UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA
CURSO DE MESTRADO

GRACIVANE DA SILVA PESSOA

UM ESTUDO DIAGNÓSTICO SOBRE O CÁLCULO DA ÁREA DE FIGURAS PLANAS NA MALHA QUADRICULADA:

influência de algumas variáveis

RECIFE
2010

GRACIVANE DA SILVA PESSOA

UM ESTUDO DIAGNÓSTICO SOBRE O CÁLCULO DA ÁREA DE FIGURAS PLANAS NA MALHA QUADRICULADA: influência de algumas variáveis

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Orientador: Profª Drª Paula Moreira Baltar Bellemain

RECIFE

2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CENTRO DE EDUCAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA

CURSO DE MESTRADO

UM ESTUDO DIAGNÓSTICO SOBRE O CÁLCULO DA ÁREA DE FIGURAS PLANAS NA MALHA QUADRICULADA: influência de algumas variáveis

Comissão examinadora

_____

Profª Drª Paula M Baltar Bellemain

1º Examinador / Presidente

_____

Profª Drª Anna Paula de Avelar Brito Lima

2º Examinaddor

_____

Prof Dr Paulo Figueiredo Lima

3º Examinaddor

Recife, 26 de março de 2010

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho primeiramente a minha família e a todos que estiveram ao meu lado incentivando e acreditando em mais esse projeto.

AGRADECIMENTOS

A DEUS e a NOSSA SENHORA,

pela saúde, força e todas as coisas boas que têm proporcionado em minha vida, estando presente em cada momento guiando meus caminhos e permitindo mais esta conquista.

À Profª Drª Paula Moreira Baltar Bellemain,

pelas suas orientações, por sua sabedoria e serenidade, por ter acreditado em meu potencial e neste trabalho.

Ao Prof Dr Paulo Figueiredo Lima e a Profª Drª Anna Paula de Avelar Brito Lima,

por terem aceitado o convite para fazerem parte da nossa banca examinadora, fornecendo valiosas contribuições à conclusão desta dissertação.

A Profª Drª Rosinalda Aurora de Melo Teles e ao Prof Dr Abraão Juvêncio de Araujo,

pelas valiosas contribuições em minha banca de qualificação e em encontros de estudo.

As amigas Lúcia Durão e Rosa de Fátima,

pelos incentivos, por ter dividido comigo as dúvidas dessa caminhada, pelas contribuições neste estudo e parcerias em outros trabalho.

A todos os colegas dos grupos *Pró-Grandeza* e *Canteiro de Obras Didáticas*,

pelas considerações com relação a este trabalho, pelas palavras de incentivo e ambiente acolhedor vivido em todos os encontros que estive presente.

A todas escolas que participaram deste estudo,

em especial aos alunos, professores, diretores e coordenadores que tornaram possível este trabalho.

À minha família,

em especial a meus pais, Graciete e Ivanildo, e meu esposo José Alexandre, pela importante presença, dando-me forças para superar os obstáculos, incentivando-me a dar prosseguimento à minha formação acadêmica.

Aos colegas de trabalho,

pela força e incentivo na realização de mais este trabalho e colaboração nos momentos difíceis.

A todos os colegas, professores e funcionários do *Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica*,

por acreditarem em meu trabalho, pela força e contribuições diretas e indiretas quando sempre que precisei.

"Se não receio o erro é porque estou sempre pronto a corrigi-lo"
Bento Jesus Caraça

RESUMO

Este trabalho é um estudo diagnóstico sobre os procedimentos mobilizados por alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, na resolução de atividades de cálculo de área de figuras planas em malhas quadriculadas. Adotamos a abordagem de área como grandeza, desenvolvida por Douady e Perrin-Glorian (1989) na França e utilizada em diversas pesquisas no Brasil, tais como Bellemain e Lima (2002). Adotamos a Teoria das Situações Didáticas, desenvolvida por Guy Brousseau e mais precisamente a noção de variável didática, como referencial teórico. Investigamos especificamente a influência de certas variáveis nos procedimentos de resolução empregados pelos alunos: o tipo de preenchimento das figuras, a posição relativa das figuras em relação à malha, o domínio numérico das medidas das áreas, os tipos de figura. O teste consistiu em 14 questões de cálculo de área, com variações nos valores atribuídos a cada uma das variáveis supracitadas, e foi respondido por 100 alunos de 6º ano de cinco escolas diferentes, da região metropolitana de Recife. A análise dos dados mostra que quando os valores das variáveis permitem que o problema seja resolvido apenas por contagem de quadradinhos, o desempenho dos alunos é bastante satisfatório. No extremo oposto, se é exigida a visualização de uma figura ladrilhável, que contém a figura original (procedimento de subtração de áreas) os sujeitos da pesquisa apresentam grande dificuldade em resolver as questões propostas. Os procedimentos que envolvem decomposição-recomposição, frações ou complementação de partes das superfícies unitárias estão disponíveis para um quantitativo significativo de sujeitos, mas há também muitos alunos que não conseguem lidar com esse tipo de problema adequadamente: contam apenas os quadradinhos completos dentro da figura ou contam como inteiros todos os que estão parcialmente contidos nela, por exemplo.

Palavras-chave: Área de figuras planas, grandezas e medidas, malhas quadriculadas, variáveis didáticas.

RESUMÉ

Ce travail est une étude de diagnostic sur les procédures déployées par les étudiants dans la classe de 6ème de l'école primaire, dans des activités de résolution pour le calcul aire de figures planes en maille à damier. Nous avons adopté la zone d'approche et de l'ampleur, développé par Douady et Perrin-Glorian (1989) en France et utilisée dans plusieurs études au Brésil, comme Bellemain et Lima (2002). Nous avons adopté la Théorie des Situations Didactiques, développé par Guy Brousseau et plus précisément la notion de didactique variable, que théorique. Plus précisément étudié l'influence de certaines variables dans les procédures de règlement utilisé par les étudiants: le type de rembourrage les chiffres, la position relative des chiffres en ce qui concerne le maillage, la domination numérique des mesures des domaines, les types de figure. Le test consistait en 14 questions pour calculer la surface, avec des variations dans les valeurs attribuées à chacune des variables ci-dessus, et a répondu à 100 étudiants de 6e année de cinq écoles différentes dans la région métropolitaine de Recife. L'analyse des données montre que lorsque les valeurs des variables qui permettent que le problème soit résolu que par comptage des places, la performance des étudiants est tout à fait satisfaisante. À l'autre extrême, si elle est nécessaire pour afficher une image ladrilhável, qui contient le chiffre initial (procédure de soustraction de zones), les sujets ont de grandes difficultés à résoudre les questions posées. Les procédures qui entraînent la décomposition-recomposition, et fractions du complément des actions de surfaces unitaires sont disponibles pour un des sujets importants quantitative, mais il ya aussi beaucoup d'étudiants qui ne peut pas gérer correctement ce problème: complète ne compter que les places à l'intérieur de la figure ou comprennent tous les nombres entiers qui sont partiellement contenues, par exemple.

Mots-clés: Aire de figures planes, grandeurs et mesures, quadrillé de maille, variables didactiques.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 11

1 APRENDIZAGEM E ENSINO DO CONCEITO DE ÁREA E O USO DA MALHA COMO RECURSO DIDÁTICO 15

1.1 Erros e entraves no ensino e a aprendizagem do conceito de área 15

1.1.1 A área como grandeza 18

1.1.2 Algumas pesquisas que adotam a área como grandeza 20

1.1.3 A medida da área de superfícies planas 23

1.2 Pesquisas que utilizam malhas quadriculadas no ensino-aprendizagem de área 26

1.3 Contribuições da malhas quadriculadas como recurso didático no cálculo da área de figuras planas 31

2 VARIÁVEIS E VARIÁVEIS DIDÁTICAS 35

2.1 Breve estudo sobre Variáveis Didáticas 35

2.2 Exemplos de variáveis 38

3 OBJETIVOS DA PESQUISA 42

3.1 Objetivo Geral 42

3.2 Objetivos Específicos 42

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS 43

4.1 Situando a pesquisa e justificando nossas escolhas 43

4.2 Caracterização dos sujeitos 45

4.3 Descrição e análise a priori das atividades 46

4.4 Análise a priori dos procedimentos de resolução dos alunos 59

4.4.1 Respostas consideradas corretas 59

4.4.2 Respostas consideradas incorretas 64

5 ANÁLISE DOS RESULTADOS 65

5.1 Analisando os resultados 65

5.2 Influência de algumas variáveis nos procedimentos utilizados pelos sujeitos pesquisados 69
5.3 Contribuições da malha quadriculada em nosso estudo 100
CONSIDERAÇÕES FINAIS 106
REFERÊNCIAS 112
APÊNDICES 115
APÊNDICE A: ATIVIDADES PROPOSTAS NO ESTUDO 116
APÊNDICE B: RESPOSTAS DOS ALUNOS 123

INTRODUÇÃO

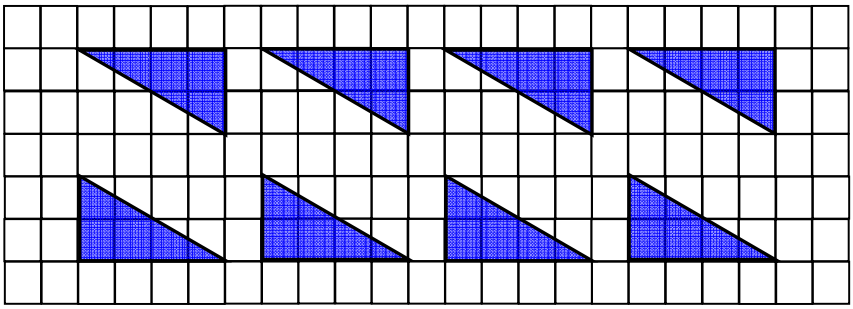
Na proposta dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (Brasil, 1998), área é um conteúdo do bloco das Grandezas e Medidas. De acordo com o documento, esse conteúdo deve ser trabalhado na escola a partir do 2º ciclo (4º e 5º anos) do ensino fundamental. Espera-se que nesse nível, o estudo seja focado na exploração de situações práticas e unidades de medidas não-convencionais, como o palmo, o pé, palitos, e outros objetos.

No 3º ciclo (6º e 7º ano) há um resgate das experiências vivenciadas no ciclo anterior, mas a ênfase passa a ser nos conceitos e na introdução progressiva de fórmulas. Nesse processo, é importante, de acordo com o PCN, a compreensão da ideia de medida de superfície bem como a equivalência de figuras planas através da composição e decomposição de figuras (Brasil, 1998).

Alguns professores recorrem a materiais manipulativos como Blocos Lógicos, Material Dourado, outros exploram atividades com jogos como Tangram, Torre de Hanói, Trilhas Numéricas, etc. O uso de alguns desses recursos são propostos em livros didáticos e de apoio didático do ensino fundamental.

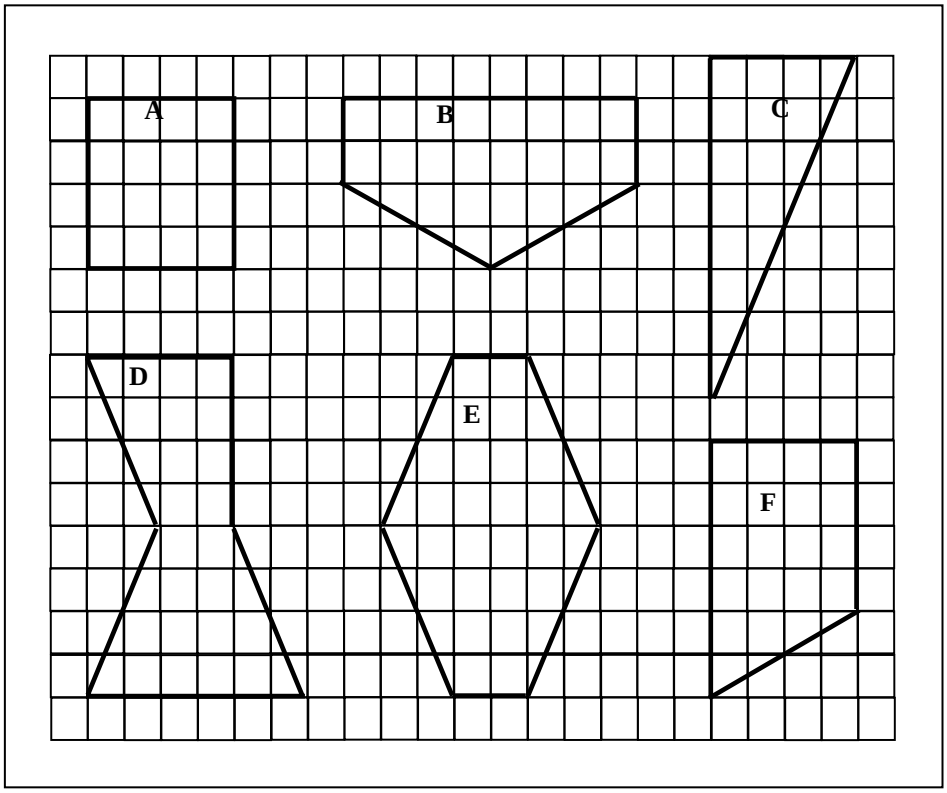
Ochi (*et al*,1997), apresenta várias atividades envolvendo malhas (quadriculadas, pontilhadas, triangulares e outras) e explorando conteúdos como: sequências, simetrias, congruência e semelhança, área e perímetro. Com relação à área, chama a atenção para a dificuldade apresentada por crianças em entender que figuras diferentes podem apresentar a mesma área. Uma das atividades proposta é a seguinte.

Pinte e recorte os triângulos abaixo.



Quadro 1: Atividade proposta por Ochi (*et al*,1997, p.46).

Depois é solicitado que o aluno utilize os triângulos da página anterior para compor as figuras na malha abaixo.



Quadro 2: Atividade proposta por Ochi (*et al*,1997, p.47).

Em seguida, é pedido que o aluno complete as afirmações seguintes e responda a pergunta sobre as figuras que possuem mesma área.

A superfície da figura **A** foi recoberta com ..... triângulos, ou seja, a área da figura **A** é ..... triângulos.

A figura **B** tem área ..... triângulos.

A figura **C** tem área ..... triângulos.

A figura **D** tem área ..... triângulos.

A figura **E** tem área ..... triângulos.

A figura **F** tem área ..... triângulos.

Faça uma lista da figuras que têm a mesma área.

Quadro 3: Atividade proposta por Ochi (*et al*,1997, p.48).

Esta atividade é um exemplo de como pode ser explorada a ideia de medida de superfície bem como a equivalência de figuras planas através da composição e decomposição de figuras, como sugere o PCN.

Santana (2006) investiga a utilização de três recursos didáticos (Tangram, Poliminós e Malhas), no estudo do conceito de área em livros didáticos do 3º e 4º ciclo (5ª a 8ª série) do ensino fundamental. Em todas as 6 (seis) coleções analisadas, no capítulo relacionado a área, apresentavam como recurso a Malha e o Tangram. A pesquisadora afirma que os conceitos de área e comprimento podem ser introduzidos de maneira informal utilizando unidades de medidas não padronizadas e que o uso das malhas quadriculadas favorece a construção do conceito de medida.

Bellemain e Lima (2002) destacam três situações principais que dão sentido ao conceito de área enquanto grandezas: situações de comparação, situações de medida e situações de produção.

Nossa pesquisa trata de um estudo diagnóstico sobre o cálculo da área em malhas quadriculadas por alunos do 6º ano do ensino fundamental.

Apesar de outros trabalhos como o de Ochi (*et al*,1997) utilizarem a malha quadriculada como recurso didático, não percebemos uma discussão direcionada às potencialidades da mesma. Além disso, as atividades realizadas na malha quadriculada possuem um aspecto “menos formal”, no qual podemos explorar a ideia intuitiva da área e os procedimentos mais utilizados são a contagem de quadradinhos e a composição e decomposição de figuras.

Uma das motivações para a escolha do tema foi a participação no grupo *Pró-Grandezas* da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, que têm como foco de estudo o ensino e aprendizagem de grandezas e medidas.

O texto aqui apresentado encontra-se dividido em cinco capítulos:

No primeiro capítulo focamos o ensino e a aprendizagem do conceito de área, destacando entraves e erros cometidos por alunos em pesquisas de referência como as de Douady e Perrin-Glorian (1989) realizada na França que apontam resultados também observados em resoluções de alunos em pesquisas brasileiras, como as de Facco (2003). Ainda neste capítulo apresentamos uma discussão sobre as contribuições do uso da malha quadriculada no cálculo da área de figuras planas, bem como outras pesquisas que utilizam a malha como recurso didático.

O segundo capítulo apresenta um breve estudo sobre a noção de Variáveis Didáticas, elemento da Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau. Destacamos exemplos de

algumas variáveis e valores que podem assumir podendo provocar mudanças nos procedimentos de resolução dos alunos.

O terceiro capítulo trata dos objetivos geral e específicos de nosso trabalho.

No quarto capítulo descrevemos nossos procedimentos metodológicos. Situamos a pesquisa justificando nossas escolhas, caracterizamos os sujeitos, as escolas e as condições de aplicação do instrumento de pesquisa. Fazemos também uma descrição detalhada de cada item destacando seu objetivo. Também neste capítulo, apresentamos a análise *a priori* das resoluções de cada item.

O quinto capítulo é destinado à análise dos resultados. Apresentamos alguns protocolos de alunos para exemplificar conclusões da pesquisa. Resultados quantitativos, como itens com maior e menor índice de acerto, procedimentos mais e menos utilizados; e resultados qualitativos que expressam as dificuldades de compreensão, interpretação e erros cometidos por uso inadequado de fórmulas entre outros. Destacamos as influências de algumas variáveis nos procedimentos de resolução dos sujeitos pesquisados e quais contribuições foram observadas pelo uso da malha quadriculada.

Por fim apresentamos nossas considerações finais, nas quais discutimos os principais resultados da pesquisa e possíveis estudos com base em pontos não privilegiados, mas articulados com o presente estudo, seguido das referências e apêndices.

1 APRENDIZAGEM E ENSINO DO CONCEITO DE ÁREA E O USO DA MALHA COMO RECURSO DIDÁTICO

1.1 Erros e entraves no ensino e a aprendizagem do conceito de área

Muitas das pesquisas sobre ensino e aprendizagem de área apoiam-se nos trabalhos de Douady e Perrin-Glorian (1989). As autoras desenvolveram, na França, estudos sobre o processo de aprendizagem do conceito de área de figuras planas, com alunos de nível escolar equivalente aos do 2º ciclo do ensino fundamental brasileiro. Essas pesquisadoras identificaram alguns erros cometidos com frequência pelos alunos, em relação à área e ao perímetro.

- *Área associada ao ladrilhamento efetivo*: ao adotar uma superfície unitária com certa forma, a medida da área de uma figura, depende da quantidade de superfícies unitárias (de mesma forma) que cabem na figura;
- *Área associada à superfície*: a área é a própria superfície;
- *Dissociação de área e perímetro*: mudanças ocorridas na área acarretam necessariamente alteração em seu perímetro e vice-versa;
- *Mesma área versus mesmo perímetro*: dadas duas figuras com mesma área certamente seus perímetros também serão iguais;
- *Extensão inadequada de fórmulas*: uso de fórmulas em contextos que não são válidas, como a obtenção da área de um paralelogramo através do produto de duas "dimensões", ou multiplicar os três lados de um triângulo para obter sua área.

As pesquisadoras destacam ainda que alguns alunos mobilizam uma *concepção numérica* ou uma *concepção forma* (concepção geométrica) ou mesmo ambas, mas de forma isolada uma da outra.

Nas concepções numéricas, são considerados apenas elementos relacionados ao cálculo. O aluno executa operações utilizando todos ou parte dos valores dados no problema de maneira mais ou menos coerente, como no cálculo da área de um triângulo através da adição de dois de seus lados, depois multiplicá-lo pelo terceiro.

Balacheff (1988, *apud* Bellemain e Lima, 2000) considera concepções geométricas o amálgama entre área e superfície, perímetro e contorno. Assim sendo, preservando a forma de

uma figura, alterações ocorridas na área acarretariam necessariamente modificações no perímetro e reciprocamente. Uma das origens das dificuldades conceituais dos alunos é a ausência de construção das relações pertinentes entre os campos numérico e geométrico.

Com relação às concepções geométricas (forma) e numéricas o documento da Base Curricular Comum para as Redes Públicas de Ensino de Pernambuco - BCC (2008), indica o trabalho direcionado para exploração de situações que ajudem na distinção de figura e grandeza bem como número e grandeza.

> Também podem ser trabalhadas situações que explorem a **distinção entre figura e grandeza.** Por exemplo, situações em que figuras diferentes tenham o mesmo perímetro; em que recipientes diferentes tenham a mesma capacidade, etc. É igualmente importante que o aluno compreenda que o **número associado à grandeza,** quando se realiza a medição, depende da unidade escolhida. Assim, certa área não é igual a dois; de fato, a área pode medir dois, ou quatro, ou oito, etc., dependendo da unidade escolhida. (PERNAMBUCO, 2008, p.89).

O reagrupamento da figura, sem perda nem acréscimo de partes, ajuda no cálculo de sua área, considerando que poderá ser "transformada" numa figura na qual o procedimento utilizado para calcular sua área seja conhecido, ou seja, ao se deparar com figuras como mostra o exemplo abaixo.

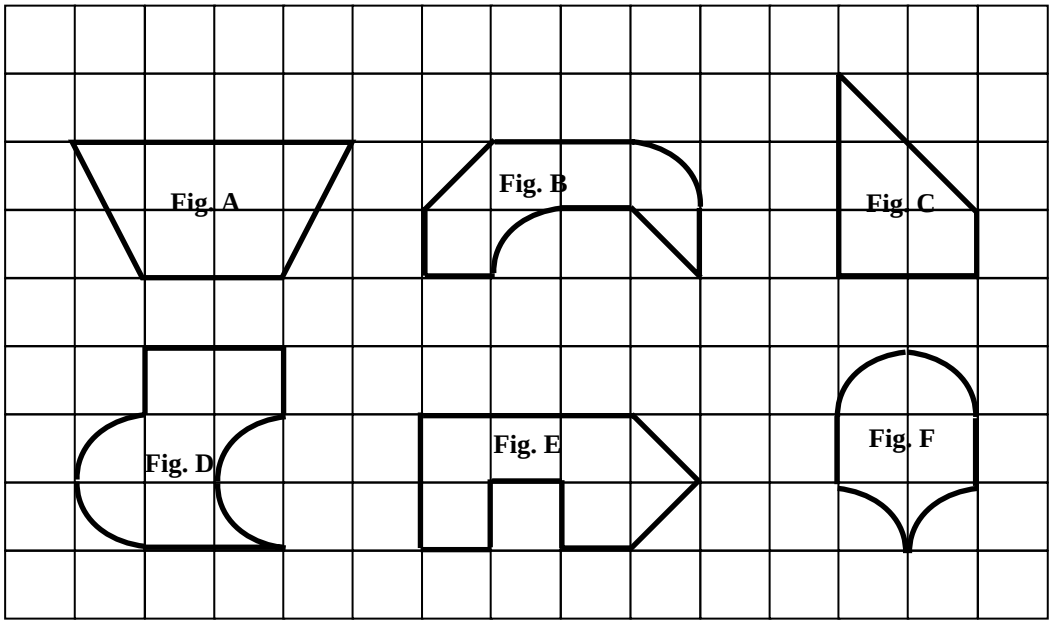


Figura 1

Todas as figuras acima podem ser "transformadas" em quadrados (fig. C e F) ou retângulos (fig. A, B, D e E), e o aluno poderá obter a área utilizando a fórmula da área do retângulo ou através da contagem de quadradinhos.

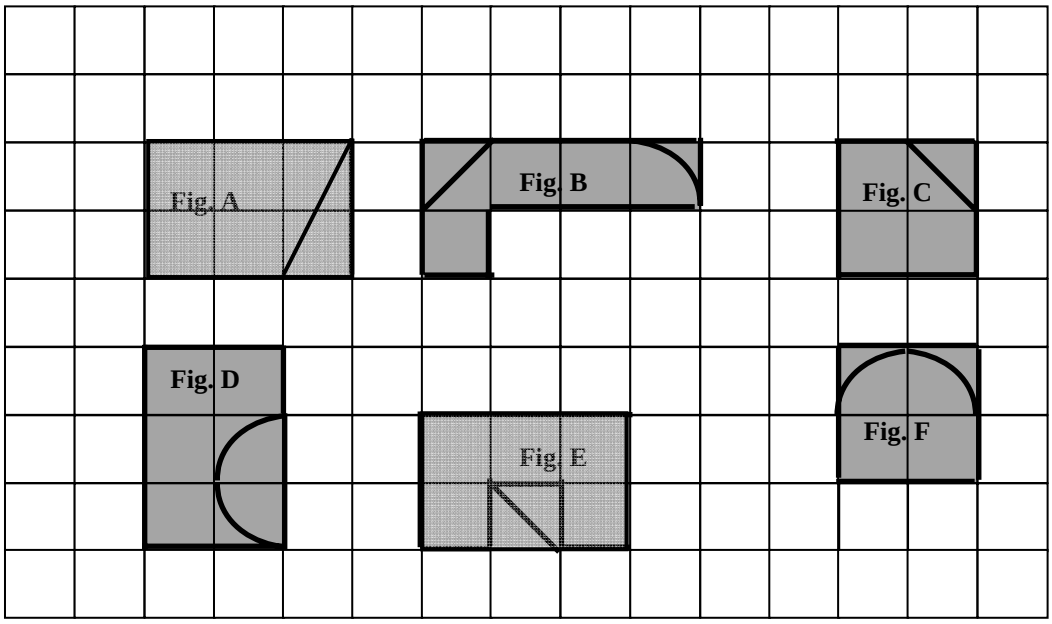


Figura 2

Chamamos a atenção para dois resultados relevantes que podem conduzir o aluno a interpretações equivocadas ao se deparar com questões envolvendo o conceito de área:

- a dificuldade em perceber (aceitar) que figuras diferentes podem ter mesma área; e
- a área de uma figura pode ser representada por números diferentes, dependendo da unidade de medida adotada.

No primeiro caso, está em evidência a diferença entre **área** e **figura**.

No exemplo abaixo, temos três figuras com mesma área.

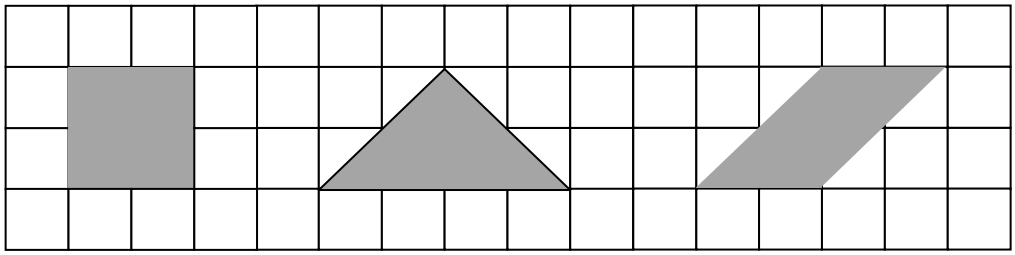


Figura 3

Cada uma das superfícies acima apresenta área igual a quatro quadradinhos (se tomarmos como unidade a área do quadradinho da malha).

Os alunos que não conseguem perceber a equivalência entre as áreas das figuras acima mobilizam uma "*concepção forma*" na qual a área está ligada à superfície e suas características variam de acordo com a variação da superfície.

No segundo caso, exemplificamos uma situação em que a mesma área pode ser expressa de, pelo menos, três maneiras diferentes, considerando a unidade de medida unitária.

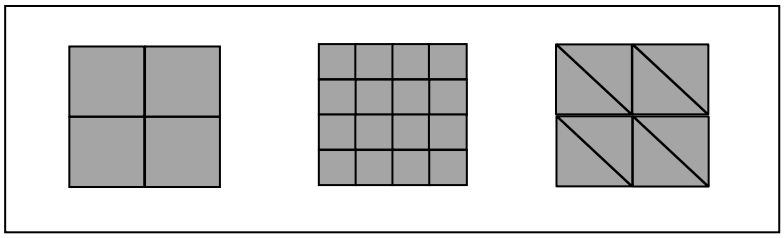


Figura 4

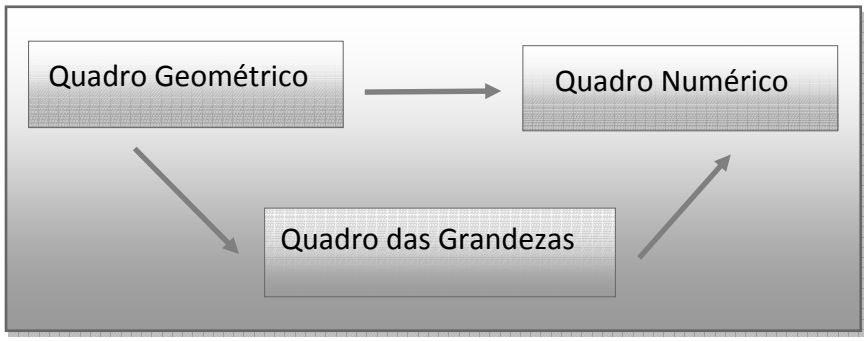
No primeiro quadrado, a área da figura corresponde a 4 (considerando a área de um quadrado como unidade), no segundo 16 (considerando a área de um quadradinho como unidade) e o terceiro 8 (considerando a área de um triângulo como unidade). Para alguns alunos, a segunda figura possui a maior área, pois consideram a área um número. Como podemos perceber o que muda em cada um dos quadrados apresentados não é a área e sim a unidade utilizada para medir esta área. Os valores atribuídos em cada caso são proporcionais à unidade de medida considerada.

Percebemos que apesar do tempo (mais de 20 anos) os estudos realizados por Douady & Perrin-Glorian (1989), apontam para erros e dificuldades ainda hoje percebidos por pesquisadores com relação aos alunos brasileiros. Melo e Bellemain (2008), apontam as mesmas dificuldades com relação às concepções geométricas e numéricas.

> Nossos resultados confirmam a pertinência da análise de Douady & Perrin-Glorian, (1989), Balacheff (1989) e Bellemain (2004): alguns erros cometidos pelos alunos podem ser explicados como manifestação de concepções geométricas e numéricas e revelam a falta da compreensão pelos alunos da área e do perímetro como grandezas (MELO e BELLEMAIN, 2008).

1.1.1 A área como grandeza

Na tentativa de superar os entraves e erros cometidos por alunos no ensino e aprendizagem de área, Douady e Perrin-Glorian (1989), propõem o estudo da área como grandeza. Nessa proposta, adotam uma organização conceitual para a área em três quadros: o *geométrico*, o *numérico* e o das *grandezas*.



Quadro 1

O quadro geométrico é constituído por superfícies planas; o quadro numérico é formado pelas medidas das superfícies planas (números reais positivos); e o quadro das grandezas é composto por classes de equivalência de superfícies de mesma área.

Considerar o estudo da área como grandeza consiste em estabelecer distinções entre área e figura (superfície), área e número (valor numérico atribuído à medida da área pertencente ao conjunto dos números reais e positivos).

No trabalho desenvolvido por Douady e Perrin-Glorian (1989), ressaltamos duas de suas hipóteses:

- *o desenvolvimento, no ensino, do conceito de área enquanto grandeza permite aos alunos estabelecer as relações necessárias entre os quadros geométrico e numérico*;
- *uma identificação precoce entre grandezas e números favorece o amálgama de diferentes grandezas (no caso do estudo mencionado, comprimento e área).*

Essas hipóteses reforçam a necessidade de inter-relação entre os aspectos geométricos, aqueles propriamente das grandezas e os numéricos, no estudo das grandezas geométricas e suas medidas.

> É comum em matemática identificar áreas e medidas através da escolha de uma unidade e reter apenas dois pólos: superfície e número. Este é o ponto de vista geralmente adotado no ensino. Nessas condições, a área é um invariante não da superfície, mas do par (superfície, unidade): para uma superfície fixa, a área considerada como número depende da escolha da unidade. Isso é legítimo se não temos a intenção de mudar a unidade, mas é um ponto de vista difícil de ser mantido se queremos nos ocupar de superfícies materiais e se desejamos que a área seja um invariante da superfície e apenas dela (DOUADY E PERRIN-GLORIAN, 1989).

As medidas permitem associar diversas grandezas ao conjunto dos números reais não negativos, resultado de grande relevância sob o ponto de vista dos modelos matemáticos.

1.1.2 Algumas pesquisas que adotam a área como grandeza

Os estudos da área como grandeza propostos por Douady e Perrin-Glorian (1989), realizado na França, inspiraram outros trabalhos com foco no ensino e aprendizagem da área.

Baltar (1996) desenvolveu pesquisas utilizando análise de avaliações de desempenho de alunos franceses e de resultados de pesquisas em Educação Matemática (como as de Douady e Perrin-Glorian, 1989). Em suas pesquisas, a autora destaca alguns erros cometidos por alunos e que podem dificultar a construção do conceito de área, tais como: o amálgama entre área e perímetro; uso inadequado de unidades de medidas (cm para área e cm^2 para perímetro) e o emprego indevido de fórmulas (generalização de fórmulas em situações nas quais não são válidas, como, área = perímetro x 2, ou área = soma dos lados).

Chiummo (1998) propõe uma seqüência didática para o ensino-aprendizagem do conceito de áreas e utiliza como referência os trabalhos de Douady & Perrin-Glorian (1989) e de Baltar (1996) que consideram o estudo da área enquanto grandeza. A autora fez um levantamento das concepções de alunos (por meio de um pré-teste) e professores (com base em um questionário) sobre o conceito de área e perímetro. O foi realizado com 66 alunos de duas turmas da 6ª série do ensino fundamental de uma escola municipal do Estado de São Paulo. As atividades foram formuladas em papel branco, outras em malha quadriculada. A pesquisadora destaca algumas conclusões com relação ao pré-teste.

- O conceito de área e perímetro é introduzido por meio de fórmulas, sem uma reflexão progressiva sobre os mecanismos utilizados ou ladrilhamento, composição e decomposição;
- Os alunos apresentam muita dificuldade em resolver problemas quando as figuras utilizadas não são usuais, ou seja, não é possível calcular de maneira direta utilizando fórmulas;
- O papel quadriculado não foi utilizado corretamente em algumas questões, os alunos confundiam o contorno com a área;
- As questões em que os alunos resolveram corretamente por meio de fórmulas, foram realizadas mecanicamente;
- Os alunos não diferenciam os conceitos de área e perímetro;
- Os alunos apresentaram dificuldade em perceber a diferença entre superfície e área.

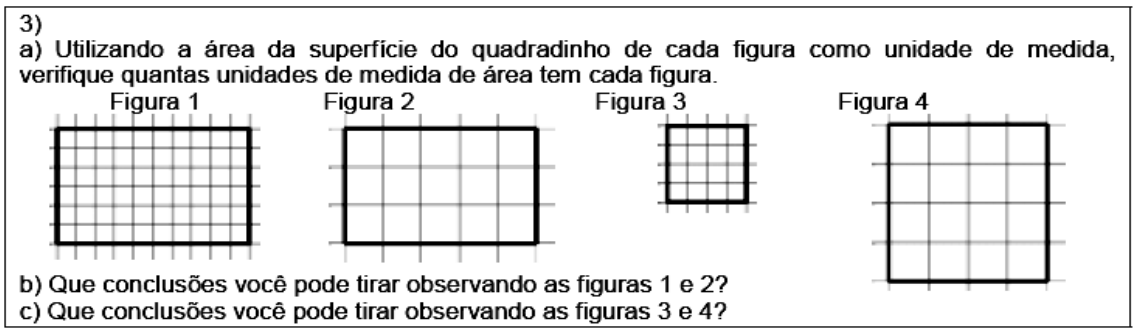
Diante dessas conclusões, a pesquisadora sugere um trabalho direcionado para o aperfeiçoamento de professores com atividades utilizando o pontilhado, o ladrilhamento e posteriormente a composição e decomposição. O objetivo é levar o aluno à construção de fórmulas pela necessidade do cálculo de área de figuras usuais e não por um processo mecânico com ênfase na memorização.

Com relação à construção do conceito de área, Bellemain e Lima (2002) destacam três situações que dão sentido ao conceito de área: situações de *comparação*, de *medida* e de *produção* de superfícies. Os autores trazem uma reflexão sobre a relação entre comparação e medida. Para os pesquisadores ao afirmarmos que medir grandezas significa *"estabelecer uma comparação entre elas"*, não estamos admitindo, inicialmente, a possibilidade de compararmos grandezas de mesma espécie sem medi-las. Por exemplo, podemos pedir para que dois alunos digam qual deles mora mais perto da escola. Nesse caso não precisam medir as distâncias, mas podemos compará-las, e estabelecer uma relação de maior, menor ou igual.

Em nossa pesquisa, utilizamos situações de medida em malhas quadriculadas. Acreditamos que os procedimentos que são privilegiamos na malha com relação ao cálculo da área, contribuem no processo de compreensão de fórmulas.

Facco (2003) propõe uma sequência didática que privilegia decomposição e composição de figuras planas. As atividades são formuladas em papel branco, malhas quadriculadas (com dois quadriculados diferentes), malha triangular. O objetivo da pesquisa é estudar fenômenos que interfiram no processo de ensino-aprendizagem do conceito de área. Para tanto, um dos aportes teóricos é o estudo da área como grandeza. A pesquisadora chama a atenção para as atividades propostas nos livros didáticos que, em geral, introduzem o conceito de área como número associado a uma superfície e priorizam seu cálculo por meio de fórmulas.

Apresentamos a seguir uma atividade proposta em sua pesquisa e os resultados obtidos que tinha por objetivo fazer com que os alunos percebessem à que mudança na unidade utilizada para medir a área não acarreta alteração na área e que o mesmo número pode representar áreas diferentes.



Quadro 2: Facco 2003, p.67.

Com relação às figuras 1 e 2, 44% dos alunos (32 alunos) disseram que possuíam o mesmo tamanho e uma das justificativas que explicitam o raciocínio do aluno foi a seguinte "*se fizer mais divisões as figuras ficarão iguais"*.

SITUAÇÃO: respostas	SIM (%) (Resposta correta)	NÃO (%)
Fig.1 e 2 têm o mesmo tamanho	44	50
Fig.1 e 2 têm unidades de medidas diferentes.	59,5	31,5
Fig. 3 e 4 têm tamanhos diferentes	62,5	31,5
Fig. 3 e 4 têm a mesma quantidade de unidade de medida com superfícies diferentes	37,5	56,5

Quadro 3: Facco 2003, p. 69.

A dificuldade que alguns alunos apresentaram em resolver a questão fornece indícios de concepções numéricas que precisam ser trabalhadas de maneira a permitir que o aluno dissocie a área do número que ela representa.

Uma das hipóteses validadas na pesquisas de Facco (2003) é que o uso de uma sequência de atividades, voltada à composição e decomposição de figuras planas para alunos da 5ª série (6º ano) do ensino fundamental, facilita o processo de ensino-aprendizagem do conceito de área.

Um elemento que julgamos ser relevante para o processo de ensino e aprendizagem do conceito de área (e de outros conteúdos) é a ideia de variável didática proposta por Guy Brousseau, na Teoria das Situações Didáticas.

Santos (2005) apresenta uma reflexão pertinente para o uso de algumas variáreis didáticas na resolução de problemas envolvendo área do paralelogramo. Um das variáveis destacada na pesquisa foi a *posição relativa dos lados do paralelogramo*, com os seguintes valores: um dos lados na posição horizontal, vertical ou ambos na posição oblíqua.

> A identificação de variáveis didáticas é fortemente imbricada com o estudo das dificuldades que os alunos encontram na resolução dos problemas e das respostas corretas ou erradas que fornecem. Da mesma forma, os objetivos de aprendizagem de uma situação problema são intrinsecamente ligados aos valores das variáveis. É, portanto, necessário conhecê-las para otimizar as aprendizagens que estão realmente em jogo" (SANTOS 2005, p. 41).

A pesquisadora investigou, em uma coleção de livros didáticos para séries iniciais do ensino fundamental (5ª a 8ª série), possíveis abordagens da área do paralelogramo. O trabalho também destaca procedimentos utilizados por alunos de uma 8ª série (9º ano) ao resolverem problemas envolvendo o mesmo tema. Os sujeitos da pesquisa foram 21 alunos da 8ª série de uma escola pública da cidade do Recife. A autora chama a atenção para o uso

descontextualizado em que o conceito de área está inserido. O desenvolvimento de atividades envolvendo o conceito de área é muitas vezes focado em procedimentos e fórmulas de maneira mecânica.

> Frequentemente, o conceito é apresentado ao estudante de forma pronta e acabada, desvinculado de qualquer contexto. É o caso, por exemplo, do professor que, ao ensinar a maneira de calcular a área do paralelogramo, apresenta verbalmente a fórmula: "*a área do paralelogramo é a base vezes a altura"*. Desse modo, deixa de valorizar a invariância da área com relação à escolha do lado tomado como base e de apresentar situações nas quais tal fórmula poderia ser aplicada. Neste caso, do aluno é exigido apenas o conhecimento e a aplicação, geralmente mecânica, da fórmula, em exercícios artificiais (SANTOS, 2005, p. 31).

As atividades propostas (6 no total) para os alunos da 8ª série apresentavam situações de comparação de áreas, medidas aproximadas, produção de figura com mesma área e mesmo perímetro, cálculo direto através de fórmulas, determinação de comprimento da altura dados apenas valores, sem a figura. Numa análise global, com relação ao cálculo da área do paralelogramo, o erro mais frequente foi o uso de fórmulas erradas. Outro erro detectado foi a omissão ou uso inadequado de unidades de medida ao utilizarem régua graduada. Esses erros podem ser associados a indícios de concepções numéricas, visto que o relevante no caso é a existência do cálculo.

1.1.3 A medida da área de superfícies planas

A ideia intuitiva que existe ao comparar duas grandezas para determinar uma relação de maior, menor ou igual, conduz ao aperfeiçoamento do processo de medir, muitas vezes restrito à atribuição de valores numéricos.

Os PCN (Brasil, 1997) destacam que a ideia de medida tem sua origem no procedimento de comparação de grandezas de mesma natureza.

> A comparação de grandezas de mesma natureza que dá origem a ideia de medida e o desenvolvimento de procedimentos para o uso adequado de instrumentos, tais como balança, fita métrica e relógio, conferem a este conteúdo um acentuado caráter prático (BRASIL, 1997, p. 79).

Os PCN (Brasil, 1998) propõem que no 3º ciclo sejam contempladas situações de medida com a ideia de comparar quantas vezes uma medida cabe dentro de outra.

> No estudo dos conteúdos referentes a Grandezas e Medidas nos terceiro e quarto ciclos é preciso retomar as experiências que explorem o conceito de medida. Por exemplo, para medir o comprimento de um objeto o aluno precisa saber quantas vezes é necessário aplicar uma unidade previamente escolhida nesse objeto, ou seja, executar duas operações: uma geométrica (aplicação da unidade no comprimento a ser medido) e outra aritmética (contagem de quantas unidades couberam). Os mesmos procedimentos são utilizados para obter áreas e volumes. Evidentemente, essa constatação somente será percebida em situações em que as medidas são acessíveis a essas comparações e contagens (BRASIL, 1998, p.129).

O uso da malha quadriculada como recurso didático explora esta ideia a partir do procedimento de contar quadradinhos.

O documento reforça ainda a necessidade de utilização de procedimentos que favoreçam a compreensão das ideias envolvidas, como a obtenção da medida da área através da composição e decomposição de figuras cuja área eles já sabem calcular (recortes e sobreposição de figuras) por procedimentos de contagem (papel quadriculado, ladrilhamento), por estimativas e aproximações (BRASIL, 1998, p. 131).

Para Chamorro Plaza e Belmonte Gómez (2000, *apud* Perez, 2008), *grandezas* são consideradas e percebidas como atributos ou propriedades de coleção de objetos, o processo de medição de uma grandeza consiste em compará-la diretamente através dos sentidos ou indiretamente utilizando instrumentos adequadamente.

No procedimento de comparar duas superfícies para determinar qual delas “ocupa mais lugar no plano”, destacam-se duas ideias centrais: a primeira é a construção de uma função-área, que associa cada superfície a um número e o processo de comparar superfícies planas restringe-se a *comparar números*; a segunda refere-se à escolha de uma superfície unitária arbitrária, a partir da qual a medição da área limita-se a verificar *quantas vezes* a superfície unitária cabe na figura.

O cálculo da área utilizando malhas quadriculadas auxilia no processo de medição posto que a área é obtida ao comparar a unidade (geralmente o quadradinho) com a superfície a ser medida: quantas unidades cabem na superfície?

As figuras a seguir (quadrado, triângulo e paralelogramo) possuem a mesma área, pois todas são formados por 2 (dois) triângulos congruentes.

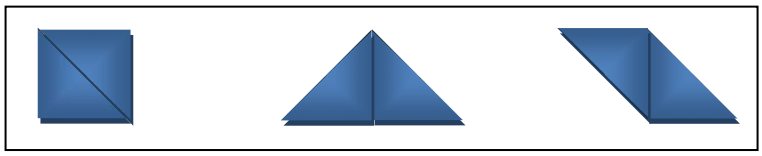


Figura 5

Na figura abaixo para obter a medida da área de **A,** tomando o quadradinho **u** como unidade, basta fazer a contagem de quadradinhos.

Na figura **B,** o procedimento de contar quadradinhos não é suficiente, dada a impossibilidade de ladrilhamento utilizando apenas quadradinhos iguais a **u**.

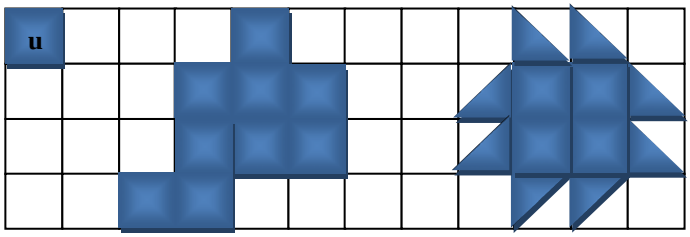


Figura 6 A **Figura 6 B**

Chamamos a atenção para a distinção entre a ***área do quadradinho*** e o ***quadradinho como unidade de área***. A compreensão de que a área do quadradinho não depende de sua "forma" e sim da região que este ocupa, contribui para a percepção de que dois triângulos possuem a mesma área que um quadradinho.

Para efeito didático utilizamos o ***quadradinho u*** como unidade de medida, no entanto o significado é o da ***área do quadradinho u***.

Ao iniciar a construção de um modelo de estrutura matemática do conceito de área de superfícies planas, vamos associar o termo **superfície** a um subconjunto limitado do plano euclidiano. A estrutura que descreveremos a seguir foi definida por Douady e Perrin-Glorian (1989), e adotada em outros trabalhos como os de Baltar (1996), Duarte (2002) e Bellemain e Lima (2002). Uma de suas hipóteses de pesquisa estabelece a necessidade de construir a área como grandeza autônoma, distinguindo *área e superfície;* e *área e número*. O objetivo dessa distinção é definir uma função medida que associe superfícies a números reais positivos.

Primeiro determinamos uma **função-medida** definida em um conjunto **S** de superfícies com valores no conjunto dos números reais não negativos. Essa função apresenta três propriedades fundamentais:

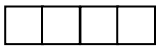
- **Positividade:** se A é uma superfície com interior não vazio, então f(A) > 0;
- **Aditividade:** se as superfícies A e B possuem no máximo pontos de sua fronteira em comum, então f(A∪B) = f(A) + f(B);

- **Invariância por Isometrias:** se uma superfície A é transformada em outra superfície B, de maneira que dados dois pontos quaisquer de A, suas distâncias permanecem as mesmas em B, então f(A) = f(B)

Considerar a área como grandeza corresponde a tomar a área como classe de equivalência de superfícies de mesma medida.

1.2 Pesquisas que utilizam malhas quadriculadas no ensino-aprendizagem de área

Destacamos algumas pesquisas que utilizaram malhas quadriculadas em atividades envolvendo área de figuras planas.

Gomes (2000) em seu estudo investiga a evolução de conhecimentos de alunos da 6ª série (7º ano) do ensino fundamental a respeito do conceito de área numa sequência didática. A pesquisa foi realizada numa escola da rede particular de ensino de São Bernardo do Campo, na Grande São Paulo. Utilizou como aporte teórico a *dialética ferramenta-objeto* e o *jogo de quadros* propostos por Douady. As atividades propostas utilizaram papel quadriculado de 0,5cm por 0,5cm. A unidade de área apresentada foi um retângulo de 1cm^2 de área, como mostra a figura  = 1cm^2. Essa unidade deveria ser utilizada pelos alunos para desenhar as figuras solicitadas nos problemas. Era solicitado que os alunos desenhassem retângulos com área medindo 1/2 cm^2, 1/4 cm^2, 2 ½ cm^2, 16 cm^2 e 20 cm^2. A tabela abaixo mostra os percentuais de respostas dos alunos quando solicitados a desenhar 2 (dois) retângulos com área igual a 2 cm^2.

Produção	Percentual		
	Área correta	Área incorreta	Total
Desenho de dois retângulos não-congruentes.	9,09%	9,09%	18,18%
Desenho de dois retângulos congruentes.	36,36%	13,64%	50%
Desenho de um retângulo.	9,09%	22,73%	31,82%
Total	54,54%	45,46%	100%

Quadro 4: Gomes 2000, p. 65.

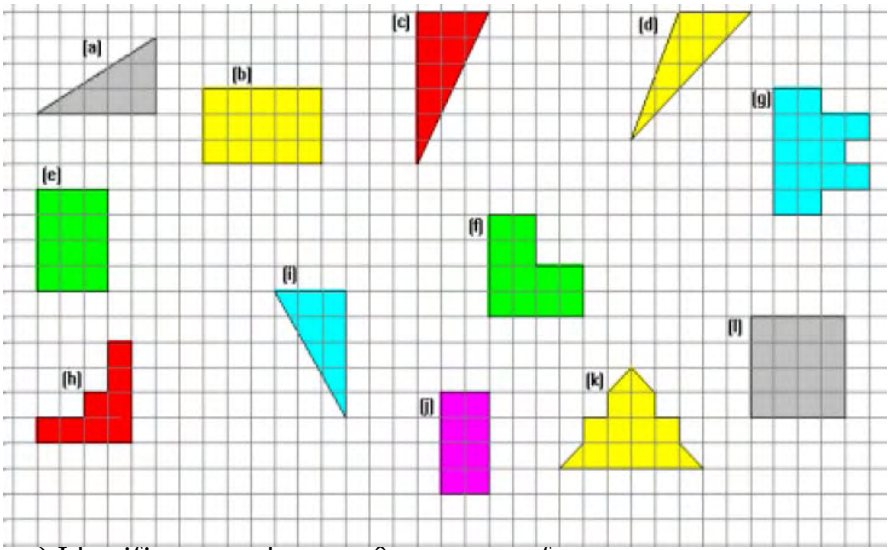
A pesquisadora conclui que o trabalho com outras unidades de área para o cálculo da área do retângulo apresentou um avanço significativo no tocante aos conhecimentos relativos ao conceito de área.

Facco (2003) propõe em sua pesquisa uma sequência de atividades voltadas ao processo de decomposição e composição de figuras planas com alunos da 5ª série (ou 6º ano), contribuindo para o ensino-aprendizagem do conceito de área enquanto grandeza. As atividades propostas são realizadas em papel branco, quadriculado e triangular.

A atividade abaixo solicitava dos alunos a identificação de figuras com a mesma forma (triangular e retangular) e também se a área dependia da forma, foi obtido um resultado de 56% de acerto para o primeiro grupo de figuras de mesma forma, alguns alunos acharam que já haviam respondido a questão e não perceberam que havia outros grupos de figuras de mesma forma. A palavra "forma" foi utilizada na pesquisa com o sentido usual não no sentido matemático: ter mesma forma significa pertencer a uma mesma categoria de figuras.

Apenas 5 dos 32 alunos responderam os três itens completos e corretos. As figuras são mostradas na malha a seguir.

Observe as figuras



a) Identifique aquelas que têm a mesma forma.
b) Identifique as que têm a mesma quantidade de papel.
c) A área depende da forma da figura? Dê um exemplo.

Figura 7

Para o item que solicitava a indicação de figura que possuíam a mesma área o índice de acerto foi de 97 %, alguns alunos teciam o seguinte comentário: "*é só contar os*

quadradinhos de todos e ver quem tem resposta igual”. Outra atividade solicitava que o aluno mostrasse que as figuras apresentadas no papel quadriculado possuíam a mesma área.

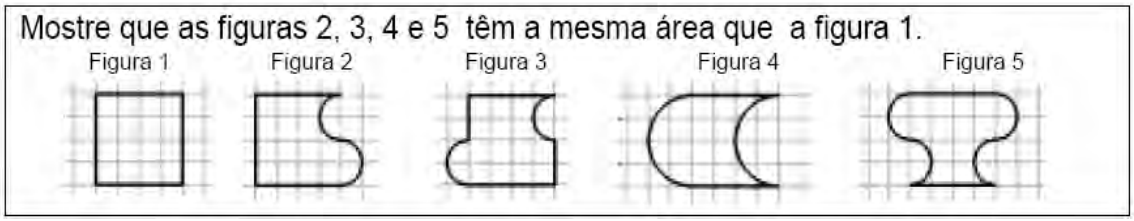


Figura 8

A pesquisadora em sua análise apresenta algumas respostas, dadas pelos alunos, nas quais, o procedimento utilizado foi o de composição e decomposição das figuras.

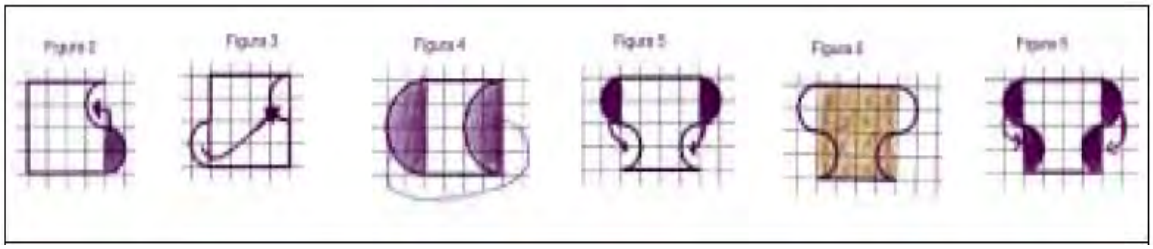


Figura 9

A pesquisadora constatou no início da pesquisa um grau relevante de dificuldade dos alunos em diferenciar área e perímetro. Uma das hipóteses formuladas no estudo foi.

> Uma proposta de ensino-aprendizagem do conceito de área como grandeza, voltado à reconfiguração de figuras planas por meio da decomposição e composição dessas figuras, facilitaria o processo aprendizagem-aprendizado do aluno como também subsidiaria o professor em suas escolhas didáticas para o ensino de conteúdos relacionados à área (FACCO, 2003, p. 138).

Embora os baixos índices de acertos em questões consideradas mais complexas nas quais a percepção com relação maneira de decompor e recompor a figura, a autora conclui que o caminho de resolução dos problemas foi se tornando cada vez mais fácil, confirmando a hipótese formulada.

Os trabalhos de Silva (2004), Santana (2006) e Barros (2007) fazem uma análise sobre as atividades que envolvem os conceitos de área e perímetro em alguns livros didáticos e apresentam indicações que podem revelar as escolhas didáticas e os direcionamentos dados por alguns profissionais.

Santana (2006) chama a atenção para a utilização de recursos didáticos e a criação de uma proposta pedagógica que justifique seu uso. Realiza um estudo sobre a utilização de alguns recursos apresentados nos livros didáticos do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental (antigas 5ª a 8ª séries). Segundo a pesquisadora, o uso das malhas quadriculadas favorece a construção do conceito de medida. Os conceitos de área e comprimento podem ser introduzidos de maneira informal utilizando unidades de medidas não padronizadas.

> As malhas podem aparecer articulando-se com o conceito de área na exploração de unidades não padronizadas, possibilitando a composição de figuras com os lados podendo coincidir, ou não, com as linhas das malhas no procedimento de representação de figuras em malhas quadriculadas. Alguns de seus contornos, que não coincidem com as linhas dessas malhas, permitem realizar a compensação das unidades (quadradinhos) que cabem na figura (SANTANA, 2006, p. 93).

A pesquisadora ressalta que nas 6 (seis) coleções analisadas, a malha estava presente em todas; e dos 3 (três) recursos didáticos investigados (malha, Tangram e Poliminós), a malha é o mais utilizado.

> As malhas podem servir, também, como um facilitador, para a obtenção da fórmula algébrica da área de algumas figuras, como, por exemplo, na figura do retângulo, representada em uma malha quadriculada, a contagem das unidades, organizadas em linhas e em colunas, pode vir a colaborar com a observação de que a área pode ser calculada pelo produto das medidas dos lados (SANTANA, 2006, p. 95).

Buratto (2006) apresenta uma reflexão sobre a formação inicial de professores de Matemática e o ensino-aprendizagem do conteúdo de áreas de figuras geométricas planas e realiza sua pesquisa com 30 alunos do 5º semestre de um curso de licenciatura.

Destacamos a seguir, uma das atividades proposta pela pesquisadora em que utiliza como recurso didático a malha quadriculada.

Problema 6:

Se a área de um quadradinho é 1cm², calcule a área da figura: (não esqueça de escrever como chegou na resposta)

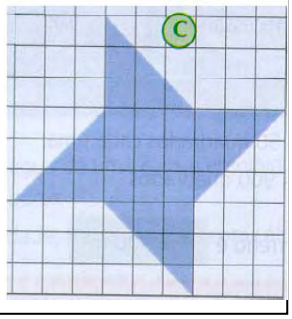


Figura 10

Percebemos que o fato de a atividade ser realizada na malha quadriculada favorece o procedimento de contar quadradinhos (aspecto numérico) e a intencionalidade do uso da fórmula (aspecto algébrico) através decomposição composição da figura (aspecto geométrico) formando outras figuras cuja fórmula da área seja conhecida, como mostra os exemplos de dois dos protocolos abaixo.

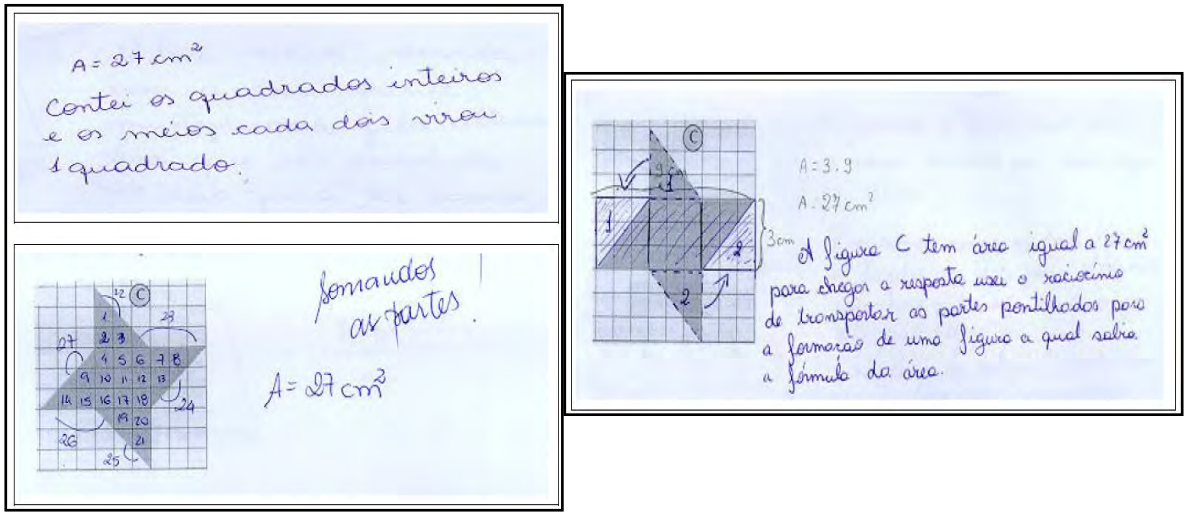


Figura 11

Na atividade a seguir, a autora privilegia a decomposição e composição da figura para posteriormente utilizar a contagem de quadradinhos. Observamos ainda que o cálculo da área da figura sem o auxílio da malha seria dificilmente obtido, posto que ela é formada por segmentos de reta e arcos de circunferências, não possui simetria. O recurso da malha favorece a visualização de que partes da figura podem ser reorganizadas formando quadradinhos inteiros, obtendo assim a área utilizando posteriormente a contagem de quadradinhos.

Atividade 3: Calcule a área da figura desenhada sobre uma malha centimetrada. Explique sua resposta.

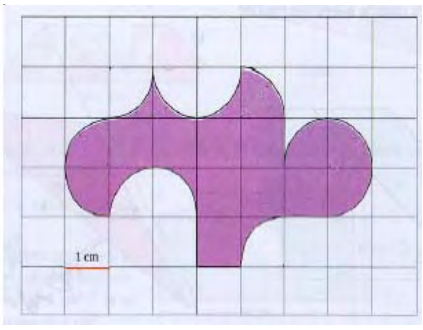


Figura 12

Este o procedimento de contar quadradinhos e a percepção de que a medida da área de dois triângulos é a mesma que a de um quadradinho, são de grande relevância para a na compreensão do conceito de área enquanto grandeza e constituem importante elemento para o estabelecimento de fórmulas de figuras usuais.

1.3 Contribuições da malhas quadriculadas como recurso didático no cálculo da área de figuras planas

Nos estudos de Douady e Perrin-Glorian (1989) o papel quadriculado destaca-se por auxiliar na comparação de superfícies e obtenção do cálculo através da contagem de quadradinhos.

> O trabalho sobre papel quadriculado tem por propósito mobilizar uma concepção de área medida pelos números de quadrados. Duas superfícies $\mathbf{S_1}$ e S_2 têm a mesma área quando elas são constituídas do mesmo número de quadrados, podendo ser sobrepostos ou não. Se $\mathbf{S_1}$ contém menos quadrados que $\mathbf{S_2}$, a área de $\mathbf{S_1}$ é menor que a área de $\mathbf{S_2}$ (DOUADY E PERRIN-GLORIAN, 1989).

Além da contagem outro procedimento bastante utilizado no cálculo de área em malhas quadriculadas é a decomposição/composição. Dependendo da disposição da figura, sem a malha não seria possível determinar sua área, como é o caso daquelas que não possuem lados apoiados na linha da malha.

Como obter a área de uma figura não usual (não há uma fórmula para calcular diretamente) em que não é dada nenhuma medida (lados, altura, etc.)?

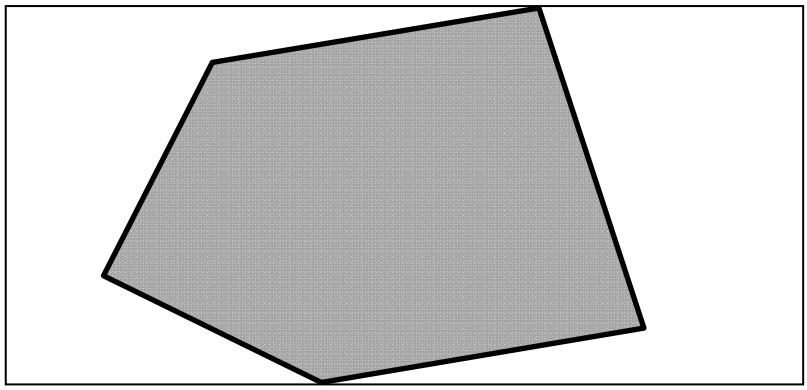


Figura 13

Ao posicionar a figura na malha quadriculada as medidas passam a ser dadas em função dos comprimentos dos lados dos quadradinhos.

Observe a mesma figura na malha quadriculada.

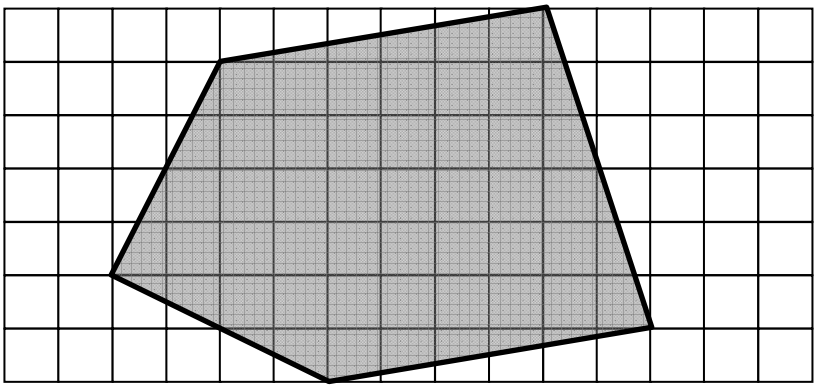


Figura 14

Mesmo disposta na malha, a figura não possui nenhum de seus lados apoiados nas linhas da malha, isso dificulta bastante calcular a área. Mas será que é possível dividir a superfície em figuras em que a fórmula da área seja conhecida?

O quadriculado abaixo mostra uma possibilidade onde a figura original é subdividida em 4 (quatro) triângulos, com uma base e altura relativa conhecida, e 1 (um) retângulo. A área da figura original é a soma das áreas dos triângulos e do retângulo.

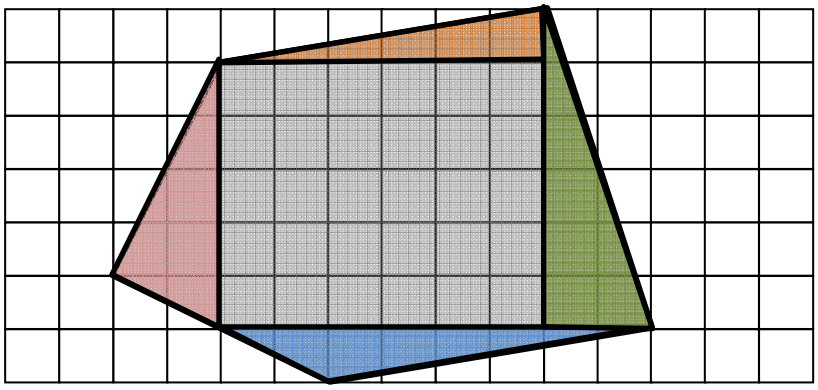


Figura 15

Os PCN (Brasil, 1998) indicam que o trabalho com a área de superfícies planas deve contemplar a noção da *medida de superfície* e de *equivalência de figuras planas*, para tanto deve contemplar o uso da composição e decomposição de figuras.

Mesmo utilizando o procedimento de decompor e recompor superfícies podemos nos deparar com figuras em que este procedimento não é suficiente. Como mostra a figura na malha a seguir. Qual é a área do triângulo disposto na malha?

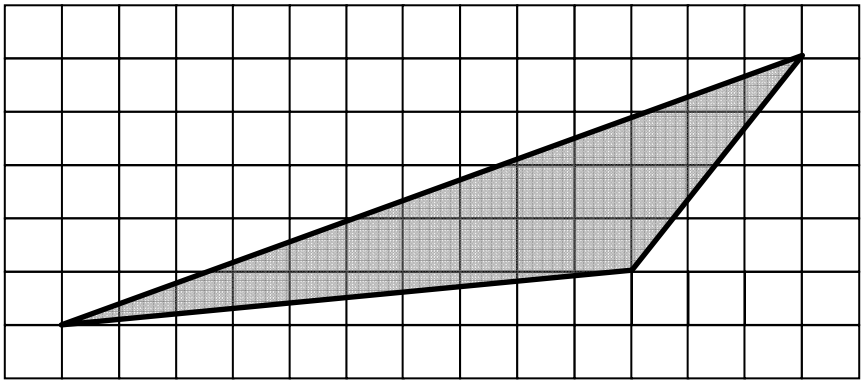


Figura 16

Neste exemplo, uma maneira de obter a área da figura é enquadrar a mesma no menor retângulo que pode ser formado que contenha totalmente a figura. O retângulo evidenciará triângulos e retângulos os quais poderemos calcular suas áreas facilmente, pois apresentam uma base e uma altura relativa identificadas. Depois calculamos a área do retângulo maior (contendo totalmente a figura) e em seguida, calculamos as áreas dos triângulos e retângulos. Finalmente, subtraímos da área do retângulo maior as áreas que não fazem parte da figura original. Observe as divisões na malha a seguir.

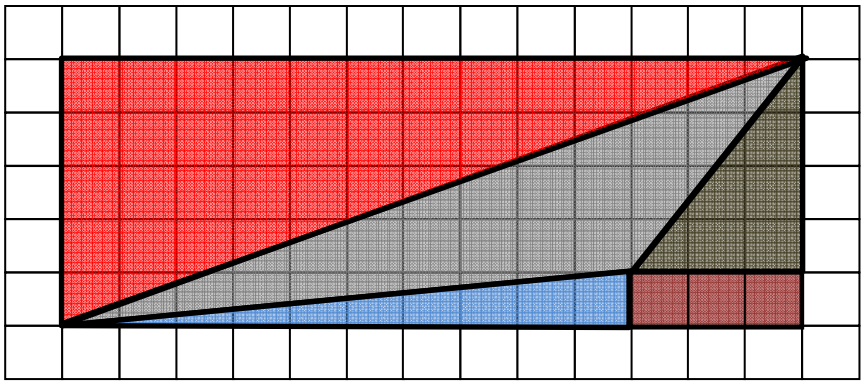


Figura 17

As áreas que não fazem parte da figura são formadas por 3 (três) triângulos e 1 (um) retângulo, que em geral, as fórmulas das áreas são conhecidas.

Nenhuma das pesquisas anteriores sejam trabalhos como os de Silva (2004), Santana (2006) e Barros (2007) que fazem uma análise sobre as atividades que envolvem os conceitos de área e perímetro em alguns livros didáticos ou estudos que envolvem a área de figuras

planas em atividades com malhas quadriculadas, como os de Chiummo (1998), Gomes (2000), Facco (2003) e Buratto (2006) apresentaram esta possibilidade de procedimentos para o cálculo da área na malha.

Na maioria das atividades envolvendo o cálculo de área de figuras planas na malha quadriculada, a medida da área, tomando a área do quadradinho como superfície unitária, são valores inteiros. Neste sentido, o campo de numérico fica praticamente restrito aos números naturais. A ampliação do campo numérico dos naturais para os racionais pode dar indícios de como os alunos enfrentam situações de cálculo com valores fracionários. Essa mudança também pode contribuir para que outras estratégias de cálculo sejam mobilizadas, sejam elas corretas ou não, possibilitando a identificação de entraves e dificuldades que podem não ocorrer quando os valores numéricos não inteiros.

Neste sentido, destacamos a relevância de investigar como os alunos lidam com problema em que as figuras não possuem lados apoiados nas linhas da malha e quando os valores numéricos utilizados para determinar a sua área encontram-se no campo dos números racionais.

No capítulo a seguir, destacamos essas e outras variáveis (e valores) utilizadas em nossa pesquisa.

2 VARIÁVEIS E VARIÁVEIS DIDÁTICAS

2.1 Breve estudo sobre Variáveis Didáticas

Na perspectiva da didática da matemática, a aquisição de conhecimentos depende essencialmente das características das situações nas quais os sujeitos são colocados.

Cada conhecimento matemático tem pelo menos uma situação que o caracteriza e o diferencia dos demais (BROUSSEAU, 2008).

Na tentativa de modelar o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos, Guy Brousseau desenvolveu a Teoria das Situações Didáticas – TSD. As *situações* nessa teoria são vistas como modelo de interação do sujeito com o meio. Esta teoria tem por objetivo estudar os fenômenos que interferem no processo de ensino e de aprendizagem da matemática, e propor um modelo teórico para a construção, análise e experimentação das situações didáticas. Além disso, a TSD busca caracterizar um processo de aprendizagem por uma sequência de situações reprodutíveis favorecendo modificações de um conjunto de comportamentos dos aprendizes.

Uma *situação didática* tem por objetivo conduzir o a adquirir um conhecimento determinado e se caracteriza pelo *milieu* (meio), e este, por sua vez, é organizado a partir da escolha dos valores das *variáveis didáticas* envolvidas na situação. Entendemos que as variáveis didáticas (e seus respectivos valores) constituem importantes ferramentas que auxiliam na análise das situações de aprendizagem. São consideradas variáveis didáticas aquelas nas quais, a alteração de seus valores proporciona modificações nas estratégias consideradas ótimas utilizadas pelo aluno, para resolver o referido problema. Quando a mudança dos valores destas variáveis é significativa dizemos que ocorreu um *salto informacional*, podendo originar uma mudança qualitativa nas estratégias pertinentes para resolver o problema. O termo variável didática na Teoria das Situações Didáticas proposta por Guy Brousseau pode ser entendido como aquela com a qual a mudança de valores provoca modificações nos procedimentos ótimos o que a torna um ponto importante no estudo de modelos de aprendizagem (ALMOULOUD, 2007).

Brousseau (2008) caracteriza as variáveis didáticas como um tipo particular de variável cognitiva em que o professor determina e controla por meio dos valores atribuídos a

essas variáveis. Dentre os valores escolhidos para uma determinada variável, existe ao menos uma estratégia ótima.

> Chamamos de *variável cognitiva* aquela que se encontra em uma situação tal que, pela escolha de valores diferentes, pode alterar o conhecimento ótimo. Entre as variáveis cognitivas, as *variáveis didáticas* são as que o professor pode determinar (BROUSSEAU, 2008, p. 35).

As figuras dispostas no quadriculado abaixo, apresentam valores diferentes para a variável *posição da figura com relação à malha*: todos os lados estão apoiados nas linhas da malha (fig. A); alguns lados apoiados nas linhas da malha (fig. B) e nenhum lado apoiado nas linhas da malha (fig. C).

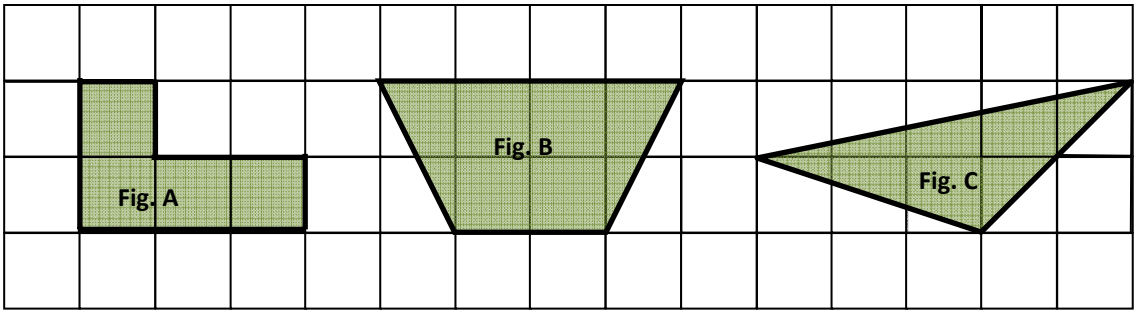


Figura 18

As estratégias ótimas também variam de uma figura para a outra. Na figura A, a área pode ser obtida através da contagem de quadradinhos. Nas figuras B e C, apenas a contagem não suficiente para determinar a área. Na figura B, é necessária a decomposição e recomposição de partes da figura e posteriormente utilizar a contagem. Na figura C, o aluno precisa enquadrar a figura num retângulo (de 5x2), calcular a área total e subtrair das áreas que não fazem parte da figura inicial. Ressaltamos que outros procedimentos também podem ser utilizados para calcular a área das figuras.

Embora o conceito de variável didática não tenha sido desenvolvido para pesquisas de cunho diagnóstico, consideramos que o estudo sistemático das variáveis e de seus valores também é pertinente e útil em estudos que têm por objetivo investigar os conhecimentos mobilizados pelos sujeitos e não sua evolução.

Santos (2005), em seu estudo sobre problemas envolvendo a área de paralelogramo, utilizou as seguintes variáveis:

- posição relativa dos lados (horizontal, vertical ou ambas na posição oblíqua);

- orientação dos lados de maior comprimento, tendo o paralelogramo que possui um dos lados na posição horizontal como referência;
- inclinação da figura (direita ou esquerda);
- existência da figura (presença ou ausência da figura);
- natureza das soluções (requer procedimento numérico e/ou algébrico, nenhum);
- dados fornecidos para a solução (apenas os dados necessários, existência de dados desnecessários, não são fornecidos dados imediatos);
- posição do lado tomado como base (horizontal, vertical, oblíqua);
- comprimento do lado tomado como base (maior ou menor comprimento),
- posição da altura traçada (interior ou exterior ao paralelogramo).

Santos e Bellemain (2007) destacam a importância da variável didática na categorização de problemas matemáticos.

> "... a variável didática é uma ferramenta importante na categorização dos problemas matemáticos a serem propostos aos alunos, na elaboração de problemas adaptados para desestabilizar regras de ação errôneas, na escolha de problemas que contribuam significativamente para a aprendizagem e na análise dos procedimentos de resolução mobilizados pelos alunos, inclusive nos erros cometidos" (SANTOS e BELLEMAIN, 2007).

BESSOT e COMITI (2009) consideram variáveis produzidas numa situação geral, as quais atribuem valores que vão caracterizar as variáveis fundamentais de interesse, ou seja, aqueles valores que alteram as características das soluções. Esses valores favorecem ou possibilitam algumas soluções e tornam complexas ou bloqueiam outras soluções. Algumas destas variáveis podem estar disponíveis para o professor avançar em seu planejamento (variáveis educacionais) e outras não estão disponíveis para o professor e seus valores são fixos (limitações do sistema de ensino).

Guy Brousseau, (1982a, *apud* BESSOT e COMITI, 2009), analisa a situação em termos de variáveis relacionadas com os procedimentos, um campo de problemas podem ser gerados a partir de uma situação alterando valores de certas variáveis que, por sua vez, estão mudando as características das estratégias custo (solução, validade, etc.), complexidade [...]. Apenas mudanças que afetam a hierarquia das estratégias são consideradas. As variáveis didáticas são relevantes pois escolhas pertinentes de seus valores num determinado momento podem causar ajustes e regulação da aprendizagem (Brousseau, 1982b).

Para Grenier (1988, *apud* Santos, 2005), essas variáveis constituem particularidades do problema que influenciam diretamente sobre as regras de resolução priorizadas pelo aluno, o

que provoca mudanças no status das respostas, ou seja, ao assumirem diferentes valores contribuem para o surgimento de novos procedimentos de resolução dos alunos.

Numa pesquisa de tipo diagnóstico é importante identificar variáveis, determinar quais valores pode assumir e que consequências pode haver sobre estratégias possíveis. Valores atribuídos a determinada variável podem conduzir o aluno a procedimentos corretos e/ou favorecer o aparecimento de conhecimentos fora de seus domínio de validade.

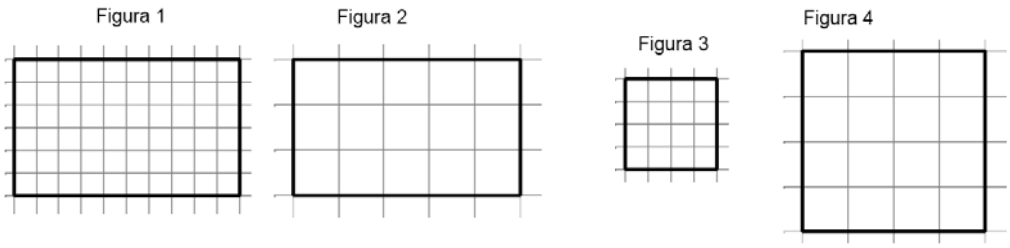
2.2 Exemplos de variáveis

Em nossa pesquisa elegemos algumas variáveis cujo papel, supomos ser fundamental para entendermos que procedimentos são privilegiados, e de que maneira a mudança nos valores destas variáveis pode favorecer o cálculo área de figuras planas e a compreensão da área como grandeza.

Pesquisas como as de Facco (2003) e Buratto (2006) utilizam o papel quadriculado em atividades envolvendo área de superfícies planas. Embora as variáveis não fossem foco dos estudos, destacaremos algumas e os valores atribuídos na atividade.

Do trabalho de Facco (2003) destacamos duas atividades em que ela utiliza tipos diferentes de malha.

Utilizando a área da superfície do quadradinho de cada figura como unidade de medida, verifique quantas unidades de medida de área tem cada figura.



Que conclusões você pode tirar observando as figuras 1 e 2?
Que conclusões você pode tirar observando as figuras 3 e 4?

Figura 19

Utilizando a área da superfície do triângulo da malha como unidade de medida, verifique quantas unidades de medida de área contém cada figura abaixo.

Figura 1 Figura 2 Figura 3

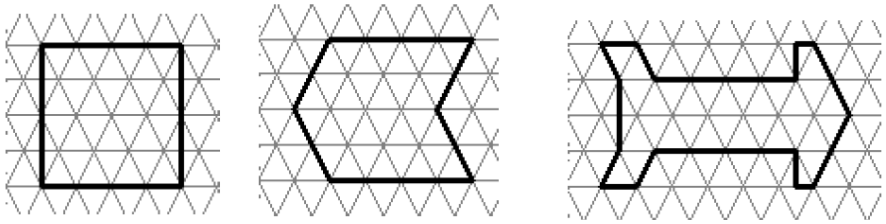


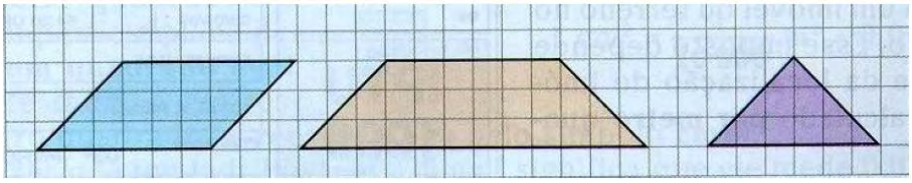
Figura 20

Na primeira atividade utiliza malha quadriculada de dois tamanhos diferentes (0,5 cm e 1 cm); na segunda, malha triangular. Ou seja, se considerarmos a variável *tipo de malha* dispomos de 3 três valores: quadriculada de 0,5 cm, quadriculada de 1 cm e triangular.

Na pesquisa de Buratto (2006) destacamos 3 (três) atividades.

1) Numa folha de papel quadriculado, considerando um quadradinho dessa folha como unidade de medida, desenhe polígonos de:
   1. área igual a 11 quadradinhos 2. área igual a 8,5 quadradinhos

2) Utilizando como unidade de medida de superfície a metade de um quadradinho da malha determine a área de cada polígono:
   E observando as figuras, o que você pode afirmar sobre as suas áreas?



3) Sem fórmula conseguiremos calcular a área dos polígonos abaixo? Como?
   Se considerarmos o cm^2 como unidade padrão, qual a área dos polígonos seguintes:

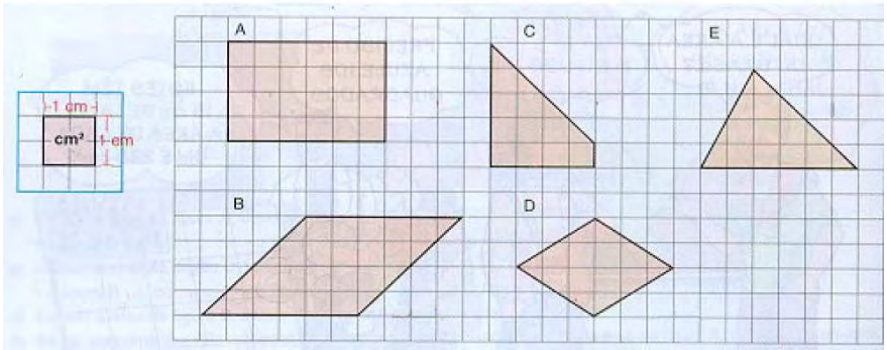


Figura 21

A variável que consideramos para exemplificar o uso é a *unidade de medida* para a qual destacamos três valores: um quadradinho, metade de um quadradinho e quatro quadradinhos.

Observamos que em todas as pesquisas citadas e que utilizaram a malha quadriculada no estudo da área de figuras planas, o preenchimento da figura permite visualizar as linhas da malha, ou seja, nenhuma figura apresenta *hachuramento* com a malha não-visível.

O uso da malha quadriculada favorece o procedimento de contar quadradinhos no cálculo da área, dentre outros. Será que este procedimento ainda prevalece no cálculo da área de um triângulo ou de uma figura não poligonal? E se a malha não for visível, ou seja, a figura for preenchida de maneira a não permitir a visualização dos quadradinhos, como o aluno poderá realizar a contagem?

O uso do papel quadriculado, nesses estudos, propicia, principalmente, procedimentos de contagem, decomposição e composição, e o uso de fórmulas. Alguns desses procedimentos são combinados, ou seja, o aluno utiliza inicialmente a decomposição/composição depois emprega fórmulas ou conta os quadradinhos.

Que tipo de variáveis, e seus respectivos valores, podem trazer contribuições relevantes para a mudança de procedimentos utilizados por alunos no cálculo de área de superfícies planas em malhas quadriculadas?

Vamos agora identificar outras variáveis e valores que consideramos relevantes em um processo diagnóstico, sobre a medida da área de superfícies dispostas em malha quadriculada. Observe as figuras na malha abaixo.

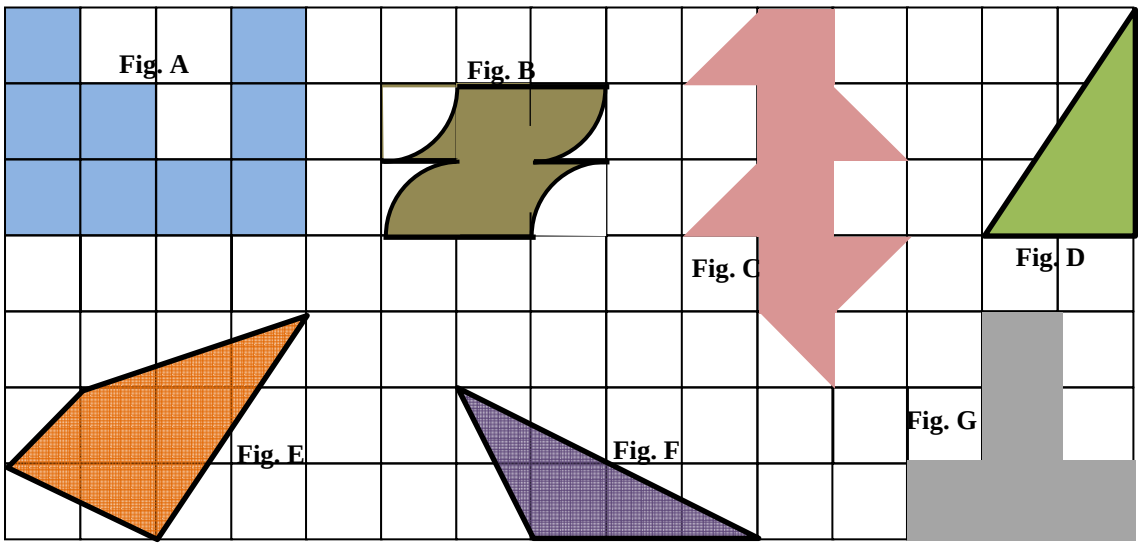


Figura 22

Com relação ao cálculo da área, qual (is) das figuras a (s) área(s) é obtida mais facilmente? Existe alguma que não é possível calcular a área? Qual delas o cálculo é mais trabalhoso? Que aspecto na figura dificulta mais o cálculo? Qual (is) das figuras a (s) dispomos de maior variedade de procedimentos para calcular a área?

As respostas para as perguntas acima podem levar a identificar variáveis cuja natureza pode ser didática ou não, estudar os diferentes valores que essas variáveis podem assumir e investigar os reflexos das mudanças de valores no processo de resolução dos problemas pelos alunos.

As figuras B, C, D e G são *hachuradas* e não permite visualizar a malha. Mas esse aspecto não impede que a área seja obtida. Ou seja, o tipo de preenchimento, se a malha é visível ou não apenas dificulta que o procedimento (a contagem, decomposição/composição, uso de formula) seja realizado de maneira direta, não o impossibilita.

Apenas as áreas das figuras A e G podem ser obtidas utilizando unicamente a contagem. Tomando a área do quadradinho como superfície unitária, todas as figuras, com exceção da C, possuem valores inteiros. O campo numérico dos números naturais não dá conta para calcular a área da figura C. No entanto, o fato da medida da área ser inteira ou fracionária, também não bloqueia o procedimento a ser utilizado, mas pode fornecer indícios de entraves na compreensão e/ou manipulação de valores fracionários.

As áreas das figuras B e C podem ser determinadas utilizando a decomposição/composição. As áreas das figuras D e F podem ser obtidas através do uso da fórmula. O que possibilita o uso direto da fórmula neste caso é o fato de serem figuras usuais de fórmula conhecida, e possuírem pelo menos um dos lados apoiados nas linhas da malha. O que não acontece com a figura E, por exemplo. Esta é a figura que exige um procedimento mais elaborado, visto que nenhum dos procedimentos utilizados anteriormente é suficiente para obter sua área. Isso é consequência principalmente da figura não possuir nenhum de seus lados apoiados na malha. Neste caso o procedimento indicado é o enquadramento da figura no menor retângulo possível que contenha toda a figura, calcular a área total e subtrair as áreas que não fazem parte da mesma. Este procedimento já foi detalhado no final do capítulo.

3 OBJETIVOS DA PESQUISA

3.1 Objetivo Geral

Fazer um estudo diagnóstico sobre os procedimentos utilizados por alunos do 6º ano do Ensino Fundamental na resolução de atividade envolvendo o cálculo de área de figuras planas em malhas quadriculadas e como a mudança no valor de algumas variáveis podem influenciar nesses procedimentos.

3.2 Objetivos Específicos

- ✓ Investigar as contribuições da malha quadriculada como recurso didático para o estudo da área como grandeza;
- ✓ Identificar os procedimentos utilizados por alunos do 6º ano do Ensino Fundamental na resolução de problemas de cálculo da área de figuras planas na malha quadriculada;
- ✓ Estudar a relação entre os valores assumidos pelas variáveis identificadas, o desempenho e os procedimentos de resolução empregados por alunos de 6º ano em malhas quadriculadas.

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

4.1 Situando a pesquisa e justificando nossas escolhas

O 6º ano do ensino fundamental configura uma das etapas em que há uma transição no processo de ensino e aprendizagem com relação ao estudo da área de figuras planas. O trabalho nos anos anteriores focava a ideia intuitiva de área. Nessa nova etapa o trabalho passa a ter um caráter mais formal, as unidades de medidas antes arbitrárias (palmo, palito, canudo, polegar, passos), dão vez a unidades padronizadas (cm^2, m^2). Destaca-se também o estabelecimento progressivo de fórmulas.

A BCC (Pernambuco, 2008) recomenda que a introdução de conceitos se faça progressivamente com a preocupação de não gerar dificuldades de aprendizagens.

Acreditamos o uso da malha quadriculada neste nível de escolaridade (6º ano) pode favorecer a compreensão do conceito de área como grandeza, principalmente através da decomposição/composição de figuras.

Nossa pesquisa foi dividida em quatro etapas:

- Construção e análise *a priori* do instrumento de pesquisa;
- Seleção das escolas e dos alunos a serem pesquisados,
- Aplicação e resolução do instrumento pelos alunos selecionados;
- Análise das respostas dos alunos e confrontação com a análise *a priori*.

A construção e análise *a priori,* foram desenvolvidas conjuntamente. O levantamento de alguns questionamentos subsidiou a elaboração do teste.

Quais os procedimentos de resolução possíveis para problemas de cálculo de área de figuras na malha quadriculada?

Em nossa revisão de literatura consideramos vários estudos que envolviam a área de figuras planas em atividades com malhas quadriculadas, como os de Chiummo (1998), Facco (2003) e Buratto (2006). Nessas pesquisas os procedimentos identificados nas resoluções dos alunos foram contagem, decomposição e composição e uso de fórmulas.

Chiummo (1998), das figuras dispostas na malha todas eram poligonais, algumas figuras usuais (como triângulos e retângulos), permitindo o cálculo direto através de fórmula, e outras não usuais. Facco (2003) e Buratto (2006), além de figuras poligonais também utilizaram figuras compostas por segmentos e arcos de circunferência.

Com relação ao cálculo da área, um procedimento que não verificamos em nenhuma das pesquisas e acreditamos contribuir no estudo da área como grandeza é o enquadramento da figura no menor retângulo possível que contenha toda a figura, calcular a área total e subtrair as áreas que não fazem parte da mesma. Para exemplificar esse procedimento, vamos calcular a área da figura abaixo, considerando a área do quadradinho da malha como unidade.

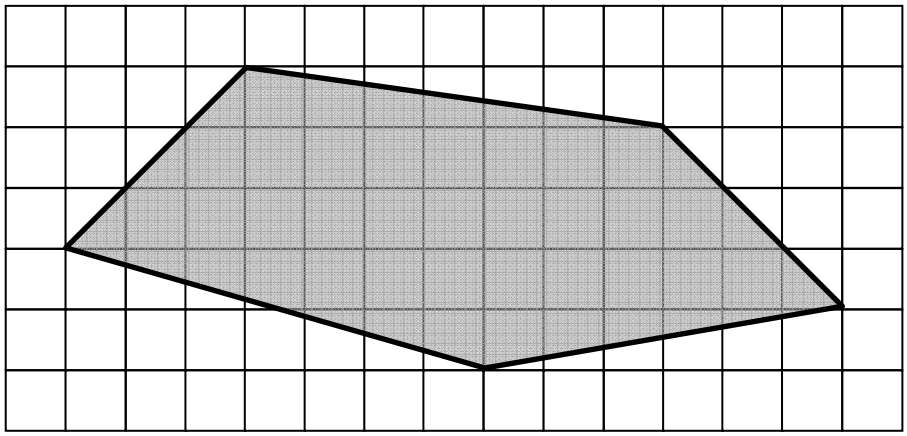


Figura 23

A figura é um pentágono irregular e nenhum de seus lados encontra-se apoiado nas linhas da malha. Vamos construir um retângulo que contenha totalmente a figura.

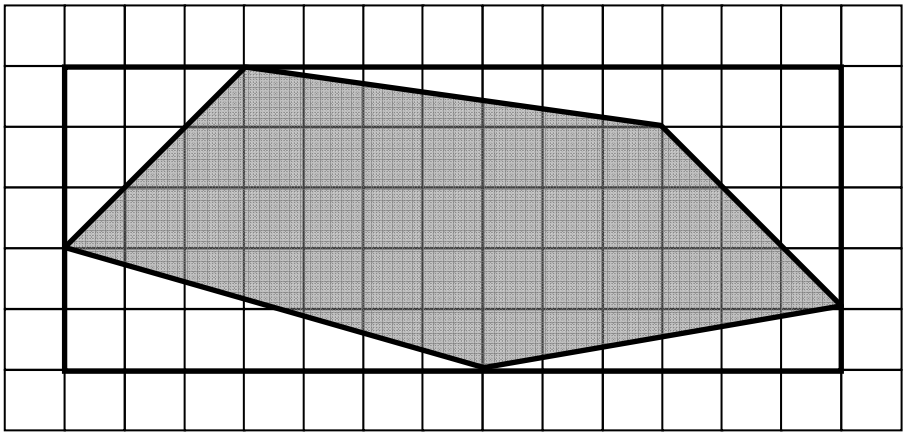


Figura 24

Dentro do retângulo e ao redor da figura visualizamos outras figuras (triângulos e retângulos) que podemos calcular a área utilizando fórmulas.

Assim a figura pode ser dividida como mostra a figura a seguir.

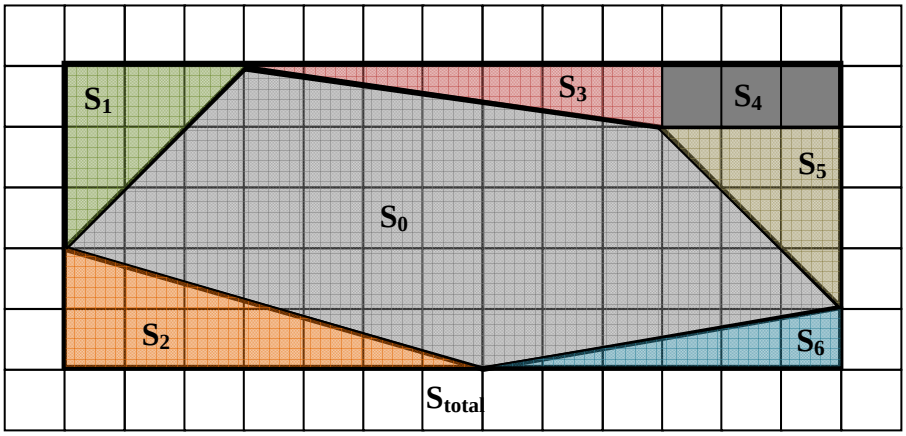


Figura 25

A área da original será obtida a través do seguinte cálculo:

$$S_0 = S_{total} - (S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6)$$
$$S_0 = 65. - (4{,}5 + 7 + 3{,}5 + 3 + 4{,}5 + 3)$$
$$S_0 = 65. - 25{,}5 \Rightarrow S_0 = 39{,}5 \text{ quadradinhos}$$

4.2 Caracterização dos sujeitos

A pesquisa foi realizada com 100 (cem) alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, distribuídos em 5 (cinco) escolas, sendo uma da rede pública municipal (17 alunos), uma da rede pública federal (29 alunos) e três da rede particular (14 + 25 + 15 = 54 alunos) de ensino. Com relação à escolha das escolas, optamos por não centralizar numa única para que o estudo não fosse muito local, para diversificar o público, selecionamos escolas públicas (municipal e federal) e particulares. A seleção das escolas se deu pela proximidade de professores que disponibilizaram seus horários ou contaram com colegas que se sentiam à vontade para a realização da pesquisa. Em algumas das turmas pesquisadas o conteúdo de área ainda não havia sido trabalhado este ano, mas este fato não contribuiu para que os alunos se negassem a realizar a atividade. Como as atividades foram realizadas na malha quadriculada os alunos ficaram menos constrangidos em resolver as questões.

4.3 Descrição e análise a *priori* das atividades

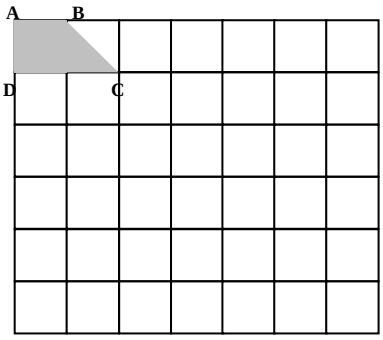
As atividades propostas nesta pesquisa tiveram a finalidade de diagnosticar os procedimentos utilizados por alunos do 6º ano do Ensino Fundamental para calcular a área de superfícies planas utilizando a malha quadriculada como recurso didático.

O papel quadriculado foi utilizado como o recurso didático onde as atividades foram construídas, mas poderia estar na condição de variável se tivéssemos utilizado outros tipos de malha como a pontilhada e a triangular que corresponderiam aos valores da variável tipo de papel. Em geral, a medida do comprimento do lado do quadradinho da malha utilizado em atividades de ensino e aprendizagem é 0,5 cm ou 1 cm. Para evitar que os alunos associem a medida do quadriculado a unidades como o cm^2, construímos uma malha com o lado do quadradinho medindo 0,8 cm. Para realizar as atividades o aluno não dispunha de nenhum instrumento como régua graduada por exemplo.

Inicialmente fizemos um levantamento exploratório e informal de atividades envolvendo área e perímetro em malhas quadriculadas. Utilizamos nesse levantamento as pesquisas anteriores (como as de Chiummo, 1998; Facco, 2003; Buratto, 2006) e alguns livros didáticos disponíveis na biblioteca e adotados nas escolas que trabalhamos. Realizamos algumas dessas atividades em turmas do 6º e 9º ano do ensino fundamental.

Vejamos alguns exemplos dessas atividades.

Desenhe na malha quadriculada três figuras que tenham, cada uma, o dobro da área da figura ABCD.



Nomeie as figuras que você desenhou: X, Y e Z.
Os perímetros das figuras X, Y e Z são iguais? Em caso afirmativo, justifique sua resposta

Caso contrário, qual a figura que tem maior perímetro? Explique como você chegou a essa conclusão.

Figura 26

Calcule a área da figura abaixo considerando o quadradinho **u** como unidade de medida de área.

a) b) c)

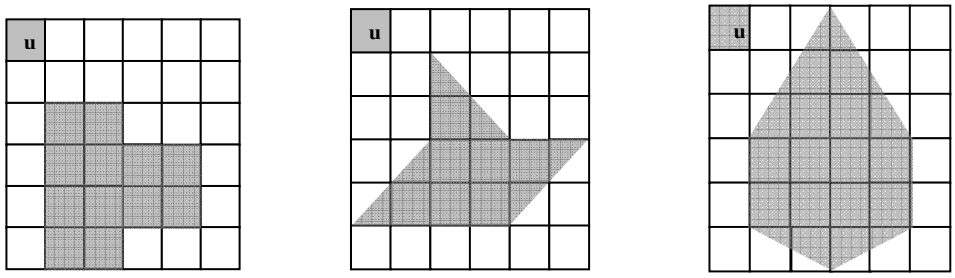


Figura 27

Calcule a área da figura cinza.

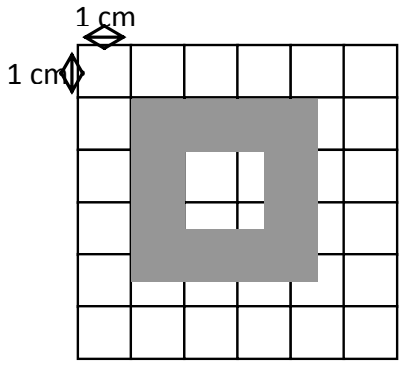
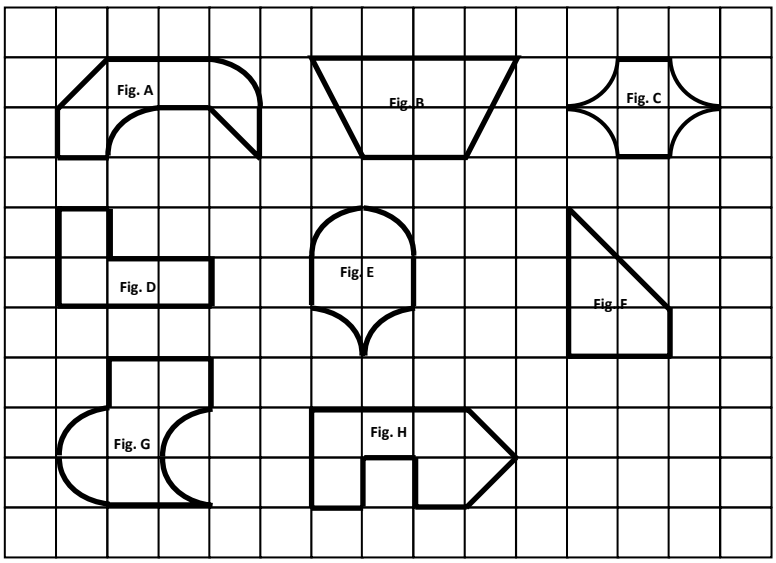


Figura 28

Considere cada uma das figuras na malha quadriculada abaixo.



a) Entre as figuras acima há figuras de mesma área? Em caso afirmativo, quais são elas? Explique como você fez:

b) Entre as figuras acima há figuras de mesmo perímetro? Em caso afirmativo, quais são elas? Explique como você fez:

Figura 29

As atividades citadas na página anterior, exploravam os três tipos de situações que dão sentido ao conceito de área propostas por Baltar (1996): *situações de comparação, de medida e de produção*. Diante dos resultados dos alunos, optamos por abordar apenas as situações de medida da área de figuras planas. Escolhemos não trabalhar com o perímetro por achar que o tempo disponível não seria suficiente para análises das duas grandezas. Além disso, é mais fácil calcular a área do que o perímetro na malha, pois o campo numérico dos racionais não seria suficiente, algumas medidas seriam irracionais com a diagonal do quadrado, arcos de circunferência, por exemplo. Se fossem usadas situações de comparação de perímetro sem necessariamente recorrer à medida, as possibilidades de figuras seriam bastante restritas.

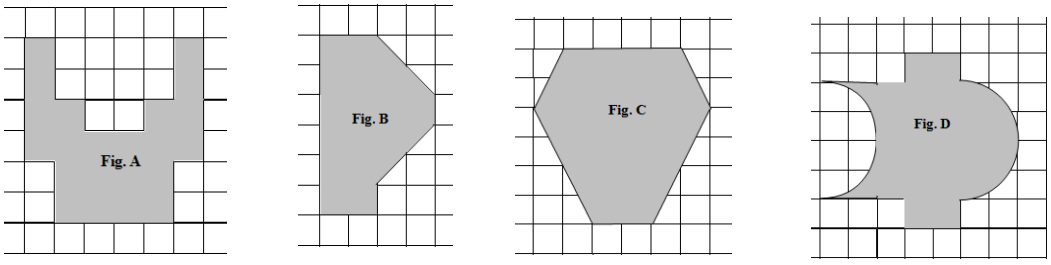
Que variáveis serão consideradas e que valores essas variáveis podem assumir?

Que procedimentos são favorecidos ou bloqueados pela escolha dos valores?

As atividades poderão ser entregues juntas ou separadas, em que ordem os alunos deverão resolvê-las?

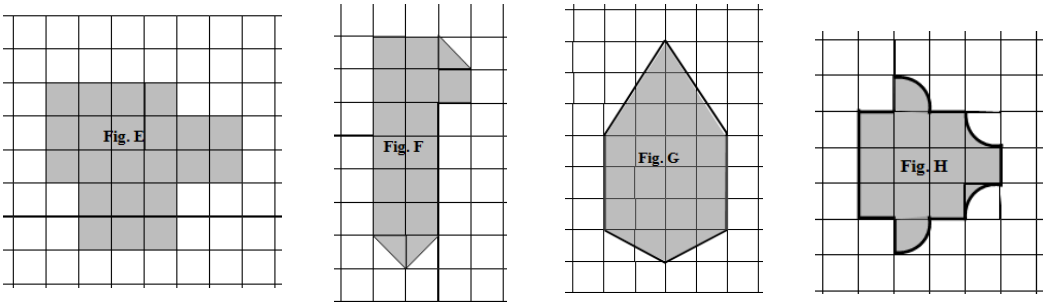
Com relação às atividades, a variedade de figuras tem por objetivo favorecer maior diversidade nos procedimentos de respostas dos alunos pesquisados. Em todos os itens solicitamos que o aluno calcule a área da figura na malha quadriculada considerando o quadradinho u como unidade de medida de área. Para explicar e justificar melhor nossa intenção em propor este estudo, separaramos os itens em quatro grupos:

- O primeiro com os itens 1, 2, 3 e 4, correspondentes as figuras A, B, C e D;



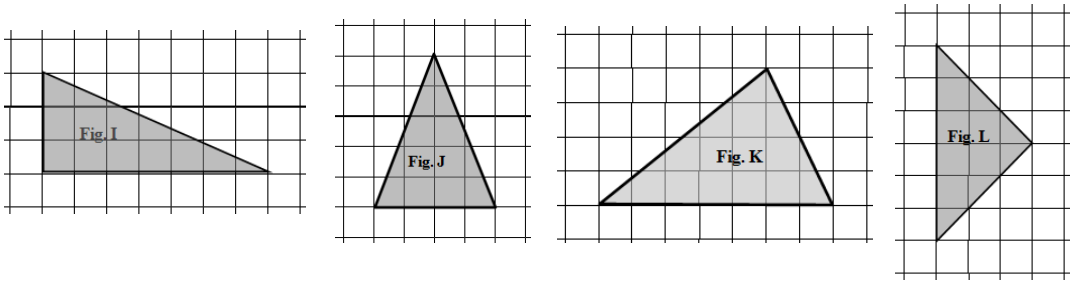
Quadro 5: itens 1, 2, 3 e 4

- O segundo com os itens 5, 6, 7 e 8, correspondentes as figuras E, F, G e H;



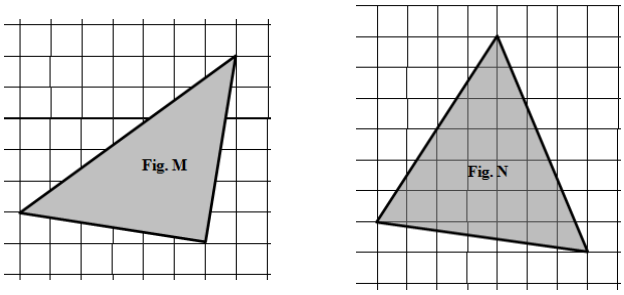
Quadro 6: itens 5, 6, 7 e 8

- O terceiro com os itens 9, 10, 11 e 12, correspondentes as figuras I, J, K e L;



Quadro 7: itens 9, 10, 11 e 12

- O quarto com os itens 13 e 14, correspondentes as figuras M e N;



Quadro 8: itens 13 e 14

No primeiro e segundo grupo os itens foram propostos com a intenção de comparar os procedimentos utilizados pelo aluno em pares de itens que se relacionam, ou seja, a análise dos itens será realizada em pares de itens, e cada par formado por um item de cada grupo.

Nos itens 1 e 5 (figuras A e E) esperamos que o procedimento de contar quadradinhos seja o mais utilizado, apesar de não serem figuras usuais, acreditamos que este procedimento fornece subsídios para a generalização de fórmulas. O que diferencia os dois itens é o fato de que no item 1 a figura não permite a visualização da malha o que pode dificultar a obtenção da resposta do aluno e no item 5 o aluno poderá facilmente contar a quantidade de quadradinhos, posto que estes encontra-se visíveis.

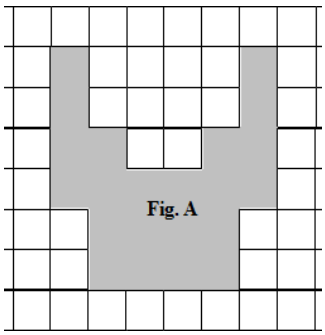


Figura 30

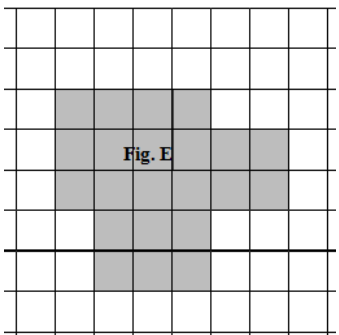


Figura 31

Pressupomos que estes dois itens sejam os de maior número de acertos, visto que para obtenção do resultado o aluno, *a priori*, utilizará o procedimento de contagem de quadradinhos.

Acreditamos que a mudança no valor da variável *preenchimento da figura* não constituirá um entrave na obtenção do resultado, entretanto dificultará a contagem direta de quadradinhos, além de pode provocar novos procedimentos, como por exemplo, dividir a figura em retângulos, calcular suas áreas e somar os resultados.

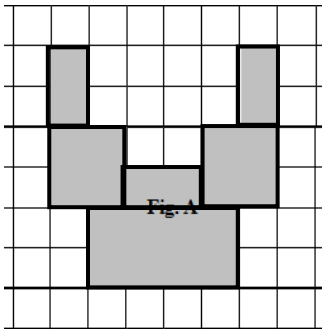


Figura 32

Os itens 2 e 6 (figuras B e F), os procedimentos realizados deverão ser os mesmos, visto que a diferenciação entre os itens anteriores é a possibilidade de obtenção de áreas fracionadas (no caso do item 6) e a percepção que um triângulo corresponde a metade do quadradinho, que uma unidade de medida pode ser obtida pela composição de dois triângulos.

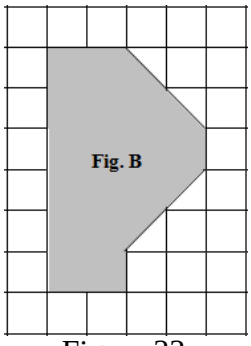


Figura 33

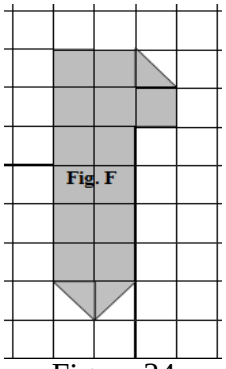


Figura 34

Os itens 3 e 7 (figuras C e G) a diferenciação está apenas no preenchimento da figura, no item 3 não permite que o aluno visualize a malha. Para obter a área nessas figuras, apenas a contagem de quadradinhos não dá conta. Será preciso lançar mão de outro procedimento além da contagem, posto que as frações de quadradinhos, agora, não correspondem à metade.

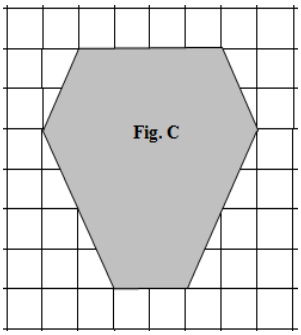


Figura 35

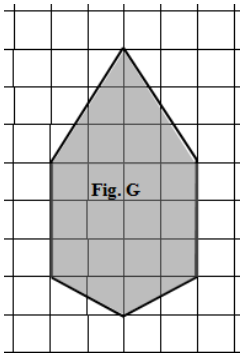


Figura 36

Os itens 4 e 8 (figuras D e H) apresentam figura cujos contornos são formados por segmentos de retas e arcos de circunferências e seus raios correspondem respectivamente a 2 e 1 lados do quadradinho. Neste par de itens os alunos poderão usar a decomposição e composição e perceber que completando as frações de quadradinhos, chegarão a uma quantidade inteira de quadradinhos.

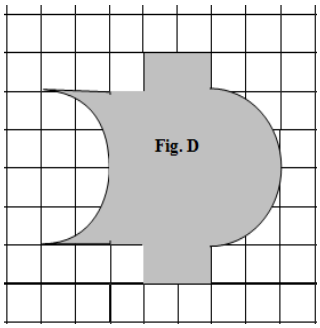


Figura 37

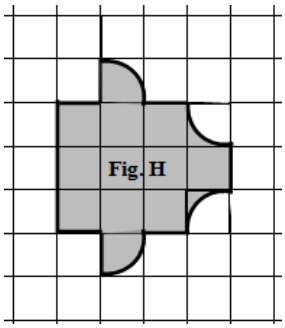


Figura 38

O terceiro grupo de questões (9, 10, 11 e 12, figuras I, J, K e L) é formado apenas por triângulos. Todos eles possuem um lado (base) apoiado nas linhas da malha, e a altura referente a este lado, interna ao triângulo, com medidas inteiras (considerando o lado do quadradinho como unidade de medida de comprimento) e visível, posto que o preenchimento das figuras permite visualizar a malha. O que diferencia um item do outro é a posição e o tipo do triângulo. Apenas o item 9 (figura I) apresenta um triângulo retângulo.

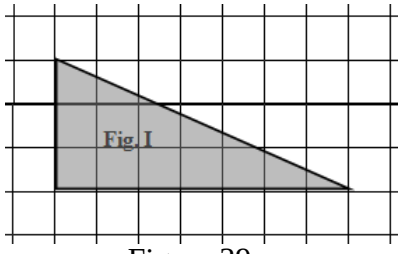


Figura 39

Os itens 10 e 12 (figuras J e L) os triângulos são isósceles diferenciando um do outro pela posição, no item 10 o lado que encontra-se apoiado no segmento da malha está na horizontal (posição prototípica) e no item 12 o lado encontra-se na vertical. Outro aspecto que merece destaque é que os lados congruentes do triângulo L cortam os quadradinhos pela metade, o que possibilita a contagem de quadradinhos.

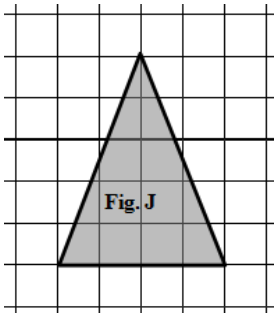


Figura 40

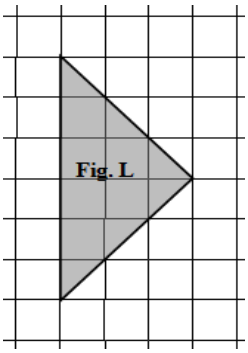


Figura 41

Na figura J além da fórmula pode ser utilizado a decomposição e recomposição formando um retângulo, podendo combinar Ester procedimento com o uso da fórmula do retângulo ou a própria contagem.

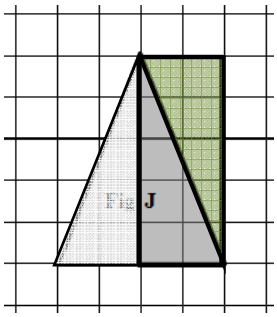


Figura 42

O item 11 apresenta um triângulo escaleno.

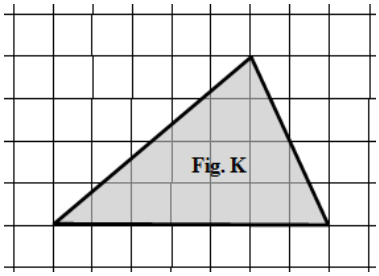


Figura 43

Neste grupo de questões a intenção foi a de verificar o uso que o aluno faz da fórmula do triângulo. Sabemos que o aluno também poderá realizar a decomposição e recomposição das figuras para obter um retângulo e facilmente contar ou utilizar a fórmula do retângulo para calcular a área. Porém, o procedimento de decompor e recompor só poderá ser realizado nos itens 10 e 12 por se tratar de triângulos isósceles. Nos itens 9 e 11 o aluno poderá completar o retângulo e depois dividir o resultado por dois, que utiliza a mesma idéia da fórmula da área do triângulo.

O quarto e último grupo (itens 13 e 14) apresentam triângulos que não possuem nenhum lado apoiado no segmento da malha, seus vértices coincidem com vértices do quadradinho da malha. O item 13 diferencia do item 14 por não permitir a visualização da malha e também por ter a medida da área fracionária. A medida da área que pode ser obtida através do enquadramento da figura em um retângulo, calculando a área total e subtraindo as áreas que não fazem parte da figura. Ressaltamos que estes itens são considerados os que apresentam mais dificuldades por serem figuras pouco comuns com relação à posição da figura na malha (não possui nenhum lado apoiado na malha), além disso, as estratégias de resolução são mais limitadas.

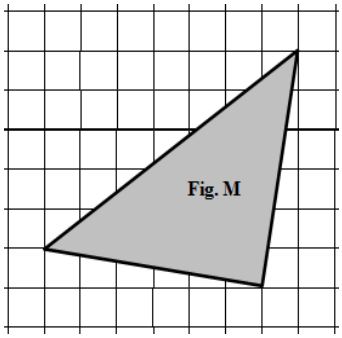


Figura 44

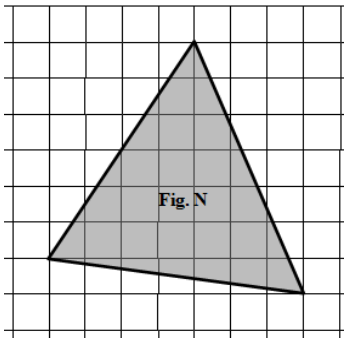


Figura 45

Análise das respostas e procedimentos dos alunos considerou os estudos de Douady e Perrin-Glorian (1989) e Baltar (1996) e nas relações estabelecidas entre o quadro geométrico e numérico, confrontação das respostas dos alunos com a análise *a priori*.

O quadro a seguir apresenta todas as variáveis e os valores que consideramos na pesquisa.

Variável	Valor
V_1: Contorno da figura	P – poligonal C – composto por segmentos e arcos de circunferência
V_2: Preenchimento da figura	HV – hachurada com malha visível HI – hachurada sem malha visível
V_3: Posição relativa dos polígonos em relação à malha	TL – todos os lados da figura "seguem a malha" DQ – algum(s) lado(s) da figura "seguem a malha" e os demais são diagonais dos quadrados DR – algum(s) lado(s) da figura "seguem a malha" e há pelo menos um lado que é diagonal de um retângulo não quadrado DC – algum(s) lado(s) da figura "seguem a malha" e os demais são arcos de circunferências N – nenhum dos lados da figura "segue a malha"
V_4: Medida da área tomando o quadradinho da malha como superfície unitária	I – inteira F – fracionária
V_5: Tipo de figura	U – usual (todas as figuras para as quais os alunos podem usar diretamente uma fórmula) I – irregular

Tabela 1

Com relação à variável *preenchimento da figura*, outro valor que pode ser considerado é *não hachurada*, na qual a figura apresentaria apenas o contorno, como mostra a figura abaixo.

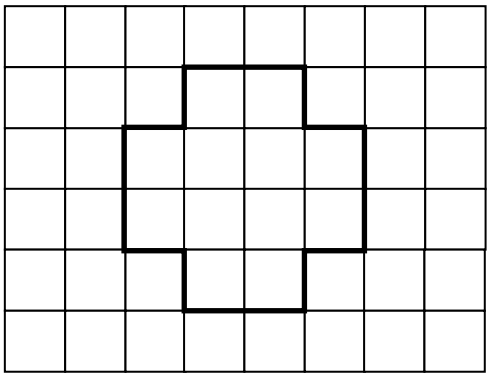


Fig.46

Optamos por não considerar esse valor para a variável *preenchimento da figura*, por acreditar que o aluno poderia desconsiderar a superfície e calcular o perímetro da figura.

De acordo com as variáveis selecionadas acima, as atividades foram organizadas em quatorze itens. Os alunos responderam o instrumento da pesquisa (as atividades) numa ordem pré-estabelecida. Esta ordem levou em consideração a mudança nos valores das variáveis, para identificar de que maneira a alteração desses valores poderia contribuir para provocar mudanças nas estratégias empregadas pelos alunos.

Como o instrumento era formado por 14 figuras, cada aluno recebeu 7 folhas de papel com 2 (duas) questões por folha. A ordem foi escolhida de acordo com os procedimentos ótimos previstos na análise *a priori*, do mais simples ao mais complexo (mais elaborado).

Além de fornecer o resultado, o aluno também deveria descrever como chegou àquele resultado. As atividades foram entregues uma por vez para evitar que o aluno refizesse as primeiras atividades influenciado pela maneira de resolver as posteriores e vice-versa.

As quatro primeiras figuras tinham em comum o preenchimento *hachurado* sem malha visível e também todas as medidas da área (em quadradinhos) é um valor inteiro. As três primeiras figuras possuem o contorno formado apenas por segmentos de reta e a quarta por segmentos e arcos de circunferência. Nenhuma das figuras é usual, o que dificulta o uso direto de fórmulas.

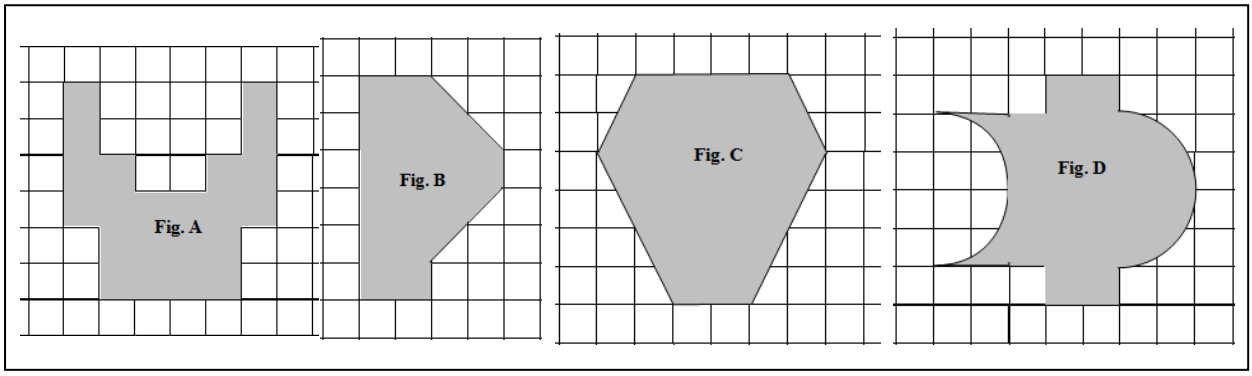


Figura 47

Na figura A, temos apenas quadradinhos inteiros, e como procedimento ótimo a contagem. Nas figuras B, C, e D o procedimento privilegiado é a decomposição e recomposição de partes da figura e posteriormente a contagem. Apesar de considerarmos o mesmo procedimento a configuração há diferença de uma figura para outra. Na figura B, apesar da medida da área ser inteira é necessária a contagem de partes fracionárias, 4 (quatro) metades de quadrinho da malha. Na figura C, as partes que devem ser agrupadas representam metades de retângulos dificultando a contagem das metades como na figura anterior. Na figura D, o recorte é feito na parte que representa metade de uma circunferência.

Observamos agora outro grupo de figuras que nessa sequência foi entregue duas a duas figuras E e F, posteriormente G e H.

As quatro figuras apresentam a variável preenchimento da figura fixa. Ou seja, todas são *hachuradas* com a malha visível, as figuras E, F e G são figuras poligonais, formadas apenas por segmentos de retas e a figura H, segmentos e arcos de circunferência.

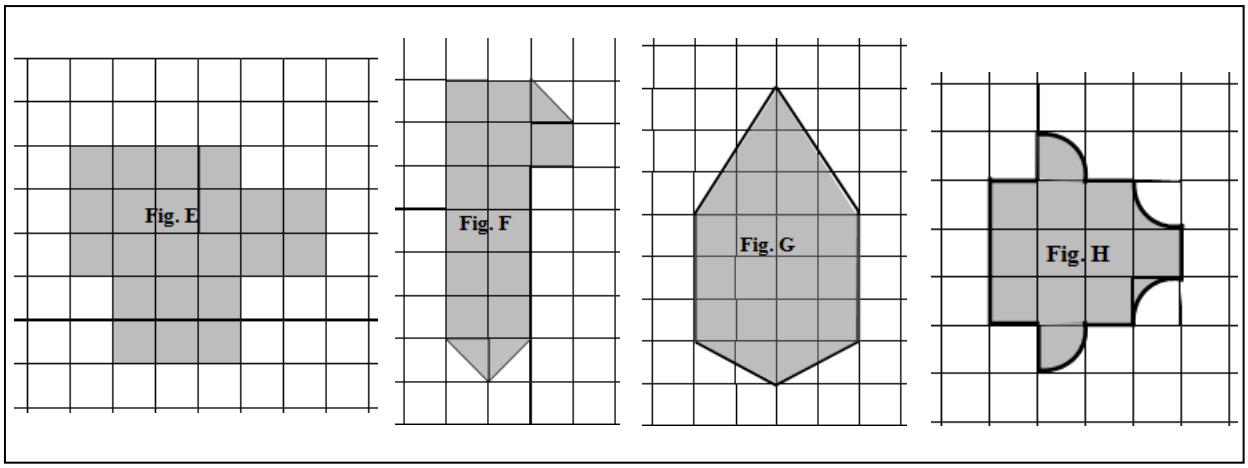


Figura 48

Os procedimentos e níveis de complexidade das figuras E, F, G e H são equivalentes aos previstos para as figuras A, B, C e D respectivamente.

O outro grupo de figuras formado é formado por figuras usuais, apenas triângulos, o que facilita o uso direto da fórmula.

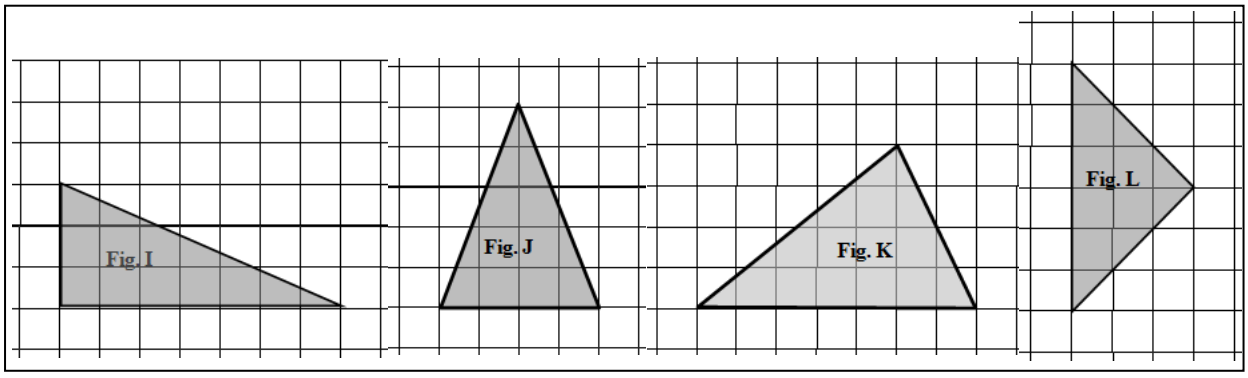


Figura 49

Todos os triângulos apresentam pelo menos um lado apoiado nas linhas da malha e altura relativa a esse lado visível com medida inteira (tomando o comprimento do lado do quadradinho como unidade de comprimento). Apenas o triângulo possui a medida da área fracionária, os outros apresentam medida da área (em quadradinhos) inteira. Os triângulos J e L podem suas áreas calculadas decompondo e recompondo formando um retângulo depois contando os quadradinhos.

Vamos agora ao último grupo de figuras: as figuras M e N. Neste caso as duas figuras são usuais, representam triângulos, nenhum de seus lados encontra-se apoiado nas linhas da malha, o que dificulta o uso da fórmula.

O que diferencia uma figura da outra é o tipo de preenchimento, a M não permite visualizar a malha e a N a malha é visível; e a medida da área tomando o quadradinho como superfície unitária, M é fracionária e N é inteira.

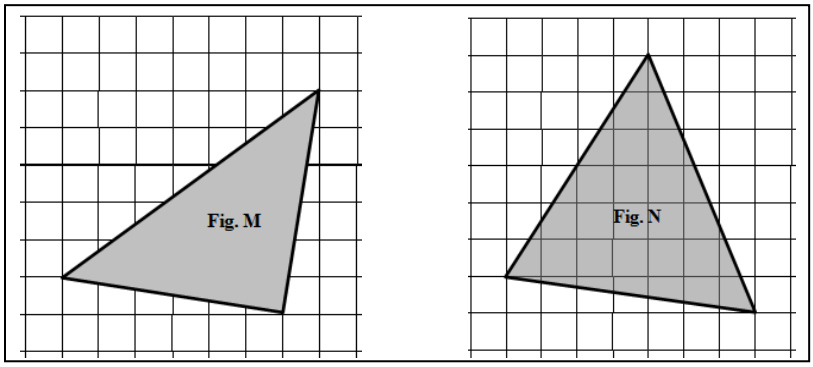


Figura 50

A tabela a seguir apresenta de maneira sucinta como as variáveis foram distribuídas, organizadas em cada item.

Item / Figura	Medida da Área (em quadradinhos)	Valor das Variáveis				
		V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
1º / A	22	P	HI	TL	I	I
2º / B	18	P	HI	DQ	I	I
3º / C	26	P	HI	DR	I	I
4º / D	24	C	HI	DC	I	I
5º / E	23	P	HV	TL	I	I
6º / F	14,5	P	HV	DQ	F	I
7º / G	20	P	HV	DR	I	I
8º / H	12	C	HV	DC	I	I
9º / I	10,5	P	HV	DR	F	U
10º / J	10	P	HV	DR	I	U
11º / K	14	P	HV	DR	I	U
12º / L	9	P	HV	DQ	I	U
13º / M	18,5	P	HI	N	F	U
14º / N	23	P	HV	N	I	U

Tabela 2

Na malha quadriculada, a unidade de medida de área será a área de um quadradinho. A área de cada figura será dada pela quantidade de quadradinhos (ou frações destes) que cabem na figura e não pelo ladrilhamento efetivo utilizando o quadradinho da malha.

Douady e Perrin-Glorian (1989) chamam a atenção para a forma da superfície unitária utilizada para medir a área de uma superfície. Segunda as autoras essa escolha pode levar o aluno a considerar a impossibilidade de obter a área da superfície.

Para alguns alunos a área depende do recobrimento da superfície utilizando uma quantidade finita de superfícies unitárias da mesma forma da unidade dada. Neste caso, não consideram que dois triângulos possuem a mesma área que um quadradinho da malha, por exemplo.

Com o objetivo de "provocar" outros procedimentos além da contagem de quadradinhos, propomos atividades (exceto os 1º e 5º itens) em que o aluno necessita visualizar decomposições e recomposições nas superfícies dadas para obter sua área.

Nos itens 2, 6 e 12 (figuras B, F e L), o procedimento de contar quadradinhos ainda prevalece, mas associada à composição das metades de quadradinhos, que correspondem a um quadradinho inteiro.

Nos itens 4 e 8 (figuras D e H), suas áreas são dada por uma quantidade inteira de quadradinhos o aluno tem que utilizar outros procedimentos além da contagem de ou obter uma unidade de medida pela composição de duas dessas partes. O aluno deve deslocar partes da figura correspondentes a frações de circunferências e completar formando quadradinhos inteiros, depois contar ou utilizar fórmula da área do retângulo. Esses são os procedimentos que consideramos ótimos para os itens citados, não implica serem os únicos a utilizados.

Douady e Perrin-Glorian (1989) destacam ainda o uso inadequado das fórmulas e unidades de medidas.

O uso de fórmulas em contextos em que não são válidas é mais provável de ocorrer nos itens 9, 10, 11 e 12 (figuras I, J, K e L), onde além do procedimento de decomposição e recomposição, um procedimento esperado é o uso da fórmula da área do triângulo. Nestes itens, os triângulos apresentam um lado (base) totalmente apoiado na malha e a altura referente a este lado com medida inteira (formada apenas por lados do quadradinho da malha).

4.4 Análise *a priori* dos procedimentos de resolução dos alunos

Após definirmos os itens para compor nosso instrumento de pesquisa, realizamos a análise *a priori* dos procedimentos (corretos ou não) que os alunos podem apresentar como respostas.

Nessa análise consideramos os resultados de estudos anteriores, como os de Douady e Perrin-Glorian (1989) que sinalizam dificuldades relacionadas a concepções numéricas e geometricas; estudos como os de Baltar (1996) que destacam o amálgama entre área e perímetro; uso inadequado de unidades de medidas e o emprego indevido de fórmulas; pesquisas como as de Chiummo, 1998; Facco, 2003; Buratto, 2006, onde os procedimentos verificados foram a contagem, a decomposição/recomposição e o uso de fórmulas.

4.4.1 Respostas consideradas corretas

Os procedimentos de contar, decompor e compor a figura podem ser utilizados em praticamente todos os itens. Podem ser realizados de várias maneiras dependendo da figura.

1º. Item: contagem, decomposição com contagem, decomposição e uso de fórmula e enquadramento da figura num retângulo, cálculo da área total e subtração as áreas que não fazem parte da figura.

- Contar quadradinhos um a um após completar a malha;
- Decompor a figura em 5 retângulos (com dimensões 4x1 cada) e 2 quadrados (com dimensões 1x1 cada) e somar as áreas obtidas;
- Decompor a figura em 4 retângulos (três com dimensões 2x1 e um com dimensões 4x2) e 2 quadrados (com dimensões 2x2) e somar as áreas obtidas;
- Decompor a figura em 3 retângulos (dois com dimensões 4x1 e um com dimensões 4x3) e 2 quadrados (com dimensões 1x1 cada) e somar as áreas obtidas;
- Decompor a figura em 8 retângulos (sete com dimensões 2x1 e um com dimensões 4x2) e somar as áreas obtidas;
- Decompor a figura em 11 retângulos (com dimensões 2x1 cada) e somar as áreas obtidas;

- Completar um quadrado com lado medindo 6, calcular sua área e subtrair os 14 quadradinhos que não fazem parte da figura.

2º. Item: contagem (partes inteiras e fracionárias), contagem com composição (dois triângulos formando uma unidade de medida), decomposição com contagem, decomposição e uso de fórmula e enquadramento da figura num retângulo, cálculo da área total e subtração as áreas que não fazem parte da figura.

- Contar quadradinhos e frações de quadradinhos após completar a malha;
- Decompor a figura em 7 retângulos (com dimensões 2x1), 2 quadrados (com dimensões 1x1) e 4 triângulos retângulos isósceles (com catetos medindo 1, metade de um quadradinho) em seguida somar as áreas obtidas;
- Decompor a figura em 3 retângulos (com dimensões 2x1), 4 quadrados (dois com dimensões 2x2 e dois com dimensões 1x1) e 4 triângulos retângulos isósceles (com catetos medindo 1, metade de um quadradinho) em seguida somar as áreas obtidas;
- Decompor a figura em 2 retângulos (um com dimensões 2x1 e outro com dimensões 6x2) e 2 triângulos retângulos isósceles (com catetos medindo 2) em seguida somar as áreas obtidas;
- Completar um retângulo com dimensões 4x6, calcular sua área e subtrair os 4 triângulos retângulos isósceles (metade do quadradinho) e 4 quadradinhos.

3º. Item: contagem com decomposição/composição, decomposição/composição com uso de fórmula e enquadramento da figura num retângulo, cálculo da área total e subtração as áreas que não fazem parte da figura.

- Contar quadradinhos e frações de quadradinhos por decomposição/composição após completar a malha;
- Decompor a figura em 10 retângulos (com dimensões 2x1 cada), decomposição de 6 triângulos (formados pela metade de um retângulo 2x1) para compor 3 retângulos (de dimensões 2x1) em seguida somar as áreas obtidas;
- Decompor a figura em 6 triângulos retângulos (metade de retângulos de dimensões 2x1) formando, através da composição 3 retângulos (de dimensões 2x1), 2 retângulos (com dimensões 4x2) e um quadrado de lado 2;
- Completar um quadrado de lado 6, calcular sua área e subtrair as partes que não fazem compõem a figura original (quadradinhos e frações de quadradinhos).

4º. Item: contagem com decomposição/composição, decomposição/composição com uso de fórmula e enquadramento da figura num retângulo, cálculo da área total e subtração as áreas que não fazem parte da figura.

- Completar a malha, decompor e compor a parte da figura formada por arcos de circunferência e em seguida contar os quadradinhos;
- Decompor a figura em 1 retângulo (com dimensões 2x6), 4 quadradinhos, decompor e compor a parte da figura formada por arcos de circunferência formando um retângulo (com dimensões 2x4), calcular as áreas dessas sub-figuras e depois somá-las;
- Decompor a figura em 7 retângulos (seis com dimensões 2x1 e um com dimensões 3x4), decompor e compor a parte da figura formada por arcos de circunferência formando quatro retângulos (com dimensões 2x1 cada), calcular as áreas dessas sub-figuras e depois somá-las;
- Decompor a figura em 6 retângulos (quatro com dimensões 3x1 e dois com dimensões 2x1), decompor e compor a parte da figura formada por arcos de circunferência formando quatro retângulos (com dimensões 2x1 cada), calcular as áreas dessas sub-figuras e depois somá-las;
- Decompor e compor a parte da figura formada por arcos de circunferência completando os quadradinhos fracionários, após essa composição decompor a figura em 6 retângulos (quatro com dimensões 5x1 e dois com dimensões 2x1), calcular suas áreas e somar os resultados;
- Enquadrar a figura em um retângulo (de dimensões 5x6) e subtrair os 6 quadradinhos que não fazem parte da figura original.

5º. Item: contagem, decomposição com contagem, decomposição e uso de fórmula e enquadramento da figura num retângulo, cálculo da área total e subtração as áreas que não fazem parte da figura.

- Contar quadradinhos um a um;
- Decompor a figura em 3 retângulos (com dimensões 4x3, 2x2 e 3x2), calcular e somar suas áreas;
- Decompor a figura em 3 retângulos (com dimensões 3x1, 2x2 e 3x5), calcular e somar suas áreas;
- Decompor a figura em 3 retângulos (com dimensões 3x1, 2x6 e 3x2), calcular e somar suas áreas;

- Enquadrar a figura em um retângulo (de dimensões 5x6) e subtrair os 8 quadradinhos que não fazem parte da figura original.

6º. Item: contagem, decomposição/composição com contagem, decomposição/composição e uso de fórmula enquadramento da figura num retângulo, cálculo da área total e subtração as áreas que não fazem parte da figura.

- Contar quadradinhos e frações de quadradinhos;
- Decompor a figura em 1 retângulo (com dimensões 2x6), dois quadradinhos sendo um formado pela decomposição/composição de dois triângulos, e um triângulo retângulo formado pela metade de um quadradinho, calcular e somar suas áreas;
- Decompor a figura em 4 quadrados (três com dimensões 2x2 e um com dimensões 1x1), um quadradinho formado pela decomposição/composição de dois triângulos, e um triângulo retângulo formado pela metade de um quadradinho, calcular e somar suas áreas;
- Decompor a figura em 6 retângulos (com dimensões 2x1), dois quadradinhos sendo um quadradinho formado pela decomposição/composição de dois triângulos, e um triângulo retângulo formado pela metade de um quadradinho, calcular e somar suas áreas;
- Enquadrar a figura num retângulo de dimensões 3x7, e subtrair os 5 quadradinhos os 3 triângulos formados pela metade do quadradinho.

7º. Item: contagem com decomposição/composição, decomposição/composição com uso de fórmula e enquadramento da figura num retângulo, cálculo da área total e subtração as áreas que não fazem parte da figura.

- Decompor a figura em 2 triângulos (com dimensões 2x3) e compor um retângulo (de dimensões 2x3); 2 triângulos (com dimensões 2x1) e compor um retângulo (de dimensões 2x1), um retângulo (com dimensões 4x3), obter as áreas pela contagem de quadradinhos;
- Decompor a figura em 2 triângulos (com dimensões 4x3 e 4x1) e um retângulo (com dimensões 4x3), obter as áreas através do uso de fórmulas e somar os resultados;
- Decompor a figura em 4 triângulos (dois com dimensões 2x3 e dois com 2x1) e dois retângulos (com dimensões 2x3 cada), obter as áreas através do uso de fórmulas e somar os resultados;

- Enquadrar a figura num retângulo de dimensões 4x7, e subtrair os 4 triângulos retângulos (dois com catetos 3 e 2, dois com catetos 2 e 1).

8º. Item: contagem com decomposição/composição, decomposição/composição com uso de fórmula

- Formar um retângulo de 3x4 e contar os quadradinhos;
- Formar um retângulo de 3x4 e calcular a área através da fórmula do retângulo.

9º. Item: uso de fórmula e completar o retângulo, calcular a área através de fórmula e dividir o resultado por 2.

- Utilizar a fórmula da área do triângulo de forma direta;
- Formar um retângulo de 3x7 e contar os quadradinhos e dividir o resultado por 2;

10º. Item: uso de fórmula, decomposição e recomposição e contagem; decomposição e recomposição e uso de fórmula.

- Utilizar a fórmula da área do triângulo de forma direta;
- Formar um retângulo de 2x5 e contar os quadradinhos;
- Formar um retângulo de 2x5 e usar fórmula do retângulo.

11º. Item: uso de fórmula e enquadramento da figura num retângulo, calcular a área total e subtrair as áreas que não fazem parte da figura.

- Utilizar a fórmula da área do triângulo de forma direta;
- Formar um retângulo de 4x7, calcular a área total e subtrair da área dos dois triângulos retângulos que não fazem parte da figura;
- Formar um retângulo de 4x7, calcular a área total e dividir o resultado por 2.

12º. Item:contagem, decomposição e recomposição, uso de fórmula, enquadramento da figura num retângulo, cálculo da área total e subtração as áreas que não fazem parte da figura

- Contar os quadradinhos inteiros e a metades de quadradinhos;
- Utilizar a fórmula da área do triângulo de forma direta;
- Decompor e recompor a figura formando um quadrado de 3x3 e calcular a área através da fórmula da área do quadrado;
- Formar um retângulo de 3x6, calcular a área e dividir o resultado por 2.

13º. Item: enquadramento da figura num retângulo, cálculo da área total e subtração as áreas que não fazem parte da figura.

- Formar um retângulo de 6x7, calcular a área total e subtrair da área dos triângulos retângulos que não fazem parte da figura original.

14º. Item: enquadramento da figura num retângulo, cálculo da área total e subtração as áreas que não fazem parte da figura.

- Formar um retângulo de 7x7, calcular a área total e subtrair da área dos triângulos retângulos que não fazem parte da figura original.

4.4.2 Respostas consideradas incorretas

Na análise *a priori* das atividades um procedimento que acreditamos ser utilizado por alguns sujeitos da pesquisa é o cálculo da medida do perímetro das figuras. Isto pode ocorrer pela dificuldade em dissociar a área do perímetro de figuras planas como evidenciam algumas pesquisas como as de Douady e Perrin-Glorian (1989). Esse procedimento é previsto para qualquer um dos itens, considerando que pode haver ou não a diferenciação de segmentos (lado, diagonal, arco de circunferência).

Outra observação que fazemos é com relação à variável *medida da área tomando o quadradinho da malha como superfície unitária* que possui como valores numéricos medidas inteiras (onze figuras) e fracionárias (três figuras). Alguns alunos podem ser levados a utilizar aproximações ou mesmo desconsiderar os valores fracionários, para a medida da área, propostos nas figuras F, I e M.

Uma resposta que também pode ser utilizada por alguns sujeitos, leva em consideração a possibilidade de ladrilhamento. Essa idéia pode fazer com que o aluno utilize a contagem apenas dos quadradinhos inteiros em cada figura, o pode ser observado em todos os itens, com exceção dos itens 1 e 5, nos quais todos os quadradinhos são inteiros, isto é, é possível ladrilhar as figuras com quadradinhos iguais ao tomado como superfície unitária.

Outro erro previsto está associado à utilização incorreta de unidades de medidas. Apesar de adotarmos a área do quadradinho como superfície unitária, acreditamos que alguns alunos poderão apresentar em suas respostas unidades como cm^2, m^2, cm e m.

5 ANÁLISE DOS RESULTADOS

5.1 Analisando os resultados

A pesquisa que realizamos contou com a colaboração de 5 escolas que denominaremos de A, B, C, D e E. Cada aluno será identificado por um código formado por uma letra (referente a escola) e um número de ordem, por exemplo D 10, refere-se ao décimo aluno da escola D. Não temos pretensão de comparar os resultados obtidos entre as escolas nem generalizar os resultados desta pesquisa. A opção por mais de uma escola teve por objetivo diversificar nossa amostra. No gráfico abaixo apresentamos os índices de acertos por questão em percentuais.

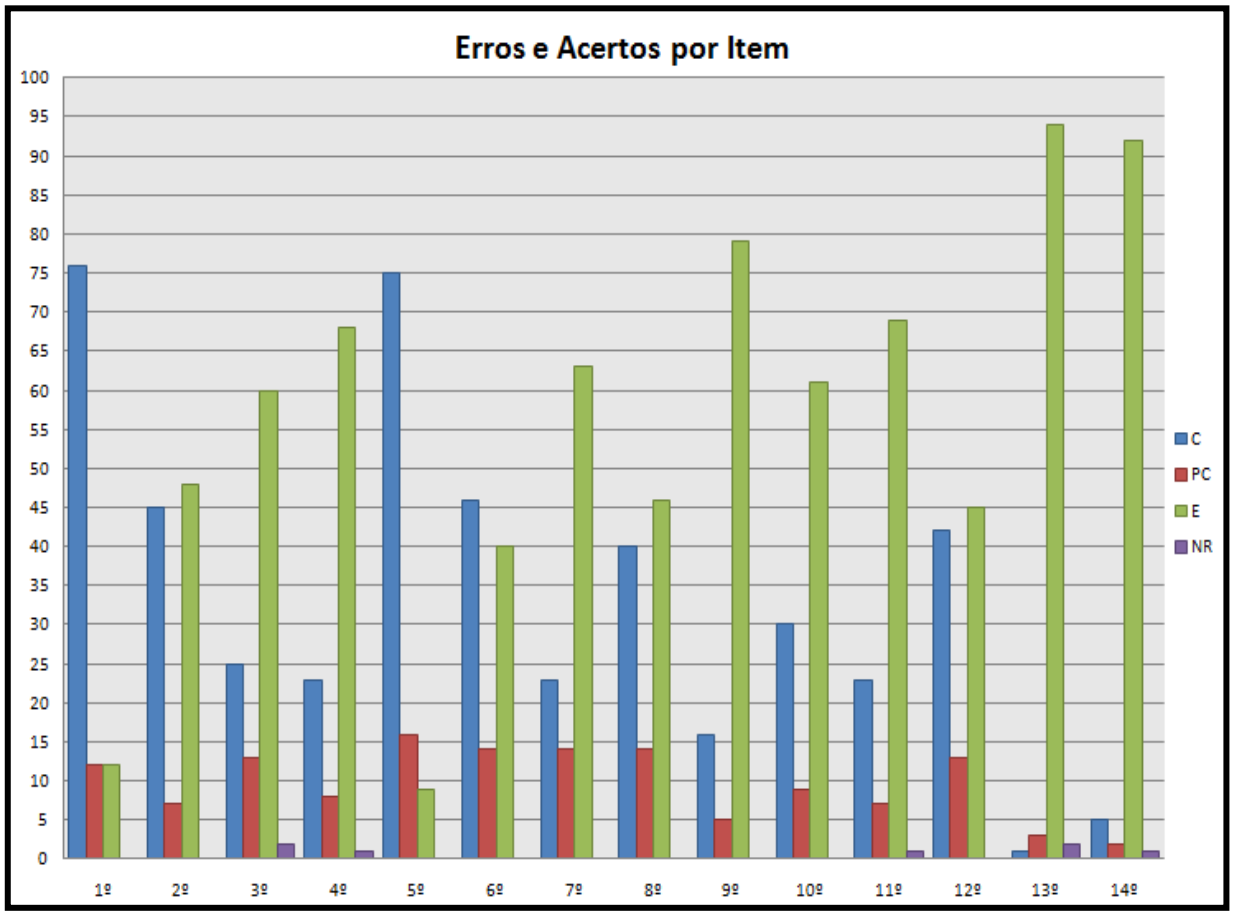


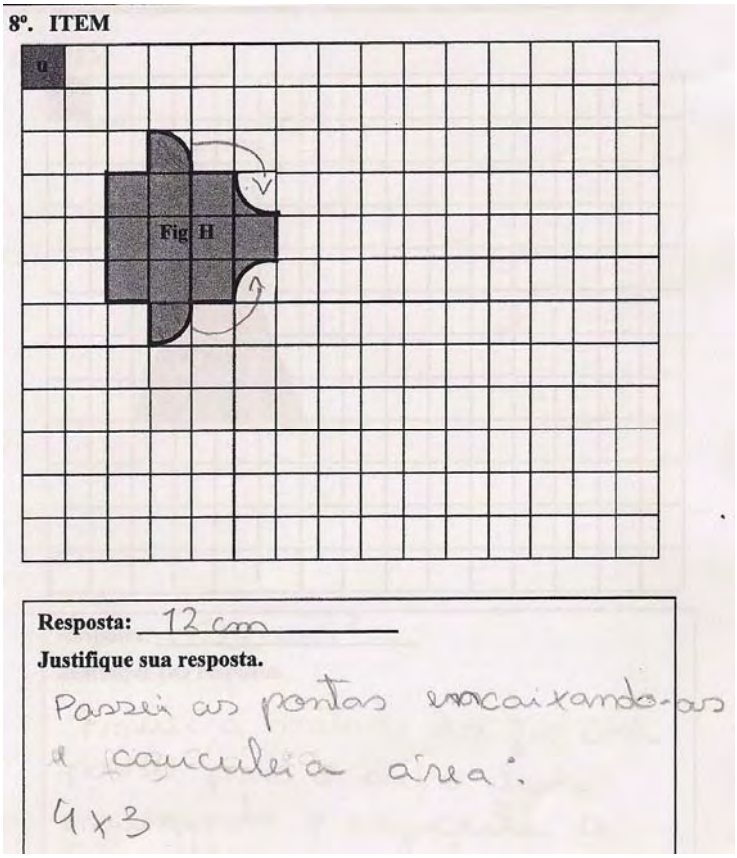
Gráfico 1

Legenda: C: resposta correta PC: resposta parcialmente correta
E: resposta errada NR: não respondeu

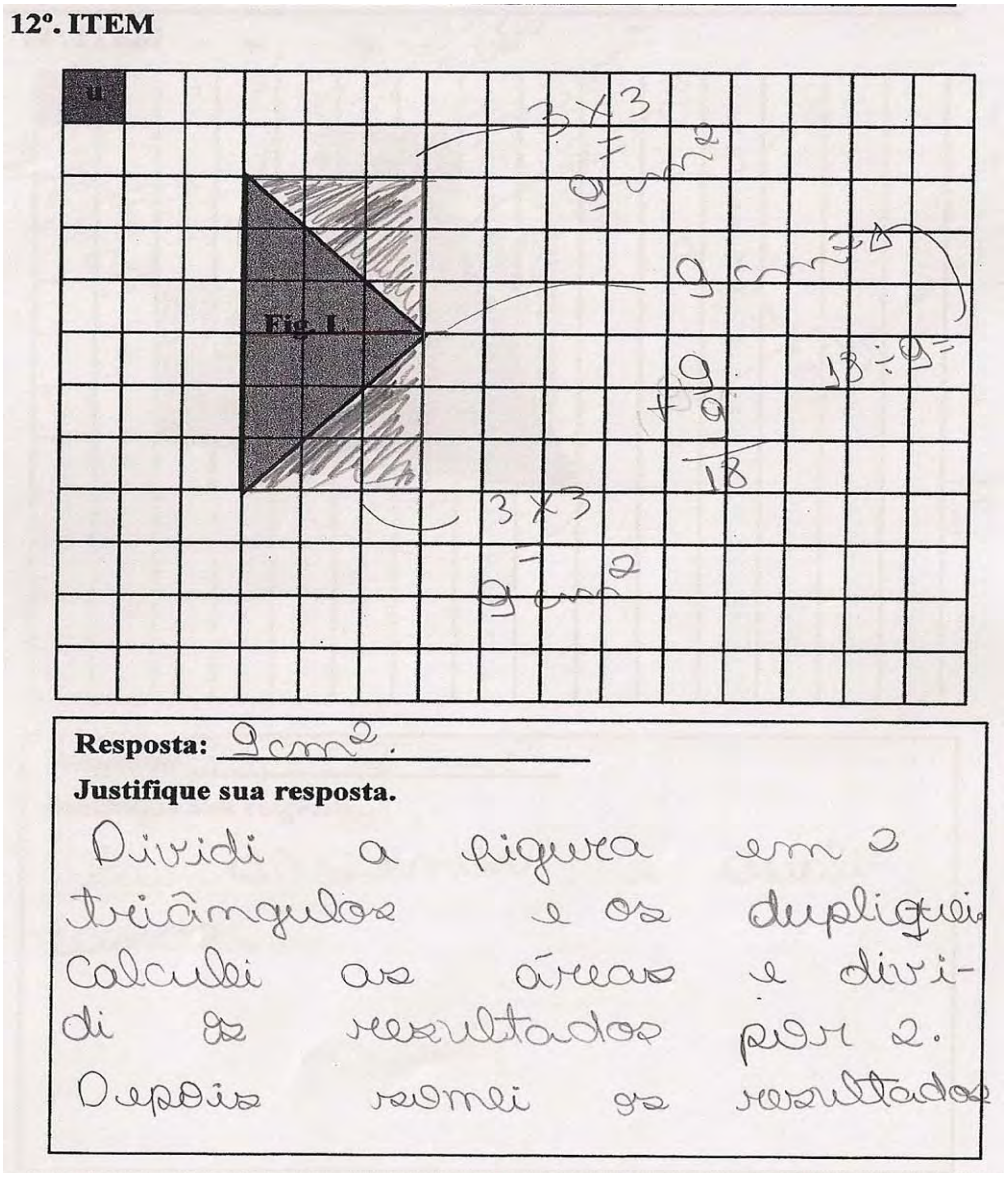
Nenhuma escola teve percentual de questões corretas igual ou superior a 50%.

Observamos uma baixa incidência de ausência de resposta. Num universo de 1.400 respostas (14 questões por aluno) apenas 3 alunos deixaram itens sem responder totalizando 7 itens sem resposta, um aluno não respondeu o 3º item, um não respondeu o 13º item e um aluno não respondeu os itens 3º, 4º, 11º, 13º e o 14º.

As atividades proposta em malhas quadriculadas em geral apresentam os quadradinhos medindo 1cm ou 0,5cm de lado. Para evitar a associação com estas unidades utilizamos o quadradinho com a medida do lado 0,8cm e adotamos o quadradinho como *uma unidade de medida de área*. Mesmo não fazendo referência a unidades de medida convencionais, 17 alunos fizeram uso inadequado da unidade de medida, 14 alunos utilizaram cm^2; 1 aluno utilizou cm; 1 aluno usou m^2 e 1 aluno alternou entre cm^2 e m^2. Dentre as respostas destes 17 alunos, 136 itens possuíam o cálculo correto e a unidade de medida inadequada, considerando que a unidade de medida de área atribuída às superfícies era um quadradinho. Pela relevância da quantidade de alunos que assumiram essas unidades (17%), achamos necessário atribuir a esses itens a categoria de *resposta parcialmente correta*, sinalizando o erro na gestão das unidades, mas o procedimento utilizado estava correto, conduzindo ao acerto no cálculo. Os procedimentos utilizados por esses alunos foram bem elaborados e o resultado incorreto foi apenas a unidade de medida especificada, como mostra os dois exemplos abaixo dos alunos B 20 e B 29.



Protocolo do aluno B 29.



Protocolo do aluno B 20.

Em nossa análise *a priori*, destacamos que as figuras A e E apresentariam maior percentual de acertos, pois se tratava dos itens considerados mais simples, com relação a percepção e procedimento mobilizado pelo aluno.

Item / Figura	C (em %)	PC (em %)	E (em %)	NR (em %)
1º / A	76	Tabela 3	12	00
2º / B	45	07	48	00
3º / C	25	13	60	02
4º / D	23	08	68	01
5º / E	75	16	09	00
6º / F	46	14	40	00
7º / G	23	14	63	00
8º / H	40	14	46	00
9º / I	16	05	79	00
10º / J	30	09	61	00
11º / K	23	07	69	01
12º / L	42	13	45	00
13º / M	01	03	94	02
14º / N	05	02	92	01

Se levarmos em conta as questões corretas e parcialmente corretas, teremos um quantitativo de 88% dos alunos para a figura A e 91% dos alunos para a figura E.

Item / Figura	C+PC (em %)	E (em %)	NR (em %)
1º / A	88	12	00
2º / B	52	48	00
3º / C	38	60	02
4º / D	31	68	01
5º / E	91	09	00
6º / F	60	40	00
7º / G	37	63	00
8º / H	54	46	00
9º / I	21	79	00
10º / J	39	61	00
11º / K	30	69	01
12º / L	55	45	00
13º / M	04	94	02
14º / N	07	92	01

Tabela 4

Vamos agora agrupar as questões pela proximidade de resultados. De acordo com a proximidade de acertos, formamos 4 (quatro) grupos que serão analisados e relacionados com as variáveis envolvidas e os valores atribuídos a essas variáveis. A tabela a seguir ajuda a identificar os agrupamentos.

Grupo	Percentual de Acerto (em %)	Figura
Primeiro	$75 < x \leq 100$	A, E
Segundo	$50 < x \leq 75$	B, F, H, L
Terceiro	$25 < x \leq 50$	C, D, G, J, K
Quarto	$x \leq 25$	I, M, N

Tabela 5

Para esta análise consideramos os resultados numéricos corretos, ou seja, agrupamos os itens corretos e parcialmente corretos.

A seguir consideraremos esses resultados (respostas corretas e parcialmente corretas) e faremos uma análise da influência que algumas variáveis podem ter exercido nessas respostas.

5.2 Influência de algumas variáveis nos procedimentos utilizados pelos sujeitos pesquisados

Em nosso trabalho consideramos cinco variáveis (contorno da figura, preenchimento da figura, posição relativa dos polígonos em relação à malha, medida da área tomando o quadradinho da malha como superfície unitária, tipo de figura), descritas no capítulo anterior, que acreditamos influenciar nos procedimentos de respostas dos alunos pesquisados.

Faremos uma análise baseada na média de acerto por grupo de itens. Em cada grupo fixaremos uma variável e compararemos os resultados percentuais para verificar a relevância da variável fixada no desempenho dos sujeitos.

a) Contorno da figura

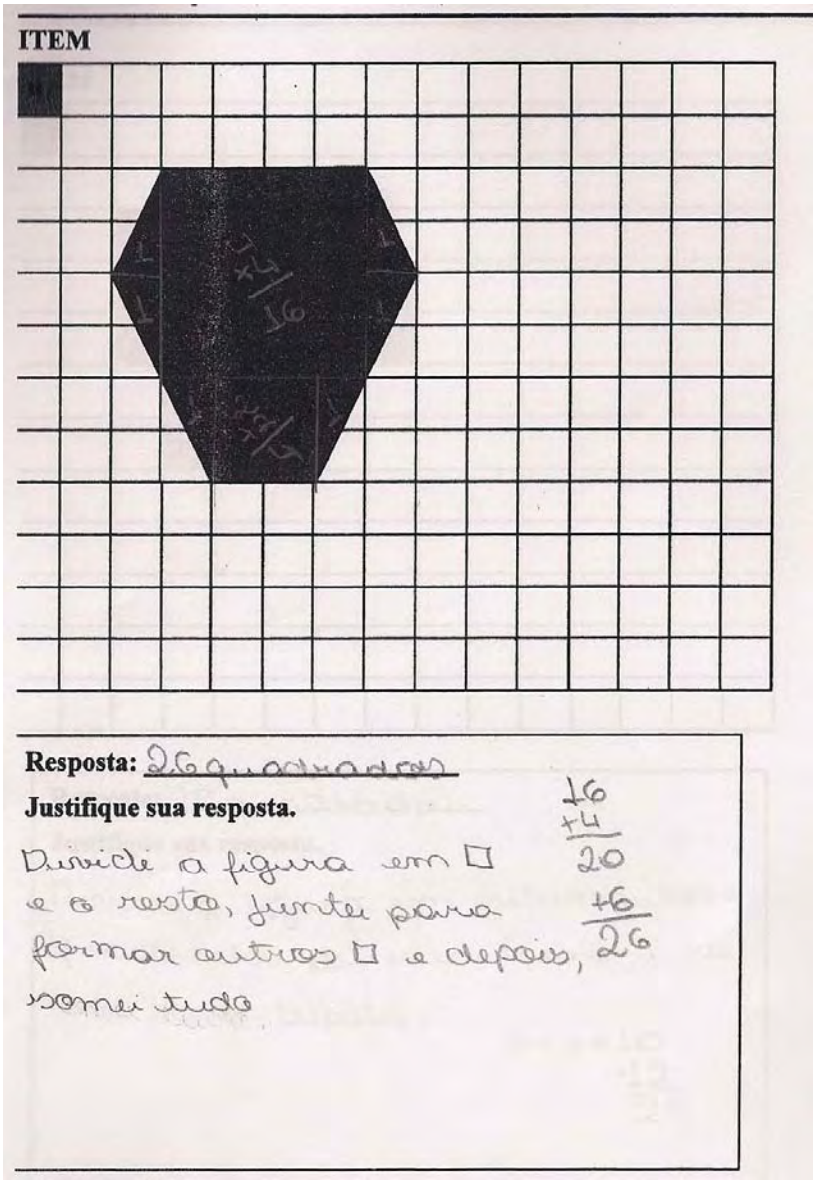
Com relação ao *contorno da figura*, temos dois valores a considerar: *poligonal* ***(P)*** e *composto por segmentos e arcos de circunferência* ***(C)***.

Item	A,	B,	C,	E,	F,	G,	I,	J,	K,	L,	M e N		D e H	
Percentual de acerto (%)	88	52	38	91	60	37	21	39	30	55	04	07	31	54
Média de acerto (%)	43,5												42,5	

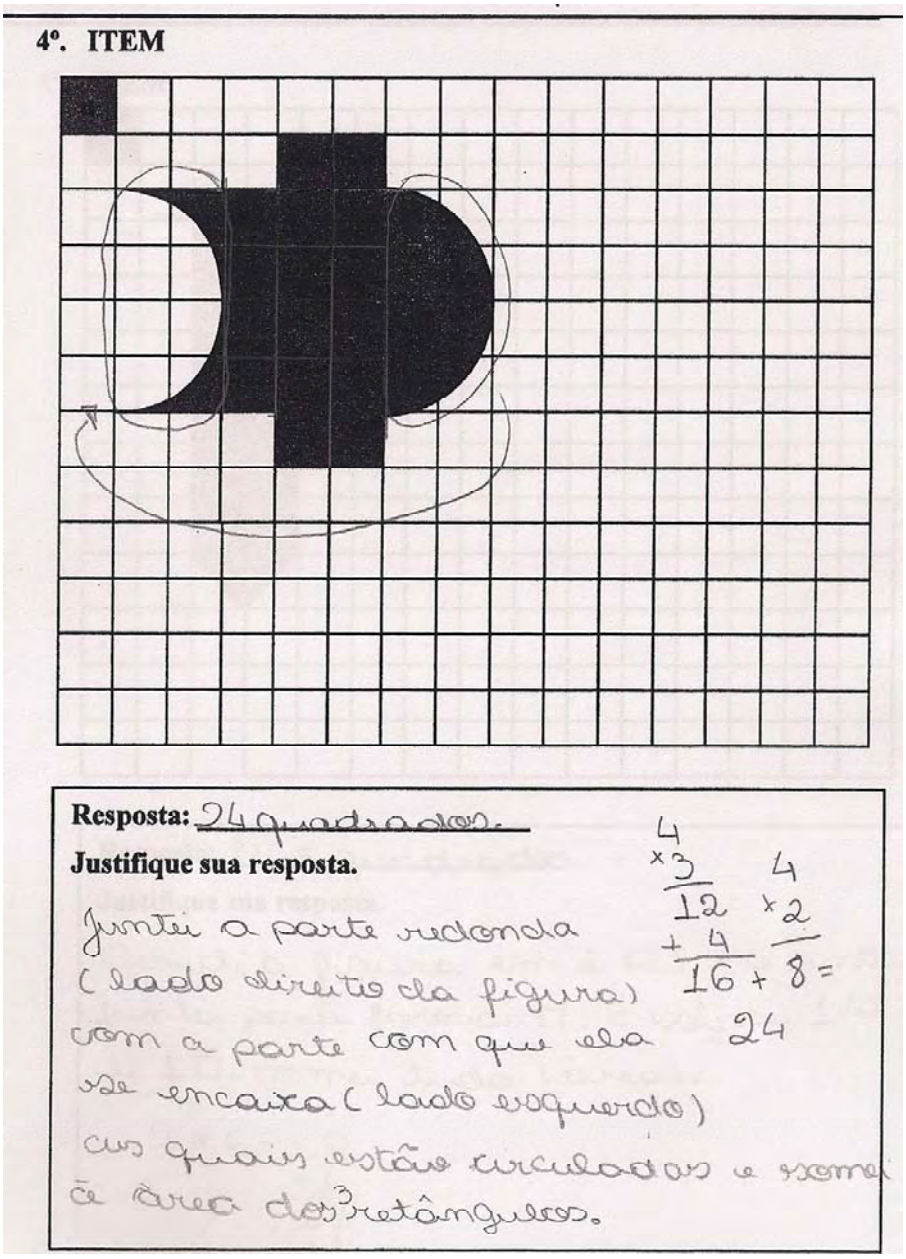
Tabela 6

As diferenças entre as médias de acertos não foi significativa, apenas 1% de diferença. Concluímos que os valores atribuídos a esta variável nesse estudo, não alteraram de maneira expressiva a obtenção do resultado correto por parte dos sujeitos pesquisados

A figura a seguir mostra como o aluno B 02 resolveu os 3º e 4º itens (figuras C e D).



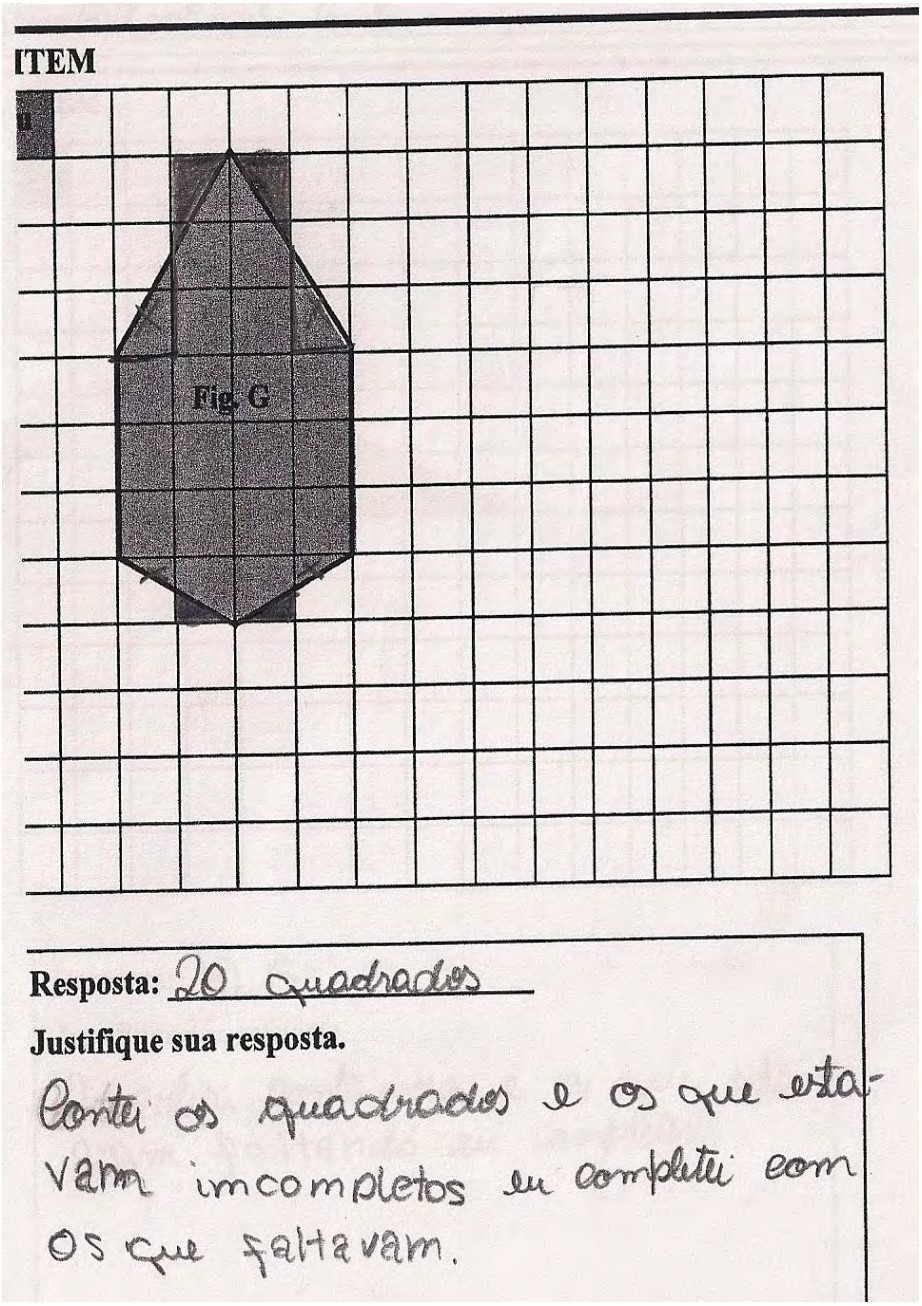
Protocolo do aluno B 02.



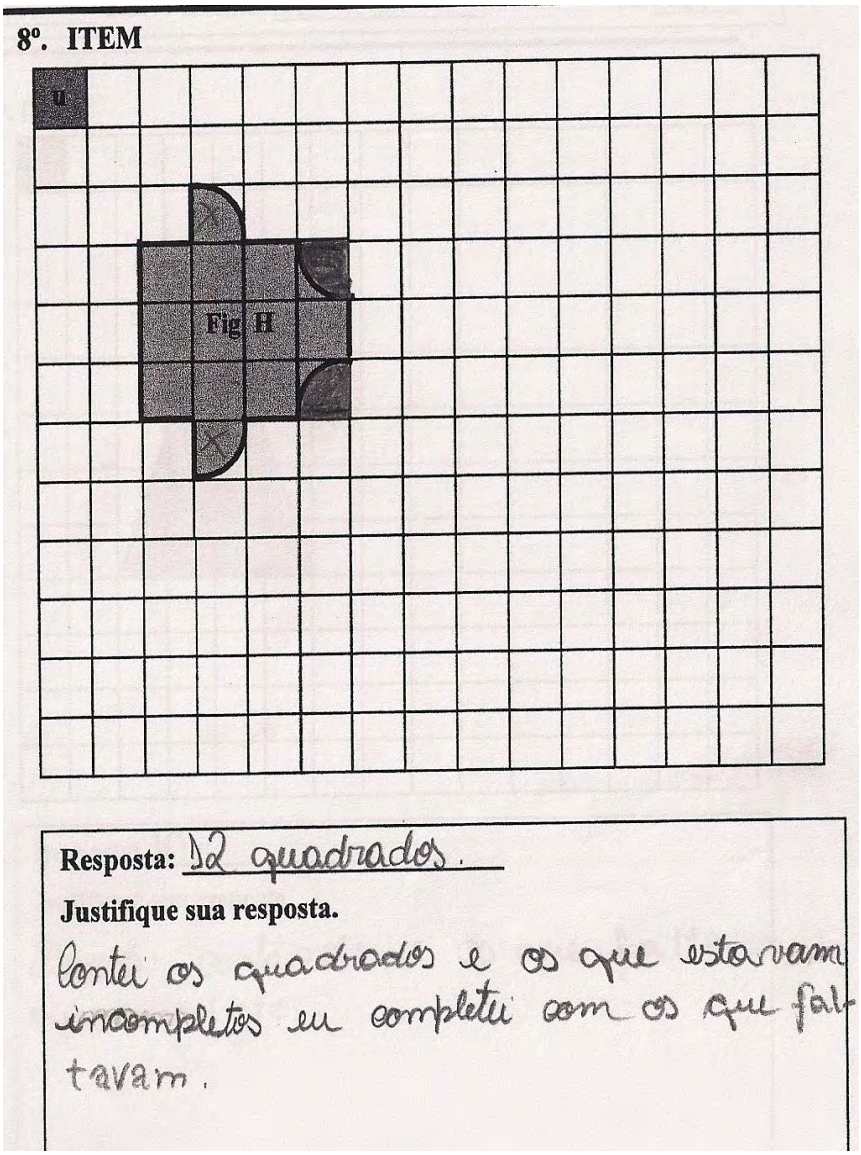
Protocolo do aluno B 02.

Observamos que o fato de os contornos das figuras serem de tipos diferentes (poligonal e não poligonal) não dificultou a obtenção da resposta correta, e os procedimentos utilizados são parecidos, mas em termos qualitativos são diferentes. No 3º item o aluno dividiu a figura em retângulos e triângulos retângulos, calculou a área de cada um através de fórmulas e somou os resultados. No 4º item, completou a malha, usou decomposição/composição, calculou a área através de fórmula e somou os resultados.

A próxima figura apresenta a resolução do sujeito D 25 ao resolver os 7º e 8º itens (figuras G e H).



Protocolo do aluno D 25.



Protocolo do aluno D 25.

Neste exemplo o aluno também não apresentou dificuldades em resolver as questões propostas. No 7º item, completou os quadradinhos e contou agrupando as frações de quadradinhos. No 8º item, utilizou a decomposição/composição e contou os quadradinhos.

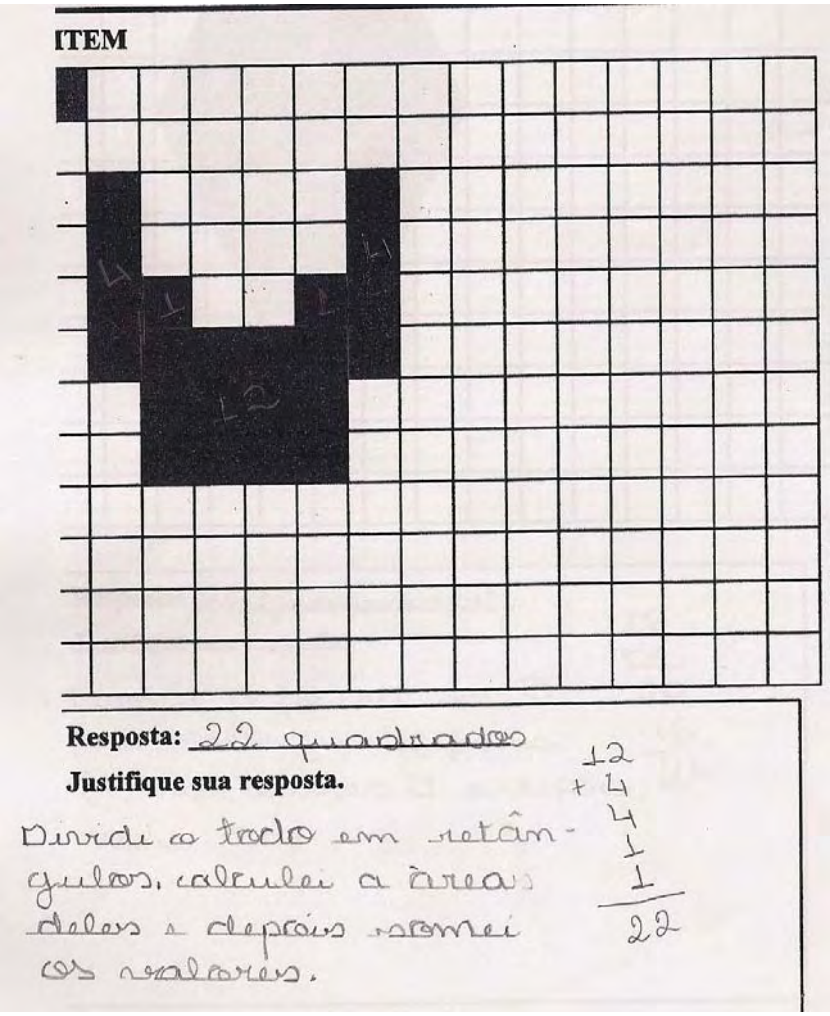
b) Preenchimento da figura

Com relação ao *preenchimento da figura*, temos dois valores a considerar: *hachurada com malha visível* ***(HV)*** e *hachurada sem malha visível* ***(HI)***. Na análise dos resultados agrupamos os itens que apresentavam o mesmo grau de complexidade, entre os pares o que muda é o valor da variável preenchimento da figura, as outras variáveis permanecem fixas.

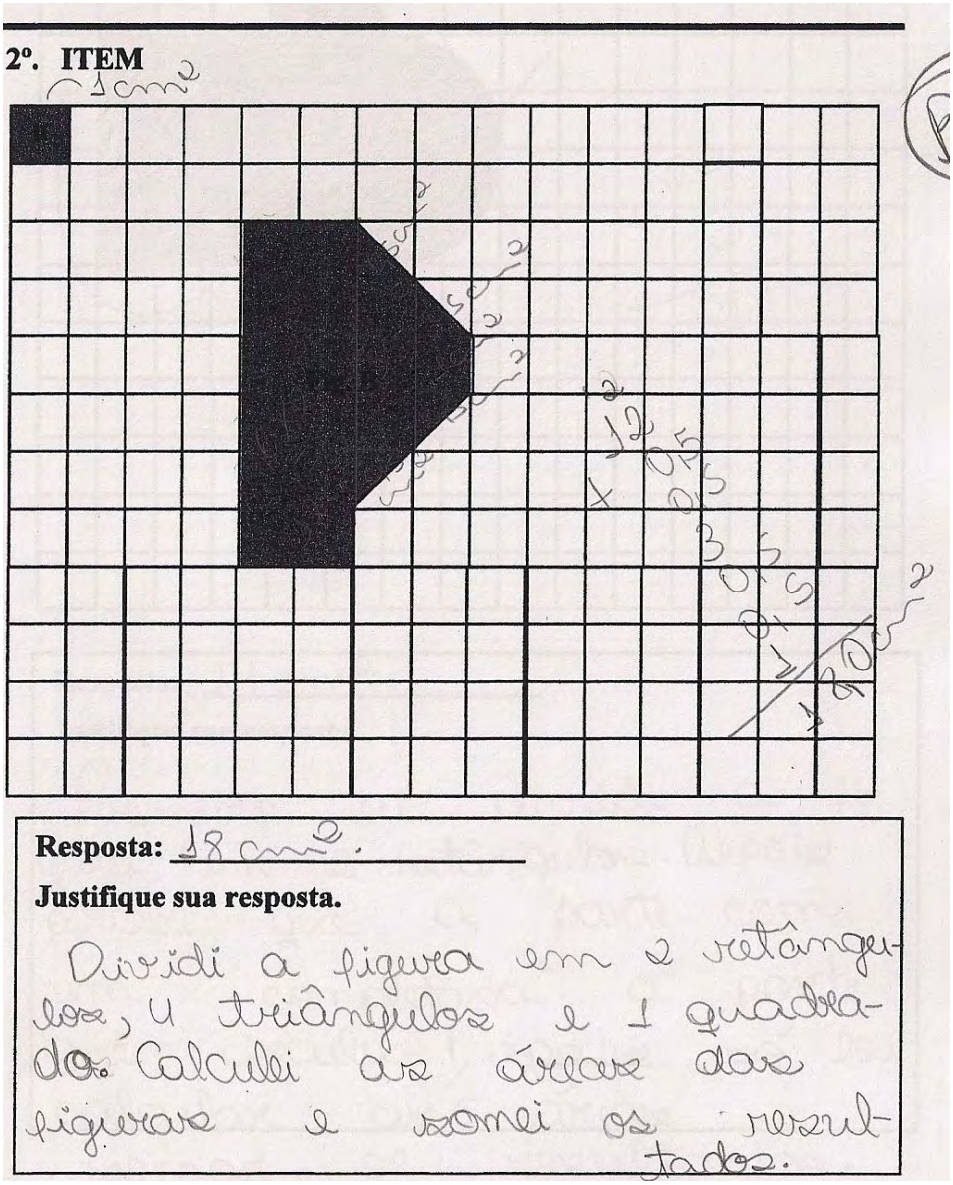
Figuras	A x E		B x F		C x G		D x H		M x N	
Percentual de acerto (%)	88	91	52	60	38	37	31	54	04	07
Figuras	A, B, C, D e M					E, F, G, H e N				
Média de acerto (%)	42,6					49,8				

Tabela 7

A mudança no valor dessa variável apresenta uma diferença entre as médias de acerto de 7,2 %. Percebemos em nossa análise qualitativa que essa variável não impossibilitou grande parte dos alunos em calcular a área das figuras. Apresentamos a seguir os protocolos de dois alunos B 02 e B 20, que podem exemplificar resoluções em que a malha não representou um entrave na resolução da atividade.



Protocolo do aluno B 02.

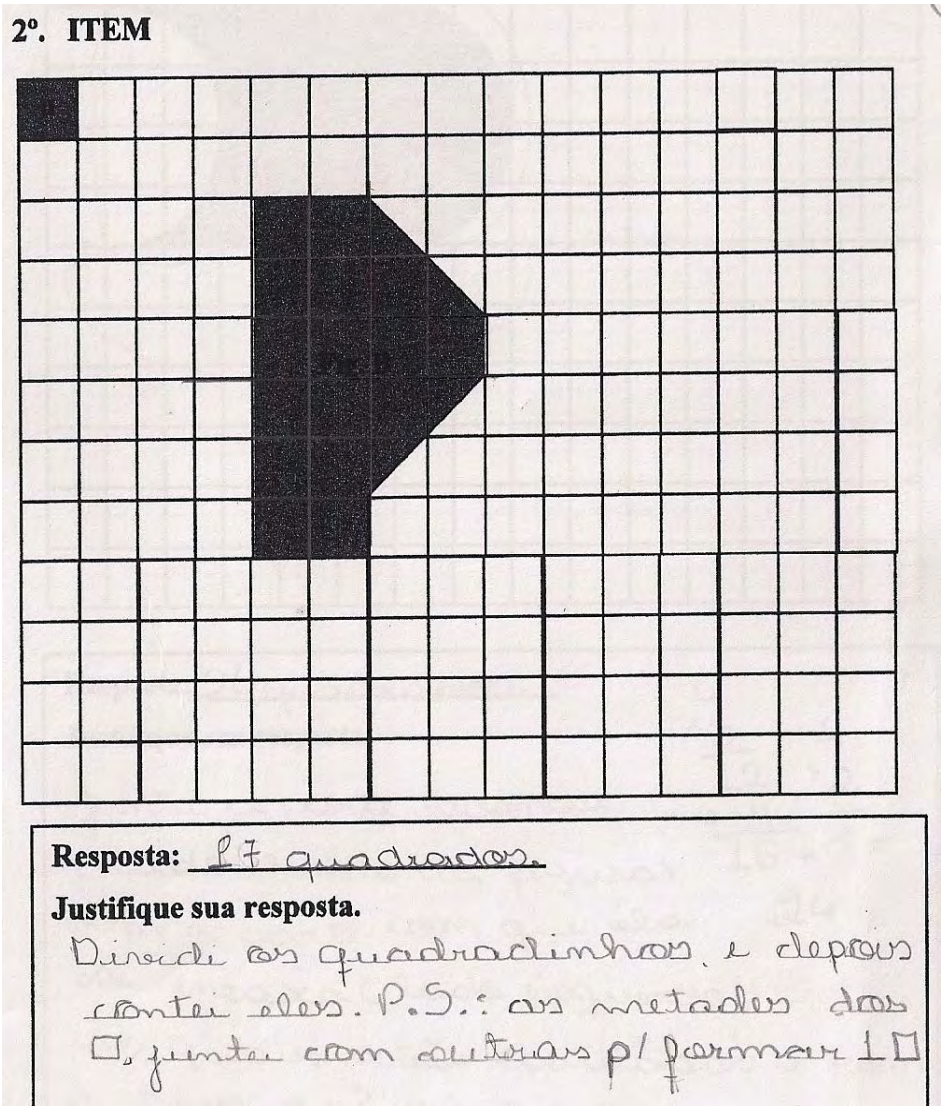


Protocolo do aluno B 20.

O aluno B 02 dividiu a figura em retângulos, contou os quadrados dentro de cada retângulo e somou os resultados.

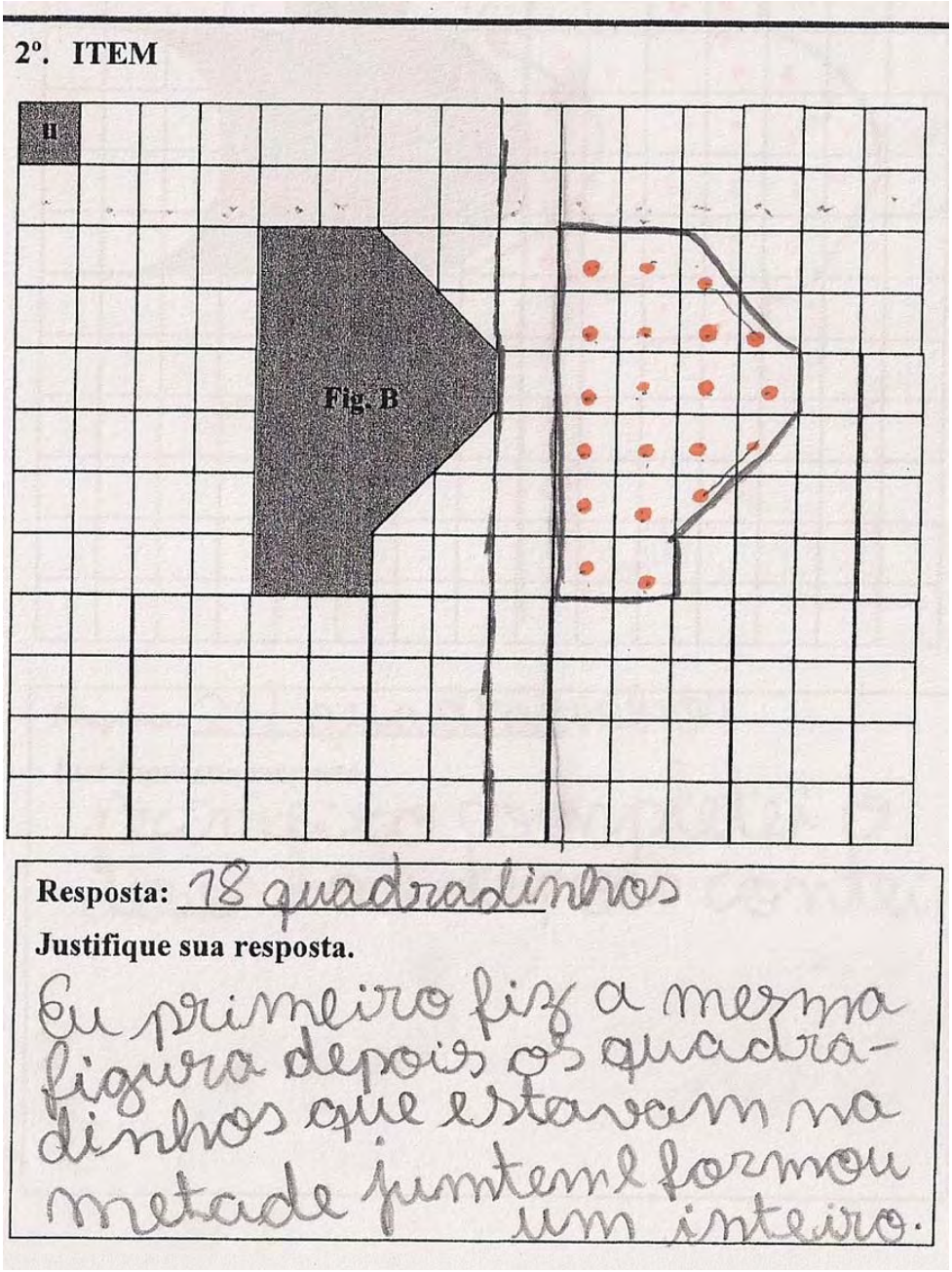
O aluno B 20 dividiu a figura em retângulos, calculou a área de cada um através de fórmula e somou os resultados e as frações de quadradinhos. Este protocolo é um dos que consideramos parcialmente corretos por estabelecer uma unidade que não foi a escolhida para a atividade, uso de unidades convencionais (cm^2) quando a unidade indicada é a área do quadradinho u.

Por outro lado em algumas respostas o aluno utilizou procedimentos corretos (inclusive a justificativa), mas o resultado apresentado estava incorreto, como mostra o protocolo do aluno B 02.

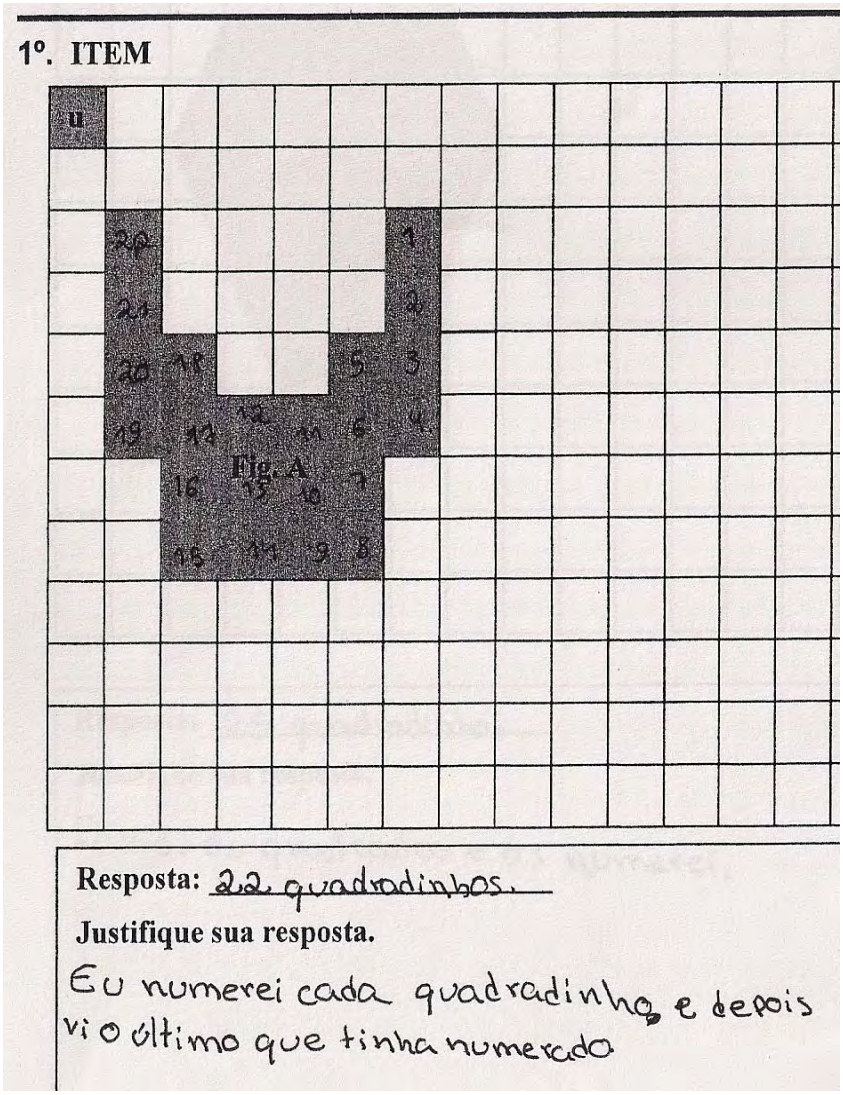


Protocolo do aluno B 02.

Para alguns alunos o preenchimento da figura impedindo de visualizar as linhas da malha não impediu o cálculo correto e possibilitou procedimentos não previstos na análise *a priori*. Desses procedimentos destacamos dois protocolos. No primeiro o aluno desenhou a figura na malha ao lado para visualizar a malha e contou os quadradinhos agrupando as metades (frações de quadradinhos). No segundo, a malha não representou nenhuma dificuldade e contou enumerando os quadradinhos.



Protocolo do aluno E 11.



Protocolo do aluno C 05.

c) Posição relativa dos polígonos em relação à malha

A variável *posição relativa dos polígonos em relação à malha*, teve cinco valores atribuídos:

1) *todos os lados da figura "seguem a malha"* ***(TL)****;*

2) *algum(s) lado(s) da figura "seguem a malha" e os demais são diagonais dos quadrados (DQ);*

3) *algum(s) lado(s) da figura "seguem a malha" e há pelo menos um lado que é diagonal de um retângulo não quadrado (DR);*

4) *algum(s) lado(s) da figura "seguem a malha" e os demais são arcos de circunferências* ***(DC)****;*

5) *nenhum dos lados da figura "segue a malha"* ***(N)***.

Em nossa análise *a priori* os valores atribuídos a essa variável apresentou o maior índice de respostas incorretas com relação ao valor *nenhum dos lados da figura "segue a malha"* ***(N)***.

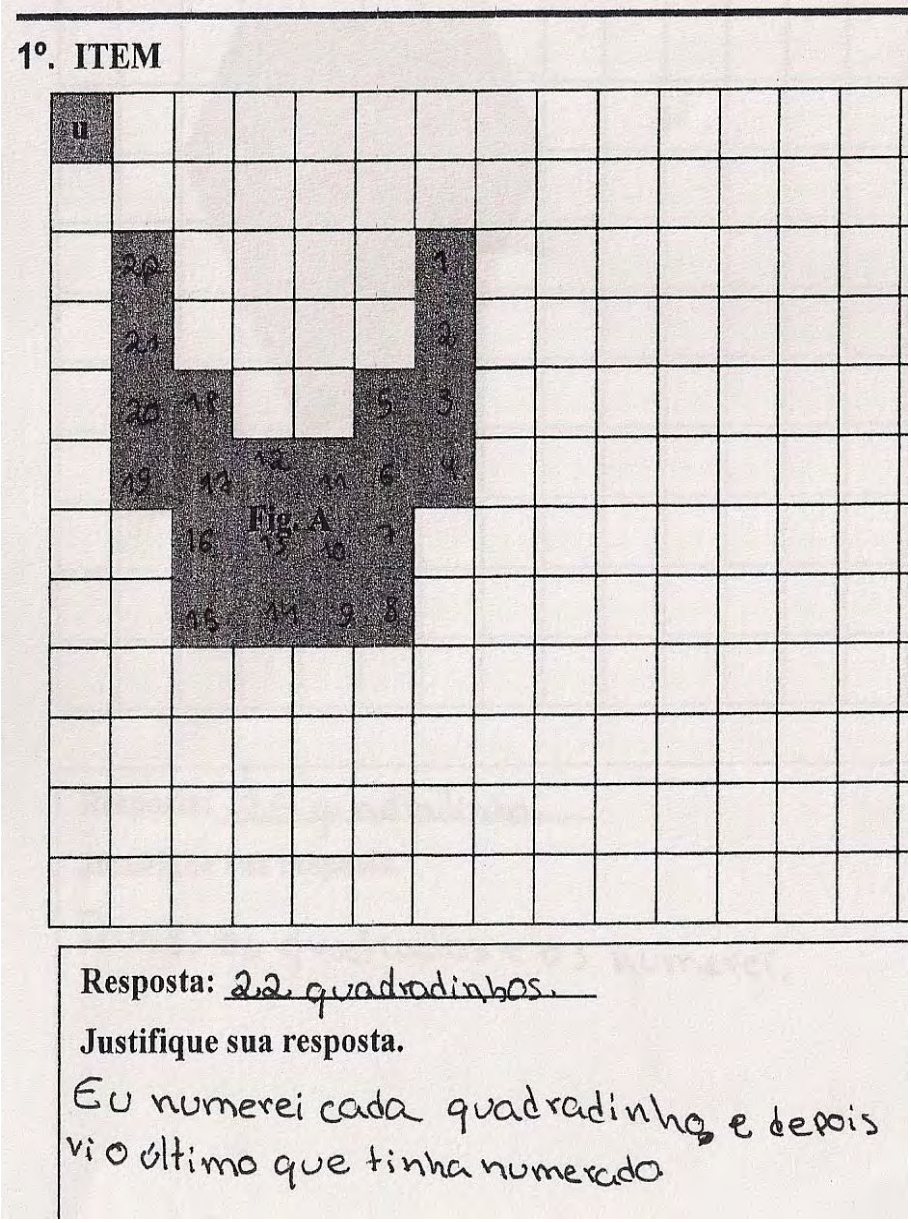
Figuras	**A e E**		**B, F e L**			**C, G, I, J e K**					**D e H**		**M e N**	
Percentual de acerto (%)	**88**	**91**	**52**	**60**	**55**	**38**	**37**	**21**	**39**	**30**	**31**	**54**	**04**	**07**
Figuras	**A e E**		**B, C, D, F, G, H, I, J, K, e L**										**M e N**	
Média de acerto (%)	**89,5**		**41,6**										**5,5**	

Tabela 8

As figuras e os percentuais de acerto estão agrupadas de acordo com o valor da variável, e o agrupamento que considera as figuras e a média de acerto foi disposto levando em conta os procedimentos que são privilegiados na mudança de valor da variável: *contagem* (A e E); *decomposição/recomposição* (B, C, D, F, G, H, I, J , K, e L) e *enquadramento da figura num retângulo para calcular a área total e subtrair as áreas que não fazem parte da figura* (M e N).

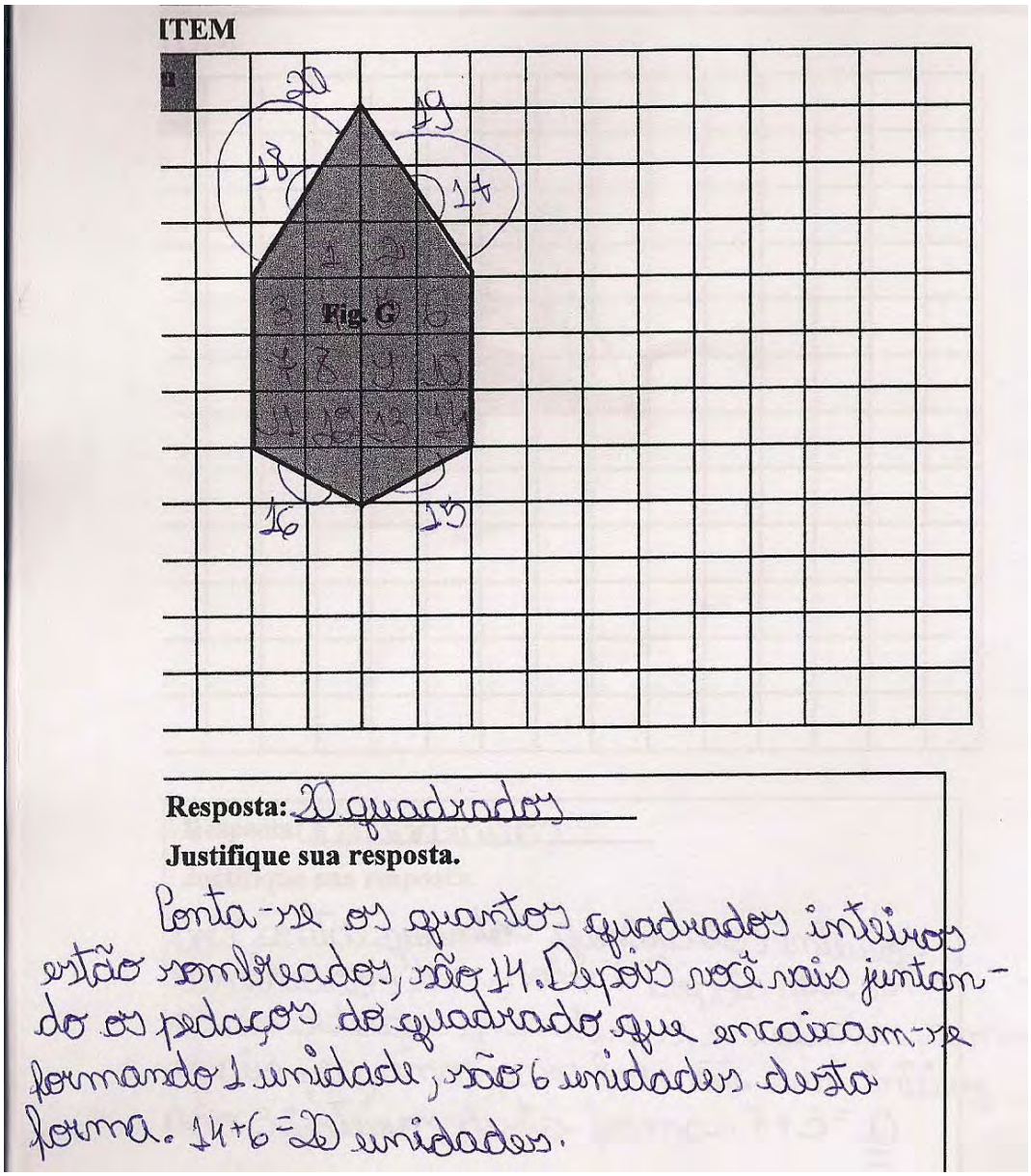
As figuras que favorecem o procedimento de contagem de quadradinhos possuem a maior média de acerto (89,5%), seguida da decomposição/recomposição (41,6%) e do enquadramento da figura num retângulo para calcular a área total e subtrair as áreas que não fazem parte da figura (5,5%).

O fato de as figuras estarem desenhadas na malha quadriculada corrobora para que o procedimento de contagem de quadradinho seja contemplado. Em alguns casos a contagem foi realizada direta mesmo quando a malha não estava visível, como mostra a seguir o protocolo do aluno C 05.

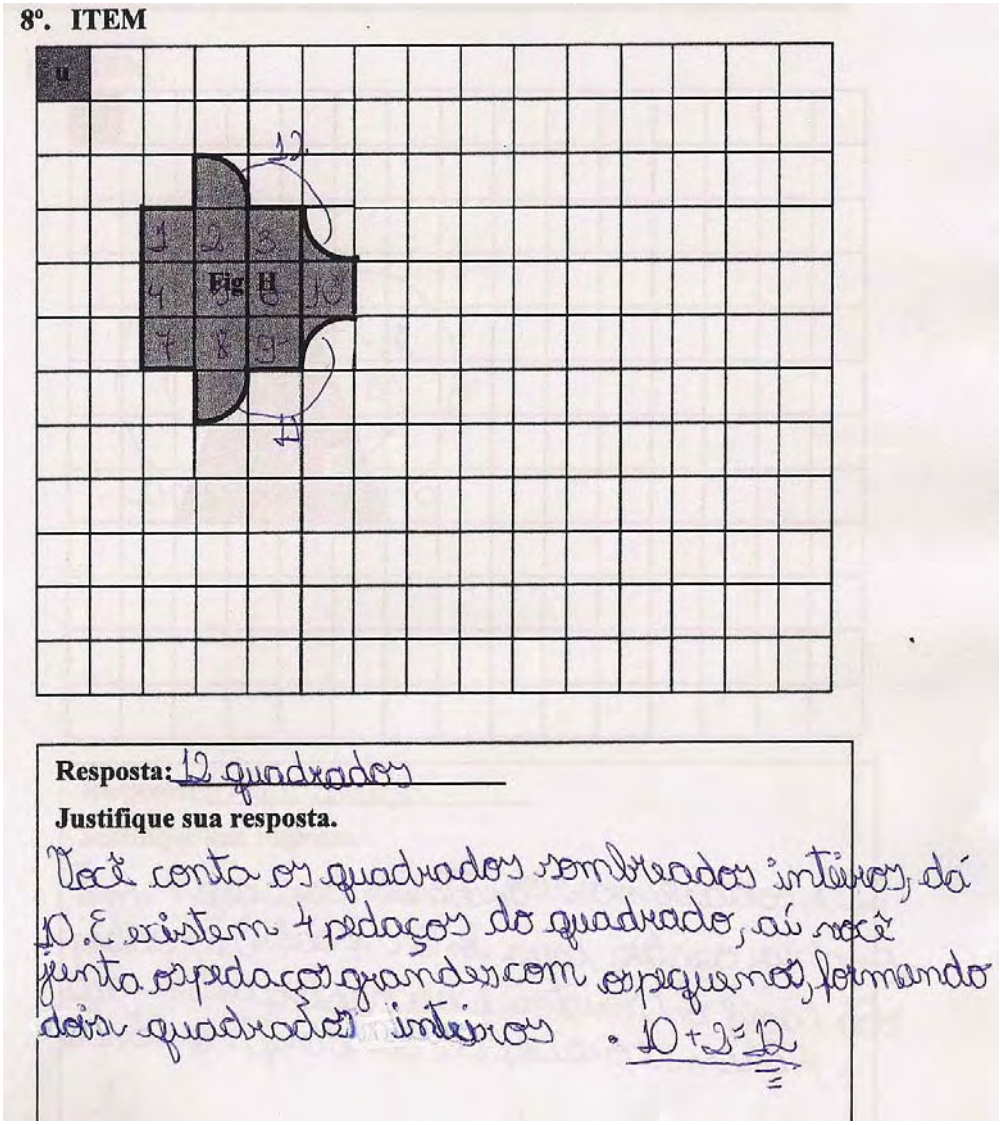


Protocolo do aluno C 05.

Embora os itens que trazem as figuras B, C, D, F, G, H, I, J , K, e L, o procedimento destacado seja o da decomposição/recomposição, a contagem direta dos quadradinhos também foi realizada de maneira correta, como mostra o protocolo do aluno B 03 abaixo.

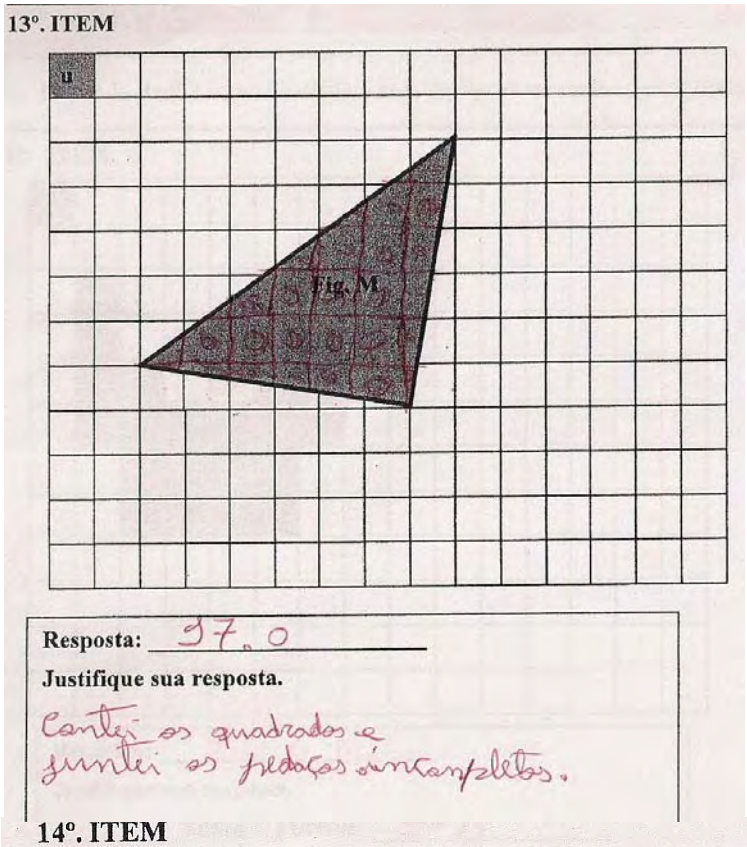


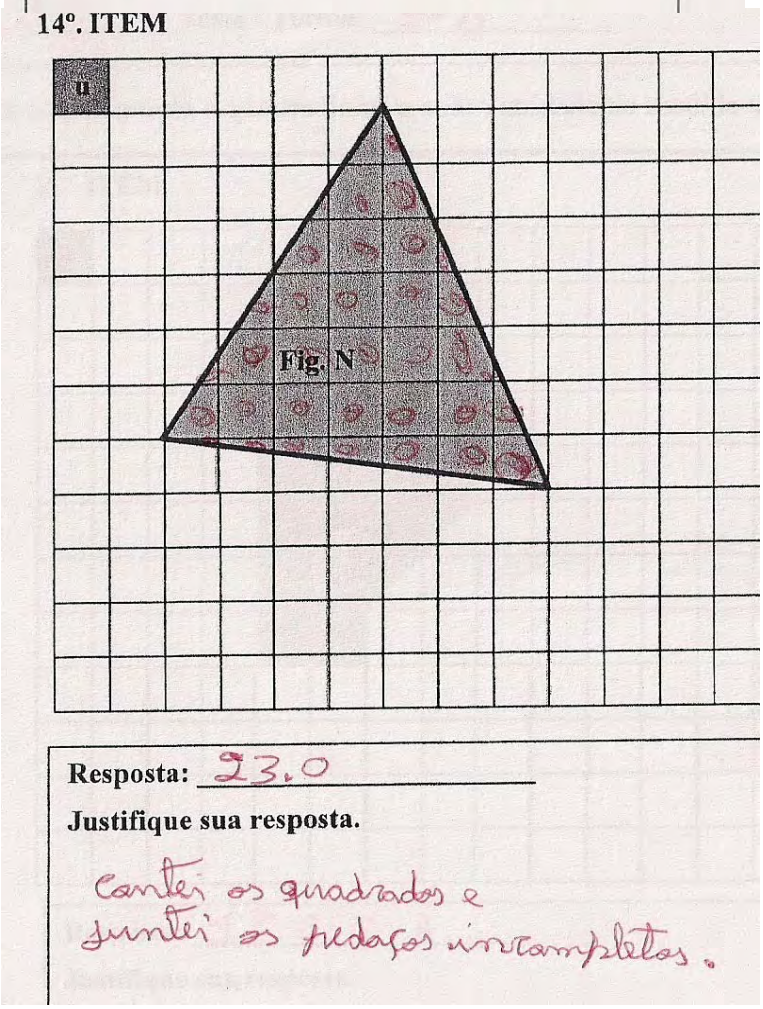
Protocolo do aluno B 03.



Protocolo do aluno B 03.

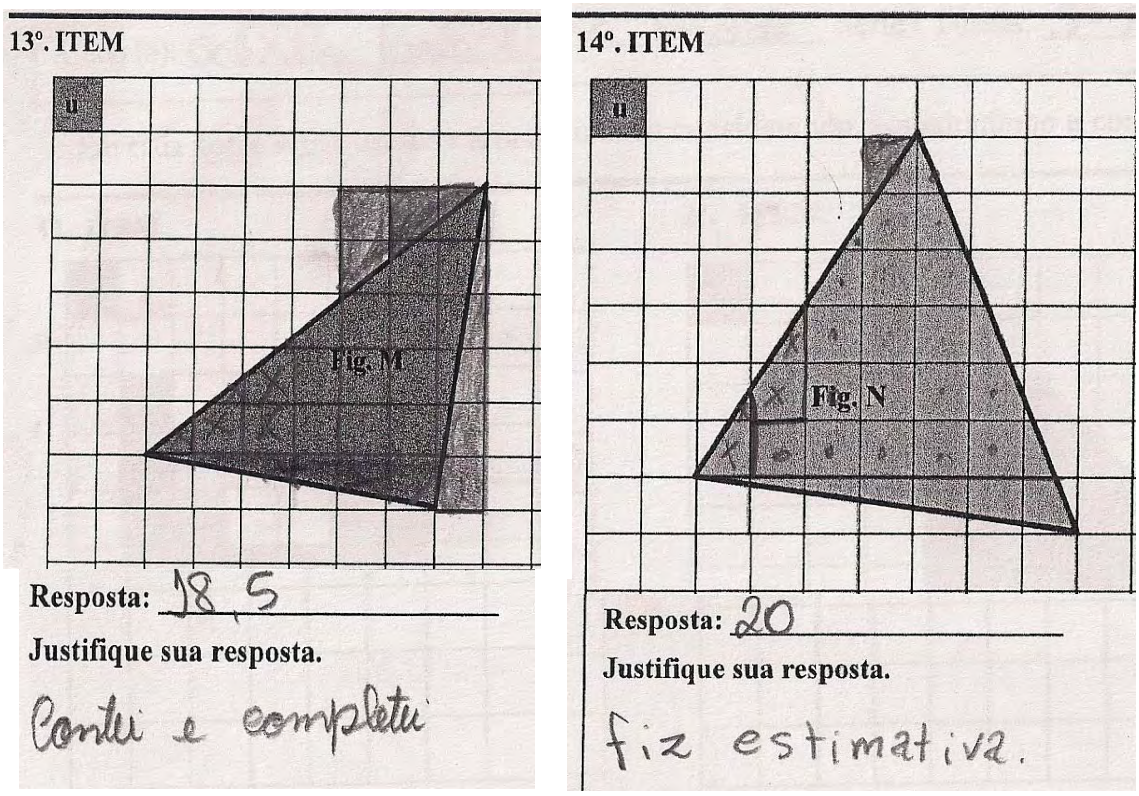
As figuras M e N tiveram os mais baixos percentuais de acerto. A razão desses resultados pode está na leitura das figuras, que são consideradas as mais complexas e de estratégias ótimas mais restritas. Encontramos variedade de procedimentos considerados não corretos ou que o emprego desses procedimentos nessas figuras conduziria a respostas incorretas. Destacamos alguns protocolos para exemplificar essa diversidade.





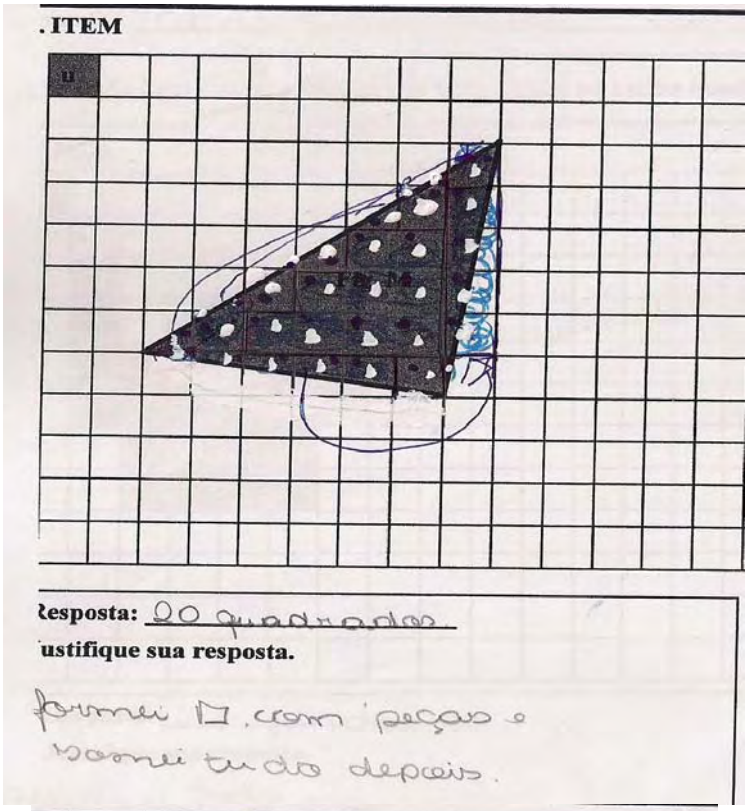
Protocolos do aluno A 07.

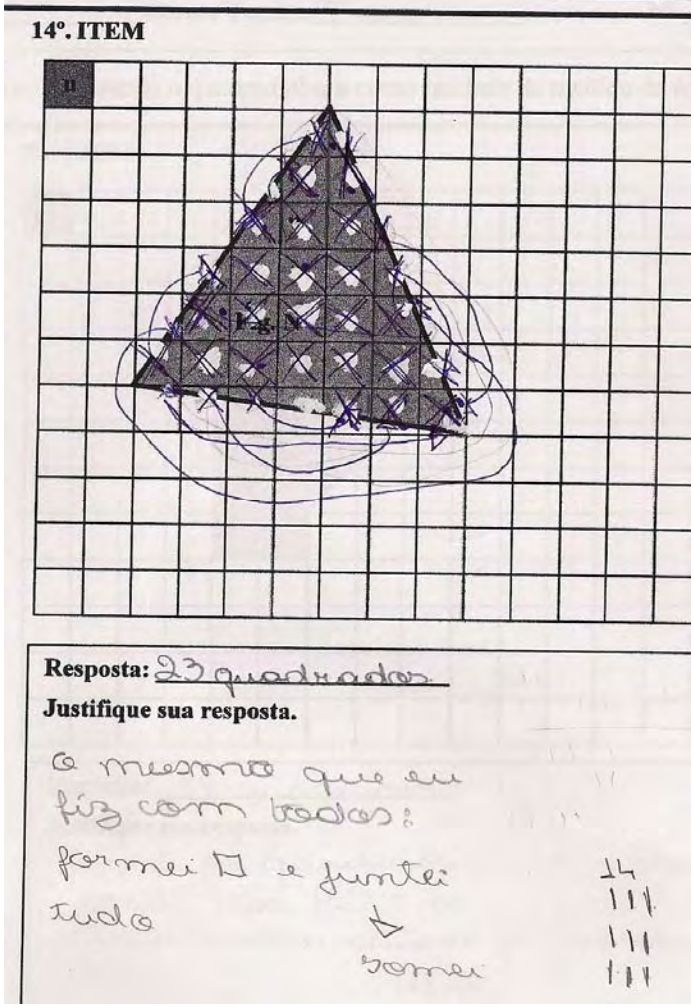
O aluno A 07 completou a malha para visualizar os quadradinhos, e contou agrupando as frações de quadradinhos na figura M, na figura N, contou agrupando as frações. Observamos que o procedimento empregado nos dois itens foi praticamente o mesmo, e conduziu para a figura M, uma resposta incorreta, mas para a figura N, o resultado apresentado está correto.



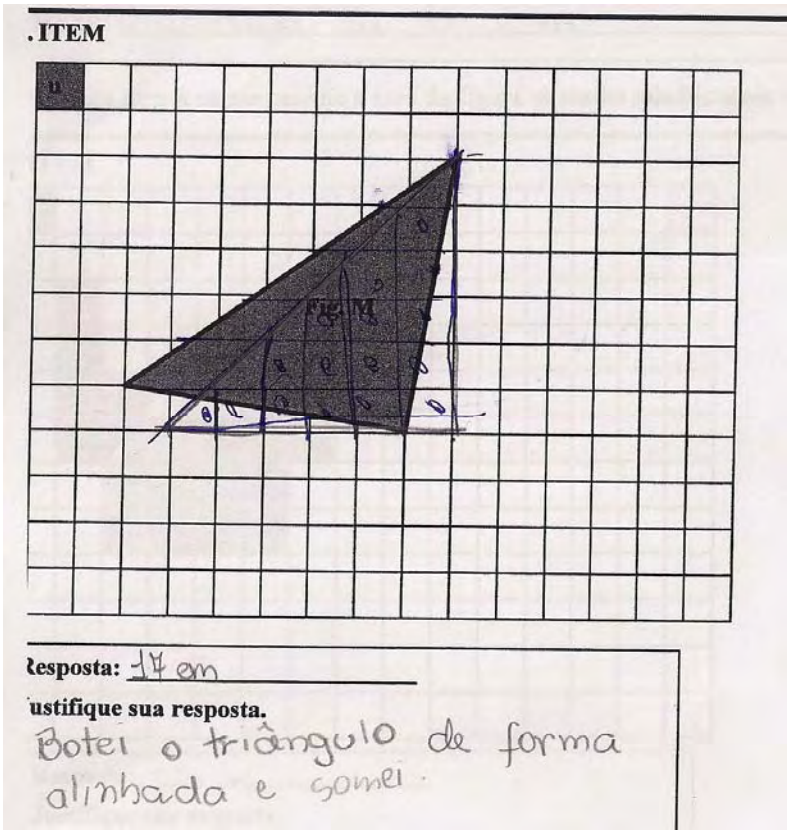
Protocolo do aluno D 25.

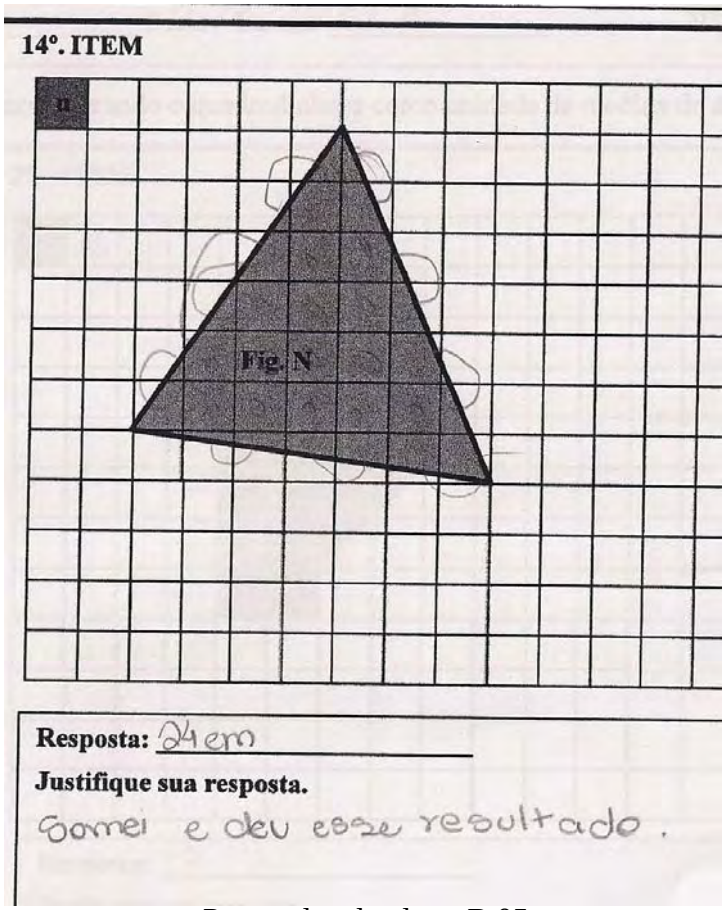
O aluno D 25 completou a malha, utilizou decomposição/composição e contou na figura M, com isso acertou o item. Na figura N tentou utilizar o mesmo procedimento, mas pela dificuldade de visualizar as partes da figura que poderiam ser compensadas, usou a estimativa e chegou próximo da resposta correta, 23 quadradinhos.





Protocolos do aluno B 02.

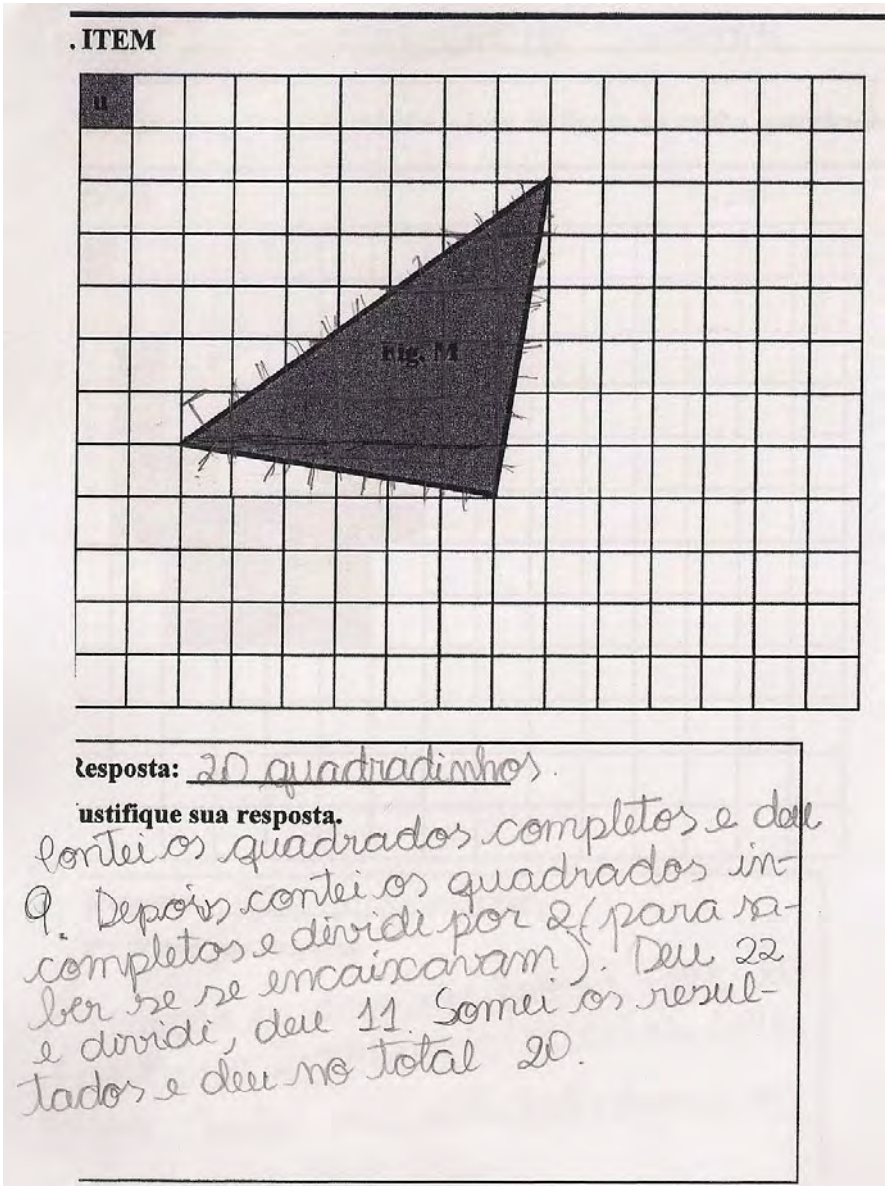




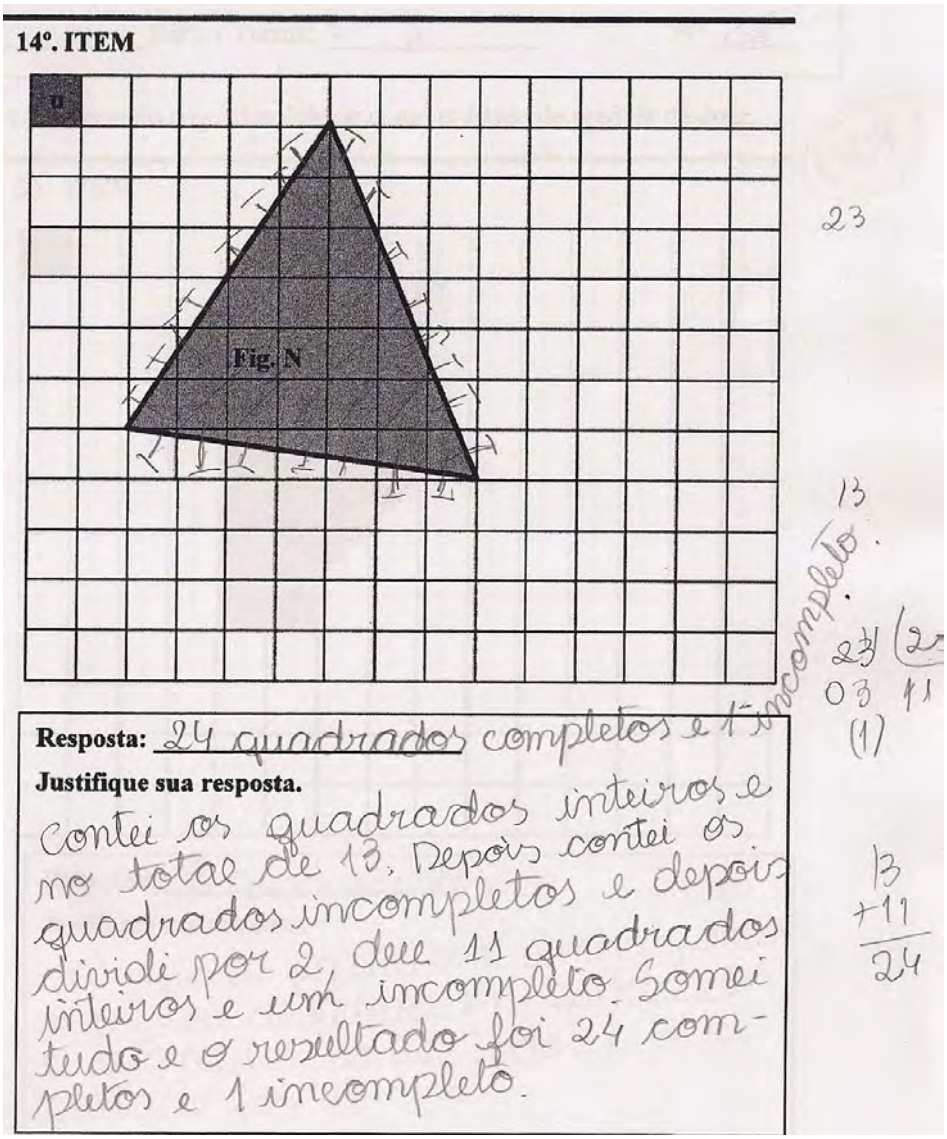
Protocolos do aluno B 05.

Nos protocolos acima observamos que apesar da dificuldade apresentada os resultados incorretos foram próximos dos corretos. O aluno B 02 completou a malha, dividiu a figura em retângulos e contou agrupando as frações de quadradinhos. Apesar de utilizar o mesmo procedimento nos dois itens, acertou apenas o 14º item.

Já o aluno B 05, utilizou procedimentos diferentes nos dois itens. No 13º completou a malha, rotacionou a figura apoiando dois de seus lados na malha e contou agrupando as frações de quadradinhos. No 14º item apenas contou agrupando as frações de quadradinhos. Apesar das tentativas o aluno não acertou nenhuma das questões.

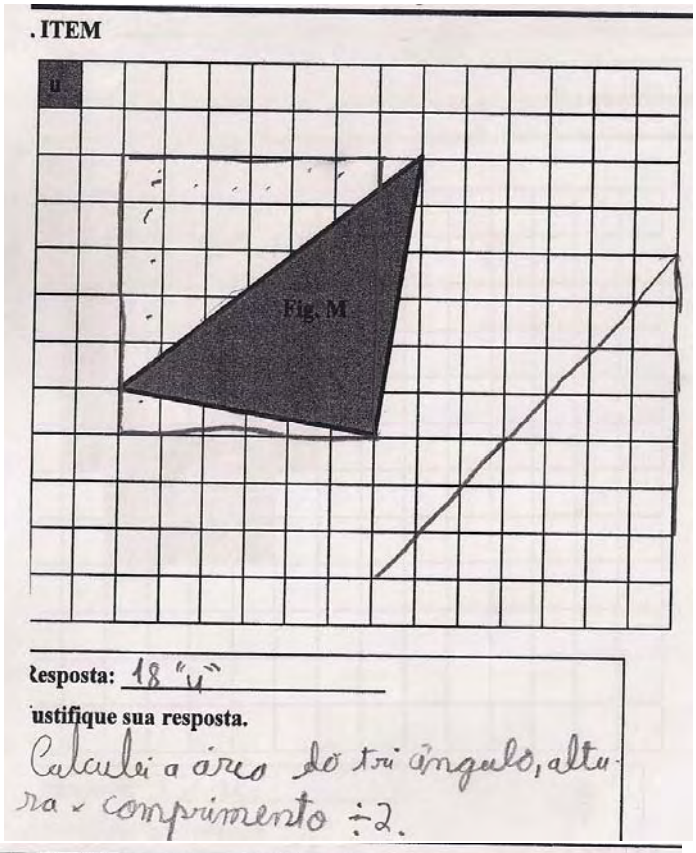


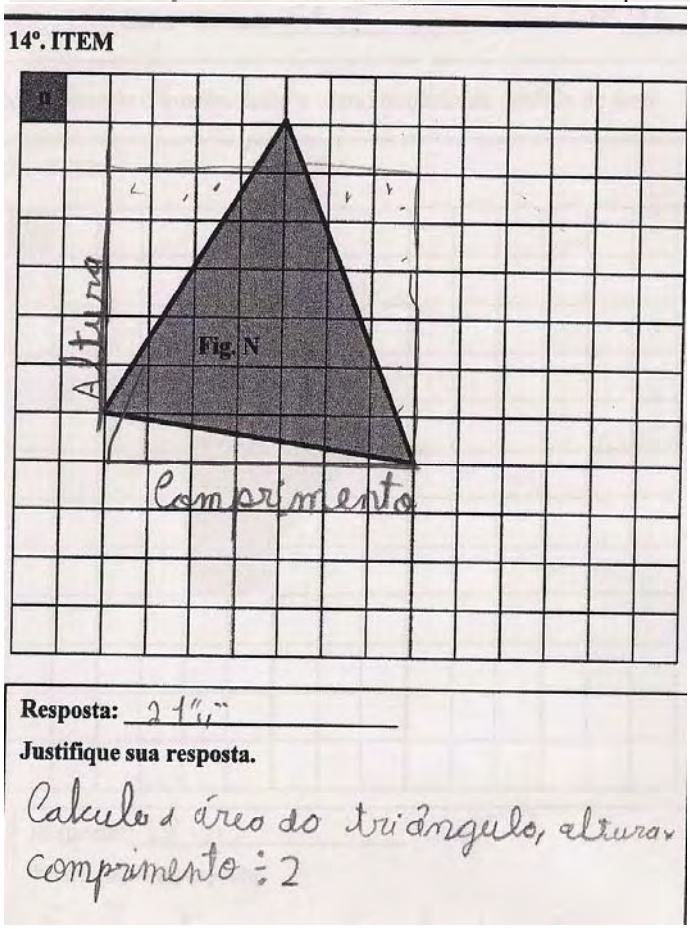
Protocolo do aluno B7



Protocolo do aluno B7

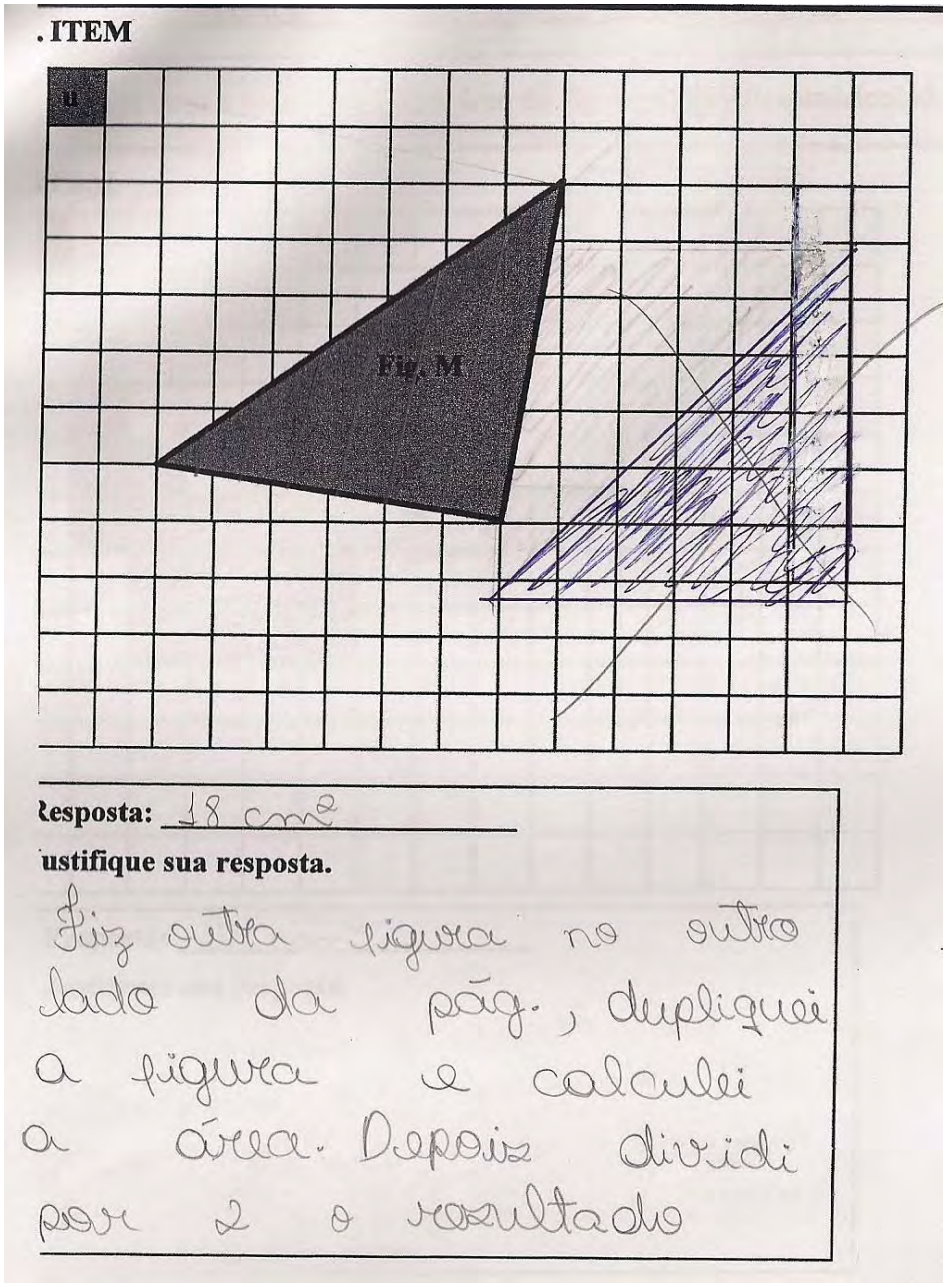
O aluno B 07 utilizou o mesmo procedimento nos dois itens e obteve respostas próximas do resultado correto. Chama-nos a atenção a riqueza de detalhe na justificativa do aluno nos dois itens.]



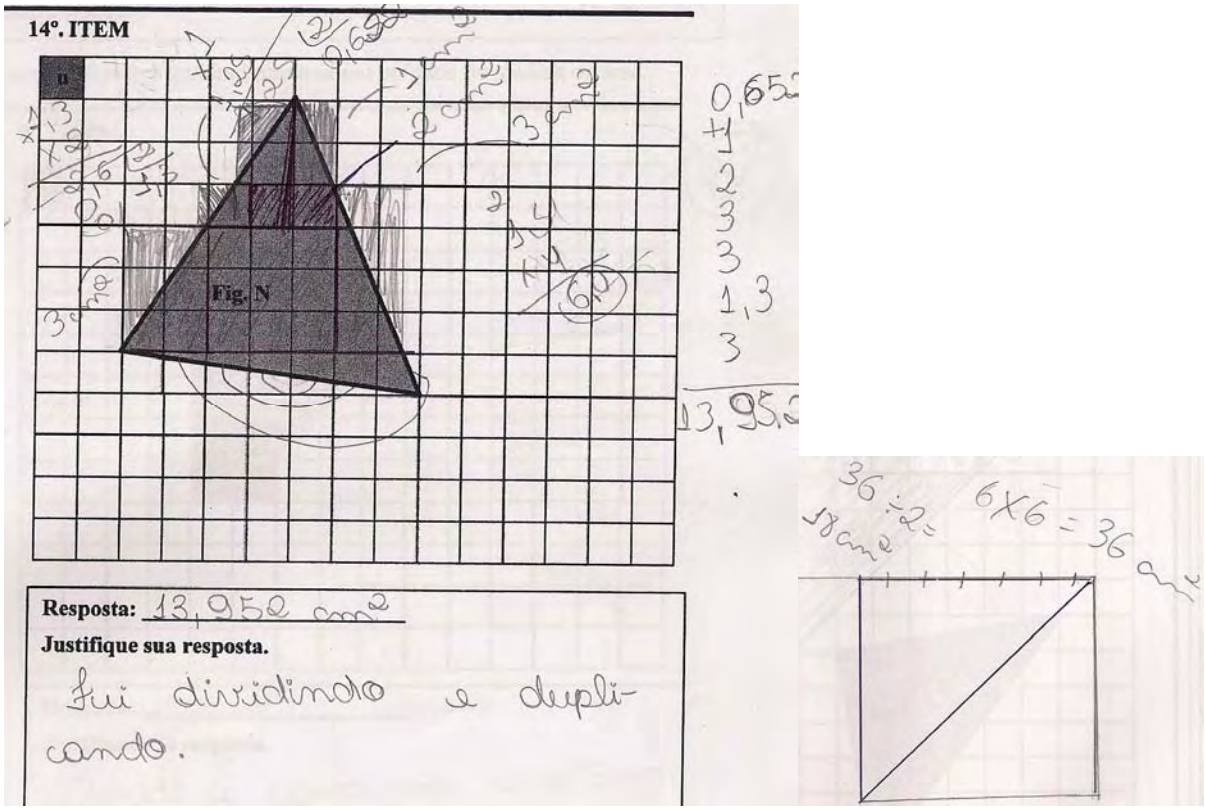


Protocolo do aluno B 16.

O procedimento utilizado pelo aluno B 16 nos dois itens foi o uso da fórmula da área do triângulo. Na figura o aluno ainda rotacionou o triângulo para facilitar o cálculo da área.



Protocolo do aluno B 20.



Protocolo do aluno B 20.

No item 13 o aluno B 20 tentou rotacionar a figura, mas não teve êxito. Depois desenhou o triângulo no outro lado da folha, duplicou a figura formando um quadrado, calculou a área e dividiu por dois. O resultado ficou muito próximo do correto que era 18,5 quadradinhos. No item 14 dividiu a figura em retângulos calculando as áreas e dividindo os resultados parciais por 2, depois somou todos os resultados.

Observamos que embora o resultado não tenha sido o correto em nenhum dos itens, o aluno apresentou boa compreensão da questão e os procedimentos mostram um domínio das operações com números decimais além de boa interpretação geométrica.

d) Medida da área tomando o quadradinho da malha como superfície unitária

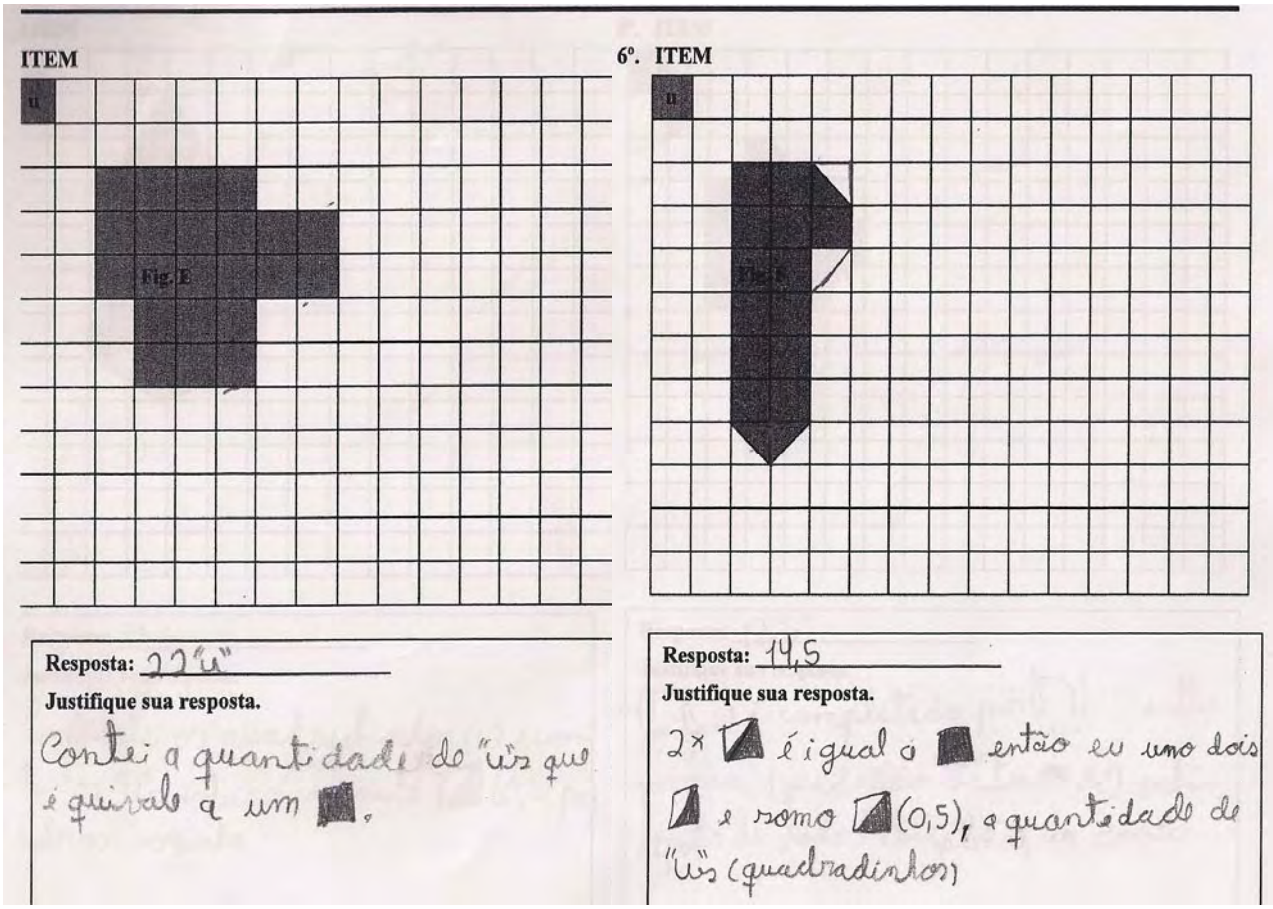
Figuras	**A,**	**B,**	**C,**	**D,**	**E,**	**G,**	**H,**	**J,**	**K,**	**L,**	**N**	**F,**	**I e M**	
Percentual de acerto (%)	**88**	**52**	**38**	**31**	**91**	**37**	**54**	**39**	**30**	**55**	**07**	**60**	**21**	**04**

Tabela 9

Figuras	**A, B, C, D, E, G, H, J, K, L e N**	**F, I e M**
Média de acerto (%)	**47,45**	**28,33**

Outra variável considerada no estudo foi a *medida da área tomando o quadradinho da malha como superfície unitária* com dois valores: *inteira* ***(I)*** e *fracionária* ***(F)***.

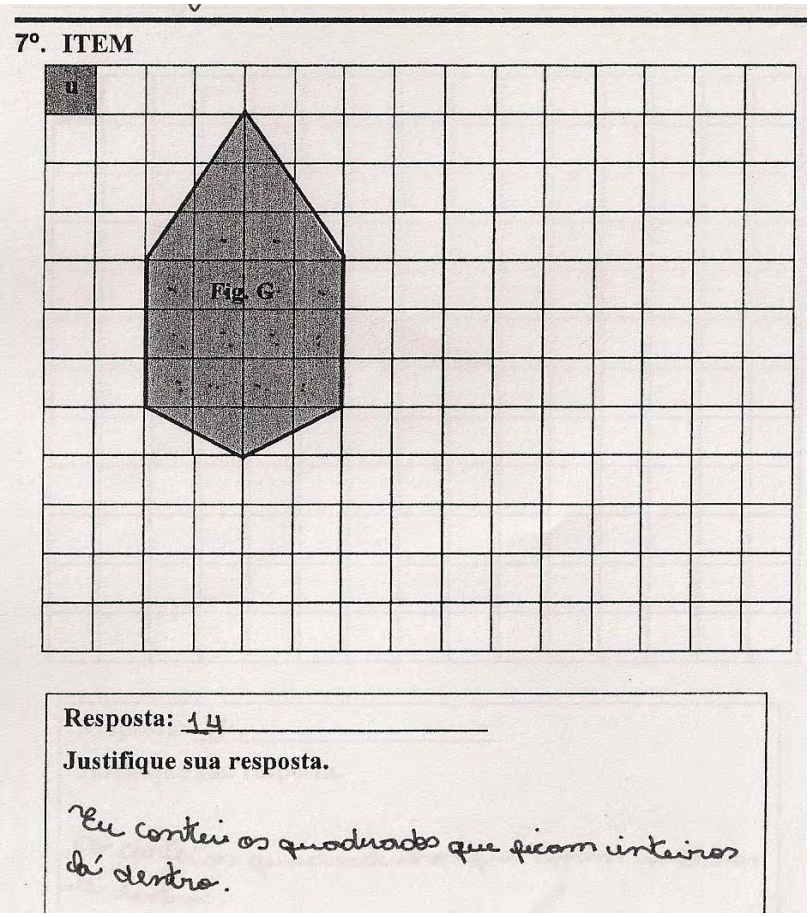
Os procedimentos mais utilizados foram três: *contagem, decomposição/composição e uso de fórmula*. A seguir apresentamos exemplos de protocolos que mostram esses procedimentos.



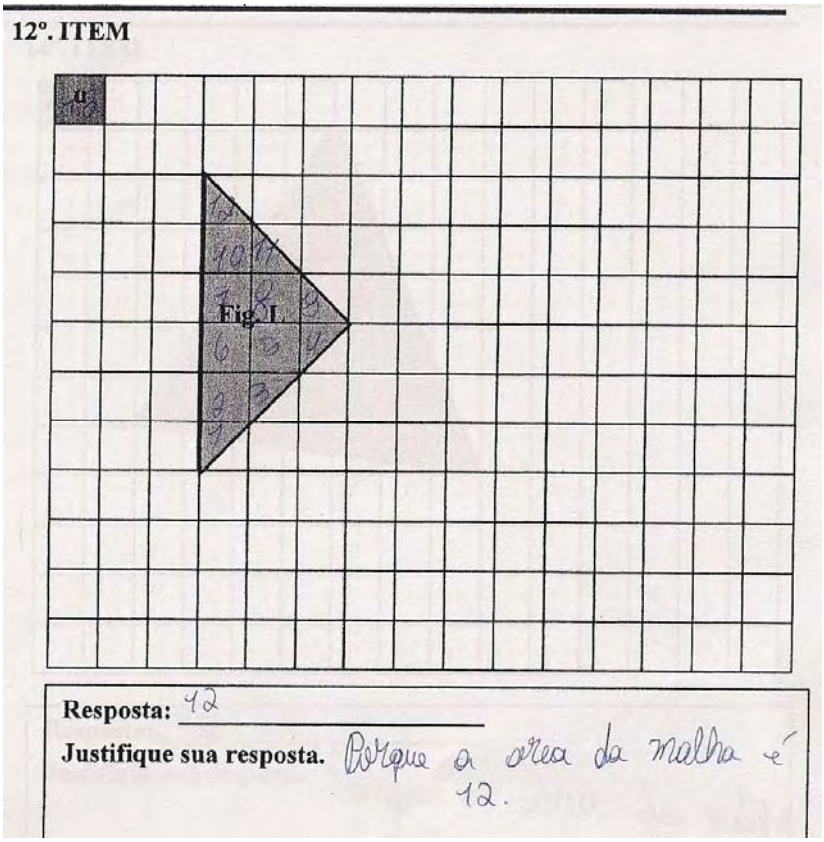
Protocolo do aluno B 16.

Podemos observar o aluno B16 realiza a contagem corretamente e mostra através de sua justificativa que a compreensão função medida da área não é restrita ao conjunto dos números naturais como imagem, ou seja, admite que a área de uma superfície pode ser representada por uma medida racional.

Nas atividades em que a medida da área da figura era fracionária alguns alunos tiveram mais dificuldades em resolver corretamente. Alguns desconsideraram a parte fracionária do quadradinho contando apenas os quadradinhos inteiros, mesmos quando as frações correspondiam a metade do quadradinho. Outros alunos contaram as frações de quadradinhos como quadrados inteiros. Os protocolos dos alunos E 08 e D 07 exemplificam estas interpretações.

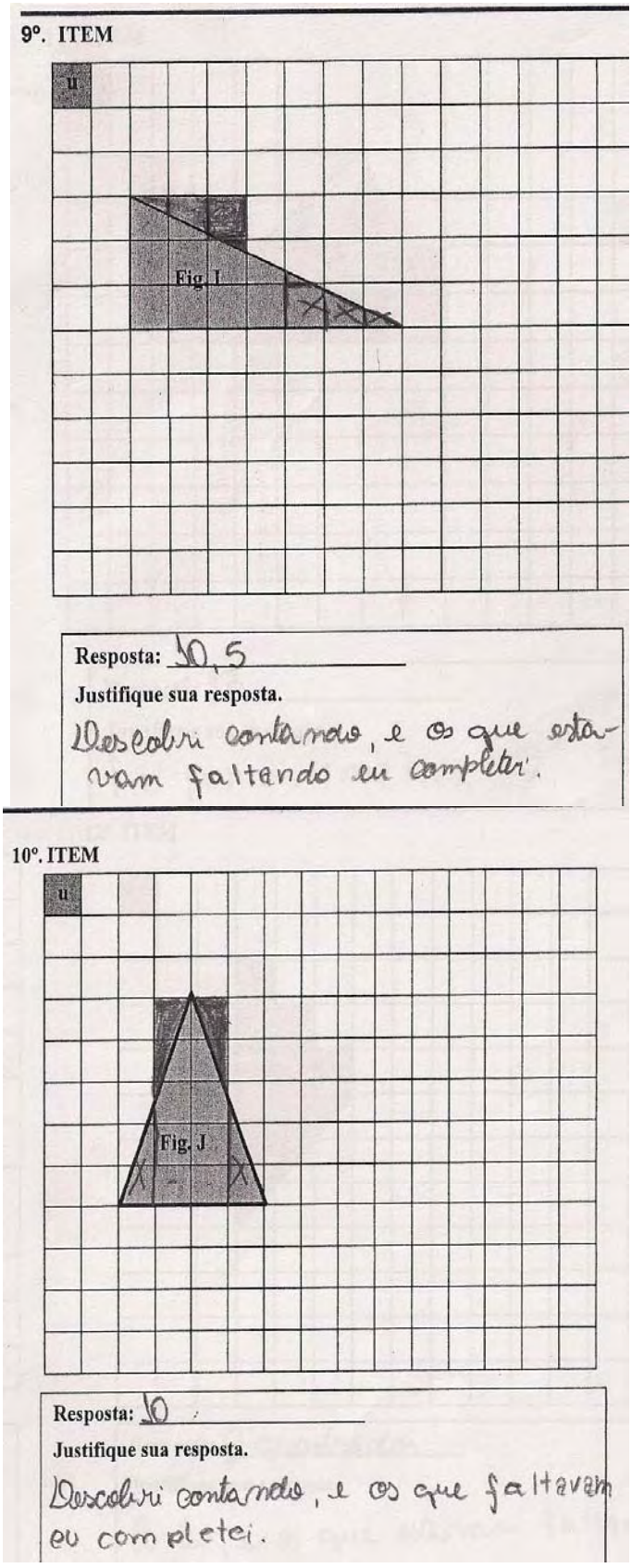


Protocolo do aluno E 08.



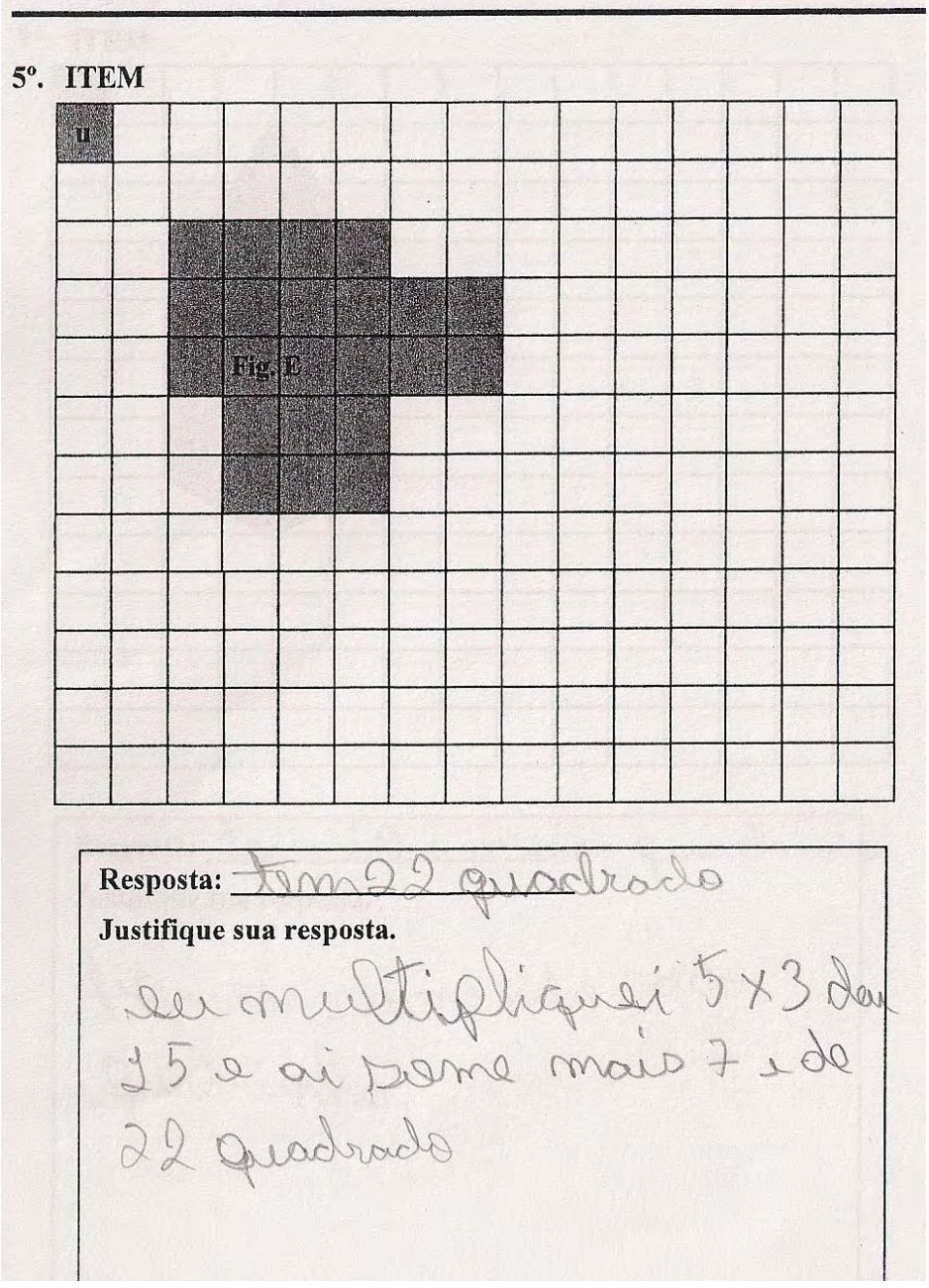
Protocolo do aluno D 07

O protocolo a seguir mostra que o aluno D 25 utilizou a decomposição/composição e resolve corretamente os dois itens.

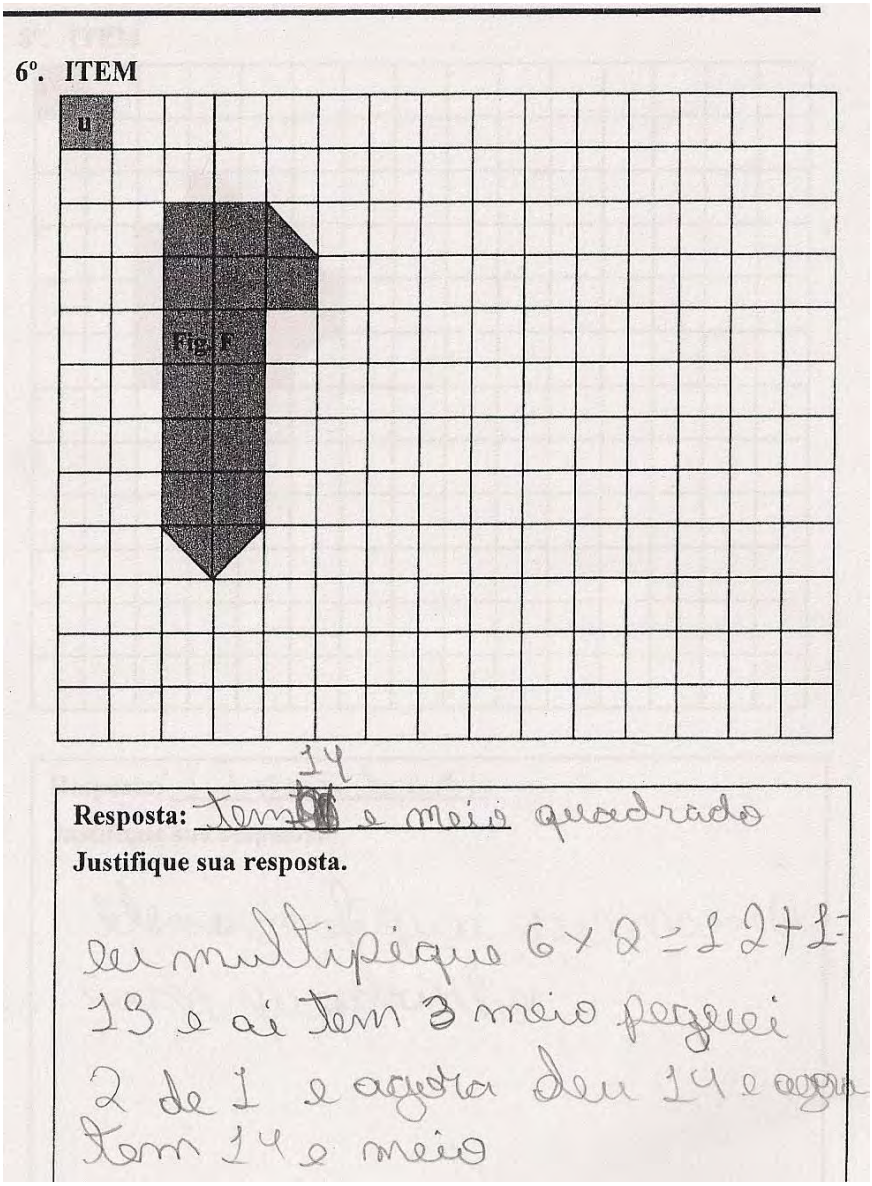


Protocolo do aluno D 25.

Agora destacamos outro exemplo na análise da variável *medida da área tomando o quadradinho da malha como superfície unitária,* que o procedimento utilizado pelo aluno E 07 foi o uso de fórmulas.



Protocolo do aluno E 07.



Protocolo do aluno E 07.

e) Tipo de figura

Para a *variável tipo de figura* elegemos dois valores diferentes: *irregular* ***(I)***, não há uma fórmula especifica para calcular a área de maneira direta, e *usual* ***(U)***, figuras para as quais os alunos podem usar diretamente uma fórmula, no caso da pesquisa área do triângulo.

Figuras	A,	B,	C,	D,	E,	F,	G, e H,		I,	J,	K,	L,	M, e N	
Percentual de acerto (%)	88	52	38	31	91	60	37	54	21	39	30	55	04	07

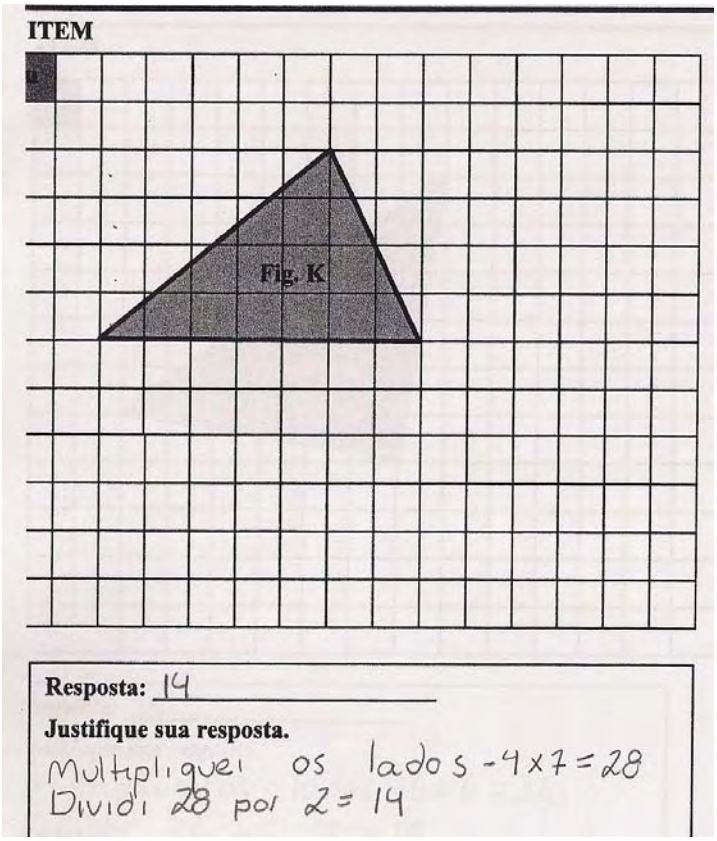
Tabela 10

Figuras	A,	B,	C,	D,	E,	F,	G, e H	I,	J,	K,	L,	M, e N
Média de acerto (%)	56,37							26				

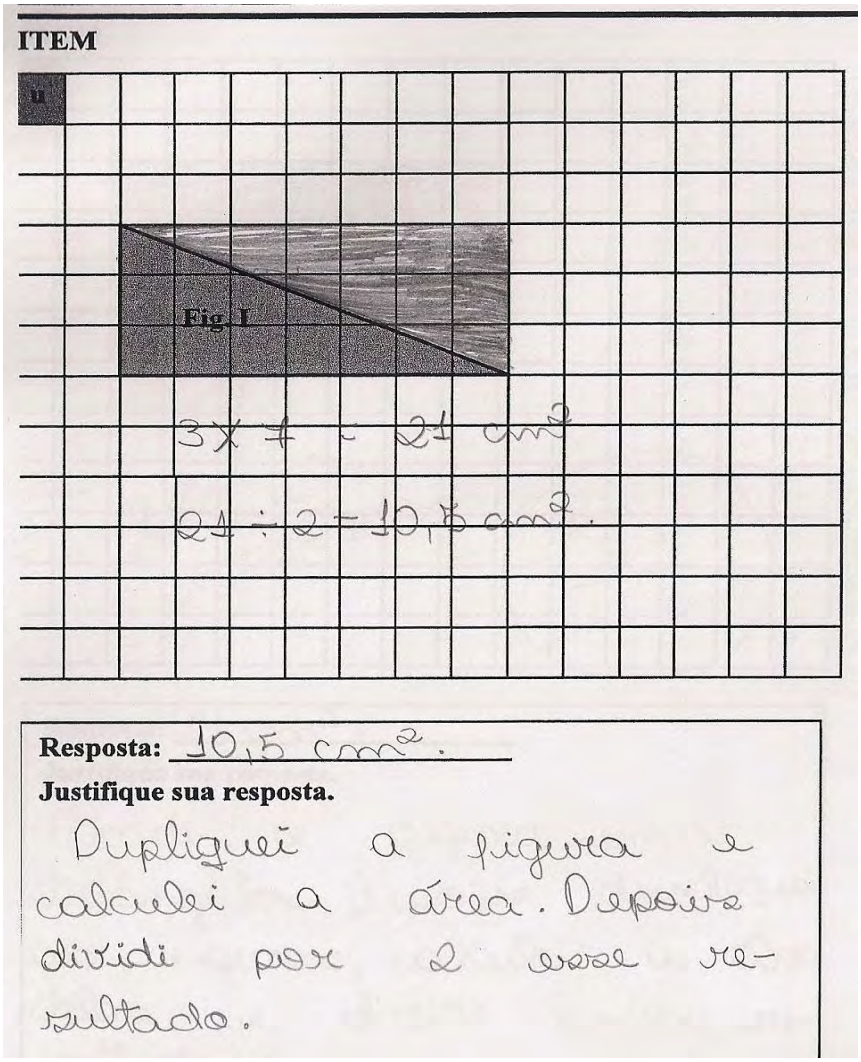
Embora os resultados para essa variável, apresente uma diferença entre as médias de 30,37 %, devemos considerar que no primeiro grupo temos as figuras com maior índices de acerto (figuras A e E) e no segundo grupo temos as com maior índice de respostas incorretas (I, M e N).

No segundo grupo temos figuras as quais o procedimento ótimo é o uso de fórmulas para os itens que possuem figuras usuais (exceto as figuras M e N) e no primeiro grupo, outros procedimentos (como a contagem, decomposição e recomposição, por exemplo) por se tratar de figuras são irregulares.

Percebemos com os resultados das médias de acertos que o cálculo da medida da área de figuras planas irregulares é favorecido pelo uso da malha quadriculada.



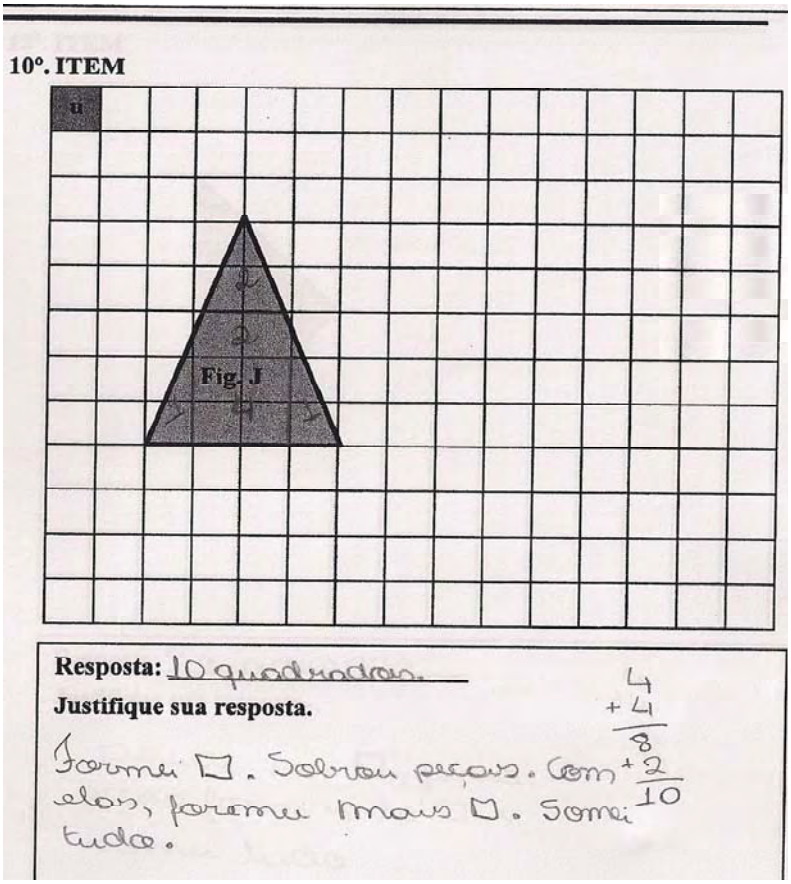
Protocolo do aluno B 27.



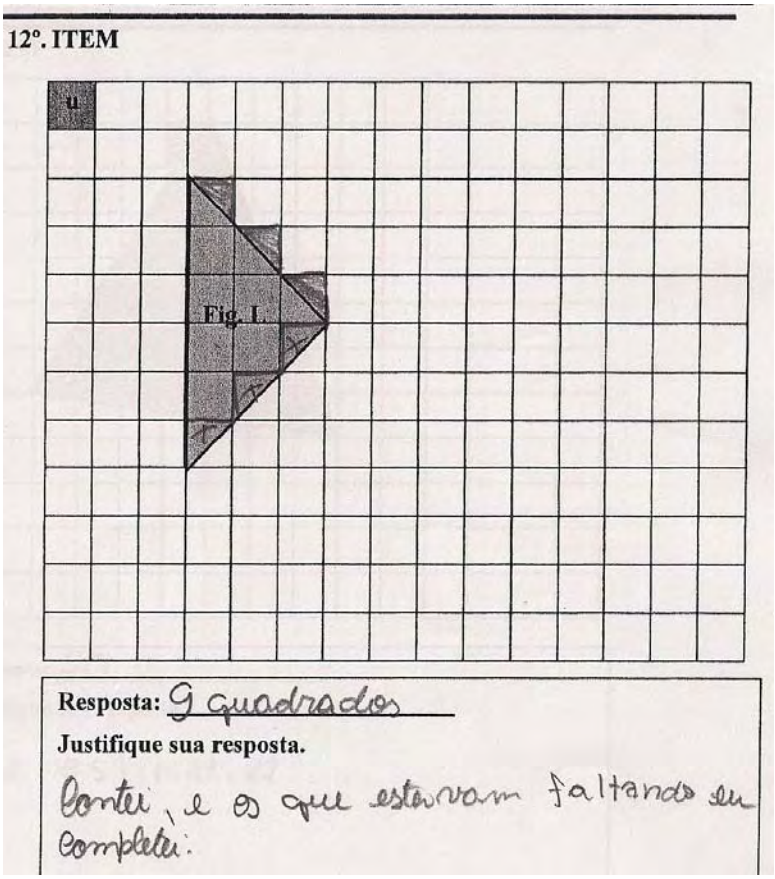
Protocolo do aluno B 20.

Os alunos B 27 e B 20 utilizaram a fórmula da área do retângulo para calcular a área da figura. O não uso direto da fórmula da área do triângulo pode ter sido por desconhecimento da fórmula ou a malha facilitou a percepção de que ao completar o retângulo a parte “fora” e “dentro” da figura são iguais. A malha nesse caso favoreceu a interpretação e ideia da dedução fórmula da área do triângulo.

Embora as figuras usuais apresentem fórmulas simples e do conhecimento de alguns alunos, encontramos procedimentos diferentes, mas que conduziram a respostas corretas. Dentre estes procedimentos destacamos a contagem e a decomposição/composição privilegiado em praticamente todas as questões. Para exemplificar apresentamos os protocolos dos alunos B 02 e D 25, a seguir.



Protocolo do aluno B 02.



Protocolo do aluno D 25.

5.3 Contribuições da malha quadriculada em nosso estudo

Atividades envolvendo malhas quadriculadas como recurso didático são bastante vivenciadas nas aulas de Matemática. Vários são os conteúdos que podem ser trabalhados com esse recurso, como simetria, ampliação e redução de figuras (conceito de semelhança), sequências lógicas, gráficos, área, perímetro, dentre outros.

No estudo diagnóstico que realizamos, a malha quadriculada é direcionada para o cálculo da área de superfícies planas e a unidade de medida é a área do quadradinho da malha. Nesta perspectiva, o uso da malha quadriculada proporciona uma ideia intuitiva, na qual o conceito de área é introduzido de maneira informal com unidades de medida não convencionais.

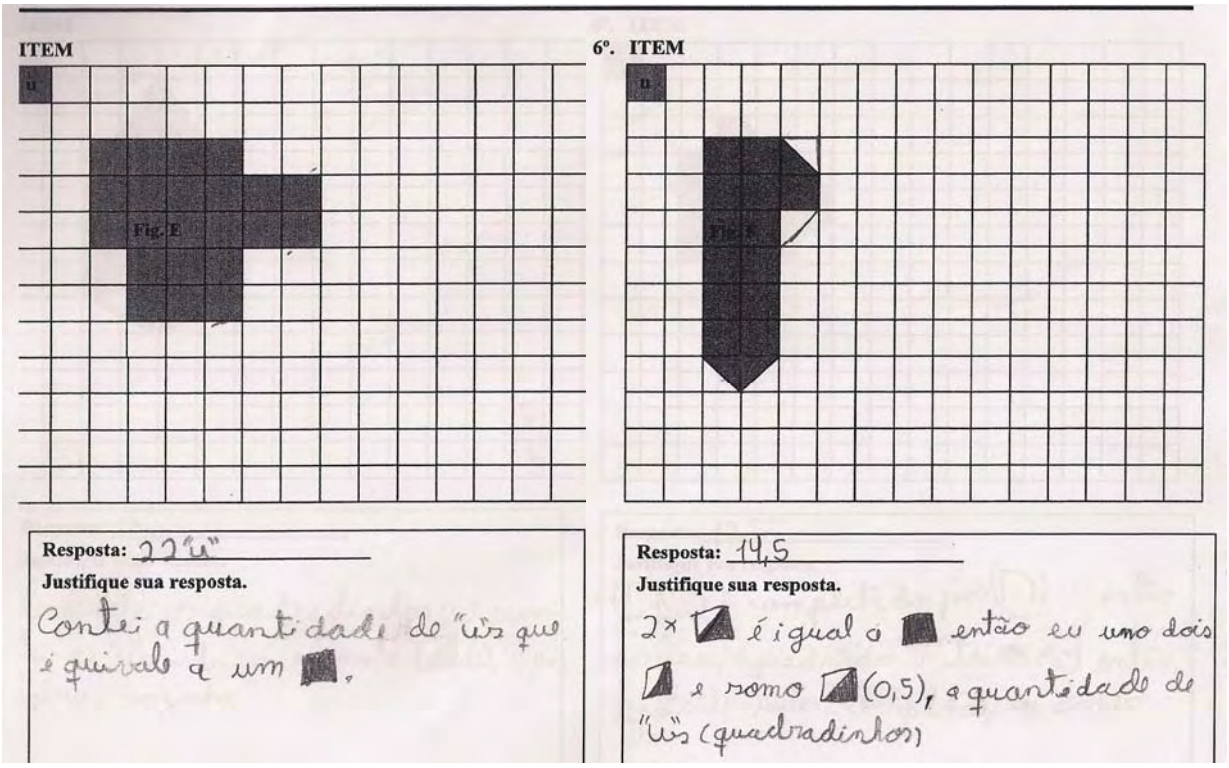
Na análise das variáveis envolvidas no estudo, em atividades com malhas os alunos pesquisados realizam com maior sucesso questões em que o procedimento ótimo é a contagem de quadradinhos, seguido da decomposição/composição e uso de fórmulas. A tabela abaixo apresenta esses resultados e as médias para cada procedimento, considerando as respostas corretas e parcialmente corretas.

Procedimentos ótimos	**Contagem**		**Decomposição/recomposição**						**Uso de Fórmula**			
Figuras	A	E	B	C	D	F	G	H	I	J	K	L
Percentuais de Acertos	88	91	52	38	31	60	37	54	21	39	30	55
Média de Acertos	89,5		45,3						36,25			

Tabela 11

Os itens com menores índices de acertos foram os 13º e 14º (figuras M e N) com média de 5,5%. Esses itens apresentam as figuras cujas leituras mais complexas e estratégias de soluções mais restritas.

A determinação de uma superfície unitária, como a área de um quadradinho da malha, para medir a área de figuras dispostas na malha quadriculada, apóia-se na ideia da *área como grandeza unidimensional*, para a qual a obtenção da área limita-se a verificar *quantas vezes a superfície unitária cabe* na figura. Alguns alunos expressaram essa ideia ao resolver as atividades, como mostra o protocolo do aluno B 16.

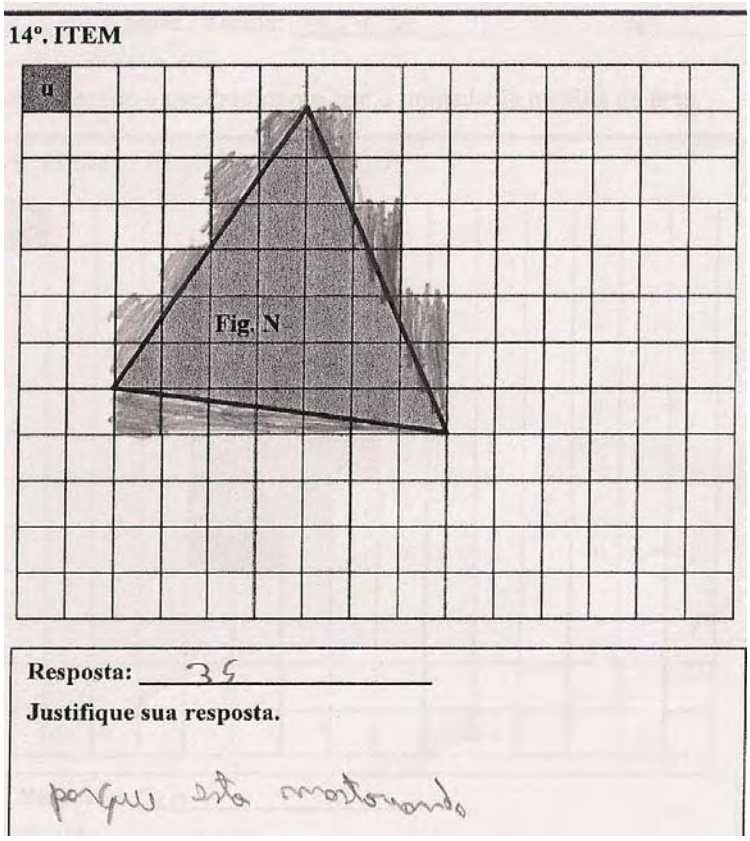


Protocolo do aluno B 16.

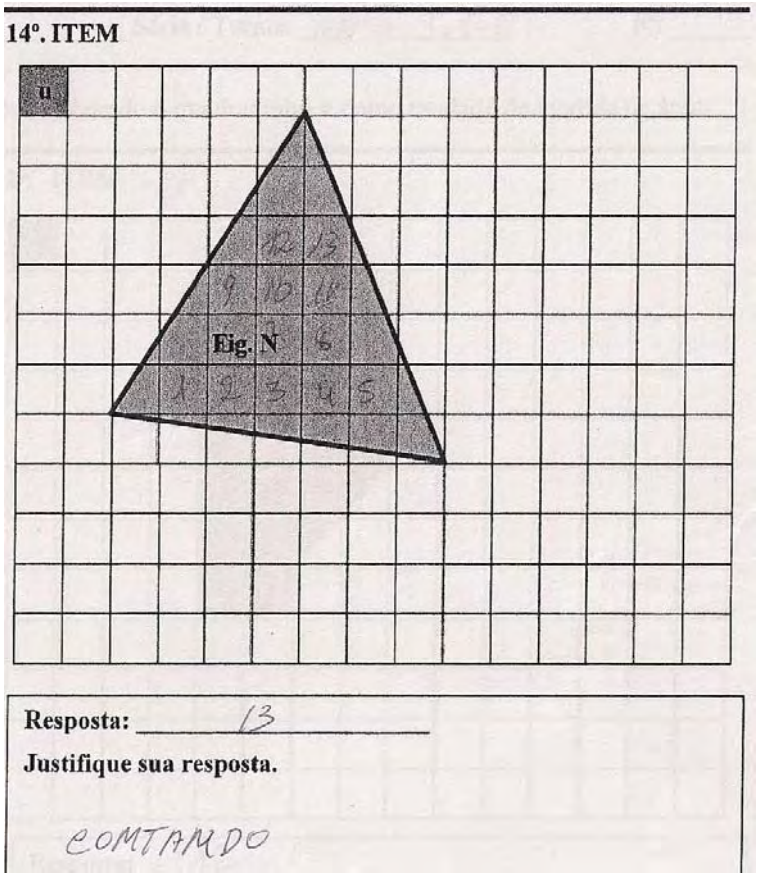
Para alguns alunos a adoção da superfície unitária como o quadradinho da malha, pode ser interpretada como a possibilidade de ladrilhar a figura a superfície do quadradinho, ou seja, verificar quantos quadrados cabem na figura conservando sua forma e tamanho. Neste sentido destacamos duas interpretações expressas nos protocolos de dois alunos, A 11 e A 15.

No primeiro (A 11), o aluno completa as frações de quadradinhos e conta como se fizessem parte da figura original. No segundo (A 15), o aluno conta apenas os quadrados inteiros no interior da figura.

Veja a resolução nos protocolos a seguir.



Protocolo do aluno A 11.



Protocolo do aluno A 15

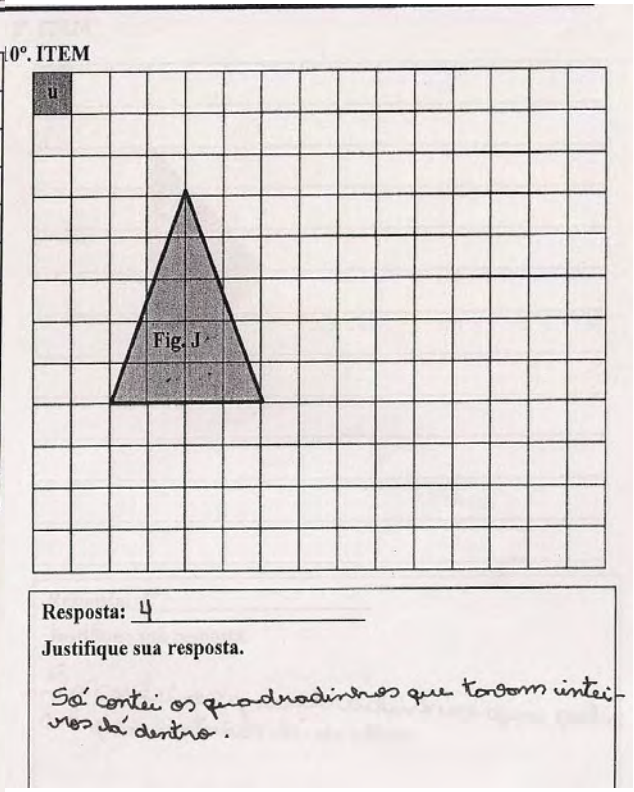
Essa interpretação reforça um erro já verificado por Douady e Perrin-Glorian, (1989) em seus estudos com alunos na França, quando afirma que *a superfície unitária sendo uma superfície com certa forma faz com que para alguns alunos a possibilidade de medida de uma superfície dependa de ser efetivamente ladrilhável com elementos daquela forma*.

O protocolo do aluno A 15, também pode ser interpretado como a dificuldade do aluno em admitir que a área de uma superfície pode ser expressa por um número fracionário. Neste sentido o trabalho com a malha possibilita a ampliar do conjunto imagem da função-medida dos naturais para os racionais.

Os protocolos a seguir, mostram a resolução de dois alunos B 29 e E 08.

O primeiro aluno (B 29) utiliza decomposição/composição, seguido de fórmula para obter a medida da área da figura. O segundo aluno (E 08) despreza as partes fracionárias dos quadradinhos e conta apenas os quadradinhos inteiros.

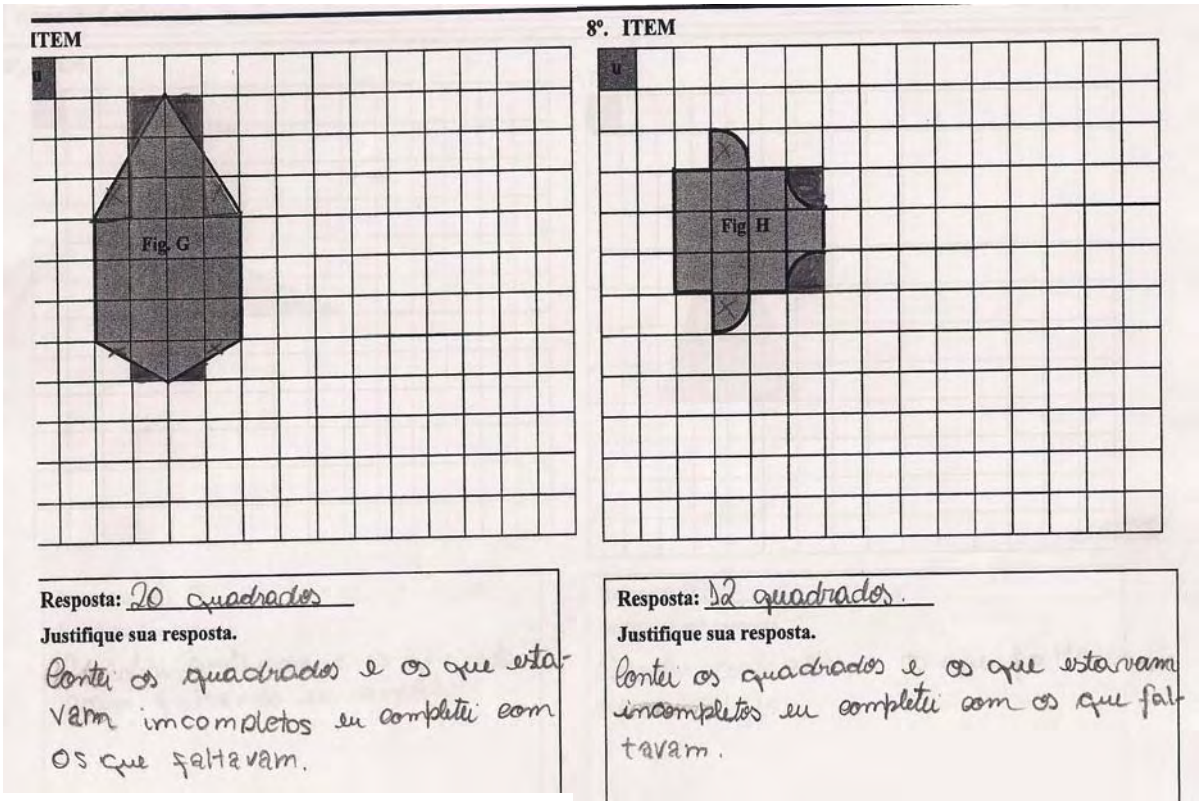
Protocolo do aluno B 29.



Protocolo do aluno E 08.

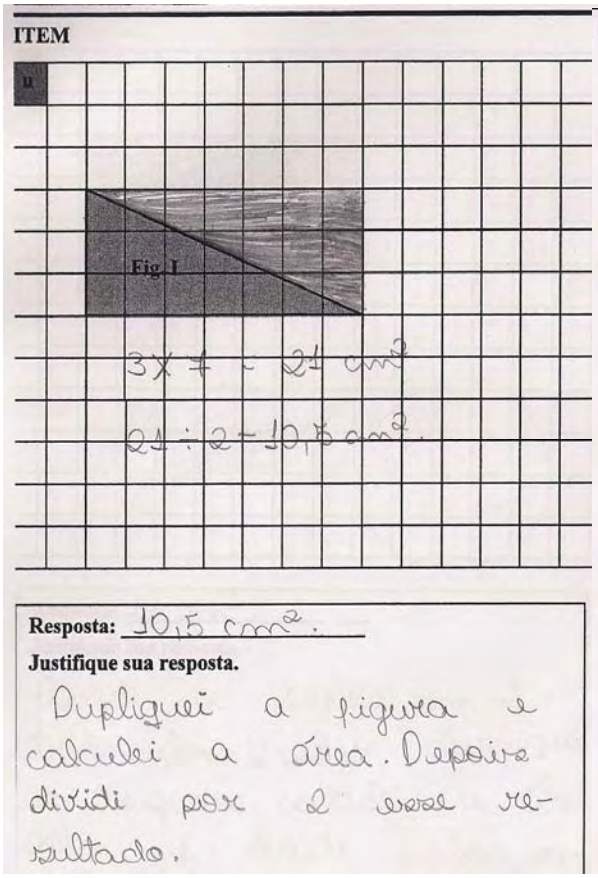
Outro ponto que podemos destacar como contribuição da malha quadriculada, é a determinação da medida da área de figuras através do procedimento de decomposição/composição. Este procedimento auxilia na articulação entre os quadros geométricos e das grandezas, propostos por Douady e Perrin-Glorian (1989).

Este procedimento é observado em vários itens de nossas atividades, com destaque para as figuras C, D, G, e H. Como mostra a figura abaixo.

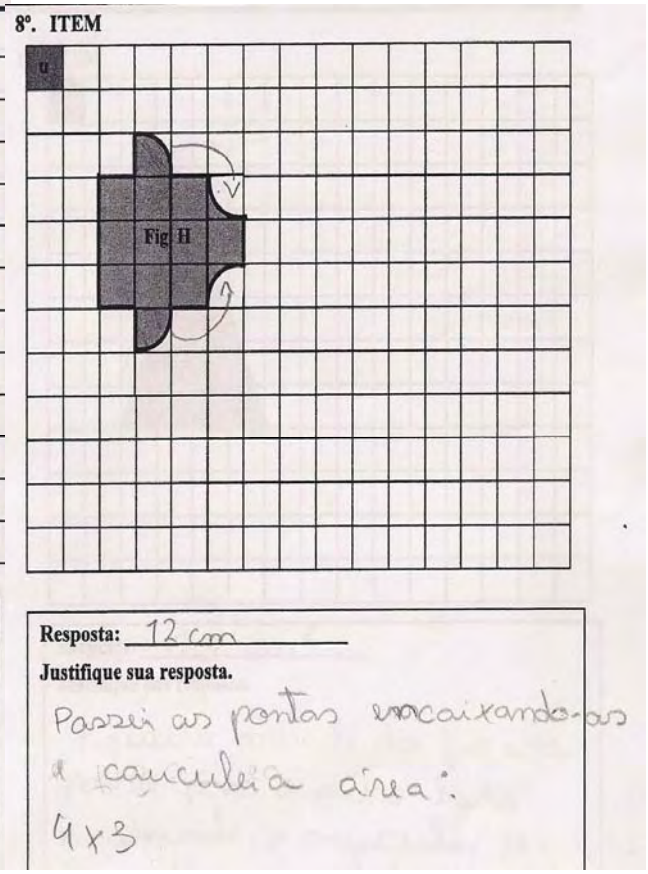


Protocolo do aluno D

No trabalho com malhas quadriculas destacamos também o procedimento de contagem de quadradinhos na compreensão do cálculo da área através de fórmula, como mostra os protocolos abaixo.



Protocolo do aluno B 20



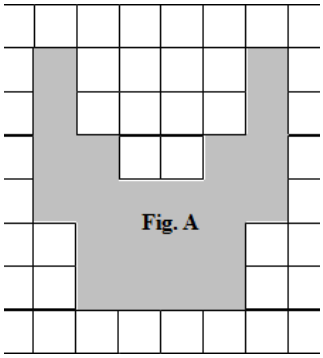
Protocolo do aluno B 29.

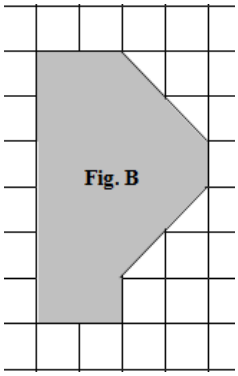
Observe que o aluno B 20 completa a figura formando um retângulo com três fileiras com sete quadradinhos cada. A malha também facilita a visualização da figura original ocupar metade do retângulo. O aluno B 29 utiliza a decomposição/composição para formar um retângulo com três fileiras de quatro quadradinhos cada.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O uso da malha quadriculada propicia a operação de medida da área através da contagem de quadradinhos, ou seja, medir a área neste contexto corresponde a determinar quantas vezes o quadradinho cabe dentro da figura. Neste processo estamos realizando duas operações distintas, uma geométrica e outra numérica. No caso do cálculo da área na malha quadriculada, a operação geométrica corresponde a ladrilhar a figura e a numérica contar a quantidade de superfícies unitárias que couberam na figura.

Com relação a essas a duas operações, numérica e geométrica, a proposta do uso da malha quadriculada era de ampliar o universo de compreensão e procedimentos progressivamente através do nível de complexidade de cada item. Observe as figuras A e B.



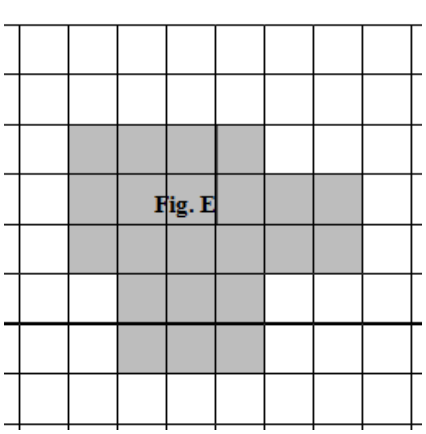


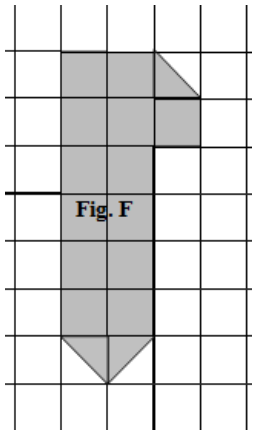
Com relação à operação geométrica, a figura A o ladrilhamento utilizando quadradinhos com a mesma “forma” e tamanho do quadradinho **u** é suficiente, ou seja, basta contar quantos quadradinhos iguais a **u** cabem na figura.

Na figura B, apenas o ladrilhamento não da conta de resolver a questão, é necessário uma ampliação do procedimento anterior. Agora o aluno deverá perceber que a área do quadradinho **u** pode ser re-arrumada em metades. A cada duas metades formamos um quadradinho inteiro.

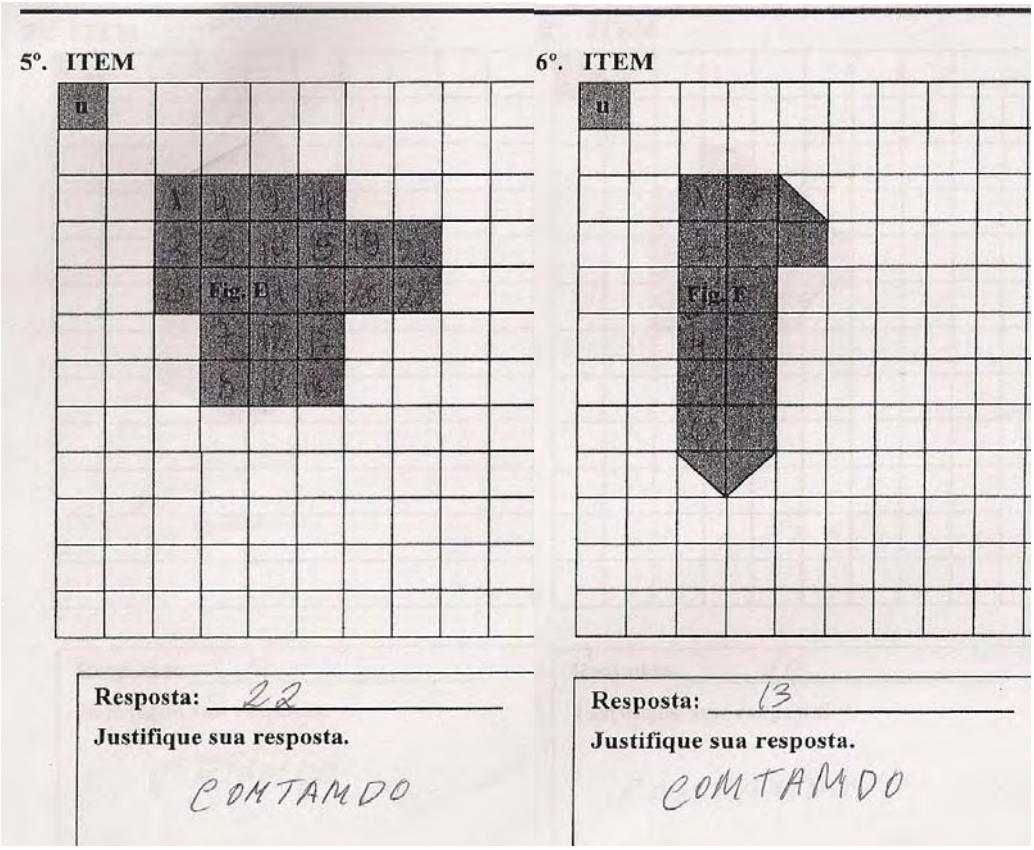
O universo numérico das duas figura também muda. Apesar do resultado de cada uma ser um valor inteiro, 22 e 18 respectivamente, na figura B acrescentamos valores fracionários, 1/2 do quadradinho.

Com as figuras E e F abaixo, fazemos uma análise análogo, a diferença esta no valor numérico da área, 22 e 14,5 respectivamente.





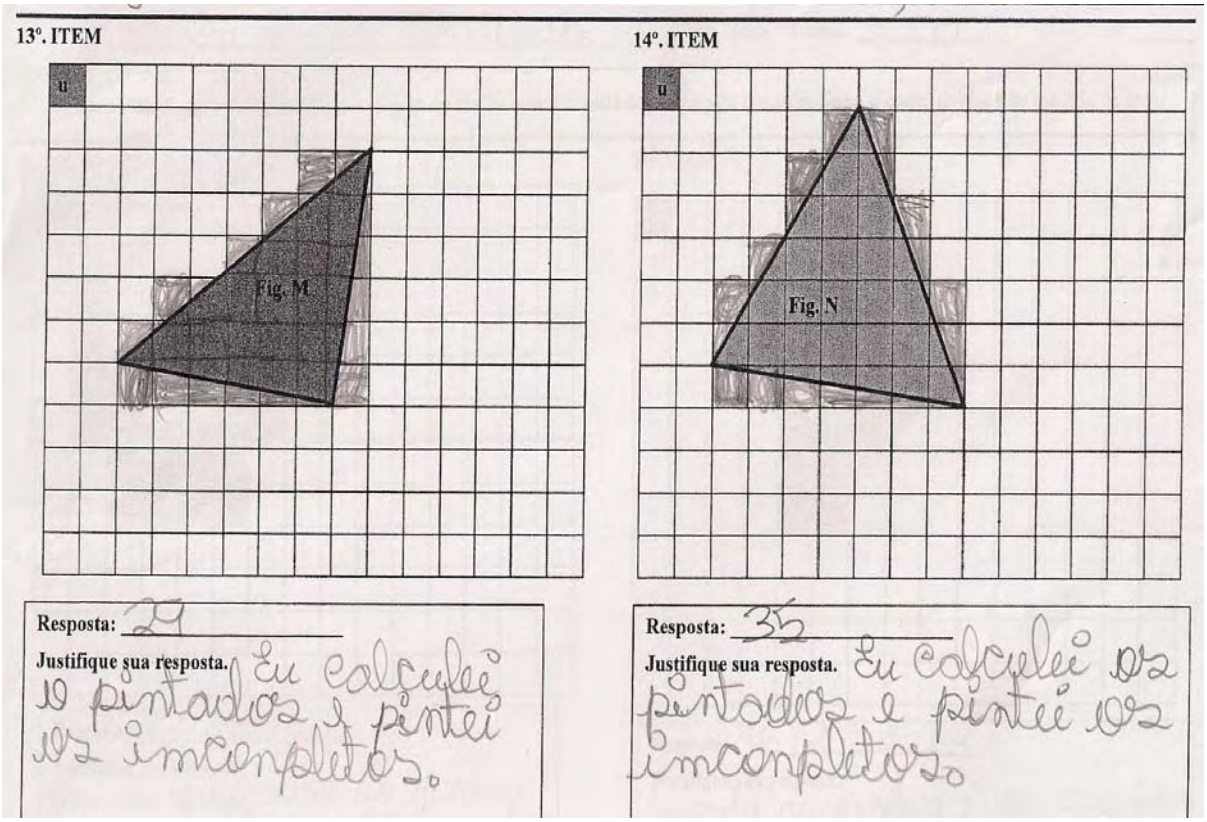
Alguns alunos tiveram dificuldade em compreender essas operações geométricas e numéricas. Nas figuras A e E contaram os quadradinhos obtendo a resposta correta. Nas figuras B e F contaram apenas os quadradinhos inteiros, como mostra o protocolo do aluno A 15 abaixo.



Protocolo do aluno A 15

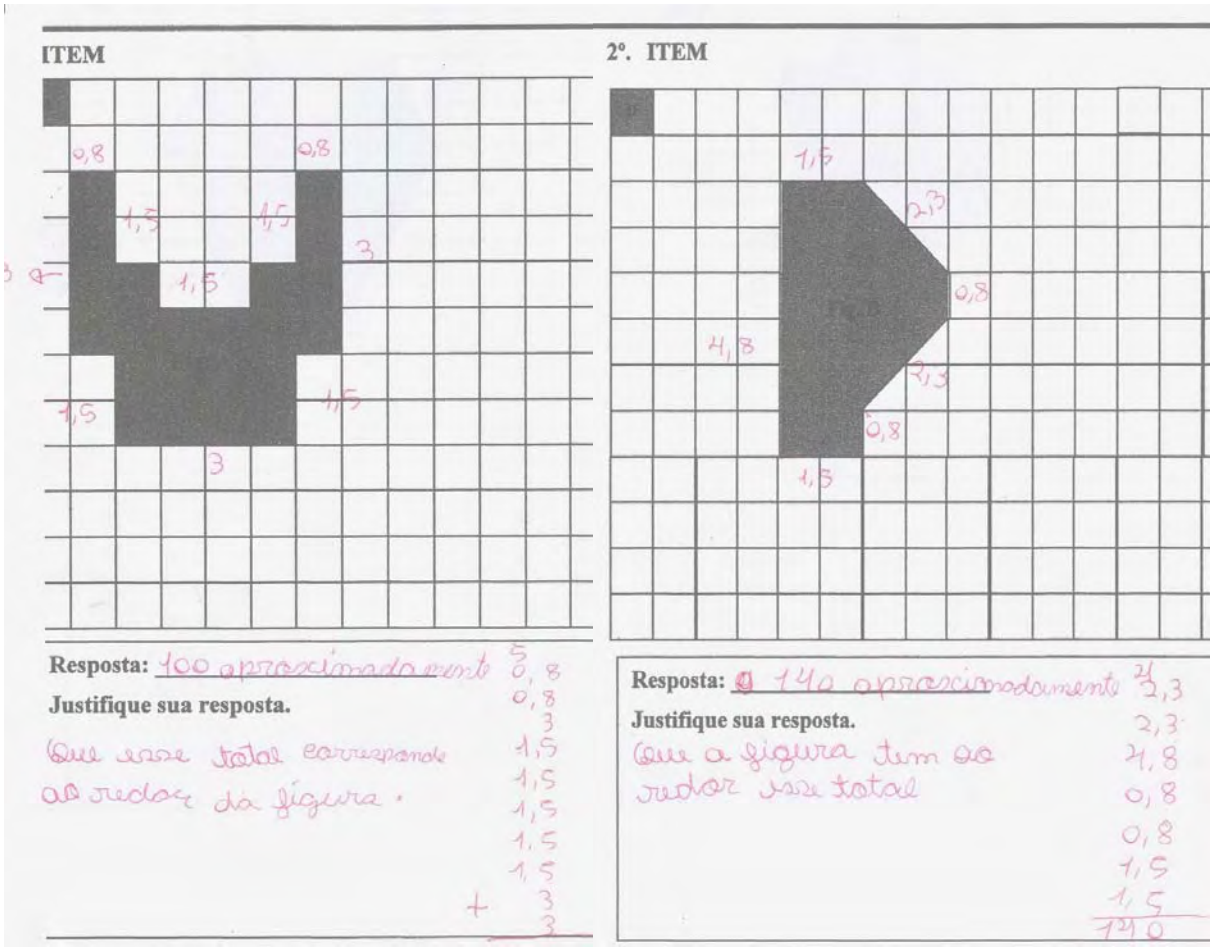
Verificamos com esse exemplo a dificuldade de alguns alunos em aceitar que a área de uma figura pode ser representada por um valor fracionário. O trabalho com a malha quadriculada nesse sentido poderá favorecer a compreensão intuitiva da medida fracionária.

Outro procedimento que exemplifica essa dificuldade é quando o aluno completa o quadradinho e conta como um inteiro, como mostra o protocolo do aluno A 06.



Protocolo do aluno A 06

Para a realização do calculo da área de cada superfície não foi fornecido nenhum material para que o aluno fizesse uso e auxiliasse na obtenção do resultado. No entanto, alguns sujeitos fizeram uso de instrumentos como a régua graduada para exprimir seus resultados, como o exemplo da resolução abaixo.



Protocolo do aluno D 19

Observamos que, assim como nos estudos de Douady e Perrin-Glorian, (1989) e Bellemain e Lima (2002), o aluno apresentou dificuldade em dissociar a área do perímetro, embora solicitado o cálculo da área da figura ele determinou o perímetro. Observamos também erro ao somar os números decimais no 1º item.

Vamos dividir algumas conclusões em dois grupos: *as contribuições da malha e a influência de algumas variáveis*.

Com relação às contribuições da malha destacamos:

- a possibilidade de aceitar que a medida da área pode ser um valor fracionário. Isso significa ampliar o conjunto imagem da função-medida, dos naturais para os racionais positivos;
- possibilita a compreensão da área enquanto grandeza através do procedimento de decomposição e composição, evidencia a invariância da área por equidecomponibilidade (*se duas superfícies podem ser decompostas em um*

número finito de partes, duas a duas congruentes, estas superfícies possuem a mesma área);

- a escolha de uma superfície unitária (área do quadradinho), a partir da qual a medição da área limita-se a verificar *quantas vezes* a superfície unitária cabe na figura; (ideia de *área unidimensional*, ou seja, a medida da área da superfície é obtida pela quantidade de quadradinhos que podem ser obtidos (formados) a partir da superfície da figura dada);
- a contagem de quadradinhos ajuda na interpretação e ideia da dedução de fórmulas;
- possibilita o cálculo de figuras sem necessidade de dados numéricos;
- os procedimentos mais utilizados foram: a contagem seguida decomposição/recomposição e uso de fórmula.

Com relação às variáveis, destacamos:

- das 5 (cinco) variáveis que utilizamos, apenas 2 (duas) consideramos variáveis didáticas: *Posição relativa dos polígonos em relação à malha* e *Tipo de figura*;
- as outras variáveis **(**contorno da figura, preenchimento da figura, medida da área tomando o quadradinho da malha como superfície unitária), em alguns casos, apenas dificultaram a resolução, não provocaram mudanças nos procedimentos ótimos;
- obtenção de medidas fracionárias pode ajudar na compreensão da equivalência entre a área do quadradinho e a área de dois triângulos e ampliar o campo numérico dos naturais para os racionais. A passagem da medida inteira para a medida fracionária é feita de maneira intuitiva, o aluno pode utilizar uma linguagem que lhe é familiar, como *metade do quadradinho, quadradinho e meio*.

A tabela a seguir apresenta todos os procedimentos utilizados identificados nas resoluções dos alunos pesquisados.

Tabela 12

Procedimentos mais utilizados
1. Contar agrupando as frações de quadradinhos para formar um inteiro
2. Contar considerando as frações de quadradinhos como um inteiro
3. Contar apenas de quadradinhos inteiros
4. Completar a malha para visualizar os quadradinhos
5. Enumerar os quadradinhos
6. Completar os quadradinhos e contou como inteiros
7. Usar decomposição e composição
8. Usar de fórmula
9. Enquadrar a figura num retângulo para calcular a área total e subtrair as áreas que não fazem parte da figura
10. Calcular o perímetro (utilizando régua, adotando o lado como 1 u.m.c., diferenciando lado, diagonal e arco de circunferência)
11. Utilizar estruturas multiplicativas
12. Desenhar a figura na malha ao lado para visualizar os quadradinhos
13. Rotacionar a figura apoiando os lados na malha
14. Dividir a figura em retângulos

Com base no estudo realizado, destacamos a importância do uso da malha quadriculada no ensino do cálculo da área de figuras planas. Um estudo futuro pode ser realizado focalizando outras situações como comparação e/ou produção de superfícies. Outro tema que sugerimos é um trabalho envolvendo perímetro ou ainda as duas grandezas. Em qualquer um dos temas ressaltamos para a relevância da escolha das variáveis envolvidas e que consequências podem ser previstas na atribuição de determinados valores.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag . **Fundamentos da didática da matemátic**a. Paraná. Ed. UFPR, 2007.

BALTAR, Paula Moreira. **Enseignement-apprentissage de la notion d'aire de surface plane: une étude de l'acquisition des relations entre les longueurs et les aires au cóllege.** (Tese Doutorado) Grenoble, França:Universidade Joseph Fourier, 1996.

BARROS, Alexandre Luís de Souza. **Uma análise das relações entre área e perímetro em livros didáticos de 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental**. Recife. 213 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação. Centro de Educação. Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2007.

BELLEMAIN, Paula Moreira Baltar. **Um Candidato a Obstáculo à Aprendizagem dos Conceitos de Comprimento e Área como Grandezas**. 2º Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática. II HTEM. 2004.

BELLEMAIN, Paula Moreira Baltar; LIMA, Paulo Figueiredo. **Um estudo da noção de grandeza e implicações no ensino fundamental e médio.** Natal. Série testos de História da Matemática, vol. 8. 2002.

_____Análises prévias à concepção de uma engenharia de Formação continuada para professores de Matemática do ensino fundamental. **Anais da 23º Reunião Anual da ANPED – Associação Nacional de Pesquisa e Pós-graduação em Educação**, Caxambu. Publicação em CD-Rom, 2000.

BESSOT, Annie et COMITI, Claude. **Éléments Fondamentaux de Didactique des Mathématiques Ouvrage bilingue.** LÊ THI Hoai Châu et LÊ VAN Tien, Dai Hoc Su Pham T.P. Ho Chi Minh. Université Joseph Fourier de Grenoble, 2009.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao Estudo das Situações Didáticas: conteúdos e métodos de ensino**. São Paulo: Ática, 2008.

BROUSSEAU, Guy. Fundamentos e Métodos da Didática da Matemática. In: BRUM, Jean (direção). **Didáticas das Matemáticas**. Tradução de Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget,1986. Cap.1. p. 35-113. (Coleção Horizontes Pedagógicos). 1986.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática, ensino de quinta a oitava séries**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BURATTO, Ivone Catarina Freitas. **Representação Semiótica no Ensino da Geometria: uma alternativa metodológica na formação de professores**. Florianópolis. 143f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica). Programa de Pós-Graduação em Educação Cientifica e Tecnológica. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2006.

CHIUMMO, Ana. **O conceito de áreas de figuras planas: capacitação para Professores do Ensino Fundamental**. São Paulo. 138 f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 1998.

DOUADY, Régine. e PERRIN-GLORIAN, Marie-Jeanne. **Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane**. Educational Studies in Mathematics 20. p. 387-424. 1989.

DUARTE, Jorge Henrique. **Análise de situações didáticas para construção do conceito de área como grandeza no Ensino Fundamental**. Recife. 213 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação. Centro de Educação. Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2002.

FACCO, Sônia Regina. **Conceito de Área: uma proposta de ensino aprendizagem**. São Paulo. 150 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2003.

GOMES, Gisela Hernandes. **Um estudo de área com alunos da 6ª série do Ensino Fundamental**. São Paulo. 158 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2000.

LIMA, Paulo Figueiredo, BELLEMAIN, Paula Moreira Baltar, LIMA, Maurício Figueiredo. **Grandezas e Medidas nas séries iniciais do Ensino Fundamental**. n/p.

MELO, Marcos André Pereira de, BELLEMAIN, Paula Moreira Baltar. Identificando Concepções Numéricas e Geométricas na Resolução de um problema de Área e Perímetro. **2º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. Recife. UFRPE, 2008

OCHI, Fusako Hori, PAULO, Rosa Monteiro, YOKOYA, Joana Hissae, IKEGAMI, João Kazuwo. **O uso de quadriculados no ensino da Geometria**. Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática – CAEM. Instituto de Matemática e Estatística – IME – USP. 3ª edição. São Paulo, 1997.

PANIZZA, Mabel et al. **Ensinar matemática na educação infantil e nas séries iniciais: análise e propostas**. Porto Alegre: Artmed, 2006.

PEREZ, Marlene. **Grandezas e Medidas: representações sociais de professores do ensino fundamental**. Curitiba. 200 f. Tese (Doutorado em Educação) Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2008.

PERNAMBUCO. **Secretaria de Educação Base Curricular Comum para as Redes Públicas de Ensino de Pernambuco: matemática / Secretaria de Educação**. – Recife, 134 p. SE. 2008.

SANTANA, Walenska Maysa Gomes de**. O uso de recursos didáticos no ensino do conceito de área: uma análise de livros didáticos para as séries finais do ensino fundamental**. Recife. 189 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação. Centro de Educação. Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2006.

SANTOS, Marilene Rosa. & BELLEMAIN, P. M. B. A área do paralelogramo no livro didático de matemática. **Educação Matemática em Revista**. SBEM. Ano 13, nº 23. Recife, 2007.

SANTOS, Marilene .Rosa. **Resolução de problemas envolvendo área de paralelogramo: um estudo sob a ótica do contrato didático e das variáveis didáticas.** Recife. 178 f. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Ensino das Ciências). Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2005.

SILVA, Marithiça Flaviana da. **Frações e grandezas geométricas: um estudo exploratório da abordagem em livros didáticos**. Recife. 176 f. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação. Centro de Educação. Universidade Federal de Pernambuco Pernambuco, Recife, 2004.

TELES, Rosinalda Aurora de Melo, BELLEMAIN, Paula Moreira Baltar. A influência dos valores de variáveis didáticas num problema de área. **Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática** – 2º SIPEMAT – 2008 – Recife

APÊNDICES

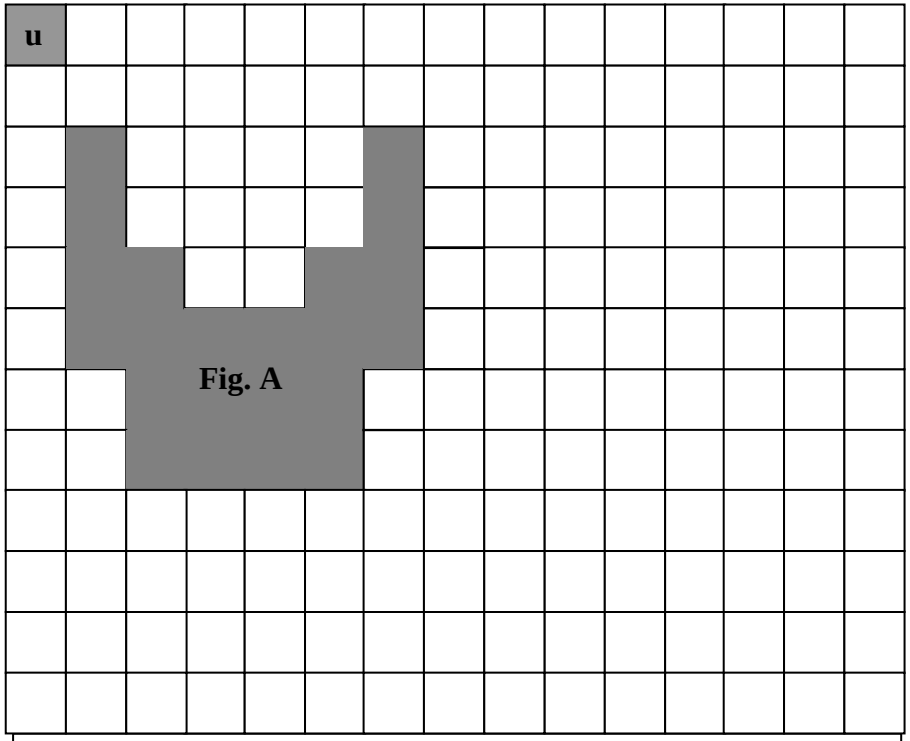
APÊNDICE A: ATIVIDADES PROPOSTAS NO ESTUDO

Escola: _____ Data: _____ / _____ / _____

Aluno (a): _____ Série / Turma: _____ Nº _____

Em cada item a seguir calcule a área da figura na malha quadriculada considerando o quadradinho **u** como unidade de medida de área.

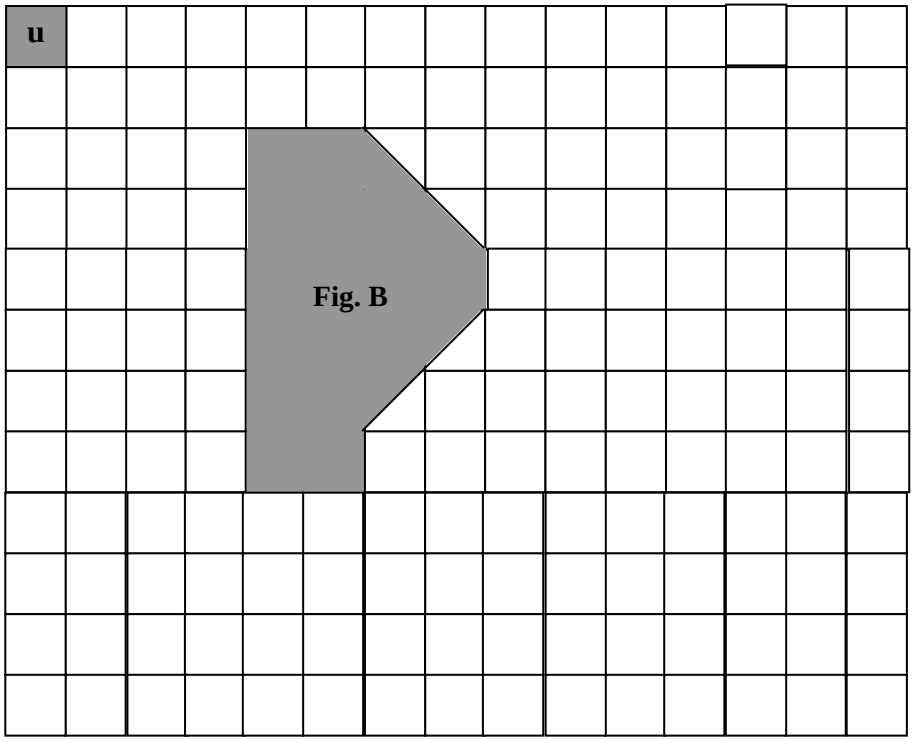
1º. ITEM



Resposta: _____

Justifique sua resposta.

2º. ITEM

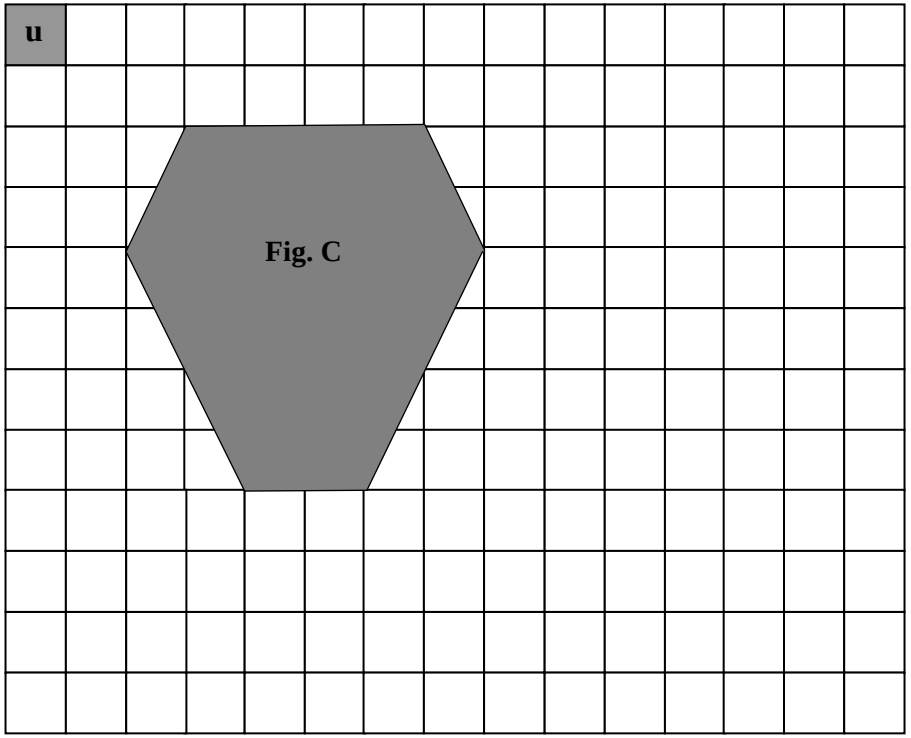


Resposta: _____

Justifique sua resposta.

Aluno (a): _____ Série / Turma: _____ Nº _____

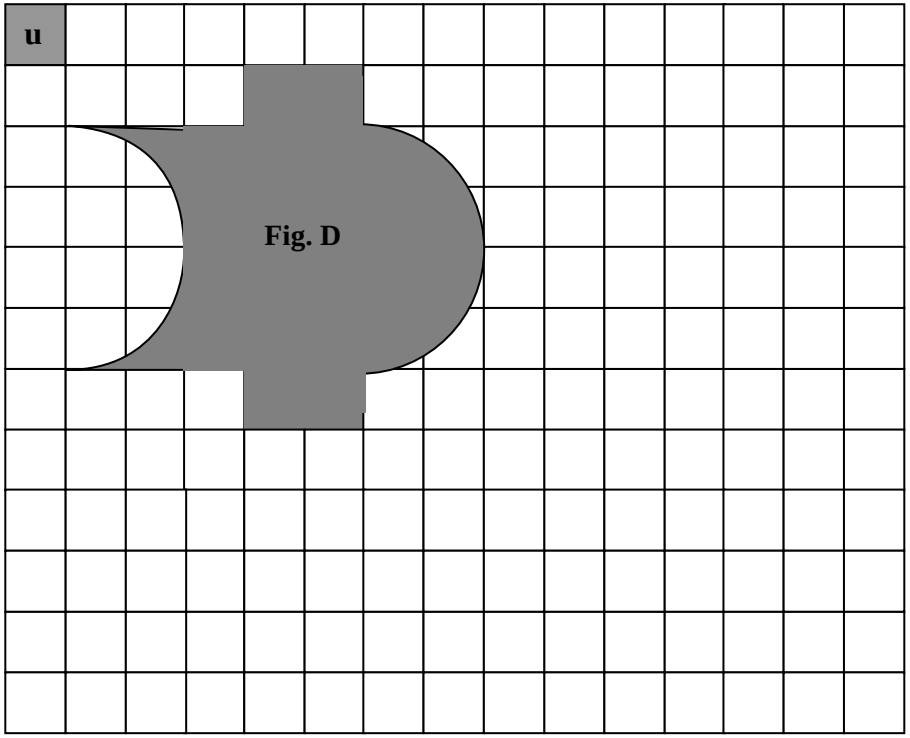
3º. ITEM



Resposta: _____

Justifique sua resposta.

4º. ITEM

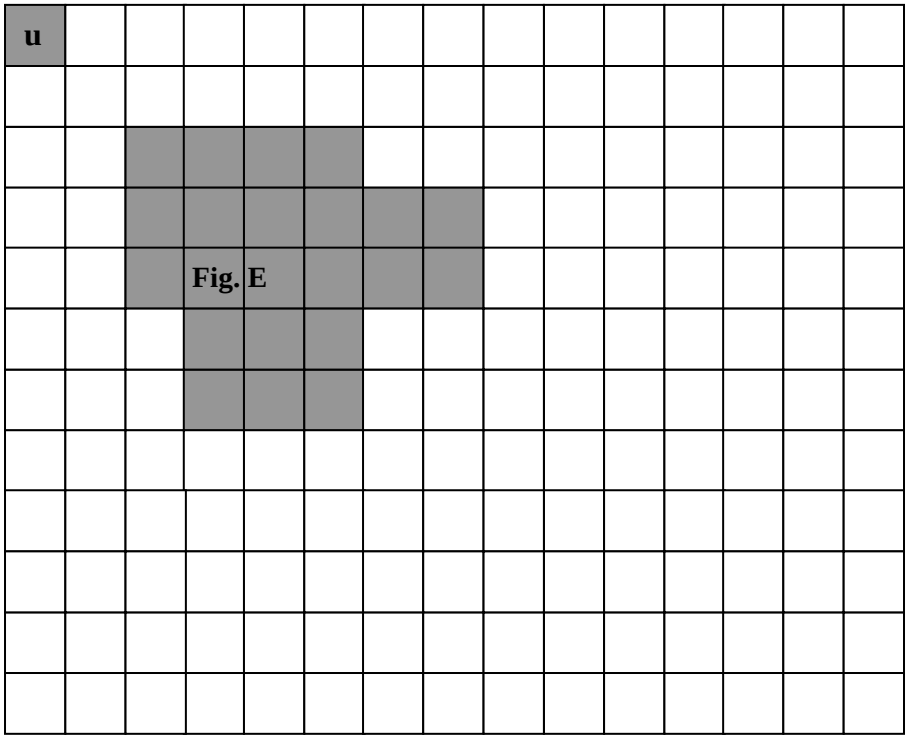


Resposta: _____

Justifique sua resposta.

Aluno (a): _____ Série / Turma: _____ Nº _____

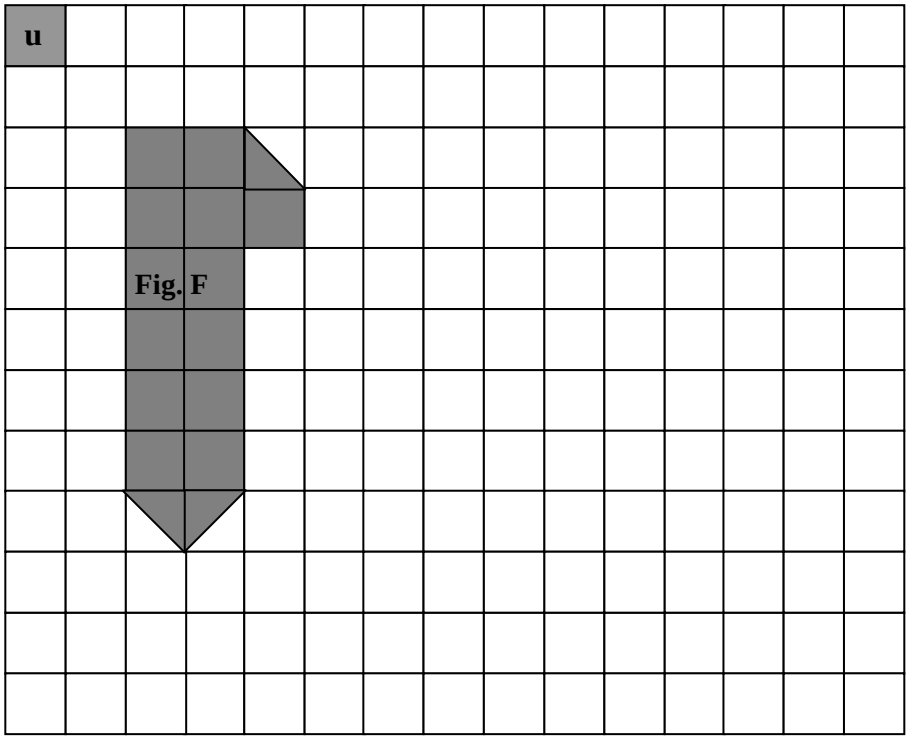
5º. ITEM



Resposta: _____

Justifique sua resposta.

6º. ITEM

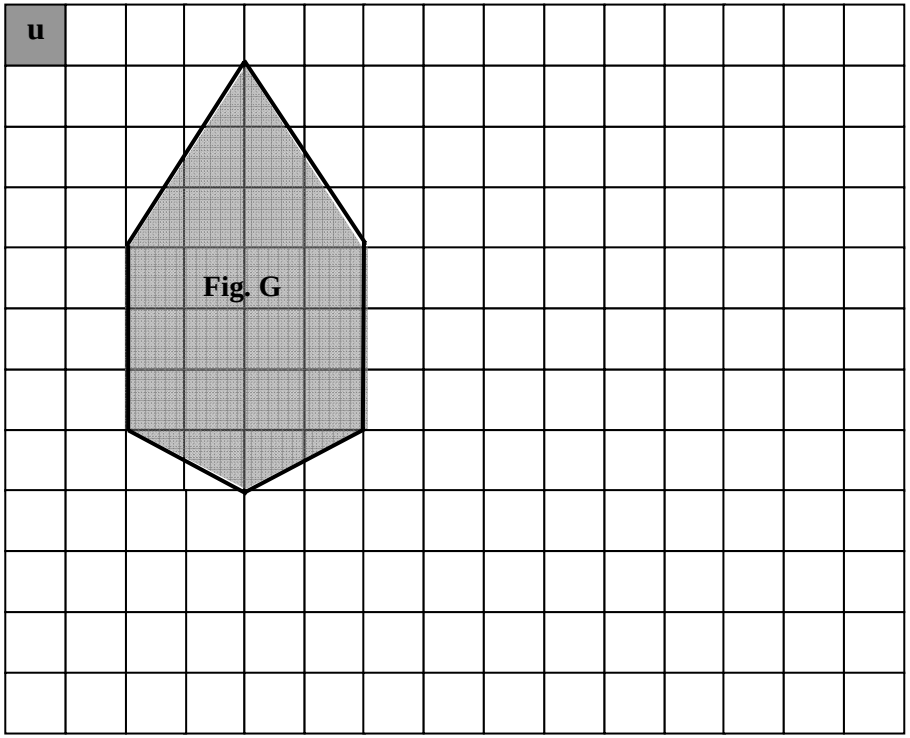


Resposta: _____

Justifique sua resposta.

Aluno (a): _____ Série / Turma: _____ Nº _____

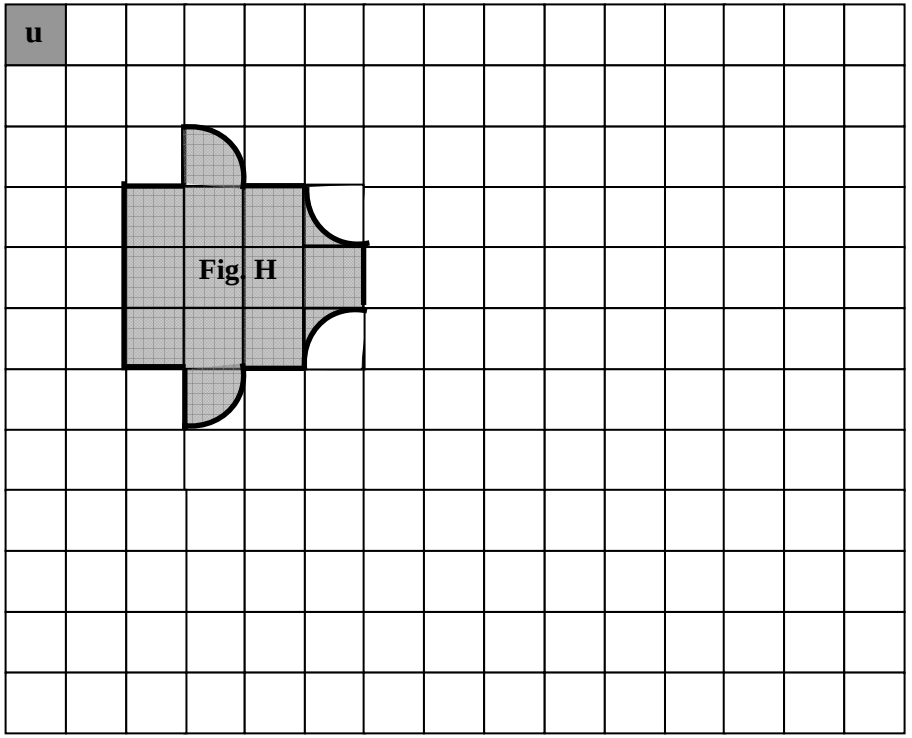
7º. ITEM



Resposta: _____

Justifique sua resposta.

8º. ITEM

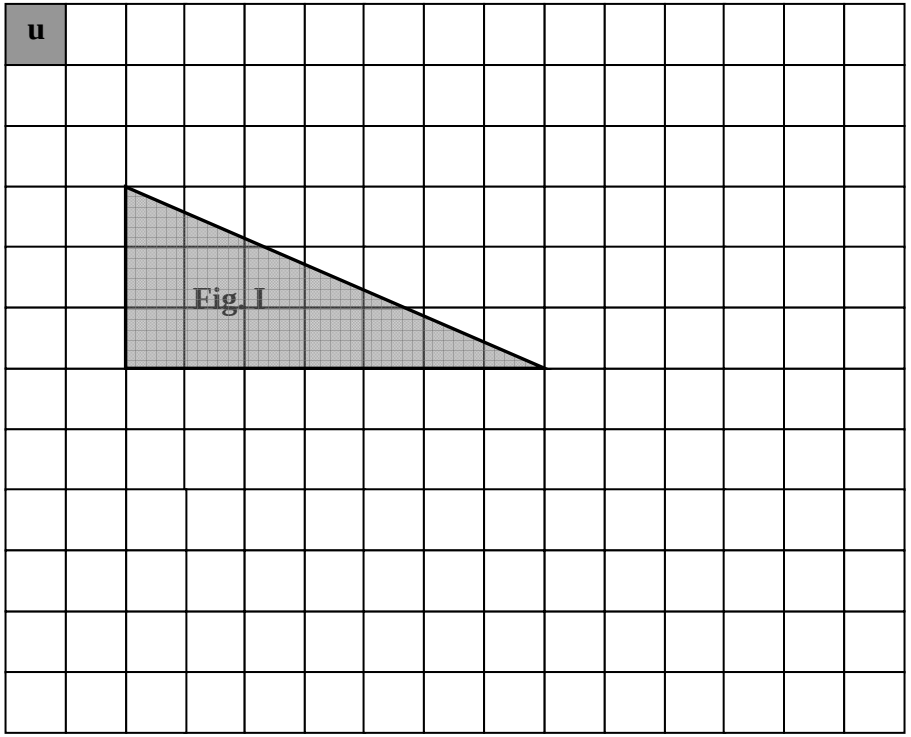


Resposta: _____

Justifique sua resposta.

Aluno (a): _____ Série / Turma: _____ Nº _____

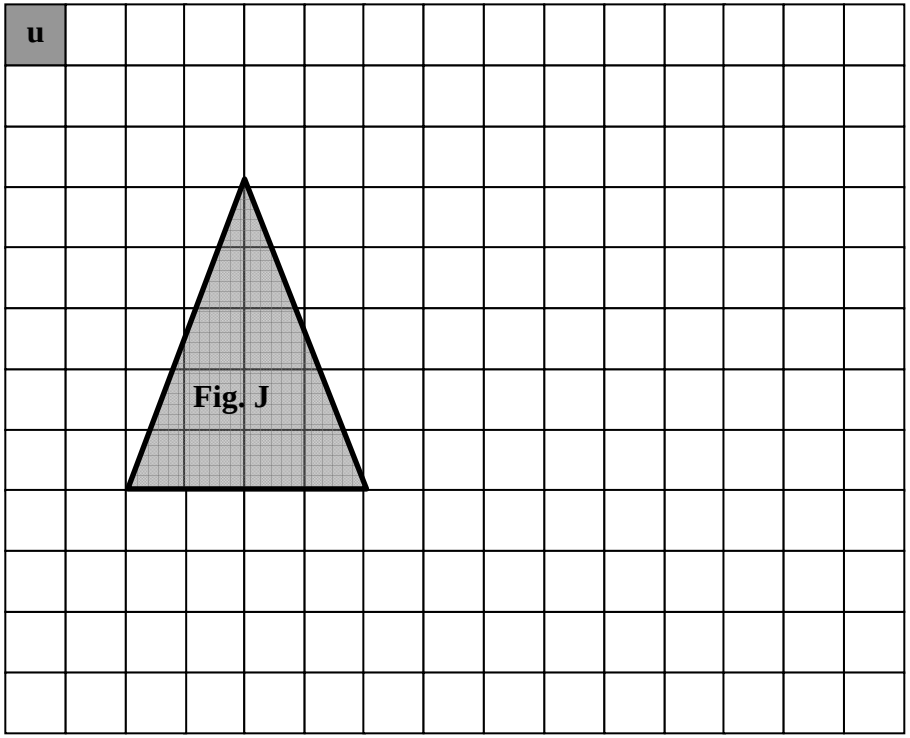
9º. ITEM



Resposta: _____

Justifique sua resposta.

10º. ITEM

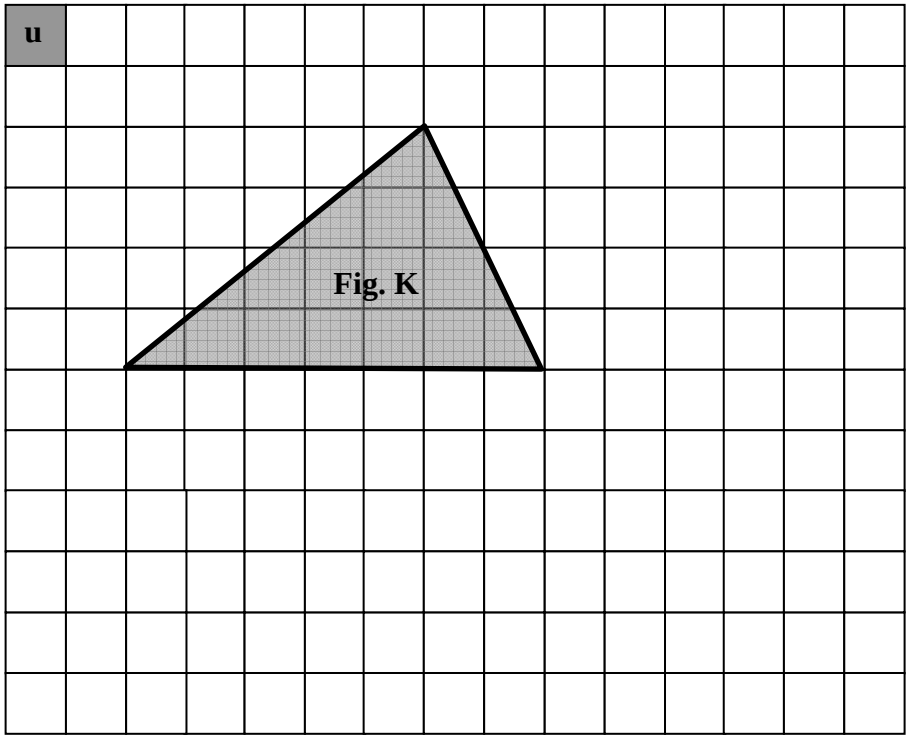


Resposta: _____

Justifique sua resposta.

Aluno (a): _____ Série / Turma: _____ Nº _____

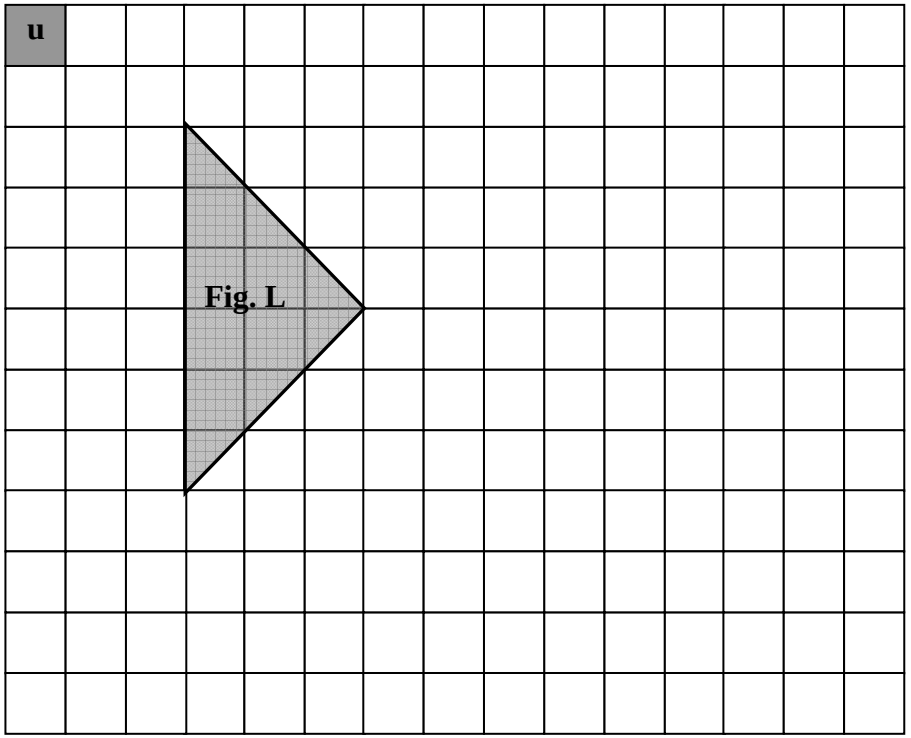
11º. ITEM



Resposta: _____

Justifique sua resposta.

12º. ITEM

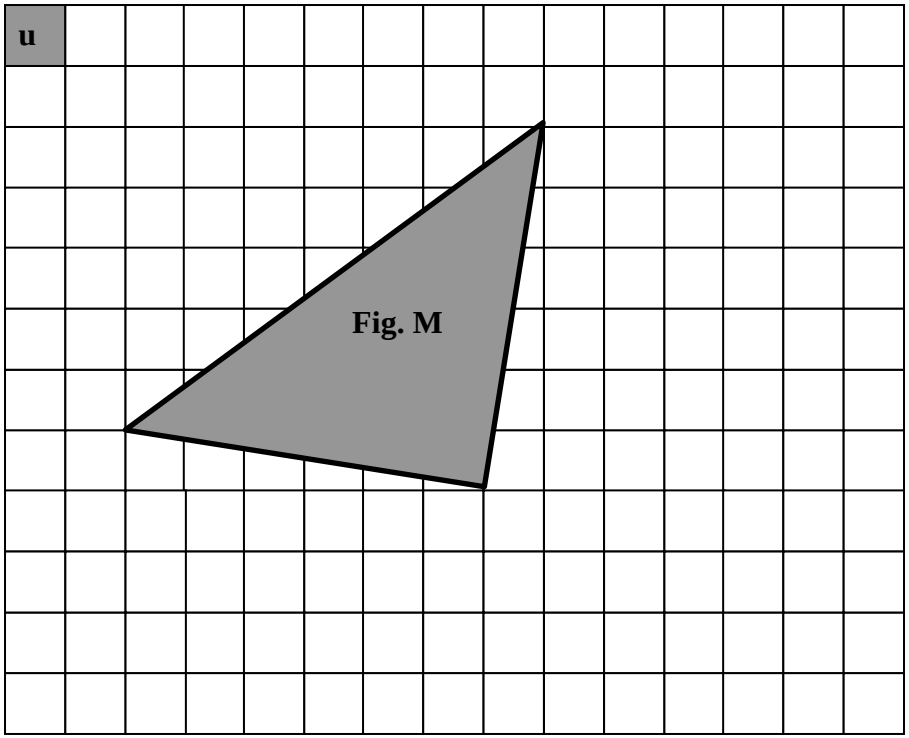


Resposta: _____

Justifique sua resposta.

Aluno (a): _____ Série / Turma: _____ Nº _____

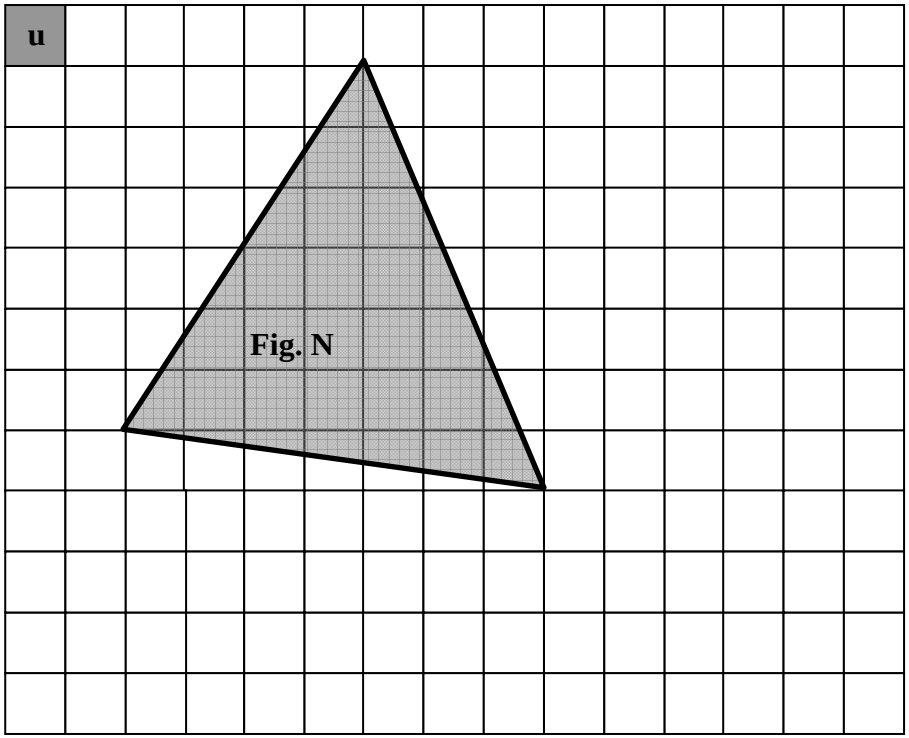
13º. ITEM



Resposta: _____

Justifique sua resposta.

14º. ITEM



Resposta: _____

Justifique sua resposta.

APÊNDICE B: RESPOSTAS DOS ALUNOS

Aluno: A01		Escola: A	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22		
2º			20
3º			32
4º			28
5º	22		
6º			16
7º			26
8º			14
9º			14
10º			16
11º			19
12º			12
13º			26
14º			32
Total	02	00	12

Aluno: A02		Escola: A	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22q		
2º			20q
3º			32q
4º			28q
5º	22q		
6º			16q
7º			29q
8º			14q
9º			14q
10º			14q
11º			18q
12º			13q
13º			26q
14º			38q
Total	02	00	12

Aluno: A03		Escola: A	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22q		
2º			20q
3º			32q
4º			28q
5º	22q		
6º			16q
7º			26q
8º			14q
9º			15q
10º			16q
11º			20q
12º			12q
13º			22
14º			33
Total	02	00	12

Aluno: A04		Escola: A	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22		
2º			20
3º			29
4º			22
5º	22		
6º			16
7º			26
8º			14
9º			15
10º			16
11º			29
12º			12
13º			36
14º			43
Total	02	00	12

Aluno: A05		Escola: A	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22		
2º			20
3º			31
4º			27
5º	22		
6º			16
7º			26
8º			14
9º			14
10º			16
11º			19
12º			12
13º			25
14º			33
Total	02	00	12

Aluno: A06		Escola: A	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22 i		
2º	16 i e 4/2		
3º			32
4º			22
5º	22		
6º			13
7º			26
8º			14
9º			14
10º			16
11º			20 pintadas e 10 meios
12º			12
13º			29
14º			35
Total	03	00	11

Aluno: A07		Escola: A	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22.0 m.á.		
2º	18.0 m.á.		
3º	26.0 m.á.		
4º			23.5m.á
5º	22.0		
6º	14.5		
7º	20.0		
8º	12.0		
9º			11.0
10º	10.0		
11º	14.0		
12º	9.0		
13º			17.0
14º	23.0		
Total	11	00	03

Aluno: A08		Escola: A	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º			26
2º			17
3º			28
4º			28
5º	22		
6º			16
7º			26
8º			14
9º			14
10º			16
11º			19
12º			12
13º			26
14º			32
Total	01	00	13

Aluno: 09		Escola: A	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22		
2º			20
3º			31
4º			26
5º	22		
6º			16
7º			26
8º			14
9º			14
10º			14
11º			19
12º			12
13º			27
14º			35
Total	02	00	12

Aluno: A10		Escola: A	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22		
2º			13
3º			27
4º			31
5º	22		
6º			16
7º			26
8º			14
9º			15
10º			16
11º			20
12º			12
13º			23
14º			25
Total	02	00	12

Aluno: A11		Escola: A	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22		
2º			20
3º			32
4º			38
5º	22		
6º			15
7º			16
8º			14
9º			15
10º			16
11º			20
12º			12
13º			31

Aluno: A12		Escola: A	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22		
2º			17
3º			25
4º			20
5º	22		
6º	14 e um meio		
7º			21
8º	12		
9º			9 e meio
10º	10		
11º			10
12º	9		
13º			13
14º			28
Total	06	00	08

14º			35
Total	02	00	12

Aluno: A13		Escola: A	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22		
2º			22
3º			33
4º			25
5º	22		
6º			16
7º			25
8º			14
9º			13
10º			14
11º			18
12º			11
13º			27
14º			33
Total	02	00	12

Aluno: A14		Escola: A	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º			28q
2º			19q
3º			31q
4º			32q
5º	22q		
6º	14 e meio		
7º			23
8º			13
9º			12 e meio
10º			13q
11º			15q
12º			12q
13º			27
14º			26q
Total	02	00	12

Aluno: A15		Escola: A	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22		
2º			16
3º			20
4º			18
5º	22		
6º			13
7º			14
8º			10
9º			6
10º			4
11º			9
12º			6
13º			9
14º			13
Total	02	00	12

Aluno: A16		Escola: A	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22		
2º			20
3º			36
4º			28
5º	22		
6º			16
7º			26
8º			14
9º			14
10º			15
11º			19
12º			12
13º			31
14º			35
Total	02	00	12

Aluno: A17		Escola: A	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22		
2º			20
3º			32
4º			28
5º	22		
6º			16
7º			26
8º			14
9º			14
10º			14
11º			19
12º			12
13º			27
14º			35
Total	02	00	12

Aluno: B01		Escola: B	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º			22cm^2
2º			18 cm^2
3º			26 cm^2
4º			**23,3 cm^2**
5º			22 cm^2
6º			14,5 cm^2
7º			20 cm^2
8º			12 cm^2
9º			**10,4 cm^2**
10º			10 cm^2
11º			**14,3 cm^2**
12º			9 cm^2
13º			**18,5 cm^2**
14º			23 cm^2
Total	00	00	14

Aluno: B02		Escola: B	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22q		
2º			17q
3º	26q		
4º	24q		
5º	22q		
6º	14,5q		
7º	20q		
8º	12q		
9º			9,5q
10º	10q		
11º	14q		
12º	9q		
13º			20q
14º	23q		
Total	11	00	03

Aluno: B03		Escola: B	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22q		
2º	18q		
3º	26q		
4º	24q		
5º	22q		
6º	14,5q		
7º	20q		
8º	12q		
9º			10q
10º	10q		
11º	14q		
12º	9q		
13º			21q
14º			24q
Total	11	00	03

Aluno: B04		Escola: B	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22q		
2º	18q		
3º	26q		
4º	24q		
5º	22q		
6º	14,5q		
7º	20q		
8º	12		
9º			11,5
10º			11
11º	14		
12º	9		
13º			18q
14º			24
Total	10	00	04

Aluno: B05		Escola: B	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º			22cm
2º	18		
3º			26cm
4º			**22cm**
5º			22cm
6º			14,5cm
7º			20cm
8º			12cm
9º			**12cm**
10º	10		
11º			**13cm**
12º			9cm
13º			**17cm**
14º			**24cm**
Total	02	00	12

Aluno: B06			Escola: B
Item	**C**	**NR**	**E**
1º			22 cm^2
2º	18		
3º			26 cm^2
4º			24 cm^2
5º			22 cm^2
6º			14,5 cm^2
7º			20 cm^2
8º			12 cm^2
9º			**9 cm^2**
10º			**20 cm^2**
11º			**13 cm^2**
12º			9 cm^2
13º			**19 cm^2**
14º			**22 cm^2**
Total	01	00	13

Aluno: B07	Escola: B		
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22q		
2º	18q		
3º	26q		
4º			26q
5º	22q		
6º	14q e meio		
7º	20q		
8º	12q		
9º	10q comp e 1 incomp		
10º	10q		
11º	14q		
12º	9q comp		
13º			20q
14º			24q
Total	11	00	03

Aluno: B08	Escola: B		
Item	**C**	**NR**	**E**
1º			22m^2
2º			**17 m^2**
3º			26 m^2
4º			**25 m^2**
5º			22 m^2
6º			14,5 m^2
7º			**19 m^2**
8º			12 m^2
9º			10,5 m^2
10º			10 m^2
11º			14 m^2
12º			9 m^2
13º			**17 m^2**
14º			**24 m^2**
Total	00	00	14

Aluno: B09	Escola: B		
Item	**C**	**NR**	**E**
1º			22 ccm^2
2º			18cm^2
3º			26 cm^2
4º			**26,1 cm^2**
5º			22cm^2
6º			14,5 cm^2
7º			20 cm^2
8º			12 cm^2
9º			**11 cm^2**
10º			10cm^2
11º			14cm^2
12º			9cm^2
13º			**20 cm^2**
14º			**24 cm^2**
Total	00	00	14

Aluno: B10	Escola: B		
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22q		
2º	18q		
3º			26 cm^{2}q de área
4º			**26 cm^2 q**
5º			22 cm^2
6º			14,5 cm^2
7º			20 cm^2
8º			12 cm^2
9º			**18,5 cm^2**
10º			**9,8 cm^2**
11º			**12 cm^2**
12º			**7 cm^2**
13º			**14,5 cm^2**
14º			**22 cm^2**
Total	02	00	12

Aluno: B11	Escola: B		
Item	**C**	**NR**	**E**
1º			22 cm^2
2º			18 cm^2
3º			26 cm^2
4º			24 cm^2
5º			22 cm^2
6º			14,5 cm^2
7º			20 cm^2
8º			12 cm^2
9º			**9,5cm^2**
10º			**12 cm^2**
11º			**13 cm^2**
12º			9 cm^2
13º			**aprox. 20 cm^2**
14º			**28 cm^2**
Total	00	00	14

Aluno: B12	Escola: B		
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22q u		
2º	18q u		
3º	26u		
4º			22u
5º	22u		
6º	14,5u		
7º	20u		
8º	12u		
9º			9,5u
10º			**7u**
11º	14u		
12º	9u		
13º			**15u**
14º			**20u**
Total	09	00	05

Aluno: B13		Escola: B	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º			22 cm^2
2º			18 cm^2
3º			26 cm^2
4º			24 cm^2
5º			22 cm^2
6º			14,5 cm^2
7º			20 cm^2
8º			12 cm^2
9º			10,5 cm^2
10º			10 cm^2
11º			**13 cm^2**
12º			9 cm^2
13º			**17 cm^2**
14º			23 cm^2
Total	00	00	14

Aluno: B14		Escola: B	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º			22 cm^2
2º			19 cm^2
3º			26 cm^2
4º			24 cm^2
5º			22 cm^2
6º			14,5 cm^2
7º			20 cm^2
8º			11 cm^2
9º			10,5 cm^2
10º			10 cm^2
11º			13 cm^2
12º			9 cm^2
13º			24 cm^2
14º			25 cm^2
Total	00	00	14

Aluno: B15		Escola: B	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22□		
2º	18□		
3º	26□		
4º	24□		
5º	22□		
6º	14□ e meio (14,5□)		
7º	20		
8º	12□		
9º			10□ e um pouq
10º	10		
11º	14□		
12º	9□		
13º			13□
14º			24□
Total	11	00	03

Aluno: B16		Escola: B	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22u		
2º	18u		
3º			27u
4º	24u		
5º	22u		
6º	14,5		
7º			19,5
8º	12u		
9º	10,5u		
10º	10u		
11º	14u		
12º	9u		
13º			18u
14º			21u
Total	10	00	04

Aluno: B17		Escola: B	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º			30 cm^2
2º			16 cm^2
3º			21,3 cm^2
4º			25 cm^2
5º			22 cm^2
6º			16 cm^2
7º			10,5 cm^2
8º			12 cm^2
9º			14 cm^2
10º			12 cm^2
11º			13,4 cm^2
12º			12 cm^2
13º			16,4 cm^2
14º			22,02 cm^2
Total	00	00	14

Aluno: B18		Escola: B	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º			23 cm^2
2º			19 cm^2
3º			27 cm^2
4º			27 cm^2
5º			23
6º			15,5
7º			20, x cm^2
8º			13 cm^2
9º			11,5 cm^2
10º			10, x cm^2
11º			14,9 cm^2
12º			10 cm^2
13º			20 cm^2
14º			24cm^2
Total	00	00	14

Aluno: B19		Escola: B	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º			22 cm^2
2º			18 cm^2
3º			26 cm^2
4º			24 cm^2
5º			22 cm^2
6º			14,5 cm^2
7º			20 cm^2
8º			12 cm^2
9º			10,5 cm^2
10º			10 cm^2
11º			14 cm^2
12º			9 cm^2
13º			20 cm^2
14º			24 cm^2
Total	00	00	14

Aluno: B20		Escola: B	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º			22 cm^2
2º			18 cm^2
3º			26 cm^2
4º			24 cm^2
5º			22 cm^2
6º			14,5 cm^2
7º			20 cm^2
8º			12 cm^2
9º			10,5 cm^2
10º			10 cm^2
11º			14 cm^2
12º			9 cm^2
13º			18 cm^2
14º			13,952 cm^2
Total	00	00	14

Aluno: B21		Escola: B	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22un		
2º	18un		
3º	26un		
4º	24un		
5º	22un		
6º	14,5q		
7º			18un
8º	12un		
9º	10,5un		
10º			7un
11º	14un		
12º	9un		
13º			20un
14º			24,5un
Total	10	00	04

Aluno: B22		Escola: B	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22q		
2º	18q		
3º			19q
4º	24q		
5º	22q		
6º	14,5q		
7º			16q
8º	12q		
9º			10q
10º			8q
11º			13q
12º	9q		
13º			17q
14º			25q
Total	07	00	07

Aluno: B23		Escola: B	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22		
2º	18		
3º	26		
4º	24		
5º			22cm^2
6º			14,5 cm^2
7º			20 cm^2
8º			12 cm^2
9º			10 cm^2
10º			9 cm^2
11º			14 cm^2
12º			9 cm^2
13º			18,5 cm^2
14º			23,5 cm^2
Total	04	00	10

Aluno: B24		Escola: B	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22q		
2º	18q		
3º			30q
4º			25q
5º	22		
6º	14,5		
7º			18,5
8º	12		
9º			11
10º	10		
11º			15
12º			8,5
13º			20
14º			18
Total	06	00	08

Aluno: B25		Escola: B	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º			22 cm^2
2º	18		
3º			26 cm^2
4º			24 cm^2
5º			22 cm^2
6º			14,5 cm^2
7º			20 cm^2
8º			12 cm^2
9º			9,5 cm^2
10º			12 cm^2
11º			14 cm^2
12º			9 cm^2
13º			19 cm^2
14º			22 cm^2
Total	01	00	13

Aluno: B26		Escola: B	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22q		
2º	18q		
3º	26q		
4º	24q		
5º	22q		
6º	14,5q		
7º			19q
8º	12q		
9º			11q
10º	10q		
11º			12q
12º	9q		
13º			15q
14º			24q
Total	09	00	05

Aluno: B27		Escola: B	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º			23
2º			19
3º			27
4º			27
5º	22		
6º	14,5		
7º	20		
8º	12		
9º	10,5		
10º	10		
11º	14		
12º	9		
13º			18
14º			24,5
Total	08	00	06

Aluno: B28		Escola: B	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22		
2º	18		
3º	26		
4º	24		
5º			22cm^2
6º			14,5m^2
7º			17
8º	12		
9º	10,5		
10º	10		
11º	14		
12º			12
13º			21
14º			24
Total	08	00	06

Aluno: B29		Escola: B	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º			22cm^2
2º			18cm^2
3º			26cm^2
4º			24cm^2
5º			22cm^2
6º	14,5		
7º			20cm^2
8º			12cm
9º	10,5		
10º			10cm^2
11º			14cm^2
12º			9cm^2
13º			21cm^2
14º			21cm^2
Total	02	00	12

Aluno: C01		Escola: C	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22q		
2º			17q
3º	26q		
4º			28q
5º			23q
6º	14 e meio quadrado		
7º			18q
8º	12		
9º			10 2/4 q
10º	10q		
11º			17 3/5
12º	9q		
13º			17 e meio
14º			22 2/3
Total	06	00	08

Aluno: C02		Escola: C	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22u		
2º	18u		
3º		x	
4º	24		
5º	22		
6º	14,5		
7º			20,5
8º	12		
9º			10 e 1/3
10º	10		
11º	14		
12º	9		
13º			19,5
14º			20
Total	09	01	04

Aluno: C03		Escola: C	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º			6x4
2º	3x6		
3º	2x13		
4º			27un
5º	2x11		
6º	14 un e meia		
7º			9x9
8º			6x6
9º			5x5 e meio
10º			5x5 e meio
11º			7x7
12º	9un		
13º			8x8
14º			2x11
Total	05	00	09

Aluno: C04		Escola: C	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22q		
2º	18q		
3º	26q		
4º			28
5º	22		
6º	14 e meio		
7º	20		
8º	12		
9º			9 e meio
10º	10		
11º			13
12º	9		
13º			19 e meio
14º	23		
Total	10	00	04

Aluno: C05		Escola: C	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22q		
2º			15q
3º			25q
4º			25q
5º	22q		
6º	14,5q		
7º	20q		
8º			11q
9º			10,2q
10º			7q
11º			13q
12º			8q
13º			18 q
14º			21q
Total	04	00	10

Aluno: C06		Escola: C	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22un		
2º	18		
3º		X	
4º		X	
5º	22		
6º	14 1/2		
7º	20		
8º	12		
9º			10
10º	10		
11º		X	
12º	9		
13º		X	
14º		X	
Total	08	05	01

Aluno: C07		Escola: C	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22un		
2º			20un
3º			32un
4º			29un
5º	22un		
6º			16un
7º			26un
8º			14un
9º			15un
10º			16un
11º			19
12º			12
13º			30un
14º			34un
Total	02	00	12

Aluno: C08		Escola: C	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22un		
2º			17un
3º			28un
4º			22un
5º			21un
6º			14un
7º			17un
8º			11un
9º			11un
10º	10un		
11º			15un
12º			10un
13º			18un
14º			25un
Total	02	00	12

Aluno: C09		Escola: C	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22		
2º			19
3º			32
4º	24		
5º	22		
6º			15,5
7º			24
8º			14
9º			14,5
10º			16,2
11º			20
12º			12
13º			22,5
14º			33
Total	03	00	11

Aluno: C10		Escola: C	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22q		
2º	18q		
3º			28q
4º			25q
5º	22		
6º	14,5		
7º	20		
8º	12		
9º			10
10º			8
11º			12
12º	9		
13º			12
14º			20
Total	07	00	07

Aluno: C11		Escola: C	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22		
2º			19
3º			21
4º			22
5º	22		
6º	14 meio		
7º			16 meio
8º			10 meio
9º	6 meio		
10º			8 meio
11º			10 meio
12º			6 meio
13º			12 meio
14º			16 meio
Total	04	00	10

Aluno: C12		Escola: C	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22		
2º			20
3º			34
4º			28
5º	22		
6º	14,5		
7º			21
8º	12		
9º			13
10º	10		
11º	14		
12º	9		
13º			24
14º			17
Total	07	00	07

Aluno: C13		Escola: C	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22		
2º	18		
3º			25
4º	24		
5º			21
6º	14 1/2		
7º	20		
8º	12		
9º			11 e meio
10º			11
11º	14		
12º	9		
13º			19
14º	23		
Total	09	00	05

Aluno: C14		Escola: C	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22un		
2º	16inteiro 4meios 18 un		
3º	20 inteiros e 6 quase inteiros		
4º			18int, 4 part, 4 meios e 2 quase int
5º	22		
6º	14 e meio		
7º			19 e meio
8º	12		
9º			11
10º	10		
11º			12 meio
12º	9		
13º		X	
14º			23 meio
Total	08	01	05

Aluno: D01		Escola: D	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22		
2º	18		
3º	26		
4º	24		
5º	22		
6º	14,5		
7º			19
8º	12		
9º			9,5
10º			8
11º			13
12º	9		
13º			17,5
14º			22,5
Total	08	00	06

Aluno: D02		Escola: D	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22		
2º	18		
3º	26		
4º	24		
5º	22		
6º	14,5		
7º	20		
8º	12		
9º			10
10º	10		
11º	14		
12º	9		
13º			18
14º			24
Total	11	00	03

Aluno: D03		Escola: D	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22		
2º			20
3º			32
4º			30
5º	22		
6º			16
7º			26
8º			14
9º			14
10º			16
11º			20
12º			12
13º			30
14º			35
Total	02	00	12

Aluno: D04		Escola: D	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22un		
2º	18un		
3º			21un
4º			19
5º			16un
6º			14un
7º			16
8º			10
9º			7un
10º			6un
11º			10un
12º			6un
13º			15un
14º			16un
Total	02	00	12

Aluno: D05		Escola: D	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22q		
2º	18q		
3º	26q		
4º			14
5º	22		
6º	14,5		
7º	20		
8º	12		
9º	10,5		
10º	10		
11º	14		
12º	9		
13º			16
14º			19
Total	11	00	03

Aluno: D06		Escola: D	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22		
2º	18		
3º			24
4º			aprox. 18
5º	22		
6º	14,5		
7º			23
8º			13
9º			10
10º			11
11º	14		
12º	9		
13º			12
14º			27
Total	06	00	08

Aluno: D07		Escola: D	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º			23
2º			16
3º			29
4º			20
5º	22		
6º			16
7º			25
8º			13
9º			13
10º			15
11º			19
12º			12
13º			28
14º			29
Total	01	00	13

Aluno: D08		Escola: D	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º			21
2º			15
3º			22
4º			22
5º			23
6º			17
7º			27
8º			14
9º			15
10º			18
11º			20
12º			13
13º			30
14º			36
Total	00	00	14

Aluno: D09		Escola: D	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22		
2º	18		
3º			24,5
4º			30
5º	22		
6º	14,5		
7º			19,5
8º	12		
9º	10,5		
10º	10		
11º			9,5
12º			7
13º			16
14º	23		
Total	08	00	06

Aluno: D10		Escola: D	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22		
2º			20
3º			32
4º			26
5º	22		
6º			16
7º			26
8º			14
9º			14
10º			16
11º			19
12º			12
13º			28
14º			31
Total	03	00	11

Aluno: D11		Escola: D	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22		
2º			20
3º			32
4º			30
5º	22		
6º			16
7º			26
8º			14
9º			14
10º			16
11º			20
12º			12
13º			31
14º			35
Total	02	00	12

Aluno: D12		Escola: D	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22		
2º			17
3º			32
4º			30
5º	22		
6º			16
7º			26
8º			14
9º			14
10º			16
11º			20
12º			12
13º			26
14º			35
Total	02	00	12

Aluno: D13		Escola: D	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22		
2º			20
3º			32
4º			30
5º	22		
6º			16
7º			26
8º			14
9º			15
10º			14
11º			20
12º			12
13º			30
14º			35
Total	02	00	12

Aluno: D14		Escola: D	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22		
2º	18		
3º	26		
4º			25
5º	22		
6º	14,5		
7º	20		
8º	12		
9º	10,5		
10º	10		
11º	14		
12º	9		
13º			19
14º			29
Total	11	00	03

Aluno: D15		Escola: D	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22		
2º	18		
3º	26		
4º			22
5º	22		
6º	14,5		
7º	20		
8º	12		
9º	10,5		
10º	10		
11º			12
12º	9		
13º			15,5
14º			19
Total	10	00	04

Aluno: D16		Escola: D	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22		
2º	18		
3º			27
4º			26
5º	22		
6º	14,5		
7º	20		
8º			12
9º			10
10º	10		
11º	14		
12º	9		
13º			13
14º			24
Total	08	00	06

Aluno: D17		Escola: D	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º			12
2º			6
3º			23
4º			6
5º	22		
6º			16
7º			12
8º			1,5
9º			12
10º			11
11º			9,0
12º			10
13º			16
14º			12
Total	01	00	13

Aluno: D18		Escola: D	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º			20
2º			15
3º			24
4º			26
5º	22		
6º			14
7º			22
8º	12		
9º			12
10º	10		
11º	14		
12º	9		
13º			15
14º			20
Total	05	00	09

Aluno: D19		Escola: D	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º			100 aprox.
2º			140 aprox.
3º			149
4º			86
5º			113
6º			120
7º			124
8º			60
9º			12,6
10º			11,4
11º			14,4
12º			11,8
13º			16,0
14º			16,9
Total	00	00	14

Aluno: D20		Escola: D	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22		
2º			20
3º			23
4º			22
5º	22		
6º			16
7º	20		
8º			13
9º			12
10º			8
11º			13
12º	9		
13º			16
14º			26
Total	04	00	10

Aluno: D21		Escola: D	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22q		
2º			21q
3º			21q
4º			29q
5º	22q		
6º			15q
7º			24q
8º			14q
9º			15q
10º			14q
11º			18q
12º			12q
13º			24q
14º			31q
Total	02	00	12

Aluno: D22		Escola: D	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22q		
2º	18q		
3º			20q
4º			19q
5º	22q		
6º	14,5q		
7º	20q		
8º			11q
9º			9,5q
10º			8,0q
11º			13q
12º	9q		
13º			18q
14º			17q
Total	06	00	08

Aluno: D23		Escola: D	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22		
2º	18		
7º	18		
8º	12		
9º	10 1/2		
10º			9 1/8
11º	14		30
12º	9		
13º	14,5		16

Aluno: D24		Escola: D	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22		
2º			17
3º	26		
4º			30
5º	22		
6º	14 1/2		
7º	20		
8º			11
9º	10 1/2		
10º			9 1/8
11º	14		
12º	9		
13º			16
14º			24 1/2
Total	08	00	06

14º			22
Total	10	00	04

Aluno: D25		**Escola: D**	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22q		
2º	18q		
3º	26q		
4º	24q		
5º	22q		
6º	14,5q		
7º	20q		
8º	12q		
9º	10,5q		
10º	10q		
11º			13
12º	9q		
13º	18,5		
14º			20
Total	12	00	02

Aluno: E01		Escola: E	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22		
2º	18		
3º			27
4º	24		
5º	22		
6º	14,5		
7º			18,5
8º	12		
9º			12
10º	10		
11º			13
12º	9		
13º			21
14º			20
Total	08	00	06

Aluno: E02		Escola: E	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º			
2º			
3º			
4º			
5º			
6º			
7º			
8º			
9º			
10º			
11º			
12º			
13º			
14º			
Total			

Aluno: E03		Escola: E	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22q		
2º			20q
3º			31q
4º			25q
5º			12q
6º			16q
7º			25q
8º	12q		
9º			14q
10º			16q
11º			18q
12º			12q
13º			28q
14º			33q
Total	02	00	12

Aluno: E04		Escola: E	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22		
2º	18		
3º	26		
4º			23,5
5º	22		
6º	14,5		
7º			19
8º	12		
9º	10,5		
10º			9
11º			14,5
12º	9		
13º			20
14º			20,5
Total	08	00	06

Aluno: E05		Escola: E	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22		
2º			19
3º			26
4º	24		
5º	22		
6º	14,5		
7º			21
8º	12		
9º	10,5		
10º	10		
11º			16
12º			10
13º			23
14º			26,5
Total	07	00	07

Aluno: E06		Escola: E	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22		
2º	18		
3º			27
4º	24		
5º	22		
6º	14,5		
7º			18
8º	12		
9º			10
10º			9
11º	14		
12º			11
13º			15
14º			20,5
Total	07		07

Aluno: E07		Escola: E	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22q		
2º	18q		
3º			18q
4º			22q
5º	22q		
6º	14,5		
7º			19 e meio q
8º	12q		
9º			9q
10º			8q
11º			13q
12º	9q		
13º	18,5		
14º			16q
Total	06	00	08

Aluno: E08		Escola: E	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22		
2º	18		
3º			12
4º			12
5º	22		
6º			13
7º			14
8º			10
9º			6
10º			4
11º			7
12º			6
13º			15
14º			13
Total	03	00	11

Aluno: E09		Escola: E	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22		
2º	18		
3º	26		
4º	24		
5º	22		
6º	14,5		
7º			20
8º	12		
9º			10
10º	10		
11º			13 e pouquinho
12º	9		
13º			18
14º			19,5
Total	09		05

Aluno: E10		Escola: E	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22		
2º			17
3º			33
4º			30
5º	22		
6º			16
7º			26
8º			14
9º			14
10º			16
11º			19
12º			12
13º			22
14º			33
Total	02	00	12

Aluno: E11		Escola: E	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22q		
2º	18q		
3º			29q
4º	24q		
5º	22q		
6º			14
7º			21
8º	12		
9º			11
10º			11
11º			16
12º	9		
13º			30
14º			30
Total	06	00	08

Aluno: E12		Escola: E	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22		
2º			20
3º			32
4º	24		
5º	22		
6º			16
7º			25
8º			14
9º			15
10º			18
11º			17
12º			12
13º			28
14º			35
Total	03	00	11

Aluno: E13		Escola: E	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22		
2º	18		
3º			23
4º			23
5º	22		
6º	14,5		
7º			16
8º	12		
9º			9,5
10º			7
11º			16
12º	9		
13º			12
14º			20
Total	06	00	08

Aluno: E14		Escola: E	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22q		
2º			20
3º			25
4º			25
5º	22		
6º			16
7º			25
8º			14
9º			14
10º			14
11º			19
12º			12
13º			24
14º			33
Total	02	00	12

Aluno: E15		Escola: E	
Item	**C**	**NR**	**E**
1º	22		
2º			20
3º			32
4º			27
5º	22		
6º			16
7º			26
8º			14
9º			15
10º			16
11º			19
12º			12
13º			27
14º			33
Total	02	00	12

ALUNA

GRACIVANE DA SILVA PESSOA

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO

"UM ESTUDO DIAGNÓSTICO SOBRE O CÁLCULO DA ÁREA DE FIGURAS PLANAS NA MALHA QUADRICULADA: INFLUÊNCIA DE ALGUMAS VARIÁVEIS."

COMISSÃO EXAMINADORA:

Presidente e Orientador
Profª. Drª. Paula Moreira Baltar Bellemain

Examinador Interno
Prof. Dr. Paulo Figueiredo Lima

Examinador Externo
Profª. Drª. Anna Paula de Avelar Brito Lima

Recife, 26 de março de 2010.

Pessoa, Gracivane da Silva

Um estudo diagnóstico sobre o cálculo da área de figuras planas na malha quadriculada : influência de algumas variáveis. Recife : O Autor, 2010.

141f. : il. : quad., graf., tab.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CE. Educação, 2010.

Inclui apêndices

1. Matemática – Estudo e ensino 2. Grandezas e medidas 3. Área de figuras planas 4. Malhas quadriculadas 5. Variáveis didáticas I. Título

372.7	**CDD (22.ed.)**	**UFPE**
37	**CDU (2.ed.)**	**CE2010-0035**