



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Juscelino Grigório Lopes

**Finitude e Bifurcações de Classes de Equilíbrios Relativos no
Problema Restrito Losangular de Cinco Corpos no Plano**

Recife

2020

Juscelino Grigório Lopes

**Finitude e Bifurcações de Classes de Equilíbrios Relativos no
Problema Restrito Losangular de Cinco Corpos no Plano**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em
Matemática da Universidade Federal de Pernambuco
como requisito parcial para obtenção do título de
Doutorado em Matemática.

Área de Concentração: Geometria

Orientador: Prof. Dr. EDUARDO SHIRLIPPE GÓES LEANDRO

Recife
2020

Catálogo na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

L864f Lopes, Juscelino Grigório
 Finitude e bifurcações de classes de equilíbrios relativos no problema
 restrito losangular de cinco corpos no plano / Juscelino Grigório Lopes. – 2020.
 93 f.: il., fig., tab.

 Orientador: Eduardo Shirlippe Góes Leandro.
 Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN,
 Matemática, Recife, 2020.
 Inclui referências e apêndices.

 1. Geometria. 2. Difeomorfismos. I. Leandro, Eduardo Shirlippe Góes
 (orientador). II. Título.

 516 CDD (23. ed.) UFPE- CCEN 2021 - 18

JUSCELINO GRIGÓRIO LOPES

**FINITUDE E BIFURCAÇÕES DE CLASSES DE EQUILÍBRIOS RELATIVOS NO
PROBLEMA RESTRITO LOSANGULAR DE CINCO CORPOS NO PLANO.**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutorado em Matemática.

Aprovado em: 19/02/2020

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Eduardo Shirlippe Goes Leandro (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. César Augusto Rodrigues Castilho (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Hildeberto Eulálio Cabral (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Anete Soares Cavalcanti (Examinador Externo)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Prof. Dr. Thiago Dias Oliveira Silva (Examinador Externo)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela paz que me concede a cada dia nessa jornada.

Aos meus pais e meus irmãos por todo amor e apoio incondicionais.

Ao meu orientador Eduardo Leandro pela paciência e confiança em meu trabalho.

Aos professores e colegas da UFPE pelos ensinamentos e companheirismo.

Aos membros da banca pela gentileza de participar da avaliação desse trabalho.

Ao CNPQ pela bolsa de estudos.

Resumo

Neste trabalho, estudaremos o conjunto \mathcal{R} de classes de similaridades de equilíbrios relativos do Problema Restrito Losangular de Cinco Corpos no Plano. Por meio de técnicas modernas da Geometria Algébrica, veremos que \mathcal{R} é um conjunto finito para cada valor do parâmetro d que descreve a medida de uma das semidiagonais do losango normalizado formado pelos corpos de massas positivas. Além disso, exibiremos um difeomorfismo involutivo σ do espaço tridimensional que mantém \mathcal{R} invariante e reduz a teoria de bifurcações de equilíbrios relativos ao estudo da interseção entre três curvas na região (semiquadrante) do primeiro quadrante delimitada pela bissetriz e pelo eixo das ordenadas. Descreveremos analiticamente o conjunto de bifurcações de equilíbrios relativos nos eixos cartesianos. Provaremos que existe uma única bifurcação em cada um dos eixos cartesianos, simétricas pelo difeomorfismo involutivo σ . Por fim, iremos completar a descrição do diagrama de bifurcações de maneira numérica no interior do semiquadrante, mostrando que não há bifurcações fora dos eixos coordenados e adicionaremos a descrição analítica do comportamento das classes de similaridades de equilíbrios nos caso críticos onde temos massa nula e massa infinita.

Palavras-chave: Equilíbrio Relativo. Finitude de Classes. Difeomorfismo. Conjunto de Bifurcações.

Abstract

In this work, we study the set \mathcal{R} formed by the classes of relative equilibria in the Rhombus Restricted Problem of Five Bodies in the Plane. Through modern techniques from Algebraic Geometry, we will see that \mathcal{R} is finite for each the value parameter d that describes the length of one of the semi-diagonals of the normalized rhombus formed by the positive mass. In addition, we will exhibit an involutive diffeomorphism σ in the tridimensional space that leaves \mathcal{R} invariant and reduces the theory of bifurcations relative equilibria to the study of the intersection between three curves in the semi-quadrant delimited by the bisector of the first quadrant and the ordinate axis. We will describe analytically the set of bifurcations of relative equilibria in the cartesian axes. We will also prove that there is a single bifurcation on each of the cartesian axes, symmetrical by the diffeomorphism. We will complete the description of the bifurcation diagram numerically in the interior of semiquadrant, showing that there are no bifurcation off the Cartesian axes and we will add the analytical description of the behavior of the equilibrium similarity classes in the critical cases where we have zero mass and infinite mass.

Keywords: Relative Equilibria. Finiteness of Classes. Difeomorphism. Bifurcations Set.

Sumário

1	Introdução	8
2	Equilíbrios Relativos do PRL5C	13
2.1	Equilíbrios Relativos do Problema de N Corpos.....	13
2.2	Problema Restrito Losangular de Cinco Corpos.....	18
2.3	Aplicação Massa e Simetria Fundamental.....	24
3	Algebrização e Finitude de Equilíbrios Relativos do PRL5C	32
3.1	Algebrização das Equações de Equilíbrios Relativos	32
3.2	Finitude de Equilíbrios Relativos nos Eixos Cartesianos.....	41
4	Bifurcações de Equilíbrios Relativos do PRL5C	58
4.1	Bifurcações de Equilíbrios Relativos nos Eixos Cartesianos.....	58
4.2	Inexistência de Bifurcações de Equilíbrios Relativos	76
4.3	Análise das singularidades	80
	Referências	83
	Apêndice A – Equilíbrios na Bissetriz	85
	Apêndice B – Descrição do Polinômio $F_1 _{\mathcal{B}_{41}}$	91

1 Introdução

Historicamente, as soluções de equilíbrios relativos do problema Newtoniano de N corpos foram tema de pesquisa de muitos matemáticos. Entre eles, grandes matemáticos como Euler(1767) e Lagrange(1772). Estes foram os responsáveis pela demonstração da finitude de classes de equilíbrios relativos do problema de 3 corpos e também forneceram a classificação dessas soluções.

Como definido por Wintner (1941), um sistema de N pontos de massas m_i no plano, $i = 1, \dots, N$, é uma configuração central se o vetor aceleração de cada ponto é um múltiplo constante $\lambda \in \mathbb{R}$ das posições dos pontos $x_i \in \mathbb{R}^2$ com respeito ao centro de massa $c = \frac{1}{\sum m_i} \sum m_i x_i$. Por meio da lei da gravitação universal e da segunda lei de Newton, essa definição pode ser traduzida no seguinte sistema de equações:

$$\sum_{j \neq i} \frac{m_j}{r_{ij}^3} (x_j - x_i) = \lambda(x_i - c), \quad r_{ij} = \|x_i - x_j\|, \quad i = 1, \dots, N.$$

Para $N = 2$, existe apenas uma configuração central e a mesma é colinear. Agora, para $N = 3$, existem apenas cinco configuração centrais para qualquer escolha de $(m_1, m_2, m_3) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$, conforme demonstrado por Siegel e Moser (1971). Duas dessas configurações consistem na disposição dos pontos ao longo dos vértices de um triângulo equilátero, correspondendo ao arranjo dos pontos no sentido anti-horário. Este tipo de configuração foi encontrada por Lagrange(1772). As outras três configurações são colineares e cada uma delas provêm de uma das três disposições possíveis de três pontos ao longo de uma reta a menos de reflexão. As configurações centrais colineares foram descobertas por Euler(1767). Nesse caso, a distância entre os pontos nessas cinco configurações é determinada pelas massas. Para $N \geq 4$, Wintner (1941) mostrou que não existem configurações centrais não-colineares para massas arbitrárias.

Através da exploração de simetrias presentes nas equações de configurações centrais acima, para reduzir o número de variáveis, muitas soluções especiais têm sido obtidas. A existência de pelo menos uma configuração central colinear para cada ordenamento foi provada por Lehmann-Filhes (1891). Moulton (1910) provou a existência de uma única configuração central colinear para cada uma das $\frac{N!}{2}$ permutações de N pontos ao longo de uma reta para qualquer escolha

de massas. Esse resultado é uma generalização do obtido por Euler para $N = 3$.

As configurações centrais são importantes por muitas razões. Elas fornecem as posições iniciais das únicas soluções explícitas conhecidas do problema Newtoniano de N corpos. Entre essas soluções, temos os equilíbrios relativos, movimentos planares em que cada corpo realiza uma rotação uniforme em torno do centro de massa. Existem também as soluções homotéticas com colapso total e as ejeções homotéticas. De acordo com um resultado provado por Sundman, toda solução do problema de N corpos começando ou terminando em uma colisão total é assintótica a um movimento homotético. Além disso, equilíbrios relativos e configurações centrais estão estritamente associados às mudanças topológicas nas variedades integrais da energia total e do momento angular constantes, conforme mostrado por Smale (1970) e Albouy(1993).

Nesta tese, estudaremos equilíbrios relativos do problema restrito losangular de cinco corpos. Este problema consiste em cinco corpos no plano sujeitos à lei de atração gravitacional newtoniana, com a particularidade de que um dos corpos possui massa nula e os outros quatro de massas positivas se dispõem nos vértices de um losango com uma semidiagonal unitária e outra cuja medida é descrita por um parâmetro.

Nosso principal interesse consiste nos problemas de finitude e contagem de classes de equilíbrios relativos. Com efeito, queremos demonstrar finitude e apresentar uma contagem para o número de classes de equilíbrios relativos módulo similaridades, bem como analisar a relação entre este número e o parâmetro que altera a forma do losango. Um passo importante na nossa abordagem dos problemas de finitude e contagem é a determinação das propriedades fundamentais do conjunto de bifurcações. Nesse sentido, é necessário uma compreensão razoável sobre configurações centrais degeneradas.

De acordo com Palmore(1975), os questionamentos sobre a existência e a natureza das configurações degeneradas foram propostos por Smale(1970). Palmore forneceu o primeiro exemplo de tais configurações por meio de uma família a um parâmetro de configurações centrais na classe de polígonos regulares de N lados encaixados. No caso $N = 3$, essa família consiste em um triângulo equilátero com massas iguais unitárias nos vértices e uma massa arbitrária no centro. Palmore mostrou que a massa no centro do triângulo tem exatamente um valor de bifurcação. A mesma família de configurações foi posteriormente estudada por Meyer e Schmidt(1988) para valores de N maiores. Estes forneceram uma lista de valores de bifurcações e uma análise completa das bifurcações nessas configurações degeneradas para $4 \leq N \leq 13$. Estes resultados dependem de cálculos complexos feitos por processadores algébricos. Em comparação com estes trabalhos, nosso problema consiste de uma família a um parâmetro de configurações

centrais sem assumirmos nenhuma simetria além da simetria do losango.

A partir da conjectura de Smale(1970) sobre a finitude de classes de equilíbrios relativos no problema de N corpos para massas positivas arbitrárias, a busca por demonstrações de finitude se intensificou. Albouy(1996) provou a finitude e forneceu a classificação para as classes de equilíbrios no problema de quatro corpos no plano com massas iguais. Hampton e Moeckel(2006) provaram a finitude de equilíbrios para $N = 4$ através do método desenvolvido por Bernstein, Khovanskii e Kushnirenko e algumas ferramentas de Álgebra Computacional. Albouy e Kaloshin(2012) demonstraram a finitude de equilíbrios para $N = 4$ sem o uso do computador e provaram, a menos de um conjunto de medida nula, a finitude de equilíbrios para $N = 5$. Embora estes resultados tenham sido muito importantes, o problema de finitude geral para $N \geq 5$ ainda segue em aberto.

Algumas características do conjunto de configurações degeneradas do problema restrito de quatro corpos foram obtidas numericamente por Pedersen(1944) e, confirmadas também numericamente, posteriormente por Simó(1978) e Gannaway(1981), que também forneceu resultados analíticos em vários casos especiais.

Barros e Leandro(2011) usaram análise clássica e computação exata para provar a conclusão significativa do trabalho de Pedersen de que o conjunto de configurações centrais degeneradas do problema restrito de quatro corpos é uma curva analítica simples, fechada, contida no interior do triângulo formado pelas massas positivas. Essas propriedades foram cruciais para compreender as bifurcações sofridas pelas configurações centrais degeneradas nesse problema. Barros e Leandro(2014) também mostraram que o conjunto de bifurcações do problema restrito de quatro corpos é uma curva contínua simples no espaço das massas. A curva de bifurcações foi obtida por eles como a imagem dos equilíbrios relativos degenerados pela aplicação massa M descrita em termos das distâncias mútuas entre as primárias e o corpo de massa nula. Essa aplicação permitiu mapear os vetores tangentes à curva de configurações degeneradas usando a derivada de M .

Neste trabalho, estudaremos minuciosamente a finitude e as bifurcações de classes de equilíbrios relativos do problema restrito losangular de cinco corpos (PRL5C). Da perspectiva do problema de quatro corpos, Leandro(2019) mostrou que a família de losangos a um parâmetro, sendo este uma das semidiagonais, possui algumas características básicas. Considerando o principal resultado obtido por Albouy(2002), Leandro mostrou que as massas presentes nos vértices da mesma diagonal devem ser iguais. Pela homogeneidade das equações de equilíbrios relativos com relação às massas, essa família de losangos pode ser reduzida a uma subfamília de modo que $m_1 = m_3 = 1$ e $m_2 = m_4 = m$ (ver a figura 2.1, página 21).

O fato de Barros e Leandro(2011) conseguirem escrever a aplicação massa como função das distâncias mútuas foi crucial para a demonstração de finitude, bem como para a contagem de classes de configurações centrais no problema restrito de quatro corpos no plano. Nesse sentido, enfrentamos uma grande dificuldade pois no PRL5C não é possível relacionar o parâmetro m por meio de uma função com as distâncias mútuas entre as primárias e o corpo de massa nula. Por este motivo, desenvolvemos uma maneira nova de abordar o estudo de bifurcações de equilíbrios relativos usando técnicas algébricas e analíticas.

No capítulo 2, definiremos o problema de N corpos em \mathbb{R}^d , com $d \geq 2$, e descreveremos seus elementos, enfatizando as soluções de equilíbrios relativos. Em seguida, exibiremos as equações para equilíbrios relativos do Problema Restrito Losangular de Cinco Corpos (PRL5C). Nesse sentido, forneceremos uma demonstração alternativa de que as massas positivas nos vértices do losango devem ser iguais e exibiremos as equações que descrevem a posição da massa nula em um equilíbrio relativo do PRL5C. Além disso, obteremos a relação entre o parâmetro massa m de duas primárias e o parâmetro d que descreve uma semidiagonal do losango normalizado. Além disso, concluiremos que o parâmetro m é positivo somente para valores do parâmetro d em um intervalo aberto limitado (teorema 2.3) e que existe um difeomorfismo σ que mantém invariante o conjunto de equilíbrios relativos do PRL5C (proposição 2.6). Por fim, usaremos as simetrias presentes nas equações de equilíbrios relativos para determinar a região do plano que contém suas soluções (lema 2.8).

No capítulo 3, podemos descrever nosso principal resultado como um teorema de finitude para cada valor d da semidiagonal do losango normalizado associado a massa m positiva (teorema 3.11). Inicialmente, reescreveremos as equações de equilíbrios relativos do PRL5C na forma polinomial. Dessa maneira, perceberemos a importância dos equilíbrios relativos nos quais o corpo de massa nula localiza-se em um dos eixos cartesianos (proposição 3.1). Em seguida, mostraremos a finitude de equilíbrios relativos do PRL5C nos eixos cartesianos (proposições 3.7 e 3.8) e no interior de um quadrado no primeiro quadrante (teorema 3.6) para cada valor do parâmetro d associado a massas positivas, usando técnicas da Geometria Algébrica e um sistema de coordenadas simétricas nas distâncias mútuas.

Nesse processo, enfatizaremos a importância do difeomorfismo σ , que mantém o conjunto de equilíbrios relativos \mathcal{R} invariante no processo de eliminação das regiões do plano que não contém equilíbrios relativos. Por fim, utilizando as transformações de Möbius e o algoritmo generalizado de Vincent, contaremos os equilíbrios relativos nos eixos cartesianos, exibiremos a relação dessa contagem com o parâmetro d e veremos a estrutura gráfica da curva de equilíbrios à medida que variamos d em um intervalo aberto limitado (proposições 3.9 e 3.10).

No capítulo 4, mostraremos que o conjunto de bifurcações de equilíbrios relativos do PRL5C é invariante pelo difeomorfismo σ (teorema 4.2). Em seguida, descreveremos as equações de degenerescência de equilíbrios relativos nos eixo cartesiano das ordenadas e exibiremos equações algébricas equivalentes no plano $\alpha\beta$. A partir disso, estudaremos as interseções dessas curvas algébricas de degenerescência com as curvas de equilíbrios relativos. Além disso, utilizaremos o Teorema da Função Implícita para polinômios, a Regra de Sinais de Descartes e argumentos geométricos envolvendo vetores tangentes às curvas algébricas estudadas para mostrar que existe um único equilíbrio relativo degenerado $(0, y_1, d_1)$ onde $(d_1, y_1) \in [0.6196, 0.6262] \times (0, 1)$ no espaço xyd , que não altera o número de equilíbrios relativos no semi-eixo positivo das ordenadas (proposições 4.5 e 4.8). Por meio do difeomorfismo σ , estenderemos os resultados obtidos no estudo de equilíbrios relativos degenerados no eixo das ordenadas para o eixo das abscissas.

Finalizaremos a discussão com a descrição numérica do comportamento dos equilíbrios relativos degenerados do PRL5C no interior do primeiro quadrante. Veremos que o equilíbrio degenerado $(0, y_1, d_1)$ é a única bifurcação presente no problema a menos da simetria descrita pelo difeomorfismo σ . Finalizaremos este capítulo, provando que podemos incluir os casos onde a massa é nula ou infinita no diagrama de bifurcações por meio das séries de Puiseux e concluiremos que existe 4 classes de equilíbrios relativos bifurcando no ponto $(\sqrt{3}, 0, \sqrt{3})$ do plano xyd associado a $m = 0$.

No Apêndice A, provaremos que existem equilíbrios relativos no plano $x = y$ do espaço xyd se, e somente se, o losango normalizado formado pelas massas positivas for um quadrado ($d = 1$). Além disso, alguns aspectos técnicos das demonstrações feitas no capítulo 3 são detalhadas apropriadamente no Apêndice B.

2 Equilíbrios Relativos do PRL5C

Neste capítulo, definiremos o problema de N corpos em \mathbb{R}^d , com $d \geq 2$, por meio das equações de Newton e descreveremos detalhadamente seus elementos, com ênfase nas soluções de equilíbrio relativo dessas equações. Em seguida, escreveremos um sistema de equações cujas soluções são os equilíbrios relativos do Problema Restrito de Cinco Corpos nos quais os corpos de massas positivas formam um losango. Além disso, provaremos que os corpos em vértices opostos desse losango possuem massas iguais, e utilizaremos esse fato para obter equações equivalentes para a posição do corpo de massa nula em um equilíbrio relativo no caso em que os quatro corpos de massas positivas se dispõem nos vértices de um losango normalizado e o corpo de massa nula está no mesmo plano desse losango.

Neste contexto, exibiremos uma relação entre o parâmetro que representa as massas dispostas nos vértices do losango normalizado ao longo da reta que contém uma diagonal e o comprimento da semidiagonal. Veremos ainda que a positividade desse parâmetro está associada a valores da semidiagonal desse losango contidos em um intervalo aberto limitado. Finalmente, exibiremos um difeomorfismo que mantém invariante o conjunto de equilíbrios relativos do Problema Restrito Losangular de Cinco Corpos.

2.1 Equilíbrios Relativos do Problema de N Corpos

O problema newtoniano de N corpos em \mathbb{R}^d , com $d \geq 2$, consiste em determinar o movimento de N partículas pontuais sob a influência de suas forças mútuas de atração gravitacional. A dinâmica de N corpos $x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbb{R}^d$, com massas positivas m_1, m_2, \dots, m_N , respectivamente, é caracterizada pela Segunda Lei da Dinâmica e a Lei Gravitacional de Newton dadas por

$$m_i \ddot{x}_i = \sum_{j \neq i} \frac{m_j m_i}{r_{ij}^3} (x_j - x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

onde $r_{ij} = \|x_i - x_j\|$ é a distância euclidiana entre as partículas nas posições x_i e x_j . Para $N = 2$, Newton resolveu o sistema de equações diferenciais de 2ª ordem acima. Para $N \geq 3$, não existe um estudo completo das soluções desse sistema de equações diferenciais. Em certos

casos, podemos obter, explicitamente, soluções especiais denominadas *soluções homográficas*. Uma solução homográfica do problema de N corpos no plano consiste em uma solução da forma

$$x_i(t) - c = \alpha(t)R(t)(x_i(0) - c), \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

para um vetor fixo $c \in \mathbb{R}^2$, uma função escalar não-negativa $\alpha = \alpha(t)$, com $\alpha(0) = 1$, e uma função real $R(t) \in SO(2)$.

Suponhamos que $R(t)$ seja de classe C^2 . Como $(R(t))^T R(t) = I$, segue-se que $\frac{d}{dt}[(R(t))^T R(t)] = 0$, donde $\dot{R}^T R + R^T \dot{R} = 0$, logo $R^{-1} \dot{R} = -(R^{-1} \dot{R})^T$, o que implica que $R^{-1} \dot{R}$ é uma matriz anti-simétrica. Assim, existe uma matriz

$$K(t) = \begin{bmatrix} 0 & -s(t) \\ s(t) & 0 \end{bmatrix},$$

tal que $R^{-1} \dot{R} = K(t)$. Desse modo, obtemos a equação diferencial $\dot{R} = RK$, cuja solução é

$$R = R(0)e^{\int_0^t K(x)dx}.$$

Supondo que $R(0) = I$ temos que

$$R(t) = \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) & -\text{sen}(\theta(t)) \\ \text{sen}(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) \end{bmatrix}; \quad \dot{\theta} = s.$$

De fato, como $K = sE$, onde

$$E = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

então $R = e^{\theta E}$, onde $\theta = \int_0^t s(x)dx$. Sendo

$$e^{\theta E} = I + \theta E + \frac{(\theta E)^2}{2!} + \frac{(\theta E)^3}{3!} + \dots$$

e observando que $E^2 = -I$, $E^3 = -E$ e $E^4 = I$, segue que

$$R = I + \left(-\frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right)I + \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right)E,$$

como queríamos. Além disso, da igualdade $R^{-1} \dot{R} = K$, tem-se $\dot{\theta} = s$.

Em outras palavras, as soluções homográficas são tais que a figura formada no instante

inicial pelos corpos é preservada ao longo do movimento, a menos de homotetia e rotação. Um caso importante de soluções homográficas no plano ocorre quando

$$\alpha = \alpha(t) \equiv 1.$$

Neste caso, as soluções homográficas são denominadas *equilíbrios relativos*. Nessas soluções, os corpos giram em torno do centro de massa com velocidade angular ω . Conseqüentemente, temos $\dot{\theta} = \omega$, ou seja, $\theta = \omega t$. Portanto, em um equilíbrio relativo temos

$$R(\omega t) = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & -\text{sen}(\omega t) \\ \text{sen}(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}.$$

Desse modo, se considerarmos um sistema de coordenadas em rotação uniforme com origem em c , uma tal solução estaria em repouso, o que justifica a utilização do termo “equilíbrio”.

Vejamos o que ocorre com o Problema de N corpos quando temos um equilíbrio relativo. Notemos que

$$\ddot{x}_i = -\omega^2 R(\omega t)(x_i(0) - c), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Sendo assim, supondo que um tal movimento é solução do problema de N corpos no plano, obtém-se

$$-\omega^2(x_i(0) - c) = \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{r_{ij}^3(0)}(x_j(0) - x_i(0)), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Portanto, se um equilíbrio relativo existe, então as posições iniciais $x_i(0)$, $i = 1, 2, \dots, N$, satisfazem as equações

$$\sum_{j \neq i} \frac{m_j}{r_{ij}^3(0)}(x_j(0) - x_i(0)) = \lambda(x_i(0) - c), \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

onde $\lambda = -\omega^2$ é uma constante negativa. Estas são as equações de equilíbrios relativos para o Problema de N Corpos no Plano. Por outro lado, suponhamos que as posições iniciais $x_i(0)$, com $i = 1, 2, \dots, N$, são soluções do sistema de equações anterior para um certo λ negativo, ou seja,

$$\sum_{j \neq i} \frac{m_j}{r_{ij}^3(0)}(x_j(0) - x_i(0)) = \lambda(x_i(0) - c), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Desse modo, afirmamos que

$$x_i(t) = R(\sqrt{-\lambda}t)(x_i(0) - c) + c, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

é uma solução do problema de N corpos no plano. Com efeito,

$$\begin{aligned}\ddot{x}_i &= -\lambda R(\sqrt{-\lambda t})(x_i(0) - c) \\ &= R(\sqrt{-\lambda t}) \left(\sum_{j \neq i} \frac{m_j(x_j(0) - x_i(0))}{r_{ij}^3(0)} \right) \\ &= \sum_{j \neq i} \frac{m_j(R(\sqrt{-\lambda t})x_j(0) - R(\sqrt{-\lambda t})x_i(0))}{r_{ij}^3(0)} \\ &= \sum_{j \neq i} \frac{m_j(x_j(0) - x_i(0))}{r_{ij}^3(0)},\end{aligned}$$

daí multiplicando ambos os membros da igualdade acima por m_i obtemos a conclusão desejada. Em suma, *existem equilíbrios relativos para o problema de N corpos no plano se, e somente se, as posições iniciais x_i satisfazem as equações*

$$\sum_{j \neq i} \frac{m_j}{r_{ij}^3}(x_j - x_i) = \lambda(x_i - c), \quad i=1,2,\dots,N \quad (2.1)$$

para uma constante negativa λ .

Agora, vejamos o significado físico do vetor $c \in \mathbb{R}^2$ presente nas equações de equilíbrios relativos. Nesse sentido, para cada $i = 1, 2, \dots, N$, multiplicamos a i -ésima equação por m_i e depois somamos as N equações no instante inicial $t = 0$, para obtermos

$$\lambda \left(Mc - \sum_{i=1}^N m_i x_i \right) = \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} \frac{m_j m_i}{r_{ij}^3}(x_j - x_i),$$

onde $M = \sum_{i=1}^N m_i$ é a massa total das N partículas. Como $\sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} \frac{m_j m_i}{r_{ij}^3}(x_j - x_i) = 0$, pois cada termo aparece duas vezes nessa soma com sinais opostos, e λ é negativo, concluímos que

$$c = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i x_i,$$

ou seja, c é o centro de massa dos corpos no instante inicial.

Vamos finalizar esta seção com um resultado crucial a respeito das simetrias básicas presentes nas equações de equilíbrios relativos do problema de N corpos no plano

Proposição 2.1. *O conjunto de equilíbrios relativos do problema de N corpos é invariante por homotetias e isometrias do plano.*

Demonstração. Suponhamos que $(x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{2N}$ é um equilíbrio relativo do problema de N corpos para um certo $\lambda \in \mathbb{R}_-^*$. Vejamos a invariância por homotetias inicialmente. Para isso,

consideremos $k \neq 0$ como constante homotética. Desse modo, multiplicando cada termo das equações de equilíbrios relativos por $\frac{k}{|k|^3}$, obtemos

$$\sum_{j \neq i} \frac{m_j}{\|kx_j - kx_i\|^3} (kx_j - kx_i) = \frac{\lambda}{|k|^3} (kx_i - kc), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Portanto, $(kx_1, kx_2, \dots, kx_N)$ é um equilíbrio relativo com constante $\frac{\lambda}{|k|^3}$ e centro de massa $kc \in \mathbb{R}^N$. Para mostrarmos a invariância por isometrias do plano, utilizaremos o fato básico de que toda isometria do plano é uma composição de uma transformação linear ortogonal com uma translação. Seja $\iota = L \circ T$ uma isometria de \mathbb{R}^2 , onde L é uma transformação linear ortogonal, isto é,

$$\|L(y_2) - L(y_1)\| = \|y_2 - y_1\|, \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^2,$$

e T é uma translação por $u \in \mathbb{R}^2$, isto é,

$$T(y_1) = y_1 + u, \quad \forall y_1 \in \mathbb{R}^2.$$

Desse modo, temos

$$\sum_{j \neq i} \frac{m_j}{\|\iota(x_j) - \iota(x_i)\|^3} (\iota(x_j) - \iota(x_i)) = \lambda(\iota(x_i) - \iota(c)).$$

Logo,

$$\sum_{j \neq i} \frac{m_j}{\|L(x_j) - L(x_i)\|^3} (L(x_j) - L(x_i)) = \lambda(L(x_i) - L(c)),$$

ou seja,

$$L \left(\sum_{j \neq i} \frac{m_j}{\|x_j - x_i\|^3} (x_j - x_i) - \lambda(x_i - c) \right) = 0.$$

Portanto, $(\iota(x_1), \iota(x_2), \dots, \iota(x_N))$ é um equilíbrio relativo com constante λ . \square

No que segue, utilizaremos a proposição anterior para contar equilíbrios relativos no sentido de contar classes de equivalência por essas similaridades básicas.

2.2 Problema Restrito Formado por um Losango Mais um Corpo de Massa Nula

A partir de agora, fixaremos $N = 5$. Para o Problema Restrito Formado por um Losango Mais um Corpo de Massa Nula ou, simplesmente, Problema Restrito Losangular de Cinco Corpos (PRL5C), consideraremos que:

- os corpos estão sujeitos à atração gravitacional newtoniana mútua;
- $m_5 = 0$;
- os corpos de massas positivas estão dispostos nos vértices de um losango centrado na origem e o corpo de massa nula pertence ao mesmo plano desse losango;
- as semidiagonais do losango medem d_1 e d_2 , de modo que $x_1 = (0, d_1)$, $x_2 = (d_2, 0)$, $x_3 = (0, -d_1)$ e $x_4 = (-d_2, 0)$ são as posições iniciais dos corpos de massas positivas m_1, m_2, m_3 e m_4 , respectivamente;
- o corpo x_5 não exerce atração gravitacional sobre os demais corpos.

Suponhamos que $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ é um equilíbrio relativo para algum $\lambda \in \mathbb{R}_-^*$. Sejam l e $M = \sum_{j=1}^5 m_j$, o lado do losango e a massa total dos corpos, nessa ordem.

Desse modo, temos que o centro de massa dos corpos no instante inicial é dado por

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{M} \sum_{j=1}^5 m_j x_j \\ &= \left(\frac{(m_2 - m_4)d_2}{M}, \frac{(m_1 - m_3)d_1}{M} \right). \end{aligned}$$

Fixando $i = 1$ nas equações de equilíbrios relativos em (2.1), temos

$$\sum_{j \neq 1} \frac{m_j}{r_{1j}^3} (x_j - x_1) = \lambda (x_1 - c).$$

Isso implica que

$$\left(\frac{(m_2 - m_4)d_2}{l^3}, \frac{(-m_2 - m_4)d_1}{l^3} - \frac{m_3}{4d_1^2} \right) = \lambda \left(\frac{(m_4 - m_2)d_2}{M}, \frac{(m_3 - m_1)d_1}{M} + d_1 \right). \quad (2.2)$$

Da primeira entrada dos vetores na igualdade (2.2) segue que

$$(m_2 - m_4)d_2 \left(\frac{1}{l^3} + \frac{\lambda}{M} \right) = 0. \quad (2.3)$$

Como $d_2 > 0$, segue de (2.3) que

$$m_2 = m_4 \quad \text{ou} \quad \lambda = -\frac{M}{l^3}.$$

Da segunda entrada dos vetores na igualdade (2.2) segue que

$$\frac{(-m_2 - m_4)d_1}{l^3} - \frac{m_3}{4d_1^2} = \lambda \left(\frac{(m_3 - m_1)d_1}{M} + d_1 \right). \quad (2.4)$$

Fixando $i = 3$ nas equações de equilíbrios relativos em (2.1), temos

$$\sum_{j \neq 3} \frac{m_j}{r_{3j}^3} (x_j - x_3) = \lambda (x_1 - c).$$

Donde segue que

$$\left(\frac{(m_2 - m_4)d_2}{l^3}, \frac{(m_2 + m_4)d_1}{l^3} + \frac{m_1}{4d_1^2} \right) = \lambda \left(\frac{(m_4 - m_2)d_2}{M}, \frac{(m_3 - m_1)d_1}{M} - d_1 \right). \quad (2.5)$$

Da segunda entrada dos vetores na igualdade (2.5) segue que

$$\frac{(m_2 + m_4)d_1}{l^3} + \frac{m_1}{4d_1^2} = \lambda \left(\frac{(m_3 - m_1)d_1}{M} - d_1 \right) \quad (2.6)$$

Fixando $i = 2$ nas equações de equilíbrios relativos em (2.1), temos

$$\sum_{j \neq 2} \frac{m_j}{r_{2j}^3} (x_j - x_2) = \lambda (x_2 - c),$$

ou seja,

$$\left(\frac{(-m_1 - m_3)d_2}{l^3} - \frac{m_4}{4d_2^2}, \frac{(m_1 - m_3)d_1}{l^3} \right) = \lambda \left(\frac{(m_4 - m_2)d_2}{M} + d_2, \frac{(m_3 - m_1)d_1}{M} \right). \quad (2.7)$$

Da segunda entrada dos vetores na igualdade (2.7) segue que

$$(m_1 - m_3)d_1 \left(\frac{1}{l^3} + \frac{\lambda}{M} \right) = 0. \quad (2.8)$$

Como $d_1 > 0$, segue de (2.8) que

$$m_1 = m_3 \quad \text{ou} \quad \lambda = -\frac{M}{l^3}.$$

Da primeira entrada dos vetores na igualdade (2.7) segue que

$$\frac{(-m_1 - m_3)d_2}{l^3} - \frac{m_4}{4d_2^2} = \lambda \left(\frac{(m_4 - m_2)d_2}{M} + d_2 \right). \quad (2.9)$$

Fixando $i = 4$ nas equações de equilíbrios relativos em (2.1), temos

$$\sum_{j \neq 4} \frac{m_j}{r_{4j}^3} (x_j - x_4) = \lambda(x_4 - c)$$

$$\left(\frac{(m_1 + m_3)d_2}{l^3} + \frac{m_2}{4d_2^2}, \frac{(m_1 - m_3)d_1}{l^3} \right) = \lambda \left(\frac{(m_4 - m_2)d_2}{M} - d_2, \frac{(m_3 - m_1)d_1}{M} \right). \quad (2.10)$$

Da primeira entrada dos vetores na igualdade (2.10) segue que

$$\frac{(m_1 + m_3)d_2}{l^3} + \frac{m_2}{4d_2^2} = \lambda \left(\frac{(m_4 - m_2)d_2}{M} - d_2 \right). \quad (2.11)$$

Adicionando os respectivos membros da equação (2.4) com os membros da equação (2.6), obtemos a igualdade

$$\frac{(m_1 - m_3)}{4d_1^2} = \frac{\lambda(m_3 - m_1)2d_1}{M},$$

donde segue que

$$\frac{(m_1 - m_3)}{8d_1^3} = \frac{\lambda}{M}(m_3 - m_1). \quad (2.12)$$

Analogamente, adicionando os respectivos membros da equação (2.9) com os membros da equação (2.11), obtemos a igualdade

$$\frac{(m_2 - m_4)}{4d_2^2} = \frac{\lambda(m_4 - m_2)2d_2}{M},$$

donde segue que

$$\frac{(m_2 - m_4)}{8d_2^3} = \frac{\lambda}{M}(m_4 - m_2). \quad (2.13)$$

Se assumirmos que $m_1 \neq m_3$ e $m_2 \neq m_4$ então $\lambda = -\frac{M}{l^3}$. Substituindo esse valor de λ nas equações (2.12) e (2.13), concluímos que $l^3 = 8d_1^3 = 8d_2^3$, ou melhor, $l = 2d_1 = 2d_2$. Pelo Teorema

de Pitágoras, temos que $l = \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$. Daí, como $d_1 = d_2$, obtemos $l = d_1\sqrt{2}$ e $l = 2d_1$. Donde segue que $d_1 = 0$, o que é um absurdo pois $d_1 > 0$. Portanto, $\lambda \neq -\frac{M}{7^3}$ e

$$m_1 = m_3 \quad \text{e} \quad m_2 = m_4.$$

Observe que essa conclusão implica que o centro de massa dos corpos no instante inicial, cuja expressão é

$$c = \left(\frac{(m_2 - m_4)d_2}{M}, \frac{(m_1 - m_3)d_1}{M} \right),$$

está localizado na origem.

Os argumentos expostos acima demonstram a proposição a seguir.

Proposição 2.2. *Considere quatro corpos de massas positivas m_1, m_2, m_3 e m_4 dispostos nos vértices de um losango. Se esses corpos formam um equilíbrio relativo do Problema de Quatro Corpos no Plano, então as massas que ocupam vértices opostos do losango são iguais.*

Agora, estudaremos detalhadamente os equilíbrios relativos no contexto da proposição (2.2), adicionando um corpo de massa nula ao plano que contém o losango. Tendo em vista a proposição 2.1 e aplicando uma homotetia conveniente, podemos normalizar as semidiagonais do losango de modo que $d_1 = 1$ e $d_2 = d > 0$ e, usando a homogeneidade das equações de equilíbrios relativos, podemos multiplicar as massas por uma constante, alterando também a constante negativa λ , de modo que $m_1 = m_3 = 1$ e $m_2 = m_4 = m > 0$. Em outras palavras, a família de losangos descritos na proposição (2.1) é completamente descrita pela subfamília de losangos tais que $d_1 = 1$ e $m_1 = m_3 = 1$.

Neste contexto, fixaremos um losango normalizado com semidiagonais medindo $d_1 = 1$ e $d_2 = d > 0$, e primárias $m_1 = m_3 = 1$ e $m_2 = m_4 = m > 0$; veja a figura 2.1. Desse modo, $x_1 = (0, 1), x_2 = (d, 0), x_3 = (0, -1)$ e $x_4 = (-d, 0)$ são as posições iniciais dos corpos nesse losango.

É natural nos questionarmos a respeito da posição x_5 do corpo de massa nula m_5 no plano que contém o losango normalizado de modo que $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ seja um equilíbrio relativo do PRL5C. Em busca de uma resposta a essa questão, precisamos exibir as equações que descrevem a posição desse corpo em um equilíbrio relativo, bem como obter informações sobre os parâmetros positivos d e m e sobre a constante negativa λ associada a esse equilíbrio relativo.

No losango normalizado, temos que o centro de massa dos corpos no instante inicial é a origem e que $\ell = \sqrt{1 + d^2}$ é o lado desse losango. Desse modo, as equações de equilíbrio relativo

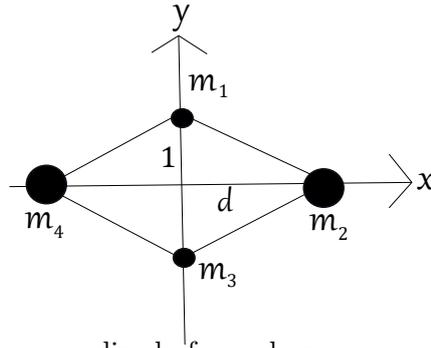


Figura 2.1: Losango normalizado formado por $m_1 = m_3 = 1$ e $m_2 = m_4 = m$

em (2.1) assumem a forma

$$\sum_{j \neq i} \frac{m_j}{r_{ij}^3} (x_j - x_i) = \lambda x_i, \quad i=1,2,\dots,5. \quad (2.14)$$

Fixando $i = 1$ em (2.14), obtemos a igualdade entre vetores

$$\frac{m}{\ell^3} (d, -1) + \frac{1}{8} (0, -2) + \frac{m}{\ell^3} (-d, -1) = \lambda (0, 1).$$

Donde segue que

$$\lambda = -\frac{2m}{\ell^3} - \frac{1}{4}. \quad (2.15)$$

Analogamente, fixando $i = 2$ em (2.14), obtemos a igualdade entre vetores

$$\frac{1}{\ell^3} (-d, 1) + \frac{1}{\ell^3} (-d, -1) + \frac{m}{8d^3} (-2d, -0) = \lambda (d, 0).$$

Donde segue que

$$\lambda = -\frac{2}{\ell^3} - \frac{m}{4d^3}. \quad (2.16)$$

Notemos ainda que se fixarmos $i = 3$ e $i = 4$ nas equações (2.14), obtemos novamente as igualdades (2.15) e (2.16), respectivamente. Além disso, igualando os valores de λ em (2.15) e (2.16), concluímos que

$$m = \frac{d^3(\ell^3 - 8)}{\ell^3 - 8d^3}, \quad \text{onde } \ell = \sqrt{1 + d^2}. \quad (2.17)$$

No que segue, utilizaremos amplamente as expressões em (2.15) e (2.17) para expressar os parâmetros λ , m e ℓ como funções do parâmetro $d > 0$.

Finalmente, façamos $x_5 = (x, y)$ e consideremos $r_j = \|x_j - x_5\|$ a distância euclidiana entre a primária m_j , $j = 1, 2, 3, 4$, e o corpo x_5 ; veja Figura 2.2 . Assim, fixando $i = 5$ nas equações (2.14) temos

$$\frac{1}{r_1^3}(-x, 1-y) + \frac{m}{r_2^3}(d-x, -y) + \frac{1}{r_3^3}(-x, -1-y) + \frac{m}{r_4^3}(-d-x, -y) = \lambda(x, y).$$

Dessa igualdade entre vetores, obtemos o sistema de equações

$$\begin{cases} F(x, y, d) = 0, \\ G(x, y, d) = 0, \end{cases} \quad (2.18)$$

onde

$$F(x, y, d) = \lambda x + \frac{x}{r_1^3} + \frac{x}{r_3^3} + m \left(\frac{x-d}{r_2^3} + \frac{x+d}{r_4^3} \right) \quad \text{e}$$

$$G(x, y, d) = \lambda y + \frac{y-1}{r_1^3} + \frac{y+1}{r_3^3} + m \left(\frac{y}{r_2^3} + \frac{y}{r_4^3} \right),$$

são funções que dependem das coordenadas cartesianas do corpo de massa nula no equilíbrio relativo (x, y) e do parâmetro d que representa a semidiagonal do losango normalizado.

Existe uma maneira curta de escrever o sistema de equações em 2.18. Para isso, consideremos a função potencial do PRL5C, a saber

$$\Phi(x, y, d) = \frac{\lambda}{2}(x^2 + y^2) - \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} \right) - m \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4} \right). \quad (2.19)$$

Um cálculo direto mostra que as equações (2.18) são equivalentes às equações

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0;$$

isto é, as posições de m_5 em um equilíbrio relativo, com d fixo, são precisamente os pontos críticos de Φ .

As distâncias mútuas r_j entre as primárias e m_5 , e as coordenadas cartesianas de m_5 estão relacionadas pelas fórmulas

$$x = \frac{r_4^2 - r_2^2}{4d}, \quad y = \frac{r_3^2 - r_1^2}{4}. \quad (2.20)$$

Se conhecemos a posição (x, y) do corpo m_5 em um equilíbrio relativo (ver figura 2.2)

podemos, rapidamente, obter outras posições desse corpo no plano cartesiano de modo que tenhamos um novo equilíbrio relativo.

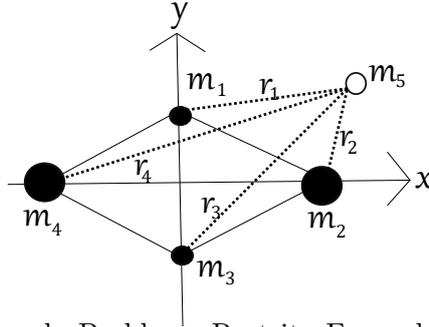


Figura 2.2: Um equilíbrio relativo do Problema Restrito Formado por um Losango Mais um Corpo de Massa Nula

Com efeito, da proposição 2.1, tem-se que se (x, y, d) é uma solução do sistema em 2.18, com $x \geq 0$ e $y \geq 0$, então, via rotações no sentido anti-horário de ângulos $\frac{\pi}{2}, \pi$ e $\frac{3\pi}{2}$ radianos, também o são os pontos $(-x, y, d), (-x, -y, d)$ e $(x, -y, d)$, respectivamente. Portanto, para determinar todas as posições $x_5 = (x, y)$ do corpo m_5 em um equilíbrio relativo do PRL5C é suficiente restringir a posição desse corpo ao primeiro quadrante do plano cartesiano ($x \geq 0$ e $y \geq 0$).

2.3 Aplicação Massa e Simetria Fundamental

A expressão do parâmetro massa m em função do parâmetro semidiagonal d do losango normalizado, dada pela equação (2.17), que chamaremos de *aplicação massa*, nos permite obter informações importantes sobre os equilíbrios relativos do PRL5C.

Primeiro, estamos interessados em determinar os valores do parâmetro d associados às massas $m_2 = m_4 = m$ positivas no losango normalizado, isto é, queremos obter o domínio da aplicação massa $m = m(d)$, uma vez que m é uma função positiva de d . Em busca disso, utilizaremos a relação pitagórica $\ell^2 = 1 + d^2$ entre o lado ℓ e a semidiagonal d do losango para parametrizar a aplicação massa em (2.17) com o intuito de obter uma função racional.

Consideremos a parametrização racional da hipérbole $\ell^2 - d^2 = 1$,

$$\ell = \frac{\alpha^2 + 1}{2\alpha} \quad \text{e} \quad d = \frac{\alpha^2 - 1}{2\alpha}, \quad (2.21)$$

onde $\alpha \in (1, +\infty)$, já que d e ℓ são positivos. Consequentemente, a equação (2.17) torna-se

$$m = -\frac{1}{8} \cdot \frac{(\alpha^2 - 4\alpha + 1) \cdot (\alpha^4 + 4\alpha^3 + 18\alpha^2 + 4\alpha + 1) \cdot (\alpha - 1)^3 \cdot (\alpha + 1)^3}{\alpha^3 \cdot (\alpha^2 - 3) \cdot (7\alpha^4 - 6\alpha^2 + 3)}. \quad (2.22)$$

Como

$$\frac{(\alpha^4 + 4\alpha^3 + 18\alpha^2 + 4\alpha + 1) \cdot (\alpha - 1)^3 \cdot (\alpha + 1)^3}{\alpha^3 \cdot (7\alpha^4 - 6\alpha^2 + 3)} > 0,$$

visto que $\alpha > 1$, segue da função racional dada por (2.22) que

$$m > 0 \iff \frac{\alpha^2 - 4\alpha + 1}{\alpha^2 - 3} < 0 \quad \text{e} \quad \alpha > 1.$$

Logo,

$$m > 0 \iff \sqrt{3} < \alpha < 2 + \sqrt{3}.$$

De (2.21), temos que $d = d(\alpha)$ é uma função crescente, pois $d'(\alpha) = \frac{\alpha^2 + 1}{2\alpha^2}$ é sempre positiva.

Desse modo, como $d(\sqrt{3}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ e $d(2 + \sqrt{3}) = \sqrt{3}$, concluímos que

$$m \text{ é positiva} \iff \frac{1}{\sqrt{3}} < d < \sqrt{3}.$$

Além disso, para $d = \sqrt{3}$ temos $m = 0$, enquanto m é descontínua em $d = \frac{1}{\sqrt{3}}$, com $\lim_{d \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}^+} m = +\infty$

e $\lim_{d \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}^-} m = -\infty$, e m é negativa para $d \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$. É necessário salientar ainda, que

a aplicação massa é uma função decrescente da semidiagonal d em seu domínio, $d \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right)$, uma vez que $m'(d) < 0$ nesse intervalo.

Em suma as características da aplicação massa expostas acima demonstram o seguinte teorema

Teorema 2.3. *Considere quatro primárias no plano, ocupando os vértices de um losango normalizado, com semidiagonais iguais a 1 e d , tais que $m_1 = m_3 = 1$ e $m_2 = m_4 = m$ (ver Figura 2.1), e uma massa nula no plano. Se esses cinco corpos formam um equilíbrio relativo do PRL5C, então o parâmetro m é um função diferenciável, positiva e decrescente da semidiagonal d desse losango no intervalo aberto $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right)$.*

A positividade do parâmetro m em um equilíbrio relativo nos impõe restrições geométricas sobre o comprimento da semidiagonal d do losango normalizado, conforme descrito no teorema acima. Vejamos mais uma propriedade importante da aplicação massa presente nas fórmulas dadas em (2.17). Para isso, consideremos a inversão

$$\bar{d} := \frac{1}{d}, \quad \text{restrita ao intervalo} \quad d \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right). \quad (2.23)$$

Sejam $\bar{\ell} = \ell(\bar{d})$, $\bar{m} = m(\bar{d})$ e $\bar{\lambda} = \lambda(\bar{d})$. Explicitamente, temos

$$\bar{\ell} = \sqrt{1 + \bar{d}^2} = \frac{\sqrt{1 + d^2}}{d} = \frac{\ell}{d},$$

$$\bar{m} = \frac{\bar{d}^3(\bar{\ell}^3 - 8)}{\bar{\ell}^3 - 8\bar{d}^3} = \frac{\ell^3 - 8d^3}{d^3(\ell^3 - 8)} = \frac{1}{m}$$

e, finalmente,

$$\bar{\lambda} = -2\frac{d^3}{m\ell^3} - \frac{1}{4} = \frac{d^3}{m} \left(-\frac{2}{\ell^3} - \frac{m}{4d^3} \right) = \frac{d^3}{m} \lambda.$$

Do exposto acima, temos que a proposição

Proposição 2.4. *A aplicação massa $m = m(d)$, definida para $d \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right)$, associada a um equilíbrio relativo do PRL, admite a simetria de inversão*

$$m(\bar{d}) = \frac{1}{m(d)}, \quad \text{onde } \bar{d} = \frac{1}{d}.$$

Já vimos o que ocorre com os parâmetros m , ℓ e λ associados a um equilíbrio relativo quando fazemos a inversão descrita em (2.23) na semidiagonal d do losango normalizado. Agora, investigaremos o que ocorre com a posição do corpo de massa nula $x_5 = (x, y)$ em um equilíbrio relativo do PRL5CP sob efeito dessa inversão. Para isso, consideremos as variáveis

$$\bar{x} := \frac{y}{d} \quad \text{e} \quad \bar{y} := \frac{x}{d}. \quad (2.24)$$

Recordemos que um equilíbrio relativo do Problema Restrito Formado por um Losango Mais um Corpo de Massa Nula é uma tripla (x, y, d) que satisfaz o sistema (2.18) e as igualdades em (2.17). Mais formalmente, temos a definição

Definição 2.5. Denotaremos por \mathcal{R} o conjunto de todas as classes de equilíbrios relativos do Problema Restrito Losangular de Cinco Corpos.

Notemos que $\mathcal{R} \neq \emptyset$, pois $(0, 0, d) \in \mathcal{R}$, para todo $d \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right)$, já que $F(0, 0, d) = G(0, 0, d) = 0$. Geometricamente, esses equilíbrios consistem em fixar o corpo de massa nula na origem do plano cartesiano (centro de massa do losango normalizado).

Agora, analisaremos o que ocorre com as funções F e G quando avaliadas no ponto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{d})$. Para isso, notemos que

$$\bar{r}_{1,3} := \sqrt{\bar{x}^2 + (\bar{y} \mp 1)^2} = \frac{\sqrt{y^2 + (x \mp d)^2}}{d} = \frac{r_{2,4}}{d}$$

e

$$\bar{r}_{2,4} := \sqrt{\bar{y}^2 + (\bar{x} \mp \bar{d})^2} = \frac{\sqrt{x^2 + (y \mp 1)^2}}{d} = \frac{r_{1,3}}{d}.$$

Consequentemente, temos que

$$\begin{aligned} F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{d}) &= \bar{\lambda}\bar{x} + \frac{\bar{x}}{\bar{r}_1^3} + \frac{\bar{x}}{\bar{r}_3^3} + \bar{m} \left(\frac{\bar{x} - \bar{d}}{\bar{r}_2^3} + \frac{\bar{x} + \bar{d}}{\bar{r}_4^3} \right) \\ &= \frac{d^2}{m} \lambda y + d^2 \frac{y}{r_2^3} + d^2 \frac{y}{r_4^3} + \frac{d^2}{m} \left(\frac{y-1}{r_1^3} + \frac{y+1}{r_3^3} \right) \\ &= \frac{d^2}{m} \left[\lambda y + \frac{y-1}{r_1^3} + \frac{y+1}{r_3^3} + m \left(\frac{y}{r_2^3} + \frac{y}{r_4^3} \right) \right] \\ &= \frac{d^2}{m} G(x, y, d) \end{aligned} \quad (2.25)$$

e

$$\begin{aligned} G(\bar{x}, \bar{y}, \bar{d}) &= \bar{\lambda}\bar{y} + \frac{\bar{y}-1}{\bar{r}_1^3} + \frac{\bar{y}+1}{\bar{r}_3^3} + \bar{m} \left(\frac{\bar{y}}{\bar{r}_2^3} + \frac{\bar{y}}{\bar{r}_4^3} \right) \\ &= \frac{d^2}{m} \lambda x + d^2 \frac{x-d}{r_2^3} + d^2 \frac{x+d}{r_4^3} + \frac{d^2}{m} \left(\frac{x}{r_1^3} + \frac{x}{r_3^3} \right) \\ &= \frac{d^2}{m} \left[\lambda x + \frac{x}{r_1^3} + \frac{x}{r_3^3} + m \left(\frac{x-d}{r_2^3} + \frac{x+d}{r_4^3} \right) \right] \\ &= \frac{d^2}{m} F(x, y, d). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Portanto, como $\frac{d^2}{m}$ é uma constante positiva, segue das igualdades (2.25) e (2.26) que o sistema dado por 2.18 é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{d}) = 0, \\ G(\bar{x}, \bar{y}, \bar{d}) = 0. \end{cases} \quad (2.27)$$

As igualdades (2.24) nos permitem definir a aplicação $\sigma : (\mathbb{R}_+)^2 \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow (\mathbb{R}_+)^2 \times \mathbb{R}_+^*$ dada por

$$\sigma(x, y, d) = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{d}). \quad (2.28)$$

Em termos das aplicações elementares $\rho(x, y, d) = (y, x, d)$, $\iota(x, y, d) = (x, y, \bar{d})$ e $h(x, y, d) =$

(dx, dy, d) , podemos reescrever essa aplicação como

$$\sigma = h \circ \iota \circ \rho.$$

Com efeito, temos

$$\begin{aligned} (h \circ \iota \circ \rho)(x, y, d) &= (h \circ \iota)(y, x, d) \\ &= h(y, x, \bar{d}) \\ &= \left(\frac{y}{d}, \frac{x}{d}, \frac{1}{d} \right) \\ &= \sigma(x, y, d). \end{aligned}$$

Vejamos algumas propriedades da aplicação σ , que será amplamente utilizada para estudar o conjunto \mathcal{R} .

Proposição 2.6. σ é um difeomorfismo involutivo em $(\mathbb{R}_+)^2 \times \mathbb{R}_+^*$ cujos pontos fixos são $\mathcal{F}_\sigma = \{(x, y, d) \in (\mathbb{R}_+)^2 \times \mathbb{R}_+^* : x = y \text{ e } d = 1\}$.

Demonstração. Como as funções-componentes de σ são suaves segue que σ é diferenciável. Além disso, temos que

$$\begin{aligned} \sigma^2(x, y, d) &= (h \circ \iota \circ \rho) \left(\frac{y}{d}, \frac{x}{d}, \frac{1}{d} \right) \\ &= (h \circ \iota) \left(\frac{x}{d}, \frac{y}{d}, \frac{1}{d} \right) \\ &= h \left(\frac{x}{d}, \frac{y}{d}, d \right) \\ &= (x, y, d), \end{aligned}$$

ou seja, σ é a sua própria inversa e σ^2 é a aplicação identidade de $(\mathbb{R}_+)^2 \times \mathbb{R}_+^*$. Por fim, um ponto fixo de σ satisfaz a igualdade $\sigma(x, y, d) = (x, y, d) \iff \left(\frac{y}{d}, \frac{x}{d}, \frac{1}{d} \right) = (x, y, d)$. Donde, concluímos que $\frac{1}{d} = d \Rightarrow d = 1$ e $\frac{x}{d} = y \Rightarrow x = y$. \square

O difeomorfismo σ é uma ferramenta crucial para estudar o conjunto \mathcal{R} . Nesse sentido, temos o principal resultado deste capítulo:

Teorema 2.7. \mathcal{R} é invariante pelo difeomorfismo σ .

Demonstração. Seja $(x, y, d) \in \mathcal{R}$ e $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{d}) = \sigma(x, y, d)$. Por definição, temos que $F(x, y, d) = G(x, y, d) = 0$. Pelas igualdades (2.25) e (2.26), concluímos que $G(\bar{x}, \bar{y}, \bar{d}) = F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{d}) = 0$, ou seja, $\sigma(x, y, d) \in \mathcal{R}$. Reciprocamente, seja $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{d}) \in \mathcal{R}$. Por definição, temos que

$F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{d}) = G(\bar{x}, \bar{y}, \bar{d}) = 0$. Novamente pelas igualdades (2.25) e (2.26), concluímos que $G(x, y, d) = F(x, y, d) = 0$. Donde, segue que $(x, y, d) \in \mathcal{R}$. \square

Uma consequência imediata desse teorema é que se conhecermos todos os equilíbrios relativos do PRL5C para um certo $d_0 \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right)$, então também conhecemos todos os equilíbrios relativos associados ao losango normalizado com semidiagonal $\frac{1}{d_0} \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right)$. Portanto, se determinamos todas as triplas $(x, y, d) \in \mathcal{R}$, com $d \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right]$, então o difeomorfismo σ nos permite obter todas as triplas em \mathcal{R} tais que $d \in [1, \sqrt{3})$.

O parágrafo anterior e os pontos fixos de σ nos permitem concluir que o quadrado ($d = 1$) merece uma atenção especial. Estudaremos mais profundamente o quadrado no apêndice A.

Finalizamos o capítulo determinando as regiões do primeiro quadrante do plano cartesiano onde podemos fixar o corpo de massa nula de modo a obtermos um equilíbrio relativo. Desse modo, temos o seguinte resultado técnico.

Lema 2.8. *Se $(x, y, d) \in \mathcal{R}$, então $(x, y) \in [0, 3] \times [0, 3]$.*

Demonstração. Vamos começar a prova reescrevendo a função $F(x, y, d)$ do sistema (2.18) de maneira conveniente. Para isso, trocamos $\lambda = -\frac{1}{4} - \frac{2m}{l^3}$ em F , de modo que obtemos

$$\begin{aligned} F(x, y, d) &= x \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{[x^2 + (y-1)^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{[x^2 + (y+1)^2]^{\frac{3}{2}}} \right) \\ &+ m \left(-\frac{2x}{l^3} + \frac{x-d}{[(x-d)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{x+d}{[(x+d)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} \right). \end{aligned}$$

Afirmamos que para $x \geq 8$ e $y \geq 8$, temos $F(x, y, d) < 0$ para todo $d \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right)$.

De fato, temos

$$\frac{1}{[x^2 + (y-1)^2]^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{[8^2 + (8-1)^2]^{\frac{3}{2}}} < \frac{1}{1000},$$

$$\frac{1}{[x^2 + (y+1)^2]^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{[8^2 + (8+1)^2]^{\frac{3}{2}}} < \frac{1}{1000}$$

e, como $\frac{1}{\sqrt{3}} < d < \sqrt{3}$, temos claramente que $l^3 \leq 8$, $\frac{x-d}{[(x-d)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} \leq 1$, $\frac{x+d}{[(x+d)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} \leq 1$ e

$\frac{2x}{\ell^3} \geq 2$. Consequentemente,

$$-\frac{1}{4} + \frac{1}{[x^2 + (y-1)^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{[x^2 + (y+1)^2]^{\frac{3}{2}}} < -\frac{1}{4} + \frac{2}{1000} < 0 \quad \text{e}$$

$$-\frac{2x}{\ell^3} + \frac{x-d}{[(x-d)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{x+d}{[(x+d)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} < -2 + 1 + 1 = 0.$$

Logo, obtemos

$$F(x, y, d) < x \left(-\frac{1}{4} + \frac{2}{1000} \right) + m(-2 + 1 + 1) < 0,$$

como queríamos. Para concluir a demonstração, afirmamos que, para $3 \leq x \leq 8$ e $3 \leq y \leq 8$, temos $F(x, y, d) < 0$ para todo $d \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3} \right)$. Com efeito, recordemos que

$$F(x, y, d) = \lambda x + x \left(\frac{1}{r_1^3} + \frac{1}{r_3^3} \right) + m \left(\frac{x-d}{r_2^3} + \frac{x+d}{r_4^3} \right).$$

Primeiramente notemos que

$$r_1^2 = x^2 + (y-1)^2 \geq 3^2 + (3-1)^2 = 13, \quad r_3^2 = x^2 + (y+1)^2 \geq 3^2 + (3+1)^2 = 25,$$

$$r_2^2 = (x-d)^2 + y^2 > (3-\sqrt{3})^2 + 3^2 > 10 \quad \text{e} \quad r_4^2 = (x+d)^2 + y^2 > \left(3 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 3^2 > 20.$$

Seguem dessas desigualdades que

$$r_1^3 > 46, \quad r_3^3 > 125, \quad r_2^3 > 31 \quad \text{e} \quad r_4^3 > 89.$$

Daí,

$$x \left(\frac{1}{r_1^3} + \frac{1}{r_3^3} \right) < 8 \left(\frac{1}{46} + \frac{1}{125} \right) < 0, 24,$$

$$\frac{x-d}{r_2^3} + \frac{x+d}{r_4^3} < \frac{8-\frac{1}{\sqrt{3}}}{31} + \frac{8+\sqrt{3}}{125} < 0, 32.$$

Além disso, $\ell \leq 2$ e $\lambda x \leq 3\lambda = -\frac{6m}{\ell^3} - \frac{3}{4} \leq -\frac{3}{4}m - \frac{3}{4}$. Portanto,

$$F(x, y, d) < -\frac{3}{4}m - \frac{3}{4} + \frac{6}{25} + \frac{8}{25}m < 0.$$

□

Se impusermos restrições sobre a semidiagonal d do losango normalizado podemos melhorar o lema anterior. Em suma, temos o seguinte resultado

Lema 2.9. Se $(x, y, d) \in \mathcal{R}$ e $d \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right]$, então $(x, y) \in [0, 2, 1) \times [0, 2, 1)$.

Demonstração. Pelo lema 2.8, é suficiente mostrar que para $(x, y) \in [2.1, 3] \times [2.1, 3]$ e $d \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right]$ tem-se $(x, y, d) \notin \mathcal{R}$. Pelo teorema 2.3, sabemos que $m = m(d)$ é uma função decrescente de d e, como $m(1) = 1$, temos que $m > 1$ e $\ell \leq 2$ para $d \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right]$. Além disso, temos ainda

$$r_1^2 = x^2 + (y - 1)^2 \geq 2.1^2 + (2.1 - 1)^2 = 5,62, \quad r_3^2 = x^2 + (y + 1)^2 \geq 2.1^2 + (2.1 + 1)^2 = 14,02,$$

$$r_2^2 = (x - d)^2 + y^2 \geq (2.1 - 1)^2 + 2.1^2 = 5,62 \quad \text{e} \quad r_4^2 = \left(2.1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 2.1^2 > (2.1 - 0.58)^2 + 2.1^2 > 6,72.$$

Seguem dessas desigualdades que

$$r_1^3 > 13, \quad r_3^3 > 52, \quad r_2^3 > 13 \quad \text{e} \quad r_4^3 > 17.$$

Desse modo, chegamos a $x \left(\frac{1}{r_1^3} + \frac{1}{r_3^3}\right) < 3 \left(\frac{1}{13} + \frac{1}{51}\right) < \frac{29}{100}$ e $\frac{x - d}{r_2^3} + \frac{x + d}{r_4^3} < \frac{3 - \frac{57}{100}}{13} + \frac{3 + 1}{17} < \frac{43}{100}$. Além disso, $\lambda x \leq \frac{21}{10} \lambda = -\frac{\frac{21}{5}m}{\ell^3} - \frac{\frac{21}{10}}{4} \leq -\frac{\frac{21}{5}m}{2\sqrt{2}} - \frac{21}{40} < -\frac{7}{5}m - \frac{1}{2}$. Portanto,

$$\begin{aligned} F(x, y, d) &= \lambda x + x \left(\frac{1}{r_1^3} + \frac{1}{r_3^3}\right) + m \left(\frac{x - d}{r_2^3} + \frac{x + d}{r_4^3}\right) \\ &< -\frac{7}{5} - \frac{1}{2} + \frac{29}{100} + \frac{43}{100} \\ &< 0, \end{aligned}$$

para $(x, y) \in [2, 1, 3] \times [2, 1, 3]$ e $d \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right]$.

□

3 Algebrização e Finitude de Equilíbrios Relativos do PRL5C

Neste capítulo, reescreveremos as equações de equilíbrios relativos dadas pelo sistema (2.18) na forma polinomial, por meio das distâncias mútuas entre as primárias e o corpo de massa nula. Desse modo, veremos que os eixos cartesianos originam posições do corpo de massa nula formando um equilíbrio relativo do PRL5C. Usando relações de coplanaridade para um equilíbrio relativo, simplificaremos as equações polinomiais anteriores por meio de um sistema de coordenadas simétricas que nos permitirá estudar a finitude de equilíbrios relativos no interior do quadrado descrito no lema 2.9. Usando o resultante entre dois polinômios para eliminar variáveis e as transformações de Möbius juntamente com o método de Vincent generalizado para eliminar as variações de sinal nesses polinômios, provaremos a finitude do conjunto \mathcal{R} de equilíbrios relativos módulo similaridades de \mathbb{R}^2 do PR5CP no plano de equilíbrios.

Por meio do difeomorfismo σ definido por (2.28) reduziremos o estudo dos equilíbrios relativos nos eixos cartesianos a apenas um dos eixos. Neste eixo, utilizaremos parametrizações racionais, inspiradas em (2.21), que nos levará a obter equações polinomiais simples em duas variáveis. Tais equações, juntamente com as transformações de Möbius e o método de Vincent generalizado, nos possibilita demonstrar finitude e fornecer a contagem de equilíbrios relativos nos eixos cartesianos. Nesse processo, utilizaremos o software Maple para visualizarmos essas curvas algébricas e fazermos mudanças de variáveis de natureza relativamente simples que nos possibilitarão provar que essas curvas algébricas são gráficos de funções de uma variável.

3.1 Algebrização das Equações de Equilíbrios Relativos

Vimos nas equações (2.20) que as coordenadas cartesianas de m_5 e as distâncias mútuas r_j entre as primárias e m_5 estão relacionadas de maneira polinomial. Essas expressões nos permitem reescrever as funções F e G , que descrevem a posição do corpo de massa nula em um equilíbrio relativo do PRL5C, de maneira polinomial. Para isso, substituiremos os parâmetros m e λ pelas suas expressões dadas pelas equações (2.17) e (2.15), respectivamente, e as coordenadas cartesianas de m_5 pelas expressões em (2.20), nas funções F e G . Usando a

notação $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3, r_4)$, obtemos

$$F(\vec{r}, d, \ell) = \frac{(r_4 - r_2)F_1(\vec{r}, d, \ell)}{16dS(\vec{r}, d, \ell)} \quad \text{e} \quad G(\vec{r}, d, \ell) = \frac{(r_1 - r_3)G_1(\vec{r}, d, \ell)}{16S(\vec{r}, d, \ell)},$$

onde $F_1(\vec{r}, d, \ell) = 16\ell^6 d^5 r_1^3 r_2^2 r_3^3 + 16\ell^6 d^5 r_1^3 r_3^3 r_4^2 + \dots - 4\ell^6 r_2^3 r_3^3 r_4^4$ é um polinômio com 26 monômios, $G_1(\vec{r}, d, \ell) = 16\ell^6 d^3 r_1^4 r_2^2 r_3^3 + 16\ell^6 d^3 r_1^4 r_3^3 r_4^3 + \dots - 16\ell^6 r_2^3 r_3^2 r_4^3$ é um polinômio com 26 monômios e $S(\vec{r}, d, \ell) = (2d - \ell)(4d^2 + 2d\ell + \ell^2)\ell^3 r_1^3 r_2^3 r_3^3 r_4^3$.

Notemos que o polinômio $S(\vec{r}, d, \ell)$ é sempre positivo, pois $d \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right)$ e $\ell = \sqrt{1 + d^2}$ implicam que $2d - \ell > 0$. Consequentemente, se $(x, y, d) \in \mathcal{R}$ então o sistema (2.18) pode ser reescrito na forma polinomial

$$\begin{cases} (r_4 - r_2)F_1(\vec{r}, d, \ell) = 0, \\ (r_1 - r_3)G_1(\vec{r}, d, \ell) = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Sabemos pelas equações (2.20) que

$$x = \frac{(r_4 - r_2)(r_4 + r_2)}{4d} \quad \text{e} \quad y = \frac{(r_3 - r_1)(r_3 + r_1)}{4}.$$

Desse modo, segue do sistema (2.18) e do lema 2.8 que $r_2 = r_4, r_1 \neq r_3$ se e somente se $x = 0$, e $y \in (0, 3)$; $r_1 = r_3, r_2 \neq r_4$ se e somente se $y = 0$ e $x \in (0, 3)$, e $r_1 = r_3, r_2 = r_4$ se e somente se $(x, y) = (0, 0)$. Em outras palavras, vale a propriedade a seguir

Proposição 3.1. *Seja $(x, y, d) \in \mathcal{R}$ e $r_1 = r_3$ ou $r_2 = r_4$. Então, o corpo de massa nula está localizado sobre os eixos cartesianos nos segmentos $[0, 3)$ de cada eixo.*

O resultado acima nos diz que o conjunto de equilíbrios relativos do Problema Restrito Losangular de Cinco Corpos, \mathcal{R} , possui dois subconjuntos importantes:

$$\mathcal{R}_1 := \{(x, y, d) \in \mathcal{R} : x = 0\} \quad \text{e} \quad \mathcal{R}_2 := \{(x, y, d) \in \mathcal{R} : y = 0\}.$$

Por meio do sistema (2.18) podemos caracterizar os demais pontos de \mathcal{R} como

$$\mathcal{R}_3 := \{(x, y, d) \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 : F_1 = G_1 = 0\}.$$

Vale ressaltar ainda que, por meio do difeomorfismo σ e do teorema 2.7, temos que $\sigma(\mathcal{R}_1) = \mathcal{R}_2$, $\sigma(\mathcal{R}_2) = \mathcal{R}_1$ e $\sigma(\mathcal{R}_3) = \mathcal{R}_3$.

Descrever as coordenadas cartesianas de m_5 em um equilíbrio relativo do PRL5CP usando

as distâncias mútuas r_j , $j = 1, 2, 3, 4$, entre m_5 e as primárias nos vértices do losango além de nos permitir algebrizar as funções F e G , nos proporciona obter outras relações polinomiais entre as distâncias mútuas r_j por meio de condições de coplanaridade.

Neste contexto, considere o tetraedro formado pelas primárias m_1, m_2, m_3 e pela massa nula m_5 localizada no ponto (x, y, z) ; veja a figura 2.2 na página 26. O volume V desse tetraedro em termos dos seus lados pode ser calculado na forma de determinante por

$$288V^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1+d^2 & 4 & r_1^2 \\ 1 & 1+d^2 & 0 & 1+d^2 & r_2^2 \\ 1 & 4 & 1+d^2 & 0 & r_3^2 \\ 1 & r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 & 0 \end{vmatrix};$$

ver Uspensky (1948), página 256. Desta forma, o anulamento desse determinante representa a relação de coplanaridade em termos das distâncias mútuas entre as primárias m_1, m_2, m_3 e a massa nula m_5 . Logo, a relação

$$\begin{aligned} C_1(r_1, r_2, r_3, d) &= -d^2 r_1^4 + 2d^2 r_1^2 r_3^2 - d^2 r_3^4 - 4d^4 + 4d^2 r_1^2 + 8d^2 r_2^2 + 4d^2 r_3^2 \\ &\quad - r_1^4 + 4r_1^2 r_2^2 - 2r_1^2 r_3^2 - 4r_2^4 + 4r_2^2 r_3^2 - r_3^4 - 8d^2 + 4r_1^2 - 8r_2^2 + 4r_3^2 - 4 = 0 \end{aligned}$$

representa a planaridade desses quatro corpos na configuração. Analogamente, para que o tetraedro formado pelas primárias m_1, m_3, m_4 e a massa nula m_5 tenha volume nulo é necessário que

$$\begin{aligned} C_2(r_1, r_3, r_4, d) &= -d^2 r_1^4 + 2d^2 r_1^2 r_3^2 - d^2 r_3^4 - 4d^4 + 4d^2 r_1^2 + 8d^2 r_4^2 + 4d^2 r_3^2 \\ &\quad - r_1^4 + 4r_1^2 r_4^2 - 2r_1^2 r_3^2 - 4r_4^4 + 4r_4^2 r_3^2 - r_3^4 - 8d^2 + 4r_1^2 - 8r_4^2 + 4r_3^2 - 4 = 0. \end{aligned}$$

O anulamento das funções C_1 e C_2 caracteriza a planaridade de um equilíbrio relativo do PRL5C. Deste modo, podemos representar um equilíbrio relativo em \mathcal{R}_3 usando as distâncias mútuas r_i , com $i = 1, 2, 3, 4$, como coordenadas da massa nula, isto é,

$$\mathcal{R}_3 = \{(\vec{r}, d) \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 : F_1(\vec{r}, d) = G_1(\vec{r}, d) = 0 \text{ e } C_1(r_1, r_2, r_3, d) = C_2(r_1, r_3, r_4, d) = 0\}.$$

Notemos ainda que

$$C_1 - C_2 = 4(r_2^2 - r_4^2)(2d^2 - r_1^2 + r_2^2 - r_3^2 + r_4^2).$$

Em \mathcal{R}_3 , trocaremos as condições de coplanaridade $C_1 = C_2 = 0$ pelo sistema polinomial equivalente dado por $W_1(\vec{r}, d) = W_2(\vec{r}, d) = 0$, onde $W_1(\vec{r}, d) = 2d^2 - r_1^2 + r_2^2 - r_3^2 + r_4^2$ e $W_2(\vec{r}, d) = C_1 + C_2$ é um polinômio com 23 monômios, pois estamos interessados em fazer uma mudança de variáveis conveniente de modo a eliminar o máximo possível de variáveis na caracterização polinomial de \mathcal{R}_3 .

Nesse sentido, consideremos as coordenadas simétricas

$$\begin{cases} a = r_2 + r_4, \\ b = r_2 r_4, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} s = r_1 + r_3, \\ t = r_1 r_3. \end{cases}$$

Explicitamente, temos que $r_1 = \frac{s - \sqrt{s^2 - 4t}}{2}$, $r_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$, $r_3 = \frac{s + \sqrt{s^2 - 4t}}{2}$ e $r_4 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$. Substituindo essas novas coordenadas nos polinômios que caracterizam \mathcal{R}_3 obtemos

$$W_3 = -a^2 + 2d^2 + s^2 + 2b - 2t - 2,$$

$$W_4 = -2d^2 s^4 + 8d^2 s^2 t - 4a^4 + 8a^2 d^2 + 4a^2 s^2 - 8d^4 + 8d^2 s^2 - 2s^4 + 16a^2 b - 8a^2 t - 16bd^2 - 8bs^2 - 16d^2 t + 8s^2 t - 8a^2 - 8b^2 + 16bt - 16d^2 + 8s^2 - 8t^2 + 16b - 16t - 8,$$

$$F_2 = -4a^4 d^3 \ell^6 t^3 + 16a^2 d^5 \ell^6 t^3 + 12a^2 b d^3 \ell^6 t^3 - 16bd^5 \ell^6 t^3 + 32a^4 d^3 \ell^3 t^3 - 128a^2 d^5 \ell^3 t^3 + 32ab^3 d^3 \ell^3 s^3 - 4ab^3 \ell^6 s^3 + ab^3 \ell^6 t^3 - 96a^2 b d^3 \ell^3 t^3 - 96ab^3 d^3 \ell^3 s t + 12ab^3 \ell^6 s t + 128bd^5 \ell^3 t^3 - 64ab^3 d^3 t^3 \text{ e}$$

$$G_2 = 4a^3 d^3 \ell^6 s t^3 - 12abd^3 \ell^6 s t^3 - 32a^3 d^3 \ell^3 s t^3 - 32b^3 d^3 \ell^3 s^4 + 4b^3 \ell^6 s^4 - b^3 \ell^6 s t^3 + 96abd^3 \ell^3 s t^3 + 96b^3 d^3 \ell^3 s^2 t - 12b^3 \ell^6 s^2 t + 128b^3 d^3 \ell^3 s^2 - 16b^3 \ell^6 s^2 - 128b^3 d^3 \ell^3 t + 64b^3 d^3 s t^3 + 16b^3 \ell^6 t.$$

Agora, consideremos a mudança de coordenadas

$$\begin{cases} v = b + t, \\ u = b - t. \end{cases}$$

Daí, obtemos $W_5 = -a^2 + 2d^2 + s^2 + 2u - 2$ e $W_6 = -2d^2 s^4 - 4d^2 s^2 u + 4d^2 s^2 v - 4a^4 + 8a^2 d^2 + 4a^2 s^2 - 8d^4 + 8d^2 s^2 - 2s^4 + 12a^2 u + 4a^2 v - 16d^2 v - 8s^2 u - 8a^2 - 16d^2 + 8s^2 - 8u^2 + 16u - 8$. Em um ponto de \mathcal{R}_3 , sabemos que $W_5(a, s, u, v, d) = W_6(a, s, u, v, d) = 0$ e que $F_2(a, s, u, v, d, \ell) = G_2(a, s, u, v, d, \ell) = 0$. De $W_1 = W_2 = 0$ concluímos que

$$u = \frac{a^2 - s^2 - 2d^2 + 2}{2} \quad (3.2)$$

e

$$v = \frac{a^2 d^2 s^2 - 2d^4 s^2 - 2a^2 d^2 + a^2 s^2 + 8d^4 - 2d^2 s^2 - 2a^2 + 8d^2}{2(d^2 s^2 + a^2 - 4d^2)}. \quad (3.3)$$

Finalmente, substituindo u e v pelas expressões dadas em (3.2) e (3.3) no sistema polinomial $F_2 = G_2 = 0$ e eliminando os fatores não-nulos, obtemos o sistema polinomial

$$\begin{cases} F_3(a, s, d, \ell) = 0, \\ G_3(a, s, d, \ell) = 0, \end{cases} \quad (3.4)$$

onde $F_3(a, s, d, \ell) = 8a^7 d^{12} \ell^6 s^{18} - 48a^5 d^{14} \ell^6 s^{18} + \dots + 536870912d^{17} \ell^3 s^2$ é um polinômio com 1682 monômios e $G_3(a, s, d, \ell) = -8a^6 d^{12} \ell^6 s^{19} + 48a^4 d^{14} \ell^6 s^{19} + \dots + 16777216d^{15} s^7$ é um polinômio com 1682 monômios. Esse processo de eliminação de variáveis nos permite escrever

$$\mathcal{R}_3 = \{(a, s, d, \ell) \in \mathcal{R} : F_3(a, s, d, \ell) = G_3(a, s, d, \ell) = 0 \text{ e } \ell^2 = 1 + d^2\}.$$

Para completar a algebrização que nos levou ao sistema polinomial (3.4), precisamos determinar o domínio das variáveis a e s . Nesse sentido, utilizaremos o lema 2.9. Assim, no que segue consideraremos o prisma $d \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right]$ e $(x, y) \in [0, 2.1) \times [0, 2.1)$. Recordemos que

$$a = r_2 + r_4 = \sqrt{(x-d)^2 + y^2} + \sqrt{(x+d)^2 + y^2} \quad \text{e} \quad s = r_1 + r_3 = \sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{x^2 + (y+1)^2}.$$

Desse modo, temos

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{x-d}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2}} + \frac{x+d}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial a}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2}} + \frac{y}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2}}.$$

Daí, $\frac{\partial a}{\partial y} = 0 \iff y = 0$ e $\frac{\partial a}{\partial x}(x, 0, d) = \frac{x-d}{|x-d|} + 1 \Rightarrow \frac{\partial a}{\partial x}(x, 0, d) = 0 \iff x \leq d$. Segue disso que o valor mínimo de a é atingido nos pontos $(x, 0, d)$, com $x \leq d$. Donde obtemos $a_{\min} = 2d > 1.15$. O valor máximo de a é atingido na fronteira do prisma no ponto $(2, 1, 2, 1, 1)$, ou seja, $a_{\max} < 6, 12$.

Analogamente, temos

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + (y+1)^2}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{y-1}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} + \frac{y+1}{\sqrt{x^2 + (y+1)^2}}.$$

Daí, $\frac{\partial s}{\partial x} = 0 \iff x = 0$ e $\frac{\partial s}{\partial y}(0, y, d) = \frac{y-1}{|y-1|} + 1 \Rightarrow \frac{\partial s}{\partial y}(0, y, d) = 0 \iff y \leq 1$. Segue disso que o valor mínimo de s é atingido nos pontos $(0, y, d)$, com $y \leq 1$. Donde, obtemos $s_{\min} = 2$. O valor

nunca é maior do que o número de variações de sinal na sequência dos coeficientes de $f(x)$ e, se for menor, sempre é congruente ao número de variações de sinal de f módulo 2.

Demonstração. Ver Uspenky (1948), página 121. Para uma generalização desse resultado ver Barros e Leandro (2019), página 4. \square

A segunda ferramenta que utilizaremos é a parte substancial do nosso método de demonstração ao longo deste capítulo: as transformações de Möbius. Utilizaremos transformações de Möbius da forma

$$\psi_i(x_i; \kappa_i^{(1)}, \kappa_i^{(2)}) = \frac{\kappa_i^{(2)} x_i + \kappa_i^{(1)}}{x_i + 1}, \quad \kappa_i^{(1)} < \kappa_i^{(2)}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

para obter mudanças de variáveis para polinômios $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. O numerador das funções racionais $f \circ (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$ obtidas dessa forma serão denotados por $f|_{\mathcal{B}}$, onde $\mathcal{B} = [\kappa_1^{(1)}, \kappa_1^{(2)}] \times [\kappa_2^{(1)}, \kappa_2^{(2)}] \times \dots \times [\kappa_n^{(1)}, \kappa_n^{(2)}]$.

As transformações de Möbius são uma importante ferramenta para isolar raízes de polinômios. Nossa técnica é inspirada por um algoritmo desenvolvido por Vincent que permite uma drástica redução no número de variações de sinais nos coeficientes de um polinômio em uma variável. Dessa forma, é possível dizer se um polinômio é positivo, negativo ou nulo em uma dada região do plano. Mais precisamente, determinaremos partições do plano em blocos de modo que, em cada bloco, os coeficientes dos polinômios que utilizaremos possuem um comportamento muito simples com respeito a variações de sinal. Esta técnica tem sido empregada com sucesso em estudos de finitude, estabilidade e bifurcações de equilíbrios relativos (ver Barros e Leandro (2011) e (2014)). Por simplicidade, iremos nos referir a polinômios cujos monômios são todos positivos como $C+$, e a polinômios cujos monômios são todos negativos como $C-$.

Para implementar o método descrito acima, faremos muitas mudanças de variáveis. Essas mudanças são de natureza simples e nos permitirão determinar o comportamento de um polinômio em um bloco de nossa partição. Dados o grau e os monômios dos polinômios envolvidos, recorreremos ao software Maple para nossas mudanças de variáveis.

O Maple também será usado para visualização de curvas e superfícies algébricas reais correspondentes ao conjunto de zeros de nossos polinômios. Essas visualizações sugerem convenientes partições das regiões do espaço que serão estudadas. Primeiro, um bloco \mathcal{B} , relativamente grande, contendo todas as possíveis soluções é determinado analiticamente. Via Maple, notamos que um subbloco \mathcal{B}' deve, por exemplo, conter parte de apenas uma curva ou

superfície, mas não de outra(s). Como estaremos interessados em localizar as interseções de todas as curvas ou superfícies, e \mathcal{B}' parece não conter nenhum ponto de interseção, aplicaremos uma transformação de Möbius conveniente para verificar se isso é verdade. Se for verdade, adicionaremos \mathcal{B}' a nossa partição e consideraremos o complementar de \mathcal{B}' em \mathcal{B} , onde repetiremos o processo. A construção da partição termina quando \mathcal{B} for completamente coberto com uma quantidade finita de sublocos.

Após a descrição sucinta das ferramentas e do método que usaremos, demonstraremos o principal resultado dessa seção.

Teorema 3.6. *O número de classes de equilíbrios relativos em \mathcal{R}_3 é finito para cada $d \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right)$.*

Demonstração. Usando o difeomorfismo σ , é suficiente provar a finitude de \mathcal{R}_3 para cada $d \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right]$. Sabemos que os elementos desse conjunto são soluções do sistema polinomial (3.4) descrito por

$$\begin{cases} F_3(a, s, d, \ell) = 0, \\ G_3(a, s, d, \ell) = 0, \end{cases}$$

onde $(a, s, d, \ell) \in (1, 15, 6, 12) \times [2, 6, 12) \times \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right] \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{2}\right]$. Para mostrar que o conjunto solução desse sistema é finito para cada $d \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right]$ e $\ell \in \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{2}\right]$, reordenaremos os monômios de F_3 e G_3 na forma

$$F_3(a) = x_0 a^{25} + x_1 a^{24} + \dots + x_{25} \quad \text{e} \quad G_3(a) = y_0 a^{24} + y_1 a^{23} + \dots + y_{24},$$

onde os x_i 's e y_i 's pertencem a $k[s]$, com k sendo o corpo $\mathbb{Q}(d, \ell)$, e consideraremos o polinômio

$$T(s) := \text{Res}(F_3, G_3, a).$$

Observemos que o resultado estará provado se, para cada valor do parâmetro $d \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right]$, mostrarmos que o polinômio $T(s)$ não se anula identicamente nos pontos da hipérbole $E = 0$, onde $E = \ell^2 - d^2 - 1$. De fato, se (\bar{a}, \bar{s}) é a posição da massa nula em um equilíbrio relativo do PRL5C, então $F_3 = G_3 = 0$, o que implica que

$$T(\bar{s}) = 0.$$

Uma maneira de mostrar que um polinômio é não-nulo segundo o teorema 3.4 consiste em verificar que o mesmo não se anula para um valor fixo da variável. Tendo isso em mente,

provaremos que $T(s)$ não é o polinômio nulo, verificando que $T(2) \neq 0$ para todo $d \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right]$ na hipérbole $E = 0$.

Fixando $s = 2$, temos que $x_0 = 64d^3 - \ell^6 \neq 0$, $y_0 = 2\ell^6 - 128d^3 \neq 0$. Além disso, tem-se $x_1 = x_9 = x_{10} = 0$ e $x_{12} = x_{12+i} = 0$, com $i = 1, 2, \dots, 12$; $y_1 = y_9 = 0$ e $y_{11} = y_{11+j} = 0$, com $j = 1, 2, \dots, 13$. Conseqüentemente, em $s = 2$, o sistema (3.4) torna-se

$$\begin{cases} F_3|_{s=2}(a) = a^{14}R_1(a), \\ G_3|_{s=2}(a) = -2a^{15}R_2(a), \end{cases} \quad (3.5)$$

onde R_1 e R_2 são polinômios em a , com coeficientes no corpo $\mathbb{Q}(d, \ell)$, com 51 e 43 monômios, respectivamente. Desse modo, segue do sistema (3.5) que para mostrar que $T(2)$ é não-nulo é suficiente provar que

$$K(d, \ell) := Res(R_1, R_2, a)$$

não é identicamente nulo nos pontos da hipérbole $E = 0$. Para isso, sabemos, pelo teorema 3.4, que os zeros de K nessa hipérbole provém de zeros do polinômio

$$K_1(d) = Res(K, H, \ell).$$

Em suma, basta verificar que $K_1(d)$ não se anula identicamente para cada $d \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right]$. Com efeito, temos explicitamente

$$\begin{aligned} K_1(d) &= d^{30}(1+d^2)^{70}(d^2-3)^3(3d^2-1)^7(21d^4+6d^2+1)^7(d^2-4d+1)^8 \\ &\quad (d^4+6d^2+21)^3(d^4+4d^3+18d^2+4d+1)^8 K_2(d), \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde $K_2(d)$ é um polinômio com grau 88 e 87 monômios, irreduzível sobre \mathbb{Q} . De (3.6) é suficiente mostrar que $K_2(d)$ não se anula identicamente para $d \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right]$. Para isso, consideremos a transformação de Möbius

$$\psi(d; 0.57, 1) = \frac{0.57d + 1}{d + 1}.$$

Como

$$K_2|_{\mathcal{B}} = -1.696493278 \cdot 10^{22}d^{88} - \dots - 2.239411484 \cdot 10^{31}$$

é um polinômio $C-$, onde $\mathcal{B} = [0.57, 1]$, segue que K_2 não se anula para $d \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right] \cap \mathcal{B}$. \square

Para completar a demonstração da finitude de \mathcal{R} para cada $d \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right)$ falta mostrar a finitude para equilíbrios nos quais o corpo de massa nula se localiza nos eixos cartesianos, ou seja, verificar finitude nos subconjuntos \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 .

3.2 Finitude de Equilíbrios Relativos nos Eixos Cartesianos

Na proposição 3.1 percebemos, naturalmente, a importância dos equilíbrios relativos do PRL5C nos quais o corpo de massa nula está localizado em um dos eixos cartesianos. Pelo difeomorfismo σ , também vimos que é suficiente estudar esses equilíbrios relativos em apenas um dos eixos coordenados, visto que $\sigma(\mathcal{R}_1) = \mathcal{R}_2$ e $\sigma(\mathcal{R}_2) = \mathcal{R}_1$. Desse modo, estudaremos detalhadamente as propriedades do conjunto \mathcal{R}_1 ao longo dessa seção, com ênfase na finitude de equilíbrios relativos nesse conjunto.

A algebrização das equações de equilíbrios relativos no eixo das ordenadas é relativamente simples em relação à feita na seção anterior para estudar o conjunto \mathcal{R}_3 . Com efeito, fazendo $x = 0$ no sistema

$$\begin{cases} F(x, y, d) = 0 \\ G(x, y, d) = 0 \end{cases},$$

vemos que a primeira equação é trivialmente verificada, enquanto a segunda se reduz a

$$\lambda y + \frac{y-1}{|y-1|^3} + \frac{y+1}{|y+1|^3} + \frac{2my}{(y^2+d^2)^{\frac{3}{2}}} = 0. \quad (3.7)$$

Pela proposição 3.1, sabemos que as soluções dessa equação para cada $d \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right)$ pertencem ao intervalo $y \in [0, 3)$ no eixo das ordenadas. Além disso, notamos que nesse segmento existe uma colisão em $y = 1$ (descontinuidade na equação (3.7)) entre o corpo de massa nula e a primária m_1 . Desse modo, é necessário dividir esse segmento em duas partes a fim de simplificar a equação (3.7):

- Para $0 \leq y < 1$, a equação (3.7) assume a forma

$$\lambda y - \frac{1}{(y-1)^2} + \frac{1}{(y+1)^2} + \frac{2my}{(y^2+d^2)^{\frac{3}{2}}} = 0; \quad (3.8)$$

- Para $1 < y < 3$, a equação (3.7) assume a forma

$$\lambda y + \frac{1}{(y-1)^2} + \frac{1}{(y+1)^2} + \frac{2my}{(y^2+d^2)^{\frac{3}{2}}} = 0. \quad (3.9)$$

As técnicas que usaremos para estudar o conjunto solução das equações (3.8) e (3.9) utilizam equações polinomiais em duas variáveis. Nesse sentido, precisamos escolher parametrizações racionais convenientes a fim de transformar o termo $\frac{2my}{(y^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}$ em uma função racional.

Neste contexto, trocaremos os parâmetros m e λ nas equações (3.8) e (3.9) por suas expressões dadas pelas equações (2.15) e (2.17):

$$\lambda = -\frac{2m}{\ell^3} - \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad m = \frac{d^3(\ell^3 - 8)}{\ell^3 - 8d^3}, \quad \text{onde} \quad \ell = \sqrt{1 + d^2}.$$

Em seguida, consideraremos, novamente, a parametrização racional da hipérbole $\ell^2 - d^2 = 1$ dada por

$$\ell = \frac{\alpha^2 + 1}{2\alpha} \quad \text{e} \quad d = \frac{\alpha^2 - 1}{2\alpha},$$

onde $\alpha \in (1, +\infty)$, e, inspirados nesta mudança de variáveis, substituiremos a variável y pela parametrização racional

$$y = \frac{d(\alpha)(\beta^2 - 1)}{2\beta}, \quad (3.10)$$

onde $\beta \in (1, +\infty)$, pois $y > 0$.

Para finalizar a transformação das equações (3.8) e (3.9) em equações polinomiais nas variáveis α e β , precisamos determinar a variação do parâmetro β quando $0 < y < 1$ e $1 < y < 3$. Primeiro, para $0 < y < 1$, temos que $0 < \frac{d(\beta^2-1)}{2\beta} < 1$, ou, equivalentemente,

$$\begin{cases} \beta^2 - 1 > 0, \\ \beta^2 - \frac{2}{d}\beta - 1 < 0. \end{cases}$$

Resolvendo este sistema e intersectando seu conjunto solução com o intervalo $\beta > 1$, concluímos que

$$1 < \beta < \frac{1 + \ell}{d},$$

onde $\ell = \sqrt{1 + d^2}$ é o lado do losango normalizado. A fim de obtermos um extremo superior real para o intervalo de variação de β , seja

$$f_1(d) = \frac{1 + \ell}{d},$$

com $d \in \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right]$. Como f_1 é decrescente em seu domínio, visto que $f_1'(d) = -\frac{1+\ell}{d^2} < 0$, segue que

$f_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2 + \sqrt{3}$ é o valor máximo de f_1 . Portanto, a equação (3.8) é equivalente a

$$F_1(\alpha, \beta) = 0, \quad (3.11)$$

onde $(\alpha, \beta) \in (\sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}) \times (1, 2 + \sqrt{3})$ e $F_1(\alpha, \beta) = \alpha^{20}\beta^{14} - \alpha^{20}\beta^{12} + \dots + 2\alpha^2 - \beta^2 + 1$ é um polinômio com grau total 34 e 247 monômios. A visualização numérica da curva algébrica definida pela equação (3.11) será importante na demonstração de finitude mais adiante; veja figura 3.1 a seguir.

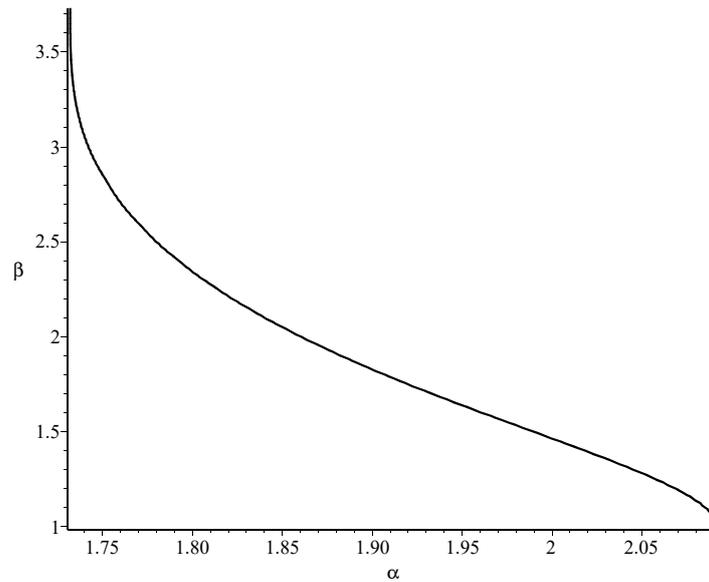


Figura 3.1: Curva algébrica $F_1(\alpha, \beta) = 0$ no plano $\alpha\beta$.

Agora, para $1 < y < 3$, temos que $1 < \frac{d(\beta^2-1)}{2\beta} < 3$, ou, de maneira equivalente,

$$\begin{cases} \beta^2 - \frac{2}{d}\beta - 1 > 0, \\ \beta^2 - \frac{6}{d}\beta - 1 < 0. \end{cases}$$

Resolvendo este sistema e intersectando seu conjunto solução com o intervalo $\beta > 1$, concluímos que

$$\frac{1 + \ell}{d} < \beta < \frac{3 + \sqrt{9 + d^2}}{d}.$$

Para determinarmos extremos inferiores e superiores reais para β , notemos que o valor mínimo de f_1 é $f_1(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$ e, considerando $f_2(d) = \frac{3 + \sqrt{9 + d^2}}{d}$, com $d \in \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right]$, temos que f_2 é decrescente, uma vez que $f_2'(d) = -\frac{3(3 + \sqrt{9 + d^2})}{d^2\sqrt{9 + d^2}} < 0$. Donde segue que $f_2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2\sqrt{7} + 3\sqrt{3}$ é o

valor máximo de f_2 . Logo, a equação (3.9) é equivalente a

$$G_1(\alpha, \beta) = 0, \quad (3.12)$$

onde $(\alpha, \beta) \in (\sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}) \times (\sqrt{3}, 2\sqrt{7} + 3\sqrt{3})$ e $G_1(\alpha, \beta) = \alpha^{22}\beta^{16} - 2\alpha^{22}\beta^{14} + \dots + \alpha^2 - 2\beta^2 + 1$ é um polinômio com grau total 38 e 294 monômios; veja figura 3.2.

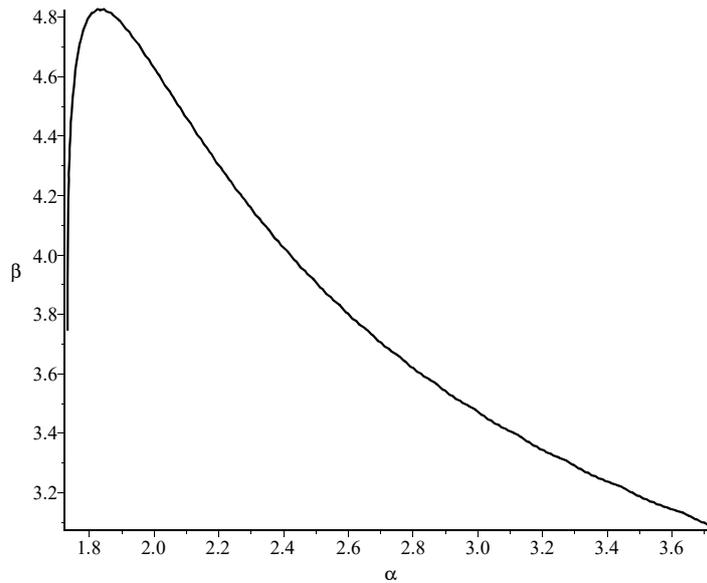


Figura 3.2: Curva algébrica $G_1(\alpha, \beta) = 0$ no plano $\alpha\beta$.

Agora, utilizaremos as transformações de Möbius para demonstrar rigorosamente que as curvas algébricas dadas nas equações (3.11) e (3.12) são gráficos no primeiro quadrante do plano $\alpha\beta$. No que segue, adotaremos 1,732 e 3,74 como aproximações racionais para $\sqrt{3}$ e $2 + \sqrt{3}$, respectivamente.

Proposição 3.7. *A curva algébrica $F_1(\alpha, \beta) = 0$ define implicitamente um gráfico no bloco $\mathcal{B} = [1, 732, 3, 74] \times [1, 3, 74]$ do plano $\alpha\beta$.*

Demonstração. Primeiro, consideremos o polinômio $F_2(\alpha, \beta) = \frac{\partial F_1}{\partial \alpha}$, com grau total 33 e 234 monômios e observemos que o bloco \mathcal{B} contém $(\sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}) \times (1, 2 + \sqrt{3})$. A nossa ideia consiste em particionar \mathcal{B} em sublocos tais que $F_1 \neq 0$ ou $F_2 \neq 0$ em cada um deles e utilizar o teorema da função implícita para polinômios nos sublocos onde $F_2 \neq 0$ para obtermos o gráfico desejado.

As notações $C+$ e $C-$, introduzidas na primeira seção para polinômios cujos monômios são todos positivos ou negativos, respectivamente, será amplamente utilizada.

Primeiro, notemos que

$$F_1 |_{[2.10, 3.74] \times [1, 3.74]} = -4.333361035 \cdot 10^{19} \alpha^{17} \beta^8 - \dots - 1.274948527 \cdot 10^{20},$$

é $C-$, então o bloco $\mathcal{B}_1 = [2.10, 3.74] \times [1, 3.74]$ não contém raízes da equação (3.11). Seja

$$\mathcal{B}_2 = [1.732, 2.10) \times [1, 3.74] = \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_1.$$

A equação (3.11) não possui solução no bloco $\mathcal{B}_3 = [2, 2.10] \times [1.50, 3.74] \subset \mathcal{B}_2$ pois

$$F_1 |_{\mathcal{B}_3} = -1.901632623 \cdot 10^{19} \alpha^{17} \beta^8 - \dots - 1.622204285 \cdot 10^{15}$$

é $C-$. Além disso, no bloco $\mathcal{B}_4 = [2, 2.10] \times [1, 1.50)$ temos que

$$F_2 |_{\mathcal{B}_4} = -2.925055001 \cdot 10^5 \alpha^{17} \beta^8 - \dots - 152.5445183$$

é $C-$, conseqüentemente, em uma vizinhança de cada ponto de $\{F_1 = 0\} \cap \mathcal{B}_4$ tem-se um gráfico de uma função analítica $\alpha = \alpha(\beta)$.

Consideremos a decomposição

$$\mathcal{B}_4 = \mathcal{B}_{41} \cup \mathcal{B}_{42},$$

onde $\mathcal{B}_{41} = [2, 2.10] \times [1, 1.27]$ e $\mathcal{B}_{42} = [2, 2.10] \times [1.27, 1.50]$.

Agora, consideraremos o polinômio

$$F_1 |_{\mathcal{B}_{41}} = \sum_{i=0}^{20} f_i(\beta) \alpha^i.$$

Cada f_i é um polinômio de grau 14, f_0, f_1 possuem apenas monômios negativos e f_{10}, \dots, f_{20} possuem apenas monômios positivos, e, para cada $i = 2, \dots, 9$, f_i possui uma única variação de sinal. Daí, pela Regra de Sinais de Descartes (Teorema 3.5), f_i possui apenas uma raiz real para cada $i = 2, \dots, 9$. As raízes β_i de cada f_i satisfazem $\beta_{i+1} < \beta_i$, $i = 2, \dots, 8$, como pode ser facilmente verificado usando transformações de Möbius. Segue disso, que para $\beta > \beta_3$, $F_1 |_{\mathcal{B}_{41}}$ não possui variações de sinal, enquanto que para $\beta \leq \beta_3$, $F_1 |_{\mathcal{B}_{41}}$ sempre possui uma única variação de sinal. Portanto, pelo Teorema da Função Implícita para polinômios (ver Barros e Leandro (2019), teorema 2.5, página 6), concluímos que $\{F_1 = 0\} \cap \mathcal{B}_{41}$ é um gráfico (para mais detalhes, ver o apêndice B).

Agora, consideraremos o polinômio

$$F_1 |_{\mathcal{B}_{42}} = \sum_{i=0}^{20} g_i(\beta) \alpha^i.$$

Cada g_i é um polinômio de grau 14, g_0, \dots, g_9 possuem apenas monômios negativos, e, para cada $i = 10, \dots, 20$, g_i possui uma única variação de sinal. Daí, pela Regra de Sinais de Descartes, g_i possui apenas uma raiz real para cada $i = 10, \dots, 20$. As raízes β_i de cada g_i satisfazem $\beta_{i+1} < \beta_i$, $i = 10, \dots, 19$, como pode ser facilmente verificado usando transformações de Möbius. Segue disso, que para $\beta > \beta_{14}$, $F_1 |_{\mathcal{B}_{42}}$ não possui variações de sinal, enquanto que para $\beta \leq \beta_{14}$, $F_1 |_{\mathcal{B}_{42}}$

sempre possui uma única variação de sinal. Portanto, pelo Teorema da Função Implícita para polinômios, concluímos que $\{F_1 = 0\} \cap \mathcal{B}_{42}$ é um gráfico.

Em suma, segue dos dois parágrafos anteriores que $\{F_1 = 0\} \cap \mathcal{B}_4$ é um gráfico.

Para facilitar a leitura e a compreensão do restante dessa demonstração e da proposição seguinte, ressaltamos que usaremos exaustivamente o argumento presente nos dois parágrafos anteriores. Além disso, recomendamos ver Barros e Leandro (2019) para a demonstração da existência de uma partição para o bloco \mathcal{B} e de como uma tal partição é escolhida.

Seja

$$\mathcal{B}_5 = [1.732, 2) \times [1, 3.74] = \mathcal{B}_2 \setminus (\mathcal{B}_3 \cup \mathcal{B}_4).$$

Observemos que em $\mathcal{B}_6 = [1.90, 2] \times [1, 1.48] \cup [1.90, 2] \times [1.90, 3.74]$ não há soluções da equação (3.11) visto que

$$F_1 |_{[1.90, 2] \times [1, 1.48]} = +7.020330010 \cdot 10^{18} \alpha^{10} \beta^5 + \dots + 3.245066266 \cdot 10^9$$

é $C+$ e

$$F_1 |_{[1.90, 2] \times [1.90, 3.74]} = -1.254434131 \cdot 10^{22} \alpha^{10} \beta^5 - \dots - 2.112705055 \cdot 10^{18} \alpha^4$$

é $C-$. Além disso, no bloco $\mathcal{B}_7 = [1.90, 2] \times (1.48, 1.90)$, a equação (3.11) define, localmente, um gráfico de uma função $\alpha = \alpha(\beta)$ em cada ponto pois

$$F_2 |_{\mathcal{B}_7} = -1.342978993 \cdot 10^9 \alpha^{10} \beta^5 - \dots - 66.46677356$$

é $C-$.

Consideremos a decomposição

$$\mathcal{B}_7 = \mathcal{B}_{71} \cup \mathcal{B}_{72},$$

onde $\mathcal{B}_{71} = [1.90, 2] \times [1.48, 1.69]$ e $\mathcal{B}_{72} = [1.90, 2] \times [1.69, 1.90]$.

Agora, consideraremos o polinômio

$$F_1 |_{\mathcal{B}_{71}} = \sum_{i=0}^{20} f_i(\beta) \alpha^i.$$

Cada f_i é um polinômio de grau 14, f_0 possui apenas monômios negativos e f_{13}, \dots, f_{20} possuem apenas monômios positivos, e, para cada $i = 1, \dots, 12$, f_i possui uma única variação de sinal. Daí, pela Regra de Sinais de Descartes, f_i possui apenas uma raiz real para cada $i = 1, \dots, 12$. As raízes β_i de cada f_i satisfazem $\beta_{i+1} < \beta_i$, $i = 2, \dots, 8$, como pode ser facilmente verificado usando transformações de Möbius. Segue disso, que para $\beta > \beta_5$, $F_1 |_{\mathcal{B}_{71}}$ não possui variações de sinal, enquanto que para $\beta \leq \beta_5$, $F_1 |_{\mathcal{B}_{71}}$ sempre possui uma única variação de sinal. Portanto, pelo Teorema da Função Implícita para polinômios, concluímos que $\{F_1 = 0\} \cap \mathcal{B}_{71}$ é um gráfico.

Agora, consideraremos o polinômio

$$F_1|_{\mathcal{B}_{72}} = \sum_{i=0}^{20} g_i(\beta)\alpha^i.$$

Cada g_i é um polinômio de grau 14, g_0, \dots, g_{12} possuem apenas monômios negativos, e, para cada $i = 13, \dots, 20$, g_i possui uma única variação de sinal. Daí, pela Regra de Sinais de Descartes, g_i possui apenas uma raiz real para cada $i = 13, \dots, 20$. As raízes β_i de cada g_i satisfazem $\beta_{i+1} < \beta_i$, $i = 13, \dots, 19$, como pode ser facilmente verificado usando transformações de Möbius. Segue disso, que para $\beta > \beta_{16}$, $F_1|_{\mathcal{B}_{72}}$ não possui variações de sinal, enquanto que para $\beta \leq \beta_{16}$, $F_1|_{\mathcal{B}_{72}}$ sempre possui uma única variação de sinal. Portanto, pelo Teorema da Função Implícita para polinômios, concluímos que $\{F_1 = 0\} \cap \mathcal{B}_{72}$ é um gráfico.

Em suma, segue dos dois parágrafos anteriores que $\{F_1 = 0\} \cap \mathcal{B}_7$ é um gráfico.

Seja

$$\mathcal{B}_8 = [1.732, 1.90) \times [1, 3.74] = \mathcal{B}_5 \setminus (\mathcal{B}_6 \cup \mathcal{B}_7).$$

De maneira similar, temos que em $\mathcal{B}_9 = [1.80, 1.90] \times [1, 1.90] \cup [1.80, 1.90] \times [2.38, 3.74]$ não há soluções da equação (3.11) visto que

$$F_1|_{[1.80, 1.90] \times [1, 1.90]} = +1.891992208 \cdot 10^{19} \alpha^{10} \beta^5 + \dots + 4.620218761 \cdot 10^{10}$$

é $C+$ e

$$F_1|_{[1.80, 1.90] \times [2.38, 3.74]} = -6.345152108 \cdot 10^{21} \alpha^{10} \beta^5 - \dots - 1.601653443 \cdot 10^{14}$$

é $C-$. Além disso, no bloco $\mathcal{B}_{10} = [1.80, 1.90] \times (1.90, 2.38)$, a equação (3.11) define, localmente, um gráfico de uma função em cada ponto pois

$$F_2|_{\mathcal{B}_{10}} = -1.057858395 \cdot 10^9 \alpha^{10} \beta^5 - \dots - 48.63908765$$

é $C-$.

Agora, consideraremos o polinômio

$$F_1|_{\mathcal{B}_{10}} = \sum_{i=0}^{20} f_i(\beta)\alpha^i.$$

Cada f_i é um polinômio de grau 14, f_0, f_1, f_2 e f_3 possuem apenas monômios negativos, e, para cada $i = 4, \dots, 20$, f_i possui uma única variação de sinal. Daí, pela Regra de Sinais de Descartes, f_i possui apenas uma raiz real para cada $i = 4, \dots, 20$. As raízes β_i de cada f_i satisfazem $\beta_{i+1} < \beta_i$, $i = 1, \dots, 20$. Segue disso, que para $\beta \leq \beta_{10}$, $F_1|_{\mathcal{B}_{10}}$ não possui variações de sinal, enquanto que para $\beta > \beta_{10}$, $F_1|_{\mathcal{B}_{10}}$ sempre possui uma única variação de sinal. Portanto, pelo Teorema da Função Implícita para polinômios, concluímos que $\{F_1 = 0\} \cap \mathcal{B}_{10}$ é um gráfico.

Seja

$$\mathcal{B}_{11} = [1.732, 1.80) \times [1, 3.74] = \mathcal{B}_8 \setminus (\mathcal{B}_9 \cup \mathcal{B}_{10}).$$

Observemos que em $\mathcal{B}_{12} = [1.75, 1.80] \times [1, 2.38] \cup [1.75, 1.80] \times [2.90, 3.74]$ não há soluções da equação (3.11) visto que

$$F_1 |_{[1.75, 1.80] \times [1, 2.38]} = +4.325903293 \cdot 10^{19} \alpha^{10} \beta^5 + \dots + 4.0892358 \cdot 10^{10}$$

é $C+$ e

$$F_1 |_{[1.75, 1.80] \times [2.90, 3.74]} = -2.444040556 \cdot 10^{21} \alpha^{10} \beta^5 - \dots - 2.981503351 \cdot 10^{13}$$

é $C-$. Além disso, no bloco $\mathcal{B}_{13} = [1.75, 1.80] \times (2.38, 2.90)$, a equação (3.11) define, localmente, em cada ponto um gráfico de uma função pois

$$F_2 |_{\mathcal{B}_{13}} = -4.719789169 \cdot 10^8 \alpha^{10} \beta^5 - \dots - 14.58151081$$

é $C-$.

Agora, consideraremos o polinômio

$$F_1 |_{\mathcal{B}_{13}} = \sum_{i=0}^{20} g_i(\beta) \alpha^i.$$

Cada g_i é um polinômio de grau 14, g_0 e g_1 possuem apenas monômios negativos, e, para cada $i = 2, \dots, 20$, g_i possui uma única variação de sinal. Daí, pela Regra de Sinais de Descartes, g_i possui apenas uma raiz real para cada $i = 2, \dots, 20$. As raízes β_i de cada g_i satisfazem $\beta_{i+1} < \beta_i$, $i = 1, \dots, 20$. Segue disso, que para $\beta \leq \beta_9$, $F_1 |_{\mathcal{B}_{13}}$ não possui variações de sinal, enquanto que para $\beta > \beta_9$, $F_1 |_{\mathcal{B}_{13}}$ sempre possui uma única variação de sinal. Portanto, pelo Teorema da Função Implícita para polinômios, concluímos que $\{F_1 = 0\} \cap \mathcal{B}_{13}$ é um gráfico.

Seja

$$\mathcal{B}_{14} = [1.732, 1.75) \times [1, 3.74] = \mathcal{B}_{11} \setminus (\mathcal{B}_{12} \cup \mathcal{B}_{13}).$$

Notemos que em $\mathcal{B}_{15} = [1.732, 1.75] \times [1, 2.90]$ não há soluções da equação (3.11) visto que

$$F_1 |_{\mathcal{B}_{15}} = +9.320206223 \cdot 10^{19} \alpha^{10} \beta^5 + \dots + 7.656629519 \cdot 10^{10}$$

é $C+$. Finalmente, no bloco $\mathcal{B}_{16} = [1.732, 1.75] \times (2.90, 3.74]$, a equação (3.11) define, localmente, em cada ponto um gráfico de uma função pois

$$F_2 |_{\mathcal{B}_{16}} = -4.591030360 \cdot 10^8 \alpha^{10} \beta^5 - \dots - 13.81760031$$

é $C-$.

Agora, consideraremos o polinômio

$$F_1 |_{\mathcal{B}_{16}} = \sum_{i=0}^{20} f_i(\beta) \alpha^i.$$

Cada f_i é um polinômio de grau 14, f_0, f_1 e f_2 possuem apenas monômios negativos, e, para cada $i = 3, \dots, 20$, f_i possui uma única variação de sinal. Daí, pela Regra de Sinais de Descartes, f_i possui apenas uma raiz real para cada $i = 3, \dots, 20$. As raízes β_i de cada f_i satisfazem $\beta_{i+1} < \beta_i$, $i = 3, \dots, 20$. Segue disso, que para $\beta \leq \beta_{12}$, $F_1|_{\mathcal{B}_{16}}$ não possui variações de sinal, enquanto que para $\beta > \beta_{12}$, $F_1|_{\mathcal{B}_{16}}$ sempre possui uma única variação de sinal. Portanto, pelo Teorema da Função Implícita para polinômios, concluímos que $\{F_1 = 0\} \cap \mathcal{B}_{16}$ é um gráfico. \square

Esse resultado mostra que o comportamento dos equilíbrios relativos do PRL5C no segmento $0 < y < 1$ do eixo das ordenadas é bem simples. De fato, se olharmos para as imagens pela parametrização (3.10) dos pontos do gráfico da curva algébrica $F_1(\alpha, \beta) = 0$, obteremos a descrição precisa desses equilíbrios relativos no bloco $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right) \times [0, 1)$ do plano dy ; veja figura 3.3. Vemos que existe um único $d_0 \in (0.80, 0.81)$, associado ao equilíbrio relativo com a massa nula na origem do plano cartesiano, tal que para cada $d \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, d_0\right]$ há um único equilíbrio relativo do PRL5CP no segmento $0 < y < 1$, enquanto que para cada $d \in (d_0, \sqrt{3})$ não há equilíbrios relativos nesse segmento.

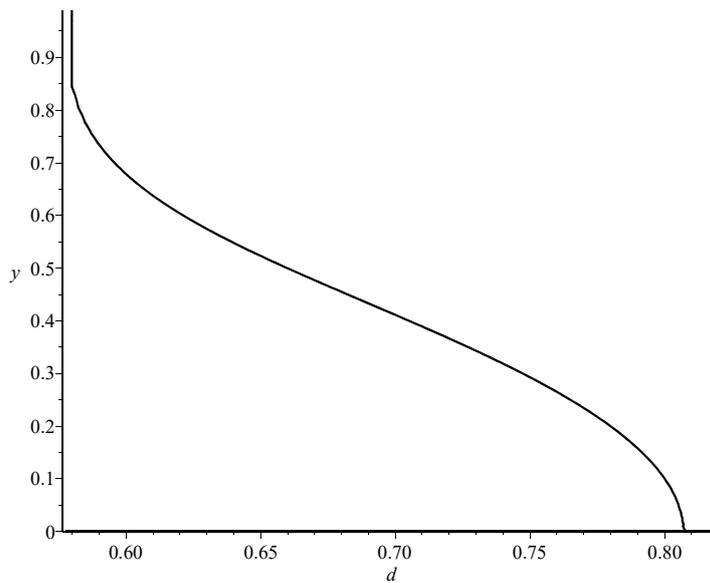


Figura 3.3: Gráfico de equilíbrios relativos no bloco $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right) \times [0, 1)$ do plano dy .

Finalmente, analisaremos a curva algébrica $\{G_1(\alpha, \beta) = 0\}$ dada pela equação (3.12) por meio das transformações de Möbius. Adotaremos $10,5$ como aproximação racional para $2\sqrt{7} + 3\sqrt{3}$.

Proposição 3.8. *A curva algébrica $G_1(\alpha, \beta) = 0$ define implicitamente o gráfico da função $\beta = \beta(\alpha)$ no bloco $\mathcal{B} = [1, 732, 3, 74] \times [1.732, 10.50]$ do plano $\alpha\beta$.*

Demonstração. Primeiro, consideremos o polinômio $G_2(\alpha, \beta) = \frac{\partial G_1}{\partial \beta}$, com grau total 37 e 273 monômios e observemos que o bloco \mathcal{B} contém o bloco $(\sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}) \times (\sqrt{3}, 3\sqrt{3} + 2\sqrt{7})$. A partir de agora iremos decompor o bloco \mathcal{B} de maneira análoga à feita na proposição anterior.

Desse modo, notemos que

$$G_1 |_{[1.732, 3.74] \times [4.85, 10.50]} = -8.880753555 \cdot 10^{32} \alpha^{13} \beta^5 - \dots - 2.993105051 \cdot 10^{31} \alpha \beta,$$

é $C-$, então o bloco $\mathcal{B}_1 = [1.732, 3.74] \times [4.85, 10.50]$ não contém raízes da equação (3.12). Além disso, temos que

$$G_1 |_{[1.732, 3.74] \times [1.732, 3.08]} = 2.704299907 \cdot 10^{25} \alpha^{13} \beta^5 + \dots + 2.45964889 \cdot 10^{22} \alpha \beta,$$

é $C+$, ou seja, as soluções da equação (3.12) pertencem ao bloco

$$\mathcal{B}_2 = [1.732, 3.74] \times [3.08, 4.85].$$

No bloco $\mathcal{B}_3 = [3.40, 3.74] \times [3.08, 4.85]$ temos que

$$G_1 |_{\mathcal{B}_3} = -9.507912171 \cdot 10^{19} \alpha^{22} \beta^{16} - \dots - 2.457738182 \cdot 10^{26} \alpha \beta,$$

é $C-$. Enquanto que no bloco $\mathcal{B}_4 = [3.40, 3.74] \times [3.08, 3.40]$, temos que $G_1(\alpha, \beta) = 0$ define, localmente, em cada ponto desse bloco, o gráfico de uma função analítica $\beta = \beta(\alpha)$ pois

$$G_2 |_{\mathcal{B}_4} = -21.17849511 \alpha^{22} \beta^{13} - \dots - 4273.146305 \alpha,$$

é $C-$.

Em \mathcal{B}_4 , consideraremos o polinômio

$$G_1 |_{\mathcal{B}_4} = \sum_{i=0}^{16} f_i(\alpha) \beta^i.$$

Cada f_i é um polinômio de grau 22, f_0, \dots, f_7 possuem apenas monômios negativos e f_{16} possui apenas monômios positivos, e, para cada $i = 8, \dots, 15$, f_i possui uma única variação de sinal. Daí, pela Regra de Sinais de Descartes, f_i possui apenas uma raiz real para cada $i = 8, \dots, 15$. As raízes α_i de cada f_i satisfazem $\alpha_{i+1} < \alpha_i$, $i = 8, \dots, 15$. Segue disso, que para $\alpha > \alpha_9$, $G_1 |_{\mathcal{B}_4}$ não possui variações de sinal, enquanto que para $\alpha \leq \alpha_9$, $G_1 |_{\mathcal{B}_4}$ sempre possui uma única variação de sinal. Portanto, pelo Teorema da Função Implícita para polinômios, concluímos que $\{G_1 = 0\} \cap \mathcal{B}_4$ é um gráfico.

As demais soluções da equação (3.12) pertencem ao bloco

$$\mathcal{B}_5 = [1.732, 3.40] \times [3.08, 4.85].$$

Para evitar estender demasiadamente a demonstração, descreveremos os sub-blocos de \mathcal{B}_5 e os sinais de G_1 e G_2 em cada bloco por meio da tabela que segue.

Blocos	Polinômios	Classificação
$\mathcal{B}_6 = [3.3, 3.4] \times [3.35, 4.85]$	G_1	$C-$
$\mathcal{B}_7 = [3.3, 3.4] \times [3.08, 3.35]$	G_2	$C-$
$\mathcal{B}_8 = [3.0, 3.3] \times [3.08, 3.30]$	G_1	$C-$
$\mathcal{B}_9 = [3.0, 3.3] \times [3.55, 4.85]$	G_1	$C-$
$\mathcal{B}_{10} = [3.0, 3.3] \times [3.30, 3.55]$	G_2	$C-$
$\mathcal{B}_{11} = [2.7, 3.0] \times [3.80, 4.85]$	G_1	$C-$
$\mathcal{B}_{12} = [2.7, 3.0] \times [3.08, 3.50]$	G_1	$C+$
$\mathcal{B}_{13} = [2.7, 3.0] \times [3.50, 3.80]$	G_2	$C-$
$\mathcal{B}_{14} = [2.5, 2.7] \times [3.08, 3.70]$	G_1	$C+$
$\mathcal{B}_{15} = [2.5, 2.7] \times [3.95, 4.85]$	G_1	$C-$
$\mathcal{B}_{16} = [2.5, 2.7] \times [3.70, 3.95]$	G_2	$C-$
$\mathcal{B}_{17} = [2.3, 2.5] \times [3.95, 4.20]$	G_2	$C-$
$\mathcal{B}_{18} = [2.3, 2.5] \times [4.20, 4.85]$	G_1	$C-$
$\mathcal{B}_{19} = [2.3, 2.5] \times [3.08, 3.95]$	G_1	$C+$
$\mathcal{B}_{20} = [2.1, 2.3] \times [4.20, 4.45]$	G_2	$C-$
$\mathcal{B}_{21} = [2.1, 2.3] \times [4.45, 4.85]$	G_1	$C-$
$\mathcal{B}_{22} = [2.1, 2.3] \times [3.08, 4.20]$	G_1	$C+$
$\mathcal{B}_{23} = [1.9, 2.1] \times [3.45, 4.80]$	G_2	$C-$
$\mathcal{B}_{24} = [1.9, 2.1] \times [4.80, 4.85]$	G_1	$C-$
$\mathcal{B}_{25} = [1.9, 2.1] \times [3.08, 4.45]$	G_1	$C+$
$\mathcal{B}_{26} = [1.84, 1.90] \times [4.75, 4.85]$	G_2	$C-$
$\mathcal{B}_{27} = [1.84, 1.90] \times [3.08, 4.75]$	G_1	$C+$
$\mathcal{B}_{28} = [1.78, 1.84] \times [4.60, 4.85]$	G_2	$C-$
$\mathcal{B}_{29} = [1.78, 1.84] \times [3.08, 4.60]$	G_1	$C+$
$\mathcal{B}_{30} = [1.75, 1.78] \times [4.50, 4.75]$	G_2	$C-$
$\mathcal{B}_{31} = [1.75, 1.78] \times [3.08, 4.50]$	G_1	$C+$
$\mathcal{B}_{32} = [1.75, 1.78] \times [4.75, 4.85]$	G_1	$C-$
$\mathcal{B}_{33} = [1.74, 1.75] \times [4.30, 4.55]$	G_2	$C-$
$\mathcal{B}_{34} = [1.74, 1.75] \times [3.08, 4.30]$	G_1	$C+$
$\mathcal{B}_{35} = [1.74, 1.75] \times [4.55, 4.85]$	G_1	$C-$
$\mathcal{B}_{36} = [1.734, 1.740] \times [4.10, 4.35]$	G_2	$C-$

Blocos	Polinômios	Classificação
$\mathcal{B}_{37} = [1.734, 1.740] \times [3.08, 4.10]$	G_1	$C+$
$\mathcal{B}_{38} = [1.734, 1.740] \times [4.35, 4.85]$	G_1	$C-$
$\mathcal{B}_{39} = [1.733, 1.734] \times [4.00, 4.15]$	G_2	$C-$
$\mathcal{B}_{40} = [1.733, 1.734] \times [3.08, 4.00]$	G_1	$C+$
$\mathcal{B}_{41} = [1.733, 1.734] \times [4.15, 4.85]$	G_1	$C-$
$\mathcal{B}_{42} = [1.7324, 1.7330] \times [3.90, 4.00]$	G_2	$C-$
$\mathcal{B}_{43} = [1.7324, 1.7330] \times [3.08, 3.90]$	G_1	$C+$
$\mathcal{B}_{44} = [1.7324, 1.7330] \times [4.00, 4.85]$	G_1	$C-$
$\mathcal{B}_{45} = [1.7320, 1.7324] \times [3.60, 4.00]$	G_2	$C-$
$\mathcal{B}_{46} = [1.7320, 1.7324] \times [3.08, 3.60]$	G_1	$C+$
$\mathcal{B}_{47} = [1.7320, 1.7324] \times [4.00, 4.85]$	G_1	$C-$

Agora, mostraremos que nos blocos da tabela acima onde G_2 não se anula, tem-se que a curva $\{G_1 = 0\}$ é o gráfico de uma função analítica.

Em \mathcal{B}_7 , consideraremos o polinômio

$$G_1|_{\mathcal{B}_7} = \sum_{i=0}^{16} g_i(\alpha)\beta^i.$$

Cada g_i é um polinômio de grau 22, g_0, \dots, g_3 possuem apenas monômios negativos e g_7, \dots, g_{16} possuem apenas monômios positivos, e, para cada $i = 4, 5, 6$, g_i possui uma única variação de sinal. Daí, pela Regra de Sinais de Descartes, g_i possui apenas uma raiz real para cada $i = 4, 5, 6$. As raízes α_i de cada g_i satisfazem $\alpha_{i+1} < \alpha_i$, $i = 4, 5, 6$. Segue disso, que para $\alpha \leq \alpha_4$, $G_1|_{\mathcal{B}_7}$ não possui variações de sinal, enquanto que para $\alpha > \alpha_4$, $G_1|_{\mathcal{B}_7}$ sempre possui uma única variação de sinal. Portanto, pelo Teorema da Função Implícita para polinômios, concluímos que $\{G_1 = 0\} \cap \mathcal{B}_7$ é um gráfico.

Em \mathcal{B}_{10} , consideraremos o polinômio

$$G_1|_{\mathcal{B}_{10}} = \sum_{i=0}^{16} f_i(\alpha)\beta^i.$$

Cada f_i é um polinômio de grau 22, f_0, \dots, f_4 possuem apenas monômios negativos, e, para cada $i = 5, \dots, 16$, f_i possui uma única variação de sinal. Daí, pela Regra de Sinais de Descartes, f_i possui apenas uma raiz real para cada $i = 5, \dots, 16$. As raízes α_i de cada f_i satisfazem $\alpha_{i+1} < \alpha_i$, $i = 5, \dots, 16$. Segue disso, que para $\alpha > \alpha_7$, $G_1|_{\mathcal{B}_{10}}$ não possui variações de sinal, enquanto que para $\alpha \leq \alpha_7$, $G_1|_{\mathcal{B}_{10}}$ sempre possui uma única variação de sinal. Portanto, pelo Teorema da Função Implícita para polinômios, concluímos que $\{G_1 = 0\} \cap \mathcal{B}_{10}$ é um gráfico.

Em \mathcal{B}_{13} , consideraremos o polinômio

$$G_1|_{\mathcal{B}_{13}} = \sum_{i=0}^{16} g_i(\alpha)\beta^i.$$

Cada g_i é um polinômio de grau 22, g_0, \dots, g_4 possuem apenas monômios negativos, e, para cada $i = 5, \dots, 16$, g_i possui uma única variação de sinal. Daí, pela Regra de Sinais de Descartes, g_i possui apenas uma raiz real para cada $i = 5, \dots, 16$. As raízes α_i de cada g_i satisfazem $\alpha_{i+1} < \alpha_i$, $i = 5, \dots, 16$. Segue disso, que para $\alpha > \alpha_8$, $G_1|_{\mathcal{B}_{13}}$ não possui variações de sinal, enquanto que para $\alpha \leq \alpha_8$, $G_1|_{\mathcal{B}_{13}}$ sempre possui uma única variação de sinal. Portanto, pelo Teorema da Função Implícita para polinômios, concluímos que $\{G_1 = 0\} \cap \mathcal{B}_{13}$ é um gráfico.

Em \mathcal{B}_{16} , consideraremos o polinômio

$$G_1|_{\mathcal{B}_{16}} = \sum_{i=0}^{16} f_i(\alpha)\beta^i.$$

Cada f_i é um polinômio de grau 22, f_0, \dots, f_2 possuem apenas monômios negativos e f_{16} possui apenas monômios positivos, e, para cada $i = 3, \dots, 15$, f_i possui uma única variação de sinal. Daí, pela Regra de Sinais de Descartes, f_i possui apenas uma raiz real para cada $i = 3, \dots, 15$. As raízes α_i de cada f_i satisfazem $\alpha_{i+1} < \alpha_i$, $i = 3, \dots, 15$. Segue disso, que para $\alpha > \alpha_6$, $G_1|_{\mathcal{B}_{16}}$ não possui variações de sinal, enquanto que para $\alpha \leq \alpha_6$, $G_1|_{\mathcal{B}_{16}}$ sempre possui uma única variação de sinal. Portanto, pelo Teorema da Função Implícita para polinômios, concluímos que $\{G_1 = 0\} \cap \mathcal{B}_{16}$ é um gráfico.

Em \mathcal{B}_{17} , consideraremos o polinômio

$$G_1|_{\mathcal{B}_{17}} = \sum_{i=0}^{16} g_i(\alpha)\beta^i.$$

Cada g_i é um polinômio de grau 22, g_0, \dots, g_2 possuem apenas monômios negativos, e, para cada $i = 3, \dots, 16$, g_i possui uma única variação de sinal. Daí, pela Regra de Sinais de Descartes, g_i possui apenas uma raiz real para cada $i = 3, \dots, 16$. As raízes α_i de cada g_i satisfazem $\alpha_{i+1} < \alpha_i$, $i = 3, \dots, 16$. Segue disso, que para $\alpha > \alpha_7$, $G_1|_{\mathcal{B}_{17}}$ não possui variações de sinal, enquanto que para $\alpha \leq \alpha_7$, $G_1|_{\mathcal{B}_{17}}$ sempre possui uma única variação de sinal. Portanto, pelo Teorema da Função Implícita para polinômios, concluímos que $\{G_1 = 0\} \cap \mathcal{B}_{17}$ é um gráfico.

Em \mathcal{B}_{20} , consideraremos o polinômio

$$G_1|_{\mathcal{B}_{20}} = \sum_{i=0}^{16} f_i(\alpha)\beta^i.$$

Cada f_i , $i = 0, \dots, 16$, é um polinômio de grau 22 com uma única variação de sinal. Daí, pela Regra de Sinais de Descartes, f_i possui apenas uma raiz real para cada $i = 0, \dots, 16$. As raízes α_i de cada f_i satisfazem $\alpha_{i+1} < \alpha_i$, $i = 0, \dots, 16$. Segue disso, que para $\alpha > \alpha_5$, $G_1|_{\mathcal{B}_{20}}$ não possui variações de sinal, enquanto que para $\alpha \leq \alpha_5$, $G_1|_{\mathcal{B}_{20}}$ sempre possui uma única variação de sinal.

Portanto, pelo Teorema da Função Implícita para polinômios, concluímos que $\{G_1 = 0\} \cap \mathcal{B}_{20}$ é um gráfico.

Em \mathcal{B}_{23} , consideraremos o polinômio

$$G_1|_{\mathcal{B}_{23}} = \sum_{i=0}^{16} g_i(\alpha)\beta^i.$$

Cada g_i é um polinômio de grau 22, g_0 possui apenas monômios negativos e g_3, \dots, g_{16} possuem apenas monômios positivos, e, para cada $i = 1, 2$, g_i possui uma única variação de sinal. Daí, pela Regra de Sinais de Descartes, g_i possui apenas uma raiz real para cada $i = 1, 2$. As raízes α_i de cada g_i satisfazem $\alpha_{i+1} < \alpha_i$, $i = 1$. Segue disso, que para $\alpha > \alpha_1$, $G_1|_{\mathcal{B}_{23}}$ não possui variações de sinal, enquanto que para $\alpha \leq \alpha_1$, $G_1|_{\mathcal{B}_{23}}$ sempre possui uma única variação de sinal. Portanto, pelo Teorema da Função Implícita para polinômios, concluímos que $\{G_1 = 0\} \cap \mathcal{B}_{23}$ é um gráfico.

Em \mathcal{B}_{26} , consideraremos o polinômio

$$G_1|_{\mathcal{B}_{26}} = \sum_{i=0}^{16} f_i(\alpha)\beta^i.$$

Cada f_i é um polinômio de grau 22, f_0, \dots, f_3 possuem apenas monômios negativos e f_{11}, \dots, f_{16} possuem apenas monômios positivos, e, para cada $i = 4, \dots, 10$, f_i possui uma única variação de sinal. Daí, pela Regra de Sinais de Descartes, f_i possui apenas uma raiz real para cada $i = 4, \dots, 10$. As raízes α_i de cada f_i satisfazem $\alpha_{i+1} < \alpha_i$, $i = 4, \dots, 9$. Segue disso, que para $\alpha > \alpha_4$, $G_1|_{\mathcal{B}_{26}}$ não possui variações de sinal, enquanto que para $\alpha \leq \alpha_4$, $G_1|_{\mathcal{B}_{26}}$ sempre possui uma única variação de sinal. Portanto, pelo Teorema da Função Implícita para polinômios, concluímos que $\{G_1 = 0\} \cap \mathcal{B}_{26}$ é um gráfico.

Em \mathcal{B}_{28} , consideraremos o polinômio

$$G_1|_{\mathcal{B}_{28}} = \sum_{i=0}^{16} g_i(\alpha)\beta^i.$$

Cada g_i é um polinômio de grau 22, g_0, \dots, g_2 possuem apenas monômios negativos e g_6, \dots, g_{16} possuem apenas monômios positivos, e, para cada $i = 3, 4, 5$, g_i possui uma única variação de sinal. Daí, pela Regra de Sinais de Descartes, g_i possui apenas uma raiz real para cada $i = 3, 4, 5$. As raízes α_i de cada g_i satisfazem $\alpha_{i+1} > \alpha_i$, $i = 3, 4$. Segue disso, que para $\alpha > \alpha_3$, $G_1|_{\mathcal{B}_{28}}$ não possui variações de sinal, enquanto que para $\alpha \leq \alpha_3$, $G_1|_{\mathcal{B}_{28}}$ sempre possui uma única variação de sinal. Portanto, pelo Teorema da Função Implícita para polinômios, concluímos que $\{G_1 = 0\} \cap \mathcal{B}_{28}$ é um gráfico.

Em \mathcal{B}_{30} , consideraremos o polinômio

$$G_1|_{\mathcal{B}_{30}} = \sum_{i=0}^{16} f_i(\alpha)\beta^i.$$

Cada f_i é um polinômio de grau 22, f_{13}, \dots, f_{16} possuem apenas monômios positivos, e, para cada $i = 0, \dots, 12$, f_i possui uma única variação de sinal. Daí, pela Regra de Sinais de Descartes, f_i possui apenas uma raiz real para cada $i = 0, \dots, 12$. As raízes α_i de cada f_i satisfazem $\alpha_{i+1} < \alpha_i$, $i = 0, \dots, 11$. Segue disso, que para $\alpha > \alpha_6$, $G_1 |_{\mathcal{B}_{30}}$ não possui variações de sinal, enquanto que para $\alpha \leq \alpha_6$, $G_1 |_{\mathcal{B}_{30}}$ sempre possui uma única variação de sinal. Portanto, pelo Teorema da Função Implícita para polinômios, concluímos que $\{G_1 = 0\} \cap \mathcal{B}_{30}$ é um gráfico.

Em \mathcal{B}_{33} , consideraremos o polinômio

$$G_1 |_{\mathcal{B}_{33}} = \sum_{i=0}^{16} g_i(\alpha) \beta^i.$$

Cada g_i é um polinômio de grau 22, g_{11}, \dots, g_{16} possuem apenas monômios positivos, e, para cada $i = 0, \dots, 10$, g_i possui uma única variação de sinal. Daí, pela Regra de Sinais de Descartes, g_i possui apenas uma raiz real para cada $i = 0, \dots, 10$. As raízes α_i de cada g_i satisfazem $\alpha_{i+1} > \alpha_i$, $i = 0, \dots, 10$. Segue disso, que para $\alpha > \alpha_6$, $G_1 |_{\mathcal{B}_{33}}$ não possui variações de sinal, enquanto que para $\alpha \leq \alpha_6$, $G_1 |_{\mathcal{B}_{33}}$ sempre possui uma única variação de sinal. Portanto, pelo Teorema da Função Implícita para polinômios, concluímos que $\{G_1 = 0\} \cap \mathcal{B}_{33}$ é um gráfico.

Em \mathcal{B}_{36} , consideraremos o polinômio

$$G_1 |_{\mathcal{B}_{36}} = \sum_{i=0}^{16} f_i(\alpha) \beta^i.$$

Cada f_i é um polinômio de grau 22, f_{13}, \dots, f_{16} possuem apenas monômios positivos, e, para cada $i = 0, \dots, 12$, f_i possui uma única variação de sinal. Daí, pela Regra de Sinais de Descartes, f_i possui apenas uma raiz real para cada $i = 0, \dots, 12$. As raízes α_i de cada f_i satisfazem $\alpha_{i+1} > \alpha_i$, $i = 0, \dots, 11$. Segue disso, que para $\alpha > \alpha_6$, $G_1 |_{\mathcal{B}_{36}}$ não possui variações de sinal, enquanto que para $\alpha \leq \alpha_6$, $G_1 |_{\mathcal{B}_{36}}$ sempre possui uma única variação de sinal. Portanto, pelo Teorema da Função Implícita para polinômios, concluímos que $\{G_1 = 0\} \cap \mathcal{B}_{36}$ é um gráfico.

Em \mathcal{B}_{39} , consideraremos o polinômio

$$G_1 |_{\mathcal{B}_{39}} = \sum_{i=0}^{16} g_i(\alpha) \beta^i.$$

Cada g_i é um polinômio de grau 22, g_{10}, \dots, g_{16} possuem apenas monômios positivos, e, para cada $i = 0, \dots, 10$, g_i possui uma única variação de sinal. Daí, pela Regra de Sinais de Descartes, g_i possui apenas uma raiz real para cada $i = 0, \dots, 9$. As raízes α_i de cada g_i satisfazem $\alpha_{i+1} > \alpha_i$, $i = 0, \dots, 8$. Segue disso, que para $\alpha > \alpha_6$, $G_1 |_{\mathcal{B}_{39}}$ não possui variações de sinal, enquanto que para $\alpha \leq \alpha_6$, $G_1 |_{\mathcal{B}_{39}}$ sempre possui uma única variação de sinal. Portanto, pelo Teorema da Função Implícita para polinômios, concluímos que $\{G_1 = 0\} \cap \mathcal{B}_{39}$ é um gráfico.

Em \mathcal{B}_{42} , consideraremos o polinômio

$$G_1|_{\mathcal{B}_{42}} = \sum_{i=0}^{16} f_i(\alpha)\beta^i.$$

Cada f_i é um polinômio de grau 22, f_0, \dots, f_{14} possuem apenas monômios negativos, e, para cada $i = 15, 16$, f_i possui uma única variação de sinal. Daí, pela Regra de Sinais de Descartes, f_i possui apenas uma raiz real para cada $i = 15, 16$. As raízes α_i de cada f_i satisfazem $\alpha_{i+1} > \alpha_i$, $i = 15$. Segue disso, que para $\alpha > \alpha_{16}$, $G_1|_{\mathcal{B}_{42}}$ não possui variações de sinal, enquanto que para $\alpha \leq \alpha_{16}$, $G_1|_{\mathcal{B}_{42}}$ sempre possui uma única variação de sinal. Portanto, pelo Teorema da Função Implícita para polinômios, concluímos que $\{G_1 = 0\} \cap \mathcal{B}_{42}$ é um gráfico.

Em \mathcal{B}_{45} , consideraremos o polinômio

$$G_1|_{\mathcal{B}_{45}} = \sum_{i=0}^{16} g_i(\alpha)\beta^i.$$

Cada g_i é um polinômio de grau 22, g_0 e g_1 possuem apenas monômios negativos e g_{16} possui apenas monômios positivos, e, para cada $i = 2, \dots, 15$, g_i possui uma única variação de sinal. Daí, pela Regra de Sinais de Descartes, g_i possui apenas uma raiz real para cada $i = 2, \dots, 15$. As raízes α_i de cada g_i satisfazem $\alpha_{i+1} > \alpha_i$, $i = 1, \dots, 14$. Segue disso, que para $\alpha > \alpha_4$, $G_1|_{\mathcal{B}_{45}}$ não possui variações de sinal, enquanto que para $\alpha \leq \alpha_4$, $G_1|_{\mathcal{B}_{45}}$ sempre possui uma única variação de sinal. Portanto, pelo Teorema da Função Implícita para polinômios, concluímos que $\{G_1 = 0\} \cap \mathcal{B}_{45}$ é um gráfico. \square

O resultado acima mostra que existe um único equilíbrio relativo no segmento $1 < y < 3$ para cada valor do parâmetro $d \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right)$; veja figura 3.4.

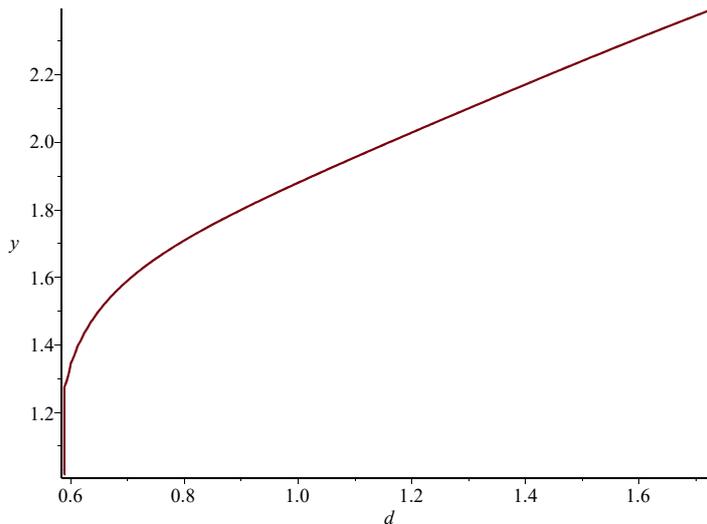


Figura 3.4: Gráfico de equilíbrios relativos no bloco $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right) \times (1, 3)$ do plano dy .

As proposições 3.7 e 3.8 caracterizam a finitude de classes equilíbrios relativos de \mathcal{B}_1 e nos fornecem uma contagem para as classes de equilíbrios relativos no eixo das ordenadas. Além

disso, garantem a existência de um único $d_0 \in (0.80, 0.81)$, associado ao equilíbrio relativo com a massa nula na origem do plano cartesiano, tal que para cada $d \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, d_0\right]$ há um único equilíbrio relativo do PRL5CP no segmento $0 < y < 1$. Explicitamente, temos

Proposição 3.9. *O número de equilíbrios relativos em \mathcal{R}_1 é igual a 2 para cada $d \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, d_0\right]$ e igual a 1 para cada $d \in (d_0, \sqrt{3})$, onde $d_0 \in (0.80, 0.81)$.*

Sabemos que o difeomorfismo σ nos permite obter os equilíbrios relativos no eixo das abscissas (\mathcal{R}_2) a partir dos equilíbrios relativos no eixo das ordenadas (\mathcal{R}_1). Em suma, temos

Proposição 3.10. *O número de equilíbrios relativos em \mathcal{R}_2 é igual a 2 para cada $d \in \left[\frac{1}{d_0}, \sqrt{3}\right)$ e igual a 1 para cada $d \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{d_0}\right)$.*

Juntando as proposições 3.9 e 3.10 com o teorema 3.6, obtemos o principal resultado desse capítulo:

Teorema 3.11. *O conjunto de equilíbrios relativos do problema restrito losangular de cinco corpos \mathcal{R} módulo similaridades é finito para cada valor do parâmetro $d \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right)$.*

4 Bifurcações de Equilíbrios Relativos do PRL5C

Neste capítulo, estudaremos as bifurcações de equilíbrios relativos do Problema Restrito Losangular de Cinco Corpos. Primeiramente, mostraremos que o conjunto de bifurcações de equilíbrios relativos desse problema é invariante pelo difeomorfismo σ . Em seguida, descreveremos as equações de degenerescência de equilíbrios relativos nos eixo cartesiano das ordenadas e exibiremos equações algébricas equivalentes no plano $\alpha\beta$. A partir disso, estudaremos as interseções dessas curvas algébricas de degenerescência com as curvas de equilíbrios relativos obtidas no capítulo 2. Utilizaremos as transformações de Möbius e o software Maple para particionar as regiões do plano $\alpha\beta$ de interesse a fim de eliminar a possibilidade de interseção entre as curvas de degenerescência e as curvas de equilíbrios no eixo das ordenadas.

Neste contexto, utilizaremos o Teorema da Função Implícita para polinômios, a Regra de Sinais de Descartes e argumentos geométricos envolvendo vetores tangentes às curvas algébricas estudadas para mostrar que existe um único equilíbrio relativo degenerado $(d_1, y_1) \in [0.6196, 0.6262] \times (0, 1)$ no plano dy , que não altera o número de equilíbrios relativos no eixo positivo das ordenadas. Por meio do difeomorfismo σ , estenderemos os resultados obtidos no estudo de equilíbrios relativos degenerados no eixo das ordenadas para o eixo das abscissas. Finalizaremos a discussão com a descrição numérica do comportamento dos equilíbrios relativos degenerados do PRL5C no primeiro quadrante. Veremos que o equilíbrio degenerado (d_1, y_1) é a única bifurcação presente no problema a menos da simetria descrita pelo difeomorfismo σ e que podemos incluir os casos singulares $m = 0$ e $m = +\infty$ no diagrama de bifurcações, por meio das séries de Puiseux.

4.1 Bifurcações de Equilíbrios Relativos nos Eixos Cartesianos

Nesse contexto, é necessário definir e caracterizar os equilíbrios relativos degenerados do PRL5C. Em termos do potencial reduzido Φ , descrito na equação (2.19), sabemos que as posições $x_5 = (x, y)$ do corpo de massa nula em um equilíbrio relativo são precisamente os pontos críticos desse potencial. Esse fato motiva a próxima definição. A descrição analítica das

curvas algébricas de equilíbrios relativos no eixo das ordenadas, feita no capítulo anterior para demonstrar finitude, pode ser melhorada com o intuito de determinar os valores do parâmetro $d = d(\alpha)$, semidiagonal do losango normalizado do PRL5C, para os quais temos uma mudança local no número de interseções dessas curvas algébricas. Desse modo, estamos interessados em conhecer os valores de bifurcação do parâmetro α que originam um equilíbrio relativo degenerado do Problema Restrito Losangular de Cinco Corpos no eixo das ordenadas.

Nesse contexto, é necessário definir e caracterizar os equilíbrios relativos degenerados do PRL5C. Em termos do potencial reduzido Φ , descrito na equação (2.19), sabemos que as posições $x_5 = (x, y)$ do corpo de massa nula em um equilíbrio relativo são precisamente os pontos críticos desse potencial. Esse fato motiva a próxima definição.

Definição 4.1. Um *equilíbrio relativo degenerado* do Problema Restrito Losangular de Cinco corpos é uma tripla $(x, y, d) \in \mathcal{R}$ que satisfaz a equação

$$\psi(x, y, d) = \det(Hes(\Phi))(x, y, d) = [\Phi_{xx}\Phi_{yy} - \Phi_{xy}\Phi_{xy}](x, y, d) = 0. \quad (4.1)$$

Observamos ainda que

$$\Phi_x(x, y, d) = F(x, y, d) \quad e \quad \Phi_y(x, y, d) = G(x, y, d).$$

Nosso próximo resultado descreve precisamente o efeito do difeomorfismo σ sobre os equilíbrios relativos degenerados do PRL5C.

Teorema 4.2. *O conjunto de equilíbrios relativos degenerados \mathcal{D} do Problema Restrito Losangular de Cinco Corpos é invariante por σ .*

Demonstração. Provaremos que o determinante hessiano ψ é invariante por σ , i.e, $\psi \circ \sigma = \psi$. Já vimos que o sistema de equações de equilíbrios relativos é invariante pelo difeomorfismo σ nas igualdades (2.25) e (2.26). Dessa maneira, é suficiente mostrar que a equação (4.1) é invariante por σ . Para isso, consideremos a função

$$H(x, y, d) = \begin{bmatrix} F_x(x, y, d) & F_y(x, y, d) \\ G_x(x, y, d) & G_y(x, y, d) \end{bmatrix}.$$

Observe que $\psi(x, y, d) = \det H(x, y, d)$. De (2.25), temos que $G(x, y, d) = \frac{m}{d^2}(F \circ \sigma)(x, y, d)$.

Segue disso que

$$\begin{aligned} G_x(x, y, d) &= DF(\sigma(x, y, d))\sigma_x(x, y, d) \\ &= \frac{m}{d^3}F_y(\sigma(x, y, d)) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} G_y(x, y, d) &= DF(\sigma(x, y, d))\sigma_y(x, y, d) \\ &= \frac{m}{d^3}F_x(\sigma(x, y, d)). \end{aligned}$$

Desse modo, obtemos

$$H(x, y, d) = \begin{bmatrix} F_x(x, y, d) & F_y(x, y, d) \\ \frac{m}{d^3}F_y(\sigma(x, y, d)) & \frac{m}{d^3}F_x(\sigma(x, y, d)) \end{bmatrix}.$$

Dessa igualdade, concluímos que

$$\begin{aligned} \psi(x, y, d) &= \det H(x, y, d) \\ &= \frac{m}{d^3} [F_x(x, y, d)F_x(\sigma(x, y, d)) - F_y(x, y, d)F_y(\sigma(x, y, d))]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Como $\sigma^2(x, y, d) = (x, y, d)$, segue de (4.2) que

$$\begin{aligned} \psi(\sigma(x, y, d)) &= \frac{m}{d^3} [F_x(\sigma(x, y, d))F_x(\sigma^2(x, y, d)) - F_y(\sigma(x, y, d))F_y(\sigma^2(x, y, d))] \\ &= \psi(x, y, d). \end{aligned}$$

□

O difeomorfismo σ , além de nos possibilitar reduzir o estudo dos equilíbrios relativos nos eixos cartesianos a apenas um dos eixos, como vimos no início dessa seção, também nos permite reduzir o estudo dos equilíbrios relativos degenerados nos eixos cartesianos a apenas um dos eixos, conforme visto no teorema acima. Desse modo, reescreveremos a condição de degenerescência, dada pela equação (4.1), para o eixo das ordenadas.

Neste contexto, como

$$\Phi_{xy}(x, y, d) = \Phi_{yx}(x, y, d) = -\frac{3x(y-1)}{r_1^5} - \frac{3x(y+1)}{r_3^5} - m \left(-\frac{3y(x-d)}{r_2^5} - \frac{3y(x+d)}{r_4^5} \right)$$

e lembrando que $r_2 = r_4$ no eixo y , concluímos que

$$\Phi_{xy}(0, y, d) = \Phi_{yx}(0, y, d) = 0. \quad (4.3)$$

Da mesma maneira, de

$$\Phi_{xx}(x, y, d) = \lambda - \frac{3x^2}{r_1^5} + \frac{1}{r_1^3} - \frac{3x^2}{r_3^5} + \frac{1}{r_3^3} - m \left(\frac{3(x-d)^2}{r_2^5} - \frac{1}{r_2^3} + \frac{3(x+d)^2}{r_4^5} - \frac{1}{r_4^3} \right)$$

e

$$\Phi_{yy}(x, y, d) = \lambda - \frac{3(y-1)^2}{r_1^5} + \frac{1}{r_1^3} - \frac{3(y+1)^2}{r_3^5} + \frac{1}{r_3^3} - m \left(\frac{3y^2}{r_2^5} - \frac{1}{r_2^3} + \frac{3y^2}{r_4^5} - \frac{1}{r_4^3} \right),$$

segue que

$$\Phi_{xx}(0, y, d) = \lambda + \frac{1}{|y-1|^3} + \frac{1}{|y+1|^3} - m \left(\frac{6d^2}{(y^2+d^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{2}{(y^2+d^2)^{\frac{3}{2}}} \right), \quad (4.4)$$

e

$$\Phi_{yy}(0, y, d) = \lambda - \frac{2}{|y-1|^3} - \frac{2}{|y+1|^3} - m \left(\frac{6y^2}{(y^2+d^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{2}{(y^2+d^2)^{\frac{3}{2}}} \right). \quad (4.5)$$

Logo, da igualdade (4.3), temos que a condição de degenerescência no eixo das ordenadas é dada por

$$\psi(0, y, d) = (\Phi_{xx}\Phi_{yy})(0, y, d). \quad (4.6)$$

Eliminado a colisão $y = 1$ (descontinuidade de Φ no segmento $y \in [0, 3)$), podemos simplificar a equação (4.6), de modo que

- Para $0 \leq y < 1$, a condição de degenerescência assume a forma

$$\psi(0, y, d) = (\Phi_{xx}\Phi_{yy})(0, y, d), \quad (4.7)$$

onde

$$\Phi_{xx}(0, y, d) = \lambda - \frac{1}{(y-1)^3} + \frac{1}{(y+1)^3} - m \left(\frac{6d^2}{(y^2+d^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{2}{(y^2+d^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

e

$$\Phi_{yy}(0, y, d) = \lambda + \frac{2}{(y-1)^3} - \frac{2}{(y+1)^3} - m \left(\frac{6y^2}{(y^2+d^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{2}{(y^2+d^2)^{\frac{3}{2}}} \right);$$

- Para $1 \leq y < 3$, a condição de degerescência assume a forma

$$\psi(0, y, d) = (\Phi_{xx}\Phi_{yy})(0, y, d), \quad (4.8)$$

onde

$$\Phi_{xx}(0, y, d) = \lambda + \frac{1}{(y-1)^3} + \frac{1}{(y+1)^3} - m \left(\frac{6d^2}{(y^2+d^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{2}{(y^2+d^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

e

$$\Phi_{yy}(0, y, d) = \lambda - \frac{2}{(y-1)^3} - \frac{2}{(y+1)^3} - m \left(\frac{6y^2}{(y^2+d^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{2}{(y^2+d^2)^{\frac{3}{2}}} \right).$$

Vamos considerar novamente as parametrizações racionais dadas por

$$\ell = \frac{\alpha^2 + 1}{2\alpha}, \quad d = \frac{\alpha^2 - 1}{2\alpha} \quad \text{e} \quad y = \frac{d(\alpha)(\beta^2 - 1)}{2\beta},$$

onde $\alpha, \beta \in (1, +\infty)$. Além disso, para transformarmos cada termo nas equações (4.8) e (4.9) em funções polinomiais nas variáveis α e β é necessário trocar os parâmetros m e λ por suas expressões em termos de d e ℓ dadas nas igualdades (2.15) e (2.17), respectivamente.

Primeiro, consideremos o segmento $0 < y < 1$ no eixos das coordenadas. Estamos interessados em determinar as soluções dos sistemas

$$\begin{cases} F_1(\alpha, \beta) = 0, \\ A_1(\alpha, \beta) = 0, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} F_1(\alpha, \beta) = 0, \\ B_1(\alpha, \beta) = 0, \end{cases} \quad (4.9)$$

onde $A_1(\alpha, \beta) = \alpha^{24}\beta^{22} - \alpha^{24}\beta^{20} - 64\alpha^{24}\beta^{19} - \dots - \beta^2 + 1$ é um polinômio com grau total 46 e 447 monômios, obtido de $\Phi_{xx}(0, y, d)$ por meio das parametrizações acima após eliminarmos os fatores não-nulos uma vez que

$$\Phi_{xx}(\alpha, \beta) = \frac{A_1(\alpha, \beta)}{4(\beta^2 + 1)^5(\alpha^2 - 3)(7\alpha^4 - 6\alpha^2 + 3)(\alpha^2 + 1)^3V(\alpha, \beta)}$$

com

$$V(\alpha, \beta) = (\alpha\beta + \alpha + \beta + 1)^3(\alpha\beta - \alpha - \beta + 1)^3(\alpha\beta - \alpha + \beta + 1)^3(\alpha\beta + \alpha - \beta + 1)^3,$$

e $B_1(\alpha, \beta) = \alpha^{24}\beta^{22} - \alpha^{24}\beta^{20} + 128\alpha^{24}\beta^{19} - \dots - \beta^2 + 1$ é um polinômio com grau total 46 e 455 monômios, obtido de $\Phi_{yy}(0, y, d)$ após eliminarmos os fatores não-nulos pois

$$\Phi_{yy}(\alpha, \beta) = \frac{B_1(\alpha, \beta)}{4(\beta^2 + 1)^5(\alpha^2 - 3)(7\alpha^4 - 6\alpha^2 + 3)(\alpha^2 + 1)^3V(\alpha, \beta)}$$

e $(\alpha, \beta) \in (\sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}) \times (1, 2 + \sqrt{3})$ (domínio de F_1).

As soluções desses sistemas são os equilíbrios degenerados no plano $\alpha\beta$. Assim, determinaremos todas as interseções entre as curvas de degenerescência $A_1 = 0$ e $B_1 = 0$ com a curva de equilíbrios relativos $F_1 = 0$. Vimos, no início da demonstração da proposição 3.7, que F_1 não se anula no bloco $\mathcal{B} = [2.1, 3.74] \times [1, 3.74]$. Desse modo, podemos restringir o estudo dos sistemas em (4.9) ao bloco

$$\mathcal{B} = (\sqrt{3}, 2.10) \times (1, 2 + \sqrt{3})$$

do plano $\alpha\beta$; veja a figura 4.1.

Antes de obter as soluções dos sistemas (4.9), eliminaremos as regiões que não contém interseções entre as curvas de degenerescência e a curva de equilíbrios por meio dos dois lemas técnicos a seguir.

Lema 4.3. *As curvas algébricas $\{A_1 = 0\}$ e $\{B_1 = 0\}$ não intersectam a curva algébrica $\{F_1 = 0\}$ no bloco $\mathcal{B}_1 = [1.806, 2.084] \times (1, 3.74]$ do plano $\alpha\beta$.*

Demonstração. Vamos utilizar as transformações de Möbius para decompor o bloco \mathcal{B}_1 em sub-blocos de modo que em cada sub-bloco o sistema (4.9) não admita solução. Além disso, para evitar estender demasiadamente a prova, descreveremos os sub-blocos e os sinais dos polinômios em cada sub-bloco por meio da tabela a seguir.

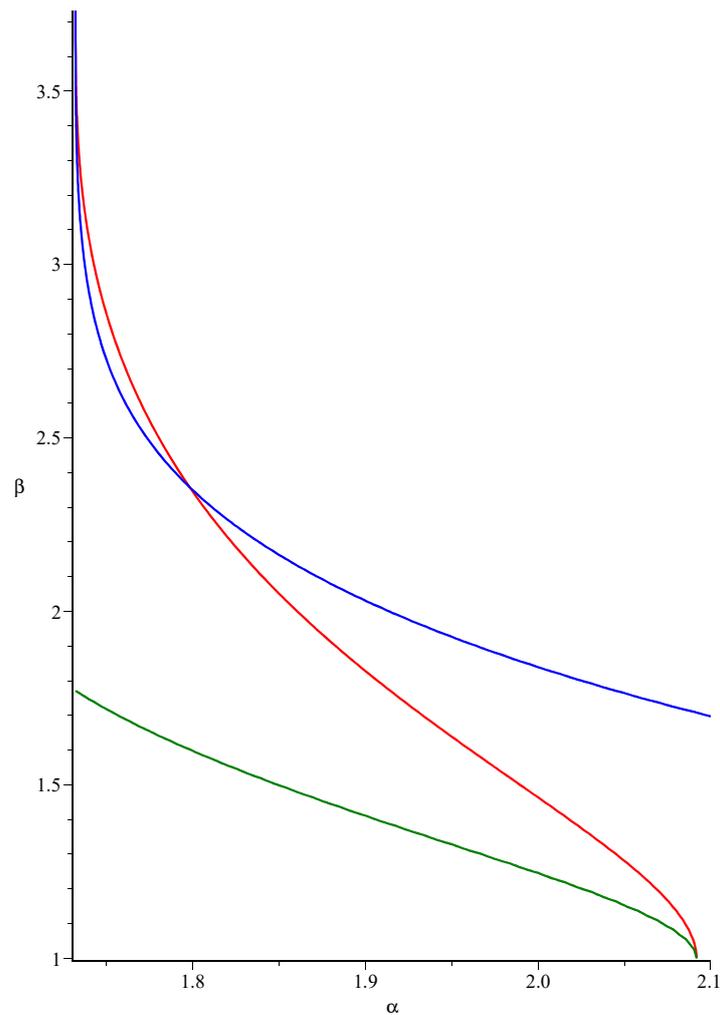


Figura 4.1: Curvas algébricas $F_1 = 0$, $A_1 = 0$ e $B_1 = 0$ em vermelho, azul e verde no arquivo pdf, nesta ordem, no bloco \mathcal{B} .

Blocos	Polinômios	Classificação
$\mathcal{B}_2 = [2.08, 2.084] \times [1, 1.10]$	F_1	$C-$
$\mathcal{B}_3 = [2.08, 2.084] \times [1.10, 1.20]$	A_1 e B_1	$C+$
$\mathcal{B}_4 = [2.08, 2.084] \times [1.20, 3.74]$	F_1	$C-$
$\mathcal{B}_5 = [2.06, 2.08] \times [1, 1.15]$	F_1	$C+$
$\mathcal{B}_6 = [2.06, 2.08] \times [1.15, 1.30]$	A_1 e B_1	$C-$
$\mathcal{B}_7 = [2.06, 2.08] \times [1.30, 3.74]$	F_1	$C-$
$\mathcal{B}_8 = [2.02, 2.06] \times [1.25, 1.45]$	A_1 e B_1	$C+$

$\mathcal{B}_9 = [2.02, 2.06] \times [1.45, 3.74]$	F_1	$C-$
$\mathcal{B}_{10} = [1.92, 2.02] \times [1, 1.40]$	F_1	$C+$
$\mathcal{B}_{11} = [1.92, 2.02] \times [1.40, 1.76]$	A_1 e B_1	$C+$
$\mathcal{B}_{12} = [1.92, 2.02] \times [1.76, 3.74]$	F_1	$C-$
$\mathcal{B}_{13} = [1.87, 1.92] \times [1, 1.48]$	F_1	$C+$
$\mathcal{B}_{14} = [1.87, 1.92] \times [1.48, 2]$	A_1 e B_1	$C+$
$\mathcal{B}_{15} = [1.87, 1.92] \times [2, 3.74]$	F_1	$C-$
$\mathcal{B}_{16} = [1.85, 1.87] \times [1, 1.52]$	F_1	$C+$
$\mathcal{B}_{17} = [1.85, 1.87] \times [1.52, 2.08]$	A_1 e B_1	$C+$
$\mathcal{B}_{18} = [1.85, 1.87] \times [2.08, 3.74]$	F_1	$C-$
$\mathcal{B}_{19} = [1.83, 1.85] \times [1, 1.55]$	F_1	$C+$
$\mathcal{B}_{20} = [1.83, 1.85] \times [1.55, 2.16]$	A_1 e B_1	$C+$
$\mathcal{B}_{21} = [1.83, 1.85] \times [2.16, 3.74]$	F_1	$C-$
$\mathcal{B}_{22} = [1.82, 1.83] \times [1, 1.60]$	F_1	$C+$
$\mathcal{B}_{23} = [1.82, 1.83] \times [1.60, 2.22]$	A_1 e B_1	$C+$
$\mathcal{B}_{24} = [1.82, 1.83] \times [2.22, 3.74]$	F_1	$C-$
$\mathcal{B}_{25} = [1.815, 1.82] \times [1, 1.60]$	F_1	$C+$
$\mathcal{B}_{26} = [1.815, 1.82] \times [1.60, 2.25]$	A_1 e B_1	$C+$
$\mathcal{B}_{27} = [1.815, 1.82] \times [2.25, 3.74]$	F_1	$C-$
$\mathcal{B}_{28} = [1.81, 1, 815] \times [1, 1.60]$	F_1	$C+$
$\mathcal{B}_{29} = [1.81, 1.815] \times [1.60, 2.28]$	A_1 e B_1	$C+$
$\mathcal{B}_{30} = [1.81, 1.815] \times [2.28, 3.74]$	F_1	$C-$
$\mathcal{B}_{31} = [1.806, 1.81] \times [1, 1.60]$	F_1	$C+$
$\mathcal{B}_{32} = [1.806, 1.81] \times [1.60, 2.305]$	A_1 e B_1	$C+$
$\mathcal{B}_{33} = [1.806, 1.81] \times [2.305, 3.74]$	F_1	$C-$

Lema 4.4. *As curvas algébricas $\{A_1 = 0\}$ e $\{B_1 = 0\}$ não intersectam a curva algébrica $\{F_1 = 0\}$ no bloco $\mathcal{B}_2 = [1.7321, 1.7960] \times (1, 3.74)$ do plano $\alpha\beta$.*

Demonstração. Vamos começar eliminando a possibilidade de interseção entre as curvas $\{B_1 = 0\}$ e $\{F_1 = 0\}$ no bloco \mathcal{B}_2 . Para isso, basta notar que

$$\mathcal{B}_2 = ([1.7321, 1.7960] \times [1, 2.35]) \cup ([1.7321, 1.7960] \times [2.35, 3.74])$$

e que

$$F_1|_{[1.7321, 1.7960] \times [1, 2.35]} = +1.055432716 \cdot 10^{12} \alpha^{19} \beta^{13} + \dots + 2.49074348 \cdot 10^{10}$$

e

$$B_1 |_{[1.7321, 1.7960] \times [2.35, 3.74]} = +1.020565140 \cdot 10^{27} \alpha^{19} \beta^{13} + \dots + 4.360545159 \cdot 10^{20} \alpha$$

são polinômios contendo apenas monômios positivos nos blocos $[1.7321, 1.7960] \times [1, 2.35]$ e $[1.7321, 1.7960] \times [2.35, 3.74]$, respectivamente.

Do exposto acima, segue que é suficiente mostrar que as curvas algébricas $\{A_1 = 0\}$ e $\{F_1 = 0\}$ não se intersectam no bloco

$$\mathcal{B}_4 = [1.7321, 1.7960] \times [2.35, 3.74] = \mathcal{B}_2 \setminus \mathcal{B}_3,$$

onde $\mathcal{B}_3 = [1.7321, 1.7960] \times [1, 2.35]$, para concluir a prova, visto que F_1 é $C+$ em \mathcal{B}_3 . De maneira análoga à feita no lema 4.3, iremos decompor o bloco \mathcal{B}_4 em sub-blocos, de modo que em cada sub-bloco tenhamos A_1 ou F_1 não-nulos, por meio da tabela que segue.

Blocos	Polinômios	Classificação
$\mathcal{B}_5 = [1.7952, 1.796] \times [2.35, 2.373]$	F_1	$C+$
$\mathcal{B}_6 = [1.7952, 1.7960] \times [2.373, 3.74]$	A_1	$C-$
$\mathcal{B}_7 = [1.794, 1.7952] \times [2.35, 2.379]$	F_1	$C+$
$\mathcal{B}_8 = [1.794, 1.7952] \times [2.379, 3.74]$	A_1	$C-$
$\mathcal{B}_9 = [1.793, 1.794] \times [2.35, 2.386]$	F_1	$C+$
$\mathcal{B}_{10} = [1.793, 1.794] \times [2.386, 3.74]$	A_1	$C-$
$\mathcal{B}_{11} = [1.791, 1.793] \times [2.35, 2.395]$	F_1	$C+$
$\mathcal{B}_{12} = [1.791, 1.793] \times [2.395, 3.74]$	A_1	$C-$
$\mathcal{B}_{13} = [1.788, 1.791] \times [2.35, 2.41]$	F_1	$C+$
$\mathcal{B}_{14} = [1.788, 1.791] \times [2.41, 3.74]$	A_1	$C-$

$\mathcal{B}_{15} = [1.784, 1.788] \times [2.35, 2.435]$	F_1	$C+$
$\mathcal{B}_{16} = [1.784, 1.788] \times [2.435, 3.74]$	A_1	$C-$
$\mathcal{B}_{17} = [1.779, 1.784] \times [2.35, 2.465]$	F_1	$C+$
$\mathcal{B}_{18} = [1.779, 1.784] \times [2.465, 3.74]$	A_1	$C-$
$\mathcal{B}_{19} = [1.772, 1.779] \times [2.35, 2.51]$	F_1	$C+$
$\mathcal{B}_{20} = [1.772, 1.779] \times [2.51, 3.74]$	A_1	$C-$
$\mathcal{B}_{21} = [1.765, 1.772] \times [2.35, 2.57]$	F_1	$C+$
$\mathcal{B}_{22} = [1.765, 1.772] \times [2.57, 3.74]$	A_1	$C-$
$\mathcal{B}_{23} = [1.758, 1.765] \times [2.35, 2.64]$	F_1	$C+$
$\mathcal{B}_{24} = [1.758, 1.765] \times [2.64, 3.74]$	A_1	$C-$
$\mathcal{B}_{25} = [1.750, 1.758] \times [2.35, 2.73]$	F_1	$C+$
$\mathcal{B}_{26} = [1.750, 1.758] \times [2.73, 3.74]$	A_1	$C-$
$\mathcal{B}_{27} = [1.744, 1.750] \times [2.35, 2.83]$	F_1	$C+$
$\mathcal{B}_{28} = [1.744, 1.750] \times [2.83, 3.74]$	A_1	$C-$
$\mathcal{B}_{29} = [1.739, 1.744] \times [2.35, 2.95]$	F_1	$C+$
$\mathcal{B}_{30} = [1.739, 1.744] \times [2.95, 3.74]$	A_1	$C-$
$\mathcal{B}_{31} = [1.736, 1.739] \times [2.35, 3.06]$	F_1	$C+$
$\mathcal{B}_{32} = [1.736, 1.739] \times [3.06, 3.74]$	A_1	$C-$
$\mathcal{B}_{33} = [1.734, 1.736] \times [2.35, 3.19]$	F_1	$C+$
$\mathcal{B}_{34} = [1.734, 1.736] \times [3.19, 3.74]$	A_1	$C-$
$\mathcal{B}_{35} = [1.733, 1.734] \times [2.35, 3.29]$	F_1	$C+$
$\mathcal{B}_{36} = [1.733, 1.734] \times [3.29, 3.74]$	A_1	$C-$
$\mathcal{B}_{37} = [1.7325, 1.733] \times [2.35, 3.39]$	F_1	$C+$
$\mathcal{B}_{38} = [1.7325, 1.733] \times [3.39, 3.74]$	A_1	$C-$
$\mathcal{B}_{39} = [1.7323, 1.7325] \times [2.35, 3.45]$	F_1	$C+$
$\mathcal{B}_{40} = [1.7323, 1.7325] \times [3.45, 3.74]$	A_1	$C-$
$\mathcal{B}_{41} = [1.7322, 1.7323] \times [2.35, 3.51]$	F_1	$C+$
$\mathcal{B}_{42} = [1.7322, 1.7323] \times [3.51, 3.74]$	A_1	$C-$
$\mathcal{B}_{43} = [1.7321, 1.7322] \times [2.35, 3.56]$	F_1	$C+$
$\mathcal{B}_{44} = [1.7321, 1.7322] \times [3.56, 3.74]$	A_1	$C-$

□

Os lemas técnicos acima nos permitem restringir a busca por soluções dos sistemas em

(4.9) a três sub-blocos de $\mathcal{B} = (\sqrt{3}, 2.10) \times (1, 2 + \sqrt{3})$: $\overline{\mathcal{B}}_1 = [1.796, 1.806] \times (1, 2 + \sqrt{3})$, $\overline{\mathcal{B}}_2 = (\sqrt{3}, 1.7321] \times (1, 2 + \sqrt{3})$ e $\overline{\mathcal{B}}_3 = [2.084, 2.10] \times (1, 2 + \sqrt{3})$. No que segue, adotaremos 1.732 e 3.74 como aproximações racionais convenientes para $\sqrt{3}$ e $2 + \sqrt{3}$, respectivamente. Observamos ainda que precisaremos utilizar três ou mais casas decimais em alguns blocos nas próximas demonstrações devido a existência de interseção entre as curvas estudadas em pontos da fronteira do domínio das mesmas. Dessa forma, temos

Proposição 4.5. *O conjunto solução dos sistemas em (4.9) é unitário no bloco*

$\overline{\mathcal{B}}_1 = [1.796, 1.806] \times (1, 2 + \sqrt{3})$. *Tal solução é dada pela interseção entre as curvas algébricas $\{A_1 = 0\}$ e $\{F_1 = 0\}$.*

Demonstração. Consideraremos o bloco $\mathcal{B}_1 = [1.796, 1.806] \times [1, 3.74]$ que contém $\overline{\mathcal{B}}_1$. Primeiro, mostraremos que as curvas algébricas $\{B_1 = 0\}$ e $\{F_1 = 0\}$ não se intersectam em \mathcal{B}_1 . De fato, basta notar que

$$\mathcal{B}_1 = ([1.796, 1.806] \times [1, 2.30]) \cup ([1.796, 1.806] \times [2.30, 3.74])$$

e que

$$F_1|_{[1.796, 1.806] \times [1, 2.30]} = +7.022242546 \cdot 10^{11} \alpha^{20} \beta^{12} + \dots + 1.79913965 \cdot 10^8$$

e

$$B_1|_{[1.796, 1.806] \times [2.30, 3.74]} = +2.919706085 \cdot 10^{17} \alpha^{24} \beta^{21} + \dots + 2.498099372 \cdot 10^{19}$$

são polinômios contendo apenas monômios positivos nos blocos $[1.796, 1.806] \times [1, 2.30]$ e $[1.796, 1.806] \times [2.30, 3.74]$, respectivamente.

Agora, notemos que

$$F_1|_{[1.796, 1.806] \times [2.38, 3.74]} = -2.655211280 \cdot 10^{13} \alpha^{20} \beta^{12} - \dots - 3.399828890 \cdot 10^{13}$$

contém apenas monômios negativos no bloco $[1.796, 1.806] \times [2.38, 3.74]$ do plano $\alpha\beta$. Desse modo, podemos restringir a busca por soluções do sistema $A_1 = F_1 = 0$ ao bloco

$$\mathcal{B}_2 = [1.796, 1.806] \times (2.30, 2.38).$$

Afirmamos que $\{A_1 = 0\}$ e $\{F_1 = 0\}$ são gráficos no bloco \mathcal{B}_2 . Para provar isso, consideraremos $A_2 = \frac{\partial A_1}{\partial \beta}$ e $F_2 = \frac{\partial F_1}{\partial \beta}$ e utilizaremos o teorema da função implícita para polinômios. Primeiro, notemos que

$$A_2|_{\mathcal{B}_2} = -2.122276482 \cdot 10^{17} \alpha^{24} \beta^{20} - \dots - 7.665230564 \cdot 10^{17} \alpha - 6.573256003 \cdot 10^{17} \beta$$

e

$$F_1|_{\mathcal{B}_2} = -1.205854311 \cdot 10^{15} \alpha^{19} \beta^{11} - \dots - 1.531190408 \cdot 10^{12},$$

possuem apenas monômios negativos em \mathcal{B}_2 . Daí, pelo teorema da função implícita, em cada ponto das curvas algébricas $\{A_1 = 0\}$ e $\{F_1 = 0\}$ temos o gráfico de uma função analítica. Resta mostrar que cada uma dessas curvas formam um gráfico em \mathcal{B}_2 e que esses gráficos intersectam-se em apenas um ponto. Para isso, consideraremos os polinômios

$$A_1|_{\mathcal{B}_2} = \sum_{i=0}^{22} g_i(\alpha) \beta^i \quad \text{e} \quad F_1|_{\mathcal{B}_2} = \sum_{i=0}^{14} f_i(\alpha) \beta^i.$$

Cada g_i é um polinômio de grau 24, g_0, g_1 e g_2 possuem apenas monômios negativos e g_{16}, \dots, g_{22} possuem apenas monômios positivos, e, para cada $i = 3, \dots, 15$, g_i possui uma única variação de sinal. Daí, pela Regra de Sinais de Descartes, g_i possui apenas uma raiz real para cada $i = 3, \dots, 15$. As raízes α_i de cada g_i satisfazem $\alpha_{i+1} < \alpha_i$, $i = 3, \dots, 14$. Segue disso que, para $\alpha > \alpha_7$, $A_1|_{\mathcal{B}_2}$ não possui variações de sinal, enquanto que para $\alpha \leq \alpha_7$, $A_1|_{\mathcal{B}_2}$ sempre possui uma única variação de sinal. Portanto, pelo teorema da função implícita para polinômios, concluímos que $\{A_1 = 0\} \cap \mathcal{B}_2$ é um gráfico.

Cada f_i é um polinômio de grau 20, f_0 e f_1 possuem apenas monômios negativos e f_{14} possui apenas monômios positivos, e, para cada $i = 2, \dots, 13$, f_i possui uma única variação de sinal. Daí, pela Regra de Sinais de Descartes, f_i possui apenas uma raiz real para cada $i = 2, \dots, 13$. As raízes α_i de cada f_i satisfazem $\alpha_{i+1} < \alpha_i$, $i = 2, \dots, 12$. Segue disso, que para $\alpha > \alpha_6$, $F_1|_{\mathcal{B}_2}$ não possui variações de sinal, enquanto que para $\alpha \leq \alpha_6$, $F_1|_{\mathcal{B}_2}$ sempre possui uma única variação de sinal. Portanto, pelo teorema da função implícita para polinômios, concluímos que $\{F_1 = 0\} \cap \mathcal{B}_2$ é um gráfico.

Para finalizar a prova, falta mostrar que os gráficos de $\beta_1 = \beta_1(\alpha)$ e $\beta_2 = \beta_2(\alpha)$, definidos implicitamente por $A_1(\alpha, \beta_1(\alpha)) = 0$ e $F_1(\alpha, \beta_2(\alpha)) = 0$, respectivamente, possuem apenas um ponto em comum no bloco \mathcal{B}_2 . Para isso, derivamos implicitamente essas funções e obtemos a inclinação do vetor tangente em cada ponto do gráfico,

$$\beta'_1(\alpha) = -\left(\frac{\partial A_1}{\partial \alpha}\right) \left(\frac{\partial A_1}{\partial \beta}\right)^{-1} \quad \text{e} \quad \beta'_2(\alpha) = -\left(\frac{\partial F_1}{\partial \alpha}\right) \left(\frac{\partial F_1}{\partial \beta}\right)^{-1}.$$

Desse modo, para mostrar que existe no máximo uma interseção entre esses gráficos em \mathcal{B}_2 , temos que verificar que o numerador da diferença

$$\Delta(\alpha) = \beta'_2(\alpha) - \beta'_1(\alpha)$$

não muda de sinal nesse bloco, pois os denominadores de $\beta'_i(\alpha)$, para $i = 1, 2$, não se anulam, como vimos acima. Como

$$\Delta|_{\mathcal{B}_2} = -9.973377365 \cdot 10^{33} \alpha^{41} \beta^{33} - \dots - 6.058095873 \cdot 10^{39} \alpha^{29}$$

é $C-$, temos que só pode haver, no máximo, uma interseção entre os gráficos no bloco \mathcal{B}_2 . Por outro lado, vimos, no lema 4.3, que a curva algébrica $\{A_1 = 0\}$ está sempre acima da curva algébrica $\{F_1 = 0\}$ no bloco $[1.806, 2.084] \times (1, 3.74]$ do plano $\alpha\beta$ e, no lema 4.4, vimos também que a curva algébrica $\{F_1 = 0\}$ está sempre acima da curva algébrica $\{A_1 = 0\}$ no bloco $[1.7321, 1.7960] \times (1, 3.74]$. Como essas curvas são gráficos em \mathcal{B}_2 , concluímos que há exatamente uma interseção entre elas nesse bloco. \square

Na proposição anterior, vimos que existe um único $\alpha_1 \in [1.796, 1.806]$ que origina um equilíbrio relativo degenerado $(d_1, y_1) \in [0.6196, 0.6262] \times (0, 1)$ no eixo das ordenadas. Essa bifurcação não altera o número de equilíbrios relativos no eixo y , visto que, conforme descrito na proposição 3.7 (veja figuras 3.1 e 3.4), a curva algébrica $\{F_1 = 0\}$ é um gráfico para $\alpha \in (\sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$. Desse modo, o equilíbrio que surge no ponto (d_1, y_1) no eixo das ordenadas bifurca em direção ao primeiro quadrante do plano xy .

A seguir, mostraremos que o equilíbrio degenerado acima é o único ponto de bifurcação presente no eixo y positivo.

Se substituirmos $\alpha = \sqrt{3}$ em $F_1 = A_1 = B_1 = 0$, concluímos que $(\alpha_0, \beta_0) = (\sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$ seria uma solução presente nos dois sistemas de (4.9). Contudo, esse ponto pertence à fronteira do domínio aberto de F_1 , pois para esse valor de α temos $d = \frac{1}{\sqrt{3}}$ que representa uma singularidade no sistema de equações de equilíbrios relativos. Desse modo, temos

Proposição 4.6. *Os sistemas (4.9) não possuem solução no bloco $\overline{\mathcal{B}}_2 = (\sqrt{3}, 1.7321] \times (1, 2 + \sqrt{3})$.*

Demonstração. Primeiro, consideraremos o bloco $\mathcal{B}_2 = [1.732, 1.7321] \times [1, 3.74]$ que contém o bloco $\overline{\mathcal{B}}_2$. Notemos que

$$F_1|_{[1.732, 1.7321] \times [1, 3.60]} = +4.212641647 \cdot 10^{11} \alpha^{18} \beta^{14} + \dots + 2.50051 \cdot 10^9$$

é $C+$. Desse modo, podemos restringir a busca por soluções dos sistemas em (4.9) ao bloco $\mathcal{B}_3 = [1.732, 1.7321] \times [3.60, 3.74]$. A seguir exibiremos uma tabela com alguns sub-blocos de \mathcal{B}_3 e os sinais de cada polinômio nesses sub-blocos.

Blocos	Polinômios	Classificação
$\mathcal{B}_4 = [1.732, 1.73207] \times [3.60, 3.63]$	F_1	$C+$
$\mathcal{B}_7 = [1.73207, 1.7321] \times [3.60, 3.63]$	A_1	$C-$
$\mathcal{B}_7 = [1.73207, 1.7321] \times [3.60, 3.63]$	B_1	$C+$
$\mathcal{B}_8 = [1.732062, 1.7321] \times [3.63, 3.74]$	A_1	$C-$
$\mathcal{B}_9 = [1.732062, 1.7321] \times [3.63, 3.74]$	F_1	$C+$
$\mathcal{B}_{10} = [1.7320, 1.73205] \times [3.63, 3.74]$	F_1	$C+$
$\mathcal{B}_{11} = [1.73205, 1.732062] \times [3.63, 3.65]$	F_1	$C+$
$\mathcal{B}_{12} = [1.732056, 1.732062] \times [3.65, 3.74]$	A_1	$C-$
$\mathcal{B}_{12} = [1.732056, 1.732062] \times [3.65, 3.74]$	B_1	$C+$
$\mathcal{B}_{13} = [1.73205, 1.732062] \times [3.65, 3.67]$	F_1	$C+$
$\mathcal{B}_{14} = [1.732053, 1.732056] \times [3.67, 3.74]$	A_1	$C-$
$\mathcal{B}_{15} = [1.732053, 1.732056] \times [3.67, 3.74]$	B_1	$C+$
$\mathcal{B}_{16} = [1.732050, 1.732053] \times [3.67, 3.685]$	F_1	$C+$
$\mathcal{B}_{17} = [1.732052, 1.732053] \times [3.685, 3.74]$	A_1	$C-$
$\mathcal{B}_{17} = [1.732052, 1.732053] \times [3.685, 3.74]$	B_1	$C+$

Segue da tabela acima, que as soluções dos sistemas em (4.9), caso existam, pertencem ao bloco $\mathcal{B}_{18} = [1.732050, 1.732052] \times [3.685, 3.74]$. De fato, sabemos que $(\sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}) \in \mathcal{B}_{18}$ é uma solução desses sistemas e, como vimos acima, podemos nos aproximar dessa solução o quanto quisermos usando transformações de Möbius para garantir que ela é única.

□

Proposição 4.7. *Os sistemas (4.9) não possuem solução no bloco $\overline{\mathcal{B}}_3 = [2.084, 2.10] \times (1, 2 + \sqrt{3})$.*

Demonstração. Consideraremos o bloco $\mathcal{B}_3 = [2.084, 1.806] \times (1, 3.74]$ que contém $\overline{\mathcal{B}}_3$. Primeiro, mostraremos que as curvas algébricas $\{A_1 = 0\}$ e $\{F_1 = 0\}$ não se intersectam em \mathcal{B}_3 . De fato, basta notar que

$$\mathcal{B}_3 = ([2.084, 2.10] \times [1, 1.12]) \cup ([2.084, 2.10] \times [1.12, 3.74])$$

e que $F_1|_{[2.084, 2.10] \times [1.12, 3.74]} = -1.323470116 \cdot 10^{12} \alpha^{19} \beta^{13} - \dots - 3.217795538 \cdot 10^{16} \alpha$ e

$$A_1|_{[2.084, 2.10] \times (1, 1.12)} = 3.913672872 \cdot 10^{23} \alpha^{19} \beta^{13} + \dots + 9.504432566 \cdot 10^{14} \alpha$$

são polinômios contendo apenas monômios negativos e positivos, nessa ordem, nos blocos $[2.084, 2.10] \times [1.12, 3.74]$ e $[2.084, 2.10] \times (1, 1.12)$, respectivamente.

Com base no que vimos acima, podemos restringir a busca por soluções do sistema $B_1 = F_1 = 0$ ao bloco

$$\mathcal{B}_4 = [2.084, 2.10] \times (1, 1.12).$$

Além disso, como

$$B_1 |_{[2.092, 2.10] \times [1, 3.74]} = 1.631532085 \cdot 10^{11} \alpha^{24} \beta^{21} + \dots + 4.455549739 \cdot 10^{22} \alpha$$

é um polinômio $C+$, temos que as soluções de $B_1 = F_1 = 0$, caso existam, pertencem ao bloco

$$\mathcal{B}_5 = [2.084, 2.092] \times (1, 1.12).$$

Para evitar estender a demonstração, apresentaremos a redução do bloco \mathcal{B}_5 e o sinais dos polinômios F_1 e B_1 na tabela a seguir.

Blocos	Polinômios	Classificação
$\mathcal{B}_6 = [2.084, 2.088] \times (1, 1.065]$	F_1	$C+$
$\mathcal{B}_7 = [2.084, 2.088] \times [1.065, 1.12]$	B_1	$C+$
$\mathcal{B}_8 = [2.088, 2.090] \times [1.045, 1.12]$	B_1	$C+$
$\mathcal{B}_9 = [2.088, 2.090] \times (1, 1.045]$	F_1	$C+$
$\mathcal{B}_{10} = [2.090, 2.091] \times (1, 1.03]$	F_1	$C+$
$\mathcal{B}_{11} = [2.090, 2.091] \times [1.03, 1.12]$	B_1	$C+$
$\mathcal{B}_{12} = [2.091, 2.0915] \times (1, 1.02]$	F_1	$C+$
$\mathcal{B}_{13} = [2.091, 2.0915] \times (1.02, 1.12]$	B_1	$C+$
$\mathcal{B}_{14} = [2.0915, 2.092] \times [1.013, 1.12]$	B_1	$C+$
$\mathcal{B}_{15} = [2.0915, 2.0917] \times (1, 1.013]$	F_1	$C+$
$\mathcal{B}_{16} = [2.0919, 2.092] \times (1, 1.013]$	F_1	$C+$
$\mathcal{B}_{17} = [2.0917, 2.09175] \times (1, 1.009]$	F_1	$C+$
$\mathcal{B}_{18} = [2.0917, 2.09175] \times (1.009, 1.0013]$	B_1	$C+$
$\mathcal{B}_{19} = [2.09175, 2.09178] \times (1, 1.007]$	F_1	$C+$
$\mathcal{B}_{20} = [2.09175, 2.09178] \times (1.007, 1.013]$	F_1	$C+$

□

Por fim, consideremos o segmento $1 < y < 3$ no eixo das ordenadas. Estamos interessados em determinar as soluções dos sistemas

$$\begin{cases} G_1(\alpha, \beta) = 0, \\ A_2(\alpha, \beta) = 0, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} G_1(\alpha, \beta) = 0, \\ B_2(\alpha, \beta) = 0, \end{cases} \quad (4.10)$$

onde $A_2(\alpha, \beta) = \alpha^{24}\beta^{22} - \alpha^{24}\beta^{20} - 64\alpha^{24}\beta^{19} - \dots - 64\beta^3 - \beta^2 + 1$ é um polinômio com grau total 46 e 451 monômios, obtido de $\Phi_{xx}(0, y, d)$ por meio das parametrizações acima após eliminarmos os fatores não-nulos, $B_2(\alpha, \beta) = \alpha^{24}\beta^{22} - \alpha^{24}\beta^{20} + 128\alpha^{24}\beta^{19} - \dots + 128\beta^3 - \beta^2 + 1$ é um polinômio com grau total 46 e 455 monômios, obtido de $\Phi_{yy}(0, y, d)$, e $(\alpha, \beta) \in (\sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}) \times (\sqrt{3}, 3\sqrt{3} + 2\sqrt{7})$ (domínio de G_1).

As soluções desses sistemas são os equilíbrios degenerados no plano $\alpha\beta$. Assim, determinaremos todas as interseções entre as curvas de degenerescência $A_2 = 0, B_2 = 0$ com a curva de equilíbrios relativos $G_1 = 0$. O comportamento dessas três curvas está ilustrado na Figura 4.2 a seguir.

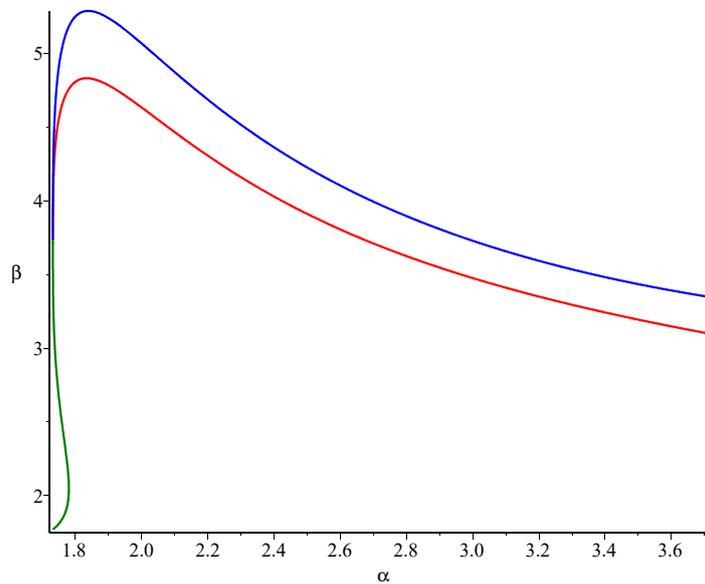


Figura 4.2: Curvas algébricas $G_1 = 0$, $A_2 = 0$ e $B_2 = 0$ em vermelho, azul e verde no arquivo pdf, nessa ordem, no plano $\alpha\beta$.

Se substituirmos $\alpha = \sqrt{3}$ em $G_1 = A_2 = B_2 = 0$, concluímos que $(\alpha_0, \beta_0) = (\sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$ seria uma solução presente nos dois sistemas de (4.10), como sugere a figura acima. Contudo, esse ponto pertence ao fecho do domínio de G_1 , mas não pertence ao seu domínio. A seguir, mostraremos que não existem equilíbrios relativos degenerados no segmento $1 < y < 3$.

Proposição 4.8. *Os sistemas (4.10) não possuem soluções no bloco $\mathcal{B} = (\sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}) \times (\sqrt{3}, 3\sqrt{3} + 2\sqrt{7})$ do plano $\alpha\beta$.*

Demonstração. Primeiro, mostraremos que as curvas algébricas $\{G_1 = 0\}$ e $\{B_2 = 0\}$ não se intersectam em \mathcal{B} . Para isso, notemos que no bloco $\mathcal{B}_1 = [1.79, 3.74] \times [1.732, 10.5]$ temos que $B_2|_{\mathcal{B}_1} = -1.824254891 \cdot 10^{16} \alpha^{24} \beta^{20} - \dots - 6.492784841 \cdot 10^{36}$ é C^- , no bloco $\mathcal{B}_2 = [1.7321, 1.79] \times [3.7321, 10.5]$, temos que $B_2|_{\mathcal{B}_2} = -7.426422489 \cdot 10^{15} \alpha^{24} \beta^{22} - \dots - 7.048344330 \cdot 10^{28}$

é C^- e, no bloco $\mathcal{B}_3 = [1.7321, 1.79] \times [1.732, 3.7321]$, temos ainda que $G_1|_{\mathcal{B}_3} = +7.749836502 \cdot 10^{17} \alpha^{18} \beta^{14} + \dots + 6.501822604 \cdot 10^{14}$ é C^+ .

Do que vimos acima, segue que as soluções do sistema $G_1 = B_2 = 0$, caso existam, pertencem ao bloco

$$\mathcal{B}_4 = (\sqrt{3}, 1.7321] \times [1.732, 2 + \sqrt{3}).$$

Na fronteira de \mathcal{B}_4 , o sistema $G_1 = B_2 = 0$ possui a solução $(\alpha_0, \beta_0) = (\sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$, como vimos acima. Desse modo, vamos considerar o bloco $\mathcal{B}_5 = [1.732, 1.7321] \times [1.732, 3.7321]$ que contém \mathcal{B}_4 e mostraremos que podemos nos aproximar dessa solução o quanto quisermos para garantir que não há outras soluções no bloco \mathcal{B}_5 .

Na tabela que segue apresentaremos alguns sub-blocos de \mathcal{B}_5 , onde o sistema $G_1 = B_2 = 0$ não possui solução.

Blocos	Polinômios	Classificação
$\mathcal{B}_6 = [1.732, 1.7321] \times [1.732, 3.60]$	G_1	C^+
$\mathcal{B}_7 = [1.7320, 1.73205] \times [3.60, 3.7321]$	B_2	C^+
$\mathcal{B}_8 = [1.732052, 1.7321] \times [3.60, 3.7321]$	G_1	C^+
$\mathcal{B}_9 = [1.7320, 1.73205] \times [3.60, 3.7321]$	B_2	C^+
$\mathcal{B}_{10} = [1.732052, 1.7321] \times [3.60, 3.7321]$	G_1	C^+
$\mathcal{B}_{11} = [1.732050, 1.7320505] \times [3.60, 3.7321]$	B_2	C^+
$\mathcal{B}_{12} = [1.732051, 1.732052] \times [3.60, 3.7321]$	G_1	C^+
$\mathcal{B}_{13} = [1.7320505, 1.732051] \times [3.60, 3.705]$	B_2	C^+
$\mathcal{B}_{14} = [1.7320505, 1.7320508] \times [3.705, 3.7321]$	B_2	C^+
$\mathcal{B}_{15} = [1.7320509, 1.732051] \times [3.705, 3.7321]$	G_1	C^+
$\mathcal{B}_{16} = [1.7320508, 1.7320509] \times [3.705, 3.723]$	G_1	C^+

Segue da tabela acima, que as soluções do sistema $G_1 = B_2 = 0$, caso existam, pertencem ao bloco $\mathcal{B}_{17} = [1.7320508, 1.73209] \times [3.723, 3.7321]$. De fato, sabemos que $(\sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}) \in \mathcal{B}_{17}$ é uma solução desse sistema e, como vimos acima, podemos nos aproximar dessa solução o quanto quisermos usando transformações de Möbius para garantir que ela é única.

Agora, estudaremos as soluções do sistema $G_1 = A_2 = 0$. Como $G_1|_{[1.732, 3.74] \times [4.80, 10.5]} = -8.241635016 \cdot 10^{24} \alpha^{19} \beta^{12} - \dots - 1.578305818 \cdot 10^{31} \beta^7$ é C^- e $A_2|_{[1.732, 3.74] \times [1.732, 3.30]} = +2.764572479 \cdot 10^{14} \alpha^{24} \beta^{22} + \dots + 1.433534643 \cdot 10^{29} \beta^7$ é C^+ , é suficiente mostrar que as curvas algébricas $\{G_1 = 0\}$ e $\{A_2 = 0\}$ não possuem interseções no bloco $\mathcal{B}_4 = [1.732, 3.74] \times [3.30, 4.80]$, exceto no ponto (α_0, β_0) . Na tabela que segue apresentaremos alguns sub-blocos de \mathcal{B}_4 , onde esse sistema não possui soluções.

Blocos	Polinômios	Classificação
$\mathcal{B}_5 = [3.35, 3.74] \times [3.30, 4.80]$	G_1	$C-$
$\mathcal{B}_6 = [1.732, 3.35] \times [3.30, 3.50]$	A_2	$C+$
$\mathcal{B}_7 = [3, 3.35] \times [3.50, 4.80]$	G_1	$C-$
$\mathcal{B}_8 = [1.732, 3] \times [3.50, 3.70]$	A_2	$C+$
$\mathcal{B}_9 = [2.75, 3] \times [3.70, 4.80]$	G_1	$C-$
$\mathcal{B}_{10} = [2.50, 2.75] \times [3.70, 3.90]$	A_2	$C+$
$\mathcal{B}_{11} = [2.50, 2.75] \times [3.90, 4.80]$	G_1	$C-$
$\mathcal{B}_{12} = [2.25, 2.50] \times [3.70, 4.20]$	A_2	$C+$
$\mathcal{B}_{13} = [2.25, 2.50] \times [4.20, 4.80]$	G_1	$C-$
$\mathcal{B}_{14} = [2.05, 2.25] \times [3.70, 4.50]$	A_2	$C+$
$\mathcal{B}_{15} = [2.05, 2.25] \times [4.50, 4.80]$	G_1	$C-$
$\mathcal{B}_{16} = [1.75, 2.05] \times [3.70, 4.80]$	A_2	$C+$
$\mathcal{B}_{17} = [1.744, 1.75] \times [3.70, 4.55]$	A_2	$C+$
$\mathcal{B}_{18} = [1.744, 1.75] \times [4.55, 4.80]$	G_1	$C-$
$\mathcal{B}_{19} = [1.744, 1.75] \times [3.70, 4.55]$	A_2	$C+$
$\mathcal{B}_{20} = [1.740, 1.744] \times [3.70, 4.50]$	A_2	$C+$
$\mathcal{B}_{21} = [1.740, 1.744] \times [4.50, 4.80]$	G_1	$C-$
$\mathcal{B}_{22} = [1.736, 1.740] \times [3.70, 4.39]$	A_2	$C+$
$\mathcal{B}_{23} = [1.736, 1.740] \times [4.39, 4.80]$	G_1	$C-$
$\mathcal{B}_{24} = [1.734, 1.736] \times [3.70, 4.25]$	A_2	$C+$
$\mathcal{B}_{25} = [1.734, 1.736] \times [4.25, 4.80]$	G_1	$C-$
$\mathcal{B}_{26} = [1.733, 1.734] \times [3.70, 4.17]$	A_2	$C+$
$\mathcal{B}_{27} = [1.733, 1.734] \times [4.17, 4.80]$	G_1	$C-$
$\mathcal{B}_{28} = [1.7325, 1.733] \times [3.70, 4.06]$	A_2	$C+$
$\mathcal{B}_{29} = [1.7325, 1.733] \times [4.06, 4.80]$	G_1	$C-$
$\mathcal{B}_{30} = [1.7323, 1.7325] \times [3.70, 3.98]$	A_2	$C+$
$\mathcal{B}_{31} = [1.7323, 1.7325] \times [3.98, 4.80]$	G_1	$C-$
$\mathcal{B}_{32} = [1.7322, 1.7323] \times [3.70, 3.95]$	A_2	$C+$
$\mathcal{B}_{33} = [1.7322, 1.7323] \times [3.95, 4.80]$	G_1	$C-$
$\mathcal{B}_{34} = [1.7321, 1.7322] \times [3.70, 3.92]$	A_2	$C+$
$\mathcal{B}_{35} = [1.7321, 1.7322] \times [3.92, 4.80]$	G_1	$C-$

$\mathcal{B}_{36} = [1.73208, 1.7321] \times [3.70, 3.86]$	A_2	$C+$
$\mathcal{B}_{37} = [1.73208, 1.7321] \times [3.86, 4.80]$	G_1	$C-$
$\mathcal{B}_{38} = [1.73205, 1.73208] \times [3.84, 4.80]$	G_1	$C-$

Segue da tabela acima, que as soluções do sistema $G_1 = A_2 = 0$, caso existam, pertencem ao bloco $\mathcal{B}_{38} = [1.73205, 1.73208] \times [3.70, 3.74]$. De fato, sabemos que $(\sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}) \in \mathcal{B}_{38}$ é uma solução desse sistema e, como vimos acima, podemos nos aproximar dessa solução o quanto quisermos usando transformações de Möbius para garantir que ela é única.

□

4.2 Inexistência de Bifurcações de Equilíbrios Relativos no Primeiro Quadrante

Sabemos que existe uma bifurcação de equilíbrios relativos no eixo y em um ponto $(d_1, y_1) \in [0.6196, 0.6262] \times (0, 1)$ que não altera o número de equilíbrios relativos nesse eixo à medida que variamos o valor da semidiagonal d no intervalo $[0.6196, 0.6262]$ (proposição 3.5). Nessa seção, descreveremos essa bifurcação por meio de algumas figuras obtidas com o software Maple e veremos que, a menos de simetria pelo difeomorfismo σ , esse é o único ponto importante no diagrama de bifurcação do Problema Restrito Losangular de Cinco Corpos.

Neste contexto, descreveremos o conjunto solução do sistema

$$\begin{cases} F(x, y, d) = 0, \\ G(x, y, d) = 0, \\ \psi(x, y, d) = 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

formado pelas equações de equilíbrios relativos (2.18) e a condição de degenerescência (4.1), por meio de algumas figuras para valores específicos importantes do parâmetro d . Nosso intuito, é mostrar numericamente que existe apenas um equilíbrio relativo degenerado localizado no eixo y , a menos de simetria pelo difeomorfismo σ .

Para $d = 0.5774$, vemos, na figura 4.3, que existe apenas um equilíbrio relativo no interior do quadrado $0 \leq x \leq 2.1$ e $0 \leq y \leq 2.1$ e que $\psi = 0$ não intersecta $F = G = 0$ simultaneamente.

Para $d = 0.58$, vemos, na figura 4.4, que existe apenas um equilíbrio relativo no interior do quadrado $0 \leq x \leq 2.1$ e $0 \leq y \leq 2.1$ e que $\psi = 0$ não intersecta $F = G = 0$ simultaneamente. Este comportamento se mantém para os valores de $d \in (0.58, 0.62]$, conforme podemos ver na figura 4.5 a seguir. Notemos ainda que as três curvas nessa figura estão se aproximando do ponto de bifurcação $(0, y_1)$ no eixo y .

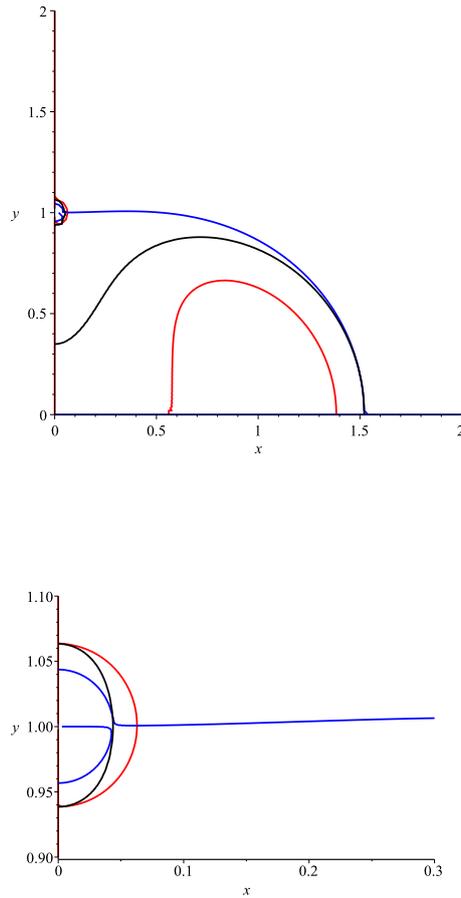


Figura 4.3: Soluções do sistema (4.11) para $d = 0.5774$, com um aumento próximo de $(0, 1)$. Em vermelho, azul e preto temos, nessa ordem, $F = 0, G = 0$ e $\psi = 0$.

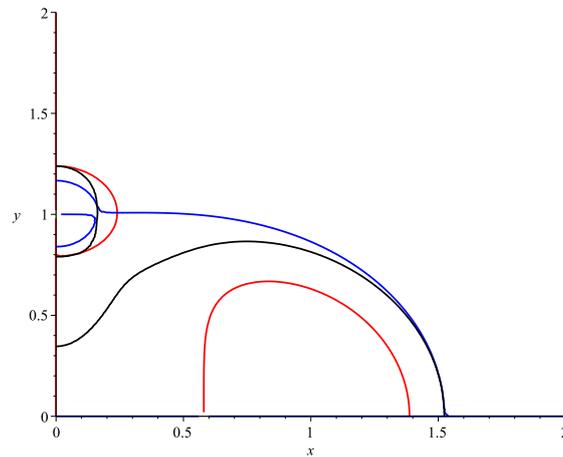


Figura 4.4: Soluções do sistema (4.11) para $d = 0.58$. Em vermelho, azul e preto temos, nessa ordem, $F = 0, G = 0$ e $\psi = 0$.

Este comportamento se mantém para os valores de $d \in (0.58, 0.62]$, conforme podemos ver na figura 4.5 acima. Notemos ainda que as três curvas nessa figura estão se aproximando do ponto de bifurcação $(0, y_1)$ no eixo das ordenadas, em destaque na figura 4.6.

Após a interseção tripla no ponto $(0, y_1)$ para um único valor $d_1 \in (0.6196, 0.6262)$, surge mais um equilíbrio relativo do PRL5C no interior do quadrado $0 \leq x \leq 2.1$ e $0 \leq y \leq 2.1$, conforme

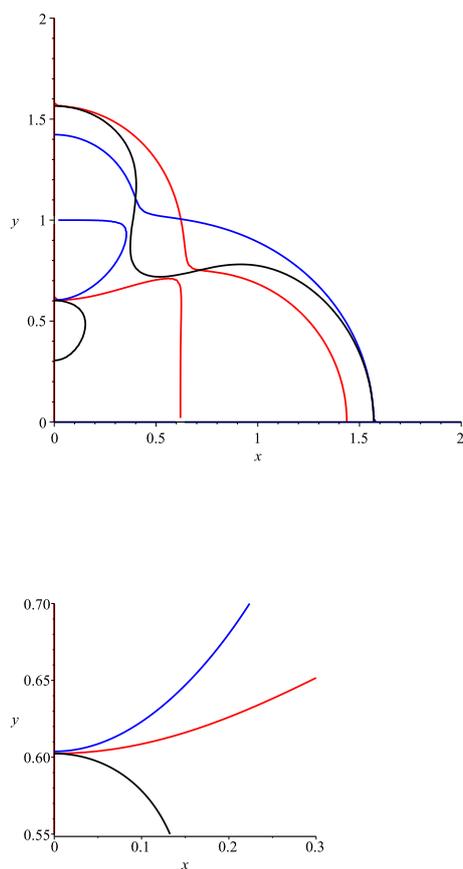


Figura 4.5: Soluções do sistema (4.11) para $d = 0.62$, com um aumento na vizinhança do ponto $(0, 0.6)$.

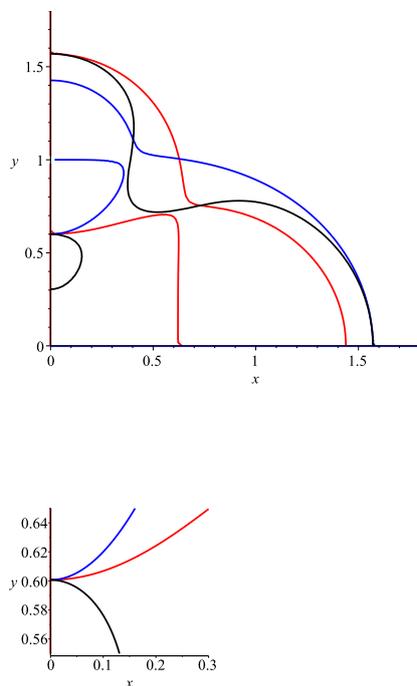
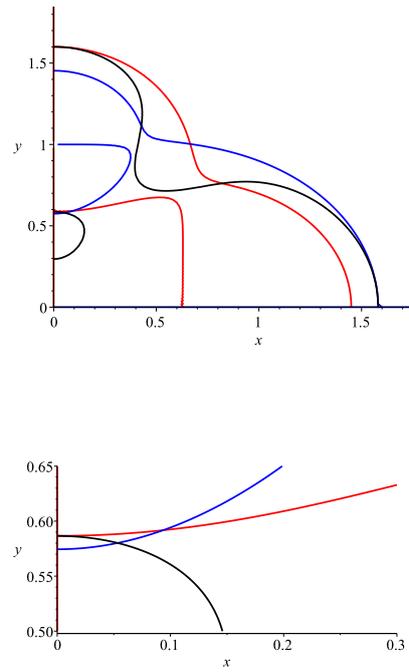
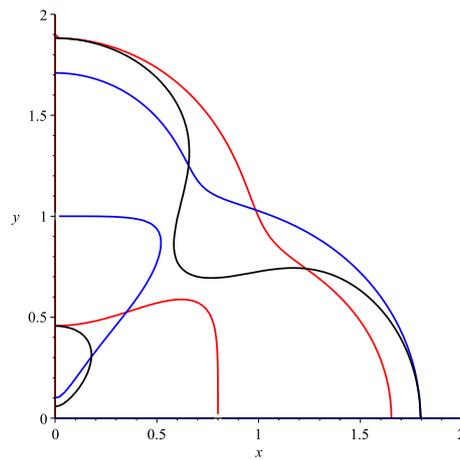
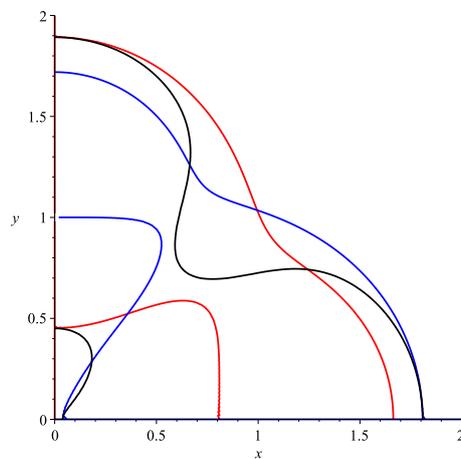


Figura 4.6: Soluções do sistema (4.11) para $d = 0.621$, com um aumento na vizinhança do ponto $(0, 0.6)$.

podemos observar na figura 4.7.

Para os valores de $d \in (d_1, 1]$, temos dois equilíbrios relativos no interior desse quadrado no primeiro quadrante. Além disso, para $d \in (0.80, 0.81)$ temos uma bifurcação de equilíbrios

Figura 4.7: Soluções do sistema (4.11) para $d = 0.63$.Figura 4.8: Soluções do sistema (4.11) para $d = 0.80$.Figura 4.9: Soluções do sistema (4.11) para $d = 0.81$.

relativos no eixo y , conforme demonstrado na proposição 3.8 e ilustrado nas figuras 4.8 e 4.9.

Para cada valor de $d \in (d_1, 1)$ os dois equilíbrios relativos localizam-se no semi-quadrante $y > x$, de modo que à medida que d se aproxima de 1 ambos os equilíbrios se aproximam da bissetriz $x = y$. Dessa forma, para $d = 1$, os dois equilíbrios no interior do quadrado localizam-se na bissetriz $x = y$ (a demonstração deste fato, encontra-se no apêndice A), como podemos ver na figura 4.10.

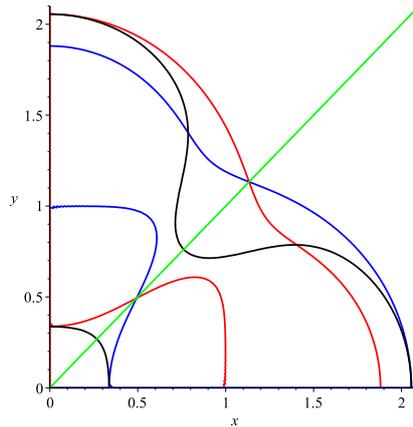


Figura 4.10: Soluções do sistema (4.11) para $d = 1$, com ênfase na bissetriz $x = y$.

Para os valores $d \in (1, \sqrt{3})$, o comportamento dos equilíbrios relativos no semi-quadrante $y < x$ é completamente descrito pelo difeomorfismo σ e pelo comportamento dos equilíbrios relativos, caracterizados acima, no semi-quadrante $y > x$.

4.3 Análise das Singularidades $m = 0$ e $m = +\infty$

Finalizaremos este capítulo, analisando os casos singulares no sistema (2.18) quando temos $d = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $d = \sqrt{3}$, ou seja, quando a massa dos corpos x_2 e x_4 localizados nos vértices do losango normalizado é infinita ou nula, respectivamente. Por meio do difeomorfismo σ e dos teoremas 2.7 e 4.2, é suficiente analisar o que ocorre com as soluções do sistema (2.18) apenas para $d = \sqrt{3}$.

Queremos mostrar que no ponto $(\sqrt{3}, 0, \sqrt{3})$ do plano xyd bifurcam 4 soluções do sistema $F(x, y, d) = G(x, y, d) = 0$, duas delas provenientes do eixo x e as outras duas provenientes do primeiro e quarto quadrantes do plano de maneira simétrica. Contudo, notemos que este ponto não pertence ao domínio de F pois o termo $\frac{m(x-d)}{r_2^3}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ de segunda ordem neste ponto.

Para eliminar esta singularidade, faremos o desenvolvimento em séries de Puiseux das funções F e G numa vizinhança de $(\sqrt{3}, 0, \sqrt{3})$ no plano xyd , devido ao expoente fracionário

presente no cubo das distâncias mútuas r_i , com $i = 1, 2, 3, 4$, no sistema (2.18).

Primeiro, escrevendo as séries de Taylor das funções

$$m(d) = \frac{d^3(\ell^3 - 8)}{\ell - 8d^3} \quad \text{e} \quad \lambda(d) = -\frac{2m}{\ell^3} - \frac{1}{4},$$

onde $\ell = \sqrt{1 + d^2}$, até a segunda ordem em torno do ponto $d = \sqrt{3}$, obtemos

$$m(\delta) = -\frac{27}{4(3\sqrt{3}-1)}\delta - \frac{63\sqrt{3} + 6885}{10816}\delta^2 + O(\delta^3) \quad \text{e}$$

$$\lambda(\delta) = -\frac{1}{4} + \frac{27}{16(3\sqrt{3}-1)}\delta - \frac{2043\sqrt{3} + 12069}{43264}\delta^2 + O(\delta^3).$$

Consideremos $x = \sqrt{3} - \epsilon_1(\delta)$, $y = 0 + \epsilon_2(\delta)$ e $d = \sqrt{3} - \delta$ numa vizinhança de $(\sqrt{3}, 0, \sqrt{3})$, onde $\epsilon_1(\delta) = K_1\delta^{\frac{1}{3}} + K_2\delta^{\frac{2}{3}} + O(\delta)$ e $\epsilon_2(\delta) = W_1\delta^{\frac{1}{3}} + W_2\delta^{\frac{2}{3}} + O(\delta)$ são séries de Puiseux, com expoente $\frac{1}{3}$, até a segunda ordem. Consequentemente, obtemos

$$F(\delta) = C_1\delta^{\frac{1}{3}} + C_2\delta^{\frac{2}{3}} + O(\delta) \quad \text{e} \quad G(\delta) = D_1\delta^{\frac{1}{3}} + D_2\delta^{\frac{2}{3}} + O(\delta),$$

onde

$$C_1 = -\frac{9}{16}K_1 + \frac{27}{12\sqrt{3}-4}aK_1,$$

$$C_2 = -\frac{9}{16}K_2 + \frac{27}{12\sqrt{3}-4}aK_2 + \frac{57\sqrt{3}}{128}K_1^2 + \frac{3\sqrt{3}}{128}W_1^2 + \frac{81}{32(3\sqrt{3}-1)}aK_1B_1,$$

$$D_1 = -\frac{3}{16}W_1 + \frac{27}{12\sqrt{3}-4}aW_1 \quad \text{e}$$

$$D_2 = -\frac{3}{16}W_2 + \frac{27}{12\sqrt{3}-4}aW_2 + \frac{81}{32(3\sqrt{3}-1)}aW_1^2 + \frac{15\sqrt{3}}{64}K_1 + \frac{3\sqrt{3}}{64}K_1W_1,$$

onde $a = (K_1^2 + W_1^2)^{\frac{3}{2}}$ e $K_1 \neq 0$ ou $W_1 \neq 0$ pois se ambos forem nulos temos uma série de Puiseux trivial.

Para regularizar a singularidade nas equações de equilíbrios relativos no ponto $(\sqrt{3}, 0, \sqrt{3})$ é necessário que $C_1 = D_1 = 0$ e $C_2 = D_2 = 0$. O sistema de equações $C_1 = D_1 = 0$ é equivalente à

$$\begin{cases} K_1 \left(-\frac{9}{16} + \frac{27}{12\sqrt{3}-4}a \right) = 0, \\ W_1 \left(-\frac{3}{16} + \frac{27}{12\sqrt{3}-4}a \right) = 0. \end{cases}$$

Donde, segue que $K_1 = 0$ e $W_1 = \pm \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}-1}{36}}$ ou $W_1 = 0$ e $K_1 = \pm \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}-1}{12}}$.

Substituindo $K_1 = 0$ e $W_1 = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}-1}{36}}$ no sistema $C_2 = D_2 = 0$, obtemos $K_2 = \frac{\sqrt{3}}{16} \sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{1}{36}\right)^2}$ e $W_2 = -\frac{27}{6\sqrt{3}-2} \sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{1}{36}\right)^5}$. Por outro lado, trocando $K_1 = 0$ e $W_1 = -\sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}-1}{36}}$ no sistema $C_2 = D_2 = 0$, obtemos $K_2 = \frac{\sqrt{3}}{32} \sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{1}{36}\right)^2}$ e $W_2 = -\frac{27}{12\sqrt{3}-4} \sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{1}{36}\right)^5}$.

Analogamente, trocando $W_1 = 0$ e $K_1 = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}-1}{12}}$ no sistema $C_2 = D_2 = 0$, obtemos $K_2 = \frac{19\sqrt{3}}{24} \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{12}}$ e $W_2 = -\frac{5\sqrt{3}}{8} \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{12}}$. Por outro lado, substituindo $W_1 = 0$ e $K_1 = -\sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}-1}{12}}$ no sistema $C_2 = D_2 = 0$, obtemos $K_2 = \frac{19\sqrt{3}}{48} \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{12}}$ e $W_2 = -\frac{5\sqrt{3}}{16} \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{12}}$.

Portanto, concluímos que a partir do ponto singular $(\sqrt{3}, 0, \sqrt{3})$ do espaço xyd bifurcam quatro soluções do sistema $F(x, y, d) = G(x, y, d) = 0$, duas delas provenientes do eixo x , como vimos na proposição 3.10, e as outras duas provenientes do primeiro e quarto quadrantes do plano xy , como discutido na seção anterior. Além disso, o comportamento dos equilíbrios relativos na vizinhança do ponto singular $(0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) = \sigma(\sqrt{3}, 0, \sqrt{3})$ é completamente análogo pelo teorema 4.2. (INDICAR FIGURA) (reescrever o fecho)

Referências

- ALBOUY, A. On a paper of Moeckel on central configurations, **Regul. Chaotic Dyn.** **8**, p. 133-142, 2002.
- ALBOUY, A. Integral manifolds of the N -body problem, **Invent. Math.** **114**, Springer-Verlag, p. 463-488, 1993.
- ALBOUY, A. The symmetric central configurations of four equal masses in Hamiltonian Dynamics and Celestial Mechanics, **Contemp. Math.** **198**, Amer. Math. Soc., v. 198, p. 131-135, 1996.
- ALBOUY, A; KALOSHIN, V. Finiteness of central configurations of five bodies in the plane. **Ann. Math.** v.176, p.535-588, 2012.
- BARROS, J.F.; LEANDRO, E.S.G. The set of degenerate central configurations in the planar restricted four-body problem. **SIAM J. Math. Anal.** v.43, p.634-661, 2011.
- BARROS, J.F.; LEANDRO, E.S.G. Bifurcations and enumeration of classes of relative equilibria in the planar restricted four-body problem. **SIAM J. Math. Anal.** v.46, p.1185-1203, 2014.
- BARROS, J.F.; LEANDRO, E.S.G. Localization of real algebraic Hypersurfaces with applications to the enumeration of the classes of relative equilibria of a $(5+1)$ -body problem. **J. Math. Anal. Appl.** **485**, p.1-15, 2019.
- BANG, D.; ELMABSOUT, B. Restricted $N+1$ - body problem: existence and stability of relative equilibria. **Cel. Mech. and Dyn. Astr.** **89**, p.305-318, 2004.
- DZIOBEK, O. Über einen merkwürdigen Fall der Vielkörperproblems. **Astron. Nach.** v.152, p. 33-46, 1900.
- EULER, L. De motu restilíneo trium corporum se mutuo attrahentium. **Novi. Comm. Acad. Svi. Imp. Petrop**, v.11, p.144-151, 1767.
- GANNAWAY, J.R. Determination of All Central Configurations in the Planar Four-Body Problem with One Inferior Mass. **Ph.D. thesis, Vanderbilt University, Nashville**, 1981.
- HAMPTON, M.; MOECKEL, R. Finiteness of relative equilibria of the four-body problem. **Invent. Math.**, v.163, p.289-312, 2006.
- LAGRANGE, J.L. **Ouvres Completes**, v. 6, p.272-292. 1772.
- LEHMANN-FILHES, R. Über zwei fölle der vielkörpersproblem. **Astron. Nach.** v.127, 1891.
- LONGLEY, W.R. Some particular solutions of the problem of n bodies. **Bull. Amer. Math. Soc.**, v.13, p. 324-335, 1907.
- MACMILLAN, W.D; BARTKY, R. Permanent configurations in the problem of four bodies. **Trans. Amer. Math. Soc.**, v.34, p.838-875, 1932.

- MEYER, K.R; SCHMIDT, D.S. Bifurcations of relative equilibria in the 4- and 5-body problem. **Ergod. Theory Dynam. Systems**, **8**, p. 215-225, 1988.
- MEYER, K.R; SCHMIDT, D.S. Bifurcations of relative equilibria in the N-body and Kirchhoff problems. **SIAM J. Math. Anal.**, **19**, p. 1295-1313, 1988.
- MOECKEL, Richard. Relative equilibria in the four body problem. **Erg. Th. Dyn. Sys.**, v.5, p.417-435, 1985.
- MOULTON, F.R. The straight line solutions of the problem of N bodies. **Ann. of Math.**, v.12, p.1-17, 1910.
- PACELLA, F. Central Configurations of the N -body problem via the equivariant Morse theory. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**. v.97, p. 59-74, 1972.
- PALMORE, J.I. Classifying relative equilibria, **I. Bull. Amer. Math. Soc.** v. 79, p.904-908, 1973; **II, Bull. amer, Math. Cos.** v.81, p. 489-491, 1975; **III, Letters in Math. Phisycs** , p.71-73, 1975.
- PALMORE, J.I. Measure of degenerate relative equilibria, **I. Ann. Math.**, v.104,p.421-429, 1976.
- PEDERSEN, P. Librationspunkte im restringierten Vierkörperproblem, **Danske Vid. Selsk. Math.-Fys.**, **21**, p. 1780, 1944.
- PERKO, L.M. ; WALTER, E.L. Regular polygon solution of the N-body problem. **Amer. Math. Soc.** v. 94,p. 301-309, 1985.
- SIEGEL, C.L; MOSER, J.K. **Lectures on Celestial Mechamics**. New York: Ed. Springer Verlag, 1971.
- SIMÓ, C. Relative equilibrium solutions in the four body problem, **Celestial Mech. Dynam. Astronom.**, **18**, pp. 165-184, 1978.
- SMALE, S. The colected papers of Stephen Smale. **Singapore University Press**. Vol. 2, parte VII, p.871-916, 1970.
- USPENSKY, J.V. Theory of equations. **McGraw-Hill**, New York, 1948.
- VAINSENCHE, I. Introdução às Curvas Algébricas Planas. **Coleção Matemática Universitária**, vol.5, IMPA, Rio de Janeiro, 1996.
- WILLIAMS, W.L. Permanent configurations in the problem of five bodies. **Trans. Amer. Math. Soc.**, v. 44,p. 563-579, 1938.
- WINTNER, A. The Analytical Foundations of Celestial Mechanics. **Princeton Math. series**, v. 5, 1941.

Apêndice A - Equilíbrios Relativos na Bissetriz

Neste apêndice, estudaremos em detalhes os equilíbrios relativos do Problema Restrito Losangular de Cinco Corpos (PRL5C) no caso em que o corpo de massa nula localiza-se na bissetriz do primeiro quadrante $x = y$ do plano cartesiano. Veremos que um equilíbrio desse tipo só é possível quando o losango de semidiagonais 1 e d se reduz ao quadrado de semidiagonal unitária; ver Bang e Elmabsout (2004). Finalizaremos essa discussão mostrando que a recíproca desse resultado também é válida, ou seja, existem equilíbrios relativos na bissetriz do primeiro quadrante apenas no caso em que as primárias se dispõem nos vértices de um quadrado com centro de massa na origem do plano cartesiano.

Inicialmente, fixaremos a posição do corpo de massa nula na bissetriz do primeiro quadrante $x = y$ e estudaremos detalhadamente o conjunto solução do sistema de equações descrito por

$$\begin{cases} F(x, d) = 0, \\ G(x, d) = 0, \end{cases}$$

onde

$$F(x, d) = \lambda x + \frac{x}{r_1^3} + \frac{x}{r_3^3} + m \left(\frac{x-d}{r_2^3} + \frac{x+d}{r_4^3} \right) \quad e$$

$$G(x, d) = \lambda x + \frac{x-1}{r_1^3} + \frac{x+1}{r_3^3} + m \left(\frac{x}{r_2^3} + \frac{x}{r_4^3} \right),$$

que descreve a posição na bissetriz do corpo de massa nula em um equilíbrio relativo do PRL5C. Observe que no sistema acima, as distâncias mútuas r_i são funções apenas da abscissa (x) do corpo de massa nula e da semidiagonal (d) do losango normalizado. Além disso, notemos que

$$(F - G)(x, d) = \frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_3^3} + md \left(\frac{1}{r_4^3} - \frac{1}{r_2^3} \right).$$

Neste contexto, os equilíbrios relativos na bissetriz são descritos por

$$\begin{cases} (F - G)(x, d) = 0, \\ G(x, d) = 0. \end{cases}$$

Para algebrizar esse sistema de equações, consideraremos as coordenadas

$$\begin{cases} a = r_2 + r_4, \\ k = r_4 - r_2, \\ b = r_2 r_4, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} s = r_1 + r_3, \\ w = r_3 - r_1, \\ t = r_1 r_3. \end{cases}$$

Nestas coordenadas, temos

$$F_1 - G_1 = \frac{w(s^2 - t)}{t^3} + md \frac{(-k)(a^2 - b)}{b^3} \quad \text{e}$$

$$G_1 = \frac{ak}{4d} \left(\lambda + \frac{s(s^2 - 3t)}{t^3} + m \frac{a(a^2 - 3b)}{b^3} \right) - \frac{w(s^2 - t)}{t^3}.$$

Além disso, temos algumas relações fundamentais entre essas variáveis descritas por

$$\begin{cases} a^2 - k^2 - 4b = 0, \\ s^2 - w^2 - 4t = 0, \\ ak - dsw = 0, \end{cases}$$

onde a última dessas equações decorre da igualdade $x = y$ na bissetriz e as relações de coplanaridade

$$C_1 = a^2 - 2b - s^2 + 2t - d^2 + 2 = 0 \quad \text{e}$$

$$C_2 = -d^2 s^4 + 4d^2 s^2 t - 2a^4 + 4a^2 d^2 + 2a^2 s^2 - 4d^4 + 4d^2 s^2 - s^4 + 8a^2 b - 4a^2 t - 8bd^2 - 4bs^2 - 8d^2 t + 4s^2 t - 4a^2 - 4b^2 + 8bt - 8d^2 + 4s^2 - 4t^2 + 8b - 8t - 4 = 0.$$

Das relações fundamentais acima, obtemos

$$b = \frac{a^2 - k^2}{4}, \quad t = \frac{s^2 - w^2}{4} \quad \text{e} \quad k = \frac{dsw}{a}.$$

Substituindo essas variáveis nas duas relações de coplanaridade e eliminando os termos não-nulos, obtemos

$$C_{11} = d^2 s^2 w^2 + a^4 - 4a^2 d^2 - a^2 s^2 - a^2 w^2 + 4a^2 = 0 \quad \text{e}$$

$$C_{22} = d^4 s^4 w^4 + 10a^4 d^2 s^2 w^2 - 8a^2 d^4 s^2 w^2 - 2a^2 d^2 s^4 w^2 - 2a^2 d^2 s^2 w^4 + a^8 - 8a^6 d^2 - 2a^6 s^2 - 2a^6 w^2 + 16a^4 d^4 - 8a^4 d^2 s^2 - 8a^4 d^2 w^2 + a^4 s^4 + 2a^4 s^2 w^2 + a^4 w^4 + 8a^2 d^2 s^2 w^2 + 8a^6 + 32a^4 d^2 - 8a^4 s^2 - 8a^4 w^2 + 16a^4 = 0.$$

Agora, calculando o resultante de C_{11} e C_{22} em relação a w , obtemos o polinômio

$$R(a, s, d) = 64a^8d^4R_1(a, s, d)^2R_2(a, s, d)^2,$$

onde $R_1(a, s, d) = a^2 - d^2s^2$ e $R_2(a, s, d) = a^4s^2 - 4a^2d^2s^2 - a^2s^4 + 2d^2s^4 - 2a^4 + 8a^2d^2 + 4a^2s^2 - 8d^2s^2$.

O conjunto formado pelos zeros de R contém o conjunto de equilíbrios relativos do PRL5C na bissetriz $x = y$.

Após substituir as expressões de b, t e k , dadas acima, e $m = \frac{d^3(\ell^3-8)}{\ell^3-8d^3}$, $\lambda = -\frac{2m}{\ell^3} - \frac{1}{4}$ em $F_1 - G_1 = 0$ e $G_1 = 0$ e eliminar os termos não-nulos, obtemos o sistema de equações

$$\begin{cases} (F_2 - G_2)(a, s, w, \ell, d) = 0, \\ G_2(a, s, w, \ell, d) = 0, \end{cases}$$

onde $(F_2 - G_2)(a, s, w, \ell, d) = a^3d^7\ell^3s^9w^2 - 3a^3d^7\ell^3s^7w^4 + \dots - 3a^{12}\ell^3s^2 - a^{12}l^3w^2$ é um polinômio com 32 monômios e $G_2(a, s, w, \ell, d) = -d^6\ell^6s^{13}w^6 + 3d^6\ell^6s^{11}w^8 - \dots + 768a^{12}\ell^6s^2 + 256a^{12}\ell^6w^2$ é um polinômio com 80 monômios.

Para finalizar o processo de algebrização, vamos eliminar a variável w no sistema do parágrafo anterior, tomando resultante de cada um dos polinômios que o compõem com a condição de coplanaridade dada pelo polinômio C_{11} em relação a w . Desse modo, obtemos o sistema de equações

$$\begin{cases} P_1(a, s, \ell, d) = 0, \\ P_2(a, s, \ell, d) = 0, \end{cases}$$

onde $P_1(a, s, \ell, d) = 8a^{12}d^{12}\ell^6s^{19} - \dots - 262144a^{12}d^9s^7$ é um polinômio com 316 monômios e $P_2(a, s, \ell, d) = 8a^{12}d^{12}\ell^6s^{19} - \dots + 196608a^{16}d^7s^5$ é um polinômio com 1060 monômios.

Como vimos acima, uma parte do conjunto de equilíbrios relativos do Problema Restrito Losangular de Cinco Corpos na bissetriz do primeiro quadrante do plano cartesiano é caracterizado pelo conjunto solução do sistema

$$\begin{cases} P_1(a, s, \ell, d) = 0, \\ P_2(a, s, \ell, d) = 0, \\ R_1(a, s, \ell, d) = 0. \end{cases}$$

De $R_1(a, s, \ell, d) = 0$, segue que $a = ds$. Assim, eliminamos a variável a do sistema de

equações e obtemos

$$\begin{cases} -d^{14}s^{14}(s-2)^4(s+2)^4(d+1)^4(d-1)^5(d^3\ell^3+d^2\ell^3+d\ell^3-8d^3+\ell^3)=0, \\ -d^{18}s^{19}(s-2)^6(s+2)^6(d-1)^6(d+1)^6(-\ell^2+4d)(\ell^4+4d\ell^2+16d^2)=0. \end{cases}$$

As únicas soluções desse sistema são dadas por $s = 2$ e $d = 1$. Sabemos que $s = 2$ implica que o corpo de massa nula está localizado na origem do plano cartesiano, enquanto que $d = 1$ mostra que há equilíbrios relativos na bissetriz $x = y$ apenas no caso em que o losango normalizado é um quadrado com semidiagonal unitária.

A outra parte do conjunto de equilíbrios relativos do Problema Restrito Losangular de Cinco Corpos na bissetriz do primeiro quadrante do plano cartesiano é caracterizada pelo conjunto solução do sistema

$$\begin{cases} P_1(a, s, \ell, d) = 0, \\ P_2(a, s, \ell, d) = 0, \\ R_2(a, s, \ell, d) = 0. \end{cases}$$

Para resolver esse sistema, precisaríamos eliminar mais uma variável tomando resultante dos polinômios P_1 e P_2 com o polinômio R_2 , em relação a uma das quatro variáveis presentes. Contudo, isso não é possível computacionalmente via Maple. Para contornar essa dificuldade, exibiremos outro processo de algebrização a fim de obtermos um sistema de equações polinomiais que englobe as soluções desse sistema.

Para isso, substituiremos novamente $b = \frac{a^2 - k^2}{4}$, e $k = \frac{dsw}{a}$ e, por meio de $C_1 = 0$, $t = -a^2 + 2d^2 + s^2 + 2b - 2$, na condição de coplanaridade $C_2 = 0$ e na relação fundamental $s^2 - w^2 - 4t = 0$. Desse modo, obtemos

$$\begin{cases} R_3(a, s, w, d) = 0, \\ R_4(a, s, d) = 0, \end{cases}$$

onde $R_3(a, s, w, d) = 2d^2s^2w^2 + 2a^4 - 8a^2d^2 - 3a^2s^2 - a^2w^2 + 8a^2$ e $R_4(a, s, w, d) = a^4s^2 - 4a^2d^2s^2 - a^2s^4 + 2d^2s^4 - 2a^4 + 8a^2d^2 + 4a^2s^2 - 8d^2s^2$. Agora, calculamos o resultante entre R_2 e R_3 em relação a variável w , para obtermos $R_{23}(a, s, d) = -32a^8d^4s^4 + 128a^6d^6s^4 + 48a^6d^4s^6 - 64a^4d^6s^6 + a^4d^4s^8 + 16a^{10}d^2s^2 - 22a^8d^2s^4 - 256a^6d^6s^2 - 168a^6d^4s^4 - 4a^6d^2s^6 + 256a^4d^6s^4 + a^{12} - 40a^{10}d^2 - 4a^{10}s^2 + 144a^8d^4 + 112a^8d^2s^2 + 4a^8s^4 + 8a^6d^2s^4 + 8a^{10} - 96a^8d^2 - 16a^8s^2 + 16a^8 = 0$. Por fim, calculamos o resultante entre R_{23} e R_4 em relação à variável a e eliminamos os termos não-nulos. Dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned}
R(s, d) = & 576d^6s^{10} + 17d^4s^{12} - 6784d^6s^8 - 592d^4s^{10} - 10d^2s^{12} + 31488d^6s^6 + 5936d^4s^8 + 192d^2s^{10} \\
& + \\
& s^{12} - 72192d^6s^4 - 27072d^4s^6 - 1504d^2s^8 - 16s^{10} + 81920d^6s^2 + 63040d^4s^4 + 6272d^2s^6 + 112s^8 - 36864d^6 - \\
& 73216d^4s^2 - 14976d^2s^4 - 448s^6 + 33792d^4 + 19456d^2s^2 + 1088s^4 - 10240d^2 - 1536s^2 + 1024 = 0.
\end{aligned}$$

Sabemos que os parâmetros d e ℓ estão vinculados pela relação $E = 0$, com $E(d, \ell) = \ell^2 - d^2 - 1$. Desse modo, calculamos o resultante dessa relação polinomial com os polinômios $F_1 - G_1$ e G_1 e, após eliminarmos os termos não-nulos, temos o sistema polinomial

$$\begin{cases} P_3(a, s, d) = 0, \\ P_4(a, s, d) = 0, \end{cases}$$

onde $P_3(a, s, d) = -4a^4d^{32}s^{30} - \dots - 65536a^6d^{12}s^{12}$ é um polinômio com 2309 monômios e $P_4(a, s, d) = 64a^{12}d^{36}s^{38} - \dots + 4294967296a^{12}d^{12}s^{12}$ é um polinômio com 16800 monômios. Daí, concluímos que o sistema $P_3 = P_4 = R_4 = R = 0$ contém os demais equilíbrios relativos do PRL5C na bissetriz $x = y$. Mostraremos que esse sistema não possui outras soluções além de $s = 2$ e $d = 1$. Para isso, estudaremos o conjunto solução do sub-sistema

$$\begin{cases} P_3(a, s, d) = 0, \\ R_4(a, s, d) = 0, \\ R(s, d) = 0. \end{cases}$$

Mostraremos que este sub-sistema não admite soluções, exceto $s = 2$ ou $d = 1$. Com efeito, calculando o resultante entre os polinômios P_3 e R_4 em relação à a , obtemos

$$T(d, s) = s^{36}d^{36}(s - 2)^{16}(s + 2^{16}(d + 1)^{16}(d - 1)^{18})T_1(d, s),$$

onde

$T_1(d, s) = 5308416d^{74}s^{120} + 14155776d^{72}s^{122} + \dots + 302231454903657293676544s^{48}$ é um polinômio de grau total 194 e 4455 monômios.

Agora, fazemos o resultante entre os polinômios T_1 e R em relação à variável s . Desse modo, obtemos

$$T_2(d) = kd^{208}T_{11}(d)T_{22}(d),$$

onde $T_{11}(d) = 590698044921960421418377056563217358312642292219904d^{352} + \dots + 189035532d + 15752961$ é um polinômio com grau 352 e 353 monômios, $T_{22}(d) =$

$24344484355020531231522155308762039290226016256d^{356} + \dots + 34169454720d^2 + 6046617600$ é um polinômio com grau 356 e 354 monômios e k é uma constante real. Logo, os candidatos a valores do parâmetro $d \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right)$ para os quais tem-se equilíbrios relativos na bissetriz dos quadrantes ímpares são as raízes de T_{11} e T_{22} .

Usando o difeomorfismo σ , podemos nos restringir às raízes d de T_{11} e T_{22} tais que $d \in [1, \sqrt{3})$. Por meio das transformações de Möbius isolamos as raízes desses polinômios e percebemos que existe uma única raiz $d_1 \in (1.24, 1.25)$ de T_{11} e uma única raiz $d_2 \in (1.22, 1.23)$ de T_{22} satisfazendo essas condições. Contudo, como nos intervalos $\left(\frac{1}{1.25}, \frac{1}{1.24}\right)$ e $\left(\frac{1}{1.23}, \frac{1}{1.22}\right)$ não temos raízes de T_{11} e T_{22} , respectivamente, concluímos, usando novamente o difeomorfismo σ que nenhuma raiz desses dois polinômios origina um valor para o parâmetro d associado a um equilíbrio relativo do Problema Restrito Losangular. Do exposto acima, obtemos

Proposição 4.9. *Existem equilíbrios relativos do Problema Restrito Losangular de Cinco corpos na bissetriz dos quadrantes ímpares se, e somente se, as quatro primárias se dispõem nos vértices de um quadrado com semidiagonal unitária.*

Apêndice B - Descrição do Polinômio $F_1 |_{\mathcal{B}_{41}}$

Aqui, listaremos os polinômios $f_i(\beta)$, $i = 2, \dots, 9$, que compõem o polinômio $F_1 |_{\mathcal{B}_{41}}$ definido na proposição 3.6, exibiremos as transformações de Möbius usadas nesses polinômios para eliminar sua única variação de sinal e reescreveremos F_1 com uma única variação de sinal em \mathcal{B}_{41} .

Neste contexto, temos

$$f_2(\beta) = 2.845729228 \cdot 10^{10} \beta^{14} + 4.52186254 \cdot 10^{11} \beta^{13} + 2.639419959 \cdot 10^{12} \beta^{12} + 5.657988327 \cdot 10^{12} \beta^{11} - 1.187909474 \cdot 10^{13} \beta^{10} - 1.159246373 \cdot 10^{14} \beta^9 - 3.85256998 \cdot 10^{14} \beta^8 - 7.892692100 \cdot 10^{14} \beta^7 - 1.115084676 \cdot 10^{15} \beta^6 - 1.125840870 \cdot 10^{15} \beta^5 - 8.15805036 \cdot 10^{14} \beta^4 - 4.161630996 \cdot 10^{14} \beta^3 - 1.423121086 \cdot 10^{14} \beta^2 - 2.934492826 \cdot 10^{13} \beta - 2.762470607 \cdot 10^{12},$$

$$f_3(\beta) = 5.602776039 \cdot 10^{11} \beta^{14} + 8.902811589 \cdot 10^{12} \beta^{13} + 6.161182097 \cdot 10^{13} \beta^{12} + 2.427742332 \cdot 10^{14} \beta^{11} + 5.852220518 \cdot 10^{14} \beta^{10} + 8.08830579 \cdot 10^{14} \beta^9 + 2.794571200 \cdot 10^{14} \beta^8 - 1.328915685 \cdot 10^{15} \beta^7 - 3.254983131 \cdot 10^{15} \beta^6 - 4.11116621 \cdot 10^{15} \beta^5 - 3.366751015 \cdot 10^{15} \beta^4 - 1.85392962 \cdot 10^{15} \beta^3 - 6.67658661 \cdot 10^{14} \beta^2 - 1.428629004 \cdot 10^{14} \beta - 1.382423954 \cdot 10^{13},$$

$$f_4(\beta) = 3.926822960 \cdot 10^{12} \beta^{14} + 6.23972175 \cdot 10^{13} \beta^{13} + 4.43503474 \cdot 10^{14} \beta^{12} + 1.860670714 \cdot 10^{15} \beta^{11} + 5.09382262 \cdot 10^{15} \beta^{10} + 9.413198209 \cdot 10^{15} \beta^9 + 1.148487760 \cdot 10^{16} \beta^8 + 7.89907956 \cdot 10^{15} \beta^7 - 1.63037829 \cdot 10^{14} \beta^6 - 6.94434627 \cdot 10^{15} \beta^5 - 8.219095196 \cdot 10^{15} \beta^4 - 5.314500369 \cdot 10^{15} \beta^3 - 2.094246187 \cdot 10^{15} \beta^2 - 4.745050084 \cdot 10^{14} \beta - 4.775488527 \cdot 10^{13},$$

$$f_5(\beta) = 1.717750000 \cdot 10^{13} \beta^{14} + 2.729504686 \cdot 10^{14} \beta^{13} + 1.961265371 \cdot 10^{15} \beta^{12} + 8.428110523 \cdot 10^{15} \beta^{11} + 2.408294864 \cdot 10^{16} \beta^{10} + 4.797208177 \cdot 10^{16} \beta^9 + 6.75270526 \cdot 10^{16} \beta^8 + 6.579086880 \cdot 10^{16} \beta^7 + 4.039087628 \cdot 10^{16} \beta^6 + 9.310196702 \cdot 10^{15} \beta^5 - 8.047569975 \cdot 10^{15} \beta^4 - 9.312133025 \cdot 10^{15} \beta^3 - 4.46965718 \cdot 10^{15} \beta^2 - 1.11971006 \cdot 10^{15} \beta - 1.197316726 \cdot 10^{14},$$

$$f_6 = 5.367810919 \cdot 10^{13} \beta^{14} + 8.52945101 \cdot 10^{14} \beta^{13} + 6.165038641 \cdot 10^{15} \beta^{12} + 2.683099291 \cdot 10^{16} \beta^{11} +$$

$$7.833647177 \cdot 10^{16}\beta^{10} + 1.615299173 \cdot 10^{17}\beta^9 + 2.405831395 \cdot 10^{17}\beta^8 + 2.590158751 \cdot 10^{17}\beta^7 + 1.965188704 \cdot 10^{17}\beta^6 + 9.697191261 \cdot 10^{16}\beta^5 + 2.258036185 \cdot 10^{16}\beta^4 - 5.265174251 \cdot 10^{15}\beta^3 - 5.943442571 \cdot 10^{15}\beta^2 - 1.863983637 \cdot 10^{15}\beta - 2.216456467 \cdot 10^{14},$$

$$f_7(\beta) = 1.273141175 \cdot 10^{14}\beta^{14} + 2.023021385 \cdot 10^{15}\beta^{13} + 1.467654733 \cdot 10^{16}\beta^{12} + 6.437702683 \cdot 10^{16}\beta^{11} + 1.904069795 \cdot 10^{17}\beta^{10} + 4.005077479 \cdot 10^{17}\beta^9 + 6.148598114 \cdot 10^{17}\beta^8 + 6.942788117 \cdot 10^{17}\beta^7 + 5.712998199 \cdot 10^{17}\beta^6 + 3.315683990 \cdot 10^{17}\beta^5 + 1.249743950 \cdot 10^{17}\beta^4 + 2.317656510 \cdot 10^{16}\beta^3 - 2.0902602 \cdot 10^{15}\beta^2 - 1.974467763 \cdot 10^{15}\beta - 2.975002221 \cdot 10^{14},$$

$$f_8(\beta) = 2.369845378 \cdot 10^{14}\beta^{14} + 3.765684350 \cdot 10^{15}\beta^{13} + 2.738869662 \cdot 10^{16}\beta^{12} + 1.207795155 \cdot 10^{17}\beta^{11} + 3.603314020 \cdot 10^{17}\beta^{10} + 7.677956225 \cdot 10^{17}\beta^9 + 1.201204424 \cdot 10^{18}\beta^8 + 1.394783617 \cdot 10^{18}\beta^7 + 1.198227288 \cdot 10^{18}\beta^6 + 7.473420023 \cdot 10^{17}\beta^5 + 3.241472344 \cdot 10^{17}\beta^4 + 8.884314964 \cdot 10^{16}\beta^3 + 1.149467594 \cdot 10^{16}\beta^2 - 5.402109670 \cdot 10^{14}\beta - 2.61346467 \cdot 10^{14}$$

e

$$f_9(\beta) = 3.531577969 \cdot 10^{14}\beta^{14} + 5.611677403 \cdot 10^{15}\beta^{13} + 4.089072416 \cdot 10^{16}\beta^{12} + 1.810183005 \cdot 10^{17}\beta^{11} + 5.433985797 \cdot 10^{17}\beta^{10} + 1.168436795 \cdot 10^{18}\beta^9 + 1.851765338 \cdot 10^{18}\beta^8 + 2.190036808 \cdot 10^{18}\beta^7 + 1.93234868 \cdot 10^{18}\beta^6 + 1.255376319 \cdot 10^{18}\beta^5 + 5.826679156 \cdot 10^{17}\beta^4 + 1.821427796 \cdot 10^{17}\beta^3 + 3.38769765 \cdot 10^{16}\beta^2 + 2.607584026 \cdot 10^{15}\beta - 7.115148260 \cdot 10^{13}.$$

A única raiz β_3 de f_3 está no intervalo $(1.54, 1.55)$ pois

$$f_3\left(\frac{\beta+1.54}{\beta+1}\right) = -1.53680047384736 \cdot 10^{18}\beta^{12} - \dots - 1.16655461279654 \cdot 10^{13} \text{ é } C-$$

e

$$f_3\left(\frac{1.55\beta+3.74}{\beta+1}\right) = +2.22523383097252 \cdot 10^{19}\beta^{12} + \dots + 1.66926159403800 \cdot 10^{21} \text{ é } C+.$$

Além disso, temos que

$$f_2\left(\frac{\beta+1.54}{\beta+1}\right) = -6.57046967692862 \cdot 10^{17}\beta^{12} - \dots - 6.48000897562630 \cdot 10^{16} \text{ é } C-,$$

$$f_4\left(\frac{\beta+1.54}{\beta+1}\right) = +3.03698256577794 \cdot 10^{18}\beta^{12} + \dots + 1.63808405686191 \cdot 10^{19}\beta \text{ é } C+,$$

$$f_5\left(\frac{\beta+1.54}{\beta+1}\right) = +3.83427715576568 \cdot 10^{19}\beta^{12} + \dots + 1.04107869135513 \cdot 10^{20}\beta \text{ é } C+,$$

$$f_6\left(\frac{\beta+1.54}{\beta+1}\right) = +1.626744694 \cdot 10^{20}\beta^{12} + \dots + 3.468334771 \cdot 10^{19} \text{ é } C+,$$

$$f_7\left(\frac{\beta+1.54}{\beta+1}\right) = +4.499612332 \cdot 10^{20}\beta^{12} + \dots + 8.943937590 \cdot 10^{19} \text{ é } C+,$$

$$f_8\left(\frac{\beta+1.54}{\beta+1}\right) = +9.197419901 \cdot 10^{20}\beta^{12} + \dots + 1.756809610 \cdot 10^{20} \text{ é } C+ \text{ e}$$

$f_9\left(\frac{\beta+1.54}{\beta+1}\right) = +1.46006401437951 \cdot 10^{21} \beta^{12} + \dots + 2.71813504849222 \cdot 10^{20}$ é $C+$.

Desse modo, para $\beta \leq \beta_3$, $F_1|_{\mathcal{B}_{41}}$ sempre possui uma única variação de sinal.