



Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Física

José Valdo de Santana Filho

**Dinâmicas de Langevin para distribuições de
passos no movimento de animais e para
modelos de evolução populacional**

Recife
2020

José Valdo de Santana Filho

Dinâmicas de Langevin para distribuições de passos no movimento de animais e para modelos de evolução populacional

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Física.

Área de Concentração: Física Teórica e Computacional

Orientador: Ernesto Carneiro Pessoa Raposo

Recife

2020

Catálogo na fonte
Bibliotecária Mariana de Souza Alves CRB4-2105

S232d Santana Filho, José Valdo de.
Dinâmicas de Langevin para distribuições de passos no movimento de animais e para modelos de evolução populacional/ José Valdo de Santana Filho. – 2020.
122 f.: il., fig., tab.

Orientador: Ernesto Carneiro Pessoa Raposo.
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Física. Recife, 2020.
Inclui referências.

1. Física Teórica e Computacional. 2. Dinâmica de Langevin. 3. Equação de Fokker-Planck. 4. Distribuição de passos no movimento animal. I. Raposo, Ernesto Carneiro Pessoa. (orientador) II. Título.

530.1

CDD (22. ed.)

UFPE-CCEN 2020-155

JOSÉ VALDO DE SANTANA FILHO

**DINÂMICAS DE LANGEVIN PARA DISTRIBUIÇÕES DE PASSOS
NO MOVIMENTO DE ANIMAIS E
PARA MODELOS DE EVOLUÇÃO POPULACIONAL**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Física.

Aprovada em: 29/07/2020.

BANCA EXAMINADORA

[Participação via Videoconferência](#)

Prof. Ernesto Carneiro Pessoa Raposo
Orientador
Universidade Federal de Pernambuco

[Participação via Videoconferência](#)

Prof. Paulo Roberto de Araujo Campos
Examinador Interno
Universidade Federal de Pernambuco

[Participação via Videoconferência](#)

Prof. Sérgio Galvão Coutinho
Examinador Externo
Universidade Federal de Pernambuco

[Participação via Videoconferência](#)

Prof. Fernando Jorge Sampaio Moraes
Examinador Externo
Universidade Federal Rural de Pernambuco

[Participação via Videoconferência](#)

Prof. Marcos Gomes Eleuterio da Luz
Examinador Externo
Universidade Federal do Paraná

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro, além da UFPE pela estrutura física fornecida.

Agradeço ao professor Ernesto Raposo pela orientação, ao André Amado que me ensinou uma maneira eficaz de calcular histogramas, ao Tawan Tayron que me ensinou Python e C, ao Francisco Carol que me incentivou a vir para Recife e estudou comigo para o EGD, aos professores Rios Leite, Sérgio Coutinho, Giovanni Lopes, Fernando Parísio, Clécio Clemente, Mauro Copelli e Paulo Campos que tão bem ministraram as disciplinas de Teoria Quântica, Transições de Fase e Fenômenos Críticos, Eletromagnetismo, Mecânica Quântica Avançada, Mecânica Estatística Avançada, Mecânica Clássica Avançada e Processos Estocásticos. Aos meus antigos professores Francisco Barbosa e José Pimentel pela dedicação. Às minhas amigas Ana Rita e Crislane Brito pela atenção. Ao meu irmão Raniê Carbonário, à minha irmã Ranieri Aparecida, à minha mãe Antônia Pereira e ao meu pai José Valdo, que por me conhecerem desde sempre puderam me compreender.

RESUMO

Propomos uma dinâmica de Langevin para a descrição da evolução temporal dos tamanhos dos passos ℓ do movimento animal, cujo termo determinístico é uma função $f(\ell)$ enquanto o termo estocástico é descrito por um ruído branco ponderado por outra função $g(\ell)$. Assim, por meio da interpretação de Itô obtemos a correspondente equação de Fokker-Planck, para a qual encontramos analiticamente a distribuição estacionária em diferentes cenários, isto é, ruídos aditivos, ruídos multiplicativos lineares e não lineares, em meios homogêneos e heterogêneos, quando uma dinâmica é também proposta para a intensidade do ruído e uma análise por superestatística é utilizada. Além disso, via o método numérico de Milstein, analisamos as dinâmicas que originam processos superdifusivos. Apresentamos também um estudo de dinâmicas populacionais baseadas em recursos com duas fontes de ruídos, para as quais resultados analíticos foram obtidos na proximidade do equilíbrio que se mostram adequados quando a magnitude do ruído é pequena. Na sequência, temos uma análise, no regime estacionário, da correlação entre o tamanho da população e a quantidade de recursos disponíveis em termos das intensidades dos ruídos. Para um sistema com um número maior de espécies e de tipos de recursos, temos uma generalização para uma dinâmica ecológica, na qual estamos interessados nas taxas de sobrevivências das espécies mediante a competição pelos recursos.

Palavras-chave: Dinâmica de Langevin. Equação de Fokker-Planck. Distribuição de passos no movimento animal. Dinâmica populacional. Dinâmica ecológica

ABSTRACT

We propose a Langevin dynamics to describe the time evolution of move lengths ℓ , whose deterministic term is a function $f(\ell)$ while the stochastic term is described by a white noise weighted by another function $g(\ell)$. So through the Itô's interpretation we obtain the corresponding Fokker-Planck equation, for which we obtain analytically the stationary distribution in different scenarios, this is, additive noise, linear and non-linear multiplicative noise, in addition to homogeneous and heterogeneous environment, for which a dynamic is also proposed for the noise intensity and an analysis by superstatistics is used. Furthermore, using Milstein's numerical method, we analyze the dynamics that originate processes superdiffusive. We also present a resource-based model for a population dynamics with two sources of noise, for which we obtain analytical results in the vicinity of equilibrium, which are adequate as long as the magnitude of the noise is small. Then we have an analysis of the correlation between the size population and the amount of resources available in terms of noise intensities. For a system with a greater number of species and types of resources, we have a generalization for an ecological dynamic, in which we are interested in the survival rates of species owing to competition for resources.

Keywords: Langevin dynamics. Fokker-Planck equation. Distribution of animal move lengths. Population dynamics. Ecological dynamics

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

<p>Figura 1 – Representação de algumas distribuições estáveis $P(x)$, em (a), e de suas funções de distribuição acumulada $Q(x) \equiv \int_{-\infty}^x P(x')dx'$, em (b), para diferentes valores do parâmetro de estabilidade α no caso simétrico $\beta = 0$, com parâmetro de escala unitário $c = 1$, e centradas na origem $\mu = 0$. Para as figuras (c) e (d) temos respectivamente a distribuição e a distribuição acumulada para diferentes valores de β com $\alpha = 1$, $c = 1$ e $\mu = 0$.</p>	25
<p>Figura 2 – Representação de algumas distribuições estáveis $P(x)$ em escala logarítmica para (a) diferentes valores do parâmetro de estabilidade α com $\beta = 0$, $c = 1$ e $\mu = 0$, e (b) diferentes valores de β com $\alpha = 1$, $c = 1$ e $\mu = 0$, quão menor o valor de α maior a probabilidade de ocorrência de valores mais distantes do valor médio $\mu = 0$.</p>	26
<p>Figura 3 – Simulação numérica do que é observado em um movimento Browniano</p>	27
<p>Figura 4 – Representação da solução da equação de difusão, eq.(1.23), com $D = 0.5$ para diferentes instantes de tempo $t = 0.01$, $t = 0.1$ e $t = 1$. Observa-se com o decorrer do tempo que a função $f(x, t)$ torna-se cada vez mais espalhada pelo eixo x. Além disso, cada curva é acompanhada de uma solução numérica (em laranja), calculada sorteando-se o tamanho do passo Δ como sendo um valor gerado aleatoriamente segundo uma distribuição $\phi(\Delta)$ Gaussiana de média zero e variância 0.001.</p>	30
<p>Figura 5 – Deslocamento quadrático médio x_{rms} para o mesmo caso descrito na fig.(4).</p>	30
<p>Figura 6 – Aspecto do crescimento da área coberta pela trajetória da partícula para o mesmo caso descrito na fig.(4), que corresponde ao incremento $\langle x^2 \rangle$ no caso unidimensional, para diferentes tempos, sendo (a)t=0,2, (b)t=0,4, e (c)t=1,6.</p>	33
<p>Figura 7 – Aspecto típico de um ruído branco (a) e de um ruído browniano (b).</p>	40
<p>Figura 8 – Comparativo entre o resultado analítico para a distribuição de tamanhos de passos $P(\ell)$, eq.(3.22), obtido via solução estacionária da equação de Fokker-Planck na prescrição de Itô, e o resultado numérico obtido a partir da dinâmica de Langevin, eq.(3.1), utilizando o método de Milstein. Temos a distribuição gama (expressão 4 na Tabela 1) com parâmetros $\gamma = 1$, $a = 2$, $b = 1$, $\varepsilon = 1/2$ em (a), e a distribuição gama inversa (expressão 5 na Tabela 1) com parâmetros $\gamma = -1$, $a = -2$, $b = -1$, $\varepsilon = 1/2$ em (b). Um <i>ensemble</i> de 10^8 comprimentos de passo $\{\ell\}$ foram contabilizados em cada figura.</p>	78

Figura 9 – Dinâmica do movimento de uma partícula em uma caminhada aleatória com os tamanhos de passos advindos da equação de Langevin que resulta na distribuição estacionária $P(\ell)$ na eq.(3.24), cujo comportamento assintótico de $\ell \rightarrow \infty$ resulta em $P(\ell) \sim \ell^{-\mu} \exp(-\lambda \ell^\gamma)$, com o expoente da lei de potência dado por $\mu = 2 - \frac{a-v}{\varepsilon}$ e $\lambda = b/(\gamma\varepsilon)$, os parâmetros utilizados neste exemplo foram $\gamma = 1$, $a = 2$, $b = 10^{-4}$, $\varepsilon = 1$, $\ell_0 = 1$, tal que $\mu = v$ e $\lambda = b$. Os resultados numéricos foram obtidos via simulações da dinâmica de Langevin, eq.(3.1), por meio do método de Milstein. A distância quadrática média do caminhante $x_{rms} \sim N^\nu$ é mostrada como função do número de passos N realizados até então, onde ν é o expoente de difusão. Para $\mu = v = 4$ (a) e para $\mu = v = 0$ (b) a dinâmica da difusão é normal desde o começo como indicado pela regressão linear de coeficientes angular 0,50, em oposição temos o caso $\mu = 2$ (c) pertencente a região superdifusiva $1 < \mu < 3$, que apresenta uma região superdifusiva $\nu = 0,65$ antes de atingir em definitivo a região difusiva $\nu = 0,50$ como prevê o TCL. 81

Figura 10 – Dinâmica do movimento de uma partícula em uma caminhada aleatória com os tamanhos de passos advindos da equação de Langevin que resulta na distribuição estacionária $P(\ell)$ na eq.(3.25), cujo comportamento assintótico de $\ell \rightarrow \infty$ resulta em $P(\ell) \sim \ell^{-\mu} \exp(-\lambda \ell^\gamma)$, com o expoente da lei de potência dado por $\mu = 2 - \frac{a}{\varepsilon}$ e $\lambda = b/(\gamma\varepsilon)$, os parâmetros utilizados neste exemplo foram $\gamma = 1$, $b = 10^{-4}$, $\varepsilon = 1$, $c = 1$, tal que $\mu = 2 - \frac{a}{\varepsilon}$ e $\lambda = b$. Os resultados numéricos foram obtidos via simulações da dinâmica de Langevin, eq.(3.1), por meio do método de Milstein. A distância média quadrática do caminhante $x_{rms} \sim N^\nu$ é mostrada como função do número de passos N realizados até então, onde ν é o expoente de difusão. Para $a = -2 \rightarrow \mu = 4$ (a) e para $a = 2 \rightarrow \mu = 0$ (b) a dinâmica da difusão é normal desde o começo como indicado pela regressão linear de coeficientes angular 0,50, em oposição temos o caso $a = 0 \rightarrow \mu = 2$ (c) pertencente a região superdifusiva $1 < \mu < 3$, que apresenta uma região superdifusiva $\nu = 0,65$ antes de atingir em definitivo a região difusiva $\nu = 0,50$ como prevê o TCL. 84

Figura 11 – Dinâmica do movimento de uma partícula em uma caminhada aleatória com os tamanhos de passos advindos da equação de Langevin que resulta na distribuição estacionária $P(\ell)$ na eq.(3.31), cujo comportamento assintótico de $\ell \rightarrow \infty$ resulta em $P(\ell) \sim \ell^{-\mu} \exp(-\lambda \ell^\gamma)$, com o expoente da lei de potência dado por $\mu = 1 + \frac{b}{\varepsilon} - \frac{v \ell_0}{\varepsilon}$ e $\lambda = (v - a)/(\varepsilon)$, os parâmetros utilizados neste exemplo foram $b = -1$, $a - v = -10^{-2}$, $\varepsilon = 1$, $\ell_0 = 1$, tal que $\mu = v \ell_0 / \varepsilon$ e $\lambda = a - v$. Os resultados numéricos foram obtidos via simulações da dinâmica de Langevin, eq.(3.1), por meio do método de Milstein. A distância quadrática média do caminhante $x_{rms} \sim N^\nu$ é mostrada como função do número de passos N realizados até então, onde ν é o expoente de difusão. Para $v = -4 \rightarrow \mu = 4$ (a) e para $v = 0 \rightarrow \mu = 0$ (b) a dinâmica da difusão é normal desde o começo como indicado pela regressão linear de coeficientes angular 0,50, em oposição temos o caso $v = -2 \rightarrow \mu = 2$ (c) pertencente a região superdifusiva $1 < \mu < 3$, que apresenta uma região superdifusiva $\nu = 0,65$ antes de atingir em definitivo a região difusiva $\nu = 0,50$ como prevê o TCL. 87

Figura 12 – Soluções estacionárias para as distribuições (a) $P(\ell)$ e (b) $f(\varepsilon)$ avaliadas de forma numérica via simulações do método de Milstein aplicado ao par de equações (3.33, 3.1), com $\bar{\omega} = 2$ ($b_\varepsilon = 1$, $\kappa = 1/2$), $\bar{b} = \sqrt{2}$ para diferentes valores de ω , enquanto $G(\ell) = \ell$, e $F(\ell)$ é dado na eq.(3.21) com $b = 1$, $\gamma = 1$, $a = (1 + \gamma)/\varepsilon$. Ao passo que são avaliadas também pelas propostas nas eqs.(3.37, 3.35), respectivamente para a distribuição $P(\ell)$ e $f(\varepsilon)$ 89

Figura 13 – Dinâmica do movimento de uma partícula em uma caminhada aleatória com os tamanhos de passos advindos da equação de Langevin que resulta na distribuição estacionária $P(\ell)$ na eq.(3.31), cujo comportamento assintótico de $\ell \rightarrow \infty$ resulta em $P(\ell) \sim \ell^{-\mu} \exp(-\lambda \ell^{\gamma/2})$, com o expoente da lei de potência dado por $\mu = 1 - \frac{\gamma}{2}(\omega + \frac{r}{\gamma} - \frac{1}{2})$ e $\lambda = 2\bar{b}$, os parâmetros utilizados neste exemplo foram $\omega = 1/4$, $r = 1/2$, $\bar{b} = 10^{-3}$ tal que $\mu = 1 - \frac{\gamma}{2}(\frac{1}{2\gamma} - \frac{1}{4})$ e $\lambda = 2 \times 10^{-3}$. Os resultados numéricos foram obtidos via simulações da dinâmica de Langevin, eq.(3.1), por meio do método de Milstein. A distância quadrática média do caminhante $x_{rms} \sim N^\nu$ é mostrada como função do número de passos N realizados até então, onde ν é o expoente de difusão. Para $\gamma = 26 \rightarrow \mu = 4$ (a) a dinâmica da difusão é normal desde o começo, como indicado pela regressão linear de coeficientes angular 0,50, em particular nesse exemplo não foi possível obter $\mu = 0$, em oposição temos o caso $\gamma = 10 \rightarrow \mu = 2$ (b) pertencente a região superdifusiva $1 < \mu < 3$, que apresenta uma região superdifusiva $\nu = 0,60$ antes de atingir em definitivo a região difusiva $\nu = 0,50$ como prevê o TCL. 90

Figura 14 – Resultados numéricos computados por meio do método de Milstein para a evolução temporal do tamanho da população $n(t)$ com ruído incluso apenas na taxa de mortalidade, $g_\nu \neq 0$ e $g_\delta = 0$, para a qual temos a dinâmica de Langevin descrita na eq.(4.13). Cada curva representa uma realização independente da dinâmica populacional. A linha horizontal tracejada indica o valor analítico de n^* , eq.(4.15), no qual a distribuição de equilíbrio $P(n)$ dada na eq.(4.14) atinge seu máximo (valor mais provável no equilíbrio). Podemos notar que $n(t)$ oscila em torno do valor predito analiticamente n^* . A condição inicial utilizada nestas simulações é $n(0) = 75$, e para os demais parâmetro temos $g_\nu = 0.5$, $\nu = 0.05$, $\delta = 100$, $a = 0.25$, $k = 0.1$, e $h = 0.001$ 98

Figura 15 – Distribuição de probabilidades no equilíbrio para o tamanho da população com ruído incluso apenas na taxa de mortalidade, $g_\nu \neq 0$ e $g_\delta = 0$. Há uma boa concordância entre as duas curvas. A vermelha é traçada pela solução estacionária analítica na eq.(4.14), em que utilizamos a aproximação (4.8) referente a presumida vizinhança do equilíbrio. Enquanto isso, a azul é obtida pelo método de Milstein aplicado ao par de equações em (4.5a, 4.5b), e utilizando as expressões (4.12a, 4.12b), portanto sem o uso da aproximação do equilíbrio. A linha vertical tracejada indica o valor de equilíbrio da população na ausência de ruído, que é maior que o valor definido em (4.15). A condição inicial utilizada nestas simulações é $n(0) = 75$ e $S(0) = 2$, e para os demais parâmetros temos $g_\nu = 0.5$, $\nu = 0.05$, $\delta = 100$, $S_{máx} = 5$, $a = 0.25$, $k = 0.1$, e $h = 0.001$. . . 99

Figura 16 – Comparativo entre o valor máximo da população n^* calculado numericamente (curva azul) através das eqs.(4.5a, 4.5b) junto as expressões (4.12a, 4.12b), e o valor de n^* obtido pela eq.(4.15) quando a aproximação em (4.8) é utilizada (curva tracejada vermelha). Nota-se que a aproximação é válida para pequenos valores de g_ν . A condição inicial utilizada nestas simulações é $n(0) = 75$ e $S(0) = 2$, e para os demais parâmetros temos $\nu = 0.05$, $\delta = 100$, $S_{máx} = 5$, $a = 0.25$, $k = 0.1$, e $h = 0.001$. A curva numérica é ainda uma média sobre 100 realizações. 100

Figura 17 – Resultados numéricos computados por meio do método de Milstein para a evolução temporal da quantidade de recurso disponível $S(t)$ com ruído incluso apenas na taxa de entrada de recurso, $g_\nu = 0$ e $g_\delta \neq 0$, para a qual temos a dinâmica de Langevin descrita na eq.(4.16). Cada curva representa uma realização independente da dinâmica populacional. A linha horizontal tracejada indica o valor analítico de S^* , eq.(4.18), no qual a distribuição de equilíbrio $P_n(S)$ dada na eq.(4.17) atinge seu máximo (valor mais provável no equilíbrio). Podemos notar que $S(t)$ oscila em torno do valor predito analiticamente S^* . A condição inicial utilizada nestas simulações é $S(0) = 2$, e para os demais parâmetros temos $g_\delta = 0.05$, $\nu = 0.05$, $\delta = 100$, $a = 0.25$, $k = 0.1$, e $h = 0.001$. O tamanho da população está fixado no valor do modelo determinístico $\frac{-a\delta}{\ln(1-\nu/k)}$ 101

Figura 18 – Função densidade de probabilidades no equilíbrio para a quantidade do recurso com ruído incluso apenas na taxa de entrada de recurso, $g_\nu = 0$ e $g_\delta \neq 0$. Há uma boa concordância entre as duas curvas. A curva vermelha é traçada pela solução estacionária analítica na eq.(4.17), enquanto a azul é obtida pelo método de Milstein aplicado ao par de equações em (4.5a, 4.5b) e utilizando as expressões (4.12a, 4.12b). A linha vertical tracejada indica o valor de equilíbrio da quantidade do recurso para o modelo na ausência de ruído, ambos os máximos coincidem no valor definido em (4.18). A condição inicial utilizada nestas simulações é $S(0) = 2$, e para os demais parâmetros temos $g_\delta = 0.05$, $\nu = 0.05$, $\delta = 100$, $S_{m\acute{a}x} = 5$, $a = 0.25$, $k = 0.1$, e $h = 0.001$. O tamanho da população é fixado no seu valor de equilíbrio para o modelo na ausência do ruído $n_{free}^* = \frac{-a\delta}{\ln(1-\nu/k)}$ 102

Figura 19 – Comparativo entre o valor máximo da população S^* calculado numericamente (curva azul) através das eqs.(4.5a, 4.5b) junto as expressões (4.12a, 4.12b), e o valor de S^* obtido pela eq.(4.18), para o caso do tamanho da população estar fixado no seu valor de equilíbrio do modelo na ausência do ruído $n_{free}^* = \frac{-a\delta}{\ln(1-\nu/k)}$ (curva tracejada vermelha). Nota-se que a aproximação é válida para pequenos valores de g_δ . A condição inicial utilizada nestas simulações é $S(0) = 2$, e para os demais parâmetros temos $\nu = 0.05$, $\delta = 100$, $S_{m\acute{a}x} = 5$, $a = 0.25$, $k = 0.1$, e $h = 0.001$. A curva numérica é ainda uma média sobre 100 realizações. 103

Figura 20 – Soluções numéricas para a evolução do tamanho da população $n(t)$ (à esquerda) e da quantidade de recurso disponível $S(t)$ (à direita) nos casos em que o ruído é inserido (a) somente na taxa de entrada de recurso, $g_\nu = 0$, com $g_\delta = 0.05$, (b) somente na taxa de mortalidade, $g_\nu = 0.50$, com $g_\delta = 0$, e (c) em ambas as taxas $g_\nu = 0.5$ e $g_\delta = 0.05$. Cada linha ilustra uma realização numérica independente para a dinâmica populacionais obtida via método de Milstein aplicada ao sistema de Langevin conduzido pelas eqs.(4.5a, 4.5b, 4.12a, 4.12b). A linha horizontal representa o valor de equilíbrio na ausência de ruídos. Em todos os casos, após decorrido um tempo transiente, os resultados obtidos oscilam em torno do valores preditos analiticamente $n_{free}^* = \frac{-a\delta}{\ln(1-\nu/k)}$ e $S^* = \frac{\delta S_{m\acute{a}x}}{n S_{m\acute{a}x} - \delta}$. A condição inicial utilizada nestas simulações é $n(0) = 75$, $S(0) = 2$, e para os demais parâmetros temos $\nu = 0.05$, $\delta = 100$, $S_{m\acute{a}x} = 5$, $a = 0.25$, $k = 0.1$, e $h = 0.001$ 104

Figura 21 – Mapa de calor para a distribuição de equilíbrio conjunta $P(n, S)$ do tamanho da população n e da quantidade do recurso S para diferentes intensidades dos ruídos. De (a) a (d) a magnitude do ruído na taxa de mortalidade é mantida fixa em $g_\nu = 0.5$, enquanto a magnitude do ruído na taxa de entrada do recurso aumenta tal que em (a) $g_\delta = 0$, (b) $g_\delta = 0.025$, (c) $g_\delta = 0.05$, (d) $g_\delta = 0.1$. Por outro lado, de (e) a (h) magnitude do ruído na taxa de entrada do recurso é mantida fixa em $g_\delta = 0.025$ enquanto a magnitude do ruído na taxa de mortalidade aumenta tal que em (e) $g_\nu = 0$, (f) $g_\nu = 0.1$, (g) $g_\nu = 0.2$, (h) $g_\nu = 0.5$. O encontro da linha vertical e da horizontal marca a solução de equilíbrio do modelo determinístico. A condição inicial utilizada nestas simulações é $n(0) = 75$, $S(0) = 2$, e para os demais parâmetros temos $\nu = 0.05$, $\delta = 100$, $S_{m\acute{a}x} = 5$, $a = 0.25$, $k = 0.1$, e $h = 0.001$ 106

Figura 22 – Mapa de calor da correlação, calculada a partir do coeficiente de correlação de Pearson, entre o tamanho da população n e a quantidade do recurso S no equilíbrio como função das intensidades do ruído na taxa de mortalidade g_ν , e da taxa de entrada do recurso, g_δ . Por toda a extensão dos parâmetros analisados a correlação entre as grandezas é negativa. Notamos que a correlação tende a aumentar quando g_ν aumenta, ao passo que tende a diminuir quando g_δ aumenta. Assim, pequenas flutuações no recurso $g_\delta \approx 0$ resultam numa correlação quase perfeita entre n e S , enquanto para $g_\nu \approx 0$ as grandezas são praticamente independentes. A condição inicial utilizada nestas simulações é $n(0) = 75$, $S(0) = 2$, e para os demais parâmetros temos $\nu = 0.05$, $\delta = 100$, $S_{m\acute{a}x} = 5$, $a = 0.25$, $k = 0.1$, e $h = 0.001$ 107

Figura 23 – À esquerda a frequência relativa das espécies ao longo do tempo para 6 espécies competindo por 3 diferentes recursos. Cada cor representa a frequência relativa de uma espécie. À direita o número de espécies remanescentes ao longo do tempo para a mesma situação. Nesta a cor indica o limiar considerado para a extinção da espécie, azul para $t_{lim} = 0.01$, laranja para $t_{lim} = 0.1$, e verde para $t_{lim} = 0.5$. Os eixos estão exibidos em escala logarítmica. A condição inicial utilizada nestas simulações é $n_i(0) = 75$, $S_j(0) = 2$, e para os demais parâmetros temos $\nu_i = 0.05$, $g_\nu = 0.5$, $\delta_j = 100$, $g_\delta = 0.5$, $H = 5$, $L = 0.1$, $a_{ij} = 0.25$, $k_{ij} = 0.1$, e $h = 0.001$ 110

Figura 24 – À esquerda o número de espécies remanescentes no equilíbrio em função do parâmetro L para 21 espécies competindo por 3 tipos de recursos, aqui a cor indica o limiar considerado para a extinção da espécie, azul para $t_{lim} = 0.01$, laranja para $t_{lim} = 0.1$, e verde para $t_{lim} = 0.5$. À direita o mesmo para 7 tipos de recursos. A condição inicial utilizada nestas simulações é $n_i(0) = 75$, $S_j(0) = 2$, e para os demais parâmetros temos $\nu_i = 0.05$, $g_\nu = 0.5$, $\delta_j = 100$, $g_\delta = 0.5$, $H = 5$, $L = 0.1$, $a_{ij} = 0.25$, $k_{ij} = 0.1$, e $h = 0.001$. Os gráficos correspondem à média de 5 configurações independentes. 111

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Sumário de algumas funções densidade de probabilidades de tamanhos de passos, originadas a partir da solução estacionária correspondente à forma geral da dinâmica de Langevin apresentada na eq.(3.1), as expressões 1-12 pertencem à categoria de ruídos homogêneos ao longo de toda a trajetória do animal, em particular para 1-10 temos $c \rightarrow 0^+$ além de $G(\ell)$ linear, e $G(\ell)$ não linear para 11 e 12, ao passo que as distribuições 13 e 14 estão relacionadas a algum grau de inhomogeneidade do meio, quando a estatística de ruído heterogêneo é utilizada.	76
Tabela 2 – Conjunto de parâmetros que tornam a variância da distribuição na eq.(3.29) finita, e evitam singularidades diretamente na própria dinâmica. Os parâmetros sem vínculo estão livres para serem finitos.	85
Tabela 3 – Requisitos para regime superdifusivo na distribuição de Bessel apresentada na eq.(3.41)	90

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	Aspectos do Deslocamento Animal	17
1.1.1	Teorema Central do Limite	21
1.1.2	Teorema Central do Limite Generalizado	22
1.1.3	Movimento Browniano	26
1.2	Aspectos Históricos da Dinâmica Populacional	32
2	MÉTODOS EM PROCESSOS ESTOCÁSTICOS	39
2.1	Equação de Langevin e Equação de Fokker-Planck	39
2.2	Interpretações de Itô e Stratonovich	51
2.3	Algoritmos Numéricos	58
2.3.1	Geração de Números Aleatórios	61
3	DISTRIBUIÇÕES DE TAMANHOS DE PASSOS NA DINÂMICA DO DESLOCAMENTO ANIMAL	64
3.1	Estatística de Ruído Homogêneo	73
3.1.1	Ruído Linear	73
3.1.2	Ruído não linear	83
3.2	Estatística de Ruído Heterogêneo	86
4	DINÂMICA POPULACIONAL	93
4.1	Modelo com duas fontes de ruídos	93
4.1.1	O caso $g_\delta = 0$	95
4.1.2	O caso $g_\nu = 0$	100
4.1.3	O caso $g_\delta \neq 0$ e $g_\nu \neq 0$	103
4.2	Dinâmica Ecológica	108
5	CONCLUSÕES	112
	REFERÊNCIAS	114

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho realizamos uma abordagem via dinâmica de Langevin para dois problemas distintos. O primeiro refere-se às distribuições dos tamanhos dos deslocamentos de animais, que são estudadas em função de diversas formas de mecanismos determinísticos e efeitos aleatórios representados por ruídos brancos. O segundo refere-se, ao mesmo formalismo de equações de Langevin, quando aplicado em alguns modelos de evolução dos tamanhos de populações que interagem com o meio pela obtenção de recursos. A seguir, apresentamos uma breve introdução para cada um desses temas, os quais serão desenvolvidos em mais detalhes nos capítulos seguintes.

No capítulo 2, apresentaremos alguns métodos em processos estocásticos, como a equação de Langevin, e o formalismo de cálculo estocástico requerido pelas interpretações de Itô e Stratonovich na obtenção da equação de Fokker-Planck correspondente. Em seguida, algoritmos numéricos, tais como o método de Milstein, serão apresentados, aos quais permitem avaliar a evolução temporal da dinâmica de Langevin. Por fim, há um pequeno comentário sobre a geração de números aleatórios a fim de obter uma distribuição de probabilidades específica.

No capítulo 3, analisaremos algumas propostas para os termos determinísticos, lineares e não lineares, da dinâmica de Langevin, e obteremos as distribuições dos tamanhos de passos para estatísticas de ruídos homogêneos e heterogêneos [1].

No capítulo 4, apresentaremos a proposta por equação de Langevin aplicada a um modelo de evolução populacional de uma espécie que interage com o meio em que vive por meio da extração de um recurso, que assim apresentará duas fontes de ruídos, uma para o tamanho da população e outra para a quantidade de recurso disponível. Estaremos interessados, quando um dos ruídos for nulo, em resultados analíticos na proximidade do equilíbrio, e, para o caso mais geral, resultados numéricos permitem analisar a correlação entre o tamanho da população e a quantidade de recurso no limite estacionário. Em seguida, uma generalização para um número maior de espécies e recursos será apresentada tendo em vista a probabilidade de sobrevivência das populações [2].

1.1 Aspectos do Deslocamento Animal

O *deslocamento* é uma das principais componentes da dinâmica da ecologia animal. A dinâmica animal é essencial para a maioria dos processos comportamentais fundamentais, tais como a busca por alimentos, a fuga de predadores, ou migrações sazonais, influenciando de forma decisiva nas ações vitais dos indivíduos, e na sobrevivência de populações inteiras. O estudo estatístico dos padrões de deslocamento e os processos de evolução das dinâmicas

do movimento são de grande importância para o entendimento dos seus mecanismos básicos.

Particularmente na ecologia do movimento [3, 4], temos que, apesar das melhorias tecnológicas e da expectativa por grandes volumes de dados de comportamentais [5], a inerente complexidade da dinâmica do movimento animal frequentemente impede uma compreensão maior dos processos subjacentes que a controlam [6]. É certo que o comportamento de qualquer ser, incluindo sua capacidade de locomoção, é uma expressão macroscópica das suas atividades neurais. Temos aqui um processo de interação entre os aspectos anatômicos, as funções cognitivas e o meio ambiente em que se encontra, que ademais, envolvem uma grande quantidade de outras relações entre as espécies coabitantes, como, por exemplo, a dispersão versus a defesa de predadores. Portanto, requer-se a análise e o processamento de grandes volumes de dados para a obtenção de maior precisão e resolução, para que assim um número maior de espécies e o cruzamento de informações de várias atividades e condições seja possível. Tal que um entendimento ecológico macro, e uma relação entre as atividades e as distribuições de probabilidades, que discutiremos a seguir, possa ser compreendida.

Devido às novas tecnologias que facilitam a obtenção de detalhes dos movimentos individuais nas suas diversas escalas espaciais e temporais. Existe a possibilidade da mudança de abordagem de uma metodologia focada na descrição das regiões do espaço, como caracterizadas por meio de densidades e fluxos de movimento, para o ponto de visto centrado nos movimentos individuais, caracterizados, por exemplo, por velocidades e acelerações [7]. Ainda há a falta de um paradigma unificado e derivado de primeiros princípios que possibilite os estudos dentro de um contexto comum, com melhor clareza da interação entre as componentes fundamentais do movimento dos seres vivos, isto é, estados internos (porque se movem), o movimento em si (como se movem), navegação (quando e para onde se movem) e a capacidade dos fatores externos (mudanças no meio) de afetarem o movimento, junto às consequências ecológicas e evolucionárias (como a própria diversidade da vida) do movimento.

No intuito de descrever o caminho percorrido como uma série de unidades menores, a própria definição do que é um passo isoladamente sofre a influência do protocolo utilizado durante a análise do movimento. Uma vez o tendo definido, podemos agrupar um conjunto destes, para o qual, o objetivo para a identificação das fases do movimento durante o qual algum objetivo é definido. Por exemplo, passos curtos podem estar associados a uma grande disponibilidade de recursos próximos, enquanto passos maiores podem estar associados à regiões escassas de alimentos ou mesmo à fuga de algum perigo.

Apesar de muitos seres, como as abelhas, apresentarem padrões de movimento intermitentes (deslocamento e pausa), e portanto apresentarem tamanhos de passo bem definido, ou por exemplo, quando analisamos apenas a profundidade de um animal marinho

(embora movimente-se nas três dimensões), a identificação dos pontos de retorno pode ser simplificada. Outros tantos se movimentam de maneira tortuosa e/ou contínua, nesses casos, além da ocorrência de dados insuficientes, existem algumas dificuldades em extrair os tamanhos de passos dos bancos de dados de rastreo [8], embora algumas melhoras tecnológicas estejam em curso, como GPS mais preciso [9]. Neste sentido, o surgimento de dados biológicos mais apurados, junto a avanços teóricos, devem ser o guia para a melhoria do mapeamento de trajetórias em comprimentos de passo, fornecendo as bases para a detecção das variações do movimento, e assim dos possíveis mecanismos comportamentais por trás dessas escolhas [10].

Neste contexto, o desenvolvimento de uma estrutura teórica básica, que ajude na compreensão dos padrões estatísticos do deslocamento animal é de relevante importância para o progresso de pesquisas em buscas aleatórias. Com esta motivação, neste trabalho consideramos uma abordagem pautada na física estatística para as funções densidade de probabilidades características do movimento animal, mais especificamente os tamanhos dos passos, para tal usaremos um tratamento baseado em equações diferenciais estocásticas (equações de Langevin) e o formalismo de superestatística.

A dinâmica do movimento está intrinsecamente relacionada às distribuições de tamanhos de passos e ângulos de viragem, os quais em trabalhos teóricos são considerados com pouca ou nenhuma correlação [11, 12]. Todavia, existem abordagens na literatura em que os tamanhos dos passos e os ângulos de viragem estão correlacionados, por exemplo, em movimentos típicos de pequenos passos e grandes ângulos, alternados com grandes passos e pequenos ângulos, que são encontrados em modelos de caminhada aleatórias em múltiplas escalas para o movimento animal, como observado no padrão de movimento de algumas espécies de alces quando estão em estado de acampamento ou em estado de exploração, e apresentam, respectivamente, maior/menor persistência em manter a direção [13]. O modo como a dinâmica de um ser desenvolve-se no tempo tem grande influência nas suas atividades fundamentais, sendo determinante para, entre outros fatores, a capacidade de difusão e a eficiência na busca por recursos, que pode se tornar uma questão chave principalmente em áreas escassas em recursos [14, 15, 16].

A suposição da ausência de memória em processos Markovianos comporta algumas evidências experimentais como o voo de algumas borboletas [17]. Entretanto, animais respondem aos estímulos fisiológicos e a diversos estímulos do meio de várias formas, tal que podem exibir diferentes comportamentos de movimentos. Assim, inferir padrões e dinâmicas de movimentos a partir de séries temporais da localização dos animais, frequentemente envolve a estimativa de parâmetros associados com diferentes tipos de atividades, que podem exigir outras formulações como caminhadas aleatórias com alguma tendência ou correlação [18].

Parte da complexidade envolvida no cálculo das distribuições de tamanhos de

passos resulta da dependência das diversas motivações internas, respostas às interações externas e outros contextos ecológicos como dispersão e exploração. Então, à parte de experimentalmente controlar o comportamento animal, em geral torna-se difícil associar características específicas do comportamento com alguma das distribuições de tamanhos de passos $P(\ell)$ precisamente. Em outras palavras, trata-se de como justificar do ponto de vista teórico que uma dada $P(\ell)$ (exponencial, gama ou lei de potência), extraída de análises estatísticas ou de dados empíricos, é a adequada, com base em primeiros princípios, às características mecanicistas do comportamento animal. Metabolismo interno e interações com o meio dependem mais do contexto experimental dos dados que da inferência estatística utilizada [19].

Frequentemente análises comparativas em diferentes condições podem ajudar a entender, sem a necessidade de maiores detalhes mecanicistas, qual mecanismo é o mais adequado, e ainda obter uma descrição conveniente do movimento animal como em alguns modelos de velocidades correlacionadas [20]. De fato, o devido ajuste entre dados experimentais e dinâmicas de Langevin é um desafio que permanece, e ainda requer atenção junto ao avanço da captação de informação sobre o comportamento animal.

Considerando as dificuldades técnicas da análise dos dados experimentais para a elaboração de uma dinâmica de Langevin a partir de uma perspectiva exclusivamente mecânica, do ponto de vista da física estatística o problema pode ser simplificado considerando o deslocamento animal como sendo governado por forças microscópicas (estímulos estocásticos locais) sem grandes preocupações a respeito das causas comportamentais genuínas. Neste sentido, trataremos o cálculo das distribuições $P(\ell)$ com base numa abordagem de dinâmicas de Langevin [19, 21] e no formalismo de superestatística [22, 23], que incorporam como elementos principais o grau de não linearidade da componente determinística do movimento e as propriedades estocásticas que regem a dinâmica dos passos ao longo do caminho percorrido pelo animal. É importante dizer que este tipo de abordagem, por meio da física estatística, não pretende modelar todos os mecanismos microscópicos oriundos de cada componente responsável pela dinâmica do movimento de uma espécie qualquer. Do mesmo modo, não há qualquer tentativa de estabelecer uma conexão direta, por primeiros princípios, entre as características microscópicas do comportamento animal e os parâmetros específicos das funções matemáticas utilizadas no formalismo das equações de Langevin. Todavia, é interessante o fato de que apesar da natural diferença das espécies de animais, a diversidade dos padrões de movimento e a distribuição de tamanhos de passos associadas não é muito extensa.

No presente trabalho consideramos dois tipos de dinâmicas de movimento. No primeiro caso temos que a influência estocástica na dinâmica dos tamanhos dos passos apresenta suas propriedades estatísticas fixas por toda a trajetória do animal. No segundo caso temos uma abordagem mais ampla em que a estatística do ruído é heterogênea, o

que possibilita a consideração de alguma inhomogeneidade do meio. Assim, por meio das dinâmicas de Langevin propostas, é possível obter muitas das distribuições de tamanhos de passos $P(\ell)$ que são usualmente consideradas na literatura da ecologia do movimento. Dinâmicas de movimento difusivas e superdifusivas (Lévy) aparecem neste contexto, bem como o comportamento em múltiplas escalas [24, 25].

Naturalmente, as situações que estamos considerando não contemplam a extensão total das possíveis dinâmicas de movimento dos animais. Por exemplo, esta abordagem de Langevin, com evolução temporal Markoviana, não inclui modelos de caminhadas aleatórias de tempo contínuo, que podem estar associados a voos de Lévy, ou ainda movimentos descritos por dinâmicas de movimento Browniano fracionário [26]. Além disso, a suposição de que os animais não guardam memória está relacionada com modelos de caminhada aleatória Markoviana para o movimento animal, entretanto adicionar correlação entre os passos pode ser uma medida necessária [27]. Neste sentido, modelos não Markovianos representam uma importante classe, tipicamente gerando dinâmicas anômalas, descritas, por exemplo, por equações de Langevin generalizadas que contabilizam memória de longo alcance [28].

1.1.1 Teorema Central do Limite

O teorema central do limite [29] é um dos principais teoremas da estatística, e assim serve de base para justificar outros problemas em diversos ramos da ciência, como na teoria das probabilidades. Consideremos um número arbitrário n de variáveis estocásticas independentes X_1, X_2, \dots, X_n , cada qual sendo o resultado de um mesmo experimento aleatório, e que assim possuem a mesma distribuição de probabilidades $P_X(x)$ para a qual iremos supor média μ e variância σ^2 finitas, como, por exemplo, nos resultados do lançamento de um dado *honesto*. Estamos interessados na soma do conjunto $\{X\}$, tal que $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ possui média $n\mu$ e, uma vez que pares quaisquer de variáveis (X_i, X_j) com $i \neq j$ não são correlacionados, temos para a variância o valor de $n\sigma^2$. Por outro lado, a distribuição da média aritmética das variáveis definida como $Z = \frac{X_1 - \langle X_1 \rangle + X_2 - \langle X_2 \rangle + \dots + X_n - \langle X_n \rangle}{n}$ convenientemente possui média nula, entretanto tem a sua variância reduzida, isto é, sua variância diminui com n , sendo dada por σ^2/n . Portanto, é conveniente reescalar a soma e redefiní-la para

$$Z = \frac{X_1 - \langle X_1 \rangle + X_2 - \langle X_2 \rangle + \dots + X_n - \langle X_n \rangle}{\sqrt{n}}, \quad (1.1)$$

que assim possui variância de valor σ^2 finita para todo valor de n .

O teorema central do limite afirma que para $n \rightarrow \infty$, a distribuição de probabilidades de Z tende a uma distribuição Gaussiana com média μ e variância σ^2 , iguais à distribuição original $P_X(x)$, mesmo quando $P_X(x)$ não é Gaussiana, sendo, por exemplo, uniforme ou exponencial, desde que seja um conjunto de variáveis aleatórias identicamente distribuídas

que apresentem variância finita. Este resultado é o responsável pela presença constante da distribuição Gaussiana em problemas associados com um grande número de eventos independentes, desde um exemplo simples como a distribuição da altura das pessoas, ou em muitos campos da física em que cálculos estatísticos ocorrem, como na física estatística de equilíbrio.

A prova do teorema central do limite consiste em calcular a transformada de Fourier (função característica, $G_X(k)$) de uma distribuição arbitrária $P_X(x)$, que possua média zero e variância σ^2 . Assim temos

$$\begin{aligned} G_X(k) &= \int dx e^{ikx} P_X(x) = \int dx \left[1 + ikx - \frac{k^2 x^2}{2} - i \frac{k^3 x^3}{6} + \dots \right] P_X(x) \\ &= 1 - \frac{1}{2} k^2 \sigma^2 - i \frac{k^3}{6} \langle x^3 \rangle + \dots \end{aligned} \quad (1.2)$$

A fatoração da função característica da soma $Y = X_1 - \langle X_1 \rangle + \dots + X_n - \langle X_n \rangle$ de variáveis estatisticamente independentes é dada por

$$\begin{aligned} P_Y(y) &= \int d(x_1 - \langle x_1 \rangle) \dots d(x_n - \langle x_n \rangle) P_{X_1}(x_1) \dots P_{X_n}(x_n) \times \\ &\quad \times \delta(y - (x_1 - \langle x_1 \rangle) + \dots + x_n - \langle x_n \rangle), \\ G_Y(k) &= \int dy P_Y(y) e^{iky} = [G_X(k)]^N, \end{aligned} \quad (1.3)$$

que pode assim ser resumida devido a equivalência das propriedades estatística das variáveis X_i . Em seguida, devido à relação $Z = Y/\sqrt{n}$, e utilizando as propriedades de reescala das funções características temos

$$G_Z(k) = G_Y(k/\sqrt{n}) = [G_X(k/\sqrt{n})]^n = \left[1 - \frac{1}{2n} k^2 \sigma^2 - i \frac{k^3}{6n\sqrt{n}} \langle x^3 \rangle + \dots \right]^n, \quad (1.4)$$

portanto

$$P_Z(z) = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{-ikz} G_Z(k) = \left[1 - \frac{1}{2n} k^2 \sigma^2 - i \frac{k^3}{6n\sqrt{n}} \langle x^3 \rangle + \dots \right]^n. \quad (1.5)$$

Devido ao fator oscilante e^{-ikz} , a função entre colchetes torna-se relevante apenas nas vizinhanças de $k = 0$ [30]. Então, desconsiderando os termos de ordem superior $O(k^3)$, e utilizando a definição de função exponencial $e^{az} = \lim_{n \rightarrow \infty} [1 + \frac{a}{n}]^n$, temos, no limite de infinitas realizações do experimento $n \rightarrow \infty$, que

$$P_Z(z) = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{-ikz} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 k^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}. \quad (1.6)$$

1.1.2 Teorema Central do Limite Generalizado

Primeiramente vamos definir o conceito de distribuição estável. Uma distribuição é estável quando uma combinação linear de duas variáveis aleatórias independentes, vindas desta distribuição, resulta na mesma distribuição à parte da escolhas de novos parâmetros.

Do mesmo modo, a denominação estende-se para uma variável aleatória que é dita ser estável quando sua distribuição é estável, também conhecidas como distribuições de Lévy alfa-estáveis [31].

A importância das distribuições de probabilidades estáveis é que estas são atratores para uma soma apropriada de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Em termos gerais, se, para uma escolha adequada de constantes A_n e B_n , a função da distribuição referente à soma $1/B_n \sum_{j=1}^n x_j - A_n$ converge para uma distribuição P no limite assintótico $n \rightarrow \infty$, onde x_1, \dots, x_n é dado ser um conjunto de variáveis aleatórias que possuem a mesma distribuição f , então caracteriza-se que f é atraída para P [32]. A totalidade das distribuições que resultam em P forma o que é denominado de domínio de atração de P . Como vimos na seção anterior, uma soma apropriadamente normalizada, eq.(1.1), de um conjunto de variáveis aleatórias com variância finita, tende à uma distribuição Gaussiana, eq.(1.6), quando o número de variáveis aumenta. No entanto, sem a suposição de variância finita, o limite pode ser uma distribuição estável que não a distribuição Normal.

Embora a função densidade de probabilidades para uma distribuição estável geral não possua uma forma analítica, podemos partir da propriedade central $G(\{a_1x + b_1\}) * G(\{a_2x + b_2\}) = G(ax + b)$, onde a notação utilizada refere-se à função característica de uma nova variável aleatória obtida por uma operação linear sobre a variável inicial. Assim, obtemos que a função característica de uma distribuição estável pode assumir, entre outras formas possíveis, a seguinte definição [33]:

$$G(k; \alpha, \beta, c, \mu) = \exp[ik\mu - |ck|^\alpha(1 - i\beta \operatorname{sgn}(k)\Phi)], \quad (1.7)$$

umas das particularidades dessa definição é que assim ela não é contínua no parâmetro $\alpha = 1$, em (1.7) $\operatorname{sgn}(k)$ é o sinal de k , tal que o valor da função característica em algum k é o complexo conjugado de seu valor em $-k$, gerando uma distribuição real. Enquanto isso, Φ é dado, por essa definição, como

$$\Phi = \begin{cases} \tan(\frac{\pi\alpha}{2}) & ; \alpha \neq 1 \\ -\frac{2}{\pi} \ln k & ; \alpha = 1 \end{cases} \quad (1.8)$$

Os exemplos mais simples são a distribuição Gaussiana ($\alpha = 2, -1 < \beta < 1$), a de Cauchy ($\alpha = 1, \beta = 0$) e a de Lévy ($\alpha = 1/2, \beta = 1$), por serem as únicas com as formas analíticas conhecidas, e que podem ser expressas em termos de funções elementares. Outros exemplos são a distribuição de Landau ($\alpha = 1, \beta = 1$) e a distribuição de Holtsmark ($\alpha = 3/2, \beta = 0$) que podem ser expressas em termos de funções hipergeométricas, mas que eventualmente podem reduzir-se à funções elementares na escolha dos valores numéricos de c e μ . Ainda temos o caso limite em que $c \rightarrow 0$ ou $\alpha \rightarrow 0$, para o qual a função característica comporta-se como $G \sim e^{ik\mu}$, e portanto a distribuição associada é a função delta de Dirac $P \sim \delta(x - \mu)$.

Uma variável estocástica é estável se sua função característica puder ser expressa por (1.7), onde $\alpha \in [0, 2]$, $\beta \in [-1, 1]$, $c \in]0, \infty[$, e $\mu \in]-\infty, \infty[$ são respectivamente os parâmetros de estabilidade, assimetria ($\beta = 0$ representa simetria), escala, e localização. Estes dois últimos parâmetros podem ser utilizados para definir uma nova variável y na forma $y = \frac{x-\mu}{c}$ para $\alpha \neq 1$, e $y = \frac{x-\mu}{c} - \beta \frac{2}{\pi} \ln c$ para $\alpha = 1$, tal que temos uma função característica redefinida para $G(k; \alpha, \beta, 1, 0)$ com $c = 1$ e $\mu = 0$, isto é, uma distribuição resultante reescalada e com média nula. Devido à definição (1.7) o parâmetro μ é a média (quando esta existe e é finita) da distribuição, $\mu = -iG'(k = 0)$ para $\alpha > 1$. Assim, desde que os parâmetros estejam dentro dos intervalos referidos, poderemos gerar funções de distribuições válidas, ou seja, que possuam uma função distribuição acumulada real e estritamente crescente entre 0 e 1. A fig.(1) mostra alguns exemplos de distribuições estáveis evidenciando como a forma das curva muda com a mudança dos parâmetros α e β . O primeiro é uma medida do quanto a distribuição esta concentrada em torno da média, enquanto o segundo relaciona-se com o grau de assimetria.

A forma geral da função característica é justificável pois, por exemplo, a função característica da soma de duas variável independentes e identicamente distribuídas é o produto da função característica que as geram. Portanto, retorna uma nova função característica com a mesma forma funcional da eq.(1.7), porém neste caso com outros valores para μ e c .

Outra propriedade das distribuições estáveis além de serem contínuas, diferenciáveis e unimodais, é que estas são infinitamente divisíveis, isto é, podem ser expressas como a distribuição de probabilidades da soma de um número arbitrário de variáveis aleatórias identicamente distribuídas, assim para qualquer n inteiro existe uma variável aleatória definida como a soma destes n elementos capaz de gerar a distribuição P . Este conceito está diretamente relacionado com o limite $n \rightarrow \infty$, eq.(1.6), na obtenção da distribuição Gaussiana no teorema central do limite.

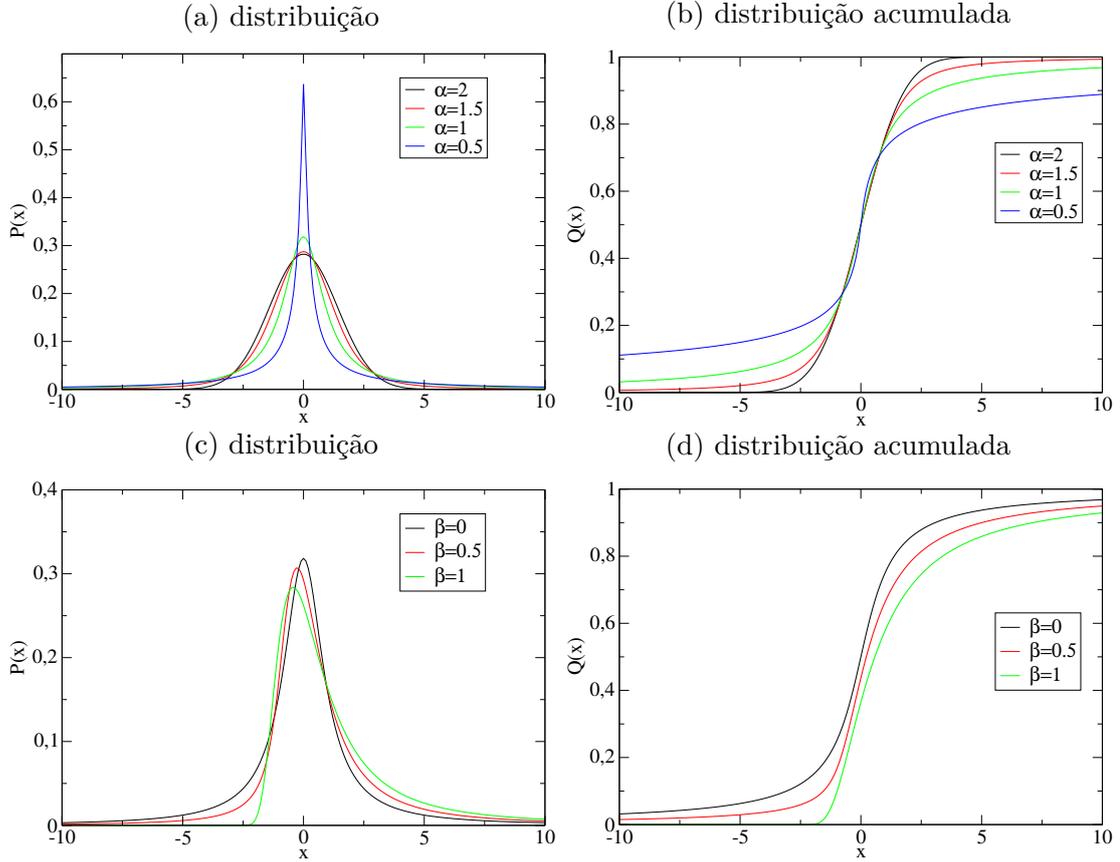
O comportamento assintótico para $P(x) = \int dk \frac{1}{2\pi} e^{-ikx} G(k)$ para $\alpha < 2$ é dado por [34]

$$P(x) \sim \frac{1}{|x|^{1+\alpha}}, \quad (1.9)$$

esta dependência em x condiciona a variância e a média a serem infinitas para $\alpha < 2$ e $\alpha < 1$ respectivamente. Podemos perceber uma dependência assintótica como uma lei de potência na fig.(2). Nota-se que para valores de $\alpha < 2$ cada vez menores, aumenta-se a probabilidade de ocorrência de valores mais distantes da média. Além disso, podem haver restrições quanto a extensão dos valores permitidos para x , por exemplo, para $\alpha < 1$ e $\beta = 1$ a distribuição restringe-se ao intervalo $x \geq \mu$, como é o caso da distribuição de Lévy, expressa por $P(x) = \sqrt{\frac{c}{2\pi}} e^{-\frac{c}{2(x-\mu)}} / (x - \mu)^{3/2}$.

Com exceção do caso $\alpha = 2$ (distribuição Gaussiana), distribuições estáveis são

Figura 1 – Representação de algumas distribuições estáveis $P(x)$, em (a), e de suas funções de distribuição acumulada $Q(x) \equiv \int_{-\infty}^x P(x')dx'$, em (b), para diferentes valores do parâmetro de estabilidade α no caso simétrico $\beta = 0$, com parâmetro de escala unitário $c = 1$, e centradas na origem $\mu = 0$. Para as figuras (c) e (d) temos respectivamente a distribuição e a distribuição acumulada para diferentes valores de β com $\alpha = 1$, $c = 1$ e $\mu = 0$.



leptocúrticas, isto é, apresentam a curtose maior que 3, e são classificadas como distribuições de cauda longa, apresentando maior probabilidade na ocorrência de eventos extremos característicos de grandes desvios em relação a média. Além disso, distribuições estáveis para um mesmo valor do parâmetro de estabilidade α , apresentam uma forma fechada em relação às convoluções, dado que o produto de duas funções características $G_1(k; \alpha, \beta_1, c_1, \mu_1)$ e $G_2(k; \alpha, \beta_2, c_2, \mu_2)$, como apresentado na eq.(1.7), retorna outra função com a mesma estrutura, mas com os novos parâmetros

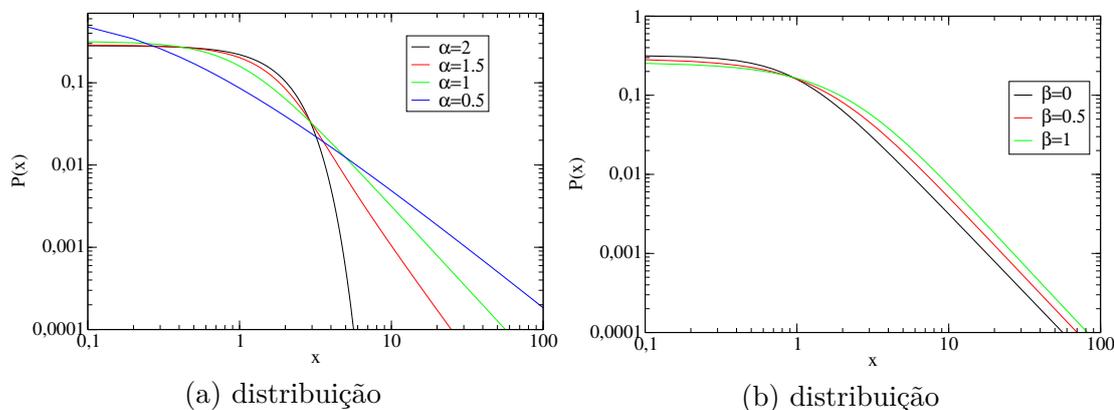
$$\mu = \mu_1 + \mu_2, \quad (1.10)$$

$$|c| = (|c_1|^\alpha + |c_2|^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad (1.11)$$

$$\beta = \frac{\beta_1|c_1|^\alpha + \beta_2|c_2|^\alpha}{|c_1|^\alpha + |c_2|^\alpha}, \quad (1.12)$$

uma vez que os parâmetros originais estejam dentro dos limites corretos, o mesmo valerá para os parâmetros resultantes dessa transformação.

Figura 2 – Representação de algumas distribuições estáveis $P(x)$ em escala logarítmica para (a) diferentes valores do parâmetro de estabilidade α com $\beta = 0$, $c = 1$ e $\mu = 0$, e (b) diferentes valores de β com $\alpha = 1$, $c = 1$ e $\mu = 0$, quão menor o valor de α maior a probabilidade de ocorrência de valores mais distantes do valor médio $\mu = 0$.



Fonte : O autor (2020)

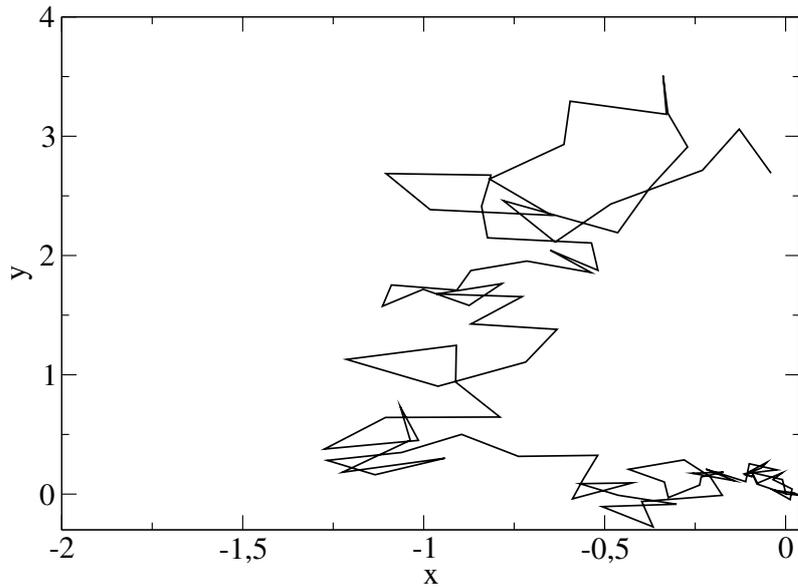
1.1.3 Movimento Browniano

Estudos conduzidos por Robert Brown em 1827, com o auxílio de microscópios, mostraram que pequenas partículas ejetadas por grãos de pólen adquiriam um movimento bastante irregular quando suspensas em água. Como botânico sua justificativa inicial foi a de supor a existência de alguma força misteriosa inerente aos seres vivos. Entretanto, a repetição do experimento com cobre e outras substâncias inorgânicas exibiam o mesmo comportamento aleatório, o que exigia uma explicação independente da natureza dos materiais. Tal movimento é conhecido como movimento Browniano, embora Jan Ingenhousz também tenha feito algumas descrições de movimento similares referentes à partículas de carvão em álcool ainda em 1765 [35]. Na fig.(3) apresentamos uma versão numérica do que se obtém nesse tipo de experimento.

Em 1877, Joseph Delsaux propôs que o comportamento apresentado devia-se ao movimento térmico do líquido utilizado e não de qualquer propriedade do material observado. No contexto histórico, a estrutura da matéria, como uma representação de partículas discretas (teoria atômica) não era ainda um consenso, embora o conceito de unidades submicroscópicas já houvesse dado respaldo à química na sua disposição dos elementos em uma estrutura periódica baseada no número atômico, e à interpretação da pressão do gás, como sendo gerada pelo impacto das partículas constituintes com as paredes do recipiente, obedecendo as leis da mecânica na teoria cinética dos gases.

Assim, o enigma do movimento Browniano residia na assimetria das colisões cinéticas das moléculas que compõem o fluido. Em 1888, Louis Gouy comprovou que a velocidade do movimento Browniano era inversamente proporcional a viscosidade do fluido

Figura 3 – Simulação numérica do que é observado em um movimento Browniano



Fonte : O autor (2020)

[36]. Uma descrição matemática satisfatória foi apresentada por Albert Einstein, onde foi obtida uma relação entre o tamanho dos átomos e o número de Avogrado, o que além disso, permitiu a condução de experimentos que forneciam sustentação à teoria molecular e à física estatística, dando prova da existência dos átomos, mesmo que não pudessem ser detectados diretamente com as tecnológicas da época.

A formulação de Einstein da teoria do movimento Browniano é baseada na conexão entre o coeficiente de difusão e a viscosidade [37]. Sendo K a força atuando, na direção x , sobre as partículas em suspensão contida num elemento de volume de comprimentos dx e área de secção transversal dS , temos, pela lei de atrito viscoso de Stokes, que esta força é dada por

$$K = 6\pi\eta av, \quad (1.13)$$

quando as partículas forem aproximadas como pequenas esferas rígidas de raio a e velocidade v , mergulhadas num fluido de viscosidade η . Por outro lado, estas se movem pelo fluido por estarem sujeitas a um gradiente de pressão (p), assim as partículas dentro do região $dx dS$ sofrem cada uma força por unidade de volume dada por

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{p(x + \Delta x) - p(x)}{\Delta x}, \quad (1.14)$$

o equilíbrio de forças ocorre quando $K + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{V}{N} = 0$. Aqui $\frac{V}{N}$ seria o volume médio ocupado por cada partícula, logo

$$6\pi\eta av = -\frac{M}{\rho N_A} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (1.15)$$

onde $\rho = \frac{m}{V}$ é a densidade de massa, M é a massa molar do soluto e N_A é o número de Avogrado (definido como o número de partículas por mol), tal que $\rho = \frac{N}{N_A} \frac{M}{V}$, onde N

é o número de partículas dentro do volume referido. Obtemos portanto da eq.(1.15) a velocidade v das partículas. Podemos associar à esta velocidade um fluxo J de partículas na direção x , correspondente à quantidade de massa que atravessa a secção de área dS numa fração de tempo dt

$$J = \rho v = -\frac{M}{6\pi\eta a v} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (1.16)$$

utilizando que a pressão osmótica comporta-se tal qual a lei dos gases ideais temos que $p = \frac{nRT}{V} = \frac{RT\rho}{M}$ (n é a quantidade de mols), portanto a corrente J pode ser dada em termos da densidade por

$$J = -\frac{RT}{6\pi\eta a N_A} \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad (1.17)$$

de onde deduz-se o coeficiente de difusão D , dado por

$$D = \frac{RT}{6\pi\eta a N_A}. \quad (1.18)$$

Haja vista a equação de continuidade para a conservação da massa $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, e tratando-se do caso unidimensional e linear em que o fluxo é diretamente proporcional ao gradiente de concentração $\vec{J} = -D\vec{\nabla}\rho$, temos a equação de difusão dada por

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2}. \quad (1.19)$$

Uma dedução também devida a Einstein [38] aborda o problema do ponto de vista estatístico. Sendo a agitação das partículas devido ao constante movimento das moléculas do líquido, admitimos que os movimentos destas moléculas são tão variáveis, que seu efeito sobre a partícula suspensa pode apenas ser descrito em termos colisões estatisticamente independentes. Assim, os deslocamentos de uma mesma molécula, em diferentes intervalos de tempo, também são processos mutuamente independentes, desde que observados sobre uma escala de tempo relevante.

Definimos n como o número de partículas suspensas no fluido. Em um intervalo de tempo τ a coordenada x de cada partícula é modificada por um quantidade Δ , apresentando valores (positivo ou negativo) de deslocamento Δ a princípio diferentes. Assim, deve existir uma lei de frequência $\phi(\Delta)$ normalizada, $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(\Delta) d\Delta = 1$, e de simetria esperada $\phi(-\Delta) = \phi(\Delta)$. Portanto uma fração $dn = n\phi(\Delta)d\Delta$ de partículas experimentam uma variação de posição entre Δ e $\Delta + d\Delta$. Espera-se que a distribuição $\phi(\Delta)$ decaia rapidamente, tal que apenas pequenos deslocamento tenham probabilidades realmente consideráveis.

O objetivo é obter como o coeficiente de difusão relaciona-se com a distribuição ϕ . Sendo $f(x, t)$ (restrita ao caso que sua dependência espacial seja apenas com a coordenada x) o número de partículas por unidade de volume no instante t . Uma correspondência entre a distribuição das partículas num tempo posterior $t + \tau$, $f(x, t + \tau)$ e inicial, $f(x, t)$, pode ser calculada através de

$$f(x, t + \tau) dx = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x + \Delta, t) \phi(\Delta) d\Delta \right] dx, \quad (1.20)$$

cuja interpretação é que o número de partículas que no tempo $t + \tau$ encontram-se numa região cercada pelos planos x e $x + dx$, são aquelas cuja posição anterior eram $x \pm \Delta$ e apresentaram o deslocamento exato $\mp \Delta$ para atingir a posição x , lembramos que $\phi(-\Delta) = \phi(\Delta)$. Estas suposições baseiam-se na independência de todos os saltos Δ da história passada do movimento (antes de t). Sendo τ uma pequena diferença de tempo comparada com o tempo de observação do experimento, e as variações Δ pequenas frente ao deslocamento total, podemos expandir em série de Taylor ambos os lados da eq.(1.20) para

$$f + \tau \frac{\partial f}{\partial t} = f \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\Delta) d\Delta + \frac{\partial f}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta \phi(\Delta) d\Delta + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta^2}{2} \phi(\Delta) d\Delta. \quad (1.21)$$

Devido à simetria e à norma de $\phi(\Delta)$, obtemos, primeiramente definido $D = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta^2}{2} \phi(\Delta) d\Delta$, que

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad (1.22)$$

onde novamente temos a equação da difusão. A solução para uma única partícula, ou um conjunto de partículas não interagentes, pode ser obtida escrevendo a eq.(1.22) no espaço de Fourier, $F(k, t) = \int dx e^{ikx} f(x, t)$. A condição inicial de todas as partículas encontrarem-se inicialmente na origem $x = 0$ proporciona o seguinte resultado

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi 4Dt}} e^{-x^2/4Dt}. \quad (1.23)$$

A fig.(4) ilustra uma solução para a equação de difusão com $x(t = 0) = 0$ e $D = 0.5$ avaliada em três tempos diferentes, de maneira analítica, eq.(1.23), e numérica através de um sorteio de passos seguindo uma distribuição Gaussiana de média zero e variância 0.001. O resultado é uma distribuição Gaussiana cuja variância representa o deslocamento quadrático médio. Devido a dependência linear, ao decorrer do tempo a tendência é que as partículas difundam-se indefinidamente com

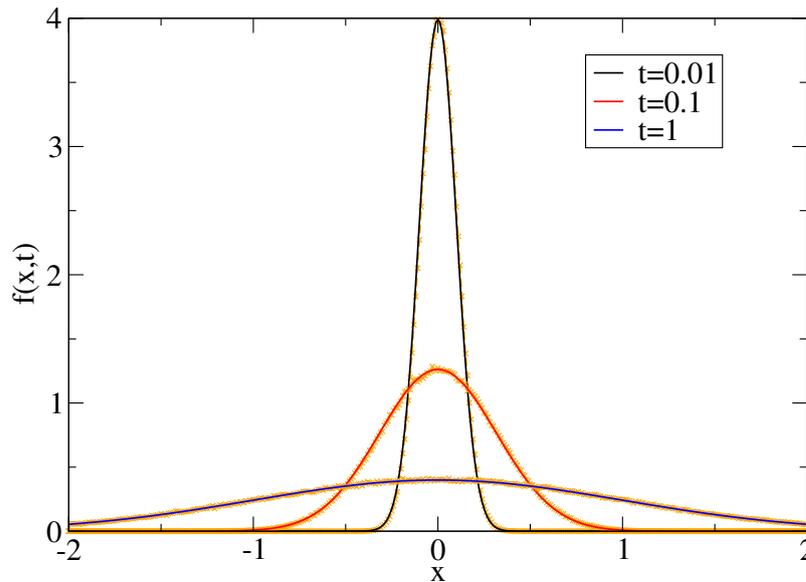
$$x_{rms} = \sqrt{2Dt}. \quad (1.24)$$

A fig.(5) mostra o comportamento esperado segundo esta equação para a mesma situação descrita na fig.(4). Por fim, podemos comparar as eqs.(1.18 e 1.24) para obter o valor de N_A como

$$N_A = \frac{RTt}{3\pi\eta a x_{rms}^2}. \quad (1.25)$$

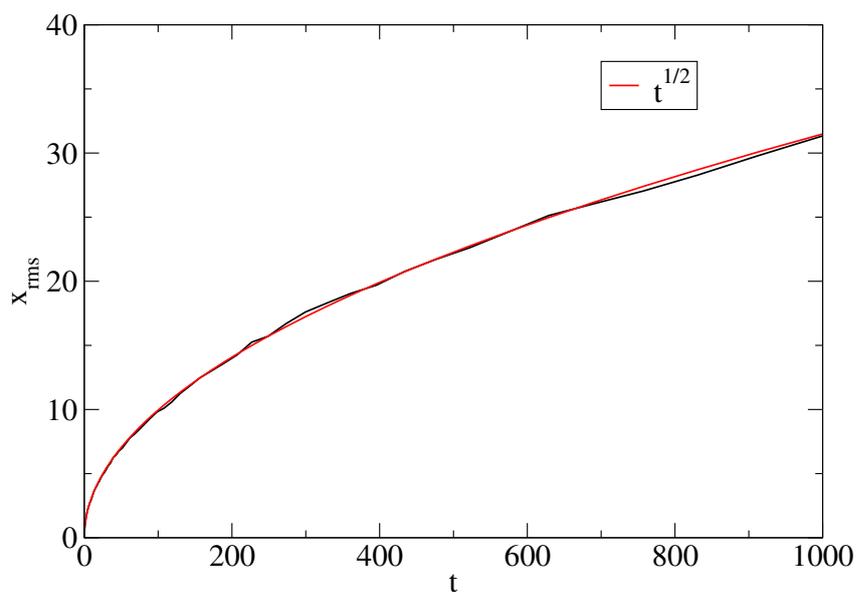
Dado o tamanho da partícula a , e que determine-se o valor de x_{rms} em um dado t experimentalmente, torna-se plausível obter o número de Avogrado, que havia originalmente sido concebido pela hipótese de que uma mesma quantidade de qualquer gás, à mesma pressão e temperatura, encerra a mesma quantidade de partículas, ajudando a reforçar a hipótese para a existência dos átomos. Por outro lado, outra relação entre o raio das partículas a e N_A também pode ser obtida por uma medição experimental da viscosidade efetiva e da viscosidade do solvente puro.

Figura 4 – Representação da solução da equação de difusão, eq.(1.23), com $D = 0.5$ para diferentes instantes de tempo $t = 0.01$, $t = 0.1$ e $t = 1$. Observa-se com o decorrer do tempo que a função $f(x, t)$ torna-se cada vez mais espalhada pelo eixo x . Além disso, cada curva é acompanhada de uma solução numérica (em laranja), calculada sorteando-se o tamanho do passo Δ como sendo um valor gerado aleatoriamente segundo uma distribuição $\phi(\Delta)$ Gaussiana de média zero e variância 0.001.



Fonte : O autor (2020)

Figura 5 – Deslocamento quadrático médio x_{rms} para o mesmo caso descrito na fig.(4).



Fonte : O autor (2020)

Posteriormente, Paul Langevin apresentou o mesmo problema na perspectiva do que hoje denominamos de equações diferenciais estocásticas, o que tornou a abordagem mais simples [39, 40]. Relembrando a força de amortecimento devido à viscosidade eq.(1.13) que atua sobre as partículas suspensas, adicionamos a esta uma força estocástica $\xi(t)$ que atua, por simplicidade, em uma mesma direção, mas que alterne o sentido e varie a intensidade de uma maneira não determinada em função da resultante das inúmeras colisões sofridas a cada instante. Assim a segunda lei de Newton, para cada uma das partículas idênticas, pode ser escrita como

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\beta \frac{dx}{dt} + \xi(t), \quad (1.26)$$

onde $\beta = 6\pi\eta a$, m é a massa das partículas, e forças de outra natureza podem ser desconsideradas.

Devido à maneira não trivial como a força $\xi(t)$ modifica-se ao longo do tempo, a forma específica de cada percurso é inviável, assim a resolução da dinâmica expressa na eq.(1.26) não necessariamente passa pela determinação da posição instantânea $x(t)$ das partículas suspensas. Ao invés disso, estamos interessados em grandezas médias associadas a variável x (denotadas por $\langle . \rangle$) realizadas sob o grande número de partículas presentes. Devido a igual probabilidade de deslocamentos de mesmo módulo, positivos e negativos, é esperado que o valor da posição média $\langle x(t) \rangle$ seja nulo nesse conjunto. Assim sendo, uma propriedade de maior interesse é o deslocamento quadrático médio, $\langle x^2(t) \rangle \geq 0$, representando a flutuação em torno da posição de origem.

Se multiplicarmos a eq.(1.26) por x , e utilizarmos as relações $x \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{d^2 x^2}{dt^2} - \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$, $\frac{dx^2}{dt} = 2x \frac{dx}{dt}$, obtemos

$$m \left[\frac{1}{2} \frac{d^2 x^2}{dt^2} - \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right] = -\frac{\beta}{2} \frac{dx^2}{dt} + x\xi(t). \quad (1.27)$$

Em seguida realizamos a média sob todas as partículas em suspensão

$$m \left[\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \langle x^2 \rangle - \left\langle \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right\rangle \right] = -\frac{\beta}{2} \frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle. \quad (1.28)$$

Aqui há termos constantes (m, β) frente à média, operações de derivadas temporal comutam com a média, e o termo $\langle x\xi(t) \rangle$ é considerado nulo sob a argumentação da natureza randômica de todas as colisões com as moléculas do líquido. Aparentemente o caráter estocástico é retirado da equação, mas este mantém-se no fato de só passarmos a ter acesso às variáveis médias na equação “determinística” remanescente. A preferência por essa apresentação é justificada quando percebemos que, devido ao princípio da equipartição da energia que atribui $\frac{1}{2}kT$ para cada grau de liberdade, o segundo termo do lado esquerdo da eq.(1.28) é, nesta formulação unidimensional, o dobro da energia cinética, e que no contexto do experimento pode ser atribuída como sendo kT , onde k é a constante de

Boltzmann e T é a temperatura absoluta em equilíbrio com o reservatório térmico (o fluido). Temos assim

$$\frac{m}{2} \frac{d^2}{dt^2} \langle x^2 \rangle - kT = -\frac{\beta}{2} \frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle, \quad (1.29)$$

que fornece uma EDO de primeira ordem na variável $g = \frac{d\langle x^2 \rangle}{dt}$ com solução

$$\frac{d\langle x^2 \rangle}{dt} = \frac{2kT}{\beta} + C e^{-\frac{\beta}{m}t}, \quad (1.30)$$

onde C é uma constante de integração. No limite quando as partículas suspensas são cada vez menores, isto é, $m \rightarrow 0$, espera-se que o efeito do movimento Browniano seja mais sentido, temos que $\frac{d\langle x^2 \rangle}{dt} = \frac{2kT}{\beta}$, portanto

$$\langle x^2 \rangle = \frac{2kT}{\beta} t = \frac{2kT}{6\pi\eta a}. \quad (1.31)$$

O mesmo resultado pode ser obtido por uma solução que despreze o tempo transiente inicial tal que $t \gg m/\beta$, pois, devido ao decaimento exponencial, rapidamente a variável alcança o regime estacionário. Sendo $x_{rms} = \langle x^2 \rangle = \sqrt{2Dt}$, e $k = \frac{R}{N_A}$, novamente obtemos o coeficiente de difusão de Einstein $D = \frac{RT}{6\pi\eta a N_A}$. Em 1908, J.B. Perrin conduziu experimentos baseados na ideia básica de Robert Brown, com precisão suficiente para corroborar a formulação matemática de Einstein e permitir uma avaliação do número de Avogadro, fazendo parte dos fatos históricos que ajudaram a encerrar o debate sobre a existência de átomos e moléculas.

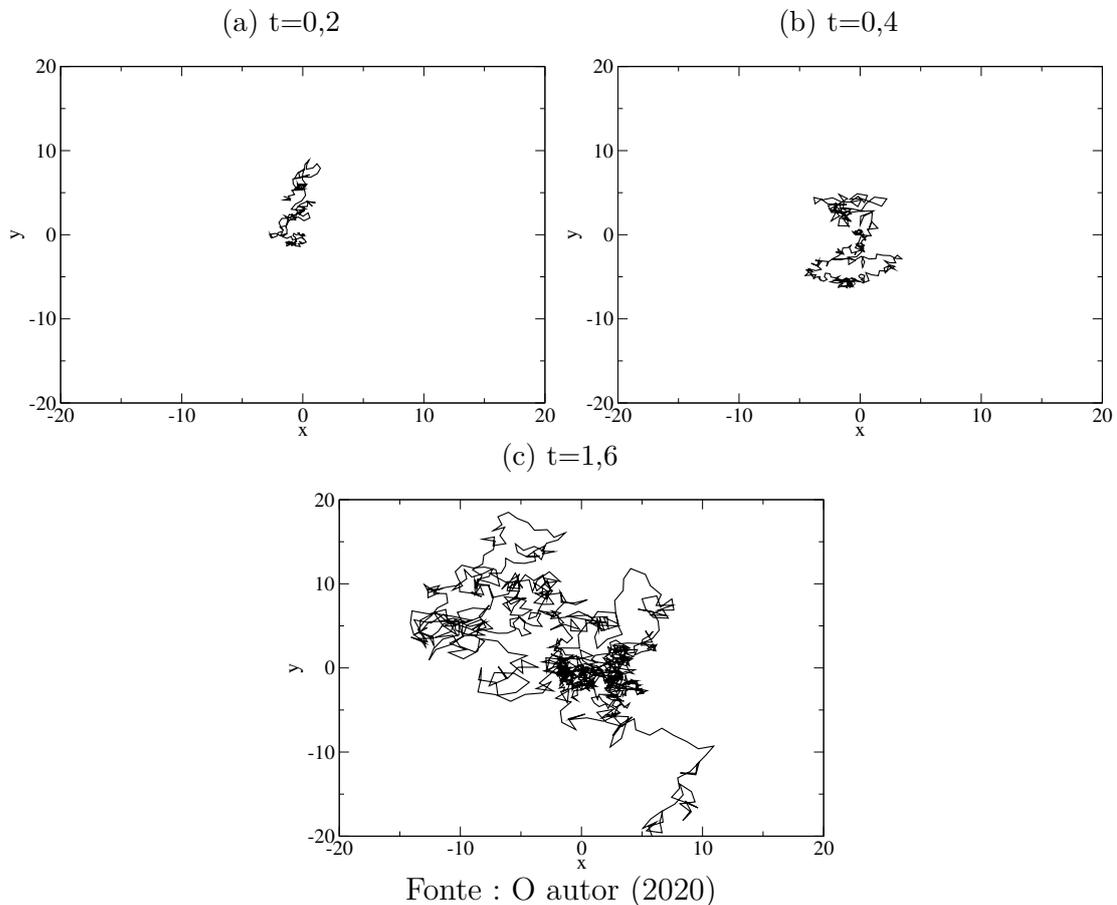
Na abordagem de Einstein, a condição de independência entre os deslocamentos Δ em diferentes tempos é equivalente à suposição de Langevin de que o termo $\langle x\xi \rangle$ anula-se. Em termos gerais a abordagem de Langevin é mais detalhada visto que esta possibilita a análise da dinâmica para tempos curtos, por exemplo, no termo $C e^{-\frac{\beta}{m}t}$, eq.(1.30), que inicialmente não aparece na forma adotada por Einstein.

A equação (1.26), conhecida como equação de Langevin foi o primeiro exemplo de uma equação diferencial estocástica, uma equação diferencial com um termo que varia de modo não determinístico, e que portanto apresenta como solução uma função estocástica. Cada solução da equação de Langevin representa uma trajetória aleatória independente, entretanto considerações simples a respeito das flutuações $\xi(t)$, como a decorrelação temporal, possibilitam a obtenção de resultados práticos como o deslocamento quadrático médio. A fig.(6) exibe como, no plano XY , a área coberta pela passagem da partícula aumenta com o tempo, uma medida similar ao valor de $\langle x^2(t) \rangle$ no caso unidimensional.

1.2 Aspectos Históricos da Dinâmica Populacional

Outro tópico referido neste trabalho é o estudo das dinâmicas populacionais. O ano de 1798 é um marco inicial histórico devido às publicações de Thomas Malthus [41] a

Figura 6 – Aspecto do crescimento da área coberta pela trajetória da partícula para o mesmo caso descrito na fig.(4), que corresponde ao incremento $\langle x^2 \rangle$ no caso unidimensional, para diferentes tempos, sendo (a) $t=0,2$, (b) $t=0,4$, e (c) $t=1,6$.



respeito do crescimento acelerado da população – *An Essay on the Principle of Population*. A época da revolução industrial trouxe mudanças como o aumento da produção de alimentos e melhorias nas condições sanitárias, tais eventos fizeram a taxa de mortalidade diminuir e taxa de natalidade aumentar, acarretando o registro de um grande crescimento populacional no período seguinte. Uma população consiste de todos os organismos de uma mesma espécie que vivem em uma dada região, e o estudo estatístico de populações e de como elas variam ao longo do tempo é chamado de demografia.

Entretanto, Malthus defendia que a população mundial estava crescendo em progressão geométrica, ao passo que a produção de alimentos era mais lenta e crescia em progressão aritmética. Assim, enquanto o crescimento populacional não fosse repensado, o controle ocorreria mediante a escassez de alimentos. Dada a hipótese proposta por Malthus com base nas estatísticas do seu tempo, podemos formular matematicamente que o modelo mais simples para o crescimento populacional de uma espécie é $dN/dt = rN$, onde $N(t)$ é o tamanho da população no instante t , e $r > 0$ é a taxa de crescimento que engloba o saldo positivo entre as taxas de natalidade e mortalidade. Como vemos, esse modelo conduz a

um crescimento exponencial $N = N_0 e^{rt}$, onde N_0 é o tamanho inicial da população (se $N_0 = 0 \rightarrow N(t) = 0$, o que previne geração espontânea). Assim, como Malthus acreditava, ocorreria um aumento descontrolado não houvesse algum tipo de mecanismo de oposição.

A constância do fator r implica que a quantidade de recurso disponível para cada indivíduo permanece inalterada quando há o aumento ou mesmo a redução da população. Naturalmente tal crescimento exponencial não pode ocorrer de maneira indefinida. Na natureza uma superpopulação pode ser reduzida pela ação de predadores, enquanto para a humanidade tinha-se o exemplo das guerras evitando a explosão demográfica, embora, em último caso, a competição por alimentos sempre imporia um limite.

Para modelar os efeitos da superlotação e de recursos finitos, podemos considerar que a taxa de crescimento per capita $(dN/dt)/N$ decresce com o aumento da população. Assim propomos um decréscimo linear com N como [42]

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right), \quad (1.32)$$

conhecida como equação logística, que busca considerar a influência da variação do tamanho da população na disponibilidade de recursos, embora este modelo não apresente uma equação dinâmica independente para a quantidade de recursos. A solução para a equação logística (1.32) é dada por

$$N(t) = \frac{e^{rt} K N_0}{K + (e^{rt} - 1) N_0}, \quad (1.33)$$

onde $N_0 = N(t=0)$ é a população inicial. Para t pequeno, temos aproximadamente o caso de crescimento exponencial anterior. Para $N > K$ a taxa de crescimento torna-se negativa, isto é, a taxa de mortalidade supera a de natalidade, e assim K torna-se a quantidade máxima estável que o ambiente comporta. Tal solução foi originalmente proposta por Verhulst [43] em 1838 para descrever o crescimento da população humana.

Equações como essas também podem ser analisadas no contexto gráfico de fluxos unidimensionais [44], para o qual os pontos fixos são obtidos quando $dN/dt = 0$, de onde obtemos, $N^* = 0$ e $N^* = K$, porém em termos biológicos $N = 0$ é um equilíbrio instável, tal que por menor que seja, uma pequena população crescerá exponencialmente até atingir o valor $N = K$. Por outro lado, uma elevação forçada de N ocasionará em um decréscimo monótono para o ponto estável $N^* = K$, e certamente é $N(t) = K$ no limite assintótico $t \rightarrow \infty$.

Em resumo, as primeiras abordagens em demografia baseiam-se em modelos determinísticos, desconsiderando a interação com outras espécies, e considerando apenas as características essenciais que influenciam o tamanho da população, tais como a taxa de reprodução e morte, mas sendo diferentes na apresentação de como se dá a relação com o meio através de suposições simples.

Além dos dados demográficos de vários países, quando as leis de crescimento foram experimentalmente testadas em laboratórios por meio de colônias bacterianas, leveduras e outros organismos simples mantidos em ambiente controlado, isto é, clima fixo, fornecimento de alimento constante e ausência de predadores, as curvas obtidas apresentavam um rápido crescimento inicial seguido por uma estabilização, sempre em forma de S como esperado pela equação logística, gerando assim um aparente comportamento global [45].

Entretanto, análises posteriores com espécies de comportamentos mais complexos, como mosca-das-frutas que apresentam diferentes estágios ao longo da vida, revelaram que após o crescimento inicial a estabilidade esperada pelo modelo logístico não era atingida, apresentando uma flutuação que não podia ser desconsiderada. Para explicar isto foram propostos modelos com tempo retardado, como quando a taxa de reprodução depende da geração passada. Posteriormente modelos visavam capturar as influências estocásticas do meio para explicar a variação obtida em relação ao valor de equilíbrio previsto pela equação logística. A princípio considerando taxas instantâneas para o saldo nascimento-morte, neste caso aos indivíduos são atribuídas probabilidades de gerar descendente ou de morrer em sucessivas etapas iterações [46]. Afinal, sistemas biológicos são probabilísticos, por exemplo, há a probabilidade de uma prole ser de dois ou três filhotes, das intempéries climáticas mudarem a quantidade de recursos disponíveis, ou ainda da eficiência dos predadores em matar a espécie em estudo.

Os conceitos fundamentais de competição e coexistência entre as espécies tiveram seus primeiros formalismos matemático nos trabalhos de Lotka [47] e Volterra [48], no qual duas espécies estão competindo pela mesma fonte de alimento cuja quantidade disponível é limitada. Assim, desconsiderando outros fatores como a predação, efeitos sazonais, e recursos alternativos, existem apenas dois efeitos principais a serem considerados.

Cada espécie crescerá, na ausência da outra, até atingir sua capacidade máxima, o que pode ser modelado assumindo um crescimento logístico para cada espécie, onde a distinguibilidade das espécies faz-se presente nas diferentes taxas de reprodução. A taxa de crescimento de cada espécie é dada por uma função linear decrescente da densidade de ambas as espécies, e o conflito dá-se quando as espécies se encontram pela disputa de alimento, neste caso é razoável supor que tais disputas ocorram em uma taxa proporcional ao tamanho de cada população, e que assim influenciem a taxa de mortalidade, sendo mais severa para a espécie mais frágil. Para um modelo simples em que há apenas duas espécies e um recurso, mostra-se que geralmente uma espécie conduz a outra a extinção, a generalização dessa ocorrência conduziu a interpretação biológica do princípio da exclusão competitiva, que afirma que duas espécies competindo pelo mesmo recurso limitado tipicamente não podem coexistir [49].

Como vimos, modelos de competição entre duas espécies são construído sobre a equação logística de espécies isoladas, dando origem a um modelo de competição intra e

interespecífica [50]. Apesar de sua simplicidade, modelos similares ao de Lotka-Volterra podem exibir caos [51], e também podem ser estendidos de modo a estudar a influência de mais espécies no processo de competição. Os modelos de competição como o de Lotka-Volterra possuem uma natureza fenomenológica [52], que se baseia em suposições sobre as propriedades dos recursos em disputa, de como os indivíduos das espécies competem e eventualmente reproduzem ou morrem.

Por meio de uma abordagem microscópica para a dinâmica, trabalhos na teoria da competição ecológica visam tornar o assunto menos fenomenológico a fim de explicitar os mecanismos de competições entre as espécies [53] com vistas em justificativas biológicas mais embasadas. Neste contexto, modelos mecanicistas para a competição de recursos vinculam a evolução temporal dos recursos com a dinâmica das espécies concorrentes. Esses modelos incluem uma dependência funcional na taxa de crescimento de cada espécie em relação à disponibilidade de recursos. Assim, os desenvolvimentos teóricos no estudo de modelos de competição permitem uma compreensão mais adequada da interação entre as espécies pela concorrência de alimentos. No caso de recursos essenciais, a taxa de crescimento específica é geralmente determinada pelo recurso mais limitador [54], sendo seu valor melhor descrito por equações como a de Monod [55]. Uma das descobertas mais importantes das abordagens anteriores é a formulação do princípio da exclusão competitiva, que afirma que, em condições de equilíbrio, o número de espécies coexistentes não pode exceder o número de recursos limitantes [56]. Apesar disso, em sistemas naturais, especialmente em biologia aquática, o número de espécies de plâncton coexistentes muitas vezes supera o número de recursos limitantes, aparentemente desrespeitando o princípio da exclusão competitiva, um fenômeno conhecido como paradoxo do plâncton [57]. De fato, o princípio da exclusão competitiva baseia-se em argumentos de equilíbrio e, portanto, possíveis soluções do plâncton o paradoxo deve relacionar-se à persistência de condições de não equilíbrio [58].

Flutuações e perturbações desempenham um papel fundamental na evolução e no destino da dinâmica populacional. Apesar da importância histórica para o entendimento dos princípios da dinâmica populacional, modelos determinísticos por vezes não se adequam e não representam alguns aspectos de sistemas naturais, tais como a finitude do meio e da própria população, além de perturbações por meio de fatores externos de caráter estocástico ou não [59], quando também nos preocupamos em avaliar a relevância destes efeitos estocásticos na existência de estados de equilíbrio. Nesse sentido, a introdução dos primeiros modelos estocásticos na segunda metade do século XX desencadeou o debate sobre a necessidade dos modelos com dinâmica estocástica em detrimento dos modelos puramente determinísticos [60]. Essa discussão está contida dentro do contexto de processos de densidade dependente e densidade independentes [61]. O primeiro relaciona as interações entre indivíduos e populações, enquanto o segundo está relacionado às forças ambientais exógenas que constituem a estrutura base para o desenvolvimento da

população. Durante as primeiras etapas deste debate a dinâmica determinística adquiriu um papel mais proeminente. Este fato foi reforçado pela descoberta do comportamento caótico, mesmo em modelos simples, o que levou à suposição da descrição das mudanças dinâmicas no tamanho da população através de modelos que não incluíssem termos estocásticos. Essa abordagem determinística baseia-se na suposição implícita de que os sistemas podem ser separados em uma parte determinística, que captura as características essenciais do sistema, e uma parte aleatória, mas que pode ser omitida. Ao decorrer de estudos, os efeitos estocásticos tornaram-se componentes essenciais para a descrição de várias sistemas [60, 62, 63]. O entendimento atual é que tanto os efeitos dependentes da densidade quanto as flutuações estocásticas são ingredientes centrais para a descrição de muitos sistemas [63], e suas interações podem de fato explicar muitos dos padrões observados na natureza [64]. De fato, há vezes em que a força dos mecanismos estocásticos é comparável àqueles vinculados a processos determinísticos [65].

A dinâmica populacional e ecológica na presença de fatores estocásticos com origens diversas pode ser de difícil modelação, pois nem sempre é fácil separar as contribuições de diferentes fontes de ruídos, bem como pode ser não trivial a estrutura base do próprio comportamento determinístico [60]. Na literatura matemática, ruído é o termo aplicado para o que obscurece a clareza de um sinal, na ecologia populacional, podemos pensar como o que não entendemos na dinâmica populacional [66]. O ruído ambiental pode ser gerado por uma variedade de fatores tais como efeitos climáticos, inimigos naturais, competição interespecífica ou mudança antropogênica, que podem não estar incluídos no protocolo determinístico. Apesar de progressos já alcançados [63], uma compreensão completa do impacto resultante da interação entre forças determinísticas e dos inevitáveis efeitos estocásticos requer ainda mais estudos. De fato, parte dos estudos nesta área tem como objetivo investigar como as ações estocásticas, geralmente representadas por flutuações nas taxas de reprodução ou mortalidade [62], determinam o destino de populações, por exemplo, avaliando sua probabilidade de extinção ou persistência.

Assim, adiante introduzimos, inicialmente para uma espécie, um modelo populacional estocástico baseado em recursos com duas fontes distintas de ruídos, presentes, um na taxa de mortalidade afetando diretamente a dinâmica da população, e outro na taxa de entrada de recursos que influencia a disponibilidade de recursos. A dinâmica do modelo é descrita por equações diferenciais estocásticas que, por meio da formulação de Langevin adequada, permite avaliar distribuições de probabilidade do tamanho da população e da quantidade de recursos disponíveis quando avaliadas no regime estacionário. Presume-se que as flutuações na taxa de mortalidade e na taxa de entrada de recursos sejam não correlacionados temporalmente e entre si, assim são considerados como ruídos brancos Gaussianos independentes. Resultados analíticos são obtidos para a situação na qual existe apenas uma fonte de ruído, e que mostram-se válido na proximidade do equilíbrio tão logo a instensidade do ruído em questão não seja demasiada grande. Quando as duas

fontes de ruídos estocásticos são consideradas de forma simultânea, soluções estacionárias das equações diferenciais estocásticas são obtidas pelo método de Milstein. O modelo é posteriormente generalizado para lidar com um número arbitrário de espécies e recursos, permitindo enquadrar o problema dentro da perspectiva de dinâmicas ecológicas, para o qual estaremos mais interessados na quantidade de espécies que sobrevivem após um longo período de competição.

Uma ocorrência intrigante na dinâmica ecológica diz respeito à violação do princípio da exclusão competitiva em sistemas naturais, tendo como exemplo de destaque os padrões observados na competição de recursos pelos fitoplâncton [67, 68]. Uma possível explicação para o chamado paradoxo do plâncton é que, devido às perturbações causadas pelo clima, as comunidades de plâncton não estão em equilíbrio [57, 69]. Indício de que a variabilidade devido a fatores externos é o mecanismo propulsor que aumenta os níveis de biodiversidade para além do limite estabelecido pelo princípio da exclusão competitiva. Além disso, mesmo assumindo um ambiente homogêneo e constante, como presumido pelo o princípio da exclusão competitiva, oscilações caóticas podem permitir a coexistência de muitas espécies [67]. Assim, parece razoável generalizar nossa abordagem a fim de verificar quantas espécies podem ser mantidas sob a presença das fontes estocásticas que interferem no sistema. Portanto, é preciso investigar se a existência de fontes estocásticas é suficiente para garantir a violação do princípio da exclusão competitiva.

2 MÉTODOS EM PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Consideramos a equação de Langevin, na forma de uma equação diferencial estocástica com as propriedades do ruído branco que permitem a caracterização de um processo como Markoviano. Na sequência, apresentamos a equação de Chapman-Kolmogorov que relaciona as probabilidades de transição entre os possíveis estados do sistema e a forma diferencial desta, conhecida como equação Mestra, a qual descreve a evolução temporal das probabilidades de ocupação dos possíveis estados. Em seguida utilizaremos a expansão de Kramers-Moyal a fim de obter uma equação diferencial de ordem finita denominada equação de Fokker-Planck. Primeiramente, na formulação que resulta na interpretação de Stratonovich, entretanto, discutiremos como reinterpretar a análise (necessária do ponto de visto estocástico) para obtermos a interpretação de Itô. Por fim, discutiremos os métodos para obter soluções numéricas para a dinâmica de Langevin e algumas técnicas para a geração de números aleatórios.

2.1 Equação de Langevin e Equação de Fokker-Planck

A equação de Langevin é uma equação diferencial estocástica para uma variável que pode ser escrita como [70]

$$\frac{dy}{dt} = A(y, t) + B(y, t)\xi(t), \quad (2.1)$$

o que a distingue de uma equação diferencial ordinária é o elemento $\xi(t)$ que é dado por um processo estocástico. Logo, conduz toda a dinâmica a ser dependente de efeitos aleatórios, mas que na presença de propriedades bem definidas para $\xi(t)$ pode ser tratada numericamente ou mesmo analiticamente.

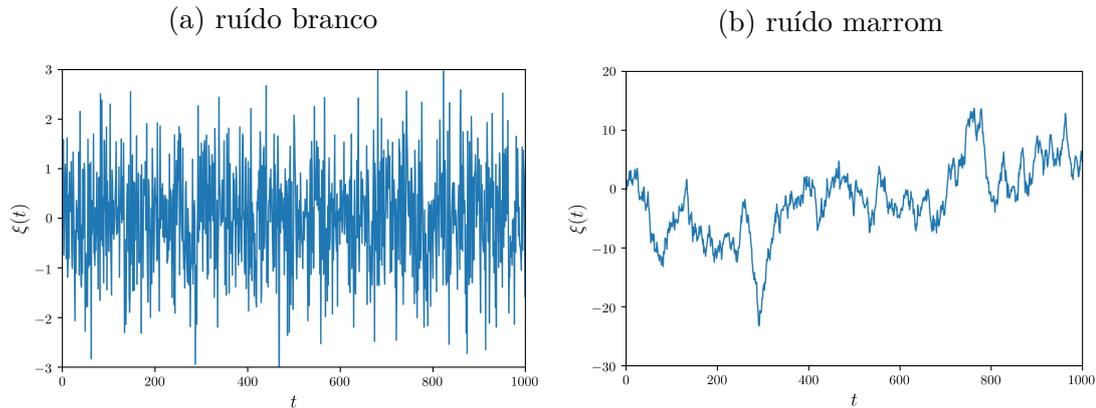
Quando $\xi(t)$ apresenta as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} \langle \xi(t) \rangle &= 0, \\ \langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle &= 2\varepsilon\delta(t_1 - t_2), \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde o símbolo $\langle . \rangle$ designa uma média sobre várias realizações (repetições da mesma medição). Assim sendo, se $\xi(t)$ possui média nula, variância finita, e não é autocorrelacionado temporalmente, passa a ser denominado de *ruído branco*. Outra propriedade fundamental do ruído branco é a densidade espectral constante, isto é, apresenta valores de intensidade igualmente distribuídos no espectro de frequências, tal qual a composição da luz branca. Pelo teorema de Wiener-Khintchine sabemos que a densidade espectral $S(\omega)$ é proporcional à transformada de Fourier da função de correlação, isto é

$$S(\omega) \sim \langle \xi(\omega)\xi^*(\omega) \rangle = \int e^{i\omega(t_1-t_2)} \langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle dt_1 dt_2 = \int e^{i\omega\tau} 2\varepsilon\delta(\tau) d\tau = 2\varepsilon, \quad (2.3)$$

Figura 7 – Aspecto típico de um ruído branco (a) e de um ruído browniano (b).



Fonte : O autor (2020)

onde definimos o intervalo $\tau = t_1 - t_2$ ao utilizar o resultado da eq.(2.2), de fato S é independente de ω para este caso. Em geral, a densidade espectral é uma função da frequência, ao que denominamos de ruído colorido.

A fim de comentar um pouco mais sobre ruídos coloridos [71], vamos analisar brevemente o caso $A(y, t) = -ay$ e $B(y, t) = 1$ na eq.(2.1). Assim

$$\frac{dy}{dt} = -ay + \xi(t), \quad (2.4)$$

por aplicação da transformada de Fourier $f(\omega) = \int dt e^{i\omega t} f(t)$ temos

$$y(\omega) = \frac{\xi(\omega)}{a - i\omega}, \quad (2.5)$$

devido à linearidade da eq.(2.4) a função densidade espectral associada a variável y , $S_y(\omega)$, é proporcional a $S(\omega)$, de onde concluímos que

$$S_y(\omega) = \frac{S(\omega)}{a^2 + \omega^2} = \frac{2\varepsilon}{a^2 + \omega^2}, \quad (2.6)$$

é dependente de ω . Para $a = 0$ temos a exata dependência $1/\omega^2$, que é um tipo de ruído colorido construído por uma composição de ruídos brancos (como de fato a eq.(2.4) para $a = 0$ caracteriza), mais comumente denominado ruído browniano ou ruído marrom. O estudo de equações que geram os mais diversos tipos de ruídos, onde destaca-se os ruídos do tipo $1/\omega$ são recorrentes [72, 73]. Na fig.(7) apresentamos o aspecto típico do ruído branco e do ruído browniano.

Além das propriedades mencionadas na eq.(2.2), se os valores em $\{\xi(t)\}$ formarem um conjunto de variáveis aleatórias identicamente distribuídas, ou seja, à parte de serem independentes, são originárias da mesma distribuição de probabilidade, o conjunto $\xi(t)$ passa a ser denominado, no caso de uma distribuição gaussiana, de ruído branco gaussiano, do mesmo modo, outras distribuições poderiam ser utilizadas. O caso gaussiano exhibe

outras propriedades, como as funções de correlação de ordem superior apresentarem relações semelhantes as obtidas no cálculo da distribuição Normal multivariada, isto é, os momentos ímpares de $\xi(t)$ são nulos, enquanto os pares podem todos serem obtidos por combinações do segundo momento utilizando o teorema de Novikov e as regras da fórmula de Wick. Temos, por exemplo,

$$\begin{aligned} \langle \xi(t_1)\xi(t_2)\xi(t_3)\xi(t_4) \rangle &= \langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle \langle \xi(t_3)\xi(t_4) \rangle + \langle \xi(t_1)\xi(t_3) \rangle \langle \xi(t_2)\xi(t_4) \rangle \\ &+ \langle \xi(t_2)\xi(t_3) \rangle \langle \xi(t_1)\xi(t_4) \rangle, \end{aligned} \quad (2.7)$$

de um modo geral, temos que computar todas as $\frac{(2n)!}{2^n n!}$ permutações possíveis, mas que sempre conduzirão, segundo (2.2) a produtos de funções delta. Assim, esse conjunto de regras assegura a característica básica da distribuição Normal, apresentando todos os cumulantes para além do segundo, nulos. Podemos condensar essa informação no seguinte funcional

$$\langle \exp \left[i \int_{-\infty}^{\infty} k(t)\xi(t) \right] \rangle = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [k(t)]^2 \right\}, \quad (2.8)$$

onde $k(t)$ é uma função arbitrária.

Resolver uma equação estocástica tal qual a equação de Langevin significa, além da evolução temporal, determinar propriedades estatísticas como médias e variâncias. Uma vez que se trata de uma equação diferencial de primeira ordem, um conjunto $\{\xi(t)\}$ determina de forma unívoca a solução de $y(t)$ dada a configuração inicial $y(0)$. Esta condição junto às propriedades de correlação em (2.2) mostram que a probabilidade condicional em um tempo t não é influenciada pela probabilidade condicional em tempos anteriores $t' < t$, caracterizando a solução da equação de Langevin como um processo Markoviano.

A equação de Langevin apresenta ainda as funções de caráter determinístico $A(y, t)$ e $B(y, t)$, conhecidas respectivamente como termo de arraste e termo de difusão em uma analogia feita com dinâmicas em fluidos, e com a forma mais simples da equação de difusão, que pode ser obtidas quando associamos a equação de Langevin com a equação de Fokker-Planck.

Para entendermos a passagem de uma equação para a outra, abordaremos alguns conceitos simples e gerais de variáveis aleatórias e processos estocásticos [74]. Os possíveis resultados de um experimento aleatório definem o que chamamos de espaço amostral Ω , dependendo da natureza do sistema em análise, este pode ser discreto, finito ou infinito (porém enumerável), ou contínuo (logo não enumerável). Um subconjunto qualquer do espaço amostral adequadamente associado ao experimento é um evento. Segundo os axiomas da probabilidade definidos por Kolmogorov, P é uma medida de probabilidade, tal que P é um mapeamento em números reais da ocorrência de um evento A_i , cujos elementos desse conjunto $\{A_i\}$ atendem uma álgebra análoga à definida para vetores em espaços vetoriais, que aplicada aos subconjuntos de Ω é denominada σ -álgebra. Assim, F é

a σ -álgebra, e Ω é o espaço amostral que portanto deve contemplar todas as possibilidades

$$\begin{aligned}\Omega &\in F, \\ A \in F &\rightarrow A^c \in F, \\ A_1, A_2 \in F &\rightarrow A_1 \cup A_2 \in F,\end{aligned}\tag{2.9}$$

onde A^c indica o complementar de A , e \cup indica a soma ou união de eventos, notamos que as duas primeiras condições implicam que o conjunto vazio \emptyset também faz parte de F . Assim definimos uma coleção de valores não negativos para P tal que

$$\begin{aligned}0 \leq P(A_i) &\leq 1, \quad \forall A \in F, \\ P(\Omega) &= 1,\end{aligned}\tag{2.10}$$

A tripla (Ω, F, P) define um espaço de probabilidade, além disso para eventos A_1, A_2, \dots disjuntos, isto é, quando todo par (A_i, A_j) tiver interseção nula $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$, devemos ter

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),\tag{2.11}$$

a adequação para modelos contínuos inicia-se pela substituição dos somatórios por integrais, e pelo conceito de que as probabilidades não estão associadas aos valores individuais, mas à uma gama de valores entre y e $y + dy$, e são dadas através de uma função densidade de probabilidade $P(y)dy$ com

$$\begin{aligned}\int dy_2 P(y_1, t_1; y_2, t_2) &= P(y_1, t_1), \\ \int dy_1 P(y_1, t_1) &= 1.\end{aligned}\tag{2.12}$$

A primeira identidade importante para processos Markovianos é a equação de Chapman-Kolmogorov, que relaciona as probabilidades de transição entre os possíveis estados do sistema. Partindo da relação entre a distribuição de probabilidade conjunta (definida como uma extensão multivariada de $P(y)$), e da probabilidade condicional (definida como a razão entre a ocorrência de um evento dada uma hipótese), denotadas respectivamente pela notação $P(., ., ., .)$ e $P(., . | ., .)$, temos que para três estados nos instantes $t_3 > t_2 > t_1$

$$P(y_3, t_3 | y_2, t_2; y_1, t_1) = \frac{P(y_3, t_3; y_2, t_2; y_1, t_1)}{P(y_2, t_2; y_1, t_1)},\tag{2.13}$$

embora $P(y_1, t_1; \dots; y_n, t_n)$ seja invariante em relação a uma permutação dos pares (y_i, t_i) , manteremos a convenção de organizar os tempos em ordem crescente da direita para à esquerda, bem como para a probabilidade condicional na qual tal escolha torna-se mais relevante por indicar o sentido da transição.

Por tratar-se de um processo Markoviano, a probabilidade condicional $P(y_3, t_3 | y_2, t_2; y_1, t_1)$ depende apenas da configuração anterior (y_2, t_2) , então podemos rearranjar a eq.(2.13) como

$$P(y_3, t_3; y_2, t_2; y_1, t_1) = P(y_3, t_3 | y_2, t_2)P(y_2, t_2; y_1, t_1), \quad (2.14)$$

repetindo a regra da eq.(2.13) para $P(y_2, t_2; y_1, t_1)$ tal que

$$P(y_2, t_2; y_1, t_1) = P(y_2, t_2 | y_1, t_1)P(y_1, t_1), \quad (2.15)$$

obtemos

$$P(y_3, t_3; y_2, t_2; y_1, t_1) = P(y_3, t_3 | y_2, t_2)P(y_2, t_2 | y_1, t_1)P(y_1, t_1), \quad (2.16)$$

a eq.(2.16) demonstra que toda a hierarquia de um processo Markoviano, ou seja qualquer forma da probabilidade conjunta, pode ser construída pelo conhecimento da função densidade probabilidade $P(y_i, t_i)$ e das probabilidades de transições $P(y_i, t_i | y_{i-1}, t_{i-1})$. Na sequência, integrando a eq.(2.16) sobre todos os possíveis valores de y_2 conforme a eq.(2.12), dividindo por $P(y_1, t_1)$ e reutilizando a definição de probabilidade condicional, obtemos a equação de Chapman-Kolmogorov

$$P(y_3, t_3 | y_1, t_1) = \int dy_2 P(y_3, t_3 | y_2, t_2)P(y_2, t_2 | y_1, t_1). \quad (2.17)$$

Apenas redefinindo termos na eq.(2.15) podemos escrever

$$P(y_3, t_3; y_1, t_1) = P(y_3, t_3 | y_1, t_1)P(y_1, t_1). \quad (2.18)$$

As eqs.(2.17 e 2.18) são próprias de processos Markovianos.

Outra identidade importante é a equação Mestra que descreve a evolução temporal das probabilidades de ocupação dos possíveis estados do sistema. Sua forma básica é um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem que podem ser escritas em uma abordagem discreta como

$$\frac{dP_i}{dt} = \sum_j M_{ij}P_j, \quad (2.19)$$

onde M é uma matriz que coordena as transições, e os P_i 's são as probabilidades associadas a cada estado individual i . A seguir apresentaremos uma dedução para a versão contínua desta equação.

Neste ponto, podemos notar algumas vantagens da equação Mestra sobre a equação de Chapman-Kolmogorov, pois a primeira além de ser linear, lida diretamente com as probabilidades de ocupação que são importantes do ponto de vista prático, ao passo que a segunda é não linear, e não contém informações específicas sobre um processo Markoviano em particular, sendo basicamente uma propriedade da solução, o que naturalmente auxilia na identificação de um processo Markoviano, mas não necessariamente na obtenção de uma solução.

A equação Mestra pode ser entendida como a forma diferencial da equação de Chapman-Kolmogorov, portanto a motivação para obtê-la é o comportamento da probabilidade de transição para pequenas diferenças de tempo. Assim, vamos propor uma expansão em potências de $h \equiv \Delta t$ de forma semelhante à série de Taylor.

$$P(y_2, t + h | y_1, t) = \alpha + \beta h + \gamma h^2 + \dots, \quad (2.20)$$

vamos restringir-nos à ordem mais baixa, $O(h)$, tal que γ e os demais coeficientes subsequentes a este sejam desprezados. Para $h = 0$, ou seja quando ainda não há evolução temporal no sistema, podemos inferir eliminando o tempo intermediário da equação de Chapman-Kolmogorov (2.17) com $t_2 = t_1$ que

$$P(y_3, t_3 | y_1, t_1) = \int dy_2 P(y_3, t_3 | y_2, t_1) P(y_2, t_1 | y_1, t_1), \quad (2.21)$$

assim, por consistência, as probabilidades de transição são dadas por funções delta de Dirac quando avaliadas no mesmo instante de tempo

$$P(y_2, t_1 | y_1, t_1) = \delta(y_2 - y_1), \quad (2.22)$$

e portanto o termo de ordem $O(h^0)$ é dado por

$$\alpha = \delta(y_2 - y_1). \quad (2.23)$$

A proposta para β é dada por

$$\beta h = \delta(y_2 - y_1)[1 - a^0(y_1, t)h] + W_t(y_2 | y_1)h, \quad (2.24)$$

onde $W_t(y_2 | y_1)$ é a probabilidade de transição por unidade de tempo de transitar de y_1 para y_2 no instante t , isto é, a taxa de transição. Trataremos todos os cálculos até ordem h , assim, até esta ordem, a normalização tem que ser garantida

$$\int dy_2 P(y_2, t + h | y_1, t) = 1, \quad (2.25)$$

para tanto o termo $a^0(y_1, t)$ (o número 0 é apenas um rótulo) introduzido na eq.(2.24) deve ser igual a

$$a^0(y_1, t) = \int dy_2 W_t(y_2 | y_1), \quad (2.26)$$

de onde concluímos que $a^0(y_1, t)h$ é a probabilidade total de migrarmos do estado y_1 no intervalo de tempo entre t e $t + h$ para qualquer outro estado diferente y_2 , enquanto $1 - a^0(y_1, t)h$ é a probabilidade de permanecermos no estado inicial y_1 durante o mesmo intervalo de tempo. Esta é essencialmente a ideia da proposta para β , mostrar a probabilidade de transição como uma combinação de dois termos, sendo o primeiro nulo para $y_1 \neq y_2$, o que implica em $a^0(y_1, t)h = \int dy_2 W_t(y_2 | y_1)h = \int dy_2 P(y_2, t + h | y_1, t) = 1 \rightarrow 1 - a^0(y_1, t)h = 0$, e o segundo nulo para $y_1 = y_2$, o que implica em $W_t(y_2 | y_1) = 0 \rightarrow a^0(y_1, t)h = 0$ e $1 - a^0(y_1, t)h = 1$.

Voltando para a equação de Chapman-Kolmogorov e substituindo t_3 por $t_2 + h$ temos

$$P(y_3, t_2 + h | y_1, t_1) = \int dy_2 P(y_3, t_2 + h | y_2, t_2) P(y_2, t_2 | y_1, t_1), \quad (2.27)$$

agora inserindo a eq.(2.20) na eq.(2.27) com α e β dados nas eqs.(2.23 e 2.24) temos

$$\begin{aligned} P(y_3, t_2 + h | y_1, t_1) &= \int dy_2 \{ \delta(y_3 - y_2) [1 - a^0(y_2, t_2)h] + W_{t_2}(y_3 | y_2)h \} P(y_2, t_2, y_1, t_1) \\ P(y_3, t_2 + h | y_1, t_1) &= P(y_3, t_2 | y_1, t_1) - a^0(y_3, t_2)h P(y_3, t_2, y_1, t_1) \\ &\quad + \int dy_2 W_{t_2}(y_3 | y_2)h P(y_2, t_2, y_1, t_1), \end{aligned} \quad (2.28)$$

utilizando a eq.(2.26) para substituir o valor de $a^0(y_2, t_2)$ e remanejando os termos da eq.(2.28) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} [P(y_3, t_2 + h | y_1, t_1) - P(y_3, t_2 | y_1, t_1)] &= \int dy_2 [W_{t_2}(y_3 | y_2) P(y_2, t_2, y_1, t_1) \\ &\quad - W_{t_2}(y_2 | y_3) P(y_3, t_2, y_1, t_1)], \end{aligned} \quad (2.29)$$

no limite $h \rightarrow 0$ identificamos o lado esquerdo da equação como uma derivada parcial no tempo. Assim, escrevemos, mudando a notação para $y_1 \rightarrow y_0, t_1 \rightarrow t_0, y_3 \rightarrow y, t_2 \rightarrow t$, e $y_2 \rightarrow y'$ que

$$\frac{\partial}{\partial t} P(y, t | y_0, t_0) = \int dy' [W_t(y | y') P(y', t | y_0, t_0) - W_t(y' | y) P(y, t | y_0, t_0)], \quad (2.30)$$

sendo esta a forma contínua para a equação Mestra dada por uma equação integro-diferencial.

Da maneira apresentada, a equação Mestra é uma equação para a probabilidade de transição e não para a probabilidade usual $P(y, t)$, entretanto podemos definir $P(y, t)$ como

$$P(y, t) = \int dy_0 P(y, t | y_0, t_0) \varrho(y_0), \quad (2.31)$$

onde $\varrho(y_0)$ é a distribuição de probabilidades no instante t_0 . Assim, de forma similar ao conceito base da equação de Chapman-Kolmogorov, temos que $\varrho(y_0)dy_0$ é a probabilidade de estar entre y_0 e $y_0 + dy_0$ no tempo t_0 , enquanto $P(y, t | y_0, t_0)$ é a probabilidade de, uma vez em y_0 , mudar para y no novo instante t , o que nos leva a somar todas as contribuições advindas da possibilidade de, em t_0 , termos diferentes y_0 's, mas que por construção nos leve sempre, em termos probabilísticos, à mesma configuração (y, t) . Assim, por aplicação do operador $\frac{\partial}{\partial t}$ na eq.(2.31) temos

$$\frac{\partial}{\partial t} P(y, t) = \int dy_0 \left[\frac{\partial}{\partial t} P(y, t | y_0, t_0) \right] \varrho(y_0), \quad (2.32)$$

assim identificamos entre os colchetes a equação Mestra. Devido à linearidade da equação definida em (2.31) podemos obter

$$\frac{\partial}{\partial t} P(y, t) = \int dy_0 \left[\int dy' W_t(y | y') P(y', t | y_0, t_0) - W_t(y' | y) P(y, t | y_0, t_0) \right] \varrho(y_0), \quad (2.33)$$

reutilizando a definição proposta pela eq.(2.31) temos

$$\frac{\partial}{\partial t}P(y, t) = \int dy' [W_t(y|y')P(y', t) - W_t(y'|y)P(y, t)]. \quad (2.34)$$

Fisicamente a metodologia utilizada na eq.(2.31) corresponde a preparar o sistema em um certo estado de não equilíbrio no instante inicial t_0 , e proceder com a extração de um *sub-ensemble*.

Para um sistema discreto a eq.(2.34) pode ser escrita como

$$\frac{dP_i}{dt}(t) = \sum_j W_{i,j}P_j(t) - \sum_j W_{j,i}P_i(t). \quad (2.35)$$

Nesta última formulação fica mais claro a propriedade chave da equação Mestra, pois esta representa uma equação de ganhos e perdas do ponto de vista do estado i . À direita o primeiro termo representa o ganho devido à soma de todas as transições dos outros estados em direção ao estado i , enquanto o segundo representa a perda devido a soma de todas as transições que partem do estado i em direção à qualquer outro estado. Nota-se que a eq.(2.35) assegura uma permanência de estado se $i = j$ pois a matriz de transição $M_{i,j} = W_{i,j} - \delta_{ij} \sum_{j'} W_{j',i}$, como definida na eq.(2.19), é nula neste caso. Por fim, mencionamos que esta última formulação permite o estudo de soluções gerais e estacionárias via o estudo de problemas de autovalor e autovetores, e por meio da construção de funções geratrizes [75].

Observando a equação Mestra na sua forma contínua eq.(2.34) notamos que apesar da linearidade em P , e de ser de primeira ordem na derivada temporal, esta é expressa por uma integração em y de difícil acesso, não possuindo uma ordem bem definida nas derivadas $\frac{\partial}{\partial y}$. Assim, iremos apresentar a expansão de Kramers-Moyal, cujo objetivo é expressar a equação integro-diferencial original como uma equação diferencial de ordem finita. Iniciamos definindo a probabilidade de transição W como uma função da amplitude do salto (definida como r) entre duas configurações, uma inicial y e uma outra final y' , tal que $r = y - y'$, assim

$$W(y'; r) \equiv W_t(y|y'), \quad (2.36)$$

com essa mudança de variável, reescrevemos a equação Mestra como

$$\frac{\partial}{\partial t}P(y, t) = \int dr W(y - r; r)P(y - r, t) - P(y, t) \int dr W(y; -r). \quad (2.37)$$

Para melhor entedimento do cálculo podemos definir a variável auxiliar $\zeta(y, t)$ como

$$\zeta(y, t) = W(y; r)P(y, t). \quad (2.38)$$

Assim, assumindo que mudanças em y ocorram de maneira suficientemente lenta tal que r é relativamente pequeno em relação aos valores característico de y , e que não haja

problemas de continuidade ou diferenciação para W e P , podemos calcular a série de Taylor correspondente à ζ como

$$\zeta(y-r, t) = \zeta(y, t) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m r^m}{m!} \frac{\partial^m}{\partial y^m} \zeta(y, t), \quad (2.39)$$

o primeiro termo da expansão na eq.(2.39) anula o segundo termo do lado direito da eq.(2.37). Assim, obtemos a expansão de Kramers-Moyal da equação Mestra

$$\frac{\partial}{\partial t} P(y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{\partial^m}{\partial y^m} [a^m(y, t) P(y, t)], \quad (2.40)$$

onde definimos o m -ésimo momento do salto a^m como

$$a^m(y, t) = \int dr r^m W(y; r), \quad (2.41)$$

quando $m = 0$ temos o caso particular na eq.(2.26).

O teorema de Pawula [76] assegura que para obtermos uma probabilidade sempre positiva como solução da equação Mestra, a expansão de Kramers-Moyal, eq.(2.40), deve ser truncada até o primeiro termo ou até o segundo, do contrário esta expansão deverá ter um número infinito de termos. Quando o m -ésimo termo da expansão é nulo ou seja desconsiderado para $m \geq 3$ tal que $a^m(y, t) = 0$, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} P(y, t) = -\frac{\partial}{\partial y} [a^1 P(y, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y^2} [a^2(y, t) P(y, t)]. \quad (2.42)$$

Assim, passamos a denominá-la equação de Fokker-Planck. Naturalmente como toda expansão que envolve uma aproximação, devido à impossibilidade de tratar analiticamente ou numericamente a equação com infinitos termos, podem ocorrer situações onde seja preferível ter a série truncada para algum $m \geq 3$ para assim fornecer uma solução melhor para o problema do que a equação de Fokker-Planck, mesmo embora ocorra a presença de valores negativo para os primeiros valores de t na densidade de probabilidades $P(y, t)$ [77].

A fim de calcular os momentos do salto, também podemos definir de forma equivalente à eq.(2.36) que $W(y; r) = W(y'|y)$ e $y' = y + r$, assim inserindo esta informação na eq.(2.41) obtemos

$$a^m(y, t) = \int dr (y' - y)^m W(y'|y), \quad (2.43)$$

em seguida definimos a grandeza auxiliar $Z^m(y; h, t)$ como

$$Z^m(y; h, t) = \int dy' (y' - y)^m P(y', t + h|y, t), \quad (2.44)$$

relacionada com a média condicional de uma potência m do incremento ocorrido entre t e $t + h$ quando há um deslocamento entre y e y' . Assim, também podemos escrever

$$Z^m(y; h, t) = \langle [y(t+h) - y(t)]^m \rangle_{y(t)=y}. \quad (2.45)$$

Então utilizando a expansão da probabilidade de transição para pequenos intervalos de tempo dadas por (2.24, 2.23, 2.20) temos em (2.44) que

$$\begin{aligned} Z^m(y; h, t) &= \int dy' (y' - y)^m \{ \delta(y' - y) + \delta(y' - y)[1 - a^0(y, t)h] + W(y'|y)h \} \\ &= h \int dy' (y' - y)^m W(y'|y) \\ &= a^m(y, t)h. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Lembrando que os termos omitidos em (2.20) são de ordem superior a $O(h)$, podemos calcular os momentos do salto $a^m(y, t)$ por meio de uma derivada da média condicional $Z^m(y; h, t)$ como se segue

$$a^m(y, t) = \left. \frac{\partial}{\partial h} Z^m(y; h, t) \right|_{h=0}, \quad (2.47)$$

ou junto à (2.45) diretamente através do limite

$$a^m(y, t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \langle [y(t+h) - y(t)]^m \rangle_{y(t)=y}. \quad (2.48)$$

Vamos utilizar a eq.(2.48) onde a função $y(t)$ será dada pela dinâmica de Langevin, para tanto integramos a eq.(2.1) entre t e $t+h$

$$y(t+h) - y = \int_t^{t+h} dt_1 A[y(t_1), t_1] + \int_t^{t+h} dt_1 B[y(t_1), t_1] \xi(t_1), \quad (2.49)$$

onde nesta notação y denota o valor inicial $y(t)$. Na sequência expandindo as funções $A[y(t_1), t_1]$ e $B[y(t_1), t_1]$ para temos

$$\begin{aligned} A[y(t_1), t_1] &= A(y, t_1) + A'(y, t_1)[y(t_1) - y] + \dots \\ B[y(t_1), t_1] &= B(y, t_1) + B'(y, t_1)[y(t_1) - y] + \dots \end{aligned} \quad (2.50)$$

onde o apóstrofo denota a derivada parcial em relação a variável y avaliada no instante inicial

$$A'(y, t) = \left. \frac{\partial A}{\partial y} \right|_y, \quad B'(y, t) = \left. \frac{\partial B}{\partial y} \right|_y, \quad (2.51)$$

assim

$$\begin{aligned} y(t+h) - y &= \int_t^{t+h} dt_1 A(y, t_1) + \int_t^{t+h} dt_1 A'(y, t_1)[y(t_1) - y] + \dots \\ &+ \int_t^{t+h} dt_1 B(y, t_1) \xi(t_1) + \int_t^{t+h} dt_1 B'(y, t_1)[y(t_1) - y] \xi(t_1) + \dots, \end{aligned} \quad (2.52)$$

para calcular o termo $[y(t_1) - y]$ iteramos a eq.(2.52) tal que

$$\begin{aligned} y(t+h) - y &= \int_t^{t+h} dt_1 A(y, t_1) + \int_t^{t+h} dt_1 A'(y, t_1) \int_t^{t_1} dt_2 A(y, t_2) \\ &+ \int_t^{t+h} dt_1 A'(y, t_1) \int_t^{t_1} dt_2 B(y, t_2) \xi(t_2) + \dots \\ &+ \int_t^{t+h} dt_1 B(y, t_1) \xi(t_1) + \int_t^{t+h} dt_1 B'(y, t_1) \xi(t_1) \int_t^{t_1} dt_2 A(y, t_2) \\ &+ \int_t^{t+h} dt_1 B'(y, t_1) \xi(t_1) \int_t^{t_1} dt_2 B(y, t_2) \xi(t_2) + \dots \end{aligned} \quad (2.53)$$

As funções A e B são determinísticas e portanto mantêm as suas formas sobre médias do processo de Wiener ($\langle \dots \rangle$), enquanto o ruído obedece as propriedades estatísticas da eq.(2.2). Assim

$$\begin{aligned} \langle y(t+h) - y \rangle &= \int_t^{t+h} dt_1 A(y, t_1) + \int_t^{t+h} dt_1 A'(y, t_1) \int_t^{t_1} dt_2 A(y, t_2) \\ &\quad + 2\varepsilon \int_t^{t+h} dt_1 B'(y, t_1) \int_t^{t_1} dt_2 B(y, t_2) \delta(t_2 - t_1) + \dots, \end{aligned} \quad (2.54)$$

devido a propriedade da função delta, $\int_{t_0}^{t_1} dt \delta(t - t_0) f(t) = \frac{1}{2} f(t_0)$, e as aproximações na forma $\int_t^{t+h} dt_1 A(y, t_1) \cong A(y, t)h$, $\int_t^{t+h} dt_1 A'(y, t_1) \int_t^{t_1} dt_2 A(y, t_2) \cong A'(y, t)A(y, t)h^2$, podemos utilizar a eq.(2.48) e determinar o coeficiente $a^1(y, t)$ tal que

$$a^1(y, t) = A(y, t) + \varepsilon B(y, t) \frac{\partial B(y, t)}{\partial y}. \quad (2.55)$$

Para calcular o coeficiente $a^2(y, t) = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{h} \langle [y(t+h) - y(t)]^2 \rangle \right\}$ também não será necessário computar todos os termos pois apenas um será não nulo. De onde obtemos

$$\begin{aligned} a^2(y, t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\langle \int_t^{t+h} dt_1 B(y, t_1) \xi(t_1) \int_t^{t+h} dt_2 B(y, t_2) \xi(t_2) \right\rangle \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_t^{t+h} dt_1 B(y, t_1) \int_t^{t+h} dt_2 B(y, t_2) 2\varepsilon \delta(t_2 - t_1) \\ &= 2\varepsilon B^2(y, t). \end{aligned} \quad (2.56)$$

Ao calcular os demais coeficiente para $m \geq 3$ obtemos como resposta $a^{m \geq 3}(y, t) = 0$. Por exemplo, para $m = 3$ podemos notar que as integrais envolvidas na obtenção de $a^m(y, t)$ são similares à forma

$$\left\langle \int_t^{t+h} dt_1 A(y, t_1) \dots \int_t^{t_1} dt_1 B(y, t_2) \xi(t_2) \dots \int_t^{t_2} dt_2 B'(y, t_3) \xi(t_3) \dots \right\rangle, \quad (2.57)$$

tal que para um número N de integrais e M ruídos, a contribuição será da ordem $O(h^N)$ quando não houver nenhum termo de ruído, será nula para um número ímpar de ruídos, ou será da ordem $O(h^{N-M/2})$ para M par, vez que devido a eq.(2.7), a média de $M/2$ pares de produtos, $\langle \xi(t_i) \xi(t_j) \rangle$, geram essa mesma quantidade de funções delta e reduzem a ordem da contribuição. Assim, os termos que contribuirão no limite $h \rightarrow 0$ serão apenas os de ordem $O(h)$. Então, apenas quando $N = 1 + M/2$ teremos uma contribuição não nula. Além disso notamos que cada ruído acompanha uma integral, e portanto no total existe no mínimo a mesma quantidade de integrais que de ruídos, e também há pelo menos uma integral mesmo na ausência de ruídos, assim $N \geq M$. Para o caso $m = 3$ teremos sempre uma soma envolvendo uma combinação de três elementos (repetidos ou não) da

eq.(2.53) e as possibilidades serão as seguintes

$$\begin{aligned}
 [0, 0, 0] &\rightarrow \text{que tem no mínimo três integrais, assim: } N \neq 1 + M/2 = 1, \\
 [0, 1, 1] &\rightarrow \text{que tem no mínimo três integrais, assim: } N \neq 1 + M/2 = 2, \\
 [0, 0, 2] &\rightarrow \text{que tem no mínimo quatro integrais, assim: } N \neq 1 + M/2 = 2, \\
 [1, 1, 2] &\rightarrow \text{que tem no mínimo quatro integrais, assim: } N \neq 1 + M/2 = 3, \\
 [0, 2, 2] &\rightarrow \text{que tem no mínimo cinco integrais, assim: } N \neq 1 + M/2 = 3, \\
 [2, 2, 2] &\rightarrow \text{que tem no mínimo seis integrais, assim: } N \neq 1 + M/2 = 4. \quad (2.58)
 \end{aligned}$$

A notação acima refere-se a quantidade de termos do tipo $\xi(t_i)$ que podem estar presentes em cada um dos três elementos escolhidos da eq.(2.53). A ordenação não tem relevância, e como explicado antes, apenas os casos que somam um número par de ruídos são levados em consideração, tal que em nenhuma circunstância temos $N = 1 + M/2$ e portanto $a^3(y, t) = 0$.

Em resumo, o processo estocástico Markoviano descrito pela equação de Langevin eq.(2.1), com ruído branco gaussiano, eq.(2.2), e que apresenta uma expansão de Kramers-Moyals até segunda ordem no momento do salto, possui uma distribuição de probabilidade obedecendo uma equação Mestra denominada equação de Fokker-Planck. Substituindo os valores de $a^1(y, t)$ e $a^2(y, t)$, eqs.(2.55, 2.56), na eq.(2.42) temos enfim

$$\frac{\partial}{\partial t} P(y, t) = -\frac{\partial}{\partial y} \left\{ [A(y, t) + \varepsilon B(y, t) \frac{\partial B(y, t)}{\partial y}] P(y, t) \right\} + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial y^2} [B^2(y, t) P(y, t)]. \quad (2.59)$$

Podemos estender a equação de Langevin em um processo multivariado caracterizado pelo vetor $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ como

$$\frac{dy_i}{dt} = A_i(\mathbf{y}, t) + \sum_k^{N_L} B_{i,k}(\mathbf{y}, t) \xi_k(t), \quad (2.60)$$

onde poderiam existir N_L termos de ruído $\xi_k(t)$ independentes com as propriedades

$$\begin{aligned}
 \langle \xi_k(t) \rangle &= 0, \\
 \langle \xi_k(t) \xi_j(t') \rangle &= 2\varepsilon_k \delta_{k,j} \delta(t - t'), \quad (2.61)
 \end{aligned}$$

e cujos momentos de ordem maior atendem propriedades como a apresentadas na eq.(2.7).

Os expoentes da expansão de Kramers-Moyals são generalizados para

$$a_{j_1, \dots, j_m}^m(\mathbf{y}, t) = \int d\mathbf{y}' (y'_{j_1} - y_{j_1}) \dots (y'_{j_m} - y_{j_m}) W(\mathbf{y}' | \mathbf{y}), \quad (2.62)$$

e podem ser calculados através da expressão

$$a_{j_1, \dots, j_m}^m(\mathbf{y}, t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\langle \prod_{\nu=1}^m [y_{j_\nu}(t+h) - y_{j_\nu}(t)] \right\rangle_{|y_k(t)=y}. \quad (2.63)$$

De onde obtemos

$$\begin{aligned} a_i^1(\mathbf{y}, t) &= A_i(\mathbf{y}, t) + \sum_{jk} \varepsilon_k B_{jk}(\mathbf{y}, t) \frac{\partial B_{ik}(\mathbf{y}, t)}{\partial y_i} \\ a_{ij}^2(\mathbf{y}, t) &= 2 \sum_k \varepsilon_k B_{ik}(\mathbf{y}, t) B_{jk}(\mathbf{y}, t) \\ a_{j_1, \dots, j_m}^m(\mathbf{y}, t) &= 0, \quad \text{para } m \geq 3. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Enquanto isso a expansão de Kramers-Moyals para a equação Mestra pode ser reescrita como

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{y}, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{j_1, \dots, j_m} \frac{\partial^m}{\partial y_{j_1} \dots \partial y_{j_m}} [a^m(\mathbf{y}, t) P(\mathbf{y}, t)], \quad (2.65)$$

a equação de Fokker-Planck resume-se aos dois primeiros termos. Assim, substituindo os valores de a^1 e a^2 temos a equação de Fokker-Planck multivariada

$$\frac{\partial}{\partial t} P = - \sum_i \frac{\partial}{\partial y_i} \left\{ \left[A_i + \sum_{jk} \varepsilon_k B_{jk} \frac{\partial B_{ik}}{\partial y_j} \right] P \right\} + \sum_{ij} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \left\{ \left[\sum_k \varepsilon_k B_{ik} B_{jk} \right] P \right\} \quad (2.66)$$

2.2 Interpretações de Itô e Stratonovich

Para entendermos as diferenças entre as interpretações de Itô e Stratonovich é preciso passar por alguns conceitos de cálculo estocástico [78, 79]. Iniciamos com uma equação diferencial estocástica em uma disposição mais simples, na ausência do termo determinístico, $f(x) = 0$, e com o coeficiente de difusão constante no tempo tal que

$$dx = g(x)dW. \quad (2.67)$$

Onde x poderia ser, por exemplo, a posição de uma partícula movendo-se sobre o efeito exclusivo de um campo aleatório representado por dW , que é o incremento de um processo de Wiener $W(t)$. Nesta seção, evitaremos definir $dW = \xi(t)dt$, embora em termos probabilísticos $W(t)$ possa ser definido de forma análoga ao ruído branco gaussiano através da probabilidade $P(W(t))$,

$$P(W(t)) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon t}} e^{-\frac{W(t)^2}{4\varepsilon t}}, \quad (2.68)$$

ou seja, uma distribuição gaussiana de média zero, $\mu = \langle W(t) \rangle = 0$, e de variância $2\varepsilon t$, $\sigma = \sqrt{\langle W^2(t) \rangle - \langle W(t) \rangle^2} = \sqrt{2\varepsilon t}$.

Entre outros propósitos, se quisermos determinar a posição $x(t)$ através da dinâmica na eq.(2.67) devemos realizar a integração

$$\begin{aligned} x(t) - x(0) &= \int_0^t dW g(x(s)) \\ &= \int_0^t dW [g(x(0)) + g'(x(0))(x(s) - x(0))], \end{aligned} \quad (2.69)$$

onde expandimos a função $g(x)$ em torno de $x(0)$ até primeira ordem em x , para em seguida utilizarmos a própria equação e iterar o termo entre colchetes. Assim obtemos

$$\begin{aligned} x(t) - x(0) &= g(x(0))W(t) + g'(x(0)) \int_0^t dW \int_0^s dW(g(x(r))) \\ &= g(x(0))W(t) + g'(x(0)) \int_0^t dW \int_0^s dW(g(x(0))), \end{aligned} \quad (2.70)$$

onde aproximamos $g(x(r))$ pelo seu valor inicial, e assim temos

$$x(t) - x(0) = g(x(0))W(t) + g'(x(0)) \int_0^t W(s)dW, \quad (2.71)$$

onde destacamos com este exemplo que no contexto do cálculo estocástico é comum a presença de integrais da forma $\int_0^t W(s)dW$.

Uma abordagem para tratar com integral que aparece na eq.(2.71) é por meio da discretização via limite quadrático médio. Tal que

$$\int_0^t W dW = m.s \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n W(t_i^*) [W(t_i) - W(t_{i-1})], \quad (2.72)$$

para tanto dividimos o tempo em n subintervalos nos quais $0 = t_0 < t_i < t_n = t$, onde t_0 é o tempo inicial, t é o tempo final, e t_i^* é um instante de tempo dentro de um intervalo discretizado $[t_{i-1}, t_i]$. Assim, $t_{i-1} < t_i^* < t_i$, e $t_i^* = t_{i-1} + \alpha(t_i - t_{i-1})$ para $0 \leq \alpha \leq 1$. O limite quadrático médio é definido como

$$m.s \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X \leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \langle (X_n - X)^2 \rangle = 0, \quad (2.73)$$

em outras palavras se existe o limite $m.s \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$, X é o valor tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle (X_n - X)^2 \rangle = 0$. Note que podemos escrever essa última equação como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (X^2 - 2\langle X_n \rangle X + \langle X_n^2 \rangle) = 0, \quad (2.74)$$

considerando o argumento desse limite com uma equação do segundo grau para X , podemos calcular o discriminante como $\Delta = 4(\langle X_n \rangle^2 - \langle X_n^2 \rangle)$. Uma vez que estamos interpretando o conjunto X_n como uma variável aleatória temos que a média do quadrado é sempre maior que o quadrado da média assim $\Delta \leq 0$, porém a obtenção de um valor real, e a consequente existência do limite é obtida apenas para $\Delta = 0$. Portanto

$$X = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle X_n \rangle. \quad (2.75)$$

De modo similar, se definirmos uma amostra média $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ podemos calcular o valor esperado $E(\bar{X})$ e a variância $Var(\bar{X})$ como

$$\begin{aligned} E(\bar{X}) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = E(X_i), \\ Var(\bar{X}) &= Var\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} n Var(X_i) = \frac{1}{n} Var(X_i), \end{aligned} \quad (2.76)$$

onde a penúltima passagem é possível quando as variáveis X_i são descorrelacionadas. Assim, no limite $n \rightarrow \infty$ teremos $E(\bar{X}) = E(X_i)$ e $Var(\bar{X}) = 0$. Neste contexto diz-se que existe uma convergência, em médias quadráticas, para a variável “aleatória” constante $\bar{X} = \lim_{n \rightarrow \infty} E(\bar{X}) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(X_i)$.

Observando as eqs.(2.72, 2.73) temos que $X = \int_0^t W dW$, $X_n = \sum_{i=1}^n W(t_i^*)[W(t_i) - W(t_{i-1})]$, e então

$$\int_0^t W dW = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{i=1}^n W(t_i^*)[W(t_i) - W(t_{i-1})] \right\rangle. \quad (2.77)$$

Alternativamente poderíamos fazer $X_i = \frac{1}{n} W(t_i^*)[W(t_i) - W(t_{i-1})]$ onde $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ é o valor desejado e $\bar{X} = \lim_{n \rightarrow \infty} E(X_i)$. Esta formulação pode ser entendida como uma média sobre várias realizações do processo de Wiener haja vista a usual definição da soma de Riemann. Afinal, diferentemente de uma equação determinística, cada realização possui sua própria evolução e fornece um resultado diferente.

Para avaliar a integral (2.77) é preciso analisar termos como $\langle W(t')W(s') \rangle$. Se $s' > t'$ temos

$$\begin{aligned} \langle W(t')W(s') \rangle &= \langle W(t')W(s') - W(t')W(t') + W(t')W(t') \rangle \\ &= \langle W(t')[W(s') - W(t')] + W(t')W(t') \rangle = \langle W(t')W(t') \rangle, \end{aligned} \quad (2.78)$$

onde a última igualdade se dá pois não há correlação entre o passo anterior $W(t')$ e o incremento do passo posterior $W(s') - W(t')$. Por outro lado, através da eq.(2.68) podemos calcular $\langle W(t')W(t') \rangle$ como

$$\langle W(t')W(t') \rangle = \int \frac{W(t')^2}{\sqrt{4\pi\varepsilon t'}} e^{-\frac{W(t')^2}{4\varepsilon t'}} dW = 2\varepsilon t', \quad (2.79)$$

e portanto de um modo geral temos $\langle W(t')W(s') \rangle = 2\varepsilon \min(t', s')$. Voltando para a eq.(2.77) temos

$$\begin{aligned} \int_0^t W dW &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [\langle W(t_i^*)W(t_i) \rangle - \langle W(t_i^*)W(t_{i-1}) \rangle], \\ &= 2\varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} [t_i^* - t_{i-1}] = 2\varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} [t_{i-1} + \alpha(t_i - t_{i-1}) - t_{i-1}] \\ &= 2\varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(t_i - t_{i-1}) = 2\varepsilon \alpha t. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Notamos que a eq.(2.80) apresenta uma característica contraintuitiva. O resultado da integral depende do instante no intervalo $[t_i, t_{i-1}]$ em que o processo $W(t)$ é avaliado. A princípio α pode ser qualquer valor entre 0 e 1. Entretanto, na literatura destacam-se apenas dois valores, o cálculo de Itô onde temos $\alpha = 0$, e o cálculo de Stratonovich onde

$\alpha = 1/2$. A interpretação de Stratonovich possui uma correspondência direta com o cálculo habitual, para o qual uma função contínua e diferenciável teria como resultado esperado $\langle \int_0^T W dW \rangle = \langle \frac{1}{2} W(t)^2 \rangle = \varepsilon T$.

Podemos ainda usar a ideia de discretização diretamente na eq.(2.67) e escrever $x(t) - x(0) = g(x(t_i^*)) [dW(t_i) - dW(t_{i-1})]$. De certa forma essa expressão computa o valor de $x(t_i^*)$ usando valores de $x(t)$ no intervalo entre t_{i-1} e t_i , embora de fato esses valores não sejam conhecidos ainda. Tal dificuldade não ocorre para funções contínuas, pois no limite $t_{i-1} \rightarrow t_i$ o valor de $x(t)$ pode ser aproximado pela série de Taylor, e assim $x(t_i) - x(t_{i-1}) \propto t_i - t_{i-1}$. Enquanto isso, visto que na idealização de ruído branco a correlação entre quaisquer que sejam os valores de $W(t)$, por menor que seja a diferença de tempo, é nula, processos estocástico permitem apenas relacionar $W(t_i) - W(t_{i-1}) \propto \sqrt{t_i - t_{i-1}}$. A interpretação de Itô elimina essa dificuldade ao avaliar $g(x)$ no instante t_{i-1} onde seu valor é conhecido, assim o cálculo é feito de forma não antecipada. Outros valores de α , como no caso de Stratonovich, referem-se à cálculos de natureza antecipada.

Apesar das definições na eq.(2.2) não existe um processo estocástico real que de fato apresente estas propriedades. Um ruído branco gaussiano é um objeto singular, tal como a função delta de Dirac é uma função singular. Embora o processo de Wiener seja ainda definido como $W(t) = \int_0^t dt' \xi(t')$ é, entretanto, não estacionário e não diferenciável. Os matemáticos preferem, com mais rigor, definir a função delta de Dirac como um limite de distribuições, sua apresentação mais simples é na forma de um retângulo cuja base tende a zero e a altura tende ao infinito, $\delta_\tau(t) = 1/\tau$ para $0 < t < \tau$ e $\delta_\tau(t) = 0$ fora desse intervalo. Bem como, se há uma correlação temporal finita τ , a densidade espectral do ruído não pode ser de maneira irrestrita independente da frequência. A densidade espectral deve ser nula acima de alguma frequência da ordem $1/\tau$, de outra maneira o sinal carregaria energia infinita. Na física podemos imaginar o conjunto $\{\xi(t)\}$ como uma densa sucessão de pequenos pulsos de curta duração com valores positivos e negativos.

Como visto anteriormente para uma equação da forma

$$dx = f(x(t), t)dt + g(x(t), t)dW, \quad (2.81)$$

em que o coeficiente de difusão depende da própria variável aleatória e, sendo o ruído $\xi(t)$ rigorosamente δ -correlacionado, não há correlação entre dois tempos mesmo que infinitamente subsequentes, então não podemos dizer ao certo qual o valor de t devemos usar ao avaliar o valor da função $g(x, t)$, o que conduz a equação ser dependente de uma interpretação como a de Itô ou Stratonovich. Uma vez que no limite $\tau \rightarrow 0$ é incorreto expressar $\dot{W} = \xi(t)$ como está escrito na eq.(2.1) (o ponto acima W refere-se a uma derivada no tempo), abordaremos esta equação através da integral de Stieltjes, que é uma generalização da integral de Riemann na qual o diferencial de integração pode ser uma

função. Uma variação em $W(t)$ gera o incremento $w(h)$

$$w(h) = W(t+h) - W(t) = \int_t^{t+h} \xi(t') dt', \quad (2.82)$$

que obedece às relações

$$\begin{aligned} \langle w(h) \rangle &= 0, & w(0) &= 0, \\ \langle w(h_1)w(h_2) \rangle &= 2\varepsilon \min(h_1, h_2), \end{aligned} \quad (2.83)$$

pois w é construído através de uma transformação linear de $\xi(t)$ que é distribuído segundo uma gaussiana. Integrando a eq.(2.81) obtemos

$$x(t+h) = x + \int_t^{t+h} f(x(t'), t') dt' + \int_t^{t+h} g(x(t'), t') dW(t'), \quad (2.84)$$

onde $x = x(t)$. Expandindo as funções f e g em torno de x temos

$$\begin{aligned} x(t+h) &= x + \int_t^{t+h} [f(x(t'), t') dt' + g(x(t'), t') dW(t') + f'(x, t')(x(t') - x) dt' \\ &\quad + g'(x, t')(x(t') - x) dW(t')], \end{aligned} \quad (2.85)$$

onde $f' = \frac{\partial f}{\partial x}|_{x=x(t)}$. A fim de iterar o termos $(x(t') - x)$ vamos fazer a seguinte mudança de variável $t' = t + h'$, $dw(h') = dW(t + h')$, $dt' = dh'$, então

$$\begin{aligned} x(t+h) &= x + \int_0^h [f(x, t+h') dh' + g(x, t+h') dw(h') + f'(x, t+h')(x(t+h') - x) dh' \\ &\quad + g'(x, t+h')(x(t+h') - x) dw(h')], \end{aligned} \quad (2.86)$$

e assim a iteração conduz a

$$\begin{aligned} x(t+h) &= x + \int_0^h [f(x, t+h') dh' + g(x, t+h') dw(h') + f'(x, t+h') dh' \int_0^{h'} f(x, t+h'') dh'' \\ &\quad + f'(x, t+h') \int_0^{h'} g(x, t+h'') dw(h'') + g'(x, t+h') dw(h') \int_0^{h'} f(x, t+h'') dh'' \\ &\quad + g'(x, t+h') dw(t') \int_0^{h'} g(x, t+h'') dw(h'')]. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Avaliando cada função f e g em um certo valor do intervalo de integração ainda temos, com $0 \leq \theta_i \leq 1$, que

$$\begin{aligned} x(t+h) - x &= hf(x, t + \theta_1 h) + g(x, t + \theta_2 h)w(h) + O(h^2) \\ &\quad + \int_0^h f'(x, t+h')g(x, t + \theta_3 h')w(h') dh' \\ &\quad + \int_0^h g'(x, t+h')h'f(x, t + \theta_4 h')dw(h') \\ &\quad + \int_0^h g'(x, t+h')g(x, t + \theta_5 h')w(h')dw(h'), \\ x(t+h) - x &= hf(x, t + \theta_1 h) + g(x, t + \theta_2 h)w(h) + O(h^2) \\ &\quad + f'(x, t + \theta_6 h')g(x, t + \theta_3 \theta_7 h)w(h) \\ &\quad + g'(x, t + \theta_8 h)h'f(x, t + \theta_4 \theta_8 h) \int_0^h dw(h') \\ &\quad + g'(x, t + \theta_9 h)g(x, t + \theta_5 \theta_9 h) \int_0^h w(h')dw(h'). \end{aligned} \quad (2.88)$$

Segundo a eq.(2.83), uma média nas realizações, desconsiderando termos de ordem superior a $O(h)$, resulta em

$$\langle x(t+h) - x \rangle = hf(x, t + \theta_1 h) + g'(x, t + \theta_3 h)g(x, t + \theta_3 \theta_2 h) \langle \int_0^h w(h') dw(h') \rangle. \quad (2.89)$$

Neste ponto o resultado é diferente via Itô ou Stratonovich. O resultado \mathcal{A} de uma integral estocástica de uma função Φ da forma

$$\mathcal{A} = \langle \int_0^h \Phi(w(h'), h') dw(h') \rangle \quad (2.90)$$

é calculada através das definições [80, 81]

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\mathcal{I}} &= \langle \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{N-1} \Phi(w(h_i), h_i) [w(h_{i+1}) - w(h_i)] \rangle, \\ \mathcal{A}_{\mathcal{S}} &= \langle \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{N-1} \Phi \left(\frac{w(h_i) + w(h_{i+1})}{2}, \frac{h_i + h_{i+1}}{2} \right) [w(h_{i+1}) - w(h_i)] \rangle, \end{aligned} \quad (2.91)$$

onde $\Delta = \max(h_{i+1} - h_i)$, $0 = h_0 < h_1 < \dots < h_N = h$. Na convenção de Itô $\Phi(w(h'), h')$ é independente do incremento $[w(h_{i+1}) - w(h_i)]$ e depende apenas do valor de $w(h_i)$ no último ponto h_i . Enquanto isso, na convenção de Stratonovich ambos os pontos (h_i, h_{i+1}) contribuem de forma simétrica. Se Φ não depende de $w(h)$ então a eq.(2.90) é apenas uma integral de Stieltjes e ambas as definições concordam.

Utilizando a convenção de Itô para avaliar o último termo da integral na eq.(2.89) temos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\mathcal{I}} = \langle \int_0^h w(h') dw(h') \rangle &= \langle \sum_{i=0}^{N-1} w(h_i) [w(h_{i+1}) - w(h_i)] \rangle \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \langle w(h_i) w(h_{i+1}) \rangle - \sum_{i=0}^{N-1} \langle w(h_i) w(h_i) \rangle \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} (2\varepsilon h_i - 2\varepsilon h_i) = 0. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Por outro lado pela convenção de Stratonovich temos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\mathcal{S}} = \langle \int_0^h w(h') dw(h') \rangle &= \langle \sum_{i=0}^{N-1} \frac{w(h_i) + w(h_{i+1})}{2} [w(h_{i+1}) - w(h_i)] \rangle \\ &= \langle \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} [w(h_i) w(h_{i+1}) - w(h_i) w(h_i) + w(h_{i+1}) w(h_{i+1}) \\ &\quad - w(h_{i+1}) w(h_i)] \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \varepsilon [2h_i - 2h_i + 2h_{i+1} - 2h_i] = \sum_{i=0}^{N-1} [h_{i+1} - h_i] = \varepsilon h. \end{aligned} \quad (2.93)$$

Assim as integrais podem ser escritas como

$$\begin{aligned} I : \int_0^h w(h') dw(h') &= \frac{w^2(h)}{2} - \varepsilon h, \\ S : \int_0^h w(h') dw(h') &= \frac{w^2(h)}{2}. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Podemos usar essas definições para recalculer o coeficiente da expansão de Kramers-Moyal $a^1 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \langle x(t+h) - x \rangle$, vide eq.(2.88), e assim

$$a^1 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [hf(x, t + \theta_1 h) + g'(x, t + \theta_3 h)g(x, \theta_3 \theta_2 h)\mathcal{A}_{I,S}], \quad (2.95)$$

de onde temos então

$$\begin{aligned} a_I^1 &= f(x, t), \\ a_S^1 &= f(x, t) + \varepsilon g'(x, t)g(x, t). \end{aligned} \quad (2.96)$$

Para o termo seguinte na expansão de Kramers-Moyal $a^2 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \langle (x(t+h) - x)^2 \rangle$ é suficiente avaliar o quadrado do segundo termo na eq.(2.88),

$$a_{I,S}^2 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \langle [g(x, t + \theta_2 h)w(h)]^2 \rangle, \quad (2.97)$$

e assim não haverá distinção entre as interpretações que fornecem o mesmo resultado

$$a_{I,S}^2 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} g^2(x, t + \theta_2 h) \langle w(h)w(h) \rangle = \varepsilon g^2(x, t). \quad (2.98)$$

Assim, a equação de Langevin original, eq.(2.1), ganha um significado de fato apenas quando acompanhada de uma interpretação. Dado que a regra a ser utilizada na avaliação das integrais estocásticas passa por essa convenção, não podemos em definitivo afirmar que uma interpretação seja a correta em detrimento das outras.

Para o cálculo de Itô temos então que o processo markoviano descrito pela dinâmica de Langevin, junto à uma condição inicial, tem sua densidade de probabilidades regida pela equação de Fokker-Planck dada por

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} \{A(x, t)P(x, t)\} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x^2} [g^2(x, t)P(x, t)], \quad (2.99)$$

e sobre as mesmas condições na prescrição de Stratonovich dada por

$$\frac{\partial}{\partial t} P(y, t) = -\frac{\partial}{\partial y} \left\{ [f(x, t) + \varepsilon g(x, t) \frac{\partial g(x, t)}{\partial x}] P(x, t) \right\} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x^2} [g^2(x, t)P(x, t)]. \quad (2.100)$$

Ainda poderíamos utilizar diretamente a eq.(2.80) para avaliar a integral na eq.(2.89), e assim obteríamos

$$\frac{\partial}{\partial t} P(y, t) = -\frac{\partial}{\partial y} \left\{ [f(x, t) + 2\alpha \varepsilon g(x, t) \frac{\partial g(x, t)}{\partial x}] P(x, t) \right\} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x^2} [g^2(x, t)P(x, t)], \quad (2.101)$$

de onde recuperamos a equação de Fokker-Planck interpretada por Itô para $\alpha = 0$, e a equação de Fokker-Planck na interpretação de Stratonovich para $\alpha = 1/2$, ou mesmo para alguma interpretação alternativa, $0 < \alpha \leq 1$, $\alpha \neq 1/2$, que avalie o ruído em algum outro tempo intermediário no sentido que explicamos anteriormente. É importante dizer que a eq.(2.101) é uma equação mais fundamental que a equação de Langevin.

2.3 Algoritmos Numéricos

Também podemos tratar as equações diferenciais estocásticas de forma numérica [82]. A maneira mais simples é o método de Euler-Maruyama [83], que é uma extensão natural do método de Euler para equações diferenciais ordinárias. Para esta abordagem, dividimos o tempo total T em pequenos intervalos iguais de duração h , assim temos $t_n = n\frac{T}{N}$, $h = t_{n+1} - t_n = \frac{T}{N}$, quanto menor h maior é a correspondência com o limite de tempo contínuo.

Partindo da equação de Langevin, dada na eq.(2.1), iremos em cada um desses subintervalos calcular a integral desta equação de forma similar a apresentada na eq.(2.49)

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} A(y, t) dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} B(y, t) \xi(t) dt, \quad (2.102)$$

no qual podemos supor que as funções A e B não variam substancialmente no decorrer desse tempo. Portanto

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = A(y_n, t_n)h + B(y_n, t_n) \int_{t_n}^{t_{n+1}} \xi(t) dt, \quad (2.103)$$

a integral remanescente, associada ao processo de Wiener $\xi(t)dt$, será denominada de saltos de Langevin s

$$s = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \xi(t) dt. \quad (2.104)$$

Devido ao seu caráter estocástico, o salto de Langevin não é função contínua nem diferenciável, então não podemos fazer uma suposição semelhante a feita para as funções A e B . Porém, uma vez que s é uma transformação linear do ruído branco $\xi(t)$, esta função herda as seguintes propriedades para a média e para a variância

$$\begin{aligned} \langle s \rangle &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \langle \xi(t) \rangle dt = 0 \\ \langle s^2 \rangle &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \langle \xi(t) \xi(t') \rangle dt dt' = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} 2\varepsilon \delta(t - t') dt' = 2\varepsilon h. \end{aligned} \quad (2.105)$$

O passo seguinte, e a escolha mais comum, é atribuir aos valores de s o resultado de um sorteio em uma distribuição normal de média zero e variância $2\varepsilon h$, $N(0, 2\varepsilon h)$, embora outras escolhas de distribuições associadas aos saltos de Langevin conduzam a resultados similares. Por vezes a aproximação também é dada por $\sqrt{2\varepsilon h}N(0, 1)$, baseada no fato que poderíamos reescrever a equação original como

$$\frac{dy}{dt} = A(y, t) + B(y, t) \sqrt{2\varepsilon h} \tilde{\xi}(t), \quad (2.106)$$

onde $\tilde{\xi}(t)$ é uma variável estocástica gaussiana unitária, isto é, $\langle \tilde{\xi}(t) \rangle = 0$ e $\langle \tilde{\xi}^2(t) \rangle = 1$. Assim, dada uma condição inicial $y(0)$, podemos por sucessivas iterações calcular o conjunto

solução $\{y\}$. Devido a natureza da correlação $\delta(t - t')$ a configuração do instante atual depende apenas da configuração do instante precedente. Assim obtemos como solução

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = A(y_n, t_n)h + B(y_n, t_n)\sqrt{2\varepsilon h}N(0, 1). \quad (2.107)$$

O método de Euler-Maruyama fornece uma solução em tempos discretos na interpretação de Itô até ordem $O(\sqrt{h})$. Na interpretação de Stratonovich, a função que acompanha o ruído é avaliada como uma média entre o tempo atual e o posterior de forma semelhante ao método Runge-Kutta de segunda ordem, que no contexto de equações diferenciais estocásticas é conhecido como o método de Euler-Heun,

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= y(t_n) + A(y_n, t_n)h + \frac{1}{2}(B(y_n, t_n) + B(\bar{y}_n, \bar{t}_n))s, \\ \bar{y}_n &= y_n + B(y_n, t_n)s, \\ s &= \sqrt{2\varepsilon h}N(0, 1). \end{aligned} \quad (2.108)$$

Veremos que tal escolha está consistente com a aproximação de Milstein, que pertence à ordem superior $O(h)$.

Para entendermos o método de Milstein [84] partimos da mesma forma base de uma equação diferencial estocástica dada na eq.(2.81). Igualmente supomos que as funções f e g são suficientemente contínuas e diferenciáveis, com mais rigor matemático, que estas sejam funções Lipschitz contínuas. Assim integramos no intervalo de tempo $(t, t + h)$ tal que tornamos a obter a eq.(2.87). Nesta equação o terceiro, quarto e quinto termos à direita (entre colchetes) devem ser desconsiderados numa aproximação de ordem $O(h)$, assim

$$\begin{aligned} x(t + h) &= x + \int_0^h f(x, t + h')dh' + \int_0^h g(x, t + h')dw(h') \\ &\quad + \int_0^h g'(x, t + h')dw(h') \int_0^{h'} g(x, t + h'')dw(h''). \end{aligned} \quad (2.109)$$

Podemos abordar esta equação a partir do ponto de vista do cálculo não antecipado de Itô. Assim obtemos

$$x(t + h) = x + f(x, t)h + g(x, t)w(h) + g'(x, t)g(x, t) \int_0^h w(h')dw(h')dh''. \quad (2.110)$$

Para calcular a integral restante utilizamos o conceito de cálculo estocástico da eq.(2.94). Portanto

$$x(t + h) = x + f(x, t)h + g(x, t)w(h) + g'(x, t)g(x, t) \left(\frac{w^2(h)}{2} - \varepsilon h \right). \quad (2.111)$$

Na sequência, uma vez que simulamos os saltos de Langevin via uma distribuição gaussiana, temos $\langle w^2(h) \rangle = 0$ e $\langle w^2(h) \rangle = 2\varepsilon h$. Assim, correspondemos $w(h) \rightarrow \sqrt{2\varepsilon}N(0, 1)$. No mais, substituindo $x = x(t)$ obtemos

$$x(t + h) = x(t) + f(x, t)h + \sqrt{2\varepsilon}g(x, t)N(0, 1)\sqrt{h} + \varepsilon g'(x, t)g(x, t)(N^2(0, 1) - 1)h. \quad (2.112)$$

Por outro lado, houvéssemos optado pela regra de Stratonovich para avaliar $\int_0^h w(h')dw(h')dh''$ obteríamos

$$x(t+h) = x(t) + f(x,t)h + \sqrt{2\varepsilon}g(x,t)N(0,1)\sqrt{h} + \varepsilon g'(x,t)g(x,t)N^2(0,1)h. \quad (2.113)$$

A partir do método de Euler-Heun em (2.108) poderíamos obter este mesmo resultado propondo $B(\bar{y}_n, \bar{t}_n) \approx B(y_n, t_n) + B'(y_n, t_n)B(y_n, t_n)s$. Outros termos resultariam em ordens superiores à $O(h)$. O termo extra no método de Milstein incrementa a intensidade da ordem de convergência de \sqrt{h} para h . Dessa perspectiva, a abordagem de Milstein corresponde ao método de Euler que é aplicado usualmente no caso determinístico, isto é, quando $g = 0$.

O método de Euler-Maruyama pode ser generalizado para o caso multidimensional de um vetor \mathbf{y} d -dimensional desde que para cada componente y^k haja uma equação correspondente,

$$dy^k = A^k(y, t)dt + \sum_{j=1}^m B^{k,j}(y, t)dW^j(t), \quad (2.114)$$

cada qual com seu próprios coeficientes de arraste A^k e difusão $B^{k,j}$, este último também relativo a cada ruído $\xi_j(t)$. Serem os m 's ruídos independentes, como apresentado na eq.(2.61) é importante quanto a obtenção da equação de Fokker-Planck mutivariada (2.101). Assim obtemos como solução para a evolução temporal de \mathbf{y} que

$$y_{n+1}^k = y_n^k + A^k h + \sum_{j=1}^m B^{k,j} \Delta W^j, \quad (2.115)$$

onde $y_n^k = y(t_n)$, $A^k = A^k(y_n, t_n)$, $B^{k,j} = B^{k,j}(y_n, t_n)$, $\Delta W^j = W_{t_{n+1}}^j - W_{t_n}^j$. Enquanto isso o método de Milstein aplicado ao caso multidimensional é dado por

$$y_{n+1}^k = y_n^k + A^k h + \sum_{j=1}^m B^{k,j} \Delta W^j + \sum_{j_1, j_2=1}^m \sqrt{\varepsilon_{j_1} \varepsilon_{j_2}} L^{j_1} B^{k, j_2} I_{j_1, j_2}, \quad (2.116)$$

onde $L^{j_1} = \sum_{q=1}^d B^{q, j_1} \frac{\partial}{\partial x^q}$, e I_{j_1, j_2} é uma integral estocástica dupla definida como

$$I_{j_1, j_2} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{t_n}^{u_1} dW_{u_2}^{j_1} dW_{u_1}^{j_2}. \quad (2.117)$$

Para $j_1 = j_2$ temos uma situação similar ao caso unidimensional, e

$$I_{j_1, j_1} = \frac{1}{2} (\Delta W_{j_1})^2 - \varepsilon_{j_1} h, \quad (2.118)$$

para $j_1 \neq j_2$ não se pode expressar a integral de maneira simples em termo dos incrementos ΔW^{j_1} e ΔW^{j_2} . Neste caso, podemos aproximar o resultado por

$$I_{j_1, j_2}^p = h \left(\frac{1}{2} \chi_{j_1} \chi_{j_2} + \sqrt{\rho_p} (\mu_{j_1, p} \chi_{j_2} - \mu_{j_2, p} \chi_{j_1}) \right) + \frac{h}{2\pi} \sum_{r=1}^p \frac{1}{r} (\zeta_{j_1, r} (\sqrt{2} \chi_{j_2} + \eta_{j_2, r}) - \zeta_{j_2, r} (\sqrt{2} \chi_{j_1} + \eta_{j_1, r})), \quad (2.119)$$

onde

$$\rho_p = \frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{r=1}^p \frac{1}{r^2}, \quad (2.120)$$

e $\chi_j, \mu_{j,p}, \eta_{j,r}, \zeta_{j,r}$ são variáveis gaussianas aleatórias independentes $N(0, 1)$ com

$$\chi_j = \frac{1}{\sqrt{h}} \Delta W^j, \quad (2.121)$$

para $1 \leq j \leq m$, $1 \leq r \leq p$, e $p = 1, 2, \dots$. Naturalmente o valor de p influencia na precisão de I_{j_1, j_2} , no entanto, devemos escolher $p = p(h) \geq K/h$ para alguma constante K a fim de obter uma ordem de convergência $O(h)$.

Além do caso simples em que há um único ruído, $m = 1$, e várias variáveis, que pode ser expresso como

$$y_{n+1}^k = y_n^k + A^k h + B^k \Delta W + \sum_{q=1}^d \varepsilon B^q \frac{\partial B^k}{\partial y^q} [(\Delta W)^2 - h], \quad (2.122)$$

existem outros casos em que não precisamos lidar com a integral estocástica dupla. Por exemplo, quando o ruído é aditivo, ou seja, apenas uma constante, ou quando cada variável estocástica possui apenas um ruído, $d = m$, não necessariamente todos distintos (desde que a intenção seja apenas uma avaliação numérica), podendo mesmo ser nulo para algum y_k , neste caso $d \leq m$. Além disso, sendo o coeficiente de difusão diagonal $B^{k,k}$ dependente apenas de x^k , isto é,

$$B^{k,j} = 0; \quad \frac{\partial B^{j,j}}{\partial y^k} = 0; \quad j \neq k, \quad (2.123)$$

podemos defini-lo como ruído diagonal, tal que as componentes do processo estão acopladas apenas através dos termos de arraste, e a formulação de Milstein fornece

$$y_{n+1}^k = y_n^k + A^k h + B^{k,k} \Delta W^k + \varepsilon_k B^{k,k} \frac{\partial B^{k,k}}{\partial y^k} [(\Delta W^k)^2 - h]. \quad (2.124)$$

2.3.1 Geração de Números Aleatórios

Por fim, comentaremos brevemente sobre métodos de geração de números aleatórios [85]. O primeiro conjunto que deve ser obtido é a distribuição uniforme $U(0, 1)$ por meio de um gerador de números aleatórios normalizados, pois esta é a base para obtermos outras distribuições. Uma forma usual para a sua obtenção são métodos baseados na avaliação de resíduos em regras de recorrência como o método das congruências lineares. O passo seguinte é gerar uma amostra de números aleatórios baseados em uma distribuição específica, para tal podemos utilizar alguns métodos a depender das particularidades de cada distribuição. Por exemplo, quando conhecermos a forma analítica da função de distribuição acumulada $\Phi(x)$ associada à uma distribuição $P(x)$, $\Phi(x) = \int_0^y P(y) dy$, e formos capazes de calcular a sua forma inversa, podemos utilizar o método da inversão que justifica-se como se segue.

Seja uma transformada T que mapeia o conjunto de variáveis aleatórias U , uniformemente distribuída entre 0 e 1, em outro conjunto X que representa a distribuição que desejamos obter, isto é $T(U) = X$, e

$$\Phi(x) = P(X \leq x) = P(T(U) \leq x) = P(U \leq T^{-1}(x)) = T^{-1}(x), \quad (2.125)$$

onde a última igualdade é possível porque $P(U \leq y) = y$ para uma distribuição uniforme $U(0, 1)$. Concluímos que a distribuição acumulada Φ é a inversa da transformada T , ou então, $T(u) = \Phi^{-1}(u)$ para $u \in [0, 1]$, portanto podemos gerar X a partir $\Phi^{-1}(u)$. Ainda podemos pensar sobre esse método de uma forma mais intuitiva, na prática faremos o seguinte cálculo

$$r = \int_0^\ell P(\ell') d\ell', \quad (2.126)$$

para então inverter o resultado encontrado e expressar ℓ em termos de r . Por normalização sabemos que $0 \leq r \leq 1$ e $0 \leq \ell \leq \infty$, logo podemos ainda reescrevê-la como $r = \int_0^\infty \Theta(\ell' - \ell) P(\ell') d\ell'$, onde $\Theta(y)$ é a função de Heaviside (definida 1 para $y > 0$ e 0 para $y < 0$), diferenciando os dois lados dessa equação em relação à variável ℓ e usando que $\delta(y) = \frac{d}{dy} \Theta(y)$ temos

$$\frac{dr}{d\ell} = P(\ell), \quad (2.127)$$

ou seja $dr = P(\ell) d\ell$. Assim, a fração de ocorrência dos valores de r em relação à ocorrência dos valores ℓ é justamente a distribuição $P(\ell)$.

A ideia do método da inversão pode ser facilitada para distribuições discretas, porém para distribuições contínuas a necessidade da forma analítica da distribuição acumulada torna o método impraticável para a maioria dos casos. Por exemplo, podemos utilizá-lo para a distribuição exponencial, mas não para outras distribuições simples como a gaussiana. Para a distribuição normal podemos utilizar o método da transformação de Box-Muller [86] para gerar até duas distribuições normais independentes. Sendo r_1 e r_2 dois números aleatórios originados de uma distribuição uniforme $U(0, 1)$, teremos que r será uma distribuição normal de média nula e variância unitária calculada por

$$r = \sqrt{-2 \ln r_1} \cos(2\pi r_2), \quad (2.128)$$

onde uma segunda distribuição normal padronizada, independente da primeira, também poderia ser obtida substituindo a função cosseno pela função seno. Particularmente, este foi o método utilizado para calcular os fatores $N(0, 1)$ descritos no método de Milstein.

Para distribuições mais complexas existem outros métodos, como o método de aceitação-rejeição e o método de Ziggurat [87]. O primeiro baseia-se, por exemplo, para uma distribuição unidimensional, em realizar uma amostragem aleatória de valores no plano cartesiano (x, y) e manter apenas a parcela da amostra que estiver contida abaixo da curva da função, sendo assim, as componentes x dos valores aceitos formam o conjunto de variáveis

aleatórias da distribuição desejada. Enquanto isso, o segundo é uma versão melhorada do primeiro que pode ser aplicado para distribuições de probabilidade monotonicamente decrescente ou distribuições simétricas unimodais.

Notamos ainda que, de certa forma, uma maneira possível de gerar alguma distribuição de variância finita, é construir a dinâmica de Langevin certa, tal que esta gera a distribuição desejada como a solução estacionária, e assim utilizar os métodos numéricos descritos anteriormente para computar um *ensemble* de valores a partir de número grande de realizações.

3 DISTRIBUIÇÕES DE TAMANHOS DE PASSOS NA DINÂMICA DO DESLOCAMENTO ANIMAL

O deslocamento total de um animal em seu habitat pode ser estudado separadamente pela soma do conjunto dos tamanhos de passos, que são caracterizados por uma quantidade de deslocamentos com direções relativamente constantes. Iniciamos considerando um dado comprimento de passo que inicia no instante $t = 0$ e termina em $t = t_f$. Definiremos a variável $\ell(t)$ como sendo a distância entre o ponto de partida e a posição em um tempo específico $t < t_f$. Assim, sendo $\ell(0) = 0$, o comprimento deste passo particular é dado por $\ell(t_f)$. Uma vez encerrado esse passo, o animal inicia uma nova caminhada em uma outra direção. Nesta nova origem reiniciamos a contagem do tempo para $t = 0$, e após um tempo possivelmente distinto t'_f alcança-se outra posição tendo tido um passo de comprimento $\ell(t'_f)$. Com a sucessiva repetição desse processo uma quantidade N de passos pode ser gerada, caracterizando assim um *ensemble* de N realizações desse processo estocástico.

Neste trabalho apresentamos um modelo baseado em equações diferenciais estocásticas para descrever a evolução temporal da variável $\ell(t)$ que determina o tamanho de cada passo. Para uma longa caminhada em que não há uma quantidade significativa de passos privilegiados, no sentido de demandarem muito mais tempo que os demais, temos que $\tau_\ell \ll \tau_N$, embora a duração típica τ_ℓ de um dado passo seja muito maior que qualquer outro tempo característico envolvido diretamente na dinâmica de ℓ (ao menos para um meio homogêneo, adiante veremos o caso heterogêneo em que uma escala de tempo a mais deve ser considerada). Então para muitos dos propósitos que abordaremos, a distribuição de um número $N \gg 1$ de tamanhos de passos no *ensemble* $\{\ell_j\}$ com $j = 1, 2, \dots, N$, corresponde à distribuição de probabilidades $P(\ell)$ resultante do regime estacionário $t \rightarrow \infty$ da PDF (do Inglês, *Probability Density Function*) $P(\ell, t)$, que logo no começo da evolução é dependente do tempo.

No modelo estocástico para o deslocamento animal, uma maneira concebível é buscar a descrição das trajetórias individuais por meio de dinâmicas de Langevin, tais como o movimento browniano, ou pelo processo de Ornstein-Uhlenbeck [12] e outras generalizações destes, que formulam as equações a partir da velocidade aos moldes das leis de Newton, para os quais o ruído branco também atua diretamente nas velocidades, tal que posteriormente uma relação com a distribuição de velocidades, posições e ângulos de viragem poderia ser obtida. Embora a extensão de tais processos para duas ou três dimensões seja aparentemente do ponto de vista matemático simples, pode causar o surgimento de dificuldades extras [12], por exemplo, a hipótese de que em um movimento browniano a dinâmica nas direções x e y sejam mutuamente independentes é na prática não razoável, nesta situação a iminente necessidade de incluir correlações traz complicações

matemáticas adicionais. Outra forma possível de tentar contornar estas dificuldades é uma abordagem baseada em distribuições de ângulos de viragem [7], mas que também não parte de um modelo simples.

Ao invés dessa abordagem baseada nas velocidades, neste trabalho desenvolvemos um modelo efetivamente baseado em descrever formalmente as flutuações no comprimento do passo por si só, assim nosso objetivo é pautado em deduzir as distribuições de probabilidade $P(\ell)$ sem ter a necessidade de conhecer os detalhes elementares que regem o deslocamento do animal. Então, por ora, em oposição a tentarmos modelar as trajetórias, segundo o qual poderíamos eventualmente determinar as distribuições de tamanhos de passos, iremos partir de uma dinâmica estocástica válida em princípio para o próprio $\ell(t)$ e investigar, fundamentado nessa perspectiva, quais são as classes e modelos relevantes, junto ao cálculo das distribuições que melhor se adequem.

Na presente formulação consideramos que o deslocamento de um animal, e portanto a variável $\ell(t)$, é o resultado de uma interação de componentes determinísticos e estocásticos, ambos assim modelados através de uma dinâmica de Langevin que de maneira habitual pode ser escrita como

$$d\ell = F(\ell)dt + G(\ell)dW, \quad (3.1)$$

onde o termo puramente determinístico $F(\ell)$ representa um termo de arrasto que, em alguns modelos de fricção é linear, mas em geral pode ser não-linear, $dW = \xi(t)dt$ é um processo de Wiener modulado espacialmente por uma função genérica $G(\ell)$, e guiado pelo ruído branco gaussiano $\xi(t)$, que apresenta média nula $\langle \xi(t) \rangle = 0$ e decorrelação temporal $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2\varepsilon\delta(t - t')$. Portanto, notamos que o parâmetro $\varepsilon > 0$ fornece a medida da magnitude do ruído, enquanto 2ε indica a variância da Gaussiana, vale ressaltar que apesar de escrito com uma dependência explícita no tempo $W(t)$ não é uma função rigorosamente bem definida nesta variável, mas que certamente apresenta valores distintos no decorrer do tempo. Esta contribuição estocástica pode ser interpretada como advinda dos termos que variam de forma randômica, como aqueles associados com a vasta quantidade de eventos imprevisíveis que de alguma forma o animal recebe ao longo de sua trajetória, e estão intrinsecamente relacionados às mudanças nos comprimentos dos passos.

Em uma primeira tentativa, vamos verificar as consequências da seguinte dinâmica de Langevin,

$$\frac{d\ell}{dt} = -a\ell + \xi(t). \quad (3.2)$$

Além do termo de arrasto mais comum $F(\ell) = -a\ell$, esta equação é expressa sob as suposições de que o ruído branco é aditivo, isto é, apenas uma constante independente de ℓ , assim $G(\ell) = 1$, e que as propriedades estatísticas do ruído não mudam durante a evolução da dinâmica, ou seja, ε é também constante no espaço e no tempo. Estas escolhas implicam, por exemplo, que passos de tamanhos diferentes estão sujeitos em média a mesma intensidade de estímulos, e que ao longo do tempo o meio mantenha-se sempre

homogêneo, o que não é de fato compatível com a realidade, visto que em geral devemos supor que o ambiente possa mudar rapidamente (comparado ao tempo típico dos passos), e assim sua influência seja diferente dependendo do tempo de exposição ao ruído ou do tamanho passo. Uma maneira de lidarmos com estas dificuldades é modelar a equação baseada em ruídos multiplicativos e padrões de estocásticos mais complexos, envolvendo uma superestatística para o parâmetro ε .

A eq.(3.2) pode ser analisada via equação de Fokker-Planck de maneira indistinta à qualquer interpretação, seja ela Itô ou Stratonovich, de onde obtemos que

$$\frac{\partial P}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial \ell} \ell P + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial \ell^2} P. \quad (3.3)$$

Após uma mudança de variável via transformada de Fourier, podemos solucionar a equação diferencial parcial resultante por meio do método das funções características, e assim para a condição inicial $P(\ell, 0) = \delta(\ell - \ell_0)$ temos que

$$P(\ell, t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi\varepsilon}{a}(1 - e^{-2at})}} \exp \left[-\frac{(\ell - \ell_0 e^{-at})^2}{\frac{2\varepsilon}{a}(1 - e^{-2at})} \right]. \quad (3.4)$$

Deste ponto de vista também podemos escrever $P(\ell, t) = P(\ell, t | \ell_0, 0)$. Trata-se de uma distribuição Gaussiana de média $\ell_0 e^{-at}$ e variância $\frac{\varepsilon}{a}(1 - e^{-2at})$. De um modo geral, a solução para um sistema de equações de Langevin lineares é dada por uma distribuição Gaussiana multivariada [30].

Por via de regra, a obtenção de soluções analíticas para $P(\ell, t)$ nos casos que não envolvam apenas equações lineares são difíceis, mesmo embora a dinâmica possa continuar relativamente simples. Entretanto, para algumas escolhas específicas dos coeficientes de arrasto e de difusão, como por exemplo quando $F(\ell, t)$ e $G(\ell, t)$ são funções separáveis no tempo e no espaço, isto é, podem ser escritas como $F(\ell, t) = D_1(\ell)T_1(t)$ e $G(\ell, t) = D_2(\ell)T_2(t)$, e ademais compartilhem a mesma dependência espacial $D_1(\ell) = D_2(\ell)$, existem algumas transformações, na prescrição de Stratonovich, que permitem recuperar a forma de uma equação de difusão simples [88, 89, 90].

Um cálculo do valor esperado de ℓ , $\langle \ell \rangle \sim e^{-at}$, mostra que para esperarmos um valor finito no limite $t \rightarrow \infty$ é necessário que a tenha um valor positivo, $a > 0$, portanto para $P(\ell, t)$ obtemos que nesse limite a solução estacionária $P(\ell) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(\ell, t)$ existe e é dada por

$$P(\ell) = \sqrt{\frac{a}{2\pi\varepsilon}} e^{-a\ell^2/2\varepsilon}, \quad (3.5)$$

ou seja, quando as propriedades estatísticas do comprimento do passo cessam sua dependência temporal, a solução continua sendo uma distribuição gaussiana, no entanto, com média nula e variância ε/a independente da condição inicial ℓ_0 , uma translação em ℓ , $\ell \rightarrow \ell - \langle \ell \rangle$ forneceria a Gaussiana mais geral e corresponderia a um processo de Ornstein-Uhlenbeck [91].

Para a dinâmica proposta, ainda podemos calcular a correlação média entre os passos e obter que $\langle \ell(t)\ell(t') \rangle = (\varepsilon/a)e^{-a|t-t'|}$, notamos que esse resultado apresenta o mesmo tipo de decaimento exponencial presente na solução $P(\ell, t)$, característico de processos Markovianos, como vemos a presença do ruído branco gaussiano não impossibilita a presença de correlações não triviais entre os valores de $\ell(t)$ ao menos no início da dinâmica, mas que logo tendem a tornarem-se irrelevantes, outros tipos de ruídos que apresentem correlação temporal finita podem gerar configurações mais complexas. Por exemplo, entre os diversos mecanismos que contribuem para o mapeamento do ambiente pelo animal, pode estar presente alguma memória recente, como quando por estímulo prévio, uma região rica em recursos tende a favorecer passos mais curtos, enquanto regiões escassas favorecem passos mais longos no intuito de buscar outras regiões, como consequência temos que o alcance da memória deve influenciar os parâmetros pelos quais estamos estudando o indivíduo, no caso o tamanho dos passos, dando origem a processos não Markovianos.

O caso intermediário $a = 0$ deve ser reinterpretado como $\frac{d\ell}{dt} = \xi(t)$, ou seja o movimento browniano elementar, para o qual a equação de Fokker-Planck fornece a equação de difusão com coeficientes constantes $\frac{\partial P}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 P}{\partial \ell^2}$. Uma análise no espaço de Fourier fornece como solução que $P(\ell, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon t}} e^{-\frac{\ell^2}{4\varepsilon t}}$, que no entanto não possui uma solução estacionária $P(\ell)$.

Por outro lado, pode ser de interesse prático apenas o conhecimento da solução estacionária. A equação de Fokker-Planck pode ser compreendida como uma equação de continuidade $\frac{\partial}{\partial t} P = -\nabla \cdot \mathbf{J}$ para a conservação da probabilidade total, por exemplo na interpretação de Itô temos

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \ell} \left[FP(\ell, t) - \varepsilon \frac{\partial}{\partial \ell} G^2 P(\ell, t) \right], \quad (3.6)$$

onde a densidade de corrente $J(\ell, t) = FP(\ell, t) - \varepsilon \frac{\partial}{\partial \ell} G^2 P(\ell, t)$ associada à grandeza conservada deverá ter seu valor constante uma vez que seja atingido o regime estacionário. Visto que a probabilidade de ℓ ser infinito deve ser nula, J também deve anular-se no infinito, enquanto que ao mesmo tempo deve ser constante em todo o espaço, de onde concluimos que, para um modelo unidimensional, teremos $J(\ell, t \rightarrow \infty) = 0$ para todo ℓ , neste limite podemos reescrever $P(\ell, t) \rightarrow P(\ell)$, $\frac{\partial P}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial}{\partial \ell} \rightarrow \frac{d}{d\ell}$, e assim

$$FP(\ell) - \varepsilon \frac{d}{d\ell} G^2 P(\ell) = 0, \quad (3.7)$$

portanto no regime estacionário a equação diferencial parcial, torna-se uma equação diferencial ordinária de fácil solução, dada por [92]

$$P(\ell) \sim \frac{1}{G^2(\ell)} \exp \left[\frac{1}{\varepsilon} \int^\ell \frac{F(\ell')}{G^2(\ell')} d\ell' \right], \quad (3.8)$$

o símbolo (\sim) indica uma proporcionalidade à parte de um fator de normalização. É importante frisar que esta solução não necessariamente existe, visto que a dinâmica pode

não permitir uma solução estacionária, fato que comumente está vinculado à impossibilidade de normalizar a distribuição $P(\ell)$ gerada por este procedimento. Para outras interpretações que incluem o termo de arrasto extra dado por $2\alpha\varepsilon G(\ell)G'(\ell)$ obtemos

$$P(\ell) \sim \frac{1}{G^{2-2\alpha}(\ell)} \exp \left[\frac{1}{\varepsilon} \int^{\ell} \frac{F(\ell')}{G^2(\ell')} d\ell' \right], \quad (3.9)$$

onde $\alpha = 1/2$ corresponde à interpretação de Stratonovich, enquanto $\alpha = 0$ recupera a eq.(3.8).

Poderíamos obter a solução dada na eq.(3.5) diretamente da eq.(3.2) através da eq.(3.9), esta solução entretanto apresenta uma característica não desejada, pois permite a presença de valores não positivos para ℓ , $\ell < 0$, haja vista a simetria do problema, por exemplo temos $P(-\ell) = P(\ell)$. A equação de Langevin, como a eq.(3.2), descreve uma evolução contínua para ℓ , tal que partindo de um valor positivo de $\ell(0) > 0$, só podemos atingir o valor $\ell(t^*) = 0$ de maneira contínua, entretanto neste instante t^* podemos obter $d\ell < 0$, e conseqüentemente um passo negativo, para isso é preciso apenas $dW = \xi(t)dt < 0$. Embora algumas escolhas como deslocar os valores para muito além do desvio padrão ($\langle \ell \rangle \gg \sqrt{\frac{2\varepsilon}{a}}$) possam atenuar bastante a ocorrência de $\ell < 0$, não há a garantia da ausência de valores negativos em longos períodos de tempo. Podemos eliminar este inconveniente pela inserção de ruídos multiplicativos na dinâmica de Langevin.

Doravante consideraremos apenas ruídos multiplicativos, ou seja, que possuam alguma dependência multiplicativa em ℓ , tal que $g(\ell = 0) = 0$. Assim, optamos por não mais considerar que atuem de maneira igual em tamanhos de passos diferentes, portanto modificamos a eq.(3.2) para

$$\frac{d\ell}{dt} = -a\ell + G(\ell)\xi(t), \quad (3.10)$$

onde $G(\ell)$ é alguma função analítica. Como vimos antes, a adição do ruído multiplicativo adiciona ao problema a necessidade de uma interpretação que forneça um significado à equação de Langevin, que era antes irrelevante ao caso aditivo. Em resumo, dado um intervalo de tempo dt da ocorrência do pulso (ruído), as convenções mais utilizadas, Itô e Stratonovich, avaliam o ruído em instantes distintos, o primeiro em $t^* = 0$, e o segundo em $t^* = dt/2$, o que resulta em

$$\begin{aligned} I : \quad & \langle G(\ell)\xi(t) \rangle = 0, \\ S : \quad & \langle G(\ell)\xi(t) \rangle = \frac{1}{2} \langle G \frac{dG}{d\ell} \rangle, \end{aligned} \quad (3.11)$$

de onde percebemos que essas médias são indistinguíveis para um ruído constante, $G(\ell) = G_0 = \text{constante}$, quando ambas as definições concordam com o valor $\langle G_0\xi(t) \rangle = 0$. Embora seja interessante mencionar que o motivo do valor ser sempre nulo na abordagem de Itô deve-se ao fato de que o valor de ℓ utilizado é aquele um instante antes do próprio pulso ocorrer, em outras palavras, $\ell(t)$ não depende de $\xi(t')$ para $t' < t$ dada a perspectiva do

cálculo não antecipado, enquanto que no caso aditivo trata-se diretamente das propriedades do ruído branco. No cálculo de Stratonovich temos $\langle \ell(t)\xi(t) \rangle \neq 0$ essencialmente porque considerar o ruído branco como o limite de um processo contínuo, para o qual este (ruído) seja o limite de ruído colorido no qual a correlação tende a zero, implica em uma correlação entre $\ell(t)$ e $\xi(t)$, tal característica faz o cálculo de Stratonovich similar ao cálculo convencional, enquanto a interpretação de Itô requer algumas convenções extras, como quando for preciso reescrever a equação de Langevin, mediante um mudança de variável não linear, e ainda manter invariante a forma da correspondente equação de Fokker-Planck [78].

Podemos notar que as particularidades envolvidas em uma outra interpretação influenciam, por exemplo, no cálculo do tamanho do passo médio, e de fato em toda a dinâmica. Por isso o termo de arrasto adicional induzido pelo ruído é necessário para especificar a expressão matemática exata da solução estacionária $P(\ell)$, que assim depende da interpretação utilizada.

A prescrição de Itô é frequentemente usada para equações diferenciais estocásticas que descrevem o movimento financeiro na bolsa de valores, e modelos de evolução de populações biológicas. Por outro lado, a prescrição de Stratonovich é utilizada para estudar a propagação de ondas eletromagnéticas através de atmosfera turbulenta, e circuitos elétricos com geradores externos de ruído. O parâmetro α que caracteriza o instante da avaliação do ruído é parte do modelo e deve ser escolhido por algum argumento físico, não havendo qualquer manipulação algébrica capaz de inferir qual seria o valor correto [79].

Devido à preferência na literatura em argumentar pela utilização da interpretação de Itô no contexto da ecologia teórica, esta será a metodologia principal utilizada neste trabalho. Todavia, é natural que a expressão particular de cada $P(\ell)$ seja distinta, mas as possíveis distribuições obtidas são essencialmente as mesmas em ambos os casos.

Uma realização da dinâmica da variável $\ell(t)$ é completamente determinada pelas funções $F(\ell)$ e $G(\ell)$, e por uma amostragem de valores que caracterizem o ruído de intensidade (sempre positiva) $\varepsilon > 0$ como descrito na eq.(3.1), para as quais medidas sobre muitas realizações determinam as propriedades médias. Portanto, no contexto do deslocamento animal torna-se necessária a imposição de alguns vínculos sobre os termos de arrasto e difusão $F(\ell)$ e $G(\ell)$ como discutiremos.

Por definição $\ell(t)$ é um valor sempre positivo não nulo, isto é, $\ell(t) \geq 0$ para todo $t \geq 0$, pois esta grandeza define a distância percorrida pelo indivíduo no tempo t em relação ao ponto de partida do movimento que determina um passo. Por hipótese a variável $\ell(t)$ evolui de maneira contínua, então como já discutimos antes no caso particular da eq.(3.2), se em uma dada realização do processo tivéssemos $\ell(t) < 0$, necessariamente este tempo teria sido precedido pelo instante t^* no qual $\ell(t^*) = 0$. Então se analisarmos a eq.(3.1) para $\ell = 0$ temos que $d\ell(t) = F(0)dt + G(0)dW$, assim se impusermos que

$F(0) \geq 0$ e $G(0) = 0$, podemos afirmar que $\ell(t)$ nunca será negativo e teremos sempre $\ell(t) \geq 0$, pois teríamos $d\ell(t^*) \geq 0$ para quando $\ell = 0$. O caso marginal $F(0) = 0$ poderia gerar um ponto fixo quando $\ell(t^*) = 0$, mas de fato em um processo rigorosamente contínuo a probabilidade de ocorrência de qualquer valor de forma precisa é nula, então o valor exato $\ell = 0$ não seria atingido, embora em uma simulação numérica o zero definido fique a cargo da precisão da máquina. Em suma, as condições $F(0) \geq 0$ e $G(0) = 0$ são suficiente para assegurar o tamanho do passo positivo ao longo de toda a dinâmica, desde que $\ell(0) > 0$. Em consequência algumas possibilidades para o termo estocástico são excluídas, como o caso aditivo já mencionado.

Pelos motivos exemplificados, a partir de agora estudaremos apenas os efeitos de ruídos multiplicativos, aqueles em que há alguma dependência com o produto de ℓ no ruído [93], incluindo algumas forma lineares e não lineares para $G(\ell)$, numa analogia com o contexto de teorias macroscópicas que descrevem modelos estocásticos de dinâmica populacional, onde tais ruídos são encontrados com o objetivo de evitar valores negativos para a densidade populacional [94, 95]. Também esclarecemos que termos de ruído genuinamente definidos positivos, tais como aqueles descritos pela distribuição de Poisson [96], poderiam prevenir a ocorrência de valores negativos para ℓ . Entretanto, em geral, para o caso de interesse $\ell(t) > 0$, há a impossibilidade de obter soluções analíticas para as distribuições $P(\ell)$, uma vez que a equação de Fokker-Planck resultante pode ser da forma integro-diferencial [97, 98], além de oferecer dificuldades práticas para uma abordagem numérica. Por exemplo, vamos utilizar novamente como protótipo a dinâmica $\frac{d\ell}{dt} = -\ell + \xi(t)$, e assim supor que o ruído apresenta uma média m positiva, pois trata-se, a princípio, de um conjunto de valores sempre positivos, $\langle \xi(t) \rangle = m > 0$, mas que ainda é decorrelacionado entorno de sua média $\langle \xi(t) - m \rangle \langle \xi(t') - m \rangle = 2\varepsilon\delta(t - t')$. Primeiro vamos calcular a solução determinística para a média $\langle \ell \rangle$, o que deve ser um indicativo para esperarmos que ainda exista uma solução estacionária e que sua média seja m , de fato, $\frac{d\ell}{dt} = -\langle \ell \rangle + m \rightarrow \langle \ell(t) \rangle = e^{-t} + m$, $\langle \ell(t \rightarrow \infty) \rangle = m$. Então realizando uma mudança de variável como $\xi_1(t) = \xi(t) - m$ recuperamos as propriedades

$$\begin{aligned} \langle \xi_1(t) \rangle &= 0, \\ \langle \xi_1(t)\xi_1(t') \rangle &= 2\varepsilon\delta(t - t'), \end{aligned} \quad (3.12)$$

tratando-se de um ruído branco na sua forma mais comum, agora a equação de Langevin torna-se

$$\frac{d\ell}{dt} = -\ell + \xi_1(t) + m, \quad (3.13)$$

propondo ainda a mudança de variável

$$\ell_1 = \ell - m, \quad (3.14)$$

obtemos

$$\frac{d\ell_1}{dt} = -\ell_1 + \xi_1(t). \quad (3.15)$$

Agora podemos usar a equação de Fokker-Planck e obter a solução estacionária

$$P(\ell_1) = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon\pi}} e^{-\frac{\ell_1^2}{2\varepsilon}} \quad \rightarrow \quad P(\ell) = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon\pi}} e^{-\frac{(\ell-m)^2}{2\varepsilon}}. \quad (3.16)$$

Substancialmente a mudança de variável na eq.(3.14) que possibilita escrever a eq.(3.15), e a obtenção da solução analítica, neste caso particular, parti do pressuposto que a variável ℓ esteja livre para variar desde $-\infty$ até $+\infty$, o que não é o nosso caso de interesse.

No intuito de resolver numericamente o problema original, integramos e obtemos $\ell(t+h) = \ell(t) - \ell h + \int_0^h \xi(t) dt$, vamos analisar os saltos de langevin $s = \int_0^h \xi(t) dt$, que têm média $E(s) = \int_0^h \langle \xi(t) \rangle dt = mh$ e variância

$$\begin{aligned} Var(s) &= E(s - E(s))^2 = E\left(\int_0^h (\xi(t) - \langle \xi(t) \rangle) dt\right)^2 \\ &= E\left(\int_0^h (\xi(t) - m) dt\right)^2 \\ &= \int_0^h \int_0^h \langle (\xi(t) - m)(\xi(t') - m) \rangle dt dt' \\ &= \int_0^h \int_0^h \delta(t - t') dt dt' \\ &= 2\varepsilon h. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Logo, devemos associar os saltos de Langevin à uma distribuição que tenha média mh e variância $2\varepsilon h$, vamos optar por uma distribuição exponencial $P(\ell) = Ae^{-B\ell}$ com $\ell > 0$, que tenha média mh e variância $2\varepsilon h$, para isto temos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty Ae^{-B\ell} d\ell &= A/B = 1, \\ \int_0^\infty \ell Ae^{-B\ell} d\ell &= A/B^2 = mh, \\ \int_0^\infty \ell^2 Ae^{-B\ell} d\ell &= 2A/B^3 = 2\varepsilon h + (mh)^2; \quad E(X^2) = Var(X) + E^2(X). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Neste caso teremos apenas valores positivos, pois ao utilizarmos o método da inversão iremos obter $\ell = -\frac{1}{B} \ln(1 - \frac{B}{A}r)$, onde $A = B$, e r é um número aleatório entre 0 e 1. Determinando A e B , em termos dos valores 2ε e m , que em princípio são valores de nosso conhecimento por se tratarem das propriedades estatísticas do ruído, a variância e a média do ruído respectivamente, obtemos resolvendo no sistema de equações para A e B em termos de 2ε e m que $A = B = \frac{m}{2\varepsilon}$. Entretanto, uma distribuição exponencial não parece ser a melhor das escolhas pois ela possui apenas dois parâmetros livres, entretanto, se considerarmos h como uma variável, obtemos $h = \frac{2\varepsilon}{m^2}$. Outras escolhas, como uma distribuição uniforme $P(\ell) = C$ para $A < \ell < B$ e $P(\ell) = 0$ fora do intervalo referido, para que possua a média e a variância adequadas deve atender $\int_A^B C d\ell = C(B - A) = 1$, $\int_A^B C \ell d\ell = \frac{C}{2}(B^2 - A^2) = mh$, $\int_A^B C \ell^2 d\ell = \frac{C}{3}(B^3 - A^3) = 2\varepsilon h + (mh)^2$, de onde obtemos $A = mh - \sqrt{6\varepsilon h}$, $B = mh + \sqrt{6\varepsilon h}$, $C = \frac{1}{2\sqrt{6\varepsilon h}}$, novamente para obtermos um ruído sempre positivo é preciso $B > A > 0$, o que gera um vínculo não desejado para h , $h > \frac{6\varepsilon}{m^2}$, uma

terceira escolha da forma $P(\ell) = A\ell^B e^{-C\ell}$, também necessariamente implicaria em $h > \frac{2\varepsilon}{m^2}$, neste casos impor alguma restrição sobre os possíveis valores do ruído ocasiona um vínculo sobre o parâmetro h que passa a possuir um valor mínimo, o que pode ser um empecilho a utilização do método de Milstein, haja vista que do ponto de vista numérico, um valor de h não suficientemente pequeno pode fornecer resultados imprecisos.

Ainda no contexto do comportamento esperado pelo deslocamento animal, as distribuições de tamanhos de passos devem obedecer algumas condições razoáveis, como $P(\ell \rightarrow \infty) = 0$ devido às restrições realistas impostas pelo ambiente à dinâmica do movimento, bem como possuir os momentos até o segundo momento finitos. Podemos comentar também para ruídos multiplicativos, como $G(\ell) = \ell$, que embora valores elevados de ℓ tendam a fazer a dinâmica divergir, temos primeiro que devido ao termo estocástico ser alternado pelo ruído (oscilando frequentemente no tempo entre valores positivos e negativos) que, ao menos da perspectiva da interpretação de Itô, esse termo tende a gerar uma contribuição de média nula, e segundo que ao impor o termo estritamente determinístico a ser da forma $F(\ell \rightarrow \infty) = -\infty$, asseguramos, comumente com um grau de maior potência, uma variação negativa o suficiente grande tanto quanto for o tamanho do passo. No entanto, apesar dessa condição ser necessária para evitar $\ell = \infty$, não é suficiente para assegurar que a distribuição seja normalizável, visto que esta, por exemplo, também deve anular-se no infinito mais rapidamente que uma função da forma $1/\ell$. Essas características influem decisivamente na taxa de difusão da trajetória animal.

Como exemplo temos a eq.(3.10), com $a > 0$ ($F(\ell \rightarrow \infty) = -\infty$) para o caso $G(\ell) = \ell$, no qual a solução estacionária via equação de Fokker-Planck na interpretação de Itô fornece

$$P(\ell) = \frac{\mathcal{N}^{-1}}{\ell^{2+a/\varepsilon}}, \quad (3.19)$$

onde \mathcal{N} seria uma constante de normalização, para o qual teríamos $P(\ell \rightarrow \infty) = 0$, todavia a eq.(3.19) não é normalizável uma vez que $\int_0^\infty P(\ell)d\ell = \infty$, e não só, mas também todos os demais momentos de ordem maior, $\langle \ell^m \rangle = \int_0^\infty \ell^m P(\ell)d\ell$, divergem, independentemente das escolhas dos parâmetros a e ε . É importante notar que não podemos nesta integral apenas restringir o limite superior da integração para um valor fixo $\ell_{máx}$, pois a princípio a dinâmica que gera a distribuição na eq.(3.19) não restringe qualquer ℓ desde que positivo. Neste exemplo a divergência não é devida a convenção usada, optássemos pela convenção de Stratonovich, obteríamos como resposta $P(\ell) = \frac{\mathcal{N}^{-1}}{\ell^{1-a/\varepsilon}}$ que é igualmente não normalizável. Neste caso a adição, por exemplo, de termos não lineares em $F(\ell)$ resulta em PDFs normalizáveis.

Junto aos vínculos necessários, analisaremos as consequência da eq.(3.1) de acordo com a escolha de $G(\ell)$, do grau de não linearidade de $F(\ell)$, e das propriedades estatísticas do ruído, para quando estas são homogêneas ou também evoluem ao longo do andar do animal. Assim, a depender do grau de variabilidade do meio podemos empregar uma

superestatística formada pela superposição de uma distribuição em ℓ , $P(\ell|\varepsilon)$, ponderada por uma função de ε , $f(\varepsilon)$, ou uma abordagem baseada na mistura estatística de várias distribuições.

3.1 Estatística de Ruído Homogêneo

Na estatística de ruído homogêneo consideramos que a intensidade do ruído definida por ε é a mesma por toda a trajetória percorrida pelo animal. Assim, cada realização da variável aleatória ξ é caracterizada pela mesma distribuição Gaussiana de média nula e variância 2ε . Nesta idealização imaginamos o ambiente como sendo aproximadamente estático no tempo e uniforme no espaço. Situações em que o meio possua elevado grau de heterogeneidade ou que variem rapidamente no tempo serão consideradas posteriormente.

Anteriormente analisamos dois casos particulares para escolhas das funções $F(\ell)$ e $G(\ell)$, um para o caso de ruído aditivo e outro para o ruído multiplicativo com termo de arrasto estritamente linear, em ambos os exemplos não obtivemos as propriedades desejadas para uma distribuição $P(\ell)$ fidedigna. Vimos primeiro que é necessário $G(0) = 0$ para evitar flutuações negativas neste instante que ocasionem $\ell < 0$. Assim, por exemplo, partindo da condição inicial $\ell(0) = 0$, temos $d\ell = F(0)dt$, para tanto, sendo $F(0) > 0$ obtemos um valor positivo não nulo para o ℓ subsequente. Então definimos $F(\ell)$ tal que $F(0) = c > 0$ em dois cenários, $c \neq 0$ e $c \rightarrow 0^+$, o segundo caso compreende a condição inicial $\ell(0) > 0$ ($\ell(0) \neq 0$), para o qual o valor de ℓ , gerado por uma equação contínua, nunca é rigorosamente zero, e assim podemos ter $c = 0$.

O conjunto de distribuições $P(\ell)$ obtidas em cada situação, será discutido tendo em vista as principais distribuições de tamanhos de passo consideradas na literatura da ecologia do movimento.

3.1.1 Ruído Linear

A escolha mais simples para representar a estatística de ruído homogêneo é dada pela função linear $F(\ell) = c - a\ell$, junto ao ruído multiplicativo linear $G(\ell) = \ell$, onde ao menos na interpretação de Itô ainda esperamos $a > 0$ para uma média finita, enquanto em termos gerais ainda temos $c > 0$ para $\ell > 0$. A distribuição para os tamanhos de passos $P(\ell)$ pode ser obtida através da solução estacionária da equação de Fokker-Planck na convenção de Itô, eq.(3.8), associada à equação de Langevin, eq.(3.1), e assim obtemos

$$P(\ell) = \mathcal{A}^{-1} \frac{e^{-c/\ell}}{\ell^{2+a/\varepsilon}}, \quad (3.20)$$

onde \mathcal{A} é uma constante de normalização que fornece uma variância finita para $P(\ell)$ desde que $a/\varepsilon > 1$, como vimos na eq.(3.19) o caso $c \rightarrow 0^+$ gera uma distribuição não normalizada.

Além de continuarmos obtendo distribuições normalizáveis, podemos introduzir em $F(\ell)$ algum grau de não linearidade a fim de obtermos funções mais genéricas. Assim, podemos reescrever o termo determinístico de forma conveniente para

$$F(\ell) = c + a\ell - b\ell^{1+\gamma}, \quad (3.21)$$

ainda com $c > 0$. No entanto, não é mais evidente que o parâmetro a seja necessariamente positivo (por isso redefinido apenas como $+a$), enquanto isso espera-se que o parâmetro b deva assumir valores positivos para $\gamma > 0$, mas que possa ser negativo para $-1 < \gamma < 0$ quando em geral a contribuição do terceiro termo é menor que a do segundo (que precisa ser negativo). Optamos por escolher apenas $\gamma \geq -1$ para evitar singularidades diretamente na função $F(\ell)$, embora um termo do tipo $-b/\ell$ possa operar na prática como uma barreira refletora, desde que $b < 0$ e $\ell(0) > 0$. Além disso temos $\gamma \neq 0$ e $b \neq 0$ para distinguir do caso anterior. Destas circunstâncias resulta que os valores de a e b podem ser tanto positivos quanto negativos, como discutiremos de maneira mais precisa com base na solução estacionária. De fato, a característica não linear adicionada pelo termo extra pode representar uma contribuição realista, pois ao longo do movimento, o animal além de submetido a efeitos estocásticos, fica sujeito à vários fenômenos complexos que são usualmente não lineares. Além disso, também discutiremos a perspectiva dos parâmetros desse modelo no contexto do deslocamento animal.

Consideramos primeiro a eq.(3.21) com $c \rightarrow 0^+$ na dinâmica de Langevin eq.(3.1), com ruído linear $G(\ell) = \ell$. Assim, a solução estacionária da equação de Fokker-Planck na convenção de Itô fornece a distribuição normalizável

$$P(\ell) = \mathcal{N}^{-1} \frac{\exp[-b\ell^\gamma/(\gamma\varepsilon)]}{\ell^{2-a/\varepsilon}}, \quad (3.22)$$

onde a constante de normalização é dada por $\mathcal{N} = \frac{1}{|\gamma|} \Gamma[(a/\varepsilon - 1)/\gamma] (b/\gamma\varepsilon)^{-(a/\varepsilon - 1)/\gamma}$, e Γ denota a função Gama $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-y} y^{x-1} dy$, $x > 0$, notamos que os valores dos parâmetros na eq.(3.22) não podem ser completamente arbitrários. Por exemplo, haja vista que $\varepsilon > 0$, a definição de função Gama requer $b/\gamma > 0$ para uma distribuição real, além do mais, é necessário para a condição de normalização que o argumento da função Γ seja positivo, assim $(a/\varepsilon - 1)/\gamma > 0$. Ainda temos devido a imposição realística de que o segundo momento deve ser finito que $(a/\varepsilon + 1)/\gamma > 0$. Notamos que agora podemos construir uma distribuição gaussiana desde que $a/\varepsilon = 2$ e $\gamma = 2$ precisamente apenas com argumento positivo, portanto sem o inconveniente de passos negativos que foram obtidos utilizando ruídos aditivos na eq.(3.5).

Notamos que, a partir da eq.(3.22), podemos obter diversos tipos de distribuições de tamanhos de passos, como exemplos temos parte delas representadas nas expressões de 1 a 9 na Tabela 1. Segue-se que as novas possibilidades criadas pela introdução de ruídos multiplicativos e efeitos não lineares proporciona uma variedade de distribuições que

incluem algumas das mais relevantes consideradas na literatura da ecologia do movimento [3, 6, 7, 11]. Por exemplo, temos que as distribuições Gaussianas e exponenciais são amplamente usadas no contexto em modelos de caminhadas aleatórias para o movimento animal, incluindo caminhadas aleatórias correlacionadas e caminhadas aleatórias com tendência [7, 99]. Distribuições exponenciais também aparecem em padrões de movimento de várias espécies de predadores marinhos em águas com alta disponibilidade de alimentos, ao passo que em regiões escarsas em recursos distribuições de lei de potência truncadas são obtidas [100, 101]. Além dessas, funções hiper-exponenciais são consideradas no estudo do deslocamento de mexilhões [25] e abelhas [102], enquanto leis de potência são registradas na dinâmica do movimento de algumas espécies de macacos [103] e nemátodos [104]. Por outro lado, distribuições exponenciais atenuadas (Weibull) estão presente no padrão de movimento de diversas espécies de abelhas [102] e alces [13]. Também temos leis de potência [105] e distribuições gama [14] na descrição de dados obtidos para os comprimentos dos passos de albatrozes em seus voos.

No contexto da análise de dados obtidos para tamanhos de passos no movimento animal, discutiremos agora sobre a interpretação dos parâmetros do modelo, ou seja da proposta da equação de Langevin original que determina a dinâmica tratada neste trabalho. Primeiro argumentamos que os parâmetros que definem as funções $F(\ell)$ e $G(\ell)$ são intrinsecamente dependentes da natureza específica de cada ser, no sentido que refletem os diferentes impulsos presentes na forma habitual de deslocarem-se no meio ambiente, e que são particulares à cada espécie animal. Todavia, destacamos que estamos principalmente interessados em abordar este problema na perspectiva da física estatística, sem preocupações maiores com relação aos detalhes inerentes a cada animal em particular, e assim buscamos por uma descrição baseada apenas em comportamentos médios. Neste sentido, é importante destacar que embora seja ampla a quantidade de diferenças presente nas mais diversas espécies, a diversidade estatística dos padrões de movimento e das distribuições de tamanhos de passos não é tão grande quanto poderia-se imaginar de início [3, 6, 7, 11, 12, 19, 106].

Podemos constatar analisando a distribuição $P(\ell)$ na eq.(3.22) que esta é determinada apenas por três parâmetros independentes, $\bar{a} = a/\varepsilon$, $\bar{b} = b/\varepsilon$, e γ . Em outras palavras, a intensidade do ruído ε atua como um fator de normalização para os coeficientes a e b presentes no termo determinístico $F(\ell)$ definido na eq.(3.21) para $c = 0^+$. Além disso, a escala característica de $P(\ell)$ pode ser inferida pela eq.(3.22) como sendo $\bar{\ell} = (\gamma/\bar{b})^{1/\gamma}$, que é uma grandeza que pode ser determinada por meio de dados experimentais. Consistentemente temos que $\bar{\ell}$ depende somente das propriedades estatísticas do ruído e da componente não linear da função $F(\ell)$ caracterizada pelos valores de b e γ . Notamos que uma distribuição sem escala característica é obtida (no caso $c \rightarrow 0^+$), sob a forma de uma lei de potência, apenas na ausência de não linearidades, que entretanto é não normalizável como na eq.(3.19). Por outro lado, para $c \neq 0$ ainda temos uma escala característica

Tabela 1 – Sumário de algumas funções densidade de probabilidades de tamanhos de passos, originadas a partir da solução estacionária correspondente à forma geral da dinâmica de Langevin apresentada na eq.(3.1), as expressões 1-12 pertencem à categoria de ruídos homogêneos ao longo de toda a trajetória do animal, em particular para 1-10 temos $c \rightarrow 0^+$ além de $G(\ell)$ linear, e $G(\ell)$ não linear para 11 e 12, ao passo que as distribuições 13 e 14 estão relacionadas a algum grau de inhomogeneidade do meio, quando a estatística de ruído heterogêneo é utilizada.

Distribuição	Expressão matemática	Parâmetros
1. Exponencial	$P(\ell) = \frac{b}{\varepsilon} \exp[-b\ell/\varepsilon]$	$\gamma = 1, b > 0, a/\varepsilon = 2$
2. Gaussiana ($\ell \geq 0$)	$P(\ell) = \sqrt{\frac{2b}{\pi\varepsilon}} \exp[-b\ell^2/(2\varepsilon)]$	$\gamma = 2, b > 0, a/\varepsilon = 2$
3. Weibull	$P(\ell) = \frac{b}{\varepsilon} \frac{\exp[-b\ell^\gamma/(\gamma\varepsilon)]}{\ell^{1-\gamma}}$	$0 < \gamma \neq 1, b > 0, a/\varepsilon = 1 + \gamma$
4. Gama	$P(\ell) = \mathcal{N}^{-1} \frac{\exp[-b\ell/\varepsilon]}{\ell^{2-a/\varepsilon}}$	$\gamma = 1, b > 0, a/\varepsilon > 1$
5. Gama inversa	$P(\ell) = \mathcal{N}^{-1} \frac{\exp[- b /(\varepsilon\ell)]}{\ell^{2-a/\varepsilon}}$	$\gamma = -1, b < 0, a/\varepsilon < -1$
6. Gama generalizada	$P(\ell) = \mathcal{N}^{-1} \frac{\exp[-b\ell^\gamma/(\gamma\varepsilon)]}{\ell^{2-a/\varepsilon}}$	$\gamma > 0, b > 0, a/\varepsilon > 1$
7. Gama inversa na potência	$P(\ell) = \mathcal{N}^{-1} \frac{\exp[-b\ell^{- \gamma }/(\gamma\varepsilon)]}{\ell^{2-a/\varepsilon}}$	$-1 < \gamma < 0, b < 0, a/\varepsilon < -1$
8. Qui-quadrado	$P(\ell) = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} \frac{\exp(-\ell/2)}{\ell^{1-k/2}}$	$\gamma = 1, \varepsilon/b = 2, a/\varepsilon = 1 + k/2, k = 1, 2, \dots$
9. Rayleigh generalizada	$P(\ell) = \left(\frac{b}{2\varepsilon}\right)^{k/2} \frac{2}{\Gamma(k/2)} \frac{\exp(-b\ell/2\varepsilon)}{\ell^{1-k}}$	$\gamma = 2, b > 0, a/\varepsilon = 1 + k, k = 1, 2, \dots$
10. Lei de potência atenuada	$P(\ell) = \tilde{\mathcal{N}}^{-1} \frac{\exp[-b\ell^\gamma/(\gamma\varepsilon)]}{(\ell+\ell_0)^{v/\varepsilon} \ell^{2-a\varepsilon}}$	$\gamma > 0, b > 0; a, \varepsilon, \text{ e } v \text{ referenciados no texto}$
11. GIG esticada	$P(\ell) = \tilde{\mathcal{N}}^{-1} \frac{\exp[-\alpha_x \ell^x - \alpha_y \ell^y]}{\ell^{1-p}}$	$\alpha_x > 0, \alpha_y > 0; \text{ GIG: } \alpha_x = 1, \alpha_y = 1;$
12. Beta	$P(\ell) = \mathcal{C} \left(\frac{\ell}{\ell_{m\acute{a}x}}\right)^{\delta-1} \left(1 - \frac{\ell}{\ell_{m\acute{a}x}}\right)^{\beta-1}$	$\ell < \ell_{m\acute{a}x}; \delta \text{ e } \beta \text{ referenciados no texto}$
13. Distribuição de Bessel	$P(\ell) = \mathcal{N}'^{-1} \ell^\omega K_{\omega-1}(b\ell)$	$\gamma = 2, b > 0, \omega > 0, \bar{b}^2 = 2b\omega > 0$
14. Hiper-exponencial	$P(\ell) = \sum_{i=1}^s \frac{\omega_i}{\lambda_i} e^{-\ell/\lambda_i}$	$\lambda_i > 0, \omega_i > 0, \sum_{i=1}^s \omega_i = 1$

Fonte : O autor (2020)

definida, no regime linear pelo próprio valor de c veja eq.(3.20), isto é do incremento de passo gerado quando $\ell = 0$, e que aparece como uma escala natural para o problema. Notamos que o termo determinístico dado pela eq.(3.21) para $\gamma = -1$ pode gerar uma solução semelhante à eq.(3.20) com os devidos ajustes nas condições de normalização.

Ainda sobre a forma funcional da distribuição $P(\ell)$ temos que está é definida por ambas componentes determinísticas e estocásticas. Nota-se que enquanto ambos atuam juntos para fornecer a dependência por parte da lei de potência na eq.(3.22) via o parâmetro $\bar{a} = a/\varepsilon$, a forma funcional da exponencial atenuada de $P(\ell)$, que esta diretamente

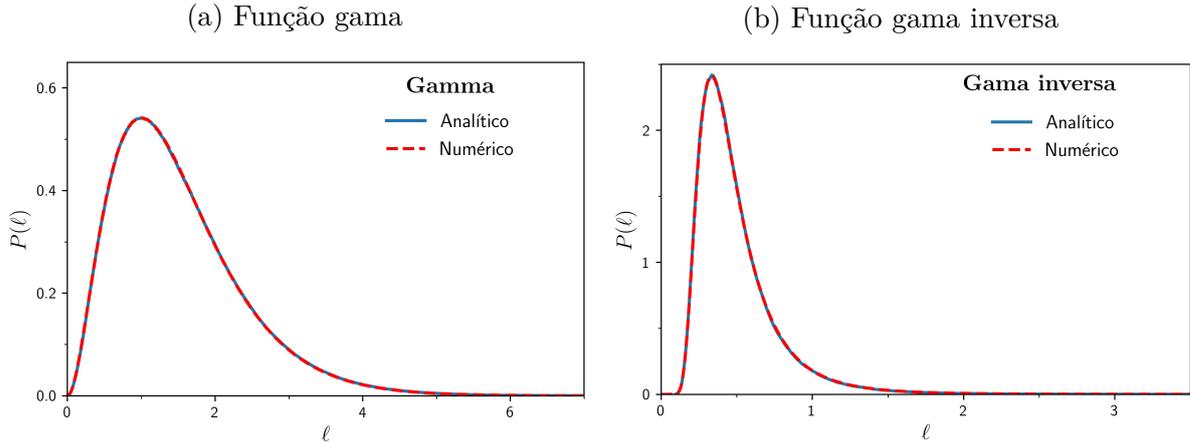
relacionada à possibilidade de obtenção de distribuições com variância finita, é composta apenas como uma função de $\ell/\bar{\ell}$ cuja potência é dada pelo mesmo expoente γ do termo não linear. Comentamos que devido ao fato das contribuições dos termos determinísticos e estocásticos serem marcadamente diferenciados, seria possível uma análise baseada apenas em dados experimentais submetidos a algum tipo de método estatístico para estimar os melhores parâmetros. Assim, o método da máxima verossimilhança (*maximum likelihood estimation*), ou o critério de informação de Akaike (*Akaike information criterion*, AIC) [7, 12] podem fornecer alguma informação sobre o tipo e a intensidade da não linearidade associada com o termo determinístico do movimento, e também das propriedades estatística do ruído em questão.

Na figura 8 mostramos dois casos particulares das expressões exibidas na tabela 1, a distribuição gama fig.(8a), e a distribuição gama inversa fig.(8b), cada par de curvas visa comparar a solução estacionária $P(\ell)$, eq.(3.22), e a solução por simulação numérica obtida através do método de Milstein [82] da equação de Langevin correspondente, eq.(3.1). Uma vez que estamos interessados apenas na solução estacionária, podemos nos valer da hipótese de ergodicidade e proceder como se segue: a partir de uma configuração inicial finita $\ell_0 \neq 0$ teremos após $N_t = 10^6$ iterações do procedimento de Milstein, utilizando um pequeno incremento de tempo $h = 10^{-3}$, que dentro de um intervalo de tempo de $\Delta t = N_t h = 10^3$ o regime estacionário da dinâmica de Langevin, eq.(3.1), é aproximadamente alcançado fornecendo subsequentemente os valores de ℓ . Assim um *ensemble* de 10^8 comprimentos de passos foram computados em cada solução numérica da figura 8.

Passaremos a discutir as consequências da dinâmica do movimento regida pela eq. (3.1), com a distribuição de comprimentos de passos dados pela eq.(3.22). Sendo o segundo momento da distribuição $P(\ell)$ finito, o teorema central do limite (*central limit theorem*, CLT) assegura que a distribuição da soma de n tamanhos de passo converge para uma gaussiana para um número suficientemente grande de n . Neste caso, a dinâmica do movimento é difusiva, significando que a raiz do valor quadrático médio (*médio root mean square*, rms) da distância percorrida após um dado tempo, ou após N passos, comporta-se após algum período transiente como $x_{rms} \sim t^\nu \sim N^\nu$, onde $\nu = 1/2$ é o expoente de difusão [11, 12].

De outra forma, do ponto de vista estatístico podem existir dinâmicas de difusões anômalas, quando o deslocamento quadrático médio, x_{rms}^2 , comporta-se de maneira não linear no tempo, de forma subdifusiva quando $\nu < 1/2$ ou superdifusiva quando $\nu > 1/2$. De fato, no contexto do TCL generalizado, uma partícula em uma caminhada aleatória com tamanhos de passos distribuídos segundo uma distribuição $P(\ell)$ pode apresentar comportamento anômalo na taxa de difusão, que fisicamente podemos relacionar com uma maior ou menor capacidade de exploração do ambiente por parte da partícula em relação à um processo de busca gaussiano. Em particular, as distribuições $P(\ell)$ relacionadas à

Figura 8 – Comparativo entre o resultado analítico para a distribuição de tamanhos de passos $P(\ell)$, eq.(3.22), obtido via solução estacionária da equação de Fokker-Planck na prescrição de Itô, e o resultado numérico obtido a partir da dinâmica de Langevin, eq.(3.1), utilizando o método de Milstein. Temos a distribuição gama (expressão 4 na Tabela 1) com parâmetros $\gamma = 1$, $a = 2$, $b = 1$, $\varepsilon = 1/2$ em (a), e a distribuição gama inversa (expressão 5 na Tabela 1) com parâmetros $\gamma = -1$, $a = -2$, $b = -1$, $\varepsilon = 1/2$ em (b). Um *ensemble* de 10^8 comprimentos de passo $\{\ell\}$ foram contabilizados em cada figura.



Fonte : O autor (2020)

processos superdifusivos apresentam variância infinita e nesse caso a soma de um grande quantidade n de tamanhos de passos converge para a família de distribuições de Lévy α -estáveis [11, 12]. O parâmetro de Lévy α pode assumir valores de $0 < \alpha \leq 2$, onde o caso exato $\alpha = 2$ corresponde à volta da distribuição Gaussiana prevista pelo resultado do TCL.

O TCL generalizado pode manifestar-se como exemplificado a seguir: um caminhante aleatório que apresente uma distribuição $P(\ell)$ para o comprimento dos passos que seja contínua e diferenciável sem apresentar nenhuma singularidade crucial na origem que impossibilite a normalização, e que apresente um comportamento assintótico para $\ell \rightarrow \infty$, vez que estaremos majoritariamente interessados na ocorrência de passos longos, na forma de uma distribuição de cauda longa como uma lei de potência, $P(\ell) \sim \ell^{-\mu}$. Temos então que, se o expoente da lei de potência é dado por $1 < \mu < 3$, a distribuição é normalizável, porém seu segundo momento é infinito, tal que a soma dos n tamanhos de passos tendem à distribuição de Lévy com índice de estabilidade $\alpha = \mu - 1$. Do modo contrário, se $\mu > 3$ a variância também é finita e a dinâmica passa a ser dirigida pelas previsões do TCL, o caso marginal $\mu = 3$ enquadra-se também no limite Gaussiano $\alpha = 2$.

Sabemos, do ponto de vista realístico, que o movimento de qualquer animal deve ser regido por uma dinâmica associada à uma distribuição $P(\ell)$ com segundo momento finito, por maior que este valor seja em relação as dimensões físicas do problema, dado que sempre

há um tamanho de passo limitante justificável pela presença de vínculos comportamentais, biológicos ou do próprio meio em que o animal se encontra. Todavia, isto não significa que regimes superdifusivos não são observados na natureza. Efetivamente, é estabelecido na literatura da ecologia do movimento que sobre certas condições como, por exemplo, em regiões com poucos recursos disponíveis, dinâmicas superdifusivas são encontradas em análises de dados experimentais coletados a partir dos padrões de movimentos de diversas espécies de animais [11, 12, 100, 101, 103, 107, 108]. Entretanto, é importante destacar que comportamentos superdifusivos são na prática limitados, em trajetos reais, pelas próprias escalas ecológicas, de fato um melhor entendimento das extensões das escalas onde os regimes superdifusivos ocorrem ajudaria na compreensão dos componentes relevantes ao movimento animal [24]. Assim sendo, comportamentos dinâmicos superdifusivos como os relacionadas as distribuições de Lévy não podem estender-se indefinidamente, posto que a variância da distribuição $P(\ell)$ tem que ser finita para um retrato factual de um deslocamento animal. Logo de acordo com o TCL a convergência para a difusão normal (Gaussiana) irá necessariamente ocorrer, mesmo embora possa demorar um longo período de tempo para convergir [109]. Tal mudança de comportamento entre o regime superdifusivo e o regime Gaussiano é o que daqui em diante chamaremos de dinâmica por superdifusão limitada.

As dinâmicas de superdifusão limitada mais simples são geradas com base em distribuições de leis de potências truncadas $P(\ell) \sim \ell^{-\mu}$ que possuem um valor de limite superior $\ell_{máx}$ e inferior $\ell_{mín}$ (tal que $P(\ell) = 0$ se $\ell > \ell_{máx}$ ou $\ell < \ell_{mín}$) ou por um fator de atenuação que atue para valores grandes de ℓ , como por exemplo uma exponencial negativa tal que $P(\ell) \sim \ell^{-\mu} \exp(-\lambda\ell)$, onde a ocorrência de valores de ℓ cada vez maiores é favorecida por valores menores de $\lambda > 0$, embora a rigor o exato limite $\lambda = 0$ possa não ser de interesse por não gerar uma distribuição normalizável. Veremos algo mais sobre isso posteriormente na seção sobre ruído não linear. Em ambos os casos, o movimento animal da correspondente $P(\ell)$ apresenta uma dinâmica, que pode apresentar uma região superdifusiva aos moldes da distribuição de Lévy, desde que $1 < \mu < 3$, com convergência aguardada para o regime de difusão normal após uma determinada quantidade de passos como requerido pela TCL.

No modelo proposto pela equação de Langevin eq.(3.1) uma dinâmica superdifusiva pode ser obtida. Para tanto, adicionaremos à função $F(\ell)$ na eq.(3.21) um novo termo $-\frac{v\ell^2}{\ell+\ell_0}$, tal que para $c = 0$ teremos

$$F(\ell) = a\ell - b\ell^{1+\gamma} - \frac{v\ell^2}{\ell + \ell_0}, \quad (3.23)$$

que reduz-se ao caso anterior para $v = 0$. Para $v \neq 0$ o termo extra interpola um comportamento quadrático e outro linear respectivamente para valores grandes e pequenos de ℓ em comparação ao valor de ℓ_0 , desse modo obtemos como solução estacionária na

interpretação de Itô, eq.(3.8), que

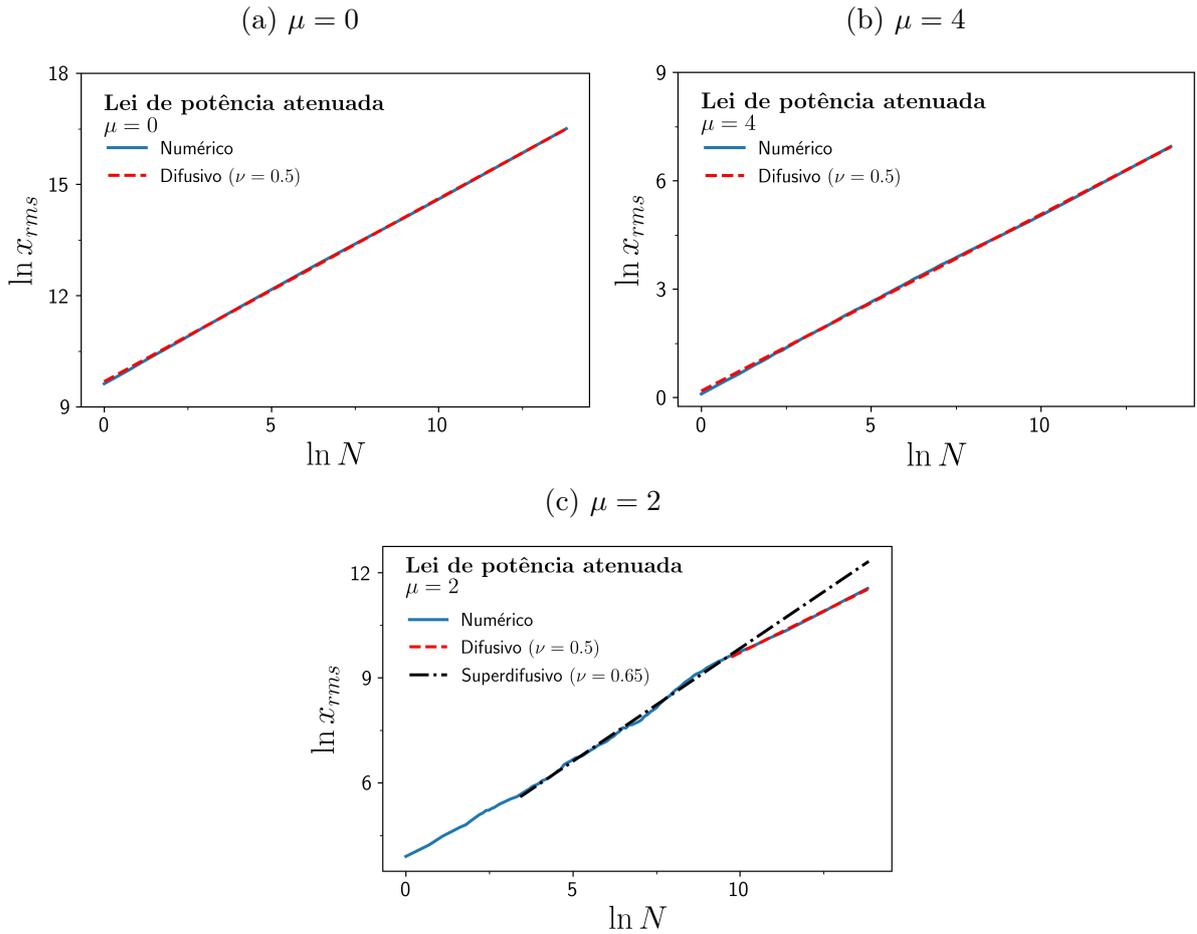
$$P(\ell) = \bar{\mathcal{N}}^{-1} \frac{\exp[-b\ell^\gamma/(\gamma\varepsilon)]}{(\ell + \ell_0)^{v/\varepsilon} \ell^{2-a/\varepsilon}}, \quad (3.24)$$

isto é, uma distribuição de lei de potência atenuada como pode ser visto na expressão 10 da Tabela 1, onde $\bar{\mathcal{N}}$ é uma constante de normalização. Porém, neste caso não conseguimos obter a expressão analítica para $\bar{\mathcal{N}}$, mesmo assim é possível saber quais são as condições necessárias para que $\bar{\mathcal{N}}$ seja finito, e a distribuição $P(\ell)$ na eq.(3.24) apresente variância finita, podemos fazer isto seguindo três regras básicas: (i) a função deve anular-se no infinito mais rapidamente que a função recíproca $1/\ell$, (ii) ter valor finito na origem, ou caso a função divirja em $\ell = 0$ deve ser de maneira mais lenta que $1/\ell$, (iii) não apresentar outras singularidades no intervalo aberto $]0, \infty[$. De onde concluímos que devemos ter $\ell_0 > 0$, $\frac{b}{\gamma} > 0$ e $\frac{a-v}{\varepsilon} < -1$ para $-1 < \gamma < 0$, ou $\frac{a}{\varepsilon} > 1$ para $\gamma > 0$. O comportamento assintótico de ℓ tendendo ao infinito na eq.(3.24) é uma distribuição de lei de potência atenuada, similar a segunda forma referida anteriormente sobre as maneiras possíveis de gerar dinâmicas por superdifusão limitada $P(\ell) \sim \ell^{-\mu} \exp(-\lambda\ell^\gamma)$, com o expoente da lei de potência sendo dado por $\mu = 2 - \frac{a-v}{\varepsilon}$. Em particular, quando $1 < \mu < 3$ um regime superdifusivo limitado pode ser obtido para $\gamma > 0$, $b > 0$ e $\varepsilon < a < v + \varepsilon$, se $0 < \frac{a}{\varepsilon} < 2$, ou $v - \varepsilon < a < v + \varepsilon$, se $\frac{a}{\varepsilon} > 2$. Entretanto para $-1 < \gamma < 0$ temos que $\frac{a-v}{\varepsilon} < -1$, portanto $\mu = 2 - \frac{a-v}{\varepsilon} > 3$. O mesmo ocorre para a distribuição $P(\ell)$ na eq.(3.22) em que as tentativas de obter o expoente μ no intervalo superdifusivo entram em contradição com as exigências de normalização ou de segundo momento finito. Por exemplo, na função gama, expressão 4 da tabela 1, a restrição de variância finita $a/\varepsilon > 1$ resulta em $\mu = 2 - a/\varepsilon < 1$, implicando que a distribuição de tamanhos de passos $P(\ell)$ na eq.(3.22) está relacionada apenas às dinâmicas difusivas normais.

O comportamento superdifusivo limitado resultante da lei de potência atenuada $P(\ell)$, eq.(3.24), pode ser observada a partir dos resultados obtidos via simulações numéricas como exibido na fig.(9) através da utilização do método de Milstein na equação de Langevin, eq.(3.1). Neste caso a escolha de alguns dos parâmetros, $\gamma = 2$, $\varepsilon = 1$, $b = 10^{-4}$ foi feita de tal modo a simplificar o expoente μ para $\mu = v$, assim o comportamento assintótico é dado por $P(\ell) \sim \ell^{-\mu} \exp(-\lambda\ell^\gamma)$ com $\gamma = 1$, e $\lambda = b$. Na simulação numérica um caminhante aleatório, com tamanhos de passo gerados pela dinâmica de Langevin correspondente à solução estacionária $P(\ell)$, inicia seu trajeto num espaço unidimensional a partir da origem, $x = 0$, e então sua posição x_N após N passos é dada por $x_N = \sum_{j=1}^N u_j \ell_j$, onde a variável u_j assume os valores de $u_j = +1$ ou $u_j = -1$ sorteados com igual probabilidade, ou seja há isotropia em relação à direção do movimento. Assim, a fig.(9) apresenta a distância quadrática média do caminhante x_{rms} em termos do número N de passos efetuados. Nas figuras (9a, 9b) temos respectivamente $\mu = 4$ e $\mu = 0$ na eq.(3.24), portanto fora do regime superdifusivo $1 < \mu < 3$, e para o qual após a média sobre uma quantidade, em cerca de

$10^4 - 10^6$ realizações, logo estabelece-se uma difusão gaussiana com expoente $\nu = 0,50$, que permanece a mesma por toda a extensão dos valores de N .

Figura 9 – Dinâmica do movimento de uma partícula em uma caminhada aleatória com os tamanhos de passos advindos da equação de Langevin que resulta na distribuição estacionária $P(\ell)$ na eq.(3.24), cujo comportamento assintótico de $\ell \rightarrow \infty$ resulta em $P(\ell) \sim \ell^{-\mu} \exp(-\lambda \ell^\gamma)$, com o expoente da lei de potência dado por $\mu = 2 - \frac{a-v}{\varepsilon}$ e $\lambda = b/(\gamma\varepsilon)$, os parâmetros utilizados neste exemplo foram $\gamma = 1$, $a = 2$, $b = 10^{-4}$, $\varepsilon = 1$, $\ell_0 = 1$, tal que $\mu = v$ e $\lambda = b$. Os resultados numéricos foram obtidos via simulações da dinâmica de Langevin, eq.(3.1), por meio do método de Milstein. A distância quadrática média do caminhante $x_{rms} \sim N^\nu$ é mostrada como função do número de passos N realizados até então, onde ν é o expoente de difusão. Para $\mu = v = 4$ (a) e para $\mu = v = 0$ (b) a dinâmica da difusão é normal desde o começo como indicado pela regressão linear de coeficientes angular 0,50, em oposição temos o caso $\mu = 2$ (c) pertencente a região superdifusiva $1 < \mu < 3$, que apresenta uma região superdifusiva $\nu = 0,65$ antes de atingir em definitivo a região difusiva $\nu = 0,50$ como prevê o TCL.



Por outro lado, a fig.(9c) evidencia um comportamento diferente quando $\mu = v = 2$. Neste caso, antes de atingir o regime difusivo normal com $\nu = 0,50$ para $N \gtrsim 8 \times 10^3$,

existe um regime superdifusivo com $\nu = 0,65$ no intervalo aproximado de $5,4 \times 10^1 \leq N \leq 8,1 \times 10^3$. Ao menos do ponto de vista teórico seria esperado que o expoente ν aumentasse quando o parâmetro γ decrescesse, embora o valor esperado de um regime balístico $\nu = 1$, para um caminhante aleatório conforme a distribuição de Lévy $P(\ell) \sim \ell^{-2}$ com $\gamma \rightarrow 0$, e índice de Lévy $\alpha = \mu - 1 = 1$ não tenha sido obtido nestas simulações.

A solução assintótica esperada $\ln x_{rms} = f(\ln N)$ pode ser estimada sabendo-se que a distribuição estacionária $P(l)$ possui média e variância finitas. Então esperamos pelo teorema central do limite que a função f deve ser uma reta na variável $\ln N$ com inclinação $0,50$, tal que $\ln x_{rms} = 0,50 \ln N + \tilde{c}$. Agora vamos imaginar o primeiro passo, aquele que ocorre no tempo $t = h$, neste instante $x(h) = \ell \rightarrow \langle x(h) \rangle = \langle l \rangle = 0$, embora a média de l , $\langle l \rangle$, seja de fato igual a: $\langle l \rangle = \int_0^\infty l P(l) dl$, devemos atribuir seu valor como sendo zero devido ao sorteio meio a meio em l que ocorre em cada passo em $x(t+h) = x(t) \pm l$. Por outro lado, $x^2(h) = l^2 \rightarrow \langle x^2(h) \rangle = \langle l^2 \rangle = \int_0^\infty l^2 P(l) dl$ é indiferente ao sinal de l , e assim temos $x_{rms}(h) = \sqrt{\langle l^2 \rangle} = \sqrt{\int_0^\infty l^2 P(l) dl} \equiv l_{rms}$. Agora vamos voltar à solução assintótica $\ln x_{rms} = 0,50 \ln N + \tilde{c}$, e avaliar seu valor em $t = h$, ou seja $N = 1$, tendo em vista que o resultado deve ser $\ln x_{rms}(h) = \ln l_{rms}$, portanto concluímos que $\tilde{c} = \ln l_{rms}$. Assim, a solução assintótica resultante é dada por $\ln x_{rms}(N) = 0,50 \ln N + \ln l_{rms}$, que é a forma exata das expressões utilizadas nas figuras quando nos referimos ao regime difusivo normal.

Uma mudança de variável da forma $\ell \rightarrow \ell - \ell_{\min}$ na eq.(3.1) conduz às mesmas expressões já apresentadas, tal que de $P(\ell) \rightarrow P(\ell - \ell_{\min})$, com a notória diferença que a dinâmica agora proíbe $\ell < \ell_{\min}$, do mesmo modo que antes havia a restrição para $\ell > 0$. Tais distribuições são relativamente recorrentes no modelo estatístico do movimento dos animais, pois é razoável para alguns caso supor que existe um tamanho de passo mínimo, por exemplo, a distribuição gama, com um limite inferior não nulo, é aplicado no modelo do padrão de movimento de albatrozes [105], e distribuições exponenciais, exponenciais esticadas, e de leis de potência truncadas, com um certo ℓ_{\min} definido, são utilizadas no modelo do deslocamento de abelhas [102].

Por fim, a última família de distribuições que abordaremos ainda com ruído linear são aquelas obtidas considerando c positivo e não nulo, $c > 0$, além de $\gamma > -1$ na definição de $F(\ell)$, eq.(3.21). Neste caso, a solução estacionária interpretada por Itô fornece

$$P(\ell) = \tilde{\mathcal{N}}^{-1} \frac{\exp[-b\ell^\gamma/(\gamma\varepsilon) - c/\ell]}{\ell^{2-a/\varepsilon}}, \quad (3.25)$$

onde $\tilde{\mathcal{N}}$ é finito e possibilita uma variância para $P(\ell)$ desde que

- (i) $\gamma > 0, b > 0$,
- (ii) $-1 < \gamma < 0, \frac{a}{\varepsilon} < -1$,

à parte dos já definidos $c > 0$ e $\varepsilon > 0$, os parâmetros não referidos nas condições acima são livres e podem assumir qualquer valor finito. Em particular, para $\gamma = 1$, quando

$F(\ell)$ é uma função quadrática, $P(\ell)$ tem a forma de uma distribuição Gaussiana inversa generalizada (GIG) [110]. A distribuição GIG esticada não tem sido aplicada no contexto da dinâmica do movimento animal, embora possa ser considerada uma generalização da eq.(3.22), uma vez que recupera as distribuições habituais, expressões de 1 à 9 na Tabela 1, no limite $c \rightarrow 0^+$. Uma característica marcante da distribuição apresentada na eq.(3.25) é que a atuação do termo $e^{-c/\ell}$ conduz à uma probabilidade nula para tamanho de passo nulo, independente do expoente da lei de potência, isto é, $P(\ell = 0) = 0$, o que pode ser de interesse junto ao caso discutido referente a um tamanho de passo mínimo.

A condição (ii) impossibilita a obtenção do intervalo $1 < \mu < 3$ pois $\mu = 2 - \frac{a}{\varepsilon} \rightarrow \mu > 3$. Por outro lado, a condição (i) não apresenta qualquer vínculo sobre a , portanto podemos obter o intervalo superdifusivo para $-1 < \frac{a}{\varepsilon} < 1$ como está retratado na fig.(10). Nas figuras (10a, 10b) temos respectivamente $\mu = 4$ e $\mu = 0$ na eq.(3.25), portanto fora do regime superdifusivo $1 < \mu < 3$, e para o qual após uma média sobre uma quantidade suficiente de realizações logo estabelece-se uma difusão Gaussiana com expoente $\nu = 0,50$, que permanece a mesma por toda a extensão dos valores de N . Por outro lado, a fig.(10c) evidencia um comportamento diferente quando $\mu = -2 - \frac{a}{\varepsilon} = 2$, neste caso antes de atingir o regime difusivo normal com $\nu = 0,50$ existe um regime superdifusivo com $\nu = 0,65$. O resultado da fig.(10) é semelhante ao da fig.(9) em virtude de ambas as dinâmicas resultarem no mesmo comportamento assintótico de suas distribuições estacionárias $P(\ell)$.

3.1.2 Ruído não linear

Ruídos não lineares também podem ser considerados na abordagem das dinâmicas de Langevin, desde que $G(0) = 0$. Por exemplo, no contexto do deslocamento um caso de interesse são distribuições que possuam um tamanho de passo máximo, $\ell_{m\acute{a}x}$, para tal vamos escrever a seguinte dinâmica (com $y > 1/2$, $z > 0$)

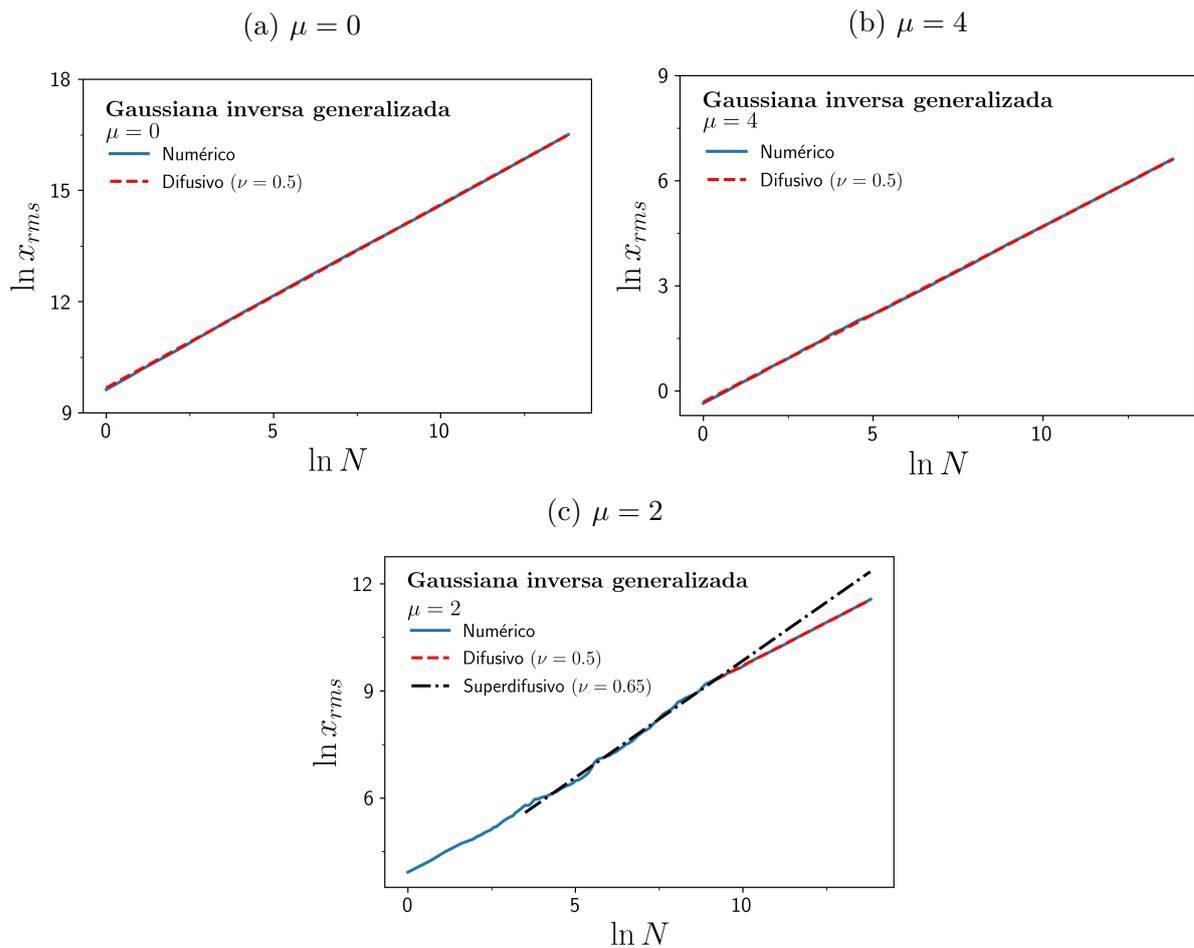
$$\frac{d\ell}{dt} = a\ell^{2z}(\ell_{m\acute{a}x} - \ell)^{2y-1} + \ell^z(\ell_{m\acute{a}x} - \ell)^y\xi(t), \quad (3.26)$$

assim a distribuição obtida segundo a eq.(3.8) resulta em

$$P(\ell) \sim \frac{1}{\ell^{2z}(\ell_{m\acute{a}x} - \ell)^{2y+\frac{a}{\varepsilon}}}, \quad (3.27)$$

que visa obter, da melhor maneira possível, a primeira proposta para a superdifusão limitada comentada anteriormente, neste caso uma lei de potência pura restrita à $\ell_{m\acute{a}x} = 0 < \ell < \ell_{m\acute{a}x}$. Na eq.(3.27) devemos ter $0 < z < 1/2$, $1/2 < y < 1/2(1 - a/\varepsilon)$, e $a < 0$, assim essa distribuição apresenta uma propriedade singularmente diferente das apresentadas até então, visto que a distribuição no seu limite máximo, $P(\ell \rightarrow \ell_{m\acute{a}x})$, pode não tender a zero. Assim sendo, não temos garantias de esta distribuição faça jus à dinâmica visto que o fluxo de probabilidade não é nulo na borda, e poder ocorrer, por exemplo, que a dinâmica de ℓ seja conduzida ininterruptamente para $\ell = 0$ ou $\ell = \ell_{m\acute{a}x}$.

Figura 10 – Dinâmica do movimento de uma partícula em uma caminhada aleatória com os tamanhos de passos advindos da equação de Langevin que resulta na distribuição estacionária $P(\ell)$ na eq.(3.25), cujo comportamento assintótico de $\ell \rightarrow \infty$ resulta em $P(\ell) \sim \ell^{-\mu} \exp(-\lambda \ell^\gamma)$, com o expoente da lei de potência dado por $\mu = 2 - \frac{a}{\varepsilon}$ e $\lambda = b/(\gamma\varepsilon)$, os parâmetros utilizados neste exemplo foram $\gamma = 1$, $b = 10^{-4}$, $\varepsilon = 1$, $c = 1$, tal que $\mu = 2 - \frac{a}{\varepsilon}$ e $\lambda = b$. Os resultados numéricos foram obtidos via simulações da dinâmica de Langevin, eq.(3.1), por meio do método de Milstein. A distância média quadrática do caminhante $x_{rms} \sim N^\nu$ é mostrada como função do número de passos N realizados até então, onde ν é o expoente de difusão. Para $a = -2 \rightarrow \mu = 4$ (a) e para $a = 2 \rightarrow \mu = 0$ (b) a dinâmica da difusão é normal desde o começo como indicado pela regressão linear de coeficientes angular 0,50, em oposição temos o caso $a = 0 \rightarrow \mu = 2$ (c) pertencente a região superdifusiva $1 < \mu < 3$, que apresenta uma região superdifusiva $\nu = 0,65$ antes de atingir em definitivo a região difusiva $\nu = 0,50$ como prevê o TCL.



Fonte : O autor (2020)

Notamos que a eq.(3.26) não permite a inclusão de nenhuma constante aditiva, pois o vínculo $0 < \ell < \ell_{m\acute{a}x}$ requeriria que esta fosse de valor positivo para $\ell = 0$ e negativo para $\ell = \ell_{m\acute{a}x}$. Para tanto, podemos modificar a dinâmica e assim propor $F(\ell) = a(\ell_{m\acute{a}x} - \ell) - b$, com $b > 0$ e $a\ell_{m\acute{a}x} - b > 0$, $G(\ell) = [\ell(\ell_{m\acute{a}x} - \ell)]^{1/2}$, de onde obtemos a distribuição beta [111]

$$P(\ell) = \mathcal{C} \left(\frac{\ell}{\ell_{m\acute{a}x}} \right)^{\alpha-1} \left(1 - \frac{\ell}{\ell_{m\acute{a}x}} \right)^{\beta-1}, \quad (3.28)$$

onde $\mathcal{C} = \Gamma(\alpha + \beta)/[\ell_{m\acute{a}x}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)]$, $\beta = b/(\varepsilon\ell_{m\acute{a}x}) > 0$, $\alpha = (a - b/\ell_{m\acute{a}x})/\varepsilon > 0$, tal que a distribuição $P(\ell)$ para os tamanhos de passos na eq.(3.28) também apresenta valores apenas entre 0 e $\ell_{m\acute{a}x}$. Numericamente pode ser necessário excluir as bordas, tal que $\ell \neq 0$ e $\ell \neq \ell_{m\acute{a}x}$.

Podemos agora generalizar o ruído não linear desta seção considerando $G(\ell) = \ell^\delta$, onde $\delta > 0$. No caso da eq.(3.21) com $c \rightarrow 0^+$, obtemos a partir da eq.(3.8) que

$$P(\ell) = \mathcal{C}'\ell^{-2\delta} \exp \left[\frac{a}{2\varepsilon(1-\delta)}\ell^{2(1-\delta)} - \frac{b}{\varepsilon[2(1-\delta) + \gamma]}\ell^{2(1-\delta)+\gamma} \right], \quad (3.29)$$

onde $\delta \neq 1$ e $\gamma \neq 2(\delta - 1)$. Para obtermos $P(\ell)$ com variância finita existem várias possibilidades que podem ser divididas dependendo do valor de δ como é exibido na Tabela 2. Nota-se que o regime superdifusivo pode ser obtido nas condições 2 e 3 da tabela 2, onde o expoente $\mu = 2\delta$ pertence ao intervalo $1 < \mu < 3$. A eq.(3.29) representa uma forma para as distribuições GIG, mas com ambas dependências exponenciais, na forma atenuada ou esticada, a depender do sinal de $2(1 - \delta)$ e $2(1 - \delta) + \gamma$.

Tabela 2 – Conjunto de parâmetros que tornam a variância da distribuição na eq.(3.29) finita, e evitam singularidades diretamente na própria dinâmica. Os parâmetros sem vínculo estão livres para serem finitos.

parâmetro δ	demais parâmetros
1. $0 < \delta < 1/2$	$-1 < \gamma < 0$, $b, a < 0$; $\gamma > 0$, $b > 0$, a .
2. $1/2 < \delta < 1$	$-1 < \gamma < -2(1 - \delta)$, $b < 0$, $a < 0$.
3. $1 < \delta < 3/2$	$\gamma > -2(1 - \delta)$, $b > 0$, $a > 0$.
4. $\delta > 3/2$	$\gamma > -2(1 - \delta)$, $b > 0$, $a > 0$; $0 < \gamma < -2(1 - \delta)$, $b, a > 0$; $-1 < \gamma < 0$, $b < 0$, a .

Fonte : O autor (2020)

Como mais um exemplo numérico podemos retomar $F(\ell)$ como apresentada na eq.(3.23), com $\gamma = -1$ (com $c \rightarrow 0^+$) junto à $G(\ell) = \ell^{1/2}$ tal que a dinâmica é descrita por

$$\frac{d\ell}{dt} = a\ell - b - \frac{v\ell^2}{\ell + \ell_0} + \ell^{1/2}\xi(t), \quad (3.30)$$

com solução estacionária seguindo a eq.(3.8) dada por

$$P(\ell) \sim \ell^{-1-\frac{b}{\varepsilon}} (\ell + \ell_0)^{\frac{v\ell_0}{\varepsilon}} \exp\left[\frac{(a-v)}{\varepsilon}\ell\right]. \quad (3.31)$$

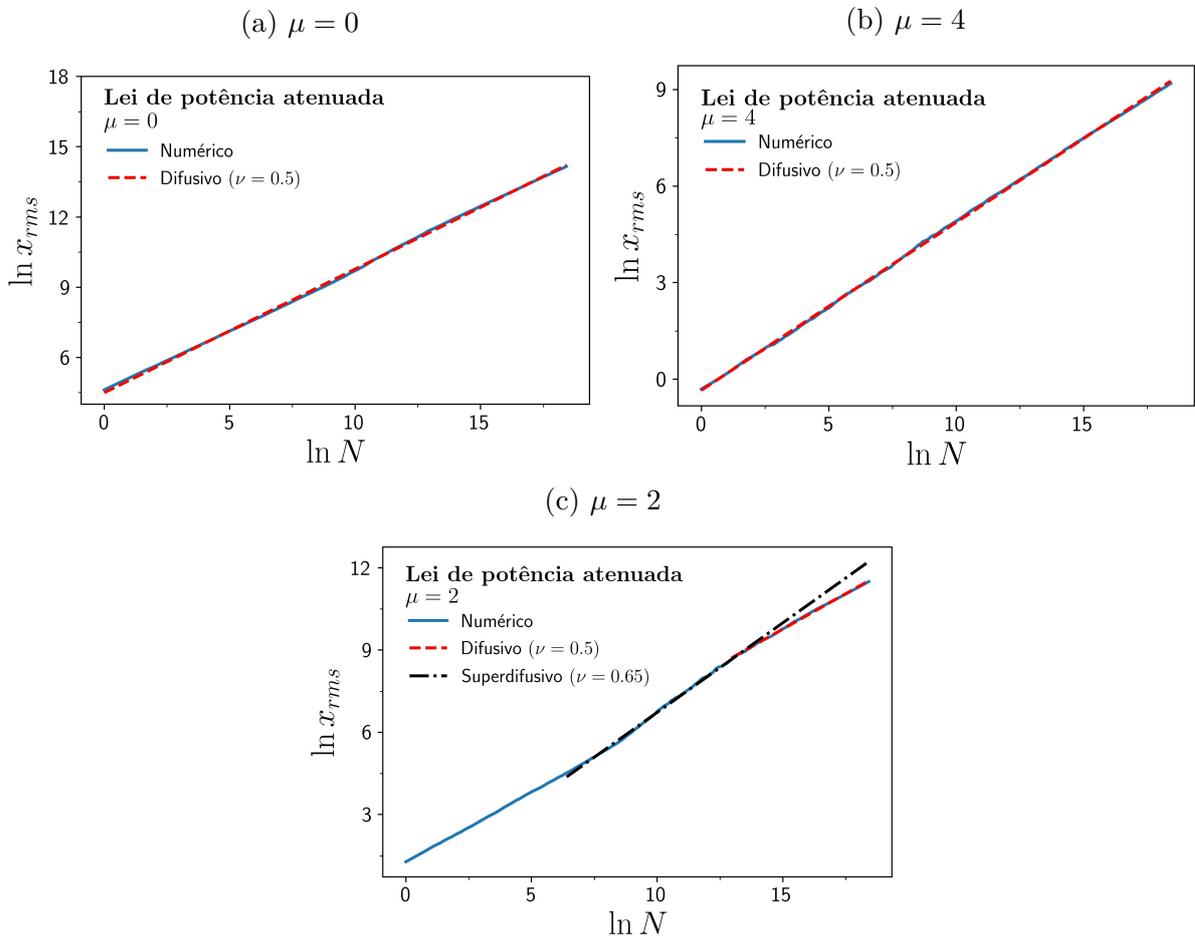
Nas figuras (11a, 11b) temos respectivamente $\mu = 4$ e $\mu = 0$ na eq.(3.31), portanto fora do regime superdifusivo $1 < \mu < 3$, e para o qual após uma média sobre uma quantidade suficiente realizações logo estabelece-se uma difusão Gaussiana com expoente $\nu = 0,50$, que permanece a mesma por todo a extensão dos valores de N . Por outro lado, a fig.(11c) evidencia um comportamento diferente quando $\mu = -\frac{v\ell_0}{\varepsilon} = 2$, neste caso antes de atingir o regime difusivo normal com $\nu = 0,50$ existe um regime superdifusivo com $\nu = 0,65$.

3.2 Estatística de Ruído Heterogêneo

Ao longo de todo o caminho percorrido pelo animal, a suposição feita na seção anterior (estatística de ruído homogêneo) de que a intensidade ε é independente do tempo, é na prática bastante restritiva para algumas situações reais. Como exemplos podemos citar ambientes cujas propriedades estatísticas modifiquem-se rapidamente, em uma escala de tempo muito menor que a do tempo de observação total τ_N , ou quando um meio heterogêneo pode ser repartido, em grandes escalas, em regiões com características muito distintas. Neste caso, o animal probabilisticamente experimenta mudanças significativas na percepção das flutuações do ruído. De fato, existem indicativos na literatura de que as componentes determinísticas e estocásticas, que regulam a interação entre o meio e o comportamento do indivíduo, conduzem as distribuições de tamanhos de passos a não serem precisamente definidas por uma única distribuição formuladas a partir da estatística de ruído homogêneo [112], possivelmente incluindo, para melhor serem descritas, expressões para $P(\ell)$ que envolvam misturas estatísticas. Por isso na sequência generalizamos o parâmetro ε para também ser função do tempo, $\varepsilon \rightarrow \varepsilon(t)$.

Iniciamos assumindo que a variação no tempo da magnitude do ruído $\varepsilon(t)$, bem como considerado antes para o tamanho do passo $\ell(t)$, não apresente um padrão determinístico, e também possua uma parcela estocástica. Consideramos então que a dinâmica das flutuações $\varepsilon(t)$ é caracterizada por uma escala temporal muito menor que o tempo total do percurso dos N passos τ_N , isto é, $\tau_\ell \ll \tau_\varepsilon \ll \tau_N$, em outras palavras consideramos que ε permanece aproximadamente constante dentro do intervalo τ_ε , pelo qual é possível o animal ter realizado um número razoável de passos, para os quais a distribuição, diretamente relacionada ao valor de ε , mantém-se basicamente a mesma. No regime estacionário essa suposição permite-nos determinar a distribuição condicional estacionária $P(\ell|\varepsilon)$. Portanto, para obtermos a distribuição de tamanhos de passos $P(\ell)$ ao longo de todo o caminho, é necessário somar cada $P(\ell|\varepsilon)$ ponderada pela distribuição estacionária $f(\varepsilon)$ dos valores de

Figura 11 – Dinâmica do movimento de uma partícula em uma caminhada aleatória com os tamanhos de passos advindos da equação de Langevin que resulta na distribuição estacionária $P(\ell)$ na eq.(3.31), cujo comportamento assintótico de $\ell \rightarrow \infty$ resulta em $P(\ell) \sim \ell^{-\mu} \exp(-\lambda \ell^\gamma)$, com o expoente da lei de potência dado por $\mu = 1 + \frac{b}{\varepsilon} - \frac{v \ell_0}{\varepsilon}$ e $\lambda = (v - a)/(\varepsilon)$, os parâmetros utilizados neste exemplo foram $b = -1$, $a - v = -10^{-2}$, $\varepsilon = 1$, $\ell_0 = 1$, tal que $\mu = v \ell_0 / \varepsilon$ e $\lambda = a - v$. Os resultados numéricos foram obtidos via simulações da dinâmica de Langevin, eq.(3.1), por meio do método de Milstein. A distância quadrática média do caminhante $x_{rms} \sim N^\nu$ é mostrada como função do número de passos N realizados até então, onde ν é o expoente de difusão. Para $v = -4 \rightarrow \mu = 4$ (a) e para $v = 0 \rightarrow \mu = 0$ (b) a dinâmica da difusão é normal desde o começo como indicado pela regressão linear de coeficientes angular 0,50, em oposição temos o caso $v = -2 \rightarrow \mu = 2$ (c) pertencente a região superdifusiva $1 < \mu < 3$, que apresenta uma região superdifusiva $\nu = 0,65$ antes de atingir em definitivo a região difusiva $\nu = 0,50$ como prevê o TCL.



Fonte : O autor (2020)

ε , conduzindo o cálculo para uma superposição estatística segundo a integral

$$P(\ell) = \int_0^\infty P(\ell|\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (3.32)$$

Esta abordagem é conhecida em outros contextos matemáticos como superestatística [22, 23] (para outras aplicações [113, 114]). Notamos que se ε apresenta valor único $\varepsilon = \varepsilon^*$, então

temos $f(\varepsilon) = \delta(\varepsilon - \varepsilon^*)$ e assim os resultados prévios com ε constante são retomados. Logo, a composição de duas distribuições na eq.(3.30) fornecem uma nova e ampla gama de distribuições para $P(\ell)$ em relação à estatística de ruído homogêneo.

Vamos considerar agora uma dinâmica estocástica própria para ε no formato similar ao da variável ℓ , assim

$$d\varepsilon = a_\varepsilon \varepsilon dt - b\varepsilon^{1+\gamma_\varepsilon} dt + \varepsilon \xi_\varepsilon dt, \quad (3.33)$$

igualmente com as mesmas propriedades de ruído branco $\langle \xi_\varepsilon(t) \rangle = 0$ e $\langle \xi_\varepsilon(t) \xi_\varepsilon(t') \rangle = 2\kappa \delta(t-t')$, onde $\kappa > 0$ define a variância das flutuações $\varepsilon(t)$. Assim, a densidade estacionária $f(\varepsilon)$ pode ser obtida pela mesma abordagem de Fokker-Planck na eq.(3.8), e então obtemos

$$f(\varepsilon) \sim \varepsilon^{\frac{a_\varepsilon}{\kappa} - 2} \exp\left(-\frac{b_\varepsilon \varepsilon^{\gamma_\varepsilon}}{\gamma_\varepsilon \kappa}\right). \quad (3.34)$$

Vamos nos ater primeiramente ao caso $\gamma_\varepsilon = 1$, quando $f(\varepsilon)$ é uma distribuição gama da forma

$$f(\varepsilon) = \hat{\mathcal{N}}^{-1} \varepsilon^{\omega-1} \exp(-\bar{\omega}\varepsilon), \quad (3.35)$$

onde $\hat{\mathcal{N}}$ é uma constante de normalização, e os parâmetro de forma ω e de escala $\bar{\omega}$ são dados por $\omega = a_\varepsilon/\kappa - 1$ e $\bar{\omega} = (b_\varepsilon/\kappa)$. Destacamos também a importância que a densidade $f(\varepsilon)$ seja normalizável e tenha segundo momento finito, para tanto consideraremos apenas $b_\varepsilon > 0$, $a_\varepsilon/\kappa > 1 \rightarrow \omega > 0$. Para exemplificar a composição proposta pela superestatística utilizaremos a distribuição condicional $P(\ell|\varepsilon)$ como sendo a distribuição exponencial esticada com razão fixa $a/\varepsilon = 1 + \gamma$ (distribuição de Weibull, expressão 3 na Tabela 1) tal que

$$P(\ell|\varepsilon) = \frac{b}{\varepsilon} \ell^{-1+\gamma} \exp(-b \ell^\gamma / \gamma \varepsilon). \quad (3.36)$$

Assim, inserindo as eqs.(3.34, 3.35) na eq.(3.32) obtemos

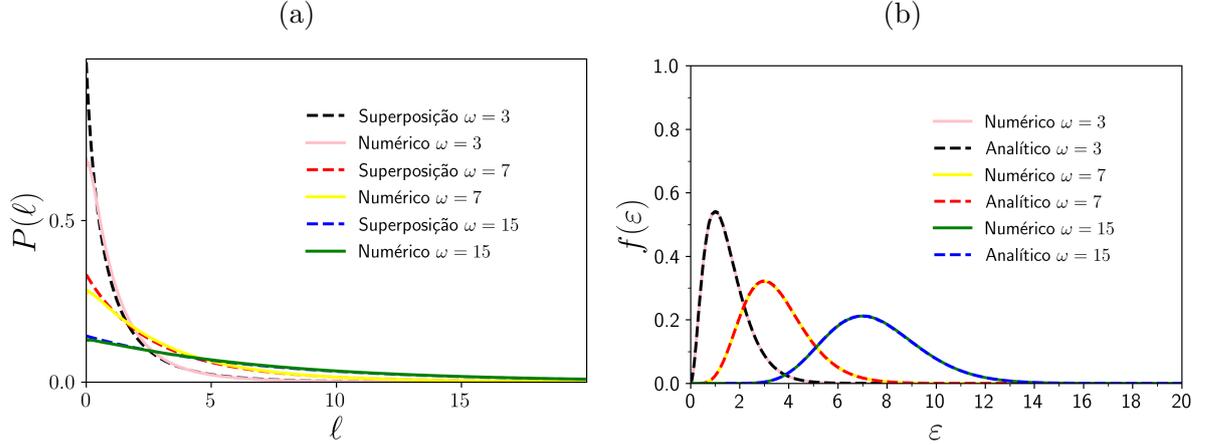
$$P(\ell) = \mathcal{N}'^{-1} \frac{K_{\omega-1}(2\bar{b}^{\gamma/2})}{\ell^{1-\gamma(\omega+1)/2}}, \quad (3.37)$$

onde a constante de normalização \mathcal{N}' é dada por $\mathcal{N}' = \Gamma(\omega)/(2|\gamma|\bar{b}^{\omega+1})$, $\bar{b} = \sqrt{b\bar{\omega}/\gamma}$ e K_ν é a função de Bessel modificada de segunda espécie (onde tomamos $K_\nu(x) \sim x^{-|\nu|}$ para um valor de x pequeno). As condições de variância finita e de não singularidade na equação base da dinâmica são: $\gamma > 0$ e $\omega > 0$, além de $\bar{\omega} > 0$ e $b > 0$. Em particular, para $\gamma = 2$ temos a distribuição beta (expressão 13 na tabela 1). Na fig.(12) temos $\gamma = 1$, $\bar{\omega} = 2$, $\bar{b} = \sqrt{2}$ para diferentes valores de ω avaliados de forma analítica pela proposta na eq.(3.37) e de forma numérica pelo método de Milstein aplicado ao par de equações (3.33, 3.1), a última com $G(\ell) = \ell$, e $F(\ell)$ dado na eq.(3.21) com $b = 1$, $a = (1 + \gamma)\varepsilon$.

Valendo-se do comportamento assintótico da função Bessel $K_\nu(x) \sim e^{-x}/\sqrt{x}$ para valores grandes de x , temos

$$P(\ell) \sim \frac{e^{-\bar{b}\ell^{\gamma/2}}}{\ell^{1-\frac{\gamma}{2}(\omega+\frac{1}{2})}}, \quad \ell \rightarrow \infty, \quad (3.38)$$

Figura 12 – Soluções estacionárias para as distribuições (a) $P(\ell)$ e (b) $f(\varepsilon)$ avaliadas de forma numérica via simulações do método de Milstein aplicado ao par de equações (3.33, 3.1), com $\bar{\omega} = 2$ ($b_\varepsilon = 1$, $\kappa = 1/2$), $\bar{b} = \sqrt{2}$ para diferente valores de ω , enquanto $G(\ell) = \ell$, e $F(\ell)$ é dado na eq.(3.21) com $b = 1$, $\gamma = 1$, $a = (1 + \gamma)/\varepsilon$. Ao passo que são avaliadas também pelas propostas nas eqs.(3.37, 3.35), respectivamente para a distribuição $P(\ell)$ e $f(\varepsilon)$.



Fonte : O autor (2020)

com expoente $\mu = 1 - \frac{\gamma}{2}(\omega + \frac{1}{2}) < 1$ dado que $\gamma > 0$ e $\omega > 0$, portanto fora do limite superdifusivo. Entretanto, podemos relaxar o vínculo para a/ε e reescrever $a/\varepsilon = 1 + r$, com $r > 0$, tal que

$$P(\ell|\varepsilon) = \left(\frac{b}{\gamma\varepsilon}\right)^{r/\gamma} \frac{\gamma}{\Gamma(r/\gamma)} \ell^{-1+r} \exp(-b\ell^\gamma/\gamma\varepsilon). \quad (3.39)$$

Assim inserindo as eqs.(3.39, 3.35) na eq.(3.32) obtemos

$$P(\ell) = \mathcal{N}_r^{-1} \frac{K_{\omega-r/\gamma}(2\bar{b}^{\gamma/2})}{\ell^{1-\gamma(\omega+r/\gamma)/2}}, \quad (3.40)$$

com $\mathcal{N}_r = [\Gamma(r/\gamma)\Gamma(\omega)]/(2|\gamma|\bar{b}^{\omega+r/\gamma})$. Logo o limite assintótico é dado por

$$P(\ell) \sim \frac{e^{-2\bar{b}\ell^{\gamma/2}}}{\ell^{1-\frac{\gamma}{2}(\omega+\frac{r}{\gamma}-\frac{1}{2})}}, \quad \ell \rightarrow \infty, \quad (3.41)$$

onde o expoente $\mu = 1 - \frac{\gamma}{2}(\omega + \frac{r}{\gamma} - \frac{1}{2})$ poderá estar no intervalo superdifusivo $1 < \mu < 3$ desde que $\omega + \frac{r}{\gamma} - \frac{1}{2} < 0$. Uma vez que $\omega > 0$, então por algum modo devemos ter $\frac{r}{\gamma} - \frac{1}{2} < 0 \rightarrow r < \gamma/2$ como critério necessário, porém não suficiente. De fato uma análise detalhada revela que os requisitos são os apresentados na Tabela 3, onde a condição $0 < r < \gamma/2$ esta implicitamente satisfeita

Na fig.(13a) temos $\mu = 4$ na eq.(3.41), portanto fora do regime superdifusivo $1 < \mu < 3$, e para o qual após uma média sobre uma quantidade suficiente realizações logo estabelece-se uma difusão gaussiana com expoente $\nu = 0,5$, que permanece a mesma por todo a extensão dos valores de N . Por outro lado, a fig.(13b) evidencia um comportamento

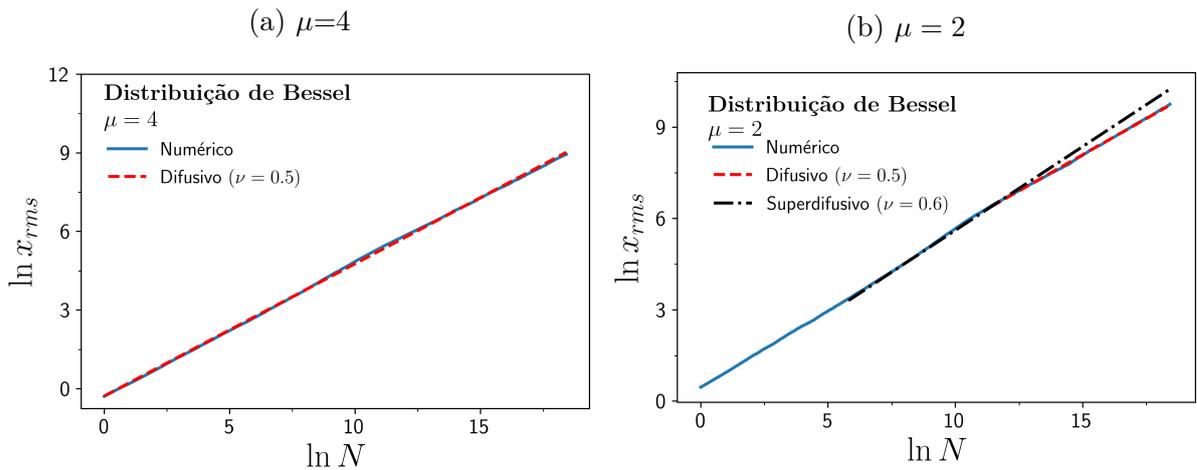
Tabela 3 – Requisitos para regime superdifusivo na distribuição de Bessel apresentada na eq.(3.41)

(I)	(II)	(III)
$\gamma > 8$	$\gamma > 8$	$0 < \gamma < 8$
$0 < \omega < 1/2 - 4/\gamma$	$1/2 - 4/\gamma < \omega < 1/2$	$0 < \omega < 1/2$
$-4/\gamma - \omega + 1/2 < r/\gamma < -\omega + 1/2$	$0 < r/\gamma < -\omega + 1/2$	$0 < r/\gamma < -\omega + 1/2$

Fonte : O autor (2020)

diferente quando $\mu = 1 - \frac{\gamma}{2}(\omega + \frac{r}{\gamma} - \frac{1}{2}) = 2$, neste caso antes de atingir o regime difusivo normal com $\nu = 0,50$ existe um regime superdifusivo com $\nu = 0,60$.

Figura 13 – Dinâmica do movimento de uma partícula em uma caminhada aleatória com os tamanhos de passos advindos da equação de Langevin que resulta na distribuição estacionária $P(\ell)$ na eq.(3.31), cujo comportamento assintótico de $\ell \rightarrow \infty$ resulta em $P(\ell) \sim \ell^{-\mu} \exp(-\lambda \ell^{\gamma/2})$, com o expoente da lei de potência dado por $\mu = 1 - \frac{\gamma}{2}(\omega + \frac{r}{\gamma} - \frac{1}{2})$ e $\lambda = 2\bar{b}$, os parâmetros utilizados neste exemplo foram $\omega = 1/4$, $r = 1/2$, $\bar{b} = 10^{-3}$ tal que $\mu = 1 - \frac{\gamma}{2}(\frac{1}{2\gamma} - \frac{1}{4})$ e $\lambda = 2 \times 10^{-3}$. Os resultados numéricos foram obtidos via simulações da dinâmica de Langevin, eq.(3.1), por meio do método de Milstein. A distância quadrática média do caminhante $x_{rms} \sim N^\nu$ é mostrada como função do número de passos N realizados até então, onde ν é o expoente de difusão. Para $\gamma = 26 \rightarrow \mu = 4$ (a) a dinâmica da difusão é normal desde o começo, como indicado pela regressão linear de coeficiente angular 0,50, em particular nesse exemplo não foi possível obter $\mu = 0$, em oposição temos o caso $\gamma = 10 \rightarrow \mu = 2$ (b) pertencente a região superdifusiva $1 < \mu < 3$, que apresenta uma região superdifusiva $\nu = 0,60$ antes de atingir em definitivo a região difusiva $\nu = 0,50$ como prevê o TCL.



Fonte : O autor (2020)

Para o caso $\gamma_\varepsilon = -1$ com $b_\varepsilon = -|b_\varepsilon| < 0$, correspondente à função gama inversa $f(\varepsilon) = \tilde{\mathcal{N}}^{-1} \varepsilon^{\omega-1} \exp(-\tilde{\omega} \varepsilon^{-1})$ onde $\tilde{\omega} = (|b_\varepsilon|/\kappa)$, temos utilizando esta $f(\varepsilon)$ junto à eq.(3.39)

na integral da eq.(3.32) que

$$P(\ell) = C^{-1} (\tilde{b}\ell^\gamma + 1)^{\omega-1} \ell^{-1+\gamma}, \quad (3.42)$$

onde $C = \Gamma(-\omega)/(b\tilde{\omega}^{1-2\omega}\Gamma(1-\omega))$, $\tilde{b} = b/(\tilde{\omega}\gamma)$, além de $\tilde{b} > 0$, $\omega < 0$, $\gamma > 2/|\omega|$ para variância finita. Assim o limite assintótico $\ell \rightarrow \infty$ é dado por

$$P(\ell) \sim \ell^{\gamma\omega-1} \quad (3.43)$$

portanto $\mu = 1 - \gamma\omega > 3$, e não pertence ao intervalo superdifusivo.

Uma generalização a mais ainda é possível quando consideramos a possibilidade de que o meio possa ser visto como composto por um conjunto de sub-regiões com propriedades estatísticas independentes. Por exemplo, modelos de caminhadas aleatórias intermitentes ou compostas [115, 116, 117, 118, 119]. Comportamentos com movimentos intermitentes podem ser relatados com o caminhante que experimenta ao longo do caminho zonas com dinâmicas marcadamente distintas, cada qual descrita pela sua própria distribuição de tamanhos de passos. Outros exemplos podem envolver diferentes ritmos internos e motivações animais conectadas com diferentes objetivos, como movimentos de dispersão, de caça ou migração. Em tais situações as distribuições podem ser expressas como uma mistura estatística de subconjuntos para o tamanho dos passos,

$$P(\ell) = \sum_{i=1}^{N_s} \rho_i P_i(\ell), \quad (3.44)$$

onde $\rho_i > 0$ é o peso estatístico do subconjunto i em um total de N_s subconjuntos, tal que a normalização requer $\sum_{i=1}^{N_s} \rho_i = 1$. O conjunto de pesos $\{\rho_i\}$ poderia representar a probabilidade de cada sub-região.

No contexto da dinâmica de Langevin, a distinção entre a superposição e a mistura estatística deve-se principalmente à consideração que a primeira consta com uma componente determinística sempre igual, não há sub-regiões independentes, de onde obtemos a mesma $P(\ell|\varepsilon)$. Além disso, o termo estocástico é aproximadamente modelado por uma mesma densidade $f(\varepsilon)$. Por outro lado na mistura estatística, ambas as componentes determinísticas e estocásticas podem variar abruptamente entre as específicas sub-regiões da trajetórias. Assim, cada distribuição $P_i(\ell)$ na eq.(3.44) pode ser uma das diferentes expressões relacionadas as estatísticas de ruído homogêneo ou heterogêneo como as que se encontram na Tabela 1, ou uma combinação da mesma distribuição, mas com parâmetros distintos. Portanto, essa abordagem generaliza as seções anteriores.

Como um exemplo de interesse, podemos relatar a distribuição hiper-exponencial para os tamanhos de passo [25, 102, 104]

$$P(\ell) = \sum_{i=1}^{N_s} \rho_i e^{-\ell/\lambda_i}, \quad (3.45)$$

com diversas taxas de decaimento $1/\lambda_i > 0$, tais distribuições com $N_s = 3$ são utilizadas para explicar o padrão de movimento de mexilhões [25], nemátodos [104], e a trajetória de abelhas em espaços confinados [102]. Nesta situação, cada parâmetro λ_i na eq.(3.45) pode estar relacionado com a dimensão espacial característica de cada sub-região, junto à outras propriedades geográficas e às atividades de interesse particular. Estratégias difusivas estão relacionadas com um pequeno número de escalas, enquanto modelos superdifusivos com de lei de potência semelhante às distribuições de Lévy tendem a apresentar um número infinito de escalas [25].

4 DINÂMICA POPULACIONAL

Analizamos um modelo de dinâmica populacional que está sujeito à interferência de flutuações estocásticas. Tais flutuações são caracterizadas como ruídos brancos em alguns parâmetros chave, que podem atuar tanto diretamente na dinâmica do tamanho da população como na quantidade de recursos disponíveis. Para uma fonte de ruído abordaremos algumas aproximações baseadas na proximidade do equilíbrio, e assim calcularemos alguns resultados analíticos tão logo a intensidade do ruído seja pequena. Para duas fontes de ruído utilizaremos métodos numéricos para estudar como a correlação entre o tamanho da população e quantidade de recursos comporta-se à medida que as intensidades dos ruídos variam. Por fim, faremos uma extensão para um sistema ecológico, em que as interações entre as várias espécies e tipos de recursos é considerada no estudo de taxas de sobrevivências.

4.1 Modelo com duas fontes de ruídos

Apresentamos inicialmente um modelo determinístico para a evolução temporal, e a conseqüente configuração estacionária possível, de uma população (mesma espécie) de tamanho n que interage com o meio através da extração de um único recurso, fonte de sua subsistência, e que, portanto, determina sua taxa de reprodução. A dinâmica possui uma função g caracterizando a taxa de crescimento da espécie, e que depende da quantidade S de recurso disponível por meio da taxa de aproveitamento $J(S)$, isto é, $g \equiv g[J(S)]$. A forma funcional deve apresentar algumas propriedades que discutiremos depois. Por outro lado, eventualmente ao morrerem os seres são removidos a uma taxa constante ν ponderada por n . Enquanto isso, o recurso possui uma fonte permanente de renovação, mas que diminui de forma proporcional ao tamanho da população e à taxa de aproveitamento do recurso. Este modelo visa representar estruturas populacionais simples e homogêneas, sem complexos fatores estruturais internos ou externos, como a população de seres unicelulares vivendo e alimentando-se em um ambiente isolado partilhando um mesmo recurso limitado [120]. A descrição apresentada pode ser resumida no seguinte conjunto de equações diferenciais ordinárias determinísticas

$$\begin{aligned}\frac{dn}{dt} &= g[J(S)]n - \nu n, \\ \frac{dS}{dt} &= \delta - J(S)n,\end{aligned}\tag{4.1}$$

onde $n(t) > 0$ e $S(t) > 0$ correspondem respectivamente ao número de indivíduos e quantidade de recurso existente no instante t , enquanto δ é a taxa de entrada do recurso (fluxo de recursos). É importante notar que estamos definindo uma equação contínua para

n , e que rigorosamente o valor de n poder assumir apenas valores inteiros, assim devemos sempre entendê-lo como uma aproximação para o tamanho exato da população. A solução de equilíbrio é obtida no regime estacionário quando $n(t) = \hat{n}$ e $S(t) = \hat{S}$. Assim, uma vez cessada a dependência temporal temos na eq.(4.1) que $\frac{dn}{dt} = 0$ e $\frac{dS}{dt} = 0$. Portanto, obtemos

$$\begin{aligned} g(\hat{n}) &= \nu, \\ J(\hat{S}) &= \delta/\hat{n}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

de onde concluímos que o equilíbrio ocorre quando a taxa de crescimento é igual à taxa de mortalidade, e quando a taxa de utilização do recurso é contrabalanceada pela taxa de recurso *per capita* fornecida à população. Embora o benefício do modelo descrito pelas eq.(4.1) ser simples, este pode ser considerado não realista, haja vista a ausência de aspectos estocásticos na dinâmica evolucionária que estão presentes em qualquer sistema real, e que sugere um estudo baseado em médias estatísticas das grandezas sujeitas a flutuações [121].

Uma maneira de tornar a descrição da dinâmica populacional mais realista é assumir algum grau de imprevisibilidade em alguns parâmetros do modelo. Por exemplo, podemos inserir flutuações estocásticas ao substituir a taxa de inserção de recurso e a taxa de mortalidade por termos que variam no tempo, como

$$\begin{aligned} \delta &\rightarrow \delta(1 + g_\delta \xi_\delta(t)), \\ \nu &\rightarrow \nu(1 - g_\nu \xi_\nu(t)). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Assim a segunda parcela atua como uma correção ao comportamento estático, correspondendo à situação de um ambiente cujo o incremento do recurso é instável, embora, devido as propriedades do termo flutuante $\xi(t)$, $\langle \delta \rangle$ ainda comporte-se como no caso determinístico. Do mesmo modo na eq.(4.3) também temos uma segunda fonte de ruído, independente da primeira, que pode ser adicionada por uma variação estocástica na taxa de mortalidade, caracterizando outras flutuações consideradas na dinâmica do tamanho da população, tais como efeitos de tamanho finito, sistemas comportamentais internos, e outras alterações ambientais não relacionadas diretamente com a obtenção de recurso. Embora oscilante no tempo, temos que o valor de ν é em média o mesmo valor proposto na eq.(4.1). Os novos parâmetros g_δ e g_ν correspondem respectivamente à magnitude dos ruídos ξ_δ e ξ_ν . Neste ponto assumiremos que tratam-se de dois ruídos brancos gaussianos descorrelacionados, e portanto apresentam as mesmas propriedades estocásticas estacionárias apresentadas na eq.(2.61). Neste capítulo, os valores de ε_δ e ε_ν estão fixados em $\varepsilon_\delta = \varepsilon_\nu = 1/2$, assim temos que a média sobre as realizações do processo de Wiener são dadas por

$$\begin{aligned} \langle \xi_i(t) \rangle &= 0, \quad \forall t; \\ \langle \xi_i(t_1) \xi_j(t_2) \rangle &= \delta_{ij} \delta(t_1 - t_2), \quad i = \delta, \nu; \end{aligned} \quad (4.4)$$

tal que as flutuações tanto quanto ao tempo, quanto a natureza de sua origem, são não correlacionadas.

Ao adicionarmos os termos randômicos da eq.(4.3) na eq.(4.1) obtemos o seguinte conjunto de equações diferenciais estocásticas acopladas

$$\frac{dn}{dt} = g[J(S)]n - \nu n + \nu n g_\nu \xi_\nu(t), \quad (4.5a)$$

$$\frac{dS}{dt} = \delta - J(S)n + \delta g_\delta \xi_\delta(t). \quad (4.5b)$$

De modo genérico podemos rearranjar as eqs.(4.5a, 4.5b) na forma de um sistema de equações de Langevin como se segue,

$$\begin{aligned} dn &= F_n(n, S)dt + G_n(n)dW(t), \\ dS &= F_S(n, S)dt + G_S(S)dW(t), \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde $dW = \xi(t)dt$ denota o processo de Wiener, ao passo que F e G correspondem a

$$\begin{aligned} F_n(n, S) &= g[J(S)]n - \nu n, \\ F_S(n, S) &= \delta - J(S)n, \\ G_n(n) &= \nu n g_\nu, \\ G_S(S) &= \delta g_\delta, \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde $F_n(n, S)$ e $G_n(n, S)$ representam as contribuições determinísticas ao tamanho da população e à quantidade de recurso respectivamente, enquanto a contribuição estocástica é modelada pelas respectivas funções $G_n(n)$ e $G_S(S)$. Neste modelo, a taxa de entrada de recurso δ é modificada por um ruído aditivo, ou seja, independente de S . Por outro lado, a taxa de mortalidade ν é modificada por um ruído multiplicativo, ou seja, dependente de n . Assim, para n as variações, em valores absolutos, tendem a serem maiores quando o tamanho da população é maior, do contrário, fosse um ruído aditivo esta alteração seria indiferente ao valor de n . Além disso, por tratar-se de uma dinâmica de tempo contínuo, tal escolha previne a existência de valores negativos para n . Embora não seja possível afirmar categoricamente que o conjunto de equações em (4.6, 4.7) impeça $S < 0$, temos que num regime $\delta \gg \delta g_\delta$, ou seja $g_\delta \ll 1$, dificilmente ocorrerão valores negativos para a quantidade de recurso. Ainda temos a possibilidade de interpretar S negativo como um período de estiagem que, como indica a estrutura das equações não favorece o crescimento da população, naturalmente desde que isso não cause divergências numéricas.

4.1.1 O caso $g_\delta = 0$

Vamos considerar a existência de um único ruído atuando diretamente na dinâmica do tamanho da população n . Assim $g_\nu \neq 0$ e $g_\delta = 0$ em (4.5a, 4.5b). Para estudarmos a evolução do tamanho da população próximo ao regime estacionário, consideramos que este

já tenha sido aproximadamente atingido na dinâmica do recurso, assim $\frac{dS}{dt} \approx 0$ em (4.5b) com $g_\delta = 0$. Sob esta suposição obtemos

$$J(S) = \frac{\delta}{n}, \quad (4.8)$$

assim substituindo a eq.(4.8) em (4.7) temos que $F_n(n) \approx g(\delta/n) - \nu n$. Logo, próximo ao equilíbrio podemos descrever o sistema por apenas uma equação diferencial estocástica na variável n , tal que a partir de (4.6) temos

$$dn = F_n(n)dt + G_n(n)dW(t). \quad (4.9)$$

Para a interpretação de Itô, eq.(2.99), a evolução temporal da função densidade de probabilidade do tamanho da população $P(n, t)$ é descrita pela equação de Fokker-Planck associada à equação de Langevin em (4.9), e dada por (com $\varepsilon_\nu = 1/2$):

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial n} \left[-F_n P + \frac{1}{2} \frac{\partial G_n^2 P}{\partial n} \right]. \quad (4.10)$$

O limite estacionário é requerido no equilíbrio, quando de fato a proposta para $J(S)$ na eq.(4.8) torna-se exata. Como vimos na eq.(3.8) a distribuição estacionária pode ser obtida analiticamente em termos das funções F_n e G_n na prescrição de Itô (com $\varepsilon_\nu = 1/2$)

$$P(n) \sim \frac{1}{G_n^2(n)} \exp \left[2 \int^n \frac{F_n(n')}{G_n^2(n')} dn' \right]. \quad (4.11)$$

Estamos abordando o problema da perspectiva dos recursos, logo devemos especificar com mais detalhes a taxa de crescimento $g[J(S)]$ determinada pela taxa de obtenção do recurso $J(S)$. Em termos biológicos, dada as características metabólicas dos indivíduos e a disponibilidade do recurso, ambas estão relacionadas ao processo de conversão de alimento em energia. Assim, vamos considerar que estas taxas são expressas por

$$J(S) = \frac{S_{m\acute{a}x} S}{S_{m\acute{a}x} + S} \quad (4.12a)$$

$$g[J(S)] = k(1 - e^{-aJ(S)}). \quad (4.12b)$$

A forma da taxa de aproveitamento do recurso é similar à considerada na dinâmica de Michaelis-Menten [122]. Notamos que $J(S)$ comporta-se de maneira linear em S quando a quantidade recurso disponível é pouca, e satura no valor $S = S_{m\acute{a}x}$ quando atinge-se o limite de muitos recursos ($S \rightarrow \infty$). Por outro lado, a taxa de crescimento $g[J(S)]$ depende da taxa de entrada do recurso e da eficiência do processo de conversão do recurso em energia, considerada como uma medida direta da taxa de crescimento, que está incorporada na eq.(4.12b) através do parâmetro a [123]. Nesse cenário, o limite de saturação $g[J(S)] \rightarrow k$ é atingindo quando $S = S_{m\acute{a}x} \gg 1/a$, e a taxa de crescimento torna-se constante. Nota-se, entretanto, que neste limite não seria possível obter uma distribuição normalizável $P(n)$

em (4.11), pois assim teríamos recursos infinitos e a população cresceria de maneira descontrolada. De outro modo, para $S \ll 1/a$ temos então $g[J(S)] \approx kaS_{m\acute{a}x} \frac{S}{S_{m\acute{a}x} + S}$, assim relacionado às equações de Michaelis-Menten ou à equação de Monod [124].

Uma vez obtida a taxa de crescimento próximo ao equilíbrio, $g[J(S)] \approx g(\delta/n)$, vide eq.(4.8), podemos utilizar a eq.(4.12b) para reescrever a equação Langevin, eq.(4.9), com $G_n(n) = \nu n g_\nu$ e $dW(t) = \xi_\nu(t)dt$, assim temos

$$\frac{dn}{dt} = k(1 - e^{a\delta/n})n - \nu n + \nu n g_\nu \xi_\nu(t). \quad (4.13)$$

Podemos utilizar as eqs.(4.9, 4.11) com $F_n(n) = k(1 - e^{a\delta/n})n - \nu n$ para determinar de maneira exata a distribuição estacionária do tamanho da população, logo temos

$$P(n) = \mathcal{A}^{-1} n^{2[(k-\nu)/(g_\nu \nu)^2 - 1]} \exp \left[-\frac{2k}{(g_\nu \nu)^2} \Gamma(0, a\delta/n) \right], \quad (4.14)$$

onde \mathcal{A} é uma constante de normalização finita para $k > \nu[1 + g_\nu^2 \nu/2]$, baseada no fato de que $\Gamma(0, c/z) \rightarrow 0$ anula-se exponencialmente para $z \rightarrow 0$ e que $\Gamma(0, c/z) \sim \ln z$ para $z \rightarrow \infty$. Além disso, se desejarmos que o segundo momento seja finito é preciso $g_\nu^2 \nu < 2$. A expressão $\Gamma(s, x) = \int_x^\infty t^{s-1} e^{-t} dt$ denota a função gama incompleta. O máximo da distribuição (4.14) n^* , $dP/dn|_{n^*} = 0$, ocorre em

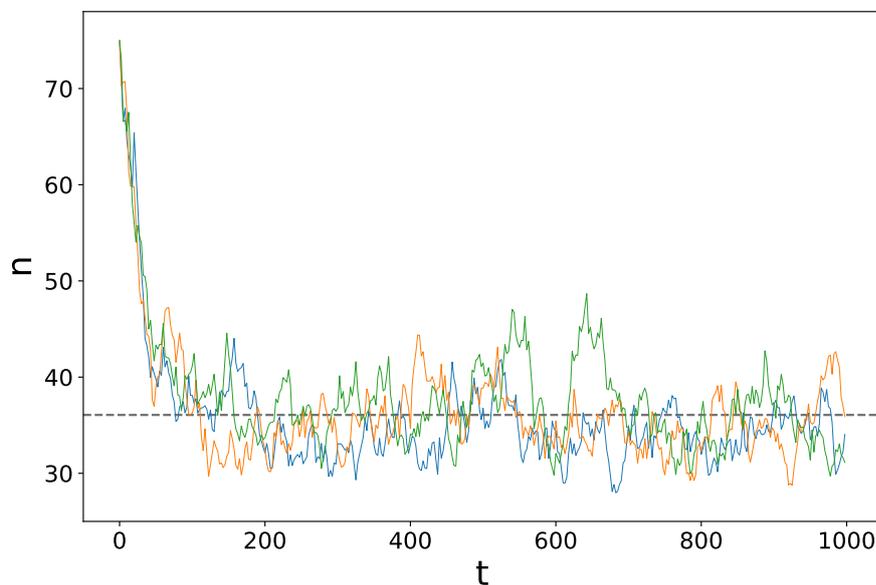
$$n^* = \frac{-a\delta}{\ln[1 - \frac{\nu}{k}(1 + g_\nu^2 \nu)]}. \quad (4.15)$$

No equilíbrio, o tamanho da população na ausência do ruído, e naturalmente seu valor máximo estável é $\frac{dn}{dt}|_{n^*} = 0$ na eq.(4.13) com $g_\nu = 0$, ou seja, $n^* = \frac{-a\delta}{\ln(1-\nu/k)}$. Um comparativo entre esta última equação e a eq.(4.15) revela que a presença do ruído multiplicativo em n resulta, na perspectiva do valor máximo de n , em um aumento efetivo da taxa de mortalidade para $\nu_{eff} = \nu(1 + g_\nu^2) > \nu$ em relação ao caso determinístico, como consequência temos que n^* é menor na presença do ruído. Na dinâmica determinística a condição suficiente para a obtenção de uma solução diferente da trivial ($n = 0$) é $k > \nu$. Dado que $1 - e^{-aJ} \leq 1$, um equilíbrio entre os dois termos da eq.(4.13) é possível, de onde obtemos $n > 0$.

Por outro lado, na dinâmica estocástica, à parte da condição de normalização, temos que em relação à n o fator exponencial na eq.(4.14) é monotonicamente decrescente. Portanto, para obtermos uma distribuição com $n^* > 0$ o expoente da lei de potência na eq.(4.14) deve ser positivo, assim $k > \nu(1 + g_\nu^2 \nu)$ (que situa-se dentro da região normalizável $k > \nu(1 + g_\nu^2 \nu/2)$), de onde observamos, quando comparado ao caso sem ruído, o mesmo aumento efetivo para a taxa de mortalidade, isto é, por um fator de $1 + g_\nu^2$. Do contrário, se o expoente da lei de potência fosse negativo, o máximo estaria localizado na origem, mas ainda poderia ser uma distribuição normalizada desde que $\nu[1 + g_\nu^2 \nu/2] < k < \nu[1 + g_\nu^2 \nu]$. Neste intervalo, embora tenhamos $n^* = 0$ com $P(n^*) \rightarrow \infty$, temos um valor médio

para o tamanho da população $\langle n \rangle$ que é finito e em geral diferente do valor no caso determinístico, mas novamente demonstra-se um incremento na taxa de mortalidade, desta vez por um fator de $1 + g_\nu^2/2$.

Figura 14 – Resultados numéricos computados por meio do método de Milstein para a evolução temporal do tamanho da população $n(t)$ com ruído incluso apenas na taxa de mortalidade, $g_\nu \neq 0$ e $g_\delta = 0$, para a qual temos a dinâmica de Langevin descrita na eq.(4.13). Cada curva representa uma realização independente da dinâmica populacional. A linha horizontal tracejada indica o valor analítico de n^* , eq.(4.15), no qual a distribuição de equilíbrio $P(n)$ dada na eq.(4.14) atinge seu máximo (valor mais provável no equilíbrio). Podemos notar que $n(t)$ oscila em torno do valor previsto analiticamente n^* . A condição inicial utilizada nestas simulações é $n(0) = 75$, e para os demais parâmetros temos $g_\nu = 0.5$, $\nu = 0.05$, $\delta = 100$, $a = 0.25$, $k = 0.1$, e $h = 0.001$.

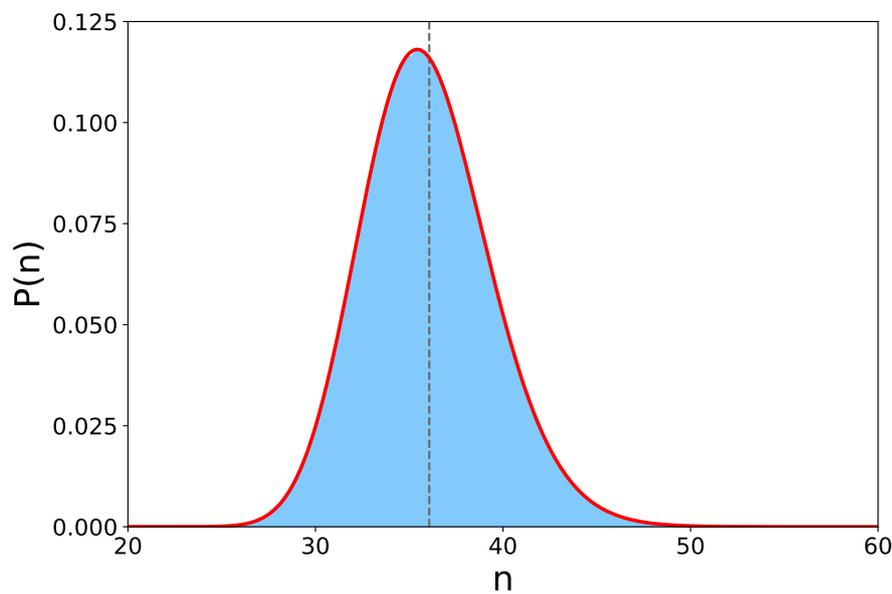


Fonte : O autor (2020)

A fig.(14) apresenta exemplos de algumas realizações $n(t)$ da dinâmica descrita na eq.(4.13) utilizando o método de Milstein. Em todas as realizações, após um período transiente inicial, o tamanho da população tende a flutuar em torno do valor previsto no caso determinístico ($g_\nu = 0$), que também deve ser a vizinhança do valor médio. O *ensemble* de valores $\{n(t)\}$ após o transiente caracteriza a distribuição estacionária obtida de maneira exata na eq.(4.14), cujo valor máximo é fornecido na eq.(4.15) (linha horizontal tracejada). Há uma boa concordância entre a distribuição $P(n)$ apresentada na eq.(4.14), e exibida na fig.(15) em relação à solução numérica via método de Milstein aplicado ao par de equações em (4.5a, 4.5b), com $g_\delta = 0$, e utilizando as expressões (4.12a, 4.12b), portanto sem recorrer à consideração da proximidade do equilíbrio para $J(S)$ na eq.(4.8).

Na fig.(15) podemos notar que a distribuição é ligeiramente assimétrica em relação ao seu valor máximo, apresentando uma densidade de probabilidades um pouco maior para

Figura 15 – Distribuição de probabilidades no equilíbrio para o tamanho da população com ruído incluso apenas na taxa de mortalidade, $g_\nu \neq 0$ e $g_\delta = 0$. Há uma boa concordância entre as duas curvas. A vermelha é traçada pela solução estacionária analítica na eq.(4.14), em que utilizamos a aproximação (4.8) referente a presumida vizinhança do equilíbrio. Enquanto isso, a azul é obtida pelo método de Milstein aplicado ao par de equações em (4.5a, 4.5b), e utilizando as expressões (4.12a, 4.12b), portanto sem o uso da aproximação do equilíbrio. A linha vertical tracejada indica o valor de equilíbrio da população na ausência de ruído, que é maior que o valor definido em (4.15). A condição inicial utilizada nestas simulações é $n(0) = 75$ e $S(0) = 2$, e para os demais parâmetro temos $g_\nu = 0.5$, $\nu = 0.05$, $\delta = 100$, $S_{máx} = 5$, $a = 0.25$, $k = 0.1$, e $h = 0.001$.

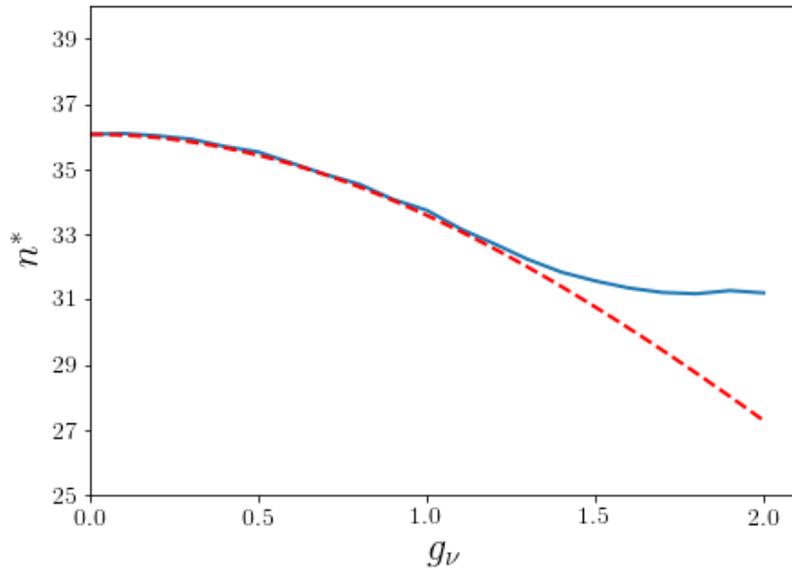


Fonte : O autor (2020)

$n > n^*$. Esta é uma consequência da não linearidade do sistema de equações e do ruído que aparece na taxa de mortalidade ser multiplicativo, do contrário, a solução seria uma distribuição Normal bivariada. A linha tracejada vertical destaca o máximo do tamanho da população no equilíbrio do cenário determinístico, que não coincide com o máximo da distribuição estacionária, e que localiza-se deslocada à direita, haja vista que houve um incremento na taxa efetiva de mortalidade ao incluirmos uma flutuação diretamente na dinâmica do tamanho da população.

A fig.(16) apresenta os resultados obtidos de forma numérica ao aplicarmos o método de Milstein às eqs.(4.5a, 4.5b) junto às expressões (4.12a, 4.12b), ao que comparamos com o resultado analítico obtido após a aproximação em (4.8). Nota-se que o resultado começa a diferenciar-se do esperado para valores grandes de g_ν .

Figura 16 – Comparativo entre o valor máximo da população n^* calculado numericamente (curva azul) através das eqs.(4.5a, 4.5b) junto as expressões (4.12a, 4.12b), e o valor de n^* obtido pela eq.(4.15) quando a aproximação em (4.8) é utilizada (curva tracejada vermelha). Nota-se que a aproximação é válida para pequenos valores de g_ν . A condição inicial utilizada nestas simulações é $n(0) = 75$ e $S(0) = 2$, e para os demais parâmetros temos $\nu = 0.05$, $\delta = 100$, $S_{m\acute{a}x} = 5$, $a = 0.25$, $k = 0.1$, e $h = 0.001$. A curva numérica é ainda uma média sobre 100 realizações.



Fonte : O autor (2020)

4.1.2 O caso $g_\nu = 0$

Analisamos agora a situação em que o ruído está presente apenas na taxa de entrada de recurso δ . Assim, temos $g_\delta \neq 0$ e $g_\nu = 0$ dando origem a um ruído aditivo, isto é, independente de S na dinâmica que descreve a quantidade de recurso. Como mostra as eqs.(4.5b, 4.12a), podemos escrever

$$\frac{dS}{dt} = \delta - \frac{S_{m\acute{a}x}S}{S_{m\acute{a}x} + S}n + \delta g_\delta \xi_\delta(t). \quad (4.16)$$

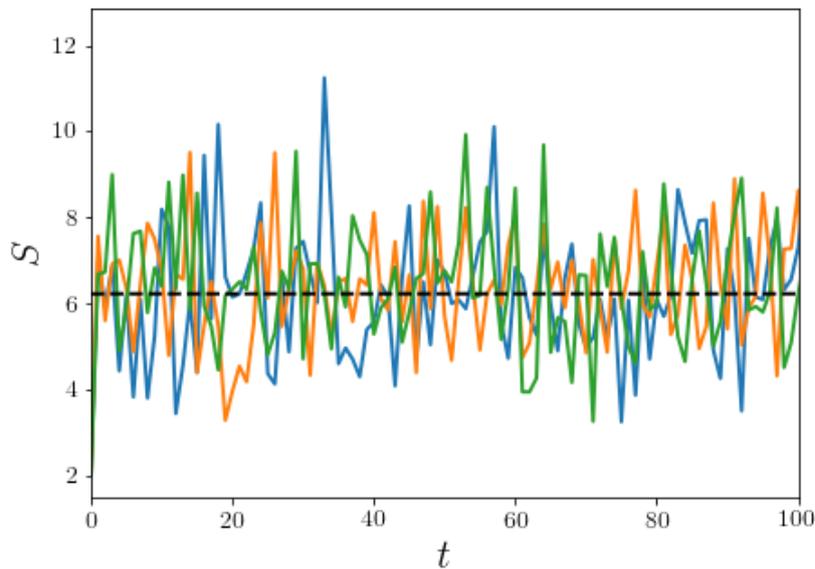
Em seguida determinamos analiticamente a distribuição de equilíbrio $P_n(S)$, referente a um tamanho n fixo para a população, através da formulação de Itô dada na eq.(4.11) com $F(S)$ e $G(S)$ dados na eq.(4.16), assim

$$P_n(S) = \mathcal{B}^{-1}(S + S_{m\acute{a}x})^{2S_{m\acute{a}x}n/(g_\delta\delta)^2} \exp \left[-\frac{2}{(g_\delta\delta)^2}(nS_{m\acute{a}x} - \delta)S \right], \quad (4.17)$$

onde \mathcal{B} é uma constante de normalização finita para $n > \delta/S_{m\acute{a}x}$. Portanto, no equilíbrio existe um valor mínimo para o tamanho da população, correspondente à razão entre a taxa

de entrada de recurso δ e taxa assintótica máxima referente ao crescimento do tamanho da população, $S_{m\acute{a}x}$. Desse modo, ao longo da din\^amica antes do equil\^brio ser atingido, valores de n abaixo disso indicam que o recurso tende a acumular-se, propiciando o crescimento da popula\~cao em dire\~cao a um certo valor dentro do limite m\^inimo estabelecido, tal que assim haja um balan\~co com a nova quantidade de recurso dispon\^ivel. Por outro lado, em contornos gerais, quando o tamanho da popula\~cao cresce muito, a disponibilidade do recurso tende a rarear fazendo o valor de n diminuir.

Figura 17 – Resultados num\^ericos computados por meio do m\^etodo de Milstein para a evolu\~cao temporal da quantidade de recurso dispon\^ivel $S(t)$ com ru\^ido incluso apenas na taxa de entrada de recurso, $g_\nu = 0$ e $g_\delta \neq 0$, para a qual temos a din\^amica de Langevin descrita na eq.(4.16). Cada curva representa uma realiza\~cao independente da din\^amica populacional. A linha horizontal tracejada indica o valor anal\^itico de S^* , eq.(4.18), no qual a distribui\~cao de equil\^brio $P_n(S)$ dada na eq.(4.17) atinge seu m\^aximo (valor mais prov\^avel no equil\^brio). Podemos notar que $S(t)$ oscila em torno do valor predito analiticamente S^* . A condi\~cao inicial utilizada nestas simula\~coes \^e $S(0) = 2$, e para os demais par\^ametros temos $g_\delta = 0.05$, $\nu = 0.05$, $\delta = 100$, $a = 0.25$, $k = 0.1$, e $h = 0.001$. O tamanho da popula\~cao est\^a fixado no valor do modelo determin\^istico $\frac{-a\delta}{\ln(1-\nu/k)}$.



Fonte : O autor (2020)

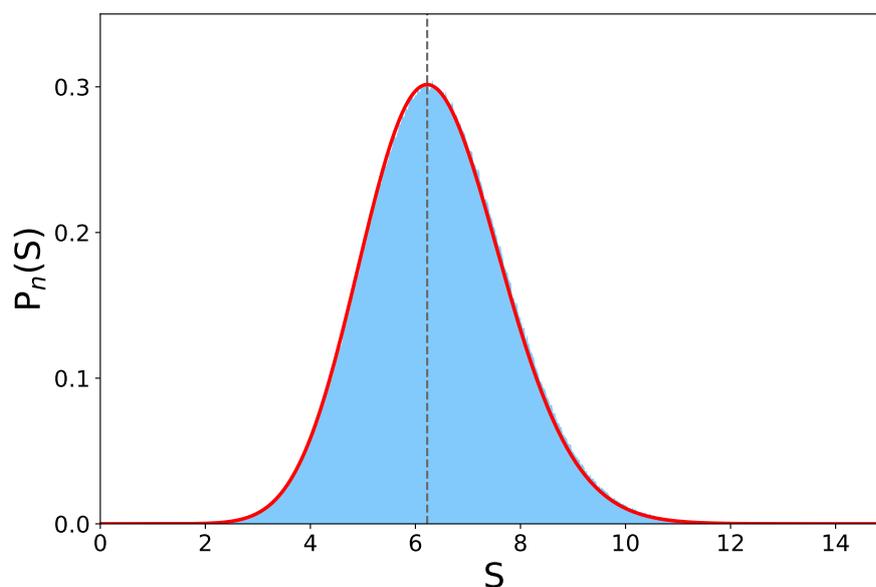
Entretanto, notamos que a presen\~ca do ru\^ido aditivo, na taxa de entrada do recurso, n\~ao modifica a posi\~cao do m\^aximo da distribui\~cao quando comparada ao caso determin\^istico. De fato o m\^aximo ocorre em

$$S^* = \frac{\delta S_{m\acute{a}x}}{n S_{m\acute{a}x} - \delta}, \quad (4.18)$$

que não depende da intensidade do ruído g_δ . Portanto é diferente do caso precedente com ruído multiplicativo em ν , cujo valor máximo da distribuição estacionária, localizado em n^* , é dependente do valor da magnitude do ruído g_ν como podemos ver na eq.(4.15).

A fig.(17) apresenta exemplos de algumas realizações $S(t)$ da dinâmica descrita na eq.(4.16) utilizando o método de Milstein. O valor de n é atribuído como sendo o valor de equilíbrio do caso determinístico. Em todas as realizações rapidamente a quantidade do recurso tende a flutuar em torno do valor previsto no caso determinístico ($g_\delta = 0$), que também deve estar próximo do valor médio. O *ensemble* de valores $\{S(t)\}$ após um transiente caracteriza a distribuição estacionária obtida de maneira exata na eq.(4.17), cujo valor máximo é fornecido na eq.(4.18). Há uma boa concordância entre a distribuição $P_n(S)$ apresentada na eq.(4.17), e exibida na fig.(18), em relação à solução numérica via método de Milstein aplicado ao par de equações em (4.5a, 4.5b) utilizando as expressões (4.12a, 4.12b) com $g_\nu = 0$.

Figura 18 – Função densidade de probabilidades no equilíbrio para a quantidade do recurso com ruído incluso apenas na taxa de entrada de recurso, $g_\nu = 0$ e $g_\delta \neq 0$. Há uma boa concordância entre as duas curvas. A curva vermelha é traçada pela solução estacionária analítica na eq.(4.17), enquanto a azul é obtida pelo método de Milstein aplicado ao par de equações em (4.5a, 4.5b) e utilizando as expressões (4.12a, 4.12b). A linha vertical tracejada indica o valor de equilíbrio da quantidade do recurso para o modelo na ausência de ruído, ambos os máximos coincidem no valor definido em (4.18). A condição inicial utilizada nestas simulações é $S(0) = 2$, e para os demais parâmetros temos $g_\delta = 0.05$, $\nu = 0.05$, $\delta = 100$, $S_{máx} = 5$, $a = 0.25$, $k = 0.1$, e $h = 0.001$. O tamanho da população é fixado no seu valor de equilíbrio para o modelo na ausência do ruído $n_{free}^* = \frac{-a\delta}{\ln(1-\nu/k)}$.

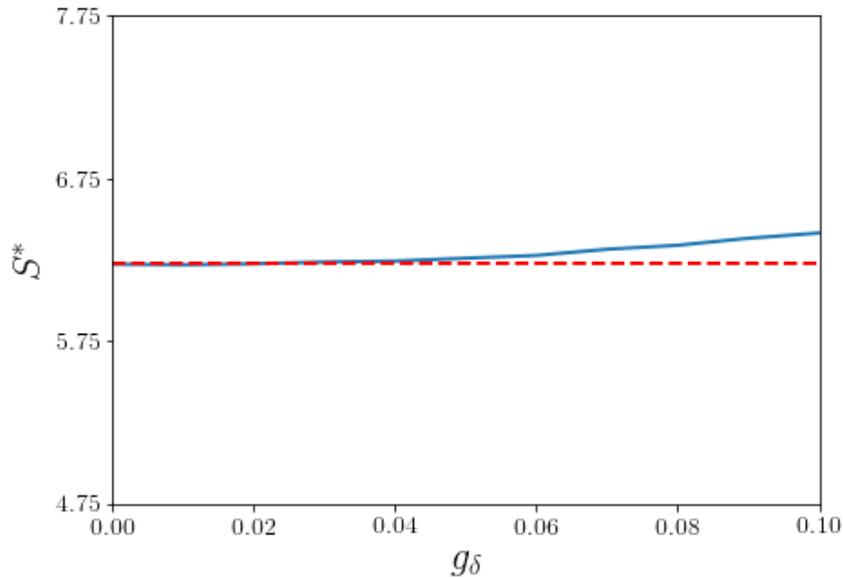


Fonte : O autor (2020)

Embora não seja possível obter um valor para n nas proximidades do equilíbrio conforme fizemos para $J(S)$ na eq.(4.8), é viável supor que seu valor passe a maior parte do tempo na vizinhança de seu valor máximo $n_{free}^* = \frac{-a\delta}{\ln(1-\nu/k)}$. De fato, podemos notar na fig.(20a) (aonde temos $g_\nu = 0$) que, após um curto período transiente, a integração numérica conduz a valores de $n(t)$ aproximadamente constantes, coincidindo com a solução de equilíbrio do caso determinístico.

A fig.(19) apresenta os resultados obtidos de forma numérica ao aplicarmos o método de Milstein às eqs.(4.5a, 4.5b) junto as expressões (4.12a, 4.12b), ao que comparamos com o resultado analítico obtido após a aproximação em (4.18) quando, além disso, supomos que o valor de n é fixo e dado pelo valor de equilíbrio na ausência de ruídos. Nota-se que o resultado começa a diferenciar-se do esperado para valores grandes de g_δ .

Figura 19 – Comparativo entre o valor máximo da população S^* calculado numericamente (curva azul) através das eqs.(4.5a, 4.5b) junto as expressões (4.12a, 4.12b), e o valor de S^* obtido pela eq.(4.18), para o caso do tamanho da população estar fixado no seu valor de equilíbrio do modelo na ausência do ruído $n_{free}^* = \frac{-a\delta}{\ln(1-\nu/k)}$ (curva tracejada vermelha). Nota-se que a aproximação é válida para pequenos valores de g_δ . A condição inicial utilizada nestas simulações é $S(0) = 2$, e para os demais parâmetros temos $\nu = 0.05$, $\delta = 100$, $S_{máx} = 5$, $a = 0.25$, $k = 0.1$, e $h = 0.001$. A curva numérica é ainda uma média sobre 100 realizações.



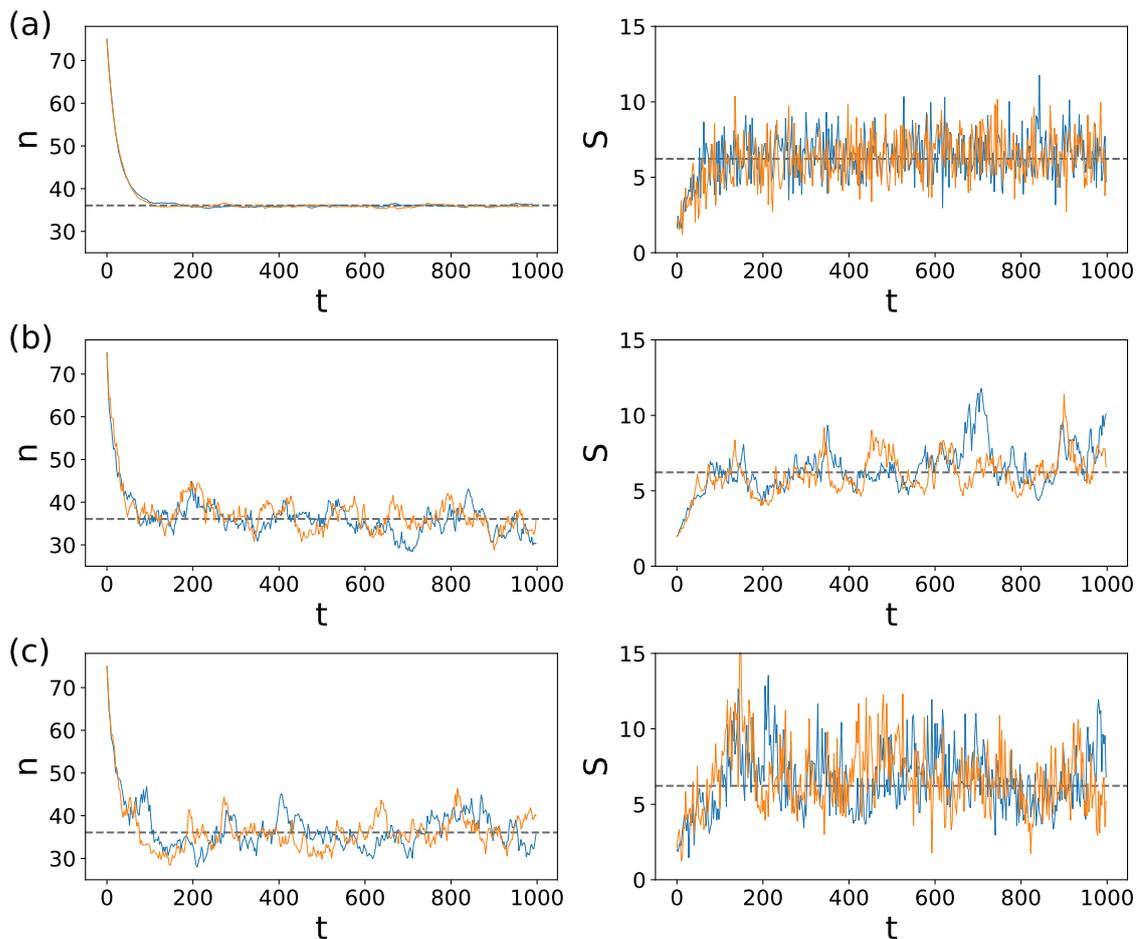
Fonte : O autor (2020)

4.1.3 O caso $g_\delta \neq 0$ e $g_\nu \neq 0$

O caso mais geral do modelo de Langevin apresentado nas eqs.(4.5a, 4.5b, 4.12a, 4.12b) ocorre quando os ruídos estão presente em ambas as taxa de mortalidade e de

entrada de recurso, isto é, $g_\delta \neq 0$ e $g_\nu \neq 0$. Neste caso, a não linearidade dos termos da dinâmica resulta em uma equação diferencial parcial (equação de Fokker-Planck) para a distribuição estacionária conjunta $P(n, S)$ de difícil solução analítica. Portanto, analisaremos a evolução do sistema a partir de soluções numéricas advindas da aplicação do método de Milstein ao conjunto de equações de Langevin do modelo.

Figura 20 – Soluções numéricas para a evolução do tamanho da população $n(t)$ (à esquerda) e da quantidade de recurso disponível $S(t)$ (à direita) nos casos em que o ruído é inserido (a) somente na taxa de entrada de recurso, $g_\nu = 0$, com $g_\delta = 0.05$, (b) somente na taxa de mortalidade, $g_\nu = 0.50$, com $g_\delta = 0$, e (c) em ambas as taxas $g_\nu = 0.5$ e $g_\delta = 0.05$. Cada linha ilustra uma realização numérica independente para a dinâmica populacionais obtida via método de Milstein aplicada ao sistema de Langevin conduzido pelas eqs.(4.5a, 4.5b, 4.12a, 4.12b). A linha horizontal representa o valor de equilíbrio na ausência de ruídos. Em todos os casos, após decorrido um tempo transiente, os resultados obtidos oscilam em torno dos valores preditos analiticamente $n_{free}^* = \frac{-a\delta}{\ln(1-\nu/k)}$ e $S^* = \frac{\delta S_{m\acute{a}x}}{n S_{m\acute{a}x} - \delta}$. A condição inicial utilizada nestas simulações é $n(0) = 75$, $S(0) = 2$, e para os demais parâmetros temos $\nu = 0.05$, $\delta = 100$, $S_{m\acute{a}x} = 5$, $a = 0.25$, $k = 0.1$, e $h = 0.001$.



Fonte : O autor (2020)

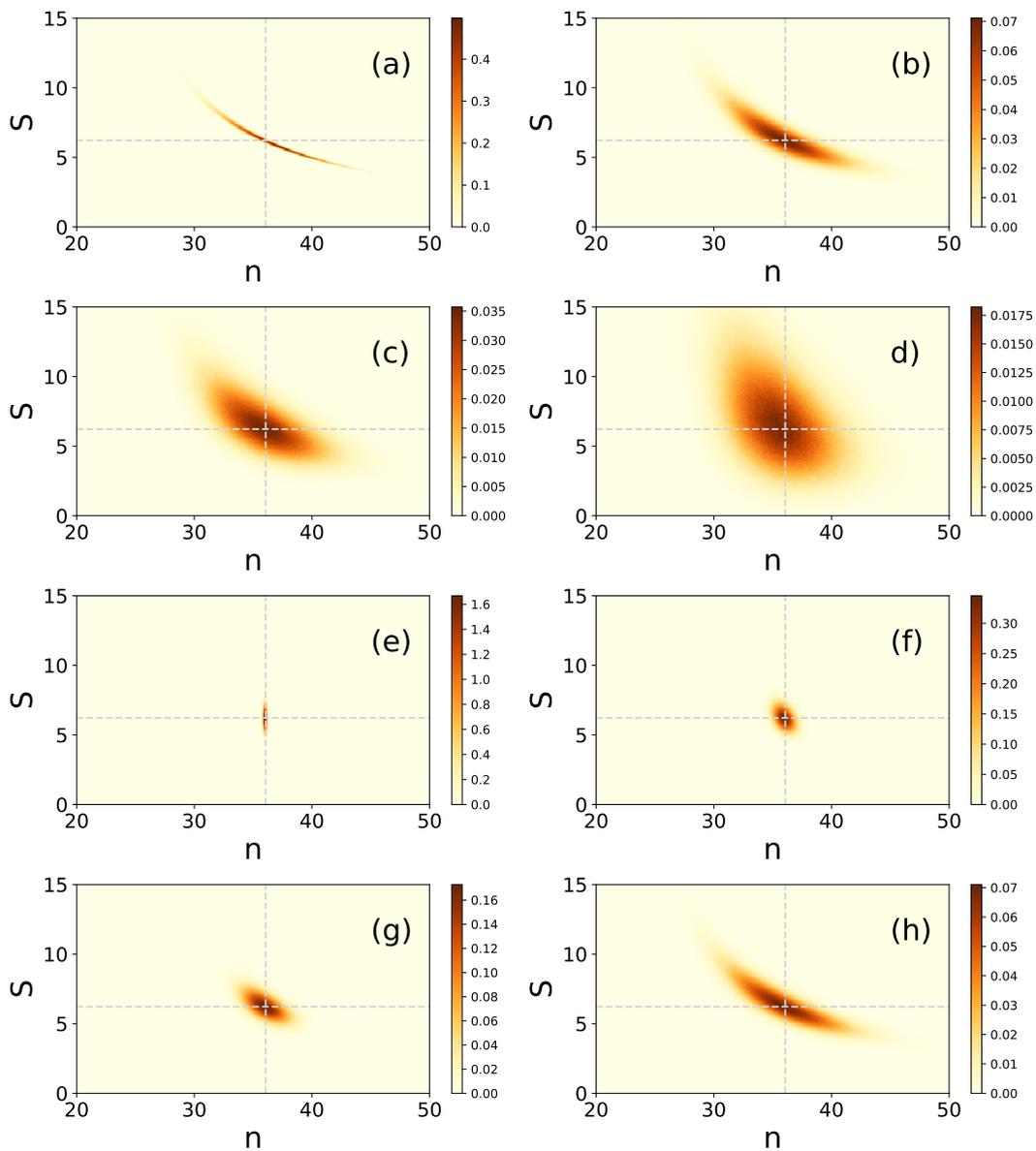
A fig.(20) compara as evoluções temporais do tamanho da população $n(t)$ e da quantidade de recurso $S(t)$ de algumas realizações do método de Milstein. Para (a) quando o ruído está presente apenas na taxa de entrada de recurso δ , $g_\nu = 0$, (b) quando o ruído está presente apenas na taxa de mortalidade ν , $g_\delta = 0$, e (c) quando ambos os ruídos estão presentes, $g_\nu \neq 0$ e $g_\delta \neq 0$. Podemos notar comparando as imagens à esquerda na fig.(20) que a dinâmica do tamanho da população gera flutuações relevantes em n apenas quando $g_\nu \neq 0$, isto é, quando há o ruído proporcional à n atuando diretamente na sua própria equação. Quando não, e apenas há o ruído aditivo atuando diretamente na equação de S , o tamanho da população tende a tornar-se rapidamente constante, e igual ao seu valor no equilíbrio do caso determinístico.

As imagens à direita na fig.(20) mostram a influência de cada tipo de ruído na quantidade do recurso. Agora, o fator predominante é a presença do ruído aditivo na taxa de entrada do recurso, que atuando essencialmente na sua dinâmica, faz as flutuações em S serem mais recorrentes nas figs.(20a, 20c) quando $g_\delta \neq 0$, e de maneira mais amena na fig.(20b) quando $g_\delta = 0$ e apenas o ruído multiplicativo em ν é considerado. Em resumo, observamos a partir da fig.(20) que o efeito combinado do aumento da magnitude dos ruídos multiplicativo e aditivo, respectivamente $n\xi_\nu(t)$ e $\xi_\delta(t)$, causam uma variação significativa no tamanho da população e torna a quantidade de recurso ainda mais inconstante ao longo do tempo.

A fig.(21) apresenta alguns mapas de calor para a distribuição de equilíbrio conjunta $P(n, S)$ para diferentes valores das intensidades g_ν e g_δ dos ruídos que atuam na taxa de mortalidade e na taxa de entrada do recurso. A solução de equilíbrio do modelo na ausência de ambos os ruídos n_{free}^* e S^* está indicada pela intersecção das linhas tracejadas vertical e horizontal. Para $g_\delta = 0$, fig.(21a), a área no espaço de fase (n, S) com $P(n, S) \neq 0$ é bastante restrita, ou seja, para um dado valor possível do tamanho n da população, uma pequena extensão de valores de S são permitidos, e assim uma pequena região do espaço de fase é visitado embora que uma variação de n esteja com maior probabilidade sujeita à uma mudança em S . Por outro lado, entre as figs.(21a-21d), quando há um aumento da magnitude do ruído na taxa de entrada de recurso (enquanto a magnitude do ruído na taxa de mortalidade é fixa), a distribuição $P(n, S)$ torna-se mais espalhada e ocupa um domínio maior no espaço de fase (n, S) .

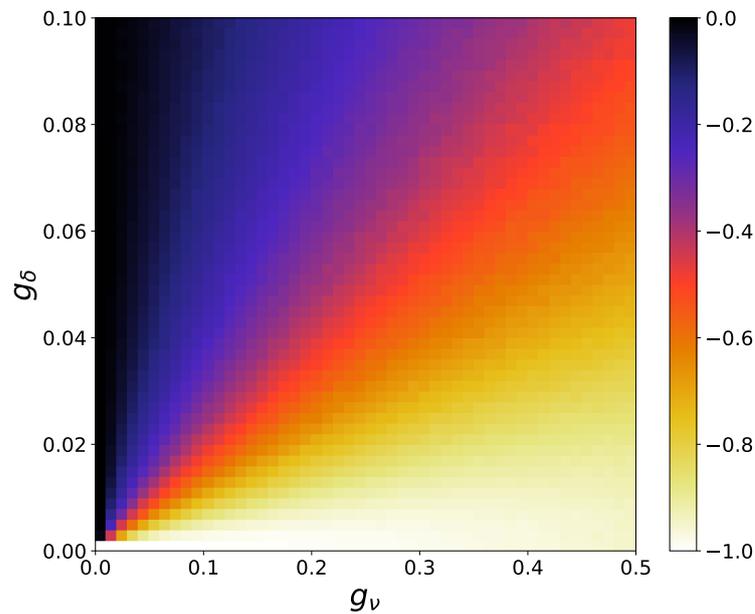
Na fig.(21e) vemos que na ausência do ruído na taxa de mortalidade a área ocupada é ainda mais reduzida, como indicado na fig.(20a) o valor de n pouco flutua em torno do seu valor de equilíbrio. Por outro lado, nas figs.(21e-21h) notamos que o gradual aumento do termo g_ν (enquanto g_δ é constante) favorece à ocorrência de valores de n diferentes de n_{free}^* , ao passo que a extensão de valores de S também aumenta. De um modo, geral a fig.(4.6) ilustra que existe uma correlação negativa entre o tamanho da população n e quantidade de recurso S , no sentido que geralmente um aumento na população é seguido

Figura 21 – Mapa de calor para a distribuição de equilíbrio conjunta $P(n, S)$ do tamanho da população n e da quantidade do recurso S para diferentes intensidades dos ruídos. De (a) a (d) a magnitude do ruído na taxa de mortalidade é mantida fixa em $g_\nu = 0.5$, enquanto a magnitude do ruído na taxa de entrada do recurso aumenta tal que em (a) $g_\delta = 0$, (b) $g_\delta = 0.025$, (c) $g_\delta = 0.05$, (d) $g_\delta = 0.1$. Por outro lado, de (e) a (h) magnitude do ruído na taxa de entrada do recurso é mantida fixa em $g_\delta = 0.025$ enquanto a magnitude do ruído na taxa de mortalidade aumenta tal que em (e) $g_\nu = 0$, (f) $g_\nu = 0.1$, (g) $g_\nu = 0.2$, (h) $g_\nu = 0.5$. O encontro da linha vertical e da horizontal marca a solução de equilíbrio do modelo determinístico. A condição inicial utilizada nestas simulações é $n(0) = 75$, $S(0) = 2$, e para os demais parâmetros temos $\nu = 0.05$, $\delta = 100$, $S_{máx} = 5$, $a = 0.25$, $k = 0.1$, e $h = 0.001$.



Fonte : O autor (2020)

Figura 22 – Mapa de calor da correlação, calculada a partir do coeficiente de correlação de Pearson, entre o tamanho da população n e a quantidade do recurso S no equilíbrio como função das intensidades do ruído na taxa de mortalidade g_ν , e da taxa de entrada do recurso, g_δ . Por toda a extensão dos parâmetros analisados a correlação entre as grandezas é negativa. Notamos que a correlação tende a aumentar quando g_ν aumenta, ao passo que tende a diminuir quando g_δ aumenta. Assim, pequenas flutuações no recurso $g_\delta \approx 0$ resultam numa correlação quase perfeita entre n e S , enquanto para $g_\nu \approx 0$ as grandezas são praticamente independentes. A condição inicial utilizada nestas simulações é $n(0) = 75$, $S(0) = 2$, e para os demais parâmetro temos $\nu = 0.05$, $\delta = 100$, $S_{m\acute{a}x} = 5$, $a = 0.25$, $k = 0.1$, e $h = 0.001$.



Fonte : O autor (2020)

de uma diminuição do recurso, e que uma sobra de recurso costuma indica baixa população.

Estudamos de maneira quantitativa o efeito da variação da magnitude dos ruídos g_δ e g_ν na correlação entre o tamanho da população n e a quantidade do recurso S . Para tanto, calculamos o coeficiente de correlação de Pearson definido como

$$\rho = \frac{\langle n, S \rangle}{\sigma_n \sigma_S}, \quad (4.19)$$

onde $\langle n, S \rangle$ denota a covariância entre n e S ,

$$\langle n, S \rangle = \int (n - \langle n \rangle)(S - \langle S \rangle) P(n, S), \quad (4.20)$$

enquanto σ_n e σ_S denotam, respectivamente, o desvio padrão das variáveis n e S .

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 &= \langle n, n \rangle = \int (n - \langle n \rangle)^2 P_n(n), \\ \sigma_S^2 &= \langle S, S \rangle = \int (S - \langle S \rangle)^2 P_S(S), \end{aligned} \quad (4.21)$$

aqui $P_n(n)$ e $P_S(S)$ denotam as distribuições marginais $P_n(n) = \int dn P(n, S)$ e $P_S(S) = \int dS P(n, S)$. Na fig.(22) apresentamos o mapa de calor da correlação entre o tamanho da população n e a quantidade do recurso S no equilíbrio, calculado a partir do coeficiente de correlação de Pearson, para diferentes valores da magnitude do ruído na taxa de mortalidade g_ν , e da taxa de entrada do recurso g_δ . Nota-se que a correlação é sempre negativa. Além disso, notamos que o aumento de g_ν ou g_δ resulta em efeitos opostos, tal que uma maior intensidade das flutuações na taxa de entrada de recurso g_δ reduz a correlação ($\rho = 0$ resulta em uma independência linear), enquanto uma maior intensidade na flutuação na taxa de mortalidade aumenta a correlação ($\rho = -1$ resulta em uma dependência linear perfeita).

4.2 Dinâmica Ecológica

Podemos generalizar o modelo para a perspectiva de uma dinâmica ecológica. Para tanto teremos agora um número qualquer de espécies n_r e uma variedade total de recursos n_s . Assim sendo, a dinâmica é regida pelo seguinte conjunto de $n_r + n_s$ equações diferenciais estocásticas

$$\frac{dn_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n_r} g_{ij} [J_{ij}(S_j)] n_i - \nu n_i + \nu n_i g_\nu \xi_{\nu,i}(t), \quad i = 1, 2, \dots, n_r, \quad (4.22a)$$

$$\frac{dS_j}{dt} = \delta_j - \sum_{i=1}^{n_r} J_{ij}(S_j) n_i + \delta_j g_\delta \xi_{\delta,j}(t), \quad i = 1, 2, \dots, n_r, \quad (4.22b)$$

onde $J_{ij}(S_j)$ e g_{ij} são também generalizados para

$$J_{ij}(S_j) = \frac{S_{m\u00e1x,ij} S_j}{S_{m\u00e1x,ij} + S_j}, \quad (4.23a)$$

$$g_{ij} [J_{ij}(S_j)] = k_{ij} \left(1 - e^{a_{ij} J_{ij}(S_j)} \right), \quad (4.23b)$$

cada qual associada com suas pr\u00f3prias fontes de ru\u00eddos branco (independentes um dos outros)

$$\langle \xi_{l,m}(t) \xi_{l',m'}(t') \rangle = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'} \delta(t-t'), \quad l, l' = \nu, \delta \quad m, m' = 1, 2, \dots, n_r, 1, 2, \dots, n_s. \quad (4.24)$$

A generaliza\u00e7\u00e3o apresentada nas equa\u00e7\u00f5es acima permite acrescentar a ideia de que, em princ\u00edpio, cada esp\u00e9cie i \u00e9 caracterizada pelo seus pr\u00f3prios par\u00e2metros. Assim, h\u00e1 diferentes taxas de mortalidade $\nu_i \rightarrow \nu_i [1 - g_\nu \xi_{\nu,i}(t)]$, bem como diferentes taxas crescimento, aquisi\u00e7\u00e3o e de aproveitamento dos recursos medidas em k_{ij} , $J_{ij}(S_j)$ e a_{ij} , que assim tamb\u00e9m tornam-se relativas \u00e0 cada recurso j . Al\u00e9m disso, cada recurso possui uma taxa pr\u00f3pria de renova\u00e7\u00e3o $\delta_j \rightarrow \delta_j [1 + g_\delta \xi_{\delta,j}(t)]$.

Nesta nova perspectiva analisaremos a influ\u00eancia de um par\u00e2metro espec\u00edfico, a saber, $S_{m\u00e1x,ij}$ que governa a taxa de aquisi\u00e7\u00e3o de recursos $J_{ij}(S_j)$. Neste sentido, para

evitar uma análise de alta dimensionalidade temos $\nu_i = \nu$, $k_{ij} = k$, $a_{ij} = a \forall i, j$, e $\delta_j = \delta \forall j$. Assumiremos dois valores para $S_{máx,ij}$, L e H , tal que $L < H$. Para a maioria dos pares espécie-recurso a taxa de aquisição terá o valor mínimo L , porém alguns terão o valor máximo H , de modo que as espécies tem preferência por algum tipo de recurso. No limite $L \rightarrow H$ todas as espécies são seletivamente equivalente e a dinâmica é regida por uma evolução neutra.

A seguir, na forma matricial, apresentamos $S_{máx,ij}$ para o exemplo em que existem 6 espécies e 3 recursos

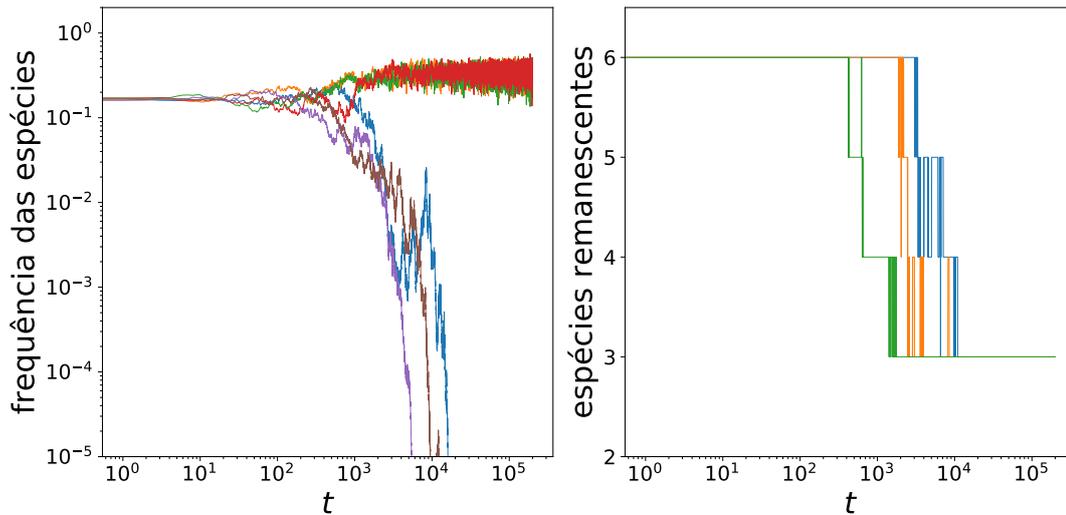
$$S_{máx,ij} = \begin{bmatrix} H & L & L \\ L & H & L \\ L & L & H \\ H & L & L \\ L & H & L \\ L & L & H \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

Assim cada linha denota uma espécie enquanto as colunas representam um tipo de recurso, nesta notação o elemento da matriz $S_{máx,ij}$ é referente a taxa de aquisição de recurso da espécie i em relação ao recurso j . Para evitar a situação mencionada anteriormente de seletivamente equivalente (por exemplo, as espécies 1 e 4 atuarem de maneira idêntica nos recurso 1), iremos multiplicar cada termo $S_{máx,ij}$ por um fator aleatório da forma $1 + \delta_{ij}$, onde δ_{ij} é advindo de uma distribuição Normal $N(0; 0, 1)$. Desse modo evitamos que várias espécies tenha os mesmos parâmetros e que sejam essencialmente as mesmas. Embora pequena, havendo de início uma variação, garantimos que as espécies são de fato distinguíveis.

Consideramos o exemplo em que há inicialmente $n_s = 6$ espécies disputando por $n_r = 3$ recursos. Em seguida obtemos numericamente, via método de Milstein, o lado esquerdo da fig.(23) como uma realização possível. Nessa figura temos a frequência relativa das espécies ao longo do tempo. Neste cálculo, devido ao número maior de equações e a imprevisibilidade da ocorrência de valores negativos para a quantidade dos recursos, $S_j < 0$ foi redefinido para $S_j = 0$ sempre que necessário.

Nota-se que a condição inicial (todas as espécies iniciam com a mesma quantidade de indivíduos) mantém-se praticamente a mesma durante algum tempo, mas em algum momento devido a concorrência por recursos algumas extinguem-se. Destacamos que esse é apenas um resultado possível e que a configuração final pode variar bastante, tanto quanto em relação a quais são as espécies sobreviventes, como quanto a quantidade final, um valor final maior ou menor pode eventualmente ocorrer, dependendo também do tempo total de análise. No modelo, a variável n_i é contínua, então a regra para definir a extinção é imprecisa, o critério utilizado nesta seção é que se o tamanho da população for menor do que um dado limite esta é considerada como extinta, embora o seu valor não seja a partir

Figura 23 – À esquerda a frequência relativa das espécies ao longo do tempo para 6 espécies competindo por 3 diferentes recursos. Cada cor representa a frequência relativa de uma espécie. À direita o número de espécies remanescentes ao longo do tempo para a mesma situação. Nesta a cor indica o limiar considerado para a extinção da espécie, azul para $t_{lim} = 0.01$, laranja para $t_{lim} = 0.1$, e verde para $t_{lim} = 0.5$. Os eixos estão exibidos em escala logarítmica. A condição inicial utilizada nestas simulações é $n_i(0) = 75$, $S_j(0) = 2$, e para os demais parâmetro temos $\nu_i = 0.05$, $g_\nu = 0.5$, $\delta_j = 100$, $g_\delta = 0.5$, $H = 5$, $L = 0.1$, $a_{ij} = 0.25$, $k_{ij} = 0.1$, e $h = 0.001$.

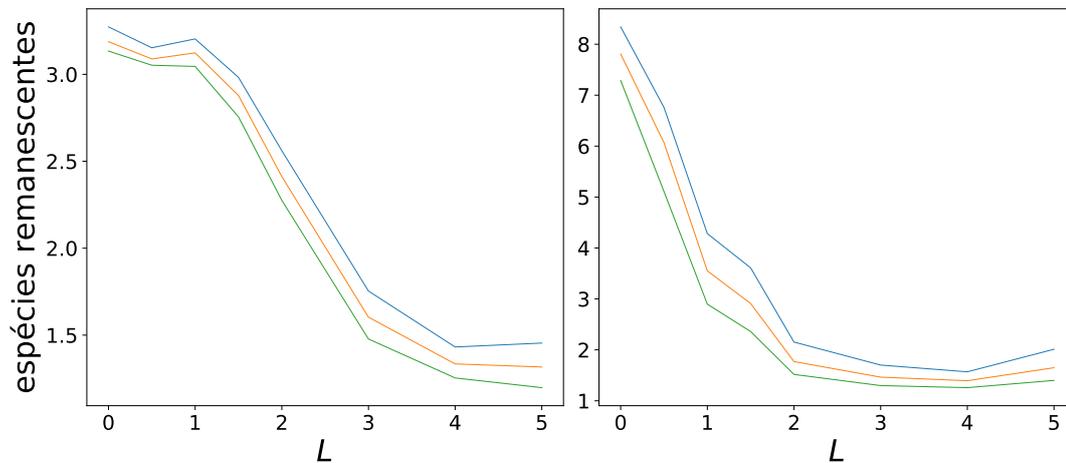


Fonte : O autor (2020)

daí atribuído como zero, pois como podemos ver à direita na fig.(23), que apresenta a quantidade de espécies remanescentes após um dado tempo, ocasionalmente o número de espécies aumenta após ter diminuído. Neste exemplo, porém o número final de espécies não depende de maneira significativa do limiar t_{lim}

Na fig.(24) temos o número de espécies remanescentes em termos do parâmetro L , enquanto H tem seu valor fixo em $H = 5$. A máxima coexistência ocorre para L pequeno, quando as espécies estão mais especializadas em recursos diferentes. Por exemplo, em (4.25) temos duas espécies mais aptas na extração de cada recurso. À medida que o valor de L aumenta em direção ao valor de H o número de espécies diminui, pois a adequação das espécies ao meio torna-se mais homogênea e a disputa é maior pelos mesmos tipos de recursos. Apenas para $L \ll H$ o número de espécies no equilíbrio torna-se maior que o número de recursos, mas tendem a serem iguais quando $L \rightarrow H$.

Figura 24 – À esquerda o número de espécies remanescentes no equilíbrio em função do parâmetro L para 21 espécies competindo por 3 tipos de recursos, aqui a cor indica o limiar considerado para a extinção da espécie, azul para $t_{lim} = 0.01$, laranja para $t_{lim} = 0.1$, e verde para $t_{lim} = 0.5$. À direita o mesmo para 7 tipos de recursos. A condição inicial utilizada nestas simulações é $n_i(0) = 75$, $S_j(0) = 2$, e para os demais parâmetros temos $\nu_i = 0.05$, $g_\nu = 0.5$, $\delta_j = 100$, $g_\delta = 0.5$, $H = 5$, $L = 0.1$, $a_{ij} = 0.25$, $k_{ij} = 0.1$, e $h = 0.001$. Os gráficos correspondem à média de 5 configurações independentes.



Fonte : O autor (2020)

5 CONCLUSÕES

Para a dinâmica do deslocamento animal, propomos calcular a evolução temporal dos tamanhos dos passos como sendo baseada em uma dinâmica de Langevin, constituída por termos determinísticos e uma componente estocástica na forma de um ruído branco. Soluções estacionárias analíticas são obtidas, no caso unidimensional, via o formalismo da equação de Fokker-Planck vista como uma equação de continuidade. Assim, discutimos as formas dessas funções em termos de formas lineares e não lineares, de ruídos homogêneos e heterogêneos, e composições ou misturas estatísticas.

Concluimos assim que a proposta por equação de Langevin para a dinâmica dos tamanhos dos passos, junto a equação de Fokker-Planck, é capaz de gerar, no regime estacionário, boa parte das distribuições habitualmente encontradas na literatura do deslocamento animal. Embora que a complexidade dos padrões de locomoção tenham sido reduzidas, sem maiores explicações em termos biológicos, pelo grau de linearidade das funções envolvidas na dinâmica e das propriedades estatísticas do ruído, que também podem requerer uma análise por superestatística relacionado aos ambientes heterogêneos. Assim a utilização de métodos numéricos, em particular via método de Milstein, conhecidos no estudo de equações diferenciais estocásticas, possibilita a avaliação da evolução temporal da posição do caminhante, de onde podemos, por meio do expoente de difusão inferido pela relação de lei de potência entre deslocamento quadrático médio e o tempo transcorrido, $\langle x^2 \rangle \sim t^\nu$, caracterizar os padrões de difusão como sendo normal com $\nu = 0,50$ ou superdifusivo com um valor maior que este.

A dinâmica do tamanho dos passos poderia ser ainda estudada com a adição de mais fontes de ruídos, possivelmente com a introdução de mais dimensões espaciais, além da inclusão de algum grau de anisotropia do meio em favorecer passos em uma direção em detrimento das outras.

O tamanho da população e quantidade de recursos disponíveis são modelados por um par de equações diferenciais estocásticas acopladas, que permitem avaliar a evolução temporal dessas grandezas. Assim, para a dinâmica populacional de indivíduos de uma espécie em busca do mesmo recurso, concluimos que quando permitimos flutuações na taxa de entrada de recurso e na taxa de mortalidade, uma análise por meio do coeficiente de correlação de Pearson, que é sempre negativo, revela que a correlação aumenta quando a intensidade do ruído na taxa de mortalidade aumenta, enquanto a correlação diminui quando a intensidade do ruído na entrada de recursos aumenta. Por outro lado, quando um ou outro ruído é nulo, isto é, apenas um dos ruídos está presente, alguns resultados analíticos podem ser obtidos, e mostram-se válido na proximidade do equilíbrio tão logo a intensidade do ruído seja pequena. Para um sistema com um número maior de espécies e

de tipos de recursos, focamos na observação do regime assintótico, no qual verificamos que o número de espécies nunca é maior que a quantidade de variedade de recursos disponíveis.

No modelo base de uma espécie e um recurso, poderíamos ainda estudar o problema da dinâmica populacional considerando a flutuação de outros parâmetros, o que pode originar outros tipos de ruídos. Na dinâmica ecológica, poderíamos ainda estudar a influência de outros parâmetros na taxa de sobrevivência das espécies.

REFERÊNCIAS

- 1 SANTANA-FILHO, J. V. et al. A langevin dynamics approach to the distribution of animal move lengths. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, IOP Publishing, v. 2020, n. 2, p. 023406, feb 2020. Citado na página 17.
- 2 AMADO, A. et al. Interplay of sources of stochastic noise in a resource-based model. *The European Physical Journal Plus*, v. 134, 04 2019. Citado na página 17.
- 3 NATHAN, R. et al. A movement ecology paradigm for unifying organismal movement research. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Academy of Sciences, v. 105, n. 49, p. 19052–19059, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 75.
- 4 BASTILLE-ROUSSEAU, G. et al. Flexible characterization of animal movement pattern using net squared displacement and a latent state model. *Movement Ecology*, v. 4, 06 2016. Citado na página 18.
- 5 GOMEZ-MARIN, A. et al. Big behavioral data: Psychology, ethology and the foundations of neuroscience. *Nature neuroscience*, v. 17, p. 1455–62, 11 2014. Citado na página 18.
- 6 ÅKESSON SUSANNE; HANSSON, L.-A. *Animal movement across scales*. 1. ed. [S.l.]: Oxford University Press, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 75.
- 7 TURCHIN, P. *Quantitative Analysis of Movement: Measuring and Modeling Population Redistribution in Animals and Plants*. 1. ed. [S.l.]: Sinauer Associates Inc, 1998. Citado 4 vezes nas páginas 18, 65, 75 e 77.
- 8 HUMPHRIES HENRI WEIMERSKIRCH, D. W. S. N. E. A new approach for objective identification of turns and steps in organism movement data relevant to random walk modelling. *Methods in Ecology and Evolution*, v. 4, p. 930–938, 10 2013. Citado na página 19.
- 9 DEMVSAR, U. et al. Analysis and visualisation of movement: an interdisciplinary review. *Movement Ecology*, v. 3, 12 2015. Citado na página 19.
- 10 EDELHOFF, H.; SIGNER, J.; BALKENHOL, N. Path segmentation for beginners: An overview of current methods for detecting changes in animal movement patterns. *Movement Ecology*, v. 4, 12 2016. Citado na página 19.
- 11 VISWANATHAN MARCOS G. E. DA LUZ, E. P. R. H. E. S. G. M. *The Physics of Foraging: An Introduction to Random Searches and Biological Encounters*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2011. Citado 5 vezes nas páginas 19, 75, 77, 78 e 79.
- 12 MÉNDEZ DANIEL CAMPOS, F. B. a. V. *Stochastic Foundations in Movement Ecology: Anomalous Diffusion, Front Propagation and Random Searches*. 1. ed. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2014. (Springer Series in Synergetics). Citado 6 vezes nas páginas 19, 64, 75, 77, 78 e 79.

- 13 MORALES, J. et al. Extracting more out of relocation data: Building movement models as mixtures of random walks. *EEB Articles*, v. 85, 09 2004. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 75.
- 14 VISWANATHAN, G. et al. Optimizing the success of random searches. *Nature*, v. 401, p. 911–4, 11 1999. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 75.
- 15 RUSCH, F. et al. Transient dynamics in a nonequilibrium superdiffusive reaction-diffusion process: Nonequilibrium random search as a case study. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 102, p. 012126, Jul 2020. Citado na página 19.
- 16 BARTUMEUS, F. et al. Stochastic optimal foraging: Tuning intensive and extensive dynamics in random searches. *PloS one*, v. 9, p. e106373, 09 2014. Citado na página 19.
- 17 ROOT, R.; KAREIVA, P. The search for resources by cabbage butterflies (*pieris rapae*): Ecological consequences and adaptive significance of markovian movements in a patchy environment. *Ecology*, v. 65, p. 147–165, 02 1984. Citado na página 19.
- 18 MCCLINTOCK, B. et al. A general discrete-time modeling framework for animal movement using multistate random walks. *Ecological Monographs*, v. 82, p. 335–349, 08 2012. Citado na página 19.
- 19 LENZ, F.; CHECHKIN, A. V.; KLAGES, R. Constructing a stochastic model of bumblebee flights from experimental data. *PLOS ONE*, Public Library of Science, v. 8, n. 3, p. 1–7, 03 2013. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 75.
- 20 GURARIE, E. et al. Correlated velocity models as a fundamental unit of animal movement: Synthesis and applications. *Movement Ecology*, v. 5, 05 2017. Citado na página 20.
- 21 WILKINSON, D. J. *Stochastic Modelling for Systems Biology, Third Edition*. Hardcover. [S.l.]: CRC Press, 2018. Citado na página 20.
- 22 BECK, C.; COHEN, E. Superstatistics. *Statistical Mechanics and its Applications*, v. 322, p. 267–275, 05 2002. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 87.
- 23 METZNER, C. et al. Superstatistical analysis and modelling of heterogeneous random walks. *Nat Comm*, v. 6, p. 7516, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 87.
- 24 TORNEY, C. et al. From single steps to mass migration: the problem of scale in the movement ecology of the Serengeti wildebeest. *Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences*, v. 373, p. 20170012, 05 2018. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 79.
- 25 REYNOLDS, A. Mussels realize Weierstrassian Lévy walks as composite correlated random walks. *Scientific reports*, v. 4, p. 4409, 03 2014. Citado 4 vezes nas páginas 21, 75, 91 e 92.
- 26 MANDELBROT, B. B.; NESS, J. W. V. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Review*, Society for Industrial and Applied Mathematics, v. 10, n. 4, p. 422–437, 1968. Citado na página 21.

- 27 VISWANATHAN, G. Improvements in the statistical approach to random Levy flight searches m.g.e. da luz, s.v. buldyrev, s. havlin, e.p. raposo, h.e. stanley. *Physica A-statistical Mechanics and Its Applications - PHYSICA A*, v. 295, p. 89–92, 01 2001. Citado na página 21.
- 28 GIUGGIOLI, L. et al. Fokker–Planck description for a linear delayed langevin equation with additive Gaussian noise. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 49, p. 384002, 09 2016. Citado na página 21.
- 29 REICHL, L. E. *A modern course in statistical physics*. 2nd ed. ed. [S.l.]: Wiley, 1998. Citado na página 21.
- 30 SALINAS, S. *Introduction to statistical physics*. 1. ed. [S.l.]: Springer, 2001. (Graduate texts in contemporary physics). Citado 2 vezes nas páginas 22 e 66.
- 31 NOLAN, J. *Stable distribution: Models for heavy-tailed data*. 01 2014. Citado na página 23.
- 32 PAUL, J. B. W. *Stochastic processes: from physics to finance*. 1. ed. [S.l.]: Springer, 1999. Citado na página 23.
- 33 GNEDENKO A. N. KOLMOGOROV, K. L. C. J. L. D. B. V. *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables. Revised Edition*. revised. [S.l.]: Addison-Wesley, 1968. Citado na página 23.
- 34 V.M., Z. *One-dimensional stable distributions*. [S.l.]: AMS, 1986. (Translations of Mathematical Monographs - Vol 65). Citado na página 24.
- 35 CHOWDHURY, D. 100 years of Einstein's theory of Brownian motion: From pollen grains to protein trains —2. *Resonance*, v. 10, p. 42–54, 11 2005. Citado na página 26.
- 36 DUPLANTIER, B. Brownian motion, "diverse and undulating". *Einstein 1905-2005*, v. 47, 06 2007. Citado na página 27.
- 37 EINSTEIN, A. Investigations on the theory of the Brownian movement by Albert Einstein, ph.d. *SERBIULA (sistema Librum 2.0)*, 01 1956. Citado na página 27.
- 38 Einstein, A. Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. *Annalen der Physik*, v. 322, n. 8, p. 549–560, jan 1905. Citado na página 28.
- 39 SILVA, J.; LIMA, J. Quatro abordagens para o movimento browniano. *Revista Brasileira de Ensino de Física - REV BRAS ENSINO FIS*, v. 29, 01 2007. Citado na página 31.
- 40 BREHM, J.; MULLIN, W. *Introduction to the structure of matter: a course in modern physics*. [S.l.: s.n.], 1989. Citado na página 31.
- 41 MALTHUS, T. *An Essay on the Principle of Population*. [S.l.]: Printed for J. Johnson, in St. Paul's Church-Yard, 1798. Citado na página 32.
- 42 BEGON COLIN R. TOWNSEND, J. L. H. M. *Ecology: From Individuals to Ecosystems*. 4. ed. [S.l.]: Wiley-Blackwell, 2006. Citado na página 34.

- 43 VERHULST, P. F. Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. *Corresp. Math. Phys.* v. 10, p. 113–121, 1838. Citado na página 34.
- 44 STROGATZ, S. H. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. [S.l.]: Addison-Wesley Pub, 1994. (Studies in nonlinearity). Citado na página 34.
- 45 PEARL, R. The growth of populations. *The Quarterly Review of Biology*, University of Chicago Press, v. 2, n. 4, p. 532–548, 1927. ISSN 00335770, 15397718. Citado na página 35.
- 46 KREBS, C. *Ecology. The Experimental Analysis of Distribution and Abundance*. 5th. ed. [S.l.: s.n.], 1972. Citado na página 35.
- 47 LOTKA, A. Contribution to the theory of periodic reactions. *J. Phys. Chem.*, v. 14, 01 1910. Citado na página 35.
- 48 VOLTERRA, V. Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi. *Memoria della Regia Accademia Nazionale dei Lincei, Series 6*, v. 2, p. 31–113, 01 1926. Citado na página 35.
- 49 MAY, R. *Theoretical ecology : principles and applications*. Oxford England Boston: Blackwell Scientific Publications, 1981. Citado na página 35.
- 50 OTTO, S. P. *A Biologist's Guide to Mathematical Modeling in Ecology and Evolution*. [S.l.]: Princeton University Press, 2007. Citado na página 36.
- 51 GILPIN, M. E. Spiral chaos in a predator-prey model. *The American Naturalist*, University of Chicago Press, American Society of Naturalists, v. 113, n. 2, p. 306–308, 1979. Citado na página 36.
- 52 LEÓN, J.; TUMPSON, D. Competition between two species for two complementary or substitutable resources. *Journal of Theoretical Biology*, v. 50, p. 185–201, 04 1975. Citado na página 36.
- 53 TILMAN, D. Resources: A graphical-mechanistic approach to competition and predation. *The American Naturalist*, [University of Chicago Press, American Society of Naturalists], v. 116, n. 3, p. 362–393, 1980. ISSN 00030147, 15375323. Citado na página 36.
- 54 TILMAN, D. Resource competition between plankton algae: An experimental and theoretical approach. *Ecology*, Ecological Society of America, v. 58, n. 2, p. 338–348, 1977. ISSN 00129658, 19399170. Citado na página 36.
- 55 MONOD, J. La technique de culture continue: théorie et applications. In: _____. [S.l.: s.n.], 1978. v. 79, p. 184–204. Citado na página 36.
- 56 HARDIN, G. The competitive exclusion principle. *Science*, v. 131, p. 1292–, 04 1960. Citado na página 36.
- 57 HUTCHINSON, G. E. The paradox of the plankton. *The American Naturalist*, University of Chicago Press, American Society of Naturalists, v. 95, n. 882, p. 137–145, 1961. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 38.

- 58 HUANG, W. et al. A resource-based game theoretical approach for the paradox of the plankton. *PeerJ — The Journal of Life and Environmental Sciences*, v. 4, p. e2329, 09 2016. Citado na página 36.
- 59 DEANGELIS, D.; WATERHOUSE, J. Equilibrium and nonequilibrium concepts in ecological models. *Ecological Monographs*, v. 57, p. 1–21, 03 1987. Citado na página 36.
- 60 COULSON, T.; ROHANI, P.; PASCUAL, M. Skeletons, noise and population growth: The end of an old debate? *Trends in Ecology & Evolution*, v. 19, p. 359–64, 08 2004. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 37.
- 61 HIGGINS, K. et al. Stochastic dynamics and deterministic skeletons: Population behavior of dungeness crab. *Science*, 01 1997. Citado na página 36.
- 62 KAITALA, V. et al. Population dynamics and the color of environmental noise. *Proceedings. Biological sciences / The Royal Society*, v. 264, p. 943–8, 08 1997. Citado na página 37.
- 63 BJORNSTAD, O.; GRENFELL, B. Noisy clockwork: Time series analysis of population fluctuations in animals. *Science (New York, N.Y.)*, v. 293, p. 638–43, 08 2001. Citado na página 37.
- 64 MÅREN, I. et al. Changing contributions of stochastic and deterministic processes in community assembly over a successional gradient. *Ecology*, v. 99, p. 148–157, 01 2018. Citado na página 37.
- 65 LEIRS, H. et al. Stochastic seasonality and nonlinear density-dependent factors regulate population size in an africa rodent. *Nature*, v. 71, 01 1997. Citado na página 37.
- 66 TURCHIN, P. *Complex Population Dynamics: A Theoretical/Empirical Synthesis*. [S.l.]: Princeton University Press, 2003. (MPB-35) (Monographs in Population Biology). Citado na página 37.
- 67 HUISMAN, J.; WEISSING, F. Biological conditions for oscillations and chaos generated by multispecies competition. *Ecology*, v. 82, p. 2682–2695, 10 2001. Citado na página 38.
- 68 SHORESH, N.; HEGRENESS, M.; KISHONY, R. Evolution exacerbates the paradox of the plankton. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, v. 105, p. 12365–9, 09 2008. Citado na página 38.
- 69 SCHEFFER, M. et al. Why plankton communities have no equilibrium: solutions to the paradox: Recent developments in fundamental and applied plankton research. *Hydrobiologia*, v. 491, 01 2003. Citado na página 38.
- 70 GARCIA-PALACIOS, J. Introduction to the theory of stochastic processes and Brownian motion problems. 02 2007. Citado na página 39.
- 71 MILOTTI, E. 1/f noise: A pedagogical review. *Arxiv: Physics*, 05 2002. Citado na página 40.
- 72 KAULAKYS, B.; GONTIS, V.; ALABURDA, M. Point process model of 1/f noise vs a sum of lorentzians. *Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics*, v. 71, p. 051105, 06 2005. Citado na página 40.

- 73 GONTIS, V.; KAULAKYS, B. Modeling long-range memory trading activity by stochastic differential equations. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 382, p. 114–120, 08 2007. Citado na página 40.
- 74 FELLER, W. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. [S.l.]: Wiley, 1968. v. 1. Hardcover. Citado na página 41.
- 75 KAMPEN, N. V. *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*. 3rd ed. ed. [S.l.]: Elsevier, 2007. (North-Holland personal library). Citado na página 46.
- 76 PAWULA, R. Approximation of the linear Boltzmann equation by the Fokker-Planck equation. *Physical Review - PHYS REV X*, v. 162, p. 186–188, 10 1967. Citado na página 47.
- 77 RISKEN, H.; VOLLMER, H. On the application of truncated generalized fokker-planck equations. *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter and Quanta*, v. 35, p. 313–315, 09 1979. Citado na página 47.
- 78 KAMPEN, N. Ito versus stratonovich. *J. Stat. Phys.*, v. 24, p. 175–187, 01 1981. Citado 2 vezes nas páginas 51 e 69.
- 79 MANNELLA, R.; MCCLINTOCK, P. Ito versus stratonovich: 30 years later. *Fluctuation and Noise Letters*, v. 11, 05 2012. Citado 2 vezes nas páginas 51 e 69.
- 80 ITO, K. Stochastic integral. *Proc. Imp. Acad.*, The Japan Academy, v. 20, n. 8, p. 519–524, 1944. Citado na página 56.
- 81 RISKEN, H. *The Fokker-Planck equation: methods of solution and applications*. 2. ed. [S.l.]: Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1989. (Springer Series in Synergetics 18). Citado na página 56.
- 82 KLOEDEN, E. P. P. E. *Numerical solution of stochastic differential equations*. Corrected. [S.l.]: Springer, 1995. (Stochastic Modelling and Applied Probability). Citado 2 vezes nas páginas 58 e 77.
- 83 MARUYAMA, G. Continuous Markov processes and stochastic equations. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, v. 4, p. 48–90, 01 1955. Citado na página 58.
- 84 MILSTEIN, G. Approximate integration of stochastic differential equations. *Theor. Prob. Appl.*, v. 19, p. 583–588, 01 1974. Citado na página 59.
- 85 TORAL, P. C. R. *Stochastic Numerical Methods: An Introduction for Students and Scientists*. 1. ed. [S.l.]: Wiley-VCH, 2014. Citado na página 61.
- 86 BOX, G.; MULLER, M. A note on the generation of random normal deviates. *Annals of Mathematical Statistics*, v. 29, p. 610–611, 06 1958. Citado na página 62.
- 87 TSANG, W.; MARSAGLIA, G. The ziggurat method for generating random variables. *Journal of Statistical Software*, v. 05, 01 2000. Citado na página 62.
- 88 FA, K. Linear Langevin equation with time-dependent drift and multiplicative noise term: Exact study. *Chemical Physics*, v. 287, p. 1–5, 02 2003. Citado na página 66.

- 89 FA, K. Exact solution of the Fokker-Planck equation for a broad class of diffusion coefficients. *Physical Review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics*, v. 72, p. 020101, 09 2005. Citado na página 66.
- 90 FA, K. Solution of Fokker-Planck equation for a broad class of drift and diffusion coefficients. *Physical Review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics*, v. 84, p. 012102, 07 2011. Citado na página 66.
- 91 UHLENBECK, G. E.; ORNSTEIN, L. S. On the theory of the brownian motion. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 36, p. 823–841, Sep 1930. Citado na página 66.
- 92 SCHENZLE, A.; BRAND, H. Multiplicative stochastic processes in statistical physics. *Phys. Rev. A*, v. 20, 10 1979. Citado na página 67.
- 93 WILKINSON, D. J. *Stochastic modelling for systems biology*. Second edition. [S.l.]: CRC Press/Taylor & Francis Group, 2012. (Chapman & Hall/CRC mathematical and computational biology series). Citado na página 70.
- 94 TAUBER, U. Critical dynamics: A field theory approach to equilibrium and non-equilibrium scaling behavior. *Critical Dynamics: A Field Theory Approach to Equilibrium and Non-Equilibrium Scaling Behavior*, p. 1–511, 01 2012. Citado na página 70.
- 95 KAMENEV, A.; MEERSON, B.; SHKLOVSKII, B. How colored environmental noise affects population extinction. *Physical Review Letters*, v. 101, p. 268103, 01 2009. Citado na página 70.
- 96 GRIGORIU, M. Dynamic systems with Poisson white noise: Special issue in memory of professor J. B. roberts (editor: Raouf A. Ibrahim). *Nonlinear Dynamics*, v. 36, 01 2004. Citado na página 70.
- 97 COX, D. *The Theory of Stochastic Processes*. 1. ed. [S.l.]: Chapman and Hall/CRC, 2017. Citado na página 70.
- 98 HONGLER, M.-O.; FILLIGER, R. On jump-diffusive driving noise sources - some explicit results and applications. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 06 2016. Citado na página 70.
- 99 CODLING, E.; PLANK, M.; BENHAMOU, S. Random walks in biology. *Journal of the Royal Society*, v. 5, p. 813–34, 09 2008. Citado na página 75.
- 100 SIMS, D. et al. Scaling laws of marine predator search behaviour. *Nature*, v. 451, p. 1098–102, 03 2008. Citado 2 vezes nas páginas 75 e 79.
- 101 HUMPHRIES, N. et al. Environmental context explains Lévy and Brownian movement patterns of marine predators. *Nature*, v. 465, 06 2010. Citado 2 vezes nas páginas 75 e 79.
- 102 KEMBRO, J. et al. Bumblebees learn foraging routes through exploitation–exploration cycles. *Journal of The Royal Society Interface*, v. 16, p. 20190103, 07 2019. Citado 4 vezes nas páginas 75, 82, 91 e 92.

- 103 RAMOS-FERNANDEZ, G. et al. Lévy walk patterns in the foraging movements of spider monkeys (*ateles geoffroyi*). *Behavioral Ecology and Sociobiology*, v. 55, 02 2003. Citado 2 vezes nas páginas 75 e 79.
- 104 BARTUMEUS, F. et al. Foraging success under uncertainty: Search tradeoffs and optimal space use. *Ecology Letters*, v. 19, 09 2016. Citado 3 vezes nas páginas 75, 91 e 92.
- 105 EDWARDS, A. et al. Revisiting Lévy flight search patterns of wandering albatrosses, bumblebees and deer. *Nature*, v. 449, p. 1044–8, 11 2007. Citado 2 vezes nas páginas 75 e 82.
- 106 SMOUSE, P. et al. Stochastic modeling of animal movement. *Philosophical transactions of the Royal Society of London. Series B, Biological sciences*, v. 365, p. 2201–11, 07 2010. Citado na página 75.
- 107 REYNOLDS, A. Lévy flight movement patterns in marine predators may derive from turbulence cues. *Proceedings of the Royal Society*, v. 470, p. 20140408, 09 2014. Citado na página 79.
- 108 KOELZSCH, A. et al. Experimental evidence for inherent Levy search behaviour in foraging animals. *Proceedings. Biological sciences / The Royal Society*, v. 282, 05 2015. Citado na página 79.
- 109 SHLESINGER, M. Comment on “stochastic process with ultraslow convergence to a Gaussian: The truncated Lévy flight”. *Physical Review Letters*, v. 74, p. 4959, 07 1995. Citado na página 79.
- 110 (AUTH.), B. J. *Statistical Properties of the Generalized Inverse Gaussian Distribution*. 1. ed. [S.l.]: Springer-Verlag New York, 1982. (Lecture Notes in Statistics 9). Citado na página 83.
- 111 PANIK, M. J. *Advanced Statistics from an Elementary Point of View*. [S.l.]: Academic Press, 2005. Citado na página 85.
- 112 DALZIEL, B.; MORALES, J.; FRYXELL, J. Fitting probability distributions to animal movement trajectories: Using artificial neural networks to link distance, resources, and memory. *The American naturalist*, v. 172, p. 248–58, 02 2008. Citado na página 86.
- 113 VASCONCELOS, G.; SALAZAR, D. Multicanonical distribution and the origin of power laws. *Revista Cubana de Física*, v. 29, 08 2012. Citado na página 87.
- 114 MACÊDO, A. et al. Universality classes of fluctuation dynamics in hierarchical complex systems. *Physical Review E*, v. 95, 01 2017. Citado na página 87.
- 115 LOMHOLT, M. et al. Lévy strategies in intermittent search processes are advantageous. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, v. 105, 08 2008. Citado na página 91.
- 116 O'BRIEN; BROWMAN, H.; EVANS, B. Search strategies of foraging animals. *American Scientist*, v. 78, p. 152–160, 01 1990. Citado na página 91.
- 117 KRAMER, D.; MCLAUGHLIN, R. The behavioral ecology of intermittent locomotion. *American Zoologist*, v. 41, 04 2001. Citado na página 91.

- 118 Reynolds, A. M. On the intermittent behaviour of foraging animals. *Europhys. Lett.*, v. 75, n. 4, p. 517–520, 2006. Citado na página 91.
- 119 BÉNICHOU, O. et al. Intermittent search strategies. *Reviews of Modern Physics*, v. 83, 04 2011. Citado na página 91.
- 120 FERNÁNDEZ, L. et al. Coexistence of competing metabolic pathways in well-mixed populations. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 93, p. 052401, 2016. Citado na página 93.
- 121 BENTON, T.; PLAISTOW, S.; COULSON, T. Complex population dynamics and complex causation: devils, details and demography. *proc r soc b biol sci* 273: 1173–1181. *Proceedings. Biological sciences / The Royal Society*, v. 273, p. 1173–81, 2006. Citado na página 94.
- 122 JOHNSON, K. A.; GOODY, R. S. The original Michaelis constant: Translation of the 1913 Michaelis–Menten paper. *Biochemistry*, v. 50, n. 39, p. 8264–8269, 2011. Citado na página 96.
- 123 FERNÁNDEZ, L.; CAMPOS, P. Evolution of complexity in a resource-based model. *European Physical Journal Plus*, v. 132, p. 72, 02 2017. Citado na página 96.
- 124 MONOD, J. The growth of bacterial cultures. *Annual Review of Microbiology*, v. 3, n. 1, p. 371–394, 1949. Citado na página 97.