UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA

GABRIELLY BEATRIZ BATISTA MACHADO

CURVAS CÔNICAS: uma análise das articulações entre os registros de representação com auxílio do Conics 3D

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Recife
2020

GABRIELLY BEATRIZ BATISTA MACHADO

CURVAS CÔNICAS: uma análise das articulações entre os registros de representação com auxílio do Conics 3D

Dissertação apresentado ao Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática

Orientador (a): Prof. Dr. Paulo Figueiredo Lima

Coorientador (a): Prof. Dr.José Edeson de Melo Siqueira

Recife
2020

Catalogação na fonte
Bibliotecário Danilo Leão, CRB-4/2213

M149c Machado, Gabrielly Beatriz Batista.
Curvas cônicas: uma análise das articulações entre os registros de representação com auxílio do Conics 3D. / Gabrielly Beatriz Batista Machado. – Recife, 2020.
126p.

Orientador: Paulo Figueiredo Lima
Coorientador: José Edeson de Melo Siqueira.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2020.
Inclui Referências.

1.Matemática - Geometria. 2. Curvas (Geometria). 3. Hipérbole - Geometria. 4. Parábola- Geometria. 5. UFPE - Pós-graduação. I. Lima, Paulo Figueiredo (Orientador). II. Siqueira, José Edeson de Melo. III. Título.

516 (23. ed.) UFPE (CE2020-075)

GABRIELLY BEATRIZ BATISTA MACHADO

CURVAS CÔNICAS: UMA ANÁLISE DAS ARTICULAÇÕES ENTRE OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO COM AUXÍLIO DO CONICS 3D

Dissertação apresentado ao Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Aprovada em: 28/02/2020

COMISSÃO EXAMINADORA

____
Orientador: Professor Dr. Paulo Figueiredo Lima – UFPE

____
Co-orientador: Professor Dr.José Edeson de Melo Siqueira – UFPE

____
1ª Examinadora interna: Professora Drª. Paula Moreira Baltar Bellemain – UFPE

____
2ª Examinadora externa: Professora Drª. Thyana Farias Galvão – UFPE

Dedico a Deus por me dar forças nos momentos mais difíceis desse trabalho.

Dedico este projeto à minha família e amigos que estiveram acompanhando todo o processo acadêmico direto e indiretamente.

Dedico a todos os meus professores da graduação e da pós-graduação, que foram de fundamental importância na construção identidade profissional.

Ao meu orientador e co-orientador por toda disponibilidade e ensinamentos ao longo da construção desse trabalho.

Agradecimentos

Em primeiro lugar eu agradeço a Deus por guiar meus passos e por todas as lições aprendidas ao longo da minha vida.

Agradeço a toda a minha família pelo apoio e amor dado, em especial a minha avó Maria das Graças Machado que enfrentou diversos desafios para me oferecer todo o cuidado e suporte necessário. Agradeço também ao meu companheiro de vida Linaldo Leite por me incentivar, me fazer acreditar e perseverar neste sonho.

Agradeço ao meu orientador professor doutor Paulo Figueiredo por sempre estar disponível, por compreender as minhas necessidades enquanto orientanda e por toda sabedoria compartilhada ao longo da construção deste trabalho.

Sou imensamente grata aos professores doutores Auta, Edeson e Thyana por todo incentivo para permanecer na academia, pelo exemplo de humanidade, pela disposição para ajudar, pela responsabilidade e profissionalismo na condução da formação docente dos licenciandos e contribuição para a ciência.

Agradeço a Professora doutora Paula Baltar por todos as reflexões e ensinamentos compartilhados no grupo de pesquisa Pró Grandezas e nos seminários da linha de pesquisa: didática da matemática. Ter a oportunidade de ouvi-la é sempre um momento de aprendizado e com certeza isso contribuiu muito para minha formação acadêmica.

Sou bastante grata aos meus amigos Ricardo, Igor, Givaldo, Elizabeth, Ana Lima, Jean, Felipe, Gabriel, Cesário, Amanda, Alana, Marcela, Duda, Lybna, Edinaldo, Pollyana por todo apoio fornecido e por todos os momentos de união e descontração que foram essenciais na minha caminhada.

Agradeço a Andreza, Elizabeth, Franklin e Ilda por compartilharem junto comigo os desafios enfrentados na trajetória acadêmica do mestrado.

E agradeço a esta minha dupla de amigos, que a Universidade me deu, Betânia e Ricardo que me proporcionaram momentos de alegria em meio aos desafios impostos pela jornada acadêmica.

Se a educação sozinha não transforma a sociedade, sem ela, tampouco, a sociedade muda.
FREIRE, 2000.

Resumo

A presente pesquisa pretende investigar o processo de articulação entre os registros de representação das Curvas Cônicas sob uma perspectiva dinâmica de articulação através de uma sequência de atividades com o auxílio do protótipo “Conics 3D”. A análise qualitativa, sob a ótica da Teoria do Registros de Representação Semiótica – TRRS, busca compreender como os alunos da Licenciatura em Expressão Gráfica – LEG da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE articulam as representações: figural espacial, gráfico cartesiano e algébricas das Curvas Cônicas a partir das possibilidades de articulação dinâmica oferecidas pelo “Conics Studium 3D” e pela situações de aprendizagem propostas. O ensino deste objeto matemático tem sido relegado no Brasil e também em outros países como o México e Espanha. A respeito disto, a literatura aponta que as Cônicas são tratadas predominantemente sob o ponto de vista algébrico e ensinadas de maneira segmentada, sem articulação com as demais representações sob as perspectivas da Geometria Sintética e Geometria Projetiva. Nesse sentido, consideramos pertinente analisar o processo de articulação, levando em conta as possibilidades das tecnologias contemporâneas para o ensino dos objetos matemáticos, de modo a contribuir para o ensino das Curvas Cônicas avaliando novas situações de aprendizagem. Os resultados das análises reforçam a necessidade de uma ênfase em atividades centradas na mobilização cognitiva, através das potencialidades dos registros semióticos dinâmicos. As ferramentas do recurso analisado favoreceram a visualização da integração dos registros algébricos e geométricos do objetivo matemático em questão. Com respeito à ampliação das potencialidades do recurso, foram explicitadas questões relativas à manipulação direta, à inserção da circunferência, à exploração da propriedade de lugar geométrico, entre outras.
Palavras-chave: Ensino de Curvas Cônicas. Conics studium 3D. Elipse. Hipérbole. Parábola.

Abstract

The present research investigating the process of articulation between the records of representation of the Conical Curves under a dynamic perspective of articulation through a sequence of activities with the aid of the "Conics 3D" prototype. A qualitative analysis, from the perspective of the Theory of Semiotic Representation Records - TRRS, seeks to understand how undergraduate students in Graphic Expression - LEG at the Federal University of Pernambuco - UFPE articulate the representations: spatial figural, Cartesian graph and algebraic conic curves from the possibilities of dynamic articulation offered by "Conics 3D" and the proposed learning hypothesis. Mathematical object teaching was relegated from Brazil and also in other countries such as Mexico and Spain. In this regard, the literature points out that the Conics are treated predominantly from the algebraic point of view and taught in a segmented manner, without articulation with the other representations from the perspectives of Synthetic Geometry and Projective Geometry. In this sense, we consider the analysis of the articulation process pertinent, taking into account the possibilities of contemporary technologies for the teaching of mathematical objects, in order to contribute to the teaching of Conical Curves evaluated new learning possibilities. The results of the analyzes reinforce the need for an emphasis on activities centered on cognitive mobilization, through the potential of the dynamic semiotic records. The analysis feature tools favored the visualization of the integration of algebraic and geometric registers of the mathematical objective in question. With respect to the expansion of potentialities of the resource, issues related to handling direct access, the insertion of the circumference, the exploitation of the geometr, among others.
Palavras-chave: Conical Curve Teaching. 3D studium conics. Ellipse. Hyperbole. Parable.

Lista de ilustrações

Lista de quadros

Lista de tabelas

Lista de abreviaturas e siglas

1D	Unidimensional
2D	Duas dimensões
3D	Três Dimensões
AGD	Ambiente de Geometria Dinâmica
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
ED	Engenharia Didática
GGB	Geometria Gráfica Bidimensional
GGT	Geometria Gráfica Tridimensional
LEG	Licenciatura em Expressão Gráfica
MMM	MOVIMENTO MATEMÁTICA MODERNA
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
PP	Parâmetros de Pernambuco
SEE-SP	Secretaria de Estado da Educação de São Paulo
SIENA	Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem
SR	Sistemas de Representação
TRRS	Teoria dos Registros de Representação Semiótica
UFPE	Universidade Federal de Pernambuco

Sumário

1 INTRODUÇÃO

O campo da matemática se diferencia dos demais a medida em que o acesso aos seus objetos só é permitido por meio dos registros de representação semiótica. Tal acesso é realizado através das representações em linguagem natural, algébrica, representações figurais e gráficas, conforme classifica Duval (2003). A diferença em detrimento das demais está no aspecto da observação dos objetos, no qual os particulares da matemática não são observáveis. Nesse sentido, é notável que, no contexto desta área do conhecimento, as representações configuram-se como imprescindíveis ao seu desenvolvimento e ao seu estudo.

As Curvas Cônicas, objeto de estudo desta pesquisa, podem ser caracterizadas através da Geometria Sintética com a representação figural espacial, da Geometria Projetiva com a representação figural e da Geometria Analítica com as representações gráficas e algébricas, assim apresentando variadas formas de representar tal objeto matemático. No que se refere aos aspectos do ensino-aprendizagem, os documentos curriculares, como exemplo, o PCNEM (BRASIL,2000) destaca que o ensino da matemática deve propiciar ao aluno a produção de significado, não devendo se deter apenas ao algoritmo.

A respeito da importância didática da diversificação das representações, os estudos sob o ponto de vista cognitivo de Duval (2003) apontam que para que seja desenvolvida a compreensão dos objetos matemáticos é necessário que haja o domínio e a coordenação de pelo menos dois registros de representação do objeto matemático estudado. Nesse sentido, percebe-se a pertinência em tratar as cônicas através das suas variadas representações.

No entanto, estudos como o de Silva (2011) e o de Lopes (2014) apontam que as representações algébricas são priorizadas no âmbito do ensino destas curvas, consequentemente, o espaço dedicado às demais representações é reduzido, sendo algumas delas relegadas ao último momento dos semestres letivos ou não abordadas em sala de aula. Isto pode comprometer o desenvolvimento da construção do conhecimento em relação à referida temática, pois conforme aponta Duval (2003), cada representação poderá revelar determinadas propriedades do objeto matemático. Além disso, a ênfase em uma única abordagem poderá ocasionar a confusão entre o objeto e sua representação, ou seja, a incapacidade de perceber a diferença entre o objeto e a representação.

Apesar das recomendações científicas indicarem a importância da diversificação das representações no ensino, no Brasil, o estudo das Curvas Cônicas na educação básica é conduzido privilegiando o enfoque algébrico, conforme aponta (LOPES, 2014). O Movimento da Matemática Moderna - MMM, ocorrido a partir de meados século XX, trouxe o enfoque da álgebra e da aritmética para o ensino de matemática. Este fato pode ser apontado como uma das possíveis razões para as dificuldades referentes ao ensino de Geometria no Brasil, assim como a predominância da abordagem algébrica no ensino desta temática. A fragmentação e a ausência da abordagem sob uma perspectiva da Geometria

Sintética no ensino deste conteúdo também é apontada em pesquisas como a de Bordallo (2011).

Numa perspectiva contemporânea, o avanço das tecnologias computacionais permitiu desenvolver sistemas dinâmicos, mais especificamente em relação ao ensino e aprendizagem, esses sistemas contribuem na visualização das variáveis através da manipulação feita pelo usuário. Atualmente, existem programas de Geometria Dinâmica, tais como o GeoGebra, o Cabri-Géomètre, que propiciam ao estudante perceber as propriedades dos objetos matemáticos através da sua manipulação. Neste sentido, as novas recomendações, considerando as possibilidades do advento das tecnologias, indicam que este conteúdo deve ser abordado sob uma perspectiva de articulação dinâmica. Siqueira (2019) desenvolveu o protótipo "Conics Studium 3D" que permite articular de maneira dinâmica das seguintes representações: figural espacial, gráfico cartesiano e algébricas das cônicas.

Assim, a presente pesquisa busca analisar através de uma sequência de atividades e com o auxílio do Conics Studium 3D, como os licenciandos articulam as representações (gráfica, algébrica e figural espacial) das Curvas Cônicas através da transformação de tratamento e conversão, sob uma abordagem articulada e dinâmica. Neste sentido, busca-se avaliar situações de ensino-aprendizagem, que utilizem as possibilidades de articulação dinâmica do Conics 3D, numa perspectiva de integração dos registros de representação semiótica para a superação das dificuldades relacionadas a este ensino.

A estrutura da dissertação está dividida em seis capítulos, no qual o primeiro compreende a introdução e a descrição dos objetivos. O segundo é dedicado ao referencial teórico da pesquisa, explorando as perspectivas da teoria dos Registros de Representação Semiótica. O terceiro refere-se ao estudo das Curvas Cônicas e suas abordagens segundo a Geometria Sintética e a Geometria Analítica. Ainda neste capítulo foi realizado uma revisão de literatura este ensino. No quarto capítulo há uma breve investigação sobre a integração de recursos computacionais ao processo de ensino-aprendizagem no âmbito da matemática. Os procedimentos metodológicos adotados foram explicitados no quinto capítulo e a análise dos resultados no sexto.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo geral

Analisar a partir de uma sequência de atividades e com o auxílio do Conics Studium 3D, como os licenciandos articulam a representação Gráfica, Algébricas e Figural Espacial das Curvas Cônicas.

1.1.2 Objetivos específicos

- Elencar as principais dificuldades relacionadas à aprendizagem das curvas cônicas para desenvolver uma sequência de atividades que propicie a articulação dinâmica entre os registros de representação (Gráfica, Algébricos e Figural Espacial) com auxílio do software Conics Studium 3D;
- Analisar como se estabelece a atividade de conversão entre os registros de representação das Curvas Cônicas (Gráfica, Algébricos e Figural Espacial), assim como os tratamentos, e as apreensões: perceptiva e operatória;
- Analisar as contribuições e as possíveis limitações do Conics Studium 3D como recurso para a articulação das representações das Curvas Cônicas.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Teoria dos Registros de Representação Semiótica

O aporte teórico desta pesquisa é a teoria dos Registros de Representação Semiótica do filósofo e psicólogo Raymond Duval. Essa teoria, de cunho cognitivista, tem por objetivo analisar o funcionamento cognitivo do pensamento em Matemática, assim como as dificuldades enfrentadas na aprendizagem dessa ciência, considerando o acesso aos objetos, a diversidade de representações advindas dos sistemas semióticos e a diferenciação entre o objeto matemático e sua representação.

Em seus estudos, esse teórico destaca a particularidade inerente à aprendizagem das matemáticas, tal característica se justifica em virtude das atividades cognitivas demandarem a utilização de sistemas de expressão e de representação além da linguagem natural ou das imagens. O autor complementa ainda que, as atividades cognitivas no âmbito desta ciência requerem:

> Sistemas variados de escrituras para os números, notações simbólicas para os objetos, escrituras algébricas e lógica que contenham o estatuto de línguas paralelas à linguagem natural para exprimir as relações e as operações, figuras geométricas, representações em perspectiva, gráficos cartesianos, redes, diagramas, esquemas, etc. (DUVAL, 2009, p.13)

Em seus estudos, Duval (2003) aponta que uma das principais dificuldades na aprendizagem de Matemática advém do fato que os objetos matemáticos não são diretamente perceptíveis e por isso esses objetos só podem ser acessados com a utilização de um sistema semiótico. Ou seja, os objetos matemáticos são considerados abstratos e não são diretamente observáveis, sendo assim, necessário, o uso de representações que permitam a comunicação e a expressão das atividades cognitivas relacionadas ao pensamento matemático, como, por exemplo, signos, símbolos, tabelas, códigos, gráficos, algoritmos, desenhos.

Duval (2009) define as representações semióticas como “produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação, os quais têm suas dificuldades próprias de significado e de funcionamento”. Partindo desse pressuposto, Duval (2003, p.14) classifica as representações semióticas nos seguintes registros: a língua natural, os sistemas de escrita (numérica, algébrica e simbólica), os gráficos cartesianos e as figuras geométricas.

No âmbito da aprendizagem em Matemática os sistemas semióticos permitem representar um mesmo objeto de diversas maneiras, admitindo assim ao sujeito o acesso a determinados conceitos que estão expressos em cada tipo de representação. Entretanto, do ponto de vista cognitivo, nenhuma representação revela todos os conceitos do objeto representado, ou seja, cada representação expressa um tipo de conceito.

Sobre a aprendizagem em matemática, Duval aponta que para que ocorra a compreensão no estudo desta ciência é necessário o domínio e a coordenação de pelo menos dois registros de representação semiótica. Esse domínio, citado pelo autor, revela-se importante para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com as suas representações.

Em sua pesquisa, o autor ainda destaca que as confusões entre o objeto e a sua representação provocam, ao longo do tempo, consequências na compreensão.

O autor classifica em dois tipos: registros multifuncionais e registros monofuncionais, nos quais cada um deles podem ser classificados entre representação discursiva e representação não discursiva. O primeiro tipo caracteriza-se como não algoritmizável e o segundo é tratado essencialmente por algoritmos.

Tabela 1 – Classificação dos registros mobilizáveis no funcionamento matemático

	Representação discursiva	Representação não discursiva
Registros multifuncionais: os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua natural Associações verbais (conceituais). Forma de Raciocinar • Argumentação a partir de observações, crenças. . . ; • Dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectiva (configurações em dimensões 0, 1, 2 ou 3) • Apreensão operatória e não somente perceptiva; • Construção com instrumentos.

	Representação discursiva	Representação não discursiva
Registros monofuncionais: os tratamentos são principalmente algoritmos	Sistemas de escrita: • Númericas (binária, decimal ou fracionária); • Simbólicas (línguas formais). Calculo	Gráficos cartesianos. • Mudança de sistemas de coordenadas; • Interpolação e extrapolação.

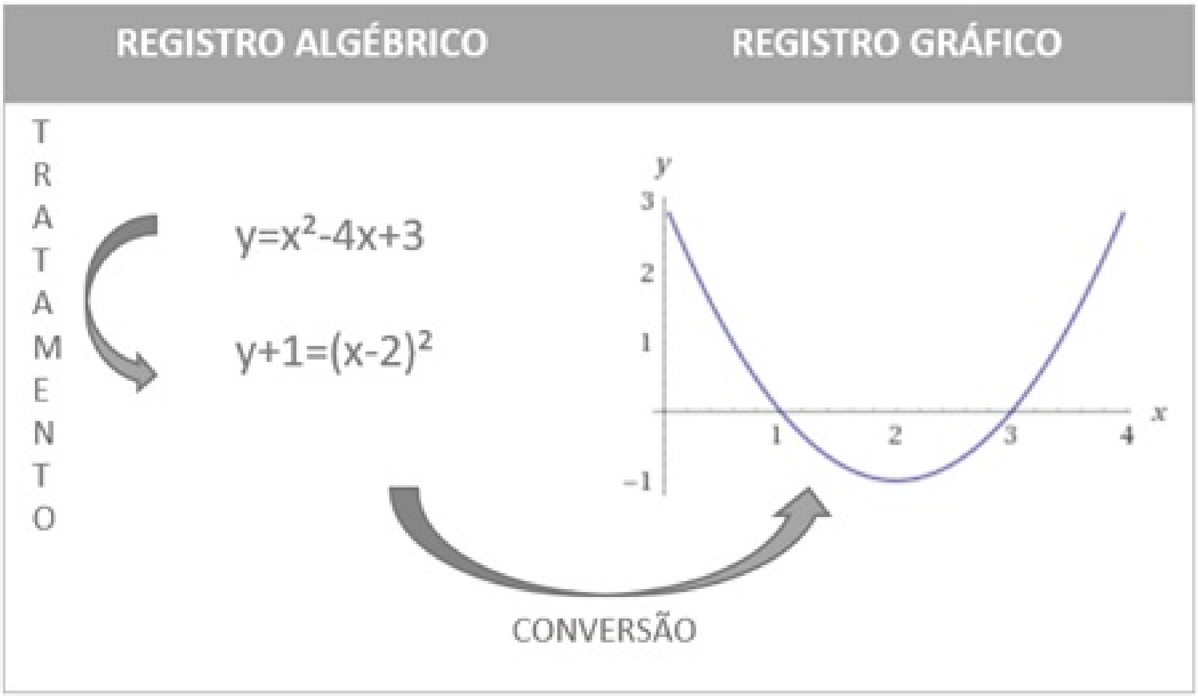
(DUVAL, 2013, p.14)

Em sua teoria, Duval define duas atividades cognitivas que estão relacionadas com a aquisição conceitual a partir da mobilização e coordenação dos registros de representação: tratamento e conversão.

Tratamento: é uma transformação de representação interna a um registro de representação ou a um sistema. Ou seja, é uma transformação que ocorre no mesmo sistema de representação.

Conversão: é uma transformação externa em relação ao registro de representação de partida. Ou seja, a representação do objeto é convertida em outra pertencente a outro registro, permitindo ao indivíduo visualizar outras propriedades do objeto matemático. Por esta razão, esta transformação é considerada de grande valia para a compreensão do indivíduo.

Figura 1 – Exemplo de tratamento e conversão

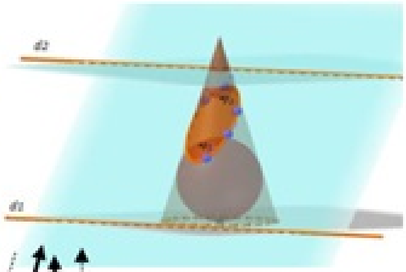
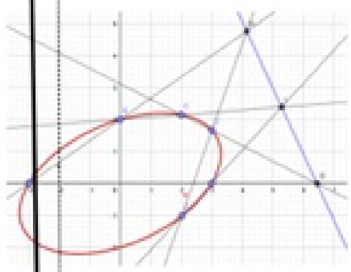
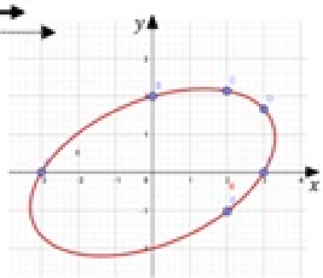


Fonte: autora

Duval reflete em seus estudos sobre graus diferentes de complexidade inerentes ao processo de mudança de registro e nessa perspectiva estabelece as noções de congruência e não-congruência. Nesse sentido, compreende-se que há congruência entre dois registros quando a representação terminal transparece na representação inicial, ou seja, a passagem de uma à outra é mais evidente. Em contrapartida, no fenômeno de não-congruência esta passagem é menos transparente elevando assim o grau de dificuldade da conversão. O autor ainda revela que o processo de tratamento pode ser aumentado na conversão de não-congruência, assim como a conversão poderá ser impossível de realizar.

No que se diz respeito especificamente aos estudos das Curvas Cônicas, Siqueira (2019) propõe em sua pesquisa a seguinte classificação dos registros semióticos da elipse:

Tabela 2 – Classificação dos tipos de registros semióticos mobilizados no estudo de uma elipse

	Representações DISCURSIVAS	Representações NÃO DISCURSIVAS
Representações cujas TRANSFORMAÇÕES não são determinadas por um ALGORITMO	A Representação figural das cônicas segundo o teorema de Dandelin-Quetelet, tomamos **cinco pontos da curva** definida pela seção do plano com o cone de revolução, possibilitará elaborar um **sistema 5x5** e encontrar uma equação quadrática geral $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, que por sua vez permitirá obter outras como a matricial $[x \quad y] \cdot \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [D \quad E] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + F = 0$ e algébrica que remeterá a forma reduzida $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + F = 0$, e a partir destas podemos obter a representação gráfica.	***Representação Figural Espacial*** 
Representações Auxiliares da transição	$\begin{cases} (-3)^2 + \frac{D}{A}(-3) + \frac{F}{A} = 0 \\ \frac{C}{A}(2)^2 + \frac{E}{A}(2) + \frac{F}{A} = 0 \\ (2)^2 + \frac{B}{A}(2)(2{,}15) + \frac{C}{A}(2{,}15)^2 + \frac{D}{A}(2) + \frac{E}{A}(2{,}15) + \frac{F}{A} = 0 \\ (3)^2 + \frac{B}{A}(3)(1{,}66) + \frac{C}{A}(1{,}66)^2 + \frac{D}{A}(3) + \frac{E}{A}(1{,}66) + \frac{F}{A} = 0 \\ (3)^2 + \frac{D}{A}(3) + \frac{F}{A} = 0 \end{cases}$	
Representações das TRANSFORMAÇÕES ALGORITMIZÁVEIS	***Representações Algébricas*** **Equação quadrática geral** $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ $4x^2 - 5xy + 9y^2 - 36 = 0$ **Forma matricial** $[x \quad y] \cdot \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [D \quad E] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + F = 0$ $[x \quad y] \begin{bmatrix} 4 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 36 = 0$ **Equação reduzida após mudança de base** $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + F = 0$ $\left(\frac{13 + 5\sqrt{2}}{72}\right)(x')^2 + \left(\frac{13 - 5\sqrt{2}}{72}\right)(y')^2 = 1$	***Representação Gráfica*** 

Fonte: (SIQUEIRA, 2019, p.133)

Conforme aponta Siqueira (2019) ao refletir sobre a tabela 2, a articulação cognitiva entre as representações da elipse pode ser iniciada através da representação figural espacial da curva segundo o teorema de Dandelin como registro de entrada, definida como seção do plano com o cone de revolução, da qual extraem-se 5 pontos. No caso da articulação entre os registros algébricos e gráficos, o mesmo autor afirma ser necessário para esta situação o uso de representações auxiliares de transição, tais como os resultados do teorema de Pascal e do teorema de Brianchon para as cônicas, levando em conta que cinco pontos não colineares determinam uma curva cônica, permitindo assim a obtenção dos pontos para a construção de um sistema linear (5x5), cuja a solução levará à equação quadrática, que posteriormente conduzirá à obtenção de expressões algébricas, inclusive na forma matricial. Através destas expressões poderão ser obtidas as representações gráficas.

No entanto, o mesmo autor chama atenção para o fato de que a conversão poderá se dar pelo sentido inverso por meio da identificação das variáveis visuais no sistema de coordenadas para obtenção das equações e em seguida a obter a representação figural espacial. Em suma, a transformação de conversão poderá ser iniciada por qualquer uma das representações, chegando em outra representação ao final.

No que se diz respeito à Geometria nos estudos de Duval, são destacadas reflexões e particularidades às atividades deste campo. Assim, compreende-se que tais atividades diferem de outras atividades matemáticas. A diferença reside na coordenação entre tratamentos particulares aos registros figurais e a representação em língua natural abarcando o discurso teórico. O autor aponta para a necessidade desta coordenação, no qual através dos tratamentos são denominadas as figuras e as suas propriedades e através da língua natural são apresentadas as definições, propriedades, etc. Scheifer baseada em Duval (2004, p.156).

O autor afirma que a caracterização de uma figura geométrica tem como requisito a coordenação simultânea entre dois tipos de representações referentes à figura geométrica. Assim, a depender da existência da coordenação entre registro discursivo e figural denominamos de figura geométrica ou de figura.

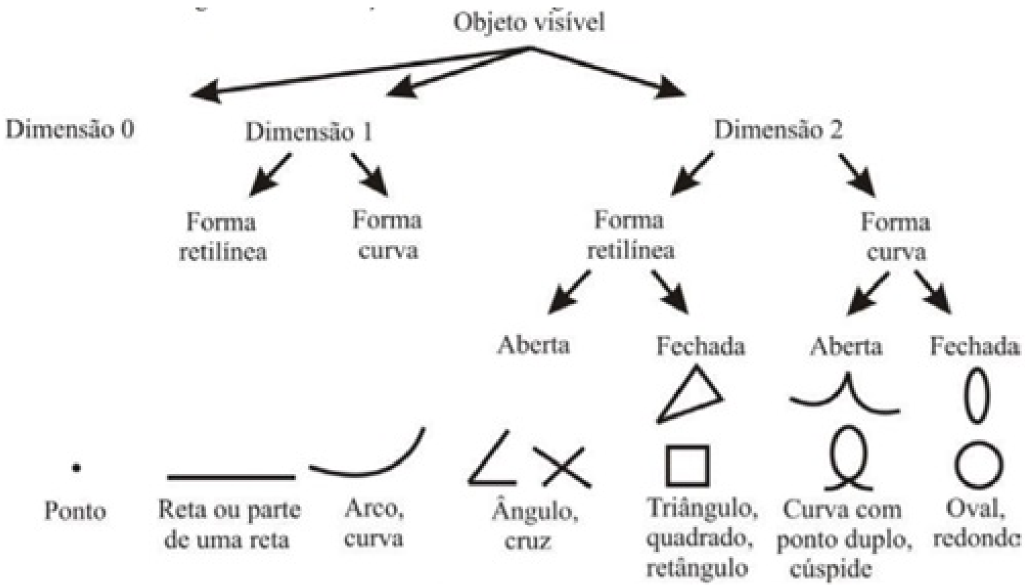
De acordo com Brandt (2017) a necessidade da relação entre os registros figural e discursivo se justifica pela variabilidade de abordagens conceituais oferecidas por uma figura e para a percepção do objeto tratado.

Ao tratar das características de uma figura, denominadas de unidades figurais elementares, Duval aponta dois tipos: as dimensionais e as qualitativas. A primeira diz respeito aos elementos da figura:

- Ponto: OD
- Linha: 1D
- Figura plana: 2D
- Figura espacial: 3D

Já no que se refere à segunda, trata-se das formas, contornos abertos ou fechados, as linhas retas ou curvas. Sobre as unidades descritas acima, Duval desenvolveu o seguinte esquema:

Figura 2 – Classificação das unidades figurais elementares



Fonte: (DUVAL, 2004, p.159)

No entanto, o autor expõe que em muitos momentos há uma contradição entre a percepção imediada que se tem ao visualizar a figura e o discurso que a acompanha. Nesse sentido, tem-se que em determinados momentos a interpretação perceptiva realizada ao visualizar a figura não é favorável a interpretação das propriedades explicitadas no registro discursivo. De acordo com Scheifer (2017) baseada em Duval (2004, p.156) a ocorrência da divergência poderá ocasionar a realização dos tratamentos baseados na percepção espontânea, sem a concordância do registro discursivo com a figura.

Considerando a amplitude elementar relacionada ao campo da geometria, Duval estabelece em seus estudos diferentes tipos de apreensões para a interpretação das representações dos objetos geométricos, tais como: apreensão perceptiva, apreensão operatória, apreensão discursiva e a apreensão sequencial.

- **Apreensão perceptiva:**

Diz respeito ao nível inicial das apreensões propostas por Duval, referindo-se ao reconhecimento das unidades figurais que são discerníveis em uma figura. O nível de complexidade inerente ao reconhecimento de tais unidades relaciona-se com o agrupamento ou não das unidades. Ou seja, perceber uma unidade de dimensão 2 separadamente não exige o mesmo esforço que o reconhecimento de unidades figurais integradas.

- **Apreensão operatória:**

De acordo com Duval (2004) a apreensão sobre as figuras sob a ótica heurística denomina-se como operatória. Trata-se das possíveis modificações geométricas de uma figura, tais como: mover, recombinar, reduzir, ampliar, entre outras.

Tal apreensão, segundo Duval (2004, p.175) demanda a organização perceptiva espontânea da figura, havendo uma variação no custo temporal a depender do número, da heterogeneidade e do posicionamento das unidades figurais.

Ao refletir sobre a importância dos tratamentos figurais, (DUVAL, 2012, p. 289) comenta: "os tratamentos que são reveladores de uma apreensão operatória, quer dizer, os tratamentos puramente figurais, têm uma importância muito particular na medida em que eles são decisivos para a utilização heurística da figura".

Esta apreensão pode ser classificada entre os termos modificações mereológicas, modificações óticas e modificações de posição. Sobre esses tipos de apreensão operatória criou-se o seguinte quadro:

Tabela 3 – Tipos de apreensão operatória de figuras

TIPO DE MODIFICAÇÃO FIGURAL	OPERAÇÕES QUE CONSTITUEM A PRODUTIVIDADE HEURÍSTICA	FATORES QUE INTERFEREM NA VISIBILIDADE
MODIFICAÇÃO MEREOLÓGICA (DECOMPOSIÇÃO DA FIGURA EM SUB FIGURAS)	- Reconfiguração Intermediária - Imersão	- Característica convexa ou não convexa das partes elementares
MODIFICAÇÃO ÓTICA	- Superposibilidade - Anamorfose	- Recobrimento parcial - Orientação
MODIFICAÇÃO DE POSIÇÃO	- Rotação - Translação	- Estabilidade das referências do campo perceptivo para o suporte das figuras

Fonte: (DUVAL, 2012, p.127)

Modificação mereológica:

Caracteriza-se como a modificação de uma figura sem a alteração da sua dimensão. É suscetível de manipulação do objeto, e apoia-se diretamente na percepção. (DUVAL, 2011, p.88 – 89) O processo heurístico, que subsidia a operação mereológica, acontece por meio de reconfigurações. A exemplo, tem-se a reconfiguração intermediária que configura-se como a divisão de uma figura em sub figuras, podendo serem reagrupadas em um contorno global diferente, tal como afirma Scheifer (2017).

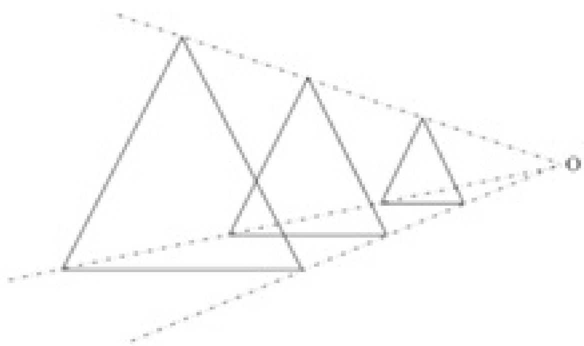
Modificação ótica:

A modificação ótica se caracteriza como a ocorrência da mesma forma e orientação no plano fronto-paralelo, mas com variação de tamanho: superposição em profundidade de duas figuras semelhantes. Também ocorrendo quando existe variação do plano em relação ao plano fronto-paralelo, tendo variação de forma, tamanho e constância. São citadas questões que podem inibir ou impulsionar a visibilidade destas operações, tais como: a mesma orientação das figuras (objeto e imagem), a distinção entre todas as linhas da perspectiva e os lados das figuras, a localização do centro de homotetia no interior ou no exterior no contorno convexo abarcando ambas as figuras. (SCHEIFER, 2017, p.61) baseada em (DUVAL, 2012, p. 288)

Como exemplo da modificação ótica, tem-se a anamorfose que pode ser classificada como uma representação semiótica em perspectiva. A depender do ponto de vista em que está localizado o observador, a representação pode se apresentar como distorcida. No entanto, em outra posição pode-se perceber o verdadeiro objetivo de representação do autor que a criou.

O segundo exemplo é a superposição (colocar em perspectiva) que refere-se a possibilidade de ver em profundidade uma representação plana. É caracterizado por possibilitar a percepção da variação distância em que se vê o objeto em comparação com outro. Assim, é possível estabelecer a relação do tamanho do objeto com a sua distância, ou seja, o objeto de maior tamanho está localizado mais próximo do observador que o menor. A operação em questão demanda que uma unidade figural sirva de sinal para um centro organizador na representação, tal como o ponto de fuga. (SCHEIFER, 2017, p.61) baseada em (DUVAL, 2004, p. 173).

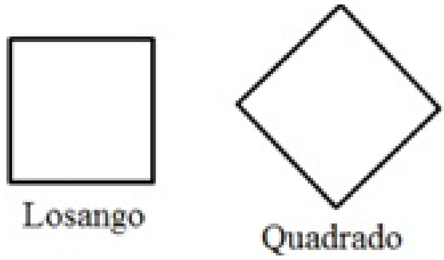
Figura 3 – Operação ótica de colocar em perspectiva



Fonte: (SCHEIFER, 2017, p. 63)

Modificação de posição: É compreendida como a mudança do posicionamento de uma figura em relação a um referencial. Nesse sentido, as modificações referentes a esta operação relacionam-se a variação de orientação por meio de rotação e translação, mantendo assim o mesmo tamanho e forma. (DUVAL, 2012, p. 288) De acordo com Scheifer (2017) o processo de modificação de posição através de rotações ou translações de uma unidade de figura elementar pode se configurar como um obstáculo para a sua identificação.

Figura 4 – Representação de losango e do quadrado



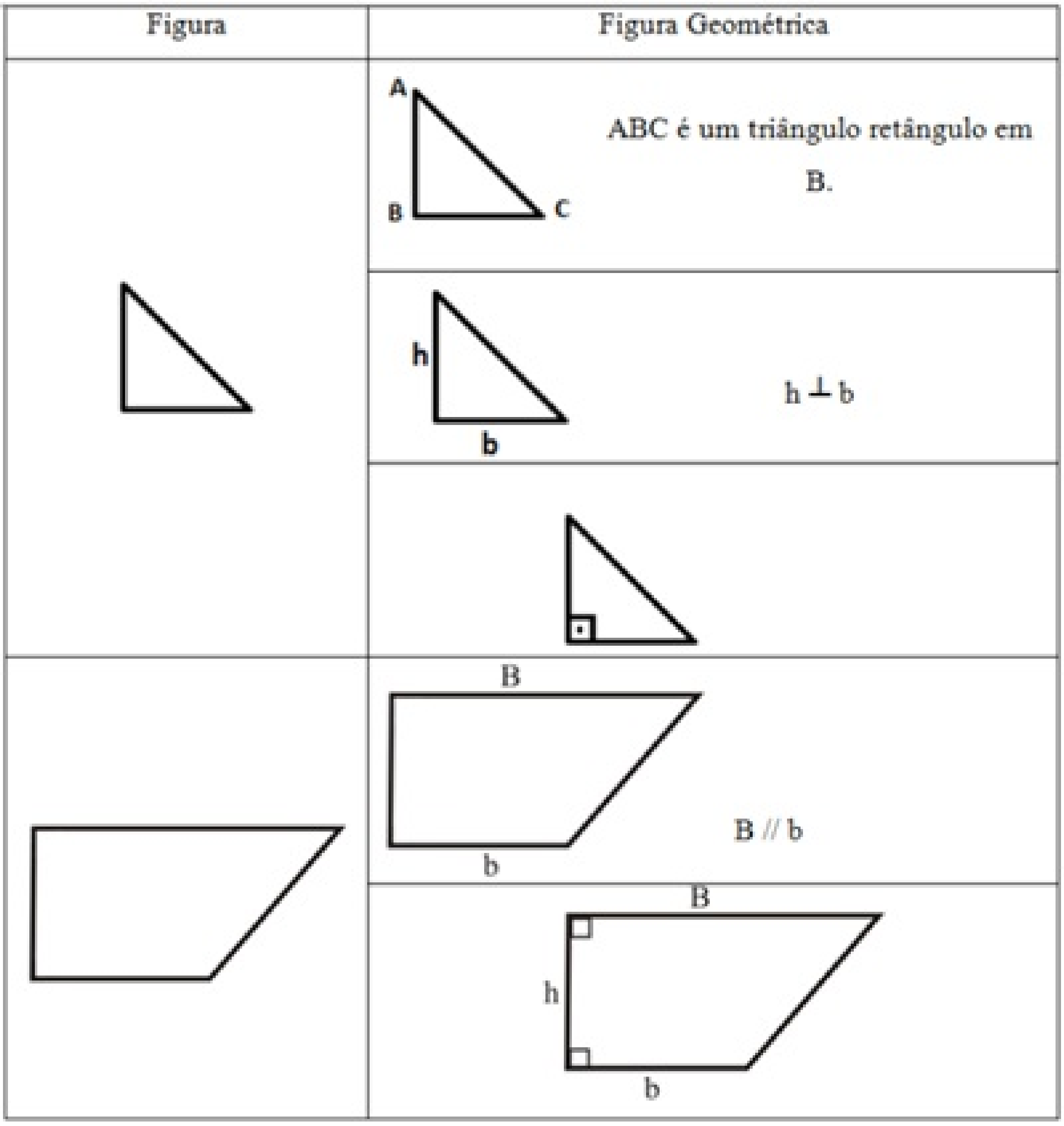
Fonte: (SCHEIFER, 2017, 64)

- **Apreensão discursiva:**

Esta apreensão estabelece uma forte relação com a apreensão perceptiva, de modo que uma depende da outra na constituição dos requisitos que Duval estabelece para uma figura geométrica. Então, na consideração de tal dependência a apreensão discursiva surge como o apoio no trabalho de interpretação de uma figura. Sobre isto, Duval afirma que não há figura sem legenda. Assim, o domínio da figura se dá a partir da apreensão perceptiva com o aporta da apreensão discursiva.

Ao discutir a diferença entre figura e figura geométrica, bem como as diferentes influências do discurso junto a representação figural, Scheifer (2017) desenvolveu o seguinte quadro:

Figura 5 – Diferença entre figura e figura geométrica.



Fonte: (SCHEIFER, 2017, p. 65)

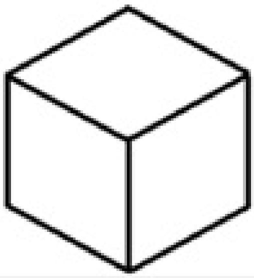
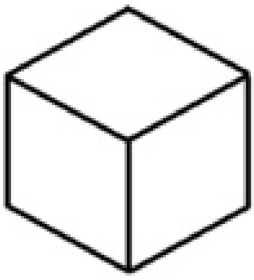
Ao observar os exemplos da autora referentes a isto, fica clara a necessidade do discurso requerido para a compreensão das figuras do ponto de vista cognitivo.

No que se referem as dificuldades de compreensão figural no âmbito da geometria, Duval reflete que muitas ocorrem em razão da não combinação da percepção com o discurso. Sobre tal combinação Duval afirma:

> A organização perceptiva de uma figura privilegia o reconhecimento de certas unidades figurais e tende a ocultar as outras. Contudo, as unidades figurais que foram identificadas de forma perceptiva nem sempre concordam com as que estão designadas no enunciado, ou com as que são pertinentes com a resolução do problema proposto. (DUVAL, 2004, p.169, tradução de SCHEIFER, 2017)

Nesse sentido, Scheifer (2017) propõe um quadro que exemplifica a diferença discursiva que pode ser empregada junto a uma mesma figura.

Quadro 1 – Diferentes apreensões perceptivas e discursivas para uma mesma representação

Figura Geométrica		Desconstrução dimensional
Figura	Discurso	
	Poliedro regular formado por seis faces planas quadrangulares, sendo que cada vértice une três faces.	Para conseguir identificar o cubo (3D), precisamos fixar o olhar nas faces (2D) unidas pelas arestas (1D) (3D →2D→1D) E para identificarmos cada face do quadrado (2D) precisamos nos fixar nas retas (1D) que a delimita, e a qual pertence outra face (2D→ 1D)
	Hexágono regular formado pelo conjunto de segmentos consecutivos e não-colineares contidos num mesmo plano e que formam uma figura fechada.	Para identificar o hexágono (2D), precisamos fixar o olhar nos segmentos de reta (1D) que formam o lados do polígono e ignorar, pela conduta de abdução, os três segmentos de reta do interior da figura. (2D→ 1D)

Fonte: (SCHEIFER, 2017, p. 66)

Na proposta explicativa da autora, percebe-se a acentuada diferença nos discursos que diferem explicitamente no sentido da caracterização da dimensão, sendo o primeiro um cubo (objeto tridimensional) e o segundo um hexágono (figura bidimensional). Conforme aponta a autora, os elementos que compõem a figura usada nos dois exemplos pode variar de acordo com o discurso empregado. Nesse sentido, reafirma-se mais uma vez a importância da integração de um discurso adequado ao objetivo requerido na atividade proposta.

- **Apreensão sequencial:**

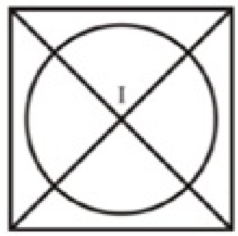
Segundo Duval (2012, p.120) esta apreensão é demandada explicitamente nas atividades de construção e/ou de descrição, objetivando a reprodução de uma figura.

Assim, atividades que requerem construções geométricas solicitam a apreensão sequencial, pois, são dadas as orientações conceituais a serem executadas até a conclusão da figura a ser construída.

A exemplo da apreensão sequencial, Moretti e Brandt (2015) propõem uma questão que mobiliza simultaneamente as apreensões perceptiva, operatória e principalmente a sequencial.

Quadro 2 – Atividade que requer apreensão sequencial

Exemplo 5:
Considere a figura e as frases a seguir:
a - Chame de **I** o ponto onde as diagonais se cortam
b - Desenhe um quadrado com 5cm de lado
c - Trace o círculo de centro em **I** no interior do quadrado
d - Trace as diagonais do quadrado



Fonte: Moretti e Brandt (2015)

Conforme apontam os autores, para reproduzir a figura é necessário estabelecer a ordem **a, b, c, d.** Objetivasse encontrar a ordem dessas frases, sem necessariamente reescrevê-las, sendo necessária apenas indica-la.

3 CURVAS CÔNICAS

Este capítulo dedica-se a um breve resgate histórico da trajetória dos estudos e descobertas relacionados às Curvas Cônicas, buscando evidenciar os principais momentos que culminaram na construção da teoria e das suas respectivas propriedades. Nesta seção, ainda serão expostas as representações das cônicas, em suas mais diversas formas, e também as suas propriedades.

3.1 Perspectivas históricas sobre as curvas cônicas

Historicamente a Matemática se constituiu como um aporte relevante na resolução de problemas para os homens e suas civilizações. O domínio dos conhecimentos implicava na ampliação do poder de quem os detinha, ou seja, na ampliação da percepção sobre diversas estratégias que poderiam ser utilizadas a favor desses povos.

Conforme aponta Boyer (1974), não parece viável atribuir a descoberta da Matemática a uma única tribo, sendo mais provável que está noção tenha sido gradual e surgida tão repentinamente na cultura do homem quanto a forma de usar fogo, aproximadamente há 300.000 anos.

O surgimento da Matemática comumente é atribuído à solução das necessidades práticas, entretanto, há possibilidade desta origem estar atrelada ao surgimento da arte de contar vinculada aos rituais religiosos, conforme apontam estudos antropológicos Boyer(1974). No que se refere ao surgimento da Geometria, temos algumas possibilidades, como: Heródoto afirmava que a Geometria originou-se no Egito a partir da necessidade de medição das terras após as inundações no vale do rio Nilo, mas Aristóteles atribuía a condução dos estudos da Geometria à existência no Egito de uma classe sacerdotal com lazeres, Boyer (1974). A partir dos dados históricos explicitados podemos perceber que há imprecisões quanto à origem exata da Matemática e da Geometria, podendo estas, inclusive, terem se originado simultaneamente em mais de uma localidade e terem mais de uma razão atribuída ao seu surgimento.

Segundo registros históricos, as possíveis iniciativas que deram origem ao estudo das Curvas Cônicas surgiram em meados III a.C. Os apontamentos de Gutierrez (2010) indicam os gregos como os pioneiros na descoberta das curvas, ao buscarem solucionar o problema da duplicação do cubo que, de antemão, não apresentava relação direta com o conteúdo das curvas. O surgimento deste problema parece estar relacionado com o início de uma intensa epidemia de peste que dizimou um quarto da população de Atenas. Em busca de solucionar este mal que acometia a saúde dos atenienses, uma delegação foi enviada ao oráculo de Apolo em Delfos. Esta instituição, considerada uma dais mais importantes e poderosas da Grécia antiga, abrigava os sacerdotes e sacerdotisas e habitualmente recebiam visitas de grandes personalidades daquela época ou pessoas comuns em busca de aconselhamentos, orientações espirituais e previsões sobre o futuro, entre outros. Dessa forma, a delegação questionou ao oráculo como poderiam sanar a epidemia, então, o mesmo informou que para conceder a benção precisaria que os atenienses construíssem um novo altar em forma de cubo dedicado à Apolo, que deveria conter o dobro do volume do cubo anterior.

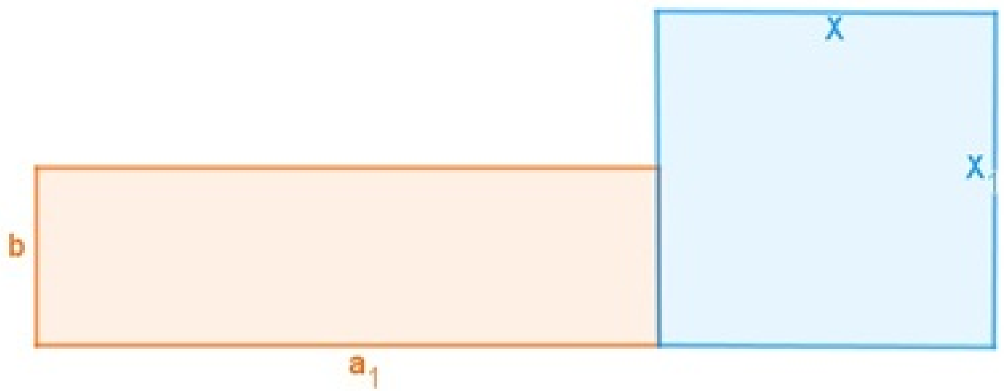
O primeiro matemático grego a tentar solucionar a duplicação do cubo, também conhecido como problema de Delfos, foi Hipócrates (460 – 380 a.C), que nasceu na ilha de Quios.

O problema da duplicação do cubo:

Dada a aresta de um cubo, construir, usando apenas régua e compasso, uma aresta de outro cubo que tenha o dobro do volume do primeiro.

Através da elaboração do método da redução, Hipócrates mostrou que o problema resumia-se a encontrar médias proporcionais entre a aresta inicial e o seu dobro, conforme elucida Gutierrez (2010). Para alcançar esta generalização, este matemático, reduziu o problema da duplicação a um problema de Geometria Plana mais acessível, que viabilizou a criação de soluções do ponto de vista da Geometria. Os instrumentos euclidianos (régua sem graduação e compasso) foram utilizados para a construção proposta pelo Matemático Grego, objetivando encontrar um quadrado cuja à área é igual à de um retângulo fornecido previamente, tal como podemos observar na figura abaixo:

Figura 6 – Generalização de Hipócrates

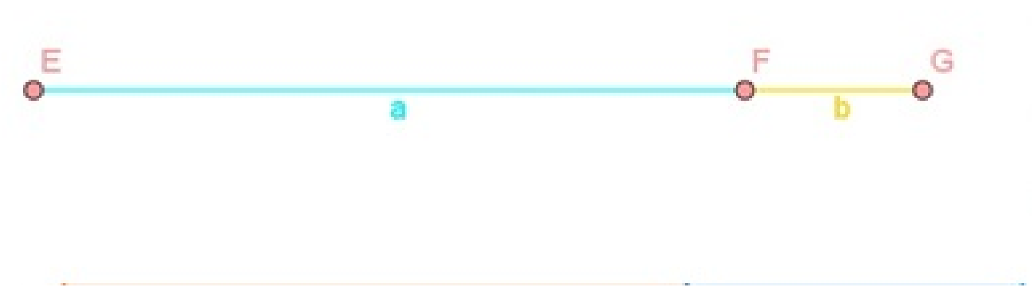


Fonte: da autora

A partir do retângulo de lados a e b, Hipócrates realizou as seguintes etapas construtivas da generalização:

I) Os segmentos $\overline{EF}$ e $\overline{FG}$, referentes aos lados a e b do retângulo fornecido, são alinhados, conforme a figura 7;

Figura 7 – Etapas da construção de Hipócrates



Fonte: da autora

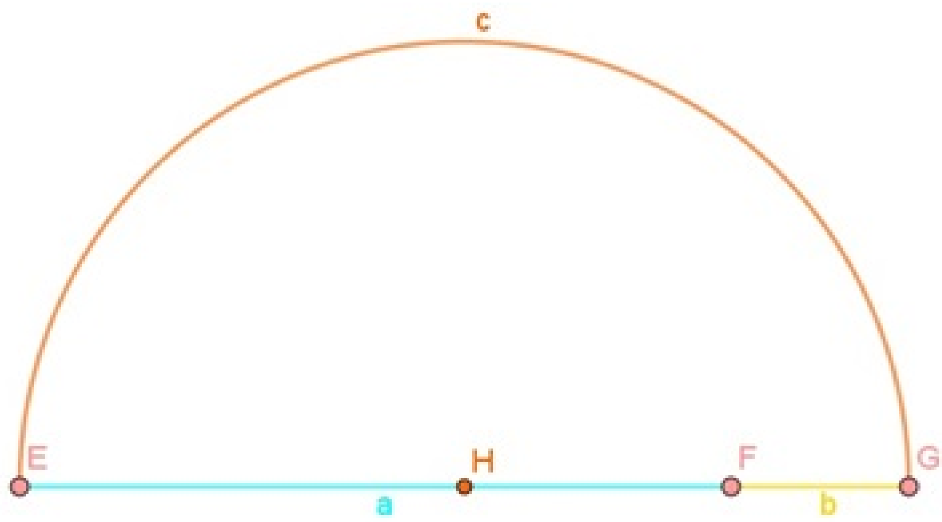
II. O ponto médio H do segmento $\overline{EG}$ é determinado;

Figura 8 – Etapas da construção de Hipócrates

Fonte: da autora

III.Constrói-se o semicírculo com centro H e raio $\overline{EH}$.

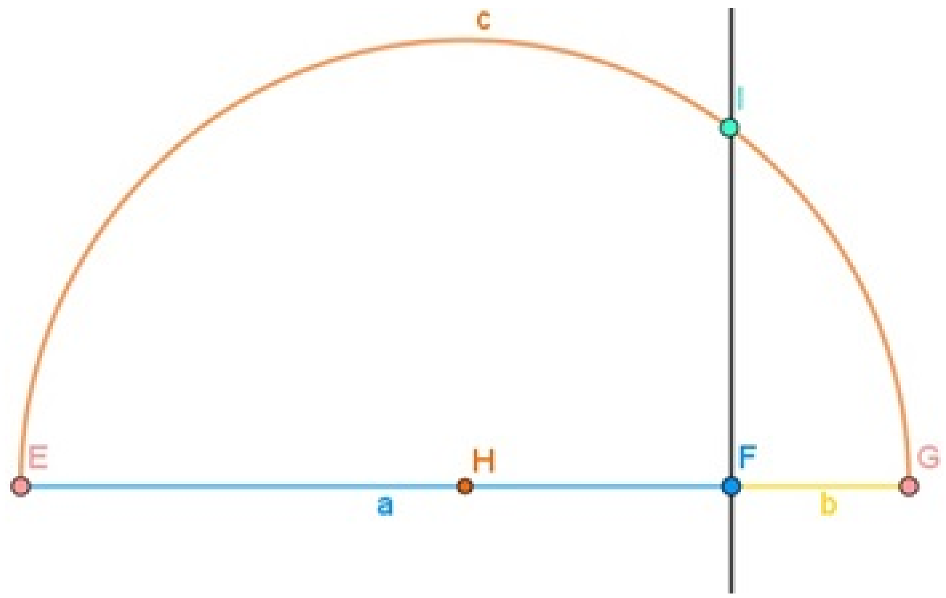
Figura 9 – Etapas da construção de Hipócrates



Fonte: da autora

IV. Para encontrar o ponto I, é necessário traçar uma reta perpendicular ao segmento $\overline{EG}$ até o encontro do semicírculo (C). Dessa forma, a intersecção da reta perpendicular com o semicírculo determinará o ponto I.

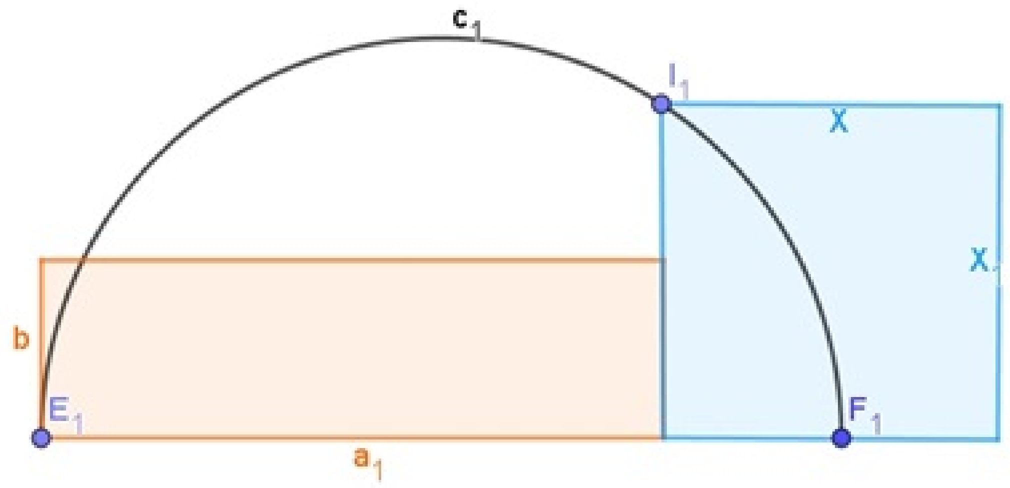
Figura 10 – Etapas da construção de Hipócrates



Fonte: da autora

V. O segmento $\overline{IF}$ corresponde ao lado do quadrado com mesma área do retângulo fornecido inicialmente. A partir deste segmento podemos determinar o quadrado.

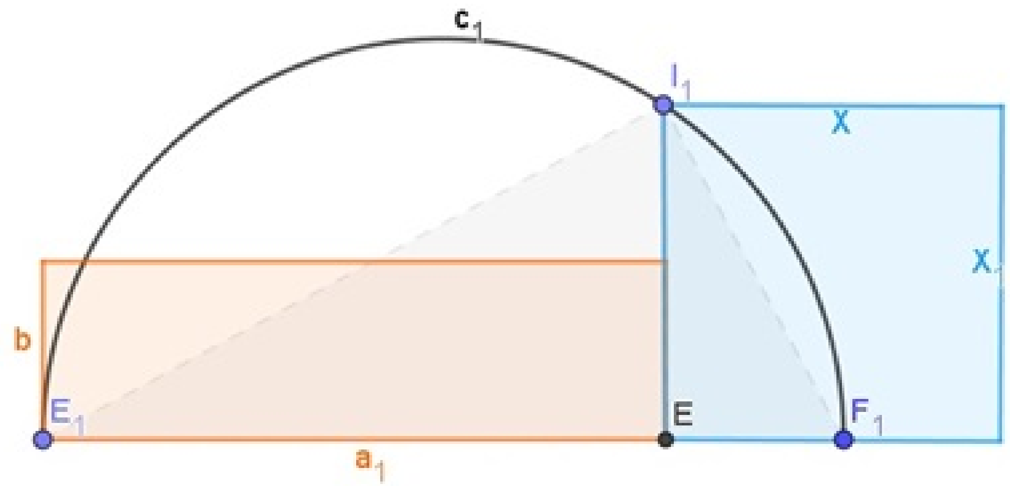
Figura 11 – Etapas da construção de Hipócrates



Fonte: da autora

A observação dos elementos da construção permite algumas deduções, tais como: os catetos dos triângulos retângulos são proporcionais, pois, os mesmos são semelhantes devido à congruência dos ângulos, ou seja, são triângulos semelhantes que correspondem um ao outro, tal como está representado na figura 12. Então, temos que a_1 está para x assim como x está para b.

Figura 12 – Etapas da construção de Hipócrates



Fonte: da autora

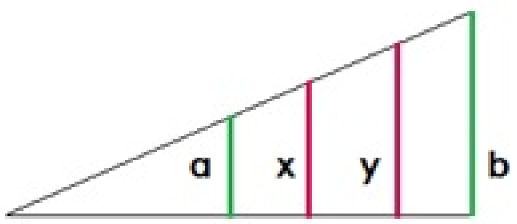
$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

A generalização deste matemático grego afirmava que para encontrar as médias proporcionais devemos descobrir os valores de x e y na seguinte notação encontrada ao final dos seus estudos:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

Conforme a representação das proporções na figura abaixo, observamos que o segmento a representa a aresta do cubo dado.

Figura 13 – Representação das médias proporcionais



Fonte: da autora

A notação explicitada acima equivale à obtenção das seguintes equações:

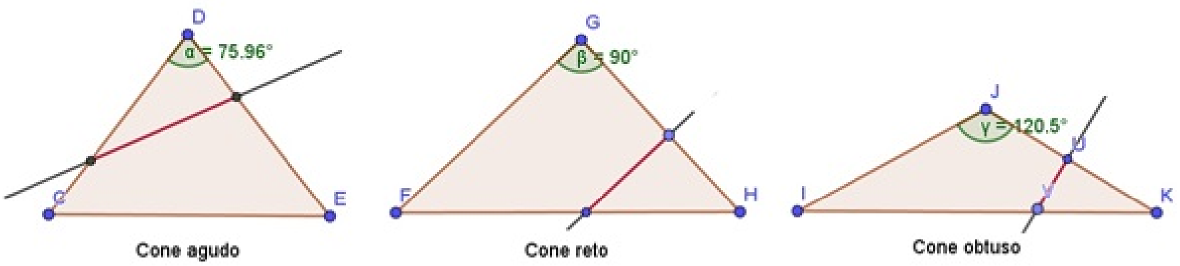
$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y}, \frac{x}{y} = \frac{y}{b}, \frac{a}{x} = \frac{y}{b}$$

A partir do isolamento de y, temos que $X^3=2a^3$. Nota-se que algebricamente a resolução do problema é aparentemente menos complexa. Entretanto, é importante ressaltar que Hipócrates pretendia alcançar a resolução apenas com o auxílio dos instrumentos euclidianos.

3.1.1 A origem das Cônicas por Menaechmus

O matemático grego Menaechmus nasceu em Alopeconnesus, localizada na Ásia menor, aproximadamente em 380 a.C. A ele é atribuída a descoberta das Secções Cônicas obtidas através da intersecção de um plano com um cone de ângulo reto, agudo ou obtuso, tal como está representado na figura 10. Menaechmus foi membro da academia de Platão (348 a.C), discípulo de Eudoxo e mestre de Aristóteles.

Figura 14 – Exemplo das proposições de Menaechmus



Fonte: da autora

O problema da duplicação do cubo é apontado como a possível razão para a motivação deste Matemático no que se refere ao surgimento das Curvas Cônicas. Na mobilização das resoluções, Menaechmus, observou a existência de duas curvas denominadas posteriormente de parábola e hipérbole. O surgimento da Elipse foi posterior e resultante dos procedimentos comandados pelo então Matemático grego.

No que se refere à resolução do problema da duplicação do cubo, o que instigou Menaechmus nas suas realizações, descobriu-se que a solução estava relacionada a um ponto de intersecção entre duas curvas (parábolas), sendo este ponto o fornecedor das médias proporcionais. As generalizações de Hipócrates serviram como suporte para as resoluções propostas por Menaechmus, tal como podemos observar a seguir:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

A partir da notação de Hipócrates, podemos determinar as seguintes equações ao considerar *b=2a* :

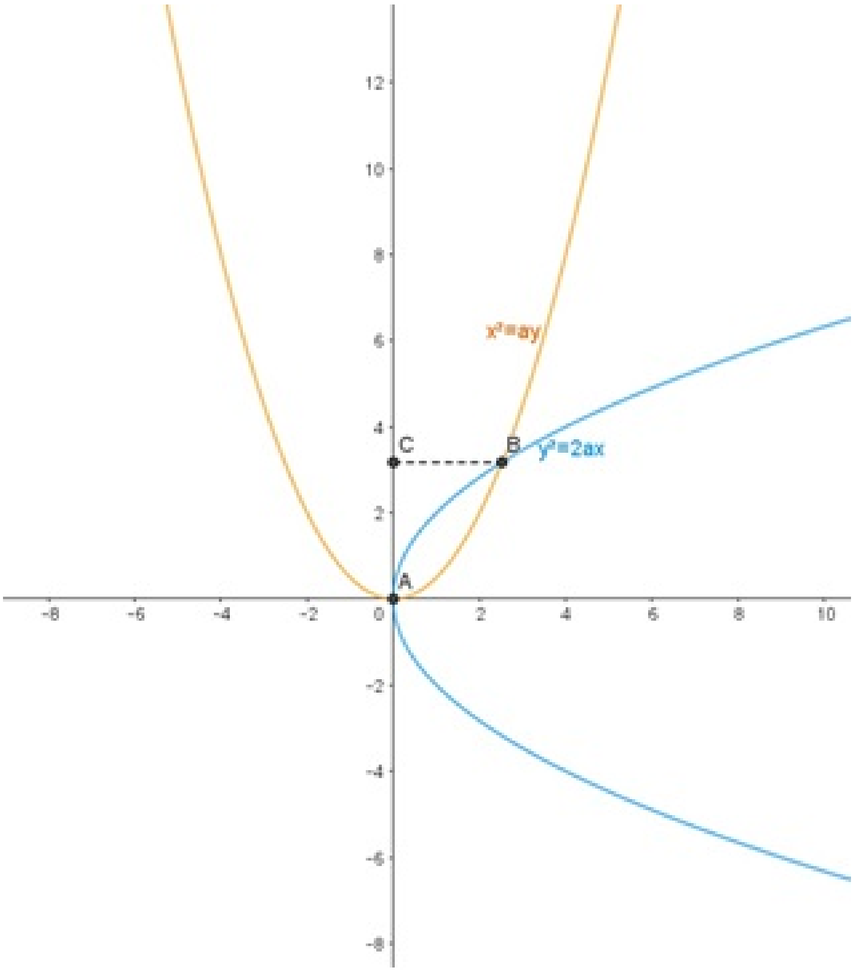
$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y}, \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}, \frac{a}{x} = \frac{y}{2a}$$

Assim, obteremos as seguintes soluções:

$$x^2=ay, \quad y^2=2ax \;\; e \;\; xy=2a^2$$

Embora as proposições expostas acima representem soluções, considera-se desconhecida a maneira como este matemático realizava a determinação dos pontos das curvas no plano. No entanto, podemos observar a solução proposta a partir da figura 15, na qual a intersecção de duas parábolas determina a aresta do cubo duplicado.

Figura 15 – Interseção de duas parábolas



Fonte: da autora baseada em Boyer (1974).

Conforme observamos na figura 15, a partir do prolongamento do ponto de intersecção das curvas até o encontro do eixos x e y obteremos os lados do quadrado duplicado. Estes achados do matemático grego Menaechmus delinearam o início dos estudos referentes às Curvas Cônicas.

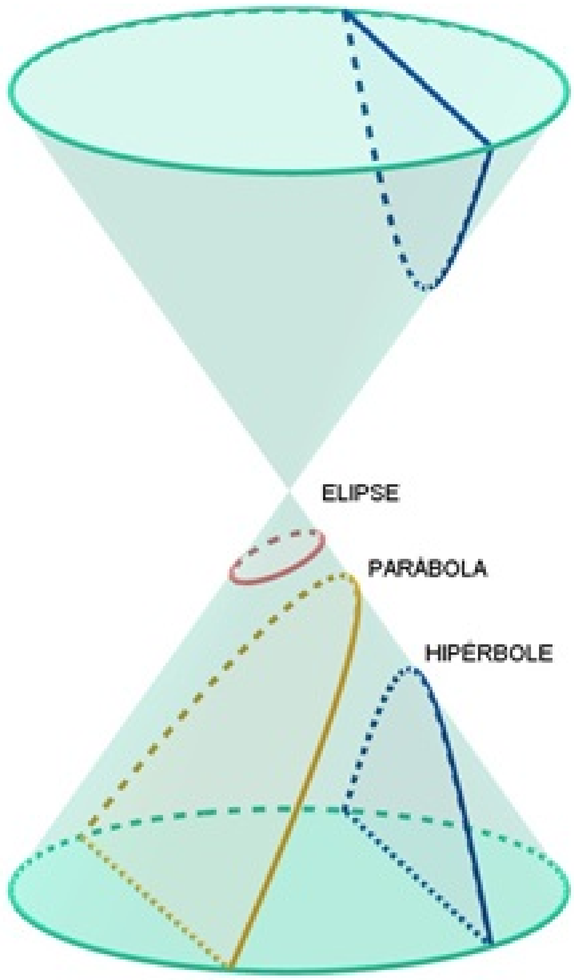
3.1.2 As descobertas de Apolônio

Apolônio era matemático e astrônomo, nasceu em Perga e era membro da escola de Alexandria. Considerado como “o grande geômetra”, ele desenvolveu um conjunto de 8 livros, nomeado de Seções Cônicas, que tratavam sobre as propriedades destas curvas. Os estudos de Apolônio são considerados os mais consistentes no que se diz respeito a este conteúdo. De acordo com Boyer (1974), a motivação que justifica o desenvolvimento da obra se deu a partir da solicitação do geômetra chamado Naucrates.

No momento em que este matemático elaborou sua obra, as Seções Cônicas já eram conhecidas há um século e meio. Outros estudiosos como Aristeu e Euclides produziram escritas gerais sobre o assunto, entretanto o tratado sobre as cônicas produzido por Apolônio de Perga superou todos os demais pelo seu nível mais avançado, Boyer (1974). Nesse sentido, a obra deste autor se consolidou substituindo os estudos alavancados anteriormente, além disso, parece não haver registros de tentativas de aperfeiçoamento da obra na antiguidade.

Os tratados conduzidos por outros matemáticos como, por exemplo, Menaechmus condicionavam à obtenção das curvas às seções em três diferentes cones retos: agudo, reto ou obtuso. Diferente dos estudos elaborados anteriormente, Apolônio introduziu a noção de que as cônicas poderiam ser obtidas através de um único cone, reto ou não, interceptado por um plano que ao variar determinará curvas diferentes, conforme ilustra a figura 12.

Figura 16 – A obtenção das Curvas Cônicas de acordo com Apolônio



Fonte: da autora.

De acordo com os estudos deste matemático, obtemos a hipérbole através da intersecção entre um plano e um cone de duas folhas. A parábola é obtida a partir da secção do cone por um plano paralelo a uma geratriz. A obtenção da elipse caracteriza-se pela secção de um plano em todas as geratrizes do cone.

Apolônio introduziu uma descoberta importante ao provar que o cone não precisa necessariamente ser reto, ou seja, um cone com o eixo perpendicular à face da base, podendo também ser um cone oblíquo ou escaleno. Outra diferença que pode ser apontada nos estudos de Apolônio é a substituição do cone de uma folha por outro de duas folhas, isto é, cones pertencentes ao mesmo eixo e com vértices coincidentes, conforme observamos na figura 16.

A respeito do cone, Boyer baseado em Apolônio afirma:

> Se fizermos uma reta, de comprimento indefinido e passando sempre por um ponto fixo, mover-se ao longo da circunferência de um círculo que não está num mesmo plano com o ponto de modo a passar sucessivamente por cada um dos pontos dessa circunferência, a reta móvel descreverá a superfície de um cone duplo. (BOYER, 1974, P.107)

A nova definição contribuiu para o surgimento da hipérbole com dois ramos. A noção de "duas hipérboles" era mencionada pelos geômetras naquela época, mas não há indícios de menções referentes à "dois ramos" antes de Apolônio, Boyer(1974).

A designação das nomenclaturas da Elipse e da Hipérbole também foram atribuídas a Apolônio. Há registros de que os Pitagóricos tenham utilizado as palavras Elipse, Hipérbole e Parábola na solução das equações quadráticas por aplicação de área. No que se refere ao significado destas palavras, temos:

Ellipsis (significando falta) tinha sido a palavra usada quando um retângulo de área dada era aplicado a um segmento e lhe faltava um quadrado (ou outra figura específica), e hyperbole (um lançamento além) tinha sido a palavra usada quando a área excedia o segmento. A palavra parábola (indicando colocar ao lado ou comparação) não indicava nem excesso, nem deficiência. (BOYER, 1974, P.108)

Conforme afirma Boyer (1974), As Cônicas de Apolônio configuram-se como uma obra de níveis de profundidade extraordinários, no entanto, surpreende-se que o autor não tenha explorado algumas propriedades importantes como, por exemplo, os focos que não foram nomeados por Apolônio sendo abordados apenas indiretamente em seus estudos. Nos textos atuais os focos são compreendidos e expostos com destaque por expressarem uma propriedade relevante das curvas. Outra questão que não fica explícita em As Cônicas é o papel da diretriz e também não há conceito numérico correspondente à excentricidade. Não é descartada a possibilidade desta ausência de conceitos está relacionada às obras de Apolônio que foram perdidas.

3.1.3 As contribuições de Germinal Pierre Dandelin

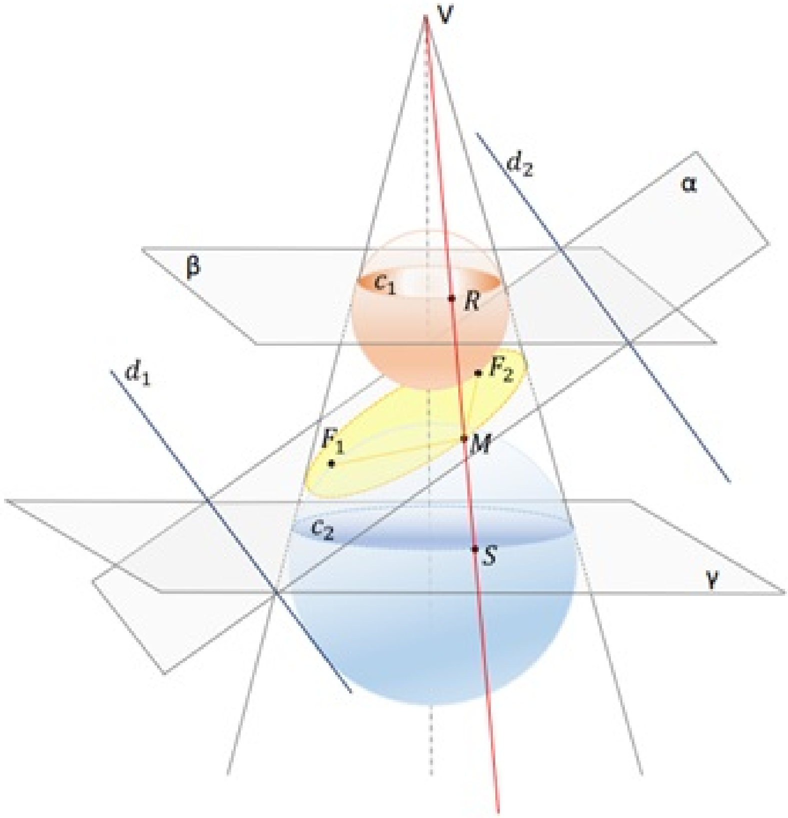
Posterior aos conceitos empregados por Apolônio, o matemático belga Germinal Pierre Dandelin (1794-1847) desenvolveu, sob a perspectiva da geometria sintética, uma importante contribuição no que se diz respeito aos conhecimentos previamente construídos sobre as Curvas Cônicas. Dandelin explorou a noção das propriedades focais a partir da demonstração tridimensional de esferas inscritas no cone de revolução, também mencionadas nos estudos do matemático Lambert Adolph Jacques Quetelet (1796-1874). As proposições de Dandelin consideram que as superfícies esféricas inscritas no cone de revolução e tangentes ao plano de interseção descrevem a posição dos focos.

No que se refere à elipse, Dandelin propõe a existência de um plano secante tangente a duas esferas. Conforme os estudos de Monteiro (2014) e Sousa (2016) temos a seguinte proposição:

Situação 1: Uma elipse é gerada a partir de um cone de revolução interceptado por um plano α, secante e oblíquo em relação às geratrizes do cone. Duas esferas inscritas neste cone tangenciam, simultaneamente, a superfície do sólido geométrico em questão e o plano α nos pontos F_1 e F_2, denominados focos da curva.

Sousa (2016) explicita que MR + MS é constante, uma vez que, o ponto M pertence simultaneamente à elipse e a uma reta tangente às esferas nos pontos R e S, assim, passam também por M duas retas tangentes às esferas nos pontos F_1 e F_2. A autora ainda aponta a seguinte propriedade: "Se MF_1 é uma tangente a uma das esferas, visto que o plano secante é tangente em F_1à esfera, MS é outra tangente. Assim, tem-se que MF_1=MS. Do mesmo modo, ocorre com MF_2 e MR. Por conseguinte: MF_1+MF_2=MS+MR=RS." (SOUSA, 2016, p.36)

Figura 17 – Elipse – Dandelin- Quetelet



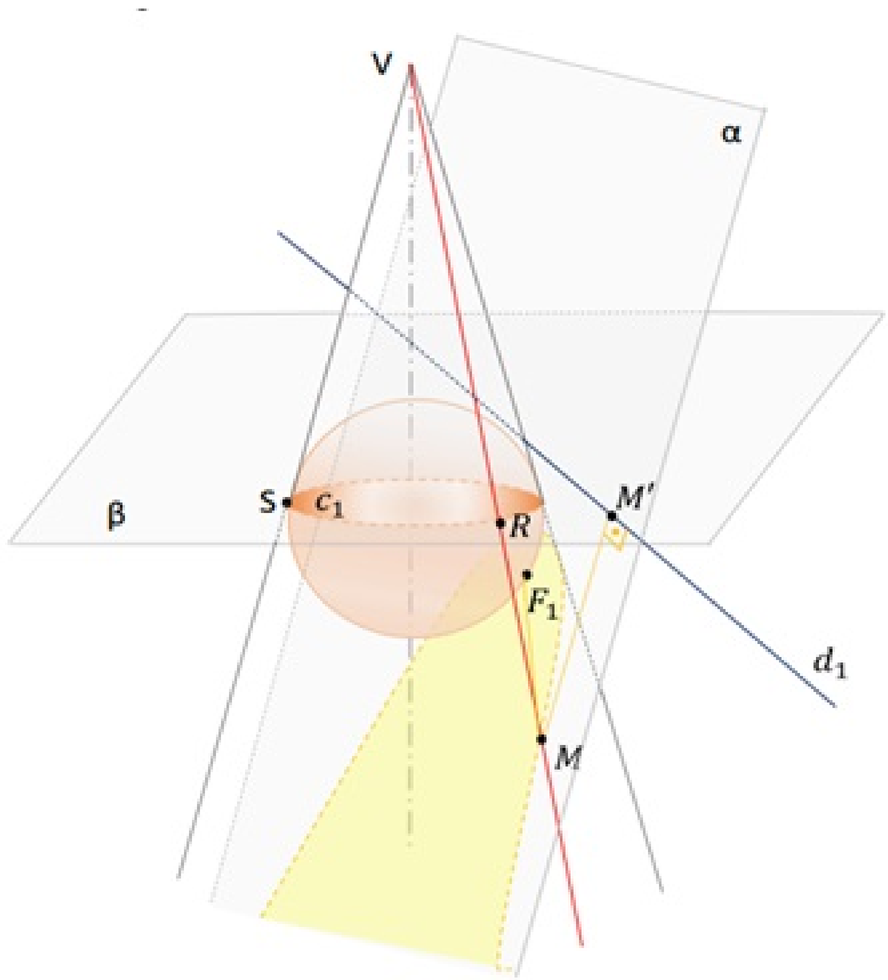
Fonte: Sousa (2016)

Situação 2: Uma parábola é gerada a partir de um cone de revolução interceptado por um plano α paralelo a uma posição da geratriz do cone. Uma esfera é inscrita no sólido geométrico tangenciando simultaneamente sua superfície interna e o plano α. O ponto de tangencia entre a esfera e o plano α determinará o foco (F_1).

A respeito das propriedades relacionadas a esta situação, Sousa (2016) afirma:

> Como no primeiro caso, *M* é um ponto qualquer da curva e *MF1 e MR são tangentes à esfera e, portanto, são congruentes. Nota-se que* α é paralelo à geratriz que contém o ponto S, também pertencente à c1. Do mesmo modo, o ponto R pertence a c, e a geratriz que contém M. Portanto, VS = VR, assim como, MF1=MR. Seja ainda, M'a projeção ortogonal de M sobre d1, tem-se que o segmento de reta MM' pertence a α, logo é paralelo a geratriz que contém VR. Desse modo, podemos observar a existência de dois triângulos isósceles semelhantes, o triângulo VSR e o RMM'. Sendo assim, já vimos que RM=MF1, então RM = MM', logo MF1=MM'. Concluímos, portanto, que a distância do ponto M ao foco é igual à distância do ponto M à diretriz da curva d1. (SOUSA, 2016, P.37)

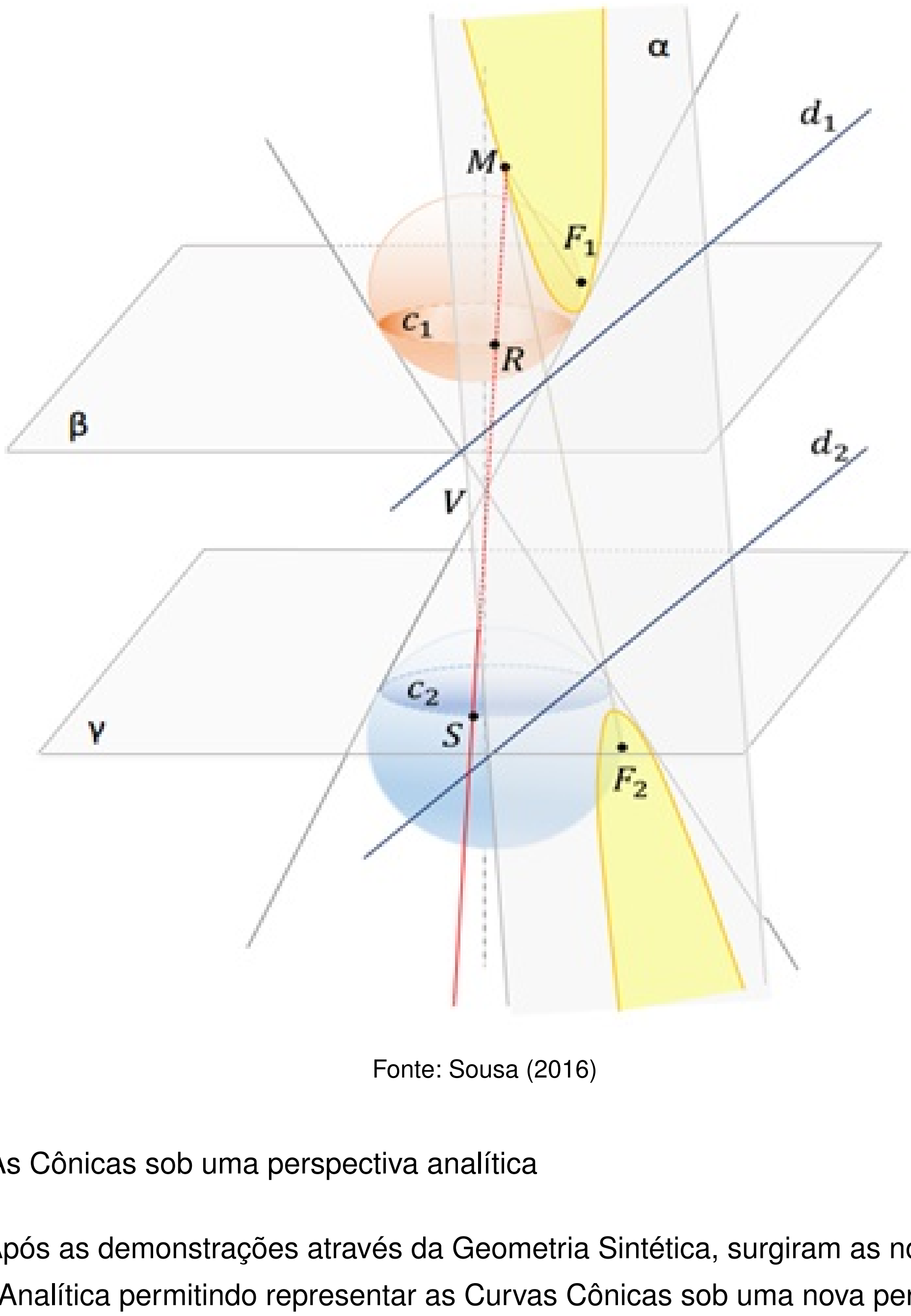
Figura 18 – Parábola – Dandelin- Quetelet



Fonte: Sousa (2016)

Situação 3: Uma hipérbole é gerada a partir de um cone de revolução interceptado por um plano α oblíquo ou paralelo a diretriz do sólido geométrico. Duas esferas são inscritas de modo a tangenciar a superfície interna do sólido geométrico e o plano α. Os pontos de tangência entre o plano α e as esferas são denominados F_1 e F_2 focos da Hipérbole.

Figura 19 – Hipérbole – Dandelin- Quetelet



Fonte: Sousa (2016)

3.1.4 As Cônicas sob uma perspectiva analítica

Após as demonstrações através da Geometria Sintética, surgiram as noções da Geometria Analítica permitindo representar as Curvas Cônicas sob uma nova perspectiva. De acordo com Siqueira (2019) o surgimento da Geometria Simbólica (séc. XVIII) possibilitou representar expressões algébricas geometricamente. Nesse contexto, origina-se a Geometria Analítica na qual a descoberta é atribuída aos matemáticos René Descartes e Pierre de Fermat. Assim, os estudos propostos por esses teóricos permitiram o desenvolvimento de um novo ramo da matemática, cujo objetivo é estudar a Geometria através de equações, conforme aponta Siqueira (2019). Esses matemáticos conduziram os estudos de forma independente e de maneira simultânea, no entanto, Descartes publicou sua obra antes de Fermat.

Ao refletir sobre os estudos no âmbito da Geometria Analítica, Siqueira (2019, p.72) aponta que "a Geometria Analítica traduz pontos, retas, cônicas e outras construções geométricas em expressões algébricas, as quais, quando analisadas, podem revelar propriedades geométricas das figuras representadas".

Em sua obra Discours de la méthode pour bien conduire la raison et chercher la vérité dans les sciences (Discurso sobre o método para raciocinar bem e procurar a verdade nas ciências), o teórico Descartes, propôs a noção do que seria a Geometria Analítica. Segundo BACCA (2013) a abordagem da geometria por via algébrica seria a singularidade do livro. Também a respeito da caracterização do estudo do teórico, Boyer (1996) indica:

> A obra de Descartes é com demasiada frequência descrita [. . .] como a aplicação da álgebra a geometria, ao passo que na verdade poderia ser bem caracterizada como sendo a tradução de operações algébricas em linguagem geométrica. (BOYER, 1974, p. 232).

Conforme esses apontamentos, podemos compreender que os estudos de Descartes também incidiram fundamentalmente sobre as construções geométricas.

Siqueira (2019) aponta que em *La Géométrie*, apêndice da sua obra, Descartes demonstrou que a álgebra poderia ser empregada no estudo da geometria, diferente de como tradicionalmente ocorria antes, quando os problemas de aritmética e de álgebra eram resolvidos através das figuras e construções geométricas.

Na mesmo época e trabalhando de modo independente, Fermat publicou sua obra "Introdução aos Lugares Geométricos planos e sólidos". De acordo com Roque (2012, p. 265) o objetivo dos estudos de Fermat era expressar os problemas geométricos de Apolônio por meio da linguagem algébrica proposta por Viète. Esse matemático desenvolveu técnicas algébricas e as utilizou para definir as cônicas, analisando suas interseções, tal como afirma Roque (2012).

Em determinado momento, Fermat dá seguimento aos seus estudos para as equações de segundo grau, demonstrando as situações que o lugar geométrico dos pontos que satisfazem a equação é um círculo ou uma cônica. A partir disto, conclui-se que dados os eixos coordenados e os coeficientes da equação, os parâmetros que definem as cônicas são estabelecidos, tal como menciona Roque (2012).

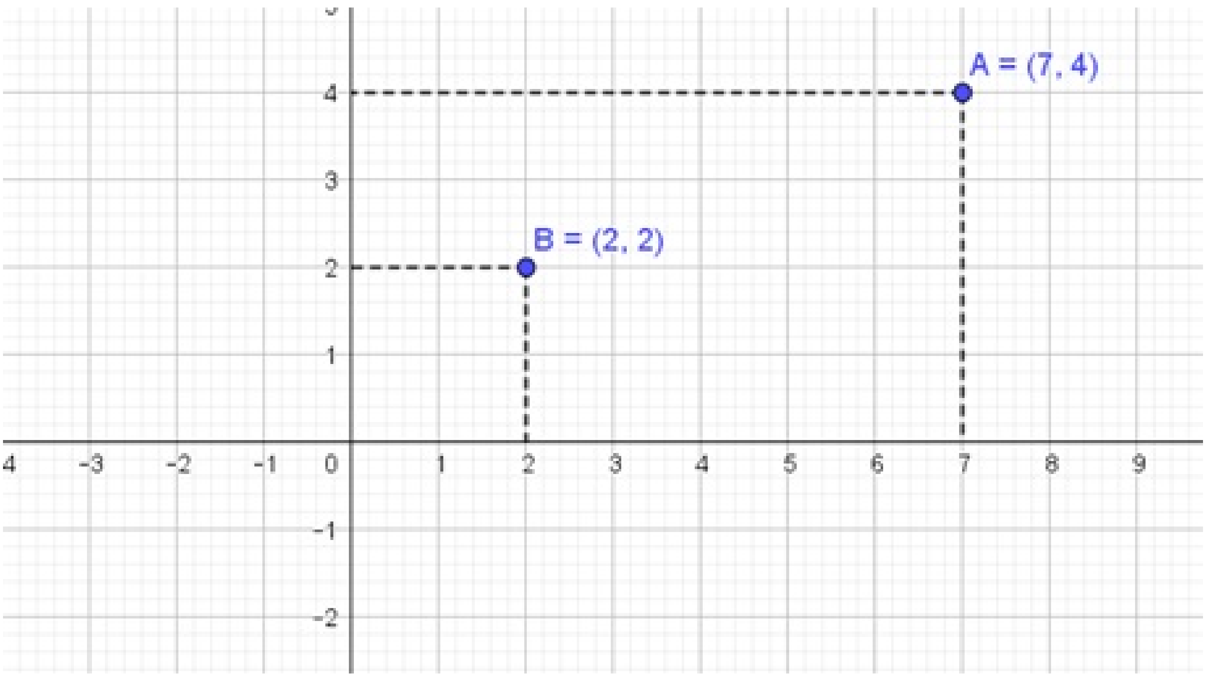
Este matemático encontrou, a partir da equação da hipérbole, o lugar geométrico dos pontos que a satisfazem e posteriormente ainda propôs soluções para equações de grau 3 e 4 através da interseção das cônicas, tal como afirma Roque (2012). A respeito do método de resolução para essas equações, Fermat resolvia da seguinte forma:

> Dada uma equação de grau 3 ou 4 em uma variável, era preciso determinar o valor da incógnita x. Para encontrá-lo, Fermat escrevia duas equações de segundo grau em duas variáveis x e y, tomadas como coordenadas dos pontos de interseção de cônicas. (ROQUE, 2012, p.266)

De modo geral, compreende-se que a Geometria Analítica se consolidou como um ramo importante no âmbito da matemática. Sobre isto, Siqueira (2019) afirma que a relevância da articulação entre a Álgebra e a Geometria refletiu-se nos trabalhos científicos, assim como também nas aplicações em outras áreas, tais como na física, nas engenharias, na computação, entre outras.

A partir do desenvolvimento deste campo, introduziu-se uma nova maneira de representar as formas geométricas através dos eixos ordenados no plano cartesiano. Conforme afirma Siqueira (2019, p.72) “Trata-se de um sistema de eixos ordenados e perpendiculares, em que cada ponto do plano é representado por um único par ordenado (x; y), sendo x e y números reais”.

Figura 20 – Representação de dois pontos no plano cartesiano



Fonte: da própria autora.

Esses princípios possibilitaram o estudo de retas e curvas a partir da representação de pares ordenados no plano cartesiano e por equações que satisfazem uma correspondência entre X e Y, conforme afirma Siqueira (2019). O autor exemplifica que, “se todo ponto P de coordenadas (x; y) é tal que x e y estão relacionados por uma expressão algébrica, e satisfazendo uma reta ou uma curva, então, podemos estudar suas propriedades a partir do estudo da equação”. (SIQUEIRA, 2019, p.73)

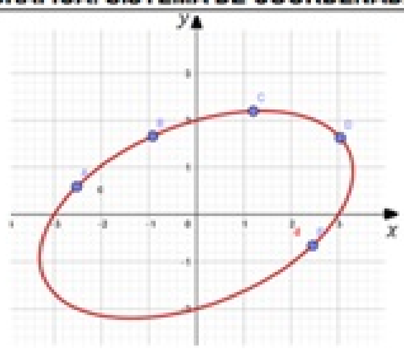
A respeito dos principais objetivos das coordenadas cartesianas, Siqueira (2019) baseado em Roque (2012) aponta:

> um dos principais objetivos das coordenadas cartesianas era permitir o estudo de curvas por meio de retas, e Descartes, visava compreender melhor as relações entre as grandezas dos problemas geométricos, ao traduzi-los em linguagem algébrica, ou seja, o objetivo da nova geometria seria estudar figuras usando proporções. (SIQUEIRA, 2019, p.74)

Assim, de acordo com Siqueira (2019), conclui-se que as cônicas, sob a ótica da geometria analítica, podem ser representadas como um subconjunto de pontos que satisfazem equações quadráticas, de tal forma que o gráfico dessas equações com duas variáveis poderá ser uma elipse, uma hipérbole, uma parábola ou umas das suas degeneradas.

Ao analisar a transformação por conversão da elipse através dos seus registros de representação algébricos e gráfico, o autor propõe as seguintes formas de representação algébrica ilustradas na tabela abaixo.

Tabela 4 – Elipse definida a partir da geometria analítica.

		REPRESENTAÇÕES ALGÉBRICAS	
GEOMETRIA ANALÍTICA	ALGÉBRICAS	Equação quadrática na forma geral $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$	$4x^2-5xy+9y^2-36=0$
		Equação na forma matricial $[x\quad y]\cdot\begin{bmatrix}A & \frac{B}{2}\\ \frac{B}{2} & C\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}+[D\quad E]\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}+F=0$	$[x\quad y]\begin{bmatrix}4 & -\frac{5}{2}\\ -\frac{5}{2} & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}-36=0$
		$[x'\quad y']\cdot\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}+[D\quad E]\cdot\begin{bmatrix}x_{11} & x_{21}\\ x_{12} & x_{22}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}+F=0$	$[x'\quad y']\begin{bmatrix}\frac{13+5\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & \frac{13-5\sqrt{2}}{2}3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}-36=0$
		Equação reduzida A rotação do referencial xy para outro, $x'y'$ $\lambda_1(x')^2+\lambda_2(y')^2+F=0$	$\left(\frac{13+5\sqrt{2}}{72}\right)(x')^2+\left(\frac{13-5\sqrt{2}}{72}\right)(y')^2=1$
		REPRESENÇÃO GRÁFICA: SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS	
	GRÁFICA		

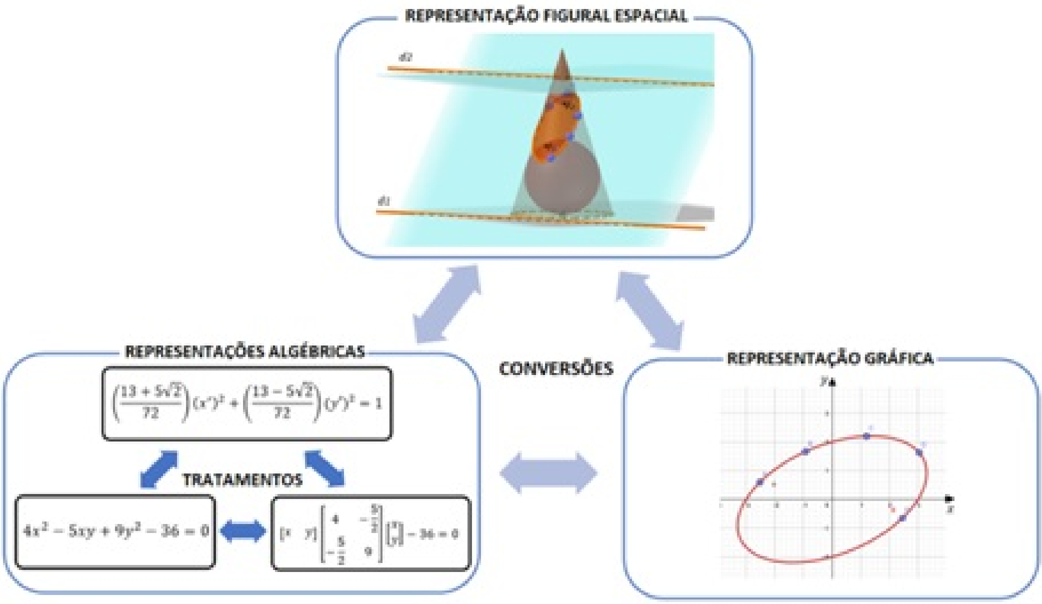
Fonte: (SIQUEIRA, 2019, p.77)

Conforme podemos observar na tabela 3, a elipse pode ser representada algebricamente por meio da equação quadrática geral, da equação em sua forma matricial e também da equação reduzida.

3.1.5 Considerações gerais sobre as Curvas Cônicas

Considerando os princípios propostos por Duval em relação aos tipos de representação, as cônicas podem ser expressas através das equações e matrizes sob o ponto de vista da álgebra (representação algébrica), através dos gráficos cartesianos sob a ótica da Geometria Analítica (representação gráfica), e através das construções geométricas sob a perspectiva da geometria sintética (representação figural). A exemplo disto, podemos observar a figura abaixo proposta por Siqueira (2019) em seus estudos sobre as representações da elipse.

Figura 21 – Correspondência entre os registros de representação figural espacial, algébricos e gráfico



Fonte: (SIQUEIRA, 2019, p.135)

Conforme se observa na figura anterior, cada representação da elipse expõe determinadas propriedades, como exemplo, a representação figural espacial mostra a obtenção da curva através da interseção do plano no cone, bem como a localização geométrica do foco proposto nos estudos de Dandelin. Na representação gráfica temos a obtenção da curva através dos 5 pontos sob a perspectiva do lugar geométrico e na representação algébrica podemos obter os coeficientes a e b, que no caso da elipse representam as medidas dos semieixos maior e menor.

Por essa razão, é fundamental desenvolver e planejar o processo de ensino-aprendizagem de modo a propiciar a diversificação dos registros de representação dos objetos matemáticos, bem como da conversão entre eles. Como já vimos anteriormente, essas considerações são fundamentais para a compreensão no estudo da matemática.

3.2 Revisão de literatura

Nesta seção será apresentada uma breve revisão de literatura sobre os apontamentos apresentados em alguns estudos da literatura referentes ao ensino – aprendizagem das Curvas Cônicas na Educação Básica e no Ensino Superior. Embora a pesquisa tenha como foco central as cônicas no Ensino Superior, consideramos pertinente investigar no nível básico como são conduzidos os processos de ensino-aprendizagem relacionado ao conteúdo em questão, assim como a apresentação do mesmo nos materiais didáticos utilizados.

3.2.1 Ensino das Curvas Cônicas

Na busca por compreender o estatuto do ensino das Curvas Cônicas no Brasil e em outros países, realizou-se uma busca nas pesquisas de Contreras et al. (2002), Velásquez et al. (2007), Neto (2008), Bordallo (2011), Silva (2011), Dallemole e Groenwald (2012), Lopes (2014), Nascimento (2015), Sousa (2016), Muniz Junior (2018), Siqueira (2019). Em decorrência do Movimento da Matemática Moderna, a abordagem centrada na Álgebra ainda é apontada em estudos. Pesquisadores como Silva (2011), Lopes (2014) e Nascimento (2015) apontam em suas investigações que as Curvas Cônicas, que se inserem na área de Geometria Analítica, são tratadas predominantemente a partir do enfoque algébrico.

Bordallo (2011), ao analisar os programas de ensino, as leis e as orientações curriculares à respeito do estudo das Curvas Cônicas e sua evolução ao longo do tempo, constatou que não era dada à importância à questão da unificação das cônicas. A autora ainda aponta que o modo como as cônicas são tratadas define a presença ou não da unificação, ou seja, quando abordados sob o ponto de vista geométrico era mais comum a existência da unificação; quando eram tratadas sob à ótica analítica apareciam de maneira fragmentada. Também é sinalizado que a influência do MMM marcou o fim da abordagem da geometria sintética e apesar do encerramento do movimento o tratamento permaneceu apenas analítico, ocasionando assim no fim da sua apresentação unificada.

Silva (2011) propôs em seu estudo, baseado no currículo do estado de São Paulo, atividades complementares ao material fornecido pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo - SEE-SP, buscando contemplar aspectos menos priorizados pelo currículo sobre as Seções Cônicas. Em sua investigação, o autor afirma que o material fornecido pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo parece ter uma abordagem das Seções Cônicas a partir da perspectiva algébrica.

Dallemole e Groenwald (2012) analisaram em sua investigação a dificuldades dos alunos na conversão dos registros de representação em Geometria Analítica, mais especificamente reta e circunferência, e também as contribuições do Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem (SIENA) para identificar essas dificuldades. O experimento foi realizado com discentes de diferentes semestres do curso de Licenciatura em Matemática. Os resultados apontaram a existência de maiores dificuldades na conversão entre os registros relacionados às representações em linguagem natural e os registros algébricos da circunferência e da reta.

Corroborando com as ideias de Silva (2011), Lopes (2014) ao investigar materiais desenvolvidos pela Secretaria do Estado de São Paulo, tais como: caderno do professor e do aluno, constata a restrição do ensino das Curvas Cônicas às equações. Entretanto, no que se refere ao estudo da parábola observou-se na definição uma ênfase na representação gráfica. Outra constatação feita por esta autora refere-se a ausência da menção ao estudo desta temática na perspectiva do lugar geométrico. Esta autora, propõe em sua pesquisa, a partir de uma sequência didática, investigar a apropriação das definições de parábola enquanto lugar geométrico por alunos do Ensino Médio.

Nascimento (2015) em sua investigação, que trata de uma proposta para o ensino das Curvas Cônicas, verificou através de uma pesquisa bibliográfica realizada nos principais livros didáticos de Matemática adotados na educação básica que a abordagem presente nesses textos trata as Curvas Cônicas sob uma ótica meramente algébrica, com uma grande quantidade de fórmulas que devem ser memorizadas pelo aluno. Este autor ainda afirma que:

> Não é extrapolação afirmar que o estudo deste conteúdo é tratado, atualmente, de uma maneira superficial e meramente mecânica. Não sendo dada a atenção apropriada aos detalhes e contextualizações que podem se tornar extremamente relevantes para uma devida compreensão ao tema. (NASCIMENTO, 2015, p.3)

A respeito da compreensão dos objetos matemáticos, Duval afirma que é necessária à articulação entre pelo menos dois registros de representação semiótica, ou seja, o aluno deverá dominar e coordenar, no mínimo, dois registros de representação do objeto matemático estudado. Privilegiar determinadas representações em detrimento de outras pode comprometer a compreensão dos discentes, uma vez que, cada representação do objeto matemático revela determinadas características.

Com o propósito de analisar como se dá a ocorrência do processo de articulação entre as diferentes abordagens das Cônicas no ensino, Souza (2016) constatou, através de experimentos como simulação virtual e questionário, lacunas no ensino e aprendizagem deste conteúdo, como por exemplo, impasses na articulação de conceitos prévios e a ausência de sentido no acesso às representações. O experimento foi realizado com alunos do ensino superior de uma universidade pública brasileira, no qual para participar do estudo em questão deveriam ter tido acesso ao conteúdo de Curvas Cônicas no Ensino Médio. Estes resultados reforçam as aparentes limitações relacionadas aos conhecimentos dos alunos em relação às múltiplas representações das Curvas Cônicas.

Muniz Junior (2018) constatou, através de uma análise crítica das abordagens das Curvas Cônicas nas obras distribuídas às Escolas Públicas pelo Programa Nacional do

Livro Didático – PNLD, que o tratamento analítico das equações é priorizado nesses textos. No que se refere ao tratamento sob o ponto de vista da geometria, o autor aponta que é insuficiente e a abordagem na perspectiva da geometria espacial é quase inexistente.

No mesmo sentido, Neto (2008) aponta para a existência de uma extrema concentração na caracterização das Cônicas por meio das equações, não sendo dada a devida importância às demais caracterizações deste objeto matemático. Esta apresentação limitada traz consequências na compreensão do objeto em questão, uma vez que, suas demais representações semióticas são pouco exploradas, assim como também a apresentação das diferentes propriedades reveladas em cada representação pode ser afetada. A exemplo disto, o mesmo autor cita a possibilidade da outra caracterização das cônicas através de um ponto denominado foco e uma reta intitulada como diretriz, concepção originada a partir das raízes da Grécia Antiga.

O autor, em uma breve descrição sobre o modo como o ensino das Curvas Cônicas eram conduzidos na época em que a pesquisa foi realizada, afirma que o primeiro contato com este conteúdo acontece no último ano do ensino fundamental através do estudo da parábola sob a forma de função quadrática, no qual são apresentadas em conjunto sua representação algébrica e sua representação gráfica. No entanto, ao longo da exposição deste conteúdo nesta etapa da educação básica os professores costumam ignorar as conexões com as cônicas sendo, portanto, priorizada a introdução do conceito de função. No início da etapa posterior da Educação Básica, a parábola retorna como objeto de estudo no contexto das funções e com mais amplitude, no entanto, a ausência de articulação com as cônicas é mantida. O foco está atrelado à apreensão da manipulação das equações analíticas. É na última série do ensino médio que ocorre o surgimento das cônicas no programa escolar, no entanto, em algumas situações o conteúdo nem sequer é ensinado. Se ocorre, o foco recaí sobre as equações analíticas por meio das demonstrações da caracterização bifocal. (NETO, 2008)

Siqueira (2019) desenvolveu o protótipo “Conics 3D” com objetivo de apresentar as Cônicas de maneira articulada e dinâmica através da exploração dos “objetos semióticos dinâmicos”, ou seja, uma maneira dinâmica de articular as representações algébricas (equações), as representações gráficas cartesianas e as representações figurais espaciais. Após realizar uma extensa investigação sob os pontos de vista epistemológico, didático e cognitivo, o autor percebeu que os softwares já existentes apresentavam limitações na possibilidade de articular a representação figural espacial com as representações algébricas e gráfica cartesiana e constatou a necessidade de articular de uma forma dinâmica as representações das Curvas.

Com relação ao ensino das cônicas no cenário mundial acessamos as pesquisas de Contreras et al. (2002) e Velásquez et al. (2007). Considerando a pertinência do ensino das cônicas, Contreras et al. (2002) propuseram um estudo sintético-analítico das construções com a elipse, consideradas por eles, motivadoras para os alunos do Bacharelato, que corresponde aos dois últimos anos do ensino médio brasileiro. Os autores afirmam que a elipse não é sequer tratada em alguns institutos de Educação Secundária da Espanha e em determinados casos ocorre o estudo da circunferência. Os mesmos ainda demonstram uma preocupação com relação à compreensão sobre o tema, uma vez que, nas universidades se parte do princípio que os programas do ensino secundário foram cumpridos efetivamente.

No texto intitulado como "La Geometría Analítica: ¿cómo presentarla de manera interesante para los alumnos de la educación media superior?", Velásquez et al. (2007) realizam uma investigação a respeito da cônica elipse e com objetivo de orientar professores sobre a conceituação na perspectiva do ensino-aprendizagem da elipse e da geometria analítica. Estes autores verificaram a existência de dificuldades dos alunos da educação média superior do México na compreensão das figuras geométricas enquanto objetos algébricos e os objetos algébricos enquanto figuras geométricas, ou seja, dificuldades na conversão entre as diferentes representações e consequentemente na identificação das variáveis simbólicas e visuais da curva em questão.

Embora a Geometria Analítica esteja presente como uma unidade temática nos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN+ (BRASIL, 2006) e explicite sobre o desenvolvimento da habilidade de estabelecer conexões entre diferentes representações dos objetos matemáticos, estudos como o de Silva (2011), Lopes (2014), Nascimento (2015), Muniz Junior (2018) apontam que há uma predominância da abordagem Algébrica presente no ensino das Curvas Cônicas no âmbito da educação básica. Os possíveis prejuízos que podem ser ocasiodados por esta perspectiva limitada são: A confusão entre o objeto matemático e a sua representação e o comprometimento da compreensão do conteúdo devido à ausência de articulação com as demais representações semióticas na apresentação do objeto matemático.

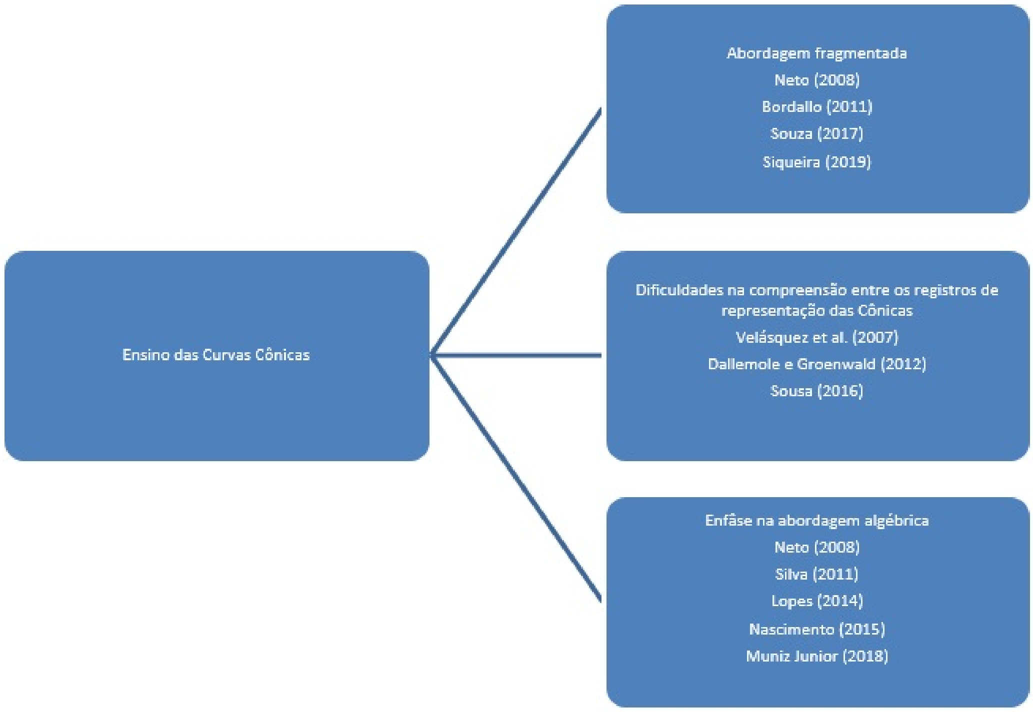
No contexto do ensino superior, os dados fornecidos por Souza (2016) apontam que alunos pertencentes a um curso de formação dedicado ao estudo da Geometria Gráfica e suas aplicações que por sua vez, tiveram acesso às experiências em disciplinas de Geometria Gráfica Bidimensional – GGB e Sistemas de Representação - SR, e tiveram acesso as Curvas Cônicas no ensino médio apresentaram dificuldades em articular as representações semióticas propostas na atividade de coleta de dados. Esta lacuna apontada na compreensão dos alunos se dá, possivelmente, em razão da abordagem segmentada deste objeto matemático, uma vez que os alunos participantes do experimento tiveram acesso ao conteúdo em diferentes níveis da educação e sob mais de uma ótica. A exemplo disto, na disciplina de GGB as cônicas são apresentadas como lugares geométricos.

No que se refere às pesquisas relacionadas ao ensino deste conteúdo, parte destas têm refletido sobre a necessidade de abordá-lo com o enfoque geométrico, a partir da utilização de softwares de Geometria Dinâmica, sequências didáticas e materiais concretos. Entretanto, poucas tem como foco principal dedicar-se a investigação dos livros didáticos a partir da teoria dos Registros de Representação Semiótica refletindo sobre os tratamentos, as conversões e os fatores de congruência. Um fator comumente explicitado nas pesquisas é a abordagem fragmentada da temática, sem privilegiar a articulação entre os diferentes pontos de vista das curvas. A quase inexistência da Geometria Sintética no ensino também é indicada nas pesquisas, esta Geometria, utilizando métodos geométricos, foi responsável conceituar as Cônicas como obtidas a partir da seção do cone de revolução. Entendemos que a caracterização desta temática através do enfoque mencionado anteriormente é importante para o processo de ensino-aprendizagem significativo.

Com relação as recomendações do ponto de vista didático para o ensino desta temática, os apontamentos também recaem sobre a condução do ensino das Curvas Cônicas de maneira articulada e dinâmica, permitindo ao aprendiz a construção do conhecimento através das variadas óticas existentes do tema. Nesse sentido, consideramos pertinente desenvolver uma sequência de atividades centrada nas principais dificuldades identificadas na literatura e de maneira articulada com as possibilidades do protótipo “Conics 3D” com o objetivo de validar o artefato.

A seguir, apresentamos um (quadro) síntese sobre as pesquisas presentes na revisão de literatura.

Quadro 3 – Quadro resumo da revisão de literatura sobre o ensino das Curvas Cônicas



Fonte: da autora.

4 INTEGRAÇÃO DE RECURSOS COMPUTACIONAIS NO PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

A discussão referente as possibilidades de integração das tecnologias no âmbito da educação acompanham o desenvolvimento da sociedade há um considerável período. As possibilidades fornecidas pelos recursos computacionais foram pautas de diversas propostas a partir de diferentes correntes pedagógicas, umas com uma abordagem mais tradicionalista cujo o objetivo centrava-se no treinamento, ou seja, a aprendizagem se dava através da tentativa e/ou erro. Outras com abordagens mais contemporâneas, centrando os esforços no desenvolvimento da aprendizagem através da mobilização de reflexões sobre conceitos e propriedades dos objetos matemáticos pelo aluno, sendo este colocado como protagonista no processo de ensino-aprendizagem.

A evolução das discussões reflete atualmente na segunda proposta mecionada, utilizando como recursos as possibilidades oferecidas pelos softwares desenvolvidos para o trabalho com a matemática de modo geral e também como os que foram desenvolvidos para tratar de determinados objetos matemáticos em específico.

De acordo com Bellemain (2002) os softwares de cunho construtivista oferecem ao usuário condições e ferramentas necessárias para a resolução de problemas. Como exemplo, temos os softwares de geometria dinâmica, que permitem a exploração das propriedades inerentes aos objetos matemáticos favorecendo a percepção do que é constante e do que varia em determinadas representações.

Uma particularidade pertinente dos recursos computacionais é o suporte a criação de simulações que ampliam o modo de percepção do usuário em relação às transformações das representações dos objetos matemáticos. Simular tais transformações através de modelos didáticos físicos (objetos manipuláveis) nem sempre é uma tarefa fácil devido ao tempo de confecção e ao acesso à materiais específicos necessários.

Em concordância com essa discussão, surge na década de 70 a noção de micromundo atribuída, inicialmente, aos teóricos Minsky e Papert. Conforme aponta

Bellemain(2002), a definição inicial designada ao termo micromundo refere-se a um sistema que permite simular ou reproduzir um domínio do mundo real, cujo o objetivo recaí sobre a abordagem e resolução de problemas.

Bellemain (2002) reflete em seu estudo que de modo recorrente a resolução de problemas alimenta o desenvolvimento conceitual. Em concordância com Thompson (1987) que ao definir a noção de micromundo, propôs duas vertentes que se relacionam entre si: o desenvolvimento conceitual e a resolução de problemas.

As discussões a respeito da temática se aprofundaram e de uma maneira mais específica, em relação à matemática, surgiu uma caraterização para o micromundo matemático, tal como afirma Bellemain (2002):

> Trata-se, pelo micromundo matemático, de fornecer um sistema próximo de um sistema axiomático, que permite expressar e resolver um conjunto de problemas.

> Relativamente à implementação de sistema axiomático, o computador tem uma contribuição significativa, pois ele permite criar novos sistemas de objetos e relações que oferecem novas formas de resolver os problemas. (BELLEMAIN, 2002, p. 55)

As discussões a respeito do micromundo matemático culminam na noção das representações dos objetos matemáticos, pois, a partir das possibilidades geradas pelas tecnologias computacionais, tais como as simulações, são geradas representações próprias do contexto informático. Sobre isto, autores como Almouloud e Salazar (2015) e Siqueira (2019) incluem no debate sobre a TRRS termos como registro figural dinâmico e registros semióticos dinâmicos

Ao refletirem sobre o estudo da geometria, Almouloud e Salazar (2015) salientam a importância do uso das representações figurais em seu ensino. E a partir destas que os objetos podem ser acessados podendo oportunizar a percepção de propriedades e formulação de conjecturas. Os autores também destacam que o trabalho com a geometria exige maior esforço cognitivo que os demais campos da matemática, isto justifica-se pelo fato de que os tratamentos nos registros figurais e discursivos devem ocorrer simultaneamente.

Para entendermos os fundamentos relacionados ao termo registro figural dinâmico, é necessário compreender as reflexões de Duval a respeito do ato de "ver" uma figura. O autor elucida que podem ser conduzidas analises cognitivas a partir da forma, dos conhecimentos geométricos mobilizados e das ferramentas que deram suporte a construção.

Nesse sentido, com base na literatura de Duval, Almouloud e Salazar (2015) listam os três aspectos para analisar uma figura:

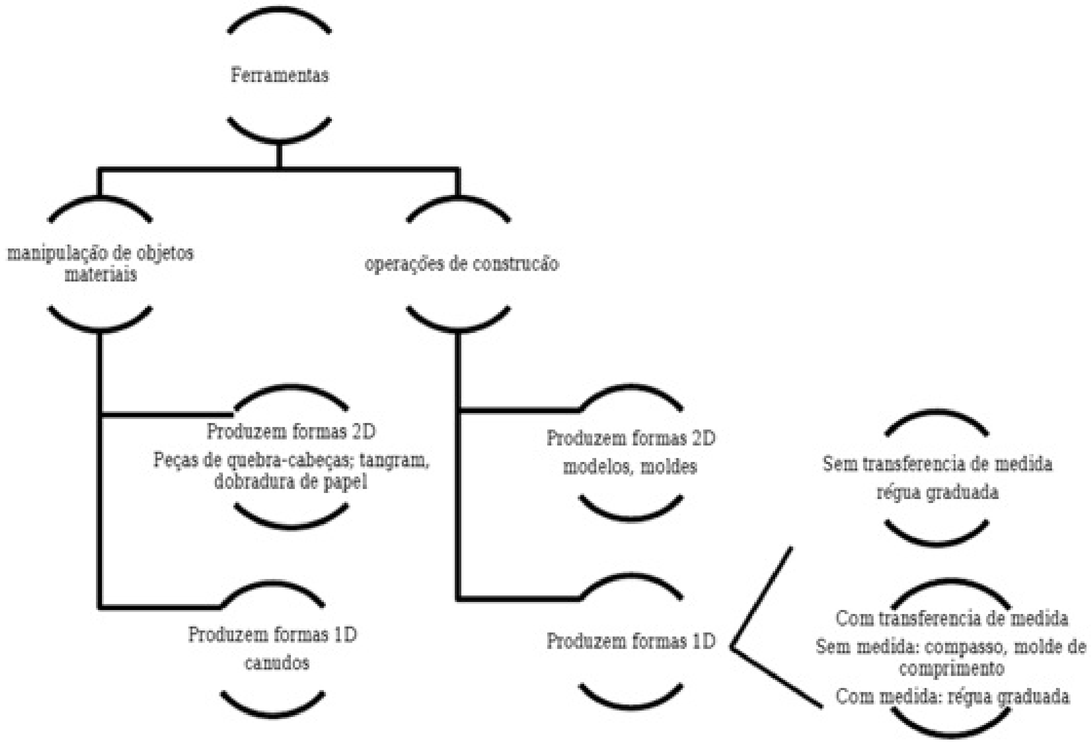
- Forma da figura: "baseada na percepção da figura cujos contornos são fechados. A figura pode ser vista como um agrupamento por justaposição, quando existem tantas formas como contornos fechados ou por superposição, quando existem menos formas que contornos fechados." (ALMOULOUD E SALAZAR, 2015, p. 922)
- "Conhecimento das propriedades geométricas da figura que se devem mobilizar para a sua análise e na qual devem ser consideradas suas unidades figurais" (ALMOULOUD E SALAZAR, 2015, p. 923)
- "Ferramentas utilizadas para representa-la ou para construí-la" (ALMOULOUD E SALAZAR, 2015, p. 923)

Com relação às ferramentas, Duval elenca três diferentes tipos:

- Material manipulativo (tangram, dobradura de papel, peças de quebra cabeça, etc.)
- Régua, compasso, molde
- Softwares

Assim, admite-se o seguinte esquema sobre a classificação de ferramentas para construir figuras:

Figura 22 – Classificação de ferramentas para construir figuras



Fonte: (ALMOULOUD E SALAZAR, 2015, p. 923 adaptado de DUVAL, 2005, p. 14)

Compreende-se que os agrupamentos por justaposição são mobilizados através da manipulação de objetos materiais. Já no que se refere aos agrupamentos por superposição, estes são favorecidos pelas ferramentas que permitem operações de construção.

A passagem de uma ferramenta para outra, segundo Duval, significa um salto cognitivo, pois “se passa de um mundo no qual o espaço se organiza em função dos gestos do corpo e de sua orientação a um mundo no, qual o espaço se determina em função dos gestos unicamente técnicos” (DUVAL, 2005, p. 113)

Mais especificamente em relação à experimentação em ferramentas computacionais, compreendemos que existem particularidades em comparação com as outras. A respeito disso, Almouloud e Salazar (2015) consideram:

> Que o uso de softwares e, especificamente, de AGD para o trabalho com figuras geométricas é indispensável já que proporciona outro olhar sobre elas, porque sua utilização permite realizar tanto por agrupamentos por justaposição como por superposição, algo que não é possível fazer de maneira simultânea quando se trabalha com outras ferramentas. (ALMOULOUD E SALAZAR, 2015, p. 924)

Nesse sentido, os ambientes de geometria dinâmica configuram-se como um recurso relevante de suporte à aprendizagem, pois, possibilita uma maior amplitude perceptiva em relação às representações dos objetos matemáticos. Sobre isto, Chaachoua (1997) avalia que os ambientes de geometria dinâmica (AGD) podem contribuir na validação de situações geométricas de maneira experimental.

Ao refletir sobre a importância dos AGD, Gravina (2001) justifica que eles:

> Incentivam o espírito de investigação em matemática: sua interface interativa, aberta a exploração e à experimentação, disponibiliza os experimentos de pensamento, manipulando diretamente os objetos na tela do computador, e com realimentação imediata, os alunos questionam o resultado das suas ações/operações, conjecturam e testam a validade das conjecturas inicialmente através dos recursos de natureza empírica. (GRAVINA, 2001, p.89-90)

Como dito anteriormente, as possibilidades que os softwares proporcionam aos usuários configuram uma nova caracterização na relação entre as representações, algumas delas diferem das realizadas através do papel, lápis e instrumentos de desenho. Pois, possibilitam a articulação dinâmica das representações, que em outros ambientes não informatizados fica praticamente impossível de ser demonstrada.

Com respeito a relevância das representações no processo de ensino-aprendizagem, Bellemain afirma:

> As representações têm um papel central na elaboração e evolução dos saberes e na construção dos conhecimentos pelo sujeito, o computador pode contribuir de forma significativa nesses processos com novos sistemas de representação. **Os softwares de geometria dinâmica constituem exemplos do uso do computador na criação de novos sistemas de representação dos objetos da geometria**. (BELLEMAIN, 2002, p.55)

Em relação aos softwares no ensino e aprendizagem de geometria, Duval (2011) reflete que não há distinção entre as representações exibidas na tela do computador e as produzidas graficamente no papel para uma apreensão visual. Para ele, a exigência de uma mesma desconstrução dimensional ocorre tanto ao ver a figura no papel quanto no monitor do computador. Porém, há a constituição de modo fenomenológico de produção novo, com base na aceleração de tratamentos.

A diferença nas experiências no contexto dos AGD é apontada pelos autores Almouloud e Salazar (2015), quando consideram que as três atividades cognitivas, que formam registros, formação, tratamento e conversão do registro figural se realizam de modo diferente quando o sujeito interage com o AGD. A justificativa para tal argumento reside no fato de que “as funções de arrastamento e manipulação direta permitem que se construam relações entre os tratamentos figurais e discursivos da figura de maneira diferente em relação a quando se trabalha em um ambiente dinâmico” (ALMOULOUD E SALAZAR, 2015, p. 927).

Nesse sentido, os autores propõem os seguintes termos:

- **Formação dinâmica**

A formação, para Duval, diz respeito a criação de uma representação de um objeto de determinado sistema semiótico. Mais especificamente, com relação ao registro figural, a formação se dá através do reconhecimento das unidades figurais, bem como sua relação com base nas propriedades geométricas da figura em questão.

Com respeito à formação dinâmica, diz-se que a formação de uma representação semiótica em AGD ocorre quando o usuário escolhe uma ferramenta (na barra de ferramentas) para representar um objeto geométrico, conforme apontam Almouloud e Salazar (2015).

- **Tratamentos dinâmicos**

Os tratamentos figurais, segundo Duval, ocorrem com base nas transformações dentro os registro figural através da mudança de posição conservando a mesma configuração (mudança de posição, translação, rotação, etc)

A proposta de definição do termo tratamentos dinâmicos relaciona-se como a noção proposta por Duval de que há uma aceleração dos tratamentos em softwares. Nesse sentido, de acordo com Almouloud e Salazar (2015), os tipos tratamentos através de AGD identificados pelos autores foram: a mudança de uma figura sem modificá-la (a partir da manipulação direta), a mudança dos comprimentos dos lados (através da função arrastamento e da ferramenta homotetia) e a reconfiguração da figura (por meio da função arrastamento e outras a depender da figura em questão). Almouloud e Salazar (2015).

- **Conversão no ambiente de geometria dinâmica**

Duval define conversão como uma transformação externa ao registro, com base na mudança de representações.

Para Almouloud e Salazar (2015) a conversão dinâmica se caracteriza a partir da língua natural (enunciado do problema) à representação figural no AGD, sendo possível a realização de tratamentos dinâmicos para a solução do problema.

- **Registro figural dinâmico**

Com base nos três termos mencionados nos itens anteriores, Almouloud e Salazar (2015) denominam os registros das figuras em AGD como **Registro Figural Dinâmico,** em referência a possibilidade de desenvolvimento das atividades cognitivas quando interagem com as representações no contexto de um AGD.

As discussões referentes à isto se aprofundaram no estudo de Siqueira (2019) fazendo surgir o termo Registros Semióticos Dinâmicos. O autor define tal termo como:

> Articular de maneira dinâmica suas equações (e suas várias formas entre si – transformação por tratamento), sua representação gráfica cartesiana e a sua representação figural espacial, de modo que ao realizar deslocamentos na representação figural espacial obtenhamos modificação no gráfico cartesiano e nas expressões algébricas, permitindo o acesso rápido e contínuo a várias situações (Transformação por conversão). (SIQUEIRA, 2019, p.292)

Assim, em concordância com Almouloud e Salazar (2015) e com Siqueira (2019) entendemos que os ambientes computacionais dinâmicos oferecem possibilidades diferentes dos ambientes não dinâmicos e essa diferença altera a relação que se estabelece entre as representações dos objetos matemáticos, ampliando a noção previamente estabelecida sobre os registros de representação. A influência dessas modalidades de ferramentes e recursos recaem sobre percepção dos usuários, permitindo a reflexão sobre as relações que se estabelecem entre as representações a partir da sua articulação dinâmica. Acreditamos que tais ambientes configuram-se como importantes recursos no suporte a criação de conjecturas e na dedução dos conceitos e propriedades dos objetos transparecidos em cada representação de maneira particular.

5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Este capítulo tem o propósito de apresentar os procedimentos metodológicos adotados para alcançar os objetivos da pesquisa, que tem como principal questão norteadora: Como se dá o processo de articulação dos registros de representação das Curvas Cônicas através de uma abordagem articulada e dinâmica com auxílio de uma sequência de atividades e do protótipo Conics 3D?

5.1 Caracterização dos sujeitos

Os sujeitos participantes do experimento integram o corpo de alunos do curso de Licenciatura em Expressão Gráfica – LEG da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE. O currículo da LEG objetiva a formação de professores nas áreas de Geometria Gráfica e suas aplicações nas áreas de Arquitetura, Design, Artes Visuais, Engenharias, entre outras. Os profissionais são direcionadas a atuar no campo da Educação Básica, em cursos da Educação Profissional e Tecnológica nas modalidades a distância e presencial.

Os licenciandos pertencentes ao sexto período do curso foram escolhidos para compor a pesquisa por terem acesso ao conteúdo de Curvas Cônicas desde o primeiro semestre da graduação. A disciplina de Geometria Gráfica Bidimensional apresenta esta temática, essencialmente, sob o ponto de vista dos lugares geométricos.

Em um momento posterior, os licenciandos cursam a disciplina de Geometria Analítica no qual as curvas são apresentadas através de uma caracterização algébrica. Por último, estudam as curvas através da sua representação tridimensional na disciplina de Geometria Gráfica Tridimensional.

Consideramos a opção por estes sujeitos por entender que o acesso às representações das Curvas Cônicas se dá de uma maneira mais ampla e com ênfase na abordagem da geometria sintética a partir das representações figurais destas curvas.

5.2 O experimento

Para a realização da pesquisa em questão, conduziremos o experimento através de uma sequência de atividades com o auxílio do Conics 3D de modo a possibilitar a articulação dinâmica das representações algébricas, gráfico cartesiana e figural espacial das Curvas Cônicas.

5.2.1 A Sequência de Atividades

Conforme demonstram as pesquisas investigadas na revisão de literatura (seção 2.2.1) muitas são as dificuldades encontradas no ensino e na aprendizagem das Cônicas. Nesse sentido, buscamos desenvolver uma sequência de atividades que reúna situações que favoreçam o reconhecimento das representações: figural espacial, algébricas e gráfica através da diversificação dos registros de representação e da articulação dinâmica entre eles, de modo a contribuir para a superação das dificuldades, do ponto de cognitivo, relacionadas a este ensino.

Destacamos, dentre as principais dificuldades que cercam o ensino das Cônicas, conforme os apontamentos da revisão de literatura e sob a ótica de Siqueira (2019) as seguintes dificuldades:

- Identificar e relacionar as variáveis visuais com as unidades simbólicas;
- Ausência de articulação entre a Geometria sintética e Analítica;
- Reconhecimento das curvas cônicas sob outras perspectivas além da sua forma algébrica;
- Articular as transformações por tratamento das diferentes formas algébricas (equação quadrática, equação reduzida e matricial);

A sequência de atividades foi dividida em duas etapas, sendo a primeira dedicada à transformação de tratamento dentro do registro geométrico, explorando as representações figurais e gráficas das Curvas Cônicas. Nesta primeira etapa de atividades buscou-se, através das situações propostas, a superação da dificuldade relacionada ao reconhecimento dessas curvas sob outras formas de representação se não a algébrica.

A segunda etapa de atividades explorou a transformação de conversão, tendo como foco a articulação entre os registros geométricos e os algébricos. As nove situações foram elaboradas com o intuito de promover a superação das dificuldades relacionadas a articulação entre a geometria sintética e a álgebra, o reconhecimento das variáveis visuais e unidades simbólicas, assim como a relação entre as mesmas, ou seja, a correspondência das unidades de sentido das suas representações.

Com relação às dificuldades em transformar via tratamento as diferentes formas algébricas, optou-se por explorar mais a geometria sintética em consonância com a álgebra, do que focar apenas no trabalho com aspecto algébrico.

5.2.2 Análise a priori das questões da sequência de atividades

Como já dito anteriormente, buscou-se desenvolver atividades que propiciassem a percepção das correspondências das unidades de sentido das representações figural espacial, gráfica e algébrica das curvas cônicas auxiliada pelo programa Conics Studium 3D.

Nesse sentido, buscamos identificar como os alunos realizam os tratamentos e as conversões (transformações de representações semióticas) nas atividades propostas, assim como também a influência do Conics como ferramenta para o trabalho cognitivo dos alunos na resolução das atividades propostas, evidenciando os pontos positivos e os que demandam aprimoramento no âmbito do software em questão.

No primeiro momento trataremos da análise a priori da primeira fase da sequência de atividades, classificando as questões de acordo com os objetivos e requisitos sob à ótica da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Em seguida, serão abordadas as classificações em relação à segunda fase da sequência.

A fase inicial, dedicada à exploração das transformações dentro do registro geométrico, congregou 7 questões. A caraterização como tratamento da articulação entre a representação gráfica e a representação figural espacial justifica-se pois consideramos se tratar de uma transformação dentro do registro geométrico.

O trabalho com o aspecto figural das cônicas teve como foco a exploração via representação espacial relacionada às leis de geração destas curvas dadas pelas diferentes interseções do plano de seção com o cone de revolução de duas folhas.

Abordar a exploração das transformações dentro do registro geométrico com as representações figurais e gráficas das cônicas, relaciona-se com a noção dos tratamentos figurais discutidos por Duval.

Para este autor, os tratamentos figurais independem do conhecimento matemático enquanto registros das figuras e se caracterizam pelas modificações que podem ser realizadas nas figuras, podendo ser modificações óticas ou posicionais e efetuadas mentalmente, ou fisicamente. A razão pela qual se justifica a importância dessa transformação relaciona-se com a dificuldade no alcance da percepção das relações e propriedades das figuras pertinentes à resolução. Tal como afirma Scheifer, 2017, baseada em (DUVAL, 2004, 2011, 2012a e 2012b)

O aprofundamento da noção dos tratamentos figurais se encaminha para a noção das apreensões das figuras, discutidas no referencial teórico da presente pesquisa, na qual retomaremos aqui a apreensão perceptiva. Para Duval, tal percepção diz respeito ao nível inicial de apreensão das figuras geométricas, tendo como característica o reconhecimento das diferentes unidades figurais que compõem uma figura.

A discussão das apreensões estabelece relação com uma atividade fundamental na compreensão dos objetos do campo da geometria, a visualização, que associada aos processos cognitivos pode produzir a construção do conhecimento geométrico.

No entanto, esse campo de estudo dispõe de algumas complexidades, tal como a abstração mencionada nos estudos de Duval. No que se refere especificamente a percepção das unidades figurais, o reconhecimento pode se dá em diferentes graus de complexidade, tal como elucida (SHEIFER, 2017, p.58)

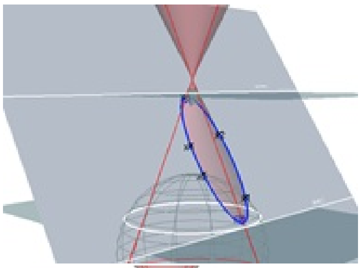
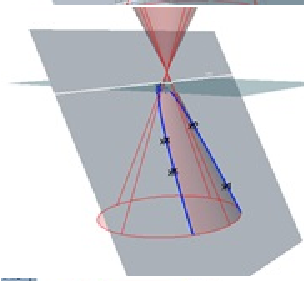
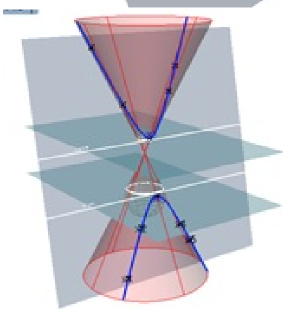
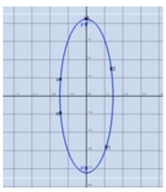
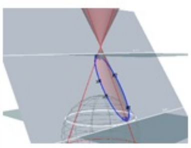
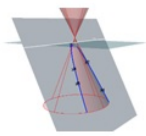
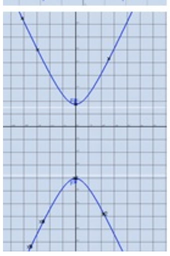
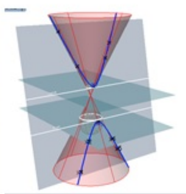
> Não há dificuldade em reconhecer uma unidade figural de dimensão 2 que se apresenta separadamente. Porém o reconhecimento das unidades figurais integradas a uma configuração podem levar mais ou menos tempo, dependendo da

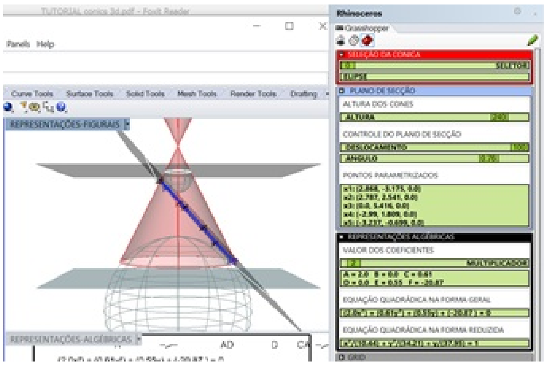
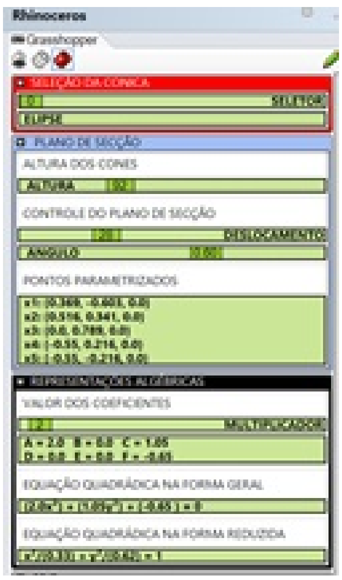
> orientação que tenham em relação a sua orientação visual típica. (SHEIFER, 2017, p.58)

A razão pela qual se justifica tal diferença nas situações de reconhecimento é atraibuída a dois fatores: o primeiro diz respeito ao predomínio das unidades figurais de dimensão superior e o segundo refere-se a presença de mais unidades figurais elementares que o necessário para a contrução. (SHEIFER,2017)

Nesse sentido, reunimos na primeira fase do experimento, situações que demandaram ações cognitivas via tratamentos figurais e apreensão perceptiva. Assim, organizamos o quadro a seguir elucidando as questões desenvolvidas com os respectivos objetivos sob a ótica da TRRS.

Tabela 5 – Objetivos de análise sob o ponto de vista cognitivo – primeira fase

Questões	Objetivos
1ªConsiderando o plano de corte como um plano cartesiano, descreva onde você colocaria os eixos (X e Y) para representar a curva de interseção desse plano com o cone.   	Observar os tratamentos figurais por meio das apreensões: perceptiva e operatória
2ª Agora você têm a representação gráfica orientada por um par de eixos ortogonais. Onde você colocaria os eixos (X e Y) na representação espacial? Como você compara essa resposta com a resposta da sua questão anterior sem o fornecimento da representação gráfica?      	Observar os tratamentos figurais por meio das apreensões: perceptiva e operatória

Questões	Objetivos
3ª Observe a figura 1 e descreva que relações os planos horizontais e inclinado tem com as diretrizes. 	Observar os tratamentos figurais por meio das apreensões: perceptiva e operatória
4ª Descreva as relações observadas entre os focos (F1 e F2) e as esferas.	Observar os tratamentos figurais por meio das apreensões: perceptiva e operatória
5ª Posicione os controles deslizantes conforme a figura 2. Em seguida, mova o controle deslizante (ângulo) e observe a variação do ponto X3. • Descreva as relações que a rotação do plano de seção tem com as coordenadas do ponto X3 na representação gráfica. 	Observar os tratamentos figurais por meio das apreensões: perceptiva e operatória

Questões	Objetivos
6ª Posicione os controles deslizantes conforme a figura 3. Observe a cônica obtida e descreva: • Como ficaria a representação gráfica da cônica se o plano de seção fosse rotacionado em 45° (em torno do eixo do cone)? Esboce a representação gráfica resultante. 	Observar os tratamentos figurais por meio das apreensões: perceptiva e operatória

Questões	Objetivos
7ª Mantenha o controle conforme a figura 01 e observe a representação gráfica: • Se o eixo maior da curva estivesse no eixo X, que alterações ocorreriam na representação figural espacial? Esboce a representação figural espacial resultante.	Observar os tratamentos figurais por meio das apreensões: perceptiva e operatória

Fonte: da autora

A segunda fase das atividades teve como foco a transformação de conversão das representações das Curvas Cônicas e congregou nove questões. Entendemos que as dificuldades no âmbito do ensino-aprendizagem em matemática podem estar relacionadas a fatores didáticos, epistemológicos do objeto matemático, políticas educacionais, curriculares, cognitivos, dentre outros.

Reconhecemos que há uma vasta lista de possibilidades em que possa se justificar os problemas relacionados à aprendizagem no âmbito deste campo. No entanto, os gestos cognitivos requisitados na coordenação das representações de um objeto matemático são complexos e essa complexidade é enfatizada na TRRS.

O processo de transição entre os registros de representações semióticas é considerado um dos mais importantes, pois, é a partir dele que são percebidas as particularidades inerentes a cada representação do objeto, tais como: conceitos e propriedades.

Porém, cada representação de um objeto matemático possui unidades de sentido e para migrar de uma representação para outra o indivíduo necessita do reconhecimento dessas unidades. Além disso, a complexidade da conversão pode ser maior ou menor a depender do registro de partida, ou seja, pode-se ter mais facilidade em sair de uma representação algébrica para uma gráfica do que o processo inverso.

O fator que justifica tal fato é o que Duval chama de congruência e não congruência. Sobre isto, o autor afirma:

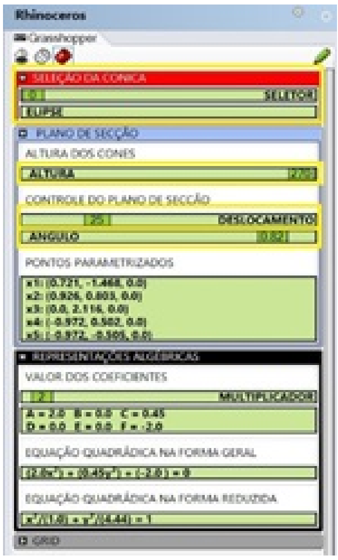
> duas situações poderão ocorrer: Ou a representação terminal transparece na representação de saída e a conversão está próxima de uma situação de simples codificação – diz-se então que há congruência -, ou ela não transparece absolutamente e se dirá que ocorre a não-congruência (DUVAL, 2013, p.19).

O insucesso dos alunos no alcance da compreensão em matemática muitas vezes está relacionada à não congruência em algumas conversões. Sobre isso Duval (2011, p.121) elucida que “A variação de congruência e não congruência é uma das maiores causas da incompreensão ou dos erros de interpretação dos enunciados do problema para os alunos”.

Assim, compreendemos o desafio cognitivo que configura o processo de conversão e, ao mesmo tempo, reconhecemos a sua importância para o desenvolvimento da compreensão dos objetos matemáticos. Por esse motivo, foram elaboradas 9 questões que objetivam oportunizar siatuações de articulação entre as representações algébricas, gráfica e figural espacial e simultaneamente buscam levar os participantes a perceberem as unidades de sentido, propriedades e conceitos dessas curvas. As questões propostas contemplaram registros monofuncionais (escritas algébricas) e também os multifuncionais (figuras geométricas).

A seguir, descrevemos as questões propostas no experimento e os objetivos de cada uma delas de acordo com a TRRS.

Tabela 6 – Objetivos de análise sob o ponto de vista cognitivo – segunda fase

<table>
<tr><th>Questões</th><th>Objetivos</th></tr>
<tr><td>
1. Posicione os controles deslizantes conforme a figura 1. Em seguida, mova o controle (ângulo) e observe a equação quadrática na forma reduzida (representação algébrica) e o gráfico cartesiano (representação o gráfica).
A partir da sua observação, descreve a relação entre os coeficientes (unidades simbólicas) da equação quadrática na forma reduzida (representação algébrica) e as variáveis visuais do gráfico da curva (representação gráfica).
A partir das manipulações no software, você identificou quais elementos da equação quadrática correspondem aos da representação gráfica?


</td><td>
Observar os possíveis tratamentos realizados
Observar as possíveis conversões realizadas
Observar as possíveis identificações de unidades de sentido
</td></tr>
<tr><td>
2. Mova o controle deslizante (seleção da cônica) até o seletor 01. Em seguida observe os valores dos coeficientes (unidades simbólicas) da equação quadrática na forma reduzida (representação algébrica) e o dados do gráfico da curva (representação gráfica).
Qual a relação entre os coeficientes da equação quadrática na forma reduzida e os dados do gráfico da curva?
</td><td>
Observar os possíveis tratamentos realizados
Observar as possíveis conversões realizadas
Observar as possíveis identificações de unidades de sentido
</td></tr>
</table>

Questões	Objetivos
3. Mova o controle deslizante (deslocamento) e observe o gráfico da curva e a sua equação quadrática na forma reduzida. A partir das observações, descreve qual a relação entre o deslocamento do plano e os valores dos coeficientes da equação quadrática na forma reduzida.	Observar os possíveis tratamentos realizados Observar as possíveis conversões realizadas Observar as possíveis identificações de unidades de sentido
4. Mova o controle deslizante (ângulo) e observe a representação figural espacial, o gráfico da curva e a sua equação quadrática na forma reduzida. • Que alterações foram observadas? • A partir das observações é possível concluir algo?	Observar os possíveis tratamentos realizados Observar as possíveis conversões realizadas Observar as possíveis identificações de unidades de sentido
5. Mova o controle deslizante (seleção da cônica) até o seletor 02. Em seguida observe os valores dos coeficientes da equação quadrática na forma reduzida (representação algébrica) e os dados do gráfico da curva (representação gráfica). Qual a relação entre os coeficientes da equação quadrática na forma reduzida e os dados do gráfico da curva?	Observar os possíveis tratamentos realizados Observar as possíveis conversões realizadas Observar as possíveis identificações de unidades de sentido
6. Posicione os controles deslizantes conforme a figura 2. Em seguida, observe a equação quadrática na forma geral e os coeficientes relacionados à curva representada. Após a observação, mude o controle deslizante (seleção da curva) para obter uma parábola e posteriormente uma hipérbole. A partir da obtenção de cada curva você deve observar a equação quadrática geral e os coeficientes. Quais as alterações foram observadas? 	Observar os possíveis tratamentos realizados Observar as possíveis conversões realizadas Observar as possíveis

Questões	Objetivos
7. Movimente o controle deslizante (ângulo) e obtenha uma equação reduzida da elipse com os seguintes coeficientes: A= 2,39 B= 4,27 C= 1,37	Observar os possíveis tratamentos realizados Observar as possíveis conversões realizadas
8. Movimento o controle deslizante inclinação e obtenha a representação gráfica de uma elipse com a^2 = 1.39 e b^2= 3.12. Represente no papel o resultado da representação gráfica obtida.	Observar as possíveis conversões realizadas

Com relação à expectativa das possíveis respostas esperadas nas questões e aos objetivos almejados em cada uma delas, elaboramos o quadro abaixo que explicita tais aspectos.

Tabela 7 – Expectativas de resolução das atividades propostas/primeira fase

Questão	Objetivo	Expectativa de resposta
01	Identificação da apreensão perceptiva relacionada aos tratamentos com o registro figural	Representar o plano de interseção/cartesiano com a curva e as devidas localizações dos eixos X e Y a partir da representação figural espacial de cada cônica.
02	Identificação da apreensão perceptiva relacionada aos tratamentos com o registro figural	Confrontamento dos dados da questão anterior a partir do fornecimento da representação gráfica com o posicionamento dos eixos.
03	Provocar a reflexão sobre as propriedades espaciais da formação das diretrizes	Perceber que as diretrizes são formadas a partir da interseção entre planos horizontais e o plano inclinado que gera a cônica

Questão	Objetivo	Expectativa de resposta
04	Propiciar a reflexão sobre a localização espacial dos focos, tal como foi proposta por Dandelin.	Apontar como relação a tangência da esfera com o plano de interseção para definir a localização espacial dos focos.
05	Identificar a apreensão perceptiva do sujeito ao observar a variação de um ponto parametrizado a partir da rotação do plano em que o mesmo está localizado.	Apontar que a medida que o ângulo aumenta o ponto X3 se afasta do cruzamento dos eixos.
06	Identificar a percepção dos sujeitos em relação às transformações por rotações pertinentes ao registro figural	Desenhar a representação gráfica da elipse após uma rotação de 45º em torno do eixo do cone.
07	Identificar a percepção dos sujeitos em relação às transformações por rotações pertinentes ao registro figural	Desenhar a representação espacial da curva invertendo a posição dos eixos X e Y, percebendo que o enunciado afirma que o eixo maior da curva estará localizado no eixo X.

Com respeito à segunda etapa do experimento, explicitamos a seguir os objetivos e expectativas de respostas:

Tabela 8 – expectativas de resolução das atividades propostas/segunda fase

Questão	Objetivo	Expectativa de resposta
01	Propiciar ao sujeito a percepção das unidades de sentido da representação algébrica (equação quadrática reduzida) e a representação gráfica correspondente a elipse.	Identificar que os valores de a e b da equação quadrática reduzida correspondem as variáveis visuais da representação gráfica.

Questão	Objetivo	Expectativa de resposta
02	Propiciar ao sujeito a percepção das unidades de sentido da representação algébrica (equação quadrática reduzida) e a representação gráfica correspondente a parábola.	Identificar que os valores de a e b da equação quadrática reduzida correspondem as variáveis visuais da representação gráfica
03	Provocar a percepção das alterações relacionadas ao deslocamento do plano e os valores dos coeficientes da equação reduzida da parábola	Identificar que a medida que o deslocamento aumenta maior o coeficiente de X e menor o coeficiente de Y.
03	Levar o sujeito a perceber a propriedade relaciona a obtenção da parábola através da representação figural espacial	Relacionar a não movimentação do plano a propriedade de geração da parábola: o paralelismo entre o plano de interseção e uma geratriz do cone.
04	Propiciar ao sujeito a percepção das unidades de sentido da representação algébrica (equação quadrática reduzida) e a representação gráfica correspondente a hipérbole.	Identificar que os valores dos coeficientes da equação quadrática reduzida correspondem as variáveis visuais da representação gráfica.

Questão	Objetivo	Expectativa de resposta
06	Provocar a percepção das relações entre as variáveis visuais da representação gráfica e as unidades simbólicas da equação quadrática na forma geral.	Identificar e relacionar as unidades simbólicas da equação na forma geral com as variáveis visuais da representação gráfica da elipse, parábola e hipérbole. **No caso de elipse:** os sinais dos coeficientes de X^2 e Y^2 devem ser iguais. **No caso da parábola:** apenas um termo deverá ser quadrático. **No caso de hipérbole:** Os sinais dos coeficientes quadráticos precisam ser opostos.

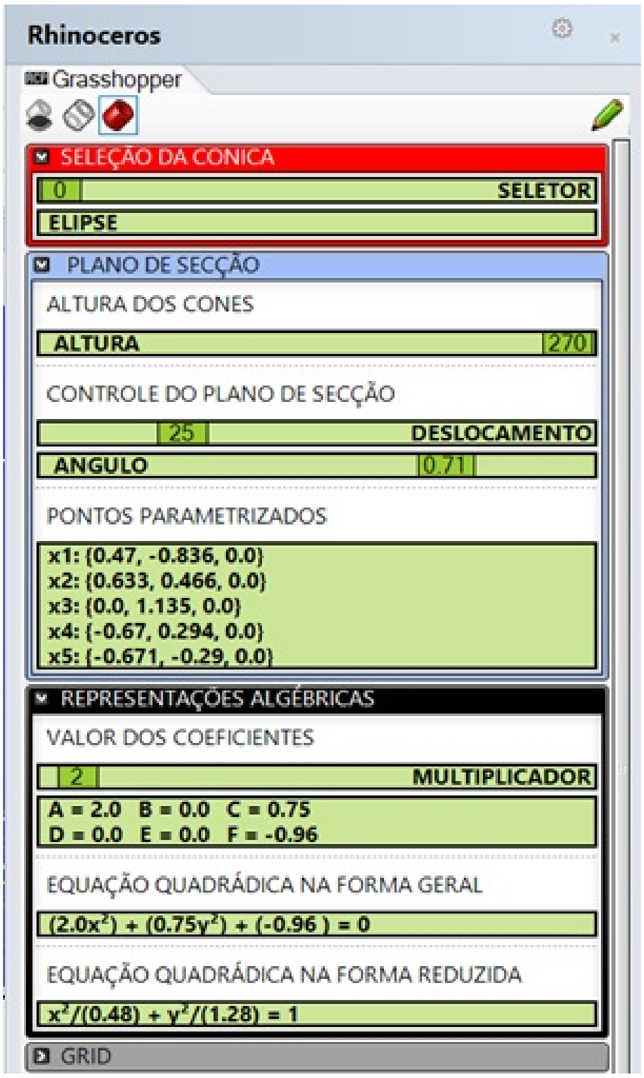
Questão	Objetivo	Expectativa de resposta
07	Propiciar a percepção de que os valores da equação reduzida estão ao quadrado. Assim, os sujeitos deverão realizar um tratamento via papel lápis para obter tal equação.	$X^2/5,71 + Y^2/18,2329=1$
08	Em primeiro lugar, pretende-se verificar se os sujeitos compreenderam que as variáveis fornecidas na questão apenas devem ser inseridas na equação de maneira direta, ou seja, sem a necessidade de tratamentos. Em segundo lugar, é solicitada uma conversão partindo da representação algébrica e chegando na representação gráfica.	$X^2/1,39 + y^2/3,12=1$ Variáveis visuais do gráfica: a= 1,178 e b=1,766.
09	Objetiva-se provocar uma reflexão em relação à propriedade dos focos na representação espacial, bem como as devidas correspondências em relação as demais representações.	A mobilização da relação entre a localização dos focos e a tangência da esfera com o plano de interseção. A relação do foco na representação espacial com a representação gráfica. A relação do foco da representação espacial e a representação algébrica.

Acreditamos que tal atividade configura-se mais como um suporte a percepção dos elementos formadores das representações do que na mobilização das transformações por tratamento e conversão. Concordamos com Duval quanto a relevância dessas transformações para a compreensão dos objetos matemáticos, mas, ao mesmo tempo, entendemos ser necessária a provocação reflexiva dos elementos formadores das representações.

5.2.3 O protótipo “Conics Studium 3D”

O artefato “Conics 3D” desenvolvido por Siqueira (2019) foi prototipado no Rhinoceros com o Plug-in Grasshoper. O principal objetivo do autor foi elaborar um recurso de articulação dinâmica das representações das Curvas Cônicas, mais especificamente as representações algébricas, gráfico cartesiano e figural espacial. O Software permite que o usuário, ao manipular os controles deslizantes, visualize as transformações entre os registros de representação, a exemplo, a variação das variáveis visuais. Na figura seguinte podemos observar o painel de controle do Conics 3D:

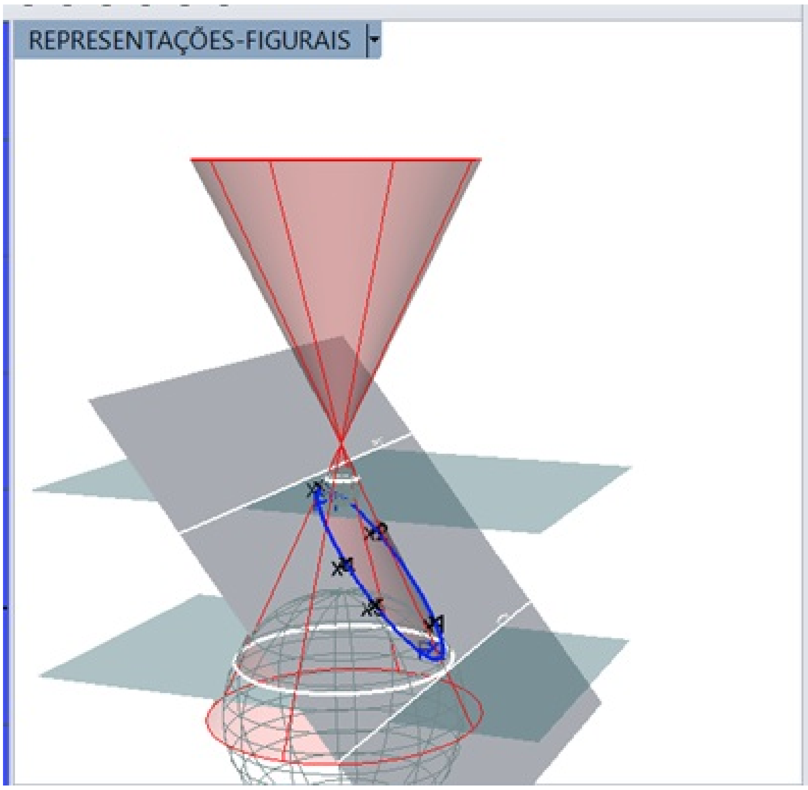
Figura 23 – Painel de controle Conics Studium 3D



O primeiro controle deslizante é responsável pela opção das Curvas Cônicas, onde o zero diz respeito à elipse, o um a parábola e o dois à hipérbole. Assim, foi previamente estabelecido em sua programação que para obter tais cônicas deve-se mover o controle (seleção da cônica).

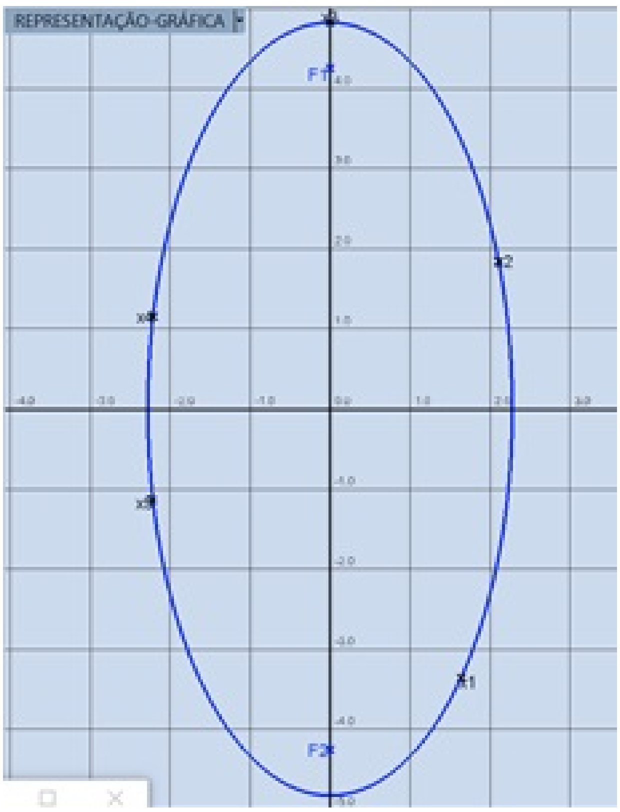
No quadro plano de seção, do painel de controle, temos o segundo controle deslizante (altura dos cones) que é responsável pela alteração da altura dos cones que geram as cônicas através da representação figural espacial.

Figura 24 – Representação figural espacial no Conics Studium 3D



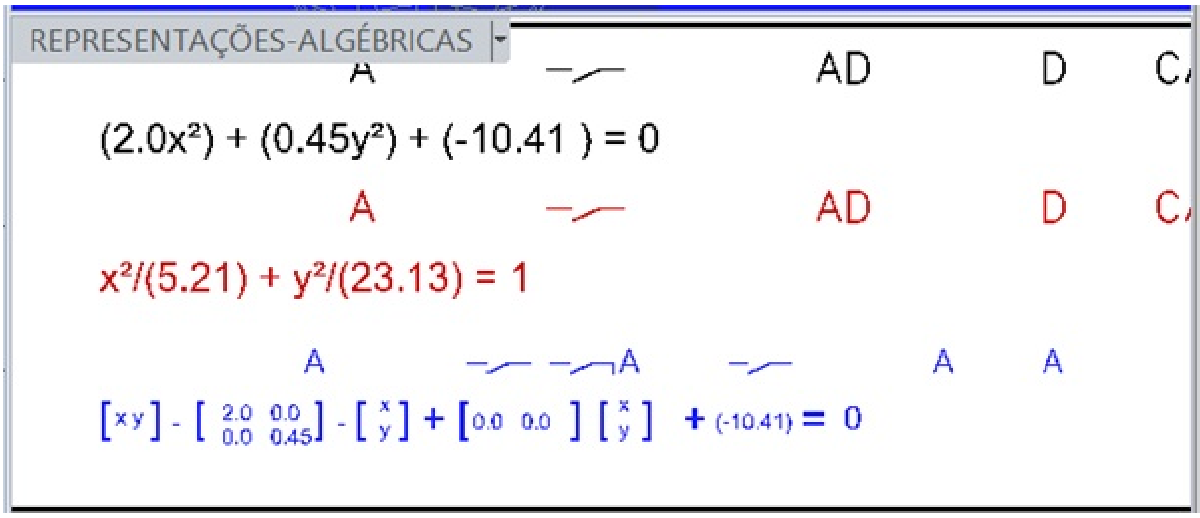
Fonte: Conics Studium 3D

Figura 25 – Representação gráfica no Conics Studium 3D



Fonte: Conics Studium 3D

Figura 26 – Representações algébricas no Conics Studium 3D



Fonte: Conics Studium 3D

O terceiro controle deslizante (deslocamento) tem a função de deslocar por translação o plano de interseção que secciona o cone duplo. O quarto controle (ângulo) é responsável pela rotação do mesmo plano de interseção mencionado anteriormente. O último controle deslizante altera o multiplicador dos coeficientes.

As transformações por conversão e por tratamento ocorrem no software através das alterações na representação figural espacial ao mover tais controles deslizantes, permitindo assim a visualização da articulação dinâmica das representações das curvas cônicas.

5.2.4 Princípios norteadores da análise

A pesquisa em questão caracteriza-se como qualitativa, em consonância com os procedimentos metodológicos adotados e objetivos descritos que visam realizar uma descrição analítica do experimento. Assim, a condução das análises se deu prioritariamente sob o ponto de vista cognitivo, com interesse nos gestos intelectuais mobilizados. Embora haja uma distinção entre a análise sob os pontos de vista cognitivo e matemático, levamos em consideração ambos os olhares. Ao considerar os desafios inerentes à aprendizagem das curvas cônicas, empregamos situações cujo aluno é levado a refletir sobre algumas noções que caracterizam o objeto matemático em questão no presente estudo.

Para a realização da análise, foram utilizados alguns procedimentos metodológicos baseados na Engenharia Didática, cujo objetivo é compreender como se dá a articulação entre os registros de representação semiótica das Curvas Cônicas através de situações propostas em uma sequência de atividades sob uma perspectiva dinâmica de articulação.

A organização do estudo se deu a partir das seguintes fases:

- Análise prévia
- Construção da sequência de atividades

- Experimentação
- Análise dos resultados

De acordo Machado (2012) baseada em Guilhermina Waldegg, a pesquisa em didática consiste em um processo empírico, uma vez que os dados são coletados através da realidade e posteriormente comparados às hipóteses. A escola, a sala de aula, o escritório de trabalho, a sociedade que configuram-se como laboratório da pesquisa em didática.

- **Análise Prévia**

A primeira etapa caracteriza-se pelo momento na qual se realizam as análises preliminares, de modo a conhecer a fundamentação epistemológica do conteúdo em questão, as questões relacionadas ao ensino-aprendizagem do objeto matemático e traçado das hipóteses, aportes teóricos e metodologias de pesquisa. É importante ressaltar que as análises preliminares podem ser retomadas e aprofundadas ao decorrer da pesquisa.

- **Construção das sequências de atividades**

Esta fase diz respeito a reunião e descrição das informações obtidas na etapa anterior para assim analisar e desenvolver as situações que serão propostas aos alunos. (Machado, 2012)

- **Experimentação**

Almouloud (2007, p. 174) afirma que a experimentação: "[. . .] é o momento de colocar em funcionamento todo o dispositivo construído com a possibilidade de realizar modificações [. . .]. Esta etapa ocorre no momento em que o pesquisador entre em contato com os sujeitos da pesquisa para a realização do experimento. Se forem identificadas, por meio das análises locais do desenvolvimento experimental, alterações necessárias implicará em um retorno à análise a priori.

- **Análise**

A última fase consiste no tratamento dos dados recolhidos na experimentação, concebidos através da observação realizada e materiais de registro dos sujeitos ao longo da experiência. Em algumas situações poderão ser necessários a obtenção de novos dados complementares através de questionários, entrevistas individuais ou em pequenos grupos.

A Teoria dos Registros de Representação é o aporte teórico para a análise qualitativa permitindo investigar o processo de aprendizagem das representações, as transformações entre os registros (conversões) e as transformações entre um mesmo registro (tratamentos), além da análise das apreensões: perceptiva e operatória.

5.2.4.1 *As fases da pesquisa baseadas nos princípios da Engenharia Didática*

Análises preliminares

A fase inicial dedica-se ao estudo, sob o ponto de vista histórico-epistemológico, do objeto matemático em questão, buscando refletir sobre sua origem e evolução ao longo do tempo. As propriedades explicitadas em cada representação das Curvas Cônicas também serão analisadas nesta fase, assim como o processo de conversão entre estes registros de representação destas curvas.

No prosseguimento desta fase será conduzida uma investigação na literatura a respeito do ensino das Curvas Cônicas no contexto da Educação Básica e Superior e no âmbito nacional e internacional. O interesse desta análise é identificar as principais abordagens das cônicas adotadas para o seu ensino, assim como as principais dificuldades encontradas ao longo deste processo.

Construção das situações e análise a priori

A partir dos resultados identificados na fase anterior, serão desenvolvidas as atividades que darão suporte a experimentação. A construção dessas atividades objetiva propiciar, através das situações de aprendizagem e das possibilidades do recurso "Conics 3D", a identificação de como ocorrem as articulações dos registros de representação das Curvas Cônicas sob uma perspectiva de articulação dinâmica, bem como a construção do conhecimento relacionado ao conteúdo em questão.

Na análise a priori, serão explicitados as questões desenvolvidas para compor a sequência de atividades, os objetivos de cada uma delas, as escolhas didáticas, as possíveis respostas e as expectativas das soluções que serão propostas pelos sujeitos.

Experimentação

Esta fase é dedica à aplicação da sequência de atividades com os sujeitos da pesquisa. A coleta de dados poderá ocorrer em mais de um encontro para cumprir o planejamento da sequência de atividades previsto na fase anterior da ED.

As sessões do experimento serão desenvolvidas em um dos laboratórios de informática da instituição de ensino. A escolha por este local justifica-se pela adoção do "Conics 3D" como recurso didático, que será utilizado na resolução das atividades propostas na sequência.

Para o recolhimento dos dados, serão utilizadas folhas de papel, bem como a gravação das telas dos computadores através do programa aTubeCatcher para a identificação das ações que os sujeitos produzirão ao resolver as atividades propostas.

Por fim, os dados serão analisados, sob a ótica da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, com o objetivo de identificar os tratamentos e as apreensões perceptiva e operatória, bem como as conversões entre os registros de representação das Curvas

Cônicas.

5.2.4.2 *Critérios de análise*

Para analisar como se dá a articulação entre as representações das Curvas Cônicas através da sequência de atividades proposta sob uma perspectiva dinâmica de articulação, foram estabelecidos critérios de análise que buscam identificar as transformações dentro dos registros de representação (tratamento) e as que ocorrem entre as diferentes representações das cônicas (conversão). Para tanto, foram utilizados os seguintes critérios:

Critério 01

O primeiro critério diz respeito à identificação da transformação dentro do próprio registro, denominada por Duval como *tratamento. Mais especificamente, os tratamentos dentro do registro geométrico que foram propostos na primeira etapa da atividade.*

Critério 02

No segundo critério verificou-se a ocorrência da conversão, transformação entre registros de representação, mais especificamente entre a representação figural, representação gráfica e representação algébrica.

Critério 03

No terceiro critério buscou-se a identificação das apreensões: perceptiva e operatória relacionadas aos tratamentos figurais.

6 ANÁLISE DOS RESULTADOS

6.1 Documentos oficiais

Nesta seção realizou-se uma breve análise a respeito das orientações e reflexões explicitadas nos documentos oficiais brasileiros pertinentes ao ensino das Curvas Cônicas na Educação Básica. A pertinência de investigar as recomendações para este nível de ensino justifica-se por considerar que esses documentos eram vigentes na época em que os sujeitos da pesquisa cursaram o ensino médio. Nesse sentido, as orientações curriculares incidem sobre o modo de planejar e conduzir o processo de ensino-aprendizagem e por isso considera-se importante conhecer os elementos sobre as cônicas presentes nesses documentos.

A Geometria é fundamental para a compreensão, interpretação e elaboração de atividades em diferentes áreas do conhecimento, como a arquitetura, engenharia, arte, odontologia, entre outras, pois requerem que o indivíduo tenha habilidade espacial. Segundo Broitman e Itzcovich (2006), "a Geometria não é somente um conjunto de saberes formalizados ao longo da história, é também um modelo de raciocínio e dedução muito importante para a formação cultural dos sujeitos (p.175)". O estudo desta área pode propiciar o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial. Fürkotter e Morelatti (2009, p. 29) afirmam que "é cada vez mais indispensável que as pessoas desenvolvam a capacidade de observar o espaço tridimensional e de elaborar modos de comunicar-se a respeito dele, pois a imagem é um instrumento de informação essencial no mundo moderno".

Partindo desta compreensão, os documentos oficiais que pretendem conduzir a aprendizagem no Brasil explicitam habilidades básicas e competências específicas a serem desenvolvidas pelos alunos no âmbito das Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. No PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais uma das habilidades, que se refere ao desenvolvimento da capacidade de comunicação, é: "interpretar e utilizar diferentes formas de representação (tabelas, gráficos, expressões, ícones. . .)" (BRASIL, 2000, P.12). Este documento, ainda destaca que deve-se desenvolver no ensino médio a competência de: "transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas etc.) e vice-versa."

Partindo dessa compreensão, entende-se que o documento mencionado anteriormente considera a importância do desenvolvimento da habilidade de articular (converter) os diversos registros de representação dos objetos matemáticos. Esse processo de articulação é explicitado nos estudos do teórico Duval como algo fundamental para a compreensão no estudo da matemática. Transitar entre as representações também é considerado pertinente porque cada representação poderá expor determinada propriedade do objeto matemático. No caso das cônicas, a representação figural espacial mostra como as curvas são obtidas através das seções no cone de duas folhas, já através das suas representações gráficas podemos observar a propriedade das curvas como lugar geométrico.

No que se refere ao ensino de Geometria Analítica, BRASIL (2006) afirma que essa disciplina possibilita a articulação entre a Geometria e a Álgebra, possibilitando assim ao docente trabalhar o entendimento das equações por meio de representações geométricas e representações geométricas por meio de equações. O PCN+ indica como uma das habilidades a serem desenvolvidas a partir do ensino da Geometria Analítica a capacidade de “Associar situações e problemas geométricos às suas correspondentes formas algébricas e representações gráficas e vice-versa.” (BRASIL, 2006, p.125). Este documento ainda aponta que pretende-se desenvolver com o tema habilidades como:

- Interpretar e fazer uso de modelos para a resolução de problemas geométricos. (BRASIL, 2006, p.125).
- Reconhecer que uma mesma situação pode ser tratada com diferentes instrumentais matemáticos, de acordo com suas características. (BRASIL, 2006, p.125).
- Construir uma visão sistemática das diferentes linguagens e campos de estudo da Matemática, estabelecendo conexões entre eles. (BRASIL, 2006, p.125).

De modo geral, observa-se que as habilidades requeridas para a formação no ensino médio consideram recomendações científicas importantes, como exemplo, a diversificação das representações dos objetos matemáticos para a plena compreensão. O reconhecimento de diferentes linguagens da matemática (registros de representação) é mencionado, assim como também a associação entre as representações por duas vias, ou seja, a conversão entre um registro de partida e outro de chegada e vice e versa. No entanto, esses documentos não aprofundam a noção de congruência proposta por Duval, que reflete sobre as dificuldades no processo de conversão demonstrando que em algumas situações a passagem de um registro para o outro é mais complexa.

No âmbito do estado de Pernambuco, este conteúdo encontra-se presente como componente curricular do terceiro ano do ensino médio da disciplina de matemática. No que se diz respeito as expectativas de aprendizagem relacionadas ao estudo das seções cônicas, Pernambuco (2012) aponta que o aluno deve:

Compreender o conceito de vetor, tanto do ponto de vista geométrico (coleção de segmentos orientados de mesmo comprimento, direção e sentido) quanto do ponto de vista algébrico (caracterizado por suas coordenadas). Dominar a aplicação dos conhecimentos de geometria analítica na resolução de problemas. Encontrar as equações das cônicas (parábola, elipse e hipérbole). Resolver sistemas de equações e inequações do segundo grau a duas variáveis, tanto algébrica quanto graficamente. (PERNAMBUCO, 2012, P.23)

Os parâmetros de Pernambuco (2012) enfatizam sobre a importância de se estabelecer, durante o ensino médio, conexões entre a Matemática com as demais áreas do conhecimento e aplicações sociais, assim como com outros campos da própria Matemática.

Este documento ainda reflete que um dos meios que favorecem o estudante a estabelecer essas conexões é: "trabalhar, simultaneamente, as ideias matemáticas em diferentes quadros (numérico, algébrico, funcional, geométrico, gráfico etc.)." (PERNAMBUCO, 2012, P.121). Os parâmetros ainda preconizam que o estudo da Geometria deve oportunizar aos discentes a competência de resolver problemas do cotidiano, tais como:

"orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas e reconhecer propriedades de figuras geométricas básicas. A geometria também aparece como campo privilegiado, apesar de não ser o único, para exercitar as inter-relações entre o método lógico-dedutivo e o raciocínio intuitivo." (PERNAMBUCO, 2012, P.122)

Apesar de refletir sobre a pertinência de conduzir o estudo da matemática trabalhando simultaneamente as representações dos objetos, o referido documento enfatiza, no momento que cita as curvas cônicas, a sua abordagem por via das equações (sob o ponto de vista algébrico) e também através das suas representações gráficas, focando nas resoluções de problemas sob estas óticas a partir de tratamentos e conversões.

No que se diz respeito especificamente ao ensino da Geometria Analítica, os parâmetros de Pernambuco enfatizam que para as propriedades inerentes a este estudo apresentem significado ao aluno torna-se necessário que o trabalha neste campo não se resuma apenas a manipulação simbólica.

Entendemos que as possíveis razões relacionadas à priorização do enfoque algébrico tenha relação com o MMM, como já mencionado anteriormente. A partir deste movimento, o ensino de Geometria passou por algumas modificações. Houve uma diminuição deste conteúdo nos currículos escolares trazendo consequências para o seu ensino até os dias atuais. Os materiais didáticos, como exemplo, os livros mantiveram os conteúdos, todavia, na maioria das vezes, eram trazidos nos últimos capítulos. Isto, ocasionava na diminuição do seu ensino por falta de tempo. Tal como afirma Pavanello (1999) "este costume de programar a Geometria para o final do ano letivo é, de outro modo, reforçado pelos livros didáticos que, pelo que se pode observar, abordam esses temas quase sempre por último". Posteriormente, pesquisadores como Pais (2006) apontam uma distribuição diferente dos conteúdos de Geometria nos livros didáticos, onde alguns livros apresentam a temática em sua primeira parte.

No entanto, os desafios enfrentados no ensino desta área do conhecimento não parecem se limitar à distribuição desses conteúdos nos livros didáticos, pois, a partir do MMM foi dado um grande enfoque às questões da Álgebra e por consequência, o ensino da Matemática passou a tratar esta temática como uma das centrais, tal como podemos observar nos dados da revisão de literatura sobre o ensino das cônicas.

De modo geral, percebe-se que os documentos explicitados nessa análise refletem e recomendam o ensino dessas curvas a partir da diversificação dos registros, considerando as razões científicas apontadas por Duval. No entanto, no contexto atual houve a publicação de um novo documento denominado como Base Nacional Comum Curricular – BNCC, onde a temática foi retirada dos estudos da educação básica. Sendo tratadas apenas através do estudo da função quadrática.

6.2 Análise do experimento

A condução dos experimentos aconteceu em um laboratório de informática de uma Universidade Pública Federal no estado de Pernambuco. De maneira prévia foram instalados os programas Conics studium 3D e Atubecatcher.

Com raízes fundamentadas na Geometria Dinâmica e na Teoria dos Registros de representação Semiótica, o primeiro programa tem o propósito de proporcionar a articulação dinâmica dos registros de representação das Curvas Cônicas. A interface do controle do programa permite ao usuário manipular as representações de forma simultânea, oportunizando uma percepção diferente da relação que se estabelece entre as representações de um objeto matemático.

Tal diferença se justifica pela ancoragem num ambiente computacional que dispõe de recursos visuais capazes de simular as transformações sofridas em cada representação a partir da variação de algumas propriedades. Assim, avaliamos este software como um importante recurso a ser utilizado em processos de ensino-aprendizagem sobre as cônicas, sendo os seus recursos disponibilizados em situações que objetivem a reflexão-crítica dos conceitos, das propriedades e das correspondências que relacionam as representações do objeto matemático.

O segundo programa foi utilizado para registros audiovisuais da interação dos alunos com o software, dos possíveis diálogos que possam surgir à respeito das transformações por tratamento ou por conversão, das possíveis identificações das unidades de sentido das representações das curvas, dos possíveis barreiras relacionadas aos fatores de congruência e não congruência e por fim da mobilização dos mesmos na possível construção do conhecimento a partir das atividades propostas. As potencialidades e possíveis pontos a serem aprimorados no âmbito do Conics Studium 3D também serão expostas no texto.

Afim de simplificar o entendimento das análises, elaboramos uma tabela que servirá de base na análise dos resultados das questões.

Tabela 9 – Aspectos norteadores da análise

ANÁLISE COGNITIVA

ANÁLISE COGNITIVA
• TRANSFORMAÇÕES NOS REGISTROS • APREENSÃO PERCEPTIVA • APREENSÃO OPERATÓRIA
ANÁLISE MATEMÁTICA
• COMPREENSÃO DE CONCEITOS E PROPRIEDADES
ANÁLISE DO CONICS MÉDIUM 3D COMO RECURSO
• INTERFACE • FUNCIONALIDADES QUE AUXILIAM NO PROCESSO DE APRENDIZAGEM • FUNCIONALIDADES QUE PODERIAM SER INSERIDAS PARA APRIMORAR O SOFTWARE

Fonte: da autora

O primeiro dia de experimentação ocorreu no dia 22 de novembro de 2019 como parte das atividades propostas dentro da disciplina de Metodologia do Ensino da Expressão Gráfica – Tecnologias Computacionais. Os participantes da pesquisa se organizaram em grupos, sendo duas duplas e um trio. No entanto, devido a um problema técnico com a captação do áudio apenas uma das duplas foi considerada no processo analítico da pesquisa. Como dito anteriormente, a primeira etapa se dedicou ao trabalho com a representação figural espacial e gráfica das cônicas.

O segundo dia de experimentação com esses mesmos participantes ocorreu no dia 29 de novembro. Os mesmo grupos estavam presentes e foram organizados da mesma maneira. Neste dia foram aplicadas as atividades referentes a segunda fase do experimento, que tinham como objetivo a exploração das conversões entre as representações gráficas e algébricas, assim como as representações figurais espaciais com as algébricas.

O caráter da pesquisa denomina-se como pesquisa-intervenção, no qual são admitidas intervenções do pesquisador sob o caráter mediador no processo de construção de uma possível aprendizagem a partir da interação com os recursos disponibilizados. É importante destacar que por fatores externos ao ambiente de pesquisa, a mediação em determinados momentos não foi possível.

É pertinente destacar que, embora a experimentação tenha ocorrido no contexto das atividades de uma disciplina, não foram propostas recompensas à participação na pesquisa. Neste sentido, não houve atribuição de notas aos resultados das atividades deste experimento.

Devido aos problemas técnicos com a captação audiovisual do experimento, decidiu-se por aplicar mais um vez às duas etapas do experimento com uma dupla convidada. Ambos os participantes antediam aos mesmos critérios que os outros inicialmente convidados. Sendo eles, alunos do curso de LEG que cursaram as três disciplinas que tratam sobre as Curvas Cônicas. A primeira aplicação com o segundo grupo ocorreu no dia 03/02/20 e a segunda no dia 06/02/20.

Em um primeiro momento, foram explicitados os objetivos do experimento a ser aplicado, destacando algumas noções da TRRS tais como: as transformações por tratamento e por conversão. Essas noções foram citadas com o objetivo de situar os participantes em relação à atividade proposta, sem objetivar um aprofundamento teórico com relação à TRRS.

Em um segundo momento, foi dada uma explicação à cada dupla com relação à interface do software Conics 3D. Foram destacadas as funcionalidades presentes no controle do programa que através de controles deslizantes permitem alterar a seleção da cônica (Elipse, Parábola e Hipérbole), altura do cone de duas folhas, o deslocamento e a inclinação do plano de seção (que se intercepta com o cone de duas folhas), os coeficientes da equação geral, a equação geral e reduzida.

Outros comandos pertinentes também foram destacados como, por exemplo, o zoom que pode ser dado na tela de cada representação, a ferramenta responsável por rotacionar a representação figural espacial e por último a ferramenta de mover o objeto representado.

No prosseguimento da experiência, os alunos foram solicitados a iniciar as gravações da tela e do áudio com o programa Atubecatcher a partir das instruções ditas pela autora do trabalho.

Com o intuito de preservar a identidade dos sujeitos da pesquisa, utilizaremos as seguintes nomenclaturas:

Grupo 01: P – 01 e P – 02

Grupo 02: S – 01 e S – 02

O número do grupo diz respeito a divisão de cada grupo na participação do experimento. E os termos (P – 01 e P – 02) e (S – 01 e S – 02) referem-se à cada participante de forma individual, sendo os P's sujeitos do grupo 01 e os S's pertencentes ao grupo 02.

Com relação às respostas dos sujeitos nas atividades propostas, elaboramos o seguinte quadro contemplando o nível do alcance das expectativas: expectativa atingida integralmente, parcialmente e não atingida.

Figura 27 – Resultado do alcance das expectativas no experimento

RESULTADO DO EXPERIMENTO

GRUPO 01
ETAPA 01

QUESTÃO	01	02	03	04	05	06	07
	EXPECTATIVA ATINGIDA	EXPECTATIVA ATINGIDA	EXPECTATIVA ATINGIDA	PARCIALMENTE	EXPECTATIVA ATINGIDA	NÃO ATINGIDA	PARCIALMENTE

GRUPO 01
ETAPA 02

QUESTÃO	01	02	03	04	05	06	07	08	09
	PARCIALMENTE	PARCIALMENTE	EXPECTATIVA ATINGIDA	EXPECTATIVA ATINGIDA	NÃO ATINGIDA	PARCIALMENTE	NÃO ATINGIDA	NÃO ATINGIDA	NÃO ATINGIDA

RESULTADO DO EXPERIMENTO

GRUPO 02
ETAPA 01

QUESTÃO	01	02	03	04	05	06	07
	PARCIALMENTE	PARCIALMENTE	EXPECTATIVA ATINGIDA	NÃO ATINGIDA	PARCIALMENTE	NÃO ATINGIDA	EXPECTATIVA ATINGIDA

GRUPO 02
ETAPA 02

QUESTÃO	01	02	03	04	05	06	07	08	09
	PARCIALMENTE	PARCIALMENTE	PARCIALMENTE	NÃO ATINGIDA	NÃO ATINGIDA	PARCIALMENTE	NÃO ATINGIDA	NÃO ATINGIDA	EXPECTATIVA ATINGIDA

Fonte: da autora

De modo geral, percebe-se que o desempenho dos participantes na resolução das atividades teve um melhor resultado na primeira etapa do experimento. Tal fato pode estar relacionado tanto ao contexto da graduação ao qual os sujeitos estão associados quanto à complexidade inerente a transformação por conversão. A oferta do curso de LEG está centrada na representação gráfica e figural dos objetos geométricos, propiciando um aprofundamento maior no registro geométrico em relação ao algébrico.

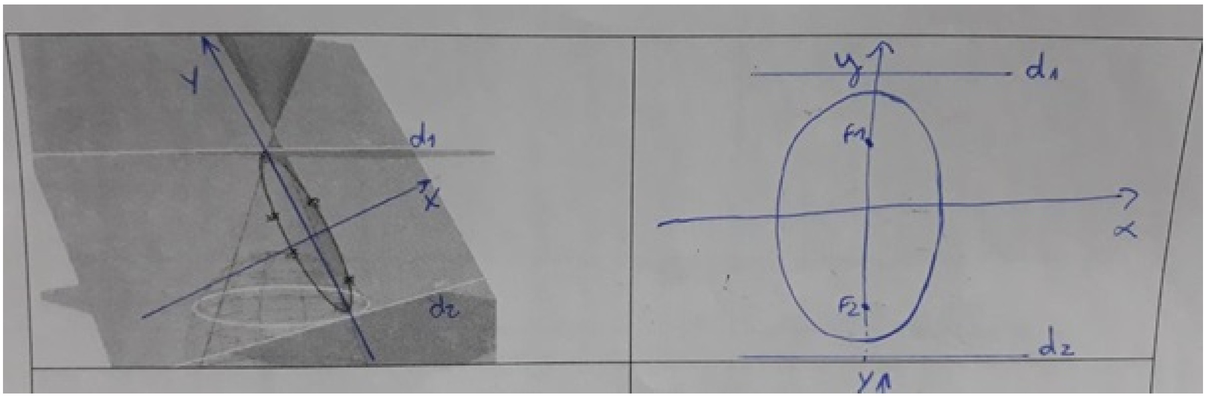
ANÁLISE DAS ATIVIDADES/ETAPA 01 – GRUPO 01

No que se refere as análises das atividades do grupo 01 durante a primeira etapa do experimento, percebeu-se que, em razão de interferências externas ao experimento na mediação, os sujeitos não descreveram com maior profundidade seus argumentos nas questões. É perceptível também o conforto dos participantes em trabalhar com o registro geométrico devido ao contexto em que estão inseridos.

Questão 1

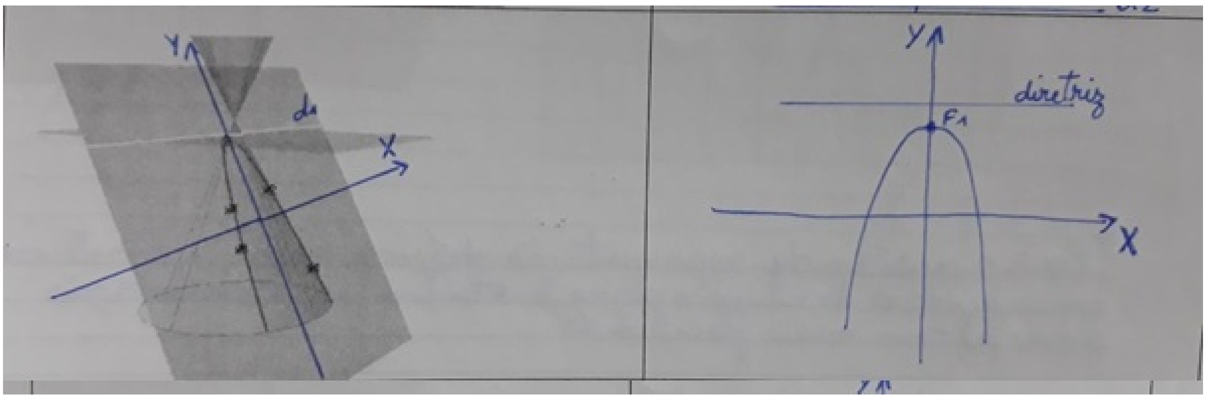
A partir da manipulação do software os participantes indicaram que na representação espacial e no esboço de uma representação gráfica como ficariam posicionados os eixos cartesianos. Percebemos que há uma grande aproximação das respostas de acordo com as expectativas para a questão. Para chegar a tal conclusão, de acordo com a TRRS os alunos precisam mobilizar as apreensões perceptiva e operatória. A perceptiva da identificação imediatava da configuração bidimensional e tridimensional da representação efetuada e na representação fornecida. E na operatória nas modificações que a figura pode sofrer, neste caso houve uma rotação do plano de interseção, de modo que o mesmo fique posicionado de forma paralela em relação plano de projeção, configurando-se assim como uma modificação ótica.

Figura 28 – Registro dos sujeitos S1 e S2



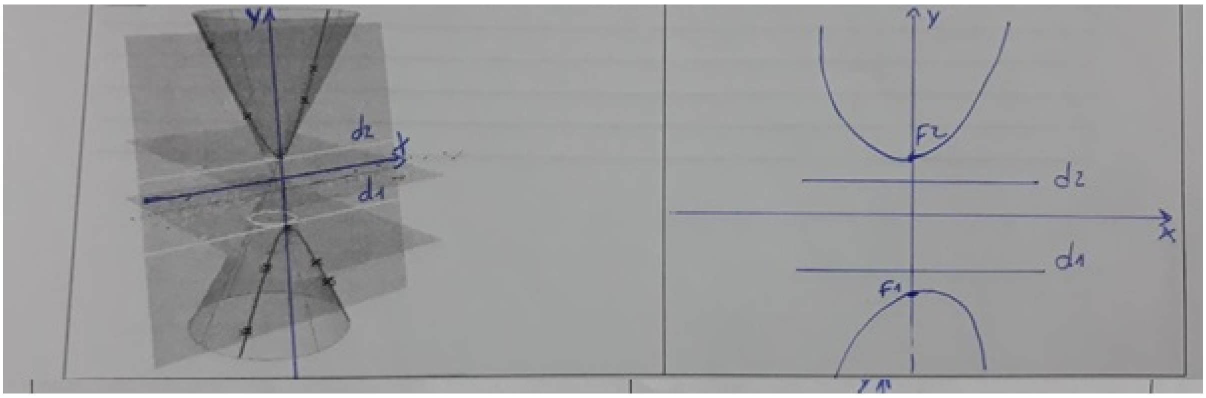
Fonte: resultado do experimento

Figura 29 – Registro dos sujeitos S1 e S2



Fonte: resultado do experimento

Figura 30 – Registro dos sujeitos S1 e S2



Fonte: resultado do experimento

Assim compreendemos que os sujeitos conseguiram realizar os tratamentos figurais pertinentes a questão disponibilizada, mobilizando a apreensão perceptiva e a operatória: modificação ótica.

Questão 2

A proposta da questão é propiciar um confrontamento dos dados da questão anterior com o fornecimento da representação gráfica cartesiana.

De modo não aprofundado, os participantes apontam que a partir da manipulação do software observaram as representações simultaneamente para poder identificar onde posicionariam os eixos. É salientado na resposta que a representação gráfica fornecida no software foi utilizada como guia para as conjecturas. Do ponto de vista da avaliação do software, acreditamos que as articulações dinâmicas oferecidas se caracterizam como suporte as conjecturas. Assim, na situação propostas é visível que o Conics 3D se portou como recurso para a mobilização das reflexões dos sujeitos.

Questão 3

Com o propósito de favorecer a reflexão sobre os elementos que compõem a representação figural espacial, desenvolvemos a questão número três. O elemento em questão diz respeito aos requisitos para a formação da diretriz.

Nesse sentido, os sujeitos S1 e S2 indicaram que a relação estabelecida entre os planos horizontais e o plano inclinado se dá através da formação da diretriz.

“As diretrizes são a interseção de um plano inclinado com um horizontal”

(S1 e S2)

Do ponto de vista da análise matemática, que se centra no trabalho com os conceitos e as propriedades, acreditamos que a simulação da representação figural espacial no software favoreceu a identificação de tal propriedade que caracteriza as diretrizes.

Questão 4

A localização espacial dos focos proposto por Dandelin foi a razão para a inserção desta questão no experimento, cujo objetivo era refletir sobre as relações observadas entre os focos e as esferas.

Como resposta ao questionamento, os sujeitos responderam:

"Os focos são o ponto de tangência entre a elipse e a esfera" (S1 e S2)

A percepção dos licenciandos atendeu as expectativas anteriormente previstas para o experimento. Nesse sentido, apontamos mais uma vez que a simulação da representação figural espacial e suas alterações efetuadas de forma dinâmica favorecem a percepção dos alunos do que tange a propriedade criada por Dandelin.

Questão 5

A quinta questão contemplou a exploração das transformações sofridas por um ponto X3 (parametrizado) através da rotação do plano de interseção com o controle deslizante (ângulo). A articulação entre representação figural espacial e representação gráfica é solicitada através da busca das relações entre a rotação do plano de seção e as coordenadas do ponto X3 na representação gráfica.

A resposta dos sujeitos atende à expectativa para a questão, apontando assim que "quanto maior o ângulo, mais afastado fica o ponto X" (S1 e S2).

Tal resposta condiz com a simulação proposta na questão. No que se refere à mobilização das apreensões, mais uma vez a questão demanda apreensão perceptiva, solicitando uma identificação imediata da configuração da representação, e também a apreensão operatória: modificação ótica, através da redução e ampliação da representação gráfica da elipse por meio da mudança da angulação do plano de interseção com o cone. Desse modo, acreditamos que os alunos mobilizaram tais apreensões para a resolução da questão, ao mesmo tempo, que as simulações transformam de maneira dinâmica tais representações para os alunos.

Questão 06

Na presente questão o objetivo centrou-se na transformação na representação figural espacial, no qual demandou a apreensão perceptiva e operatória: modificação ótica, a partir da solicitação da representação gráfica resultante de uma rotação e 45º em torno do eixo do cone.

Os sujeitos indicaram que os focos ficariam mais próximos a origem.

Numa avaliação posterior à aplicação do experimento, acreditamos que o enunciado da questão demanda uma maior detalhamento de como acontecerá tal rotação. Dessa maneira, os alunos terão mais suporte na efetuação do tratamento solicitado. É importante salientar que o software não simula tal transformação. A resposta esperada para tal questão era que elipse resultante, possivelmente, seria a mesma.

A partir dos áudios gravados no experimento, identificamos que os sujeitos interpretaram que a rotação seria efetuada a partir do decrescimento do ângulo do plano de interseção. A razão para tal interpretação está diretamente associada ao enunciado, que não especifica como a rotação será efetuada. Neste caso, pretendia-se que a rotação se efetuasse de modo semelhante à rotação da diretriz para formar o cone, e não a angulação do plano em relação ao plano horizontal em si.

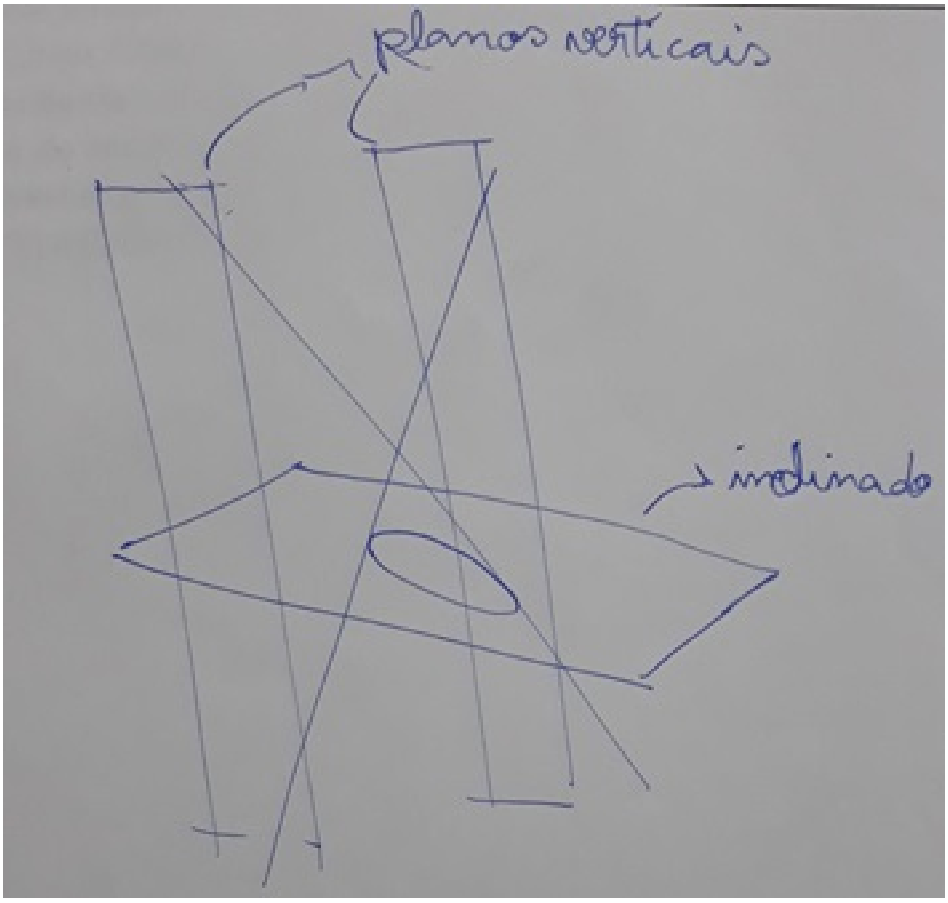
A partir da interpretação feita em relação ao enunciado, os sujeitos modificaram o ângulo do controle deslizante para 45 e chegaram à conclusão mencionada anteriormente. Tal situação, reforça a importância das legendas das figuras discutidas por Duval, no qual o enunciado em língua natural irá exercer a influência para a interpretação da representação figural que se pretende passar. No caso citado acima, o enunciado não estava adequado para que os alunos efetuassem o tratamento de maneira correta.

Questão 07

A sétima questão propôs aos sujeitos uma reflexão em relação à transformação da representação figural espacial através da rotação dos eixos, de modo a transformar o eixo maior no X e o menor no Y. É solicitado na questão o esboce da representação figural espacial resultante.

Na resposta a questão os sujeitos reconhecem o processo de rotação inerente á questão e pontam: “planos horizontais se tornariam verticais, rotacionando, assim, o plano cartesiano representação gráfica”. (S1 e S2)

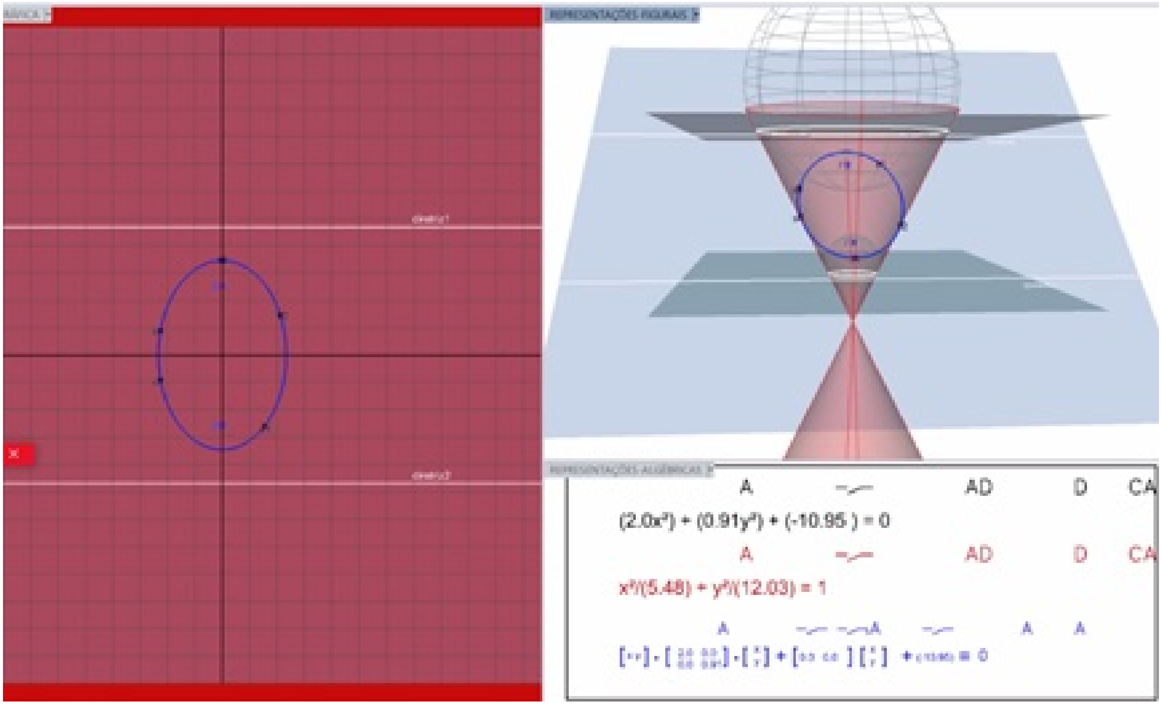
Figura 31 – Registro dos sujeitos S1 e S2



Fonte: resultado do experimento

A partir da simulação da figura a seguir, os sujeitos indicaram que ocorreria uma rotação nos planos horizontais que compõem a representação figural espacial e a partir disso ocorreria a alteração dos eixos X e Y, tornado X o eixo maior, rotacionando o plano cartesiano.

Figura 32 – Figura 32 - Simulações realizadas pelos sujeitos S1 e S2.



Fonte: resultado do experimento

De fato a mudança dos eixos supõe uma rotação, conforme indicam os participantes. Embora o software não permita efetuar tal transformação, percebemos que os sujeitos requisitaram as simulações para poder refletirem e efetuarem o tratamento requerido. Mais uma vez é solicitado as apreensões perceptiva e operatória: modificação ótica.

ANÁLISE DAS ATIVIDADES/ETAPA 02 – GRUPO 01

A segunda etapa concentrou questões relacionadas às propriedades das cônicas através da exploração de suas representações, bem como a articulação entre elas via conversão. Os objetivos centrais estavam relacionadas ao reconhecimento das propriedades a partir das simulações possibilitadas no Conics Studium 3D, a identificação das variáveis visuais da representação gráfica e as unidades simbólicas das representações algébricas.

A atividade em questão configura-se como mais desafiadora para os sujeitos devido à duas razões: a primeira diz respeito a complexidade inerente à transformação de conversão entre os registros de representação e a segunda ao contexto em que os licenciados estão inseridos, sendo apresentados as diversas representações das Curvas Cônicas, mas sem necessariamente focar a integração entre elas. Como dito anteriormente, as representações do registro geométrico são privilegiadas em tal contexto, podendo assim influenciar nos resultados do experimento em relação às articulações com o registro algébrico.

Questão 01

A primeira questão da segunda etapa do experimento pretendia oportunizar a reflexão sobre as relações entre a representação gráfica e a representação algébrica (equação reduzida) para a posterior identificação das variáveis visuais e unidades simbólicas, assim como a correspondência entre elas. Para tanto, foi solicitado que os alunos posicionassem os controles deslizantes para obtenção de uma elipse e a partir da manipulação do controle (ângulo) observassem as variações nas representações, para em seguida apontar quais as relações das variáveis visuais com as unidades simbólicas e a correspondência entre eles.

Os participantes perceberam algumas regularidades a partir da simulação da articulação entre as representações indicando que: "ao variar o ângulo podem perceber que na representação gráfica quanto menor a angulação menores ficaram os denominadores na representação algébrica". (S1 e S2)

Tal relato nos faz perceber que as simulações no software oportunizam o reconhecimento das diferentes representações das curvas cônicas, possibilitando uma possível distinção do que é o objeto matemático e do que são as suas representações. A noção de que o acesso aos objetos só se dá por meio das representações também poderá ser mobilizada a partir das reflexões ao longo da experimentação com o Conics 3D.

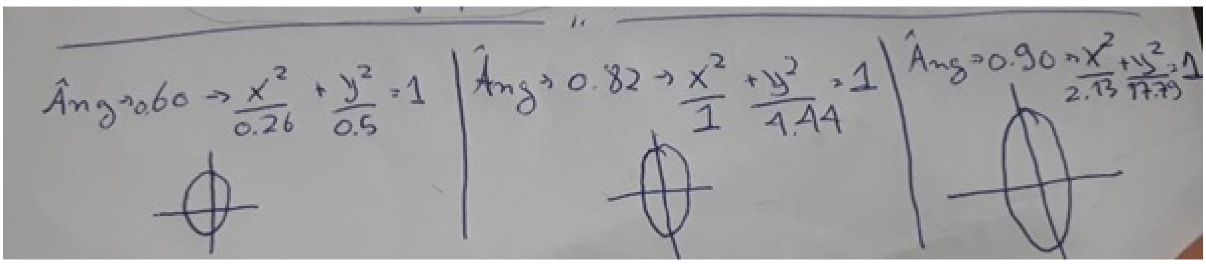
Os participantes também notaram que há uma menor variação no denominador de X^2 na equação e seu respectivo eixo na representação gráfica do que o denominador de Y^2 na representação algébrica e seu eixo no gráfico cartesiano.

No que se refere especificamente a relação entre as unidades simbólicas e as variáveis visuais, os sujeitos apontaram:

> "Apesar de não acharmos as correspondentes da representação algébrica na representação gráfica, podemos perceber que o denominador de X possui relação diretamente proporcional ao eixo menor, e o denominador de Y possui relação diretamente proporcional com o eixo maior" (S1 e S2)

Pode-se observar que a partir da reflexão em relação às articulações dinâmicas das representações das curvas cônicas favoreceram aos sujeitos a percepção da relação existente entre as unidades simbólicas (denominadores da equação) com os eixos da representação gráfica. Os participantes testaram no software as possibilidades de variação das representações algébricas e gráficas através da variação do ângulo do plano de interseção, tal como podemos observar na figura a seguir:

Figura 33 – Figura 33 - Registro dos sujeitos S1 e S2



Fonte: resultados do experimento

Apesar de perceberem através das manipulações no conics 3D a relação entre os coeficientes e as variáveis visuais, os licenciandos não apontaram com maior pronfundidade a correspondência existente entre os mesmo, mais especificamente na indicação da seguinte relação: os valores dos eixos X e Y da representação gráfica, correspondentes a metade do eixo menor e a metado do eixo maior são o produto da raiz quadrada dos denominadores da equação reduzida (representação algébrica).

Com relação à segunda alternativa, que tratava da relação estabelecida entre a angulação do plano de corte que intercepta o cone e os coeficientes da equação reduzida, os participantes apontaram:

"A angulação do plano de corte com o horizontal é inversamente proporcional aos coeficientes" (S1 e S2)

No entanto, a partir da simulação percebe-se que ao diminuir o ângulo de interseção do plano de corte em relação ao plano horizontal, os coeficientes diminuem. Nesse sentido houve uma interpretação equivocada dos participantes.

Nos registros de áudio do experimento, o sujeito S1 diz: "com decrescimento a angulação entre o plano de corte e o plano horizontal fica menor e os coeficientes da equação reduzida também diminuem". S2 diz em seguida: "Ah não véi".

Em um momento posterior S2 afirma que na sua perspectiva os coeficientes diminuem a partir do crescimento do ângulo e o S1 sede e recua o seu argumento. No entanto, é importante destacar que a partir das articulações dinâmicas surge em um dos participantes a resposta correta para tal questão.

É importante ressaltar que a questão requisita ao aluno uma conversão, pois, supõe que os alunos coordenem as unidades de sentido da representação algébrica e da representação gráfica. Na resposta dos sujeitos, acreditamos ter sido efetuada tal conversão, pois, na resposta deles via representação em língua natural consta a descrição da coordenação entre os registros.

A influência da articulação dinâmica oferecida pelo Conics 3D é notória no alcance da transformação por conversão entre as representações requeridas na questão.

Questão 02

No mesmo sentido que a primeira questão, o principal objetivo era propiciar uma situação de reflexão a respeito das relações entre a representação gráfica e a representação algébrica, mais especificamente no que tange às variáveis visuais e unidades simbólicas destas representações da parábola.

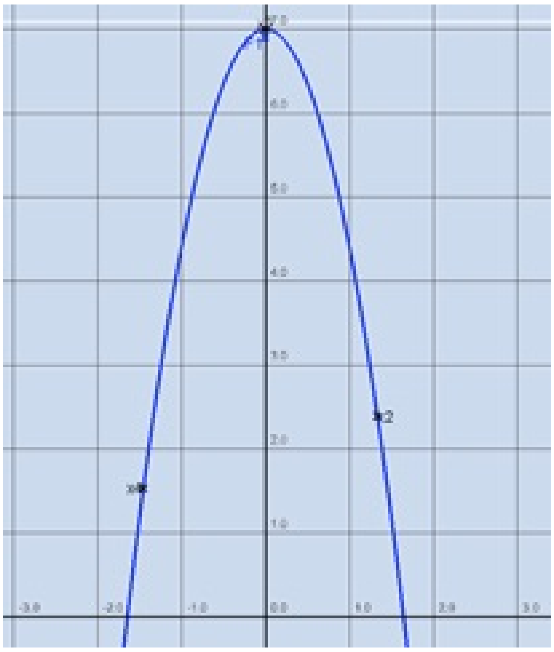
Os participantes conseguiram indicar a relação do coeficiente de Y (unidade simbólica) da equação algébrica com o vértice da parábola (variável visual) afirmando que: "o denominador do coeficiente de Y representa o valor do vértice da parábola na representação gráfica" (S1 e S2). No entanto, não conseguiram compreender as relações que se estabelecem entre o valor do coeficiente de X e o gráfico da parábola. A razão para a dificuldade de percepção pode estar relacionada com a complexidade da conversão, principalmente porque em termos de codificação é mais fácil de identificar a relação existente entre o coeficiente de Y com o gráfico cartesiano, do que a identificação da correspondência entre o coeficiente de X com o gráfico, que exige do aluno a realização de um tratamento:

Exemplo:

Representação algébrica – Equação reduzida da parábola

$$\frac{x^2}{2{,}71} + \frac{y}{7.03} = 1$$

Figura 34 – Representação gráfica – gráfico cartesiano da parábola



Fonte: resultado do experimento

Para compreender a relação existente entre o coeficiente A de X^2 com a representação gráfica é necessário executar o seguinte tratamento:

A^2=2,71

A=2,71 = 1,6462077633

Após o tratamento, determinando o valor de A, o nível de complexidade se equipara, tornando a codificação mais transparente de uma representação para a outra. Tal fator tem relação com os fatores de congruência propostos por Duval em seu estudo. Quando há congruência o registro de representação de saída transparece no registro de representação de chegada, quando não há diz-se que não transparece. Compreendemos que a passagem do registro de representação algébrica para o registro de representação gráfica-cartesiana satisfaz a noção de congruência, tendo as três características requisitadas:

1.ordem das unidades significativas;

2. correspondência semântica entre as unidades de significado;

3. univocidade semântica terminal.

Dessa maneira, os sujeitos conseguem realizar parcialmente a conversão a partir da descrição da coordenação da unidade de sentido do coeficiente de Y com a variável visual do gráfico (vértice da parábola). No entanto, encontrou um obstáculo na coordenação do coeficiente X com a respectiva variável visual.

A presente questão orienta os alunos a observarem primeiro as unidades simbólicas e depois as variáveis visuais. Havendo uma conversão, o sentido da transformação partindo do registro algébrico torna-se menos complexo do que a saída do registro geométrico para o algébrico.

Questão 03

Ainda no contexto das reflexões sobre as representações da parábola, a presente questão objetivou provocar a percepção da influência do deslocamento do plano (translação) nas representação algébrica e na representação gráfica. Tal identificação encontra suporte nas articulações dinâmicas oferecidas pelo software através dos registros dinâmicos de representação.

Em resposta a tal questão, os participantes indicaram:

"Quanto maior o deslocamento, menor o coeficiente de X e maior o de Y" (S1 e S2)

A justificativa dos sujeitos se adequa com as expectativas esperadas para tal questão.

O Conics 3D possibilitou a percepção de tal transformação a partir das suas articulações dinâmicas, favorecendo assim a condução para uma compreensão global do objeto matemático.

Questão 4

O interesse da quarta questão é o de possibilitar uma reflexão a respeito da propriedade relacionada a obtenção da parábola por meio da interseção do plano com o cone duplo: o paralelismo do plano de interseção com uma das geratrizes do cone. Ao escolher no painel de controle a curva parábola e em seguida manipular o controle deslizante ângulo o software conserva o posicionamento do plano de interseção mantendo a propriedade. Nesse sentido, foi proposto na questão a mesma situação descrita.

Como resposta à reflexão os sujeitos indicaram: "Não altera nada, pois, se alteramos a angulação do plano de corte não se obtém uma parábola. O programa não permite por causa do seletor (o plano de corte precisa estar paralelo a uma geratriz e com a mesma inclinação da geratriz)." (S1 e S2)

Tal resposta condiz com as expectativas para a questão. É notório que a simulação do software exerceu forte influência para tal conjectura, pois, não permite a mudança da angulação do plano para satisfazer tal propriedade.

Questão 5

Com o objetivo de promover a construção do conhecimento referente a relação entre os elementos da representação gráfica e da representação algébrica (equação reduzida) da hipérbole, mais especificamente no que se refere às unidades simbólicas e às variáveis visuais, foi criada a quinta questão.

Como resposta para tal questão os sujeitos indicaram: “não conseguimos identificar” (S1 e S2)

Em nossa avaliação posterior ao desenvolvimento e aplicação do experimento, acreditamos que tal questão necessitaria de outras anteriores que oferecessem um suporte para alguns aspectos pertinentes às particularidades da curva em questão. Em uma situação mais simples (representação da hipérbole com o centro na origem) a identificação das relações pode se tornar mais simples. Já no caso de estar transladada, a identificação fica muito menos transparente quando relacionamos os coeficientes da equação quadrática reduzida (unidades simbólicas) com as unidades simbólicas da representação gráfica. Assim, seriam necessárias a proposta de situações que propiciassem a reflexão sobre a noção das assíntotas, sobre os tratamentos que podem ser efetuados na equação reduzida para a identificação de elementos do gráfico, e também uma situação de comparação entre representações da hipérbole centrada na origem e transladada.

Questão 06

A presente questão tinha o objetivo de provocar uma situação de identificação das condições necessárias, relacionadas a representação algébrica (equação quadrática geral), para a obtenção de cada curva cônica. Nesse sentido, utilizamos como suporte as simulações do Conics Studium 3D, que permite a visualização das transformações das representações de forma dinâmica. Assim, os alunos foram orientados a observar a equação quadrática geral de cada cônica ao mudar o seletor que as determina.

Quando questionados sobre quais as alterações foram observadas, os sujeitos respondem: “O coeficiente de Y sempre diminui. O de X aumenta na parábola e na hipérbole fica negativo.” (S1 e S2)

A resposta não condiz com os resultados da simulação sugerida quando os sujeitos apontam que o coeficiente de Y sempre diminui e o de X aumenta na parábola. A indicação de que o C na hipérbole fica negativo está coerente com a situação proposta.

Já no que se refere a resposta dos sujeitos em relação às condições necessárias para obter as curvas, temos as seguintes indicações:

Obtenção da elipse na equação quadrática geral:

“O x e o y precisam estar elevados ao quadrado” (S1 e S2)

Obtenção da parábola na equação quadrática geral:

“O x fica ao quadrado e o y não precisa” (S1 e S2)

Obtenção da hipérbole na equação quadrática geral:

O x e o y ficam ao quadrado e é adicionado outro y a equação.

As respostas dos sujeitos são condizentes com a simulação previamente orientada. No entanto, as condições para tais obtenções podem ser um pouco mais profundas. Para distinguir a representação algébrica da cônica através da equação geral pode-se efetuar tratamentos na equação até reduzi-la. Os aspectos abaixo também podem ser observados na equação para identificação da cônica.

No caso de elipse: os sinais dos coeficientes de X^2 e Y^2 devem ser iguais.

No caso da parábola: apenas um termo deverá ser quadrático.

No caso de hipérbole: Os sinais dos coeficientes quadráticos precisam ser opostos.

Numa avaliação posterior à aplicação do experimento, percebeu-se a necessidade da mobilização dos conhecimentos dos alunos em relação às transformações por tratamento das representações algébricas. A efetuação desses tratamentos é indicada por Siqueira (2019) como uma dificuldade no contexto da aprendizagem dessas curvas. Nesse sentido, acreditamos que seria necessária a criação de situações que favorecem os gestos cognitivos dos alunos no sentido da efetuação de tais tratamentos, para assim dar suporte a identificação das condições necessárias para obtenção de cada curva na equação quadrática geral.

Questão 07

A sétima questão do experimento solicitava aos participantes que obtivessem uma representação algébrica (equação reduzida) da elipse a partir dos coeficientes A=2,39 B=4,27 e C=1,37

A resposta dos sujeitos indica: “não é possível colocar esse valor com o controle deslizante pedido”.

A presença do coeficiente C como dado na questão tornou-se um obstáculo para os alunos por não termos trabalhado a noção inerente a ele ao longo do experimento. Nesse sentido, acreditamos ser necessário uma adaptação na questão de modo a favorecer a compreensão dos alunos, assim como também na inserção de situações que discutam o papel do coeficiente C no âmbito do registro de representação algébrica.

Questão 8

De modo semelhante ao que se pede na questão anterior, a solicitação é obter a representação gráfica de uma elipse com os seguintes coeficientes: a^2=1,39 e b^2=3,12. A questão requer a mobilização da compreensão dos alunos no que se refere as unidades de sentido das representações, na algébrica as unidades simbólicas e na gráfica as variáveis visuais. Consequentemente, resultando numa conversão entre tais registros de representação.

A resposta dos sujeitos para tal questão foi a seguinte: “não conseguimos colocar esses valores no software”

É importante ressaltar que os valores indicados na questão são de um exemplo tirado do próprio software. Nesse sentido, acreditamos que a razão para o não alcance da efetuação da conversão tem relação com a não compreensão dos sujeitos sobre as unidades de sentido que compõem das representações. Como exemplo, a diferenciação dos valores dos denominadores da equação reduzida que estão ao quadrado e necessitam da efetuação de um tratamento para a construção da representação gráfica cartesiana da curva.

$x^2 9+y^2 4=1$ $\quad$ a^2=9 | b^2=4 a=9 = 3 | b=4 =2

Sendo assim, as variáveis visuais do gráfico serão a=3 e b=2.

Como já dito anteriormente, a complexidade relacionada à transformação de conversão é alta e demanda do aluno grande esforço cognitivo. No entanto, devemos considerar como influência na dificuldade de compreensão a trajetória dos sujeitos numa educação básica que provavelmente privilegiou a representação algébrica em detrimento das demais, sem as necessárias articulações com a representação gráfica, a figural espacial e a língua natural para subsidiar a compreensão global do objeto matemático.

Questão 9

No contexto da nona questão, houve o interesse de novamente provocar uma reflexão em relação à propriedade dos focos propostos por Dandelin. Desta vez, evocando também as observações nas demais representações, além da figural espacial.

Como resposta, ao primeiro item que perguntava sobre as alterações observadas nas três representações os sujeitos apontam: "Na gráfica os focos se distanciam da origem". Na espacial o eixo maior aumenta. Na algébrica os coeficientes diminuem" (S1 e S2)

Como resposta ao item dois, que questionava sobre a relação do foco (F2) como os elementos da representação figural espacial, os sujeitos indicaram: "Gráfica: o ponto se distancia da origem, algébrica: não sabemos, espacial: o ponto se distancia do vértice do cone.

Há uma equivoco quando os sujeitos afirmam que os coeficientes diminuem, em determinado momento um deles afirmam que aumentam. Mas no final decidem por afirmar que diminuem. É importante ressaltar que ao mover o controle deslizante do ângulo até o final obtem-se a representação de uma elipse sem estar centrada na origem.

A resposta ao segundo 'item' não atendeu as expectativas, pois, os licenciandos não indicaram a tangência do plano de interseção com a esfera para a determinação do foco. Diferente da resposta dada pelos mesmos na primeira etapa das atividades.

ANÁLISE DAS ATIVIDADES – GRUPO 02

Já no que se refere as atividades do grupo 02, de modo geral os sujeitos apresentaram-se mais confortáveis com a resolução da primeira etapa de atividades. É necessário salientar que os conhecimentos relacionados ao registro geométrico eram predominantemente mobilizados nas reflexões ao longo das atividades, tais como fundamentos da Geometria Descritiva – Posições relativas ao plano de projeção, Geometria Projetiva – definição das cônicas, etc.

Questão 1

A primeira questão demandava que os sujeitos refletissem sobre o posicionamento dos eixos cartesianos na representação figural espacial da elipse, parábola e hipérbole. Ou seja, era solicitado que os participantes inserissem na representação figural espacial os eixos.

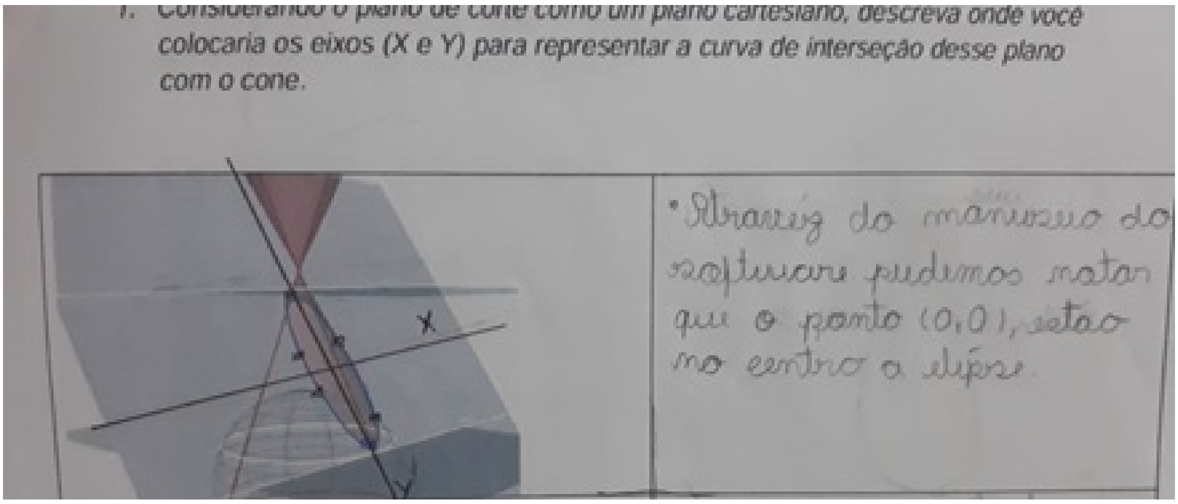
Do ponto de vista cognitivo, a questão exigia que os alunos compreendessem que o plano de intercepta o cone (que gera a curva cônica) é um plano cartesiano que transformado na representação gráfica ficará paralelo ao plano de projeção, sendo assim projetado em verdadeira grandeza. Além disso, havia a demanda da percepção no sentido de compreender a curva na representação gráfica como parte da representação espacial (resultado da seção). A compreensão dessas transformações dentro do registro geométrico podem ser caracterizadas como apreensão perceptiva e operatória: modificação ótica.

GRUPO 02 – PI / P2

As reflexões que surgiram durante a resolução da primeira questão se concentraram na localização do ponto (0,0) (interseção dos eixos cartesianos) para determinar onde estariam localizados os mesmos na representação figural espacial. Para conjecturar a respeito disto, os sujeitos utilizaram as representações do Conics Studium 3D, assim como as simulações de transformações possibilitados por ele.

Assim, iniciou-se uma discussão sobre a dimensão do plano cartesiano/de interseção com o objetivo de entender se o plano era delimitado ou infinito. Ambos chegaram a conclusão de que o plano era infinito. Nesse sentido, apontaram como resposta na primeira alternativa que o cruzamento dos respectivos eixos cartesianos se localizavam no centro da elipse.

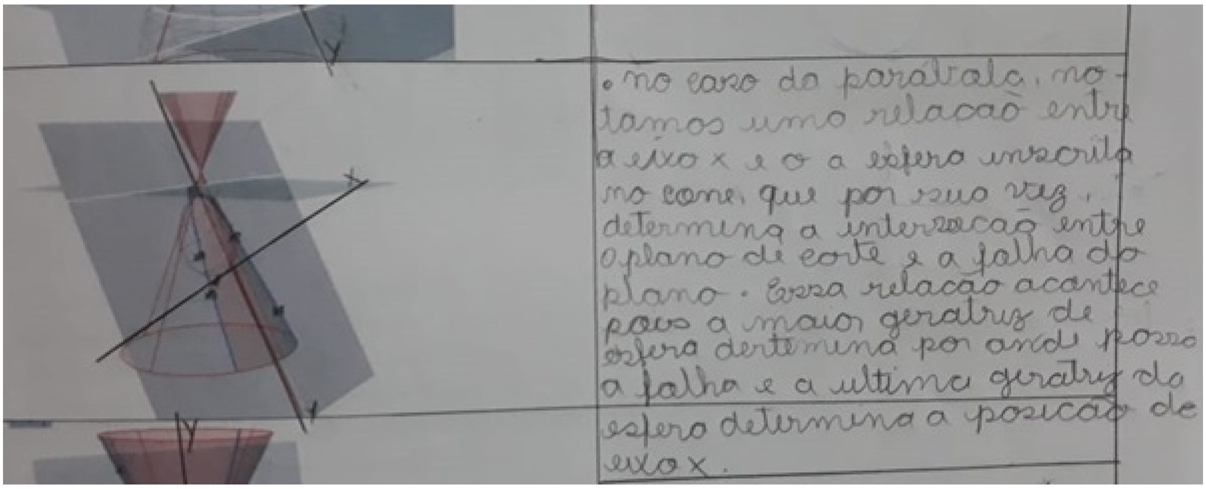
Figura 35 – Registro dos sujeitos P1 e P2



Fonte: resultado da pesquisa

Com relação às reflexões dos sujeitos na segunda alternativa que tratava sobre a parábola, houve um impasse entre os participantes na determinação da localização dos eixos. No final, ambos concordaram que o eixo X era determinado pela última geratriz da esfera.

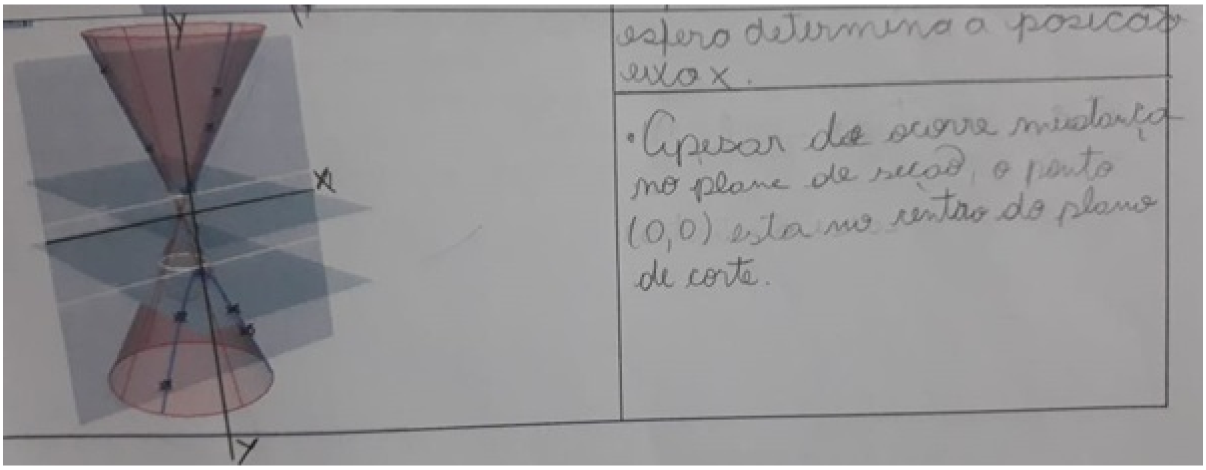
Figura 36 – Registro dos sujeitos P1 e P2



Fonte: resultado da pesquisa

Na alternativa que trata sobre a hipérbole, os licenciandos apontaram que o cruzamento dos eixos de interseção se localizavam no centro do plano de interseção.

Figura 37 – Registro dos sujeitos P1 e P2



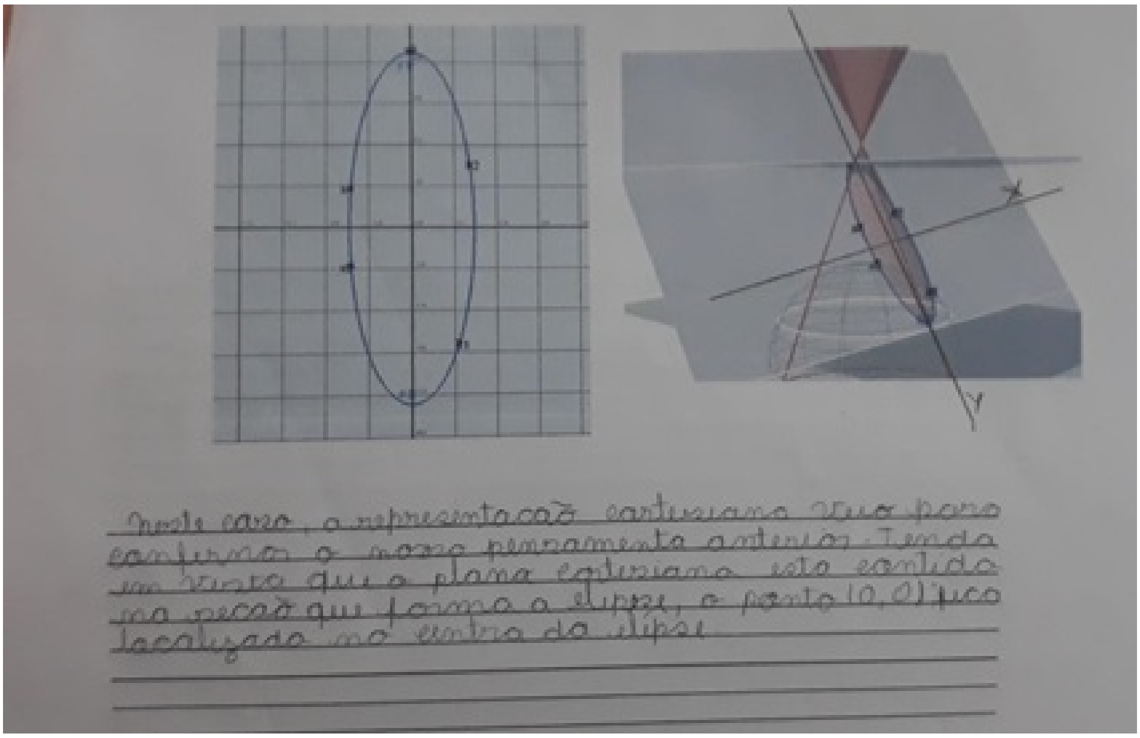
Fonte: resultado da pesquisa.

Questão 2

O objetivo da questão era propiciar a reflexão sobre a resposta dada na questão anterior a partir do fornecimento da representação gráfica associada a representação figural espacial. Nesse sentido, os sujeitos foram levados a confrontar as respostas dadas anteriormente com os dados da representação gráfica cartesiana.

Na primeira alternativa que tratava sobre a elipse, os sujeitos apontaram que a representação gráfica veio para confirmar o argumento deles em relação a questão anterior. A partir da observação dos dados na nova representação fornecida os mesmos puderam perceber visualmente a centralidade dos eixos coincidindo no centro da elipse.

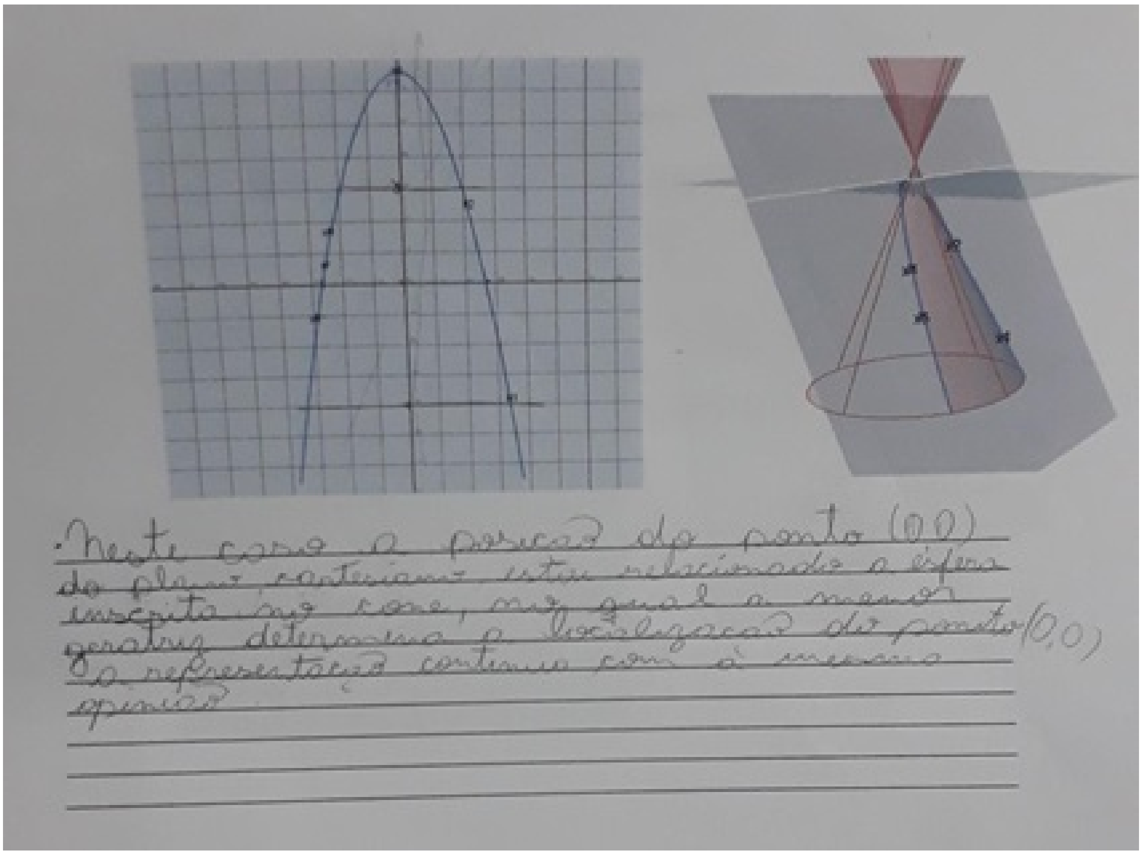
Figura 38 – Registro dos sujeitos P1 e P2



Fonte: resultado do experimento

No caso seguinte, que trata sobre o confrontamento dos dados da parábola na questão anterior, os sujeitos mantiveram seu argumento afirmando que o ponto (0,0) do plano cartesiano está relacionado a esfera inscrita no cone, sendo atribuída a menor geratriz a determinação do cruzamento dos eixos X e Y. A resposta da dupla em questão pode estar possivelmente associada a dois fatores: o primeiro diz respeito a complexidade inerente aos tratamentos figurais e o segundo corresponde ao planejamento visual das cores das representações no software, no qual as cores da esfera e dos planos que interceptam o cone são as mesmas. Entendemos que tal fato pode possivelmente causar alguma confusão na compreensão dos elementos da representação figural espacial.

Figura 39 – Registro dos sujeitos P1 e P2



Fonte: resultado do experimento.

Com relação à alternativa que tratava sobre a hipérbole, os sujeitos se mostraram confusos em relação ao posicionamento anteriormente indicado. Na resposta, foi dito pelos participantes que a representação cartesiana fornecida implicou em dúvidas em razão de uma nova percepção apontada por eles: a interseção do eixo X com o vértice do cone e não o ponto médio do cone.

Nesse sentido, compreendemos em relação aos resultados da primeira e segunda questão que os licenciandos conseguiram realizar parcialmente os tratamentos figurais. Embora tivesse acessado e articulado diversas vezes as representações no Conics 3D, os mesmos não conseguiram realizar a apreensão operatória: modificação ótica no caso da hipérbole. No caso desse grupo, houve uma grande quantidade de deduções possíveis que foram lançadas para justificar a localização dos eixos. Os sujeitos associaram os eixos ao vértice do cone, à esfera, entre outros.

Questão 3

A presente questão pretendia provocar no aluno uma reflexão a respeito dos elementos da representação figural espacial que justificam a obtenção das diretrizes. Através da observação das representações do registro geométrico no Conics 3D os sujeitos indicaram a relação conforme as expectativas: a relação presente entre os planos horizontais e inclinado e a interseção entre eles que geram as diretrizes da curva.

A resposta dos alunos atendeu as expectativas da questão. Acreditamos que a representação figural espacial fornecida pelo Conics 3D favorece a percepção dessa propriedade. Nesse sentido, o software contribuiu para tal identificação.

Questão 4

O propósito da quarta questão era propiciar a percepção da propriedade proposta por Dandelin em relação às esferas: a tangência do plano de interseção com a esfera determina os focos.

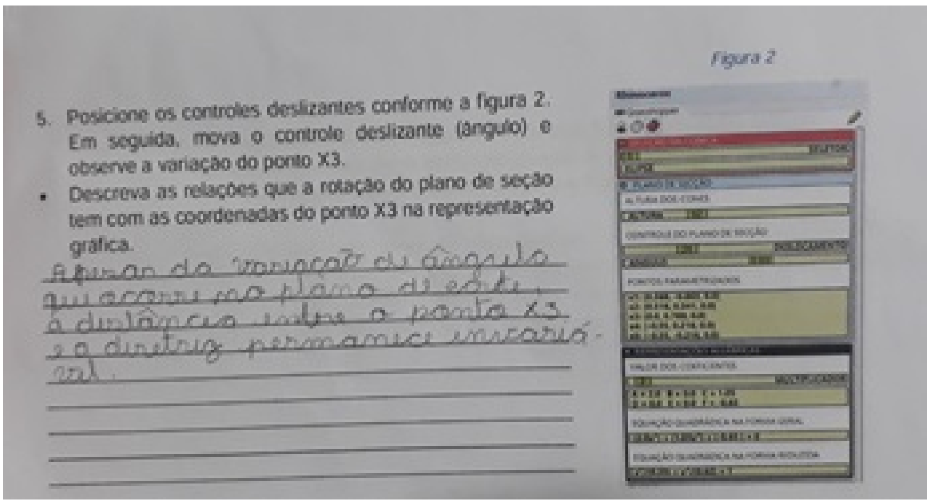
Os sujeitos P1 e P2 atribuíram a relação dos focos (F1 e F2) e as esferas à determinação da direção do eixo maior da elipse. Compreendemos que a resposta dos sujeitos tenha relação com o mesmo aspecto citado anteriormente em relação às cores da esfera e dos planos.

Questão 5

Na presente questão os alunos são levados a refletir a respeito da variação do ponto X3 (ponto parametrizado) da elipse com o objetivo de descrever as relações entre a rotação do plano (representação figural espacial) com as coordenadas do ponto na representação gráfica.

Compreendemos que a resposta dos sujeitos atendeu parcialmente as expectativas previstas, pois, os mesmos identificaram uma regularidade entre o posicionamento do ponto X3 e a diretriz. Tal como podemos observar na resposta a seguir:

Figura 40 – Registro dos sujeitos P1 e P2



Fonte: resultado do experimento

No entanto, não descrevem a relação que se estabelece entre a variação do ângulo com as coordenadas de X3. Nesse sentido, compreende-se que os sujeitos não mobilizaram a apreensão operatória: modificação ótica, na ampliação e redução que o ponto sofre a partir da mudança de angulação.

Questão 6

A reflexão associada a esta questão diz respeito as transformações relacionadas ao registro figural espacial, mais especificamente no que se refere à rotação do plano de interseção. Os licenciandos são levados a pensar sobre como ficaria a representação gráfica de uma elipse após o plano de interseção ser rotacionado em torno do eixo do cone em 45º. Como dito anteriormente, acreditamos que questão poderia fornecer mais informações e orientações que subsidiassem os gestos cognitivos de maneira mais efetiva. Concordamos com Duval sobre a importância que a legenda da figura tem no processo de percepção do que está sendo exposto.

No que se refere à resposta da dupla, os mesmos apontaram que a soma do ângulo original com o do ângulo de rotação, independente do sentido, modifica a abertura do eixo maior.

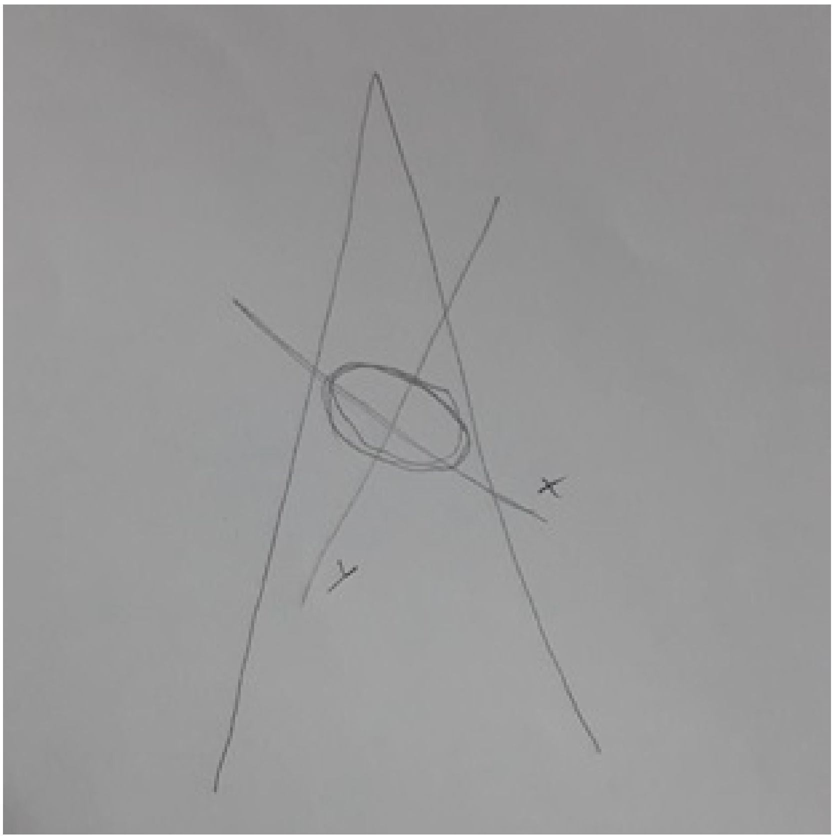
Assim, a expectativa para a questão não foi alcançada. Reforçamos que atribuímos o não alcance das respostas à formulação do enunciado.

Questão 7

A última questão da primeira etapa tinha o objetivo de propiciar um tratamento na representação figural espacial através de uma rotação nos eixos, onde o X passaria a ser o maior eixo da elipse.

Na resposta, os sujeitos descreveram que ocorreria uma inversão das coordenadas, no qual a elipse deixaria de ser alongada e passaria a ser achatada.

Figura 41 – Registro dos sujeitos P1 e P2



Fonte: resultado do experimento.

Na representação figural elaborada pelos mesmos podemos perceber a mobilização da apreensão operatória, mais especificamente na modificação de posição que diz respeito ao deslocamento da figural em relação a um referencial.

Nesse sentido, consideramos que a inversão dos eixos supõe uma rotação. Assim, o tratamento pertinente à questão foi atingido.

Salientamos que ao longo da condução das atividades, um dos sujeitos, indicou que seria bom que o software oferecesse a possibilidade de um único controle deslizante para a obtenção das três curvas através da interseção do plano com o cone.

ANÁLISE DAS ATIVIDADES/ETAPA 02 – GRUPO 02

Questão 1

Após interagirem com as manipulações através do software, os licenciandos apontaram: "podemos notas que ao manipular o ângulo, o valor que divide X^2 e Y^2 muda, assim como na representação gráfica, muda o tamanho dos eixos da elipse, em relação aos focos. Os focos da elipse estão relacionando-se com os numeradores da equação reduzida" (P1 e P2).

As percepções iniciais dos licenciandos sobre a variação dos coeficientes da equação quadrática reduzida e dos eixos da representação gráfica da elipse a partir da variação do ângulo de interseção estão corretas. No entanto, a relação apontada com os focos não atende as expectativas anteriormente elencadas neste trabalho. Nesse sentido, os sujeitos não conseguem coordenar as unidades de sentido das representações gráfica e algébrica, o que implica na não realização da conversão. Acreditamos que tal dificuldade tenha relação com a complexidade inerente à transformação de conversão. Além disso, a trajetória acadêmica, que possivelmente, não privilegiou a articulação entre o registro algébrico e o geométrico pode ter relação com os resultados.

Questão 2

Na mobilização dos gestos cognitivos para a identificação das relações existentes entre o registro de representação algébrico e o registro de representação gráfica da parábola, os sujeitos atenderem parcialmente as expectativas de resposta para tal questão. Assim como o primeiro grupo, houve uma maior facilidade em identificar a relação do coeficiente de Y (unidade simbólica) com a vértice da parábola (variável visual) para o caso explicitado na questão. No entanto, ao refletirem sobre a relação do coeficiente de X^2 (unidade simbólica) com a interseção da curva com o eixo de X (variável visual) os alunos não conseguiram apontar tal relação. Tal como podemos observar no relato a seguir: "percebe-se que o numerador de Y está relacionado ao ponto mais alto da parábola. No entanto, não conseguimos estabelecer relação entre o numerador de X e os dados da representação gráfica" (P1 e P2)

Como mencionada na análise do grupo anterior, a identificação da unidade simbólica relacionada ao Y supõe a efetuação de um tratamento, o que torna a relação menos transparente na correspondência entre as representações. Nesse sentido, acreditamos que haja a necessidade de subsidiar através de novas situações uma melhor percepção em relação à isso.

Questão 3

Na presente questão, objetiva-se a reflexão sobre a influência do deslocamento (translação) do plano de interseção nos valores dos coeficientes da representação algébrica, mais especificamente na equação reduzida e na representação gráfica.

Ao refletirem sobre tal questão, os sujeitos respondem:

"Ao movimentar o controle deslocamento, percebemos que a curva fica mais aberta e o valor do coeficiente de X aumenta, no entanto, Y se mantém, tanto na representação algébrica quanto na representação gráfica." (P1 e P2)

As percepções iniciais citadas pelos sujeitos estão coerentes com a simulação, tais como: a tendência de abertura da curva a medida que o deslocamento aumenta e também o aumento do coeficiente de X. No entanto, a inalteração citada por eles em relação aos valores de Y não condiz com a simulação. Acreditamos que a demora na alteração das representações através da manipulação dos controles pode ter influenciado tal equívoco dos alunos.

Questão 4

Na presente questão o objetivo central convergia para a identificação de uma importante propriedade da parábola no que se diz respeito a sua obtenção no cone de duas folhas:

o paralelismo do plano de interseção com uma das geratrizes do cone. Essa condição de existência relaciona à parábola é simulada no programa através da manipulação do controle deslizante (ângulo) que mantém um único posicionamento do plano de interseção.

Ao responderem tal questão, os alunos do grupo dois apontaram que nenhuma alteração foi observada. Na justificativa para tal fato, eles apontam: "para a mudança do ângulo é necessário que tenham duas diretrizes e relacionando com o plano de corte. No caso da parábola, há apenas uma diretriz, fazendo com que o ângulo não se altere"

A partir da mudança dos seletores das cônicas e da comparação dentre todas as curvas, a observação dos sujeitos indicou que a não alteração do ângulo estava associada ao fato de ter apenas uma diretriz. Assim, compreende-se que o objetivo da questão não foi atingido. Em nenhum momento os sujeitos perceberam que a não alteração do ângulo do plano tinha relação com o paralelismo com uma das geratrizes do cone.

Questão 5

A presente questão tinha como objetivo a identificação das relações entre os elementos da representação gráfica e os da representação algébrica (equação reduzida) da hipérbole. No entanto, a partir de uma avaliação posterior da questão, entendemos que seria necessário discussões prévias que dessem suporte a compreensão de tais relações. Nesse caso, em uma versão posterior da atividade é necessário que se repense os requisitos necessários para a compreensão das relações das variáveis visuais e unidades simbólicas da hipérbole.

No que se refere à resposta dos participantes, os relatos apontam que: "percebemos que y passou a ter dois coeficientes, e eles determinam a posição da curva cônica. Já o X determina o formato da curva, tendo em vista que a hipérbole tem duas curvas de mesmo formato, guiada por um único valor de X."

A resposta não condiz com a expectativa para a questão, pois, não identifica as unidades de sentido que compõem a representação algébrica e a representação gráfica. Nesse sentido, a transformação de conversão não foi realizada.

Questão 6

No âmbito desta questão, pretendeu-se propiciar uma reflexão sobre as relações estabelecidas entre a representação algébrica (equação quadrática na forma geral) e os seus respectivos coeficientes. Os licenciando são solicitados a observar a equação e os coeficientes de cada curva cônica obtida, destacando quais as condições necessárias para obter cada uma delas através da equação geral. A experimentação através do software oferece condições visuais para a observação dinâmica de tais transformações.

De acordo com o relato dos sujeitos, alguns pontos permaneceram contantes nas três cônicas, porém: "na elipse, percebemos a presença do coeficiente C, na parábola percebe-se a presença do coeficiente E, enquanto que na hipérbole percebemos a presença tanto de C quanto de E."

Com relação aos requisitos para a obtenção de cada curva, os sujeitos apontaram os seguintes:

Para a obter uma elipse:

$(ax^2)+(Ay^2) + (-B)=0$

“No qual B tem que ser menos que 0” (P1 e P2)

Para obter uma parábola

$(ax^2) +(by)+(-c) = 0$

No qual C tem que ser menor que 0.

Para obter uma hipérbole

$(ax^2)+(by^2)+(cy)+(d)=0$

Apesar de haver algumas indicações pertinentes na indicação dos alunos, tal como o mesmo sinal dos coeficientes de X^2 e Y^2 para obtenção da curva. A conjectura generaliza sem estender as justificativas os requisitos para a identificação das curvas na equação quadrática geral. Como indicamos na análise do primeiro grupo, tomamos como base os seguintes requisitos:

No caso de elipse: os sinais dos coeficientes de X^2 e Y^2 devem ser iguais.

No caso da parábola: apenas um termo deverá ser quadrático.

No caso de hipérbole: Os sinais dos coeficientes quadráticos precisam ser opostos.

Questão 7

Na presente questão é solicitado aos sujeitos a representação algébrica (equação reduzida) de uma elipse a partir do fornecimento dos seus coeficientes.

Para tanto, é exigida uma compreensão prévia dos tratamentos relacionados aos coeficientes, sabendo diferenciar A^2 e A e B^2 e B.

Ao mobilizarem seus conhecimentos para a resolução da questão, os alunos chegaram a seguinte conclusão:

$\frac{x^2}{2,39} + \frac{y^2}{4,27}$

No momento em que os alunos refletiam, houve a orientação de uma nova observação nas representações do software no que se diz respeito à da correspondência existente entre os coeficientes (unidades simbólicas) e variáveis visuais da representação gráfica. Embora as orientações e as observações das simulações no software objetivassem favorecer a compreensão dos sujeitos, eles acabaram por não realizarem o tratamento necessário para a posterior formação da equação. Acreditamos que o fornecimento do coeficiente C na questão se configurou como um obstáculo, pois, não houve um momento de reflexão nas questões anteriores que tratassem desse coeficiente relacionado-o com a equação reduzida. Além disso, a questão solicitava que os licenciandos obtivessem tal equação no software, no entanto, a equação reduzida não específica o coeficiente C.

Questão 8

Na oitava questão, os alunos eram levados a realizar uma conversão entre o registro de representação algébrica e o registro de representação gráfica através do fornecimento dos coeficientes a^2= 1,39 e b^2=3,12. A resposta para tal questão demanda a compreensão da correspondência entre as variáveis visuais da representação gráfica e das unidades simbólicas da representação. Sem tal compreensão o aluno dificilmente conseguirá realizar a conversão.

A resposta dos sujeitos não atendeu às expectativas elencadas na pesquisa. O risco da não realização da conversão era alto, pois, na questão anterior a dupla demonstrou a não compreensão sobre tais elementos.

Registro dos sujeitos P1 e P2

$$\frac{x^2}{1,17} + \frac{y^2}{1,76} = 1$$

Questão 9

Como já dito anteriormente, o objetivo da nona questão era novamente propiciar uma reflexão sobre a propriedade dos focos proposto por Dandelin. Além de provocar uma percepção em relação as demais representações.

Na resposta as alternativas os sujeitos apontaram que a partir da movimentação do plano, a posição de F2 se altera. No entanto, diferente da resposta dada na primeira etapa do experimento que refletia sobre a mesma propriedade, os licenciados apontaram que: "o ponto F2 é a interseção entre o plano de corte e a esfera inscrita no cone". Nesse sentido, o objetivo de propiciar a percepção da propriedade foi alcançado. Apontamos, mais uma vez, que a simulação da representação figural espacial e suas transformações se configuraram como essenciais para a percepção de tais propriedades.

6.3 Discussões dos resultados

Os resultados apontam para a necessidade de aprimorar a sequência de atividades no que se refere ao favorecimento da percepção dos alunos em relação aos tratamentos efetuados no âmbito do registro algébrico. A dificuldade inerente às transformações por tratamento dentro desse registro foi citada por Siqueira (2019) como resultado da sua revisão de literatura. A abstração relacionada ao trabalho como a álgebra pode estar associada à tal dificuldade, assim como a própria organização dos processos de ensino-aprendizagem que, de modo geral, acabam privilegiando o enfoque algébrico, sem, no entanto provocar a reflexão sobre os elementos que o compõe, ocasionando assim na falta de sentido para o aluno. A não coordenação entre o registro algébrico com o geométrico também pode ter uma enorme relação com este fator, uma vez que, é através da coordenação que o aluno compreende as unidades de sentido das representações.

A sequência de atividades também necessita de uma adaptação no que tange ao enunciado de algumas questões. É através deles que os alunos entendem a mensagem que se quer passar com a figura indicada, sendo, portanto, fundamental elaborar de forma bem estruturada o discurso que estará associado à representação figura, pois, isto determinará a interpretação do aluno sobre a questão.

É importante ressaltar que este trabalho ao mesmo tempo, que pretendia favorecer os gestos cognitivos dos alunos, objetivava propiciar a percepção de algumas propriedades e conceitos das curvas cônicas. Nesse sentido, acreditamos que há uma relação estabelecida entre os gestos cognitivos e a percepção das propriedades inerentes a cada representação, no entanto, compreendemos a diferenciação que se dá entre o trabalho cognitivo e o trabalho matemático. Por isso, entendemos ser necessário um estudo mais aprofundado para o desenvolvimento ou adaptação das situações de aprendizagem que privilegiem a coordenação entre os registros de representação dessas curvas, tendo como recurso o software Conics Studium 3D.

No que se refere as potencialidades do Conics Studium 3D, observou-se que a possibilidade de simular a representação figural espacial e suas transformações foram um diferencial na compreensão da propriedade proposta por Dandelin, na percepção da formação das diretrizes, assim como nas transformações pertinentes à mesma por meio de rotação e translação. Sobretudo, a articulação dos registros semióticos dinâmicos se caracterizam como fundamentais na coordenação entre os registros representação gráfica e os registros de representação algébrica, contribuindo diretamente na percepção das unidades de sentido de cada representação.

No que tange aos pontos que poderiam ser melhorados, temos fatores como a implementação da noção de excentricidade, manipulação direta nas representações, noção de lugar geométrico, inclusão da circunferência como curva cônica, inclusão de um controle deslizante que suponha a obtenção de todas as curvas simultaneamente e maior fluidez no tempo das transformações ao movimentar os controles deslizantes, mais especificamente no que se diz respeito as representações algébricas que se encontram no painel de controle. A implementação de um quadro contendo os coeficientes da equação quadrática reduzida também seria interessante na distinção dos coeficientes da equação quadrática geral.

De modo geral, compreende-se que a sequência de atividades articulada com o Conics Studium 3D contribui para a compreensão dos alunos em relação às curvas cônicas. O aporte propiciado pelo programa foi um diferencial na possível distinção entre o objeto e a sua representação e na articulação dinâmica entre as representações que ocorre de modo diferente dos ambientes não dinâmicos. Por fim, as interações com o software articulado com as questões propostas na sequência de atividades permitiram a construção de sentido nos sujeitos da pesquisa.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Uma consistente construção do conhecimento supõe em dar sentido ao aluno para os objetos que estão sendo trabalhados e transformados. Partindo deste pressuposto, o presente trabalhou buscou fortalecer a ideia de que o trabalho com a matemática demanda muito mais do que a mera aplicação de fórmulas para a resolução de questões, exigindo a criação de situações que explorem a coordenação entre as representações dos objetos matemáticos, mais especificamente no que se diz respeito as curvas cônicas. O favorecimento de tais articulações permitirá ao sujeito, o reconhecimento das propriedades que transparecem em cada representação do objeto, assim como as relações que se estabelecem entre elas. Ressaltamos que, diferente dos apontamentos da literatura que indicam o foco no trabalho com a representação algébrica em detrimento das outras, o nosso trabalho buscou privilegiar todas as representações.

Nesse sentido, buscou-se a criação de situações, com o auxílio do Conics Studium 3D, que favorecessem o reconhecimento das unidades de sentido que compõem as representações das curvas cônicas através da coordenação entre as mesmas. As articulações dinâmicas oferecidas pelo software favoreceram o reconhecimento das unidades de sentido, das diferentes representações que uma mesma curva pode ter, assim como as transformações que elas podem sofrer a partir das mudanças na representação figural espacial.

Entendemos, que de certa maneira, as conversões realizadas pelos alunos sem a utilização do software acontecem de maneira diferente, devido ao não acesso dos registros semióticos dinâmicos. Enquanto que o aluno ao utilizar o software como recurso observa as transformações e conjectura sobre elas coordenando suas unidades de sentido, as conversões sem tal auxílio são puramente mentais através dos registros não dinâmicos.

O dinamismo das simulações experenciadas pelos sujeitos tiveram uma possível influência na produção de sentido sobre as representações do objeto matemático estudado e ainda na construção de uma compreensão, sob o ponto de vista da análise matemática, conceitual das propriedades.

No mesmo sentido, compreendemos que os tratamentos figurais, mais especificamente a apreensão perceptiva e operatória também ocorrem de maneira diferente, pois, os alunos acessam as transformações de maneira dinâmica a partir do software, diferente do que aconteceria com recursos não dinâmicos.

Assim, compreendemos que a influência dos registros dinâmicos de representação podem se caracterizar como um importante recurso na percepção e na coordenação dos registros de representação semiótica dos objetos matemáticos. Portanto, é necessário avaliar com mais profundidade, em trabalhos futuros, as conversões com o recurso dos registros dinâmicos e as sem o recurso dos registros dinâmicos.

Uma consistente construção do conhecimento supõe em dar sentido ao aluno para

os objetos que estão sendo trabalhados e transformados. Partindo deste pressuposto, o presente trabalhou buscou fortalecer a ideia de que o trabalho com a matemática demanda muito mais do que a mera aplicação de fórmulas para a resolução de questões, exigindo a criação de situações que explorem a coordenação entre as representações dos objetos matemáticos, mais especificamente no que se diz respeito as curvas cônicas. O favorecimento de tais articulações permitirá ao sujeito, o reconhecimento das propriedades que transparecem em cada representação do objeto, assim como as relações que se estabelecem entre elas. Ressaltamos que, diferente dos apontamentos da literatura que indicam o foco no trabalho com a representação algébrica em detrimento das outras, o nosso trabalho buscou privilegiar todas as representações.

Nesse sentido, buscou-se a criação de situações, com o auxílio do Conics Studium 3D, que favorecessem o reconhecimento das unidades de sentido que compõem as representações das curvas cônicas através da coordenação entre as mesmas. As articulações dinâmicas oferecidas pelo software favoreceram o reconhecimento das unidades de sentido, das diferentes representações que uma mesma curva pode ter, assim como as transformações que elas podem sofrer a partir das mudanças na representação figural espacial.

Entendemos, que de certa maneira, as conversões realizadas pelos alunos sem a utilização do software acontecem de maneira diferente, devido ao não acesso dos registros semióticos dinâmicos. Enquanto que o aluno ao utilizar o software como recurso observa as transformações e conjectura sobre elas coordenando suas unidades de sentido. As conversões sem tal auxílio são puramente mentais através dos registros não dinâmicos.

No que tange a compreensão das representações algébricas, o aspecto simulativo do Conics Studium 3D articulado com a sequência de atividades favoreceu a percepção das condições necessárias para identificação das curvas através da sua equação geral.

O dinamismo das simulações experienciadas pelos sujeitos tiveram uma possível influência na produção de sentido sobre as representações do objeto matemático estudado e ainda na construção de uma compreensão, do ponto de vista da análise matemática, conceitual das propriedades.

No mesmo sentido, compreendemos que os tratamentos figurais, mais especificamente a apreensão perceptiva e operatória também ocorrem de maneira diferente, pois, os alunos acessam as transformações de maneira dinâmica a partir do software, diferente do que aconteceria com recursos não dinâmicos.

Assim, compreendemos que a influência dos registros dinâmicos de representação podem se caracterizar como um importante recurso na percepção e na coordenação dos registros de representação semiótica dos objetos matemáticos.

Portanto, é necessário avaliar com mais profundidade, em trabalhos futuros, as conversões com o recurso dos registros dinâmicos e as sem o recurso dos registros dinâmicos.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S.A. **A. Fundamentos da didática da Matemática.** Curitiba:Ed.UFPR,2007

ARTIGUE, M. **Ingénierie Didactique**. Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 9.3, p. 281-308, 1998.

BACCA, P. C. **Geometria analítica na educação básica :primeiros passos no plano cartesiano.** 2013. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática). Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática. URB, Blumenau, 2013.

BELLEMAIN, F.. **O Paradigma Micromundo**. In: COLÓQUIO DE HISTÓRIA E TECNOLOGIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA HTEM, 2002, Rio de Janeiro. Anais... Rio de Janeiro: UFRJ, 2002, p. 51-62.

BRANDT, C. F. **Questões para a aprendizagem da geometria segundo Raymond Duval.** Encontro Paranaense de Educação Matemática, Unioeste, Cascavel 2017.

BORDALLO, M. **As Cônicas na matemática escolar brasileira: história, presente e futuro**. 2011.Dissertação (Mestrado em ensino da Matemática). Programa de Pósgraduação em Ensino da Matemática. UFRJ, Rio de Janeiro, 2011.

BRASIL, Secretaria de Educação Básica. Orientações Curriculares para o Ensino Médio; volume 2. Brasília: Ministério da Educação. 2006.

BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais. Ensino médio. Brasília: Ministério da Educação, 2000.

BOYER, C. **História da Matemática.** São Paulo: Blucher, 1974.

BROITMAN, C.; ITZCOVICH, H. – **Geometria nas séries iniciais do ensino fundamental: problemas de seu ensino, problema para seu ensino** - In: PANIZZA, Mabel (org.) – Ensinar matemática na educação infantil e nas series iniciais – Análises e propostas. Porto Alegre: Artmed, 2006.

CHAACHOUA, H. **Fonctions du dessin dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace étude d'un cas: la vie des problèmes de construction et rapports des enseignants à ces problèmes**. 1997. Tese (Doutorado em Didática da Matemática) – Universidade Joseph Fourier, Grenoble, 1997.

CONTRERAS, A., CONTRERAS, M. & GARCÍA, M. **Sobre la geometría sintética y analítica. La elipse y sus construcciones.** RELIME: Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 5 (2), 111-132, Del Gustavo A Madero (Mexico), 2002.

DUVAL, R. **Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática**. In: MACHADO, Silvia D. A. Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica. Campinas: Editora Papirus, 2003, p.11-34.

DUVAL, R. **Semiosis y pensamento humano: registros semíoticos y aprendizajes intelectuales.** Tradução: Myriam Veja Restrepo. Santiago de Cali. Ed.Perter Lag, 2004.

DUVAL, R**. Semiósis e pensamento humano**: **Registros semióticos e aprendizagens intelectuais**. Trad. Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

FÜRKOTTER, M.; MORELATTI, M. R. M. **A Geometria da Tartaruga: uma introdução à Linguagem LOGO**. In: SIMPÓSIO DE MATEMÁTICA, 4, 2009, Presidente Prudente, Anais… Presidente Prudente, 2009. p. 1-29.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de Geometria Dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo.** 2001. 277 f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

LOPES, Sandra. **Sequência Didática para o estudo das seções cônicas com auxílio do software GeoGebra na Matemática**. Anais do Encontro de Produção Discente PUCSP/Cruzeiro do Sul. São Paulo. p. 1-8. 2012.

LOPES, Sandra. **Uma Sequência Didática para o ensino de Parábola enquanto lugar geométrico.** 2014. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Pós – graduação em Educação Matemática, São Paulo.

MACHADO, S. D. A. Engenharia Didática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.), **Educação Matemática: uma (nova) introdução**. 3.ed. São Paulo: Editora da PUC, 2012. p. 233-247

MORETTI, M, T.; BRANDT, C, F. **Construção de um Desenho Metodológico de Análise Semiótica e Cognitiva de problemas de Geometria que envolvam figuras**.Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.17, n.3, p. 597-616, 2016.

MUNIZ JUNIOR, F. H. M. **Seções Cônicas.** 2018. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Viçosa, Programa de Pós- Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Minas Gerais.

NASCIMENTO, A. C. R. **Uma abordagem dinâmica e atual para o ensino das Cônicas na Educação Básica.** 2015. Dissertação (Mestrado em Matemática) –

Universidade de Brasília, 2015.

NETO, F. Q. **Tradução comentada da obra “Novos elementos das seções Cônicas” (PHILIPPE de LA HIRE – 1679) e sua relevância para o ensino médio de matemática.** Dissertação (Mestrado) – UFRJ – RJ: Rio de Janeiro, 2008.

PAIS, L. C. **Estratégias de ensino de Geometria em livros didáticos de matemática em nível de 5ª a 8ª série do ensino fundamental** – 2006. Disponível em:<http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_29/estrategias.pdf.> Acesso em: 04/07/2017.

PAVANELLO, R. M. **A Geometria no Ensino Fundamental. Teoria e Prática da Educação**, Maringá. v. 1, n. 2, p. 33-41, 1999.

PERNAMBUCO. **Parâmetros curriculares para a Educação Básica do Estado de Pernambuco** – Concepções. 2012

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação. **Base Curricular Comum para as Redes Públicas de Ensino de Pernambuco**: Matemática / Secretaria de Educação. - Recife: SE. 2012

ROQUE, T. M. **História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.** Ed. Zahar, Rio de Janeiro, 2012

SALAZAR, J. V. F. ; ALMOULOUD, S. A. . **Registro figural no ambiente de geometria dinâmica**. Educação Matemática Pesquisa (Online), v. 17, p. 919, 2015.

SCHEIFER, C. **Design Metodológico para Análise de Atividades de Geometria segundo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica.** Dissertação (Mestrado em Educação; área de concentração: Educação) – Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2017.

SIQUEIRA, J. E. M. **Articulando os registros de representação semiótica das curvas cônicas através da integração de recursos computacionais.** Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, UFPE, Recife, 2019.

SOUSA, N. S. **Curvas Cônicas: do espaço ao plano da abstração ao registro visual numa perspectiva dinâmica**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, UFPE, Recife, 2017.

SOUZA, N.S. **Configurações Didáticas de Ambientes Virtuais de Aprendizagem na Educação à Distância.** 2016. Dissertação (Mestrado) Universidade Federal de Pernambuco, PE. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica.

SILVA, M. B. **Secções Cônicas: atividades com Geometria Dinâmica com base no Currículo do Estado de São Paulo**. 2011. Dissertação (Mestrado) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Pós – graduação em Educação Matemática, São Paulo.

VELÁSQUEZ, S., APREZA, E., LLUCK, D., MORENO, M. & VALDEZ, G. La Geometría Analítica: **¿cómo presentarla de manera interesante para los alumnos de la educación media superior?**. En C. Dolores, G. Martínez, R. M. Farfán, C. Carrillo, I. López & C. Navarro (Eds.), Matemática Educativa: algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula. Editorial Díaz de Santos: México, 2007

THOMPSON, P.W. (1987), **Mathematical microworlds and intelligent computer-assisted instruction,** in Kearsley G (ed.), Artificial Intelligence & Instruction, applications and methods, Addilson Wesley, 83-109.

Anexos

Quadro 4 – Programa da disciplina de geometria gráfica bidimensional do curso de licenciatura em expressão gráfica

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA PARA ASSUNTOS ACADÊMICOS
DIRETORIA DE DESENVOLVIMENTO DO ENSINO

PROGRAMA DE COMPONENTE CURRICULAR

TIPO DE COMPONENTE (Marque um X na opção)

[X] Disciplina
[ ] Atividade complementar
[ ] Monografia
[ ] Prática de Ensino
[ ] Módulo
[ ] Trabalho de Graduação

STATUS DO COMPONENTE (Marque um X na opção)

[X] OBRIGATÓRIO [ ] ELETIVO [ ] OPTATIVO

DADOS DO COMPONENTE

Código	Nome	Carga Horária Semanal		Nº. de Créditos	C. H. Global	Período
		Teórica	Prática			
EG 440	GEOMETRIA GRÁFICA BIDIMENSIONAL	30	60	4	90	1º

Pré-requisitos		Co-Requisitos		Requisitos C.H.	0

EMENTA

Normas gerais do desenho técnico - Fundamentos da Geometria Euclidiana - Estudo das figuras geométricas: linhas retas, polígonos, cônicas, espirais, curvas cíclicas - Propriedades métricas e posicionais dos polígonos convexos em geral e particularmente dos triângulos e quadriláteros. Propriedades decorrentes da regularidade dos polígonos. Verificação gráfica de propriedades. Problemas gráficos de construção de polígonos, com soluções discutidas. As curvas planas. Concepção geométrica e construção de lugares geométricos planos. Estudo de tangência e sua aplicação na construção de linhas concordantes.

OBJETIVO (S) DO COMPONENTE

1. Conhecer os elementos geométricos;
2. Distinguir as principais formas geométricas;
3. Desenvolver no aluno as seguintes habilidades: concentração, interesse pela geometria gráfica, entendimento das figuras geométricas (linhas retas, polígonos, cônicas, espirais, curvas cíclicas), capacitar o aluno na utilização dos instrumentos de desenho;
4. Demonstrar os processos de construção das formas planas com uso dos instrumentos;
5. Aumentar a capacidade de abstração e visualização espacial.

METODOLOGIA

Aulas expositivas com a utilização de quadro, marcador de quadro branco, slides e modelos didáticos (concretos e simulados por computadores).

AVALIAÇÃO

Será realizado com base nos seguintes critérios:

- Nas unidades: média ponderada dos exercícios + avaliação da unidade;
- Média geral: média aritmética das 3 unidades.

CONTEÚDO PROGRAMÁTICO

1. Fundamentos da geometria euclidiana: geometria pré-euclidiana; princípios dos elementos de Euclides; etapas do raciocínio Euclidiano;
2. Estudo das figuras geométricas: linhas retas: propriedade de posição (perpendiculares, oblíquas, paralelas), distância, linhas proporcionais; triângulos, quadriláteros, polígonos em geral; casos de congruência e semelhança, retas particulares, relações numéricas, razão áurea;
3. Dados métricos e posicionais, explícitos ou implícitos, simples ou compostos, necessários para a determinação gráfica de polígonos de n lados; dados independentes e dados inter-relacionados; limites de variação de cada dado em função dos demais; compatibilização (nº de soluções); circunferência e demais curvas cônicas: arco e corda, medida dos ângulos, ângulo inscrito, medida de uma circunferência, cálculo de pi, eixo radical, traçado da elipse, parábola e hipérbole, Propriedades comuns e particulares do círculo, da elipse, da parábola e da hipérbole que permitem sem traçado quando conhecidos seus elementos métricos e posicionais. Traçado de tangentes e normais às cônicas e aplicação de arcos concordantes dessas curvas, entre si e com segmentos de reta, na composição de curvas gráficas usadas na tecnologia e nas artes visuais; potência de um ponto em relação com uma circunferência; espirais, volutas, conchóides e cissóides, curvas cíclicas: ciclóide, epiciclóide e hipociclóide; casos degenerados;
4. Resolução de problemas de construção de figuras geométricas: lugares geométricos (definição e conceito), propriedades lineares e angulares, lugares geométricos na construção de figuras, as figuras geométricas como lugares geométricos na resolução de problemas; por igualdade e semelhança: construção de figuras por simetria, rotação, translação; transformação e homotetia. As transformações geométricas na resolução de problemas.

BIBLIOGRAFIA BÁSICA

1. CARVALHO, Benjamin de A. **Desenho Geométrico**. 3. ed. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1959.

2. F.G.M. **Exercices de géométrie.** 6° edition. Paris: Gabay, 1991.

3. MACHADO, Ardevan. **Geometria Descritiva:** noções fundamentais para uso dos alunos do curso científico e dos candidatos às Escolas Superiores, teoria e exercícios. São Paulo: Ed. Nacional, 1967.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

1. CARRAL M. Geometria. Paris: Editions Ellipse, 1995.

2. CHAPUT, Frère Ignace. **Elementos de geometria descritiva com numerosos exercicios**. Rio de Janeiro: F. Briguiet & Cia., 1957.

3. LEBESGUES, H. **Leçons sur les constructions géométriques**. Paris: Gabay, 1987.

4. ROUCHE, E.; COMBEROUSSE, C. **Traité de géométrie**. 7° edition. Paris: Gauthier - Villars, 1946.

5. SANCHEZ, Marmol L.; PEREZ, Beato M. **Geometría métrica, proyectiva y sistemas de representación**. Vol. I e II, 2ª ed. Madri: SAETA, 1947.

DEPARTAMENTO A QUE PERTENCE O COMPONENTE	HOMOLOGADO PELO COLEGIADO DE CURSO
Departamento de Expressão Gráfica	Licenciatura em Expressão Gráfica

Quadro 5 – Programa da disciplina de geometria analítica do curso de licenciatura em expressão gráfica

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA PARA ASSUNTOS ACADÊMICOS
DIRETORIA DE DESENVOLVIMENTO DO ENSINO

PROGRAMA DE COMPONENTE CURRICULAR

TIPO DE COMPONENTE (Marque um X na opção)

[X] Disciplina
[ ] Atividade complementar
[ ] Monografia
[ ] Prática de Ensino
[ ] Módulo
[ ] Trabalho de Graduação

STATUS DO COMPONENTE (Marque um X na opção)

[X] OBRIGATÓRIO [ ] ELETIVO [ ] OPTATIVO

DADOS DO COMPONENTE

Código	Nome	Carga Horária Semanal		Nº. de Créditos	C. H. Global	Período
		Teórica	Prática			
EG 442	GEOMETRIA ANALÍTICA	45	0	3	45	2º

Pré-requisitos	• MATEMÁTICA APLICADA	Co-Requisitos		Requisitos C.H.	0

EMENTA

Vetores no plano e no espaço, álgebra vetorial, produto escalar, produto misto. Coordenadas cartesianas no plano, reta, circunferência, cônicas e regiões planas. Coordenadas polares. Representação gráfica e lugares geométricos. Transformações lineares.

OBJETIVO (S) DO COMPONENTE

Perceber e compreender o relacionamento entre as representações gráficas dos objetos geométricos e suas representações analíticas, além de desenvolver a capacidade de formulação e interpretação de situações, presentes no curso de Licenciatura em Expressão Gráfica, a partir da abordagem da geomertia analítica.

METODOLOGIA

O conteúdo programático será abordado através de aulas expositivas dialogadas e de sessão de exercícios e resolução de problemas.

AVALIAÇÃO

Serão realizadas duas provas escritas. A média da disciplina consistirá da média aritmética das duas provas.

CONTEÚDO PROGRAMÁTICO

1. Vetores geométricos, definições;
2. Noções de geometria analítica: Descartes e Fermat inventam a geometria analítica, princípios;
3. Sistemas de coordenados e base de vetores;
4. Ponto médio, distência entre pontos, comprimentos;
5. Equação da reta, distância entre ponto e reta;
6. Equações das circunferência, distância de um ponto a uma circunferência;
7. Princípio da mudança de sistema de coordenadas;
8. Tranformações geométricas no plano;
9. Equações das cônicas: elipse, parábola e hipérbole, distância de um ponto a uma cônica;
10. Coordenadas no espaço, coordenadas de pontos, equação de reta e plano, equação da esfera.

BIBLIOGRAFIA BÁSICA

1. BALDIN Y. Y.; SAITO Futura Y. K. **Geometria Analítica para todos.** São Carlos: EDUFSCAR, 2012.

2. BOLDRINI, J.L.; COSTA, S.I.R.; FIGUEIREDO, V.L.; WETZLER, H.G. **Álgebra Linear**. São Paulo: Harbra, 1986.

3. VENTURI, Jacir J. **Álgebra Vetorial e Geometria Analítica.** Curitiba: Artes Gráficas e Editora Unificado, s. d.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

1. LEHMANN, Charles H. **Geometria Analítica.** México: Hispoano-Américas, 1953.

2. LIMA, Elon Lages. **Geometria Analítica e Álgebra Linear.** Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

3. REIS, G.L., SILVA, V.V. **Geometria Analítica.** 2ª ed. Rio de Janeiro: LCT, 1996.

4. SANTOS, Reginaldo. **Um Curso de Geometria Analítica e Álgebra Linear.** Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2009.

5. WEXLER, Charles. **Analytic geometry:** a vector approach. Addison Wesley 1964.

DEPARTAMENTO A QUE PERTENCE O COMPONENTE

Departamento de Expressão Gráfica

HOMOLOGADO PELO COLEGIADO DE CURSO

Licenciatura em Expressão Gráfica

ASSINATURA DO CHEFE DO DEPARTAMENTO

ASSINATURA DO COORDENADOR DO CURSO

Quadro 6 – Programa da disciplina de geometria gráfica tridimensional III do curso de licenciatura em expressão gráfica

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA PARA ASSUNTOS ACADÊMICOS
DIRETORIA DE DESENVOLVIMENTO DO ENSINO

PROGRAMA DE COMPONENTE CURRICULAR

TIPO DE COMPONENTE (Marque um X na opção)

[X] Disciplina
[ ] Atividade complementar
[ ] Monografia
[ ] Prática de Ensino
[ ] Módulo
[ ] Trabalho de Graduação

STATUS DO COMPONENTE (Marque um X na opção)

[X] OBRIGATÓRIO
[ ] ELETIVO
[ ] OPTATIVO

DADOS DO COMPONENTE

Código	Nome	Carga Horária Semanal		Nº. de Créditos	C. H. Global	Período
		Teórica	Prática			
EG 467	GEOMETRIA GRÁFICA TRIDIMENSIONAL 3	30	60	4	90	4º

Pré-requisitos	• GEOMETRIA GRÁFICA TRIDIMENSIONAL 1	Co-Requisitos		Requisitos C.H.	0

EMENTA

Representação de curvas espaciais e superfícies caracterizadas por malhas bidirecionais. Representação gráfica por projeções e desenvolvimento, obtendo delas seções planas e interseções, com aplicações à tangencia e concordância.

OBJETIVO (S) DO COMPONENTE

1. Compreender e conjecturar sobre a formação das superfícies curvas e as seções e interseções nelas sofridas;
2. Trabalhar a visualização espacial de modo sistemático;
3. Aplicar operações geométricas para a obtenção das representações das superfícies curvas a serem estudadas, assim como, áreas sombreadas e planificações.

METODOLOGIA

1. Aulas expositivas com a utilização de recursos plurisensoriais;
2. Estudar a planificação das superfícies curvas desenvolvíveis, visando à otimização da área de recorte para a sua modelagem tridimensional;
3. Concluir do estudo das propriedades, as vantagens da projeção desses sólidos, para a obtenção de diferentes seções e curvas.

AVALIAÇÃO

Primeira unidade

- Exercícios em classe (peso 1,5)
- Projeto (fase 1) (peso 3,5)
- Exercício Escolar (peso 5,0)

Segunda Unidade

- Exercícios em classe (peso 1,5)
- Projeto (fase 2) (peso 3,5)
- Exercício Escolar (peso 5,0)

CONTEÚDO PROGRAMÁTICO

- Generalidades e representação de curvas planas: cônicas, espirais, hélice e cicloides;
- Superfícies: geração e classificação;
- Superfícies desenvolvíveis: cones e cilindros – representação, sombras, seção planas, planificação, plano tangente, linhas geodésicas e interseção;
- Superfícies reversas: hiperboloide escaleno, e paraboloide hiperbólico. Conoíde, cilindroide e helicoide (de plano e cone diretor) – representação, seção plana e plano tangente;
- Helicoide desenvolvível;
- Superfícies circulares de revolução: cone, cilindro esfera, elipsoide (alongado e achatado), hiperboloide (de 1 e 2 folhas), paraboloide de revolução, toro circular e serpentina: representação, seção plana e plano tangente.

BIBLIOGRAFIA BÁSICA

1. MACHADO, Adervan. **Geometria descritiva:** teoria e exercícios. São Paulo; Rio de Janeiro: McGraw- Hill do Brasil, 1976.

2. SANCHEZ-MARMOL, L. **Geometria:** métrica, projectiva y sistemas de representación. Madri: SAETA, 1947.

3. RODRIGUES, Álvaro José. **Geometria descritiva:** projetividade, curvas e superfícies. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico Ltda., 1960.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

1. CHAPUT, Frère Ignace. **Elementos de geometria descritiva com numerosos exercícios**. Rio de Janeiro: F. Briguiet, 1957.

2. GIESECK, Frederick E. et al. **Comunicação gráfica moderna**. Rio Grande do Sul: Bookman, 2002.

3. FRENZEL, Louis E. **Understanding Expert Systems.** Indianapolis: Howard W. Sams, 1987.

4. FROST, R.A. **Introduction to Knowledge Base Systems.** London: Collins Professional and Technical, 1986.

5. WATT, Alan H. **The computer image**. Massachusetts: Addison-Wesley, 1997.

DEPARTAMENTO A QUE PERTENCE O COMPONENTE	HOMOLOGADO PELO COLEGIADO DE CURSO
Departamento de Expressão Gráfica	Licenciatura em Expressão Gráfica

ASSINATURA DO CHEFE DO DEPARTAMENTO

ASSINATURA DO COORDENADOR DO CURSO

Conteúdo Disciplinares