UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
EDUMATEC – PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLOGIA

ESTUDO DA ECOLOGIA DO SABER PROPORCIONALIDADE NO ENSINO FUNDAMENTAL SOB A ÓTICA DA TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

MARIA SÔNIA LEITÃO MELO VIEIRA

RECIFE
2020

Maria Sônia Leitão Melo Vieira

ESTUDO DA ECOLOGIA DO SABER PROPORCIONALIDADE NO ENSINO FUNDAMENTAL SOB A ÓTICA DA TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica – EDUMATEC, da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Doutora em Educação Matemática e Tecnológica.

Área de concentração: Didática da Matemática

Orientador: Dr. Marcelo Câmara dos Santos

Recife

2020

Catalogação na fonte
Bibliotecária Natália Nascimento, CRB-4/1743

V658e Vieira, Maria Sônia Leitão Melo.

Estudo da ecologia do saber proporcionalidade no ensino fundamental sob a ótica da teoria antropológica do didáticos. / Maria Sônia Leitão Melo Vieira. – Recife, 2020.

239f.

Orientador: Marcelo Câmara dos Santos.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2020.

Inclui Referências e Apêndices.

1. Educação – Teoria Antropológica do Didático. 2. Proporcionalidade. 3.Ensino Fundamental – Livros Didáticos. 4. UFPE - Pós-graduação. I. Santos, Marcelo Câmara dos. (Orientador). II. Título.

371 (23. ed.) UFPE (CE2020-042)

MARIA SÔNIA LEITÃO MELO VIEIRA

ESTUDO DA ECOLOGIA DO SABER PROPORCIONALIDADE NO ENSINO FUNDAMENTAL SOB A ÓTICA DA TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutora em Educação Matemática e Tecnológica.

Aprovado em: 29/05/2020

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos (Orientador e Presidente)
Universidade Federal de Pernambuco

PMBaltar

Profa. Dra. Paula Moreira Baltar Bellemain (Examinadora Interna)
Universidade Federal de Pernambuco

Profa. Dra. Marilene Rosa dos Santos (Examinadora Interna)
Universidade de Pernambuco

Prof. Dr. Marcus Bessa de Menezes (Examinador Externo)
Universidade Federal de Campina Grande

Prof. Dr. Vladimir Lira Veras Xavier de Andrade (Examinador Externo)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Ao Adilson Vieira, meu esposo, pelo companheirismo, respeito, grande amor e dedicação em todos nossos momentos pessoais e profissionais.

Às minhas filhas Sofia e Manuela, pela carinhosa e alegre presença em minha vida.

Aos meus inesquecíveis pais e apoiadores, João Olímpio Vieira de Melo e Maria de Lourdes Leitão de Melo (*in memoriam*).

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por ter me permitido sabedoria, saúde, paciência e garra neste árduo percurso.

À minha família, Adilson, Sofia e Manuela, pela compreensão quanto às ausências, embora em presença, durante os momentos de imersão diários aos estudos, e pela força recebida nas ocasiões de esgotamento físico e mental, quando eles chegavam junto me dando apoio.

À minha querida amiga Zanita (mãe de coração) por toda sua generosidade, cuidado e atenção para comigo e com minha família, sempre disposta a nos ajudar.

À Secretaria de Educação do Estado de Pernambuco e à Secretaria de Educação do Município de Recife por ter me permitido a oportunidade de realização desses estudos.

Ao meu professor orientador, Marcelo Câmara por ter acreditado no projeto e seguir orientando-me até o final.

Ao professor Abraão Juvencio, por todas as contribuições dadas, desde as leituras de sua tese e os momentos de esclarecimento durante as aulas da disciplina Construtos Teóricos até as considerações apresentadas no exame de qualificação, as quais foram muito importantes para o caminhar desta pesquisa.

A Alexandre Barros, Almir Moura e André Costa, parceria formada durante o estudo da disciplina Construtos Teóricos, pelos produtivos debates favorecendo ao aprofundamento da teoria e à produção de vários artigos, a partir da análise dos fenômenos didáticos, publicados em periódicos e anais de eventos da educação matemática, os quais formaram uma coletânea transformada em livro e publicada em 2019.

Ao Grupo Fenômenos Didáticos e Pró-Grandezas, pela oportunidade de
reflexão sobre a TAD e outras teorias, bem como de aprendizagem a partir da escuta
acerca das pesquisas já realizadas e em andamento pelos membros dos grupos.

Aos funcionários da Secretaria do EDUMATEC, em particular a Mário e Clara, equipe sempre prestativa e comprometida no atendimento aos nossos pleitos.

A todos os professores do programa com os quais tive o benefício de realizar várias aprendizagens fundamentais para o meu crescimento intelectual e minha formação humana.

Aos professores da disciplina de Seminários DDM, Iranete Lima, Rosinalda Teles, Marcelo Câmara, Paulo Figueiredo, Paula Bellemain, Marilene dos Santos, Jadilson Almeida e Aldinete Lima, pelas importantes contribuições durante as apresentações desta pesquisa.

Aos colegas leitores de Seminários DDM, pelas valiosas contribuições para o te

pesquisa.

Aos colegas da turma Doutorado 2016, em particular a André Pereira

convivência divertida e produtiva nas disciplinas cursadas.

Aos membros da banca, Marilene Rosa, Paula Bellemain, Vladimir Andrade, Marcus Bessa, Jadilson Almeida e Lúcia Ferreira, pelas inestimáveis contribuições durante o exame de qualificação e concordância em participar da defesa.

"Claramente, muitas pessoas que não têm desenvolvido a sua capacidade de raciocínio proporcional têm sido capazes de compensar usando regras de álgebra, geometria e trigonometria, mas, no final, as regras são um substituto pobre para a compreensão. Elas não estão preparadas para aplicações reais em estatística, biologia, geografia ou física – nas quais o importante é que os princípios fundamentais dependem da proporcionalidade. Isto é lamentável, num momento em que um número crescente de profissões depende diretamente da matemática ou do uso de modelos matemáticos para aumentar a eficiência, para salvar vidas, para poupar dinheiro ou tomar decisões importantes" (LAMON, 2008, p. 3).

RESUMO

Este estudo se insere na problemática ecológica da proporcionalidade no saber a ser ensinado, cujo principal objetivo foi investigar a ecologia do objeto de saber proporcionalidade sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático (TAD) (CHEVALLARD, 1999), em textos acadêmicos, currículo e livros didáticos, do Ensino Fundamental. Tomamos a TAD como método que nos permitiu caracterizar a organização matemática – OM, as relações institucionais e a razão de ser do saber existente no interior das instituições. Partiu-se do questionamento: como vive o saber proporcionalidade no âmbito dos textos acadêmicos, dos referenciais curriculares e dos livros didáticos? Buscaram-se respostas por meio do filtro da proporcionalidade construído a partir de elementos da TAD e inspirado no "filtre des grandeurs" (CUELLAR, 2012). Com o exame de textos da literatura acadêmica – teses, dissertações, artigos e capítulos de livros –, que pertenciam a publicações no âmbito das instituições Matemática, Educação Matemática e da Psicologia Cognitiva na Educação Matemática, evidenciaram-se modelos epistemológicos de referência para proporcionalidade que permitiram caracterizar a razão de ser do saber; as praxeologias matemáticas; e a relação institucional do objeto proporcionalidade, situando-o quanto ao *habitat*, nichos e relações ecológicas nos textos. O estudo também revelou que são várias as circunstâncias que rodeiam esse objeto de saber nas instituições e que proporcionalidade mantém uma relação harmônica de protocooperação com outros saberes matemáticos e estabelece teia alimentar, ora alimentando-se, ora servindo de alimento. Na instituição Currículo, o Modelo Institucional Dominante para Proporcionalidade (MIDP), no Ensino Fundamental, revela-se em uma relação harmônica no estudo dos diferentes significados da multiplicação e da divisão; de porcentagem; de partição na álgebra e de grandezas proporcionalmente direta e proporcionalmente inversa; em geometria a proporcionalidade é explorada na análise das medidas dos ângulos e da proporcionalidade dos lados de figuras poligonais em contexto de malha quadriculada; no estudo das relações métricas do triângulo retângulo; do teorema de Pitágoras e Teorema de proporcionalidade; em grandezas e medidas o objeto de saber proporcionalidade é estudado na compreensão de que o perímetro é proporcional à medida dos lados de um quadrado, o que não ocorre com a área. Existe recomendações explícitas na direção contrária à relação de parasitismo com a técnica da regra de três. O trabalho realizado na análise do livro didático convergiu com o que propõe a instituição Currículo e revelaram as instituições identificadas na literatura acadêmica quanto à introdução de OM em que proporcionalidade seja introduzida desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, favorecendo ao desenvolvimento da relação ecológica de protocooperação, mas diverge no não reconhecimento da importância da proporcionalidade enquanto ideia fundamental da matemática na relação recíproca, em que se comporta ora alimentando-se, ora servindo de alimento no saber a ser ensinado.

Palavras-chave: Proporcionalidade. Ecologia didática. Teoria Antropológica do Didático.

ABSTRACT

This study is part of the ecological problem of proportionality in the knowledge to be taught, whose main objective was to investigate the ecology of the object of knowledge proportionality from the perspective of the Anthropological Theory of Didactics (TAD) (CHEVALLARD, 1999), in academic texts, curriculum and books didactics, from Elementary School. We took TAD as a method that allowed us to characterize the mathematical organization, institutional relationships and the raison d'être of knowledge existing within institutions. It started from the question: how does the knowledge of proportionality live in the context of academic texts, curricular references and textbooks? Answers were sought through the proportionality filter built from elements of TAD and inspired by the “filtre des grandeurs” (CUELLAR, 2012). From the sieve in academic literature texts – theses, dissertations, articles and book chapters –, which belonged to publications within the scope of the Mathematics, Mathematical Education and Cognitive Psychology in Mathematics Education institutions, epistemological models of reference for proportionality became evident that allowed to characterize the raison d'être of knowledge; mathematical praxeologies; and the institutional relationship of the object proportionality, placing it in terms of habitat, niches and ecological relationships, in the texts. The study also revealed that there are several circumstances surrounding this object of knowledge in institutions and that proportionality maintains a harmonious relationship of proto-cooperation with other mathematical knowledge, establishing a food web, sometimes feeding or sometimes serving food. In curricular references, the dominant institutional model for proportionality, in Elementary Education, is revealed in a harmonic relationship in the study of the different meanings of multiplication and division and in the study of the percentage; of partition in algebra and of proportions directly proportional and proportionally inverse; in geometry, proportionality is explored in the analysis of the measurements of angles and proportionality of the sides of polygonal figures in the context of checkered mesh; in the study of the metric relationships of the right triangle; the Pythagorean theorem and proportionality theorem; in the thematic unit quantities and measures, the object of knowing proportionality is studied in the understanding that the perimeter is proportional to the measurement of the sides of a square, which does not occur with the area. There are explicit recommendations in the opposite direction to the parasitism relationship with the three rule technique. The work carried out in the analysis of the textbook converged with what the curriculum proposes and revealed the academic literature regarding the introduction of mathematical organizations in which proportionality is introduced since the early years of elementary school, but diverges in the failure to recognize the importance of proportionality as an idea fundamental aspect of mathematics in the reciprocal relationship, in which it behaves either feeding itself or sometimes serving food, in the knowledge to be taught.

Keywords: Proportionality. Didactic ecology. Anthropological Theory of Didactics.

RÉSUMÉ

Cette étude s'inscrit dans le problème écologique de la proportionnalité des connaissances à enseigner, dont l'objectif principal était d'étudier l'écologie de l'objet de la proportionnalité des connaissances dans la perspective de la Théorie anthropologique de la didactique (TAD) (CHEVALLARD, 1999), dans les textes académiques, les programmes et les livres didactique, de l'école primaire. Nous avons pris le TAD comme une méthode qui nous a permis de caractériser l'organisation mathématique, les relations institutionnelles et la raison d'être des connaissances existant au sein des institutions. Elle partait de la question: comment la connaissance de la proportionnalité vit-elle dans le contexte des textes académiques, des références curriculaires et des manuels? Des réponses ont été recherchées à travers le filtre de proportionnalité construit à partir d'éléments de TAD et inspiré du «filtre des grandeurs» (CUELLAR, 2012). À partir du tamis des textes de la littérature universitaire – thèses, dissertations, articles et chapitres de livres –, qui appartenaient à des publications dans le cadre des institutions de mathématiques, d'enseignement mathématique et de psychologie cognitive dans l'enseignement des mathématiques, des modèles épistémologiques de référence pour la proportionnalité sont devenus évidents. cela a permis de caractériser la raison d'être du savoir; praxéologies mathématiques; et la relation institutionnelle de la proportionnalité de l'objet, le situant en termes d'habitat, de niches et de relations écologiques, dans les textes. L'étude a également révélé qu'il existe plusieurs circonstances entourant cet objet de connaissance dans les institutions et que la proportionnalité maintient une relation harmonieuse de proto-coopération avec d'autres connaissances mathématiques, établissant un réseau trophique, parfois nourrissant ou parfois servant de la nourriture. Dans les références curriculaires, le modèle institutionnel dominant de proportionnalité, dans l'enseignement primaire, se révèle dans une relation harmonique dans l'étude des différentes significations de la multiplication et de la division et dans l'étude du pourcentage; de partition en algèbre et de proportions directement proportionnelles et proportionnellement inverses; en géométrie, la proportionnalité est explorée dans l'analyse des mesures des angles et de la proportionnalité des côtés des figures polygonales dans le cadre du maillage quadrillé; dans l'étude des relations métriques du triangle rectangle; le théorème de Pythagore et le théorème de proportionnalité; dans les quantités et mesures unitaires thématiques, l'objet de la connaissance de la proportionnalité est étudié en sachant que le périmètre est proportionnel à la mesure des côtés d'un carré, ce qui ne se produit pas avec la zone. Il existe des recommandations explicites dans la direction opposée à la relation de parasitisme avec la technique des trois règles. Le travail effectué dans l'analyse du manuel a convergé avec ce que le programme propose et a révélé la littérature académique concernant l'introduction d'organisations mathématiques dans lesquelles la proportionnalité est introduite depuis les premières années du primaire, mais diverge dans l'incapacité à reconnaître l'importance de la proportionnalité en tant qu'idée. aspect fondamental des mathématiques dans la relation réciproque, dans laquelle elles se comportent soit en se nourrissant soit en servant parfois de la nourriture, dans les connaissances à enseigner.

Mots-clés: Proportionnalité. Écologie didactique. Théorie anthropologique de la didactique.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR
BOLEMA	BOLETIM DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
CAPES	COORDENAÇÃO DE APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DE NÍVEL SUPERIOR
CIAEM	CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
EMP	EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM PESQUISA
LD	LIVRO DIDÁTICO
MED	MODELO INSTITUCIONAI DOMINANTE
MER	MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERÊNCIA
MERP	MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERÊNCIA PARA PROPORCIONALIDADE
PA	PRODUÇÃO ACADÊMICA
PCN	PARÂMETROS CURRICULAES NACIONAIS
PNLD	PROGRAMA NACIONAL DO LIVRO DIDÁTICO
REVEMAT	REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
RC	REFERENCIAL CURRICULAR
RPM	REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA
SBHMAT	SOCIEDADE BRASILEIRA DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA
SBM	SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TAD	TEORIA ANTROPÓLÓGICA DO DIDÁTICO
TD	TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA
UFBA	UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
UFPE	UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Na matemática, a noção de proporcionalidade está relacionada a várias situações nas quais precisamos comparar duas grandezas, às vezes sem nem nos darmos conta de que estamos fazendo matemática: situações como no preparo de alimentos, aumentando ou diminuindo uma receita, ao dosar uma determinada medicação para uma criança – quando a quantidade de gotas fica em função do peso e na análise de uma planta ou maquete, entre outras.

A ideia de proporcionalidade está relacionada à rotina de diferentes profissões, por exemplo na agronomia, ao calcular o espaço a ser cultivado por diferentes tipos de lavoura; na arquitetura, na elaboração de projetos compatíveis com os diferentes ambientes; no direito, no cálculo proporcional de bens nas partilhas de heranças; na engenharia das diferentes áreas, na elaboração de diferentes tipos de plantas e protótipos.

Nas disciplinas escolares, a proporcionalidade está presente, além da Matemática, no estudo da Física, da Química, da Biologia e da Geografia, por exemplo.

Proporcionalidade é um conceito matemático muito estudado por vários pesquisadores ao longo do tempo. Para Vergnaud (1988), proporcionalidade é uma relação multiplicativa entre as quantidades de dois espaços-medidas. Van de Walle (2009) apresenta proporcionalidade como a igualdade entre duas relações. De acordo com Costa Júnior (2010), resolver problemas que envolvem o conceito de proporcionalidade é muito mais que aplicar algoritmos, como a regra de três, por exemplo, normalmente associada à proporcionalidade. Tinoco (1996), Schliemann e Carraher (1997) e Costa e Allevato (2015) discutem que o trabalho com proporcionalidade nas escolas se restringe quase que exclusivamente à utilização da técnica da regra de três, baseando-se apenas nas propriedades de razões equivalentes, ou seja, dadas duas razões equivalentes $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, se as igualdades $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ e $a \, . \, d = b . \, c$, são verdadeiras, portanto, $d = b \, . \, \frac{c}{a}$. Os autores ainda destacam que, em alguns livros didáticos de matemática[1], proporcionalidade surge no 7º ano, no capítulo destinado ao estudo das razões proporções e o foco do estudo é dado na propriedade fundamental, das proporções "o produto dos extremos é igual ao produto dos meios e vice-versa".

A proporcionalidade é a relação entre duas variáveis (grandezas) proporcionais, mas é importante atentar para o fato que

[1] Iremos nos aprofundar nesse debate no capítulo destinado à análise dos livros didáticos.

> [...] se o professor, em seu trabalho com o conteúdo, utiliza apenas esse tipo de estratégia está deixando de explorar as relações existentes entre as grandezas e, com isso, os alunos perdem a oportunidade de desenvolver o raciocínio proporcional. É recomendável identificar as características, isto é, as relações numéricas apresentadas em cada situação, assim como o fator invariante que permite exprimir a relação matematicamente. Dessa forma, entendemos que em problemas envolvendo o conceito de proporcionalidade devemos explorar as relações existentes entre as grandezas consideradas, bem como enfatizar a relação desse conceito com outros conceitos matemáticos (COSTA; ALLEVATO, 2015, p. 4).

Os autores ainda destacam que "[...] a proporcionalidade não é apenas um conteúdo matemático, mas um 'formador' de estruturas cognitivas para a compreensão de outros importantes conceitos matemáticos, tanto nas questões numéricas, como naquelas que envolvem Medidas e Geometria" (COSTA; ALLEVATO, 2015, p. 3).

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para o ensino de Matemática, nos anos iniciais do Ensino Fundamental, verificamos que

> A proporcionalidade, por exemplo, está presente na resolução de problemas multiplicativos, nos estudos de porcentagem, de semelhança de figuras, na matemática financeira, na análise de tabelas, gráficos e funções. O fato de que vários aspectos do cotidiano funcionam de acordo com leis de proporcionalidade evidencia que o raciocínio proporcional é útil na interpretação de fenômenos do mundo real. Ele está ligado à inferência e à predição e envolve métodos de pensamento qualitativos e quantitativos (Essa resposta faz sentido? Ela deveria ser maior ou menor?). Para raciocinar com proporções é preciso abordar os problemas de vários pontos de vista e também identificar situações em que o que está em jogo é a não proporcionalidade (BRASIL, 1997, p. 38).

Diante desse cenário, algumas inquietações surgiram. A regra de três seria uma espécie de parasita[2] da proporcionalidade, em seu nicho ecológico? Ou seja, a ênfase no estudo da regra de três pela matemática escola, não estaria prejudicando o ensino e a aprendizagem do objeto de saber proporcionalidade? Constituirão os referenciais curriculares um direcionamento na relação entre saberes, em que a proporcionalidade é um saber hospedeiro e a regra de três um parasita? E, nos livros didáticos, como se dá a relação entre os saberes matemáticos e a proporcionalidade? Os questionamentos anteriores nos ajudaram a nortear nossa questão de pesquisa, ao nos perguntarmos: como vive o saber proporcionalidade no âmbito do saber acadêmicos e do saber a ser ensinado no Ensino Fundamental?

Para respondermos ao nosso questionamento, enveredamo-nos pela Teoria Antropológica do Didático (TAD), teoria inicialmente desenvolvida pelo pesquisador francês Yves Chevallard e que vem sendo muito estudada por vários pesquisadores da França (Artud,

---

[2] Em analogia ao conceito de parasitismo em Biologia, cuja relação, na maioria das vezes, apresenta benefícios para o parasita e prejuízo para o hospedeiro, interrogamo-nos se a ênfase no estudo da regra de três pela matemática escolar não estaria prejudicando o ensino e a aprendizagem do objeto de saber proporcionalidade.

Bessot, Chaachoua), da Espanha (Bosch e Gascón) e do Brasil (Almouloud, Bellemain, Bittar, Câmara dos Santos), por exemplo.

A atividade matemática – e, por consequência, a atividade de estudo da Matemática – é situada no conjunto das atividades humanas, realizadas nas instituições sociais. Partindo dessa premissa, a TAD nos ajudará a interpretar fenômenos relacionados ao ensino de matemática, entendendo que um saber matemático não existe isolado, no vácuo, mas que faz parte das relações que estabelece entre outros saberes ou grupos de saberes, além das modificações que o saber sofre desde o momento da sua origem, até o momento, que é efetivamente trabalhado em sala de aula.

As transformações sofridas pelo saber são objetos de estudo de um dos elementos da TAD que é a transposição didática (TD) que se interessa pelo estudo do saber, que teve origem na academia, por exemplo, e que, a partir da realização de um processo de transposição didática, se torna objeto de estudo nas salas de aula das escolas do Ensino Fundamental. Um saber não chega na escola tal qual é usado em uma determinada instituição produtora de saberes. Passa por diversas modificações, ou seja, transposições didáticas. É preparado para ser ensinado pelos professores antes de ser estudado pelos estudantes. E, nessa trajetória, o saber parte da instituição academia e passa pela instituição noosfera – formada por agentes de ministérios e secretarias de educação, membros de universidades, autores de livros didáticos, professores da educação básica, entre outros –, antes de chegar à sala de aula.

Na TAD, há também uma ramificação que é a ecologia didática, que se preocupa com o estudo das relações do um saber com outro ou com grupos de saberes, dentro de um determinado ambiente – no nosso caso, dentro da Matemática do Ensino Fundamental. O estudo da ecologia indaga sobre as organizações matemáticas e/ou didáticas de um determinado saber. Quais as tarefas direcionadas a esse saber? Que técnicas estão relacionadas? Como se pode justificar o uso de uma ou mais técnicas para a execução de uma dada tarefa? Elas se relacionam com o saber estudado? Esses questionamentos, entre outros, nos ajudam a entender uma determinada organização ou praxeologia de um saber. No capítulo que se destina ao referencial teórico, iremos nos aprofundar mais nesses pontos.

O estudo ecológico da proporcionalidade no saber acadêmico será investigado por meio dos textos acadêmico e do saber a ser ensinado por meio da leitura dos referenciais curriculares e de uma coleção de livros didáticos. O estudo do currículo e dos livros didáticos torna-se importante para caracterizar as relações institucionais em torno do objeto de saber proporcionalidade. Assim, estudamos de maneira geral os *habitats*[3] e os nichos[4] ecológicos da proporcionalidade no saber a ser ensinado[5] no Ensino Fundamental. Por *habitat* tomamos o local onde vive o saber e por nicho ecológico a função do saber no sistema de objetos com os quais interage.

Nossa pesquisa se propõe a investigar a ecologia do objeto de saber proporcionalidade, sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático, no saber sábio – textos acadêmicos – e no saber a ser ensinado – currículo e livro didático (LD), do Ensino Fundamental.

O nosso texto está dividido em seis capítulos, os quais detalharemos a seguir.

No capítulo I, trataremos da origem e delimitação dos dados da tese e abordaremos o quadro teórico; a revisão da literatura; a problemática, objetivos de pesquisa e hipótese de trabalho; e os aspectos metodológicos. No quadro teórico, traremos reflexões sobre alguns elementos da transposição didática da TAD. Na revisão da literatura, apresentaremos um cenário da proporcionalidade em pesquisas anteriores organizada a partir de critérios inspirados na TAD. A problemática situará nosso objeto em decorrência do que foi verificado na revisão da literatura e na perspectiva da teoria. Por fim, apresentaremos os aspectos metodológicos que também toma elementos da TAD em sua composição e inspiração no "filtre des grandeurs" (CUELLAR, 2012, p.109), para a construção do filtro da proporcionalidade.

Os capítulos subsequentes dedicam-se à apresentação dos resultados da pesquisa. Inicialmente, expomos a análise dos à luz do filtro da proporcionalidade nos textos acadêmicos no ponto 3, das instituições Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática e Base Nacional Comum Curricular de Matemática, ambos direcionados ao Ensino Fundamental no ponto 4 e da coleção de livros didáticos de matemática, 1º ao 5º ano, do Ensino Fundamental no ponto 4. Em seguida, trataremos das análises comparativas das três análises realizadas à luz do filtro da proporcionalidade, verificando se há coerência entre o que aponta a literatura acadêmica, o que é proposto pelos dos referenciais curriculares e o que está posto nos livros didáticos, e, finalmente, expressaremos nossas considerações finais.

[3] Em analogia à Biologia, lugar de morada dos saberes.
[4] Em alusão à Biologia, função que o saber desempenha no estudo de um outro saber.
[5] Saber presente no currículo, por exemplo.

2 ORIGEM E DELIMITAÇÃO DOS DADOS: QUADRO TEÓRICO, REVISÃO DA LITERATURA, PROBLEMÁTICA E ASPECTO METODOLÓGICO

Este estudo foi motivado a partir de reflexões resultantes da minha dissertação de mestrado, concluída no ano de 2004, bem como das experiências profissionais vivenciadas como professora da Educação Básica das redes públicas estadual e municipal de Pernambuco, desde o ano de 1986. E a partir das experiências como professora formadora das redes públicas, em tela.

Partimos, a princípio, das lacunas apontadas em nossa pesquisa de mestrado, com relação às estratégias de resolução de estudantes do Ensino Médio em problemas que envolviam escalas, cujos alguns pontos nos inquietaram bastante, como o uso de estratégia da regra de três como recurso mais adotado e da gestão incorreta das unidades, que se apresentaram como importantes fontes de dificuldade conceitual entre os estudantes investigados.

Estudar o potencial do conceito de escala no trabalho de articulação com outros conceitos matemáticos, principalmente entre os conceitos de proporcionalidade, semelhança e comprimento, foi objeto de investigação em nossa pesquisa de mestrado. Investigamos o conceito de escala sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), em livros didáticos e nos procedimentos de resolução de problemas dos estudantes de uma turma do 1º ano do Ensino Médio.

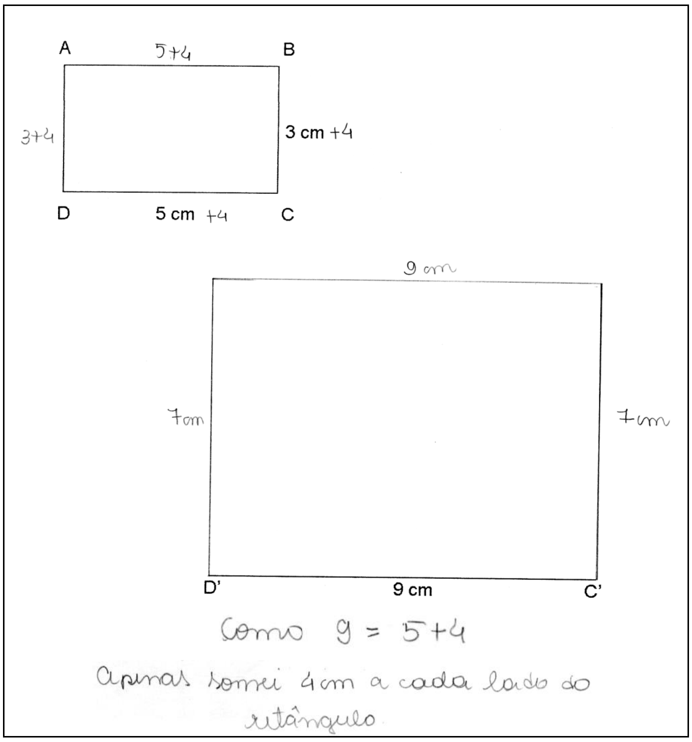
A Teoria dos Campos Conceituais (TCC), teoria cognitivista que procura explicar as estratégias usadas pelo sujeito durante o processo de aprendizagem de um determinado campo conceitual, foi o nosso referencial teórico para análise dos dados em nossa pesquisa.

Para Vergnaud (1991, p. 25), "[...] a chave é considerar a ação do sujeito em situação e a organização de seu comportamento. Daí a importância atribuída ao conceito de esquema". A TCC permite analisar o conhecimento dentro de uma dialética entre conceitos e campos conceituais, uma vez que esse conhecimento é observado como em permanente interconexão não só na Matemática, como nas outras ciências e na vida. Nossa pesquisa de mestrado se concentrou nas conexões do conceito de escala com os campos conceituais das estruturas multiplicativas, da geometria e das grandezas e medidas.

Em nossa pesquisa de mestrado, observamos que proporcionalidade está presente no referencial curricular, sendo um saber a ser trabalhado ao longo dos anos finas do Ensino Fundamental, com a função de saber articulador aos saberes semelhança (ampliação e redução) e grandezas (diretamente, inversamente e não proporcionais). Nos PCNs, há também destaque para a importância de a escola realizar um trabalho voltado para o desenvolvimento do raciocínio proporcional[6] evitando o uso de uma idiossincrasia institucional, ou seja, o estudo da técnica pela técnica, de um caso particular, por exemplo o uso exacerbado da estratégia de regra de três em detrimento do estudo do saber a ele relacionado, que poderia ser as grandezas diretamente e inversamente proporcionais.

Na análise dos protocolos das respostas dadas pelos estudantes aos problemas propostos em nossa pesquisa de mestrado, observamos que alguns estudantes fizeram uso da adição de um determinado valor na tentativa da realização de um cálculo que levava à ampliação de um retângulo, cuja ampliação de um dos lados já era dada, como mostra a figura a seguir.

Figura 1 – Técnica aditiva – resolução de problema envolvendo *proporcionalidade*



Fonte: Melo (2004).

O estudante acrescentou quatro unidades aos comprimentos A'B' e C'D' e justificavam a resposta da seguinte forma: "[...] apenas somei 4cm a cada lado do retângulo" (MELO, 2004), na resolução de problemas envolvendo a construção de uma figura, por meio da ampliação de outra figura dada (retângulo ABCD com o comprimento BC e AD = 4cm e

[6] Sobre o raciocínio proporcional, trazemos uma maior reflexão no capítulo IV, no qual nos dedicamos ao estudo dos saberes proporção, proporcionalidade e raciocínio proporcional.

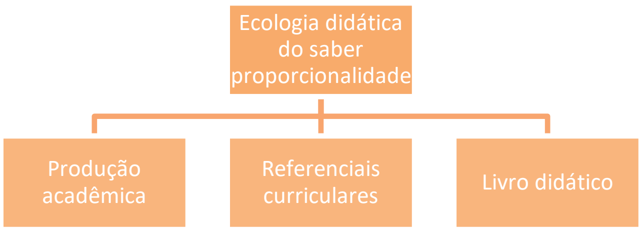
os comprimentos AB e CD = 3cm), em que se solicitava que o estudante realizasse a construção da ampliação desse retângulo a partir da medida do comprimento de um lado ampliado, (comprimento B'C' = 7cm), resultando no retângulo A'B'C'D'. Nesse ponto, leva-nos a refletir se a técnica empregada pelo estudante não estaria na realidade, remetendo à ideia de negação da proporcionalidade.

Também foram observadas dificuldades dos estudantes quanto à gestão das unidades de medida, em atividades envolvendo a conversão de valores em escalas em um mapa para valores no real. A resposta deveria ser dada em quilômetros e foi apresentada em metros, por exemplo (MELO, 2012). Embora proporcionalidade não tivesse sido o foco da pesquisa de mestrado (2004), despertou nosso interesse pelos indícios que foram deixados, instigando-nos a buscarmos respostas para alguns questionamentos. Por que nos protocolos dos estudantes do 1º ano do Ensino Médio e do curso de Licenciatura em Matemática a resolução do problema envolvendo proporcionalidade também se remeteu a uso da estratégia de regra de três, bem como para uma estratégia aditiva[7]? Estariam, ainda, os estudantes utilizando o pensamento aditivo, em problemas nos quais o que deveria ser mobilizado seriam as comparações multiplicativas?

> Apesar de terem contato quase que diariamente com situações de proporcionalidade, os alunos tendem a apresentar algumas dificuldades em compreender o conceito; ajudá-los a desenvolver o raciocínio proporcional tem sido um grande desafio no período escolar, sendo essencial ao aprendizado de diversas disciplinas do Ensino Fundamental, Médio e Superior (COSTA; ALLEVATO, 2016, p. 3).

Concordamos com Costa e Allevato (2016), e seus achados nos deixam mais motivados para realizarmos o estudo ecológico do saber proporcionalidade, que tomará como norte o modelo de análise que contempla três fontes de estudo, como ilustra a figura a seguir.

Figura 2 – Ecologia do saber proporcionalidade: modelo de análise



Fonte: Elaborada pela autora.

[7] Tomando como referência a Teoria dos Campos Conceituais, conceito de proporcionalidade faz parte do campo conceitual das estruturas multiplicativas. Durante os procedimentos de resolução, alguns estudantes mobilizaram apenas conceitos do campo conceitual das estruturas aditivas.

Em nosso estudo, tomamos textos de matemática acadêmica[8] – os textos acadêmicos de educação matemática e a matemática escolar[9] – os referenciais curriculares e as coleções de livros didáticos como fontes para a delimitação dos dados de nossa tese. A delimitação desses documentos para a construção dos dados de nossa tese torna-se importante, pois percebemos que, para nos situar acerca do saber proporcionalidade enquanto saber "sábio" – acadêmico, e enquanto saber a ensinado, organizado pela noosfera, seria incontornável a análise da produção acadêmica (artigos, dissertações, livros e teses; de documentos oficiais: referenciais curriculares, diretrizes educacionais, entre outros; e de livros didáticos para os cinco primeiros anos do Ensino Fundamental) parte das explicações e atividades para o estudante e orientações para o professor.

O estudo das produções acadêmicas nos permitirá situar proporcionalidade enquanto "saber sábio", desde a sua origem até as praxeologias destinadas ao trabalho desse saber na escola, "saber a ser ensinado". Identificando as modificações por que passa esse saber nesse processo de transposição didática, uma vez que "[...] o que a noção de transposição didática mostra especialmente é que o conhecimento matemático (seja 'aprendido', 'ensinado', 'a ser ensinado') está na raiz de qualquer problemática didática" (BOSCH; CHEVALLARD, 1999, p. 3).

Mas o que é de fato o processo de transposição didática? De onde vem o termo "saber sábio" e "saber a ser ensinado"? O que são praxeologias? Esses termos estarão bem presentes em nosso estudo, fazem parte do aporte teórico adotado em nossa pesquisa e farão parte dos temos que abordaremos no tópico a seguir no qual situaremos o quadro teórico da pesquisa.

2.1 QUADRO TEÓRICO

A Teoria Antropológica do Didático será o referencial teórico adotado para o qual tomamos como base de sustentação de nossa problemática. Consultamos principalmente os estudos de Chevallard (1994; 1997;1998; 1999; 2002; 2002a; 2002b; 2002c; 2010; 2018), cuja teoria tem início em seus estudos e também nos apoiamos nas pesquisas de Almouloud (2015), Araújo (2009), Bellemain (2015), Bittar (2017), Bosch e Chevallard (1999), Brito

[8] "Matemática acadêmica, vista como um conjunto de práticas e saberes associados à constituição de um corpo científico de conhecimentos, conforme produzido pelos matemáticos profissionais e reconhecido socialmente como tal" (DAVID et al. 2013, p. 45).

[9] "Matemática escolar, vista como um conjunto de práticas e saberes associados ao desenvolvimento do processo de educação escolar em matemática (que não se restringem ao que se ensina aos alunos na escola, porque inclui também, por exemplo, os saberes profissionais vinculados ao trabalho docente nesse processo)" (DAVID et al. 2013, p. 45).

(2006), Câmara dos Santos e Menezes (2015), Chaachoua (2016, 2017), Garcia (2005), Gascón e Bosch (2007), Ravel (2003) e Santos (2015), que fazem uso da TAD em seus trabalhos acadêmicos, para o estudo dos fenômenos didáticos presentes ou não na ecologia do saber. No nosso caso, a TAD nos ajudará a entender a problemática ecológica em torno do saber proporcionalidade.

2.1.1 A noção de transposição didática

Para Gascón e Bosch (2007), o processo de TD nos ajuda a refletir sobre o saber a ser ensinado pela escola, anunciando que o que se ensina nela é, em certo modo, produzido fora dela, algo que é gerado fora, mas que se leva ou é transposto para a escola por necessidades sociais de educação e difusão.

Esse saber produzido fora da escola pela comunidade científica, centros de pesquisas, entre outros, só será objeto de estudo na escola, mais precisamente vivenciado em sala de aula, após passar por processo de transposição realizado pela noosfera "[...] onde o saber científico ganha a 'roupagem didática', a partir de currículos e programas de ensino" (BRITO, 2006). Chevallard (1994) denomina de noosfera a esfera formada por uma pluralidade de agentes que pensa sobre o ensino, e que recebe forte influência da sociedade (agentes responsáveis pela política de ensino das secretarias de educação, membros da academia, professores, entre outros).

De acordo com Chevallard (1994), o saber passa por várias etapas, desde a sua origem até chegar a ser efetivamente ensinado. O saber a ser ensinado ocorre na noosfera. A noosfera é formada por todos que intervêm direta ou indiretamente no processo de transposição didática (Ministério da Educação – propondo mudanças no referencial curricular, os pais, os alunos, os professores que vão definir que livros vão adotar, a sociedade que vai cobrar em determinado ponto...). É designada por "esfera pensante", ou seja, formada por diferentes instituições que irão transpor o "saber sábio" a um saber a ser ensinado na escola pelo professor, que, por sua vez, também atua na transposição do saber. Durante a elaboração do planejamento pelo professor, o saber assume o status de saber preparado que posteriormente será efetivamente ensinado pelo professor.

> A transformação realizada não origina outro saber científico, mas gera o mesmo saber, porém adaptado para ser ensinado. Assim, esse 'novo saber' é submetido ao controle do processo de ensino e aprendizagem, que determina uma progressão no tempo sobre o que deve ser ensinado e, em algumas vezes, até como deve ser ensinado (SANTOS, 2015, p. 29-30).

Ao estudar os diferentes status que o saber adquire no processo de transposição didática, Chevallard (1994) amplia a unidade empírica de análise didática de tal modo que a unidade mínima de análise de qualquer processo didático passa a conter todas as etapas da transposição didática (análise desde o saber matemático de origem até o saber matemático ensinado e aprendido).

Além das noções de "saber sábio", "saber a ensinar" e "saber a ser ensinado", pesquisas realizas por Ravel (2003) apontam avanços com relação ao saber apresentando o "saber preparado" – aquele resultante do planejamento do professor – e "o saber efetivamente ensinado" que Bessa de Menezes (2010) evidencia em seus estudos, que seria a última etapa percorrida pelo saber em sua essência na sala de aula:

> Diferente do que o nome dado a este saber possa parecer, principalmente para a área de psicologia da educação, iremos definir esse saber como sendo todo e qualquer saber "retornado" pelo aluno, após esse saber ter sido "apresentado" em sala de aula. Sabemos que o mesmo (saber aprendido) não é somente formado pelo que é apresentado em sala de aula, ou seja, somente através do que é "ensinado"; temos consciência de que outras relações fora de sala de aula, na família, na comunidade em que vive, nos clubes, enfim, em outros locais onde pode aparecer esse saber em jogo, fazem com que nossos alunos tenham outras fontes para transformar este saber (BESSA DE MENEZES, 2010, p. 28-29).

Na passagem desses estágios, ou *status*, o saber sofre algum tipo de deformação, e, nesse caso, faz-se necessária a aplicação da vigilância epistemológica. Vigilância essa que se refere ao cuidado que se deve ter com a conexão entre esses saberes, para que não sejam deformados ao longo do processo de transposição e tenha sua essência alterada. Ou seja, cuidando para que essas adaptações do saber não se desviem de maneira tal do saber de origem. Embora seja importante salientar que, mesmo sem a vigilância epistemológica, a TD ainda é realizada.

> A distância entre o saber científico e o saber escolar aumenta consideravelmente por meio das transposições ocorridas, o que poderá acarretarem uma deformação do saber. Sobre isso, Brousseau (1986) alerta para a necessidade de haver uma vigilância em relação a Transposição didática, pois "ela é inevitável, necessária e, em certo sentido, lamentável" (p. 47). A esse respeito Chevallard (1991) concorda com Brousseau, argumentando que é necessário que se realize uma vigilância epistemológica, para que as deformações, supressões e adaptações não desfigurem o saber original (SANTOS, 2015, p. 31).

A escola é um local que se propõe a comunicar saberes. Para isso, torna-se importante a realização de uma série de transformações adaptativas dos saberes, para que eles possam "viver" no novo ambiente que a escola oferece.

Vamos trazer brevemente, uma discussão acerca do que podemos observar na TAD, sobre a distinção entre conhecimento e saber. O *conhecimento* é algo mais próximo do indivíduo, são as construções que ele faz sobre um saber, ele pertence ao indivíduo. Já o *saber* é algo mais amplo, faz parte das relações pessoais e institucionais, o saber é igualável as obras produzidas pela humanidade.

Para que certo saber seja ensinado na escola, é necessário um trabalho cuidadoso de TD. Bellemain (2015) nos alerta que não basta somente analisar apenas o saber em seus diferentes status.

> É necessário discutir e problematizar os modelos do saber acadêmico que dominam as instituições educativas e construir modelos epistemológicos de referência para os objetos de estudo investigados, a partir dos dados empíricos das três instituições básicas consideradas: a comunidade acadêmica dos matemáticos, o sistema educativo e a escola (BELLEMAIN, 2015, p. 3).

Em muitas situações, o processo de transposição didática não é capaz de manter ou recriar uma possível "razão de ser" do saber matemático que a escola propõe a ensinar. Para compreender o saber a ser ensinado, faz-se necessário entender as razões que motivam e justificam seu ensino. De acordo com Bosch e Gascón (2007), tomar consciência dos processos de transposição produziu uma ampliação drástica no campo de estudo da didática

> [...] porque esse saber é parte do saber a ensinar na escola, em que contextos e problemáticas se inscreve inicialmente, e o que justifica essa inscrição. Essa análise do saber a ensinar não pode fazer economia da origem, ou "razão de ser" desta noção, por que se construiu inicialmente, em que âmbito, contexto ou problemática, e como participa do desenvolvimento do saber matemático, até chegar às possíveis funções da noção nas atividades (matemáticas e não matemáticas) que ocorrem na sociedade e que, de em certo sentido, são o que justifica e legitima sua escolha como "saber a ensinar" (BOSCH; GASCON, 2007, pp. 392-393).

Ainda, de acordo com Bosch e Gascón (2007, p. 393), o fenômeno de transposição didática não pode ser reduzido a análises pontuais de livros didáticos ou de referenciais curriculares, o que importa é o tipo de questões que se elabora: "por que ensinar isto? Por que esta organização? De onde ela vem? E o tipo de fenômeno que os livros não mostram".

Como já mencionamos anteriormente, uma das contribuições da transposição para o projeto epistemológico da Didática foi a ampliação da unidade empírica de análise que passa a conter todas as etapas da transposição didática, não elegendo nenhum sistema de referência privilegiado para a análise destas diferentes etapas.

A transposição didática vai anunciando os diferentes status de um saber apresentando uma unidade mínima de análise. As etapas anunciadas e os diferentes status que o saber adquire (do saber sábio até o saber ensinado) podem ser descritas com ampliação da base teórica para a TAD. Em nosso estudo, questionamo-nos qual "a razão de ser" da proporcionalidade no Ensino Fundamental e em que medida as alternativas de transposição didática permitem conservar e/ou recriar "razões de ser" aceitáveis para esse objeto no nível de ensino em foco.

2.1.2 A teoria antropológica do didático (TAD)

A TAD, fruto dos estudos do pesquisador francês Yves Chevallard, surge da necessidade de encontrar respostas às investigações no âmbito dos fenômenos didáticos para os quais a noção de transposição didática já não era suficiente. Mas por que "antropológico do didático"? Fomos buscar elementos para responder a esse questionamento.

Para Garcia (2005, p. 89), "O enfoque antropológico consiste em partir do homem fazendo Matemática, o didático é denso na Matemática, isto é, todo fenômeno tem um componente didático essencial"[10]. O enfoque didático, por sua vez, refere-se à intenção de aprendizagem de um determinado saber ensinado. "O didático é o Enfoque da realidade social que coexiste na presença de uma intenção, de uma pessoa ou mais, geralmente por uma instituição, de fazer algo, para que uma pessoa ou uma instituição 'aprenda' um saber"[11] (CHEVALLARD, 2010, p. 3).

A didática é "[...] a ciência das condições[12] e restrições de difusão (e da não difusão) das praxeologias no seio das instituições da sociedade"[13] (CHEVALLARD, 2010, p. 3). Nesse âmbito, a didática se preocupa do estudo e da "[...] elucidação da economia e ecologia do didático. [...] Tem como objetivo explicar as decisões, gestos, julgamentos das instâncias pessoais envolvidas ou capazes de intervir nas possíveis situações didáticas" (CHEVALLARD, 2018, p. 27). Em se tratando de ecologia didática, "[...] visa explorar as

---

[10] "El *enfoque antropológico* consiste en partir del hombre haciendo matemáticas, y postular que lo didáctico es denso en la matemática, esto es, que también todo fenómeno matemático tiene un componente didáctico essencial".

[11] "Le didactique est cette dimension du réel social qui est coextensive à la présence d'une intention, portée par une personne ou, plus généralement, par une institution, de faire quelque chose pour que quelqu'un, personne ou institution, « apprenne » quelque chose".

[12] "Enfatizemos neste momento a distinção feita na TAD entre as condições e restrições: uma restrição é uma condição observada, de certa posição institucional a um certo instante, como não modificável, imutável (relativamente e provisória). Da mesma forma, uma condição é uma restrição modificável nesse mesmo sentido" (CHEVALLARD, 2018, p. 35, tradução livre da autora).

[13] «Est la science des conditions et des contraintes de la diffusion (et de la non-diffusion) des praxéologies au sein des institutions de la société».

condições de possibilidade ou impossibilidade de fatos econômicos observáveis ou imagináveis, condições que os incitam a acontecer ou inversamente, impedem que ocorram" (CHEVALLARD, 2018, p. 27).

Em estudos recentes, Garcia (2005, p. 90), citando Espinosa (1998, p. 70), enfatiza que a ecologia didática pode apresentar uma compreensão melhor a partir da metáfora

> Os organismos matemáticos são considerados com os "seres vivos" e o sistema matemático seu "meio". A questão essencial é que as condições de existência de um objeto matemático, a sua forma de vida, são determinadas pelo tipo de relações que se tem com seu "meio" e, principalmente, por sua própria "composição genética". Logo, se as condições, as "leis de existência" de um objeto matemático são transgredidas por algum motivo, corre um grave problema de extinção"[14] (ESPINOSA, 1998, p. 70 apud GARCIA, 2005, p. 90).

A ecologia didática inspira-se na noção de ecologia, campo de estudo da Biologia. De acordo com o Eugene Odum, um dos pioneiros no estudo da ecologia,

> A palavra ecologia deriva da palavra grega *oikos*, que significa "casa" ou "lugar onde se vive". Em sentido literal, a ecologia é o estudo dos organismos "em sua casa". A ecologia define-se usualmente como o estudo das relações dos organismos ou grupos de organismos com o seu ambiente, ou a ciência das inter-relações que ligam os organismos vivos ao seu ambiente (EUGENE ODUM, 2001, p. 4).

O estudo da ecologia didática tem um papel importante, pois vai poder situar a origem das condições modificáveis ou não de difusão de um determinado saber. Para Bosch e Gascón (2007), a partir da escala dos diferentes níveis de determinação, podemos realizar uma análise mais precisa dos fenômenos.

> Na verdade, a didática tem-se centrado em primeiro lugar no didático criado *na classe,* e ainda mais especificamente *pelo professor*. Este foco do campo de estudo tem conduzido, muito cedo, ao quadro da Teoria da Transposição Didática – primeiro estado histórico da TAD – a destacar as condições de atuação *não criadas pelo professor,* as condições que são para ele, muitas vezes restrições, (que ele sabe ou que ele ignora) e, mais amplamente, as condições criadas em outros níveis do que chamamos *escala de níveis de (co)determinação didática* (CHEVALLARD, 2018, p. 36).

Cada nível participa da determinação da ecologia das organizações matemáticas e didáticas por meio dos pontos de apoio que oferecem e das condições e restrições que

[14] "Los objetos matemáticos se consideran como los "organismos vivos", y el sistema matemático su "medio". La cuestión esencial es que las condiciones de existencia de un objeto matemático, o su forma de vida, viene determinada por el tipo de relación que tiene con su "medio" y, claro está, por su propia "composición genética".
Luego, si las condiciones o "leyes de existencia" de un objeto matemático son transgredidas por los motivos que sean, corre un grave problema de extinción".

impõem[15], segundo Chevallard (2002a, p. 10). Cada plano da escala possui uma hierarquia apresentando níveis superiores – disciplina, pedagogia, escola e civilização – e níveis inferiores – domínio, setor, temas e assunto.

> Os níveis mais altos cobrem muitos tipos de conteúdo, os mais familiares grandes tipos sendo o que é comumente referido como *disciplinas*. As condições e princípios de ensino que dizem respeito a várias disciplinas (individualmente e como interagem) são incluídos no nível da *pedagogia*. De outros condições vêm da instituição de ensino (*escola*), vêm da *sociedade* em que a escola reside, ou surgem mesmo de uma escala maior *civilização* (grupo culturalmente homogêneo de sociedades)[16] (ARTIGUE; WINSLØW, 2010, p. 5).

Artigue e Winsløw (2010) ainda descrevem com detalhes o que é tomado por níveis inferiores na escala dos níveis de (co)determinação, na TAD.

> Mas a TAD também nos permite identificar uma série de níveis de codeterminação do estudo de uma disciplina; estes podem em certa medida, estar associado aos elementos unificadores da praxeologias que eles determinam. Especificamente, um *domínio* abrange uma coleção de organizações regionais envolvendo várias teorias formando uma parte maior da disciplina (como a álgebra na matemática, ambos devem ser entendidos dentro do contexto institucional de uma escola). Um *sector* é caracterizado pelo estudo de uma organização regional (ou partes dele) que vem de uma família de praxeologias compartilhando uma teoria. [...] Diferentes tecnologias podem estar em uso, a partir de discursos informais em quais polinômios aparecem apenas como equações que determinam uma curva para formais em que eles são elementos algébricos com suas próprias regras de composição. Isso, por sua vez, dá origem a diferentes *temas*, cada um unificado por uma tecnologia (e assim cada um determinando o estudo de uma organização local). Finalmente, um *assunto* é concentrado em um Tipo de tarefas e técnica, motivadas e articuladas dentro de um tema maior[17] (ARTIGUE; WINSLØW, 2010, p. 5).

Como pode ser observado, esses níveis têm sua hierarquia girando em torno de diferentes organizações matemáticas (pontual, local, regional ou global). Em nossa pesquisa, focaremos no estudo da ecologia didática da proporcionalidade, buscando nas praxeologias

---

[15] «Chaque niveau concourt à déterminer l'écologie des organisations mathématiques et des organisations didactiques par les points d'appui qu'il offre et les contraintes qu'il impose».

[16] "The higher levels cover many types of content, the most familiar grand types being what is commonly referred to as disciplines. The conditions and principles for teaching that concern several *disciplines* (individually and as they interact) are subsumed in *pedagogies*. Other conditions come from the institution of teaching (*school)*, come from the society in which the school resides, or arise even from an even larger *civilisation* (culturally homogenous group of societies)".

[17] "But ATD also allows us to identify a number of *subdisciplinary levels* of codetermination of the study of a discipline; these can to some extent be associated with the unifying elements of the praxeologies they determine. Specifically, a *domain* embraces a collection of regional organisations involving several theories forming a larger part of the discipline (such as algebra within mathematics, both to be understood within the institutional context of a school). A *sector* is characterised by the study of one regional organisation (or parts of it) that comes from a family of praxeologies sharing one theory. [...] Different technologies may be in use, from informal discourses in which polynomials appear only as equations determining a curve to formal ones in which they are algebraic elements with their own composition rules. That, in turn, gives rise to different *themes*, each unified by a technology (and thus each determining the study of a local organisation)".

identificar em quais *habitat*s e nichos ecológicos esse saber se encontra e quais influências recebem dos diferentes níveis da escala. Retomaremos ao debate envolvendo a escala dos níveis de codeterminação, mais adiante, quando estivermos tratando mais detalhadamente das praxeologias.

O estudo antropológico do didático visa à investigação de um objeto de saber passando por sua origem, evolução e seu desenvolvimento dentro do processo de estudo de uma maneira geral. A TAD nos permite tomar um certo distanciamento da realidade e propor um recorte para o estudo dessa realidade. Com a possibilidade de modelização das atividades matemáticas e didáticas, Chevallard amplia o estudo dos fenômenos didáticos buscando recurso na Antropologia Didática.

Nos termos da TAD, a atividade matemática – e, por consequência, a atividade de estudo da matemática – é situada no conjunto das atividades humanas, realizadas nas instituições sociais. Parte de três noções fundamentais: a noção de objeto, de pessoa e da relação pessoal de um indivíduo com um objeto.

A noção de objeto "[...] é toda entidade material ou não material, que existe para ao menos um indivíduo. Tudo é então objeto, inclusive as pessoas"[18] (CHEVALLARD, 2002a, p. 1). Nessa linha, entendemos que o saber proporcionalidade, o referencial curricular, o livro didático, o professor e o estudante são exemplos de objetos, ou seja, "[...] todo produto intencional da atividade humana é um objeto"[19] (CHEVALLARD, 2002a, p. 1).

O conceito de pessoa, de acordo com a TAD, vai depender da relação pessoal empreendida entre um indivíduo e o objeto. O conceito de pessoa "[...] é então o par formado por um indivíduo x e o sistema de suas relações pessoais com o objeto $R\ (x,\ o)$, em um dado momento da história de x"[20] (CHEVALLARD, 2002a, p. 1).

A noção de relação pessoal com o objeto diz respeito ao conjunto formado por todas as interações que o indivíduo pode ter com o objeto. As noções de pessoa e de indivíduo são distintas. A partir das experiências vividas, as pessoas passam a ter relações com diferentes tipos de objeto. Tomamos como exemplo o objeto de saber proporcionalidade e a relação que o indivíduo passa a ter com ele, ao longo da sua escolaridade[21]. Nos anos iniciais do Ensino Fundamental, a pessoa se relaciona um pouco com a proporcionalidade ao estudar

---

[18] «est objet toute entité, matérielle ou immatérielle, *qui existe pour au moins un individu*. Tout est donc objet, y compris les personnes » .

[19] «Tout produit intentionnel de l'activité humaine, est un objet».

[20] «est alors le couple formé par un individu x et le système de ses rapports personnels $R(x, o)$, à un moment donné de l'histoire de x» .

[21] Tomamos apenas um recorte desse percurso, pois entendemos que o saber proporcionalidade possui vida em vários outros setores da Matemática e setores para além da Matemática.

multiplicação e divisão; ao estudar nos anos finais grandezas direta e inversamente proporcionais, semelhança de figuras, números racionais a relação entre a pessoa e a proporcionalidade já se amplia bastante, dessa forma, a pessoa daquele determinado indivíduo já não é mais a mesma que era antes, com relação ao objeto de saber proporcionalidade.

À medida que o indivíduo avança em seus estudos, a sua pessoa vai se modificando com relação ao objeto estudado. Assim, a pessoa muda com o passar do tempo, enquanto o indivíduo permanece invariante. Essa relação, em diferentes momentos da vida, da pessoa com o objeto, vai formando o que Chevallard (1998) denomina de universo cognitivo. Para a TAD, esse movimento de relação pessoal entre indivíduo e objeto, quando gera mudanças do estado inicial da relação, acarretará uma *aprendizagem*.

Para explicar a evolução do universo cognitivo de uma pessoa Chevallard (1998), apresenta-nos uma quarta noção fundamental, a noção de instituição. A instituição é tida como a porta de entrada da obra: "[...] uma sociedade é feita de obras, que fazem parte das construções humanas visando encontrar respostas para alguns questionamentos, que são a razão de ser dessas obras[22]" (CHEVALLARD, 1997, p. 1). As obras são, na realidade, as boas respostas encontradas para os questionamentos lançados pela humanidade, ou seja, as obras são os saberes que vão sendo produzidos pela humanidade ao longo da história.

> A entrada de uma pessoa em uma obra, que participa por definição da socialização da pessoa, contribui ao mesmo tempo para sua formação, na medida em que essa pessoa se submete à disciplina do trabalho – esportivo, legal, artístico, matemático, político, gramatical, filosófico, romântico, poético, etc. Qualquer instituição é, de fato, um operador de entrada em certas obras e, portanto, um operador de socialização e formação[23] (CHEVALLARD, 1997, p. 1).

A relação institucional, de modo geral, acontece pelas sujeições[24] existente entre a pessoa e a instituição. "Pelo fato de ser o sujeito de uma multidão de instituições, que o indivíduo x é constituído em uma pessoa" (CHEVALLARD, 1998, p. 2). Uma instituição pode ser definida como

---

[22] «Une société est faite d'*oeuvres*, c'est-à-dire de constructions humaines visant à apporter réponse à certaines *questions*, qui sont les *raisons d'être* de ces oeuvres».

[23] «L'entrée d'une personne en une oeuvre, qui participe par définition de la socialisation de la personne, ontribue du même coup à sa formation, dans la mesure où cette personne se soumet à la discipline de l'oeuvre – discipline sportive, juridique, artistique, mathématique, politique, grammaticale, philosophique, amoureuse, poétique, etc. Toute institution est ainsi, de fait, un opérateur d'entrée dans certaines oeuvres, et donc un opérateur de socialisation et de formation».

[24] Chevallard (1998) defende que o termo sujeição não é empregado no sentido de se se tornar escravo, mas, no sentido que passa a ter no "final do século XVII o sentido técnico de 'manter no lugar', ao qual se refere principalmente no seguinte: o indivíduo é 'mantido no lugar' apenas por suas subjugações institucionais, que fazem dele uma pessoa, isto é, que lhe permite viver". (p. 3).

> [...] um dispositivo social "total", que pode de fato ter apenas uma extensão muito reduzida do espaço social (existem micro instituições), mas que permite – e impõe – a seus sujeitos, isto é, às pessoas x que passam a ocupar as diferentes posições p oferecidas em I, maneiras próprias de fazer e pensar[25] (CHEVALLARD, 2002a, p. 2).

As instituições têm o papel de dispositivo que absorve os saberes e oportuniza que eles sejam objetos de conhecimento para determinado indivíduo. Assim que o indivíduo *X* reconhece esse objeto de saber *O*, passa-se a ter uma relação pessoal *R (X, O)* e vai modificando, assim, sua personalidade. Do mesmo modo, se o objeto *O* existe para uma instituição *I*, e o sujeito passa a ter uma posição naquela instituição, existirá, então, uma relação institucional, *RI (p, O)*.

> [...] uma instituição pode ser quase tudo o que quer que seja. Devido à natureza da palavra, poderíamos dar uma conotação própria a esse personagem, ou seja, "associação ou organização de caráter social, educativo, religioso, de ensino, etc." (KURY, 2002). Porém, não devemos nos surpreender ao vermos, em certos momentos, objetos tomarem o status de instituição. Uma escola é certamente uma instituição, que possui outras instituições a ela agregada, como uma sala de aula, por exemplo (SANTOS; MENEZES, 2015, p. 650).

Se a sala de aula ou uma disciplina são exemplos de instituição, indagamo-nos, então: a realização de uma aula pode acontecer dentro de um espaço físico delimitado ou não, mas podemos afirmar que toda sala de aula em si é um espaço físico? Entendemos que, do ponto de vista do sistema didático, seria necessário pelo menos o professor e o estudante enquanto sujeitos interagindo em torno do saber. Mas, em relação a uma disciplina escolar, qual é a sua natureza? É também exemplo de instituição?

A sala de aula pode ser identificada como instituição que pertencente ao sistema educativo e é constituída por sujeitos – professor e estudante. Esses sujeitos têm maneira própria de se relacionar com a instituição, reproduzindo o que é permitido ou imposto pela instituição a que pertence, devendo seguir as regras da sala de aula, do 6º ano, por exemplo. São sujeitos ativos que contribuem para a vida daquela instituição a qual pertencem.

Nas Diretrizes Curriculares Nacionais (2009), o termo disciplina surge como termo correlato para conhecimento, ensino, matéria, conteúdo curricular ou componente curricular. Logo, um componente curricular teria necessariamente sujeitos definidos interagindo em torno de um saber?

---

[25] «Une institution *I* est un dispositif social «total», qui peut certes n'avoir qu'une extension très réduite dans l'espace social (il existe des «micro-institutions»), mais qui permet – et impose – à ses *sujets*, c'est-à-dire aux personnes *x* qui viennent y occuper les différentes *positions p* offertes dans *I*, la mise en jeu de *manières de faire et de penser propres*».

A ideia de instituição pode ser tomada num sentido bastante amplo (pode ser uma sala de aula, um livro didático, um sujeito), e tal ação vai depender do sentido amplo que for tomado, nos termos de Chaachoua (2016). Uma instituição também pode ser definida como um local onde habita um determinado objeto de saber matemático.

> Para Chevallard (1999), o saber matemático organiza uma forma particular de conhecimento, produto da ação humana, em uma instituição caracterizada por qualquer coisa que se produza, se utiliza e se ensina, além de poder eventualmente transpor as instituições. Assim, o autor introduz a noção de *habitat* de um objeto matemático como sendo o tipo de instituição onde se encontra o saber relacionado ao objeto de estudo, que por sua vez determinará a função desse saber, ou seja, determinará seu nicho (ALMOULOUD, 2015, pp. 10-11).

Em nosso estudo, tomamos como instituições, os textos do PCN e da BNCC, bem como os textos dos livros didáticos por serem o habitat do saber a ser ensinado e por determinarem a função desse saber. Entendemos que esses textos são instituições por permitirem a entrada de um repertório de obras a serem estudadas, bem como oferecer formas de estudo legítimas para diferentes gerações.

As escolas, tanto públicas como privadas, no Brasil, seguem um modelo diferente de outras sociedades, como a da França, por exemplo. Aqui, o currículo ainda não era impositivo, como é na França, e os PCNs[26], por sua natureza norteadora, podem ter uma relação institucional com a escola, ou não. Com a chegada da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), vem a obrigatoriedade de cumprimento do currículo, pelo menos a parte comum, para a construção dos documentos locais. Essa relação institucional passará a existir entre BNCC e as secretarias de educação, a BNCC e escola; a BNCC e professor; e, consequentemente, a BNCC e estudante.

O livro didático, por sua vez, realiza esse papel de introdução da obra com mais êxito, pois, na maioria das escolas brasileiras, ele está presente na sala de aula.

> Uma instituição I é um dispositivo social que impõe às pessoas que ocupam uma posição em I, modos de fazer e de pensar próprios (Chevallard, 1992). Assim, o livro didático pode ser considerado uma instituição para alunos e professores que o utilizam (a depender do objetivo da pesquisa realizada) (BITTAR, 2017, p. 366).

O livro didático também é considerado uma instituição por Chaachoua (2017) ao entender que ele desempenha o papel de programa curricular em algumas sociedades.

> Na maioria dos países, os livros didáticos são uma tradução de uma diretriz institucional, muitas vezes expressa como um programa, conforme interpretado

[26] Parâmetros Curriculares Nacionais para os anos iniciais (1997) e para os anos finais (1998) do Ensino Fundamental.

> pelos autores. São, portanto, resultado de uma transposição didática (Chevallard, 1985, 1992) dos textos dos programas. Como Neyret (1995), consideramos os livros didáticos como produtos de instituições transponíveis. Podem ser pessoas específicas ou grupos de pessoas encarregadas pelas autoridades para escrever o manual[27] (CHAACHOUA, 2017, 371).

O Programa Nacional do Livro Didático[28], no Brasil, distribui o livro didático para todos os estudantes das escolas públicas da Educação Básica desde o ano de 1937[29]. Muitas escolas privadas também adotam livros, que são adquiridos pelos pais dos estudantes. Dessa forma, o livro didático passa a ter uma abrangência quase que total, atuando como uma instituição que tem a função de porta de entrada das obras, para professores e estudantes, ajudando a difundir o saber por diversas gerações.

Nessa perspectiva, entendemos que Chevallard (1997) toma a escola como o principal operador de entrada das obras na sociedade, e as gerações mais jovens aprendem sobre determinada sociedade, ao estudar as obras que a compõem, ou seja, sobre os saberes produzidos pelas sociedades. Mas, para a divulgação das obras, a escola conta com o apoio de várias outras instituições – as turmas (6º, 7º. 8º anos etc.), as disciplinas (Matemática, História, Ciências etc.), o currículo, o livro didático etc.

De acordo com Chevallard (2018, p. 28), pesquisas recentes, que utilizam a TAD alertam sobre o paradigma de visitação das obras, ou seja, apenas a socialização pela escola do que é culturalmente produzido pela sociedade e que é, muitas vezes, "[...] olhado como antididático ou pelo menos de muito baixa didaticidade" e aponta para o paradigma nascente de questionamento do mundo, inspirado nas práticas didáticas do mundo da pesquisa.

Nessa perspectiva, um indivíduo, ao entrar em contato com as instituições Currículo do Ensino Fundamental e Livro Didático, vai construindo uma relação pessoal com os diferentes objetos de saber ali presentes. A partir do momento em que passamos a admitir uma forma de fazer e pensar, da instituição, proposta pelos autores, bem como influenciado

---

[27] «Dans la plupart des pays, les manuels sont une traduction d'une directive institutionnelle, exprimée souvent sous forme de programme, selon une interprétation des auteurs. Ils sont donc un résultat d'une transposition didactique (Chevallard, 1985, 1992) des textes des programmes. Comme Neyret (1995), nous considérons les livres scolaires comme des produits d'institutions transpositives. Celles-ci peuvent être des personnes particulières ou des groupes de personnes chargées par des autorités de rédiger le manuel» .

[28] O Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) é o mais antigo dos programas voltados à distribuição de obras didáticas aos estudantes da rede pública de ensino brasileira e iniciou-se com outra denominação, em 1937. Ao longo desses 80 anos, o programa foi aperfeiçoado e teve diferentes nomes e formas de execução. Atualmente, o PNLD é voltado à educação básica brasileira, tendo como única exceção os alunos da educação. infantil. Disponível em: http://www.fnde.gov.br/programas/programas-do-livro/livro-didatico/historico. Acesso em: 26 jun. 2017.

[29] No ano de 1937, com a publicação do Decreto-Lei nº 93, de 21 de dezembro, é criado o Instituto Nacional do Livro, que tem entre outras competências "promover as medidas necessárias para aumentar, melhorar e baratear a edição de livros no país bem como para facilitar a importação de livros estrangeiros", conforme histórico do Fundo Nacional para o Desenvolvimento da Educação.

pela disposição do saber da instituição, passamos, então, a construir uma relação institucional. A partir dessa premissa, questionamo-nos: que paradigmas podemos observar, de acordo com o que é proposto pela noosfera, nos PCNs e na BNCC para o saber proporcionalidade? A forma como as instituições em foco apresentam o saber proporcionalidade permite ao indivíduo uma relação pessoal que promova a reflexão e criticidade ou uma atitude automatizada?

> [...] todo o saber é o saber de uma ou mais instituições [I] e "um indivíduo concreto pode fazer contato com o saber, ao se relacionar com uma ou mais instituições. [...] A relação institucional para [esse saber]", afirma, "basicamente, o que é feito na I", com "[esse saber], e como [ele] está envolvido"[30] (CHEVALLARD, 1998, p. 213).

Um objeto *O* só existe para uma instituição I quando I passa a conhecer esse objeto *O*. Por exemplo, se levarmos em consideração a relação pessoal entre o professor e o referencial curricular, podemos inferir que só existirá relação pessoal se os objetos de saberes presentes naquela instituição "referencial curricular" se tornam conhecido pelo indivíduo "professor".

O universo cognitivo de x, $U(x) = \{(o, R(x, o)) \,/\, R\,(x, o) \neq \varnothing\}$, ou seja, o universo cognitivo[31] de x, é igual ao objeto *O* e a relação pessoal de x com objeto *O,* tal que a relação pessoal de x com o objeto *O* não resulta em um conjunto vazio. Embora o referencial curricular exista, como uma instituição, e em uma instituição, se o referencial não fizer parte do saber de um determinado professor, ele não fará parte do universo cognitivo desse professor. Dessa forma, a relação pessoal entre o objeto e a instituição existe, mas não há a relação pessoal entre o professor e o objeto.

Para descrever a relação institucional que supõe a relação pessoal de um sujeito com um objeto do saber, a TAD nos oferece um modelo teórico /metodológico formado por uma tarefa que pertença a um determinado tipo de tarefa T, uma técnica τ, que lhe permita uma resolução adequada de T, justificada por uma tecnologia θ e, que venha a ser justificada por uma teoria Θ. Esse quarteto forma a praxeologia.

> [...] a palavra praxeologia destaca a estrutura de uma organização [T/τ/θ/Θ]: o grego práxis, que significa "prática", remete ao bloco prático/técnico (ou prático) [T/t], e o

[30] Tradução livre da autora do presente trabalho.

[31] "Deve-se notar que o adjetivo cognitivo não é levado aqui em seu sentido usual de intelectualista: tenho uma relação pessoal com a minha escova de dentes, a máquina de café na lanchonete, o pedal do freio do meu carro etc., todos os objetos que fazem parte do meu universo cognitivo, da mesma forma que fazem parte dele, por exemplo, a noção de equação de segundo grau ou a de derivada" (CHEVALLARD, 2002, p. 2. Tradução nossa).

> grego logos, que significa "razão", discurso da razão, remete ao bloco tecnológico-teórico [θ/Θ][32] (CHEVALLARD, 2002, p. 1).

Esse modelo metodológico oportuniza "[...] a análise das práticas institucionais que permitem a descrição e o estudo das condições de realização"[33] (BOSCH; CHEVALLARD, 1999, p. 5). Ele é definido a partir de três postulados, sobre os quais trataremos a seguir.

Primeiro postulado praxeológico referente aos tipos de tarefas: "[...] toda prática institucional se deixa analisar, de diferentes pontos de vista e de diferentes formas, em um sistema de tarefas relativamente bem circunscritos, que se desenvolve no fluxo da prática"[34] (BOSCH; CHEVALLARD, 1999, p. 5).

Diferentes tarefas podem ser realizadas, pelo sujeito, no reconhecimento de uma semelhança, tais como: fazer uso da percepção para comparar comprimentos, verificar a proporcionalidade dos comprimentos a partir da comparação, da medição, por exemplo. No entanto, nem tudo pode ser analisado como tarefa, apenas a "[...] menção de verbos de ação muito abrangentes (por exemplo, 'calcular', 'demonstrar', etc.) deixa o conteúdo mal definido" (BOSCH; CHEVALLARD, 1999, p. 5), pois remetem a uma ação imprecisa. Esses exemplos são, na realidade, gêneros de tarefas. O tipo de tarefa T – Calcular a razão de semelhança entre a medida real de um comprimento e a medida representada em um mapa é um tipo de tarefa, mas calcular, somente, é um gênero de tarefas que demanda uma determinação.

O segundo postulado pressupõe que "[...] a realização de qualquer tarefa resulta da implementação de uma técnica" (BOSCH; CHEVALLARD,1999, p. 5).

A técnica refere-se ao método, à estratégia utilizada para resolver um determinado tipo de tarefa. Uma mesma técnica pode ser utilizada para realizar vários tipos de tarefas, de diferentes gêneros. A técnica e o tipo de tarefa vão formar o bloco prático/técnico – saber fazer.

> [...] em uma determinada instituição *I*, com relação a um determinado Tipo de tarefa *T* dada, há geralmente apenas uma técnica, ou pelo menos um pequeno número de técnicas institucionalmente reconhecidas, com a exclusão de possíveis técnicas alternativas – que podem existir efetivamente, mas em outras instituições. Uma tal

[32] «Le mot de praxéologie souligne la structure de l'o rganisation [*T*/t/q/Q] : le grec *praxis*, qui signifie «pratique», renvoie au *bloc praticotechnique* (ou *praxique*) [*T*/t], et le grec *logos*, qui signifie « raison », «discours raisonné», renvoie au *bloc technologico-théori*
que [q/Q]» (CHEVALLARD, 2002C, p. 1)

[33] «d'analyse des pratiques institutionnelles qui en permette la description et l'étude des conditions de réalisation».

[34] «un premier postulat selon lequel toute pratique institutionnelle se laisse analyser, de différents points de vue et de différentes façons, en un système de tâches relativement bien circonscrites, qui se découpent dans le flux de la pratique» (BOSCH ; CHEVALLARD, 1999, p. 5).

> exclusão é correlativa, nos atores, de *I* – fazer assim, é natural [...] –, em contraste com todas as possíveis técnicas alternativas, que os sujeitos da *I* ignorarem, ou, se eles forem confrontados com isto, que eles se considerarão espontaneamente como artificial, e (então) “questionável”, “inaceitável”, etc. A esse respeito, é muito provável que os sujeitos da *I*, observem paixões institucionais pelas técnicas naturalizadas na instituição[35] (CHEVALLARD, 1998).

Poderíamos citar como exemplo o caso da regra de três como paixão institucional, que, às vezes, em um tipo de tarefa de proporcionalidade, várias são as técnicas que podem ser usadas, mas só a regra de três é empregada pelos estudantes pelo hábito adquirido nas aulas de Matemática em ano anteriores.

É importante enfatizar que “[...] uma técnica τ não é, necessariamente, de natureza algorítmica ou quase algorítmica: ela é assim em poucos casos[36]” (CHEVALLARD, 1998, p. 3). Por exemplo, podemos descrever a maneira como realizamos a ampliação de uma figura, como realizamos um determinado passo de dança, ou, ainda, os caminhos que percorremos para a realização de uma pintura em uma tela. Mas a escolha dessa ou daquela técnica tem por trás um outro bloco que vai compor a organização matemática, que é o bloco tecnológico/teórico (logos), formado pela tecnologia e pela teoria referente ao tipo de tarefa T, em jogo.

> Mais um saber-fazer [*T*/τ] é aparentemente uma entidade isolada. Toda técnica τ chama em princípio uma *justificação*, isto é, “um discurso racional” (*logos*), portanto sobre essa técnica (*tekhnè*), o que vamos chamar de uma tecnologia de τ. Por que, por exemplo, ao dividir de acordo com a técnica tradicionalmente ensinada na escola primária, vemos os números do quociente procurado alinhados logo abaixo da barra horizontal? Para a tecnologia θ da técnica τ para responder! (Sabemos que, neste caso, a tecnologia proposta permanece amplamente alusiva e participa mais da confissão cultural do que da prova matemática[37]) (CHEVALLARD, 1999, p. 3).

---

[35] «[...] en une institution I donnée, à propos d’un type de tâches T donné, il existe en général une seule technique, ou du moins un petit nombre de techniques institutionnellement reconnues, à l’exclusion des techniques alternatives possibles – qui peuvent exister effectivement, mais alors en d’autres institutions. Une telle exclusion est corrélative, chez les acteurs de I, d’une illusion de « naturalité » des techniques institutionnelles dans I – faire ainsi, c’est naturel... –, par contraste avec l’ensemble des techniques alternatives possibles, que les sujets de I ignoreront, ou, s’ils y sont confrontés, qu’ils regarderont spontanément comme artificielles, et (donc) «contestables », « inacceptables», etc. À cet égard, on observe assez fréquemment, chez les sujets de I, de véritables passions institutionnelles pour les techniques naturalisées dans l’institution».

[36] «une technique t n’est pas nécessairement de nature *algorithmique* ou *quasi* algorithmique : il n’en est ainsi que dans de trop rares cas».

[37] «Mais un savoir-faire [T/τ] n’est qu’en apparence une entité isolée. Toute technique τ appelle en principe une justification, c’est-à-dire un « discours raisonné » (logos) portant sur cette technique (tekhnè), soit ce qu’on nommera une technologie de τ. Pourquoi, par exemple, lorsqu’on effectue une division selon la technique enseignée traditionnellement à l’école primaire, voit-on s’aligner à droite, sous la barre horizontale, les chiffres du quotient cherché? À la technologie θ de la technique τ de répondre! (On sait que, en l’espèce, la technologie proposée reste largement allusive, et participe davantage de l’aveu culturel que de la preuve mathématique)» .

A tecnologia tem por finalidade justificar e esclarecer, assim como de produzir a técnica. Enquanto a teoria está "dentro do "saber", postula-se em um segundo nível de descrição-explicação-justificação (isto é, o nível da tecnologia da tecnologia) que se denomina teoria[38]" (GARCIA, 2005, p. 93).

> Em associação com o bloco [*T*/τ] emerge também o segundo bloco, [θ/Θ], formado de uma tecnologia e de uma teoria, que podemos identificar em linguagem corrente – de maneira resumida – um saber. O sistema composto de quatros componentes *T*, τ, θ, Θ constitui uma *praxeologia*, notada [T/τ/θ/Θ]. É uma tal praxeologia [T/τ/θ/Θ] que olharemos aqui como um saber *em sentido pleno*, associação de um saber-fazer [*T*/τ], até mesmo uma família de savoir-faire ([*Tj*/τ*j*])*j*∈*J*, e de um saber *no sentido restrito*, [θ/Θ][39] (CHEVALLARD, 1999, p. 4).

O terceiro postulado antropológico diz respeito à ecologia das tarefas e das técnicas e refere-se às "[...] condições e restrições que permitem a produção e a utilização nas instituições" (BOSCH; CHEVALLARD,1999, p. 6).

> Mas a TAD propõe também interrogar a razão de existência das praxeologias na instituição, ou seja, o que motiva que essa praxeologia seja instalada e não outra, em certo momento na instituição. Esse é o cerne da chamada problemática ecológica, dentro da TAD. Em analogia com o campo da ecologia, questionam-se as condições de vida dos objetos de saber nas instituições, o que leva a discutir como os objetos institucionais interagem e que funções cumprem na instituição (ARTAUD, 1998, p.8).

A problemática ecológica está na maneira de se questionar e de se buscar respostas para a razão de ser de determinados objetos:

> De onde vêm esses novos objetos a serem ensinados? Como eles chegaram lá? Que inter-relações eles têm com que outros objetos? E, acima de tudo, por que eles chegaram tão longe?" sem se interrogar não somente no que é, [...] mas ainda se perguntando por que o que não é, não é[40] (CHEVALLARD, 1994, p. 142).

Essa forma de se questionar marca a entrada na problemática ecológica, atitude bastante fecunda e que abre um (vasto) campo de pesquisa: o estudo do funcionamento dos sistemas que nascem, que vivem, que desaparecem, que têm suas leis e que morrem.

---

[38] "Dentro del "saber" se postula un segundo nivel de descripción-explicación-justificación (esto es, el nivel de la tecnología de la tecnología) que se denomina teoría" .

[39] «En association avec le bloc [T/τ] émerge ainsi un second bloc, [θ/Θ], formé d'une technologie et d'une théorie, qu'on peut identifier à ce que la langue courante nomme – de manière réductrice – un savoir. Le système des quatre composants T, τ, θ, Θ constitue une praxéologie, notée [T/τ/θ/Θ]. C'est une telle praxéologie [T/τ/θ/Θ] que l'on regardera ici comme un savoir au sens plein, association d'un savoir-faire [T/τ], voire d'une famille de savoir-faire ([Tj/τj])j∈J, et d'un savoir au sens restreint, [θ/Θ]» .

[40] «D'où viennent ces nouveaux objets enseignés ? Comment sont-ils arrivés là ? Quelles interrelations avec quels autres objets y nouent-ils ? Et, aussi, surtout : pourquoi sont-ils arrivés jusque-là ?... s'interroger non seulement sur ce qui est [...] mais encore se demander pourquoi ce qui n'est pas, n'est pas ...».

> A problemática ecológica expandirá o campo de análise e abordará as restrições que são criadas entre os diferentes objetos de conhecimento a serem ensinados. A descrição do conhecimento matemático resultante nem sempre implica uma estrutura prévia e continua a se expressar em termos dos objetos que a compõem. Mas esses objetos agora mantêm inter-relações hierárquicas, permitindo vislumbrar estruturas ecológicas orientadas a objetos (BOSCH; CHEVALLARD, 1999).

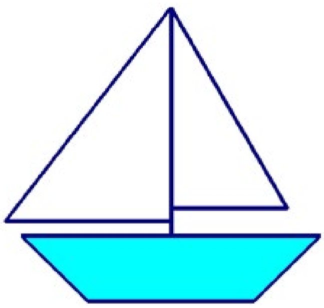
Ainda recorremos aos autores para nos ajudar a justificar nossas escolhas pelo saber a ser ensinado – produto da noosfera como campo de pesquisa.

> Para entender as dificuldades dos alunos na aprendizagem de uma noção, não basta estudar os aspectos cognitivos da aprendizagem. Tem que se perguntar qual o papel que desempenha essa noção nas distintas atividades (Matemáticas e não matemáticas), que devem aprender os alunos e a maneira como chegar a "entrar" nas atividades guiadas pelos professores (ou pela "instituição de ensino"). Porém tem que ir mais além e indagar por que esta noção faz parte do saber a ensinar na escola, em que contextos e problemáticas se inscreve inicialmente, e por que desta inscrição[41] (BOSCH; GÁSCON, 2007, p. 392).

Vamos considerar um problema matemático de redução de figura, para exemplificar nossa visão desses dois blocos: tarefa/técnica e tecnologia/teoria. Seja o tipo de tarefa T_1 – Fazer a redução de uma figura, como podemos observar no exemplo do T_1, a seguir.

Figura 3 – Tipo de tarefa: fazer redução de figuras

Faça uma redução da figura a seguir:



Fonte: Melo (2004, p. 78).

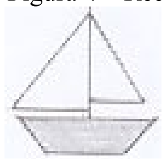
Para esse tipo de tarefa T_1 – Realizar uma redução, é possivel adotar algumas técnicas, por exemplo, como a técnica τ_1, a seguir:

Com a ajuda de uma régua, medir o comprimento dos segmentos do barquinho e estabelecer uma constante de proporcionalidade (por exemplo, uma razão de 1:5) e construir a

41 "Para entender las dificultades de los alumnos en el aprendizaje de una noción, no basta con estudiar los aspectos cognitivos del aprendizaje. Hay que preguntarse el papel que desempeña esta noción en las distintas actividades (Matemáticas y no-Matemáticas y no-Matemáticas) que deben aprender los alumnos y la manera cómo se les ha hecho "entrar" en estas actividades guiados por los profesores (o por la "institución enseñante"). Pero hay que ir más allá e indagar por qué esta noción forma parte del saber a enseñar en la escuela, en qué contextos y problemáticas se la inscribe inicialmente, y el porqué de esta inscripción" (BOSCH; GASCÓN, 2007, p. 392).

redução do barquinho, com a ajuda de uma régua e de um transferidor, ou com a ajuda de um compasso e uma régua, por exemplo.

Figura 4 – Redução



Fonte: Melo (2004, p. 81).

Para selecionar e justificar a escolha da melhor técnica t, que seja adequada ao tipo de tarefa *T,* que esteja em conformidade com a *I,* a tecnologia é acionada.

> Será notado que uma segunda função da tecnologia é explicar, tornar inteligível, iluminar a técnica. Se a primeira função - para justificar a técnica - é garantir que a técnica forneça o que é reivindicado, essa segunda função é explicar por que é assim. Note que estas duas funções são desigualmente assumidas por uma dada tecnologia. Deste ponto de vista, na matemática, a função da justificação tradicionalmente prevalece, através da exigência demonstrativa, na função de explicação[42] (CHEVALLARD, 1998. p. 4).

No caso do tipo de tarefa T_1 – Fazer a redução de uma figura, podemos explicar o resultado com a ajuda da tecnologia por meio do teorema de semelhança para figuras poligonais.

O desenho do barco é o de uma figura poligonal, composta por dois triângulos retângulos e por um trapézio isósceles[43]. o qual, pode ser decomposto em triângulos retângulos e em um retângulo, propiciando o uso do teorema de semelhança para figuras poligonais, de que duas figuras são semelhantes quando possuem comprimento dos lados proporcionais e ângulos correspondentes iguais.

O bloco tecnológico/teórico pode se apresentar de maneira associada, pois, ao justificar a técnica aplicada, acabamos por apresentar também a teoria. Por exemplo, a tecnologia, ou seja, a justificativa para adoção da técnica τ_1, poderia ser a tecnologia que se amalgama com a teoria. A esse respeito, Chevallard (2002c, p. 2) esclarece que "[...] a recipeocidade epstemológica dos blocos prático/técnico e tecnológico/teórico é uma exigência

[42] «On notera ensuite qu'une deuxième fonction de la technologie est d'expliquer, de rendre intelligible, d'éclairer la technique. Si la première fonction – justifier la technique – consiste à assurer que la technique donne bien ce qui est prétendu, cette deuxième fonction consiste à exposer pourquoi il en est bien ainsi. On notera que ces deux fonctions sont inégalement assumées par une technologie donnée. De ce point de vue, en mathématiques, la fonction de justification l'emporte traditionnellement, par le biais de l'exigence démonstrative, sur la fonction d'explication» .

[43] Os triângulos, que formam a vela do barco possuem, respectivamente, os seguintes comprimentos: 8,5 cm, 7 cm e 5 cm; e 7 cm, 3,5 cm e 6 cm. O trapézio possui um comprimento de 9 cm na base maior, 5 cm na base menor e 3 cm nos lados.

didática chave"[44]. No caso, a descrição do tipo de tarefa T – Fazer a redução de uma figura, apresentada anteriormente, supõe o estudo de ao menos, uma parte do bloco tecnológico/teórico [θ/Θ], envolvendo as noções de propoporcionalidade e semelhança de figuras poligonais.

O estudo a partir da unidade mínima, um tipo de tarefa torna-se muito resumido se olharmos do ponto de vista do professor, ao planejar uma aula ou um autor ao elaborar um livro. Faz-se necessário partir de uma unidade maior, mais ampla, e partir não apenas do bloco do saber fazer, mas do *logos*, ou seja, do nível da tecnologia ou da teoria.

> A organização matemática que o professor pretende criar na turma não tem mais a estrutura atômica que exibe a fórmula [*T*/τ/θ/Θ]: é um amálgama de tais organizações pontuais, que serão notadas [*Ti*/τ*i*/θ/Θ] *i* ∈ I e isso é chamado de organização matemática local. E é de tal organização local que o aluno terá que extrair, reconstruindo-o com os seus colegas sob a direção do professor (ou, por falta de algo melhor, por conta própria), as organizações únicas em que seu domínio será avaliado preferencialmente. O professor, enquanto isso, deve lidar com um fenômeno similar, mas em um nível mais alto: a organização local [*Ti*/τ*i*/θ/Θ] *i* ∈ I correspondente ao tema de estudos que deve ser extraído de uma organização maior, que será dita regional, e que pode-se olhar formalmente como o resultado da fusão de organizações locais que admitem a mesma teoria Θ, [*Tji*/τ*ji*/θ*j*/Θ]*i* ∈ I*j*, *j* ∈ J. Este nível, o do setor de estudos, não é de forma alguma, terminal. Em geral, existem níveis mais altos de determinação matemática (organização): a fusão de várias organizações regionais [*Tji*/τ*ji*/θ*j*/Θ*k*]*i*∈I*j*, *j*∈J*k* leva a uma organização global, identificável a um campo de estudo; e todos esses domínios se amalgamam em uma disciplina comum – para nós, "matemática"[45] (CHEVALLARD, 2002d, p. 2).

A importância do estudo de uma organização matemática, a partir de unidades menores dispostas em níveis, favorece ao trabalho do pesquisador. Esses planos foram organizados na escala dos níveis de codeterminação, pois

[44] «La solidarité épistémologique des blocs pratico-technique et technologico-théorique est une exigence didactique clé».

[45] «L'organisation mathématique que le professeur vise à mettre en place dans la classe n'a plus alors la structure atomique qu'exhibe la formule [*T*/τ/θ/Θ] : c'est un amalgame de telles organisations ponctuelles, que l'on notera [*Ti*/τ*i*/θ/Θ]*i*∈I et qu'on appelle organisation (mathématique) *locale*. Et c'est d'une telle organisation locale que l'élève devra alors extraire, en les reconstruisant avec ses camarades d'étude sous la direction du professeur (ou, faute de mieux, pour son propre compte), les organisations *ponctuelles* sur lesquelles sa maîtrise sera préférentiellement évaluée. Le professeur, quant à lui, doit gérer un phénomène analogue, mais à un niveau supérieur : l'organisation locale [*Ti*/τ*i*/θ/Θ]*i*∈I correspondant au *thème d'études* doit être extraite d'une organisation plus vaste, qu'on dira *régionale*, et qu'on peut regarder formellement comme le fruit de l'amalgamation d'organisations locales admettant la *même théorie* Θ, [*Tji*/τ*ji*/θ*j*/Θ]*i*∈I*j*, *j*∈J. Ce niveau, celui du *secteur d'études*, n'est au reste nullement terminal. On constate en effet, en général, l'existence de niveaux supérieurs *de détermination (d'une organisation) mathématique* : l'amalgamation de plusieurs organisations régionales [Tji/tji/qj/Qk]iÎIj, jÎJk conduit ainsi à une organisation globale, identifiable à un domaine d'études ; et l'ensemble de ces domaines est amalgamé en une commune discipline – pour nous, «les mathématiques». 2).

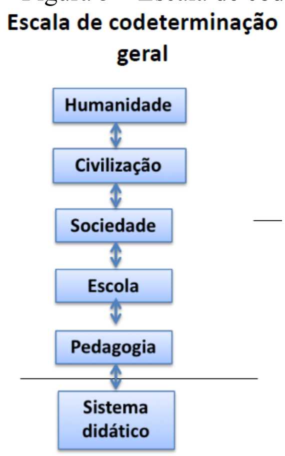
> O reconhecimento da *hierarquia de* níveis assim esboçada, que vai dos *assuntos de estudo* à *disciplina* passando por *temas, setores e domínios,* tem por mérito principal permitir uma primeira ordenação nos pacotes de restrições que presidem ao estudo escolar, evitando um desequilíbrio excessivamente gritante entre o que, dessas restrições, será levado em conta e o que será deixado para trás[46] (CHEVALLARD, 2002D, p. 2).

No estudo da ecologia de um saber, torna-se inevitável a compreensão da escala de codeterminação, uma vez que, no processo de transposição didática, o saber sofrerá influência dos diferentes níveis – superior e inferior. As condições modificáveis ou não modificáveis, presentes na ecologia do saber, podem ter origem em diferentes pontos da escala.

> Esta escala tem sobretudo o interesse, e o mérito mesmo, de lembrar que nem tudo acontece no sistema didático e que é preciso olhar para além dele. Exemplo de condições que relevam da humanidade: o homem é alguém que nasce « inacabado », o que torna o didático denso em todo local na humanidade (ARTUD, 2018).

Em seus estudos, Bessot (2019) nos apresenta a escala de codeterminação geral, que compreende, no nível superior, a humanidade, a civilização, a sociedade, a escola e a pedagogia; e, no nível inferior, compreendido como sistema didático, como pode ser conferida na Figura 5.

Figura 5 – Escala de codeterminação geral



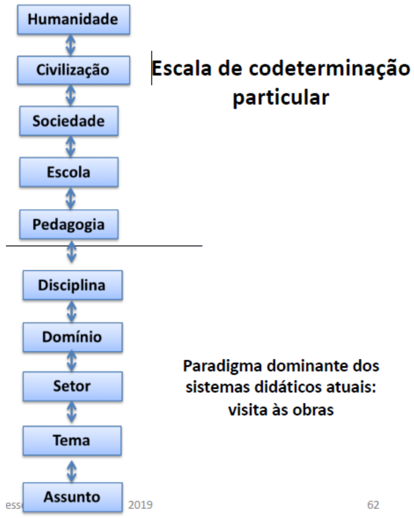
Fonte: Bessot (2019, p.03).

A pesquisadora também defende uma visão mais ampla da escala, denominada por ela de "escala de codeterminação particular". Nessa perspectiva, a autora mostra o paradigma

[46] «La reconnaissance de la *hiérarchie de niveaux* ainsi ébauchée, qui va des *sujets d'études* à la *discipline* en passant par *thèmes*, *secteurs* et *domaines*, a pour principal mérite de permettre un premier tri dans les paquets de contraintes présidant à l'étude scolaire, en évitant um déséquilibre trop flagrant entre ce qui, de ces contraintes, sera pris en compte et ce qui sera laissé pour compte» (CHEVALLARD, 2002d, p. 2).

dominante dos sistemas didáticos atuais: disciplina, domínio, setor, tema e assunto, como pode ser observado na Figura 6.

Figura 7 – Escala de codeterminação particular

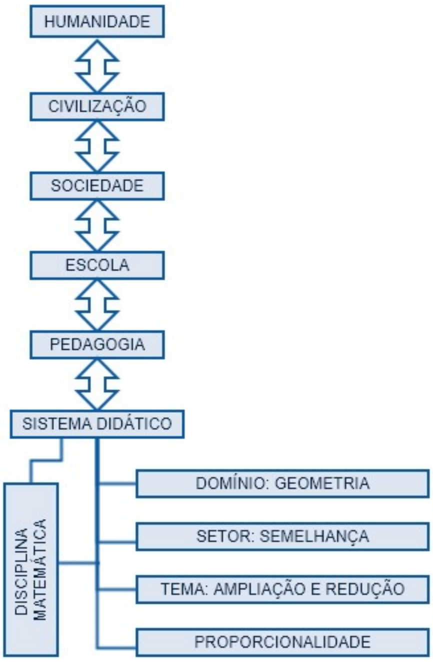


Fonte: Bessot (2019).

O estudo de um tema matemático pode ser realizado por meio da descrição e da análise do fenômeno a partir de praxeologias matemáticas e/ou de praxeologias didáticas. Uma praxeologia matemática em torno de um assunto é um estudo praxeológico pontual, o estudo de diferentes assuntos que compõem um tema – praxeologia local. Tal organização tem sua origem em um determinado setor de estudo – praxeologia regional, que, por sua vez, precisa se alimentar de um domínio (como a Geometria, por exemplo), originando a praxeologia global. E o amalgama de todos os domínios dá origem à disciplina – no nosso caso, a matemática.

Remetendo ao nosso estudo, poderíamos exemplificar a escala de codeterminação particular apresentada por Bessot (2019), por meio da figura a seguir, que ilustra os níveis superior e inferior da escala. No nível superior, teremos humanidade, civilização, sociedade, escola, pedagogia, e, no nível inferior, sistema didático. Em uma organização matemática com foco no domínio da geometria, ao se trabalhar o setor semelhança a partir do tema de ampliação e redução de figuras destacamos o estudo da proporcionalidade.

Figura 7 – Escala de codeterminação particular:
proporcionalidade – exemplo



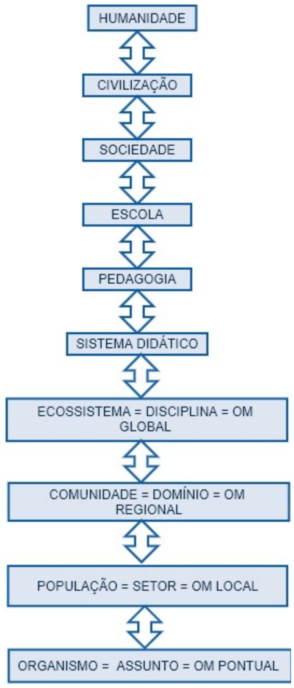
Fonte: Elaborada pela autora.

De maneira geral, “[...] a análise em termos de praxeologia é um instrumento teórico e metodológico para caracterizar o que se faz em uma instituição com certo objeto de saber” (BELLEMAIN, 2015, p. 3). Estudar a ecologia didática por meio das praxeologias matemáticas do objeto de saber proporcionalidade, sua relação com o ambiente conceitual, as instituições em que habitam, as suas inter-relações com o meio ambiente, remete-nos à necessidade de delimitar o ecossistema conceitual da nossa pesquisa. Adotaremos o termo “[...] ecossistema como sendo o local onde se desenvolve um determinado sistema que possui uma ecologia própria” (SANTOS; MENEZES, 2015, p. 649) em nossa pesquisa. A Matemática do Ensino Fundamental será tomada como ecossistema, por entendermos que essa disciplina é um local onde se desenvolve um determinado sistema que possui uma ecologia própria em que vivem diferentes saberes de diferentes domínios, nos quais se desenvolvem diferentes praxeologias.

> Em ecologia, o termo **população**, originalmente cunhado para denotar um grupo de pessoas, foi ampliado para incluir grupos de indivíduos de qualquer tipo de organismo. Do mesmo modo, **comunidade**, no sentido ecológico (algumas vezes designada como “comunidade biótica”), inclui todas as populações que ocupam uma certa área. A comunidade e o ambiente não vivo funcionam juntos, como um sistema ecológico ou **ecossistema** (ODUM; BARRETT, 2008, p. 14).

Como se pode notar, a ecologia didática, assim como a ecologia, preocupa-se de forma ampla, mas não total, com os níveis de sistema didático além daqueles do organismo.

Figura 8 – Hierarquia dos níveis de organização ecológica didática



Fonte: Elaborada pela autora.

No nível inferior da hierarquia, no sistema didático, vamos tomar o nível dos organismos, como o ponto que corresponde à organização pontual (T, t, θ, Θ), ou seja, o assunto, proporcionalidade, por exemplo. Subindo um nível, a população de saberes que correspondem às organizações matemáticas locais, no conjunto dos números naturais. O próximo nível, o da comunidade, equivale às organizações regionais, dentro de um determinado domínio dos números, a título de exemplo. E o nível da disciplina, o ecossistema, que se forma com várias organizações regionais que leva a uma organização global, que se pode identificar a um campo de estudo que se estruturam em uma disciplina comum – em nosso caso, a Matemática.

A ecologia estuda também as relações dos organismos ou grupos de organismos com o seu ambiente. Em nosso estudo, trazemos dois tipos de relação ecológica para analogamente ser também estudo da ecologia didática. Falamos das relações de protocooperação e parasitismo.

A relação ecológica de protocooperação é uma ligação harmônica “[...] na qual ambas as populações são beneficiadas pela associação embora as relações não sejam obrigatórias” (ODUM, 1988, p. 1; 2001, p. 346). Do ponto de vista do nosso estudo, a protocooperação pode acontecer, por exemplo, em uma organização matemática em que são realizados tipos de tarefas para resolver problemas de multiplicação envolvendo a ideia de proporcionalidade. Essa relação estabelecida entre os saberes tanto trará benefício para as aprendizagens da multiplicação quanto da proporcionalidade, mas não são necessariamente obrigatórias, ou seja, não se estuda multiplicação apenas partindo da ideia de proporcionalidade, e, da mesma forma, não se estuda proporcionalidade só a partir do viés da multiplicação.

Outra interação ecológica entre os seres vivos é o processo conhecido por parasitismo, que é a relação entre um parasita e um hospedeiro. Parasitas são organismos que vivem em associação com outros, dos quais retiram os meios para a sua sobrevivência, normalmente prejudicando o organismo hospedeiro. Parasitismo, "[...] quando nos referimos ao controle das populações que estão interagindo. A relação entre um parasita e o hospedeiro é específica, ou seja, um determinado parasita só se hospeda em organismos de uma espécie, ou um grupo de espécies" (MENDONÇA, 2016, p. 119). Podemos trazer esse conceito para didática e por analogia citar como exemplo a relação em que há uma ênfase exagerada em se trabalhar uma determinada técnica, causando prejuízo a aprendizagem da teoria que a justifique.

A análise ecológica de um objeto de saber é organizada em torno de "[...] duas noções: o habitat que designa os lugares da vida e o ambiente conceitual deste objeto de saber e o nicho que designa a função desse objeto no sistema de objetos com os quais interage" (CHAACHOUA, 2017, p. 5). Em nossa pesquisa, adotamos os diferentes setores de estudo dos domínios – aritmética, álgebra, grandezas, entre outros –, como lugares de vida, o ambiente conceitual do objeto de saber proporcionalidade, ou seja, o *habitat* do objeto de saber proporcionalidade. Será tomado como nicho ecológico o modo como a proporcionalidade vive no ecossistema Matemática.

Do pondo de vista da Biologia/Ecologia, os seres vivos de um mesmo ecossistema nutrem diferentes ligações em função de sua alimentação exercendo uma posição para cada ser na cadeia alimentar – os autótrofos (produtores), heterótrofos (os consumidores e os decompositores). Os seres autótrofos são aqueles que "[...] realizam síntese de matéria orgânica a partir de substâncias inorgânicas simples. [...] ocupam sempre o primeiro nível nas cadeias alimentares das quais participam. Deles dependem todos os demais seres vivos" (MENDONÇA, 2016, p.56). São exemplos todos os seres que realizam a fotossíntese. Ao passo que os seres heterótrofos "[...] não são capazes de sintetizar o próprio alimento. Estão representados por todos os animais e fungos, pelos protistas não clorofilados e por bactérias que não são produtoras" (MENDONÇA, 2016, p.57).

Inspiramo-nos nesse contexto para tentarmos realizar uma analogia entre os "seres vivos" e os "saberes", mas nos deparamos com pelo menos duas questões. A primeira: existiria algum saber matemático que dele dependesse todos os demais saberes? Recorremos ao dicionário da língua portuguesa para pesquisar sobre a genealogia do vocábulo do autótrofo. Encontramos que esta palavra tem sua origem do grego *autós*, “[...] o próprio; por si mesmo” + *trofhé,* ‘alimentação’”.[47] De sorte que, nesse momento, surge o segundo questionamento: um saber pode existir por si mesmos, sem depender de nenhum outro saber para que tenha vida?

No ecossistema matemática, vamos encontrar diferentes praxeologias, as quais estamos tomando como cadeias tróficas ou cadeias alimentares – em que o saber proporcionalidade interage com outros saberes de diferentes praxeologias. Nossa preocupação ainda reside em realizar uma analogia coerente entre os conceitos de ecologia biológica e ecologia didática; assim, novos questionamentos surgem. Existiria alguma organização matemática ou didática de um objeto de saber, que dela dependesse todas as praxeologias dos demais saberes? Uma praxeologia matemática ou didática de um saber pode existir por si mesma, sem depender de nenhum outro saber para que tenha vida?

Em virtude dessas indagações e de não encontramos respostas satisfatórias para elas no momento, decidimos tomar os saberes matemáticos, enquanto saberes de natureza heterotrófica que ocupam a posição de consumidores. Visto que, no nosso caso, no âmbito da didática da matemática, um saber não exista no vácuo, como salienta Chevallard (2008), desse argumento partimos da ideia que um saber não existe por si só, já que ele mesmo, se considerado, apenas dentro da Matemática, estará relacionado a saberes de diferentes domínios, por exemplo: o conceito de proporcionalidade é encontrado na aritmética, na álgebra, na geometria e nas grandezas, entre outros domínios.

A ideia de cadeia alimentar, em didática da matemática, pode ser identificada nos estudos de Chevallard (2008), no texto “Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique”, ao explicar sobre a ecologia das organizações praxeológicas. “De acordo com uma imagem emprestada da ecologia biológica, cadeias tróficas, onde uma praxeologia ‘se alimenta de outra’ – e paradoxalmente, o fato existe na instituição que serve como *habitat*[48]” (CHEVALLARD, 2008). Observamos que o autor se refere a *habitat* enquanto instituição. Como já vimos neste texto que o conceito de instituição na TAD é bem amplo, reforçaremos nossa ideia de que os diferentes setores dos diferentes domínios da matemática escolar serão aceitos como o *habitat* não só do saber, mas das praxeologias a ele relacionadas.

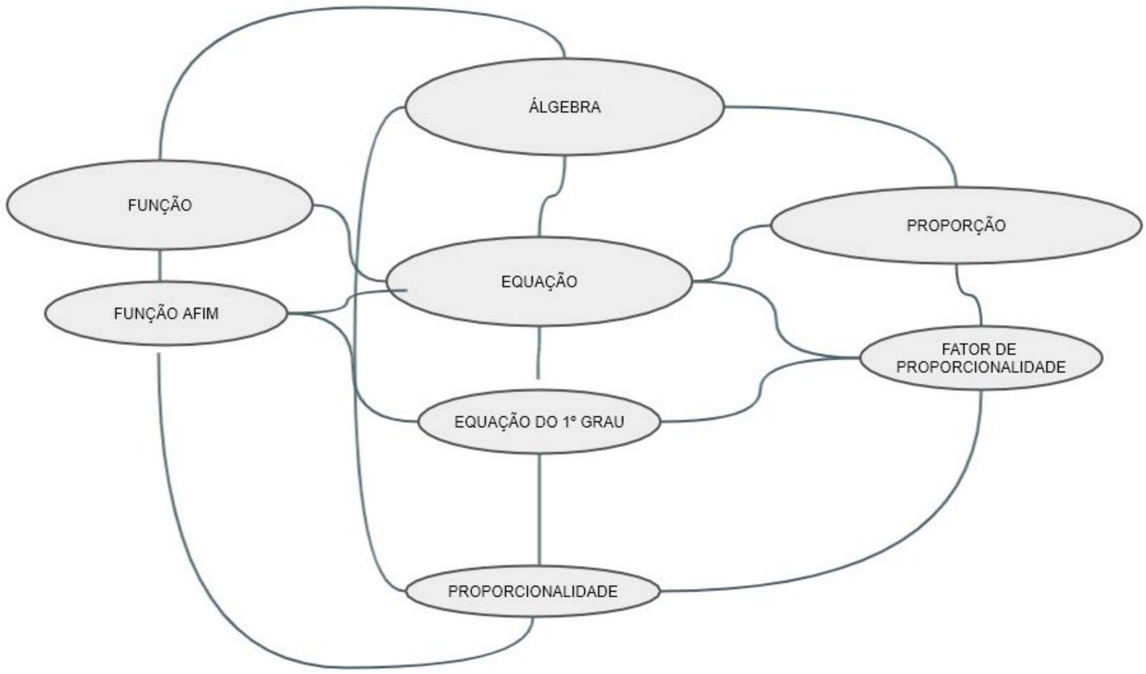
As relações que os saberes travam no processo de retroalimentação recebem o nome de relações tróficas. De acordo com a Biologia, essas relações tróficas se referem a duas

[47] eBook Dicionário Porto Editora da Língua Portuguesa. Acesso em: 25 set. 2019.

[48] «Selon une image empruntée à l’écologie bio logique, se créent – et se rompent, au cours notamment des mouvements transpositifs – des *chaînes trophiques*, où une praxéologie « se nourrit d’une autre » – et, paradoxalement, par cela, *la fait exister* dans l’institution qui lui sert d’*habitat*».

situações distintas: a cadeia trófica e a teia trófica. No caso da proporcionalidade, observamos que teia trófica torna-se mais adequada pela natureza das relações que são estabelecidas entre os diferentes saberes, ou seja, a teia alimentar é formada por várias cadeias interligadas no ecossistema. Para ilustrar a ideia de teia de teia alimentar, tomamos como exemplo um recorte de uma organização matemática regional da proporcionalidade no domínio da Álgebra, como ilustra a figura a seguir.

Figura 9 – Teia alimentar: proporcionalidade/álgebra



Fonte: Elaborada pela autora.

Quando ocorre uma mudança, por menor que seja, no ecossistema, isso provoca um desequilíbrio ecológico. Na Biologia, isso ocorre quando um ser vivo, animal ou vegetal, sofre uma alteração para mais ou para menos em sua quantidade de habitantes, o que pode provocar reações em cadeia e desequilibrar o funcionamento do ecossistema.

Em se tratando da ecologia didática, esse desequilíbrio didático tende a acontecer quando há uma tendência de se enfatizar demais no trabalho de um determinado saber (ou mesmo de um domínio). Como podemos citar como exemplo o fato da Geometria, que por um determinado tempo na educação brasileira não teve seu ensino realizado nas escolas, provocando um desequilíbrio na construção dos saberes de geometria de uma determinada geração.

> [...] o ensino de Geometria na abordagem tradicional já era problemático em relação ao baixo conhecimento do professor, aos métodos usados, à dificuldade de relacionar a teoria e a prática – e o enfoque das transformações trouxe, na verdade,

> problemas ainda maiores. Essa situação fez com que muitos professores passassem a não ensinar Geometria por nenhum dos enfoques, uma omissão que acabou amparada, por assim dizer, pela Lei de Diretrizes e Bases do ensino de 1º e 2º Graus, lei nº 5692/71 (CURY, 2019, p.07).

Para fazer considerações sobre o conteúdo ao qual faz menção a Lei de Diretrizes e Bases do ensino de 1º e 2º Graus, Lei nº 5692/71º, o autor recorre a Pavanello (1993).

> A liberdade que essa lei concedia às escolas quanto à decisão sobre programas das diferentes disciplinas possibilitou que muitos professores de matemática, sentindo-se inseguros para trabalhar com a geometria, deixassem de inclui-la em sua programação. Por outro lado, mesmo dentre aqueles que continuaram a ensiná-la, muitos reservaram o final do ano letivo para sua abordagem em sala de aula – talvez numa tentativa, ainda que inconsciente, de utilizar a falta de tempo como desculpa pela não realização do trabalho programado com o tópico em questão (CURY, 2019, p. 07).

Existe também uma situação de desequilíbrio didático, na ecologia didática, quando o foco do ensino é colocado sobre alguns saberes, deixando outros pouco iluminados, resultando em uma relação desarmônica, ou seja, o ensino de um determinado saber atua como predador inibindo ou anulando completamente a vivência de outro saber. Quando há um desequilíbrio no ecossistema matemática, a relação trófica se altera, podendo causar até a morte de determinada "espécie".

Em suma, faremos uso do referencial teórico e metodológico da TAD, a partir de elementos da ecologia didática, em que as relações tróficas presentes na teia alimentar, bem como as ligações harmônicas de protocooperação e a associação desarmônica do parasitismo, farão parte do nicho ecológico desta vasta teoria, que nos ajudará na busca de respostas ao nosso questionamento de pesquisa: como vive o saber proporcionalidade no Ensino Fundamental.

2.2 REVISÃO DA LITERATURA: CENÁRIO DA PROPORCIONALIDADE EM PESQUISAS ANTERIORES

Nosso olhar para essa revisão buscou na TAD elementos da ecologia e da praxeologia matemática para a construção das categorias de análise dos textos, procurando responder também às perguntas: qual a razão de ser desse saber na literatura acadêmica? E quais os tipos de tarefa, as técnicas, as tecnologias e as teorias que giram em torno do objeto de saber em questão? A escolha da proporcionalidade como objeto de estudo tem como motivação principal as lacunas existentes em torno desse saber percebidas durante nossa pesquisa de mestrado. Nossa revisão de literatura tem por finalidade situar o estudo da proporcionalidade no contexto das pesquisas realizadas sobre o tema. Buscamos textos de pesquisas que pudessem trazer respostas às nossas questões iniciais.

Muitos pesquisadores em Didática da Matemática apresentam interesse em estudar sobre a proporcionalidade e colocam em evidência, em alguns casos, o estudante e suas aprendizagens, suas estratégias de resolução, seus erros e suas dificuldades, os problemas e as variáveis suscetíveis de afetar o ensino dos estudantes e a importância da proporcionalidade nos programas e livros didáticos em diferentes países.

Para a construção desta revisão, foram escolhidos alguns periódicos (A1 ou B2) a partir da classificação da CAPES e de acordo com a área Educação Matemática. Também realizamos o estudo de teses e dissertações sobre proporcionalidade.

Embora os estudos presentes em nossa revisão da literatura, em sua grande maioria, não tenham utilizado a TAD como referencial teórico, organizamos este capítulo levando em consideração quatro pontos à luz da TAD. O primeiro ponto trata das alterações sofridas, pelo saber proporcionalidade, em sua ecologia. O segundo ponto se preocupa em pesquisar sobre as organizações matemáticas. O terceiro ponto se refere às organizações didáticas, e o quarto e último ponto trata das pesquisas que revelam a influência dos níveis de codeterminação didática no estudo do saber proporcionalidade.

2.2.1 Quanto às alterações sofridas pelo saber proporcionalidade, em sua ecologia

Buscamos identificar nas pesquisas anteriormente realizadas elementos que permitissem perceber situações modificáveis na ecologia didática da proporcionalidade. Trazemos o estudo realizado por Levain (1993) que teve por objetivo explorar as competências dos estudantes para a resolução de problemas de ampliação e escala. Levain (1993) investigou um grupo de 225 estudantes por meio de aplicação de problemas a serem resolvidos, visando identificar se o sucesso ou o fracasso dos estudantes permitiria construir um perfil específico quanto à utilização de estratégias particulares de resolução. Os resultados dos estudos revelaram que alguns alunos não dominavam os esquemas de proporcionalidade e faziam uso de estratégias aditivas. Revelaram também que a apresentação precoce de problemas de escala para os estudantes permitia que eles conseguissem resolver tais problemas, mesmo sem ter o conceito formalizado. Percebemos, neste estudo, que possivelmente a transposição didática da proporcionalidade pode interferir na construção do saber pelos estudantes e nos questionamos: por que alunos que ainda não haviam estudado um caso particular da proporcionalidade (escala) conseguiam resolver os problemas mesmo sem ter o conceito formalizado?

Em estudo realizado por Lima (1998), com um grupo de professores de Matemática e outro de programadores visuais, com relação à leitura de gráficos de quantidades, veiculados pela mídia impressa, evidenciou-se que

> Os aspectos relacionados aos padrões de medição encontram-se direcionados para a análise de **escala, conceito matemático que consiste em uma razão entre a medida do comprimento gráfico e a medida das quantidades dadas, guardando-se entre estas uma relação de proporcionalidade**. O conceito de escala remete aos aspectos estruturais e relativos à métrica de produção de gráficos. A manipulação de escalas para criar efeitos de leituras voltadas para se destacar o que se pretende veicular é um padrão visual bastante usual nos impressos jornalísticos (LIMA, 1998, p. 20-21, grifo nosso).

Foi observado que, durante o processo de interpretação dos gráficos, os participantes pertencentes aos grupos de professores de Matemática recorriam a determinados conceitos matemáticos (percentagem, razão, proporção), enquanto os programadores visuais recorriam ao conceito de escala e a suas relações com os aspectos da apresentação do gráfico. Percebemos que, dependendo do ambiente ecológico que se encontre o saber, ele sofrerá alteração em seu nicho ecológico.

Estudos realizados por Tinoco, Portela, Silva e Maia (2011) sobre as dificuldades relacionadas ao ensino de proporcionalidade no domínio da álgebra evidenciaram que, embora a noção de proporcionalidade seja iniciada na vida de uma criança quando ela começa a raciocinar multiplicativamente, em problemas envolvendo contextos monetários, relação tempo-distância etc., esse aspecto não é sempre explorado nas salas de aula. Para as autoras, o saber proporcionalidade, em geral, é tratado como um novo assunto, com nomenclatura, propriedades e métodos específicos, como os das regras de três simples, direta e inversa, e composta, o que os desvincula do contexto dos números racionais e dificulta a sua compreensão. Essas constatações apontadas pelas autoras nos ajudam na elaboração de nosso questionamento em querer saber como vive proporcionalidade em sua ecologia no Ensino Fundamental? Será que, na relação entre saberes, a proporcionalidade é um saber hospedeiro e a regra de três um parasita? Constituirão os referenciais curriculares um direcionamento oposto ao que as autoras apresentam? E, nos livros didáticos, como se dá a relação entre os saberes matemáticos e a proporcionalidade?

Tinoco, Portela, Silva e Maia (2011) também ressaltam que existe isolamento da proporcionalidade em relação à álgebra, apesar de os problemas explorados envolverem quase sempre relações entre grandezas variáveis. As autoras também destacam quatro aspectos que justificam a razão de ser da proporcionalidade na escola básica e a sua relação com a álgebra:

a) a proporcionalidade é um dos temas mais presentes no cotidiano de todas as pessoas;

b) a função linear foi historicamente, e ainda é, a função considerada mais simples e a mais natural;

c) um ensino significativo de proporções requer o uso de diversas representações, como: tabelas, gráficos, desenhos e símbolos; e

d) o raciocínio com proporções envolve: um senso de covariação[49], comparações múltiplas, predição, inferência e a capacidade de armazenar e processar mentalmente informações, que são raciocínios inerentes à utilização do pensamento algébrico e à construção do conceito de variável, que merece atenção especial, citando Post, Behr e Lesh (1995).

O estudo também revelou que, na maioria dos casos, os problemas que envolvem proporcionalidade podem ser representados por uma equação que, uma vez resolvida, fornece a solução dos problemas. As autoras ainda nos alertam que, sem tais ferramentas, o estudante é levado a utilizar métodos estereotipados, sem compreender o que faz.

Nessa mesma linha, estudos realizados por Costa e Allevato evidenciaram que

> O tema proporcionalidade é apresentado aos alunos somente no 7º ano do Ensino Fundamental, e não raro é abordado de modo fragmentado, sem tratar das conexões, da seguinte forma: (1) definição de razão; (2) definição de proporção como igualdade de razões; (3) propriedades das razões; (4) grandezas diretamente proporcionais; (5) grandezas inversamente proporcionais; (6) regra de três simples; (7) regra de três composta e (8) juros simples (2016, p. 4).

Os autores defendem a ideia de que a proporcionalidade não é tão somente um saber da disciplina matemática, “[...] mas um formador de estruturas cognitivas para a compreensão de outros importantes conceitos matemáticos, tanto nas questões numéricas, como naquelas que envolvem Medidas e Geometria” (COSTA; ALLEVATO, 2016, p. 4).

As pesquisas realizadas por Levain (1993), Lima (1998), Tinoco, Portela, Silva e Maia (2011) e Costa e Allevato (2016) apontam para as alterações que o saber proporcionalidade sofre em sua ecologia quando trabalhados em diferentes Instituições. Esses se relacionam com

---

[49] Senso de covariação, esse termo tem origem na Teoria da Covariação de Kelley (1967). “As pessoas usam esse princípio da covariação para decidir se atribuem o comportamento a disposições internas (personalidades) ou a fatores externos (pressão social)” (COHEN, 2013, p. 16). Tendência à variedade simultânea, em grandeza e sinal, dos termos de duas séries cronológicas. Medida da tendência à variedade simultânea dos termos de duas séries cronológicas. https://www.dicio.com.br/covariacao. Em exatas a variância conjunta, é uma medida do grau de interdependência numérica entre duas variáveis aleatórias.

nosso questionamento de pesquisa ao trazer elemento sobre as condições de vida do saber proporcionalidade; as restrições e adaptações que sofre para que possa continuar vivendo nas diferentes instituições.

2.2.2 Quanto ao equipamento praxeológico matemático

Estamos aqui considerando como "equipamento praxeológico", os estudos desenvolvidos em torno dos tipos de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias – do saber proporcionalidade.

Buscando identificar as estratégias que os estudantes de 5ª à 8ª série mobilizariam ao resolverem problemas de proporção simples, e como lhes atribuíam significado, Câmara e Oliveira (2000) observaram se existiam distinções quanto às estratégias utilizadas por alunos das diferentes séries. Na opinião dos autores,

> [...] a resolução de problemas de proporção, na escola, normalmente é realizada através da utilização da regra de três, algoritmo que, supõe-se, deve conduzir à resposta correta. Na utilização desse algoritmo, geralmente, os alunos não estabelecem relações entre as grandezas envolvidas no problema e isso ocorre, não porque o algoritmo favoreça a isso, mas sim, porque o contrato didático implicitamente estabelecido, dá a esse algoritmo o status de um "jeito mágico" de resolver, onde a tarefa do aluno se resume a encontrar os números no problema e a operar com eles, sem necessariamente estabelecer relações (CÂMARA; OLIVEIRA, 2000, p. 3).

Entendemos que, ao resolver os problemas de proporcionalidade, utilizando a técnica da regra de três, nos leva a induzir que o foco do estudo desses estudantes reside principalmente na propriedade fundamental da proporcionalidade – o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.

Câmara e Oliveira (2000) constataram, também, que nos livros didáticos os problemas apresentados sobre proporcionalidade já traziam valores numéricos de fácil operacionalização, induzindo ao uso da estratégia de regra de três. Também identificaram que, na escola, o contrato didático[50] implicitamente estabelecido rege que o estudante só aprende, ou aprende bem, se ele souber refazer o caminho percorrido pelo professor, se souber manipular os dados numéricos apresentados nos problemas e se souber utilizar os algoritmos ensinados.

---

[50] O contrato didático não é um contrato pedagógico geral. Ele depende estreitamente dos conhecimentos em jogo. "Não devemos ver neles nenhum sinal de rejeição de teorias complementares, mas preferencialmente, a necessidade de estabelecer uma ligação, uma conversão, entre as duas teorias. Esse laço só pode existir na condição 'que haja um objeto que faça sentido aos dois: é preciso que eu diga por qual objeto didático o psiquismo vai se expressar nesta situação'" (BROUSSEAU, 1991a, p. 158).

Ao observar os dados relativos aos alunos do 5º ano que ainda não tinham estudado proporcionalidade, os autores constataram que esses estudantes se apropriam do significado dos problemas, e os resolvem por meio de estratégias variadas, que são construídas a partir dos conhecimentos anteriores. Nessa etapa da escolaridade, os alunos não fazem uso da regra de três, pois eles não conhecem esse algoritmo, mas não deixam de usar técnicas adequadas à resolução do problema. Enquanto na análise das estratégias utilizadas pelos estudantes do 6º, 7º e 8º anos, percebeu-se um predomínio do uso da regra de três. A esse respeito, os autores destacam "[...] que a utilização mecânica de um algoritmo leva o estudante, muitas vezes, a perder a sua capacidade de se apropriar do significado de um problema, levando-o a se preocupar, apenas, com os cálculos a serem feitos, sem uma análise das respostas advindas desses cálculos" (CÂMARA; OLIVEIRA, 2000, p. 16). Percebemos que o estudo de um saber, que não favorece ao desenvolvimento de diferentes estratégias de resolução, revela-se em uma praxeologia matemática ineficiente ao desenvolvimento do equipamento praxeológico dos estudantes.

Bernal (2004) realizou análise de livros didáticos e análise das observações em sala de aula, com o objetivo de identificar a proporção enquanto saber a ensinar e enquanto saber ensinado em turmas de 6ª série do Ensino Fundamental. Para a autora, o estudo dos livros didáticos e a observação em sala forneceram elementos sobre o *habitat* (lugar onde reside) e o nicho ecológico (função da proporção no ecossistema), enquanto saber ensinado, na 6ª série. Os resultados desse estudo evidenciaram duas abordagens para o estudo da proporção:

> Uma abordagem com origem na teoria grega das proporções, na qual a proporção é objeto de estudo, e outra abordagem, na qual o objeto proporção não é presente e as questões relativas à proporção são ensinadas no contexto dos números reais, das igualdades e equações, com ênfase à noção de proporcionalidade (BERNAL, 2004, p. 6).

Na análise do livro didático, foi observado que esse confirma o que foi evidenciado em sala de aula. Para a autora, os resultados desse estudo permitiram identificar abordagens distintas sobre as questões relativas a elementos da organização matemática da proporcionalidade.

Ponte e Marques (2011) desenvolveram estudo comparativo com o objetivo de analisar como proporção era introduzida e desenvolvida nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio em Portugal, Espanha, Brasil e EUA. O estudo focou na natureza da abordagem e na demanda cognitiva[51], estrutura e contexto das tarefas. Os resultados mostraram que os livros didáticos tendiam a apresentar as tarefas em um nível intermediário de demanda cognitiva e com uma estrutura fechada[52]. Contextos não matemáticos predominavam em três dos quatro livros didáticos analisados. No entanto, para os autores, existiam diferenças marcantes no modo como os livros abordavam os aspectos conceituais e procedimentais de proporção.

> Há outra diferença importante na maneira como os livros didáticos abordam as noções e procedimentos matemáticos. No caso de Portugal, o estudo da proporção baseia-se no estudo de números racionais, no caso da Espanha baseados em no estudo dos números racionais e da porcentagem e ainda noutros casos no estudo de números racionais, equações e padrões. Em Portugal, Brasil e EUA a noção de razão desempenha um papel importante, mas não aparece em Espanha, que utiliza a noção de “série proporcional”. Somente em dois países há menção à “propriedade fundamental das proporções”[53] (PONTE; MARQUES, 2011, p. 11).

A forma didática de tratar o assunto também variava, indo de um estilo de questionamento/resolução de problemas a um modo explicativo/prático; cada um deles amparava-se em um tipo diferente de tarefa.

Os resultados dos estudos realizados por Câmara e Oliveira (2000), Bernal (2004) e Ponte e Marques (2011) nos levam a questionar se o saber proporcionalidade não seria melhor apreendido pelos estudantes se eles trabalhassem com diferentes tipos de tarefas que os permitissem desenvolver uma diversidade de técnicas, levando-os à ampliação do seu equipamento praxeológico. Diante do exposto, questionamo-nos: como e quais são os tipos de tarefas, para o estudo de proporcionalidade, nos livros didáticos, no Brasil?

2.2.3 Quanto aos momentos de estudo da organização didática (OD)

Durante o desenvolvimento de um curso de atualização para professores de Matemática, na França, denominado “Didática e Ensino da Matemática”, Bodin (1989) coordenou as atividades do curso que consistiria na realização de uma sequência didática a ser

---

[51] Em seu texto, Ponte e Marques (2011) utilizam o termo demanda cognitiva referindo-se aos três tipos diferentes de tarefas – reprodução, conexão e reflexão, existentes no estudo do PISA (OCDE, 2004).

[52] Ponte e Marques (2011) esclarecem que nas tarefas *fechadas*, os dados matemáticos, objetivos e as condições são claramente indicados. Em tarefas *abertas*, o aluno precisa fornecer mais especificação de dados, objetivos e condições. Tarefas *semiabertas* estão entre essas duas.

[53] “There is another important difference in the way the textbooks approach the mathematical notions and procedures. In one case (Portugal) the study proportion is based in the study of rational numbers, in another (Spain) based rational numbers and percents and (iii) in still another cases in the study of rational numbers, equations and patterns. In Portugal, Brazil and USA the notion of ratio plays in important role, but it does not appear in Spain, that uses the notion of ‘proportional series’. Only in two countries there is mention to the ‘fundamental property of proportions’”.

aplicada a estudantes de várias turmas, simultaneamente, num período de uma hora, sendo observada por cerca de 4 a 5 professores por sala. O curso aconteceu durante uma semana, com aproximadamente vinte professores. Foi escolhido o tema proporcionalidade pela constatação da quantidade de textos sobre seu ensino e aprendizagem, assim como a disponibilidade de material decorrente de várias horas de observação em sala de aula[54].

Durante o período do curso de formação, foram realizadas a análise da sequência proposta sobre o tema proporcionalidade; a análise a priori das dificuldades e o comportamento dos estudantes no desenvolvimento da sequência; a análise dos protocolos de observação; e a análise a posteriori. Os resultados do estudo evidenciaram que o tópico escala foi o que apresentou maior destaque por ter sua aplicação em várias áreas e por apresentar uma diversidade de termos que remetia à compreensão diversa tanto por parte dos professores como dos estudantes.

Na análise de vários livros didáticos utilizados na França tanto de Matemática como de outras disciplinas escolares, o tópico escala, em geral, era apresentado como coeficiente de proporcionalidade, e frequentemente escala se encontrava nos livros em uma variedade de termos: escala linear, escala métrica, escala de proporcionalidade, escala gráfica e escala numérica, entre outros. O estudo mostrou que a melhoria na aprendizagem dos estudantes poderia vir de uma conjunção de reflexão teórica e a observação sistemática da prática, bem como com relação aos diferentes status do saber (saber a ser ensinado e saber efetivamente ensinado), e que é uma passagem obrigatória tanto para a investigação quanto para a formação de professores.

Em pesquisa realizada por Costa e Allevato (2012) com professores de Matemática em formação inicial, tendo como objetivo explorar o estudo de proporcionalidade por meio da resolução de problemas de Geometria, revelou-se que os professores tinham poucos conhecimentos com relação à proporcionalidade, principalmente nas conexões com a Geometria. Os autores destacaram também que a falta de conhecimentos não era apenas com relação aos conteúdos, eles também tinham dúvidas em relação a “quando” e “como” deveriam ensinar.

Oliveira (2009), em seu estudo, buscou compreender as práticas de ensino relacionadas à proporcionalidade. Ela observou o processo de ensino e aprendizagem em escola secundária[55], no Canadá, com estudantes de 13 a 14 anos, levando em consideração a

[54] Textos elaborados pelo COPREM (1988) sobre proporcionalidade, assim como o trabalho desenvolvido pelo I.R.E.M (1996) em salas de aula de quinta e sexta séries.
[55] Escola secundária no Canadá corresponde ao Ensino Fundamental no Brasil.

prática docente e as demonstrações de aprendizagem dos alunos, no momento da introdução do conceito de proporcionalidade por meio da resolução de problemas. Os resultados mostram também o potencial e a diversidade das estratégias utilizadas antes do ensino formal da proporcionalidade na escola e as dificuldades presentes. A autora destaca que, nos programas secundários no Quebec,

> [...] o desenvolvimento do conceito de proporcionalidade constitui um dos desafios importantes do passado do currículo secundário. [...] a proporcionalidade constitui um tema fundamental em Matemática e vários aspectos da realidade obedecem às regras da proporcionalidade. O raciocínio proporcional se revela então uma habilidade intelectual muito útil (OLIVEIRA, 2009, p. 463).

Em nossa análise preliminar, percebemos que o trabalho de Bodin (1989), Oliveira (2009) e Costa e Allevato (2012) apresentam indícios do saber proporcionalidade em seus diferentes status (saber a ensinar, saber preparado e saber efetivamente ensinado), bem como fazendo parte do ecossistema noosferiano apresentando elementos importantes para o estudo da ecologia da proporcionalidade que pretendemos realizar.

2.2.4 Quanto à interferência dos níveis de codeterminação

Aqui, preocupamo-nos em investigar as pesquisas que, embora também não fizessem uso da TAD, deixaram evidências quanto à interferência dos níveis de codeterminação matemática e didática, no trabalho com o saber proporcionalidade, nos anos finais do Ensino Fundamental.

Carraher (1994) realizou estudo que teve por objetivo investigar o desempenho em resolução de problemas envolvendo diferentes escalas de dois grupos: um de estudantes e outro de mestres de obra. O grupo formado por estudantes cursava a 7ª série do Ensino Fundamental e, portanto, já havia estudado vários conteúdos, tais como: grandezas geométricas, comprimento e área, razão, proporcionalidade e semelhança, entre outros. O outro grupo, formado por profissionais da construção civil (mestres de obras), tinha contato com desenhos em escala, mas todos os sujeitos possuíam grau de instrução inferior ao dos estudantes entrevistados, variando entre analfabetos e alguns que já haviam cursado até a 5ª série do Ensino Fundamental.

Durante o primeiro momento do estudo, os mestres recebiam uma planta, na qual não estava especificada a escala, que poderia ser determinada por eles mediante outras medidas ali presentes. Em um segundo momento, o problema apresentava escalas usadas no dia a dia dos mestres de obras (1:100 e 1:50) e outras não usuais (1: 40 e 1:33,3). O trabalho com plantas contendo escalas não usuais no ofício tinha por objetivo verificar se o conhecimento dos mestres era restrito às situações que envolviam escalas familiares. Quanto aos estudantes, que também passaram pelos dois momentos, a expectativa era a de que eles não apresentassem maiores dificuldades na resolução dos problemas, uma vez que haviam recebido na escola orientação sobre vários algoritmos, mas não tinham tido contato, até o momento, com desenhos em escala.

Neste estudo, foram analisados três aspectos da tarefa Matemática: o percentual de tarefas corretas, em que os mestres de obras mostraram desempenho superior aos dos estudantes e às estratégias de resolução; o uso da regra de três, "que é o algoritmo ensinado na escola para a resolução de problemas de proporção e as soluções aditivas incorretas" (CARRAHER, 1994, p. 110); e o tipo de erro. Na análise da autora

> [...] ao contrário da aprendizagem escolar, a experiência cotidiana parece enriquecer os números de significados. Assim os mestres-de-obras eram mais eficientes que os estudantes ao utilizarem a mesma estratégia, exibindo um número reduzido de erros quando a estratégia escolhida era apropriada (CARRAHER, 1994, p. 122).

Sendo a escala um caso particular da proporcionalidade, acreditamos que esse estudo pode nos ajudar a perceber as possíveis influências da sociedade e buscar identificar no ecossistema noosferiano possíveis aplicações didáticas para proporcionalidade, ou seja, posta como um saber a ser ensinado pela escola.

Os estudos realizados por Carraher e Hart (1981), na Inglaterra, e por Vergnaud (1979), na França, evidenciaram que a transmissão cultural sistemática de algoritmos, nas aulas de Matemática, não tem efeito direto e marcante sobre o desempenho dos estudantes ao resolverem, fora das aulas de Matemática, outros problemas em que estão envolvidas relações proporcionais.

Para Vergnaud (1983), o campo conceitual das estruturas multiplicativas é composto do conjunto de situações que requerem uma multiplicação, uma divisão ou uma combinação dessas operações (inclusive problemas de proporção simples e múltipla) e, ao mesmo tempo, o conjunto de conceitos e teoremas que permitem analisar essas situações, tais como: função linear e não linear, fração, razão, proporção, número racional etc. O autor desenvolveu estudos das estruturas multiplicativas e destaca que

> Problemas de proporções simples surgem em situações de custo, partição, mistura, massa-volume e muitos outros contextos. Problemas de proporções múltiplas aparecem em situações de consumo e produção de bens, além de espaço, mecânica,

> calor e outros contextos. Cada contexto tem suas especificidades e as dificuldades dos estudantes devem-se aos muitos contextos de aplicação das mesmas estruturas multiplicativas (VERGNAUD, 1983, p. 142).

Ainda para o autor, o conhecimento pode ser explícito “[...] sob a forma de uma ação, seja escolhendo a operação adequada, seja sendo hábil para expressar o caminho para essa adequação” (VERGNAUD, 1983, p. 141). Dentro dessa perspectiva, as dificuldades na resolução de situações de proporcionalidade ocorreriam pela não generalização do conceito aos diversos contextos, nos quais o conceito de proporcionalidade esteja inserido.

A revisão da literatura mostra-nos que várias pesquisas em Didática da Matemática remetem à proporcionalidade, levando em consideração quatro pontos. O primeiro, que trata das alterações sofridas pelo saber proporcionalidade em sua ecologia (LEVAIN (1993); LIMA (1998); TINOCO; PORTELA; SILVA; MAIA (2011)); o segundo, que se refere à praxeologia matemática – tarefas, técnicas, tecnologias e teorias – do saber proporcionalidade, visando perceber a existência de vida para esse saber no ecossistema (CÂMARA; OLIVEIRA (2000); BERNAL (2004); PONTE et al. (2011)); o terceiro, que se refere aos momentos de estudo da organização didática (OD), como os estudos de Bodin (1989), Costa e Allevato (2012) e Oliveira (2009); e o quarto, que trata da interferência dos níveis de Codeterminação didática no trabalho com o saber proporcionalidade nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio (CARRAHER (1994); CARRAHER; HART (1981)), na Inglaterra, e por Vergnaud (1979; 1983) na França). Essas pesquisas apontam indícios interessantes que nos ajudaram em nosso estudo acerca da ecologia do saber proporcionalidade, em diferentes instituições, no Ensino Fundamental.

2.3 PROBLEMÁTICA, OBJETIVOS DE PESQUISA E HIPÓTESE DE TRABALHO

Este estudo tem por objetivo principal investigar a ecologia do objeto de saber proporcionalidade sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático no saber “sábio” – textos acadêmicos – e no saber a ser ensinado – currículo e livros didáticos, do Ensino Fundamental. Pretendemos, para tanto, enveredar por três fontes de pesquisa: a literatura acadêmica – artigos, dissertações e teses; e as instituições: PCN de matemática e BNCC; e a coleção de livro didático de matemática dos anos iniciais. Com essa finalidade, organizamo-nos a partir dos objetivos específicos:

a) identificar o modelo epistemológicos de referência do saber proporcionalidade nos textos acadêmicos – artigos, dissertações e teses;

b) identificar o modelo institucional dominante do saber proporcionalidade nas instituições Currículo: PCN e BNCC – e Livros didáticos;
c) especificar as razões de ser, do saber proporcionalidade, nos textos acadêmicos e nas instituições Currículo e Livro didático;
d) determinar e caracterizar as organizações matemáticas, do objeto do saber proporcionalidade nas instituições estudadas;
e) caracterizar a relação institucional do objeto proporcionalidade, situando o estudo da proporcionalidade – habitat, nichos e relações ecológicas;
f) realizar análise comparativa da razão de ser, da relação institucional e das organizações matemáticas entre os estudos dos textos acadêmicos, das instituições Currículo e Livro didático.

2.3.1 Problemática

O objeto de saber proporcionalidade se faz presente em muitas situações cotidianas no dia a dia das pessoas e como objeto de estudo na escola, mas ainda é um saber gerador de dificuldades tanto do ponto de vista da aprendizagem quanto do ensino. A proporcionalidade "[...] é um instrumento universal de comparação, ela descreve uma relação de dependência entre grandezas com as razões[56]" (COMIN, 2000, p.5).

Nos estudos realizados durante a revisão da literatura, encontramos indicação para que o estudo da proporcionalidade seja desenvolvido em diferentes momentos da Ensino Fundamental (do 4º aos 9º anos). Spinillo e Bryant (1991; 1999) e Spinillo (2002) sugerem que o estudo da proporcionalidade seja iniciado desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, partindo da ideia de metade, com crianças com idade a partir dos seis anos. Por outro lado, Tinoco (1996), Schliemann e Carraher (1997) e Costa e Allevato (2015) discutem que o trabalho com proporcionalidade nas escolas se restringe quase que exclusivamente à utilização da técnica da regra de três, em que "[...] a tarefa do aluno se resume a encontrar os números no problema e a operar com eles, sem necessariamente estabelecer relações" (CÂMARA; OLIVEIRA, 2000, p.3).

Os estudos apontam que a proporcionalidade é uma ideia matemática que contribui para a compreensão de outros saberes matemáticos importantes tanto nas questões numéricas como naquelas que envolvem Grandezas e Geometria (COSTA; ALLEVATO, 2016, p.08).

[56] «Elle est um instrument universel de comparaison, elle décrit une relation de dépendance entre grandeurs com as razões».

Em análise de livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental, Médio e Superior, constatou-se que proporcionalidade é abordada fundamentando-se ora na teoria das razões e proporções, ora na teoria das aplicações lineares, como apontaram alguns estudos (PONTE; MARQUES, 2011; HERSANT, 2010).

No levantamento da revisão da literatura, notamos que, na sua maioria, as pesquisas giram em torno do ensino ou da aprendizagem da proporcionalidade, ou seja, do saber preparado (RAVEL, 2003) ou do saber aprendido (MENEZES, 2010). De acordo com a Teoria Antropológica do Didático, existem também a relação institucional desempenhada no sistema didático (saber, professor e aluno), entre o saber e determinada instituição, que pode provocar alterações na transposição didática do objeto desde sua origem até se tornar saber aprendido.

No nosso caso, interessa-nos estudar o saber a ser ensinado, elaborado pela noosfera – PCN, BNCC e livros didáticos, sem perder de vista o saber na sua origem que aqui adotamos como saber acadêmico. Nosso estudo se insere na problemática ecológica da proporcionalidade no saber a ser ensinado, no qual examinaremos as escolhas institucionais e seus efeitos nos documentos curriculares e livros didáticos, sob a ótica da TAD (CHEVALLARD, 1999). A TAD será tomada também como método para caracterizar a organização matemática, as relações institucionais e a razão de ser do saber existente no interior das instituições. Temos como interpelação inicial: como vive o saber proporcionalidade no âmbito dos textos acadêmicos, dos referenciais curriculares e dos livros didáticos?

Para responder ao nosso questionamento, partimos de algumas hipóteses. Hipótese H1: de acordo com as instituições identificadas na literatura acadêmica, as crianças a partir de seis já possuem estruturas cognitivas capazes de desenvolver o raciocínio proporcional mediados por tarefas de comparação parte-parte. Conforme a instituição Currículo – PCN e BNCC a ecologia didática da proporcionalidade aconteça a partir do quarto ano. A instituição livro didático acompanha o que propõe as instituições da Literatura acadêmica e a instituição currículo.

Embora as instituições PCN e BNCC tragam a proporcionalidade enquanto uma das ideias que permeiam o ensino da Matemática desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, essa relação de protocooperação entre os saberes não se efetiva em conformidade nos livros didáticos como apontam a revisão da literatura.

Acerca dessa hipótese, indagamo-nos: quais os modelos epistemológicos do saber proporcionalidade presentes nos textos acadêmicos? Quais modelos institucionais dominantes podem ser encontrados no referencial curricular e no livro didático? Qual a razão de ser do objeto proporcionalidade nos PCNs, na BNCC, nos LDs e nos textos acadêmicos? Existem pontos convergentes ou divergentes entre a razão de ser, a relação institucional e as organizações matemáticas nos textos acadêmicos, nos referenciais curriculares e nos livros didáticos?

Nossa segunda hipótese H2: no saber a ser ensinado no ensino fundamental, nas instituições Currículo e Livro didático, proporcionalidade encontra condições necessárias para o desenvolvimento de sua existência a partir das relações ecológicas, principalmente da relação de protocooperação, desde o quarto ano do ensino fundamental.

Ponderamos que, embora a revisão da literatura aponte que o saber proporcionalidade seja importante para o desenvolvimento do raciocínio de vários outros saberes matemáticos, isso indica que o trabalho da proporcionalidade na escola direciona o aluno para a repetição de técnicas em que o condicionam problemas matemáticos a partir de dados numéricos latentes. Sendo o livro didático uma instituição muito presente em sala de aula, torna-se um potencial agente de reforço das práticas identificadas.

Nessa hipótese, refletimos como se caracterizam a relação institucional do objeto proporcionalidade em seu estudo? Quais as relações ecológicas do saber em se tratando do *habitat* e do(s) nicho(s) nos PCNs, na BNCC, nos LDs e nos textos acadêmicos? Como se caracterizam as organizações matemáticas do objeto do saber proporcionalidade nas instituições estudadas?

De acordo com a ecologia, um ser nasce, desenvolve-se a partir das condições que passa a ter no ambiente, estabelece reações e morre. Esse ciclo também pode ser percebido por analogia na ecologia didática: um saber nasce, desenvolve-se a partir das condições que passa a ter no ambiente, estabelece reações e morre. Assim como acontece com os seres vivos, em que alguns podem viver por mais tempo que o outro, o mesmo fenômeno pode ser levado para a ecologia didática. O tempo de vida de um saber depende principalmente dos níveis superiores da escala de codeterminação, sua vida tem início nos níveis inferiores da escala e é determinada pelas condições estabelecidas pela humanidade, por exemplo, para permanecer em uso.

2.4 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Os textos acadêmicos têm papel fundamental na divulgação do saber que foi, ou está sendo produzido, pela esfera acadêmica. Esses textos servem de veículos para a socialização do saber que ali se encontra e que fazem parte tanto da formação inicial como da formação continuada de indivíduos.

Partimos para a análise de artigos, dissertações e teses que foram escolhidos em periódicos (A1 e A2), a partir da classificação da CAPES, em educação matemática, cujo objeto de estudo consistir em proporcionalidade. As categorias de análise dos textos acadêmicos surgiram a partir da adaptação de alguns elementos propostos por Chaachoua (2017) para a escolha e análise de livros didáticos, no nosso caso para escolha dos textos acadêmico, tais como: o momento da publicação; a representatividade da obra; e a análise ecológica.

Para tanto, realizamos nossa revisão de literatura tomando a base de dados Periódicos da CAPES, por ser uma "[...] biblioteca virtual que reúne e disponibiliza a instituições de ensino e pesquisa no Brasil o melhor da produção científica internacional"[57]. Partimos dos critérios: palavras-chave, recorte temporal e leitura dos resumos. Inserimos a palavras-chave "proporcionalidade e raciocínio proporcional", com a finalidade de realizar a delimitação do nosso tema, em títulos dos textos acadêmicos no âmbito da educação matemática. Realizamos um recorte temporal tomando como base o período de fundação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática[58], a fim de delimitarmos um período coerente com o início dos debates acerca da educação matemática no Brasil, e a leitura dos resumos.

A partir dessa revisão, construímos nosso percurso metodológico para a análise dos textos percorrendo as seguintes fases:

a) selecionamos 31 textos (a partir da leitura dos resumos) – compreendendo 19 artigos, duas dissertações, seis teses e oito livros, que estão melhor detalhados no Quadro 1;
b) dividimos o material para análise (proporcionalidade e raciocínio proporcional); e
c) realizamos a análise buscando identificar as razões de ser do saber – os modelos epistemológicos do saber proporcionalidade; a relação institucional, em que se situa

---

[57] Disponível em: https://www.periodicos.capes.gov.br/index.php?option=com_pcontent&view=pcontent&alias=missao-objetivos&Itemid=109. Acesso em: 16 jun. 2020.

[58] Fundada em 27 de janeiro de 1988, a SBEM é uma sociedade civil, de caráter científico e cultural, sem fins lucrativos e sem qualquer vínculo político, partidário ou religioso. Tem como finalidade congregar profissionais da área de Educação Matemática e de áreas afins. A SBEM tem em seus quadros pesquisadores, professores e estudantes que atuam nos diferentes níveis do sistema educacional brasileiro, da educação básica à educação superior. Ela possui também sócios institucionais e sócios de outros países.

o estudo de proporcionalidade – *habitat* e nichos; a organização matemática; e a organização didática.

Os textos acadêmicos estudados estão descriminados no quadro a seguir:

Quadro 1 – Seleção dos textos acadêmicos

TIPO DE OBR	ANO	AUTORES	INSTITUIÇÃO
ARTIGO	2019	Cavalcanti e Guimarães	REVEMAT
	2018	Bortoloti e Barbosa	EMP
	2017	Imenes e Tinoco	Cadernos da Educação Básica
	2016	Lundberg e Kilhamn	Int. J of Sci and Math Educ
	2016	Cyrino [et al]	EMP
	2016	Livy e Herbert	Australian Journal of Teacher Education
	2016	Costa e Allevato	www2.rc.unesp.br
	2013	Ordoñez	Revista Latinoamericana de Inv. en Matemática Educativa
	2012	Silvestres e Ponte	Interacções Revista
	2012	Rivas, Godino e Castro	BOLEMA
	2011	Tinoco, Portela, Silva e Maia	CIAEM
	2010	Cavalcanti [et al]	BOLEMA
	2008	Bem-Chaimp, Ilany e Kert	BOLEMA
	2005	Bongiovanni	Revista Iberoamericana de Educación Matemática
	2000	Câmara e Oliveira	Anais da XXIII Reunião Anual da ANPEd
	2002	Spinillo	Psicologia: Reflexão e Crítica
	1998	Chevallard	http://yves.chevallard.free.fr
	1993	Levain	Petit x
	1986	Ávila	RPM
DISSER-TAÇÃO	2008	El-Assadi	UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
	2004	Melo	UFPE
TESE	2016	Bortoloti	UFBA
	2013	Voisin	Université Victor Segalen Bordeaux 2
	2012	Cuellar	Université Montpellier 2
	2009	Oliveira	Université do Québec à Montréal
	2005	Garcia	Universidad de Jaén
	2000	Comin	Universite Bordeaux 1
LIVRO	2014	Ponte	Universidade de Lisboa
	2010	Lima	SBM
	2004	Gomes e Ferreira	Instituto Paulo Montenegro
	2002	Bellemain	SBHMAT
	1997	Lima	SBM
	1995	Post, Behr e Lesh	Atual
	1994	Carraher	Cortez
	1991	Lima	SBM

Fonte: Elaborado pela autora.

Em nossa busca no banco de dados dos periódicos da CAPES, selecionamos os textos em que os termos proporcionalidade, proporção e raciocínio proporcional estivessem presentes no título.

A palavra proporção, quando pesquisada nos títulos de artigos de diferentes áreas, apresenta, em nossa análise, relacionada a diferentes ideias: de razão, de proporção e de porcentagem. Observamos que o termo "proporção áurea" é muito utilizado, em textos de diferentes áreas, para se referir a questões de estéticas, principalmente relacionado à medicina e à odontologia.

O termo proporcionalidade é utilizado principalmente em pesquisas de diferentes áreas, como: direito, economia, estatística (principalmente, relacionado à ideia de variação) e saúde. Outros termos muito presentes nas pesquisas foram "coeficiente de proporcionalidade" e pensamento proporcional, entre outros. Podemos observar que em diferentes áreas de conhecimento, proporcionalidade se faz presente confirmando a importância de seu estudo para diferentes gerações, na vida cotidiana.

Quanto aos referenciais curriculares – Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e Base Nacional Comum Curricular (BNCC) –, foram elencados, por serem constituídos a partir de um processo de transposição didática externa, cuja finalidade é orientar o saber que vai ser ensinado. Torna-se importante fonte de investigação sobre qual o tratamento dispensado ao saber proporcionalidade ao longo dos nove anos do Ensino Fundamental.

Para o estudo da ecologia do saber proporcionalidade, faremos a análise dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (1997 e 1998) e a da Base Nacional Comum Curricular (2018). O texto dessas instituições representa o produto da noosfera, a elaboração do saber a ser ensinado, que se configura como ambiente de estudo muito importante em nossa pesquisa.

Entendemos que o estudo desses textos vai nos permitir situar o saber proporcionalidade no tempo e no espaço, pois partiremos da análise dos PCNs, que possui mais de 20 anos de existência no Ensino Fundamental brasileiro. O documento pode ter servido de referencial educacional para o país, influenciando na elaboração de currículos locais, de livros didáticos, de mudanças de práticas em sala de aula. A BNCC, por ser um documento mais atual e por sua natureza obrigatória, da sua parte curricular comum, poderá também provocar alterações na forma de pensar a educação do país.

O estudo da ecologia do saber proporcionalidade nesses textos poderá nos levar a encontrar as condições e as restrições, que foram postas ou não, para o saber proporcionalidade nessas instituições. Do mesmo modo poderá nos ajudar a responder o nosso questionamento de pesquisa. Nossa análise levará em conta a identificação das *razões de ser* do saber – esboçando os modelos epistemológicos e os modelos institucionais dominantes para o saber proporcionalidade[59]; a caracterização da relação institucional, identificando em que se situa o estudo de proporcionalidade – *habitat* e nichos; a caracterização/identificação da organização matemática; a caracterização/identificação da organização didática; e a análise das organizações modeladas.

O nosso olhar para os livros didáticos (LD) se justifica por esses apresentarem em seu texto parte importante do produto da noosfera no saber a ser ensinado na escola. Torna-se de fundamental importância a sua análise para o estudo da ecologia do saber proporcionalidade. E também tem sua importância pela forma como o LD é utilizado em nosso país, que, muitas vezes, tem a função de currículo e orienta o trabalho do professor. Esse fato ocorre pela natureza restrita do currículo em vigência até então – os PCNs. Embora com a chegada da BNCC, cuja natureza seja prescritiva, é possível que, no futuro, os LDs sejam utilizados apenas como mais uma ferramenta de apoio para os professores e estudantes.

Em nossa metodologia, a análise do LD obedecerá a uma cronologia com relação aos PCNs e a BNCC. Pretendemos analisar uma coleção de livros didáticos de mesmo autor do Ensino Fundamental – dos anos iniciais e dos anos finais –, aprovada pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). Pretendemos verificar se proporcionalidade sempre esteve presente nas coleções, ou o contrário – se esteve presente em algum momento e depois desapareceu, se voltou a fazer parte enquanto objeto de estudo ou como contexto para o trabalho de outros saberes.

Tomamos como referência os princípios elaborados por Chaachoua e Comiti (2010), adotados e citados por Bittar (2017), para a escolha dos nossos critérios de análise do livro didático, que dizem respeito ao momento de edição (publicação); à representatividade da obra; à estrutura do livro; à análise ecológica; e, por fim, à análise praxeológica.

Como critério o momento de publicação, a coleção escolhida para análise, *A Conquista da Matemática. José Ruy Giovanni Jr. FTD, 2018. 1º ao 5º ano do ensino fundamental,* já apresenta o texto dos livros, conforme as determinações da BNCC[60] .

Quanto ao critério de representatividade, a escolha levou em consideração maior tempo de adoção da coleção em escolas públicas ou privadas e aprovada pelo PNLD do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental. Além da coleção, também as orientações didáticas para o professor, o manual do professor (MP), podem se constituir de excelente fonte para justificar as escolhas das tarefas e técnicas, presentes nos livros didáticos.

---

[59] Sobre os modelos epistemológico de referência e epistemológico dominante, discutimos de forma mais aprofundada no capítulo II, na parte do marco teórico.

[60] De acordo com a Resolução CNE/CP nº 2, de 22 de dezembro de 2017, estabelecida pelo CNE para a Educação Infantil e o Ensino Fundamental, passa a valer nas escolas a partir de 2020.

O percurso metodológico para a análise do LD é composto das seguintes fases: escolha da coleção dos anos iniciais Ensino Fundamental, a ser analisada; divisão do material para análise, orientação de estudo (parte do curso e atividades), tipos de tarefas; identificação das razões de ser do saber proporcionalidade a partir da identificação do modelo institucional dominante; a caracterização da relação institucional, dos *habitats* e nichos; e da organização matemática.

Quanto ao critério estrutura do livro, adotaremos, a princípio, a análise da parte destinada às atividades e a parte destinada aos textos de explicações, que chamaremos de parte do curso. Inspiramo-nos no trabalho de Bittar, ao destacar que

> Nessa parte os autores do livro didático trazem, mesmo que implicitamente, o que consideram que os alunos daquele nível de escolaridade devem aprender e é nessa Parte que os alunos buscam pistas para resolver o que lhes é pedido. A análise da Parte Curso permite identificar alguns tipos de tarefas que parecem importantes naquela instituição, neste caso o LD (2017, p 372-374).

E, por fim, realizaremos a análise comparativa das análises anteriores. Durante esta análise comparativa, pretendemos verificar se há uma coerência entre o que a literatura acadêmica aponta, o que é proposto pelos PCNs e pela BNCC e o que está posto nos livros didáticos sobre o saber proporcionalidade.

2.4.1 O filtro da proporcionalidade

Tomamos como inspiração a pesquisa de Cuellar (2012), que usou o filtro das grandezas (Filtre des grandeurs) para identificar as praxeologias matemáticas e didáticas propostas para o estudo das grandezas, práticas de avalição, os elementos, as inter-relações internas e externas e a razão de ser das grandezas. Realizamos adaptações dos elementos utilizadas pela pesquisadora para nortear a metodologia de nossa pesquisa, visando delimitar e caracterizar a proporcionalidade no Ensino Fundamental.

Figura 10 – Filtro da proporcionalidade

Fonte: Elaborada pela autora.

Neste estudo, tomaremos os seguintes elementos que passarão pelo filtro de proporcionalidade:

1) Quais as razões de ser da proporcionalidade no Ensino Fundamental? Iremos nos direcionar a partir do Modelo Epistemológico Esboçado para Proporcionalidade (MEEP), a partir dos textos acadêmicos, para a identificação do Modelo Institucional Dominante para Proporcionalidade (MIDP), a ser identificados no referencial curricular e na coleção de livros didáticos) nas instituições estudadas;
2) Quais as organizações matemáticas propostas para proporcionalidade? Realizaremos o estudo dos tipos de tarefas, técnicas, tecnologias e teoria que constarem nas instituições;
3) Qual a relação institucional do objeto de saber proporcionalidade?;
4) Quais as inter-relações entre proporcionalidade e outros objetos matemáticos: habitat, nichos e outras relações ecológicas;
5) Qual a importância do estudo da proporcionalidade no Ensino Fundamental?

Em virtude desses questionamentos, descreveremos, a seguir, os pormenores desses cinco elementos para serem investigados na ecologia didática do saber proporcionalidade.

2.4.1.1 Razão de ser do saber proporcionalidade

Toda atividade científica tem sua essência no estudo de recortes da realidade. Uma pesquisa, por mais longa que seja, não conseguiria dar conta da realidade tal qual como ela é. O cientista, dentro de sua área, geralmente busca modelizar a realidade a ser investigada.

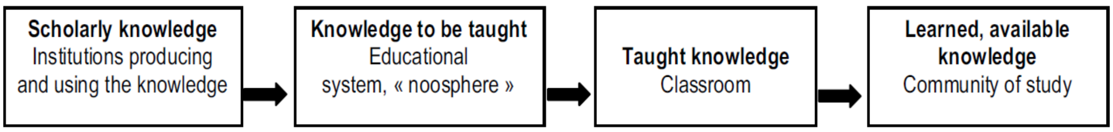
Na Didática da Matemática, não é diferente. Partindo da lógica de modelizar a realidade, Chevallard (1998, p.09) estabelece "[...] que qualquer atividade humana regularmente realizada pode ser incluída sob um *único* modelo, que é resumido aqui a palavra da *praxeologia".* Em Didática da Matemática,

> A relatividade institucional do saber matemático – colocada em evidência pela teoria da transposição didática (Chevallard, 1985/1991) – e a consequente entrada do saber matemáticos nos problemas didáticos, fizeram com que esta disciplina tivesse que assumir explicitamente a responsabilidade de analisar os modelos epistemológicos do saber vigentes nas instituições envolvidas nos processos de transposição (GASCÓN, 2018, p. 59).

Os saberes que compõem a Matemática são de natureza abstrata, porém, não são desconectados da vida real, como muitas vezes é apresentado em sala de aula. "A Matemática é um campo de estudo integrado; portanto, ver a Matemática como um todo leva à necessidade de estudar e pensar nas conexões existentes entre os diversos eixos temáticos dessa área de ensino" (COSTA; ALLEVATO, 2016).

Bosch e Gascón trazem luz ao debate sobre a importância de se observar uma unidade mínima para a análise do saber matemático. Para os autores, essa observância compreende lançar o olhar para a "[...] matemática acadêmica[61], a matemática ensinada e a matemática efetivamente aprendida" (BOSCH; GASCÓN, 2006, p. 57). E nos apresenta ao esquema, representado na figura a seguir, que reproduzimos a seguir.

Figura 11 – Processo de transposição didática



Fonte: Bosch e Gascón (2006, p.11).

[61] O termo "acadêmico" foi usado – de certa forma – para caracterizar o saber que garante e legitima o processo de ensino. Citando Kang e Kilpatrick (*op cit.*, p. 2): "Um corpo acadêmico de saber não é senão o saber usado para produzir novos conhecimentos e para organizar o saber recém-produzido em uma coletividade teórica coerente. A difícil recepção da expressão 'saber acadêmico' comprova a dificuldade de considerá-lo no mesmo nível saber a ser ensinado ou o saber como na verdade é ensinado na escola" (BOSCH; GÁSCON, 2006, tradução livre da autora).

Os autores, ainda, destacam a importância de se considerar as três instituições: a comunidade acadêmica, o sistema de ensino e a sala de aula, no momento da realização da preparação de um modelo epistemológico de referência, para a análise de determinado saber matemático, em seu processo de transposição.

> O que queremos destacar é o seguinte: considerar o processo de transposição como um novo objeto de estudo permite aos pesquisadores em educação matemática se libertarem de modelos epistemológicos espontâneos que são implicitamente impostos pelas instituições educacionais a que pertencemos. Ao olhar para este novo objeto empírico que inclui todos os passos da matemática acadêmica para a matemática ensinada e aprendida, precisamos elaborar nosso próprio modelo de "referência" do corpo correspondente do saber matemático. [...] o que chamamos de 'saber epistemológico de referência' (Bosch e Gascón, 2005) que constitui o modelo teórico básico para o pesquisador e pode ser elaborado a partir dos dados empíricos das três instituições correspondentes: a comunidade matemática, sistema educacional e sala de aula[62] (BOSCH; GASCÓN, 2006, p. 57).

Em nosso estudo, tomamos como modelo epistemológico esboçado para proporcionalidade – MEEP, o saber posto nas instituições matemáticas acadêmica e matemática escolar – produções oriundas da noosfera, como proporcionalidade. A matemática realmente estudada na escola não será objeto de estudo, nesse momento.

Tomamos os textos acadêmicos, por serem portadores da produção acadêmica, como o que Chevallard chama de “saber sábio” ou saber de origem. O modelo epistemológico esboçado para proporcionalidade – MEEP, que caracterizaremos a partir destas leituras nos ajudará a identificar o modelo institucional dominante nas instituições Currículo e Livro didático. Esses modelos nos ajudarão a visualizar a(s) *razão(ões) de ser* do saber proporcionalidade nestas instituições.

2.4.1.2 Organização matemática (OM) do objeto do saber proporcionalidade

A análise das OMs nos ajudará a identificar o conjunto de tarefas que serão organizadas, posteriormente, em tipos de tarefas:

---

[62] “We are not commenting here on the other steps of the transposition process that delimit the degree of freedom left to teachers and students when carrying out their work in the classroom. They have been more studied as they correspond to the place where the teaching process is usually located. What we want to stress is the following: considering the transposition process as a new object of study allows researchers in mathematics education to free themselves from spontaneous epistemological models that are implicitly imposed by the educational institutions to which we belong. When looking at this new empirical object that includes all steps from scholarly mathematics to taught and learnt mathematics, we need to elaborate our own ‘reference’ model of the corresponding body of mathematical knowledge. [...] what we call the ‘reference epistemological knowledge’ (Bosch and Gascón 2005) that constitutes the basic theoretical model for the researcher and can be elaborated from the empirical data of the three corresponding institutions: the mathematical community, the educational system and the classroom” (BOSCH; GASCÓN, 2006, p. 57).

> [...] a noção de Tipo de tarefas tem como principal função permitir o agrupamento de tarefas julgadas suficientemente próximas. Essa modelagem depende, ao mesmo tempo, da realidade modelada, da instituição em que se emprega o trabalho conduzido e, claro, do pesquisador que faz a análise (ARTUD, 2005, apud BITAR, 2017, p. 373).

Buscando identificar as condições modificáveis e não modificáveis do saber proporcionalidade em sua ecologia, realizamos adaptações dos quadros apresentados por Santos (2015), que tomou como base os critérios de análise definidos por Chevallard (1999), ao elaborar quadros avaliativos para a análise do conceito de área.

Quadro 2 – Critérios avaliativos de uma OM em relação ao tipo de tarefa e à técnica

Tipo de tarefa	Os problemas que envolvem proporcionalidade são bem **identificados**?
	Os problemas que envolvem proporcionalidade são **representativos**?
	Os problemas que envolvem proporcionalidade são importantes e têm **razão de ser**?
	Os problemas que envolvem proporcionalidade são **pertinentes**?
Técnica	As formas de resolver problemas que envolvem proporcionalidade são bem elaboradas ou apenas esboçadas?
	As formas de resolver problemas que envolvem proporcionalidade são **fáceis de utilizar**?
	As formas de resolver problemas que envolvem proporcionalidade são **confiáveis**?
	As formas de resolver problemas que envolvem proporcionalidade são possíveis de **evoluir**?

Fonte: Adaptado de Santos (2015).

Quanto à análise do bloco tecnológico/teórico, também faremos uso do quadro de análise elaborado por Santos (2015), inspirada em Chevallard (1999), após adaptações, direcionando o foco ao nosso objeto de pesquisa, proporcionalidade.

Quadro 3 – Critérios avaliativos de uma OM em relação à tecnologia e à teoria

Tecnologia e teoria	O saber proporcionalidade é bem **explicado**?
	Sendo dado um enunciado, o problema envolvendo sua justificativa é somente posto ou o **enunciado** é considerado tacitamente como pertinente, evidente, natural ou ainda bem conhecido?
	As formas de justificação são próximas às **formas canônicas** ou são adaptadas às suas condições de utilização e o que permitem justificar?
	São adotadas **formas de justificação** explicativas, dedutivas etc.?
	Os **argumentos** utilizados são cientificamente **válidos**?
	Os resultados do bloco tecnológico-teórico disponibilizado são **explorados de forma efetiva e otimizada** para resolver novas tarefas?

Fonte: Adaptado de Santos (2015).

2.4.1.3 Relação institucional do saber proporcionalidade

De onde vem a proporcionalidade para tornar-se objetos no Ensino Fundamental? Partindo desse questionamento, realizarmos a caracterização da relação institucional, do saber proporcionalidade a partir dos critérios avaliativos da relação institucional quanto à ecologia das tarefas e técnica a ser identificado nos textos na produção acadêmicos, nos referenciais curriculares e nos livros didáticos, como ilustrado no Quadro 4, a seguir. Nessas instituições, investigaremos se o saber proporcionalidade sofreu adaptações para continuar a existir, ou não.

Quadro 4 – Critérios avaliativos da RI quanto à ecologia das tarefas e à técnica.

Tipos de tarefas	As tarefas que envolvem proporcionalidade fazem parte de quais **instituições**?
	As tarefas que envolvem proporcionalidade surgem em que ***habitat***?
	Proporcionalidade surge nas tarefas como objeto de estudo ou como um **nicho ecológico** para o estudo de um outro saber?
	Existem **relações tróficas** entre proporcionalidade e outros saberes no encaminhamento das tarefas.
Técnica	As formas de resolver as tarefas de proporcionalidade **variam dentro e entre as instituições?**
	As formas de resolver problemas que envolvem proporcionalidade têm sua **origem em que habitat**?
	As formas de resolver problemas que envolvem proporcionalidade são **amplamente usadas em diversos tipos de tarefas de diferentes *habitats***?
	As formas de resolver problemas que envolvem proporcionalidade destacam proporcionalidade como objeto de estudo um como um **nicho ecológico** para o estudo de um outro saber?

Fonte: Elaborado pela autora.

Na análise da relação institucional do saber proporcionalidade nos LD, tomaremos como instituições, o próprio livro e cada ano de escolaridade a que o livro é destinado – 1º ao 5º ano. O estudo focará tanto na parte do curso como na parte das atividades.

Vale salientar que, sobre o saber a ser ensinado, produto da noosfera, também lançaremos nosso olhar para as orientações apresentadas no manual do professor e para o guia do livro didático. Nesse caminhar, percebemos que investigar as relações institucionais que proporcionalidade estabelece ao longo dos anos finais do Ensino Fundamental se torna importante.

Tomaremos, também, como referência os critérios definidos por Chevallard (1999), para analisar, além do bloco do saber fazer, o bloco tecnológico/teórico; a razão de ser e a pertinência da relação institucional quanto à ecologia didática.

2.4.1.4 Inter-relações entre proporcionalidade e outros objetos matemáticos: *habitat*, nichos e outras relações ecológicas

Nesse ponto, pretendemos identificar as relações tróficas – cadeias e teias alimentares formadas entre proporcionalidade e outros saberes do ecossistema matemática, nas praxeologias matemáticas e didáticas, voltadas para o Ensino Fundamental. O Quadro 5, a seguir, dispõe os critérios usados na análise.

Quadro 5 – Inter-relações entre proporcionalidade e outros objetos matemático

Tipos de tarefas	As tarefas que envolvem proporcionalidade fazem parte de qual(is) *habitat*(s)?
	As tarefas que envolvem proporcionalidade surgem inter-relacionadas em qual(is) nicho(s)?
	Proporcionalidade se inter-relaciona nas tarefas como alimento ou como alimentando-se?
Técnica	As formas de resolver as tarefas de proporcionalidade **variam dentro e entre as comunidades de saberes?**
	As formas de resolver problemas que envolvem proporcionalidade têm sua **origem em que comunidade, população, saber**?
	As formas de resolver problemas que envolvem proporcionalidade são **amplamente usadas em diversos tipos de tarefas de diferentes comunidades, populações, saberes**?
	As técnicas de resolver problemas que envolvem proporcionalidade destacam esse objeto como como um **nicho ecológico** em qual(is) **comunidades, populações, saberes**?

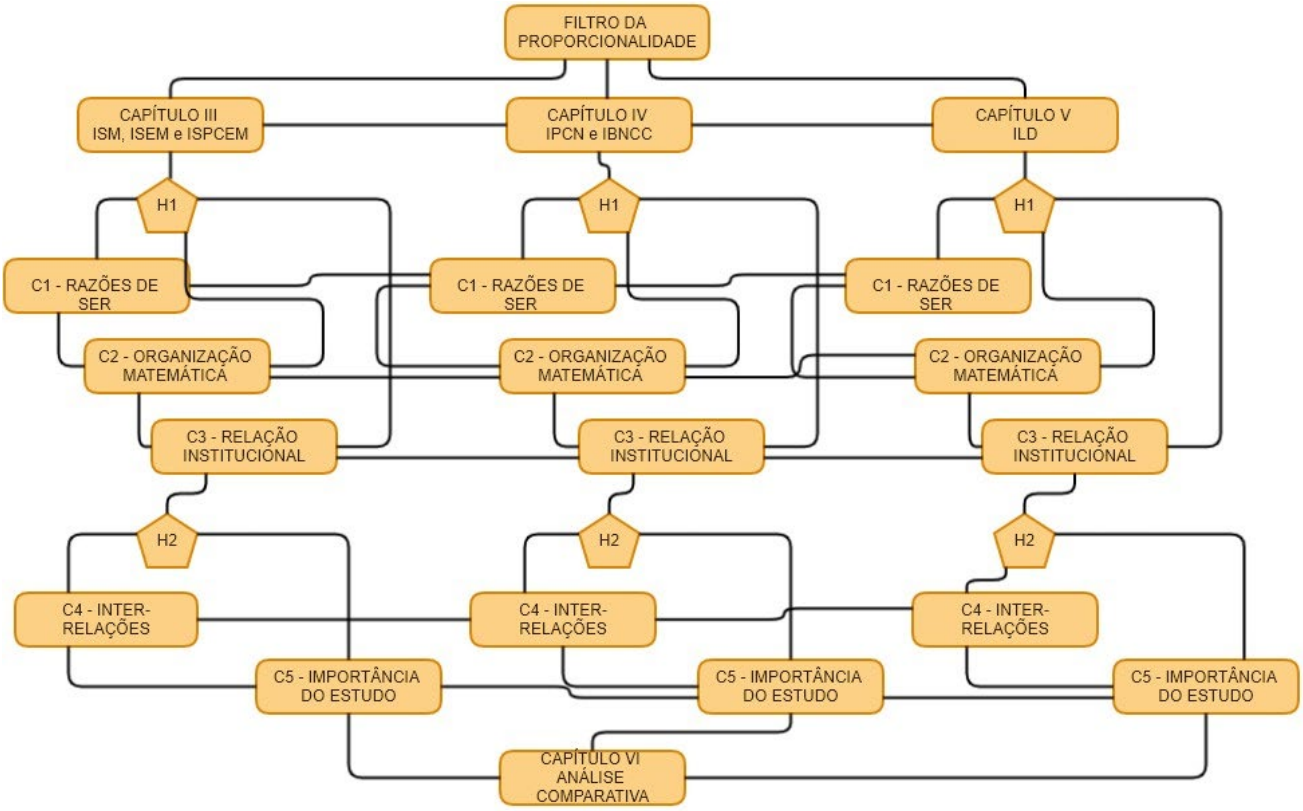
Fonte: Elaborada pela autora.

2.4.1.5 Importância do estudo da proporcionalidade no Ensino Fundamental

Quais escolhas foram realizadas para proporcionalidade pela noosfera? Iremos nos pautar em encontrar alguma evidência que nos permita entender as escolhas da noosfera ao contemplar esse saber para essa etapa de ensino.

O esquema a seguir tem a intenção de apresentar uma visão geral do filtro da proporcionalidade no nosso percurso metodológico. A partir do filtro, construiremos os três capítulos correspondentes às análises das instituições presentes na literatura acadêmica (capítulo III), da instituição Currículo: PCN e BNCC (capítulo IV) e da instituição Livro Didático dos anos iniciais do Ensino Fundamental. As nossas duas hipóteses de pesquisa poderão ser validadas a partir dos cinco crivos elencados a partir do filtro da proporcionalidade. São eles: C1 – as razões de ser da proporcionalidade no Ensino Fundamental; C2 – as organizações matemáticas propostas para proporcionalidade; C3 – a relação institucional do objeto de saber proporcionalidade; C4 – as inter-relações entre proporcionalidade e outros objetos matemáticos: habitat, nichos e outras relações ecológicas; e C5 – a importância do estudo da proporcionalidade no Ensino Fundamental.

Figura 12 – Esquema geral do percurso metodológico



Fonte: Elaborada pela autora.

Retomando nosso questionamento de pesquisa: como vive o saber proporcionalidade no âmbito do saber acadêmicos e do saber a ser ensinado no Ensino Fundamental? Nesse momento, focaremos o estudo em descobrir como a literatura especializada, artigos em periódico, dissertação e teses tratam proporcionalidade.

3 O SABER PROPORCIONALIDADE NOS TEXTOS ACADÊMICOS

Neste capítulo, pretendemos trazer luz ao debate sobre o saber proporcionalidade partindo do questionamento: em que contextos e problemáticas se inscreve esse saber, na matemática, do Ensino Fundamental, e por que dessa inscrição? Nossa pesquisa parte do questionamento: como vive o saber proporcionalidade no âmbito dos textos acadêmicos, dos referenciais curriculares e dos livros didáticos. Neste momento, perguntamo-nos sobre como vive o saber proporcionalidade no âmbito dos textos acadêmico.

O conhecimento matemático surge na humanidade a partir da necessidade de se resolver problemas do cotidiano e aos poucos, junto com seus registros, passa a ser conhecimento de muitos, de várias pessoas, de comunidades. Essa ampliação do universo desse conhecimento o eleva a categoria de um objeto de saber social.

A TAD considera o conhecimento matemático "[...] como algo relativo, emergindo de práticas humanas e que, portanto, é sensível a tudo que afetando essas práticas, afeta os meios de acesso, os conteúdos e as formas desse conhecimento" (ARTIGUE, 2011, p. 37 apud CHAACHOUA; BITTAR, 2016, p. 2).

Embora a matemática esteja presente em nossa vida, a construção do conhecimento matemático é diferente da construção do conhecimento cotidiano, do conhecimento que ocorre a partir dos fenômenos da natureza. Os objetos matemáticos são construções abstratas de conhecimento realizadas por cada indivíduo. Só a representação desses objetos matemáticos é perceptível aos nossos olhos. São construções realizadas pela mente humana e associadas a uma representação.

Vamos trazer brevemente uma discussão acerca do que podemos observar na TAD sobre a distinção entre conhecimento e saber. O conhecimento é algo mais próximo do indivíduo; são as construções que ele faz sobre um saber; ele pertence ao indivíduo. Já o saber é algo mais amplo, fazendo parte das relações pessoais e institucionais. O saber é igualável às obras produzidas pela humanidade.

Diariamente, deparamo-nos com situações do cotidiano que demandam a utilização de objetos de saber matemáticos. Vamos tomar como o exemplo o problema a seguir, que denominamos de "Problema da gelatina".

Quadro 6 – Problema da gelatina

Dissolva um pacote de 30g de gelatina em pó, em 250ml (1/4 de litro) de água fervente. Adicione mais 250ml de água fria ou gelada e coloque em taças. Leve à geladeira até adquirir consistência. Esta receita rende aproximadamente 5 poções de 100 ml, cada. Para preparar aproximadamente 40 porções de 100ml cada, quanto de gelatina em pó, será necessário?	
5 porções → 30g 1 porção → 30:5 = 6g 40 porções → 40.6g = 240g (1) ou, 5x = 40 x = 8 pacotes (2)	Logo, se 1 pacote de 30g de gelatina em pó rende aproximadamente 5 poções de 100 ml, cada. Então, para obter 40 poções de 100 ml cada, precisamos descobrir quantas vezes teremos que multiplicar as 5 porções para obter 40.

Fonte: Elaborado pela autora.

Ainda que o preparo da gelatina seja uma tarefa relativamente fácil para ser realizada no dia a dia, o saber matemático que está em torno dessa atividade requer um pouco mais de atenção com relação ao seu estudo. Trata-se de realizar operações com grandezas diretamente proporcionais, envolve números racionais, relaciona a quantidade de gelatina em pó e a quantidade de água, entre outros saberes.

No entanto, podemos recorrer a alguns domínios para resolver tal tarefa. No domínio da Aritmética, por exemplo, basta observar que 40 é um múltiplo de 5, então 40 é divisível por 5 que resulta em 8, mas "8 o que"? Gramas ou pacotes? Observando os cálculos realizados, notamos que a resolução (1) apelou para o método de encontrar o valor da unidade. Já a resolução (2 recorreu à álgebra, resolvendo uma equação do primeiro grau. Contudo, poderia, também, encontrar o resultado sem a realização de cálculos escrito, por ser um problema relativamente simples. Bastaria pensar quantas vezes teremos que multiplicar as 5 porções para obter 40, ou seja, encontrar o fator multiplicativo. Mas, a simples indicação de um número não seria suficiente para apresentar a resposta adequada, pois, se respondêssemos com relação à quantidade de pacotes de gelatina, seriam 8, mas, com relação à quantidade de gramas de gelatina, seriam 240. Questionamo-nos: será que essa solução poderia ser encontrada por estudantes dos anos iniciais, do Ensino Fundamental?

Em virtude dos argumentos utilizados para o "problema da gelatina", acreditamos ser importante apresentar alguns termos que adotaremos em nossa pesquisa. Ao longo do texto, o objeto de saber quantidade pode surgir acompanhado dos adjetivos: homogênea (pacotes, gramas); heterogêneas (não posso somar pacotes com grama, pois não são da mesma espécie); contínuas (a quantidade de pó de gelatina); e discretas[63] (um pacote de gelatina, dois copos de

[63] Quantidade é uma porção de alguma coisa que se pode pesar, medir ou contar. Homogênea são coisas da mesma espécie em um só número. Quantidade heterogênea são as de espécies diferentes e que não se pode reunir em um número só. Quantidade contínua são aquelas cujas unidade estão intimamente ligadas, e somente

água). O termo número será tomado como o objeto de saber que exprime quantas unidades contêm um agrupamento (em 8 pacotes de gelatina, a quantidade é todo o pó de gelatina; a unidade é o pacote; e o número é o 8, que indica a quantidade de pacotes de gelatina.

A proporcionalidade é um dos saberes matemáticos que faz parte das atividades mais básicas do nosso dia a dia, muito presente nas práticas sociais. Por exemplo, quando uma costureira amplia ou reduz um molde de uma roupa para adequá-la a determinado manequim; no momento do preparo da mistura da tinta, pelo pintor, adequando a quantidade de solvente proporcionalmente à tinta concentrada; quando calculamos a quantidade de medicamento a ser ministrado a uma criança, em razão do "peso" que ela possui; na leitura de uma planta baixa; no cálculo das parcelas nas compras a prazo; na interpretação das contas de água, de luz ou das faixas para recolhimento do imposto de renda; quando adequamos uma determinada receita culinária em razão do quantitativo de pessoas que serão servidas; no preparo de uma bebida quanto à quantidade de açúcar com relação à quantidade de líquido (suco de frutas, água, por exemplo); entre outros, estão todos, de alguma forma, mobilizando o saber proporcionalidade.

Desde o químico ao cozinheiro, do engenheiro ao mestre de obras, o raciocínio proporcional passa a ser uma competência básica para a realização das tarefas de sua profissão. Várias outras áreas profissionais, nas quais a proporcionalidade é indispensável para o desenvolvimento de suas tarefas, ainda podem ser citadas, por exemplo: arquitetura e urbanismo, topografia, tecnologia, enfermagem, design de modas etc.

A ecologia do saber proporcionalidade nos textos acadêmicos nos leva a refletir como vive o saber proporcionalidade no âmbito do saber de origem no Ensino Fundamental em matemática? A Didática é "[...] a ciência das condições e restrições de difusão (e da não difusão) das praxeologias no seio das instituições da sociedade"[64] (CHEVALLARD, 2010, p. 02). E, nessa perspectiva, percorremos a literatura acadêmica, procurando situar a razão de ser da proporcionalidade enquanto "saber sábio" ou "saber de origem" que, em nosso estudo, será considerado como saber acadêmico.

Podemos observar, na revisão da literatura, que o trabalho com proporcionalidade remete a um raciocínio mais elaborado, qualitativo. É sobre essa especificidade, desse objeto de saber, que vamos apresentar neste capítulo com o objetivo de investigar a ecologia do

---

podem ser avaliadas pelo peso ou pela medida. Quantidades discretas são aquelas que podem ser contadas individualmente, por unidade. Para mais informações ver Bellemain (2002).

[64] «Est la science des conditions et des contraintes de la diffusion (et de la non-diffusion) des praxéologies au sein des institutions de la société».

objeto de saber proporcionalidade sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático, no saber sábio – textos acadêmicos.

3.1 RAZÃO DE SER DO SABER PROPORCIONALIDADE

Para Chevallard (1997), uma sociedade é construída a partir de suas obras. Essas construções humanas têm por objetivo responder aos questionamentos colocados pela humanidade, ao longo do tempo, e as respostas encontradas para esses questionamentos são a razão(ões) de ser dessas obras.

A partir da problemática ecológica, que no nosso caso está em buscar respostas para a razão de ser da proporcionalidade, no Ensino Fundamental, perguntamos: de onde vem a proporcionalidade para tornar-se objetos de ensino? Como ela chegou ao currículo e ao livro didático? Que inter-relações existem com outros objetos? Por que proporcionalidade foi selecionado pela noosfera? Do mesmo modo, parafraseando Chevallard (1994), sem me interrogar não somente porque proporcionalidade é objeto de estudo, mas ainda nos perguntamos por que proporcionalidade deixaria de ser objeto de estudo no Ensino Fundamental?

Nessa perspectiva, buscamos, neste capítulo, encontrar resposta para a pergunta: de onde vem a proporcionalidade para tornar-se objetos de ensino? Partiremos para a construção do MERP, a partir dos achados em artigos, dissertações, teses e livros, da educação matemática, da matemática e psicologia cognitiva da educação matemática. Pretendemos encontrar a razão de ser do saber proporcionalidade a partir dos MEEPs.

3.1.1 Modelo Epistemológico Esboçado para Proporcionalidade (MEEP)

Em alusão à Teoria das Proporções, que dominou por muito tempo as considerações desse objeto de saber no campo da Álgebra, o debate a respeito do modelo matemático para proporcionalidade atravessa fronteiras. "Na educação obrigatória francesa, observamos a mesma evolução histórica: o estudo de proporcionalidade e aplicação linear que é hoje o modelo matemático Institucional substituiu a dos problemas de regra de três e a teoria das proporções[65]" (HERSANT, 2010, p. 2). Mas como essa adaptação do saber se desenvolveu?

[65] «Dans l'enseignement obligatoire français, on observe la même évolution historique: l'étude de la proportionnalité et de l'application linéaire qui est aujourd'hui le modèle mathématique institutionnel a remplacé celle des problèmes de règle de trois et de la théorie des proportions».

Estudada desde períodos remotos, a proporcionalidade sempre despertou o interesse da humanidade, embora em alguns momentos da sua história tenha tido diferentes interpretações. Nossa investigação toma como recorte temporal, para estudar a transposição didática da proporcionalidade, o espaço entre a década de 1980 aos dias atuais.

No Brasil, acompanhando um ajustamento já em movimento em vários continentes, com a finalidade de tornar o conhecimento científico mais próximo da noosfera, algumas associações passam a existir a partir da década de 1960 em nosso país. A Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), “[...] fundada em julho de 1969, durante o 7º Colóquio Brasileiro de Matemática, como uma entidade civil, de caráter cultural e sem fins lucrativos, voltada principalmente a estimular o desenvolvimento da pesquisa e do ensino da matemática no Brasil” (SANTOS, 2018, p. 1), objetivava a difusão do saber matemático para além dos muros das academias.

Posteriormente, também é criada a Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), que se preocupa igualmente com o debate acerca do saber matemático, mas, principalmente, se ocupa principalmente em refletir sobre os fenômenos didáticos que surgem na sala de aula nos processos de ensino e de aprendizagem da matemática.

> [...] no período que vai de 1985 a 1988, anos correspondentes à realização da VI Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM), em Guadalajara no México, e à fundação oficial da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, na cidade de Maringá-PR. Ao ano de 1987 será dado especial destaque. Durante o Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM) na cidade de São Paulo, os participantes desse movimento decidiram empreender esforços, tendo em vista a criação de uma Sociedade que congregasse os educadores matemáticos brasileiros, sendo estabelecido o prazo de um ano para a construção coletiva de seus estatutos (PEREIRA, 2005, p. 12).

A criação das sociedades favoreceu a transposição do saber matemático a ser ensinado tornando esse saber mais acessível. Um bom exemplo é a criação de periódicos como a revista do professor de matemática (RPM) e o periódico educação matemática em revista EMR.

Em um artigo da RPM, escrito por Ávila (1986), identificamos um MEEP_{1}, cujo nicho ecológico se encontra na Álgebra, nas Grandezas e na Estatística.

> Definição 1. Diz-se que duas variáveis (ou grandezas) x e y são proporcionais – mais especificamente diretamente proporcionais – se estiverem assim relacionadas: y = kx ou y/x = k, onde k é uma constante positiva, chamada constante de proporcionalidade.
> Definição 2. Diz-se que as variáveis x e y são inversamente proporcionais se y = k/x ou xy = k, onde k é uma constante positiva (constante de proporcionalidade) (ÁVILA, 1986, p. 3).

Encontramos, também, a representação algébrica para proporcionalidade, remetendo também a função linear, y = mx, $MEEP_2$.

> A proporcionalidade é um exemplo simples, mas importante, de função matemática e pode ser representada como uma equação linear. Como tal, é uma ponte adequada e talvez necessária entre a experiência e modelos comuns e as representações mais abstratas que se expressarão de forma algébrica. A representação algébrica da proporcionalidade (y = mx) abrange uma classe incrivelmente ampla de ocorrências físicas (POST; BEHR; LEHS, 1995, p. 91).

Tomamos como $MEEP_3$ o que é apresentado por Lima (1997), como modelo matemático de proporcionalidade: "[...] a função linear, dada pela fórmula f(x) = ax, é o modelo matemático para os problemas de proporcionalidade" (LIMA, 1997, p. 92). Para o autor, "[...] a proporcionalidade é, provavelmente, a noção matemática mais difundida na cultura de todos os povos e seu uso universal data de milênios" (LIMA, 1997, p. 92). Ele justifica seu argumento, apresentado uma citação do livro *Aritmética progressiva,* de Antônio Trajano, adotado no Brasil até a década de 1960, chegando a ter mais de oitenta edições publicadas.

> Diz-se que duas grandezas são proporcionais quando elas se correspondem de tal modo que, multiplicando-se uma quantidade de uma delas por um número, a quantidade correspondente da outra fica multiplicada ou dividida pelo mesmo número. No primeiro caso, a proporcionalidade se chama direta e, no segundo, inversa; as grandezas se dizem diretamente ou inversamente proporcionais (TRAJANO, 1960 apud LIMA, 1997, p. 92).

Lima (1997, p. 93) salienta que um modelo tradicional "[...] equivale a dizer que a grandeza y é diretamente proporcional à grandeza x quando existe um número a (chamado a *constante de proporcionalidade*) tal que $y = ax$ para todo valor de x".

Garcia (2005), em seus estudos, situou a proporcionalidade no domínio da Álgebra, apresentando uma explicação para a organização clássica de proporcionalidade, enquanto igualdade entre grandezas. Observamos que os temas "redução a unidade" e "regra de três" citados fazem parte do estudo setor "quarta proporcional", e que o tema "equação do 1º grau" pertence ao setor "equação", que faze parte do domínio da Álgebra. O autor ressalta também que as expressões "redução a unidade" e "regra de três" são técnicas "clássicas" para a resolução de tarefas com proporcionalidade, e expressas por uma equação.

> A primeira organização matemática (primeiro nível de algebrização) surge da modernização da linguagem usada para descrever a relação entre grandezas, dando origem a uma evolução de técnicas "clássicas" (regra de três e redução à unidade) e tecnologia da organização clássica. A relação de proporcionalidade não é mais caracterizada por proporções (como razões homogêneas iguais) a serem expressas

> por meio de equações: “duas grandezas X e Y são **diretamente proporcionais** quando uma correspondência entre elas pode ser estabelecida de tal maneira que, entre qualquer quantidade x de X e seu correspondente y de Y se cumpra a relação $y = k \cdot x$” (Bolea, Bosch e Gascón, 2001b, p 276). Analogamente, a **proporcionalidade inversa** simples será expressa pela equação $x . y = k$, ou, $y = k / x = k . x^{-1}$ [66] (GARCIA, 2005, p. 195, grifos nossos).

Tomamos, aqui, dois outros modelos epistemológicos para proporcionalidade: $MEEP_4$ ($y = k \cdot x$); e MERP $_{(5)}$ ($x. y = k$, ou, $y = k / x = k . x^{-1}$), identificados, nesse recorte, do texto de Garcia (2005). Onde a primeira equação corresponde às grandezas proporcionais diretas (função linear) e a segunda indica as grandezas proporcionais inversas – função exponencial.

O modelo matemático de proporcionalidade, no qual “[...] as grandezas são substituídas por números reais que são suas medidas” (LIMA, 2010, p. 5), em que se consideram apenas as medidas positivas de grandezas, é identificado como outro $MEEP_5$, que remete ao Teorema Fundamental da Proporcionalidade, que, de acordo com o autor,

> Uma proporcionalidade (numérica) é uma função f: $R+ \rightarrow R+$ com as seguintes propriedades:
> 1) f é uma função crescente, isto é, $x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$ para quaisquer $x, x' \in R+$.
> 2) Para todo $x \in R+$ e todo $n \in N$ tem-se $f(nx) = n . f(x)$ (LIMA, 2010, p. 5).

Para que exista uma proporcionalidade, faz-se necessário que se atenda a duas condições se $x \rightarrow y$ *e* $x' \rightarrow y'$, então, $x < x'$ implica $y < y'$; e, se $x \rightarrow y$ então $nx \rightarrow ny$, *para todo* $n \in N$. O conjunto dessas duas condições é tomado como um outro $MEEP_6$.

> - Quanto maior for *x*, maior será *y*. Em termos matemáticos: se $x \rightarrow y$ *e* $x' \rightarrow y'$ então $x < x'$ implica $y < y'$.
> - Se dobrarmos, triplicarmos etc. o valor de x, o valor correspondente de y será dobrado, triplicado etc. na linguagem matemática: se $x \rightarrow y$ então $nx \rightarrow ny$ *para todo* $n \in N$.
>
> Nas condições acima, a correspondência $x \rightarrow y$ chama-se uma *proporcionalidade* (LIMA, 2010, p. 2).

Dependendo do problema matemático a ser solucionado, a definição anterior torna-se ineficiente como em contexto monetário, por exemplo.

---

[66] “La primera organización matemática (primer nivel de algebrización) surge de la modernización del lenguaje usado para describir la relación entre magnitudes, dando lugar a una evolución de las técnicas ‘clásicas’ (regla de tres y reducción a la unidad) y de la tecnología de la organización clásica. La relación de proporcionalidad deja de estar caracterizada mediante proporciones (como igualdad de razones homogéneas) para expresarse mediante ecuaciones: ‘dos magnitudes X e Y son directamente proporcionales cuando se puede establecer una correspondencia entre ellas de tal forma que, entre una cantidad cualquiera x de X y su correspondiente y de Y se cumpla la relación $y = k \cdot x$’ (Bolea, Bosch y Gascón, 2001b, p. 276). De manera análoga, la proporcionalidad simple inversa se expresará mediante la ecuación $x \times y = k$, o bien, $y = k / x = k \times x^{-1}$.”

> Se uma quantia fixa gera, após um mês de investimento, um retorno y, não é verdade que após n meses essa quantia gere o retorno n . y, mesmo que a taxa de juros permaneça constante. Pois ao final de cada mês é como se tivesse sido aplicada novamente uma quantia maior, igual a existente no mês anterior mais os juros correspondentes. Assim o retorno (num período fixo) é proporcional ao capital inicial, mas não é proporcional ao tempo de investimento (LIMA, 2010, p. 5).

Percebemos que, no $MEEP_7$, o atributo que se interpreta "quanto maior for x maior será y" não garante a proporcionalidade entre x e y, como pode ser observado no exemplo dado em contexto monetário. Do ponto de vista da proporcionalidade inversa, Lima evidencia que

> Dizer que *y* é inversamente proporcional a *x* equivale a dizer que *y* é proporcional a 1/*x*. Segue então do Teorema Fundamental da Proporcionalidade que se *y* é inversamente proporcional a *x* então tem-se y = *a*/*x*, onde o fator de proporcionalidade *a* é o valor de *y* que corresponde a *x* = 1 (2010, pp. 8-9).

Entendemos dessa forma a proporcionalidade inversa como o $MEEP_8$. De acordo com Garcia,

> O segundo nível de algebrização envolve a integração de todas as relações proporcionais possíveis (direta simples, inversa simples e composta de qualquer tipo) usando um único modelo: uma função de várias variáveis reais, homogêneas de grau ± 1.
>
> $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = k \cdot x_1^{\varepsilon_1} \cdot x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n} \qquad e_i = \pm 1$
>
> onde *xi* são quantidades de grandezas *Xi*, direta ou inversamente proporcional a outra grandeza Y. [...] Toda relação de proporcionalidade se representar mediante um único modelo: $f*(x) = k \cdot x$, donde $k = f(1,1,...1) = f*(1)$[67] (2005, p. 197).

Entretanto, ainda é muito recorrente, na matemática, do Ensino Fundamental, e que vez por outra se confundem no dia a dia ao saber proporcionalidade, são a proporção e a regra de três.

> Se *f*: R+ → R+ é uma proporcionalidade, então, para quaisquer x_1, x_2 com $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$, tem-se $y_1/x_1 = y_2/x_2$. Com efeito, ambos esses quocientes são iguais ao fator de proporcionalidade *a*. A igualdade $y_1/x_1 = y_2/x_2$ chama-se ***proporção***.
> Chama-se de ***regra de três*** ao problema que consiste em, conhecendo três dos números x_1, x_2, y_1, y_2, *determinar o quarto* (LIMA, 2010, p. 7, grifos nossos).

[67] "El segundo nivel de algebrización supone la integración de todas las posibles relaciones de proporcionalidad (simple directa, simple inversa y compuesta de cualquier tipo) mediante un único modelo: una función de varias variables reales, homogénea de grado ± 1. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = k \cdot x_1^{\varepsilon_1} \cdot x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n} \qquad e_i = \pm 1$ siendo xi cantidades de una magnitud Xi, directa o inversamente proporcional com otra magnitud Y. [...] toda relación de proporcionalidad se puede representar mediante un modelo único: f * (x) = k × x , donde k = f (1,1,...1) = f * (1)".

Vale salientar que, na década de 1980, na França, aconteceu um processo de revisão do programa tanto da educação básica quanto do ensino superior, e o saber proporcionalidade sofreu alteração em sua ecologia. "Os currículos da escola primária e da faculdade foram modificados em 1985. No nível elementar, foram feitas pequenas nuances: a proporcionalidade foi associada às funções e o exemplo da regra dos três foi sugerido[68]" (HERSANT, 2010, p. 17). Em meados dos anos de 1980, nova reforma curricular e "[...] a proporcionalidade é apresentada como um 'conceito de capital', cujo aprendizado é fundamental e deve ser realizado gradualmente. Este último ponto é uma diferença dos programas de 1985 que não explicaram essa necessidade de aprendizado progressivo[69]" (HERSANT, 2010, p. 18). Tais reformas tendem a impactar nos sistemas educacionais de vários países, inclusive no Brasil.

A regra de três (quarta proporcional) tem na sua modelagem matemática nas teorias das razões e proporções e a teoria da aplicação linear.

> Embora possuam diferentes objetos básicos (razão, proporção, extremos e meios para a teoria das proporções e aplicação linear, função linear, imagem e antecedente da aplicação linear) essas teorias obviamente têm pontos comuns:
> – o coeficiente de proporcionalidade permite passar de um para o outro com a seguinte propriedade (expressa no contexto de sequências numéricas por razões de conveniência): se as sequências $(x_i)_{i \in N}$ *e* $(y_i)_{i \in N}$ *(xi) são proporcionais, existe uma constante k tal que para qualquer i inteiro* $y_i = kx_i$*;*
> – a propriedade da linearidade, embora expressa com objetos diferentes (razão, proporção / combinação linear)[70] (HERSANT, 2010, p. 4).

Observamos que a regra de três é um problema, ou seja, um tipo de tarefa, e está no bloco do saber fazer da organização matemática. Lima (2010) nos chama a atenção enfaticamente para o fato de que "[...] a regra de três, proveniente da proporção $y_1/x_1 = y_2/x_2$, só pode ser legitimamente empregada quando se tem uma proporcionalidade *f,* sendo $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$" (LIMA, 2010, p. 7). Nessa mesma linha, Ávila já sinalizava que

---

[68] «Les programmes de l'école élémentaire et du collège sont modifiés en 1985. Au niveau de l'élémentaire de légères nuances sont apportées: la proportionnalité est associée aux fonctions et l'exemple de la règle de trois est suggéré» (HERSANT, 2010, p. 17).

[69] «la proportionnalité est présentée comme un « concept capital » dont l' apprentissage est fondamental et doit s'effectuer progressivement. Ce dernier point constitue une différence avec les programmes de 1985 qui n'explicitaient pas cette nécessité d'apprentissage progressif» (HERSANT, 2010, p. 18).

[70] «la théorie des rapports et proportions et l'application linéaire. Bien qu'ayant des objets de base différents (rapport, proportion, extrêmes et moyens pour la théorie des proportions et application linéaire, fonction linéaire, image et antécédent pour l'application linéaire), ces théories ont évidemment des points communs:
- le coefficient de proportionnalité permet de passer de l'une à l'autre avec la propriété suivante (exprimée dans le cadre des suites numériques pour des raisons de commodité) : si les suites (xi)i∈N et (yi)i∈N sont proportionnelles, il existe une constante k telle que pour tout ientier yi = kxi ;
- la propriété de linéarité, bien qu'exprimée avec des objets différents (rapport, proportion / combinaison linéaire)» (HERSANT, 2010, p. 4).

> [...] os problemas propostos nos livros como "regra de três" são aplicação de equação do primeiro grau. Todos podem ser formulados em termo de duas variáveis x e y, ligadas por uma equação do tipo y = kx ou xy = k. onde k é uma constante. Isso é verdade mesmo nos chamados "problemas de regra de três composta" [...] não há sequer necessidade de se tratar separadamente esses problemas de "regra de três composta" pois eles se encaixam perfeitamente na mesma categoria dos outros, chamados de regra de três simples" e não há necessidade de usar flechas. Também não é preciso dividir esses problemas em várias etapas. A própria expressão 'regra de três composta" é infeliz, pois se envolve mais de três números, como pode ser de "três"?... (1986, p. 4).

A esse debate, acrescenta-se que, do ponto de vista do ensino da proporcionalidade, a partir da

> [...] institucionalização precoce das técnicas não parece razoável, pois queremos que os alunos usem o raciocínio proporcional e desenvolvam procedimentos apropriados. A única técnica que pode parecer "eficaz" é o produto cruzado, mas é um "truque" e mata todo o raciocínio da proporcionalidade, que é desejável desenvolver em outro lugar, se quisermos que a noção adote sentido[71] (HERSANT, 2010, p. 23).

Apesar de o nosso foco de estudo ser o Ensino Fundamental, abrimos uma exceção aqui para um comentário que jugamos pertinente. O emprego da expressão regra dos três, nos programas ensino superior, "[...] talvez justifique para alguns autores a apresentação da proporcionalidade com propriedades próximas à teoria das proporções (igualdade de razões, Julien et al., 1987) e o uso de técnicas bastante derivadas da teoria das proporções"[72] (HERSANT, 2010, p. 19).

Entendemos que a regra de três não é um objeto de saber, sendo, por vezes, uma técnica que pode ser justificada pela teoria das razões e proporções.

Adotamos os modelos relacionados ao saber proporcionalidade, "[...] a igualdade $y_1/x_1 = y_2/x_2$ chama-se de proporção" (LIMA, 2010, p. 7), como o $MEEP_9$, e regra de três, "ao problema que consiste em, conhecendo três dos números x_1, x_2, y_1, y_2, *determinar o quarto*" (LIMA, 2010, p. 7), como o $MEEP_{10}$.

Ainda sobre proporção com nicho ecológico nas grandezas, do Livro V, dos Elementos de Euclides, verifica-se que "[...] (quatro) grandezas são ditas **terem mesma**

---

71 «L'institutionnalisation précoce de techniques n'apparaît donc pas raisonnable dans la mesure où l'on veut que les élèves emploient des raisonnements de proportionnalité et développent des procédures appropriées. La seule technique qui pourrait apparaître « efficace » est la produit en croix, mais c' est un « truc » et il tue tout raisonnement de proportionnalité, ce qu'il est souhaitable de développer par ailleurs si l' on veut que la notion prenne sens» (HERSANT, 2010, p. 23).

72 «Au collège, l'emploi de l'expression « règle de trois » dans les programmes justifie peut-être pour certains auteurs la présentation de la proportionnalité avec des propriétés proches de la théorie de proportions (égalités de rapports dans le Julien et al., 1987) et l'emploi de techniques plutôt issues de la théorie des proportions» (HERSANT, 2010, p. 19).

razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta, se os múltiplos da primeira e da terceira são correspondentes maiores, iguais ou menores do que os mesmos múltiplos da segunda e da quarta" (HEART, 1956 apud BELLEMAIN, 2002, p. 76).

Traduzindo o texto de Euclides em linguagem matemática:

> Em notação atual: A igualdade $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, é equivalente ao conjunto das seguintes implicações lógicas:
> Se para m, n inteiros, mA > nB, então, mC . nD.
> Se para m, n inteiros, mA = nB, então, mC = nD.
> Se para m, n inteiros, mA < nB, então, mC < nD.
> (BELLEMAIN, 2002, p. 76).

Tomamos essa notação como mais um $MEEP_{11}$, para proporção, explicitamente o domínio das Grandezas.

A proporcionalidade também tem nicho ecológico da Geometria e habita o setor semelhança. "A noção de semelhança corresponde à ideia natural de 'mudança de escala', isto é, ampliação ou redução de uma figura alterando seu tamanho sem modificar suas proporções" (LIMA, 1991, p. 31). Tomamos a noção de semelhança como $MEEP_{12}$.

Toda figura é semelhante a si própria. A função identidade, σ: F →F', é uma semelhança de razão 1. Tomamos a função identidade como $MEEP_{13}$.

> Sejam *F* e *F'* figuras, do plano ou do espaço, e *r* um número real positivo. Diz-se que *F* e *F'* são *semelhantes*, com *razão de semelhança r,* quando existe uma correspondência biunívoca *σ: F →F'*, entre os pontos de *F* e os pontos de *F',* com a seguinte propriedade:
> Se *X, Y* são pontos quaisquer de *F* e *X'* = σ(X), *Y'* = σ (*Y) são seus correspondentes e F' então* $\overline{x'y'} = r.\ \overline{XY}$.
> A correspondência biunívoca *σ: F →F',* com esta propriedade de multiplicar as distâncias pelo **fator constante *r*[73]**, chama-se uma *semelhança de razão r*, entre *F* e *F'.* Se *X'* = σ(X), diz-se que os pontos *X, Y são homólogos* (LIMA, 1991, p. 33, grifo nosso).

Em virtude da variedade de modelos epistemológicos para proporcionalidade, que identificamos nos textos acadêmicos, decidimos por organizá-los em um quadro para uma melhor análise, que dispomos no Quadro 7 com os MEEP, os nichos e os *habitats*.

[73] Entendemos *fator constante r*, como fator de proporcionalidade r.

Quadro 7 – MEEP, nicho ecológico e *habitat*

	MEEP	*HABITAT* COMUNIDADE DE SABERES	NICHO ECOLÓGICO (SETOR – TEMA)
1	SE Y = KX OU Y/X = K; SE Y = K/X OU XY = K (ÁVILA, 1986)	ÁLGEBRA	FUNÇÃO Função Linear
2	Y = MX **(**POST, BEHR E LEHS,1995)	ÁLGEBRA	FUNÇÃO Função Linear
3	A função linear, dada pela fórmula *f*(x) = ax, é o modelo matemático para os problemas de proporcionalidade (LIMA, 1997)	ÁLGEBRA	FUNÇÃO Função Linear
4	Y = k · x (GARCIA, 2005)	ÁLGEBRA	FUNÇÃO Função Linear Proporcionalidade direta
5	x. y = k, ou, y = k / x = k . x -1 (GARCIA, 2005).	ÁLGEBRA	FUNÇÃO Função exponencial Proporcionalidade inversa
6	Uma proporcionalidade (numérica) é uma função f: R+ → R+ com as seguintes propriedades: *f* é uma função crescente, isto é, x < x’⇒ f (x) < f (x’) para quaisquer x, x’ ∈ R+. Para todo x ∈ R+ e todo n∈ N tem-se f (nx) = n . f (x) (LIMA, 2010)	ÁLGEBRA	FUNÇÃO Função Linear
7	Se x → y e x’ → y’, então, x < x’ implica y < y’; e, se x → y então nx → ny, para todo n ∈ N (LIMA, 2010)	ÁLGEBRA	PROPORCIONALIDADE
8	*Y* é inversamente proporcional a x então tem-se y = a/x, onde o fator de proporcionalidade a é o valor de y que corresponde a x = 1 (LIMA, 2010, p. 8-9)	ÁLGEBRA	PROPORCIONALIDADE Inversa
9	A igualdade y1/x1 = y2/x2 chama-se de proporção Lima (2010)	ÁLGEBRA	PROPORCIONALIDADE Proporção
10	Ao problema que consiste em, conhecendo três dos números x1, x2, y1, y2, determinar o quarto (LIMA, 2010)	ÁLGEBRA	PROPORCIONALIDADE Quarta proporcional Regra de três
11	A igualdade $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, é equivalente ao conjunto das seguintes implicações lógicas: Se para m, n inteiros, mA > nB, então, mC . nD. Se para m, n inteiros, mA = nB, então, mC = nD. Se para m, n inteiros, mA < nB, então, mC < nD. (BELLEMAIN, 2002)	GRANDEZAS	POPORÇÃO Grandezas Proporcionalmente Direta Inversa
12	A noção de semelhança corresponde à ideia natural de “mudança de escala”, isto é, ampliação ou redução de uma figura alterando seu tamanho sem modificar suas proporções (LIMA, 1991)	GEOMETRIA	SEMELHANÇA
13	σ: F →F’, que é uma semelhança de razão 1 (LIMA, 1991)	GEOMETRIA	SEMELHANÇA Função identidade

Fonte: Elaborado pela autora.

Nos modelos epistemológicos esboçados para proporcionalidade, percebemos que a ideia de fator de proporcionalidade é representado ora pela letra “*k”,* ora pela letra “*a*”; em ambos os casos, entendemos esses modelos fazem uso de expressões diferentes, porém dando a mesma conotação para a representação algébrica da proporcionalidade, enquanto função linear.

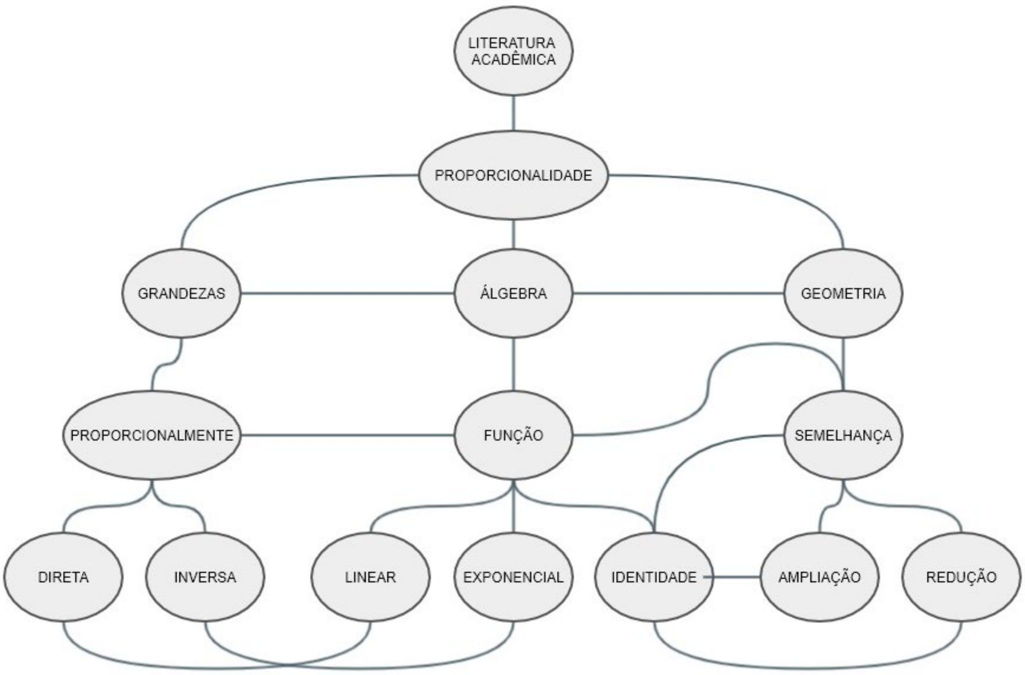
Observamos que "Teorema Fundamental da Proporcionalidade" é descrito pelo modelo da função linear, função f: R → R definida por $f(x) = ax$, onde $a \in$ R é uma constante.

Podemos concluir que, quanto ao *habitat* e nichos ecológicos, proporcionalidade tem *habitat* no comunidade de saberes da álgebra com o nicho ecológico no estudo da função linear; tem *habitat* no comunidade de saberes das grandezas e que o nicho ecológico se revela no estudo das grandezas proporcionalmente diretas e proporcionalmente inversas, podendo ainda se articular a função linear e função exponencial; e tem *habitat* no comunidade de saberes geometria com o nicho ecológico no estudo da semelhança, podendo se articular com a função identidade.

Em virtude dos modelos epistemológicos revelados, entendemos que a razão de ser da proporcionalidade na literatura acadêmica se dá pelo reconhecimento de sua importância para o estudo da *função*, das grandezas proporcionalmente direta e proporcionalmente inversas, e da semelhança, além do reconhecimento dos diversos usos sociais que são feitos com o objeto de saber proporcionalidade.

A teia alimentar ilustrada pela Figura 13 expressa as relações entre proporcionalidade reveladas pela literatura acadêmica e que passa a compor o nosso MERP, a partir do qual analisaremos os modelos epistemológicos dominantes presentes nos RC e nos LD.

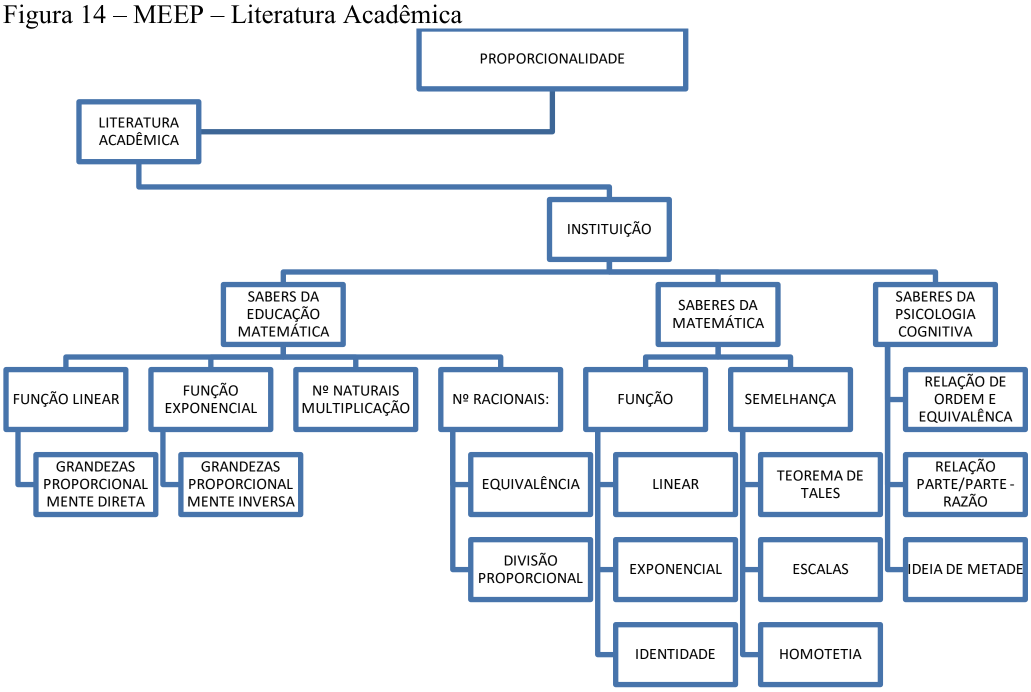
Figura 13 – Modelo Epistemológico Esboçado para Proporcionalidade (MEEP)



Fonte: Elaborada pela autora.

A partir do filtro da proporcionalidade, identificamos razão de ser do objeto de saber proporcionalidade na literatura acadêmica. Esboçamos nos âmbitos das instituições estudadas Saberes da Educação Matemática, Saberes da Matemática e Saberes da Psicologia Cognitiva e filtramos seguinte o MEEP ilustrado pela Figura 14, a seguir.

Figura 14 – MEEP – Literatura Acadêmica



Fonte: Elaborada pela autora.

Passamos, agora, ao segundo ponto do filtro da proporcionalidade, que é o das praxeologias matemáticas. Nesse sentido, questionamo-nos: quais os tipos de tarefas e técnicas relacionadas à proporcionalidade? Como são justificadas as técnicas na produção acadêmica? Em que ponto se revela a razão de ser proporcionalidade nas OM?

3.2 ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA (OM) DO OBJETO DO SABER PROPORCIONALIDADE

Para nossa análise da organização matemática (OM) nos textos acadêmicos, partimos dos questionamentos associados aos tipos de tarefas: os problemas que envolvem proporcionalidade são bem identificados, representativo, pertinentes e têm razão de ser? E, associados às técnicas: as formas de resolver os problemas são bem elaboradas ou apenas esboçadas? São fáceis de utilizar, confiáveis e possíveis de evoluir?

Antes de esboçarmos o conteúdo deste tópico do texto, acrescentamos mais dois conceitos dentro do arcabouço da ecologia didática que estamos estudando. Reportamo-nos aos conceitos de população e comunidade de saberes.

Na análise das praxeologias matemáticas realizadas nos textos acadêmicos, referirmo-nos ao conjunto de todos os tipos de tarefa de um determinado saber como uma população de saberes. Por exemplo: todos os tipos de tarefas de proporcionalidade da comunidade de saberes da álgebra formam uma população de saberes. Os tipos de tarefa de função também vivem nessa comunidade de saberes, mas fazem parte de outra população, pois são saberes distintos. Na álgebra, portanto, há população de tipos de tarefa de proporcionalidade, população de tipos de tarefas de função e várias populações de diferentes saberes.

No mesmo sentido, para todos os saberes de um determinado lugar que mantêm relações entre si formam chamaremos de comunidade de saberes. Seguindo o exemplo anterior, significa dizer que todas as populações da álgebra formam uma comunidade de saberes.

Um ponto que vale ser salientado diz respeito ao referencial teórico dos textos que serviram de nosso objeto de estudo. Esses textos não utilizaram necessariamente o referencial teórico metodológico da TAD. O trabalho de identificar as organizações matemáticas localizando os possíveis tipos de tarefa, técnicas, tecnologias e teorias presentes, fez parte da nossa construção dos dados. Sobre essa organização matemática é o que trataremos a seguir.

3.2.1 Bloco do saber /fazer – tipos de tarefas e técnicas alusivas à proporcionalidade

No tópico anterior, elencamos os MEEPs que identificamos na análise da produção acadêmica. Esses modelos serão tomados como possíveis técnicas, para a resolução de diferentes tipos de tarefas envolvendo proporcionalidade.

Mas outras técnicas poderão ser mobilizadas no momento de resolução de determinado tipo de tarefa de proporcionalidade, pois, como observamos, a teia alimentar em torno desse saber é bastante eclética, envolvendo diferentes comunidade de saberes. Nas relações tróficas – teia alimentar, assim como na cadeia alimentar –, podemos agrupar os organismos em diferentes níveis tróficos, ou seja, podemos agrupar os seres que possuem os hábitos alimentares semelhantes.

As diferentes organizações matemáticas globais, regionais, locais e pontuais formam uma teia alimentar responsável pela manutenção da vida da proporcionalidade, no ecossistema matemática. Na teia alimentar, podemos agrupar as organizações matemáticas pontuais para proporcionalidade (OMPp) em diferentes níveis tróficos, ou seja, podemos agrupar as OMPp pelos hábitos alimentares na escala dos níveis de codeterminação. Nos diferentes domínios, os diversos papéis ocupados pela OMPp, nas várias cadeias alimentares, formarão os nichos ecológicos do saber, ou seja, quando em determinada OMPp proporcionalidade é objeto de estudo ou serve de organismo para o estudo de outro saber.

Nas OMPp, dependendo do hábito alimentar, diferentes técnicas podem ser mobilizadas a depender do tipo de tarefa indicado. Vimos que os modelos esboçados – MEEPs (ÁVILA, 1986; GARCIA, 2005; POST; BEHR; LEHS, 1995; LIMA, 1997; 2010) recorrem à função linear; (GARCIA, 2005) apelam para função exponencial – proporcionalidade inversa. Lima (2010) aborda as proporções explicada pela igualdade de duas razões e apresenta regra de três com a ideia de quarta proporcional. Já Bellemain (2002) apresenta proporção como igualdade entre razões, enquanto Lima (1991) aponta semelhança como a ideia natural de mudança de *escala* e destaca semelhança identificada pela função identidade.

Vários autores evidenciam que proporcionalidade tem sido objeto de estudo e que há registro de uma variedade de tipos de tarefas, mas que, de maneira geral, podem ser divididos em dois agrupamentos: tarefas de valor ausente e tarefas de comparação (SPINILLO, 2002; POST; BEHR; LEHS, 1995; TOURNIAIRE; PULOS, 1985).

3.2.1.1 Tipos de tarefas e técnicas

Iniciamos este ponto nos perguntando: os tipos de tarefa observados na literatura acadêmica que envolvem proporcionalidade são bem identificados? São representativos? São pertinentes? Têm razão de ser? Existe uma população de tipos de tarefas de proporcionalidade nas diferentes comunidades de saberes da matemática do Ensino Fundamental?

Pretendemos, a partir de agora, apresentar quadros organizados com os tipos de tarefas relacionados ao saber proporcionalidade, partindo de um agrupamento por gênero, quando possível. Em seguida, traremos exemplos de tipos de tarefas envolvendo proporcionalidade e possíveis técnicas usadas na sua resolução.

Os tipos de tarefa são descritos por um verbo de ação e um complemento, por exemplo: identificar valores desconhecidos, antecipar valores e comparar quantidades. As tarefas são ações mais simples, em decorrência de um determinado tipo de tarefa. As técnicas são ações empreendidas para a resolução de determinado tipo de tarefa, e essas ações podem ser algoritmizáveis ou não. Identificamos, principalmente, tipos de tarefas do gênero comparar, estimar, calcular e determinar atinente ao saber proporcionalidade.

Os tipos de tarefas (T), do gênero comparar (por exemplo: comparar quantidades, nas quais duas razões/taxas são dadas e pede-se não por uma resposta numérica, mas uma comparação entre razões ou taxas) são presentes na literatura acadêmica. Apresentamos, a seguir, o Quadro 9, no qual relacionamos quatro tipos de tarefas, do gênero comparar, como exemplo de (T), presentes na literatura acadêmica.

Quadro 8 – Tipo de tarefa do gênero comparar

Tipo de tarefa	
T_1	Comparar razões entre grandezas
T_2	Comparar valores de grandezas de diferentes quantidades
T_3	Comparar diferentes tamanhos

Fonte: Elaborado pela autora.

Na literatura acadêmica, como salientamos, é recorrente o uso de problemas de comparação para trabalhar como proporcionalidade direta. Foram identificados diversos tipos de tarefa de comparação nos estudos de Post, Behr e Lehs (1995), Spinillo (2002), Bem-Chaim, Ilany e Keret (2008), Tinoco, Portela, Silva e Maia (2011), Silvestre e Ponte (2012), Rivas, Gondino e Castro (2012) e Livy e Herbert (2013), entre outros. A seguir, apresentamos alguns exemplos.

T_1 – Comparar razões entre grandezas.

Em Livy e Herbert (2013), encontramos um exemplo do T_1, realizando comparação entre a o desenvolvimento populacional de gatos selvagens em duas reservas diferentes.

> Por exemplo, “35 gatos selvagens foram encontrados em uma reserva natural de 146 hectares, enquanto 27 gatos selvagens foram encontrados em uma reserva de 103 hectares. Qual reserva teve o maior problema de gatos selvagens?” (Siemon, 2005, p. 2)[74] (LIVY; HERBERT, 2013, p. 4).

Observamos nesse problema de comparação, o qual trabalha com grandezas discretas, que duas quantidades discretas diferentes são consideradas e comparadas. A técnica seria verificar qual o fator de proporcionalidade é maior. 35/146 = 0.238; 27/103 = 0233. Uma questão interessante a ser posta é: o que corresponde a esses números? A diferença será de quantos gatos? No exemplo a seguir, também se refere ao tipo de tarefa T_1 – Comparar razões entre grandezas.

[74] “For example, ‘35 feral cats were found in a 146 hectares nature reserve whilst 27 feral cats were found in a 103 hectares reserve. Which reserve had the biggest feral cat problem?’” (SIEMON, 2005, p. 2).

> Foi feito um teste sobre a preferência entre os refrigerantes BOLA-COLA e COLA-NOLA e chegou-se aos seguintes resultados: A razão entre aqueles que preferem BOLA-COLA a COLA-NOLA é de 3 para 2. A quantidade dos que preferem BOLA-COLA a COLA-NOLA está na razão de 17.139 para 11.426. O grupo dos que preferem BOLA-COLA a COLA-NOLA tem 5.713 pessoas a mais. Pergunta-se: as três afirmações acima resultaram do mesmo teste? Explique! Qual afirmação descreve de modo mais adequado os resultados da comparação entre BOLA-COLA e COLA-NOLA? Explique! Se você precisasse divulgar os resultados, qual afirmação acima pareceria mais adequada? Por quê? Sugira outros modos possíveis de comparar as preferências e a popularidade entre dois tipos de refrigerantes[75] (BEN-CHAIM; ILANY; KERET, 2008, p. 155).

Na realidade, as três afirmações estão corretas, pois, na primeira e segunda questão, temos a razão de proporcionalidade igual a 1,5. Na terceira questão, 5.713 corresponde à diferença entre os dois valores. Nessa tarefa, foi usada como motivação uma pesquisa de mercado sobre a preferência entre dois diferentes refrigerantes. Observamos no texto dos autores que uma possível técnica para o T_1 seria os alunos compararem as razões, aplicarem as propriedades e encontrarem uma determinada parte de um todo ou, dado o todo, encontrarem dele uma parte. Percebemos que as tarefas resultantes dos questionamentos realizados em T_1 mostram que a apresentação de resultados de pesquisa, fazendo uso da razão $\frac{3}{2}$, ou da expressão "3 para 2", torna-se mais econômico e inteligível para o leitor do que fazendo uso dos valores absolutos.

"Se Nicki, ao correr, desse menos voltas na pista e gastasse mais tempo que ontem, sua velocidade seria maior, menor, igual, ou impossível de dizer? (E quanto a menos voltas em tempo menor?)" (POST; BEHR; LEHS, 1995, p. 90). Esse exemplo do tipo de tarefa T_1, não apresenta necessidade de valores específicos para a realização da comparação.

> Neste tipo de situação, o raciocínio qualitativo exige a capacidade de interpretar o significado das duas taxas, guardar essa informação e então comparar as interpretações com alguns critérios predeterminados. [...] Esse processo requer um raciocínio comparativo em níveis múltiplos, bastante diferente de uma abordagem algorítmica, em que se usa uma regra para resolver problemas prognosticáveis, por caminhos predeterminados (POST; BEHR; LEHS, 1995, pp. 90-91).

Uma possível técnica para solucionar o problema enunciado no tipo de tarefa T_1 seria "[...] interpretar o significado das duas taxas, guardar essa informação e então comparar as interpretações com alguns critérios predeterminados" (POST; BEHR; LEHS, 1995, p. 90).

Outro exemplo para o tipo de tarefa T_2, agora envolvendo comparação numérica: "Mary comprou 4 disquetes por \$ 3,60. Joana comprou 5 disquetes idênticos por \$ 4,25. Qual

---

[75] Ver atividade original nos anexos.

delas fez compra melhor?" (POST; BEHR; LEHS, 1995, p. 96). Uma possível técnica para a resolução desse tipo de tarefa recorre ao uso da taxa unitária.

> Note-se que para esse problema é natural o raciocínio "quanto por um". Dois cálculos simples (divisões) produzirão duas taxas unitárias que, então, poderão ser comparadas facilmente. Joana fez a compra melhor, pois pagou $0,85 por disquete, enquanto Mary pagou $ 0,90 por disquete. O método de taxa unitária pode ser usado com eficácia e é uma maneira natural de lidar com todos os problemas de comparação numérica (POST; BEHR; LEHS, 1995, p. 96).

Outro problema de comparação entre grandezas: "Se num supermercado uma caixa com 400 g de sabão custa R$ 3,00 e outra caixa com 200g do mesmo sabão custa R$ 2,00, que tipo de caixa é mais vantajoso comprar?" (TINOCO; PORTELA; SILVA; MAIA, 2011, p. 5). Observa-se que uma possível técnica de resolução, além da análise qualitativa que deve ser posta na realização do problema, seria calcular o fator de proporcionalidade e realizar a comparação deles.

T_2 – comparar valores de grandezas de diferentes quantidades.

Como exemplo para esse tipo de tarefa, pode-se "[...] apresentar para o aluno uma jarra contendo uma bebida preparada com dois copos de concentrado de laranja e dois copos de água. Uma outra jarra contendo três copos de concentrado de laranja e três copos de água. E perguntar: Qual delas tem o gosto mais forte de laranja, ou elas têm o mesmo gosto?" (SPINILLO, 2002. p. 476).

Uma possível técnica para resolver esse problema seria: "[...] a criança pode, inicialmente, estabelecer uma relação entre o número de copos de concentrado de laranja e de água em cada jarra" (SPINILLO, 2002. p. 476). Ou seja, realizar a comparação entre a capacidade da primeira jarra: 4 copos (2 copos de concentrado para 2 copos de água; 2:2) e a capacidade da segunda jarra: a de 6 copos (3 copos de concentrado para 3 copos de água; 3:3).

Um exemplo de tipo de tarefa T_2, aplicadas com alunos do 6º do Ensino Fundamental, como pode ser observado na Figura 17, a seguir.

Figura 15 – Tipo de tarefa T_3 – Problema do suco de cenoura

Para o lanche é preciso fazer sumo de cenoura. O Barnabé tinha as receitas A, B e C.

	Concentrado de cenoura (ml)	Água (ml)
Receita A	100	600
Receita B	250	1000
Receita C	320	1920

a) Qual é o sumo que sabe mais a cenoura?

Resposta do grupo de Dário:

razões 600 : 100 = 6
1000 : 250 = 4
1920 : 320 = 6

R: As que tenhem a maior sabor a cenoura são o A e a C
ambas tenhem uma razão de 6

Figura 5 – Problema da ficha de trabalho 4 e resposta de um grupo da turma B

Fonte: Silvestre e Ponte (2012, p. 19).

Os estudantes deveriam comparar as quantidades dispostas em uma tabela e apresentar o resultado de suas análises, apontando em qual das receitas a quantidade de suco de cenoura era maior. A técnica usada foi do cálculo do fator de proporcionalidade.

Outro exemplo para o tipo de tarefa T_2: “[...] crianças entre 5 e 11 anos eram solicitadas a determinar qual dentre dois recipientes com água era o mais cheio ou se ambos estavam igualmente cheios. Recipientes de variados tamanhos e com quantidades diferentes de água eram apresentados aos pares” (SPINILLO, 2012, p. 476).

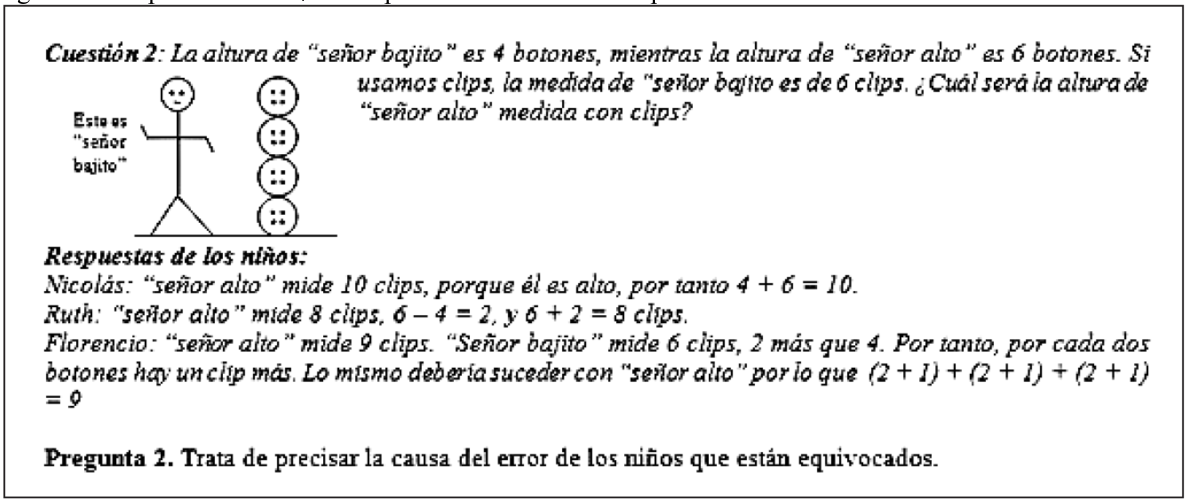
Como uma possível técnica, “[...] os estudantes poderiam manipular os recipientes ou apenas realizar observações para determinar qual dos dois recipientes estava mais cheio ou se ambos estavam igualmente cheios, justificando suas respostas” (SPINILLO, 2002, p. 478).

O estabelecimento de comparações entre o espaço vazio e o espaço ocupado pela água em cada recipiente e comparar essas relações nos dois recipientes seria uma possibilidade de justificativa de uso da técnica visando estabelecer a diferença entre quantidade relativa e absoluta à teoria em questão.

T_3 – Comparar diferentes tamanhos.

Analisamos em Rivas, Gondino e Castro (2012) outro tipo de tarefa de comparação de quantidades, aplicado a professores que trabalhavam com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental.

Figura 16 – Tipo de tarefa T_4 – Comparando com botões e clipes


Cuestión 2: La altura de "señor bajito" es 4 botones, mientras la altura de "señor alto" es 6 botones. Si usamos clips, la medida de "señor bajito es de 6 clips. ¿Cuál será la altura de "señor alto" medida con clips?

Este es "señor bajito"

Respuestas de los niños:
Nicolás: "señor alto" mide 10 clips, porque él es alto, por tanto 4 + 6 = 10.
Ruth: "señor alto" mide 8 clips, 6 – 4 = 2, y 6 + 2 = 8 clips.
Florencio: "señor alto" mide 9 clips. "Señor bajito" mide 6 clips, 2 más que 4. Por tanto, por cada dos botones hay un clip más. Lo mismo debería suceder con "señor alto" por lo que (2 + 1) + (2 + 1) + (2 + 1) = 9

Pregunta 2. Trata de precisar la causa del error de los niños que están equivocados.

Figura 1 - La tarea

Fonte: Rivas, Gondino e Castro (2012).

A atividade consistia em comparar a altura de dois "senhores". Em um primeiro momento, são usados botões para se expressar os tamanhos e, em seguida, utiliza-se uma nova unidade de medida (clipes), para realizar as comparações. A técnica a ser utilizada fará uso do cálculo do fator de proporcionalidade, requer raciocínio qualitativo, exigindo a capacidade de interpretação das duas razões armazenar essa informação e, então, comparar as interpretações.

Quadro 9 – Tipo de tarefa do gênero estimar

Tipo de tarefa	
T_4	Estimar o valor da densidade de determinado conjunto.

Fonte: Elaborado pela autora.

T_4 – Estimar o valor da densidade de determinado conjunto.

Um exemplo para o tipo de tarefa T_4 consiste em fazer uma estimativa no trabalho com grandezas discretas.

> Os alunos recebem um saquinho com uma quantidade (desconhecida) de feijões brancos e um copo com um determinado número de feijões pretos. Os alunos misturam os feijões e então, por amostragem ou usando procedimentos de contagem, devem fazer uma estimativa da quantidade de feijões brancos no saquinho (BEN-CHAIM; ILANY; KERET, 2008, p.135).

Percebemos que o problema já direciona para uma possível técnica de resolução. Os estudantes podem misturar os feijões e, então, por amostragem ou usando procedimentos de contagem, podem fazer uma estimativa da quantidade de feijões brancos no saquinho.

Estimar o número de pessoas, presentes numa grande concentração, ou o número de pássaros ou qualquer outro animal numa determinada área, é o contexto usado para exemplo para o tipo de tarefa T_4. Os autores entregaram aos estudantes um problema no qual havia uma imagem de uma concentração de pessoas em determinado espaço, seguido do comando.

> Usualmente, os jornalistas gostam de estimar o número de pessoas envolvidas em manifestações e desfiles. Consideremos um exemplo: uma manifestação política foi noticiada num programa de televisão. O jornalista juntou-se à multidão e declarou: "A praça está cheia de manifestantes. Pelo menos 200.000 pessoas estão aqui e nas ruas próximas". Ao mesmo tempo, um outro jornalista, numa emissora de rádio, divulgava: "A Polícia anunciou que 100.000 pessoas participam da manifestação e que a ordem está sendo mantida".
> Responda as seguintes questões:
> a. Por que, se ambos os jornalistas estavam no mesmo local, relatando o mesmo acontecimento, houve uma diferença significativa em relação à estimativa do número de pessoas presentes à manifestação?
> b. Em sua opinião, como os jornalistas fizeram as estimativas sobre o número de pessoas presentes na manifestação?
> c. Sugira um método com o qual os jornalistas obteriam uma melhor estimativa do número de pessoas presentes na manifestação[76].(BEN-CHAIM; ILANY; KERET, 2008).

Observamos que, nesse Tipo de tarefa T_4, a expressão "[...] estimar o valor da densidade de determinado conjunto" já direciona implicitamente a técnica para a resolução que é a realização da estimativa do valor da densidade demográfica, que corresponde à distribuição da população em determinada área. Poderia se tomar a medida da área da praça, estimar um valor de pessoas por metro quadrado e por estimativa, por exemplo, 10 pessoas para cada m^2, e chegar a um valor mais próximo da quantidade de pessoas.

Quadro 10 – Tipo de tarefa do gênero calcular

Tipo de tarefa	
T_5	Calcular **a divisão proporcional**.
T_6	Calcular **o fator escalar** entre diferentes grandezas.
T_7	Calcular **o fator escalar** em um gráfico.
T_8	Calcular **com porcentagem**.
T_9	Calcular a **quotização proporcional**.
T_{10}	Calcular **a proporção** entre diferentes grandezas.

Fonte: Elaborado pela autora.

T_5 – Calcular a divisão proporcional.

Situações de divisão proporcional "[...] são aquelas situações em que você trabalha com uma série de quantidades de grandezas que são comparadas entre si para determinar seu comportamento, seja em relação a outra série de quantidades de grandezas ou a uma série de

[76] Ver atividade original nos anexos.

números[77]" (ORDOÑEZ, 2013, p. 75). Para esse tipo de tarefa T_5, trazemos um problema que consiste no conceito de "[...] razão, isto é, uma comparação multiplicativa entre quaisquer duas quantidades de mesma natureza ou não" (LAMON, 2006; CYRINO et al., 2014).

> Dois pastores possuem 9 pães: o primeiro tem 4, e o segundo, 5. Aparece um caçador esfomeado e os três dividem entre si igualmente os 9 pães. O caçador paga sua parte, dando 8 moedas ao primeiro pastor e 10 ao segundo. Um dos pastores reclama desse pagamento, achando injusta a distribuição das moedas, dizendo que deveria receber mais do que recebeu. Quantas moedas cada um deve receber? (BORTOLOTI; BARBOSA, 2018, p. 9).

É possível observar outra técnica para o tipo de tarefa T_5, usando a divisão proporcional

> Se eles dividiram em partes iguais, cada um comeu 3 pães; logo, o que tinha 5 deu 2 pães e o que tinha 4 pães deu 1 pão. Como o total de moedas pagas por 3 pães foi 18, cada pão custou 6 moedas; logo, quem deu um pão deveria receber 6 moedas e o segundo, 12 moedas, mantendo a proporção de ½, utilizada na entrega dos pães (BORTOLOTI; BARBOSA, 2018, p. 9).

Identificamos também outra técnica para o tipo de tarefa T_5: "[...] seria mais justo dar ao primeiro pastor 1 parte das 18 moedas enquanto o outro receberia duas partes. Assim, 1º) 1/3 de 18 e 2°) 2/3 de 18. Logo: 1º pastor 6 Moedas e o 2°, 12 moedas" (BORTOLOTI; BARBOSA, 2018, p. 9). Recorrendo à razão 2 para 1.

T_6 – Calcular o fator escalar entre diferentes grandezas.

Para exemplificar o tipo de tarefa T_6 – Calcular o fator escalar entre diferentes grandezas, tomamos uma atividade apresentada por (MELO, 2004).

[77] "Son aquellas situaciones en las que se trabaja con una serie de cantidades de magnitud que se comparan entre sí para determinar su comportamiento, ya sea con respecto a otra serie de cantidades de magnitud o de una serie de números".

Figura 17 – Tipo de tarefa T_6 – Fator escalar

A fotografia abaixo representa uma ampliação de um pequeno circuito elétrico.

Na fotografia, esse circuito de forma retangular tem 3cm de comprimento e 1,8 cm de largura. O comprimento real do circuito é de 1,8mm. Qual a largura real do circuito? Justifique sua resposta.

Fonte: Melo (2004).

Do ponto de vista de uma técnica para a $T_{6,}$ ao calcular o fator escala entre os comprimentos do circuito ampliado (3 cm ou 30mm) e o comprimento do circuito real (1,8 mm ou 0,18cm), teríamos o fator escalar de aproximadamente 16,6 mm. Logo, dividindo a largura real do circuito (1,8cm ou 18mm) pelo fator escalar (1,66 cm ou16,6 mm), encontraria o valor de aproximadamente 1,08mm.

Outro exemplo para o tipo de tarefa T_6 cita um problema proposto por Vergnaud (1981), "[...] tenho 3 pacotes de yogurt. Existem 4 yogurt em cada pacote. Quanto tenho de yogurt?[78]" (VERGNAUD, 1998, p. 164 apud MOHAMED EL-ASSADI, 2008, p. 47). O autor esclarece a técnica com a utilização do fator escalar.

> Com o operador escalar, procuramos a proporção entre quantidades da mesma natureza. Podemos aplicar um operador escalar "x3" que faz o link entre 1 pacote e 3 pacotes para encontrar a quantidade de iogurte associada a 3 pacotes, ou seja, 4 x 3 = 12 = x[79] (MOHAMED EL-ASSADI, 2008, p. 37).

Percebemos que, embora não esteja explicito no enunciado da questão "calcular o fator ou operador escalar", a tarefa pode naturalmente ser resolvida com a técnica do fator escalar por não demandar de conhecimentos algébricos aprofundados. Nesse caso, pode ser utilizada "[...] a propriedade de homogeneidade da função linear, $f(\alpha x) = \alpha\ f(x)$. $\alpha \in Q^{+}$" (BELLEMAIN, 2012, p. 119).

T_7 - Calcular o fator escalar em um gráfico.

Encontramos em textos de educação matemática direcionado ao estudo do tratamento da informação que

[78] «J'ai 3 paquets de yaourts. Il y a 4 yaourts dans chaque paquet. Combien ai-je de yaourts?».

[79] «Avec l'opérateur scalaire, nous cherchons le rapport entre des quantités de même nature. On peut appliquer un opérateur scalaire «x3 » qui fait le lien entre 1 paquet et 3 paquets pour trouver la quantité de yaourts associée à 3 paquets, soit 4 x 3 = 12 = x».

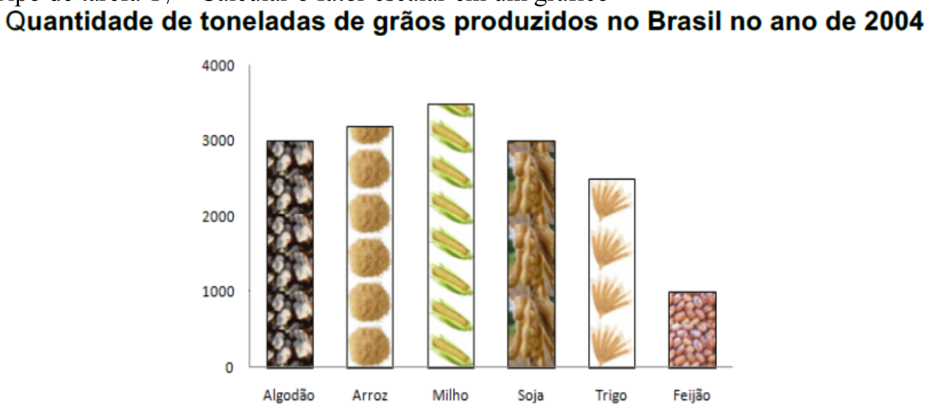
> [...] na construção de um gráfico a **primeira tarefa** importante que temos que realizar é uma escolha conveniente do intervalo da escala e para isso precisamos analisar o tamanho do papel, identificar os valores máximos e mínimos das grandezas que serão representadas e, a partir dessas dimensões, **calcular a escala que permita ocupar o espaço disponível** (VANIN, 2009, apud CAVALCANTI; GUIMARÃES, 2019, p. 7, grifos nossos).

A primeira tarefa, do tipo de tarefa T_7 – Calcular o fator escalar em um gráfico seria “uma escolha conveniente do intervalo da escala” adequado ao espaço que se tem no papel.

> Em seguida precisamos fazer a divisão da escala de modo a localizar e marcar os pontos facilmente, bem como permitir uma leitura posterior de valores a partir do gráfico, mas é imprescindível que os espaços entre os intervalos das escalas sejam proporcionais (CAVALCANTI; GUIMARÃES, 2019, p. 7).

Em estudos sobre escalas expressas em gráficos, os estudantes tendem ao erro quando a tarefa solicitada remete a uma situação em que o valor da escala está implícito no gráfico. Podemos observar na figura a seguir um exemplo desse tipo de tarefa.

Figura 18 – Tipo de tarefa T_7 – Calcular o fator escalar em um gráfico



a) Qual a quantidade de trigo produzida no Brasil? ____________________ (Localizar frequência a partir da categoria de valor **implícito** na escala)	b) Qual a quantidade de feijão produzido no Brasil? ____________________ (Localizar frequência a partir da categoria de valor **explícito** na escala)

Figura 6 – Atividades envolvendo valor explícito ou implícito

Fonte: Cavalcanti (2010, p. 40)

Observamos que o intervalo proporcional na escala era de 1000 toneladas e que, na questão “a”, o estudante deveria calcular o fator escalar no gráfico para responder à questão.

T_8 – Calcular com porcentagem.

Para esse tipo de tarefa T_8 – Calcular com porcentagem:

> Há uma ressalva a esse fato: o trabalho com porcentagens. Em princípio, são propostas duas técnicas para calcular uma porcentagem de uma quantidade: a “regra dos três” e a “redução à unidade”. Desta última, os autores observam que calcular z% é equivalente à multiplicação pelo operador (escalar) z / 100, que eles não identificam como “constante de proporcionalidade”, mas usam como técnica para calcular aumentos e diminuições percentuais (técnica $\tau \frac{SL}{ma1}$)[80] (GARCIA, 2005, p. 295).

A dificuldade de estudantes, tanto do Ensino Fundamental como do Ensino Médio, em resolver problemas com porcentagem reside na não aprendizagem do conceito de proporcionalidade.

> Os diferentes estudos em matemática e ciências da educação, bem como as avaliações, mostram a frequente falta de sucesso no projeto de apropriação da proporcionalidade entre os alunos do ensino fundamental ao ensino médio. Lacunas resilientes na multiplicação, falta de entendimento sobre questões de proporcionalidade e não proporcionalidade e extrema dificuldade nos cálculos percentuais são todos sinais das dificuldades envolvidas na aprendizagem do conceito de proporcionalidade[81] (VOISIN, 2013, p. 7).

Recorremos ao problema do cálculo de percentual de estudantes para exemplificar o tipo de tarefa T_8: “Dos 40 alunos de uma turma do Ensino Fundamental, 26 são do sexo feminino. Qual é o percentual dos alunos do sexo masculino?” (BORTOLOTI; BARBOSA, 2018, p. 279). Do ponto de vista da técnica para o tipo de tarefa T_8, “[...] todas as situações que envolvem porcentagem podem ser resolvidas com o uso de proporções e de uma estrutura conceitual essencialmente idêntica” (POST; BEHR; LEHS, 1995, p. 92). Os autores ainda colocam que “A porcentagem é um tipo particular de taxa. Nesse caso, o denominador do par-taxa é sempre 100” (POST; BEHR; LEHS, 1995, p. 92). Os mentores, inclusive, citam três exemplos de porcentagens que podem ser resolvidos pela proporcionalidade entre as razões.

> (1) Jessica fez 85 pontos num teste de 115 pontos. Qual a porcentagens de acertos? (85/115 = x/100); (2) Se Jéssica acertou 74% de um teste de 115 questões, quantas questões acertou? (74/100 = x/115); ou (3) Jessica acertou 85 questões de um teste, totalizando 74% de acertos. De quantas questões se compunha o teste? (74/100 = 85x ou 85/74 – x/100) (POST; BEHR; LEHS, 1995, p. 92).

---

[80] “Existe una salvedad a este hecho: el trabajo con porcentajes. En principio, se proponen dos técnicas para calcular un porcentaje de una cantidad: la ‘regla de tres’ y la ‘reducción a la unidad’. De esta última, los autores observan que calcular un *z%* equivale a multiplicar por el operador (escalar) *z*/100, que no identifican como ‘constante de proporcionalidad’, pero que sí usan como una técnica para calcular aumentos y disminuciones porcentuales (técnica $SL_{ma1}\ \tau$)”.

[81] «Les différents travaux en didactique des mathématiques et en sciences de l'éducation tout comme les évaluations montrent l'inaboutissement fréquent du projet d'appropriation de la proportionnalité auprès des élèves de l'école élémentaire jusqu'au collège. Les lacunes résistantes sur la multiplication, la non compréhension des problèmes de proportionnalité et de non proportionnalité et l'extrême difficulté des calculs de pourcentages sont autant de signes qui montrent les difficultés liées à l'apprentissage de la notion de proportionnalité.»

As técnicas τ_1 e τ_2, elencadas para a resolução do problema que exemplifica o tipo de tarefa T_8, que foram apresentadas por professores que participaram dos estudos de Bortoloti (2016).

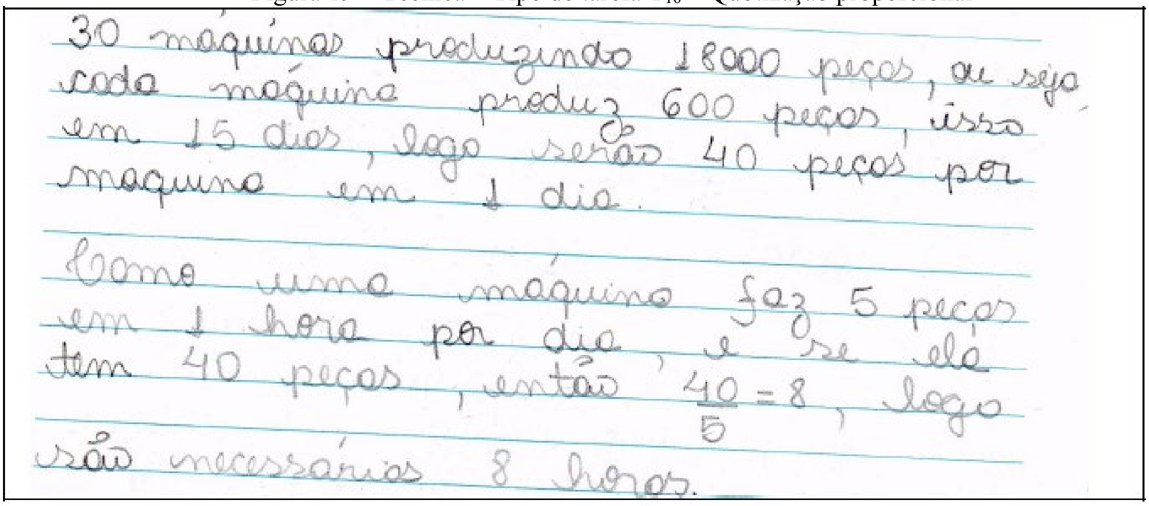
A técnica t_1: "Devemos dividir 100 por 40 e o resultado multiplicar por 14. Logo, $\frac{14\,.\,100}{40}$ = 35%" (BORTOLOTI, 2016, p. 69). E a técnica t_2: "k = 14/40 = 0,35, para estabelecermos o percentual basta multiplicarmos esse valor por 100, daí teremos 35%" (BORTOLOTI, 2016, p. 69).

Ao analisarmos cada técnica, observamos que a τ_1 possui, na realidade, duas possíveis formas de resolver o problema, que chamaremos de (τ_1a e τ_1b). Na primeira técnica (τ_1a), a operação indicada é a divisão ($\frac{100}{40} = \mathbf{2,5}$ x 14 = 35%). Na técnica τ_1b, recorre-se a uma multiplicação e uma divisão para a resolução do problema. Observamos que as técnicas envolvidas na resolução têm seu *nicho ecológico* essencialmente na aritmética. A técnica τ_2 recorre ao fator de proporcionalidade para calcular o percentual, k = $\frac{14}{40}$ = 0,35.

T_9 – Calcular a quotização proporcional.

Para esse tipo de tarefa T_{10}, faremos uso do problema: "Em uma fábrica, 25 máquinas produzem 15 000 peças de automóvel em 12 dias, trabalhando 10 horas por dia. Quantas horas por dia deverão trabalhar 30 máquinas para produzirem 18 000 peças em 15 dias?" (BORTOLOTI, 2016, p. 69). Tomamos como técnica, para o tipo de tarefa T_{10}, uma das resoluções apresentadas pela autora, ilustrada pela Figura 21, a seguir.

Figura 19 – Técnica – Tipo de tarefa T_{10} – Quotização proporcional



30 máquinas produzindo 18000 peças, ou seja cada máquina produz 600 peças, isso em 15 dias, logo serão 40 peças por maquina em 1 dia.

Como uma máquina faz 5 peças em 1 hora por dia, e se ela tem 40 peças, então $\frac{40}{5} = 8$, logo são necessárias 8 horas.

Fonte: Bortoloti (2016, p. 121).

A técnica utilizada no recorte foi a redução a unidade. Pode-se observar que, “[...] para saber o número de horas para a produção de 40 peças, ele estabeleceu uma relação de proporcionalidade com o número de peças produzidas em uma hora por máquina” (BORTOLOTI, 2016, p. 121). A técnica proposta vai “desmembrando” o problema em quotas, recorrendo ao valor unitário das grandezas envolvidas, a partir da proposição “como uma máquina faz 5 peças em l h [...]”. Mas como se chegou a essa proposição?

Então, voltando ao problema, e trabalhando com uma grandeza de cada vez, temos:

Peças por máquinas: produção de 25 máquinas, 1500 peças em 12 dias; produção de 01 máquina, 600 peças, em 12 dias (1800 : 30 = 600).

Peças por dia: em 12 dias, produz 600 peças; em 1 dia, produz 50 peças, (600 : 12 = 50).

Peças por horas: 1 dia (10h) produz 50 peças; 1 hora produz 5 peças (50 : 10 = 5).

Logo, partindo para a questão do problema “Quantas horas por dia deverão trabalhar 30 máquinas para produzirem 18 000 peças em 15 dias?”, teremos o mesmo raciocínio proporcional uma vez que já possui o número total de elementos de cada grupo (30 máquinas em 15 dias produzem 18000 peças; 1 máquina em 15 dias produz 600 peças, “logo serão 40 peças por máquina em um dia), fica precisando apenas encontrar o número de horas. Assim, “[...] como uma máquina faz 5 peças em 1 hora por dia, então $\frac{40}{5} = 8$, logo serão necessárias 8 horas” (BORTOLOTI, 2016, p. 121).

T_{10} – Calcular **a proporção** entre diferentes grandezas.

Se “[...] uma torneira enche um tanque em 6h. Uma segunda torneira enche em 10h. As duas juntas enchem o tanque em quanto tempo?” (BORTOLOTI, 2016, p. 72). O desenvolvimento a seguir remete a uma possível técnica para a resolução do tipo de tarefa T_{11}.

> As torneiras juntas enchem 4/15 da caixa em uma hora, daí o tempo *x* gasto pelas duas será de *x/1* x 4/15=1. $4x$=15. Logo, x=3,75$horas$, ou seja, 3horas e 45 min. Somar as vazões para, então, encontrarem a grandeza desconhecida – o tempo (representado pela letra x) que as duas torneiras levam para encher o tanque (BORTOLOTI; BARBOSA, 2018, p. 281).

Outro estilo de tipo de tarefa que identificamos na literatura acadêmica foi do gênero “determinar”, que organizamos no quadro a seguir.

Quadro 11 – Tipo de tarefa do gênero determinar

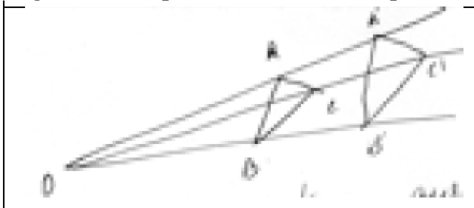
Tipo de tarefa	
T_{15}	Determinar **a igualdade** entre duas razões
T_{16}	Determinar qual dentre dois recipientes com água está **mais cheio**
T_{17}	Determinar **o tamanho** de diferentes retângulos

Fonte: Elaborado pela autora.

T_{15} – Determinar a igualdade entre duas razões.

O exemplo para o tipo de tarefa T_{15} habita a geometria e tem nicho ecológico na semelhança – homotetia e no teorema de Tales.

Figura 22 – Tipo de tarefa T_{15} – Proporcionalidade e geometria



$$\frac{2}{3} = \frac{1{,}5}{B'A'}$$

Fonte: Bortoloti e Barbosa (2018, p. 283).

"Dadas as semirretas $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$ e o triângulo equilátero ABC de lado 1,5 u.c. [unidade de comprimento], determinar as medidas do triângulo A'B'C' com AB//A'B' e CA//C'B', sabendo que OB = 2 e BB' = 1" (BORTOLOTI; BARBOSA, 2018, p. 283).

A técnica que descreve a resolução: "23 = 1,5 *B'A'* [...] *B'A'* = 4,52 =2,25 u.c. Como A'B'C' é equilátero, podemos afirmar que seus lados medem 2,25 u.c" (BORTOLOTI; BARBOSA, 2018, p. 284).

T_{16} – Determinar qual dentre dois recipientes com água é o mais cheio.

Utilizamos, para ilustrar o tipo de tarefa T_{16} a seguinte situação. "Determinar qual dentre dois recipientes com água é o mais cheio ou se ambos estão igualmente cheios" (SPINILLO, 2002, p. 477). Ao "[...] estabelecer comparação entre as relações de primeira-ordem entre si: a) água-volume total em cada recipiente (duas relações parte-todo); ou b) água-espaço vazio em cada recipiente (duas relações parte-parte)" (SPINILLO, 2002, p. 485), desenvolve-se o raciocínio proporcional de estudantes a partir dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

T_{17} – Determinar o tamanho de diferentes retângulos.

Levar as crianças a desenvolver o raciocínio proporcional a partir de tarefas que partam da construção de metade é uma atividade que retiramos da literatura acadêmica para exemplifica o tipo de tarefa T_{15}. "Qual dentre dois retângulos de papel (12cm x 16cm e 8cm x 12cm) divididos em uma parte preta e outra branca correspondia a um pequeno retângulo de papel (4cm x8cm), também dividido em uma parte preta e outra branca?" (SPINILLO, 2002, p. 479).

Como uma possível técnica, "podiam ser observados retângulos a) igualdade das partes; b) parte preta maior que a branca; e c) parte preta menor que a branca" (SPINILLO, 2002, p. 477). Entendemos que esse tipo de técnica contribui para o raciocínio proporcional qualitativo das crianças, oportunizando a formação de hábitos que possam vir a romper no futuro com a simples aplicação de técnica pela técnica.

Inicialmente, perguntamo-nos sobre a existência ou não de população de tipos de tarefas de proporcionalidade nas diferentes comunidades de saberes da matemática do Ensino Fundamental. Observamos que a comunidade do saber proporcionalidade é formada, na literatura acadêmica estudada, pelas populações dos tipos de tarefa (T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8, T_9, T_{10}, T_{11}, T_{15}, T_{16} e T_{17}) que vão permitir o desenvolvimento do raciocínio proporcional qualitativo bem como do raciocínio proporcional quantitativo.

Figura 23 – Comunidade do saber proporcionalidade nos textos acadêmicos

Fonte: Elaborada pela autora.

Portanto, a comunidade do saber proporcionalidade nos textos acadêmicos é formada pela população dos tipos de tarefa comparar (quantidades e tamanhos); estimar (valores); calcular (divisão proporcional, fator escalar, porcentagem, quotização e proporção); e determinar (igualdades, quantidades e tamanhos). Em todos os tipos de tarefas, observou-se a intenção de se estimular o raciocínio qualitativo.

3.2.2 Bloco do saber – tecnologias e teorias alusivas à proporcionalidade

Observamos que as formas de resolver os tipos de tarefas que envolvem proporcionalidade proposta pela literatura acadêmica são bem elaboradas, fáceis de utilizar e confiáveis. As técnicas envolvidas são pertinentes. Mas percebemos a preocupação em se evitar distanciamentos entre o desenvolvimento do raciocínio proporcional qualitativo e o raciocínio quantitativo. O raciocínio proporcional permite ao estudante que ele venha a

> a) reconhecer a equivalência entre situações distintas; b) pensar em termos relativos e não em termos absolutos; e c) estabelecer relações entre relações, i.e., estabelecer relações de segunda-ordem que ligam duas ou mais relações de primeira-ordem. Estes aspectos são o cerne do raciocínio proporcional, em especial as relações de primeira e de segunda-ordem (SPINILLO, 2002, p. 478).

Spinillo (2002) ainda destaca que se torna importante, também, permitir que as crianças possam

a) usar sistematicamente o referencial de 'metade' para julgar a equivalência (estabelecimento de julgamentos relativos; mesma proporção: ½ *vs.* ½; cheio *vs.* cheio) e a não equivalência entre o modelo e as alternativas; e
b) discriminar e explicitar as relações de primeira ordem (comparações parte-parte) e de segunda-ordem (capacidade de estabelecer a distinção entre quantidade absoluta e relativa – proporcionalidade), envolvidas nas técnicas empregadas, estaria trabalhando na direção da teoria, do que juga, ser o cerne do raciocínio proporcional, ou seja, as relações de primeira e de segunda ordem.

> Spinillo e Bryant (1991, 1999) realizaram uma série de experimentos sobre proporção em crianças de 4 a 8 anos de idade, cujos resultados consistentemente mostraram que desde os 6 anos as crianças apresentam noções iniciais sobre proporção, estabelecendo relações parte-parte (razão), ao invés de relações parte-todo (fração) para decidirem a respeito da equivalência entre quantidades contínuas e discretas. As relações parte-parte envolviam o uso da 'metade' como ponto de referência ('mais que metade', 'menos que metade', 'igual à metade'), estratégia esta que auxiliava a criança a fazer julgamentos proporcionais. Os autores concluíram que a noção de 'metade' desempenha papel importante na compreensão inicial sobre proporção (SPINILLO, 2002, p. 478).

Atividades de comparação são próprias do conceito de proporcionalidade, ou seja, fazem parte da construção do raciocínio proporcional. "Uma comparação multiplicativa entre quaisquer duas quantidades de mesma natureza ou não" (LAMON, 2006; CYRINO et al., 2014).

Nem sempre uma técnica utilizada para resolver um problema de determinado tipo de tarefa é algoritmizável, como podemos observar na técnica utilizada para a resolução dos tipos de tarefa T_1, T_2 e T_3 do gênero comparar, por exemplo. As tecnologias que são justificadas pela técnica do "fator escalar ou operador escalar" fundamentam-se nas propriedades da função linear.

> [...] tem a ver com o fato de relacionar as variações de uma das grandezas em relação às variações da outra (ou quando são analisadas as relações entre as quantidades da mesma grandeza). A análise escalar baseia-se nas duas primeiras propriedades da função linear, que permitem a realização de procedimentos de grande utilidade no tratamento de situações, uma vez que focalizam seu estudo nos processos de variação[82] (ORDOÑEZ, 2013, p. 77).

As técnicas mobilizadas para resolver tarefas desse tipo podem ser "[...] justificadas – nem sempre explicitamente pelas pessoas que as mobilizam – mas, por leis físicas" (BITTAR, 2017, p. 367). As que fazem uso de razão ou taxas se justificam por propiciar

> [...] "conexões com os tópicos "frações", "decimais" e "porcentagens". Além disso, o diálogo com os alunos sobre suas resoluções e intenções, visando a elaborar exemplos concretos para o ensino do tópico "razão", também permite que se torne cada vez mais claro o significado de algumas operações aritméticas, especialmente os diferentes significados da operação de divisão, considerando a divisão por inclusão e a divisão por partes (BEM-CHAIM; ILANY; KERET, 2008, p. 136).

As técnicas também se justificam pela equivalência entre relações de primeira e de segunda ordem. Ou seja, "pelas relações entre concentrado vs. água em cada jarra (2:2 e 3:3) que são as relações de primeira-ordem. A relação de segunda ordem consiste em comparar essas duas relações para verificar se são equivalentes ou não (2:2 vs. 3:3)" (SPINILLO, 2002, p. 476).

Questionamo-nos, então: qual a relação institucional do saber proporcionalidade na produção acadêmica analisada? Quais são as instituições que apresentam afinidade com esse objeto de saber? Pretenderemos discutir esses questionamentos no próximo tópico.

---

[82] "Tiene que ver con el hecho de poner en relación las variaciones de una de las magnitudes con respecto a las variaciones en la otra (o cuando se analizan las relaciones entre las cantidades de la misma magnitud). El análisis escalar se basa en las dos primeras propiedades de la función lineal, lo cual permite la realización de procedimientos de gran utilidad en el tratamiento de las situaciones, ya que centran su estudio en los procesos de variación. "

3.3 RELAÇÃO INSTITUCIONAL DO SABER PROPORCIONALIDADE

Em nosso estudo, estamos tomando como instituição o *habitat* do saber, por entendermos que é nesse local que o saber estabelece sua relação com os demais saberes. São nessas instituições que se determinará a função do saber. No nosso caso, referimo-nos às instituições Saberes da educação matemática, Saberes da matemática e Saberes da psicologia cognitiva, como o *habitat* da proporcionalidade.

Como já anunciamos em capítulo anterior, a abordagem ecológica no ensino de matemática, nos termos da TAD, se preocupa em

> [...] realizar uma ampliação notável da problemática didática que, sob o risco de simplificação, poderíamos descrever muito brevemente da seguinte forma. Em vez de levantar os problemas de ensino e aprendizagem em termos do que fazer, para que essa ou aquela noção, atividade ou problemática possa ser melhor ensinada ou aprendida e, em consequência, investigar as dificuldades que surgem nos processos de ensino e aprendizagem da matemática procurando uma maneira de superá-las, a TAD se pergunta quais são as condições que permitem, facilitam ou favorecem certas atividades matemáticas e didáticas que podem ser desenvolvidas (existir, ocorrer ou "viver") em um determinado ambiente institucional (escola primária, ensino médio, universidade, um determinado ambiente profissional ou sociedade em geral) e quais são as restrições que dificultam, entorpecem ou mesmo impedem a implementação dessas atividades (BARQUERO, 2009, pp. 5-6)[83].

Nessa direção, perguntamo-nos quais são as condições que permitem, facilitam ou favorecem a comunidade do saber proporcionalidade, em atividades matemáticas e didáticas que podem ser desenvolvidas no ambiente institucional da literatura acadêmica, e quais são as restrições que dificultam, entorpecem ou mesmo impedem a implementação dessas atividades.

3.3.1 Condições institucionais

Do ponto de vista das condições de existência da proporcionalidade apresentamos a seguir o que observamos em cada uma das instituições Educação Matemática, Matemática e

[83] "[...] consiste en realizar una ampliación notable de la problemática didáctica que, a riesgo de simplificar, podríamos describir muy brevemente como sigue. En lugar de plantear los problemas de enseñanza y aprendizaje en términos de qué hacer para que tal o cual noción, actividad o problemática puedan enseñarse o aprenderse mejor y, en consecuencia, investigar las dificultades que surgen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas buscando la manera de superarlas, la TAD se pregunta cuáles son las *condiciones* que permiten, facilitan o favorecen que determinadas actividades matemáticas y didácticas puedan desarrollarse (existir, tener lugar, o "vivir") en un determinado entorno institucional (la escuela primaria, la escuela secundaria, la universidad, un entorno profesional determinado o la sociedad en general) y cuáles son las *restricciones* que dificultan, entorpecen o incluso impiden la puesta en práctica de estas atividades."

Psicologia Cognitiva da Educação Matemática, estudadas em teses, dissertações, artigos e livros.

As condições institucionais são aquelas que permitem, facilitam ou favorecem as praxeologias matemáticas e didáticas em torno do saber proporcionalidade. Nestes termos observamos que:

3.3.1.1 Instituição Saberes da Educação Matemática

a) "A proporcionalidade é um instrumento universal de comparação. Ela descreve uma relação de dependência entre grandezas com as razões" (COMIN, 2000);
b) "[...] o desenvolvimento do conceito de proporcionalidade constitui um dos desafios importantes do passado do currículo secundário. [...] a proporcionalidade constitui um tema fundamental em Matemática e vários aspectos da realidade obedecem às regras da proporcionalidade. O raciocínio proporcional se revela, então, uma habilidade intelectual muito útil" (OLIVEIRA, 2009, p. 463).
c) "[...] ao observar os dados relativos aos estudantes do 5º ano que ainda não tinham estudado proporcionalidade, os autores constataram que esses alunos se apropriam do significado dos problemas, e os resolvem por meio de estratégias variadas, que são construídas a partir dos conhecimentos anteriores" (CÂMARA; OLIVEIRA, 2000, p. 04);
d) "[...] a apresentação precoce de problemas de escala para os estudantes permitia que eles conseguissem resolver tais problemas, mesmo sem ter o conceito formalizado" (LEVAIN,1993);
e) "[...] a noção de proporcionalidade é iniciada na vida de uma criança quando ela começa a raciocinar multiplicativamente" (TINOCO; PORTELA; SILVA; MAIA, 2011, p. 12);
f) "[...] proporcionalidade é um dos tópicos mais presentes no cotidiano de todas as pessoas" (TINOCO; PORTELA; SILVA; MAIA, 2011);
g) "[...] a função linear foi historicamente, e ainda é, a função considerada mais simples e a mais natural" (TINOCO; PORTELA; SILVA; MAIA, 2011, p. 11);
h) "[...] a proporcionalidade não é tão somente um saber da disciplina matemática, mas um formador de estruturas cognitivas para a compreensão de outros importantes conceitos matemáticos, tanto nas questões numéricas, como naquelas que envolvem Medidas e Geometria" (COSTA; ALLEVATO, 2016, p. 4);

i) “[...] a relação de proporcionalidade não é mais caracterizada por proporções (como razões homogêneas iguais) a serem expressas por meio de equações: duas grandezas X e Y são **diretamente proporcionais** quando uma correspondência entre elas pode ser estabelecida de tal maneira que, entre qualquer quantidade x de X e seu correspondente y de Y, se cumpra a relação $y = k \cdot x$” (BOLEA; BOSCH; GASCÓN, 2001b, p. 276, apud GARCIA, 2005, grifo nosso).

3.3.1.1 Instituição Saberes da Matemática

a) “A função linear, dada pela fórmula $f(x) = ax$, é o modelo matemático para os problemas de proporcionalidade” (LIMA, 1997, p. 92);
b) “[...] a proporcionalidade é, provavelmente, a noção matemática mais difundida na cultura de todos os povos e seu uso universal data de milênios” (LIMA, 1997, p. 92);
c) “[...] as grandezas são substituídas por números reais que são suas medidas” (LIMA, 2010, p. 5).
d) “[...] quanto maior for *x*, maior será *y*. Em termos matemáticos: se $x \rightarrow y$ *e* $x' \rightarrow y'$, então $x < x'$ implica $y < y'$. Se dobrarmos, triplicarmos etc., o valor de x, o valor correspondente de y será dobrado, triplicado etc., na linguagem matemática: se $x \rightarrow y$ então $nx \rightarrow ny$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. Nas condições acima, a correspondência $x \rightarrow y$ chama-se uma *proporcionalidade”* (LIMA, 2010, p. 2);
e) “[...] proporção ou proporcionalidade é uma semelhança de razões” (COMMANDINO, 1944, p. 76).

3.3.1.2 Instituição Saberes da Psicologia Cognitiva

a) “O raciocínio com proporções envolve: um senso de covariação, comparações múltiplas, predição, inferência e a capacidade de armazenar e processar mentalmente informações, que são raciocínios inerentes à utilização do pensamento algébrico e à construção do conceito de variável” (TINOCO; PORTELA; SILVA; MAIA, 2011; POST; BEHR; LESH, 1995, p.8);
b) “[...] a experiência cotidiana parece enriquecer os números de significados. Assim, os mestres de obras eram mais eficientes que os estudantes ao utilizarem a mesma

estratégia, exibindo um número reduzido de erros quando a estratégia escolhida era apropriada" (CARRAHER, 1994, p. 122);

c) "[...] a representação algébrica da proporcionalidade (y = mx) abrange uma classe incrivelmente ampla de ocorrências físicas" (POST; BEHR; LEHS, 1995, p. 91);
d) "[...] o raciocínio qualitativo exige a capacidade de interpretar o significado das duas taxas, guardar essa informação e então comparar as interpretações com alguns critérios predeterminados". Esse processo requer um raciocínio comparativo em níveis múltiplos, bastante diferente de uma abordagem algorítmica, em que se usa uma regra para resolver problemas prognosticáveis, por caminhos predeterminados" (POST; BEHR; LEHS, 1995, p. 90-91);
e) "[...] reconhecer a equivalência entre situações distintas; pensar em termos relativos e não em termos absolutos; e estabelecer relações entre relações, i.e., estabelecer relações de segunda-ordem que ligam duas ou mais relações de primeira-ordem. Esses aspectos são o cerne do raciocínio proporcional, em especial as relações de primeira e de segunda-ordem" (SPINILLO, 2002, p. 478);
f) "[...] desde os 6 anos, as crianças apresentam noções iniciais sobre proporção, estabelecendo relações parte-parte (razão), ao invés de relações parte-todo (fração) para decidirem a respeito da equivalência entre quantidades contínuas e discretas. As relações parte-parte envolviam o uso da 'metade' como ponto de referência ('mais que metade', 'menos que metade', 'igual à metade'), estratégia essa que auxiliava a criança a fazer julgamentos proporcionais" (SPINILLO, 2002, p. 478);
g) "[...] o raciocínio proporcional significa a realização de certo nível de maturidade matemática que consolida muitas ideias elementares e abre a porta ao mais avançado pensamento matemático e científico" (LAMON, 2008, p.8 apud SOUZA, 2016, p. 45).

3.3.2 Restrições institucionais

Do ponto de vista das restrições institucionais verificamos o que a literatura acadêmica aponta como situações que dificultam, entorpecem ou mesmo impedem a implementação satisfatória de praxeologias matemática e didáticas em torno do objeto de saber proporcionalidade. Observamos nas instituições que:

3.3.2.1 Instituição Saberes da Educação Matemática

a) "O saber proporcionalidade, em geral, é tratado como um novo assunto, com nomenclatura, propriedades e métodos específicos, como os das regras de três simples, direta e inversa, e composta, o que os desvincula do contexto dos números racionais e dificulta a sua compreensão" (TINOCO; PORTELA; SILVA; MAIA, 2011, p.12);

b) "[...] existe isolamento da proporcionalidade em relação à álgebra, apesar de os problemas explorados envolverem quase sempre relações entre grandezas variáveis (TINOCO, PORTELA; SILVA; MAIA, 2011, p. 12);

c) "[...] a resolução de problemas de proporção, na escola, normalmente é realizada através da utilização da regra de três, algoritmo que, supõe-se, deve conduzir à resposta correta (CÂMARA; OLIVEIRA, 2000, p. 3);

d) "[...] o contrato didático implicitamente estabelecido dá a esse algoritmo (regra de três) o status de um "jeito mágico" de resolver, em que a tarefa do estudante se resume a encontrar os números no problema e a operar com eles, sem necessariamente estabelecer relações" (CÂMARA; OLIVEIRA, 2000, p. 3);

e) "[...] a utilização mecânica de um algoritmo leva o estudante, muitas vezes, a perder a sua capacidade de se apropriar do significado de um problema, levando-o a se preocupar, apenas, com os cálculos a serem feitos, sem uma análise das respostas advindas desses cálculos" (CÂMARA; OLIVEIRA, 2000, p. 16);

f) "[...] se o professor, em seu trabalho com o conteúdo, utiliza apenas esse tipo de estratégia, está deixando de explorar as relações existentes entre as grandezas e, com isso, os alunos perdem a oportunidade de desenvolver o raciocínio proporcional" (COSTA; ALLEVATO, 2016, p. 4);

g) "[...] os professores tinham poucos conhecimentos com relação à proporcionalidade, principalmente nas conexões com a Geometria. [...] a falta de conhecimentos não era apenas com relação aos conteúdos, eles também tinham dúvidas em relação a 'quando' e 'como' deveriam ensinar" (COSTA; ALLEVATO, 2012);

h) "[...] apesar de terem contato quase que diariamente com situações de proporcionalidade, os alunos tendem a apresentar algumas dificuldades em compreender o conceito. Ajudá-los a desenvolver o raciocínio proporcional tem sido um grande desafio no período escolar, sendo essencial ao aprendizado de diversas disciplinas do Ensino Fundamental, Médio e Superior" (COSTA; ALLEVATO, 2015, p. 3);

i) "[...] o tema proporcionalidade é apresentado aos alunos somente no 7º ano do Ensino Fundamental, e não raro é abordado de modo fragmentado, sem tratar das conexões" (COSTA; ALLEVATO, 2016, p. 4);

j) "[...] nos livros didáticos, os problemas apresentados sobre proporcionalidade já traziam valores numéricos de fácil operacionalização, induzindo ao uso da estratégia de regra de três" (CÂMARA; OLIVEIRA, 2000, p. 3);

k) "[...] os diferentes estudos em matemática e ciências da educação, bem como as avaliações, mostram a frequente falta de sucesso no projeto de apropriação da proporcionalidade entre os alunos do Ensino Fundamental ao Ensino Médio. Lacunas resilientes na multiplicação, falta de entendimento sobre questões de proporcionalidade e não proporcionalidade e extrema dificuldade nos cálculos percentuais são todos sinais das dificuldades envolvidas na aprendizagem do conceito de proporcionalidade"[84] (VOISIN, 2013, p. 7);

l) "[...] a reforma da "matemática moderna" expulsa, por volta de 1970, muitos elementos teóricos e tecnológicos da matemática "clássica" considerados obsoletos, incluindo a teoria das razões e das proporções, eliminando, ao mesmo tempo, técnicas elementares que, de fato, não serão imediatamente substituídos, ou apenas serão substituídos por praxeologias mais complexas, que não são muito viáveis no anos iniciais do Ensino Fundamental"[85] (CHEVLLARD, 1998, p. 6).

3.3.2.2 Instituição Saberes da Matemática

[84] «Les différents travaux en didactique des mathématiques et en sciences de l'éducation tout comme les évaluations montrent l'inaboutissement fréquent du projet d'appropriation de la proportionnalité auprès des élèves de l'école élémentaire jusqu'au collège. Les lacunes résistantes sur la multiplication, la non compréhension des problèmes de proportionnalité et de non proportionnalité et l'extrême difficulté des calculs de pourcentages sont autant de signes qui montrent les difficultés liées à l'apprentissage de la notion de proportionnalité.»

[85] «Jusqu'au milieu du XXe siècle, ainsi, l'arithmétique scolaire contient, sous le nom de *théorie des rapports et proportions*, une praxéologie mathématique locale qui permet de traiter efficacement les problèmes de proportionnalité directe ou inverse : si 8 sucettes coûtent 10 francs, et si on veut connaître le prix, x francs, de 3 sucettes, on dira que « 8 *est à* 10 *comme* 3 *est à x* », ce qui se traduit par la *proportion* notée classiquement $8:10::3:x$, dans laquelle on sait que le produit des *extrêmes*, $8\times x$, est égal au produit des *moyens*, 10×3, égalité qui donne aussitôt $x = \frac{10 \times 3}{8}$. La réforme « des mathématiques modernes » a, autour de 1970, expulsé nombre d'éléments théoriques et technologiques des mathématiques « classiques » regardés comme obsolètes, dont la théorie des rapports et proportions, non sans éliminer en même temps des techniques élémentaires qui, de fait, ne seront pas immédiatement remplacées, ou ne le seront que par des praxéologies plus complexes, peu viables dans les petites classes de l'enseignement secondaire» (CHEVALLARD, 1998, p. 6).

a) "Aritmética e a álgebra vinham se desenvolvendo há séculos, contudo sem bases seguras, de forma que a geometria continuava sendo o modelo do rigor mais acabado. Mas, com a fundamentação dos números reais, no século passado, em bases sólidas e mais confiáveis do que as da antiga geometria, a teoria das proporções de Eudoxo passa a ter apenas valor histórico" (ÁVILA, 1986, p. 2);
b) "[...] se f: R+ → R+ é uma proporcionalidade, então, para quaisquer x_1, x_2 com $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$, tem-se $y_1/x_1 = y_2/x_2$. Com efeito, ambos esses quocientes são iguais ao fator de proporcionalidade a. A igualdade $y_1/x_1 = y_2/x_2$ chama-se ***proporção"*** (grifo nosso);
c) "[...] chama-se de ***regra de três*** ao problema que consiste em, conhecendo três dos números x_1, x_2, y_1, y_2, *determinar o quarto"* (LIMA, 2010, p. 7, grifo nosso);
d) "[...] a outra abordagem enfatiza a "propriedade fundamental das proporções", afirmando que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ é uma proporção, então $ad = bc$". A principal diferença é que a regra de **três simples** ou "Produto cruzado" é um relacionamento que **envolve quatro números**, ao passo que **propriedade de proporções**" envolve **as noções de razão e equação**"[86] (PONTE; MARQUES, 2011, p. 3, grifos nossos);
e) "[...]não precisamos mais usar a superada teoria geométrica das proporções, muito menos os resquícios que dela ficaram na terminologia, na notação e, sobretudo, na maneira de apresentar os fatos, como os problemas de regra de três" (ÁVILA, 1986a, p. 2, grifos nossos).

Em virtude do que observamos nas instituições, do ponto de vista das condições, chegamos à conclusão que, pelo fato de vários aspectos da realidade obedecerem às regras de proporcionalidade, ela se faz presente no cotidiano das pessoas. Além disso, proporcionalidade é um saber que atua na formação de estruturas cognitivas para a compreensão de conceitos matemáticos, o que reforça a ideia de que não se trata de um saber que possa ser vivenciado em um determinado período de estudo; ao contrário, ele vai sendo desenvolvido pelo estudante desde o momento em que o estudante inicia a construção do raciocínio multiplicativo.

---

[86] "The other approach emphasizes the "fundamental property of proportions", stating that "if $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ is a proportion, then ad = bc". The main difference is that the "rule of three simple" or "cross product" is a relationship involving four numbers whereas the "fundamental property of proportions" involves the notions of ratio and equation."

Observamos que a má formação do professor, abordagem do livro didático e o processo de ensino do saber proporcionalidade foram as principais restrições identificadas na literatura acadêmica. Os professores apresentam dificuldades em resolver problemas envolvendo proporcionalidade; em metodologias adequadas para o ensino; e em perceber o tempo didático adequado para a vivencias desse objeto de saber. O livro didático introduz o saber em um capítulo específico, com problemas em que os valores numéricos se destacam direcionando o cálculo para o uso da técnica da regra de três. Do ponto de vista do ensino, o saber é tratado como um novo assunto e é desvinculado do contexto dos números racionais, além de ser direcionado ao uso da técnica da regra de três como um “jeito mágico” para resolver problemas de proporcionalidade, levando os alunos a realizar cálculos sem uma reflexão sobre as respostas que são geradas a partir desses cálculos.

Observa-se que a literatura acadêmica faz a distinção entre o objeto de saber proporção e a técnica da regra de três. A proporção é vista como operação que envolve as noções de razão e equação. A regra de três é um relacionamento que envolve números e é um resquício da teoria geométrica das proporções.

A proporcionalidade tem destaque na formação de estruturas cognitivas para a compreensão de conceitos matemáticos de diversas comunidades de saberes. Por fazer parte do bloco tecnológico/teórico, o objeto proporcionalidade requer tarefas que favoreçam ao desenvolvimento do raciocínio qualitativo e quantitativo.

Diante do exposto, perguntamo-nos: em quais temas, setores e domínios da matemática habita o saber proporcionalidade? Qual(is) o(s) seu(s) nicho(s) ecológico(s)? Quais são suas relações ecológicas? Discutiremos no próximo tópico algumas possíveis respostas para esses questionamentos, pois vamos nos preocupar com as inter-relações da proporcionalidade com outros objetos de saber matemático do Ensino Fundamental.

3.4 INTER-RELAÇÕES ENTRE PROPORCIONALIDADE E OUTROS OBJETOS MATEMÁTICOS: *HABITAT*, NICHOS E OUTRAS RELAÇÕES ECOLÓGICAS

Como já nos referimos anteriormente, tomamos por *habitat* as instituições – local em que vive o saber no ecossistema matemática do Ensino Fundamental – e por nicho ecológico a função e o modo de vida do saber determinado pela instituição no ecossistema. No tópico anterior, localizamos alguns *habitats,* mas, neste momento, iremos nos concentrar na instituição Saberes da Matemática.

Para identificarmos o nicho do saber proporcionalidade, investigamos as relações ecológicas entre objeto de saber e os demais saberes do ecossistema matemática do Ensino Fundamental e quais relações são estabelecidas entre os saberes. Preocupamo-nos principalmente com as relações tróficas (função do objeto nas cadeias e teias alimentares, enquanto caça ou enquanto caçador), denominada predação. Além da relação de captura de alimento ou de servir de alimento, também nos atentamos para a relação entre um parasita e seu hospedeiro designada de parasitismo.

A matemática do Ensino Fundamental é vista como o ecossistema onde encontramos diferentes habitats (os comunidade de saberes da matemática, instituição onde a proporcionalidade encontra alimento, abrigo e condições necessárias para viver), assim como os possíveis nichos ecológicos ("profissão" do saber no ecossistema).

Como vimos anteriormente, o objeto proporcionalidade tem sua origem no ecossistema da Matemática do Ensino Fundamental nas inter-relações entre diferentes comunidades de saberes. Essas inter-relações ocorrem também entre saberes de diferentes naturezas. O estudo da proporcionalidade oportuniza ao indivíduo tanto o desenvolvimento do bloco prático (saber fazer) como do bloco teórico/ tecnológico (saber).

Proporcionalidade possui uma especificidade própria, o que demanda uma atenção a aspectos relacionados a como se processa o saber do ponto de vista de quem estuda, do ponto de vista de quem ensina e do ponto de vista da natureza desse saber.

3.4.1 Enfoque do estudo

O saber proporcionalidade apresenta um grau de complexidade elevado tanto com relação ao desenvolvimento do raciocínio qualitativo quanto com relação ao desenvolvimento do raciocínio quantitativo e demanda do indivíduo o acionamento de vários outros saberes.

> Em artigo de extensa revisão da literatura sobre o tema, publicado em 1985, Pulos e Tourniaire chamam a atenção para o fato de que, apesar de sua importância no cotidiano e em contextos científicos, **o conceito de proporcionalidade é difícil, adquirido tardiamente** (no final da adolescência para os sujeitos que frequentam regularmente a escola, conforme diversas pesquisas, tais como Hart, 1981) e não dominado por muitos adultos. Além disso, na conclusão de seu trabalho, os autores citados insistem em que o raciocínio proporcional **não é um construto unitário e sim algo complexo e multifacetado**. Um trabalho mais recente de pesquisa sobre o raciocínio proporcional (Schwartz e Moore, 1998) enfatiza as dificuldades reveladas em estudos sobre o assunto com adultos (GOMES; FERREIRA, 2004, p. 128, grifo nosso).

Embora pesquisas posteriores (POST; BEHR; LESH, 1995; SPINILLO, 2002; BEN-CHAIMP; ILANY; KERET, 2008) apontem que estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental já tragam consigo estruturas cognitivas compatíveis para o desenvolvimento do raciocínio proporcional, e que o desenvolvimento de atividades em sala, principalmente partindo da ideia de metade, possam ser capazes de construir qualitativamente, desde cedo, o raciocínio proporcional, concepções como essas apresentadas por Gomes e Ferreira (2004) ainda alimentem uma postura resistente que se enraíza entre os saberes matemático do Ensino Fundamental no processo de ensino e aprendizagem do objeto de saber proporcionalidade.

O raciocínio proporcional é uma maneira de pensar matematicamente, que envolve processos cognitivos, mobilizados pelo sujeito, no momento de pensar proporcionalmente; é uma forma de pensar qualitativamente sobre um problema apresentado estabelecendo relações do tipo: este resultado faz sentido? Deveria ter mais ou menos? Poderia ser maior ou menor? O raciocínio proporcional relaciona tanto aspectos matemáticos como psicológicos. Raciocinar proporcionalmente envolve métodos de pensamentos qualitativos e quantitativos, o que justifica proporcionalidade ser um objeto de saber complexo e de intricada aquisição.

> [...] o raciocínio qualitativo, **requer uma comparação** que não depende de valores específicos. [...] esse processo requer uma capacidade mental que Piaget situou no nível operacional formal do desenvolvimento cognitivo. Referiu-se a esse processo como **operar com operações**. Isto é, **a interpretação de cada uma das razões** é uma operação em si e por si, e **a comparação** é outro nível de operação. Esse processo requer um raciocínio comparativo em níveis múltiplos, bastante diferente de uma abordagem algorítmica, em que se usa uma regra para resolver problemas prognosticáveis, por caminhos determinados (POST; BEHR; LESH, 1995, p. 90 – 91, grifos nossos).

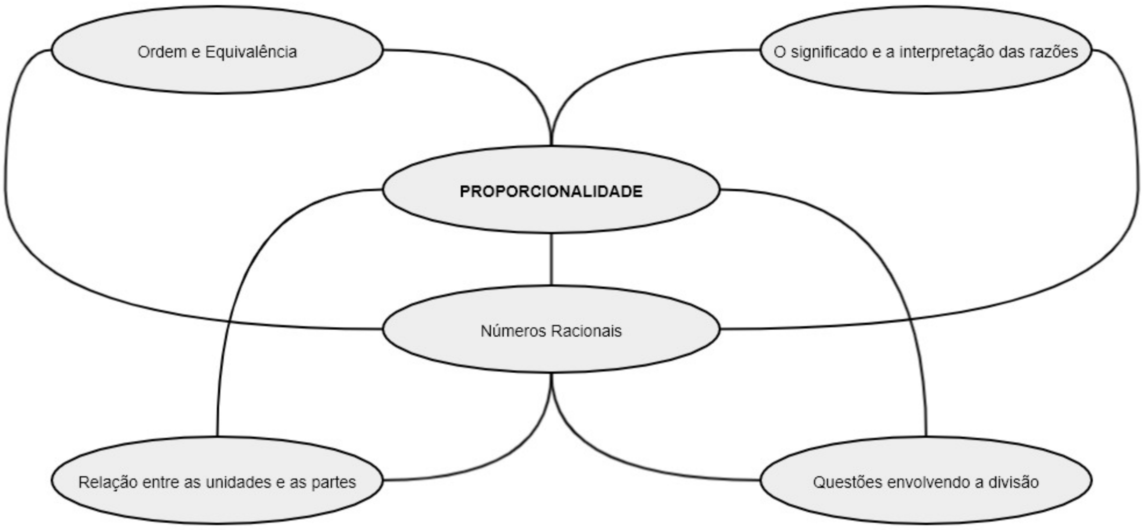
Podemos observar aqui que, do ponto de vista das relações tróficas, o estudo da proporcionalidade tem como nicho da proporcionalidade a função de servir de alimento para o desenvolvimento do raciocínio proporcional qualitativo quando o processo de ensino e aprendizagem oportuniza ao raciocínio comparativo em níveis múltiplos. Percebemos, também, a relação de parasitismo, quando o estudo da proporcionalidade ocorre só via o algoritmo da regra de três, que limita as aprendizagens e empobrece o desenvolvimento do raciocínio proporcional. Notamos um relevo da relação de parasitismo estabelecido entre o parasita – o estudo da regra de três (abordagem algorítmica, em que se usa uma regra para resolver problemas prognosticáveis, por caminhos determinados) e o hospedeiro – o estudo do objeto proporcionalidade (processo que requer um raciocínio comparativo em níveis múltiplos).

O estudo do saber proporcionalidade sugere o desenvolvimento principalmente do raciocínio proporcional, provocando o acionamento de uma imbricada teia alimentar. Lidar com o raciocínio proporcional

> Implica no domínio de vários conceitos sobre números racionais, como por exemplo **ordem e equivalência**, a **relação entre as unidades e as partes**, o **significado e a interpretação das razões** e **questões envolvendo a divisão**, especialmente no que se refere a dividir um número menor por um maior. Para raciocinar com proporções é preciso ter flexibilidade mental para abordar problemas por vários ângulos e, ao mesmo tempo, ter noções suficientemente sólidas para não deixar afetar por números grandes ou "complicados" ou pelo contexto em que se insere o problema (POST; BEHR; LESH, 1995, p. 91, grifos nossos).

Na relação trófica, identificamos na citação a proporcionalidade habitando o comunidade de saberes dos números e operações, no ecossistema da matemática do Ensino Fundamental, cujo nicho ecológico se dá no estabelecimento de relações com os números racionais, desencadeando uma trama entre diferentes saberes – relação de ordem e equivalência, relação entre as unidades e as partes, significado e a interpretação das razões e questões envolvendo a divisão –, que servem de alimento para o raciocínio proporcional e, consequentemente, para construção do objeto proporcionalidade.

Figura 22 – Teia alimentar: proporcionalidade/números racionais



Fonte: Elaborada pela autora.

Nesse caminho, questionamo-nos: será que um ensino focado apenas na abordagem algorítmica permitirá ao estudante a capacidade de estabelecer a distinção entre quantidade absoluta e relativa? Como deve ocorrer o processo de ensino que possa permitir ao estudante interpretar as razões em jogo e compará-las posteriormente?

3.4.2 Enfoque do ensino

O ensino do objeto de saber proporcionalidade pode ser iniciado antes mesmo do início do Ensino Fundamental, partindo da ideia de metade, em tipo de tarefa de comparação, de acordo com a instituição Saberes da Psicologia Cognitiva. A complexidade do raciocínio proporcional, quando não desenvolvido, pode se converter em dificuldades para os estudantes, uma vez que resolver problemas de proporcionalidade requer:

> a) **reconhecer a equivalência entre situações distintas**; b) **pensar em termos relativos e não em termos absolutos**; e c) **estabelecer relações entre relações**, i.e., estabelecer relações de segunda-ordem que ligam duas ou mais relações de primeira-ordem. **Estes aspectos são o cerne do raciocínio proporcional, em especial as relações de primeira e de segunda-ordem** (SPINILLO, 2002, p. 475, grifos nossos).

Nessa linha, Spinillo (2002) aponta que a distinção entre quantidade relativa (operar com porcentagens, ler e interpretar gráficos estatísticos, por exemplo) e quantidade absoluta são os aspectos cruciais ao raciocínio proporcional, assim como as relações de primeira e de segunda-ordem.

Outro fato importante, com relação ao **ensino**, é que o desenvolvimento do raciocínio proporcional está ligado à determinação da existência ou não da relação proporcional entre as grandezas envolvidas.

> O fenômeno da desarticulação das organizações matemáticas, e particularmente o isolamento escolar da proporcionalidade, está inativo desde meados da década de 90. Com base nessa consideração, faz-se uma chamada para questionar o modelo epistemológico da proporcionalidade, presente em livros didáticos e desenhos curriculares e que se tornou dominante na instituição escolar. Nesse questionamento, pergunta-se até que ponto é conveniente isolar a proporcionalidade como objeto de pesquisa e como objeto de conhecimento matemático a ser ensinado. Nesse sentido, o autor propõe que "o problema didático da proporcionalidade deve ser integrado ao estudo muito mais abrangente do problema do ensino-aprendizagem das relações funcionais entre grandezas" (p. 17). [...] para dar uma resposta ao problema didático descrito acima, é necessário questionar a lógica dessas relações funcionais, ou seja, determinar a relevância de trabalhar em sala de aula essas relações[87] (GASCÓN, 2010, apud ORDOÑEZ, 2012, p. 71).

[87] "El fenómeno de desarticulación de las organizaciones matemáticas, y particularmente el aislamiento escolarde la proporcionalidad, ha estado latente desde mediados de los años noventa. A partir de esta consideración, se hace un llamado para cuestionar el modelo epistemológico de la proporcionalidad, presente en los libros de texto y en los diseños curriculares y que se ha vuelto dominante en la institución escolar. En este cuestionamiento se pone en duda hasta qué punto es conveniente aislar la proporcionalidad como objeto de investigación y como objeto de conocimiento matemático para ser enseñado. En tal sentido el autor propone que "El problema didáctico de la proporcionalidad debe ser integrado en el estudio mucho más comprensivo del problema de la enseñanza-aprendizaje de las relaciones funcionales entre magnitudes" (p. 17). Al mismo tiempo propone que para dar una respuesta al problema didáctico anteriormente esbozado es necesario cuestionar las razones de ser de dichas relaciones funcionales, es decir, determinar la pertinencia de trabajar en el aula de clase este tipo de relaciones."

Na instituição Saberes da Educação Matemática, observamos uma referência ao fato do saber proporcionalidade ficar reservado em um capítulo do livro didático de matemática do 7º ano. Gascón (2010) e Ordoñez vêm reforçar o que foi posto pela instituição e nos remete a nos questionamos sobre a pobreza de relações que esse fato pode reservar: será que esse isolamento do objeto de saber, no livro didático, não estaria favorecendo a relação de parasitismo e uma não construção da essência do saber proporcionalidade?

3.4.3 Enfoque da natureza do saber

Do ponto de vista da natureza do saber, encontramos na literatura acadêmica, principalmente na instituição Saberes da Matemática, a inter-relação entre a proporcionalidade e outros objetos como equação linear – que representa uma relação simples, de natureza multiplicativa, entre os termos dos pares ordenados (x, y); função; escala; números racionais; grandezas proporcionalmente direta, entre outros.

A "proporcionalidade se resume à função y = kx" (IMENES, 2017, p. 95). O "[...] raciocínio proporcional pode ser descrito como uma grande ideia matemática – abrangendo diferentes tópicos, como álgebra, cálculo, escala e aritmética de números racionais"[88] (LUNDBERG; KILHAMN, 2016, p. 4). A proporcionalidade é "[...] uma comparação multiplicativa entre quaisquer duas quantidades de mesma natureza ou não" (LAMON, 2006; CYRINO et al., 2014; BORTOLOTI; BARBOSA, 2018). Esse saber "[...] diz respeito à relação multiplicativa entre duas grandezas. [...] surge enquanto razão, como: divisão proporcional, fator de escala, porcentagem, quotização proporcional, e taxa" (BORTOLOTI; BARBOSA, 2018, p. 282).

O objeto de saber proporcionalidade destaca-se pelo "[...] fato de muitos aspectos de nosso mundo funcionarem de acordo com as regras de proporcionalidade faz com que a capacidade de raciocinar com proporções seja extremamente útil na interpretação dos fenômenos do mundo real" (POST; BEHR; LESH, 1995, p. 90). Mas essa capacidade de raciocínio nem sempre é desenvolvida, trazendo prejuízos tanto para o sujeito quanto para a sociedade.

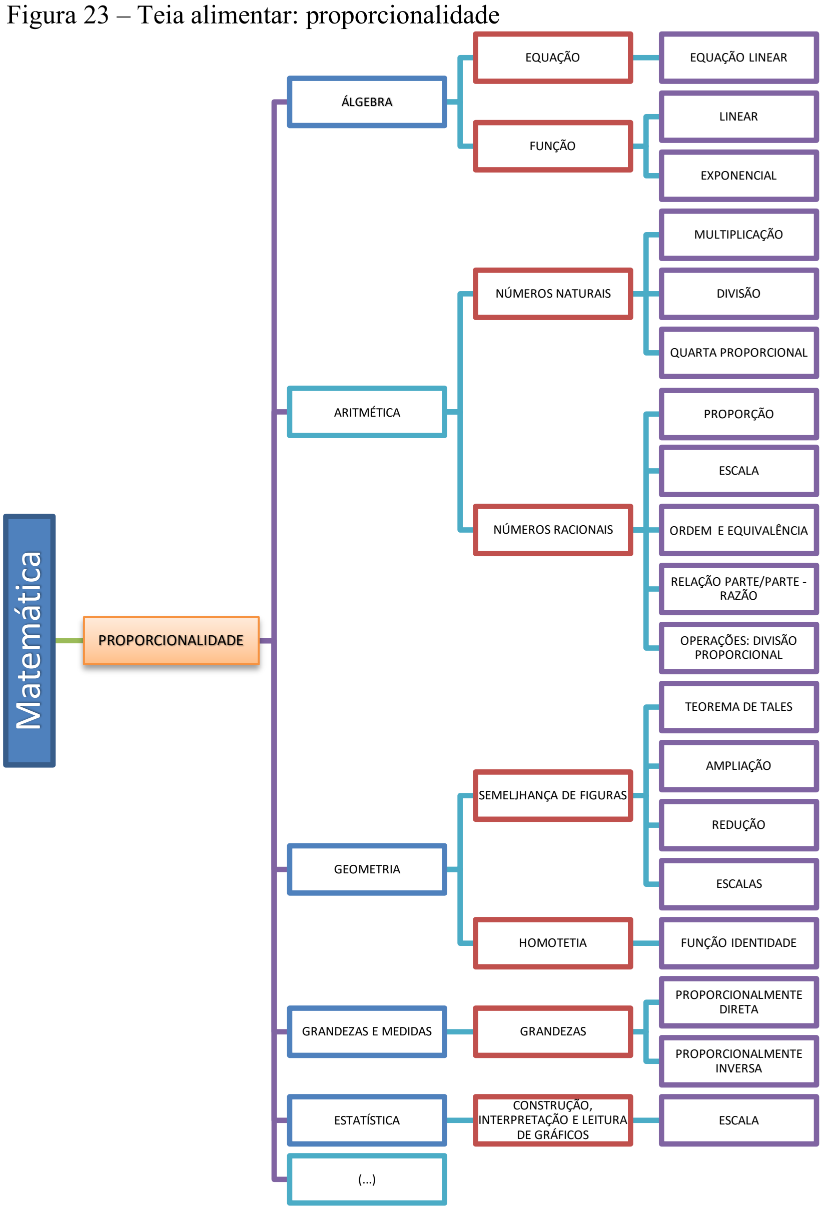
> Claramente, muitas pessoas que não têm desenvolvido a sua capacidade de raciocínio proporcional têm sido capazes de compensar usando regras de álgebra, geometria e trigonometria, mas, no final, as regras são um substituto pobre para a compreensão. Elas não estão preparadas para aplicações reais em estatística,

[88] "Proportional relationships can be described as a mathematical 'big idea' spanning different topics such as algebra, calculus, scaling, and rational number arithmetic" (LUNDBERG ; KILHAMN, 2016, p. 4).

> biologia, geografia ou física – nas quais o importante é que os princípios fundamentais dependem da proporcionalidade. Isto é lamentável, num momento em que um número crescente de profissões depende diretamente da matemática ou do uso de modelos matemáticos para aumentar a eficiência, para salvar vidas, para poupar dinheiro ou tomar decisões importantes (LAMON, 2008, p. 3, apud SOARES, 2016, p. 44).

O saber proporcionalidade possui uma especificidade própria e precisa ser cuidadosamente experenciado tanto do ponto de vista de quem ensina como do ponto de vista de quem aprende. Diferentes comunidades de saberes matemáticos cooperam nas praxeologias para proporcionalidade, nas quais diversos nichos ecológicos se desenvolvem, favorecendo o processo de ensino e de estudo desse objeto r formando uma teia alimentar promissora, como podemos observar pela figura a seguir.

Figura 23 – Teia alimentar: proporcionalidade



Fonte: Elaborada pela autora.

Vale salientar que tanto na figura anterior como na redação do texto deste capítulo não apresentamos todas as possibilidades de relação protocooperação entre os saberes relacionados à proporcionalidade, que são numerosas, formando uma teia alimentar com ramificações que contemplam um mesmo saber, por exemplo o caso particular de proporcionalidade “escala”.

Iniciamos este tópico nos questionando sobre quais são as inter-relações existentes entre proporcionalidade com outros objetos no Ensino Fundamental na literatura acadêmica. Percebemos que, do ponto de vista nicho ecológico, na comunidade de saberes da Álgebra existem inter-relações entre proporcionalidade e equação (linear); função linear (proporcionalidade direta); e função exponencial (proporcionalidade inversa). No comunidade de saberes da aritmética, proporcionalidade se inter-relaciona com os números naturais (na multiplicação; na divisão; na relação entre termos absolutos e relativos; e na quarta proporcional), e com os números racionais (na relação de ordem e equivalência; na relação entre as unidades e as partes; no significado do número racional enquanto razões, proporção e quociente – divisão). Na comunidade de saberes das grandezas e medidas proporcionalidade, são identificadas inter-relações entre grandezas (proporcionalmente direta ou proporcionalmente inversa). Na comunidade de saberes da geometria, se verificam inter-relações da proporcionalidade entre semelhança (no teorema de Tales, na ampliação, na redução e em escala) e na homotetia (na função identidade). Na comunidade de saberes da estatística, o saber proporcionalidade inter-relaciona-se com escala (na construção, na interpretação e na leitura de gráficos estatísticos).

Ainda em seu nicho ecológico, proporcionalidade, além de habitar em diferentes populações que formam as comunidades de saberes, desenvolve uma teia alimentar responsável pela manutenção da vida desse objeto de saber no ecossistema matemática. Nas suas relações tróficas, de captura de alimento ou de servir de alimento, há uma associação de protocooperação sem provocar danos na ecologia dos saberes, e possui imbricação entre diferentes temas, setores, estabelecendo também a relação de parasitismo. Organizamos, no quadro a seguir, um breve resumo dessas relações entre os saberes.

Quadro 13 – Relações entre os saberes

Relações entre os saberes	
Protocooperação	**Parasitismo**
Na relação harmônica entre diferentes saberes que favorece ao desenvolvimento: • De saberes ligados aos números naturais e racionais: ○ ordem e equivalência;	Nessa relação desarmônica, o saber se torna hospedeiro de um processo de ensino e aprendizagem focado: • em técnicas “algoritmizável”, justificadas nas teorias

o relação entre as unidades e as partes; o significado e interpretação das razões; o questões envolvendo a divisão; o da ideia de metade; o do uso de estimativas; o das tarefas de comparação; o da flexibilidade mental; o do raciocínio proporcional qualitativo e quantitativo	o geométrica de proporção; e o razões e proporções.

Fonte: Elaborado pela autora.

No seio das cadeias e teias alimentares, o saber proporcionalidade atua como alimento, ajudando a se desenvolver enquanto saber, no sentido de assumir para si a função de favorecer ao desenvolvimento da ideia de metade, do uso de estimativas, das tarefas de comparação, das noções de equivalência, da flexibilidade mental e do raciocínio proporcional qualitativo e quantitativo.

Do ponto de vista da relação de parasitismo, observamos que o objeto de saber proporcionalidade sofre quando tem sua razão de ser anulada, ao ser substituído pelo uso da regra de três, que é um substituto pobre para o desenvolvimento do raciocínio proporcional. Proporcionalidade passa a ter a função de hospedeiro de técnicas puramente algoritmizável, a partir de um ensino prognosticáveis com resquícios da teoria geométrica de proporção e da teoria das razões e proporções. A aplicação da técnica da regra de três em si não causaria danos ao processo, uma vez que ela se justifica dentro da teoria, mas a sua utilização quase que unânime, sem articulação com outras, empobrece as aprendizagem do objeto de saber, causando um desequilíbrio em sua ecologia, podendo pôr em risco a vida do raciocínio proporcional ao longo da escolaridade do estudante. A pluralidade de técnicas enriquece o processo de ensino e aprendizagem do saber proporcionalidade e de outros saberes a ele correlacionados.

Logo, questionamo-nos: por que proporcionalidade foi selecionado pela noosfera para o Ensino Fundamental? São respostas para esse questionamento que pretendemos esboçar no tópico a seguir.

3.5 IMPORTÂNCIA DO ESTUDO DA PROPORCIONALIDADE NO ENSINO FUNDAMENTAL

Por que proporcionalidade foi selecionada pela noosfera para o Ensino Fundamental? Embora entendamos que teremos respostas mais robustas para esse questionamento a partir da análise dos referenciais e do livro didático, em nosso estudo dos textos acadêmicos, percebemos que o saber proporcionalidade tem indicação para ser introduzido já nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Spinillo (2002) traz luz ao debate sobre a importância, para que o ensino desse saber seja iniciado por meio de problemas que sejam resolvidos, fazendo uso da **estratégia de 'metade'** e do **uso de estimativas,** antes do 7º ano.

Ben-Chaimp, Ilany e Keret (2008) enfatizam que o raciocínio proporcional envolve relações matemáticas multiplicativas, ao contrário das relações aditivas que são mais usuais para muitas crianças no início da vida escolar. Colaborando com a importância da ideia defendida por Spinillo (2002) da introdução de atividades envolvendo metades (parte/parte), mais precocemente, visando familiarizar os estudantes com as relações matemáticas multiplicativas.

A importância de se trabalhar algumas tarefas introdutórias para distinguir pensamento aditivo e pensamento multiplicativo antes de dar início ao estudo de razão e proporção é apontada como alternativa nas pesquisas desenvolvidas por Harel e Confrey (1994) apud Ben-Chaimp, Ilany e Keret (2008). Para que o estudante consiga diferenciar o pensamento aditivo do pensamento multiplicativo, é importante que o professor desenvolva tarefas que permitam que o estudante se exponha e trabalhe intuitivamente com proporcionalidade, além de oportunizar o confronto com situações reais de sala de aula.

Algumas pesquisas como as desenvolvidas por Cramer, Post, Currier (1993) e Post, Behr e Lesh (1995), Ben-Chaim, Ilany e Keret (2008) também destacam a importância de se realizar tipos tarefas para investigar o raciocínio proporcional, com o objetivo de:

a) diferenciar o pensamento aditivo do pensamento multiplicativo;
b) calcular o valor desconhecido (ou ausente), nos quais se disponibilizam partes de uma informação e pede-se para que seja encontrado o restante da solução;
c) comparar quantidades, nas quais duas razões/taxas são dadas e pede-se não por uma resposta numérica, mas por uma comparação entre razões ou taxas;
d) realizar comparação ou predição qualitativa, nos quais são solicitadas comparações que não dependem de valores numéricos específicos.

O trabalho com a proporcionalidade a partir da resolução de problemas tem importância, uma vez "[...] o conceito nasce da resolução de problemas, em contextos nos quais a proporcionalidade está presente e, também, naqueles em que ela é ausente" (IMENES, 2017, p. 95). É primordial o desenvolvimento do estudo da proporcionalidade "[...] com a presença de um fator multiplicativo constante na relação entre duas variáveis. Assim, proporcionalidade nasce no campo das funções, como um tipo especial de função" (IMENES, 2017, p. 95).

Tradicionalmente, trabalha-se proporcionalidade inserida em problemas de valor ausente enquanto objeto pertencente à instituição Saberes da Matemática, no entanto "[...] toda **relação proporcional** pode ser representada pela **função** $\boldsymbol{y = mx}$, o tipo mais fundamental de equação linear" (POST; BEHR; LESH; 1995, p. 90).

Diante do que foi exposto até o momento, observamos que o estudo do saber proporcionalidade desperta a imaginação, a intuição e o raciocínio. Por esses motivos, torna-se um saber que, historicamente, ao passar de geração para geração, revela a importância do seu estudo nesta etapa de escolaridade.

Embora tenhamos percebido a presença do estudo da proporcionalidade em diferentes disciplinas escolares, nosso estudo tem foco no ecossistema matemática do Ensino Fundamental. Entendemos a relevância que o objeto de saber proporcionalidade tem no realce apresentado nos textos acadêmicos, com destaque para o cuidado com alguns pontos: que o objeto de saber proporcionalidade possa fazer parte do planejamento de aulas do professor, visando traçar um panorama dos saberes já adquiridos pelos estudantes, e dar encaminhamentos aos novos saberes, garantindo o desenvolvimento de organizações matemáticas que contemplem o desenvolvimento dor raciocínios proporcional qualitativo e quantitativo.

Iniciamos este capítulo nos perguntando: em que contextos e problemáticas, proporcionalidade se inscreve na matemática do Ensino Fundamental, e por que dessa inscrição? Como vive proporcionalidade nos textos acadêmicos?

Proporcionalidade se inscreve na matemática em contextos históricos, sociais e culturais por ser um saber culturalmente difundido entre diferentes povos, de uso universal e milenar; é uma ponte adequada entre a experiência (física) e as representações abstratas que se expressam de forma algébrica; é um saber que faz parte do cotidiano das pessoas e pode ter seu estudo iniciado, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, a partir da ideia de metade, provocando reflexão em situação de equivalência e de não equivalência.

O objeto de saber proporcionalidade se inscreve na matemática por fazer parte de uma imbricada teia de saberes, que, à medida que se vivencia esse objeto de saber, se favorece a vida de vários outros saberes no ecossistema.

O estudo dos textos da literatura acadêmica evidenciou que são várias as circunstâncias que rodeiam esse objeto de saber, e que ele possui vida no seio das instituições Saberes da Educação Matemática, Saberes da Matemática e Saberes da Psicologia Cognitiva.

Mantém uma relação com outros saberes de predatismo, ora capturando alimento, ora servindo de alimento para o estudo de objetos de saberes matemáticos. Também, vivencia a relação de parasitismo como saber hospedeiro da regra de três.

No próximo capítulo, apresentamos nossos resultados da análise dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática e da Base Nacional Comum Curricular e partimos de alguns questionamentos: por que proporcionalidade foi selecionada pela noosfera para o Ensino Fundamental? Interessamo-nos em saber como e quando o referencial curricular chama a atenção para essa necessidade de estudo do saber? O currículo apresenta sugestões de situações para o professor mediar praxeologias para o saber proporcionalidade com os estudantes? Sobre essas questões é o que pretendemos discutir a seguir.

4 O SABER PROPORCIONLIDADE NA INSTITUIÇÃO CURRÍCULO: PCNS E NA BNCC

Assim como no capítulo anterior, iniciamos este capítulo nos questionando sobre a ecologia do saber proporcionalidade nos referenciais curriculares. Como vive o saber proporcionalidade no âmbito do saber a ser ensinado no Ensino Fundamental em matemática? Esse questionamento se desdobra em outros: em quais contextos e problemáticas se inscreve o objeto de saber proporcionalidade, no referencial curricular de matemática do Ensino Fundamental, e por que dessa inscrição? Na busca de respostas para nossas indagações, realizamos uma análise à luz do filtro da proporcionalidade nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental – anos iniciais (1997) e anos finais (1998) e na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do Ensino Fundamental (2018).

O estudo da ecologia do saber proporcionalidade nos PCNs e na BNCC nos ajudará investigar a ecologia do objeto de saber proporcionalidade sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático, no saber a ser ensinado nas instituições. Nossa análise buscará, a partir da aplicação do filtro da proporcionalidade, identificar *razões de ser* do saber, a organização matemática, a relação institucional, as inter-relações e a importância do saber proporcionalidade no ensino de matemática.

Os Parâmetros Curriculares de Nacionais apontam para a necessidade de uma organização curricular em que os objetos de saber matemático sejam distribuídos ao longo do Ensino Fundamental de forma não linear e que sejam trabalhados em articulação com outros objetos de saber matemático.

A partir do ano de 2018, entra em vigor a BNCC, que chega com natureza prescritiva, ou seja, com forção de lei, trazendo a consolidação da disposição do Ensino Fundamental em nove anos, mas mantendo a organização dos conteúdos de forma espiralada.

A análise deste capítulo será dividida em dois momentos. Olharemos com o filtro da proporcionalidade para os PCNs do Ensino Fundamental e, no segundo momento, iremos nos deter nos estudos da BNCC, fazendo uso do mesmo filtro.

4.1 RAZÃO DE SER DO SABER PROPORCIONALIDADE

Do ponto de vista da transposição didática, os referenciais curriculares, diferente dos textos acadêmicos que estão bem próximo do “saber de origem”, são produzidos pela noosfera, que realizam adequações, transformando o “saber de origem” em “saber a ser ensinado”. O estudo da ecologia do saber proporcionalidade nos PCNs e na BNCC nos leva a refletir se há condições e/ou restrições para esse objeto de saber, após processo de transposição didática.

De onde vem proporcionalidade para se tornar objeto de ensino na instituição do Currículo do Ensino Fundamental? Nossa análise em busca das razões de ser do objeto de saber proporcionalidade tomará como norte o MEEP, elaborado a partir dos achados da análise da literatura acadêmica.

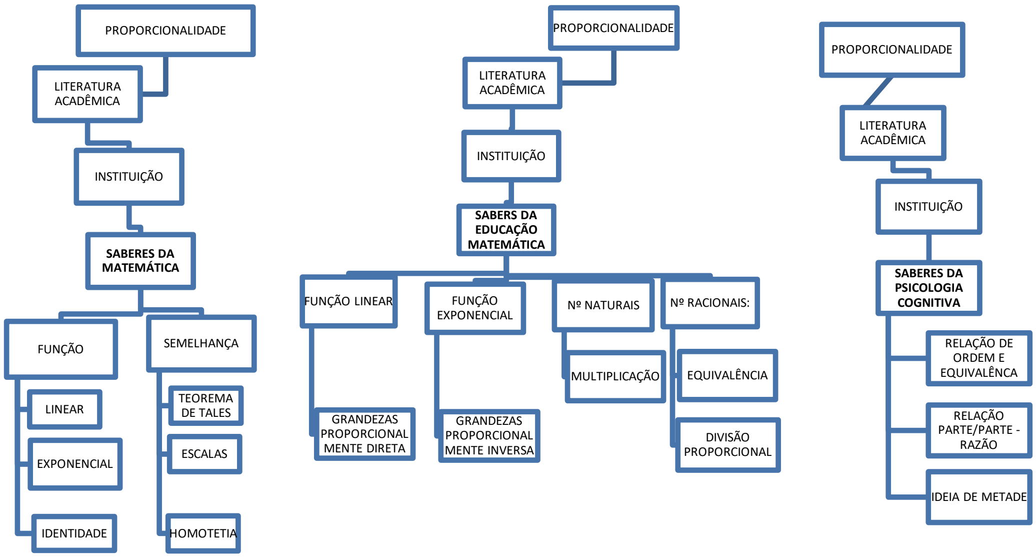
Observamos que os modelos mais evidentes foram:

Quadro 13 – MEEPs em destaque na literatura acadêmica

- Variação entre grandezas proporcionalmente direta (se x então y; se nx então ny, para todo $n \in N$.);
- variação entre grandezas proporcionalmente inversa, em que $y = k / x = k \cdot x^{-1}$;
- função linear ($f(x) = nx$;
- se multiplicar as distâncias pelo fator constante r, e se tem a relação biunívoca $f: F \to F'$, *então tem-se semelhança de razão r*, entre F e F'. Se $x' = f(x)$, os pontos *x, y são proporcionais.*

Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 24 – Modelo Epistemológico Esboçado para Proporcionalidade (MEEP)



Fonte: Elaborada pela autora.

A partir desse modelo, pretendemos identificar o modelo institucional dominante de para o saber proporcionalidade (MIDP), nos PCNs e na BNCC, para o Ensino Fundamental.

4.1.1 Instituição Currículo: Parâmetros Curriculares de Matemática (PCN)

Percebemos o sistema educacional como um sistema dinâmico, que recebe as influências endógenas e exógenas a educação. Nas últimas décadas do século XX, o sistema educacional brasileiro, alinhado ao debate educacional dentro e fora do país, toma como norte os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental, que teve como função

> [...] orientar e garantir a coerência dos investimentos no sistema educacional, socializando discussões, pesquisas e recomendações, subsidiando a participação de técnicos e professores brasileiros, principalmente daqueles que se encontram mais isolados, com menor contato com a produção pedagógica atual (BRASIL, 1997, p. 13).

Este documento surge com orientação para os oito anos do Ensino Fundamental e numa nova proposta de organização do sistema educação, que deixa de ser seriado para se organizar em ciclos – 1º e 2° ciclos (correspondendo aos quatros primeiros anos do EF) e 3º e 4º (quatro últimos anos do EF). Até então, o ensino teria duração de 8 anos. Em 2006, a partir da institucionalização do Plano Nacional de Educação (PNE), é criada a Lei nº 11.274, que regulamenta o Ensino Fundamental com duração de nove anos, tornando obrigatória a entradas das crianças nesta etapa de ensino, a partir dos seis anos.

Nossa escolha por analisar os PCNs em nossa pesquisa justifica-se pelo fato desses documentos serem produto da noosfera, configurando-se como ambiente de estudo muito importante em nossa pesquisa e por nos permitir situar o objeto de saber proporcionalidade nas últimas três décadas.

Inicialmente, encontramos o objeto de saber proporcionalidade como uma das de ideias fundamentais, de desenvolvimento importante orientando para que os conteúdos sejam "[...] selecionados levando em conta sua potencialidade quer para instrumentação para a vida, quer para o desenvolvimento do raciocínio" (BRASIL, 1997, p. 22). Os parâmetros para os anos iniciais também destacam que a proporcionalidade

> [...] está presente na resolução de problemas multiplicativos, nos estudos de porcentagem, de semelhança de figuras, na matemática financeira, na análise de tabelas, gráficos e funções. [...] Para raciocinar com proporções é preciso abordar os problemas de vários pontos de vista e também identificar situações em que o que está em jogo é a não proporcionalidade (BRASIL,1997, p. 38).

Nos anos iniciais, no tópico "Conteúdos de matemática para o segundo ciclo", encontramos narrativa que utiliza proporcionalidade no rol de novos conceitos importantes a serem construídos:

> [...] os alunos ampliam conceitos já trabalhados no ciclo anterior (como o de número natural, adição, medida, etc.), estabelecem relações que os aproximam de novos conceitos (como o de número racional, por exemplo), aperfeiçoam procedimentos conhecidos (contagem, medições) e constroem novos (cálculos envolvendo proporcionalidade, por exemplo) (BRASIL, 1997, p. 53).

Nas orientações didáticas, o estudo de proporcionalidade surge implicitamente na exploração dos diferentes significados dos números racionais no "[...] trabalho com escalas em mapas (a escala é de 1 cm para 100 m)" e na "[...] exploração da porcentagem (40 em cada 100 alunos da escola gostam de futebol)" (BRASIL,1997, p. 68).

No segundo ciclo, proporcionalidade surge como uma das ideias do grupo de situações associadas à comparação entre razões no trabalho de problemas que exploram a multiplicação e divisão, sendo esse o foco dado para proporcionalidade, nessa etapa de ensino.

Nas orientações, para os terceiro e quarto ciclos, é retomada a orientação para se trabalhar os conteúdos matemático a partir das ideias fundamentais, em que proporcionalidade é novamente listada como uma delas.

Nos objetivos de matemática para o terceiro ciclo, vamos encontrar um para o desenvolvimento

> [...] do raciocínio que envolva a proporcionalidade, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a observar a variação entre grandezas, estabelecendo relação entre elas e construir estratégias de solução para resolver situações que envolvam a proporcionalidade (BRASIL,1998, p. 65).

No tópico para "Conteúdos de matemática para o terceiro ciclo", vamos encontrar a proporcionalidade de forma implícita no texto. Percebemos o saber posto implicitamente nas orientações para o estudo dos conteúdos do bloco Espaço e Forma, nas relações entre figuras espaciais e suas representações planas, por exemplo (ampliação e redução), no estudo de mapas, construções de maquetes, entre outros. "É importante que essas atividades sejam conduzidas, de forma que mantenha ligações estreitas com o estudo de outros conteúdos, em particular com as atividades numéricas, métricas e com a noção de proporcionalidade" (BRASIL, 1997, p. 68).

De maneira explícita, vamos encontrar proporcionalidade nos conteúdos e procedimento para números e operações "[...] resolução de situações-problema que envolvem a ideia de proporcionalidade, incluindo os cálculos com porcentagens, pelo uso de estratégias não convencionais" (BRASIL,1998, p. 72).

O objeto de saber volta a ser explicitado, nos conteúdos propostos para o quarto ciclo, no bloco de estudo da Álgebra, em forma de alerta para a importância do desenvolvimento de um ensino que permita que os estudantes percebam que existem conexões entre os saberes presentes em diferentes blocos.

> A proporcionalidade, por exemplo, que já vem sendo trabalhada nos ciclos anteriores, aparece na resolução de problemas multiplicativos, nos estudos de porcentagem, de semelhança de figuras, na matemática financeira, na análise de tabelas, gráficos e funções. Para a compreensão da proporcionalidade é preciso também explorar situações em que as relações não sejam proporcionais, os contraexemplos (BRASIL, 1998, p. 84).

Vimos que os textos acadêmicos também apontam para a importância da proporcionalidade na resolução de problemas multiplicativos, nos estudos de porcentagem, de semelhança de figuras, na matemática financeira, na análise de tabelas, gráficos e funções. Apesar de o documento mencionar que a proporcionalidade vem sendo trabalhada desde ciclos anteriores em articulação com diferentes conteúdos, essa recomendação só é identificada no segundo ciclo como uma das ideias a serem trabalhadas nos problemas envolvendo multiplicação e divisão. A partir do terceiro ciclo, identificamos recomendação explícita para as conexões entre proporcionalidade no estudo de porcentagem nos problemas envolvendo variação entre grandezas. E implicitamente no estudo das semelhanças de figuras.

No quarto ciclo, a ideia de proporcionalidade em problemas de multiplicação e divisão é retomada na modelagem do espaço real e observação das relações entre tamanhos, aproximando-se "[...] da noção de proporcionalidade, o que permitirá, num momento posterior, a utilização das escalas na construção de maquetes" (BRASIL, 1998, p. 123). No bloco do Espaço e Forma, percebemos a ideia de fator escalar presente, no estudo da semelhança de figuras por meio da homotetia.

> Além disso, é preciso ficar claro para o aluno como e em que circunstâncias são produzidas figuras semelhantes. Para tanto, é preciso compreender a ideia de razão de semelhança ("a razão k que existe entre dois de seus lados homólogos"), por meio de ampliações e reduções que podem ser feitas numa figura pelas transformações conhecidas como homotetias (BRASIL, 1998, pp. 124-125).

De maneira implícita, o objeto de saber proporcionalidade pode ser identificado no estudo do conceito de semelhança que está "[...] presente no estudo de escalas, plantas, mapas, ampliações de fotos, fotocópias como também quando se verifica, por exemplo, se as medidas das partes do corpo humano se mantêm proporcionais entre um representante jovem e um representante adulto" (BRASIL, 1998, p. 125).

Nessa etapa de escolaridade, o saber proporcionalidade também está vinculado a problemas que envolvem grandezas "[...] diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais (função afim ou quadrática). Essas situações são oportunas para que se expresse a variação por meio de uma sentença algébrica, representando-a no plano cartesiano" (BRASIL, 1998, p. 84).

Observamos que, nas orientações destinadas ao trabalho do bloco Grandezas e Medida, no terceiro e quarto ciclo, o documento detalha a importância de se trabalhar problemas em que haja a variação do perímetro de uma figura para investigar o que pode ocorrer com sua área. "Desse modo, observam que existem diferentes tipos de variações (diretamente proporcionais, inversamente proporcionais e não proporcionais)" (BRASIL, 1998, p. 131-132).

Observamos duas menções, com relação ao uso da técnica de regra de três, ao longo de todas as orientações dos PCNs (1997; 1998). A primeira menção refere-se à resolução de problemas envolvendo "[...] grandezas diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais por meio de estratégias variadas, incluindo a regra de três" (BRASIL, 1998, p. 87), que vive na parte destinada aos conteúdos e procedimentos, do bloco números e operações. A segunda habita também o bloco dos números e operações e surge como nicho ecológico em situações que envolvem o conceito de proporcionalidade direta, em que o quociente entre as quantidades que se correspondem é constante.

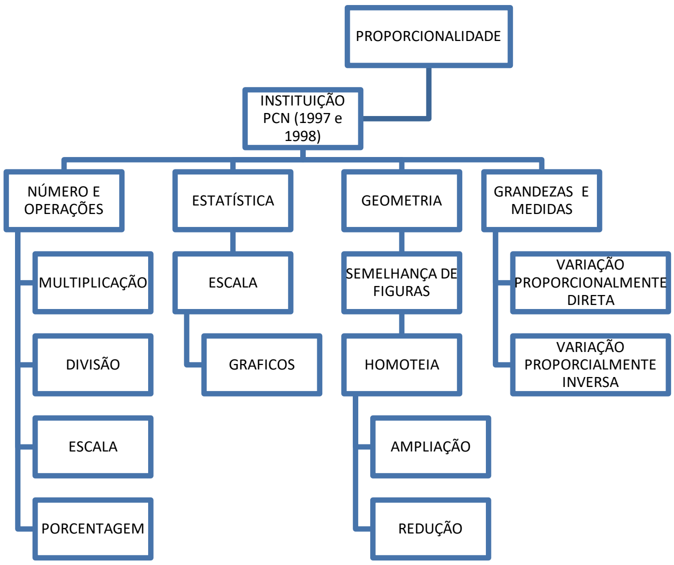
> Convém notar que a familiaridade com situações-problema em que aparecem essas relações leva os estudantes a construir procedimentos não convencionais para resolver esse tipo de problema antes de compreender e utilizar os procedimentos convencionais como a regra de três (BRASIL, 1998, p. 110).

Essa menção está nas orientações didáticas para o trabalho dos significados das operações multiplicação e divisão. Percebemos que a técnica da regra de três não faz parte da razão de ser da proporcionalidade, na instituição referencial curricular, e está em conformidade com o que observamos na literatura acadêmica.

4.1.1.1 Modelo Institucional Dominante para Proporcionalidade (MIDP)

A partir do filtro da proporcionalidade identificamos a razão de ser do objeto de saber proporcionalidade, no âmbito da instituição PCN, localizamos o seguinte MIDP.

Figura 25 – Modelo Institucional Dominante para Proporcionalidade: PCN



Fonte: Elaborada pela autora.

Observamos que o saber proporcionalidade, na instituição PCN, habita a comunidade de saberes da álgebra/aritmética (Número e Operações), do Espaço e Forma (Geometria) da estatística e das Grandezas e Medidas. Na comunidade de saberes: dos Números e Operações, o saber tem nicho ecológico nos problemas de multiplicação, divisão e porcentagem; da estatística, associando-se ao estudo de gráficos; da Geometria, ele tem nicho ecológico no estudo da semelhança de figuras, por meio da homotetia nos problemas de ampliação e redução; e das Grandezas e Medidas, tem função no estudo de problemas de variação das grandezas proporcionalmente diretas e proporcionalmente inversas.

Portanto, o modelo dominante identificado revela que a razão de ser da proporcionalidade na instituição PCN dá-se pelo reconhecimento de sua importância para o estudo de problemas de multiplicação, divisão e porcentagem; nos problemas de ampliação e redução, e de problemas de variação das grandezas proporcionalmente diretas e proporcionalmente inversas, além do reconhecimento dos diversos usos sociais que são feitos com o objeto de saber proporcionalidade.

4.1.2 Instituição Currículo: Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) da Educação Infantil e do Ensino Fundamental foi aprovada pelo CNE em 21 de dezembro de 2017, pela Resolução CNE/CP nº 2/2017, com fundamento no Parecer CNE/CP nº 15/2017. De acordo com o Capítulo I, das Disposições Gerais, no seu art. 1º, o parecer confere que a BNCC deve ser reconhecida

> [...] como documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais como direito das crianças, jovens e adultos no âmbito da Educação Básica escolar, e orientam sua implementação pelos sistemas de ensino das diferentes instâncias federativas, bem como pelas instituições ou redes escolares (BRASIL, RESOLUÇÃO CNE_CP, 2017, p. 4).

A BNCC tem como finalidade apresentar um referencial comum que norteará a construção dos currículos das diversas redes educacionais no país – redes de ensino e instituições escolares públicas e particulares “[...] passam a ter uma referência nacional obrigatória para a elaboração ou adequação de seus currículos e propostas pedagógicas” (BRASIL, 2018, p. 5). Ela orienta o mínimo de conteúdo que os estudantes devem aprender, unificando nacionalmente esse teor e oportunizando que cada rede de ensino possa complementar com a parte diversificada, bem como ampliando os conteúdos de acordo com o tipo de aluno que se pretenda formar.

As habilidades a serem desenvolvidas, ao longo do Ensino Fundamental, foram organizadas na BNCC, levando em consideração cinco unidades temáticas (Número, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística), e o saber proporcionalidade está presente em três delas (Número, Álgebra e Geometria). Para cada unidade temática, são apresentados os objetos de conhecimentos a serem estudados e as habilidades que consistem em desenvolver ao longo de determinado ano de escolaridade.

A BNCC apresenta o mesmo destaque para a proporcionalidade que observamos também nos PCNs, incluindo esse saber no rol das ideias fundamentais da Matemática – "[...] equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação" (BRASIL, 2018, p. 266). O argumento utilizado é que essas ideias permitem a articulação entre elas, e que são importantes como saber a ser ensinado pela escola, pois ajudam na construção do pensamento matemático dos estudantes.

Na unidade temática Número, o documento destaca que, "[...] no processo da construção da noção de número, os estudantes precisam desenvolver, entre outras, as ideias de aproximação, **proporcionalidade**, equivalência e ordem, noções fundamentais da Matemática" (BRASIL, 2018, p. 266, grifo nosso). Nessa mesma linha, o documento ainda destaca que

> A proporcionalidade, por exemplo, deve estar presente no estudo das operações com os números naturais, da representação fracionária dos números racionais, de áreas, de funções, probabilidade etc. Além disso, essa noção também se evidencia em muitas ações cotidianas e de outras áreas do conhecimento, como vendas e trocas mercantis, balanços químicos, representações gráficas etc. (BRASIL, 2018, p. 268).

As habilidades relacionadas ao estudo das operações com os números naturais, com a representação fracionária dos números racionais, por exemplo, têm indicação de ser introduzida já nos anos iniciais do Ensino Fundamental. E o estudo da proporcionalidade tem indicação de início já a partir do 4º ano, partido de "problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação e da divisão: adição de parcelas iguais, configuração retangular, proporcionalidade, repartição equitativa e medida" (BRASIL, 2018, p. 290). Para esse objeto, observamos duas habilidades: "[...] resolver e elaborar problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação (adição de parcelas iguais, organização retangular e proporcionalidade), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos" e "[...] resolver e elaborar problemas de divisão cujo divisor tenha no máximo dois algarismos, envolvendo os significados de repartição equitativa e de medida, utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos" (BRASIL, 2018, p. 290). No 6º ano, na unidade temática número, o documento apresenta as habilidades "[...] resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da 'regra de três', utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros" (BRASIL, 2018, p. 301), direcionada ao objeto de conhecimento "Cálculo de porcentagens por meio de estratégias diversas, sem fazer uso da "regra de três" (BRASIL, 2018, p. 300).

Vale ressaltar que a técnica de regra de três só é mencionada pela BNCC em três momentos: o primeiro, nas normatizações com relação aos anos iniciais no trabalho da noção intuitiva de função; o segundo, no objeto de aprendizagem com relação ao estudo da porcentagem; e o terceiro, na parte das habilidades com relação também a porcentagem. Nas três menções, a determinação é para que o estudo seja realizado "sem a utilização da regra de três". O que nos deixa mais uma vez inquietados: estaria então tal técnica sendo banida do ecossistema matemática do Ensino Fundamental?

Na unidade temática álgebra, as "[...] ideias matemáticas fundamentais vinculadas a essa unidade são: equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade" (BRASIL, 2018, p. 270). Nos anos iniciais, observamos que o estudo da noção intuitiva de função é estimulado por meio de problemas de variação proporcional.

> A noção intuitiva de função pode ser explorada por meio da resolução de problemas envolvendo a variação proporcional direta entre duas grandezas (sem utilizar a regra de três), como: "Se com duas medidas de suco concentrado eu obtenho três litros de refresco, quantas medidas desse suco concentrado eu preciso para ter doze litros de refresco?" (BRASIL, 2018, p. 270).

Ainda na unidade temática álgebra, no 5° ano, localizamos a habilidade "[...] resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, alterar as quantidades de ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escala em mapas, entre outros" (BRASIL, 2018, p. 295). Esta habilidade está relacionada ao objeto de conhecimento "grandezas diretamente proporcionais". Para o objeto "[...] problemas envolvendo a partição de um todo em duas partes proporcionais", direciona-se a habilidade "[...] resolver problemas envolvendo a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, tais como dividir uma quantidade em duas partes, de modo que uma seja o dobro da outra, com compreensão da ideia de razão entre as partes e delas com o todo" (BRASIL, 2018, p. 295).

No 7º ano, na unidade temática álgebra, alistada no objeto de conhecimento "[...] grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais", direcionam-se à seguinte habilidade "[...] resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas" (BRASIL, 2018, p. 307). E, por último, encontramos no 9° ano, para o mesmo objeto de conhecimento, a habilidade "[...] resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas" (BRASIL, 2018, p. 317).

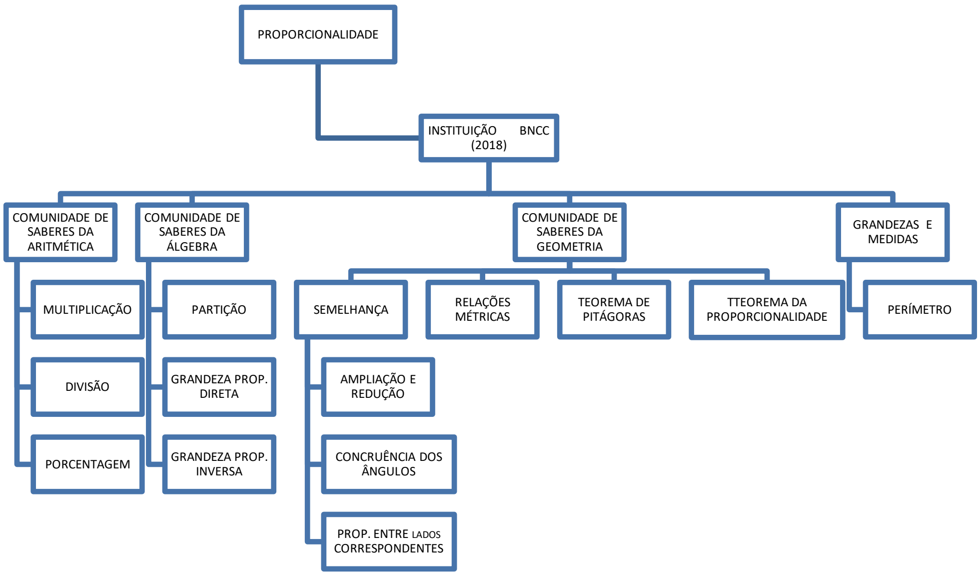
Na unidade temática geometria, no 5º ano, o objeto de conhecimento "[...] ampliação e redução de figuras poligonais em malhas quadriculadas: reconhecimento da congruência dos ângulos e da proporcionalidade dos lados correspondentes" traz a habilidade "[...] reconhecer a congruência dos ângulos e a proporcionalidade entre os lados correspondentes de figuras poligonais em situações de ampliação e de redução em malhas quadriculadas e usando tecnologias digitais" (BRASIL, 2018, p. 297). No 9º ano, encontramos a proporcionalidade no objeto de conhecimento "Relações métricas no triângulo retângulo. Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração. Retas paralelas cortadas por transversais: teoremas de proporcionalidade e verificações experimentais" (BRASIL, 2018, p. 318). Para esses objetos de conhecimento, relacionam-se as habilidades, "[...] demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos"; e "[...] resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes" (BRASIL, 2018, p. 319).

Na unidade temática grandezas e medidas, encontramos indicação para o trabalho da proporcionalidade, no 6º ano, no objeto de conhecimento "[...] perímetro de um quadrado como grandeza proporcional à medida do lado" direcionado à habilidade "[...] analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados, para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, o que não ocorre com a área (BRASIL, 2018, p. 303).

4.1.2.1 Modelo Institucional Dominante para Proporcionalidade (MIDP)

Identificamos a razão de ser do objeto de saber proporcionalidade, por meio do filtro da proporcionalidade na esfera da instituição BNCC, e localizamos o seguinte MIDP.

Figura 26 – Modelo Institucional Dominante para Proporcionalidade – BNCC



Fonte: Elaborada pela autora.

O Modelo Institucional Dominante para Proporcionalidade, para o Ensino Fundamental, na BNCC se revela no estudo dos diferentes significados da multiplicação e da divisão e no estudo da porcentagem na unidade temática número. Na unidade temática álgebra, a proporcionalidade tem destaque no estudo de partição, de grandezas proporcionalmente diretas e grandezas proporcionalmente inversas. Em geometria, o destaque surge em contexto de malha quadriculada, em que a proporcionalidade é explorada na análise das medidas dos ângulos e da proporcionalidade dos lados de figuras poligonais; no estudo das relações métricas do triângulo retângulo; do teorema de Pitágoras e Teorema de proporcionalidade. Finalmente, na unidade temática grandezas e medidas o objeto de saber proporcionalidade é estudado na compressão que o perímetro é proporcional a medida dos lados de um quadrado, por exemplo, o que não ocorre com a área.

Caminhamos agora para o segundo ponto do filtro da proporcionalidade, que é o das praxeologias matemáticas. Partimos dos questionamentos: existem tipos de tarefas e técnicas relacionadas à proporcionalidade na instituição Currículo? Como são justificadas as técnicas nessas instituições? Em que ponto se revela a razão de ser da proporcionalidade nas OM nos PCNs e na BNCC?

4.2 ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA (OM) DO OBJETO DO SABER PROPORCIONALIDADE

Pretendemos, a partir de agora, apresentar quadros organizados com os tipos de tarefas relacionados ao saber proporcionalidade, partindo de um agrupamento por gênero e, quando possível, apresentaremos exemplos de tipos de tarefas envolvendo proporcionalidade e possíveis técnicas usadas na sua resolução.

Para nossa análise das OMs, questionamo-nos se os tipos de tarefa, técnicas, tecnologia e teoria observados nas instituições PCN e BNCC envolvendo proporcionalidade são bem identificados. São representativos? São pertinentes? Têm razão de ser? Existe uma população de tipos de tarefas de proporcionalidade nas diferentes comunidades de saberes da matemática do Ensino Fundamental?

4.2.1 Instituição Currículo: Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs)

Identificamos em nossa análise que não há indicação para o trabalho com proporcionalidade no primeiro ciclo do Ensino Fundamental. Com relação ao segundo ciclo, encontramos indicação para o trabalho de proporcionalidade já no primeiro parágrafo dos conteúdos de matemática para o ciclo, ressaltando a importância da construção desse novo conceito nessa etapa da escolaridade.

Na instituição PCN, foram identificados pelo menos quatro gêneros para os tipos de tarefas (resolver, dividir, determinar e calcular). O documento destaca bastante a importância de um ensino focado na resolução de problemas, e, por esse motivo, identificamos cinco tipos de tarefa do gênero resolver. Quanto aos demais gêneros, encontramos apenas um tipo de cada.

4.2.1.1 Tipos de tarefas e técnicas

Quadro 14 – Tipo de tarefa do gênero calcular – PCN

Tipo de tarefa	
T_{14}	Calcular com porcentagens, pelo uso de estratégias não convencionais

Fonte: Elaborado pela autora.

O tipo de tarefa T_{14} pode ser ilustrado pelo recorte do texto ao sugerir que, “[...] partindo de um trabalho em que o estudante compreenda o significado da expressão ‘dez por cento’, ele pode, por exemplo, calcular 35% de 120, achando 10% de 120 (12), 5% de 120 (metade de 12) e adicionando as parcelas: 12 + 12 + 12 + 6 = 42” (BRASIL, 1997, p. 81).

Outra forma de cálculo sugerida pelo documento é por estimativa. Segundo a instituição, essa forma de cálculo se apoia "[...] em aspectos conceituais referentes aos números e às operações (ordem de grandeza, valor posicional, proporcionalidade e equivalência), em procedimentos (como decompor, substituir, arredondar, compensar), na aplicação de estratégias de cálculo mental" (BRASIL, 1997, p. 77).

Quadro 15 – Tipo de tarefa do gênero resolver – PCN

Tipo de tarefa	
T_{18}	Resolver problemas com a ideia de proporcionalidade pelo uso de técnicas não convencionais.
T_{19}	Resolver problema com grandezas determinadas pela razão de duas outras (densidade e velocidade) .
T_{20}	Resolver problema com grandezas determinadas pela razão entre o produto (energia elétrica: kWh).
T_{21}	Resolver problema de comparação de razões.
T_{22}	Resolver problemas que envolvem a propriedades das congruências e semelhanças.
T_{23}	Resolver problemas de variação de grandezas (proporcionalmente direta, inversa ou não proporcionais.
T_{24}	Resolver problemas que envolvem a ideia de proporcionalidade, incluindo os cálculos com porcentagens.

Fonte: Elaborado pela autora.

T_{18} – Resolver problemas com a ideia de proporcionalidade pelo uso de técnicas não convencionais.

Não identificamos de maneira explícita no texto exemplo para o tipo de tarefa T_{18}. Porém, ao longo do texto, encontramos destaque para o trabalhar com técnicas não convencionais, favorecendo ao raciocínio de diferentes procedimentos evitando meramente o uso da regra de três.

> Convém notar que a familiaridade com situações-problema em que aparecem essas relações leva os alunos a construir procedimentos não convencionais para resolver esse tipo de problema antes de compreender e utilizar os procedimentos convencionais como a regra de três (BRASIL, 1998, p. 110).

Vale salientar que a instituição PCN segue essa orientação até o quarto ciclo quanto ao ensino do objeto de saber proporcionalidade. Perguntamo-nos: será que o livro didático também adota essa perspectiva?

T_{19} – Resolver problema com grandezas determinadas pela razão de duas outras (densidade e velocidade).

Identificamos o tipo de tarefa T_{19}, no fragmento do texto "[...] resolução de situações-problema envolvendo grandezas determinadas pela razão de duas outras (densidade e velocidade)" (BRASIL, 1998, p. 90). Percebemos um alerta para a importância de se desenvolver um ensino, nessa etapa de escolaridade, buscando também contextos externos a matemática.

T_{20} – Resolver problema com grandezas determinadas pelo produto (energia elétrica: kWh).

> Como as medidas quantificam grandezas do mundo físico e são fundamentais para a interpretação deste, as possibilidades de integração da Matemática com as outras áreas do ensino fundamental ficam evidentes, como Ciências Naturais (densidade, velocidade, energia elétrica) ou Geografia (coordenadas geográficas, densidade demográfica, escalas de mapas e guias) (BRASIL, 1998, p. 85).

Assim como em T_{19}, o tipo de tarefa T_{20} apresenta orientação para o desenvolvimento de "[...] resolução de situações-problema envolvendo grandezas determinadas pelo produto (energia elétrica: kWh)" (BRASIL, 1998, p. 90).

T_{21} – Resolver problema de comparação de razões.

Para o tipo de T_{21}, proporcionalidade surge como presa para o trabalho da multiplicação. Identificamos vários exemplos associando a ideia de proporcionalidade a partir da realização de comparação entre razões. As orientações destacam que, no cotidiano dos estudantes, muitas situações similares estão presentes.

> – Marta vai comprar três pacotes de chocolate. Cada pacote custa R$ 8,00. Quanto ela vai pagar pelos três pacotes? (A ideia de proporcionalidade está presente: 1 está para 8, assim como 3 está para 24) (BRASIL, 1997, p. 72).
>
> – Dois abacaxis custam R$ 2,50. Quanto pagarei por 4 desses abacaxis? (Situação em que o aluno deve perceber que comprará o dobro de abacaxis e deverá pagar — se não houver desconto — o dobro, R$ 5,00, não sendo necessário achar o preço de um abacaxi para depois calcular o de 4) (BRASIL, 1998, p. 109).

No primeiro exemplo, observamos que a técnica sugerida recorre ao valor unitário e, no segundo exemplo, a técnica utilizada recorre ao fator de proporcionalidade, preparando o terreno para o trabalho com funções em etapa posterior.

Encontramos também exemplos de problemas envolvendo proporcionalidade visando trabalhar o significado da divisão enquanto repartição.

> – Marta pagou R$ 24,00 por 3 pacotes de chocolate. Quanto custou cada pacote? (A quantia em dinheiro será repartida igualmente em 3 partes e o que se procura é o valor de uma parte.) (BRASIL, 1997, p. 72).
>
> Paguei R$ 11,60 por 4 metros de tela. Quanto custa 0,50 m dessa mesma tela? (Como 0,5 cabe 8 vezes em quatro, a quantia em dinheiro será repartida igualmente em 8 partes e o que se procura é o valor de uma parte, ou calcular quanto custa cada metro e achar a metade (BRASIL, 1998, p. 109).

O desenvolvimento da técnica recorre ao encontro do valor unitário. Também encontramos exemplo para o trabalho do significado da divisão associada à ideia de “determinar quanto cabe”.

> – Marta gastou R$ 24,00 na compra de pacotes de chocolate que custavam R$ 3,00 cada um. Quantos pacotes de chocolate ela comprou? (Procura-se verificar quantas vezes 3 cabe em 24, ou seja, identifica-se a quantidade de partes.) (BRASIL, 1998, p. 72).
>
> Paguei R$ 11,60 por um rolo de tela cujo metro custa R$ 2,90. Quantos metros de tela há no rolo? (Procura-se verificar quantas vezes R$ 2,90 cabe em R$ 11,60 – identifica-se a quantidade de partes.) (BRASIL, 1998, p. 109).

Novamente, identificamos o fator de proporcionalidade sendo usado como técnica no exemplo anterior e no próximo.

> Se 8 metros de tela custam R$ 5,80, quanto pagarei por 16 metros de tela? (situação em que o aluno deve perceber que comprará o dobro de tela e que deverá pagar – se não houver desconto. o dobro de R$ 5,80, não sendo necessário achar o preço de 1 metro para depois calcular o de 16) (BRASIL, 1998, p. 109).

O exemplo a seguir sugere mais problemas de comparação entre razões em que o quociente entre as quantidades que correspondentes são constantes.

> Ao trabalhar com situações que envolvem o conceito de proporcionalidade direta, em que o quociente entre as quantidades que se correspondem é constante, como uma relação entre número de pacotes e seus pesos (ver tabela a seguir) o aluno terá oportunidade de identificar a manutenção da razão peso/nº de pacotes quando se multiplicam as quantidades por um mesmo número. No exemplo citado tal razão é expressa por 4 kg por pacote.

Nº de pacotes	Peso (kg)
1	4
2	8
3	12
4	16

Fonte: Brasil (1998, p. 110).

T_{22} – Resolver problemas que envolvem a propriedades das congruências e semelhanças.

Observamos que a instituição PCN explora bastante as possibilidades de conexões, principalmente entre o bloco das Grandezas e Medidas, que, no exemplo a seguir, vem como sugestão trabalho das propriedades das congruências e semelhança.

> Um outro ponto a ser considerado é a importância de levar em conta as conexões das medidas com os demais blocos de conteúdos matemáticos. Ou seja: o professor, ao propor situações-problema envolvendo grandezas e medidas, proporcionará contextos para a construção de conceitos e procedimentos não só os estritamente relacionados a este tema, mas também a outros, como ampliação dos campos numéricos, razões e proporções, gráficos cartesianos, relações geométricas, medidas estatísticas etc. Por exemplo, no quarto ciclo, os alunos poderão perceber a equivalência entre algumas figuras planas pela aplicação de propriedades das congruências e semelhanças (BRASIL, 1998, p. 131).

Exercícios que envolvem a construção de maquetes são atividades que levam “o aluno a observar as relações entre tamanhos e aproximar-se da noção de proporcionalidade, o que permitirá, num momento posterior, a utilização das escalas na construção de maquetes” (BRASIL, 1998, p. 131). O documento ainda acrescenta que

> Outro aspecto importante refere-se ao uso de recursos como as maquetes tridimensionais, e não apenas as representações desenhadas. As maquetes, por exemplo, têm por objetivo, de um lado, contribuir para melhorar as imagens visuais dos alunos e, de outro, favorecer a construção de diferentes vistas do objeto pelas mudanças de posição do observador, frequentemente indispensáveis na resolução de problemas que envolvem a localização e movimentação no espaço (BRASIL, 1998, p. 131).

Como pode ser verificado no recorte anterior, o trabalho com maquetes também contribui em desenvolver habilidade que envolve a localização e movimentação no espaço.

T_{23} – Resolver problemas de variação de grandezas (proporcionalmente direta, inversa ou não proporcionais).

O exemplo para o tipo de tarefa T_{23} a seguir sugere a realização de comparações entre variação de grandezas onde o que está em foco é a percepção da não proporcionalidade.

> Pode-se iniciar a exploração da noção de semelhança em figuras tridimensionais por meio de atividades que mostrem, por exemplo, que recipientes de um mesmo produto de diferentes capacidades muitas vezes não são semelhantes, como as garrafas de refrigerante de capacidades diferentes: a razão entre suas alturas não é igual à razão entre os diâmetros dos gargalos (BRASIL, 1998, p. 125).

Tecendo um paralelo com a literatura acadêmica, observamos que há recomendação para esse tipo de situação desde os anos iniciais pelos textos acadêmico. A instituição PCN traz a orientação no quarto ciclo, final do Ensino Fundamental.

> Situações-problema envolvendo áreas e perímetros também são contextos interessantes para um trabalho com a variação de grandezas. Assim, por exemplo, os alunos podem estabelecer como varia o perímetro (ou a área) de um quadrado em função de seu lado; ou então, estabelecer relações entre os lados de retângulos que têm um mesmo perímetro (ou área). Desse modo, observam que existem diferentes tipos de variações (diretamente proporcionais, inversamente proporcionais e não proporcionais) (BRASIL, 1998, p. 131 - 132).

Observamos, no exemplo anterior, a recorrência ao bloco das grandezas e medidas como contexto para análise e estudo dos tipos de variações entre as grandezas.

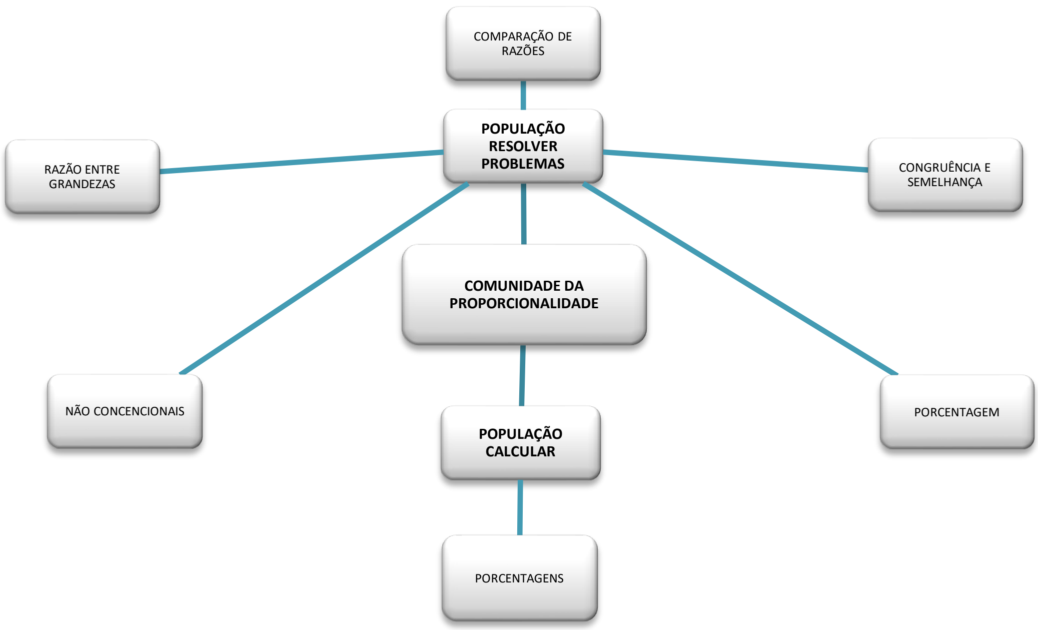
T_{24} – resolver problemas que envolvem a ideia de proporcionalidade, incluindo os cálculos com porcentagens.

A instituição orienta o trabalho a partir da "[...] resolução de situações-problema que envolvem a ideia de proporcionalidade, incluindo os cálculos com porcentagens, pelo uso de estratégias não convencionais" (BRASIL, 1997, p. 72), desde o segundo ciclo do Ensino Fundamental. Os PCNs ainda salientam que, "[...] em relação ao cálculo de porcentagem nos dois primeiros ciclos, alguns recursos mais simples e evidentes para as crianças podem ser explorados, deixando para os ciclos posteriores a apresentação de técnicas convencionais" (BRASIL, 1997, p. 81).

Outro gênero de tipo de tarefa identificado foi "calcular". Observamos que essa ação não é muito sugerida ao longo das orientações.

Enfim, inicialmente nos perguntamos se existia uma população de tipos de tarefas de proporcionalidade nas diferentes comunidades de saberes da matemática do Ensino Fundamental. Na instituição PCN, notamos existe uma comunidade do saber proporcionalidade formada pelas populações de oito tipos de tarefa (T_{14}, T_{18}, T_{19}, T_{20}, T_{21}, T_{22}, T_{23} e T_{24}), que vão permitir diversas conexões entre os diferentes saberes do ecossistema matemática do Ensino Fundamental.

Figura 27 – Comunidade do saber proporcionalidade na instituição PCN



Fonte: Elaborado pela autora.

Do ponto de vista das tecnologias e teorias, observamos que, na instituição PCN, as justificativas das técnicas (tecnologias) se voltam sempre para o desenvolvimento da ideia de proporcionalidade (teoria). O documento sinaliza para essa compreensão em um dos objetivos de matemática para o terceiro ciclo,

> [...] do raciocínio que envolva a proporcionalidade, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o estudante a: observar a variação entre grandezas, estabelecendo relação entre elas e construir estratégias de solução para resolver situações que envolvam a proporcionalidade (BRASIL, 1998, p. 68).

Percebemos nos PCNs orientação para que as atividades de proporcionalidade não sofram restrições pela escola, uma vez que "essa postura leva ao empobrecimento do trabalho, produzindo efeito contrário ao de enriquecer o processo ensino-aprendizagem" (BRASIL, 1997, p. 23).

Chama-nos a atenção para alguns aspectos que afetam o trabalho dos números naturais, comprometendo a sua aprendizagem. Um dos aspectos abordados diz respeito ao "[...] desestímulo ao uso dos procedimentos aritméticos, considerados como raciocínios inferiores – quando comparados aos procedimentos algébricos" (BRASIL, 1998, p. 97). Remete-nos ao trabalho focado apenas no raciocínio quantitativo – na regra de três –, sem o desenvolvimento de um conjunto de tarefas que oportunizem a compreensão da proporcionalidade, logo que levam à construção do raciocínio proporcional qualitativo.

4.2.2 Instituição Currículo: Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

A análise da organização matemática na instituição BNCC não apresentará exemplos detalhados como o fizemos nas análises das OMs anteriores, pois a organização dessa instituição não apresenta elementos com tal detalhamento.

Observamos que, na BNCC, existe uma preocupação para que os objetos de conhecimento sejam trabalhados por meio da resolução e elaboração de problemas, favorecendo sempre a articulação entre os objetos dentro das unidades temáticas, bem como permitindo as conexões entre objetos de diferentes unidades. Nessa instituição, proporcionalidade é objeto de estudo nos 4°, 5°, 6°, 7º e 9º anos do Ensino Fundamental.

Na análise dos tipos de tarefa, identificamos na instituição BNCC pelo menos quatro gêneros para os tipos de tarefas (resolver; resolver e elaborar; reconhecer; e analisar e descrever).

4.2.2.1 Tipos de tarefas e técnicas

Para o gênero “resolver problema”, encontramos dois tipos de tarefa (T_1 e T_2), relacionadas à variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas e envolvendo a partilha de uma quantidade em duas partes iguais como ilustra o Quadro 17. Esse gênero e tipos de tarefas foram identificados exclusivamente nas recomendações do 5º ano do Ensino Fundamental.

Quadro 16 – Tipo de tarefa do gênero resolver problemas – BNCC

	Tipo de tarefa
T_{25}	Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas.
T_{26}	Resolver problemas envolvendo a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais

Fonte: Elaborado pela autora.

De acordo com a BNCC, o tipo de tarefa T_{25} poderia ser resolvido por meio de técnica como a realização da associação da quantidade de um produto ao valor a pagar; realizando a alteração das quantidades de ingredientes de receitas, ampliando ou reduzindo escala em mapas, entre outros.

Para o tipo de tarefa T_{26}, encontramos a recomendação para a realização de técnicas tais como “[...] dividir uma quantidade em duas partes, de modo que uma seja o dobro da outra, com compreensão da ideia de razão entre as partes e delas com o todo” (BRASIL, 2108, p. 295).

O gênero “resolver e elaborar” foi identificado em seis tipos de tarefa (T_{30}, T_{31}, T_{32}, T_{33}, T_{34} e T_{35}), como ilustrado no quadro a seguir, destinados aos 4º, 6º, 7º e 9º anos do Ensino Fundamental, envolvendo diferentes significados da multiplicação e divisão; porcentagens; variação proporcional direta e de variação proporcional inversa entre duas grandezas; relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas; e aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade.

Quadro 17 – Tipo de tarefa do gênero resolver e elaborar problemas – BNCC

	Tipo de tarefa
T_{30}	Resolver e elaborar problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação.
T_{31}	Resolver e elaborar problemas envolvendo diferentes significados da divisão.
T_{32}	Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens
T_{33}	Resolver e elaborar problemas com variação proporcional direta e inversa entre duas grandezas
T_{34}	Resolver e elaborar problemas com variação proporcional direta e inversa entre duas ou mais grandezas
T_{35}	Resolver e elaborar problemas de aplicação do Teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade

Fonte: Elaborado pela autora.

Do ponto de vista de possibilidade de resolução do tipo de tarefa T_{30}, encontramos indicação na base para possíveis técnicas como a realização de resolução e a elaboração de "[...] problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação (adição de parcelas iguais, organização retangular e proporcionalidade), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos" (BRASIL, 2018, p. 291).

Para o tipo de tarefa T_{31}, existe a recomendação para uso de técnica que oportunize a resolução e a elaboração de "[...] problemas de divisão cujo divisor tenha no máximo dois algarismos, envolvendo os significados de repartição equitativa e de medida, utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos" (BRASIL, 2018, p. 291).

O tipo de tarefa T_{32} remete à possibilidade de uso de técnica que favoreça a resolução e a elaboração de "[...] problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da "regra de três", utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros" (BRASIL, 2018, p. 301).

A instituição recomenda que, para o tipo de tarefa T_{33}, sejam desenvolvidas técnicas que permitam a resolução e a elaboração de "[...] problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas" (BRASIL, 2018, p. 307).

De acordo com a BNCC, o tipo de tarefa T_{34} remete ao desenvolvimento de técnica de resolução e elaboração de "[...] problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas" (BRASIL, 2018, p. 317).

O tipo de tarefa T_{35} possibilita o desenvolvimento de técnica que remeta à resolução e elaboração de "[...] problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes" (BRASIL, 2018, p. 319).

Para o gênero "reconhecer", foi identificado apenas um tipo de tarefa (T_{36}), na unidade temática geometria, no 5º ano, conforme ilustrada no Quadro 19.

Quadro 18 – Tipo de tarefa do gênero reconhecer – BNCC

Tipo de tarefa	
T_{36}	Reconhecer a congruência dos ângulos e a proporcionalidade entre os lados correspondentes de figuras poligonais

Fonte: Elaborado pela autora.

Do ponto de vista da resolução do tipo de tarefa T_{36}, a instituição aponta para o uso de técnica que favoreça o reconhecimento da "[...] congruência dos ângulos e a proporcionalidade entre os lados correspondentes de figuras poligonais em situações de ampliação e de redução em malhas quadriculadas e usando tecnologias digitais" (BRASIL, 2018, p. 297).

Identificamos um tipo de tarefa do gênero "analisar e descrever" direcionado ao 6º ano, na unidade temática grandezas e medidas, destinado ao estudo das mudanças no perímetro e na área de um quadrado.

Quadro 19 – Tipo de tarefa do gênero analisar e descrever – BNCC

Tipo de tarefa	
T_{37}	Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado

Fonte: Elaborado pela autora.

Para o tipo de tarefa T_{37}, a BNCC recomenda a aplicação de técnica que permita o estudante desenvolver análises e posteriores descrições acerca de "[...] mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados, para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, o que não ocorre com a área" (BRASIL, 2018, p. 303).

O gênero "demonstrar" foi apontado no objeto de conhecimento endereçado ao 9º ano do Ensino Fundamental na unidade temática geometria, alusiva às relações métricas do triângulo retângulo.

Quadro 20 – Tipo de tarefa do gênero demonstrar – BNCC

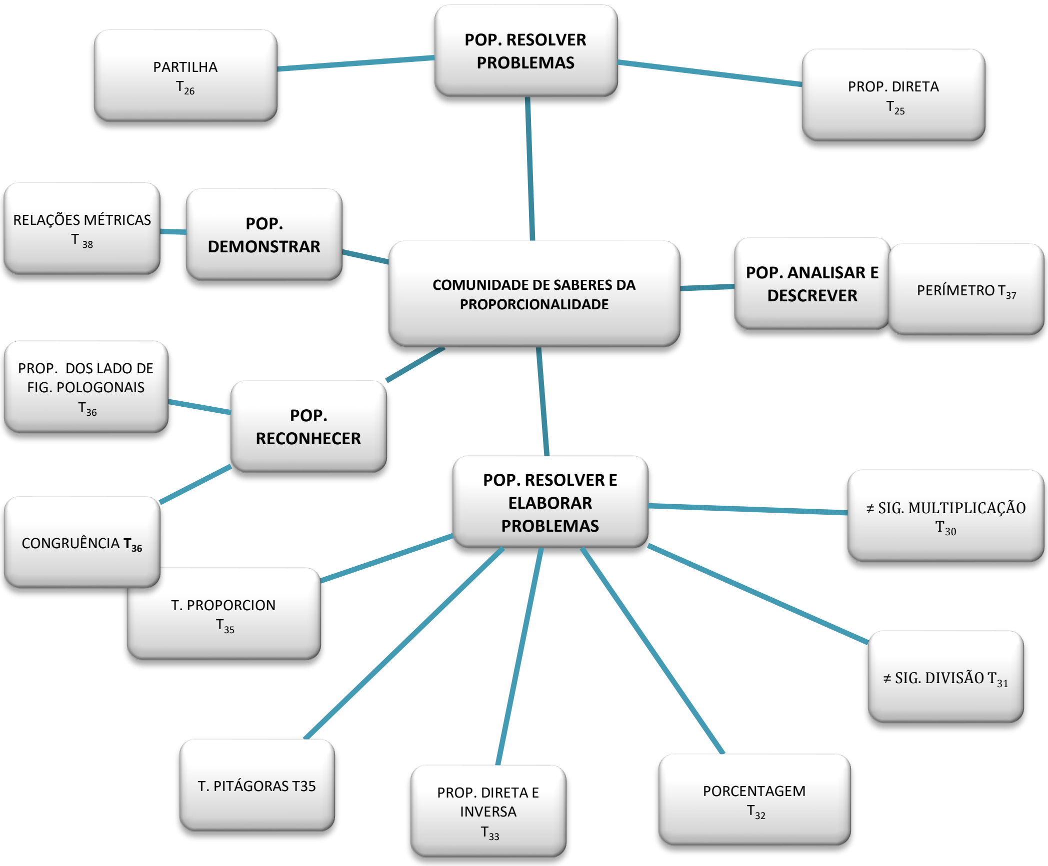
Tipo de tarefa	
T_{38}	Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo

Fonte: Elaborado pela autora.

A instituição orienta para o emprego de técnica que viabilize as demonstrações das "[...] relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos" (BRASIL, 2018, p. 319).

A organização matemática na BNCC revela onze diferentes tipos de tarefa e orientações para técnicas a eles sinalizadas. Acreditamos que tanto o bloco do "saber fazer" quanto o bloco do "saber" nessa instituição seja representativo, pertinente e tem razão de ser. Consideramos que a existência de uma comunidade do saber proporcionalidade é formada por cinco populações de tipos de tarefas de proporcionalidade nas unidades temáticas Número, Álgebra, Geometria e Grandezas e medidas.

Figura 28 – Comunidade do saber proporcionalidade na Instituição BNCC



Fonte: Elaborado pela autora.

Essa comunidade estruturada viabiliza diversas conexões entre os diferentes saberes do ecossistema matemática do Ensino Fundamental.

Do ponto de vista das tecnologias e teorias, observamos a BNCC, as justificativas das técnicas (tecnologias), se voltam sempre para o desenvolvimento da ideia de proporcionalidade (teoria). No qual esse objeto de saber encontra-se no elenco das ideias fundamentais que para desenvolvimento ao longo do Ensino Fundamental.

4.3 A RELAÇÃO INSTITUCIONAL DO OBJETO DO SABER PROPORCIONALIDADE

De onde vem a proporcionalidade para se tornar objetos no Ensino Fundamental? Quais as condições para a existência do saber proporcionalidade que facilitam ou favorecem a comunidade desse objeto saber? Quais são as restrições que dificultam, entorpecem ou mesmo impedem a implementação das atividades matemáticas e didáticas que podem ser desenvolvidas no ambiente institucional dos PCNs e da BNCC?

Partindo desses questionamentos, realizamos a caracterização da relação institucional, do saber proporcionalidade nos PCNs e na BNCC, como poderá ser lido no texto a seguir.

4.3.1 Instituição Currículo

Assim como observamos nas instituições presentes na literatura acadêmica, a proporcionalidade tem destaque na formação de estruturas cognitivas para a compreensão de conceitos matemáticos de diversas comunidades de saberes. Por fazer parte do bloco tecnológico/teórico, o objeto proporcionalidade requer tarefas que favoreçam ao desenvolvimento do raciocínio qualitativo e quantitativo, também na instituição PCN.

Tanto do ponto de vista das condições quanto das restrições, observamos que a instituição PCN vai pelos mesmos caminhos do que notamos nas instituições analisadas na literatura acadêmica.

4.3.1.1 Condições Institucionais

Do ponto de vista das condições de existência da proporcionalidade apresentamos a seguir o que observamos na Instituição Currículo composta pelos Parâmetros Curriculares Nacionais e pela Base Nacional Comum Curricular.

As condições institucionais são aquelas que permitem, facilitam ou favorecem as praxeologias matemáticas e didáticas em torno do saber proporcionalidade. Nestes termos observamos que:

4.3.1.1.1 Nos Parâmetros Curriculares Nacionais

a) "O fato de que vários aspectos do cotidiano funcionam de acordo com leis de proporcionalidade evidencia que o raciocínio proporcional é útil na interpretação de fenômenos do mundo real" (BRASIL,1997, p. 38).
b) "Ele está ligado à inferência e à predição e envolve métodos de pensamento qualitativos e quantitativos (essa resposta faz sentido? Ela deveria ser maior ou menor?). Para raciocinar com proporções, é preciso abordar os problemas de vários

pontos de vista e também identificar situações em que o que está em jogo é a não proporcionalidade" (BRASIL, 1997, p. 38).

c) "A proporcionalidade, por exemplo, está presente na resolução de problemas multiplicativos, nos estudos de porcentagem, de semelhança de figuras, na matemática financeira, na análise de tabelas, gráficos e funções" (BRASIL,1997, p. 38).
d) "O estudo das grandezas variáveis deu origem ao conceito de função e fez surgir, em decorrência, um novo ramo: a Análise Matemática" (BRASIL, 1998, p. 24).
e) "As atividades em que as noções de grandezas e medidas são exploradas proporcionam melhor compreensão de conceitos relativos ao espaço e às formas. São contextos muito ricos para o trabalho com os significados dos números e das operações, da ideia de proporcionalidade e escala, e um campo fértil para uma abordagem histórica" (BRASIL,1997, p. 40).
f) "A variedade de conexões que podem ser estabelecidas entre os diferentes blocos, ou seja, ao planejar suas atividades, o professor procurará articular múltiplos aspectos dos diferentes blocos, visando possibilitar a compreensão mais fundamental que o estudante possa atingir a respeito dos princípios/métodos básicos do corpo de conhecimentos matemáticos (proporcionalidade, equivalência, dedução, etc.); além disso, buscará estabelecer ligações entre a Matemática, as situações cotidianas dos alunos e as outras áreas do conhecimento" (BRASIL, 1997, p. 40; 1998, p. 53).
g) "Ao relacionar ideias matemáticas entre si, podem reconhecer princípios gerais, como proporcionalidade, igualdade, composição e inclusão, e perceber que processos como o estabelecimento de analogias, indução e dedução estão presentes tanto no trabalho com números e operações como em espaço, forma e medidas" (BRASIL, 1997, p. 29; 1998, p. 37).

4.3.1.1.2 Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

"A noção intuitiva de função pode ser explorada por meio da resolução de problemas envolvendo a variação proporcional direta entre duas grandezas (sem utilizar a regra de três), como: "Se com duas medidas de suco concentrado eu obtenho três litros de refresco, quantas medidas desse suco concentrado eu preciso para ter doze litros de refresco?" (BRASIL, 2018. p. 270).

A relação institucional do saber proporcionalidade na Instituição BNCC acompanha o que constatamos na instituição PCN e na literatura acadêmica. A proporcionalidade tem relevância na formação de estruturas cognitivas para a compreensão de conceitos matemáticos de diversas comunidades de saberes. A BNCC deixa transparecer alguns pontos para reflexão que analisamos ora como condição de vida do saber no ecossistema matemática do Ensino Fundamental, ora como restrição a essa existência.

4.3.1.2 Restrições institucionais

Do ponto de vista das restrições institucionais verificamos o que a instituição Currículo aponta como situações que dificultam, entorpecem ou mesmo impedem a implementação satisfatória de praxeologias matemática e didáticas em torno do objeto de saber proporcionalidade. Observamos nas instituições que:

4.3.1.2.1 Nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN

a) “Parte dos problemas referentes ao ensino de Matemática estão relacionados ao processo de formação do magistério, tanto em relação à formação inicial como à formação continuada. Decorrentes dos problemas da formação de professores, as práticas na sala de aula tomam por base os livros didáticos, que, infelizmente, são, muitas vezes, de qualidade insatisfatória. A implantação de propostas inovadoras, por sua vez, esbarra na falta de uma formação profissional qualificada, na existência de concepções pedagógicas inadequadas e, ainda, nas restrições ligadas às condições de trabalho” (BRASIL,1998, p. 22).

b) “Quanto à organização dos conteúdos, é possível observar uma forma excessivamente hierarquizada de fazê-lo. É uma organização, dominada pela ideia de pré-requisito, cujo único critério é a definição da estrutura lógica da Matemática, que desconsidera em parte as possibilidades de aprendizagem dos alunos. Nessa visão, a aprendizagem ocorre como se os conteúdos se articulassem como elos de uma corrente, encarados cada um como pré-requisito para o que vai sucedê-lo” (BRASIL, 1997 e 1998, p. 22).

c) “Embora se saiba que alguns conhecimentos precedem outros e que as formas de organização sempre indicam um certo percurso, não existem, por outro lado, amarras tão fortes como algumas que podem ser observadas comumente, tais como:

apresentar a representação fracionária dos racionais, para introduzir posteriormente a decimal; desenvolver o conceito de semelhança, para depois explorar o teorema de Pitágoras” (BRASIL,1998, p. 22).

d) “O estudo das transformações que envolvem a ampliação e redução de figuras é um bom ponto de apoio à construção do conceito de semelhança. Porém, esse conceito é geralmente abordado apenas para os triângulos, tendo como única referência a definição que é apresentada ao aluno já na introdução desse conteúdo: dois triângulos são semelhantes quando e somente quando têm os três ângulos respectivamente congruentes ou os lados correspondentes proporcionais”. Tal abordagem é limitada para uma compreensão mais ampla do conceito de semelhança. Isso pode ser favorecido se tal conceito for estudado em outras figuras, inclusive nas não poligonais” (BRASIL,1998, p. 124).

e) “O que também se observa em termos escolares é que, muitas vezes, os conteúdos matemáticos são tratados isoladamente e são apresentados e exauridos num único momento. Quando acontece de serem retomados (geralmente num mesmo nível de aprofundamento, apoiando-se nos mesmos recursos), é apenas com a perspectiva de utilizá-los como ferramentas para a aprendizagem de novas noções. De modo geral, parece não se levar em conta que, para o aluno consolidar e ampliar um conceito, é fundamental que ele o veja em novas extensões, representações ou conexões com outros conceitos” (BRASIL 1998, p. 22-23).

f) “Existem também professores que, na tentativa de tornar mais significativa a aprendizagem da Álgebra, simplesmente deslocam para o Ensino Fundamental conceitos que tradicionalmente eram tratados no Ensino Médio com uma abordagem excessivamente formal de funções. Convém lembrar que essa abordagem não é adequada a esse grau de ensino” (BRASIL, 1998, p. 116).

4.3.1.2.2 Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

“Assim, a Geometria não pode ficar reduzida à mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras” (BRASIL, 2018, p. 270).

Em síntese, do ponto de vista das condições para a existência do saber proporcionalidade nos PCNs, observamos que o documento evidencia que o fato de vários aspectos do cotidiano funcionarem de acordo com as leis da proporcionalidade; o raciocínio proporcional é importante na interpretação de fenômenos da vida real; o raciocínio proporcional exige análise de situações proporcionais e de não proporcionais; proporcionalidade está presente em problemas de multiplicação, porcentagem, semelhança de figuras, matemática financeira, na análise de tabelas, gráficos e funções; o estudo das grandezas deu origem ao estudo de funções; e que grandezas e medidas são contextos admiráveis para o estudo da ideia de proporcionalidade e fazem parte das atividades que facilitam ou favorecem a comunidade do objeto de saber proporcionalidade na instituição PCN.

Observamos que o documento aponta várias situações desfavoráveis para a realização de um ensino eficaz dos saberes matemáticos de maneira geral. Logo, entendemos que essas restrições também comprometem a vida do saber proporcionalidade na instituição Ensino Fundamental.

Concluímos que um sucessão de fatores são restrições para a ecologia da proporcionalidade, tais como: a formação dos professores, tanto a inicial quanto a continuada inadequada para lidar com o saber matemático; a adoção de livro didático de qualidade insatisfatória; a má condução do ensino dos saberes matemáticos; a forma hierarquizada de trabalhar os saberes com foco na ideia de pré-requisito; a redução do tempo educacional para o trabalho de um saber; o aumento do tempo educacional de um saber que ainda será objeto de estudo em etapa posterior; e o não trabalho de um saber em novas extensões, representações ou conexões com outros saberes dificultam, entorpecem ou mesmo impedem a implementação das atividades matemáticas e didáticas que podem ser desenvolvidas no ambiente institucional dos PCNs.

Fica evidente no texto da BNCC a preocupação em que o processo de ensino e de aprendizagem se desenvolva, permitindo que os estudantes possam ser protagonistas das suas aprendizagens fazendo a escolha de técnicas que melhor lhes convier, fugindo de um processo repetitivo de emprego quase automático de fórmulas sem muito questionamento sobre a utilização.

É importante salientar que a instituição PCN também já apresenta essa preocupação do uso exagerado de fórmulas no ecossistema matemática do Ensino Fundamental. Fica evidente no texto dessa instituição a recomendação para a vivência do processo de ensino e aprendizagem por meio da abordagem da resolução de problemas.

No próximo tópico, tratamos das inter-relações do objeto de saber proporcionalidade com outros objetos de saber do ecossistema matemática do Ensino Fundamental. E nos questionamos: de onde vem a proporcionalidade para tornar-se objeto de saber nas instituições PCN e BNCC do Ensino Fundamental? Em quais comunidades de saberes do ecossistema matemática, o saber proporcionalidade habita? Qual(is) o(s) seu(s) nicho(s) ecológico(s)? Quais são suas relações ecológicas? Passamos, agora, ao penúltimo crivo do filtro da proporcionalidade.

4.4 INTER-RELAÇÕES ENTRE PROPORCIONALIDADE E OUTROS OBJETOS MATEMÁTICOS: *HABITAT*, NICHOS E OUTRAS RELAÇÕES ECOLÓGICAS

No capítulo anterior, localizamos alguns *habitats* e nichos, do saber proporcionalidade no ecossistema matemática do Ensino Fundamental. Também descrevemos sobre as relações tróficas entre objeto de saber e os demais saberes do ecossistema matemática do Ensino Fundamental e as relações que são estabelecidas entre eles. Observamos que, além da relação de captura de alimento ou de servir de alimento, proporcionalidade ainda participa da relação de parasitismo, adotando o papel de hospedeiro da técnica de regra de três. Nesse momento, pretendemos discutir sobre esses mesmos pontos, na análise das instituições PCN e BNCC.

Como vimos anteriormente, o objeto proporcionalidade tem sua origem no ecossistema Matemática do Ensino Fundamental nas inter-relações entre diferentes comunidades de saberes. Essas inter-relações ocorrem também entre saberes de diferentes naturezas. O estudo da proporcionalidade oportuniza ao indivíduo tanto o desenvolvimento do bloco prático (saber fazer) como do bloco teórico/ tecnológico (saber).

Observamos, também, que proporcionalidade possui uma especificidade própria relacionada a aspectos pertinentes ao saber a partir de três pontos de vistas: de quem estuda, de quem ensina e da natureza do saber. Para a análise das instituições PCN e BNCC, questionamo-nos se essa especificidade própria é reconhecida em suas orientações e como ela se realiza.

4.4.1 Instituição Currículo: Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs)

Do ponto de vista da análise das especificidades do saber proporcionalidade, observamos que a instituição PCN apresenta ênfase para a importância de se realizar um estudo que alcance as conexões entre o saber proporcionalidade e outros os saberes matemáticos.

> A proporcionalidade, por exemplo, que já vem sendo trabalhada nos ciclos anteriores, aparece na resolução de problemas multiplicativos, nos estudos de porcentagem, de semelhança de figuras, na matemática financeira, na análise de tabelas, gráficos e funções. Para a compreensão da proporcionalidade é preciso também explorar situações em que as relações não sejam proporcionais, os contraexemplos (BRASIL, 1998, p. 84).

Na seção "conteúdos propostos para o ensino de matemática no quarto ciclo" do Ensino Fundamental, comunidade de saberes da Álgebra, o documento ainda acrescenta que "[...] no trabalho com a Álgebra é fundamental a compreensão de conceitos como o de variável e de função" (BRASIL, 1998, p. 84). Esses conceitos estão no cerne do saber proporcionalidade.

> O aluno poderá desenvolver essa noção (proporcionalidade[89]) ao analisar a natureza da interdependência de duas grandezas em situações-problema em que elas sejam diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais (função afim ou quadrática). Essas situações são oportunas para que se expresse a variação por meio de uma sentença algébrica, representando-a no plano cartesiano (BRASIL, 1998, pp. 84-85).

No setor destinado aos Números Naturais e Sistema de Numeração Decimal, no bloco dos números e operações, dos ciclos iniciais do Ensino Fundamental, existe orientação para que o ensino permita que os alunos realizarem comparação de coleções visando ao desenvolvimento da concepção de número.

> Dentre as situações que favorecem a apropriação da ideia de número pelos alunos, algumas se destacam. Uma delas consiste em levá-los à necessidade de comparar duas coleções do ponto de vista da quantidade, seja organizando uma coleção que tenha tantos objetos quanto uma outra, seja organizando uma coleção que tenha o dobro, ou o triplo, etc., de uma outra, seja completando uma coleção para que ela tenha a mesma quantidade de objetos de uma outra (BRASIL, 1997, p. 66).

Embora no trecho não faça menção explícita ao saber proporcionalidade, inferimos que tal sugestão de atividade durante o estudo pode favorecer ao desenvolvimento do raciocínio proporcional qualitativo dos estudantes.

No bloco Espaço e Forma, destinado aos terceiros e quarto ciclos, o documento orienta que

---

[89] Acréscimo nosso.

> Além disso, é preciso ficar claro para o aluno como e em que circunstâncias são produzidas figuras semelhantes. Para tanto, é preciso compreender a ideia de razão de semelhança ("a razão k que existe entre dois de seus lados homólogos"), por meio de ampliações e reduções que podem ser feitas numa figura pelas transformações conhecidas como homotetias (BRASIL, 1998, pp. 124-125).

Entendemos que, nesse ponto, o estudo pode se desenvolver contemplando as conexões entre os saberes, e o processo se tornará mais suave para o estudante ao perceber que a "razão k" trabalhada agora no contexto das figuras semelhantes está conectada com o estudo de conceitos como o de variável e de função.

A análise do ponto de vista de quem ensina na instituição PCN foi bem mais tranquila, devido ao escopo do documento que se propõe a "[...] fornecer elementos para ampliar o debate nacional sobre o ensino dessa área do conhecimento, socializar informações e resultados de pesquisas, levando-as ao conjunto dos professores brasileiros" (BRASIL, 1998, p. 15). Além disso, o documento também destaca que

> A compreensão dos fenômenos que ocorrem no ambiente – poluição, desmatamento, limites para uso dos recursos naturais, desperdício – terá ferramentas essenciais em conceitos (médias, áreas, volumes, proporcionalidade, etc.) e procedimentos matemáticos (formulação de hipóteses, realização de cálculos, coleta, organização e interpretação de dados estatísticos, prática da argumentação, etc.) (BRASIL, 1997, p. 27).

Observamos que a proporcionalidade tem como nicho ecológico favorecer o debate entre diferentes contextos, por exemplo meio ambiente e Matemática. Essa função do objeto de saber é anunciada nos dois livros, ou seja, ao longo dos nove anos do Ensino Fundamental.

> O estudo detalhado das grandes questões do Meio Ambiente - poluição, desmatamento, limites para uso dos recursos naturais, sustentabilidade, desperdício, camada de ozônio - pressupõe que o aluno tenha construído determinados conceitos matemáticos (áreas, volumes, proporcionalidade etc.) e procedimentos (coleta, organização, interpretação de dados estatísticos, formulação de hipóteses, realização de cálculos, modelização, prática da argumentação etc.) (BRASIL, 1998, p. 31).

No terceiro ciclo, que corresponde às etapas hoje denominadas de 6º e 7º anos, a instituição PCN orienta que sejam explorados problemas

> [...] que levem os alunos a fazer predições por meio de questões que envolvam aspectos qualitativos e quantitativos (O número encontrado deveria ser maior ou menor? Quanto maior? Essa resposta faz sentido?). Para resolver esses problemas os alunos poderão construir procedimentos não convencionais, deixando para o quarto ciclo o estudo dos procedimentos convencionais (BRASIL, 1998, p. 67).

O documento não deixa claro o que está denominando como "procedimentos não convencionais". Na seção conteúdos para o ensino de matemática no quarto ciclo, há recomendação para que as verificações empíricas continuem a ser estimuladas "[...] pois estas permitem produzir conjecturas e ampliar o grau de compreensão dos conceitos envolvidos" (BRASIL, 1998, p. 87).

Conteúdos propostos para o ensino de Matemática no quarto ciclo é o título do setor no qual encontramos uma sugestão de conexão entre proporcionalidade e a Matemática Comercial Financeira.

> Para compreender, avaliar e decidir sobre algumas situações da vida cotidiana, como qual a melhor forma de pagar uma compra, de escolher um financiamento etc. é necessário trabalhar situações-problema sobre a Matemática Comercial e Financeira, como calcular juros simples e compostos e dividir em partes proporcionais pois os conteúdos necessários para resolver essas situações já estão incorporados nos blocos (BRASIL, p. 86, 1998).

Percebemos a preocupação com o desenvolvimento da capacidade de argumentação dos estudantes a partir do bom direcionamento do ensino. "As relações entre as medidas de área de uma figura e de outra, que é resultado de sua ampliação (ou redução), também podem ser observadas. Na ampliação ou redução de corpos tridimensionais é interessante verificar o que ocorre com seus volumes" (BRASIL, 1998, p. 125). Nesse ponto, entendemos que o documento convida o professor a refletir em sala sobre questão como, por exemplo: será que as relações de proporcionalidade são as mesmas na ampliação (ou redução) de comprimentos, de área e de volume?

> O conceito de semelhança está presente no estudo de escalas, plantas, mapas, ampliações de fotos, fotocópias como também quando se verifica, por exemplo, se as medidas das partes do corpo humano se mantêm proporcionais entre um representante jovem e um representante adulto (BRASIL, 1998, p. 125).

Em síntese, do ponto do ensino, a instituição PCN orienta para um processo que favoreça o desenvolvimento do raciocínio proporcional por meio de praxeologias que envolvam os estudantes em um ambiente de aprendizagem, oportunizando as conexões entre os saberes matemáticos e extra matemáticos mediante a resolução de problemas.

A natureza do objeto de saber proporcionalidade, na instituição PCN, aponta para a importância da visão da proporcionalidade enquanto uma ideia matemáticas que favorece a "[...] processos como o estabelecimento de analogias, indução e dedução [...] presentes tanto no trabalho com números e operações como em espaço, forma e medidas" (BRASIL, p. 29, 1997 e 1998, p. 37). A instituição PCN reconhece as especificidades do saber proporcionalidade dos pontos de vistas do estudo, do ensino e da natureza do saber e apresenta orientações para a realização de praxeologias que se desenvolvam em diferentes contextos, oportunizando as conexões entre os diferentes saberes.

4.4.2 Instituição Currículo: Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

Iniciamos a análise da Instituição BNCC nos questionamos: o objeto de saber proporcionalidade tem especificidade própria reconhecida na instituição? Como se realiza o reconhecimento pela instituição?

Do ponto de vista do ensino, observamos na BNCC, na unidade temática geometria para os anos iniciais do Ensino Fundamental, evidências da relação de predação em que proporcionalidade serve de alimento para o ensino dos conceitos de congruência e semelhança.

> Nessa etapa, devem ser enfatizadas também as tarefas que analisam e produzem transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, de modo a desenvolver os conceitos de congruência e semelhança (BRASIL, 2018, p. 270).

Verificamos na unidade temática números, para os anos iniciais do Ensino Fundamental, enfoque ao estudo de conceitos associados à matemática financeira, no qual proporcionalidade desenvolve a função de alimento para o estudo destes objetos de conhecimento. “Outro aspecto a ser considerado nessa unidade temática é o estudo de conceitos básicos de economia e finanças, visando à educação financeira dos estudantes. [...] Os alunos devem dominar também o cálculo de porcentagem, porcentagem de porcentagem, juros, descontos e acréscimos, incluindo o uso de tecnologias digitais” (BRASIL, 2018, p. 267). A instituição ainda estabelece que

> Assim, podem ser discutidos assuntos como taxas de juros, inflação, aplicações financeiras (rentabilidade e liquidez de um investimento) e impostos. No tocante a esse tema, espera-se que saibam reconhecer, comparar e ordenar números reais, com apoio da relação desses números com pontos na reta numérica. [...] Esse pensamento é ampliado e aprofundado quando se discutem situações que envolvem conteúdos das demais unidades temáticas: Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas e Probabilidade e estatística (BRASIL, 2018, p. 267).

Nessa relação trófica, proporcionalidade se faz presente de maneira indireta nos anos finais do Ensino Fundamental. A instituição BNCC dispõe que o processo de ensino se dê por meio de resolução e elaboração de problemas.

No ponto de vista do saber, o objeto proporcionalidade tem o status de ideia fundamental. "Com base nos recentes documentos curriculares brasileiros, a BNCC leva em conta que os diferentes campos que compõem a Matemática reúnem um conjunto de **ideias fundamentais** que produzem articulações entre eles: equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação" (BRASIL, 2018, p. 268). O documento esclarece que essas ideias se aplicam enquanto objeto de conhecimento, e apresenta como exemplo algumas possibilidades de imbricação da proporcionalidade com outros saberes.

> Essas ideias fundamentais são importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos e devem se converter, na escola, em objetos de conhecimento. A proporcionalidade, por exemplo, deve estar presente no estudo de: operações com os números naturais; representação fracionária dos números racionais; áreas; funções; probabilidade etc. Além disso, essa noção também se evidencia em muitas ações cotidianas e de outras áreas do conhecimento, como vendas e trocas mercantis, balanços químicos, representações gráficas etc. (BRASIL, 2018, p. 268).

Verificamos que, assim como na literatura acadêmica, existem inter-relações entre proporcionalidade e diversos saberes matemáticos nas instituições PCN e BNCC. As relações tróficas da proporcionalidade se dão tanto nas relações de captura de alimento (ser objeto de estudo) quanto na relação de servir de alimento o saber (servir de contexto para o estudo de outros saberes), portanto existe a relação de protocooperação. A proporcionalidade conserva conexão entre diferentes comunidades de saberes da matemática que vão formar uma teia alimentar responsável pela manutenção da vida do saber no ecossistema matemática do Ensino Fundamental. Não constatamos nas instituições PCN e BNCC incentivo para a relação de parasitismo como ficou destacado na literatura acadêmica.

Do ponto de vista da relação de parasitismo, entendemos ser relevante pontuar que detectamos na seção de conceitos e procedimentos no bloco dos Números e Operações para o quarto ciclo a sugestão para que o ensino considere a "[...] resolução de problemas que envolvem grandezas diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais por meio de estratégias variadas, incluindo a regra de três" (BRASIL, 1998, p. 87). Inferimos que a regra de três é, para a instituição PCN, vista como um procedimento – técnica, que tem a sugestão para o seu uso só a partir do quarto ciclo, que corresponde aos oitavos e nonos anos, segundo a organização atual de ensino. Em três momentos, localizamos na instituição BNCC recomendação para o não uso da técnica de regra de três no Ensino Fundamental antes do 9º ano. Em síntese, entendemos que nas instituições PCN e BNCC não há estímulo para a relação de parasitismo.

Quadro 21 – Relações ecológicas entre os saberes

RELAÇÕES ENTRE OS SABERES	
Protocooperação	
PCN	BNCC
Na relação harmônica entre diferentes saberes que favorece ao desenvolvimento de:	

• diferentes significados da multiplicação e divisão;
• noção de escala;
• conceito de porcentagem;
• estudo de semelhança de figuras;
• uso da homotetia;
• grandezas proporcionalmente direta e inversa.
	• operações com os números naturais;
	    ○ diferentes significados da multiplicação e divisão;
	    ○ noção de partilha;
	• representação fracionária dos números racionais;
	• conceito de porcentagem;
	• noção intuitiva de função;
	• grandezas proporcionalmente direta e inversa;
	• estudo de áreas e perímetro;
	• Teorema de Pitágoras;
	• Teorema da proporcionalidade;
	• noção de congruência;
	• relações métricas etc.

Fonte: Elaborado pela autora.

Em virtude dos fatos mencionados, questionamo-nos sobre a importância da proporcionalidade no ecossistema matemática no ensino fundamental. O porquê dessa escolha realizada pela noosfera. São respostas para esse questionamento que pretendemos esboçar no tópico a seguir.

4.5 IMPORTÂNCIA DO ESTUDO DA PROPORCIONALIDADE NO ENSINO FUNDAMENTAL

Buscando entender o que justifica o ensino do saber proporcionalidade no ecossistema matemática do Ensino Fundamental, perguntamo-nos: por que o saber proporcionalidade foi selecionado pela noosfera – instituições PCN e BNCC –, para a matemática do ensino de fundamental? A partir desse questionamento, pretendemos passar as instituições PCN e BNCC pelo último crivo do filtro da proporcionalidade e obter uma maior transparência sobre a ecologia do saber no ecossistema matemática do Ensino Fundamental.

4.5.1 Instituição Currículo: Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs)

No tópico "Breve análise da trajetória das reformas e do quadro atual do ensino de Matemática", a instituição PCN apresenta a discussão sobre o mérito da matemática nas escolas do Ensino Fundamental. O documento destaca que tem por finalidade "[...] adequar o trabalho escolar a uma nova realidade, marcada pela crescente presença dessa área do conhecimento em diversos campos da atividade humana" (BRASIL, 1997, p. 18). Dentro desse debate, a instituição acena para

> [...] as recomendações insistentemente feitas no sentido de que conteúdos são veículo para o desenvolvimento de ideias fundamentais (como as de proporcionalidade, equivalência, etc.) e devem ser selecionados levando em conta sua potencialidade quer para instrumentação para a vida, quer para o desenvolvimento do raciocínio, nem sempre são observadas (BRASIL, 1997, p. 22 e 1998, p. 22).

Os PCN de Matemática, no primeiro livro (1997), no bloco dos Números e Operações, sugerem que o ensino e a aprendizagem de proporcionalidade tenham sua vivência a partir do segundo ciclo do Ensino Fundamental, quando do trabalho de saberes relativos a problemas multiplicativos. No bloco Grandezas e Medidas, orienta que "[...] as atividades em que as noções de grandezas e medidas são exploradas proporcionam melhor compreensão de conceitos relativos ao espaço e às formas" (BRASIL, 1997, p. 40). Dando relevância ao fato que as grandezas e medidas "[...] são contextos muito ricos para o trabalho com os significados dos números e das operações, da ideia de proporcionalidade e escala, e um campo fértil para uma abordagem histórica" (BRASIL, 1997, p. 40).

A partir do segundo ciclo o objeto de saber proporcionalidade tem recomendação para ser trabalhado nos demais ciclos do ensino fundamental – 2º ao 4º. O quadro a seguir dispõe a indicação do estudo do objeto por ciclo e bloco de conteúdo.

Quadro 1 - Proporcionalidade – PCN – Indicação para estudo

Ciclo	Blocos de conteúdos			
	Número e operações	Espaço e forma	Grandezas e medidas	Tratamento da informação
1º				
2º	X	X	X	
3º	X	X	X	X
4º	X	X	X	X

Fonte: produção nossa

Percebemos na instituição a influência do objeto de saber proporcionalidade em diferentes praxeologias matemáticas para o trabalho associado ao estudo dos diferentes significados da multiplicação e divisão, na noção de escala, do conceito de porcentagem, do estudo de semelhança de figuras, do uso da homotetia e de grandezas proporcionalmente direta e inversa. A proporcionalidade tem o mérito de ser uma das ideias fundamentais da matemática por oportunizar o acesso a diferentes objetos de conhecimento a partir do viés da proporcionalidade.

4.5.2 Instituição Currículo: Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

Na BNCC, proporcionalidade tem indicação para ser introduzida no ecossistema matemática do Ensino Fundamental a partir do 4º ano por meio de problemas "[...] envolvendo diferentes significados da multiplicação e da divisão: adição de parcelas iguais, configuração retangular, proporcionalidade, repartição equitativa e medida" (BRASIL, 2018, p. 290). O desenvolvimento de tipos de tarefas relacionadas a esse objeto de conhecimento pode ajudar os estudantes a diferenciar o pensamento aditivo do pensamento multiplicativo.

O objetivo de se trabalhar com tipo de tarefas envolvendo a ideia fundamental de proporcionalidade se dá pelo mérito de fazer parte de diferentes unidades temáticas. Na Álgebra, por exemplo, a instituição salienta que se "[...] deve enfatizar o desenvolvimento de uma linguagem, o estabelecimento de generalizações, a análise da interdependência de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações" (BRASIL, 2018, p. 270).

A partir do 4º ano, o objeto de saber proporcionalidade tem recomendação para ser trabalhado nos demais anos do Ensino Fundamental – 4º ao 9º. O principal habitat da proporcionalidade é na unidade temática álgebra prescrito nos 5º, 7°, 8° e 9° anos. O quadro a seguir dispõe a indicação do estudo do objeto por ano e unidade temática.

Quadro 23 – Proporcionalidade na BNCC – indicação

Ano	**Unidade temática**			
	Número	Álgebra	Geometria	Grandezas e medidas
4º	X			
5º		X	X	
6º	X			X
7º		X		
8º		X		
9°		X	X	

Fonte: Elaborado pela autora.

Proporcionalidade tem sua importância na unidade temática número no estudo da multiplicação, divisão e do cálculo de porcentagens por meio de estratégias diversas, sem fazer uso da “regra de três”; na Álgebra, no estudo de variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais, de problemas envolvendo a partição de um todo em duas partes proporcionais; na Geometria, no estudo de ampliação e redução de figuras poligonais em malhas quadriculadas para o reconhecimento da congruência dos ângulos e da proporcionalidade dos lados correspondentes, das relações métricas no triângulo retângulo, do Teorema de Pitágoras nas verificações experimentais e demonstração, das retas paralelas cortadas por transversais nos teoremas de proporcionalidade e verificações experimentais; e na grandezas e medidas, no estudo de perímetro de um quadrado como grandeza proporcional à medida do lado.

Iniciamos este capítulo nos perguntando em que contextos e problemáticas proporcionalidade se inscreve na matemática do Ensino Fundamental, e o porquê dessa inscrição? Como vive proporcionalidade nas instituições PCN e BNCC?

Constatamos que o objeto de saber proporcionalidade se insere em diferentes contextos e internos e externos da matemática. Apresenta-se inscrito em distintas problemáticas da vida real e tem toda essa relevância reconhecida pelas instituições estudadas, destinando ao objeto o mérito de ideia fundamental da matemática.

No capítulo a seguir, exporemos os resultados obtidos a partir do filtro da proporcionalidade, da análise de uma coleção de livros didáticos do primeiro ao 9º ano do Ensino Fundamental.

5 O SABER PROPORCIONALIDADE NOS LIVROS DIDÁTICOS

Entendemos que o livro didático é um elemento muito presente na prática do professor e exerce uma influência na forma como o professor prepara e vivencia a aula de um determinado conhecimento. Frison et al. (2009) destaca que "[...] o livro didático é considerado um direcionador das práticas curriculares". Nessa mesma linha, Coelho et al. (2015) acrescenta que "Os recursos disponibilizados pelo livro didático, como leituras adicionais, curiosidades e experiências, são mais uma alternativa que pode complementar a prática docente, trazendo um resultado satisfatório para ambos os lados". Os autores ainda salientam que

> As intervenções realizadas comprovaram que os recursos existentes no livro didático, pode ser uma maneira de inovar sua prática docente, contribuindo assim, para uma postura reflexiva por parte do professor, e colaborando para a construção da autonomia da tomada de decisão por parte do aluno (COELHO et al., 2015, p. 66).

De acordo com Bittar (2017, p.01), "[...] o livro didático utilizado por um professor pode fornecer uma boa aproximação com a sua prática em sala de aula, especialmente no que diz respeito ao conteúdo apresentado e às metodologias utilizadas". Esses estudos nos ajudam a justificar a importância de se realizar a investigação nesse veículo, a fim de identificar, por meio do filtro da proporcionalidade, as razões de ser, a organização matemática, a relação institucional, as inter-relações e a importância da proporcionalidade no Ensino Fundamental em duas coleções de livros didáticos – uma destinada aos anos iniciais e a outra destinada aos anos finais desta etapa de ensino.

A ecologia do saber proporcionalidade nos LDs nos leva a refletir como vive o saber proporcionalidade no âmbito do saber a ser ensinado no Ensino Fundamental em matemática. Essa indagação nos remete a novos questionamentos: como proporcionalidade vive na instituição livro didático? Qual o lugar da proporcionalidade nessa instituição matemática para o Ensino Fundamental? A proporcionalidade tem alguma função no estudo de outros objetos matemáticos nas coleções analisadas? Pretendemos olhar o livro didático numa perspectiva antropológica, buscando situar o estudo da proporcionalidade na instituição, levando em consideração uma cronologia que permita a realização de um estudo comparativo entre os LDs e os referenciais curriculares – PCN e BNCC.

O estudo da ecologia do saber proporcionalidade, nos PCNs e na BNCC, irá nos ajudar a investigar a ecologia do objeto de saber proporcionalidade sob a ótica da Teoria

Antropológica do Didático, no saber a ser ensinado nas instituições. Nossa análise buscará, a partir da aplicação do filtro da proporcionalidade, identificar razões de ser do saber, a organização matemática, a relação institucional, as inter-relações e a importância do saber proporcionalidade, no ensino de matemática.

5.1 RAZÃO DE SER DO SABER PROPORCIONALIDADE NOS LIVROS DIDÁTICOS

Os livros didáticos, do mesmo modo que os referenciais curriculares, constituem-se em instituições portadoras de saber a ser ensinado, que foram produzidos pela noosfera em um processo de transposição didática.

Tomamos como norte o MEEP elaborado a partir dos achados da análise da literatura acadêmica, da mesma maneira como atuamos com relação ao estudo dos referenciais curriculares, agora na análise dos LDs. Observamos que, entre os modelos revelados, os que obtiveram maior evidência foram:

Quadro 24 – MEEPs em destaque na literatura acadêmica

- Variação entre grandezas proporcionalmente direta (se x então y; se nx então ny, para todo $n \in N$.);
- variação entre grandezas proporcionalmente inversa, em que $y = k / x = k \cdot x^{-1}$;
- função linear ($f(x) = nx$);
- se multiplicar as distâncias pelo fator constante r, e se tem a relação biunívoca $f: F \to F'$, *então tem-se semelhança de razão r*, entre *F* e *F'*. Se $x' = f(x)$, os pontos *x, y são proporcionais.*

Fonte: Elaborado pela autora.

Além do MEEP, os modelos epistemológicos dominantes – MIDPs, identificados na instituição Currículo, servirão de lentes para nossa investigação da razão de ser do saber proporcionalidade, nas coleções de LD. Dentre os modelos que se destacaram na análise da literatura acadêmica, só o da função linear ($f(x) = nx$) não foi observado. Portanto, os MIDPs identificados nas instituições PCN e BNCC foram:

Quadro 25 –MIDPs identificados na Instituição Currículo

• Variação entre grandezas proporcionalmente direta (se x então y; se nx então ny, para todo $n \in N$.);
• variação entre grandezas proporcionalmente inversa, em que, $y = k / x = k \cdot x^{-1}$;
• se multiplicar as distâncias pelo fator constante r, e se tem a relação biunívoca $f: F \rightarrow F'$, *então tem-se semelhança de razão r*, entre *F* e *F'*. Se $x' = f(x)$, os pontos *x, y são proporcionais.*

Fonte: Elaborado pela autora.

De posse dos modelos descritos anteriormente, buscamos delinear, nesse momento, o MIDP, como consequência dos estudos realizados na coleção de LD dos anos iniciais do Ensino Fundamental, e caracterizar a razão de ser do saber proporcionalidade nessa instituição.

Retomando a problemática ecológica, perguntamo-nos: de onde vem a proporcionalidade para tornar-se objetos de ensino a serem ensinados no livro didático? Como o objeto de saber chegou nessa instituição? Proporcionalidade poderia deixar de ser, objeto de estudo, no Ensino Fundamental?

5.1.1 Instituição Livros Didáticos – anos iniciais – Ensino Fundamental

A coleção de livros didáticos analisada "A conquista da Matemática: componente curricular matemática: Ensino Fundamental, anos iniciais, de autoria de José Rui Giovanni Júnior, primeira edição, pela FTD, 2018", trata-se de um material para a divulgação em formato reduzido em uma versão submetida à avaliação e aprovada pelo PNLD do ano de 2019. A coleção apresenta o manual do professor e o livro do estudante em uma mesma obra. O primeiro volume da coleção está dividido em quinze unidades e os demais em nove.

Nossa escolha por analisar essa coleção justifica-se pelo fato de o autor José Rui Giovanni Júnior participar do PNLD, em diferentes anos, submetendo sua obra à avaliação do comitê e obter aprovação. Em decorrência dessa aceitação do PNLD, seus livros são adotados em escolas de rede pública e privada, contribuindo para a formação de estudantes a partir de sua transposição didática do saber matemático para diferentes gerações.

Identificamos o objeto de saber proporcionalidade a partir das orientações didáticas no manual do professor, na unidade 4, do LD do 2° ano do Ensino Fundamental, quando o autor sugere ao professor que

> Após a reflexão, proponha a construção de uma linha do tempo. Peça a cada aluno que insira seu ano de nascimento e uma placa com o seu nome. A linha do tempo deve ter um espaçamento proporcional entre as datas para retratar o tempo. Por exemplo, de 10 em 10 cm uma década, e 1 cm para cada ano. Caso haja mais algum ano que julguem importante, insira-o também na linha do tempo (GIOVANNI JÚNIOR, 2018, p. 79).

A sugestão da atividade se encontra na página inicial da unidade 4, que se propõe ao estudo dos "números e medida do tempo". Ao realizar a sugestão de atividade, o professor dará a oportunidade aos estudantes de realizar a construção de uma linha do tempo com intervalos proporcionais que propiciará a compreensão e construção das escalas em mapas e gráficos, entre outros. Implicitamente, a sugestão de atividade "de 10 em 10 cm uma década, e 1 cm para cada ano" remete ao modelo de semelhança de razão r, mantendo a proporcionalidade dos intervalos. Embora, ressaltamos, não tenhamos identificado a intenção do autor em chamar a atenção para o objeto de saber proporcionalidade. No livro didático do aluno, durante esta unidade, não há orientação na parte do curso e não há atividade, como sugerida acima para ser realizada pelo estudante.

Na unidade 8, "Multiplicação", no tópico 3, do LD do 2° ano, no manual do professor encontramos os termos "Dobro e metade", na "Atividade complementar: dobrando a receita", que remete à habilidade (EF02MA08)[90].

> [...] sugerimos como atividade complementar que proponha uma receita na qual os alunos terão de dobrar as quantidades dos ingredientes. Escolha uma receita simples e que faça parte da culinária da região de moradia dos alunos. Estimar resultados e efetuar cálculos mentais é muito importante nessa fase (GIOVANNI JÚNIOR, 2018, p. 186).

É sugerido ao professor que mostre uma receita simples de brigadeiro aos alunos, por exemplo. "Explique para a turma que uma porção da receita não é suficiente para todos da classe e que será necessário preparar o dobro" (GIOVANNI JÚNIOR, 2018, p. 186). Observamos que esse tipo de tarefa permite ao professor desenvolver o raciocínio proporcional por meio da técnica "metade", no caso dobro, como foi evidenciado na análise da literatura acadêmica, nos estudos desenvolvidos por Spinillo (2002). Esse exercício remete

[90] Resolver e elaborar problemas envolvendo dobro, metade, triplo e terça parte, com suporte de imagens ou material manipulável, utilizando estratégias pessoais.

ao modelo (*se x então y; se nx então ny, para todo n* $\in$ *N*). No livro do aluno, há três problemas para os alunos calcularem o dobro ou a metade usando como contextos idades, jogo de futebol e quilometragem.

Na unidade 9, "Mais medidas", destinada ao trabalho das habilidades (EF02MA16 e EF02MA17[91]), na seção "Assim também se aprende", é proposta ao estudante uma receita de sopa, e, no enunciado final, o aluno é solicitado a adaptá-la para servir um número maior de pessoas. No manual do professor, consta a diretriz.

> Como desafio, os alunos precisarão calcular a quantidade de ingredientes necessários dessa mesma receita para servir uma maior quantidade de pessoas.
> Explique aos alunos que, se uma receita serve 10 pessoas, e queremos servir o dobro ou o triplo de pessoas, devemos aumentar a quantidade de cada ingrediente da receita proporcionalmente.
> No caso dessa atividade, para servir 30 pessoas deve-se multiplicar por 3 a quantidade de cada ingrediente da receita (GIOVANNI JR., 2018, p. 223).

Percebemos a ideia de proporcionalidade "de um para muitos", que parte ao valor unitário para encontrar a quantidade desejada relacionada ao modelo variação de grandezas proporcionalmente direta. Similarmente à regra de três, a recorrência ao valor unitário das razões envolvidas para prosseguir com o cálculo já foi destacada na análise da literatura acadêmica como técnicas clássica, referente ao primeiro nível de algebrização, conforme evidenciado por Garcia (2005).

Os referenciais curriculares recomendam que proporcionalidade seja uma das ideias fundamentais da matemática Ensino Fundamental, mas concordam que o início do trabalho com esse objeto de saber seja a partir do segundo ciclo (3º e 4º ano) nos parâmetros e a partir do 4º ano na base. A coleção vai na linha do que foi visto na análise dos textos acadêmicos e já vai introduzindo, embora de forma bem sutil a partir do 2° ano do Ensino Fundamental.

Passando, então, para as observações do livro didático do 3° ano do Ensino Fundamental, encontramos na unidade 3, "Grandezas e medidas: comprimento, massa, capacidade", a ideia de proporcionalidade de forma explícita, tanto no livro do aluno como nas orientações didáticas.

> Na **atividade 3**, trabalha-se com a ideia de proporcionalidade. Faça algumas perguntas como*: Quais são os itens do material escolar que Débora comprou?;*

[91] (EF02MA16) Estimar, medir e comparar comprimentos de lados de salas (incluindo contorno) e de polígonos utilizando unidade de medida não padronizadas e padronizadas (metro, centímetro e milímetro) e instrumentos adequados. (EF02MA17) Estimar, medir e comparar capacidade e massa, utilizando estratégias pessoais e unidades de medidas não padronizadas (litro, mililitro, cm^3, grama e quilograma).

Quantos cadernos ela comprou?; E quantas lapiseiras?; Quanto Débora pagou por essa compra? (GIOVANNI JR., 2018, p. 196).

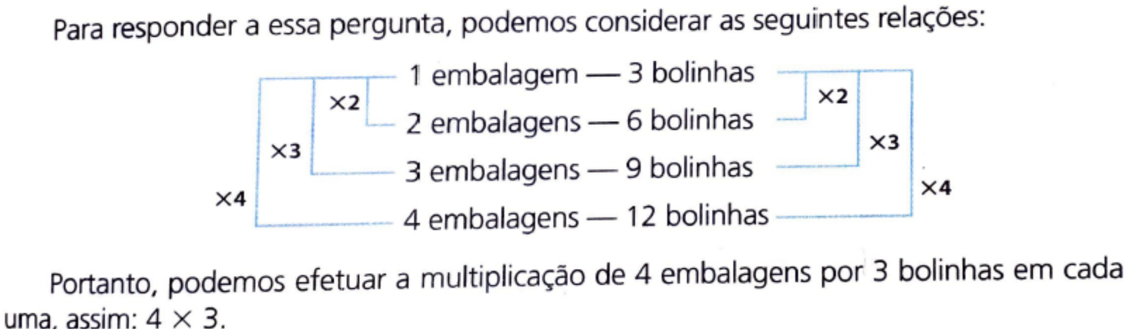
A tarefa solicita que o estudante observe um quadro contendo informações sobre artigos escolares e preço respectivos. Em seguida, pondera: "[...] considerando que não houve desconto no valor unitário de cada produto comprado e que todos os itens de cada produtos são iguais, responda" (GIOVANNI JR., 2018, p. 196). Imediatamente, o autor indaga sobre o preço unitário de cada item. Mais adiante, nas orientações didáticas, é aconselhado ao professor que

> A título de desafio podem ser aqui propostos problemas de proporcionalidades que podem ser resolvidos com uma divisão e uma multiplicação. Por exemplo, a escola comprou 7 unidades de um mesmo jogo e pagou 84 reais. Quanto a escola gastaria se tivesse comprado apenas 4 unidades? E 5 unidades? (GIOVANNI JR., 2018, 3º ano, p. 196).

Novamente, observamos o tipo de tarefa que remete ao cálculo da taxa unitária ou valor unitário, pede-se ao aluno para achar o valor unitário do caderno e da lapiseira, sendo dado um múltiplo correspondente do produto – preço total no âmbito da variação dos valores das grandezas proporcionalmente direta. Nas demais unidades, não encontramos a ideia de proporcionalidade.

No livro do 4º ano, na unidade 4, destinada ao trabalhado da multiplicação com números naturais, encontramos no livro do aluno, na parte do curso, algumas situações relacionadas ao significado da multiplicação. A 3º situação está associada à ideia de proporcionalidade. O autor apresenta um problema envolvendo compras de bolinhas do jogo de pingue-pongue. "[...] Cada embalagem vem com três bolinhas. Se ela comprar 4 embalagens, com quantas bolinhas de pingue-pongue ela vai ficar? (GIOVANNI JR., 2018, p. 93). Na sequência, é proposta uma técnica de resolução.

Figura 29 – Proporcionalidade – curso – LD 4° ano



Fonte: Giovanni Jr. (2018, p. 93).

Como pode ser observado na Figura 31, o autor alude à técnica clássica de valor unitário, porém orientando para o modelo (*se x então y; se nx então ny, para todo n* $\in$ *N*). No manual do professor, aponta-se necessidade de o docente observar se os estudantes percebem a relação de proporcionalidade.

> A terceira situação explora a ideia de proporcionalidade da multiplicação. Verifique se os alunos observam que à medida que o número de embalagens aumenta, o número de bolinhas aumenta proporcionalmente. Se julgar oportuno, apresente outras situações em que essa ideia é contemplada. Pergunte aos alunos o que devemos fazer com as quantidades dos ingredientes de uma receita se queremos dobrá-la ou triplicá-la. Deixe que expliquem seus raciocínios e suas estratégias. Observe as respostas e faça questionamentos caso cometam equívocos. Explique, por exemplo, que ao dobrar ou triplicar uma receita é necessário aumentar proporcionalmente a quantidade de ingredientes e procure justificar esse fato (GIOVANNI JR., 2018, p. 93).

O autor propõe a retomada do contexto da receita para explicar a ideia de proporcionalidade implícita na ação de dobrar, triplicar etc., ou seja, *se nx então ny.* As orientações seguem alertando para situação em que não haja proporcionalidade, contribuindo para a percepção que nem sempre existirá proporcionalidade nas conexões entre grandezas.

> Situações deste tipo podem despertar a curiosidade dos alunos e novos questionamentos podem surgir. Por exemplo, um aluno perguntar se o tempo de cozimento de determinada receita que foi dobrada ou triplicada também deve ser dobrado ou triplicado, assim como foi feito com os ingredientes. Perguntas como essa promovem situações ricas em argumentações e favorecem a interdisciplinaridade, já que professores de outras áreas podem ser convidados para esclarecimentos mais aprofundados. No caso particular dessa pergunta, temos aí uma ótima oportunidade para fazer que os alunos se deem conta de que nem todas as grandezas envolvidas em certo fenômeno se relacionam proporcionalmente (GIOVANNI JR., 2018, p. 93).

No final do tópico 1 da unidade 4, no quadro “Conexões”, o livro didático do aluno, no texto do curso, veicula uma receita de suco seguida por uma atividade que propõe aos alunos realizar o aumento da receita a partir dos dados postos em uma tabela. Nas orientações didáticas, o autor argumenta que

> As receitas são recursos que favorecem o uso da multiplicação, pois possibilitam diversas situações problematizadoras, como: Se a receita de suco de abacaxi rende 5 porções e em nossa classe há 25 alunos, quantas vezes teremos de fazer a receita para que cada aluno receba uma porção?; Convidamos o dobro de pessoas para tomar um lanche e precisamos dobrar a quantidade de suco. Qual será a quantidade necessária de cada ingrediente? [...] acompanhe os alunos no desenvolvimento **da atividade 6.** Espera-se que eles percebam que é necessário manter a proporção para fazer mais de uma receita (GIOVANNI JR., 2018, p. 95).

As atividades e orientações didáticas localizadas no livro do aluno e no manual do professor fazem parte da unidade 4, e estão associadas habilidades (EF04MA06)[92] que propõem o trabalho dos diferentes significados da multiplicação.

Observamos também no livro do 4º ano, na unidade 8, “Geometria”, no tópico 7, destinado ao estudo de simetria, uma discreta referência à escala, por meio da figura impressa, cuja tarefa solicitada ao aluno é para desenhar o eixo de simetria. Embora não tenha referência explícita no livro do aluno e no manual do professor, entendemos que a relação da imagem da escala ao lado da figura – ampliada ou reduzida, com a ideia de proporcionalidade.

No livro do 5º ano, na unidade 4, “Multiplicação e divisão com números naturais”, com relação à habilidade (EF05MA12), o autor destaca nas orientações didáticas

> Neste capítulo serão retomadas algumas ideias importantes a respeito da multiplicação para que os alunos possam rever os conteúdos estudados, sistematizar e usar com autonomia tais conceitos, entre eles: disposição retangular; adição de parcelas iguais; e proporcionalidade. Essas ideias ajudarão os alunos a compreender a multiplicação de maneira mais profunda e a usar outros recursos, além da conta armada, para resolver as opera-ções e os problemas (GIOVANNI JR., 2018, p. 81).

Na parte do curso, o autor apresenta três situações para cada uma das ideias da multiplicação, cabendo à proporcionalidade a terceira situação, expressa por meio de um problema em que um confeiteiro precisa aumentar em quinze vezes uma determinada receita. O manual do professor orienta que

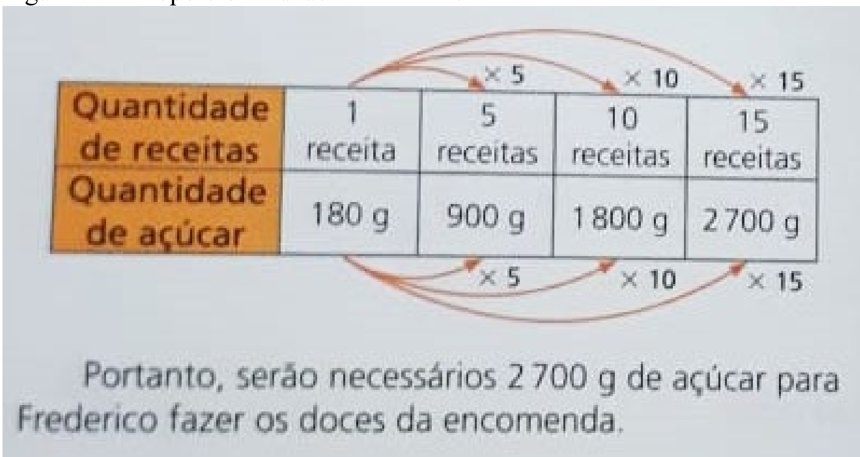
> Na terceira situação, explora-se a ideia de proporcionalidade associada à multiplicação. Para uma receita utiliza-mos 180 gramas de açúcar, para 5 receitas basta multiplicar essa quantidade por 5, para 10 receitas, multiplicamos a quantidade inicial de açúcar por 10, e assim sucessivamente, portanto, é necessário aumentar proporcionalmente a quantidade de ingredientes (açúcar) de acordo com o número de receitas a serem feitas (GIOVANNI JR., 2018, p. 82).

Na parte do curso, no livro do aluno é utilizado um quadro para ilustrar a relação de proporcionalidade que ocorre com a quantidade de açúcar a partir do momento em que essa quantidade é aumentada em 5, 10, 15 vezes.

---

[92] (EF04MA06) Resolver e elaborar problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação (adição de parcelas iguais, organização retangular e proporcionalidade), utilizando estratégias diversas como o cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.

Figura 30 – Proporcionalidade – LD 4° ano



Quantidade de receitas	1 receita	5 receitas	10 receitas	15 receitas
Quantidade de açúcar	180 g	900 g	1 800 g	2 700 g

Portanto, serão necessários 2 700 g de açúcar para Frederico fazer os doces da encomenda.

Fonte: Giovanni Jr. (2018, p. 82).

Na unidade 5, "Números e medidas", no tópico 7, "Resolução de problemas", o autor propõe uma atividade em que é dada a medida da distância entre dois pontos, e pede-se a medida da distância entre dois outros pontos em que os pontos anteriores estão contidos. Nas orientações didáticas, explica-se que

> Na **atividade 1**, é possível que alguns alunos apresentem dificuldades para analisar a imagem corretamente. A distância entre **A** e **B** está dividida em cinco trechos de medida **d**, os alunos devem perceber que o valor de **d** é calculado dividindo-se 36 por 3, portanto: d =12 cm; a distância de **A** a **B** é de cinco vezes o trecho **d**, então 5 x 12cm = 60 cm (GIOVANNI JR., 2018, p. 136).

Ainda na unidade 5, no tópico "Falando de... cidadania", há uma atividade que se reporta ao estudo de escala: "[...] na **atividade 3**, chame a atenção para a escala do mapa, explicando que, nesse mapa, cada 1 cm corresponde a distância real de 75 km" (GIOVANNI JR., 2018, p. 136).

Observamos que essas atividades aludem ao uso de fator de proporcionalidade e, dessa forma, refere-se ao modelo de semelhança em que se multiplicar as distâncias pelo fator constante r, e se tem a relação biunívoca *f: F →F', então tem-se semelhança de razão r*, entre *F* e *F'.* Se *x'* = f(x), os pontos *x, y são proporcionais* –, no entanto o autor não chama a atenção do professor para esse ponto nas orientações didáticas.

A unidade 6, "Números expressos na forma de fração", destina-se, também, ao trabalho da habilidade (EF05MA06)[93], cujo foco está no estudo da porcentagem. De acordo com os PCNs, o aprendizado do saber proporcionalidade passa pela exploração da

[93] (EF05MA06) Associar as representações 10%, 25%, 50%, 75% e 100% respectivamente à décima parte, quarta parte, metade, três quartos e um inteiro, para calcular porcentagens utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.

porcentagem, entendida como uma razão de denominador centesimal. Post, Behr e Lehs (1995) apresentam três tipos de problemas envolvendo porcentagem, que, tomando com norte, e a partir deles, realizamos uma classificação para os problemas de porcentagem – ideia de proporcionalidade.

> (1) Jessica fez 85 pontos num teste de 115 pontos. Qual a porcentagens de acertos? (85/115 = x/100); (2) Se Jéssica acertou 74% de um teste de 115 questões, quantas questões acertou? (74/100 = x/115); ou (3) Jessica acertou 85 questões de um teste, totalizando 74% de acertos. De quantas questões se compunha o teste? (74/100 = 85x ou 85/74 – x/100) (POST, BEHR e LEHS, 1995, p. 92).

Considerando os três problemas, entendemos que no primeiro tipo, que chamamos de tipo 1, se quer saber o *percentual* de parte do todo; no segundo problema (tipo 2), se pergunta qual o valor da *parte* percentual do todo; e, no terceiro, tipo 3, se interessa em identificar o valor *do todo*.

Retomando o livro do 5º ano, no tópico 6, "Fração e porcentagem", da unidade 6, na parte do curso, o autor inicia com quatro situações de porcentagem em que se quer saber qual o valor *da parte* percentual do todo. Na primeira situação, a intenção é introduzir a ideia de porcentagem, e as demais objetivam relacionar as representações 10%, 25%, 50% e 100% respectivamente à décima parte, quarta parte, metade e um inteiro. Na parte das atividades as quais apresentam seis problemas para os alunos solucionarem, todos são do tipo 2 – saber qual o valor da parte percentual do todo.

Assim como foi observado no livro do 4º ano, na unidade 6, no tópico "Assim também se aprende", no livro do 5º ano, localizamos uma discreta referência à escala, relacionando a fotografia da tartaruga e a escala referindo-se ao tamanho real do animal. No livro do aluno e no manual do professor, não há referência explícita ao sentido da escala na página.

Voltamos a identificar a ideia de proporcionalidade relacionada à porcentagem na unidade 6, no tópico "Falando de... cidadania", do livro 5° ano, em duas atividades envolvendo as grandezas massa e tempo em um contexto de coleta seletiva de lixo.

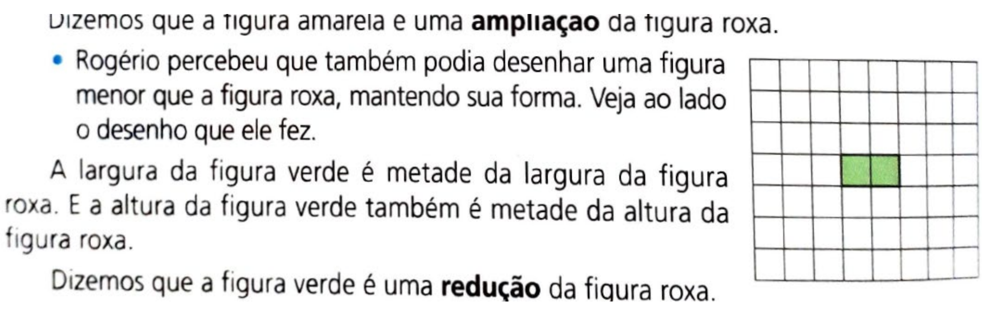
A atividade apresenta um texto no qual é dada a quantidade de lixo produzida por dia, mas, para o aluno encontrar a resposta, precisa-se descobrir o valor total de lixo produzido em um mês, para, a partir dessa informação, responder aos questionamentos que seguem. Ou seja, trabalhar com as informações que: indicam que em um dia são produzidos 2000 kg de lixo. Essa quantidade de lixo é composta por $\frac{1}{5}$ de latas de alumínio (informação explícita) e $\frac{4}{5}$ de garrafas pets (informação implícita). Os estudantes trabalharão com a comparação das razões $\frac{2000\,kg}{1\,dia}$ e $\frac{quantos\,kg}{30\,dia}$, e o autor deixa livre para o aluno a forma de resolução.

A unidade 8, “Mais sobre geometria”, destina-se ao trabalho da habilidade (EF05MA18)[94], que evidencia o estudo da congruência dos ângulos e da proporcionalidade dos lados correspondentes entre três outras, que aborda o objeto de conhecimento. O tópico inicial, “Explorando”, da unidade 8, vem com subtítulo “ampliação e redução”. A parte do curso tem início com uma situação em que é apresentada uma malha quadriculada com duas imagens de paralelogramo – um menor azul e um maior roxo. Na sequência, as figuras são sobrepostas, e o aluno é levado a refletir sobre alguns pontos. “[...] espera-se que os alunos percebam que fazendo a sobreposição das figuras fica mais fácil comparar os ângulos e os lados dela” (GIOVANNI JR., 2018, p. 200). Nas orientações didáticas, no manual do professor o autor revela a finalidade de explorar os conhecimentos prévios dos alunos sobre o tema ampliação e redução de figuras geométricas.

> Utilizando a sobreposição de figuras, espera-se que os alunos compreendam intuitivamente as propriedades necessárias para ocorrer a redução ou ampliação. Nesse momento, não é necessário que eles conheçam a nomenclatura associada ao tema, como a congruência dos ângulos ou a proporcionalidade dos lados, mas que eles percebam sua existência em figuras em que há redução ou ampliação (GIOVANNI JR., 2018, p. 200).

Ainda na unidade 8, no tópico 3, “Ampliação e redução de figuras”, há uma retomada do tema ampliação e redução com a explicitação do termo figuras, que não constava no tópico, “Explorando”. A parte do curso é iniciada novamente com uma atividade contendo dois retângulos – um maior que o outro –, em que os estudantes são convidados a responder quantas vezes a largura e altura do retângulo maior (amarelo) equivale a altura e a largura do retângulo menor (roxo).

Figura 31 – Proporcionalidade – curso – LD 5° ano



Dizemos que a figura amarela é uma **ampliação** da figura roxa.

- Rogério percebeu que também podia desenhar uma figura menor que a figura roxa, mantendo sua forma. Veja ao lado o desenho que ele fez.

A largura da figura verde é metade da largura da figura roxa. E a altura da figura verde também é metade da altura da figura roxa.

Dizemos que a figura verde é uma **redução** da figura roxa.

Fonte: Giovanni Jr. (2018, p. 208).

94 “Ampliação e redução de figuras poligonais em malhas quadriculadas: reconhecimento da congruência dos ângulos e da proporcionalidade dos lados correspondentes” (BRASIL, 2018, p. 296).

Como recomendação para o trabalho do professor, as orientações didáticas recomendam que a retomada do estudo do tema ampliação e redução se dê antes de forma pragmática com a experimentação pelos alunos em folha de papel quadriculado para a realização de ampliações e redução de figuras, recortes e sobreposição encaixando os ângulos e analisando a proporcionalidade dos lados aumentados ou diminuídos.

Na parte do livro destinada às atividades, o autor solicita em uma tarefa que seja realizada a ampliação de uma figura com a forma de um losango, em malha quadriculada de modo que a ampliação tenha o dobro da medida dos lados da figura dada. Em outra atividade, são retratados três triângulos sobrepostos, e o autor instiga os alunos a encontrar as medidas a partir de uma unidade dada e a realizar julgamentos acerca das ampliações dos triângulos.

No espaço das orientações didáticas, o autor descreve que atividade tem a expectativa que "[...] os alunos percebam que o triângulo maior tem a mesma forma do menor, ambos são triângulos equiláteros e os lados são proporcionais, pois aumentaram de 3 u para 9 u" (GIOVANNI JR., 2018, p. 209).

Inferimos que, nesta unidade, o modelo institucional dominante que se destaca é a noção de semelhança que corresponde à ideia natural de mudança de escala, isto é, ampliação ou redução de uma figura, alterando seu tamanho sem modificar a proporcionalidade dos seus lados, em que o fator de proporcionalidade são as unidades de medidas não padronizadas – quadradinho e unidade (u).

Na unidade 9, "Operações com números decimais", do livro do 5º ano, o tópico 2 destina-se ao estudo da multiplicação com números na forma decimal. A parte do curso abre o tema com situações envolvendo a multiplicação com decimais. Na segunda situação, evidencia a variação entre os valores das grandezas em um problema para ensinar o algoritmo da multiplicação.

Não há referência à proporcionalidade, no livro do aluno e no manual do professor, porém o raciocínio proporcional poderia ter sido direcionado nas orientações didáticas para uma reflexão em sala de aula pelo professor. Poderiam ser realizadas considerações como: se um rolo de fio tem 2,75 m, quantos metros têm dois rolos? E três rolos? E quatro rolos? Existe uma associação entre grandezas resultando na razão entre quantidade de rolo e quantidade de metros, se variam proporcionalmente quando multiplicados por 2, por 3, por 4, e assim por diante. São grandezas diretamente proporcionais. Recorremos a Lima (2010) para justificar nosso argumento.

- Quanto maior for x, maior será y. Em termos matemáticos: se $x \rightarrow y$ e $x' \rightarrow y'$ então $x < x'$ implica $y < y'$.

> - Se dobrarmos, triplicarmos etc. o valor de x, o valor correspondente de y será dobrado, triplicado etc. na linguagem matemática: se $x \rightarrow y$ então $nx \rightarrow ny$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.
>
> Nas condições acima, a correspondência $x \rightarrow y$ chama-se uma *proporcionalidade* (LIMA, 2010, p. 2).

Logo, se constasse nas orientações didáticas, ao menos a conexão entre multiplicação com números na forma decimal e a ideia de proporcionalidade poderia possivelmente fazer parte do saber o "saber preparado" (RAVEL, 2003), e tornasse "o saber efetivamente ensinado" (BESSA DE MENEZES, 2010) em sala de aula.

Na parte destinada às atividades, localizamos um problema envolvendo distâncias entre cidades, abrangendo a ideia de proporcionalidade. Nas orientações didáticas, o autor ressalta:

> Na atividade 4, observe as estratégias que os alunos utilizam para calcular o item b. Eles podem fazer a adição do número encontrado no item a com 37 ,8 km ou fazer a multiplicação de 37,8 x 3. Caso algum aluno perceba a relação de pro-porcionalidade entre as distâncias, peça que compartilhe com a turma como ele pensou para resolver o item b da atividade. Caso isso não aconteça, mostre essa relação para os alunos (GIOVANNI JR., 2018, p. 235).

Entendemos que uma técnica de resolução para esse problema poderia fazer uso da noção de semelhança de razão ***r***, para encontrar o dobro da distância pretendida. No mesmo bloco de atividade, o estudante é convidado a trabalhar no contexto da grandeza massa, em que deverá calcular a quantidade de carboidrato a partir dos dados presentes em um quadro. Para essa atividade, o manual do professor sugere que

> [...] espera-se que os alunos percebam a proporcionalidade associada à multiplicação presente na atividade. Para o item b, o aluno deverá efetuar o cálculo 6,3 x 7 para chegar ao resultado esperado. Incentive-os a estimar os resultados de multiplicação de números na forma decimal por números naturais, arredondando número na forma decimal para o inteiro mais próximo (GIOVANNI JR., 2018, p. 235).

No mesmo tópico da unidade 9, existe um subtópico reservado ao trabalho com os números decimais e a porcentagem. A parte do curso apresenta duas situações para introduzir o tema; são problemas de porcentagem cuja técnica reporta-se ao uso do fator proporcional. Nas orientações didáticas, o autor propõe que o professor retome o conceito de porcentagem a partir da associação ao inteiro que foi dividido em 100 partes iguais e lembra das duas representações que vêm sendo estudadas: a fracionária e a decimal. "Proponha uma atividade para que retomem o cálculo de porcentagem usando frações, que já foi estudado, e aproveite essa mesma atividade para mostrar como fazemos o cálculo quando a porcentagem está na forma decimal" (GIOVANNI JR., 2018, p. 235). O manual do professor também sugere o trabalho com foco nas equivalências Sistema de Numeração Decimal no cálculo da porcentagem com o número na forma decimal.

> A vantagem desse processo é que efetuamos multiplicações com números naturais. Por exemplo, para calcular 6% de 150, escrevemos 0,06, ou seja, 6 centésimos. Efetuamos a multiplicação de 6 centésimos por 150 e vamos obter 900 centésimos. Como 100 centésimos equivalem a 1 inteiro, 6% de 150 é igual a 9 (GIOVANNI JR., 2018, p. 237).

Na seção seguinte, são propostas 10 atividades. A primeira solicita a escrita do número decimal correspondente à determinada porcentagem, e as nove demais são problemas de porcentagem, do tipo 2 – saber qual o valor da parte percentual do todo.

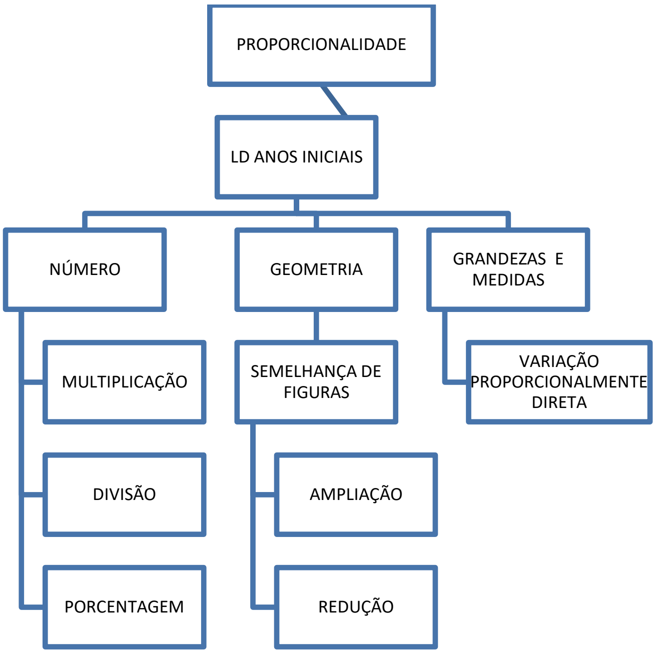
O tópico 3, "Divisão com números na forma decimal", ainda na unidade 9, na parte do curso expõe cinco situações em formato de problemas para o desenvolvimento do tema. As três primeiras situações focam na construção do algoritmo da divisão com números na forma decimal. A quinta situação experiencia a divisão entre dois números cujo quociente é um número decimal. A quarta situação que nos interessa apresenta um problema de divisão proporcional. De acordo com o manual do professor, "[...] na quarta situação, será explorada a ideia de um todo repartido em duas partes desiguais, de modo que uma seja o dobro da outra, leia o texto da fala de Paulo para os alunos e acompanhe o desenvolvimento da divisão presente na próxima página" (GIOVANNI JR., 2018, p. 243).

Voltamos a identificar o saber proporcionalidade ainda na unidade 9, no tópico 5, "Usando a calculadora", na parte reservada às atividades o manual do professor propõe: "[...] espera-se que os alunos percebam a ideia do todo repartido em duas partes proporcionais" (GIOVANNI JR., 2018, p. 256). Na atividade, dois irmãos precisam repartir uma determinada quantidade de bolinhas de gude, de modo que um deles fique com o dobro da quantidade do outro.

5.1.1.1 Modelo Institucional Dominante para Proporcionalidade (MIDP)

Localizamos o MIDP, na instituição livros didáticos dos anos iniciais do Ensino Fundamental, a partir do filtro da proporcionalidade caracterizando a razão de ser do objeto de saber proporcionalidade, nessa instituição.

Figura 32 – Modelo Institucional Dominante para Proporcionalidade – MIDP/LD



Fonte: Elaborada pela autora.

Constatamos que o saber proporcionalidade possui *habitat* nos comunidade de saberes dos Números, da Geometria e das Grandezas e Medidas, na instituição LD dos anos iniciais. Na comunidade de saberes dos Números, o objeto de saber tem nicho ecológico como significado da multiplicação e divisão de números naturais; como porcentagem – razão de denominador centesimal; e escala – razão entre a representação e o real em contexto de mapas. Na comunidade de saberes Geometria, o nicho ecológico ocorre na semelhança de figuras – ampliação e redução; e, na comunidade de saberes das Grandezas e Medidas, seu nicho ecológico aparece no estudo da variação das grandezas proporcionalmente diretas.

Em síntese, identificamos na análise da coleção dos LDs dois modelos epistemológicos dominantes. O primeiro com foco na Álgebra – variação entre grandezas proporcionalmente direta – e o outro no âmbito da geometria – semelhança, enquanto razão de ser nessa instituição.

Quadro 26 –MIDPs identificados na Instituição Livro Didático

• Variação entre grandezas proporcionalmente direta (se x então y; se nx então ny, para todo n $\in$ N.); • se multiplicar as distâncias pelo fator constante r, e se tem a relação biunívoca *f: F →F', então tem-se semelhança de razão r*, entre *F* e *F'*. Se *x'* = f(x), os pontos *x, y são proporcionais.*

Fonte: Elaborada pela autora.

Também identificamos algumas técnicas que trataremos nas OMs, nos resultados evidenciados pelo filtro da proporcionalidade no tópico das organizações matemáticas.

5.2 ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA (OM) DO OBJETO DO SABER PROPORCIONALIDADE

Em nosso estudo da instituição Livros Didáticos, questionamo-nos se os tipos de tarefa, técnicas, tecnologia e teoria, presentes nessa instituição abrangendo proporcionalidade, são bem identificados, representativos e pertinentes; se a organização matemática tem razão de ser; e se existe uma população de tipos de tarefas de proporcionalidade nas diferentes comunidades de saberes da matemática do Ensino Fundamental.

Nossa análise se pautará nas organizações matemáticas localizadas explicitamente nos LD e no manual do professor, e, também, nas nossas inferências ao saber proporcionalidade presente nas praxeologias, mas que não teve a intencionalidade para o seu trabalho acentuado.

Organizamos os resultados obtido em quadros contendo os tipos de tarefas relacionados ao saber proporcionalidade, partindo de um agrupamento por gênero, e, quando possível, apresentamos exemplos de tipos de tarefas envolvendo proporcionalidade e possíveis técnicas usadas na sua resolução. Nessa investigação, perguntamo-nos se os problemas que envolvem proporcionalidade são bem identificados, representativos, pertinentes e têm razão de ser? E se as técnicas, as formas de resolver os problemas, são bem elaboradas ou apenas esboçadas? São fáceis de utilizar, confiáveis e possíveis de evoluir? Como se caracteriza a população dos tipos de tarefa para proporcionalidade? Quais comunidades de populações dos tipos de tarefa para proporcionalidade podem ser constatadas?

5.2.1 Instituição Livros Didáticos dos anos iniciais – Ensino Fundamental

Nosso propósito, neste momento, é explicitar os resultados da análise da instituição LD à luz da segunda etapa do filtro da proporcionalidade – organização matemática focando os blocos do “saber fazer” bem como o bloco do “saber”.

5.2.1.1 Bloco do saber /fazer – tipos de tarefas e técnicas alusivas à proporcionalidade

Os resultados do estudo na instituição LD revelaram que o saber proporcionalidade não é mencionado, mesmo que implicitamente, no LD para o 1º ano do Ensino Fundamental. Nos livros dos demais anos, o objeto de saber é visto timidamente no 2º, 3º e 4º ano e passa a ter um enfoque maior no livro do 5º ano. O número de atividades voltadas ao trabalho da ideia de proporcionalidade principalmente é bem baixo, em média três atividades para todo o ano letivo. Mesmo no 5º ano, o número só apresenta um crescimento expressivo nas atividades concernentes à porcentagem.

Os MEEPs revelados no estudo da produção acadêmica e os MIDPs que identificamos na análise dos referenciais, bem como na investigação da razão de ser na instituição LD, serão tomados como possíveis técnicas, para a resolução de diferentes tipos de tarefas abrangendo a ideia de proporcionalidade.

5.2.1.1.1 Tipos de tarefas e técnicas

Voltamos aos questionamentos que elencamos no início deste capítulo. Os problemas que envolvem proporcionalidade são bem identificados, representativo, pertinentes e têm razão de ser? As técnicas de resolução dos problemas são bem elaboradas ou apenas esboçadas? Elas são fáceis de utilizar, confiáveis e possíveis de evoluir? Como se caracteriza a população dos tipos de tarefa para proporcionalidade? Quais comunidades são formadas pelas populações de tipos de tarefa para proporcionalidade?

Identificamos na coleção de LD dos anos iniciais pelo menos três gêneros (calcular, comparar e resolver) para oito tipos de tarefas. O Quadro 27, a seguir, ilustra os tipos de tarefa do gênero calcular.

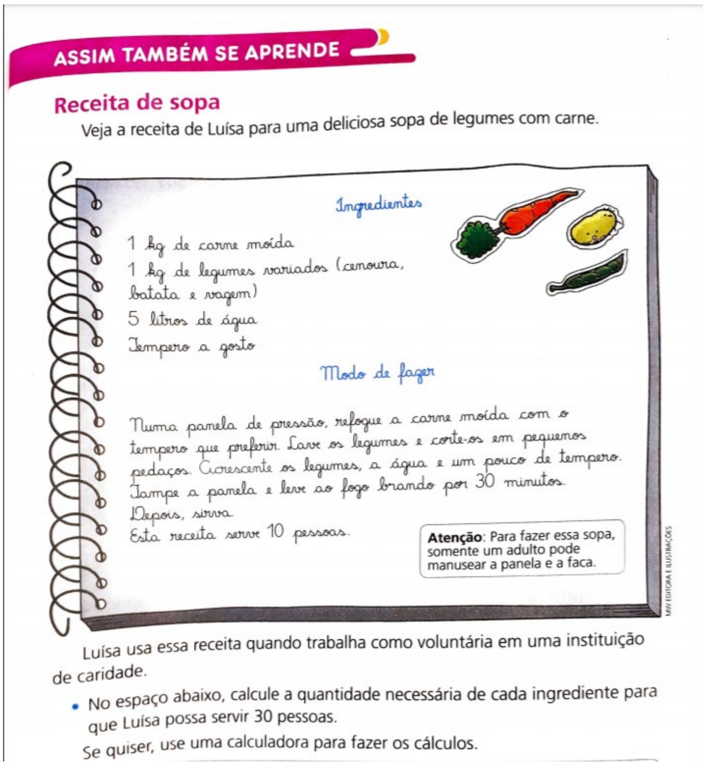
Quadro 27 – Tipo de tarefa do gênero calcular – LD – anos iniciais

Tipo de tarefa	
T_{11}	Calcular a variação proporcional **de um para muitos.**
T_{12}	Calcular a variação proporcional na busca do **valor unitário.**
T_{13}	Calcular a **distância** entre pontos.

Fonte: Elaborado pela autora.

Identificamos o tipo de tarefa T_{11} – Calcular a variação proporcional de um para muitos, no livro do aluno do 2º ano do Ensino Fundamental. Os alunos são convidados a calcular "[...] a quantidade necessária de cada ingrediente para que Luísa possa servir 30 pessoas" (GIOVANNI JR., 2018, p. 223). Dentro de um contexto de culinária em que traz uma receita de sopa que serve 10 pessoas.

Figura 32 – T_{11} – variação proporcional de um para muitos – LD – 2° ano EF



ASSIM TAMBÉM SE APRENDE

Receita de sopa

Veja a receita de Luísa para uma deliciosa sopa de legumes com carne.

Ingredientes

1 kg de carne moída
1 kg de legumes variados (cenoura, batata e vagem)
5 litros de água
Tempero a gosto

Modo de fazer

Numa panela de pressão, refogue a carne moída com o tempero que preferir. Lave os legumes e corte-os em pequenos pedaços. Acrescente os legumes, a água e um pouco de tempero. Tampe a panela e leve ao fogo brando por 30 minutos. Depois, sirva.
Esta receita serve 10 pessoas.

Atenção: Para fazer essa sopa, somente um adulto pode manusear a panela e a faca.

Luísa usa essa receita quando trabalha como voluntária em uma instituição de caridade.

- No espaço abaixo, calcule a quantidade necessária de cada ingrediente para que Luísa possa servir 30 pessoas.

Se quiser, use uma calculadora para fazer os cálculos.

Fonte: Giovanni Jr. (2018, p. 223).

No manual do professor, o autor coloca que "[...] nessa seção os alunos são convidados a analisar uma receita cujos ingredientes são utilizados com base na medida-padrão de massa, para os legumes e a carne e de capacidade para a água" (GIOVANNI JR., 2018, p. 223). Orienta o professor para explicar "[...] aos alunos que, se uma receita serve 10 pessoas, e queremos servir o dobro ou o triplo de pessoas, devemos aumentar a quantidade de cada ingrediente da receita proporcionalmente" (GIOVANNI JR., 2018, p. 223).

Do ponto de vista da técnica de resolução, ela não vem elaborada e esboçadas no livro do aluno. O autor sugere que os estudantes façam uso da calculadora. Fica para o professor a orientação que, "[...] no caso dessa atividade, para servir 30 pessoas deve-se multiplicar por 3 a quantidade de cada ingrediente da receita" (GIOVANNI JR., 2018, p. 223):

Figura 34 – Técnica sugerida

3 × 1 = 3; 3 kg de carne moída.
3 × 1 = 3; 3 kg de legumes variados.
3 × 5 = 15; 15 litros de água.
Tempero a gosto. ”

Fonte: Giovanni Jr. (2018, p. 223).

Interpretamos como orientação para o uso da técnica do uso do fator de proporcionalidade “multiplicar por três”.

No 4º ano, na unidade 4, “Multiplicação com números naturais”, no tópico 1, “Ideias da multiplicação”, o autor recorre ao contexto de receitas para tratar da ideia de proporcionalidade na parte das atividades do livro do aluno. “As receitas são recursos que favorecem o uso da multiplicação, pois possibilitam diversas situações problematizadoras” (GIOVANNI JR., 2018, p. 196), conforme o manual do professor. No livro do aluno, no quadro conexões, encontramos uma receita de suco cuja atividade propõe ao aluno realizar o aumento da receita a partir dos dados postos em uma tabela.

Figura 35 – T_{11} – variação proporcional de um para muitos – LD – 4° ano EF

6. Complete o quadro abaixo com a quantidade necessária de ingredientes para preparar o número de receitas indicado do suco de ananás.

	1 Receita	2 Receitas	3 receitas	4 receitas
Litros de água	1	2	3	4
Ananás cortado	1	2	3	4
Colheres de sopa de açúcar	2	4	6	8

Fonte: Giovanni Jr. (2018, p. 95).

Nas orientações didáticas, tem-se a expectativa de que os alunos “[...] percebam que é necessário manter a proporção para fazer mais de uma receita” (GIOVANNI JR., 2018, p. 95). Novamente, a técnica implícita é para o uso do fator de proporcionalidade.

Outra atividade identificada como do tipo de tarefa T_{11} – Calcular a variação entre grandezas de um para muitos, foi encontrada no livro do 5º ano, na unidade “Operações com números na forma decimal”, no tópico destinado ao estudo da multiplicação com decimais na parte das atividades.

Figura 36 – T_{11} – variação proporcional de um para muitos – LD – 5° ano EF

8. Suponha que um copo com 200 mL de leite contenha 9,4 g de carboidrato e 6,3 g de proteína.

a) Complete o quadro abaixo para registrar a quantidade de carboidrato que uma pessoa vai ingerir em uma semana tomando um copo de leite por dia.

Dia	1	2	3	4	5	6	7
Quantidade de carboidrato (em grama)	9,4	18,8	28,2	37,6	47	56,4	65,8

b) Calcule, agora, quantos gramas de proteína essa pessoa consome em uma semana só com esses copos de leite. 44,1 g

Fonte: Giovanni Jr. (2018, p. 235).

Observamos no manual do professor que se tem a intenção de que os estudantes “[...] percebam a proporcionalidade associada à multiplicação presente na atividade. [...] Incentive-os a estimar os resultados de multiplicação de números na forma decimal por números naturais, arredondando número na forma decimal para o inteiro mais próximo” (GIOVANNI JR., 2018, p. 235).

Entendemos que as técnicas indicadas nos livros do 2º, 4º e 5º anos do Ensino Fundamental são relativamente fáceis de utilizar, confiáveis e possivelmente de evoluir nessa etapa de escolaridade. A ideia de proporcionalidade “de um para muitos” está sendo utilizada dentro do tópico destinado ao estudo das medidas de grandezas, ideias da multiplicação e multiplicação com números na forma decimal, em que o conceito de multiplicação é o objeto de conhecimento. A técnica direcionada ao tipo de tarefa se identifica com o modelo (*se x então y; se nx então ny, para todo n* $\in$ *N*) variação proporcionalmente direta. Percebemos um avanço se levarmos que as instituições PCN e BNCC indicam que o estudo do objeto proporcionalidade inicie a partir do 4º ano do Ensino Fundamental. E um encurtamento da distância entre o que teoriza a literatura acadêmica[95] e o que pratica a instituição LD.

O tipo de tarefa T_{12} – Calcular a variação proporcional na busca do valor unitário foi encontrado no livro do aluno do 3º ano do Ensino Fundamental, cujo objetivo era “[...] formalizar os conceitos de divisão exata e divisão não exata” (GIOVANNI JR., 2018, p. 192), em um contexto da grandeza valor monetário.

[95] A literatura acadêmica propõe que o estudo da proporcionalidade deva ser iniciado com crianças de seis anos a partir da técnica de metade. Ver estudos de Spinillo (2002).

Figura 37 – Tipo de tarefa T_{12} – Variação proporcional, LD – 3° ano EF

3. Veja no quadro ao lado informações a respeito do material escolar que Débora comprou.

Quantidade	Artigo	Preço total
6	Caderno	96 reais
3	Lapiseira	27 reais

Considerando que não houve desconto no valor unitário de cada produto comprado e que todos os itens de cada produto são iguais, responda:

a) Qual é o preço de 1 caderno? 96 ÷ 6 = 16; 16 reais.

b) Qual é o preço de 1 lapiseira? 27 ÷ 3 = 9; 9 reais.

c) Qual é o total da compra de 1 caderno e 1 lapiseira? 16 + 9 = 25; 25 reais.

Fonte: Giovanni Jr. (2018, p. 196).

O tipo de tarefa T_{12}, expresso na atividade 3 do livro do 3º ano, orienta o professor para desenvolver em sala a técnica do cálculo do valor unitário. Como podemos constatar no tópico a seguir, do manual do professor – Atividade complementar: Vamos às compras!

> Inicie uma roda de conversa para que os alunos compartilhem os conhecimentos que possuem sobre descontos e promoções veiculadas em diferentes mídias.
> Proponha aos alunos que elaborem, no caderno, um quadro como o mostrado a seguir para indicar a operação numérica que permite calcular o valor unitário de cada item. Veja:

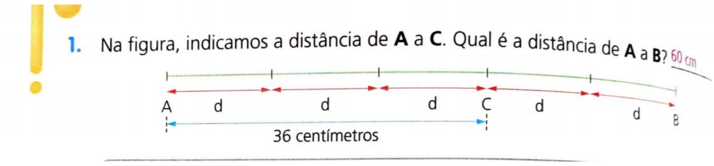
Quantidade	Artigo	Preço total	Operação numérica	Preço unitário
6	Caderno	96 reais	96 ÷ 6	
3	Lapiseira	27 reais	27 ÷ 3	

> Em seguida, pergunte ao grupo: *Se o preço de 6 cadernos é 96 reais, quanto custou cada caderno? Como podemos calcular?; Que operação é preciso fazer para descobrir o preço unitário dos cadernos?; Se o preço de 3 lapiseira é 27 reais, quanto custou cada lapiseira*? (GIOVANNI JR., 2018, p. 192).

No livro do aluno, na parte do curso nas situações apresentadas para a introdução do conteúdo, o autor apresenta quatro situações para o trabalho da divisão exata e não exata, pela natureza do tema divisão, nos anos iniciais, chegar ao valor unitário seria basicamente a finalidade. A técnica não é muito elaborada e é fácil de utilizar, embora o conceito de divisão não seja dos fáceis nessa etapa de escolaridade, porém ela é confiável e possível de evoluir. O que se espera do estudante é que ele mobilize seus conceitos de múltiplos e divisores, estudados até o momento, para calcular o valor unitário do caderno e da lapiseira, sendo dado um múltiplo correspondente – preço total. A técnica aponta para o modelo (*se x então y; se nx então ny, para todo n* $\in$ *N*). Se *x* aumenta ou diminui, *y* aumenta ou diminui na mesma proporcionalidade. Se alterar a quantidade de cadernos, o valor a pagar será alterado na mesma proporção.

O último tipo de tarefa desse bloco, T_{13} – Calcular a distância entre pontos, pode ser exemplificado pelo exercício encontrado no livro do 5º ano, no item 7 – resolvendo problemas, da unidade 5, "Números e medidas". A tarefa consta no livro do aluno na parte das atividades e tem por finalidade encontrar a distância entre dois pontos usando a unidade de medida (d) como fator de proporcionalidade.

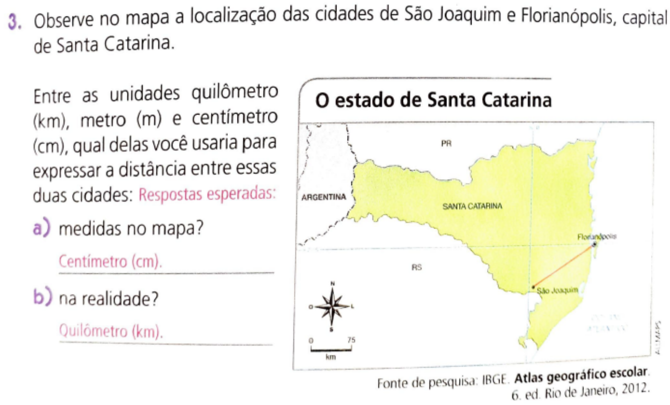
Figura 38 – Tipo de tarefa T_{13} – Calcular a distância – LD – 5° ano EF



Fonte: Giovanni Jr. (2018, p. 136).

De acordo com o manual do professor, os estudantes podem ter dificuldade de resolver a atividade por que "[...] a distância entre **A** e **B** está dividida em cinco trechos de medida **d**. Os alunos devem perceber que o valor de **d** é calculado dividindo-se 36 por 3, portanto: d = 12 cm; a distância de **A** a B é de cinco vezes o trecho d, então 5 x 12 cm = 60 cm" (GIOVANNI JR., 2018, p. 136). Entendemos que a técnica indicada remete ao conceito de semelhança de r, ao dividir a medida do comprimento de A a C para encontrar o valor do fator de proporcionalidade **d**. Ainda na unidade 5, no item "Falando de... cidadania", na parte das atividades, há um exercício envolvendo escala em mapa. O estudante é convidado a observar o mapa do estado de Santa Catarina e analisar as medidas das distâncias entre duas cidades, no mapa e no real, escolhendo a melhor unidade de medida padrão para cada caso.

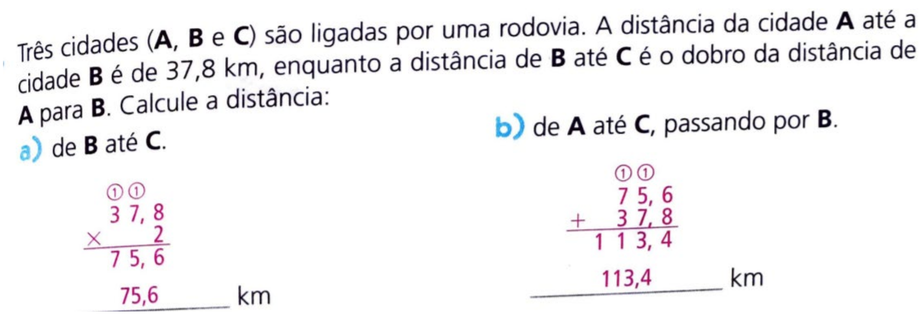
Figura 39 – Tipo de tarefa T_{13} – Calcular a distância – LD – 5° ano EF



Fonte: Giovanni Jr. (2018, p.137).

Localizamos mais um exemplo no livro do 5º ano, na unidade 9, que tem o intuito explorar as operações com números decimais, no item destinado ao trabalho da multiplicação. Requisita-se que o estudante calcule a distância entre as cidades a partir da informação que a distância pretendida é o dobro da distância anterior.

Figura 40 – Tipo de tarefa T_{13} – Calcular distâncias – 5º ano EF



Fonte: Giovanni Jr. (2018, p. 235).

No manual do professor, o autor deixa claro sua intenção de trabalhar a ideia de proporcionalidade por meio dessa atividade. É chamada a atenção do professor para a possibilidade do aluno

> [...] fazer a adição do número encontrado no item a com 37 ,8 km ou fazer a multiplicação de 37,8 x 3. Caso algum aluno perceba a relação de proporcionalidade entre as distâncias, peça que compartilhe com a turma como ele pensou para resolver o item b da atividade. Caso isso não aconteça, mostre essa relação para os alunos (GIOVANNI JR., 2018, p. 235).

Inferimos que seja relativamente fácil utilizar a técnica focalizada, confiável e possível de evoluir. Apesar de percebermos que a ideia de proporcionalidade implícita na atividade relaciona ao modelo se multiplicar as distâncias pelo fator constante *r*, e se tem a relação biunívoca $f: F \rightarrow F'$, *então tem-se semelhança de razão r*, entre *F* e *F'*. Se $x' = f(x)$, os pontos *x, y são proporcionais*.

Quadro 28 – Tipo de tarefa do gênero comparar – LD – anos iniciais EF

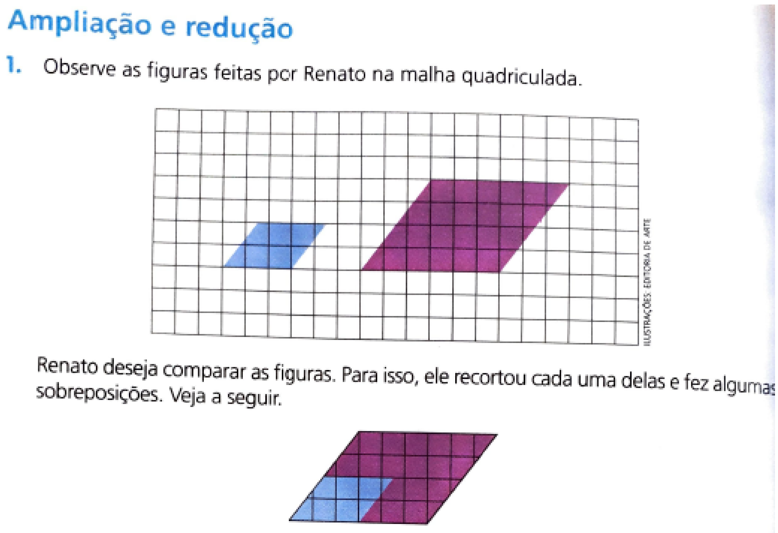
Tipo de tarefa	
T_{39}	Comparar figuras e aplicar propriedades .

Fonte: Elaborado pela autora.

Encontramos dois exemplos para o tipo de tarefa T_{39} – Comparar figuras e aplicar propriedades, um na parte do curso e o outro na parte das atividades no livro do aluno do 5º ano, na unidade 8, "Mais sobre geometria", na qual se intenciona o trabalho da habilidade

(EF05MA18[96]) em que aborda a ampliação e redução de figuras. A unidade é composta por seis tópicos, Explorando, 01, 02, 03, 04 e "Falando de... cidadania". O tópico "Explorando" versa sobre o tema "ampliação e redução", e, no livro do aluno, na parte do curso, é introduzida com a apresentação da atividade a seguir.

Figura 41 – Tipo de tarefa T_{39} – Comparar figuras – 5º ano EF



Fonte: Giovanni Jr. (2018, p. 200).

A expectativa do autor para com essa atividade se dá na esperança que os alunos "[...] percebem que, sobrepondo a figura da maneira como Renato fez, é possível comparar os ângulos e os lados da figura" (GIOVANNI JR., 2018, p. 200), conforme consta no manual do professor. Há a sugestão para que o professor "[...] se julgar necessário, providencie papel quadriculado para os alunos reproduzirem na prática os passos efetuados na atividade. Eles poderão verificar os itens **c** e **d** fazendo medições com as figuras recortadas" (GIOVANNI JR., 2018, p. 200). A atividade é acompanhada dos seguintes questionamentos:

[96] "Ampliação e redução de figuras poligonais em malhas quadriculadas: reconhecimento da congruência dos ângulos e da proporcionalidade dos lados correspondentes" (BRASIL, 2018, p. 296).

Figura 42 – Tipo de tarefa T_{39} – Comparar figuras – 5º ano EF

• Agora, responda: Resposta pessoal. Espera-se que os alunos percebam que fazendo a sobreposição das figuras fica mais fácil comparar os ângulos e os lados delas.

a) Na sua opinião, por que Renato fez as sobreposições das figuras dessa maneira?

b) O que é possível perceber em comum entre as duas figuras?

Resposta pessoal. Espera-se que os alunos percebam que os ângulos sobrepostos (e os demais ângulos também) são congruentes e que os lados são proporcionais.

c) Quantas vezes o **menor** lado da figura azul cabe no **menor** lado da figura roxa?

2 vezes.

d) Quantas vezes o **maior** lado da figura azul cabe no **maior** lado da figura roxa?

2 vezes.

2. Você sabe o que é redução e ampliação de uma figura? Converse com os colegas e com o professor. Resposta pessoal.

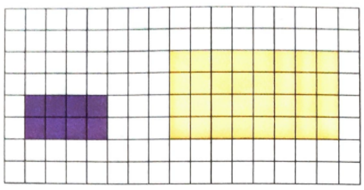
Fonte: Giovanni Jr. (2018, p. 200).

A sugestão da atividade com a malha quadriculada e com sobreposições ajuda aos estudantes a perceberem as propriedades implícitas na ampliação e redução de figuras – congruência dos ângulos e proporcionalidade dos lados correspondentes. O autor aconselha o professor a pedir que os estudantes “[...] façam uma ampliação desse quadrado. Verifique qual é o entendimento deles em relação a como deve ser feita a ampliação. Esclareça as dúvidas e corrija qualquer eventual equívoco” (GIOVANNI JR., 2018, p. 200).

Ainda na unidade 8, no tópico 3, há uma retomada do tema ampliação e redução com a explicitação do termo figuras. A parte do curso tem início com a orientação para a análise do desenho de dois retângulos feitos em uma malha quadrada.

Figura 43 – Tipo de tarefa T_{39} – Comparar figuras – ampliação – 5º ano EF

• Observe abaixo os dois desenhos que Rogério fez na malha quadriculada.



Rogério desenhou dois retângulos. O retângulo roxo mede 4 unidades de largura e 2 unidades de altura. Já o retângulo amarelo mede 8 unidades de largura e 4 unidades de altura.

• Agora, responda:

a) A largura do retângulo amarelo equivale a quantas vezes a largura do retângulo roxo? 2 vezes.

b) A altura do retângulo amarelo equivale a quantas vezes a altura do retângulo roxo? 2 vezes.

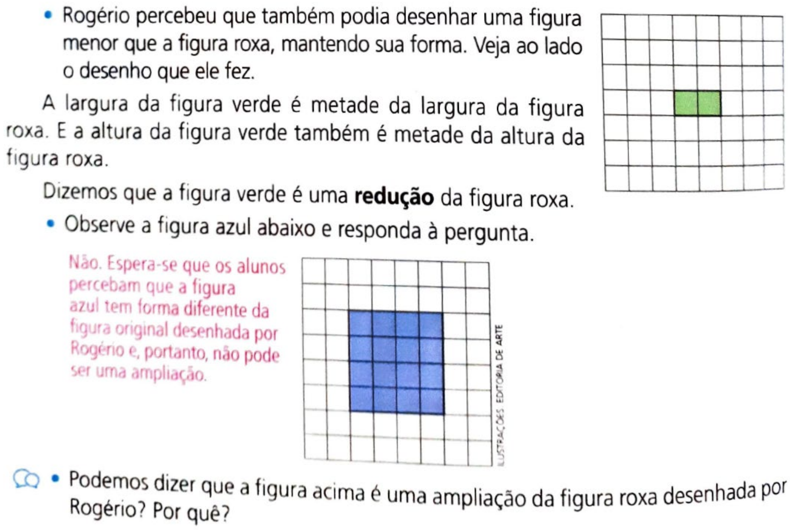
Dizemos que a figura amarela é uma **ampliação** da figura roxa.

Fonte: Giovanni Jr. (2018, p. 208).

Percebemos que há um direcionamento de uma técnica para que o aluno perceba a relação proporcionalidade existente na ampliação, ou seja, o retângulo amarelo foi aumentando na mesma proporção tanto no comprimento da largura quanto no comprimento da altura (dobrou o comprimento da altura e também dobrou o comprimento da largura), logo os modelos “se nx então ny” ou podemos concluir que *tem-se semelhança de razão r*, entre *F* e *F’*. Se *x’* = f(x), os pontos *x, y são proporcionais*. Esses modelos são adequados, e, embora a explicação esteja numa perspectiva algébrica, o objeto de conhecimento, reconhecimento da congruência dos ângulos e da proporcionalidade das medidas dos comprimentos dos lados correspondentes habitam a comunidade de saberes da geometria.

Continuando a parte do curso, o autor discorre sobre a ideia de proporcionalidade. Traz para o debate a ideia de metade na redução da figura roxa anterior, retângulo 2x4, para a construção do retângulo verde de uma figura semelhante, porém com suas dimensões reduzidas pela metade.

Figura 44 – Tipo de tarefa T_{39} – Comparar figuras – redução – 5º ano EF


- Rogério percebeu que também podia desenhar uma figura menor que a figura roxa, mantendo sua forma. Veja ao lado o desenho que ele fez.

A largura da figura verde é metade da largura da figura roxa. E a altura da figura verde também é metade da altura da figura roxa.

Dizemos que a figura verde é uma **redução** da figura roxa.

- Observe a figura azul abaixo e responda à pergunta.

Não. Espera-se que os alunos percebam que a figura azul tem forma diferente da figura original desenhada por Rogério e, portanto, não pode ser uma ampliação.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

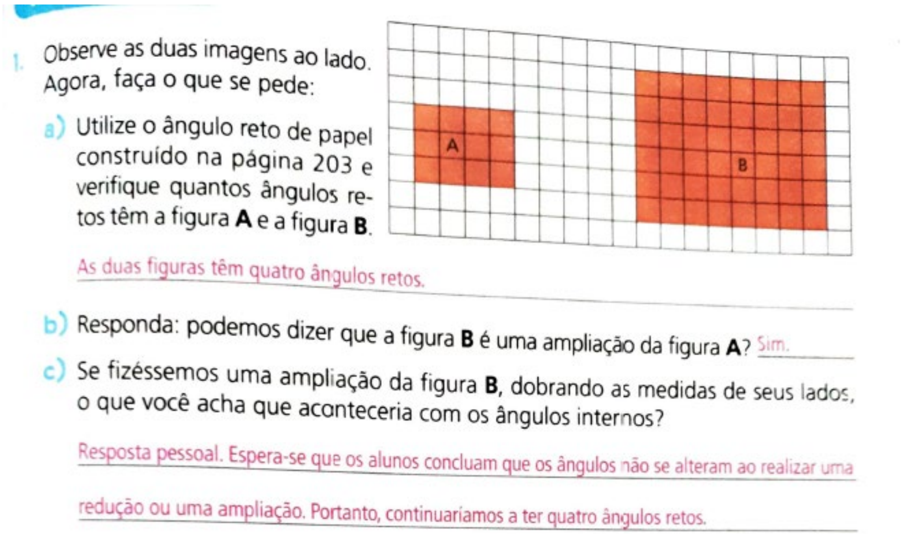
- Podemos dizer que a figura acima é uma ampliação da figura roxa desenhada por Rogério? Por quê?

Fonte: Giovanni Jr. (2018, p. 208, 5º ano).

Outro fato importante que o autor apresenta na parte do curso é a negação da proporcionalidade. Apresenta um quadrado 4x4, e pede para que o estudante observe a figura, julgue se é uma ampliação da figura roxa e justifique o porquê de sua resposta. Recordamos aqui a problemática ecologia lançada por Chevallard (1994, p. 142): “[...] sem se interrogar não somente no que é, [...] mas ainda se perguntando porque o que não é, não é [...]”. A apresentação da atividade não proporcional na parte do curso é importante para trazer a reflexão para os alunos sobre o fato de que, para se ter uma ampliação ou redução, se necessita que haja a alteração proporcional do comprimento dos lados da figura.

Na parte das atividades da unidade 8 do livro, do 5º ano, encontramos três exemplos de emprego da ampliação e redução para o tipo de tarefa T_{40}. Na primeira atividade, o autor pede que os alunos comparem duas figuras quanto aos seus ângulos – retos, permitindo que os estudantes construam a ideia de congruência dos ângulos internos.

Figura 45 – Tipo de tarefa T_{39} – Comparar ângulos de figuras – ampliação – 5º ano EF



1. Observe as duas imagens ao lado. Agora, faça o que se pede:

a) Utilize o ângulo reto de papel construído na página 203 e verifique quantos ângulos retos têm a figura **A** e a figura **B**.

As duas figuras têm quatro ângulos retos.

b) Responda: podemos dizer que a figura **B** é uma ampliação da figura **A**? Sim.

c) Se fizéssemos uma ampliação da figura **B**, dobrando as medidas de seus lados, o que você acha que aconteceria com os ângulos internos?

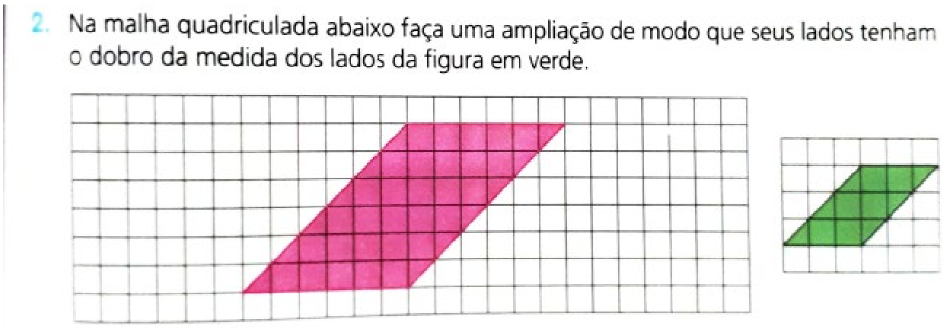
Resposta pessoal. Espera-se que os alunos concluam que os ângulos não se alteram ao realizar uma redução ou uma ampliação. Portanto, continuaríamos a ter quatro ângulos retos.

Fonte: Giovanni Jr. (2018, p. 209).

A construção da técnica passa pela observação e reflexão sobre uma das condições para a ampliação ou redução de figuras – congruência dos ângulos. Como destaca o autor “[...] espera-se que os alunos concluam que os ângulos não se alteram ao realizar uma redução ou uma ampliação” (GIOVANNI JR., 2018, p. 209).

Na segunda atividade, também utilizando a malha quadriculada, solicita-se a construção da ampliação de uma figura. O foco, agora, passa para a outra condição de ampliação ou redução de figuras proporcionalidade das medidas do comprimento dos lados.

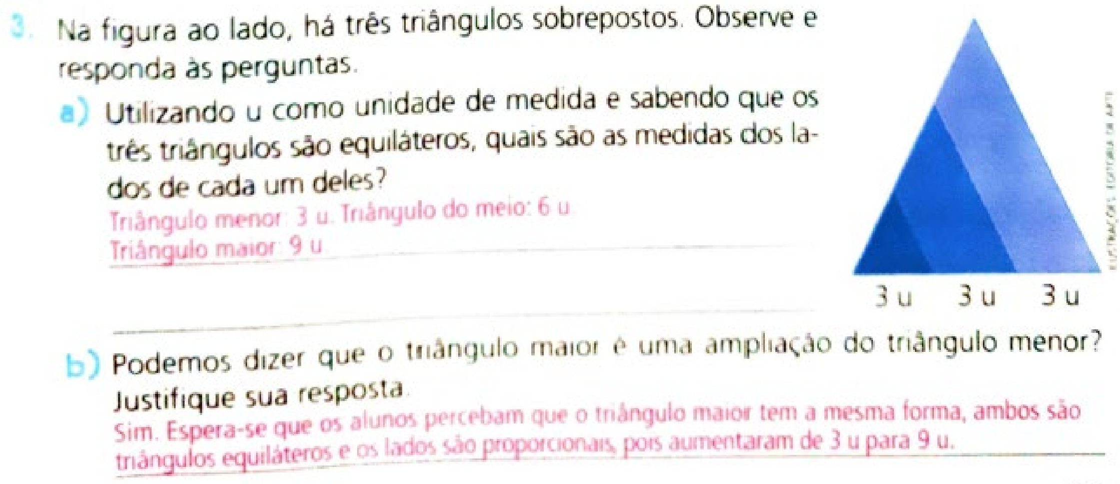
Figura 46 – Tipo de tarefa T_{39} – Comparar de figuras – ampliação – 5º ano EF


2. Na malha quadriculada abaixo faça uma ampliação de modo que seus lados tenham o dobro da medida dos lados da figura em verde.

Fonte: Giovanni Jr. (2018, p. 209).

Na terceira atividade, são retratados três triângulos sobrepostos e se instigam os alunos para encontrar as medidas a partir de uma unidade dada (u) e comparar se o triângulo maior é uma ampliação do triângulo menor.

Figura 47 – Tipo de tarefa T_{40} – Comparar figuras – 5º ano EF


3. Na figura ao lado, há três triângulos sobrepostos. Observe e responda às perguntas.

a) Utilizando u como unidade de medida e sabendo que os três triângulos são equiláteros, quais são as medidas dos lados de cada um deles?
Triângulo menor: 3 u. Triângulo do meio: 6 u
Triângulo maior: 9 u

3 u 3 u 3 u

b) Podemos dizer que o triângulo maior é uma ampliação do triângulo menor? Justifique sua resposta.
Sim. Espera-se que os alunos percebam que o triângulo maior tem a mesma forma, ambos são triângulos equiláteros e os lados são proporcionais, pois aumentaram de 3 u para 9 u.

Fonte: Giovanni Jr. (2018, p. 209).

No espaço das orientações didáticas, tem-se a expectativa de que “[...] os alunos percebam que o triângulo maior tem a mesma forma do menor, ambos são triângulos equiláteros e os lados são proporcionais, pois aumentaram de 3 u para 9 u” (orientações didáticas, GIOVANNI JR., 2018, p. 209, 5º ano).

Do ponto de vista do objeto de conhecimento “[...] reconhecimento da congruência dos ângulos e da proporcionalidade dos lados correspondentes”, a ser estudado por meio desse tipo de tarefa T_{39}, as técnicas são as mesmas exploradas na parte do curso que se relaciona ao modelo de semelhança de razão r, em que a razão em atividade é a unidade de medida “quadradinho” se multiplicar as medidas dos lados pelo fator constante r. Sentimos falta de pelo menos uma atividade ressaltando a não proporcionalidade de figuras ampliadas ou reduzidas. Entendemos que essas técnicas poderiam ser mais fáceis de utilizar se usadas de maneira pragmática, permitindo muitos momentos de experimentação e análise. No entanto elas são confiáveis, pois conduzem a compreensão da importância de se manter a congruência dos ângulos e proporcionalidade das medidas dos comprimentos dos lados da figura para se garantir a ampliação ou redução, além de terem um potencial enorme de possibilidade de evoluir.

Quadro 29 – Tipo de tarefa do gênero resolver problemas – LD – anos iniciais EF

Tipo de tarefa	
T_{27}	Resolver problemas envolvendo dobro ou metade.
T_{28}	Resolver problemas envolvendo triplo ou terça parte; 4x ou x/4; nx ou x/n.
T_{29}	Resolver problemas de porcentagem

Fonte: Elaborado pela autora.

Para o tipo de tarefa "Resolver problemas envolvendo dobro ou metade – T_{27}", encontramos um exemplo no livro do 2º ano, na unidade 8, "Multiplicação", no tópico "Dobro e metade".

Figura 48 – Tipo de tarefa T_{27} – Dobro/metade – 2º ano EF

Fonte: Giovanni Jr. (2018, p. 186).

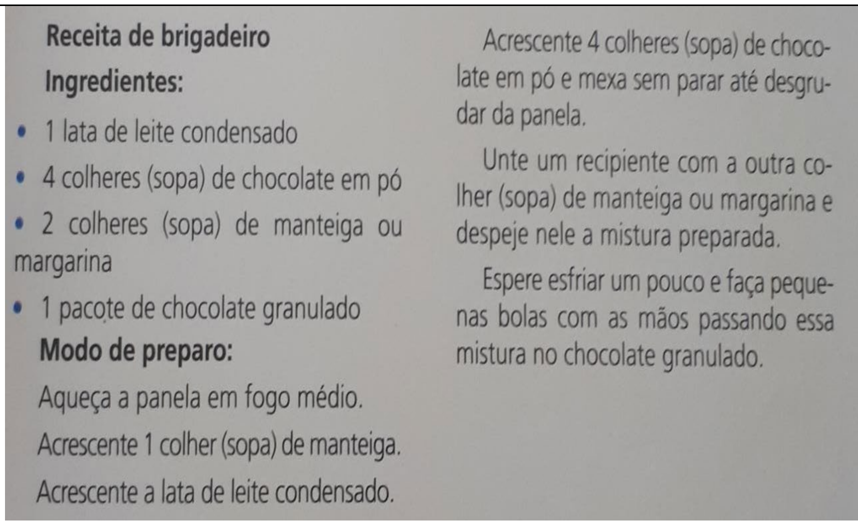
Essa atividade é sugerida no livro do aluno na parte das atividades. Em paralelo, nas orientações Didáticas, o autor sugere para o professor que seja realizada em sala uma atividade complementar que remete à habilidade (EF02MA08[97]).

> [...] sugerimos como atividade complementar que proponha uma receita na qual os alunos terão de dobrar as quantidades dos ingredientes. Escolha uma receita simples e que faça parte da culinária da região de moradia dos alunos. Estimar resultados e efetuar cálculos mentais é muito importante nessa fase (GIOVANNI JR., 2018, p. 186).

Nas orientações didáticas, o autor também apresenta como sugestão uma receita de brigadeiro em que há a seguinte diretriz para o professor.

Figura 49 – Tipo de tarefa T_{27} – Dobro/metade – 2º ano EF

Apresente aos alunos uma receita de brigadeiro. Coloque-a no quadro de giz ou, se possível, disponibilize essa receita impressa para cada aluno e orientem que colem no caderno. Explique para a turma que uma porção da receita não é suficiente para todos da classe e que será necessário preparar o dobro. Complete com os alunos no quadro de giz os ingredientes e as quantidades necessárias para a receita inicial e para fazer o dobro da receita de brigadeiro" (GIOVANNI JR., 2018, p. 186).



Receita de brigadeiro

Ingredientes:

- 1 lata de leite condensado
- 4 colheres (sopa) de chocolate em pó
- 2 colheres (sopa) de manteiga ou margarina
- 1 pacote de chocolate granulado

Modo de preparo:

Aqueça a panela em fogo médio.

Acrescente 1 colher (sopa) de manteiga.

Acrescente a lata de leite condensado.

Acrescente 4 colheres (sopa) de chocolate em pó e mexa sem parar até desgrudar da panela.

Unte um recipiente com a outra colher (sopa) de manteiga ou margarina e despeje nele a mistura preparada.

Espere esfriar um pouco e faça pequenas bolas com as mãos passando essa mistura no chocolate granulado.

Fonte: Giovanni Jr. (2018, p. 187).

Ainda na parte das atividades do livro do 2º ano, na unidade 8, cujo objetivo é trabalhar a multiplicação identificamos outro exemplo para o tipo de tarefa T_{27}, no qual os alunos precisam encontrar a distância em km que corresponde à metade da distância percorrida por outro. Entendemos que a técnica que está implícita é do uso do fator de proporcionalidade.

[97] Resolver e elaborar problemas envolvendo dobro, metade, triplo e terça parte, com suporte de imagens ou material manipulável, utilizando estratégias pessoais.

Figura 50 – Tipo de tarefa T_{27} – Dobro/metade – 2º ano EF

6. Com sua bicicleta, Fernando andou 4 quilômetros. Theo andou a metade dessa distância com sua bicicleta. Quantos quilômetros Theo andou com sua bicicleta? 2 quilômetros.

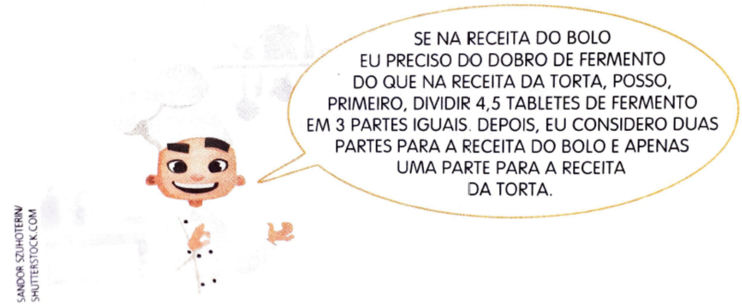
Fonte: Giovanni Júnior (2018, p. 186).

Voltamos a identificar outro exemplo para o tipo de tarefa T_{27}, no livro do 5º ano, na unidade 9, “Operações com números na forma decimal”. Na parte do curso, o autor apresenta cinco situações para experenciar divisão na forma decimal. A situação que nos interessou foi a quarta, na qual é explorada a ideia de um todo repartido em duas partes desiguais, de modo que uma seja o dobro da outra.

Figura 51 – Tipo de tarefa T_{27} – Dobro/metade – 5º ano EF

4ª situação: Paulo tem 4,5 tabletes de fermento e precisa usar todos eles para fazer um bolo e uma torta. A receita do bolo deve levar o dobro de fermento do que a receita da torta. Quantos tabletes de fermento devem ir em cada receita?

Observe como Paulo fez para calcular a quantidade de tabletes de cada receita.



Então, podemos começar dividindo 4,5 por 3. Observe essa divisão usando o algoritmo.

1. Iniciamos dividindo as unidades: 4 unidades divididas por 3 é igual a 1 unidade e resta 1 unidade: $1 \times 3 = 3$ e $4 - 3 = 1$.

U	d	
4 ,	5	3
−3		1 (unidade)
1		

Fonte: Giovanni Jr. (2018, p. 243).

No manual do professor, identificamos a recomendação de uma técnica para ser explorada, pelo professor, em sala de aula.

> No quadro de giz, reproduza os passos apresentados no livro do aluno. A cada passo associe as etapas do algoritmo com as representações da página para que os alunos possam compreender os passos do algoritmo.
> Ao final, evidencie a situação da proporcionalidade. Temos 4,5 tabletes de fermento e eles foram divididos em duas partes, 3 partes para o bolo e 1,5 parte para a torta,

ou seja, o bolo levará o dobro de tabletes que a torta (GIOVANNI JR., 2018, p. 244).

Entendemos que a técnica descrita refere-se ao desenvolvimento da divisão proporcional. Observamos que esse tipo de tarefa permite ao professor trabalhar a multiplicação e a divisão, dando oportunidade de os estudantes desenvolverem o raciocínio proporcional por meio da ideia de “metade”, como foi evidenciado por Spinillo (2002) na análise da literatura acadêmica.

O tipo de tarefa T_{28} – Resolver problemas envolvendo triplo ou terça parte; 4x ou x/4; nx ou x/n segue a mesma lógica do tipo de tarefa T_{27}. Encontramos no livro do aluno direcionado ao 3º, 4º e 5º ano do Ensino Fundamental. No livro do 3º ano, verificamos na unidade 3, destinada ao estudo das grandezas e medidas: comprimento, massa, capacidade, um problema que remete à ideia de proporcionalidade um para muitos.

Figura 52 – Tipo de tarefa T_{28} – Resolver problemas – triplo – LD – 3º ano EF

4. Helena costuma usar 1 litro de água para fazer 5 taças de gelatina.

Quantos litros de água ela usará para fazer 15 taças? 3 L

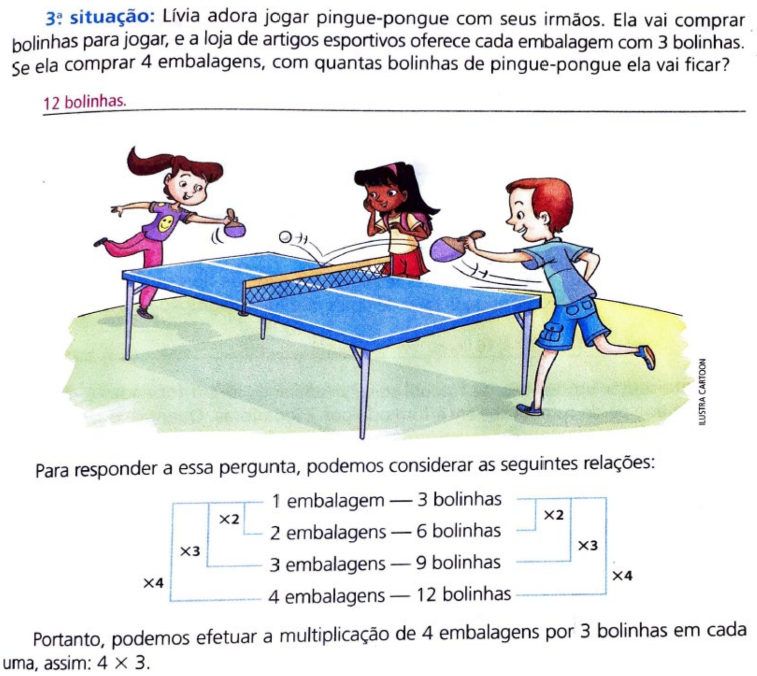
Fonte: Giovanni Jr. (2018, p. 70).

Do ponto de vista da técnica, não há indicação explícita para a aplicação da ideia de proporcionalidade com a realização dessa atividade, mas entendemos que a tarefa possui um potencial muito bom para a vivência do tema, pois reporta-se ao cálculo do triplo. Nas orientações didáticas, o autor sugere que “[...] espera-se que os alunos percebam que, se para 5 taças de gelatina precisamos de um litro de água, para 15 taças (5 + 5 + 5) precisaremos de 3 litros de água. Explore a ilustração como suporte aos alunos na resolução da atividade” (GIOVANNI JR., 2018, p. 70). Entendemos que a técnica que está implícita é da divisão proporcional, fazendo o uso do fator de proporcionalidade.

Poderia ser sugerido ao professor explorar a ideia de proporcionalidade, realizando coletivamente a comparação das razões entre as grandezas envolvidas – volume de água e de gelatina, com os estudantes. *Se com 1 litro faço 5 taças de gelatina, com 2 litros farei quantas* *taças? E com três litros?* Essa técnica de resolução de refletir com a turma levaria à construção da ideia de proporcionalidade em que, se uso cinco taças de gelatina em um litro de água, então 15 taças agrupadas de cinco em cinco correspondem a três grupos. Para cada grupo de cinco taças, usaria um litro de água, logo, para três grupos, três litros.

Outro exemplo para o tipo de tarefa T_{28} foi localizado no livro do 4º ano, na unidade 4, destinado ao trabalhado da multiplicação com números naturais. Na parte do curso para o estudo das ideias da multiplicação, o autor apresenta três situações. A terceira situação é associada à ideia proporcionalidade da multiplicação, como ilustra a figura a seguir.

Figura 53 – Tipo de tarefa T_{28} – Resolver problemas – quadruplo – LD – 4º ano EF


3ª situação: Lívia adora jogar pingue-pongue com seus irmãos. Ela vai comprar bolinhas para jogar, e a loja de artigos esportivos oferece cada embalagem com 3 bolinhas. Se ela comprar 4 embalagens, com quantas bolinhas de pingue-pongue ela vai ficar?

12 bolinhas.

Para responder a essa pergunta, podemos considerar as seguintes relações:

×2 ×3 ×4
1 embalagem — 3 bolinhas
2 embalagens — 6 bolinhas
3 embalagens — 9 bolinhas
4 embalagens — 12 bolinhas
×2 ×3 ×4

Portanto, podemos efetuar a multiplicação de 4 embalagens por 3 bolinhas em cada uma, assim: 4 × 3.

Fonte: Giovanni Jr. (2018, p. 93).

Entendemos que a técnica indicada recorre ao cálculo do quádruplo da quantidade inicial, ou seja, a técnica que está implícita faz uso do fator de proporcionalidade. Observamos que, no manual do professor, o autor dá uma atenção maior ao tema, fazendo as seguintes considerações.

> Verifique se os alunos observam que à medida que o número de embalagens aumenta o número de bolinhas aumenta proporcionalmente. Se julgar oportuno, apresente outras situações em que essa ideia é contemplada. Pergunte aos alunos o que devemos fazer com as quantidades dos ingredientes de uma receita se queremos dobrá-la ou triplicá-la. Deixe que expliquem seus raciocínios e suas estratégias. Observe as respostas e faça questionamentos caso cometam equívocos. Explique, por exemplo, que ao dobrar ou triplicar uma receita é necessário aumentar

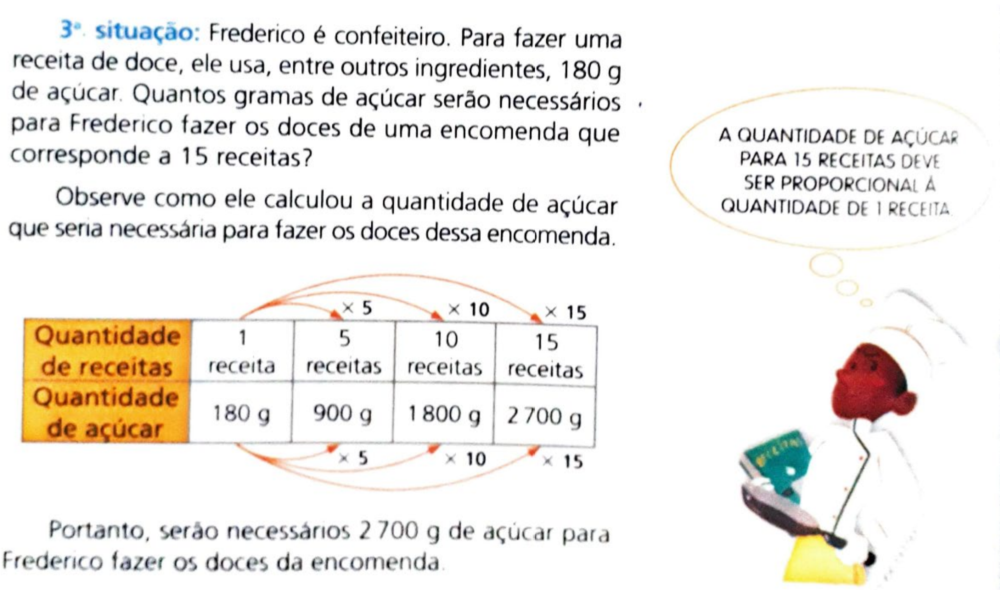
> proporcionalmente a quantidade de ingredientes e procure justificar esse fato (GIOVANNI JR., 2018, p. 93).

Observamos outra situação de negação da proporcionalidade relacionada ao estudo da multiplicação, no livro do 4º ano. “Por exemplo, um aluno perguntar se o tempo de cozimento de determinada receita que foi dobrada ou triplicada também deve ser dobrado ou triplicado, assim como foi feito com os ingredientes” (GIOVANNI JR., 2018, p. 93). O autor, nas orientações didáticas, ressalta que

> Perguntas como essa promovem situações ricas em argumentações e favorecem a interdisciplinaridade, já que professores de outras áreas podem ser convidados para esclarecimentos mais aprofundados. No caso particular dessa pergunta, temos aí uma ótima oportunidade para fazer que os alunos se deem conta de que nem todas as grandezas envolvidas em certo fenômeno se relacionam proporcionalmente (GIOVANNI JR., 2018, p. 93).

No livro do 5º ano, na unidade 4, “Multiplicação e divisão com números naturais”, no tópico “Situações de multiplicação”, o autor inicia a parte do curso a partir de três situações em que a multiplicação pode ser usada. Na terceira situação, é explorada a ideia de proporcionalidade. O problema, dentro do contexto de uma receita, espera que o estudante encontre a quantidade aumentada em quinze vezes do valor inicial.

Figura 54 – Tipo de tarefa T_{28} – Resolver problemas – nx ou x/n – LD – 5º ano EF



3ª situação: Frederico é confeiteiro. Para fazer uma receita de doce, ele usa, entre outros ingredientes, 180 g de açúcar. Quantos gramas de açúcar serão necessários para Frederico fazer os doces de uma encomenda que corresponde a 15 receitas?

Observe como ele calculou a quantidade de açúcar que seria necessária para fazer os doces dessa encomenda.

Quantidade de receitas	1 receita	5 receitas	10 receitas	15 receitas
Quantidade de açúcar	180 g	900 g	1 800 g	2 700 g

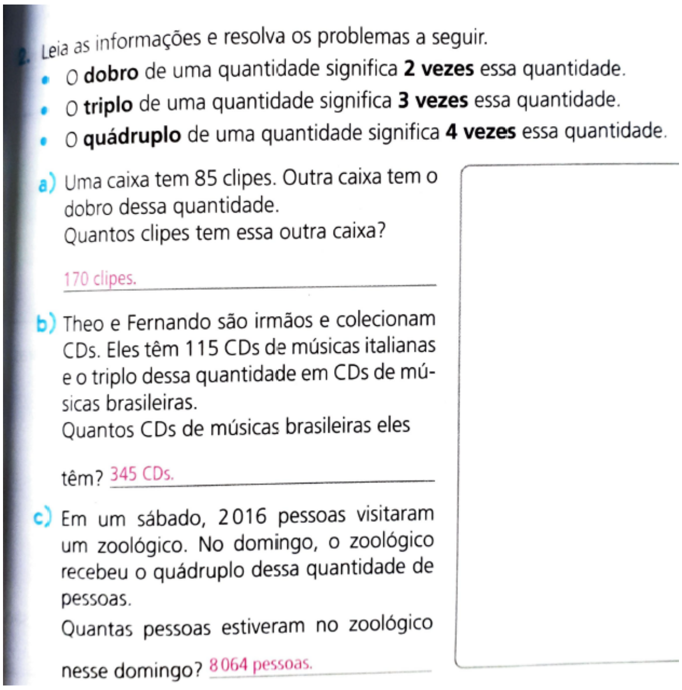
Portanto, serão necessários 2 700 g de açúcar para Frederico fazer os doces da encomenda.

Fonte: Giovanni Jr. (2018, p. 82).

A técnica indicada no livro do aluno pelo autor utiliza um quadro para ilustrar sua intencionalidade e vai aumentando o valor inicial proporcionalmente em intervalos fixos, ou seja, se uma receita usa 180g, cinco receitas usarão (5 x 180g = 900g), 10 receitas usarão (2 x 5 x 180g = 1800g) e 15 receitas usarão (3 x 5 x 180g = 2700g). Logo, a técnica evidencia o modelo de variação proporcional direta *se nx então ny*.

Na parte das atividades, na mesma unidade do livro do 5º ano, encontramos apenas uma tarefa que coaduna com a indicação da multiplicação como ideia de proporcionalidade.

Figura 52 – Tipo de tarefa T_{28} – Resolver problemas – nx ou x/n – LD – 5º ano EF



2. Leia as informações e resolva os problemas a seguir.

- O **dobro** de uma quantidade significa **2 vezes** essa quantidade.
- O **triplo** de uma quantidade significa **3 vezes** essa quantidade.
- O **quádruplo** de uma quantidade significa **4 vezes** essa quantidade.

a) Uma caixa tem 85 clipes. Outra caixa tem o dobro dessa quantidade.
Quantos clipes tem essa outra caixa?
170 clipes.

b) Theo e Fernando são irmãos e colecionam CDs. Eles têm 115 CDs de músicas italianas e o triplo dessa quantidade em CDs de músicas brasileiras.
Quantos CDs de músicas brasileiras eles têm? 345 CDs.

c) Em um sábado, 2016 pessoas visitaram um zoológico. No domingo, o zoológico recebeu o quádruplo dessa quantidade de pessoas.
Quantas pessoas estiveram no zoológico nesse domingo? 8064 pessoas.

Fonte: Giovanni Jr. (2018, p. 85).

Do ponto de vista da técnica, entendemos que, a partir do que está posto no enunciado da questão, é esperado que o aluno faça uso do fator de proporcionalidade, partindo do modelo de variação proporcional direta *se nx então ny,* isto é, se 1 caixa tem 85 clipes, então 2 (2x1) caixas terá 170 (2x85) clipes, questão a; se 1 coleção tem 115 CDs, então 3 coleções terão 345 (3x115) CDs, questão b; se visitam uma quantidade de 2016 pessoas no sábado, então no domingo visitaram o zoológico 8064 (4x2016) pessoas, questão c.

Na unidade 6, no tópico "Falando de... cidadania", no livro do aluno no 5º ano, encontramos duas atividades que remetem à ideia de proporcionalidade, embora essa correspondência não seja destacada pelo autor no livro do aluno e no manual do professor.

2. Dos 2 000 kg de lixo produzidos por dia nessa cidade, $\frac{1}{5}$ é constituído de latas e alumínio e garrafas PET e poderia ser reaproveitado imediatamente, pois há uma empresa interessada em comprar esse material para reciclar. Considerando que 1000 kg correspondem a 1t e 1 mês comercial corresponde a 30 dias, quantas

toneladas de lixo por mês:
a) podem ser imediatamente reaproveitadas? 12 t
b) não podem ser imediatamente reaproveitadas? 48t
3. Do lixo a ser reaproveitado imediatamente (latas de alumínio e garrafas PET), a quarta parte corresponde às gar-rafas PET. Por mês, quantas toneladas representam:
as garrafas PET? 3t
as latas de alumínio? 9 t
Fonte: Giovanni Jr. (2018, p. 177).

A intenção do autor com essa atividade é permitir que os estudantes possam "[...] mobilizar e aplicar os conhecimentos sobre frações e operações com frações construídos durante os estudos realizados ao longo a unidade" (GIOVANNI JR., 2018, p. 176). No entanto, entendemos que o estudo de comparação razões entre grandezas também é mobilizado, ou seja, o raciocínio proporcional.

Do ponto de vista dos tipos de tarefas e das técnicas caracterizadas na análise da instituição Livros Didáticos para os anos iniciais do Ensino Fundamental, organizamos o quadro a seguir para ilustrar melhor nossa síntese. As técnicas apresentadas neste momento revelam o modelo epistemológico e dominante caracterizado na instituição Livro Didático de matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Quadro 30 – Tipo de tarefa T e técnica τ – livro didático

Saber	1º ano		2ºano		3º ano		4º ano		5º ano	
Tipo de tarefa/técnica	T	τ	T	τ	T	τ	T	τ	T	τ
Geometria: Ampliação e redução									T_{40}	τ_1; τ_2
Número: Divisão – ideia de proporcionalidade					T_{13}	τ_1				
Número: Multiplicação – ideia de proporcionalidade					T_6	τ_1	T_1	τ_1	T_{12}; T_{14}; T_{29}	τ_1
Número: Multiplicação/divisão: dobro metade			T_{28}	τ_1						
Número: Multiplicação/divisão: triplo					T_{13}	τ_1				
Grandezas: Números e medidas									T_{14}	τ_2

Tipos de tarefa
T_{12}: Calcular a variação entre grandezas **de um para muitos.**
T_{13}: Calcular a variação entre grandezas na busca do **valor unitário.**
T_{14}: Calcular a **distância** entre pontos.
T_{40}: Comparar figuras e aplicar propriedades.
T_{28}: Resolver problemas envolvendo dobro ou metade.
T_{29}: Resolver problemas envolvendo triplo ou terça parte; 4x ou x/4; nx ou x/n.
Técnica fundamentada no MERP e no MIDP.
t_1: Variação entre grandezas proporcionalmente direta (se x então y; se nx então ny, para todo n $\in$ N).
t_2: Se multiplicar as distâncias pelo fator constante r, e se tem a relação biunívoca *f: F →F', então tem-se semelhança de razão r*, entre *F* e *F'*. Se *x'* = f(x), os pontos *x, y são proporcionais.*
Fonte: Elaborado pela autora.

O tipo de tarefa T_{29} – Resolver problemas de porcentagens foi a categoria com maior presença na instituição LD. Ainda que só tenha início no livro do 5º ano, porcentagem pode ser encontrada em duas unidades, 6 e 9, e tem vida abundante tanto na parte do curso como na parte das atividades, porém a exploração das técnicas poderia ser modelada, tornando-se praxeologias vinculadas à construção conceito de proporcionalidade e à construção do raciocínio proporcional.

Na unidade 6, "Números expressos na forma de fração", no tópico "Frações e porcentagens", o autor não explora o estudo da porcentagem a partir do cálculo do fator de proporcionalidade. Na parte do curso, é dito que, "[...] além de usar frações, podemos representar os resultados dessa pesquisa usando porcentagem. [...] Portanto, $\frac{1}{4}$ ou 25% das pessoas foram desfavoráveis ao perfume do produto de limpeza e $\frac{3}{4}$, ou 75% foram favoráveis" (GIOVANNI JR., 2018, p. 16). O autor enfatiza os resultados por meio das representações de fração e de porcentagem. No tópico "Fazendo cálculo de porcentagens", na parte do curso, o autor desenvolve duas situações, ambas fazendo uso da técnica da fração irredutível para o cálculo porcentagem. Na parte das atividades, são apresentadas ao todo dez questões de porcentagem em que se solicita ao aluno a escrita na forma de fração, por extenso, na forma de fração irredutível, na reta numérica; e a resolução de problemas de cálculo do valor correspondente a determinado percentual do todo.

Tabela 1 – Tarefas de porcentagens – LD – 5° ano

Tarefa de porcentagem	Nº	Técnica	Nº
Escrever na forma de fração	01	25% = 25/100	01
Escrever por extenso	01	Uso da linguagem materna	01
Escrever a fração irredutível correspondente	01	Simplificação de fração	01
Escrever na reta numérica a fração expressa na figura	01	Frações maior; e menor que 50/100	01
Resolver problemas	01	Valor de percentual do todo	06

Fonte: Elaborada pela autora.

Decidimos apresentar alguns exemplos das tarefas encontradas na unidade 6. Verificamos um problema em um contexto de compra e vendas, para o qual se solicita que o aluno realize o cálculo de descontos promocionais.

Figura 56 – Tipo de tarefa T_{29} – Porcentagem – desconto

2. Uma loja de artigos masculinos está fazendo uma grande liquidação de seu estoque de inverno.

a) Se o preço de uma camisa for 80 reais, quanto essa camisa custará na liquidação?

Essa camisa custará ___48___ reais na liquidação.

b) Se o preço de um modelo de calças for 200 reais, quanto ele custará nessa liquidação?

Esse modelo de calças custará ___120___ reais nessa liquidação.

Fonte: Giovanni Jr. (2018, p. 170).

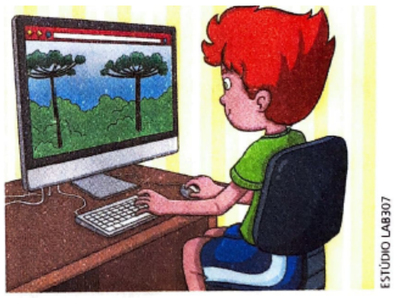
Examinando o manual do professor, constatamos que o autor intenciona que os alunos trabalhem decompondo e recompondo os percentuais para encontrar o cálculo solicitado.

> Na **atividade 2**, 40% podem ser calculados como 4 X 10%, bastando para isso calcular 10% de 80 e multiplicar o resultado por 4. Observe que os alunos podem fazer esses cálculos mentalmente, pois, para calcular 40% de 80, basta dividir 80 por 10 e multiplicar o resultado por 4 (8 x 4 = 32). O mesmo ocorre no cálculo de 40º/o de 200: dividindo 200 por 10 obtemos 20, que multiplicado por 4 resulta em 80 (GIOVANNI JR., 2018, p. 170).

Outra atividade da lista de problemas conecta porcentagem com o tema meio ambiente, no contexto de biomas brasileiros solicitando ao estudante que seja calculado o valor do percentual correspondente à parte de um todo similar a 48%.

Figura 57 – Tipo de tarefa T_{29} – Porcentagem – valor de percentual de parte do todo

4. Em uma escola, 500 alunos participarão de uma exposição sobre ambientes florestais do Brasil e poderão escolher, para a pesquisa, a Mata Atlântica, a Floresta de Araucárias ou a Floresta Amazônica. Se 48% dos alunos escolherem a Floresta Amazônica, quantos alunos pesquisarão esse ambiente? 240 alunos.



Fonte: Giovanni Jr. (2018, p. 171).

Nas orientações didáticas, verificamos recomendações ao professor para perguntar aos estudantes “[...] se o resultado deve ser maior ou menor do que a metade de 500. É esperado que eles percebam que 48% é menor que a metade e, portanto, concluam que devem obter como resposta um número menor que 250, mas bem próximo dele" (GIOVANNI JR., 2018, p. 171). Percebemos a intenção do trabalho do cálculo por estimativas.

Ainda na unidade 6, há mais uma atividade cuja expectativa é para que os alunos calculem o percentual correspondente à parte do todo em um contexto de jogo de futebol.

Figura 58 – Tipo de tarefa T_{29} – Porcentagem – contexto esportivo

5. Em um torneio de futebol, cada equipe disputa um total de 120 pontos. Quantos pontos acumulou, no fim desse torneio, uma equipe que teve um aproveitamento de 75%? 90 pontos.

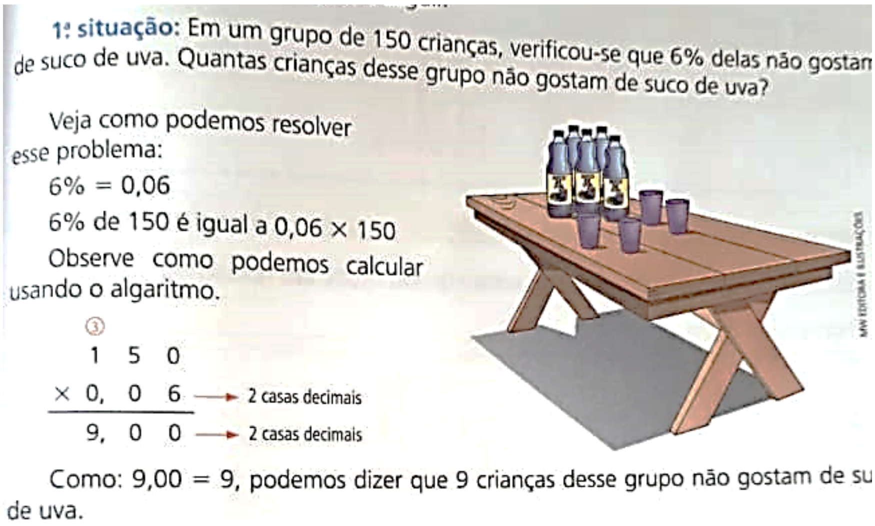
Fonte: Giovanni Jr. (2018, p. 171).

Observamos no manual do professor que o autor explica que o cálculo de 75% pode ser analisado de formas variadas. "Podemos pensar em 75% como 50% + 25%. Mas também que 25% = 50% : 2. Ou seja, para obter 75% de 120, calculamos: 50% de 120 fazendo 120 : 2 = 60; 25% de 120 fazendo 60 : 2 = 30. Assim, 75% de 120 é igual a 90" (GIOVANNI JR., 2018, p. 171). Continuando, o autor destaca que "[...] outra estratégia para efetuar esse cálculo é calcular diretamente 25% de 120, dividindo 120 por 4 e multiplicando o resultado por 3 (120 : 4 x 3 = 90)" (GIOVANNI JR., 2018, p. 171).

Constatamos, ao longo desta unidade, que a técnica de resolução que faz uso do fator de proporcionalidade não é mencionada no livro do aluno e no manual do professor. A tecnologia direciona para a teoria da multiplicação e divisão de números racionais.

Na unidade 9, "Operação com números na forma decimal", o tema porcentagem é retomado no tópico, "Os números decimais e a porcentagem". O tópico 2 direciona-se ao trabalho da multiplicação com números decimais. Nele, há um tópico secundário, "Os números decimais e a porcentagem", no qual a parte do curso é introduzida com a apresentação de duas situações. Na primeira situação, identificamos implicitamente a ideia de proporcionalidade.

Figura 59 – Tipo de tarefa T_{29} – Porcentagem – fator de proporcionalidade



1ª situação: Em um grupo de 150 crianças, verificou-se que 6% delas não gostam de suco de uva. Quantas crianças desse grupo não gostam de suco de uva?

Veja como podemos resolver esse problema:

6% = 0,06

6% de 150 é igual a 0,06 × 150

Observe como podemos calcular usando o algaritmo.

$$\begin{array}{r} \scriptstyle 3 \\ 1\ 5\ 0 \\ \times\ 0,\ 0\ 6 \\ \hline 9,\ 0\ 0 \end{array}$$

2 casas decimais

2 casas decimais

Como: 9,00 = 9, podemos dizer que 9 crianças desse grupo não gostam de suco de uva.

Fonte: Giovanni Jr. (2018, p. 237).

No problema, verificamos que a técnica já se apresenta favorável ao uso do fator de proporcionalidade, mas não há desenvolvimento nesse sentido. Na unidade 7, o livro aborda os números decimais. Em seguida, trabalhou geometria, abordando a ampliação e redução na unidade 8.

> Proponha uma atividade para que retomem o cálculo de porcentagem usando frações, que já foi estudado, e aproveite essa mesma atividade para mostrar como fazemos o cálculo quando a porcentagem está na forma decimal. Ao final, mostre que o valor encontrado é o mesmo. Isso significa que eles podem resolver porcentagens da maneira que preferirem.
> Esclarecidos esses pontos, trabalhe com as situações apresentadas nesta página. Se julgar pertinente, explore as equivalências entre as ordens do Sistema de Numeração Decimal no cálculo da porcentagem com o número na forma de-cimal. A vantagem desse processo é que efetuamos multiplicações com números naturais. Por exemplo, para calcular 6% de 150, escrevemos 0,06, ou seja, 6 centésimos. Efetuamos a multiplicação de 6 centésimos por 150 e vamos obter 900 centésimos. Como 100 centésimos equivalem a 1 inteiro, 6% de 150 é igual a 9 (GIOVANNI JR., 2018, p. 237).

Entendemos que, nesse ponto das orientações, o autor poderia sugerir ao menos para o professor que, nesse momento, a ideia de proporcionalidade está sendo trabalhada, pois 0,06 nada mais é que o fator de proporcionalidade decorrente da divisão de 6/100, que, ao ser multiplicado por 150, resulta na resposta solicitada. Esse encaminhamento da técnica favorece a modelagem de praxeologias para a construção do raciocínio proporcional.

Na parte das atividades, são propostas 10 tarefas. A primeira solicita a escrita do valor percentual correspondente à porcentagem e as nove demais são problemas de porcentagem, do tipo de tarefa T_{42} – Qual o valor *da parte* percentual do todo.

Figura 60 – Tipo de tarefa T_{29} – Porcentagem – fator de proporcionalidade

2. Em um *show*, compareceram 3 500 pessoas. Sabe-se que 54% dessas pessoas têm menos de 21 anos. Quantas pessoas com menos de 21 anos estiveram presentes nesse *show*? 54% = 0,54

$$\begin{array}{r} 3\,5\,0\,0 \\ \times \quad 0{,}5\,4 \\ \hline 1\,4\,0\,0\,0 \\ +\,1\,7\,5\,0\,0\,0 \\ \hline 1\,8\,9\,0{,}0\,0 \end{array}$$

Estiveram presentes nesse *show* 1 890 pessoas com menos de 21 anos.

3. Em um clube, há 18 000 sócios. Desse número, 35% são homens. Quantos sócios homens há nesse clube? 35% = 0,35

$$\begin{array}{r} 1\,8\,0\,0\,0 \\ \times \quad 0{,}3\,5 \\ \hline 9\,0\,0\,0\,0 \\ +\,5\,4\,0\,0\,0\,0 \\ \hline 6\,3\,0\,0{,}0\,0 \end{array}$$

Nesse clube, há 6 300 sócios homens.

4. O preço de um brinquedo é 840 reais. Para pagamento à vista, há um desconto de 5%. Qual é o valor do desconto e qual é o preço à vista? 5% = 0,05

$$\begin{array}{r} 8\,4\,0 \\ \times \; 0{,}0\,5 \\ \hline 4\,2{,}0\,0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8\,4\,0 \\ -\;\;4\,2 \\ \hline 7\,9\,8 \end{array}$$

5. Um número decimal **A** expressa 50% do número natural 91. Qual é o número **A**? 45,5

6. Em uma cidade com 16 500 habitantes, 4% deles têm mais de 70 anos. Quantos habitantes dessa cidade têm mais de 70 anos? 660 habitantes.

7. Em uma prova de Conhecimentos Gerais há 50 questões. Caio errou 6% do total. Quantas questões ele acertou? 47 questões.

8. Theo comprou 10 pacotes de figurinhas, com 8 figurinhas em cada pacote. Dessas figurinhas, 15% eram repetidas. Quantas figurinhas não eram repetidas? 68 figurinhas.

9. Em uma corrida de Fórmula 1, deram a largada 24 carros, porém 25% deles não terminaram a corrida. Quantos carros abandonaram essa corrida? 6 carros.

10. O preço de uma geladeira é 1 350 reais. Para pagamento à vista há um desconto de 8%. Qual é o valor do desconto? Quanto pagará quem comprar a geladeira à vista?
108 reais; 1 242 reais.

Fonte: Giovanni Jr. (2018, p. 238-239).

Tomando com norte os tipos de problemas apresentados por Post, Behr e Lehs (1995), a partir deles realizamos uma classificação para tipos de tarefas de porcentagem da lista de atividade.

Quadro 31 – Tipo de tarefa T29 – porcentagem – fator de proporcionalidade

Tipo	Tarefa	Técnica			
		Proporção Post, Behr e Lehs, 1995	Livro didático		Fator de proporcionalidade
$T_{29.1}$	Jessica fez 85 pontos num teste de 115 pontos. Qual a porcentagens de acertos?	(85/115 = x/100);	Não há tarefas deste tipo no livro	Não há tarefas deste tipo no livro	85/115 = 0,74 0,74 x 100 = 74
$T_{29.2}$	Se Jéssica acertou 74% de um teste de 115 questões, quantas questões acertou?	(74/100 = x/115);	50%+20%+4% 57,5+23+4,6 ≅ 85	74% = 0,74 0 85,74 x 115 ≅ 85	74/100 = 0,74 115 x 0,74 ≅ 85
$T_{29.3}$	Jessica acertou 85 questões de um teste, totalizando 74% de acertos. De quantas questões se compunha o teste?	(74/100 = 85x ou 85/74 – x/100).	Não há tarefas deste tipo no livro	Não há tarefas deste tipo no livro	74/100 = 0,74 85/0,74 ≅ 115

Fonte: Elaborado pela autora.

No primeiro tipo de tarefa $T_{29.1}$, entendemos que no problema se quer saber o valor do *percentual* de parte do todo. No segundo, classificado como tipo de tarefa $T_{29.2}$, pergunta-se qual o valor *da parte* percentual do todo. E o terceiro, tipo de tarefa $T_{29.3}$, interessa-se em identificar *o todo* percentual. A técnica proposta por Post, Behr e Lehs (1995) para a resolução de problemas de porcentagem se justifica na teoria das razões e proporções. As técnicas propostas pelo autor do livro didático se aproximam mais à propriedade da linearidade, embora expressa com objetos diferentes (razão, proporção/ combinação linear), assim como a técnica do fator de proporcionalidade.

Como constatamos na análise da literatura acadêmica, a porcentagem é vista como "[...] um tipo particular de taxa. Nesse caso o denominador do par-taxa é sempre 100" (POST; BEHR; LEHS, 1995, p. 92), que pode recorrer ao uso da técnica de regra de três com justificativa na teoria da razão e proporção. Verificamos também que, na transposição didática da porcentagem no saber a ser ensinado, geralmente "[...] são propostas duas técnicas para calcular uma porcentagem de uma quantidade: a 'regra dos três' e a 'redução à unidade'" (GARCIA, 2005, p. 295).

Notamos que, na análise dos referencias curriculares, tanto os PCNs quanto a BNCC desencorajam o uso da técnica da regra de três, nos anos iniciais, encaminhando a construção de possíveis técnicas a partir do repertório de conhecimento dos alunos. Observamos que, na instituição LD, existe o cuidado de introduzir e sistematizar o trabalho com porcentagens, valendo-se das frações equivalentes e irredutíveis, bem como com o trabalho dos números decimais em que a ideia de proporcionalidade pode vir a ser explorada. O uso de técnicas que permitem a modelagem de praxeologias vinculadas à construção conceito de proporcionalidade não é muito estimulado na análise dos livros didáticos.

5.3 A RELAÇÃO INSTITUCIONAL DO OBJETO DO SABER PROPORCIONALIDADE

A análise da literatura acadêmica e na instituição Currículo, revelou que é conferido à proporcionalidade o mérito de ajudar no desenvolvimento de estruturas cognitivas para a compreensão de saberes matemáticos de diversas comunidades ecológicas do ecossistema matemática.

Ao olhar a TAD, indagamo-nos sobre quais condições permitem, facilitam ou favorecem a existência das organizações matemáticas no ambiente institucional do livro didático dos anos iniciais do Ensino Fundamental e quais são as restrições que dificultam ou mesmo impedem a implementação dessas praxeologias.

No enfoque das condições de existência, bem como das restrições para a vida do saber proporcionalidade, seguimos com o resultado do que observamos na instituição Livros Didáticos do Ensino Fundamental, composta por cinco volumes, do 1º ao 5º ano.

5.3.1 Condições institucionais

Do ponto de vista das condições de existência da proporcionalidade apresentamos a seguir o que observamos na Instituição Livro Didático. As condições institucionais são aquelas que permitem, facilitam ou favorecem as praxeologias matemáticas e didáticas em torno do saber proporcionalidade. Nestes termos observamos que:

a) Introduz a ideia de proporcionalidade, nas orientações didáticas e nas atividades no livro do aluno a partir do 2º ano do Ensino Fundamental, partindo da ideia de dobro e metade. Essa condição converge com o que a literatura acadêmica aponta com relação ao estudo que favoreçam ao raciocínio proporcional desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, principalmente nos estudos de Levain (1993), Câmara e Oliveira (2000), Spinillo (2002), Tinoco, Portela, Silva e Maia (2011), até o que orienta os PCNs (BRASIL,1997) e determina a BNCC (BRASIL, 2018);
b) Associa a ideia de proporcionalidade a um dos significados da multiplicação; utiliza o objeto de saber como técnica para resolver problemas de repartição; emprega

como técnica para a resolução de problemas envolvendo as grandezas comprimento, massa e capacidade; proporcionalidade participa no estudo de ampliação e redução de figuras poligonais em malhas quadriculadas; e em tarefas de sobrepor figuras para o reconhecimento da congruência dos ângulos e da proporcionalidade dos lados correspondentes, convergindo com o que propõe a literatura acadêmica e os referenciais curriculares.

5.3.2 Restrições institucionais

Do ponto de vista das restrições institucionais verificamos o que a instituição Livro Didático aponta como situações que dificultam, entorpecem ou mesmo impedem a implementação satisfatória de praxeologias matemática e didáticas em torno do objeto de saber proporcionalidade. Observamos nas instituições que:

a) Pouquíssimas oportunidades de exercício para o aluno. Essas poucas atividades ligadas ao saber proporcionalidade não são retomadas ao longo da unidade ou nas demais. Quando há alguma retoma, não existe articulação com o objeto de saber anterior. A quantidade de atividades é mínima, para o trabalho do saber matemático, com a ideia de proporcionalidade ao longo dos cinco anos iniciais do Ensino Fundamental;
b) a coleção de LD para os anos iniciais apresenta atividades pontuais, nas orientações didáticas, a serem desenvolvidas pelos professores durante o ensino, mas não traz proposições no livro didático do aluno.

De acordo com os PCNs, nos anos iniciais podem ser realizados “[...] cálculos envolvendo proporcionalidade” (BRASIL, 1997, p. 53); “[...] trabalho com escalas em mapas (a escala é de 1 cm para 100 m)”; e “[...] exploração da porcentagem (40 em cada 100 alunos da escola gostam de futebol)” (BRASIL,1997, p. 68), “[...] situações associadas à comparação entre razões, que, portanto, envolvem a ideia de proporcionalidade” (BRASIL,1997, p. 72).

No mesmo sentido, a BNCC aponta que a proporcionalidade deve estar presente “[...] no estudo das operações com os números naturais, da representação fracionária dos números racionais, de áreas, de funções, probabilidade etc.” (BRASIL, 2018, p. 268); com relação à comunidade de saberes dos números, proporcionalidade tem importância “no processo da construção da noção de número, os alunos precisam desenvolver, entre outras, as ideias de aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem, noções fundamentais da Matemática

(BRASIL, 2018, p. 268). No 4º ano, a BNCC determina que sejam trabalhados “[...] problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação e da divisão: adição de parcelas iguais, configuração retangular, proporcionalidade, repartição equitativa e medida” (BRASIL, 2018, p. 290). Na unidade temática álgebra, a base destaca a relevância do trabalho de problemas “[...] que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, alterar as quantidades de ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escala em mapas, entre outros” (BRASIL, 2018, p. 293), como também “[...] problemas envolvendo a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, tais como dividir uma quantidade em duas partes, de modo que uma seja o dobro da outra, com compreensão da ideia de razão entre as partes e delas com o todo” (BRASIL, 2018, p. 293). Em geometria, o documento exige que se desenvolva um trabalho com “[...] ampliação e redução de figuras poligonais em malhas quadriculadas” favorecendo ao “[...] reconhecimento da congruência dos ângulos e da proporcionalidade dos lados correspondentes (BRASIL, 2018, p. 293).

Analisamos como restrição a existência de vida e possível desequilíbrio ecológico na comunidade praxeológica da proporcionalidade o fato de a coleção analisada apresentar um total, que consideramos reduzido, de quinze atividades envolvendo proporcionalidade explicitamente, que deverão ser trabalhadas ao longo dos cinco anos iniciais do Ensino Fundamental, como dispomos na tabela a seguir.

Tabela 2 – Número de atividade por ano – livro didático

Comunidade de saberes	Saber	1º ano	2º ano	3º ano	4º ano	5º ano
Geometria	Ampliação e redução	0	0	0	0	3
Números	Divisão – ideia de proporcionalidade	0	0	1	0	1*
	Multiplicação – ideia de proporcionalidade	0	0	1	1*1#	4
Números /Álgebra	Multiplicação/divisão: dobro/metade	0	2	0	0	0
	Multiplicação/divisão: triplo	0	1	0	0	0
	Porcentagem	0	0	0	0	16
Grandezas	Números e medidas	0	0	0	0	2

* orientação na parte do curso
# orientação no manual do professor
Fonte: Elaborada pela autora.

No volume do 1º ano, não há referência à proporcionalidade no livro do aluno e nas orientações didáticas. No 2º ano, há três atividades com a ideia de proporcionalidade no trabalho da multiplicação (dobro e triplo) e da divisão (metade). No 3º ano, o aluno pode desenvolver uma atividade de divisão e outra de multiplicação com a ideia de proporcionalidade. No 4º ano, na parte do curso, há uma situação explicativa, e, na parte das atividades, tem apenas uma tarefa para o trabalho da multiplicação envolvendo a ideia de proporcionalidade. Tanto os PCNs quanto a BNCC indicam o início do estudo a partir desse ano. No LD do 5º ano apresenta mais atividades que a soma das atividades propostas nos quatro anos anteriores destina-se ao trabalho de ampliação e redução (três), multiplicação com a ideia de proporcionalidade (quatro), cálculo de distância (duas) e uma situação explicativa, em problema de divisão em partes proporcionais. Incluímos também dezesseis atividades de porcentagem, que implicitamente se ligam à proporcionalidade, mas, dessas, só em nove inferimos a possibilidade do uso do fator de proporcionalidade. A coleção não correlaciona proporcionalidade e porcentagem.

Por ser a coleção analisada muito adotada por parte de professores e escolas, tanto de redes públicas como de rede privadas, novos estudos poderiam ser realizados, investigando o saber preparado e o saber aprendido, com a finalidade de identificar possíveis desequilíbrios ecológicos na didática do saber proporcionalidade, visto que a análise da literatura acadêmica e dos referenciais apontou que o professor tem pouca familiaridade com esse objeto de saber, bem como tem dúvidas em relação a ‘quando’ e ‘como’ deveriam ensinar.

No próximo tópico, tratamos das inter-relações do objeto de saber proporcionalidade com outros objetos de saber do ecossistema matemática do Ensino Fundamental. E nos questionamos: de onde vem a proporcionalidade para tornar-se objeto de saber nas instituições Livros Didáticos do Ensino Fundamental? Em quais comunidades de saberess do ecossistema matemática, o saber proporcionalidade habita? Qual(is) o(s) seu(s) nicho(s) ecológico(s)? Quais são suas relações ecológicas? Passamos, agora, ao penúltimo crivo do filtro da proporcionalidade.

5.4 INTER-RELAÇÕES ENTRE PROPORCIONALIDADE E OUTROS OBJETOS MATEMÁTICOS: *HABITAT*, NICHOS E OUTRAS RELAÇÕES ECOLÓGICAS

Do ponto de vista da ecologia didática do saber proporcionalidade, observamos que a literatura acadêmica revela esse objeto habitando na comunidade de saberes da álgebra, da aritmética, das grandezas, da geometria e da estatística, entre outras; estabelece teias alimentares com diversos saberes, estabelecidas por relações de protocooperação; desenvolve a relação de parasitismo em decorrência de um processo de ensino focado em técnicas. O enfoque dado pelos PCNs e pela BNCC convergem com a literatura acadêmica quanto ao *habitat* da proporcionalidade, bem como quanto às associações do saber nas relações tróficas e de protocooperação; quanto à relação de parasitismos os documentos, seguem direção oposta, divergindo do que foi apontado pela literatura acadêmica, orientação para um processo de transposição que oportunize as estratégias pessoais dos alunos principalmente nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Neste ponto do nosso estudo, o crivo foi em saber quais as escolhas realizadas para o saber proporcionalidade pela instituição Livros Didáticos de Matemática, dos anos iniciais do ensino de fundamental. Pretendemos organizar nossa análise situando a ecologia didática observando as relações institucionais estabelecidas nas comunidades de saberes – *habitat* da proporcionalidade e nas diferentes populações de saberes em que desempenha sua função nas relações de convivência com outros saberes no ecossistema Matemática.

Figura 63 – Ecologia didática do saber

Fonte: Elaborada pela autora.

Preocupamo-nos principalmente com as ligações tróficas determinadas pela relação institucional (função do objeto nas cadeias e teias alimentares captura de alimento ou de servir de alimento), de protocooperação e de parasitismo.

Na instituição Livro Didático do 2º ano do Ensino Fundamental, verificamos ecologia didática da proporcionalidade habitando nas comunidades de saberes da aritmética e das grandezas, estabelecendo teia alimentar entre os saberes multiplicação, divisão e tempo. Só há quatro momentos de interação ao longo de todo o livro, em atividades a serem realizadas pelos alunos no estudo do dobro, triplo e metade. Embora o saber não esteja explícito nas orientações para o professor e nas atividades do aluno, ele se torna perceptível pelos contextos de receita e dados organizados em quadro. A relação entre número e a grandezas tempo percebe-se implicitamente nas orientações didáticas para a realização em sala de uma linha do tempo.

Nas relações institucionais no Livro Didático do 3º ano, identificamos no livro didático a ideia de proporcionalidade habitando a comunidade de saberes da aritmética, na relação harmônica da Protocooperação com a divisão, em um contexto de dados organizados em quadro.

A ecologia observada na instituição Livro Didático do 4º ano localiza proporcionalidade, coabitando nas comunidades da aritmética e das grandezas. As funções são desempenhadas nas associações com a multiplicação e as grandezas massa e capacidade em contexto de receita. Há só um episódio de ligação ecológica ao longo de todo o ano.

Percebemos uma maior atuação da ecologia da proporcionalidade, na instituição Livro Didático do 5º ano, em que habitam as comunidades de saberes da álgebra, da aritmética, da geometria e das grandezas. As relações estabelecidas, ocorrem entre operações nos conjuntos dos números naturais e racional – números decimais, mais especificamente no âmbito da multiplicação e da divisão – partilham e em associação com as medidas de comprimento; ampliação e redução de figuras, com o estabelecimento de congruência entre os ângulos e proporcionalidades dos lados; e porcentagem.

A relação institucional do livro com o saber proporcionalidade estabelecida pelas ligações tróficas caracteriza-se com proporcionalidade, atuando sempre como alimento para o estudo de outro saber cuja ênfase se situa na multiplicação e divisão. Identificamos como protocooperação essa relação ecológica colocada, uma vez que, mesmo havendo troca de benefícios, não requerem a presença permanente uma da outra. Mesmo a coleção iniciando o estudo de situações envolvendo a ideia de proporcionalidade no 2º ano, entendemos que, em razão da escassez de momentos de estudo envolvendo tal ideia, ao longo dos cinco primeiros anos do Ensino Fundamental, provoca um desequilíbrio na ecologia didática do saber proporcionalidade.

5.5 IMPORTÂNCIA DA PROPORCIONALIDADE NO ENSINO FUNDAMENTAL

Em nosso estudo da instituição Livro Didático do Ensino Fundamental, investigamos a coleção de livros didáticos *A Conquista da Matemática*, composta por cinco volumes, destinada aos anos iniciais desta etapa de escolaridade.

Constatamos que, em algum momento, o objeto de saber proporcionalidade tem sua importância reconhecida, uma vez que a instituição permite que a vida desse saber seja iniciada anos antes do que prescreve o currículo. Percebemos que a instituição cumpre uma determinação delegada pela instituição Currículo do Ensino Fundamental e vai encaixando o saber em algumas unidades sem oferecer condições adequadas para sua existência. Observa que há alguma relutância em como, onde e quando trazer o saber em sua ecologia. Como já foi apontado na literatura acadêmica.

A ecologia do saber tem início no livro do 2º ano na unidade 8, mas ele é esquecido na unidade 9, última unidade de estudo do ano. No 3º ano, volta a ter reconhecimento, mas só na unidade 8, em uma atividade relacionada à divisão e ao contexto de dados dispostos em quadro, e não é retomado na última unidade. No 4º ano, proporcionalidade dá sinais que tem de fato sua importância reconhecida, quando a instituição traz o saber como uma das ideias da multiplicação em um problema explicativo na parte do curso, mas só é apresentado e apenas um tipo de tarefa de multiplicação o requisita. No 5º ano, a instituição retoma a ecologia da proporcionalidade, promovendo a ligação de protocooperação com as estruturas multiplicativas e com o estudo de semelhança de figuras em problemas envolvendo a variação proporcional direta de grandezas. Na unidade 4, “Relações matemáticas multiplicativas”, na unidade 5 associando o saber a medidas de comprimento, na unidade 6, ligando-se a frações e porcentagens[98], na unidade 8, “Ampliação e redução”, e na unidade 9, em conexão com a grandeza massa.

Iniciamos este capítulo nos perguntando como vive o saber proporcionalidade no âmbito do saber a ser ensinado, na instituição Livro Didático de Matemática, do Ensino Fundamental? Observamos que proporcionalidade na instituição Livro Didático tem seu nascimento previsto no 2º ano, mas não são dadas as condições favoráveis para sua existência ao longo desse ano. Para o 3º e o 4º ano, a instituição alimenta um pouco o saber, mas, na realidade, ele é chamado para servir de alimento como uma das ideias da multiplicação e o trabalho da divisão. No 5º ano, a instituição permite que o desenvolvimento da proporcionalidade ocorra, mas as condições para sua existência não são as melhores. O lugar

[98] Na unidade 6, o livro didático inicia o estudo de porcentagem. Não há citação explícita à proporcionalidade no livro do aluno e nas orientações didáticas. Admitimos a associação da ideia de proporcionalidade pela possibilidade do uso da técnica aplicada para a resolução de tipos de tarefas envolvendo tal ideia da multiplicação.

da proporcionalidade nessa instituição é principalmente de constituir teia alimentar com as relações matemáticas multiplicativas e nas relações de semelhança de figuras. Nessas associações, observa-se principalmente a protocooperação.

No capítulo seguinte, realizamos estudo comparativo entre as análises das diferentes instituições ISM, ISEM, ISPCEM, Currículo e LDs em uma perspectiva antropológica, buscando situar o estudo da proporcionalidade nessas instituições.

6 ANÁLISE COMPARATIVA DAS ANÁLISES ANTERIORES

Neste capítulo, apresentamos a análise comparativa dos estudos realizados na literatura acadêmica e nas instituições currículo e livro didático. Organizamos nossos resultados levando em consideração pontos convergentes ou divergentes que se relacionam à razão de ser, às organizações matemáticas, à relação institucional, às inter-relações e à importância dada ao saber proporcionalidade nos textos acadêmicos, nos referenciais curriculares e nos livros didáticos.

Do ponto de vista da razão de ser, uma diferença principal identificada foi com relação ao MEEP e ao MIDP. Modelo epistemológico esboçado se refere ao que foi identificado durante a análise da literatura acadêmica nas instituições Saberes da Matemática (ISM), Saberes da Educação Matemática (ISEM) e Saberes da Psicologia Cognitiva da Educação Matemática (ISPCEM). Os saberes oriundos dessas instituições fazem parte do saber acadêmico, conforme a TAD, "saber sábio". O MIDP diz respeito ao saber a ser ensinado presente nas instituições currículo e livro didático. Esse saber já passou por um processo de transposição didática na noosfera.

Quadro 32 – Modelo epistemológico e modelo institucional

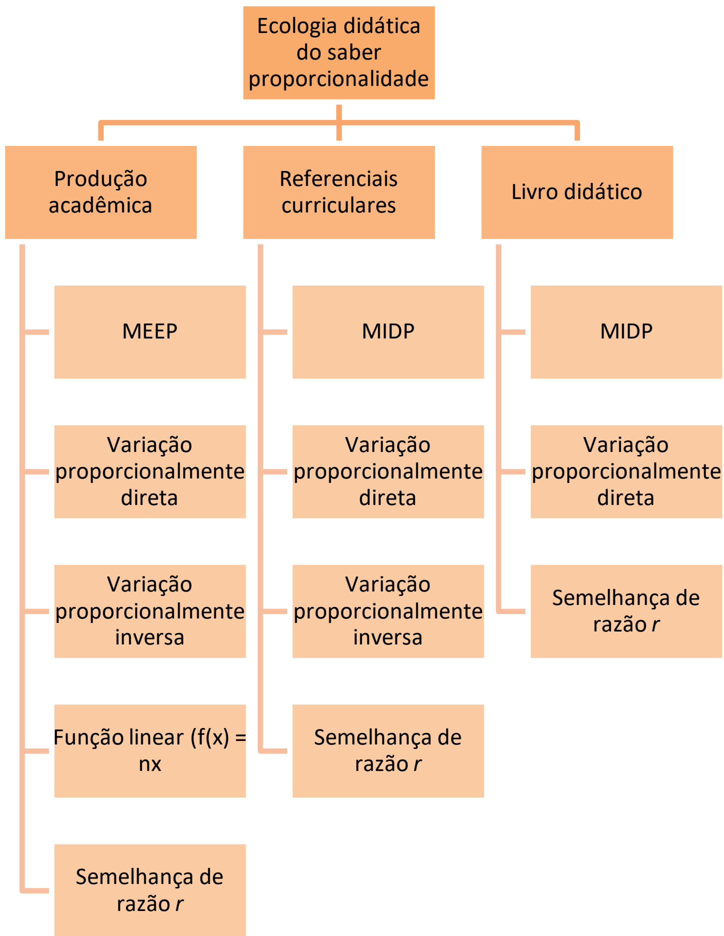
	INSTITUIÇÃO			
	SM, SEM e SPCEM	PCN	BNCC	LD
	MEEP	MIDP		
PROPORCIONALIDADE DIRETA Função Linear - (TFP) - função f: R → R definida por f (x) = ax, onde a ∈ R é uma constante				
PROPORCIONALIDADE INVERSA				
SEMELHANÇA				

PROPORCIONALIDADE DIRETA: se $y = kx$; (ÁVILA, 1986); $y = mx$ (POST, BEHR E LEHS,1995); $f(x) = ax$. (LIMA, 1997); $y = k \cdot x$ (GARCIA, 2005); $f(nx) = n \cdot f(x)$ (LIMA, 2010); se $x \to y$ então $nx \to ny$, para todo $n \in N$ (LIMA, 2010).
PROPORCIONALIDADE INVERSA: se $y = k/x$ (ÁVILA, 1986); $\mathbf{y = a/x}$, fator de proporcionalidade **a** é o valor de **y** que corresponde a $\mathbf{x = 1}$ (LIMA, 2010); $x \cdot y = k$, ou, $y = k / x = k \cdot x^{-1}$ (GARCIA, 2005).
SEMELHANÇA DE FIGURAS: ampliação ou redução de uma figura alterando seu tamanho sem modificar suas proporções (LIMA, 1991); $\sigma: F \to F'$, que é uma semelhança de razão 1 (LIMA, 1991).
Fonte: Elaborado pela autora.

A razão de ser epistemológica questiona o objeto do saber matemático de uma maneira mais global. O MEEP revelado pelo estudo da literatura acadêmica apresentou uma abrangência de escolaridade diferente do currículo e livro didático. As instituições presentes na literatura acadêmica forneceram elementos para a ecologia do saber proporcionalidade desde o momento do seu nascimento, desenvolvimento e estabelecimento de relações no Ensino Fundamental, Médio e Superior. Na realidade, obtivemos apenas um panorama dessa ecologia retratado nos 31 textos pesquisados. O MIDP caracterizado na instituição Currículo do Ensino Fundamental – PCN e BNCC – alimentou nossos dados com elementos da ecologia didática relativa aos nove anos do Ensino Fundamental. E o MIDP observado na instituição livro didático trata de elementos da ecologia didática do saber nos cinco anos iniciais do Ensino Fundamental.

A razão de ser epistemológica e a razão de ser institucional se revelaram diferentes devido à natureza de cada instituição estudada. É possível afirmar que a razão de ser da proporcionalidade anunciada pelo MEEP presente nos textos nutre a razão de ser de proporcionalidade nas instituições Currículo do Ensino Fundamental e Livro Didático determinada pelo MIDP. A figura a seguir ilustra a ecologia didática do objeto de saber proporcionalidade e a caracterização da razão de ser do saber revelada pelos modelos nas diferentes instituições.

Figura 64 – Ecologia didática – MEEP e MIDP



Fonte: Elaborada pela autora.

A ecologia didática da proporcionalidade, do ponto de vista das razões de ser, epistemológica e institucional, converge quanto ao *habitat* nas comunidades de saberes da álgebra e das grandezas na variação proporcional direta na ligação de protocooperação com outros saberes; e, na comunidade de saberes da geometria, a partir de praxeologias voltadas para a semelhança de figuras, desenvolvendo também a relação de protocooperação junto a outros saberes.

Do ponto de vistas das organizações matemáticas, a ecologia do objeto de saber proporcionalidade, nas instituições identificadas na literatura acadêmica, a ênfase incide no logos – no aspecto do saber, na instituição Currículo do Ensino Fundamental, a ênfase é distribuída tanto para o logos quanto para a práxis – saber fazer, contudo, na instituição Livro Didático, o destaque é dado para a práxis.

Quanto ao bloco do *logos*, na literatura acadêmica as instituições ISM, ISEM e ISPCEM situam o saber proporcionalidade nas comunidades de saberes: da álgebra – *função linear*, *função exponencial (proporcionalidade inversa) e função identidade*; da aritmética – *multiplicação e divisão*; e da geometria – *semelhança de figuras.* Na instituição Currículo, os PCNs localizam o objeto de saber junto nas comunidades de saberes: da aritmética/álgebra – *multiplicação, divisão, escala e porcentagem;* na geometria – *semelhança de figuras*; das grandezas/álgebra – *variação proporcionalmente direta/inversa.* E a BNCC conecta proporcionalidade às nas comunidades de saberes: na álgebra – *partição, variação proporcionalmente direta/inversa*; da aritmética – *multiplicação, divisão e porcentagem*; da geometria – *semelhança de figuras, relações métricas, teorema de Pitágoras e teorema das proporções*. A instituição Livros Didáticos dos anos iniciais do Ensino Fundamental relaciona a proporcionalidade com as comunidades de saberes: da aritmética – *multiplicação divisão e porcentagem;* da geometria – *semelhança de figuras;* das grandezas/álgebra – *variação proporcionalmente direta.* Quanto ao campo do saber – logos, a instituição livro didático converge com as demais.

Quanto ao bloco da práxis, observamos que tipos de tarefas dos gêneros comparar, calcular e resolver afluem entre as instituições. Do ponto de vista da caracterização das técnicas, observamos que o fator de proporcionalidade é um procedimento convergente em todas as instituições. Outras técnicas recorrentes nas instituições são τ_s – Técnica de semelhança de figuras e τ_u – Técnica de redução à unidade. As técnicas que se destacam em presença nas instituições vão em direção a dois MIDP filtrados na análise da instituição dos livros didáticos, variação entre grandezas proporcionalmente direta (se x então y; se nx então ny, para todo n ∈ N.) e semelhança de figuras (se multiplicar as distâncias pelo fator constante r. E se tem a relação biunívoca *f: F →F', então tem-se semelhança de razão r*, entre *F* e *F'*. Se *x'* = f(x), os pontos *x, y são proporcionais*). O quadro a seguir ilustra os demais gêneros, tipos de tarefas e técnicas reconhecidos nas instituições investigadas.

Quadro 33 – OM – instituições – práxis

PRÁXIS	GÊNERO	TIPO DE TAREFA: T	TÉCNICA: τ
Literatura Acadêmica ISM; ISEM e ISPCEM	Comparar	T_1, T_2, T_3,	τ_u, τ_{fp}
	Estimar	T_4	τ_u
	Calcular	T_5, T_6, T_7, T_8, T_9, T_{10}	τ_u, τ_{fe}, τ_{dp}, τ_{qp}
	Determinar	T_{15}, T_{16}, T_{17}	τ_s, τ_{pp}, τ_m
IPCN	Calcular	T_{14}	τ_d, τ_a, τ_c, τ_t
	Resolver	T_{18}, T_{19}, T_{20}, T_{21}, T_{22}, T_{23} ,T_{24}	τ_u, τ_{fp}, τ_{cr}, τ_{dp},
IBNCC	Resolver	T_{25}, T_{26}	τ_s, τ_{fp}, τ_{cr}, τ_{dp}, τ_{fe}, τ_{atp}
	Resolver e elaborar	T_{30}, T_{31}, T_{32}, T_{33}, T_{34}, T_{35}	τ_s, τ_{fp}, τ_{cr}, τ_{dp}, τ_{fe}, τ_{atp}
	Reconhecer	T_{36}	τ_s
	Analisar e descrever	T_{37}	τ_{cf}
	Demonstrar	T_{38}	τ_s, τ_{atp}
ILD	Calcular	T_{12}, T_{13}	τ_u, τ_{fp}, τ_s,
	Comparar	T_{39}	τ_{sar}, τ_{cf} ,
	Resolver	T_{27}, T_{28} ,T_{29}	τ_{fp}, τ_{dp},

τ_u: técnica de redução à unidade
τ_s: técnica de semelhança de figuras
τ_{sar}: técnica de semelhança – ampliação/redução de figuras
τ_d: técnica de decomposição
τ_a: técnica de arredondamento
τ_c: técnica de compensação
τ_t: técnica de transição
τ_{fp}: técnica de recorrer ao fator de proporcionalidade
τ_{dp}: técnica da divisão proporcional
τ_{qp}: técnica de quotização proporcional
τ_{fe}: técnica de fator escalar
τ_{pp}: técnica de comparação parte/parte
τ_m: técnica de comparação – construção da ideia de metade
τ_{cr}: técnica de comparação entre razões
τ_{atp}: técnica de aplicação do Teorema de Pitágoras
τ_{cf} : técnica de comparação de figuras por sobreposição

Fonte: Elaborado pela autora.

Na análise comparativa da relação institucional do objeto do saber proporcionalidade, procuramos investigar as condições que permitem, facilitam ou favorecem que certas atividades matemáticas e didáticas possam ser desenvolvidas no ecossistema da matemática do Ensino Fundamental e as restrições que dificultam, entorpecem ou mesmo impedem a implementação dessas atividades nas instituições.

Em uma perspectiva global, as instituições analisadas da literatura acadêmica e do currículo concordam que são condições de existência do saber, no ecossistema matemática do Ensino Fundamental, devido a vários aspectos da realidade obedecerem às regras de proporcionalidade; por atuar na formação de estruturas cognitivas para a compreensão de conceitos matemáticos; pelo motivo de os alunos conseguirem mobilizar estratégias próprias, mesmo sem a formalização do saber em sala de aula, na resolução de problemas; pelo fato de o raciocínio proporcional corresponder a um nível de maturidade matemática consolidando ideias elementares e desenvolvimento de pensamento matemático e científico mais avançado. Na instituição Currículos os PCN e a BNCC divergem das instituições ISM, ISEM e ISPCEM quanto a condição de existência “que a crianças de seis anos serem capazes de estabelecer relação parte-parte (razão)”, e orientam para que o estudo tenha início com estudantes do 4º ano (9 anos). A ILD introduz o conceito de proporcionalidade, nas orientações didáticas e nas atividades no livro do aluno, a partir do 2º ano do Ensino Fundamental, partindo da ideia de dobro e metade e convergindo com o que a literatura acadêmica aponta discordando da instituição currículo.

Do ponto de vista das restrições sofridas pelo saber, observamos que a má formação do professor, abordagem do livro didático e o processo de ensino do saber proporcionalidade, em que o saber é tratado como um novo assunto desvinculado de vários contextos matemático foram as principais restrições identificadas nas instituições estudadas da literatura acadêmica e são convergentes nas instituições investigadas na literatura acadêmica e no currículo. Quanto à abordagem do saber na Instituição LD, observamos que são restrições para vida da proporcionalidade as poucas oportunidades de estudo para o aluno. Além disso, não há conexão com outros objetos matemáticos na unidade e há retomada nas unidades seguintes.

Proporcionalidade é um saber que possui uma ecologia didática fecunda do ponto de das inter-relações que são estabelecidas entre outros objetos matemáticos e possui *habitat* em diferentes comunidades de saberes. Forma diferentes cadeias alimentares e desenvolve relações ecológicas de protocooperação e parasitismo.

Nas instituições presentes na literatura acadêmica e no currículo, proporcionalidade habita as comunidades de saberes da álgebra, da aritmética, da estatística, da geometria e das grandezas. Na instituição Livro Didático, a ecologia da proporcionalidade inicia morando nas comunidades de saberes da aritmética, da geometria e das grandezas.

Do ponto do nicho ecológico, em conformidade com a literatura acadêmica, proporcionalidade tem potencial para o desenvolvimento da relação harmônica de protocooperação com: equação (linear), função linear (proporcionalidade direta), função exponencial (proporcionalidade inversa) e homotetia (função identidade).

Em concordância com as instituições da literatura acadêmica e do currículo do Ensino Fundamental, a relação de protocooperação pode acontecer entre multiplicação; divisão; relação entre termos absolutos e relativos; grandezas proporcionalmente direta ou proporcionalmente inversa; semelhança figuras (ampliação, redução, teorema de Tales e escala); com escala (na construção, na interpretação e na leitura de gráficos estatísticos).

A instituição Livros Didáticos, por sua vez, apresenta a associação de protocooperação entre proporcionalidade, multiplicação e divisão (relação parte-parte, uma das ideias da multiplicação); semelhança (ampliação e redução); e variação proporcional direta.

Identificamos nas instituições da literatura acadêmica e do currículo a relação desarmônica de parasitismo quando proporcionalidade tem sua razão de ser anulada, ao ser substituído pelo estudo da técnica algotimizáveis, como a regra de três.

Quanto à importância do saber proporcionalidade para ser trabalhada no Ensino Fundamental, as instituições ISM, ISEM, ISPCEM, PCN e BNCC apontaram que o saber está presente em várias atividades da vida diária das pessoas; atua como um formador de estruturas cognitivas a aprendizagem de diversos saberes; e é tomado como uma das ideias matemáticas que pode permear todo o período de escolaridade. Constatamos que, na instituição Livro Didático dos anos iniciais, o saber tem muita importância e não são oferecidas condições adequadas para sua existência. A instituição cumpre apenas uma determinação delegada pela instituição Currículo do Ensino Fundamental.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa se incorpora na problemática ecológica da proporcionalidade no saber a ser ensinado, cujo principal objetivo foi investigar a ecologia do objeto de saber proporcionalidade sob a ótica da TAD (CHEVALLARD, 1999), em instituições presentes em textos acadêmicos, na instituição Currículo e na instituição LD dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Tomamos a TAD como método que nos permitiu evidenciar a ecologia didática do saber proporcionalidade ao caracterizar as organizações matemáticas, as relações institucionais e as razões de ser do saber existente no interior das instituições. Em nosso questionamento de pesquisa, procuramos saber como vive proporcionalidade no ecossistema matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Buscaram-se respostas por meio do filtro da proporcionalidade construído a partir de elementos da TAD e inspirado no "filtre des grandeurs" (CUELLAR, 2012).

O filtro da proporcionalidade nos ajudou na elucidação das nossas investigações a partir dos cinco crivos: C1 – as razões de ser da proporcionalidade no Ensino Fundamental; C2 – as organizações matemáticas propostas para proporcionalidade; C3 – a relação institucional do objeto de saber proporcionalidade; C4 – as inter-relações entre proporcionalidade e outros objetos matemáticos: habitat, nichos e outras relações ecológicas; e C5 – a importância do estudo da proporcionalidade no Ensino Fundamental. Para comprovar nossa H1, recorremos aos três primeiros crivos C1, C2 e C3. E, para checarmos nossa segunda H2, evocamos os dois últimos crivos, C4 e C5, em diálogo com os três primeiros. Os resultados obtidos das análises constantes dos capítulos 3, 4 e 5 foram aos poucos confirmando as nossas hipóteses.

As investigações sobre como vive proporcionalidade no ecossistema matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental partiram de duas hipóteses: H1: de acordo com as instituições identificadas na literatura acadêmica, as crianças a partir de seis já possuem estruturas cognitivas capazes de desenvolver o raciocínio proporcional mediados por tarefas de comparação parte-parte. Conforme a instituição Currículo – PCN e BNCC a ecologia didática da proporcionalidade aconteça a partir do quarto ano. A instituição livro didático acompanha o que propõe as instituições da Literatura acadêmica e a instituição currículo.

A literatura acadêmica aponta indícios para o desenvolvimento de condições de existência do saber a partir do 1º ano do Ensino Fundamental.

No capítulo 3, os achados na literatura acadêmica evidenciam que proporcionalidade passa a ter vida a partir dos anos iniciais, podendo ser introduzida nas salas de aula junto a crianças de seis anos, ou seja, a partir do 1º ano do Ensino Fundamental.

Ao analisarmos o currículo, no capítulo 4, constatamos que as relações ecológicas observadas nas instituições, tanto os PCNs (BRASIL, 1997) quanto a BNCC (BRASIL, 2018), estabelecem que proporcionalidade passe a ter vida no ecossistema matemática a partir do 4º ano do Ensino Fundamental.

No capítulo 5, consta a análise instituição livro didático, na qual nos surpreendemos ao verificar que a ecologia do saber proporcionalidade tem início a partir do 2º ano do Ensino Fundamental, mas a instituição não oferece as condições necessárias para o desenvolvimento da proporcionalidade ao longo do 2º, 3º e 4º 4º ano. Só no 5º ano, o saber consegue desenvolver teia alimentar e estabelecer algumas relações ecológicas.

Quanto à ecologia didática do nosso objeto nas instituições, investimos na segunda hipótese, H2: no saber a ser ensinado no ensino fundamental, nas instituições Currículo e Livro didático, proporcionalidade encontra condições necessárias para o desenvolvimento de sua existência a partir das relações ecológicas, principalmente da relação de protocooperação, desde o quarto ano do ensino fundamental.

De acordo com a ecologia, um ser nasce, desenvolve-se a partir das condições que passa a ter no ambiente, estabelece reações e morre. Esse ciclo também pode ser percebido por analogia na ecologia didática: um saber nasce, desenvolve-se a partir das condições que passa a ter no ambiente, estabelece reações e morre. Assim como acontece com os seres vivos, em que alguns podem viver por mais tempo que o outro, o mesmo fenômeno pode ser levado para a ecologia didática. O tempo de vida de um saber depende principalmente dos níveis superiores da escala de codeterminação, e sua vida tem início nos níveis inferiores da escala e é determinada pelas condições estabelecidas pela humanidade, por exemplo para permanecer em uso.

Entendendo que a BNCC é o currículo vigente, com o poder de determinar os objetos de conhecimentos mínimos que devem fazer parte do saber a ensinar no sistema educacional brasileiro, localizamos nesse documento duas expectativas de aprendizagem (EF04MA06 e EF04MA07), em que o saber proporcionalidade aparece de forma explícita na população de saberes de números, a primeira expectativa estabelecendo uma teia alimentar com a multiplicação como uma das ideias – de proporcionalidade, e a segunda desenvolvendo teia alimentar com a divisão.

O estudo na instituição currículo revelou que proporcionalidade tem importância para constar no documento do Ensino Fundamental nos anos iniciais; a instituição dispõe de sugestões para organizações matemáticas que deem condições para esse saber possa interagir com outros enquanto uma das ideias fundamentais da matemática, além de apontar possibilidades de relações entre diferentes comunidades de saberes. No entanto, sentimos falta de um esclarecimento maior do "quando" estudar o saber durante aquele ano, recaindo no que a análise da literatura acadêmica apontou com relação à formação deficitária dos professores, que, além de não terem familiaridade com proporcionalidade, não sabem quando aplicá-la (COSTA; ALLEVATO, 2012).

Na análise da instituição Livro Didático dos anos iniciais do Ensino Fundamental, nossa tese é respondida quando verificamos que nascimento do saber na instituição, embora precoce com relação ao currículo, não é acompanhado de condições devido à escassez de praxeologias que lhe garantam energia necessária para que se desenvolva adequadamente. A fragmentação das praxeologia nas unidades e nos anos posteriores compromete o desenvolvimento do raciocínio proporcional nos indivíduos, impedindo que exista uma evolução simétrica e contínua ao longo da sua vida escolar e que, posteriormente, venha a se transformar em saber que cresce junto como o desenvolvimento intelectual do indivíduo.

Há um desequilíbrio nas relações estabelecidas, na ecologia didática, em que proporcionalidade embora desenvolva a relação harmônica de protocooperação com diversas comunidades de saberes, possui vulnerabilidade quanto às organizações matemáticas deficitárias, favorecendo a relação desarmônica de parasitismo – seja pelo tempo pedagógico dedicado ao saber, seja pela fragilidade das relações estabelecidas.

Este estudo avança com relação a alguns elementos da ecologia didática, apresentando uma ampliação das relações ecológicas didáticas, por exemplo as associações de protocooperação e parasitismo e a explicação da escala dos níveis de codeterminação, dos níveis inferiores, trazendo a relação de elementos da ecologia como ecossistema, comunidade de saberes, população de saberes e organismos em analogia à ecologia didática de saberes como disciplina, domínios, setores e saberes, respectivamente (o estabelecimento de termos como comunidade de saberes e população de saberes, relacionando-as às organizações matemáticas regionais e locais, respectivamente, como explicação para elementos dos níveis inferiores da escala dos níveis de codeterminação).

Do ponto de vista das proposições, um encaminhamento seria de se reivindicar a antecipação do estudo da proporcionalidade para anos anteriores ao 4º, apontando praxeologias que permitam as condições satisfatórias para a existência da ecologia do saber, podendo ter no currículo enquanto uma das ideias fundamentais da matemática, um lugar de mais autoria para se desenvolver, criar novos laços e se reestabelecer no meio ambiente, não apenas como um alimento para a multiplicação, mas atuando como articulador nas várias comunidades de saberes que gravitassem em torno da ideia matemática de proporcionalidade. Tal demanda se fundamenta no que apontam as instituições caracterizadas na literatura acadêmica, bem como do que verificamos na análise da instituição livro didático, que sinaliza para a possibilidade de existência da ecologia da proporcionalidade a partir do 2º ano do Ensino Fundamental, ratificando, dessa forma, o que os estudos acadêmicos vêm delineando.

Consequentemente, as instituições Livro Didáticos tenderiam ao acatamento do apresentado pela instituição Currículo do Ensino Fundamental, podendo tais praxeologias, ao serem desenvolvidas em sala de aula, minimizarem a falta de familiaridade com o saber bem como quando e como utilizá-lo nas aulas de Matemática, como constata a literatura acadêmica.

Pesquisas posteriores, em educação matemática tomando o referencial teórico da TAD, no âmbito da ecologia didática, poderiam realizar um estudo no campo da sala de aula, investigando como se dá a ecologia da proporcionalidade no sistema didático nas instituições pertencentes aos anos iniciais do Ensino Fundamental (1º, 2º, 3º, 4º e 5º ano), partindo do que a instituição Saberes da Psicologia Cognitiva da educação matemática já vem constatando. O estudo poderia verificar em sala de aula o saber preparado e o saber efetivamente aprendido, partido de observações e análise de aulas – praxeologias utilizadas (o saber a ser ensinado, o saber preparado e o saber efetivamente ensinado), postura dos alunos diante das organizações matemáticas propostas para proporcionalidade – por exemplo, técnicas utilizadas e tecnologias acionadas para justificar suas técnicas, por meio de observações e de aplicação de protocolos, conferindo se as relações estabelecidas favorecem as ligações de protocooperação e se há parasitismos espontâneos nas relações didáticas ou planejados para corrigir algum desequilíbrio didático (número de aulas, de atividades, de encaminhamentos explicativos, entre outros).

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. Teoria antropológica do didático: metodologia de análise de materiais didáticos. **Union**, n. 42, p. 9-34, nov. 2015.

ARAUJO, A. J. de. **O ensino de álgebra no Brasil e na França: estudo sobre o ensino de equações do 1º grau à luz da teoria antropológica do didático**. Abraão Juvêncio de Araújo. – Recife: 2009.

ARTAUD, M. Praxéologies de formation, praxéologies pour la formation et leur écologie. *In*: CONFERENCIA LADIMA 2. Brasil. 2018.

ARTAUD.M. **La problématique écologique**: um style d'approche du didactique. IXieme ecole d'été de didactique des mathematiques: La problématique écologique. 2001.

ARTAUD, M. Introduction à l'approche écologique du didactiques: l'écologique des organisations mathématiques et didactiques. *In*: LA NEUVÈME ÉCOLE D'ETE DE DIDa)TIQUES DÊS MATHEMATIQUES, 9. 1998, Hougate, Bailleul. **Anais...** Hougate, p. 101-134. 1998.

ÁVILA, G. Eudoxo, Dedekind, números reais e ensino de Matemática. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 7, 1985.

BELLEMAIN, P. Ensinar comprimentos no ciclo de alfabetização. *In*: ANAIS DO VI SIPEM. Pirenópolis - Goiás – Brasil. 15 a 19 de novembro de 2015.

BELLEMAIN, P. ; LIMA. P. F. **Um estudo da noção de grandeza e implicações no Ensino Fundamental**. Paula Moreira Baltar Bellemain e Paulo Figueiredo Lima. Ed. Geral: Jonh A. Fossa – Natal. SBHMata, 2002.

BEN-CHAIM, D.; ILANY, B.; KERET, Y. **Atividades Investigativas Autênticas" para o ensino de razão e proporção na formação de professores de matemática para os níveis elementar e médio.** Traduzido do original por Antônio Vicente Marafioti Garnica, docente do Departamento de Matemática da UNESP de Bauru e do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da UNESP de Rio Claro. Bolema, Rio Claro (SP), ano 21, p. 125 a 159, 2008.

BERNAL. M. M., **Estudo do objeto proporção**: elementos de sua organização Matemática como objeto a ensinar e como objeto ensinado. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2004

BESSOT, A. **Introdução aos elementos de base da teoria antropológica do didático**. Conferência. Curso 1 – Análise do saber em uma instituição. Brasil. 2018.

BITTAR, M. A Teoria antropológica do didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos. **Zetetiké**, Campinas, SP, v. 25, n. 3, p. 364-387, set./dez. 2017.

BODIN. A**.** Le echelles: preparation d’une situation d’enseignement en classe de cinqueieme. IREM de Bersançon. College d’Ornans. **Petit X**, n. 20. 1989.

BONGIOVANNI. V. As duas maiores contribuições de Eudoxo de Cnido “a teoria das proporções e o método da exaustão”. **Revista Iberoamericana de Educação Matemática**, 2005, n. 2, p. 91-110.

BOSCH. M. ; CHEVALLARD. Y. La sensibilité de l’activité mathematique aux ostensifs. Objet d’etude et problematique.: Disponível em
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/.
Acesso em: 22 maio 2018

BOSCH, M. 25 años de Transposición Didática. *In*: RUIZ-HIGUERAS, Luiza (org.). **SOCIEDAD, escuela y matemática**: aportaciones a la Teoría Antropológica de lo didáctico. Univesidad de Jaen. 2007.p. 385-406.

BRASIL. Secretaria de Educação do Ensino Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Matemática. Brasília: MEC-SEF.1997.

BRASIL. Secretaria de Educação do Ensino Fundamental. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC-SEF. 2017.

BRITO MENEZES, A. P. A. **Contrato didático e transposição didática**: inter-relações entre os fenômenos didáticos na iniciação à álgebra na 6ª série do Ensino Fundamental. 2006. 258 f. Tese (Doutorado em Educação) - Programa de Pós-Graduação em Educação. Centro de Educação. Universidade Federal Pernambuco. Recife: UFPE, 2006.

BROUSSEAU G., **L’enjeu dans une situation didactique**, Documents pour la formation des professeurs d’école en didactique des mathématiques, IREM de Paris VII, p. 147-163, 1991a.

CÂMARA DOS SANTOS, M.; OLIVEIRA, I. A. O ensino fundamental e a resolução de problemas de proporção simples. *In*: XXIII REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 2000, Caxambu. Anais **da XXIII Reunião Anual da ANPEd**, 2000.

CÂMARA SANTOS, M; MENEZES, M. B. A teoria antropológica do didático: uma releitura sobre a teoria. **Perspectivas da Educação Matemática,** UFMS, v. 8, número temático, 2015.

CAVALCANTI. M; GUIMARÃES. G. Conhecimento matemático para o ensino de escala apresentada em gráficos nos anos iniciais do Ensino Fundamental.
REVEMAT, Florianópolis (SC), v. 14, Edição Especial Educação Estatística, p. 1-19, 2019.

CHAACHOUA, H. Le role de l’analyse des manuels dans la Theorie Antopologique du Didactique. **HAL Id: hal-01519339.** https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01519339
Submitted on 19 May 2017. Arquivo digital.

CHASE, J. M.; LEIBOLD, M. A. **Ecological niches, linking classical and contemporary approaches**. Chicago, Chicago University Press. 2003.

CHEVALLARD, Y. **La Transposition Didactique**: du savoir savant au savoir ensigné. Genoble : La pensée Sauvage, 1991.

CHEVALLARD, Y. Les processus de transposition didactique et leur theorisation. ***IUFM et IREM d'Aix-Marseille.*** 1994. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Les_processus_de_transposition.pdf. Acesso em: 22 set. 2015

CHEVALLARD, Y. Questions vives, savoirs moribonds : le problème curriculaire aujourd'hui. **IUFM d'Aix-Marseille.** 1997. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/. Acesso em: 5 maio 2018.

CHEVALLARD, Y. Dictionnaire de didactique des mathématiques 1997-1998. Organisation Didactiques: 1. Les cadres généraux. **IUFM d'Aix-Marseille.** Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Organisations_didactiques_1_1998_.pdf. Acesso em: 6 maio 18.

CHEVALLARD, Y. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathematiques: L'approche anthropologique. **IUFM d'Aix-Marseille.** 1998. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Analyse_des_pratiques_enseignantes.pdf. Acesso em: 17 maio 17.

CHEVALLARD, Y. **La recherche en didactique et la formation des professeurs**: problématiques, concepts, problèmes. **IUFM d'Aix-Marseille.** 1999. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=27.
Acesso em : 03 out. 2016.

CHEVALLARD, Y. Approche Anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathematiques. **IUFM d'Aix-Marseille.** 2002a. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/. Acesso em 10 out. 2016.

CHEVALLARD, Y. Nouveaux dispositifs didactiques au collège et au lycée: raisons d'être, fonctions, devenir. **IUFM d'Aix-Marseille.** 2002b. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/. Acesso em: 12 mar. 2017.

CHEVALLARD, Y. Organiser l'etude. 1. Structures & fonctions. **IUFM d'Aix-Marseille.** 2002c. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/. Acesso em: 13 mar. 2017.

CHEVALLARD, Y. Organiser l'etude. 3. Ecologie & Regulation. **IUFM d'Aix-Marseille.** 2002d. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/. Acesso em: 13 fev.2018.

CHEVALLARD, Y. La didactique, dites-vous? Education& didactique, 4.1. **IUFM d'Aix-Marseille.** out. 2010. p. 139-146.

CHEVALLARD, Y. A Teoria Antroplógica do Didático face ao professor de matemática. *In*: **A Teoria Antropológico do Didática**: princípios e fundamentos. Curitiba, PR: CRV, 2018.

COELHO, C. K. G.; COIMBRA, D. C. S.; VALERIO. C. L. L.; VILELA. M. V. F. Percepções da relação professor/livro didático e as formas de utilização de seus recursos na

Escola Estadual São Lourenço, Dom Aquino-MT. **REMOA**, v. 14, ed. especial UFMT, 2015, p. 53-68.

COMIN, E. **Proportionnalité et fonction linéaire**. Caracteres, causes et effets didactiques des évolutions et didactitiques des évollutions et des réforms dans la scolarité obligatoire. Thése presentée à l'Universite Bordeaux I. 2000.

COSTAS, M. DOS S.; ALLEVATO. N. S, G. **O conceito de proporcionalidade através da resolução de problemas de geometria**: perspectivas didáticas de (futuros) professores de Matemática em formação inicial. 2012. Disponível em: www2.rc.unesp.br/gterp/sites/default/files/artigos/. Acesso em: 3. jan. 2017.

CURY, F. G. Análise de um livro didático de geometria plana apoiada na hermenêutica de profundidade. **Zetetiké**, Campinas, SP, v. 27, 2019, p. 1-21. Acesso em: 5 set. 2019.

DAVID, M. M. et al.. Matemática escolar, matemática acadêmica e matemática do cotidiano: uma teia de relações sob investigação. **Acta Scientiae**, v. 15, n. 1, jan./abr. 2013.

E-ASSADI. M. Étude de la notion de proportionnalité ches des élèves du secondaire de la première nation CRIE. **Présenté comme exigence partielle de la maîtrise em éducation.** Université du Québec à Montréal, 2008.

FERREIRA, M. C. C.; GOMES, M. L. M. **O raciocínio proporcional no contexto da avaliação das habilidades Matemática pelo 2º INAF**. In: FONSECA, M. C. R. Letramento no Brasil: habilidades Matemáticas: reflexões a partir do INAF 2002. São Paulo: Global: Ação Educativa Assessoria, Pesquisa e Informação: Instituto Paulo Montenegro, 2004.

FRISON, M. D; VIANNA, J; CHAVES, J.M; BERNARDI, F.N. Livro didático como instrumento de apoio para a construção de propostas de ensino de Ciências Naturais**.** *In*: ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS. Florianópolis, 2009, p. 4-5.

GARCÍA, F. J. G. **La modelización como herramienta de articulación de la Matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales.** Tesis (Doctoral) – Didáctica de las Ciencias. Universidad de Jaén. Departamento de Didáctica de las Ciencias (Experimentales, Matemáticas y Sociales). Jaén, 2005.

HART, K. Ratio and proportion. *In*: Hiebert, J.; BEHR, M. (eds.), **Number concepts and operations in the Middle** Grades 2. Reston, Virginia, USA: National Council of Teachers of Mathematics, 1988. p. 198-219.

HERSANT. M. La proportionnalité dans l'enseignement obligatoire en France, d'hier à aujourd'hui. **Repères IREM**, 2005, p. 5-41.

KARPLUS, E. F., KARPLUS, R.; WOLLMANN, W. The influence of cognitive style. **School Science and Mathematics**, 6, p. 476-482. 1974.

KARPLUS, R.; PULOS, S.; STAGE, E. K. Proportional reasoning of early adolescents. *In*: LESH, R.; LANDAU, M. (eds.). **Acquisition of mathematic concepts and processes**. New York: Academic Press, 1983.

IMENES, L. M. Proporcionalidade sob o ponto de vista da transposição didática com Luiz Márcio Imenes pelas pesquisadoras Changkuo Rodrigues e Dayane Cristina Rocha Tinoco. **Cadernos da Educação Básica**, v. 1, n. 3, jan. 2017.

LEVAIN, J.-P. Proportionnalité, agrandissement et échelle. Dans: **Petit**, x, 31, p. 15-34. 1993.

LUNDBERG, A. L. V.; KILHAMM, C. **Transposition of knowledge**: encountering proportionality in an Algebra Task. **Int J of Sci and Math Educ**. 2016.

LIMA, E. L. **Temas e problemas**. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

LIVY, S.,; HERBERT, S. Second-Year Pre-Service Teachers' Responses to Proportional Reasoning Test Items. **Australian Journal of Teacher Education**, v. 38, n. 11. 2013. Disponível em: http://dx.doi.org/10.14221/ajte.2013v38n11.7. Acesso em: 26 jun.2020.

MELO, M. S. L. de.; BELLEMAIN, P. M. B. A abordagem do conceito de escala em livros didáticos para o terceiro e quartos ciclos do Ensino Fundamental: uma análise à luz da Teoria dos Campos Conceituais. *In*: ANAIS DO SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Recife: UFPE, 2006.

MELO, M. S. L. de. **Um estudo sobre o ensino e aprendizagem do conceito de escala, no quarto ciclo do Ensino Fundamental**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação. Centro de Educação. Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2004.

MELO VIEIRA, M. S. L. de. Estudo exploratório acerca dos conceitos de proporcionalidade e comprimento. In: 3º SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, Fortaleza. 2011.

MENDONÇA, V. L. **Biologia**: ecologia: origem da vida e biologia celular embriologia e histologia: volume 1: Ensino Médio / Vivian L. Mendonça. 3. ed. São Paulo: Editora AJS. (Coleção Biologia). 2016.

MENEZES. M. B. **Praxeologia do professor e do aluno**: uma análise das diferenças no ensino de equação de segundo grau. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Centro de Educação. UFPE. Recife. 2010.

ODUM E. P. **Fundamentos de Ecologia**. Serviço de Educação e Bolsas. 6. ed. Fundação Catalouste Gulbenkian. 2001.

ODUM, E. P.; BARRETT, G. W. **Fundamentos de ecologia.** Tradução de Pégasus Sistemas e Soluções. São Paulo: Cengage Learning, 2008.

OLIVEIRA I. A. F. G. **Um estudo sobre a proporcionalidade**: a resolução de problemas de proporção simples no Ensino Fundamental. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Pernambuco. Recife. 2000.

OLIVEIRA I. A. F. G **La proportionnalité l'école**: qu'enseigne t-on?qu'append-on? These presenté à l Faculté des sciences de l'éducation de Uninversité du Québec à Montréal. 2008

OLIVEIRA, Z. V. Conceito de Quantidade na obra de Van Roomen: reflexões sobre a História da Matemática no Ensino. **História da Ciência e Ensino: construindo interfaces**, v. 13, 2016, p. 69-84. Disponível em: revistas.pucsp.br/index.php/hcensino /article/ download/ 26309/ 19451. Acesso em 16 jun. 2016.

ORDOÑEZ, E. A. S. Razones, proporciones y proporcionalidad en una situación de reparto: una mirada desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, v. 16, n. , p. 65-97, 2013

PONTE, J. P.; MARQUES. S. Proportion in school mathematics textbooks: a comparative study. **RIPEM**, v. 1, n.1, 2011.

RAVEL L. **Des programmes _a la classe**: etude de la transposition didactique interne. Exemple de l'arithmetique en Terminale S specialite mathematique. Education. Universit_e Joseph-Fourier - Grenoble I, 2003. French.

RIVAS, M. A.; GODINO, J. D.; CASTRO, W. F. **Desarrollo del conocimiento para la enseñanza de la proporcionalidad en futuros profesores de Primaria**. Bolema, Rio Claro (SP), v. 26, n. 42B, p. 559-588, abr. 2012.

SANTOS, M. R. **A transposição didática do conceito de área de figuras geométricas planas no 6º ano do Ensino Fundamental**: um olhar sob a ótica da Teoria Antropológica do didático. Tese (Doutorado em Ensino das Ciências e Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Departamento de Educação, Recife, 2015.

SILVESTRE, A. I.; PONTE, J. P. **Proporcionalidade direta no 6° ano de escolaridade**: uma abordagem exploratória 1. **Interacções**, n. 20, p. 70-97, 2012. Disponível em: http://www.eses.pt/interaccoes. Acesso em: 25.06.2017

SPINILLO, A. G. Papel de intervenções específicas na compreensão da criança sobre proporção. **Psicologia**: Reflexão e Crítica, v. 15, n. 3, p. 475-487, 2002.

TINOCO, L. A. de A. Proporcionalidade e Pensamento Algébrico – Como e Por que integrar? *In*: XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – CIAEM, XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil, 2011.

VERGNAUD, G. Multiplicative Structures. In: LESH, R.; LANDAU, M. (eds.), **Acquisition of mathematic concepts and processes**. New York: Academic Press. 1983.

VERGNAUD, G. Multiplicative Structures. *In*: **Number Concepts and Operations in the Middle Grades**. James Hiebert e Merlyn Behr. v.2.1991.

APÊNDICES

APÊNDICE A – BNCC – OBJETOS DE CONHECIMENTO E HABILIDADE

	Anos iniciais	
4º ano		
Unidade temática	Objeto de conhecimento	Habilidades
Número	Problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação e da divisão: adição de parcelas iguais, configuração retangular, proporcionalidade, repartição equitativa e medida (2018, p. 290).	(EF04MA06) Resolver e elaborar problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação (adição de parcelas iguais, organização retangular e proporcionalidade), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos (2018, p. 291). (EF04MA07) Resolver e elaborar problemas de divisão cujo divisor tenha no máximo dois algarismos, envolvendo os significados de repartição equitativa e de medida, utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.
5° ano		
Álgebra	Grandezas diretamente proporcionais (2018, p. 294).	(EF05MA12) Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, alterar as quantidades de ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escala em mapas etc. (2018, p. 295).
	Problemas envolvendo a partição de um todo em duas partes proporcionais (2018, p. 294).	(EF05MA13) Resolver problemas envolvendo a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, tais como dividir uma quantidade em duas partes, de modo que uma seja o dobro da outra, com compreensão da ideia de razão entre as partes e delas com o todo (2018, p. 295).
Geometria	Ampliação e redução de figuras poligonais em malhas quadriculadas: reconhecimento da congruência dos ângulos e da proporcionalidade dos lados correspondentes (2018, p. 296).	(EF05MA18) Reconhecer a congruência dos ângulos e a proporcionalidade entre os lados correspondentes de figuras poligonais em situações de ampliação e de redução em malhas quadriculadas e usando tecnologias digitais (2018, p. 297).
	Anos finais	
6º ano		
Número	Cálculo de porcentagens por meio de estratégias diversas, sem fazer uso da “regra de três” (2018, p. 300).	(EF06MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da “regra de três”, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira etc. (2018, p. 301).
Grandezas e medidas	Perímetro de um quadrado como grandeza proporcional à medida do lado (2018, p. 302).	(EF06MA29) Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus

		lados, para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, o que não ocorre com a área (2018, p. 303).
7º ano		
Álgebra	Problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais (2018, p. 306).	(EF07MA17) Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas (2018, p. 307).
8º ano		
Álgebra	Variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais (2018, p. 312).	(EF08MA12) Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano (2018, p. 312). (EF08MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas (2018, p. 312).
9º ano		
Álgebra	Grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais (2018, p. 316).	(EF09MA08) Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas (2018, p. 317).
Geometria	Relações métricas no triângulo retângulo. Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração. Retas paralelas cortadas por transversais: teoremas de proporcionalidade e verificações experimentais (2018, p. 318).	(EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos. (EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes (2018, p. 319).

APÊNDICE B – PARALELO ENTRE A BNCC E A COLEÇÃO ANALISADA

Coleção "A conquista da matemática anos iniciais", em paralelo com a BNCC				
Ano	BNCC		COLEÇÃO	
2º	OBJETO DE CONHECIMENTO	HABILIDADE	PRINCIPAIS CONTEÚDOS	UNIDADE
	NÚMEROS			
	Problemas envolvendo significado de dobro, metade, triplo e terça parte.	(EF02MA08) Resolver e elaborar problemas envolvendo dobro, metade, triplo e terça parte, com suporte de imagens ou material manipulável, utilizando estratégias pessoais.	Multiplicação – dobro Divisão – metade, triplo...	8 – Multiplicação
	GRANDEZAS E MEDIDAS			
	Medidas de tempo: intervalo de tempo, uso do calendário, leitura de horas em relógios digitais e ordenação de datas.	(EF02MA018) Indicar a duração de intervalo de tempo entre duas datas, como dia da semana e mês do ano, utilizando calendário, para planejamentos e organização da agenda.	Intervalo de tempo entre duas datas	9 – Mais medidas
3°	GRANDEZAS E MEDIDAS			
	Medida de capacidade e de massa (unidade não convencionais e convencionais); registro de estimativa e comparações.	(EF03MA020) Estimar, medir, comparar capacidade e massa utilizando unidades de medidas não padronizadas e padronizadas mais usuais (metro, centímetro e mililitro) em leituras de rótulos e embalagens entre outros.	Comprimento, massa, capacidade	3 – Grandezas e medidas: comprimento, massa, capacidade
4º	NÚMEROS			
	Problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação e da divisão: adição de parcelas iguais, configuração retangular, proporcionalidade, repartição equitativa e medida.	(EF04MA06) Resolver e elaborar problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação (adição de parcelas iguais, organização retangular e proporcionalidade), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos (2018, p. 291). .	Diferentes significados da multiplicação: adição de parcelas iguais, configuração retangular, proporcionalidade	4 – Multiplicação com números naturais
		(EF04MA07) Resolver e elaborar problemas de divisão cujo divisor tenha no máximo dois algarismos, envolvendo os significados de repartição equitativa e de medida, utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.		
5º	ÁLGEBRA			
	Grandezas diretamente proporcionais (2018, p. 294).	(EF05MA12) Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, alterar as quantidades de ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escala em mapas etc.(2018, p. 295).		4 – Multiplicação e divisão com números naturais.

	Problemas envolvendo a partição de um todo em duas partes proporcionais (2018, p. 294).	(EF05MA13) Resolver problemas envolvendo a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, tais como dividir uma quantidade em duas partes, de modo que uma seja o dobro da outra, com compreensão da ideia de razão entre as partes e delas com o todo (2018, p. 295).		
	GEOMETRIA			
		Ampliação e redução de figuras poligonais em malhas quadriculadas: Reconhecimento da congruência dos ângulos e da proporcionalidade dos lados correspondentes (2018, p. 296).	(EF05MA18) Reconhecer a congruência dos ângulos e a proporcionalidade entre os lados correspondentes de figuras poligonais em situações de ampliação e de redução em malhas quadriculadas e usando tecnologias digitais (2018, p. 297).	

APÊNDICE C –Análise praxeológica – LD

Ano	Página	Saber	Tipo de tarefa	Técnica	Parte do curso	Parte das atividades – questão
1º	-	-			-	-
2º	186	Multiplicação/divisão Dobro/metade	T_5;	t_1	-	04; 06
	223	Multiplicação/divisão Triplo (aumento proporcional)	T_1	t_1	Orientação	-
3º	196	Divisão – ideia de proporcionalidade	T_2	t_1	-	03
	93	Multiplicação – ideia de proporcionalidade	T_6	t_1	Orientação	-
4º	94	Multiplicação – ideia de proporcionalidade	T_1	t_1	-	06
5º	82	Multiplicação – ideia de proporcionalidade	T_6	t_1	Orientação	-
	85	Multiplicação – ideia de proporcionalidade	T_6	t_1	-	02
	235	Multiplicação – ideia de proporcionalidade	T_3; T_1	t_2; t_1	-	04; 08
	136	Números e medidas	T_3	t_2	-	01
	139	Números e medidas	T_3	t_2	-	03
	200	Ampliação e redução	T_4	t_1;	Orientação	01;
	208	Ampliação e redução	T_4	t_1; t_2	Orientação	-
	209	Ampliação e redução	T_4	t_1; t_2	-	01;02
	243	Multiplicação/divisão Dobro/metade	T_5;	t_1	Orientação	-

Tipos de tarefa
T_1: Calcular a variação entre grandezas **de um para muitos.**
T_2: Calcular a variação entre grandezas na busca do **valor unitário.**
T_3: Calcular a **distância** entre pontos.
T_4: Comparar figuras e aplicar propriedades
T_5: Resolver problemas envolvendo dobro ou metade.
T_6: Resolver problemas envolvendo triplo ou terça parte; 4x ou x/4; nx ou x/n.
Técnica
t_1: Variação entre grandezas proporcionalmente direta (se x então y; se nx então ny, para todo $n \in N$).
t_2: Se multiplicar as distâncias pelo fator constante r, e se tem a relação biunívoca *f: F →F', então tem-se semelhança de razão r*, entre *F* e *F'*. Se *x'* = f(x), os pontos *x, y são proporcionais.*

ANEXOS

ANEXO A – Bola-cola ou cola-nola?

Bolema, Rio Claro (SP), Ano 21, nº 31, 2008, p. 125 a 159 Atividades Investigativas 155

Atividade 02: Preferência por refrigerante

BOLA-COLA
OU
COLA-NOLA?

Foi feito um teste sobre a preferência entre os refrigerantes BOLA-COLA e COLA-NOLA e chegou-se aos seguintes resultados:

A razão entre aqueles que preferem BOLA-COLA a COLA-NOLA é 3 para 2.

A quantidade dos que preferem BOLA-COLA a COLA-NOLA está na razão de 17.139 para 11.426.

O grupo dos que preferem BOLA-COLA a COLA-NOLA tem 5.713 pessoas a mais.

Pergunta-se: as três afirmações acima resultaram do mesmo teste? Explique!

Qual afirmação descreve de modo mais adequado os resultados da comparação entre BOLA-COLA e COLA-NOLA? Explique!

Se você precisasse divulgar os resultados, qual afirmação acima pareceria mais adequada? Porque?

Sugira outros modos possíveis de comparar as preferências e a popularidade entre dois tipos de refrigerantes.

ANEXO B – Atividade de estimativa

Bolema, Rio Claro (SP), Ano 21, nº 31, 2008, p. 125 a 159 Atividades Investigativas 153

Anexos

Atividades investigativas autênticas relacionadas ao RP - TAXA

Atividade 1: Estimativa do número de pessoas numa manifestação

Figura 02: Uma manifestação

Primeiro estágio da atividade

Usualmente, os jornalistas gostam de estimar o número de pessoas envolvidas em manifestações e desfiles. Consideremos um exemplo: uma manifestação política foi noticiada num programa de televisão. O jornalista juntou-se à multidão e declarou: "A praça está cheia de manifestantes. Pelo menos 200.000 pessoas estão aqui e também nas ruas próximas". Ao mesmo tempo, um outro jornalista, numa emissora de radio, divulgava: "A Polícia anunciou que 100.000 pessoas participam da manifestação e que a ordem está sendo mantida".

Responda as seguintes questões:

a. Por que, se ambos os jornalistas estavam no mesmo local, relatando o mesmo acontecimento, houve uma diferença significativa em relação à estimativa do número de pessoas presentes à manifestação?

b. Em sua opinião, como os jornalistas fizeram as estimativas sobre o número de pessoas presentes na manifestação?

c. Sugira um método com o qual os jornalistas obteriam uma melhor estimativa do número de pessoas presentes na manifestação (o próximo estágio do problema pode ajudá-lo).