



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Cleiton de Lima Ricardo

Teoremas de Poincaré-Hopf, Gauss-Bonnet e Dehn-Sommerville
em complexos simpliciais energizados

Recife
2020

Cleiton de Lima Ricardo

**Teoremas de Poincaré-Hopf, Gauss-Bonnet e Dehn-Sommerville
em complexos simpliciais energizados**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em matemática.

Área de Concentração: Geometria e Topologia

Orientador: Prof. Fernando Antônio Nóbrega Santos

Recife

2020

Catálogo na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

R488t Ricardo, Cleiton de Lima
Teoremas de Poincaré-Hopf, Gauss-Bonnet e Dehn-Sommerville em complexos simpliciais energizados / Cleiton de Lima Ricardo. – 2020.
63 f.: il., fig.

Orientador: Fernando Antônio Nóbrega Santos.
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, Recife, 2020.
Inclui referências.

1. Geometria. 2. Complexos simpliciais energizados. I. Santos, Fernando Antônio Nóbrega (orientador). II. Título.

516

CDD (23. ed.)

UFPE- CCEN 2020 - 85

CLEITON DE LIMA RICARDO

**TEOREMAS DE POINCARÉ-HOPF, GAUSS-BONNET E DEHN-SOMMERVILLE EM
COMPLEXOS SIMPLICIAIS ENERGIZADOS.**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutorado em Matemática.

Aprovado em: 31/01/2020

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Fernando Antônio Nóbrega Santos (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Manoel José Machado Soares Lemos Leandro (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Eduardo Shirlippe Goes Leandro (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Nivan Roberto Ferreira Júnior (Examinador Externo)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Raydonal Ospina Martínez (Examinador Externo)
Universidade Federal de Pernambuco

Dedico ao meu orientador, Fernando Nóbrega, que me conduziu a fronteira do conhecimento

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por tudo, ao professor Fernando Nóbrega pelo incentivo e companheirismo em todos os momentos e a minha esposa pela compreensão do meu objetivo neste tempo de doutoramento.

Cleiton de Lima Ricardo

RESUMO

A geometria dos complexos simpliciais era muito pouco estudada antes do início da última década, porém, desde então, parece ter havido uma explosão dos trabalhos nesta área, com isso novas estruturas acabam surgindo com o desenvolvimento e as descobertas dentro do arcabouço desta geometria. Neste trabalho desenvolvemos a teoria dos complexos simpliciais energizados, uma estrutura derivada dos complexos simpliciais abstratos e que se comporta como uma generalização dos estudos topológicos dos mesmos. São apresentados além de uma introdução a nova estrutura, o estudo dos primeiros operadores energizados, o desenvolvimento das versões dos teoremas de Gauss-Bonnet e Poincaré-Hopf energizados, as relações de Denh-Sommerville energizadas e uma versão discreta do teorema de Riemann-Roch. A tese ainda apresenta uma seleção de estratégias para desenvolver novos resultados dentro da estrutura dos complexos simpliciais energizados. Estes novos resultados para os quais são traçadas as estratégias podem ser categorizados em três frentes: O preenchimento da teoria, a expansão dos resultados para conjuntos de conjuntos e as aplicações na ciências de dados, biologia e medicina.

Palavras-chave: Complexos simpliciais energizados. Gauss-Bonnet. Poincaré-Hopf. Riemann-Roch. Operadores energizados.

ABSTRACT

The geometry of the simplicial complexes was under-investigated before the beginning of the last decade, but since then there seems to have been an explosion of work in this field. Therefore, new structures come to emerge with the development and discoveries within the framework of simplicial geometry. In this thesis, we push forward the development of the theory of energized simplicial complexes, a structure derived from abstract simplicial complexes that behaves as a generalization of their classical topological version. In addition to an introduction to this new structure, we studied the first energized operators, the development of the energized Gauss-Bonnet and Poincaré-Hopf theorems, the energized Denh-Sommerville relations, and a discrete version of the Riemann-Roch theorem. The thesis also presents a selection of strategies and pathways to develop further results within the structure of energized simplicial complexes. These new results for which the strategies are drawn can be categorized on three fronts: The completion of the theory, the expansion of the results to sets of sets and applications in data sciences, biology and medicine.

Keywords: Simplicial complexes energized. Gauss-Bonnet. Poincaré-Hopf. Riemann-Roch. Energized operators..

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Esfera Triangularizada	16
Figura 2 – $G = \{A, B, C, a, b, c, t1\}$	18
Figura 3 – O refinamento baricêntrico de G.	19
Figura 4 – Ilustração Complexo Simplicial do Exemplo 3.3	25
Figura 5 – Exemplo 1	44
Figura 6 – O complexo $G = \{A, B, C, a, b, c, t1\}$ e refinamento baricêntrico e o grafo símlice	52
Figura 7 – Exemplo 1	54

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	COMPLEXOS SIMPLICIAIS ENERGIZADOS	14
2.1	Complexos simpliciais	14
2.2	Grafos e complexos simpliciais	17
2.3	Complexos Simpliciais Energizados	19
2.3.1	Operadores Laplacianos Energizados	20
3	ALGUNS RESULTADOS EM COMPLEXOS SIMPLICIAIS ENER- GIZADOS	23
3.1	Teorema do determinante	23
3.2	Teorema da Energia	26
3.3	Alguns casos solúveis de complexos energizados	29
3.3.1	Caso Unimodular	29
3.3.2	Caso de energia constante	30
3.3.3	Caso Topológico	31
3.3.4	Caso Paramétrico	31
4	TEOREMAS DE POINCARÉ-HOPF, GAUSS-BONNET E DEHN- SOMMERVILLE	33
4.1	Teorema de Poincaré-Hopf	33
4.1.1	Um breve histórico	33
4.1.2	Poincaré-Hopf em grafos	34
4.1.3	Poincaré Hopf para complexos simpliciais	37
4.1.4	Poincaré Hopf para complexos simpliciais energizados	38
4.2	Teorema de Gauss-Bonnet	40
4.2.1	Um breve histórico	40
4.2.2	Gauss-Bonnet-Chern para grafos	41
4.2.3	Teorema de Gauss-Bonnet para complexos simpliciais	43
4.2.4	Teorema de Gauss-Bonnet para complexos simpliciais energizados	43
4.3	A relação entre os dois teoremas	45
4.4	As relações de Dehn-Sommerville energizadas	46
4.5	Teorema de Riemann-Roch discreto	49
4.5.1	O teorema clássico	49
4.5.2	Riemann-Roch para grafos	50
4.5.3	Riemann-Roch e os complexos energizados	52

5	DISCUSSÕES E PERSPECTIVAS	54
5.1	Alguns casos	54
5.1.1	Traço dos operadores energizados	54
5.1.2	Conjuntos de conjuntos finitos energizados	56
5.2	Perspectivas	58
5.3	Conclusão	59
	REFERÊNCIAS	61

1 INTRODUÇÃO

Muito se sabe sobre a estrutura homológica de complexos simpliciais abstratos. Por outro lado, a estrutura geométrica dos complexos simpliciais veio se tornar popular apenas na última década, certamente isto devido ao avanço computacional, bem como a motivação gerada pela ciência de dados que possibilitou trabalhar de forma mais abrangente a geometria de modelos simpliciais discretos. Resultados recentes emergiram de diferentes formas, desde as triangularizações de superfícies contínuas até modelos de análise de conjuntos de dados em R^n . Os primeiros trouxeram desenvolvimentos significativos na computação gráfica. Já as aplicações desta estrutura no contexto da ciência de dados levaram a desenvolvimentos da popularmente conhecida análise topológica de dados com desdobramentos inovadores nas áreas de cosmologia, biologia, neurociência e medicina. Uma vantagem da análise geométrica de dados, em comparação com a análise topológica é o acesso a estrutura discreta local do modelo, que deixa muitas opções a serem exploradas no contextos da conexão geometria-topologia em complexos simpliciais.

Desde os idos de 2010 que Oliver Knill, (veja [1]) introduziu uma agenda geométrica para um campo cujas aplicações eram predominantemente topológicas: desenvolver versões discretas de resultados e teoremas conhecidos nas áreas de geometria e topologia do contínuo para complexos simpliciais abstratos. Inicialmente a abordagem foi feita utilizando grafos simples e, em seguida, estendendo resultados geométricos para complexos simpliciais.

Muito recentemente, Knill no trabalho "The amazing world of simplicial complexes"(veja [2]), a partir do axioma fundamental dos complexos simpliciais abstratos, i.e., o axioma do fechamento sob inclusão (Se G é um conjuntos de conjuntos finitos e se $x \subset y$ e $y \in G$ implicar em $x \in G$ então G é um complexo simplicial), mostrou que é possível construir um análogo discreto de dezenas de teoremas em geometria e topologia, alguns destes já foram estudados em mais detalhes na literatura embora vários resultados clássicos em geometria do contínuo ainda não foram transpostos para o caso simplicial. Um aspecto muito interessante desta agenda recente em geometria diferencial simplicial é o fato que muitos desses resultados podem ser observados empiricamente, por exemplo, em [3], no qual é possível calcular a curvatura combinatorial, ou até mesmo a curvatura de Ricci como em [4], para um conjunto de dados experimentais e ainda o Teorema de Gauss-Bonnet para complexos simpliciais foi observado em dados empíricos de redes cerebrais para o estudo de transições de fase topológicas [5].

Tal possibilidade pode abrir caminho para uma revolução no entendimento de sistemas complexos.

Tendo em vista a efervescência dessa área com diversas direções a serem toma-

das na extensão de resultados clássicos de geometria para complexos simpliciais, é que desenvolvemos esta tese de doutorado.

Muito recentemente, motivado pelo teorema de Riemann-Roch, o autor supracitado constrói uma estrutura denominada aqui nesta tese de "Complexos simpliciais energizados". A publicação do preprint sobre o título "Energized simplicial complexes" (veja [6]) apresenta a comunidade de pesquisadores matemáticos, especialmente, os da área de geometria e topologia combinatorial, uma nova estrutura com uma gama de extensões para se trabalhar.

Esta nova estrutura funciona em alguns casos como uma generalização dos complexos simpliciais abstratos já existentes, pois cada símplice desta nova estrutura possui uma "energia" associada. Esta energia é uma medida genérica, a nomenclatura é só para facilitar na construção da teoria. A energia é uma função $h : G \rightarrow \mathbb{R}$.

A vantagem desta estrutura é que, em alguns de seus resultados, o axioma fundamental de complexos simpliciais pode ser omitido e o resultado é válido para conjuntos de conjuntos e, portanto, podendo aplicar em uma sigma álgebra, uma topologia ou outras estruturas definidas a partir de conjuntos de conjuntos. Outra vantagem é proporcionar um análogo discreto para o teorema de Riemann-Roch inspirado na teoria de Baker-Norine, presente em [7] e [8].

A tese foi construída quando começamos em uma empreitada para estudar esta nova estrutura, analisando e otimizando em algumas situações, desenvolvendo novos resultados para a mesma, observando resultados topológicos e generalizando para casos energizados, abrindo perspectivas de novos desenvolvimentos e ponderando os novos resultados desenvolvidos.

O trabalho está exposto em cinco capítulos. A presente introdução é seguida do segundo capítulo onde apresentamos os conceitos preliminares dos complexos simpliciais energizados e isto fazemos didaticamente, como se fosse para alguém que não conhece nem mesmo complexos simpliciais abstratos, tendo como objetivo tornar a leitura acessível para aqueles que não são desta área.

O terceiro capítulo é uma espécie de resumo otimizado do artigo do Knill [6]. Nele apresentamos os principais resultados, enunciando-os e demonstrando-os. As demonstrações, em alguns casos, diferem bastante das apresentadas no paper, isto acontece com o objetivo de trazer demonstrações mais claras do que as existentes. Ao apresentar novas provas, fomos motivados pelo paper de S.K. Mukherjee intitulado "A simple elementary proof of "The Unimodularity Theorem" of Oliver Knill" (veja [9]), que mostrou, em alguns casos, a importância de expor outras provas para os resultados do Knill. Os teoremas abordados são os seguintes: teorema do determinante, teorema dos operadores energizados e o teorema da energia, além de uma síntese da análise de alguns casos específicos.

No quarto capítulo temos a principal parte da tese, no qual desenvolvemos outros

resultados. Aqui basicamente apresentaremos os teoremas de Gauss Bonnet e Poincaré Hopf, trazendo uma breve histórico e traçando o desenvolvimento de resultados até chegarmos na generalização para complexos simpliciais energizados. Nesta etapa ainda demonstramos o teorema de expectação no contexto energizado, as relações de Dehn-Sommerville energizadas e teorema associado a ela. Finalizamos o capítulo apresentando uma versão discreta do teorema de Riemann-Roch motivada pela estrutura de complexos simpliciais energizados.

Na última parte, sobre o título de "discussões e perspectivas" é onde cumprimos o terceiro objetivo de nossa empreitada acadêmica. Aqui nós analisamos alguns casos específicos não vistos ainda, estudamos o traço dos operadores energizados e o conjuntos de conjuntos energizados. Abordamos estes resultados neste último capítulo, pois a discussão deles proporcionou perspectivas de futuros trabalhos nesta área.

Finalmente, concluímos o trabalho apresentando três novas frentes de trabalhos para continuidade da pesquisa de complexos simpliciais energizados.

2 COMPLEXOS SIMPLICIAIS ENERGIZADOS

Neste capítulo introduziremos os conceitos básicos de complexos simpliciais abstratos, sua realização geométrica e algumas de suas propriedades. Já na sua parte final, apresentaremos o conceito de complexos simpliciais energizados introduzido recentemente, bem como algumas de suas propriedades.

2.1 Complexos simpliciais

O objetivo desta seção é apresentar os conceitos básicos de complexos simpliciais. Esta estrutura é muito importante pois nos permite transitar entre conceitos combinatórios e geométricos. Vejamos primeiro o conceito geométrico.

Seja $S = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_k\}$ um conjunto de pontos discretos do espaço euclidiano \mathbb{R}^d . Dizemos que os elementos de S são independentes (em posição genérica) se $\{x_0 - x_1, x_0 - x_2, \dots, x_0 - x_k\}$ é um conjunto linearmente independente, no sentido vetorial.

Nós dizemos que $x \in \mathbb{R}^d$ é uma **combinação afim** de S se existe números reais $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ tal que somam exatamente 1, e x pode ser escrito como

$$x = \sum_{i=0}^k \lambda_i \cdot x_i.$$

Uma combinação afim é dita uma **combinação convexa** se $\lambda_i \geq 0$ para todo i . Os números $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ são chamados de **coordenadas baricêntricas** de x . Para o conjunto de todos os pontos que são combinações convexas de S , damos o nome de **fecho convexo** de S .

Um **k -símplice** é um casco convexo de um conjunto S com $k + 1$ pontos independentes. Cada ponto de S é dito ser um **vértice** do k -símplice. Um k -símplice é um k -dimensional subespaço topológico do espaço euclidiano. Ou seja, **dimensão** de um k -símplice σ é $\dim \sigma = k$.

Seja σ o k -símplice com vértices em S . Dizemos que τ é uma **face** de σ se τ é um símplice com vértices em $T \subseteq S$. Quando τ é uma face de σ podemos dizer que σ é uma **coface** de τ . Esta relação pode ser indicada por $\tau \leq \sigma$.

Agora podemos definir um complexo simplicial

Definição 2.1. Um **complexo simplicial** é um conjunto finito X de símplices que é fechado sob interseções e faces, ou seja, que satisfazem as seguintes condições:

- a. Se $\sigma \in X$ e $\tau \leq \sigma$, então $\tau \in X$;

b. Se σ_1 e σ_2 estão em X , então $\sigma_1 \cap \sigma_2$ ou é vazio ou é uma face de σ_1 e σ_2 .

A **dimensão** de X é a dimensão do maior símplice em X , ou seja,

$$\dim X = \max\{\dim \sigma \mid \sigma \in X\}.$$

A definição acima é mais fácil de ser visualizada quando comparada com versões abstratas e possui aplicações importantes. Por outro lado, a seguir veremos a definição abstrata que tem possibilitado uma extensão maior da estrutura de complexos simpliciais, principalmente com o advento da análise topológica de dados, e será ela a principal utilizada neste trabalho daqui em diante para definir os complexos simpliciais energizados.

Definição 2.2. Dado um conjunto K , um **complexo simplicial abstrato** de K é uma coleção \mathcal{S} de subconjuntos de K , tal que:

- a. $\{v\} \in \mathcal{S}$ para todo $v \in K$;
- b. Se $\tau \subseteq \sigma$ e $\sigma \in \mathcal{S}$ então $\tau \in \mathcal{S}$.

Os subconjuntos unitários de K são chamados de **vértices**. Os elementos de \mathcal{S} são chamados **símplices abstratos**. Um símplice σ é dito um **k -símplice**, ou um símplice com **dimensão** k ($\dim \sigma = k$) se σ tem $k + 1$ elementos. O símplice τ é uma **face** de σ (ou σ é uma **coface** de τ) se $\tau \subseteq \sigma$.

Dado um complexo simplicial X , existe uma maneira natural de construir um complexo simplicial abstrato \mathcal{S} associado a ele. Para todo $\sigma \in X$, consideremos $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ o conjunto de vértices de σ . Definimos, então,

$$\mathcal{S} = \{\{\text{vértices de } \sigma\} \mid \sigma \in X\}.$$

É fácil verificar que \mathcal{S} é um complexo simplicial abstrato. Esta representação natural de X através de um complexo simplicial abstrato \mathcal{S} é chamado de **vertex scheme** de X ou esquema simplicial de X [10]. Isto possibilita trabalhar com a ligação entre as duas definições. Mas, para completarmos a compreensão desta relação entre as duas definições, precisamos apresentar o teorema da realização geométrica.

Nós podemos usar complexos simpliciais para representar uma variedade e outros espaços topológicos pelo seu espaço suporte. O **espaço suporte** $|X|$ de um complexo simplicial X é $|X| = \cup_{\sigma \in X} \sigma$. Por si mesmo, $|X|$ é um espaço topológico. Quando um espaço topológico \mathbb{X} é homeomorfo a um espaço suporte de um complexo simplicial X , dizemos que $|X|$ é uma **triangularização** de \mathbb{X} . Um exemplo clássico de triangularização é a de uma esfera, que pode ser triangularizada com um tetraedro (figura 1).

Definição 2.3. Dizemos que os complexos simpliciais geométricos X_1 e X_2 são **isomórficos** se existir um homeomorfismo entre $|X_1|$ e $|X_2|$.

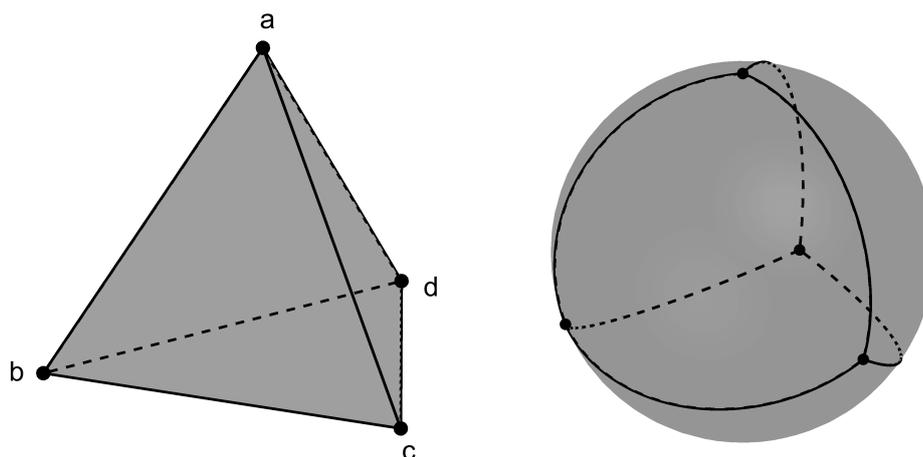


Figura 1 – Esfera Triangularizada

Definição 2.4. Seja \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 complexos simpliciais abstratos com conjuntos de vértices V_1 e V_2 , respectivamente. Dizemos que \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 são **isomórficos** se existir uma função bijetora $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ tal que, os conjuntos de \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 são os mesmos sob renomeação dos vértices mediante a função ϕ , ou seja, alterando cada vértice de \mathcal{S}_1 pela sua respectiva imagem obtemos \mathcal{S}_2 . A função ϕ é dita ser um **isomorfismo**.

Por fim, enunciaremos o teorema da realização geométrica, cuja a demonstração pode ser encontrada em [11]. Ela foi omitida aqui por fugir ao escopo do trabalho. Assim, depois deste teorema, abandonaremos os termos 'geométrico' e 'abstrato' tratando apenas como **complexo simplicial**.

Teorema 2.5 (Teorema da realização geométrica). *Todo complexo simplicial abstrato \mathcal{S} é isomorfo ao vertex scheme de algum complexo simplicial geométrico X . E dois complexos simpliciais geométricos são isomorfos se, e somente se, seus vertex scheme são isomorfos como complexos simpliciais abstratos.*

Se um complexo simplicial \mathcal{S} é isomorfo ao vertex scheme de algum complexo simplicial geométrico X , dizemos que X é uma **realização geométrica** de \mathcal{S} .

Agora podemos ver complexos simpliciais como estruturas puramente combinatoriais. Por outro lado, por meio de aplicações que associam os vértices a pontos de um espaço topológico e geométrico podemos ver a geometria realizada.

Definição 2.6. Dados dois espaços topológicos X e Y , dizemos que os dois são **homeomórficos** se existe uma função $\phi : X \rightarrow Y$ que é contínua, e a sua inversa ϕ^{-1} também é contínua. A função ϕ é chamada de **homeomorfismo**.

Um dos assuntos mais importantes estudados no âmbito da matemática, em particular da topologia algébrica, é a classificação de espaços por meio de uma propriedade

fundamental que diferencia os mais distintos espaços. Uma importante ferramenta a se estudar são os **invariantes topológicos** dos espaços. Um invariante topológico é uma propriedade de um espaço topológico que é preservada por qualquer homeomorfismo.

Um invariante topológico muito conhecido, e de grande importância, é a Característica de Euler, que tem relevância, por exemplo, na classificação de superfícies. Ele foi originalmente definido para grafos por Euler e, em seguida, estendido para dimensões maiores por Poincaré. Este invariante é definido de forma elementar para complexos simpliciais.

Definição 2.7. Seja \mathcal{S} um complexo simplicial. Chamaremos s_k o número total de k -símplices em \mathcal{S} . O invariante topológico chamado **Característica de Euler** é o número $\chi(\mathcal{S})$ definido como

$$\chi(\mathcal{S}) = \sum_{k=0}^{\dim \mathcal{S}} (-1)^k s_k.$$

Mais adiante veremos que os estudos deste invariante se permeiam nas mais diversas áreas da geometria, topologia, combinatória e aplicações.

2.2 Grafos e complexos simpliciais

Os grafos são os exemplos mais simples de complexos simpliciais, pois são formados apenas por vértices (0-símplice) e arestas (1-símplice). Nesta seção nós apresentaremos o refinamento baricêntrico de um complexo simplicial e o grafo conexão, que são formas de ver o complexo simplicial como um grafo ou um complexo derivado de um grafo. Além disso, veremos o complexo de Whitney de um grafo, uma forma de enxergar um grafo como um complexo simplicial e apresentaremos a noção de invariante combinatorial para um complexo simplicial.

Um **grafo completo** é um grafo onde cada vértice se liga, por meio de arestas do grafo, a todos os outros vértices do grafo. Um grafo completo de $(k + 1)$ vértices pode ser visto como um k -símplice. Dado um grafo H , um **subgrafo** A é um subconjunto de H tal que, A é um grafo.

Definição 2.8. Dado um grafo simples H então o complexo simplicial formado pela reunião dos subgrafos completos (*símplices*) de H é chamado de **Complexo de Whitney** de H . O Complexo de Whitney de H também é conhecido como o **clique complex** do grafo H .

Exemplo 2.9. Seja $H = \{(1), (2), (3), (1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$ um grafo. Então, o complexo de Whitney de H é o complexo simplicial $G = \{(1), (2), (3), (1, 2), (2, 3), (3, 1), (1, 2, 3)\}$. Veja que cada subgrafo completo de H torna-se um símplice de G .

Definição 2.10. Seja $G = \mathcal{S}$ um complexo simplicial abstrato finito. Chamamos de **Refinamento Baricêntrico**^{1 2} de G , o complexo de Whitney G_1 do grafo que tem como vértices os simplices de G e as arestas são definidas pelo conjunto $\{AB; A, B \in G; A \subset B \text{ ou } B \subset A\}$. Ou seja, A se conecta com B se um estiver contido no outro.

Exemplo 2.11. Se $G = \{(1), (2), (1, 2)\}$ denotando $G = \{A, B, C\}$, então, o refinamento baricêntrico será $G_1 = \{A, B, C, (A, C), (B, C), (C, C)\}$

Exemplo 2.12. Seja $G = \{A, B, C, a, b, c, t1\}$ como na Figura 2. O refinamento baricêntrico de G tem um número bem maior de vértices, como pode ser visto na figura 3, o grafo do refinamento baricêntrico de G , é dado por $G_1 = \{A, B, C, a, b, c, t1, (a,B), (a,C), (a,t1), (b,C), (b,A), (b,t1), (c,A), (c,B), (c,t1), (A,t1), (B,t1), (C,t1), (A,c,t1), (A,b,t1), (C,a,t1), (C,b,t1), (B,a,t1), (B,c,t1)\}$.

Observação 2.13. O grafo do refinamento baricêntrico não possui loops, ou seja, um vértice se ligando a si mesmo. Esta observação é importante, já que todo conjunto está contido em si mesmo e, no refinamento baricêntrico, dois vértices se conectam se um está contido no outro. Isto ocorre por considerarmos o complexo de Whitney do grafo e não o grafo em si.

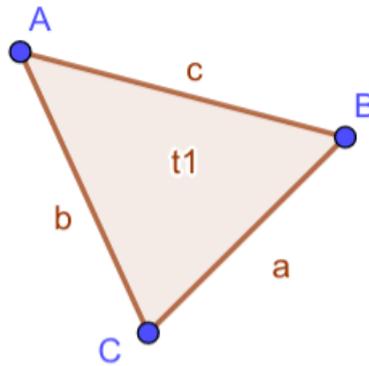


Figura 2 – $G = \{A, B, C, a, b, c, t1\}$

O refinamento baricêntrico pode ser aplicado no complexo G_1 gerando um novo refinamento denotado por G_2 . Quando temos uma medida que não muda por refinamento baricêntrico, dizemos que ela é um **invariante combinatorial** para complexos simpliciais (veja [13]).

¹ É importante lembrar que esta é uma definição combinatorial dada pelo O. Knill em seus escritos diferente do refinamento baricêntrico definido por ANNALISA BUFFA AND SNORRE H. CHRISTIANSEN (veja [12]).

² Esta definição apresenta o refinamento Baricêntrico como o complexo de Whitney do grafo, mas é comum denotar o grafo por G_1 também.

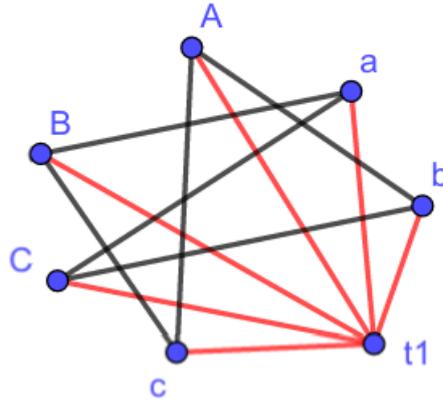


Figura 3 – O refinamento baricêntrico de G .

Dentre alguns exemplos de invariantes combinatoriais nos complexos simpliciais que podemos citar temos a "co-homologia simplicial", a "característica de Euler", os "grupos de homotopia" e as "invariantes Bott" (veja [13]).

Podemos perceber no exemplo anterior que $\chi(G) = \chi(G_1)$, note que $\chi(G) = 3 - 3 + 1 = 1$ e $\chi(G_1) = 7 - 12 + 6 = 1$.

Existem muitos exemplos de aplicações que não são invariantes combinatoriais, uma delas é o f -vetor. O f -vetor de um complexo simplicial G de dimensão k é o vetor $v(G) = (f_0, f_1, \dots, f_k)$, onde f_k é o número de simplices de dimensão k em G .

Note que no exemplo acima $v(G) = (3, 3, 1)$ e $v(G_1) = (7, 12, 6)$ são distintos.

Um outro grafo que também possui características topológicas interessantes é o grafo conexão. O **grafo conexão** G' é o grafo onde o conjunto de vértices são os simplices de G , ou seja, $V(G') = G$ e para todo x, y em G , x se conecta com y se $x \cap y \neq \emptyset$. O complexo de Whitney de G' é chamado de **complexo conexão**, geralmente simbolizado também por G' .

Note que G_1 é subconjunto de G' . Os dois grafos G_1 e G' têm o mesmo conjunto de vértices, pois esse é o conjunto de simplices de G . O grafo G' possui tipo topológico diferente de G_1 e frequentemente, por exemplo a característica de Euler dele é distinta da de G . G_1 e G' são conhecidos da teoria dos grafos como exemplos de "complexo de bandeiras".

2.3 Complexos Simpliciais Energizados

Nesta seção apresentaremos a motivação para definir os complexos simpliciais energizados, além de, claro, definir e apresentar algumas propriedades e exemplos de complexos simpliciais energizados.

Dado um complexo simplicial G com n elementos, ou seja, com n simplices, definimos a função $h : G \rightarrow \mathbb{R}$ que define uma energia para cada simplex de G . Seja $A \subset G$, subconjunto de G , definimos a energia de A por $E[A] = \sum_{x \in A} h(x)$. E, como consequência, a energia total será $E[G] = \sum_{x \in G} h(x)$.

Definição 2.14. Um complexo simplicial G munido de uma função h definida para cada simplex de G é chamado de **complexo simplicial energizado**, denotado por (G, h) .

A motivação para definir os complexos simpliciais energizados, ou simplesmente energizar a geometria definida pelo complexos, não é apenas da física ou das funções densidades de probabilidade, como talvez seja a primeira impressão, e certamente já seria de grande importância pensar assim, mas esta definição produz uma afinidade com a geometria algébrica, da mesma forma que uma função a valores inteiros com energia finita em uma curva algébrica é um divisor.

Trazer divisores discretos na forma de energia relaciona-se de alguma forma à geometria algébrica discreta: O teorema de Riemann-Roch na forma da teoria de Baker-Norine [7] generalizada para multigrafos em [8] diz que a energia total $E[G]$ de um divisor, ou seja, o grau de um divisor, é uma distância sinalizada $l(G) - l(K - G)$, onde K é o divisor canônico e $l(G)$ é o menor valor de energia que se deve adicionar para que a estrutura possa ser efetivada (não negativa em todos os lugares) usando divisores principais. Uma estrutura como a dos complexos energizados possibilita introduzir uma versão discreta deste teorema em complexos simpliciais, a partir da teoria de Baker-Norine.

Uma outra motivação interessante para o estudo dos complexos simpliciais energizados, além das citadas acima, é que muito dos resultados mostrados para eles, podem ser pensados para conjuntos de conjuntos energizados, ou seja, conjuntos de conjuntos que não tem necessariamente as propriedades de complexos simpliciais, mas possuem a função energia.

Uma outra inspiração interessante para o desenvolvimento da teoria de complexos simpliciais energizados é na análise topológica de dados. Os k -simplices, de maneira geral, são vistos nas aplicações como uma maneira de inferir experimentalmente interações de ordem k , i.e., entre k corpos de um sistema experimental. No caso de redes cerebrais por exemplo, um k -clique é definido quando há alto nível de correlação entre k áreas do cérebro durante uma ressonância magnética nuclear em repouso. A energia do complexo simplicial seria uma espécie de análogo de Hamiltoniano para complexos simpliciais.

2.3.1 Operadores Laplacianos Energizados

Os operadores laplacianos em complexos simpliciais podem ser definidos de diversas formas. O principal e mais conhecido é o **Laplaciano de Hodge**. Seja d a derivada exterior definida em G e se $H = dd^* + d^*d = (d + d^*)^2$ é o Laplaciano de Hodge no

conjunto de formas diferenciais, então $H = \bigoplus_k H_k$ é uma matriz $n \times n$ que possui os blocos diagonais e nulidade de H_k é o número de Betti b_k de G pela teoria de Hodge.

Outro que é bastante conhecido é o **Laplaciano conexão**. Este laplaciano também é definido por uma matriz $n \times n$, $C = 1 + A$ onde A é a matriz adjacência, ou seja, os elementos da matriz são descritos por

$$C(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \cap y \neq \phi \\ 0 & \text{se } x \cap y = \phi \end{cases}.$$

Os operadores laplacianos possuem certas semelhanças e diferenças: por um lado ambos são definidos por matrizes $n \times n$ e de acordo com [14] ambos podem descrever a característica de Euler a partir de seu espectro; por outro lado, as matrizes inversas de H são mais difíceis de manipular do que as de C . Dessa forma, para estudarmos complexos energizados é mais viável o laplaciano conexão, tendo em vista a importância da observação da inversa, pensando claro na analogia com as funções de Green da teoria potencial de Newton conforme é visto em [15].

Para definir o laplaciano energizado teremos a motivação do laplaciano conexão, mas agora o elemento $L(x, y)$ da matriz será a energia de $x \cap y$, no caso da matriz conexão a energia é a característica de Euler de $x \cap y$.

Dado um complexo simplicial energizado (G, h) , para $x \in G$ definimos o *Star* e o *Core*, respectivamente, por

$$W^+(x) = \{y \in G; x \subset y\}$$

$$W^-(x) = \{y \in G; y \subset x\}.$$

Seja $\omega(x) = (-1)^{\dim(x)}$, onde $\dim(x) = |x| - 1$ e $|x|$ é a cardinalidade de x , isto é, o número de vértices de x . Definimos a matriz $S(x, y) = \delta(x, y)\omega(x)$, cujo o traço é a característica de Euler $\chi(G)$ do complexo simplicial.

Definição 2.15. Definimos quatro matrizes conexões $n \times n$ para (G, h) , as conexões homoclínicas definidas por

$$L^{--}(x, y) = E[W^-(x) \cap W^-(y)]$$

$$L^{++}(x, y) = E[W^+(x) \cap W^+(y)]$$

e para completar as matrizes heteroclínicas definidas por

$$L^{+-}(x, y) = E[W^+(x) \cap W^-(y)]$$

$$L^{-+}(x, y) = E[W^-(x) \cap W^+(y)].$$

Estas últimas não usaremos neste trabalho. Chamaremos de **Laplaciano Energizado** a matriz $L = L^{--}$ e a matriz cuja as entradas são as **funções de Green** será $g = SL^{++}S$.

Todas estas matrizes são de valores inteiros se h é uma função de valores inteiros

Observação 2.16. Pode-se estabelecer uma **ordem** em G para o estabelecimento das matrizes como, por exemplo, se $x \subset y$, então, x é ordenado antes de y na lista de conjuntos de G . Esta ordem será utilizada para otimizar as nossas demonstrações daqui pra frente. Uma ordem em G define uma base na qual as matrizes são escritas.

Exemplo 2.17. Seja $G = \{(a), (b), (a, b)\}$ e seja os respectivos valores da energia $h = \{1, 2, 3\}$. Dessa forma, temos as matrizes

$$L = L^{--} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad L^{++} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad g = SL^{++}S = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 3 & 5 & -3 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

3 ALGUNS RESULTADOS EM COMPLEXOS SIMPLICIAIS ENERGIZADOS

Os Complexos simpliciais energizados foram introduzidos muito recentemente por O. Knill [6], abrindo caminho para o desenvolvimento de novos resultados envolvendo o uso desta estrutura. Este capítulo tem como objetivo a exposição dos principais resultados existentes neste trabalho para que, a posteriori possamos desenvolver novos resultados de geometria diferencial nesta estrutura.

Além de apresentarmos os principais resultados existentes, em certas etapas, versões alternativas para demonstrações apresentadas em [6], se provarão mais simples e claras para compreensão e introdução dos novos resultados.

Basicamente o capítulo está organizado nos três principais teoremas, o teorema do determinante, o teorema da energia e o teorema do super traço, este último apresentado como um corolário. Além disso, apresentaremos um breve resumo das funções energia expostas em [6], a saber: $h(x) \in \{-1, 1\}$, $h(x) = 1$, $h(x) = \omega(x)$ e $h(x) = t^{|x|}$, com t um parâmetro real.

3.1 Teorema do determinante

Nesta seção estudaremos as propriedades do determinante dos operadores laplaciano energizado ($L = L^{--}$), além das funções de Green ($g = SL^{++}S$).

Para uma função a valores reais qualquer $h : G \rightarrow \mathbb{R}$, definimos a **característica de Fermi** como

$$\varphi(G) = \prod_{x \in G} h(x).$$

A característica de Fermi é uma versão multiplicativa da característica de Euler no contexto de complexos simpliciais usuais. Aqui veremos de forma mais generalizada como uma versão multiplicativa do teorema da energia, que será visto mais a frente.

Todas as matrizes homoclínicas e heteroclínicas dos complexos simpliciais energizados possuem o mesmo determinante. Vejamos isso a partir do seguinte teorema:

Teorema 3.1 (Determinante). *Se G é um complexo simplicial energizado com operadores L e g definidos acima, então a característica de Fermi de G é o determinante de L e g , ou seja,*

$$\det(L) = \det(g) = \prod_{x \in G} h(x).$$

É importante notar que este resultado foi obtido em [6], mas com demonstração alternativa. Além disso, trazemos abaixo um exemplo que torna mais claro o argumento utilizado.

Demonstração. Para demonstrar este teorema faremos uso do teorema de Jacobi:

Lema 3.2 (Teorema de Jacobi). *Dada uma matriz A ($n \times n$). Se tomarmos uma de suas filas (linha ou coluna), multiplicarmos por uma constante e adicionarmos a outra fila, o determinante não se altera.*

Demonstração. Este é um teorema clássico visto ainda no ensino médio, cuja a prova é bem simples uma prova detalhada, bem como propriedades dos determinante podem ser vistos em [16]. \square

Para demonstrar o teorema estudaremos a matriz L^{++} e consideraremos esta matriz com a ordem estabelecida na observação 2.16. Isto posto, a última coluna da matriz L^{++} será a do símplice de maior grau, seja x este símplice e d o seu grau, temos que $L^{++}(\cdot, x) \in \{h(x), 0\}$, sendo $h(x)$ se o símplice da linha correspondente está contido em x e 0 caso contrário.

Se observarmos cada linha em que $L^{++}(\cdot, x)$ é não nulo, $h(x)$ aparece nas outras colunas correspondentes a símplices que estão contidos em x . Seja y um símplice de G de dimensão $d - 1$ contido em x . Temos que $L^{++}(y, y) = h(y) + h(x) + K$, sendo K expresso pela soma das energias dos demais símplices de ordem maior que $d - 1$ que contém y .

Sendo assim, utilizando o teorema de Jacobi, subtrairemos da coluna correspondente ao símplice y a coluna correspondente ao símplice x . Repetimos este processo subtraindo também todas as colunas correspondentes ao símplice de dimensão d que contém y . Nesta nova matriz temos que $L'^{++}(y, y) = h(y)$ e $L'^{++}(z, y) = 0$ para $y \subset z$. Temos, pelo teorema de Jacobi, que o determinante não se altera. Repetindo este processo teremos uma matriz triangular inferior, cujo determinante é o produto dos termos da diagonal principal, ou seja, $\prod_{x \in G} h(x)$.

Como $g = SL^{++}S$ e o $\det(S) = \pm 1$, pelo teorema de Binet temos que $\det(g) = \det(L^{++})$.

Para mostrar que o $\det(L)$ é igual a característica de Fermi de G , basta utilizarmos um raciocínio análogo, observando apenas que ao invés de analisar a última coluna, como em L^{++} , devemos olhar para a primeira, assim chegaremos a uma matriz triangular superior com determinante igual ao $\det(L)$, cujo o determinante é o produto das energias.

\square

Exemplo 3.3. Este exemplo é uma ilustração do processo que utilizamos na demonstração acima. Consideremos o complexo simplicial da figura 4.

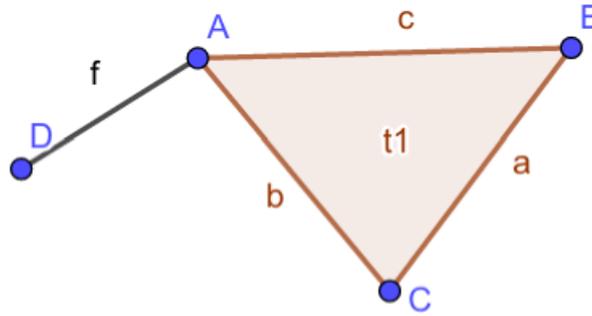


Figura 4 – Ilustração Complexo Simplicial do Exemplo 3.3

Consideremos a notação dos simplices como o próprio valor da energia para facilitar a notação, por exemplo, $h(a) = a$. Logo, $L^{++} =$

$$\left(\begin{array}{cccccccccc} A + b + c + f + t1 & c + t1 & b + t1 & f & t1 & b + t1 & c + t1 & f & t1 \\ c + t1 & B + c + a + t1 & a + t1 & 0 & a + t1 & t1 & c + t1 & 0 & t1 \\ b + t1 & a + t1 & C + a + b + t1 & 0 & a + t1 & b + t1 & t1 & 0 & t1 \\ f & 0 & 0 & D + f & 0 & 0 & 0 & f & 0 \\ t1 & a + t1 & a + t1 & 0 & a + t1 & t1 & t1 & 0 & t1 \\ b + t1 & t1 & b + t1 & 0 & t1 & b + t1 & t1 & 0 & t1 \\ c + t1 & c + t1 & t1 & 0 & t1 & t1 & c + t1 & 0 & t1 \\ f & 0 & 0 & f & 0 & 0 & 0 & f & 0 \\ t1 & t1 & t1 & 0 & t1 & t1 & t1 & 0 & t1 \end{array} \right).$$

Observemos que o simplice de maior dimensão é o de energia $t1$, última coluna. Sendo assim, subtrairemos a nona coluna das colunas 1,2,3,5,6 e 7, pois estas correspondem aos simplices que estão contidos em $t1$. Assim, temos

$$\left(\begin{array}{cccccccc} A + b + c + f & c & b & f & 0 & b & c & f & t1 \\ c & B + c + a & a & 0 & a & 0 & c & 0 & t1 \\ b & a & C + a + b & 0 & a & b & 0 & 0 & t1 \\ f & 0 & 0 & D + f & 0 & 0 & 0 & f & 0 \\ 0 & a & a & 0 & a & 0 & 0 & 0 & t1 \\ b & 0 & b & 0 & 0 & b & 0 & 0 & t1 \\ c & c & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & t1 \\ f & 0 & 0 & f & 0 & 0 & 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t1 \end{array} \right).$$

Agora analisaremos os simplices de dimensão 1, i.e., as colunas 5,6,7 e 8, que correspondem aos simplices a,b,c e f, respectivamente. Em seguida, subtrairemos da coluna

1, as colunas 6,7 e 8. Além disso, da coluna 2 subtrairemos as colunas 5 e 7. Da coluna 3 subtrairemos as colunas 5 e 6. E, finalmente, da coluna 4 subtrairemos a coluna 8. E, dessa forma, temos a matriz resultante:

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & b & c & f & t1 \\ 0 & B & 0 & 0 & a & 0 & c & 0 & t1 \\ 0 & 0 & C & 0 & a & b & 0 & 0 & t1 \\ 0 & 0 & 0 & D & 0 & 0 & 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & t1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & t1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & t1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t1 \end{pmatrix}.$$

Já que o determinante desta matriz é igual ao determinante de L^{++} , que é igual ao determinante de g , segue que $\det(g)$ é o produto $ABCDabcf(t1)$.

O teorema acima implica diretamente no teorema de unimodularidade já provado em alguns papers ([17], [9]), basta tomar $h(x) \in \{-1, 1\}$ e temos que L e g são unimodulares, isto é, o determinante é unitário.

3.2 Teorema da Energia

Nesta seção abordaremos o teorema da energia para complexos simpliciais energizados, que provavelmente é o principal resultado apresentado em [6]. Da mesma forma que fizemos para o teorema do determinante, apresentaremos uma demonstração alternativa.

O teorema da energia para complexos simpliciais ordinários é abordado em 2017 em [15] e depois em 2019 (veja [18]). Neste trabalho foi mostrado que o somatório das entradas da função de Green, que é o análogo do potencial de Newton para o caso discreto, é igual a característica de Euler do complexo simplicial.

Nós mostraremos aqui que o somatório das funções de Green resulta na energia total do complexo simplicial.

Teorema 3.4 (Teorema da energia para complexos energizados). *Seja (G, h) um complexo simplicial energizado. Seja $E[G] = \sum_{x \in G} h(x)$, a energia total de (G, h) e $g(x, y)$ as entradas das funções de Green em (G, h) . Então,*

$$E[G] = \sum_{x, y \in G} g(x, y).$$

Demonstração. Para demonstrar este teorema precisamos mostrar a seguinte afirmação:

$$\omega(x)g(x, x) = \sum_{y \in G} g(x, y). \tag{3.1}$$

Uma vez que é verdade a afirmação 3.1 temos que

$$\omega(x)g(x, x) = \sum_{y \in G} \omega(x)\omega(y)E[W^+(x) \cap W^+(y)],$$

o que é equivalente a

$$E[W^+(x) \cap W^+(x)] = g(x, x) = \sum_{y \in G} \omega(y)E[W^+(x) \cap W^+(y)].$$

Fazendo $W^+(x) = G$, temos que

$$E[G] = \sum_{y \in G} \omega(y)E[G \cap W^+(y)] = \sum_{y \in G} \omega(y)E[W^+(y)] = \sum_{y \in G} \omega(y)g(y, y).$$

Utilizando mais uma vez a afirmação 3.1, finalmente temos $E[G] = \sum_{x, y \in G} g(x, y)$. \square

Lema 3.5 (afirmação para provar o teorema acima). *Seja g a função de Green associada a um complexo simplicial energizado, então:*

$$\omega(x)g(x, x) = \sum_{y \in G} g(x, y),$$

ou seja, o somatório de toda uma fila da matriz g corresponde a um valor que depende apenas das entradas da diagonal, que é igual a $\omega(x)g(x, x)$.

Demonstração. Para provar este lema precisamos antes observar algumas implicações do fato de G ser um complexo simplicial.

Observação 3.6. Se G é um complexo simplicial, então, valem os dois axiomas da definição 2.2, logo:

- Se $y \subset x$ e $x \in G$, então, $y \in G$. Assim, se $|x| = d$ então já sabemos que G possui $2^d - 1$ símlices contidos em x , isto porque o \emptyset não é símlice.
- A característica de Euler de um símlice $x \in G$ é 1.

De fato, seja $v(x) = (f_0, f_1, \dots, f_d)$ o f -vetor do símlice temos que $f_i = \binom{d+1}{i+1}$, ou seja, os termos da linha $d+1$ do triângulo de Pascal, cuja soma alternada já sabemos que é nula. Tirando o primeiro termo da linha $\binom{d+1}{0}$ temos que a soma alternada é 1 e assim,

$$\sum_{i=0}^d (-1)^i f_i(x) = 1,$$

que é exatamente $\chi(x)$, a característica de Euler do símlice x .

Tendo feito estas considerações, analisemos uma coluna da matriz g , com a ordem explicitada na observação 2.16. Seja x um d -símlice, temos que $g(x, x) = L^{++}(x, x)$

é o somatório das energias de todos os símlices que contém x . Analisando a coluna correspondente ao símlice x note que os valores localizados acima de $g(x, x)$ são os $g(y, x)$ em que $\dim(y) \leq \dim(x)$ e os valores localizados abaixo de $g(x, x)$ são os valores $g(z, x)$ em que $\dim(z) \geq \dim(x)$.

Observemos os valores situados acima de $g(x, x)$ na coluna.

Se $y \subset x$, então, $g(x, x)$ difere de $g(y, x)$, apenas pelo sinal, pois

$$g(y, x) = \omega(y)\omega(x)L^{++}(y, x) = \omega(y)\omega(x)E[W^+(y \cup x)] \quad (3.2)$$

$$= \omega(y)\omega(x)E[W^+(x)] = \omega(y)\omega(x)g(x, x). \quad (3.3)$$

Portanto, para $y \subset x$, segue que

$$\sum_{y \subset x} g(y, x) = \omega(x)g(x, x) \sum_{y \subset x} \omega(y) = \chi(x)\omega(x)g(x, x).$$

Se y não está contido em x então $g(y, x)$ pode ser zero, caso G não possua símlice que contenha a união de x e y ou $\omega(y)\omega(x)g(z, z)$ com z o símlice de menor dimensão, o qual contém $x \cup y$.

Agora observemos os valores situados abaixo de $g(x, x)$ na coluna.

Se $x \subset z$ então usando argumento semelhante ao usado em 3.2, temos que $g(z, x) = \omega(z)\omega(x)g(z, z)$ e caso x não esteja contido em y então $g(z, x)$ é zero.

Portanto, o somatório das entradas da coluna correspondente ao símlice x é composto por $g(x, x)$ e $g(z, z)$ para todo $z \in G$, tal que $x \subset z$.

Note que $g(x, x) = g(z, z) + K$, isto é, o termo $g(z, z)$ faz parte de $g(x, x)$, assim se queremos contar quantas vezes o termo $g(z, z)$ aparece na coluna sem está dentro de $g(x, x)$ basta subtrair, desta forma, temos que a soma das entradas da coluna é dada por

$$C_x = \chi(x)\omega(x)g(x, x) + \left(\sum_{z \in G; z \subset x} \chi(z)\omega(x)g(z, z) - \chi(x)\omega(x)g(z, z) \right).$$

Como a característica de Euler de um símlice é sempre 1, conclui-se que $C_x = \omega(x)g(x, x)$. \square

Observação 3.7. A ordem utilizada para a base da matriz, traz clareza à demonstração, porém as quantidades de vezes que os termos $g(x, x)$ e os $g(z, z)$'s aparecem, independem da ordem escolhida.

Exemplo 3.8. Este exemplo tem o objetivo de ilustrar o resultado acima. Observaremos o mesmo complexo energizado do exemplo 3.3, que possui a seguinte matriz g :

$$g = \begin{pmatrix} A+b+c+f+t1 & c+t1 & b+t1 & f & -t1 & -(b+t1) & -(c+t1) & -f & t1 \\ c+t1 & B+c+a+t1 & a+t1 & 0 & -(a+t1) & -t1 & -(c+t1) & 0 & t1 \\ b+t1 & a+t1 & C+a+b+t1 & 0 & -(a+t1) & -(b+t1) & -t1 & 0 & t1 \\ f & 0 & 0 & D+f & 0 & 0 & 0 & -f & 0 \\ -t1 & -(a+t1) & -(a+t1) & 0 & a+t1 & t1 & t1 & 0 & -t1 \\ -(b+t1) & -t1 & -(b+t1) & 0 & t1 & b+t1 & t1 & 0 & -t1 \\ -(c+t1) & -(c+t1) & -t1 & 0 & t1 & t1 & c+t1 & 0 & -t1 \\ -f & 0 & 0 & -f & 0 & 0 & 0 & f & 0 \\ t1 & t1 & t1 & 0 & -t1 & -t1 & -t1 & 0 & t1 \end{pmatrix}.$$

Observemos o símplice com energia a , uma aresta, ou seja, símplice de dimensão 1. Note que usamos $h(a) = a$ para facilitar a notação. Pode-se ver na matriz acima que $g(a, a) = a + t1$ e, por outro lado, se somarmos a coluna correspondente ao símplice a (quinta coluna) percebe-se que a soma é exatamente $a + t1$. Isto acontece com cada coluna e, pela simetria da matriz, com cada linha também.

Definição 3.9. Seja A uma matriz $n \times n$, chamamos de **traço** de A , $tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$, ou seja, a soma dos elementos da diagonal principal. Dizemos que o **super traço** de g é o traço de Sg , ou seja, $str(g) = tr(Sg)$.

A identidade de McKean-Singer discreta é conhecida classicamente para o operador laplaciano de Hodge (apresentado na subseção 2.3.1), como $str(e^{-tH}) = \chi(G)$. A seguir apresentaremos um corolário do teorema anterior, que é uma versão desta identidade para complexos simpliciais energizados.

Corolário 3.10. (McKean-Singer) O super traço de g é energia total de G , ou seja $E[G] = str(g)$.

Demonstração. De fato, basta usar a afirmação do teorema acima e o resultado do teorema em si e temos $str(g) = tr(Sg) = \sum_{x \in G} \omega(x)g(x, x) = \sum_{x \in G} \sum_{y \in G} g(x, y) = E[G]$. \square

3.3 Alguns casos solúveis de complexos energizados

Nesta seção abordaremos de maneira resumida os casos de funções energia específicos estudados pelo O. Knill em seu artigo [6] sobre complexos energizados. Temos 4 casos: o caso unimodular, quando $h(x) \in \{-1, 1\}$, o caso de energia constante, quando $h(x) = 1$, o caso topológico quando $h(x) = \omega(x)$, e o caso paramétrico, quando $h(x) = t^{|x|}$, para algum t .

3.3.1 Caso Unimodular

Seja (G, h) um complexo simplicial energizado, tal que, a imagem de h seja $\{-1, 1\}$. Pelo teorema do determinante temos que o determinante das matrizes homoclínicas e heteroclínicas serão -1 ou 1 , ou seja unimodulares. A matriz de valores inteiros unimodular

é caracterizada por ter inteira-inversível, isto é, existe uma matriz com entradas inteiras que é sua inversa.

Assim, para $h(x) \in \{-1, 1\}$ temos que $\det(Lg) = 1$. Seria g a inversa de L ? A resposta é afirmativa, vejamos primeiro o lema 3.11, que aqui a prova será omitida, por ser bem técnica, porém, pode ser encontrada em [6]) e o teorema 3.12 conclui o argumento em favor da resposta afirmativa.

Lema 3.11. *O produto Lg é uma matriz triangular inferior com entradas na diagonal $h(x)^2$ e as entradas abaixo da diagonal são da forma $h(u)^2 - h(v)^2$, com u e v símlices de G .*

Teorema 3.12. *Se $h(x) \in \{-1, 1\}$ então g é a inversa de L .*

Demonstração. De fato, pelo lema 3.12 Lg é a matriz identidade e, portanto, g é a inversa de L . □

Observação 3.13. Pela lema 3.11 podemos afirmar ainda que se $h(x) \in \{-a, a\}$ então $Lg = a^2 \cdot I$, sendo I a matriz identidade.

3.3.2 Caso de energia constante

O caso da energia constante é um subcaso do caso unimodular. Consideremos $h(x) = 1$, para todo $x \in G$. Este caso é interessante, pois nele L e g são definidas positivas, L é inversa de g e, além disso, L e g são iso-espectrais.

Como já vimos no primeiro caso, g e L são uma a inversa da outra, o que se repete para este caso, e o determinante delas pelo teorema do determinante é sempre 1. Vejamos dois resultados que distinguem este caso do anterior.

Teorema 3.14. *O número de autovalores negativos de L é igual ao número de valores negativos assumido pela função energia h . O mesmo é verdade para g e L^{++} .*

Demonstração. A prova é feita por indução. Com efeito, pensemos na matriz L , $k \times k$ de um complexo (G, h) ordenada, sem perda de generalidade, na ordem explicitada na observação 2.16. Pelo teorema do determinante, $\det(L) = \prod_x h(x)$. Por outro lado, $\det(L) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_k$, onde os λ_i s são os autovalores de L . Suponha que tenhamos p autovalores positivos e n autovalores negativos, de modo que $n + p = k$. Em seguida acrescentamos um símlice x , com energia $h(x)$ negativa, à G . A nova matriz $L(G + x)$ tem o sinal do determinante oposto ao da matriz $L(G)$ pelo teorema do determinante, logo não é difícil ver que o autovalor acrescido será negativo também. O que conclui a demonstração. □

Teorema 3.15. (*Simetria espectral*) *Se o funcional energia é constante e igual a 1, então L e g são matrizes positivas definidas. Além disso, elas são a inversa uma da outra e são iso-espectrais.*

Demonstração. Para mostrar que elas são positivas definidas, basta observar que, como $h(x) > 0$ para todo $x \in G$, pelo teorema anterior seus autovalores são todos positivos. Para mostrar que uma é a inversa da outra considere o caso unimodular na subseção 3.3.1. Já para mostrar que elas são iso-espectrais usa-se o argumento da deformação, introduzido em [19]. Finalmente, podemos observar a matriz L , como uma matriz de contagem, quando $h \equiv 1$. \square

3.3.3 Caso Topológico

O terceiro caso é assinalado como o caso topológico, isso porque, neste caso a energia total é a característica de Euler. Trata-se de um subcaso do primeiro, valendo assim todos os resultados do primeiro, mas com o surgimento do invariante topológico, o que torna este exemplo interessante para o estudo.

Este caso foi estudado nas primeiras observações sobre a energia de um complexo simplicial [veja [18]]. Esta situação traz uma conexão entre topologia e energia.

Aqui temos que a função energia é definida por $h(x) = \omega(x) = (-1)^{\dim(x)}$, logo a matriz laplaciano fica definida por $L(x, y) = \chi(x \cap y)$ e a matriz da função de Green é definida por $g = L^{-1}$, onde χ é a característica de Euler do complexo simplicial.

3.3.4 Caso Paramétrico

Neste caso temos uma energia paramétrica, ou seja, definida a partir de um parâmetro. Este talvez seja o caso mais distinto do primeiro estudado e pode ter aplicações mais imediatas em análise de dados, onde é possível atribuir parâmetros empíricos como função energia. Neste sentido, cada simplexo de dimensão k pode ter uma energia que captura fenomenologia de interações entre k constituintes de um sistema complexo experimental.

Seja $h(x) = t^{|x|}$, para algum parâmetro t , a função energia de um complexo simplicial energizado (G, h) . Então como seriam as matrizes deste complexo?

Vejamos, $L(x, y) = \sum_{z \subset x \cap y} t^{|z|}$ como $\dim(x) = |x| - 1$, então este somatório vai ser semelhante a uma f -função. Dado um conjunto $H \subset G$ de dimensão d definimos a **f -função** de H por $f_H(t) = 1 + f_0 t + \dots + f_d t^{d+1}$, onde (f_0, f_1, \dots, f_d) é o f -vetor. Note que, o somatório da energia dos simplices 0-dimensionais é $f_0 t$, o somatório da energia dos simplices 1-dimensionais é $f_1 t^2$ e assim sucessivamente até os de dimensão d (dimensão

maior do conjunto referente a função). Logo, temos ¹ $L(x, y) = (f_{W^-(x) \cap W^-(y)}(t) - 1)$ e $g(x, y) = \omega(x)\omega(y)(f_{W^+(x) \cap W^+(y)}(t) - 1)$.

A energia total pela definição será $E[G] = (f_G(t) - 1)$ e pelo teorema da energia $(f_G(t) - 1) = \sum_{x,y} \omega(x)\omega(y)(f_{W^+(x) \cap W^+(y)}(t) - 1)$.

Alguns valores de f_G são interessantes, por exemplo $f_G(-1) = 1 - \chi(G)$ e $f_G(1) = 1 + |G|$. Este último aparece na configuração do determinante, note que o determinante de L e g são o mesmo pelo teorema do determinante e é

$$\det(g) = \prod_{x \in G} h(x) = \prod_{k=0}^d t^{f_k(k+1)} = t^{f_0 + \dots + f_d(d+1)} = t^{f'_G(1)}.$$

Exemplo 3.16. Seja $G = \{(1), (2), (1, 2)\}$ e $h(x) = t^{|x|}$ para $x \in G$. Então temos

$$L = \begin{pmatrix} t & 0 & t \\ 0 & t & t \\ t & t & t + t^2 \end{pmatrix}, \quad L^{++} = \begin{pmatrix} t + t^2 & t^2 & t^2 \\ t^2 & t + t^2 & t^2 \\ t^2 & t^2 & t^2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad g = \begin{pmatrix} t + t^2 & t^2 & -t^2 \\ t^2 & t + t^2 & -t^2 \\ -t^2 & -t^2 & t^2 \end{pmatrix}.$$

Temos $\det(L) = \det(g) = t^4 = t^{f'_G(1)} = t^{2 \cdot 1 + 1 \cdot 2}$, já que $f_0 = 2$ e $f_1 = 1$. Temos ainda que $E[G] = 2t + t^2 = \sum_{x,y} g(x, y)$.

¹ No artigo [6] aparentemente o autor escolheu $h(x) = -t^{|x|}$, pois suas matrizes são resultados da energia definida dessa forma, por isso optamos aqui manter o desenvolvimento a partir da definição da energia $h(x) = t^{|x|}$.

4 TEOREMAS DE POINCARÉ-HOPF, GAUSS-BONNET E DEHN-SOMMERVILLE

Neste capítulo desenvolveremos dois teoremas clássicos para complexos simpliciais energizados, além de apresentarmos o teorema de expectativa para o contexto energizado e as relações de Dehn-Sommerville energizadas. Ao final do capítulo propomos uma versão discreta para o teorema de Riemann-Roch derivado da estrutura de complexos simpliciais energizados. Como estratégia para um melhor entendimento dos resultados, faremos um paralelo com a versão contínua dos respectivos teoremas clássicos.

4.1 Teorema de Poincaré-Hopf

Nesta seção trataremos do clássico teorema de Poincaré-Hopf, fazendo um breve histórico, seguido de seu desdobramento para teoria de grafos, sua generalização para complexos simpliciais e finalmente uma abordagem para complexos simpliciais energizados.

4.1.1 Um breve histórico

Traços deste teorema aparecem ainda na educação básica no formato do teorema de Euler: "Se P é um poliedro convexo com V vértices, A arestas e F faces então $V - A + F = 2$ ". Este teorema foi percebido por Leibniz e veio a público em 1860, derivado de um resultado de Descartes de 1639. E obviamente mais tarde perceberam que era falso para um poliedro qualquer. De fato, a hipótese de que P é convexo o torna verdadeiro.

Finalmente, em 1893, Poincaré percebeu que o número $V - A + F$ é de fato um invariante topológico. Poincaré mostrou que, se dois poliedros P e P' homeomórficos têm respectivamente V, A, F e V', A', F' números de vértices, arestas e faces, então $V - A + F = V' - A' + F'$. Se P é um poliedro, definimos $\chi(P) = V - A + F$ como sendo a característica de Euler-Poincaré de P . Algo menos geral vale: se dois poliedros são homotópicos então eles tem a mesma característica de Euler-Poincaré. Por isso, o teorema citado é verdadeiro no caso de poliedros convexos, pois eles são homeomorfos a uma esfera.

Este resultado foi generalizado para variedades em geral, onde identificamos a característica de Euler com a soma dos índices de um campo vetorial de uma variedade em seus pontos singulares. Sua versão para superfície é enunciada abaixo no teorema 4.3 e foi desenvolvida por Poincaré em [20]. Sua generalização para dimensões mais altas foi feita por Hopf [21].

Definição 4.1. Sejam M, N superfícies compactas orientadas e seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Seja $p \in M$ um ponto regular para f , ou seja, $Df(p)$ é isomorfismo entre T_pM e $T_{f(p)}N$. A matriz $Df(p)$ pode ou não preservar orientação: se $\det(Df(p)) > 0$

preserva, caso contrário reverte orientação. Se $q \in N$ é um valor regular, definimos o **grau de f em q** por

$$\text{deg}(f, q) = \sum_{p \in f^{-1}(q)} \text{sgn}(\det(Df(p))).$$

Se N é conexo então o grau não depende do ponto, então chamamos apenas $\text{deg}(f)$.

Definição 4.2. Seja X um campo vetorial com uma singularidade isolada em p_0 . Seja $\epsilon > 0$ tal que não existem outras singularidades distando menos que ϵ de p_0 . Seja S_ϵ^{n-1} a esfera centrada em p_0 e de raio ϵ . Considere a função $G : S_\epsilon^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$, dada por $G(x) = \frac{X(x)}{\|X(x)\|}$.

O **índice de X em p_0** , $\text{Ind}_{p_0}(X)$, é definido como sendo o grau de G .

Teorema 4.3. Se M é uma superfície compacta e orientada, e X é um campo vetorial com singularidades p_1, \dots, p_k então

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^k \text{Ind}_{p_i}(X),$$

com $\text{Ind}_p(X)$ o índice de X em p .

4.1.2 Poincaré-Hopf em grafos

Em 2012 O. Knill, propôs um teorema tipo Poicaré-Hopf para grafos simples em [22]. Ele definiu o índice de forma mais prática no caso discreto, utilizando a própria característica de Euler como veremos a seguir.

Seja f uma função definida nos vértices do grafo (V, E) . Dizemos que f é localmente injetiva, se $f(x) \neq f(y)$ para $\{x, y\} \in E$. O gradiente de f em x é uma função $\nabla f(x) : S(x) \rightarrow \mathbf{R}$ tal que, $\nabla f(x)(y) = f(y) - f(x)$, onde $S(x)$ é o conjunto de todos os vértices que se ligam a x .

Funções localmente injetivas também são conhecidas como **funções de Morse**. Note que se f é localmente injetiva, ∇f é sempre diferente de zero para todo $x \in V$, o que seria uma maneira alternativa de definir uma função de Morse.

Definição 4.4. Seja f uma função localmente injetiva. Seja $S_f^-(x) = \{y \in S(x); \nabla f(x) < 0\} = \{y \in S(x); f(y) - f(x) < 0\} = \{y \in S(x); f(y) < f(x)\}$. Definimos o índice de f no vértice x como

$$i(x) = 1 - \chi(S_f^-(x)).$$

Uma pergunta que pode saltar aos nossos olhos é qual a motivação para definir o índice desta forma? A resposta como sempre emerge através de uma analogia com o caso contínuo. O. Knill observa o comportamento dos "campos gradientes" das funções de Morse nos grafos bidimensionais. Note que se $\nabla f(x)$ em $S(x)$ tem o mesmo sinal então

temos que x é um máximo ou mínimo e se $\nabla f(x)$ em $S(x)$ muda de sinal, logo, temos um ponto de sela, então, inicialmente foi proposto que o $i(x) = 1 - \frac{s(x)}{2}$, com $s(x)$ o número de mudanças de sinal de $\nabla f(x)$ em $S(x)$ para grafos bidimensionais. Por outro lado, para dimensões maiores esta definição não funciona, então chegamos a definição acima, usando a característica de Euler do **conjunto de saída**, $S_f^-(x)$, ou seja, em lugar do $\frac{s(x)}{2}$, usamos $\chi(S_f^-(x))$ e $\chi(\phi) = 0$. Dessa forma, considerando os vértices como os pontos de singularidades, temos a versão deste teorema para grafos.

Teorema 4.5 (Poincaré-Hopf para grafos). *Se $G = (V, E)$ é um grafo simples e f uma função localmente injetiva em G então*

$$\sum_{x \in V} i(x) = \chi(G).$$

Demonstração. A prova detalhada pode ser vista em [22], a qual envolve provar três lemas que apenas enunciaremos aqui:

- A soma do índice é independente da função de Morse.
- $\sum_{v \in V} V_k(v) = (k+2)v_{k+1}$, onde $V_k(v)$ é o número de subgrafos completos de dimensão k contido em $S(v)$, i.e., o número de cliques de $S(v)$.
- $\sum_{v \in V} W_k(v) = kv_{k+1}$, onde $W_k(v)$ é o número de subgrafos completos de dimensão $k+1$ que contém vértices tanto em $S^+(v)$ quanto em $S^-(v)$.

Pelo primeiro lema temos que a soma dos índices $\chi'(G)$ não muda com a função de Morse, logo para f e $-f$ a soma é a mesma. Dessa forma, temos

$$\sum_{v \in V} 1 - \chi(S^+(v)) = \chi'(G), \tag{4.1}$$

$$\sum_{v \in V} 1 - \chi(S^-(v)) = \chi'(G). \tag{4.2}$$

Somando 4.1 e 4.2 temos

$$2v_0 - \sum_{v \in V} \chi(S^+(v)) + \chi(S^-(v)) = 2\chi'(G).$$

Substituindo na expressão acima as equações abaixo retiradas dos lemas,

$$\chi(S(v)) = V_0(v) - V_1(v) + \dots \tag{4.3}$$

$$\chi(S^+(v)) = V_0^+(v) - V_1^+(v) + \dots \tag{4.4}$$

$$\chi(S^-(v)) = V_0^-(v) - V_1^-(v) + \dots \tag{4.5}$$

temos agora, usando lema 2 e 3 que

$$2\chi'(G) = 2v_0 - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sum_{v \in V} (V_k^-(v) + V_k^-(v)) \quad (4.6)$$

$$= 2v_0 - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sum_{v \in V} (V_k(v) - W_k^-(v)) \quad (4.7)$$

$$= 2v_0 - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [(k+2)v_{k+1} - kv_{k+1}] \quad (4.8)$$

$$= 2v_0 - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2v_{k+1} \quad (4.9)$$

$$= 2v_0 - 2v_1 + \dots = 2\chi(G). \quad (4.10)$$

□

Uma vantagem da utilização de teoremas como este de Poincaré Hopf é que torna possível calcular a característica de Euler de grafos grandes somando quantidades locais, uma vez que o caminho para calcular via contagem dos subgrafos completos é considerado, por alguns, um problema NP-hard (veja [23] para mais problemas deste tipo).

Em 2019 O. Knill trouxe uma versão parametrizada para este teorema (veja [24]) utilizando a f -função baseada no f -vetor já definida no segundo capítulo.

A versão parametrizada responde ao questionamento se existe um teorema tipo Poincaré-Hopf para a f -função, uma vez que, encontrar a f -função, assim como encontrar a característica de Euler, de um complexo simplicial é um problema NP-hard, logo precisamos reduzir o problema a uma soma de índices aplicados nas esferas de cada vértice.

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples e $f_G(t) = 1 + f_0t + \dots + f_d t^{d+1}$, onde d é a dimensão de G , a f -função de G . Seja $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ uma função localmente injetiva e $S_g(x)$ a parte de $S(x)$ em que g é negativa. Definimos $f_{S_g(x)}(t)$ o índice de g em x . Assim temos o teorema parametrizado de Poincaré Hopf para grafos.

Teorema 4.6 (Poincaré-Hopf Parametrizado). *Para um grafo G e uma função g localmente injetiva no conjunto de vértices V de G temos que*

$$f_G(t) = 1 + t \sum_{x \in V} f_{S_g(x)}(t)$$

Demonstração. A prova é feita por indução. Vejamos que para $G = 0$, o grafo vazio temos que o resultado é 1 em ambos os lados da equação, para $G = v$, grafo unitário, temos $(1 + t)$ em ambos os lado da equação. Agora suponhamos que vale para G com k vértices, note que quando adicionamos um novo vértice x , a parcela $t f_{S_g(x)}(t)$ é acrescida a ambos os lados da equação pois os subgrafos completos em que seus vértices estão ligados a x aumentam uma dimensão, isto é, se tínhamos um subgrafo completo H de dimensão k e agora seus vértices se ligam a x , temos subgrafos completos $H + x$ de dimensão $k + 1$, por

isso, para os $H \subset S_g(x)$, somamos as parcelas polinomiais de uma dimensão acima, o que justifica multiplicarmos por t . \square

Uma boa observação é que para $t = -1$ temos que o lado esquerdo da equação é $1 - \chi(G)$ e o lado direito é $1 - \sum_{x \in V} i_g(x)$, onde $i_g(x) = 1 - \chi(S_g(x))$. Portanto, temos como caso particular uma redução ao Poincaré-Hopf para grafos.

$$\chi(G) = \sum_{x \in V} i_g(x)$$

4.1.3 Poincaré Hopf para complexos simpliciais

Já vimos até o momento o teorema de Poincaré Hopf para grafos, mas como estender então para complexos simpliciais, se todo complexo simplicial fosse um complexo de Whitney de um grafo simples, o problema estaria resolvido, porém infelizmente isto não ocorre. Basta ver, por exemplo o complexo $G = \{(1), (2), (3), (1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$ que é um complexo simplicial, mas não é complexo de Whitney de nenhum grafo, apesar de G em si ser um grafo.

Então vamos utilizar o refinamento baricêntrico de um complexo, pois já sabemos que ele é o complexo de Whitney de um grafo. Dessa forma, podemos aplicar Poincaré-Hopf de grafos nele.

Dado um complexo simplicial G definimos a esfera $S(x)$ como o conjunto de todos os símlices y que se conectam com x em G_1 , o refinamento baricêntrico de G . Ou seja, $S(x) = \{y \in G; y \subset x \text{ ou } x \subset y\} / \{x\}$, em outras palavras, as inclusões são estritas.

Dada uma função $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ no complexo G esta função também está definida no conjunto de vértices de G_1 , pois $V(G_1) = G$. A função f é localmente injetiva em G se $f(x) \neq f(y)$ para x e y conectados em G_1 .

Definimos o conjunto de saída de modo semelhante ao definido para grafos $S_f^-(x) = \{y \in S(x); f(y) < f(x)\}$. E o índice de f em x é $i_f(x) = 1 - \chi(S_f^-(x))$.

Teorema 4.7. *Dado um complexo simplicial G e uma função $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ localmente injetiva, então*

$$\chi(G) = \sum_{x \in G} i_f(x).$$

Demonstração. Basta observar que G_1 é o complexo de Whitney de um grafo simples e aplicar o teorema para grafos neste grafo, onde os vértices são os símlices de G e temos $\chi(G_1) = \sum_{x \in G} i_f(x)$.

Podemos olhar para f explicitada por $f(x) = \dim(x)$, que é uma coloração (função localmente injetiva) com um número mínimo de cores, pois o número cromático é igual ao número do clique. Note que, neste caso, $S_f^-(x)$ é o conjunto das faces do símlice x .

Assim, $\chi(S_f^-(x))$ é 0 ou 2, pois é a soma alternada de uma linha do triângulo de Pascal sem as extremidades unitárias (argumento utilizado anteriormente). Assim, o $i_f(x)$ é 1 ou -1 . De forma mais exata, se a dimensão de x é ímpar, a linha do triângulo de Pascal é par e a soma alternada é 2 e, desse modo, $i_f(x) = -1$ e de modo análogo, se $\dim(x)$ é par, temos $i_f(x) = 1$, assim, $i_f(x) = \omega(x)$.

Por definição já temos que a característica de Euler de um complexo G é $\chi(G) = \sum_{x \in G} \omega(x)$ e com o argumento acima temos que $\chi(G_1)$ também é dada por este somatório, e isso mostra que $\chi(G) = \chi(G_1)$, o que completa a prova. \square

Calcular o índice em cada símplice envolve calcular característica de Euler em cada símplice e isto conduz a característica de Euler de todo o complexo simplicial.

4.1.4 Poincaré Hopf para complexos simpliciais energizados

Agora precisamos estender este resultado para complexos simpliciais energizados, observando que ao invés da característica de Euler, expressaremos a energia total. Porém um fato importante é que a característica de Euler é invariante sob refinamento baricêntrico, o que não ocorre em geral para energia total, pois não sabemos como a energia está definida no refinamento baricêntrico de um complexo energizado. Assim, para o teorema de Poincaré Hopf, precisamos generalizar a noção do "campo vetorial" que até então só tratávamos como o gradiente da função localmente injetiva.

Seja G um complexo simplicial com conjunto de vértices V . Então G é chamado de **complexo direcionado** se existe uma função $F : G \rightarrow V$ tal que $F(x) \in x$. Dizemos que F é a função direção ¹ de G .

Note que F em um complexo unidimensional define uma orientação nas arestas, por exemplo, a aresta AB aponta para A se $F(AB) = A$.

Esta função associa cada símplice do complexo a um vértice, possibilitando a definição do índice nos vértices.

Dado um complexo simplicial energizado e direcionado (G, h, F) definimos o índice por

$$i_F(v) = \sum_{x \in F^{-1}(v)} h(x),$$

para todo $v \in V$, assim o índice é a energia da coleção de símplices apontando para o vértice v .

¹ Durante o desenvolvimento desta tese, Knill publicou versão alternativa a apresentada aqui para Poincaré Hopf, em dezembro de 2019. Optamos por não retirar da tese, pois sua abordagem é um pequeno trecho no início do artigo voltados para grafos, veja em [25].

Teorema 4.8. *Seja (G, h, F) um complexo simplicial energizado direcionado, então*

$$E[G] = \sum_{v \in V} i_F(v).$$

Demonstração. Da definição da função direção, temos que, dado um símplice x , ele apontará para um único vértice $F(x)$. Assim, para dois vértices distintos v_1 e v_2 , temos que $F^{-1}(v_1) \cap F^{-1}(v_2) = \emptyset$ e portanto da definição do índice temos que a energia de cada símplice x é transportada para o vértice $F(x)$. Este ato de transportar preserva a energia total. \square

Exemplo 4.9. Se $h(x) = \omega(x)$, o caso topológico, temos que

$$\chi(G) = \sum_{v \in V} \chi(F^{-1}(v)),$$

ou seja, calculando a característica de Euler de cada componente (coleção) associada a um vértice temos a característica de Euler do complexo.

Se G é um complexo unidimensional, uma função direção F define um dígrafo direcionado, onde cada aresta aponta para um vértice. E $i(v) = \chi(F^{-1}(v)) = 1 - |A_v| = 1 - \chi(S^-(v))$, onde $|A_v|$ é o número de arestas direcionadas para o vértice v . Quando somamos todos os $i(v)$ teremos $\chi(G) = |V| - |A|$.

Esta forma de Poincaré Hopf é um caso mais geral que os mostrados anteriormente para grafos no teorema 4.5. Note que, dada uma função localmente injetiva g nos vértices $V(G)$, podemos escolher $F(x)$ para ser o vértice em x que g é maximal.

Exemplo 4.10. Um caso especial é o complexo simplicial bi-direcionado, isto é, ele possui duas funções direções, F^+ e F^- e ambas são $G \rightarrow V$ e tanto $F^+(x) \in x$ quanto $F^-(x) \in x$ para todo $x \in G$. Podemos pensar em $F^-(x)$ como o começo do símplice e $F^+(x)$ como o final do símplice. Os pontos de equilíbrio são situações onde $F^-(x) = F^+(x)$. Estes são pontos em que várias órbitas podem se fundir. Todo símplice de dimensão zero é um ponto de equilíbrio, pois $F^-(\{v\}) = F^+(\{v\}) = v$. Para um grafo direcionado a escolha natural é definir $F^-(\{(a, b)\}) = a$ e $F^+(\{(a, b)\}) = b$.

Obviamente que F^+ e F^- definem dois índices de Poincaré Hopf, o i^+ e i^- , respectivamente. Podemos olhar agora para o **índice simétrico**, definido por

$$i_{sym}(x) = \frac{i^+(x) + i^-(x)}{2}.$$

Note que, $\sum_{x \in V} \frac{i^+(x) + i^-(x)}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{x \in V} i^+(x) + \sum_{x \in V} i^-(x) \right) = E[G]$, portanto o teorema de Poincaré Hopf é válido para o índice simétrico.

4.2 Teorema de Gauss-Bonnet

Nesta seção trataremos do clássico teorema de Gauss-Bonnet, abordando inicialmente um breve histórico, seguido de seu desdobramento para grafos e, finalmente, sua noção para complexos simpliciais energizados.

4.2.1 Um breve histórico

O clássico teorema de Gauss Bonnet é um resultado importante para superfícies em geometria diferencial. A sua importância é devido ao fato dele relacionar a geometria da superfície (por meio de sua curvatura) a topologia da superfície (por meio da sua característica de Euler).

Tem este nome desde Carl Friedrich Gauss, que conhecia uma versão do teorema, mas nunca a publicou, e Pierre Ossian Bonnet, que publicou um caso especial em 1848. A forma inicial de Gauss foi publicada depois em [26]. A sua forma mais popularmente conhecida hoje é a que se segue.

Teorema 4.11. *Seja M uma superfície diferencial compacta (uma variedade riemanniana bi-dimensional compacta). Seja K a curvatura gaussiana e k_g a curvatura geodésica sobre a fronteira de M , denotada por ∂M . Então*

$$\int_M K \, dA + \int_{\partial M} k_g \, ds = 2\pi\chi(M).$$

É importante observar que para superfície sem fronteira o termo $\int_{\partial M} k_g \, ds$ desaparece, e esta nova fórmula (sem o termo mencionado) ficou bastante conhecida por classificar as superfícies compactas e sem fronteiras.

Este teorema foi generalizado para variedade de dimensões maiores por Shiing-Shen Chern em seu artigo [27] de 1944. Antes dele, já existia estudos em hiper superfícies do espaço euclidiano realizados por Allendoerfer, Fenchel e Weil em 1940, que inclusive é citado no artigo de Chern. O novo teorema recebe o nome de Teorema de Gauss-Bonnet-Chern, o qual é descrito a seguir.

Teorema 4.12 (Gauss-Bonnet-Chern). *Seja M uma variedade riemanniana de dimensão par, orientada e compacta, então*

$$\int_M K(p) = \chi(M),$$

onde $K(p) = Pf(k(p))$, é o Pfaffiano da curvatura forma associada a conexão de Levi-Civita.

A curvatura forma, que é a curvatura da conexão de Levi-Civita no fibrado principal, pode ser representada por uma matriz A , uma matriz anti-simétrica. O $Pf(A)$ é o

polinômio de coeficientes inteiros onde as variáveis são as entradas da matriz, tal que $\det(A) = (Pf(A))^2$. Pelo fato de que o Pfaffiano de matrizes de ordem ímpar serem sempre zero, temos o resultado apenas para dimensões pares. O termo $K(p)$ é chamado de **classe de Euler** ou **curvatura de Euler**

Por fugir um pouco do escopo da tese a demonstração será omitida aqui, mas você pode consultar quatro formas distintas de demonstrar este teorema em [28], inclusive a prova original do próprio Chern.

4.2.2 Gauss-Bonnet-Chern para grafos

Em 2011 [29], O.Knill propôs então definir uma curvatura de Euler para que fosse possível formular um teorema semelhante ao Gauss-Bonnet-Chern para os grafos. Segundo ele, a discretização das curvaturas via fórmulas do tipo Puiseux, se limitavam apenas a duas dimensões, então ele constrói do zero. Vejamos a sua definição.

Definição 4.13. Seja $V_k(p)$ = os simplices k -dimensional na esfera unitária de p , denotada por $S(p)$, então definimos curvatura de Euler por

$$K(p) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{V_{k-1}(p)}{k+1},$$

e ainda podemos considerar $V_{-1}(p) = 1$ para eliminar o primeiro termo desta definição.

Uma pergunta que podemos fazer é como esta definição se aproxima da curvatura forma de Euler? A resposta dada pelo Knill é tomar um "Super operador" D tal que $V_{k-2} = tr(D^k)$ para $k \geq 1$, assim temos que $K(p) = tr(\log(D+1)) = \log(\det(D+1))$. Então, se $D+1$ for anti-simétrica temos que $K(p) = 2\log(Pf(D+1))$, daí para dimensões ímpares teremos $K(p) = 0$. Esta é a principal motivação para descrever a curvatura desta forma, considerar a possibilidade de $K(p)$ ser nula para dimensões ímpares.

O estudo das mais diversas curvaturas para grafos e complexos simpliciais tem alcançado uma vasta quantidade de publicações nos últimos anos, dentre elas temos as que consideram o grafo ou o complexo simplicial imersos no espaço euclidiano, ou como uma triangulação de uma variedade, e as versões combinatoriais que consideram apenas o fator combinatório e analogias com o caso contínuo. A definição acima fica entre as curvaturas combinatoriais. Segue o teorema de Gauss Bonnet para grafos considerando esta curvatura.

Teorema 4.14. Se $G = (V, E)$ é um grafo finito de dimensão d então

$$\sum_{p \in V} K(p) = \chi(G)$$

Demonstração. A demonstração deste teorema desenvolve-se por meio das Equações de transferência do lema 4.15 demonstrado abaixo.

Já sabemos que para um grafo G temos

$$v_0 - v_1 + v_2 - v_3 + \cdots + (-1)^d v_d = \chi(G). \quad (4.11)$$

Usando as equações de transferência e o fato que $\sum_p 1 = v_0$ temos

$$\sum_p 1 + \sum_p \frac{V_0(p)}{2} - \sum_p \frac{V_1(p)}{3} + \cdots + (-1)^d \sum_p \frac{V_{d-1}(p)}{d+1} = \chi(G). \quad (4.12)$$

Daí temos, pela definição de $K(p)$ que

$$\sum_{p \in V} K(p) = \chi(G). \quad (4.13)$$

□

Lema 4.15. *Seja $V_k(p) =$ os simplices k -dimensional na esfera unitária de p , então*

$$\sum_p V_{k-1}(p) = (k+1)v_k,$$

para $k = 1, \dots, d$ e v_k o número de simplices k -dimensionais em G .

Demonstração. Mostraremos as equações de transferências por indução, basta observar que o caso $k = 1$ é válido pois o número de vértices contidos em $S(p)$ é exatamente o grau de p ($deg(p)$), o número de arestas que incidem em p no grafo. Somando esta quantidade sobre todo $p \in V$ temos duas vezes o número de arestas ($2v_1$). Para $k = 2$, temos que o número de arestas, contadas de forma semelhante é 3 vezes o número de faces ($3v_2$). Assim, seguindo este raciocínio definimos o k -grau, $deg_k(p) = V_{k-1}(p)$, pois os simplices k -dimensionais contendo p estão em uma correspondência 1-1 com os simplices $(k-1)$ -dimensionais de $S(p)$. Assim teremos v_k simplices em $k+1$ vértices para cada simplice, logo temos que o somatório é $(k+1)v_k$. □

Podemos à semelhança do teorema de Poincaré Hopf mostrado anteriormente, ter uma forma parametrizada do teorema de Gauss-Bonnet. Basta considerar a f -função de um grafo G . E como já observamos, $f_G(-1) = 1 - \chi(G)$. Veja agora que a antiderivada de $f_{S(p)}$, avaliada em (-1) , é algo semelhante a curvatura de Euler. Se $f_{S(p)}(t) = 1 + f_0 t + f_1 t^2 + \cdots + f_d t^{d+1}$, então a anti-derivada é $F_{S(p)}(t) = t + \frac{f_0 t^2}{2} + \frac{f_1 t^3}{3} + \cdots + \frac{f_d t^{d+2}}{d+2}$ e assim temos $F_{S(p)}(-1) = \sum_{k=0}^{d+1} (-1)^{k+1} \frac{f_{k-1}(S(p))}{k+1}$, uma expressão bem semelhante a curvatura de Euler. Assim temos o teorema que generaliza o teorema de Gauss-Bonnet para uma f -função, apresentado a seguir.

Teorema 4.16 (Teorema de Gauss-bonnet parametrizado). *Dado um grafo G então*

$$f_G(t) = \sum_{p \in V(G)} F_{S(p)}(t),$$

onde F é a anti-derivada de f .

Demonstração. Basta notar que em cada polinômio $F_{S(p)}$ o coeficiente para o termo de grau $k + 1$, é $\frac{V_{k-1}}{k+1}$ (usando a notação do teorema anterior) e quando somarmos todos eles sobre o conjunto de vértices, como vimos acima, temos v_k , que é denotado por f_k aqui. Isso conclui a prova. \square

4.2.3 Teorema de Gauss-Bonnet para complexos simpliciais

O resultado apresentado para grafos acima aparece pela primeira vez em 1992 para complexos simpliciais finitos em um artigo de Norman Levitt (veja [30]), obviamente, não com o nome de curvatura ou Gauss-Bonnet, mas define uma função sobre o *star* dos vértices (todos os símlices que contém o vértice), em que o somatório sobre os vértices é a característica de Euler. Por isso, a curvatura de Euler também é conhecida como a curvatura de Levitt em alguns lugares.

Se todo complexo fosse o complexo de Whitney de um grafo então teríamos o mesmo teorema válido, como aparece em [31], mas isso não é verdade como vimos acima, então vamos usar no lugar de $S(p)$, a bola simplicial $B(x) = (W^+(x) \cup W^-(x))$, a união da generalização do *star* e do *core*, já exposta no primeiro capítulo. Para símlices de dimensão 0, temos que $B(x) = W^+(x)$, já que $W^-(x) = x$.

Teorema 4.17 (Gauss-bonnet para complexos simpliciais). *Dado um complexo simplicial G , $V(G)$ o conjunto dos símlices 0-dimensionais de G e $K(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{f_k(B(x))}{k+1}$, então*

$$\chi(G) = \sum_{x \in V(G)} K(x).$$

Demonstração. A demonstração deste teorema é uma aplicação direta do Gauss-Bonnet para complexos simpliciais energizados no caso $h(x) = \omega(x)$, veja abaixo. \square

Este resultado já foi observado em sistemas reais como em [5] para o estudo de transição de fase topológicas no cérebro e em [3] para observar redes sociais e sistemas tecnológicos.

4.2.4 Teorema de Gauss-Bonnet para complexos simpliciais energizados

Agora pensaremos em um teorema do tipo Gauss-Bonnet para a energia total de um complexo energizado. Já vimos que, dependendo de como a função energia é definida, a Energia total pode trazer informações importantes sobre o complexo.

A nossa motivação para formulação deste teorema parte essencialmente da sua versão parametrizada para grafos que vimos acima. Definiremos um polinômio para a energia total.

Dado um complexo energizado (G, h) , seja $E_G(t) = \sum_{x \in G} h(x)t^{d(x)}$, onde $d(x)$ é a dimensão do símplice x . Podemos perceber que avaliando esta função em 1 temos $E_G(1) = E[G]$. Uma vez definido este polinômio podemos definir a curvatura como a antiderivada desta função.

Definição 4.18. Seja $E_G(t) = \sum_{x \in G} h(x)t^{d(x)}$ para um complexo simplicial energizado (G, h) , definimos a **curvatura energizada** como

$$K(x) = \int_0^1 E_{B(x)}(t)dt = \left(\sum_{y \in B(x)} \frac{h(y)t^{d(y)+1}}{d(y)+1} \right)_{t=0}^1 = \sum_{y \in B(x)} \frac{h(y)}{d(y)+1}$$

para todo símplice x de dimensão zero.

Teorema 4.19 (Teorema de Gauss-Bonnet para complexos simpliciais energizados). *Dado um complexo simplicial energizado (G, h) e $V(G)$ o conjunto dos 0-dimensionais símplices então*

$$E[G] = \sum_{x \in V(G)} K(x)$$

Demonstração. A demonstração deste teorema é desenvolvida por meio do argumento de redistribuição das cargas de energia dos símplices de dimensão maior que zero para os vértices. Se x é um 0-símplice então sua carga só aparecerá em $K(x)$, já que x não contém nenhum outro símplice de dimensão zero. Se x é um k -símplice com vértices x_1, \dots, x_{k+1} então sua energia aparecerá em $k+1$ bolas simpliciais, portanto colocando $\frac{1}{k+1}$ da carga de x em cada bola simplicial que ele aparece, não alteramos o somatório final. É exatamente isso que a curvatura energizada faz. □

Exemplo 4.20. Este exemplo ajudará a compreender a prova descrita acima.

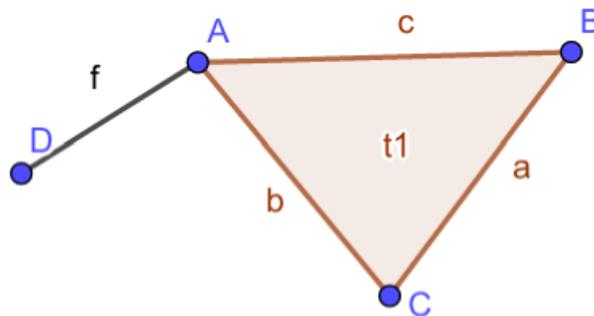


Figura 5 – Exemplo 1

Seja G o símplice acima. $G = \{A, B, C, D, a, b, c, f, t1\}$. Seja o conjunto das respectivas energias $h = \{x, y, z, w, X, Y, Z, W, \theta\}$ Então temos:

$$K(A) = x + \frac{Y}{2} + \frac{Z}{2} + \frac{W}{2} + \frac{\theta}{3}, \quad (4.14)$$

$$K(B) = y + \frac{X}{2} + \frac{Z}{2} + \frac{\theta}{3}, \quad (4.15)$$

$$K(C) = z + \frac{X}{2} + \frac{Y}{2} + \frac{\theta}{3}, \quad (4.16)$$

$$K(D) = w + \frac{W}{2}. \quad (4.17)$$

$$(4.18)$$

Note que $E(G) = K(A) + K(B) + K(C) + K(D)$ como na afirmação acima.

Corolário 4.21. *Se $h(x) = \omega(x)$ em um complexo simplicial energizado (G, h) então,*

$$K(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{f_k(B(x))}{k+1} e$$

$$\chi(G) = \sum_{x \in V(G)} K(x).$$

Demonstração. De fato, $(-1)^k f_k(B(x))$ é o somatório da energia $(h(x) = \omega(x))$ de todos os simplices de dimensão k de $B(x)$. Daí como já vimos acima que para este caso $E[G] = \chi(G)$, temos o resultado que mostra este corolário e o teorema 4.17. \square

4.3 A relação entre os dois teoremas

Ao abordar estes dois teoremas é oportuno indagar se existe relação entre eles. Uma razão para esta pergunta é o fato de ambos, no contexto energizado, expressarem a energia total de um complexo.

Mas, qual a relação entre o índice de Poincaré-Hopf e a curvatura energizada? No teorema a seguir veremos que, tomando o espaço das funções direções como um espaço de probabilidade com medida uniforme, tem-se que a expectativa ou esperança do índice corresponde à curvatura, isto para cada vértice do complexo simplicial.

Teorema 4.22. *Seja (G, h) um complexo simplicial energizado, \mathcal{F} o espaço das funções direções² e $i_{F_i}(x)$ o índice de Poincaré-Hopf para $F_i \in \mathcal{F}$ no vértice x . Seja \mathcal{F} um espaço de probabilidade equiprovável, então, a esperança do índice sobre este espaço é a curvatura energizada no vértice x , ou seja,*

$$E(i_F)(x) = K(x).$$

² Durante a produção desta tese foi publicado em dezembro de 2019 um preprint [32] com uma versão alternativa do teorema de Gauss-bonnet energizado e a curvatura ali foi definida diretamente como a esperança do índice de Poincaré-Hopf. Este resultado mostra que a nossa definição de alguma forma concorda com os resultados recentes de [32].

Demonstração. De fato, dado um vértice v e um vértice w que pertencem ao mesmo k -símplice σ , temos que a probabilidade dentro do espaço de probabilidade equiprovável \mathcal{F} é $\frac{1}{k+1}$ tanto para $\sigma \in F^{-1}(v)$ quanto para $\sigma \in F^{-1}(w)$, portanto para qualquer vértice teremos a mesma probabilidade, que depende do símplice a que ele pertence. Assim a esperança do índice é

$$E(i(v)) = \sum_{x \in W^+(v)} \frac{1}{k(x) + 1} \cdot h(x) = K(v).$$

□

4.4 As relações de Dehn-Sommerville energizadas

As Equações de Dehn-Sommerville são um conjunto relações lineares entre o número de faces de diferentes dimensões de um símplice. Elas foram estudadas primeiro para os politopos de dimensão 4 e 5 por Max Wilhelm Dehn em 1905 ([33]) e sua forma geral foi estabelecida pelo escocês Duncan Sommerville em 1927 ([34]). Estas equações podem ser vistas como uma condição de simetria dos h -vetores e isso se tornou a formulação padrão na literatura combinatória recente.

Já vimos que existe o f -vetor de um complexo, onde suas coordenadas são os números de faces das diferentes dimensões, ou seja, $f = (f_0, f_1, \dots, f_d)$, onde $f_k = \sum_{x: \dim(x)=k} (-1)^k \omega(x)$, a quantidade de k -dimensionais faces do complexos.

Este f -vetor gera uma f -função, tal que $f(t) = 1 + f_0t + \dots + f_d t^{d+1}$. O h -vetor das relações de Dehn-Sommerville é dado pelos coeficientes da função $h_G(t) = (t-1)^{d+1} f(\frac{1}{t-1}) = h_0 + h_1t + \dots + h_{d+1}t^{d+1}$ e assim $h = (h_0, h_1, \dots, h_{d+1})$.

As relações de Dehn-Sommerville afirmam que o vetor h é palindrômico, isto significa que $h_i = h_{d+1-i}$, para $i \in \{0, \dots, d+1\}$. Dizemos que o complexo G é **Dehn-Sommerville** se as relações de Dehn-Sommerville são satisfeitas.

O. Knill trata destas simetrias em [31] para complexos simpliciais. Vejamos alguns exemplos que ele apresenta.

Exemplo 4.23. Pensemos no icosaedro complexo, gerado pelos triângulos $\{(1, 2, 5), (1, 2, 6), (1, 3, 4), (1, 3, 5), (1, 4, 6), (2, 5, 9), (2, 6, 1), (2, 9, 10), (3, 4, 8), (3, 5, 11), (3, 8, 11), (4, 6, 12), (4, 8, 12), (5, 9, 11), (6, 10, 12), (7, 8, 11), (7, 8, 12), (7, 9, 10), (7, 9, 11), (7, 10, 12)\}$. Note que, $f(t) = 1 + 12t + 30t^2 + 20t^3$ e $h(t) = 1 + 9t + 9t^2 + t^3$. O f -vetor é $(12, 30, 20)$ e o h -vetor é $(1, 9, 9, 1)$. Portanto, o icosaedro complexo é Dehn-Sommerville.

Exemplo 4.24. Pensemos agora na Faixa de Möbius gerada por $\{(1, 2, 5), (1, 5, 8), (2, 3, 6), (2, 5, 6), (3, 4, 7), (3, 6, 7), (4, 5, 8), (4, 7, 8)\}$. Note que o f -vetor é $(8, 16, 8)$ e o h -vetor é $(-1, 3, 5, 1)$. Logo, a Faixa de Möbius não é Dehn-Sommerville.

A pergunta que queremos responder é como estender esta definição de Dehn-Sommerville para complexos simpliciais energizados? Para isso, definiremos algo como um tipo de f -vetor energizado.

Definição 4.25. Seja (G, h) um complexo simplicial energizado então temos o e -vetor, onde $e = (e_0, \dots, e_d)$, quando $e_k = (-1)^k \sum_{x \in G; \dim(x)=k} h(x)$, para $k \in \{0, 1, \dots, d\}$, sendo d a dimensão de G .

Definimos a e -função como $e(t) = 1 + e_0t + e_1t^2 + \dots + e_d t^{d+1}$.

A definição do e -vetor é semelhante ao f -vetor para o caso $h(x) = \omega(x)$ e assim a e -função reflete a f -função.

Definição 4.26. Dado um complexo simplicial energizado (G, h) , seja o h^e -vetor o h -vetor da e -função, ou seja, $h^e(t) = (t-1)^{d+1} e\left(\frac{1}{t-1}\right) = h_0^e + h_1^e t + \dots + h_{d+1}^e t^{d+1}$, para o $h^e = (h_0^e, h_1^e, \dots, h_{d+1}^e)$.

Dizemos que (G, h) é **Dehn-Sommerville energizado** se h^e é palindrômico.

Exemplo 4.27. O primeiro exemplo é quando $h(x) = \omega(x)$, no qual temos uma redução ao caso que motivou a definição, onde a f -função corresponde a e -função e, assim, o complexo icosaedro citado acima é um exemplo. O. Knill mostra em [31] que neste caso se G é Dehn-Sommerville então o seu refinamento baricêntrico G_1 também é. Por exemplo para o icosaedro complexo G o f -vetor de G_1 é $(62, 180, 120)$ e o h -vetor é $(1, 59, 59, 1)$.

Exemplo 4.28. O segundo exemplo é (G, h) , onde G é um triângulo definido pelos pontos A, B e C . Assim, $G = \{A, B, C, a, b, c, \theta\}$, onde $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ e $\theta = ABC$. Utilizaremos a mesma notação para descrever a energia de cada símplice, ou seja, representaremos $h(x)$ por x .

Temos que a e -função é dada por

$$e(t) = 1 + (A + B + C)t - (a + b + c)t^2 + \theta t^3, \quad (4.19)$$

e assim podemos calcular a h^e -função por $h^e(t) = (t-1)^3 e\left(\frac{1}{t-1}\right)$, assim

$$\begin{aligned} h^e(t) &= (t-1)^3 + (A+B+C)(t-1)^2 - (a+b+c)(t-1) + \theta \\ &= t^3 - 3t^2 + 3t - 1 + t^2(A+B+C) - 2t(A+B+C) + (A+B+C) \\ &\quad - t(a+b+c) + (a+b+c) + \theta \\ &= t^3 + t^2((A+B+C) - 3) + t(3 - 2(A+B+C) - (a+b+c)) \\ &\quad + (A+B+C + a+b+c + \theta - 1) \end{aligned}$$

Logo, para (G, H) ser Dehn-Sommerville energizado basta que $E[G] = 2$ e $3(A+B+C) - 6 = -(a+b+c)$. Perceba que neste caso se $h(x) = \omega(x)$, o caso topológico, o complexo

não é Dehn-Sommerville, mas se os valores de h forem definidos por $A = B = C = 1$ e $a = b = c = -1$ e $\theta = 2$ temos que (G, h) é Dehn-Sommerville.

Teorema 4.29. *Dado um complexo simplicial energizado (G, h) e sua e -função, então (G, h) é Dehn-Sommerville se, e somente se, a e -função satisfaz a simetria $e(t) = (-1)^{d+1}e(-1-t)$.*

Demonstração. Começamos lembrando que a condição de palindrômico de um polinômio equivale a afirmação de que suas raízes são invariantes sobre a involução $x \rightarrow 1/x$, ou seja, se x é raiz então $1/x$ também é, isso porque se $h^e(x)$ é palindrômico de grau $d+1$ então $h^e(1/x) = \frac{h^e(x)}{x^{d+1}}$. Assim, temos que

$$h^e\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{h^e(x)}{x^{d+1}} = \left(\frac{x-1}{x}\right)^{d+1} e\left(\frac{1}{x-1}\right). \quad (4.20)$$

Por outro lado temos

$$h^e\left(\frac{1}{x}\right) = ((1/x) - 1)^{d+1} e\left(\frac{1}{(1/x) - 1}\right) = \left(\frac{1-x}{x}\right)^{d+1} e\left(\frac{x}{1-x}\right). \quad (4.21)$$

Dessa forma, igualando as expressões 4.20 e 4.21, com algumas manipulações e fazendo $t = \frac{1}{x-1}$, temos o que se segue

$$\begin{aligned} \left(\frac{x-1}{x}\right)^{d+1} e\left(\frac{1}{x-1}\right) &= \left(\frac{1-x}{x}\right)^{d+1} e\left(\frac{x}{1-x}\right) \\ \left(\frac{x-1}{x}\right)^{d+1} e\left(\frac{1}{x-1}\right) &= (-1)^{d+1} \left(\frac{x-1}{x}\right)^{d+1} e\left(\frac{x}{1-x}\right) \\ e\left(\frac{1}{x-1}\right) &= (-1)^{d+1} e\left(\frac{x}{1-x}\right) \\ e(t) &= (-1)^{d+1} e(-1-t). \end{aligned}$$

□

Uma das coisas interessantes do exemplo apresentado acima no triângulo energizado, foi o fato de que uma das condições para ser Dehn-Sommerville era que $E[G] = 2$. Seria esta uma condição para todo complexo energizado? O corolário abaixo esclarece algo a respeito.

Corolário 4.30. *Se (G, h) é um complexo energizado de dimensão d e é Dehn-Sommerville, então $E[G] \in \{0, 2\}$.*

Demonstração. Note que $e(-1) = 1 - E[G]$, pois os e_k para k ímpar é composto pela soma dos $-h(x)$ dos símlices x de dimensão k , já para l par o e_l é composto pela soma dos $h(x)$ dos símlices x de dimensão l . Portanto em $e(-1)$ temos um somatório em todas as dimensões de $-h(x)$ totalizando $-E[G]$.

Aplicando o teorema acima, temos que se (G, h) é Dehn-Sommerville então $e(0) = (-1)^{d+1}e(-1)$ e assim, como $e(0) = 1$, temos que,

$$\begin{aligned} 1 &= (-1)^{d+1}(1 - E[G]) \\ (-1)^{d+1}E[G] &= (-1)^{d+1} - 1 \end{aligned}$$

Portanto, $E[G] \in \{0, 2\}$ □

4.5 Teorema de Riemann-Roch discreto

Esta seção apresenta o resultado que motivou a elaboração da estrutura dos complexos simpliciais energizados, uma versão discreta para o clássico teorema de Riemann-Roch. Os resultados aqui exibidos foram motivados pelas versões discretas para grafos de Baker-Norine ([7]) e de James-Miranda ([8], [35]).

4.5.1 O teorema clássico

O teorema de Riemann-Roch é um importante resultado nas áreas de análise complexas e geometria algébrica. O resultado relaciona expressões topológicas como o gênero, com os divisores que podem ser vistos como expressões algébricas. De modo breve podemos ver o clássico teorema a seguir.

Um divisor D sobre uma superfície de Riemann é uma função $D : X \rightarrow \mathbb{Z}$ onde o suporte de D , ou seja, o conjunto de pontos p em que $D(p) \neq 0$, é um subconjunto discreto de X . Assim, D pode ser denotado formalmente por

$$D = \sum_{p \in X} D(p) \cdot p,$$

tendo em vista que os termos efetivos da soma são os que p está no suporte de D . O conjunto de todos os divisores de X é denotado por $Div(X)$.

No caso em que X é uma superfície de Riemann compacta, que é o contexto do teorema, então o suporte de um divisor D é finito. E neste caso, se para $D_1, D_2 \in Div(X)$ definimos $(D_1 + D_2)(p) = D_1(p) + D_2(p)$ como uma soma em $Div(X)$ temos que o mesmo é um grupo abeliano livre gerado pelos pontos de X .

O grau de um divisor é dado por

$$deg(D) = \sum_{p \in X} D(p).$$

Uma superfície de Riemann compacta também pode ser vista como uma 2-variedade real, compacta orientável e, portanto, pode ser classificada, segundo resultado de teoria de variedades, como sendo um g -toro, para um único inteiro $g \geq 0$, a menos de difeomorfismo.

Este g é o gênero de X , que é um invariante topológico à semelhança da característica de Euler.

Inicialmente, em 1857, Riemann provou um resultado que ficou conhecido como desigualdade de Riemann. A mesma estabelece que para uma superfície de Riemann compacta X de gênero g e D um divisor sobre X , temos

$$l(D) \geq \deg(D) - g + 1,$$

onde $l(D)$ é a dimensão do espaço associado ao divisor D . O Teorema de Riemann-Roch tomou a forma como é conhecido atualmente após o trabalho de um aluno de Riemann, Gustav Roch em 1865, que identificou precisamente a diferença na desigualdade transformando-a em uma igualdade. O Teorema de Riemann-Roch para uma superfície de Riemann compacta de gênero g e com divisor canônico K estabelece que:

$$l(D) - l(K - D) = \deg(D) - g + 1,$$

onde $l(K - D)$ é o termo de correção proposto por Roch.

4.5.2 Riemann-Roch para grafos

Em 2007, Baker-Norine [7] publicaram um análogo discreto do teorema de Riemann-Roch para grafos e apresentou uma aplicação do teorema encontrando estratégias vencedoras para o "chip-firing game" ou "Dollar game" estudado depois por Durval-Caroline-Martin em [36] e mais recente por Kim-Perkinson em [37], este último já trabalhando o jogo no contexto dos complexos simpliciais.

Tudo começa com a introdução da teoria dos divisores para grafos.

Definição 4.31. Seja $G = (V, E)$ um grafo simples. Um divisor D em G é uma combinação linear de $V(G)$ com coeficientes inteiros, ou seja,

$$D = \sum_{v \in V(G)} D(v) \cdot v,$$

onde $D(v)$ é inteiro para cada $v \in V(G)$. O conjunto de todos os divisores de G ($Div(G)$) é equivalente a $\mathbb{Z}V$ e portanto é um grupo abeliano livre no conjunto finito $V(G)$.

Se um $D \in Div(G)$ é tal que, $D(v) \geq 0$ para todo $v \in V(G)$ então dizemos que D é um **divisor efetivo** de G .

Definição 4.32. Definimos o grau de um divisor como

$$\deg(D) = \sum_{v \in V(G)} D(v).$$

Seja $\mathcal{M}(G) = \text{Hom}(G, \mathbb{Z})$, um análogo das funções meromorfas das superfícies de Riemann no contínuo. Existe um isomorfismo entre $\text{Div}(G)$ e $\mathcal{M}(G)$ dado pelo operador definido para toda $f \in \mathcal{M}(G)$, como

$$\nabla(f) = \sum_{v \in V(G)} \nabla_v(f) \cdot v,$$

onde $\nabla_v(f) = \sum_{y \sim v} (f(v) - f(y))$, com $v \sim y$ denotando os vértices y 's que se conectam com v por uma aresta.

Definição 4.33. Um divisor que é a imagem de $f \in \mathcal{M}(G)$ pelo operador ∇ é dito um **divisor principal**. O conjunto de todos os divisores principais de G é expresso por $P\text{Div}(G)$.

Não é difícil mostrar que $P\text{Div}(G)$ é subgrupo de $\text{Div}(G)$ e ainda que $\text{deg}(D) = 0$ para todo $D \in P\text{Div}(G)$. De fato, dado dois divisores principais, basta usar a linearidade do operador ∇ e vemos que a soma dos dois divisores é imagem da soma de dois elementos de $\mathcal{M}(G)$. Para verificar que o grau é nulo, basta observar que em cada termo $\nabla_v(f)$ aparece $-f(y)$, o qual, será cancelado com $f(y)$ de $\nabla_y(f)$.

Definição 4.34. Dizemos que dois divisores D e D' de G estão em **equivalência linear** ($D \sim D'$) se $(D - D') \in P\text{Div}(G)$.

O **sistema linear associado** a D é definido por

$$|D| = \{E \in \text{Div}(G); E \geq 0 \text{ e } E \sim D\},$$

ou seja, o conjunto de todos os divisores efetivos que são equivalentes a D . E é assim que Baker-Norine define a dimensão $r(D)$, como

$$r(D) = \dim(|D|),$$

com $r(D) = 0$ quando $|D| = \phi$ e declara que para cada inteiro $s \geq 0$, $r(D) \geq s$ se, somente se, $|D - E| \neq \phi$ para todo divisor efetivo E de grau s . Portanto, está claro que $r(D)$ depende apenas da classe de equivalência linear de D .

Seja K um divisor definido por $K = \sum_{v \in V(G)} (\text{deg}(v) - 2) \cdot v$, que é chamado por Baker-Norine de **divisor canônico**. Portanto o $\text{deg}(K) = 2|A| - 2|V| = 2g - 2 = -2\chi(G)$. Isto conclui as definições para enunciar o teorema de Riemann-Roch para grafos.

Teorema 4.35 (Riemann-Roch para grafos). *Seja $G = (V, E)$ um grafo simples e D um divisor de G . Então*

$$r(D) - r(K - D) = \text{deg}(D) + 1 - g.$$

A demonstração será omitida aqui, mas pode ser encontrada em [7].

4.5.3 Riemann-Roch e os complexos energizados

Em 2019, Kim e Perkinson [37] desenvolveram, motivados pelos trabalhos de Durval, Caroline e Martin [36], uma teoria de divisores para complexos simpliciais. Porém, o teorema de Riemann-Roch não é abordado, pois seu objetivo é estudar o "Dollar Game" no contexto simplicial. Kim-Perkinson utiliza-se dos grupos críticos e os i -laplacianos de Hodge. Aqui vamos apresentar uma versão mais simples, baseada na estrutura de complexos simpliciais energizados.

Seja (G, h) um complexo simplicial energizado, temos que o grafo de G_1 , ou seja, o grafo do refinamento baricêntrico se encaixa na estrutura de Baker-Norine. Olhando $h(x)$ como os coeficientes do divisor D , temos que

$$D = \sum_{x \in G} h(x)x.$$

Porém, na estrutura de Baker-Norine temos apenas vértices e arestas o que não acontece com G_1 . Portanto devemos usar o grafo símplice de G , um grafo que está contido em G_1 .

Definição 4.36. Dado um complexo simplicial G , chamamos de **grafo símplice** de G , o grafo G_s em que os vértices são os simplices de G e para todo x e y simplices de G , x se conecta com y se $x \subset y$ ou $y \subset x$ e a dimensão difere por 1. Por exemplo, veja na figura 6.

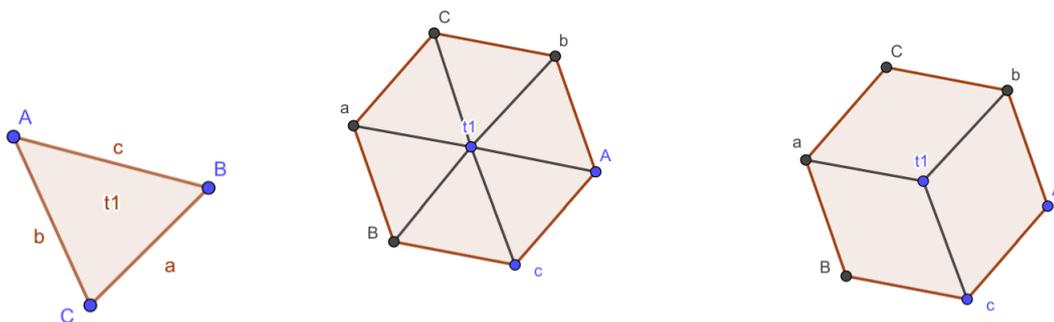


Figura 6 – O complexo $G = \{A, B, C, a, b, c, t1\}$ e refinamento baricêntrico e o grafo símplice

Note que no grafo símplice de (G, h) , a energia aparecerá apenas nos vértices, pois os vértices de G_s são os simplices de G . Essa estrutura se encaixa perfeitamente com as condições apresentadas em [7]. Aplicando o teorema de Riemann-Roch para grafos temos o seguinte resultado.

Teorema 4.37. Dado um complexo simplicial G e um divisor D então

$$r(D) - r(K - D) = E[G] + 1 - g,$$

onde g é o gênero de G_s e $E[G]$ é a energia total do complexo simplicial energizado (G, h) , com $h(x) = D(x)$ e $K = \sum_{x \in G} (\deg(x) - 2) \cdot x$, com $\deg(x)$ a quantidade de arestas que atacam x em G_s .

A demonstração é uma aplicação direta de Riemann-Roch na versão de [7].

Uma contribuição deste teorema é relacionar sistemas de equivalência linear do espaço das energias que podem ser atribuídas a G associado a um divisor D , ou seja, os divisores de G associados a energia do complexo simplicial energizado com a energia total do mesmo complexo. Esta última, como já vimos, pode ser descrita de várias formas pelos teoremas já apresentados ao longo da Tese.

Uma aplicação deste teorema, e que pode ser estudada, é uma versão dos jogos "chip-firing game" ou "Dollar game", com os divisores agora em todos os símlices, o estudo consiste exatamente em encontrar estratégias vencedoras para este novo jogo. A escolha do grafo símlice foi motivada por esta associação da versão discreta de Riemann-roch com estes jogos, cuja a movimentação ocorre com o espaço de uma dimensão apenas.

5 DISCUSSÕES E PERSPECTIVAS

Esta tese teve como objetivo introduzir o estado da arte no que diz respeito a geometria de complexos simpliciais e contribuir, de forma singela, para o desenvolvimento de novos resultados geométricos em complexos simpliciais energizados. Esta agenda científica é apenas o começo de uma série de extensões simpliciais que podem emergir, seja por inspiração puramente matemática, seja por motivação oriunda da análise topológica de dados. Neste sentido, procuramos abordar neste capítulo um pouco a estrutura matemática dos complexos energizados em alguns casos em que é possível vislumbrar a extensão de resultados clássicos em geometria para o caso energizado, abrindo caminho para perspectivas frutíferas de trabalhos futuros.

5.1 Alguns casos

Aqui observaremos alguns casos específicos que resultaram em potenciais generalizações, dentre elas temos a expressão para o traço das matrizes energizadas e a analogia entre complexos simpliciais e conjuntos de conjuntos.

5.1.1 Traço dos operadores energizados

Vejamos, primeiro, o caso em que $h(x) = 1$ para todo $x \in G$. Este é um caso bastante estudado no artigo primevo dos complexos simpliciais energizados [6], pois possui uma simetria espectral dos operadores L^{-} e g . Por outro lado, por exemplo, com respeito as relações de Dehn-Sommerville, apenas o complexo vazio ($G = \phi$) ou o $G = \{(1), (2)\}$ satisfazem tais relações.

Com relação a curvatura, como ficaria o exemplo 4.20 para o caso $h \equiv 1$?

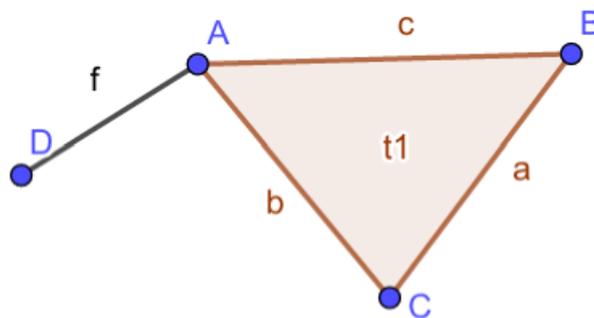


Figura 7 – Exemplo 1

$$\begin{aligned}
 K(A) &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{17}{6}, \\
 K(B) &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{14}{6}, \\
 K(C) &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{14}{6}, \\
 K(D) &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{9}{6}, \\
 K(A) + K(B) + K(C) + K(D) &= \frac{54}{6} = 9.
 \end{aligned}$$

Este caso não tem apenas a importância da simetria espectral, ele se destaca pela contagem total dos símlices que estão em G , a matriz L deste caso é conhecida como operador de contagem ou matriz de contagem, veja em [19]

Um outro caso ligado a contagem dos símlices, desta vez usando a curvatura, ocorre quando a função energia é $h(x) = |x|$. Neste caso, note que $K(x) = \sum_{y \in B(x)} \frac{|y|}{d(y) + 1}$, com $d(y)$ a dimensão do símlice y , e portanto, como $|y| = d(y) + 1$, temos que $K(x) = |B(x)| = |W^+(x)|$.

Aplicando no exemplo 4.20 com $h(x) = |x|$ temos

$$\begin{aligned}
 K(A) &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5, \\
 K(B) &= 1 + 1 + 1 + 1 = 4, \\
 K(C) &= 1 + 1 + 1 + 1 = 4, \\
 K(D) &= 1 + 1 = 2, \\
 K(A) + K(B) + K(C) + K(D) &= 15.
 \end{aligned}$$

Podemos perceber que neste caso, $E[G] = f'_G(1) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(k+1)$, para a f -função do complexo G dado. Assim as matrizes L e g podem ser escritas pela f -função também. Portanto $L(x, y) = f'_{(W^-(x) \cap W^-(y))}(1)$ e $g(x, y) = f'_{(W^+(x) \cap W^+(y))}(1)$. O determinante das matrizes g e L neste caso são iguais, que é dado por

$$\det(g) = \det(L) = \prod_{k=0}^d (k+1)^{f_k(G)}.$$

Um fato interessante é que este caso fornece informações para expressarmos o traço das matrizes energizadas. Qual seria o $tr(g)$ e o $tr(L)$?

Dado um complexo simplicial energizado (G, h) , para expressarmos o $tr(g)$, basta observar que os elementos $g(x, x) = L^{++}(x, x)$, pois $\omega^2(x) = 1$, sempre. Note que $g(x, x)$ é uma soma que inclui a energia de todos os símlices que contém x , assim nesta soma, a energia de um símlice x , $h(x)$, aparece outras vezes nos símlices que contém ele. Logo,

teremos $h(x)$ aparecendo $|W^-(x)|$ vezes e, pela propriedade de complexos simpliciais, $h(x)$ aparecerá um total de $2^{d(x)+1} - 1$ vezes, onde $d(x)$ é a dimensão de x . Portanto,

$$tr(g) = \sum_{x \in G} |W^-(x)|h(x) = \sum_{x \in G} (2^{d(x)+1} - 1)h(x).$$

Por outro lado, na matriz L , as energias que se repetem são as de dimensão menor, de modo que a energia de um vértice v aparece em todo $L(x, x)$ onde $v \in x$. E, assim, $h(v)$ aparece exatamente $|W^+(v)|$ vezes, que é exatamente $K(v)$ para o caso ($h(x) = |x|$) apresentado acima, ou ainda, o $g(v, v)$ para o caso ($h \equiv 1$). Dessa forma,

$$tr(L) = \sum_{x \in G} |W^+(x)|h(x).$$

Exemplo 5.1. Para $h \equiv 1$ temos que $tr(g) = \sum_{x \in G} (2^{d(x)+1} - 1)$ e $tr(L) = \sum_{x \in G} g(x, x)$, ou seja, o traço de g e L também são iguais neste caso, além de g e L serem iso-espectrais, como já foi mostrado no capítulo 3.

Exemplo 5.2. Para $h(x) = |x|$ temos que o

$$tr(g) = \sum_{x \in G} (2^{d(x)+1} - 1)|x| = \sum_{k=0}^d (2^{k+1} - 1)(k + 1)f_k(G)$$

e $tr(L) = \sum_{x \in G} |W^+(x)||x|$. Neste caso não há como simplificar, mas certamente $E[G]$ é uma cota inferior, pois a soma sobre os 0-símplice é equivalente a soma das curvaturas, que pelo teorema de Gauss-Bonnet é a energia total.

Um funcional que talvez seja interessante para se estudar no contexto energizado é o **funcional hidrogênio** estudado no contexto mais simples por Knill em [38]. Este funcional é definido por $tr(L - g)$ e, para nós, no contexto energizado seria

$$H(G, h) = tr(L - g) = tr(L) - tr(g) = \sum_{x \in G} (|W^+(x)| - |W^-(x)|)h(x).$$

Esta certamente é uma perspectiva de estudos futuros.

5.1.2 Conjuntos de conjuntos finitos energizados

Uma das principais vantagens da estrutura dos complexos simpliciais energizados é sua aproximação do conjunto de conjuntos energizados, ou seja, alguns dos resultados são válidos mesmo quando G é apenas um conjunto de conjuntos finitos, com uma função energia h , a qual atribui uma energia para cada conjunto que pertence a G . Esta extensão possibilitaria aplicar resultados aqui estudados em uma sigma álgebra ou até mesmo em uma topologia ou outra estrutura definida por conjuntos de conjuntos.

Exemplo 5.3. Seja $G = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$ e $h(x) = 1$ para todo $x \in G$. Este exemplo é apresentado por Knill como "Comma". Note que G não é um complexo simplicial, pois fere o axioma de definição tendo em vista que, $\{2\} \subset \{1, 2\}$ e $\{2\} \notin G$.

Temos que as matrizes energizadas L e g são dadas por

$$L = L^{--} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad L^{++} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad g = SL^{++}S = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Note que o teorema do determinante é válido, pois $\det(L) = \det(g) = \prod_{x \in G} h(x) = 1$. Note também que a característica particular do caso $h \equiv 1$, onde L e g são iso-espectrais também é válida aqui, pois os autovalores de L e g são $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Inclusive, estes resultados possibilitam a construção de grafos ligados aos operadores, denotados por Knill por Γ^{++} e Γ^{--} e estes grafos são iso-espectrais também.

A extensão do teorema do determinante para conjunto de conjuntos, é verdade em geral. Isto acontece em razão de que na demonstração apresentada no capítulo 3, não necessitamos da condição axiomática original de complexos simpliciais da definição 2.2, ou seja, para um conjunto de conjuntos munido de uma função energia podemos replicar a demonstração apresentada.

Por outro lado, note que o teorema da energia não funciona aqui. A energia total é $E[G] = 2$ e o somatório dos $g(x, y)$ é 1, assim $\sum_{x, y \in G} g(x, y) \neq E[G]$. E o teorema do super traço obviamente também não vale, isto é devido ao fato de que a condição axiomática de complexo simpliciais da definição 2.2 foi usada fortemente na demonstração destes teoremas (via triângulo de Pascal), não possibilitando uma replicação das mesmas para o contexto de conjunto de conjuntos.

Ao observar este exemplo e ponderações apresentadas surge a seguinte pergunta: será que os teorema de Poincaré Hopf e Gauss Bonnet podem ser estendidos para conjuntos de conjuntos?

Note que no exemplo do "Comma" apenas um conjunto é apresentado como vértice e assim a sua única curvatura é $K(1) = 1 + 1/2 = 3/2 \neq 2$, já o índice de Poincaré Hopf funciona, tendo em vista que, só há uma possibilidade de função direção, que é $G = F^{-1}(1)$, pois só temos um vértice. Porém, isto não significa que Poincaré-Hopf é válido para todo conjunto de conjuntos. Por exemplo, $G = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$ é um caso em que este resultado não é válido.

De fato, em geral estes teoremas não são estendidos para conjuntos de conjuntos, porém uma restrição menor que o axioma de complexos simpliciais poderia fazer um deles ser válido para conjuntos de conjuntos, a saber, o teorema de Poincaré-Hopf.

Teorema 5.4. *Dado um conjunto de conjuntos G , munido de uma função energia h . Se todos os conjuntos unitários do conjunto $A = \bigcup_{x \in G} x$ pertencem a G então dada uma função*

direção $F : G \rightarrow V(G)$ temos que

$$E[G] = \sum_{v \in V(G)} i_F(v).$$

Demonstração. Basta observar que $G = \dot{\bigcup}_{v \in V(G)} F^{-1}(v)$, ou seja, a união disjunta de conjuntos que dá G , logo a soma das energias destes conjuntos será a energia total de G . \square

Por outro lado, esta condição não é suficiente para o teorema de Gauss Bonnet energizado pois a condição axiomática dos complexos simpliciais é crucial na sua demonstração.

5.2 Perspectivas

Os complexos simpliciais energizados são estruturas topológicas recentes, sua primeira aparição foi em agosto de 2019. Portanto, existem muitos resultados para desenvolvimento futuros. Dentre outras opções, podemos caminhar em pelo menos três frentes para desenvolvimentos futuros.

A primeira seria completar a própria teoria, como por exemplo o estudo dos funcionais hidrogênio apresentados neste capítulo, observando o comportamento do traço dos operadores. Um outro caminho é estudar uma espécie de cohomologia energizada para esta estrutura ou uma versão do operador de Hodge. Ainda poderíamos definir o refinamento baricêntrico de um complexo energizado, dentre muitos outros resultados no contexto de geometria discreta e topologia algébrica.

Uma segunda frente de trabalho promissora é a geometria diferencial de conjuntos de conjuntos, por exemplo, verificando sob quais condições a extensão dos teoremas de geometria para complexos energizados são estendíveis para conjuntos de conjuntos, como ilustramos resultados preliminares para o teorema de Poincaré Hopf, estabelecendo restrições menores que as do axioma de complexos simpliciais, as quais teoremas de geometria diferencial ainda podem ser válidos. Nossos resultados indicam o possível uso destes resultados para uma sigma álgebra ou, até mesmo, uma topologia ou outras estruturas que possam ser definidas por conjuntos de conjuntos.

A terceira frente que podemos desenvolver é buscar aplicações práticas nas diversas áreas do conhecimento desta estrutura. A produção de matemática pura muitas vezes é motivada pelas aplicações e vice-versa. Embora os resultados elencados são relevantes em matemática independentemente das possíveis aplicações, o fato dos resultados desta tese serem possíveis de ser observados no contexto de análise topológica de dados, certamente torna os resultados potencialmente mais relevantes para a comunidade científica de maneira geral, além da matemática. É claro que, existem teorias matemáticas que só encontraram

aplicações um século depois, mas no caso da análise topológica de dados este intervalo tem sido cada vez mais curto.

Uma das aplicações que esta estrutura teórica pode fornecer, é na física do estado sólido, um ramo da física da matéria condensada que estuda a matéria rígida ou sólidos. Recentemente, um artigo desta área foi publicado utilizando geometria diferencial discreta para resolver problemas de cristalização (veja [39]). Neste artigo ele utilizou o teorema de Gauss-Bonnet para grafos, já que não existia ainda os resultados desenvolvidos nesta Tese. Com a estrutura dos complexos simpliciais energizados estes problemas poderão ser atacados de modo mais direto (simples) e abrangente (para dimensões maiores que dois).

Uma outra e importante área de aplicação é na análise topológica de dados. Os k -símplices podem ser utilizados para inferir interações de ordem k , ou seja, entre k -corpos de um sistema experimental. Recentemente foi publicado um paper (veja [40]) onde foi analisada a interação entre 19 conjuntos de dados e cada um deles foi caracterizado como um símplice via análise estrutural de redes. Com os complexos simpliciais energizados problemas como estes podem ser resolvidos.

Outras aplicações feitas com complexos simpliciais que podem ser desenvolvidas e analisadas a partir de complexos simpliciais energizados podem ser vistas em [41] e [42].

5.3 Conclusão

Esta tese traz luz aos teoremas clássicos de geometria diferencial em uma nova estrutura da geometria combinatorial, a saber, os complexos simpliciais energizados. Dada a relevância desta estrutura, espera-se generalizações de resultados topológicos e geométricos já conhecidos vislumbrando possíveis aplicações em análise topológica de dados, dentro da topologia e geometria estocástica. Percebemos na exposição inicial da tese, ao revisar o artigo original sobre complexos energizados, que há muito material para se trabalhar, desde os conceitos mais básicos aos teoremas mais sofisticados.

Ao desenvolver teoremas do tipo Gauss Bonnet e Poincaré-Hopf, verificamos como as estruturas macros da geometria e até mesmo da geometria combinatorial estão ligadas. A expansão das relações de Dehn-Sommerville para o contexto energizado mostraram uma simetria condicionada as cargas de energia dos símplices.

O desenvolvimento do estudo dos traços dos operadores e a extensão para conjuntos de conjuntos anunciam uma teoria bem ajustada e com forte possibilidades de muitas aplicações. Para teoria de conjuntos, por exemplo, a introdução de complexos energizados pode abrir caminho para que resultados clássicos de geometria diferencial tenham sua eventual contrapartida em teoria de conjuntos.

Acreditamos que esta tese cumpriu com êxito o objetivo de estudar e desenvolver novos resultados e teoremas dentro da teoria dos complexos simpliciais energizados. Os

resultados reportados aqui abrem caminho para inúmeras aplicações em geometria e topologia simplicial, dentro da matemática pura e aplicada.

REFERÊNCIAS

- 1 KNILL, O. A discrete Gauss-Bonnet type theorem. *arXiv preprint arXiv:1009.2292*, 2010.
- 2 KNILL, O. The amazing world of simplicial complexes. *arXiv preprint arXiv:1804.08211*, 2018.
- 3 WU, Z.; MENICHETTI, G.; RAHMEDE, C.; BIANCONI, G. Emergent complex network geometry. *Scientific reports*, Nature Publishing Group, v. 5, p. 10073, 2015.
- 4 WEBER, M.; SAUCAN, E.; JOST, J. Characterizing complex networks with Forman-Ricci curvature and associated geometric flows. *arXiv preprint arXiv:1607.08654*, 2016.
- 5 SANTOS, F. A.; RAPOSO, E. P.; COUTINHO-FILHO, M. D.; COPELLI, M.; STAM, C. J.; DOUW, L. Topological phase transitions in functional brain networks. *Physical Review E*, APS, v. 100, n. 3, p. 032414, 2019.
- 6 KNILL, O. Energized simplicial complexes. *arXiv preprint arXiv:1908.06563*, 2019.
- 7 BAKER, M.; NORINE, S. Riemann-Roch and Abel-Jacobi theory on a finite graph. *Advances in Mathematics*, Elsevier, v. 215, n. 2, p. 766–788, 2007.
- 8 JAMES, R.; MIRANDA, R. A Riemann-Roch theorem for edge-weighted graphs. *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 141, n. 11, p. 3793–3802, 2013.
- 9 MUKHERJEE, S. K.; BERA, S. A simple elementary proof of “The Unimodularity Theorem” of Oliver Knill. *Linear Algebra and Its applications*, Elsevier, v. 547, p. 124–127, 2018.
- 10 LIMA, E. *Homologia básica*. Rio de Janeiro: IMPA, 2009. ISBN 9788524402869.
- 11 MUNKRES, J. R. *Elements of algebraic topology*. [S.l.]: CRC Press, 2018.
- 12 BUFFA, A.; CHRISTIANSEN, S. A dual finite element complex on the barycentric refinement. *Mathematics of Computation*, v. 76, n. 260, p. 1743–1769, 2007.
- 13 BOTT, R. Two new combinatorial invariants for polyhedra. *Portugaliae mathematica*, Sociedade Portuguesa de Matemática, v. 11, n. 1, p. 35–40, 1952.
- 14 KNILL, O. One can hear the Euler characteristic of a simplicial complex. *arXiv preprint arXiv:1711.09527*, 2017.
- 15 KNILL, O. On Helmholtz free energy for finite abstract simplicial complexes. *arXiv preprint arXiv:1703.06549*, 2017.
- 16 EVES, H. W. *Elementary matrix theory*. [S.l.]: Courier Corporation, 1980.
- 17 MUKHERJEE, S. *A new elementary proof of the Unimodularity theorem of Oliver Knill*. 2019.

- 18 KNILL, O. The energy of a simplicial complex. *arXiv preprint arXiv:1907.03369*, 2019.
- 19 KNILL, O. The counting matrix of a simplicial complex. *arXiv preprint arXiv:1907.09092*, 2019.
- 20 POINCARÉ, H. Sur les courbes définies par une équation différentielle i (1881), ii (1882), iii (1885), iv (1886). *Oeuvres I, Gauthier-Villars, Paris*, 1881.
- 21 HOPF, H. Über die curvatura integra geschlossener Hyperflächen. *Mathematische Annalen*, Springer, v. 95, n. 1, p. 340–367, 1926.
- 22 KNILL, O. A graph theoretical Poincaré-Hopf theorem. *arXiv preprint arXiv:1201.1162*, 2012.
- 23 DU, D.-Z.; KO, K. Theory of computational complexity. 2000. *John Wiley&Sons*.
- 24 KNILL, O. *A parametrized Poincaré-Hopf Theorem and Clique Cardinalities of graphs*. 2019.
- 25 KNILL, O. Poincaré-Hopf for vector fields on graphs. *arXiv preprint arXiv:1911.04208*, 2019.
- 26 GAUSS, K. *General investigations of curved surfaces*. [S.l.]: Raven Press, Hewlett (New York), 1965.
- 27 CHERN, S.-s. A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed riemannian manifolds. *Annals of mathematics*, JSTOR, p. 747–752, 1944.
- 28 LI, Y. The Gauss-Bonnet-Chern theorem on riemannian manifolds. *arXiv preprint arXiv:1111.4972*, 2011.
- 29 KNILL, O. A graph theoretical Gauss-Bonnet-Chern theorem. *arXiv preprint arXiv:1111.5395*, 2011.
- 30 LEVITT, N. The Euler characteristic is the unique locally determined numerical homotopy invariant of finite complexes. *Discrete & Computational Geometry*, Springer, v. 7, n. 1, p. 59–67, 1992.
- 31 KNILL, O. Dehn-Sommerville from Gauss-Bonnet. *arXiv preprint arXiv:1905.04831*, 2019.
- 32 KNILL, O. *More on Poincaré-Hopf and Gauss-Bonnet*. 2019.
- 33 DEHN, W. M. *Primary arsinés*. [S.l.]: Press of the Eschenbach Printing Company, 1905.
- 34 SOMMERVILLE, D. M. The relations connecting the angle-sums and volume of a polytope in space of n dimensions. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, The Royal Society London, v. 115, n. 770, p. 103–119, 1927.
- 35 JAMES, R.; MIRANDA, R. Riemann-Roch theory on finite sets. *arXiv preprint arXiv:1202.0247*, 2012.

-
- 36 DUVAL, A. M.; KLIVANS, C. J.; MARTIN, J. L. Critical groups of simplicial complexes. *Annals of Combinatorics*, Springer, v. 17, n. 1, p. 53–70, 2013.
- 37 KIM, J.; PERKINSON, D. Simplicial Dollar Game. *arXiv preprint arXiv:1908.09350*, 2019.
- 38 KNILL, O. On a Dehn-Sommerville functional for simplicial complexes. *arXiv preprint arXiv:1705.10439*, 2017.
- 39 LUCA, L. D.; FRIESECKE, G. Crystallization in two dimensions and a discrete Gauss–Bonnet theorem. *Journal of Nonlinear Science*, Springer, v. 28, n. 1, p. 69–90, 2018.
- 40 BENSON, A. R.; ABEBE, R.; SCHAUB, M. T.; JADBABAIE, A.; KLEINBERG, J. Simplicial closure and higher-order link prediction. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Acad Sciences, v. 115, n. 48, p. E11221–E11230, 2018.
- 41 PETRI, G.; BARRAT, A. Simplicial activity driven model. *Physical review letters*, APS, v. 121, n. 22, p. 228301, 2018.
- 42 AMORIM, E.; MOREIRA, R. A.; SANTOS, F. A. The Euler characteristic and topological phase transitions in complex systems. *BioRxiv*, Cold Spring Harbor Laboratory, p. 871632, 2019.