



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

KARINE DE ALMEIDA SANTOS

**DINÂMICA DE UM PROBLEMA ISÓSCELES GERADO POR UMA SOLUÇÃO
COLINEAR**

Recife

2020

KARINE DE ALMEIDA SANTOS

**DINÂMICA DE UM PROBLEMA ISÓSCELES GERADO POR UMA SOLUÇÃO
COLINEAR**

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Orientador: Hildeberto Eulálio Cabral

Recife

2020

Catálogo na fonte
Bibliotecária Mariana de Souza Alves CRB4-2105

S237d Santos, Karine de Almeida
Dinâmica de um problema isósceles gerado por uma solução colinear /
Karine de Almeida Santos. – 2020.
58 f.: il., fig.

Orientador: Hildeberto Eulálio Cabral..
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN,
Matemática, Recife, 2020.
Inclui referências.

1. Análise. 2. Problema restrito dos quatro corpos. 3. Problema isósceles.
4. Equilíbrios. Soluções periódicas. I. Cabral, Hildeberto Eulálio (orientador). II.
Título.

515

CDD (22. ed.)

UFPE- CCEN 2021-03

KARINE DE ALMEIDA SANTOS

**DINÂMICA DE UM PROBLEMA ISÓSCELES GERADO POR UMA SOLUÇÃO
COLINEAR**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutorado em Matemática.

Aprovado em: 30/10/2020

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Hildeberto Eulalio Cabral (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. César Augusto Rodrigues Castilho (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Anete Soares Cavalcanti (Examinadora Externa)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Prof. Dr. Lúcia de Fátima de Medeiros Brandão Dias (Examinadora Externa)
Universidade Federal de Sergipe

Prof. Dr. Gerson Cruz Araújo (Examinador Externo)
Universidade Federal de Sergipe

Dedico a todos que contribuíram em minha jornada, em especial a minha querida mãe Ilda.

AGRADECIMENTOS

Gratidão e dever cumprido expressam bem o sentimento que tenho neste momento. Gratidão, porque várias pessoas me ajudaram nessa jornada. Dever cumprido, por ter dedicado para estar aqui hoje. Ainda que seja insuficiente, não posso deixar de agradecer:

a Deus por sempre me dar força, serenidade e pelas pessoas que tenho o privilégio de conviver;

a minha amada mãe, Ilda, por todos os valores ensinados, por me apoiar, por seu amor incondicional, carinho, suas infinitas orações e por todos esforços realizados para que eu pudesse ir em busca de meus sonhos. Ao meu saudoso pai, Leontino, que mesmo indo tão cedo, me irradiou com sua alegria, seus mimos e seus valores;

a todos meus amigos, em especial, aos de longas datas, Gisele, Nívea, Kelly, Mislene, Última e meu brother Serginei, quem me incentivou vir para Recife. Aqui, tive oportunidade de conhecer pessoas maravilhosas que trouxeram e trazem alegria aos meus dias: a República 104 A e todas(os) amigas(os) do DMat e correlacionados;

as minhas duas matriarcas, as quais tive o privilégio de crescer com elas por perto, seu carinho e cuidado fazem falta, mas seus legados estarão sempre comigo;

aos meus irmãos Wesley e Leonardo que sempre me apoiaram e me deram segurança para estar fora todos estes anos;

aos meus sobrinhos afilhados, Gabriel e Jannes.

ao meu companheiro Leodan, pelo carinho e apoio, mesmo à distância;

a todos meus familiares pela torcida e carinho, em especial a meus padrinhos Nedina e Gentil e também a minha prima Elizete, pela constante presença e por me apoiar sempre;

aos professores do Programa da Pós que contribuíram para minha formação, em especial, ao Professor Hildeberto, com quem tive o privilégio de trabalhar e muito aprender, minha admiração, carinho e meu sincero agradecimento. Agradeço ao Professor Gerson por disponibilizar o código computacional que gerou as curvas da seção 2.5.4 deste trabalho e também ao Professor Adecarlos por implementar esse código no software gratuito Máxima e prestar uma valiosa assistência;

a banca por aceitar o convite e pelas sugestões que trazem melhoria a este trabalho;

a todos financiamentos que tive durante toda minha trajetória estudantil. Em especial, aos órgãos de fomento Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)

- Código de Financiamento 001 e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo financiamento deste doutoramento.

RESUMO

Neste trabalho estudamos dois problemas da Mecânica Celeste: o problema restrito colinear de quatro corpos e o problema isósceles gerado por uma solução colinear de Euler. No primeiro problema, discutimos a existência de equilíbrios, a estabilidade destes e a existência de órbitas periódicas. No segundo, obtemos um círculo de equilíbrios, e então usamos uma técnica de redução, em que o sistema Hamiltoniano de 3 graus de liberdade é reduzido a um com 2 graus de liberdade. Para este sistema, discutimos a estabilidade paramétrica do sistema linearizado na vizinhança do equilíbrio utilizando como ferramentas o Teorema de Krein-Gelfand-Lidskii e o método de Deprit-Hori para obter as curvas que separam as regiões de estabilidade e instabilidade.

Palavras-chaves: Problema restrito dos quatro corpos. Problema isósceles. Equilíbrios. Soluções periódicas. Estabilidade. Estabilidade paramétrica.

ABSTRACT

In this work we study two problems in Celestial Mechanics: the restricted collinear four body problem and the isosceles problem generated by an Euler collinear solution of the three body problem. In the first problem, we discuss the existence and stability of equilibrium solutions and the existence of periodic orbits. In the second problem we find a circle of equilibria and then use a procedure to reduce the Hamiltonian to a two-degree of freedom Hamiltonian. For this reduced system, we discuss the parametric stability of the linearised system in a neighbourhood of the equilibrium point using as tools the Krein-Gelfand-Lidskii's Theorem and the Deprit-Hori method to obtain the curves that separate stability and instability regions.

Keywords: Restricted four body problem. Isosceles problem. Equilibrium. Periodic solution. Stability. Parametric stability.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	O PROBLEMA RESTRITO COLINEAR DE QUATRO CORPOS . .	12
2.1	O HAMILTONIANO DO PROBLEMA EM COORDENADAS PULSANTES	12
2.2	EQUILÍBRIOS	16
2.3	NATUREZA DOS EQUILÍBRIOS	22
2.3.1	Estabilidade do equilíbrio P_1	23
2.3.2	Estabilidade do equilíbrio P_2	26
2.4	EXISTÊNCIA DE ÓRBITAS PERIÓDICAS	28
3	SOLUÇÕES ISÓSCELES GERADAS POR UMA SOLUÇÃO COLI- NEAR DE EULER	32
3.1	O HAMILTONIANO DO PROBLEMA ISÓSCELES	34
3.2	EQUILÍBRIOS	36
3.3	EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA DO SISTEMA HAMILTONIANO	38
3.4	ELIMINAÇÃO DO AUTOVALOR NULO	39
3.5	O HAMILTONIANO REDUZIDO	41
3.5.1	Normalização da parte quadrática do Hamiltoniano	43
3.5.2	Estabilidade paramétrica do sistema linearizado	45
3.5.3	Ressonâncias	48
3.5.4	Construção das curvas delimitadoras das regiões de estabilidade e instabilidade	49
4	CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS FUTURAS	56
	REFERÊNCIAS	57

1 INTRODUÇÃO

Esta tese apresenta um estudo sobre a dinâmica de dois problemas. O primeiro deles, é o problema restrito de quatro corpos espacial, onde a massa infinitesimal é atraída gravitacionalmente pelos três primários dispostos em solução colinear de Euler sobre o eixo das abscissas. O segundo, é o problema isósceles espacial proveniente de uma perturbação da solução colinear de Euler.

Ambos problemas são casos particulares do problema de N corpos descrito por Isaac Newton em sua obra *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, cuja *imprimatur*¹, foi concedida em 1686 sendo sua publicação realizada no ano seguinte. Para $N = 2$ o problema se reduz ao problema de Kepler. Para $N \geq 3$ não temos solução geral e analítica explícita, então ao longo do tempo tem-se estudado casos e soluções particulares do problema, a começar pelo problema de três corpos, amplamente explorado até os dias de hoje. Ele recebeu contribuições de grandes nomes, como Newton, Clairaut, Euler, Lagrange, Hill, Jacobi, Poincaré, Levi-Civita, Chazy, Wintner dentre outros. O artigo (MUSIELAK; QUARLES, 2014) faz um rico apanhado histórico e também discute vários aspectos do desenvolvimento teórico sobre o problema de três corpos, para o qual além desta, outras referências podem ser consultadas como (ARNOLD, 1989), (CABRAL; DIACU, 2002), (MEYER; HALL; OFFIN, 2009), (WINTNER, 1941).

Os problemas restritos são aqueles que estudam a dinâmica de uma massa quase nula na presença de outras massas, denominadas primários. Depois de explorar o problema restrito dos três corpos, outros estudiosos como Hill e Moulton alavancaram o estudo do problema de 4 corpos. Desde então vários outros estudiosos têm contribuído, tais como Andoyer [1906], Lindow [1922, 1923], Schaub [1929], MacMillan and Bartky [1932], Huttenhain [1933], Pedersen [1944, 1952], Brumberg [1957], Palmore [1973], Simó [1978], Majorana [1981], Álvarez-Ramirez e Vidal [2009], todos referenciados no artigo (BALTAGIANNIS; PAPADAKIS, 2011) de Baltagiannis e Papadakis.

Desde então, como mencionado, o problema de N corpos vem sendo explorado à partir de certas configurações. Vários pesquisadores abordaram o problema restrito de quatro corpos, alguns no caso planar, outros no caso espacial com potenciais distintos do gravitacional ou com o potencial gravitacional mas com os primários em configuração equilátera e/ou envolvendo outros aspectos tais como efeito fotoelétrico, radiação, etc. Neste trabalho, consideramos a

¹ termo em latim que significa permissão ou autorização concedida por autoridades eclesiásticas para que determinado texto seja impresso. Fonte: Wikipédia

interação gravitacional entre as massas, de modo que o potencial considerado é o Newtoniano. No Capítulo 1 deste trabalho, vamos abordar o problema restrito de quatro corpos no caso em que os primários se encontram em solução colinear de Euler. Na primeira seção encontramos o Hamiltoniano em coordenadas giratórias e pulsantes. Em seguida investigamos as soluções de equilíbrio para este sistema Hamiltoniano, não-autônomo 2π -periódico. Provamos a existência de equilíbrios colineares, denotados por P_1 e de equilíbrios não-colineares, denotados por P_2 , que correspondem aos equilíbrios equiláteros de Lagrange no problema restrito dos 3-corpos. Depois, estudamos a natureza destes equilíbrios quanto à estabilidade no sentido de Lyapunov. Por fim, na última seção deste capítulo, provamos a existência de órbitas periódicas de Lyapunov do sistema na vizinhança da solução de equilíbrio P_2 .

No Capítulo 2, vamos estudar um caso particular do problema de três corpos, o problema isósceles, para o qual as seguintes referências podem ser consultadas (CABRAL, 2012), (GOMES, 2004), (LLIBRE; ORTEGA, 2008), (LLIBRE; SIMÓ, 1980), (WINTNER, 1941). Primeiramente, apresentamos o problema isósceles em seus três aspectos (tipos). Em seguida, geramos uma solução isósceles do terceiro tipo, partindo de uma solução colinear de Euler, e assim como no capítulo anterior, apresentamos a equação de movimento em coordenadas giratórias e pulsantes, obtendo uma formulação Hamiltoniana nestas coordenadas. Obtemos um círculo de equilíbrios para este sistema e uma interpretação geométrica pôde ser obtida. Após obter a equação característica da matriz para o sistema Hamiltoniano autônomo linearizado no equilíbrio, vimos que a aparição do autovalor nulo se deve ao fato de que as mudanças de coordenadas introduzem uma integral primeira no sistema, e que é possível fazer uma redução deste sistema, como mostra a Seção 2.5. O conteúdo desenvolvido após realizada esta redução segue na direção de discutir a estabilidade paramétrica e construir as curvas que separam as regiões de estabilidade e instabilidade deste sistema Hamiltoniano reduzido.

Por fim, apresentamos a conclusão e aspectos futuros a serem investigados.

2 O PROBLEMA RESTRITO COLINEAR DE QUATRO CORPOS

Neste capítulo demos uma formulação Hamiltoniana para o problema restrito de quatro corpos quando os primários se movem em uma solução colinear elíptica. Encontramos as soluções de equilíbrio e realizamos o estudo de sua estabilidade. Depois provamos, para valores restritos de μ , a existência de órbitas periódicas de Lyapunov na vizinhança dos equilíbrios estáveis.

No próximo capítulo, faremos um estudo mais detalhado da dinâmica dos primários quando estes formam uma solução isósceles para o problema de três corpos.

2.1 O HAMILTONIANO DO PROBLEMA EM COORDENADAS PULSANTES

O problema restrito dos quatro corpos consiste em estudar o movimento de um corpo de massa infinitesimal que é atraída por três corpos massivos, denominados primários. O corpo infinitesimal não afeta a órbita dos demais e seu movimento é determinado pela força gravitacional que os primários exercem sobre ele. Supomos que os primários se movem em uma solução colinear de Euler onde as massas das extremidades m_1 e m_2 possuem mesmo valor m diferente da massa m_3 do corpo central que está situado na origem de um sistema inercial de coordenadas $Oxyz$ com a base canônica $\{e_1, e_2, e_3\}$ e os outros dois primários se movem no plano xy . Denote por r_i^e a posição de cada m_i , com $r_2^e = -r_1^e$ e $r_3^e = 0$. Como as massas das extremidades são simétricas em relação ao eixo Oz , basta conhecermos o movimento de uma delas para conhecer a solução colinear. A Figura 1, na página seguinte, ilustra a situação.

O movimento da massa de m_1 é regido pela equação

$$\ddot{r}_1^e = \frac{Gm_2}{\|r_1^e - r_2^e\|^3}(r_2^e - r_1^e) + \frac{Gm_3}{\|r_1^e - r_3^e\|^3}(r_3^e - r_1^e) = -\frac{2Gm}{8\|r_1^e\|^3}r_1^e - \frac{Gm_3}{\|r_1^e\|^3}r_1^e,$$

ou seja,

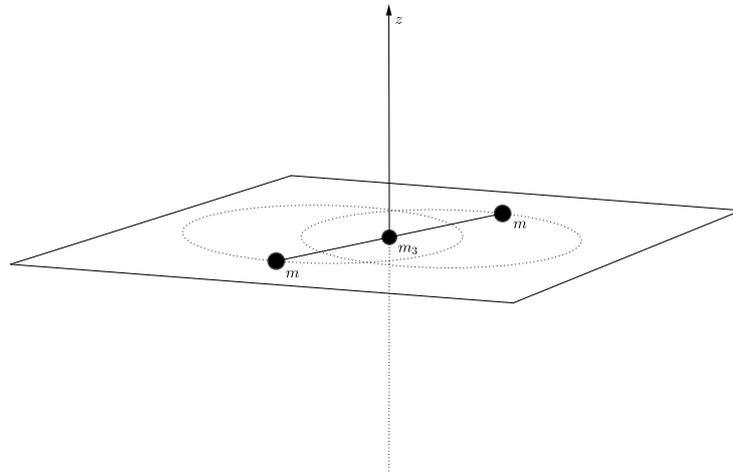
$$\ddot{r}_1^e = -\frac{G(m + 4m_3)}{4\|r_1^e\|^3}r_1^e.$$

Fixe m_3 , denote $\frac{m}{m_3} = \mu > 0$ e considere l um comprimento tal que $\frac{Gm_3}{l^3} = 1$. Agora tome $z = \frac{1}{l}r_1^e$. Então, a equação acima se reescreve como segue

$$\ddot{z} = -\frac{\kappa}{\|z\|^3}z, \quad \kappa = \frac{\mu + 4}{4}. \quad (2.1)$$

Note que, z é solução de Kepler (2.1) no plano. Consideramos a solução colinear com z descrevendo uma solução elíptica deste problema. Recordemos da teoria do problema de Kepler,

Figura 1 – Solução colinear



que

$$\rho = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \nu}, \quad \dot{\nu} = \frac{c}{\rho^2}, \quad (2.2)$$

onde $\rho = \|z\|$ é a distância ao foco atrator, ν é a anomalia verdadeira e $p = a(1 - \epsilon^2)$ é o parâmetro da órbita, sendo a o semieixo maior desta. Das equações (2.2), obtemos as relações

$$\rho \dot{\nu}^2 = \frac{c^2}{\rho^3} \quad \text{e} \quad \ddot{\rho} = \frac{c^2}{\rho^3} \frac{\epsilon \cos \nu}{(1 + \epsilon \cos \nu)}, \quad (2.3)$$

a segunda ocorre porque $\dot{\rho} = \frac{p\epsilon \sin \nu}{(1 + \epsilon \cos \nu)^2} \dot{\nu} = \frac{c\epsilon}{p} \sin \nu$, donde $\ddot{\rho} = \rho \dot{\nu}^2 \frac{\epsilon \cos \nu}{1 + \epsilon \cos \nu}$.

A equação do movimento da massa infinitesimal, m_4 , atraída pelas três massas em movimento na solução colinear de Euler é dada pela equação

$$\ddot{r}_4 = \frac{Gm}{\|r_4 - r_1^e(t)\|^3} (r_1^e(t) - r_4) + \frac{Gm}{\|r_4 - r_2^e(t)\|^3} (r_2^e(t) - r_4) + \frac{Gm_3}{\|r_4 - r_3^e(t)\|^3} (r_3^e(t) - r_4).$$

Faça $r_i^e = l\mathbf{r}_i$, $i = 1, 2, 3$ e $r_4 = l\mathbf{r}$. Dessa forma, temos

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mu}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1(t)\|^3} (\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}) + \frac{\mu}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2(t)\|^3} (\mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}) + \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_3(t)\|^3} (\mathbf{r}_3(t) - \mathbf{r}),$$

isto é,

$$\ddot{\mathbf{r}} = \nabla_{\mathbf{r}} U(\mathbf{r}, t, \mu), \quad (2.4)$$

onde o potencial U é dado por

$$U(\mathbf{r}, t, \mu) = \frac{\mu}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1(t)\|} + \frac{\mu}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2(t)\|} + \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_3(t)\|}. \quad (2.5)$$

As duas mudanças de coordenadas a seguir envolvem a combinação de coordenadas giratórias com coordenadas pulsantes. Nosso objetivo será escrever a equação do movimento (2.4), onde

a anomalia verdadeira, ν , seja nossa nova variável tempo e, com isso, o Hamiltoniano será 2π -periódico nesta variável. Vamos considerar o problema em coordenadas giratórias (ou sistema sinódico)¹, fazendo $\mathbf{r} = \Omega\xi$, onde

$$\Omega(\nu) := \Omega = \begin{bmatrix} \cos \nu & -\sin \nu & 0 \\ \sin \nu & \cos \nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e reescrever o lado esquerdo de (2.4) com relação às novas variáveis. A base (móvel) desse novo sistema é $\hat{e}_1 = (\cos \nu, \sin \nu, 0)$, $\hat{e}_2 = (-\sin \nu, \cos \nu, 0)$ e $\hat{e}_3 = e_3 = (0, 0, 1)$. Primeiramente, derivando \mathbf{r} com relação a t , em que $'$ denota derivada com relação a ν , temos

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \dot{\nu}\Omega'\xi + \Omega\dot{\xi} \\ \ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{\nu}\Omega'\xi + \dot{\nu}^2\Omega''\xi + 2\dot{\nu}\Omega'\dot{\xi} + \Omega\ddot{\xi}. \end{aligned}$$

Seja $\Sigma = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, note que $\Omega' = \Omega\Sigma$ e $\Omega'' = \Omega\Sigma^2$. Substituindo estas últimas relações na equação anterior e reordenando os termos, temos

$$\ddot{\mathbf{r}} = \Omega[\ddot{\xi} + 2\dot{\nu}\Sigma\dot{\xi} + \ddot{\nu}\Sigma\xi + \dot{\nu}^2\Sigma^2\xi]. \quad (2.6)$$

A próxima mudança de variáveis irá colocar o problema em coordenadas pulsantes². Usando $\rho = \|z\| = \|\mathbf{r}_j\|$, $j = 1, 2$ façamos $\xi = \rho x$, derivando com relação a t , temos

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \dot{\rho}x + \rho\dot{\nu}x' \\ \ddot{\xi} &= \ddot{\rho}x + 2\dot{\rho}\dot{\nu}x' + \rho(\dot{\nu}^2x'' + \ddot{\nu}x') = \ddot{\rho}x + (2\dot{\rho}\dot{\nu} + \rho\ddot{\nu})x' + \rho\dot{\nu}^2x''. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Derivando a expressão $\rho^2\dot{\nu} = c$ com relação a t , temos $\rho(2\dot{\rho}\dot{\nu} + \rho\ddot{\nu}) = 0 \Leftrightarrow 2\dot{\rho}\dot{\nu} + \rho\ddot{\nu} = 0$.

Daí,

$$\ddot{\xi} = \ddot{\rho}x + \rho\dot{\nu}^2x''. \quad (2.8)$$

¹ O referencial deixa de ser inercial, pois segue seu próprio corpo em movimento e, portanto, é acelerado. Ao girarmos juntamente com o corpo temos a sensação de estar em repouso. Exemplo: um referencial ortonormal fixo com origem no centro da Terra pode ser considerado um referencial inercial para o estudo dos corpos na superfície desta. Já um referencial ortonormal fixo com origem na superfície da Terra não é inercial pois ele tem uma aceleração devido à rotação da Terra em torno do seu eixo. Um observador no espaço, vê o movimento de rotação da Terra em torno do seu eixo de rotação Oz , enquanto que um observador na Terra não percebe esta rotação.

² Aqui os primários permanecerão fixos, isto é, eliminamos os movimentos homotéticos.

Assim, substituindo as expressões (2.7) e (2.8) em (2.6), temos

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{r}} &= \Omega[\ddot{\rho}x + \rho\dot{\nu}^2x'' + 2\dot{\nu}\Sigma(\dot{\rho}x + \rho\nu x') + \rho\ddot{\nu}\Sigma x + \rho\dot{\nu}^2\Sigma^2x] \\
&= \Omega[\ddot{\rho}x + \rho\dot{\nu}^2x'' + (2\dot{\rho}\dot{\nu} + \rho\ddot{\nu})\Sigma x + 2\rho\dot{\nu}^2\Sigma x' + \rho\dot{\nu}^2\Sigma^2x] \\
&= \Omega[\rho\dot{\nu}^2(x'' + 2\Sigma x') + (\ddot{\rho}I_3 + \rho\dot{\nu}^2\Sigma^2)x],
\end{aligned} \tag{2.9}$$

onde I_3 denota a matriz identidade de ordem 3.

Usando as relações de (2.3), reescrevemos (2.9) da seguinte forma

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{c^2}{\rho^3}\Omega \left[x'' + 2\Sigma x' + \Sigma^2x + \frac{\epsilon \cos \nu}{(1 + \epsilon \cos \nu)}x \right]. \tag{2.10}$$

Por outro lado, vejamos como ficam U e U_x com relação às mudanças de variáveis realizadas acima e reescrevamos o lado direito de (2.4). Primeiro, lembre que

$$\mathbf{r}_2 = -\mathbf{r}_1, \quad \|\mathbf{r}_1\| = \rho \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_3 = 0,$$

daí, em coordenadas rotacionais, temos

$$\mathbf{r}_1 = \rho\hat{e}_1 = \rho\Omega e_1 \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_2 = -\rho\Omega e_1.$$

Dessa forma, ao realizarmos as mudanças $\mathbf{r} = \Omega\xi$ e $\xi = \rho x$, teremos $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\| = \|\Omega(\xi - \rho e_1)\| = \rho\|x - e_1\|$, $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2\| = \rho\|x + e_1\|$ e, segue por (2.5), que

$$U(\mathbf{r}, \mu) = \frac{1}{\rho}V(x, \mu), \quad V(x, \mu) = \frac{\mu}{\|x - e_1\|} + \frac{\mu}{\|x + e_1\|} + \frac{1}{\|x\|}.$$

Agora, derivando esta última com respeito a \mathbf{r} , temos

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r}, t, \mu) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial x}(x, \mu) \frac{\partial x}{\partial \mathbf{r}}, \quad \text{onde} \quad x = \frac{1}{\rho}\Omega^{-1}\mathbf{r}, \tag{2.11}$$

isto é, para todo $w \in \mathbb{R}^3$, temos

$$\langle \nabla_{\mathbf{r}}U(\mathbf{r}, t, \mu), \Omega w \rangle = \frac{1}{\rho^2} \langle \nabla_x V(x, \mu), w \rangle.$$

E ainda, como Ω é ortogonal, temos a seguinte relação entre os gradientes de U e V :

$$\nabla_{\mathbf{r}}U(\mathbf{r}, t, \mu) = \frac{1}{\rho^2}\Omega \nabla_x V(x, \mu). \tag{2.12}$$

Por (2.10) e (2.12) vemos que a equação do movimento, (2.4), toma a forma

$$x'' + 2\Sigma x' + \Sigma^2x + \frac{\epsilon \cos \nu}{(1 + \epsilon \cos \nu)}x = \frac{\rho}{c^2}\nabla_x V(x, \mu).$$

Usando $\rho = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \nu}$, reescrevemos a equação acima do seguinte modo

$$(x' + \Sigma x)' = -\Sigma(x' + \Sigma x) - \frac{1}{1 + \epsilon \cos \nu} \left(\epsilon \cos \nu x - \frac{p}{c^2} \nabla_x V(x, \mu) \right). \quad (2.13)$$

Tomando $x' + \Sigma x = y$ na equação acima e usando o fato de que no problema de Kepler $\frac{c^2}{p} = \kappa$, temos o seguinte sistema de primeira ordem

$$x' = y - \Sigma x \quad y' = -\Sigma y + \nabla_x S(x, \nu, \mu, \epsilon) \quad (2.14)$$

onde,

$$S(x, \nu, \mu, \epsilon) = \frac{1}{1 + \epsilon \cos \nu} \left(-\frac{1}{2} \epsilon \cos \nu \|x\|^2 + \frac{1}{\kappa} V(x, \mu) \right),$$

e

$$V(x, \mu) = \frac{\mu}{d_1} + \frac{\mu}{d_2} + \frac{1}{d_3}, \quad (2.15)$$

com

$$d_1 = \|x - e_1\|, \quad d_2 = \|x + e_1\| \quad \text{e} \quad d_3 = \|x\|.$$

O sistema (2.14) é Hamiltoniano, onde a função Hamiltoniana $H : \Lambda \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \times I \times [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$H(x, y, \nu, \mu, \epsilon) = \frac{1}{2} \|y\|^2 - S(x, \nu, \mu, \epsilon) - \langle \Sigma x, y \rangle, \quad (2.16)$$

com $\Lambda = \{x \in \mathbb{R}^3 / x \neq e_1, x \neq -e_1 \text{ e } x \neq 0\}$ e I um conjunto de números reais positivos.

Assim, finalizamos esta seção dando a formulação Hamiltoniana do problema e agora temos a disposição toda a teoria de Sistemas Hamiltonianos para usarmos.

Uma observação importante é que em Sistemas Hamiltonianos, H será uma integral primeira se o sistema for autônomo e, neste caso, isso ocorre quando $\epsilon = 0$.

2.2 EQUILÍBRIOS

Nesta seção buscamos um tipo de solução mais simples, as que são constantes ao longo do tempo, este último agora representado por ν . Isto é, suponhamos que $z^* = (x^*, y^*)$, seja tal que $\nabla_z H(z^*, \nu, \mu, \epsilon) = 0$, para todos $\nu \in \mathbb{R}$, $\mu \in I$ e $\epsilon \in [0, 1)$, então $z(\nu, \mu, \epsilon) = z^*$ é uma *solução de equilíbrio* ou, simplesmente um *equilíbrio* do sistema (2.17). Pra encontrá-las, escrevamos o sistema Hamiltoniano não-autônomo (2.14) da seguinte forma

$$z' = J \nabla_z H(z, \nu, \mu, \epsilon), \quad z = (x, y), \quad J = \begin{bmatrix} O & I \\ -I & O \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

onde ' denota derivada com relação a ν . Dito isso, os equilíbrios de (2.14) são os pontos $(x, y) \in \Lambda \times \mathbb{R}^3$ tais que

$$y = \Sigma x \quad (2.18)$$

$$\nabla_x S(x, \nu, \mu, \epsilon) = \Sigma^2 x, \quad (2.19)$$

para todos $\nu \in \mathbb{R}$, $\mu \in I$ e $\epsilon \in [0, 1)$, onde

$$\nabla_x S(x, \nu, \mu, \epsilon) = \frac{1}{1 + \epsilon \cos \nu} \left(-\epsilon \cos \nu x + \frac{1}{\kappa} \nabla_x V(x, \mu) \right).$$

Como

$$d_1 = \sqrt{(x_1 - 1)^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad d_2 = \sqrt{(x_1 + 1)^2 + x_2^2 + x_3^2} \quad \text{e} \quad d_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad (2.20)$$

então as derivadas parciais de V em (2.15), são

$$\begin{aligned} V_{x_1}(x, \mu) &= - \left(\frac{\mu}{d_1^3} (x_1 - 1) + \frac{\mu}{d_2^3} (x_1 + 1) + \frac{1}{d_3^3} x_1 \right) \\ V_{x_j} &= - \left(\frac{\mu}{d_1^3} + \frac{\mu}{d_2^3} + \frac{1}{d_3^3} \right) x_j, \quad j = 2, 3. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Vamos resolver o sistema (2.19) regressivamente, ou seja, da terceira componente em direção à primeira. Como a terceira componente de $\Sigma^2 x$ é nula, segue da terceira equação de (2.19), que

$$-\epsilon \cos \nu x_3 + \frac{p}{c^2} V_{x_3}(x, \mu) = 0 \Leftrightarrow \left[\epsilon \cos \nu + \frac{1}{\kappa} D(x, \mu) \right] x_3 = 0, \quad (2.22)$$

onde

$$D(x, \mu) = \frac{\mu}{d_1^3} + \frac{\mu}{d_2^3} + \frac{1}{d_3^3}. \quad (2.23)$$

Note que (2.22) se cumpre para todos $\nu \in \mathbb{R}$, $\mu \in I$ e $\epsilon \in [0, 1)$ se, e somente se, $x_3 = 0$.

Quando isso ocorre, temos

$$\hat{d}_1 = \sqrt{(x_1 - 1)^2 + x_2^2}, \quad \hat{d}_2 = \sqrt{(x_1 + 1)^2 + x_2^2} \quad \text{e} \quad \hat{d}_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

e ainda,

$$\hat{D}(x, \mu) = D((x_1, x_2, 0), \mu) = \frac{\mu}{\hat{d}_1^3} + \frac{\mu}{\hat{d}_2^3} + \frac{1}{\hat{d}_3^3}.$$

Portanto, as duas primeiras equações do sistema (2.19) se reescrevem da seguinte forma

$$\begin{cases} \frac{1}{1 + \epsilon \cos \nu} \left[x_1 \left(1 - \frac{1}{\kappa} \hat{D}(x, \mu) \right) + \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\mu}{\hat{d}_1^3} - \frac{\mu}{\hat{d}_2^3} \right) \right] = 0 \\ \frac{1}{1 + \epsilon \cos \nu} \left[1 - \frac{1}{\kappa} \hat{D}(x, \mu) \right] x_2 = 0. \end{cases} \quad (2.24)$$

No estudo das equações de (2.24) vamos considerar os dois casos:

$$(a) x_2 = 0 \quad \text{e} \quad (b) x_2 \neq 0.$$

É claro que a segunda equação se cumpre no caso (a). O estudo do caso (a) para a primeira equação de (2.24) é tratado na proposição a seguir. O argumento para prová-la é similar ao que foi empregado em (ARRIBAS et al., 2016); ver também a prova da existência dos equilíbrios colineares de Euler no problema restrito dos três corpos. O caso (b) será estudado mais à frente.

Proposição 2.1 *Para $x_2 = 0$ na primeira equação de (2.24), as seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (i) *existe um único $x_1^*(\mu)$ em cada um dos intervalos $(1, +\infty)$ e $(-\infty, -1)$, que satisfaz (2.25), explicitada abaixo;*
- (ii) *existe um único $x_1^*(\mu)$ em cada um dos intervalos $(0, 1)$ e $(-1, 0)$, que satisfaz (2.25), explicitada abaixo.*

Neste caso, denotamos o equilíbrio por $P_1 = (x_1^*, 0, 0, 0, x_1^*, 0)$.

Demonstração. Tomando $x_2 = 0$ na primeira equação de (2.24), temos

$$D_1(x_1, \mu) = D((x_1, 0, 0), \mu) = \kappa x_1,$$

isto é,

$$\frac{\mu}{(x_1 - 1)^2} \frac{(x_1 - 1)}{|x_1 - 1|} + \frac{\mu}{(x_1 + 1)^2} \frac{(x_1 + 1)}{|x_1 + 1|} + \frac{1}{x_1^2} \frac{x_1}{|x_1|} = \kappa x_1, \quad (2.25)$$

$$\kappa = \frac{\mu + 4}{4}.$$

Multipliquemos (2.25) por $x_1^2 \neq 0$ e, em seguida, denotemos o lado esquerdo por $\mathcal{D}(x_1, \mu)$, isto é,

$$\mathcal{D}(x_1, \mu) = \kappa x_1^3, \quad (2.26)$$

onde

$$\mathcal{D}(x_1, \mu) = \frac{\mu x_1^2}{(x_1 - 1)^2} \frac{(x_1 - 1)}{|x_1 - 1|} + \frac{\mu x_1^2}{(x_1 + 1)^2} \frac{(x_1 + 1)}{|x_1 + 1|} + \frac{x_1}{|x_1|}. \quad (2.27)$$

Dessa forma, vamos mostrar que, em ambos os casos (i) e (ii), é única a interseção entre as curvas $y_1 = \mathcal{D}(x_1, \mu)$ e $y_1 = \kappa x_1^3$. Como o comportamento da curva $y_1 = \kappa x_1^3$ é bem conhecido, basta analisarmos o comportamento da curva $y_1 = \mathcal{D}(x_1, \mu)$, e isso será feito nos casos a seguir:

(i) Suponhamos $x_1 \in (1, +\infty)$, então por (2.27), temos

$$\mathcal{D}(x_1, \mu) = \frac{\mu x_1^2}{(x_1 - 1)^2} + \frac{\mu x_1^2}{(x_1 + 1)^2} + 1. \quad (2.28)$$

Observemos que:

1. $\lim_{x_1 \rightarrow 1^+} \mathcal{D}(x_1, \mu) = \lim_{x_1 \rightarrow 1^+} \frac{\mu x_1^2}{(x_1 - 1)^2} + \frac{\mu x_1^2}{(x_1 + 1)^2} + 1 = +\infty$;
2. $\lim_{x_1 \rightarrow +\infty} \mathcal{D}(x_1, \mu) = 2\mu + 1$;
3. \mathcal{D} é decrescente, de fato

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'(x_1, \mu) &= \left[\frac{2\mu x_1}{(x_1 - 1)^2} - \frac{2\mu x_1^2}{(x_1 - 1)^3} \right] + \left[\frac{2\mu x_1}{(x_1 + 1)^2} - \frac{2\mu x_1^2}{(x_1 + 1)^3} \right] \\ &= 2\mu \left[\frac{1}{(x_1 + 1)^3} - \frac{1}{(x_1 - 1)^3} \right] x_1 < 0, \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\text{pois } x_1 > 1 \text{ e } x_1 + 1 > x_1 - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{(x_1 + 1)^3} - \frac{1}{(x_1 - 1)^3} < 0.$$

Assim, claramente a curva $y_1 = \mathcal{D}(x_1, \mu)$ intersecta o gráfico da curva cúbica $y_1 = \kappa x_1^3$ em um único ponto $x_1^*(\mu)$ no intervalo $(1, +\infty)$, ver Figura 2 na página seguinte.

(ii) Suponhamos $x_1 \in (0, 1)$, então por (2.27), temos

$$\mathcal{D}(x_1, \mu) = -\frac{\mu x_1^2}{(x_1 - 1)^2} + \frac{\mu x_1^2}{(x_1 + 1)^2} + 1. \quad (2.30)$$

E ainda,

1. $\lim_{x_1 \rightarrow 1^-} \mathcal{D}(x_1, \mu) = \lim_{x_1 \rightarrow 1^-} -\frac{\mu x_1^2}{(x_1 - 1)^2} + \frac{\mu x_1^2}{(x_1 + 1)^2} + 1 = -\infty$;
2. \mathcal{D} é decrescente, de fato,

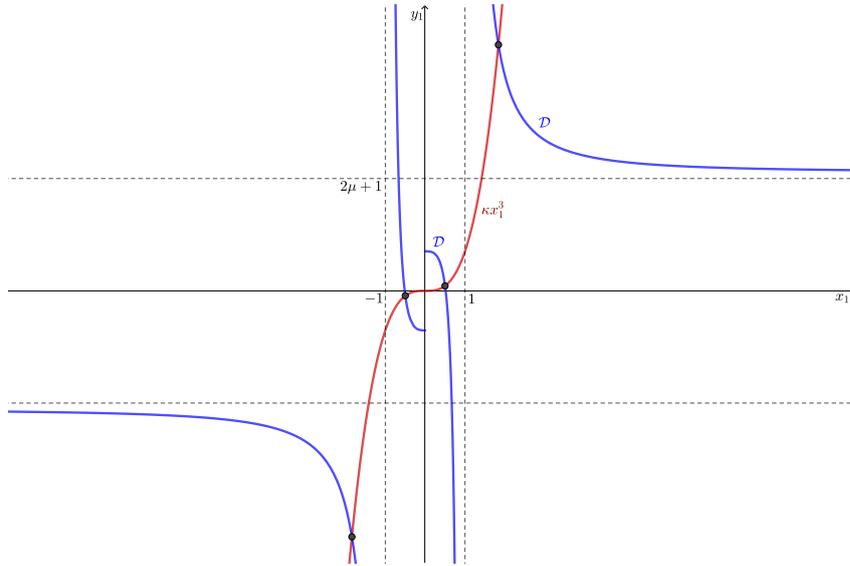
$$\begin{aligned} \mathcal{D}'(x_1, \mu) &= -\frac{2\mu x_1}{(x_1 - 1)^2} + \frac{2\mu x_1^2}{(x_1 - 1)^3} + \frac{2\mu x_1}{(x_1 + 1)^2} - \frac{2\mu x_1^2}{(x_1 + 1)^3} \\ &= \frac{2\mu x_1}{(x_1 - 1)^2} \left(\frac{x_1}{(x_1 - 1)} - 1 \right) + \frac{2\mu x_1}{(x_1 + 1)^2} \left(1 - \frac{x_1}{(x_1 + 1)} \right) \\ &= 2\mu \left[\frac{1}{(x_1 - 1)^3} + \frac{1}{(x_1 + 1)^3} \right] x_1 < 0, \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\text{pois } x_1 - 1 > -(x_1 + 1) \Leftrightarrow \frac{1}{(x_1 - 1)^3} + \frac{1}{(x_1 + 1)^3} < 0.$$

Pelo mesmo argumento do caso anterior, concluímos a existência de um único $x_1^* \in (0, 1)$ tal que $\mathcal{D}(x_1, \mu) = \kappa x_1^3$.

Por fim, se $x^*(\mu) = (x_1^*(\mu), 0, 0)$ segue da primeira equação de (2.18), que $y^* = \Sigma x^*$ e, portanto, o ponto de equilíbrio P_1 é dado por $(x^*(\mu), y^*(\mu)) = (x_1^*(\mu), 0, 0, 0, x_1^*(\mu), 0)$.

Figura 2 – Solução colinear



A Figura 2 acima, ilustra a existência dos equilíbrios em cada um dos intervalos. Note que quando $x_1 > 0$, temos $\mathcal{D}(-x_1, \mu) = \mathcal{D}(x_1, \mu)$, ou seja, para cada equilíbrio $x_1^*(\mu)$ tomado em um dos intervalos $(0, 1)$ e $(1, \infty)$, existe o simétrico correspondente. Por este fato, é suficiente analisarmos apenas quando $x_1 > 0$

■

Agora vamos abordar o caso em que $x_2 \neq 0$. Nele, temos pela segunda equação de (2.24), que $\hat{D}(x, \mu) = \kappa$, substituindo na primeira equação de (2.24), temos

$$\frac{1}{\hat{d}_1^3} - \frac{1}{\hat{d}_2^3} = 0 \Leftrightarrow (\hat{d}_2 - \hat{d}_1)(\hat{d}_2^2 + \hat{d}_1\hat{d}_2 + \hat{d}_1^2) = 0.$$

Esta última possui raiz real somente quando $\hat{d}_1 = \hat{d}_2$, o que implica $x_1 = 0$. Assim, a primeira equação de (2.24) se reescreve como sendo

$$f(x_2, \mu) = \kappa, \quad (2.32)$$

onde $\kappa = \frac{\mu + 4}{4}$ e f é a função definida para $x \neq 0$ por

$$f(x, \mu) = \frac{2\mu}{[x^2 + 1]^{3/2}} + \frac{1}{x^2|x|}. \quad (2.33)$$

Proposição 2.2 Para cada $\mu > 0$, existe um único $x_2^*(\mu) \in (0, 1)$ que satisfaz (2.32). Evidentemente, $-x_2^*(\mu) \in (-1, 0)$ também é raiz de (2.32). Neste caso, o equilíbrio é $P_2 = (0, x_2^*, 0, -x_2^*, 0, 0)$.

Demonstração. Vemos claramente que fixado μ , $f \rightarrow +\infty$ quando $x \rightarrow 0^\pm$ e $f \rightarrow 0^+$, quando $|x| \rightarrow +\infty$. Além disso, para cada $\mu > 0$ fixado, a função é decrescente no semieixo positivo $x > 0$, e é crescente no semieixo negativo, $x < 0$, pois a derivada

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \mu) = -3 \left(\frac{2\mu}{[x^2 + 1]^{5/2}} + \frac{1}{|x|^5} \right) x$$

é negativa quando $x > 0$ e é positiva quando $x < 0$. Para ver este fato, reescrevamos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \mu) = -3 \left[2\mu \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)^5 + \frac{x}{|x|} \right] \frac{1}{x^4}$$

e perceba que $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)^5 \in (-1, 1)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Dessa forma, quando $x > 0$, temos

$1 < 2\mu \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)^5 + 1 < 2\mu + 1$ e, portanto, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \mu) < 0$. Analogamente se conclui que

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \mu) > 0$ quando $x < 0$.

Como $\kappa = \frac{\mu + 4}{4} > 0$, concluímos que existe um único $x_2(\mu) > 0$ tal que $f(x_2(\mu), \mu) = \kappa$.

Analogamente, concluímos a existência de uma raiz de (2.32) no semieixo negativo.

Feito isso, nos resta mostrar que $x_2(\mu) < 1$. Como $\frac{\partial f}{\partial x}(x_2(\mu), \mu) \neq 0$, o Teorema das Funções Implícitas diz que $x_2(\mu)$ é uma função analítica de μ , pois $f(x, \mu) - \kappa$ é uma função analítica de (x, μ) . Derivando (2.32) com relação a μ , temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_2(\mu), \mu) x_2'(\mu) = \frac{1}{4}.$$

Nesta última expressão, pelo fato de $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \mu) < 0$, tem-se $x_2'(\mu) < 0$, logo a função $x_2(\mu)$ é decrescente. Da equação $f(x, \mu) = \kappa$, temos $x = 1$ quando $\mu = 0$ e, pelo fato de $x_2(\mu)$ ser decrescente, temos $x_2(\mu) < 1$.

Por fim, de (2.18), temos $y^*(\mu) = \Sigma x^*(\mu)$, ou seja, $y_1^*(\mu) = -x_2^*(\mu)$, $y_2^* = 0 = y_3^*$, daí o equilíbrio P_2 é dado por $(x^*(\mu), y^*(\mu)) = (0, x_2^*(\mu), 0, -x_2^*(\mu), 0, 0)$.

■

Dessa forma, o estudo desta seção nos leva a dois tipos de equilíbrios, $P_1 = (x_1^*, 0, 0, 0, x_1^*, 0)$ e $P_2 = (0, x_2^*, 0, -x_2^*, 0, 0)$. Vimos que existem quatro equilíbrios do tipo P_1 sobre o eixo dos primários, um em cada um dos intervalos:

$$(-\infty, -1), \quad (-1, 0), \quad (0, 1) \quad \text{e} \quad (1, \infty).$$

E, para cada μ , existem dois equilíbrios do tipo P_2 , $x_2^* = x_2^*(\mu)$, um no intervalo $(-1, 0)$ e outro no intervalo $(0, 1)$.

Na próxima seção damos início ao estudo da estabilidade destas soluções de equilíbrio.

2.3 NATUREZA DOS EQUILÍBRIOS

Na seção anterior vimos a existência das soluções de equilíbrio. Nesta seção estamos interessados em estudar o comportamento de cada uma delas em sua vizinhança. Para isto, fazemos o estudo da parte linear do Hamiltoniano. Seja $z = (x, y)$, a linearização do sistema Hamiltoniano na vizinhança de uma solução de equilíbrio é dada por

$$z' = A(\nu, \mu, \epsilon)(z - z^*) + \mathcal{O}(|z - z^*|), \quad A(\nu, \mu, \epsilon) = J\mathcal{G}. \quad (2.34)$$

onde, $\mathcal{G} = H_{zz}(z^*, \nu, \mu, \epsilon)$. No nosso caso,

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} -S_{xx}^* & \Sigma \\ -\Sigma & I \end{pmatrix}$$

$$\text{e } S_{xx}^* = S_{xx}(x^*, \nu, \mu, \epsilon) = \frac{1}{1 + \epsilon \cos \nu} \left(-\epsilon \cos \nu + \frac{1}{\kappa} V_{xx}(x^*, \mu) \right).$$

Vamos tratar de um caso particular do problema que é quando $\epsilon = 0$. Neste caso, o sistema será autônomo e denotaremos $A(\nu, \mu, \epsilon)$ por A a matriz Hamiltoniana deste sistema. Nosso objetivo é estudar a natureza dos equilíbrios obtidos na seção anterior no que diz respeito à sua estabilidade/instabilidade. Veremos que os equilíbrios colineares representados por P_1 são todos instáveis. Já para o equilíbrio P_2 garantimos estabilidade (linear) para certos valores de μ . Na próxima seção, vamos estudar a existência de órbitas periódicas em uma vizinhança do equilíbrio.

A estabilidade dos equilíbrios de um sistema Hamiltoniano autônomo, ocorre quando todos seus autovalores são imaginários puros (ou nulos) e A é diagonalizável sobre \mathbb{C} . No caso de algum autovalor não ser imaginário puro, sua parte real será não nula e, como o polinômio característico de A é par, então sempre haverá um autovalor com parte real positiva, implicando pelo Teorema de Lyapunov (enunciado a seguir), que o equilíbrio é instável.

Teorema 2.3 (Lyapunov) *Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ autovalores da matriz $n \times n$, $A = Df(z^*)$. Se o equilíbrio z^* é estável, então $Re(\lambda_j) \leq 0$ para todo j ; se $Re(\lambda_j) > 0$ para algum j , então o equilíbrio é instável.*

Demonstração. Ver (SIEGEL; MOSER, 1971), pág 203.

Agora, busquemos os autovalores do sistema linearizado na vizinhança de um dos equilíbrios, z^* , para o caso circular, em que $\epsilon = 0$. Neste caso, $A = J\mathcal{G}$, onde $\mathcal{G} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\kappa} V_{xx}^* & \Sigma \\ -\Sigma & I \end{pmatrix}$

e V_{xx}^* denota a matriz hessiana de V no equilíbrio z^* . A função V possui as derivadas mistas de segunda ordem nulas em todos equilíbrios. Sendo assim, temos uma matriz diagonal cujas entradas são obtidas através de (2.20), (2.23) e (2.21), isto é

$$\begin{aligned} V_{x_1x_1}(x, \mu) &= -D(x, \mu) - x_1 D_{x_1} - \left(\frac{3\mu}{d_1^5} (x_1 - 1)^2 - \frac{3\mu}{d_2^5} (x_1 + 1)^2 \right), \\ V_{x_2x_2}(x, \mu) &= -D(x, \mu) + \left(\frac{3\mu}{d_1^5} + \frac{3\mu}{d_2^5} + \frac{3}{d_3^5} \right) x_2^2, \\ V_{x_3x_3}(x, \mu) &= -D(x, \mu) + \left(\frac{3\mu}{d_1^5} + \frac{3\mu}{d_2^5} + \frac{3}{d_3^5} \right) x_3^2. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Vamos denotar as entradas da matriz hessiana de V no equilíbrio z_i^* , da seguinte forma

$$a_i(\mu) = a_i = V_{x_1x_1}(x_i^*, \mu), \quad b_i(\mu) = b_i = V_{x_2x_2}(x_i^*, \mu) \quad \text{e} \quad c_i(\mu) = c_i = V_{x_3x_3}(x_i^*, \mu), \quad i = 1, 2$$

e usar uma notação ou outra dependendo do que for mais conveniente. Os autovalores de A são obtidos através do polinômio característico

$$p(\lambda) = \left(\frac{c_i}{\kappa} - \lambda^2 \right) \left[\lambda^4 + \left(2 - \frac{1}{\kappa} (a_i + b_i) \right) \lambda^2 + \left(\frac{a_i}{\kappa} + 1 \right) \left(\frac{b_i}{\kappa} + 1 \right) \right], \quad i = 1, 2. \quad (2.36)$$

Para que haja estabilidade (linear), vamos investigar a existência de raízes imaginárias puras e distintas. O primeiro fator do polinômio característico dará um par de raízes imaginárias puras distintas se $c_i < 0$. O segundo fator dará um par de raízes imaginárias puras distintas, quando as seguintes condições referentes à equação $\lambda^4 + \alpha\lambda^2 + \beta = 0$ forem satisfeitas: $\alpha > 0$, $\beta > 0$ e $\Delta = \alpha^2 - 4\beta > 0$.

Vejamos quando isso ocorre em cada equilíbrio nas duas seções a seguir.

2.3.1 Estabilidade do equilíbrio P_1

No equilíbrio P_1 , $x^* = (x_1^*, 0, 0)$, onde $x_1^* = x_1(\mu)$, os valores de d_1 , d_2 e d_3 são dados por

$$d_1^2 = (x_1^* - 1)^2, \quad d_2^2 = (x_1^* + 1)^2 \quad \text{e} \quad d_3^2 = x_1^{*2}.$$

Então, de (2.35), obtemos os valores de a_1 , b_1 e c_1 , a saber:

$$a_1 = 2D_1(x_1^*, \mu) \quad \text{e} \quad b_1 = -D_1(x_1^*, \mu) = c_1, \quad (2.37)$$

onde $D_1(x_1^*, \mu) = D(x^*, \mu) = \frac{\mu}{|x_1^* - 1|^3} + \frac{\mu}{|x_1^* + 1|^3} + \frac{1}{|x_1^*|^3}$.

Perceba que $a_1 = -2b_1$, daí por (2.36), o polinômio característico é

$$p(\lambda) = \left(\frac{b_1}{\kappa} - \lambda^2 \right) \left[\lambda^4 + \left(\frac{b_1}{\kappa} + 2 \right) \lambda^2 + \left(1 + \frac{b_1}{\kappa} \right) \left(1 - \frac{2b_1}{\kappa} \right) \right].$$

Do primeiro fator, garantimos a existência de uma raiz imaginária pura, pois de $b_1 = -D(x^*, \mu) < 0$ e $\kappa > 0$, temos $\frac{b_1}{\kappa} < 0$. Para que as demais raízes sejam imaginárias puras e distintas vamos usar os critérios mencionados anteriormente, isto é, se, e somente se, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ e $\Delta = \alpha^2 - 4\beta > 0$, onde

$$\alpha = 2 + \frac{b_1}{\kappa}, \quad \beta = \left(1 + \frac{b_1}{\kappa}\right) \left(1 - \frac{2b_1}{\kappa}\right) \quad \text{e} \quad \Delta = \frac{b_1}{\kappa} \left(\frac{9b_1}{\kappa} + 8\right).$$

$$(i) \quad \alpha > 0 \Leftrightarrow \frac{b_1}{\kappa} > -2;$$

$$(ii) \quad \beta > 0 \Leftrightarrow -1 < \frac{b_1}{\kappa} < \frac{1}{2};$$

$$(iii) \quad \Delta > 0 \Leftrightarrow \frac{b_1}{\kappa} > 0 \text{ ou } \frac{b_1}{\kappa} < -\frac{8}{9};$$

Destas três condições, temos $0 < \frac{b_1}{\kappa} < \frac{1}{2}$ ou $-1 < \frac{b_1}{\kappa} < -\frac{8}{9}$. Mas, como já vimos, $\frac{b_1}{\kappa} < 0$, portanto

$$-1 < \frac{b_1}{\kappa} < -\frac{8}{9}. \quad (2.38)$$

Proposição 2.4 *O equilíbrio P_1 do sistema $z' = Az$ é instável.*

Demonstração. Para demonstrarmos esta Proposição, vamos usar o Teorema de Lyapunov no contexto de sistemas Hamiltonianos como foi mencionado no início desta seção. Isto é, basta mostrarmos que o autovalor de A não é imaginário puro, ou seja, precisamos verificar que a condição dada por (2.38) não é satisfeita. Faremos isto nos dois casos seguintes, pois os casos dos equilíbrios simétricos a estes, são consequências destes:

$$(a) \quad x_1^* > 1 \quad \text{e} \quad (b) \quad 0 < x_1^* < 1.$$

(a) vimos pela Proposição 2.1(i) que existe um único $x_1^* > 1$ tal que (2.25) é satisfeita, isto é

$$\frac{\mu}{(x_1^* - 1)^2} + \frac{\mu}{(x_1^* + 1)^2} + \frac{1}{x_1^{*2}} = \kappa x_1^*.$$

Multiplicando esta última por $-\frac{1}{\kappa x_1^*}$ e explicitando o termo $-\frac{1}{\kappa x_1^{*3}}$, temos

$$-\frac{1}{\kappa x_1^{*3}} = -1 + \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\mu}{x_1^*(x_1^* - 1)^2} + \frac{\mu}{x_1^*(x_1^* + 1)^2} \right). \quad (2.39)$$

Por outro lado, por (2.37), temos

$$\begin{aligned}
 \frac{b_1}{\kappa} &= -\frac{1}{\kappa} D_1(x_1^*, \mu) = -\frac{1}{\kappa} \left(\frac{\mu}{(x_1^* - 1)^3} + \frac{\mu}{(x_1^* + 1)^3} \right) - \frac{1}{\kappa x_1^{*3}} \\
 &\stackrel{(2.39)}{=} -\frac{1}{\kappa} \frac{\mu}{(x_1^* - 1)^3} \left(1 - \frac{x_1^* - 1}{x_1^*} \right) - \frac{1}{\kappa} \frac{\mu}{(x_1^* + 1)^3} \left(1 - \frac{x_1^* + 1}{x_1^*} \right) - 1 \\
 &= \frac{\mu}{\kappa x_1^*} \left(\frac{1}{(x_1^* + 1)^3} - \frac{1}{(x_1^* - 1)^3} \right) - 1.
 \end{aligned}$$

Como $x_1^* + 1 > x_1^* - 1$, temos $\frac{1}{(x_1^* + 1)^3} - \frac{1}{(x_1^* - 1)^3} < 0$ e como $\frac{\mu}{\kappa x_1^*} > 0$, segue que a primeira parcela possui sinal negativo e somada com -1 , segue que $\frac{b}{\kappa} < -1$ para todo $x_1^* > 1$. Portanto, existe autovalor de A que não é imaginário puro.

- (b) Vimos pela Proposição 2.1(ii), que existe um único $x_1^* \in (0, 1)$ tal que (2.25) é satisfeita, isto é,

$$-\frac{\mu}{(x_1^* - 1)^2} + \frac{\mu}{(x_1^* + 1)^2} + \frac{1}{x_1^{*2}} = \kappa x_1^*.$$

Utilizando o mesmo argumento do item acima, multipliquemos esta última por $-\frac{1}{\kappa x_1^*}$ e explicitemos o termo $-\frac{1}{\kappa x_1^{*3}}$ como na equação abaixo

$$-\frac{1}{\kappa x_1^{*3}} = -1 + \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\mu}{x_1^*(x_1^* + 1)^2} - \frac{\mu}{x_1^*(x_1^* - 1)^2} \right). \quad (2.40)$$

E por (2.37), temos

$$\begin{aligned}
 \frac{b}{\kappa} &= -\frac{1}{\kappa} D_1(x_1^*, \mu) = -\frac{1}{\kappa} \left(-\frac{\mu}{(x_1^* - 1)^3} + \frac{\mu}{(x_1^* + 1)^3} \right) - \frac{1}{\kappa x_1^{*3}} \\
 &\stackrel{(2.40)}{=} \frac{1}{\kappa} \frac{\mu}{(x_1^* - 1)^3} \left(1 - \frac{x_1^* - 1}{x_1^*} \right) + \frac{1}{\kappa} \frac{\mu}{(1 + x_1^*)^3} \left(\frac{x_1^* + 1}{x_1^*} - 1 \right) - 1 \\
 &= \frac{\mu}{\kappa x_1^*} \left(\frac{1}{(1 + x_1^*)^3} + \frac{1}{(x_1^* - 1)^3} \right) - 1.
 \end{aligned} \quad (2.41)$$

Como $0 < x_1^* < 1$, temos $x_1^* > -x_1^* \Rightarrow 1 + x_1^* > 1 - x_1^*$, daí $\frac{1}{(1 + x_1^*)^3} < -\frac{1}{(x_1^* - 1)^3} \Leftrightarrow \frac{1}{(1 + x_1^*)^3} + \frac{1}{(x_1^* - 1)^3} < 0$. Além disso, como $\frac{\mu}{\kappa x_1^*} > 0$, novamente a primeira parcela possui sinal negativo. Pelo mesmo argumento usado no item anterior, garantimos a existência de autovalor de A que não é imaginário puro.

Logo, pelos itens (a) e (b), temos que A possui autovalor com parte real não nula e, segue pelo cometário feito no início da demonstração, que P_1 é instável.

Perceba que os casos $x_1^* < -1$ e $-1 < x_1^* < 0$ recaem nos casos anteriores, pois $-x_1^* > 1$ e $-1 < -x_1^* < 0$. Portanto, os equilíbrios colineares são todos *instáveis*.



2.3.2 Estabilidade do equilíbrio P_2

Seja P_2 o equilíbrio $(0, x_2^*, 0, -x_2^*, 0, 0)$, pela Proposição 2.2, vimos a existência de x_2^* no intervalo $(0, 1)$ e de seu simétrico em $(-1, 0)$. Vamos focar apenas no caso em que $x_2^* > 0$. Como $x_1^* = x_3^* = 0$, temos

$$d = d_1 = d_2 = \sqrt{x_2^{*2} + 1} \quad \text{e} \quad d_3 = |x_2^*|$$

Conseguimos expressar as entradas não nulas da hessiana de V por meio de (2.35), como segue:

$$\begin{aligned} a_2(\mu) &= V_{x_1x_1}^* = -D_2(x_2^*, \mu) + \frac{6\mu}{d^5}, \\ b_2(\mu) &= V_{x_2x_2}^* = -D_2(x_2^*, \mu) + 6\mu \frac{d_3^2}{d^5} + \frac{3}{d_3^3}, \\ c_2(\mu) &= V_{x_3x_3}^* = -D_2(x_2^*, \mu), \end{aligned}$$

onde

$$D_2(x_2^*, \mu) = D((0, x_2^*, 0), \mu) = \frac{2\mu}{d^3} + \frac{1}{d_3^3}. \quad (2.42)$$

Como $d_3^2 = x_2^{*2} = d^2 - 1$, temos $\frac{d_3^2}{d^5} = \frac{1}{d^3} - \frac{1}{d^5}$ e b_2 pode ser reescrito como segue

$$b_2 = 2D_2(x_2^*, \mu) - \frac{6\mu}{d^5}. \quad (2.43)$$

Como x_2^* cumpre a equação (2.32), temos $D_2(x_2^*, \mu) = \kappa$ e conseqüentemente

$$a_2 = -\kappa + \frac{6\mu}{d^5}, \quad b_2 = 2\kappa - \frac{6\mu}{d^5} \quad \text{e} \quad c_2 = -\kappa. \quad (2.44)$$

Por estas relações vemos que

$$a_2 + b_2 = \kappa. \quad (2.45)$$

Proposição 2.5 *O equilíbrio P_2 é estável para os valores de μ no intervalo $0 < \mu < \mu_1$, onde*

$$\mu_1 = \frac{4}{143 + 96\sqrt{2}}.$$

Demonstração. O polinômio característico de $A = J\mathcal{G}$ é dado por (2.36) e, usando (2.45), o reescrevemos da seguinte forma

$$p(\lambda) = \left(\lambda^2 - \frac{c_2}{\kappa} \right) (\lambda^4 + \lambda^2 + \beta), \quad (2.46)$$

onde $\beta = \left(1 + \frac{a_2}{\kappa}\right) \left(1 + \frac{b_2}{\kappa}\right)$ tem que ser positivo, pela condição de estabilidade.

O primeiro fator do polinômio característico revela as primeiras raízes $\lambda = \pm i$, pois $\frac{c_2}{\kappa} = -1$. As demais raízes são dadas pelo segundo fator e são

$$\lambda^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\beta}}{2}.$$

Estas últimas são imaginárias puras se, e somente se,

$$0 < \beta < \frac{1}{4}. \quad (2.47)$$

Portanto, a condição para que P_2 seja estável é que as desigualdades (2.47) sejam satisfeitas.

De (2.45), temos $\beta = 2 + \frac{a_2 b_2}{\kappa^2}$. Coloque $\sigma = \frac{6\mu}{d^5}$, segue por (2.44), que $\frac{a_2 b_2}{\kappa^2} = -2 + \frac{3\sigma\kappa - \sigma^2}{\kappa^2}$ e concluímos que

$$\beta = \frac{\sigma(3\kappa - \sigma)}{\kappa^2}.$$

Como $\sigma > 0$, segue da primeira desigualdade de (2.47) que $3\kappa > \sigma$, ou seja,

$$\frac{\kappa}{\sigma} > \frac{1}{3}. \quad (2.48)$$

Quanto a segunda desigualdade em (2.47), ela é equivalente à seguinte desigualdade

$$\left(\frac{\kappa}{\sigma}\right)^2 - 12\left(\frac{\kappa}{\sigma}\right) + 4 > 0.$$

Obtendo as raízes desta função quadrática, vemos que, a condição (2.48) faz com que a desigualdade acima se cumpra se, e somente se

$$\frac{1}{3} < \frac{\kappa}{\sigma} < 6 - 4\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad \frac{\kappa}{\sigma} > 6 + 4\sqrt{2}. \quad (2.49)$$

Por outro lado, recordemos que para o equilíbrio P_2 , $0 < x_2^* < 1$, daí $1 < d < \sqrt{2}$ e como $\frac{1}{\sigma} = \frac{d^5}{6\mu}$, temos

$$\frac{\kappa}{6\mu} < \frac{\kappa}{\sigma} < \frac{2\sqrt{2}\kappa}{3\mu}. \quad (2.50)$$

Pela primeira desigualdade em (2.50), vemos que para a última desigualdade em (2.49) seja atendida, basta que $\frac{\kappa}{6\mu} > 6 + 4\sqrt{2}$. Como $\kappa = \frac{\mu + 4}{4}$, obtemos a seguinte condição para a estabilidade de P_2

$$0 < \mu < \mu_1 = \frac{4}{143 + 96\sqrt{2}}.$$



Assim, as duas proposições desta seção mostram que os quatro equilíbrios do tipo P_1 são todos instáveis e que os dois equilíbrios do tipo P_2 são estáveis para μ no intervalo $(0, \mu_1)$.

Na próxima seção daremos um passo adiante na investigação de outros tipos de soluções, as periódicas.

2.4 EXISTÊNCIA DE ÓRBITAS PERIÓDICAS

Durante o estudo de equações diferenciais

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in U \subset \mathbb{R}^n, \quad (2.51)$$

nos deparamos com subconjuntos $S \subset U$, que possuem a seguinte característica: para cada ponto $x \in S$ a solução de (2.51), $\phi_t(x)$, que passa por este ponto no instante t_0 permanece em S para todo $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, dizemos que S é um conjunto invariante para (2.51).

Conjuntos de níveis de integrais primeiras são conjuntos invariantes para a dinâmica de (2.51). O conjunto formado pelos pontos de equilíbrio de (2.51) é o conjunto invariante mais simples. Depois deste, o conjunto invariante mais simples, é o de uma órbita periódica.

Note que se a equação é linear e autônoma, $\dot{x} = Ax$, e a matriz A tem um autovalor imaginário puro, $\lambda = i\beta$, a equação têm órbitas periódicas. De fato, se v é o autovetor associado ao autovalor λ , então $x(t) = e^{\lambda t}v$ é uma solução da equação e ela é evidentemente $\frac{2\pi}{\beta}$ periódica. Seja $A = Df(x_0)$, onde x_0 é um equilíbrio de (2.51). Por translação podemos supor $x_0 = 0$ e então na vizinhança do equilíbrio a equação pode ser escrita na forma

$$\dot{x} = Ax + \mathcal{O}(\|x\|^2). \quad (2.52)$$

Se A possui um autovalor imaginário puro, o sistema linearizado $\dot{x} = Ax$ terá órbitas periódicas em qualquer vizinhança da origem. De fato, no argumento acima, basta tomar o autovetor v com norma suficientemente pequena. Uma questão natural é se isto garante que a equação não-linear (2.52) também terá órbita periódica em uma vizinhança da origem. O exemplo a seguir é tratado em [(SIEGEL; MOSER, 1971),pág 103]] e mostra que isto não é verdade em geral. De fato, considere o sistema

$$\dot{x} = -y + \epsilon x(x^2 + y^2)^m, \quad \dot{y} = x + \epsilon y(x^2 + y^2)^m.$$

Este sistema reescrito em coordenadas polares é dado por

$$\dot{r} = \epsilon r^{2m+1}, \quad \dot{\theta} = 1,$$

cuja solução geral é dada por

$$r(t) = \frac{r_0}{[1 - 2\epsilon(mr_0^{2m})t]^{1/2m}}, \quad \theta(t) = t + \theta_0.$$

Como r é crescente ou decrescente conforme $\epsilon > 0$ ou $\epsilon < 0$, temos que a única solução periódica do sistema não-linear é a solução equilíbrio.

Através deste exemplo vimos que, nem sempre a existência de órbitas periódicas para o sistema linearizado no equilíbrio, garante a existência das mesmas para o sistema não-linear. Mas, no caso de sistemas Hamiltonianos, se o sistema linearizado no equilíbrio tiver um autovalor imaginário puro, veremos que sob certas condições podemos garantir a existência de órbitas periódicas para o sistema não-linear. Este resultado é conhecido como Teorema do Centro de Lyapunov e seu enunciado é

Teorema 2.6 *Suponhamos que para os autovalores da parte linear, $A = J\mathcal{G}$, do sistema Hamiltoniano diferenciável*

$$z' = Az + \dots$$

tenhamos λ_1 imaginário puro e $\frac{\lambda_j}{\lambda_1} \notin \mathbb{Z}$ para $j = 2, \dots, n$. Então existe uma família de solução do sistema não-linear correspondente ao autovalor λ_1 , $z_\rho(\nu, \mu, 0)$, que é periódica em ν , com período diferenciável $\tau(\rho)$, e ainda, $\lim_{\rho \rightarrow 0} \tau(\rho) = \frac{2\pi}{|\lambda_1|}$.

Demonstração. Ver (SIEGEL; MOSER, 1971), pág 104.

Perceba que a principal condição à qual referíamos é a de não-ressonância: $\frac{\lambda_j}{\lambda_1} \notin \mathbb{Z}$, $j = 2, \dots, n$. Lembremos que um sistema Hamiltoniano possui ressonância se os autovalores de A são linearmente dependentes sobre \mathbb{Q} , ou equivalentemente, linearmente independentes sobre \mathbb{Z} .

Agora, a fim de aplicarmos o teorema acima, lembremos que os autovalores da matriz A obtida pela linearização de H na vizinhança do equilíbrio do tipo P_2 são:

$$\lambda_1 = \omega_1(\mu)i, \quad \lambda_2 = \omega_2(\mu)i \quad \text{e} \quad \lambda_3 = \omega_3i,$$

onde as frequências ω_i 's > 0 , são:

$$\omega_1^2(\mu) = \frac{1 + \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \omega_2^2(\mu) = \frac{1 - \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \text{e} \quad \omega_3 = 1,$$

com $\Delta = \frac{1}{4} - \beta > 0$. Existem três famílias de órbitas periódicas do sistema não linear, cada uma associada a cada um dos autovalores imaginários puros. Para ver isto, consideremos cada um dos casos à seguir:

- (i) vejamos que $\frac{\lambda_j}{\lambda_3} \notin \mathbb{Z}$, $j = 1, 2$. De fato, note que como $\Delta > 0$, temos $\omega_2 > 0$ se, e somente se $1 - \sqrt{\Delta} > 0$ se, e somente se, $0 < \Delta < 1$ para todo $0 < \mu < \mu_1$ e, por conseguinte,

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \omega_1(\mu) \leq 1 \quad \text{e} \quad 0 < \omega_2(\mu) \leq \frac{\sqrt{2}}{2},$$

isto é, $\frac{\lambda_j}{\lambda_3} \notin \mathbb{Z}_+^*$ para qualquer $0 < \mu < \mu_1$, $j = 1, 2$. Portanto, pelo Teorema do Centro de Lyapunov, existe uma família de solução do sistema Hamiltoniano não linear, $z_\rho(\nu, \mu, 0)$, cujo período tende a 2π quando a família de solução se aproxima do equilíbrio P_2 .

- (ii) Agora vejamos que $\frac{\lambda_j}{\lambda_2} \notin \mathbb{Z}$, $j = 1, 3$. Neste caso, suponhamos

$$\frac{\lambda_3}{\lambda_2} = s \Leftrightarrow \lambda_3^2 = s^2 \lambda_2^2 \quad \text{e} \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = r \Leftrightarrow \lambda_1^2 = r^2 \lambda_2^2.$$

Usando o fato de $\Delta = \frac{1}{4} - \beta$ nas relações acima, temos

$$s^{-2} - s^{-4} - \beta = 0 \quad \text{e} \quad r^2(r^2 + 1)^{-2} - \beta = 0. \quad (2.53)$$

Assim, exigimos que

$$\beta \neq m^{-2} - m^{-4} \quad \text{e} \quad \beta \neq m^2(m^2 + 1)^{-2}, \quad \text{para todo inteiro } m > 1.$$

Portanto, para os valores de β que cumpram ambas condições acima, o Teorema do Centro de Lyapunov, garante a existência de uma família de soluções do sistema Hamiltoniano não-linear, $z_\rho(\nu, \mu, 0)$, emanando do equilíbrio P_2 , que é periódica em ν e cujo período aproximado é $\tau(0) = \frac{2\pi}{|\lambda_2|}$.

- (iii) Por fim, o caso $\frac{\lambda_j}{\lambda_1} \notin \mathbb{Z}$, $j = 2, 3$ é análogo item (ii) e obteremos uma quantidade enumerável de restrições para β fora das quais podemos garantir outra família de soluções periódicas, estas com períodos próximos de $\tau(0) = \frac{2\pi}{|\lambda_1|}$.

Neste este capítulo, demos uma formulação Hamiltoniana para o problema restrito de quatro corpos quando os primários se encontravam em solução colinear elíptica. À partir desta

formulação garantimos a existência de soluções equilíbrio, realizamos o estudo da estabilidade linear e a existência de órbitas periódicas para valores restritos de μ .

No próximo capítulo, faremos um estudo mais detalhado da dinâmica dos primários quando estes formam uma solução isósceles para o problema de três corpos.

3 SOLUÇÕES ISÓSCELES GERADAS POR UMA SOLUÇÃO COLINEAR DE EULER

Neste capítulo, faremos um estudo do problema isósceles proveniente de uma perturbação da solução colinear de Euler no problema de três corpos.

Uma solução isósceles do problema dos três corpos é uma solução em que as três massas formam, em cada instante, a configuração de um triângulo isósceles que não se degenera em uma configuração colinear nem em uma configuração equilátera. Como as coordenadas de uma solução do problema dos três corpos são funções analíticas do tempo, se uma solução é colinear ou equilátera durante um intervalo de tempo, por menor que seja, ela permanece colinear ou equilátera, conforme o caso, para todo o tempo. Assim, tais configurações particulares só ocorrem para valores isolados do tempo e, por conseguinte, a base do triângulo isósceles está bem definida.

É um teorema importante o fato de que em uma solução isósceles as massas da base são iguais, ver (CABRAL, 2012). Com base neste fato, pode-se provar que existem exatamente três tipos de soluções isósceles. Nos dois primeiros tipos de soluções isósceles ocorrem colisões de modo que esta solução está definida apenas em um intervalo finito do tempo **a menos de regularizações das colisões**. No terceiro tipo, não ocorrem colisões e a solução está definida para todo o tempo.

Algumas referências sobre soluções isósceles são (CABRAL, 1983), (CABRAL, 2012), [(GO-MES, 2004), pág 50-56], (SIMÓ; MARTINEZ, 1987) e [(WINTNER, 1941), pág 344-346].

Nosso objetivo é estudar uma solução isósceles do terceiro tipo originada à partir de uma solução colinear de Euler onde as massas nos extremos descrevem uma órbita elíptica, como no Capítulo 1. Assim como no capítulo anterior, consideremos três massas em solução colinear de Euler, onde as massas das extremidades são $m_1 = m_2 = m > 0$ e a massa central é $m_3 > 0$. Impomos um carácter isósceles nesta solução por meio de uma perturbação nas posições de m_1 e m_2 da seguinte forma

$$r_1 = \bar{r}_1^e + \bar{v} + \bar{w}e_3 \quad \text{e} \quad r_2 = -(\bar{r}_1^e + \bar{v}) + \bar{w}e_3, \quad (3.1)$$

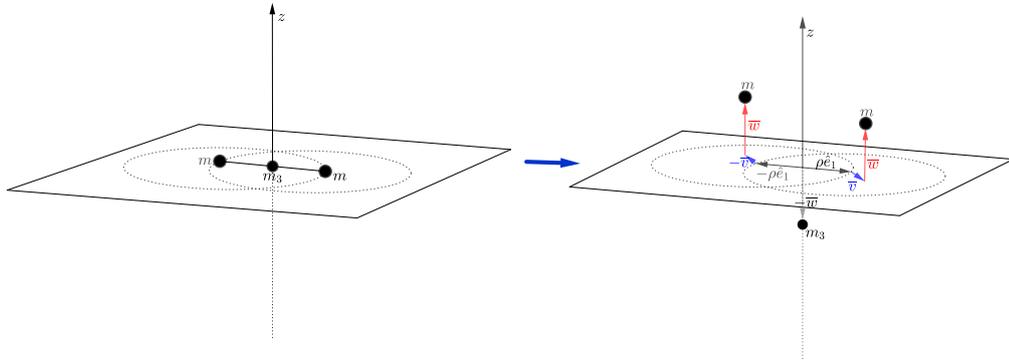
onde $\langle \bar{v}, e_3 \rangle = 0$ e $\bar{r}_1^e = \rho \hat{e}_1$ com $\hat{e}_1 = (\cos \nu, \sin \nu, 0)$.

Para que o centro de massa permaneça na origem, o raio vetor de m_3 fica dado por

$$r_3 = -\frac{2m}{m_3} \bar{w}e_3.$$

A Figura 3, à seguir, ilustra tal situação.

Figura 3 – Perturbação da solução colinear de Euler



Observe que o lado direito da Figura 3 representa a solução colinear e seu lado direito configura a solução isósceles após a perturbação da solução colinear. Vamos provar que existem uma função vetorial $\bar{v} = \bar{v}(t)$ e uma função escalar $\bar{w} = \bar{w}(t)$ tais que os vetores em (3.1) são de fato uma solução das equações de movimento do problema dos três corpos:

$$\begin{aligned} \ddot{r}_1 &= \frac{Gm}{\|r_1 - r_2\|^3}(r_2 - r_1) + \frac{Gm_3}{\|r_1 - r_3\|^3}(r_3 - r_1) \\ \ddot{r}_2 &= \frac{Gm}{\|r_1 - r_2\|^3}(r_1 - r_2) + \frac{Gm_3}{\|r_2 - r_3\|^3}(r_3 - r_2) \\ \ddot{r}_3 &= \frac{Gm}{\|r_1 - r_3\|^3}(r_1 - r_3) + \frac{Gm}{\|r_2 - r_3\|^3}(r_2 - r_3). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Denotemos

$$d_{12} = \|r_1 - r_2\|, \quad d_{13} = \|r_1 - r_3\| \quad \text{e} \quad d_{23} = \|r_2 - r_3\|.$$

Do fato de m_1 e m_2 permanecerem equidistantes de m_3 , isto é, $d_{13} = d_{23}$, segue de (3.2), que

$$\begin{cases} \ddot{r}_2 - \ddot{r}_1 = -G \left(\frac{2m}{d_{12}^3} + \frac{m_3}{d_{13}^3} \right) (r_2 - r_1) \\ \ddot{r}_3 = \frac{Gm}{d_{13}^3} (r_1 + r_2 - 2r_3) \end{cases}.$$

De (3.1), temos $r_1 - r_2 = 2(\bar{r}_1^e + \bar{v})$ e $r_1 + r_2 - 2r_3 = 2\frac{M}{m_3}\bar{w}e_3$, onde $M = 2m + m_3$ é a

massa total. Assim, o sistema acima se reescreve da seguinte forma

$$\begin{cases} \ddot{\bar{r}}_1^e + \ddot{\bar{v}} = -G \left(\frac{2m}{d_{12}^3} + \frac{m_3}{d_{13}^3} \right) (\bar{r}_1^e + \bar{v}) \\ \ddot{\bar{w}}e_3 = -\frac{GM}{d_{13}^3} \bar{w}e_3 \end{cases}, \quad (3.3)$$

onde

$$d_{12} = \|r_1 - r_2\| = \|2(\bar{r}_1^e + \bar{v})\| \quad \text{e} \quad d_{13} = \|r_1 - r_3\| = \left\| (\bar{r}_1^e + \bar{v}) + \frac{M}{m_3} \bar{w}e_3 \right\|.$$

A função vetorial $\bar{r}_1^e(t)$ é conhecida ela é a solução do Problema de Kepler (2.1) que descreve o movimento da massa m_1 na solução colinear considerada. Observe que $\bar{v} = 0$, $\bar{w} = 0$ é solução de equilíbrio deste sistema, pois como mencionado r_1^e é uma solução de Kepler. Assim, (3.3) é um sistema de segunda ordem em \bar{v} , \bar{w} com dados analíticos. Portanto, pelo teorema de existência e unicidade em equações diferenciais ordinárias, para cada condição inicial \bar{v}_0 , \bar{w}_0 , $\dot{\bar{v}}_0$, $\dot{\bar{w}}_0$, existe uma única solução deste sistema definida em um intervalo aberto do tempo, cujas coordenadas são funções analíticas de t . Como ela determina os vetores em (3.1) que formam uma configuração isósceles neste intervalo, então, por analiticidade, a solução (3.1) coincide com a solução isósceles em todo o tempo em que está definida, e por ser do terceiro tipo, ela está definida para todo tempo.

3.1 O HAMILTONIANO DO PROBLEMA ISÓSCELES

Denote os vetores $\bar{v} = (v_1, v_2, 0)$ e $v = (v_1, v_3, v_3)$. Considere a reescala do vetor vertical, $\bar{w}e_3 = \sqrt{\frac{m_3}{M}} v_3 e_3$. Esta reescala permite que o sistema (3.3) seja reescrito do seguinte modo

$$\ddot{v} = \nabla U(v, t, m, m_3) - \ddot{\bar{r}}_1^e, \quad (3.4)$$

onde

$$U(v, t, m, m_3) = \frac{Gm}{4d_{12}} + \frac{Gm_3}{d_{13}},$$

com

$$d_{12} = \sqrt{(\rho \cos \nu + v_1)^2 + (\rho \sin \nu + v_2)^2}$$

$$d_{13} = \sqrt{(\rho \cos \nu + v_1)^2 + (\rho \sin \nu + v_2)^2 + \frac{M}{m_3} v_3^2}.$$

Seja $\mu = \frac{m}{m_3}$, temos $\frac{M}{m_3} = 2\mu + 1$. Além disso, considere l uma unidade de comprimento tal que $\frac{Gm_3}{l^3} = 1$ e faça

$$l\bar{r}_1^e = r_1^e, \quad \text{e} \quad lv = z, \quad z = (z_1, z_2, z_3)$$

então (3.4) fica dado por

$$\ddot{z} = \nabla U(z, t, \mu) - \ddot{r}_1^e, \quad (3.5)$$

onde $U(z, t, \mu) = \frac{\mu}{4d_{12}} + \frac{1}{d_{13}}$.

Assim como no Capítulo 1 vamos colocar o vetor que sintetiza a perturbação, z , para realizar o movimento de forma característica a r_1^e , isto é, fazemos a rotação seguida da homotetia da seguinte forma

$$(1) z = \Omega\zeta \quad (2) \zeta = \rho x.$$

Dessa forma, temos

$$z_1 = \rho(x_1 \cos \nu - x_2 \sin \nu), \quad z_2 = \rho(x_1 \sin \nu + x_2 \cos \nu) \quad \text{e} \quad z_3 = \rho\sqrt{2\mu + 1}x_3.$$

Assim como no Capítulo 1, usamos a anomalia verdadeira como nova variável tempo, daí do lado esquerdo de (3.5) temos

$$\ddot{z} = \frac{c^2}{\rho^3} \Omega \left[x'' + 2\Sigma x' + \Sigma^2 x + \frac{\epsilon \cos \nu}{1 + \epsilon \cos \nu} x \right] \quad (3.6)$$

e do lado direito, o potencial $\nabla_z U(z, t, \mu) = \frac{1}{\rho^2} \Omega \nabla_x W(x, \mu)$. Além disso, como $r_1^e = \rho \hat{e}_1$, onde $\hat{e}_1 = (\cos \nu, \sin \nu, 0)$, temos

$$\ddot{r}_1^e = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\nu}^2) \hat{e}_1 = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\nu}^2) \Omega e_1.$$

De (2.3), segue que $\ddot{\rho} - \rho \dot{\nu}^2 = -\frac{c^2}{\rho^3} \frac{1}{1 + \epsilon \cos \nu}$ e, portanto,

$$\ddot{r}_1^e = -\frac{c^2}{\rho^3} \frac{1}{1 + \epsilon \cos \nu} \Omega e_1. \quad (3.7)$$

Procedendo como no Capítulo 1, usamos a anomalia verdadeira como nova variável tempo, daí a equação (3.5) fica reescrita da seguinte forma

$$x'' + 2\Sigma x' + \Sigma^2 x = \frac{1}{1 + \epsilon \cos \nu} \left(-\epsilon \cos \nu x + \frac{p}{c^2} \nabla_x W(x, \mu) + e_1 \right),$$

isto é,

$$(x' + \Sigma x)' = -\Sigma(x' + \Sigma x) + \frac{1}{1 + \epsilon \cos \nu} \left(-\epsilon \cos \nu x + \frac{1}{\kappa} \nabla_x W(x, \mu) + e_1 \right), \quad (3.8)$$

Exatamente como anteriormente, usamos o fato de $\frac{c^2}{p} = \kappa$ e reduzimos o sistema acima a um de primeira ordem quando tomamos $y = x' + \Sigma x$, isto é, obtemos a dinâmica descrita por um sistema canônico

$$x' = y - \Sigma x \quad y' = -\Sigma y + \nabla_x V(x, \nu, \mu, \epsilon), \quad (3.9)$$

cujo Hamiltoniano $H : \Gamma \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \times I \times [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ é dado por

$$H(x, y, \nu, \mu, \epsilon) = \frac{1}{2} \|y\|^2 - V(x, \nu, \mu, \epsilon) - \langle \Sigma x, y \rangle, \quad (3.10)$$

onde $\Gamma = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 \neq -1 \text{ ou } x_2 \neq 0\}$, I é um conjunto de números reais positivos e

$$V(x, \nu, \mu, \epsilon) = \frac{1}{1 + \epsilon \cos \nu} \left(-\frac{1}{2} \epsilon \cos \nu \|x\|^2 + \frac{1}{\kappa} W(x, \mu) + x_1 \right), \quad \kappa = \frac{\mu + 4}{4}, \quad (3.11)$$

onde

$$W(x, \mu) = \frac{\mu}{4d_1} + \frac{1}{d_2},$$

com

$$d_1 = \sqrt{(1 + x_1)^2 + x_2^2} \quad \text{e} \quad d_2 = \sqrt{(1 + x_1)^2 + x_2^2 + (2\mu + 1)x_3^2}.$$

3.2 EQUILÍBRIOS

Os pontos de equilíbrios são os pontos (x, y) tais que $(x', y') = (0, 0)$ para todo $\nu \in \mathbb{R}$, $\mu \in I$ e $\epsilon \in [0, 1)$. Dessa forma, por (3.9), eles são dados como segue

$$y = \Sigma x \quad (3.12)$$

$$\nabla_x V(x, \nu, \mu, \epsilon) = \Sigma^2 x, \quad (3.13)$$

para todo $\nu \in \mathbb{R}$, $\mu \in I$ e $\epsilon \in [0, 1)$. Além disso,

$$\nabla_x V(x, \nu, \mu, \epsilon) = \frac{1}{1 + \epsilon \cos \nu} \left(-\epsilon \cos \nu x + \frac{1}{\kappa} \nabla_x W(x, \mu) + e_1 \right),$$

onde

$$\nabla_x W(x, \mu) = - \left(B(x, \mu)(1 + x_1), B(x, \mu)x_2, \frac{(2\mu + 1)}{d_2^3} x_3 \right) \quad (3.14)$$

com

$$B(x, \mu) = \frac{\mu}{4d_1^3} + \frac{1}{d_2^3}.$$

Como a terceira entrada de $\Sigma^2 x$ é nula, da terceira equação de (3.13), temos

$$-\epsilon \cos \nu x_3 + \frac{1}{\kappa} W_{x_3} = 0 \Leftrightarrow \left[\epsilon \cos \nu + \frac{1}{\kappa} \frac{(2\mu + 1)}{d_2^3} \right] x_3 = 0$$

que se cumpre para qualquer que seja $\nu \in \mathbb{R}$, $\mu \in I$ e $\epsilon \in [0, 1)$ se, e somente se, $x_3 = 0$. Quando isso ocorre ($x_3 = 0$), temos $d_1 = d_2 = \sqrt{(1 + x_1)^2 + x_2^2}$. Desse modo, as duas primeiras equações do sistema (3.13) se reescrevem como segue

$$\frac{1}{1 + \epsilon \cos \nu} \left(1 - \frac{1}{\kappa} \frac{\kappa}{d_1^3} \right) (1 + x_1) = 0, \quad \frac{1}{1 + \epsilon \cos \nu} \left(1 - \frac{1}{\kappa} \frac{\kappa}{d_2^3} \right) x_2 = 0.$$

Note que $1 + x_1$ e x_2 não podem ser simultaneamente nulas, pois isto daria $d_1 = 0$, uma singularidade para W . Então, pelo sistema acima, temos $d_1^3 = 1$, ou seja,

$$(1 + x_1)^2 + x_2^2 = 1, \text{ para todos } \nu \in \mathbb{R}, \mu \in I \text{ e } \epsilon \in [0, 1). \quad (3.15)$$

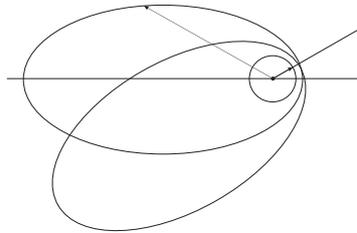
Assim, por (3.13), temos $y_1 = -x_2$, $y_2 = 1 + x_1$. Portanto, vamos denotar estes equilíbrios da seguinte forma:

$$(x^*, y^*) = ((1 + x_1^*), x_2^*, 0, -x_2^*, (1 + x_1^*), 0),$$

onde $((1 + x_1)^*, x_2^*)$ é um ponto do círculo (3.15).

Vimos ao final da Seção 1 que o equilíbrio $\bar{v} = 0$, $\bar{w} = 0$ do sistema (3.3) dá a solução colinear de Euler que gerou as soluções isósceles consideradas. O que dão os equilíbrios do sistema Hamiltoniano (3.10)? Para compreendermos a situação, tome um ponto x_0 do círculo de equilíbrios (3.15), observe que ao fazermos a rotação e homotetia, cada ponto deste círculo dará origem a uma elipse cujo foco é comum ao centro $(-1, 0)$ deste círculo e cujo eixo principal é definido conforme ν varia; veja esta interpretação na Figura 4 abaixo.

Figura 4 – Interpretação geométrica para o círculo de equilíbrios



Assim, cada equilíbrio do sistema Hamiltoniano (3.10) situado no círculo (3.15) corresponde a uma solução colinear elíptica. Note que os equilíbrios na dinâmica dos movimentos isósceles não são soluções isósceles.

3.3 EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA DO SISTEMA HAMILTONIANO

Nesta seção, vamos obter os autovalores do sistema linearizado na solução equilíbrio.

Considere o sistema Hamiltoniano linearizado na solução equilíbrio $z' = A(\nu, \mu, \epsilon)z$, onde

$$A(\nu, \mu, \epsilon) = JH_{zz}(z^*, \nu, \mu, \epsilon) = \begin{pmatrix} -\Sigma & I \\ V_{xx}^* & -\Sigma \end{pmatrix},$$

sendo que $V_{xx}^* = V_{xx}(x^*, \nu, \mu, \epsilon) = \frac{1}{1 + \epsilon \cos \nu} \left(-\epsilon \cos \nu + \frac{1}{\kappa} W_{xx}^*(x, \mu) \right)$ e $W_{xx}^* = W_{xx}(x^*, \mu)$ denota a matriz hessiana de W no equilíbrio. Quando $\epsilon = 0$, temos um sistema constante, que será representado pela matriz Hamiltoniana $A = A(\mu)$, onde $V_{xx}^* = \frac{1}{\kappa} W_{xx}^*$. Para obtermos as entradas dessa última, usemos (3.14), daí

$$\begin{aligned} W_{x_1x_1} &= 3B_1(x, \mu)(1 + x_1)^2 - B(x, \mu) \\ W_{x_1x_2} &= 3B_1(x, \mu)(1 + x_1)x_2 \\ W_{x_2x_2} &= 3B_1(x, \mu)x_2^2 - B(x, \mu) \\ W_{x_3x_3} &= \frac{(2\mu + 1)}{d_2^3} \left(\frac{3(2\mu + 1)}{d_2^2} x_3^2 - 1 \right), \end{aligned}$$

onde $B_1(x, \mu) = \left(\frac{\mu}{4d_1^5} + \frac{1}{d_2^5} \right)$. Como no equilíbrio, $x_3^* = 0$ e (3.15) é satisfeita, as entradas da matriz W_{xx}^* são:

$$\begin{aligned} a = a(\mu) &= W_{x_1x_1}^* = \kappa [3(1 + x_1^*)^2 - 1] \\ b = b(\mu) &= W_{x_1x_2}^* = \kappa [3(1 + x_1^*)x_2^*] \\ c = c(\mu) &= W_{x_2x_2}^* = \kappa [3x_2^{*2} - 1] \\ d = d(\mu) &= W_{x_3x_3}^* = -(2\mu + 1), \end{aligned}$$

sendo as demais entradas nulas. O polinômio característico de A é dado por

$$p(\lambda) = \left(\frac{d}{\kappa} - \lambda^2 \right) \left[\lambda^4 + \left(2 - \frac{a+c}{\kappa} \right) \lambda^2 + \left(\frac{a}{\kappa} + 1 \right) \left(\frac{c}{\kappa} + 1 \right) - \frac{b^2}{\kappa^2} \right].$$

Agora note que

$$\begin{aligned} 2 - \frac{a+c}{\kappa} &= 2 - (3(1 + x_1^*)^2 + 3x_2^{*2} - 2) = 1 \\ \left(\frac{a}{\kappa} + 1 \right) \left(\frac{c}{\kappa} + 1 \right) - \frac{b^2}{\kappa^2} &= 3(1 + x_1^*)^2(3x_2^{*2}) - 9(1 + x_1^*)^2x_2^{*2} = 0. \end{aligned}$$

Portanto, o polinômio característico fica da seguinte forma

$$p(\lambda) = -\lambda^2 \left(\frac{2\mu + 1}{\kappa} + \lambda^2 \right) (\lambda^2 + 1). \quad (3.16)$$

Desse modo, temos um autovalor nulo de multiplicidade 2 e dois autovalores imaginários puros distintos, pois como $\mu \neq 0$, temos $\frac{2\mu + 1}{\kappa} \neq 1$.

Note que o Hamiltoniano linearizado na solução equilíbrio é dado por

$$\begin{aligned} H_0(x, y, \mu) &= \frac{1}{2} \langle -JAz, z \rangle \\ &= \frac{1}{2} \left[\|y\|^2 - \frac{1}{\kappa} \langle x, W_{xx}^* x \rangle - 2 \langle \Sigma x, y \rangle \right], \quad \kappa = \frac{\mu + 4}{4}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

3.4 ELIMINAÇÃO DO AUTOVALOR NULO

Na seção anterior, vimos que a matriz Hamiltoniana A possui um autovalor nulo de multiplicidade igual a dois. Isto, conforme a Proposição (3.1) abaixo, se deve ao fato de a função

$$\mathcal{Q}(x, y) = \langle \Sigma x, y \rangle$$

ser uma integral primeira do sistema (3.10). A razão pela qual $\mathcal{Q}(x, y)$ é uma integral primeira de (3.10) é que o potencial (3.11) é invariante por rotações em torno do eixo x_3 . De fato, como

$$x' = H_y = y - \Sigma x, \quad y' = -H_x = V_x - \Sigma y, \quad \text{onde } \Sigma = \Omega^{-1} \Omega',$$

temos

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}' &= \langle \Sigma x', y \rangle + \langle \Sigma x, y' \rangle, \quad \text{pois } \Sigma^T = -\Sigma \\ &= \langle \Sigma y - \Sigma^2 x, y \rangle + \langle \Sigma x, V_x - \Sigma y \rangle \\ &= \langle \Sigma x, V_x \rangle, \end{aligned}$$

esta última ocorre porque

$$\langle \Sigma y - \Sigma^2 x, y \rangle + \langle \Sigma x, -\Sigma y \rangle = \langle \Sigma y, y \rangle - \langle \Sigma^2 x, y \rangle + \langle \Sigma^2 x, y \rangle = 0.$$

Agora, como V é invariante pela rotação Ω , temos $V(\Omega x) = V(x)$, para todo x e, derivando esta última com relação a ν , temos $\langle \nabla V(\Omega x), \Omega' x \rangle = 0$. Por outro lado, do fato de Ω ser ortogonal, segue que $\nabla V(\Omega x) = \Omega \nabla V(x)$. Portanto, $0 = \langle \nabla V(x), \Omega^{-1} \Omega' x \rangle = \langle \nabla V(x), \Sigma x \rangle$, isto é, $\mathcal{Q}' = 0$. Assim, \mathcal{Q} é uma integral primeira.

Proposição 3.1 *Seja x_0 equilíbrio de $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ e Ψ uma integral primeira deste sistema definida em uma vizinhança de x_0 tal que $\nabla \Psi(x_0) \neq 0$. Então $A = Df(x_0)$ tem autovalor nulo.*

Demonstração. Por facilidade, vamos supor $x_0 = 0$, caso contrário, basta considerar uma translação para origem. Dessa forma, a equação diferencial pode ser escrita como $\dot{x} = Ax + \mathcal{O}(\|x\|^2)$.

Suponhamos que A não tenha autovalor nulo. Então A é invertível, logo existe v não nulo, tal que $Av = \nabla\Psi(0) \neq 0$. Agora, para cada $s > 0$, próximo de zero, seja $x(t, s)$ a solução de $\dot{x} = f(x)$, tal que $x(0, s) = sv$. Como Ψ é integral primeira desse sistema e $x(t, s)$ é solução dele, temos $\Psi(x(t, s)) = \Psi(x(0, s)) = \Psi(sv)$ para todo t . Derivando esta última com relação à t , obtemos $\langle \nabla\Psi(x(t, s)), \dot{x}(t, s) \rangle = 0$, para todo t . Como $\dot{x}(t, s) = Ax(t, s) + \mathcal{O}(\|x(t, s)\|^2)$, fazendo $t = 0$, obtemos

$$0 = \langle \nabla\Psi(x(0, s)), \dot{x}(0, s) \rangle = \left\langle \nabla\Psi(sv), sAv + \mathcal{O}(\|sv\|^2) \right\rangle.$$

Dividindo por s e fazendo $s \rightarrow 0$, obtemos por meio da continuidade de $\nabla\Psi$, $\langle \nabla\Psi(0), Av \rangle = 0$. Mas, $Av = \nabla\Psi(0)$, daí $\|\nabla\Psi(0)\|^2 = 0$, contradizendo o fato de $\nabla\Psi(0) \neq 0$. Portanto, A tem um autovalor nulo. ■

Por meio do próximo resultado, conseguimos reduzir o número de graus do sistema Hamiltoniano autônomo. Sua demonstração pode ser vista na Seção 18 de (SIEGEL; MOSER, 1971) e como nela descreve-se o processo de redução, vamos apresentá-la aqui. Este processo será utilizado na próxima seção para reduzir o sistema Hamiltoniano (3.10) a um outro com dois graus de liberdade.

Proposição 3.2 *Seja um sistema Hamiltoniano autônomo $\dot{z} = J\nabla H(z)$ e Ψ uma integral primeira que não depende do tempo. Então, em uma região onde $\nabla\Psi(z) \neq 0$ pode-se baixar de uma unidade o número de graus de liberdade do sistema.*

Demonstração. Seja $\Psi(x, y)$ a integral primeira do sistema Hamiltoniano autônomo $\dot{z} = J\nabla H(z)$ com n graus de liberdade. Vamos procurar uma transformação simplética $\phi : x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, gerada por uma função $\mathcal{W}(x, y)$ de modo que nas novas variáveis $w = (u, v)$ tenhamos $\psi(u, v) = v_n$, onde

$$\psi(w) = \Psi(\phi(w)). \tag{3.18}$$

Como $x = \mathcal{W}_y(u, y)$ no processo precisamos conhecer uma solução particular da equação

$$v_n = \Psi(\mathcal{W}_y, y). \tag{3.19}$$

Suponha que para esta solução particular tenhamos $\det D^2\mathcal{W}(u, y) \neq 0$. Então \mathcal{W} gera uma transformação simplética $\phi : x = x(u, v), y = y(u, v)$. Denotemos por \mathcal{H} o Hamiltoniano nas novas variáveis, isto é, $\mathcal{H}(w) = H(\phi(w))$.

Por (3.18), temos

$$\nabla\psi(w) = D\phi(w)^T \cdot \nabla\Psi(z), \quad (3.20)$$

onde $z = \phi(w(t))$ é solução de $\dot{z} = J\nabla H(z)$, e como Ψ é integral primeira deste sistema, temos

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dt} (\Psi(z(t))) &= D\Psi(\phi(w)) \cdot (D\phi(w) \cdot \dot{w}) \\ &= \left\langle \nabla\Psi(z), D\phi(w)J\nabla\mathcal{H}(w) \right\rangle \\ &= \left\langle D\phi(w)^T \nabla\Psi(z), J\nabla\mathcal{H}(w) \right\rangle \\ &= \left\langle \nabla\psi(w), J\nabla\mathcal{H}(w) \right\rangle, \end{aligned} \quad (3.21)$$

a última igualdade é válida em virtude de (3.20).

Agora, pela exigência (3.19), temos $\nabla\psi(w) = (0, \dots, 0; 0, \dots, 0, 1)$ e, por (3.21), segue que $\mathcal{H}_{u_n} = 0$, isto é, o novo Hamiltoniano $\mathcal{H}(u, v)$ não contém a variável u_n . Além disso, como $\dot{v}_n = \mathcal{H}_{u_n} = 0$, temos que a variável v_n é uma constante do movimento. Fixando seu valor, v_n^0 , o Hamiltoniano $\mathcal{H}(u_1, \dots, u_{n-1}; v_1, \dots, v_{n-1}, v_n^0)$ tem $n - 1$ graus de liberdade. ■

Observação: Note que na matriz hessiana G , $2n \times 2n$, do Hamiltoniano $\mathcal{H}(u, v)$, a linha correspondente à variável u_n é nula, isto é, a n -ésima linha de G é nula. Como G é simétrica, a n -ésima coluna de G é nula e, por conseguinte, a n -ésima coluna de $A = JG$ é nula. Portanto, A tem um autovalor nulo, e como esta matriz é Hamiltoniana, este autovalor é duplo. Ao reduzir a dinâmica ao espaço que se obtém quando se fixa o valor da integral primeira que deu origem ao autovalor nulo, obtemos um sistema reduzido no qual o autovalor nulo foi eliminado.

3.5 O HAMILTONIANO REDUZIDO

Nesta seção, vamos fazer a redução do sistema Hamiltoniano proveniente de (3.17) a um outro com dois graus de liberdade usando a integral primeira

$$\mathcal{Q}(x, y) = -\langle \Sigma x, y \rangle = x_2 y_1 - x_1 y_2.$$

Primeiramente, vamos buscar uma transformação simplética $(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) \mapsto (u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3)$ tal que nas novas variáveis u, v tenhamos $\mathcal{Q} = v_2$.

Como \mathcal{Q} é bilinear, procuramos uma função geradora $\mathcal{W}(u, y)$ na forma de uma função bilinear em $g_1, g_2, x_3, v_1, v_2, v_3$:

$$\mathcal{W}(u, y) = g_1(u_1, u_2)y_1 + g_2(u_1, u_2)y_2 + u_3y_3.$$

Como $\mathcal{W}_{u_2} = g_{1u_2}y_1 + g_{2u_2}y_2$ e $\mathcal{Q}(\mathcal{W}_y, y) = g_2(u_1, u_2)y_1 - g_1(u_1, u_2)y_2$ a equação (3.18) que aqui significa $\mathcal{W}_{u_2} = \mathcal{Q}(\mathcal{W}_y, y)$, nos dá o sistema de equações

$$g_{1u_2} = g_2(u_1, u_2), \quad g_{2u_2} = -g_1(u_1, u_2).$$

Verificamos facilmente que

$$g_1(u_1, u_2) = u_1 \cos u_2, \quad g_2(u_1, u_2) = -u_1 \sin u_2$$

é uma solução particular para a qual temos $\det \mathcal{W}_{u,y} = -u_1$. Assim, numa região onde $u_1 \neq 0$ a função \mathcal{W} gera a requerida transformação simplética, a qual é dada por

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1 \cos u_2, & x_2 &= -u_1 \sin u_2, & x_3 &= u_3 \\ y_1 &= v_1 \cos u_2 - \frac{v_2}{u_1} \sin u_2, & y_2 &= -v_1 \sin u_2 - \frac{v_2}{u_1} \cos u_2, & y_3 &= v_3. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Dessa forma, obtemos

$$x_1^2 + x_2^2 = u_1^2, \quad d_2 = \sqrt{u_1^2 + (2\mu + 1)u_3^2} \quad \text{e} \quad y_1^2 + y_2^2 = v_1^2 + \frac{1}{u_1^2}v_2^2$$

e assim vemos que o potencial nas coordenadas u_1, u_2, u_3 depende somente de u_1 e u_3 . Como $\mathcal{Q} = v_2$ e v_2 é uma constante do movimento, fixando seu valor $v_2 = \gamma$, podemos ignorar o termo \mathcal{Q} em (3.17) e obtemos agora o seguinte Hamiltoniano reduzido

$$\mathcal{H}(u_1, u_3, v_1, v_3, \mu, \gamma, \epsilon) = \frac{1}{2} (v_1^2 + v_3^2) + \mathcal{V}(u_1, u_3, v_1, v_3, \mu, \gamma, \epsilon), \quad (3.23)$$

com o potencial (3.11) agora dado por,

$$\mathcal{V}(u_1, u_3, \mu, \gamma, \epsilon) = \frac{\gamma^2}{2u_1^2} + \frac{1}{1 + \epsilon \cos \nu} \left(\frac{1}{2} \epsilon \cos \nu (u_1^2 + u_3^2) - \frac{1}{\kappa} \mathcal{W}(u_1, u_3, \mu) \right),$$

onde

$$\mathcal{W}(u_1, u_3, \mu) = \left(\frac{\mu}{4|u_1|} + \frac{1}{[u_1^2 + (2\mu + 1)u_3^2]^{1/2}} \right). \quad (3.24)$$

Se $\gamma \neq 1$, então (3.23) não tem equilíbrios. Se $\gamma = 1$, seu único equilíbrio é o ponto

$$P^* : u_1 = 1, \quad u_3 = 0, \quad v_1 = 0, \quad v_3 = 0.$$

O sistema Hamiltoniano linearizado na solução equilíbrio é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(u_1, u_3, v_1, v_3, \mu, \epsilon) &= \frac{1}{2}(v_1^2 + v_3^2) + \frac{3}{2}u_1^2 \\ &- \frac{1}{1 + \epsilon \cos \nu} \left[-\frac{\epsilon \cos \nu}{2}(u_1^2 + u_3^2) + u_1^2 - \frac{(2\mu + 1)}{2\kappa}u_3^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Embora tenhamos reduzido para dois o grau de liberdade de (3.23), o sistema depende de ν e, portanto, o estudo da estabilidade deste equilíbrio é não trivial. Se o sistema fosse autônomo, poderíamos usar o teorema de Arnold, mas este não é o caso.

Assim, resta-nos a possibilidade de estudo da estabilidade do equilíbrio para o sistema linearizado numa vizinhança do mesmo. Na Subseção 2.5.2 faremos o estudo da estabilidade paramétrica do sistema Hamiltoniano linearizado. Para este estudo é necessário obter a forma normal do sistema Hamiltoniano linearizado quando $\epsilon = 0$ e obter informações sobre a região de estabilidade linear por meio das frequências de oscilações lineares, objeto de estudo da próxima seção.

3.5.1 Normalização da parte quadrática do Hamiltoniano

Nesta seção vamos obter a forma normal do sistema Hamiltoniano reduzido (3.23), no caso autônomo, isto é, quando $\epsilon = 0$. O processo de normalização, que pode ser consultado na Seção 1.2 de (MARKEEV, 2009) é feito para o caso de estabilidade linear do sistema, em que todos os autovalores $\pm\lambda_1, \dots, \pm\lambda_n$ são imaginários puros distintos, $\lambda_k = i\omega_k$, com $\omega_k > 0$. Neste processo devemos obter os autovetores associados a cada autovalor λ_k , $v_k = r_k + is_k$, $k = 1, \dots, n$, da matriz $A = JG$, onde G é a matriz hessiana do Hamiltoniano quadrático no equilíbrio em questão. Em seguida, calcula-se os produtos simpléticos $(r_k, s_k) = \langle r_k, Js_k \rangle$, onde $J = \begin{bmatrix} O & I \\ -I & O \end{bmatrix}$ é matriz simplética de ordem $2n$. Denotando-se por δ_k o sinal de (r_k, s_k) e por ρ_k o quociente $\frac{1}{\sqrt{(r_k, s_k)}}$, então a matriz cujas colunas são os vetores

$$-\rho_1 s_1, -\rho_2 s_2, \dots, -\rho_n s_n, \delta_1 \rho_1 r_1, \delta_2 \rho_2 r_2, \dots, \delta_n \rho_n r_n$$

é a matriz da transformação linear simplética que normaliza o Hamiltoniano quadrático.

A forma normal do Hamiltoniano é dada por

$$H(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} \delta_k \omega_k (x_k^2 + y_k^2). \quad (3.26)$$

Observe que esta forma normal é a soma algébrica de n osciladores harmônicos de frequências $\omega_1, \dots, \omega_k$.

No caso do Hamiltoniano reduzido (3.23), com $\gamma = 1$ e $\epsilon = 0$, a matriz hessiana G no equilíbrio $P^* = (1, 0, 0, 0)$ é $G = \begin{bmatrix} \mathcal{W}_{uu}^* & O \\ O & I \end{bmatrix}$, onde $\mathcal{W}_{uu}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{2\mu+1}{\kappa} \end{bmatrix}$, $\kappa = \frac{\mu+4}{4}$.

Os autovalores de $A = JG$ são $\pm\lambda_k = \pm i\omega_k$, $k = 1, 3$, com $\omega_1 = 1$ e $\omega_3 = \frac{(2\mu+1)}{\kappa}$. Para os autovetores $v_k = r_k + is_k$ associados a λ_k , $k = 1, 3$, podemos tomar

$$r_1 = (0, 1, 0, 0) \quad s_1 = (0, 0, 0, 1) \quad r_3 = (1, 0, 0, 0) \quad s_3 = (0, 0, (2\mu+1)/\kappa, 0),$$

cujos produtos simpléticos (r_k, s_k) são os valores

$$(r_1, s_1) = 1 \quad \text{e} \quad (r_3, s_3) = \frac{2\mu+1}{\kappa}.$$

Assim, $\delta_1 = \delta_2 = +1$ e $\rho_1 = 1$, $\rho_3 = \sqrt{\kappa/(2\mu+1)}$. A matriz simplética N da transformação linear simplética que leva o Hamiltoniano (3.23), quando $\epsilon = 0$, à sua forma normal

$$H_{0,\text{red}}(x, y, \mu) = \frac{1}{2}\omega_1(x_1^2 + y_1^2) + \frac{1}{2}\omega_3(x_2^2 + y_2^2), \quad (3.27)$$

é

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega_1^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_3^{-1/2} \\ -\omega_1^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_3^{1/2} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

onde as frequências são

$$\omega_1 = 1 \quad \text{e} \quad \omega_3(\mu) = 2\sqrt{\frac{2\mu+1}{\mu+4}}.$$

Para $\epsilon = 0$, o sistema Hamiltoniano (3.23) é autônomo e como sua parte linear no equilíbrio P^* , em virtude de (3.27), é definida positiva, este equilíbrio é estável para o sistema (3.23), quando $\epsilon = 0$. Como este sistema tem dois graus de liberdade, a estabilidade do equilíbrio poderia ser examinada usando-se o teorema de estabilidade de Arnold, se o sistema fosse autônomo. Como este último fato não ocorre, a saída é nos limitarmos a examinar se o equilíbrio é estável para o sistema linearizado em torno do equilíbrio, cujo Hamiltoniano é dado em (3.25). Esta questão será estudada na próxima subseção.

3.5.2 Estabilidade paramétrica do sistema linearizado

O sistema Hamiltoniano linear (3.25) é periódico no tempo ν , com período 2π . Para sistemas Hamiltonianos lineares periódicos o estudo da estabilidade pode ser feito com a teoria de Krein-Gelfand-Lidskii, ver Seção 6.5 de (CABRAL; AO, 2020) e Seção 3.1 de (MARKEEV, 2009) ou (YAKUBOVICH; STARZHINSKII, 1975). Vamos fazer algumas considerações sobre a questão de estabilidade de sistemas lineares.

Seja $A = A(\nu)$ uma matriz contínua de ordem n . Dizemos que o sistema linear $x' = Ax$ é *estável* se a origem $x = 0$ é um equilíbrio estável desta equação.

Agora considere uma matriz $A(\nu)$ de ordem n que além de contínua, seja τ -periódica e o seguinte sistema linear

$$z' = A(\nu)z. \quad (3.28)$$

Queremos introduzir o conceito de estabilidade forte, mas antes, é preciso falarmos de vizinhança, e para isto dotamos o espaço \mathcal{A} formado pelas matrizes $A(\nu)$, $n \times n$, contínuas e τ -periódicas com a seguinte norma

$$\|A\| = \sup_{0 \leq \nu \leq \tau} |A(\nu)|. \quad (3.29)$$

Dessa forma, $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach. Perceba que por $A(\nu)$ ser τ -periódica, basta que a consideremos em $[0, \tau]$.

Agora podemos definir rigorosamente estabilidade forte. Dizemos que o sistema (3.28) é *fortemente estável* se ele é estável e se existe $\varepsilon > 0$ tal que qualquer outro sistema de mesma natureza, $z' = \tilde{A}(\nu)z$, é estável para todo $\tilde{A}(\nu) \in B_\varepsilon(A(\nu))$. Este conceito é, evidentemente, bem mais forte do que o de ser apenas estável e ele é muito importante, visto que os sistemas muitas vezes descrevem fatos observados ou estimados experimentalmente, e portanto, carregam consigo inevitáveis imprecisões.

Outro conceito de estabilidade para sistema lineares um pouco mais fraco do que este é definido quando a matriz $A(\nu)$ em (3.28) depende de parâmetros. Seja $A(\nu, \varrho)$ contínua em (ν, ϱ) e τ -periódica em ν , onde o parâmetro ϱ varia num conjunto $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^k$. Dizemos que o sistema linear $z' = A(\nu, \varrho^*)z$, é *parametricamente estável* se ele é estável e se existe $\delta > 0$, tal que para qualquer $\varrho \in B_\delta(\varrho^*) \cap \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^k$ o sistema $z' = A(\nu, \varrho)z$ é estável.

Evidentemente, se o sistema $x' = A(\nu, \varrho^*)x$ é fortemente estável, então ele é parametricamente estável.

A teoria de Floquet nos garante que a matriz fundamental do sistema (3.28), $Z(\nu)$, pode ser escrita na forma $Z(\nu) = Q(\nu)e^{\nu B}$, onde $Q(\nu)$ é τ -periódica e B é constante. Lembremos que a *matriz fundamental* é uma matriz solução de (3.28) tal que $\det Z(\nu_0) \neq 0^1$. Outro fato, é que podemos transferir o estudo da estabilidade de $z' = A(\nu)z$ para o sistema constante $\zeta' = B\zeta$ mediante à seguinte mudança de variáveis $z(\nu) = Q(\nu)\zeta(\nu)$. De fato, como $Q(\nu)$ é τ -periódica, então $Q(\nu)$ é limitada para todo $\nu \in \mathbb{R}$. Além disso, como $Z(\nu) = Q(\nu)e^{\nu B}$ podemos expressar $Q(\nu)^{-1} = Z(\nu)^{-1}e^{\nu B}$ que também é limitada por ser periódica. Para ver este último fato, basta usar que para toda matriz fundamental, existe uma matriz constante e inversível, C , tal que $Z(\nu + \tau) = Z(\nu)C$, na verdade, $C = e^{\tau B}$ e é denominada *matriz de monodromia*.

Os autovalores, ρ , da matriz de monodromia C são denominados *multiplicadores característicos* de (3.28), ou simplesmente *multiplicadores*, e os autovalores de B são denominados *expoentes característicos* de (3.28). Note que se λ é um expoente característico de (3.28) então $\rho = e^{\lambda\tau}$.

No caso do sistema (3.28) ser Hamiltoniano, temos uma propriedade adicional que é o fato de serem *recíprocos*, isto é, para todo multiplicador característico, o conjugado inverso também é.

Seja $\lambda = i\beta$ expoente característico e $\rho = e^{\tau\lambda}$ o multiplicador correspondente. Um autovetor v de B para λ é também um autovetor de $Z(\nu)$ para ρ . Dizemos que ρ é um multiplicador de *primeira espécie* ou de *segunda espécie* se o produto simplético $(r, s) = \langle r, Js \rangle$ é positivo ou negativo, respectivamente, qualquer que seja o autovetor $v = r + is$ de ρ . Dizemos que o multiplicador ρ é *definido* se ele é de primeira ou de segunda espécie. Dizemos que o multiplicador ρ é *indefinido* se ele não é de primeira nem de segunda espécie. Neste caso, existem autovetores de ρ dando produtos simpléticos de sinais contrários.

O teorema à seguir é fundamental na teoria de estabilidade de sistemas lineares Hamiltonianos e pode ser consultado na Seção 6.5 de (CABRAL; AO, 2020), Seção 3.1 de (MARKEEV, 2009) ou (YAKUBOVICH; STARZHINSKII, 1975).

Teorema 3.3 (*Krein-Gelfand-Lidskii*) *O sistema Hamiltoniano real linear e periódico como (3.28) é fortemente estável se, e somente se, todos seus multiplicadores estão no círculo unitário e todos eles são definidos.*

¹ aqui basta que seja para algum ν_0 , pelos seguintes fatos: 1) os vetores $Z_j(\nu)$ da matriz fundamental são l.i.'s se, e somente se, $\det Z(\nu) \neq 0$; 2) se $\{Z_1(\nu_0), \dots, Z_n(\nu_0)\}$ é l.i. para algum ν_0 , então é l.i. para todo $\nu \in \mathbb{R}$.

Suponhamos que o sistema Hamiltoniano τ -periódico linearizado na solução equilíbrio, $z' = A(\nu, \mu, \epsilon)z$, dependa de dois parâmetros escalares μ, ϵ e que o sistema não perturbado seja estável para todo $\mu \in I$. Será que para ϵ pequeno o sistema também é estável? Vimos que se $z' = A(\nu, \mu^*, 0)$ é fortemente estável para algum $\mu^* \in I$, então ele é estável para toda vizinhança de $(\mu^*, 0)$. Mas e se o sistema não for fortemente estável?

Como o sistema não perturbado é estável, então os multiplicadores $\rho_1(\mu^*), \dots, \rho_{2n}(\mu^*)$ estão todos na circunferência unitária. Se todos multiplicadores são simples, isto é, têm multiplicidade igual a um, então para μ próximo à μ^* e ϵ pequeno, o sistema $z' = A(\nu, \mu, \epsilon)z$ têm multiplicadores simples e todos estão no círculo unitário, ou seja, esse sistema é estável para (μ, ϵ) na vizinhança de $(\mu^*, 0)$. Suponhamos que temos um multiplicador múltiplo, digamos $\rho_k^* = \rho_k(\mu^*)$. Seja $\lambda_k = i\omega_k$, $\omega_k \geq 0$ um expoente característico de $z' = A(\nu, \mu, 0)z$ e $\rho_k = e^{\tau\lambda_k}$ o multiplicador múltiplo correspondente, pelo fato do sistema Hamiltoniano ser recíproco, temos $\rho_k = \rho_l$ ou $\rho_k = \frac{1}{\rho_l}$, para algum l . Isto é, $e^{\tau i\omega_k} = e^{\tau i\omega_l}$, ou seja, $e^{i\tau\omega_k \pm i\tau\omega_l} = 1$ se, e somente se, $\cos[\tau(\omega_k \pm \omega_l)] + i\text{sen}[\tau(\omega_k \pm \omega_l)] = (1, 0)$. Portanto, a existência de multiplicador múltiplo ocorre quando

$$\omega_k \pm \omega_l = N \frac{\pi}{\tau}, \quad N \in \mathbb{Z}. \quad (3.30)$$

Esta ressonância é denominada *ressonância de Krein* e possui a seguinte classificação quanto a seu tipo:

- (i) *ressonância básica*: se $2\omega_k = N$, isto é, se $k = l$;
- (ii) *ressonância combinada*, se $k \neq l$.

E ainda, se ocorre apenas uma vez algum desses tipos de ressonância, dizemos que ela é *simples*, caso contrário, dizemos que é *múltipla*. Assim, se temos duas ressonâncias, ω_1 e ω_2 , pode ocorrer:

1. simples básica: $2\omega_1 = N$, $2\omega_2 \notin \mathbb{Z}$; dupla básica: $2\omega_1 = N_1$, $2\omega_2 = N_2$;
2. ressonância combinada: $\omega_1 \pm \omega_2 = N$.

Quando o sistema $z' = A(\nu, \mu^*, 0)$ tem um multiplicador múltiplo para algum valor $\mu^* \in I$, dizemos que este é o valor de *ressonância paramétrica*. Em decorrência do teorema de Krein-Gelfand-Lidskii, o sistema não perturbado para este valor de ressonância, pode ser fortemente estável. No caso em que seja parametricamente estável, temos que para (μ, ϵ) na vizinhança de

$(\mu^*, 0)$ o sistema perturbado $z' = A(\nu, \mu, \epsilon)z$ é estável, para ϵ pequeno. Agora, assumamos que o sistema não perturbado não é fortemente estável. Isto é, na vizinhança deste sistema, existem sistemas estáveis e instáveis. Além disso, na família de sistemas paramétricos $z' = A(\nu, \mu, \epsilon)z$, podemos ter parâmetros que fornecem sistemas estáveis e parâmetros que fornecem sistemas instáveis. Assim, talvez os parâmetros possam ser separados por curvas contínuas que limitam, no plano paramétrico, as regiões de sistemas da família que são estáveis e as regiões de instáveis.

No caso de termos mais de dois parâmetros teremos superfícies ao invés de curvas para delimitar tais regiões. Nas próximas subseções trabalharemos para construir estas regiões.

3.5.3 Ressonâncias

Nesta subseção vamos analisar quais tipos de ressonâncias de Krein aparecem para o equilíbrio da forma $P^* = (1, 0, 0, 0)$. Antes disso, vamos fazer algumas considerações. A primeira delas é que após uma análise prévia, vimos que é suficiente supor μ estritamente positivo, já que como vimos ao final da Seção 2.3, $\mu \neq 0$. A segunda é sempre que mencionarmos "inteiro", entenda por número inteiro não-negativo. E por fim, vimos que as frequências são:

$$\omega_1 = \omega_1(\mu) = 1 \quad \text{e} \quad \omega_3 = \omega_3(\mu) = 2\sqrt{\frac{2\mu + 1}{\mu + 4}}. \quad (3.31)$$

Note que $2\omega_1 = 2$ é inteiro qualquer que seja μ , e perceba que do fato de $\mu > 0$, temos

$$1 < \omega_3(\mu) < 2\sqrt{2}. \quad (3.32)$$

Dessa forma, temos uma ressonância simples sempre que $2\omega_3$ não for um número inteiro.

As ressonâncias duplas ocorrem para os valores de μ tais que $2\omega_3 = N$, onde neste caso, vemos de (3.32) que as únicas possibilidades de valores para N ser inteiro são $N = 3, 4, 5$. Os respectivos valores de ressonância paramétrica são

$$\mu_3^* = \frac{20}{23}, \quad \mu_4^* = 3 \quad \text{e} \quad \mu_5^* = 12. \quad (3.33)$$

Quanto à existência de uma ressonância combinada, suponha que $\omega_1 + \omega_3 = N$. Como $\omega_1 = 1$, o inteiro N tem que ser maior do que 1, ou seja, teríamos $2\omega_3 = 2(N - 1)$ e como $2(N - 1)$ é um número positivo, resultaria novamente em uma ressonância dupla. Portanto, não existe ressonância combinada.

3.5.4 Construção das curvas delimitadoras das regiões de estabilidade e instabilidade

Nesta subsecção, estamos interessados em construir as regiões de estabilidade e instabilidade. As referências utilizadas foram: (ARAÚJO, 2015), (NETO, 2016), (MARKEEV, 2005), (MARKEEV, 2009), Capítulo 4 de (MARKEYEV, 2006) e (VALERIANO, 2015).

Na seção anterior, vimos que as ressonâncias duplas ocorrem quando $N = 3, 4, 5$. Vamos construir as curvas que delimitam as regiões de estabilidade e instabilidade, para o seguinte caso de ressonância dupla

$$2\omega_1(\mu_4^*) = 2 \quad \text{e} \quad 2\omega_3(\mu_4^*) = 4,$$

onde $\mu_4^* = 3$. Tais curvas são construídas no plano $\mu - \epsilon$ e podem ser expressas através da seguinte expansão em ϵ

$$\mu = \mu_{\text{expand}} = \mu^* + \mu_1\epsilon + \mu_2\epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad (3.34)$$

onde os coeficientes μ_1, μ_2 deverão ser encontrados por meio da equação característica do Hamiltoniano autônomo e 2π -periódico, K obtido através do método de Deprit-Hori como veremos.

Primeiramente, expandimos (3.25) em ϵ , isto é

$$H(u, v, \nu, \mu, \epsilon) = H_0 + \epsilon H_1 + \frac{\epsilon^2}{2!} H_2 + \cdots + \frac{\epsilon^k}{k!} H_k + \mathcal{O}(\epsilon^{k+1}), \quad (3.35)$$

onde

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{1}{2} \left(v_1^2 + v_3^2 + u_1^2 + \frac{4(2\mu + 1)}{\mu + 4} u_3^2 \right) \\ H_1 &= \frac{1}{2(\mu + 4)} \left[12u_1^2 + 3\mu u_1^2 - 7\mu u_3^2 \right] \cos \nu \\ H_2 &= -\frac{1}{2(\mu + 4)} \left[12u_1^2 + 3\mu u_1^2 - 7\mu u_3^2 \right] \cos^2 \nu \\ H_3 &= \frac{1}{2(\mu + 4)} \left[12u_1^2 + 3\mu u_1^2 - 7\mu u_3^2 \right] \cos^3 \nu \end{aligned}$$

Em seguida, normalizamos o sistema não perturbado, H_0 , utilizando (3.27) para obter

$$H_{0,red} = \frac{1}{2}(u_1^2 + v_1^2) + (u_3^2 + v_3^2). \quad (3.36)$$

E ainda, após aplicarmos a rotação

$$\begin{aligned} u_1 &= \cos(\nu) X_1 + \text{sen}(\nu) Y_1 \\ u_3 &= \cos\left(\frac{N\nu}{2}\right) X_3 + \text{sen}\left(\frac{N\nu}{2}\right) Y_3 \\ v_1 &= -\text{sen}(\nu) X_1 + \cos(\nu) Y_1 \\ v_3 &= -\text{sen}\left(\frac{N\nu}{2}\right) X_3 + \cos\left(\frac{N\nu}{2}\right) Y_3 \end{aligned}, \quad N = 4$$

obtemos o novo Hamiltoniano $\mathbf{H}(X, Y) = H(X, Y) - W_\nu$, onde W é a função geradora da rotação² e, $\mathbf{H}_0 = 0$. Feito isso, estamos aptos a iniciar o método de Deprit-Hori que poderá ser consultado na Seção 3.3.1 de (BRANDÃO; CABRAL, 2018), [(MARKEEV, 2009), pág 40] ou [(MEYER; HALL; OFFIN, 2009), pág 237].

Note que $K_0 = \mathbf{H}_0 = 0$ e

$$K_m = \mathbf{H}_m + \sum_{j=1}^{m-1} \left[C_{m-1}^{j-1} L_j \mathbf{H}_{m-j} + C_{m-1}^j K_{j,m-j} \right] - \frac{DW_m}{D\nu}, \quad (3.37)$$

onde

$$C_r^k = \frac{r!}{k!(r-k)!},$$

$L_i f$ é o colchete de Poisson, dado por

$$L_i f = \{f, W_i\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \frac{\partial W_i}{\partial Y_i} - \frac{\partial f}{\partial Y_i} \frac{\partial W_i}{\partial X_i} \right)$$

$$K_{j,i} = L_j K_i - \sum_{s=1}^{j-1} C_{j-1}^{s-1} L_s K_{j-s,i}$$

$$\frac{DW_m}{D\nu} = \frac{\partial W_m}{\partial \nu} - L_m \mathbf{H}_0$$

Neste caso, como $\mathbf{H}_0 = 0$, temos $\frac{DW_m}{D\nu} = \frac{\partial W_m}{\partial \nu}$ e também $L_m \mathbf{H}_0 = 0$ para todo m .

Em [(MARKEEV, 2009), pág 62], quando $2\omega_1 = N_1$ e $2\omega_3 = N_2$, $N_1 \neq N_2$, o autor menciona que a análise computacional é feita dependendo da paridade de N_1 e N_2 , da seguinte forma:

- são ambos pares ou ambos ímpares;

² $W(u, Y)$ é a função geradora de uma mudança de coordenadas simplética $(u, v) \mapsto (X, Y)$, por meio da rotação pelo ângulo $\omega\nu$, $u = X \cos(\omega\nu) + Y \text{sen}(\omega\nu)$, $v = -X \text{sen}(\omega\nu) + Y \cos(\omega\nu)$. W é dada por $W(u, Y, \nu) = -\frac{1}{2}(u^2 + Y^2) \frac{\text{sen}(\omega\nu)}{\cos(\omega\nu)} + \frac{uY}{\cos(\omega\nu)}$, onde usando a expressão de u , obtemos $W_\nu = -\frac{\omega}{2}(X^2 + Y^2)$.

- um deles é par e outro ímpar.

No nosso caso, como $2\omega_1$ é sempre par, teremos os casos: $2\omega_3 = N$ também par ou $2\omega_3 = N$ ímpar.

Como mencionado no início desta seção, vamos construir as curvas quando $N = 4$, isto é, $2\omega_1(\mu_4^*) = 2$ e $2\omega_3(\mu_4^*) = 4$, onde $\mu_4^* = 3$.

Para darmos início ao método de Deprit-Hori, expressamos K_j , W_j e \mathbf{H}_j da seguinte forma:

$$\begin{aligned} K_j &= \sum_{r_1+r_2+s_1+s_2=2} k_{r_1 r_2 s_1 s_2}^{(j)} X_1^{r_1} X_2^{r_2} Y_1^{s_1} Y_2^{s_2} \\ \mathbf{H}_j &= \sum_{r_1+r_2+s_1+s_2=2} h_{r_1 r_2 s_1 s_2}^{(j)} X_1^{r_1} X_2^{r_2} Y_1^{s_1} Y_2^{s_2} \\ W_j &= \sum_{r_1+r_2+s_1+s_2=2} w_{r_1 r_2 s_1 s_2}^{(j)} X_1^{r_1} X_2^{r_2} Y_1^{s_1} Y_2^{s_2}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Primeiro computamos K_1 fazendo $m = 1$ em (3.37), isto é

$$K_1 = \mathbf{H}_1(X, Y, \nu, \mu) - \frac{\partial W_1}{\partial \nu}, \quad (3.39)$$

onde dessa última temos

$$\frac{\partial W_1}{\partial \nu} = \mathbf{H}_1 - K_1 \quad (3.40)$$

e ao substituírmos K_1 , \mathbf{H}_1 e W_1 , dados pelas expressões acima em (3.39) e, em seguida, ao compararmos os coeficientes de mesmo monômio, temos as equações:

$$\begin{aligned} k_{2000}^{(1)} &= h_{2000}^{(1)} - \frac{dw_{2000}^{(1)}}{d\nu} \\ k_{1100}^{(1)} &= h_{1100}^{(1)} - \frac{dw_{1100}^{(1)}}{d\nu} \\ k_{1010}^{(1)} &= h_{1010}^{(1)} - \frac{dw_{1010}^{(1)}}{d\nu} \\ k_{1001}^{(1)} &= h_{1001}^{(1)} - \frac{dw_{1001}^{(1)}}{d\nu} \\ k_{0200}^{(1)} &= h_{0200}^{(1)} - \frac{dw_{0200}^{(1)}}{d\nu} \\ k_{0110}^{(1)} &= h_{0110}^{(1)} - \frac{dw_{0110}^{(1)}}{d\nu} \\ k_{0101}^{(1)} &= h_{0101}^{(1)} - \frac{dw_{0101}^{(1)}}{d\nu} \\ k_{0020}^{(1)} &= h_{0020}^{(1)} - \frac{dw_{0020}^{(1)}}{d\nu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{0011}^{(1)} &= h_{0011}^{(1)} - \frac{dw_{0011}^{(1)}}{d\nu} \\ k_{0002}^{(1)} &= h_{0002}^{(1)} - \frac{dw_{0002}^{(1)}}{d\nu} \end{aligned}$$

Vamos ver como se dá a resolução dessas equações em um dos casos, os demais, são análogos. Note que pelo fato de N ser par, teremos W 2π -periódica. Agora, do método Deprit-Hori queremos que K_1 seja autônomo, daí por (3.39) e do fato de W ser 2π -periódica, temos

$$K_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_1 d\nu.$$

Dessa forma,

$$k_{2000}^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_{2000}^{(1)} d\nu, \quad (3.41)$$

e, novamente usando (3.39), temos

$$w_{2000}^{(1)} = \int \left(h_{2000}^{(1)} - k_{2000}^{(1)} \right) d\nu. \quad (3.42)$$

Esse mesmo argumento é empregado na resolução das demais equações, de modo que, dando prosseguimento ao método Deprit-Hori, o próximo passo é realizar cálculos análogos aos anteriores para $m = 2$ em (3.37):

$$\begin{aligned} K_2 &= \mathbf{H}_2 + \{\mathbf{H}_1, W_1\} + \{K_1, W_1\} + \{\mathbf{H}_0, W_2\} - \frac{\partial W_2}{\partial \nu} \\ &= \mathbf{H}_2 + \{\mathbf{H}_1, W_1\} + \{K_1, W_1\} - \frac{\partial W_2}{\partial \nu} \end{aligned} \quad (3.43)$$

Desta última, usando o fato de W_2 ser 2π -periódica, temos

$$K_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\mathbf{H}_2 + \{\mathbf{H}_1, W_1\} + \{K_1, W_1\} \right) d\nu. \quad (3.44)$$

Conhecido K_2 , obtemos

$$W_2 = \int \left(\mathbf{H}_2 - K_2 + \{\mathbf{H}_1, W_1\} + \{K_1, W_1\} + \{\mathbf{H}_0, W_2\} \right) d\nu \quad (3.45)$$

Agora vejamos na prática como acontece esse passo. Usando (3.38), temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_{2000}^{(2)}}{\partial \nu} &= h_{2000}^{(2)} - k_{2000}^{(2)} + \left(h_{1100}^{(1)} + k_{1100}^{(1)} \right) w_{1001}^{(1)} + 2 \left(h_{2000}^{(1)} + k_{2000}^{(1)} \right) w_{1010}^{(1)} \\ &\quad - \left(h_{1001}^{(1)} - k_{1001}^{(1)} \right) w_{1100}^{(1)} - 2 \left(h_{1010}^{(1)} + k_{1010}^{(1)} \right) w_{2000}^{(1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_{1100}^{(2)}}{\partial \nu} &= h_{1100}^{(2)} - k_{1100}^{(2)} + \left(h_{1100}^{(1)} + k_{1100}^{(1)} \right) w_{0101}^{(1)} + 2 \left(h_{2000}^{(1)} + k_{2000}^{(1)} \right) w_{0110}^{(1)} \\ &\quad - 2 \left(h_{1001}^{(1)} + k_{1001}^{(1)} \right) w_{0200}^{(1)} + 2 \left(h_{0200}^{(1)} + k_{0200}^{(1)} \right) w_{1001}^{(1)} + \left(h_{1100}^{(1)} + k_{1100}^{(1)} \right) w_{1010}^{(1)} \\ &\quad - \left(h_{0101}^{(1)} + k_{0101}^{(1)} + h_{1010}^{(1)} + k_{1010}^{(1)} \right) w_{1100}^{(1)} - 2 \left(h_{0110}^{(1)} + k_{0110}^{(1)} \right) w_{2000}^{(1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial w_{1010}^{(2)}}{\partial \nu} &= h_{1010}^{(2)} - k_{1010}^{(2)} + (h_{1100}^{(1)} + k_{1100}^{(1)}) w_{0011}^{(1)} + (4h_{2000}^{(1)} + 4k_{2000}^{(1)}) w_{0020}^{(1)} \\ &\quad - (h_{1001}^{(1)} + k_{1001}^{(1)}) w_{0110}^{(1)} + (h_{0110}^{(1)} + k_{0110}^{(1)}) w_{1001}^{(1)} \\ &\quad - (h_{0011}^{(1)} - k_{0011}^{(1)}) w_{1100}^{(1)} - 4(h_{0020}^{(1)} + 4k_{0020}^{(1)}) w_{2000}^{(1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial w_{1001}^{(2)}}{\partial \nu} &= h_{1001}^{(2)} - k_{1001}^{(2)} - 2(h_{1100}^{(1)} + k_{1100}^{(1)}) w_{0002}^{(1)} + 2(h_{2000}^{(1)} + k_{2000}^{(1)}) w_{0011}^{(1)} \\ &\quad - (h_{1001}^{(1)} + k_{1001}^{(1)}) w_{0101}^{(1)} + (h_{0101}^{(1)} - h_{1010}^{(1)} + k_{0101}^{(1)} - k_{1010}^{(1)}) w_{1001}^{(1)} \\ &\quad + (h_{1001}^{(1)} + k_{1001}^{(1)}) w_{1010}^{(1)} - 2(h_{0002}^{(1)} + k_{0002}^{(1)}) w_{1100}^{(1)} - 2(h_{0011}^{(1)} + k_{0011}^{(1)}) w_{2000}^{(1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial w_{0200}^{(2)}}{\partial \nu} &= h_{0200}^{(2)} - k_{0200}^{(2)} + 2(h_{0200}^{(1)} + k_{0200}^{(1)}) w_{0101}^{(1)} + (h_{1100}^{(1)} + k_{1100}^{(1)}) w_{0110}^{(1)} \\ &\quad - 2(h_{0101}^{(1)} + k_{0101}^{(1)}) w_{0200}^{(1)} - (h_{0110}^{(1)} + k_{0110}^{(1)}) w_{1100}^{(1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial w_{0110}^{(2)}}{\partial \nu} &= h_{0110}^{(2)} - k_{0110}^{(2)} + 2(h_{0200}^{(1)} + k_{0200}^{(1)}) w_{0011}^{(1)} + 2(h_{1100}^{(1)} + k_{1100}^{(1)}) w_{0020}^{(1)} \\ &\quad + (h_{0110}^{(1)} + k_{0110}^{(1)}) w_{0101}^{(1)} - (h_{0101}^{(1)} + h_{1010}^{(1)} - k_{0101}^{(1)} + k_{1010}^{(1)}) w_{0110}^{(1)} \\ &\quad - 2(h_{0011}^{(1)} + k_{0011}^{(1)}) w_{0200}^{(1)} - (h_{0110}^{(1)} + k_{0110}^{(1)}) w_{1010}^{(1)} - 2(h_{0020}^{(1)} + k_{0020}^{(1)}) w_{1100}^{(1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial w_{0101}^{(2)}}{\partial \nu} &= h_{0101}^{(2)} - k_{0101}^{(2)} + 4(h_{0200}^{(1)} + k_{0200}^{(1)}) w_{0002}^{(1)} + (h_{1100}^{(1)} + k_{1100}^{(1)}) w_{0011}^{(1)} \\ &\quad + (h_{1001}^{(1)} + k_{1001}^{(1)}) w_{0110}^{(1)} - 4(h_{0002}^{(1)} + k_{0002}^{(1)}) w_{0200}^{(1)} \\ &\quad - (h_{0110}^{(1)} + k_{0110}^{(1)}) w_{1001}^{(1)} - (h_{0011}^{(1)} + k_{0011}^{(1)}) w_{1100}^{(1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial w_{0020}^{(2)}}{\partial \nu} &= h_{0020}^{(2)} - k_{0020}^{(2)} + (h_{0110}^{(1)} + k_{0110}^{(1)}) w_{0011}^{(1)} + 2(h_{1010}^{(1)} + k_{1010}^{(1)}) w_{0020}^{(1)} \\ &\quad - (h_{0011}^{(1)} + k_{0011}^{(1)}) w_{0110}^{(1)} - 2(h_{0020}^{(1)} + k_{0020}^{(1)}) w_{1010}^{(1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_{0011}^{(2)}}{\partial \nu} &= h_{0011}^{(2)} - k_{0011}^{(2)} + 2 \left(h_{0110}^{(1)} + k_{0110}^{(1)} \right) w_{0002}^{(1)} + \left(h_{0101}^{(1)} + h_{1010}^{(1)} + k_{0101}^{(1)} + k_{1010}^{(1)} \right) w_{0011}^{(1)} \\ &\quad + 2 \left(h_{1001}^{(1)} + k_{1001}^{(1)} \right) w_{0020}^{(1)} - \left(h_{0011}^{(1)} + k_{0011}^{(1)} \right) w_{0101}^{(1)} - 2 \left(h_{0002}^{(1)} + k_{0002}^{(1)} \right) w_{0110}^{(1)} \\ &\quad - 2 \left(h_{0020}^{(1)} + k_{0020}^{(1)} \right) w_{1001}^{(1)} - \left(h_{0011}^{(1)} - k_{0011}^{(1)} \right) w_{1010}^{(1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_{0002}^{(2)}}{\partial \nu} &= h_{0002}^{(2)} - k_{0002}^{(2)} + 2 \left(h_{0101}^{(1)} + k_{0101}^{(1)} \right) w_{0002}^{(1)} + \left(h_{1001}^{(1)} + k_{1001}^{(1)} \right) w_{0011}^{(1)} \\ &\quad - 2 \left(h_{0002}^{(1)} + k_{0002}^{(1)} \right) w_{0101}^{(1)} - \left(h_{0011}^{(1)} + k_{0011}^{(1)} \right) w_{1001}^{(1)} \end{aligned}$$

e assim por diante. Em seguida, obtemos a expressão de K como em (3.38), dada por

$$K = k_{2000} X_1^2 + k_{1010} X_1 Y_1 + k_{0020} Y_1^2 + k_{0200} X_2^2 + k_{0101} X_2 Y_2 + \frac{1}{2} (1 + 2k_{0002}) Y_2^2.$$

Com isso, o Hamiltoniano (3.35) é levado à este novo Hamiltoniano K , onde a variável tempo ν do hamiltoniano foi eliminada.

Temos que as regiões de estabilidade e instabilidade, quando as ressonâncias são ambas pares ou ambas ímpares, são baseadas nas condições de fronteira da equação característica do sistema Hamiltoniano 2π -periódico associado à K , dada por

$$\lambda^4 + \tilde{\alpha} \lambda^2 + \tilde{\beta} = 0.$$

Isto é, quando

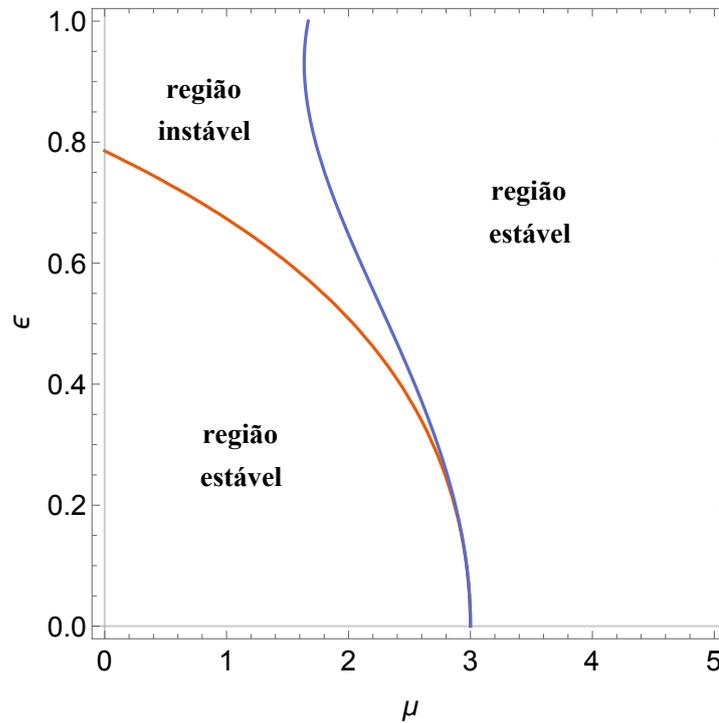
$$\tilde{\alpha} \geq 0, \quad \tilde{\beta} = 0 \quad \text{ou} \quad \tilde{\alpha} \geq 0, \quad \tilde{\Delta} = \tilde{\alpha}^2 - 4\tilde{\beta} = 0.$$

Dessa forma, como mencionado anteriormente, por meio destas condições encontramos os coeficientes da curva (3.34). Para o valor de ressonância paramétrica, $\mu_4^* = 3$, obtivemos a seguintes curvas de fronteiras para condição $\tilde{\beta} = 0$:

$$\tilde{\mu}_1 = \mu_4^* - \frac{63}{20} \epsilon^2 - 2.774625 \epsilon^4$$

$$\tilde{\mu}_2 = \mu_4^* - \frac{63}{20} \epsilon^2 + 1.819125 \epsilon^4$$

Figura 5 – Regiões de estabilidade e instabilidade



A região entre as curvas da figura acima representa a região de instabilidade para a vizinhança do valor de ressonância paramétrica $\mu_4^* = 3$ do sistema Hamiltoniano (3.25) quando as ressonâncias são ambas pares, $2\omega_1(\mu_4^*) = 2$ e $2\omega_3(\mu_4^*) = 4$.

Observamos que para ϵ pequeno a região de instabilidade é muito estreita e se alarga a medida que ϵ cresce. Mesmo para ϵ muito pequeno existem sistemas instáveis para μ numa vizinhança de $\mu_4^* = 3$.

Finalizamos este capítulo com bastante informações sobre este problema, demos a formulação Hamiltoniana, mostramos a existência de equilíbrios, classificamos os tipos de ressonâncias e, por fim, fizemos o estudo de estabilidade paramétrica para um dos casos de ressonância dupla.

4 CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS FUTURAS

No Capítulo 1 estudamos o problema restrito colinear de quatro corpos. Vimos a questão da estabilidade, no sentido de Lyapunov, para os equilíbrios existentes, provando que o equilíbrio colinear é instável e o não-colinear é estável para um certo intervalo do parâmetro das massas μ . Provamos ainda a existência de órbitas periódicas de Lyapunov na vizinhança do equilíbrio estável.

Gostaríamos de explorar mais este sistema mecânico. Para o estudo da estabilidade paramétrica do sistema linearizado na vizinhança do equilíbrio estável já temos resultados parciais; encontramos as ressonâncias do tipo simples básicas no caso em que a massa m_4 se encontra no mesmo plano dos primários. Pretendemos fazer o estudo para construir as curvas que delimitam as regiões de estabilidade e instabilidade.

No Capítulo 2 estudamos um problema isósceles gerado por uma solução colinear do problema dos três corpos. Expressamos a dinâmica deste problema isósceles como um sistema Hamiltoniano com três graus de liberdade nas coordenadas pulsantes tendo a anomalia verdadeira do problema de Kepler subjacente como o novo tempo. Restringimos o estudo ao Hamiltoniano reduzido e obtivemos as curvas que delimitam as regiões de estabilidade e instabilidade em um caso de ressonância dupla quando os inteiros envolvidos são ambos pares. Pretendemos fazer a construção destas curvas, quando $2\omega_3$ for ímpar.

Finalmente, pretendemos aprofundar o estudo deste problema isósceles com o objetivo de compreender melhor a sua dinâmica e de utilizar os resultados obtidos no projeto intitulado "Problema restrito isósceles de quatro corpos" do professor Hildeberto Cabral de cuja equipe fazemos parte.

REFERÊNCIAS

- ARAÚJO, G. C. *Estabilidade paramétrica em um problema de $p+2$ corpos*. 2015.
- ARNOLD, V. *Mathematical methods of classical mechanics*. Second. [S.l.]: Springer New York, 1989. v. 60. (Graduate texts in mathematics, v. 60).
- ARRIBAS, M.; ABAD, A.; ELIPE, A.; PALACIOS, M. Equilibria of the symmetric collinear restricted four-body problem with radiation pressure. *Astrophysics and space science*, Springer, v. 361, n. 2, p. 84, 2016.
- BALTAGIANNIS, A.; PAPADAKIS, K. Equilibrium points and their stability in the restricted four-body problem. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, World Scientific, v. 21, n. 08, p. 2179–2193, 2011.
- BRANDÃO, L. F. M. D.; CABRAL, H. E. Parametric stability in a sitnikov-like restricted p -body problem. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, Springer, v. 30, n. 1, p. 81–92, 2018.
- CABRAL, H. Periodic and quasi-periodic motions in triple stellar systems. *mpna*, v. 2, p. 3–9, 1983.
- CABRAL, H.; DIACU, F. *Classical and celestial mechanics: the Recife lectures*. [S.l.]: Princeton University Press, 2002.
- CABRAL, H. E. On the isosceles solutions of the three-body problem. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana: Tercera Serie*, Sociedad Matematica mexicana, v. 18, n. 2, p. 135–141, 2012.
- CABRAL, H. E.; AO, L. F. M. D. B. *Normal Forms for Hamiltonian Systems*. [S.l.]: Versão preliminar, 2020.
- GOMES, G. *Estudo do problema dos três corpos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pernambuco, <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/7417>, mar. 2004.
- LLIBRE, J.; ORTEGA, R. On the families of periodic orbits of the sitnikov problem. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, SIAM, v. 7, n. 2, p. 561–576, 2008.
- LLIBRE, J.; SIMÓ, C. Estudio cualitativo del problema de sitnikov. *Publicacions de la Secció de Matemàtiques*, JSTOR, p. 49–71, 1980.
- MARKEEV, A. On one special case of parametric resonance in problems of celestial mechanics. *Astronomy Letters*, Springer, v. 31, n. 5, p. 350–356, 2005.
- MARKEEV, A. *Linear Hamiltonian Systems and some applications to the problem of stability of motion of satellites relative to the center of mass*. [S.l.]: Regular and Chaotics Dynamics, 2009.
- MARKEYEV, A. Multiple parametric resonance in hamilton systems. *Journal of applied mathematics and mechanics*, Elsevier, v. 70, n. 2, p. 176–194, 2006.
- MEYER, K. R.; HALL, G. R.; OFFIN, D. *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N -Body Problem*. 2. ed. [S.l.]: Springer-Verlag New York, 2009. v. 90. (Applied Mathematical Sciences, v. 90).

MUSIELAK, Z. E.; QUARLES, B. The three-body problem. *Reports on Progress in Physics*, IOP Publishing, v. 77, n. 6, p. 065901, Jun 2014. ISSN 1361-6633. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/0034-4885/77/6/065901>>.

NETO, J. L. de M. *Estabilidade paramétrica na dinâmica de pêndulos em órbita elíptica*. <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/23429>: [s.n.], 2016.

SIEGEL, C.; MOSER, J. *Lectures on Celestial Mechanics*. [S.l.]: Springer, Berlin, 1971.

SIMÓ, C.; MARTINEZ, R. Qualitative study of the planar isosceles three-body problem. *Celestial mechanics*, Springer, v. 41, n. 1-4, p. 179–251, 1987.

VALERIANO, L. R. *Estabilidade paramétrica no problema de Robe*. 2015.

WINTNER, A. The analytical foundations of celestial mechanics, univ. Press, Princeton, 1941.

YAKUBOVICH, V. A.; STARZHINSKII, V. M. *Linear differential equations with periodic coefficients*. [S.l.]: Krieger Pub Co, 1975. v. 1.