



Centro de Educação  
Campus Universitário  
Cidade Universitária  
Recife-PE/BR CEP: 50.670-901  
Fone/Fax: (81) 2126-8952  
E. Mail: [edumatec@ufpe.br](mailto:edumatec@ufpe.br)  
[www.ufpe.br/ppgedumatec](http://www.ufpe.br/ppgedumatec)

**MABEL CRISTINA MARQUES MELO**

**FAZENDO MÉDIA: compreensões de alunos e professores  
dos anos iniciais do Ensino Fundamental**

**RECIFE**

**2010**

MABEL CRISTINA MARQUES MELO

FAZENDO MÉDIA: compreensões de alunos e professores  
dos anos iniciais do Ensino Fundamental

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Orientadora: Professora Doutora Gilda  
Lisbôa Guimarães

RECIFE

2010

**Melo, Mabel Cristina Marques**

**Fazendo média: compreensões de alunos e professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental/ Mabel Cristina Marques Melo. – Recife : O Autor, 2010. 149 f. : il. ; 31 cm.**

**Orientador: Gilda Lisboa Guimarães**

**Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco, CE, Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2010.**

**1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Matemática – Ensino Fundamental. I. Guimarães, Gilda Lisboa. II. Universidade Federal de Pernambuco, CE, Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica. III. Título.**

**37**

**CDU (2.ed.)**

**UFPE**

**372.7**

**CDD (22.ed.)**

**CE2010-43**



ALUNA

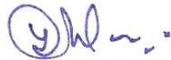
MABEL CRISTINA MARQUES MELO

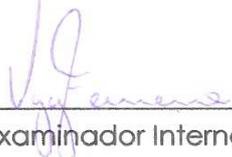
TÍTULO DA DISSERTAÇÃO

"FAZENDO MÉDIA: COMPREENSÕES DE ALUNOS E PROFESSORES DOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL."

COMISSÃO EXAMINADORA:

  
Presidente e Orientador  
Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Gilda Lisboa Guimarães

  
Examinador Externo  
Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Irene Maurício Cazorla

  
Examinador Interno  
Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Verônica Gifirana Gomes Ferreira

Recife, 31 de março de 2010.

## DEDICATÓRIA

*À Deus pela graça concedida, pois só  
“Ele é a Rocha cuja obra é perfeita,  
porque todos os seus caminhos juízo são;  
Deus é a verdade, e não há nele injustiça;  
justo e reto é” (Deuteronômio 32.4).*

*À minha mãe Joselita e ao meu pai Marcos (in memorian),  
À minha avó, Maria do Carmo (in memorian),  
Ao meu esposo Paulo Melo e a minha filha Alanna, meus amores.*

## AGRADECIMENTOS

Sou grata primeiramente a Deus, por ter me concedido essa vitória.

Agradeço a minha querida filha Alanna e ao meu esposo Paulo Melo pela compreensão, estímulo, paciência, carinho e especialmente pelo amor ofertado.

Obrigada a minha mãe Lita pela educação que me deu, pelo amor e dedicação de toda uma vida.

Um agradecimento especial à Gilda Guimarães, pela amizade, pelo aprendizado, por me ajudar e incentivar na vida acadêmica, pela orientação neste estudo, pela parceria estabelecida desde o ano de 2005 e por me fazer descobrir a importância da formação pela e para pesquisa.

Às amigas do grupo de estudo que me apoiaram brilhantemente: Milka Cavalcanti, Érica Cavalcanti, Edilza Silva e Patrícia Luz.

Às amigas do curso de Pedagogia: Milka, Nyrluce, Renata, Rossana e Jaysa.

À direção e a coordenação das seis escolas do município de Moreno - Pernambuco, que tornaram possível a realização da coleta de dados e, especialmente, aos professores e alunos que contribuíram para concretização dessa pesquisa.

Agradeço a Verônica Gitirana, Irene Cazorla, Antonio Roazzi e Rute Borba pelas contribuições na construção deste trabalho.

Aos professores e as coordenadoras Gilda Guimarães e Patrícia Smith do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica e aos colegas da turma de Mestrado de 2010.

À Marlene e Elizângela, bem como a todos os funcionários do curso de Mestrado.

A CAPES, pela bolsa PROF e pelo incentivo à pesquisa.

Enfim, em gratidão compartilho as palavras de Paulo Freire com todos vós:

Não há ensino sem pesquisa e pesquisa sem ensino (...). Ensino porque busco, porque indaguei, porque indago e me indago. Pesquiso para constatar, constatando, intervenho, intervindo educo e me educo. Pesquiso para conhecer o que não conheço e comunicar ou anunciar a novidade (FREIRE, 1996, p.29).

## RESUMO

O presente estudo investigou como o conceito de média aritmética é compreendido por alunos e professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, considerando diferentes invariantes, significados e representações. Participaram desse estudo 210 sujeitos de seis escolas públicas do Município de Moreno – Pernambuco, sendo 75 alunos do 3º ano, 104 alunos do 5º ano do Ensino Fundamental e 31 professores desse mesmo nível de ensino. Foi solicitado que cada sujeito respondesse individualmente a um teste envolvendo sete questões. Foram criados dois testes, os quais apresentavam equivalência entre os invariantes (a média está localizada entre os valores extremos; é influenciada por cada um e por todos os valores; não necessariamente coincide com um dos valores que a compõem; pode ser um número que não tem um correspondente na realidade física; seu cálculo leva em consideração todos os valores inclusive os nulos e os negativos; é um valor representativo dos valores a partir dos quais foi calculada) e significados (estimativa de uma quantidade desconhecida em presença de erros de medida; obtenção de uma quantidade equitativa a repartir para conseguir uma distribuição uniforme; serve de elemento representativo de um conjunto de valores dados; necessidade de conhecer o valor que se irá obter com maior probabilidade ao contar com um dado faltando em uma distribuição) apresentados em cada questão, mas variavam a representação: gráfico de colunas ou enunciado escrito. Os resultados mostraram um desempenho muito fraco dos alunos e não foram observadas diferenças significativas entre os níveis de escolaridade. Os professores apresentaram um desempenho significativamente superior ao dos alunos, evidenciando uma maior compreensão do conceito de média aritmética. Entretanto, ressalta-se que o desempenho destes ainda foi aquém do desejado. Verificou-se, que na maioria das questões, o tipo de representação não foi um fator determinante na compreensão do conceito de média, mas exerceu influência na estratégia de resolução utilizada pelos sujeitos investigados. Professores e alunos apresentaram dificuldades diferentes em relação aos significados da média. Quanto aos invariantes, foi difícil tanto para os professores quanto para os alunos à compreensão de que a média pode ser um número que não tem um correspondente na realidade física. A partir de uma análise de Estrutura de Similaridade (SSA) entre as questões e os grupos investigados, foi possível observar a existência de uma alta correlação entre os significados: média como uma quantidade equitativa a repartir para conseguir uma distribuição uniforme e como elemento representativo de um conjunto de valores com distribuição aproximadamente simétrica. Essa correlação foi percebida também entre os invariantes: a média é influenciada por cada um e por todos os valores; considera todos os valores inclusive os nulos, e é um valor representativo dos valores a partir dos quais foi calculada. Dessa forma, parece que o significado apresentou maior influência do que o invariante no desempenho dos sujeitos investigados. Esse estudo aponta alguns caminhos didáticos possíveis de serem desenvolvidos ao se buscar um trabalho sistematizado relacionado ao conceito de média. Finalmente, nossos resultados evidenciam a importância dos invariantes, significados e representações na compreensão do conceito de média aritmética.

**Palavras-Chave:** Educação Estatística; média aritmética; anos iniciais do Ensino Fundamental

## ABSTRACT

This research aims to investigate how arithmetic mean is understood by teachers and pupils in Primary School. It was taken into account different invariants, meanings and representations. Two hundred and ten subjects from six state schools from Moreno - Pernambuco took part in it. Seventy five out of two hundred and ten were pupils of 3rd year, one hundred and four pupils of 5th year from Primary School and thirty one teachers from the same level of education. Each person was asked to answer a test with seven questions. It was made two tests which had equivalence between the invariants (the mean is between the extreme values; it is influenced by each and by all values; they necessarily do not coincide with one of the value which compounds it, it can be a number that does not have a correspondent within the physics reality; its calculation takes into account all the values, including the null and negative ones; it is a representative value of the values from which was calculated) and meanings (estimative of an unknown quantity in the presence of mistake measure; obtainment of a fair quantity to be divided in order to get an equable distribution; it works as a representative element of a data value group; it is needed to know which value will be obtained with higher probability when it is counted a data that is missing within a distribution) presented in each question, however they varied their representation: graphic of columns or a written statement. The results showed a very weak performance of the pupils and it was not seen significant differences between the levels of educational background. The teachers presented a significant superior performance, evidencing a better comprehension of the arithmetic mean concept. Nevertheless it is highlighted that the teachers' performance was not proficient. It was noticed that the majority of the questions, such as the kind of representation was not a determinant factor in the comprehension of the mean concept, but it fulfilled its influence in the solving strategy used by the subjects in our research. Teachers and pupils had different difficulties in relation to the meanings, meanwhile teachers and pupils had difficulties to understand that the mean can be a number with no sense in real life. From analysis of the Structure Similarity (ASS) between the questions and investigated groups was possible to notice that there is a greater correlation between the meanings: mean as a similar quantity to be divided in order to get an equable distribution and as a representative element of a data value group with approximate symmetrical distribution. This correlation was also noticed between the invariants: the mean is influenced by each and by all values; its calculation takes into account all the values, including the null ones and it is a representative value of the values from which was calculated. As it was noticed in this study the mean seems to be the one which presented greater influence than the invariants in the subjects' performance. This research points out some possible didactics way to be developed through a systematical work related to the mean concept. Finally, this study shows the importance of the meanings, invariants and representation in the comprehension of the arithmetic mean concept.

**KeyWords:** Statistic Education; arithmetic mean; early school years of Primary School

## SUMÁRIO

### RESUMO

### ABSTRACT

### CAPÍTULO 1

#### **A EDUCAÇÃO ESTATÍSTICA** 09

1.1 A Estatística e sua origem 11

1.2 Currículo e Educação Estatística 14

1.3 Estatística: definições 17

1.4 A Teoria dos Campos Conceituais 20

1.5 Média aritmética 23

1.6 Estudos sobre média 25

1.6.1 Nos anos iniciais do Ensino Fundamental 25

1.6.2 No Ensino Médio e Superior 30

1.7 A formação do professor para o ensino da Estatística 33

1.7.1 Estudos com pedagogos 34

### CAPÍTULO 2

#### **METODOLOGIA** 38

2.1 Participantes 38

2.2 Procedimentos 39

2.3 Instrumento diagnóstico 39

2.3.1 Disposição das questões 41

### CAPÍTULO 3

#### **O QUE SABEM ALUNOS E PROFESSORES DOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL SOBRE MÉDIA ARITMÉTICA?** 49

3.1 A análise quantitativa do desempenho 51

3.2 A análise do desempenho em relação ao tipo de representação	53
3.3 A análise do desempenho em relação aos invariantes e significados da média aritmética	62
3.4 A análise de correlação entre as questões e os grupos investigados	77
<b>CAPÍTULO 4</b>	
<b>QUAIS ESTRATÉGIAS OS PARTICIPANTES DA PESQUISA UTILIZARAM AO RESPONDEREM AS QUESTÕES SOBRE O CONCEITO DE MÉDIA ARITMÉTICA?</b>	81
<b>CAPÍTULO 5</b>	
<b>CONCLUSÕES</b>	127
<b>REFERÊNCIAS</b>	136
<b>APÊNDICES</b>	

# CAPÍTULO 1

## A EDUCAÇÃO ESTATÍSTICA

Atualmente é evidente o destaque conferido à Educação Estatística na sociedade em que vivemos. Os veículos de comunicação de massa, a cada dia têm demonstrado valorar a publicação de informações diversas via o uso frequente de gráficos e tabelas. Entende-se que essa prática midiática ocorre em função do reconhecimento social dos atributos pertencentes às ferramentas estatísticas, como a rapidez e facilidade para organização, sintetização e difusão de dados, utilizando para isso um espaço reduzido. Vale salientar que, nessa conjuntura, a mídia desempenha um papel expressivo, uma vez que é eminente o seu poder na formação de opiniões individuais e coletivas.

O avanço tecnológico causado pela criação do computador, sobretudo, da internet, e as variadas formas de transmissão e obtenção de informações que esta tecnologia proporciona, impulsionaram intensamente o aumento da quantidade de informações que são expostas à sociedade. Nesse sentido, Lopes (2003) reconhece que por ser esta a sociedade da informação e do conhecimento, a mesma nos apresenta exigências que não são futuras, mas imediatas.

Assim sendo, Batanero e Godino (2001) asseveram que devido a tal abundância de informações com as quais os cidadãos se deparam em seu trabalho cotidiano, torna-se necessário um conhecimento básico da Estatística para a correta interpretação de dados.

Diante do exposto, enfatiza-se a relevância que possui a Educação Estatística, ao apresentar por objetivo tornar todos os cidadãos estatisticamente competentes (CARVALHO, 2006). Tal propósito implica, segundo a autora, na formação de atitudes, capacidades e conhecimentos que permitam o desenvolvimento da reflexão e da criticidade em relação à informação veiculada através de conteúdos estatísticos, mesmo num uso indevido ou abusivo.

No Brasil, nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (1997) para as séries iniciais do Ensino Fundamental, destaca-se a importância da Educação Estatística em função do seu uso social. Desse modo, devido a esta demanda da sociedade, o ensino de Estatística se constitui como sendo algo fundamental para o desenvolvimento da competência estatística pelos sujeitos, favorecendo assim o exercício da cidadania.

Nesta perspectiva, também nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (1998) para as séries finais do Ensino Fundamental, ressalta-se que

a compreensão e a tomada de decisões diante de questões políticas e sociais dependem da leitura crítica e interpretação de informações complexas, muitas vezes contraditórias, que incluem dados estatísticos e índices divulgados pelos meios de comunicação. Ou seja, para exercer a cidadania é necessário saber calcular, medir, raciocinar, argumentar e tratar informações estatisticamente (p.27).

Sendo assim, justifica-se mediante a orientação apresentada nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (1997) a necessidade de se introduzir o estudo da Estatística desde os primeiros anos de escolarização, argumentando que a “finalidade é que o aluno venha a construir procedimentos para coletar, organizar, comunicar e interpretar dados, utilizando tabelas, gráficos e representações que aparecem frequentemente em seu dia-a-dia” (p. 56).

Nesse sentido, compreendemos que o trabalho com os conceitos e habilidades inerentes a Educação Estatística requer uma seriedade no reconhecimento imprescindível do acesso a este conhecimento desde a infância e no decorrer da vida dos sujeitos. Como bem afirma Carvalho (2001)

Numa sociedade onde a informação faz cada vez mais parte do dia-a-dia da maioria das crianças, onde grandes quantidades de dados fazem parte da realidade quotidiana das sociedades ocidentais, importa que as crianças, desde logo, consigam coligir, organizar, descrever dados de forma a saberem interpretá-las e, com base nelas, tomarem decisões. (p. 29-30).

Notoriamente, há no meio acadêmico uma preocupação relacionada à qualidade do processo de ensino-aprendizagem dos conteúdos estatísticos. As pesquisas e debates sobre a temática da Educação Estatística buscam proporcionar uma melhor compreensão sobre questões relacionadas ao processo de ensino-aprendizagem, tanto no âmbito conceitual, como no didático-metodológico e suas implicações no processo de formação docente e, de modo especial, na preparação deste para o ensino dos conteúdos pertencentes a esta área do conhecimento.

Em relação à didática da estatística especificamente, Batanero (2000) ressalta que o seu desenvolvimento tem se dado de forma insuficiente e que só recentemente estamos tomando conhecimento das principais dificuldades dos alunos em relação aos conceitos mais importantes.

Dentre os conceitos considerados importantes destaca-se o de média, que comumente vem sendo utilizado, seja no âmbito social, acadêmico, escolar, econômico, dentre outros, suscitando a necessidade de desenvolvimento da compreensão deste conceito pela sociedade.

Dessa forma, no intuito de contribuirmos para a consolidação do ensino da Estatística desde os primeiros anos de escolaridade, buscamos nesse estudo investigar como o conceito de média aritmética é compreendido por alunos e professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, considerando diferentes invariantes, significados e representações.

## **1.1 A Estatística e sua origem**

Ao pontuar alguns dados históricos, constata-se que a origem da Estatística data de muitos anos atrás e remete-nos a épocas bastante antigas, em que a mesma se apresentava de maneira simples e incipiente, diferentemente do que se observa nos dias atuais.

De acordo com Ferreira, Tavares e Turkman (2002), uma das preocupações percebidas em todas as culturas diz respeito ao ato de contar, enumerar e recensear. Em várias civilizações, dentre as quais se podem destacar Israel, Roma, Egito e China,

observa-se a necessidade por parte do Estado em conhecer a sua população, tanto economicamente como socialmente.

Historicamente, constata-se que diversos imperadores ordenavam a realização de recenseamentos da população visando à arrecadação de impostos e o recrutamento para o serviço militar. Batanero e Godino (2001) declaram que algumas civilizações mais antigas como a Chinesa, a Suméria e a Egípcia já coletavam dados sobre população, bens e produção.

Registros egípcios de presos de guerra e também de falta de mão-de-obra relativa à construção de pirâmides, os quais datam de 5000 e 3000 a. C. respectivamente, são considerados os primeiros dados estatísticos disponíveis (BAYER, BITTENCOURT, ROCHA e ECHEVESTE, 2004).

Outros registros históricos sobre a China mostram que o primeiro imperador Yao houvera ordenado o primeiro recenseamento no ano de 2238 a. C. com fins agrícolas e comerciais. Buscou-se saber nomeadamente “o número de habitantes, a fim de poder repartir o território, de distribuir as terras, estabelecer os rolos de pergaminho de impostos e de proceder ao recrutamento militar” (FERREIRA, TAVARES E TURKMAN, 2002, p.8).

Na Bíblia Sagrada no quarto livro do Pentateuco escrito por Moisés, chamado de Números devido aos censos promovidos durante o período de quarenta anos, em que o povo de Israel peregrinou pelo deserto (entre aproximadamente 1400 e 1280 a.C.), se encontra o relato da contagem dos israelitas em idade de serviço militar (Nm. 1.1-46; 26.1-51).

No Novo Testamento, no Evangelho segundo Lucas, faz-se referência à ordem emitida pelo imperador César Augusto, o qual determinou a realização de um censo em todos os países do Império Romano. Para tal, todas as pessoas deviam se registrar, cada uma na sua própria cidade de origem, a fim de ser feita uma contagem da população. Foi por ocasião deste censo que José e Maria viajaram à Belém, onde nascera Jesus Cristo (Lc. 2.1-3). Vale ressaltar, que os censos propriamente ditos foram estabelecidos pelo império romano desde o século IV a. C.

Posteriormente nos séculos XVII e XVIII d. C., a estatística era considerada a arte de governar pelos aritméticos políticos daquela época, tendo como função servir de olhos e ouvidos para o governo (BATANERO E GODINO, 2001).

Quanto à origem da palavra estatística, a mesma foi criada pelo acadêmico alemão Gottfried Achenwall em 1752. O termo estatística está ligado à palavra status que é originária do latim e significa estado devido ao aproveitamento que os políticos e o estado extraíam dela. (BAYER, BITTENCOURT, ROCHA e ECHEVESTE, 2004).

Em meados do século XX, houve um grande desenvolvimento da Estatística e as suas aplicações integravam vários domínios científicos, tecnológicos, políticos e sociais. Em consequência disto, neste mesmo século a Estatística foi qualificada como sendo uma das ciências metodológicas fundamentais e base do método científico experimental (BATANERO, 2001).

Dentro desse contexto, surgiu a necessidade de formação técnica e especializada na área de estatística (BRANCO, 2000). No intuito de suprir essa demanda, organismos internacionais objetivaram melhorar a informação estatística nos países em desenvolvimento, o que implicaria numa preparação suficiente de técnicos estatísticos nesses países.

Hoje é inegável a preocupação referente à Educação Estatística, a nível internacional, uma vez que tal tema passou a ser abordado tanto por organizações, quanto por eventos de pesquisa científica como: American Statistical Association (ASA), International Statistical Institute (ISI), International Association for Statistical Education (IASE), International Conferences on Teaching Statistics (ICOTS), International Conferences on Mathematics Education (ICME), Psychology on Mathematics Education (PME), Acção Local de Estatística Aplicada (ALEA), dentre outros, que segundo Batanero (2001) têm se dedicado a promoção da Educação Estatística.

## 1.2 Currículo e Educação Estatística

Nos últimos anos tem aumentado consideravelmente o número de investigações, publicações e materiais curriculares relacionados à Educação Estatística (BATANERO e GODINO, 2005).

De acordo com Bayer, Bittencourt, Rocha e Echeveste (2004) em 1970 na primeira conferência Comprehensive School Mathematics Program surgiu, a nível internacional, a idéia de incluir a Estatística no ensino da Matemática nas escolas. Naquela ocasião foi proposto que se incluísse ao currículo da matemática noções de Estatística e Probabilidade desde o curso secundário.

Segundo Batanero (2000), recentemente os novos currículos têm incorporado o ensino de Estatística na escola primária e secundária, dando ênfase ao aspecto exploratório e ao trabalho com projetos interdisciplinares. Salienta-se que o trabalho por meio de projetos permite contextualizar os conteúdos em situações do interesse do aluno e acaba por integrar o ensino da Estatística num processo mais amplo de investigação (BATANERO e DÍAZ, 2005).

No Brasil, desde a década de 40 que os conteúdos de Estatística e Probabilidade fazem parte do currículo de Matemática do Ensino Médio (ROTUNNO, 2007). Entretanto, só após terem se passado mais de cinco décadas, em 1997 estes conteúdos foram propostos para o Ensino Fundamental, mediante o estabelecimento dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), tendo por finalidade promover a formação crítica do cidadão.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (1997) o ensino da Estatística aparece inserido no bloco de conteúdos denominado de “Tratamento da Informação”. Destaca-se neste bloco temático a importância do ensino, desde os primeiros anos de escolaridade, tanto das noções de Estatística e Probabilidade, como de Combinatória.

Em relação aos conteúdos inseridos no referido bloco, este documento propõe que sejam desenvolvidas pelos alunos as seguintes habilidades:

**Propostas para o primeiro ciclo:** leitura e interpretação de informações contidas em imagens; coleta e organização de informações; criação de registros pessoais para comunicação de informações coletadas; exploração da função do número como código numérico na organização de informações; interpretação e elaboração de listas, tabelas simples, tabelas de dupla entrada e gráficos de barra para comunicar a informação obtida; produção de textos escritos a partir da interpretação de gráficos e tabelas (BRASIL, 1997, p.52).

**Propostas para o segundo ciclo:** coleta, organização e descrição de dados; leitura e interpretação de dados apresentados de maneira organizada e construção dessas representações; interpretação de dados apresentados por meio de tabelas e gráficos, para identificação de características previsíveis ou aleatórias de acontecimentos; produção de textos escritos, a partir da interpretação de gráficos e tabelas; construção de gráficos e tabelas com base em informações contidas em textos jornalísticos, científicos ou outros; obtenção e interpretação de média aritmética; exploração da idéia de probabilidade em situações-problema simples, identificando sucessos possíveis, sucessos certos e as situações de "sorte"; utilização de informações dadas para avaliar probabilidades; identificação das possíveis maneiras de se combinar elementos de uma coleção e de contabilizá-las usando estratégias pessoais (BRASIL, 1997, p.61-62).

Vale destacar, que os Parâmetros curriculares Nacionais de Matemática (1997) mencionam especificamente o trabalho com o conceito de média aritmética apenas a partir do 2º ciclo do Ensino Fundamental, propondo a obtenção e interpretação da média, e igualmente no 1º segmento da Educação de Jovens e Adultos (EJA). Observa-se ainda, que o referido documento não se refere ao trabalho com as demais medidas de tendência central, como a moda e a mediana, em nenhum dos dois primeiros ciclos do Ensino Fundamental. A proposição de atividades envolvendo essas três medidas de tendência central (média, moda e mediana) só é verificada a partir do 3º ciclo do ensino fundamental e no 2º segmento da EJA.

Uma investigação considerada bastante relevante e que aborda a questão curricular foi realizada por Ponte e Fonseca (2001). Estes autores prestaram uma grande contribuição ao investigarem os objetivos, conteúdos e orientações metodológicas referentes à Estatística, tanto ao nível do ensino básico quanto do secundário. Os autores realizaram esta pesquisa mediante a análise comparativa entre o currículo de Portugal, da Inglaterra e dos Estados Unidos da América.

Ponte e Fonseca (2001) referem-se a Holmes (2000) ao afirmarem que atualmente coexistem na Europa três grandes tendências concernentes ao ensino da Estatística, a saber:

- Ênfase no processo de análise de dados, levando em consideração que o uso de dados faz parte da vida diária das pessoas;
- Reconhecimento da Estatística como um capítulo da Matemática, enfatizando os aspectos conceituais e/ou computacionais;
- Reconhecimento da Estatística como uma ferramenta auxiliar para o estudo de assuntos diversos e disciplinas escolares.

Para os autores os currículos atuais da disciplina de Matemática, a nível internacional, percebem a Estatística a partir de duas perspectivas. A primeira atribui destaque aos aspectos matemáticos da Estatística, principalmente os conceitos, cálculos e demais procedimentos e a segunda enfatiza a análise de dados.

O currículo português se coloca na primeira perspectiva, já o currículo oficial inglês e o americano proposto pelo National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) situam-se na segunda.

Assim sendo, em Portugal a Estatística é tida como um capítulo da Matemática de menor importância, em que se enfatiza apenas a representação de dados, referindo-se superficialmente aos demais “aspectos relativos ao planejamento das investigações e a realização de inferências” (PONTE e FONSECA, 2001, p.21). Em contrapartida, na Inglaterra e nos Estados Unidos entende-se que a mesma integra um processo mais amplo que envolve “a realização de investigações, formulando questões, recolhendo,

representando, organizando e interpretando dados, fazendo inferências e, a partir daí, colocando novas questões e reiniciando o ciclo investigativo”.

Os referidos autores também salientam algumas diferenças entre os documentos curriculares desses três países com relação ao modo como são tratados os conceitos de Estatística. Um desses aspectos distintivos corresponde ao fato de que no currículo português valoriza-se o trabalho com as medidas de tendência central até ao final do 3º ciclo do ensino básico, enquanto que nos documentos americano e inglês atribui-se mais atenção às medidas de dispersão.

Ao analisar as principais semelhanças resultantes dessa comparação, constata-se que os três países compartilham concomitantemente de uma mesma visão a respeito de dois aspectos relacionados ao ensino dos conteúdos estatísticos. O primeiro refere-se ao uso de novas tecnologias para representar e calcular dados, e o segundo diz respeito à realização de experiências envolvendo os próprios alunos, estabelecendo conexão com outros tópicos da matemática e também com outras disciplinas, valorizando assim o caráter interdisciplinar da Estatística.

### **1.3 Estatística: definições**

Partindo da idéia de que a Educação Estatística compreende a utilização social da competência estatística e tem como propósito formar pessoas letradas estatisticamente, ratificamos a definição de Estatística, apresentada por Ponte, Brocardo e Oliveira (2005), que a especifica como sendo

um processo que envolve a realização de investigações, formulando questões, recolhendo, representando, organizando e interpretando dados, fazendo inferências e, a partir daí, colocando novas questões e reiniciando o ciclo investigativo (p.108).

Cabriá (1994 apud BATANERO e GODINO, 2005) complementa com propriedade esta definição ao afirmar que a

Estatística estuda o comportamento dos fenômenos denominados de coletivos. Está caracterizada por uma informação acerca de um coletivo ou universo, o que constitui seu objeto material; um modo próprio de raciocínio, o método estatístico, o que constitui seu objeto formal e algumas previsões de frente com o futuro, o que implica um ambiente de incerteza, que constitui seu objeto ou causa final (p.6).

Na literatura encontra-se uma variedade de termos relacionados à estatística como, por exemplo: letramento estatístico, literacia estatística, estocástica, cultura estatística, raciocínio estatístico, competência estatística, entre outros. Porém, mesmo diante dessa diversidade de expressões, observa-se que o intuito maior é fazer com que as pessoas se tornem letradas estatisticamente, isto é, que consigam desenvolver a cultura estatística. Vale salientar que este desenvolvimento “não surge espontaneamente, pela simples participação na actividade social, pelo que a escola é chamada a desempenhar um papel fundamental na educação dos alunos neste campo” (PONTE e FONSECA, 2001, p.7).

Batanero e Díaz (2005, p.1) definem o termo “cultura estatística” em consonância com o que Gal (2002, p.2-3) denomina de “alfabetização estatística”. Ambas as expressões referem-se à capacidade de interpretar e analisar criticamente a informação estatística, tendo argumentos apoiados em dados de diversos contextos, mas não se limitando a eles, como também ter a capacidade para discutir ou comunicar opiniões.

Segundo Pagan, Leite, Magina e Cazorla (2008) para que de fato se efetive o letramento estatístico, torna-se necessário ao sujeito:

- Ter um conhecimento mínimo acerca de conceitos e idéias estatísticas;
- Dominar alguns procedimentos matemáticos;
- Conhecer o contexto, de modo que se familiarize com a informação estatística;
- Ter comportamento questionador diante da informação estatística.

Para Garfield e Gal (1999a) possuir um pensamento estatístico diz respeito à capacidade de “utilizar ideias estatísticas e atribuir um significado à informação estatística. Por outras palavras, ser capaz de fazer interpretações com base em conjuntos de dados, representações de dados ou mesmo com um resumo dos dados” (p.207).

De acordo com esses mesmos autores (1999b, p.2-3) para que os estudantes apreendam o raciocínio estatístico ou pensamento estatístico é imprescindível que se alcance os objetivos elencados a seguir:

1. Compreensão de como se conduzem e desenvolvem investigações estatísticas: variação, descrição e organização de populações, amostra, inferências da amostra para a população;
2. Compreensão dos processos (etapas) presentes numa investigação estatística: formulação do problema e da pergunta do estudo; planejamento, coleta, organização, exploração, análise dos dados, interpretação e discussão dos mesmos em função das perguntas iniciais;
3. Domínio de procedimentos estatísticos, especificamente a organização de dados, o cálculo de certos índices (medidas de tendência central e de dispersão), a comunicação a partir de diferentes tipos de representações e a aplicação de novas tecnologias;
4. Compreensão de idéias matemáticas presentes nos procedimentos estatísticos: explicar porque o valor da média pode ser afetado pela presença de valores extremos de um conjunto de dados ou o que acontece à média ou à mediana quando os valores sofrem alterações;
5. Desenvolvimento da noção de probabilidade e de incerteza mediante a utilização de atividade de simulação e de discussão, para que os alunos consigam construir idéias acerca de fenômenos imprevisíveis que ocorrem no cotidiano, sobre os quais se podem formar intuições incorretas e retirar conclusões erradas ou tomar decisões menos adequadas;

6. Desenvolvimento da capacidade de comunicar estatisticamente, de utilizar a terminologia estatística de forma crítica, com base na construção de argumentos e da análise exploratória de dados;
7. Desenvolvimento de atitudes estatísticas positivas conseguidas quando se trabalha com os alunos seguindo uma metodologia de investigação.

Nessa perspectiva, podemos dizer que a formação do raciocínio estatístico perpassa pelo conhecimento e compreensão acerca do processo investigativo em múltiplos aspectos, envolve saber interpretar os dados, tirar conclusões, inferir sobre os mesmos e comunicá-los adequadamente fazendo uso de variadas formas para representá-los, como também requer a clareza de que a Estatística envolve lidar muito mais com incertezas do que com as certezas matemáticas.

#### **1.4 A Teoria dos Campos Conceituais**

A Teoria dos Campos Conceituais foi desenvolvida pelo professor e pesquisador Gerard Vergnaud (1986; 1990). Para este autor estudar os processos pelos quais ocorrem a apropriação e transmissão dos conhecimentos matemáticos, como um domínio científico é um movimento de grande importância e que não se restringe a nenhuma ciência específica. Vale salientar, que várias investigações têm sido realizadas tendo por base esta teoria, notadamente, pesquisas no campo da Educação Matemática e da Psicologia Cognitiva.

As idéias teóricas postas por Vergnaud têm contribuído com pesquisadores e professores, no sentido de ajudar os mesmos a compreenderem como são formados e desenvolvidos os conceitos matemáticos por parte dos alunos, mediante a observação de suas estratégias de ação (MAGINA, CAMPOS, NUNES E GITIRANA, 2001).

A teoria cognitivista de desenvolvimento conceitual proposta por Vergnaud (1996, p.118) apresenta o processo de conceitualização como sendo o cerne do desenvolvimento cognitivo (MOREIRA, 2002). A mesma apresenta alguns princípios fundamentais para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem de competências

complexas, principalmente daquelas oriundas das ciências e das técnicas, bem como busca fornecer um quadro teórico coerente mediante o qual é possível analisar, a partir de um mesmo foco, a formação e o funcionamento dos conhecimentos (VERGNAUD, 1990).

A Teoria dos Campos Conceituais parte do princípio de que para compreender o desenvolvimento e a apropriação dos conhecimentos, torna-se necessário estudar uma gama de conjuntos de situações e conceitos. Vergnaud (1986) apresenta como princípio norteador a idéia de que o conhecimento está organizado em campos conceituais e define-os como sendo “um conjunto de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão” (p.84). Ressalta-se que este domínio não ocorre rapidamente, mas se desenvolve ao longo de um período de tempo.

Ao considerar a formação dos conhecimentos, Vergnaud (1986) argumenta que o saber forma-se a partir da resolução de problemas, isto é, de situações a dominar. O mesmo admite a definição de problema enquanto “qualquer situação em que é necessário descobrir relações, desenvolver atividades de exploração, hipóteses e verificação, para produzir uma solução” (p.76).

Compreende-se que os processos cognitivos e as respostas dos sujeitos ocorrem em função das situações com as quais são confrontadas. Nesse sentido, destaca-se o quanto é relevante apresentar aos alunos múltiplas situações, as quais possibilitem ampliar a significação de um conceito, como também coloquem a prova as competências e as concepções dos aprendizes.

Magina et al (2001) afirmam que para descrever e analisar os avanços e conquistas dos alunos no seu processo de aprendizagem e desenvolvimento deve-se levar em consideração duas ferramentas fundamentais: a competência e a concepção, uma vez que ambas são concebidas como sendo duas faces de uma mesma moeda. Os conceitos explícitos e os conhecimentos implícitos promovem a formação da competência que é delineada pela ação do aluno diante das situações (resolução de problemas). Quanto às concepções dos alunos, estas podem ser demonstradas por suas expressões verbais ou outras representações simbólicas.

Dessa forma, percebe-se a necessidade de que o processo de ensino aprendizagem perpassa pela progressiva introdução de situações cada vez mais complexas, as quais sejam constituídas de novos aspectos de um mesmo conjunto de conceitos e casualmente um conceito novo (VERGNAUD, 1986). Tal argumentação é bastante pertinente uma vez que existem diferentes categorias de problemas, as quais recorrem no domínio de propriedades diferentes de um mesmo conceito.

Segundo Magina et al (2001) pesquisadores e professores apresentam dificuldades em compreender um conceito, uma vez que o mesmo não emerge apenas de um tipo de situação, assim como uma simples situação envolve mais de um conceito.

Nessa perspectiva, Vergnaud (1990) afirma em sua teoria que todo conceito é definido por três dimensões, ou seja, a construção do conhecimento está ancorada em três pilares de conjuntos, conhecido como (**S, I, R**):

- **S** → refere-se ao conjunto das *situações* pelas quais se dá sentido ao conceito, ou seja, tornam o conceito significativo;
- **I** → diz respeito ao conjunto de *invariantes* (objetos, propriedades e relações) que podem ser reconhecidos e utilizados pelos sujeitos para analisar e dominar essas situações;
- **R** → corresponde ao conjunto de *representações simbólicas* que podem ser utilizadas para pontuar e representar esses invariantes e, deste modo, representar as situações e os procedimentos para lidar com os mesmos (MAGINA et al, 2001, p. 7).

Em relação a esta última dimensão, consideramos que a multiplicidade de representações apresentadas aos alunos favorece a compreensão de um conceito, uma vez que no processo de conceitualização do real a dimensão representativa exerce um papel muito importante. Nessa perspectiva, Vergnaud (1981) considera que existe uma mediação entre as representações e os objetos do mundo real, enfatizando a necessidade de se estudar um conceito por meio de diversas representações, visto

que estas podem tornar opacos determinados aspectos ou fazer transparecer outros no processo de análise de um mesmo conceito.

Tendo em vista, que o presente trabalho buscou investigar como o conceito de média aritmética é compreendido por alunos e professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, considerando diferentes invariantes, significados e representações, a teoria apresentada por Vergnaud foi escolhida para subsidiar nosso estudo, por considerar que a formação do conceito esta ancorada por estes três pilares de conjuntos (situações, invariantes e representações), contribuindo assim, para compreensão da formação do conceito de média.

### 1.5 Média aritmética

As medidas de tendência central e, a média, em particular, são conceitos elementares da Estatística, a partir das quais são construídas outras medidas.

Na Estatística um conjunto de dados pode ser resumido ou sintetizado por meio de determinadas quantidades chamadas de medidas, dentre as quais podemos destacar as medidas de assimetria, as de dispersão e as de posição. As medidas de posição nos orientam quanto à posição da distribuição em relação ao eixo das abscissas e se subdividem em medidas de tendência central - média, moda e mediana - e medidas de ordenamento - mediana e separatrizes (CAETANO, 2004).

A média aritmética é uma medida de tendência central “que resume e representa um conjunto de dados em um único valor”. Seu cálculo “remete à divisão em partes iguais do todo entre seus componentes. Assim, seu algoritmo consiste em somar todos os valores da variável e dividir pelo número de dados” (CAZORLA e SANTANA 2006, p.18).

O símbolo que representa a média é o  $\bar{x}$ . Ao considerarmos uma série de  $n$  valores de uma variável  $x$ , a média aritmética simples será determinada pela expressão:

$$\bar{x} = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_n)/n$$

Exemplo de média aritmética:

1- Um aluno tirou as notas 6, 7, 9 e 10 em quatro provas.

A sua média será:  $(6 + 7 + 9 + 10) / 4 = 8$

Sabe-se que a média simples é um conceito habitual no nosso dia-a-dia, sendo abordada em variados setores da sociedade, sobretudo no contexto escolar. Há um pouco mais de duas décadas e meia passadas, Pollatsek, Lima e Well (1981) já ressaltavam a utilização frequente da média na vida cotidiana das pessoas, bem como sua importância como um conceito básico da Estatística e da ciência experimental.

Batanero (2000) destaca que o significado desse conceito emerge progressivamente, envolvendo uma classe de problemas dos quais a autora elenca quatro tipos aplicáveis a média, que são os seguintes:

- a estimativa de uma quantidade desconhecida, em presença de erros de medida;
- a obtenção de uma quantidade equitativa a repartir para conseguir uma distribuição uniforme;
- a aplicação de que a média serve de elemento representativo de um conjunto de valores dados, cuja distribuição é aproximadamente simétrica;
- a necessidade de conhecer o valor que se irá obter com maior probabilidade ao contar com um dado faltando em uma distribuição.

Esta classe de problemas é primeiramente de ordem prática e posteriormente de ordem teórica, e conduzem à formalização do referido conceito de média.

O estudo e a caracterização das propriedades desse conceito permitem que de forma progressiva, o conceito de média seja posto em prática na solução de distintas situações-problema.

Strauss e Bichler (1988) enfatizam que o domínio do conceito de média está profundamente relacionado à compreensão de suas propriedades, que são:

- a) A média está localizada entre os valores extremos (valor mínimo  $\leq$  média  $\leq$  valor máximo);
- b) A soma dos desvios a partir da média é zero ( $\sum(X_i - \text{média}) = 0$ );
- c) A média é influenciada por cada um e por todos os valores (média =  $\sum X_i/n$ );
- d) A média não necessariamente coincide com um dos valores que a compõem;
- e) A média pode ser um número que não tem um correspondente na realidade física (por exemplo, o número médio de filhos por casal é de 2,3);
- f) O cálculo da média leva em consideração todos os valores inclusive os nulos e os negativos;
- g) A média é um valor representativo dos dados a partir dos quais ela foi calculada. Em termos espaciais, a média é o valor que está mais próximo de todos os valores.

## **1.6 Estudos sobre média**

Na revisão da literatura encontram-se alguns estudos que têm como cerne de sua questão investigativa o conceito de média. Estas pesquisas estão relacionadas a vários níveis de ensino, a saber: Ensino Fundamental, Ensino Médio e Ensino Superior. Dessa forma, através desses estudos procurou-se identificar aspectos que pudessem contribuir com esta pesquisa, a qual buscou analisar como o conceito de média aritmética é compreendido por alunos e professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, considerando diferentes invariantes, significados e representações.

### **1.6.1 Nos anos iniciais do Ensino Fundamental**

Lima (2005) realizou um estudo no qual se propôs a investigar a introdução do conceito de média aritmética com alunos da 4ª série do Ensino Fundamental de uma escola da rede estadual de ensino da cidade de São Paulo, apoiando-se no desenvolvimento de uma intervenção de ensino, usando o software educacional

*Tabletop* que consiste em um pacote estatístico destinado à organização e manipulação de dados.

Este estudo se baseou em questões que visavam relacionar a introdução do conceito de média aritmética por meio de representações gráficas, usando problemas inseridos no cotidiano dos alunos que compunham a amostra. A autora fez uso de gráficos em um ambiente computacional. Isto ocorreu devido ao entendimento de que a utilização desse ambiente pode favorecer o desenvolvimento de habilidades necessárias à leitura e interpretação de gráficos, como também pode facilitar a construção e reconstrução do gráfico de forma mais rápida. Além disso, o ambiente computacional pode oferecer aos alunos uma representação visualmente mais agradável, e pode oportunizar o desenvolvimento de distintos procedimentos pelos mesmos ao resolverem as atividades propostas.

O que motivou a autora a investigar o uso do software *Tabletop* na situação de sala de aula foi o fato do mesmo apresentar uma flexibilidade para se trabalhar com diferentes representações gráficas e também por considerá-lo adequado à idade das crianças das séries iniciais.

A autora salienta ainda que o *Tabletop* permite inserir etapas de construção e análise do banco de dados. Os dados são organizados primeiramente na forma de tabelas, podendo ser tratados e visualizados sob diferentes representações gráficas.

Outra razão para escolha do *Tabletop* foi pelo fato deste software apresentar características técnico-pedagógicas, as quais se constituem enquanto critérios de exigência para a escolha de softwares, indicados no documento do Programa Nacional de Informática na Educação (PROINFO). Sendo assim, a autora destaca as principais características técnico-pedagógicas apresentadas pelo *Tabletop* tendo por base o referido documento.

- a) incitar a curiosidade; permitir formulação e teste de hipóteses;
- b) evitar tratamentos inadequados aos erros cometidos;
- c) possibilitar interação com o usuário, estimulando o questionamento e tomada de decisões;

- d) favorecer a interdisciplinaridade;
- e) estar em consonância com os parâmetros curriculares nacionais, promovendo sua operacionalização;
- f) favorecer a proposição e a busca de soluções de situações-problema e simulações;
- g) estimular o trabalho cooperativo;
- h) provocar no aluno a análise dos registros do caminho percorrido, suas dificuldades e progressos; (MAGINA, 2000 apud LIMA, 2005).

Segundo Lima (2005) este estudo foi organizado em três fases, o pré-teste, a intervenção de ensino e o pós-teste. De acordo com a proposta de desenvolvimento e aplicação da intervenção de ensino apresentada pela autora foi efetuado a aplicação de pré e pós-testes a dois grupos de alunos. O grupo experimental (GE) constituído pelos alunos que realizaram atividades de intervenção em ambiente computacional e o grupo controle (GC) que não participaram do processo de intervenção em ambiente computacional. Vale salientar que a professora responsável pela turma trabalhou com o grupo controle o conteúdo de média aritmética utilizando sua própria metodologia e planejamento.

A primeira fase desse estudo refere-se à aplicação de um pré-teste nos dois grupos GE e GC, cuja análise forneceu para a autora, relevantes informações a respeito da concepção que os alunos apresentavam sobre o conceito de média, uma vez que estes ainda não haviam estudado o conteúdo. Mediante esta análise foi possível reelaborar as atividades de intervenção previamente preparadas. Na segunda fase foram desenvolvidas as atividades de intervenção no grupo experimental e na terceira fase foi realizada a aplicação no GE e GC de um pós-teste, que possuía equivalência matemática ao pré-teste. Esta última fase objetivava analisar o progresso, ou não, do grupo-experimental em relação ao pré- teste, comparando-o com os resultados alcançados pelo grupo-controle.

A autora constatou na análise intragrupal, ao se estabelecer uma relação entre o pós-teste e o pré-teste, que ocorreu um aumento do número de acertos do grupo

experimental (17,06%) e do grupo controle (5,84%) no que concerne a leitura e interpretação do gráfico de barras, assim como no conceito de média aritmética. Segundo a autora esses resultados podem refletir a influência da intervenção de ensino aplicada em ambiente computacional no grupo experimental.

Para a autora, a leitura e a interpretação de gráficos constituiu-se em um elemento essencial, uma vez que apresentaram influência direta na introdução do conceito de média aritmética, já que os invariantes necessários para sua obtenção (soma dos valores do conjunto e número total de valores do conjunto) precisariam ser retirados dos dados contidos no gráfico, sendo necessária uma correta leitura dos mesmos.

De acordo com a autora, nos problemas em que era demandada a determinação da média, os alunos (31,8%) apresentaram no pré-teste a concepção de média como soma dos valores do conjunto. Todavia, após a intervenção, ocorreu uma diminuição no número desse tipo de resposta (de 22 para 14) e um aumento nas respostas que apresentaram uma concepção de média, na qual se utilizava a soma dos valores do conjunto e o número total de valores, relacionando-os com o algoritmo da média aritmética.

Algumas especificidades que para a autora interferiram na construção do conceito de média simples, trata-se da dificuldade para realizar a leitura dos valores dos dados, que se apresentavam de maneira implícita, no eixo das ordenadas. Tal fato acabou exercendo influência na integração dos dados e, por conseguinte, atrapalhou a determinação da média. A autora sugere que o tipo de gráfico que possuía uma escala não-unitária com valores de alguns dos dados apresentados implicitamente no eixo, parece ter influenciado na determinação da média aritmética.

Outra dificuldade observada, pela autora, diz respeito à compreensão de que ao calcular a média aritmética deve-se considerar o valor nulo, isto é, o zero, quando este aparecer entre os dados do conjunto. Quanto à propriedade de que o valor médio é representativo dos valores, cuja média foi calculada, nas atividades que sugeria a utilização da média para realização de alguma previsão, observou-se que poucos alunos usavam-na diretamente, contudo, notou-se a necessidade dos mesmos de avaliarem a coerência entre o valor obtido e os dados da situação. Vale ressaltar, que

no decorrer da intervenção de ensino vários alunos do grupo experimental apresentaram de forma intuitiva o conceito de moda.

Em relação ao uso do gráfico de dupla entrada, a autora afirma que o mesmo parece dificultar a identificação do total dos valores do conjunto usado na obtenção da média, devido à presença de variável tanto no eixo horizontal como no vertical. Esta característica desse tipo de representação acaba requerendo do aluno a identificação de qual a variável deve ser utilizada para obter o total dos valores do conjunto.

Sendo assim, Lima concluiu que a introdução ao conceito de média aritmética baseada na representação gráfica foi beneficiada pelo uso do software *Tabletop*, uma vez que permitiu aos alunos a descoberta de propriedades e relações entre os elementos constitutivos da leitura e interpretação de gráficos e da média aritmética, já que nas várias situações propostas era exigida a extração dos dados apresentados na forma gráfica.

Outro estudo que merece ser destacado é o de Caetano (2004) em que se buscou investigar o desenvolvimento da leitura e interpretação de gráficos e o conceito de média aritmética por crianças, mediante uma intervenção de ensino em que se utilizou o material manipulativo. A pesquisa foi desenvolvida com alunos de duas classes de 4ª série do Ensino Fundamental de uma escola da rede pública estadual de São Paulo, uma classe formou o grupo controle e a outra o grupo experimental.

Em relação, especificamente, ao conceito de média aritmética, os resultados do pré-teste indicaram que a maioria dos alunos tinha como sinônimo de média aritmética o valor total dos dados do gráfico ou o valor assumido pela variável na barra ou categoria localizada no meio do gráfico.

No início da intervenção, esta autora constatou que os alunos apresentavam dificuldade para identificar os invariantes operatórios da média aritmética (total dos valores da variável e quantidade desses valores). Posteriormente, a autora, observou através dos resultados obtidos no pós-teste uma melhora no desempenho dos alunos, uma vez que cerca de 50% deles conseguiram calcular a média aritmética e alguns justificaram suas respostas discriminando os seus invariantes operatórios.

Quanto às propriedades levantadas por Strauss e Bichler (1988) trabalhadas na intervenção de ensino, a autora salienta que a de mais fácil percepção foi a “C” (o valor

médio pode ser influenciado pelos valores de cada um dos dados) e a que os alunos demonstraram maior dificuldade foi a “F” (tem-se que ter em conta os valores nulos no cálculo da média). Vale destacar que a propriedade “G” (a média é um valor representativo dos dados a partir dos quais ela foi calculada) apresentou um elevado grau de dificuldade para estes alunos.

Estudos realizados com alunos mais velhos, que fazem parte do ensino secundário e universitário, também apresentam incompreensões relacionadas ao conceito de média aritmética. Consideramos importante compreender essas dificuldades, para refletirmos sobre o que pode ser desenvolvido nos anos iniciais de escolarização, e como contribuir para que os alunos compreendam melhor o conceito de média.

### **1.6.2 No Ensino Médio e Superior**

Cazorla (2002) buscou investigar a compreensão de graduandos, que cursavam a disciplina Estatística em uma universidade no interior da Bahia, relacionada ao conceito de média aritmética e a compreensão de gráficos de barras e de linhas. A autora observou que os sujeitos: conheciam o algoritmo da média simples e algumas propriedades; conseguiram solucionar problemas no sentido reverso. A autora também constatou uma correlação significativa entre o domínio de média aritmética e o nível na leitura de gráficos.

Em relação à atividade que envolvia o conhecimento acerca das propriedades da média, a mesma consistia em obter a média ao se incorporar um novo valor ao conjunto de dados já existente. De acordo com os resultados esta questão foi respondida corretamente por quase 80% dos sujeitos tanto no pré-teste quanto no pós-teste. O erro mais observado se deu devido ao fato de se ignorar o novo dado e calcular a média dos números novamente. Segundo a autora, os universitários apresentaram um desempenho regular com relação ao domínio do conceito de média e um baixo desempenho concernente a leitura de gráficos. Nesse sentido, Cazorla argumenta que é necessário se ater mais ao conceito de média, particularmente ao processo de

ponderação e algumas propriedades como, por exemplo: o cálculo da média inclui todos os valores da variável, inclusive os valores zeros e os negativos e, os desvios positivos dos valores da variável em relação à média anulam os desvios negativos, conceito que origina a variância e o desvio padrão, como medidas de variabilidade.

Ressalta-se então, a importância do papel da instrução na ampliação do desenvolvimento de habilidades estatísticas, tendo em vista as exigências do mundo atual, que é permeado pela informação.

Mayén, Cobo, Batanero e Balderas (2007) investigaram a compreensão de estudantes mexicanos, que estavam finalizando o ensino secundário, sobre diferentes elementos do significado das medidas de tendência central. O estudo foi realizado mediante a aplicação de um questionário a 125 estudantes mexicanos de 17 e 18 anos, de sete centros de ensino público.

Em relação à média, os resultados obtidos indicaram a existência de dificuldades como: reconhecer que a média é pouco resistente quando há valores atípicos e que todos os valores de uma dada distribuição influenciam no cálculo da média.

Por outro lado, foi observado que os estudantes mexicanos apresentaram facilidade em reconhecer os problemas de estimar uma quantidade desconhecida e os que solicitam efetuar uma repartição equitativa, como sendo associados à média aritmética, compreender termos ou símbolos relacionados com as médias, calcular a média simples, entender o algoritmo de cálculo de média, realizar a inversão para encontrar uma distribuição com média dada, reconhecer o efeito do zero sobre o valor da média, reconhecer que a soma dos desvios acima e abaixo da média se compensa.

Diante dessa constatação, os autores sugerem o desenvolvimento da cultura estatística desses estudantes e que se promova o enriquecimento do ensino mediante a utilização de atividades mais próximas a vida cotidiana dos mesmos, uma vez que a contextualização poderá ajudá-los ao se depararem com situações em sua vida diária e profissional em que seja necessário interpretar e trabalhar com as medidas de tendência central.

Stella (2003) constatou que alunos do 3º ano do Ensino Médio de São Paulo apresentam um bom desempenho com problemas que envolvem a média ponderada. Segundo a autora, a maioria dos alunos, que participou da investigação, apresentou

uma interpretação algorítmica do conceito de média, o que pode justificar as dificuldades para resolverem problemas que envolviam o cálculo de média com dados apresentados na forma gráfica.

A autora ressalta que o ensino da média e das medidas de tendência central não deve envolver apenas situações em que o aluno aplique o algoritmo e já obtenha o resultado, mas que sejam propostas situações-problema em que o estudante seja levado a construir a distribuição de dados, identificando possíveis conjuntos de dados a partir de uma determinada média. Argumenta-se que os gráficos tiveram um papel importante nestes tipos de problemas, uma vez que os resultados de sua pesquisa indicaram que os mesmos ajudam na compreensão dos aspectos da média quando são utilizados como ferramentas de construção, não se restringindo a apresentação desse tipo de representação somente para leitura e interpretação.

Anjos e Gitirana (2008) analisaram o tratamento dado a média aritmética nos livros didáticos das séries finais do Ensino Fundamental. A análise foi realizada em todas as 16 coleções de livros didáticos, referentes a estas séries, aprovadas pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) em 2008.

Os autores observaram que a propriedade da média (a média é influenciada por cada um e por todos os valores) foi trabalhada em quase todas as atividades (98,5%) relacionadas à média aritmética. O número de atividades em que a média aritmética encontrada não coincidia com um dos valores do conjunto foi de aproximadamente 75%, o que contribui para busca de um significado interpretativo para média encontrada pelo aluno.

Constatou-se, ainda, que em apenas 15% das atividades a média aritmética representou um valor que pode não ter um correspondente na realidade física. Em 12,5% das atividades analisadas foi utilizado algum valor nulo ou negativo no cálculo da média e só em 6% das atividades a média foi utilizada enfatizando o seu aspecto representativo.

Diante disso, as autoras salientam que a visão da média aritmética como sendo um conteúdo básico e de fácil compreensão precisa ser revista, pois os alunos apresentam inúmeras dificuldades na sua utilização e compreensão.

Apesar dos estudos citados anteriormente versarem sobre a temática das medidas de tendência central, seja abordando-as de forma conjunta, seja enfocando especificamente, uma das medidas de posição central, em especial a média, constatamos que poucas se destinaram a investigar os sujeitos nos primeiros anos de escolaridade. Supõe-se que a existência desta lacuna se deve a recente inclusão, do ensino de Estatística no currículo brasileiro, já a partir dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

A partir das constatações apresentadas referentes ao processo de ensino-aprendizagem de habilidades e conceitos elementares relativos à Estatística, percebe-se a necessidade de se buscar desenvolver o letramento estatístico nos alunos, sejam eles crianças ou adultos, desde os anos iniciais de escolarização.

Nesse sentido, acreditamos que a aprendizagem da Estatística envolve desde o desenvolvimento de habilidades de interpretação, incluindo a inferência, a construção de variadas representações a partir de dados produzidos ou coletados, como também a compreensão das medidas de tendência central, as mais usuais como a média, moda e mediana.

Se os dados estatísticos, em geral, são apresentados através de tabelas e/ou gráficos é coerente pensar que os alunos devem aprender desde cedo como a partir da leitura e interpretação dessas representações é possível obter outros conceitos como as medidas de tendência central e também fazer previsões para o futuro. Vale destacar, a importância do domínio da leitura e interpretação de tabelas e gráficos ao se trabalhar as medidas de tendência central a partir dessas representações.

### **1.7 A formação do professor para o ensino de Estatística**

Atualmente, ainda se questiona se a formação recebida pelos professores, seja inicial ou continuada, tem verdadeiramente subsidiado os mesmos para o ensino da Estatística. As lacunas existentes na formação concernente ao trabalho com essa área do conhecimento exigem uma ação enérgica voltada à melhoria do processo formativo desses profissionais.

Uma das formas de subsidiar o docente para o ensino de Estatística perpassa pelo acesso as publicações científicas, sendo essencial sabermos o que tem sido produzido a respeito deste novo campo, e de modo especial, o que tem sido publicado sobre esta temática para a prática de ensino, sobretudo nos anos iniciais.

Nesse sentido, Batanero, Godino, Green, Holmes e Vallecillos (1994) ressaltam que a ênfase dada ao trabalho com a Estatística requer uma intensa preocupação com a formação dos docentes. Sendo assim, para que a instituição escolar venha de fato a formar cidadãos críticos mediante a aprendizagem dos saberes estatísticos, é necessário dentre outras coisas, que o professor seja devidamente preparado no decorrer de toda a sua formação, ou seja, permanentemente, obtendo assim contribuições que permitam a sua qualificação para o ensino.

Nessa perspectiva, Guimarães, Gitirana, Marques e Cavalcanti (2007) ao realizarem um Estado da Arte em anais de congressos e periódicos científicos nacionais, no período de 2001 a 2006, encontraram 51 publicações em anais de congressos, referentes à Educação Estatística nos anos iniciais do Ensino Fundamental e apenas sete artigos em periódicos científicos. Demonstrando assim, a necessidade de maiores investimentos em publicações brasileiras, especificamente, em periódicos devido à escassez revelada nesse estudo.

Compreende-se o quanto é importante que professores tenham domínio e clareza conceitual acerca dos conteúdos estatísticos elementares e suas especificidades, sobretudo saber como ensiná-los gradualmente no decorrer dos anos de escolaridade. A apropriação desses requisitos por estes profissionais poderá contribuir na proposição de estratégias didáticas que venham facilitar a aprendizagem de tais conceitos e habilidades relacionados à Estatística.

### **1.7.1 Estudos com Pedagogos**

Marques e Guimarães (2008) realizaram um estudo que buscou analisar um processo de formação inicial de graduandos de Pedagogia, o qual visava articular teoria e prática a partir da proposição, execução e análise de uma pesquisa de intervenção

realizada pelos graduandos/professores, a qual versava acerca de conceitos e habilidades pertencentes à Educação Estatística. Neste estudo foram realizadas análises de 23 relatórios de aulas elaborados e executados por graduandos que cursaram uma disciplina de estágio, denominada de Pesquisa e Prática Pedagógica IV, na Universidade Federal de Pernambuco - UFPE e entrevistas com as professoras de duas turmas da referida disciplina.

Os resultados obtidos pelas autoras revelam a importância do ato de planejar enquanto estratégia formativa, uma vez que os graduandos perceberam a necessidade de se planejar as aulas e as professoras da disciplina a viabilidade do uso do planejamento enquanto estratégia de formação de professores.

Observou-se ainda que na execução das aulas os graduandos buscaram desenvolver situações de ensino em que foram levados em consideração os conhecimentos prévios dos alunos, o trabalho em grupos, a busca pela participação efetiva dos alunos, o estímulo à argumentação, a contextualização dos conteúdos trabalhados com a realidade dos alunos, a adequação dos recursos didáticos utilizados, dentre outros. Entretanto, as autoras constataram a existência de uma superficialidade nas análises referentes à aprendizagem dos conhecimentos matemáticos e das mediações realizadas nesse processo.

Ressalta-se, assim, a necessidade de se buscar, intensamente, processos de formação que valorizem o professor pesquisador enquanto aquele que pesquisa o processo de ensino-aprendizagem em sua sala de aula, a aprendizagem dos alunos e as relações desta com sua mediação enquanto professor.

Diante disto, torna-se fundamental observar os estudos que investigam o desempenho de Pedagogos em relação aos conceitos estatísticos de média, moda e mediana.

Gonçalez (2002) realizou um estudo com 1096 estudantes universitários dos primeiros anos do curso de Pedagogia de uma Universidade Particular de Campinas e de São Paulo buscando verificar as atitudes dos mesmos em relação à Estatística, o desempenho e a utilização do computador como mais um instrumento facilitador da aprendizagem. Os resultados revelaram que 49% dos estudantes apresentavam

atitudes negativas. Preocupado com esse alto percentual, Gonzalez buscou investigar possíveis soluções para minimizar a ocorrência dessas atitudes.

Posteriormente, propôs a um grupo de 259 estudantes do curso de Pedagogia da região de Campinas o uso do computador durante as aulas de Estatística, levando os mesmos a vivenciarem situações de organização de dados mediante o uso de programas computacionais, no intuito de que conseguissem compreender de forma mais significativa conceitos como o de média, moda e mediana. O autor observou que esses alunos mudaram suas posturas em relação à estatística e, ainda, aprenderam vários conceitos estatísticos.

De acordo com Lopes (1998) torna-se necessário considerar que as raízes da Estatística procedem das diferentes áreas do conhecimento, e que esse reconhecimento remete-nos ao seu caráter interdisciplinar. Desse modo, “vislumbramos o ensino da Estatística assumindo um papel de instrumento de operacionalização, de integração entre diversas disciplinas e mesmo entre diferentes temas dentro da própria Matemática” (p.27).

Magina, Cazorla, Gitirana e Guimarães (2008) analisaram as concepções de estudantes e professores que atuam nos anos iniciais do Ensino Fundamental na cidade de São Paulo sobre o conceito de média. Neste estudo foi aplicado um teste a 287 estudantes e professores, sendo 54 alunos da 4ª série e 47 da 5ª série do ensino fundamental, 61 estudantes iniciantes e 82 concluintes do curso de Pedagogia, e 43 professores das séries iniciais do ensino fundamental.

A partir da análise dos resultados, observou-se a falta de compreensão dos sujeitos sobre as propriedades da média enunciadas por Strauss e Bichler (1988). Segundo as autoras, os sujeitos consideraram a média como sendo a soma dos valores da variável. Esta compreensão, considerada inválida estatisticamente, foi encontrada com maior frequência entre os alunos da 4ª série, decrescendo entre os alunos concluintes do curso de graduação em Pedagogia e desaparecendo no grupo dos professores.

As autoras constataram que foi comum os alunos mais jovens confundirem a média com o valor máximo dos dados, o que parece ter relação com a falta de compreensão de que a média só pode tomar valores entre os extremos. Outra

incompreensão apresentada por vários sujeitos foi a ideia de que a média tem que coincidir com pelo menos um dos valores do conjunto de dados, ignorando que a média pode tomar qualquer valor, mesmo que não tenha um referente físico no mundo real.

De acordo com as autoras, a média se apresentou como um conceito difícil de ser compreendido, havendo uma maior apropriação do mesmo em função da escolaridade, entretanto observou-se também que professores em pleno exercício ainda apresentam concepções, sem validade estatística.

Portanto, conscientes da necessidade eminente de se efetivar a construção do conhecimento estatístico, tanto por adultos como por crianças, é de suma importância que os professores tenham domínio e clareza sobre as suas características e de como tais conteúdos devem ser ensinados progressivamente. Para isso, torna-se essencial que na sua formação inicial e continuada estes, tomem consciência a respeito da complexidade dos conceitos estatísticos, incluindo os mais simples, cujo significado deve ser construído gradualmente. Assim, o conhecimento desses aspectos poderá contribuir na proposição de estratégias didáticas que venham facilitar a aprendizagem dos conceitos e habilidades relacionados à Estatística, bem como o seu aprofundamento no decorrer da escolarização.

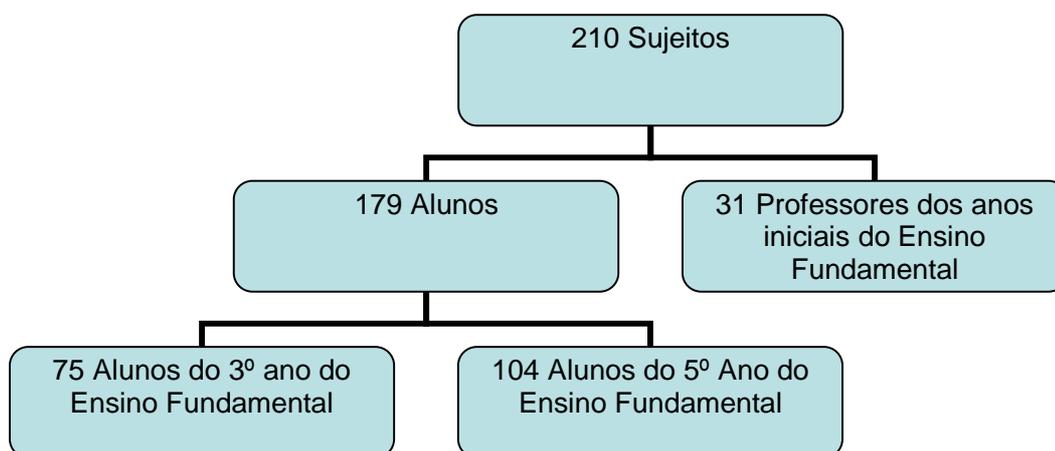
## CAPÍTULO 2

### METODOLOGIA

O presente estudo buscou investigar como o conceito de média aritmética é compreendido, por alunos e professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, considerando diferentes invariantes, significados e representações.

#### 2.1 Participantes

Participaram desse estudo 210 sujeitos, sendo 75 alunos do 3º ano e 104 alunos do 5º ano do Ensino Fundamental, bem como 31 professores desse mesmo nível de ensino, conforme demonstra o esquema a seguir:



Os grupos investigados (professores, alunos do 3º ano e alunos do 5º ano) faziam parte de seis escolas públicas do Município de Moreno - Pernambuco, nas quais foi realizada a aplicação do instrumento diagnóstico. Os 31 professores pertenciam a

seis escolas diferentes (A, B, C, D, E, F), os 75 alunos do 3º ano a quatro escolas (A, B, D, E) e os 104 alunos do 5º ano faziam parte de três escolas distintas (A, C, D).

Optou-se por investigar esses anos específicos de escolaridade, pelo fato dos alunos dos 3º e 5º anos estarem finalizando o primeiro e o segundo ciclos do Ensino Fundamental, respectivamente.

## **2.2 Procedimento**

Solicitou-se que os alunos do 3º e 5º ano do Ensino Fundamental respondessem, individualmente, a uma série de sete questões. Os professores também responderam as mesmas questões que os alunos.

A coleta de dados foi realizada com cada um dos professores nas suas respectivas salas de aula ou na sala dos professores, os alunos do 5º ano também responderam ao teste em suas salas de aula. Os alunos do 3º ano apresentaram dificuldades de leitura, por isso foi feita a leitura de cada uma das questões pela pesquisadora para pequenos grupos, que responderam ao teste em outros ambientes como: sala dos professores, biblioteca, laboratório de informática.

## **2.3 Instrumento Diagnóstico**

Inicialmente, vale destacar que esse estudo baseou-se na ideia de formação do conceito criada por Vergnaud (1990). Quanto à formação do conceito, entende-se como uma tríade de três conjuntos distintos compreendendo o conjunto de situações, invariantes e representações.

Dessa forma, nossa apreciação perpassa pelos invariantes, significados e representações simbólicas relacionados ao conceito de média.

Em relação aos invariantes, este estudo teve por base no estudo de Strauss e Bichler (1988) no qual os autores levantam sete propriedades da média, que são as seguintes:

- a) A média está localizada entre os valores extremos  
(valor mínimo  $\leq$  média  $\leq$  valor máximo);
- b) A soma dos desvios a partir da média é zero ( $\sum(X_i - \text{média}) = 0$ );
- c) A média é influenciada por cada um e por todos os valores (média =  $\sum X_i/n$ );
- d) A média não necessariamente coincide com um dos valores que a compõem;
- e) A média pode ser um número que não tem um correspondente na realidade física (por exemplo, o número médio de filhos por casal é de 2,5);
- f) O cálculo da média leva em consideração todos os valores inclusive os nulos e os negativos;
- g) A média é um valor representativo dos dados a partir dos quais ela foi calculada. Em termos espaciais, a média é o valor que está mais próximo de todos os valores.

Nesse sentido, analisou-se a compreensão dos grupos com relação a seis dos setes invariantes levantados por Strauss e Bichler (1988). Só não manipulamos o invariante “b” (a soma dos desvios a partir da média é zero).

No que concerne aos significados, esta pesquisa baseia-se no estudo de Batanero (2000), no qual a autora elenca quatro significados do conceito de média, a saber:

- a estimativa de uma quantidade desconhecida, em presença de erros de medida;
- a obtenção de uma quantidade equitativa a repartir para conseguir uma distribuição uniforme;
- a aplicação de que a média serve de elemento representativo de um conjunto de valores dados, cuja distribuição é aproximadamente simétrica;
- a necessidade de conhecer o valor que se irá obter com maior probabilidade ao contar com um dado faltando em uma distribuição.

Desta forma, verifica-se a compreensão dos grupos investigados em relação aos significados do conceito de média.

Quanto às representações simbólicas verificou-se a compreensão dos professores e alunos do 3º e 5º ano do Ensino Fundamental sobre o conceito de média aritmética a partir de questões em que os dados foram apresentados por meio de gráficos de colunas e enunciados escritos.

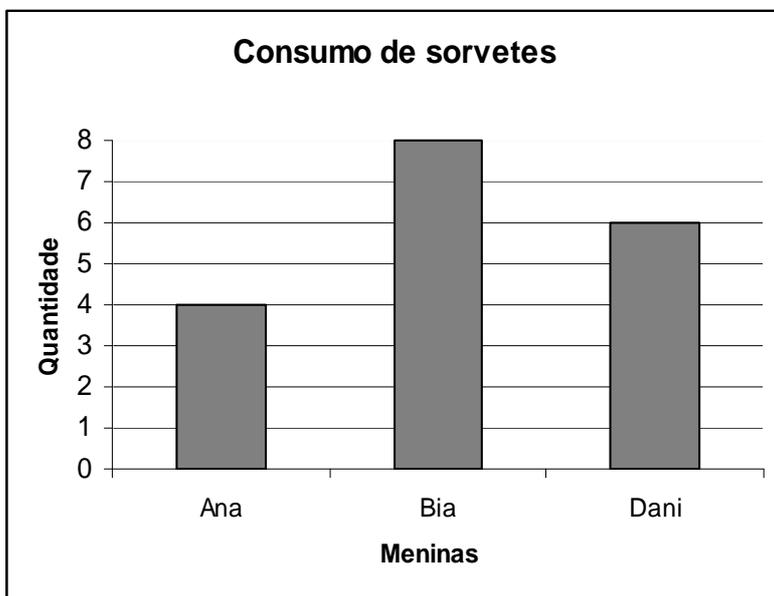
Salienta-se que o instrumento diagnóstico foi constituído por dois tipos de teste (A e B), contendo cada teste sete questões. Os testes apresentavam equivalência entre os invariantes e significados apresentados em cada questão, mas variavam o tipo de representação entre gráfico de colunas ou enunciado escrito.

### **2.3.1 Disposição das questões**

#### **Questão 1**

Em relação à primeira questão, ressalta-se que a mesma foi constituída de duas indagações, a primeira denominamos de Questão 1 e a segunda de Questão1A.

A Questão 1 solicitava que os grupos obtivessem a média aritmética, admitindo-a como uma quantidade equitativa a repartir para conseguir uma distribuição uniforme (significado), bem como que a média é influenciada por cada um e por todos os valores (invariante). Quanto à Questão 1A, requeria-se que os grupos reconhecessem que ao se acrescentar mais um valor ao conjunto de dados, apresentados na Questão 1 (Teste A e B), a média seria alterada. Vejamos a referida questão nos dois tipos de teste:

**Questão 1 (Teste A):**

Se essas meninas tivessem tomado a mesma quantidade de sorvetes, quantos cada uma teria tomado, ou seja, qual a média de sorvete tomado por essas meninas?

**Resposta: 6.**

**Questão 1A:**

Se uma delas tivesse tomado mais 1 sorvete, iria alterar a média de sorvete tomado por cada uma? Por quê?

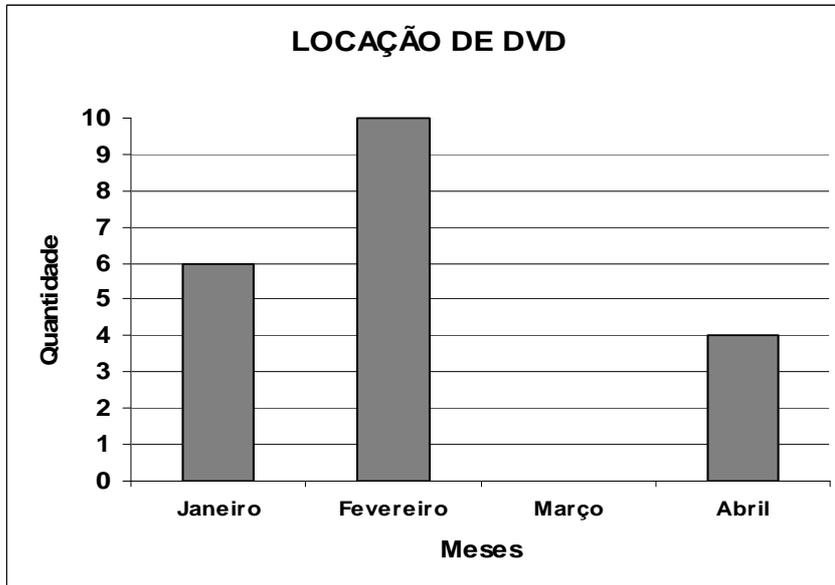
**Questão 1 (Teste B):** Em um campeonato de futebol o time de Pedro disputou três jogos. Em cada partida a quantidade de gols foi diferente: 3, 7 e 5 gols. Em média quantos gols foram marcados por partida, ou seja, se tivessem marcado a mesma quantidade de gols em cada uma das partidas, quantos gols seriam? **Resposta: 5.**

**Questão 1A:** Se o time de Pedro tivesse marcado mais um gol, a média de gols marcados por partida seria alterada? Por quê?

A Questão 2 refere-se a ideia de média como uma quantidade equitativa a repartir para conseguir uma distribuição uniforme (significado) e que a mesma leva em consideração, ao ser calculada, os valores nulos (invariante). Vejamos esta questão nos dois tipos de teste:

**Questão 2 (Teste A):** Alana, Natália, Vivi e Bruna são amigas e gostam muito de brincar de boneca. Alana tem 6 bonecas, Natália 4, Vivi não tem nenhuma e Bruna tem 2 bonecas. Se essas meninas tivessem a mesma quantidade de bonecas, quantas cada uma teria, ou seja, qual a média de bonecas desse grupo de meninas?

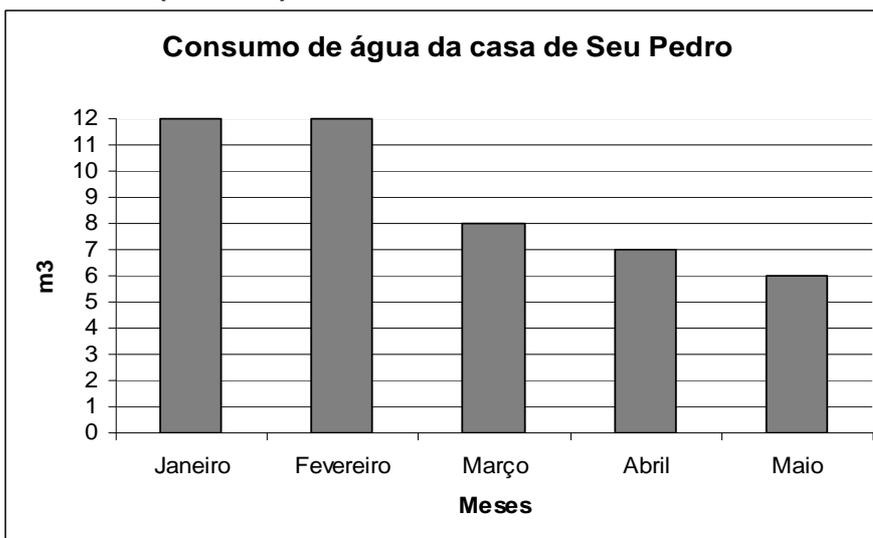
**Resposta: 3.**

**Questão 2 (Teste B):**

Qual a quantidade média de DVD's locados por Felipe por mês, ou seja, se ele tivesse locado a mesma quantidade de DVD's por mês, quantos DVD's ele teria locado?

**Resposta: 5.**

A Questão 3 requeria o cálculo da média aritmética, reconhecendo-a como elemento representativo de um conjunto de valores com distribuição aproximadamente simétrica (significado); e que a mesma não necessariamente coincide com um dos valores que a compõem (invariante). Observemos a mencionada questão nos dois tipos de teste:

**Questão 3 (Teste A):**

Qual o consumo médio mensal de água dessa casa?

- a)  $12 \text{ m}^3$
- X** b)  $9 \text{ m}^3$
- c)  $8 \text{ m}^3$
- d)  $45 \text{ m}^3$

**Questão 3 (Teste B):** João realizou cinco ligações de seu celular. Na 1ª ligação ele gastou R\$ 8,00, na 2ª R\$ 7,00, na 3ª R\$ 4,00, na 4ª R\$ 3,00 e na 5ª ligação ele gastou R\$ 3,00. Quantos reais João gastou em média por ligação?

- a) R\$ 3,00  
b) R\$ 4,00  
c)  R\$ 5,00  
d) R\$ 25,00

Foi solicitado na Questão 4, que a partir de uma média dada fossem identificados os possíveis conjuntos de dados que correspondessem a referida média. Para tal, demandava-se o entendimento da média como elemento representativo de um conjunto de valores com distribuição aproximadamente simétrica (significado) e também enquanto um valor representativo dos dados a partir dos quais ela foi calculada (invariante). Salienta-se que para criação das alternativas de respostas apresentadas na Questão 4, tomamos por base o estudo de Magina et al (2008), o qual apresenta algumas concepções, sem validade estatística, relacionadas à média.

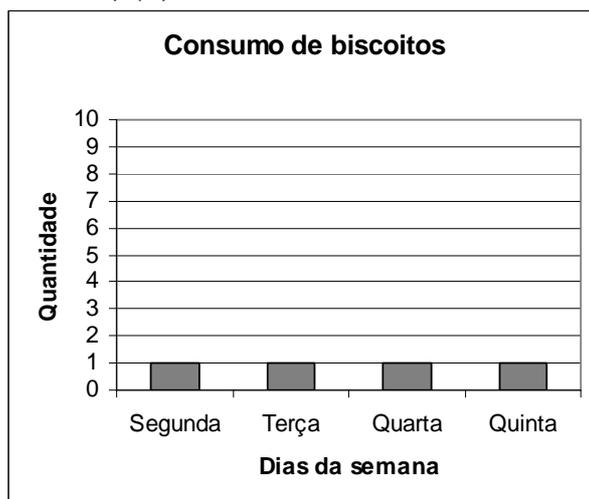
Na alternativa “a” os valores que compõe o conjunto de dados são constantes e a soma dos mesmos é igual ao valor da média; na “b” os valores são distintos e o conjunto de dados corresponde à média apresentada na questão; na “c” os valores são constantes e iguais ao valor da média, correspondendo à média descrita na questão; na “d” os valores são múltiplos do valor da média; na “e” os valores são distintos e não ultrapassam o valor da média; a “f” os valores são diferentes e um dos valores ultrapassa o valor da média. Atentemos para dita questão nos dois tipos de teste:

**Questão 4 (Teste A):** Marcos obteve no final do ano a média 4 em Geografia. Coloque V (Verdadeiro) ou F (Falso) para as possíveis notas recebidas por Marcos nas quatro unidades do ano letivo:

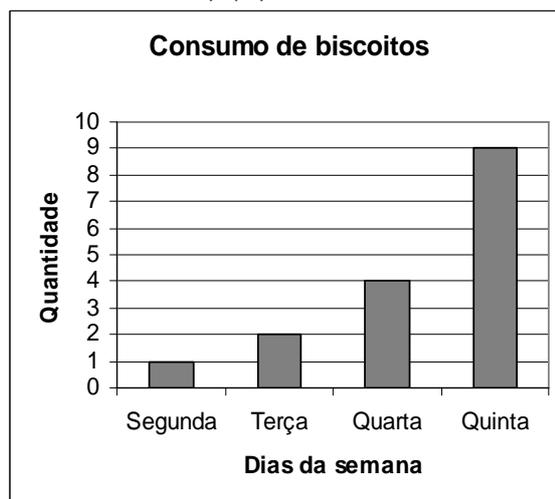
- a) (F) 1, 1, 1, 1  
b) (V) 1, 2, 4, 9  
c) (V) 4, 4, 4, 4  
d) (F) 1, 2, 4, 8  
e) (F) 1, 2, 3, 4  
f) (F) 1, 2, 4, 10

**Questão 4 (Teste B):** Mariana come em média 4 biscoitos por dia. Coloque V (Verdadeiro) ou F (Falso) para as possíveis quantidades de biscoitos que ela comeu em cada dia:

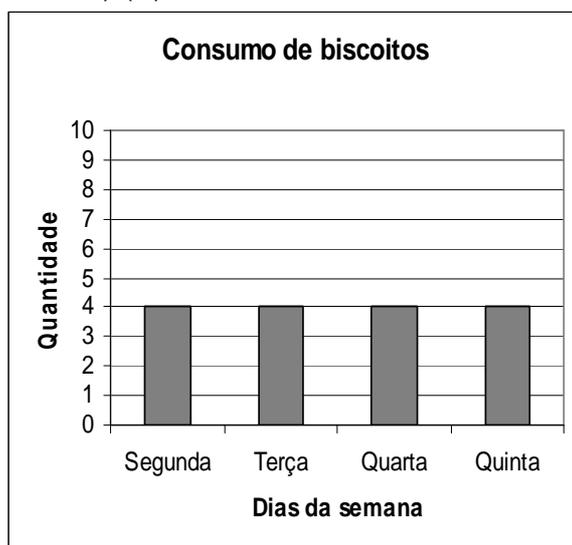
a) (F)



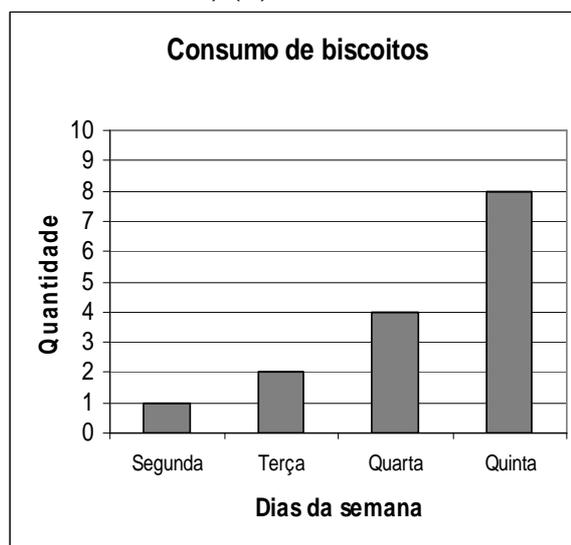
b) (V)



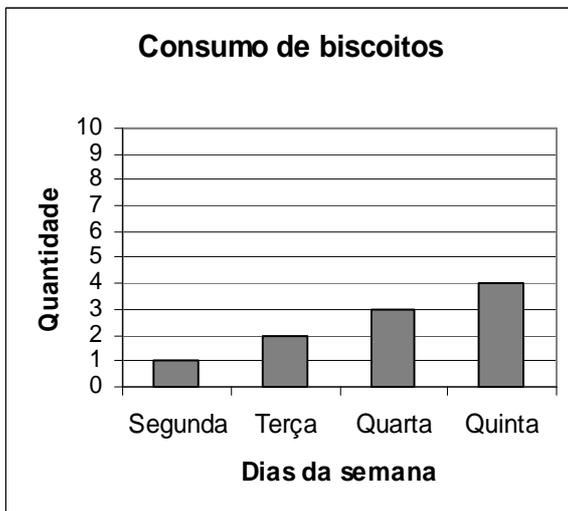
c) (V)



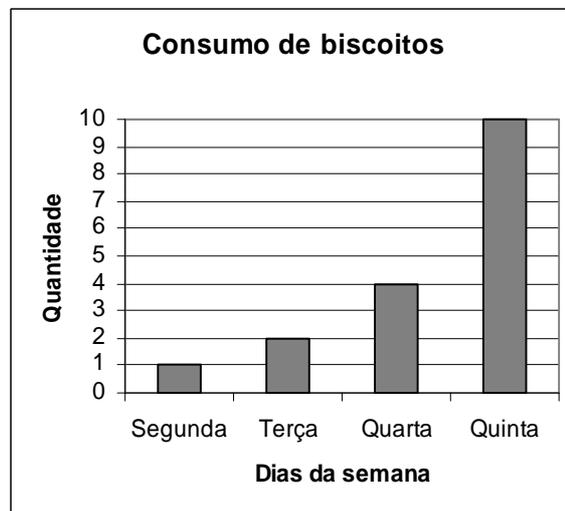
d) (F)



e) (F)

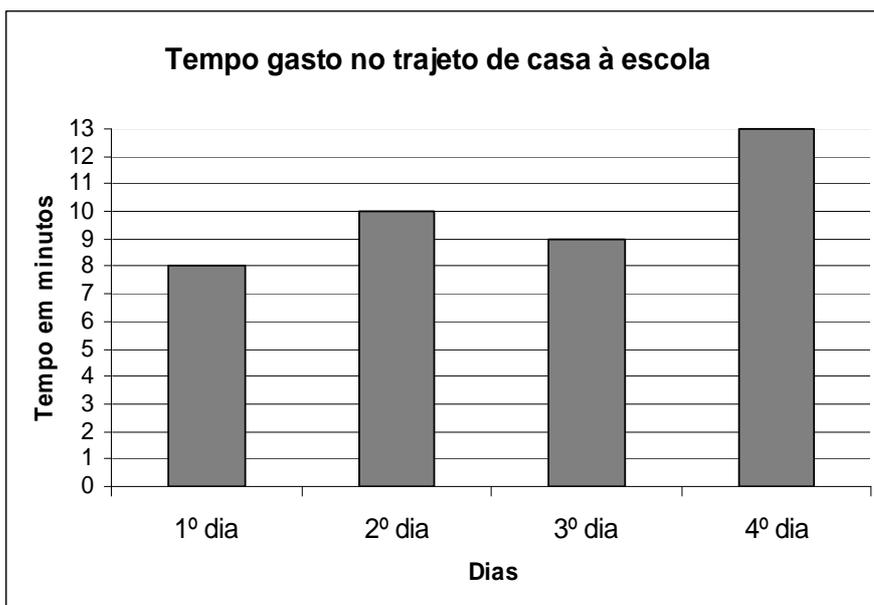


f) (F)



A Questão 5 requeria a obtenção da média aritmética, entendendo-a como uma estimativa de uma quantidade desconhecida em presença de erros de medida (significado), como também que a média é influenciada por cada um e por todos os valores (invariante). Vejamos a citada questão nos dois tipos de teste:

#### Questão 5 (Teste A):



Qual seria a melhor estimação de tempo gasto para percorrer o trajeto de casa à escola?

**Resposta: 10.**

**Questão 5 (Teste B):** Na feira quatro vendedores resolveram saber quanto pesava uma uva. Cada um pesou na sua própria balança e acharam os seguintes resultados em gramas: 10, 9, 11, 6. Qual seria a melhor estimativa do peso real da uva? **Resposta: 9.**

A Questão 6 pedia o cálculo da média aritmética, admitindo que a mesma tratasse de um elemento representativo de um conjunto de valores com distribuição aproximadamente simétrica (significado), como também pode ser um número que não tem sentido na vida real (invariante). Observemos a referida questão nos dois tipos de teste:

**Questão 6 (Teste A):** Flávio trabalhava em uma loja de eletrodomésticos. No primeiro dia de trabalho ele entregou 4 geladeiras, no segundo 5, no terceiro 7 e no quarto 6. Qual foi a média de geladeiras entregues nesses dias? **Resposta: 5,5.**

**Questão 6 (Teste B):**



Qual foi a média de nascimento de cães por ano?

**Resposta: 8,5.**

A Questão 7 solicitava o reconhecimento da média como valor que se irá obter com maior probabilidade ao contar com um dado faltando em uma distribuição (significado). Também envolvia a ideia de que a média está localizada entre os valores extremos (invariante). Vejamos, a seguir, a Questão 7 nos dois tipos de teste:

**Questão 7 (Teste A):**



Cinco pessoas pegaram um elevador. Este elevador suporta até cinco pessoas com peso médio de 70 kg. Qual seria o peso mais provável da quinta pessoa?

**Resposta: 70 Kg.**

**Questão 7 (Teste B):** O peso médio dos alunos da primeira série é de 20 Kg. Separamos 5 alunos que pesam: 22, 18, 17 e 21. Qual seria o peso mais provável do quinto aluno? **Resposta: 20 Kg.**

## **CAPÍTULO 3**

### **O QUE SABEM ALUNOS E PROFESSORES DOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL SOBRE MÉDIA ARITMÉTICA?**

Neste capítulo delinearemos a análise dos resultados da diagnose realizada. Primeiramente apresentaremos a análise quantitativa que foi realizada, mediante a utilização de um software estatístico denominado Statistical Package for Social Sciences – SPSS. Posteriormente apresentaremos a análise de cunho qualitativo que versa sobre a análise das estratégias apresentadas pelos grupos investigados ao resolverem sete questões envolvendo o conceito de média aritmética.

O objetivo deste estudo foi investigar como o conceito de média aritmética é compreendido, por alunos e professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, tendo por base a ideia de formação do conceito criada por Vergnaud (1990), a qual entende que um conceito compreende um conjunto de situações, invariantes e representações.

Ressalta-se que o instrumento diagnóstico foi formado por dois tipos de testes (A e B), compostos por sete questões. Cada questão envolvia um mesmo significado e invariante em ambos os testes, porém o tipo de representação variava entre gráfico de colunas e enunciado escrito. Através de tal manipulação buscou-se analisar a compreensão dos grupos investigados em relação aos significados e invariantes do conceito de média, bem como se o tipo de representação pelo qual os dados foram apresentados exercia influência na compreensão do referido conceito. Tivemos também o intuito de verificar as possíveis diferenças em função da escolaridade.

O Quadro 1, a seguir, apresenta os aspectos sobre os quais versa cada questão do instrumento diagnóstico.

Quadro1. Aspectos abordados em cada questão do instrumento diagnóstico

Questões	Representações		Significados	Invariantes
Q1e Q1A	Teste A	Gráfico de colunas	Média como uma quantidade equitativa a repartir para conseguir uma distribuição uniforme	A média é influenciada por cada um e por todos os valores
	Teste B	Enunciado escrito		
Q2	Teste A	Enunciado escrito	Média como uma quantidade equitativa a repartir para conseguir uma distribuição uniforme	A média considera todos os valores inclusive os nulos (não foram manipulados valores negativos)
	Teste B	Gráfico de colunas		
Q3	Teste A	Gráfico de colunas	A média serve de elemento representativo de um conjunto de valores com distribuição aproximadamente simétrica	A média não necessariamente coincide com um dos valores que a compõem
	Teste B	Enunciado escrito		
Q4	Teste A	Enunciado escrito	A média serve de elemento representativo de um conjunto de valores com distribuição aproximadamente simétrica	A média é um valor representativo dos dados a partir dos quais ela foi calculada
	Teste B	Gráfico de colunas		
Q5	Teste A	Enunciado escrito	Estimativa de uma quantidade desconhecida em presença de erros de medida	A média é influenciada por cada um e por todos os valores
	Teste B	Gráfico de colunas		
Q6	Teste A	Enunciado escrito	A média serve de elemento representativo de um conjunto de valores com distribuição aproximadamente simétrica	A média pode ser um número que não tem um correspondente na realidade física
	Teste B	Gráfico de colunas		
Q7	Teste A	Enunciado escrito	Necessidade de conhecer o que se irá obter com maior probabilidade ao contar com um dado faltando em uma distribuição	A média está localizada entre os valores extremos (valor mínimo $\leq$ média $\leq$ valor máximo)
	Teste B	Gráfico de colunas		

No Quadro 2 apresenta-se a frequência dos grupos investigados por tipo de teste realizado.

**Quadro 2. Frequência dos grupos investigados por tipo de teste**

<b>Tipo de teste</b>	<b>Professores</b>	<b>Alunos do 3º ano</b>	<b>Alunos do 5º ano</b>	<b>Total</b>
<b>A</b>	18	34	52	104
<b>B</b>	13	41	52	106
<b>Total</b>	31	75	104	210

Ao analisar o Quadro 2, observa-se que a frequência dos dois tipos de testes (A e B) aplicados nos três grupos (professores, alunos do 3º ano e alunos do 5º ano) foi próxima. Porém, por não ter sido um quantitativo equitativo para cada tipo de teste nos grupos investigados nossas análises foram realizadas a partir do uso de percentuais.

No Quadro 3 apresenta-se a média de idade dos grupos investigados.

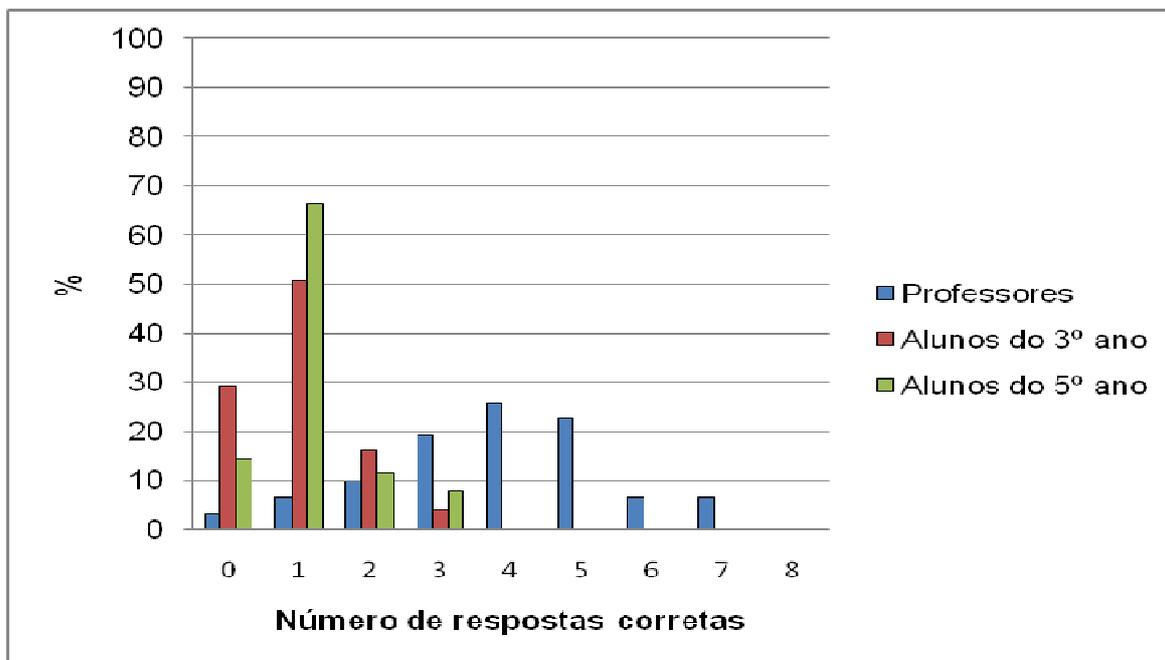
**Quadro 3. Média de idade por grupo investigado**

<b>Grupos</b>	<b>Média de idade</b>	<b>N</b>
<b>Professores</b>	40 anos e 2 meses	31
<b>Alunos do 3º ano</b>	7 anos e 9 meses	75
<b>Alunos do 5º ano</b>	10 anos	104

### 3.1 A análise quantitativa do desempenho

A análise do desempenho permite verificar a compreensão dos grupos investigados acerca do conceito de média aritmética, mais especificamente com relação aos invariantes, significados e representações.

Iniciaremos apresentando os percentuais dos grupos investigados (professores, alunos do 3º ano e alunos do 5º ano) pela frequência de questões respondidas corretamente.



**Gráfico 1. Percentuais de respostas corretas por grupo**

Ressaltamos que o número de respostas corretas varia de zero a oito, tendo em vista que a Questão 1 está desdobrada em dois itens. O segundo item denomina-se de Questão 1A nas demais análises.

Ao analisar o Gráfico 1 observa-se que nenhum dos sujeitos dos três grupos investigados respondeu corretamente a todas as questões que compõem o instrumento diagnóstico.

Verifica-se ainda que o maior número de acertos foi obtido pelo grupo dos professores, em que 6,5% acertaram 7 questões. Constata-se também a existência de sujeitos que não acertaram nenhuma questão nos três grupos. (professores= 3,2%; alunos do 3º ano= 29,3% e alunos do 5º ano= 14,4%).

Os grupos dos alunos apresentaram percentuais de acertos semelhantes independente do ano escolar.

Como era de se esperar, os professores responderam corretamente mais questões do que os alunos do 3º e 5º ano, evidenciando uma maior compreensão concernente ao conceito de média aritmética. Entretanto, ressalta-se que o desempenho destes ainda foi aquém do desejado.

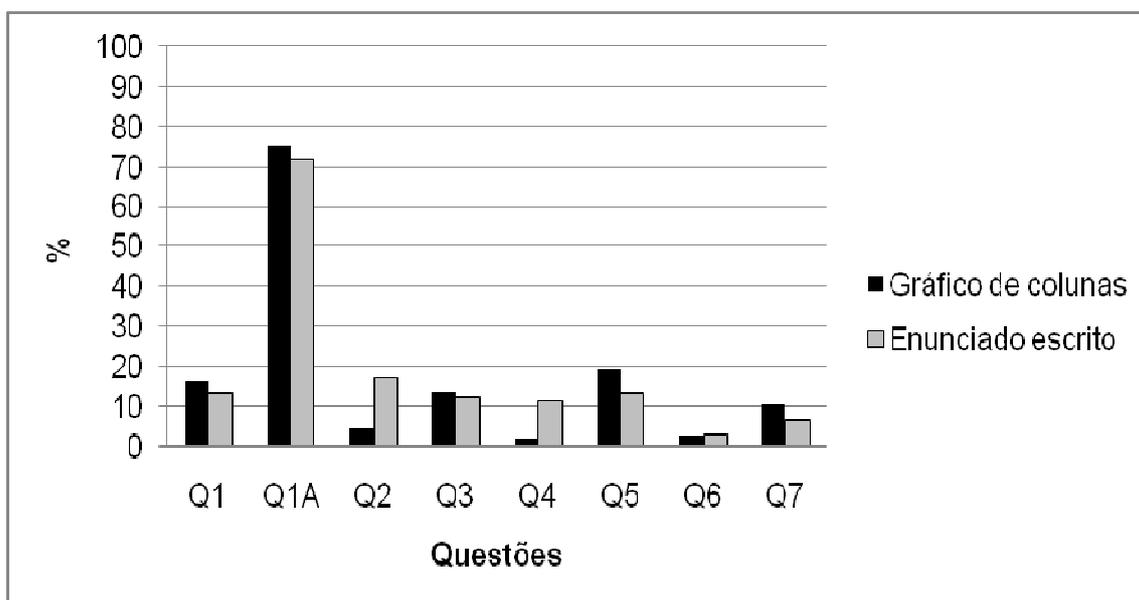
### **3.2 A análise de desempenho em relação ao tipo de representação utilizada na apresentação dos dados das questões acerca do conceito de média aritmética**

Neste estudo verificou-se a compreensão dos alunos de 3º e 5º anos e dos professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental sobre o conceito de média aritmética a partir de questões em que os dados foram apresentados por meio de gráficos de colunas e enunciados escritos. Procurou-se averiguar se o tipo de representação exercia alguma influência na compreensão do conceito de média.

#### **O tipo de representação exerce influência na compreensão do conceito de média aritmética?**

Para responder a essa indagação procuramos analisar cada uma das questões contidas no instrumento diagnóstico em relação ao tipo de representação (gráfico de colunas ou enunciado escrito) pelo qual foram apresentados os dados.

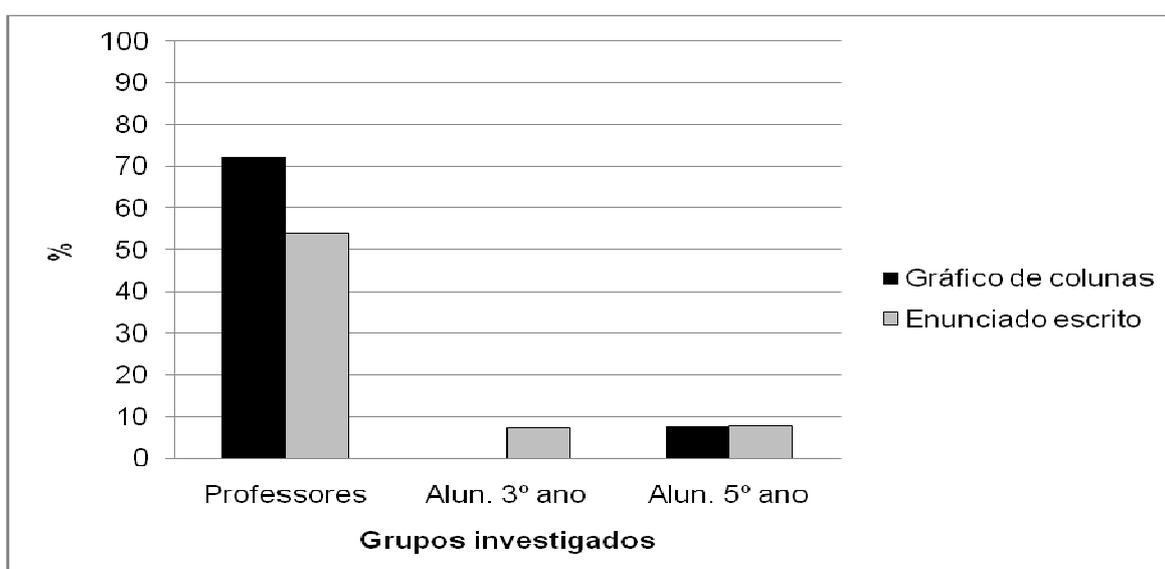
No Gráfico 2, a seguir, apresentam-se os percentuais de acertos por tipo de representação.



**Gráfico 2. Percentuais de acertos por tipo de representação**

Ao analisar o Gráfico 2, verifica-se pouca diferença no desempenho dos grupos no que concerne ao tipo de representação (gráfico de colunas ou enunciado escrito), pelo qual os dados das questões foram apresentados. Observa-se o desempenho um pouco melhor nas questões 2 e 4 nas situações propostas a partir do enunciado escrito.

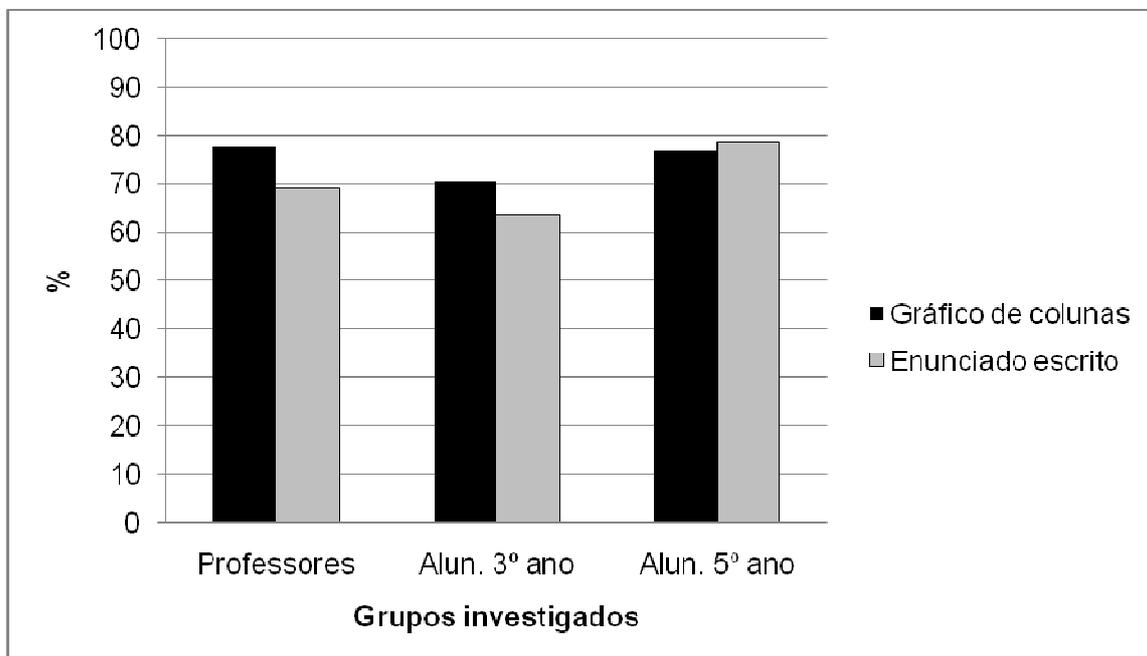
A seguir, analisam-se cada uma das questões por grupo em função do tipo de representação apresentado.



**Gráfico 3. Percentuais de acertos na Questão 1 por tipo de representação e por grupo**

O Gráfico 3 apresenta os percentuais de acertos na Questão 1 (ver Apêndice A e B) por tipo de representação e por grupo. Observou-se a diferença de desempenho entre professores e alunos, mas não existem diferenças significativas ( $F(1, 209) = 0,653$ ,  $p = 0,420$ ) em função do tipo de representação (gráfico de colunas ou enunciado escrito) utilizado para apresentação dos dados.

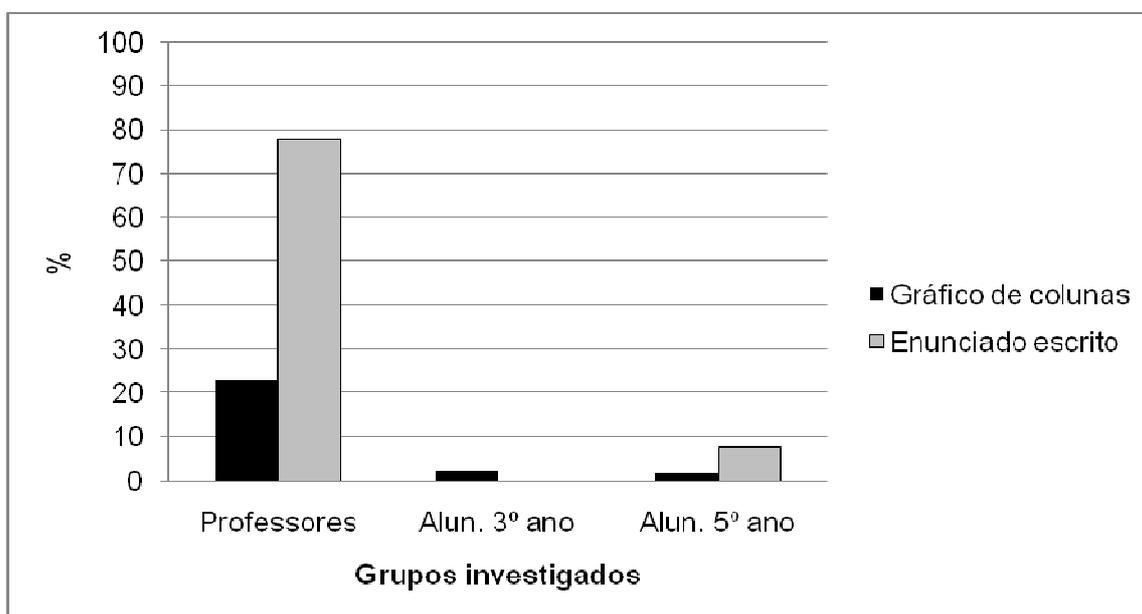
O Gráfico 4 abaixo apresenta o desempenho na Questão 1A (ver Apêndice A e B) em função do tipo de representação por grupo investigado.



**Gráfico 4. Percentuais de acertos na Questão 1A por tipo de representação e por grupo**

Observa-se que tanto professores quanto alunos do 3º e 5º ano tiveram um bom desempenho na Questão 1A. Verifica-se que a representação não foi um fator determinante para o desempenho dos grupos, pois não se verificou diferença significativa ( $F(1, 209) = 0,428$ ,  $p = 0,514$ ) em relação ao tipo de representação (gráfico de colunas ou enunciado escrito).

No que se refere à Questão 2 (ver Apêndice A e B), observa-se no Gráfico 5 que os professores demonstraram maior facilidade com relação ao enunciado escrito. Os alunos tanto do 3º como do 5º ano demonstraram dificuldades em ambos os tipos de representações.

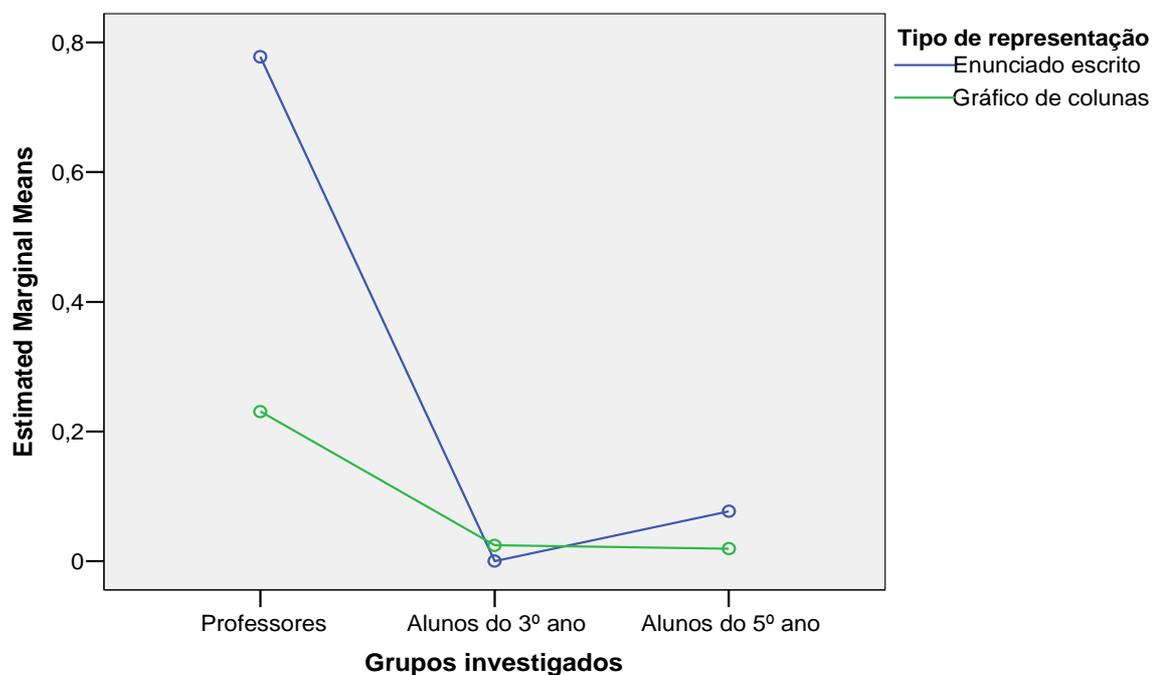


**Gráfico 5. Percentuais de acertos na Questão 2 por tipo de representação e por grupo**

Ao analisar a Questão 2, constatou-se diferença significativa ( $F(1, 209) = 27,620$ ,  $p < 0.000$ ) em função do tipo de representação, pois os desempenhos referentes ao enunciado escrito foram superiores ao de gráfico de colunas. Mais adiante buscaremos analisar as possíveis causas dessa dificuldade.

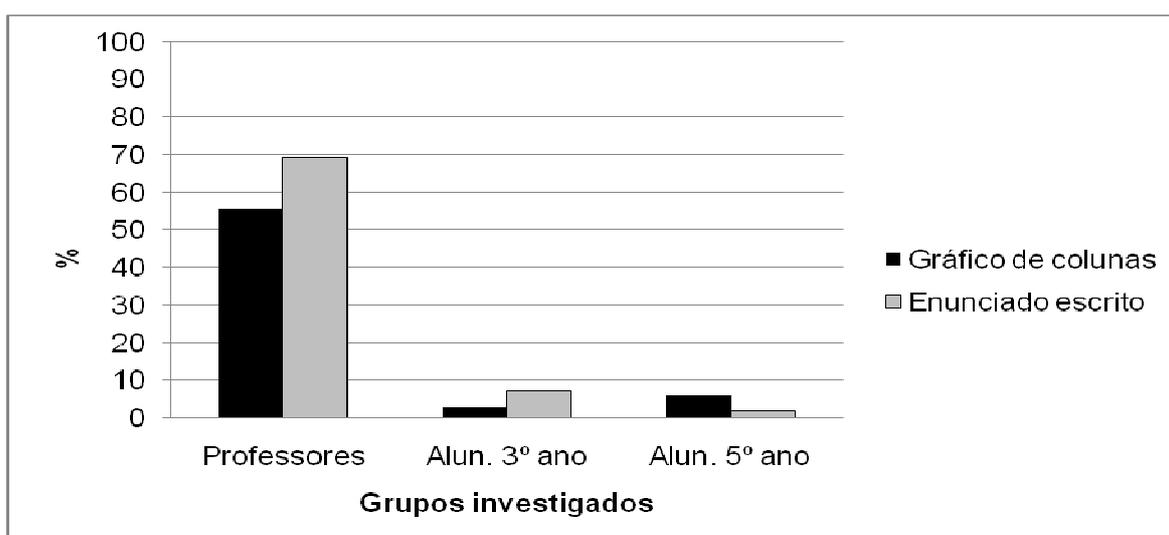
Evidenciou-se ainda, diferença significativa de desempenho ( $F(2, 209) = 53,343$ ,  $p < 0.000$ ) entre os professores e os alunos do 3º e 5º ano, como também se verificou o efeito de interação ( $F(2, 209) = 16,980$ ,  $p < 0.000$ ) entre o tipo de representação e os grupos investigados, conforme demonstra o Gráfico 6.

**Estimated Marginal Means of Resposta da questão 2A**



**Gráfico 6. Desempenho dos tipos de representações por grupo**

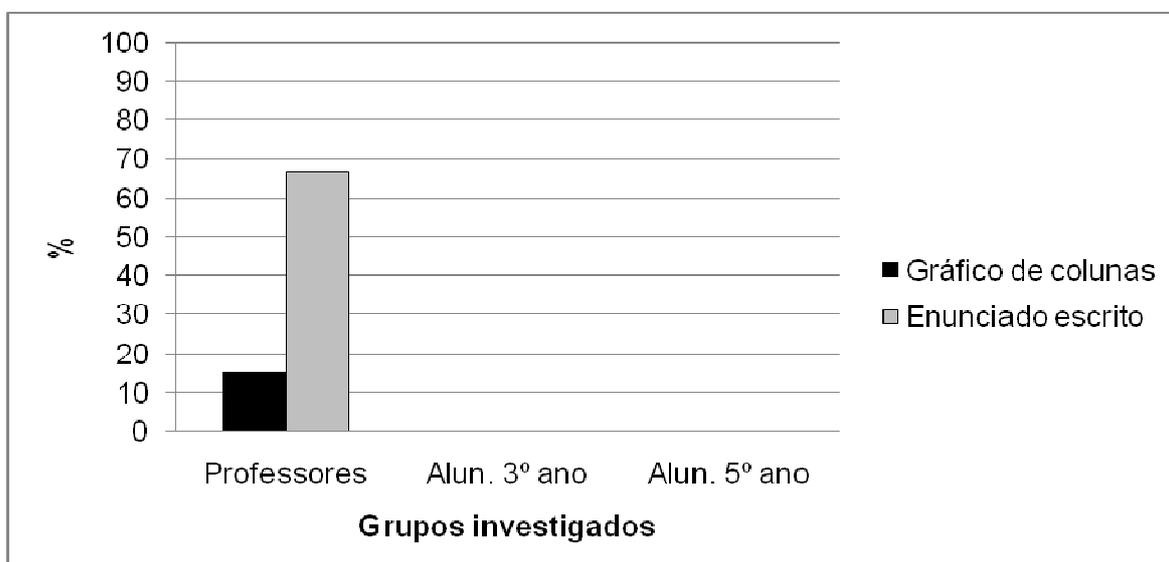
Em relação à Questão 3 (ver Apêndice A e B), o Gráfico 7 apresenta os percentuais de acertos por tipo de representação e por grupo.



**Gráfico 7. Percentuais de acertos na Questão 3 por tipo de representação e por grupo**

Segundo o Gráfico 7, a maioria dos professores tiveram um desempenho satisfatório ao responderem a Questão 3, seja mediante a apresentação dos dados por meio de gráfico de colunas ou enunciado escrito. Os alunos do 3º ano apresentaram menos dificuldade ao resolverem a questão que envolvia enunciado escrito, já os alunos do 5º ano a que implicava na leitura do gráfico de colunas. Entretanto, não se constatou diferença significativa ( $F(1, 209) = 1,240, p = 0,267$ ) em função do tipo de representação.

No que se refere à Questão 4 (ver Apêndice A e B), o Gráfico 8 expressa os percentuais de acertos por tipo de representação e por grupo.

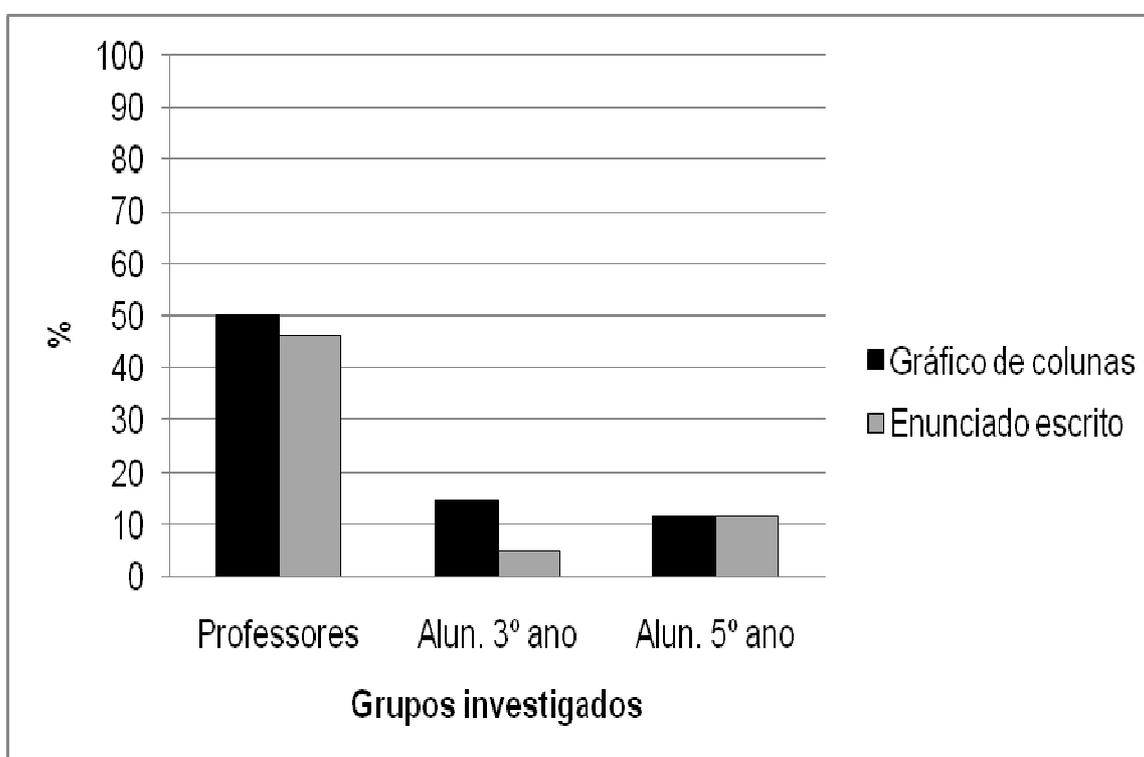


**Gráfico 8. Percentuais de acertos na Questão 4 por tipo de representação e por grupo**

Observa-se que para os alunos do 3º e 5º ano, o tipo de representação não influenciou na compreensão do conceito de média aritmética. Em relação ao grupo de professores a leitura do gráfico de colunas foi mais difícil do que com o enunciado escrito. Isso pode ter ocorrido devido à influência do contexto da referida questão, pois no Teste A, que envolvia enunciado escrito, a situação versava sobre a média de notas de um determinado aluno. Requeria-se então, que fossem identificados quais conjuntos de dados correspondiam à média apresentada. Dessa forma, entende-se que o contexto foi um fator que pode ter exercido influência sobre o desempenho dos professores.

Foram constatadas diferenças significativas ( $F(1, 209) = 41,936, p < 0.000$ ) em função do tipo de representação, pois o desempenho referente ao enunciado escrito foi superior ao de gráfico de colunas. Também foi constatada diferença significativa ( $F(2, 209) = 77,877, p < 0.000$ ) entre os desempenhos dos professores e os desempenhos dos alunos do 3º e 5º ano. Evidenciou-se efeito de interação ( $F(2, 209) = 30,421, p < 0.000$ ) entre o tipo de representação e os grupos investigados.

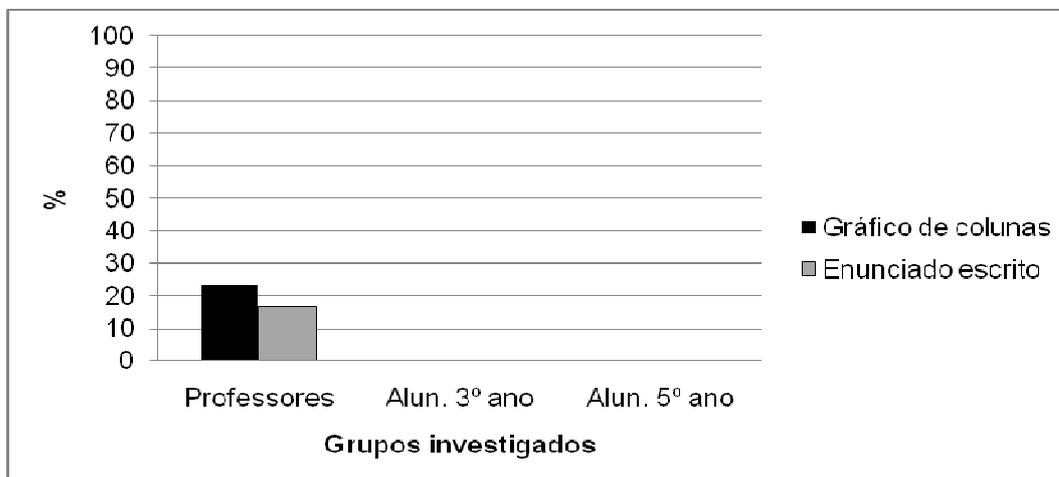
O Gráfico 9 expõe os percentuais de acertos na Questão 5 (ver Apêndice A e B) por tipo de representação e por grupo.



**Gráfico 9. Percentuais de acertos na Questão 5 por tipo de representação e por grupo**

Ao analisar Questão 5, percebe-se que houve pouca diferença no desempenho dos professores em relação ao tipo de representação. O grupo de alunos do 3º ano teve um desempenho melhor na situação que envolvia gráfico de colunas. Para os alunos do 5º ano o tipo de representação não foi um fator determinante de diferenciação. Porém, não foi observada diferença significativa ( $F(1, 209) = 0,692, p = 0,406$ ) em função do tipo de representação.

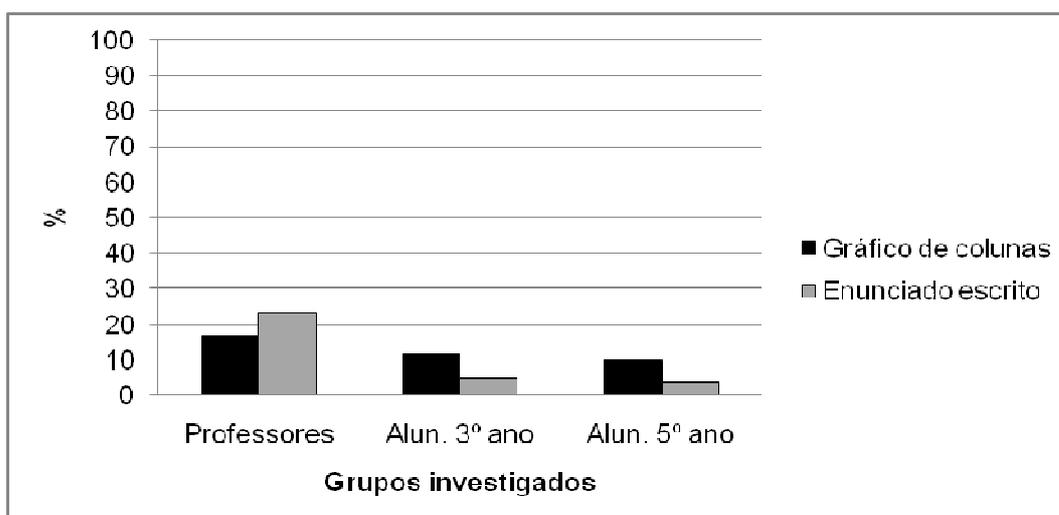
O Gráfico 10 mostra os percentuais de acertos na Questão 6 (ver Apêndice A e B) por tipo de representação e por grupo.



**Gráfico 10. Percentuais de acertos na Questão 6 por tipo de representação e por grupo**

Constata-se que os professores tiveram um baixo desempenho, tanto no gráfico de colunas (23,1%) quanto no enunciado escrito (16,7%). Para os alunos de ambos os anos, o tipo de representação não foi um fator importante na compreensão do conceito de média aritmética nessa situação. Não foi verificada diferença significativa de desempenho ( $F(1, 209) = 0,776$ ,  $p = 0,379$ ) em função do tipo de representação.

O Gráfico 11 exibe os percentuais de acertos na Questão 7 (ver Apêndice A e B) por tipo de representação e por grupo.



**Gráfico 11. Percentuais de acertos na Questão 7 por tipo de representação e por grupo**

Observa-se nos três grupos, um desempenho considerado baixo. Os professores tiveram um pouco mais de facilidade com o enunciado escrito do que com gráfico de colunas. Contudo, para os alunos do 3º e 5º ano, lidar com a situação que envolvia o gráfico de colunas foi mais fácil. Entretanto, não foi verificada diferença significativa em função do tipo de representação ( $F(1, 209) = 0,003$ ,  $p = 0,959$ ), bem como os desempenhos entre os grupos investigados não variaram significativamente ( $F(2, 209) = 1,623$ ,  $p = 0,200$ ) em função da escolaridade.

O Quadro 4 descreve os percentuais de acertos das questões em relação ao tipo de representação utilizada para apresentar os dados por grupo.

**Quadro 4. Percentuais de acertos das questões em relação ao tipo de representação por grupo.**

Questões	Professores		Alunos do 3º ano		Alunos o 5º ano	
	Gráfico de colunas	Enunciado Escrito	Gráfico de colunas	Enunciado Escrito	Gráfico de colunas	Enunciado Escrito
Q1	72,2	53,8	0,0	7,3	7,7	7,7
Q1A	77,8	69,2	70,6	63,4	76,9	78,8
Q2	23,1	77,8	2,4	0,0	1,9	7,7
Q3	55,6	69,2	2,9	7,3	5,8	1,9
Q4	15,4	66,7	0,0	0,0	0,0	0,0
Q5	50,0	46,2	14,7	4,9	11,5	11,5
Q6	23,1	16,7	0,0	0,0	0,0	0,0
Q7	11,1	23,1	11,8	4,9	9,6	3,8

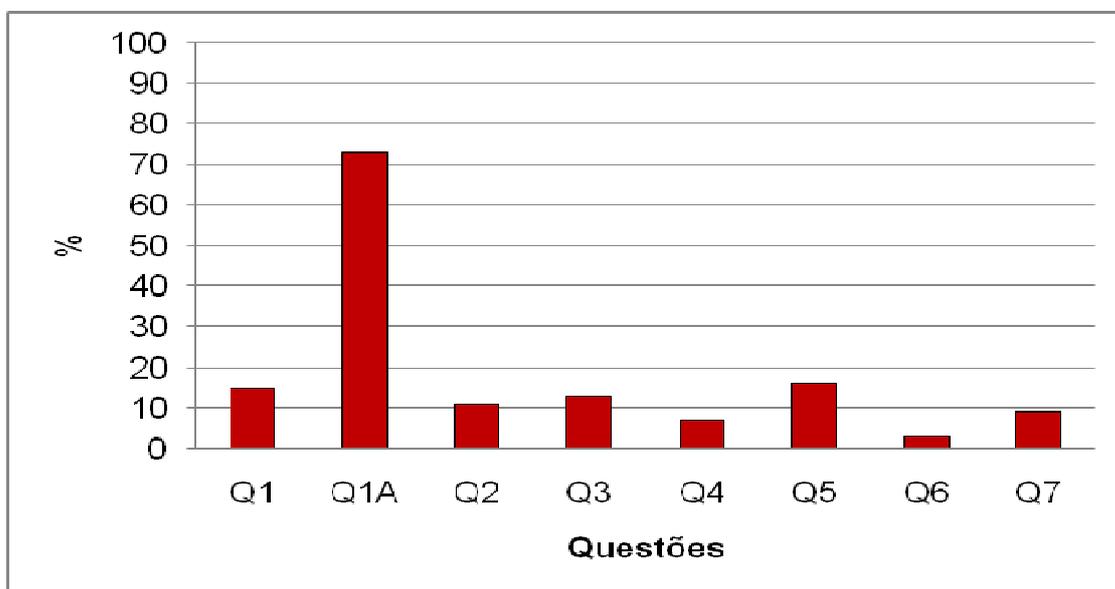
Ao considerar todas as questões do instrumento diagnóstico em relação ao tipo de representação pelo qual os dados foram extraídos, verificou-se que para maioria das questões o tipo de representação não foi um fator determinante para compreensão do conceito de média aritmética. Todavia, foi constatado diferenças significativas em função do tipo de representação apenas nas questões 2 e 4, em que os desempenhos dos professores foram superiores quando as questões envolviam enunciado escrito. Diante disso, torna-se necessário a efetivação de um trabalho voltado o desenvolvimento da compreensão acerca do conceito de média, considerando o uso de variados tipos de representação.

Nesse sentido, ressalta-se o importante papel da dimensão representativa no processo de conceitualização do real, uma vez que se considera o trabalho com múltiplas representações um fator que contribui para compreensão de um conceito. Nessa perspectiva, concordamos com Vergnaud ao destacar a necessidade de “identificar e classificar situações adequadas à aprendizagem de determinado conceito, pesquisar os invariantes operatórios usados pelos alunos e procurar entender como, por que, e quando uma certa representação simbólica pode ajudar na conceitualização” (MOREIRA, 2002, p. 27).

### **3.3 A análise do desempenho em relação aos invariantes e significados do conceito de média aritmética**

Através da análise do desempenho dos sujeitos investigados verifica-se a compreensão dos mesmos com relação aos invariantes e significados do conceito de média aritmética.

No Gráfico 12 apresentam-se os percentuais de acertos por cada uma das questões.



**Gráfico 12. Percentual de acertos por cada questão**

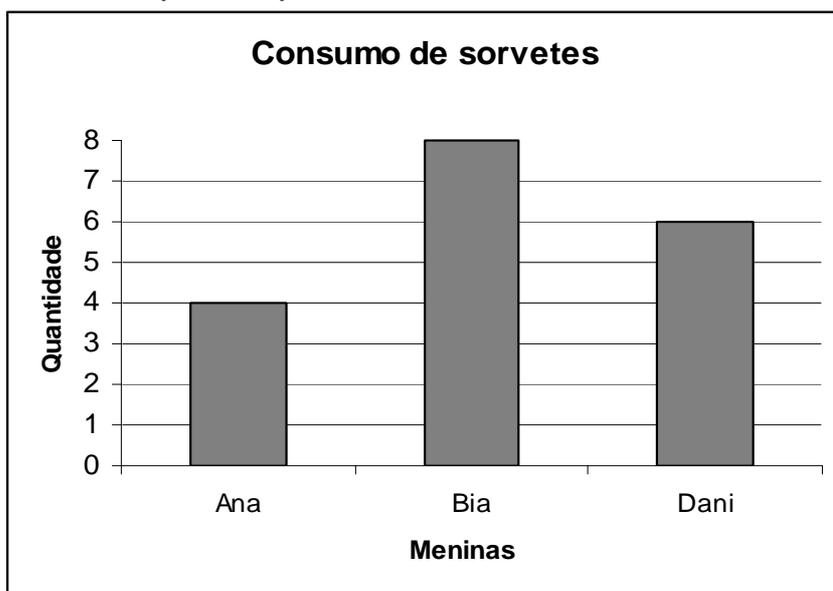
Ao analisar o Gráfico 12, observa-se que a Questão 1A se destaca em termos de percentual de acertos. A Questão 1A requeria que os grupos reconhecessem que ao se acrescentar mais um valor a um conjunto de dados, representados num gráfico ou no enunciado escrito, a média seria alterada.

Ao constatar-se 73% de acertos na Questão 1A, conclui-se que os grupos investigados foram bem sucedidos, pois mesmo sem necessariamente realizar o cálculo da média aritmética, demonstraram compreender a ideia de que ao se acrescentar mais um valor a determinado conjunto de dados a média é alterada. Nesse sentido, nosso estudo está em consonância com um dos resultados obtidos por Cazorla (2002) ao constatar que quase 80% dos sujeitos investigados (estudantes universitários que estavam cursando disciplinas de Estatística), conseguiram calcular o valor da média ao ser incorporado um novo valor ao conjunto de dados.

Destaca-se que nas demais questões os percentuais de acertos foram baixos, inferiores a 17%. Ao observar as questões 1 e 5 verificam-se que os percentuais de acertos foram um pouco maiores do que as outras questões, 15% e 16% respectivamente.

A Questão 1 solicitava que os grupos obtivessem a média aritmética, admitindo-a como uma quantidade equitativa a repartir para conseguir uma distribuição uniforme (significado), bem como que a média é influenciada por cada um e por todos os valores (invariante). Vejamos a referida questão nos dois tipos de teste:

**Questão 1 (Teste A):**

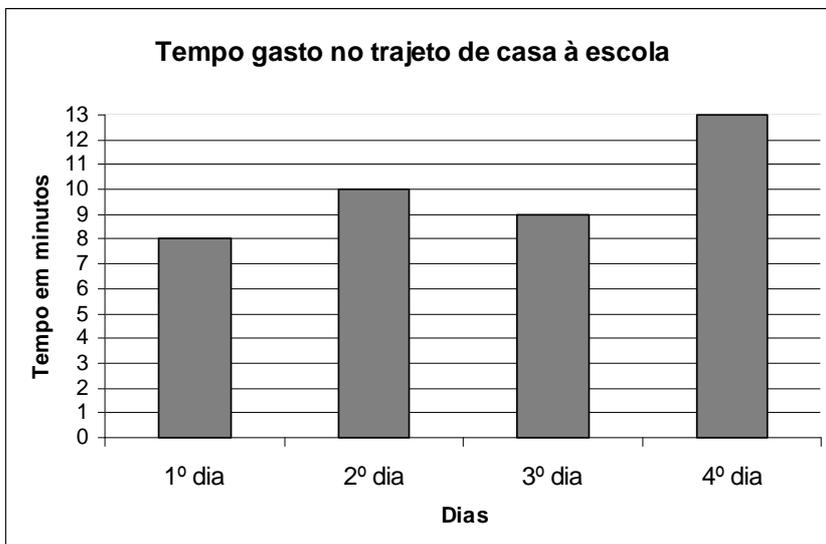


Se essas meninas tivessem tomado a mesma quantidade de sorvetes, quantos cada uma teria tomado, ou seja, qual a média de sorvete tomado por essas meninas?

**Resposta: 6.**

**Questão 1 (Teste B):** Em um campeonato de futebol o time de Pedro disputou três jogos. Em cada partida a quantidade de gols foi diferente: 3, 7 e 5 gols. Em média quantos gols foram marcados por partida, ou seja, se tivessem marcado a mesma quantidade de gols em cada uma das partidas, quantos gols seriam? **Resposta: 5.**

Na Questão 5, demandava-se que os grupos obtivessem a média aritmética, entendendo-a como uma estimativa de uma quantidade desconhecida em presença de erros de medida (significado), como também que a média é influenciada por cada um e por todos os valores (invariante). Observemos a questão nos dois tipos de teste:

**Questão 5 (Teste A):**

Qual seria a melhor estimativa de tempo gasto para percorrer o trajeto de casa à escola?

**Resposta: 10.**

**Questão 5 (Teste B):** Na feira quatro vendedores resolveram saber quanto pesava uma uva. Cada um pesou na sua própria balança e acharam os seguintes resultados em gramas: 10, 9, 11, 6. Qual seria a melhor estimativa do peso real da uva? **Resposta: 9.**

Ao observar as questões 1 e 5 verifica-se que as mesmas referem-se ao mesmo invariante da média. Dessa forma, constata-se certa facilidade de compreensão dos grupos atinente ao entendimento de que a média é influenciada por cada um e por todos os valores. Segundo Caetano (2004) essa propriedade foi a de mais fácil percepção pelos alunos. Nesse sentido, Anjos e Gitirana (2008) observaram que a mesma foi trabalhada por quase todas as atividades (98,5%), ao realizarem uma análise do tratamento dado a média aritmética nos livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental.

Em relação aos significados identificados nas questões 1 e 5, observa-se que os grupos foram um pouco mais bem sucedidos ao responderem as questões que envolviam a média como uma quantidade equitativa a repartir para conseguir uma distribuição uniforme (Questão 1), como também a média como estimativa de uma quantidade desconhecida em presença de erros de medida (Questão 5). Demonstra-se assim, uma discreta facilidade de compreensão com relação a esses significados.

Dados encontrados por Mayén, Cobo, Batanero e Balderas (2007) ao realizarem um estudo com estudantes mexicanos de bacharelado, indicaram que os problemas associados à média, que envolviam a ideia de melhor estimativa de uma quantidade desconhecida em presença de erros de medidas, bem como uma repartição equitativa em uma distribuição de dados, foram particularmente fáceis para os alunos. Diante disso, percebe-se que é possível o desenvolvimento de um trabalho voltado ao ensino-aprendizagem do conceito de média aritmética desde os anos elementares, com aprofundamento dos conteúdos no decorrer dos anos de escolarização.

Na Questão 6, foi observado o menor desempenho. Nesta questão requeria-se que os grupos calculassem a média aritmética, compreendendo-a enquanto elemento representativo de um conjunto de valores com distribuição aproximadamente simétrica (significado), bem como reconhecessem que a média pode ser um número sem sentido na vida real (invariante). Observemos a questão nos dois tipos de teste:

**Questão 6 (Teste A):** Flávio trabalhava em uma loja de eletrodomésticos. No primeiro dia de trabalho ele entregou 4 geladeiras, no segundo 5, no terceiro 7 e no quarto 6. Qual foi a média de geladeiras entregues nesses dias? **Resposta: 5,5.**

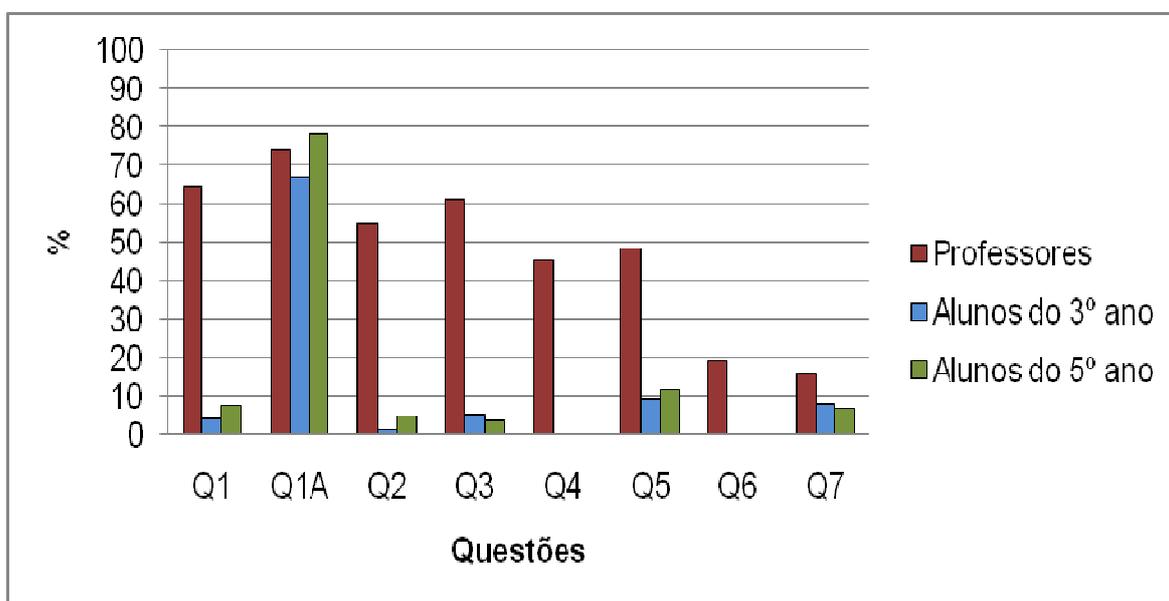
**Questão 6 (Teste B):**



Sendo assim, observa-se que os grupos demonstraram ter uma maior dificuldade de compreensão relativa ao invariante que corresponde a ideia de que a média pode ser um número que não tem um correspondente na realidade física, ou seja, pode ser um valor sem sentido na vida real. De forma semelhante, Cazorla (2002) afirma que estudantes de graduação apresentaram dificuldades de resolução quando a questão envolvia a interpretação da média de uma variável discreta cujo resultado é um número decimal.

Os grupos também tiveram dificuldade na compreensão do significado da média enquanto elemento representativo de um conjunto de valores com distribuição aproximadamente simétrica. Isso implica na necessidade de se trabalhar de forma mais sistemática esse invariante e significado da média.

Buscando analisar como foi o desempenho dos diferentes grupos nas questões, no Gráfico 13 apresentam-se os percentuais de acertos por cada uma das questões por grupo.



**Gráfico 13. Percentuais de acertos por questão por grupo**

Ao analisar o Gráfico 13, percebe-se que todos os grupos apresentaram alto percentual de acertos na Questão 1A, levando-se à conclusão de que existe uma compreensão acerca da alteração da média ao ser acrescido a um determinado conjunto de dados mais um valor. Talvez esse percentual de respostas corretas tenha

ocorrido pelo fato desta questão não necessariamente envolver a realização de cálculos. Não foi observada diferença significativa ( $F(2, 209) = 1,298$ ,  $p = 0,275$ ) de desempenho em função da escolaridade ao efetuar a análise de variância referente à Questão 1A.

Ainda de acordo com o Gráfico 13, constata-se que os professores apresentaram um percentual maior de respostas corretas do que os alunos do 3º e 5º ano, para as questões que envolviam a compreensão do conceito de média aritmética, o que já era esperado devido o grau de escolarização dos docentes. Foi observada diferença significativa de desempenho entre o grupo dos professores e os grupos de alunos do 3º e 5º ano do Ensino Fundamental nas questões 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Não sendo observadas diferenças significativas entre os referidos grupos apenas na Questão 1A ( $F(2, 209) = 1,298$ ,  $p = 0,275$ ) e na Questão 7 ( $F(2, 209) = 1,623$ ,  $p = 0,200$ ).

Ao verificar o desempenho dos alunos do 3º e 5º ano, percebe-se uma grande dificuldade em relação ao conceito de média aritmética, pois os alunos apresentaram percentuais de acertos bastante baixos na maioria das questões para ambos os anos de escolaridade. Não foram evidenciadas diferenças significativas entre os alunos do 3º ano e os alunos do 5º ano em nenhuma das questões. Dessa forma, constata-se que a escolaridade não está exercendo influência na compreensão do conceito de média aritmética, pelo menos no que tange aos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Ao executar a análise de variância UNIANOVA, evidenciou-se diferença significativa de desempenho entre o grupo de professores e os grupos de alunos do 3º e 5º ano, tanto na Questão 1 ( $F(2, 209) = 50,781$ ,  $p < 0.000$ ) como na Questão 3 ( $F(2, 209) = 60,053$ ,  $p < 0.000$ ). De acordo com o post-hoc de comparação múltipla (Tukey HSD) as diferenças foram significativas ( $p < 0.000$ ) entre as médias de acertos dos professores e dos alunos de ambos os anos. Ou seja, o desempenho dos professores em relação à obtenção da média aritmética, admitindo-a como uma quantidade equitativa a repartir para conseguir uma distribuição uniforme (significado), bem como que a média é influenciada por cada um e por todos os valores (invariante); e em relação ao cálculo da média, reconhecendo-a como elemento representativo de um conjunto de valores com distribuição aproximadamente simétrica (significado), e que a mesma não necessariamente coincide com um dos valores que a compõem (invariante)

foram significativamente superiores aos desempenhos nos grupos dos alunos do 3º ano e do 5º ano do Ensino Fundamental.

Ainda de acordo com o Gráfico 13 constata-se um menor desempenho dos professores nas questões 6 e 7. A Questão 6 também foi de difícil compreensão para os alunos, uma vez que nenhum dos alunos, seja do 3º ou do 5º ano, conseguiu responder a referida questão com exatidão.

Observou-se diferença significativa de desempenho em função da escolaridade na Questão 6 ( $F(2, 209) = 21,634, p < 0.000$ ), o grupo de professores apresentou um desempenho significativamente distinto do desempenho dos alunos de ambos os anos de escolaridade. Já na Questão 7 não foi observado diferença significativa entre os grupos em função da escolaridade ( $F(2, 209) = 1,623, p = 0,200$ ).

A Questão 6 pedia o cálculo da média aritmética, admitindo que a mesma pode ser um número que não tem sentido na vida real (invariante), como também trata-se de um elemento representativo de um conjunto de valores com distribuição aproximadamente simétrica (significado).

**Questão 6 (Teste A):** Flávio trabalhava em uma loja de eletrodomésticos. No primeiro dia de trabalho ele entregou 4 geladeiras, no segundo 5, no terceiro 7 e no quarto 6. Qual foi a média de geladeiras entregues nesses dias? **Resposta: 5,5.**

**Questão 6 (Teste B):**



Qual foi a média de nascimento de cães por ano?  
**Resposta: 8,5.**

A Questão 7 solicitava o reconhecimento da média como valor que se irá obter com maior probabilidade ao contar com um dado faltando em uma distribuição (significado). Também envolvia a ideia de que a média está localizada entre os valores extremos (invariante).

**Questão 7 (Teste A):**



Cinco pessoas pegaram um elevador. Este elevador suporta até cinco pessoas com peso médio de 70 kg. Qual seria o peso mais provável da quinta pessoa?

**Resposta: 70 Kg.**

**Questão 7 (Teste B):** O peso médio dos alunos da primeira série é de 20 Kg. Separamos 5 alunos que pesam: 22, 18, 17 e 21. Qual seria o peso mais provável do quinto aluno? **Resposta: 20 Kg.**

Nas questões 6 e 7 foram detectados os menores percentuais de acertos dos professores (19,4 e 16,1) respectivamente, e nenhum aluno do 3º ou do 5º ano acertou a Questão 6. Isso indica uma maior dificuldade de compreensão com relação aos seguintes invariantes: a média pode ser um número que não tem sentido na vida real; e a média está localizada entre os valores extremos.

No que se refere aos significados envolvidos nestas questões observa-se que, tanto professores quanto os alunos apresentaram uma falta de conhecimento com relação ao reconhecimento da média, como elemento representativo de um conjunto de valores com distribuição aproximadamente simétrica (Questão 6), e como valor que se

irá obter com maior probabilidade ao contar com um dado faltando em uma distribuição (Questão 7).

Estas observações levam a uma reflexão sobre o significado da média enquanto elemento representativo de um conjunto de valores com distribuição aproximadamente simétrica. Observa-se um desempenho maior dos grupos investigados na Questão 3 e um desempenho bem menor na Questão 6 com relação a esse mesmo significado.

Tal constatação é um indício de uma provável dificuldade de compreensão, por parte dos professores e principalmente dos alunos, com relação ao invariante do conceito de média tratado na Questão 6, a saber: a média pode ser um número que não tem um correspondente na realidade física. Por outro lado, admiti-se também como possível fator de interferência, a diferença de contexto das referidas questões.

Percebe-se, ainda, que os alunos do 3º e 5º ano obtiveram desempenho um pouco melhor na Questão 5 do que nas demais questões, excetuando-se a Questão 1A já analisada. Entretanto, constatou-se diferença significativa entre os grupos ( $F(2, 209) = 14,977, p < 0.000$ ), sendo que esta se deu apenas entre o grupo de professores e dos alunos ( $p < .000$ ) conforme o post-hoc Tukey HSD.

No que concerne à Questão 4, observou-se diferença significativa de desempenho em função da escolaridade ( $F(2, 209) = 77,877, p < 0.000$ ), isto é, o grupo de professores apresentou um desempenho distintamente superior ao desempenho dos alunos de ambos os anos de escolaridade.

Foi solicitado na Questão 4, que a partir de uma média dada fossem identificados os possíveis conjuntos de dados que correspondessem a referida média. Para tal, demandava-se o entendimento da média como um valor representativo dos dados a partir dos quais ela foi calculada (invariante); e também enquanto elemento representativo de um conjunto de valores com distribuição aproximadamente simétrica (significado). Atentemos para dita questão nos dois tipos de teste:

**Questão 4 (Teste A):** Marcos obteve no final do ano a média 4 em Geografia. Coloque V (Verdadeiro) ou F (Falso) para as possíveis notas recebidas por Marcos nas quatro unidades do ano letivo:

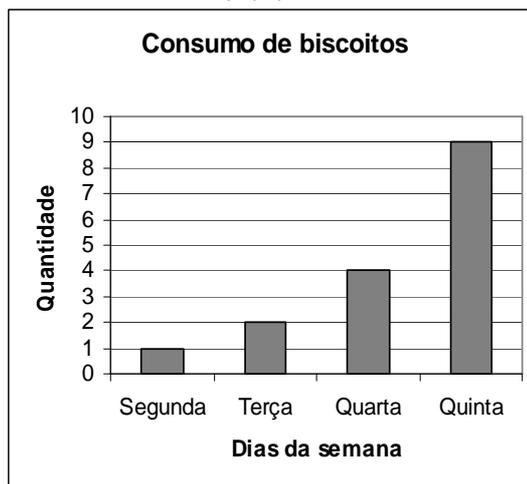
- a) (F) 1, 1, 1, 1                      c) (V) 4, 4, 4, 4                      e) (F) 1, 2, 3, 4  
 b) (V) 1, 2, 4, 9                      d) (F) 1, 2, 4, 8                      f) (F) 1, 2, 4, 10

**Questão 4 (Teste B):** Mariana come em média 4 biscoitos por dia. Coloque V (Verdadeiro) ou F (Falso) para as possíveis quantidades de biscoitos que ela comeu em cada dia:

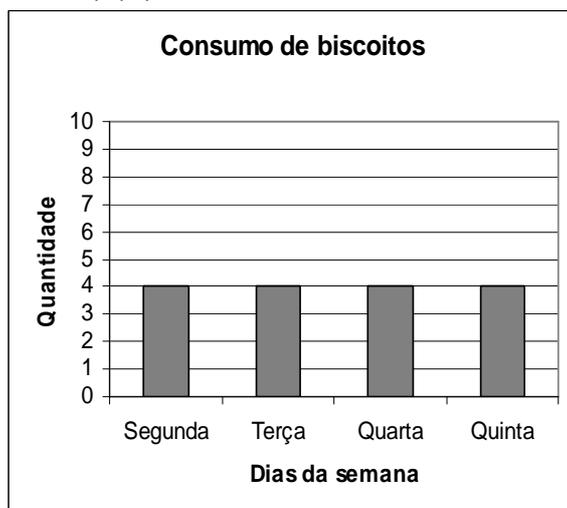
a) (F)



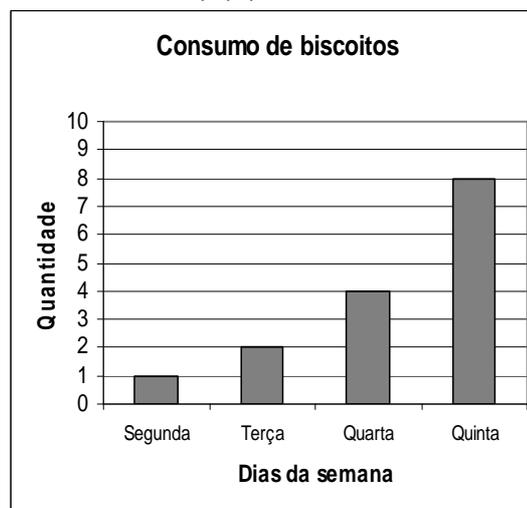
b) (V)

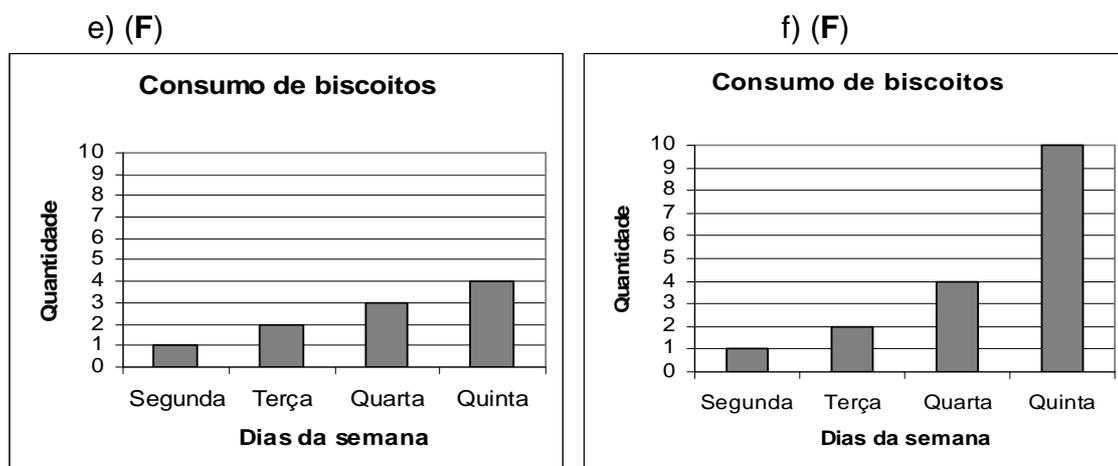


c) (V)



d) (F)





Ao analisar a Questão 4, constata-se a falta de compreensão dos alunos do 3º e 5º ano em relação a média como um valor representativo dos dados a partir dos quais ela foi calculada, ou seja, a média é o valor que está mais próximo de todos, em termos espaciais (invariante); bem como de que a média serve de elemento representativo de um conjunto de valores, cuja distribuição é aproximadamente simétrica (significado). Tais resultados seguem em concordância com os trabalhos de Cazorla (2002; 2003) em que se constatou a falta de compreensão do aspecto representativo da média pelos alunos de graduação. Ressalta-se, ainda, que este aspecto relativo à média não é devidamente explorado nas atividades dos livros didáticos (ANJOS e GITIRANA, 2008).

A Questão 2 (ver Apêndice A e B), refere-se ao invariante da média, que versa sobre a ideia de que a mesma leva em consideração os valores nulos; e ao significado que estabelece a média como uma quantidade equitativa a repartir para conseguir uma distribuição uniforme.

Ao analisar a Questão 2 observa-se um desempenho baixo por parte dos alunos do 3º e 5º ano, sendo que o 5º ano foi um pouco melhor que o 3º ano, porém esta diferença não foi significativa.

Quanto ao grupo dos professores, a maioria (54,8%) apresentou uma compreensão do citado invariante e significado, o que foi constatado também através do bom desempenho desse grupo na Questão 1, a qual envolvia este mesmo significado. Evidenciou-se diferença significativa de desempenho ( $F(2, 209) = 53,343$ ,  $p < 0.000$ ) entre os desempenhos dos professores e dos alunos do 3º e 5º ano.

Portanto, ao analisar todas as questões do instrumento diagnóstico, verificaram-se diferenças significativas do grupo dos professores em relação aos desempenhos dos grupos dos alunos do 3º e do 5º ano na maioria das questões. Entretanto, os desempenhos dos alunos do 3º e do 5º ano não variaram significativamente em função da escolaridade em nenhuma das questões analisadas. Logo, percebe-se a ausência de um trabalho sistematizado e que seja desenvolvido gradualmente nos anos elementares do Ensino Fundamental em relação à introdução do conceito de média aritmética.

O Quadro 5 apresenta o percentual de acertos em relação aos significados do conceito de média por grupo.

**Quadro5. Percentuais de acertos em relação aos significados por grupo**

Significados da média	Questões	Alunos do 3º ano (%)	Alunos do 5º ano (%)	Professores (%)
Quantidade equitativa a repartir para conseguir uma distribuição uniforme	Q1	4,0	7,7	64,5
	Q2	1,3	4,8	54,8
A média serve de elemento representativo de um conjunto de valores com distribuição aproximadamente simétrica	Q3	5,3	3,8	61,3
	Q4	0,0	0,0	45,2
	Q6	0,0	0,0	19,4
Estimativa de uma quantidade desconhecida em presença de erros de medida	Q5	9,3	11,5	48,4
Necessidade de conhecer o que se irá obter com maior probabilidade ao contar com um dado faltando em uma distribuição	Q7	8,0	6,7	16,1

Ao analisar o Quadro 5, em síntese, constata-se que o grupo dos professores foi mais bem sucedido na Questão 1 que inclui o significado da média como uma quantidade equitativa a repartir para conseguir uma distribuição uniforme. No entanto, percebe-se que com relação à Questão 2, que envolve esse mesmo significado, os professores apresentaram um desempenho menor. Esta diferença pode ter relação com o invariante envolvido na Questão 2 (a média considera todos os valores inclusive os nulos).

Verifica-se ainda, que a maior dificuldade do grupo dos professores foi na Questão 7, a qual versa sobre um significado mais complexo da média: a necessidade de conhecer o que se irá obter com maior probabilidade ao contar com um dado faltando em uma distribuição. Talvez esse insucesso se deva tanto a complexidade deste significado quanto ao fato do mesmo não ser sistematicamente ensinado. Segundo Cobo e Batanero (2004) ao realizarem um estudo sobre os significados da média nos livros de texto do ensino secundário, constataram que o referido significado não foi encontrado em nenhum dos vinte e dois livros analisados. Logo, torna-se necessário que seja promovido um trabalho sistemático de ensino relativo a este significado.

Quanto aos alunos do 3º e 5º ano, ambos apresentaram um desempenho um pouco maior na Questão 5, que envolve a aplicação da média para estimativa de uma quantidade desconhecida em presença de erros de medida. Observou-se dificuldade de compreensão dos alunos nas questões 4 e 6, as quais referem-se a aplicação de que a média serve de elemento representativo de um conjunto de valores com distribuição aproximadamente simétrica. Vale destacar, que o grupo dos professores apresentou percentuais de acertos diferenciados nas seguintes questões que envolviam este significado: Questão 1 (61,3), Questão 4 (45,2) e Questão 6 (19,4). Esse baixo desempenho verificado na Questão 6 pode ter relação com o invariante envolvido nesta questão (a média pode ser um valor sem sentido na vida real).

O Quadro 6 expõe o percentual de acertos em relação aos invariantes do conceito de média por grupo.

**Quadro 6. Percentuais de acertos em relação aos invariantes por grupo**

Invariantes	Questões	Alunos do 3º ano (%)	Alunos do 5º ano (%)	Professores (%)
A média é influenciada por cada um e por todos os valores	Q1	4,0	7,7	64,5
	Q5	9,3	11,5	48,4
A média considera todos os valores inclusive os nulos	Q2	1,3	4,8	54,8
A média não necessariamente coincide com um dos valores que a compõem	Q3	5,3	3,8	61,3
A média é um valor representativo dos dados a partir dos quais ela foi calculada	Q4	0,0	0,0	45,2
A média pode ser um número que não tem um correspondente na realidade física	Q6	0,0	0,0	19,4
A média está localizada entre os valores extremos (valor mínimo $\leq$ média $\leq$ valor máximo)	Q7	8,0	6,7	16,1

De acordo com o Quadro 6, em geral, observa-se que quanto aos invariantes da média, os grupos dos alunos apresentam percentuais bastante baixos, contudo observa-se que alguns conseguem apresentar algumas respostas corretas em determinadas situações, mesmo que intuitivamente ou mediante o uso da redistribuição equitativa dos valores. Nesse sentido, entende-se que é possível e necessário se desenvolver um trabalho escolar nesse nível de ensino, visto que os alunos possuem algum tipo de idéia a respeito da média, utilizando-a em algumas situações do cotidiano, mas sem compreender o que significa realmente.

Para ambos os grupos de alunos, a dificuldade consiste em entender a média como um valor representativo dos dados a partir dos quais ela foi calculada. Nesse sentido, Caetano (2004) e Cazorla (2003) também revelam a dificuldade de compreensão dos alunos em relação ao aspecto representativo da média.

Em relação aos professores, foi bastante difícil lidar com o reconhecimento de que a média está localizada entre os valores extremos. Outro aspecto considerado bastante complicado para os três grupos investigados refere-se à compreensão de que a média pode ser um número que não tem um correspondente na realidade física, ou seja, é um valor sem sentido na vida real. Tais resultados seguem em concordância com o trabalho de Cazorla (2002). Dessa forma, é importante considerar tais aspectos ao se promover intervenções de ensino acerca do conceito de média aritmética.

### **3.4 A análise de correlação entre as questões e os grupos investigados**

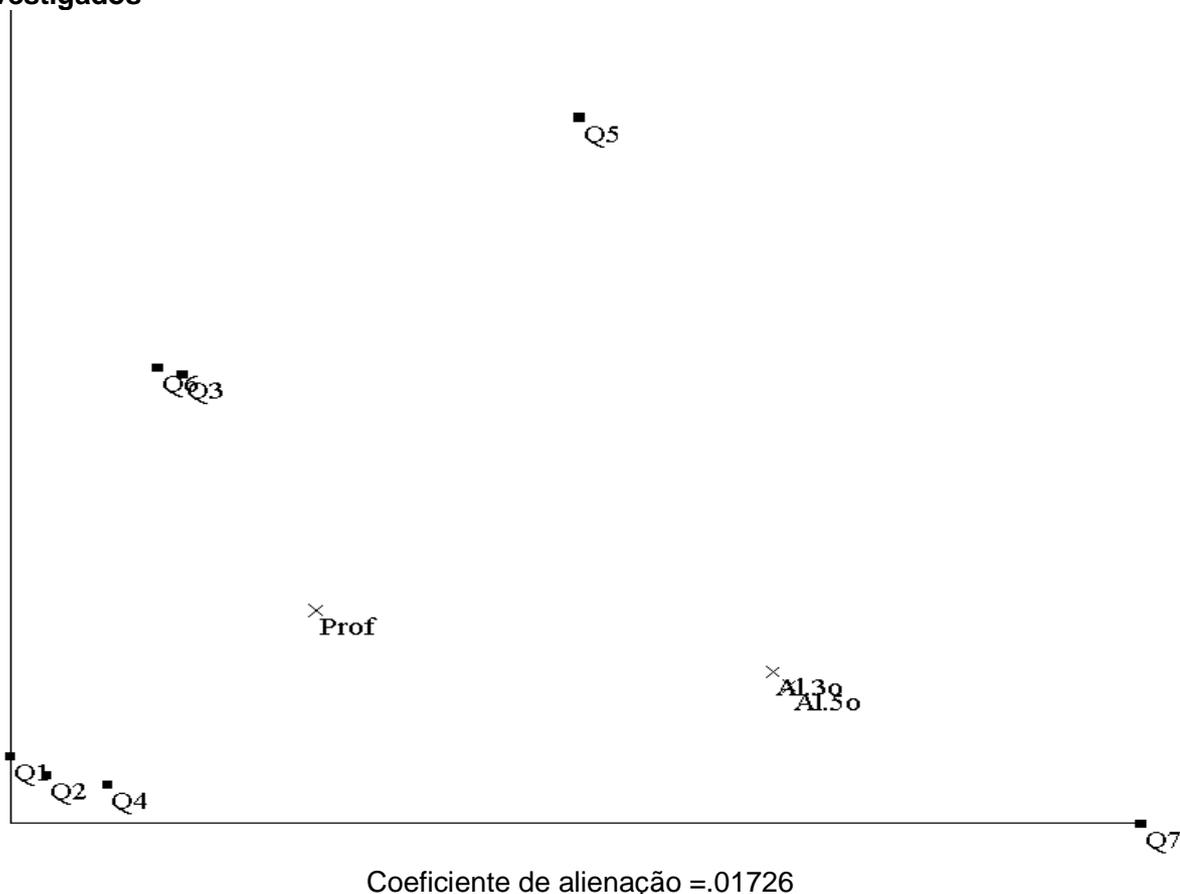
Após essa exposição do desempenho dos diferentes grupos de alunos nas diferentes atividades, buscou-se uma maneira pela qual pudéssemos analisar a relação entre esses dados, considerando toda essa complexidade de variáveis envolvidas na compreensão do conceito de média. Para isso, realizou-se uma análise do tipo multidimensional, denominada Análise da Estrutura de Similaridade ('*Similarity Structure Analysis*' SSA - Borg e Lingoes, 1987), que pertence a uma série de programas não-métricos 'Guttman-Lingoes' fundamentada nos trabalhos de Louis Guttman.

Mais especificamente, esta análise processa uma matriz de correlação entre  $n$  variáveis através de representações gráficas destas variáveis como pontos em um espaço Euclidiano. Todos os pares de variáveis são comparados de acordo com seus níveis de similaridade/dissimilaridade. Em seguida é produzida uma solução espacial que melhor represente essa relação entre variáveis. Pontos representando as variáveis são projetados num espaço, de modo que quanto maior for a correlação entre duas variáveis, mais próximas elas se localizarão no espaço da projeção e vice-versa, criando-se, assim, 'regiões de contiguidade' ou 'regiões de descontinuidade' representando espacialmente as correlações entre-itens. O SSA classifica as distâncias

dentro da ordem especificada a partir dos próprios dados não impondo ortogonalidade nos dados como ocorre na análise fatorial.

Posteriormente, o espaço da solução produzida é dividido em regiões. A fase de identificação de um conjunto de pontos como uma região é realizada tendo como base a correspondência entre as suas facetas e o espaço produzido, retratando a relação entre as variáveis. Uma região é definida como qualquer subgrupo de variáveis representadas por um elemento comum a partir de alguma faceta. É possível, assim, descobrir a estrutura latente que emana dos dados através de uma representação espacial facilmente compreensível. O que é importante no SSA é a divisão do espaço da projeção em regiões. Como afirma Young (1987) “o elemento essencial de definição de todo método de escalonamento multidimensional é a representação espacial da estrutura de dados” (p.3).

**Figura1. Análise de Estrutura de Similaridade (SSA) das questões em relação aos grupos investigados**



Nessa projeção podemos analisar dois tipos de dados, a similaridade entre as questões considerando o desempenho de cada um dos participantes e a similaridade entre os grupos investigados.

A partir da Análise de Estrutura de Similaridade (SSA), observa-se na Figura 1 em relação aos tipos de questões, que a Q1, Q2 e Q4 estão dispostas espacialmente bem próximas uma da outra, isso indica que existe uma alta correlação. As questões 1 e 2 envolviam o mesmo significado (média como uma quantidade equitativa a repartir para conseguir uma distribuição uniforme) e a Questão 4 envolvia o reconhecimento de que a média serve de elemento representativo de um conjunto de valores com distribuição aproximadamente simétrica (significados). Essas questões envolviam respectivamente os seguintes invariantes: a média é influenciada por cada um e por todos os valores; que considera todos os valores inclusive os nulos, e que é um valor representativo dos dados a partir dos quais ela foi calculada.

Verifica-se também uma aproximação entre as questões 3 e 6, as quais envolvem o mesmo significado de média, ou seja, a média serve de elemento representativo de um conjunto de valores com distribuição aproximadamente simétrica.

Observa-se que quando o significado é o mesmo existe uma alta correlação entre as questões, apesar das mesmas apresentarem invariantes diferentes. Assim, parece que o significado foi um fator importante no desempenho dos alunos. A compreensão desses significados apresenta algo em comum ou pode ser desenvolvida a partir das mesmas experiências. Essas correlações contribuem para a elaboração de estratégias didáticas de ensino.

Por outro lado, as questões 3 e 4 envolvem o mesmo significado (a média serve de elemento representativo de um conjunto de valores com distribuição aproximadamente simétrica) e se apresentaram espacialmente distantes, mas na mesma linha o que novamente mostra a similaridade das mesmas, reforçando a importância do significado.

As questões 5 e 7, além de se apresentarem como bastante diferenciadas das demais, apresentam uma grande distância entre si. A Questão 5 era a única que envolvia o significado de média como uma estimativa de uma quantidade desconhecida em presença de erros de medida, porém apresentava o mesmo invariante da Questão 1

(a média é influenciada por cada um e por todos os valores). Novamente o significado parece ter tido maior influência do que o invariante. Para Mayén et al (2007) a idéia de média como estimativa de uma quantidade desconhecida em presença de erros de medida é muito importante, visto que é a base dos métodos de estimação. Os resultados obtidos pelas autoras sugerem que esta idéia é intuitiva para os alunos.

Já na Questão 7 era a única que apresentava o significado de que a média envolve a necessidade de conhecer o que se irá obter com maior probabilidade ao contar com um dado faltando em uma distribuição e a única que envolvia o invariante envolvendo a compreensão de que a média está localizada entre os valores extremos (valor mínimo  $\leq$  média  $\leq$  valor máximo). De fato, essa questão ficou bem isolada das demais.

Esses resultados nos chamam a atenção para a importância dos significados na compreensão do conceito de média, porém reforçam a Teoria de Vergnaud (1990) a qual afirma que os invariantes, as situações e as representações influenciam na compreensão de um conceito.

Esse tipo de análise nos ajuda a pensar em como conduzir o processo ensino aprendizagem uma vez que nos mostra as similaridades ou não entre os diferentes invariantes e significados de um conceito.

Em relação aos grupos investigados por nós, percebe-se uma proximidade muito grande entre os grupos dos alunos do 3º e 5º ano do Ensino Fundamental e um distanciamento em relação aos professores. Tais dados nos evidenciam a grande correlação entre os dois grupos de alunos em relação ao desempenho nas questões indiferenciado os mesmos, o que não é de se esperar uma vez que existem dois anos de escolaridade e de vida, em geral, entre os sujeitos.

## **CAPÍTULO 4**

### **QUAIS ESTRATÉGIAS OS PARTICIPANTES DA PESQUISA UTILIZARAM AO RESPONDEREM AS QUESTÕES SOBRE O CONCEITO DE MÉDIA ARITMÉTICA?**

No capítulo anterior apresentamos as análises do percentual de acertos em cada questão e suas interrelações. Ficou posto a grande dificuldade das professoras e, principalmente, dos alunos de ambos os anos em compreender vários aspectos relacionados aos invariantes e significados da média aritmética.

Entretanto, entre acertar e errar nos parece fundamental buscar entender como é que os diferentes participantes demonstravam compreender o conceito de média.

Analisar os tipos de respostas e estratégias utilizadas pelos grupos investigados para resolverem as questões postas no instrumento diagnóstico, as quais envolveram o conceito de média aritmética, é de fundamental importância, visto que tais estratégias darão indicações acerca de como os alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental e os professores desse mesmo nível de ensino compreendem o conceito de média aritmética. Além disso, a partir de tal conhecimento sobre o conceito de média aritmética, os professores podem desenvolver processos de ensino-aprendizagem que trabalhem de forma sistemática e gradual este conceito.

Em seguida, apresentam-se os tipos de estratégias usadas pelos professores, alunos do 3º ano e alunos do 5º ano ao responderem cada uma das questões sobre média aritmética, por tipo de representação pela qual foram apresentados os dados.

O Quadro 7 expõe os tipos de estratégias utilizadas pelos grupos investigados ao responderem a Questão 1 e Quadro 8 apresenta os percentuais de estratégias usadas por cada grupo investigado e por tipo de representação.

Salienta-se que na Questão 1 (ver Apêndice A e B) pedia-se a obtenção da média aritmética, admitindo-a como uma quantidade equitativa a repartir para conseguir uma

distribuição uniforme (significado), bem como que a média é influenciada por cada um e por todos os valores (invariante).

**Quadro 7. Tipos de respostas e estratégias apresentadas pelos grupos ao resolverem a Questão 1.**

<b>1- Resposta correta com explicitação do procedimento de resolução (uso do algoritmo da média aritmética)</b>	Obtém a resposta correta por meio do procedimento de cálculo da média aritmética: soma de todos os valores da variável dividido pela quantidade de dados.
<b>2- Resposta correta sem explicitação do procedimento de resolução</b>	Apresenta apenas a resposta correta para situação proposta.
<b>3- Resposta incorreta, com uso da adição dos valores da variável</b>	Apresenta uma resposta incorreta, pois soma os valores apresentados na questão. Percebe-se que a utilização dessa estratégia remete ao seguinte procedimento: usar um algoritmo conhecido na tentativa de solucionar uma questão que envolve um procedimento de cálculo ainda não compreendido.
<b>4- Resposta incorreta, com uso de valor(es) apresentado(s) na questão</b>	Apresenta uma resposta incorreta, com uso de valor(es) apresentado(s) na própria questão.
<b>5- Resposta incorreta, com uso do valor da maior coluna</b>	Apresenta uma resposta incorreta, com uso de um valor apresentado na própria questão, especificamente o valor da maior coluna. A utilização dessa estratégia refere-se à localização de ponto extremo no gráfico, neste caso o ponto máximo.
<b>6- Resposta incorreta, com uso de valor(es) apresentado(s) na questão, multiplicado(s) pela quantidade de dados</b>	Apresenta uma resposta incorreta, com uso de um ou mais valores apresentados na questão, multiplicado(s) pelo número de dados.
<b>7- Resposta incorreta, com uso da adição dos valores, multiplicação por 2</b>	Apresenta uma resposta incorreta, pois soma os valores apresentados na questão e multiplica por 2.
<b>8- Resposta incorreta, com uso do maior valor apresentado mais 1</b>	Apresenta uma resposta incorreta, com uso do maior valor apresentado na questão acrescentando ao mesmo mais 1. Essa estratégia pode ter sido influenciada pela questão 1A que envolvia o acréscimo de mais 1 a um dos valores apresentados.
<b>9- Resposta incorreta, com uso de valores, os quais não apresentam relação com a situação proposta</b>	Apresenta uma resposta incorreta, com uso de valor que não faz sentido para a situação proposta.
<b>10- Em branco</b>	Não é apresentada nenhuma tentativa de resolução da questão. Pode-se inferir que a não

	resposta possa ter sido motivada pela incompreensão do conceito envolvido na questão, pela dificuldade de compreensão do contexto da situação proposta, pelo desinteresse em responder o teste, dentre outras suposições.
--	---

O Quadro 8 detalha os percentuais de estratégias usadas na resolução da Questão 1 por cada grupo investigado e por tipo de representação.

**Quadro 8. Percentuais de estratégias utilizadas para responder a Questão 1 por grupo e por tipo de representação.**

Estratégias	Professores (%)			Alunos do 3º ano (%)			Alunos do 5º ano (%)		
	Gráfico de colunas	Enuncia-do Escrito	Total	Gráfico de colunas	Enuncia-do Escrito	Total	Gráfico de colunas	Enuncia-do Escrito	Total
1	16,1	6,5	22,6	--	--	--	--	--	--
2	25,8	16,1	41,9	0,0	4,0	4,0	3,8	3,8	7,6
3	3,2	0,0	3,2	2,7	24,0	26,7	8,7	26,0	34,7
4	3,2	3,2	6,4	10,7	10,7	21,4	9,6	8,7	18,3
5	9,7	0,0	9,7	25,3	0,0	25,3	19,2	0,0	19,2
6	0,0	3,2	3,2	0,0	2,7	2,7	5,8	1,9	7,7
7	0,0	6,5	6,5	1,3	1,3	2,6	0,0	2,9	2,9
8	--	--	--	0,0	5,3	5,3	0,0	1,9	1,9
9	--	--	--	5,3	2,7	8,0	2,9	2,9	5,8
10	0,0	6,5	6,5	0,0	4,0	4,0	0,0	1,9	1,9
<b>Total</b>	58,1	41,9	100,0	45,3	54,7	100,0	50,0	50,0	100,0

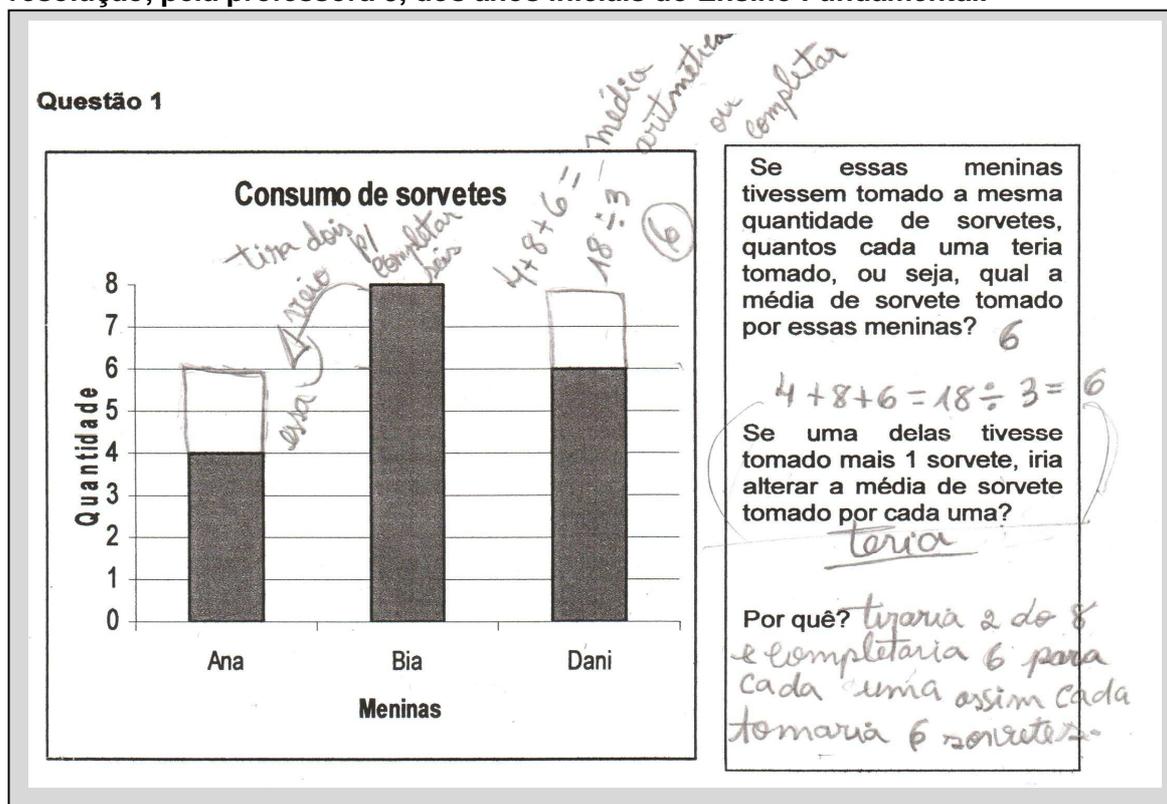
De acordo com o Quadro 8, verifica-se que os percentuais de respostas corretas (64,5%), relativas às estratégias 1 (22,6%) e 2 (41,9%), foram utilizadas pela maioria dos professores, o que parece indicar uma compreensão do que foi solicitado na

Questão 1 em relação ao conceito de média aritmética. Estas estratégias foram mais frequentes quando os dados foram apresentados por meio de gráfico de colunas.

Dessa forma, percebe-se que os professores utilizaram mais a estratégia 2 (41,9%), que compreende a utilização de apenas a resposta correta, ou seja, o procedimento de resolução da questão não foi explicitado na resposta. Entende-se que o uso dessa estratégia está associado a algum procedimento de resolução, como o uso de cálculo mental, a compensação dos valores ou até mesmo o algoritmo, porém esses métodos ficaram implícitos.

Salienta-se, que apenas o grupo dos professores fez uso da estratégia 1 (22,6%), que consiste no estabelecimento da resposta correta com explicitação do procedimento de resolução. Essa estratégia caracterizou-se pelo uso do algoritmo da média aritmética para obtenção da resposta correta. A seguir, apresenta-se um exemplo de estratégia de resposta, em que um sujeito pertencente ao grupo dos professores acerta a Questão 1, explicitando o procedimento de resolução.

Figura 2. Resposta correta da Questão 1, com explicitação do procedimento de resolução, pela professora 8, dos anos iniciais do Ensino Fundamental.



Analisando-se a Figura 2, observa-se que a professora 8 responde corretamente a Questão 1, tornando explícito o uso das seguintes estratégias: utilização do algoritmo da média aritmética e redistribuição de valores ou compensação dos valores. Observa-se que a referida professora realiza o cálculo da média aritmética (soma dos valores da variável e divisão pelo número de dados), obtendo seis como resposta, contudo percebe-se que ela também faz a redistribuição de valores, pois registra acima da maior coluna a seguinte instrução: “tira dois para completar seis”, demonstrando que duas quantidades foram retiradas da coluna de Bia sendo redistribuídas para a coluna de Ana, que foi acrescida de mais duas quantidades, conforme o desenho feito pela professora. Esse procedimento fez com que cada uma das três colunas ficasse com quantidades iguais a seis. A professora reafirma o procedimento usado ao relatar o seguinte trecho: “tiraria 2 do 8 e completaria 6 para cada uma assim cada tomaria 6 sorvetes”.

Embora as estratégias 1 (resposta correta com explicitação do procedimento de resolução) e 2 (resposta correta sem explicitação do procedimento de resolução) sejam consideradas respostas corretas, elas se distinguem pelo fato da estratégia 2 não apresentar o procedimento de resolução da questão, o sujeito expõe apenas a resposta certa, como pode-se observar nos seguintes exemplos de resolução.

**Figura 3. Resposta correta da Questão 1, sem explicitação do procedimento de resolução, pela professora 12, dos anos iniciais do Ensino Fundamental.**

**Questão 1**

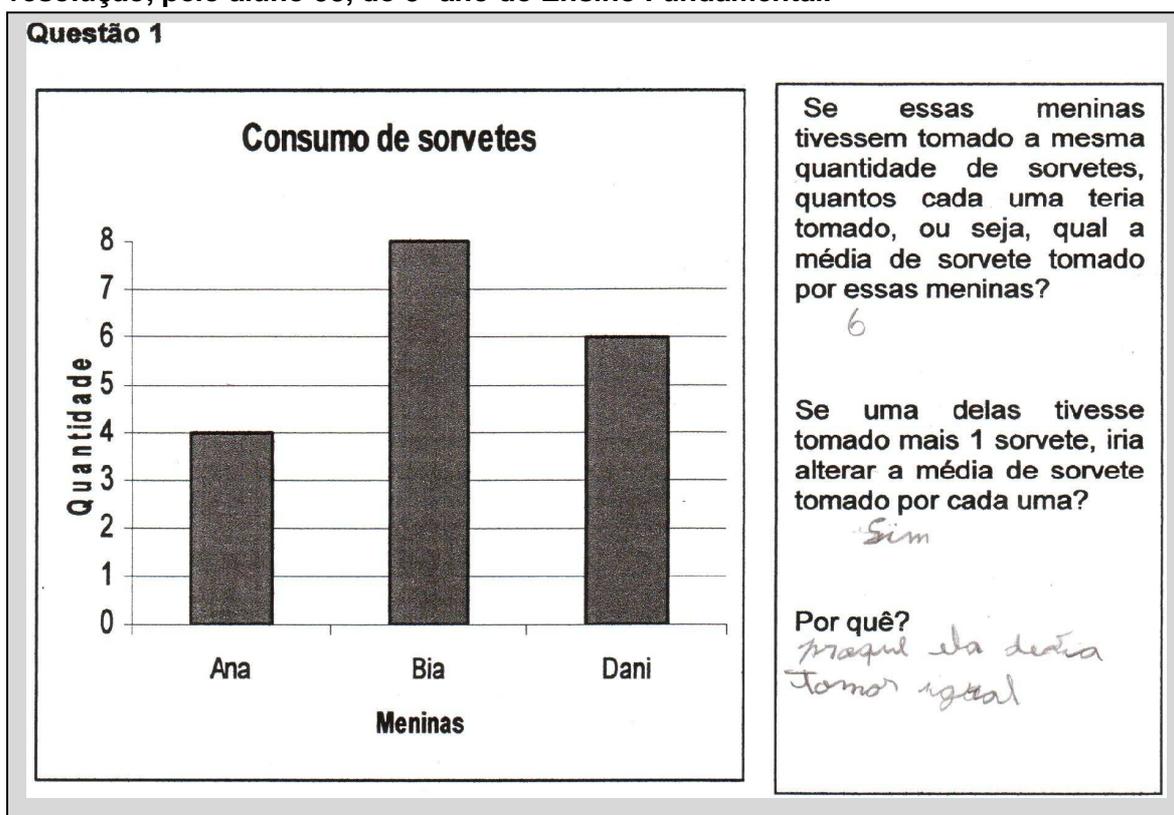
Em um campeonato de futebol o time de Pedro disputou três jogos. Em cada partida a quantidade de gols foi diferente: 3, 7 e 5 gols. Em média quantos gols foram marcados por partida, ou seja, se tivessem marcado a mesma quantidade de gols em cada uma das partidas, quantos gols seriam? *5 gols*

Se o time de Pedro tivesse marcado mais um gol, a média de gols marcados por partida seria alterada? *sim*

Por quê?

Na Figura 3 a professora apresentar apenas a resposta correta sem explicitar a forma como conseguiu obter como resposta o valor cinco. Esse tipo de resposta apareceu em aproximadamente 42% dos protocolos dos professores, embora tenha sido observada também em alguns protocolos dos alunos do 3º ano (4%) e 5º ano (7,6%) do Ensino Fundamental.

**Figura 4. Resposta correta da Questão 1, sem explicitação do procedimento de resolução, pelo aluno 98, do 5º ano do Ensino Fundamental.**



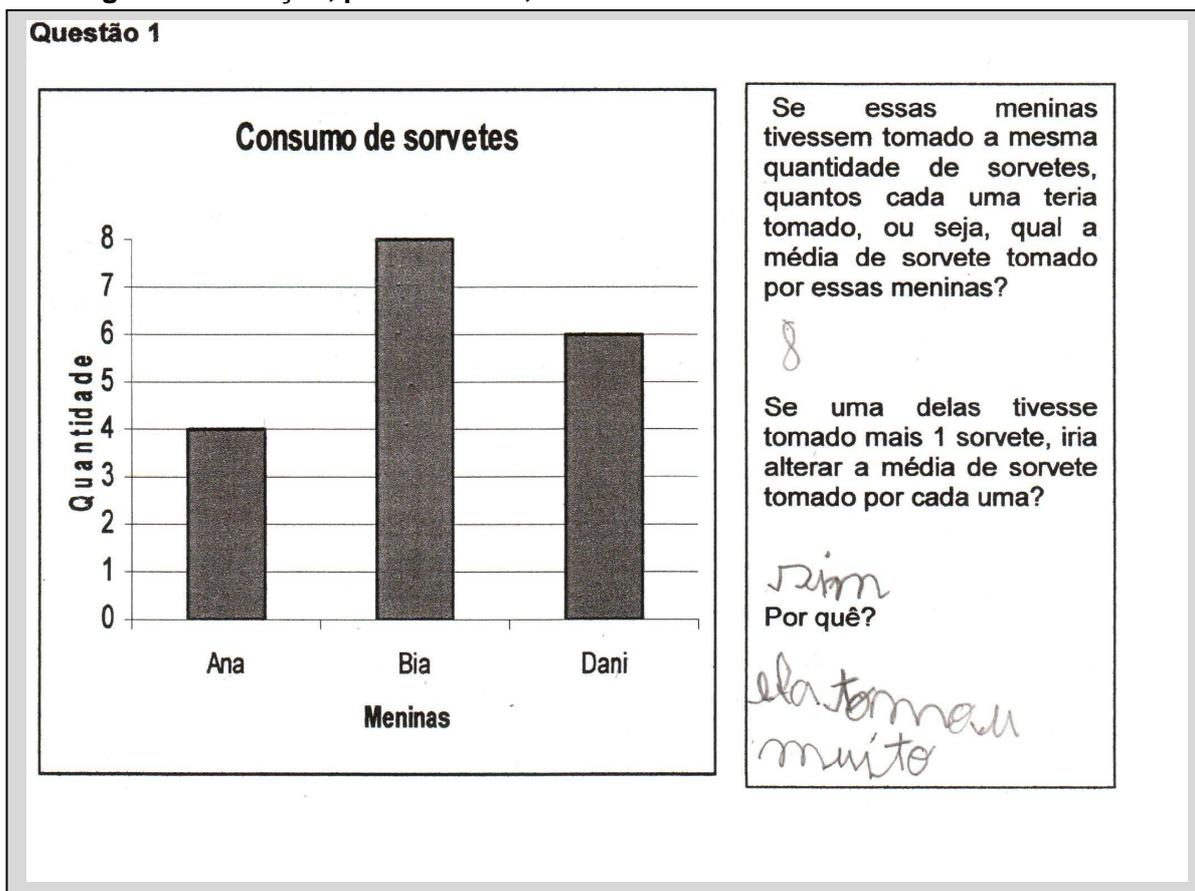
Na Figura 4 tem-se o exemplo de um aluno do 5º ano do Ensino Fundamental que respondeu corretamente a Questão 1, contudo registrou apenas a resposta sem explicitar o procedimento de resolução. Salienta-se que a resposta do aluno não foi dada ao acaso pela escolha aleatória de um dos valores correspondentes as colunas, pelo fato do aluno relatar o seguinte trecho: “porque ela devia tomar igual”, demonstrando compreensão acerca da repartição equitativa dos valores. Supõe-se que o aluno tenha realizado a redistribuição dos valores com uso do cálculo mental. Nesse

sentido, observa-se que alguns alunos conseguem obter o valor da média ao realizar a repartição equitativa dos valores.

Vale ressaltar, que estes dois tipos de estratégias anteriormente mencionados foram observados também no estudo de Pessoa (2009), que investigou a compreensão de alunos do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio sobre problemas que envolviam o raciocínio combinatório.

Em relação aos alunos do 3º e 5º ano, contata-se que as estratégias de uso mais frequente foram a 3 e 5. Observou-se que quando a Questão 1 envolvia gráfico de colunas a estratégia mais utilizada foi a 5, definida como resposta incorreta, com uso do valor da maior coluna, tanto para os alunos do 3º ano (25,3%) quanto para os alunos do 5º ano (19,2%). A seguir, apresenta-se um exemplo da estratégia 5:

**Figura 5. Resposta incorreta da Questão 1, com uso do valor da maior coluna enquanto estratégia de resolução, pela aluna 55, do 3º ano do Ensino Fundamental.**



A Figura 5 representa a estratégia de uma aluna do 3º ano do Ensino Fundamental que apresenta como resposta o valor da maior coluna. A utilização, em específico, desse tipo de estratégia demonstra uma concepção de média como sendo o ponto extremo no gráfico de colunas, neste caso o ponto máximo. Pode-se pensar, ainda, que como o aluno não sabia o que responder, optou por dar como resposta a maior coluna, uma vez que esse tipo de resposta é requerido frequentemente nas atividades propostas por professores ou em livros didáticos. Esse resultado se assemelha ao obtido por Magina, Cazorla, Gitirana e Guimarães (2008) ao realizarem uma pesquisa com estudantes e professores que atuam nos anos iniciais do Ensino Fundamental sobre o conceito de média. Nesse estudo foi constatado que os grupos investigados demonstraram compreender a média como o ponto máximo. As autoras destacam que diferentes representações implicam em distintas compreensões de um mesmo conceito.

Por outro lado, quando a representação usada para apresentação dos dados era o enunciado escrito, a estratégia mais usual foi a 3 (alunos do 3º ano - 24,0% e alunos do 5º ano - 26,0%), que trata-se de uma resposta incorreta, com uso da adição dos valores da variável. Percebe-se que os alunos ao se depararem com a situação envolvendo o conceito de média aritmética, demonstram não saber como solucioná-la, porém utilizam enquanto estratégia de resolução o algoritmo da adição por já terem conhecimento sobre o mesmo, tentando assim, através dos seus conhecimentos prévios, responderem de alguma forma a questão posta.

**Figura 6. Resposta incorreta da Questão 1, com uso da adição dos valores da variável enquanto estratégia de resolução, pela aluna 79, do 3º ano do Ensino Fundamental.**

**Questão 1**

Em um campeonato de futebol o time de Pedro disputou três jogos. Em cada partida a quantidade de gols foi diferente: 3, 7 e 5 gols. Em média quantos gols foram marcados por partida, ou seja, se tivessem marcado a mesma quantidade de gols em cada uma das partidas, quantos gols seriam? 15

Se o time de Pedro tivesse marcado mais um gol, a média de gols marcados por partida seria alterada?

Por quê?

Sim

Por que? Os gols são 3, 7 e 5.

Na figura 6, pode-se observar que a aluna do 3º ano do Ensino Fundamental utiliza o desenho de bolinhas para quantificar a soma de gols, apresentando como resposta o total de quinze (15) gols como valor resultante dessa adição. Assim, percebe-se que o uso desse tipo de estratégia implica na concepção de média como sendo a soma dos valores da variável. Nesse sentido, encontram-se estudos como os de Lima (2005), Caetano (2004), Stella (2003) e Magina et al (2008) em que este tipo de concepção, sem validade estatística, foi comumente observada nas respostas dos alunos, seja dos anos iniciais ou finais do Ensino Fundamental. Magina et al (2008) observaram esse tipo de concepção em apenas 1,2% das respostas dos alunos concluintes do curso de Pedagogia, não sendo observada entre o grupo dos professores, o que difere um pouco de nossos resultados, uma vez que encontramos esta concepção entre o grupo dos professores (3,2%) dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Dessa forma, salienta-se a necessidade de preparação efetiva dos professores no decorrer de sua formação, para que os mesmos possam desenvolver um trabalho adequado concernente ao processo de ensino-aprendizagem dos conceitos estatísticos, dentre os quais destacamos o de média aritmética.

O Quadro 9 descreve os tipos de justificativas apresentadas pelos grupos investigados ao responderem a Questão 1A e o Quadro 10 mostra os percentuais de justificativas descritas por cada grupo investigado e por tipo de representação. Na Questão 1A (ver Apêndice A e B) requeria-se dos grupos o reconhecimento de que ao se acrescentar mais um valor ao conjunto de dados a média se altera.

**Quadro 9. Tipos de justificativas apresentadas pelos grupos na Questão 1A**

<b>1- Considera que o acréscimo implica na alteração da média</b>	Considera que o aumento em um dos valores da variável implica na alteração da média. Foi mencionado em 16,1% dos protocolos dos professores que o resultado não seria exato.
<b>2- Afirma apenas o seguinte: “sim” (professores) ou “acho que sim” (alunos)</b>	Considera que o aumento em um dos valores da variável altera a média, contudo afirma apenas que acha que sim.
<b>3- Considera a alteração, mencionando o aumento em um dos valores da variável</b>	Considera a alteração da média e justifica fazendo relação com o aumento de um dos valores da variável.
<b>4- Relaciona o aumento com os dados ou com o enunciado apresentado na situação proposta</b>	Apresenta justificativa relacionada com os dados ou com o enunciado apresentado na situação proposta.
<b>5- Relaciona o aumento apenas com a adição dos valores</b>	Apresenta justificativa relacionada apenas com a adição dos valores da variável.
<b>6- Relaciona o aumento com aspectos do cotidiano</b>	Apresenta justificativa relacionada com a sua vivência, ou seja, emite opinião a partir da sua experiência de vida.
<b>7- Relaciona o aumento com o maior valor entre os dados</b>	Apresenta justificativa relacionada com o maior valor entre os dados, seja no gráfico de colunas ou no enunciado escrito.
<b>8- Desconsidera que o aumento altera a média</b>	Não considera que o acréscimo em um dos valores da variável implica na alteração da média.
<b>9- Escrita incompreensível</b>	Apresenta escrita incompreensível.
<b>10-Em branco</b>	Deixa a questão em branco.

O Quadro 10 delinea os percentuais de justificativas usadas na Questão 1A por cada grupo investigado e por tipo de representação.

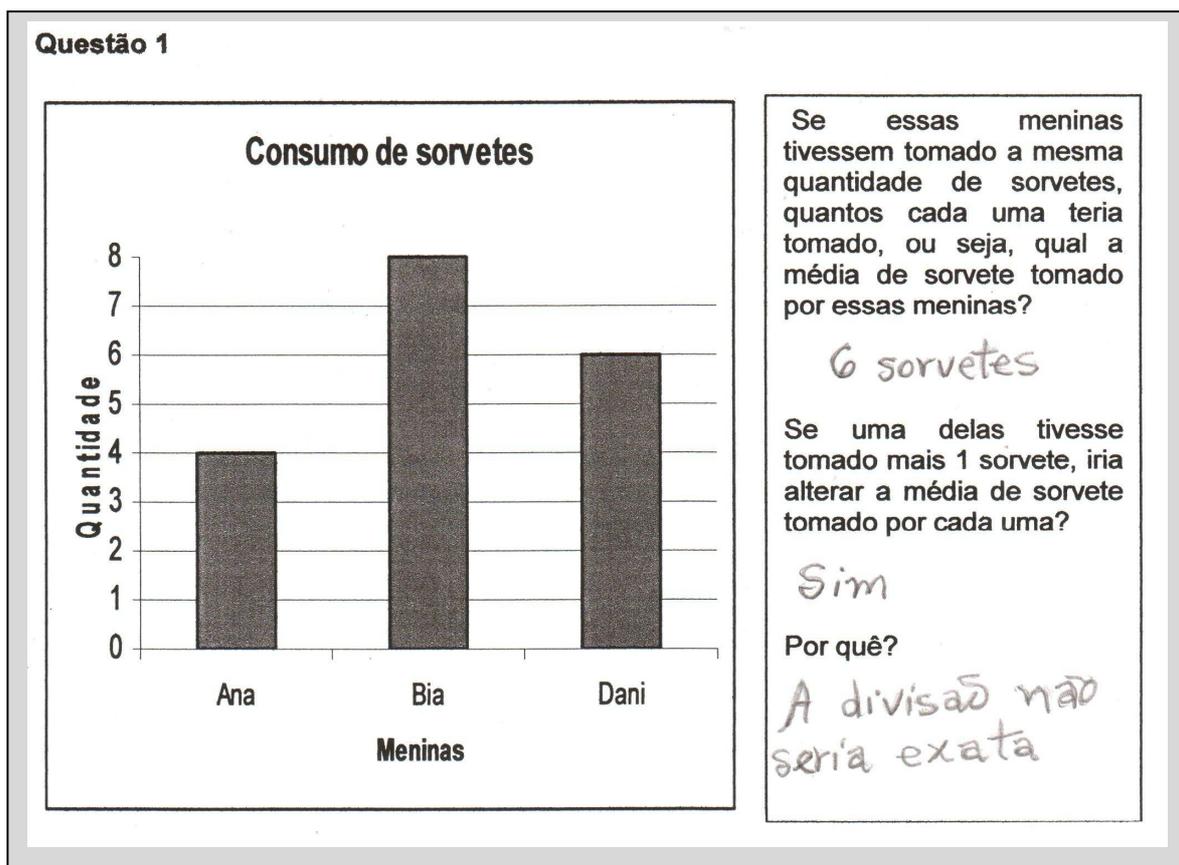
**Quadro 10. Percentuais de justificativas utilizadas para responder a Questão 1A por grupo e por tipo de representação.**

Estra- tégias	Professores (%)			Alunos do 3º ano (%)			Alunos do 5º ano (%)		
	Gráfico de colunas	Enuncia- do Escrito	Total	Gráfico de colunas	Enuncia- do Escrito	Total	Gráfico de colunas	Enuncia- do Escrito	Total
1	22,5	6,5	29,0	5,3	9,3	14,6	20,1	10,6	30,7
2	6,5	6,5	12,9	4,0	18,6	22,6	1,9	1,9	3,8
3	3,2	6,5	9,7	4,0	--	4,0	6,7	--	6,7
4	3,2	3,2	6,5	1,3	4,0	5,3	6,7	7,7	14,4
5	6,5	3,2	9,7	--	--	--	1,0	8,7	9,7
6	3,2	3,2	6,5	13,3	2,7	16,0	1,9	10,6	12,5
7	--	--	--	1,3	--	1,3	--	--	--
8	6,5	6,5	12,9	10,6	14,6	25,2	4,8	6,7	11,5
9	--	--	--	2,7	--	2,7	--	--	--
10	6,5	6,5	12,9	2,7	5,3	8,0	6,7	3,8	10,5
<b>Total</b>	58,1	41,9	100,0	45,3	54,7	100,0	50,0	50,0	100,0

Ao analisar o Quadro 10, constata-se que tanto professores quanto alunos consideraram que o aumento em um dos valores da variável implicava na alteração da média. Mesmo que intuitivamente os alunos demonstraram compreender que por menor que fosse o aumento isso implicava numa alteração da média, mesmo sem saber realizar seu cálculo. Logo, tais dados indicam uma facilidade em compreender que a média é influenciada por cada um e por todos os valores (invariante).

Os professores que dominavam o algoritmo da média ressaltaram que o resultado seria inexato (16,1%), mesmo que não fosse registrado o valor da nova média com os décimos, conforme demonstra o exemplo a seguir:

**Figura 7. Justificativa da resposta da Questão 1A, relativa ao resultado inexato ao se calcular a média, pela professora 22, dos anos iniciais do Ensino Fundamental.**



Na Figura 7, observa-se que a professora responde corretamente a segunda indagação posta nesta situação (Questão 1A) e justifica afirmando que “a divisão não seria exata”, ou seja, seria acrescentado décimos ao valor da média já obtido na Questão 1. Percebe-se, então, que ela considera que o acréscimo de valor influencia na média.

Em relação aos alunos do 3º e 5º ano, percebe-se que em algumas de suas justificativas foi tomada por base a experiência de vida, visto que foram emitidas opiniões mencionando aspectos do cotidiano (estratégia 6).

**Figura 8. Justificativa da resposta da Questão 1A, relativa ao estabelecimento de relação com a própria vivência, pela aluna 148, do 5º ano do Ensino Fundamental.**

**Questão 1**

Em um campeonato de futebol o time de Pedro disputou três jogos. Em cada partida a quantidade de gols foi diferente: 3, 7 e 5 gols. Em média quantos gols foram marcados por partida, ou seja, se tivessem marcado a mesma quantidade de gols em cada uma das partidas, quantos gols seriam? *15 gols*

Se o time de Pedro tivesse marcado mais um gol, a média de gols marcados por partida seria alterada? *eu acho que sim porque ele ele gosta de jogar*

Por quê? *Pra fazer 16 Gol*

Observa-se na Figura 8, que a aluna do 5º ano do Ensino Fundamental entende que existe uma alteração por ser acrescido mais um ao total de 15 gols. A mesma apresenta uma concepção de média como sendo a soma de valores, considerada inválida estatisticamente. Percebe-se em sua justificativa, que ela emite opinião a partir da sua experiência de vida, conforme demonstra o seguinte trecho: “eu acho que sim por que ele gosta de jogar pra fazer 16 gol”.

Vejam o que ocorreu nas questões seguintes. O Quadro 11 mostra os tipos de estratégias utilizadas pelos grupos ao solucionarem a Questão 2 e a Tabela 9 apresenta os percentuais de estratégias usadas por cada grupo investigado e por tipo de representação.

Na Questão 2 (ver Apêndice A e B), assim como na Questão 1, solicitava-se a obtenção da média aritmética, admitindo-a como uma quantidade equitativa a repartir para conseguir uma distribuição uniforme (significado). Contudo, em relação ao invariante a Questão 2 se diferencia da Questão 1, pois atenta para o fato do cálculo da média levar em consideração todos os valores inclusive os nulos.

**Quadro 11. Tipos de respostas e estratégias apresentadas pelos grupos ao resolverem a Questão 2.**

<p><b>1- Resposta correta com explicitação do procedimento de resolução (uso do algoritmo da média aritmética)</b></p>	<p>Obtém a resposta correta por meio do procedimento de cálculo da média aritmética: soma de todos os valores da variável dividido pela quantidade de dados.</p>
<p><b>2- Resposta correta sem explicitação do procedimento de resolução</b></p>	<p>Apresenta apenas a resposta correta para situação proposta.</p>
<p><b>3- Resposta incorreta, com uso do algoritmo da média aritmética, porém desconsiderando o valor nulo</b></p>	<p>Apresenta resposta incorreta, pois apesar de fazer uso do algoritmo da média aritmética não considera o valor nulo na obtenção da mesma.</p>
<p><b>4- Resposta incorreta, com uso da adição dos valores da variável</b></p>	<p>Apresenta uma resposta incorreta, pois soma os valores apresentados na questão. Percebe-se que a utilização dessa estratégia remete ao seguinte procedimento: usar um algoritmo conhecido na tentativa de solucionar uma questão que envolve um procedimento de cálculo ainda não compreendido.</p>
<p><b>5- Resposta incorreta, com uso de valor(es) apresentado(s) na questão</b></p>	<p>Apresenta uma resposta incorreta, com uso de valor(es) apresentado(s) na própria questão.</p>
<p><b>6- Resposta incorreta, com uso do valor da maior coluna</b></p>	<p>Apresenta uma resposta incorreta, com uso de um valor apresentado na própria questão, especificamente o valor da maior coluna. A utilização dessa estratégia refere-se à localização de ponto extremo no gráfico, neste caso o ponto máximo.</p>
<p><b>7- Resposta incorreta, com uso de valor(es) apresentado(s) na questão, multiplicado(s) pela quantidade de dados</b></p>	<p>Apresenta uma resposta incorreta, com uso de um ou mais valores apresentados na questão, multiplicado(s) pelo número de dados.</p>
<p><b>8- Resposta incorreta, com uso de valor(es) apresentado(s) na questão, multiplicado(s) pela quantidade de dados desconsiderando o valor nulo.</b></p>	<p>Apresenta uma resposta incorreta, com uso de um ou mais valores apresentados na questão, multiplicado(s) pelo número de dados desconsiderando o valor nulo.</p>
<p><b>9- Resposta incorreta, com uso da quantidade de colunas do gráfico</b></p>	<p>Apresenta uma resposta incorreta, com uso da quantidade de colunas presentes no gráfico.</p>
<p><b>10-Resposta incorreta, com uso de valores, os quais não apresentam relação com a situação proposta</b></p>	<p>Apresenta uma resposta incorreta, com uso de valor que não faz sentido para a situação proposta.</p>

<b>11- Outros</b>	Apresenta resposta incorreta, com uso de outras estratégias de resolução, as quais não se referem as demais categorias.
<b>12-Em branco</b>	Não é apresentada nenhuma tentativa de resolução da questão. Pode-se inferir que a não resposta possa ter sido motivada pela incompreensão do conceito envolvido na questão, pela dificuldade de compreensão do contexto da situação proposta, pelo desinteresse em responder o teste, dentre outras conjecturas.

O Quadro 12 apresenta os percentuais de estratégias por tipo de representação utilizadas pelos grupos investigados ao solucionarem a Questão 2.

**Quadro 12. Percentuais de estratégias utilizadas para responder a Questão 2 por grupo e por tipo de representação.**

Estratégias	Professores (%)			Alunos do 3º ano (%)			Alunos do 5º ano (%)		
	Gráfico de colunas	Enunciado Escrito	Total	Gráfico de colunas	Enunciado Escrito	Total	Gráfico de colunas	Enunciado Escrito	Total
1	3,2	25,8	29,0	--	--	--	--	--	--
2	6,5	19,4	25,9	1,3	--	1,3	1,0	3,8	4,8
3	3,2	--	3,2	--	--	--	1,9	--	1,9
4	3,2	3,2	6,4	10,7	30,7	41,4	16,3	25,0	41,3
5	12,9	6,5	19,4	4,0	9,3	13,3	--	7,7	7,7
6	--	--	--	18,7	--	18,7	11,5	--	11,5
7	--	3,2	3,2	1,3	--	1,3	3,8	5,8	9,6
8	3,2	--	3,2	--	--	--	3,8	1,9	5,8
9	--	--	--	1,3	--	1,3	1,9	--	1,9
10	--	--	--	12,0	2,7	14,7	3,8	1,9	5,8
11	--	--	--	--	--	--	3,8	1,9	5,8
12	9,7	--	9,7	5,3	2,7	8,0	1,9	1,9	3,8
<b>Total</b>	41,9	58,1	100,0	54,7	45,3	100,0	50,0	50,0	100,0

Ao analisar o Quadro 12, observa-se que a maioria dos professores (54,9%) respondeu corretamente da Questão 2, utilizando as estratégias 1 (29%) e 2 (25,9%) para solucioná-la. Constata-se também que a estratégia 1 não foi usada pelos alunos de ambos os anos de escolarização, mas alguns alunos conseguiram resolver corretamente mediante a aplicação da estratégia 2.

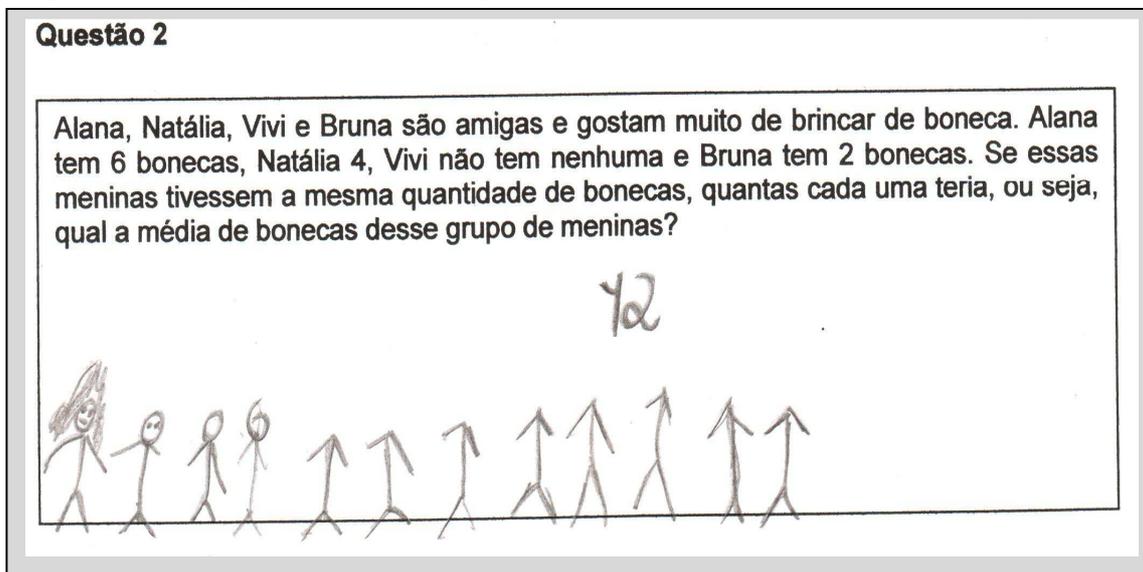
Tanto a estratégia 1 (estabelecimento da resposta correta com explicitação do procedimento de resolução - 25,8) como a estratégia 2 (utilização da resposta correta sem explicitação do procedimento de resolução - 19,4) apresentaram uma maior ocorrência na situação que envolvia o enunciado escrito. No entanto, quando a questão envolvia gráfico de colunas a estratégia mais usual foi a 5 (resposta incorreta, com uso de valor(es) apresentado(s) na questão - 12,9%).

Tais observações indicam que na Questão 2, os professores demonstraram mais facilidade em lidar com o enunciado escrito, apresentando 35,2% de respostas corretas. Entretanto, quando a situação envolvia gráfico de colunas o percentual de acertos foi de apenas 9,7%. Isso denota que nesta questão os professores demonstraram dificuldade de compreensão em relação ao conceito de média aritmética atrelada a esse tipo de representação.

Quanto aos alunos do 3º e 5º ano, verifica-se que a estratégia 4 (resposta incorreta, com uso da adição dos valores da variável) foi bastante empregada, principalmente quando a questão envolvia enunciado escrito. A soma dos valores apresentados foi um procedimento efetuado aproximadamente por 41% dos alunos tanto do 3º ano quanto do 5º ano. A utilização da estratégia 6 (resposta incorreta, com uso do valor da maior coluna - 18,7%) também foi frequente.

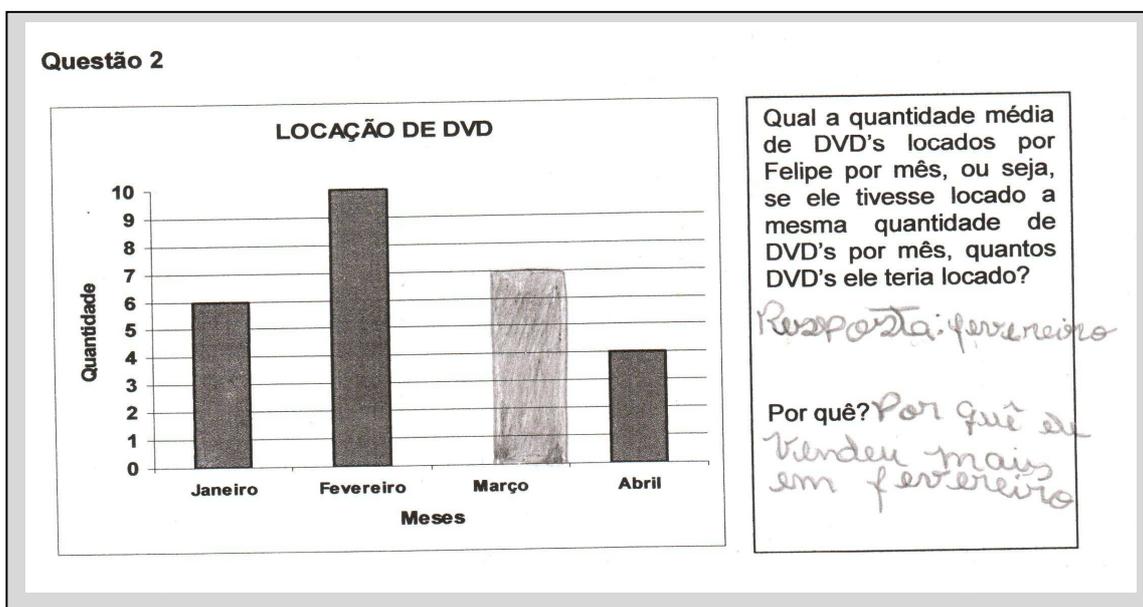
Percebe-se assim, como foi observado na Questão 1, que os alunos tentaram encontrar alguma maneira de solucionar a questão sobre média aritmética, supondo que a resposta passava pela adição dos valores apresentados ou pela constatação do valor da maior coluna do gráfico (ponto máximo). Apresentam-se a seguir exemplos desses dois tipos de estratégias de resolução para Questão 2.

Figura 9. Resposta incorreta da Questão 2, com uso da adição dos valores da variável enquanto estratégia de resolução, pela aluna 88, do 3º ano do Ensino Fundamental.



Na Figura 9 pode-se observar que a aluna do 3º ano do Ensino Fundamental apresenta uma concepção de média como soma dos valores da variável, o que foi observado entre as estratégias de respostas do grupo de professores e, principalmente, entre os grupos dos alunos tanto na Questão 1 como na Questão 2. Vale destacar que a aluna utiliza o desenho para apoiar sua contagem.

Figura 10. Resposta incorreta da Questão 2, com uso da categoria que corresponde ao valor da maior coluna enquanto estratégia de resolução, pelo aluno 97, do 3º ano do Ensino Fundamental.



Ao analisar a Figura 10, percebe-se que o aluno do 3º ano do Ensino Fundamental acaba localizando a categoria (fevereiro) a partir da sua frequência (10) que corresponde à maior coluna no gráfico. Além disso, observa-se que o aluno desenhou uma coluna para o mês de março que apresentava zero como valor para aquele mês. Tais observações sugerem que o aluno possui uma concepção equivocada de média como ponto máximo (neste caso, especificamente, ele registrou a categoria que correspondia ao ponto extremo), bem como apresenta dificuldade em considerar o zero ou valor nulo como um valor possível de pertencer ao conjunto de dados e que deve ser considerado ao se calcular a média.

Observa-se ainda, através das estratégias 3 e 8, a dificuldade de compreensão em relação ao invariante da média, o qual afirma que no cálculo da média deve-se considerar todos os valores inclusive os nulos. Em relação a este invariante, Lima (2005) e Caetano (2004) também constataram esta dificuldade ao realizar um estudo com alunos do 5º ano do Ensino Fundamental. Anjos e Gitirana (2008) asseveram que a propriedade da média elencada por Strauss e Bichler (1988) que versa sobre a consideração dos valores nulos e negativos ao se calcular a média, não é devidamente explorada pelos livros didáticos.

O Quadro 4 apresenta os tipos de estratégias utilizadas pelos grupos ao responderem a Questão 3 (ver Apêndice A e B) e a Tabela 10 mostra os percentuais de estratégias usadas por cada grupo investigado e por tipo de representação. Essa questão requeria o cálculo da média, reconhecendo-a como elemento representativo de um conjunto de valores com distribuição aproximadamente simétrica (significado); e envolvia também a compreensão de que não necessariamente a média coincide com um dos valores que a compõem (invariante).

**Quadro 13. Tipos de respostas e estratégias apresentadas pelos grupos na Questão 3.**

<b>1- Resposta correta com explicitação do procedimento de resolução (uso do algoritmo da média aritmética)</b>	Assinala a resposta correta, obtida por meio do procedimento de cálculo da média aritmética: soma de todos os valores da variável dividido pela quantidade de dados.
<b>2- Resposta correta sem explicitação do procedimento de resolução</b>	Assinala apenas a resposta correta (alternativa que corresponde à média aritmética).
<b>3- Resposta incorreta, com uso da alternativa que corresponde a ao valor da mediana</b>	Apresenta uma resposta incorreta, pois assinala a alternativa que corresponde à mediana.
<b>4- Resposta incorreta, com uso da alternativa que corresponde ao valor da moda</b>	Apresenta uma resposta incorreta, pois assinala a alternativa que corresponde à moda.
<b>5- Resposta incorreta, com uso da adição dos valores da variável</b>	Apresenta uma resposta incorreta, pois soma os valores apresentados na questão. Percebe-se que a utilização dessa estratégia remete ao seguinte procedimento: usar um algoritmo conhecido na tentativa de solucionar uma questão que envolve um procedimento de cálculo ainda não compreendido.
<b>6- Resposta incorreta, com uso da adição dos valores apresentados como alternativas de respostas</b>	Apresenta uma resposta incorreta, com uso da adição dos valores apresentados como alternativas de respostas para situação proposta.
<b>7- Em branco</b>	Não é apresentada nenhuma tentativa de resolução da questão. Pode-se inferir que a não resposta possa ter sido motivada pela incompreensão do conceito envolvido na questão; pela dificuldade de compreensão do contexto ou representação utilizada na situação proposta; pelo desinteresse em responder o teste, dentre outras conjecturas.

O Quadro 14 mostra os percentuais de estratégias por tipo de representação usadas pelos grupos investigados ao resolverem a Questão 3.

**Quadro 14. Percentuais de estratégias utilizadas para responder a Questão 3 por grupo e por tipo de representação.**

Estratégias	Professores (%)			Alunos do 3º ano (%)			Alunos do 5º ano (%)		
	Gráfico de colunas	Enunciado Escrito	Total	Gráfico de colunas	Enunciado Escrito	Total	Gráfico de colunas	Enunciado Escrito	Total
1	6,5	16,1	22,6	--	--	--	--	--	--
2	25,8	12,9	38,7	1,3	4,0	5,3	2,9	1,0	3,8
3	12,9	--	12,9	--	2,7	2,7	11,5	--	11,5
4	--	3,2	3,2	25,3	12,0	37,3	24,0	1,0	25,0
5	12,9	9,7	22,6	17,3	32,0	49,3	10,6	42,3	52,9
6	--	--	--	--	2,7	2,7	--	4,8	4,8
7	--	--	--	1,3	1,3	2,7	1,0	1,0	1,9
<b>Total</b>	58,1	41,9	100,0	45,3	54,7	100,0	50,0	50,0	100,0

De acordo com o Quadro 14, constata-se que a maioria (61,3%) dos professores acertou a Questão 3, sendo que 22,6% registraram qual foi o procedimento de resolução utilizado, neste caso o algoritmo da média, e 38,7% apenas assinalaram a alternativa correta.

Dentre as respostas incorretas percebe-se que os professores utilizaram bastante a estratégia 5 (22,6%), que diz respeito a adição dos valores da variável apresentados na questão. Essa estratégia foi aplicada pelos professores quando a questão envolvia tanto enunciado escrito (9,7%) quanto gráfico de colunas (12,9%), sendo mais frequente neste último tipo de representação.

Também foi usada pelos professores a estratégia 3 (12,9%), que se refere a escolha da alternativa que corresponde ao valor da mediana. Essa estratégia foi utilizada apenas quando a questão apresentava os dados a partir do gráfico. A escolha dessa alternativa pode ter sido motivada pelo aspecto visual, visto que o valor da mediana localizava-se no meio, entre as colunas do gráfico. Neste caso, o tipo de representação parece ter influenciado na escolha da alternativa de resposta.

Verifica-se que os alunos do 3º e 5º ano, utilizaram bastante as estratégias 4 (resposta incorreta, com uso da alternativa que corresponde ao valor da moda) e 5 (resposta incorreta, com uso da adição dos valores da variável). A adição dos valores da variável aparece frequentemente na situação em que o tipo de representação foi o enunciado escrito. Vejamos a seguir um exemplo que indica a concepção equivocada de média aritmética como sendo a soma dos valores.

**Figura 11. Resposta incorreta da Questão 3, com uso da adição dos valores da variável, pelo aluno 106, do 5º ano do Ensino Fundamental.**

**Questão 3**

João realizou cinco ligações de seu celular. Na 1ª ligação ele gastou R\$ 8,00, na 2ª R\$ 7,00, na 3ª R\$ 4,00, na 4ª R\$ 3,00 e na 5ª ligação ele gastou R\$ 3,00. Quantos reais João gastou em média por ligação? <sup>25</sup>

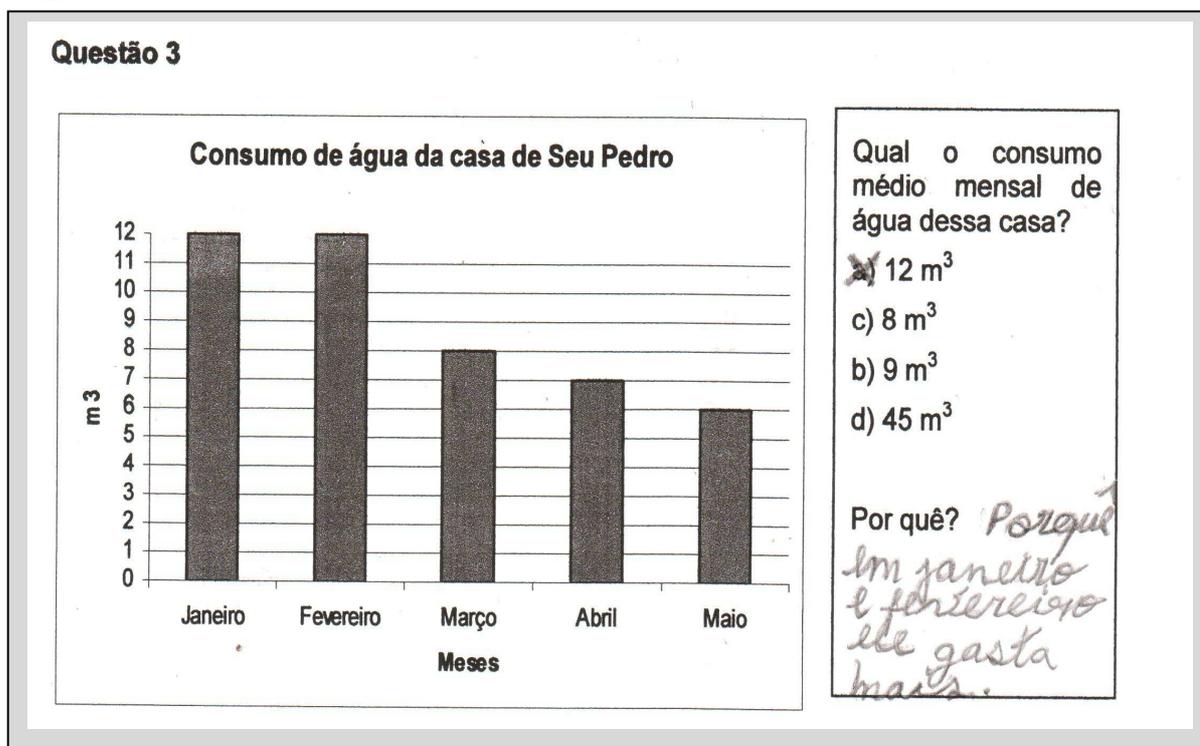
a) R\$ 3,00                      c) R\$ 5,00  
b) R\$ 4,00                      Xd) R\$ 25,00

Por quê? *porque 8 + 7 do 15 + 4 do 19 + 3 do 22 + 3 do*

Na Figura 11, observa-se que o aluno do 5º ano do Ensino Fundamental utiliza como estratégia para obtenção da média a soma dos valores. Este tipo de concepção inapropriada foi percebido entre o grupo dos professores, mas foi comumente utilizada pelos alunos de ambos os anos de escolaridade.

Quando o tipo de representação referia-se ao gráfico de colunas foi mais usual a escolha da alternativa que corresponde à moda. Contudo, a tomada da moda pela média pode ter sido influenciada pelo fato do valor da mesma ser a maior coluna ou ponto máximo. Dessa forma, percebe-se a possível influência do tipo de representação na compreensão de média evidenciada pelos alunos.

Figura 12. Resposta incorreta da Questão 3, com uso da moda, pela aluna 162, do 5º ano do Ensino Fundamental.



Observa-se na Figura 12, que a aluna do 5º ano do Ensino Fundamental assinala a alternativa “a” que corresponde ao valor da moda, a mesma justifica afirmando o seguinte: “Porquê em janeiro e fevereiro ele gasta mais”. Considera-se, ainda, a influência do tipo de representação, já que o aspecto visual (colunas mais altas) pode ter sido um fator que influenciou na escolha dessa alternativa que adota a moda pela média. Nessa perspectiva, Russell e Mokros (1991) observaram que estudantes, de forma incorreta, atribuíram a palavra média a ideia de valor mais frequente.

No Quadro 15 observam-se os tipos de estratégias apresentadas pelos grupos ao resolverem a Questão 4 (ver Apêndice A e B) e no Quadro 16 apresentam-se os percentuais das estratégias usadas por cada grupo investigado e por tipo de representação. Nesta questão, solicitava-se que a partir de uma média dada fossem identificados os possíveis conjuntos de dados que correspondesse a referida média. Para tal, demandava-se o entendimento da média como um valor representativo dos dados a partir dos quais ela foi calculada (invariante); e também enquanto elemento

representativo de um conjunto de valores com distribuição aproximadamente simétrica (significado).

**Quadro 15. Tipos de respostas e estratégias apresentadas pelos grupos na Questão 4.**

<p><b>1- Resposta correta, com escolha dos conjuntos de dados, os quais correspondem à média apresentada na questão</b></p>	<p>As alternativas (b,c) foram assinaladas como respostas verdadeiras, pois os conjuntos de dados das referidas alternativas correspondem à média apresentada na questão.</p>
<p><b>2- Resposta incorreta, com escolha dos conjuntos de dados que correspondem ao valor da média, bem como de conjuntos em que a média obtida é um número aproximado do valor da média apresentada na questão</b></p>	<p>Assinala como verdadeiras as alternativas (b,c) referentes aos conjuntos de dados que correspondem ao valor da média, bem como as alternativas (d,f) em que a média obtida é um número aproximado do valor da média apresentada na questão. Percebe-se, em alguns protocolos de respostas, que ora foi considerada apenas a parte inteira do número, ora foi considerada a possibilidade de arredondamento do número. Isso parece indicar o não reconhecimento de que a média pode ser um número decimal.</p>
<p><b>3- Resposta incorreta, com escolha dos conjuntos de dados que correspondem ao valor da média, bem como do conjunto de dados em que a adição dos valores resulta no valor da média apresentada na questão</b></p>	<p>Assinala como verdadeiras as alternativas (a,b,c) referentes aos conjuntos de dados que correspondem ao valor da média, bem como a alternativa em que a adição dos valores resulta no valor da média apresentada na questão.</p>
<p><b>4- Resposta incorreta, com escolha do conjunto de dados em que a adição dos valores resulta no valor da média apresentada na questão</b></p>	<p>Assinala como verdadeira a alternativa (a) que se refere ao conjunto de dados em que a adição dos valores resulta no valor da média apresentada na questão.</p>
<p><b>5- Resposta incorreta, com escolha do conjunto de dados em que os valores são constantes e iguais ao valor da média apresentada na questão</b></p>	<p>Assinala como verdadeira a alternativa (c) que se refere apenas a um dos conjuntos de dados que corresponde ao valor da média dada. Esse conjunto de dados especificamente é formado por valores constantes e iguais ao valor da média apresentada na questão.</p>
<p><b>6- Resposta incorreta, com escolha dos conjuntos de dados em que os valores são constantes</b></p>	<p>Assinala como verdadeiras as alternativas (a,c) referentes aos conjuntos de dados em que os valores são constantes.</p>
<p><b>7- Resposta incorreta, com escolha dos conjuntos de dados em que os valores são</b></p>	<p>Assinala como verdadeiras as alternativas (a,d,c), as quais se referem aos conjuntos de dados em que os valores são múltiplos do valor</p>

<b>múltiplos do valor da média apresentada na questão</b>	da média apresentada na questão.
<b>8- Resposta incorreta, com escolha dos conjuntos de dados em que os valores não ultrapassam o valor da média apresentada na questão</b>	Assinala como verdadeiras as alternativas (a,c,e) que se referem aos conjuntos de dados em que os valores não ultrapassam o valor da média apresentada na questão.
<b>9- Resposta incorreta, com escolha dos conjuntos de dados em que o valor da média conste entre os demais valores</b>	Assinala como verdadeiras as alternativas (b,c,d,e,f) que se referem aos conjuntos de dados em que conste entre os valores dos conjuntos o valor da própria média descrita na questão.
<b>10-Resposta incorreta, com escolha dos conjuntos de dados em que os valores não ultrapassam o valor da média, constando entre esses valores a média apresentada na questão.</b>	Assinala como verdadeiras as alternativas (c,e) que se referem aos conjuntos de dados em que os valores não ultrapassam o valor da média, constando entre os valores o valor da própria média descrita na questão.
<b>11-Resposta incorreta, com escolha dos conjuntos de dados em que os valores sejam variados e que dentre eles haja valores superiores ao valor da média</b>	Assinala como verdadeiras as alternativas (b,d,f) que correspondem aos conjuntos de dados formados por valores variados (não constantes) e que dentre eles haja valores superiores ao valor da média.
<b>12-Resposta incorreta, com escolha dos conjuntos de dados em que os valores sejam variados (valores não constantes)</b>	Assinala como verdadeiras as alternativas (b,d,e,f) referentes aos conjuntos de dados em que os valores não são constantes.
<b>13-Resposta incorreta, sem apresentar coerência ou regularidade nas respostas assinaladas</b>	Assinala como verdadeiras ou falsas as alternativas sem estabelecer nenhum nexo entre as escolhas realizadas.
<b>14-Resposta incorreta, com marcação das alternativas como sendo todas verdadeiras ou todas falsas.</b>	Assinala as alternativas como sendo todas verdadeiras ou todas falsas. Esta ação indica a incompreensão do que estava sendo solicitado na questão.
<b>15-Em branco</b>	Não é apresentada nenhuma tentativa de resolução da questão. Pode-se inferir que a não resposta possa ter sido motivada pela incompreensão do conceito envolvido na questão; pela dificuldade de compreensão do contexto ou representação utilizada na situação proposta; pelo desinteresse em responder o teste, dentre outras conjecturas.

O Quadro 16 expõe os percentuais de estratégias por tipo de representação colocadas pelos grupos investigados ao resolverem a Questão 4.

**Tabela 11. Percentuais de estratégias utilizadas para responder a Questão 4 por grupo e por tipo de representação.**

Estratégias	Professores (%)			Alunos do 3º ano (%)			Alunos do 5º ano (%)		
	Gráfico de colunas	Enunciado Escrito	Total	Gráfico de colunas	Enunciado Escrito	Total	Gráfico de colunas	Enunciado Escrito	Total
1	6,5	41,9	48,4	--	--	--	--	--	--
2	3,2	9,7	12,9	4,0	4,0	8,0	1,9	8,7	10,6
3	--	3,2	3,2	--	1,3	1,3	--	--	--
4	--	--	--	1,3	--	1,3	1,0	2,9	3,8
5	12,9	3,2	16,1	--	5,3	5,3	1,9	--	1,9
6	3,2	--	3,2	--	--	--	1,9	--	1,9
7	3,2	--	3,2	--	2,7	2,7	--	1,0	1,0
8	3,2	--	3,2	8,0	--	8,0	4,8	4,8	9,6
9	--	--	--	1,3	--	1,3	3,8	1,0	4,8
10	3,2	--	3,2	--	--	--	1,9	1,0	2,9
11	--	--	--	2,7	2,7	5,3	4,8	3,8	8,7
12	--	--	--	--	1,3	1,3	1,9	--	1,9
13	6,5	--	6,5	22,7	20,0	42,7	13,5	24,0	37,5
14	--	--	--	10,7	6,7	17,3	1,9	--	1,9
15	--	--	--	4,0	1,3	5,3	--	--	--
<b>Total</b>	41,9	58,1	100,0	54,7	45,3	100,0	50,0	50,0	100,0

De acordo com o Quadro 16, nota-se que 48,4% dos professores assinalaram como verdadeiras as alternativas corretas (b e c), as quais correspondiam ao valor da média apresentada na Questão 4. Essa estratégia foi utilizada principalmente, na situação com enunciado escrito (41,9%). Vale destacar, que além da influência do tipo de representação, o tipo de contexto também pode ter sido um fator determinante, visto que nesta situação abordava-se o assunto de notas atribuídas a um aluno, as quais resultavam numa determinada média.

Observou-se ainda, a utilização da estratégia 5 tanto pelos grupos dos alunos quanto pelo grupo dos professores (16,1%). Neste caso, foi assinalado como verdadeira apenas a alternativa “c”, a qual se refere especificamente, a valores constantes e iguais a média apresentada na questão. Segundo Magina et al (2008), entender que a média só pode resultar de valores constantes e iguais a ela, foi uma concepção inválida observada apenas entre alunos do 5º e 6º ano, não sendo encontrada entre os graduandos de Pedagogia e os professores. Observemos a seguir um exemplo da estratégia 5.

**Figura 13. Resposta incorreta da Questão 4, com escolha do conjunto de dados em que os valores são constantes e iguais ao valor da média apresentada na questão, pela professora 13, dos anos iniciais do Ensino Fundamental.**

**Questão 4**

Marcos obteve no final do ano a média 4 em Geografia. Coloque V (Verdadeiro) ou F (Falso) para as possíveis notas recebidas por Marcos nas quatro unidades do ano letivo:

a) ( <del>F</del> ) 1, 1, 1, 1	c) (V) 4, 4, 4, 4	e) ( <del>F</del> ) 1, 2, 3, 4
b) ( <del>F</del> ) 1, 2, 4, 9	d) ( <del>F</del> ) 1, 2, 4, 8	f) ( <del>F</del> ) 1, 2, 4, 10

Na Figura13, observa-se que a professora reconhece como sendo verdadeiro apenas o conjunto de dados composto por valores constantes e iguais a média, não reconhecendo como verdadeira a alternativa “b” que também corresponde ao valor da média apresentada na situação.

Também foi bastante utilizada, tanto pelos professores como pelos alunos de ambos os anos de escolarização, a estratégia 2, que considera como alternativas verdadeiras os conjuntos de dados que correspondem ao valor da média apresentada na questão, bem como as alternativas em que a média obtida é um número aproximado do valor da média. Foi observada em alguns protocolos de professores, a consideração dos conjuntos de dados em que o valor da média obtida a partir dos mesmos, corresponde a um número que pode ser arredondado para mais ou para menos, em função do valor da média apresentada na questão. Entende-se, que esta atitude pode ter sido motivada pela experiência profissional dos professores, em que comumente se pratica o arredondamento de notas. Além desse aspecto ligado a prática profissional, percebe-se nessa ação um indicativo de dificuldade no reconhecimento da possibilidade da média aritmética ser um número racional.

**Figura 14. Resposta incorreta da Questão 4, com escolha do conjunto de dados que correspondem ao valor da média, bem como de conjuntos em que a média obtida é um número aproximado do valor da média apresentada na questão, pela professora 16, dos anos iniciais do Ensino Fundamental.**

**Questão 4**

Marcos obteve no final do ano a média 4 em Geografia. Coloque V (Verdadeiro) ou F (Falso) para as possíveis notas recebidas por Marcos nas quatro unidades do ano letivo:

a) (F) 1, 1, 1, 1	c) (V) 4, 4, 4, 4	e) (F) 1, 2, 3, 4
b) (V) 1, 2, 4, 9	d) (V) 1, 2, 4, 8	f) (V) 1, 2, 4, 10

*considerarei apenas a parte inteira, sem considerar os décimos.*

Na Figura 14, observa-se que a professora assinala como verdadeiras além das alternativas corretas (b,c), as alternativas que correspondem aos conjuntos de dados em que o valor obtido se aproxima do valor da média (4), ou seja, ela faz um arredondamento seja para mais (alternativa “d” – 3,75) ou para menos (alternativa “f” – 4,25) considerando apenas a parte inteira do número.

Em relação aos alunos, nota-se que 42,7% dos protocolos do 3º ano e 37,5% do 5º ano não apresentaram nenhumnexo ou regularidade nas escolhas das alternativas sendo elas verdadeiras ou falsas. Também com frequência assinalaram como sendo verdadeiras as alternativas que se referem aos conjuntos de dados em que os valores não ultrapassam o valor da média apresentada na questão (estratégia 8).

No Quadro 17 apresentam-se os tipos de estratégias delineadas pelos grupos ao responderem a Questão 5 (ver Apêndice A e B) e no Quadro 18 estão descritos os percentuais das estratégias utilizadas pelos grupos e por tipo de representação. Nesta questão, requeria-se que os grupos obtivessem a média aritmética, entendendo-a como uma estimativa de uma quantidade desconhecida em presença de erros de medida (significado). Em relação ao invariante, a questão implicava no reconhecimento de que a média é influenciada por cada um e por todos os valores.

**Quadro 17. Tipos de respostas e estratégias apresentadas pelos grupos na Questão 5.**

<b>1- Resposta correta com explicitação do procedimento de resolução (uso do algoritmo da média aritmética)</b>	Obtém a resposta correta por meio do procedimento de cálculo da média aritmética: soma de todos os valores da variável dividido pela quantidade de dados.
<b>2- Resposta correta sem explicitação do procedimento de resolução</b>	Apresenta apenas a resposta correta para situação proposta.
<b>3- Resposta incorreta, com uso da adição dos valores da variável</b>	Apresenta uma resposta incorreta, pois soma os valores apresentados na questão. Percebe-se que a utilização dessa estratégia remete ao seguinte procedimento: usar um algoritmo conhecido na tentativa de solucionar uma questão que envolve um procedimento de cálculo ainda não compreendido.
<b>4- Resposta incorreta, com uso de valor(es) apresentado(s) na questão</b>	Apresenta uma resposta incorreta, com uso de valor(es) apresentado(s) na própria questão.

<b>5- Resposta incorreta, com uso do valor da maior coluna</b>	Apresenta uma resposta incorreta, com uso de um valor apresentado na própria questão, especificamente o valor da maior coluna. A utilização dessa estratégia refere-se à localização de ponto extremo no gráfico, neste caso o ponto máximo.
<b>6- Resposta incorreta, com uso do menor valor apresentado na questão</b>	Apresenta uma resposta incorreta, com uso do menor valor apresentado na própria questão.
<b>7- Resposta incorreta, com uso de valor relacionado com o seu próprio cotidiano</b>	Apresenta uma resposta incorreta, com uso de um valor estabelecido a partir da sua própria vivência no dia-a-dia.
<b>8- Resposta incorreta, com uso de valores, os quais não apresentam relação com a situação proposta</b>	Apresenta uma resposta incorreta, com uso de valor que não faz sentido para a situação proposta.
<b>9- Escrita incompreensível</b>	Apresenta uma escrita incompreensível ao responder a questão.
<b>10-Em branco</b>	Não é apresentada nenhuma tentativa de resolução da questão. Pode-se inferir que a não resposta possa ter sido motivada pela incompreensão do conceito envolvido na questão, pela dificuldade de compreensão do contexto da situação proposta, pelo desinteresse em responder o teste, dentre outras conjecturas.

O Quadro 18 apresenta as estratégias utilizadas pelos grupos para solucionar a Questão 5 por tipo de representação.

**Quadro 18. Percentuais de estratégias utilizadas para responder a Questão 5 por grupo e por tipo de representação.**

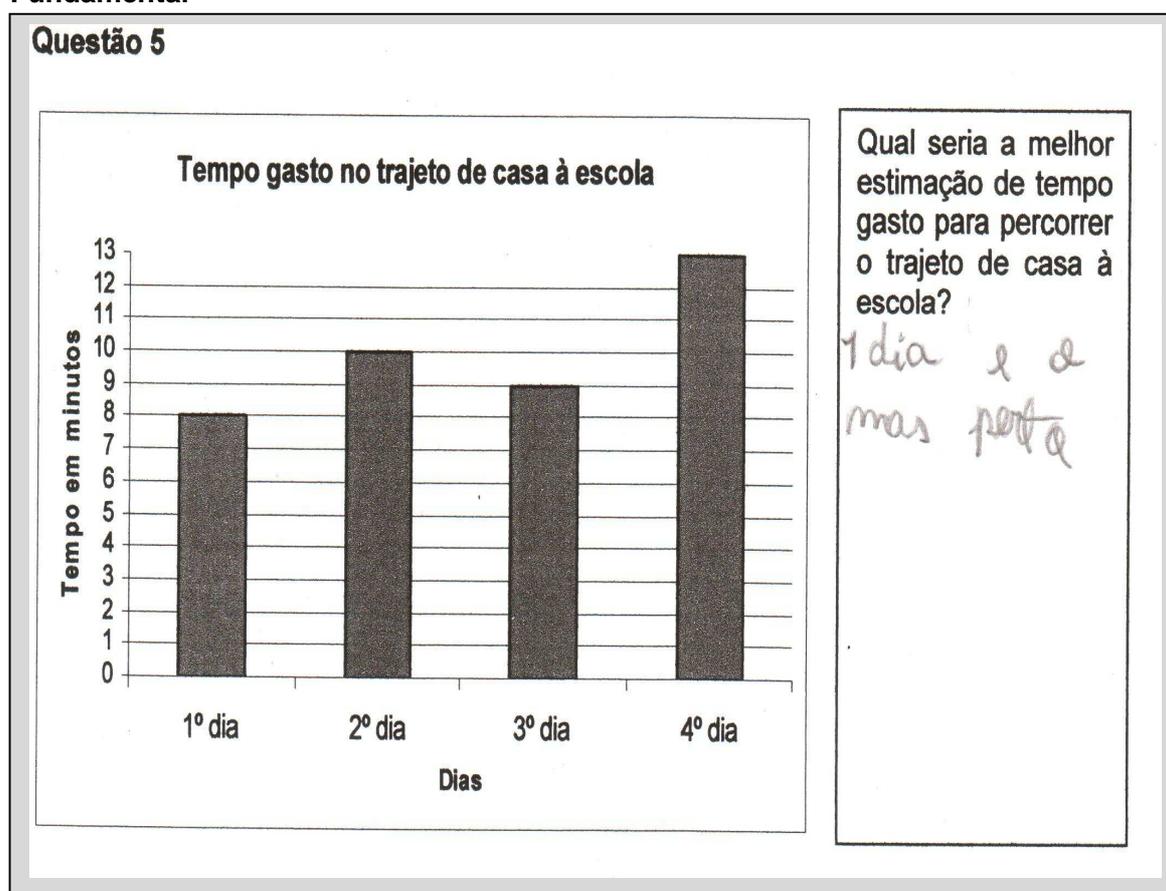
Estratégias	Professores (%)			Alunos do 3º ano (%)			Alunos do 5º ano (%)		
	Gráfico de colunas	Enuncia-do Escrito	Total	Gráfico de colunas	Enuncia-do Escrito	Total	Gráfico de colunas	Enuncia-do Escrito	Total
1	12,9	12,9	25,8	--	--	--	--	--	--
2	19,4	6,5	25,8	5,3	2,7	8,0	4,8	6,7	11,5
3	3,2	--	3,2	1,3	1,3	2,7	1,0	10,6	11,5
4	3,2	3,2	6,5	5,3	22,7	28,0	1,9	8,7	10,6
5	3,2	--	3,2	24,0	--	24,0	16,3	--	16,3
6	12,9	16,1	29,0	4,0	14,7	18,7	17,3	22,1	39,4
7	--	--	--	2,7	5,3	8,0	4,8	--	4,8
8	--	--	--	--	2,7	2,7	1,0	1,9	2,9
9	--	--	--	1,3	--	1,3	1,0	--	1,0
10	3,2	--	3,2	1,3	5,3	6,7	1,9	--	1,9
<b>Total</b>	58,1	41,9	100,0	45,3	54,7	100,0	50,0	50,0	100,0

Segundo nos mostra o Quadro 18, as estratégias 1, 2 e 6 foram as mais usadas pelos professores. A maioria deles (51,6%) respondeu corretamente a Questão 5, sendo que 25,8% realizaram o cálculo da média aritmética e 25,8% apenas registraram a resposta correta.

No que concerne ao uso da estratégia 6, verifica-se que 29,0% dos professores, 18,7% do alunos do 3º ano e 39,4% dos alunos do 5º ano apresentaram como resposta o menor valor apresentado na questão.

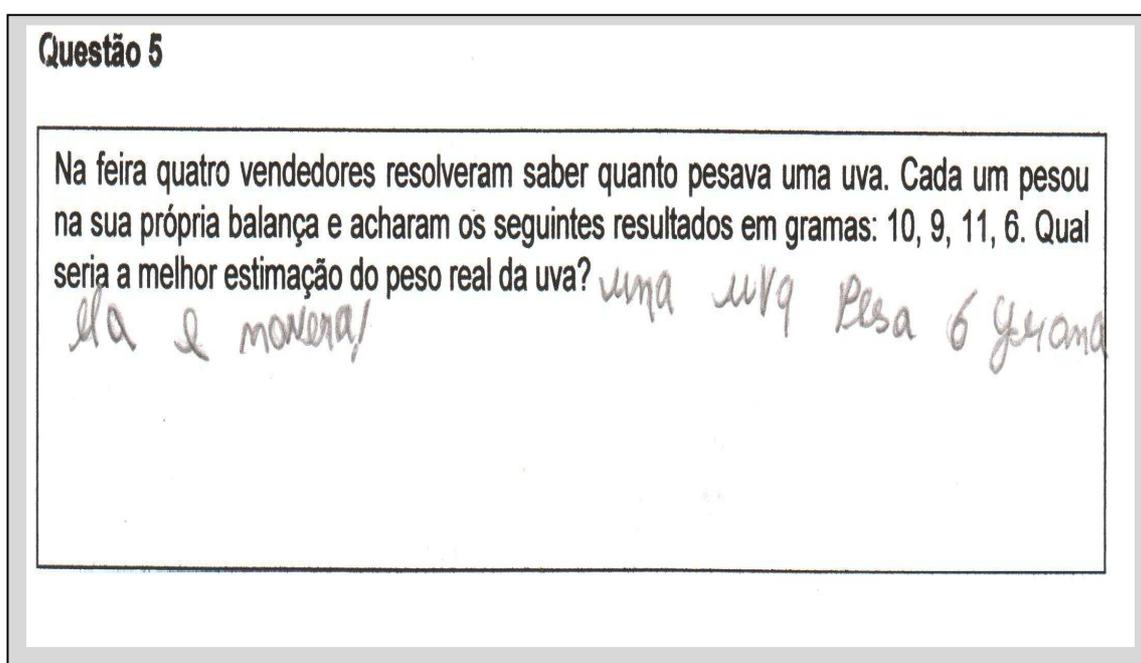
Ao analisar a estratégia 6, percebe-se a influência da experiência de vida na resposta dos sujeitos, pois alguns alunos relataram que eles não demoravam muito para vir de casa à escola, então a resposta seria o menor tempo (contexto do teste A), já outros disseram que uma uva é muito pequena e por isso seu peso deveria ser o menor (contexto do teste B). No caso dos professores, talvez a ausência da palavra média no enunciado da pergunta, tenha exercido influência no uso do menor valor como melhor estimativa, visto que eles podem ter apresentado dúvidas sobre se de fato o conceito de média aritmética estaria envolvido na Questão 5. Observemos exemplos do tipo de estratégia 6 utilizada na situação com gráfico e com enunciado escrito, respectivamente.

**Figura 15. Resposta incorreta da Questão 5, com uso do menor valor apresentado na questão que envolvia gráfico de coluna, pelo aluno 157, do 5º ano do Ensino Fundamental**



A Figura 15 representa a estratégia de um aluno do 5º ano do Ensino Fundamental que utiliza como resposta o menor valor entre os dados (ponto mínimo que corresponde à coluna mais baixa). O aluno justifica sua escolha afirmando o seguinte: “1 dia é o mais perto”. Percebe-se, então, que o aluno considera como melhor estimativa o menor valor, na situação posta, desconsiderando o valor da média como estimativa de uma quantidade desconhecida em presença de erros de medida.

**Figura 16. Resposta incorreta da Questão 5, com uso do menor valor apresentado na questão que envolvia enunciado escrito, pela aluna 153, do 5º ano do Ensino Fundamental**



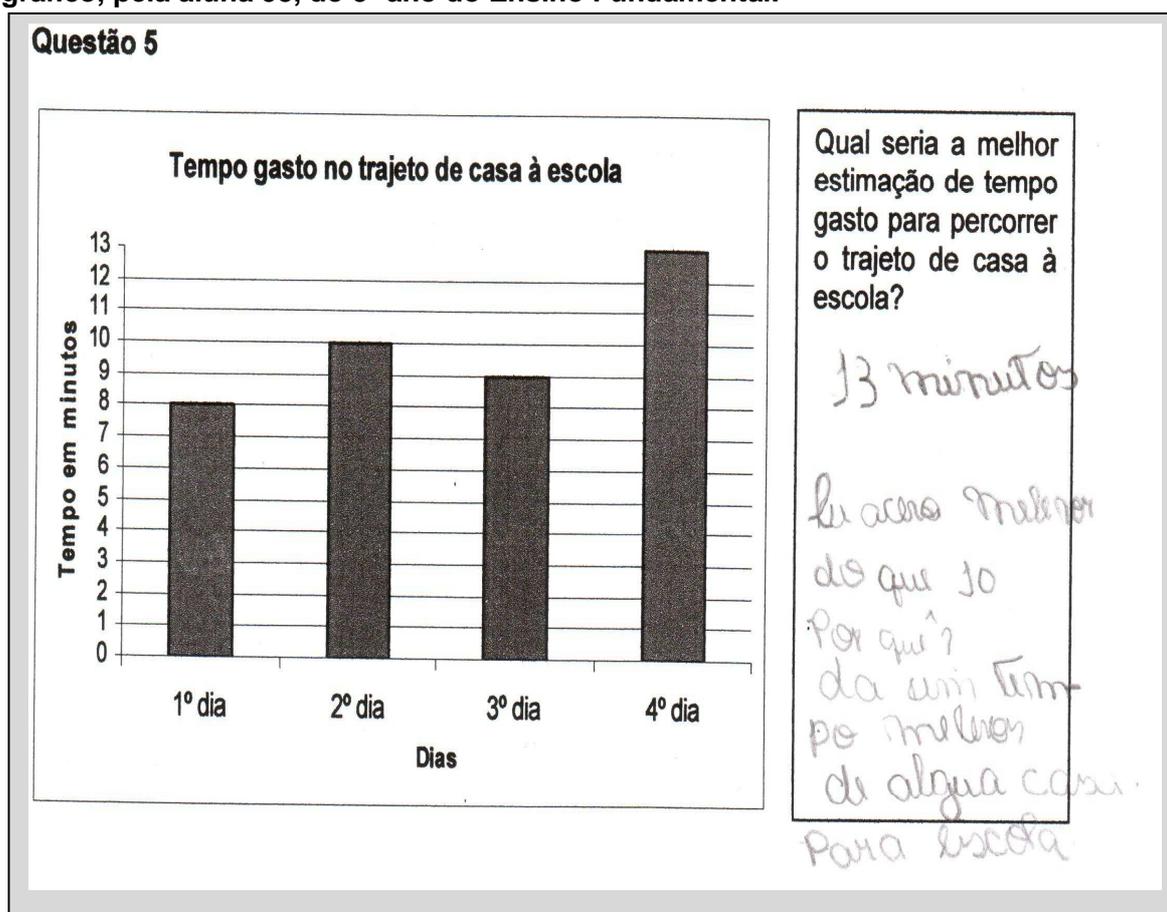
Em relação à Figura 16, observa-se que a aluna do 5º ano do Ensino Fundamental reconhece o menor valor como melhor estimativa para o peso (massa) da uva, pois relata o seguinte: “uma uva pesa 6 grama ela é manera!”. Isso indica que, neste caso, o seu conhecimento de mundo, ou seja, a experiência de vida acabou influenciando na resposta, no sentido de que, sendo a uva uma fruta pequena implica em ter o peso mais baixo (menor valor entre os dados apresentados na questão).

Salienta-se, que a escolha do menor valor da variável como sendo a melhor estimativa, indica a existência de dificuldades em compreender a média como uma

estimativa de uma quantidade desconhecida em presença de erros de medida (significado da média).

Foi percebido também o uso da estratégia 4 (resposta incorreta, com uso de valor(es) apresentado(s) na própria questão) em 28% das respostas apresentadas pelos alunos do 3º ano, principalmente na situação que envolvia enunciado escrito (22,7%). Também se observou a utilização da estratégia 5 tanto pelos alunos do 3º ano (24%) quanto do 5º ano (16,3%), exclusivamente na situação que envolve gráfico. Esta estratégia refere-se a uma resposta incorreta, com uso de um valor apresentado na própria questão, especificamente o valor correspondente a maior coluna do gráfico.

**Figura 17. Resposta incorreta da Questão 5, com uso do valor da maior coluna do gráfico, pela aluna 93, do 5º ano do Ensino Fundamental.**



Na Figura 17, observa-se que a escolha do valor que corresponde a maior coluna, parece indicar que a aluna também considerou, assim como foi observado na análise da estratégia 6, a sua experiência de vida. Ao justificar sua resposta (13 minutos) a aluna argumenta o seguinte: “eu acho melhor do que 10 Por quê? da um tempo melhor de (...) casa para escola”. Percebe-se assim, que o reconhecimento do valor da maior coluna (maior tempo) como a melhor estimativa, indica a existência de dificuldades em reconhecer a média como estimativa de uma quantidade desconhecida em presença de erros de medida (significado).

No Quadro 19 apresentam-se os tipos de estratégias delineadas pelos grupos ao responderem a Questão 6 (ver Apêndice A e B) e no Quadro 20 estão descritos os percentuais das estratégias utilizadas pelos grupos e por tipo de representação. Nesta questão pedia-se que os grupos calculassem a média aritmética, compreendendo-a enquanto elemento representativo de um conjunto de valores com distribuição aproximadamente simétrica (significado), bem como reconhecessem que a média pode ser um número que não tem um correspondente na realidade física (invariante).

**Quadro 19. Tipos de respostas e estratégias apresentadas pelos grupos ao resolverem a Questão 6.**

<b>1- Resposta correta com explicitação do procedimento de resolução (uso do algoritmo da média aritmética)</b>	Obtém a resposta correta por meio do procedimento de cálculo da média aritmética: soma de todos os valores da variável dividido pela quantidade de dados.
<b>2- Resposta correta sem explicitação do procedimento de resolução</b>	Apresenta apenas a resposta correta para situação proposta.
<b>3- Resposta incorreta com uso do algoritmo da média aritmética (não reconhece que a média pode ser um número que não possui um correspondente na realidade física)</b>	Apresenta resposta incorreta, pois considera apenas a parte inteira do número demonstrando que não reconhece que a média pode ser um número que não tem um correspondente na realidade física, ou seja, não tem sentido na vida real.
<b>4- Resposta incorreta, com uso da adição dos valores da variável</b>	Apresenta uma resposta incorreta, pois soma os valores apresentados na questão. Percebe-se que a utilização dessa estratégia remete ao seguinte procedimento: usar um algoritmo conhecido na tentativa de solucionar uma questão que envolve um procedimento de cálculo ainda não compreendido.

<b>5- Resposta incorreta, com uso de valor(es) apresentado(s) na questão</b>	Apresenta uma resposta incorreta, com uso de valor(es) apresentado(s) na própria questão.
<b>6- Resposta incorreta, com uso do valor da maior coluna</b>	Apresenta uma resposta incorreta, com uso de um valor apresentado na própria questão, especificamente o valor da maior coluna. A utilização dessa estratégia refere-se à localização de ponto extremo no gráfico, neste caso o ponto máximo.
<b>7- Resposta incorreta, com uso da quantificação dos dados</b>	Apresenta uma resposta incorreta, com uso da quantificação dos dados apresentados na questão como resposta.
<b>8- Resposta incorreta, com uso da subtração de valores apresentados no enunciado</b>	Apresenta uma resposta incorreta, com uso da subtração de valores apresentados na questão.
<b>9- Resposta incorreta, com uso da divisão de cada valor da variável por 2</b>	Apresenta uma resposta incorreta, com uso da divisão de cada valor da variável por 2, ou seja, divide pela metade.
<b>10-Resposta incorreta, com uso de valores, os quais não apresentam relação com a situação proposta</b>	Apresenta uma resposta incorreta, com uso de valor que não faz sentido para a situação proposta.
<b>11- Outros</b>	Apresenta resposta incorreta, com uso de outras estratégias de resolução, as quais não se referem as demais categorias.
<b>12-Em branco</b>	Não é apresentada nenhuma tentativa de resolução da questão. Pode-se inferir que a não resposta possa ter sido motivada pela incompreensão do conceito envolvido na questão, pela dificuldade de compreensão do contexto da situação proposta, pelo desinteresse em responder o teste, dentre outras conjecturas.

O Quadro 20 apresenta os percentuais das estratégias utilizadas pelos grupos para solucionar a Questão 6 por tipo de representação.

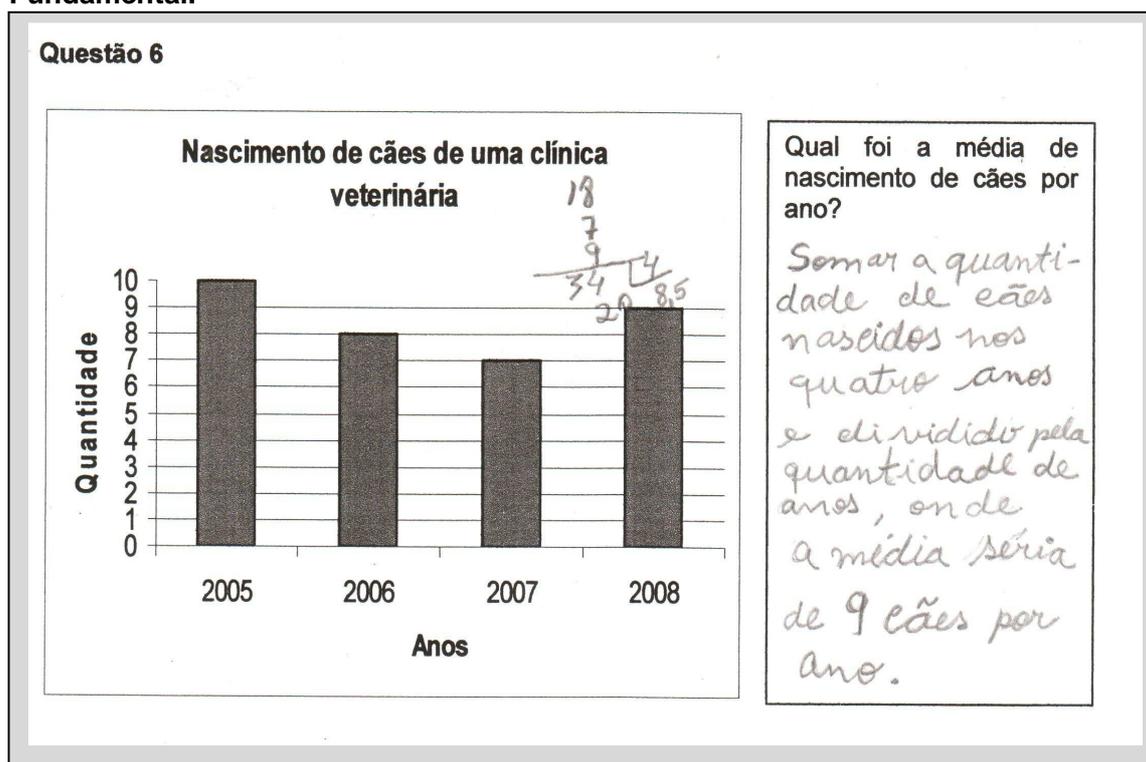
**Quadro 20. Percentuais de estratégias utilizadas para responder a Questão 6 por grupo e por tipo de representação.**

Estratégias	Professores (%)			Alunos do 3º ano (%)			Alunos do 5º ano (%)		
	Gráfico de colunas	Enuncia-do Escrito	Total	Gráfico de colunas	Enuncia-do Escrito	Total	Gráfico de colunas	Enuncia-do Escrito	Total
1	9,7	9,7	19,4	--	--	--	--	--	--
2	3,2	3,2	6,5	--	--	--	--	--	--
3	9,7	22,6	32,3	--	--	--	--	--	--
4	6,5	16,1	22,6	2,7	28,0	30,7	12,5	35,6	48,1
5	--	3,2	3,2	38,6	9,4	48,0	30,7	5,8	36,5
6	6,5	--	6,5	2,7	--	2,7	1,9	--	1,9
7	--	--	--	--	--	--	1,0	1,0	1,9
8	--	--	--	--	2,7	2,7	--	1,0	1,0
9	--	--	--	--	--	--	1,0	1,9	2,9
10	3,2	--	3,2	4,0	2,7	6,7	--	--	--
11	3,2	3,2	6,5	1,3	1,3	2,7	2,9	1,9	4,8
12	--	--	--	5,3	1,3	6,7	--	2,9	2,9
<b>Total</b>	41,9	58,1	100,0	54,7	45,3	100,0	50,0	50,0	100,0

De acordo com o Quadro 20, a estratégia 3 foi a mais utilizada (32,3%) pelos professores na tentativa de solucionar a Questão 6. Os professores realizaram o cálculo da média aritmética, porém demonstraram não reconhecer que a média pode ser um número que não tem um correspondente na realidade física, ou seja, não tem sentido

na vida real, uma vez que apresentavam um valor inteiro como resposta para questão. Essa estratégia aparece mais na situação com enunciado escrito (22,6%).

**Figura 18. Resposta incorreta da Questão 6, não reconhece que a média pode ser um valor sem sentido na vida real, pela professora 1, dos anos iniciais do Ensino Fundamental.**

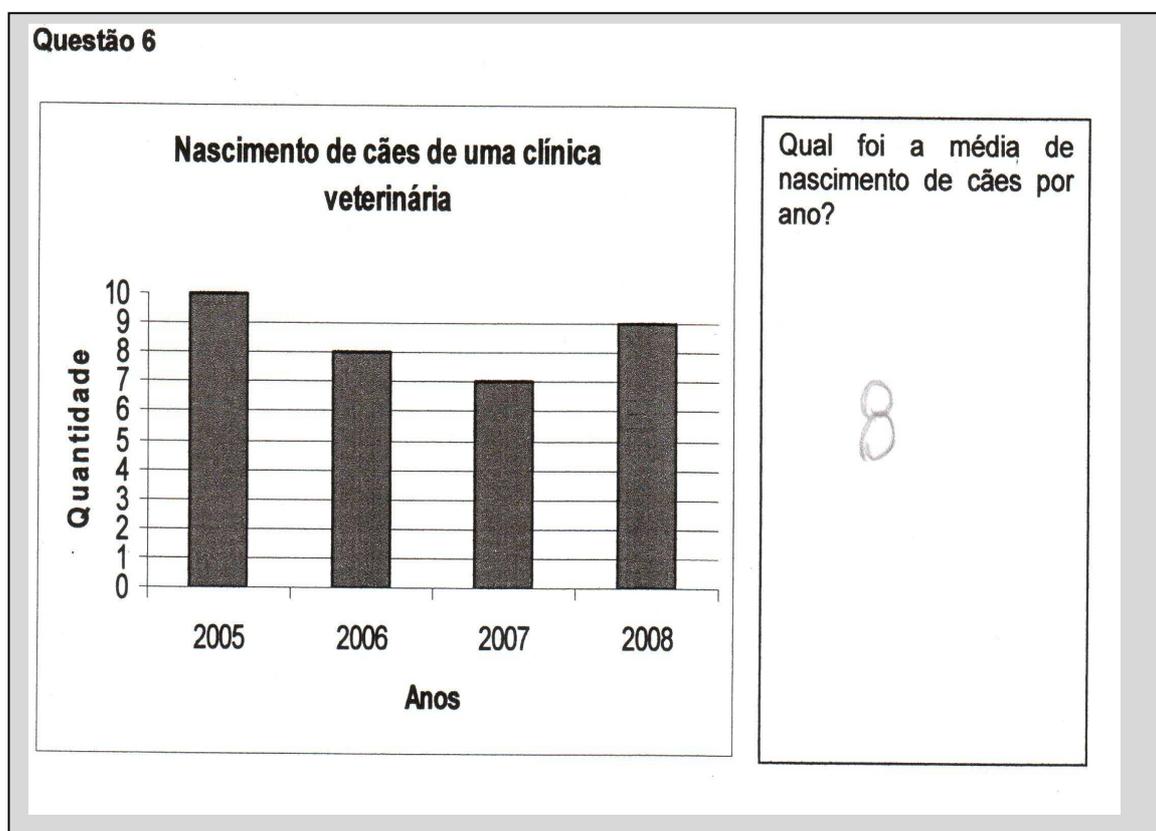


Ao observar a Figura 18, percebe-se que a professora 1 domina o algoritmo da média, pois registra seu cálculo realizado com sucesso, contudo não reconhece o valor obtido (8,5) como um número de resposta possível para a situação, pois mesmo encontrando como resultado 8,5 ela relata como resposta o seguinte: “ somar a quantidade de cães nascidos nos quatro anos e dividido pela quantidade de anos, onde a média seria de 9 cães por ano”. Isso indica dificuldades de compreensão com relação ao invariante levantado por Strauss e Bichler (1988) o qual versa sobre a idéia de que a média pode ser um número sem sentido na vida real.

Em relação aos alunos, salienta-se que não houve acertos na Questão 6. Foi mais comum, entre os alunos do 3º ano, o uso da estratégia 5 (48,0%), que diz respeito

ao uso de valor(es) apresentado(s) na própria questão. Essa estratégia foi encontrada principalmente, na situação que envolvia o gráfico de colunas (38,6%). Já entre os alunos do 5º ano, foi observado o uso frequente (48,1%) da soma dos valores, sobretudo na situação em que os dados foram apresentados via enunciado escrito (35,6%). Observemos os exemplos referentes às estratégias 5 e 4, utilizadas principalmente pelos alunos.

**Figura 19. Resposta incorreta da Questão 6, com uso de valores apresentados na própria questão, pelo aluno 194, do 5º ano do Ensino Fundamental.**



Observa-se na Figura 19 que o aluno, provavelmente, para não deixar a questão em branco utiliza um dos valores da variável como estratégia de resolução para Questão 6. Mesmo sendo o valor (8) próximo ao valor correto da média (8,5), percebe-se que não se trata de um arredondamento, pois ao analisar o protocolo de modo mais

geral, constata-se que o referido aluno não demonstra ter conhecimento sobre o algoritmo da média aritmética.

**Figura 20. Resposta incorreta da Questão 6, com uso da adição dos valores da variável, pela aluna 37, do 3º ano do Ensino Fundamental.**

**Questão 6**

Flávio trabalhava em uma loja de eletrodomésticos. No primeiro dia de trabalho ele entregou 4 geladeiras, no segundo 5, no terceiro 7 e no quarto 6. Qual foi a média de geladeiras entregues nesses dias?

The student's work shows a vertical addition of the numbers 5, 7, and 6, resulting in 22. Above the numbers, there are several rows of small circles (dots) drawn to represent the numbers being added.

Na Figura 20, observa-se novamente a concepção de média atrelada ao uso da soma dos valores da variável. A aluna do 3º ano do Ensino Fundamental registra o algoritmo da soma, mas apóia o seu cálculo na contagem das bolinhas desenhadas.

No Quadro 21 apresentam-se os tipos de estratégias delineadas pelos grupos ao responderem a Questão 7 (ver Apêndice A e B) e no Quadro 22 estão descritos os percentuais das estratégias utilizadas pelos grupos e por tipo de representação. Essa questão solicitava o reconhecimento da média como valor que se irá obter com maior probabilidade ao contar com um dado faltando em uma distribuição (significado). Também envolvia a ideia de que a média está localizada entre os valores extremos (invariante).

**Quadro 21. Tipos de respostas e estratégias apresentadas pelos grupos na Questão 7.**

<b>1- Resposta correta sem explicitação do procedimento de resolução</b>	Apresenta apenas a resposta correta para situação proposta (valor da média citado na própria questão).
<b>2- Resposta incorreta, com uso do algoritmo da média aritmética.</b>	Apresenta resposta incorreta, com uso do algoritmo da média aritmética.

<b>3- Resposta incorreta, com uso de compensação em função do valor da média</b>	Apresenta resposta incorreta, com uso do seguinte procedimento: 1º-multiplica o valor da média por 5 (quantidade de pessoas no teste A ou quantidade de alunos no teste B); 2º-soma os valores da variável; 3º-subtrai do 1º resultado o 2º resultado.
<b>4- Resposta incorreta, com uso da ideia de média como valor entre os valores</b>	Apresenta uma resposta incorreta, com uso do entendimento da média como sendo um valor que se encontra entre os valores (ideia de meio).
<b>5- Resposta incorreta, com uso da ideia de média como metade</b>	Apresenta uma resposta incorreta, com uso da ideia de média como sendo metade.
<b>6- Resposta incorreta, com uso da adição dos valores da variável</b>	Apresenta uma resposta incorreta, pois soma os valores apresentados na questão. Percebe-se que a utilização dessa estratégia remete ao seguinte procedimento: usar um algoritmo conhecido na tentativa de solucionar uma questão que envolve um procedimento de cálculo ainda não compreendido.
<b>7- Resposta incorreta, com uso de valor(es) apresentado(s) na questão</b>	Apresenta uma resposta incorreta, com uso de valor(es) apresentado(s) na própria questão.
<b>8- Resposta incorreta, com uso do maior valor presente no enunciado escrito</b>	Apresenta uma resposta incorreta, com uso de um valor apresentado na própria questão, especificamente o maior valor entre os dados.
<b>9- Resposta incorreta, com uso do valor da maior coluna</b>	Apresenta uma resposta incorreta, com uso de um valor apresentado na própria questão, especificamente o valor da maior coluna. A utilização dessa estratégia refere-se à localização de ponto extremo no gráfico, neste caso o ponto máximo.
<b>10-Resposta incorreta, com uso da multiplicação do valor da média por 5</b>	Apresenta uma resposta incorreta, com uso da multiplicação do valor da média por 5 (quantidade de pessoas)
<b>11- Resposta incorreta, com uso de valores aproximados dos valores presentes na questão</b>	Apresenta uma resposta incorreta, com uso de valores aproximados dos valores presentes na questão.
<b>12-Resposta incorreta, com uso de valores, os quais não apresentam relação com a situação proposta</b>	Apresenta uma resposta incorreta, com uso de valor que não faz sentido para a situação proposta.
<b>13-Em branco</b>	Não é apresentada nenhuma tentativa de resolução da questão. Pode-se inferir que a não resposta possa ter sido motivada pela incompreensão do conceito envolvido na questão, pela dificuldade de compreensão do

	contexto da situação proposta, pelo desinteresse em responder o teste, dentre outras conjecturas.
--	---

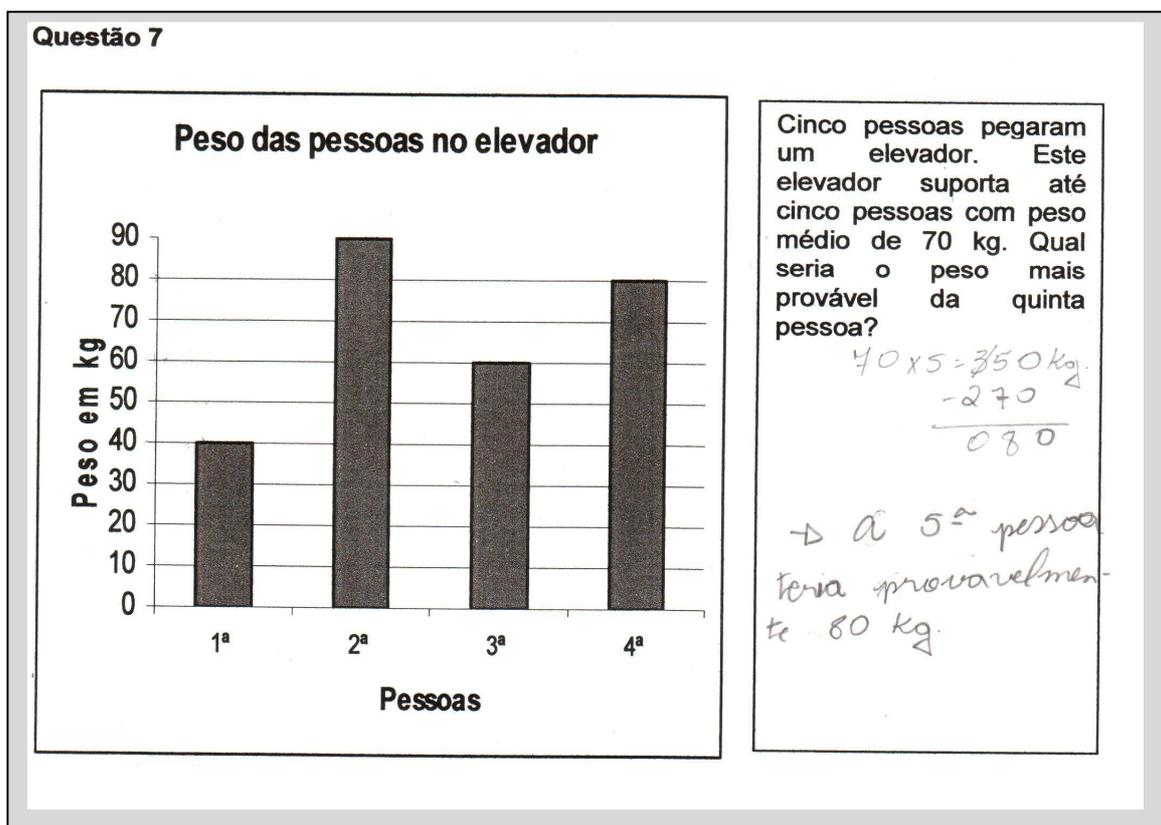
O Quadro 22 apresenta os percentuais das estratégias utilizadas pelos grupos para solucionar a Questão 7 por tipo de representação.

**Quadro 22. Percentuais de estratégias utilizadas para responder a Questão 7 por grupo e por tipo de representação.**

Estratégias	Professores (%)			Alunos do 3º ano (%)			Alunos do 5º ano (%)		
	Gráfico de colunas	Enuncia-do Escrito	Total	Gráfico de colunas	Enuncia-do Escrito	Total	Gráfico de colunas	Enuncia-do Escrito	Total
1	6,5	9,7	16,1	5,3	2,7	8,0	4,8	1,9	6,7
2	9,7	6,5	16,1	--	--	--	--	--	--
3	16,1	9,7	25,8	--	--	--	--	--	--
4	3,2	12,9	16,1	--	10,7	10,7	--	11,5	11,5
5	3,2	--	3,2	6,7	4,0	10,7	9,6	--	9,6
6	--	3,2	3,2	--	--	--	1,0	8,7	9,6
7	12,9	--	12,9	9,3	1,3	10,7	20,2	2,9	23,1
8	--	--	--	--	25,3	25,3	--	16,3	16,3
9	--	--	--	17,3	--	17,3	9,6	--	9,6
10	--	--	--	--	--	--	1,0	--	1,0
11	3,2	--	3,2	--	--	--	1,0	4,8	5,8
12	--	--	--	5,3	5,3	10,7	--	3,8	3,8
13	3,2	--	3,2	1,3	5,3	6,7	2,9	--	2,9
<b>Total</b>	58,1	41,9	100,0	45,3	54,7	100,0	50,0	50,0	100,0

Ao analisar o Quadro 22, percebe-se que os professores utilizaram com maior frequência as estratégias 1, 2, 3 e 4. A estratégia 3, que diz respeito ao procedimento de compensação a partir do valor da média e da quantidade de dados, foi bastante utilizada (25,8%), sendo mais empregada quando a questão envolvia gráfico de colunas (16,1%) do que com o enunciado escrito (9,7%). Apesar de ser considerada uma resposta incorreta para a Questão 7, foi muito interessante observar o raciocínio usado na tentativa de obter uma solução coerente. Observemos a seguir um exemplo alusivo a estratégia 3.

**Figura 21. Resposta incorreta da Questão 7, com uso do procedimento de compensação a partir do valor da média, pela professora 14, dos anos iniciais do Ensino Fundamental.**

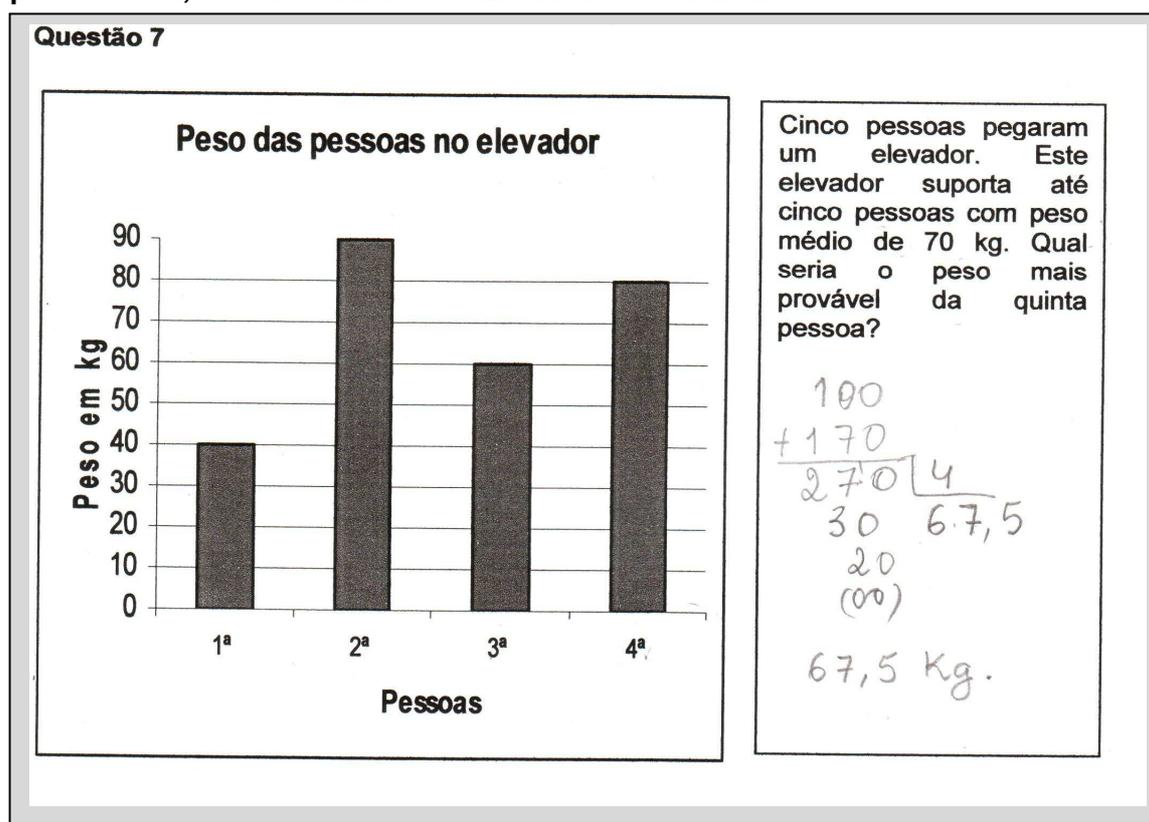


A Questão 7, entendida como de maior complexidade, visto que a resposta correta para esta questão refere-se ao valor da própria média apresentada na situação, foi resolvida pela professora a partir do procedimento demonstrado na Figura 21: multiplicou o valor que correspondia ao peso médio por 5 (quantidade de pessoas que

pegaram o elevador), obtendo o valor de 350 kg. Em seguida, subtraiu desse valor 270 (correspondente à soma dos valores da variável no gráfico). Por fim, conseguiu como resultado 80 (valor do peso máximo que a 5ª pessoa poderia ter para ser suportada pelo elevador), que considera ser o valor que provavelmente teria a quinta pessoa.

Destaca-se que apenas os professores usaram a estratégia 2 e 3. Em relação à estratégia 2, observa-se que os professores que tinham conhecimento sobre o algoritmo da média aritmética, usaram o cálculo da média para obter uma resposta, que diferentemente das demais questões, não era adequada para o significado envolvido na questão (média como valor que se irá obter com maior probabilidade ao contar com um dado faltando em uma distribuição). Vejamos a seguir um exemplo da estratégia 2.

**Figura 22. Resposta incorreta da Questão 7, com uso do algoritmo da média, pela professora 4, dos anos iniciais do Ensino Fundamental.**

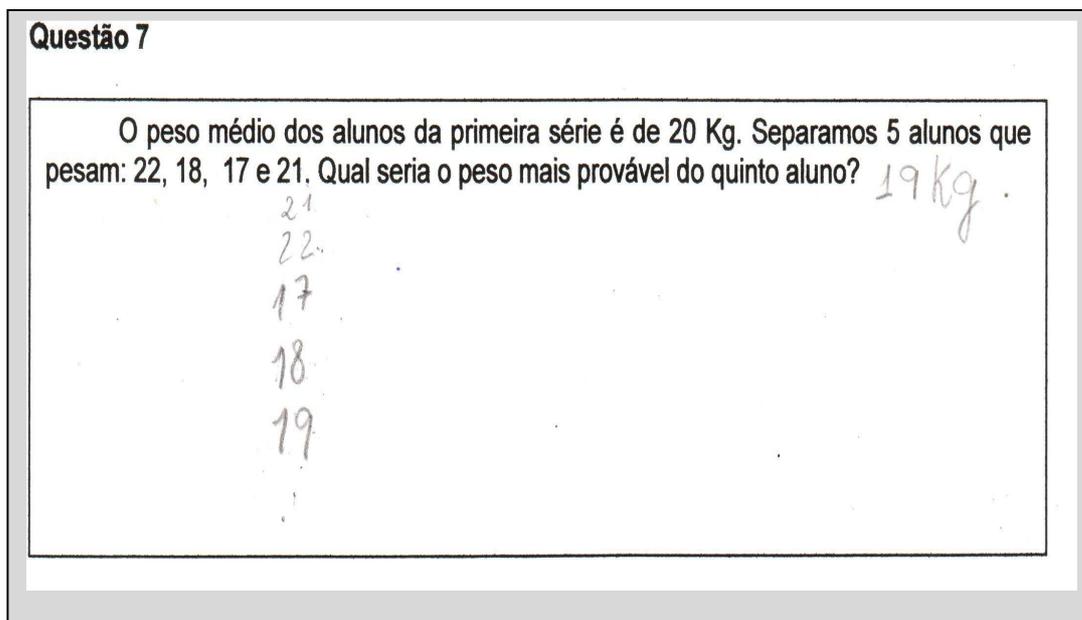


Outra estratégia utilizada pelo grupo dos professores foi o cálculo do algoritmo da média considerando apenas os quatro valores apresentados no gráfico. Na Figura

22, observa-se que a professora adiciona os valores da variável, obtendo como resposta o valor de 270, depois divide este valor por quatro (quantidade de dados) conseguindo o resultado de 67,5Kg, considerado incorreto para esta situação. Nota-se, que a professora não levou em consideração a quinta pessoa na obtenção da resposta. Tal procedimento parece indicar uma dificuldade de compreensão em relação ao significado levantado por Batanero (2000) que diz respeito ao reconhecimento da média como valor mais provável ao contar com um dado faltando em uma distribuição.

Os professores utilizaram, ainda, a estratégia 4 em 16,1% das respostas para Questão 7. Essa estratégia refere-se a uma resposta incorreta, com uso do entendimento da média como sendo um valor que se encontra entre os valores (ideia de meio).

**Figura 23. Resposta incorreta da Questão 7, com uso da idéia de média como sendo um valor entre os dados, pela professora 10, dos anos iniciais do Ensino Fundamental.**

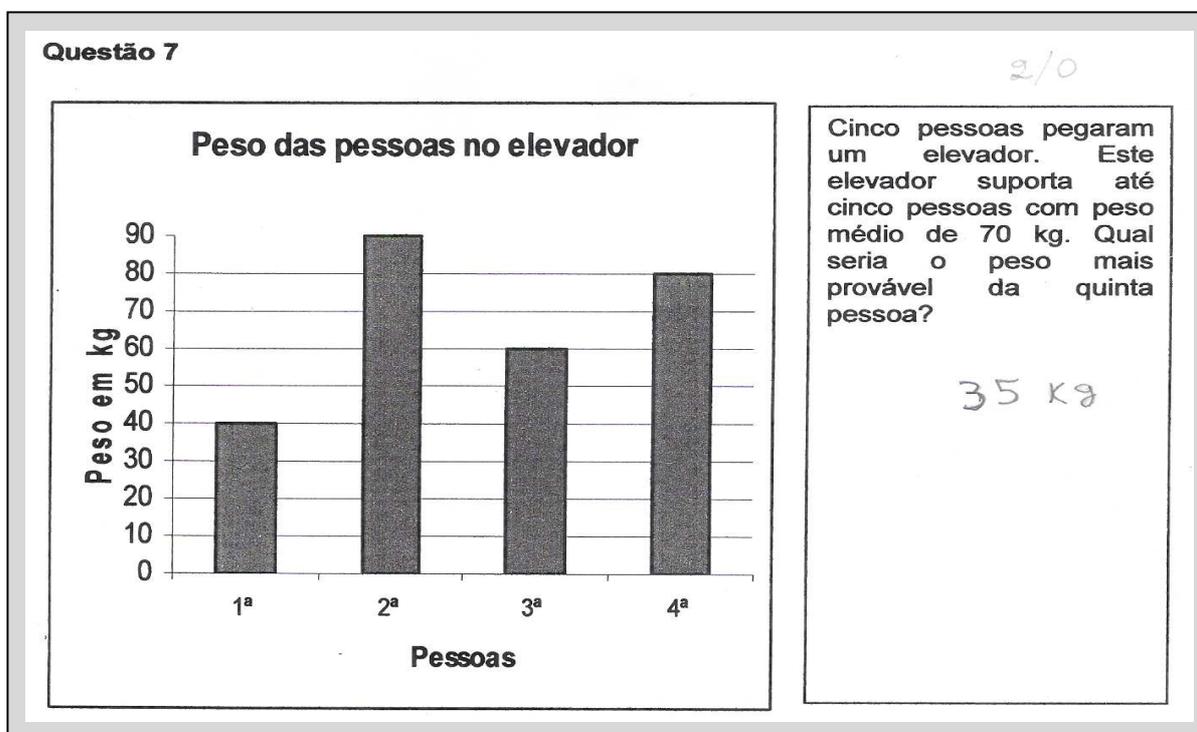


Observa-se na Figura 23, que a professora apresenta uma concepção equivocada de média como sendo o valor que se encontra entre os dados. Percebe-se que ela faz a listagem dos valores presentes no enunciado e acrescenta o valor 19, que para ela estaria faltando entre os valores. Este procedimento parece indicar que a

professora considera o valor entre os dados (valor do meio) como sendo o mais provável de se obter ao contar com um dado faltando em uma distribuição.

Verificou-se ainda, que os alunos de ambos os anos de escolarização usaram bastante a estratégia 8, que refere-se a uma resposta incorreta, com uso do maior valor apresentado na situação que envolvia enunciado escrito. Na situação que envolvia o gráfico de colunas, os alunos do 3º ano comumente utilizaram a estratégia 9 (17,3%), que refere-se ao uso do valor que corresponde à maior coluna ou ponto máximo. Com os alunos do 5º ano foi mais usual a estratégia 7 (23,1%), em que foram utilizados valores apresentados na própria questão. Percebe-se que os alunos tentaram responder a questão de alguma forma, evitando assim deixá-la em branco. O uso de valores presentes na situação teve maior frequência (20,2%) quando o tipo de representação foi o gráfico de colunas. Foi constatado também através da estratégia 5, a ideia de média como sendo metade.

**Figura 24. Resposta incorreta da Questão 7, com uso da ideia de média como metade, pela aluna 173, do 5º ano do Ensino Fundamental.**



Na Figura 24, verifica-se que a aluna do 5º ano do Ensino Fundamental apresenta uma concepção equivocada de média como sendo metade. Percebe-se que ela divide o valor do peso médio que é 70 kg por dois, obtendo como resposta 35 kg.

A estratégia 1 ( resposta correta, com utilização do valor da média apresentada na situação) foi utilizada tanto por professores (16,1%), quanto por alunos do 3º ano (8,0%) e do 5º ano (6,7%). Percebe-se que o uso do valor da média como resposta para a Questão 7 surge como algo intuitivo.

Portanto, diante da análise das estratégias apresentadas pelos grupos ao responderem as sete questões aplicadas na diagnose, constata-se que o tipo de representação exerce influência determinante no tipo de estratégia de resolução utilizada pelos sujeitos. Tal constatação dá indícios do quanto é relevante conectar o trabalho com as variadas formas de representação de um conceito, neste caso o de média, à compreensão do próprio conceito pelo sujeito. Deste modo, torna-se importante considerar tais indicativas no processo de sistematização do ensino deste conteúdo.

## CAPÍTULO 5

### CONCLUSÕES

Atualmente é evidente o destaque conferido à Educação Estatística na sociedade em que vivemos. O avanço tecnológico causado pela criação do computador impulsionou intensamente o aumento da quantidade de informações que são expostas à sociedade. Devido a tal abundância de informações com as quais os cidadãos se deparam em seu trabalho cotidiano, torna-se necessário um conhecimento básico da Estatística para a correta interpretação de dados.

Tal propósito implica na formação de atitudes, capacidades e conhecimentos que permitam o desenvolvimento da reflexão e da criticidade em relação à informação veiculada através de conteúdos estatísticos.

Nesse sentido, a apropriação de conceitos elementares da Estatística é algo fundamental e deve ocorrer desde os primeiros anos de escolarização. Dentre os conceitos considerados básicos na Estatística destaca-se o de média, que é base para outros conceitos estatísticos e vem sendo utilizado comumente, seja no âmbito escolar (nas notas dos alunos), acadêmico (em análises de dados de pesquisas), econômico e na vida diária, pois a média é uma palavra corriqueira usada por crianças e adultos.

Atualmente, pesquisas vêm sendo realizadas enfocando estes conceitos elementares, sobretudo o de média. Contudo, em geral, percebe-se a ausência de investigações que abordem as três dimensões da formação do conceito, que segundo Vergnaud (2009) trata-se dos conjuntos de invariantes, significados e representações. Nessa perspectiva, a presente pesquisa investigou como o conceito de média aritmética é compreendido, por alunos e professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, considerando diferentes invariantes, significados e representações.

Compreender as concepções de média aritmética apresentadas por professores e alunos é fundamental, pois como ressalta Vergnaud (1986), as concepções

modeladas pelas situações da vida cotidiana não deveriam ser ignoradas, visto que é necessário conhecer ou reconhecer melhor as concepções mais primitivas, os erros e as incompreensões, bem como o modo pelo qual as concepções mudam ou podem mudar, mediante situações, explicações e etapas.

Vale salientar, que este estudo baseou-se na ideia de formação do conceito criada por Vergnaud (1990, p.7; 2009, p.29), a qual propõe que todo conceito é definido por uma terna de três conjuntos, a saber: “o conjunto de situações que dão sentido ao conceito (S); o conjunto de invariantes operatórios que estruturam as formas de organização da atividade suscetíveis de serem evocados por essas situações (I); e o conjunto das representações linguísticas e simbólicas que permitem representar os conceitos e suas relações (L)”.

No intuito de atingir nosso objetivo, buscamos apoio teórico também nos estudos de Batanero (2000) e Strauss e Bichler (1988) sobre o conceito de média.

Em relação aos significados, Batanero (2000) elenca quatro significados do conceito e média, a saber: a estimativa de uma quantidade desconhecida, em presença de erros de medida; a obtenção de uma quantidade equitativa a repartir para conseguir uma distribuição uniforme; a aplicação de que a média serve de elemento representativo de um conjunto de valores dados, cuja distribuição é aproximadamente simétrica; a necessidade de conhecer o valor que se irá obter com maior probabilidade ao contar com um dado faltando em uma distribuição.

Quanto aos invariantes, Strauss e Bichler (1988) levantam sete propriedades da média, que são as seguintes: a média está localizada entre os valores extremos; a soma dos desvios a partir da média é zero; a média é influenciada por cada um e por todos os valores; a média não necessariamente coincide com um dos valores que a compõem; a média pode ser um número que não tem um correspondente na realidade física; o cálculo da média leva em consideração todos os valores inclusive os nulos e os negativos; a média é um valor representativo dos dados a partir dos quais ela foi calculada. Em termos espaciais, a média é o valor que está mais próximo de todos os valores.

No que diz respeito às representações, Vergnaud (1981) argumenta que existe uma mediação entre as representações e os objetos do mundo real, uma vez que no

processo de conceitualização do real a dimensão representativa exerce um papel essencial. Dessa forma, considera-se que o trabalho com a multiplicidade de representações favorece a compreensão dos conceitos, pois pode fazer transparecer determinados aspectos ou tornar opacos outros no processo de análise de um mesmo conceito. Assim, neste estudo o tipo de representação pelo qual os dados foram apresentados, variou entre enunciado escrito e gráfico de colunas.

Nesse sentido, desenvolvemos um teste diagnóstico constituído por dois tipos de teste (A e B), contendo cada teste sete questões. Os testes apresentavam equivalência entre os invariantes e significados envolvidos em cada questão, mas variavam o tipo de representação entre gráfico de colunas ou enunciado escrito.

Dessa forma, procurou-se verificar a compreensão dos grupos investigados em relação aos significados e invariantes do conceito de média aritmética, bem como se o tipo de representação pelo qual os dados foram apresentados exercia influência na compreensão do referido conceito. Tivemos também o intuito de verificar as possíveis diferenças em função da escolaridade.

Em relação ao desempenho dos grupos observou-se que nenhum dos sujeitos dos três grupos investigados respondeu corretamente a todas as questões que compõe o instrumento diagnóstico. Verificou-se que o maior número de acertos obtido ocorreu no grupo dos professores, no qual 6,5% acertaram 7 questões. Constata-se também a existência de sujeitos que não acertaram nenhuma questão nos três grupos.

Como era de se esperar, os professores apresentaram um percentual de respostas corretas significativamente melhor que os alunos do 3º e 5º ano, evidenciando uma maior compreensão concernente ao conceito de média aritmética. Entretanto, ressalta-se que o desempenho destes ainda foi aquém do desejado.

Ao analisar o desempenho dos alunos do 3º e 5º ano, percebe-se uma grande dificuldade em relação ao conceito de média aritmética. Os alunos apresentaram percentuais de acertos bastante baixos na maioria das questões. Entretanto, não foram evidenciadas diferenças significativas entre os alunos do 3º e 5º ano do Ensino Fundamental em nenhuma das questões. Os percentuais de acertos foram semelhantes, independente do ano escolar. Dessa forma, constata-se que a

escolaridade parece não estar exercendo influência na compreensão do conceito de média aritmética, pelo menos no que tange aos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Assim, apesar do conceito de média ser considerado básico na Estatística e os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (1997) para o 2º ciclo ressaltarem a importância do desenvolvimento de diversos conteúdos relativos à Estatística, inclusive o de média aritmética, constatou-se um desempenho muito fraco de alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

No que concerne à compreensão dos significados e invariantes do conceito de média aritmética, constatou-se que os professores apresentaram melhor desempenho ao lidarem com a ideia de média como uma quantidade equitativa a repartir para conseguir uma distribuição uniforme. Esses dados corroboram com os resultados encontrados por Mayén, Cobo, Batanero e Balderas (2007) os quais afirmam que estudantes mexicanos de bacharelado, também apresentaram melhor desempenho em situações nas quais a média é uma quantidade equitativa a repartir para conseguir uma distribuição uniforme.

Ressaltamos que na situação na qual esse significado era também com a ideia de média como uma quantidade equitativa a repartir para conseguir uma distribuição uniforme, mas o invariante referia-se a média considerar todos os valores inclusive os nulos, o desempenho foi menor por parte dos professores, o que parece indicar uma influência deste invariante no desempenho desse grupo. Lima (2005) e Caetano (2004) ao realizarem seus estudos com alunos do 5º ano do Ensino Fundamental, também constataram dificuldades de compreensão com relação a esse invariante da média. Essa dificuldade pode ocorrer em função de ser pouco explorada, uma vez que Anjos e Gitirana (2008) asseveram que a propriedade da média elencada por Strauss e Bichler (1988) que versa sobre a consideração dos valores nulos e negativos ao se calcular a média, não é devidamente explorada pelos livros didáticos.

Percebe-se que o significado que se refere à necessidade de conhecer o que se irá obter com maior probabilidade ao contar com um dado faltando em uma distribuição foi uma situação de difícil compreensão. Talvez esse insucesso se deva tanto a complexidade deste significado quanto ao fato do mesmo não ser sistematicamente ensinado. Segundo Cobo e Batanero (2004) ao realizarem um estudo sobre os

significados da média nos livros de texto do ensino secundário, constataram que o referido significado não foi encontrado em nenhum dos vinte e dois livros analisados.

Para Magina et al (2001), professores apresentam dificuldades em compreender um conceito, porque sua apropriação não emerge apenas de um tipo de situação, assim como uma simples situação envolve mais de um conceito.

Quanto à compreensão dos alunos do 3º e 5º ano do Ensino Fundamental acerca dos significados da média, observou-se um desempenho um pouco melhor na questão que envolve a aplicação da média para estimativa de uma quantidade desconhecida em presença de erros de medida.

A dificuldade maior dos alunos de ambos os anos de escolaridade foi com relação à aplicação de que a média serve de elemento representativo de um conjunto de valores com distribuição aproximadamente simétrica. Tais resultados seguem em concordância com os trabalhos de Cazorla (2002; 2003) nos quais foram constatadas essas incompreensões com alunos de graduação. Outro aspecto difícil foi entender a média como um valor representativo dos dados a partir dos quais ela foi calculada. Nesse sentido, Caetano (2004) e Cazorla (2003) também revelam a dificuldade de compreensão dos alunos em relação a esse aspecto. Assim, é importante considerar tais aspectos ao se promover intervenções de ensino acerca do conceito de média aritmética.

Observa-se que a compreensão de que a média pode ser um número sem sentido na vida real foi bastante complicado tanto para os professores quanto para os alunos. De forma semelhante, Cazorla (2002) afirma que estudantes de graduação apresentaram dificuldades de resolução quando a questão envolvia a interpretação da média de uma variável discreta cujo resultado é um decimal.

Por outro lado, percebemos grande facilidade em reconhecer que ao se acrescentar mais um valor a determinado conjunto de dados a média é alterada.

Os resultados obtidos, mediante a realização de uma Análise de Estrutura de Similaridade (SSA) entre as questões e os grupos investigados, indicaram a existência de correlação entre questões que envolviam um mesmo significado, mas com invariante diferente. Nesse sentido, o significado parece ter tido maior influencia do que o invariante no desempenho dos sujeitos investigados. Portanto, esses resultados nos

chamam a atenção para a importância dos significados na compreensão do conceito de média, reforçando a importância atribuída por Vergnaud (1990) aos significados, invariantes e representações na formação do conceito.

Em relação à influência do tipo de representação na compreensão do conceito de média, observamos que para maioria das questões o tipo de representação, pelo qual os dados foram apresentados, não foi um fator determinante para compreensão do conceito de média aritmética. Porém, o tipo de representação exerceu forte influência na estratégia de resolução utilizada pelos sujeitos. Strauss e Bichler (1988) ao realizarem uma investigação com crianças de 8 a 12 anos, utilizando diversas tarefas para cada uma das propriedades do conceito de média, variando o tipo de dados entre contínuos e discretos e também o meio de apresentação entre numérico, verbal e concreto, verificaram que o tipo de dados e o meio de apresentação utilizado não apresentaram efeitos significativos.

Outro aspecto observado e que nos parece fundamental, refere-se às concepções de média apresentadas pelos diferentes participantes. Segundo Magina et al (2001) essas concepções podem ser demonstradas por expressões verbais ou outras representações simbólicas. Compreende-se que os processos cognitivos e as respostas dos sujeitos ocorrem em função das situações com as quais são confrontadas. Assim, destaca-se o quanto é relevante o trabalho com múltiplas situações, as quais ampliem a significação de um conceito

Nesse sentido, mediante análise das estratégias de resolução, constatamos a existência de várias concepções em relação à média aritmética. Observou-se o uso do algoritmo no cálculo da média aritmética. Essa estratégia apareceu unicamente entre os professores. Outro tipo de estratégia corresponde ao registro apenas da resposta correta. Essa estratégia apareceu entre professores e alunos.

Foi constatado, também, concepções sem validade estatística. Na maioria das situações, a média foi considerada como soma dos valores da variável, sobretudo quando os dados foram apresentados por meio do enunciado escrito. Por outro lado, outra concepção equivocada surgiu quando a situação envolvia o gráfico de colunas, neste caso, entendia-se que a média correspondia ao valor da maior coluna ou ponto máximo. Tais estratégias de resolução demonstram a influência do tipo de

representação na concepção de média apresentada. Esses dados estão em conformidade com os resultados obtidos por Magina et al (2008) que também encontraram esses mesmos tipos de concepções, estatisticamente inválidas, ao realizarem uma pesquisa que analisou as concepções de estudantes e professores sobre média.

Entender que a média só pode resultar de valores constantes e iguais ao valor da própria média, foi uma concepção equivocada que apareceu entre alunos do 3º e 5º ano e professores. Segundo Magina et al (2008), esse tipo de concepção foi observada entre alunos do 5º e 6º ano, porém não foi encontrada entre os graduandos de Pedagogia e os professores.

Outra concepção equivocada apresentada tanto por alunos quanto por professores foi a de entender a média como o menor valor entre os dados. Essa concepção apareceu na situação que envolvia a estimativa de uma quantidade desconhecida, em presença de erros de medida. Neste caso, percebe-se a influência da experiência de vida na resposta dos sujeitos, pois alguns alunos relataram que eles não demoravam muito para vir de casa à escola, então a resposta seria o menor tempo (contexto do gráfico de colunas), já outros disseram que uma uva é muito pequena e por isso seu peso deveria ser o menor (contexto do enunciado escrito). No caso dos professores, talvez a ausência da palavra média no contexto da pergunta, tenha exercido influência no uso do menor valor como melhor estimativa, visto que eles podem ter apresentado dúvidas se de fato o conceito de média aritmética estaria envolvido na referida questão.

Observam-se, ainda, outras concepções alternativas em relação à média aritmética, não considerar o valor nulo ao realizar o cálculo da média; não reconhecer que a média pode ser um número que não tem um correspondente na realidade física, ou seja, não tem sentido na vida real; tomar o valor da mediana pela média, essa última estratégia foi utilizada apenas quando a questão apresentava os dados a partir do gráfico. A escolha dessa alternativa pode ter sido motivada pelo aspecto visual, visto que o valor da mediana estava localizado no meio, entre as colunas do gráfico. Também foi identificado o uso de valor(es) apresentado(s) na própria situação, principalmente no gráfico de colunas.

Quando a situação envolvia o reconhecimento da média como valor que se irá obter com maior probabilidade ao contar com um dado faltando em uma distribuição, observou-se que os professores utilizaram o procedimento de compensação a partir do valor da média e da quantidade de dados, sendo mais empregada quando a questão envolvia gráfico de colunas. Apesar de ser considerada uma resposta incorreta foi muito interessante o raciocínio usado na tentativa de obter uma solução coerente para questão.

Entender a média como sendo um valor que se encontra entre os valores (ideia de meio) foi outra concepção detectada nesta situação. Foi constatada também a concepção de média como sendo metade.

Por outro lado, ressaltamos que apesar das dificuldades, alguns alunos conseguiram apresentar respostas corretas. Verificou-se que tanto alunos do 3º ano como do 5º ano acertaram algumas questões, chegando, em ambos os grupos, a termos três questões respondidas corretamente pelo mesmo aluno. Esses acertos ocorreram com maior frequência em situações que envolviam o invariante que corresponde à ideia de que a média é influenciada por cada um e por todos os valores e o significado de média como estimativa de uma quantidade desconhecida em presença de erros de medida.

Quanto ao tipo de representação pelo qual os dados foram apresentados, enunciado escrito ou gráfico de colunas, não percebemos uma tendência que facilitou a compreensão do conceito de média.

Nesse sentido, Moreira (2002, p.27) destaca a necessidade de “identificar e classificar situações adequadas à aprendizagem de determinado conceito, pesquisar os invariantes operatórios usados pelos alunos e procurar entender como, por que e quando uma certa representação simbólica pode ajudar na conceitualização” .

Dessa forma, entende-se que é possível e necessário se desenvolver um trabalho escolar nesse nível de ensino, visto que alguns alunos demonstram conhecimentos sobre o conceito de média aritmética.

Assim, fica explícita a necessidade de um trabalho sistematizado sobre média aritmética com os alunos dos anos iniciais de escolarização. Da mesma forma, é

fundamental que os professores desses níveis de ensino compreendam o conceito de média e saibam como trabalhar com seus alunos.

Portanto, os resultados obtidos nesse estudo apontam alguns caminhos didáticos possíveis de serem desenvolvidos ao se buscar um trabalho sistematizado relacionado ao conceito de média aritmética. Evidenciando, como afirma Vergnaud (1990), a importância dos invariantes, situações e representações na compreensão do conceito.

Enfim, torna-se importante que outras pesquisas sejam realizadas, com outros níveis de ensino, bem como intervenções de ensino, as quais busquem focar as três dimensões que, segundo Vergnaud (1990), constituem o conceito.

## REFERÊNCIAS

ALMEIDA, J. F. **Bíblia do Obreiro**. Revista e Atualizada no Brasil. 2ª edição. Barueri – São Paulo: Sociedade Bíblica do Brasil, 2007.

ANJOS, D.; GITIRANA, V. Exploração do conceito de média nos em livros didáticos das séries finais do Ensino Fundamental. **Anais do 2º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática – SIPEMAT**, 2008, PP.1-9.

BATANERO, C. Significado y comprensión de las medidas de posición central. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. **UNO: Revista de didáctica de las matemáticas**, Nº. 25, (Ejemplar dedicado a: Contrucción de conocimientos matemáticos para el siglo XXI), 2000, pp. 41-58.

\_\_\_\_\_. **Didáctica de la estadística**. Grupo de Investigación en Educación Estadística. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, 2001.

BATANERO, C. Y GODINO, J. **Análisis de datos y su didáctica**. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Grupo de Investigación en Educación Estadística, 2001, p.1-168.

\_\_\_\_\_. Perspectivas de la educación estadística como área de investigación. En R. Luengo (Ed.), **Líneas de investigación en Didáctica de las Matemáticas** (pp. 203-226). Badajoz: Universidad de Extremadura, 2005.

BATANERO, C.; GODINO, J.; GREEN, D.; HOLMES, P. y VALLECILLOS, A. Errores y dificultades en la comprensión de los conceptos estadísticos elementales. **International Journal of Mathematics Education in Science and Technology**, 25 (4), 527-547, 1994.

BATANERO, C. y DÍAZ, C. **El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística**. I Congresso de Estatística e Investigação Operacional da Galiza e Norte de Portugal. Guimarães, Portugal, 2005.

BAYER, A.; BITTENCOURT, H.; ROCHA, J.; ECHEVESTE, S. **Estatística e a sua História**. In: XII Simpósio Sulbrasileiro de Ensino de Ciências, 2004, Canoas. Anais do XII Simpósio Sulbrasileiro de Ensino de Ciências, 2004. v. 1. p. 1-12.

BORG, I e LINGOES, J, C. **Multidimensional similarity structure analysis**. New York: Springer, 1987.

BRANCO, J. Estatística no Secundário: O ensino e seus problemas. In C. Loureiro, F. Oliveira e L. Brunheira (Orgs.), **Ensino e Aprendizagem da Estatística** (pp 11-30). Lisboa: SPE, APM, DE e EIO da FCUL, 2000.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática, Ensino de 1a a 4a série**. Brasília, MEC/ SEF, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação do Ensino Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC-SEF. 1998.

CABRIÁ, S. **Filosofía de la estadística**. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Valencia, 1994.

CAETANO, S. **Introduzindo a estatística nas séries iniciais do ensino fundamental a partir de material manipulativo: uma intervenção de ensino**. Tese de Mestrado em Educação Matemática. PUC/ São Paulo, 2004.

CARVALHO, C. Olhares sobre a Educação Estatística em Portugal. **Anais do I Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática - SIPEMAT**, Recife, 2006.

CARVALHO, C. **Interação entre pares: contributos para a promoção do desenvolvimento lógico e do desempenho estatístico, no 7º ano de escolaridade**. Departamento de Educação da Faculdade de Ciências. Universidade de Lisboa (Portugal). Tese de Doutoramento, 2001.

CAZORLA, I. M. **A relação entre a habilidade viso-pictórica e o domínio de conceitos estatísticos na leitura de gráficos**. Campinas. Tese (Doutorado em Educação), Universidade Estadual de Campinas, 2002.

\_\_\_\_\_. Média aritmética: um conceito prosaico e complexo. **Anais do IX Seminário de Estatística Aplicada**, Rio de Janeiro, 2003.

\_\_\_\_\_. **Slides**, 2006. Disponível em:<[www.pucsp.br/pensamentomatematico/EPeM2006\\_2.ppt](http://www.pucsp.br/pensamentomatematico/EPeM2006_2.ppt)>. Acesso em: 10 de setembro de 2008.

CAZORLA, I.; SANTANA, E. **Tratamento da informação para o ensino fundamental e médio**. Itabuna: Via Litterarum, 2006.

COBO, B. y BATANERO, C. Significados de la media em los libros de texto de secundaria. **Enseñanza de las ciencias**, 22(1), 5-18, 2004.

FERNANDES, J. e BARROS, P. Dificuldades de futuros professores do 1º e 2º ciclos em estocástica. **Anais do V Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática - CIBEM**, 2005.

FERREIRA, M.; TAVARES, I. e TURKMAN, M. VI Dossier Didáctico – **Notas sobre a História da Estatística**, 2002. Disponível em:  
<<http://alea.ine.pt/html/statofic/html/dossier/doc/dossier6.pdf>> Acesso em: 10 de setembro de 2008.

GAL, I. Adult's statistical literacy. Meanings, components, responsibilities. **International Statistical Review**, 70(1), 1-25, 2002.

GARFIELD, J. & GAL, I. Teaching and assessing statistical reasoning. In: Stiff, L. & Curcio, F. **Developing Mathematical Reasoning in Grades k-12**. USA: The National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), 1999a, (pp. 207-219).

\_\_\_\_\_. Assessment and Statistics Education: current challenges and directions. **International Statistical Review**, 1999b, 67. 1. 1-12.

GONÇALEZ, N. **Atitudes dos alunos do curso de pedagogia com relação à disciplina de estatística no laboratório de informática**. Campinas: Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas. Tese (Doutorado em Educação - Educação Matemática), 2002.

GUIMARÃES, G.; GITIRANA, V.; MARQUES, M. e CAVALCANTI, M. Educação estatística na educação infantil e nos anos iniciais. **Zetetiké**. Cempem – FE. Unicamp, v. 17, n. 32, jul/dez, 2009.

HOLMES, P. What sort of statistics should be taught in schools — and why? In C. Loureiro, F. Oliveira, & L. Brunheira (Eds.). **Ensino e aprendizagem da Estatística** (pp. 49-56). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Estatística e Associação dos Professores de Matemática, 2000.

LIMA, R. **Introduzindo o conceito de média aritmética na 4ª série o Ensino Fundamental usando o ambiente computacional**. Tese de Mestrado em Educação Matemática – PUC/SP, 2005.

LOPES, C. **A Probabilidade e a Estatística no ensino fundamental: Uma análise curricular**. Campinas: Universidade Estadual de Campinas Faculdade de Educação, 1998. [Tese de mestrado, documento policopiado]

\_\_\_\_\_. **Conhecimento Profissional dos professores e suas relações com Estatística e Probabilidade na Educação Infantil**. Tese de Doutorado. Campinas/SP: FE/UNICAMP, 2003.

MAGINA, S. **Integração do Computador nas Salas de Aulas de Matemática do Ensino Fundamental: Formação e Desenvolvimento de um Núcleo de Ensino e Pesquisa**. Projeto de pesquisa, FAPESP, processo No 00/04112-8, 2000.

MAGINA, S; CAMPOS, V; GITIRANA, V; NUNES, T. **Repensando adição, subtração: contribuições da teoria dos campos conceituais**. 2ª edição. São Paulo: PROEM, 2001.

MAGINA, S; CAZORLA, I; GITIRANA, V; GUIMARÃES, G. Concepções e concepções alternativas de media: um estudo comparativo entre professores e alunos. **Anais do 11º International Congress on Mathematical Education - ICME**, Monterrey, Mexico, July 6 - 13, 2008.

MARQUES, M. e GUIMARÃES, G. Formação inicial: análise sobre estratégias didáticas construídas por graduandos de Pedagogia da UFPE. **Anais do 2º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática – SIPEMAT**, 2008.

MAYÉN, S.; COBO, B.; BATANERO, C. Y BALDERAS, P. Comprensión de las medidas de posición central en estudiantes mexicanos de bachillerato. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática – UNIÓN**. Marzo de 2007, Número 9, páginas 187-201.

MOREIRA, M. **A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área**. Investigações em Ensino de Ciências – V7(1), pp. 7-29, 2002. Disponível em: <[www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol7/n1/v7\\_n1\\_a1.html](http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol7/n1/v7_n1_a1.html)>. Acesso em: 31 de outubro de 2008.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS - N. C. T. M. **Principles and standards for school mathematics**. Reston, VA: NCTM, 2000.

PAGAN, A.; LEITE, A. P.; MAGINA, S. M. P.; CAZORLA, I. M. A leitura e interpretação de gráficos e tabelas no Ensino Fundamental e Médio. **Anais do 2º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática - SIPEMAT**, Recife: Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2008.

PESSOA, C. **Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio**. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Pernambuco, 2009.

POLLATSEK, A.; LIMA, S. E & WELL, A. D. Concept or computation: students' understanding of the mean. **Educational Studies in Mathematics**, 12, 1981, p. 191-204.

PONTE, J. P e FONSECA, H. **Orientações curriculares para o ensino da Estatística: Análise comparativa de três países**. Quadrante, 10(1), 93-115, 2001.

PONTE, J.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

ROTUNNO, Sandra. **Estatística e probabilidade**: um estudo sobre a inserção desses conteúdos no ensino fundamental. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Paraná, 2007.

RUSSELL, S. J. Y MOKROS, J. R. What's Typical?: Children's Ideas about Average. In: D. Vere-Jones (Ed.) **Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics** (Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute), 1991, 307-313.

SILVA, F., AMARAL, F., ALBUQUERQUE, J. e OLIVEIRA, L. **Gráficos**: importante ou determinante, eis a avaliação do professor. Pôster apresentado na disciplina Metodologia do Ensino de Matemática I, do Curso de Pedagogia, 2006.

STELLA, C. **Um estudo sobre o conceito de média com alunos do ensino médio**. Tese de Mestrado em Educação Matemática. PUC/São Paulo, 2003.

STRAUSS, S. e BICHLER, E. The development of children's concepts of the arithmetic average. **Journal for Research in Mathematics Education**, 19(1), 1988, p.64-80.

VERGNAUD, G. **L'enfant, la mathématique et la réalité**. Berne, Francfort/M, Peter Lang, 1981.

\_\_\_\_\_. **Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas**. Análise Psicológica, 1986. 1(V): 75 - 90.

\_\_\_\_\_. **La théorie des champs conceptuel**. Recherches en Didactique des Mathématiques, RDM, vol. 10, n° 23, pp. 133-170, 1990.

\_\_\_\_\_. Education: the best part of Piaget's heritage. **Swiss Journal of Psychology**, 55(2/3): 112-118, 1996.

\_\_\_\_\_. O que é aprender? In: BITTAR, M. e MUNIZ, C. (orgs.). **A aprendizagem Matemática na perspectiva da teoria dos campos conceituais**. 1ª edição. Curitiba: Editora CRV, 2009.

YOUNG, F. W. **Multidimensional scaling**: History, Theory and applications. (Ed. Robert M. Hamer). Hillsdale, N. J. : Erlbaum, 1987.

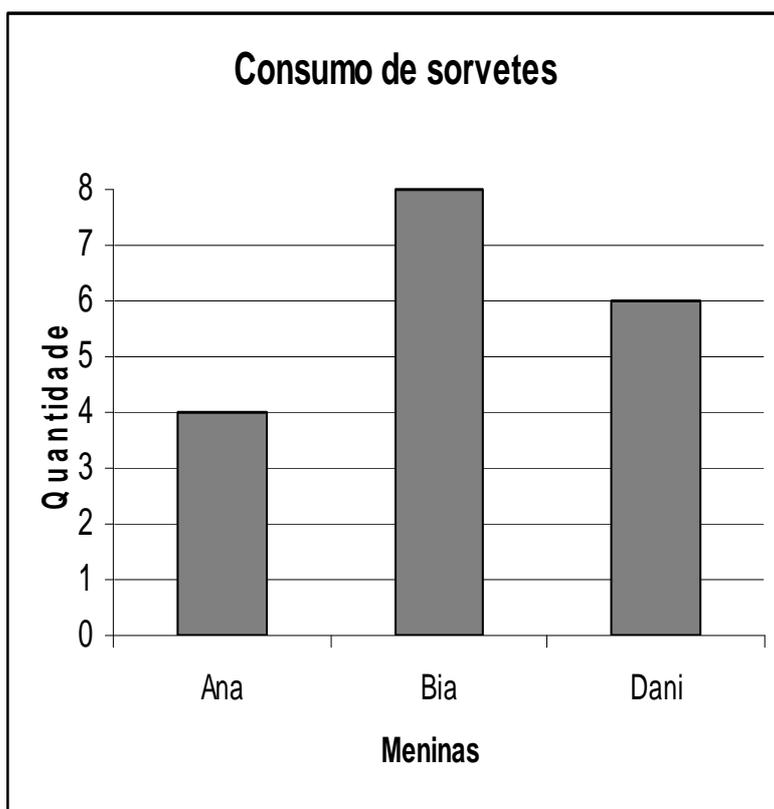
## APÊNDICE A - INSTRUMENTO DIAGNÓSTICO (TESTE "A")

NOME \_\_\_\_\_

IDADE \_\_\_\_\_

ESCOLA \_\_\_\_\_

### Questão 1



Se essas meninas tivessem tomado a mesma quantidade de sorvetes, quantos cada uma teria tomado, ou seja, qual a média de sorvete tomado por essas meninas?

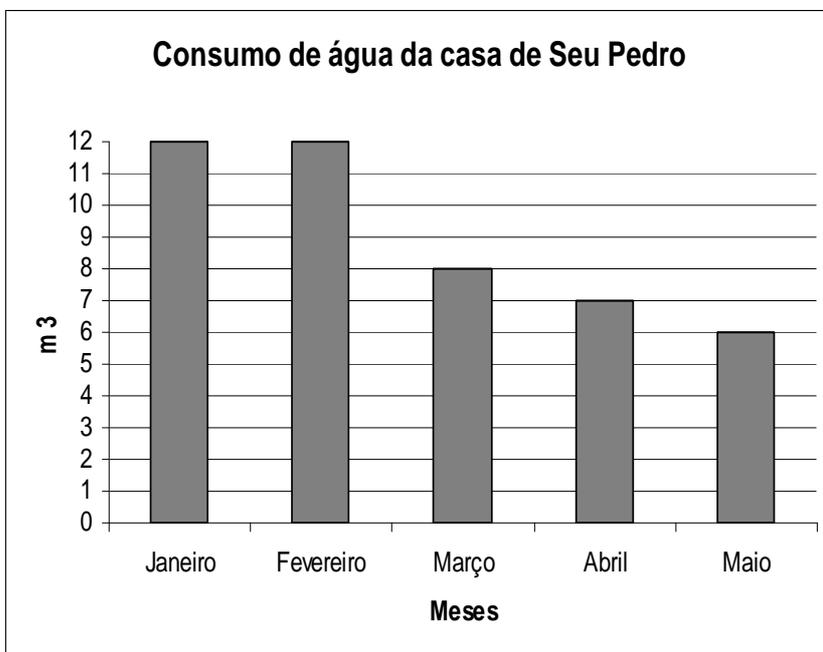
Se uma delas tivesse tomado mais 1 sorvete, iria alterar a média de sorvete tomado por cada uma?

Por quê?

### Questão 2

Alana, Natália, Vivi e Bruna são amigas e gostam muito de brincar de boneca. Alana tem 6 bonecas, Natália 4, Vivi não tem nenhuma e Bruna tem 2 bonecas. Se essas meninas tivessem a mesma quantidade de bonecas, quantas cada uma teria, ou seja, qual a média de bonecas desse grupo de meninas?

### Questão 3



Qual o consumo médio mensal de água dessa casa?

- a)  $12 \text{ m}^3$
- b)  $9 \text{ m}^3$
- c)  $8 \text{ m}^3$
- d)  $45 \text{ m}^3$

### Questão 4

Marcos obteve no final do ano a média 4 em Geografia. Coloque V (Verdadeiro) ou F (Falso) para as possíveis notas recebidas por Marcos nas quatro unidades do ano letivo:

- a) ( ) 1, 1, 1, 1
- b) ( ) 1, 2, 4, 9

- c) ( ) 4, 4, 4, 4
- d) ( ) 1, 2, 4, 8

- e) ( ) 1, 2, 3, 4
- f) ( ) 1, 2, 4, 10

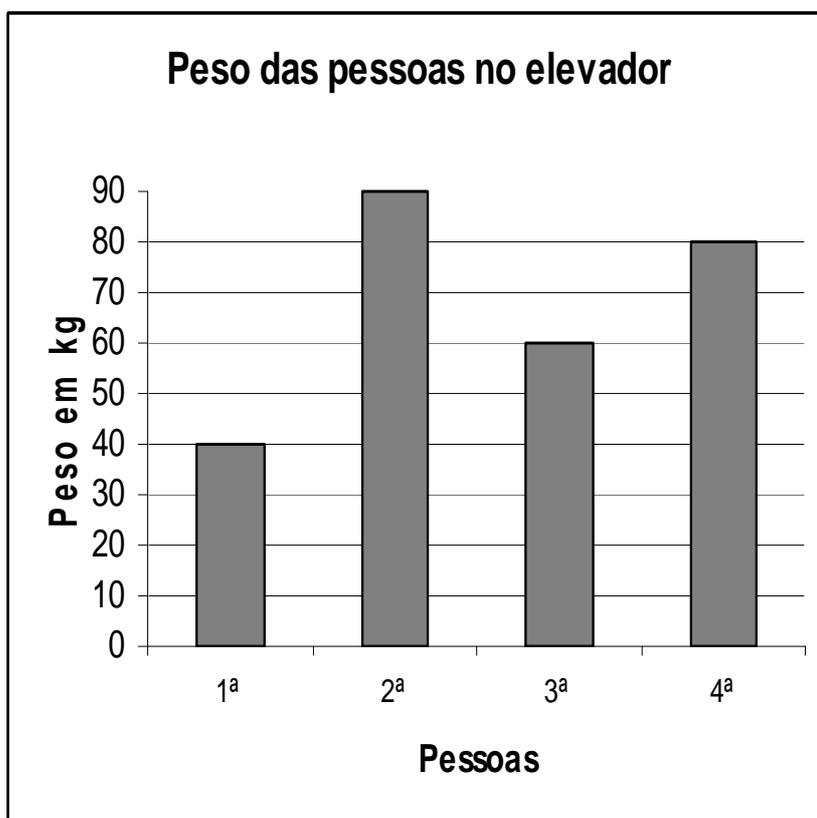
**Questão 5**

Qual seria a melhor estimação de tempo gasto para percorrer o trajeto de casa à escola?

**Questão 6**

Flávio trabalhava em uma loja de eletrodomésticos. No primeiro dia de trabalho ele entregou 4 geladeiras, no segundo 5, no terceiro 7 e no quarto 6. Qual foi a média de geladeiras entregues nesses dias?

## Questão 7



Cinco pessoas pegaram um elevador. Este elevador suporta até cinco pessoas com peso médio de 70 kg. Qual seria o peso mais provável da quinta pessoa?

## APÊNDICE B - INSTRUMENTO DIAGNÓSTICO (TESTE “B”)

NOME \_\_\_\_\_

IDADE \_\_\_\_\_

ESCOLA \_\_\_\_\_

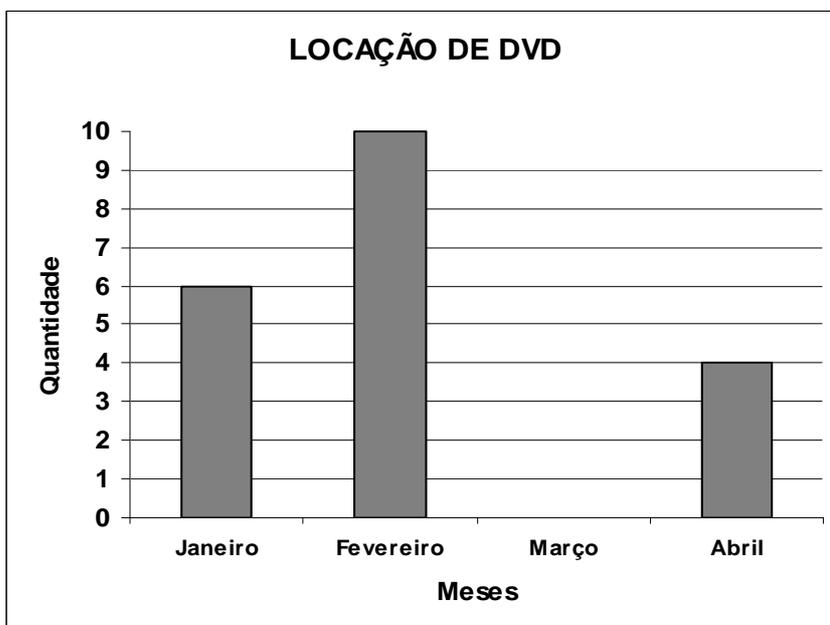
### Questão 1

Em um campeonato de futebol o time de Pedro disputou três jogos. Em cada partida a quantidade de gols foi diferente: 3, 7 e 5 gols. Em média quantos gols foram marcados por partida, ou seja, se tivessem marcado a mesma quantidade de gols em cada uma das partidas, quantos gols seriam?

Se o time de Pedro tivesse marcado mais um gol, a média de gols marcados por partida seria alterada?

Por quê?

### Questão 2



Qual a quantidade média de DVD's locados por Felipe por mês, ou seja, se ele tivesse locado a mesma quantidade de DVD's por mês, quantos DVD's ele teria locado?

**Questão 3**

João realizou cinco ligações de seu celular. Na 1ª ligação ele gastou R\$ 8,00, na 2ª R\$ 7,00, na 3ª R\$ 4,00, na 4ª R\$ 3,00 e na 5ª ligação ele gastou R\$ 3,00. Quantos reais João gastou em média por ligação?

- a) R\$ 3,00                      c) R\$ 5,00  
 b) R\$ 4,00                      d) R\$ 25,00

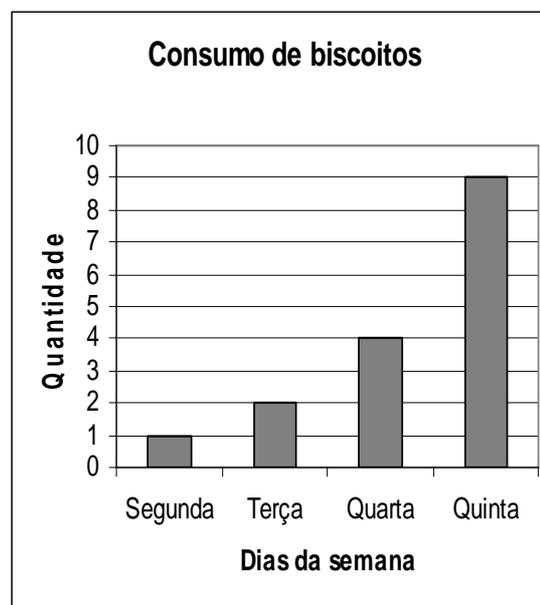
**Questão 4**

Mariana come em média 4 biscoitos por dia. Coloque V (Verdadeiro) ou F (Falso) para as possíveis quantidades de biscoitos que ela comeu em cada dia:

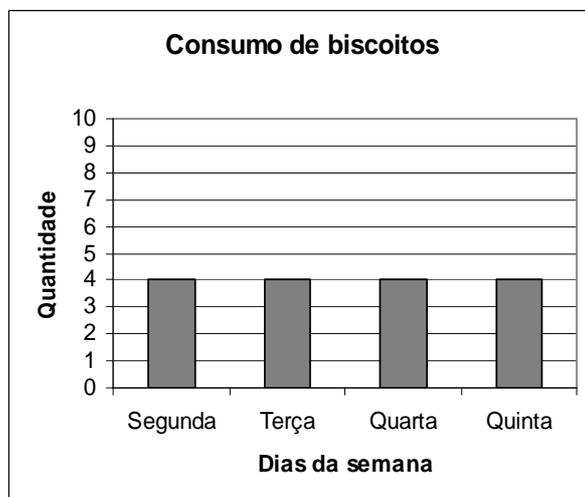
a) ( )



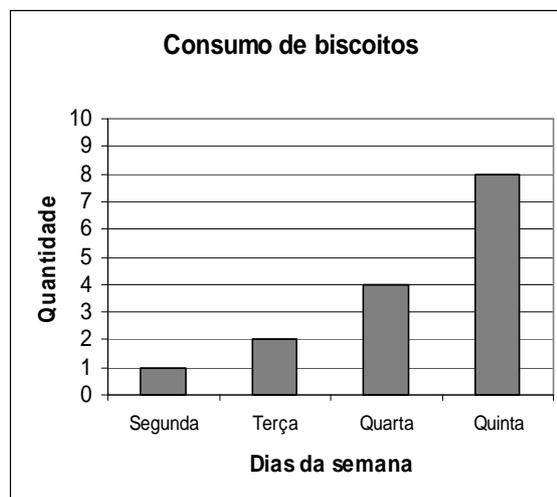
b) ( )



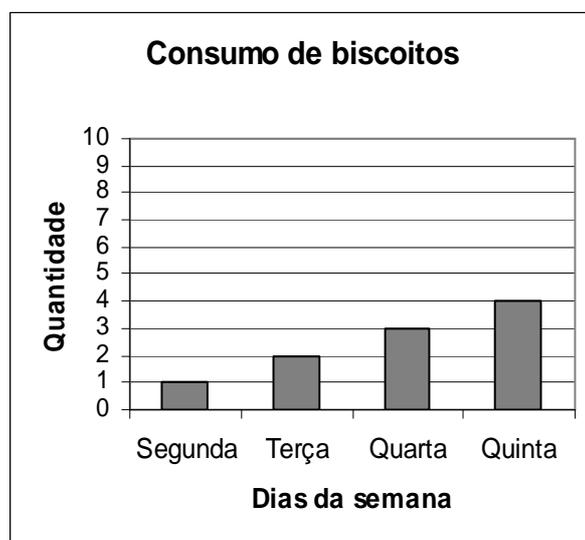
c) ( )



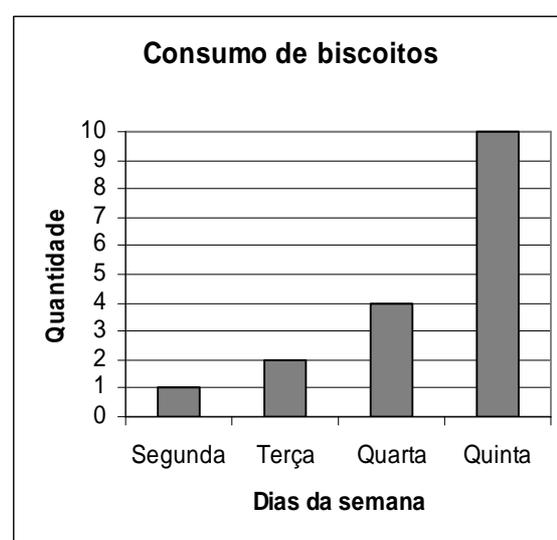
d) ( )



e) ( )

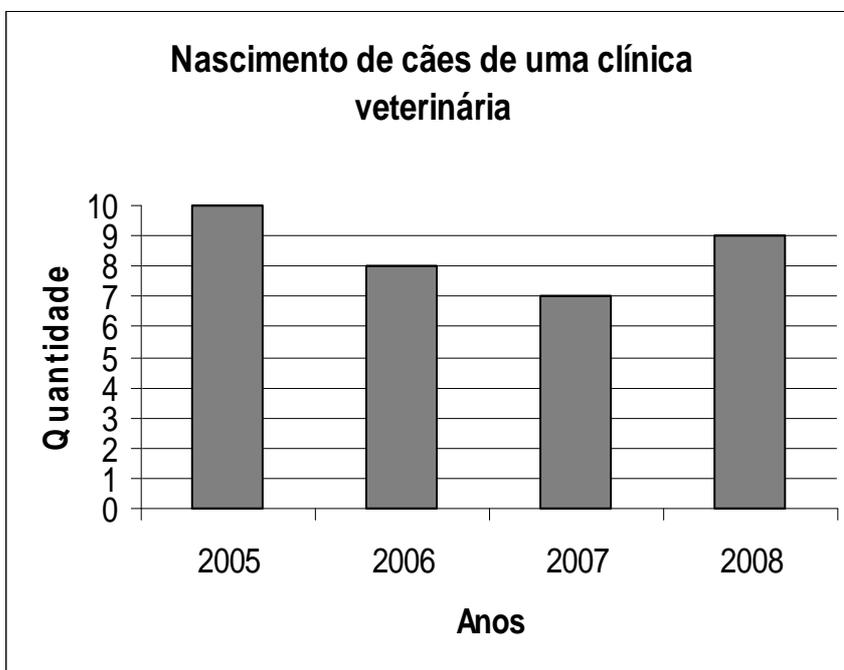


f) ( )



### Questão 5

Na feira quatro vendedores resolveram saber quanto pesava uma uva. Cada um pesou na sua própria balança e acharam os seguintes resultados em gramas: 10, 9, 11, 6. Qual seria a melhor estimativa do peso real da uva?

**Questão 6**

Qual foi a média de nascimento de cães por ano?

**Questão 7**

O peso médio dos alunos da primeira série é de 20 Kg. Separamos 5 alunos que pesam: 22, 18, 17 e 21. Qual seria o peso mais provável do quinto aluno?