

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
E TECNOLÓGICA
CURSO DE MESTRADO

Tânia Maria Cantinho Paredes de Araújo

**Concepções dos alunos do Ensino Fundamental sobre
equivalência entre equações do primeiro grau**

Recife
2010

Tânia Maria Cantinho Paredes de Araujo

Concepções dos alunos do Ensino Fundamental sobre equivalência entre equações do primeiro grau

Dissertação apresentado ao Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Orientadora: Prof^a. Dra. Iranete Maria da Silva Lima

Coorientadora: Prof^a. Dra. Verônica Gitirana

Recife

2010

Araújo, Tânia Maria Cantinho Paredes de
Concepções dos alunos do Ensino Fundamental
sobre equivalência entre equações do primeiro grau /
Tânia Maria Cantinho Paredes de Araújo. Recife : O
Autor, 2010.
115f. : il. : quad., graf.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de
Pernambuco. CE. Educação, 2010

Inclui apêndices

1. Matemática – Estudo e ensino 2. Álgebra –
Equação do 1º grau 3. Equivalência 4. Ensino
fundamental I. Título

372.7
37

CDD (22.ed.)
CDU (2.ed.)

UFPE
CE2010-0031



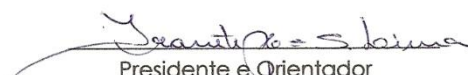
ALUNA

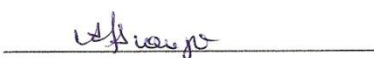
TÂNIA MARIA CANTINHO PAREDES DE ARAÚJO

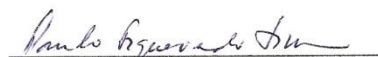
TÍTULO DA DISSERTAÇÃO

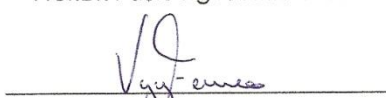
"Concepções dos alunos do ensino fundamental sobre equivalência entre equações do primeiro grau."

COMISSÃO EXAMINADORA:


Presidente e Orientador
Iranete Maria da Silva Lima


Examinador Externo
Prof. Dr. Abraão Juvencio de Araújo


Examinador Interno
Prof. Dr. Paulo Figueiredo Lima


Examinador Interno e co-orientadora
Prof.ª dr.ª Verônica Gítrana Gomes Ferreira

Recife, 26 de março de 2010.

Ao meu marido

Meu agradecimento...

a minha orientadora, Prof^a. Dra. Iranete Maria da Silva Lima,

a minha co-orientadora, Prof^a. Dra. Verônica Gitirana,

aos membros da banca de qualificação, Prof. Dr. Abraão Juvêncio de Araujo e Prof. Dr. Fernando Raul de Assis Neto.

e aos membros da banca examinadora, Prof. Dr. Abraão Juvêncio de Araujo e Prof. Dr. Paulo Figueiredo Lima.

Pelo apoio financeiro continuo durante dois anos, agradeço a Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco.

RESUMO

Esta pesquisa investigou as concepções dos alunos sobre equivalência entre equações do 1º grau. Para tal investigação um teste foi elaborado com sete questões que buscavam identificar: as concepções de equivalência mobilizadas pelos alunos quando definem equações equivalentes, dão exemplos e resolvem problemas de equações do primeiro grau; em que medida o aluno entende que obtém equações equivalentes no processo de sua resolução e o conhecimento dos alunos quanto às propriedades de equivalência. O teste foi aplicado a 334 alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, de cinco escolas particulares do agreste pernambucano. As categorias de análise foram previamente definidas a partir da literatura e dos resultados de um estudo piloto: *solução por definição*, *solução por substituição*, *solução por resolução*, *tratamento algébrico realizado no processo de resolução*, *tratamento algébrico realizado independente do processo de resolução*, *tratamento algébrico apresentado no processo de resolução*, *tratamento algébrico apresentado independente do processo de resolução*, *reflexividade*, *simetria*, *transitividade*, *palavras correlatas*, *sinônimo de igualdade*, *equivalência na equação*, *comparação lado a lado* e *outros*. Quatro novas categorias foram acrescentadas após a análise dos protocolos: *estrutura*, *igualdade operacional*, *incógnita* e *fração*. A análise dos dados indica que as concepções *solução por resolução* e *solução por definição* são as mais mobilizadas entre os sujeitos pesquisados. No entanto, a verificação da solução parece não ter significado para estes sujeitos. A concepção *simetria* é a de menor incidência entre as concepções relacionadas às propriedades de equivalência. Por fim, as concepções de equivalência entre equações são mobilizadas muitas vezes mesmo que os sujeitos não conheçam esta expressão.

Palavras-chave: Concepções. Equivalência. Equações do primeiro grau.

ABSTRACT

This research investigated students' conceptions concerning equivalence between first degree equations. A test was specially designed composed of seven questions that looked to identify: the conceptions of equivalence mobilized by students when they define equivalent equations, give examples and solve problems on first degree equations; in what measure the student understands that they obtain equivalent equations in the process of solution; students' knowledge of the properties of equivalence. The test was undertaken 334 students from the last year of Elementary School, from five private schools from Pernambuco state country side. The categories of analysis were previously defined from the literature and from results of a pilot study: *solution by definition, solution by substitution, solution by equation solving, algebraic treatment carried out in the solution process, algebraic treatment carried out independently of the solution process, algebraic treatment displayed in the solution process, algebraic treatment displayed independently of the solution process, reflexivity, symmetry and transitivity, related words, synonym with equality, equivalence in the equation, side by side comparison* and *others*. Four new categories were added after the analysis of the data: *structure, operational equality, unknown* and *fraction*. The analysis of the data indicates *the conceptions solution by equation solving and solution by definition* are the ones most often mobilized among the subjects of the research. However, checking the solution seems to have no meaning for those subjects. The *symmetry* is the one with the least incidence among the conceptions related to the properties of equivalence. Finally, the conceptions of equivalence between equations are mobilized many times even when the subjects do not know this expression.

Key-words: Conceptions. Equivalence. First degree equations.

LISTAS DE FIGURAS

Figura 1 – Equações pontuais.....	17
Figura 2 – Equações pontuais da diferença de dois quadrados.....	17
Figura 3 – Prova da Proposição 1.....	21
Figura 4 – Tarefa de substituição numérica	35
Figura 5 – Ancora, retirado do protocolo A064, de um sujeito de nossa pesquisa....	38
Figura 6 – Erro, retirado do protocolo A202, de um sujeito de nossa pesquisa	39
Figura 7 – Erro, retirado do protocolo A318, de um sujeito de nossa pesquisa	40
Figura 8 – Erro, retirado do protocolo A202, de um sujeito de nossa pesquisa	41
Figura 9 – Varias coordenações entre sistemas produtivos requeridos para a compreensão matemática.....	45
Figura 10 – Classificação dos diferentes registros que podem ser mobilizados em processos matemáticos	46
Figura 11 – Tratamento, registro algébrico.....	47
Figura 12 – Exemplo da mobilização da concepção <i>SI</i> , resposta de Adão.....	59
Figura 13 – Exemplo da mobilização da concepção <i>PC</i> , resposta de Eva.	59
Figura 14 – Exemplo da mobilização da concepção <i>SD</i> , retirado do protocolo A002, de um sujeito de nossa pesquisa.....	60
Figura 15 – Exemplo da mobilização da concepção <i>SS</i> , retirado do protocolo A243, de um sujeito de nossa pesquisa.....	61
Figura 16 – Exemplo da mobilização da concepção <i>SR</i> , retirado do protocolo A277, de um sujeito de nossa pesquisa.....	61
Figura 17 – Exemplo da mobilização da concepção <i>TRP</i> , retirado do protocolo A069, de um sujeito de nossa pesquisa.....	62
Figura 18 – Exemplo da mobilização da concepção <i>TRIP</i> , retirado do protocolo A305, de um sujeito de nossa pesquisa	62
Figura 19 – Exemplo da mobilização da concepção <i>TAP</i> , retirado do protocolo A009, de um sujeito de nossa pesquisa.....	62
Figura 20 – Exemplo da mobilização da concepção <i>TAIP</i> , retirado do protocolo A211, de um sujeito de nossa pesquisa.....	63
Figura 21 – Exemplo da mobilização da concepção <i>SI</i> , retirado do protocolo A098, de um sujeito de nossa pesquisa.....	63

Figura 22 – Exemplo da mobilização da concepção <i>PC</i> , retirado do protocolo A101, de um sujeito de nossa pesquisa.....	64
Figura 23 – Exemplo da mobilização da concepção <i>EE</i> , retirado do protocolo A174, de um sujeito de nossa pesquisa.....	64
Figura 24 – Exemplo da mobilização da concepção <i>CLL</i> , retirado do protocolo PA002, de um sujeito do estudo piloto.....	65
Figura 25 – Exemplo da mobilização da concepção <i>R</i> , retirado do protocolo A144, de um sujeito de nossa pesquisa.....	65
Figura 26 – Exemplo da dificuldade inerente ao uso das letras, retirado do protocolo A112, de um sujeito de nossa pesquisa	66
Figura 27 – Quadro da questão 5 do nosso instrumento de coleta de dados	66
Figura 28 – Exemplo da mobilização da concepção <i>S</i> , retirado do protocolo A211, de um sujeito de nossa pesquisa.....	66
Figura 29 – Exemplo da mobilização da concepção <i>T</i> , retirado do protocolo A198, de um sujeito de nossa pesquisa.....	67
Figura 30 – Exemplo retirado do protocolo A254, de um sujeito de nossa pesquisa	68
Figura 31 – Exemplo retirado do protocolo A236, de um sujeito de nossa pesquisa	69
Figura 32 – Exemplo retirado do protocolo A265, de um sujeito de nossa pesquisa	69
Figura 33 – Exemplo retirado do protocolo A028, de um sujeito de nossa pesquisa	70
Figura 34 – Exemplo retirado do protocolo A110, de um sujeito de nossa pesquisa	70
Figura 35 – Exemplo retirado do protocolo A144, de um sujeito de nossa pesquisa	70
Figura 36 – Exemplo retirado do protocolo A208, de um sujeito de nossa pesquisa	71
Figura 37 – Exemplo retirado do protocolo A045, de um sujeito de nossa pesquisa	71
Figura 38 – Exemplo retirado do protocolo P002, de um sujeito do estudo piloto.....	72
Figura 39 – Exemplo retirado do protocolo A188, de um sujeito de nossa pesquisa	72
Figura 40 – Exemplo retirado do protocolo A072, de um sujeito de nossa pesquisa	73
Figura 41 – Exemplo retirado do protocolo A045, de um sujeito de nossa pesquisa	73
Figura 42 – Exemplo retirado do protocolo A116, de um sujeito de nossa pesquisa	74
Figura 43 – Exemplo retirado do protocolo A210, de um sujeito de nossa pesquisa	74
Figura 44 – Exemplo retirado do protocolo A320, de um sujeito de nossa pesquisa	75
Figura 45 – Exemplo retirado do protocolo P003, de um sujeito do estudo piloto.....	75
Figura 46 – Exemplo retirado do protocolo A023, de um sujeito de nossa pesquisa	76
Figura 47 – Exemplo retirado do protocolo A100, de um sujeito de nossa pesquisa	76
Figura 48 – Exemplo retirado do protocolo A227, de um sujeito de nossa pesquisa	77

Figura 49 – Exemplo retirado do protocolo P008, de um sujeito do estudo piloto.....	78
Figura 50 – Exemplo retirado do protocolo A006, de um sujeito de nossa pesquisa	79
Figura 51 – Exemplo da mobilização da concepção <i>EE</i> , retirado do protocolo PA034, de um sujeito do estudo piloto	81
Figura 52 – Percentual de acertos dos alunos nas três primeiras questões	81
Figura 53 – Concepções de equivalência identificadas por sujeito no estudo piloto .	82
Figura 54 – Exemplo da mobilização simultânea das concepções <i>T</i> e <i>SI</i> , retirado do protocolo P001, de um sujeito do estudo piloto	84
Figura 55 – Propriedades de equivalência identificadas por sujeito distribuição disjunta no estudo piloto	85
Figura 56 – Exemplo da mobilização da concepção <i>E</i> , retirado do protocolo A261, de um sujeito de nossa pesquisa.....	87
Figura 57 – Exemplo da mobilização da concepção <i>igualdade operacional</i> , retirado do protocolo A210, de um sujeito de nossa pesquisa.....	87
Figura 58 – Exemplo da mobilização da concepção <i>I</i> , retirado do protocolo A010, de um sujeito de nossa pesquisa, resposta da questão 4 item a.....	88
Figura 59 – Exemplo da mobilização da concepção <i>F</i> , retirado do protocolo A108, de um sujeito de nossa pesquisa.....	88
Figura 60 – Concepções de equivalência identificadas por sujeito	89
Figura 61 – Frequências das concepções mobilizadas pelos alunos por questão	90
Figura 62 – Percentual de acertos dos alunos nas três primeiras questões	93
Figura 63 – Exemplo da mobilização da concepção <i>F</i> , retirado do protocolo A102, de um sujeito de nossa pesquisa.....	93
Figura 64 – Frequências da mobilização das propriedades de equivalência pelos alunos, por questão	94
Figura 65 – Propriedades de equivalência identificadas por sujeito, distribuição disjunta	95
Figura 66 – Propriedades de equivalência identificadas por sujeito.....	96

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	12
CAPÍTULO 1 EQUAÇÕES E EQUIVALÊNCIA NA MATEMÁTICA	16
1.1 Equações	16
1.2 Equações Equivalentes.....	18
1.2.1 O que é uma relação?	18
1.2.2 E a relação de equivalência?	18
1.2.3 Princípios de equivalência	19
1.3 Equações do primeiro grau	23
1.3.1 Expressões algébricas do primeiro grau	24
1.3.2 Equações do primeiro grau (nova abordagem).....	26
CAPÍTULO 2 A RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA E A ÁLGEBRA.....	29
2.1 A relação de equivalência e o ensino.....	29
2.2 Algumas reflexões sobre a Álgebra Escolar.....	30
2.3 Algumas pesquisas sobre as equações do primeiro grau	33
CAPÍTULO 3 A NOÇÃO DE CONCEPÇÃO	42
3.1 A noção de concepção nas pesquisas em Educação Matemática.....	42
3.2 Teoria dos Registros de Representação Semiótica	44
3.3 Concepção no contexto da Álgebra Escolar	48
CAPÍTULO 4 OBJETIVOS	54
4.1 Objetivo geral	54
4.2 Objetivos específicos	54
CAPÍTULO 5 METODOLOGIA.....	55
5.1 Sujeitos	56
5.2 Instrumento de coleta.....	56
5.3 Categorias de análise	57
5.3.1 Categorias relativas às concepções de equivalência entre equações	60
5.3.2 Categorias relativas ao domínio das propriedades de equivalência	65
5.4 Análise a priori das questões	67
CAPÍTULO 6 O ESTUDO PILOTO.....	80
6.1 Sujeitos	80
6.2 Resultados e discussão	80

CAPÍTULO 7 RESULTADOS E DISCUSSÃO	86
CONCLUSÃO.....	97
REFERÊNCIAS.....	99
APÊNDICE A Teste escrito – Parte 1.....	104
APÊNDICE B Teste escrito – Parte 2.....	105
APÊNDICE C Síntese das categorias previa de análise	109
APÊNDICE D Síntese das categorias de análise	110
ANEXO 1 Original da Figura 4	111
ANEXO 2 Original da Figura 9	112
ANEXO 3 Original da Figura 10	113

INTRODUÇÃO

Muitas são as pesquisas em Educação Matemática que versam sobre o ensino e a aprendizagem da Álgebra. Uma das temáticas desenvolvidas por essas pesquisas é as concepções dos alunos, quer sobre a Álgebra, como no clássico estudo de Usiskin (1995), quer sobre seus elementos, como o sinal de igual (KIERAN, 1981; MOLINA, 2004; CAVALCANTI, 2008), ou sobre a própria equação (LINCHEVSKI; SFARD, 1991; LIMA, 2007).

Em seu clássico estudo, Usiskin (1995) associa as concepções da Álgebra com os diferentes usos das variáveis. Seu trabalho identifica quatro tipos de concepções: Álgebra como Aritmética generalizada, Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas, Álgebra como estudo de relações entre grandezas e Álgebra como estudo das estruturas. Na concepção Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas, as variáveis são incógnitas. É neste universo que está inserido nosso estudo, pois as variáveis de uma equação do primeiro grau são incógnitas.

As pesquisas sobre as concepções de igualdade envolvem necessariamente a equivalência entre as expressões algébricas ou aritméticas que compõem uma equação. Portanto, envolvem a relação de equivalência e suas propriedades: reflexividade, simetria e transitividade. Contudo, a concepção que “[...] persiste através do Ensino Fundamental e mesmo no Ensino Médio” (KIERAN, 1981, p. 317, tradução nossaⁱ) é a concepção operacional do sinal de igual. Nela, a relação de equivalência não está presente e este símbolo é sinônimo de *efetue*. Mesmo havendo a concepção relacional do sinal de igual, é importante ressaltar que “[...] a capacidade de considerar uma equação algébrica como uma expressão de equivalência, porque ambos os lados têm o mesmo valor, não parece ser suficiente para uma conceitualização adequada do processo de resolução de equação” (ibid, p. 323, tradução nossaⁱⁱ). Além disso, a equivalência no contexto das equações não se restringe ao caso da igualdade entre expressões, como destaca Kieran (ibid, p. 323):

resolver equações não apenas envolve uma compreensão da noção de que os lados direito e esquerdo da equação são expressões equivalentes, mas também que cada equação pode ser substituída por uma equação equivalente (ou seja, que tem o mesmo conjunto solução). (tradução nossaⁱⁱⁱ).

Entretanto, compreender que duas equações são equivalentes porque é possível transformar uma na outra não garante a compreensão de que elas tenham o mesmo conjunto solução. É o que mostram os resultados da pesquisa de Linchevski; Sfard (1991) sobre as concepções de equivalência entre equações e equivalência entre inequações dos alunos quando indicaram que “[...] a transformabilidade formal era praticamente o único critério para a equivalência” (ibid, p. 232, tradução nossa^{iv}), no lugar da igualdade do seu conjunto solução. Em contraste, a pesquisa de Lima (2007) sobre as concepções dos alunos sobre equação aponta a concepção *Conta* como a mais evidente. Nesta concepção, a equação é uma conta que tem como objetivo a realização das operações existentes nas duas expressões algébricas que a compõem. Apesar disto, não é dada importância à relação de equivalência existente na igualdade, o que pode levar a erros na resolução de uma equação.

Os resultados distintos das pesquisas de Linchevski; Sfard (1991) e de Lima (2007) podem estar relacionados com diferentes práticas de ensino dos dois países onde foram realizadas as pesquisas: Israel e Brasil, respectivamente.

Estes resultados induzem a seguinte questão: Como abordar a noção de equivalência presente em uma equação, uma vez que “[...] não é claro, se, ou mesmo como, esses princípios na direção de interpretar o sinal de igual em termos de uma relação de equivalência se desenvolvem em uma consciência da noção de equações equivalentes [...]” (KIERAN, 1981, p. 325, tradução nossa^v) ?

Uma das sugestões dos pesquisadores é o uso de um suporte representacional como a balança de dois pratos, pois “[...] a balança oportuniza a compreensão do princípio de equivalência [...]” (LINS LESSA; FALCÃO, 2005, p. 320). Entretanto, “[...] ela não se presta a discutir a equivalência entre equações por meio da comparação de seus conjuntos-verdade” (LIMA, 2007, p. 49). Outra sugestão, que diferentemente da anterior permite esta discussão, é a de Kieran et al (2008), em que se aborda a noção de equivalência presente em uma equação

através da problematização da matemática associada às tecnologias. Para esses autores:

Problematizar a matemática significa torná-la aberta à discussão, isto é, criar uma arena matemática na qual questões são postas e tenta-se pensar profundamente sobre a matemática, incluindo aquilo que pode parecer ser inconsistências ou contradições e, de fato, usando dilemas provocados pela tecnologia como um meio de fazer avançar o pensamento (ibid, p. 250, tradução nossa^{vi}).

Neste contexto, as tecnologias reduzem as dificuldades de fomentar as discussões nas aulas sobre Álgebra simbólica-litera (ibid).

Apesar dos resultados das pesquisas indicarem alternativas para melhorar o ensino e a aprendizagem da Álgebra, ou mesmo apontarem algumas limitações, “[...] é em função do conhecimento que o professor tem do aluno e do seu funcionamento, como sujeito aprendiz, que ele faz as escolhas e toma suas decisões didáticas [...]” (LIMA, 2009, p. 64). Por esta razão, considera-se importante conhecer previamente as concepções dos alunos sobre uma determinada noção matemática.

Nessa perspectiva, estabelecemos como objetivo desta pesquisa identificar as concepções de equivalência entre equações que os alunos mobilizam quando resolvem problemas que envolvam equações do primeiro grau. Entre as concepções previamente determinadas, a partir da literatura, encontram-se as relacionadas com conhecimento dos alunos quanto às propriedades de equivalência. Este foco é a principal diferença desta pesquisa em relação à pesquisa de Linchevski; Sfard (1991). Além disto, como nos restringirmos às equações do primeiro grau, a questão da não transformabilidade não é objeto de nossa pesquisa.

Para apresentar a investigação, esta dissertação está organizada da seguinte forma. No primeiro capítulo daremos uma visão informal, do ponto de vista matemático, dos conceitos relevantes para esta investigação: equação, equações equivalentes, relação, em particular a relação de equivalência, princípios de equivalência e equações do primeiro grau; no segundo, faremos uma breve reflexão sobre a relevância da relação de equivalência para o ensino e o desenvolvimento das crianças, assim como sobre a definição de Álgebra e, por fim, apresentamos algumas pesquisas sobre as equações do primeiro grau; no terceiro capítulo, apresentaremos um breve estudo da noção de concepção adotada nas pesquisas,

uma síntese da Teoria dos Registros de Representação Semiótica e em seguida algumas noções de concepção sobre a Álgebra escolar; no quarto capítulo apresentamos os objetivos deste estudo que foram definidos a partir de nossa questão de pesquisa: Quais concepções de equivalência – corretas do ponto de vista da matemática, errôneas ou incompletas – os alunos do Ensino Fundamental mobilizam quando resolvem equações do primeiro grau? No capítulo seguinte apresentamos a metodologia, descreveremos a dinâmica da pesquisa, os sujeitos pesquisados, o instrumento de coleta de dados, as categorias de análise e a análise a priori das questões que compõem o instrumento de coleta; no sétimo, apresentamos o estudo piloto, destacando o contexto em que foi realizado, e discutindo os resultados à medida que estes forem apresentados; no oitavo capítulo apresentaremos e discutiremos os resultados de nosso estudo, à medida que responderemos as seguintes questões:

1. Quais concepções de equivalência os alunos do Ensino Fundamental mobilizam quando resolvem equações do primeiro grau
2. Os alunos conhecem o termo equações equivalentes?
3. Os alunos mobilizam as propriedades da relação de equivalência?

Para finalizar, apresentaremos nossas conclusões, enfatizando os principais resultados obtidos na análise dos dados.

CAPÍTULO 1 EQUAÇÃO E EQUIVALÊNCIA NA MATEMÁTICA

Daremos uma visão informal, do ponto de vista matemático, dos conceitos de equação, de equações equivalentes, de relação, em particular o da relação de equivalência, dos princípios de equivalência e de equações do primeiro grau. Uma abordagem mais precisa dependeria de um maior aprofundamento na teoria dos conjuntos e na lógica matemática, que julgamos desnecessário aos nossos propósitos.

1.1 Equações

Distinguiremos dois tipos de equação, que chamaremos *equação pontual* e *equação entre funções*. Denominaremos *equação pontual* a expressão da igualdade entre dois objetos matemáticos. Tipicamente, esses objetos são elementos de um conjunto dado ou subconjuntos de um conjunto dado. Para nossos propósitos, consideraremos que uma *equação pontual* pode ser verdadeira ou falsa. No contexto dos números inteiros, por exemplo, a *equação pontual* $5 = 3 + 2$ é verdadeira, enquanto a *equação pontual* $1 = 0$ é falsa. Assim, seria mais preciso dizer que uma *equação pontual* é a expressão de uma igualdade potencial entre dois objetos matemáticos.

Passaremos agora à definição de *equação entre funções*. Dados dois conjuntos A e B , e duas funções $f: A \rightarrow B$ e $g: A \rightarrow B$, para um elemento a fixado de A , a *equação pontual* $f(a) = g(a)$ expressa a igualdade potencial entre elementos de B . A *equação entre funções* $f(x) = g(x)$ é a expressão da coleção de todas essas equações pontuais, com x variando em A . O *conjunto solução* dessa equação é o conjunto dos valores de x que tornam a *equação pontual* correspondente verdadeira. Apresentamos um exemplo na Figura 1.

$x \in \mathbb{Z}$	$f(x) = 2x + 1$ $g(x) = 3x$	
Valores atribuídos	$f(x) = g(x)$	Verdadeira ou falsa
	$2x + 1 = 3x$	
-2	$2(-2) + 1 = 3(-2)$ $-5 = -6$	Falsa
0	$2.0 + 1 = 3.0$ $1 = 0$	Falsa
1	$2.1 + 1 = 3.1$ $3 = 3$	Verdadeira
5	$2.5 + 1 = 3.5$ $11 = 15$	Falsa

Figura 1 – Equações pontuais

Quando esse conjunto solução é todo o conjunto A , essa equação é chamada *identidade*. Como na equação que representa a diferença dos quadrados, Figura 2.

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$	$f(x, y) = x^2 - y^2$ $g(x, y) = (x + y)(x - y)$	
Valores atribuídos	$f(x, y) = g(x, y)$	Verdadeira ou falsa
	$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$	
$(-2, 1)$	$(-2)^2 - 1^2 = (-2 + 1)(-2 - 1)$ $3 = 3$	Verdadeira
$(0, \sqrt{2})$	$0^2 - \sqrt{2}^2 = (0 + \sqrt{2})(0 - \sqrt{2})$ $-2 = -2$	Verdadeira
$(1, 1)$	$1^2 - 1^2 = (1 + 1)(1 - 1)$ $0 = 0$	Verdadeira
$(\frac{1}{4}, -\frac{1}{5})$	$(\frac{1}{4})^2 - (\frac{1}{5})^2 = (\frac{1}{4} + \frac{1}{5})(\frac{1}{4} - \frac{1}{5})$ $\frac{9}{400} = \frac{9}{400}$	Verdadeira

Figura 2 – Equações pontuais da diferença de dois quadrados

1.2 Equações equivalentes.

Diremos que uma equação entre funções $E2$ é equivalente à equação entre funções $E1$ se o conjunto solução de $E2$ for igual ao de $E1$. A relação *ser equivalente* a entre equações entre funções é um exemplo de relação de equivalência. Antes de descrevermos a relação de equivalência, explicaremos o que é uma relação.

1.2.1 O que é uma relação?

Dado um conjunto C , uma *relação* em C é um subconjunto R do produto cartesiano $C \times C$. Dizemos que o elemento a está relacionado ao elemento b , e escrevemos aRb , se o par ordenado (a, b) pertence a R . Por exemplo, a relação *maior que* (digamos, no conjunto dos números inteiros) consiste de todos os pares em que o primeiro elemento é maior que o segundo. Assim, o par $(3, 1)$ está em R , mas o par $(1, 3)$ não está.

Uma relação R pode ser *reflexiva*, *simétrica* e *transitiva*.

- 1) R é *reflexiva* se todos os pares da forma (a, a) estão em R .
- 2) R é *simétrica* se o par (b, a) pertencer a R sempre que o par (a, b) pertencer a R .
- 3) R é *transitiva* se o par (a, c) pertencer a R sempre que os pares (a, b) e (b, c) pertencerem ambos a R .

“[...] estas três propriedades são completamente independentes” (Weisstein, s/d, s/p, tradução nossa^{vii}). Por exemplo, no conjunto dos números inteiros, a relação *maior que* é transitiva, mas não é nem simétrica, nem reflexiva. A relação *maior que ou igual a* é transitiva e reflexiva, mas não é simétrica.

1.2.2 E a relação de equivalência?

É uma relação em um conjunto X que satisfaz simultaneamente as três propriedades: *reflexividade*, a *simetria* e a *transitividade*. Ou seja, é uma relação: “[...]”

1. Reflexiva: aRa para todo $a \in X$,
2. Simétrica: aRb implica bRa para quaisquer $a, b \in X$
3. Transitiva: aRb e bRc implica aRc para quaisquer $a, b, c \in X$, [...]”
(Weisstein, s/d, s/p, tradução nossa^{viii})

Por exemplo, *tem a mesma área que* é uma relação de equivalência no conjunto dos triângulos do plano euclídeo. De forma mais geral, se $f: C \rightarrow D$ é uma função qualquer, a relação *ter mesma imagem por f* é uma relação de equivalência em C (de forma mais matemática, esta relação é descrita por $R = \{(a, b) / f(a) = f(b)\}$). No exemplo dos triângulos, D é o conjunto dos números reais positivos e f é a função área. Também é possível, embora um pouco mais elaborado, descrever dessa forma a relação de equivalência *ser semelhante a* no conjunto dos triângulos no plano euclídeo.

Fixados dois conjuntos A e B , a relação *ter o mesmo conjunto solução* é uma relação de equivalência entre as equações funcionais para funções de A em B (para ser rigoroso, seria necessário mostrar que a coleção de tais equações forma um conjunto, mas ignoraremos este ponto).

De fato, esta é uma relação do tipo definido por uma função $f: C \rightarrow D$ como descrito acima, onde C é o conjunto das equações funcionais e D o conjunto das partes de A (o conjunto de todos os subconjuntos de A), e f associa a cada equação seu conjunto solução.

1.2.3 Princípios de equivalência

O princípio aditivo e o princípio multiplicativo são chamados de princípios de equivalência. Estes princípios dizem respeito a operações binárias. Por isto, iniciaremos esta subseção definindo tais operações.

Uma *operação binária* em um conjunto B é uma função que associa a cada par ordenado de elementos de B um elemento em B . Denotaremos uma operação binária genérica por φ . Note que $\varphi: B \times B \rightarrow B$. A adição, a subtração e a multiplicação são exemplos de operações binárias, se B for, por exemplo, o conjunto dos números inteiros, ou racionais, ou reais, ou complexos, ou o conjunto das matrizes 2×2 . Note que a subtração não é uma operação binária no conjunto dos números naturais, mas a adição e a multiplicação sim. A operação que associa a cada par de pontos no plano euclidiano seu ponto médio também é uma operação binária. Por conveniência, usaremos a notação $\varphi(a, b) = a\varphi b$.

Se $a = b$ é uma equação pontual verdadeira em B , e φ é uma operação binária qualquer em B , então, para qualquer elemento c de B , as equações pontuais $a\varphi c = b\varphi c$ e $c\varphi a = c\varphi b$ também serão verdadeira. Isto decorre de $(a, c) = (b, c)$ e $(c, a) = (c, b)$, como pares ordenados, e não depende de qualquer propriedade adicional que a operação φ possa ter. Abaixo listamos duas propriedades que a operação φ pode ou não ter:

1. *Associatividade*: $(a\varphi b)\varphi c = a\varphi(b\varphi c)$, para quaisquer a, b e c em B ,
2. *Existência do elemento neutro*: Existe um elemento e em B tal que, para todo elemento a de B , $a\varphi e = a = e\varphi a$.

Por exemplo, em um conjunto numérico como acima, a adição e a multiplicação são associativas, mas a subtração não é. O elemento neutro da adição é o 0 e o elemento neutro da multiplicação é o 1. A subtração não tem elemento neutro. A operação *ponto médio*, descrita acima, não tem elemento neutro nem é associativa.

Suponha que exista elemento neutro e para uma operação binária φ em B . Diremos que um elemento c de B tem inverso (com relação a φ) se existir um

elemento de B , que denotaremos por c^{-1} , tal que $c\varphi(c^{-1}) = e = (c^{-1})\varphi c$. É possível mostrar que se este elemento existe, então é único.

Proposição 1

Se φ é associativa e tem elemento neutro e , e c tem inverso, então a equação pontual $a = b$ é verdadeira se e somente se a equação pontual $a\varphi c = b\varphi c$ for verdadeira, e também se e somente se a equação pontual $c\varphi a = c\varphi b$ for verdadeira.

De fato, se $a\varphi c = b\varphi c$ é verdadeira, então $(a\varphi c)\varphi(c^{-1}) = (b\varphi c)\varphi(c^{-1})$ é verdadeira. A Figura 3 apresenta as etapas da prova:

Equação	Propriedade aplicada
$(a\varphi c)\varphi(c^{-1}) = (b\varphi c)\varphi(c^{-1})$	associatividade
$a\varphi(c\varphi(c^{-1})) = b\varphi(c\varphi(c^{-1}))$	
$a\varphi e = b\varphi e$	inverso
$a = b$	elemento neutro

Figura 3 – Prova da Proposição 1

A análise a partir de $c\varphi a = c\varphi b$ é semelhante.

Quando B é o conjunto numérico dos inteiros, ou dos racionais, ou dos reais, ou dos complexos, e φ é a adição, então a Proposição 1 é o *princípio aditivo* para igualdades aritméticas. É importante observar que, neste caso, todo elemento de B tem inverso, e a notação para c^{-1} , neste caso, é $-c$. Se φ for a multiplicação e B for o conjunto numérico dos racionais, ou dos reais, ou dos complexos, temos o *princípio multiplicativo* para igualdades aritméticas. Neste caso, todo elemento de B tem inverso, com exceção do elemento 0. Não é possível obter a conclusão do enunciado se $c = 0$, pois, por exemplo, $0 \times 3 = 0 \times 2$ é verdadeira, mas $3 = 2$ não é. Observamos que a conclusão princípio multiplicativo (a lei do corte) vale ainda nos inteiros, quando $c \neq 0$, mas sua demonstração depende das propriedades de duas

operações binárias, adição e multiplicação (as propriedades são, além da existência de inverso aditivo, a distributividade e a ausência de divisores de zero).

Vejamos as consequências da proposição acima para as equações entre funções. Suponha que φ seja uma operação binária em B . Dada uma função $f: A \rightarrow B$ e um elemento c de B , podemos formar uma nova função $f\varphi c: A \rightarrow B$ definida por $f\varphi c(x) = f(x)\varphi c$ (ou seja, $\varphi(f(x), c)$). De forma análoga definimos a função $c\varphi f$. Por exemplo, suponha que $A = B$ é o conjunto dos números naturais, $c = 3$ e $f(x) = x^2$. Se φ é a operação adição, então $f\varphi 3(x) = x^2 + 3$. Se φ for a multiplicação, então $f\varphi 3(x) = 3x^2$.

Proposição 2 (Primeiro princípio de equivalência para equações funcionais)

Suponha que φ seja uma operação binária em B , associativa e com elemento neutro. Se c tem inverso, então a equação entre funções $f(x) = g(x)$ é equivalente à equação entre funções $f\varphi c(x) = g\varphi c(x)$ e também à equação entre funções $c\varphi f(x) = c\varphi g(x)$.

Isto por que, para cada elemento fixado a de A , a equação pontual $f(a) = g(a)$ será verdadeira se e somente se a equação $f(a)\varphi c = g(a)\varphi c$ for verdadeira, e analogamente para $c\varphi f(a) = c\varphi g(a)$.

No caso particular em que $A = B$ é o conjunto numérico dos racionais, ou dos reais, ou dos complexos, e φ é a multiplicação, a Proposição 2 é chamada *princípio multiplicativo*. Neste caso, os elementos com inverso são os números diferentes de zero.

Analogamente ao exposto antes da Proposição 2, dadas duas funções $f: A \rightarrow B$ e $h: A \rightarrow B$, podemos formar uma nova função $f\varphi h: A \rightarrow B$, definida por $f\varphi h(x) = f(x)\varphi h(x)$ (ou seja, $\varphi(f(x), h(x))$). Por exemplo, suponha que $A = B$ é o conjunto dos números naturais, $f(x) = x^2$ e $h(x) = 2x^3$. Se φ é a operação adição, então $f\varphi h(x) = x^2 + 2x^3$. Se φ for a multiplicação, então $f\varphi h(x) = 2x^5$. Se exigirmos um pouco mais da operação binária φ , obtemos um princípio de equivalência mais forte que o acima.

Proposição 3 (Segundo princípio de equivalência para equações funcionais)

Suponha que φ seja uma operação binária em B , associativa e com elemento neutro. Suponha adicionalmente que todo elemento de B tenha inverso. Então, para qualquer função $h: A \rightarrow B$, a equação entre funções $f(x) = g(x)$ é equivalente à equação entre funções $f\varphi h(x) = g\varphi h(x)$ e também à equação entre funções $h\varphi f(x) = h\varphi g(x)$.

Isto por que, para cada elemento a de A fixado, o elemento $h(a)$ tem inverso, e desempenha um papel semelhante ao c na Proposição 2.

No caso particular em que $A = B$ é o conjunto numérico dos inteiros, ou dos racionais, ou dos reais, ou dos complexos, e φ é a adição, a Proposição 3 é chamada *princípio aditivo*.

Como exemplo, no contexto em que A e B são o conjunto dos números reais, a equação entre funções $x^2 + 3x + 3^x = 4 + 3^x$ é equivalente à equação entre funções $x^2 + 3x = 4$. Neste caso, φ é a adição, $f(x) = x^2 + 3x$, $h(x) = 3^x$ e g é a função constante $g(x) = 4$. Suponha, entretanto, que φ seja a multiplicação, e que a função h seja definida por $h(x) = 0$, se x for negativo, e $h(x) = 1$, se x for positivo ou nulo. Se $f(x) = x$ e $g(x) = |x|$, então as equações $f\varphi h(x) = g\varphi h(x)$ e $f(x) = g(x)$ não são equivalentes. A primeira é verdadeira para todo valor de x (é uma identidade), enquanto a segunda apenas para valores não negativos. A não equivalência entre as duas equações é uma consequência de 0 não ter inverso multiplicativo.

1.3 Equações do primeiro grau.

Nesta seção, suporemos que $A = B$ seja o conjunto numérico dos racionais, ou dos reais, ou dos complexos.

Uma função $f: A \rightarrow A$ é dita *afim* se existem elementos a e b em A tais que $f(p) = ap + b$ para cada p em A . Uma equação entre funções $f(x) = g(x)$ é uma *equação do primeiro grau* se as funções f e g forem ambas *afins*.

Se $f(p) = a_1p + b_1$ e $g(p) = a_2p + b_2$ para cada p em A , então a equação $f(x) = g(x)$ é equivalente à equação $a_1x + b = a_2x + b$, pois para cada p em A , a equação $f(p)$ será verdadeira se e somente se a equação $a_1p + b_1 = a_2p + b_2$ for verdadeira. Usando o princípio aditivo (Proposição 3) e as propriedades da adição e multiplicação (comutatividade e associatividade da adição, existência de elemento inverso da adição e distributividade da multiplicação em relação à adição), obtemos que esta equação é equivalente à equação $(a_1 - a_2)x = b_2 - b_1$. Temos então três casos. Se $a_1 \neq a_2$, então $a_1 - a_2$ tem inverso multiplicativo, e pelo princípio multiplicativo (Proposição 2), esta equação será equivalente a $x = (b_2 - b_1)/(a_1 - a_2)$. Concluimos que, neste caso, o conjunto solução de $f(x) = g(x)$ será composto de um único elemento, a saber, $(b_2 - b_1)/(a_1 - a_2)$. Se $a_1 = a_2$ e $b_1 \neq b_2$, a equação $(a_1 - a_2)p = b_2 - b_1$ será falsa para qualquer valor de p , pois o lado esquerdo se anula. Neste caso o conjunto solução será vazio. Finalmente, se $a_1 = a_2$ e $b_1 = b_2$, a equação é verdadeira para qualquer valor de x , e temos uma identidade. Em resumo, se uma equação de primeiro grau tem solução e não é uma identidade, então esta solução é única. Como exemplos, a equação $2x + 4x + 6 = 3x + 3x + 4 + 2$ é uma identidade, a equação $3x + 2 = 3x + 1$ não tem solução e a equação $3x + 2 = 2x + 1$ tem solução única.

Da discussão acima, vemos que se uma equação de primeiro grau tem solução e não é uma identidade, então é equivalente a uma equação da forma $x = x_0$, onde $\{x_0\}$ é seu conjunto solução. Além disso, uma vez que se chegue à equação equivalente $a_1x + b = a_2x + b$, é possível chegar à equação equivalente $x = x_0$ por uma aplicação dos princípios aditivo e multiplicativo, usando ainda as propriedades da adição e multiplicação. Vemos também que se a equação é uma identidade, chegamos à equação equivalente $0 = 0$. Se o conjunto solução é vazio, chegamos à equação equivalente $0 = b_2 - b_1$, que é equivalente à equação $0 = 1$, por uma aplicação do princípio multiplicativo.

Embora a abordagem funcional acima seja satisfatória do ponto de vista teórico, pode não corresponder à expectativa formal (representação escrita) do que venha a ser uma equação do primeiro grau. Assim, por exemplo, se A é o conjunto dos números reais, a equação $2x + x^2 + (1 - |x|)e^{\ln(1+|x|)} = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}$ é uma equação do primeiro grau, no sentido acima. Para evitar esse tipo de situação,

daremos a seguir uma abordagem que leva em conta o formato da representação escrita.

1.3.1 Expressões algébricas de primeiro grau.

Nesta seção, suporemos que $A = B$ seja o conjunto numérico dos racionais, ou dos reais, ou dos complexos. A expressão de um elemento específico de A será chamada constante, em oposição a variável. Assim, $\sqrt{3}$, $2 + 3$, $6(2 + 3)$, π , $2 + i$ e $3^4 - 6(2 + 3)3^4$ são constantes.

Definimos que a única expressão algébrica de primeiro grau *de ordem 0* é a expressão x .

Definimos que as expressões algébricas de primeiro grau *de ordem 1* são aquelas obtidas a partir da expressão algébrica de primeiro grau de tipo 0 mediante aplicação sucessiva de um número finito de operações, cada uma de um dos seguintes tipos: adição à esquerda de uma constante; adição à direita de uma constante; multiplicação à esquerda por uma constante; multiplicação à direita por uma constante. Exemplo: $10((3x - 2)5 + 1)$.

Definimos que as expressões algébricas de primeiro grau *de ordem 2* são aquelas obtidas a partir de uma expressão algébrica de primeiro grau de *ordem 1*, mediante aplicação sucessiva de um número finito de operações, cada uma de um dos seguintes tipos, e pelo menos uma do tipo 1 ou 2:

1. Adição à esquerda de uma expressão algébrica de primeiro grau de ordem até 1;
2. Adição à direita de uma expressão algébrica de primeiro grau de ordem até 1;
3. Adição à esquerda de uma constante;
4. Adição à direita de uma constante;
5. Multiplicação à esquerda por uma constante;
6. Multiplicação à direita por uma constante.

Exemplo: $4(10((3x - 2)5 + 1) + 2(7 - 2x)) + 5$.

Tendo definido expressões algébricas de primeiro grau de *ordem* $n > 1$, definimos que as expressões algébricas de primeiro grau de *ordem* $n+1$ são aquelas obtidas a partir de uma expressão algébrica de primeiro grau de *ordem* n , mediante aplicação sucessiva de um número finito de operações, cada uma de um dos seguintes tipos e pelo menos uma do tipo 1 ou 2:

1. Adição à esquerda de uma expressão algébrica de primeiro grau de *ordem* n ;
2. Adição à direita de uma expressão algébrica de primeiro grau de *ordem* n ;
3. Adição à esquerda de uma expressão algébrica de primeiro grau de ordem menor que n ;
4. Adição à direita de uma expressão algébrica de primeiro grau de ordem menor que n ;
5. Adição à esquerda de uma constante;
6. Adição à direita de uma constante;
7. Multiplicação à esquerda por uma constante;
8. Multiplicação à direita por uma constante.

Por exemplo, a expressão

$$4 \left(10((3x - 2)5 + 1) + 2(7 - 2x) \right) + 5 + 2(x - 2 + 6(3x + 1))$$

é de *ordem* 3. É importante notar que, como estamos em uma abordagem formal, as operações acima, para efeito das definições dadas, nunca são *efetuadas* (assim, por exemplo, a expressão $0x + 1x$ é de *ordem* 2). De fato, essas operações podem ser definidas de maneira apenas formal. Por exemplo, a multiplicação à esquerda por uma constante pode ser definida *por ponha a expressão entre parênteses, a menos que seja de ordem 0, e escreva a constante imediatamente à esquerda*, etc.

O procedimento indutivo acima define o que são expressões algébricas de primeiro grau de *ordem* n para qualquer n natural. Uma *expressão algébrica de primeiro grau* é uma expressão algébrica de primeiro grau de *ordem* n , para algum n . Ou seja, as expressões algébricas de primeiro grau constituem a coleção de todas as expressões definidas pelo processo indutivo acima descrito.

1.3.2 Equações do primeiro grau (nova abordagem).

Nesta seção, suporemos novamente que $A = B$ seja o conjunto numérico dos racionais, ou dos reais, ou dos complexos. Relembramos que as operações de adição e multiplicação nesses conjuntos satisfazem as seguintes propriedades, válidas para quaisquer elementos a , b e c de A (note, entretanto, a importante exceção na propriedade 8):

1. *Comutatividade da adição:* $a + b = b + a$;
2. *Associatividade da adição:* $(a + b) + c = a + (b + c)$;
3. *Existência de elemento neutro da adição:* $a + 0 = a = 0 + a$;
4. *Existência de elemento inverso da adição:* existe $-a$ em A tal que $a + (-a) = 0 = (-a) + a$;
5. *Comutatividade da multiplicação:* $ab = ba$;
6. *Associatividade da multiplicação:* $(ab)c = a(bc)$;
7. *Existência de elemento neutro da multiplicação:* $a1 = a = 1a$;
8. *Existência de elemento inverso da multiplicação:* se $a \neq 0$, $a(1/a) = 1 = (1/a)a$;
9. *Distributividade da multiplicação em relação à adição:* $a(b + c) = ab + ac$;
 $(a + b)c = ac + bc$;

Lembramos que as propriedades acima caracterizam a estrutura algébrica conhecida por *corpo*. Por exemplo, o conjunto dos números da forma $a + b\sqrt{2}$, onde a e b são racionais, constitui um corpo contendo os racionais e contido nos reais. A discussão desta seção pode ser levada a efeito em qualquer corpo.

Uma expressão algébrica de primeiro grau define uma função em A no momento em que os símbolos componentes de uma expressão passam a exercer seus papéis de números (as constantes), variável (o x) e operações binárias (a adição e a multiplicação). É possível, mas tedioso, verificar que a função assim definida é uma função afim. Um ingrediente importante nessa verificação é a seguinte propriedade das funções afins: se f e g são funções afins, e a e b são elementos de A , então a função $af + bg$ é afim. De fato, se $f(p) = a_1p + b_1$ e $g(p) = a_2p + b_2$, para todo p em A , então $af(p) + bg(p) = (aa_1 + ba_2)p + (ab_1 + bb_2)$,

para todo p em A . Com isto, observa-se que cada uma das operações envolvidas na definição de expressão algébrica de primeiro grau de ordem n , quando vistas do ponto de vista funcional, transforma uma função afim em outra função afim. Um argumento de indução completa a verificação mencionada.

Finalmente, podemos definir uma *equação do primeiro grau* como uma equação entre funções $f(x) = g(x)$, em que as expressões de f e g são ambas expressões algébricas de primeiro grau. Pela discussão acima, vemos que nesta nova definição, as equações do primeiro grau formam um subconjunto das equações do primeiro grau como definidas anteriormente.

Observamos, finalmente, que, no momento em que as expressões algébricas são vistas do ponto de vista funcional, como descrito acima, e permitimos que as operações binárias *adição* e *multiplicação* sejam efetuadas, respeitando suas propriedades, podemos transformar uma expressão algébrica de primeiro grau em outra, em que cada passo da transformação corresponde a uma aplicação de alguma das propriedades dessas operações numéricas. É possível então verificar que qualquer expressão algébrica de primeiro grau pode ser transformada, no sentido acima, em uma expressão da forma $ax + b$ em um número finito de passos. Esta verificação também usa um argumento de indução. Desta forma, combinando os resultados desta seção com os da seção *Equações do primeiro grau*, vemos que, se permitimos apenas as seguintes operações:

1. Aplicação de uma das propriedades das operações de adição e multiplicação;
2. Aplicação do princípio aditivo;
3. Aplicação do princípio multiplicativo;

então podemos transformar, em um número finito de passos, qualquer equação do primeiro grau que tenha solução e não seja uma identidade, em uma equação da forma $x = x_0$, onde $\{x_0\}$ é seu conjunto solução. Uma identidade pode ser transformada na equação $0 = 0$, e uma equação sem solução na equação $0 = 1$.

CAPÍTULO 2 A RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA E A ÁLGEBRA

Apresentamos neste capítulo uma reflexão sobre a relevância da relação de equivalência para o ensino e para o desenvolvimento das crianças. Seguida de uma reflexão sobre a definição de Álgebra no contexto escolar, em que abordaremos os limites entre a Álgebra e a Aritmética, contemplando alguns resultados de estudos desenvolvidos com o objetivo de identificar dificuldades de aprendizagem e algumas concepções dos alunos sobre a Álgebra. Finalizaremos apresentando algumas pesquisas sobre as equações do primeiro grau e suas contribuições para nossa pesquisa.

2.1 A relação de equivalência e o ensino

A relevância deste tema é justificada tanto por ser a equivalência um conceito básico do corpo de conhecimentos matemáticos que perpassa toda a matemática Brasil (1998), quanto pela importância da Álgebra na Educação Matemática Básica, principalmente no que se refere ao tema equações. Do ponto de vista da Psicologia Cognitiva, a Álgebra é essencial ao desenvolvimento das crianças. Este fato é evidenciado tanto por Vygotsky (1987, p.180) quando afirma que “[...] a álgebra livra o pensamento da criança da prisão das relações numéricas concretas e o eleva ao nível mais abstrato [...]” (tradução nossa^{ix}), quanto pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática do Ensino Fundamental quando recomenda a veiculação da ideia de equivalência, “[...] levando em conta a sua potencialidade, quer para instrumentação para a vida, quer para o desenvolvimento de formas de pensar” (BRASIL, 1998, p. 22).

As recomendações insistentemente feitas no sentido de que conteúdos são veículo para o desenvolvimento de idéias fundamentais (como as de proporcionalidade, equivalência, etc.) e devem ser selecionados levando em conta sua potencialidade quer

para instrumentação para a vida, quer para o desenvolvimento do raciocínio, nem sempre são observadas. (BRASIL, 1997, p. 22)

Nesta perspectiva, a concepção de equivalência entre equações tem um papel importante tanto no desenvolvimento do aluno enquanto cidadão, quanto no desenvolvimento cognitivo de suas competências complexas. Nela, as equações devem ser vistas como ferramentas para resolver problemas e os seus tratamentos podem ser considerados como procedimentos direcionados à obtenção de uma meta: a solução (BRASIL, 1998). Além disto, estes tratamentos

[...] não devem ser encarados apenas como aproximação metodológica para aquisição de um dado conceito, mas como conteúdos que possibilitem o desenvolvimento de capacidades relacionadas com o saber fazer, aplicáveis a distintas situações. Esse “saber fazer” implica construir as estratégias e os procedimentos, compreendendo os conceitos e processos neles envolvidos (ibid, 1998, p. 50).

Por isto, acreditamos na relevância da concepção de equivalência entre equações como objeto a ser pesquisado.

Algumas pesquisas abordaram a noção de equivalência na perspectiva dos procedimentos adotados para se manter a equivalência entre os dois lados da equação, como Kieran (1981) e Lins Lessa; Falcão (2005). A utilização do princípio aditivo e do princípio multiplicativo são destacados nessas pesquisas. Outras, como Kieran et al (2008), abordam a noção de equivalência na perspectiva da validade do conjunto-verdade apresentado. O nosso estudo aborda esta noção na perspectiva de equivalência entre equações, definida pela igualdade entre seus conjuntos solução. Nesta abordagem, apesar de serem importantes os procedimentos que preservam a equivalência (derivados dos princípios aditivos e multiplicativos), é fundamental a noção de validação da solução encontrada, não só em relação à equação inicial, como também em relação às equações intermediárias, obtidas no processo de resolução.

2.2 Algumas reflexões sobre a Álgebra Escolar

Uma definição controversa é a de Álgebra, principalmente quando se refere à Álgebra escolar. As respostas à pergunta — o que é Álgebra? — geralmente são dadas em termos dos objetos matemáticos que a compõe, como: equações, inequações, funções etc. Neste sentido, Gomes (2003, p.1) afirma que a “[...] Álgebra elementar se constitui basicamente no estudo das equações e das expressões algébricas (funções)”.

A questão que se coloca e sobre a qual não há consenso entre os estudiosos em Educação Matemática é: *o que vem depois desses elementos?* Como, por exemplo, a questão dos gráficos serem ou não parte da Álgebra (MATOS, 2007; LINS; GIMENEZ, 2006; GIL; PORTANOVA, s/d; OLIVEIRA, 2002). Estas questões repercutem diretamente na forma de organizar um currículo para a educação algébrica, no que se deve considerar como sendo relevante na Álgebra escolar e, também, no modo como se deve encaminhar o processo de ensino e de aprendizagem. Permeando todas estas discussões estão as concepções de Álgebra.

O limite entre a Álgebra e a Aritmética é outro ponto sobre o qual não há consenso entre os estudiosos. Entretanto, um ponto consensual é a existência de continuidades e rupturas entre estes domínios da Matemática. Estas rupturas e continuidades se revelam nos resultados dos estudos sobre as causas das dificuldades dos alunos no aprendizado da Álgebra.

Para Booth (1995, p. 24), muitas das dificuldades apresentadas pelos alunos estão relacionadas com os seguintes aspectos:

- a) o foco da atividade algébrica e a natureza das “respostas”;
- b) o uso da notação e da convenção em álgebra;
- c) o significado das letras e das variáveis;
- d) os tipos de relação e métodos usados em aritmética

A autora ressalta ainda que os alunos trazem da Aritmética a expectativa de respostas bem formadas, ou seja, respostas com um único termo, uma vez que o foco da atividade aritmética “[...] é encontrar determinadas respostas numéricas particulares” (ibid) , enquanto que o foco da atividade algébrica “[...] é estabelecer procedimentos e relações e expressá-los numa forma simplificada geral” (ibid). Isto

pode levá-los a mobilizar uma concepção errada, decorrente do uso das notações e convenções em Álgebra. Por exemplo, eles podem simplificar uma expressão algébrica adicionando termos não semelhantes como “ $3p + 4q$ ” para “ $7pq$ ” (ibid, p.27). Neste caso, o símbolo $+$ é interpretado unicamente como símbolo operatório. É a possibilidade de uma expressão algébrica, com mais de um termo, representar tanto o procedimento, quanto a resposta, o que gera o dilema “nome-processo” (DAVIS, 1975, apud BOOTH, 1995, p.27).

Esta expectativa de respostas bem formadas pode ser influência do conhecimento que o aluno tem da justaposição como representação da adição que ocorre nas frações mistas, ou mesmo como valor posicional. Por exemplo:

1. frações mistas: $2\frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3}$;
2. valor posicional: $71 = 7 \text{ dezenas} + 1 \text{ unidade}$.

Além da justaposição do valor posicional contribuir para a interpretação do símbolo $+$ apenas como operador, ela pode levar o aluno a não aceitar uma única letra para representar um número com mais de um algarismo.

Outra dificuldade decorrente do significado atribuído às letras é a ausência de referencial numérico na Aritmética, que advém da interpretação das letras como um rótulo, por exemplo, indicando unidades de medida como o metro (m). Entretanto, na Álgebra, a mesma letra (m) pode ser usada para representar a *quantidade* de metros. Ao considerar a letra como um rótulo, o aluno interpreta um termo qualquer, por exemplo, $3a$ (três vezes um número a) como três abacaxis, ou qualquer outro objeto não abstrato, que faça parte do contexto, cujo nome inicie com a letra utilizada. Além disto, a letra pode não está representando um único objeto abstrato (incógnita), mas uma coleção destes objetos, ou seja, uma variável. Por outro lado, um mesmo objeto matemático pode ser representado por diferentes letras, entretanto, “[...] as crianças muitas vezes assumem que letras diferentes devem necessariamente representar valores numéricos diferentes” (BOOTH, 1995, p.32).

Por fim, a autora também aponta a má compreensão das convenções aritméticas e a utilização de métodos informais como fonte das dificuldades dos alunos. Uma dessas convenções é a hierarquia das operações aritméticas, que geralmente é ignorada pelas crianças, “[...] porque acham que a seqüência escrita de operações determina a ordem em que os cálculos devem ser efetuados” (ibid, p.

33). Esta má interpretação leva as crianças a ignorar a necessidade de parênteses em determinadas expressões.

Muitas dessas dificuldades estão associadas diretamente aos conceitos relacionados com os elementos que compõem uma equação, como, por exemplo, a noção de incógnita, de variável, os diferentes significados do sinal de igualdade e a noção de equivalência. Em consequência disto, é vasta a literatura em Educação Matemática, no contexto da Álgebra, que versa sobre equações, principalmente sobre seus elementos.

A seguir, apresentaremos algumas dessas pesquisas.

2.3 Algumas pesquisas sobre as equações do primeiro grau

Como dissemos anteriormente, é vasta a literatura que aborda o conceito de equação. Diversas pesquisas buscam as razões para as dificuldades apresentadas pelos alunos durante a aprendizagem de equações. Como, por exemplo, Linchevski; Sfard (1991), Araujo (1999), Teles (2002), Freitas (2002), Lins Lessa; Falcão (2005), Ribeiro (2007), Lima (2007; s/d), Attorps; Tossavainen (2008) e Araújo (2009).

Araujo (1999) investiga a forma como alunos, de diferentes níveis de habilidade matemática, das áreas de exatas, biológicas e humanas resolviam problemas algébricos. Esse estudo estatístico teve como sujeito 145 alunos de uma escola pública e uma particular do último ano do Ensino Médio e 233 universitários, todas localizadas na cidade de Campinas, em São Paulo. Os resultados apontaram diferenças “[...] significativas da atitude em relação à matemática, entre as áreas de opção profissional [...]” (ibid, p. 199). Além de erros no tratamento das equações decorrentes tanto do uso incorreto do princípio de equivalência, quanto do uso indevido de regras como *muda lado – muda sinal*.

Teles (2002) investigou como a compreensão das propriedades da igualdade e do conceito de operações inversas na Aritmética interfere na apropriação da Álgebra e, mais especificamente, na resolução de equações polinomiais do primeiro grau. Um estudo diagnóstico foi realizado a partir da análise em duas coleções de livros didáticos de matemática para o ensino fundamental, os quatro últimos anos.

Um teste escrito, individual, foi realizado com 62 alunos que cursavam tanto o Ensino Fundamental, quanto o Ensino Médio. Além do teste, foram realizadas entrevistas semidiretivas com cinco destes alunos. Um dos resultados apontado pela autora foi “[...] a não compreensão do conceito de equação, no sentido de equilíbrio” (ibid, p. 153). Consequentemente, “[...] as propriedades da igualdade, também, não foram utilizadas corretamente” (ibid). Para a autora, “[...] os erros, cometidos pelos alunos na resolução de equações polinomiais do 1º grau, são, parcialmente, herdados da aritmética [...]” (ibid, p. 165) ou decorrentes da ruptura entre a Aritmética e Álgebra. Segundo Carraher; Schliemann; Brizuela (2000, p. 3), esta ruptura é acentuada e prolongada “[...] pela separação completa entre aritmética e álgebra” (tradução nossa^x) nos programas de Álgebra e Aritmética. Porém, elas podem ser amenizadas. Para isto, os programas devem ser integrados, desde o início, sempre que possível.

Freitas (2002) investigou os erros relacionados aos aspectos conceituais e à compreensão dos procedimentos nas resoluções de equações do 1º grau. Os resultados revelam que os erros cometidos na transposição de termos independem desses termos terem ou não uma parte literal. Além disso, frases como — *passar e mudar de sinal; isolar o x* — propiciam a mecanização de técnicas que não contribuem para tornar significativos os procedimentos matemáticos nelas implicados. Um aspecto muito próximo ao nosso objeto de pesquisa é a validação da solução encontrada. Em geral, os sujeitos dessa pesquisa, alunos do ensino médio de uma escola particular do interior de São Paulo, não conseguiram interpretar se o valor obtido é solução da equação, justificando o resultado pelas aplicações das regras utilizadas. Para este autor, “[...] o processo de validação poderia favorecer a compreensão das equações equivalentes, bem como do significado da igualdade” (ibid, p. 118). Acreditamos que a abordagem apresentada por Kieran et al (2008) para introduzir o conceito de equivalência entre expressões algébricas promova este significado, como também, o significado de solução. Estes autores propõem uma atividade em que aborda a “[...] equivalência das expressões algébricas e o papel de restrições na determinação de valores admissíveis para a equivalência” (ibid, p. 250, tradução nossa^{xi}). Nesta atividade os alunos substituem determinados valores em diferentes expressões (fig. 4).

Para $x =$	1/3	-5		
Expressão	Resultado	Resultado	Resultado	Resultado
1. $(x - 3)(4x - 3)$				
2. $(x^2 + x - 20)(3x^2 + 2x - 1)$				
3. $(3x - 1)(x^2 - x - 2)(x + 5)$				
4. $(-x + 3)^2 + x(3x - 9)$				
5. $\frac{(x^2 + 3x - 10)(3x - 1)(x^2 + 3x + 2)}{x + 2}$				

Figura 4 – Tarefa de substituição numérica

Fonte: Kieran et al (2008, p. 251)

A partir desta atividade, o professor promove discussões que envolvam a definição de expressões equivalentes, com ênfase deliberada no conjunto de números admissíveis.

Lins Lessa; Falcão (2005) retoma a discussão a respeito da relação entre pensamento e linguagem no processo de conceitualização em matemática. O estudo de Lins Lessa (1996 apud LINS LESSA; FALCÃO, 2005) contribui com esta discussão. Neste estudo estatístico, foram realizadas, em três fases, entrevistas individuais com quarenta estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental de escolas da cidade de Recife, em Pernambuco. A autora investigou em que aspectos determinados suportes didáticos contribuem para a compreensão do princípio de equivalência, especificamente a passagem de uma equação para a outra a partir do princípio aditivo e do princípio multiplicativo. A ênfase foi dada na manutenção do equilíbrio entre os pratos da balança, ou seja, na equivalência entre as expressões que compõem a equação. Deste modo, a equivalência entre as equações é vista apenas por sua transformabilidade a partir da aplicação destes princípios. Como resultado, a autora destaca que “[...] a criança pode compreender o *princípio de equivalência* a partir de esquemas sensório-motores, mas com os problemas ela precisa de esquemas operatórios formais para compreender os mesmos princípios” (LINS LESSA, 1996, apud LINS LESSA; FALCÃO, 2005, p.321).

Ribeiro (2007) analisa o desenvolvimento epistemológico da noção de equação, tanto como um objeto de estudo, quanto como um algoritmo, na perspectiva de um ensaio teórico, o autor fez um levantamento histórico a partir de pesquisas na área da Educação Matemática e de fontes bibliográficas históricas, além de um estudo matemático da noção de equação. Ele destaca a importância de conceber equação como uma noção primitiva, “[...] que pode ser utilizada de maneira intuitiva e com forte apelo pragmático” (ibid, p.16) e apresenta três noções de equações: “[...] uma relacionada a um **caráter pragmático**, outra relacionada a um **caráter geométrico** e uma terceira relacionada a um **caráter estrutural**” (RIBEIRO, 2009, p.83). Estas três noções foram definidas para distinguir as maneiras como os estudiosos, em diferentes épocas históricas, tratavam e concebiam uma equação. Para os babilônios e egípcios tal noção tinha basicamente um caráter pragmático. Ou seja, originava-se de problemas de ordem prática, que eram equacionados, intuitivamente, através de métodos relacionados à ideia aritmética de igualar duas quantidades. Para os gregos tal noção tinha um caráter geométrico. Ou seja, solucionava-se um problema particular através de manipulações geométricas, de forma dedutiva (RIBEIRO, 2009). Para os europeus, “[...] **equações** eram vistas dentro de um sistema **estrutural** com propriedades e características bastante definidas. A equação é considerada em si própria, operando-se sobre ela mesma, com **finalidade** de se encontrar **soluções gerais**” (RIBEIRO, 2009, p. 83). A noção de equação descrita acima, segundo o autor, está relacionada ao caráter estrutural.

Araújo (2009) caracteriza e compara as transposições didáticas realizadas na França e no Brasil sobre o ensino de resolução de equações do 1º grau com uma incógnita. O autor analisa os programas institucionais destes países, os livros didáticos adotados por eles e realiza um estudo experimental com 117 alunos, sendo 62 alunos franceses de duas *classes de seconde* (1º ano do Ensino Médio) de escolas públicas e, 55 alunos brasileiros de duas turmas do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública. Dos resultados deste experimento, o autor aponta a ocorrência majoritária de três tipos de erros na resolução de equações:

- Erros de transposição de coeficientes em equações do tipo $ax = c$.
- Erros de transposição de termos constantes em equações do tipo $ax + b = c$.

- Erros de reagrupamento de termos semelhantes em equações do tipo $a_1x + b_1 = a_2x + b_2$. (ARAÚJO, 2009, p. 278)

Além deles, foram identificados erros de cálculos numéricos e de cálculos algébricos. Todos eles revelam a falta de domínio dos princípios e propriedades matemáticas que justificam os procedimentos utilizados pelos sujeitos pesquisados.

Lima (2007) procura entender os significados atribuídos pelos alunos do Ensino Médio à equação e aos métodos de resolução. Com esta finalidade, a autora realizou um estudo estatístico, com alunos dos dois primeiros anos do Ensino Médio, da região metropolitana de São Paulo. Para ela, ficou evidente que muitos dos oitenta “[...] sujeitos desta pesquisa têm uma concepção de equação como uma conta a ser efetuada [...]” (ibid, p.281). Nesta concepção, que ela chama de concepção *Conta*, “[...] o sinal de igual é visto como um sinal operacional” (ibid, p. 282) e não como um símbolo próprio de uma relação de equivalência.

Em outro estudo, esta autora procura observar os erros cometidos na resolução de equações e inequações por cento e dez universitários da área de exatas. Com esta finalidade, foi realizado um questionário escrito. Com o propósito de realizar uma análise mais detalhada dos dados coletados, foi utilizado software CHIC (Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive). Este software possibilita a construção de gráficos implicativos, ou seja, um esquema em forma de árvore. Todavia, “Nenhum aluno esboçou alguma tentativa de resolução gráfica [...]. Qualquer que fosse a alternativa escolhida para tratar o problema proposto, ela era algébrica” (LIMA, s/d, p. 9).

Linchevski; Sfard (1991, p.317) “[...] mostrou que na álgebra, as concepções pseudo-estruturais podem estar mais amplamente disseminadas do que se suspeitava” (tradução nossa^{xii}). As concepções pseudo-estruturais são concepções que se referem aos procedimentos matemáticos como se estes fossem os objetos matemáticos. Entretanto, o aluno mobiliza estas concepções quando é “[...] incapaz de pensar em termos de objetos abstratos [...]” (ibid, tradução nossa^{xiii}). Ele tem uma compreensão instrumental, ou seja, conhece as regras e tem capacidade de usá-las (SKEMP, 1976), entretanto, não sabe por que as usa. A falta de significado de uma destas regras, *muda lado – muda sinal*, se evidencia na resposta de um dos sujeitos

da presente pesquisa, quando ele associa a ela uma crendice popular (fig. 5): quem passa por baixo do arco-íris muda de sexo.

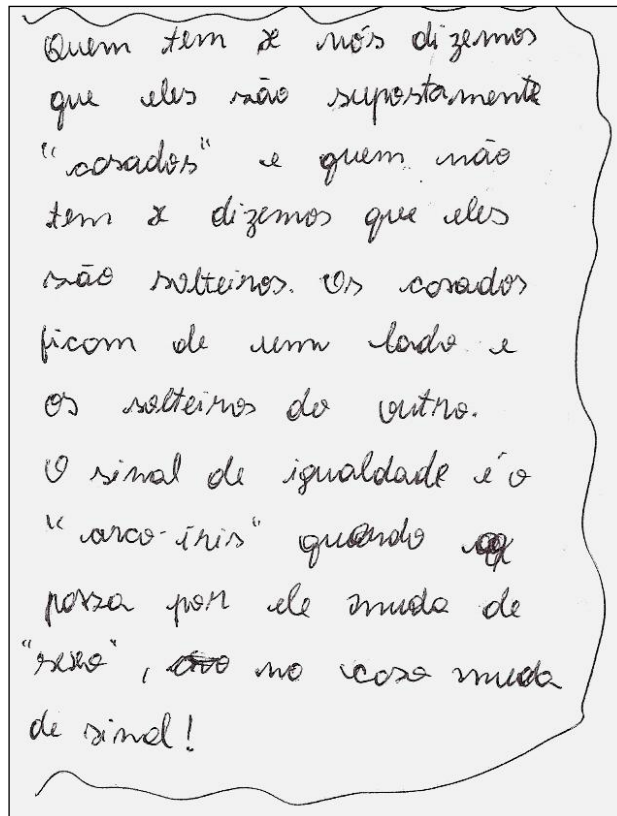


Figura 5 – Ancora, retirado do protocolo A064, de um sujeito de nossa pesquisa

Os resultados de Linchevski; Sfard (1991), como mencionado na introdução, não indicam o conjunto solução como critério para a equivalência. A possibilidade de transformar uma equação em outra é praticamente o único critério para a equivalência. Além disto, aspectos externos, "[...] tais como, semelhança parcial e diferença parcial entre suas fórmulas componentes" (ibid, p. 323, tradução nossa^{xiv}) também são identificados como critério para decidir sobre a equivalência entre equações e inequações.

Attorps; Tossavainen (2008) estuda as concepções dos professores de matemática e os alunos de licenciatura em matemática sobre equações. Os autores destacam que:

[...] os erros de concepção sobre equações que estão relacionados com as propriedades da relação de equivalência são

surpreendentemente comuns entre os estudantes de **licenciatura** de matemática. (ibid, p. 2, grifo nosso, tradução nossa^{xv})

Os resultados de Linchevski; Sfard (1991), Lima (2007) e Attorps; Tossavainen (2008) contribuíram para determinar as categorias prévias de análise utilizadas no nosso estudo. Falaremos destas categorias na seção 3 do capítulo 5, quando definiremos cada uma delas.

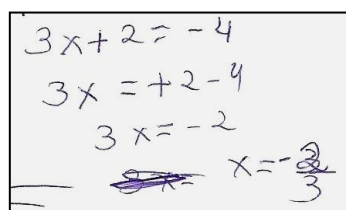
Os resultados dos estudos citados nesta seção possibilitam-nos apontar a concepção operacional do sinal de igual e as concepções pseudo-estruturais como as principais concepções responsáveis pelos entraves encontrados pelos alunos na construção da noção de equivalência entre equações. Estes entraves constituem o ponto de partida do nosso trabalho.

A concepção operacional do sinal de igual parece ter como consequência o não uso do “[...] princípio algébrico de efetuar a mesma operação em ambos os membros da equação [...]” (LIMA, 2007, p. 282), enquanto as concepções pseudo-estruturais possibilitam erros decorrentes do uso incorreto do princípio aditivo e do princípio multiplicativo no tratamento em uma equação, como os erros encontrados por Araujo (1999). Além desses tipos de erros, Araújo (2009) identificou erros na aplicação das propriedades operatórias.

A partir destes estudos, mapeamos os possíveis erros de tratamento na resolução de uma equação. Distribuímos esses erros em três classes: erros na aplicação do princípio aditivo, erros na aplicação do princípio multiplicativo e erros na aplicação das propriedades operatórias. Apresentamos abaixo o detalhamento desta classificação, utilizando os erros apresentados por Araújo (2009) na sua forma algébrica, com alguns exemplos retirados dos nossos dados.

Erros na aplicação do princípio aditivo:

- $ax \pm b = c \Rightarrow ax = c \pm b$, como na Figura 6;



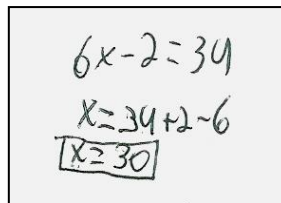
$$\begin{array}{l} 3x + 2 = -4 \\ 3x = +2 - 4 \\ 3x = -2 \\ x = -\frac{2}{3} \end{array}$$

Figura 6 – Erro, retirado do protocolo A202, de um sujeito de nossa pesquisa

- $b - ax = c \Rightarrow ax = c - b$;
- $b - ax = c \Rightarrow ax = c + b$;
- $ax + b = c \Rightarrow ax = b - c$;
- $x + b = c \Rightarrow x = \frac{b}{c}$;
- $b - ax = cx - d \Rightarrow ax - cx = -d - b$;
- $b - ax = cx - d \Rightarrow b - d = cx + ax$;
- $b - ax = cx - d \Rightarrow b + d = cx - ax$;
- $ax - b = cx + d \Rightarrow ax + cx = d + b$;
- $b + ax = d - cx \Rightarrow ax + cx = d + b$;
- $b - ax = cx - d \Rightarrow -ax - cx = -d + b$;
- $b - ax = cx - d \Rightarrow -ax + cx = -d + b$;
- $ax - b = cx + d \Rightarrow ax + cx = d - b$;
- $-ax - b = -cx - d \Rightarrow ax + cx = d + b$;
- $b + ax = d - cx \Rightarrow ax + cx = b - d$;
- $b - ax = cx - d \Rightarrow b - d = cx - ax$.

Erros na aplicação do princípio multiplicativo:

- $ax = c \Rightarrow x = \frac{a}{c}$;
- $ax = c \Rightarrow x = \frac{c}{-a}$;
- $ax = c \Rightarrow x = ac$;
- $ax = c \Rightarrow x = c + a$, como na Figura 7;



$$\begin{array}{l}
 6x - 2 = 34 \\
 x = 34 + 2 - 6 \\
 \boxed{x = 30}
 \end{array}$$

Figura 7 – Erro, retirado do protocolo A318, de um sujeito de nossa pesquisa

Erros na aplicação das propriedades operatórias:

- $-k(ax + b) = (-ka)x + kb$;
- $k(ax + b) = (ka)x + b$, como na Figura 8;

c) $2x = 3(5 - x)$ tem a mesma solução da equação A? Justifique sua resposta.

Não. $2x = 15 - x$
 $2x + x = 15$
 $3x = 15$
 $x = 5$

Figura 8 – Erro, retirado do protocolo A202, de um sujeito de nossa pesquisa

- $(ax + b)(cx \pm d) = (a + c)x + (b \pm d)$;
- $(ax + b)(cx - d) = (a + c)x - adx + bcx - bd$;
- $(ax + b)(cx \pm d) = acx^2 \pm bd$;
- $ax \pm b = (a \pm b)x$;
- $ax = a + x$;
- $ax - ax = x$.

O mapeamento acima contribuiu para a elaboração do nosso instrumento de coleta, na medida em que este instrumento foi elaborado visando minimizar as possibilidades de erros no tratamento algébrico, uma vez que tais erros não constituem o foco do nosso trabalho.

CAPÍTULO 3 A NOÇÃO DE CONCEPÇÃO

Esta pesquisa objetiva estudar as concepções dos alunos sobre equivalência na resolução de equações do primeiro grau, como já mencionado. Esta escolha nos levou a fazer uma reflexão sobre a noção de *concepção* utilizada nas pesquisas em Educação Matemática. Esta reflexão nos auxilia a definir em que perspectiva este termo será utilizado na pesquisa.

Neste capítulo, apresentamos um breve estudo sobre o significado de concepções adotado nas pesquisas em Educação Matemática, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica desenvolvida por Raymond Duval e em seguida algumas noções de concepção sobre a Álgebra escolar.

3.1 A noção de concepção nas pesquisas em Educação Matemática

A pesquisa de Lima (2006) traz uma ampla discussão sobre o significado do termo *concepção* e da evolução desta noção do ponto de vista das pesquisas em Didática da Matemática.

Esta autora realizou um estudo sobre como a noção de concepção é utilizada nas pesquisas em Psicologia Cognitiva, Educação e em Didática da Matemática. A autora refere-se à Charlier (1998) para contemplar o sentido comum da palavra concepção e a abordagem construtivista do termo.

No sentido comum da palavra, uma concepção pode ser compreendida como uma ideia, uma representação ou uma crença que um sujeito tem em relação a algo. Numa abordagem construtivista, uma concepção pode ser definida como um tipo específico de conhecimento individual construído na interação do sujeito com o meio (ambiente). Ao mesmo tempo, depende do meio no qual o sujeito encontra-se e do próprio sujeito (a sua história, as suas intenções...) (CHARLIER, 1998, apud LIMA, 2006, p. 29, tradução nossa^{xvi}).

Também se reporta a Tiberghien (2005) para apontar a inexistência de uma abordagem teórica única adotada pelas diferentes correntes, nas décadas de oitenta e noventa. Esta tendência foi justificada pela variedade de termos utilizados com o mesmo significado: “[...] representações, concepções, concepções errôneas, raciocínio espontâneo, modelo espontâneo” (LIMA, p. 30, tradução nossa^{xvii}).

Isto quer dizer que *concepção* não se constituía em um objeto de estudo em si mesmo, mas que o termo *concepção* era empregado de acordo com o contexto.

Kaldrimidou; Tzekaki (2005), defendendo a importância de uma clara descrição de termos utilizados na pesquisa da Educação Matemática, utilizam como exemplo o termo *concepção*. As autoras afirmam que:

[...] pesquisadores usam o termo “concepções” referindo-se a elementos diferentes e às vezes opostos: os conceitos matemáticos, como também os elementos epistemológicos ou as ideias mais gerais sobre a natureza da Matemática; conceitos específicos, como também todos conceitos matemáticos; o conteúdo da matemática, como também o conhecimento matemático; o conhecimento individual, como também o conhecimento compartilhado entre grupos ou indivíduos (ibid, p. 4, tradução nossa^{xviii}).

Segundo as autoras:

Estes múltiplos usos e significados do termo levantam diversas questões sobre a natureza das “concepções”: (I) São elementos do conhecimento conceptual e/ou do processo de conceitualização (construções mentais dos indivíduos) ou ferramentas na análise da aprendizagem (construções dos pesquisadores)? (II) São conectados a conceitos matemáticos específicos (como função, número etc.) ou podem descrever outros elementos da Matemática (definições, campos, papéis)? (III) Qual dos significados mencionados acima é atribuído ao desenvolvimento de outros termos que expressam um conhecimento parcial, ou inadequado, ou restrito do indivíduo, como de “conceito-imagem /conceito-definição” (Vinner 1992), “mundo corporificado /mundo proceitual /mundo formal” (TALL, 2004)? (ibid, p. 4, tradução nossa^{xix}).

Cavalcanti (2008) retoma esta discussão e para exemplificar o uso plural deste termo nas pesquisas, reporta-se ao estudo de Dossey (1992) que também discute o termo *concepções* de diferentes maneiras, por exemplo, as concepções de

professores e as concepções da Matemática. Outros pesquisadores citados neste estudo como Cury (1994); Ruiz (1993) e Flores (1998), apud Molina (2005) e Ernest (1991), apud Cury (1994) referem-se a diferentes termos utilizados para expressar concepção nas pesquisas em Educação e em Psicologia Cognitiva.

O autor destaca alguns aspectos comuns encontrados nas pesquisas acerca da natureza das concepções:

- A utilização de uma pluralidade de termos distintos para uma mesma finalidade, no caso, referente às concepções dos estudantes;
- A utilização de uma pluralidade de termos para relatar uma mesma finalidade sem distingui-los. Por exemplo: crenças, concepções, visão, etc., para discutir as convicções de professores e/ou alunos acerca da natureza da Matemática;
- A utilização do termo concepção para diferentes finalidades: o conhecimento dos alunos; as convicções dos alunos e professores acerca da Matemática e do ensino da Matemática; aspectos epistemológicos da Matemática, da Álgebra; aspectos do ensino-aprendizagem da Matemática e do ensino de Álgebra;
- A falta de definição formal do significado do termo concepção;
- Certa tendência em utilizar o termo concepção de maneira muito ampla (CAVALCANTI, 2008, p. 35).

Em nosso trabalho, no que se refere às concepções dos alunos, optamos por analisar as soluções escritas por eles sob a ótica da Teoria dos Registros de Representação Semiótica e dos resultados das pesquisas que investigaram as concepções sobre equações (Lima, 2007; Linchevski; Sfard, 1991; Attorps; Tossavainen, 2008).

3.2 Teoria dos Registros de Representação Semiótica

Dos estudos de Raymond Duval nasce a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Duval é filósofo e psicólogo por formação. Seu principal interesse é o funcionamento cognitivo do aluno, que é inerente à atividade de representação (DUVAL, 2004), especificamente a representação semiótica.

Estas representações

[...] são relativas a um sistema particular de signos: a linguagem, a escrita algébrica ou os gráficos cartesianos, e podem ser convertidas em representações “equivalentes” em outro sistema semiótico, mas podendo tomar **significações** diferentes para o sujeito que as utiliza (ibid, p. 27, tradução nossa^{xx}).

É “[...] através de uma significação que se faz a apreensão perceptiva ou conceitual de um objeto” (ibid, p. 33, tradução nossa^{xxi}). É ela que torna possível ao sujeito tomar consciência. Consequentemente, suas representações têm um caráter intencional. Entretanto, a compreensão consciente do sujeito depende do funcionamento automático (inconsciente) das condições cognitivas internas, ou seja, dos vários sistemas heterogêneos cuja organização constitui a arquitetura cognitiva do sujeito epistêmico. O exemplo da Figura 9 traz as várias coordenações entre sistemas produtivos requeridos para a compreensão matemática, que inclui sistemas semióticos. É uma organização mais complexa, que depende da mobilização de diversos registros, que podem ser discursivos ou não discursivos (DUVAL, 2000).

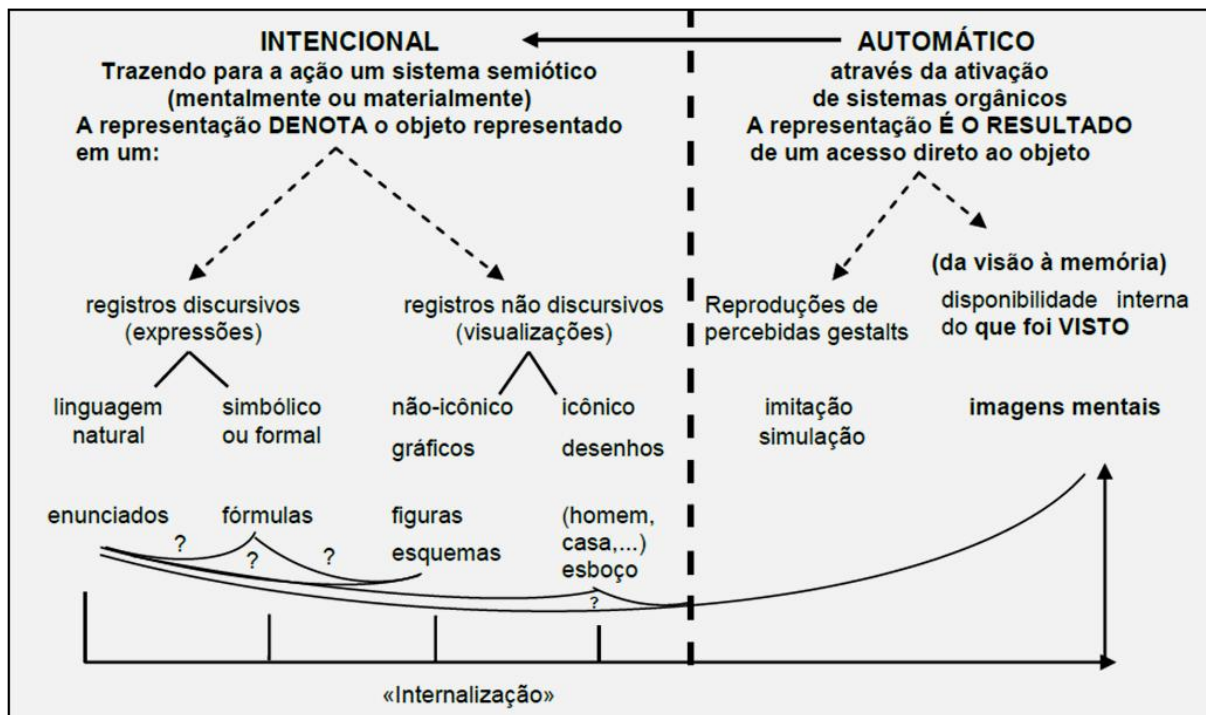


Figura 9 – Varias coordenações entre sistemas produtivos requeridos para a compreensão matemática

Fonte: Duval (2000, p. 66)

Tanto os registros discursivos como os não-discursivos podem ser multifuncionais ou monofuncionais. Os registros multifuncionais são utilizados com objetivos de comunicação e de processamento (não-algorítmicos) em todos os campos da cultura, inclusive na matemática, embora, neste campo específico, de maneira particular. “Ao contrário, os registros monofuncionais tem sido desenvolvidos para um tipo específico de processamento de forma a ter um desempenho mais poderoso e menos custoso [...]” (ibid, p. 65, tradução nossa^{xxii}) que os registros multifuncionais. A Figura 10 apresenta uma síntese dos tipos de registros.

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO-DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os processos não podem ser algoritmizados	Linguagem Natural <i>Associações verbais (conceituais)</i> <i>Razoamento:</i> -argumentos a partir de observações, crenças... - <i>deduções válidas a partir de definições ou teoremas</i>	Figuras geométricas planas ou em perspectiva (configurações de formas de dimensão 0,1, 2 ou 3) <i>Apreensão operatória e não apenas perceptiva</i> <i>Construção com régua e compasso</i>
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: A maioria dos processos é algorítmica	Sistemas de notação: numéricos (binário, decimal, fracionário...) algébricos simbólicos (linguagens formais)	Gráficos cartesianos <i>Mudança de sistemas de coordenadas</i> <i>interpolação, extrapolação</i>

Figura 10 – Classificação dos diferentes registros que podem ser mobilizados em processos matemáticos

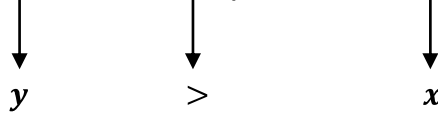
Fonte: Duval (2000, s/d, p. 3)

Estes registros intencionais são registros semióticos. É através dos registros de representações semióticas que podemos acessar os objetos matemáticos, uma vez que estes objetos são abstratos por natureza. “Por outro lado, a compreensão da matemática requer que não se confundam os objetos matemáticos com as representações usadas” (ibid, p. 2, tradução nossa^{xxiii}).

“Nessas condições, aprender matemática significa: integrar na sua própria arquitetura cognitiva todos os registros necessários enquanto novos sistemas de representação” (DUVAL, 1999, p. 3, tradução nossa^{xxiv}). É a coordenação entre os diferentes registros de representação semiótica que permite a conceitualização de um objeto matemático.

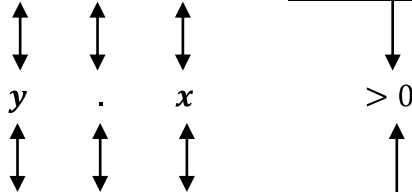
Esta coordenação pressupõe a conversão, ou seja, a transformação de uma representação de um registro a outro. Esta transformação constitui a atividade cognitiva menos espontânea e “[...] a ausência de coordenação entre os diferentes registros gera um obstáculo para as aprendizagens conceituais” (DUVAL, 2004, p. 49, tradução nossa^{xxv}). Ela pode ser congruente ou não-congruente. As transformações congruentes não criam obstáculos, pois cada unidade do registro de origem leva a apenas uma unidade no registro de chegada, como no exemplo seguinte:

Os pontos cuja ordenada é maior que sua abscissa.



As transformações não-congruentes, em contraste, possibilitam mais de uma chegada, ou seja, mais de um significado associado à representação, como no exemplo seguinte:

Os pontos cuja abscissa e ordenada têm o mesmo sinal



O produto da abscissa e ordenada é maior que 0

Outra atividade cognitiva fundamental é o tratamento, ou seja, a transformação de uma representação em um mesmo registro (monofuncional). Um exemplo deste tipo de atividade é os procedimentos algébricos realizados para encontrar o valor de uma incógnita numa equação do primeiro grau (fig. 11).

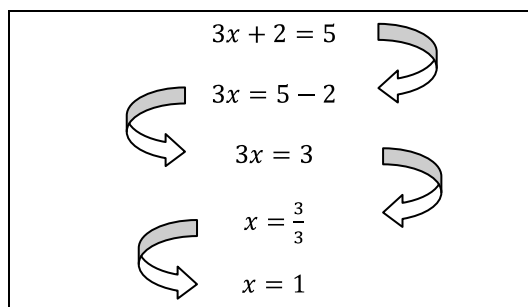


Figura 11 – Tratamento, registro algébrico.

Na síntese acima, na qual apresentamos os principais elementos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, não nos referimos às concepções, que é o nosso objeto de estudo, porque Duval não utiliza o termo concepção na sua teoria. Entretanto, ele refere-se ao processo de conceitualização.

Em nosso trabalho, atribuiremos ao termo concepção as construções individuais realizadas neste processo. Como mencionado anteriormente, estas concepções podem ser corretas do ponto de vista da matemática, errôneas ou incompletas. Analisaremos tais processos a partir das soluções escritas das questões.

3.3 Concepção no contexto da Álgebra Escolar

Tendo como objeto de pesquisa as concepções dos alunos do Ensino Fundamental enfocando, em particular, a questão da equivalência na resolução das equações do primeiro grau, consideramos relevante realizar um estudo sobre as concepções de Álgebra nas pesquisas em Educação Matemática. Para isto, elegemos algumas pesquisas deste vasto campo (FIORENTINI; MIORIN; MIGUEL, 1993; USISKIN, 1995; MOLINA, 2004; CAVALCANTI, 2008; LIMA, 2007).

Em Fiorentini; Miorin; Miguel (1993) e Usiskin (1995) o termo concepção aplica-se a uma caracterização da Álgebra. Nos demais estudos este termo aplica-se às construções mentais dos sujeitos.

Fiorentini; Miorin; Miguel (1993) utilizam diversas nomenclaturas tanto para caracterizar a Álgebra enquanto ramo da Matemática: concepção processológica, (“[...] um conjunto de procedimentos (técnicas, artifícios, processos e métodos) específicos para abordar certos tipos de problemas” (ibid, p. 82)), concepção linguístico-estilística, (“[...] uma linguagem específica, artificialmente criada com o propósito de expressar concisamente [...] procedimentos específicos [...]” (ibid)), concepção linguístico-sintático-semântica (“[...] uma linguagem específica e concisa, [...] cujo poder criativo e instrumental [...] reside [...] em sua dimensão sintático-semântica” (ibid)) e concepção linguístico-postulacional (“[...] a ciência das estruturas gerais comuns a todas as partes da Matemática, incluindo a Lógica” (PIAGET;

GARCIA, 1987, p.163, apud ibid, p. 83)); quanto para caracterizar as concepções de Educação Algébrica: concepção linguístico-pragmática, em que “[...] o papel do ensino da álgebra era fornecer um instrumental técnico (superior ao da aritmética) para a resolução de equações ou de problemas equacionáveis” (FIORENTINI; FERNANDES; CRISTOVÃO, 2005, p.3), concepção fundamentalista-estrutural em que “[...] o papel do ensino da álgebra era fornecer os fundamentos lógico-matemáticos para toda a matemática escolar (inclusive aqueles tradicionalmente considerados algébricos, como o cálculo algébrico e o estudo das equações)” (ibid, 2005, p.4), e a concepção fundamentalista-analógica, que “[...] procura fazer uma síntese entre as duas anteriores [...]” (ibid, 2005, p.4), tentando recuperar o valor instrumental da Álgebra e preservar a preocupação fundamentalista (ibid).

Usiskin (1995) apresenta quatro concepções da Álgebra, já citadas na introdução: Álgebra como Aritmética generalizada, Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas, Álgebra como estudo de relações entre grandezas e Álgebra como estudo das estruturas. Estas concepções são apresentadas com uma estreita relação com a noção de variável e a sua utilização.

Na concepção de Álgebra como Aritmética generalizada, as variáveis são entendidas como instrumentos para traduzir e expressar a generalização de padrões aritméticos. É a introdução de variáveis que faz a distinção entre o domínio algébrico e o domínio aritmético. Partindo dessas situações, o autor afirma que se torna “[...] impossível estudar aritmética adequadamente sem lidar implícita ou explicitamente com variáveis” (ibid, p. 14), ou seja, o domínio algébrico e o domínio aritmético estão interligados. Para Brito Menezes (2006) a Álgebra, neste contexto, é entendida como a *matemática das letras*. Entretanto, essas letras não assumem o papel de incógnita, pois, como afirma Freitas “[...] generalizam-se as relações conhecidas entre números e assim o problema acaba quando se encontra o modelo geral” (FREITAS, 2002, p.10). Por exemplo, “[...] $3 + 5 \cdot 7 = 5 \cdot 7 + 3$ como $a + b = b + a$ ” (USISKIN, ibid, p. 13).

Na concepção de Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas, as variáveis são utilizadas como incógnitas e constantes. Diferentemente da concepção anterior, o problema não termina quando encontramos o modelo geral. Porém, é a partir desse modelo, através de

procedimentos matemáticos que possibilitem a simplificação de equações, que chegaremos à sua solução transformando as incógnitas em elementos conhecidos. Por exemplo, dado o seguinte problema na linguagem natural: “Adicionando 3 ao quádruplo de um certo número, a soma é 40. Achar o número” (ibid, p. 14).

Faz-se a conversão para a linguagem algébrica: $5x + 3 = 40$. Etapa referente à Álgebra generalizadora de modelos. No entanto, esta etapa é o início do processo, quando falamos de Álgebra como estudo de procedimentos, que pode ser feito tanto pelo uso do princípio aditivo, $5x + 3 + (-3) = 40 + (-3)$, resultando na equação $5x = 37$, como pela regra *muda lado – muda sinal*, $5x = 40 - 3$, seguido do uso do princípio multiplicativo, $5x \cdot (1/5) = 37 \cdot (1/5)$, obtendo assim a solução do problema $x = 7,4$. Da mesma maneira, podemos usar a regra *muda lado – muda sinal* nesta etapa, $x = 37/5$.

Neste problema, a resolução foi feita em quatro etapas. Entretanto, “[...] o número de passos necessários depende do nível do aluno e da preferência do professor [...]” (ibid, p. 14). Quanto à resposta, ela pode ser facilmente testada.

Na concepção de Álgebra como estudo de relações entre grandezas, as variáveis *variam*, como chama a atenção o autor. Elas podem ser argumento, ou seja, representar os valores do domínio de uma função, ou parâmetro, que, segundo o autor, “[...] representa um número do qual dependem outros números” (ibid, p. 16). Neste contexto, há dois tipos de variáveis: a dependente, que representa os elementos do contradomínio, e a independente, que representa os elementos do domínio. Além desta mudança de significado, a introdução da notação funcional – $f(x)$ – encontra estranheza por parte dos alunos. Para o autor, “[...] uma das razões pelas quais $y = f(x)$ pode confundir os alunos é a função f , e não o argumento x , ter se tornado o parâmetro” (USISKIN, 1995, p.16).

Para exemplificar a diferença entre variáveis enquanto argumentos e variáveis enquanto incógnitas, Usiskin (ibid, p. 16-17) utilizou as etapas da resolução do seguinte problema: “ache a equação da reta pelo ponto (6,2) com inclinação 11”.

1. Modelo ou fórmula: $y = mx + b;$
2. Substituindo m por seu valor 11: $y = 11x + b;$

3. Substituindo o par de valores associados de x (6) e y (2): $2 = 11 \cdot 6 + b$;

4. Resolvendo a equação: $b = -64$;

5. Resposta da questão: $y = 11x - 64$.

Estas etapas mostram uma combinação das utilizações de variáveis propostas pelo autor até o momento. A princípio, modela-se a questão através de uma fórmula. Em seguida, atribui-se ao valor da inclinação m o valor dado, neste caso m é uma constante. Nesta etapa, b transforma-se de parâmetro em incógnita, que tem seu valor encontrado atribuindo-se os valores associados de x e y . Em todo o processo, x e y permanecem como variáveis, que é a ideia central dessa concepção.

Na concepção de Álgebra como estudo das estruturas (grupos, anéis, domínios de integridade, corpos e outros), “[...] a variável é pouco mais que um símbolo arbitrário” (USISKIN, 1995, p. 18), ou seja, ela pode ser entendida como um símbolo usado para denotar um elemento de um determinado conjunto. Como diz o autor:

Isso parece ter pouca semelhança com a álgebra do segundo grau, embora os corpos dos números reais e dos números complexos e os vários anéis de polinômios fundamentem a teoria da álgebra e as propriedades dos domínios de integridade e dos grupos expliquem porque certas equações podem ser resolvidas e outras não (ibid, p. 17-18).

É importante ressaltar que o autor defende que a Álgebra não se reduz a qualquer destas concepções isoladamente, sendo necessário tomá-las em conjunto. Para ele, além de ser uma forma de generalização da Aritmética, a Álgebra também é um meio para a resolução de problemas, um modo privilegiado de descrição e análise de relações funcionais e a chave para a compreensão de estruturas matemáticas.

Com objetivos mais específicos, focado em um dos elementos presentes em uma equação (o sinal de igual), Molina (2004) e Cavalcanti (2008) procuram identificar as concepções dos alunos sobre o sinal de igual. Enquanto Molina (ibid)

direciona seu estudo para as concepções no contexto da Aritmética, Cavalcanti (ibid) focaliza tanto o contexto aritmético quanto o algébrico.

O estudo de Molina (2004) teve como sujeitos dezoito alunos do terceiro ano do Ensino Fundamental de uma escola pública da Califórnia. Neste estudo os sujeitos “[...] tenderam a interpretar o sinal de igual como um símbolo operacional em vez de relacional [...]” (ibid, p. 86, tradução nossa^{xxvi}). Esta tendência se enquadra no que Booth (1995) chama de foco da atividade algébrica.

O estudo de Cavalcanti (2008) teve como sujeito duzentos e cinco alunos cursando o terceiro ano do Ensino Médio, de duas escolas públicas da região metropolitana do Recife. Segundo o autor, neste estudo “[...] a maior parte dos alunos não demonstrou concepções compatíveis com o significado do símbolo “=” no contexto no qual ele estava inserido” (ibid, p. 204). Tomemos a concepção operacional como exemplo. O autor afirma que ela é identificada mesmo nos contextos algébricos (ibid).

Mesmo não tendo como foco de estudo as rupturas e continuidades entre Aritmética e Álgebra, é importante salientar que os resultados da pesquisa de Cavalcanti (ibid) mostram que “[...] a ruptura necessária em relação à concepção operacional, particularmente aritmética, não foi realizada pela maior parte dos sujeitos” (ibid, p. 203). Este resultado ratifica uma das conclusões do estudo de Kieran (1981) que identifica a concepção operacional do sinal de igual em alunos do Ensino Médio. Esta autora afirma que “Este pensamento permanece à medida que as crianças ficam mais velhas e avançam para as séries superiores do ensino fundamental” (ibid, p. 324, tradução nossa^{xxvii}).

Como mencionado anteriormente, Lima (2007) aponta a concepção de equação como *Conta* a mais evidente entre os sujeitos pesquisados, ou seja, “[...] os alunos acabam enfocando somente as operações que efetuam, dando a uma equação o status de conta” (ibid, p. 141). Além disso, a principal concepção desses sujeitos sobre o sinal de igual é a concepção operacional (ibid). Para a autora, esta concepção traz duas consequências: “[...] os alunos não usam o princípio algébrico de efetuar a mesma operação em ambos os membros da equação e não obtêm equações equivalentes nas passagens da resolução” (ibid, p. 282).

Estas consequências apontadas pela autora são relevantes para o nosso estudo, se constituindo no aspecto central da pesquisa. De fato, em uma análise

preliminar em Livros Didáticos comumente adotados no Brasil, verificamos que no ensino das equações equivalentes a ênfase é dada apenas na definição, isto é, duas equações são equivalentes porque têm um mesmo conjunto solução. Em geral, nada é dito sobre o fato de que as equações obtidas, de uma etapa para outra do processo de resolução, devem ser equivalentes. Esta problemática nos levou a fazer o seguinte questionamento:

Quais concepções de equivalência – corretas do ponto de vista da matemática, errôneas ou incompletas – os alunos do Ensino Fundamental mobilizam quando resolvem equações do primeiro grau?

Lembramos que o termo concepção é usado em nosso trabalho no sentido já indicado (cf. 2.1), ou seja, as concepções são tidas como os elementos das construções mentais dos indivíduos. Para identificá-las recorreremos aos registros de representação semiótica. É nesta expectativa que realizaremos uma experimentação com os alunos do Ensino Fundamental.

CAPÍTULO 4 OBJETIVOS

A partir de nossa questão de pesquisa – *Quais concepções de equivalência – corretas do ponto de vista da matemática, errôneas ou incompletas – os alunos do Ensino Fundamental mobilizam quando resolvem equações do primeiro grau?* – apresentamos a seguir os principais objetivos deste estudo.

4.1 Objetivo geral

Identificar as concepções de equivalência entre equações que os alunos mobilizam quando resolvem problemas que envolvam equações do primeiro grau.

4.2 Objetivos específicos

- Mapear as concepções dos alunos quanto ao significado de equivalência entre equações;
- Investigar em que medida o aluno entende que obtém equações equivalentes no processo de resolução de uma equação;
- Identificar o conhecimento dos alunos quanto às propriedades de equivalência.

CAPÍTULO 5 METODOLOGIA

O estudo foi realizado com alunos de escolas da região agreste do Estado de Pernambuco, uma vez que está vinculado a um projeto em desenvolvimento no Centro Acadêmico do Agreste que tem como principal objetivo estudar as decisões didáticas de professores e os conhecimentos que as influenciam. Neste contexto, considera-se importante conhecer a priori as concepções dos alunos sobre uma determinada noção matemática. Além destas escolas, foi realizado um estudo piloto em uma escola pública da capital pernambucana, nos mesmos moldes desta pesquisa (cf. capítulo 6).

Esta pesquisa foi financiada pela Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco – FACEPE. Atualmente, esta instituição está priorizando projetos que contribuem para a interiorização das atividades de pesquisa.

A pesquisa constou da aplicação de um teste escrito (cf. apêndices A, B) em cinco escolas particulares. Os sujeitos tiveram o tempo de uma aula para realizar o teste. Havia diferenças na duração da aula de escola para escola, que variava entre quarenta e cinquenta minutos. Entretanto, apesar da diferença, todos os sujeitos terminaram a tarefa antes do tempo estabelecido.

O teste foi aplicado pelo pesquisador em seu primeiro contato com os sujeitos. Durante a aplicação, o pesquisador encontrava-se acompanhado por um professor ou coordenador da própria escola. Ele apresentava-se, explicava para os alunos a razão da pesquisa, qual a dinâmica da tarefa, como seriam identificados os sujeitos nas publicações – alunos do 9º ano de escolas particular do Agreste de Pernambuco. Além disso, informava que cada teste seria identificado por um código (exemplo: A147) e que apenas ele, o pesquisador, veria o nome escrito no teste. Mesmo com estas explicações, o pesquisador comunicava que os sujeitos poderiam escolher como identificar-se no teste, contanto que não fosse com o nome de um aluno ou aluna da própria escola e que fosse a mesma identificação nos dois blocos. Deste modo, pretendíamos anular qualquer rejeição a participar da pesquisa. Pela anuência dos sujeitos e o número de pseudônimos utilizados, por exemplo, *everybody dance now*, *smart*, *spickee*, acreditamos que esta decisão viabilizou a

coleta. Por outro lado, inviabilizou a realização de entrevista. Além dessas explicações, foi enfatizado que a justificativa dada por eles às questões era o que, de fato, importava para o pesquisador, não sendo considerada importante a correção da resposta.

Na análise dos dados, buscaremos identificar nas respostas dos alunos os elementos da concepção mobilizada por eles, segundo categorização previamente definida a partir da literatura utilizada nesta dissertação, dos resultados de cinco pré-testes aplicados individualmente e dos resultados da análise dos protocolos do estudo piloto (cf. capítulo 6). Esta categorização está sintetizada no Apêndice D.

5.1 Sujeitos

O universo deste estudo foi constituído por 334 alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de cinco escolas particulares do Agreste de Pernambuco. A escolha deste ano escolar deve-se ao fato destes alunos já terem passado pelo ensino formal das equações do primeiro grau, que normalmente ocorre a partir do 7º ano. Por este motivo, supõe-se que a resolução dessas equações lhes seja familiar.

Cada sujeito respondeu individualmente a um teste escrito composto por sete questões. Eles tiveram cinquenta minutos para responder individualmente as questões.

De agora por diante, denominaremos alunos os sujeitos desta pesquisa.

5.2 Instrumento de coleta

Um teste escrito (cf. apêndices A, B) contendo sete questões foi desenvolvido de maneira que contemplasse as seguintes categorias prévias de análise: *solução por definição, solução por substituição, solução por resolução, tratamento algébrico realizado no processo de resolução, tratamento algébrico realizado independente do processo de resolução, tratamento algébrico apresentado no processo de resolução,*

tratamento algébrico apresentado independente do processo de resolução, sinônimo de igualdade, palavras correlatas, reflexividade, simetria e transitividade (cf. seção 5.3).

Fez parte do processo de elaboração deste instrumento de coleta a aplicação de cinco pré-testes. Estes testes não foram aplicados simultaneamente. Eles foram sendo ajustados ao nosso propósito de acordo com os resultados dos testes antecedentes. Cada um deles foi realizado por apenas um estudante. Estes estudantes cursavam um dos dois últimos anos do Ensino Fundamental de uma escola particular da cidade do Recife.

As questões que compõem o teste estão divididas em dois blocos, que foram aplicados sucessivamente, na mesma hora aula.

O primeiro bloco é composto por três questões que buscam responder a seguinte questão: Os alunos conhecem o termo equações equivalentes?

O segundo bloco é composto pelas quatro questões restantes, que buscam identificar quais concepções de equivalência os alunos do Ensino Fundamental mobilizam quando resolvem problemas de equações do primeiro grau, incluindo aquelas a respeito das propriedades de equivalência.

No momento do teste o pesquisador entregava as três primeiras questões (primeiro bloco):

- 1) O que são equações equivalentes?
- 2) Dê um exemplo de duas equações equivalentes.
- 3) O que você faz para descobrir que duas equações são equivalentes?

As demais questões (segundo bloco) foram entregues aos alunos à medida que eles devolviam as três primeiras. Não foi estipulado tempo para a entrega da primeira etapa.

5.3 Categorias de análise

Como dissemos anteriormente, as categorias de análise foram determinadas previamente a partir da literatura utilizada nesta dissertação e dos resultados de cinco pré-testes aplicados. Três destas categorias são relacionadas ao conjunto

solução: *solução por definição, solução por substituição, solução por resolução*. Quatro referem-se ao tipo de tratamento algébrico: *tratamento algébrico realizado no processo de resolução, tratamento algébrico realizado independente do processo de resolução, tratamento algébrico apresentado no processo de resolução, tratamento algébrico apresentado independente do processo de resolução*. Outras três referem-se às propriedades que definem uma relação de equivalência: *reflexividade, simetria e transitividade*. Finalmente, a concepção *palavras correlatas* relaciona-se a designação nominal da equivalência entre equações e a concepção *sinônimo de igualdade* refere-se a um caso particular da relação de equivalência. A partir da análise dos dados do estudo piloto (cf. capítulo 6), observamos a necessidade de inclusão de duas novas categorias: *equivalência na equação* e *comparação lado a lado*.

As categorias prévias podem ser agrupadas em dois grupos:

1º. relativo as concepções de equivalência entre equações: *solução por definição, solução por substituição, solução por resolução, tratamento algébrico realizado no processo de resolução, tratamento algébrico realizado independente do processo de resolução, tratamento algébrico apresentado no processo de resolução, tratamento algébrico apresentado independente do processo de resolução, sinônimo de igualdade, equivalência na equação* e *comparação lado a lado*;

2º. relativo as concepções referentes ao domínio das propriedades de equivalência: *reflexividade, simetria e transitividade*.

Para dar conta de categorizar todas as respostas criamos também a categoria *palavras correlatas* que não se refere de fato a uma concepção, mas a termos correlatos utilizados pelos alunos.

As categorias do primeiro grupo foram determinadas a partir de diferentes fontes: Linchevski; Sfard (1991), Lima (2007) e dos cinco pré-testes que auxiliaram na construção do instrumento de coleta.

Os resultados de Linchevski; Sfard (1991), já citados, apontam a possibilidade de transformar uma equação em outra como critério quase absoluto para a equivalência. Isto nos fez questionar quais são as concepções dos alunos que estão relacionadas com a própria definição de equações equivalentes – duas equações são equivalentes quando possuem o mesmo conjunto solução. A partir desta

questão definimos as categorias relativas ao conjunto solução: *solução por definição*, *solução por substituição* e *solução por resolução*.

Os resultados de Lima (2007) evidenciam a concepção *Conta*. Segundo a autora, esta concepção tem como consequências procedimentos que não obtêm equações equivalentes. Isto nos fez questionar quais são as concepções dos alunos sobre equivalência entre as equações que compõem os procedimentos de resolução? A partir deste questionamento definimos as categorias relativas aos procedimentos algébricos: *tratamento algébrico realizado no processo de resolução*, *tratamento algébrico realizado independente do processo de resolução*, *tratamento algébrico apresentado no processo de resolução* e *tratamento algébrico apresentado independente do processo de resolução*.

As concepções *sinônimo de igualdade* (fig. 12) e *palavras correlatas* (fig. 13) foram definidas a partir das respostas dos estudantes nos cinco pré-testes.

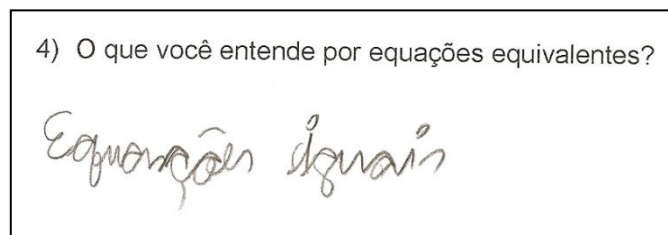


Figura 12 – Exemplo da mobilização da concepção *SI*, resposta de Adão.

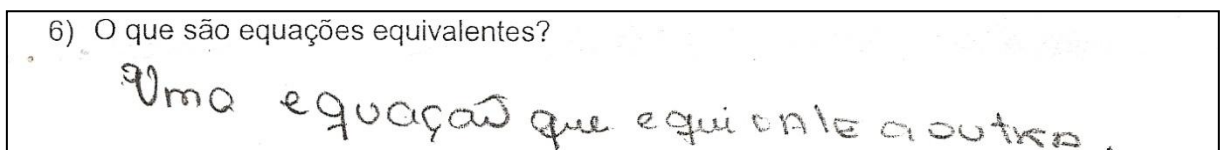


Figura 13 – Exemplo da mobilização da concepção *PC*, resposta de Eva.

As categorias do segundo grupo foram determinadas a partir de questão levantada por nós, proveniente dos resultados de Attorps; Tossavainen (2008). Neste estudo, os autores afirmam que os erros de concepção sobre equações relacionados com as propriedades da relação de equivalência são habituais entre os estudantes de licenciatura de matemática. Daí a questão: os alunos mobilizam as propriedades da relação de equivalência? A partir desta questão definimos as

categorias relativas às propriedades de equivalência: *reflexividade, simetria e transitividade*.

5.3.1 Categorias relativas às concepções de equivalência entre equações

Solução – O aluno tem a concepção de equivalência entre duas ou mais equações a partir da identificação do mesmo conjunto solução.

- Por definição – **SD** – o aluno aceita que ter a mesma solução é o que determina a equivalência entre duas equações sem necessidade de refazer a resolução do problema (fig. 14).

	Equação A $2m = 3(5 - m)$	Equação B $5x - 17 = 2x - 8$
Resolução	$2m = 3(5 - m)$	$5x - 17 = 2x - 8$
	$2m = 15 - 3m$	$5x - 2x = 17 - 8$
	$2m + 3m = 15$	$3x = 9$
	$5m = 15$	$x = \frac{9}{3}$
	$m = \frac{15}{5}$	$x = 3$ Solução
	$m = 3$ Solução	
a) Podemos afirmar que as equações A e B são equivalentes? Justifique sua resposta.		
Sim pois possuem o mesmo resultado.		

Figura 14 – Exemplo da mobilização da concepção SD, retirado do protocolo A002, de um sujeito de nossa pesquisa

- Por substituição – **SS** – o aluno entende que ao substituir a incógnita pela solução a igualdade na equação se verifica (fig. 15).

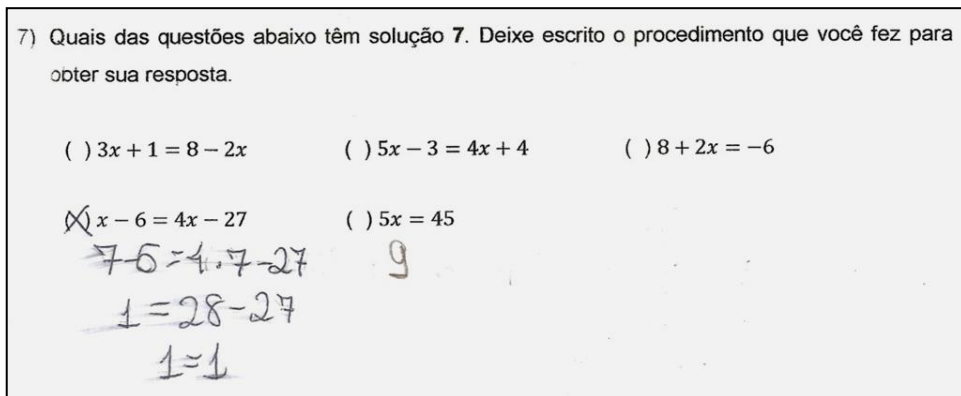


Figura 15 – Exemplo da mobilização da concepção SS, retirado do protocolo A243, de um sujeito de nossa pesquisa

- Por resolução – **SR** – o aluno entende que a solução é o resultado encontrado através de manipulação algébrica (fig. 16). Neste exemplo, a equação A é $2m = 3(5 - m)$

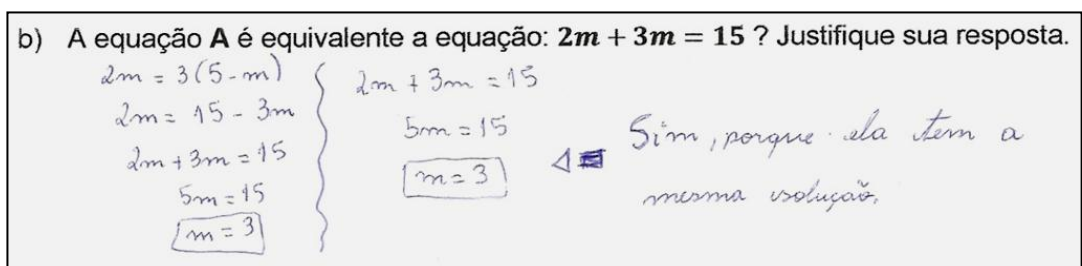


Figura 16 – Exemplo da mobilização da concepção SR, retirado do protocolo A277, de um sujeito de nossa pesquisa

Tratamento algébrico – O aluno tem a concepção de equivalência por tratamento algébrico quando acredita que duas ou mais equações são equivalentes se uma pode ser transformada na outra por manipulação algébrica.

- Realizado no processo de resolução – **TRP** – as equações são equivalentes entre si quando resultam das manipulações algébricas realizadas pelo aluno com o **propósito** de encontrar solução (fig. 17). Destacamos o termo propósito para salientar a diferença entre esta concepção e a concepção SR. Nesta concepção (TRP), o aluno entende que a equivalência entre as equações resultantes de manipulações algébricas independe do conhecimento da solução.

b) A equação A é equivalente a equação: $2m + 3m = 15$? Justifique sua resposta.

Sim, porque a equação A é $2m = 3(5-m)$, ~~em~~ fazendo uma multiplicação iremos obter $2m = 15 - 3m$, organizando $2m + 3m = 15$.

Figura 17 – Exemplo da mobilização da concepção TRP, retirado do protocolo A069, de um sujeito de nossa pesquisa

- Realizado independente do processo de resolução – **TRIP** – as equações são equivalentes entre si quando resultam das manipulações algébricas realizadas pelo aluno independentemente do **propósito** de encontrar solução (fig. 18).

O que você faz para descobrir que duas equações são equivalentes?

É fazer o dobro da outra equação da
sempre o mesmo resultado.

Figura 18 – Exemplo da mobilização da concepção TRIP, retirado do protocolo A305, de um sujeito de nossa pesquisa

- Apresentado no processo de resolução – **TAP** – as equações são equivalentes entre si quando resultam das manipulações algébricas apresentadas e que são realizadas com o **propósito** de encontrar solução (fig. 19).

b) A equação A é equivalente a equação: $2m + 3m = 15$? Justifique sua resposta.

R= Sim, porque $2m + 3m = 15$ aparece dentro da equação A.

Figura 19 – Exemplo da mobilização da concepção TAP, retirado do protocolo A009, de um sujeito de nossa pesquisa

- Apresentado independente do processo de resolução – **TAIP** – as equações são equivalentes entre si quando resultam de manipulações algébricas apresentadas e que são realizadas independentemente do **propósito** de encontrar solução (fig. 20).

5) Observe o quadro abaixo e responda:

$6x - 2 = 34$	(equação G)
$3x + 3x - 2 = 34$	
$3x + 3x - x - 2 = 34 - x$	
$3x + 2x - 2 = 34 - x$	
$3x + 2(x - 1) = 34 - x$	(equação H)

a) As equações G e H (quadro acima) têm a mesma solução? Justifique sua resposta.

Sim, porque a partir da equação G que foi feita a H.

Figura 20 – Exemplo da mobilização da concepção *TAIP*, retirado do protocolo A211, de um sujeito de nossa pesquisa

Sinônimo de igualdade – SI – O aluno tem a concepção de equivalência entre duas ou mais equações como sinônimo de igualdade entre equações (fig. 21). Nesse caso, também se especifica a dificuldade inerente ao uso das letras. Muitas vezes, o aluno tem dificuldade de entender que ao se fazer uma mudança na representação da variável, por exemplo, x por m , a equação permanece a mesma, e, portanto, elas são equivalentes. Também neste exemplo, a equação A é $2m = 3(5 - m)$.

b) A equação A é equivalente a equação: $2m + 3m = 15$? Justifique sua resposta.

Sim, porque é a mesma equação, só que de uma forma simplificada.

Figura 21 – Exemplo da mobilização da concepção *SI*, retirado do protocolo A098, de um sujeito de nossa pesquisa.

Palavras correlatas – PC – o aluno denomina duas equações equivalentes com palavras ou expressões correlatas como: *iguais*, *é a mesma*, para quaisquer equações equivalentes. Esta concepção indica que o aluno não formaliza o saber (fig. 22).

1) O que são equações equivalentes?

São equações que tem o mesmo valor.

Figura 22 – Exemplo da mobilização da concepção PC, retirado do protocolo A101, de um sujeito de nossa pesquisa

Equivalência na equação – EE – esta concepção é atribuída ao aluno que concebe a equivalência entre equações como a equivalência da igualdade (fig. 23).

	Equação A $2m = 3(5 - m)$	Equação B $5x - 17 = 2x - 8$
Resolução	$2m = 3(5 - m)$	$5x - 17 = 2x - 8$
	$2m = 15 - 3m$	$5x - 2x = 17 - 8$
	$2m + 3m = 15$	$3x = 9$
	$5m = 15$	$x = \frac{9}{3}$
	$m = \frac{15}{5}$	$x = 3$ Solução
	$m = 3$ Solução	

a) Podemos afirmar que as equações A e B são equivalentes? Justifique sua resposta.

na equação B.
Quando você substitui o valor de x por 3 o mesmo resultado
entra $5x - 17$ e $2x - 8$.

Figura 23 – Exemplo da mobilização da concepção EE, retirado do protocolo A174, de um sujeito de nossa pesquisa

Comparação lado a lado – CLL – esta concepção é atribuída ao aluno que concebe equivalência entre equações como a igualdade do valor de todas as expressões que compõe as equações envolvidas. Este aluno substitui o valor solução de “x” nas equações originalmente dadas, obtendo igualdades numéricas. Ele considera que as equações são equivalentes quando são obtidas as mesmas igualdades numéricas. Na Figura 24 podemos ver um exemplo do registro dessa concepção, embora algumas etapas descritas acima estejam subentendidas. Por ser a mesma questão do exemplo anterior, omitimos o quadro com as equações.

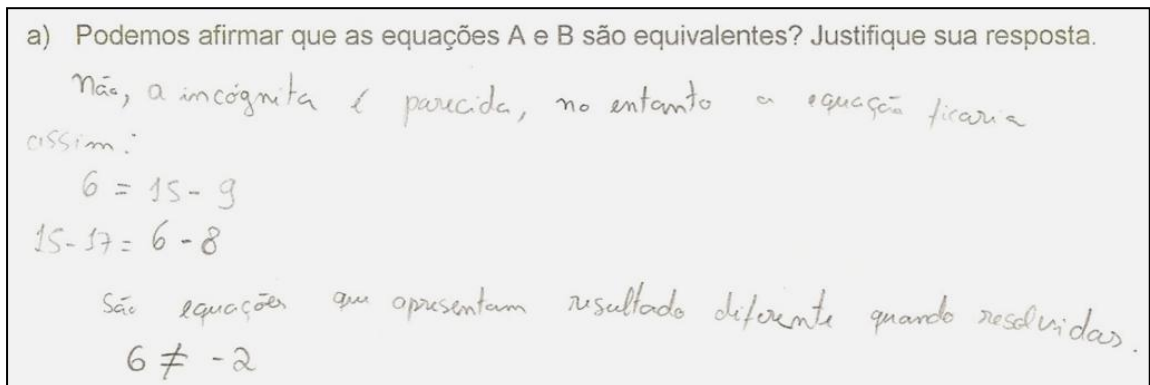


Figura 24 – Exemplo da mobilização da concepção CLL, retirado do protocolo PA002, de um sujeito do estudo piloto

Outros – esta categoria foi criada para agrupar concepções mobilizadas sem representatividade e que não fazem parte do rol de concepções previamente definidas.

5.3.2 Categorias relativas ao domínio das propriedades de equivalência.

O aluno tem a concepção de equivalência pelas propriedades de equivalência quando discerne que ao usar a transitividade, a reflexividade e a simetria as equações obtidas são equivalentes umas às outras.

Reflexividade – R – o aluno concebe que a equação A é equivalente a si mesma (fig. 25). Nesse caso, também se especifica a dificuldade inerente ao uso das letras (fig. 26). Nestes exemplos a questão é a mesma. E a equação A é $2m = 3(5 - m)$.

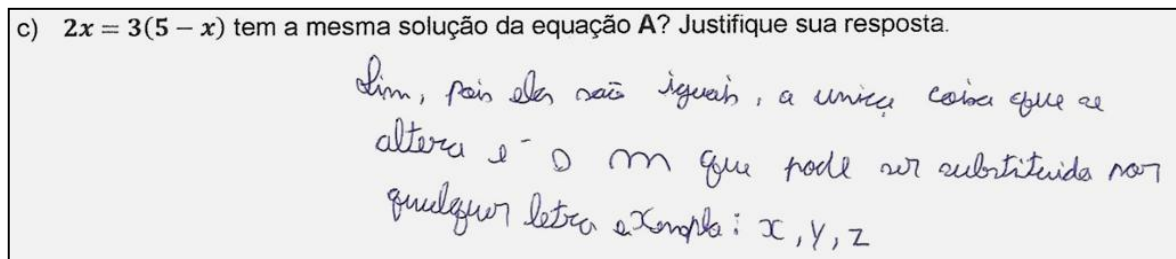


Figura 25 – Exemplo da mobilização da concepção R, retirado do protocolo A144, de um sujeito de nossa pesquisa

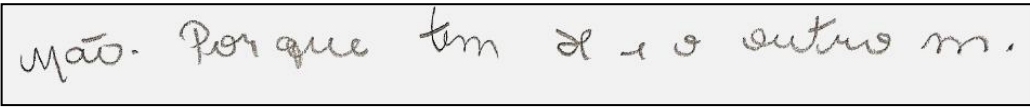


Figura 26 – Exemplo da dificuldade inerente ao uso das letras, retirado do protocolo A112, de um sujeito de nossa pesquisa

Simetria – S – o aluno reconhece que se a equação A é equivalente a B, então B é equivalente a A (fig. 28). A questão se refere ao quadro apresentado na Figura 27.

$6x - 2 = 34$	(equação G)
$3x + 3x - 2 = 34$	
$3x + 3x - x - 2 = 34 - x$	
$3x + 2x - 2 = 34 - x$	
$3x + 2(x - 1) = 34 - x$	(equação H)

Figura 27 – Quadro da questão 5 do nosso instrumento de coleta de dados

b) Partindo da equação H, podemos chegar à equação G (quadro acima) usando regras válidas na matemática? Justifique sua resposta.

Sim, é só se fazer a operação contrária feita no quadro. São regras básicas da equação.

Figura 28 – Exemplo da mobilização da concepção S, retirado do protocolo A211, de um sujeito de nossa pesquisa

Transitividade – T – o aluno reconhece que se as equações A e B são equivalentes e B e C são também equivalentes, então A é necessariamente equivalente a C (fig. 29).

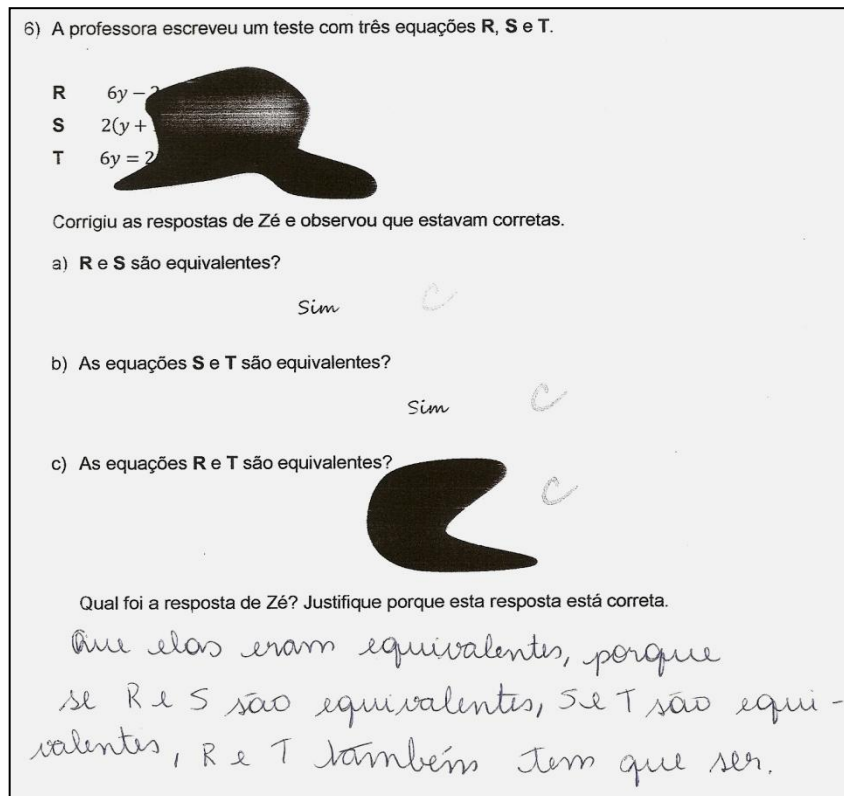


Figura 29 – Exemplo da mobilização da concepção T, retirado do protocolo A198, de um sujeito de nossa pesquisa

5.4 Análise a priori das questões.

Nesta seção, analisaremos as sete questões que compõem o instrumento de coleta. Iniciaremos apresentando as questões da **Parte 1**, seguida do seu propósito. Logo depois, apresentamos, uma a uma, as questões da **Parte 2** com sua respectiva análise.

Parte 1

- 1) O que são equações equivalentes?
- 2) Dê um exemplo de duas equações equivalentes.
- 3) O que você faz para descobrir que duas equações são equivalentes?

Estas três primeiras questões buscam identificar se os alunos conhecem o termo equações equivalentes, como também, os procedimentos a partir dos quais reconhecem que duas equações são equivalentes.

Parte 2

- 4) O quadro abaixo apresenta duas equações e uma das possíveis maneiras de resolvê-las corretamente.

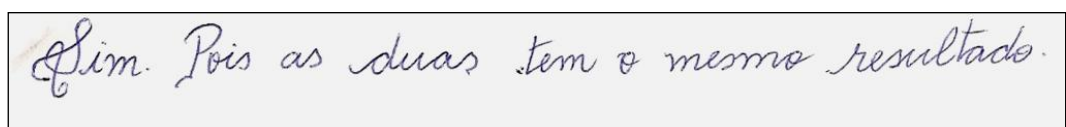
	Equação A $2m = 3(5 - m)$	Equação B $5x - 17 = 2x - 8$
Resolução	$2m = 3(5 - m)$ $2m = 15 - 3m$ $2m + 3m = 15$ $5m = 15$ $m = \frac{15}{5}$ $m = 3$ Solução	$5x - 17 = 2x - 8$ $5x - 2x = 17 - 8$ $3x = 9$ $x = \frac{9}{3}$ $x = 3$ Solução

- a) Podemos afirmar que as equações **A** e **B** são equivalentes? Justifique sua resposta.

Com o item **a** desta questão pretende-se identificar se o aluno tem a concepção que denominamos *solução*, ou seja, se ele identifica a equivalência entre equações através da propriedade que define equações equivalentes, conjunto solução, associada ao processo de resolução.

A justificativa nos ajudará a inferir quais concepções o aluno apresenta:

- Se o aluno justifica que as equações **A** e **B** são equivalentes porque têm a mesma solução, tal como na Figura 30, apenas citando o resultado fornecido, classificaremos sua concepção de *solução por definição*.



Sim. Pois as duas tem o mesmo resultado.

Figura 30 – Exemplo retirado do protocolo A254, de um sujeito de nossa pesquisa

- Se o aluno realiza os procedimentos para uma das equações, substitui a incógnita da outra equação pelo resultado encontrado e verificando se é solução, diremos que ele tem a concepção de *solução por substituição*.
- Se o aluno realiza os procedimentos para responder a questão, diremos que ele tem a concepção de *solução por resolução* (fig. 31).

$$\begin{array}{l|l}
 2m = 3(5-m) & 5x - 17 = 2x - 8 \\
 2m = 15 - 3m & 5x - 2x = -8 + 17 \\
 2m + 3m = 15 & 3x = 9 \\
 5m = 15 & x = \frac{9}{3} \\
 m = \frac{15}{5} & x = 3 \\
 m = 3 &
 \end{array}$$

São, pois o resultado deu o mesmo valor

Figura 31 – Exemplo retirado do protocolo A236, de um sujeito de nossa pesquisa

b) A equação **A** é equivalente à equação: $2m + 3m = 15$? Justifique sua resposta.

Com o item **b** desta questão pretende-se identificar se o aluno tem a concepção que denominamos *tratamento algébrico apresentado no processo de resolução*, ou seja, as equações são equivalentes entre si quando resultam das manipulações algébricas apresentadas e que foram realizadas com o propósito de encontrar solução. Como está evidente na resposta do aluno A265 (fig. 32).

Sim, pois se reduzirmos a equação A ela fica igual a $2m + 3m = 15$

Figura 32 – Exemplo retirado do protocolo A265, de um sujeito de nossa pesquisa

As estratégias de justificativa nos ajudarão a inferir quais concepções o aluno apresenta:

- Se o aluno justifica que as equações **A** e a equação $2m + 3m = 15$ são equivalentes porque a equação $2m + 3m = 15$ é parte dos procedimentos realizados para encontrar a solução da equação **A**, classificaremos sua concepção de *tratamento algébrico apresentado no processo de resolução* (fig. 33).

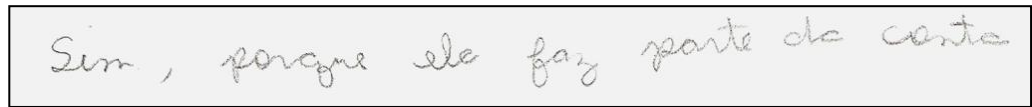


Figura 33 – Exemplo retirado do protocolo A028, de um sujeito de nossa pesquisa

- Se o aluno justifica que as equações **A** e a equação $2m + 3m = 15$ são equivalentes porque têm a mesma solução, entretanto cita os procedimentos, também classificaremos sua concepção de *tratamento algébrico apresentado no processo de resolução*.
- Se o aluno justifica que as equações **A** e a equação $2m + 3m = 15$ são equivalentes porque têm a mesma solução, apenas citando o resultado fornecido, classificaremos sua concepção de *solução por definição* (fig. 34).

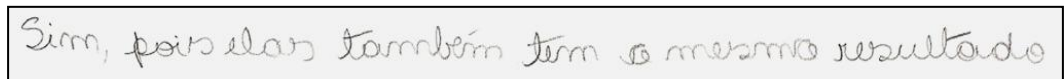


Figura 34 – Exemplo retirado do protocolo A110, de um sujeito de nossa pesquisa

- Se o aluno realiza os procedimentos para uma das equações, substitui a incógnita da outra equação e justifica sua resposta baseado no resultado encontrado, diremos que ele tem a concepção de *solução por substituição*.
- Se o aluno substitui a solução da equação **A** dada na equação $2m + 3m = 15$ e justifica sua resposta baseado no resultado encontrado, também diremos que ele tem a concepção de *solução por substituição* (fig. 35).

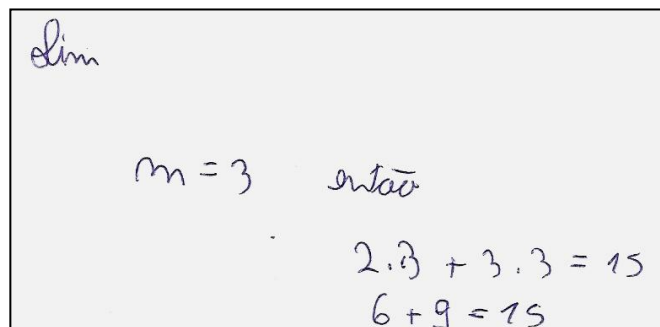


Figura 35 – Exemplo retirado do protocolo A144, de um sujeito de nossa pesquisa

- Se o aluno realiza os procedimentos para cada equação separadamente respondendo com base nas soluções encontradas, diremos que ele tem a concepção de *solução por resolução*.
- Se o aluno realiza os procedimentos para a equação $2m + 3m = 15$ respondendo com base na comparação da solução encontrada e a solução dada da equação **A**, também diremos que ele tem a concepção de *solução por resolução* (fig. 36).

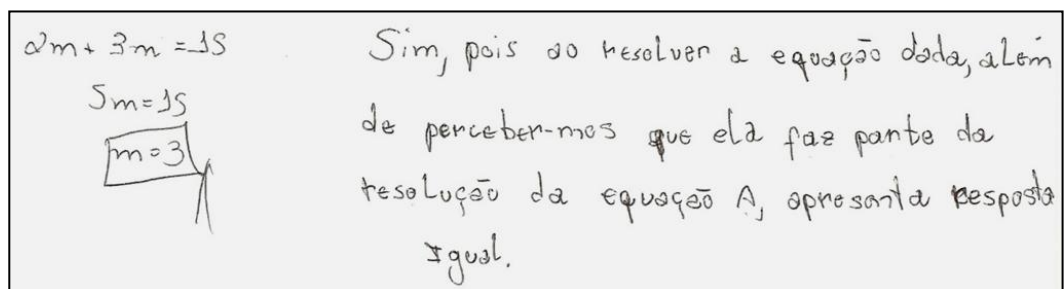


Figura 36 – Exemplo retirado do protocolo A208, de um sujeito de nossa pesquisa

c) $2x = 3(5 - x)$ tem a mesma solução da equação **A** ? Justifique sua resposta.

Com o item **c** desta questão pretende-se identificar se o aluno apresenta a concepção que denominamos *reflexividade*, ou seja, se ele identifica que uma equação **A** qualquer é equivalente a si mesma, como podemos ver na Figura 37.

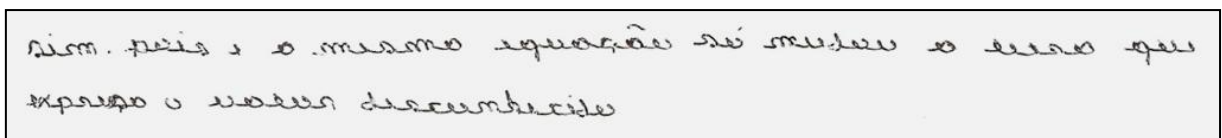
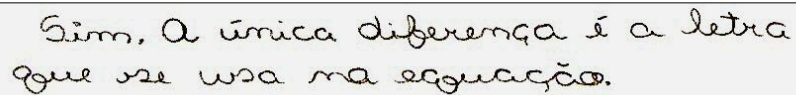


Figura 37 – Exemplo retirado do protocolo A045, de um sujeito de nossa pesquisa

As estratégias de justificativa nos ajudarão a inferir quais concepções o aluno apresenta:

- Se o aluno justifica que as equações $2x = 3(5 - x)$ e **A** são equivalentes por ser a mesma equação, classificaremos sua concepção de *reflexividade* (fig. 38).



Sim, a única diferença é a letra que se usa na equação.

Figura 38 – Exemplo retirado do protocolo P002, de um sujeito do estudo piloto

- Se o aluno justifica que as equações $2x = 3(5 - x)$ e **A** são equivalentes por terem a mesma solução, apenas citando o resultado fornecido, diremos que ele tem a concepção de *solução por definição* (fig. 39).



Sim, pois o resultado final é o mesmo.

Figura 39 – Exemplo retirado do protocolo A188, de um sujeito de nossa pesquisa

- Se o aluno realiza os procedimentos para uma das equações, substitui a incógnita da outra equação pela solução primeira e justifica sua resposta baseado no resultado encontrado, diremos que ele tem a concepção de *solução por substituição*.
- Se o aluno substitui a incógnita da equação $2x = 3(5 - x)$ pela solução apresentada da equação **A** e justifica sua resposta a partir do resultado encontrado, também classificaremos sua concepção de *solução por substituição*.
- Se o aluno realiza os procedimentos e responde referindo-se as soluções encontradas, classificaremos sua concepção de *solução por resolução*.
- Se o aluno realiza os procedimentos para a equação $2x = 3(5 - x)$, compara a solução encontrada com a solução apresentada da equação **A** e responde referindo-se as duas soluções, classificaremos sua concepção de *solução por resolução* (fig. 40).

$$2x = 15 - 3x$$

$$2x + 3x = 15$$

$$5x = 15$$

$$x = \frac{15}{5} \quad x = 3$$

É A MESMA.

POR QUE
EU FIZ
O CÁLCULO

Figura 40 – Exemplo retirado do protocolo A072, de um sujeito de nossa pesquisa

5) Observe o quadro abaixo e responda:

$6x - 2 = 34$	(equação G)
$3x + 3x - 2 = 34$	
$3x + 3x - x - 2 = 34 - x$	
$3x + 2x - 2 = 34 - x$	
$3x + 2(x - 1) = 34 - x$	(equação H)

a) As equações **G** e **H** (quadro acima) têm a mesma solução? Justifique sua resposta.

Com o item **a** desta questão pretende-se identificar se o aluno tem a concepção que denominamos *tratamento algébrico apresentado independente do processo de resolução*, ou seja, se ele identifica a equivalência entre equações pela manipulação algébrica apresentada, que foi realizada sem o propósito da solução.

As estratégias de justificativa nos ajudarão a inferir quais concepções o aluno apresenta:

- Se o aluno justifica que as equações **H** e **G** são equivalentes porque a partir da **G** chegamos na **H** através de manipulações algébricas, diremos que ele apresenta a concepção de *tratamento algébrico apresentado independente do processo de resolução* (fig. 41).

Sim. Porque a equação é a mesma apenas escrita de uma forma mais complicada.

Figura 41 – Exemplo retirado do protocolo A045, de um sujeito de nossa pesquisa

- Se o aluno manipula algebricamente a equação **H** até chegar na **G** para responder, diremos que ele apresenta a concepção de *tratamento algébrico realizado no processo de resolução* (fig. 42).

equação H $\left\{ \begin{array}{l} 3x + 2(x-1) = 34 - x \\ 3x + 2x - 2 = 34 - x \\ 3x + 2x - 2 + x = 34 \end{array} \right.$

$\boxed{6x - 2 = 34}$
igual
a equação
G

Sim, as equações G e H tem a mesma solução.

Figura 42 – Exemplo retirado do protocolo A116, de um sujeito de nossa pesquisa

- Se o aluno resolve a equação **H** e cita que a equação **G** faz parte dos procedimentos, também diremos que ele apresenta a concepção de *tratamento algébrico realizado no processo de resolução* (fig. 43)

a) As equações **G** e **H** (quadro acima) têm a mesma solução? Justifique sua resposta.

sim, pois ao longo da resolução da equação H ela se modifica e em um certo ponto fica igual a equação G.

equação H $\rightarrow 3x + 2(x-1) = 34 - x$
 $3x + 2x - 2$
equação $5x - 2 + x = 34$
G $\rightarrow 6x - 2 = 34$
 $6x = 36$
 $x = 6$

Figura 43 – Exemplo retirado do protocolo A210, de um sujeito de nossa pesquisa

- Se o aluno justifica que as equações **G** e **H** são equivalentes porque têm a mesma solução, classificaremos sua concepção de *solução por definição*.
- Se o aluno resolve uma das equações, substitui a incógnita da outra equação pela solução encontrada e sua resposta está baseada na validade da solução, diremos que ele apresenta a concepção de *solução por substituição*.

- Se o aluno resolve as duas equações e sua resposta destaca as soluções encontradas, diremos que ele apresenta a concepção de *solução por resolução* (fig. 44).

Handwritten work showing the resolution of two equations, G and H, and a justification for why they do not have the same solution.

Equation G: $6x - 2 = 34$

Equation H: $3x + 2(x - 1) = 34 - x$

Resolution of Equation G:

$$6x - 2 = 34$$

$$6x = 34 + 2$$

$$6x = 36$$

$$x = \frac{36}{6}$$

$$x = 6$$

Resolution of Equation H:

$$3x + 2(x - 1) = 34 - x$$

$$3x + 2x - 2 = 34 - x$$

$$3x + 2x + x = 34 + 2$$

$$6x = 36$$

$$x = \frac{36}{6}$$

$$x = 6$$

Justification:

a) As equações G e H (quadro acima) têm a mesma solução? Justifique sua resposta.

Não, Porque um dá 6 e outro dá um.

Figura 44 – Exemplo retirado do protocolo A320, de um sujeito de nossa pesquisa

- b) Partindo da equação **H**, podemos chegar à equação **G** (quadro acima) usando regras válidas na matemática? Justifique sua resposta.

Com o item **b** desta questão pretende-se identificar se o aluno tem a concepção que denominamos *tratamento algébrico realizado no processo de resolução*, ou seja, se ele identifica a equivalência entre equações pela manipulação algébrica realizada em uma equação até chegar à outra, realizada com o propósito da solução. Entretanto, também é possível identificar se o sujeito mobiliza a concepção que denominamos *simetria* quando reconhece que se a equação **G** é equivalente a **H**, então **H** é equivalente a **G**. Além deste caso, também consideramos o reconhecimento do processo inverso de resolução como a mobilização da concepção *simetria*. Tal como mostra a Figura 45:

a Equação H surgiu a partir da Equação G, portanto é possível chegar na Equação G, usando operações inversas

Figura 45 – Exemplo retirado do protocolo P003, de um sujeito do estudo piloto

As estratégias de justificativa nos ajudarão a inferir quais concepções o aluno apresenta:

- Se o aluno justifica que as equações **H** e **G** são equivalentes porque realizou manipulações algébricas, partindo da **H** e chegando na **G**, diremos que ele apresenta a concepção de *tratamento algébrico realizado no processo de resolução* (fig. 46).

$3x + 2x - 2 = 34 - x$
 $3x + 2x + x = 34$
 $5x + x = 36$
 $6x - 2 = 34$

não
 Sim só
 arruma a equação

Figura 46 – Exemplo retirado do protocolo A023, de um sujeito de nossa pesquisa

- Se o aluno justifica que as equações **H** e **G** são equivalentes citando o inverso do processo apresentado, diremos que ele apresenta a concepção de *simetria* (fig. 47).

Sim só alterando a ordem

Figura 47 – Exemplo retirado do protocolo A100, de um sujeito de nossa pesquisa

- Se o aluno justifica que as equações **G** e **H** são equivalentes porque têm a mesma solução, classificaremos sua concepção de *solução por definição*.
- Se o aluno resolve uma das equações, substitui a incógnita da outra equação pela solução encontrada e sua justificativa é baseada no resultado encontrado, diremos que ele apresenta a concepção de *solução por substituição*.
- Se o aluno resolve as duas equações e sua resposta destaca as soluções encontradas, diremos que ele apresenta a concepção de *solução por resolução*.

6) A professora escreveu um teste com três equações **R**, **S** e **T**.

R $6y - 2$

S $2(y + 3)$

T $6y = 2$

Corrigiu as respostas de Zé e observou que estavam corretas.

a) **R** e **S** são equivalentes?

Sim

C

b) As equações **S** e **T** são equivalentes?

Sim

C

c) As equações **R** e **T** são equivalentes?



C

Qual foi a resposta de Zé? Justifique porque esta resposta está correta.

Com esta questão pretende-se identificar se o aluno tem a concepção que denominamos *transitividade*.

As estratégias de justificativa nos ajudarão a inferir quais concepções o aluno mobiliza:

- Se o aluno responde que a resposta de Zé foi *sim* e justifica como o aluno A227 (fig. 48), diremos que ele apresenta a concepção de *transitividade*.

sim, porque se R é equivalente a S e S é equivalente a T, logo R e T serão equações equivalentes

Figura 48 – Exemplo retirado do protocolo A227, de um sujeito de nossa pesquisa

- Se para o aluno a resposta de Zé foi *sim* e na justificativa o aluno recorre à igualdade, diremos que ele apresenta a concepção de *transitividade* e de *sinônimo de igualdade* simultaneamente (fig. 49).

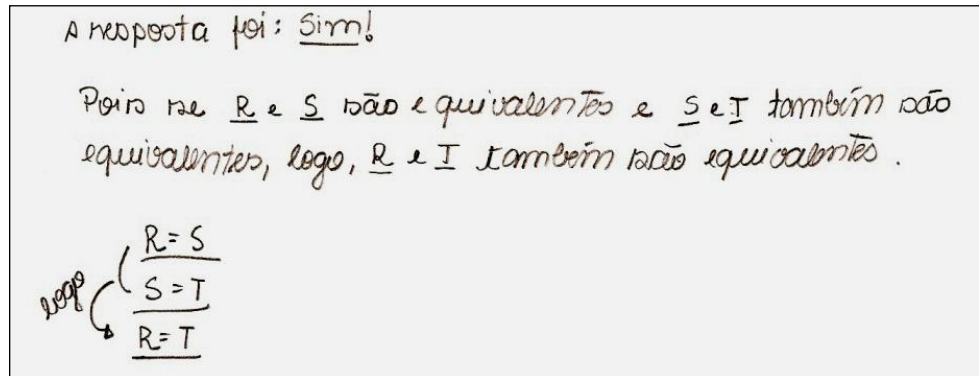


Figura 49 – Exemplo retirado do protocolo P008, de um sujeito do estudo piloto

7) Quais das questões abaixo têm solução 7. Deixe escrito o procedimento que você fez para obter sua resposta.

$$\begin{array}{lll} () 3x + 1 = 8 - 2x & () 5x - 3 = 4x + 4 & () 8 + 2x = -6 \\ () x - 6 = 4x - 27 & () 5x = 45 & \end{array}$$

Com esta questão pretende-se identificar se o aluno apresenta a concepção que denominamos *solução por substituição*, ou seja, se ele concebe a solução como o valor que torna verdadeira a equação.

As estratégias de justificativa nos ajudarão a inferir quais concepções o aluno apresenta:

- Se o aluno substitui as incógnitas pela solução apresentada como procedimento de resolução, classificaremos sua concepção de *solução por substituição*
- Se o aluno resolve as equações através de manipulações algébricas, classificaremos sua concepção de *solução por resolução* (fig. 50).

~~(X)~~ $3x + 1 = 8 - 2x$ ~~(X)~~ $5x - 3 = 4x + 4$ () $8 + 2x = -6$
~~(X)~~ $x - 6 = 4x - 27$ () $5x = 45$
 $x = \frac{45}{5}$ $x = 5$ $5x - 3 = 4x + 4$
 $x = 7$ $5x - 4x = 4 + 3$
 $x = 7$ $x = 7$
 $x - 6 = 4x - 27$
 $27 - 6 = 4x - x$
 $21 = 3x$
 $x = \frac{21}{3}$
 $x = 7$
 $3x + 1 = 8 - 2x$
 $3x - 2x = 8 - 1$
 $x = 7$
 $2x = -6 - 8$
 $x = \frac{-14}{2}$
 $x = -7$

Figura 50 – Exemplo retirado do protocolo A006, de um sujeito de nossa pesquisa

As categorias e subcategorias apresentadas anteriormente estão resumidas no Apêndice C.

CAPÍTULO 6 O ESTUDO PILOTO

O instrumento de coleta aplicado no estudo piloto é o mesmo instrumento descrito na seção 5.2, que tiveram suas questões analisadas na seção 5.4. Para classificarmos as concepções identificadas nas respostas dos alunos, deste estudo piloto, nos baseamos nas categorias previamente determinadas. Portanto, a seguir, descreveremos os sujeitos, os resultados e as conclusões destacadas a partir destes resultados.

6.1 Sujeitos

O piloto deste estudo foi constituído por 27 alunos de uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública federal de Pernambuco.

Os alunos tiveram cinquenta minutos para responder individualmente as questões.

6.2 Resultados e discussão

Os resultados serão agrupados a partir das categorias de análise. Em um primeiro momento apresentaremos aqueles que são referentes às concepções de equivalência entre equações e, em seguida, apresentaremos os resultados associados às concepções referentes ao domínio das propriedades de equivalência.

Resultados referentes às concepções de equivalência entre equações.

Como mencionado anteriormente, durante a análise dos protocolos do estudo piloto, observamos a necessidade de inclusão de duas novas categorias: *equivalência na equação e comparação lado a lado*.

A concepção *comparação lado a lado* foi identificada em 14,81% das respostas dos alunos. Ela indica que o processo de verificação é feito sem uma construção do significado.

A concepção *equivalência na equação* está associada a 37,04% dos erros ocorrido nas questões em que se buscou avaliar se o sujeito conhecia o termo equações equivalentes. Temos um exemplo desta concepção no protocolo PA034 (fig. 51).

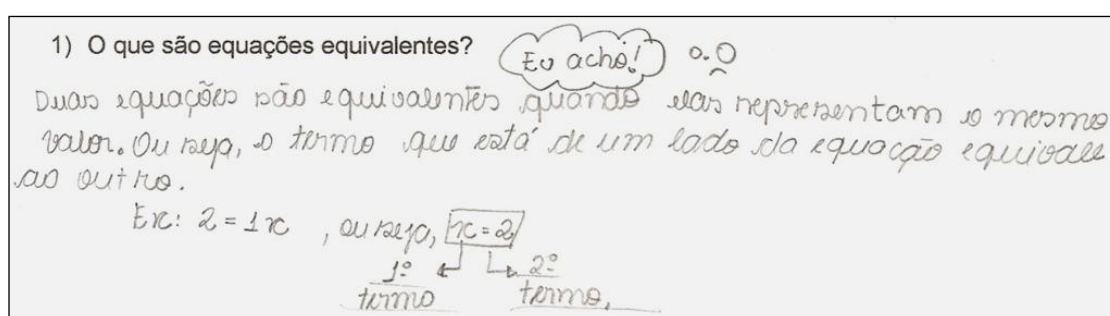


Figura 51 – Exemplo da mobilização da concepção EE, retirado do protocolo PA034, de um sujeito do estudo piloto

Destacamos que este percentual refere-se a 48% das três primeiras questões. A Figura 52 apresenta as percentagens de acertos dos alunos nas três primeiras questões.

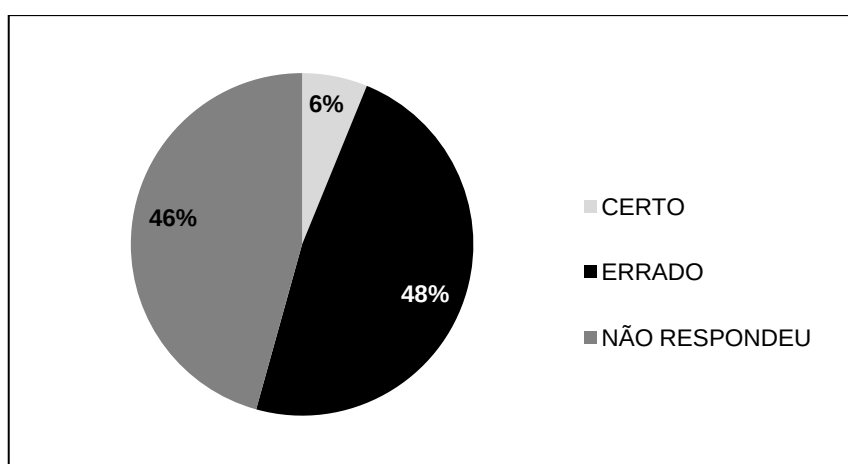


Figura 52 – Percentual de acertos dos alunos nas três primeiras questões

Também foi observado que 80% dos alunos que erraram a questão 1 acertaram o item a da questão 4. Este percentual indica que a denominação da

expressão – equivalência entre equações – não impede o processo de conceitualização do objeto.

Na sétima questão, observamos que 88,89% dos alunos, ao mobilizar a concepção *solução por resolução*, ou seja, resolveram através da resolução de cada equação, enquanto apenas 3,70% o fizeram pela substituição do valor da solução apresentado. Este resultado é oposto à nossa hipótese de que a substituição seria a escolha da maioria dos estudantes, apesar da necessidade de conversão da linguagem algébrica para a linguagem aritmética nesta escolha. A opção de 88,89% dos alunos de permanecer na linguagem algébrica pode ser devida ao fato de que “[...] a operação de conversão não é nem trivial, nem cognitivamente neutra” (DUVAL, 1999, p. 29, tradução nossa^{xxviii}). Contudo, na construção das cinco equações desta questão, incluímos três equações algébricas, ou seja, equações compostas por expressões que possuem termos incógnitos. A resolução deste tipo de equação é mais complexa do que a das equações aritméticas, ou seja, equações compostas por expressões de operações matemáticas, o que supostamente levaria o aluno a escolher a substituição.

A seguir apresentamos os percentuais relativos às concepções dos alunos (fig. 53), referentes à equivalência entre equações, que foram identificadas nos protocolos do teste piloto. Nesta distribuição, cada aluno é contado em uma concepção toda vez que ele a mobiliza ao menos uma vez. Nesse sentido, um mesmo aluno pode ser computado em duas ou mais concepções, o que faz com que a soma dos percentuais das concepções seja maior que 100%.

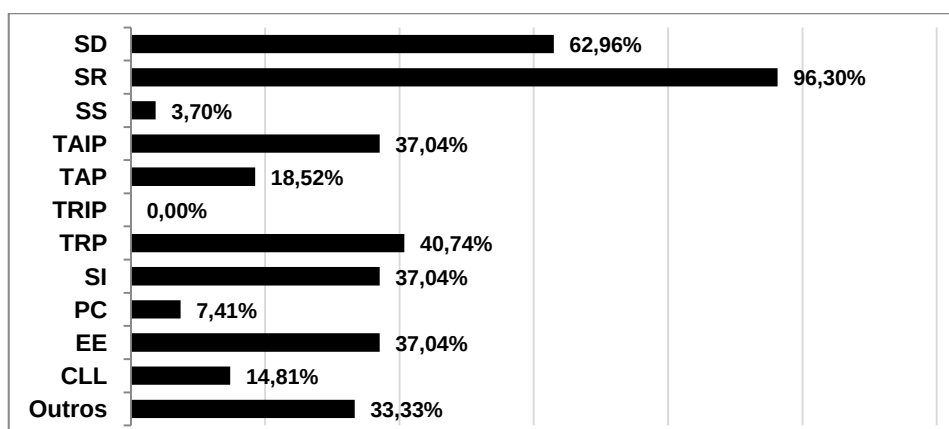


Figura 53 – Concepções de equivalência identificadas por sujeito no estudo piloto

Destes percentuais, é importante destacar que o percentual referente à concepções *solução por resolução* diminui dos 96,30% para 48,15% se não computarmos a questão 7. Esta diferença procede, por que a justificativa desta questão induz o aluno ao cálculo, quer seja numérico, quer seja algébrico e 88,89% dos alunos resolveram por cálculo algébrico.

Finalmente, o percentual nulo da concepção *tratamento algébrico realizado independente do processo de resolução* pode ter sido motivado por um erro na construção do instrumento de coleta, uma vez que não há questão no teste escrito que propicie a mobilização desta concepção.

Resultados referentes às concepções relativas às propriedades de equivalência.

Apesar da relação de equivalência estar presente em vários dos conteúdos matemáticos ministrados ao longo do Ensino Fundamental e dos alunos desse piloto estarem no último ano do Ensino Fundamental, as concepções sobre as propriedades que determinam a equivalência – *reflexividade*, *simetria* e *transitividade* – foram mobilizadas, simultaneamente, por apenas 14,81% dos alunos. Uma das prováveis explicações para este percentual é a não articulação dos conteúdos matemáticos quando estes são abordados em sala de aula. No entanto, 85,19% dos alunos mobilizaram alguma das três concepções e 55,56% mobilizaram ao menos duas concepções, o que sugere que o conjunto destas concepções está em construção.

É interessante observar que a concepção *simetria* apresenta o percentual mais baixo entre as três: *reflexividade* (59,26%), *simetria* (37,04%) e *transitividade* (59,26%). Esta diferença aponta para uma dificuldade dos sujeitos no tratamento dos processos inversos, no contexto de equações do primeiro grau. Esta dificuldade já havia sido apontada por Teles (2002).

Também foi observado que 56,25% dos alunos que mobilizaram a concepção *transitividade*, mobilizaram concomitantemente a concepção *sinônimo de igualdade*. Ou seja, em suas justificativas, esses alunos trataram a transitividade como igualdade, que é um caso particular de equivalência. Estes resultados também apontam para um conhecimento em construção em que, o sujeito chega ao conceito apoiado no caso particular da igualdade, tal como na Figura 54.

6) A professora escreveu um teste com três equações R, S e T.

R $6y - 2$

S $2(y +$

T $6y = 2$

Corrigiu as respostas de Zé e observou que estavam corretas.

R e S são equivalentes?

Sim C

a) As equações S e T são equivalentes?

Sim C

b) As equações R e T são equivalentes?

C

Qual foi a resposta de Zé? Justifique porque esta resposta está correta.

"Sim". Se R e S são equivalentes: $R = S$
 Se S e T são equivalentes: $S = T$
 Se $S = T$, então $R = T$
 $\rightarrow R = S = T$

Figura 54 – Exemplo da mobilização simultânea das concepções T e SI, retirado do protocolo P001, de um sujeito do estudo piloto

A seguir apresentamos a distribuição dos percentuais relativos às combinações das concepções referentes às propriedades de equivalência apresentadas pelos alunos nos protocolos do teste piloto (fig. 55). Como a distribuição anterior, as concepções foram computadas independentemente da questão e sua recorrência não foi contabilizada. Nesta distribuição, as categorias apresentadas são disjuntas devido ao fato de no piloto as propriedades serem mobilizadas em apenas uma questão.

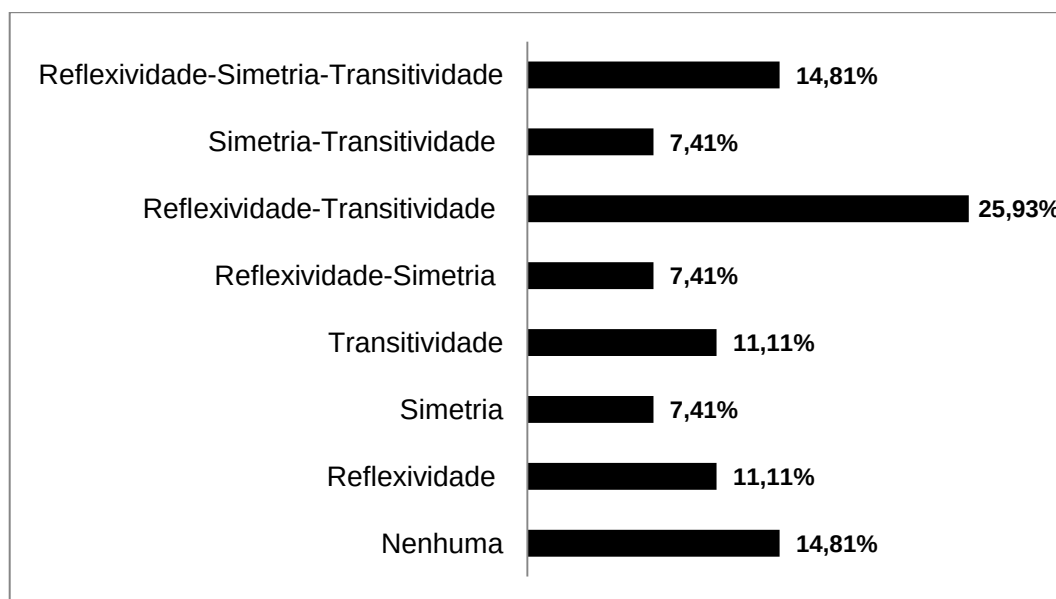


Figura 55 – Propriedades de equivalência identificadas por sujeito distribuição disjunta no estudo piloto

Esta distribuição nos permite observar que as frequências das categorias compostas de uma ou duas concepções que incluem a *simetria* são as mais baixas (7,41%). Isto indica uma dificuldade de mobilização deste conceito. Entretanto, a distribuição apresentada indica que o conjunto destas concepções está em construção.

Em resumo, a partir deste estudo piloto incluímos nas categorias definidas previamente, duas novas categorias: *comparação lado a lado* e *equivalência na equação*. Elas são a principal contribuição deste estudo para nossa pesquisa. Além deste resultado, destacamos mais quatro. Primeiro, a mobilização da concepção *solução por resolução*, na questão 7, e da nova concepção *comparação lado a lado* indicam a falta de significado do processo de verificação para o aluno. Enquanto que a mobilização da concepção *equivalência na equação* indica que a transformabilidade formal não era critério para a equivalência. Este resultado diverge do principal resultado de Linchevski; Sfard (1991). O terceiro é a mobilização simultânea das concepções *transitividade* e *sinônimo de igualdade* por mais da metade dos alunos que mobilizaram a *transitividade*. Ele indica que este conhecimento está em construção. Por fim, o processo de conceitualização da relação de equivalência entre equações não é condicionada por sua denominação, embora ela faça parte do conceito.

CAPÍTULO 7 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os resultados e discussão serão apresentados à medida que respondemos as questões levantadas até o momento. No entanto, as respostas a duas das questões – *Quais são as concepções dos alunos que estão relacionadas com a própria definição de equações equivalentes?* – e – *Quais são as concepções dos alunos que estão relacionadas com as equações que compõem o processo de resolução?* – estarão contidas na resposta à nossa questão de pesquisa – *Quais concepções de equivalência os alunos do Ensino Fundamental mobilizam quando resolvem equações do primeiro grau?*

Uma observação que precisamos fazer é sobre os parâmetros de correção adotados. Para uma resposta ser considerada correta não se considerou necessário rigor matemático, bastando que fosse mobilizada pelo aluno uma concepção incompleta, porém adequada para a situação.

Quais concepções de equivalência os alunos do Ensino Fundamental mobilizam quando resolvem equações do primeiro grau?

Ao analisarmos os dados coletados, observamos a necessidade de inclusão de quatro novas categorias: *estrutura*, *igualdade operacional*, *incógnita* e *fração*. A frequência com que estas concepções foram mobilizadas pelos alunos motivou suas inclusões.

Consideramos que o aluno mobiliza a concepção *estrutura* (**E**) quando o critério utilizado para decidir sobre equivalência entre duas ou mais equações é a semelhança entre suas estruturas (disposição dos termos) (fig. 56), tal como em Linchevski; Sfard (1991).

	Equação A $2m = 3(5 - m)$	Equação B $5x - 17 = 2x - 8$
Resolução	$2m = 3(5 - m)$	$5x - 17 = 2x - 8$
	$2m = 15 - 3m$	$5x - 2x = 17 - 8$
	$2m + 3m = 15$	$3x = 9$
	$5m = 15$	$x = \frac{9}{3}$
	$m = \frac{15}{5}$	$x = 3$ Solução
	$m = 3$ Solução	

a) Podemos afirmar que as equações A e B são equivalentes? Justifique sua resposta.

Não, pois as equações ou fórmulas principais não coincidem, ou seja, não querem dizer a mesma coisa, apesar do resultado serem iguais.

Figura 56 – Exemplo da mobilização da concepção E, retirado do protocolo A261, de um sujeito de nossa pesquisa

Esta concepção foi identificada em 16,77% das respostas dos alunos.

Uma possível justificativa para a ocorrência desta concepção é o destaque dado à conversão da linguagem natural para a linguagem algébrica no Ensino Fundamental, sem que sejam suficientemente trabalhados os conceitos matemáticos implícitos na resolução do problema.

Quanto à concepção *igualdade operacional* (IO), consideramos que o aluno a mobiliza quando a concepção operacional do sinal de igual determina a equivalência entre equações, tal como mostra a Figura 57.

2) Dê um exemplo de duas equações equivalentes.
$24 + 48 - 5 = 67$ $17 + 55 - 5 = 67$

Figura 57 – Exemplo da mobilização da concepção *igualdade operacional*, retirado do protocolo A210, de um sujeito de nossa pesquisa

Outras pesquisas reconhecem a concepção operacional em contextos algébricos (KIERAN, 1981; CAVALCANTI, 2008; LIMA, 2007). Esta concepção está associada à interpretação dada ao símbolo =, “escreva a resposta” (BOOTH, 1995, p. 27). É uma das concepções que gera dificuldades na passagem da Aritmética para a Álgebra (TELES, 2002). Em nossa pesquisa, esta concepção é reconhecida

indiretamente quando identificamos a concepção *igualdade operacional*. Ela está presente em 7,19% das respostas dos alunos.

A terceira concepção incluída foi a *incógnita (I)*. Consideramos que o aluno mobiliza esta concepção quando a representação literal da incógnita determina a não equivalência entre equações, tal como mostra a Figura 58.

Não, pois a. A quer a solução de M, e a B quer a solução de X.

Figura 58 – Exemplo da mobilização da concepção I, retirado do protocolo A010, de um sujeito de nossa pesquisa, resposta da questão 4 item a.

Esta concepção é a causa de 20,00% dos erros ocorrido no item c da questão 4. Este percentual de erros reflete a dificuldade inerente ao uso das letras.

A última concepção incluída foi a concepção *fração (F)*. Como a concepção *palavras correlatas*, ela não se refere, de fato, a uma concepção. Foi criada para dar conta da categorização de todas as respostas elaboradas pelos alunos que associam a expressão *equações equivalentes* com *frações equivalentes*, tal como mostra a Figura 59.

2) Dê um exemplo de duas equações equivalentes.

$$\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

Figura 59 – Exemplo da mobilização da concepção F, retirado do protocolo A108, de um sujeito de nossa pesquisa

Expostas as novas categorias de análise, passaremos ao principal resultado desta pesquisa: o mapeamento das concepções dos alunos sobre a equivalência entre equações do primeiro grau, ao qual nos propusemos. Para computar as concepções foi utilizado o mesmo procedimento realizado no estudo piloto, ou seja, cada aluno é contado em uma concepção toda vez que ele a mobiliza ao menos uma vez, podendo ser computado em duas ou mais concepções. Este mapeamento está sintetizado na Figura 60.

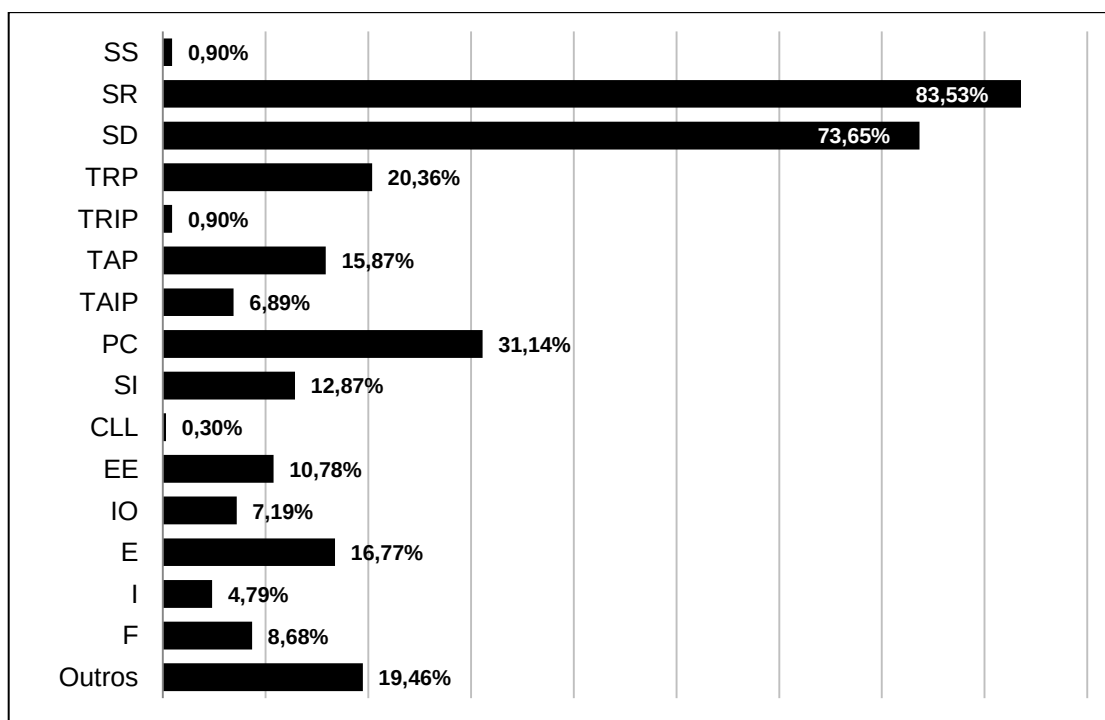


Figura 60 – Concepções de equivalência identificadas por sujeito

A partir da análise dos dados coletados, pudemos constatar a ocorrência de todas as concepções determinadas previamente. Contudo, as concepções *solução por substituição*, *tratamento algébrico realizado independente do processo de resolução* e *comparação lado a lado* tiveram percentuais não representativos (menores que 1,00%).

A concepção *comparação lado a lado* foi definida a partir do estudo piloto, pois seu percentual de frequência neste estudo foi de 14,81%. Esperávamos um percentual maior do que os 0,30% obtidos na nossa pesquisa. É provável que a diferença nas frequências seja proveniente de diferentes práticas didáticas.

O baixo percentual de ocorrência da concepção *solução por substituição* na questão 7 é oposto à hipótese de que a substituição seria a escolha da maioria dos estudantes. Esta contradição já havia ocorrido no estudo piloto, como vimos no capítulo 6. Além da hipótese levantada no estudo piloto, outra possível justificativa para este percentual é a falta de significado matemático da solução de uma equação para o aluno, o que repercute no processo de sua verificação.

Por fim, a concepção *tratamento algébrico realizado independente do processo de resolução* também obteve 0,90% de frequência. Este resultado pode ter sido motivado por uma limitação proveniente da construção do instrumento de

coleta, uma vez que não há questão no teste escrito que propicie a mobilização desta concepção.

No que se refere à frequência de ocorrência das concepções mapeadas, duas se diferenciaram das demais: a concepção *solução por resolução* e *solução por definição*. Os percentuais de alunos que mobilizaram estas concepções foram de 83,53% e 73,65%, respectivamente. As demais tiveram percentuais abaixo de 32,00%.

É importante destacar que os 83,53% dos alunos que mobilizaram a concepção *solução por resolução* diminuem para 59,28% quando não incluímos os resultados da questão 7.

A Figura 61 apresenta as frequências das concepções mobilizadas pelos alunos por questão. As células em branco representam os percentuais nulos.

Categorias	Questões									
	1	2	3	4a	4b	4c	5a	5b	6	7
SS					0,30%					0,60%
SR		8,98%	8,68%	0,60%	30,54%	40,72%	37,43%	1,50%	0,30%	75,75%
SD	14,37%	5,09%	3,89%	69,16%	20,06%	7,78%	0,60%		5,09%	
TRP	0,30%	1,20%	0,90%		2,99%	0,60%	4,49%	16,17%		
TRIP		0,30%	0,60%				0,30%			
TAP				0,30%	15,57%					
TAIP							6,89%			
PC	19,46%		2,99%	5,39%	1,80%	2,40%	5,39%	1,80%	2,10%	
SI	1,20%	0,90%	0,60%	0,30%	2,10%		0,60%		8,68%	
CLL				0,30%						
EE	8,68%	9,58%	9,58%	1,80%	0,60%	0,30%				
IO	4,79%	4,79%	4,79%	0,60%	0,90%		1,20%		0,60%	
E	2,10%	2,69%	2,40%	2,40%	0,30%	0,90%	3,29%	2,69%	6,29%	
I	0,60%	0,60%	0,30%	1,80%		2,99%			0,30%	
F	7,49%	8,08%	7,49%	0,60%						
Outros	5,09%	3,89%	5,09%	4,49%	2,40%		1,50%	1,50%	5,99%	

Figura 61 – Frequências das concepções mobilizadas pelos alunos por questão

A utilização de palavras correlatas na primeira questão se destaca entre as demais categorias. Nesta questão, sua frequência foi de 19,49%, seguida pela concepção *solução por definição* com 14,37%. Não foi representativo o uso de palavras correlatas nas demais questões. Supomos que esta diferença esta relacionada ao tipo de questão. Diferentemente, a concepção *solução por definição* teve um percentual elevado de mobilização (69,16%) na quarta questão, item a, muito acima do percentual da primeira questão. Esta diferença pode ter ocorrido porque o termo ‘equivalente’ traz consigo a noção de igualdade e esta questão destaca a mesma solução ($x = 3$) para as duas equações. Isto permite que o aluno faça suposições. Além dessas duas questões, a concepção *solução por definição* também foi mobilizada no item b da questão 4, com a frequência de 20,06%. Da mesma maneira que o item a, o item b da questão 4 também permite que o aluno faça suposições. Este pode ser o principal motivo da divergência entre estes resultados e o resultado de Linchevski; Sfard (1991, p. 232) em que o tratamento “[...] era praticamente o único critério para a equivalência” (tradução nossa^{xxix}). Outra possibilidade são as diferenças sócio-culturais. Neste caso, um estudo comparativo dos programas institucionais destes países, dos livros didáticos adotados por eles e uma análise das práticas docentes de seus professores poderiam apontar as principais diferenças no ensino e, talvez, conduzir a uma proposta eficiente.

É importante salientar que o item b da quarta questão foi elaborado com a intenção de identificar a concepção *tratamento algébrico apresentado no processo de resolução*. Esta concepção foi mobilizada por 15,57% dos alunos, contradizendo os resultados de Lima (2007). Uma hipótese para este resultado é a ênfase dada no ensino à busca pelo valor da incógnita. No último item desta questão também se destaca a mobilização da concepção *solução por resolução* (40,72%). Entretanto, neste item não se utilizou a expressão *equações equivalentes*, como nos itens a e b, mas perguntava-se pela solução das equações, o que pode ter influenciado a busca pela solução. Outra hipótese é a dificuldade inerente ao uso de diferentes letras para representar o mesmo objeto (BOOTH, 1995). Neste caso, mesma equação escrita com incógnitas diferentes, $2x = 3(5 - x)$ e $2m = 3(5 - m)$.

A questão 5, item a, também perguntava pela solução das equações. De forma semelhante à questão anterior, questionar sobre a solução das equações pode induzir o aluno a mobilizar a concepção *solução por resolução*. A frequência

desta concepção neste item foi de 37,43%, muito superior aos 6,89% de mobilização da concepção *tratamento algébrico apresentado independente do processo de resolução*. Esta concepção foi mobilizada apenas nesta questão, que foi construída para investigá-la. Quanto ao item b desta questão, a concepção *tratamento algébrico realizado no processo de resolução* foi a única mobilizada com representatividade.

A questão 7 apresentou a maior frequência de mobilização da concepção *solução por resolução* (75,75%). Considerando apenas os alunos que justificaram a resposta, esta frequência sobe para 97,68%. O uso do tratamento algébrico na quase totalidade das justificativas não garante seu acerto. O percentual dos erros foi de 67,59%, enquanto que o dos acertos foi de 32,41%. Outras pesquisas também apontam ser a resolução através de procedimentos algébricos uma tendência da maioria dos alunos, ou mesmo da sua totalidade, como no estudo de Lima (s/d).

Apesar da maioria das questões referir-se à solução da equação, não podemos afirmar que esta menção foi determinante para o alto percentual de alunos que mobilizaram, em alguma das questões, a concepção *solução por resolução* (83,53%), uma vez que no item b da questão 4, em que não se emprega tal termo, esta concepção também obteve um percentual significativo.

Tanto na Figura 60 apresentado nesta seção, quanto na Figura 61 e nos dados acima, não estão inseridos os resultados referentes às concepções *reflexividade*, *simetria* e *transitividade*, que veremos na sequência ao responder a questão sobre as propriedades de equivalência.

Os alunos conhecem o termo equações equivalentes?

As três primeiras questões do teste escrito buscam responder esta pergunta, como mencionado anteriormente. A Figura 62 mostra os percentuais de acertos destas questões.

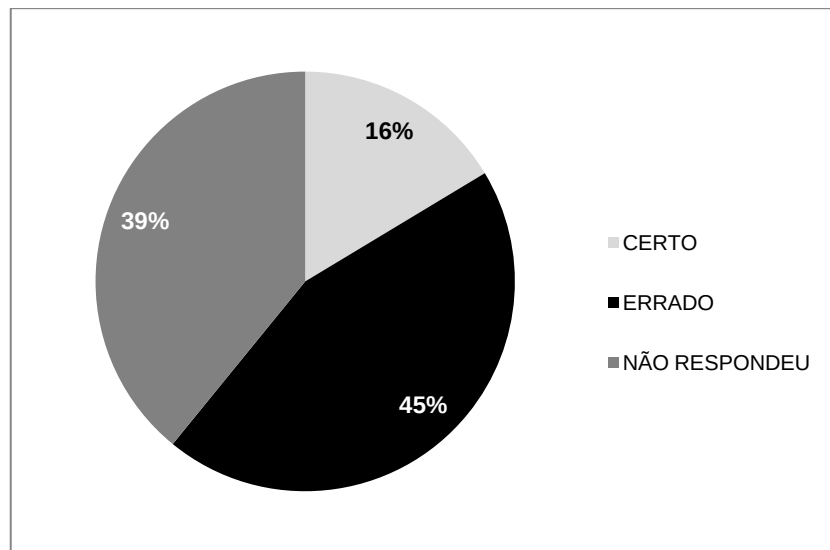


Figura 62 – Percentual de acertos dos alunos nas três primeiras questões

A concepção *equivalência na equação* foi mobilizada por 24,24% dos alunos que erraram, enquanto que 8,68% dos que erraram referiram-se às frações equivalentes, tal como na Figura 63.

2) Dê um exemplo de duas equações equivalentes.

$$\frac{2}{4} = \frac{4}{8}$$

$$\frac{2:2}{4:2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{4:2}{8:2} = \frac{2:2}{4:2} = \frac{1}{2}$$

Figura 63 – Exemplo da mobilização da concepção F, retirado do protocolo A102, de um sujeito de nossa pesquisa

Estes resultados podem ser uma consequência da pouca ênfase dada ao termo equações equivalentes. Talvez, a falta de ênfase esteja no fato deste termo definir um objeto abstrato, o conjunto solução, e a abstração ter sido posta em evidência nas propostas defendidas pelo fracassado Movimento Matemática Moderna (1960 – 1970). Todavia, o termo *equivalente* é muito utilizado no contexto das frações, podendo levar o aluno a fazer a associação deste termo com frações.

É importante destacar que 48,94% dos alunos que erraram a questão 1, acertaram o item a da questão 4. Entretanto, todos os que acertaram a questão 1, acertaram o item a da questão 4. Estes resultados indicam que a designação nominal de um objeto faz parte do processo de conceitualização, contudo, não é primordial neste processo. Na aprendizagem, não há hierarquia nas atividades cognitivas fundamentais (formação, tratamento e conversão), como destacado por Duval (2004, p. 49, tradução nossa^{xxx}) quando afirma que a conversão é “[...] uma atividade **tão** fundamental **como** as atividades de formação ou de tratamento” (grifo nosso).

Os alunos mobilizam as propriedades da relação de equivalência?

Elaboramos uma questão, ou item, para cada propriedade. O item c da questão 4 buscava identificar se o aluno mobilizava a *reflexividade*. O item b da questão 5 buscava identificar se o aluno mobilizava a *simetria*, além da concepção *tratamento algébrico realizado no processo de resolução*. Por fim, a questão 6 buscava identificar se o aluno mobilizava a *transitividade*.

A Figura 64 detalha a frequência destas três concepções.

Categorias	Questões									
	1	2	3	4a	4b	4c	5a	5b	6	7
R						29,04%				
S							1,50%	9,28%		
T							2,10%	6,59%	27,54%	

Figura 64 – Frequências da mobilização das propriedades de equivalência pelos alunos, por questão

Apesar da dificuldade inerente ao uso de diferentes letras representando a incógnita de uma equação (BOOTH, 1995), a *reflexividade* é identificada, em 29,04% dos protocolos, percentual próximo do percentual referente à *transitividade* na questão 6. Entretanto, a *simetria* apresentou, no item b da questão 5, o percentual

de 9,28%, que aponta para uma dificuldade na conceitualização desta propriedade. Como no estudo piloto, as dificuldades dos alunos de mobilizarem a *simetria* se evidenciam nos resultados da análise dos dados. Esta dificuldade pode ser proveniente do tipo de questão proposta aos alunos (questão 5, item b). Nesta questão avaliávamos a simetria do processo de resolução, o que envolve propriedade transitiva. Contudo, a concepção *transitividade* só foi mobilizada por 6,59% dos alunos, nesta questão, além da *simetria* não ter sido concomitantemente mobilizada. A simultaneidade ocorreu em 4,19% das respostas dos alunos, como podemos ver na Figura 65.

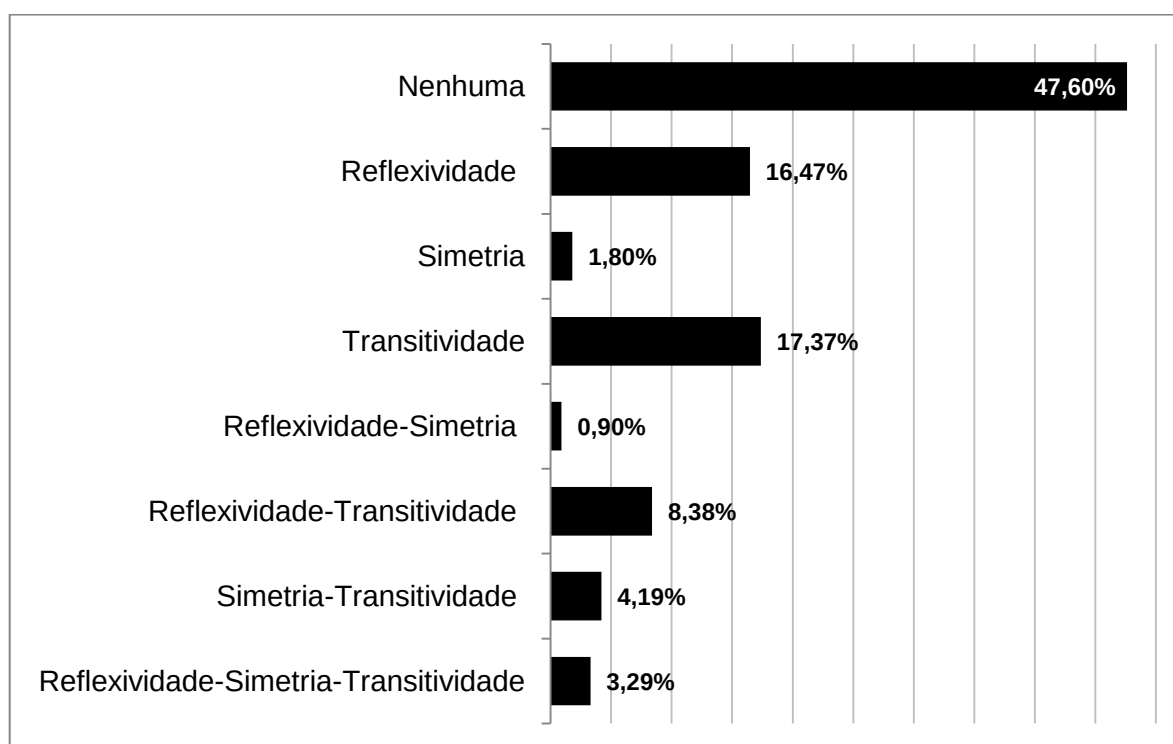


Figura 65 – Propriedades de equivalência identificadas por sujeito, distribuição disjunta

Não é representativo o percentual de alunos que mobilizaram simultaneamente as três concepções referentes às propriedades da relação de equivalência, apenas 3,29%. No entanto, 52,40% dos alunos mobilizaram alguma das três concepções e 16,79% dos alunos mobilizaram duas ou mais propriedades de equivalência, ao mesmo tempo. Sinalizando um conhecimento em construção.

Com um percentual menor que o do estudo piloto, 26,13% dos alunos que mobilizaram a concepção *transitividade* mobilizaram simultaneamente a concepção *sinônimo de igualdade* na questão 6.

Para completarmos o mapeamento ao qual nos propusemos, sintetizamos na Figura 66 os resultados referentes as propriedades de equivalência.

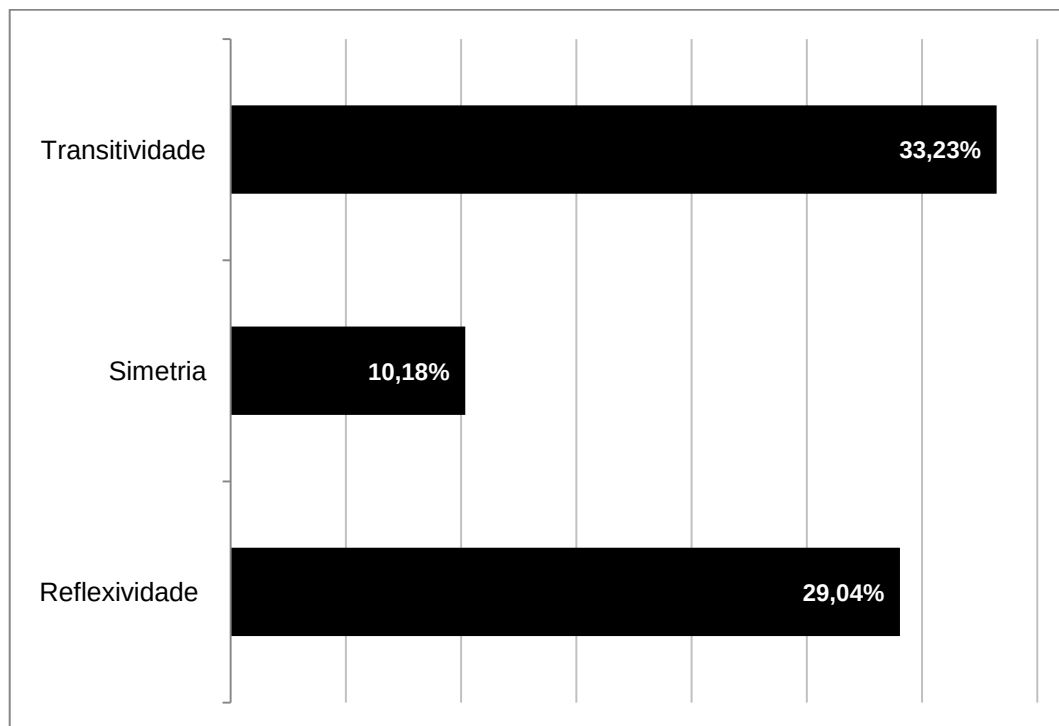


Figura 66 – Propriedades de equivalência identificadas por sujeito

Como no estudo piloto, a concepção *simetria* apresenta o percentual mais baixo entre as três: *reflexividade* (29,04%), *simetria* (10,18%) e *transitividade* (33,23%).

CONCLUSÃO

Este estudo está vinculado a um projeto em desenvolvimento no Centro Acadêmico do Agreste cujo principal objetivo é estudar as decisões didáticas de professores e os conhecimentos que as influenciam. Como estas decisões são tomadas em função do conhecimento do professor sobre o aluno, como sujeito aprendiz (LIMA, 2009), considera-se importante conhecer a priori suas concepções sobre uma determinada noção matemática. Nesta perspectiva, estabelecemos como nosso principal objetivo identificar as concepções de equivalência entre equações que os alunos mobilizam quando resolvem problemas que envolvam equações do primeiro grau. Para alcançar tal objetivo, buscamos aporte teórico na literatura existente e em elementos da Teoria do Registro de Representações Semióticas de Duval. O levantamento dos dados foi feito através de um teste escrito, individual, que contém sete questões. Participaram deste levantamento 334 alunos de cinco escolas do agreste pernambucano. As respostas destes alunos foram categorizadas a partir das quinze categorias de análise construídas previamente.

Em nossa análise, buscamos responder as questões levantadas ao longo desta dissertação, de modo a alcançar nossos três objetivos específicos: mapear as concepções dos alunos quanto ao significado de equivalência entre equações; investigar em que medida o aluno entende que obtém equações equivalentes no processo de resolução de uma equação e identificar o conhecimento dos alunos quanto às propriedades de equivalência.

Deste mapeamento destacou-se que as concepções *solução por resolução* e *solução por definição* são as mais mobilizadas entre os sujeitos pesquisados. No entanto, a verificação da solução parece não ter significado para estes sujeitos.

Outro aspecto relevante é que as concepções de equivalência entre equações são mobilizadas muitas vezes, mesmo que os sujeitos não conheçam esta expressão.

Por fim, a concepção *simetria* é a de menor incidência entre as concepções relacionadas às propriedades de equivalência. Este resultado pode ser consequência do tipo de questão que foi elaborada para identificarmos esta concepção, a questão 5, item b. Como já foi ressaltado no capítulo anterior, para

responder esta questão, o aluno também necessita mobilizar a *transitividade*, o que torna a resolução mais complexa. Adicionalmente, há a dificuldade dos sujeitos no tratamento dos processos inversos, no contexto de equações do primeiro grau (TELES, 2002), como mencionamos no capítulo 6.

Como principal limitação de nosso estudo, percebemos que poderíamos ter acrescentado ao instrumento de coleta de dados uma entrevista individual semi-estruturada. Deste modo, poderíamos esclarecer algumas respostas que não permitiram a identificação das concepções mobilizadas pelo aluno, além de investigarmos as razões pelas quais as concepções foram mobilizadas. Tal limitação sugere estudos que o ampliem.

Outra limitação, que foi apontada no capítulo 7, está relacionada à ausência de uma questão, no instrumento de coleta, que permitisse identificar a concepção *tratamento algébrico realizado independente do processo de resolução*.

Os resultados desta pesquisa suscitam novas inquietações a respeito de seu tema, tais como:

O que leva o aluno a mobilizar determinada concepção em certo tipo de questão?

Em que medida as concepções dos alunos, sobre equivalência entre equações, são afetadas pelas práticas docentes?

Quais práticas docentes privilegiam a mobilização de determinadas concepções?

Por fim, esperamos com a apresentação de nossas inquietações, que novos pesquisadores venham a ter o seu interesse despertado por estas questões.

REFERÊNCIAS

ARAUJO, Elizabeth Adorno. **Influencias das habilidades e das atitudes em relação à matemática e a escolha profissional**. 1999. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, 1999.

ARAÚJO, Abraão Juvêncio de. **O ensino de Álgebra no Brasil e na França: Estudo sobre o ensino de equações do 1º grau à luz da Teoria Antropológica do Didático**. 2009. Tese (Doutorado em Educação) - Programa de Pós-graduação em Educação. Centro de Educação. Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2009.

ATTORPS, Iiris; TOSSAVAINEN, Timo. **On the equivalence relation in students' concept image of equation**. 2008. Disponível em: <<http://www.mai.liu.se/SMDf/madif6/AttorpsTossavainen.pdf>> Acesso em 20 de setembro de 2008.

BOOTH, Lesley R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org.). **As idéias da álgebra**. Tradução Hygino H. Domingues. 6. ed. São Paulo: Atual, 1995, p. 23-36.

BRASIL, Ministério da Educação MEC, **Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN: Matemática**. Brasília, 1997, 142 p.

BRASIL, Ministério da Educação MEC, **Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN: terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental: Matemática**. Brasília, 1998, 152 p.

BRITO MENEZES, Anna Paula de Avelar. **Contrato Didático e Transposição Didática: Inter-relações entre os Fenômenos Didáticos na Iniciação à Álgebra na 6ª série do Ensino Fundamental**. 2006. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-graduação em Educação. Centro de Educação. Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2006. Disponível em: <http://www.ce.ufpe.br/posemeducacao/documentos/Teses_2006/Anna_Paula_de_Avelar_Brito_Menezes.pdf> Acesso em 11 de fevereiro de 2009.

CARRAHER, David W.; SCHLIEMANN, Analúcia Dias; BRIZUELA, Bárbara M. Early Algebra, Early Arithmetic: Treating Operations as Functions. Plenary presentation. **XXII Meeting of the Psychology of Mathematics Education**, North American Chapter, Tucson, AZ, 2000. Available in CD with video excerpts. Disponível em: <http://earlyalgebra.terc.edu/our_papers/2003/Carraheretall_PMENA2000_PBS.pdf> Acesso em 29 de maio de 2009.

CAVALCANTI, José Dilson Beserra. **Concepções de Alunos do 3º ano do Ensino Médio Sobre o Significado do Símbolo “=” em contextos aritméticos e algébricos**. 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências) - Programa de Pós-graduação em Ensino das Ciências. Departamento de Educação. Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2008.

CURY, Helena Noronha et al. Álgebra e educação algébrica: concepções de alunos e professores de matemática. **Educação Matemática em Revista**. Rio Grande do Sul, v.4, n.4, 2002, p. 9-15. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/diaadia/diadia/arquivos/File/conteudo/artigos_teses/MATEMATICA/Artigo_Cury.pdf> Acesso em 29 de outubro de 2008.

DUVAL, Raymond. Basic Issues for Research in Mathematics Education. **Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME) 24th**, Hiroshima, Japan, HI, v. 1, 2000, p. 55-69. Disponível em: <http://www.eric.ed.gov/ERICDocs/data/ericdocs2sql/content_storage_01/0000019b/80/1a/39/1a.pdf> Acesso em 20 de julho de 2009.

_____, Raymond. **Representation, vision and visualization**: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. Disponível em: < <http://pat-thompson.net/PDFversions/1999Duval.pdf> > Acesso em 20 de julho de 2009.

_____, Raymond. **Semiosis y pensamiento humano** Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Tradução Myrian Vega Restrepo, 1999. Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía – Grupo de Educación Matemática. 2. ed. Santiago de Cali, Colombia: 2004. (Trabalho original publicado em 1995).

_____, Raymond. **The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics**. Disponível em: <<http://math.uncc.edu/~sae/duval.pdf>> Acesso em 20 de julho de 2009.

FIORENTINI, Dario; FERNANDES, Fernando Luís Pereira; CRISTÓVÃO, Eliane Matesco. Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. **Actas em CD-Rom do V CIBEM** - Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática. Portugal, 2005.

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela; MIGUEL, Antonio. Contribuição para um Repensar... a Educação Algébrica Elementar. **Pro- posições**. Campinas, v. 4, n. 1, 1993, p. 78- 90. Disponível em: <http://mail.fae.unicamp.br/~proposicoes/textos/10-artigos-fiorentinid_etal.pdf> Acesso em 20 de fevereiro de 2010.

FREITAS, Marcos Agostinho de. **Equação do 1º grau**: métodos de resolução e análise de erros no Ensino Médio. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002. Disponível em: http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao_marcos_agostinho_freitas.pdf Acesso em 20 de setembro de 2008.

GIL, Katia Henn; PORTANOVA, Ruth. **Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de álgebra**. s/d. Disponível em: http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Poster/Trabalhos/PO53964543004T.doc Acesso em 03 de outubro de 2008.

GOMES, Maria da Conceição Vieira. 2003. **Educação Algébrica e Resolução de Problemas**: PGM 3 – Álgebra, Geometria e Aritmética de mãos dadas no ensino fundamental. s/d. Disponível em: <http://www.redebrasil.tv.br/salto/boletins2003/eda/tetxt3.htm> Acesso em 03 de outubro de 2008.

KALDRIMIDOU, Maria; TZEKAKI, Marianna. Theoretical issues in research of mathematics education: some considerations. **Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education**. European Research in Mathematics Education IV. Sant Feliu de Guíxols, Spain, 2004, p. 17-21. Disponível em: <http://cerme4.crm.es/Papers%20definitius/11/Kaldrimidoy%20Tzekaki.pdf> Acesso em 27 de novembro de 2008.

KIERAN, Carolyn. Concepts associated with the equality symbol. **Educational Studies in Mathematics**, vol. 12, 1981, p. 317- 326. Disponível em: <http://oak.ucc.nau.edu/smg224/401pdfs/algebrareadings/kieran1.pdf> Acesso em 26 de novembro de 2008.

KIERAN, Carolyn et al. Orchestrating whole-class discussions in algebra with the aid of CAS technology. In: O. Figueras, J.L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, e A. Sepúlveda (Eds.) **Proceedings of the 32th Conference of PME and PME-NA XXX**, Cinvestav-UMSNH: México, v. 3, 2008, p. 249-256.

LIMA, Iranete. **De la modélisation de connaissances des élèves aux décisions didactiques des professeurs**: étude didactique dans le cas de la symétrie orthogonale. 2006. Tese (Doutorado em Didactique des Mathématiques) - Université Joseph Fourier, Grenoble 1, Paris, 2006.

_____, Iranete Maria da Silva. Prática Docente: conhecimentos que influenciam as decisões didáticas tomadas por professores. In: DIAS, A. A; MACHADO, C. J. S.; NUNES, M. L. S. (Org.). **Educação, Direitos Humanos e Inclusão Social: currículo, formação docente e diversidades socioculturais**. João Pessoa: Editora Universitária da UFPB, v. 1, 2009, p. 51-67. Disponível em: <<http://www.ufpe.br/ppgedumatec/arquivos/Artigo%20Cientifico%20da%20Professor%20Iranete%20Lima.PDF>> Acesso em 10 de janeiro de 2010.

LIMA, Rosana Nogueira de. **Equações algébricas no Ensino Médio: Uma jornada por diferentes Mundos da Matemática**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007. Disponível em: <<http://descargas.cervantesvirtual.com/servlet/SirveObras/01316108699571054533802/005345.pdf>> Acesso em 27 de outubro de 2008.

_____, Rosana Nogueira de. **Resolução de equações: um estudo com o software CHIC**. 13 p., s/d. Disponível em: <<http://scholar.google.com.br/scholar?q=%22Resolu%C3%A7%C3%A3o+de+equa%C3%A7%C3%B5es%3A+um+estudo+com+o+software+CHIC%22ehl=pt-BRelr=>>> Acesso em 14 de novembro de 2009.

LINCHEVSKI, Liora; SFARD, Anna. Rules without reasons as processes without objects – The case of equations and inequalities. In: F. Furinghetti (Ed). **Proceedings of the 15th Conference of PME**. Assis, Italy, v. 2, 1991, p. 317-324. Disponível em: <http://www.eric.ed.gov/ERICDocs/data/ericdocs2sql/content_storage_01/0000019b/80/15/08/34.pdf> Acesso em 5 de novembro de 2009.

LINS, Romulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra Para o Século XXI**. 7. Ed. Campinas: Papirus, 2006.

LINS LESSA, Mônica Maria; FALCÃO, Jorge Tarcísio da Rocha. Pensamento e linguagem: uma discussão no campo da psicologia da educação matemática. **Psicologia: Reflexão e Crítica**. Rio Grande do Sul, v. 18, n. 3, 2005, p. 315-322. Disponível em: <www.scielo.br/pdf/prc/v18n3/a04v18n3.pdf> Acesso em 30 de setembro de 2008.

MATOS, Ana Sofia Mesquita de. **Explorando Relações Funcionais no 8.º Ano. Um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico**. 2007. Dissertação (Mestrado em Educação Especialidade em Didática da Matemática) - Departamento de Educação. Faculdade de Ciências. Universidade de Lisboa, Lisboa, 2007. Disponível em: <[http://ia.fc.ul.pt/textos/Ana%20Matos%20\(Tese%20mestrado\)%202007.pdf](http://ia.fc.ul.pt/textos/Ana%20Matos%20(Tese%20mestrado)%202007.pdf)> Acesso em 21 de setembro de 2008.

MOLINA, Marta González. 2004. **Resolución de igualdades numéricas por estudiantes de tercer grado**: Um estudio sobre la comprensión del signo igual y el desarrollo de pensamiento relacional. 2004. Trabalho de Investigação Tutelada. Departamento de Didática da Matemática. Universidad de Granada, Espanha, 2005. Disponível em: <<http://biblioteca.unirioja.es/dialnet/490677.pdf>> Acesso em 01 de outubro de 2008.

OLIVEIRA, A. T. C. C. Reflexões sobre a aprendizagem da álgebra. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, p. 35-39. a. 9, n. 12, Jun. 2002. SBEM.

RIBEIRO, Alessandro Jacques. **Equações e seus Multisignificados no ensino de Matemática**: contribuições de um estudo epistemológico. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/do/tese_alessandro_jacques_ribeiro.pdf> Acesso em 02 de setembro de 2008.

_____, Alessandro Jacques. A noção de equação e suas diferentes concepções: uma investigação baseada em aspectos históricos e epistemológicos. **Revista Brasileira de Educação Científica e Tecnológica**, p. 70-86. vol 2, n. 1, Jan./Abr. 2009. Disponível em: <<http://www.pg.utfpr.edu.br/depog/periodicos/index.php/rbect/article/viewFile/312/278>> Acesso em 29 de janeiro de 2010.

SKEMP, Richard R. **Relational Understanding and Instrumental Understanding**. (Primeira publicação em Mathematics Teaching, 77, 20–26, (1976)). Disponível em: <<http://republicofmath.wordpress.com/2010/01/08/richard-skemps-relational-understanding-and-instrumental-understanding/>> Acesso em 15 de novembro de 2009.

TELES, Rosinalda Aurora de Melo. **A relação entre aritmética e álgebra na matemática escolar**: um estudo sobre a influência da compreensão das propriedades da igualdade e do conceito de operações inversas com números racionais na resolução de equações polinomiais do 1º grau. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação) - Programa de Pós-graduação em Educação. Centro de Educação. Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2002.

USISKIN, Zalman. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org.). **As idéias da álgebra**. Tradução Hygino H. Domingues. 6. ed. São Paulo: Atual, 1995, p. 9-22. Tradução de: The National Council of Teachers of Mathematics.

VYGOTSKY, Lev S. Thinking and speech. In: RIEBER, R.; CARTON, A. (Eds.), **The collected works of LS Vygotsky**: Vol 1. Problems of general psychology . Tradução S. Sochinenil. New York: Plenum, 1987, p. 167-242. (Trabalho original publicado em 1934).

APÊNDICE A Teste escrito – Parte 1

Nome do Aluno: _____ . Série: _____

1) O que são equações equivalentes?

2) Dê um exemplo de duas equações equivalentes.

3) O que você faz para descobrir que duas equações são equivalentes?

APÊNDICE B Teste escrito – Parte 2

Nome do Aluno: _____. Série: _____.

- 4) O quadro abaixo apresenta duas equações e uma das possíveis maneiras de resolvê-las corretamente.

	Equação A $2m = 3(5 - m)$	Equação B $5x - 17 = 2x - 8$
Resolução	$2m = 3(5 - m)$ $2m = 15 - 3m$ $2m + 3m = 15$ $5m = 15$ $m = \frac{15}{5}$ $m = 3$ Solução	$5x - 17 = 2x - 8$ $5x - 2x = 17 - 8$ $3x = 9$ $x = \frac{9}{3}$ $x = 3$ Solução

- a) Podemos afirmar que as equações **A** e **B** são equivalentes? Justifique sua resposta.
- b) A equação **A** é equivalente a equação: $2m + 3m = 15$? Justifique sua resposta.
- c) $2x = 3(5 - x)$ tem a mesma solução da equação **A**? Justifique sua resposta.

5) Observe o quadro abaixo e responda:

$6x - 2 = 34$	(equação G)
$3x + 3x - 2 = 34$	
$3x + 3x - x - 2 = 34 - x$	
$3x + 2x - 2 = 34 - x$	
$3x + 2(x - 1) = 34 - x$	(equação H)

a) As equações **G** e **H** (quadro acima) têm a mesma solução? Justifique sua resposta.

b) Partindo da equação **H**, podemos chegar à equação **G** (quadro acima) usando regras válidas na matemática? Justifique sua resposta.

6) A professora escreveu um teste com três equações **R**, **S** e **T**.

R $6y - 2$

S $2(y + 1)$

T $6y = 2$

Corrigiu as respostas de Zé e observou que estavam corretas.

a) **R** e **S** são equivalentes?

Sim

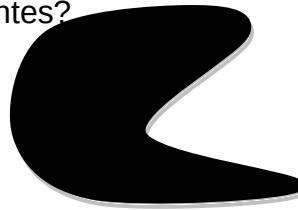
C

b) As equações **S** e **T** são equivalentes?

Sim

C

c) As equações **R** e **T** são equivalentes?



C

Qual foi a resposta de Zé? Justifique porque esta resposta está correta.

- 7) Quais das questões abaixo têm solução **7**. Deixe escrito o procedimento que você fez para obter sua resposta.

☐ $3x + 1 = 8 - 2x$

☐ $5x - 3 = 4x + 4$

☐ $8 + 2x = -6$

☐ $x - 6 = 4x - 27$

☐ $5x = 45$

APÊNDICE C Síntese das categorias previa de análise

Categorias		Subcategorias
Reflexividade		
Simetria		
Transitividade		
Solução		por substituição
		por resolução
		por definição
Tratamento algébrico		realizado no processo de resolução
		realizado independente do processo de resolução
		apresentado no processo de resolução
		apresentado independente do processo de resolução
Palavras correlatas		
Sinônimo de igualdade		
Equivalência na equação		
Comparação lado a lado		
Outros		

APÊNDICE D Síntese das categorias de análise

Categorias	Subcategorias
Reflexividade	
Simetria	
Transitividade	
Solução	por substituição
	por resolução
	por definição
Tratamento algébrico	realizado no processo de resolução
	realizado independente do processo de resolução
	apresentado no processo de resolução
	apresentado independente do processo de resolução
Palavras correlatas	
Sinônimo de igualdade	
Equivalência na equação	
Comparação lado a lado	
Igualdade operacional	
Estrutura	
Incógnita	
Fração	
Outros	

ANEXO 1 Original da Figura 4

For $x =$	1/3	-5		
Expression	Result	Result	Result	Result
1. $(x-3)(4x-3)$				
2. $(x^2+x-20)(3x^2+2x-1)$				
3. $(3x-1)(x^2-x-2)(x+5)$				
4. $(-x+3)^2+x(3x-9)$				
5. $\frac{(x^2+3x-10)(3x-1)(x^2+3x+2)}{x+2}$				

Figure 1. Numerical Substitution Task.

ANEXO 2 Original da Figura 9

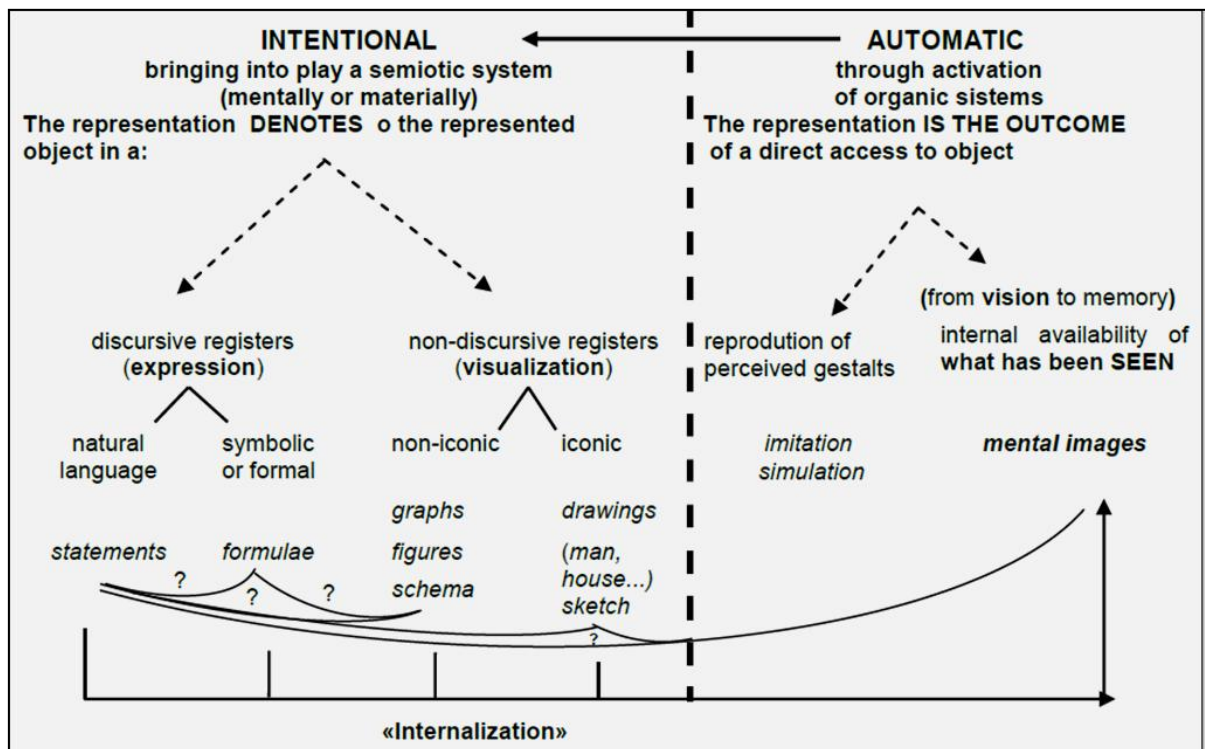


Figure 8. Various coordinations between productive systems required for mathematics understanding.

ANEXO 3 Original da Figura 10

	DISCURSIVE REPRESENTATION	NON-DISCURSIVE REPRESENTATION
MULTIFUNCTIONAL REGISTERS: Processes cannot be made into algorithms	Natural language <i>Verbal (conceptual) associations</i> <i>Reasoning:</i> - <i>arguments from observations, beliefs...</i> - <i>valid deductions from definitions or theorems</i>	Plane or perspective geometrical figures (configurations of 0, 1, 2, and 3 dimensional forms) <i>Operatory and not only perceptive apprehension</i> <i>Ruler and compass construction</i>
MONOFUNCTIONAL REGISTERS: Most processes are algorithmic	Notation systems: numeric (binary, decimal, fractional...) algebraic symbolic (formal languages)	Cartesian graphs <i>Changes of coordinate systems</i> <i>interpolation, extrapolation</i>

Figure 1 Classification of the different registers which can be mobilized in mathematical processes

-
- ⁱ [...] persists throughout elementary school and even into junior high school.
- ⁱⁱ [...]the ability to consider an algebraic equation as an expression of equivalence because both sides have the same value does not seem to be sufficient for an adequate conceptualization of the equation-solving process.
- ⁱⁱⁱ [...] equation solving involve a grasp of the notion that right and left sides of the equation are equivalent expressions, but also that each equation can be replaced by an equivalent equation (i.e., one having the same solution set).
- ^{iv} [...] the formal transformability was practically the only criterion for equivalence.
- ^v [...]It is not clear, however, whether or even how these beginnings toward interpreting the equal sing in terms of an equivalence relation develop into an awareness of the notion of equivalent equations [...].
- ^{vi} Problematizing the mathematics means making it open to discussion, that is, creating a mathematical arena in which one poses questions and tries to think deeply about the mathematics, including what might appear to be inconsistencies or contradictions and, in fact, using dilemmas provoked by the technology as a means to move one's thinking forward.
- ^{vii} [...]these three properties are completely independent
- ^{viii} [...] 1. Reflexive: $a R a$ for all $a \in X$,
 2. Symmetric: $a R b$ implies $b R a$ for all $a, b \in X$
 3. Transitive: $a R b$ and $b R c$ imply $a R c$ for all $a, b, c \in X$, [...]
- ^{ix} [...] algebra frees the child's thought from the grasp of concrete numerical relations and raises it to the level of more abstract thought, [...]
- ^x [...] by the stark separation between arithmetic and algebra.
- ^{xi} [...]equivalence of algebraic expressions and the role of restrictions in determining admissible values for the equivalence.
- ^{xii} [...] has shown that in algebra, pseudostructural conceptions may be more widely spread than suspected.
- ^{xiii} [...] unable to think in the terms of abstract objects [...]
- ^{xiv} [...] such as partial similarity and partial difference between their component formulae.
- ^{xv} [...] the misconceptions about equations which are related to the properties of the equivalence relation are surprisingly common among mathematics student teachers.
- ^{xvi} Dans le sens commun du mot, une conception peut être comprise comme une idée, une représentation ou une croyance qu'a un sujet à l'égard de quelque chose. Dans une approche constructiviste, une conception peut être définie comme un type particulier de connaissance individuelle construite dans l'interaction du sujet avec un milieu (un environnement). Elle dépend alors à la fois du milieu dans lequel le sujet se trouve et du sujet lui-même (son histoire, ses intentions...) (Charlier, 1998).
- ^{xvii} représentations, conceptions, misconceptions, alternative framework, raisonnement spontané, modèle spontané.
- ^{xviii} [...] researchers use the term "conceptions" referring to different and sometimes opposite elements: the mathematical concepts, but also the epistemological elements or more general ideas about the nature of Mathematics; specific concepts but also all mathematical concepts; the content of Mathematics, but also the mathematical knowledge; the individual knowledge, but also the knowledge shared between groups or individuals.
- ^{xix} These multiple uses and meanings of the term raise several questions about the nature of "conceptions": (I) Are they elements of the conceptual knowledge and/or of the process of conceptualization (individuals' mental constructs) or tools in the analysis of learning (researchers' constructs)? (II) Are they connected to specific mathematical concepts (like function, number etc) or can describe other elements of Mathematics (definitions, fields, roles)? (III) Which of the above mentioned meanings is ascribed to the development of other terms expressing an individual's inadequate or restricted or partial knowledge, like "concept-image/ concept-definition" (Vinner 1992), "embodied world/ proceptual world/ formal world" (Tall, 2004)?

-
- xx [...] son relativas a um sistema particular de signos: el lenguaje, la escritura algebraica o los gráficos cartesianos, y en que pueden ser convertidas en representaciones “equivalentes” en otro sistema semiótico, pero pudiendo tomar **significaciones** diferentes para el sujeto que las utiliza.
- xxi [...] a través de uma significación que se hace La aprehensión perceptiva o conceptual de um objeto.
- xxii On the contrary, monofunctional registers have been developed for one specific kind of processing, in order to have more powerful and less expensive performances [...]
- xxiii On the other hand, the understanding of mathematics requires not confusing the mathematical objects with the used representations.
- xxiv In these conditions learning mathematics means: integrate into its own cognitive architecture all needed registers as new systems of representation.
- xxv [...] la ausencia de coordinación entre los diferentes registros genera un obstáculo para los aprendizajes conceptuales.
- xxvi [...] tendieron a interpretar el signo igual como un símbolo operacional en vez de relacional [...]
- xxvii This thinking remains as children get older and advance to the upper elementary grades.
- xxviii [...] la operación de conversión no es ni trivial ni cognitivamente neutra.
- xxix [...] was practically the only criterion for equivalence.
- xxx [...] uma actividad tan fundamental como lãs actividades de formación o de tratamiento.