



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

FRANCISCO CAROL BONFIM LEAL

**ESTUDOS DE PROCESSOS DE DESEMPACOTAMENTO
DE ESTRUTURAS HIERÁRQUICAS**

Recife
2020

FRANCISCO CAROL BONFIM LEAL

**ESTUDOS DE PROCESSOS DE DESEMPACOTAMENTO
DE ESTRUTURAS HIERÁRQUICAS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Física.

Área de Concentração: Física Teórica e Computacional

Orientador: Prof. Marcelo Andrade de Filgueiras Gomes

Recife
2020

Catálogo na fonte
Bibliotecária Mariana de Souza Alves CRB4-2105

L435e Leal, Francisco Carol Bonfim
Estudos de processos de desempacotamento de estruturas hierárquicas /
Francisco Carol Bonfim Leal. – 2020.
95f.: il., fig.

Orientador: Marcelo Andrade de Filgueiras Gomes.
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Física, Recife,
2020.

Inclui referências e apêndices.

1. Física Teórica e Computacional. 2. Amassamento. 3. Estruturas hierárquicas.
4. Fractais. I. Gomes, Marcelo Andrade de Filgueiras. (orientador) II. Título.

530.1

CDD (22. ed.)

UFPE-CCEN 2020-204

FRANCISCO CAROL BONFIM LEAL

**ESTUDOS DE PROCESSOS DE DESEMPACOTAMENTO
DE ESTRUTURAS HIERÁRQUICAS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Física.

Aprovada em: 26/11/2020.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Paulo Roberto de Araujo Campos
Examinador Interno
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Eduardo Padrón Hernández
Examinador Interno
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Flávio Menezes de Aguiar
Examinador Externo
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Sérgio Galvão Coutinho
Examinador Externo
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Wilson Barros Junior
Examinador Externo
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. André de Pinho Vieira
Examinador Externo
Universidade de São Paulo

Prof. Fernando Jorge Sampaio Moraes
Examinador Externo
Universidade Federal Rural de Pernambuco

*A Quintino Leal Neto e
Maria do Carmo de Sousa Bonfim Leal.*

AGRADECIMENTOS

Sou grato ao professor Marcelo Gomes pela orientação e pela disposição. Contudo não somente pela habilidade no desempenho da atividade docente mas principalmente pelo constante exercício da reflexão epistemológica sobre física, política, ecologia e qualquer outro tema. Entre seus vários ensinamentos, o que mais me marcou dizia que "definir é limitar", me levando a sempre meditar sobre os limites das nossas certezas. Eu espero refletir e exercitar essa humildade intelectual por toda minha vida.

Pai, desde criança você cultivou em mim um apreço pelo conhecimento. Eu fazia pergunta sobre tudo e o seu olhar sereno e empolgado me dizia claramente que minha curiosidade era importante e estimulante. Até mesmo quando suas respostas não tinha o menor cabimento. O senhor foi meu primeiro professor de matemática e acredito que o melhor da minha infância. Agradeço pela paciência, cuidado e carinho!

Mãe, eu agradeço pela sua paciência e carinho. Eu nunca escolhi um caminho "comum", contudo a senhora sempre aprendeu a entender as minhas escolhas. Obrigado pelo cuidado e atenção!

Quizinho (desculpa usar seu apelido), desde que eu nasci meu melhor amigo esteve ao meu lado. Eu sempre pensei que isso é muito natural, mas hoje vejo o quanto isso é raro e especial. Agradeço a você e a Nathalya por sempre me ajudarem e acolherem em sua casa. Quando os prazos estavam apertados, eu sabia que podia contar com vocês.

Agradeço coletivamente a todos da minha família pelo apoio, carinho e paciência. Em especial aos melhores sobrinhos do mundo. Sem vocês seria bem mais difícil.

Nem mesmo o distanciamento no tempo e no espaço conseguiram me fazer esquecer de sua ajuda, entusiasmo e tutoria. Tiago Sobral você sempre será um exemplo com pessoa e profissional.

Como um tributo ao conhecimento, eu faço uma menção honrosa às noites de sexta-feira do apartamento 101 do Ed. Comodoro e aos seus participantes: Leonardo, Natália, Ana e aos outros participantes, que pelo seus cuidados especiais para comigo prefiro descrevê-los individualmente. Entre as discussões de entropia sobre os jogos de cartas e as playlists de sertanejo do Leo, nós fomos felizes!

Ao André e Azadeh deixo o meu agradecimento pela atenção sempre presente. Como colegas mais experientes você sempre me auxiliaram. Muito obrigado!

Tiago Saraiva, obrigado por sempre me auxiliar em todos os aspectos, sem dúvida você foi um oásis nessa jornada tão difícil. Sou extremamente grato!

Raoni, dividindo nossa paixão pelo forró e pela física eu tive o privilégio de lhe

acompanhar neste momento, sou grato por nossa amizade e ajuda.

A Alison por ser um ótimo amigo que sempre auxiliou com equipamentos para meus experimentos e sempre dividiu as tristezas dessa empreitada.

A Toin meu grande amigo, por sempre estimular boas discussões e viagens maravilhosas.

A Shayane, o Crato sempre fará parte de meu coração. Aos amigos do doutorado: Jesus, Winnie, Leandro, Ferreira, Joas, Tiago Anselmo, Ammis, Guillerme, Fran, Márcio, Pedro Heades, Ferreira e Joás obrigado pela parceria e pelos dias compartilhados.

A vida extra doutorado em Recife. Obrigado Adriana, Heritier, Marcela, Flamel, Claudia, Givanildo, Fernando e Wine. Em especial ao apoio de Raíssa.

Foi um prazer dividir o laboratório com os companheiros Renatinha, Vitor H. e Tawan.

Aos amigos de fé. Obrigado Phablo, Ariel, Delano, Maiara, Hemilly, Débora A., Débora L., Cássio, Tati, Pedro, Wesley, Adner, Dudu, Creuza, Nanda, Bruna P., Joana, Nay, Jota, Juliane, Bento, Ana Elisie, Carol, Bell, Araci, Paulo e Marcos. Obrigado pelas orações e apoio!

À Mael por partilhar dessa jornada comigo como colega de laboratório, guru, torcedor do Sport, manifestante político e amigo. Obrigado por me impulsionar e estar ao meu lado nos dias bons e maus.

As melhores medidas experimentais foram aquelas acompanhadas com uma boa trilha sonora. Obrigado Validuaté, Academia da Berlinda e Forró na Caixa.

A Alexandra por sempre me prestar um maravilhoso atendimento e me auxiliar nas partes burocráticas.

Aos funcionários do Departamento de Física: João e Valdomiro (da mecânica), Daniel (da eletrônica) e Francisco (da secretaria e almoxarifado), pela maravilhosa prestação do serviço público.

Ao Professor Daniel Gomes pelo apoio técnico e pela ajuda sempre com leveza.

Ao Professor Sérgio Coutinho pelo conhecimento compartilhado mas sobretudo pelas conversas.

Sou grato à CAPES e ao CNPq pelo fomento.

RESUMO

Folhas de papel amassadas são exemplos de estruturas hierárquicas que exibem muitas propriedades anômalas e são consideradas paradigmas dos sistemas complexos. Nos últimos anos, a área de estudos de superfícies amassadas têm apresentado enorme atividade com a produção de muitos resultados teóricos e experimentais, além de numerosas aplicações em tecnologias avançadas. Nesta Tese nós estudamos aspectos teóricos e experimentais de superfícies delgadas amassadas observando as relações entre os processos de empacotamento e de desempacotamento. No primeiro experimento relatamos evidências de que o desempacotamento de uma superfície enrugada é controlado assintoticamente por uma relação strain-strain semelhante em forma à lei de escala de Richardson que descreve a difusão de partículas em um fluido turbulento. Essa relação foi encontrada por meio de filmes que registraram a expansão da deformação transversal de bolas de papel amassadas em relação a um eixo de puxamento. A análise das fotografias de dilatação transversa também mostrou aspectos semelhantes aos encontrados nas estatísticas de caminhada de Lévy. No segundo experimento nós relatamos a relação stress-strain no desdobramento de superfícies amassadas. Mostramos que a tensão de tração possui uma mudança de um regime de Hookeano linear para uma lei de escala sublinear com um expoente de $0,65 \pm 0,03$, que é identificado com o expoente de Hurst das folhas amassadas. As flutuações de tensão no processo dinâmico de desempacotamento são estudadas, a distribuição estatística dos picos de força é analisada e é mostrado como o desempacotamento de folhas amassadas é guiado por interações de longa distância. No terceiro experimento investigamos a estrutura física da folha amassada durante o processo de esticamento e verificamos uma coexistência de fases, que é originada da dinâmica de desdobramento ordenada pela hierarquia das dobras. No quarto experimento, nós estudamos a compressão de folhas de papel através de diferentes abordagens e obtivemos o trabalho para amassar uma folha com tamanho L , bem como, o módulo de Young de uma bola de papel, entre outros.

Palavras-chave: Amassamento. Estruturas hierárquicas. Fractais. Processos de desempacotamento. Superfícies.

ABSTRACT

Crumpled sheets of paper are examples of hierarchical structures that exhibit many anomalous properties and are considered paradigms of complex systems. In recent years, the area of studies of crumpled surfaces has shown enormous activity with the production of many theoretical and experimental results, in addition to numerous applications in advanced technologies. In this Thesis we study theoretical and experimental aspects of thin crumpled surfaces, observing the relationships between the packaging and unpacking processes. In the first experiment, we reported evidence that the unpacking of a crumpled surface is controlled asymptotically by a strain-strain relationship similar in form to Richardson's scale law which describes the diffusion of particles in a turbulent fluid. This relationship was found through films that recorded the expansion of the transversal deformation of crumpled paper balls in relation to a pulling axis. The analysis of the transverse dilation photographs also showed aspects similar to those found in the Lévy's walking statistics. In the second experiment we report the stress-strain relationship in the unfolding of crumpled surfaces. We show that the tensile stress has a change from a linear Hookean regime to a sublinear scale law with an exponent of 0.65 ± 0.03 , which is identified with the Hurst exponent of the crumpled sheets. Stress fluctuations in the dynamic unpacking process are studied, the statistical distribution of peak force is analyzed and it is shown how the unpacking of crumpled sheets is guided by long distance interactions. In the third experiment, we investigated the physical structure of the crumpled sheet during the stretching process and verified a coexistence of phases, which originates from the unfolding dynamics ordered by the fold hierarchy. In the fourth experiment, we studied the compression of sheets of paper using different approaches and got the work to crumpling a L size sheet, as well as the Young's modulus of a paper ball, among others.

Keywords: Crumpling. Hierarchical structures. Fractals. Unpacking processes. Surfaces.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	OBJETIVO	12
1.2	JUSTIFICATIVA	12
1.3	MODELO COM FORÇAS DE CONFINAMENTO E DE AUTO-EXCLUSÃO PARA DESCREVER PROCESSOS DE AMASSAMENTO.	13
2	EVOLUÇÃO DO ESTUDO DE PROCESSOS DE AMASSAMENTO	16
2.1	GEOMETRIA DE UMA FOLHA DELGADA AMASSADA	16
2.1.1	Dimensão fractal de superfícies amassadas	16
2.1.2	Rugosidade de uma superfície amassada - Expoente de Hurst	18
2.1.3	Hierarquia de dobras	20
2.2	MODELOS DE COMPRESSÃO DE FOLHAS FINAS	22
2.2.1	Modelo de campo médio para amassamento de folhas finas	22
2.2.2	Modelo de dobras regulares	26
2.3	AMASSAMENTO DE FIOS	28
2.3.1	Empacotamento de fios em 3D	29
2.3.2	Empacotamento de fios em 2D	29
3	RELAÇÃO STRESS-STRAIN NO DESDOBRAMENTO DE FOLHAS AMAS- SADAS	33
3.1	BREVE HISTÓRICO DO ESTUDO DE PROPRIEDADES ELÁSTICAS DE SISTEMAS AMASSADOS	34
3.2	DETALHES EXPERIMENTAIS	35
3.3	RESULTADOS E DISCUSSÕES	37
3.3.1	Análise das características da curva stress-strain	37
3.3.2	Relação entre fase empacotada e fase desempacotada	43
3.4	COMPRESSÃO DE FOLHAS AMASSADAS	47
3.4.1	Modelo Termodinâmico de ordem zero da Compressão da Bola de Papel	47
3.4.2	Compressão Axial de Bolas de Papel Amassado	49
4	RELAÇÃO STRAIN-STRAIN NO DESDOBRAMENTO DE FOLHAS FI- NAS AMASSADAS	52
4.1	DETALHES EXPERIMENTAIS	52
4.1.1	Medidas da expansão lateral	53
4.1.2	Descrição do contorno	53

4.2	RESULTADOS E DISCUSSÃO	55
4.2.1	Análise qualitativa dos contornos	55
4.2.2	Análise quantitativa de $\bar{\rho}$	57
4.2.3	Análise quantitativa de ρ'	58
4.2.4	A lei de escala temporal para o strain horizontal	59
5	MODELO HIERÁRQUICO DO DESEMPACOTAMENTO DE FOLHAS AMASSADAS	61
5.1	ANÁLISE DA FLUTUAÇÃO DA FORÇA DE ESTICAMENTO NO DESEMPACOTAMENTO DE UMA FOLHA AMASSADA.	61
5.1.1	Distribuição do comprimento médio local das facetas em uma folha amassada.	62
5.1.2	Comprimento médio global das facetas de uma folha amassada.	63
5.2	SIMETRIA DE DESDOBRAMENTO E COEXISTÊNCIA DE FASES	65
6	CONCLUSÕES	70
	REFERÊNCIAS	73
	APÊNDICE A – CÓDIGO DO PROGRAMA RESPONSÁVEL PELA ANÁLISE DE IMAGEM	80

1 INTRODUÇÃO

“All models are wrong, but some are useful”. (George E. P. Box)

1.1 OBJETIVO

Esta tese tem como tema o estudo de aspectos teóricos e experimentais de superfícies delgadas amassadas, estruturas que são consideradas paradigmas dos sistemas complexos (PIETRONERO, 2008), como os agregados limitados por difusão (WITTEN; SANDER, 1981), a distribuição de matéria em larga escala no universo (PIETRONERO, 1987; LI; WHITE, 2009) e as redes complexas (BOCCALETTI et al., 2006). Em particular, estaremos interessados nas relações entre os processos de empacotamento e de desempacotamento¹ controlado desses sistemas, como delineado sobretudo nos capítulos 3 a 5 deste trabalho. Além dos aspectos teóricos e experimentais, as superfícies amassadas têm apresentado nos últimos anos múltiplas aplicações ligadas a tecnologias avançadas (WEN et al., 2012; DENG; BERRY, 2016; MAO et al., 2012).

1.2 JUSTIFICATIVA

Apesar da importância do estudo de superfícies amassadas estar razoavelmente implícito no parágrafo anterior, convém analisar com um pouco mais de detalhe essa importância da qual falamos, sobretudo no que diz respeito ao desempacotamento de estruturas hierárquicas complexas com muitas dobras e, para tanto, nada melhor do que voltarmos por um momento a nossa atenção para os sistemas biológicos, seguindo de perto o conselho cinquentenário de Stanislaw Ulam a Hans Frauenfelder: “Ask not what Physics can do for biology, ask what biology can do for physics” (FRAUENFELDER, 2014). Inicialmente, o leitor atento pode refletir e chegar, sem maiores problemas, à conclusão de que o empacotamento de uma molécula de DNA humano (comprimento $L \approx 2$ m, diâmetro da seção transversal da hélice dupla $d \approx 2$ nm) deve ser muito sofisticado para que tal estrutura dobrada possa ser acomodada dentro do núcleo de uma célula humana, cujo diâmetro é da ordem de $\Delta \approx 10 \mu\text{m}$ (HANCOCK, 2014). Há quase sete décadas sabemos, mas ainda assim temos muito a aprender, que os ácidos nucleicos e as proteínas apresentam diversos graus de estruturas integradas em hierarquias (NELSON; COX, 2017). Os ácidos nucleicos, à parte as suas estruturas hierárquicas e dobras, apresentam em seus estados condensados nos cromossomas dimensões fractais entre 2,4 e 2,5, próximas às das superfícies amassadas (BANCAUD et al., 2012), mesmo levando-se em consideração que essas macromoléculas são estruturas com uma topologia uni-dimensional, ao invés de bi-dimensional. Por outro lado, sabemos

¹ Nesta tese usamos desdobraimento, desempacotamento, desamassamento como sinônimos.

que sistemas amassados com a topologia da linha, como arames injetados em cavidades de diversos tipos, ou simplesmente amassados manualmente, apresentam dimensões fractais próximas às das superfícies amassadas (GOMES et al., 2008a; HOLANDA; GOMES, 2016).

Nos momentos da replicação, bem como nos momentos da síntese de proteínas, os DNAs ou RNAs precisam ser total ou parcialmente desempacotados. A biomassa total da Terra é estimada em 550-560 bilhões de toneladas, enquanto só a biomassa de procariontes (bactérias) é estimada em 1×10^{31} células (bactérias) (BAR-ON; PHILLIPS; MILO, 2018). Se consideramos que cada uma dessas bactérias executa por dia (86.400 segundos) apenas um estiramento/desempacotamento de DNA, chegaríamos à exorbitante frequência de $f = 1 \times 10^{31} \div 86.400 \approx 1 \times 10^{26}$ desempacotamentos/s. Levando-se em consideração toda a biomassa terrestre, com a sua complexidade dinâmica inerente, devemos admitir que a frequência diária total de desempacotamentos de estruturas complexas hierárquicas como o DNA ocorre a uma taxa $F \gg 1 \times 10^{26} \text{ s}^{-1}$. Tal frequência certamente corrobora a importância que o estudo de processos de desempacotamento deve ter para a física, a química, a biologia e diversos tipos de tecnologias existentes e ainda por serem desenvolvidas.

1.3 MODELO COM FORÇAS DE CONFINAMENTO E DE AUTO-EXCLUSÃO PARA DES-CREVER PROCESSOS DE AMASSAMENTO.

O modelo básico que permite obter uma compreensão das propriedades globais envolvidas na formação das estruturas de superfícies finas amassadas, sistemas com a topologia do plano, parte da intervenção de dois tipos de forças antagônicas e inspira-se, de certa forma, nos modelos de Flory-de Gennes que descrevem as propriedades globais de equilíbrio de polímeros não-ramificados, sistemas com a topologia da linha, em um bom solvente (GENNES, 1979). Para simular as forças externas que tendem a confinar a folha delgada sendo amassada, quer as primeiras estejam associadas às mãos, a paredes móveis ou outros dispositivos mecânicos, hidráulicos, eletro-mecânicos, entre outros, postula-se a existência de um potencial confinante simples como $U(R) = AR^n$, onde A é a constante de acoplamento, R é o tamanho da superfície estendida no espaço d -dimensional, avaliado por algum algoritmo tipo raio de giro e $n > 0$ é a outra constante. A segunda força interveniente é, naturalmente, uma força de auto-exclusão, a qual, na tradição dos modelos de campo médio para polímeros é, a princípio, associada a um potencial de dois corpos e tem a forma $V(R) = B\rho^2v$, onde v é o volume de confinamento em d dimensões, igual a $\gamma(d)R^d$, onde $\gamma(d)$ é o volume da esfera d -dimensional de raio unitário e ρ é a densidade de massa=massa da superfície/volume = $\sigma L^2/(\gamma(d)R^d)$, com B sendo a constante de acoplamento e σ sendo a densidade superficial de massa (Figura 1). Composto essas duas partes chegamos à energia total $E(R)$, cuja minimização nos

leva à lei de escala massa-tamanho

$$M = \sigma L^2 = KR^D, \quad (1.1)$$

onde $K = \sqrt{\gamma(d)nA/dB}$ e $D = (d + n)/2$ (GOMES, 1987a). Conclui-se, portanto, que para o espaço físico usual ($d = 3$) e $n = 2$ este modelo prevê a dimensão fractal correta da superfície amassada, como encontrada experimentalmente, $D = 2,5$ (GOMES, 1987b). Deve-se notar ainda que, significativamente, a variação das constantes de acoplamento A e B não alteram o expoente D , embora afetem K .

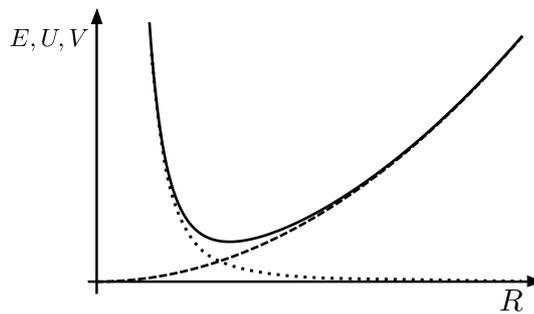


Figura 1 – Diagrama esquemático da energia potencial de confinamento, $U = AR^n$, $n > 0$ (linha tracejada), da energia de auto-exclusão $V(R)$ (linha pontilhada) e da energia total, E (linha contínua), como aparecem no modelo da seção 1.3. Veja texto para detalhes. **Fonte: Autor.**

Estes resultados são muito curiosos pois, como veremos nos capítulos 3 e 6, ocorre uma grande dissipação de energia na formação de uma superfície amassada e esta não está incluída neste modelo. Ademais, $n = 2$ corresponde ao lendário potencial Hookeano, um dos poucos potenciais com solução analítica na mecânica quântica, com a sua importância na teoria da radiação do corpo negro e na teoria da radiação, em geral, e nas propriedades elásticas da matéria condensada. Como se isso não bastasse, o potencial Hookeano é remanescente do termo entrópico, $-TS$, nas energias livres, no entorno do equilíbrio, como as que são usadas para descrever as propriedades conformacionais básicas de polímeros no equilíbrio, com $A \leftrightarrow (-T/2)(\partial^2 S/\partial R^2)_{eq} > 0$, onde a derivada segunda da entropia (S) é calculada no equilíbrio e T é a temperatura absoluta de equilíbrio. Ou seja, nesse modelo de não-equilíbrio do amassamento de superfícies delgadas, o papel da entropia é desempenhado pelo potencial confinante $U = AR^2$. Para os nossos fins vale notar, ainda, que a equação 1.1 contém implicitamente outro tipo de lei de escala muito importante para esta tese (Capítulos 3-6), a saber, a lei que relaciona a escala de comprimento complexo, literalmente o comprimento de múltiplas dobras (complexo = muitas dobras, da raiz indo-européia “plek”, dobra), R , com o comprimento máximo desdobrado, $L : R \sim L^{(2/D)}$.

No próximo capítulo apresentamos alguns trabalhos importantes para as propriedades das superfícies amassadas examinadas na presente tese, bem como, enfatizamos

resultados que foram utilizados literalmente em nossos modelos. No capítulo 3 nós examinamos a força para desempacotar folhas amassadas e fazemos uma análise da estrutura da folha amassada durante o esticamento. Ainda neste capítulo, nós incluímos resultados experimentais, de uma outra linha de pesquisa, que examina as propriedades da compressão de folhas de papel. No capítulo 4 investigamos a relação strain-strain no desempacotamento de uma folha amassada, analisando imagens detalhadas do processo de esticamento. No capítulo 5 discutimos alguns aspectos dos experimentos da relação stress-strain² do desempacotamento de folhas amassadas, em conjunto com os resultados do exame da estrutura da folha amassada durante o esticamento. Finalizamos, no capítulo 6, resumindo as nossas conclusões.

² Nota ao leitor: ao invés de tensão/deformação preferimos stress-strain, ambas dicionarizadas na língua portuguesa, face ao uso universal nos últimos anos.

2 EVOLUÇÃO DO ESTUDO DE PROCESSOS DE AMASSAMENTO

Neste capítulo apresentaremos resultados escolhidos dentro da vasta literatura referente ao fenômeno do amassamento e do empacotamento. Nosso principal intento é discutir trabalhos que abordem alguns conceitos que nos ajudaram a definir nossos principais objetivos. Para esse propósito organizamos o capítulo em três seções:

- *Geometria de uma folha delgada amassada* trata de trabalhos nos quais as principais contribuições abordam a análise estatística de características estruturais da folha empacotada.
- *Modelos de compressão sobre folhas finas* apresenta artigos que são conhecidos na literatura por analisarem a evolução do processo de compressão da folha até o estado amassado.
- *Amassamento de fio* aborda alguns resultados sobre empacotamento de fios em cavidades bi e tri-dimensionais e relaciona esses resultados com o amassamento de superfícies.

Todos os métodos e resultados descritos neste capítulo serão utilizados na elaboração dos próximos capítulos. Nossa expectativa é que este resumo encoraje a leitura dos textos originais e motive a investigação dos resultados encontrados para esses sistemas físicos.

2.1 GEOMETRIA DE UMA FOLHA DELGADA AMASSADA

2.1.1 Dimensão fractal de superfícies amassadas

Os primeiros trabalhos que abordaram o amassamento de folhas finas confinadas num pequeno volume foram feitos no Departamento de Física da UFPE (GOMES, 1987b; GOMES, 1987a), logo após Benoît Mandelbrot publicar "The Fractal Geometry of Nature" (MANDELBROT, 1983). Este experimento descreve a dimensão fractal associada a um processo robusto em que folhas delgadas de diversos tipos eram comprimidas no formato de bolas, através do método mal definido geralmente rotulado de "amassamento". A metodologia se resume em criar um gráfico Log-Log dos diâmetros médios de bolas de papel em função das respectivas massas, empacotando folhas com sete medidas de massa diferentes $M = 1, 2, 4, \dots, 64$, ou seja, folhas com sete tamanhos diferentes, veja Fig. 2-a e b. Cada bola de papel foi medida em sete direções diferentes tomadas aleatoriamente e

através delas calculado um diâmetro médio típico, $2R$. Gomes encontrou uma relação de escala entre o diâmetro e a massa na forma

$$2R \sim M^{(1/D)}. \quad (2.1)$$

onde $D = 2,51 \pm 0,19$ é interpretada como a dimensão fractal das bolas. O autor se preocupou em comprovar exaustivamente a legitimidade da natureza fractal das folhas amassadas, fazendo 4361 medidas e 89 experimentos, cuidado compreensível para a época pois a geometria fractal era muito recente, o que tornou este trabalho um clássico da literatura de amassamento, como também, de sistemas complexos.

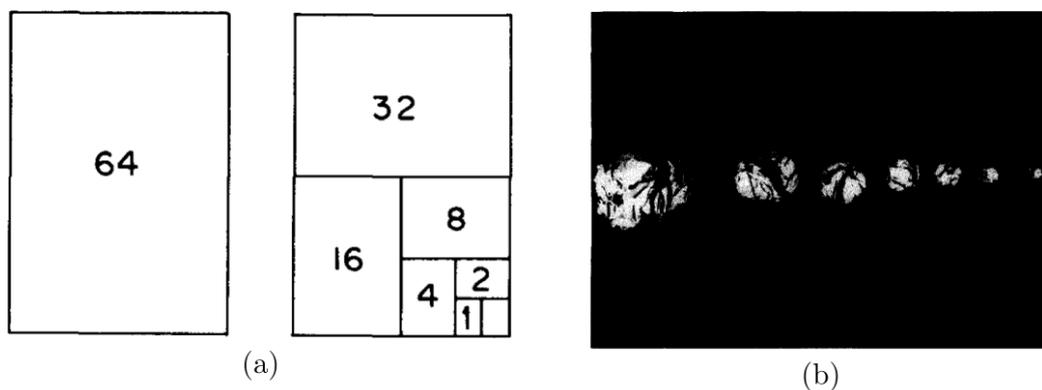


Figura 2 – a) Esquema das folhas com suas proporções relativas. b) Típica configuração de bolas de papel amassado com massas 1, 2, 4,...,64. **Fonte:** (GOMES, 1987b)

A dimensão fractal D da bola de papel deve satisfazer a condição descrita por Mandelbrot (MANDELBROT, 1983), $d \geq D \geq D_T$, onde d é a dimensão do espaço onde o fractal está mergulhado e D_T é a dimensão topológica do fractal. No caso da bola de papel $d = 3$ e $D_T = 2$, então $D = 2,5$ cumpre essa exigência. A folha amassada também foi descrita por Gomes como uma superfície auto-excludente, que podia se enquadrar numa generalização bi-dimensional do modelo de Flory para polímeros não ramificados em um bom solvente (GENNES, 1979). Neste caso espera-se que $R \sim L^\nu$, onde $\nu = 4/(d + 2)$ e L é o tamanho da folha satisfazendo $L^2 \sim M$. Segue daí que $M \sim R^D$, com $D = (d + 2)/2 = 2,5$, como foi aferido experimentalmente. Isto tudo sugere que folhas amassadas pertencem a uma classe de universalidade. Nas décadas subsequentes muitos trabalhos de sistemas diversos que envolviam o confinamento de membranas encontraram dimensão fractal $D \approx 5/2$, dentre os quais podemos citar: superfície cerebral (MAJUMDAR; PRASAD, 1988) e amassamento de uma nata de leite (GOMES et al., 2007).

2.1.2 Rugosidade de uma superfície amassada - Expoente de Hurst

Em 1989, Gomes, Jyh, Ren, Rodrigues e Furtado investigaram a rugosidade da superfície (σ) de folhas de alumínio amassadas (GOMES et al., 1989). O método utilizado para medir o diâmetro, $2R$, das superfícies amassadas (SA) foi o mesmo empregado na referência (GOMES, 1987b), descrita anteriormente. Eles definiram σ como a raiz quadrada da variância

$$(1/N) \sum_{i=1}^N (2R_i - 2R)^2 \quad (2.2)$$

onde $2R_i$ simboliza um valor particular do diâmetro (isto é, uma simples medida) da SA. As SA's apresentaram uma relação de escala para a rugosidade da superfície, a saber $\sigma \sim L^H$, com $H = 0,6 \pm 0,15$. A rugosidade da superfície é essencialmente uma função de correlação (FEDER, 1988) por isso é esperado que escale com L como

$$\sigma \sim L^{3-D}. \quad (2.3)$$

O valor de D encontrado através da rugosidade da SA é $D = 2,4 \pm 0,15$ que dentro das barras de erro é um resultado semelhante ao estimado em (GOMES, 1987b).

A lei de escala da eq. 2.3 é encontrada a partir de alguns resultados; em primeiro lugar, podemos expressar a variância através da transformada de Fourier das ondulações da superfície

$$\sigma^2 = \int_{f'}^{\infty} G(f) df. \quad (2.4)$$

onde $G(f)$ é a função de densidade espectral e f é a frequência relativa ao comprimento de onda λ das ondulações na superfície da SA. Posteriormente, deve-se notar que o tamanho L do sistema físico é finito, conseqüentemente a frequência espectral mínima será $f' = 1/L$. Em terceiro lugar, superfícies fractais estatisticamente isotrópicas têm densidade espectral da forma $G(f) \sim f^{-2H-1}$ (SAYLES; THOMAS, 1978). O último resultado descreve o expoente H como a codimensão fractal (FEDER, 1988; MANDELBROT, 1983), ou seja

$$H = 3 - D. \quad (2.5)$$

No experimento ilustrado na Fig. 3 uma bola de papel foi desdobrada com o intuito de mostrar as deformações plásticas feitas pelo processo de amassamento. Então, sua superfície foi escaneada por uma folha de laser para reconstruí-la digitalmente através das coordenadas da superfície. Em 2005, Blair e Kudroli obtiveram diretamente a curvatura local da folha, bem como as propriedades estatísticas das cristas. Com a

posse dessas medidas foi possível determinar o expoente de Hurst (H) da superfície amassada.

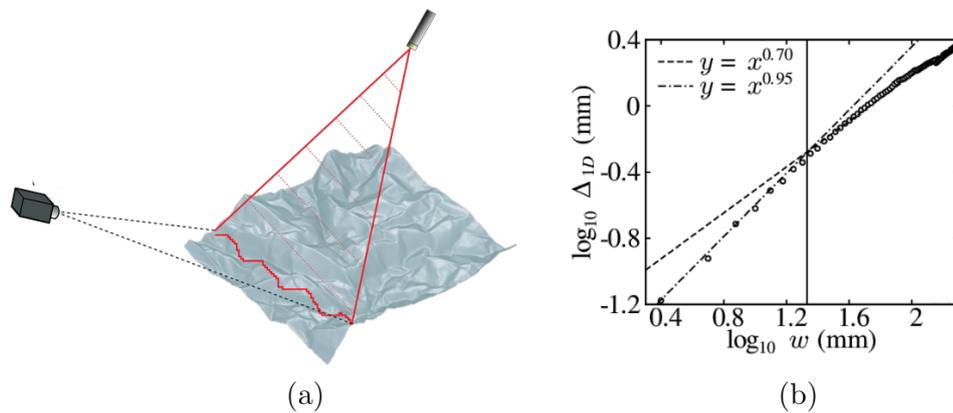


Figura 3 – a) Diagrama esquemático do aparelho experimental que faz a medida de topografia auxiliada por laser. b) Gráfico de Hurst das seções transversais obtidas na varredura de um papel amassado. O ajuste de mínimos quadrados fornece um expoente Hurst $H = 0,70$ para intervalos escala maiores. Para w pequeno o expoente ($H = 1,0$). A linha vertical marca o ponto de cut off $\log_{10} w_{cutoff} \approx 1,3$ mm entre as duas escalas. **Fonte:** (BLAIR; KUDROLLI, 2005)

Para medir H eles recorreram a uma variação da análise de Hurst, que pode ser organizada nas seguintes etapas: (1°) Cada linha do scan foi dividida em *bins*, que não se sobrepunham, com tamanho w . Então, eles registram a diferença máxima entre as elevações de cada bin (Δ) e calcularam o valor médio de Δ para as *bins* com tamanho w . (2°) Posteriormente eles aumentaram o valor de w e repetiram a primeira etapa. (3°) Eles repetiram a segunda etapa varias vezes com a finalidade de construir o conjunto coordenado $(\bar{\Delta}, w)$. Na 4° e ultima etapa, eles repetiram todo este processo em outras linhas do scan e construíram uma curva média de Δ em função de w , veja o gráfico da Fig. 3. Através do ajuste

$$\log_{10}(\Delta) \propto H \log_{10}(w) \quad (2.6)$$

podemos encontrar o expoente de Hurst. O gráfico da análise de Hurst unidimensional, veja a Fig. 3-b, mostra uma dupla lei de potência. Para uma escala menor que o comprimento característico das cristas, $H \approx 1,0$, indicando uma geometria planar. Para intervalos maiores $H \approx 0,70$. Este expoente mostra que os relevos encontrados nas superfícies amassadas não são puramente aleatórios, mas possuem memória para distâncias maiores que o comprimento médio da crista. A linha vertical no gráfico da Fig. 3-b enfatiza o ponto de corte dos dois regimes e tem valor para $w \approx 19,95$ mm. Observe que o valor do expoente de Hurst encontrado neste trabalho, para grandes escalas, é próximo do valor descrito na ref. (GOMES et al., 1989).

Blair e Kudroli também descreveram a função de distribuição de tamanhos das crista. Seu melhor ajuste está na forma

$$\rho(\ell) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma\ell} e^{-(\log \ell - \log \bar{\ell})^2 / \sigma^2}, \quad (2.7)$$

uma distribuição log-normal multiplicada por um fator $1/\ell$.

2.1.3 Hierarquia de dobras

Em um trabalho anterior, Kramer et al. (KRAMER; LOBKOVSKY, 1996) utilizaram gravadores de alta-resolução para estudar os som de estalidos que uma folha de Mylar produzia quando era amassada e desamassada sucessivas vezes. Podemos ver na Fig. 4-a uma gravação de 1 segundo do som produzido neste processo. A amplitude $i(t)$ do estalo é proporcional a pressão. Então a energia de cada clique foi definida com $E_{clique} \sim i^2(t)$.

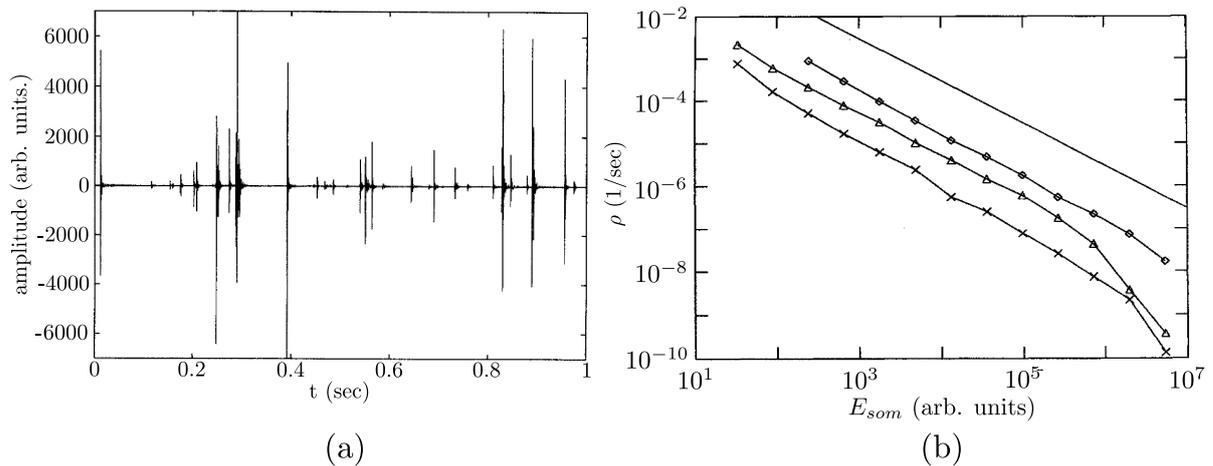


Figura 4 – (a) Amplitude vs. tempo para 1 segundo de gravação sonora do amassamento de uma folha. (b) Gráfico da função de distribuição da energia dos estalos para $\epsilon = 3,0$ (\diamond); $5,0$ (Δ) e $10,0$ (\times). A linha reta é um guia para os olhos que tem comportamento de lei de potência com expoente -1 . **Fonte:** (KRAMER; LOBKOVSKY, 1996)

O som emitido no amassamento é uma superposição de vários estalos, então a mecânica por trás do perfil registrado no gráfico da Fig. 4-a está relacionada a causa do estalo. O estalo por sua vez, é emitido durante uma mudança súbita na estrutura rugosa da folha amassada. Esta mudança está localizada numa região de tamanho ξ que esta relacionada a flambagem de uma simples faceta delimitada por uma crista. Quanto maior o tamanho do estalo maior a escala da rugosidade que esta sofrendo flambagem. Então, este trabalho sugere que a função de distribuição da energia dos cliques caracteriza a própria rede de cristas. Na Fig. 4-b nós vemos que a distribuição da energia do clique mostra uma lei de potência $\rho(E) \sim E^{-\nu}$. Através de ajustes de mínimos quadrados encontraram $\nu = 1,0 \pm 0,1$. Observe que o expoente ν mostra que $\rho(E)$ tem

o mesmo comportamento descrito pelo prefator $1/\ell$ da eq. 2.7 confirmando a relação entre E_{clique} e o comprimento das cristas. Este experimento também mostra que a rede de dobras não é uniforme, ao contrario, há uma ampla distribuição dos comprimentos das cristas.



Figura 5 – Esquema que mostra o mecanismo de fragmentação dos tamanhos das cristas que gera uma distribuição log normal e elucida a hierarquia entre cristas. **Fonte:** (WOOD, 2002)

A estrutura da rede de cristas possui uma ordenação hierárquica simples. Podemos perceber isso pois ela é composta de grandes cristas que são aleatoriamente e desigualmente quebradas em cristas menores. Este processo produz um conjunto de comprimentos fragmentados. Em 2002, A.J. Wood (WOOD, 2002) mostrou um mecanismo hierárquico simples e pragmático que produzia essa estrutura fragmentada. Ele considerou a quebra irregular e repetida de uma crista com um comprimento inicial L . Como exemplo, ele supôs dividir a crista em frações de um terço e dois terços, como mostra a Fig. 5, k vezes. Então, qualquer um dos 2^k fragmentos terão seu comprimento descrito pela função ℓ , dada por

$$\ell = L \overbrace{\left\{ \begin{matrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{matrix} \right\} \times \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{matrix} \right\} \times \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{matrix} \right\} \times \dots \times \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{matrix} \right\}}^{k \text{ fatores}}$$

escolha um
escolha um
escolha um
escolha um

que é uma multiplicação de L vezes k fatores aleatórios $\{\frac{1}{3} \frac{2}{3}\}$. Cada vez que multiplicamos $1/3$ ou $2/3$ significa que a crista foi partida mais uma vez. Então, $\log \ell$ é a soma de termos aleatórios. Através de uma substituição $u \equiv \log \ell$ nós transformamos a fragmentação de uma crista num caminhante aleatório, onde u é o comprimento de uma caminhada com k passos. Logo, a função de densidade de probabilidade de u será

$$\frac{dP(u)}{du} = \frac{1}{\sqrt{k}\sigma} e^{-(u-\bar{u})^2/k\sigma^2}.$$

Substituindo novamente $u \equiv \log \ell$ nós encontraremos a função de densidade de probabilidade com prefator $1/\ell$ da eq. 2.7.

2.2 MODELOS DE COMPRESSÃO DE FOLHAS FINAS

2.2.1 Modelo de campo médio para amassamento de folhas finas

Dois trabalhos fizeram a simulação do empacotamento de folhas confinadas em uma esfera envolvente tridimensional (VLIEGENTHART; GOMPPER, 2006; TALLINEN; ÅSTRÖM; TIMONEN, 2009). Tallinen et al. compararam os resultados da compressão de folhas elásticas e elasto-plásticas, enquanto Vliegenthart et al. compararam os resultados de folhas elásticas auto-excludentes e folhas elásticas fantasmas. Uma folha fantasma é uma que pode se interpenetrar, pois não existe auto-exclusão. ¹ A Fig. 6 tem um esquema simplificado de como foi simulado a compactação dos dois processos. Inicialmente a esfera tem o mesmo raio Φ_0 que a folha ². Conforme uma força radial de compressão f cresce o raio de compressão Φ , do volume esférico onde a folha é empacotada, diminuía.

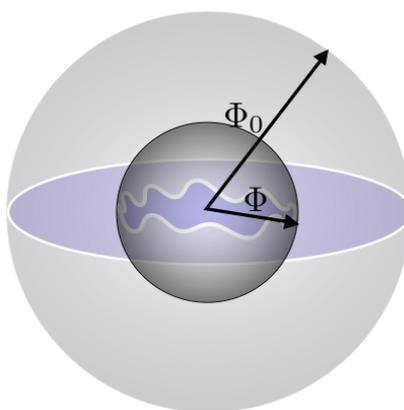


Figura 6 – A esfera confinante tem inicialmente o mesmo raio Φ_0 que a folha. Conforme uma força radial de compressão f cresce o raio de compressão Φ , do volume esférico onde a folha é empacotada, diminuía. **Fonte:** Inspirado no trabalho de (VLIEGENTHART; GOMPPER, 2006)

Os resultados das simulações mostraram que conforme o processo de compressão evolui a folha elástica passava por três regimes (VLIEGENTHART; GOMPPER, 2006; TALLINEN; ÅSTRÖM; TIMONEN, 2009). Este regimes se diferenciam pelos padrões de curvatura da folha. O primeiro regime foi denominado de estado de flambagem. Como o próprio nome sugere, aparecem ondulações na folha. Neste regime a força de compressão é muito pequena, $f < f_b$, e o raio de compressão não se altera drasticamente $\Phi \approx \Phi_0$. A força (f_b) simboliza o ponto de mudança para o próximo regime.

O segundo regime é encontrado no intervalo $f_b < f < f_c$. Para forças um pouco maiores que f_b as folhas apresentaram dobras regulares em forma de cones [Fig. 7-a]

¹ Um exemplo de estrutura fantasma é a trajetória browniana (1D), pois pode recorrer várias vezes aos pontos visitados.

² No trabalho (VLIEGENTHART; GOMPPER, 2006) a folha é circular, enquanto no trabalho (TALLINEN; ÅSTRÖM; TIMONEN, 2009) a folha é quadrada.

que, segundo (VLIEGENTHART; GOMPPER, 2006), tem forma semelhante a cônicas aplicáveis (CERDA; MAHADEVAN, 1998). Nós supomos que neste regime a dimensão fractal da folha é 2, pois a mesma não apresenta uma relação massa-tamanho como uma lei de potência.

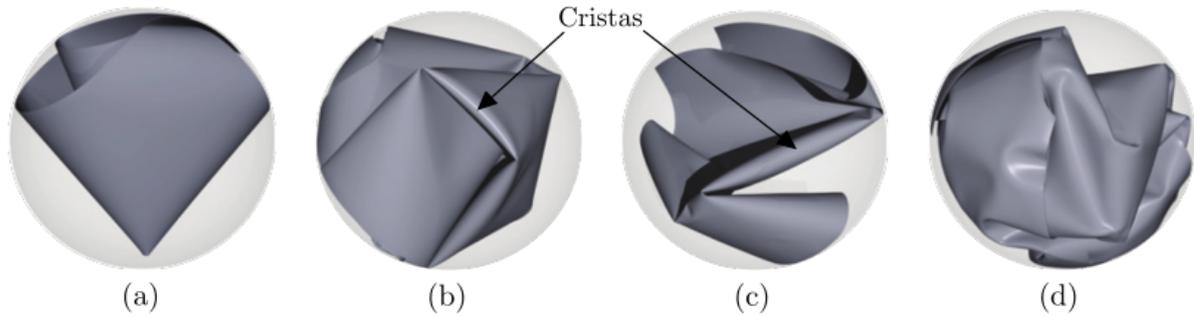


Figura 7 – Compressão de duas folhas como foi descrita na Fig. 6. (a) Folha elástica assume a forma de um cone. (b) Nesta etapa a folha elástica possui apenas alguns vértices e está no estado amassado. (c) Na folha elasto-plástica, a fase anterior ao amassamento não possui cônicas e é caracterizada pela grande deformação plástica, com muitos vértices. (d) A folha elasto-plástica não sofre relaxamento elástico quando está no regime amassado. **Fonte:** (TALLINEN; ÅSTRÖM; TIMONEN, 2009)

No terceiro regime, o raio de compactação segue uma lei de potência, e a força de compressão é maior que o limiar de amassamento f_c . (TALLINEN; ÅSTRÖM; TIMONEN, 2009) mostrou que o comprimento médio das facetas ($\bar{\Lambda}$) segue uma lei de escala da forma

$$\bar{\Lambda} \approx L(\Phi/L)^\alpha. \quad (2.8)$$

Observe que em $\Phi \approx \Phi_0$, Λ deve escalar com $L \times (\text{fator de acomodação})$, então, $\Lambda \sim L$. Contudo, se Φ for pequeno em relação a L , mais dobras serão necessárias para acomodar a folha dentro de um volume esférico com raio Φ , isto é, Λ tem que diminuir. A hipótese de escala mais simples para arranjar esta fenomenologia é usar $\Lambda \sim L(\Phi/L)^\beta$, onde $(\Phi/L)^\beta$ é uma correção ou fator de acomodação.

Foi sugerido que a energia total (E_t) de uma folha amassada está armazenada nas cristas (LOBKOVSKY et al., 1995; MORA; BOUDAUD, 2002); assim, é possível desenvolver uma teoria de campo médio, onde a energia total armazenada na folha é dada por $E_t \sim N_\Lambda E_\Lambda$, onde N_Λ é o número de cristas e E_Λ é uma lei de escala da energia de uma única crista³ (LOBKOVSKY et al., 1995). Substituindo os valores

³ Considerando que o comprimento médio das facetas e das cristas são próximos.

$N_\Lambda \approx (L/\bar{\Lambda})^2 \approx (L/\Phi)^{2\alpha}$ e $E_\Lambda \sim \kappa(\Lambda/\epsilon)^\beta \sim \kappa(L/\epsilon)^\beta(\Phi/L)^{\beta\alpha}$, temos:

$$E \sim \kappa(\Phi_0/\epsilon)^\beta(\Phi/\Phi_0)^{\alpha(\beta-2)}, \quad (2.9)$$

onde κ é a rigidez ao dobramento e ϵ é a espessura da folha. Em 2009, Tallinen; Åström e Timonen encontraram um valor para o raio de compressão do limiar de amassamento (Φ_c) que é independente de f , onde $\Phi_c = 0,4\Phi_0$ (para folhas quadradas $\Phi_c = 0,4L$). Também obtiveram o expoente da eq. 2.8 para folhas elásticas (α_{el}) quando $\Phi < 0,4\Phi_0$, $\alpha_{el} \approx 1,65$ [Veja na Fig. 8-a]. Para cristas com Λ/ϵ grande $\beta_{el} = 1/3$ (LOBKOVSKY et al., 1995), este valor foi confirmado através da simulação de uma única crista. Então para esses valores de α_{el} e β_{el} , a eq. 2.9 dá $E_t^{el} \sim R^{-2,76}$, um valor semelhante dentro das barras de erro ao que eles encontraram com resultado numérico $E_t^{el} \sim R^{-2,83 \pm 0,11}$ [Veja na Fig. 8-b]. No caso de folhas elasto-plásticas os expoentes de escala relacionados são semelhantes, $\alpha_{pl} \approx \alpha_{el}$ e $\beta_{pl} \approx \beta_{el}$.

Em 2006, Vliegthart e Gompper já tinham encontrado uma lei de escala para a energia total do tipo $E_t \sim \Phi^{-3}$ e o número de cristas $N \sim \Phi^{-4}$, correspondendo a $\alpha_{el} \approx 2$. As folhas elásticas sem auto-exclusão, isto é, folhas fantasmas também obedecem a mesma forma de lei de potência da eq. 2.9, contudo com $\alpha = 1$ e $\beta = 1/3$.

Observe na Fig. 8-a,b, que as curvas das folhas elásticas colapsam umas sobre as outras. Isso mostra que $\bar{\Lambda}/L$ em função da compressão Φ/Φ_0 (ou Φ/L) não depende da espessura ϵ . Isto significa que, se os comprimentos das cristas de folhas com tamanhos L diferentes forem normalizadas por L , os padrões das cristas destas folhas se tornarão indistinguíveis. Então, a rede de cristas de folhas elásticas com L 's diferentes possui similaridade. Podemos comprovar esta afirmação através da distribuições de probabilidade dos tamanhos de faceta (Fig. 8-c). Como podemos ver, a distribuição do tamanho Λ/L é independente de L/ϵ , e os padrões do tamanho das cristas são realmente estatisticamente semelhantes. As distribuições das Fig. 8-c podem ser ajustadas pela distribuição log-normal, contudo os melhores ajustes foram fornecidos pelas distribuições Gama.

Com relação às folhas elasto-plásticas, podemos ver na Fig. 8-a,b que o tamanho médio das facetas e a energia total escalam de maneira semelhante em função da compressão das folhas elásticas. Contudo, podemos perceber através da Fig. 8-a que o tamanho médio das facetas diminui conforme L/ϵ cresce. Isso mostra que $\bar{\Lambda}/L$ possui uma dependência da espessura. As distribuições de tamanho Λ/L da Fig. 8-d não são estatisticamente semelhantes, isto é, a rede de crista não possui similaridade para folhas elasto-plásticas.⁴

⁴ As simulações mostram que as distribuições de probabilidade de Λ/L são bem ajustadas por distribuições log-normal.

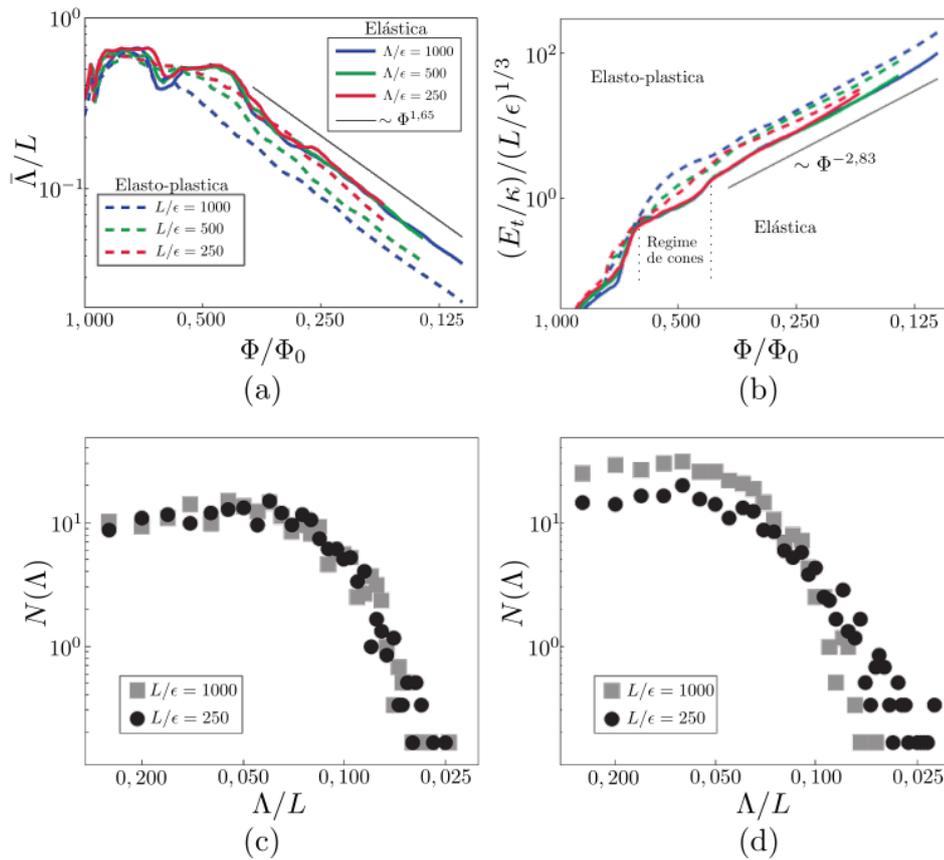


Figura 8 – Tamanho médio das facetas para folhas elásticas e elasto-plásticas de razões $L/\epsilon = 250, 500$ e 1.000 . b) A energia total das folhas elásticas e elasto-plásticas de razões $L/\epsilon = 250, 500$ e 1.000 , normalizadas por $1/(L/\epsilon)^{1/3}$. O regime de cones na energia das folhas elásticas entre os valores $\Phi \approx 0,75\Phi_0$ e $\Phi \approx 0,4\Phi_0$. (c) Distribuições do tamanho das facetas (Λ) nas folhas elásticas (d) e elasto-plásticas, para $L/\epsilon = 250$ e 1.000 e $\Phi = 0,18\Phi_0$. Cada distribuição é feita com médias de seis folhas amassadas. **Fonte:** (TALLINEN; ÅSTRÖM; TIMONEN, 2009)

As fases estruturais que aparecem durante o processo de compressão das folhas elasto-plásticas se diferenciam das três fases descritas para folhas elásticas. As deformações plásticas já aparecem para o $\Phi/\Phi_0 \approx 1$. Outra diferença é que, uma folha elasto-plástica não consegue se transformar em um cone. Como consequência, muitos vértices aparecem logo no início do amassamento, diminuindo o comprimento médio das facetas, como podemos ver em Fig. 8-a.

Derivando a eq. 2.9 em relação a Φ pode se encontrar a equação da força de compressão

$$f = \frac{dE_t}{d\Phi} \sim \frac{\kappa}{\Phi_0} \left(\frac{\Phi_0}{\epsilon} \right)^\beta \left(\frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^{\alpha(\beta-2)-1}. \quad (2.10)$$

Determinando f constante para folhas de todos os tamanhos L e $2\Phi_0 = L$, para folhas

quadradas, temos

$$\Phi^{\alpha(\beta-2)-1} \sim L^{-[(\beta-1)-\alpha(\beta-2)+1]}$$

que obedece a relação de escala $\Phi \sim L^{2/D_{el}}$. A dimensão fractal encontrada é

$$D_{el} = 2 + \frac{2(1 - \beta)}{(2 - \beta)\alpha + \beta}. \quad (2.11)$$

Substituindo os valores obtidos numericamente $\alpha_{el} = 1,65$ e $\beta_{el} = 0,33$, a eq. 2.11 fornece $D_{el} = 2,43$. O valor de D_{el} calculado teoricamente [eq. 2.11] é muito próximo do encontrado através de simulações, no próprio trabalho. Este resultado sugere que a dimensão fractal das folhas elásticas amassadas dependem apenas das propriedades de escala do comprimento médio das cristas e da energia de dobramento de uma crista simples. A dimensão fractal de folhas elasto-plásticas (D_{pl}), ao contrário, não é universal, e possui uma forte dependência do ponto de escoamento plástico do material (σ_{pl}). Contudo, a $D_{pl} \rightarrow D_{el}$ quando o ponto de escoamento plástico da folha cresce muito.

2.2.2 Modelo de dobras regulares

Em vista da relevância da singularidade da energia armazenada nas cristas no processo de amassamento de uma folha, é importante analisar como formas diferentes de dobramento podem explicar alguns aspectos das SA's. Em 2013, Deboeuf et al. (DEBOEUF et al., 2013) comparou a força de compressão para amassar folhas finas com a força necessária para fazer dobramentos regulares. Os dois processos de compactação obedecem a leis de potência semelhantes, dadas por

$$f \sim \phi^\eta, \quad (2.12)$$

onde ϕ é a razão entre o tamanho inicial e o final da folha e mede o grau de compactação da estrutura. Mesmo que o objetivo deste trabalho foque no empacotamento de superfícies, podemos compreender como a disposição das dobras tem um papel relevante na estrutura da folha amassada. Como vimos anteriormente (KRAMER; LOBKOVSKY, 1996; BLAIR; KUDROLLI, 2005; WOOD, 2002), o processo de fragmentação das cristas é responsável pela hierarquia de dobras da folha amassada.

A Fig. 9 mostra os três tipos de dobramentos regular sugeridos no artigo. Eles consideraram que a energia elástica de dobramento é igual à energia dissipada na deformação plástica do dobramento. Logo, a força para fazer uma dobra numa folha com espessura ϵ_0 , rigidez de dobramento κ_0 e tamanho L é $f_0 \sim \kappa_0/\epsilon_0$.

Na Fig. 9-a a folha possui dobras em direções paralelas em zig-zag, de forma que ela pode ser vista como objeto 1D. Neste caso, a força é considerada anisotrópica,

isto é, aplicada numa só direção. Podemos observar isso, pois sua compressão lembra uma porta sanfonada. Por causa destas simetrias, este é um dobramento de folha 1D compactada em 1D. Como o autor sugeriu, chamaremos de *compactação 1D*. Neste tipo de compactação, o número de camadas N_c é igual a L/n_d (n_d é o número de dobras). A compactação deste dobramento é $\phi \approx L/N_c \approx n_d$ e a força para compactar da folha é $f = n_d \cdot f_0$ então $f \sim \phi^1$.

No dobramento ilustrado na Fig. 9-b as dobras também ficam paralelas entre si. Isto significa que a folha tem simetria de translação no eixo paralelo a direção as dobras e por isso a folha pode ser vista como um objeto 1D. Contudo, neste caso a força de compactação atua em duas direções (no eixo x e y), por isso ele é considerado uma compactação isotrópica no plano de simetria xy . Como o autor sugeriu, chamaremos de *compactação 2D*. Em relação ao processo de compactação, a cada passo "i" a espessura cresce exponencialmente na forma $\epsilon = \epsilon_0 2^i$ e a rigidez a flexão na forma $\kappa = 2^{3i} \kappa_0$ (pois $\kappa \sim \epsilon^3$). Então, a força de compactação é dada por $f \sim \phi^2$.

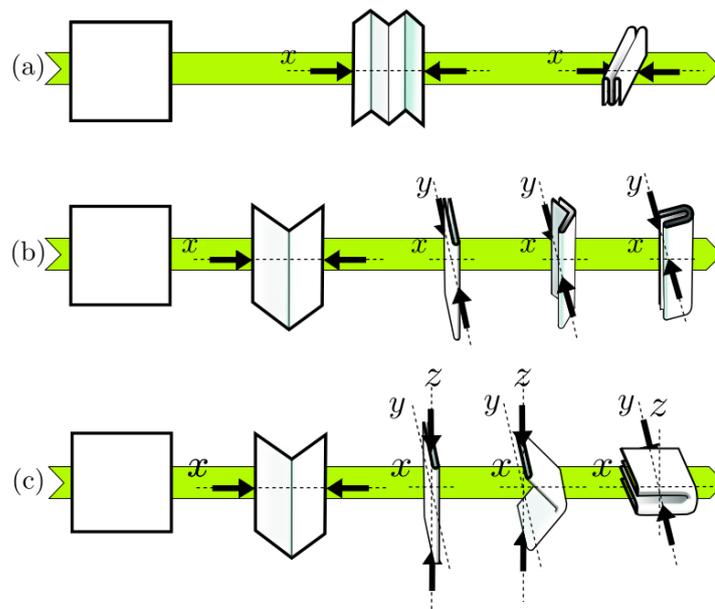


Figura 9 – Dobragem de uma folha em diferentes dimensionalidades. (a) uma folha com dobramentos uni-direcional; (b) uma folha com dobramentos bi-direcional; (c) uma folha com dobramentos tri-direcional. Os três tipos de processos de dobramentos foram denominados de compactação 1D, 2D e 3D. **Fonte:** inspirado na ref. (SOBRAL, 2015)

No último dobramento regular, a força de compactação atua em três direções perpendiculares, veja a Fig. 9-c. Como as dobras são feitas em duas direções perpendiculares a folha é considerada como um objeto 2D. Por isso este é um dobramento de folhas tipo 2D compactada em 3D. O autor sugeriu o nome de *compactação 3D*. Neste caso, devemos entender que um passo corresponde a dois dobramentos consecutivos

e em direções perpendiculares. Desta forma a espessura cresce da forma $\epsilon = 2^{2i}\epsilon_0$ e a rigidez a flexão $\kappa = 2^{6i}\kappa_0$ então a força de compactação fica $f \sim \phi^4$.

Para por a prova a relação entre as dobras regulares e o amassamento, os autores compactaram uma folha em forma cilíndrica com uma pistão (uma compressão axial de uma folha de papel). Eles encontraram experimentalmente uma lei de potência igual a eq. 2.12, com expoente $\eta = 1,3$. Segundo o modelo de dobramentos regulares este valor de η está entre os valores 1 e 2 que encontramos na compactação tipo 1D e 2D. Este resultado é esperado porque o experimento tem uma compressão com simetria da compactação axial (encontrada na compactação tipo 1D). A Tabela 1 mostra alguns resultados de experimentos que são encontrados na literatura e obedecem a eq. 2.12. A simetria dos campos de força de compactação presentes na Tabela 1 são compatíveis com os expoentes encontrados nos modelo de dobramento regular.

Tabela 1 – Expoente da força de confinamento η obtidos em diferentes tipos de compactação de folhas.

Dimensão de Compac.	Material	η
tri-direcional	Folha elástica fantasma ¹	$8/3^a, 2,66^b$
bidirecional	Folha elástica fantasma ¹	$19/9^a, 2,1^b$
unidirecional	Folha elástica fantasma ⁵	$14/9^a, 1,55^b$
tri-direcional	Folha elástica auto-excludente ¹	4^b
unidirecional	Folha de papel ²	$1,3^c$
bidirecional	Folha elasto-plástica auto-excludente ³	$3,8 \pm 0,1^b$

¹ ref.(VLIEGENTHART; GOMPPER, 2006)

² ref.(DEBOEUF et al., 2013)

³ ref.(TALLINEN; ÅSTRÖM; TIMONEN, 2009)

^a valor teórico

^b valor de simulação

^c valor experimental

Eles analisaram também a distribuição do comprimento das facetas e concluíram que ela era melhor ajustada pela distribuição log-normal. Sabemos que a distribuição log-normal caracteriza um processo hierárquico. Contudo, foi possível fazer um ajuste para a distribuição Gama que modelava melhor os dados para comprimentos pequenos. Assim como a distribuição log-normal, a distribuição Gama surge de um processo de fragmentação, contudo ela não é associada a hierarquia encontrada nas cristas de folhas amassadas.

2.3 AMASSAMENTO DE FIOS

Uma área correlata ao empacotamento de folhas finas é o estudo do amassamento de fios, que apresentou alguns resultados também interessantes. Como o fio tem

dimensão topológica $D_T = 1$ ele pode ser confinado em cavidade tridimensionais, bem como, em cavidades bidimensionais. Por causa deste aspecto estrutural o estudo do empacotamento de fios é mais simples e seu estudo influencia os trabalhos de amassamento de superfícies.

2.3.1 Empacotamento de fios em 3D

O primeiro trabalho sobre confinamento de fios foi publicado em 1991 por Aguiar, Gomes e Neto. Neste trabalho estudou-se as propriedades geométricas e a resistência elétrica de fios amassados (FA) de comprimento L num espaço de confinamento 3D (AGUIAR; GOMES; NETO, 1991). Mediu-se a dimensão fractal do fio empacotado através do expoente massa-tamanho. O método utilizado foi o mesmo empregado para encontrar a dimensão fractal de folhas amassadas (GOMES, 1987b; GOMES, 1987a) descrito na seção 2.1.1. Foi encontrada uma lei de escala $L \sim R^{2,75}$, onde a dimensão fractal é $D = 2,75$. A rugosidade (σ) foi definida como a variância (como na seção 2.1.2) e através da eq. 2.2 encontrou-se uma lei de escala $\sigma \sim R^{0,69}$. Através de substituição simples chega-se à relação de escala $\sigma \sim L^{0,25}$. Como a rugosidade é uma função de correlação (seção 2.1.2) então é esperado que ela siga a lei de escala $\sigma \sim L^{3-D}$. Utilizando o valor de D anterior temos $3 - D = 0,25$, que é exatamente o valor encontrado experimentalmente.

2.3.2 Empacotamento de fios em 2D

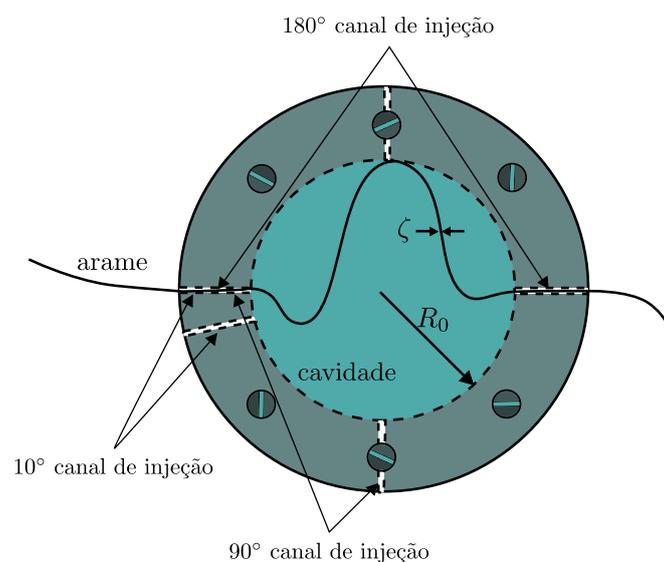


Figura 10 – Esquema simplificado de célula de injeção 2D usado em experimento.

Fonte:(DONATO; GOMES; SOUZA, 2002)

Dez anos após os trabalhos inaugurais sobre amassamento de fios em 3D, Donato, Gomes e Souza. publicaram em 2002/2003 (DONATO; GOMES; SOUZA, 2002;

DONATO; GOMES; SOUZA, 2003) os primeiros trabalhos sobre o empacotamento rígido de estruturas filamentosas numa cavidade 2D. O empacotamento era produzido pelo confinamento irreversível de fios de cobre dentro de uma cavidade planar bidimensional. O equipamento utilizado no confinamento é mostrado na Fig. 10: um fio de cobre é injetado manualmente dentro de uma cavidade de acrílico através de dois canais simultaneamente. A cavidade circular tem raio R_0 e sua altura só comporta uma camada de fios. O aparato experimental possibilitava que os dois canais de injeções tivessem três ângulos diferentes entre si $\theta = \{10^\circ, 90^\circ, 180^\circ\}$. A cavidade e o fio funcionava em regime seco, sem lubrificação.

Quando o fio é injetado dentro da célula, ele se dobra gerando estruturas hierárquicas complexas. Na Fig. 11, em cada uma das três linhas de fotografias vemos a evolução do processo de confinamento de um fio com ângulos θ diferentes ($\theta = 180^\circ, 90^\circ$ e 10°). Em cada uma das configurações com diferentes θ 's, podemos observar uma aparente estrutura hierárquica sendo formada.

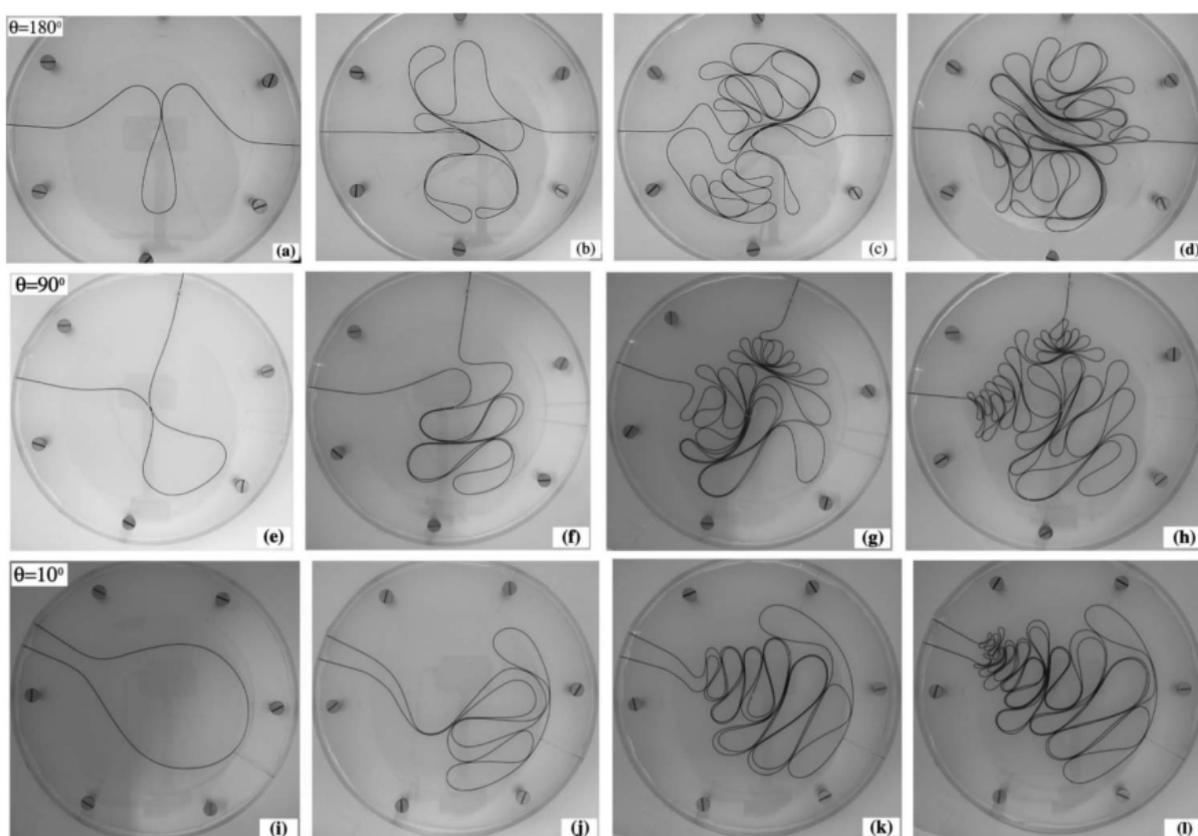


Figura 11 – Imagens de configurações de fios de cobre injetados numa cavidade circular bidimensional. Cada linha mostra a evolução da injeção do fio em um ângulo diferente. Esta evolução mostra padrões em cascata característico de sistemas hierárquicos. Mesmo que os padrões finais sejam diferentes, as grandezas físicas analisadas tem o mesmo valor. **Fonte:**(DONATO; GOMES; SOUZA, 2003)

O experimento mostra que a variação da velocidade de injeção não altera os resultados encontrados, nem os padrões observados na Fig. 11. Contudo, a velocidade de injeção vai a zero, no limite de empacotamento rígido. Neste estado, não é mais possível inserir fio na cavidade, que contém o comprimento máximo de fio (L_{max}). Esta configuração encontra-se com a capacidade máxima de ocupação $p_{max} = \zeta L_{max} / \pi R_0^2$, onde ζ é o diâmetro do fio. Os resultados experimentais apresentam $p_{max} = 0,140 \pm 0,006$. Todo o processo também foi realizado em cavidade lubrificada com óleo mineral e seus resultados concordaram perfeitamente com os encontrados no regime seco. No estado de máximo empacotamento, foi analisada a geometria do FA para encontrar sua dimensão de massa, $D = 1,9 \pm 0,1$, além da dimensão de difusão (DONATO; OLIVEIRA; GOMES, 2006), as quais se aproximam dos valores conhecidos para percolação bi-dimensional.

Poucos trabalhos se interessaram em estudar o processo de desempacotamento de tais sistemas. Em 2015, Sobral, Gomes, Machado e Brito (SOBRAL et al., 2015) estudaram pela primeira vez o desempacotamento de arames em cavidades bidimensionais. Por causa do seu aspecto seminal, este trabalho tem uma grande importância no capítulo subsequente.

O procedimento experimental se resume na extração de fios com o auxílio de um dinamômetro eletrônico: desta maneira registra-se a força necessária para arrancar cada laço da cavidade e conseqüentemente relacionar com o comprimento de fio extraído. Foi observado que o tamanho do laço e o comprimento de arame extraído são bem descritos por um modelo de crescimento exponencial. Este modelo pre-supõe a existência de uma hierarquia entre os laços na configuração de máximo empacotamento, sugestão que já foi utilizada na construção de outro modelo relacionado ao FA em 2D (DONATO; GOMES; SOUZA, 2002). A força de extração foi descrita como função do tamanho dos laços ou do comprimento extraído, e tem um comportamento que se ajusta bem a uma lei de potência.

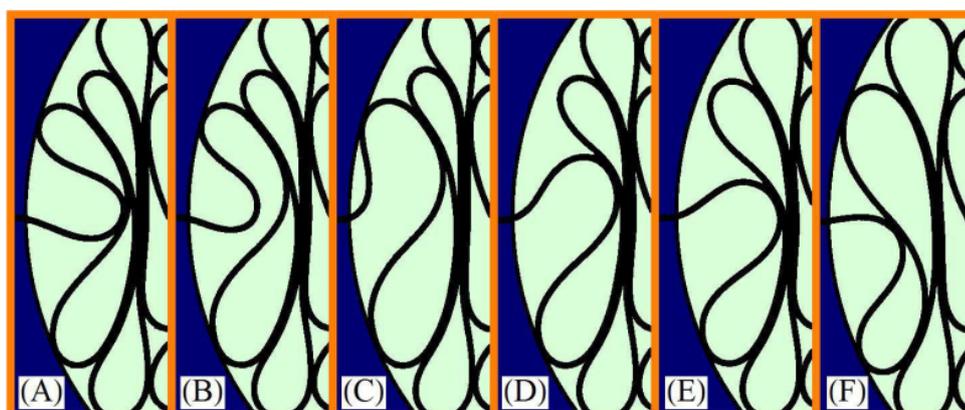


Figura 12 – Detilhe da extração de um laço de arame empacotado previamente numa célula de injeção 2D a partir de um experimento. Fonte:(SOBRAL et al., 2015)

A Fig. 12 mostra uma sequência de imagens que descrevem a evolução do processo de extração de um único laço. A remoção do laço é um procedimento que apresenta sempre uma força resistiva até que sua extração seja completada. Isso ocorre porque a passagem de cada parte do laço pelo canal de injeção é um vínculo muito forte: a medida que puxamos o fio tanto a posição quanto a inclinação do pedaço do arame que vai entrar na canal são orientados na direção do mesmo. Ao mesmo tempo toda a estrutura empacotada no interior da cavidade exerce uma pressão sobre a parte do laço que não está dentro do canal, dificultando ainda mais o alinhamento do fio com o canal. A força apresentará um máximo próximo ao final da remoção do laço (Fig. 12-d,e), pois logo no final da extração o arame se alinha e a força cai abruptamente (Fig. 12-f). O processo de extração dos laços se repete para cada um deles, contudo a magnitude máxima decresce conforme o desempacotamento prossegue.

Podemos ver na Fig. 13 a relação entre o comprimento do laço λ e a magnitude máxima da força da extração de arames, empacotados em uma cavidade com $R_0 = 15$ cm (ζ é o diâmetro do fio). Foi encontrada uma relação de escala,

$$F \sim (\zeta/\lambda)^\gamma,$$

com $\gamma = 0,92 \pm 0,03$, mostrando que a magnitude máxima da força é inversamente proporcional ao λ .

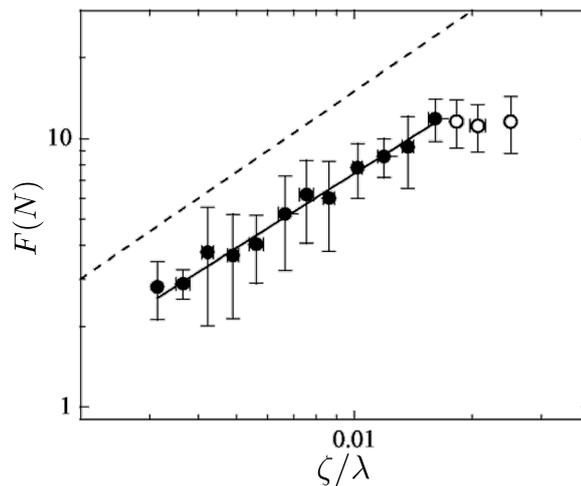


Figura 13 – A força F necessária para puxar um laço para fora da cavidade em função de ζ/λ . As linhas tracejadas são guias para os olhos e representam o regime linear. **Fonte:** (SOBRAL et al., 2015)

3 RELAÇÃO STRESS-STRAIN NO DESDOBRAMENTO DE FOLHAS AMASSADAS

Por ocasião da atribuição do Prêmio Fermi a Luciano Pietronero, em 2008, este físico conferiu às superfícies amassadas a reputação de ser um dos paradigmas dos sistemas complexos (PIETRONERO, 2008). Nos últimos anos, a superfície amassada (SA) atraiu muito interesse tanto teórico, como está descrito no cap. 2, quanto em novas tecnologias como, por exemplo, em conexão com a criação de supercapacitores (WEN et al., 2012), baterias de alto desempenho (LUO et al., 2012), materiais absorventes de energia (HANAOR et al., 2017), além de metamateriais (MIRZAALI et al., 2017; FOKKER; JANBAZ; ZADPOOR, 2019) e no estudo das propriedades do grafeno (GIORDANELLI et al., 2016), para citar apenas alguns.

Embora se possa enumerar vários interesses para o estudo deste sistema, somente um trabalho sobre desempacotamento de SA pode ser encontrado na literatura (LEAL; GOMES, 2019). O desdobraimento de superfícies finas que anteriormente estavam confinadas em um pequeno volume é um fenômeno muito comum na natureza e, como exemplos, podemos mencionar o desabrochar de um botão de uma flor (GIL, 2014), a abertura de um pára-quedas e até o desdobraimento das asas de um besouro (SAITO et al., 2014). Na primeira seção deste capítulo, relatamos um novo experimento projetado para medir a força de coesão das superfícies amassadas à medida que as desempacotamos.

Folhas de papel de tamanhos e espessuras diversas foram amassadas em uma forma quase esférica para posteriormente serem abertas e esticadas, em condições ambientes controladas, até que as mesmas estivessem totalmente desempacotadas, com a intenção de mostrar o perfil da curva de força desempacotadora versus deformação. Assim, estudamos o stress de desmantelamento de vários tipos locais de dobramentos que se superpõem. Também examinamos a evolução de duas fases estruturais que a bola de papel amassada apresenta à medida que é esticada e as relações entre essas fases.

Ainda neste capítulo, apresentamos uma outra linha de pesquisa voltada para o estudo da compressão de folhas de papel. Nosso objetivo é comparar este trabalho com os resultados do estudo de desempacotamento de SA.

A organização deste capítulo obedece à seguinte sequência: a primeira seção têm uma revisão bibliográfica de sistemas amassados observando suas propriedades elásticas. Na segunda seção descrevemos os detalhes experimentais do trabalho de desempacotamento de folhas de papel amassado, a terceira seção apresenta uma análise da curva de stress-strain e um exame sobre as fases estruturais da folha amassada durante o desempacotamento. Na quarta seção nós relatamos sobre o trabalho de compressão de folhas amassadas.

3.1 BREVE HISTÓRICO DO ESTUDO DE PROPRIEDADES ELÁSTICAS DE SISTEMAS AMASSADOS

Dentre os trabalhos sobre SA's, aqueles que examinam as propriedades mecânicas parecem ser os mais estudados. O primeiro trabalho a examinar o ensaio mecânico destas estruturas foi publicado em 1989 (GOMES et al., 1989). Parte de seus resultados já foram descritos na seção 2.1.2. Nesse artigo foi encontrado a relação strain-strain da compressão de folhas de alumínio amassadas e a relação entre o stress-strain de deformação, ambas possuem dois regimes de leis de escala que caracterizam a mudança de regime de deformação. Através da análise teórica destas relações de escala foi mostrado algumas pistas sobre a presença de comportamento universal de sistemas amassados. Em especial, devemos enfatizar um modelo proposto pelos autores, que é uma adaptação do modelo de blobs de cadeias poliméricas (GENNES, 1979) e expõem a influência do comportamento auto-similar das SA's no strain de dilatação para pequenas deformações. Veremos no cap. 5 que o desdobramento de folhas amassadas também é bastante influenciado pelas características da geometria fractal, fato que conecta o empacotamento e desempacotamento de SA's.

Posteriormente, dois trabalhos estudaram as mesmas propriedades mecânicas, descritas no parágrafo anterior, em sistemas de fios amassados que estavam empacotados em cavidades bidimensional (GOMES et al., 2008b) e tridimensional (AGUIAR; GOMES; NETO, 1991). No artigo que estudou a compressão de fios amassados em 3D, foi observado também duplas leis de potência na relação strain-strain e na relação entre o stress-strain de deformação. Além de outras leis de potência que relacionam as grandezas estudadas, foi constatado que a mudança de regime encontrada nas duas duplas leis de potência ocorrem de forma similar à encontrada na compressão de SA's, com o ponto de transição de regimes incrivelmente próximos. No trabalho referente ao estudo da compressão de fios amassados em 2D, também foi encontrado uma lei de potência na relação entre o strain de compressão e o strain de dilatação transversal. Os resultados experimentais dos dois trabalhos de compressão de fios amassados, empacotados em cavidades 2D e 3D, foram explicados pelo modelo de blobs para compressão de SA's. Este resultado mostra que os sistemas amassados possuem uma mecânica parecida, mesmo com as dimensões topológicas e dimensões espaciais diferentes.

Em 2008, Balankin e Huerta estudaram a relação entre propriedades da rede de dobras da folha de papel amassada e o stress de compressão (BALANKIN; HUERTA, 2008), utilizando um modelo estático de sistemas granulares. Eles propõem que a elasticidade encontrada nas medidas de stress-strain é causada por uma elasticidade entrópica. Outro artigo estudou grandezas como: o módulo de Young e stress de escoamento, em função da porosidade da SA (BOUAZIZ et al., 2013). Bouaziz et al. mostraram que tanto o módulo de Young quando stress de escoamento possuem um

comportamento tipo lei de potência com a porosidade da SA.

As propriedades elásticas dinâmicas de SA's, também mostram uma forte influência da universalidade desse sistema. Primeiramente, nós devemos citar o estudo da relaxação do stress observado a strain constante em folhas de papel alumínio amassado (ALBUQUERQUE; GOMES, 2002). Nesse trabalho, a deformação (na forma de uma compressão axial) é mantida fixa enquanto se mede a relaxação temporal do stress. Como resultado, foi encontrado uma relaxação anômala, na forma de um decaimento exponencial esticado do stress tipo $\exp[-(t/\tau)^\beta]$ com expoente $\beta = 0,28 \pm 0,03$, ao longo de quase seis décadas de variabilidade temporal, independentemente do valor do strain, um fato muito raro na física. Comparativamente, a relaxação de polímeros apresenta vários tipos de comportamento ao longo dos intervalos de tempo (BARTENEV; ZELENNEV, 1975), enquanto as SA apresentam uma única dependência funcional. Outro artigo analisou o relaxação do strain de compressão de uma folha amassada de Mylar, com stress de compressão fixo (MATAN et al., 2002). Foi encontrado uma dependência funcional anômala, igualmente, mas logarítmica, do strain de deformação ao longo de seis décadas de variabilidade temporal. Esses resultados sustentam a hipótese de que a relaxação exponencial esticada, i.e. não-Debye, da compressão de SA é uma consequência direta de sua estrutura fractal (hierárquica) com muitos mínimos de energia elástica, como materiais vítreos (PHILLIPS, 1996), poliméricos (CHERAYIL, 1992) e vidros de spin (PICKUP et al., 2009).

3.2 DETALHES EXPERIMENTAIS

Folhas de papel quadradas de lado L foram amassadas manualmente em uma forma quase esférica até alcançarem algo próximo ao máximo empacotamento (GOMES, 1987b). Dos quatro cantos destas folhas quadradas, deixamos dois cantos expostos após o amassamento, com o objetivo de fixá-los em um equipamento responsável pelo esticamento destas SA's, veja Fig. 14. Os dois cantos que ficaram expostos tinham suas posições na mesma diagonal da folha quadrada, como descrito no trabalho (LEAL; GOMES, 2019). Fixamos uma das duas extremidades que ficaram expostas numa base imóvel do equipamento. A outra extremidade foi fixada no dinamômetro, que ao ser movido para cima esticava a bola de papel e ao mesmo tempo registrava a força para fazê-lo. Nós controlamos também o módulo da velocidade do esticamento, $|\vec{v}|$, que era constante durante o processo de desempacotamento de cada medida. A deformação Δx , medida ao longo do eixo x (na direção de \vec{v}), é a distância entre os cantos da folha que foram expostos após o amassamento menos a distância inicial x_0 , veja em Fig. 14-a. x_0 é a distância entre os cantos da folha que foram expostos, antes do desempacotamento começar.

As medidas de desempacotamento de SA's foram organizadas em dois grupos

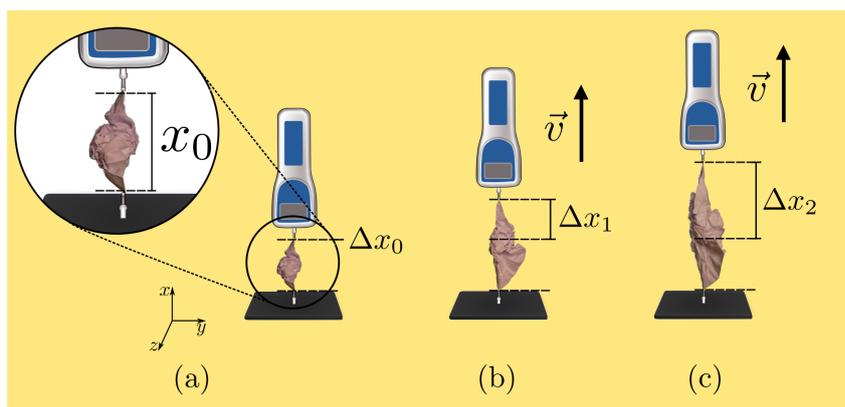


Figura 14 – Esquema de equipamento responsável por esticar e fazer as medidas de força de bolas de papel. A deformação Δx é a distância entre os cantos da folha que foram expostos após o amassamento menos a distância inicial x_0 . (a) x_0 é a distância entre os cantos da folha que foram expostos, antes do desempacotamento começar. A medida que movemos o dinamômetro com velocidade \vec{v} constante para cima a deformação aumenta, de forma que $\Delta x_0 < \Delta x_1 < \Delta x_2$.

diferentes. No primeiro deles, nós esticamos folhas amassadas com gramaturas diferentes $\mu = \{56, 75, 90 \text{ e } 120 \text{ g/m}^2\}$. Para cada gramatura nós reproduzimos 20 experimentos equivalentes. Todas as medidas deste grupo foram realizadas com $v = 0,83 \pm 0,01 \text{ mm/s}$ e $L = 210 \pm 1 \text{ mm}$. No segundo grupo, usamos folhas com lados $L = \{30; 55; 66; 77; 88; 147; 205; 264 \text{ e } 305 \text{ mm}\}$, com a velocidade de esticamento $v = 0,83 \pm 0,01 \text{ mm/s}$ e gramatura $\mu = 75 \text{ g/m}^2$. Para cada tamanho L foram reproduzidos 10 experimentos.

Repetimos o seguinte procedimento em todas as medidas: (i) fixamos uma das extremidades da bola no dinamômetro; (ii) zeramos as medidas de força do dinamômetro, para que nem o peso da bola nem qualquer tensão ou torção se some a medida feita pelo dinamômetro; (iii) fixamos a outra extremidade na base imóvel do equipamento.

A Fig. 15 mostra uma foto da máquina automática que construímos no Laboratório de Sistemas Analógicos do Departamento de Física da UFPE, com a consultoria do Prof. Daniel F. Gomes, do Departamento de Engenharia Eletrônica e de Sistemas da UFPE. Além de montarmos a parte física do equipamento, desenvolvemos um programa com uma interface capaz de controlar a máquina, decodificar os dados transmitidos pelo dinamômetro e relacionar os dados de força com os dados de deslocamento. Este equipamento desloca o dinamômetro, isto é, estica a folha amassada com um precisão de 0,1 mm. Para registrar as medidas de força utilizamos um dinamômetro Instrutherm DD-500 que tem precisão de 0,01 N. Devido à sua construção, o equipamento mecânico tem um limite operacional de $L = 305,0 \text{ mm}$ para o tamanho máximo de uma folha amassada que ele pode desdobrar. Folhas maiores não seriam desdobradas totalmente.

As amostras de folha de papel receberam alguns cuidados pois suas propriedades



Figura 15 – Foto da máquina automática usada para esticar a folha amassada.

mecânicas são muito sensíveis à umidade. A folha absorve a umidade do ar, das mãos e de superfícies que ela possa entrar em contato. A partir do momento em que a folha sai da embalagem onde ela está armazenada, ela começa a absorver umidade. Fizemos, então, os experimentos quando a umidade relativa do ar dentro do laboratório estava em aproximadamente 40%. Por isso, usamos um higrômetro no laboratório, afim de controlar a umidade relativa do ar da sala. Para diminuir a umidade relativa do ar dentro do laboratório, nós aumentamos a potência do ar-condicionado ao máximo e fizemos os experimentos no verão pois a umidade relativa do ar é mais baixa nessa estação. Todas as folhas usadas nos experimentos foram colocadas em uma estufa por 30 minutos antes das medidas de esticamento. A estufa aquecia a folha com o objetivo de mantê-la seca. Usamos luvas sempre que manuseávamos as folhas de papel, para evitar que o suor das mãos entrassem em contato com as folhas.

3.3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

3.3.1 Análise das características da curva stress-strain

A Fig. 16-a mostra uma curva típica da força, F , versus o esticamento Δx de uma bola de papel de $L = 210$ mm e $\mu = 75$ g/m². As flutuações em torno da curva de força ocorrem por causa do desmantelamento de vários tipos locais de dobras emaranhadas, fenômeno que foi descrito na curva de strain-strain do desempacotamento de folha finas (LEAL; GOMES, 2019). Cada pico sinaliza que o sistema saiu de um ponto de equilíbrio local e foi para outro. Esta é uma característica encontrada em sistemas metaestáveis onde os picos marcam a passagem para um novo estado metaestável. Um fenômeno parecido foi descrito no desempacotamento de fios amassados em cavidades bidimensionais, ao puxar o fio empacotado dentro de uma cavidade 2D (SOBRAL et al.,

2015). Uma relação entre a força de extração e o comprimento de fio extraído também pode ser encontrada nesse trabalho.

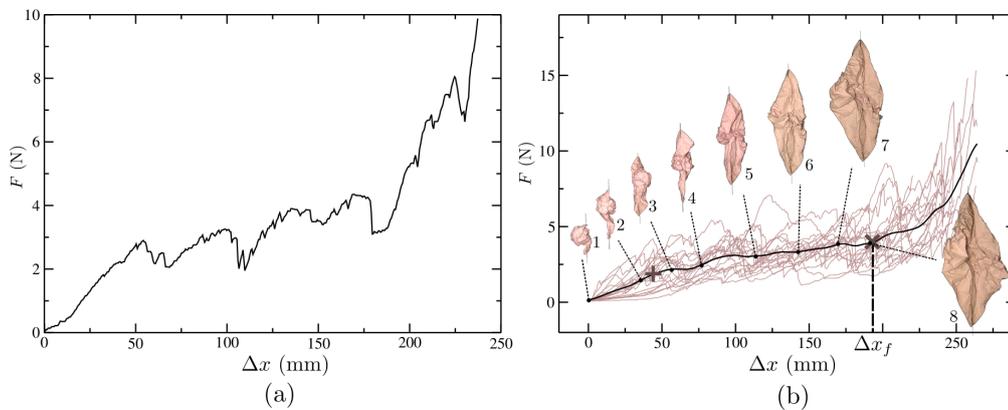


Figura 16 – (a) Medida de força, F , versus esticamento, Δx , de uma bola de papel de raio médio $R = 18 \pm 1$ mm. A folha de papel com $L = 210$ mm e $\mu = 75$ g/m², foi esticada com velocidade $v = 0,83$ mm/s. (b) As curvas tênues são 20 medidas de força, F , versus esticamento, Δx , equivalentes a Fig. 16-a. Para reduzir as flutuações das 20 medidas utilizamos o método Nadaraya Watson, que pode ser visto na curva contínua, para mais detalhes leia o texto.

Na parte (b) da Fig. 16, temos um gráfico com 20 experimentos de esticamento de bola de papel equivalentes ao mostrado na Fig. 16-a. A curva contínua é gerada com um método de regressão de dados não paramétricos, denominado regressão do kernel Nadaraya-Watson (NADARAYA, 1964; WATSON, 1964), cuja finalidade é reduzir as flutuações. No gráfico da Fig. 16-b podemos ver claramente que a inclinação da curva contínua F - Δx possui três tendências distintas, que estão localizadas em três regiões na curva. Devido a importância do ponto de mudança da primeira região para a segunda e do ponto de mudança da segunda região para a terceira nós colocamos símbolos para representa-los. A cruz (+) representa o ponto de mudança da primeira região para a segunda, $\Delta x_{(+)}$ é o valor da abscissa do ponto "+", e o "x" o ponto no qual a segunda região termina, Δx_f é o valor da abscissa do ponto "x". Δx_f indica o início da região, no final da curva $F(\Delta x)$, onde F passa a crescer muito rapidamente, ou seja, assinala a região em que as forças de coesão interna ao longo da folha passam a controlar a física do problema. Assim, Δx_f está associada à transição da física da SA em três dimensões para a física controlada pela topologia bidimensional da folha. Por isso, devemos esperar que $\Delta x_f \sim L$, onde L é o comprimento topológico relevante.

Podemos ver na Fig. 16-b oito fotografias que mostram a evolução do desempacotamento de uma bola de papel. Cada imagem aponta ao local da curva média onde a respectiva deformação ocorreu. As fotografias não correspondem a nenhuma das 20 amostras medidas no gráfico, contudo as imagens registram um desempacotamento típico de uma folha amassada. A fotografia (1) tem Δx nulo e ela representa o estado de

máximo empacotamento. As imagens (1) e (2) mostram dois estados da SA na primeira região. As deformações registradas nas fotos de (3) a (7) estão contidas na segunda região. Estas imagens mostram que duas partes da folha de papel vão se desprendendo progressivamente de uma fase empacotada da folha à medida que Δx cresce, formando uma fase desempacotada. Essas duas fases coexistem na primeira e segunda região da curva $F-\Delta x$ de uma folha com $L = 210$ mm. Contudo, no ponto (x) a fase empacotada é totalmente desmantelada como podemos ver na fotografia (8), mostrando que na terceira região a SA está inteiramente na fase desempacotada, embora a folha ainda seja rugosa. Então, a inclinação mais acentuada encontrada na terceira região é fruto da diminuição dessa rugosidade e de, eventualmente, um esticamento das fibras do papel. Ou seja, na primeira e na segunda região, as forças envolvidas são localmente transversais a domínios da folha; elas conectam em geral, domínios separados (desconexos) sobre a folha. Já na última região, as forças envolvidas são, basicamente, internas à folha.

As tendências da curva média, descrita na Fig. 16-b, na primeira e na segunda região obedecem a duas leis de escalas distintas. Observamos isso no gráfico Log-Log da Fig. 17-a que mostra uma curva Nadaraya Watson de $F-\Delta x$ para uma folha com $L = 305$ mm e $\mu = 75$ g/m². No intervalo de Δx entre 4 e 43 mm, a curva média escala com $F \sim \Delta x^{1,04 \pm 0,01}$, mostrando uma tendência hookeana linear na primeira região. A linha contínua corresponde ao ajuste de lei de potência da curva $F-\Delta x$ na segunda região igual $F \sim \Delta x^{0,65 \pm 0,03}$. Este comportamento sublinear encontrado aqui, próprio de materiais auxéticos, faz com que tais materiais exibam a importante característica de mitigar impactos (REID et al., 2018). Ou seja, a força de esticamento obedecerá a uma dupla lei de potência igual a

$$F \sim \Delta x^n, \quad (3.1)$$

onde n é 1 para $\Delta x < \Delta x_{(+)}$ e 0,65 para $\Delta x_f > \Delta x > \Delta x_{(+)}$.

As curvas típicas stress-strain em materiais usuais, não-frágeis, como metais e polímeros, apresentam inicialmente um comportamento linear, característico de um regime hookeano, seguido de um regime não-linear, reversível, e, depois um regime plástico irreversível. Em todos os materiais, o comportamento da curva no regime plástico varia muito em função da composição do material, contudo, comumente tem "formato convexo" e geralmente a curva termina no ponto de ruptura (TU et al., 2020; KITAGAWA; ZHOU; QUI, 1995). Diferentemente a curva stress-strain do esticamento de SA tem "formato côncavo", entre a segunda e a terceira regiões na Figura 16, devido a estrutura subjacente (à estrutura 3D) que é controlada pela topologia 2D das folhas. Experimentos de nano-física recentes (envolvendo forças da magnitude de pico-newtons) esticaram moléculas individuais de DNA (ou proteínas) até estarem totalmente desdobradas (ou desempacotadas) (LI et al., 2015; BUSTAMANTE et al.,

2000). Esses trabalhos apresentaram curvas stress-strain com características similares às encontradas no esticamento de SA: aproximadamente como no esticamento de SA, a terceira região é devida à estrutura subjacente (à estrutura 3D) que é controlada pela topologia 1D da cadeia polimérica.

Variando a escala do sistema (o tamanho L da folha) nós pudemos observar outras características relacionadas às inclinações da curva $F-\Delta x$. O gráfico da Fig. 17-b mostra nove curvas de desdobraimento de folhas amassadas com tamanhos L 's diferentes que refletem o método Nadaraya Watson para 10 medidas equivalentes. A curva contínua preta corresponde ao desempacotamento de folhas com $L = 305$ mm, na curva preta com dois traços e um ponto $L = 264$ mm, na curva preta com um traço e dois pontos $L = 206$ mm, na curva preta com um traço e um ponto $L = 147$ mm, na curva preta tracejada $L = 88$ mm, na curva preta pontilhada $L = 77$ mm, na curva contínua magenta $L = 66$ mm, na curva magenta com dois traços e um ponto $L = 55$ mm e na curva magenta tracejada $L = 33$ mm. Todos esses experimentos correspondem a $v = 0,83$ mm/s. Teste adicionais, com velocidades entre 0,83 e 6,10 mm/s não mostraram variações significativas nas curvas de stress-strain.

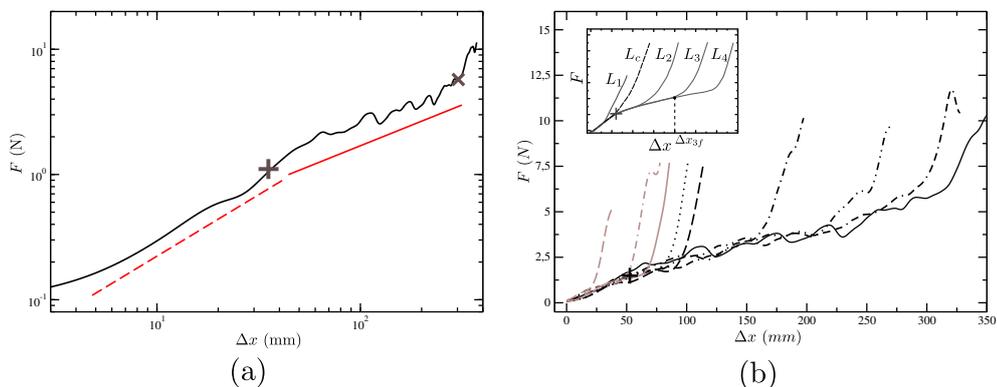


Figura 17 – (a) Gráfico Log-Log da Curva Nadaraya Watson de F vs. Δx para uma folha com $L = 305$ mm e $\mu = 75$ g/m². A linha tracejada mostra uma relação linear entre F e Δx . A linha contínua mostra uma alteração de regime na curva $F-\Delta x$ na segunda região, com uma relação do tipo lei de potência igual $F \sim \Delta x^{0,65 \pm 0,03}$. (b) Nove curvas que reproduzem o método Nadaraya Watson (médias em 10 medidas) de F vs. Δx , com $\mu = 75$ g/m² e $v = 0,83$ mm/s. Os tamanhos das nove folhas são $L = \{33, 55, 66, 77, 88, 147, 206, 264$ e 305 mm}, para mais detalhes leia o texto. No inset temos um esquema simplificando o comportamento das curvas das médias de $F-\Delta x$ com L diferentes. A curva tracejada, L_c , do inset corresponde a uma curva da média com parâmetro L que marca a transição entre os dois regimes.

Para facilitar a compreensão do leitor, no inset da Figura 17-b temos um esquema simplificando o comportamento das curvas das médias de $F-\Delta x$. Veja que a inclinação das curvas na primeira região é invariante por escala, isto é, não muda com L . Observe

que as curvas das médias mostradas na Fig. 17-b estão associadas a dois regimes de desempacotamento. No primeiro regime as curvas das médias possuem somente duas regiões, a primeira e a terceira, diferente das três regiões da curva da média da Fig. 16-b. Estas curvas têm $L \leq L_c$, onde L_c corresponde a uma medida do parâmetro L que marca a transição entre os dois regimes (a curva tracejada no inset corresponde a folha com tamanho L_c). Veja que essas curvas não têm a região intermediária caracterizada pela lei de escala descrita pela equação 3.1. Como as curvas com $L \leq L_c$ não possuem a segunda região, isso significa que elas passam da primeira região para a terceira. Por causa disso seus Δx_f 's (abscisas dos pontos \times 's de cada curva) são menores que $\Delta x_{(+)}$. Observe que o ponto de mudança da primeira região para a segunda (+) é o mesmo para todas as curvas. Δx_f de L_c é igual $\Delta x_{(+)}$ e por isso L_c não tem a segunda região. A medida exposta no gráfico da Fig. 17-b que mais se aproxima de L_c é $L = 66 \pm 1$ mm com $\Delta x_f = 58 \pm 12$.

No segundo regime as curvas das médias $F-\Delta x$ para folhas amassadas com $L > L_c$, possuem três inclinações diferentes semelhante ao que foi descrito na Fig. 16-b. Essas curvas têm as suas primeiras e segundas regiões sobrepostas umas sobre as outras. A exemplo das curvas L_3 e L_4 que percorrem o mesmo caminho no gráfico $F-\Delta x$ e se separam no ponto com abscissa Δx_{f3} , isto significa que o trabalho para desempacotar a bola L_3 , $W_3(\Delta x_{f3})$, é igual ao trabalho para esticar a bola L_4 , $W_4(\Delta x_{f3})$, até o ponto de abscissa Δx_{f3} . Então podemos afirmar que $W_i(\Delta x_{fi}) = W_j(\Delta x_{fi})$, onde $i < j$ e Δx_{fi} é a abscisa do ponto onde a bola de tamanho desdobrado " L_i " é totalmente desempacotada. Consequentemente

$$W_i(\Delta x) = W_j(\Delta x), \quad (3.2)$$

desde que $\Delta x \leq \Delta x_{fi}$, $i < j$.

Podemos observar como a curva da média é alterada quando variamos a gramatura da folha. O gráfico da Fig. 18 mostra como o perfil da curva $F-\Delta x$ muda com a gramaturas. Neste gráfico temos quatro curvas que refletem o método Nadaraya Watson sobre 20 medidas de F versus Δx , com $L = 210$ mm e $v = 0,83$ mm/s. A curva contínua tem $\mu = 56$ g/m², a curva pontilhada $\mu = 75$ g/m², a curva tracejada $\mu = 90$ g/m² e na curva com pontos e traços $\mu = 120$ g/m². Observe que na primeira região a inclinação das curvas não mudam com μ , contudo na segunda região podemos ver um leve crescimento da curva $F-\Delta x$ com o crescimento da gramatura. Em outros trabalhos já foi observado que a variação da gramatura (ou a espessura) da folha implica na mudança da dimensão fractal, bem como de outros expoentes que caracterizam as SA (GOMES, 1987b; GOMES, 1987a; TALLINEN; ÅSTRÖM; TIMONEN, 2009) [veja a seção 2.2.1].

Nós podemos confirmar que tanto a eq. 3.2 quanto a lei de potência sublinear

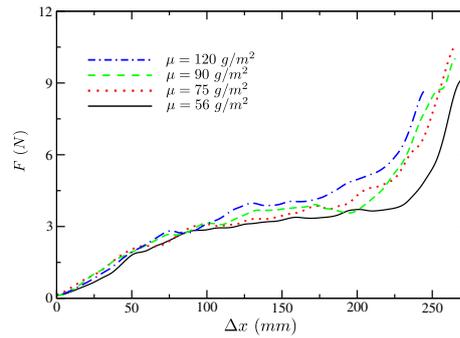


Figura 18 – Quatro curvas que refletem o método Nadaraya Watson sobre 20 medidas de F versus Δx , com $L = 210$ mm e $v = 0,83$ mm/s e gramaturas diferentes. A curva contínua $\mu = 56$ g/m², a curva pontilhada $\mu = 75$ g/m², a curva tracejada $\mu = 90$ g/m² e na curva com pontos e traços $\mu = 120$ g/m².

encontrada na eq 3.1, para $\Delta x_f > \Delta x > \Delta x_{(+)}$, são produtos do mesmo sistema. Através da integração numérica das nove curvas $F-\Delta x$ da Fig. 17-b, nós obtemos suas medidas do trabalho ($W(\Delta x_f)$) para desempacotar totalmente as folhas. Associando os $W(\Delta x_f)$'s com os seus respectivos Δx_f 's, conforme sugerido pelo o gráfico da Fig. 19, nós obtemos um ajuste de lei de potência nas medidas W vs. Δx_f e encontramos a relação

$$W(\Delta x) \sim \Delta x^{(1,73 \pm 0,05)}. \tag{3.3}$$

Derivando a equação 3.3 em relação a Δx temos $F \sim \Delta x^{(0,73 \pm 0,05)}$, que é uma boa aproximação para o ajuste de lei de potência encontrado na segunda região da curva $F-\Delta x$ da Fig. 17-a (onde obtemos um expoente $n = 0,63 \pm 0,05$).

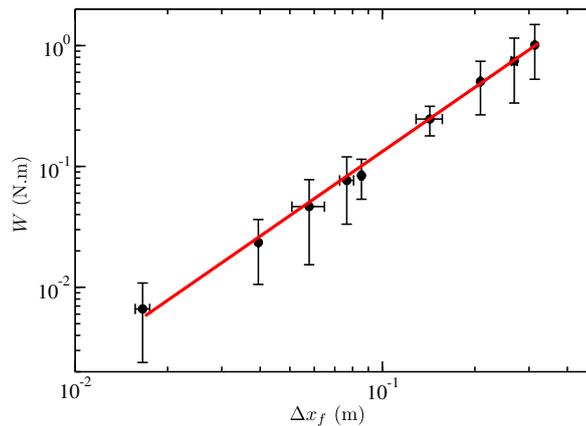


Figura 19 – Trabalho W necessário em unidades SI para desempacotar bolas de papel amassadas para L 's diferentes versus Δx_f . Os dados foram obtidos através da integração numérica das nove curvas $F-\Delta x$ da Fig. 17-b [Leia o texto para mais detalhes.]. O ajuste de lei de potência é $W = (6,9 \pm 0,1) \cdot \Delta x_f^{(1,73 \pm 0,05)}$.

Outro exemplo de sistema macio ("soft") que apresenta uma relação "stress-strain" sublinear, seguindo um regime linear como observado nas SA's, é encontrado no estudo reológico de géis coloidais (LAURATI; EGELHAAF; PETEKIDIS, 2011). A transição de um regime linear para um sublinear na relação "stress-strain" de géis coloidais se deve à quebra de ligações moleculares, que corresponde qualitativamente, às rupturas de ligações transversais à folha nas SA's.

3.3.2 Relação entre fase empacotada e fase desempacotada

Como foi mostrado na Fig. 16-b, o esticamento Δx causa um desmantelamento da SA que é responsável pela divisão da folha em duas fases (a fase empacotada e a fase desempacotada). A evolução física dessas fases está diretamente relacionada à eq. 3.2 e consequentemente à mecânica associada ao desempacotamento. Para compreendermos como as fases empacotada e desempacotada evoluem nós medimos uma grandeza que caracteriza o comprimento da fase desempacotada (u). Na figura 20-a temos uma sequência de imagens que mostra a evolução do processo de esticamento de uma bola de papel. As folhas usadas neste experimento tinham $L = 212$ mm, $\mu = 75$ g/m² e $R = 18 \pm 1$ mm.

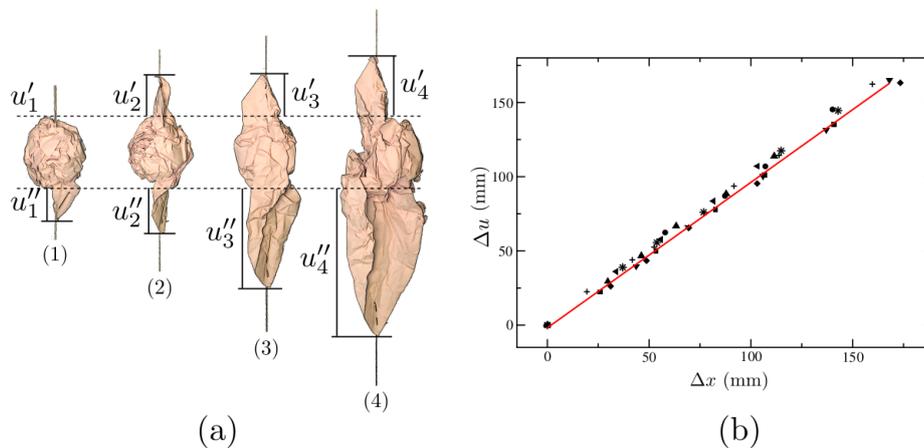


Figura 20 – (a) Sequência de imagens que mostra a evolução do processo de esticamento, com o objetivo de encontrar a variação de um comprimento característico (u) da fase desempacotada. Através de u'_i e u''_i nós medimos os comprimentos u 's do desempacotado em função de Δx , por meio da definição $u_i = u'_i + u''_i$. A variação de u é definida como $\Delta u = u_i - u_1$. (b) Gráfico de dez medidas de Δx versus Δu , com ajuste linear $\Delta u = (1,01 \pm 0,01)\Delta x$.

As quatro imagens revelam que o processo de desmantelamento da bola de papel ocorre inicialmente na vizinhança das pontas que ficaram expostas e prossegue em direção ao meio da folha. Este direcionamento do desmantelamento da fase empacotada da folha indica que existe uma simetria de desdobramento em uma única direção, que é uma consequência do método de esticamento. Duas partes desdobradas da folha

irão crescer com Δx à medida que desempacotamos a bola de papel. Então medimos o comprimento dessas duas partes e relacionamos com o seu Δx . Os comprimentos das duas parte livres são u'_i que é o pedaço superior e u''_i o pedaço inferior. O comprimento total da região livre é $u_i = u'_i + u''_i$. O gráfico da Fig. 20-b mostra a variação de u , Δu , versus Δx para dez medidas diferentes de folhas amassadas com $L = 210 \text{ mm}$ e $\mu = 75 \text{ g/m}^2$, onde $\Delta u = u_i - u_1$ e o comprimento inicial das partes desdobradas é u_1 . O ajuste feito sobre as dez medidas nos leva à equação

$$\Delta u = \Delta x. \quad (3.4)$$

Conseqüentemente, a parte desempacotada da folha deve obedecer a uma relação semelhante à equação 3.2. Na Fig. 21-a temos as duas folhas igualmente esticadas até $\Delta x = \Delta x_{f3}$, isto é, o ponto no qual a folha L_3 está totalmente desempacotada. Elas foram mapeadas para mostrar as partes das folhas que estão desempacotadas, A_{f3} e A_{f4} , e a parte que ainda está empacotada, A_{p4} . A folha L_3 está completamente desempacotada e A_{f3} é a área desempacotada da folha. As pontas que estão destacadas nas duas folhas corresponde às extremidades que ficaram expostas. Na folha L_4 temos as áreas desempacotadas, A'_{f4} e A''_{f4} , e a área emaranhada, A_{p4} . Através da eq. 3.4 nós chegamos às expressões $\Delta u_3 = \Delta x_{f3}$ e $\Delta u'_4 + \Delta u''_4 = \Delta x_{f3}$ (pois a folha com tamanho L_4 foi esticada até Δx_{f3}) então as áreas desempacotadas das duas folhas são iguais. Logo, se duas bolas de papel com L 's diferentes forem esticadas até o mesmo Δx as áreas médias desempacotadas, A_f , de ambas serão iguais.

$$A_{fi}(\Delta x) = A_{fj}(\Delta x). \quad (3.5)$$

Isto significa que se esticarmos duas folhas empacotadas com tamanhos L 's diferentes por um determinado Δx , tanto o trabalho $W(\Delta x)$ quanto a área desempacotada $A_f(\Delta x)$ das duas folhas serão iguais. Logo, os mecanismos responsáveis pelas forças de coesão da bola de papel são independentes do parâmetro L .

O comportamento descrito pela eq. 3.4 e eq. 3.5 só é comprovado para folhas com $L = 210 \text{ mm}$, pois as medidas da Fig. 20-b só foram realizadas com amostras de folhas amassadas com esse tamanho. Definimos ζ como o máximo esticamento possível de uma folha amassada com tamanho L , logo $\zeta = \sqrt{2}L - x_0$. Através da análise da razão entre as medidas de esticamento máximo, ζ , e Δx_f , para folhas com diferentes tamanhos L 's, podemos confirmar que o processo resumido nas eq. 3.4 e 3.5 pode ser estendido para a folhas amassadas com $L > L_c$ [veja Fig. 22]. Observe na Fig. 22 que todas as curvas com $L > L_c$ têm $\Delta x_f/\zeta \approx 0,82 \pm 0,02$, isso significa que Δx_f é proporcional a L , pois ζ é proporcional a L . Podemos mostrar através de um calculo analítico que a relação de proporcionalidade entre ζ e Δx_f é um reflexo da simetria de desmantelamento da fase empacotada, mostrada na Fig. 20-a, somada à igualdade entre Δx e Δu descrita na eq. 3.4.

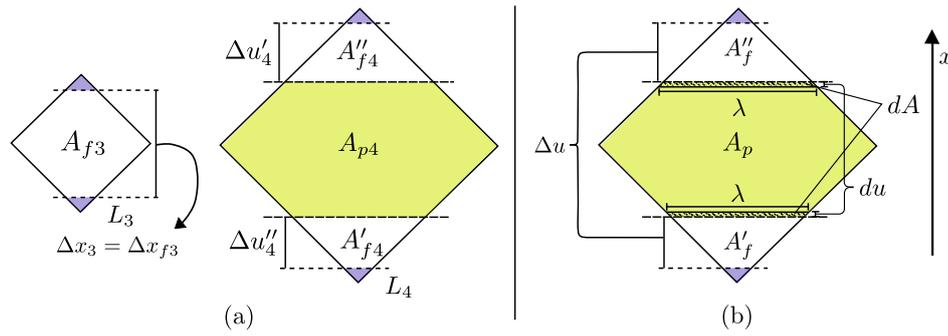


Figura 21 – (a) Mapa que mostra as áreas das folhas que estão desempacotadas, A_{f3} e A_{f4} , e a parte que ainda está empacotada, A_{p4} . Elas foram esticadas até Δx_{f3} . Neste ponto a folha L_3 está totalmente desempacotada e a folha L_4 está parcialmente desempacotada. A área desempacotada das duas folhas são iguais, $A_{f3} = A_{f4}$ pois $\Delta x_{f3} = \Delta u_3 = \Delta u'_4 + \Delta u''_4 = \Delta u_4$. (b) Esquema que mostra o desdobramento infinitesimal da folha empacotada. A medida que a folha é esticada um elemento de comprimento dx , o elemento de área dA (área riscada) é desdobrado. Observe que o elemento de área é igual a $du \cdot \lambda$.

Esta simetria se refere a um desdobramento unidirecional, isto é, o desmantelamento da fase empacotada cresce numa única direção (do eixo x), como pode ser visto na Figura 20-a. Esticando uma folha amassada em um elemento de comprimento dx (elemento infinitesimal de Δx), ela é desdobrada de um elemento de área dA , veja a Fig. 21-b. O elemento de área dA é um retângulo com altura du e comprimento λ , cuja área é igual a $\lambda \cdot du$. As duas partes desempacotadas têm comprimentos médios iguais, então $\Delta u' = \Delta u''$, e a sua união forma uma folha quadra desempacotada. Então, λ e Δx são os comprimentos das diagonais de um quadrado, significando que $\lambda = \Delta x$. Levando em consideração a eq. 3.4 então $du = dx$, logo, $dA = \Delta x \cdot dx$. Integrando dA entre os intervalos, 0 e Δx_f , nós adicionamos no cálculo a simetria de desmantelamento na direção do eixo x e obtemos

$$A_f = \int_0^{\Delta x_f} dA = \int_0^{\Delta x_f} \Delta x \cdot dx = \frac{1}{2} \Delta x_f^2.$$

Quando uma folha com tamanho L é desdobrada até o seu Δx_f (ponto que marca o fim da fase empacotada) então $A_f = L^2$, isto é, a área da fase desempacotada, A_f , é igual à área total da folha, L^2 . Logo,

$$A_f = \frac{1}{2} \Delta x_f^2 \rightarrow L^2 = \frac{1}{2} \Delta x_f^2 \rightarrow L \propto \Delta x_f. \quad (3.6)$$

O resultado da eq. 3.6 mostra que todas as folhas amassadas com $L > L_c$ também têm uma dinâmica de desmantelamento descritas pelas eq. 3.4 e 3.5.

Por outro lado, para folhas que estão em um regime $L \leq L_c$, $\Delta x_f/\zeta$ cresce linearmente com um ajuste linear tipo $\Delta x_f/\zeta = (0,36 \pm 0,06) + (0,007 \pm 0,001)L$,

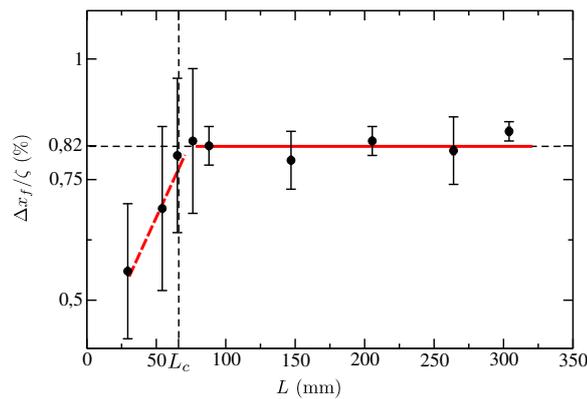


Figura 22 – Gráfico de $\Delta x_f/\zeta$ versus L . ζ é o esticamento máximo, igual a $\sqrt{2}L$ menos x_0 . As seis bolas com $L > L_c$ têm $\Delta x_f/\zeta$ constante e igual a $0,82 \pm 0,02$. Para $L < L_c$ o valor de $\Delta x_f/\zeta$ é proporcional a L . O ajuste linear para o intervalo de 0 a L_c é $\Delta x_f/\zeta = (0,36 \pm 0,06) + (0,007 \pm 0,001)L$.

então Δx_f cresce com L^2 . O ajuste linear das medidas de $\Delta x_f/\zeta$ para $L \leq L_c$ leva em consideração o peso das barras de erro das medidas e foi realizado no programa QtiPlot. Este resultado mostra que folhas amassadas com $L \leq L_c$ obedecem outra mecânica de dismantelamento diferente das eq. 3.4 e 3.5. No cap. 5, nós descreveremos um modelo que sintetizará muitos dos resultados experimentais mostrados neste capítulo e elucidaremos a origem da diferença entre folhas amassadas nos regimes $L > L_c$ e $L \leq L_c$. O valor encontrado para L_c através do ajuste da curva $\Delta x_f/\zeta$ versus L do gráfico da Fig. 22 é 66 ± 9 mm e $\Delta x_+ = 54 \pm 7$ mm.

Folhas finas na forma de bolas de papel amassadas pertencem à categoria de materiais amorfos, isto é, materiais que não podem ser definidos com precisão através da translação periódica de uma única célula unitária (MAVRAČIĆ et al., 2018). A partir desta definição, podemos ver muitas semelhanças entre este trabalho e os artigos de cisalhamento de materiais amorfos. Dentre os aspectos parecidos devemos começar pelo perfil da curva de stress-strain. Tanto na folha amassada, Fig. 16, como no estudo de cisalhamento de sólidos amorfos, a curva stress-strain tem inicialmente um comportamento linear. Quando o stress atinge a tensão de escoamento (no caso da SA o ponto "+"), a curva stress-strain entra em um regime sublinear (LIN; ZHENG, 2017). Esta mudança na inclinação da curva stress-strain é causada pela deformação plástica do material, que no caso de sólidos amorfos está relacionado à sua irregularidade e também a espaços vazios. Após o limiar de escoamento, um fluxo plástico de matéria desordenada gera um comportamento de fluxo heterogêneo, onde uma grande faixa de cisalhamento coexiste frequentemente com uma região congelada (TANGUY; LEONFORTE; BARRAT, 2006). Este aspecto é semelhante a coexistência da fase desempacotada (fase fluida) e da fase empacotada (fase congelada) do desempacotamento de folhas amassadas. Muitos trabalhos descrevem um comportamento superdifusivo em partículas imersas no fluxo

plástico de sólidos amorfos (TANGUY; LEONFORTE; BARRAT, 2006), característica que foi mostrada no desempacotamento de folhas amassadas (LEAL; GOMES, 2019) e será abordada no capítulo, a seguir.

3.4 COMPRESSÃO DE FOLHAS AMASSADAS

A compressão de folhas finas pode ser vista como o processo inverso do desempacotamento de folhas amassadas, examinado na seção anterior. Alguns aspectos básicos desses processos já foram comentados na seção 3.1. Nesta seção, mostraremos resultados que tem como objetivo relacionar estudos de compreensão de folhas finas com o trabalho de desempacotamento de folhas amassadas.

3.4.1 Modelo Termodinâmico de ordem zero da Compressão da Bola de Papel

Apesar da operação de amassar uma folha de papel na forma de uma bola ser um processo não-térmico, fora do equilíbrio, é interessante utilizarmos um modelo termodinâmico para encontrar o trabalho necessário para construir tal estrutura. Aqui, nós modelamos a folha de papel como um gás ideal e o processo de amassamento (compressão) como uma expansão (sic) isotérmica desse gás. Isso é possível pois o amassamento cria muitos espaços vazios em três dimensões, fato que não ocorre com a folha bidimensional, que não é uma estrutura porosa. O trabalho envolvido no processo é

$$W_{comp} = n\mathcal{R}T \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right), \quad (3.7)$$

onde o volume inicial do nosso sistema é $V_i = hL^2$ (volume da folha não amassada) e o volume final é $V_f = (4/3)\pi\bar{R}^3$ (volume da bola de papel com um formato aproximadamente esférico), h é a espessura da folha, n é o número de moles (de celulose) contidos na folha, \mathcal{R} é a constante dos gases e T é a temperatura. Nós encontramos o número de moles da celulose em uma folha de papel dividindo a massa da folha (M) pela massa molar da celulose (m_{cel}). Desta forma, nós estamos considerando que o papel é constituído somente de celulose, o que não é verdade. Contudo, este é um modelo aproximativo e o resultado será satisfatório se fornecer a mesma ordem de grandeza. Para uma folha de papel com $L = 2,41 \times 10^{-1}$ m, $\mu = 75 \times 10^{-3}$ Kg/m² e $h = 0,1 \times 10^{-3}$ m, temos $n = M/m_{cel} = (4,32\text{g})/(162,1\text{g}) = 0,027$ mol. No S.I. $R = 8,31$ J/K.mol e o amassamento é realizado em temperatura ambiente $T = 300$ K. Os volumes $V_i = (0,1 \times 10^{-3} \text{ m})(0,24 \text{ m})^2 = 5,76 \times 10^{-6}$ m³ e $V_f = (4/3)\pi(2,04 \times 10^{-2} \text{ m})^3 = 3,55 \times 10^{-5}$ m³. Através da equação 3.7 chegamos à

$$W_{comp} = (0,027)(8,31)(300)\ln(3,55 \times 10^{-5}/5,76 \times 10^{-6}) = 122,4 \text{ J.}$$

Comparando o valor de W_{comp} com os valores obtidos da Fig. 19, que mostram as medidas de trabalho necessário para desempacotar folhas de papel empacotadas, podemos observar que W_{comp} é duas ordens de grandeza maior que as medidas encontradas para aquele valor de W . É compreensível tal (aparente!) discrepância, uma vez que (i) a maior parte do trabalho feito na compressão (amassamento) é investido na formação dos dois tipos de defeitos topológicos do amassamento: as cristas e os cones aplicáveis (WOOD, 2002) [veja Fig. 23]. (ii) As cristas¹ são as grandes absorvedoras de energia e elas não são desfeitas no processo inverso de abertura das SA, elas permanecem na superfície, após o desdobraimento, irreversivelmente.

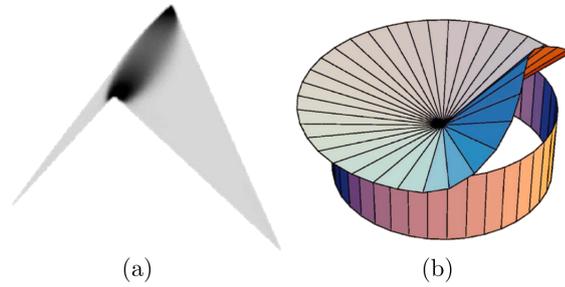


Figura 23 – a) Configuração simulada de uma crista na forma de pipa. Fonte: (LOBKOVSKY et al., 1995). (b) Esboço de cônica aplicável. Fonte: (VENKATARAMANI et al., 2000).

Através do modelo de expansão livre podemos estimar também o módulo de Young, que caracteriza a elasticidade da bola de papel amassada. Por meio dessa grandeza é possível comparar nosso modelo termodinâmico com medidas diretas de compressão axial de bolas de papel. O módulo de Young pode ser estimado através da pressão do gás ideal no instante final da compressão, isto é, através da fórmula

$$P_f = \frac{nRT}{V_f} = \frac{W_{comp}}{V_f \ln(V_f/V_i)} = \frac{W_{comp}}{1,819V_f} \approx Y \quad (3.8)$$

Utilizando os resultados encontrados através da eq. 3.7 encontramos o módulo de Young para uma folha amassada com tamanho $L = 241 \text{ mm}$,

$$Y \approx 122,4 \text{ J} / [(3,55 \times 10^{-5}) \times 1,819 \text{ m}^3] = 1,90 \times 10^6 \text{ J/m}^3 = 1,90 \text{ MPa.}$$

Este resultado obtido aqui para Y é próximo também ao módulo de Young encontrado para vegetais que possuem uma estrutura celulósica (OGAWA; MATSUURA; YAMAMOTO, 2015).

¹ Cristas após o desdobraimento serão chamadas de vincos.

Naturalmente, o leitor deve questionar seriamente a argumentação termodinâmica apresentada nesta subseção, a qual leva ao resultado $Y \approx 1,9$ MPa. Para ajudá-lo a verificar que ela não é absurda, apresentaremos abaixo uma segunda estimativa, não-termodinâmica, que leva essencialmente ao mesmo resultado, entre outros, na construção de uma SA.

Considere o amassamento manual de uma folha de papel de tamanho L , devido a uma força de compressão f , até formar uma bola aproximadamente compacta de diâmetro $2R$. Estimamos o trabalho realizado, W , para obter a bola amassada aproximadamente cúbica/esferoidal através da multiplicação da deformação pela força necessária para comprimir. Nós temos por consistência $W \approx F(L - 2R)$. Para uma folha com $L = 0,24$ m, $2R = 0,04$ m e para $F = 380$ N nós obtemos $W = 76$ J. O aumento da entropia, S , da folha amassada em comparação com a configuração plana é obtido por $S = W/T$, onde $S = 76 \text{ J}/300 \text{ K} = 0,25 \text{ J/K}$. Por outro lado, a pressão pode ser estimada a partir de $P = W/V_f$, que implica $P \approx 76/(3,55 \times 10^{-5}) \approx 2,2 \text{ MPa} \approx Y$. Note: (i) $V_f = 3,55 \times 10^{-5} \text{ m}^3$ é o mesmo valor que foi usado para o valor final no argumento termodinâmico. (ii) O valor usado para $F = 380$ N é uma média entre valores de "grip strength"[justamente o que é usado para fazer uma SA] para homens e mulheres (BAO, 2000; MASSY-WESTROPP et al., 2011). O valor é próximo do 1,9 MPa obtido pelo argumento termodinâmico, agregando consistência ao cálculo anterior e também próximo dos valores obtidos para compressão de nabos e cenouras (OGAWA; MATSUURA; YAMAMOTO, 2015).

3.4.2 Compressão Axial de Bolas de Papel Amassado

Nesta subseção nós descreveremos como foram obtidas as medidas de compressão axial, ou ensaio de compressão, da bola de papel amassado. As amostras de bolas de papel foram feitas com folhas de papel em formato quadrado e gramatura $\mu = 75 \text{ g/m}^2$. Todos os cuidados para controlar a absorção de umidade, descritos na seção 3.2, foram tomados nas amostras medidas neste trabalho. A compressão das bolas de papel foi realizada por meio de uma placa que espremia a folha de papel amassada contra a base do equipamento mecânico, veja Fig. 24-a. A placa era conectada à ponta de prova de um dinamômetro Instrutherm DD-500, que realizava as medidas de stress. O equipamento mecânico automático descrito na seção 3.2 foi adaptado para os testes de compressão, utilizando o programa e a interface que controlam o experimento. Através do programa podemos cruzar as medidas de força do dinamômetro com as medidas de deslocamento da placa. A distância entre a placa e a base é x , a distância inicial é x_0 , e a medida de compressão usada é a deformação $\delta = x_0 - x$. Todas as medidas de compressão foram realizadas a uma velocidade $v = 0,82 \text{ mm/s}$. A Fig. 24-b mostra um exemplo da medida de stress de compressão (F) versus a deformação (δ) de uma bola de papel com raio $R = 21,6 \text{ mm}$, feita com uma folha quadrada de lado $L = 241 \text{ mm}$. A

constante elástica associada ao regime assintótico de grandes deformações, no processo de compressão (reta contínua na figura 24-b), vale $k = 12 \text{ kN/m}$, e relaciona-se com Y através da expressão simples $k = \pi Y R/2$, onde R é o raio da bola de papel amassado acima reportado. O valor numérico obtido é $Y = 0,37 \text{ MPa}$. Este $k = 12 \text{ kN/m}$ medido para a compressão é cerca de 350 vezes maior que a constante elástica no regime linear inicial para o processo de esticamento mostrado na Fig. 16-b (34 N/m). O valor $Y = 0,37 \text{ MPa}$ obtido nos experimentos de compressão reportados também não é inconsistente com valor encontrado a partir da eq. 3.8, ou a partir do argumento não termodinâmico que apresentamos depois: enquanto estes últimos, se referem ao processo de formação da SA, no qual é criado, irreversivelmente, defeitos sobre a superfície, o valor de $0,37 \text{ MPa}$, cerca de 5 vezes menor que o obtido com a eq. 3.8, está associado a uma superfície amassada com os defeitos já formados.

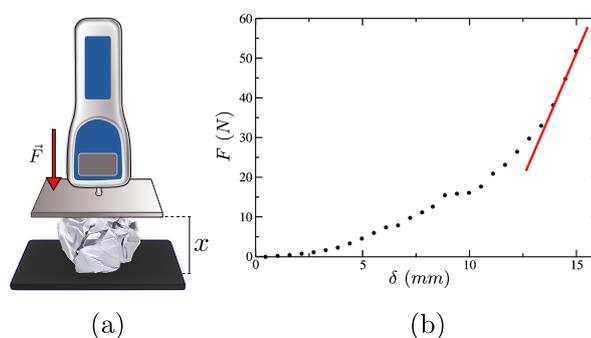


Figura 24 – a) Esquema simplificado da compressão da bola de papel amassado. b) Gráfico stress-strain da compressão axial de bola de papel de raio $R = 21,6 \text{ mm}$, feita de folha quadrada com lado $L = 241 \text{ mm}$. A deformação, δ , é a distância inicial (x_0) entre as placas menos a distância (x) instantânea entre as placas. A reta contínua no fim da curva fornece uma inclinação $k = 12 \text{ kN/m}$.

Para analisar o comportamento médio das curvas $F-\delta$, nós reproduzimos cada amostra cinco vezes. Nós fizemos medidas de compressão com folhas amassadas com tamanhos variados $L = \{16,4; 24,0; 33,0; 45,7 \text{ e } 66,0 \text{ cm}\}$, veja o gráfico da Fig. 25, para compreender como o comportamento médio da curva $F-\delta$ mudava com a escala do sistema. As curvas da Fig. 25 mostram que a rigidez da bola de papel diminui a medida que o tamanho da folha cresce, como esperado. Resultado este que concorda com o fato de que a porosidade da bola cresce com o tamanho L da folha amassada (BOUAZIZ et al., 2013). Nós observamos também a existência de um platô em todas as curvas que ocorre aproximadamente na mesma medida de força, $F = 17,21 \text{ N}$, independente de L . Acreditamos que este platô seja causado por mudanças na natureza estrutural da folha amassada, a medida que ela é comprimida. Mudanças de regime durante o processo de compressão, já foram descritas na literatura (GOMES et al., 1989) [veja o resumo da seção 3.1].

Tendo estudado neste capítulo as propriedades elásticas básicas, estáticas, envolvidas na compressão e na distensão de superfícies amassadas, passaremos, a seguir, ao estudo de propriedades que envolvem explicitamente o tempo nos processos de distensão dessas superfícies, já que os processos de relaxação temporal de superfícies amassadas foram anteriormente estudados, como comentado na seção 3.1.

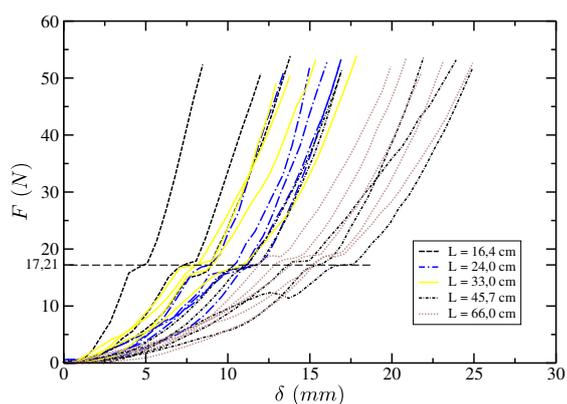


Figura 25 – Gráfico stress-strain da compressão axial de bolas de papel de folhas quadradas com tamanhos L 's variados. Para mais detalhes consulte o texto.

4 RELAÇÃO STRAIN-STRAIN NO DESDOBRAMENTO DE FOLHAS FINAS AMASSADAS

No amassamento, uma folha de papel é submetida a deformações plásticas irreversíveis que geram em sua superfície pequenos polígonos delimitados por cristas. Estas cristas guardam a memória da formação da estrutura da bola de papel, bem como suas características: fractalidade e hierarquia. No capítulo anterior, nós estudamos o desempacotamento de bolas de papel através da análise da relação stress-strain. Neste capítulo, daremos continuidade ao estudo do desempacotamento de bolas de papel, observando a expansão de sua deformação transversal, típica de um material auxético. Como pode ser facilmente verificado, folhas finas no estado de máximo empacotamento, como exemplificado por bolas de papel amassadas, pertencem à classe de materiais auxéticos (LEAL; GOMES, 2019), isto é, materiais com coeficiente de Poisson negativo (ALMGREN, 1985; KOLPAKOV, 1985).

Nosso objetivo neste capítulo é estudar a expansão da deformação transversal ao esticamento das bolas de papel amassadas. Por conta disso, as grandezas aqui estudadas foram encontradas usando várias fotografias que registravam a expansão das bolas de papel amassadas. Através de um programa de análise de imagem evidenciamos a relação do raio médio da expansão transversal $\bar{\rho}$ (ou a maior distância transversal ρ') em função do strain de tração (Δx). Nesse processo, o contorno apresenta um crescimento quadrático médio como uma lei de potência ao longo do tempo, caracterizando essa dilatação como uma difusão anômala (GREENENKO; CHECHKIN; SHUL'GA, 2004), como será mostrado em detalhe na seção 4.1.1 e 4.1.2. O expoente encontrado aponta que este é um sistema super difusivo (GREENENKO; CHECHKIN; SHUL'GA, 2004), obedecendo à lei de Richardson, encontrada na dispersão de fluidos turbulentos (RICHARDSON, 1926; JULLIEN; PARET; TABELING, 1999). Observamos que o crescimento do contorno de uma SA no processo de desembalagem apresenta flutuações intermitentes [veja vídeo do Material Suplementar de (LEAL; GOMES, 2019)], refletindo o complexo desmantelamento da estrutura amassada da folha. Estas flutuações são reminiscentes de um caminhante de Lévy com saltos longos e raros.

A estrutura deste capítulo é a seguinte: na primeira seção descrevemos os detalhes experimentais e na segunda seção apresentamos nossos resultados e discussões.

4.1 DETALHES EXPERIMENTAIS

Para estudar o strain transversal do esticamento de superfícies amassadas nós usamos folhas quadradas com lados $L = 21,1 \pm 0,1$ cm e gramatura $\mu = 75$ g/m² que foram amassadas em estruturas na forma de bola com um diâmetro médio do conjunto

$2\bar{R} = 38 \pm 1$ mm, conforme descrito em trabalhos anteriores (GOMES, 1987b). Antes de amassar, dois cantos foram deixados livres, dos quatro cantos da folha quadrada. Estes cantos ficaram expostos com o objetivo de fixá-los no equipamento responsável pelo desempacotamento, veja a Fig. 26. Os dois cantos expostos tinham posições na mesma diagonal, que é considerada a direção do strain de alongamento ao longo da vertical. Utilizamos folhas com $\mu = 75$ g/m² pois é a mesma gramatura usada nos experimentos de esticamento de folha descrito no capítulo 3.

No cap. 3, foi discutido a influência da umidade nas propriedades mecânicas da folha amassada. Por causa disso nós implementamos neste trabalho as mesmas medidas de controle da umidade. Por exemplo: as medidas foram feitas no verão, quando a umidade do ar é mais baixa e estável. Foi utilizado um higrômetro para medir a umidade relativa do ar do laboratório que marcava aproximadamente 40%, no verão com o ar-condicionado em sua potência máxima. Todo o experimento foi realizado com luvas, para que a umidade das mãos não alterasse as propriedades mecânicas das folhas amassadas.

4.1.1 Medidas da expansão lateral

Para registrar o processo de desempacotamento, gravamos imagens da expansão das bolas de papel em uma posição conveniente, como esboçado na Fig. 26. Nós utilizamos o equipamento robótico e a interface de controle de movimento descrito no capítulo 3, para esticar a folha amassada e dar suporte à câmera fotográfica. A precisão da posição de esticamento do aparato robótico é de 3 μ m e a velocidade de esticamento foi fixada em $5,8 \pm 0,1$ mm/s. As fotografias foram obtidas por uma câmera digital Olympus C-3040 Zoom, ajustada no equipamento, para que seu eixo focal seja sobreposto ao eixo do alongamento, x , a fim de evitar problemas provenientes da paralaxe. A câmera digital estava configurada com uma resolução de 2048x1536 pixels.

A deformação, Δx , é a distância entre os dois cantos da folha que foram expostos após o amassamento menos o tamanho inicial da bola amassada. O processo de esticar a bola de papel começa com a folha no estado de máximo empacotamento, $\Delta x_0 = 0,00$ mm, e continua até que a folha esteja completamente esticada, Fig. 26, última ilustração à direita. As imagens do desempacotamento das bolas amassadas foram tiradas em intervalos de $12,5 \pm 0,1$ mm ao longo da direção x . O experimento não foi realizado de maneira corrida, isto é, nós paramos o esticamento todas as vezes que tiramos as fotografias.

4.1.2 Descrição do contorno

Obtemos as grandezas geométricas de interesse processando as fotografias capturadas pela câmera digital, conforme indicado na Fig. 27-a. Esse tratamento foi

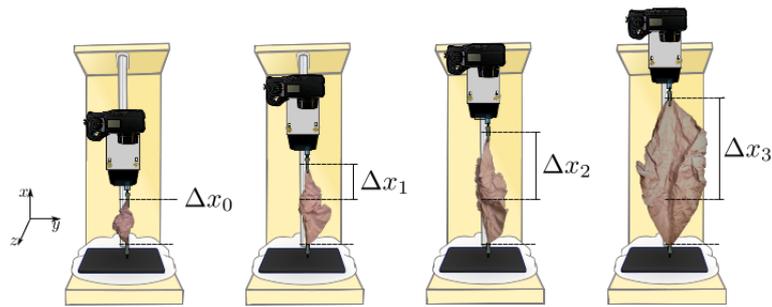


Figura 26 – Um esboço simplificado que ilustra o processo de dilatação transversal gravando imagens quando uma bola de papel é esticada. A deformação, Δx , é a distância entre os dois cantos da folha que foram expostos após o amassamento menos o tamanho inicial da bola amassada, Δx_0 . Os valores correspondentes aos quatro instantes do alongamento mostrado são $\Delta x_0 = 0,00$ mm, $\Delta x_1 = 58,97$ mm, $\Delta x_2 = 126,00$ mm e $\Delta x_3 = 189,99$ mm. Observe que, conforme a bola é esticada, ela se expande nas direções y e z .

realizado com o auxílio de um programa escrito na linguagem Wolfram Mathematica, que desenha o contorno da imagem da bola de papel amassado sendo aberta com resolução de 0,1 mm, conforme indicado na Fig. 27-a e 27-b (os códigos do programa estão disponíveis no Apêndice A). Esses contornos caracterizam a dilatação transversal da bola de papel para cada posição Δx do alongamento. No exemplo da Fig. 27, temos uma imagem correspondente a $\Delta x = 137,5 \pm 0,1$ mm, das 17 imagens que caracterizam toda a história de alongamento. No total, usamos em nosso estudo do desdobraimento de SA um conjunto com 10 réplicas equivalentes, correspondendo a um total de 170 imagens.

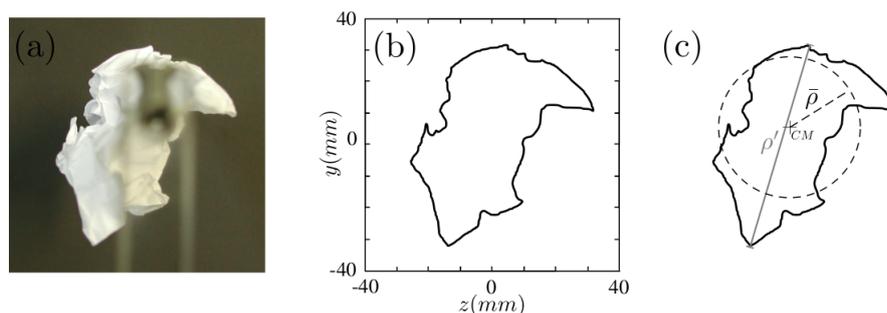


Figura 27 – Representação explicando o método de tratamento da imagem e análise da dilatação transversal. (a) Imagem capturada pela câmera posicionada no suporte, conforme descrito na Fig. 26. (b) Contorno que foi obtido ao aplicarmos nosso programa na imagem (a), consulte o texto para obter detalhes. CM é o centro de massa do contorno. (c) Ilustração do contorno (b) mostrando a distância máxima entre dois pontos do contorno (r'). Nesta imagem, a bola de papel foi esticada até $\Delta x = 137,5$ mm.

A Fig. 27-c ilustra as grandezas que são medidas e estudadas neste trabalho.

A primeira, $\bar{\rho}$, é a distância média entre os pontos do contorno e o centro de massa do contorno, CM . A segunda, ρ' é a distância máxima possível entre dois pontos do contorno. As duas grandezas caracterizam a expansão da deformação transversal, porém a diferença entre elas se origina na não homogeneidade da dilatação. Podemos verificar na Fig. 28 que a expansão cresce mais rápido na direção paralela ao eixo y , enquanto na direção paralela ao eixo z começa a crescer, mas decresce na metade do processo de esticamento. Portanto, foi necessário estudar o crescimento máximo e o crescimento médio de todas as direções.

Como este trabalho tem como objetivo modelar a expansão transversal de uma SA como uma difusão anômala, deve-se adaptar os modelos de difusão de fluidos para o método de análise de contorno descritos nesta seção. Os trabalhos que estudam a difusão de fluidos utilizam a variância da posição de suas partículas ($\langle r^2 \rangle$) para estabelecer o alcance da dispersão do fluido (RICHARDSON, 1926; JULLIEN; PARET; TABELING, 1999). A evolução temporal da variância obedece uma lei de escala igual a

$$\langle r^2 \rangle \sim t^\gamma. \quad (4.1)$$

Se $\gamma = 1$ então a eq. 4.1 corresponderá a difusão simples e se $\gamma > 1$ uma difusão anômala. Contudo, o método experimental descrito neste capítulo fornece o contorno da SA no plano yz e não a posição de cada pedaço da folha de papel. O contorno já é uma medida que caracteriza o alcance da expansão da folha no plano yz . Por este motivo foi usado o raio de giração do contorno, bem como, a máxima distância possível entre dois pontos do contorno para determinar o alcance da folha amassada.

No entanto, não se pode fazer a substituição de $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$ exatamente por $\bar{\rho}$ (ou ρ'), pois a variância fornece a variação da posição relativa entre as partículas. Como $\langle r^2 \rangle$, numa difusão bi-dimensional, tem a unidade da área [m^2], isto significa que a eq. 4.1 mostra como a variação da área por partícula escala no tempo. Através do método descrito neste capítulo é possível determinar como a variação da área do contorno escala com o tempo, pela variação do raio de giração do contorno ($\Delta\bar{\rho}$) e a variação da distância máxima ($\Delta\rho'$). $\Delta\bar{\rho}$ é igual ao raio de giração do contorno $\bar{\rho}$ menos o raio de giração do contorno quando $\Delta x = 0$ mm. $\Delta\rho'$ é igual distância máxima do contorno ρ' menos a distância máxima do contorno quando $\Delta x = 0$ mm.

4.2 RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.2.1 Análise qualitativa dos contornos

A Fig. 28-a representa um crescimento típico do contorno externo da região transversal de uma bola de papel durante a desempacotamento. O processo de desempacotamento

cotamento inicia em $\Delta x = 0,0$ mm (contorno mais escuro) e termina em $\Delta x_{final} = 203,5$ mm (contorno cinza mais claro). Isso parece contradizer o princípio de Le Châtelier, que afirma que quando um sistema em equilíbrio está sujeito a uma mudança, o próprio sistema responderá de forma a aliviar o efeito dessa mudança. Por esta razão, é comum que sistemas submetidos a um estresse de esticamento contraíam sua região transversal para amenizar os efeitos desse estresse. Conseqüentemente, a dilatação de $\bar{\rho}$ resulta em um coeficiente de Poisson negativo, que se refere a materiais auxéticos (ALMGREN, 1985; KOLPAKOV, 1985).

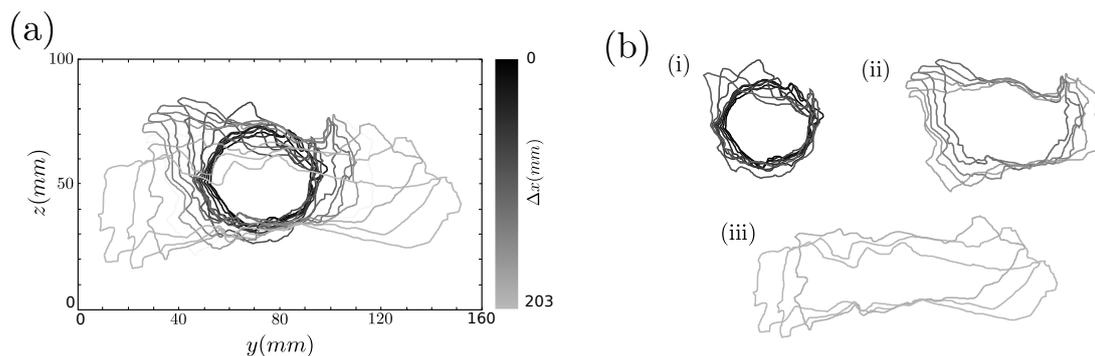


Figura 28 – a) Crescimento típico do contorno externo da região transversal da bola de papel durante o desempacotamento. A bola de papel neste exemplo em particular tem um diâmetro médio inicial $2\bar{R} = 36 \pm 2$ mm. O alongamento entre um contorno e seu sucessor, na direção de x , é de $12,5 \pm 0,1$ mm. Observe que o crescimento ocorre com saltos longos e curtos intermitentes durante o alongamento. b) Os 17 contornos foram divididos em três conjuntos, a fim de enfatizar a mudança abrupta de anisotropia crescente que ocorre no processo de expansão, a saber: quase-circular (i), quase-trapezoidal (ii) e quase-retangular (iii).

A Fig. 28 mostra como a deformação transversal tem uma tendência a crescer com Δx . No entanto, essa evolução da expansão apresenta flutuações dessa tendência, evidentes quando observamos as mudanças entre um contorno e seu sucessor. Isso se deve à natureza complexa da bola de papel: a taxa de crescimento apresenta flutuações com saltos curtos e longos do contorno distribuídos intermitentemente ao longo do alongamento, refletindo a dinâmica não trivial de expansão da superfície da bola de papel, com o desmantelamento de vários tipos locais de dobras emaranhadas.

É interessante notar que os vários contornos observados ao longo de todo o processo de desdobraimento, desta amostra típica, podem ser divididos em três grupos com três aspectos geométricos diferentes, Fig. 28-b. Podemos associar os contornos do conjunto (i), dos instantes iniciais, com uma seção quase circular; os contornos do conjunto (ii) têm uma forma quase-trapezoidal e os contornos do conjunto (iii), dos instantes finais, têm uma forma quase-retangular. Estas observações tem o único intento

de mostrar que dentro de um mesmo conjunto, os saltos de um contorno para o outro são pequenos, causados por pequenas desconexões locais folha-folha. As mudanças de forma entre os diferentes conjuntos sugerem visualmente mudanças bruscas, como os raros saltos longos de uma caminhada de Lévy (DUBKOV; SPAGNOLO; UCHAIKIN, 2008) causados por grandes desconexões globais folha-folha.

4.2.2 Análise quantitativa de $\bar{\rho}$

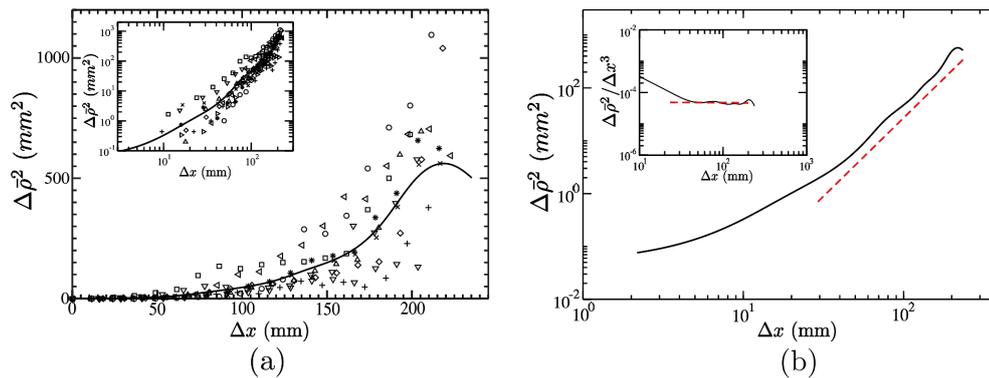


Figura 29 – (a) O raio médio do contorno, $\Delta\bar{\rho}$, versus a deformação longitudinal Δx (gráfico principal em escala linear e inserido em escalas log-log). A curva contínua reflete o método Nadaraya-Watson. Os símbolos referem-se a 10 experiências equivalentes usando 17 valores independentes diferentes da deformação longitudinal. (b) A curva de Nadaraya-Watson como em (a), mas com o guia para os olhos adicionado com a inclinação 3,00 (linha tracejada) mostrando que, assintoticamente, $\Delta\bar{\rho}^2 \sim \Delta x^{2,99\pm 0,01}$. Inset: $\Delta\bar{\rho}^2/\Delta x^3$ como uma função de Δx . Com $\Delta x \propto t$, a linha horizontal nesta inserção indica a presença do escalonamento assintótico de Richardson, $\Delta\bar{\rho}^2 \sim t^3$.

A Fig. 29 mostra $\Delta\bar{\rho}$ para diferentes valores de Δx . Na parte (a), temos um gráfico linear-linear de 10 experimentos de dilatação transversal da bola de papel. A curva contínua é gerada com um método não-paramétrico de regressão de dados denominado regressão de kernel Nadaraya-Watson (NADARAYA, 1964; WATSON, 1964), cujo objetivo é reduzir as flutuações. No inset, temos o mesmo gráfico nas escalas log-log, com o objetivo de elucidar o comportamento assintótico da curva contínua e flutuações. Na parte (b), temos a mesma curva contínua da parte (a) com um guia para os olhos, a linha tracejada, sugerindo a lei da potência assintótica $\Delta\bar{\rho}^2 \sim \Delta x^{2,99\pm 0,01}$. Observe que existe um platô incipiente no final da curva contínua na Fig. 29. Isso ocorre por conta de uma limitação do método de regressão Nadaraya-Watson devido ao pequeno tamanho de subamostragem. O ajuste atinge um intervalo entre $\Delta x = 27,95$ mm e $209,01$ mm que é aproximadamente a uma década. Pequenos intervalos de escala correspondem à dificuldade experimental de muitas curvas de escala temporal.

Duas décadas atrás, Jullien; Paret; Tabeling (1999) estudaram a dispersão de pares de partículas no fluxo de um fluido com turbulência bi-dimensional. E devido a importante analogia entre este fenômeno e o desdobraimento de uma folha amassada, reproduzimos na Fig. 29 a dependência encontrada por esses autores na curva na Fig. 2 da referencia (JULLIEN; PARET; TABELING, 1999), para que se possa fazer uma comparação mais direta.

4.2.3 Análise quantitativa de ρ'

O gráfico de $\Delta\rho'$ versus Δx é mostrado na Fig. 30, ele tem essencialmente a mesma aparência da Fig. 29, com uma lei de escala assintótica $(\Delta\rho')^2 \sim \Delta x^{3,13 \pm 0,01}$. Como discutido anteriormente, a diferença encontrada nos expoentes é o resultado da falta de homogeneidade da dilatação transversal. A falta de homogeneidade é causada pela transição de um regime em que a folha é empacotada na forma de uma bola para um regime em que ela é esticada.

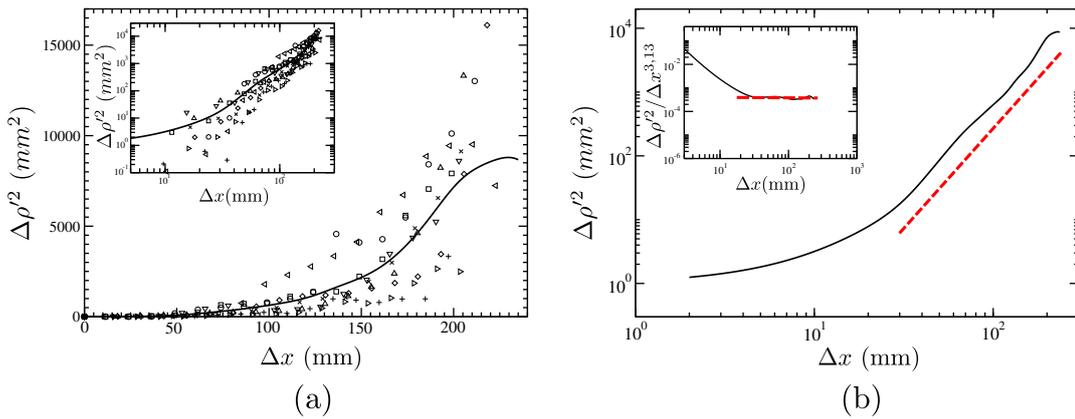


Figura 30 – (a) A distância máxima possível entre dois pontos do contorno, $\Delta\rho'$, e a deformação longitudinal Δx (gráfico principal em escala linear e inset em escalas log-log). A curva contínua reflete o método Nadaraya Watson. Os símbolos referem-se a 10 experiências equivalentes usando 17 valores independentes diferentes da deformação longitudinal. (b) A curva de Nadaraya Watson como em (a), mas com o guia para os olhos adicionado com a inclinação 1,62 (linha tracejada) mostrando $\Delta\rho' \sim \Delta x^{1,62 \pm 0,02}$. Inserção: $\Delta\rho'^2/\Delta x^{3,2}$ como uma função de Δx .

A figura 31 mostra a relação entre $\Delta\bar{\rho}$ e $\Delta\rho'$. Nos dois gráficos, temos dados de 10 experimentos com 17 valores independentes diferentes da deformação longitudinal e as curvas contínuas refletem o método Nadaraya Watson, semelhante ao descrito nos gráficos das Figuras 29 e 30. A linha tracejada, na gráfico principal, é uma lei de potência para guiar os olhos, mostrando $\Delta\rho' \sim \Delta\bar{\rho}^{1,07 \pm 0,01}$. No inset, temos o mesmo gráfico em escala linear. A linha cinza sólida no inset é dada por $\Delta\rho' = (3,54 \pm 0,02).\Delta\bar{\rho}$.

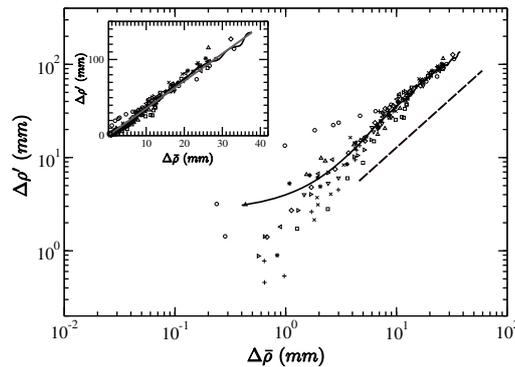


Figura 31 – A distância máxima possível entre dois pontos do contorno, $\Delta\rho'$, versus o raio médio do contorno, $\Delta\bar{\rho}$, (gráfico principal em escala log-log e inset em escala linear). A curva contínua reflete o método Nadaraya Watson. Os símbolos referem-se a 10 experiências equivalentes usando 17 valores independentes diferentes da deformação longitudinal. Veja o texto para detalhes.

4.2.4 A lei de escala temporal para o strain horizontal

A associação entre o comportamento assintótico mostrado na Fig. 29 e a relação de escala linear entre Δx e o tempo, nos leva a

$$\Delta\bar{\rho}^2 = At^\gamma, \quad (4.2)$$

isto é, nós obtemos uma lei de escala de difusão anômala espaço-temporal (semelhante a eq. 4.1) com $\gamma \approx 3$, que é uma assinatura de superdifusão (GREENENKO; CHECHKIN; SHUL'GA, 2004), como pode ser observado na estatística de caminhadas de Lévy (DUBKOV; SPAGNOLO; UCHAIKIN, 2008).

Deste modo, encontramos no desempacotamento das bolas de papel um regime que é dado essencialmente pela lei de Richardson (RICHARDSON, 1926; JULLIEN; PARET; TABELING, 1999). Isso está de acordo com a análise qualitativa da Fig. 28, que exhibe as características de caminhante de Lévy no crescimento (difusão) do contorno.

O valor $\gamma = 3$ tem uma implicação importante no estudo da equação 4.2, pois a constante A terá dimensão de $\frac{[J]}{[s].[Kg]}$, ou seja, potência por quilograma. Na turbulência, essa constante está relacionada à taxa de transferência de energia (JULLIEN; PARET; TABELING, 1999). O valor de A encontrado no ajuste da Fig. 29 é $8,98 \pm 0,08 \text{ W/Kg}$. Não estamos reivindicando aqui, evidentemente, que o desempacotamento de superfícies amassadas apresenta a usual turbulência em sua dinâmica, no entanto, à parte a existência da lei de Richardson, os dois sistemas têm semelhanças importantes: eles têm uma dinâmica não linear, ambos apresentam grandezas que possuem estruturas

hierárquicas (DONATO; GOMES; SOUZA, 2002; SULTAN; BOUDAOUUD, 2006), e ambos têm um suporte com uma dimensão fractal aproximada entre 2,5 (CS) - $8/3$ (turbulência) (SREENIVASAN; MENEVEAU, 1986; GOMES, 1987b).

5 MODELO HIERÁRQUICO DO DESEMPACOTAMENTO DE FOLHAS AMASSADAS

No capítulo-3, nós relatamos experimentos que medem a relação stress-strain e mostram uma coexistência de fases no esticamento de superfícies amassadas. O stress de esticamento mostrou uma mudança de um regime Hookeano linear para uma lei de escala sublinear. Neste capítulo, nós estudamos as flutuações dessa tensão e analisamos a distribuição estatística dos picos de força, mostrando como o desempacotamento de folhas amassadas é guiado por interações de longa distância.

5.1 ANÁLISE DA FLUTUAÇÃO DA FORÇA DE ESTICAMENTO NO DESEMPACOTAMENTO DE UMA FOLHA AMASSADA.

A mecânica subjacente a toda a fenomenologia do esticamento da folha de papel amassada tem suas raízes na organização das cristas que se formam durante o amassamento da folha. Com o objetivo de conectar as propriedades da rede dessas cristas com a curva de stress-strain, nós analisamos o elemento mais básico da curva $F-\Delta x$ (Fig. 32), os picos de flutuação, que ocorrem durante uma súbita mudança na conformação rugosa, semelhante ao que foi descrito no estudo dos ruído sonoros emitidos por uma folha elástica amassada (KRAMER; LOBKOVSKY, 1996). Nessa mudança estrutural, pequenas facetas delimitadas por cristas sofrem flambagem devido ao esticamento da SA.

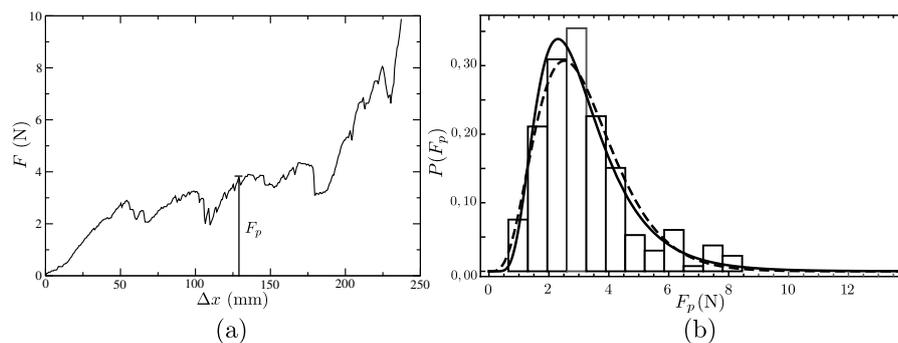


Figura 32 – (a) Gráfico de uma medida de esticamento. A magnitude de um pico (F_p) é mostrada. (b) Distribuições do tamanho relativo dos picos (F_p) da curva $F-\Delta x$ de SA com $L = 264$ mm. Essa distribuição contém as médias de dez amostras de folhas amassadas.

Para encontrar a relação entre os picos da curva $F-\Delta x$ e o comprimento das facetas (Λ), analisamos a distribuição de magnitude das forças dos picos F_p . As magnitudes de F_p correspondem aos valores da força medida em cada pico, conforme destacado na Fig. 32-a. A distribuição de F_p para 10 curvas equivalentes $F-\Delta x$ é mostrada na Fig. 32-b. A linha contínua é um ajuste com a distribuição log-normal, que tem a forma

$$P(x) \sim \exp[-(\ln(x) - \mu)^2 / (2\sigma^2)] / (x\sigma)$$

e parece capturar muito bem as características dos dados. Então, a magnitude dos picos de força encontrados aqui e do tamanho das facetas (Λ) relatados em (BLAIR; KUDROLLI, 2005) obedecem a uma relação hierárquica semelhante controlada por uma mesma distribuição estatística.

Para encontrar um comportamento hierárquico na distribuição estatística dos picos de força F_p das curvas $F-\Delta x$, precisamos definir as regiões de interesse. Na primeira e na segunda região, de acordo com a nomenclatura da Secção 3.3.1, as forças envolvidas são localmente transversais aos domínios da folha; elas geralmente conectam domínios separados na folha e são influenciadas pela hierarquia da rede de cristas. Na terceira região, as forças envolvidas são internas à folha, isso significa que a inclinação da curva de força $F-\Delta x$ não está relacionada às interações hierárquicas da rede de cristas e a magnitude dos picos é influenciada pelo rápido crescimento da força de alongamento desta região. Portanto, os picos encontrados na terceira região foram omitidos da análise. Na Fig. 32-b o leitor pode encontrar a distribuição de picos de força para folhas com tamanho $L = 264$ mm. Nós ajustamos as distribuições de magnitude de pico do desempacotamento de superfícies amassadas (SA) de tamanhos $L = \{30, 55, 66, 77, 88, 147, 206, 264 \text{ e } 305 \text{ mm}\}$, no entanto, apenas as folhas com os três L mais altos tinham um número razoável de picos para fazer um histograma. Provavelmente nosso dinamômetro não é sensível o suficiente para registrar flutuações na curva $F-\Delta x$ para folhas com tamanho L menor. Os desvios padrão encontrados para o desdobramento de SA com tamanhos $L = 305, 264$ e 206 mm foram respectivamente $\sigma \approx 0,42; 0,45$ (Fig. 32-b) e $0,42$. A Fig. 32-b também mostra que a distribuição Gama $P(x) \sim x^{a-1} / [b^a \Gamma(a)] \exp(-x/b)$ (curva tracejada da Fig. 32-b) descreve alternativamente o comportamento da distribuição de F_p 's, embora não tão bem próximo ao máximo da distribuição. Os parâmetros de forma encontrados são, respectivamente, $a = 6.3, 4.9$ e 6.8 . O teste do χ^2 quantifica que a distribuição log-normal é melhor ajustada aos dados.

5.1.1 Distribuição do comprimento médio local das facetas em uma folha amassada.

Na seção anterior, nós vimos que existe uma relação de correspondência entre o comprimento das facetas Λ e a magnitude do pico, F_p . Neste sentido é importante observar como o comprimento das facetas está distribuído sobre a superfície: a topografia da folha amassada, revelada por varredura a laser (BLAIR; KUDROLLI, 2005), Secção 2.1.2, mostra que a rugosidade média das cristas (ou elevação média da rugosidade) $\bar{\Delta}$, de uma folha de papel amassada desdobrada, dentro de uma caixa de tamanho w (veja essas grandezas na Fig. 33), escala como $\bar{\Delta} \sim w^H$. Esta lei de potência é uma análise de Hurst da topografia da folha amassada, com um expoente de Hurst $H = 0,71$, para

$w > w_c$, e $H = 1$, $w < w_c$, onde $w_c = 25 \pm 6 \text{ mm}^1$. Como as facetas são delimitadas pela rede de cristas, então $\bar{\Delta} \propto \bar{\Lambda}$, portanto

$$\bar{\Lambda} \sim w^H \tag{5.1}$$

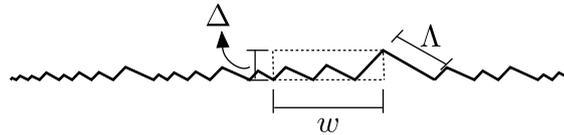


Figura 33 – Diagrama da seção transversal de uma pequena porção local de uma folha amassada, mostrando a rugosidade Δ para um intervalo w e o comprimento Λ das facetas.

O paralelo entre F_p e Λ apontado no final do parágrafo anterior, e a correspondência entre a deformação (Δx) com o intervalo (w), à medida que o desdobramento prossegue, fisicamente significa que

$$\bar{F}_p \sim \Delta x^H, \tag{5.2}$$

onde $H \approx 0,70$ para $\Delta x_f > \Delta x > \Delta x_{(+)}$ e $H \approx 1,0$ para $\Delta x < \Delta x_{(+)}$. A equação 5.2 é semelhante à eq. 3.1 e isso nos leva a identificar o expoente da primeira e segunda regiões da curva $F-\Delta x$ com o expoente de Hurst H . O expoente $H = 0,70$ indica que a rugosidade da SA não é puramente aleatória, mas possui memória para distâncias maiores que o comprimento médio da crista (MANDELBROT; NESS, 1968).

5.1.2 Comprimento médio global das facetas de uma folha amassada.

Dois trabalhos que examinaram o dobramento de folhas finas quando uma força de compressão radial f é aplicada, mostraram que as folhas passam por dois regimes caracterizados por padrões de curvatura (VLIEGENTHART; GOMPPER, 2006; TALLINEN; ÅSTRÖM; TIMONEN, 2009). Como foi descrito na subseção 2.2.1, no primeiro regime, o raio de compressão Φ do volume de confinamento é maior que Φ_c e $f < f_c$, onde Φ_c e f_c são o raio de transição e a força de transição para o regime amassado. Este regime inicial de curvaturas menores (menos acentuadas que em crista), é caracterizado por possuir cônicas aplicáveis em folhas elásticas, isto significa que o trabalho da força f é armazenado na forma de energia elástica. A dimensão fractal neste regime é semelhante àquela válida para a folha não amassada, $D = 2$. Para $\Phi < \Phi_c$ e $f > f_c$, a folha se encontra no regime amassado, suas dobras possuem hierarquia e f obedece uma lei de escala $f \sim (\kappa/L)(L/h)^\beta(\Phi/L)^{-(\alpha(\beta+1)-1)}$, onde κ é a rigidez à flexão e h

¹ Estimamos $\log_{10} w_c \approx 1,4 \pm 0,1$ da Fig. 5-c da ref. (BLAIR; KUDROLLI, 2005).

é a espessura da folha. O expoente α é encontrado através da simulação de (TALLINEN; ÅSTRÖM; TIMONEN, 2009):

$$\bar{\Lambda} \approx L(\Phi/L)^\alpha \quad (5.3)$$

com $\alpha = 1,65$, e com $\beta = 1/3$ vindo da conhecida lei de escala para a energia de uma única crista (LOBKOVSKY et al., 1995), $E_\Lambda \sim \kappa(\Lambda/h)^\beta$, cujo o valor encontrado de $\beta = 1/3$. A dimensão fractal da folha neste regime é $D = 2,5$ e $\Phi_c/L = 0,4$ para qualquer tamanho L de uma folha elastoplástica. A lei de potência de $f(h, L, \Phi)$ é encontrada em um modelo de campo médio (na eq. 2.10) através da derivada em Φ da energia de compressão de uma folha fina (eq. 2.9) e confirmada através de dados de simulação.

Depois de substituir Φ_c/L por $0,4$ em $f(h, \Phi, L)$, obtemos $f_c(h, L) = C(h)L^{(\beta-1)}$, com $C(h)$ sendo uma função de h . No gráfico da figura 17-b temos um registro do estiramento de folhas de diferentes tamanhos que foram comprimidas com a força de compressão manual f_m . Através da função inversa de $f_c(h, L)$ encontramos a folha com tamanho $L = L'$ satisfazendo $f_c = f_m$ (veja o gráfico no esquema da Fig. 34). Então, todas as folhas com $L > L'$ (linha contínua do gráfico da Fig. 34) têm suas $f_c < f_m$ e isso significa que elas estão no regime amassado e têm uma dimensão fractal $D = 2,5$, pois $f_c(h, L)$ é a força de compressão que marca a transição para o regime amassada de uma SA com tamanho L .

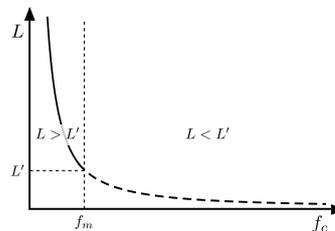


Figura 34 – Gráfico de L em função da força de compressão f_c .

As folhas com $L \leq L'$ (linha tracejada do gráfico da Fig. 34) estão no regime de cônicas aplicáveis e conseqüentemente dimensão fractal igual à das superfícies, $D = 2$. Assumindo que $L_c = L'$, a mudança de regime encontrada no alongamento de SA, entre $L \leq L_c$ e $L > L_c$, é causada pelo desdobramento de diferentes regimes estruturais da folha amassada (regime de cônicas aplicáveis ou regime amassado). O comprimento característico L_c é uma função da força f_m e h . Usando a relação entre a massa (M) e o raio da bola de papel (R) (GOMES, 1987b) como condição de contorno, $R = \Phi \sim L^{2/D}$, da eq. 5.3 nós temos

$$\bar{\Lambda} \sim L^{[(2/D-1).\alpha+1]} \rightarrow \bar{\Lambda} \sim L^H, \quad (5.4)$$

onde $H = (2/D - 1)\alpha + 1$. Para folhas com $L < L_c \rightarrow D = 2$ e $H = 1$. Para folhas com $L > L_c \rightarrow D = 2,5$ e $H = 0,67$.

As análises que levam às eqs. 5.1 e 5.4 sugerem que elas são equivalentes. Isso significa que também podemos encontrar a transição entre o regime de cônicas aplicáveis (ou regime de pequena curvatura) e o regime amassado variando a escala w . Portanto, em uma folha com $L > L_c$ e escala $w < w_c$ encontramos o regime de cônicas aplicáveis. Como $\Delta x \sim w$ então $\Delta x_{(+)}$ está associado a w_c , portanto a linearidade encontrada no início da curva $F-\Delta x$ ($\Delta x < \Delta x_{(+)}$) está relacionada às dobras de pequena curvatura do regime de cônicas aplicáveis. Em uma escala $w > w_c$, encontramos o regime amassado e por esta razão a curva $F-\Delta x$ possui um regime sublinear em $\Delta x_{(+)} < \Delta x < \Delta x_f$.

5.2 SIMETRIA DE DESDOBRAMENTO E COEXISTÊNCIA DE FASES

Nós mostramos na seção anterior que a curva de $F-\Delta x$ possui um comportamento sublinear que está relacionado à hierarquia das cristas da folha amassada. O modelo de campo médio que propomos explica os comportamentos da curva $F-\Delta x$, e consegue conectá-la a grande parte da literatura que se especializou no amassamento de folhas finas. Contudo, ainda falta explicar a origem da simetria de desdobramento do regime sublinear da curva $F-\Delta x$. Também, temos que explicar a causa da coexistência de fases estruturais presentes no regime sublinear. Por estes motivos, nós analisamos como a evolução da rede de cristas está relacionada ao processo de sobreposição de cristas.

Manipulando uma folha amassada, isto é, esticando-a e comprimindo-a, podemos observar que ela possui muitas configurações estáveis, mas distintas. A razão para esse comportamento está nas inúmeras transformações morfológicas irreversíveis, as cristas, que se cruzam e se superpõem durante o amassamento. Kramer e Lobkovsky analisaram esse aspecto da folha amassada e sugeriram que o cruzamento de duas cristas cria uma configuração na qual o movimento das facetas adjacentes se frustra, impedindo o desdobramento (KRAMER; LOBKOVSKY, 1996). Para a comodidade do leitor e devido a importância da compreensão geométrica da conformação, reproduzimos na Fig. 35 o esquema mostrando duas cristas cruzadas. Observe que uma das duas cristas cruzadas deverá ter $\theta = \pi$ para que o desdobramento não seja frustrado. Isso significa que a energia potencial elástica armazenada nas facetas adjacentes é impedida de se transformar em energia cinética pois o movimento das facetas é frustrado pela configuração de cristas cruzadas. Como uma SA deve possuir um número de cruzamentos de cristas da ordem de $O(L^2/\Lambda^2)$, então podemos dizer que a energia elástica da folha se assemelha à energia livre de um vidro de spin com uma enorme quantidade de configurações estáveis, isto é, a energia elástica da folha possui muitos mínimos distintos.

Esses mínimos de energia da SA estão relacionados estatisticamente com as propriedades da rede de cristas, pois eles são oriundos do particionamento da folha.

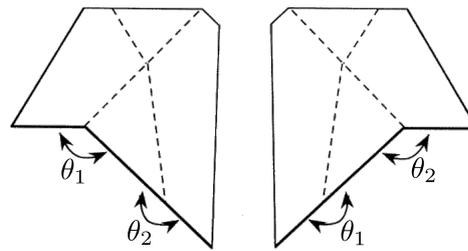


Figura 35 – Esquema ilustrativo mostrando que uma das duas cristas cruzadas deverá ter $\theta = \pi$ para que o desdobraimento não seja frustrado. **Fonte:** (KRAMER; LOBKOVSKY, 1996)

Por esse motivo nós examinamos a força-pico F_p de desconexão entre facetas. Nós desdobramos folhas quadradas com duas cristas cruzadas perpendicularmente [veja a Fig. 36]. O ângulo diedral θ entre as facetas era aproximadamente zero no início do esticamento. Por isso a abertura desses ângulos só foi possível graças a um súbito encurvamento das facetas, que gerou um pico na curva de força. Nós medimos o pico da força de esticamento desse desdobraimento através de um dinamômetro Instrutherm DD-500, utilizando a função *peak force*. Essa função registra a maior medida de força durante o esticamento da SA. O desdobraimento foi realizado puxando dois cantos com posições na mesma diagonal da folha quadrada (semelhante aos trabalhos de stress-strain descrito no cap. 3 e de strain-strain (LEAL; GOMES, 2019)). Um dos cantos foi fixado em uma base imóvel e o outro no dinamômetro. A folha amassada se desdobrava conforme nós puxávamos o dinamômetro. Devido a conformação da folha dobrada o esticamento foi realizado na horizontal. Nós não medimos quanto a folha deformava, pois nosso objetivo era a medida de F_p do desdobraimento de uma folha com tamanho L . Fizemos medidas de folhas com tamanhos $L = \{66, 33, 17, 8, 4 \text{ e } 2 \text{ cm}\}$. Para cada tamanho L , nós reproduzimos 10 amostras diferentes da força pico.

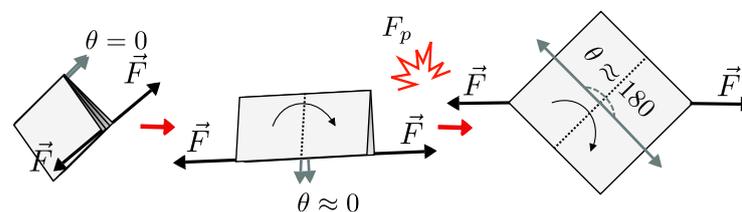


Figura 36 – Esquema do desdobraimento de uma folha quadrada com duas cristas cruzadas. Um pico na força de esticamento (F_p) é produzido quando os ângulos diedrais θ são abertos.

O gráfico das medidas de F_p versus L pode ser observado na Fig. 37, com um ajuste de lei de potência $F_p \sim L^{(1,0 \pm 0,1)}$, que mostra uma relação linear. Nessa configuração de dobramento, L é proporcional ao comprimento médio das facetas (Λ), então $F_p \propto \Lambda$. Essa relação de proporcionalidade entre F_p e Λ já foi sugerida pela correspondência

entre a distribuição da magnitude de F_p (observada na Fig. 32-b) e a distribuição do comprimento Λ (BLAIR; KUDROLLI, 2005).

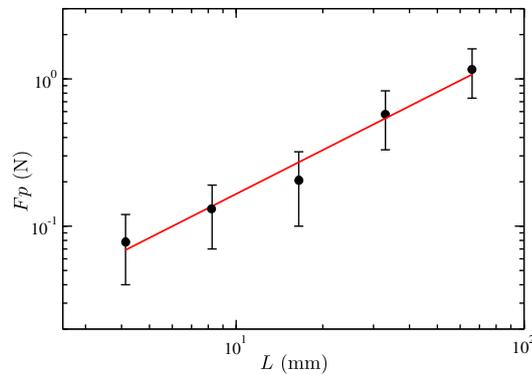


Figura 37 – Gráfico da força-pico F_p vs. L . O ajuste de lei de escala encontra uma relação $F_p \sim L^{(1,0 \pm 0,1)}$.

Devido ao resultado do experimento anterior, nós fizemos um modelo que considera cada F_p da curva $F-\Delta x$ como originado do desdobramento de uma estrutura física elementar da SA, semelhante a mostrada na Fig. 36. Na Fig. 38-a temos uma folha amassada desdobrada, onde nós colocamos em evidência parte de sua rede de cristas que está particionada em várias facetas. Nós utilizaremos como estrutura básica do desdobramento um pedaço da folha amassada que contém um vértice, as cristas e as facetas ligadas a ele (veja Fig. 38-b). Nós a denominamos de célula de desdobramento (CD).

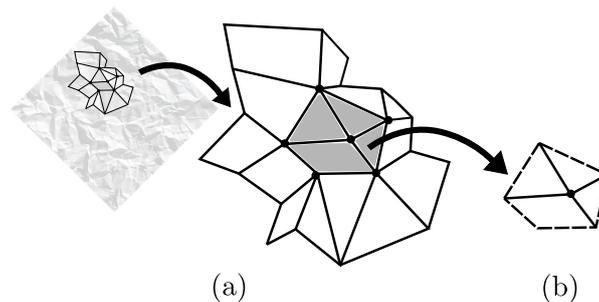


Figura 38 – (a) Folha amassada desdobrada. A seta aponta para uma configuração que enfatiza um pedaço da rede de cristas. Cada sítio da rede representa um vértice e cada ligação uma crista. (b) Célula de Desdobramento (CD) corresponde a área contendo um vértice, as cristas e as facetas ligadas a ele. **Fonte:** Autor.

Na Fig. 38-a, podemos observar que a folha amassada desdobrada pode ser vista como uma rede amorfa bidimensional de CDs. Cada CD está conectada fisicamente a suas CDs vizinhas, então quando ela é submetida a uma força de esticamento as suas CDs vizinhas serão puxadas posteriormente. A tensão de puxamento é transmitida

entre as CDs por meio de interações de primeiros vizinhos. Além deste vínculo entre vizinhos, as CDs possuem conexões de longa distância que são responsáveis pela coesão da bola de papel. Essas ligações à distância surgem do particionamento da folha durante o amassamento e por isso podem ser compreendidas através da análise da eq. 5.3. Como vimos na seção anterior, a equação 5.4 é encontrada através da eq. 5.3, e ela conecta duas propriedades importantes das SA, particionamento e memória a longa distância, devido ao expoente $1,0 > H > 0,5$. O particionamento também está associado a hierarquia das cristas e F_p (WOOD, 2002), veja na subseção 2.1.3.

A Fig. 39 mostra a evolução do particionamento de uma folha fina descrito pela eq. 5.3, a medida que Φ decresce. Na letra (a) o raio do volume de confinamento é Φ_1 e a folha é particionada em quatro pedaços. Na letra (b) o raio de confinamento é Φ_2 e na letra (c) o raio é Φ_3 . A compressão ocorre da esquerda para direita, então $\Phi_1 > \Phi_2 > \Phi_3$. Em uma perspectiva tridimensional, a evolução do particionamento é um processo de sobreposição de cristas que ocorre em uma ordem hierárquica. Então, as cristas que se formaram na compressão da folha entre os estados Φ_1 e Φ_2 (cristas que formam os vértices triangulares), estão sobrepostas às cristas que já existiam na folha em Φ_1 (cristas que formam o vértice quadrado). As cristas que se formaram na compressão da folha entre os estados Φ_2 e Φ_3 (cristas que formam os vértices circulares), estão sobrepostas às cristas que já existiam em Φ_2 e assim por diante.

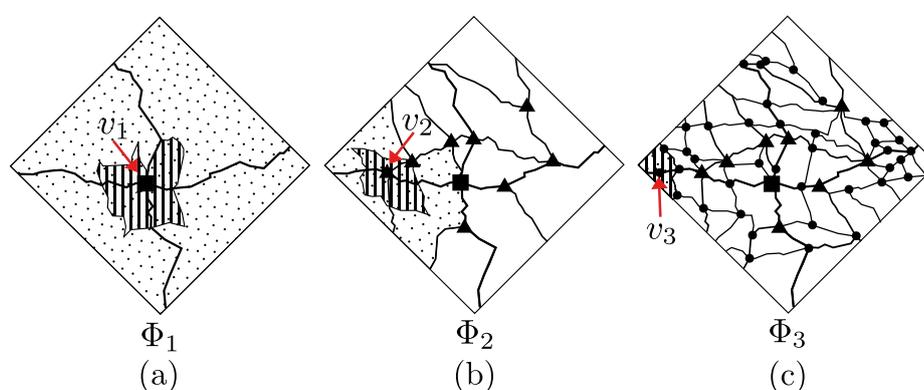


Figura 39 – Ilustrando a evolução da rede de cristas de uma folha de papel. (a) O vértice v_1 foi originado em Φ_1 . Os vértices triangulares foram formados entre os estados Φ_1 e Φ_2 . Os vértices circulares foram formados entre os estados Φ_2 e Φ_3 . O raio do volume de confinamento decresce neste sentido $\Phi_1 > \Phi_2 > \Phi_3$, ou seja, a folha está sendo comprimida.

O desempacotamento de uma SA deve obedecer ao processo inverso a essa sobreposição. O diagrama da Fig. 40 mostra essa dinâmica, onde temos uma sequência com a mesma rede de cristas da Fig. 39-c, contudo nós adicionamos um mapeamento mostrando a parte da folha com a fase desempacotada e a parte com a fase empacotada (área A_p da folha). Semelhante ao que foi descrito na Fig. 21 da subseção. 3.3.2, a fase

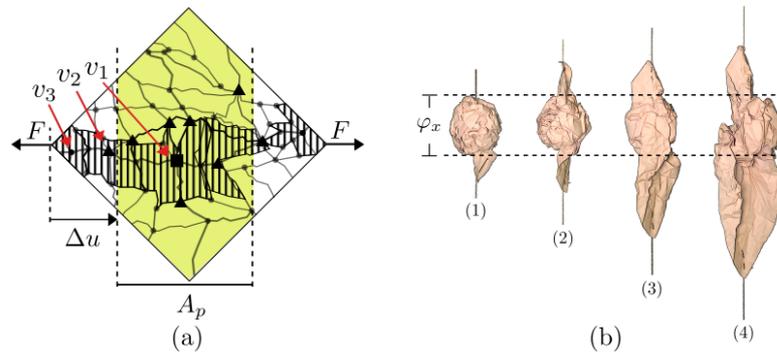


Figura 40 – (a) Ilustração mostrando a dinâmica do desdobramento por ordem hierárquica de uma folha amassada. A rede de cristas é a mesma da Fig. 39-c. A área A_p é a parte que ainda está empacotada. As CDs que estão em evidência correspondem às CDs dos vértices v_1 , v_2 e v_3 . (b) Sequência de imagens apresentada na Fig. 20-a que mostra a evolução do processo de esticamento. O diâmetro da fase empacotada na direção x , φ_x , é constante.

desempacotada cresce dos cantos da folha para o centro. Essa simetria de desdobramento é causada por dois fatores: (1^o) A força de esticamento (F) e aplicada somente na direção do eixo x . (2^o) O desdobramento deve seguir uma ordem hierárquica de desdobramento de CDs (ou cristas). Então, a sobreposição das cristas cria uma estrutura coesa que impede o desdobramento da SA quando a ordem estabelecida pela hierarquia das cristas é violada. Por esta razão, o diâmetro da fase empacotada na direção x , φ_x , na Fig. 40-b, é constante, pois a energia necessária para desdobrar as cristas que estão fora da ordem hierárquica tende a divergir. A igualdade presente na eq. 3.4, $\Delta u = \Delta x$, é uma consequência deste estado congelado da fase empacotada e mostra que o trabalho da força de esticamento, $W(\Delta x)$, é usado completamente para desdobrar as cristas que estão na ordem correta. Se φ_x mudasse com Δx , então parte do trabalho $W(\Delta x)$ seria usada para esta mudança e a tensão de esticamento envolveria o desdobramento de cristas de hierarquias diferentes ao mesmo tempo.

6 CONCLUSÕES

No primeiro trabalho (LEAL; GOMES, 2019), nós estudamos o desempacotamento de bolas de papel amassado observando a expansão de sua deformação transversal a direção de esticamento, característica típica de um material auxético (ALMGREN, 1985; KOLPAKOV, 1985). Descrevemos o perfil da região transversal da folha amassada por meio de imagens digitais, as quais foram editadas para caracterizar o perímetro dessa região por meio de curvas de nível e desta forma quantificar o alcance da expansão da folha. Nesse processo, o raio médio do contorno apresenta um crescimento quadrático médio como uma lei de potência ao longo do tempo, tipificando essa dilatação como difusão anômala (GREENENKO; CHECHKIN; SHUL'GA, 2004). O expoente encontrado, igual a $2,96 \pm 0,05$ (eq. 4.2), aponta que se trata de um sistema superdifusivo, obedecendo à lei de Richardson (JULLIEN; PARET; TABELING, 1999; RICHARDSON, 1926). Observamos também que o crescimento do contorno de uma SA no processo de desempacotamento apresenta flutuações intermitentes, refletindo o desmonte complexo da estrutura amarrotada da folha. Essas flutuações são uma reminiscência do comportamento do caminhante de Lévy com saltos longos e raros (DUBKOV; SPAGNOLO; UCHAIKIN, 2008).

No segundo trabalho (cap. 3), nós estudamos detalhadamente pela primeira vez o desempacotamento de sistemas amassados, observando a força necessária para desempacotar e esticar essas estruturas complexas. A curva de stress-strain correspondente apresenta regimes diferentes à medida que a folha se desdobra: um regime Hookeano linear no início do esticamento, poderíamos dizer associado às propriedades epidérmicas das superfícies amassadas, e um regime sublinear, diríamos "profundo", que possui um expoente igual a $0,65 \pm 0,03$, identificado neste trabalho com o expoente de Hurst da folha amassada. Este expoente H está associado à rugosidade "profunda" (bulk) da superfície amassada, para diferenciar da rugosidade superficial (GOMES et al., 1989). A distribuição de magnitude dos picos da curva de força (F_p) foi encontrada e mostrou-se consistente com o modelo hierárquico para as cristas durante o amassamento, indicando que existe uma correspondência entre o comprimento das facetas (ou cristas) e os picos F_p . Mostramos que o comportamento da curva de força é influenciado pela memória de longa distância, devido ao expoente $1 > H > 0,5$ (MANDELBROT; NESS, 1968), e por uma dinâmica de desdobramento de cristas ordenada pela hierarquia de dobras. Isso significa que o comportamento superdifusivo encontrado no desempacotamento da folha amassada (LEAL; GOMES, 2019) está conectado às propriedades da rede de cristas e à dinâmica de desdobramento de cristas ordenadas hierarquicamente. Nossos resultados mostraram que o expoente de Hurst da rugosidade da superfície (H) está

relacionado, através da eq. 5.1, a três propriedades da SA: particionamento, hierarquia e memória à longa distância. Nós registramos, também, um terceiro regime, no final da curva da força de esticamento $F(\Delta x)$, onde F passa a crescer muito rapidamente, ou seja, assinala a região em que as forças de coesão interna ao longo da folha passam a controlar a física do problema.

No processo de desdobramento relatado aqui, mostramos que há uma coexistência de duas fases estruturais: uma fase amassada fractal congelada (fase empacotada) e uma fase rugosa bidimensional sólida aberta de uma superfície com conectividade fixa (fase desempacotada). Essa coexistência de fases foi registrada no esticamento de folhas amassadas com tamanho L maior que um comprimento característico L_c . Observamos que no esticamento de SA com tamanho $L < L_c$, a dinâmica de desdobramento tem um comportamento diferente, apresentando uma transição contínua entre as fases empacotada e desempacotada.

Devido a importância do expoente de Hurst para as propriedades da folha amassada, é oportuno encontrar uma relação matemática, ao menos aproximada, entre ele e a dimensão fractal da SA. Isso pode ser buscando heurísticamente aplicando-se os valores extremos na eq. 5.1 (que tem a forma $\Lambda \sim w^H$), isto é, quando $w_{max} \approx L$ então $\Lambda_{max} \approx R$,

$$R \sim L^H, \quad (6.1)$$

onde R e L são os comprimentos empacotado (depois) e estendido (antes) do sistema amassado. Contudo, a relação Massa-Tamanho, que está descrita na eq. 2.1, obedece a lei de potência $M \sim L^2 \sim R^D$, que implica

$$R \sim L^{2/D}. \quad (6.2)$$

As expressões 6.1 e 6.2 sugerem a identificação:

$$H = 2/D,$$

com uma incerteza

$$\Delta H = (2/D^2)\Delta D.$$

Experimentos sugerem que $D = 2,50$ e $\Delta D = 0,15$, logo $H = 0,8$ e $\Delta H = 0,05$, ou seja, $H = 0,8 \pm 0,05$ que é um valor não muito distante dos encontrados nas medidas de força de esticamento ($H = 0,65 \pm 0,03$) e da análise de Hurst da rugosidade da folha amassada (0,70; erro não reportado) (BLAIR; KUDROLLI, 2005).

No terceiro trabalho, entre outros, nós estudamos de forma propedêutica a compressão de uma folha de papel através de diferentes abordagens. Primeiramente, modelamos a folha de papel como um gás ideal e o processo de amassamento (compressão) como uma expansão (sic) *isotérmica de equilíbrio* desse gás. Através desse modelo nós obtivemos o trabalho para amassar uma folha com tamanho L , bem como, o módulo de Young de uma bola de papel. Na segunda abordagem, nós calculamos o trabalho para amassar folhas finas através da força de compressão da mão de um ser humano adulto e encontramos valores para o trabalho, o aumento de entropia na formação da SA, e para o módulo de Young incrivelmente próximos ao que foi obtido no modelo termodinâmico do amassamento de folhas de papel. Comparamos os valores do trabalho para amassar uma folha de papel com o trabalho para desempacotá-la e verificamos que na descompactação o dispêndio de energia é duas ordens de grandeza menor que para a compactação, logo, o amassamento é um processo que dissipa bastante energia devido à formação de cristas.

REFERÊNCIAS

- AGUIAR, J. A.; GOMES, M. A. F.; NETO, A. S. Geometrical and electrical properties of crumpled wires. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 24, n. 3, p. L109–L112, 1991. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F0305-4470%2F24%2F3%2F002>>. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 34.
- ALBUQUERQUE, R. F.; GOMES, M. A. F. Stress relaxation in crumpled surfaces. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 310, n. 3, p. 377 – 383, 2002. ISSN 0378-4371. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437102007471>>. Citado na página 35.
- ALMGREN, R. F. An isotropic three-dimensional structure with Poisson's ratio $=-1$. *Journal of Elasticity*, v. 15, n. 4, p. 427–430, 1985. ISSN 1573-2681. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF00042531>>. Citado 3 vezes nas páginas 52, 56 e 70.
- BALANKIN, A. S.; HUERTA, O. S. Entropic rigidity of a crumpling network in a randomly folded thin sheet. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 77, p. 051124, May 2008. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.77.051124>>. Citado na página 34.
- BANCAUD, A. et al. A fractal model for nuclear organization: current evidence and biological implications. *Nucleic Acids Research*, v. 40, n. 18, p. 8783–8792, 07 2012. ISSN 0305-1048. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/nar/gks586>>. Citado na página 12.
- BAO, S. *Grip Strength and Hand Force Estimation*: Technical report no: 65-1-2000. USA Department of Labor and Industries, 2000. Citado na página 49.
- BAR-ON, Y. M.; PHILLIPS, R.; MILO, R. The biomass distribution on earth. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Academy of Sciences, v. 115, n. 25, p. 6506–6511, 2018. ISSN 0027-8424. Disponível em: <<https://www.pnas.org/content/115/25/6506>>. Citado na página 13.
- BARTENEV, G. M.; ZELENÉV, Y. V. Relaxation mechanisms in polymers. *Polymer Mechanics*, v. 11, n. 1, p. 94–108, jan. 1975. ISSN 1573-8922. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF00855429>>. Citado na página 35.
- BLAIR, D. L.; KUDROLLI, A. Geometry of crumpled paper. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 94, p. 166107, Apr 2005. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.94.166107>>. Citado 6 vezes nas páginas 19, 26, 62, 63, 67 e 71.
- BOCCALETTI, S. et al. Complex networks: Structure and dynamics. *Physics Reports*, v. 424, n. 4, p. 175 – 308, 2006. ISSN 0370-1573. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037015730500462X>>. Citado na página 12.

BOUAZIZ, O. et al. Compression of crumpled aluminum thin foils and comparison with other cellular materials. *Materials Science and Engineering: A*, v. 570, p. 1 – 7, 2013. ISSN 0921-5093. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0921509313000725>>. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 50.

BUSTAMANTE, C. et al. Single-molecule studies of dna mechanics. *Current Opinion in Structural Biology*, v. 10, n. 3, p. 279 – 285, 2000. ISSN 0959-440X. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0959440X00000853>>. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 40.

CERDA, E.; MAHADEVAN, L. Conical surfaces and crescent singularities in crumpled sheets. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 80, p. 2358–2361, 1998. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.80.2358>>. Citado na página 23.

CHERAYIL, B. J. Stretched exponential relaxation in polymer dynamics. *The Journal of Chemical Physics*, v. 97, n. 3, p. 2090–2094, 1992. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.463147>>. Citado na página 35.

DEBOEUF, S. et al. Comparative study of crumpling and folding of thin sheets. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 110, p. 104301, Mar 2013. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.110.104301>>. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 28.

DENG, S.; BERRY, V. Wrinkled, rippled and crumpled graphene: an overview of formation mechanism, electronic properties, and applications. *Materials Today*, v. 19, n. 4, p. 197 – 212, 2016. ISSN 1369-7021. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1369702115003119>>. Citado na página 12.

DONATO, C. C.; GOMES, M. A. F.; SOUZA, R. E. de. Crumpled wires in two dimensions. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 66, p. 015102, 2002. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.66.015102>>. Citado 4 vezes nas páginas 29, 30, 31 e 60.

DONATO, C. C.; GOMES, M. A. F.; SOUZA, R. E. de. Scaling properties in the packing of crumpled wires. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 67, p. 026110, 2003. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.67.026110>>. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 30.

DONATO, C. C.; OLIVEIRA, F. A.; GOMES, M. A. F. Anomalous diffusion on crumpled wires in two dimensions. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 368, n. 1, p. 1 – 6, 2006. ISSN 0378-4371. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437106001245>>. Citado na página 31.

DUBKOV, A. A.; SPAGNOLO, B.; UCHAIKIN, V. V. Lévy flight superdiffusion: An introduction. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, v. 18, n. 09, p. 2649–2672, 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/S0218127408021877>>. Citado 3 vezes nas páginas 57, 59 e 70.

FEDER, J. *Fractals*. 1. ed. [S.l.]: Springer US, 1988. 229-232 p. ISBN 978-1-4899-2126-0. Citado na página 18.

FOKKER, M. C.; JANBAZ, S.; ZADPOOR, A. A. Crumpling of thin sheets as a basis for creating mechanical metamaterials. *RSC Adv.*, The Royal Society of Chemistry, v. 9, p. 5174–5188, 2019. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1039/C8RA07565D>>. Citado na página 33.

FRAUENFELDER, H. Ask not what physics can do for biology—ask what biology can do for physics. *Physical Biology*, IOP Publishing, v. 11, n. 5, p. 053004, oct 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F1478-3975%2F11%2F5%2F053004>>. Citado na página 12.

GENNES, P.-G. de. *Scaling concepts in polymer physics*. First. Ithaca, United States: United Kingdom by Cornell University Press Ltd., 1979. Citado 3 vezes nas páginas 13, 17 e 34.

GIL, D. S. *Time-Lapse: Watch Flowers Bloom Before Your Eyes | Short Film Showcase*. 2014. National Geographic, YouTube. Disponível em: <www.youtube.com/watch?v=LjCzPp-MK48>. Citado na página 33.

GIORDANELLI, I. et al. Crumpling damaged graphene. *Scientific Reports*, The Author(s), v. 6, p. 25891, 2016. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/srep25891>>. Citado na página 33.

GOMES, M. A. F. Fractal geometry in crumpled paper balls. *American Journal of Physics*, v. 55, p. 649–650, 07 1987. Citado 4 vezes nas páginas 14, 16, 29 e 41.

GOMES, M. A. F. Paper crushes fractally. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 20, n. 5, p. L283, 1987. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0305-4470/20/i=5/a=005>>. Citado 10 vezes nas páginas 14, 16, 17, 18, 29, 35, 41, 53, 60 e 64.

GOMES, M. A. F. et al. Plastic deformation of 2d crumpled wires. *Journal of Physics D: Applied Physics*, IOP Publishing, v. 41, n. 23, p. 235408, nov 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F0022-3727%2F41%2F23%2F235408>>. Citado na página 13.

GOMES, M. A. F. et al. Plastic deformation of 2d crumpled wires. *Journal of Physics D: Applied Physics*, IOP Publishing, v. 41, n. 23, p. 235408, nov 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F0022-3727%2F41%2F23%2F235408>>. Citado na página 34.

GOMES, M. A. F. et al. Structural properties of crumpled cream layers. *Journal of Physics D: Applied Physics*, v. 40, n. 12, p. 3665, 2007. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0022-3727/40/i=12/a=017>>. Citado na página 17.

GOMES, M. A. F. et al. Mechanically deformed crumpled surfaces. *Journal of Physics D: Applied Physics*, v. 22, n. 8, p. 1217, 1989. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0022-3727/22/i=8/a=030>>. Citado 5 vezes nas páginas 18, 19, 34, 50 e 70.

GREENENKO, A.; CHECHKIN, A.; SHUL'GA, N. Anomalous diffusion and Lévy flights in channeling. *Physics Letters A*, v. 324, n. 1, p. 82 – 85, 2004. ISSN 0375-9601. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960104002798>>. Citado 3 vezes nas páginas 52, 59 e 70.

HANAOR, D. A. H. et al. Mechanical properties in crumple-formed paper derived materials subjected to compression. *Heliyon*, Publisher Description, v. 3, n. 6, p. e00329, jun. 2017. Citado na página 33.

- HANCOCK, R. Structures and functions in the crowded nucleus: new biophysical insights. *Frontiers in Physics*, v. 2, p. 53, 2014. ISSN 2296-424X. Disponível em: <<https://www.frontiersin.org/article/10.3389/fphy.2014.00053>>. Citado na página 12.
- HOLANDA, V. H. de; GOMES, M. A. F. Scaling, crumpled wires, and genome packing in virions. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 94, p. 062406, Dec 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.94.062406>>. Citado na página 13.
- JULLIEN, M.-C.; PARET, J.; TABELING, P. Richardson pair dispersion in two-dimensional turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 82, p. 2872–2875, 1999. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.82.2872>>. Citado 5 vezes nas páginas 52, 55, 58, 59 e 70.
- KITAGAWA, M.; ZHOU, D.; QUI, J. Stress-strain curves for solid polymers. *Polymer Engineering & Science*, v. 35, n. 22, p. 1725–1732, 1995. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/pen.760352202>>. Citado na página 39.
- KOLPAKOV, A. Determination of the average characteristics of elastic frameworks. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, v. 49, n. 6, p. 739 – 745, 1985. ISSN 0021-8928. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021892885900115>>. Citado 3 vezes nas páginas 52, 56 e 70.
- KRAMER, E. M.; LOBKOVSKY, A. E. Universal power law in the noise from a crumpled elastic sheet. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 53, p. 1465–1469, Feb 1996. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.53.1465>>. Citado 5 vezes nas páginas 20, 26, 61, 65 e 66.
- LAURATI, M.; EGELHAAF, S. U.; PETEKIDIS, G. Nonlinear rheology of colloidal gels with intermediate volume fraction. *Journal of Rheology*, v. 55, n. 3, p. 673–706, 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1122/1.3571554>>. Citado na página 43.
- LEAL, F. C. B.; GOMES, M. A. F. Strain-strain relation in the unfolding of crumpled thin sheets. *Materials Research Express*, IOP Publishing, v. 6, n. 10, p. 106407, aug 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F2053-1591%2Fab36de>>. Citado 7 vezes nas páginas 33, 35, 37, 47, 52, 66 e 70.
- LI, C.; WHITE, S. D. M. The distribution of stellar mass in the low-redshift Universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 398, n. 4, p. 2177–2187, 09 2009. ISSN 0035-8711. Disponível em: <<https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2009.15268.x>>. Citado na página 12.
- LI, J. et al. Dna under force: Mechanics, electrostatics, and hydration. *Nanomaterials (Basel, Switzerland)*, MDPI, v. 5, n. 1, p. 246–267, fev. 2015. ISSN 2079-4991. Disponível em: <<https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/28347009>>. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 40.
- LIN, J.; ZHENG, W. Universal scaling of the stress-strain curve in amorphous solids. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 96, p. 033002, Sep 2017. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.96.033002>>. Citado na página 46.
- LOBKOVSKY, A. et al. Scaling properties of stretching ridges in a crumpled elastic sheet. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 270, n. 5241, p. 1482–1485, 1995. ISSN 0036-8075. Disponível em: <<https://doi.org/10.1126/science.1257111>>. Citado na página 13.

//science.sciencemag.org/content/270/5241/1482>. Citado 4 vezes nas páginas 23, 24, 48 e 64.

LUO, J. et al. Crumpled graphene-encapsulated si nanoparticles for lithium ion battery anodes. *The Journal of Physical Chemistry Letters*, v. 3, n. 13, p. 1824–1829, 2012. PMID: 26291867. Disponível em: <<https://doi.org/10.1021/jz3006892>>. Citado na página 33.

MAJUMDAR, S.; PRASAD, R. R. The fractal dimension of cerebral surfaces using magnetic resonance images. *Computers in Physics*, v. 2, n. 6, p. 69–73, 1988. Disponível em: <<https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.168314>>. Citado na página 17.

MANDELBROT, B. *The Fractal Geometry of Nature*. 97-105: 1997, 1983. (Einaudi paperbacks). ISBN 9780716711865. Citado 3 vezes nas páginas 16, 17 e 18.

MANDELBROT, B. B.; NESS, J. W. V. Fractional brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Review*, v. 10, n. 4, p. 422–437, 1968. Disponível em: <<https://doi.org/10.1137/1010093>>. Citado 2 vezes nas páginas 63 e 70.

MAO, S. et al. A general approach to one-pot fabrication of crumpled graphene-based nanohybrids for energy applications. *ACS Nano*, American Chemical Society, v. 6, n. 8, p. 7505–7513, ago. 2012. ISSN 1936-0851. Disponível em: <<https://doi.org/10.1021/nn302818j>>. Citado na página 12.

MASSY-WESTROPP, N. M. et al. Hand grip strength: age and gender stratified normative data in a population-based study. *BMC Research Notes*, v. 4, n. 1, p. 127, abr. 2011. ISSN 1756-0500. Disponível em: <<https://doi.org/10.1186/1756-0500-4-127>>. Citado na página 49.

MATAN, K. et al. Crumpling a thin sheet. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 88, p. 076101, Jan 2002. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.88.076101>>. Citado na página 35.

MAVRAČIĆ, J. et al. Similarity between amorphous and crystalline phases: The case of tio₂. *The Journal of Physical Chemistry Letters*, v. 9, n. 11, p. 2985–2990, 2018. PMID: 29763315. Disponível em: <<https://doi.org/10.1021/acs.jpcllett.8b01067>>. Citado na página 46.

MIRZAALI, M. J. et al. Crumpling-based soft metamaterials: the effects of sheet pore size and porosity. *Scientific Reports*, v. 7, n. 1, p. 13028, 2017. ISSN 2045-2322. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/s41598-017-12821-6>>. Citado na página 33.

MORA, T.; BOUDAUD, A. Thin elastic plates: On the core of developable cones. *Europhysics Letters (EPL)*, IOP Publishing, v. 59, n. 1, p. 41–47, jul 2002. Disponível em: <<https://doi.org/10.1209%2Fepfl%2Fi2002-00157-x>>. Citado na página 23.

NADARAYA, E. On estimating regression. *Theory of Probability & Its Applications*, v. 9, n. 1, p. 141–142, 1964. Disponível em: <<https://doi.org/10.1137/1109020>>. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 57.

NELSON, D. L.; COX, M. M. *Lehninger Principles of Biochemistry*. Seventh edição. [S.l.: s.n.], 2017. ISBN 978-1464126116. Citado na página 12.

OGAWA, Y.; MATSUURA, M.; YAMAMOTO, N. Young's modulus and poisson's ratio changes in japanese radish and carrot root tissues during boiling. *International Journal of Food Properties*, Taylor & Francis, v. 18, n. 5, p. 1006–1013, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/10942912.2013.879388>>. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 49.

PHILLIPS, J. C. Stretched exponential relaxation in molecular and electronic glasses. *Reports on Progress in Physics*, IOP Publishing, v. 59, n. 9, p. 1133–1207, sep 1996. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F0034-4885%2F59%2F9%2F003>>. Citado na página 35.

PICKUP, R. M. et al. Generalized spin-glass relaxation. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 102, p. 097202, Mar 2009. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.102.097202>>. Citado na página 35.

PIETRONERO, L. The fractal structure of the universe: Correlations of galaxies and clusters and the average mass density. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 144, n. 2, p. 257 – 284, 1987. ISSN 0378-4371. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0378437187901919>>. Citado na página 12.

PIETRONERO, L. Complexity ideas from condensed matter and statistical physics. *Europhysics News*, v. 39, n. 6, p. 26–29, 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1051/epn:2008603>>. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 33.

REID, D. R. et al. Auxetic metamaterials from disordered networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Academy of Sciences, v. 115, n. 7, p. E1384–E1390, 2018. ISSN 0027-8424. Disponível em: <<https://www.pnas.org/content/115/7/E1384>>. Citado na página 39.

RICHARDSON, L. F. Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, The Royal Society, v. 110, n. 756, p. 709–737, 1926. ISSN 0950-1207. Disponível em: <<http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/110/756/709>>. Citado 4 vezes nas páginas 52, 55, 59 e 70.

SAITO, K. et al. Asymmetric hindwing foldings in rove beetles. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Academy of Sciences, v. 111, n. 46, p. 16349–16352, 2014. ISSN 0027-8424. Disponível em: <<https://www.pnas.org/content/111/46/16349>>. Citado na página 33.

SAYLES, R. S.; THOMAS, T. R. *Nature*, v. 271, 1978. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/271431a0>>. Citado na página 18.

SOBRAL, T. A. *Confinamento bidimensional de estruturas filamentosas com ênfase na formação de laços e topologia da cavidade*. 35 p. Tese de Doutorado, Recife, 2015. Citado na página 27.

SOBRAL, T. A. et al. Unpacking of a crumpled wire from two-dimensional cavities. *Plos One*, Public Library of Science, v. 10, n. 6, p. 1–13, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1371/journal.pone.0128568>>. Citado 3 vezes nas páginas 31, 32 e 38.

SREENIVASAN, K. R.; MENEVEAU, C. The fractal facets of turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 173, p. 357–386, 1986. Citado na página 60.

SULTAN, E.; BOUDAUD, A. Statistics of crumpled paper. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 96, p. 136103, 2006. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.96.136103>>. Citado na página 60.

TALLINEN, T.; ÅSTRÖM, J. A.; TIMONEN, J. The effect of plasticity in crumpling of thin sheets. *Nature Materials*, v. 8, n. 1, p. 25–29, jan. 2009. ISSN 1476-4660. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/nmat2343>>. Citado 7 vezes nas páginas 22, 23, 25, 28, 41, 63 e 64.

TANGUY, A.; LEONFORTE, F.; BARRAT, J. L. Plastic response of a 2d lennard-jones amorphous solid: Detailed analysis of the local rearrangements at very slow strain rate. *The European Physical Journal E*, v. 20, n. 3, p. 355–364, jul. 2006. ISSN 1292-895X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1140/epje/i2006-10024-2>>. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 47.

TU, S. et al. Stress–strain curves of metallic materials and post-necking strain hardening characterization: A review. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, v. 43, n. 1, p. 3–19, 2020. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/ffe.13134>>. Citado na página 39.

VENKATARAMANI, S. C. et al. Limitations on the smooth confinement of an unstretchable manifold. *Journal of Mathematical Physics*, v. 41, n. 7, p. 5107–5128, 2000. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.533394>>. Citado na página 48.

VLIEGENTHART, G. A.; GOMPPER, G. Forced crumpling of self-avoiding elastic sheets. *Nature Materials*, v. 5, n. 3, p. 216–221, mar. 2006. ISSN 1476-4660. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/nmat1581>>. Citado 4 vezes nas páginas 22, 23, 28 e 63.

WATSON, G. S. Smooth regression analysis. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series A (1961-2002)*, Springer, v. 26, n. 4, p. 359–372, 1964. ISSN 0581572X. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/25049340>>. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 57.

WEN, Z. et al. Crumpled nitrogen-doped graphene nanosheets with ultrahigh pore volume for high-performance supercapacitor. *Advanced Materials*, v. 24, n. 41, p. 5610–5616, 2012. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/adma.201201920>>. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 33.

WITTEN, T. A.; SANDER, L. M. Diffusion-limited aggregation, a kinetic critical phenomenon. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 47, p. 1400–1403, Nov 1981. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.47.1400>>. Citado na página 12.

WOOD, A. J. Witten’s lectures on crumpling. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 313, n. 1, p. 83 – 109, 2002. ISSN 0378-4371. Fundamental Problems in Statistical Physics. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437102012608>>. Citado 4 vezes nas páginas 21, 26, 48 e 68.

APÊNDICE A – CÓDIGO DO PROGRAMA RESPONSÁVEL PELA ANÁLISE DE IMAGEM

Nós descrevemos na seção 4.1.1 como funciona o processo de medição da expansão transversal da folha de papel amassada, quando ela é esticada. Na Fig. 26 temos o esquema do mecanismo responsável pelo registro de fotografias da dilatação transversal de bolas de papel amassado. Neste apêndice iremos descrever como funciona o código escrito em linguagem Mathematica e disponibiliza-lo.

Este apêndice será dividido em duas seções:

- 1º Método de calibração - descreve como calibramos o programa de análise de imagens afim de que ele possa transforma as medidas de unidades de pixels para milimetro.
- 2º Análise de imagem - descreve como o programa que mede a dilatação transversal do esticamento da bola de papel funciona.

MÉTODO DE CALIBRAÇÃO

Para calibrar o programa de análise de imagem mencionado na seção 4.1.2 nós registramos fotos de uma folha com um desenho em diferentes distancias x , veja Fig. 41-a. x é a distância entre o suporte da câmera e a base imóvel do aparato experimental. No capítulo 2 e 3, nós usamos x como a distancia entre as duas pontas da folha amassada que ficaram expostas, essa definição de x é equivalente a sugerida neste apêndice, pois as duas pontas serão presas no suporte da câmera e na base imóvel [Veja a Fig. 43]. Nós desenhamos na folha 36 pontos organizados como sítio de uma rede quadrada com parâmetro de rede $a = 1$ cm. O objetivo é encontrar como " a "varia com x [Fig. 41-b]. Nós analisamos, também, se a lente da câmera provocava distorções na imagem da folha, nas direções y e z , por causa de sua concavidade. Contudo, não encontramos mudanças.

Nós registramos sete fotografias em distâncias x igualmente espaçadas. As distâncias x foram {25, 50, 75, 100, 125, 150 e 175 mm}. Na Fig. 42 podemos ver as sete fotos usadas para calibrar o programa de análise de imagem. O programa de calibração irá importar essas imagens e ao final da compilação ele irá exportar o arquivo "k_c_cerro.dat"que é utilizado para calibrar a análise das medidas de dilatação nas imagens da folha amassada.

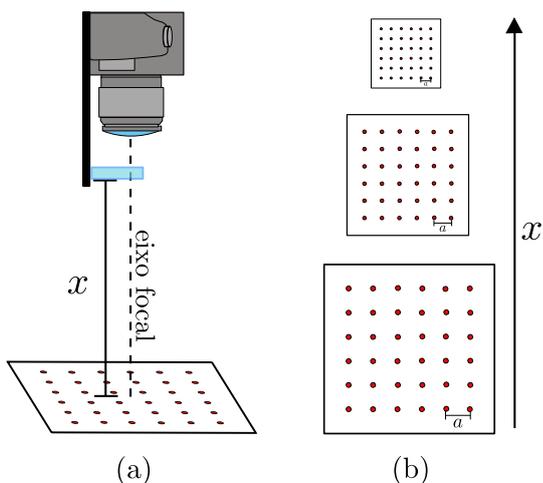


Figura 41 – Esquema que mostra o método de calibração do programa de análise da dilatação transversal. (a) O equipamento descrito na Fig. 26 registra fotografias de uma folha com 36 ponto que formam uma rede quadrada com parâmetros de rede $a = 1$ cm. (b) A medida que a câmera se move para cima (x cresce) e a imagem da folha diminui. **Fonte:** O autor (2020)

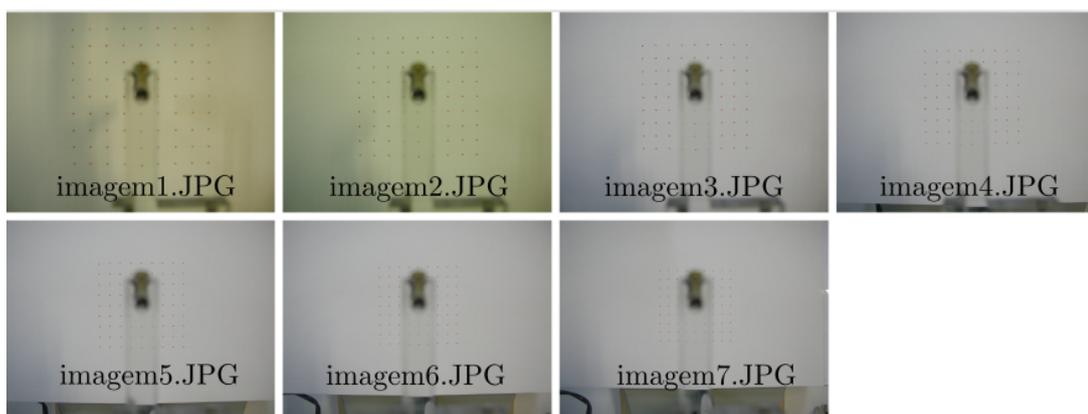


Figura 42 – Fotografias utilizadas no processo de calibração. **Fonte:** O autor (2020)

```

(***** PROGRAMA DE CALIBRAÇÃO *****)

SetDirectory[NotebookDirectory []];

(* Esta parte do código importa as imagens do diretório onde este arquivo estiver salvo. *)

Clear[lim, s]
lim = {};

Do[
  AppendTo[lim, Import[StringJoin ["imagem", Tostring[i], ".JPG" ]]];
, {i, 1, 7}]

(* Este segmento mede a resolução das fotos em pixels. *)

cf = Table[ImageDimensions[lim[[i]]]/2, {i, 1, 7}];

(*Aqui nós binarizamos as imagens das fotografias com o objetivo de colocar cada ponto da rede de pontos das fotografias num sistema de coordenadas cartesianos.*)

ims = Table[
  SelectComponents[
    Binarize[ColorSeparate[lim[[i]]][[2]], {0.2, 0.49}]
    , {"Count", "AdjacentBorderCount"}, 250 > #1 > 1 && #2 == 0 &]
    , {i, 1, 7}];

(*Neste segmento nós transformamos os pontos brancos das imagens binarizadas em ponto de um plano de coordenadas cartesianas.*)

Clear[val, val1, val2]
val1 = Table[ImageValuePositions[ims[[i]], White], {i, 1, 7}];

(* Este segmento do código translada os pontos para que o centro do eixo yz fique no centro da foto, isto no eixo focal da câ-
```

```

mera . *)

val2 = Table[
  Table[val1[[j]][[i]] - cf[[j]],{i,1,Length[val1[[j]]}],
  {j,1,Length[val1]}];
Clear[im2]

(* Abaixo , nós desenhamos os dados da imagem 1. Mude o valor "i"
de "val2[[i]]" para visualizar os dados das outras seis foto-
grafias . *)

im2 = ListPlot[val2[[1]], PlotStyle -> {Blue}];
ListPlot[{cf[[1]]}, PlotStyle -> {Red,Large}];
Show[%,im2]

(* Filtrar área importante *)

(* Neste seguimento nós vamos retirar os pontos provenientes de
ruídos , para que no gráfico só fique os pontos de interesse .*)

Clear[val3]

val3 = Table[{} ,{i,1,Length[val2]}];
j = 1;
Do[
  Do[
    If[520 > val2[[j]][[i]][[1]] > -520 \[And]
      650 > val2[[j]][[i]][[2]] > -420,
      AppendTo[val3[[j]], val2[[j]][[i]], Continue[] ];
    , {i, 1, Length[val2[[j]]}];
  , {j, 1, Length[val2]}]

ListPlot[val3[[1]], PlotStyle -> {Blue}]

(***** CALIBRANDO *****)

(* Nós criamos a lista "list3" abaixo com sete componentes. Ne-
las nós colocaremos as constantes importantes no processo de
análise de imagens. Essas constantes são denominadas de "k",

```

"c" e o erro de c ("cerro") de cada uma das sete imagens. *)

```
Clear[list3];
```

```
list3 = Table[{} , {i, 1, 7}];
```

(*Obs.: O código não é tão eficiente daqui para frente. Você terá que rodar cada segmento individualmente para cada uma das sete figuras. *)

```
(* ***** Figura 1 ***** *)
```

```
(* ***** Teste ***** *)
```

```
s = 1;
```

```
Clear[j];
```

```
j = RandomInteger[{1, Length[val3[[s]]}];
```

```
ListPlot[Table[(((val3[[s]][[j]][[1]] -  
val3[[s]][[i]][[1]])^2 + (val3[[s]][[j]][[2]] -  
val3[[s]][[i]][[2]])^2)^0.5 , {i, 1, Length[val3[[s]]}]]]
```

(* Observe o gráfico gerado no seguimento acima. Cada linha representa a distância entre dois pontos escolhidos aleatoriamente. A linha com menor valor representam a menor distância possível, que é o valor da parâmetro de rede "a" em unidades de pixels para a imagem na distância "x". Devemos colocar o valor de "b", abaixo, ligeiramente acima da primeira linha do gráfico, afim de filtrar todas as outras linhas que estão acima. *)

```
(* ***** *)
```

```
Clear[list2]
```

```
list2 = {};
```

```
s = 1;
```

```
b = 160:
```

```
Do[
```

```
  j = RandomInteger[{1, Length[val3[[s]]}];
```

```

list = Table[((val3[[s]][[j]][[1]] -
              val3[[s]][[i]][[1]])^2 + (val3[[s]][[j]][[2]] -
              val3[[s]][[i]][[2]])^2)^0.5,
            {i,2,Length[val3[[s]]}];

Clear[list1];
list1 = {};
Do[
  If[50 < ((val3[[s]][[j]][[1]] -
            val3[[s]][[i]][[1]])^2 + (val3[[s]][[j]][[2]] -
            val3[[s]][[i]][[2]])^2)^0.5 < b,
    AppendTo[
      list1 ,{((val3[[s]][[j]][[1]] -
              val3[[s]][[i]][[1]])^2 + (val3[[s]][[j]][[2]] -
              val3[[s]][[i]][[2]])^2)^0.5,(val3[[s]][[j]][[1]]^2 +
              val3[[s]][[j]][[2]]^2)^0.5}],Continue[]
    , {i,1,Length[list]};

  AppendTo[
    list2 ,{list1[[1]][[2]],Mean[Cases[list1,{x_,y_} -> x]}]};
,{1,1,300}];

(* Nesta parte do código nós encontramos a relação entre o número de pixels (c) e a distância x da câmera. Em todas as sete imagens o valor de "k" é tão pequeno que ele será desconsiderado. *)

{k,c} = {a,b}/.FindFit[list2,a x + b, {a,b},x];
g[r_]:= k r + c;
Show[ListPlot[list2,PlotRange ->{{0,800},{0,170}}],
      Plot[g[x],{x,0,800}]]

(* Calculo do erro de "c". *)

cerro = Mean[
  Table[Abs[list2[[i]][[2]] - g[list2[[i]][[1]]]],{i,1,
  Length[list2]}]]*dp;

```

```

(* Aqui nós colocamos os valores dos parâmetros "k","c" e "cerro"
na s-sessima componente da lista "list3". Como estamos ana-
lisando a imagem 1 então s = 1. *)

list3[[s]] = {k,c,cerro}

(*Obs.: Todo o código acima até (*****Figura 1*****), deve ser
repetido individualmente para cada uma das sete imagens. Copie e
cole este seguimento mais seis vezes. Cada cópia corresponderá
a análise de uma das sete imagens. Substitua o valor de "s" em
cada um delas e por isso os valores de "k", "c" e "cerro" da
função "g[x]" serão adicionados a lista "list3". Todas as vezes
que você compilar esse segmento o valor de "b" deve ser cali-
brado conforme a orientação acima.*)

(*****)

(* Após preencher as sete componentes da lista "list3" como os
parâmetros "k","c" e "cerro", nós exportamos "list3" para a
pasta na qual o programa está instalado. *)

Export["k_c_cerro.dat",list3]

ListPlot[Transpose[{xf,Cases[list3,{x_,y_,z_} -> y]}]]
ListPlot[Transpose[{xf,Cases[list3,{x_,y_,z_} -> x]}]]

```

O arquivo "k_c_cerro.dat" será usado no programa que faz análise das imagens de folhas amassadas.

CÓDIGO DO TRATAMENTO DE IMAGENS

Para compreender como o programa de análise de imagem funciona deve se entender como ele interpreta a fotografia. A Fig. 43 tem um esquema que está propositalmente dividido em duas partes. O retângulo superior tem um esquema do equipamento exibido na Fig. 26 com uma perspectiva lateral, de frente para o plano xz . O retângulo inferior tem as fotos retiradas pela câmera, que mostra uma perspectiva da folha amassada olhando para o plano yz . A divisão do esquema nas letras (a), (b) e (c) enfatiza a evolução do processo de esticamento. Como sabemos, x é a distância entre as duas pontas da folha que ficaram expostas, e também, a distância entre o suporte da câmera e a base imóvel do equipamento. x' é a meia distância entre as duas pontas da folha que ficaram expostas, $x' = x/2$.

As três fotos da parte inferior da Fig. 43 contém o contorno da foto da expansão transversal da folha amassada (veja a Fig. 27). Observe que o esquema conecta, em cada letra, dois pontos da bola de papel na parte superior com dois pontos do contorno da fotografia correspondente. Cada ponto do contorno das fotografias possui uma profundidade diferente. Então, através da foto da expansão transversal da folha amassada podemos obter o valor das componentes y (s_y) e z (s_z) da posição de cada ponto do contorno, mas não obtemos o valor da componente x (s_x).

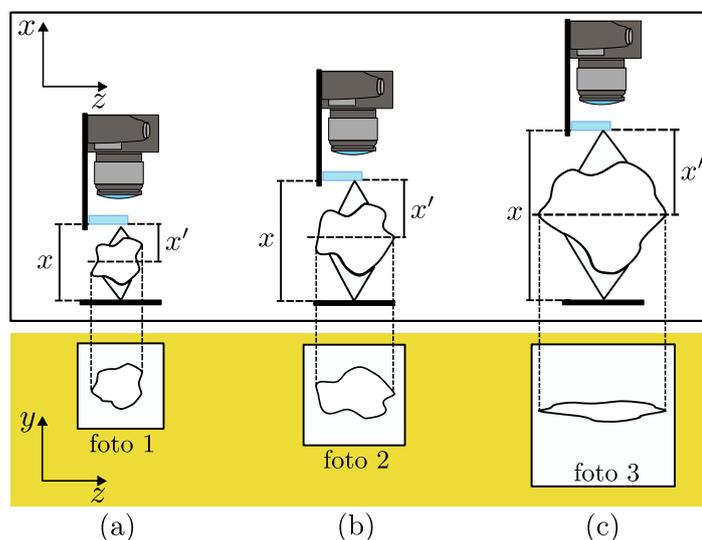


Figura 43 – Esquema que mostra como o programa de análise da dilatação transversal da folha amassada corrige e calcula os comprimentos nas imagens fotografadas. x é a distância entre a base e o suporte da câmera. x' é a meia distância entre o suporte da câmera e a base. **Fonte:** O autor (2020)

Para lidar com a falta de informação sobre a componente x da posição dos pontos do contorno, o programa de análise de imagem considera que todos os pontos do contorno têm a componente $s_x = x'$. Então, o contorno é considerado com a linha

equatorial da folha amassada. Essa estratégia tem um custo, pois o erro que ela produz em s_x da origem a um erro na calibração dos pontos do contorno. Como mostramos na Fig. 42-b o programa calibra o cambio das unidades de pixels para milimetro pela distancia x entre a imagem e o suporte da câmera.

Pode-se diminuir esse erro repetindo o experimento várias vez e analisando o comportamento médio. Mesmo que $s_x = x'$ não seja verdade para todos os pontos dos contornos o valor médio da componente x será $\bar{s}_x = x'$, pois a simetria esférica (da bola de papel) e simetria quadrada (da folha de aberta) têm suas maiores seções transversais ao eixo x na posição $x = x'$.



Figura 44 – Exemplo de uma das dez amostras da expansão transversal da folha amassada. Cada fotografia registra a folha de papel numa posição Δx diferente.
Fonte: O autor (2020)

A Fig. 44 mostra o exemplo de uma das dez amostras da expansão transversal da folha amassada. Cada fotografia registra a folha de papel numa posição Δx diferente. O programa de análise de imagem irá importar imagens como essas para encontrar o contorno, fazer o câmbio de suas medidas em unidade de milimetro e relacionar $\Delta \bar{\sigma}$ e $\Delta \sigma'$ com Δx .

```
(***** PROGRAMA DE ANÁLISE DE IMAGEM *****)

SetDirectory[NotebookDirectory[]];

(* Nesta parte do código importa se o arquivo
"k_c_cerro.dat". *)

ar = Import["k_c_cerro.dat"];

(* x0 é a posição inicial (em unidades de passos do motor elé-
trico). *)

x0 = 15428;

(* x3 é uma lista contendo todas as distancias x das 19 fotos da
Amostra 6, veja a Fig. 29. *)

x3 = Table[(20000 + 5000*i),{i,0,19}];

(* Em "x1" o valor "x0" é acrescentado a lista "x3". Então os
valores de "x0" e "x3" são divididos por dois, pois consideramos
que os pontos do contorno têm componente  $s_x = x'$ . *)

x1 = PrependTo[x3,x0]*0.0025/2;

(* x2 é uma lista contendo as 7 posições das imagens da
Fig. 27. *)

x2 = Table[10000*i*0.0025,{i,1,7}];
Clear[x]

(* Na lista "list2" tem a relação das posições x como os núme-
ros de pixels por centímetro ("c" de "k_c_cerro.dat"). *)

list2 = Transpose[{x2,Cases[ar,{s_,y_,z_} -> y]};

(* Este seguimento do código faz um ajuste dos dados da list2
```

*com uma função polinomial de segundo grau. *)*

```
{e,f,g}={a1,b,c}/.FindFit[list2,a1*z^2+b*z+c,{a1,b,c},z]
```

(A função polinomial encontrada no ajuste anterior. *)*

```
h[x_] = e*x^2 + f*x + g;
```

```
Show[Plot[h[x],{x,0,200}],ListPlot[list2]];
```

(A função d[x] corrige os dados das imagens da unidade de pixels para milímetros em função da posição x que a imagem esta. *)*

```
dp[x_] = 1/h[x];
```

(Esse seguimento importar as fotografias mostradas na Fig. 4. *)*

```
m = 19;
```

```
Clear[lim,s]
```

```
lim = {};
```

```
Do[
```

```
  (* If[i == 1 or i == 3,Continue[]]; *)
```

```
  AppendTo[lim, Import[StringJoin["foto",ToString[i], ".JPG"]]]
  ,{i,1,m}]
```

```
cf = Table[ImageDimensions[lim[[i]]]/2,{i,1,m}];
```

(Tratamento de imagem – Nesta rotina se extraiu o contorno da imagem da folha de papel. *)*

```
c11 = {0.45,0.45,0.45,0.4,0.4,0.4,0.4,0.55,0.45,0.45,0.45,0.51,
0.45,0.45,0.5,0.49,0.508,0.5,0.51};
```

```
im1 = Table[
```

```
  EdgeDetect[
```

```
    SelectComponents[
```

```

Binarize[
  SelectComponents[
    Binarize[
      ColorSeparate[lim[[i]][[3]],{c11[[i]],70}],{"Count",
        "AdjacentBorderCount"},#1>30000 && #2==0 &],{0.5}]
      ,Large]],{i,1,m}];

(* Neste segmento coloca se as posições dos pontos do contorno
numa lista , com suas coordenadas em unidade de pixels. *)

Clear[val1, val2]
val1 = Table[ImageValuePositions[im1[[i]],White],{i,1,m}];
val2 = Table[
  Table[val1[[j]][[i]] - cf[[j]],{i,1,Length[val1[[j]]}]
  ,{j,1,Length[val1]}];

(* Esta rotina mostrará os gráficos em coordenadas cartesianas
dos pontos do contorno. *)

Table[ListPlot[val2[[i]],
  PlotRange -> {{-750,750},{-750,750}},{i,1,m}];

(* Observe que, em alguns gráficos da rotina anterior, existem
pontos que não correspondem aos contornos da folha amassada. *)

(* Nessa rotina filtra se as regiões importantes, excluindo
os pontos provenientes de ruído. *)

Clear[val3]

val3 = Table[{} ,{i,1,Length[val2]}];

(* Nesta parte do filtro é descartado todos os pontos cuja
abscissa seja maior que 750 e menor que -700 e cuja ordenada
seja maior que 600 e menor que -320. *)

Do[
  Do[

```

```

If[750 > val2[[j]][[i]][[1]] > -700 And
  650 > val2[[j]][[i]][[2]] > -320,
  AppendTo[val3[[j]],val2[[j]][[i]],Continue []];

, {i,1,Length[val2[[j]]]};
,{j,1,Length[val2]}]

```

(Nesta parte do filtro nós descartamos dois pedaços correspondente ao ruído produzido pelo suporte. *)*

```

Clear[val4];
val4 = Table [{} ,{i,1,Length[val3]}];

```

```

Do[

```

```

  Do[

```

```

    If[-55 > val3[[j]][[i]][[1]] > -110 And
      280 > val3[[j]][[i]][[2]] > -600, Continue [],
    If[100 > val3[[j]][[i]][[1]] > -60 And
      280 > val3[[j]][[i]][[2]] > 50, Continue [],
    If[160 > val3[[j]][[i]][[1]] > 80 And
      280 > val3[[j]][[i]][[2]] > -600 , Continue [],
    AppendTo[val4[[j]],val3[[j]][[i]]];

```

```

    , {i,1,Length[val3[[j]]]};
  ,{j,1,Length[val3]}]

```

(Está parte da rotina mostra o resultado dos descartes. *)*

```

Table[ListPlot[val4[[i]],
  PlotRange -> {{-750,750},{-750,750}},{i,1,m}];

```

(Este segmento transforma as coordenadas de unidades de pixel para milímetro. *)*

```

val5 = Table[
  Table[val4[[j]][[i]]*dp[x1[[j]]],{i,1,Length[val4[[j]]]}
  ,{j,1,m}];

```

```

(* Centro de massa das curvas. *)
(* A rotina abaixo calcula o centro de massa dos contornos. *)

cm = Table[Mean[val5[[i]]],{i,1,Length[val5]}];

(* A rotina abaixo translada todos os pontos dos contornos de
maneira que a origem dos eixos coordenado ficará no centro de
massa de cada contorno. *)

val = Table[
  Table[val5[[j]][[i]] - cm[[j]],{i,1,Length[val5[[j]]]}]
  ,{j,1,Length[val5]}];

(* Gráfico com todos os contornos em unidade de milímetro. *)

a = 8;
ListPlot[Table[val[[i]],{i,1,18}],PlotRange -> {{-a,a},{-a,a}}]

(* Calculo da maior distância. *)
(* Nesta rotina se calcula a distância máxima entre dois
pontos do mesmo contorno (ymax). *)

Clear[ymax]
ymax={};

Do[

  AppendTo[ymax,Max[Table[Table[((val[[s]][[j]][[1]] -
val[[s]][[i]][[1]])^2+(val[[s]][[j]][[2]] -
val[[s]][[i]][[2]])^2)^0.5
  ,{j,1,Length[val[[s]]}]]],{i,1,Length[val[[s]]}]]];

,{s,1,m}]

(* Esta rotina relaciona a variação de ymax com a variação
da posição x. *)

x4 = Table[(x1[[i]]-x1[[1]])*2,{i,1,m}];
Dymax=Table[(ymax[[i]]-ymax[[1]])*10,{i,1,m}];

```

```

DxDymax=Transpose [{x4,Dymax }];
Export ["amost_DxDymax.dat",DxDymax];
ListPlot[DxDymax]

(* Transformação das coordenadas dos pontos dos contornos de
coordenadas cartesianas para coordenadas polares. *)

(* Coordenada radial - r. *)

Clear[r,theta];

r = Table[
  Table[((val[[i]][[j]][[1]])^2 + (val[[i]][[j]][[2]])^2)^0.5,
    {j,1,Length[val[[i]]}],{i,1,Length[val]}];

(* Coordenada angular - theta. *)

theta = Table[
  Table[ArcTan[val[[i]][[j]][[2]],val[[i]][[j]][[1]]],
    {j,1,Length[val[[i]]}],{i,1,Length[val]}];

thetar = Table[
  Sort[Transpose [{theta[[i]],r[[i]]}],{i,1,Length[val]}];

ListPlot[Table[thetar[[i]],{i,5,10}]]

(* Esta rotina relaciona a variação de ymax e de Rm com a va-
riação da posição x. *)

x4 = Table[(x1[[i]] - x1[[1]])*2,{i,1,m}];
Rtm = Table[Mean[\[Rho][[i]]*10,{i,1,Length[val]}];
DRtm = Table[Rtm[[i]] - Rtm[[1]],{i,1,Length[val]}];
DxDtm = Transpose [{x4,Rtm }];
DxDDRtm = Transpose [{x4,DRtm }];
ErroRtm =
  Table[StandardDeviation[r[[i]]*10,{i,1,Length[val]}];
DxEtm = Transpose [{x4,ErroRtm }];
Export ["Amost_DxDtm.dat",DxDtm]

```

O arquivo "*amost_DxDymax.dat*" contém os dados da relação Δx versus $\Delta\sigma'$ e o arquivo "*Amost_DxDRtm.dat*" contém os dados da relação Δx versus $\Delta\bar{\sigma}$.