



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E
TECNOLÓGICA
CURSO DE MESTRADO

ELIZABETH CRISTINA ROSENDO TOMÉ DA SILVA

**A APRENDIZAGEM COLABORATIVA E OS ESQUEMAS DE
ATIVIDADES COLETIVAS INSTRUMENTADAS: explorando artefatos
simbólicos na Geometria do Táxi**

RECIFE
2020

ELIZABETH CRISTINA ROSENDO TOMÉ DA SILVA

**A APRENDIZAGEM COLABORATIVA E OS ESQUEMAS DE
ATIVIDADES COLETIVAS INSTRUMENTADAS: explorando artefatos
simbólicos na Geometria do Táci**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, Centro de Educação, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Área de concentração: Educação Matemática e Tecnológica

Orientadora: Profa. Dra. Paula Moreira Baltar Bellemain

Coorientadora: Profa. Dra. Thyana Farias Galvão

RECIFE
2020

Catálogo na fonte
Bibliotecária Natália Nascimento, CRB-4/1743

- S586a Silva, Elizabeth Cristina Rosendo Tomé da.
A aprendizagem colaborativa e os esquemas de atividades coletivas instrumentadas: explorando artefatos simbólicos na Geometria do Táxi. / Elizabeth Cristina Rosendo Tomé da Silva. – Recife, 2020.
168f.
- Orientadora: Paula Moreira Baltar Bellemain.
Coorientadora: Thyana Farias Galvão
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE.
Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2020.
- Inclui Referências e Apêndices.
1. Métodos de Ensino - Aprendizagem. 2. Aprendizagem Colaborativa. 3. Geometria – Métodos de Ensino. 4. UFPE - Pós-graduação. I. Bellemain, Paula Moreira Baltar. (Orientadora). II. Galvão, Thyana Farias (Coorientadora). III. Título.
- 372.2 (23. ed.) UFPE (CE2020-046)

ELIZABETH CRISTINA ROSENDO TOMÉ DA SILVA

**A APRENDIZAGEM COLABORATIVA E OS ESQUEMAS DE
ATIVIDADES COLETIVAS INSTRUMENTADAS: explorando
artefatos simbólicos na Geometria do Táxi**

Dissertação apresentada ao
Programa de Pós-Graduação em
Educação Matemática e Tecnológica
da Universidade Federal de
Pernambuco – UFPE, Centro de
Educação, como requisito parcial
para obtenção do título de Mestre em
Educação Matemática e Tecnológica.

Aprovada em: 13/01/2020

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Paula Moreira Baltar Bellemain (Orientadora e Presidente)
Universidade Federal de Pernambuco

Profa. Dra. Thyana Farias Galvão (Coorientadora)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Franck Gilbert René Bellemain (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Rogério da Silva Ignácio (Examinador Externo)
Universidade Federal de Pernambuco

AGRADECIMENTOS

Agradecer vem do latim “*gratus*”, que significa o que agrada, mostrar-se grato ou demonstrar gratidão, reconhecimento. Quero aproveitar esse momento de *gratus* para reconhecer o papel de diversos sujeitos na construção, não apenas desta dissertação, mas na minha constante formação pessoal e profissional, em especial nos dois anos do curso de mestrado.

Em primeiro lugar agradeço aqueles que a vida me presenteou como família, *meus pais e irmã*. A realização e o título é algo individual, mas a trajetória que me permitiu alcançá-lo é nossa. Obrigada infinitas vezes pelo esforço incondicional desde a educação básica que nos permitiu alçar os voos que nos fizessem felizes e realizadas, obrigada por entenderem as ausências e incentivar o nosso crescimento em cada palavra dita, à distância muitas vezes.

A Débora, um exemplo de dedicação e amor pela pesquisa e desenvolvimento da ciência, por me encher de orgulho pela sua trajetória e me inspirar sempre. Que a sua nova experiência com a docência te faça enxergar o que me trouxe até aqui: a potência transformadora que a Educação tem na vida das pessoas.

Extendo aqui meus agradecimentos a toda *minha família* (Rosendo, Tomé e Vaz de Oliveira), que esteve sempre torcendo por mim, muitas vezes sem nem entender o que de fato eu estava fazendo, simplesmente por me amarem e respeitarem as minhas escolhas.

A Jean, que durante o percurso do mestrado casou comigo duas vezes, e esteve literalmente ao meu lado na conclusão antecipada do curso. Obrigada por discutir horas sobre Gênese Instrumental, CSCL e Geometria do Táxi comigo mesmo sem entender muitos dos aspectos teóricos. Os teus questionamentos, às vezes tão insistentes, sempre me instigavam a aprender mais sobre as teorias.

Acima de qualquer coisa obrigada por me acalmar nos dias corridos, por me incentivar a fazer o que eu queria fazer, por não me deixar desistir e por me fazer enxergar novas possibilidades a cada dificuldade encontrada na construção deste trabalho. Admiro teu crescimento diário e me inspiro no teu olhar tão sonhador.

Ao iniciar o curso de mestrado me foi dito que é um percurso solitário, e de fato é, pois existem diversos momentos que apenas nós podemos agir. Esqueceram de mencionar o quanto esse percurso pode ser leve, agradável e divertido quando

se tem pessoas ao seu lado para lhe apoiar, incentivar e crescer juntos. Gabi, Andrezza e Franklin, vocês com certeza tornaram o curso de mestrado melhor. Vocês representam muito nessa pesquisa e na minha vida.

A Felipe Costa, amigo, padrinho e parceiro da Orbitá, pelo seu jeito tão questionador que nos momentos em que conversamos sobre o projeto esteve sempre atento a fazer as perguntas que eu não queria responder, mas que foram necessárias para eu entender o propósito do meu trabalho.

A Thyana Galvão, exemplo de pessoa e profissional que vem me inspirando desde 2013 a olhar a sala de aula além de um espaço de conhecimentos científicos. Obrigada por me co-orientar durante o curso de mestrado, mesmo quando eu quis explorar outras Geometrias. Agradeço por acreditar mais uma vez no meu potencial e por não medir esforços para a concretização desta dissertação.

A Paula Baltar, minha orientadora, por valorizar minhas ideias, acreditar no meu potencial e me incentivar sempre a buscar aquilo que me tornaria realizada dentro da pesquisa. Me inspiro muito na sua maneira de olhar, defender e lutar pela educação justa e democrática em nosso país. Agradeço em especial por cada questionamento que gerava inquietações e que contribuíram sem dúvida tanto na construção da dissertação, quanto no meu olhar sobre o processo de ensino e aprendizagem.

Ao Professor Franck Bellemain, pelas inúmeras contribuições sobre as teorias utilizadas na pesquisa, por direcionar meu olhar sobre questões tão específicas da educação matemática e tecnológica e por me inspirar a sempre buscar novos desafios (estou tentando aprender a programar agora). Sua contribuição na Educação Matemática e nesta dissertação é inquestionável.

Ao professor Paulo Figueiredo, que me fez colocar em ação aquela que hoje eu considero como uma das minhas melhores qualidades: a Curiosidade. Tenho guardado na memória o momento exato em que me fez a proposta de explorar a Geometria do Táxi. Naquele momento eu não consegui dimensionar o papel fundamental que isso teria nos objetivos da minha pesquisa. Obrigada por me tirar da zona de conforto e me apresentar tantas novas possibilidades dentro da Geometria.

Ao Professor Rogério Ignácio, que acompanhou e contribuiu na construção da pesquisa desde a qualificação, apontando elementos fundamentais para articular os conhecimentos das teorias e dos objetivos da pesquisa e por refinar meu olhar sobre

os “esquemas” propostos por Rabardel de uma maneira simples e objetiva. Além da pesquisa, agradeço por ser inspiração enquanto professor e educador.

Aos *alunos da Licenciatura em Expressão Gráfica* por me auxiliarem no experimento e por colaborar na construção desta dissertação. Allan, Amanda, Beatriz, David, Eriane, Isabel e Matheus desejo a cada um de vocês muita luz e determinação para alcançar todos os seus objetivos acadêmicos e pessoais.

A todos os integrantes do LEMATEC e do Pró Grandezas por todo conhecimento compartilhado durante os encontros, seminários e conversas. A Educação Matemática está repleta de pessoas incríveis e dedicadas no aperfeiçoamento e evolução do ensino da Matemática em suas diversas especificidades.

Aos professores da Linha de Didática da Matemática por acolherem minhas discussões nos seminários e pelas contribuições na construção do meu projeto.

As pessoas que tive o prazer e honra de conhecer neste percurso e que ganharam um lugar especial na minha caixinha de admiração, por serem exemplos de busca constante por inovação na educação: Prof. Marcos Barros, Helena, Jaime e Amanda, vocês estiveram ao meu lado em um dos momentos mais especiais do curso de mestrado, momento que me fez repensar meu papel enquanto professora e pessoa. Gratidão!

A Clara, Fábio e Mário, funcionários do EDUMATEC por estarem sempre dispostos a me auxiliar em todas as burocracias, informações e dúvidas ao longo do curso do mestrado.

A CAPES, por incentivar financeiramente a pesquisa durante o ano de 2019 possibilitando ampliar a pesquisa no Brasil sobre a Educação Matemática e Tecnológica.

Por fim, a Ele, que permitiu todo esse percurso, todas as realizações e ter todas essas pessoas presentes em minha vida. A Deus, dedico cada segundo da minha vida. A Ti Senhor, agradeço por não ter me deixado desistir e por ter segurado a minha mão quando eu me desesperei, sem a fé em Teu nome nada disso seria possível. Te amo e Te adoro por toda minha existência.

Aprendi enfim, que colaborar está além da educação e das discussões acadêmicas. É preciso enxergar essa habilidade em cada ser humano e fazer dela uma maneira de viver em sociedade.

A cada novo leitor desse texto agradeço o interesse!

“O caminho que escolhi não parece alcançar o objetivo, mas fazer a verdade da Geometria duvidosa.”

Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855)

RESUMO

Esta pesquisa tem como objetivo **analisar o processo de aprendizagem colaborativa com base nos esquemas de atividades coletivas instrumentadas com ênfase na apropriação do artefato simbólico táxi-distância por meio de situações problemas**. Tomamos como base teórica a Aprendizagem Colaborativa com Suporte Computacional (*Computer Supported Collaborative Learning - CSCL*) e a Abordagem Instrumental, com ênfase nos esquemas de atividades coletivas instrumentadas. Os participantes da pesquisa foram cinco alunos de uma Universidade Pública Federal, matriculados em curso de licenciatura que habilita o profissional ao ensino de Geometria Gráfica, e que participaram de duas sessões colaborativas tendo como suporte computacional para a realização das situações problemas, um software de Geometria Dinâmica. Para possibilitar a análise da colaboração entre os participantes utilizamos lugares geométricos de equidistância de acordo com a Geometria do Táxi. As interações no experimento ocorrem presencial e virtualmente e foram registradas por meio de filmagens e gravação de tela e chat do ambiente virtual utilizado na sessão 1. Os dados obtidos, registros das interações dos sujeitos e as construções realizadas no GeoGebra, foram analisados com base em três unidades de análise: comunicação interpessoal, instrumentalização e instrumentação. A análise dos dados apontou que os esquemas de atividades coletivas instrumentados surgiram a partir da evolução de esquemas individuais identificados por meio da sequência das interações e estratégias construídas pelos participantes, indicando a apropriação colaborativa do artefato simbólico. Por meio da análise dos dados pudemos indicar que em relação ao uso do artefato simbólico táxi-distância, as tentativas de ação tiveram como principal referencial as noções euclidianas dos lugares geométricos de equidistância. Destacamos também que o uso do artefato na resolução das situações problemas, além dos aspectos evidenciados na Abordagem Instrumental, esteve vinculado a aceitação dos objetos gráficos na Geometria do Táxi. Por fim, apontamos as contribuições da pesquisa em relação ao estudo dos esquemas de atividades coletivas instrumentadas como unidade de análise da Aprendizagem Colaborativa, bem como o estudo de artefatos simbólicos como possibilidade para analisar a apropriação de conceitos matemáticos.

Palavras-chave: Aprendizagem Colaborativa com suporte computacional, Abordagem Instrumental, Táxi-distância, Geometria Dinâmica.

ABSTRACT

This research aims at analyzing the process of collaborative learning based on the schemes of collective activities instrumented with emphasis on the appropriation of the symbolic artifact taxi distance through problem situations. The Computer Supported Collaborative Learning (CSCL) and the Instrumental Approach are taken as a theoretical basis with emphasis on the instrumented collective activity schemes. The research participants were five students from a Federal Public University, enrolled in a degree course that qualifies them to teach Graphic Geometry. They participated in two collaborative sessions with computer support for the realization of problem situations, a Dynamic Geometry software. To enable the analysis of the collaboration between the participants, we use equidistance geometric places according to the Taxi Geometry. The interactions in the experiment occur in both face-to-face and virtual modes and were recorded via filming or screen recording and chat from the virtual environment used in session 1. The data obtained, records of the subjects' interactions and the constructions performed in GeoGebra, were analyzed based on three units of analysis: interpersonal communication, instrumentalization and instrumentation. The data analysis showed that the instrumented collective activity schemes arose from the evolution of individual schemes identified through the sequence of interactions and strategies constructed by the participants, indicating the collaborative appropriation of the symbolic artifact. Through the analysis of the data we were able to indicate that in relation to the use of the symbolic artifact taxi distance, the attempts of action had as main reference the Euclidean notions of the geometric places of equidistance. We also highlight that the use of the artifact in the resolution of problem situations, in addition to the aspects evidenced in the Instrumental Approach, was linked to the acceptance of graphic objects in Taxi Geometry. Finally, we point out the contributions of the research in relation to the study of collective activity schemes instrumented as a unit of analysis of Collaborative Learning, as well as the study of symbolic artifacts as a possibility to analyze the appropriation of mathematical concepts.

Keywords: *Computer Supported Collaborative Learning*, Instrumental Approach, Taxi distance, Dynamic Geometry

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Trajetos na Geometria do Táxi.....	18
Figura 2 – Representação da Gênese Instrumental.....	30
Figura 3 - Modelo SAI	32
Figura 4 - Vista aérea da cidade de Barcelona	40
Figura 5 - Trajeto do Táxi na Geometrias Euclidianas e do Táxi.....	41
Figura 6 – Malha quadriculada na GT	43
Figura 7 - Distâncias no plano.....	44
Figura 8 - Distância na GE	44
Figura 9 - Métrica na GT	45
Figura 10 – Trajeto do Balão e do Táxi	46
Figura 11 - Circunferência euclidiana.....	48
Figura 12 – Táxi-circunferência.....	49
Figura 13 - Raio e Diâmetro na Táxi – circunferência	50
Figura 14 - Ponto médio na GE.....	51
Figura 15 - Conjunto de pontos médios entre A e B.....	51
Figura 16 - Mediatriz na GE	53
Figura 17 - Táxi-mediatriz (Vertical)	54
Figura 18 - Táxi-mediatriz (Horizontal)	54
Figura 19 - Representação do táxi-mediatriz 2º caso.....	55
Figura 20 - Representação gráfica da táxi-mediatriz- 3º Caso - Vertical.....	56
Figura 21 - Representação gráfica da táxi-mediatriz-3º Caso -Horizontal.....	56
Figura 22 - Situação Problema 1.....	68
Figura 23 - Resolução apresentada no Piloto	69
Figura 24 - Situação problema 2 (a).....	70
Figura 25 - Solução apresentada no Estudo Piloto	71
Figura 26 - Resolução Situação 1	72
Figura 27 - Situação problema 2 (b).....	72
Figura 28 - Solução dada para a alternativa B	73
Figura 29 – Possível solução	73
Figura 30 - Situação Problema 2 (C).....	74
Figura 31- Conjunto de pontos médios na GT.....	74
Figura 32 - Situação problema 2 (D)	75

Figura 33- Mediatrix na GT.....	76
Figura 34 - Situação problema 3	77
Figura 35 - Solução apresentada para Situação 3	79
Figura 36 - Situação Problema 4.....	80
Figura 37 - Solução apresentada para a Situação 4	81
Figura 38 – Recorte do Roteiro de Colaboração	82
Figura 39 - Tela da Sala Virtual do VMT	84
Figura 40 - Unidades de análise.....	87
Figura 41 - Fluxograma das interações via chat do VMT	93
Figura 42 - Fluxograma das interações presenciais.....	94
Figura 43 - Possibilidade de caminho para Carlos	99
Figura 44 - Fluxograma das interações durante Questão A.....	102
Figura 45 - Determinação do ponto $(0, 1)$	103
Figura 46 - Fluxograma das interações durante Questão B.....	108
Figura 47 - Uso do ponto médio como estratégia.....	109
Figura 48 - Determinação da região por meio de um triângulo retângulo	111
Figura 49 - Representação da estratégia desenvolvida	113
Figura 50 - Solução apresentada para questão B.....	115
Figura 51 - Fluxograma das interações durante Questão C.....	117
Figura 52 - Solução dada para a questão C.....	118
Figura 53 - Fluxograma das interações durante a questão D.....	119
Figura 54 - Construção da perpendicular a AB	121
Figura 55 - Resolução apresentada para a questão D.....	123
Figura 56 - Fluxograma das interações durante Situação Problema 3.....	125
Figura 57 - Construção de três circunferências euclidianas	127
Figura 58 - Solução para a questão D.....	129
Figura 59 - Fluxograma das interações durante situação problema 4 (1)	131
Figura 60 - Fluxograma das interações durante situação problema 4 (2)	132
Figura 61 - Tentativa de ação utilizando circunferências	135
Figura 62 - Solução apresentação para a situação problema 4	139

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Conteúdos	57
Quadro 2 - Natureza das produções	59
Quadro 3 - Conteúdos previstos nos planos de ensino das disciplinas.....	64
Quadro 4 – Organização do Experimento	84
Quadro 5 - Organização da sessão 1.....	85
Quadro 6 - Legenda do fluxograma das interações	88

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CSCL	Computer-supported collaborative learning
VMT	Virtual Math Teams
GT	Geometria do Táxi
GE	Geometria Euclidiana
EU	Esquema de utilização
EUs	Esquemas de uso
EAI	Esquema de atividades instrumentadas
EACI	Esquema de atividades coletivas instrumentadas
LG	Lugar Geométrico
CNE/CP	Conselho Nacional de Educação – Conselho Pleno
GGB	Geometria Gráfica Bidimensional
Id.	do mesmo autor

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	16
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E PROBLEMÁTICA DA PESQUISA	22
2.1 APRENDIZAGEM COLABORATIVA COM SUPORTE COMPUTACIONAL – CSCL.....	22
2.1.1 Aprendizagem colaborativa e aprendizagem individual	24
2.1.2 Colaboração face - a -face	25
2.1.3 Roteiros de Colaboração	26
2.1.4 Análise da CSCL	27
2.2 ABORDAGEM INSTRUMENTAL	28
2.2.1 Esquemas de Atividades Coletivas Instrumentadas	33
2.2.2 Artefatos simbólicos	35
3 GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS E A GEOMETRIA DO TÁXI.....	38
3.1 BREVE HISTÓRIA DAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS	38
3.2 GEOMETRIA DO TÁXI: NOÇÕES E DEFINIÇÕES INICIAIS.....	40
3.2.1 Conceito de distância na Geometria do Táxi	42
3.2.2 Lugares Geométricos	47
3.3 ASPECTOS DIDÁTICOS DA GEOMETRIA DO TÁXI	57
4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	63
4.1 DELIMITAÇÃO DO CAMPO, SUJEITOS DA PESQUISA E SOFTWARE DE GEOMETRIA DINÂMICA	63
4.2 CONCEPÇÃO DO EXPERIMENTO	66
4.2.1 Elaboração e refinamento das situações problemas para a GT	66
4.2.2 Roteiro de colaboração	82
4.3 DESCRIÇÃO DO EXPERIMENTO	83
4.4 CRITÉRIOS DE ANÁLISE	87
5 RESULTADOS	91
5.1 SITUAÇÃO PROBLEMA 1.....	92
5.2 SITUAÇÃO PROBLEMA 2.....	101
5.2.1 Questão A.....	101
5.2.2 Questão B.....	107
5.2.3 Questão C.....	116
5.2.4 Questão D.....	119

5.3 SITUAÇÃO PROBLEMA 3.....	124
5.4 SITUAÇÃO PROBLEMA 4.....	130
5.5 SÍNTESE DOS RESULTADOS.....	140
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	144
REFERÊNCIAS.....	152
APÊNDICES	158

1 INTRODUÇÃO

As mudanças na sociedade, sejam decorrentes das tecnologias ou das relações sociais, têm possibilitado aos sujeitos novas formas de comunicação, interação e compartilhamento de informações por meio de recursos tecnológicos e de recentes práticas sociais. Diante destes cenários, questiona-se o impacto destas mudanças no campo educacional e se este vem se adaptando às demandas sociais.

Neste contexto, o processo de aprendizagem está passando, de maneira mais evidente, por uma transformação no que se refere ao papel dos sujeitos nele envolvidos. Diferente dos métodos de ensino baseados na transmissão de conhecimento, tendências educacionais atuais (FILATRO, 2018; BACICH E MORAN, 2018; SILVA E BARROS, 2019) têm fundamentado suas discussões em correntes teóricas que colocam o aluno como sendo o centro da aprendizagem. Diante dessa reconfiguração, esta pesquisa tem como foco discutir sobre o papel da interação entre sujeitos como central no processo de aprendizagem.

A aprendizagem pode ser entendida como a capacidade de adquirir conhecimentos a partir de estudos e experiências. Este processo possibilita distintos olhares sobre a aquisição de conhecimento e é foco de inúmeras pesquisas no âmbito educacional.

Uma das possibilidades apontadas pelas novas tendências educacionais é a aprendizagem colaborativa, que possibilita que os sujeitos aprendam por meio da colaboração com outros. Desta maneira, nosso interesse é compreender como a colaboração enquanto prática educacional pode contribuir de maneira efetiva na aprendizagem dos sujeitos.

A colaboração tem sido considerada como uma das habilidades propostas, no século XXI, como necessárias para o desenvolvimento dos indivíduos, seja no âmbito educacional, mercado de trabalho ou na própria convivência em sociedade. Torres e Irala (2015) apontam que a colaboração, vista como prática educacional, tem potencial de promover aprendizagens mais ativas a partir das interações sociais, conhecimentos individuais dos sujeitos, suas experiências e entendimento de mundo.

Apesar de esta temática surgir de maneira mais recorrente nas discussões atuais, podemos compreender sua importância desde os estudos do professor e pesquisador bielorusso Vygotsky (1896 – 1934) que se dedicou a estudar os

processos psicológicos humanos, a exemplo de esquemas mentais de sujeitos em interações com outros sujeitos. No Brasil, o primeiro contato com suas obras se deu em 1984, ano da publicação da tradução do livro *A Formação Social da Mente*. Seus trabalhos foram amplamente divulgados, traduzidos e utilizados em pesquisas que estudavam o desenvolvimento cognitivo por meio da interação social, ou seja, de sua interação com outros indivíduos e com o meio.

A aprendizagem colaborativa, em uma perspectiva sociointeracionista, considera que as interações entre sujeitos que buscam aprender algo juntos contribuem para a construção do conhecimento, uma vez que, por meio delas há troca de informações e confronto de ideias.

A aprendizagem colaborativa envolve sujeitos em torno de uma problemática, sendo o objetivo comum encontrar soluções a partir do conhecimento promovido por meio das interações. É válido ressaltar que as interações que dão sentido à aprendizagem colaborativa podem surgir em diferentes contextos, a exemplo de atividades em grupo em uma sala de aula presencial ou na educação a distância, na qual são integrados recursos tecnológicos, a exemplo de software de Geometria Dinâmica como o GeoGebra.

Quando discutimos sobre a aprendizagem colaborativa estamos falando de construção de conhecimento e de significados a partir de interações entre sujeitos. Desta maneira, nesta pesquisa, nos questionamos inicialmente como os sujeitos aprendem de maneira colaborativa e como se dá esta aprendizagem em relação aos esquemas mobilizados.

Para compreender como os sujeitos aprendem de maneira colaborativa com auxílio de recursos computacionais tomamos como referencial a noção de Aprendizagem Colaborativa com Suporte Computacional (*Computer-supported collaborative learning - CSCL*) discutida em trabalhos de Dillenbourg (1996) e Stahl, Koschmann e Suthers (2006). A apropriação de artefatos simbólicos pelos sujeitos, será analisada a partir da Gênese Instrumental de Rabardel (1995) com ênfase nos esquemas de atividades coletivas instrumentadas¹. Propomos utilizar elementos dessas teorias por compreender em que essas se complementam à medida que discutem a aprendizagem e a apropriação de recursos e conceitos quando envolvidos em atividades em grupo.

¹ O sentido dos termos do referencial teórico utilizado será discutido adiante no texto.

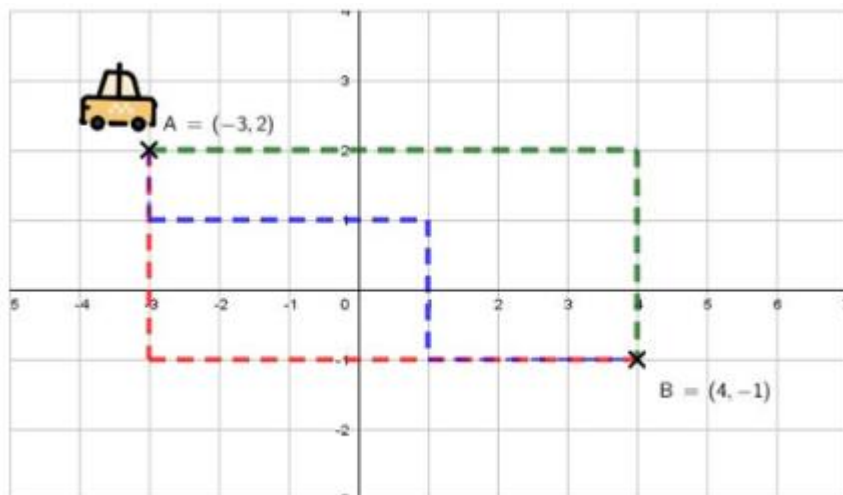
Quando nos referimos à apropriação de um artefato, nos referimos inicialmente à própria etimologia da palavra apropriar, *tornar próprio*. Consideramos a apropriação de um artefato como o processo pelo qual o sujeito desenvolve esquemas para utilizá-lo.

Nessa pesquisa, nosso interesse se volta para a apropriação de artefatos simbólicos na resolução de problemas acerca da Geometria do Táxi de maneira colaborativa utilizando o software GeoGebra. Os participantes escolhidos são licenciandos de um curso de formação inicial de professores para o ensino da Geometria Gráfica.

Com a pesquisa pretendemos promover uma aproximação entre sujeitos em formação inicial com diferentes práticas de ensino e diferentes olhares sobre o processo de aprendizagem. Vale ressaltar que estamos considerando os participantes da pesquisa em sua condição de estudantes, não sendo foco de interesse da pesquisa discutir sobre a formação docente deles. Apesar dessa escolha de delimitação, pretendemos por meio desse estudo promover uma aproximação dos futuros professores com diferentes conteúdos de geometria e olhares sobre o processo de aprendizagem, o que pode indiretamente trazer algum enriquecimento para a prática profissional futura dos participantes.

Considerando a delimitação do campo e dos sujeitos, tomamos como objeto matemático a Geometria do Táxi (GT), uma geometria não euclidiana que considera a noção de distância a partir uma “cidade ideal” na qual a determinação das distância será horizontal e vertical, conforme ilustrado na figura 1.

Figura 1 - Trajetos na Geometria do Táxi



Fonte: Elaborada pela autora

Para a pesquisa foi dada ênfase aos conceitos da GT que se relacionam com os lugares geométricos de equidistância na Geometria Euclidiana. O principal conceito, será o de táxi-distância, que será o artefato simbólico, e a sua aplicação nos conceitos de táxi-circunferência, táxi-mediatrix e ponto médio. A escolha do conteúdo considera sua importância na interpretação e representação de localizações e deslocamentos no plano, que segundo Leivas (2016) é uma das necessidades para o desenvolvimento do pensamento geométrico.

Leivas (2016) considera que o estudo da Geometria do Táxi por meio de atividades com a participação dos alunos propicia a interatividade e aprendizagem colaborativa nas diferentes formas de utilização da GT.

Além dos aspectos relacionados à construção de novos conhecimentos por meio dos conceitos da Geometria do Táxi a escolha desta se justifica, pois, sendo ela uma geometria pouco estudada na educação básica e superior, e, em específico, pelos participantes da pesquisa, apresenta situações desafiadoras, o que possibilita maior interação entre os participantes.

Em relação à proposta de análise dos esquemas desenvolvidos pelos participantes, destacamos que a Geometria do Táxi apresenta potencial para explorar conceitos que, embora sejam do conhecimento dos participantes quando trabalhados na Geometria Euclidiana, como a noção de distância e os lugares geométricos de equidistância, são considerados “novos” por se tratar de um artefato simbólico fundamentado em uma geometria até então desconhecida. Mudar o olhar sobre os conhecimentos envolvidos promove a ressignificação destes diante das representações e características próprias nessa geometria não euclidiana, o que torna um artefato novo para os participantes.

Entendemos dessa forma, que propor situações problemas a serem resolvidas de maneira colaborativa exige uma atenção maior aos conceitos trabalhados, visto que, é necessário que os conceitos sejam também um fator que possibilite a colaboração a partir dos esquemas desenvolvido pelos participantes.

Para auxiliar na resolução colaborativa dos problemas, utilizamos como recurso computacional o software de Geometria Dinâmica GeoGebra por considerar, dentre outros fatores, a possibilidade de realizar construções geométricas, testar hipóteses por meio da dinamicidade, bem como validar propriedades e invariantes das construções realizadas. Em Bairral e Marques (2016) encontramos que por meio

do uso de software de geometria dinâmica como o GeoGebra, é possível expandir as formas de justificativas e de demonstração de um problema.

Diante dos aspectos explicitados, nossa pesquisa tem como objetivo geral *analisar o processo de aprendizagem colaborativa com base nos esquemas de atividades coletivas instrumentadas de licenciandos de um curso voltado ao estudo de Geometria Gráfica com ênfase na apropriação do artefato simbólico táxi-distância por meio da resolução de situações problemas.*

A fim de atingir o objetivo geral, organizamos nossos objetivos específicos considerando os principais aspectos teóricos da pesquisa. Os objetivos são:

a) *Identificar indícios do desenvolvimento de esquemas de atividades coletivas instrumentadas a partir das sequências de interações na realização das situações problemas;*

b) *Investigar o processo de instrumentalização dos licenciandos em relação ao artefato simbólico táxi-distância;*

c) *Investigar o processo de instrumentação da táxi-distância a partir da resolução das situações problemas;*

d) *Apontar por meio dos esquemas de atividades coletivas instrumentadas elementos que indiquem a apropriação colaborativa do artefato simbólico táxi-distância.*

Após ter apresentado os principais aspectos e os objetivos da pesquisa organizamos a estrutura do texto de acordo com os fundamentos teóricos, discussão sobre a Geometria do Táxi, procedimentos metodológicos, análise dos dados e as considerações finais da pesquisa.

No Capítulo 2, dedicado à fundamentação teórica e à construção da problemática da pesquisa são apresentados os principais aspectos da CSCL, como a relação entre aprendizagem colaborativa e individual, colaboração face-a-face, roteiro de colaboração e análise da CSCL, bem como a Abordagem Instrumental, com ênfase nos elementos que a compõem, os esquemas de uso, a Gênese Instrumental e o Modelo SAI. Ainda neste capítulo, enfatizamos os esquemas de atividades coletivas instrumentadas e o uso de artefatos simbólicos apontando os motivos pelos quais estes são parte central da pesquisa.

No capítulo 3, realizamos um estudo sobre a Geometria do Táxi. Para isso, são apontados aspectos relacionados às geometrias não euclidianas, ao ensino da Geometria do Táxi por meio de uma breve revisão de trabalhos identificados na

literatura sobre a temática e as definições e relações entre a Geometria do Táxi e a Geometria Euclidiana.

No capítulo seguinte destacamos os procedimentos metodológicos: situamos as escolhas metodológicas, como a escolha do campo de pesquisa, trazemos a escolha dos sujeitos e sua caracterização. Neste capítulo são descritas as etapas da pesquisa, direcionadas à concepção do experimento e aos critérios de análise.

O resultados obtidos de acordo com os critérios de análise estabelecidos estão contemplados no capítulo 5. Por fim, no capítulo 6 apontamos nossas considerações finais e apontamentos para estudos futuros.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E PROBLEMÁTICA DA PESQUISA

Para fundamentar as discussões sobre o processo de apropriação de artefatos simbólicos em uma situação de colaboração, tomamos como base teórica a Aprendizagem Colaborativa com Suporte Computacional – CACL discutida por Dillenbourg (1998) e Stahl, Koschmann e Suthers (2006) e a Abordagem Instrumental com ênfase nos trabalhos de Rabardel (1995), Trouche (2004) e Drijvers e Trouche (2008).

2.1 APRENDIZAGEM COLABORATIVA COM SUPORTE COMPUTACIONAL – CACL

O conceito de colaboração tem sido bastante discutido atualmente em diferentes setores da sociedade ao descrever atividades em que duas ou mais pessoas atuam juntas em prol de um objetivo comum.

Novas tendências educacionais têm colocado a colaboração como uma das habilidades necessárias para o desenvolvimento dos indivíduos tanto no que se refere ao seu processo de aprendizagem quanto à sua formação cidadã. Sobre isso, Wagner (2008) aponta a colaboração como uma das sete habilidades de sobrevivência para carreiras, faculdade e cidadania.

Segundo Lipponen (2002), a ideia de que a colaboração é uma forma básica de atividade humana, essencial para o desenvolvimento cultural, é intensamente enfatizada ao longo da história da psicologia (WUNDT, 1921; MEAD, 1934; VYGOTSKY, 1962; 1978; ENGSTRÖM, 1987; HUTCHINS, 1995; BRUNER, 1996; TOMASELLO, 1999).

Em Roschelle e Teasley (1995, p.70) encontramos que a aprendizagem colaborativa é compreendida como sendo “uma atividade coordenada e síncrona que é o resultado de uma tentativa contínua de construir e manter uma concepção compartilhada de um problema”.

Ao tratarmos nesta pesquisa da colaboração no âmbito educacional nos dedicamos a analisar como estas contribuem de fato no processo de aprendizagem dos sujeitos.

Inicialmente foi necessário entender a definição de aprendizagem colaborativa, as características da *CSCL* e a relação entre aprendizagem colaborativa e individual.

Dentro das discussões sobre a colaboração no meio acadêmico existem diferentes maneiras de interpretá-la. Alguns autores, como Stahl, Koschmann e Suthers (2006) e Dillenbourg (1996,1999) consideram a colaboração como a co-construção de conhecimento e engajamento mútuo dos participantes o que a caracteriza como uma forma especial de interação. Há, ainda, outros autores que consideram a colaboração como a participação em atividades coletivas, sem enfatizar a questão da construção de conhecimento coletivo.

Tomaremos como base a primeira interpretação sobre a colaboração, apoiando nossas discussões principalmente em trabalhos de Stahl, Koschmann e Suthers (2006) e de Dillenbourg (1996,1999) buscando combinar as ideias dos autores para compreender as diferentes variáveis envolvidas em um processo de colaboração e como os sujeitos aprendem juntos com auxílio de recursos tecnológicos.

Nessa perspectiva, consideramos o enfoque da *CSCL* na teoria sócio – construtivista de Vygotsky (1998) que defende que a aprendizagem, enquanto desenvolvimento do pensamento lógico e científico, realiza-se por meio da interação comunicativa, o que possibilita a construção social do conhecimento.

De maneira ampla, Dillenbourg (1999) define que a aprendizagem colaborativa corresponde a uma situação na qual duas ou mais pessoas aprendem ou tentam aprender algo juntas. Stahl, Koschmann e Suthers (2006) ao considerarem a dimensão tecnológica ampliam essa definição considerando a *CSCL* como um ramo emergente das ciências da aprendizagem que estuda como as pessoas podem aprender em grupo com o auxílio do computador.

Apesar das definições dadas pelos autores no primeiro momento parecerem simples, a *CSCL* apresenta diversas variáveis que tornam por vezes a compreensão sobre ela complexa.

Quando tratamos da *CSCL*, é importante compreender aspectos como a diferença entre cooperação e colaboração, a aprendizagem em grupo e aprendizagem individual, suporte tecnológico para aprendizagem colaborativa e a montagem de roteiros de colaboração.

No que se refere à distinção entre cooperação e colaboração, Stahl, Koschmann e Suthers (2006, p.3) argumentam que:

Na cooperação, a aprendizagem é realizada por indivíduos que contribuem com seus resultados individuais e apresentam a sua agregação como o produto do grupo [...] na colaboração os indivíduos estão envolvidos como membros do grupo, mas as atividades nas quais eles estão engajados não são atividades de aprendizagem individual, mas sim nas interações do grupo, como negociação e compartilhamento. Os participantes não se isolam para realizar atividades individualmente, mas mantêm-se engajados em uma tarefa compartilhada que é construída e mantida pelo e para o grupo como tal.

No sentido apontado pelos autores, compreendemos que na cooperação, mesmo os sujeitos estando envolvidos em uma atividade de grupo cada membro elabora suas ideias individualmente e compartilha com o grupo sem que necessariamente sejam realizadas discussões sobre estas ideias, enquanto que na colaboração as ideias se desenvolvem à medida em que os participantes do grupo interagem, discutem diferentes pontos de vista, negociam, pensam em conjunto e chegam a um consenso a respeito da solução para a atividade que está sendo realizada.

Para que seja possível desenvolver uma situação colaborativa em que haja negociação e compartilhamento de ideias, compreendemos ser importante que os sujeitos estejam cientes de como proceder em uma discussão colaborativa para que não exista a predominância do pensamento individual ao invés do desenvolvimento colaborativo. Neste ponto, é importante compreender aspectos da *CSCL* que discutem sobre a aprendizagem individual e a aprendizagem em grupo.

2.1.1 Aprendizagem colaborativa e aprendizagem individual

A *CSCL* surgiu como reação aos software² que levavam os alunos a trabalharem de maneira individualizada e isolada sem considerar as potencialidades da internet para conectar pessoas.

Na *CSCL*, o foco está direcionado à construção de significados, tendo o grupo como unidade, sem desconsiderar que os grupos são formados por sujeitos que pensam e agem de maneiras diferentes. Sobre esta questão e corroborando com

² Embora o termo software seja uma palavra estrangeira, o fato de ser amplamente incorporado na língua portuguesa leva a que seja utilizado sem itálico ao longo do texto.

Sfard (2008) reconhecemos que, apesar de o pensamento ser uma maneira individualizada da comunicação interpessoal, em uma atividade realizada em grupo o que o indivíduo cria corresponde a um produto de um fazer coletivo.

Anteriormente, tratava-se a aprendizagem em grupo, fundamentalmente, como um processo individual e considerava-se o fato de os sujeitos trabalharem juntos como uma variável contextual que influenciava a aprendizagem individual. Nesse sentido, é importante apontar que a CSCL propõe que a aprendizagem seja analisada como um processo de grupo, sem desconsiderar a análise da aprendizagem individual (STAHL, KOSCHMANN E SUTHERS, 2006).

Araújo Filho (2015, p.20) com base em Dillenbourg et al (1996) afirma que:

O processo de dissociação entre o indivíduo e o grupo é algo complexo, mas que deve considerar os dois lados, sem necessariamente haver uma separação. Falando em CSCL isto se torna mais complicado, pois em interações colaborativas não vemos as ações dos sujeitos um a um, consideramos apenas a essência do coletivo como unidade.

Ainda que na CSCL a análise individual não seja desconsiderada, é importante evidenciar que, nela, o foco não está no que o sujeito constrói individualmente, mas no que está se passando entre e por meio dos sujeitos nas suas interações, uma vez que os sujeitos não estão reagindo de maneira isolada e sim aprendendo “através de suas perguntas, perseguindo conjuntamente linhas de raciocínio, ensinando um ao outro e vendo como os outros estão aprendendo” (STAHL, KOSCHMANN E SUTHERS ,2006, p.2).

2.1.2 Colaboração face - a -face

A aprendizagem colaborativa pode ocorrer de diferentes modos, sendo eles remoto, presencial, síncrono ou assíncrono.

Na CSCL, embora haja uma ênfase maior na colaboração remoto/online, esta também abrange a colaboração face-a-face (F2F). Neste modo de colaboração, o suporte computacional pode estar relacionado, por exemplo, com uma simulação computacional de algum modelo científico ou a representações compartilhadas.

Segundo Stahl, Koschmann e Suthers (2006), em situações de colaboração face-a-face, o foco é nas construções e explorações de simulações ou

representações, nas quais os alunos podem usar o recurso tecnológico e discutir, debater e apresentar o que aprenderam colaborativamente.

Dillenbourg (2002) aponta que, em situações de colaboração face-a-face, as interações são ricas. Apoiados nesta afirmação de Dillenbourg, compreendemos que devido a menor exigência de adaptação da linguagem necessária em um ambiente colaborativo online os sujeitos consigam expor suas opiniões de maneira mais objetiva.

É importante enfatizar que não há um modo de colaboração superior aos demais, uma vez que o contexto de cada situação é que irá determinar o modo que melhor se adequa as necessidades do grupo envolvido.

Em nossa pesquisa, consideramos os modos de colaboração principalmente presencial com momentos virtuais e/ou remoto, ambos síncronos, para observar e analisar o desenvolvimento dos esquemas coletivos dos participantes na apropriação de um artefato simbólico.

2.1.3 Roteiros de Colaboração

Os *scripts* ou roteiros de colaboração são conjuntos de instruções relativas à forma como os membros de um grupo devem interagir, como eles devem colaborar e como eles devem resolver o problema (DILLENBOURG,2002).

Estes roteiros são projetados tanto para apoiar a colaboração à distância quanto à presencial.

Os *scripts*, segundo Dillenbourg e Tchounikine (2007, p.1), visam estruturar processos colaborativos definindo sequências de atividades, criando papéis dentro dos grupos e restringindo o modo de interação entre pares ou entre grupos³.

Dillenbourg e Hong (2008) distinguem dois tipos de *scripts*:

- a) *Macro-scripts*: são modelos pedagógicos, ou seja, modelam uma sequência de atividades a ser realizada por grupos.
- b) *Micro-scripts*: são modelos de diálogo, principalmente modelos de argumentação, que são incorporados no ambiente colaborativo.

³ *Scripts aim at structuring collaborative processes by defining sequences of activities, by creating roles within groups and by constraining the mode of interaction among peers or between groups.*
Tradução nossa

No sentido apontado pelos autores entendemos que os *micro-scripts* são roteiros mais detalhados em que o mediador define o papel dos participantes de maneira a conduzir a colaboração desejada, enquanto os *macro-scripts* são definidos como roteiros de atividades mais gerais, nos quais são descritos o ambiente e sua estrutura, sem especificar papéis e as situações de aprendizagem que devem ocorrer

É importante que os roteiros apresentem informações sobre o ambiente *CSCL* em que as atividades irão se desenvolver para possibilitar maior interação entre os sujeitos mediados pelos recursos disponíveis. Os roteiros também precisam ser planejados considerando o contexto de sua aplicação e seus objetivos.

Para nosso trabalho, utilizamos a noção de *macro- scripts* de colaboração, por ter como objetivo analisar o desenvolvimento e a evolução dos esquemas dos sujeitos ao trabalharem de maneira colaborativa.

2.1.4 Análise da *CSCL*

As dimensões que compõe a *CSCL* apontam para uma área de estudo que se dedica a entender como os sujeitos constroem significados em atividades nas quais trabalham juntos com auxílio de recursos tecnológicos.

Para analisar se houve de fato construção de significados, não é possível observar apenas a construção individual dos sujeitos, pois a aprendizagem ocorre durante as interações colaborativas. Sobre isso, Stahl, Koschmann e Suthers (2006) apontam que a construção de significado não está atribuída às declarações individuais pois ele, – o significado, depende das referências compartilhadas e das declarações dos outros sujeitos.

Dillenbourg (1999) defende, ainda, que existe uma escala para analisar uma situação de colaboração, visto que cada situação apresenta configurações, objetivos e sujeitos diferentes. Essa escala considera que o tamanho do grupo e o intervalo de tempo influenciam na análise dos aspectos envolvidos na situação.

Identificar elementos que dêem subsídios para apontar que de fato ocorreu a aprendizagem colaborativa é um dos desafios da *CSCL* visto que nem sempre é possível dissociar a aprendizagem colaborativa da individual.

Outro desafio a respeito da análise em ambientes *CSCL* é que não há um consenso sobre uma unidade de análise, por considerar que essa análise depende do contexto teórico e das definições de colaboração utilizadas.

Diante disto, propomos uma aproximação com os estudos de Rabardel (1995) que ao apresentar a noção de esquemas de atividades coletivas instrumentadas⁴ nos traz elementos que julgamos serem adequados para analisar em uma proposta da *CSCL* como os sujeitos se apropriam de um conceito e constroem significados a partir dele.

Trabalhar com um sistema *CSCL* muitas vezes implica em analisar um ‘sistema de instrumentos’ (RABARDEL; BOURMAUD, 2003), sendo cada um destes instrumentos associados a alguma atividade ou serviço oferecido. Segundo Rabardel e Bourmaud (2003) a complexidade em analisar este tipo de situação decorre não apenas do número de instrumentos considerados, mas também do fato de cada instrumento pode executar uma ou mais funções previstas, bem como outras desenvolvidas pelos sujeitos.

Autores como Powell, Alqahtani e Singh (2018), Lonchamp (2012) e Ritella e Hakkarainen (2012) propõem analisar a *CSCL* a partir da Gênese Instrumental, por considerarem que a abordagem de Rabardel pode ser utilizada para analisar qualquer tipo de situação mediada por instrumentos, como também analisar como sujeitos se apropriam de um determinado artefato com uma finalidade e contexto específicos.

Apresentamos na seção seguinte os principais conceitos relacionados a proposta de Rabardel (1995) e de seu uso pedagógico por meio dos trabalhos de Trouche (2004) e Drijvers e Trouche (2008).

2.2 ABORDAGEM INSTRUMENTAL

A teorização proposta por Pierre Rabardel (1995) baseia-se nas ideias da Ergonomia Cognitiva que estuda a relação entre homens e máquinas com uma abordagem focada na mediação de atividades por meio do uso de artefatos. Neste contexto, Rabardel (id.) aponta que se trata de uma perspectiva predominantemente

⁴ Definição será trabalhada no capítulo seguinte.

antropocêntrica na qual o homem ocupa uma posição central e a partir da qual estabelece as relações com técnicas, máquinas e sistemas.

Segundo Falzon (2007, p.5), a ergonomia cognitiva “trata dos processos mentais, tais como a percepção, a memória, o raciocínio e as respostas motoras, com relação às interações entre as pessoas e outros componentes de um sistema.”

Rabardel (1995) propõe a Abordagem Instrumental para buscar compreender como o sujeito interage com os objetos ao seu redor e os modifica de acordo com seus esquemas pessoais. Segundo o autor, o foco dessa abordagem é a dialética entre *artefato* e *instrumento*, que ocorre a partir do desenvolvimento dos esquemas de utilização.

Na discussão sobre artefatos e instrumentos é importante distinguir os dois conceitos e entender os papéis de cada um dentro da proposta de Rabardel (id.).

O artefato corresponde ao objeto por si só, com características próprias e de caráter estático. Segundo Rabardel (2002) os artefatos são considerados objetos materiais ou simbólicos, podendo ser um meio material como um compasso, um computador ou um meio simbólico como uma linguagem, um conceito matemático.

Quanto ao instrumento é importante destacar que ele não existe por si “só”, uma vez que, depende da ação do sujeito ao incorporar o artefato às suas atividades, ou seja, é uma construção do sujeito ao longo de um processo de transformação.

Diante disto, é possível compreender que o instrumento possui um caráter dinâmico, uma vez que este se modifica e evolui a partir da ação do sujeito em diferentes situações.

Segundo Rabardel (1995), no processo de transformação do artefato em instrumento os sujeitos desenvolvem diferentes esquemas de utilização, sendo estes, parte da noção central desta teoria.

Rabardel (1995) considera a noção de esquema próxima a que é descrita por Vergnaud (1990) que comporta quatro elementos, sendo eles: *a)* antecipação do objetivo que ele quer atingir; *b)* regras de ação, que irão gerar a ação do sujeito; *c)* inferências, que permitem que o sujeito avalie suas ações e, *d)* invariantes operatórios. Sendo assim, a noção de esquema na abordagem instrumental corresponde às ações dos sujeitos mediadas pelo artefato para atender os objetivos propostos e que são nomeados como esquemas de utilização.

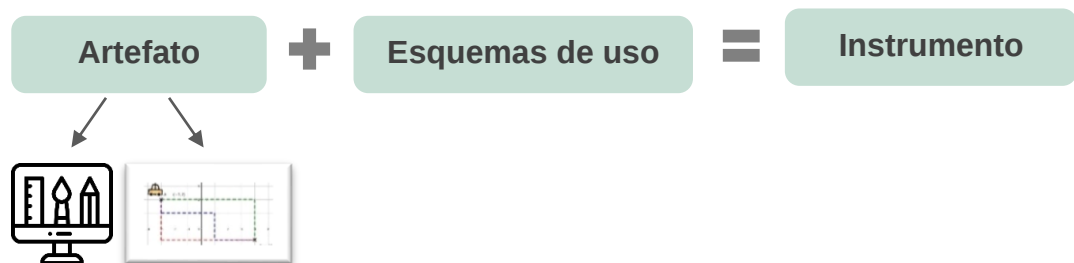
Para compreender estes esquemas de utilização, tomemos como exemplo a situação apresentada por Bittar (2011, p. 161), que trata do uso de um software como o *Cabri-Géomètre*, por um professor para o qual o software é desconhecido.

Ao entrar em contato com este material que não conhece, não sabe manipular nem mesmo as ferramentas básicas, este software é, para este professor, um artefato. À medida que ele começa a desvendar o material, descobrir como ele funciona e elaborar situações de uso do software, o professor está desenvolvendo e agregando ao artefato esquemas de utilização e, então, o artefato é transformado, para este professor, em instrumento. Quanto mais ele usar este instrumento, mais esquemas podem ser construídos, agregados ao software e o professor terá, então, um novo instrumento.

Os esquemas de utilização (EU) desenvolvidos pelo professor auxiliam na transformação do artefato (*Cabri-Géomètre*) em um instrumento.

Dentro da discussão sobre a elaboração de instrumentos pelos sujeitos por meio dos esquemas de utilização, Rabardel (1995) apresenta a noção de Gênese Instrumental, ideia central da abordagem instrumental, que se refere ao processo de transformação do artefato em instrumento.

Figura 2 – Representação da Gênese Instrumental



Fonte: Elaborado pela autora adaptado do esquema de Drijvers e Trouche (2008)

A noção de Gênese instrumental foi integrada na Didática da Matemática por meio dos trabalhos de Guin e Trouche (1999; 2002) quando aplicado no uso de calculadoras gráficas.

A Gênese Instrumental corresponde à transformação gerada pela ação do sujeito sobre o artefato, sendo estes utilizados de acordo com a função para qual foi idealizado ou não, tornando-o um instrumento na medida em que o sujeito se apropria dele ao integrá-lo à sua prática.

As elaborações instrumentais dos usuários são, portanto, ao mesmo tempo direcionadas aos próprios sujeitos e ao artefato. Estes processos foram nomeados no âmbito da Gênese Instrumental como instrumentação e instrumentalização, respectivamente.

Rabardel (1995) descreve estes processos da seguinte maneira:

- Instrumentalização: está relacionada com o enriquecimento de propriedades, funcionalidades e interface do artefato pelo sujeito. O artefato é moldado pelo sujeito.
- Instrumentação: relacionada ao surgimento e evolução dos esquemas de uso e ação instrumentadas. O uso do artefato molda o pensamento do sujeito.

A instrumentalização baseia-se em propriedades e características intrínsecas do artefato, no entanto, ele pode assumir uma função extrínseca atribuída pelo sujeito para que o artefato seja transformado em um instrumento. Rabardel (1995) aponta dois níveis considerados na instrumentalização: o primeiro tem uma característica local, quando vinculada a uma ação singular, na qual o artefato é momentaneamente instrumentalizado. Já no segundo nível, a função se conserva de maneira durável como propriedade do artefato, portanto a instrumentalização é durável ou permanente.

Neto e Silva (2017, p.123) indicam que o acompanhamento da dimensão da instrumentalização deverá ocorrer “mediante análise dos esquemas que são mobilizados em cada uma das tentativas de ação com o artefato”.

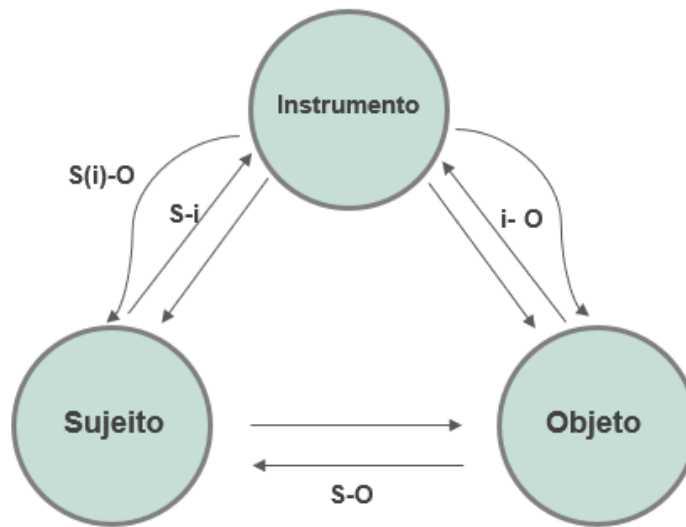
A dimensão da instrumentação está relacionada ao surgimento e evolução dos padrões de uso do artefato. Segundo Rabardel (1995), ela se caracteriza como a descoberta progressiva do artefato pelos sujeitos acompanhada da acomodação de seus esquemas, mas também por mudanças no significado do instrumento resultante da associação do artefato a novos padrões.

Segundo Hoyles e Noss (2003), a diferença entre essas duas dimensões consiste na interação bidirecional, na qual o pensamento do sujeito é moldado pelo artefato, mas também molda o artefato.

Para Drijvers e Trouche (2008) as dimensões da instrumentalização e instrumentação envolvem o desenvolvimento de esquemas mentais e que a partir deles são organizadas as estratégias de solução de problemas.

Na busca de compreender os elementos envolvidos na transformação do artefato em um instrumento, Rabardel e Vérillon (1985) propõem o modelo SAI (Situações de Atividades Instrumentais) composto por: a) sujeito: dirige a ação psíquica sobre o objeto; b) instrumento: é o mediador entre o sujeito e o objeto; e c) objeto: é sobre ele que a ação é dirigida.

Figura 3 - Modelo SAI



Fonte: Elaborado pela autora (Adaptado de Rabardel,1995)

No modelo SAI, são apresentadas as relações entre o sujeito e o objeto mediadas pelo instrumento. Para Rabardel (1995), o modelo evidencia a multiplicidade e complexidade das interações entre os vários elementos. Sendo elas:

- Sujeito- objeto [S-O]
- Sujeito-instrumento [S-i]
- Instrumento-objeto [i-O]
- Sujeito-objeto mediado pelo instrumento [S(i)-O]

O modelo SAI permite, assim, analisar os processos de instrumentalização, que ocorre na interação sujeito-objeto mediada pelo instrumento [S(i)-O] e entre Instrumento-objeto [i-O] e o processo de instrumentação, na interação entre sujeito-instrumento [S-i].

Considerando os aspectos relacionados à abordagem instrumental concordamos com Bittar (2011) quando aponta que essa abordagem fornece elementos teóricos apropriados ao estudo da ação do sujeito, mediada por um instrumento.

A noção de Esquemas de utilização (EU) inclui diferentes variantes, como os Esquemas de Uso (EUs), os Esquemas de Ações Instrumentadas (EAI) e os Esquemas de Atividades Coletiva Instrumentadas (EACI) e que podem ser compreendidos por meio de duas dimensões associados às atividades.

Voltando ao exemplo de Bittar (2011), podemos caracterizar da seguinte maneira:

- Atividades secundárias: são relativas à gestão das características e propriedades particulares do artefato – o software *Cabri-Géomètre*. Nesta dimensão, são desenvolvidos os EUs, que são aqueles relacionados ao funcionamento e manipulação do artefato.
- Atividades primárias: orientadas ao objeto da atividade, e para a qual o artefato é um meio de realização, por exemplo, se o objetivo é construir um polígono, ao aprender a usar a ferramenta do *Cabri-Géomètre* para realizar a tarefa (o objetivo da ação do sujeito) o sujeito estará desenvolvendo um EAI. Esses esquemas, EAI vão progressivamente, constituindo-se em técnicas que permitem resolver eficientemente certas tarefas (ARTIGUE, 2002).

O mesmo esquema pode, portanto, segundo Rabardel (1995), dependendo da situação assumir o *status* de EUs ou EAI. É necessário enfatizar que este processo é cíclico e em dado momento um esquema de ação instrumentada para um sujeito pode voltar a ser esquema de uso de acordo com a situação.

2.2.1 Esquemas de Atividades Coletivas Instrumentadas

Ao analisar os esquemas propostos na teoria, é possível perceber que eles estão relacionados ao trabalho individual dos sujeitos. Rabardel (1995) admite, porém, que muitas vezes o artefato é utilizado em um contexto coletivo, no qual um mesmo artefato pode ser usado, simultaneamente ou conjuntamente, por um grupo para realizar uma tarefa comum ou compartilhada.

O autor defende que os artefatos cuja utilização é pública e observável em detalhe pelos outros membros do coletivo criam boas condições para a aquisição de habilidades, mas, também, para a tomada de decisões confiáveis que podem ser controladas por uma multiplicidade de autores.

Para o autor, parece óbvio que os sujeitos envolvidos em uma atividade coletiva irão mobilizar seus EUs e EAI. No entanto, Rabardel (id.) aponta que o caráter coletivo da atividade pede o estabelecimento e implantação de esquemas específicos.

Nesse sentido, surge o terceiro nível de esquemas que são os esquemas de atividades coletivas instrumentadas (EACI), que se referem ao trabalho com um mesmo instrumento ou classes de instrumentos por diferentes sujeitos fazendo com que os esquemas de utilização possuam uma dimensão privada e outra social (ABAR; ALENCAR, 2013).

Em relação aos EACI, percebe-se que estes emergem a partir dos EUs e EAI e por outro lado os EACI são uma fonte de EUs e EAI, podendo desenvolver, evoluir e recompor as ações dos sujeitos.

Os EACI correspondem ao resultado de interações nas quais a construção de significado ocorre mediante o compartilhamento de conhecimentos, hipóteses e por meio de ação conjunta dos sujeitos ao trabalharem com um mesmo instrumento.

Ao relacionar os EACI com a abordagem de colaboração apresentada na CSCL, entendemos que a aprendizagem colaborativa não se realiza simplesmente na interação, visto que é necessário que haja mobilização dos esquemas individuais dos sujeitos para que ocorra a construção de significado, sendo essa construção relacionada também à transformação do artefato em instrumentos.

Para a análise dos esquemas elaborados pelos sujeitos, é importante destacar que não podemos observar diretamente os seus esquemas mentais. Drijvers e Trouche (2008) enfatizam que as observações são limitadas às técnicas que os sujeitos utilizam no uso do artefato e à maneira como relatam sobre elas por meio do registro escrito ou oral e que, a partir destes dados, há uma tentativa de reconstrução dos esquemas.

2.2.2 Artefatos simbólicos

Os artefatos, como visto anteriormente, podem ser materiais ou simbólicos. Quando tratamos dos artefatos simbólicos consideramos que estes podem ser uma figura, um gráfico, um método ou até mesmo uma propriedade de determinado objeto.

Assim como os artefatos materiais, os artefatos simbólicos precisam estar associados a esquemas de uso, passando a ser considerados como um meio de ação para a construção do instrumento. A tese de Jesus (2012) apresenta a mediatriz de um segmento de reta como um artefato simbólico e, portanto, buscou investigar a transformação deste artefato simbólico em instrumento na resolução de problemas geométricos.

Identificamos na literatura um número limitado de estudos (seis trabalhos) que pesquisam sobre este tipo de artefato.

A tese de Jesus (2012), percursora no uso do artefato simbólico, teve como foco a apropriação do artefato simbólico mediatriz por dois professores de matemática. O autor analisou a transformação deste artefato em instrumento na resolução de problemas geométricos e investigar como este processo poderia contribuir para a aprendizagem de conteúdos geométricos por parte dos professores.

Neto (2015) em sua dissertação estudou por meio da gênese instrumental da função de uma variável real com várias sentenças o processo de desenvolvimento cognitivo de um grupo de alunos do 2º e 3º ano do ensino médio na realização de uma sequência de atividades. O autor aponta que a apropriação do artefato simbólico não ocorreu de maneira duradoura para todos os sujeitos, o que foi possível de observar por meio das dimensões da gênese instrumental. A pesquisa de Neto (id.) adotou ainda como marco teórico a Teoria dos registros de representação semiótica (DUVAL,1995) e alguns princípios da Engenharia didática (ARTIGUE,1995).

Identificamos mais quatro pesquisas que trabalharam com artefatos simbólicos. As referidas pesquisas são dissertações da Pontifícia Universidade Católica do Perú.

A pesquisa de Chumpitaz (2013) analisa como ocorreu o processo de gênese instrumental, com ênfase na instrumentalização, de um grupo de alunos dos cursos

de engenharia na disciplina de Análise matemática. O estudo teve um caráter híbrido, pois analisou por meio de uma sequência de atividades dois artefatos: função de várias sentenças e o software GeoGebra. Sobre a apropriação do artefato simbólico função de várias sentenças os esquemas desenvolvidos tiveram como base conceitos pré-existentes como domínio e imagem. Os alunos apresentaram dificuldades na manipulação dos artefatos, porém, alcançaram o nível de instrumentalização.

O trabalho de Léon (2014) teve como objetivo estudar o processo de instrumentalização da noção de elipse em uma sequência de atividades mediada pelo software GeoGebra. Com relação à abordagem instrumental, o trabalho possibilitou compreender o surgimento e enriquecimento das propriedades da elipse por parte dos alunos, além de evidenciar que os componentes do artefato simbólico elipse foram conservados pelos sujeitos de maneira durável para certas classes de ação.

O terceiro trabalho identificado é a dissertação de Cuéllar (2014) desenvolvida com alunos de 12 a 13 anos e que também tem caráter híbrido por analisar artefatos simbólicos e materiais. No que se refere ao uso de artefatos simbólicos, o trabalho da autora focaliza na dimensão da instrumentalização do conceito de simetria axial. As conclusões apontam que as alunas conseguiram construir uma instrumentalização local de algumas das ferramentas do GeoGebra que as ajudaram na apropriação do conceito de simetria axial.

O último trabalho identificado foi Silva (2017), que apresenta uma investigação sobre o artefato simbólico circuncentro, em atividades com alunos da educação secundária do Perú⁵. A autora aplicou uma sequência de atividades utilizando o GeoGebra, nas quais pode identificar a mobilização dos esquemas de uso e de ação instrumentadas dos alunos ao construir o circuncentro de um triângulo qualquer e explorar as posições e a relação com o diâmetro da circunferência circunscrita.

Essas pesquisas apresentam contribuições para os estudos sobre artefatos simbólicos no âmbito da Didática da Matemática, uma vez que, a apropriação desses irá ajudar na elaboração de instrumentos para a resolução de diferentes classes de situações.

⁵ Equivalente ao ensino médio no Brasil.

O estudo dos artefatos simbólicos, ainda que pouco explorado, permite ampliar o olhar sobre o processo de apropriação de um conceito matemático por parte dos sujeitos.

Ao optar pelo trabalho com um artefato simbólico em um contexto de colaboração entre os pares consideramos a necessidade de situações que promovam a interação, à medida que os sujeitos têm a necessidade de discutir sobre uma definição que é fundamental para que ocorra a gênese instrumental e que evidencie o surgimento dos EACI.

A escolha do artefato simbólico táxi-distância considera também o fato de ele ser um conceito pouco abordado nas licenciaturas, logo, poderá gerar “conflito” com a Geometria Euclidiana e ser um estímulo à colaboração entre os sujeitos.

3 GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS E A GEOMETRIA DO TÁXI

Neste capítulo, são apresentados alguns elementos sobre o surgimento das geometrias não euclidianas. Em seguida, são discutidos conceitos da Geometria do Táxi considerados no nosso trabalho, relacionando-os com a Geometria Euclidiana. Por fim, há uma breve discussão sobre aspectos didáticos da Geometria do Táxi, a partir de trabalhos identificados na literatura sobre a temática.

3.1 Breve história das geometrias não euclidianas

Durante muito tempo a geometria esteve embasada em axiomas, postulados e proposições atribuídos ao matemático grego Euclides de Alexandria (300 a.C), considerado o Pai da Geometria. Sua obra, Os Elementos, composto de 13 livros, apresenta de maneira organizada e aprofundada os conhecimentos matemáticos da época, servindo de base para o desenvolvimento dessa ciência.

Segundo Eves (2011, p.167) “nenhum trabalho, exceto a Bíblia, foi tão largamente usado ou estudado e, provavelmente, nenhum exerceu influência maior no pensamento científico.”

A geometria de Euclides tem seus alicerces em cinco axiomas⁶ que, ainda segundo Eves (2011), são abstrações derivadas de experiências com régua, compasso e transferidor:

1° É possível traçar uma linha reta de um ponto qualquer a outro ponto qualquer.

2° É possível prolongar uma reta finita indefinidamente em uma linha reta.

3° É possível descrever um círculo com qualquer centro e qualquer raio.

4° Todos os ângulos retos são iguais entre si.

5° Se uma reta intercepta duas retas formando ângulos interiores de um mesmo lado menores do que dois retos, prolongando-se essas duas retas indefinidamente elas se encontrarão no lado em que os dois ângulos são menores do que dois ângulos retos.

Desde muito cedo, o 5° postulado, também conhecido como Postulado das Paralelas, foi profundamente estudado pelos matemáticos que desconfiavam que

⁶ Não fazemos distinção nesse texto entre os termos axioma e postulado.

seria possível demonstrá-lo com base nos quatro primeiros postulados, ou seja, pensavam que não seria um postulado e sim um teorema.

Durante mais de 2000 anos, desde *Os Elementos* de Euclides, a Geometria Euclidiana era vista como única e várias gerações de matemáticos se dedicaram a tentar demonstrar o 5º postulado.

A ruptura se deu entre o final do século XVIII e o início do século XIX, quando, a partir da produção de grandes matemáticos como Lobachevsky (1792 – 1852), Bolyai (1802 – 1860), Gauss (1777 – 1855) e Riemann (1826 – 1866), emergiram as primeiras geometrias não euclidianas.

Segundo Leivas (2013), os matemáticos do século XIX mostraram que o 5º postulado era independente dos quatro primeiros pois era possível criar sistemas geométricos tão consistentes quanto o de Euclides, nos quais os quatro primeiros axiomas se verificavam, mas o 5º postulado não era respeitado.

Pela importância histórica e epistemológica do Postulado das paralelas, muitas vezes se considera que as geometrias não euclidianas são aquelas que respeitam os quatro primeiros axiomas, mas nas quais o Postulado das paralelas não se verifica. Entendemos, entretanto que se pode assumir um sentido mais amplo para a expressão ‘geometria não euclidiana’ como um sistema geométrico consistente no qual um ou mais dos cinco axiomas de Euclides não é respeitado. É com esse sentido que utilizamos na nossa pesquisa.

Apesar de as geometrias não euclidianas terem sido desenvolvidas desde o século XIX, e de serem um importante capítulo da história da matemática, ainda hoje seu estudo não é está presente na educação básica. Essa ausência no currículo pode gerar a ideia de que só existe uma geometria – a euclidiana. Davis e Hersh (1985) já apontavam para este fato, chamando de “Mito de Euclides”:

É a crença de que os livros de Euclides têm verdades sobre o universo, claras e indubitáveis. Partindo de verdades evidentes, por si próprias e procedendo por demonstrações rigorosas, Euclides chega a conhecimento certo, objetivo e eterno. Mesmo agora parece que a maior parte das pessoas com instrução acredita no mito de Euclides. Até o meio ou fim do século dezenove, o mito reinava sem desafios. Todos acreditavam nele... (DAVIS; HERSH, 1985, p.366)

O trabalho com as geometrias não euclidianas também parece distante da formação inicial de professores de Matemática, como apontam os estudos de Cavichiolo (2011), Leiva (2013) e Lovis e Franco (2015). Os autores apresentam em

suas pesquisas dados que indicam que poucos professores de Matemática tiveram contato e/ou estudaram as geometrias não euclidianas na graduação.

Concordamos com Lobachevsky quando afirmava que “não há ramo de matemática, por mais abstrato que seja que não possa um dia ser aplicado aos fenômenos do mundo real” (LOBACHEVSKY apud BOYER, 1974, p.386). É o caso das geometrias não euclidianas, que podem ajudar na compreensão de aspectos da realidade, além de auxiliar no desenvolvimento do pensamento geométrico e na habilidade visual. Por isso, nos alinhamos com os autores que pensam que as geometrias não euclidianas poderiam ser mais exploradas no currículo da educação básica e na formação de professores. Entre elas, escolhemos a Geometria do Táxi, concebida inicialmente pelo russo Hermann Minkowski (1864 – 1909) e que será abordada na próxima seção.

3.2 Geometria do Táxi: noções e definições iniciais

Se imaginarmos uma cidade ideal na qual as ruas são todas formadas por trechos horizontais e verticais e suas quadras possuem as mesmas dimensões, podemos pensar em uma imagem semelhante à apresentada na Figura 4, da vista aérea da cidade de Barcelona.

Figura 4 - Vista aérea da cidade de Barcelona

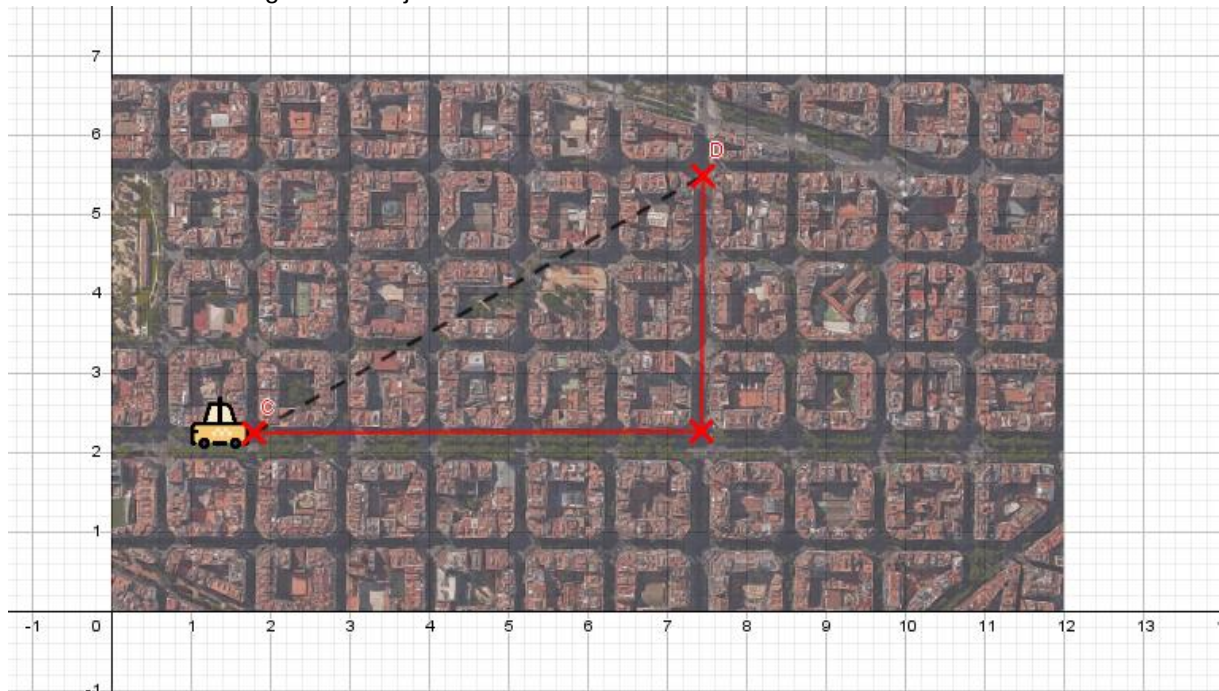


Fonte: The City Fix Brasil (2017) ⁷

⁷ Disponível em: <http://thecityfixbrasil.com/2017/02/07/os-superquarteiroes-de-barcelona-apesar-de-protestos-cidade-segue-com-estrategia-sustentavel/>. Acesso em fev, 2019.

Tomando dois pontos da cidade, indicados na Figura 5 por C e D, sabemos que a distância euclidiana entre esses pontos é determinada pela medida de comprimento do segmento CD indicado em linhas pontilhadas. Mas se um taxista precisasse se deslocar do ponto C ao ponto D, é evidente que ele teria que realizar trajetos horizontais e verticais. Para o táxi, o percurso entre os pontos C e D, traçado em vermelho, é o menor possível. Outros caminhos entre C e D, correspondentes a uma mesma distância seriam possíveis.

Figura 5 - Trajeto do Táxi na Geometrias Euclidianas e do Táxi



Fonte: The City Fix Brasil (2017) Adaptações da autora

A definição de distância entre dois pontos dada por Euclides não seria a mais adequada nessa situação. Como apontado por Noronha (2006, p.25) “a função de distância euclidiana não seria a melhor opção para modelar situações de deslocamento em um espaço urbano onde pessoas, como por exemplo, o taxista, só podem percorrer pelas ruas.” Em situações cotidianas como essa a GT traz uma solução melhor que a GE, como veremos a seguir.

Os primeiros registros de uma geometria que se aproxima da ideia apresentada anteriormente foi a Coleção de Tratados⁸ do matemático russo Hermann Minkowsky (1864 – 1909), publicados postumamente no início do século

⁸ *Gesammelte Abhandlunge*

XX, nos quais ele definiu um conceito de métrica, ou seja, a ideia geométrica de distância, na qual o círculo tem a aparência de um quadrado.

Karl Menger foi o responsável por iniciar a sistematização dos conceitos desta “distância geométrica abstrata” (NORONHA, 2006, p.26) e exibiu em 1952, através de um folheto intitulado *You will like Geometry*⁹, o termo *Taxicab Geometry* (Geometria do Táxi) pela primeira vez.

Após este evento, diversos matemáticos e filósofos se dedicaram a estudar a Geometria do Táxi, também denominada Métrica de Manhattan, Geometria Urbana (FOSSA, 2003), Métrica do quarteirão, dentre outras denominações.

Eugene Krause foi o responsável por discutir a importância pedagógica e matemática da Geometria do Táxi, enfatizando a proximidade com a Geometria Euclidiana e sua aplicação na realidade de centros urbanos bem planejados (NORONHA, 2006).

O estudo da Geometria do Táxi (GT) pode ser identificado em trabalhos na área de Geografia Urbana, a exemplo do trabalho de Abreu e Barroso (1982), o que demonstra seu caráter interdisciplinar¹⁰.

Como brevemente apresentado a noção de distância na GT difere do que comumente é trabalho na GE. Para compreender estas diferenças e relações buscamos nas próximas seções apresentar os principais conceitos da GT e sua relação com a GE.

3.2.1 Conceito de distância na Geometria do Táxi

O conceito de distância corresponde à medida da separação entre dois pontos e a sua função é representada por $d(A, B)$ pela qual são expressas noções intuitivas com base nos seguintes axiomas:

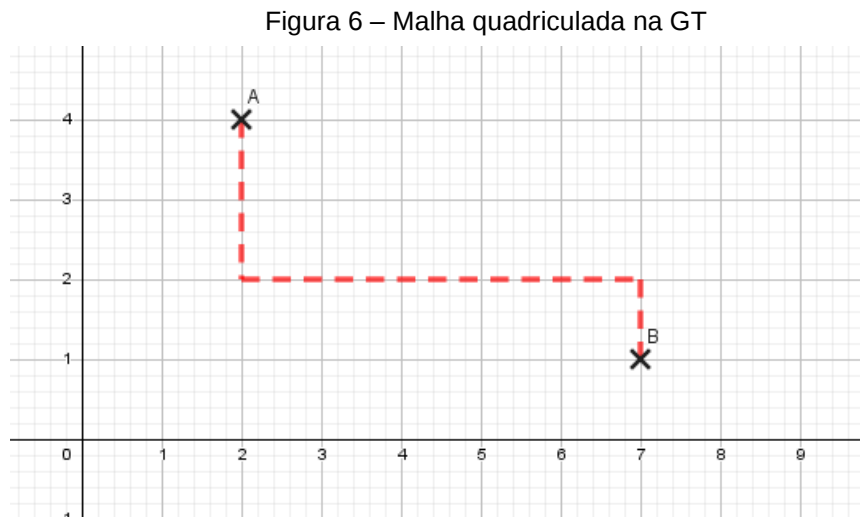
- a) $d(A, B) \geq 0$
- b) $d(A, B) = 0$, se, e somente se $A = B$
- c) $d(A, B) = d(B, A)$
- d) $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$, sendo A, B, C três pontos quaisquer.
- e) $d(A, B) = d(A, C) + d(C, B)$ se e só se A, B, C forem colineares.

⁹ Você vai gostar de Geometria (Tradução nossa)

¹⁰ Aquilo que estabelece relações entre duas ou mais disciplinas ou ramos de conhecimento.

Estes axiomas expressam respectivamente as seguintes condições: a) não existe distância negativa; b) a distância só será igual a zero quando os pontos A e B forem coincidentes; c) a distância de A para B é igual à distância de B para A; d) a distância de A para C é sempre menor ou igual à soma das distâncias de A para B adicionada à distância de B para C e, e) a igualdade na condição anterior só ocorre se os três pontos pertencem a uma mesma reta.

Na GT o plano cartesiano coberto com malhas quadriculadas é utilizado para calcular a distância entre dois pontos. Esta malha (Figura 6) dá a ideia de ruas de uma cidade ideal, na qual só se pode deslocar de um ponto ao outro por trajetos que envolvam trechos horizontais ou verticais, como mencionado anteriormente no exemplo do trajeto do táxi.

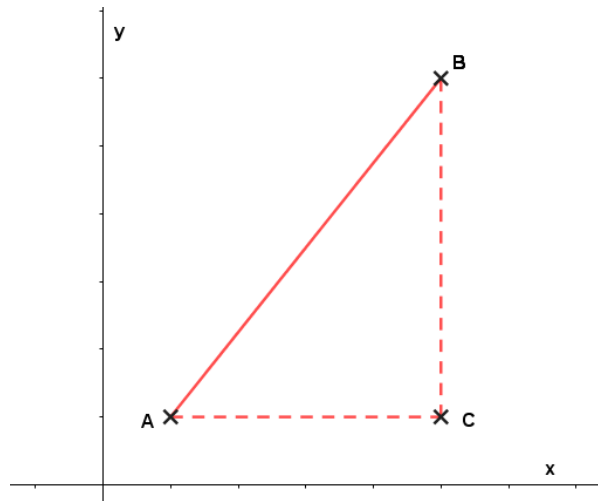


Fonte: Elaborado pela autora

Na GE a distância entre dois pontos é determinada pelo comprimento de um segmento de reta, que possui os dois pontos em suas extremidades, enquanto na GT a distância entre dois pontos corresponde à soma dos valores absolutos das diferenças de suas respectivas coordenadas. (Figura 7).

Na Figura 7, representamos dois pontos arbitrários, A (x_A , y_A) e B (x_B , y_B), e, além disso, o segmento de reta $\overline{AB}$, cuja medida de comprimento é a distância euclidiana entre os pontos A e B. Representamos, também, os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$ cujas medidas de comprimento, quando adicionadas, fornecem a distância entre A e B na GT.

Figura 7 - Distâncias no plano

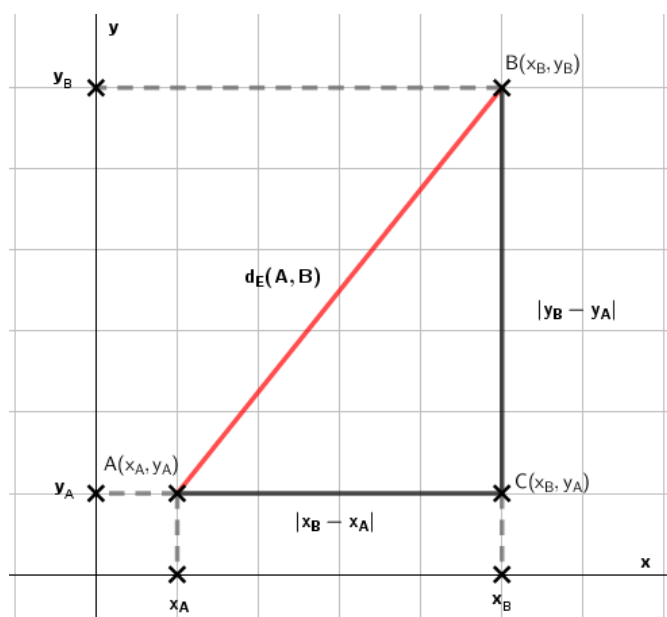


Fonte: Elaborada pela autora

Considerando as coordenadas indicadas no plano cartesiano para realizar o cálculo da distância entre o ponto A (x_A, y_A) e B (x_B, y_B) tomamos o triângulo retângulo ABC e recorremos ao Teorema de Pitágoras (Figura 8) , obtendo a equação $[d_E(AB)]^2 = |x_B - x_A|^2 + |y_B - y_A|^2$ (1) , o que implica (1):

$$d_E(AB) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \quad (1)$$

Figura 8 - Distância na GE

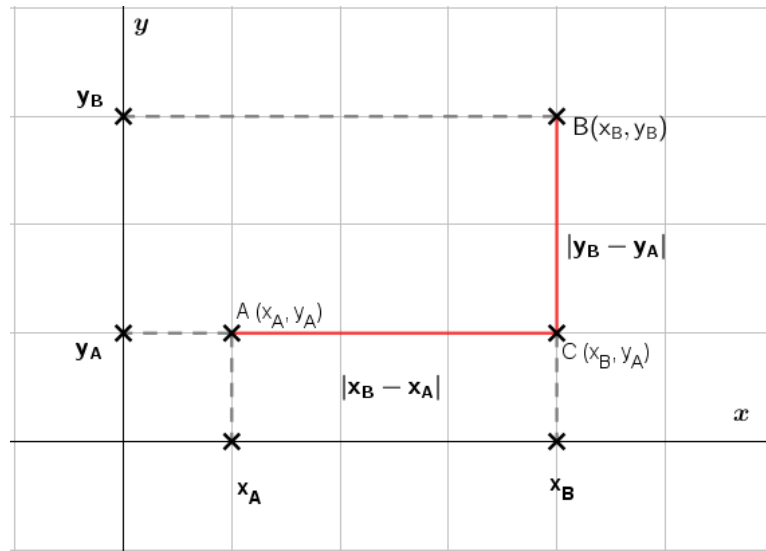


Fonte: Elaborado pela autora

Como respeito à GT, a distância entre os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ será fornecida pela fórmula (2):

$$d_T(A, B): |x_B - x_A| + |y_B - y_A| \quad (2)$$

Figura 9 - Métrica na GT



Fonte: Elaborado pela autora

É conveniente observar que na Geometria Euclidiana plana há, entre outros, dois termos primitivos fundamentais que são os **pontos** e as **retas**. No modelo dessa geometria que consiste nos pontos e nas retas do plano cartesiano ortogonal, os pontos são os pares ordenados de números reais, que representamos por (x, y) .

As retas são os conjuntos de pontos (x, y) que satisfazem uma equação do tipo $ax + by + c = 0$, em que a , b e c são números reais quaisquer com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

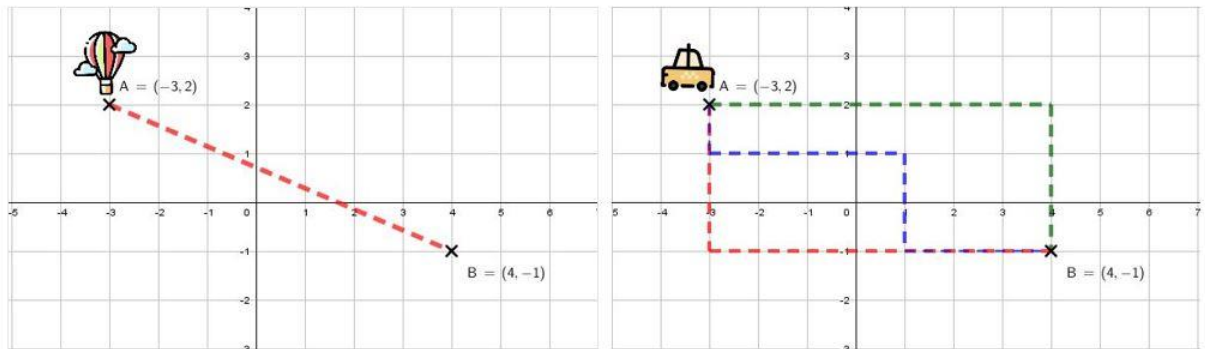
É importante ressaltar que na denominada GT, pontos e retas também são termos primitivos fundamentais. Nessa geometria, o que é menos evidente é a afirmação de que quando modelizada no plano cartesiano ortogonal, tais termos primitivos são exatamente os mesmos da Geometria Euclidiana. Noutros termos, no plano cartesiano ortonormal, os pontos são os pares ordenados de números reais (x, y) e as retas são os subconjuntos do plano que consistem nos pares (x, y) que tornam válidas equações do tipo $ax + by + c = 0$, em que a , b e c são números reais quaisquer com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. O que distingue as duas geometrias em estudo é o conceito de distância. Com isso, figuras geométricas definidas com apoio do

conceito de distância podem ter representações gráfico-visuais distintas nas duas geometrias aqui estudadas. Esse fato é central no presente trabalho.

Com o intuito de esclarecer melhor esses aspectos, consideremos o trajeto a ser realizado entre dois pontos de uma cidade, sendo utilizado como meio de transporte um balão e um táxi. Os dois irão partir do ponto A $(-3, 2)$ e seguir até o ponto B $(4, -1)$.

Observamos que, dadas as características do balão ele pode seguir segundo um segmento de reta que liga A a B. Já no caso de um automóvel, não sendo possível realizar o trajeto sobre o segmento $\overline{AB}$, pode-se escolher um entre vários caminhos que correspondem a uma mesma distância mínima percorrida, como mostra a figura 10.

Figura 10 – Trajeto do Balão e do Táxi



Fonte: Elaborado pela autora

A distância euclidiana é eficiente para modelar a situação do balão, enquanto no caso do automóvel, a distância definida na Geometria do Táxi é mais adequada. Aplicando equações (1) e (2) apresentadas anteriormente temos:

$$\begin{aligned} d_E(A, B) &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \\ &= \sqrt{(4 - (-3))^2 + ((-1) - 2)^2} = \\ &= \sqrt{7^2 + 3^2} = \\ &= \sqrt{49 + 9} = \\ &= \sqrt{58} \cong 7,62 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_T(A, B) &= |x_B - x_A| + |y_B - y_A| = \\ &= |4 - (-3)| + |(-1) - 2| = \\ &= |7| + |3| = |10| \end{aligned}$$

Esse exemplo ilustra outras diferenças entre as duas geometrias:

- a) Na GE (trajeto do balão) só há uma possibilidade de trajeto de distância euclidiana mínima entre os pontos, enquanto na GT (trajeto do automóvel) podem existir diferentes caminhos cuja táxi-distância seja mínima;
- b) Na GT as distâncias serão sempre maiores ou iguais às distâncias na métrica euclidiana.

Espera-se que, com as situações problemas a serem resolvidas de maneira colaborativa, os sujeitos cheguem a estas constatações em relação à GT e à GE. A apropriação da noção de táxi-distância será fundamental na construção do conhecimento sobre a GT.

Tendo apresentado a noção de distância na GT, ou táxi-distância, buscaremos estabelecer as relações entre a GT e os Lugares Geométricos (LG) enfatizando suas principais características nas duas geometrias. É importante perceber que devido à mudança na métrica utilizada em relação à GE, as figuras que derivam do conceito de distância passam a ser representadas graficamente de maneiras distintas.

3.2.2 Lugares Geométricos

Sendo foco das situações problemas a serem resolvidas colaborativamente no experimento, explorar os conceitos de ponto médio, circunferência e mediatriz apresentamos as suas definições como lugares geométricos na GE e na GT.

Inicialmente é importante compreender que um lugar geométrico (LG) consiste em um conjunto de pontos que possuem determinadas propriedades em comum (COSTA et al, 2009).

Completando a definição de LG, Rezende e Queiroz (2000) apontam que para que uma figura seja considerada um lugar geométrico dos pontos que possuem uma determinada propriedade (P), é necessário que:

- a) Todos os seus pontos satisfaçam a propriedade P ;
- b) Somente os pontos desta figura satisfaçam a propriedade P , isto é, se o ponto A possui a propriedade P , ele pertence à figura.

Estas propriedades estão exemplificadas para cada lugar geométrico considerado a seguir.

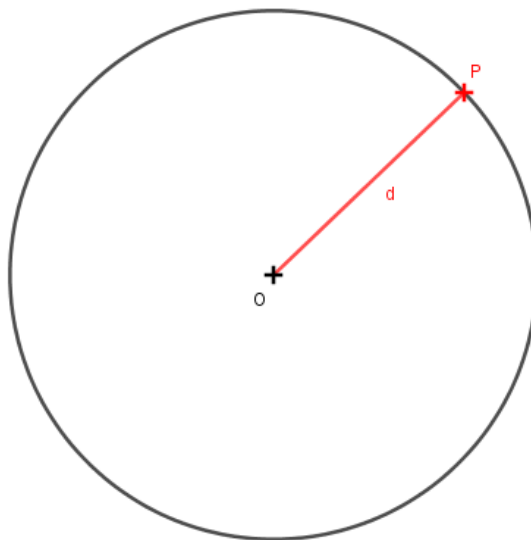
Tratamos, nesta pesquisa, as definições de circunferência e mediatriz, que são lugares geométricos em que o conceito de equidistância intervém. Destacamos, também, as definições de ponto médio em ambas as geometrias.

Caracterizamos estes lugares geométricos a partir de sua definição e representação gráfica na GT e na GE.

▪ Circunferência

A circunferência é definida como o conjunto dos pontos que estão a uma distância conhecida d de um ponto O . O raio de uma circunferência é qualquer segmento de reta que liga o centro a um ponto da circunferência. Dois raios quaisquer possuem, assim, o mesmo comprimento d , que, por vezes, também é denominado raio da circunferência.

Figura 11 - Circunferência euclidiana



Fonte: Elaborado pela autora

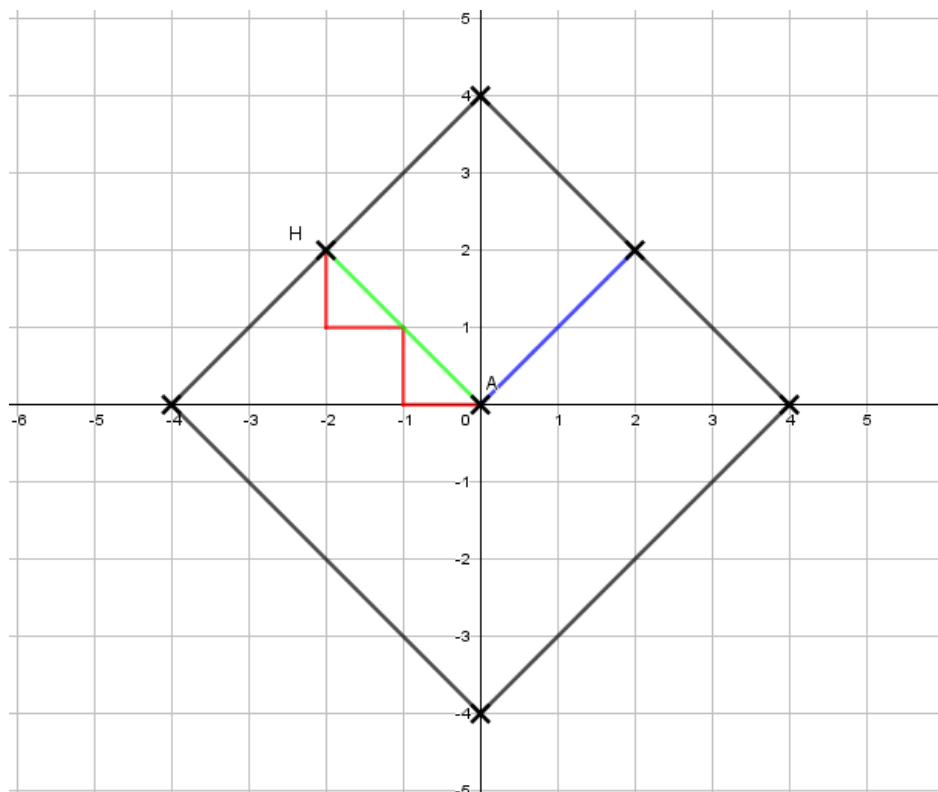
Diante da sua definição, é possível reconhecer que (i) todo ponto P que pertence a essa circunferência está a distância d do ponto O ; e que (ii) se um ponto P' está a uma distância d do ponto O , então este ponto pertence à circunferência (O, d).

Como o conceito de distância na GT difere da GE, a representação da circunferência também difere nas duas geometrias, no entanto, a definição é igual para ambas. Utilizaremos o termo táxi-circunferência para se referir à circunferência na GT.

A táxi-circunferência consiste em quatro segmentos congruentes que são representados como um quadrado, conforme a Figura 12.

Como vimos anteriormente, as retas na GE e na GT são modelizadas pelos mesmos subconjuntos do plano cartesiano, ou seja, em termos mais simples, dizemos que “as retas são as mesmas”.

Figura 12 – Táxi-circunferência



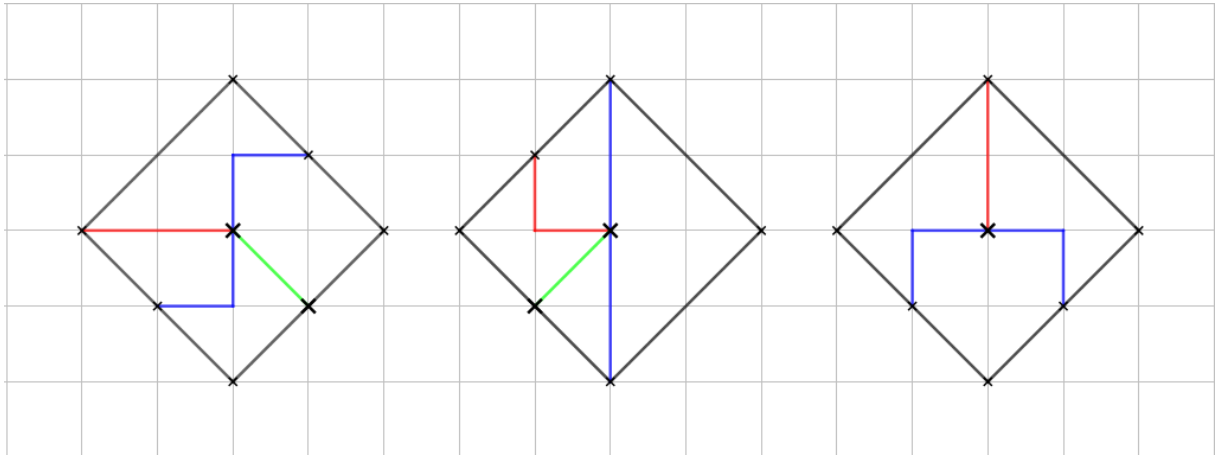
Fonte: Elaborado pela autora.

Sabendo disso, o raio de uma circunferência na GT é, igualmente, o segmento de reta que liga o centro a um ponto da circunferência.

Assim como a circunferência na GE, dois raios quaisquer na GT, possuem a mesma medida de comprimento r , chamado de raio.

O que há de novo, neste caso ? Apenas que outros caminhos ligando o centro a um ponto da circunferência possuem a mesma medida de comprimento r , como se mostra na figura 13.

Figura 13 - Raio e Diâmetro na Táxi – circunferência



Fonte: Elaborado pela autora

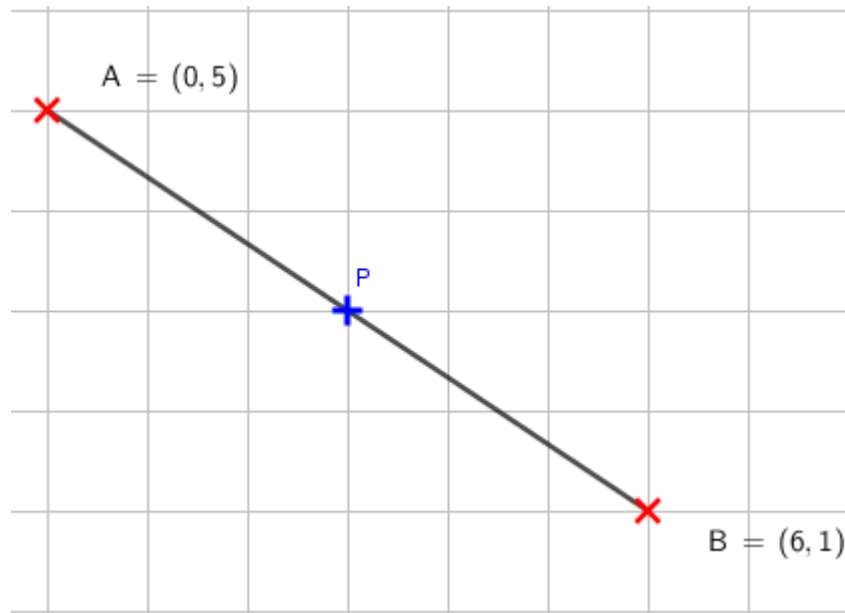
Como esses diferentes caminhos entre o centro e um ponto da táxi-circunferência possuem a mesma medida, r , podemos estender a esses caminhos a denominação de raios da táxi-circunferência, sem prejuízo para a aprendizagem do conceito. No entanto, é importante incluir entre esses caminhos o segmento de reta ligando tais pontos. Certamente, um táxi em uma cidade não poderá segui-lo, mas um balão (ou um drone) podem percorrê-lo.

▪ Ponto médio

Na GE, o ponto médio de um segmento de reta $\overline{AB}$ corresponde ao ponto, pertencente ao segmento $\overline{AB}$ e que o divide em duas partes iguais.

A distância entre o ponto médio e as extremidades do segmento $\overline{AB}$ corresponde à menor distância entre estes pontos, conforme apresentado na Figura 14.

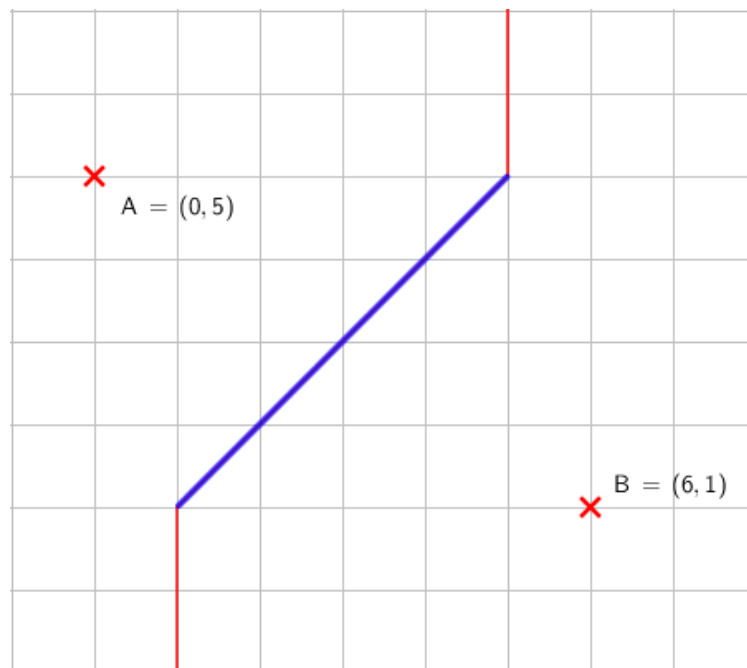
Figura 14 - Ponto médio na GE



Fonte: Elaborado pela autora

Diante da noção de distância adotada na GT e das diferentes possibilidades de caminhos possíveis entre os pontos A e B, a representação dos pontos que correspondem à menor distância entre eles é dada através de um conjunto de pontos, conforme ilustrado na figura 15 através do segmento em azul.

Figura 15 - Conjunto de pontos médios entre A e B



Fonte: Elaborado pela autora

Esse conjunto de pontos está a mesma distância de A e de B e essa táxi-distância é mínima. Dessa maneira, na GT a ideia de ponto médio como sendo um ponto único, pertencente ao segmento $\overline{AB}$ não se mantém. Em nosso trabalho utilizaremos o termo conjunto de pontos médios para se referir aos pontos que mantêm a distância entre dois pontos, sendo esta também a menor distância possível.

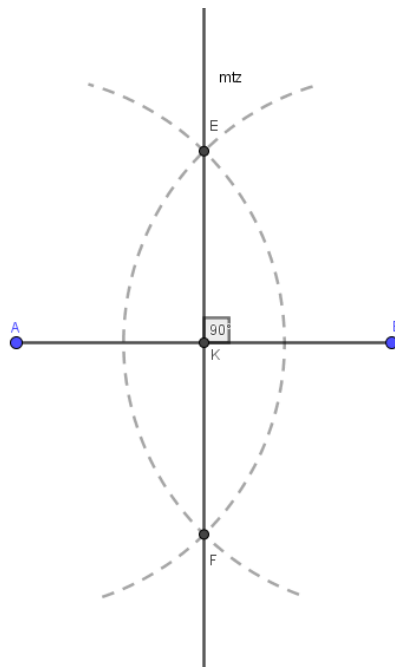
- Mediatrix

Dados dois pontos A, B, a mediatrix m do segmento de reta $\overline{AB}$ é o lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes de A e de B. É possível demonstrar na GE, que a mediatrix de $\overline{AB}$ é a reta perpendicular ao segmento que passa por seu ponto médio.

Na demonstração dessa propriedade na GE procedemos da seguinte maneira:

Dados os pontos A e B, consideramos o segmento de reta $\overline{AB}$. Com centro em A e raio r , sendo esse, maior do que a metade do comprimento $\overline{AB}$, traçamos a circunferência euclidiana σ_A . Com centro em B e raio r a circunferência euclidiana σ_B . Dos axiomas da Geometria Euclidiana resulta que σ_A e σ_B interceptam-se em dois pontos E e F situados em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AB}$. Considerando a reta $\overleftrightarrow{EF}$ e utilizando os axiomas de congruência de triângulos completamos a prova desejada de que a reta $\overleftrightarrow{EF}$ é perpendicular a $\overline{AB}$ e passa pelo seu ponto médio. A Figura 16 traz a representação gráfica da mediatrix na GE.

Figura 16 - Mediatriz na GE



Fonte: Elaborado pela autora

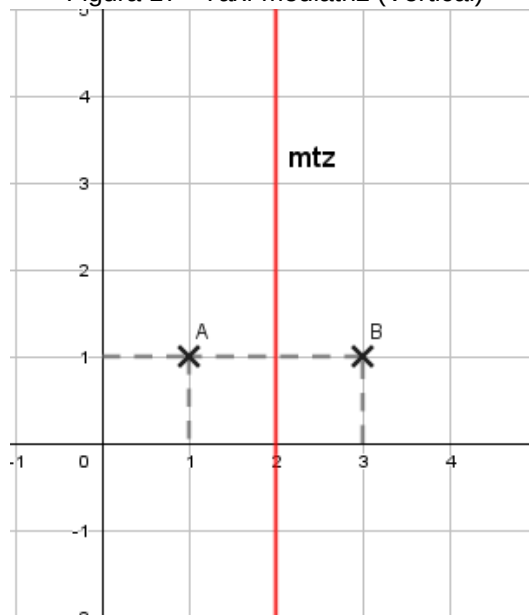
Na GT, adotamos a mesma definição de mediatriz que a da GE. O que é importante observar é que não é mais válida a proposição de que a mediatriz de um segmento $\overline{AB}$ é, necessariamente, a reta perpendicular pelo seu ponto médio. Tal fato representa papel importante no presente trabalho.

A táxi-mediatriz pode ter diferentes representações gráficas a depender da posição dos pontos no plano cartesiano. Destacamos o fato de que o emprego da táxi-circunferência desempenha um papel importante na resolução de situações problemas, em analogia com o que ocorre na demonstração da propriedade de perpendicularidade da mediatriz na GE.

Tomemos, por exemplo, três casos da táxi-mediatriz:

1º caso: Se o segmento $\overline{AB}$ estiver na horizontal ou na vertical. Tomemos, por exemplo A (1, 1) e B (3, 1):

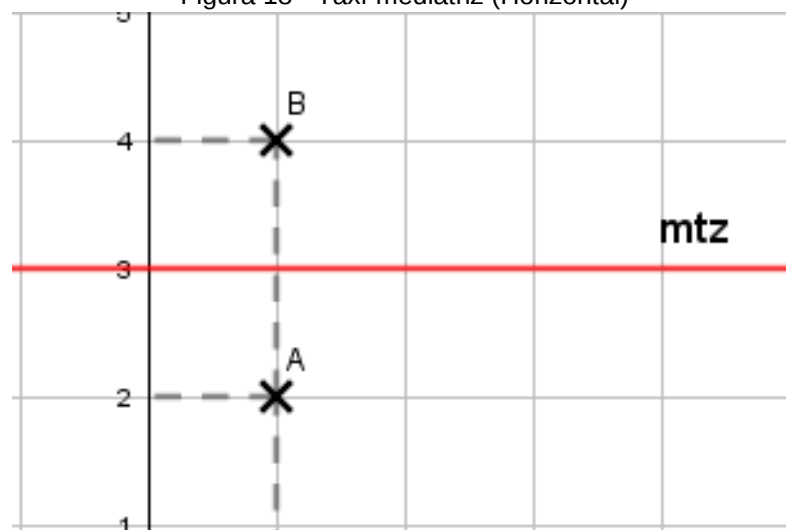
Figura 17 - Táxi-mediatrix (Vertical)



Fonte: Elaborado pela autora

E, agora, a exemplo A (1, 2) e B (1, 4):

Figura 18 - Táxi-mediatrix (Horizontal)



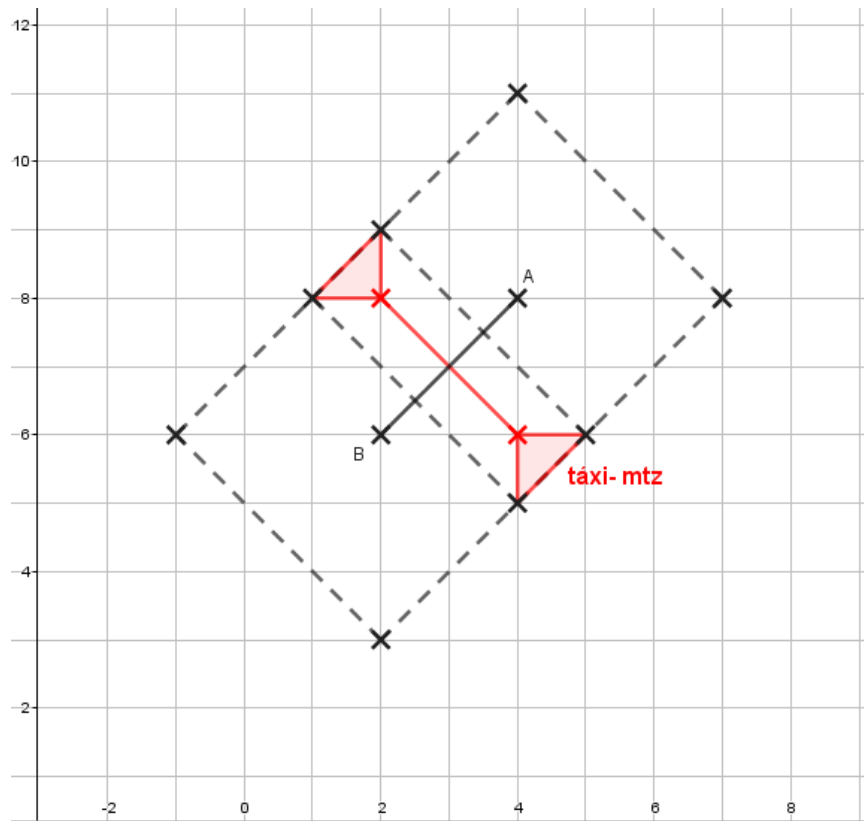
Fonte: Elaborado pela autora

Nesses dois exemplos, a situação é idêntica à que ocorre na mediatrix de $\overline{AB}$ na GE.

2º caso: O segmento $\overline{AB}$ não é horizontal nem vertical e A (a, b) e C (c, d).

Se $|a - c| = |b - d|$. Nessas condições, a táxi-mediatrix será determinada por um segmento e por duas regiões.

Figura 19 - Representação do táxi-mediatrix 2º caso



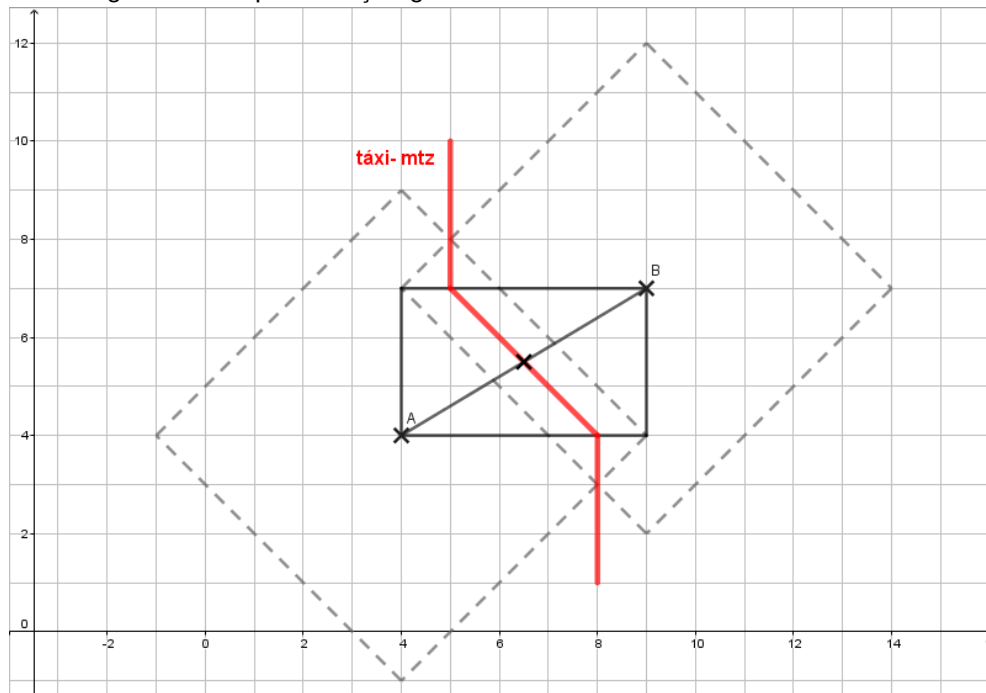
Fonte: Elaborado pela autora

Neste caso, há interseção das táxi-circunferências devido à posição dos pontos, sendo A (4, 8) e B (2, 6). Os pontos estão alinhados no plano o que faz surgir na intercessão uma região que pertence também à táxi-mediatrix procurada.

3º caso: O segmento $\overline{AB}$ não é horizontal nem vertical e A (a, b) e C (c, d) são tais que $|a - c| \neq |b - d|$

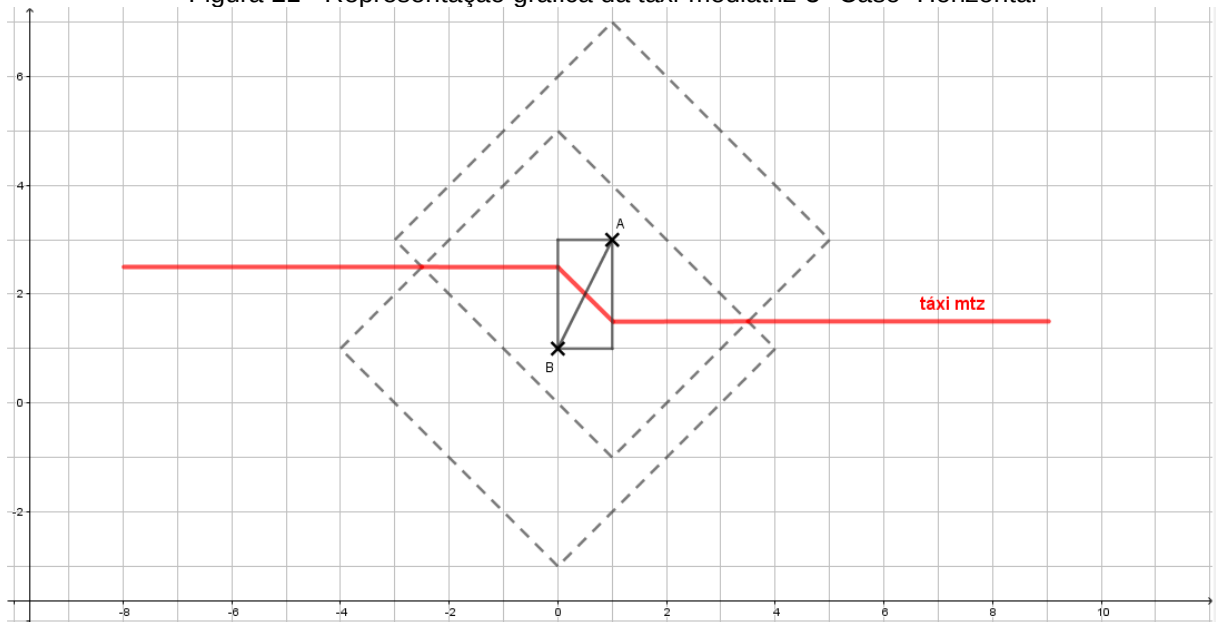
Nesse caso, a táxi-mediatrix é formada por um segmento de reta a 45° com a horizontal e duas semi-retas que serão verticais quando $|b - d| < |a - c|$ ou horizontais se $|b - d| > |a - c|$, conforme ilustrado nas figuras 20 e 21 respectivamente.

Figura 20 - Representação gráfica da táxi-mediatrix- 3º Caso - Vertical



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 21 - Representação gráfica da táxi-mediatrix-3º Caso -Horizontal



Fonte: Elaborado pela autora

Neste caso, a táxi-mediatrix irá surgir pela interseção de duas táxis-circunferências que têm raio maior que a menor distância entre os dois pontos A e B ou de duas táxis-circunferências tangentes. Como os pontos não estão alinhados em

relação ao plano cartesiano, surge uma linha poligonal como resultado para a táxi-mediatriz procurada.

Os conceitos que apresentamos na GT permitem uma aproximação com a GE, por considerar os mesmos objetos e definições, ao mesmo tempo trata-se de um conteúdo desafiador por mudar a noção de distância e consequentemente a representação gráfico-visual dos lugares geométricos que dependem da distância. Entendemos que estes conceitos quando aplicados em situações problemas permitem explorar diferentes conteúdos e habilidades que são naturalmente aplicados em situações do cotidiano.

Na próxima sessão apresentamos algumas considerações relacionadas ao ensino da GT identificadas através da literatura sobre a temática.

3.3 Aspectos didáticos da Geometria do Táxi

As ideias iniciais da GT podem se apoiar em uma contextualização próxima da realidade cotidiana, sendo interessante sua aplicação no estudo de localização e deslocamento no plano, como previsto em documentos oficiais, a exemplo da BNCC (BRASIL, 2018), para o ensino da Matemática na educação básica, conforme apresentado no Quadro 1.

Quadro 1 – Conteúdos		
	HABILIDADES	ANO
ANOS INICIAIS	Localização de objetos e pessoas no espaço.	1º
	Localização de objetos e pessoas no espaço/ Esboço de roteiros e de plantas simples.	2º
	Localização e movimentação.	3º
	Localização e movimentação/ Paralelismo e Perpendicularismo.	4º
	Plano Cartesiano: Coordenadas cartesianas e representação de deslocamentos no plano.	5º
ANOS FINAIS	Plano Cartesiano: Polígonos.	6º
	Distância entre pontos no plano cartesiano.	9º

Fonte: Elaborado pela autora com base na BNCC (2018)

O trabalho com a GT também no ensino médio permite aprofundar aspectos relacionados ao pensamento geométrico, como previsto na BNCC (Brasil, 2018), uma vez que os alunos retomam o trabalho com a habilidade de interpretar e representar a localização e o deslocamento no plano cartesiano.

Além disso, o estudo da GT pode ser articulado com outros conteúdos dessa etapa da escolaridade, como exemplo, conceitos da Geometria Analítica, Análise Combinatória voltada para o cálculo de caminhos possíveis na GT, bem como, permite um resgate de conceitos da Geometria Euclidiana possibilitando o desenvolvimento de aspectos argumentativos dessa geometria.

Já no ensino superior e na formação continuada o estudo de Geometrias não euclidianas contempla o que determina as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática (CNE/CES 1.302/2001), quando prever o estudo conteúdos matemáticos presentes na educação básica nas áreas de Geometria, bem como competências e habilidades, como o estabelecimento de relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento e o desenvolvimento de estratégias de ensino que favoreçam a criatividade, a autonomia e a flexibilidade do pensamento matemático.

Diante dos conteúdos previstos, percebe-se que as noções relativas à GT podem ser abordadas desde o ensino fundamental, contribuindo na construção do pensamento geométrico e da noção de espaço por meio de situações que são facilmente reconhecidas no dia a dia.

Kaleff e Nascimento (2004, p.13) apontam que:

[...] a Geometria do Táxi pode ser apresentada, com a intenção de se integrar a Matemática ao cotidiano do aluno, pois essa se apresenta em todos os lugares, não podendo, portanto, deixar de ser encontrada no espaço das “ruas”. Dessa forma, confrontado com esta nova Geometria, o aluno pode ser levado a perceber que existem outras Geometrias, além da Euclidiana, possibilitando que tenha despertada a sua curiosidade para novos ambientes matemáticos.

Considerando as possibilidades de trabalhar a GT, alguns autores realizaram trabalhos em diferentes níveis de ensino aplicando as noções desta geometria não euclidiana.

Por meio de uma revisão de literatura em teses, dissertações, artigos científicos e livros, buscamos identificar pesquisas em que o foco central fosse a Geometria do Táxi.

Identificamos entre as produções aquelas que apresentam dados relativos a aplicações de atividades, oficinas, experimentos e as que apresentam estudos teóricos ou sugestão de sequências de atividades com o conteúdo da Geometria do Táxi.

Quadro 2 - Natureza das produções

Estudos Teóricos	Fuzzo et al (2010); Presmic (2014); Loiola e Costa (2015).
Sequência de atividades	Krause (1986); Fossa (2003); Kaleff e Nascimento (2004); Miranda et al (2005); Oliveira (2014); Fava Neto (2013); Santos (2016); Fernandes (2017)
Aplicações da Geometria do Táxi	Noronha e Fossa (2010); César, (2010); Sales e Bairral (2012); Ferreira e Barros (2013); Caldato (2013); Nascimento (2013); Bairral e Powell (2013); Loiola (2014); Leivas (2014); Souza (2015); Leivas e Souza (2015); Leivas (2016); Andrade et al (2016); Souza e Leivas (2016); Gusmão et al (2017); Toledo (2018); Leivas (2019).

Fonte: Dados da pesquisa

Os trabalhos de Fuzzi et al (2010), Presmic (2014) e Loiola e Costa (2015) apresentam uma introdução sobre os conceitos iniciais da Geometria do Táxi por meio de demonstrações, notas históricas e aplicações. As pesquisas possibilitam reconhecer as principais diferenças entre a GT e o modelo euclidiano.

Dentre as pesquisas categorizadas como sequência de atividades, destacamos os trabalhos de Krause (1986), que apresentam aplicações práticas por meio de gráficos, problemas e exercícios sobre a GT, sendo o primeiro livro sobre a abordagem pedagógica desta Geometria, bem como o livro de Fossa (2003), “Geometria Urbana” que apresenta situações problemas que se articulam ao longo de 15 capítulos.

Kaleff e Nascimento (2004), Miranda et al (2005), Fava Neto (2013) e Oliveira (2014) fazem um estudo sobre os conceitos da GT e apresentam sequências de atividades e exemplos ilustrativos de propostas de aplicações da Geometria do Táxi com o propósito de trazer uma contribuição para se pensar e produzir Matemática de forma mais flexível e criativa.

Os trabalhos de Santos (2016) e Fernandes (2017) apresentam algumas propostas de trabalhar a GT aproximando-a de definições da GE, como exemplo, os lugares geométricos (equidistância e curvas cônicas).

Santos (2016) explora em sua pesquisa o conceito do diagrama de Voronoi¹¹ com o objetivo de apresentar de forma clara e acessível as relações entre o diagrama e alguns conceitos da geometria plana como interseções de semiplanos, regiões conexas, distância entre pontos e lugares geométricos na métrica euclidiana e do táxi, destacando o fato de que alguns lugares geométricos têm comportamentos diferentes em cada uma dessas métricas.

Publicado em 2017, o trabalho de Fernandes apresenta um estudo realizado sobre os conceitos da GT, em conjunto com uma proposta de sequência didática destinada a alunos e professores de Matemática da Educação básica que buscava abordar o tema por meio de situações problemas com o auxílio do software GeoGebra. As situações propostas apresentavam conexões com problemas de localização e movimentação no espaço, lugares geométricos e modelagem das trajetórias de deslocamentos nas ruas e avenidas de uma cidade.

Ao se aproximarem da noção de lugar geométrico, os trabalhos citados contribuem na compreensão desses a partir da métrica da GT, além de apontar elementos necessários à construção de situações que buscam confrontar este conceito a partir das duas geometrias.

Entre as pesquisas categorizadas como Aplicações da Geometria do Táxi, destacamos aquelas em que os sujeitos envolvidos foram estudantes de licenciatura em Matemática (FERREIRA; BARROS, 2013) e (NASCIMENTO, 2013) e as que utilizaram a GT com alunos da pós-graduação (LEIVAS, 2014, 2016, 2019) aproximando assim ao contexto dos sujeitos da nossa pesquisa.

Ferreira e Barros (2013) apresentam resultados parciais de uma aplicação de atividades com estudantes do 4º ano de licenciatura em Matemática de uma universidade localizada no Paraná. O trabalho teve como objetivo detectar possíveis obstáculos provenientes da constituição de conceitos euclidianos na aprendizagem da Geometria do Táxi. Os resultados apontam que embora os estudantes possuam um conceito de métrica relativamente estruturado, estes ainda se prendem à métrica

¹¹ A noção intuitiva do diagrama de Voronoi pode ser relacionada à divisão do plano em um conjunto de regiões de influência, sendo que cada região é definida como o conjunto dos pontos que estão a menor distância euclidiana de certo ponto de influência, entre um conjunto de pontos dados (BERG, 2008).

euclidiana, sendo os conceitos euclidianos caracterizados como obstáculos à construção de conceitos não euclidianos.

Nascimento (2013) explora a noção da GT como anomalia¹² indicando as suas implicações pedagógicas. O trabalho foi realizado com estudantes da licenciatura em Matemática em uma instituição do Rio Grande do Norte no âmbito da disciplina de Didática da Matemática. Os dados apontam para os conflitos iniciais ao trabalhar com uma métrica diferente, fato verificado por meio de entrevistas e respostas nas atividades nas quais os participantes não acreditavam que, se mudasse o espaço, a característica daquele item também mudaria. Após a realização da proposta de atividades e ao identificar a anomalia e aceitá-la os conceitos geométricos foram ampliados e/ou aprofundados.

As dificuldades relacionadas aos conceitos da GT na formação inicial de professores de Matemática estão relacionadas ao contrapor os conceitos da GT com a GE, que tem seu estudo mais enfatizado desde a educação básica até a formação inicial nas licenciaturas.

No seu trabalho de 2014 Leivas apresentou resultados de uma pesquisa qualitativa realizada com estudantes de um mestrado profissionalizante em ensino de Física e de Matemática que teve por objetivo investigar como esses estudantes interpretam e representam elipses, parábolas e hipérboles utilizando a Geometria do Táxi. Os estudantes conseguiram interpretar e representar corretamente os lugares geométricos propostos na atividade com a métrica do taxista. Leivas (2014) aponta ainda que os estudantes puderam perceber que há várias possibilidades de representação de um objeto geométrico além do modelo euclidiano. Além disso, segundo o autor,

um dos fatores que caracterizam essa geometria é de que há uma dependência de “medidas” e, assim o sendo, o estudo de métricas é justificado na formação dos professores, seja ela inicial ou continuada, o que irá proporcionar visão de outras geometrias, além da euclidiana. (LEIVAS, 2014, p.208)

A pesquisa de Leivas (2016) buscou compreender também como estudantes de um mestrado profissionalizante em ensino de Matemática, em uma disciplina de

¹² A autora utiliza o conceito de anomalia, como sendo um paradigma que surge para ser quebrado, questionando as definições antes tidas como verdades absolutas, mostrando irregularidades, não negando, mas ampliando e fazendo com que se observe o desvio acentuado do que até o momento tínhamos como padrão normal. (NASCIMENTO, 2013)

Geometria, utilizam recursos didáticos e tecnológicos, a exemplo do software *GeoGebra*, para resolver problemas envolvendo Geometria do Táxi. Para isto, aplicou situações problemas que tratavam de aplicações reais da GT com base nas noções de táxi-distância, ponto médio, circunferência e mediatrizes.

Leivas (2019) traz os resultados de uma investigação realizada com estudantes de geometria analítica e álgebra linear fundamentada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval. A pesquisa buscava responder o seguinte questionamento: *Para obter a melhor solução de um problema de determinação de um espaço público, verifique qual é a Geometria que proporciona um melhor resultado: a Euclidiana ou a do Táxi?* O autor aponta que embora as dificuldades encontradas pelos estudantes para obter os registros verbais dos lugares geométricos procurados na GT, eles concluíram que esta oferece melhor solução para o problema.

Os dados apresentados nas pesquisas sinalizam as dificuldades e a desequilíbrio ao trabalhar a GT e a relação com a GE. Estes apontamentos reforçam nosso interesse de propor situações que levem à apropriação dos conceitos desta geometria, uma vez que, ao gerar conflito com a GE possibilita-se a mobilização de esquemas coletivos.

Sendo o foco do trabalho identificar os EACI dos sujeitos ao se apropriarem de um artefato simbólico, consideramos que a escolha do conceito táxi-distância possibilita a interação entre os sujeitos de maneira a contribuir na construção de deduções conjuntas para solucionar as situações problemas.

Reforçando as palavras de Leiva (2016) quando aponta para a interatividade e aprendizagem colaborativa que ocorre nas diversas formas de utilização da GT acreditamos que a temática irá despertar a curiosidade e interação entre os sujeitos o que possibilitará a observação das variáveis envolvidas nos esquemas de atividades coletivas instrumentadas e na apropriação com artefato táxi-distância.

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Como já foi dito, esta pesquisa visou analisar o processo de aprendizagem colaborativa com base nos esquemas de atividades coletivas instrumentadas no contexto de apropriação do artefato simbólico táxi-distância por licenciandos de um curso que tem como foco o estudo da Geometria Gráfica. Os esquemas foram identificados nas interações presenciais e virtuais entre os participantes por meio de situações problemas sobre conceitos da Geometria do Táxi resolvidas com o auxílio do software GeoGebra.

Para atender a nossa proposta algumas escolhas metodológicas foram feitas de maneira a viabilizar a nossa análise. Abaixo apresentamos estas escolhas e suas justificativas. Elas nos permitiram analisar a colaboração na apropriação do artefato simbólico e identificar os esquemas de atividades coletivas instrumentadas mobilizados pelo grupo.

Este capítulo é composto de 4 tópicos. O primeiro explicita a delimitação do campo e dos sujeitos da pesquisa, além da justificativa da escolha do software GeoGebra. No segundo tópico destacamos como se deu a elaboração e refinamento das situações problemas para a Geometria do Táxi, com base no estudo piloto realizado, por meio do qual foram realizados os ajustes necessários para a elaboração do dispositivo central para o experimento, sendo estes apresentados ao longo do texto. Ainda no segundo tópico, tratamos dos elementos que compõem o roteiro de colaboração.

No terceiro tópico descrevemos a organização do experimento e apresentamos os pseudônimos dos participantes. Além disso, apontamos como ocorreram as sessões colaborativas, que envolveram colaboração face-a-face e virtual através de um ambiente online colaborativo.

No tópico quatro explicitamos os critérios de análise adotados e uma breve descrição dos elementos que compõem cada unidade de análise.

4.1 Delimitação do campo, sujeitos da pesquisa e software de Geometria Dinâmica

Escolhemos como campo de pesquisa um curso de licenciatura que objetiva a formação de professores para a Educação Básica (ensino fundamental, médio,

médio integrado à educação profissional técnica de nível médio) nas áreas de Geometria Gráfica (eixo central) e aplicações.

A escolha por realizar a pesquisa no âmbito da formação inicial considera inicialmente a Resolução nº 2 de 1º julho de 2015 do CNE/CP (BRASIL, 2015) que *define as diretrizes curriculares nacionais para a formação inicial em nível superior e para a formação continuada*. Esta resolução propõe a articulação entre graduação e pós-graduação como um dos princípios pedagógicos essenciais ao exercício e aprimoramento do profissional do magistério e da prática educativa.

Diante disso, destacamos a importância de trabalhar nas licenciaturas por promover reflexões sobre diferentes abordagens e tendências educacionais ainda na formação inicial e desta maneira contribuir ao longo prazo no processo de formação docente.

A decisão por considerar essa licenciatura como campo de pesquisa diz respeito à pertinência dos conceitos da Geometria do Táci com conteúdos previstos nos planos de ensino de disciplinas voltadas para o estudo da Geometria Gráfica e Geometria Analítica, conforme apresentado no Quadro 3.

Quadro 3 - Conteúdos previstos nos planos de ensino das disciplinas

Geometria Analítica	Geometria Gráfica Bidimensional
✓ Sistemas de coordenadas; ✓ Ponto Médio, distância entre dois pontos, comprimentos.	✓ Lugares geométricos (definição e conceitos); ✓ “as figuras geométricas como lugares geométricos na resolução de problemas”.

Fonte: Elaborado pela autora com base nos Planos de ensino das disciplinas.

A presença destes conteúdos nos planos de ensino nos possibilitou inferir que os licenciandos que já cursaram as disciplinas têm uma base para trabalhar com os conceitos relacionados à GT e sua relação com a GE e os lugares geométricos.

Tendo definido o campo da pesquisa, partimos para a escolha dos sujeitos considerando aspectos relacionados aos objetivos da pesquisa e sua contribuição no âmbito acadêmico.

Inicialmente consideramos a importância de promover reflexões por meio do experimento acerca da colaboração enquanto prática educacional e sua contribuição na aprendizagem dos sujeitos, além de analisar de que maneira a colaboração contribui na apropriação de conceitos pelos alunos.

Entendemos também que esta discussão é pertinente em diversos espaços acadêmicos pelo seu caráter interdisciplinar, no entanto, nos parece ser adequado aplicar com licenciandos para promover uma aproximação com diferentes práticas de ensino e diferentes olhares sobre o processo de aprendizagem.

Diante do quadro teórico e da escolha do objeto matemático da pesquisa consideramos pertinente a escolha de licenciandos de um curso cujo foco é o ensino de Geometria Gráfica, considerando principalmente o contexto das disciplinas apresentados anteriormente.

Foram definidos, enquanto sujeitos, licenciandos que já haviam cursado as disciplinas previstas na grade curricular do curso, como Geometria Analítica e Geometria Gráfica Bidimensional (GGB), disciplinas estas que apresentam conteúdos equivalentes em seus planos de ensino. Consideramos para o experimento sujeitos que tivessem familiaridade com o software de Geometria Dinâmica GeoGebra.

O reconhecimento das potencialidades dos recursos computacionais utilizados torna-se imprescindível quando se quer propor situações de aprendizagem colaborativa, uma vez que, os recursos tecnológicos devem dar suporte às interações entre os sujeitos, permitindo que estes consigam, de maneira colaborativa, elaborar deduções, justificativas e construir o conhecimento a partir destas interações. Diante disto, a escolha do software GeoGebra em nossa pesquisa se justifica por este software, que embora não tenha sido desenvolvido para trabalhar com geometrias não euclidianas, permite modelar a Geometria do Táxi por meio das suas funcionalidades e ferramentas disponíveis. Esta utilização se situa na definição de *catachrèse* apresentada por Rabardel (1995) que designa como sendo o uso de uma ferramenta para finalidades para as quais não foram projetadas.

O funcionamento do GeoGebra permite realizar construções, elaborar hipóteses por meio da dinamicidade e observar propriedades e invariantes das construções realizadas, sendo estes elementos importantes para a resolução colaborativa das situações problemas.

4.2 Concepção do experimento

A concepção do experimento consiste nos procedimentos necessários para a elaboração do dispositivo central da nossa pesquisa, por meio do qual serão realizadas as análises a fim de atender aos objetivos previstos.

Dividimos inicialmente estes procedimentos em dois momentos que foram destinados à elaboração e refinamento das situações problemas na GT e a elaboração do roteiro de colaboração.

Abaixo descrevemos as nossas escolhas para cada momento previsto.

4.2.1 Elaboração e refinamento das situações problemas para a GT

Ao realizar uma proposta de trabalho que envolve colaboração é importante ter em mente que o cenário deve apresentar elementos e situações que promovam interação e colaboração entre os sujeitos envolvidos.

Considerando este aspecto, em nossa pesquisa trabalhamos a noção de situações problemas de acordo com a definição apresentada por Câmara (2002), que afirma que as situações problemas são “situações geradoras de um problema, cujo conceito necessário à sua resolução seja aquele conceito que queremos que o aluno construa” (p.40) e tem como objetivo levar o aluno à construção de um conhecimento novo.

De acordo com esta definição, buscamos identificar e selecionar situações problemas que envolvessem os conceitos da GT e pudessem ser consideradas no contexto da pesquisa.

Um dos primeiros textos voltados para o ensino da GT é o livro *Taxicab Geometry: An Adventure in Non- Euclidean Geometry*¹³ de Eugene Krause (1986).

Inicialmente selecionamos algumas das situações apresentadas no livro e identificamos como elas estariam relacionadas aos objetivos da pesquisa. Para o nosso estudo iremos considerar as situações que tratam das noções iniciais da GT, a exemplo da noção de táxi-distância, que é o artefato simbólico a ser observado, ponto médio, táxi-circunferência e táxi-mediatrix.

As situações foram adaptadas de acordo com as aplicações da GT apresentadas em Krause (1986) e nos conceitos escolhidos para a pesquisa.

¹³ Geometria do Táxi: Uma aventura em uma Geometria não euclidiana (Tradução nossa).

Após a seleção das situações e adaptações necessárias foi realizada uma análise com base em um estudo piloto com 2 participantes (Tereza e Tiago)¹⁴ que atendem aos mesmos critérios definidos para os sujeitos do experimento da pesquisa.

Este estudo piloto teve como objetivo refinar as situações selecionadas, sendo observados aspectos como a compreensão dos enunciados, se as questões são desafiadoras o suficiente para possibilitar a colaboração e o consequente desenvolvimento dos esquemas de atividades coletivas instrumentadas, bem como a apropriação do artefato simbólico táxi-distância com auxílio das ferramentas disponíveis no software GeoGebra.

Antes de iniciar as situações problemas apresentamos no Roteiro de Colaboração uma breve contextualização da Cidade Planejada a ser considerada no experimento por meio de um exemplo da cidade de Barcelona, como ilustrado anteriormente.

Abaixo descrevemos as situações problemas analisadas, seus objetivos, possíveis soluções, o que se espera em cada situação e os principais aspectos identificados no Estudo Piloto.

Destacamos que, as figuras a serem apresentadas para ilustrar as resoluções das situações problemas não estão em mesma escala ao longo do texto. Vale ressaltar que a representação dos objetos gráficos contidos nelas não é foco da nossa análise.

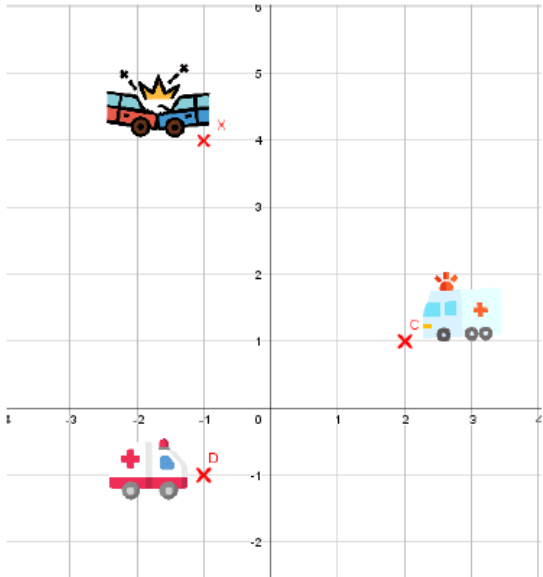
- SITUAÇÃO PROBLEMA 1

A primeira situação propõe que os participantes identifiquem qual carro está a menor distância do local da colisão representado pela coordenada X (-1, 4). Esta situação visa atender à dimensão da instrumentalização do artefato simbólico, visto que os participantes terão contato inicial com as propriedades e características do artefato.

¹⁴ Nomes fictícios

Figura 22 - Situação Problema 1

1 – Aconteceu uma colisão entre dois veículos na Cidade Planejada no local indicado em $X = (-1,4)$. Há dois carros de socorro na área, o veículo do médico Carlos em $(2,1)$ e carro da médica Débora em $(-1,-1)$. Qual veículo o serviço de socorro deve mandar para o local da colisão?



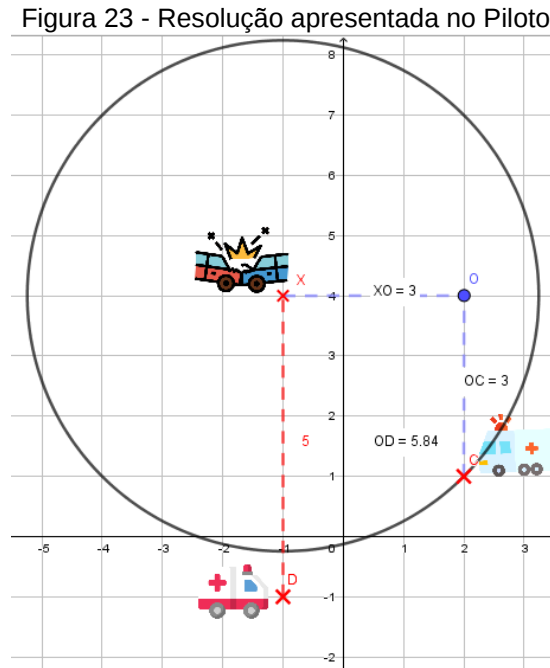
Fonte: Elaborada pela autora

Com esta situação pretendemos que os participantes comecem a entender a relação de distância na GT. Para isto, as coordenadas dos pontos C e D foram determinadas de maneira que se resolvida considerando a circunferência na GE (lugar geométrico de equidistância de um ponto) a resposta obtida será que a distância euclidiana entre X e C (4,24 cm) será menor que a distância euclidiana entre X e D (5 cm). No entanto, se resolvida considerando a configuração da cidade planejada representada pelo plano cartesiano a resposta correta será que o carro D deverá ser enviado ao local da colisão, pois mesmo tendo uma distância maior ele considerará o trajeto permitido na GT.

No estudo piloto, Tereza e Tiago inicialmente refletem sobre a distância entre os pontos C (2, 1) e X (-1, -1), conforme transcrição abaixo:

Participante	Fala
Tiago	É fácil, tipo, a distância de C pra X é menor do que de D para X, mas ele não pode andar na diagonal.
Tereza	Pode, mas não conta.
Tiago	É

Mesmo compreendendo facilmente a noção de distância aceita na situação problema eles utilizam uma circunferência para medir a distância entre os pontos. (Figura 23).



Fonte: Dados da pesquisa

Os participantes utilizam a circunferência centrada em X e passando por C para comparar as distâncias euclidianas de C a X e de D a X. Na resposta registrada em caixa de texto no próprio Geogebra eles mostram que compreendem que a resolução desse problema não se dá por meio da distância euclidiana:

Mesmo a distância de C para X sendo menor que a distância de D para X, o veículo que deve ser mandado para o socorro é o veículo em D. Pois como os veículos não podem se deslocar na diagonal, o que está em C acabaria fazendo um percurso maior ($OC+OX$).

Ao indicar a distância a ser percorrida pelo carro C como sendo ($OC+OX$) os participantes se aproximam da definição do artefato simbólico táxi-distância.

Diante da construção e resolução apresentada pelos participantes percebemos que não houve dificuldades no que se refere ao deslocamento do carro localizado em D ser o mais adequado para ir ao local da colisão.

A partir do resultado obtido no piloto consideramos como ajuste para o experimento realizar alguns questionamentos com a finalidade de compreender melhor o raciocínio utilizado pelos participantes para resolver a situação:

- a) Qual a relação de distância utilizada?
- b) Como calcular a distância entre os pontos C e D até o local da colisão?

Em relação aos EACI nesta primeira situação percebemos que houve poucas interações entre os participantes não sendo possível identificar muitos elementos que explicitem o desenvolvimento dos esquemas.

• SITUAÇÃO PROBLEMA 2

Para a segunda situação o foco foi dado aos conceitos de ponto médio, menor distância entre dois pontos e táxi-mediatrix e está dividida em 4 questões que trabalham o artefato simbólico táxi-distância em diferentes contextos.

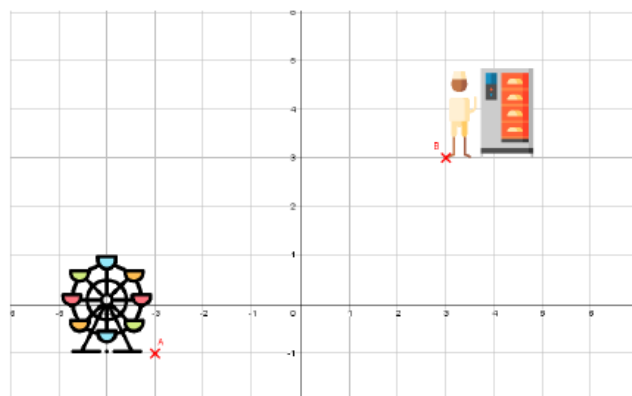
Na primeira questão apresentada (Figura 24) após trazer o contexto da situação problema é solicitado que os participantes localizem no plano qual a região em que o casal Alice e Bruno devem comprar um apartamento.

Esperamos que os participantes associem a noção de menor distância na GE e cheguem à conclusão que devido à métrica utilizada na GT não existe apenas 1 local possível, sendo possível determinar uma região entre os pontos que atenderá à condição indicada na questão.

Figura 24 - Situação problema 2 (a)

2 – Onde comprar o apartamento?

- a) Alice e Bruno estão olhando apartamentos na Cidade Planejada. Alice trabalha no parque de diversões, localizado em $A = (-3, -1)$, e Bruno, na padaria localizada em $B = (3, 3)$. Sendo eles ecologicamente conscientes, caminham até onde trabalham. Decidiram comprar seu apartamento considerando que ele deveria ser localizado próximo, de modo que a distância que Alice teria de caminhar para seu trabalho mais a distância que Bruno teria de caminhar para o seu, fosse a menor possível. Localizem no mapa a área que atenda a necessidade deles de caminhar a menor distância possível entre o apartamento e o trabalho de cada um.

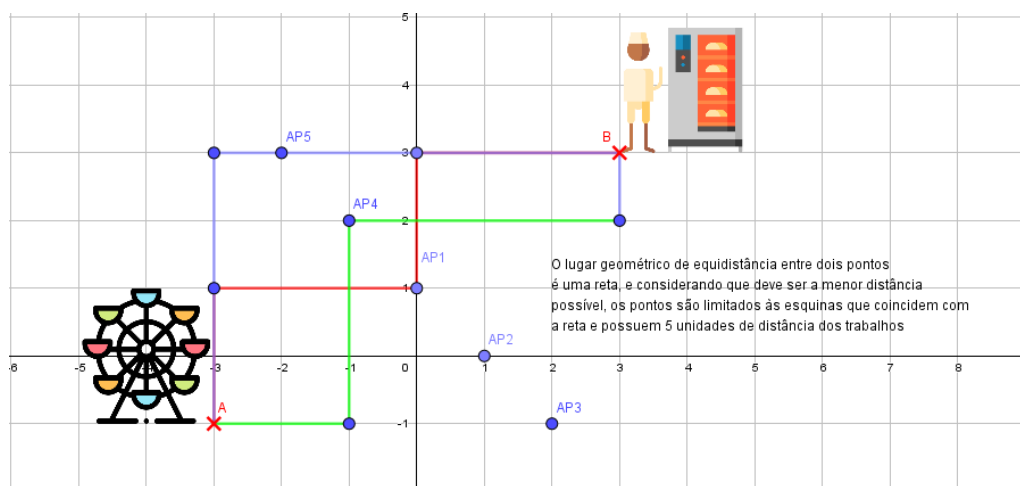


Fonte: Elaborado pela autora

No piloto percebemos a necessidade de alterar o questionamento do enunciado que solicitava “*onde eles devem procurar apartamento para atender a necessidade deles de ser a menor distância possível até o trabalho de cada um*”, para localizar a área que atendesse a necessidade deles, pois os participantes se restringiram apenas a determinar pontos sobre os nós do plano, conforme apresentado na Figura 25.

Ao considerar a resposta adequada apenas os pontos nos nós do plano (AP1, AP2, AP3, AP4 e AP5) os participantes encontraram a resposta que satisfaz a questão C, que se refere ao conjunto de pontos médios entre Alice e Bruno, ao mesmo tempo em que não consideram outros caminhos em que a soma das distâncias sejam mínimas entre os locais de trabalho dos personagens da situação.

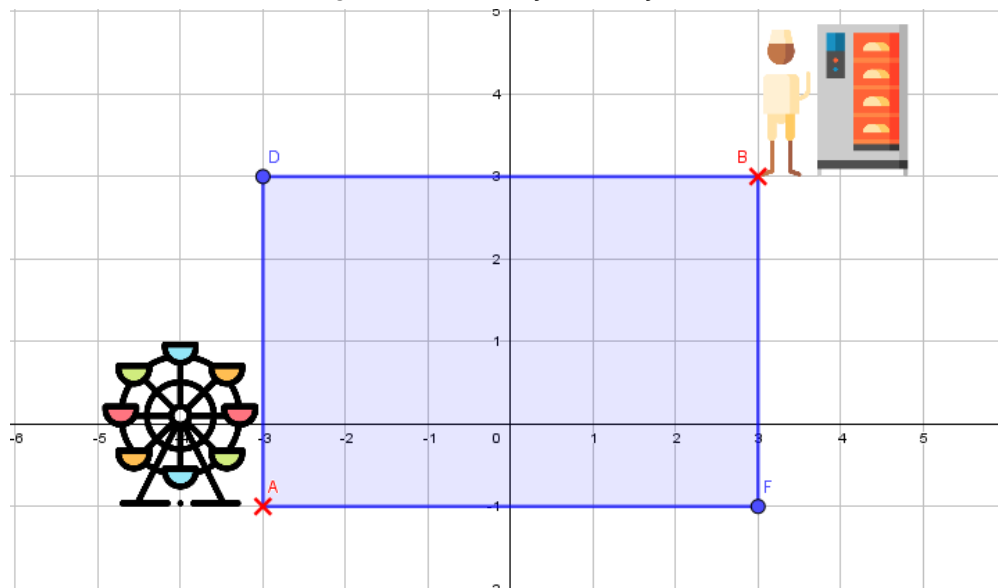
Figura 25 - Solução apresentada no Estudo Piloto



Fonte: Dados da pesquisa

Na situação apresentada a menor distância entre os pontos A (-3, -1) e B (3, 3) era de 10 unidades e a solução é dada pelo quadrilátero ADBC formado (Figura 26), exceto os pontos A e B, logo, quaisquer outros pontos do quadrilátero atendem a condição estabelecida pelo casal.

Figura 26 - Resolução Situação 1



Fonte: Elaborado pela autora

Na alternativa **B** o procedimento será o mesmo aplicado à anterior e tem como objetivo identificar e localizar pontos no espaço, comparando distâncias a dois pontos dados.

Figura 27 - Situação problema 2 (b)

- b) Em um momento de cavalheirismo Bruno decide que a soma das distâncias ainda deve ser a menor, mas Alice não deve ter que andar mais do que ele. Agora, onde eles poderiam procurar um apartamento?

Fonte: Elaborado pela autora

Nesta situação os participantes deverão utilizar a noção de menor distância para definir uma região para que o local do apartamento atenda a condição que Alice não teria de caminhar mais do que Bruno.

No estudo piloto, Tiago e Tereza definiram os pontos no plano cartesiano nos nós para indicar os locais nos quais Alice andaria menos ou tanto quanto Bruno (Figura 28). Vale ressaltar que a questão tem apenas como objetivo identificar locais nos quais Alice não ande mais que Bruno, sem especificar que pode andar a mesma distância, no entanto, como apontado por Leivas (2016) os alunos fazem esta relação, considerando uma nova hipótese para o problema.

Para a questão de letra **C** o objetivo é a obtenção de pontos equidistantes de dois pontos dados, além de reconhecer a diferença em termos da unicidade desses na GE.

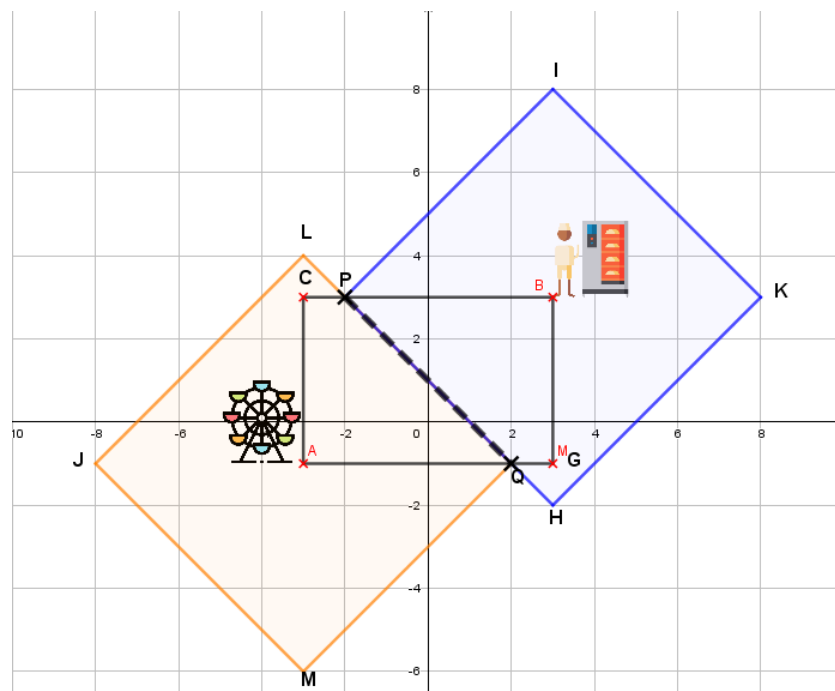
Figura 30 - Situação Problema 2 (C)

- c) Diante da atitude de Bruno, Alice concorda que a soma das distâncias deve ser mínima, mas ela acredita que o correto é que ambos tenham exatamente a mesma distância para caminhar até o trabalho. Agora, onde eles poderiam escolher o apartamento?

Fonte: Elaborado pela autora

Esperamos que seja determinado os “pontos médios”¹⁵ entre eles, usando a noção de equidistância de um ponto fixo.

Figura 31- Conjunto de pontos médios na GT



Fonte: Elaborado pela autora

O apartamento pode estar localizado em qualquer ponto sobre o segmento tracejado.

No estudo Piloto Tiago e Tereza consideraram esta condição na resolução da letra **A**, sendo assim, apenas reforçaram que se tratava da mesma solução já apresentada.

¹⁵ Considerados aqui o conjunto de pontos que estão a uma mesma distância de dois pontos dados e que distância é a menor possível.

Na última questão a condição de menor distância para a determinação do apartamento não será mais considerada, porém ainda precisam manter a distância igual para os locais de trabalho de Alice e Bruno.

Figura 32 - Situação problema 2 (D)

- d) Depois de um dia sem sucesso na busca do apartamento eles decidem ampliar a área de pesquisa. O único requisito que eles mantêm é que ambos estejam à mesma distância de seus trabalhos. Agora, onde eles deveriam olhar?

Fonte: Elaborado pela autora

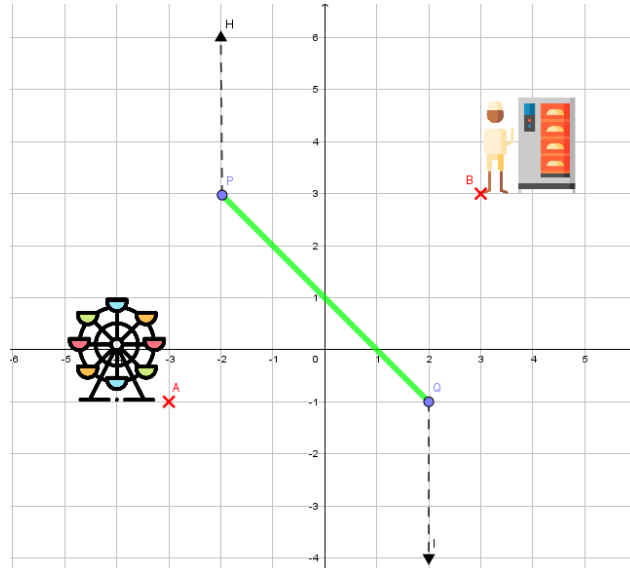
Esperamos nesta questão que os participantes reconheçam que por não haver a exigência de manter a menor distância (10 unidades) eles poderão escolher outros locais para o apartamento, no entanto, precisam identificar os locais que atendem a exigência do casal de andarem a mesma distância, além dos pontos determinados anteriormente pelos pontos médios.

Não havendo mais a condição de manter a menor distância, Tiago e Tereza constroem uma reta mediatriz entre A e B, desconsiderando que a noção de táxi-distância faz com que mesmo os pontos estando sobre a reta mediatriz (euclidiana) não se mantém a propriedade de equidistância entre os locais de trabalho de Alice e Bruno, que está sendo solicitada de acordo com a métrica do táxi, pois devido a métrica utilizada não ser a mesma da euclidiana, apenas os pontos sobre a reta mediatriz não garantem a equidistância na GT.

Diante da solução apresentada por Tiago e Tereza consideramos questionar os participantes do experimento final sobre o que *confirma que todos os pontos encontrados mantêm a equidistância entre A e B*.

Leivas (2016) ao realizar a análise desta questão apresenta que a partir do segmento de reta PQ surge uma infinidade de possibilidades em que as distâncias entre os pontos A e B irão aumentando (Figura 33).

Figura 33- Mediatriz na GT



Fonte: Elaborado pela autora adaptada de Leivas (2016)

A condição de que Alice e Bruno continuem percorrendo a mesma distância aos seus locais de trabalho se mantém ao longo das semirretas PH e QI. No segmento PQ estão os pontos que dão a distância mínima. Assim, de acordo com o conceito de mediatriz: conjunto de pontos equidistantes de dois pontos dados, obtemos o lugar geométrico mediatriz na Geometria do Táxi.

Nesta questão optamos por considerar apenas o 3º caso da táxi-mediatriz que ocorre quando os pontos não estão alinhados em relação ao plano cartesiano e sua representação corresponde a um segmento de reta a 45° com a horizontal e duas semirretas. Esta escolha foi feita por entender que por meio deste caso é possível evidenciar mais a propriedade da táxi-mediatriz como lugar geométrico sem se distanciar muito da noção euclidiana, como seria o 2º caso da mediatriz, no qual ela é formada por uma região do plano.

Apesar da escolha da representação da táxi-mediatriz no terceiro caso, notamos na resolução dos participantes uma dificuldade em associar a noção de mediatriz enquanto conjunto de pontos equidistantes de outros dois pontos. Esta dificuldade pode estar relacionada às diferentes leituras sobre a mediatriz euclidiana, muitas vezes vinculada ao traçado de uma reta perpendicular que passa pelo ponto médio de um segmento.

- SITUAÇÃO PROBLEMA 3

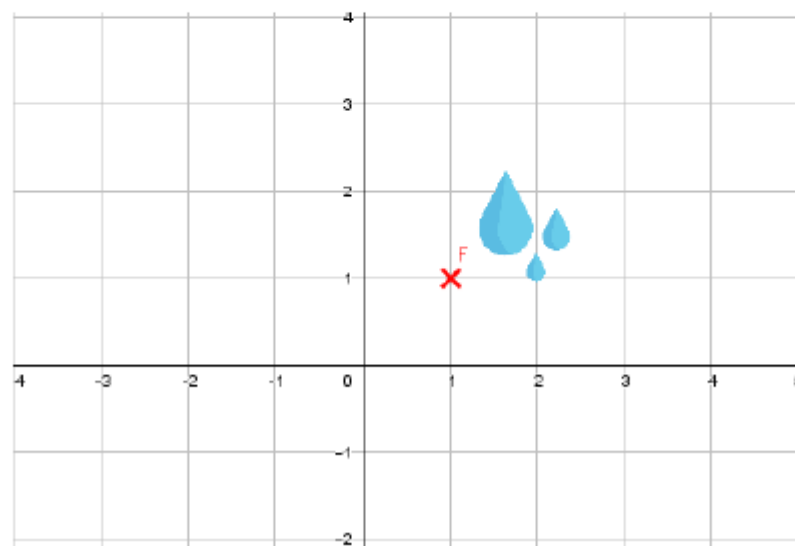
A situação problema 3 propõe que os participantes representem pontos na GT que estejam a mesma distância de um ponto fixo considerando ainda as condições da cidade planejada.

Figura 34 - Situação problema 3

3 – No Parque da Cidade Planejada será instalada uma fonte de água em $F = (1,1)$ que deverá estar a uma mesma distância de diferentes espaços do parque. Estes espaços estão localizados em:

$E1=(-3,1)$; $E2=(-2,2)$; $E3=(-1,3)$; $E4=(0,4)$; $E5=(1,5)$; $E6=(2,4)$; $E7=(3,3)$; $E8=(4,2)$; $E9=(5,1)$; $E10=(4,0)$; $E11=(3,-1)$; $E12=(2,-2)$; $E13=(1,-3)$; $E14=(0,-2)$; $E15=(-1,-1)$; $E16=(-2,0)$.

Localizem estes pontos e discutam se todos eles estão a mesma distância da fonte. Se todos estiverem a uma mesma distância discutam sobre como é possível confirmar isso.



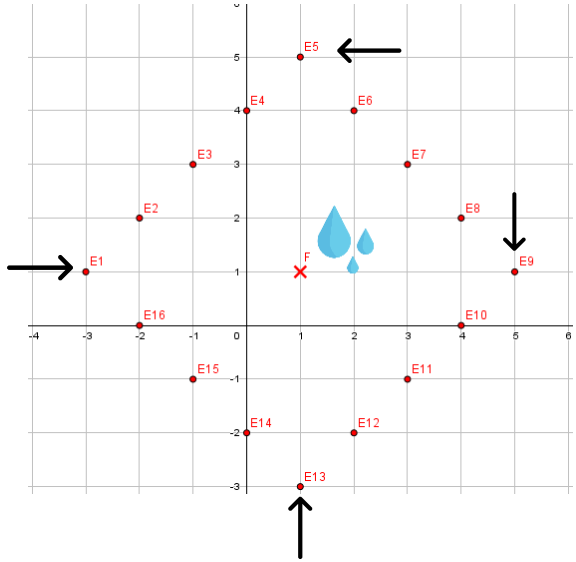
Fonte: Elaborado pela autora

Para a resolução desta situação os participantes após representarem os pontos indicados pelas coordenadas precisarão discutir sobre a relação de distância destes para a fonte.

Tendo marcado os pontos no plano Tiago e Tereza começaram a se questionar sobre a relação de distância entre a fonte e os pontos dados.

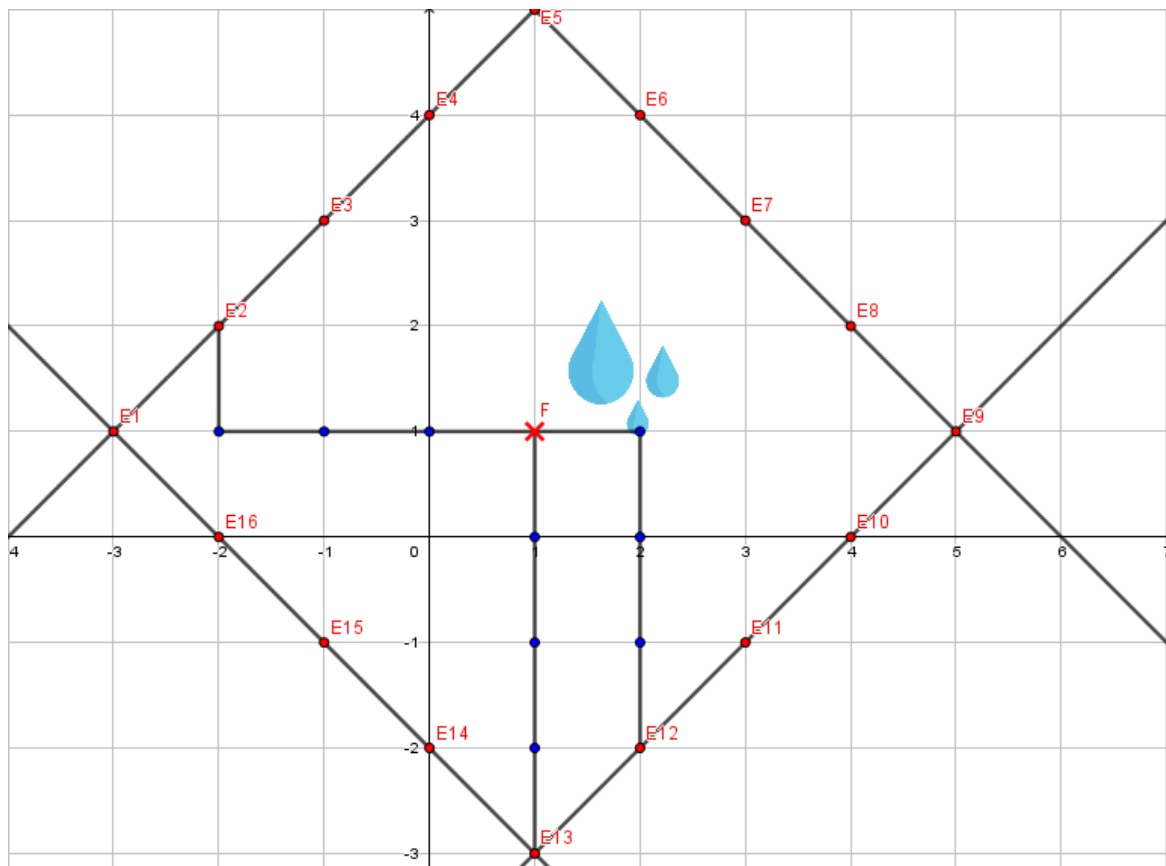
Inicialmente Tereza conta as unidades e identifica que alguns pontos estão a 4 unidades da fonte, no entanto, Tiago afirma que não estão a mesma distância e Tereza a partir da noção de táxi-distância explica o porquê de os pontos estarem a

mesma distância. Este trecho evidencia a dimensão da instrumentalização como pode ser observado por meio do recorte extraído da transcrição:

Participante	Fala	Registro e Comentários
Tiago	E aí, tá ou não tá?	
Tereza	1, 2, 3, 4...	
Tiago	Tá não.	
Tereza	Tá não? Por quê?	
Tiago	Porque não tá. Só o 1, o 9, o 13 e aquele lá de cima tão	O participante se refere aos pontos das extremidades, conforme indicado pelas setas.
Tereza	Por que não tão?	
Tiago	Não, porque é lugar geométrico	
Tereza	Não, eles não estão a mesma distância, mas depende se for considerar a distância que ele vai percorrer para chegar.	
Tiago	[...] tem as esquinas. Meu Deus, só quero imaginar como se fosse um plano.	
Tereza	Se fosse era um círculo. Se fosse um plano realmente não tava não	

Ao observarem que na representação obtida da táxi-circunferência todos os pontos estão equidistantes da fonte localizada em F (1, 1) a questão solicita que os participantes discutam de que maneira é possível confirmar esta relação de equidistância encontrada. Tiago e Tereza concluem que podem representar os caminhos entre os pontos e a fonte de maneira a garantir que todos estão a 4 unidades de distância, conforme figura 35.

Figura 35 - Solução apresentada para Situação 3



Fonte: Dados da pesquisa

Como se trata de uma táxi-circunferência todos os pontos estão a distância de 4 unidades (raio da táxi-circunferência), no entanto, para chegar a esta conclusão os participantes precisam considerar que, diante do artefato simbólico táxi-distância a representação da circunferência será diferente na GT, sendo este um fator que possibilita o levantamento de hipóteses entre os participantes para tentar confirmarem a solução encontrada.

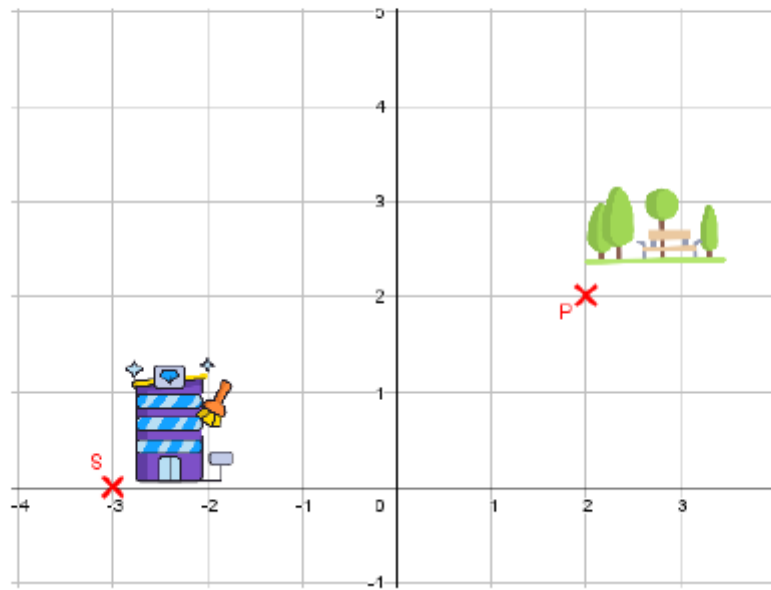
Diante da solução apresentada por Tiago e Tereza consideramos para o experimento final questionar sobre a *relação de distância entre os pontos E9 e E3* para observar de que maneira os participantes estão mobilizando a noção de táxi-distância em diferentes situações.

- SITUAÇÃO PROBLEMA 4

Para a última situação problema a construção envolvida é de interseção de táxi-circunferências no contexto de distância entre dois pontos.

Figura 36 - Situação Problema 4

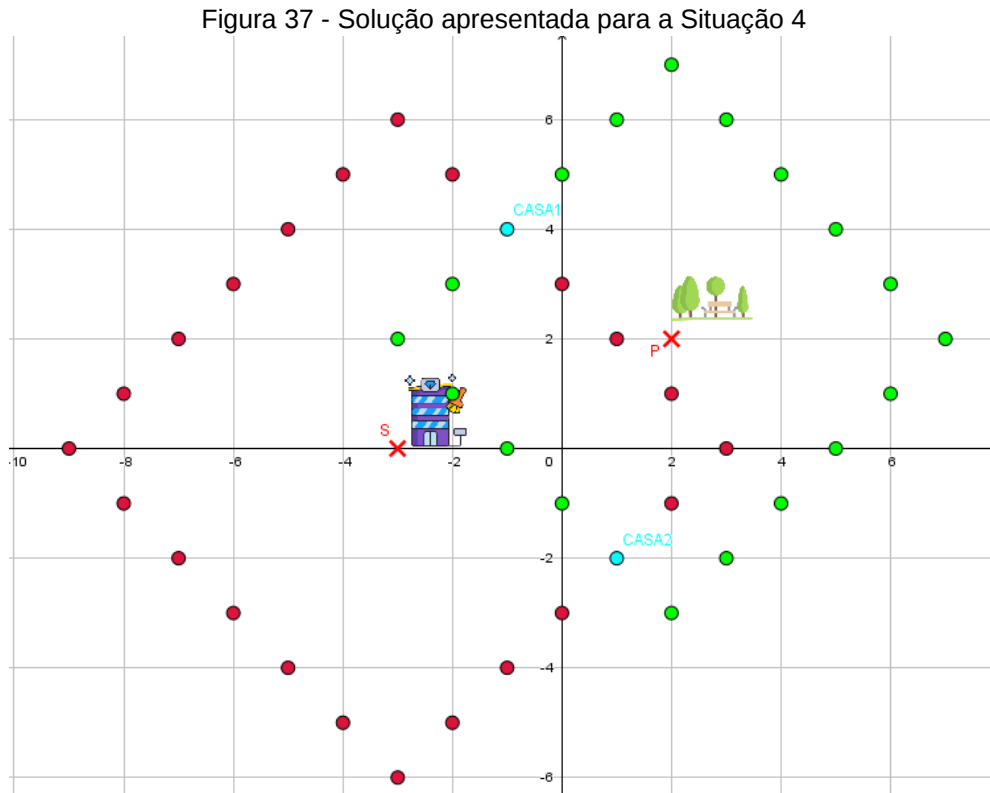
4 – Lucas é um dos moradores da Cidade Planejada. A distância da sua casa até o shopping da cidade localizado em S $(-3,0)$ é de 6 quadras e dentro de 5 quadras da Praça da cidade, P $(2,2)$. Onde está localizada a casa de Lucas?



Fonte: Elaborado pela autora

Para encontrar os possíveis locais para a casa de Lucas esperamos que os participantes determinem os pontos por meio da interseção de duas táxis circunferências, logo precisarão ter compreendido a noção de táxi-distância para calcular a distância de 6 quadras do shopping e da praça que fica a 5 quadras.

Nesta situação, Tiago e Tereza demonstram facilidade na determinação das táxis circunferências. Tiago gesticulou indicando que a construção poderia ser resolvida usando compassos para construir circunferências, mas como a distância considerada é outra é necessário marcar os pontos equidistantes e assim identificar os locais que estão localizados na interseção das duas táxi-circunferências.



Fonte: Dados da pesquisa

A resolução das situações problemas apresentadas nos permitiu observar de que maneira os participantes conseguiram se apropriar do artefato simbólico táxi-distância, uma vez que, todas elas exigiam que esta noção fosse considerada na elaboração dos seus esquemas e principalmente nos EACI.

No que se refere à associação com os lugares geométricos na GE, concordamos com Leivas (2016) quando este afirma que há uma dificuldade em sair do espaço perceptivo proposto por Euclides para aceitar novos espaços mesmo a GT sendo bastante concreta.

Em relação aos esquemas desenvolvidos, o estudo piloto demonstrou que as discussões não foram suficientes para observar os indícios do surgimento dos EACI, visto que, neste primeiro momento as estratégias e consequentemente os esquemas foram expressos de maneira implícita as discussões e as respostas registradas no próprio GeoGebra. Diante disto, identificamos a necessidade da elaboração de questionamentos ao longo de cada situação problema proposta aos participantes do experimento final com a intenção de evidenciar as respostas apresentadas.

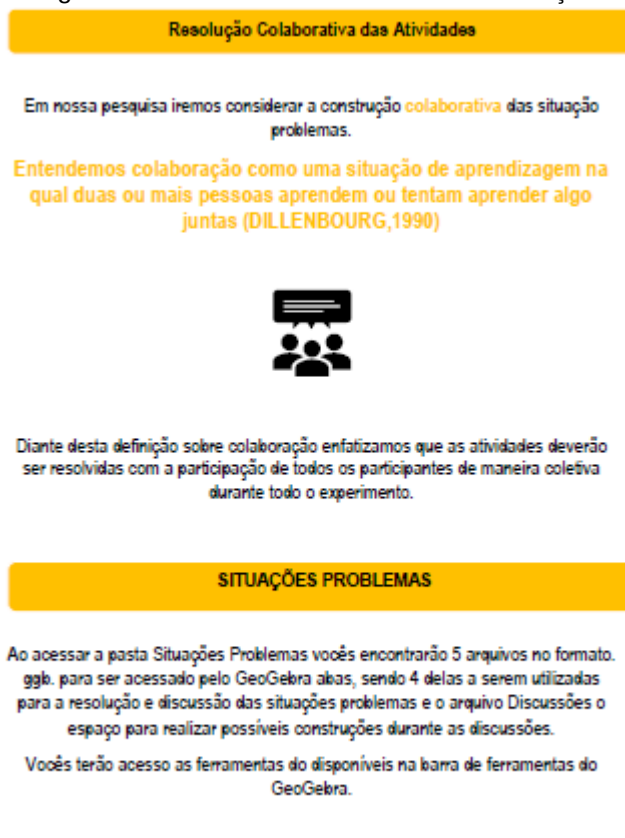
4.2.2 Roteiro de colaboração

Como apresentado anteriormente um roteiro de colaboração consiste em um conjunto de instruções relativas à maneira como os sujeitos deverão interagir, colaborar e resolver problemas.

Para apoiar nossa pesquisa utilizamos a noção de *macro-scripts*, por meio dos quais serão apresentadas informações sobre a dinâmica do experimento, a organização do grupo, o trabalho no software GeoGebra e a proposta de colaboração que se espera.

As informações que compõem o roteiro de colaboração foram organizadas em três tópicos: a) Apresentação do experimento; b) Resolução Colaborativa e c) Situações Problemas.

Figura 38 – Recorte do Roteiro de Colaboração¹⁶



Fonte: Elaborado pela autora

Estas informações serão apresentadas em um arquivo em formato PDF e ficará disponível *online* para os participantes.

¹⁶ O roteiro de colaboração completo pode ser consultado no Apêndice A deste trabalho

4.3 Descrição do experimento

Para atender o objetivo geral da pesquisa de analisar o processo de colaboração a partir do desenvolvimento de esquemas de atividades coletivas instrumentadas (EACI) de licenciandos com ênfase na apropriação do artefato simbólico táxi-distância por meio de situações problemas organizamos o experimento de maneira a contemplar as diversas dimensões envolvidas neste processo.

Foi formado um grupo com 5 licenciandos que atendiam aos critérios estabelecidos.

Como o objetivo foi acompanhar os esquemas que os sujeitos desenvolvem ao trabalhar de maneira colaborativa com o auxílio do software GeoGebra realizamos uma atividade presencial em que foi considerada tanto a colaboração face-a-face como a colaboração virtual.

Foram realizadas duas sessões colaborativas para que fosse possível observar as interações, o surgimento dos EACI e analisar se houve a apropriação do artefato táxi-distância.

Os participantes do experimento foram identificados a partir de pseudônimos criados por eles conforme indicado abaixo:



Anastácia
(AN)



Júpiter Maria
(JM)



Filha do Rio
(FR)



Nielir
(NI)



Tasilver
(TA)

O experimento se dividiu conforme apresentado no quadro abaixo, que ilustra como se deram as interações e o tempo de cada sessão colaborativa.

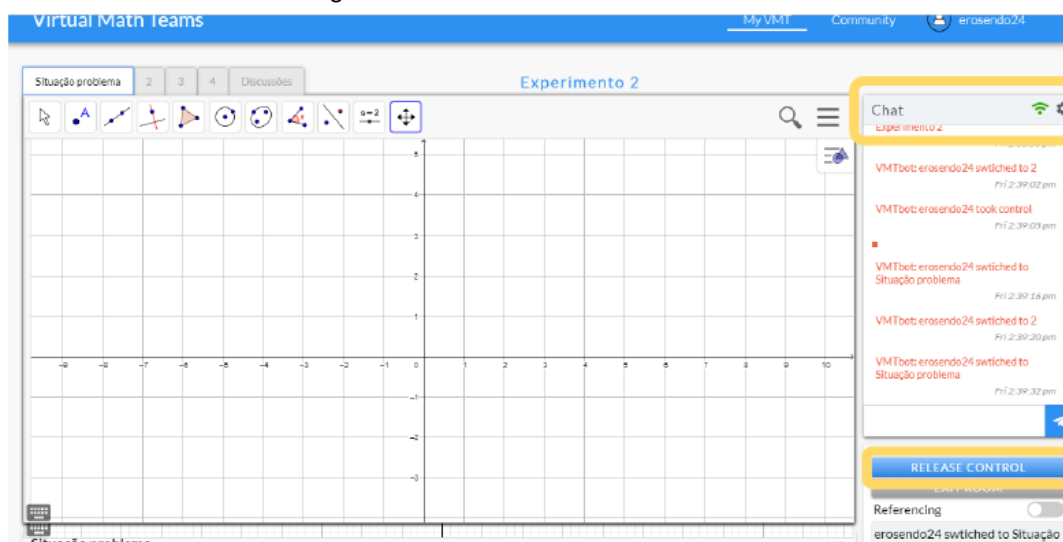
Quadro 4 – Organização do Experimento

Sessão	Data	Atividade realizada	Conceitos explorados	Interação	Tempo da sessão
1ª	29 de outubro de 2019	Situação problema 1	Distância entre pontos - táxi-distância	Presencial e virtual	50 min
2ª	05 de novembro de 2019	Situação problema 2, 3 e 4	Menor distância, Táxi-circunferência, Ponto médio, Táxi-mediatrix, interseção entre táxi-circunferências.	Presencial	1h e 30 min

Fonte: Elaborado pela autora

A primeira sessão foi planejada para acontecer utilizando uma sala virtual no ambiente online colaborativo *VMT*¹⁷ (*Virtual Math Teams*) que dispõe de ferramenta de chat e construções compartilhadas (Figura 39).

Figura 39 - Tela da Sala Virtual do VMT



Fonte: Printscreen da tela do ambiente VMT

O ambiente *VMT* foi desenvolvido com a proposta de ser um espaço para resolução de atividades matemáticas de maneira colaborativa com base na *CSCL* por Stahl e colaboradores. O ambiente articula recursos para comunicação síncrona,

¹⁷ Site do *Virtual Math Teams* : <https://vmt.mathematicalthinking.org/>

como chat e software de Geometria Dinâmica entre outros recursos que favorecem a realização de atividades colaborativas.

A proposta inicial para o experimento era observar tanto a colaboração face-a-face quanto a colaboração via interação no VMT. Os participantes seriam organizados em dois grupos que trabalhariam presencialmente e se comunicariam com o outro grupo por meio do chat do ambiente e utilizariam de maneira compartilhada o software GeoGebra na resolução das situações problemas.

Devido a questões externas ao experimento as participantes Anastácia e Filha do Rio não conseguiram estar presentes no horário previsto para o experimento, impossibilitando a formação dos grupos. Desta maneira, o experimento precisou ser reconfigurado para atender aos objetivos da pesquisa.

Diante desta reconfiguração a participante Anastácia participou do experimento por meio do VMT, já a participante Filha do Rio teve problemas de acesso remoto e não pode interagir com os demais participantes pelo chat do VMT.

Os participantes Júpiter Maria, Tasilver e Nielir trabalharam presencialmente e se comunicaram com Anastácia por meio do chat do VMT.

Para a primeira sessão colaborativa estabeleceu-se que a colaboração se manteria presencial e virtual e ambas de modo síncrono, sendo apenas um grupo presencial.

A sessão durou aproximadamente 50 minutos e se dividiu conforme Quadro 5.

Quadro 5 - Organização da sessão 1

Tempo Aproximado	Atividade realizada
15 minutos	Familiarização com o VMT e ferramenta <i>Take control</i>
5 minutos	Leitura do Roteiro de Colaboração
30 minutos	Realização da situação 1

Fonte: Dados da pesquisa

O roteiro de colaboração foi enviado para todos os participantes via endereço eletrônico momentos antes do início da sessão, bem como as informações de uso do ambiente VMT¹⁸, como login, instruções de acesso à sala virtual e uma breve descrição das ferramentas disponíveis a exemplo do chat, GeoGebra e a função *Take control*.

¹⁸ Disponíveis no Apêndice B.

Inicialmente foi solicitado que os participantes acessassem a sala virtual e testassem o chat entre eles. Neste momento, os participantes também começaram a testar a ferramenta *Take control* e entender o funcionamento do chat e do uso do GeoGebra.

Durante a sessão os participantes que trabalharam presencialmente interagiram sobre o uso do *VMT* e sobre as possíveis soluções da situação problema 1. No entanto, a comunicação a respeito da situação ocorreu principalmente por meio do chat do ambiente.

Para esta sessão foram considerados como instrumentos de coleta de dados a gravação em vídeo, o histórico do chat fornecido pelo ambiente e as construções realizadas no GeoGebra integrado ao *VMT*.

Para a segunda sessão colaborativa, que aconteceu no dia 05 de novembro de 2019, o modo de colaboração considerado foi face-a-face, visto que os cinco participantes puderam estar presentes para a realização das demais situações problemas do experimento.

Os participantes tiveram novamente acesso ao roteiro de colaboração disponibilizado em PDF com os demais enunciados das situações problemas.

A organização da sessão colaborativa 2 difere da primeira sessão pois nesta os sujeitos trabalharam utilizando apenas o software GeoGebra em um mesmo computador, no qual realizaram as construções e manipulações para testar e validar as soluções para as situações problemas.

Inicialmente foi solicitado aos participantes que retomassem a situação problema 1 visto que a participante Filha do Rio não pôde interagir com os demais a respeito da solução encontrada.

Após uma breve discussão sobre a primeira situação problema os participantes concordaram e reforçaram a solução apresentada e deram continuidade ao experimento realizando as demais situações problemas propostas.

Após a conclusão das situações problemas foi realizado um momento de Oficialização, no qual foram explicitados os principais aspectos da Geometria do Táxi, da noção de táxi-distância e a sua relação com os lugares geométricos de equidistância.

Para coleta dos dados consideramos a gravação em vídeo, a captura de tela e áudio do computador e as construções realizadas no software GeoGebra.

Os dados foram organizados para permitir realizar a análise de acordo com os critérios estabelecidos e que serão apresentados na seção seguinte.

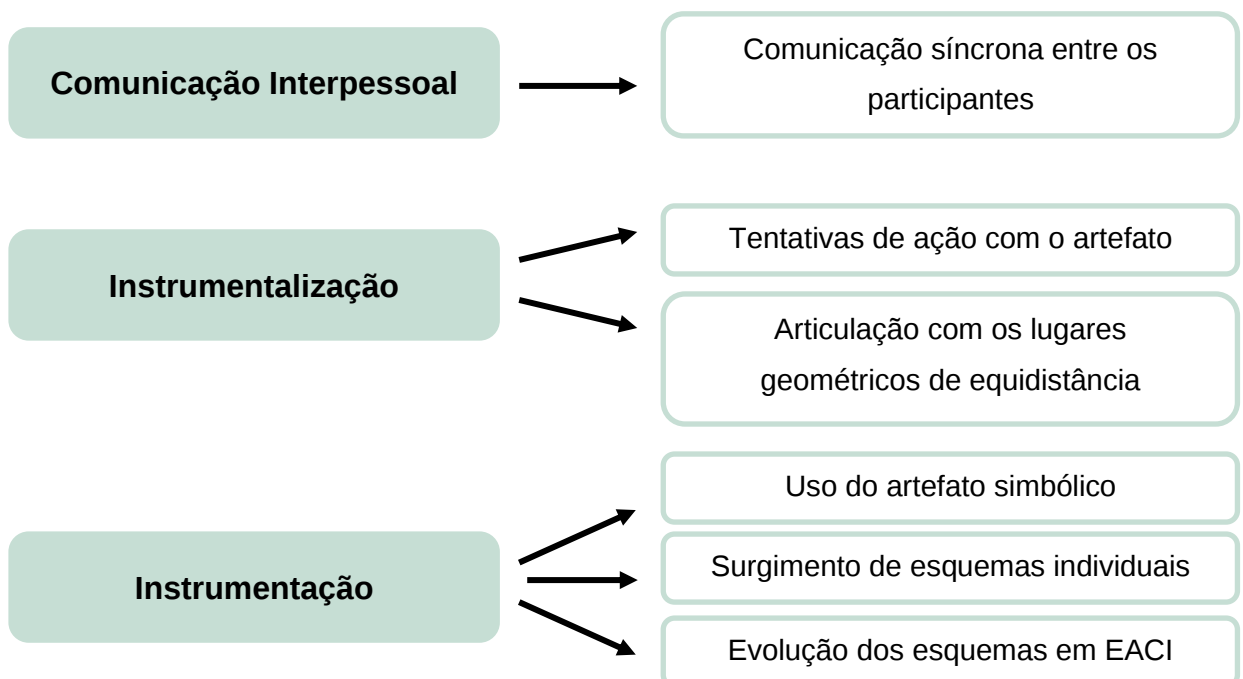
4.4 Critérios de análise

Para analisar os dados obtidos por meio do experimento e considerando o quadro teórico da nossa pesquisa definimos três unidades de análise. A partir destas unidades definimos quais elementos serão contemplados na análise do experimento.

É importante reforçar, como apontado por Drijvers e Trouche (2008), que em relação aos esquemas desenvolvidos pelos sujeitos os dados permitem que tentemos reconstruir os esquemas pois, não é possível acessar os esquemas mentais dos indivíduos. Desta maneira, os resultados obtidos por meio dos dados são baseados na reconstrução dos esquemas desenvolvidos.

O diagrama abaixo apresenta as variáveis a serem observadas em cada unidade de análise dos dados (Figura 40).

Figura 40 - Unidades de análise



Fonte: Elaborado pela autora

A primeira unidade busca analisar a comunicação interpessoal, que se refere à troca de informação entre um ou mais sujeitos. Acreditamos que para que haja uma boa comunicação entre os participantes é importante que todos consigam receber e interpretar o que será transmitido entre eles.

Retomando as ideias de Sfard (2008) concordamos que a comunicação é um processo no qual qualquer ação específica tem como propósito abordar alguém ou reagir às declarações anteriores de alguém, ou ambos.

Para observar as interações que ocorreram durante a realização das situações problemas apresentamos por meio de um fluxograma a sequência de falas dos participantes, evidenciando a participação de cada um deles ao longo de cada situação problema. Para auxiliar na compreensão das interações utilizamos alguns ícones na representação do fluxograma, conforme apresentando no Quadro 6.

Quadro 6 - Legenda do fluxograma das interações¹⁹

Representação no fluxograma	Descrição
	As setas cinzas indicam a sequência de falas dos participantes.
	As setas pretas, representadas no fluxograma de acordo com as interações, indicam a retomada da fala de um participante.
	Os retângulos preenchidos destacam os momentos em que a fala do participante apresenta um esquema individual.
	Os retângulos com bordas duplas indicam o participante que retoma uma estratégia apresentada anteriormente, com a intenção de questionar ou contribuir.
	Os retângulos com a abreviatura PES indicam os momentos de fala da pesquisadora.
	Os retângulos simples indicam falas incompletas ou que não estão diretamente relacionadas ao esquema em desenvolvimento.

Fonte: Elaborado pela autora

¹⁹ É importante destacar que não é nossa intenção analisar todas as interações apresentadas no fluxograma e sim apresentar aos leitores por meio de uma representação a sequência delas.

Além de indicar a sequência de falas destacamos por meio das representações no fluxograma principalmente os momentos em que foram apresentados os esquemas individuais, a retomada deles por outros participantes e as falas da pesquisadora. Entendemos que apontar estes momentos nos possibilita compreender como os participantes interagiram de maneira a resolver coletivamente as situações apresentadas.

Apesar da comunicação interpessoal por si só não garantir a colaboração entre os participantes consideramos uma variável importante de ser analisada, visto que a partir dela podemos observar as interações e reconstruir os esquemas desenvolvidos.

Como apontado por Rabardel (1995), os esquemas de atividades coletivas instrumentadas emergem dos esquemas individuais dos sujeitos. Logo, correspondem ao resultado das interações nas quais há uma construção compartilhada do conhecimento entre os sujeitos que trabalham com um mesmo instrumento.

Diante disso, as unidades de análise Instrumentalização e Instrumentação possibilitam observar o surgimento dos esquemas individuais dos participantes e de que maneira as interações contribuem para a evolução em EACI. Estas categorias serão observadas de acordo com a identificação e reconstrução das estratégias indicadas pelos participantes e de que maneira os demais participantes se apropriam dela e a utilizam em suas hipóteses e na própria compreensão do conceito trabalhado.

A Instrumentalização será observada por meio das tentativas de ação com o artefato simbólico táxi-distância. Estas ações dizem respeito às possíveis estratégias a serem utilizadas pelos participantes ao realizarem as situações problemas que envolvem a táxi-distância.

Ainda na segunda unidade de análise consideramos observar a articulação com os lugares geométricos de equidistância na Geometria Euclidiana. Essa observação se deu por meio das falas e construções que demonstrem relação com os conceitos na GE, em específico, as falas que apontem o conflito com a noção de distância nas duas geometrias.

Para a última unidade de análise, voltada para a dimensão da Instrumentação, serão considerados o uso do artefato simbólico (implícito e explícito) na resolução das situações problemas. Ainda nessa unidade será possível

identificar e analisar de que maneira o surgimento dos esquemas individuais dos participantes contribui para a construção coletiva e da apropriação do artefato e de que maneira estes esquemas evoluem para EACI na construção compartilhada de uma solução para a situação proposta.

Por meio dos critérios estabelecidos em cada unidade de análise buscamos identificar nas situações problemas de que maneira os EACI surgiram durante a apropriação do artefato simbólico.

5 RESULTADOS

Trazemos, neste capítulo, a análise dos dados de cada situação problema por meio dos critérios das unidades de análise, embasando os resultados de acordo com a fundamentação teórica apresentada anteriormente.

Para realizar a análise, inicialmente foi necessário transcrever as interações (mantida a fala oralizada²⁰), obtidas por meio de vídeos e das gravações de tela, bem como analisar as construções realizadas no GeoGebra pelos participantes. A partir da organização dos dados, foi possível analisar as situações problemas com base nas unidades de análise estabelecidas.

A comunicação interpessoal, que corresponde à nossa primeira unidade de análise, teve como critério identificar a comunicação síncrona entre os participantes ao longo das sessões colaborativas. Por meio de um fluxograma de cada situação problema, destacamos a interação entre os participantes, enfatizando com base em setas indicativas os momentos em que os participantes reagiram, de maneira a questionar ou contribuir nas falas de outro participante, com o objetivo de chegarem a uma resolução compartilhada da situação posta.

Em nossa primeira unidade de análise, destacamos, ainda, o surgimento dos esquemas individuais e o desencadeamento das interações a partir deles. Neste sentido, apontamos os momentos em que as representações dos esquemas individuais se conectam, evidenciando a evolução deles em EACI.

A leitura dos fluxogramas está de acordo com a legenda apresentada no capítulo anterior e segue a direção indicada pelas setas cinzas.

Em nossa segunda unidade de análise, Instrumentalização, destacamos as tentativas de ação com o artefato simbólico táxi-distância, identificadas nas interações e que evidenciam o enriquecimento das propriedades e características intrínsecas do artefato. Ainda consideramos como critério da Instrumentalização as falas dos participantes em que havia rastros da articulação com os lugares geométricos de equidistância.

A dimensão da Instrumentação, que corresponde à nossa terceira unidade de análise, está direcionada ao uso do artefato simbólico táxi-distância na resolução das situações problemas. Por meio do registro das interações, foi possível destacar elementos que indicam a apropriação do mesmo pelos participantes, a partir do seu

²⁰ Nas transcrições também foram mantidas as marcas de oralidade.

uso em diferentes condições. Para analisar de que maneira a apropriação compartilhada deste artefato ocorreu, analisamos o surgimento dos esquemas individuais dos participantes e o desenvolvimento e evolução em esquemas de atividades coletivas instrumentadas.

Estruturamos os dados que compõem a primeira e a segunda unidades de análise, com base em três elementos: a) identificação do participante; b) fala e, c) registro e comentários. Com essa estrutura, conseguimos apresentar aos leitores uma visão mais detalhada do que os participantes expressaram nas falas e as construções às quais se referem, bem como apresentar, quando necessário, comentários da pesquisadora.

Após a discussão dos dados de cada situação problema apresentamos uma síntese dos resultados obtidos considerando os principais aspectos identificados em relação às unidades de análise.

5.1 Situação Problema 1

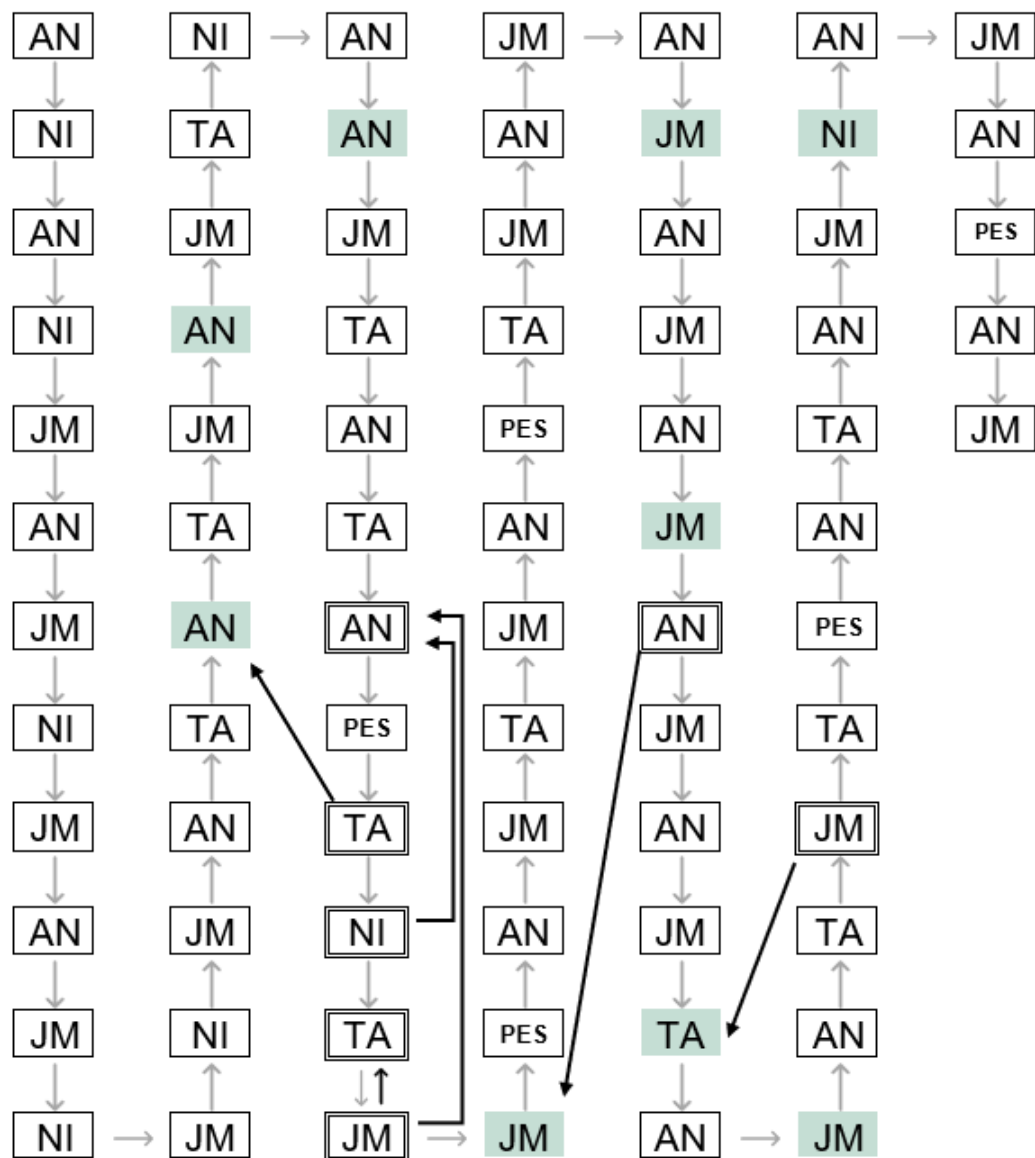
A situação problema 1 enfatizou a relação de menor distância entre pontos, buscando aproximar os participantes da noção de distância na Geometria do Táxi.

Na primeira sessão, a comunicação aconteceu tanto virtual como presencial. Os participantes Nielir, Júpiter Maria e Tasilver trabalharam em um mesmo espaço físico e acessaram individualmente o ambiente *VMT* para se comunicarem com Anastácia, que, na primeira sessão, participou virtualmente.

Na resolução da primeira situação problema, a comunicação interpessoal foi analisada tanto virtual quanto presencialmente. Na interação virtual (Figura 41), destacamos que houve poucas interações (indicadas pelas setas pretas), bem como poucos momentos em que os esquemas individuais elaborados foram discutidos de maneira direta pelos participantes.

Os retângulos simples destacam as interações que não foram direcionadas aos esquemas desenvolvidos. Destacamos que, na situação problema 1, as interações virtuais apresentam muitos desses retângulos, sendo elas, voltadas principalmente para a familiarização da ferramenta *Take control* disponível no ambiente *VMT*.

Figura 41 - Fluxograma das interações via chat do VMT



Fonte: Dados da pesquisa

No que se refere à comunicação presencial entre Júpter Maria, Nielir e Tasilver, notamos que as interações presenciais focaram mais nas dificuldades relacionadas ao uso do VMT. Quando surgiam hipóteses através das interações presenciais, os próprios participantes enfatizavam a necessidade de compartilhar por meio do chat, como evidenciado neste recorte da transcrição da fala de Júpter Maria *“Escreve, escreve que lembra que Anastácia tá lá sem saber o que a gente tá fazendo.”*

A partir da quantidade de células no fluxograma notamos que as interações presenciais foram mais intensas e evidenciaram o surgimento de um número maior de esquemas individuais se comparado ao fluxograma das interações virtuais.

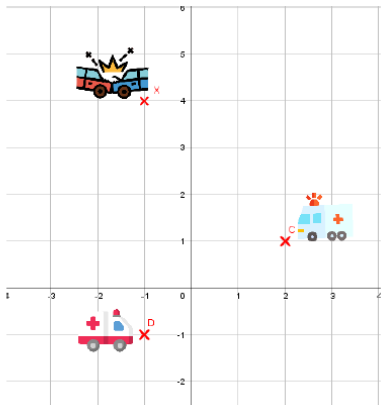
Considerando que esta situação problema é o primeiro contato dos participantes com uma noção de distância diferente da utilizada na Geometria Euclidiana, notamos que as tentativas de ação ou estratégias apresentadas pelos participantes expressam o que Rabardel (1995) considera como a descoberta progressiva do artefato que é acompanhada da acomodação dos esquemas e nas modificações no seu significado.

Como o foco de nossa pesquisa é observar o surgimento e evolução destes esquemas no contexto da aprendizagem colaborativa, reconstruímos por meio das interações no ambiente VMT e presencialmente as tentativas de ação dos participantes para solucionar a situação.

As tentativas de ação e articulação com a Geometria Euclidiana, em específico os conceitos que envolvem lugares geométricos de equidistância, correspondem desta maneira à dimensão da Instrumentalização.

Para resolver a situação 1, notamos que as tentativas de ação com o artefato ficaram evidentes em pelo menos três diferentes estratégias, sendo elas: a) usar o lugar geométrico circunferência para identificar a menor distância; b) calcular através das coordenadas dos pontos e; c) considerar a soma das unidades dos quarteirões.

Inicialmente Anastácia aponta que basta “*abrir o compasso*” para conferir a menor distância entre os pontos, sendo o ponto fixo X (-1, 4) o centro de uma circunferência e as distâncias medidas pelo raio formado entre XC e XD.

Participante	Fala	Registro e Comentários
Anastácia	Mas é só abrir o compasso e ver a menor distância. Que obviamente é de B para A	
Júpiter Maria	Não	
Tasilver	No	
Nielir	Não	
Tasilver	Essa ideia aí de Anastácia do compasso eu descarto. Leve em consideração o que é uma cidade	

Se refere ao ponto A sendo X, local da colisão e B o carro de Carlos indicado pela coordenada do ponto C.

Esta primeira tentativa mostra que assim como evidenciado no estudo piloto os participantes buscam como primeira referência a distância euclidiana.

Ao notar que as configurações da Cidade Planejada não permitem que a distância seja calculada desta maneira, a participante enfatiza que “*só que tem que considerar as ruas paralelas*”.

A segunda tentativa de ação desenvolvida pelos participantes considerou que utilizando a hipotenusa de um triângulo retângulo poderiam achar as distâncias entre os pontos.

Participante	Fala	Registro e Comentários
Nielir	[...] se a gente fosse olhar por um triângulo retângulo aqui dava para fazer uma hipotenusa e achar.	
Tasilver	Mas só que esse não vai voar por cima das casas? Uma ambulância do futuro	
Júpiter Maria	A distância de Carlos para X será a hipotenusa do triângulo formado pelas coordenadas... pela diferença das coordenadas.	
Anastácia	A menor distância seria uma linha reta, mas não podemos porque precisamos considerar os quarteirões e as ruas.	

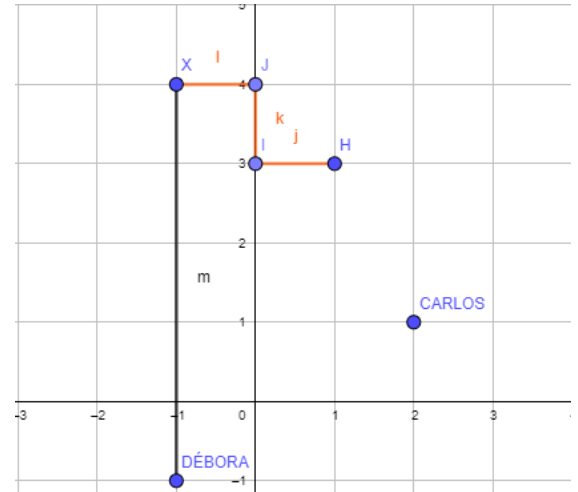
A seta indica a hipotenusa que os participantes Nielir e Júpiter Maria consideram como estratégia para determinar a distância de Carlos até o local da colisão em X.

Como visto anteriormente, na GT, a estratégia defendida por Nielir e Júpiter Maria não pode ser considerada, pois, a táxi-distância entre dois pontos A (x_A, y_A) e B (x_B, y_B) não é determinada pelo comprimento do segmento $\overline{AB}$ e sim pela soma dos valores absolutos das diferenças de suas coordenadas $|x_A - x_B| + |y_A - y_B|$.

Outra tentativa de ação com o artefato é apresentada por Tasilver e se aproxima da noção de distância como sendo a soma das unidades que representam os quarteirões:

Participante	Fala	Registro e Comentários
--------------	------	------------------------

Tasilver	No meu ver pode ser o carro D.
Nielir	Por que <i>tu acha</i> que é o carro D?
Tasilver	Por que é
Nielir	Sim
Tasilver	A distância, chega mais rápido
Nielir	Mas ele só pode andar na horizontal?
Júpiter Maria	Assim, o B tá mais perto
Tasilver	Se lembra da cidade, então o carro D vai andar 5 quarteirões e o carro C no mínimo 6. <i>Tu seguiu</i> esse raciocínio? Mas é esse raciocínio?
Nielir	Num tem outro. A menos que Débora esteja no meio de uma rua, aí já é outra história.
Tasilver	As malhas aí é como se fosse as ruas e a parte que
Nielir	Os quadradinhos são as casas
Tasilver	Exato
Júpiter Maria	Mas se seguir esse raciocínio seria o de Débora mesmo. Porque o de Carlos vai precisar fazer mais manobras.



Os participantes discutem sobre a relação de distância entre o carro de Carlos e Débora ao local da colisão e esboçam traçados dos caminhos possíveis para contar as unidades (quarteirões) que cada um deverá percorrer.

Os participantes começam a se apropriar da configuração do plano da Cidade Planejada e a considerar a noção de distância a partir desta configuração, o que nos possibilita apontar o enriquecimento de propriedades, funcionalidades e interface do artefato.

Ao serem questionados sobre como calcular a distância entre os pontos, os participantes apontam duas possibilidades, sendo a primeira apresentada por Nielir na qual ele propõe “*fazer a soma dos lados*” e a proposta de Júpiter Maria que retoma a segunda tentativa de ação com o objeto e relaciona com a construção de um triângulo retângulo no qual a hipotenusa determinaria a distância, conforme recorte abaixo:

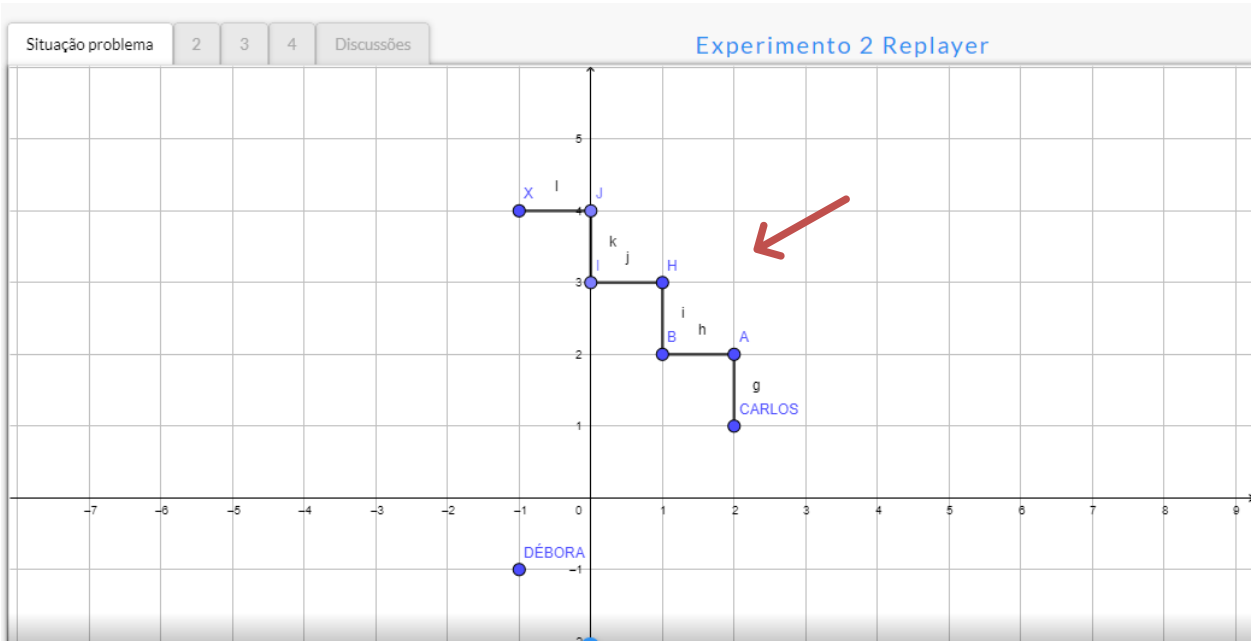
Participante	Fala	Comentários
Pesquisadora	Como vocês calculariam a distância entre os pontos?	Questionamento previsto para evidenciar a compreensão de distância na Geometria do Táxi pelos participantes.
Nielir	Fazer a soma dos lados	
Tasilver	Oi?	
Nielir	O carro de Débora para chegar em X tem que andar 5 quadras, qual o tamanho do lado da quadra? Né 1 só?	
Tasilver	Como é menino?	
Nielir	O carro de Débora para chegar aqui ele vai andar	
Tasilver	Cinco quarteirões	
Nielir	E o de Carlos vai andar quantos?	
Tasilver	No mínimo 6	Retoma a estratégia apresentada antes juntamente com Nielir, no entanto, o participante já havia mudado sua compreensão em relação a utilização da hipotenusa.
Nielir	Se a gente for contando aqui vai...	
Júpiter Maria	A distância entre eles é uma hipotenusa das coordenadas	
Nielir	É não, a hipotenusa vai dar menor	

Pudemos observar que a proposta de Júpiter Maria já havia sido apresentada por Nielir, no entanto, a partir das interações e estratégias apontadas pelos demais participantes notamos que ele não mais considera a tentativa de ação no qual utilizariam a hipotenusa pois reconhece que a medida da hipotenusa será menor por não seguir as condições da Cidade Planejada. Consideramos esta mudança na compreensão do artefato simbólico táxi-distância como resultante da associação do artefato a novos padrões (RABARDEL,1995), sendo possível por meio da reconstrução das interações apontar como resultado da construção de um conhecimento de maneira colaborativa.

Ainda foi possível identificar nas interações elementos que apontam para a apropriação do artefato simbólico, como os caminhos na GT e a relação de distância entre a GE e GT, como podemos observar nos trechos a seguir.

Em relação à identificação dos caminhos na GT os participantes inicialmente constroem apenas uma possibilidade de caminho para o carro de Carlos, representado pelos segmentos indicados na Figura 43.

Figura 43 - Possibilidade de caminho para Carlos



Fonte: Dados da pesquisa

Após a construção do caminho os participantes conversam entre si e apontam que:

Participante	Fala	Registro e Comentários
Tasilver	O percurso que foi colocado no carro de Carlos pode ser modificado, não necessariamente tenha que ser esse que foi desenhado	
Júpiter Maria	Isso...por isso mesmo acredito que deveríamos escolher com base na menor distância	
Tasilver	Acho que seria interessante colocar todos os percursos possíveis de	

	Carlos	
Júpiter Maria	São muitos	
Tasilver	Continuando a menor distância de 6	Os participantes entendem que existem diferentes possibilidades de caminhos para Carlos e usam a ferramenta polígono do GeoGebra para representar a região na qual Carlos irá fazer o menor percurso até o local da colisão.
Júpiter Maria	Infinitas possibilidades Tasilver	
Tasilver	Então poderia colocar pelo menos a área não?	
Anastácia	Sim	

Diante deste trecho consideramos que os participantes compreenderam que na GT existem diferentes possibilidades de caminhos correspondentes à menor distância, enquanto na GE só há uma possibilidade de caminho para indicar a menor distância entre dois pontos. Desta maneira, além do caminho representado, os participantes concluem que em toda a região representada pelo quadrado em laranja existem possibilidades de caminho para Carlos.

A partir da noção de táxi-distância entre os carros de Carlos e Débora até a colisão, o participante Tasilver conclui a atividade enfatizando que as distâncias serão sempre maiores para Carlos devido ao trajeto permitido na Cidade Ideal.

Participante	Fala
Tasilver	Ah sim, porque tipo [...] são vários caminhos que podem ser feitos, mas no caso do... É Carlos né? No caso do Carlos também tem várias possibilidades, mas a menor, de todas as possibilidades sempre vai ser maior do que a de Débora, sempre, mesmo tendo vários outros percursos que ele percorre sempre vai ser maior, é isso.

Desta maneira, o participante evidencia o enriquecimento das propriedades do artefato táxi-distância no que se refere aos diversos caminhos possíveis com menor distância entre os pontos.

Os dados da situação problema 1 nos permitem apontar que a comunicação entre os participantes, embora não tenha sido muito intensa, contribuiu na resolução compartilhada da situação. Os participantes interagiram de maneira que conseguiram apresentar os seus esquemas individuais e a partir da discussão deles foi possível apontar o surgimento de elementos que caracterizam os esquemas de atividades coletivas instrumentadas desenvolvidos.

5.2 Situação Problema 2

Para a situação problema 2 a noção de táxi-distância foi explorada utilizando conceitos como menor distância, ponto médio, táxi-circunferência e táxi-mediatrix distribuídos em quatro questões.

A respeito da comunicação entre os participantes nesta situação, por ser presencial notamos que houve mais interações e estas aconteceram de maneira mais rápida por meio das construções e desenvolvimento das estratégias elaboradas, como apresentadas no fluxograma das interações de cada questão.

Analizamos cada uma das questões para identificar o uso do artefato simbólico táxi-distância nas diferentes situações.

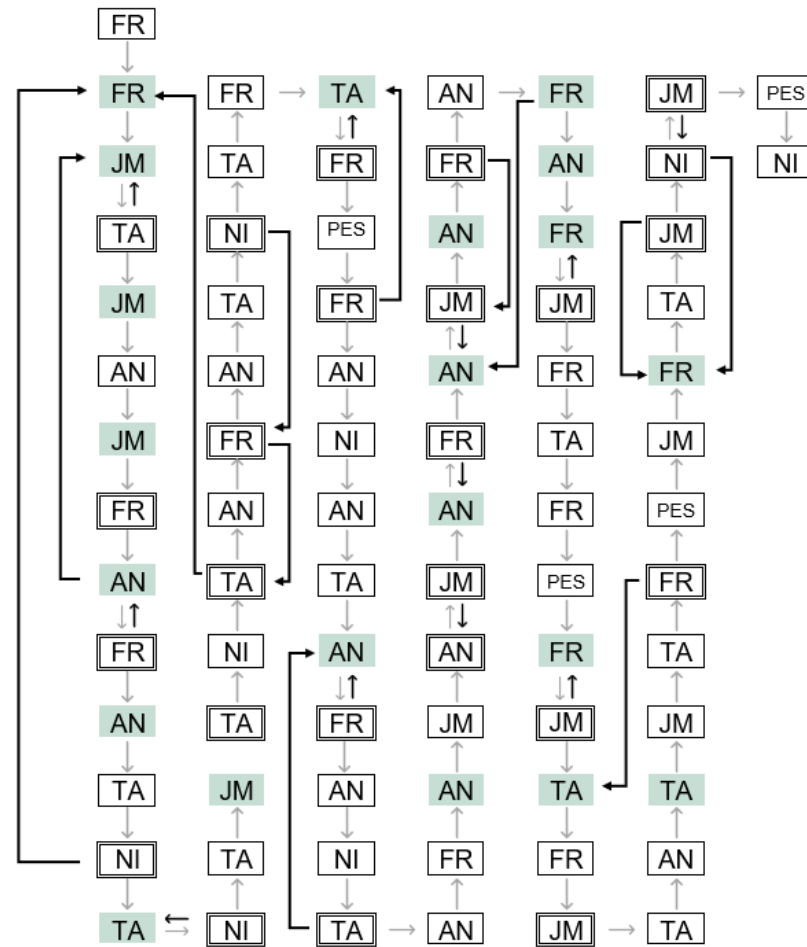
5.2.1 Questão A

Na questão **A**, foi solicitado que os participantes localizassem no plano a região na qual o casal Alice e Bruno devem comprar um apartamento considerando a menor distância entre eles.

A resolução da questão **A** nos possibilitou organizar as interações de maneira que conseguimos apontar maior interação entre os participantes e a retomada das estratégias e esquemas individuais em diversos momentos.

Destacamos por meio do fluxograma momentos importantes para evidenciar o surgimento dos EACI. Foi possível identificar em alguns momentos retângulos preenchidos conectados entre si pelas setas pretas (representam a retomada da fala para reagir e/ou contribuir). A partir desta representação entendemos que a partir de um esquema individual elaborado, outro participante reagiu e/ou contribuiu e como resultado surgiram novos esquemas resultantes das interações, caracterizando assim os EACI.

Figura 44 - Fluxograma das interações durante Questão A

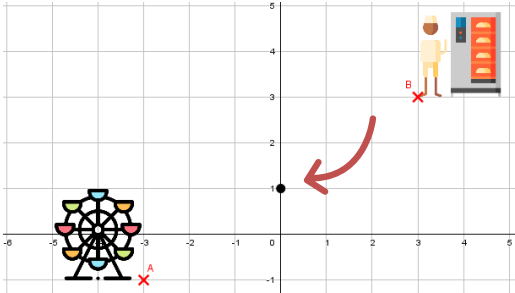


Fonte: Dados da pesquisa

Após a análise da comunicação interpessoal, identificamos quais as tentativas de ação que consideram o artefato táxi-distância e de que maneira os esquemas desenvolvidos pelos participantes apontam para a apropriação do artefato e sua transformação em instrumento para resolver a questão.

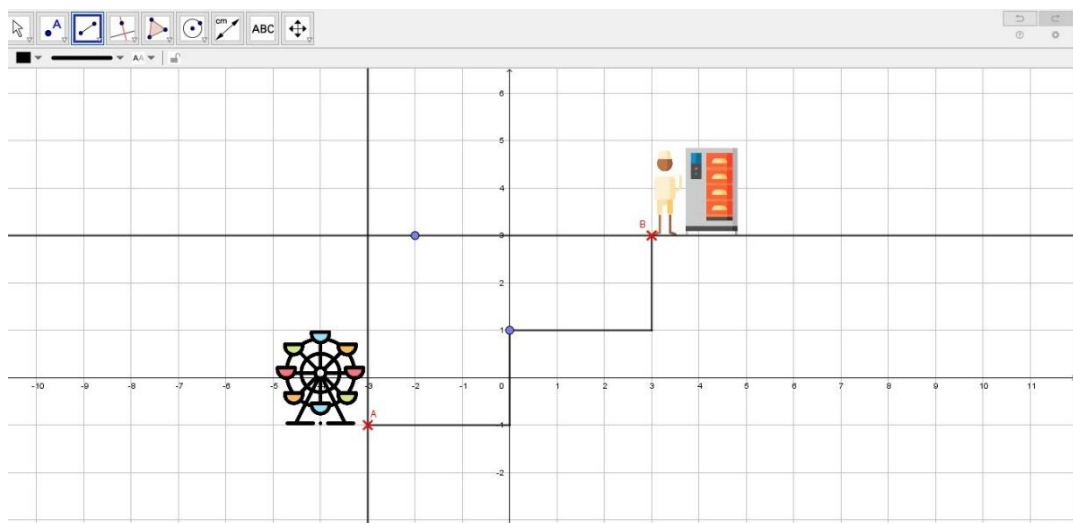
Ao ler a questão, a participante Filha do Rio relaciona rapidamente a propriedade de equidistância, sendo possível apontar que ela busca uma relação com os lugares geométricos de equidistância entre dois pontos.

Na primeira estratégia desenvolvida pelos participantes, observamos que eles relacionam os dois pontos (A e B) e a noção de equidistância para indicar que o ponto médio entre o trabalho de Alice e Bruno é a solução para localizar o apartamento no mapa. Júpiter Maria aponta que o ponto de coordenadas (0, 1) é o local onde o apartamento deve estar localizado conforme recorte da transcrição das interações:

Participante	Fala	Registro e Comentários
Júpiter Maria	Quando a gente fez [...] achou (0, 1). Porque seria o ponto em que os dois iriam caminhar a mesma distância e seria o mesmo trajeto assim.	 A seta indica o ponto de coordenadas (0, 1) que representa o ponto médio euclidiano entre A e B sugerido pela participante.
Tasilver	É o menor	
Júpiter Maria	É o menor trajeto. E na verdade das duas formas que a gente fez sempre...	
Anastácia	Sempre dava 5	Discutem sobre a relação de equidistância entre o ponto de coordenadas (0, 1) e os pontos que representam os locais de trabalho de Alice e Bruno.
Júpiter Maria	(0, 1)	
Filha do Rio	É vai ser sempre 5 né?	

Os participantes localizam desta maneira o ponto médio euclidiano entre A e B, no entanto, o ponto de coordenadas (0, 1) é apenas uma das possibilidades que atende a condição de menor táxi-distância entre os trabalhos de Alice e Bruno.

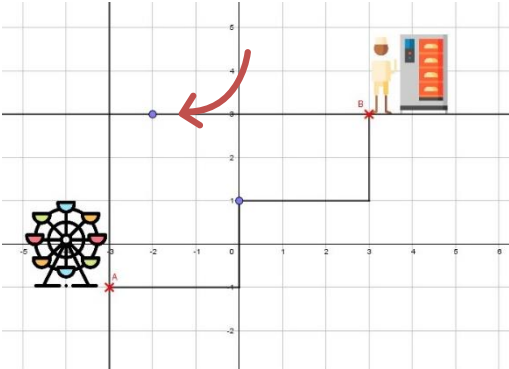
Figura 45 - Determinação do ponto (0, 1)²¹



Fonte: Dados da pesquisa

²¹ Destacamos que as figuras não utilizam as mesmas escalas e que o objeto gráfico não é foco de análise.

Através da construção do caminho feita para determinar o ponto $(0, 1)$ Anastácia aponta que existem outros pontos possíveis e não apenas o que havia sido representado, no entanto, os outros participantes continuam compreendendo que apenas o ponto de coordenadas $(0, 1)$ garante a menor distância.

Participante	Fala	Registro e Comentários
Anastácia	[...] sempre 5 quadradinhos, mas assim, tinha vários pontos que dava 5 quadradinhos para os dois. Esse de Júpiter Maria visualmente assim, quando a gente vê de cima.	 Anastácia representa o ponto indicado pela seta para argumentar com os demais participantes que existem outros pontos que estão a 5 unidades de distância dos locais de trabalho de Alice e Bruno além do que foi representado em $(0, 1)$ por Júpiter Maria.
Filha do Rio	Traça uma reta né?	
Anastácia	Traça uma reta e é aquele ponto que vai dar...	
Tasilver	É que é assim...	
Nielir	Equidistante	
Tasilver	Se for levar em consideração a equidistância vão ter vários pontos verdadeiros. Agora se for a menor, exatamente um único ponto, tipo...	
Nielir	Ééé	
Tasilver	Tipo, vão ter vários pontos que tem a mesma distância tanto para um como para outro, mas só que o menor vai ser esse	

A estratégia apresentada por Tasilver, Nielir, Filha do Rio e Júpiter Maria evidencia uma associação com o lugar geométrico de equidistância mediatriz, no entanto, considerando suas características na Geometria Euclidiana.

Participante	Fala	Registro e Comentários
Júpiter Maria	Eu vi dois, tipo, caminhos diferentes, [...] considerando os quarteirões dá no $(0, 1)$ e quando Anastácia traçou acho que uma linha reta do A ao B também passa em cima do $(0, 1)$	
Tasilver	Exato, e aí se colocasse uma perpendicular passando por esse ponto médio aí que a gente veria os outros pontos	
Nielir	Os outros pontos de...	
Tasilver	Equidistância	

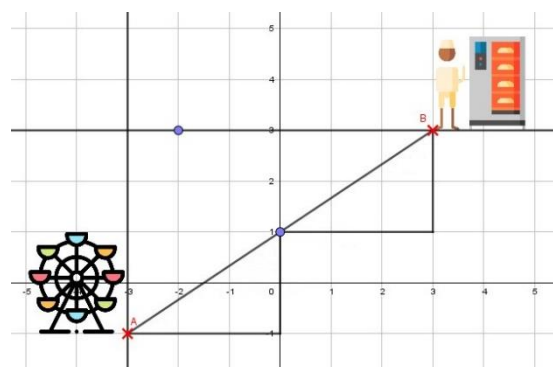
Os participantes atribuem a reta perpendicular construída as propriedades da mediatriz euclidiana e esperam que por meio dela seja possível identificar os outros pontos que ficam a menor distância do trabalho de Alice e Bruno.

Estes recortes das interações nos permitem apontar que os participantes se apoiam nas definições dos objetos gráficos da Geometria Euclidiana, sendo por vezes difícil aceitar outras possibilidades considerando a configuração da Cidade Planejada.

Anastácia retoma a discussão sobre a possibilidade de outros caminhos nos quais a distância permanecerá igual para Alice e Bruno indicando que os outros pontos também garantem a menor distância:

Participantes	Fala	Registro e Comentários
Anastácia	Mas veja [...] tem como por exemplo ... quatro. Aí tipo, pode vim pra cá aí ela vai andar 4 pra cá e 1 pra cá e ele 5, sempre eles vão andar 5 se for	Os participantes continuam discutindo em relação ao percurso a ser feito pelo casal tomando como referência os pontos indicados anteriormente.

- igual entendesse?
- Filha do Rio Mas é pra pegar um que seja mais ou menos igual né?
- Anastácia Então, aqui oh.
- Nielir O menor percurso
- Tasilver O menor percurso, a somatória dos dois seja a menor
- Anastácia Mas vai dar igual
- Filha do Rio Mas vai dar o que ela tá dizendo, mas...
- Anastácia O que eu to dizendo oh, porque vê, vamo. O 1 de Júpiter é 3, 4, 5. É o caminho que ela vai fazer. Né? Né aqui nesse ponto? Ela vai andar esse caminho aqui, ou não, vai andar esse caminho, sim, vai chegar nesse caminho aqui... aí ela vai chegar
- Filha do Rio E ele vai ter que fazer a mesma coisa
- Anastácia Vai ter que andar 5 de todo jeito, então veja, esse ponto aqui... É cinco [...] né aqui (0, 1)?
- Filha do Rio Olhe, 1, 2, 3, 4, 5. O caminho é igual e o mesmo, tanto é menor quanto é o mesmo
- Anastácia 5 pra ela, 5 pra ele aqui, onde for, aqui é 5. Eles sempre vão andar 5 então assim, esse aqui não é melhor, é melhor visualmente falando, mas eles vão andar 5 pra cá e 5 pra cá do mesmo jeito se for aqui por exemplo.



Anastácia constrói no GeoGebra um segmento de A até o ponto (0, 1) e conta as unidades até o ponto A.

Apesar da estratégia elaborada não atender as condições específicas desta questão, percebemos que o esquema apresentado por Anastácia começa a ser compreendido pelos demais participantes e que esta considera a noção de táxi-distância. Diante deste recorte podemos apontar um indício da apropriação do artefato simbólico e seu processo de transformação em instrumento que ocorre quando o artefato molda o pensamento dos participantes.

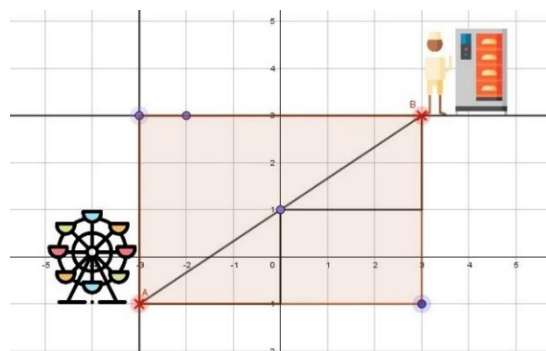
Os participantes retornam ao enunciado da questão para conferir o que foi solicitado e percebem que a solução não precisa ser dada apenas por meio de

pontos, visto que a questão solicita a determinação da região que possua menor distância entre os trabalhos de Alice e Bruno.

Participantes	Fala
Filha do Rio	Então seria esse retângulo né?
Júpiter Maria	Esse retângulo então.
Tasilver	É é... são os vários caminhos possíveis.
Filha do Rio	Entendi
Júpiter Maria	O retângulo de diagonal AB
Tasilver	Então seria
Anastácia	Isso
Tasilver	São os caminhos possíveis, a área
Júpiter Maria	Beleza
Tasilver	Então a questão pede que o quê? Localizem no mapa a área que ... então, aí tá certo, a área que atenda a necessidade deles caminharem a menor distância possível...
Filha do Rio	Então qualquer espaço que eles andarem nesta área eles estão percorrendo a menor.

Registro e Comentários

Os participantes constroem o retângulo que representa a região na qual o casal Alice e Bruno irão percorrer a menor distância até os locais de trabalho indicados pelos pontos A e B.



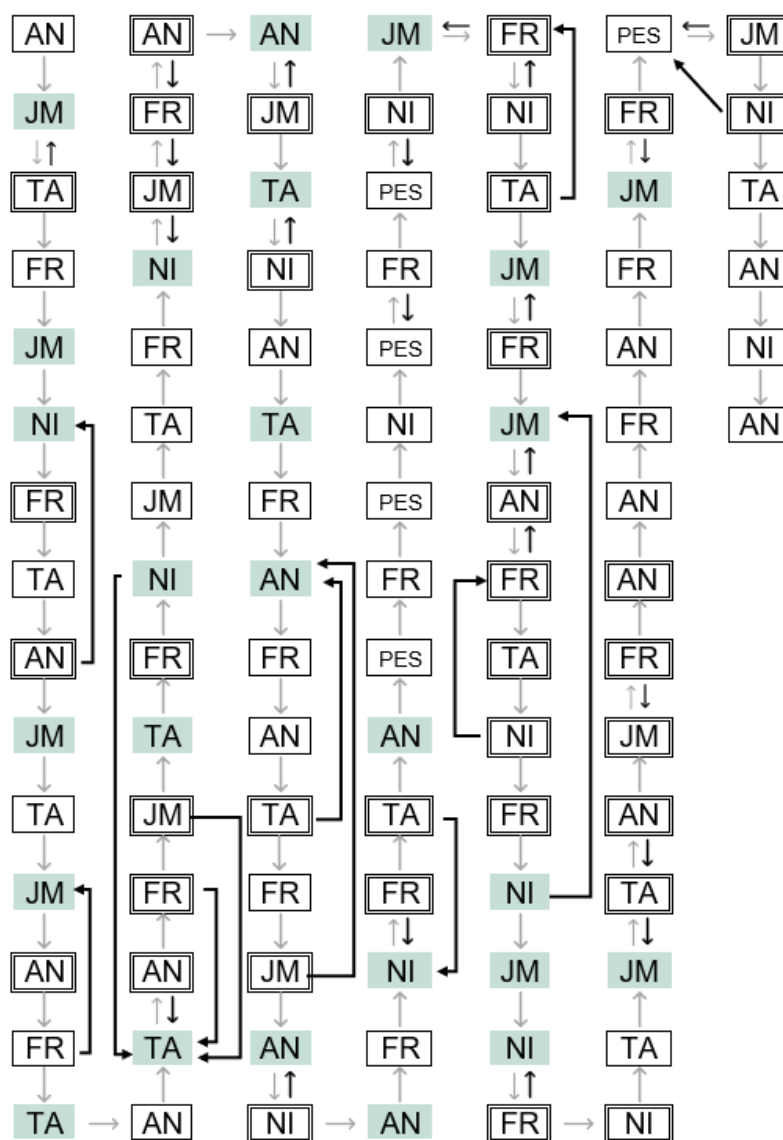
Ao chegarem a esta conclusão para a questão 1, os participantes evidenciam a compreensão da propriedade do artefato simbólico táxi-distância a respeito dos diversos caminhos possíveis que estão a menor distância entre os dois pontos.

5.2.2 Questão B

Na segunda questão apresentada, o objetivo é definir uma região em que o local do apartamento atenda à condição que Alice não teria de caminhar mais do que Bruno.

A comunicação síncrona entre os participantes durante a realização da segunda questão pode ser observada no fluxograma das interações abaixo:

Figura 46 - Fluxograma das interações durante Questão B

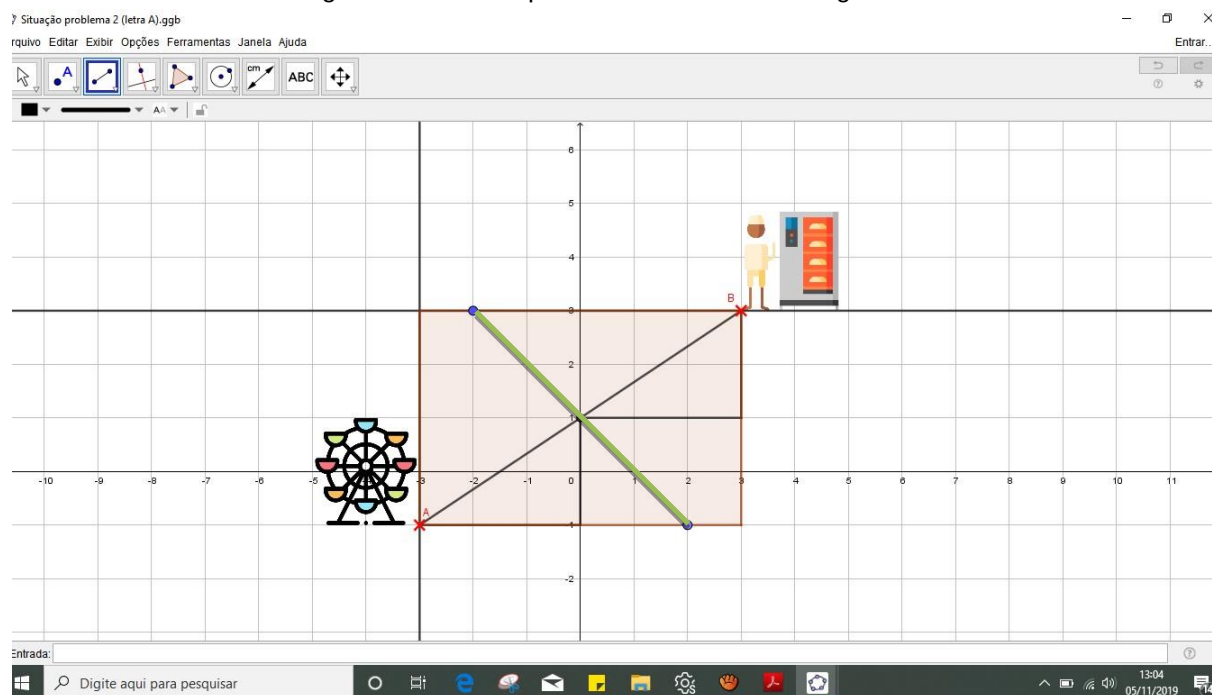


Fonte: Dados da pesquisa

Podemos observar diversos momentos em que as falas foram retomadas como reação ao surgimento dos esquemas individuais, além de notar a conexão entre os retângulos preenchidos evidenciando a contribuição dos participantes nos esquemas individuais e o surgimento de novos esquemas a partir deles.

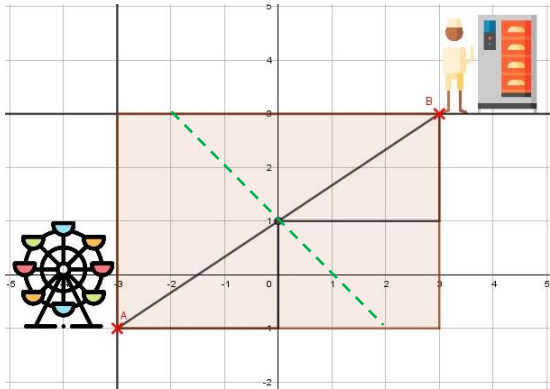
Para a nossa segunda unidade de análise, identificamos que a primeira tentativa de resolução, apresentada por Júpiter Maria, considera que o conjunto de pontos médio na GT, que corresponde ao segmento destacado em verde, é a solução procurada (Figura 47).

Figura 47 - Uso do ponto médio como estratégia



Fonte: Dados da pesquisa

O diálogo entre os participantes evidencia como a primeira estratégia se desenvolveu:

Participante	Fala	Registro e Comentários
Júpiter Maria	É aquela, aqueles pontos que tá na reta que dá cinco pros dois, que é aquela reta daqui pra cá	
Tasilver	Qual foi a lógica que <i>tu usou</i> ? Eu não entendi não.	
Filha do Rio	Eu não entendi não.	
Júpiter Maria	Esses pontos aí, qualquer um desses pontos vai dar, uma distância de 5 para os dois.	
Filha do Rio	Mas por quê?	
Júpiter Maria	Porque ele não quer que Alice ande mais que ele	
Tasilver	Certo	
Júpiter Maria	Mas também não disse que ele quer que ela ande menos que ele.	

Filha do Rio Ah, eu entendi que era menos.
Entendi

Esta estratégia considera apenas os pontos que formam o ponto médio na GT no qual ficam determinados os locais em que Alice e Bruno irão caminhar a mesma distância entre seus trabalhos e o apartamento e desconsiderando ainda os locais em que Alice irá caminhar menos que Bruno.

A segunda estratégia elaborada pelos participantes busca identificar a região em que Alice caminhe menos ou tanto quanto Bruno. Como uma das condições para a questão é que a menor área seja considerada os participantes compreendem que as distâncias determinadas no retângulo encontrado na questão anterior deve se manter.

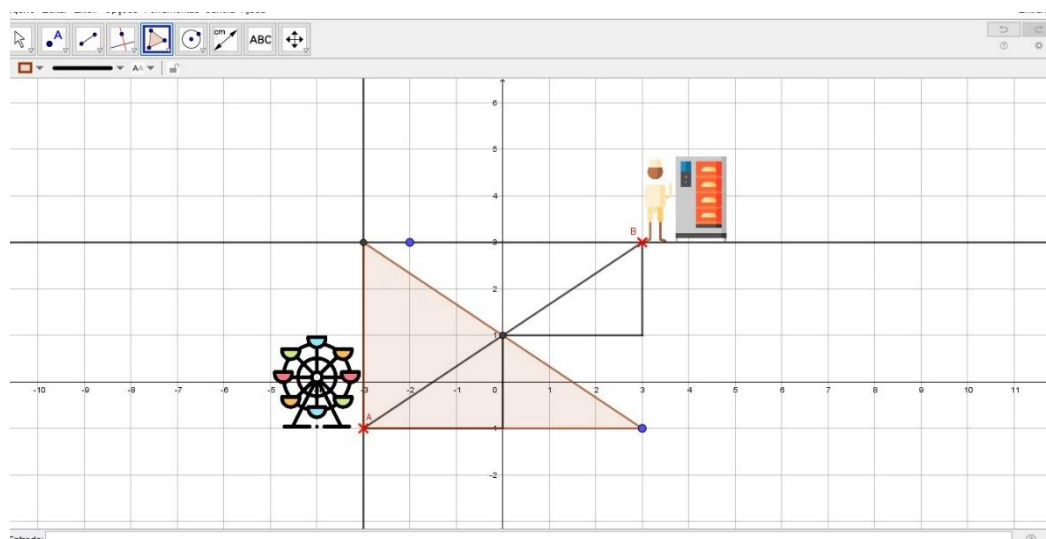
Participantes	Fala
Tasilver	A soma das distâncias deve ser a menor, continuar a menor, mas, Alice não deve ter que andar mais que ele. Agora onde eles poderiam procurar...então, ela tem que andar menos que ele. Permanece nesse retângulo
Anastácia	Não
Filha do Rio	Só não tem que andar mais que ele, ela não ...
Júpiter Maria	Mas não diz que ela tem que andar menos
Tasilver	Não, assim, a soma. Vai permanecer neste retângulo
Filha do Rio	Não ok. Ela só não tem que andar mais que ele.
Nielir	A soma vai ter que permanecer a mesma, dá <i>pra</i> entender que ele ...
Júpiter Maria	A distância ainda tem que ser a menor, quer dizer continua dentro dessa área, só que Alice não pode andar mais
Tasilver	É isso que tô dizendo...
Filha do Rio	Não pode andar mais, entendeu?
Nielir	Ele que anda mais
Júpiter Maria	Não, ele não tá dizendo que ele tem que andar mais do que ela, ele só tá dizendo que ela não deve andar mais do que ele.
Filha do Rio	Ou seja, ela pode andar igual.

Neste recorte notamos que a interpretação do enunciado da questão pelos participantes gerou diferentes compreensões sobre a solução do problema.

Conforme já anunciado por Leivas (2016) os sujeitos tendem a atribuir uma nova hipótese ao problema. Desta maneira, analisamos o uso do artefato simbólico considerando tanto o objetivo da questão, localizar região em que Alice caminhe menos que Bruno, quanto os locais em que Alice e Bruno caminharão a mesma distância até seus trabalhos.

Tendo determinado os locais em que Alice e Bruno irão caminhar a mesma distância, os participantes começam a identificar quais os locais em que Alice irá caminhar menos que Bruno. A estratégia apontada por eles considera a divisão do retângulo, que determina a menor área, em um triângulo retângulo (Figura 48).

Figura 48 - Determinação da região por meio de um triângulo retângulo



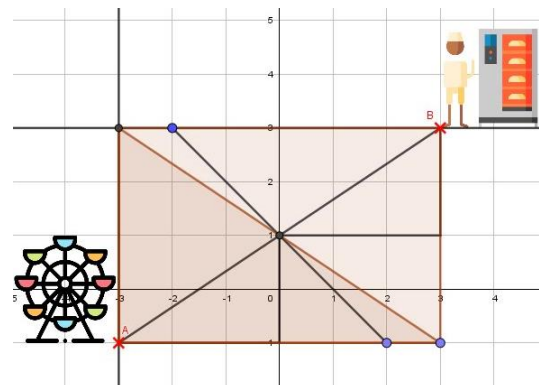
Fonte: Dados da pesquisa

A estratégia de determinar a região que Alice irá caminhar menos por meio do triângulo retângulo considera o raciocínio que se o retângulo determinado anteriormente mantém a menor distância entre os pontos, a divisão dele na metade, que resulta no triângulo, deve ser a região a ser considerada, como fica evidente no recorte da transcrição:

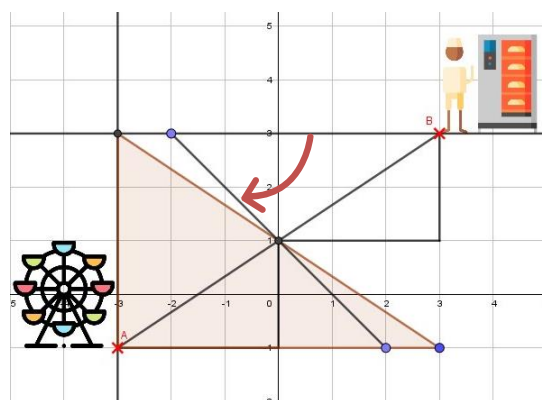
Participante	Fala
Anastácia	Ou anda igual ou ele anda mais, então reduz essa área <i>pra</i> essa metade daqui, né isso?
Júpiter Maria	Exatamente
Anastácia	É mais <i>pra</i> cá... que aí ele anda mais, aí a área fica metade <i>pra</i> ela.
Filha do Rio	ou eles andam igual
Anastácia	E aí tá contido ali... eu acho né
Tasilver	Eu não entendi
Júpiter Maria	Eu não entendi esse triângulo
Anastácia	Porque tem que ficar perto <i>pra</i> ela
Nielir	Que ela num trabalha no parque, a área desse triângulo fica mais perto <i>pra</i> ela.
Anastácia	Aquele ponto seu, ali do meio, está contido nessa área aí entendesse?
Filha do Rio	Pronto
Nielir	É porque a área que ele anda vai ser igual ou menor
Júpiter Maria	Mas eu tô falando de qualquer ponto daquela reta ali que Filha do Rio tá fazendo agora.
Tasilver	Ah, entendi agora. Então, o local do apartamento pode ser nessa área agora, porque aí vai ser ou igual, ou vai ser igual o percurso ou vai ser menor
Anastácia	Ou é igual ou é menor <i>pra</i> ela

Registro e Comentários

Se referem a construção no GeoGebra de um triângulo que divide a região do retângulo determinada antes em duas partes.



A seta indica a reta que Júpiter Maria se refere.



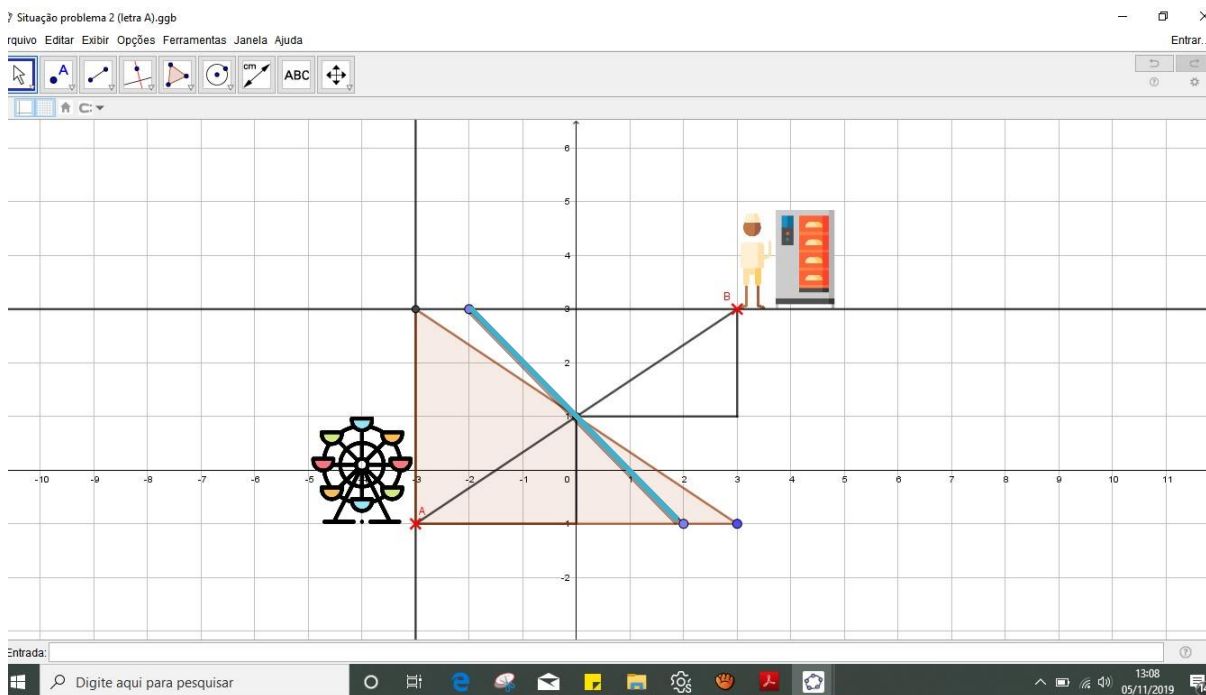
Fica evidente que a estratégia de dividir o retângulo na metade não garante que os pontos localizados sob a hipotenusa do triângulo representado mantêm a distância entre A e B. Diante disso, foi feito um questionamento para provocar os

participantes sobre como eles poderiam garantir que todos os pontos do triângulo atendam a condição apresentada na questão.

O questionamento levou os participantes a testarem na construção se as distâncias estão sendo mantidas. Inicialmente Júpiter aponta que o segmento que representa o conjunto de pontos médios entre A e B, destacado em azul na figura 49, é que garante a mesma distância entre ambos.

A partir das interações foi possível perceber como se deu a evolução deste esquema individual de Júpiter até se tornar um esquema compartilhado entre todos, caracterizando um EACI. A figura 49 ilustra o diálogo entre os participantes na construção colaborativa da solução para a questão B.

Figura 49 - Representação da estratégia desenvolvida



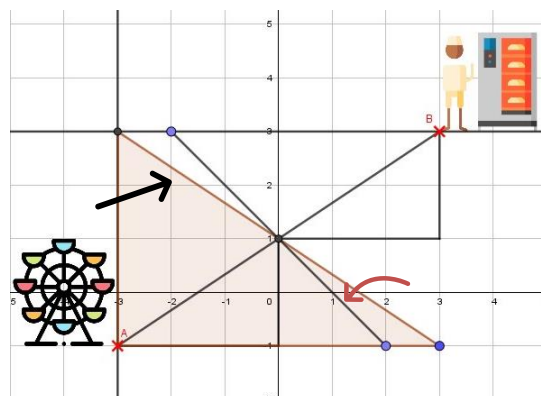
Fonte: Dados da pesquisa

Os participantes discutem a estratégia apresentada por Júpiter considerando a hipotenusa do triângulo e o ponto médio entre A e B:

Participante	Fala	Registro e Comentários
Filha do Rio	Neste caso eu acho que qualquer ponto que esteja nessa linha aqui eles vão dar a	A participante aponta que na hipotenusa do triângulo (indicado pela seta) estão os pontos que vão garantir a mesma distância

- mesma coisa.
- Pesquisadora Certo, como é que garante isso por exemplo?
- Júpiter Maria O que vai andar igual é na reta que é daqui a reta que passa daqui *pra cá* aí qualquer ponto daqui vai ser igual.
- Filha do Rio Por quê? eu num tô entendendo.
- Nielir Porque está na encruzilhada dos caminhos
- Tasilver Porque a linha é perpendicular
- Júpiter Maria Não, não é perpendicular não, porque se você olhar qualquer ponto daqui, veja, ela anda 5 ele também anda 5. Esse ponto ele anda 3, 4, 5 ela também 4, 5. Todos os pontos daqui esse, esse, esse...
- Filha do Rio Mas nesse aqui, não vai andar a mesma coisa nessa reta aqui. Oh ela vai andar
- Júpiter Maria É porque essa área aqui determina uma área em que qualquer ponto vai garantir que ela não ande mais que ele
- Anastácia Não ande mais
- Filha do Rio Sim, mas ela pode andar igual se tiver em cima dessa linha eles vão andar a mesma coisa.
- Nielir / Tasilver Não
- Filha do Rio Por quê?
- Nielir Porque essa linha não tá pegando as esquinas dos quarteirões, essa linha vai sempre pegar no meio das casas
- Júpiter Maria Essa linha não garante a menor, a distância igual *pra* eles
- Nielir Porque se você ver tá pegando sempre na encruzilhada das pistas, dos pontos, então esses pontos sempre *vai* ser igual.
- Filha do Rio Mas aqui oh, digamos, ela vai

entre os pontos A e B devido ao segmento passar por um dos pontos médios identificados anteriormente.



Júpiter discorda e indica que a condição só será atendida se os pontos estiverem localizados no segmento que corresponde ao conjunto de pontos médios (seta em vermelho).

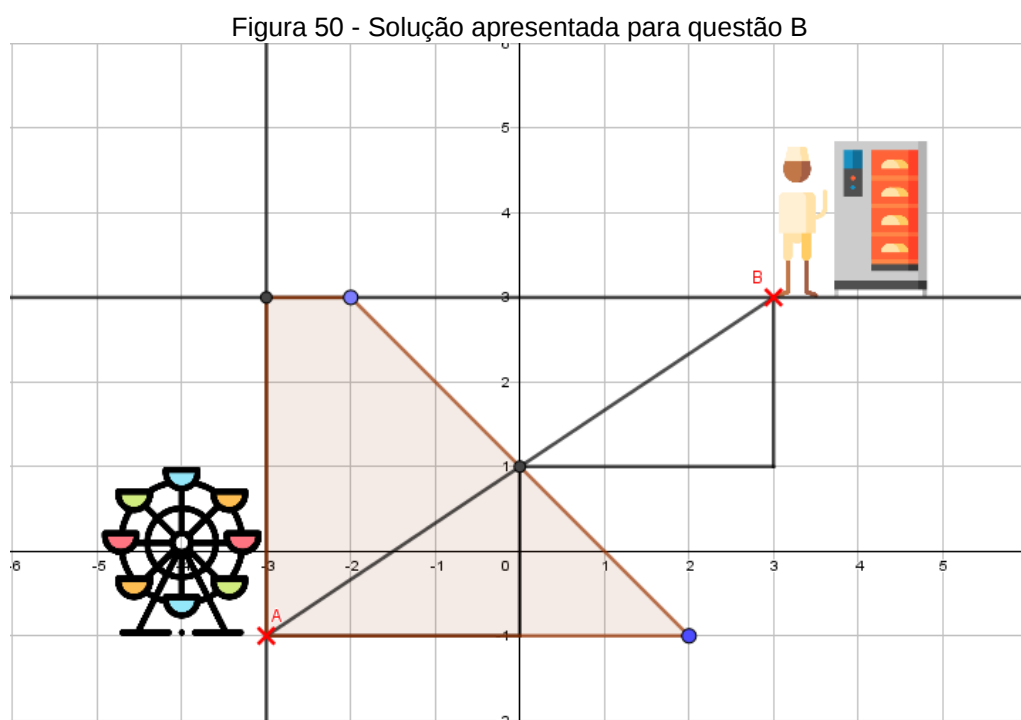
andar 1, 2, 3, 4 e meio, certo?
Ele vai andar 1, 2, 3, 4, 5 e
meio...

Nielir cinco e meio

Tasilver Aaaaah

As interações demonstram que a estratégia apresentada por Júpiter começa a ser considerada pelos demais participantes. Além disso, os registros nos possibilitam apontar para o uso do artefato simbólico táxi-distância, mesmo que de maneira implícita, nos esquemas desenvolvidos pelos participantes de maneira coletiva.

Os participantes chegam à conclusão que a região em que Alice irá caminhar menos do que Bruno pode ser representada por um trapézio (Figura 50).



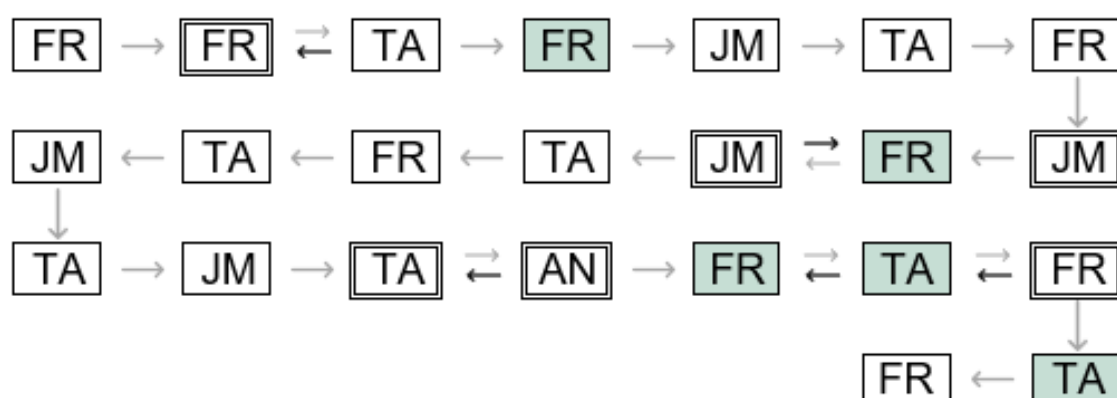
Fonte: Dados da pesquisa

Após a construção do trapézio os participantes interagem de maneira a validar a construção realizada por eles:

A construção dos “pontos médios” já havia sido considerada pelos participantes como uma das estratégias para resolver a questão A. Logo, após a leitura do enunciado os participantes reconhecem rapidamente que se trata da mesma noção utilizada antes.

A compreensão da questão anteriormente pelos participantes fica evidente no fluxograma de interações, no qual notamos um número reduzido de falas e desenvolvimento de poucas estratégias, sendo elas, apenas resgate das estratégias utilizadas inicialmente na questão A.

Figura 51 - Fluxograma das interações durante Questão C



Fonte: Dados da pesquisa

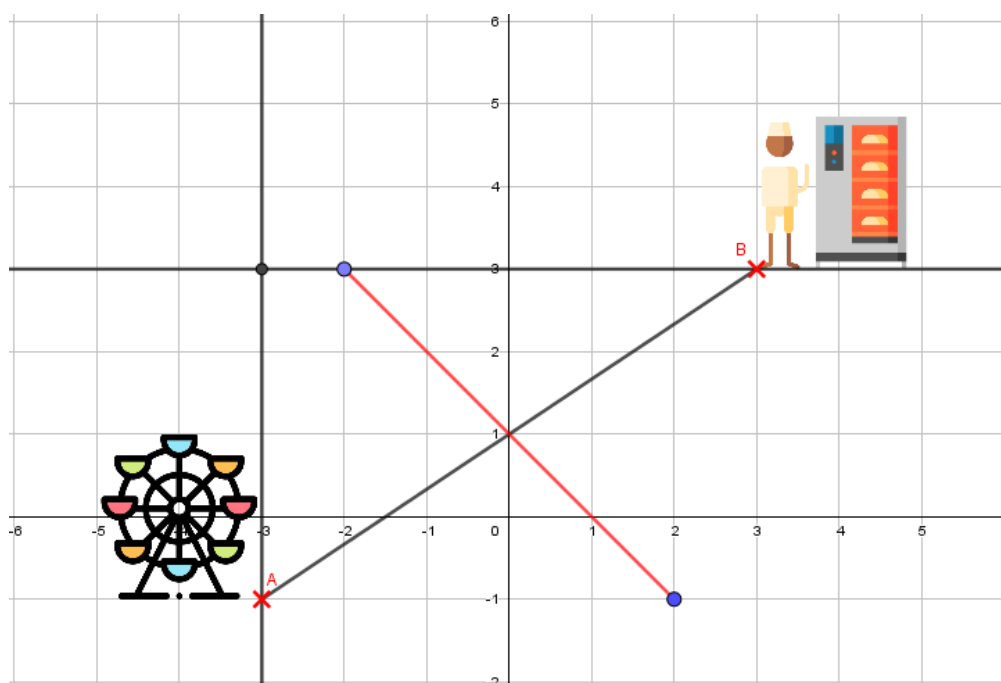
Por meio do recorte da transcrição fica mais evidente qual foi a compreensão dos participantes sobre a questão C:

Participante	Fala	Comentários
Filha do Rio	No caso era aquela linha	Os participantes se referem ao segmento formado pelos “pontos médios” utilizado como tentativa de ação na questão A.
Tasilver	Tá vendo que naquele caso ela andaria menos?	
Filha do Rio	Pronto. Agora, é aquela linha, só aquela linha... deixa a linha vermelhinha, sei lá	
Tasilver	De onde?	
Filha do Rio	Aí	
Júpiter Maria	É os pontos que dá igual pra eles	
Filha do Rio	Aí qualquer canto dessa reta vai andar a	

	mesma coisa	
Júpiter Maria	Dá igual. Ele quer saber os pontos que dá a distância igual para os dois	
Tasilver	Então volta <i>pra</i> primeira questão	
Anastácia	Éé... exatamente. Só que a primeira questão queria a área toda	
Filha do Rio	A área, agora só quer os pontos	
Tasilver	Que no caso os pontos...huum... os pontos vão ser apenas onde a linha tá tocando, nas esquinas?	
Filha do Rio	Isso	
Tasilver	Então, as possibilidades são essas, essa, essa, essa e essa	O participante se refere aos pontos na interseção entre o segmento construído e os nós do plano (Figura 52)

Nesta questão vemos que o esquema desenvolvido pelos participantes como uma das estratégias para a questão A voltou a ser aplicado, como representado na figura 52.

Figura 52 - Solução dada para a questão C



Fonte: Dados da pesquisa

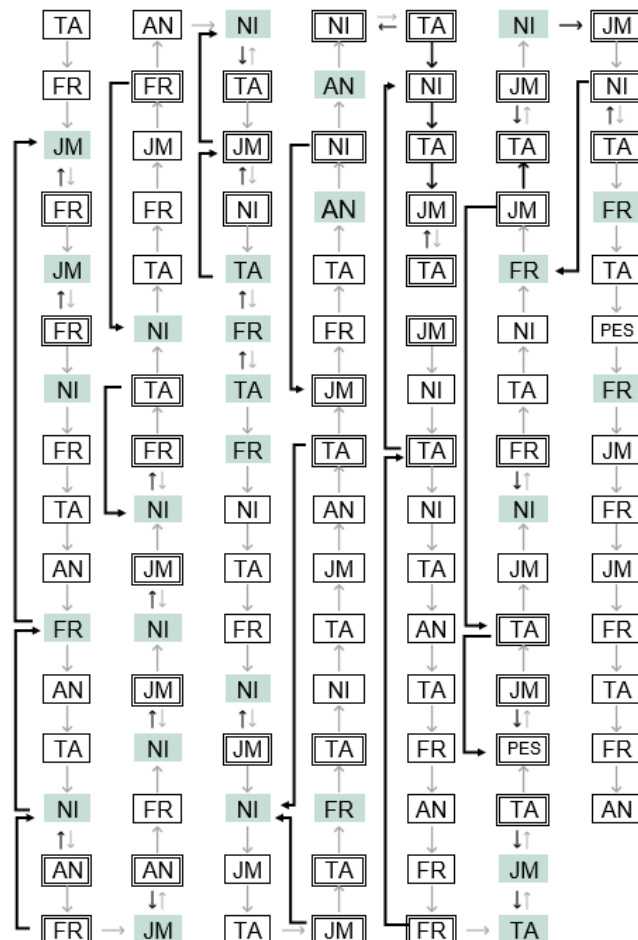
A solução apresentada indica a apropriação dos “pontos médios” na Geometria do Táxi, ao reconhecer que no contexto da Cidade Planejada a distância entre o segmento que representa os “pontos médios” e as extremidades do segmento $\overline{AB}$ corresponde à menor e mesma distância entre estes pontos. Isto fica mais evidente na fala de Júpiter “*aí qualquer canto dessa reta vai andar a mesma coisa*”.

5.2.4 Questão D

Para a questão D foi escolhido o conceito de táxi-mediatriz para observar de que maneira os esquemas desenvolvidos pelos participantes permitiriam utilizar a noção de táxi-distância.

Nesta questão pudemos observar por meio das interações o surgimento de diversos esquemas e estratégias, bem como a evolução desses em esquemas coletivos.

Figura 53 - Fluxograma das interações durante a questão D

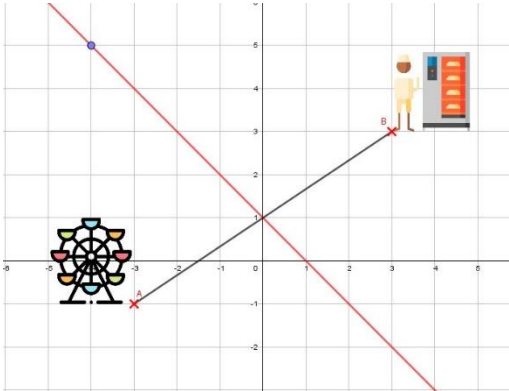


Fonte: Dados da pesquisa

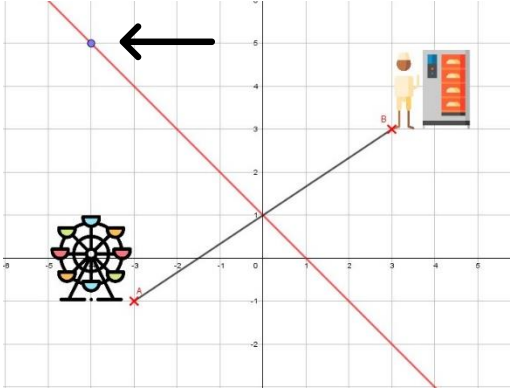
A comunicação entre os participantes evidencia que assim como visto nas interações anteriores muitos esquemas se desenvolvem com base em um esquema já apresentado por outro participante, o que nos permite indicar que houve a construção colaborativa das estratégias utilizadas nesta questão.

Para analisar as unidades de Instrumentalização e Instrumentação observamos os extratos das transcrições que contemplam os critérios estabelecidos para cada uma delas.

Inicialmente os participantes leem o enunciado da questão e observam que não há a exigência de menor distância entre os pontos A e B. Diante disso, os participantes apontam que qualquer lugar em uma reta construída por meio do prolongamento do segmento que representa os “pontos médios” na GT determinará os locais para comprar o apartamento.

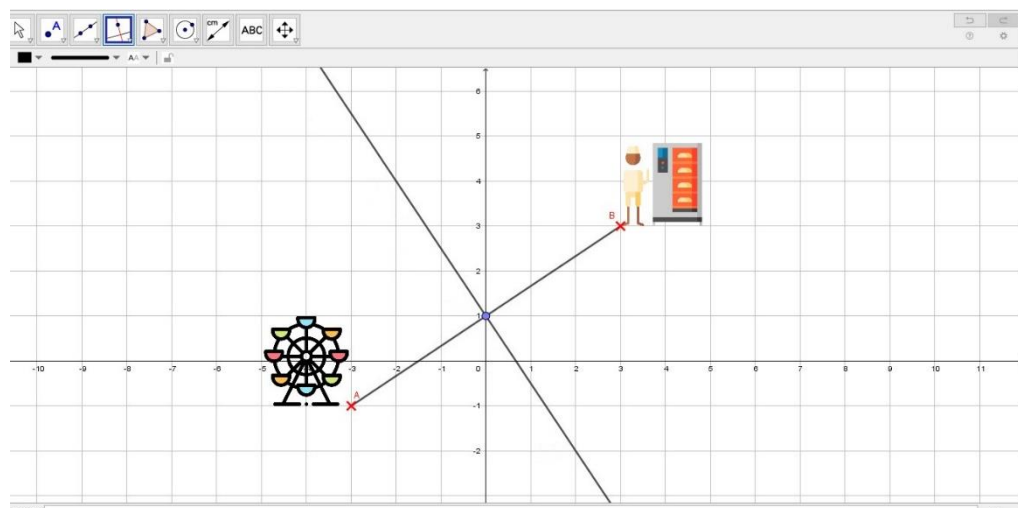
Participante	Fala	Registro e Comentários
Filha do Rio	a área não vai ser aquela né? Meu Deus a área não vai ser aquela.	Os participantes entendem que devido ao segmento formado pelos “pontos médios” garantiriam a mesma distância aos pontos A e B o seu prolongamento irá manter a propriedade de equidistância. 
Júpiter Maria	mas vai ser na mesma linha só que expandida	
Filha do Rio	é a área não vai ser o retângulo. Qualquer lugar, numa linha infinita	
Júpiter Maria	vai ser aquela reta infinita, aquela reta que já existe só que infinita	
Filha do Rio	é. entenderam?	
Tasilver	Sim, porque eles não encontraram na menor distância então agora vai ser..	

Nielir menciona a necessidade de “*ver a equidistância*” entre a reta representada e os pontos A e B, uma vez que, na reta representada nem todos os pontos estão a mesma distância. Desta maneira, eles escolhem um ponto na construção para testar o questionamento feito por Nielir.

Participante	Fala	Registro e Comentários
Nielir	Vai ter lugares que não vai ser equidistante, não vai dar <i>pra</i> ser a mesma distância.	Os participantes representam o ponto indicado pela seta e contam as unidades até os pontos A e B para verificar o que disse Nielir.
Júpiter Maria	Vai não	
Nielir	Vaaai	
Júpiter Maria	Por que Nielir?	
Nielir	Porque se você colocar aqui <i>oh</i> neste ponto aqui, ela vai <i>tá</i> bem mais perto que ele.	
Filha do Rio	Não vai não, <i>tá</i> na mesma linha	
Tasilver	Diga Nielir, qual ponto.	
Nielir	esse, mais pra cima, <i>aí</i> <i>aí</i>	
Tasilver	Tá	
Filha do Rio	Aqui	
Júpiter Maria	Faz o traçado dela <i>aí</i>	
Filha do Rio	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.... e 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	
Anastácia	Obaaa	

Ao notarem que de fato a reta representada não garante que todos os pontos estarão a mesma distância, a estratégia que passa a ser considerada é a construção de uma perpendicular ao segmento AB (Figura 54). A tentativa de ação parte de noções euclidianas, em específico, a noção de mediatriz como o lugar geométrico de equidistância entre dois pontos.

Figura 54 - Construção da perpendicular a AB



Fonte: Dados da pesquisa

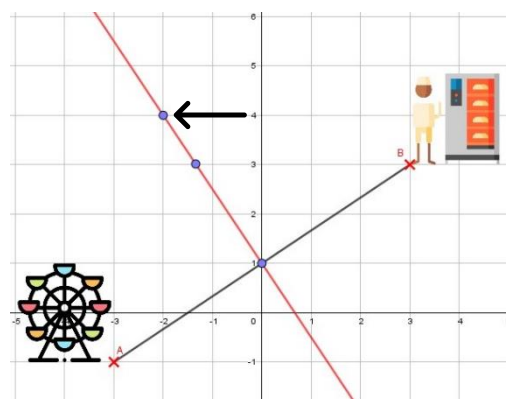
O recorte da interação permite entender como a estratégia se desenvolveu:

Participante	Fala
Nielir	Não vai ser a mesma, por isso eu falei que tem que ser perpendicular...
Tasilver	É perpendicular mesmo, exato
Júpiter Maria	Mas peraí, perpendicular não vai bater nos pontinhos
Nielir	Sim, mas vai bater nas ruas, vai bater nas ruas
Tasilver	Vai bater nas ruas onde bater é onde pode ser

Júpiter identifica então que esta estratégia também não garante a equidistância entre os pontos A e B, visto que haverá locais na perpendicular em que a reta irá passar dentro dos “*quarteirões*”.

Mesmo sabendo que haverá pontos na reta que não mantém a distância até os locais de trabalho de Alice e Bruno, os participantes continuam utilizando a mesma estratégia, conforme transcrição abaixo:

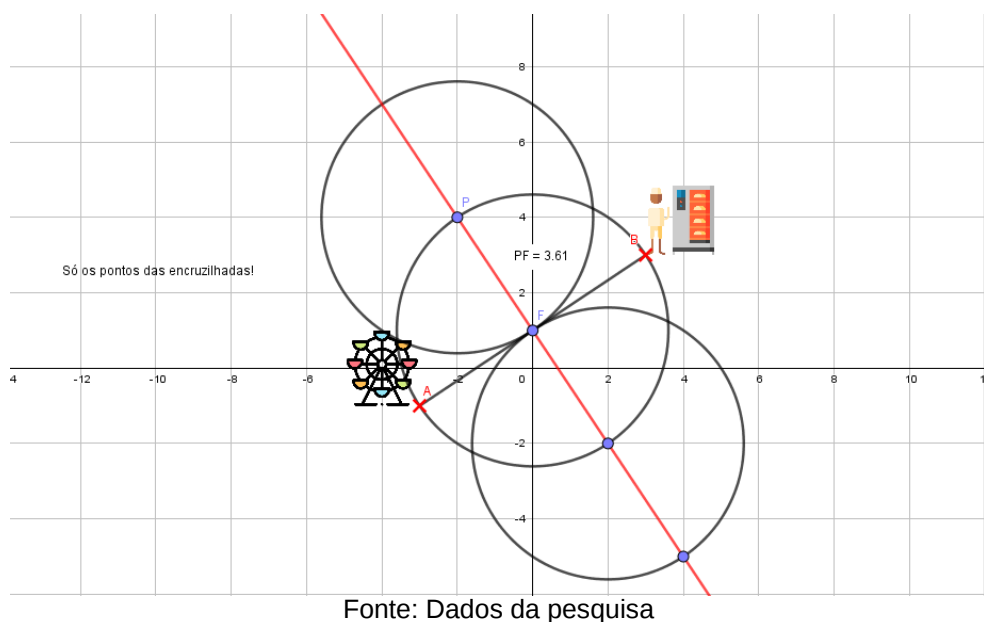
Participante	Fala	Registro e Comentários
Nielir	Testa aí num ponto da encruzilhada, testa, <i>pra</i> ver se dá a mesma distância	
Tasilver	É, é porque tá exatamente	
Júpiter Maria	Bora lá pra ver se a gente sai	
Tasilver	1, 2, 3, 4 e um pouquinho 1, 2, 3, 4, 5.... e um pouquinho	Tasilver conta as unidades do trajeto de Alice e Bruno.
Júpiter Maria	Não é	
Nielir	Se você for por esse caminho aqui	(risos) O participante propõe testar se o ponto sobre a perpendicular e que está em dos nós do plano garante a mesma distância.
Júpiter Maria	1, 2, 3, 4 ...	
Nielir	Olhe os pontos de encruzilhada pra ver... olha esse ponto de cima	
Tasilver	Qual ponto?	
Nielir	O da encruzilhada	
Tasilver	Mas a gente já viu que não é isso. Porque por exemplo daqui já dá <i>pra</i> saber que não é	



Júpiter Maria	Vê se o da encruzilhada bate
Tasilver	Bate
Júpiter Maria	1, 2, 3, 4, 5, 6 ... 3, 6 bate
Tasilver	Só nas encruzilhadas
Nielir	Bota os pontos nas encruzilhadas só <i>pra</i> gente ver
Tasilver	Mas é meu filho. Vai dar no mesmo
Anastácia	Vai dar no mesmo
Tasilver	Então
Filha do Rio	Bota um texto pra gente escrever: Só os pontos das encruzilhadas.
Tasilver	Sim, mas aí, então não vai dizer que, não vai ser exatamente as retas, seriam apenas esse ponto
Júpiter Maria	3 pontos
Tasilver	Esse, esse, esse. Não, mas ainda tem mais.

Os participantes denominaram de encruzilhada os nós da malha que forma o plano que está sendo utilizado e passam a considerar que apenas os pontos sobre os nós garantem a condição de equidistância entre A e B.

Figura 55 - Resolução apresentada para a questão D



Eles identificam ainda que existem mais pontos e caminhos equidistantes sob a reta que passa pelas “*encruzilhadas*”, porém, desconsideram que a solução para a questão deveria considerar todos os pontos equidistantes aos locais de trabalho.

As estratégias desenvolvidas pelos participantes não consideraram todas as propriedades e característica do artefato táxi-distância e desta maneira não foi possível chegar à construção da táxi-mediatriz.

É possível concluir que as estratégias elaboradas apresentavam elementos que consideravam a propriedade de equidistância da táxi-mediatriz, no entanto, notamos que o objeto gráfico prevaleceu sobre a própria definição.

Na primeira estratégia, por meio do ponto médio era possível identificar todos os pontos de menor distância entre A e B e na segunda estratégia através de uma perpendicular e utilizando a noção de mediatriz ficariam determinados os pontos que mantêm a distância. Ocorre que os esquemas desenvolvidos por eles relacionados ao artefato simbólico táxi-distância não foram suficientes para associar as duas estratégias na Geometria do Táxi e reconhecer por meio das propriedades do artefato que a união do conjunto de pontos médios, representados por um segmento, com semirretas perpendiculares iria garantir a condição de mesma distância.

A dificuldade em desenvolver um esquema que considere os aspectos apontados também foi observada no estudo piloto e pode estar relacionada à compreensão das diferentes noções da mediatriz na Geometria Euclidiana. Os participantes evidenciam por meio das construções que compreendem a mediatriz apenas como uma reta perpendicular entre os dois pontos (toma como base o traçado) e não como um conjunto de pontos que mantêm distâncias iguais entre os pontos.

5.3 Situação Problema 3

Na situação problema 3, a proposta era representar pontos que estejam a mesma distância de um ponto fixo, determinando uma táxi-circunferência. Além de representar foi solicitado que os participantes confirmassem a relação de equidistância entre a fonte e os pontos.

As interações nessa questão ocorreram conforme a sequência apresentada na Figura 56.

À medida que os pontos determinados na questão vão sendo marcados no plano cartesiano os participantes tentam identificar qual forma será gerada.

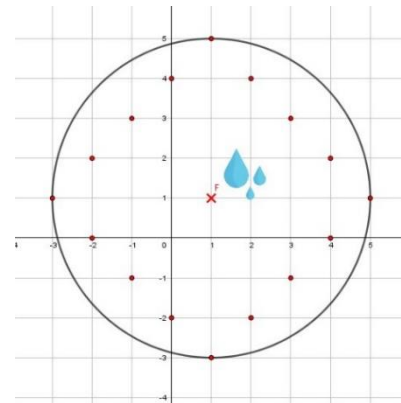
Participante	Fala
Júpiter Maria	Ah é um retângulo minha gente
Nielir	Pode ser um triângulo
Filha do Rio	Paralelogramo. É um retângulo mesmo. É um paralelogramo ou um retângulo? É um quadrado.
Nielir	Pode ser um trapézio
Filha do Rio	Um trapézio?
Tasilver	É um quadrado
Filha do Rio	Não pode ser um trapézio

Após concluir a marcação dos pontos os participantes começam a discutir sobre a relação de distância entre a fonte e os pontos. Inicialmente Júpiter e Tasilver indicam que os pontos não estão a mesma distância da fonte, indicando que o artefato simbólico táxi-distância não está sendo considerado e que estão mobilizando os conhecimentos sobre a circunferência euclidiana.

Participante	Fala	Registro e Comentário
Júpiter Maria	Não estão a mesma distância	Júpiter e Tasilver entendem que os pontos de coordenadas $(-3, 1)$, $(1, 5)$, $(5, 1)$ e $(1, -3)$ destacados abaixo estão mais distantes que os demais.
Anastácia/ Nielir	Por que não?	
Júpiter Maria	Porque as diagonais estão mais distantes que as laterais	
Tasilver	Porque num tá não minha gente ô, ô... pega daqui pra cá.	

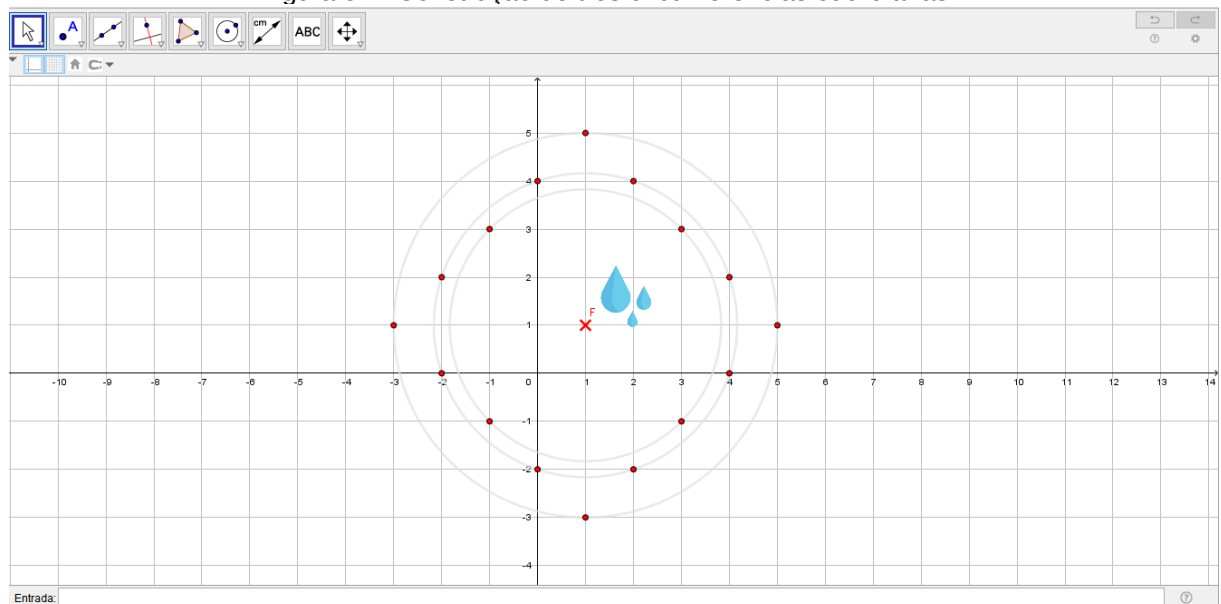
A primeira estratégia utilizada para estabelecer a relação de equidistância é a construção de uma circunferência com centro em F, conforme recorte da transcrição a seguir:

Participante	Fala	Registro e Comentários
Filha do Rio	Faz uma circunferência	Fazem a construção no GeoGebra para comparar as distâncias dos pontos até a fonte localizada em F (1, 1)
Júpiter Maria	Centro em F	
Filha do Rio	Aí, na mais... pronto aí tem 4 pontos	
Júpiter Maria	São 3 circunferências <i>pra</i> fazer	
Anastácia	Eu acho, isso mesmo, eu pensei igual Júpiter.	



Por meio da construção da circunferência euclidiana não é possível determinar que todos os pontos estão a mesma distância. Desta maneira, Júpiter e Anastácia apontam ser necessário construir três circunferências diferentes para “bater” em todos os pontos (Figura 57).

Figura 57 - Construção de três circunferências euclidianas



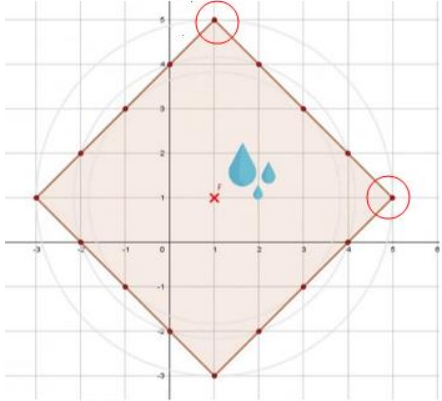
Fonte: Dados da pesquisa

Os participantes são questionados (recorte na transcrição) de que maneira é possível confirmar se há uma relação de equidistância entre os pontos nas circunferências e se elas estão de acordo com a configuração da Cidade Planejada.

Participante	Fala
Tasilver	Eeeeeita
Anastácia	A circunferência é <i>pra</i> mostrar que esses pontos são equidistantes a fonte, esses 4, esses outros que tão nessa e esses outros que tão nessa
Pesquisadora	Na Cidade Planejada a relação de distância é assim na circunferência ou horizontal e vertical?
Júpiter Maria	É que na Cidade Planejada tem os bairros
Tasilver	É, então vamos voltar
Filha do Rio	Mas deixa as circunferências
Anastácia	Faz um quadrado então
Júpiter Maria	Os pontos da diagonal estão a 4 bairros
Tasilver	Todos estão agora que percebi. 1, 2, 3, 4
Júpiter Maria	1, 2, 3, 4, éé
Tasilver	Todos estão se for levar em consideração os bairros
Júpiter Maria	Considerando os bairros a fonte está a mesma distância
Filha do Rio	Ou seja, pra gente fazer isso a gente tem que criar um quadrado né?
Júpiter Maria	Que bizarro

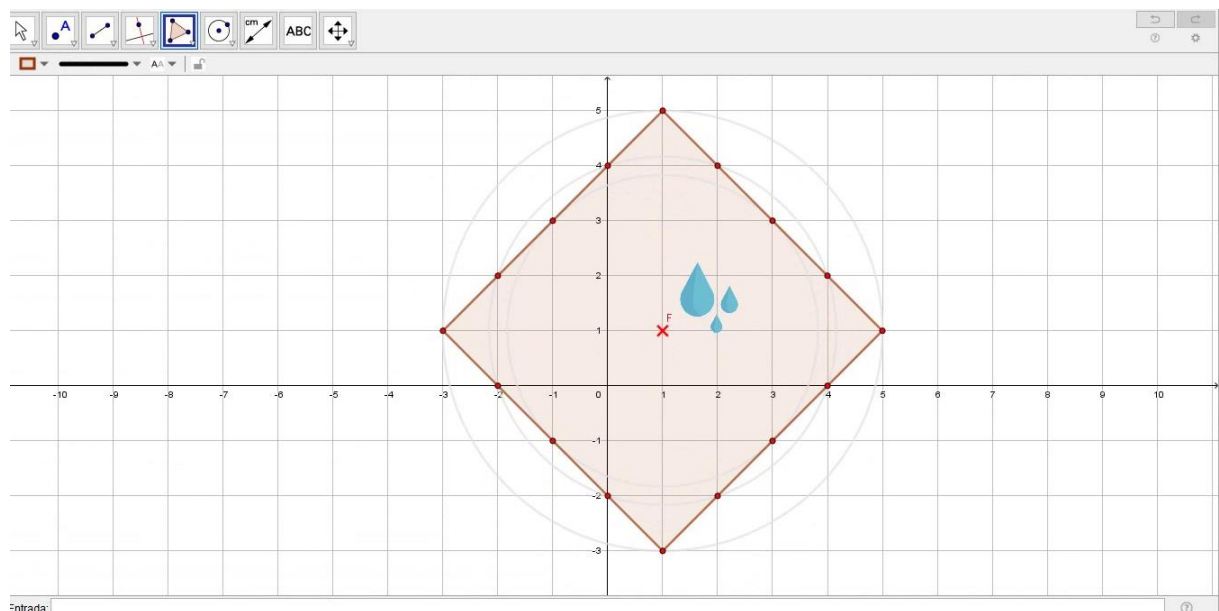
Neste extrato da transcrição, é possível apontar o uso do artefato simbólico táxi-distância após o questionamento e da identificação da medida dos raios na táxi-circunferência.

Para confirmar que todos os pontos estão a mesma distância da fonte os participantes contam as unidades da fonte até pontos aleatórios. É feito um novo questionamento sobre a distância da fonte até o ponto E3 e até o ponto E9 para confirmar a compreensão dos participantes sobre o raio na táxi-circunferência.

Participante	Fala	Registro e Comentários
Pesquisadora	Por exemplo, esse ponto daqui (E3) e esse ponto daqui (E9) está a mesma distância da fonte?	Os pontos E3 (à esquerda) e E9 (à direita) estão destacados na construção realizada pelos participantes.
Júpiter Maria	Andam a mesma quantidade de quadras	
Filha do Rio	Só que a facilidade de um é maior do que a do outro de chegar, mas a quantidade é a mesma.	
Júpiter Maria	Engraçado que aquele que fica mais distante tem o caminho mais tranquilo	
Filha do Rio	Mais fácil	
Júpiter Maria	Mais fácil de quem tá mais perto	
Tasilver	Exato	

A resolução apresentada pelos participantes para esta questão pode ser vista na Figura 58.

Figura 58 - Solução para a questão D



Fonte: Dados da pesquisa

Nesta questão notamos que os esquemas elaborados pelos participantes inicialmente não consideraram o artefato simbólico, logo, a transformação dele em

instrumento só foi possível após os questionamentos da pesquisadora. Esta situação nos permitiu observar, com base em Rabardel (1995), que em dado momento um esquema já elaborado pelos sujeitos pode voltar a ser um esquema de uso, pois ele – o esquema elaborado, não é suficiente para resolver determinada situação.

5.4 Situação Problema 4

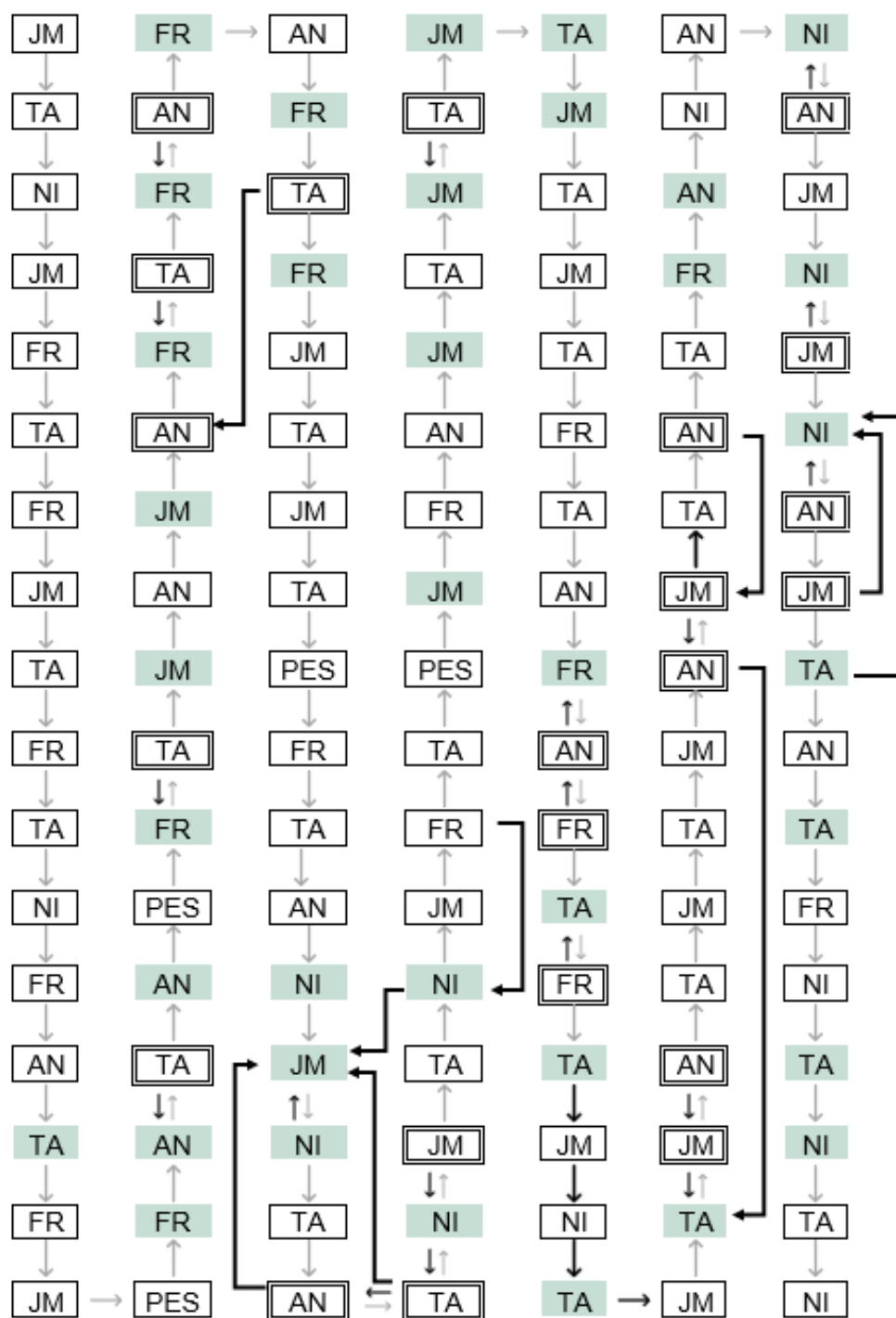
A situação 4 foca em um problema envolvendo interseção de duas táxi-circunferências.

Em relação à comunicação entre os participantes destacamos uma quantidade maior de interações que estão diretamente relacionadas ao desenvolvimento de esquemas adequados para a resolução da situação problema.

Dividimos as sequências de interações em dois fluxogramas para possibilitar uma leitura mais clara do desencadeamento da comunicação entre os participantes.

No primeiro fluxograma (Figura 59), é possível notar a indicação do surgimento e desenvolvimento de diversos esquemas e/ou estratégias individuais, bem como a conexão entre eles.

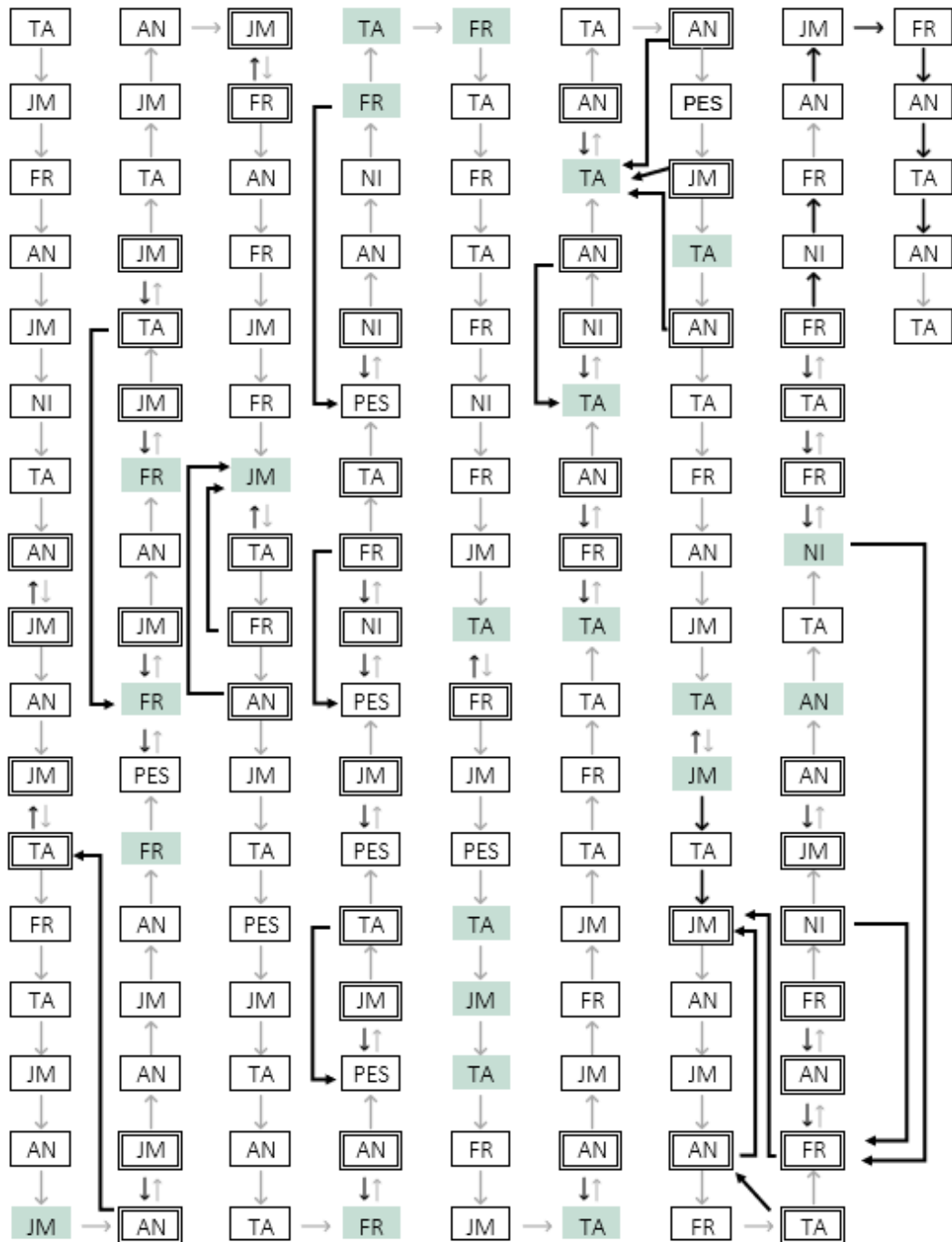
Figura 59 - Fluxograma das interações durante situação problema 4 (1)



Fonte: Dados da pesquisa

No fluxograma das interações da Figura 60, notamos que existem diversas conexões entre as falas dos participantes, indicando que a comunicação síncrona entre eles ocorreu de maneira acentuada.

Figura 60 - Fluxograma das interações durante situação problema 4 (2)



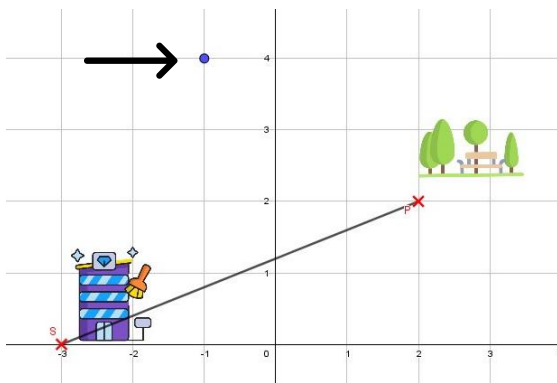
Fonte: Dados da pesquisa

Após observar o desencadeamento das interações analisamos as tentativas de ação e esquemas elaboradas durante a resolução da situação problema 4.

Para determinar os possíveis locais para a casa de Lucas, que será o resultado das interseções entre as táxi-circunferências, observamos que os participantes apontaram diferentes tentativas de ação como por exemplo, contagem

das unidades, divisão do segmento SP, determinação da região de menor distância e mediatriz.

As participantes Anastácia e Júpiter Maria apresentam como primeira tentativa de ação contar as unidades localizadas às distâncias indicadas (6 e 5 unidades) dos pontos fixos S e P, considerando os caminhos possíveis na táxi-distância para encontrar os pontos que poderiam representar a casa de Lucas. Com essa tentativa de ação as participantes não utilizam a noção de interseção entre táxi-circunferências.

Participantes	Fala	Registro e Comentários
Anastácia	Aqui	O ponto indicado pela seta corresponde ao ponto de coordenadas $(-1, 4)$ que Anastácia e Júpiter Maria identificaram ao contar as unidades até o shopping e a praça. 
Tasilver	Oxente, não é a única possibilidade não, tem várias	
Anastácia	Mas já é uma possibilidade	
Júpiter Maria	-1 e 4	
Anastácia	Vai marca	
Júpiter Maria	-1 e 4 antes que a gente esqueça	
Tasilver	Sim, mas se a gente for fazendo assim de ir encontrando pontinho tá errado, a gente tem que encontrar uma lógica pra isso	

Ao ser questionada por Tasilver a respeito de uma lógica para a tentativa de ação apresentada, Júpiter demonstra compreender que a lógica da Geometria Euclidiana não é suficiente para resolver as questões, uma vez que a configuração da Cidade Planejada não permite utilizar os objetos gráficos como na geometria utilizada por eles.

Participante	Fala
Júpiter Maria	A gente já viu que a lógica de geometria que a gente usa não funciona, porque aí tem as quadras, a gente precisa considerar as quadras esse caso da...
Tasilver	Mas tem uma lógica aí
Júpiter Maria	A geometria aí meu filho voou, porque é só essas quadras a

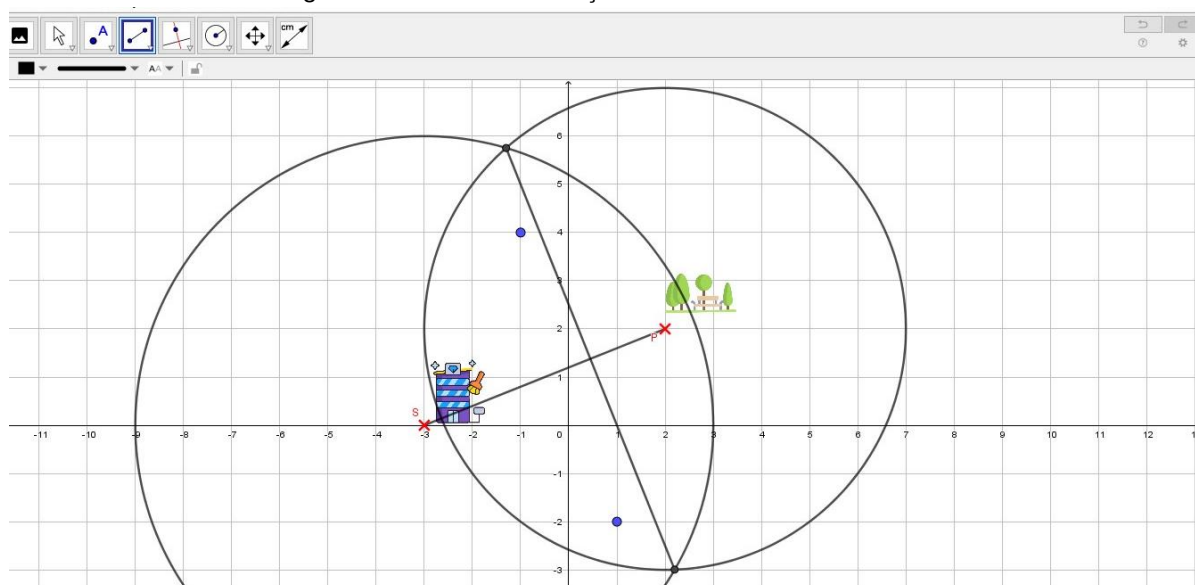
A fala de Júpiter, ao enfatizar a questão das quadras, evidencia que as propriedades e características do artefato simbólico estão moldando as tentativas de ação dos participantes.

As estratégias relacionadas à determinação de menor área, divisão do segmento SP e mediatriz não foram desenvolvidas pelos participantes.

Para tentar desenvolver uma lógica na estratégia apresentada por Júpiter e Anastácia, Nielir propõe “*fazer um quadrado*” associando a representação da circunferência na GT. Júpiter completa a proposta de Nielir, enfatizando que deverá ser construída uma circunferência de centro P com raio 5 e outra com centro em S de raio 6.

Participante	Fala
Nielir	Fazer um quadrado de ...
Júpiter Maria	Faz um círculo de 5 ao redor de P e um círculo de 6 ao redor de S.
Nielir	Onde pegar nas encruzilhadas vai dar o quadrado
Tasilver	E?
Anastácia	Toda vez que a gente faz o círculo dar errado
Tasilver	Não mais aí a gente vai encontrar os pontos
Nielir	Vai achar os 4
Júpiter Maria	A reta onde eles se cruzarem
Tasilver	De quanto?
Nielir	Aí acha 2 quadrados

Figura 61 - Tentativa de ação utilizando circunferências



Fonte: Dados da pesquisa

Como na construção da circunferência os pontos determinados anteriormente não coincidem com a interseção das circunferências, os participantes apagam a construção e não determinam os quatro pontos sugeridos por Nielir, como pode ser confirmado na frase de Tasilver “*se o ponto certo é esse, já ignora*”. Mais uma vez, notamos que os esquemas já desenvolvidos não foram suficientes para a resolução da situação problema.

Segundo Júpiter “*pela geometria seria esses pontos onde se encontram*”, sinalizando que pela geometria que eles conhecem, ou seja, a Geometria Euclidiana, os pontos seriam aqueles determinados pela interseção das circunferências. No entanto, para aquela situação em que é considerada a noção de táxi-distância, a geometria que eles conhecem “*não funciona*”.

Tasilver complementa o raciocínio de Júpiter enfatizando que “*é porque é distância por quadra e não distância*”, evidenciando a apropriação de propriedades e características do artefato simbólico táxi-distância. Ao atribuir um nome a essa “nova” distância, Tasilver apresenta elementos que indicam a apropriação do artefato simbólico, além da compreensão das características da Geometria do Táxi.

Tasilver retoma a proposta de Nielir de construir um quadrado, que seria a táxi-circunferência, agora marcando todos os pontos que estão à distância de 5 e 6 unidades dos pontos fixos considerando a distância do táxi

Participante	Fala	Registro e Comentários
Tasilver	A gente vê todos os pontos possíveis que são distantes é...de 5 quarteirões do parque	A partir da proposta de Tasilver os participantes marcam os pontos equidistantes 5 unidades do Parque.
Júpiter Maria	Sim	
Nielir	Dá	
Tasilver	E a mesma coisa <i>pra cá</i> , entenderam?	
Júpiter Maria	É... coloca aí	
Tasilver	Aí a gente vai ver quais coincidem se coincidem são os pontos	

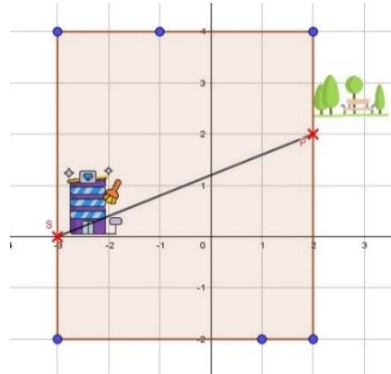
Ao discutirem sobre como garantir que esta seria a estratégia correta, outras estratégias surgem nas interações, como exemplo, a construção de um retângulo que determina a menor área. Estas estratégias não evoluem visto que ao testar os pontos os participantes não conseguem garantir a condição da situação problema.

Neste momento, os participantes são questionados (recorte na transcrição) sobre como eles conseguiriam garantir todos os pontos de mesma distância do shopping (6 unidades) e da praça (5 unidades). Duas estratégias são consideradas ao mesmo tempo entre os participantes, evidenciando que neste momento os esquemas individuais prevaleceram e eles não desenvolvem de maneira colaborativa a resolução da situação problema. O recorte das interações permite observar as diferentes estratégias sendo discutidas.

Participante	Fala
Pesquisadora	Posso fazer um questionamento? Quando a gente tem um ponto fixo e a gente quer todos os lugares que estão a mesma distância dele.
Júpiter Maria	Círculo
Tasilver	Circunferência
Pesquisadora	Certo. Vocês podem usar essa mesma lógica nessa questão?
Júpiter Maria	Não. A gente já tentou e não deu certo
Nielir	Só fazendo perpendicular
Tasilver	Pode

Nielir	[...] aí não tá perpendicular. É a mesma coisa da primeira questão, faz uma perpendicular a essa reta
Filha do Rio	Então, eu já fiz quando eu criei aquele outro polígono e não tem nada a ver
Tasilver	É a mesma lógica da fonte mesmo [...] ao invés de círculo, circunferência, então seria o quadrado
Filha do Rio	Não, não é
Júpiter Maria	Não. O ponto médio entre P e S.
Tasilver	Os pontos equidistantes
Júpiter Maria	Coloca mediatriz aí, aí vai ser
Tasilver	Ao invés do círculo, vai ser um quadrado

Ao mesmo tempo, os participantes consideram como possibilidade as noções de ponto médio e táxi-circunferência. Tasilver, então, enfatiza a estratégia que irá possibilitar determinar duas táxi-circunferências. Neste momento, notamos que o esquema desenvolvido por Tasilver é compreendido pelos demais participantes.

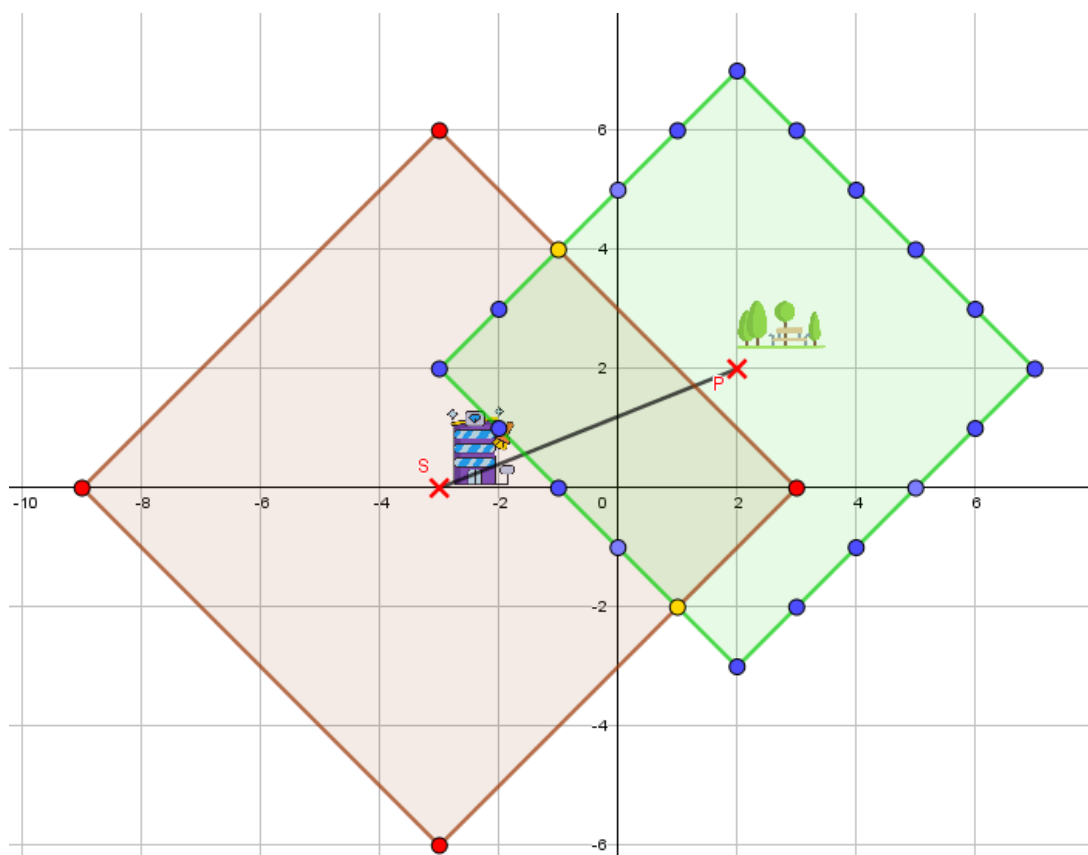
Participante	Fala	Registro e Comentários
Tasilver	Olha, presta atenção, vê só, cês lembram que na questão da fonte a gente tinha vários pontos equidistantes e não eram marcados por uma circunferência era marcado por um quadrado? então dá pra usar essa mesma lógica aqui	O participante Tasilver tenta argumentar com os demais participantes sobre a resolução da situação utilizando a noção de táxi-circunferência.
Filha do Rio	Eu tracei o paralelogramo	A figura ilustra a fala de Anastácia sobre o paralelogramo construído como uma das tentativas de Filha do Rio.
Anastácia	Olha aí o paralelogramo que Filha do Rio fez	
Tasilver	Não gente os pontos formando um quadrado tipo distantes da praça	
Nielir	E a gente vai fazer um quadrado perpendicular	
Anastácia	Mas aí não é equidistante aí, porque tem que ser um pra cinco e outro pra 6	
Tasilver	Sim, mas aí... Equidistância de cada ponto, vai contar os pontos	
Anastácia	Então faça que eu não sei fazer não	

Tasilver	Vamos lá
Anastácia	Eu achei os pontos, na minha cabeça
Júpiter Maria	Ah, eu entendi, vai fazer um quadrado de 5 entre o ponto P e um de 6 onde se encontrar
Tasilver	Um aqui e outro lá, onde se encontrar vai ser a resposta
Júpiter Maria	<i>Tu é inteligente boy</i>
Tasilver	Entendesse?
Anastácia	Ah, agora já sei como é, vai. Agora eu já entendi tudo.

Após terem considerado a estratégia de Tasilver como adequada para resolver a situação, os participantes iniciam a construção no GeoGebra. Júpiter retoma a estratégia de Nielir de determinar uma circunferência e encontrar os quatro pontos na interseção dos diâmetros e a malha, conforme trecho “*tem que achar as diagonais né? As diagonais tão nas linhas retas*”. Filha do Rio confirma a estratégia apresentada inicialmente por Nielir ao mencionar que “*as circunferências do início faziam exatamente isso, elas batiam nos pontos extremos, né?*”

A construção que os participantes apresentaram como solução corresponde ao conjunto de pontos equidistantes 5 unidades da Praça e 6 unidades do shopping que determinam duas táxi-circunferências, sendo os pontos da interseção os locais possíveis para a casa de Lucas (Figura 62).

Figura 62 - Solução apresentação para a situação problema 4



Fonte: Dados da pesquisa

Após a construção, Tasilver conclui apontando que foi possível perceber “*que em uma cidade planejada os pontos equidistantes não estão sobre uma circunferência e sim sobre um quadrado.*”

Esta questão exigiu dos participantes a apropriação do artefato simbólico táxi-distância e do seu uso na construção de táxi-circunferências. Notamos que os esquemas desenvolvidos para as outras questões não foram suficientes para associar diretamente a construção da circunferência mesmo conhecendo a propriedade de equidistância de um ponto fixo, indicando mais uma vez a dificuldade em desvincular o objeto gráfico na Geometria Euclidiana. Nesta situação as dimensões da instrumentalização e instrumentação ocorreram quase que simultaneamente ao resolverem a questão.

Quanto aos esquemas desenvolvidos de maneira colaborativa nesta questão, observamos que eles foram expressos por meio da retomada dos esquemas individuais, no entanto, em poucos momentos percebemos a evolução em EACI, que

acontece quando um esquema individual passa a ser considerado pelo grupo na construção síncrona do conhecimento.

5.5 Síntese dos Resultados

Nesta seção apresentaremos uma síntese dos resultados obtidos nas situações problemas de acordo com as unidades de análise, a fim de situar os principais aspectos identificados em relação à apropriação colaborativa do artefato simbólico táxi-distância.

Em relação à comunicação interpessoal, que corresponde à primeira unidade de análise, foi possível observar que o fato de os participantes serem todos de uma mesma turma e já se conhecerem antes do experimento fez com que a comunicação entre eles fluísse de maneira bastante perceptível.

A partir da análise dos fluxogramas das interações, pudemos destacar alguns aspectos relacionados aos modos de comunicação considerados no experimento, virtual e presencial. Notamos que, na sessão 2 na qual os participantes trabalharam presencialmente, houve maior envolvimento na resolução das situações problemas e que as interações foram mais rápidas e eficientes, considerando que as estratégias elaboradas eram facilmente compreendidas pelos demais participantes sem que houvesse a necessidade de elaboração muito detalhada das hipóteses e sugestões. Entendemos que na sessão 1 por estarem trabalhando no ambiente *VMT*, que até então era desconhecido para todos haveria a necessidade de mais tempo de familiarização com as ferramentas disponíveis. Diante disso, destacamos a importância do processo de gênese instrumental do artefato tecnológico utilizado e consequentemente o desenvolvimento de outros esquemas relacionados ao *VMT*, que não foram discutidos por não ser o foco da pesquisa.

Consideramos a comunicação interpessoal como nossa principal fonte de dados, visto que por meio dela foi possível registrar as estratégias dos participantes e, assim, identificar indícios da apropriação colaborativa do artefato simbólico.

Os fluxogramas de interação de cada situação deram uma visão mais objetiva do desencadeamento da comunicação síncrona dos participantes e nos auxiliou a analisar, a partir da sequência das falas, as trocas e construções compartilhadas entre eles.

Em nossa segunda unidade de análise, pudemos observar as tentativas de ação com o artefato simbólico táxi-distância, ou seja, a descoberta progressiva do artefato simbólico táxi-distância em instrumento.

Ficou evidente na resolução das situações problemas que as primeiras tentativas de ação com o artefato táxi-distância tinham como principal referencial as noções euclidianas que já são do conhecimento dos participantes. Esta relação com os lugares geométricos de equidistância já era esperada, pois, se tratando de situações problemas, era necessário que os participantes tivessem condições de iniciar a resolução a partir de conhecimentos prévios e de esquemas desenvolvidos anteriormente.

Para a resolução das situações problemas envolvendo os conceitos de menor distância, ponto médio, circunferência e mediatriz na Geometria do Táxi notamos que os conhecimentos prévios dos participantes sobre lugares geométricos de equidistância não foram suficientes quando eles precisaram utilizar a noção de distância na Geometria do Táxi.

O conflito entre os objetos gráficos na Geometria Euclidiana e a “nova” noção de distância a ser considerada por eles nos possibilitou observar elementos da Instrumentalização, quando a partir deste conflito os participantes começam a moldar o artefato considerando as suas características.

Ainda sobre a articulação com os lugares geométricos de equidistância, ficou evidente ao longo da análise das situações problemas que as representações gráficas na Geometria Euclidiana, que já era do conhecimento dos participantes, prevaleceram sobre as definições formalizadas destes mesmos lugares geométricos na Geometria do Táxi. Um exemplo disso pode ser visto na Situação Problema 4, quando questionados sobre a equidistância de um ponto fixo, conforme recorte da transcrição:

Participante	Fala
Pesquisadora	Posso fazer um questionamento? Quando a gente tem um ponto fixo e a gente quer todos os lugares que estão a mesma distância dele...
Júpiter Maria	Círculo
Tasilver	Circunferência
Pesquisadora	Certo, vocês podem usar essa mesma lógica nessa questão?
Júpiter Maria	Não, a gente já tentou e não deu certo

Nesta situação, os participantes haviam feito apenas a construção da circunferência euclidiana, e como esta não atendeu ao que era solicitado, a estratégia foi desconsiderada, ficando evidente, nesse momento, que, no conflito entre objeto gráfico e definições, os participantes se apoiaram na representação da circunferência euclidiana.

Estas observações em relação às tentativas de ação com o artefato e sua articulação com noções da Geometria Euclidiana nos direcionam a nossa última unidade de análise referente à Instrumentação.

Nesta unidade, consideramos para a análise o uso do artefato simbólico, o surgimento dos esquemas individuais e a evolução dos esquemas em esquemas de atividades coletivas instrumentadas (EACI). A partir da observação e análise desses aspectos será possível apontar elementos sobre o processo de aprendizagem colaborativa na apropriação do artefato simbólico.

Diante da observação das tentativas de ação com o artefato e a articulação com as definições e representações na Geometria Euclidiana, que, como visto anteriormente, prevaleceram sobre a definição de lugar geométrico formalizada, compreendemos que, em nossa pesquisa, o uso do artefato simbólico em dados momentos esteve condicionado à aceitação dos objetos gráficos na Geometria do Táxi. Dessa maneira, o uso do artefato simbólico táxi-distância na resolução das situações não dependeu apenas da sua apropriação e, sim, pela aceitação, por parte dos participantes, dos objetos que têm suas representações modificadas diante da noção de distância utilizada. Como exemplo, o reconhecimento da táxi-circunferência, como um lugar geométrico de equidistância, visto que sua representação se assemelha a um quadrado.

Em relação ao surgimento dos EACI nas interações, as análises confirmaram que, assim como apontado por Rabardel (1995), eles evoluem a partir dos esquemas individuais, o que pode ser constatado a partir das conexões nos fluxogramas de interações.

Ficou evidente durante toda a análise que, inicialmente, as estratégias eram apresentadas por um ou dois participantes e que, a partir das discussões, os demais participantes passavam a compreendê-las e a considerar na construção colaborativa das resoluções.

Vale ressaltar que, em algumas situações, essa compreensão das estratégias não se deu de maneira rápida, sendo necessárias discussões para testar e validar

diferentes hipóteses e, só assim, ser compreendida e considerada para a resolução da situação problema.

Mediante a reconstrução das estratégias e interações dos participantes pudemos identificar dois elementos centrais presentes nas definições e fenômenos da aprendizagem colaborativa, sendo eles: *a)* uso implícito ou explícito dos esquemas individuais como esquema coletivo e *b)* argumentação e negociação na resolução das situações problemas.

Estes dois elementos indicam que houve a coordenação das ações individuais e a evolução de esquemas compartilhados como contribuição para alcançar um objetivo comum (RABARDEL,1995).

Dessa maneira, podemos notar na análise das situações problemas que para os participantes colaborarem por meio do artefato simbólico táxi-distância foi necessário chegarem a um acordo compartilhado do seu uso, sendo estes, evidenciados a partir dos EACI.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa teve como objetivo analisar o processo de aprendizagem colaborativa com base nos esquemas de atividades coletivas instrumentadas de licenciandos de um curso direcionado ao estudo da Geometria Gráfica, com ênfase na apropriação do artefato simbólico táxi-distância por meio da resolução de situações problemas.

Para fundamentação teórica de nossa pesquisa, propusemos uma aproximação entre a Aprendizagem Colaborativa com Suporte Computacional (*Computer-supported collaborative learning – CSCL*), com base nos trabalhos de Stahl, Koschmann e Suthers (2006) e Dillenbourg (1996), e a Abordagem Instrumental discutida principalmente no texto de Rabardel (1995) e integrada na Didática da Matemática por meio dos trabalhos de Guin e Trouche (1999; 2002).

Em relação à colaboração, discutimos, inicialmente, os aspectos relacionados a seu uso no âmbito educacional, a partir da sua definição, características e a relação entre aprendizagem colaborativa e individual. Dessa maneira, tomando como base Vygotsky (1998) compreendemos que cada sujeito tem capacidade de desenvolvimento diferente quando envolvido em uma situação de colaboração.

Considerando o objetivo de analisar o processo de aprendizagem colaborativa dos participantes da pesquisa utilizamos a Abordagem Instrumental (RABARDEL, 1995), com ênfase na noção de esquemas de atividades coletivas instrumentadas (EACI) como uma proposta para identificar e analisar elementos que apontem para a construção colaborativa de conhecimento.

Para possibilitar a análise do processo de aprendizagem colaborativa a partir dos EACI, adotamos conceitos da Geometria do Táxi, uma geometria não euclidiana, que como apontado na revisão da literatura e análise dos aspectos didáticos tem aplicações na educação básica e superior, no entanto, é pouco explorada nos currículos. Nesse sentido, justifica-se a escolha de conceitos dessa geometria, pois entre outros fatores, os conceitos possuem um caráter desafiador que permite confrontar as definições da Geometria Euclidiana gerando conflitos cognitivos e ao serem propostas em uma situação de colaboração possibilitam a mobilização dos esquemas de atividades coletivas instrumentadas.

Caracterizamos o conceito de distância na Geometria do Táxi buscando relacionar com conceitos da Geometria Euclidiana, com foco nos lugares

geométricos de equidistância, considerando que a partir da noção de distância nas duas geometrias, ocorrem modificações nas representações gráficas dos objetos matemáticos. Por isso, evidencia-se como fundamental a apropriação da noção de distância na Geometria do Táxi para compreensão dos objetos representados segundo tal noção.

Ao compreender a importância da noção de táxi-distância para a construção de conhecimento sobre a Geometria do Táxi, tomamos o conceito como nosso artefato. Dessa maneira, nossa pesquisa se situa no âmbito das discussões e desenvolvimento de estudos sobre artefatos simbólicos.

Ainda sobre a Geometria do Táxi e com base no estudo realizado, concordamos com Krause (1986) quando aponta que ela possui uma importância pedagógica e matemática muito significativa, à medida que possibilita uma proximidade com a Geometria Euclidiana e modela a realidade de centros urbanos bem planejados, facilitando, assim, sua aplicação em sala de aula.

Nos procedimentos metodológicos discutimos sobre as escolhas necessárias para a análise do processo de aprendizagem colaborativa com base nos EACI. Organizamos a pesquisa em duas partes, sendo a primeira destinada à concepção do experimento e a segunda a sua aplicação.

As escolhas metodológicas contemplaram a delimitação do campo, sujeitos da pesquisa e do software GeoGebra, bem como, a concepção do experimento a partir da seleção, estudo e refinamento das situações problemas por meio de um estudo piloto realizado com dois participantes no qual pudemos observar as dificuldades na resolução das situações e realizar ajustes para o experimento final. Na segunda parte da pesquisa, direcionada à aplicação do experimento, foram apresentados o roteiro de colaboração, a descrição das sessões colaborativas e definidas as unidades de análise.

Com base nas unidades de análise (comunicação interpessoal, instrumentalização e instrumentação), realizamos a análise dos resultados obtidos na resolução de cada uma das situações problemas de acordo com seus objetivos e conceito envolvido. A síntese dos resultados apresenta os principais aspectos identificados na realização das situações problemas e nos permitiram observar se os objetivos foram atendidos.

Vale aqui, retomar os objetivos específicos da pesquisa:

a) *Identificar indícios do desenvolvimento de esquemas de atividades coletivas instrumentadas a partir das sequências de interações na realização das situações problemas;*

b) *Investigar o processo de instrumentalização dos licenciandos em relação ao artefato simbólico táxi-distância;*

c) *Investigar o processo de instrumentação da táxi-distância a partir da resolução das situações problemas;*

d) *Apontar por meio dos esquemas de atividades coletivas instrumentadas elementos que indiquem a apropriação colaborativa do artefato simbólico táxi-distância.*

Diante dos resultados obtidos apresentamos as conclusões da pesquisa, destacando se esses objetivos foram atendidos, bem como uma discussão acerca das contribuições da dissertação e as limitações identificadas e que podem servir como norteadoras para outras pesquisas.

A análise do processo de aprendizagem colaborativa foi possível por meio da reconstrução de sequências de interações, nas quais pudemos identificar o surgimento dos EACI e, assim, apontar a apropriação colaborativa do artefato simbólico táxi-distância. Desta maneira, concluímos que a aproximação da CSCL e da Abordagem Instrumental a partir das unidades de análise permitiu atender o objetivo da pesquisa, que visava identificar indícios do desenvolvimento desses esquemas.

As tentativas de ação com o artefato simbólico táxi-distância nos propiciaram observar um aspecto bastante pertinente quando consideramos os mesmos objetos matemáticos sendo trabalhados em duas geometrias distintas. O conflito entre a compreensão dos participantes sobre objeto gráfico e sua definição formalizada evidenciou que há uma dificuldade na aceitação por parte dos participantes das representações gráficas que não sejam de acordo com a noção de distância euclidiana. Assim como Leivas (2016) a nossa pesquisa permitiu observar que os sujeitos se apoiam principalmente nas representações gráficas e confirmam a dificuldade em sair do espaço euclidiano e aceitar outros espaços.

Diante desta dificuldade, conforme apresentado na síntese dos resultados, notamos que a apropriação do artefato simbólico em nossa pesquisa esteve ligada não apenas ao surgimento e evolução dos padrões de uso do artefato, mas,

principalmente, à aceitação das propriedades do artefato táxi-distância como verdadeiras.

Ao escolher utilizar a noção de táxi-distância, nossa pesquisa propõe-se, também, a contribuir nas discussões sobre a utilização de artefatos simbólicos, pois como pudemos identificar em nossos estudos, ainda são poucos os trabalhos que utilizam a Abordagem Instrumental para entender a apropriação de conceitos e propriedades de objetos matemáticos. Entendemos que no caso dos artefatos simbólicos os esquemas desenvolvidos têm a função de orientar os participantes no sentido de encontrar soluções de tarefas específicas inerentes do artefato (NETO; SILVA, 2017) sendo este um importante campo de discussão na educação matemática.

Ao analisar o experimento, além dos dados direcionados à apropriação do artefato simbólico, é importante destacar aspectos relativos à aprendizagem colaborativa.

A construção das sequências de interações só foi possível pois os participantes diante das situações problemas sentiram a necessidade de compartilhar suas estratégias e hipóteses. Segundo Stahl, Koschmann e Suthers (2006, p. 9) “isto se deve à necessidade que os participantes têm na colaboração de mostrarem uns aos outros o seu entendimento do significado que está sendo construído na interação”.

Ainda segundo os autores, as declarações e construções produzidas durante a colaboração são feitas pelos participantes para expressar sua compreensão, sendo esta a base para a colaboração bem-sucedida.

Ao relacionar a afirmação dos autores acerca das construções compartilhadas e o texto de Lonchamp (2012), destacamos que o trabalho com instrumentos representacionais permitiu que os alunos exteriorizassem seus próprios conhecimentos, tornando-os disponíveis para os outros de maneira a conectar, reinterpretar e expandir o conhecimento desenvolvendo, que em nossa pesquisa, se deu por meio da apropriação do artefato táxi-distância.

As interações e construção colaborativa de conhecimento permitiram, então, reconstruir o processo colaborativo com base nos esquemas de atividades coletivas instrumentadas com ênfase no processo de apropriação do artefato táxi-distância. Diante disso, foi possível atender aos objetivos da pesquisa, tanto quanto as

dimensões da instrumentalização e instrumentação, quanto à a apropriação colaborativa do artefato simbólico táxi-distância.

A análise do processo de aprendizagem colaborativa também oportunizou a observação de diferentes aspectos a serem considerados em situações que envolvam a construção compartilhada de conhecimentos, como exemplo, o tempo de observação, as formas de comunicação e a escolha das atividades a serem realizadas.

O tempo de observação das sessões colaborativas nos permitiu analisar as interações e a colaboração enquanto os participantes resolviam as situações problemas. No entanto, considerando que o apropriação do artefato pode ser durável ou permanente, apontamos que acompanhar por um período maior os participantes trabalhando juntos possibilita analisar se os esquemas desenvolvidos de maneira colaborativa se mantêm a partir da exploração das construções e de novas hipóteses atribuídas às situações problemas.

Concordamos, dessa maneira, com Drijvers e Trouche (2008) quando enfatizam que a transformação de um artefato – particularmente se for um instrumento complexo do ponto de vista matemático – requer tempo.

Em relação à comunicação interpessoal, assim como destacado na síntese dos resultados, esta possibilitou o registro dos esquemas desenvolvidos pelos participantes por meio das interações, com destaque para o desencadeamento das interações apresentado nos fluxogramas. A partir da representação gráfica das sequências de interações, pudemos observar a participação de todos e a comunicação constante entre eles, evidenciando que as situações problemas não foram resolvidas de maneira isolada e, sim, compartilhadas entre todos os participantes.

Sobre a comunicação presencial, esta se mostrou mais eficiente em nossa pesquisa, no entanto, destacamos que compreender e analisar os aspectos direcionados à colaboração virtual, como ocorreu na 1ª sessão colaborativa, se faz necessário no âmbito das discussões da CSCL, visto que, um dos seus desafios é garantir a interação e colaboração por meio de diferentes recursos tecnológicos que devem dar suporte a todo processo de colaboração online.

Outro ponto relacionado à análise dos dados, diz respeito à escolha das atividades a serem realizadas em uma situação de colaboração. Como apontado

anteriormente, a escolha do artefato simbólico táxi-distância, considerou o fato que em uma situação na qual se pretende observar as interações e construção colaborativa entre sujeitos, as atividades precisam ser pensadas de maneira a dar suporte à colaboração, visto que, questões consideradas fáceis demais ou difíceis demais poderiam ser um entrave à colaboração. Nesse sentido, reforçamos que a escolha da Geometria do Táxi em nossa pesquisa foi adequada para observar o processo colaborativo entre os participantes.

A análise do processo de aprendizagem colaborativa por meio dos esquemas de atividades coletivas instrumentadas se mostrou adequada para nossa pesquisa e nos permitiu atingir nossos objetivos, no entanto, é importante destacar alguns pontos relacionados a dificuldades e possibilidades desta articulação entre as duas teorias.

Do ponto de vista teórico, a análise dos esquemas é algo complexo, uma vez que, ao pesquisador cabe apenas reconstruir os esquemas a partir da sua interpretação e embasamento teórico diante da impossibilidade de acesso aos esquemas mentais. Em se tratando da reconstrução de esquemas coletivos, a dificuldade reside na reconstrução das sequências de interação que apresentem a construção colaborativa de um conhecimento.

Em nossa pesquisa, o registro das interações foi possível diante dos instrumentos de coleta de dados e a posterior transcrição fonética, no entanto, a reconstrução das sequências que indicavam a construção colaborativa, a apropriação do artefato, as tentativas de ação e estratégias apontadas pelos participantes exigiu uma análise detalhada de acordo com os aspectos teóricos expressos a partir das unidades de análise.

Entendemos que na reconstrução das sequências e identificação do surgimento e evolução dos esquemas colaborativos reside a principal contribuição da articulação entre a CSCL e a Abordagem Instrumental, pois é por meio desta reconstrução que os esquemas de atividades coletivas instrumentadas e a colaboração entre os participantes foram expressas.

Além de evidenciar as conclusões relacionadas aos objetivos e contribuições da pesquisa compreendemos ser pertinente apresentar a visão dos participantes sobre a experiência de trabalhar de maneira colaborativa.

Após a conclusão das situações problemas, houve um momento de oficialização dos conceitos que haviam sido considerados para as situações

problemas, bem como o resgate do objetivo do experimento de propor que os participantes trabalhassem de maneira colaborativa na resolução das questões.

Diante do recorte da transcrição das interações, foi possível apontar o reconhecimento por parte dos participantes da importância de trabalharem de maneira colaborativa como uma das variáveis que possibilitou a resolução das situações problemas. Isto pôde ser confirmado na fala da participante Filha do Rio:

Participante	Fala
Filha do Rio	E acho que a gente vai sair daqui tipo, a gente conseguiu ser mais rápido, porque trabalhou junto
Tasilver	Verdade
Filha do Rio	E eu pelo menos não vou esquecer nunca mais desse negócio, porque fica na cabeça como a gente discutiu, se tivesse feito sozinho acho que num teria sido tão...
Tasilver	Exato
Júpiter Maria	É
Filha do Rio	Não teria sido a mesma coisa. Porque são várias mentes diferentes

Diante deste recorte, no qual os participantes apontam o trabalho em grupo como necessário para a resolução das situações problemas propostas a eles, é possível confirmar as contribuições da colaboração no processo de aprendizagem dos participantes, pois ao terem contato com diferentes estratégias eles puderam refletir sobre o seu próprio conhecimento e assim desenvolver esquemas compartilhados.

Outro ponto a ser destacado a partir do *feedback* dos participantes refere-se à construção de um novo conhecimento, como expresso na fala de Júpiter “e agora a gente sai daqui sabendo que existe uma Geometria do Táxi, que eu não sabia disso”.

A importância da construção de um novo conhecimento pelos participantes significa para além da aplicação deles, uma possibilidade de enxergar novas estratégias didáticas que aproximem o estudo da Geometria Euclidiana e da Geometria do Táxi com o cotidiano das pessoas, tornando o ensino da Matemática e da Geometria Gráfica menos abstrato e facilmente reconhecido em suas aplicações diárias.

Considerando as questões apresentadas em nossa pesquisa, podemos apontar temáticas relevantes a serem exploradas em pesquisas futuras sobre a CSCL e a Abordagem Instrumental. Os esquemas de atividades coletivas instrumentadas se mostraram adequados para analisar a aprendizagem do ponto de vista da colaboração. Sendo este um conceito da Abordagem Instrumental pouco explorado cabe ressaltar a importância de aprofundar os estudos sobre as suas características e sobre o seu uso como unidade de análise.

Percebemos, também, que o trabalho com o artefato simbólico foi bastante significativo do ponto de vista da descoberta progressiva das suas propriedades e da atribuição de condições ao seu uso. Estudar o uso dos artefatos simbólicos na educação matemática poderá contribuir nas pesquisas relacionadas ao processo de aprendizagem de diferentes conceitos e propriedades matemáticas.

Consideramos também pertinente investigar o uso do artefato simbólico táxi-distância com diferentes grupos de sujeitos, como exemplo, licenciandos em Matemática, de maneira a identificar como este será moldado de acordo com as particularidades próprias da área de formação destes sujeitos.

Acreditamos que essa pesquisa apresenta contribuições importantes para o estudo e a análise da aprendizagem colaborativa com base nos esquemas de atividades coletivas instrumentadas, além de apresentar diferentes possibilidades de uso de conceitos pouco explorados dentro da Abordagem Instrumental, como o artefato simbólico e os esquemas de atividades coletivas instrumentadas. Esperamos que a partir das limitações, possibilidades e apontamentos aqui evidenciados outras pesquisas busquem soluções e aplicação em diferentes contextos.

Para além das expectativas acadêmicas da pesquisa, esperamos por meio dela apresentar a colaboração como uma habilidade necessária à formação dos sujeitos e que deve ser valorizada por nós, educadores, como uma abordagem que envolve diferentes sujeitos trabalhando em prol de um objetivo comum.

REFERÊNCIAS

- ABAR, C.; ALENCAR, S. A Gênese Instrumental na Interação com o GeoGebra: uma proposta para a formação continuada de professores de Matemática. **Bolema – Boletim de Educação Matemática**, v. 27, n. 46, p. 349-365, 2013.
- ABREU, J.; BARROSO, L. Alguns aspectos da “Geometria do Táxi” na geografia. **Revista Geografia e Ensino**, v.1, n.1, p. 31 – 46, 1982.
- ANDRADE, F.; SARMENTO, I.; LOPES, L. A geometria do taxista e as tecnologias digitais no Proeja Guia de Turismo. In: IX ENCONTRO PARAIBANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11,2016, Campina Grande. **Anais [...]**. Campina Grande: IFPB Campus Campina Grande,2016. Disponível em: <http://editorarealize.com.br/revistas/epbem/anais.php>. Acesso em ago. 2019.
- ARAÚJO FILHO, R. **Análise da colaboração em situação de formação de professores de Matemática online**. 2015. 159f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2015.
- ARTIGUE, M. Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**, v. 7, n. 3, p. 245-274, 2002.
- BAIRRAL, M.; MARQUES, F. Onde se localizam os pontos notáveis de um triângulo? Futuros professores de matemática interagindo no ambiente VMT com GeoGebra. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 18, n.1, p. 111-130, 2016.
- BAIRRAL, M.; POWELL, A. Interlocuções e saberes docentes em interações on-line: um estudo de caso com professores de Matemática. **Pro-Posições**, v. 24, n. 1 (70), p. 61-77, 2013.
- BACICH, L; MORAN, J.(org) **Metodologias Ativas para uma Educação Inovadora: Uma Abordagem Teórico-Prática**. 1ª ed. – Porto Alegre: Penso, 2018.
- BITTAR, M. A abordagem instrumental para o estudo da integração da tecnologia na prática pedagógica do professor de matemática. **Educar em Revista**, Curitiba, n. Especial 1/2011, p. 157-171, 2011.
- BOYER, C. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide, São Paulo. Universidade de São Paulo,1974.
- BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em jan,2019.
- BRASIL. Ministério da Educação – Conselho Nacional de Educação. Resolução nº 2, de 2015. *Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação inicial em nível superior (cursos de licenciatura, cursos de formação pedagógica para graduados e cursos de segunda licenciatura) e para a formação continuada*. Diário Oficial da União, Brasília, DF, 2 jul. 2015. Seção 1, p. 8 - 12. Acesso em: maio,2019.
- BRASIL. Ministério da Educação – Conselho Nacional de Educação. Parecer CNE/CES 1.302/2001. *Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de*

Matemática: Bacharelado e Licenciatura. Diário Oficial da União, Brasília, DF, 5 mar. 2002. Seção 1, p. 15. Acesso em: jan, 2020.

CALDATO, P. **O uso da Geometria do Táxi no ensino de Análise Combinatória**. Dissertação (Mestrado profissional em matemática em rede Nacional PROFMAT). Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”. São José do Rio Preto, 2013.

CÂMARA, M. Um exemplo de situação-problema: o problema do bilhar. **Revista Professor de Matemática**, n. 50, 2002.

CAVICHIOLO, C. V. **Geometrias Não Euclidianas na formação inicial do professor de Matemática: o que dizem os formadores**. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Paraná. Curitiba, PR:[s.n.], 162p. 2011

CÉSAR, S. **Geometria do Táxi – uma exploração através de atividades didáticas**. 2010. 96 f. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Belo Horizonte, 2010.

CHUMPITAZ, L. **La Génesis Instrumental: Un estudio de los procesos de instrumentalización en el aprendizaje de la función definida por tramos mediado por el software GeoGebra con estudiantes de ingeniería**. Dissertação. Pontificia Universidad Católica del Perú. 2013.

COSTA, M.; COSTA, A.; COSTA, I. **Geometria Gráfica Bidimensional: Lugares Geométricos**. Recife: Ed. Universitária da UFPE, 2009.

CUÉLLAR, D. **Simetria axial mediada por el Geogebra: um estudo com alunos de primer grado de educación secundaria**. Dissertação de mestrado. PUC – Peru. 2014.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. **A Experiência Matemática**. Portugal: Gradiva, 1985. 401p.

DILLENBOURG P. What do you mean by ‘collaborative learning’? *In: P. DILLENBOURG (Ed.), Collaborative-learning: Cognitive and Computational Approaches*. Amsterdam, NL: Pergamon, Elsevier Science Oxford, p.1-19, 1999.

DILLENBOURG, P. Over-scripting CSCL: The risks of blending collaborative learning with instructional design. *In: Three worlds of CSCL: Can we support CSCL?* Heerlen: Open Universiteit Nederland. P.A. Kirschner (Ed.), p. 61-91, 2002.

DILLENBOURG, P., BAKER, M., BLAYE, A., O’MALLEY, C. The evolution of research on collaborative learning. *In: Learning in humans and machine: towards an interdisciplinary learning science*. E. Spada and P. Reimand (Eds.). Oxford: Elsevier. p. 189 – 211. 1996

DILLENBOURG, P., HONG, F. The Mechanics of Macro Scripts. *In: International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning*. P. 5-23. 2008

DILLENBOURG, P., TCHOUNIKINE, P. Flexibility in macro-scripts for CSCL. *In: Journal of computer assisted learning*. V. 23. n. 1. p. 1 – 13. 2007.

DRIJVERS, P.; TROUCHE, L. From artifacts to instruments: a theoretical framework behind the orchestra metaphor. *In: BLUME, G. W.; HEID, M. K. (Eds.). Research on technology and the teaching and learning of mathematics: cases and perspectives*. Charlotte, NC:Information Age, v. 2, p. 363-392, 2008.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Editora da UNICAMP, 2011. 843 p.

FALZON, P. **Ergonomia**. São Paulo: Edgar Blücher, 2007. 640 p.

FAVA NETO, I. **Um novo conceito de distância: a distância do táxi e aplicações**. Dissertação (Mestrado profissional em matemática em rede Nacional PROFMAT). Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”. São José do Rio Preto, 2013.

FERNANDES, D. **Lugares Geométricos nas Geometrias Euclidiana x Táxi: Conceitos e Possibilidades de Abordagem no Ensino**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede). Universidade do Estado de Mato Grosso, 2017.

FERREIRA, L.; BARROS, R. Relações entre os objetos ostensivos e objetos não-ostensivos durante o ensino da Geometria do taxista com o software GeoGebra. *In: JIEEM – Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática* – v.6, n.2, pp.31-59, 2013.

FILATRO, A; CAVALCANTI, C. C. **Metodologias inov-ativas na educação presencial, a distância e corporativa**. 1º ed. – São Paulo: Saraiva Educação, 2018.

FOSSA, J. **Geometria Urbana**. João Pessoa: Editora Universitária /UFPB, 2003. 220f.

FUZZO, R.; REZENDE, V.; SANTOS, T. Geometria do Táxi: a menor distância ente dois pontos nem sempre é como pensamos. *In: V Encontro de Produção Científica e Tecnológica*, Campo Mourão, Paraná, 2010.

GUIN, D.; TROUCHE, L. **Mastering by the teacher of the instrumental genesis in CAS environments: necessity of intrumental orchestrations**. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 34: 204. 2002.

GUIN, D.; TROUCHE, L. The Complex Process of Converting Tools into Mathematical Instruments: The Case of Calculators. **International Journal of Computers for Mathematical Learning** 3(3):195-227. 1998.

GUSMÃO, N. et al. A Geometria do Táxi: uma proposta da geometria não euclidiana na educação básica. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.19, n.2, pp. 211-235, 2017.

HOYLES, C.; NOSS, R. What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education? *In: A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & F. K. S. Leung (Eds.), Second International Handbook of Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer. 2003*

JESUS, G. **As construções geométricas e a Gênese Instrumental: o caso da mediatriz**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC, 2012.

KALEFF, A. NASCIMENTO, R. Atividades Introdutórias às Geometrias Não-Euclidianas: o exemplo da Geometria do Táxi. **BOLETIM GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 44, p. 11-42, 2004.

KRAUSE, E. **Taxicab Geometry: an adventure in Non- Euclidean Geometry**. New York: Cover Publications, 1986.

LEIVAS, J. Elipse, parábola e hipérbole em uma geometria que não é euclidiana. **REVEMAT**. Florianópolis (SC), v.9, n. 2, p. 189-209, 2014.

LEIVAS, J. Geometria do Táxi: Resolvendo Problemas de Rotina. **ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v.9, n.2, p.177-202, novembro,2016.

LEIVAS, J. Geometrias não Euclidianas: ainda desconhecidas por muitos. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.15, n.3, pp.647-670, 2013

LÉON, J. **Estudios de los procesos de instrumentalización de la elipse mediada por el geogebra em alunos de arquitectura y administración de proyectos**. Dissertação de mestrado. PUC – Perú. 2014.

LIPPONEN, L. Exploring foundations for computer-supported collaborative learning. In G. Stahl (Ed.), **Computer support for collaborative learning: Foundations for a CSCCL community**, p. 72-81. 2002.

LOIOLA, C. **Um Táxi para Euclides: Uma Geometria não euclidiana na Educação Básica**. Dissertação (mestrado) Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, Rio de Janeiro, 2014.

LOIOLA, C.; COSTA, C. As Cônicas na Geometria do Táxi. **Ciência e Natura**, v. 37 Ed. Especial PROFMAT, p.179–191, 2015.

LONCHAMP, J. An instrumental perspective on CSCCL systems. **International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning**, 7(2), 211–237.2012

LOVIS, K.; FRANCO, V. As Concepções de Geometrias não Euclidianas de um Grupo de Professores de Matemática da Educação Básica. **BOLEMA – Boletim de Educação Matemática** 2015, vol.29, n.51, pp.369-388.

MIRANDA, D. et al. **Uma geometria não-euclidiana descomplicada**. In: III Encontro de Educação Matemática de Ouro Preto. 2015, Ouro Preto. A Educação Matemática para o exercício da cidadania. 2015.

NASCIMENTO, A. **Geometrias não euclidianas como anomalias: Implicações para o ensino de geometria e medidas**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências naturais e matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal, 2013.

NETO, A. **Um estudo da Gênese instrumental para função de uma variável real com várias sentenças**. Dissertação. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. 2015.

NETO, A.; SILVA, M. A Gênese Instrumental do artefato simbólico função de uma variável real definida por várias sentenças matemáticas em um ambiente não digital. **Revista Iberoamericana de Educação Matemática – UNIÓN**, n. 51, dez.2017.

NORONHA, C. **As geometrias urbana e isoperimétrica: uma alternativa de uso em sala de aula**. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal,2006.

NORONHA, C.; FOSSA, J. O modelo urbano como proposta para construção de conceitos matemáticos. **Revista Cocar**, v.4, n.8, pp.71-79,2010.

OLIVEIRA, V. **Geometria do Táxi: pelas ruas de uma cidade aprende-se uma geometria diferente**. Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de

Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. Campinas, SP. 2014.

POWELL, A.; ALQAHTANI, M.; SINGH, B. Supporting Students' Productive Collaboration and Mathematics Learning in Online Environments. In: **Jorgensen, R; Larkin (Ed.), STEM Education in the Junior Secondary: The State of Play**, p. 37-56. 2018.

PRESMIC, J. **Geometrias não euclidianas**. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade de Brasília – Instituto de Ciências Exatas. Brasília, 2014.

RABARDEL, P. **Les hommes et les technologies** : approche cognitive des instruments contemporains. Armand Colin, pp.239, 1995.

RABARDEL, P. **People and technology**: A cognitive approach to contemporary instruments. 2002. Disponível em : https://hal.archives-ouvertes.fr/file/index/docid/1020705/filename/people_and_technology.pdf Acesso em: dez, 2018.

RABARDEL, P., & BOURMAUD, G. From computer to instrument system: A developmental perspective. In: **Interacting with Computers**, 15(5), 665–691, 2003.

RABARDEL, P., VÉRILLON, P. Relations aux objets et développement cognitif, in **Actes des septièmes journées internationales sur l'éducation scientifique**, Chamonix, 1985.

REZENDE, E.; QUEIROZ, M. **Geometria Euclidiana Plana e construções geométricas**. Campinas, SP: Ed. Unicamp; 2000.

RITELLA, G., HAKKARAINEN, K. Instrumental genesis in technology-mediated learning: From double stimulation to expansive knowledge practices. **International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning**, n. 7(2), p. 239-258, 2012.

ROSCHELLE, J.; TEASLEY S.D. The construction of shared knowledge in collaborative problem solving. In **C.E. O'Malley (Ed), Computer-Supported Collaborative Learning**. P. 69-197, 1995.

SALES, A.; BAIRRAL, M. Interações docentes e aprendizagem matemática em um ambiente virtual. **Investigações em Ensino de Ciências** – v.17, n.2, p. 453-466, 2012.

SANTOS, P. **Diagrama de Voronoi: uma exploração nas distâncias euclidiana e do táxi**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2016.

SFARD, A. Thinking as communicating: Human development, the growth of discourse and mathematizing. Cambridge: Cambridge University Press. 2008

SILVA, E.; BARROS, M. Metodologias Ativas: Refletindo sobre seus princípios e práticas. **I Congresso Internacional Educat**. Recife: PADILHA, BARROS e MEHLECKE (org), 2019. v. 1. p. 580-590, 2019.

SILVA, M. **Génesis instrumental del circuncentro con el uso del Geogebra en estudiantes de nivel secundario**. Dissertação. Pontificia Universidad Católica del Perú. Peru, 2017.

SOUZA, H; LEIVAS, J. Geometria do Táxi: uma investigação com estudantes do Ensino Médio. In: **XII Encontro Nacional de Educação Matemática**, São Paulo, 2016.

SOUZA, M. **A Geometria do Táxi: investigação sobre o ensino de uma geometria não euclidiana para o terceiro ano do ensino médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Física e de Matemática). Centro Universitário Franciscano: Santa Maria, 2015.

STAHL, G.; KOSCHMANN, T.; SUTHERS, D. **Aprendizagem colaborativa com suporte computacional**: Uma perspectiva histórica. Tradução Hugo Fuks e Tatiana Escovedo. Cambridge: R. K. Sawyer, p. 409-426. 2006. Tradução de: Computer-supported collaborative learning: An historical perspective.

TOLEDO, M. **Uma abordagem sobre a Geometria Não-Euclidiana para o Ensino Fundamental**. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Faculdade de Ciências - Bauru, 2018.

TORRES, ILARA, Aprendizagem Colaborativa: Teoria e Prática. In: **Coleção Agrinho**, p. 61 - 93, 2015.

TROUCHE, L. Environnements informatisés et mathématiques: quels usages pour quels apprentissages? **Educational Studies in Mathematics**. v.55, p.181-197, 2004.

VERGNAUD, G. La théorie de champs conceptuels. **Recherches en Didactique de Mathématiques**, v. 10, n. 23, p. 133-170, 1990

VYGOTSKY, L. S., **A formação social da mente**. 6ª Edição. São Paulo: Martins Fontes, 1988.

WAGNER, T. **The Global Achievement Gap**: Why Even Our Best Schools Don't Teach the New Survival Skills Our Children Need—And What We Can Do About It. New York: Basic Books. p. 8-10, 13-4. 2008.

APÊNDICES

Apêndice A Roteiro de Colaboração – Experimento



ROTEIRO DE ATIVIDADES COLABORATIVAS

Experimento



Antes de começar as atividades algumas informações sobre a realização da sessão colaborativa.



Apresentação do experimento

Este experimento faz parte de uma pesquisa em nível de mestrado realizada no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica (EDUMATEC- UFPE) pela mestranda Elizabeth Cristina Rosendo Tomé da Silva.

Os participantes ficam cientes de que é compromisso dos pesquisadores **preservar o sigilo e a privacidade dos participantes cujos dados serão estudados e divulgados apenas em eventos ou publicações científicas, de forma anônima, não sendo usadas iniciais ou quaisquer outras indicações que possam identificá-los.**

Para esta sessão colaborativa serão propostas quatro situações problemas que deverão ser realizadas **colaborativamente** e de maneira **síncrona** (simultaneamente) através das hipóteses, conhecimentos, ideias e sugestões construídas nas interações entre os participantes.

- ✓ Serão 5 participantes realizando a atividade presencialmente com o auxílio de um software para as construções.
- ✓ As construções gráficas poderão ser realizadas através do software de Geometria Dinâmica GeoGebra.

Resolução Colaborativa das Atividades

Em nossa pesquisa iremos considerar a construção **colaborativa** das situação problemas.

Entendemos colaboração como uma situação de aprendizagem na qual duas ou mais pessoas aprendem ou tentam aprender algo juntas (DILLENBOURG,1990)



Diante desta definição sobre colaboração enfatizamos que as atividades deverão ser resolvidas com a participação de todos os participantes de maneira coletiva durante todo o experimento.

SITUAÇÕES PROBLEMAS

Ao acessar a pasta Situações Problemas vocês encontrarão 5 arquivos no formato. ggb. para ser acessado pelo GeoGebra abas, sendo 4 delas a serem utilizadas para a resolução e discussão das situações problemas e o arquivo Discussões o espaço para realizar possíveis construções durante as discussões.

Vocês terão acesso as ferramentas do disponíveis na barra de ferramentas do GeoGebra.

Situações problemas

Antes de iniciar as situações imaginem uma cidade na qual todas as ruas são paralelas entre si e os quarteirões se organizam de maneira equidistante. Essa Cidade Planejada pode ser comparada com esta imagem aérea da cidade de Barcelona.



Fonte: The City Fix Brasil (2017)

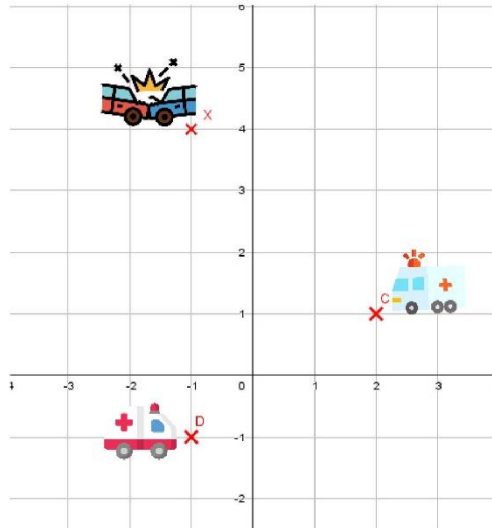
As situações a serem resolvidas consideram esta configuração de cidade (ruas paralelas e equidistantes).

Agora é com vocês!

Como resolver estas situações em uma Cidade Planejada?

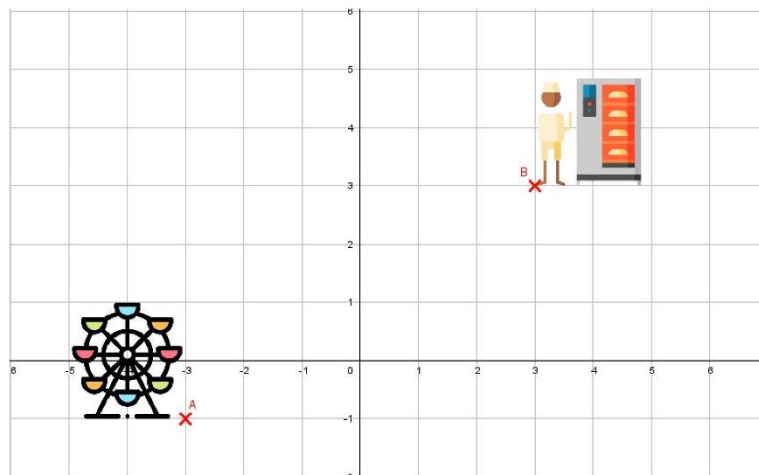


1 – Aconteceu uma colisão entre dois veículos na Cidade Planejada no local indicado em $X = (-1, 4)$. Há dois carros de socorro na área, o veículo do médico Carlos em $(2, 1)$ e carro da médica Débora em $(-1, -1)$. Qual veículo o serviço de socorro deve mandar para o local da colisão?



2 – Onde comprar o apartamento?

- a) Alice e Bruno estão olhando apartamentos na Cidade Planejada. Alice trabalha no parque de diversões, localizado em $A = (-3, -1)$, e Bruno, na padaria localizada em $B = (3, 3)$. Sendo eles ecologicamente conscientes, caminham até onde trabalham. Decidiram comprar seu apartamento considerando que ele deveria ser localizado próximo, de modo que a distância que Alice teria de caminhar para seu trabalho mais a distância que Bruno teria de caminhar para o seu, fosse a menor possível. Localizem no mapa a área que atenda a necessidade deles de caminhar a menor distância possível entre o apartamento e o trabalho de cada um.

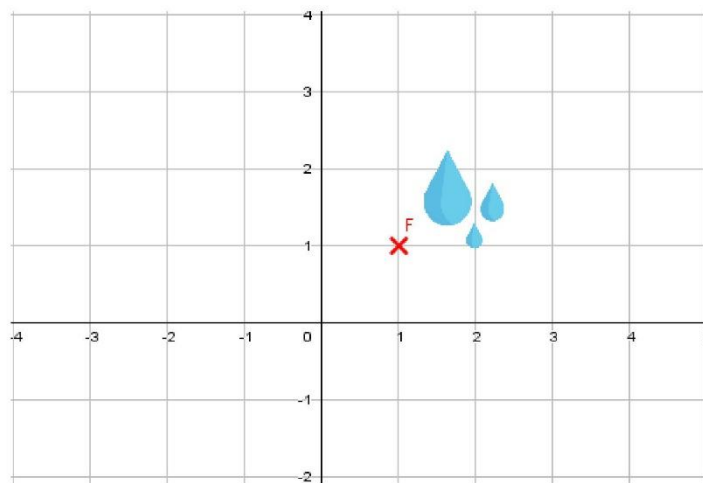


- b) Em um momento de cavalheirismo Bruno decide que a soma das distâncias ainda deve ser a menor, mas Alice não deve ter que andar mais do que ele. Agora, onde eles poderiam procurar um apartamento?
- c) Diante da atitude de Bruno, Alice concorda que a soma das distâncias deve ser mínima, mas ela acredita que o correto é que ambos tenham exatamente a mesma distância para caminhar até o trabalho. Agora, onde eles poderiam escolher o apartamento?
- d) Depois de um dia sem sucesso na busca do apartamento eles decidem ampliar a área de pesquisa. O único requisito que eles mantêm é que ambos estejam à mesma distância de seus trabalhos. Agora, onde eles deveriam olhar?

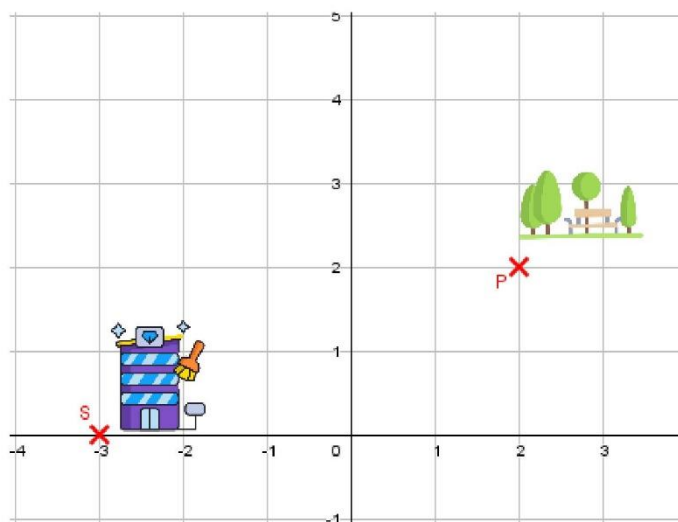
3 – No Parque da Cidade Planejada será instalada uma fonte de água em $F = (1,1)$ que deverá estar a uma mesma distância de diferentes espaços do parque. Estes espaços estão localizados em:

$E1=(-3,1)$; $E2=(-2,2)$; $E3=(-1,3)$; $E4=(0,4)$; $E5=(1,5)$; $E6=(2,4)$; $E7=(3,3)$; $E8=(4,2)$; $E9=(5,1)$; $E10=(4,0)$; $E11=(3,-1)$; $E12=(2,-2)$; $E13=(1,-3)$; $E14=(0,-2)$; $E15=(-1,-1)$; $E16=(-2,0)$.

Localizem estes pontos e discutam se todos eles estão a mesma distância da fonte. Se todos estiverem a uma mesma distância discutam sobre como é possível confirmar isso.



4 – Lucas é um dos moradores da Cidade Planejada. A distância da sua casa até o shopping da cidade localizado em S $(-3,0)$ é de 6 quadras e dentro de 5 quadras da Praça da cidade, P $(2,2)$. Onde está localizada a casa de Lucas?



As soluções deverão ser apresentadas no GeoGebra e as discussões das resoluções apresentada oralmente durante o experimento.

APÊNDICE B

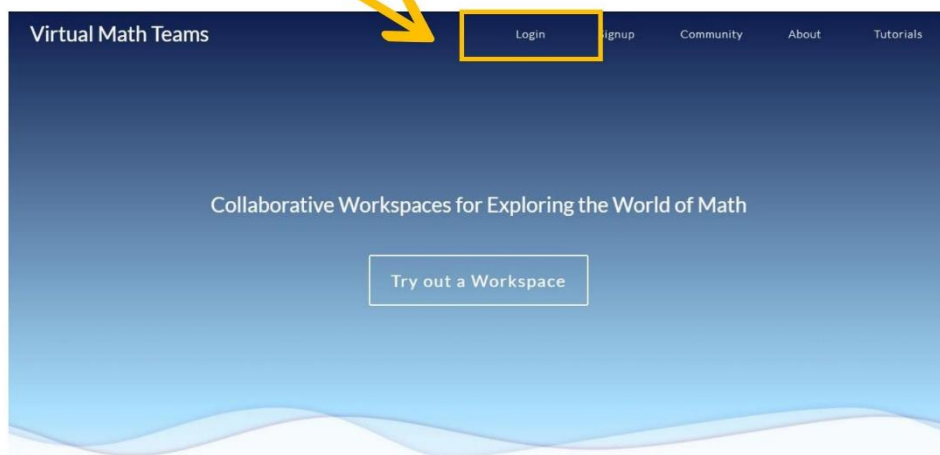
Instruções ambiente VMT

Ambiente Virtual – Virtual Math Teams (VMT)

- ✓ O VMT é um ambiente online desenvolvido para ser um espaço de resolução de atividades matemáticas de maneira colaborativa;
- ✓ Fornece uma infraestrutura de colaboração para ferramentas visuais de matemática como o software GeoGebra;

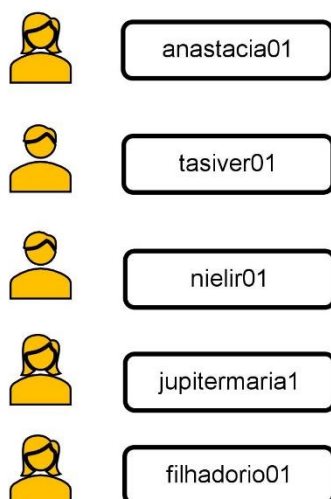
Apresentamos a seguir as informações de acesso ao ambiente VMT!!!

Tela inicial do VMT

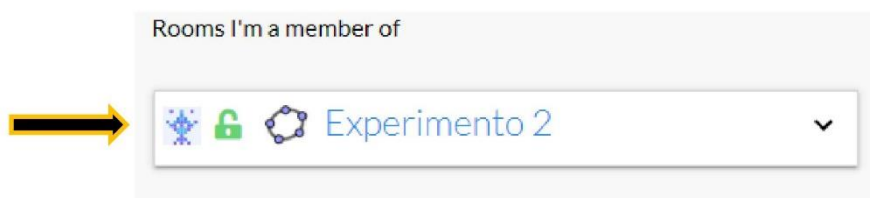


Será acessado através do link: <https://vmt.mathematicalthinking.org/>

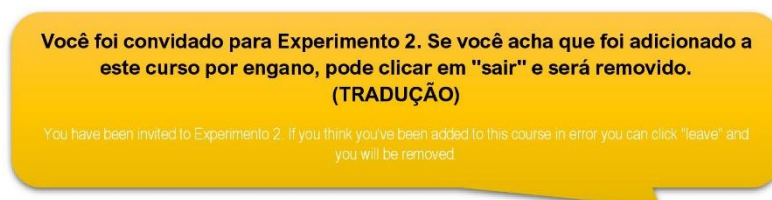
Na tela inicial vocês irão acessar o VMT através dos logins indicados abaixo e a senha já disponibilizada:



Após realizar o login será indicada a sala virtual que vocês fazem parte, conforme exemplo abaixo:



Ao clicar na sala virtual o sistema irá apresentar a seguinte mensagem:



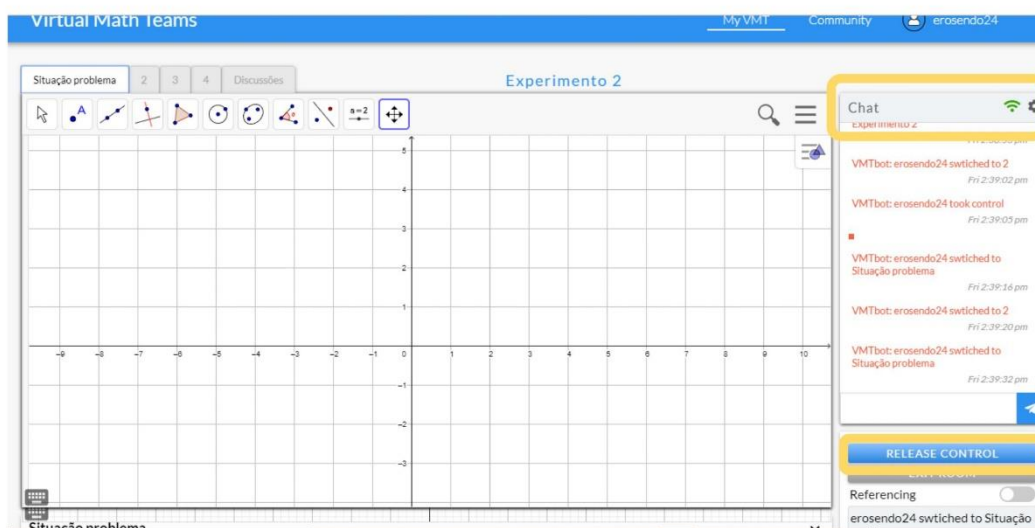
Selecione a opção JOIN (junte-se)



Ao acessar o ambiente do VMT é necessário clicar na opção **ENTER** que estará no canto inferior esquerdo da tela para entrar na Sala Virtual, como exemplo ao lado.

TELA DA SALA VIRTUAL

- ✓ A sala virtual dispõe do software GeoGebra e de uma janela de Chat (indicada na imagem acima) que será utilizada para comunicação dos participantes.
- ✓ A função **Take control / Release control** possibilita que os participantes utilizem a tela do GeoGebra um de cada vez.



APÊNDICE C

QrCode – Arquivo com as transcrições

