



Centro de Educação
Campus Universitário
Cidade Universitária
Recife-PE/BR CEP: 50.670-901
Fone/Fax: (81) 2126-8952
E. Mail: edumatec@ufpe.br
www.ufpe.br/ppgedumatec

Wagner Rodrigues Costa

**INVESTIGANDO A CONVERSÃO DA ESCRITA NATURAL PARA
REGISTROS EM ESCRITA ALGÉBRICA EM PROBLEMAS
ENVOLVENDO EQUAÇÕES DE PRIMEIRO GRAU**

Recife

2010

WAGNER RODRIGUES COSTA

INVESTIGANDO A CONVERSÃO DA ESCRITA NATURAL PARA REGISTROS EM
ESCRITA ALGÉBRICA EM PROBLEMAS ENVOLVENDO EQUAÇÕES DE
PRIMEIRO GRAU

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos

RECIFE

2010

Costa, Wagner Rodrigues

Investigando a conversão da escrita natural para registros em escrita algébrica em problemas envolvendo equações de primeiro grau/ Wagner Rodrigues Costa. – Recife : O Autor, 2010.

106 f. : il.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CE. Educação, 2010.

Inclui anexos

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Matemática - Álgebra. 3. Equações. I. Título.

37

372.7

CDU (2.ed.)

CDD (22.ed.)

UFPE

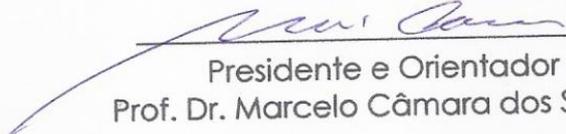
CE2010-29

WAGNER RODRIGUES COSTA

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO

"INVESTIGANDO A CONVERSÃO DA ESCRITA NATURAL PARA REGISTROS EM
ESCRITA ALGÉBRICA EM PROBLEMAS ENVOLVENDO EQUAÇÕES DO PRIMEIRO
GRAU."

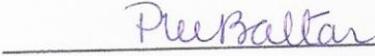
COMISSÃO EXAMINADORA:



Presidente e Orientador
Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos



Examinador Externo
Prof. Dr. Abraão Juvencio de Araújo



Examinador Interno
Prof.ª Drª Paula Moreira Baltar Bellemain

Recife, 25 de Março de 2010

Pela compreensão e motivação

dedico este trabalho a minha família,

em especial, a minha esposa Danniela e ao meu filho Dário.

AGRADECIMENTOS

Redigir essa parte do trabalho é, sem dúvida, a mais emocionante. Ela é capaz de nos fazer lembrar quantas vezes fomos ajudados e consolados nesses dois anos de dedicação. Aproveito esse momento para citar o nome daqueles que, de alguma maneira, me apoiaram.

Meus primeiros e sinceros agradecimentos vão a uma pessoa que nunca me desamparou e sempre esteve comigo me dando forças para continuar. Essa pessoa chama-se **Jesus Cristo**. Sem ele eu não teria chegado até aqui. A Ele toda honra e toda glória.

Agradeço também a minha **esposa Danniela e ao meu querido filho Dário**. Eles souberam me compreender nos momentos em que eu precisava aprofundar a pesquisa. Acredito que foi muito difícil para todos nós lhe dar com essa situação, aparentemente nova. Mas passou e a conclusão nos dá outro ânimo.

Aos meus **pais, Luiz e Dileuza**, que sempre confiaram em mim e nunca disseram que eu não seria capaz. Foram e são pessoas muito importantes na minha vida. São os meus mestres por excelência. Me ajudaram muito e me orientaram nessa caminhada.

Ao meu **irmão Wendell**, pelos bons diálogos e pela mão amiga durante esse processo. Com certeza o apoio moral foi muito importante nos momentos de dificuldades.

Ao meu **orientador, Marcelo Câmara dos Santos**, pelas suas sugestões muito pertinentes e pelas grandes contribuições. Com um modo que lhe é peculiar, mostrou o caminho da pesquisa e me ensinou como atingir o meu objetivo. Das muitas vezes que estivemos discutindo a pesquisa nunca deixou de dizer palavras que me levassem à frente. Meus sinceros agradecimentos.

Aos **colegas do grupo de pesquisa**, Fenômenos Didáticos na Classe de Matemática, pelas grandes contribuições em todo percurso da pesquisa. Souberam me mostrar o valor de um trabalho coletivo na construção do conhecimento.

A **primeira turma do mestrado do EDUMATEC** pelo incentivo e companheirismo. Em especial, aos meus parceiros de jornada, **Diógenes, Kátia e Viviane**. Muitas foram as oportunidades de estudo e aprendizagem. Aprendi muito

com eles. Lembro das muitas discussões internas e bem vindas quando estávamos definindo nossos trabalhos. Tempos bons. Agradeço muito a eles.

Aos **professores do EDUMATEC**, pelas sugestões e observações pertinentes e pelas cobranças. Leitura de textos, apresentação de trabalhos, pesquisas e muito debate. Ganhei muito com isso.

A **UFPE**, por me oportunizar um momento de crescimento profissional.

Aos meus **colegas do Colégio Visão**, muito compreensivos e motivadores em todo processo. A **direção, coordenação pedagógica** e a todos os **professores**, em especial os **de matemática**. Meus sinceros agradecimentos.

E a **todos** que me ajudaram e me motivaram para ir até o fim.

RESUMO

O presente trabalho se propõe a investigar em que medida os fatores de não congruência influenciam na conversão da escrita natural para a escrita algébrica nos problemas envolvendo equações do primeiro grau. No intuito de alcançar esse objetivo, adotamos como pressuposto teórico a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval. Segundo essa teoria, a Matemática se caracteriza pela diversidade de representações para um mesmo objeto. Um objeto pode ser representado na escrita algébrica, na forma gráfica, numérica, entre outras, de modo que a mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação é uma condição essencial para a aprendizagem em Matemática. De acordo com essa teoria, o que pode dificultar o reconhecimento de um objeto em diversas representações são os fatores de não congruência. São eles: correspondência semântica das unidades de significado, univocidade semântica terminal e conservação da ordem das unidades de significado. Nossa metodologia consistiu na elaboração e aplicação de oito problemas numa turma de oitavo ano (7ª série). Cada um dos problemas possuía variações diferentes nos fatores de não congruência de modo que fosse possível investigar a influência desses fatores na conversão. Um dos resultados encontrados nas análises se deu na dificuldade de os sujeitos converterem as equações da escrita natural para a algébrica quando os três fatores estão presentes na questão. Além disso, obtivemos como dado da pesquisa qual foi a influência mais comum que cada fator causou nos problemas. Concluímos, ressaltando que as influências dos fatores de não congruência nos problemas de equação do primeiro grau interferem na taxa de sucesso da conversão.

Palavras-chave: Fatores de não congruência. Correspondência semântica. Univocidade semântica. Conservação da ordem das unidades de significado. Registro de representação. Escrita natural e escrita algébrica.

ABSTRACT

This dissertation purposes to investigate in what degree the non congruent factors act on the conversion of natural writing to the algebra writing on the problems involving first degree equations. Intending to achieve this aim, it was adopted as presuppose theory, the theory of records and semiotic representation of Raymond Duval. According to this theory, mathematics is described by the diversity of representations of the same object. An object can be represented in the algebra writing, in the graphic form, numerical form, among others, in a way that the simultaneous mobilization of at least two representation registers is an essential condition to learn mathematics. According to this theory, what can complicate the recognition of one object in many representations are the non congruent factors . They are: semantics correspondence of the meaning units, terminal semantic univocity and conservation of meaning units order. Our methodology was the elaboration and apply of eight problems in a seventh grade group. Each problem had a different variation in the factors of non congruent factors in a way that it would be possible to investigate the influence of these factors on the conversion. One of the results found in the analysis was the difficulty the students had to convert the equations from the natural writing to the algebra writing when the three factors are in the question. Besides that, it was obtained as research data what was the most common influence that each factor caused on the problems.

In conclusion, standing out that the influences of the non congruent factors on the problems of first degree equations interfere on the conversion table of success.

Key words: Non congruent factors. Semantic Correspondence. Semantic Univocity. Conservation of the meaning units order. Representation registers. Natural writing and algebra writing.

LISTA DE QUADROS

QUADRO1 – Álgebra no Ensino Fundamental.....	16
QUADRO 2 – Concepções da álgebra e uso das variáveis.....	17
QUADRO 3 – Representação discursiva e não discursiva.....	23
QUADRO 4 – Característica dos problemas.....	34
QUADRO 5 – Lista de problemas.....	38
QUADRO 6 – Valor fixo da variável.....	40
QUADRO 7 – Critérios de não congruência e valor da variável.....	41
QUADRO 8 – Símbolo das categorias.....	51
QUADRO 9 – Síntese dos registros.....	57
QUADRO 10 – Registros algébricos.....	58
QUADRO 11 – Síntese dos problemas 03, 04 e 06.....	84
QUADRO 12 – Síntese dos problemas 05, 07 e 08.....	85
QUADRO 13 – Comparação entre os problemas 02 e 03.....	87
QUADRO 14 – Influência dos fatores.....	88

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – Reta decrescente.....	26
FIGURA 2 – Reta crescente.....	27
FIGURA 3 – Gráfico cartesiano da função quadrática.....	28

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	12
2. JUSTIFICATIVA.....	15
3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	20
3.1 O DESENVOLVIMENTO DA ÁLGEBRA E SUA RELAÇÃO COM AS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS.....	21
3.2 REPRESENTAÇÕES MENTAL E SEMIÓTICA.....	23
3.3 TRATAMENTOS E CONVERSÕES.....	25
3.4 ASSOCIAÇÃO DA TEORIA COM A QUESTÃO DE PESQUISA.....	31
4. METODOLOGIA.....	32
4.1 PÚBLICO ALVO E CONDIÇÕES DA APLICAÇÃO.....	32
4.2 CARACTERÍSTICAS DO TESTE.....	33
4.3 ANÁLISE GERAL DAS QUESTÕES DO TESTE.....	39
4.4 ANÁLISE ESPECÍFICA DAS QUESTÕES DO TESTE.....	40
4.5 ANÁLISE PRELIMINAR DAS QUESTÕES DO TESTE.....	41
5. ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS.....	51
5.1 AS CATEGORIAS DA PESQUISA.....	51
5.2 ANÁLISE INICIAL DOS RESULTADOS.....	56
5.3 ANÁLISE E DISCUSSÃO DO PROBLEMA 01.....	59
5.4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DO PROBLEMA 02.....	59
5.5 ANÁLISE E DISCUSSÃO DO PROBLEMA 03.....	64
5.6 ANÁLISE E DISCUSSÃO DO PROBLEMA 04.....	69
5.7 ANÁLISE E DISCUSSÃO DO PROBLEMA 05.....	74
5.8 ANÁLISE E DISCUSSÃO DO PROBLEMA 06.....	78
5.9 ANÁLISE E DISCUSSÃO DO PROBLEMA 07.....	81
5.10 ANÁLISE E DISCUSSÃO DO PROBLEMA 08.....	82
5.11 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS PROBLEMAS 03, 04 E 06.....	84
5.12 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS PROBLEMAS 05, 07 E 08.....	85
5.13 ANÁLISE E DISCUSSÃO GERAL DOS PROBLEMAS.....	86
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	89
REFERÊNCIAS	95
ANEXO 1 – CATEGORIAS DA PESQUISA.....	100

1 INTRODUÇÃO

O ensino de Álgebra assume um espaço bastante significativo na grade curricular das escolas brasileiras, uma vez que seu estudo está ligado ao desenvolvimento do raciocínio e à sua utilização como ferramenta para resolver problemas. Acerca dos resultados das avaliações em nível nacional sabe-se que nos itens referentes à Álgebra, o índice de acerto fica em torno de 40% em muitas regiões do país (BRASIL, 1998). Isso faz com que, ao seu ensino, seja dedicado um tempo maior de aulas quando comparada a outras áreas da Matemática, como Geometria, por exemplo, (ARAÚJO, 2001).

A excessiva manipulação algébrica, a repetição mecânica dos procedimentos são um dos focos do ensino da Álgebra. Nessa perspectiva, há um estudo das expressões algébricas, do cálculo algébrico antecipados para o aprendizado das equações. Pensa-se que quanto mais o sujeito conhecer os procedimentos algébricos melhor compreenderá como se resolve equações. O que não é verdade, como garantem os resultados de pesquisa em larga escala.

Ainda sobre esta sequência no ensino das equações, Miguel, Fiorentini e Miorim (1992) mostram a existência de três principais concepções no ensino da Álgebra. Eles ressaltam que durante o século XIX e meados do XX, tanto no Brasil como em outros países a concepção de ensino da Álgebra que prevalecia era a lingüístico-pragmática. Esta concepção se fundamentava no ensino de técnicas e no emprego de regras algébricas como condição inicial para a resolução de problemas.

Com o Movimento da Matemática Moderna, o ensino de Álgebra passou a ser tido como ferramenta de justificativa para procedimentos. Segundo essa concepção, caso o sujeito fosse capaz de realizar estas justificativas ele teria a condição de aplicar essas estruturas em diversos contextos. A esta concepção os autores denominaram de fundamentalista-estrutural.

E a terceira concepção, chamada por eles de fundamentalista-analógica, procura sintetizar as concepções anteriores, de modo a valorizar a instrumentalidade da Álgebra e o caráter de justificativa, na maioria das vezes, com recursos analógico geométricos.

Apesar dessas concepções estarem situadas em momentos históricos diferentes, podemos dizer que atualmente o ensino de Álgebra coexiste com várias concepções, de modo que esta diversidade não tem eliminado dificuldades para o seu aprendizado.

Diversas pesquisas (USISKIN, 1995; KIERAN, 1995; LOCKHEAD E MESTRE, 1997; ANDRÉ, 2007) confirmam a existência de dificuldades por parte dos alunos em aprender Álgebra. Usiskin (1995) apontou problemas na compreensão da noção de variável decorrentes da mudança de concepção dessa idéia ao longo do tempo. Kieran (1995) observou dificuldades existentes, por parte dos alunos do *high school*, quando propôs a aplicação de problemas de equação em duas abordagens, aritmética e algébrica. E Lockhead e Mestre (1997), apontaram a existência de dificuldades na tradução da linguagem escrita corrente para a linguagem matemática.

Ainda sobre pesquisas que apontam dificuldades dos alunos em Álgebra, está o trabalho de André (2007). Esta autora, valendo-se da Teoria dos Registros de Representação Semiótica mostrou que os alunos possuem sérias dificuldades em fazer a conversão da linguagem natural para a linguagem algébrica em problemas com equações do primeiro grau.

Com um público de alunos do oitavo ano (antiga sétima série) esta autora confirmou que a maioria dos sujeitos fazia a conversão dos problemas em escrita natural para a algébrica de modo mecânico e sem compreensão dos procedimentos utilizados. Faziam uma tradução para o algébrico no mesmo sentido que liam o problema.

Diante da existência dessa problemática e das dificuldades apresentadas pelos alunos em aprender Álgebra, temos, como problema de pesquisa, investigar em que medida acontece a conversão da escrita natural para a escrita algébrica nos problemas envolvendo equações do primeiro grau.

Essa investigação se limita a mostrar como a taxa de sucesso na conversão varia em função da presença de alguns fatores.

Desejamos, com isso, aprofundar algumas questões que foram apontadas anteriormente, em particular, pelo trabalho de André (2007) e contribuir para o entendimento de como se faz a conversão de equações em linguagem corrente para a algébrica.

Desse modo, no segundo capítulo procuramos justificar, de modo mais detalhado, a existência dessa problemática e a relação com nossa questão de pesquisa. Além disso, justificamos o porquê da continuidade do trabalho de André (2007).

No terceiro capítulo, justificamos a escolha da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (1995) levando em consideração a diversidade de registros semióticos como fator essencial para a compreensão em Matemática.

Neste capítulo, discorremos sobre o desenvolvimento da Álgebra e sua relação com a teoria, sobre tratamentos e conversões e, por fim, fazemos a associação da teoria com nossa questão de pesquisa.

No quarto capítulo, explicamos a metodologia utilizada, público alvo e condições da aplicação do teste. Também detalhamos as características do teste, de modo geral e específico, bem como fazemos uma análise *a priori* apontando algumas das estratégias realizadas pelos sujeitos da pesquisa.

No quinto capítulo, fazemos a análise e discussão detalhada dos resultados do teste.

Concluimos, no sexto capítulo, com as considerações finais, apontando possíveis caminhos para o surgimento e/ou aprofundamento de novas questões.

2 JUSTIFICATIVA

Enquanto ramo da Matemática, a Álgebra ocupa um espaço privilegiado no currículo, de modo que sua aprendizagem, ao invés de ser considerada de fácil construção, vem originando barreiras que têm dificultado a possibilidade de uma compreensão mais geral dos objetos matemáticos (BRASIL, 1998). Isso vem sendo demonstrado tanto pelas pesquisas em Educação Matemática, como pelas avaliações em escala nacional como, por exemplo, a Prova Brasil.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) enfatizam a necessidade de compreensão dos objetivos de ensinar Álgebra e de como se constroem os conceitos algébricos, ao invés de enfatizar as manipulações algébricas.

Para uma tomada de decisões a respeito do ensino da Álgebra, deve-se ter, evidentemente, clareza de seu papel no currículo, além da reflexão de como a criança e o adolescente constroem o conhecimento matemático, principalmente quanto à variedade de representações. Assim, é mais proveitoso propor situações que levem os alunos a construir noções algébricas pela observação de regularidades em tabelas e gráficos, estabelecendo relações, do que desenvolver o estudo da Álgebra apenas enfatizando as manipulações com expressões e equações de uma forma meramente mecânica. (BRASIL, 1998, p. 116)

A excessiva manipulação algébrica, por meio do cálculo algébrico e das equações, é um dos focos do ensino da Álgebra escolar. Um ensino centralizado nessa proposta deixa de contemplar outras dimensões das letras que são imprescindíveis para o desenvolvimento do pensamento algébrico. O quadro seguinte mostra alguns dos aspectos da Álgebra que devem ser levados em consideração no Ensino Fundamental, segundo os PCN.

QUADRO 1 – Álgebra no Ensino Fundamental

Álgebra no ensino fundamental				
Dimensões da Álgebra	Aritmética Generalizada	Funcional	Equações	Estrutural
Uso das letras	Letras como generalizações do modelo aritmético	Letras como variáveis para expressar relações e funções	Letras como incógnitas	Letras como símbolo abstrato
Conteúdos (conceitos e procedimentos)	Propriedades das operações generalizações de padrões aritméticos	Variação de grandezas	Resolução de equações	Cálculo algébrico Obtenção de expressões equivalentes

Fonte: Brasil, 1998, p.116

Nesse quadro temos as diversas dimensões da Álgebra que devem ser aprofundadas ao longo dos anos escolares, bem como os diferentes usos das letras, associados a seus respectivos conteúdos. Estas dimensões não são adquiridas de modo instantâneo, ou exclusivo em um determinado ano, mas são desenvolvidas à medida que o aluno se depara com problemas que exijam a articulação dos diversos usos das letras e dos diversos conceitos e procedimentos dos conteúdos. Em nosso trabalho estaremos adotando a letra como incógnita.

Os PCN não foram os primeiros a sinalizar esse fato. Usiskin (1995), num artigo intitulado “Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações de variáveis” já mostrou que o ensino da álgebra estava muito ligado ao manejo de técnicas manipulatórias e à dificuldade de saber em qual momento introduzir as funções. Uma de suas finalidades, nesse artigo, foi mostrar a relação existente entre os objetivos do ensino de Álgebra, as concepções dessa matéria e o uso de variáveis. Este autor resume, como vemos no quadro abaixo, a relação existente entre as concepções da Álgebra e os diferentes usos das variáveis.

QUADRO 2 – Concepções da álgebra e uso das variáveis

Concepções da Álgebra	Uso das variáveis
Aritmética Generalizada	Generalizadora de modelos Traduzir – Generalizar
Meio de resolver certo problemas	Incógnitas, constantes Resolver - Simplificar
Estudo das Relações	Argumentos, parâmetros Relacionar – Gráficos
Estrutura	Sinais arbitrários no papel Manipular - Justificar

Fonte: Usiskin, 1995, p.20

Uma das concepções presentes no ensino de Álgebra apontada pelo autor é a de que todas as variáveis são letras que representam números, e nem sempre isto é verdade. Esta concepção pode ocasionar o surgimento de dificuldades no campo algébrico impedindo o aluno de compreender, por exemplo, que “se $AB = BC$, então ΔABC é isósceles” (USISKIN, 1995). Nesse caso, as variáveis A, B e C representam pontos e não números. Em determinados momentos, as letras poderão significar matrizes e vetores, entre outros elementos, e tentar enclausurar a idéia de variável numa única concepção pode levar o aluno a não compreensão dos objetos da Álgebra. Em nosso trabalho estaremos adotando a concepção da Álgebra como meio para resolver problemas.

Kieran (1995) ressalta, num trabalho realizado com alunos da sétima série, os diferentes significados das letras nas equações e nas expressões algébricas por meio de duas propostas diferentes. Aos alunos que viam as letras como números nas equações sem fazer menção de operações inversas, a autora os classificou como pertencendo ao grupo da aritmética. Aos alunos que lançavam mão das operações inversas para dizer o que x representava em equações como $5 + x = 12$, fizeram parte do grupo da Álgebra. Os alunos desta pesquisa não só possuíam métodos particulares de resolução, como o da tentativa e erro e equivalência, mas também viam nas letras significados diferentes.

A conclusão da autora demonstrou que o grupo da Álgebra supergeneralizou o procedimento de transposição do segundo para o primeiro membro sem qualquer reflexão e significado do sinal de igual e dos princípios de equivalência. Mesmo depois de dez sessões de ensino/aprendizagem com o objetivo de discutir a resolução das equações baseado nas mesmas operações em ambos os membros da equação, o que se verificou é que apenas o grupo da aritmética utilizava regularmente o procedimento de equivalência.

As pesquisas realizadas por Lockhead e Mestre (1997) evidenciaram que os alunos possuem sérias dificuldades no que eles chamam de tradução da linguagem escrita para a linguagem matemática. Por meio de problemas envolvendo duas variáveis, os alunos escreviam o contrário da equação. No problema dos “alunos e professores” representavam “há seis vezes mais alunos do que professores” por $6A = P$ confundindo os rótulos A e P com as variáveis “número de alunos” e “número de professores”. Segundo os autores, os erros referentes à escrita do problema para equação não aconteciam por dificuldades de manipulações algébricas e nem de um problema de leitura, por que 95% dos alunos da amostra resolviam equações, mas por possuírem outros problemas como são apontados em abaixo.

Nenhum dos alunos entrevistados disse que havia mais professores que alunos. A fonte dos erros está em concepções erradas concernentes à estrutura e à interpretação de afirmações algébricas e nos processos pelos quais se faz a tradução da linguagem escrita para a linguagem algébrica (LOCKHEAD E MESTRE, 1997, p. 145)

Como bem apontaram esses autores, uma das fontes de dificuldade dos alunos pesquisados encontrava-se na passagem da escrita natural para a algébrica. E sobre este ponto, André (2007) também mostrou a existência de dificuldades presentes na conversão da linguagem natural para a algébrica com alunos de sétima série de uma escola pública do Recife.

Esta autora separou os problemas aplicados em seis contextos bastante presentes nos livros didáticos. Foram eles: idade, partilha, relação entre grandezas, sucessão de números, escolar e duas grandezas. As sete estruturas algébricas que

estão presentes em seu trabalho tiveram o papel de organizar e categorizar as questões para posterior análise.

O que André (2007) mostrou no final de seu trabalho foi que os alunos possuíam grandes dificuldades em passar da linguagem natural para a algébrica. O maior número percentual em relação aos acertos foi de 12% e em relação ao erro, 80%. Uma das conclusões da autora foi mostrar que muitas destas mudanças de linguagem estão associadas a procedimentos mecânicos. Uma das conclusões seria:

O presente estudo nos levou também a confirmar que muitas vezes os alunos enxergam a linguagem da álgebra como sendo um procedimento pelo qual se traduzem mecanicamente as palavras de um enunciado concernente a uma situação ou problema em símbolos algébricos correspondentes. No entanto, sabemos que a passagem de uma linguagem para outra requer uma série de condições de natureza não só cognitiva, mas também didática (ANDRÉ, 2007, p. 208).

Dessa forma, estudos relacionados às dificuldades em Álgebra, concepções sobre o uso de letras, conversões de linguagem natural para a algébrica, têm sido apontados por diversos autores. E pelo fato dessas questões não estarem fechadas, nosso trabalho se justifica pela continuidade e aprofundamento para novas questões.

Por isso, investigar a conversão da escrita natural para a escrita algébrica nas equações de primeiro grau torna-se o nosso principal objetivo de pesquisa.

Enquanto André (2007) salientou a existência desse problema, nossa pesquisa nasce do desejo de investigar em que medida fatores de não congruência influenciam nessa conversão.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Como fundamentação para nos auxiliar no estudo das mudanças de registros da linguagem natural para a algébrica nas equações do primeiro grau, utilizamos a teoria de Raymond Duval sobre Registros de Representação Semiótica. Segundo esta teoria, faz-se necessário fazer uma distinção entre o objeto matemático e suas respectivas representações, para que não se confunda o objeto com sua representação. Esta teoria tem seu valor do ponto de vista cognitivo, pois possibilita ao sujeito compreender que um objeto tem várias formas, bem como permite controlar a escolha de uma representação mais econômica na resolução de problemas.

Equação não é apenas $ax + b = c$ ou *o dobro de um número é seis*, bem como outras formas de representar uma equação, mas é um objeto intocável, que só pode ser percebido mediante sua representação. A necessidade de uma diversidade de representações semióticas para um mesmo objeto reside no fato de não tentar confundir o objeto matemático com sua representação.

Esta diferenciação necessária entre objeto e sua representação exige duas atividades cognitivas. Uma intimamente relacionada à representação do objeto matemático e outra, ao próprio objeto. É a *semióse* e a *noésis*. A primeira diz respeito à apreensão ou à produção de uma representação semiótica e a segunda, aos atos cognitivos ligados à apreensão conceitual de um objeto. Para Duval não existe a possibilidade de existir um sem o outro. A *noésis*, enquanto construção mental, não é independente das representações semióticas. Para Duval (2004), não existe *noésis* sem *semióse*. Para que o indivíduo represente um determinado objeto matemático faz-se necessário primeiro compreender a natureza deste objeto, suas propriedades, relações com outros objetos.

A funcionalidade cognitiva dessa abordagem encontra-se no fato de possibilitar ao aluno, não somente ver seus erros, mas compreender e controlar os processos matemáticos que estão presentes nos problemas. Dessa forma, a teoria ganha sentido uma vez que se propõe a dar um tratamento aos objetos matemáticos do ponto de vista de sua formação e conceitualização.

Duval (2004) argumenta ainda que as representações semióticas são produções externas que estão ligadas diretamente a um sistema semiótico. Essas

produções são acessíveis apenas aos sujeitos que têm o conhecimento do sistema semiótico utilizado.

Para Duval (2003), a compreensão em Matemática implica na existência de duas características peculiares. A primeira é na existência de um sistema semiótico, e a outra característica é na diversidade de sistemas semióticos presentes na Matemática. Um sistema semiótico é um conjunto de signos que possui uma finalidade de se comunicar e dar significado. Os sistemas semióticos utilizados podem ser a escrita algébrica, o sistema de numeração, a representação gráfica, a figural, entre outros.

3.1 O desenvolvimento da álgebra e sua relação com as representações semióticas

Ao longo da história, esta diversidade nos registros de representação foi essencial para a construção do conhecimento matemático, em especial, ao algébrico. Ao voltarmos o olhar para a Antiguidade, iremos perceber que a forma de comunicação e de expressão de ideias se deram por meio de uma *linguagem retórica*. Esta linguagem se caracterizava pelo uso de descrições por extenso na linguagem comum. Os problemas matemáticos dessa época eram resolvidos utilizando-se palavras do cotidiano. Esta fase ficou conhecida por *Álgebra retórica* e durou até o século III d.C.. Diofanto foi um dos seus principais representantes (PESQUITA, 2007).

A segunda fase, conhecida por *Álgebra sincopada*, caracterizava-se por um uso particular de letras para representar quantidades desconhecidas desprovido de universalidade. Os algebristas, sentindo a necessidade de simplificar cálculos, lançavam mão de abreviações de palavras e, às vezes, de um simbolismo conhecido apenas pelo matemático que o utilizava. Esta fase durou até o século XVII.

Até então, não existia nenhum sistema de representação geral capaz de tornar comum a linguagem utilizada.

No entanto, a necessidade de universalização no campo da ciência possibilitou o estabelecimento de uma ordem capaz de organizar uma linguagem em

termos de signos. O signo, enquanto representante de um objeto, assume um papel diferente daquele que ele possuía em épocas anteriores ao século XVII.

Na terceira fase da Álgebra, que iniciou por volta do século XVII, com o matemático François Viète, houve o desenvolvimento de uma linguagem algébrica capaz de unificar a Matemática em torno de uma sistematização comum. Esta fase é conhecida por uma *Álgebra simbólica*. Viète introduz letras para representar variáveis e quantidades desconhecidas de modo mais criterioso. Segundo Serfati (1997), em Viète já se via um primeiro sistema de signos que traz consigo uma reorganização em torno de uma convenção universal de interpretação.

Flores (2006), aponta que se Viète possibilitou esta mudança do modo antigo de pensar a Matemática, foi em Descartes que esta modificação tornou-se mais solidificada. É nele que haverá a separação entre o registro simbólico utilizado e o significado do objeto. Para Descartes é essencial a distinção entre significante e significado. Se antes o objeto se confundia com sua representação, agora, é necessário, para a compreensão de conceitos matemáticos, dissociá-los.

A partir de então, a lógica seguida pela construção do conhecimento matemático foi necessitando da criação ou aperfeiçoamento de um sistema de representação. O que até a Idade Média se via quase que uma imbricação entre o objeto e sua representação, por volta da Idade Moderna os matemáticos passam a estabelecer uma separação entre estes elementos.

Como bem assegura Flores (2006):

Enfim, um novo regime de saber se configura; um regime que é dado na ordem da representação. Foi isto que assegurou a fundação de um tipo de representação, de uma ciência algébrica, autônoma, moderna. A nova forma de conhecer, ou seja, a forma baseada na dissociação do signo e da semelhança, tornou, então, possível essas individualidades de pensamento como os de Viète, Descartes, Leibniz. (p.10)

A partir de então, a compreensão de um objeto matemático passa, necessariamente, pelo conhecimento de suas representações. E como se vê, o desenvolvimento da Álgebra esteve muito ligado a noção de representações semióticas.

3.2 Representações mental e semiótica

Duval (2004) diferencia dois tipos de representação. A representação mental e a representação semiótica. As representações mentais tratam de um conjunto de imagens e concepções que o sujeito tem acerca de um objeto ou sobre aquilo que está associado ao objeto. Referem-se às ideias, explicações do indivíduo sobre determinados fenômenos. Como exemplo, citamos as representações internas ou computacionais, que são execuções automáticas de uma tarefa (como os algoritmos). As representações semióticas se caracterizam pelas produções por meio da utilização de signos pertencentes a um sistema de representação. Por exemplo, adicionar 0,5 com 1,25 é realizar uma operação com dois números representados por um sistema semiótico (sistema numérico) de forma decimal.

Sobre as representações semióticas de um objeto, pode-se dizer que um objeto é identificado mediante um signo, sua parte material. O signo, segundo Pierce (2000), é um substituto ou representante de um objeto. Este signo não representa o objeto em sua totalidade, mas cria a ideia de um equivalente, podendo até ser um mais desenvolvido. É esta noção de signo que adotaremos em nosso trabalho.

Os sistemas de representação podem ser sintetizados no quadro abaixo.

QUADRO 3 – Representação discursiva e não discursiva

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO-DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis	Língua natural ¹⁴ Associações verbais (conceituais) Forma de raciocinar: <ul style="list-style-type: none"> ▪ argumentação a partir de observações, de crenças, ...; ▪ dedução válida a partir de definição ou de teoremas. 	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3) <ul style="list-style-type: none"> ▪ apreensão operatória e não somente perceptiva¹⁵; ▪ construção com instrumentos
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos	Sistemas de escritas: <ul style="list-style-type: none"> ▪ numéricas (binária, decimal, fracionária, ...); ▪ algébricas; ▪ simbólicas (língua formal) Cálculo	Gráficos cartesianos <ul style="list-style-type: none"> ▪ mudanças de sistemas de coordenadas; ▪ interpolação, extrapolação.

Fonte: Duval, 2003, p. 14

Como percebemos, há duas classificações para os tipos de representação, podendo ser discursiva ou não discursiva. Uma representação será discursiva quando não lançar mão de figuras, tabelas, gráficos, ou qualquer representação pictórica, ao contrário da representação discursiva, que se valerá da língua natural, por exemplo. Em relação aos tipos de registro, Duval os classifica como multifuncional e monofuncional. Os multifuncionais são os registros que não estão associados à utilização de algoritmos, e os monofuncionais utilizam os algoritmos, em sua maioria. Como exemplo de registro monofuncional, podemos citar a linguagem algébrica e o sistema de numeração decimal.

Em razão da diversidade dos sistemas semióticos, as representações semióticas permitem ter uma variedade de representações para um mesmo objeto. Segundo Duval (2004) esta variedade é decisiva tanto do ponto de vista da função de tratamento como do ponto de vista da conceitualização.

Do ponto de vista do tratamento é importante pelo fato de ser uma poderosa ferramenta de justificativa de procedimentos. Do ponto de vista da conceitualização, a variedade de representações para um mesmo objeto contribui para não se confundir objeto e representação.

Uma das funções da representação semiótica é a da comunicação, em que se trata de exteriorizar as representações internalizadas (mentais) tornando-as acessíveis a outrem. À medida que se tem acesso às representações exteriorizadas se torna possível perceber como o sujeito está concebendo o objeto matemático e as intervenções didáticas passam a ter mais eficácia.

Segundo Duval (2003), um registro de representação é considerado semiótico, quando se caracteriza por três atividades cognitivas: representação identificável, tratamento e conversão. Uma representação é identificável quando é possível reconhecer a qual objeto matemático se relaciona por meio de um sistema de signos. Por exemplo, utilizando a língua natural é possível elaborar problemas com diversos conceitos matemáticos, tais como área, equação, função, entre outros.

3.3 Tratamentos e conversões

O tratamento e a conversão são tipos de transformações de representação semiótica que são imprescindíveis para a atividade matemática, do ponto de vista da aprendizagem. O tratamento é a transformação da representação inicial em outras equivalentes, sem mudar o tipo de registro (transformação interna). Podemos considerar como exemplo, a resolução de uma equação na linguagem algébrica

$$\begin{aligned} 3x + 5(x - 6) &= x + 2(x + 1) + 3 \\ 3x + 5x - 30 &= x + 2x + 2 + 3 \\ 3x + 5x - x - 2x &= 2 + 3 + 30 \\ 5x &= 35 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

em que as cinco equações obtidas em cada etapa são equivalentes entre si, o registro algébrico é conservado, mas, no entanto, a representação inicial sofreu transformações até chegar em $x = 7$.

Também podemos citar o caso das expressões numéricas em que

$$\begin{aligned} \{3 + [5(4 + 2) - 6] + 7(1 - 3)\} \\ \{3 + [20 + 10 - 6] + 7 - 21\} \\ \{3 + 24 + 7 - 21\} \end{aligned}$$

13

cada uma dessas expressões são equivalentes entre si, sofrendo transformação apenas na representação mas conservando o registro, nesse caso, numérico.

A conversão trata de uma transformação de uma dada representação em outra representação e em outro registro, mas conservando a referência ao mesmo objeto. Uma função afim do tipo $y = -3x + 4$, representada na forma algébrica, pode ser representada num registro gráfico por

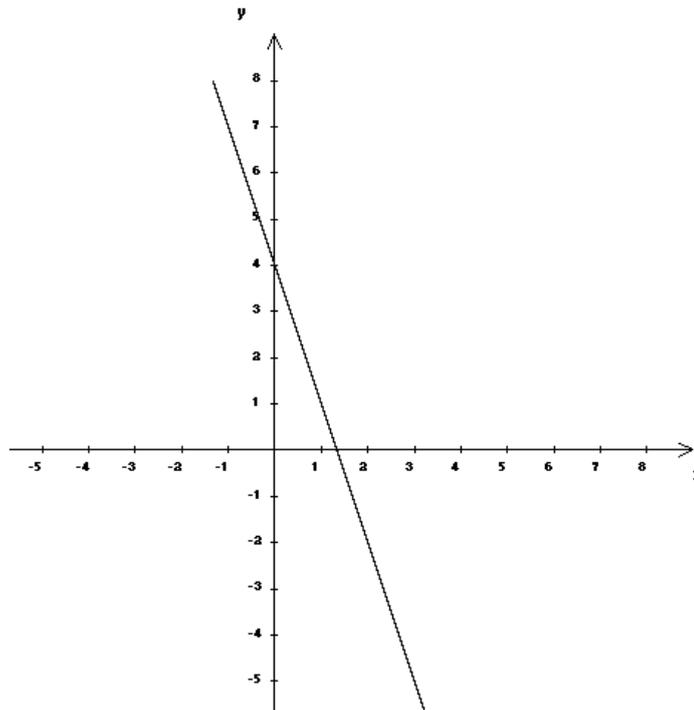


FIGURA 1 – Reta decrescente

Podemos converter uma equação em linguagem natural como “O triplo de um número é 8” para a linguagem algébrica $3x = 8$, escrever a representação algébrica de uma função a partir de seu gráfico, encontrar a área de uma região partindo de uma figura, etc.

De acordo com Duval (2003), a operação de tratamento dá importância à forma, e por conta disso é a transformação mais utilizada pelos professores como mecanismo de justificativa. Pelo fato de ser procedimental, a sua excessiva valorização pode levar o aluno a associar o objeto a uma única representação e acabar por não dissociar objeto de representação.

Mas é na operação de conversão que é permitido ao sujeito fazer a diferença entre a representação do objeto e o próprio objeto, pois ele irá se deparar com diferentes representações para um mesmo objeto. Logo, ela é uma das atividades cognitivas essenciais para a compreensão em matemática, do ponto de vista de Duval (2003). O fato de existir uma diversidade de registros de representação semiótica, dá à conversão a sua devida importância no processo de construção do conhecimento, pois ajudará o aprendiz a reconhecer a existência de várias representações para um mesmo objeto.

Alinhando-se à conversão está a mobilização entre os vários tipos de registros de representação. Segundo Duval (2003), “a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação, ou na possibilidade de trocar, a todo momento, de registro de representação”. O que Duval salienta é que não se pode garantir aprendizagem focando o ensino apenas nos tratamentos. Estes são muito úteis para justificar procedimentos, porém a atividade da conversão permite ao sujeito ampliar a dimensão conceitual.

Podemos dar o exemplo de converter uma equação da língua materna para a linguagem algébrica. Segundo Duval (2003) a coordenação entre registros garante a conceitualização do objeto matemático, pois, a partir do momento que o aluno consegue relacionar estes registros é porque ele percebe elementos particulares de cada sistema semiótico.

Tomando como referência a representação gráfica seguinte iremos identificar elementos que na representação algébrica equivalente não se vê.

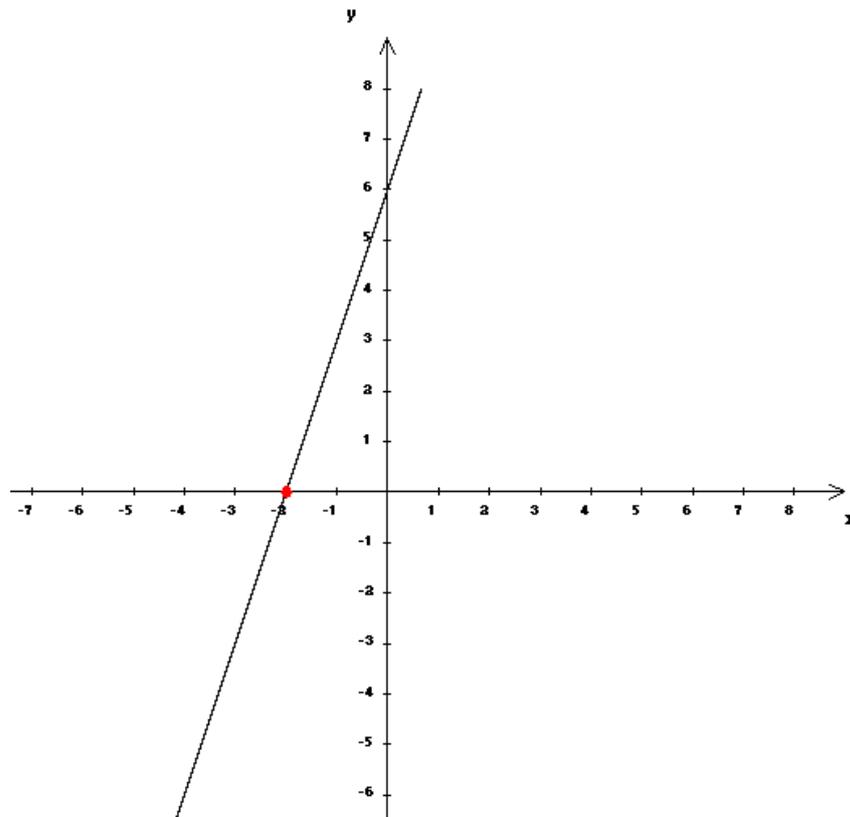


FIGURA 2 – Reta crescente

Nesta figura, o ponto vermelho indica o zero da função de $y = 3x + 6$, o que na representação algébrica não fica explícito.

Sobre este aspecto Duval (1993) destaca que um registro complementa o outro. Nenhum registro por si só é completo no sentido de representar integralmente um objeto. Isto quer dizer que, ainda que um registro de representação transpareça um dado objeto, ele será parcial, pois os conteúdos em questão são diferentes.

As representações cartesianas das funções (I) $y + 4 = (x - 3)^2$ e (II) $y = (x - 5)(x - 1)$ trazem informações diferentes sobre o mesmo objeto. Enquanto que na primeira sobressai o vértice da parábola, na segunda forma enxergamos as raízes, como se vê no gráfico seguinte.

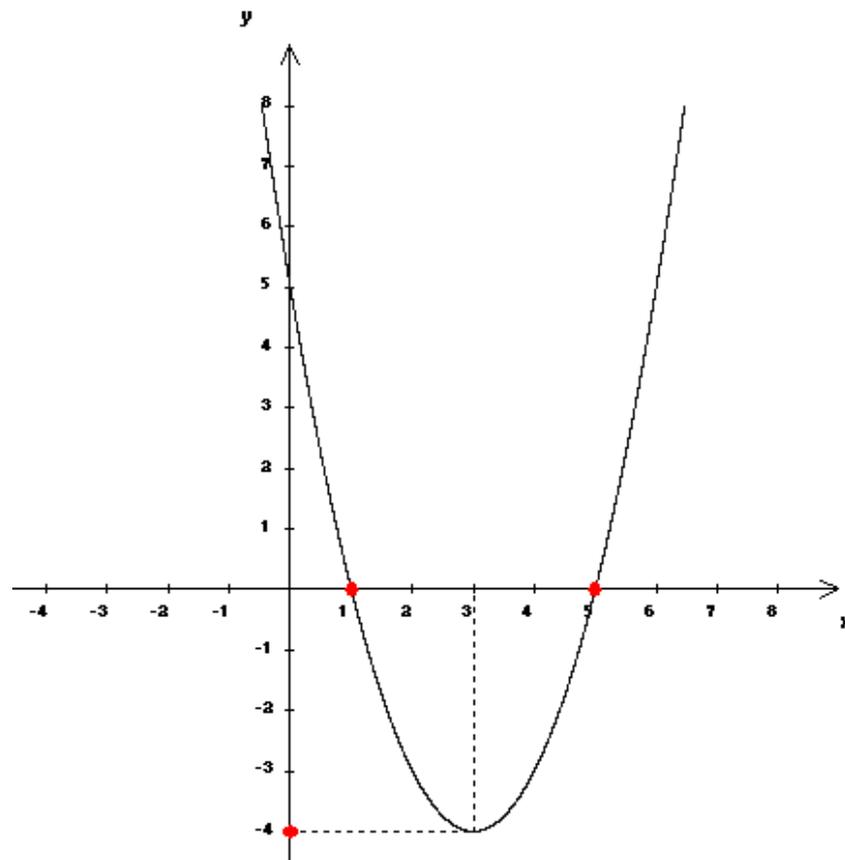


FIGURA 3 – Gráfico cartesiano da função quadrática

A atividade de conversão não é algo natural. Ela torna-se complexa, pois se depara com dois fenômenos. Um na heterogeneidade dos dois sentidos de

conversão e o outro fenômeno nas variações de congruência ou de não-congruência entre as representações.

O primeiro fenômeno característico da conversão é o sentido desta conversão. Converter um registro de **A** para **B** não demanda o mesmo custo cognitivo de converter de **B** para **A**. Podemos perceber no gráfico da figura 4. Para converter a função de sua representação gráfica para a algébrica é necessário levar em consideração conhecimentos matemáticos que obrigatoriamente não serão requeridos para a conversão da representação algébrica para a gráfica.

Este fato muitas vezes não é levado em consideração, pois, no ensino, tende-se a privilegiar um sentido da conversão, na idéia de que a volta seria automática.

Sobre o segundo fenômeno, Duval (1995) declara que o sucesso ou insucesso dos alunos na resolução dos problemas de matemática está ligado aos fatores de congruência e ao sentido da conversão. Três, são as condições a serem satisfeitas para que duas representações sejam congruentes:

- a) ordem das unidades;
- b) correspondência semântica entre as unidades de significado;
- c) univocidade semântica terminal.

A conservação da ordem das unidades de significado se caracteriza quando a conversão entre dois registros de representação se dá no mesmo sentido.

No exemplo abaixo procuramos esclarecer melhor.

O dobro de um número mais sete é cinco.

Neste problema, lemos da esquerda para direita e representamos a equação na linguagem algébrica neste mesmo sentido por $2x + 7 = 5$. Neste caso, há a conservação da ordem das unidades de significado.

A correspondência semântica das unidades de significado diz respeito a uma combinação binária existente entre as representações. No registro de partida, representado em linguagem natural, uma determinada palavra precisa está associada a apenas um signo. Nesse problema, não se verifica esse fator, pois a palavra dobro está associada a dois signos, ao número 2 e ao sinal de multiplicação.

O terceiro fator de congruência se refere a uma informação semântica num registro de representação que é mantida ao se fazer a conversão. A cada unidade de significado da representação de partida, não existe mais que uma unidade de significado no registro de representação de chegada. Uma palavra num texto possui o mesmo significado em todo ele. No problema que diz “Ao ganhar R\$ 5,00 de Pedro, Flávio ficou com R\$ 15,00. Quanto Flávio possuía inicialmente?” Este problema não possui nenhuma informação semântica que justifique, na resolução, a operação de 15 menos 5 para encontrar a quantia de Flávio. A palavra ganhar está muito associada a adição, mas no entanto, o significado dela no problema é de subtração.

Se o problema proposto fosse “Pedro tinha R\$ 10,00 e depois ganhou R\$ 5,00 de Flávio. Quanto Pedro possui agora?” teríamos uma outra operação. Para encontrar a quantia de Pedro bastava adicionar 10 com 5, o que indiretamente é reforçado pela presença da palavra *ganhou*, que indica adição.

A conversão entre dois registros de representação semiótica terá sucesso ou não em função dos graus de congruência. Se atender aos três fatores de congruência o registro de saída transparecerá com o de chegada. Isso tornará as duas representações congruentes. Caso contrário, se a negativa de um desses fatores aparecer, a conversão será não congruente.

No problema seguinte, em destaque, analisando sua estrutura, percebemos a existência da não congruência.

Numa empresa, há sete vezes mais empregados do que diretores.

O sentido que lemos o texto (esquerda para direita) não é o mesmo que utilizamos para representar este problema na linguagem algébrica. A representação correta é $7D = E$, sendo D o número de diretores e E o número de empregados e não $7E = D$. Pelo fato de não atender à conservação da ordem das unidades de significado, o problema se classifica como não congruente.

O que percebemos é que cada sistema semiótico possui um conteúdo específico na representação dos objetos. Um registro em linguagem algébrica para representar equações irá exigir conhecimentos como expressões algébricas, operações básicas com sinais, o que não se verifica com um registro em linguagem natural.

Assim, as transformações de tratamento e conversão são duas operações cognitivas essenciais para a compreensão de objetos matemáticos e sua posterior conceitualização.

3.4 Associação da teoria com a questão de pesquisa

Diante do exposto, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica nos fornece suporte para, de modo geral, investigar em que medida os fatores de não congruência influenciam na conversão da escrita natural para a escrita algébrica nos problemas envolvendo equações do primeiro grau.

Como na atividade de conversão é natural a presença dos fatores de congruência, queremos, de modo mais específico, investigar como cada um dos três fatores influenciam na conversão da escrita natural para a algébrica. Queremos analisar, então, a influência da correspondência semântica das unidades de significado, a influência da univocidade semântica terminal e a conservação da ordem das unidades na conversão, todos em problemas de equação do primeiro grau.

Dessa forma, nossa questão de pesquisa procura ser entendida à luz dessa teoria.

4 METODOLOGIA

Visando investigar em que medida os critérios de não congruência influenciam na conversão da linguagem natural para a linguagem algébrica nos problemas envolvendo equações do primeiro grau, detalhamos, a seguir, as escolhas para nosso procedimento.

4.1 Público alvo e condições da aplicação

Escolhemos duas escolas privadas da cidade do Recife, haja vista o pesquisador ser de uma dessas instituições e a outra, pelo fato de ter um quantitativo de sujeitos muito próximos. Ao todo foram sete turmas totalizando 217 sujeitos.

Como os problemas propostos eram de equações do primeiro grau, decidimos aplicá-los no oitavo ano em virtude de os sujeitos chegarem neste ano com o objeto em construção. Esta fase da escolaridade é o momento para aprofundar equações do primeiro grau.

Na etapa seguinte da metodologia realizamos a aplicação do teste. Foi no mês de setembro e coincidiu com a época que os alunos estavam estudando o assunto. Explicamos ao professor o motivo do teste e a importância da imparcialidade na aplicação. Ele estaria presente mas não poderia interferir em nenhum momento.

Após concordamos com as condições, uma terceira pessoa aplicou o teste. Os testes foram aplicados em sete encontros, cada um desses encontros com média de 100 minutos. Os alunos foram orientados a desenvolver as questões individualmente e sem nenhum material para consulta. Apenas lápis, caneta e borracha.

A idade dos sujeitos variava entre os 12 e 13 anos.

4.2 Características do teste

As questões do teste foram elaboradas procurando analisar a influência dos fatores de não congruência na conversão da linguagem natural para a linguagem algébrica em problemas sobre as equações do primeiro grau.

Segundo a Teoria de Raymond Duval, as três condições que tornam um problema congruente são a correspondência semântica das unidades de significado, a univocidade semântica terminal e a conservação da ordem das unidades de significado. Nosso teste, foi elaborado em função dessas condições.

Os fatores de não congruência foram variados com o intuito de perceber quais deles podem exercer mais ou menos influência na conversão. Um dos problemas elaborados conserva a correspondência semântica das unidades de significado, não conserva a univocidade semântica terminal e nem a ordem das unidades de significado. Um outro problema foi elaborado não conservando a correspondência semântica das unidades de significado, conservando a univocidade semântica terminal e a ordem das unidades de significado, e assim sucessivamente. Ao todo temos oito ternas, e para cada terna elaboramos um problema. Como objetivávamos investigar em que medida os critérios de não congruência influenciam na conversão da linguagem natural para a linguagem algébrica nos problemas envolvendo equações do primeiro grau, propositalmente, colocamos o primeiro problema totalmente congruente, com o intuito de confirmar pesquisas anteriores que dizem que os alunos possuem mais facilidade em resolver esse tipo de problema.

O quadro seguinte nos mostra as características estruturais dos oito problemas:

QUADRO 4 – Característica dos problemas

Número do problema	Correspondência semântica das unidades de significado	Univocidade semântica terminal	Ordem das unidades de significado
01	conservar	conservar	conservar
02	não conservar	não conservar	não conservar
03	conservar	não conservar	conservar
04	conservar	conservar	não conservar
05	conservar	não conservar	não conservar
06	não conservar	conservar	conservar
07	não conservar	conservar	não conservar
08	não conservar	não conservar	conservar

Na tentativa de se manter um padrão nas questões do teste, escolhemos um dos tipos de problemas classificados por Marchand e Bednarz (1999). Estas autoras classificam os problemas em três tipos. Problemas de transformação, problemas de taxa e problemas de partilha. Em nossa pesquisa consideraremos apenas os problemas de partilha.

Os problemas de transformação são aqueles que se caracterizam por uma transformação realizada sobre um valor inicial que, por sua vez, não é dado explicitamente no problema. Ele é desconhecido. E essa transformação no valor de partida gera uma nova situação, também desconhecida, como no exemplo seguinte.

Perguntaram a idade de Roberto e ele respondeu da seguinte forma: o triplo da idade que eu tinha a cinco anos atrás é igual a minha idade atual mais 25 anos.

Qual a idade de Roberto?

A idade de Roberto é o valor inicial e desconhecida. Sobre este valor foram realizadas três transformações. Duas aditivas, representadas por (*cinco anos atrás*) e (*mais 25 anos*) e uma multiplicativa, representada pela operação (*triplo*).

Os problemas de taxa são aqueles que aparecem relações entre grandezas não homogêneas, como no seguinte exemplo.

Sejam duas cidades A e B. Um homem viaja de automóvel a 80 km/h. Ele volta pela mesma estrada a uma velocidade de 60 km/h. Se ele faz toda viagem entre A e B em 7 horas, qual a distância entre essas duas cidades?

Os problemas de partilha são aqueles em que é conhecida uma quantidade total e esta quantidade é repartida em outras partes, sendo estas desconhecidas. As partes se relacionam levando em consideração o “número” de relações, a “natureza” dessas relações e o “encadeamento” dessas relações. Esses três funcionam como variáveis do problema que influenciam na resolução, segundo estas autoras.

No problema abaixo podemos analisar como as três variáveis aparecem na situação.

Três irmãos, Pedro, Toni e Carlos, possuem 17 selos. Pedro possui cinco selos a mais que Toni e Carlos, o triplo de Toni. Quantos selos possui cada um dos irmãos?

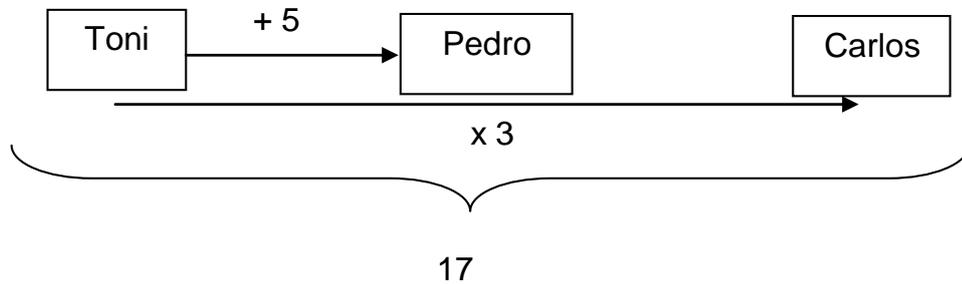
“Pedro possui cinco selos a mais que Toni” é uma relação e, “Carlos, o triplo de Toni” outra relação. Duas relações ao todo. A natureza das relações entre os dados pode ser aditiva, quando se lança mão de somas, multiplicativa, quando de multiplicações, ou ainda a natureza dessas relações pode ser mista, quando é aditiva e multiplicativa.

A primeira relação é aditiva (a mais) e a segunda, multiplicativa (triplo). Este é um problema com duas relações e de natureza mista.

Além do número de relações e da natureza entre essas relações, temos a variável do problema encadeamento das relações. Marchand e Bednarz (1999) afirmam que esse encadeamento pode ser de três tipos distintos. O encadeamento pode ser classificado como “fonte”, “poço” e “composição”.

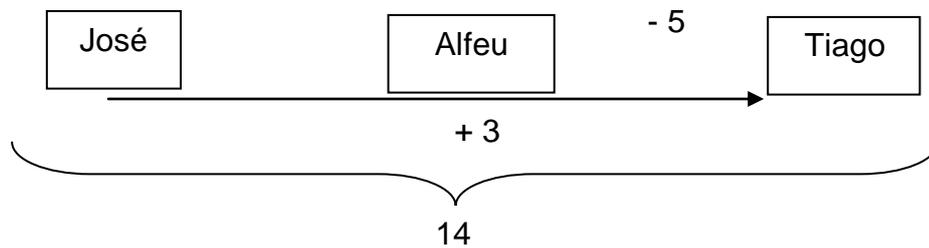
No encadeamento tipo fonte, as grandezas do problema são originadas em função de uma única grandeza. O problema citado acima é um exemplo desse tipo de encadeamento. “Toni” é a fonte desse problema, pois para encontrar a

quantidade de Pedro e de Carlos primeiro se deve descobrir quantos selos Toni possui.



No encadeamento tipo poço, as relações centralizam, convergem para um dos termos do problema, como mostra o exemplo abaixo.

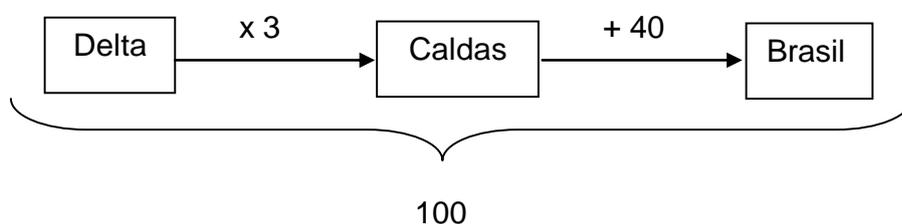
Tiago, José e Alfeu vão repartir 14 selos de modo que Tiago receba três selos a mais que José e cinco selos a menos que Alfeu. Quantos selos cada um vai receber?



Neste caso as relações convergem para Tiago.

No encadeamento tipo composição, as relações são estabelecidas seguindo uma sequência, como analisamos no exemplo abaixo.

Em uma empresa, 100 funcionários lêem um dos três jornais de maior circulação da cidade. O número de funcionários que lêem o jornal Caldas é o triplo do número de funcionários que lêem o jornal Delta, e o número de funcionários que lêem o jornal Brasil é 40 a mais do que os que lêem o jornal Caldas. Nessa empresa, qual o número de funcionários que lêem cada jornal?



Em nossa pesquisa, fizemos algumas escolhas referentes às características do problema. Essas escolhas foram feitas de modo que as variáveis no problema se dessem nos fatores de não congruência. Se não tivéssemos fixado o tipo de problema, neste caso, de partilha, poderia ser que a dificuldade do aluno estivesse em função do contexto e não dos fatores de não congruência.

A seguir, temos os oito problemas do teste, contemplando as características estruturais do quadro 4.

QUADRO 5 – Lista de problemas

Número do problema	Problema
01	Três amigos, Jorge, Paulo e Felipe, possuem, juntos, 140 bonecos. Jorge possui uma certa quantidade de bonecos. Duas vezes a quantidade de Jorge é a quantidade de Paulo. A quantidade de bonecos de Jorge, vezes quatro, é a quantidade de bonecos de Felipe. Quantos bonecos possui cada um?
02	Geraldo, Marcos e Taís vão a um orfanato de crianças carentes entregar uma contribuição financeira, voluntária, equivalente a R\$ 1 100,00. Geraldo contribuiu quatro vezes mais que Marcos e Taís com a metade do que contribuiu Marcos. Com quantos reais contribuiu cada um?
03	José, Augusto e Fábio produziram, juntos, 1400 peças na fábrica em que trabalham. Augusto produziu uma certa quantidade. Duas vezes o número de peças produzidas por Augusto dá a quantidade de Fábio. A metade do número de peças produzidas por Augusto é a quantidade fabricada por José. Quantos produtos foram fabricados, individualmente, por estes três funcionários?
04	A soma das idades de Júlio, Abreu e Bruno é de 90 anos. A idade de Abreu é três vezes a de Julio, e a idade de Bruno é cinco vezes a de Julio. Qual a idade de cada um deles?
05	Tiago, Jô e Alfeu são colecionadores de selos. Eles vão repartir 84 selos de modo que Tiago possua três vezes a quantidade de selos de Jô, e Alfeu a quinta parte de selos de Jô. Quantos selos cada um vai receber?
06	Os irmãos Juca, Rita e Márcia possuem juntos 120 brinquedos. Rita possui uma certa quantidade. O triplo da quantidade de brinquedos de Rita é igual a quantidade de brinquedos de Juca. O quádruplo do número de brinquedos de Rita é a de Márcia. Quantos brinquedos possui cada um?
07	João, Ricardo e Mateus possuem juntos 126 bolas de gude. João tem o dobro de bolas de gude de Ricardo, e Mateus tem o quádruplo de bolas de gude de Ricardo. Quantas bolas de gude possui cada um?
08	Os amigos Maria, Roger e Caio compraram chocolates numa quantidade total de 68 chocolates. Roger comprou uma certa quantidade. O triplo da quantidade de chocolates de Roger é igual a quantidade de chocolates de Maria. A quarta parte dos chocolates de Roger é igual a de Caio. Quantos chocolates comprou cada um?

4.3 Análise geral das questões do teste

As questões do teste foram elaboradas tomando por base o contexto dos problemas de partilha. Seguindo os critérios desse contexto foi escolhida uma quantia total e as partes desconhecidas que são repartidas entre os personagens da questão. O número de relações, a natureza dessas relações e o tipo de encadeamento foram fixadas. Em cada problema o número de relações será dois, a natureza dessas relações, multiplicativa e quanto ao tipo de encadeamento, fonte.

As escolhas para o número de relações e o tipo de encadeamento se deram de modo aleatório. Sendo dois o número de relações, teremos dois pares de personagens dos quais, um personagem é a fonte. Já a natureza das relações, multiplicativa, foi escolhida pelo fato de permitir uma maior variação nos fatores de não congruência. Entenda-se por multiplicativa o uso das operações de multiplicação e divisão.

Além disso, em cada questão, os nomes dos personagens são diferentes entre si e diferente nas outras questões. A escolha diferente entre si é para evitar dúvida no momento da conversão das representações, caso o sujeito queira colocar como incógnita a letra inicial do nome do personagem. O que aconteceu com bastante frequência. Também é diferente nos demais problemas para não induzir o sujeito a pensar que ao mesmo nome estaria associado o mesmo valor numérico. Dessa forma, são oito problemas, cada problema com três personagens.

O quadro a seguir relaciona as variáveis fixas de cada problema e a sua respectiva característica.

QUADRO 6 – Valor fixo da variável

VARIÁVEL FIXA	CARACTERÍSTICA DA VARIÁVEL
Tipo de problema	Problemas de partilha
Tipo de encadeamento das relações	Fonte
Número de relações	Duas
Natureza das relações	Multiplicativa

Na elaboração dos problemas do teste, escolhemos não direcionar o aluno ao tipo de solução desejada, neste caso algébrica. Tomamos essa decisão, com o intuito de possibilitar uma escolha conveniente de resposta por parte do sujeito de modo que a solução algébrica aparecesse naturalmente. Nesse sentido, apesar de desejarmos apenas a conversão da linguagem natural para a linguagem algébrica, propusemos a resolução do problema e não apenas que o representasse algebricamente.

4.4 Análise específica das questões do teste

Além das variáveis gerais de valor fixo, os problemas do teste possuem características específicas que visam atender o objetivo da pesquisa que é *investigar em que medida critérios de não congruência influenciam na conversão da linguagem natural para a escrita algébrica*.

Os problemas foram elaborados seguindo uma combinação dos três critérios de congruência. A não conservação de um desses três critérios tornará o problema não congruente, e mediante a análise *a posteriori* dos problemas percebemos quais desses fatores exerceram mais ou menos influência no momento da conversão.

Abaixo segue um quadro que relaciona a variável escolhida com o seu respectivo valor.

QUADRO 7 – Critérios de não congruência e valor da variável

VARIÁVEL	VALOR DA VARIÁVEL
Correspondência semântica	Conserva ou não conserva
Ordem das unidades de significado	Conserva ou não conserva
Univocidade semântica terminal	Conserva ou não conserva
Correspondência semântica e ordem das unidades de significado	Conserva ou não conserva
Correspondência semântica e univocidade semântica terminal	Conserva ou não conserva
Ordem das unidades de significado e ordem das unidades de significado	Conserva ou não conserva
Correspondência semântica, ordem das unidades de significado e univocidade semântica terminal	Conserva ou não conserva

No quadro acima, temos sete variáveis para análise e cada uma com dois valores, conserva ou não conserva. Na primeira linha, temos que um problema conservará a correspondência semântica e os outros dois fatores sofrerão variação. Quando não se conservar a correspondência semântica os outros dois fatores não sofrerão variação. O mesmo acontece na informação da quarta linha. Quando a correspondência semântica e a conservação da ordem das unidades de significado forem conservadas, a terceira variável sofrerá variação. Em contrapartida, quando a correspondência semântica e a conservação da ordem das unidades de significado não forem conservadas, a terceira variável não sofrerá variação. Esta análise serve para todas as questões.

4.5 Análise preliminar das questões do teste

A análise preliminar de cada questão buscou verificar a possibilidade de agrupamento entre as variáveis controladas (variável fixa) com as variáveis de não congruência que serão alteradas (conserva ou não conserva), bem como a explicitação de uma solução esperada. Entendemos por solução esperada a conversão correta para o registro algébrico.

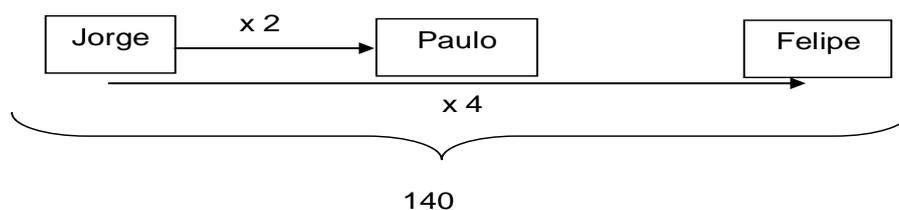
Inicialmente, escolhemos duas categorias para a solução de cada problema. Esperávamos que os registros dos alunos se dessem de modo numérico ou algébrico. O que estamos chamando de registro numérico é aquele registro que lança mão apenas de números e das quatro operações básicas. O registro algébrico é aquele que o sujeito lança mão de letras para representar incógnitas, números e operações básicas. Mas, depois da análise a posteriori, tivemos a necessidade de eleger outros cinco tipos de categorias.

Adiante, analisaremos os problemas levando em consideração a explicitação da fonte e das possíveis soluções esperadas e sua ligação com a teoria.

Número do problema	Correspondência semântica das unidades de significado	Univocidade semântica terminal	Ordem das unidades de significado
01	conservar	conservar	conservar

Três amigos, Jorge, Paulo e Felipe, possuem, juntos, 140 bonecos. Jorge possui uma certa quantidade de bonecos. Duas vezes a quantidade de Jorge é a quantidade de Paulo. A quantidade de bonecos de Jorge, vezes quatro, é a quantidade de bonecos de Felipe. Quantos bonecos possui cada um?

A fonte do problema é Jorge, pois é este quem gera a quantidade de Paulo e Felipe. Sintetizamos este problema no esquema abaixo.



Há neste problema uma congruência entre os registros de representação em linguagem natural e linguagem algébrica. As unidades de significado *vezes dois* ($\times 2$) e *vezes quatro* ($\times 4$) conservam a correspondência semântica, pois haverá dois signos na linguagem natural e dois na linguagem algébrica. Consideraremos como dois signos na linguagem algébrica mesmo que o sujeito omita o sinal de multiplicação.

A univocidade semântica terminal também é conservada, pois, no texto, *vezes dois* significa multiplicar por dois. Como no mesmo sentido que lemos o problema o

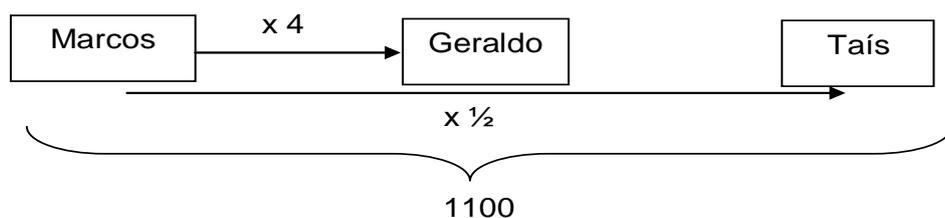
representamos em escrita algébrica (da esquerda para direita), podemos afirmar que há conservação também da ordem de significado.

A solução esperada é: se a quantia que Jorge possui for chamada de J , a de Paulo será $2J$ e a de Felipe, $4J$. Logo, em linguagem algébrica este problema será representado por $J + 2J + 4J = 140$. Isto não impede que o sujeito represente a fonte do problema por uma outra letra. Além disso, estaremos considerando como resposta esperada se o sujeito trocar a ordem das parcelas. Se ele escrever, por exemplo, $4J + 2J + J = 140$ ou $140 = J + 2J + 4J$ estaremos considerando como resposta esperada.

Número do problema	Correspondência semântica das unidades de significado	Univocidade semântica terminal	Ordem das unidades de significado
02	não conservar	não conservar	não conservar

Geraldo, Marcos e Taís vão a um orfanato de crianças carentes entregar uma contribuição financeira, voluntária, equivalente a R\$ 1 100,00. Geraldo contribuiu quatro vezes mais que Marcos e Taís com a metade do que contribuiu Marcos. Com quantos reais contribuiu cada um?

A fonte do problema é Marcos, pois é este quem gera a quantidade de Geraldo e de Taís. Podemos esquematizá-lo assim:



Neste caso não se conserva a univocidade semântica terminal, pois, segundo Duval (2004), a presença de palavras no texto com significados contrários, ganhou-perdeu, mais-menos, em nosso caso, multiplicar-dividir, faz com que não se verifique este critério.

Neste problema não se conserva a correspondência semântica das unidades de significado, porque a expressão *quatro vezes mais* (três signos) está associada a dois signos (vezes quatro, $\times 4$) e a unidade *metade* (uma palavra) também está associada a dois signos (vezes meio, $\times \frac{1}{2}$).

Não se conserva a ordem das unidades de significado, pois, para encontrar a quantia associada de Geraldo, que vem primeiro no texto, deve-se primeiro encontrar a de Marcos, fonte neste problema. Do mesmo modo, a quantia de Taís. Para saber com quanto ela contribuiu, primeiro temos que saber de que modo Taís se relaciona com Marcos. Este é quem irá determinar a sua quantia. No texto, Taís inicia a segunda relação, mas só encontramos de quanto foi sua contribuição depois que sabemos que esta contribuição é a metade da de Marcos.

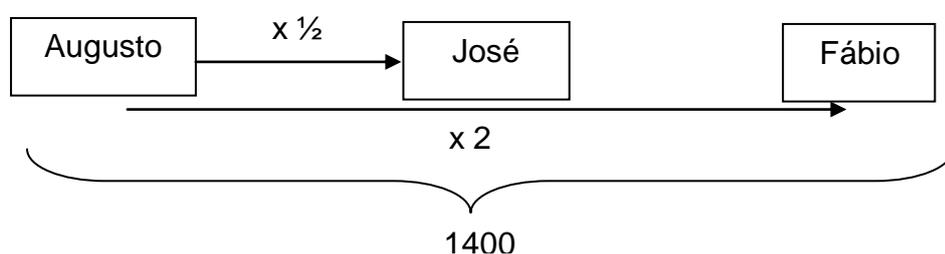
Uma solução esperada é: se a contribuição de Marcos for M , a de Geraldo será $4.M$ e a de Taís, $M/2$. Logo, este problema é convertido para a linguagem algébrica por $M + 4M + M/2 = 1100$.

Uma solução incorreta que poderá ser desenvolvida pelos estudantes é multiplicar a idade de Geraldo por quatro, para encontrar a contribuição de Marcos. Isso pode ser entendido pelo fato do problema dizer que “*Geraldo contribuiu quatro vezes mais que Marcos*”. Lendo da esquerda para a direita representariam $G.4 = M$. Do mesmo modo procederiam com Taís. $T/2 = M$. E uma possível conversão incorreta para a linguagem algébrica seria $G.4 + T/2 + M = 1100$.

Número do problema	Correspondência semântica das unidades de significado	Univocidade semântica terminal	Ordem das unidades de significado
03	conservar	não conservar	conservar

José, Augusto e Fábio produziram, juntos, 1400 peças na fábrica em que trabalham. Augusto produziu uma certa quantidade. Duas vezes o número de peças produzidas por Augusto dá a quantidade de Fábio. A metade do número de peças produzidas por Augusto é a quantidade fabricada por José. Quantos produtos foram fabricados, individualmente, por estes três funcionários?

A fonte é Augusto, pois é este quem gera a quantidade de José e de Fábio.



Neste caso não se conserva a univocidade semântica terminal, pois temos a presença das operações inversas de multiplicação e divisão.

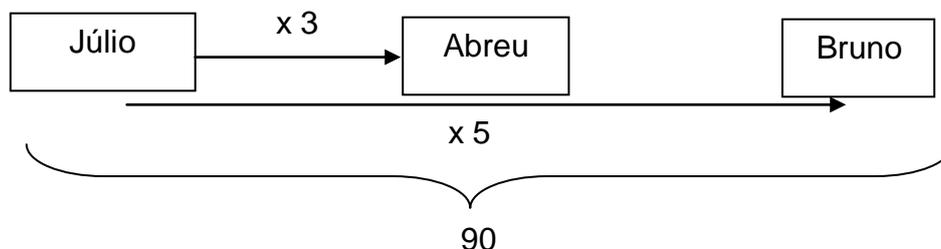
Neste problema se conserva a correspondência semântica das unidades de significado, porque a expressão *duas vezes* está associada a dois signos (vezes dois, $\times 2$) e conserva a ordem das unidades de significado, pois representamos o problema em linguagem algébrica no mesmo sentido que lemos, da esquerda para a direita.

A solução esperada é: se a quantidade produzida de Augusto for A , a de Fábio será $2.A$ e a de José, $A/2$. Logo, este problema é convertido para a linguagem algébrica por $A + 2.A + A/2 = 1\ 400$.

Uma conversão incorreta para a quantidade de Fábio, que é a “*metade do número de peças produzidas por Augusto*”, é $2 \div A$. E então, a equação montada seria $A + 2.A + 2 \div A = 1\ 400$.

Número do problema	Correspondência semântica das unidades de significado	Univocidade semântica terminal	Ordem das unidades de significado
04	conservar	conservar	não conservar
A soma das idades de Júlio, Abreu e Bruno é de 90 anos. A idade de Abreu é três vezes a de Júlio, e a idade de Bruno é cinco vezes a de Júlio. Qual a idade de cada um deles?			

A fonte é Júlio, pois é este quem gera a idade de Abreu e Bruno. Apenas podemos saber a idade de Abreu e de Bruno se conhecermos a de Júlio.



Não se conserva a ordem das unidades de significado, pois para encontrar a idade associada de Abreu, que vem primeiro na relação, deve-se primeiro encontrar a de Júlio, fonte neste problema. Do mesmo modo a idade de Bruno. Para saber sua

idade, primeiro temos que saber de que modo Bruno se relaciona com Júlio. No texto, Bruno inicia a segunda relação, mas só sabemos quantos anos ele tem depois que sabemos que sua idade é a metade da de Júlio. Ou seja, não representamos a equação no mesmo sentido que lemos.

As unidades de significado *três vezes* ($3x$) e *cinco vezes* ($5x$) conservam a correspondência semântica, pois haverá dois signos na linguagem natural e dois na linguagem algébrica.

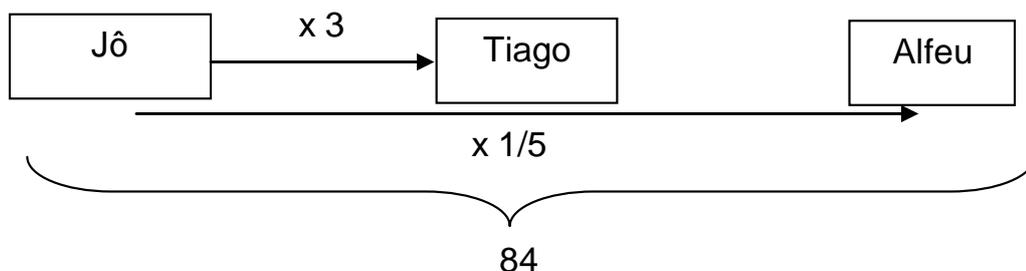
A univocidade semântica terminal também é conservada, pois temos apenas uma operação, a de multiplicação.

A solução esperada é: se a idade que Júlio possui for chamada de J , a de Abreu será $3J$ e a de Bruno, $5J$. Logo, em linguagem algébrica este problema será representada por $J + 3J + 5J = 90$.

Uma solução incorreta é identificar a quantidade de Júlio por 3 vezes a de Abreu, obedecendo a ordem da leitura e representando uma relação por $3.A = J$. Nesse caso, “A” e “J” estariam sendo utilizados como rótulos para Abreu e Júlio e não como incógnitas para “a idade de Abreu” e “a idade de Júlio”.

Número do problema	Correspondência semântica das unidades de significado	Univocidade semântica terminal	Ordem das unidades de significado
05	conservar	não conservar	não conservar
Tiago, Jô e Alfeu são colecionadores de selos. Eles vão repartir 84 selos de modo que Tiago possua três vezes a quantidade de selos de Jô, e Alfeu a quinta parte de selos de Jô. Quantos selos cada um vai receber?			

A fonte é Jô, pois é esta quem gera a quantidade de selos de Tiago e Alfeu.



Neste caso não se conserva a univocidade semântica terminal em virtude da presença de operações inversas.

Neste problema se conserva a correspondência semântica das unidades de significado, pois a expressão *três vezes* está associada a dois signos (*três vezes*, $3x$).

Não se conserva a unicidade semântica terminal e nem a ordem das unidades de significado. Para encontrar a quantia de selos associada a Tiago devemos encontrar primeiro a de Jô. Do mesmo modo para encontrar a quantia de Alfeu. A sua quantidade de selos depende de Jô.

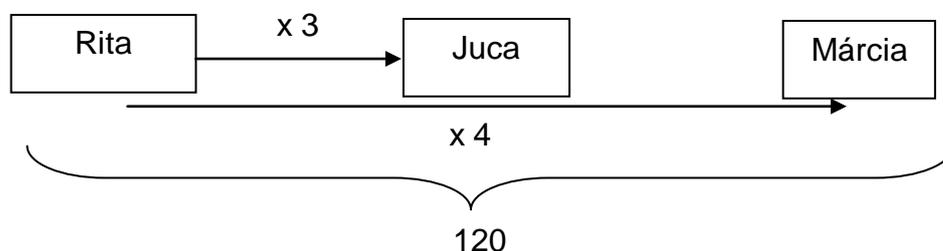
A solução esperada é: se a quantidade de selos de Jô for J , a de Tiago será $3J$ e a de Alfeu, $J/5$. Logo, este problema é convertido para a linguagem algébrica por $J + 3J + J/5 = 84$.

Um possível registro incorreto seria converter para $J + 3J + 5 \div J = 84$, entendendo a quinta parte dessa forma.

Número do problema	Correspondência semântica das unidades de significado	Univocidade semântica terminal	Ordem das unidades de significado
06	não conservar	conservar	Conservar

Os irmãos Juca, Rita e Márcia possuem juntos 120 brinquedos. Rita possui uma certa quantidade. O triplo da quantidade de brinquedos de Rita é igual a quantidade de brinquedos de Juca. O quádruplo do número de brinquedos de Rita é a de Márcia. Quantos brinquedos possui cada um?

A fonte é Rita, pois é esta quem gera a quantidade de Juca e Márcia.



Apenas não se conserva neste problema a semântica das unidades de significado.

O signo *triplo* (uma palavra) está associado a *multiplicar por três*, dois signos. Assim como quádruplo.

A univocidade semântica terminal é conservada, pois temos apenas operação de multiplicação. Como do mesmo sentido que lemos o problema o representamos em linguagem algébrica (da esquerda para direita), podemos afirmar que há conservação também da ordem de significado.

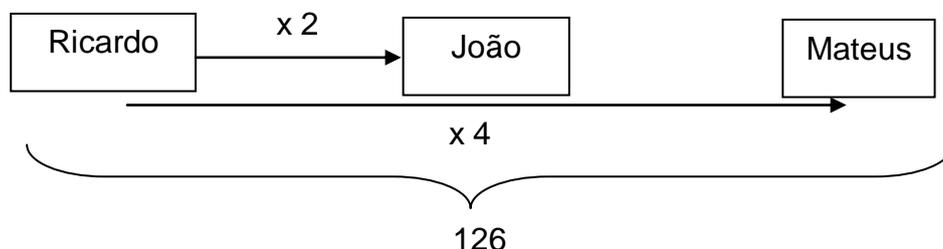
A solução esperada é: se a quantidade de brinquedos que Rita possui for chamada de R , a de Juca será $3R$ e a de Márcia, $4R$. Logo, em linguagem algébrica este problema será representada por $R + 3R + 4R = 120$.

Mas uma solução incorreta seria multiplicar a idade de Rita por 4 para encontrar a idade de Márcia, sendo a idade de Rita $3R$, pelo fato de o texto começar “O triplo da quantidade de brinquedos de Rita é igual a quantidade de brinquedos de Juca”. Dessa forma, a idade de Márcia seria $12R$, a de Rita R e a de Juca $3R$. A equação seria $R + 12R + 3R = 120$.

Número do problema	Correspondência semântica das unidades de significado	Univocidade semântica terminal	Ordem das unidades de significado
07	não conservar	conservar	não conservar

João, Ricardo e Mateus possuem juntos 126 bolas de gude. João tem o dobro de bolas de gude de Ricardo, e Mateus tem o quádruplo de bolas de gude de Ricardo. Quantas bolas de gude possui cada um?

A fonte é Ricardo, pois é este quem gera a quantidade de bolas de gude de João e Mateus.



É conservada a univocidade semântica terminal pela presença da mesma operação, neste caso multiplicação.

Neste problema não se conserva a correspondência semântica das unidades de significado, porque o signo *triplo* (uma palavra) está associado a *multiplicar por três*, dois signos. E a palavra *quádruplo* também está associada a dois signos, multiplicação e número quatro.

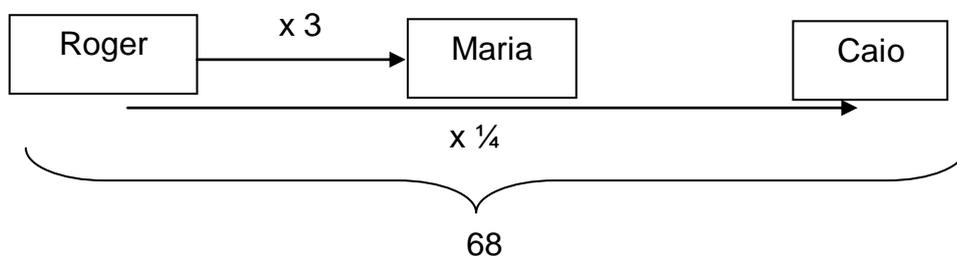
Não se conserva a ordem das unidades de significado, pois há uma inversão. João é citado primeiro no texto mas sua quantidade de bola de gude é encontrada mediante a relação com Ricardo, que aparece depois no texto.

A solução esperada é: se a quantidade de bolas de gude de Ricardo for R, a de João será 2.R e a de Mateus, 4.R. Logo, este problema é convertido para a linguagem algébrica por $R + 2R + 4R = 126$.

Uma solução incorreta seria entender a idade de Ricardo por 2J, pelo fato do texto começar “*João tem o dobro de bolas de gude de Ricardo*” e a idade de Mateus por 8J. Então teríamos $J + 2J + 8J = 126$.

Número do problema	Correspondência semântica das unidades de significado	Univocidade semântica terminal	Ordem das unidades de significado
08	não conservar	não conservar	conservar
Os amigos Maria, Roger e Caio compraram chocolates numa quantidade total de 68 chocolates. Roger comprou uma certa quantidade. O triplo da quantidade de chocolates de Roger é igual a quantidade de chocolates de Maria. A quarta parte dos chocolates de Roger é igual a de Caio. Quantos chocolates comprou cada um?			

As relações deste problema são “O triplo da quantidade de chocolates de



Não se conserva a unicidade semântica terminal pela presença de duas operações sendo representadas por triplo e quinta parte.

Neste problema não se conserva a correspondência semântica das unidades de significado, porque o signo *triplo* está associado a dois signos. Ao sinal de multiplicação e ao número três.

Como do mesmo sentido que lemos representamos em linguagem algébrica, podemos dizer que há conservação da ordem das unidades de significado.

A solução esperada é: se a quantidade de chocolate de Roger for R , a de Maria ser $3R$ e a de Caio $R/4$. Logo, este problema é convertido para a linguagem algébrica por $R + 3R + R/4$.

Uma solução incorreta seria $R + 3R + 4 \div R = 68$, esta última quantidade pelo fato de o texto começar “*A quarta parte dos chocolates de Roger é igual a de Caio*”.

Espera-se, com a análise das questões, ter uma ideia de qual estrutura de problema os alunos têm mais dificuldade e, dessa forma, perceber qual a influência dos fatores de não congruência na conversão dos registros de representação em linguagem natural para linguagem algébrica.

Em nossa análise *a priori* não nos dedicamos a fazer um apanhado exaustivo de todas as possíveis soluções esperadas, incorretas ou até mesmo mais freqüentes, mas sim, com o auxílio da teoria, ter uma noção de como alguns problemas poderiam ter sido pensado.

5 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Inicialmente tínhamos previsto considerar apenas dois tipos de registros. O numérico e o algébrico. No entanto, a partir da flexibilidade do enunciado, ao analisar os 217 protocolos surgiram outros tipos de registros que foram adicionados para efeito de pesquisa.

5.1 As categorias da pesquisa

A etapa inicial da análise consistiu em rotular cada questão mediante categorias criadas após análise geral dos registros. Nesse aspecto, o que inicialmente se resumia a duas categorias, passou a ser seis.

As categorias escolhidas estão relacionadas no quadro abaixo.

QUADRO 8 – Símbolo das categorias

Categoria	Símbolo
Registro numérico	RN
Registro algébrico conversão total	RACT
Registro algébrico conversão parcial	RACP
Registro algébrico conversão incompatível	RACI
Registro pictórico	RP
Outros	B

Em virtude dos objetivos de nossa pesquisa não, consideramos a resolução do problema mas sim, a primeira etapa da conversão, a primeira escrita feita pelo sujeito.

Consideramos como registro numérico aquela representação em que o sujeito utilizou apenas operações aritméticas para converter o problema, como vemos em alguns protocolos abaixo.

01) Três amigos, Jorge, Paulo e Felipe, possuem, juntos, 140 bonecos. Jorge possui uma certa quantidade de bonecos. Duas vezes a quantidade de Jorge é a quantidade de Paulo. A quantidade de bonecos de Jorge, vezes quatro, é a quantidade de bonecos de Felipe. Quantos bonecos possui cada um?

$$\begin{array}{l}
 140 : 7 = 20 \\
 20 \cdot 4 = 80 \\
 20 \cdot 2 = 40 \\
 20 \cdot 1 = 20
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{Jorge} = 20 \\
 \text{Paulo} = 40 \\
 \text{Felipe} = 80
 \end{array}$$

Protocolo número 14

07) João, Ricardo e Mateus possuem juntos 126 bolas de gude. João tem o dobro de bolas de gude de Ricardo, e Mateus tem o quádruplo de bolas de gude de Ricardo. Quantas bolas de gude possui cada um?

$$\begin{array}{r}
 126 \overline{) 3} \\
 \underline{12} \quad 42 \\
 006 \\
 \underline{-6} \\
 1001
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{João} - 42 \\
 \text{Ricardo} - 21 \\
 \text{Mateus} - 84
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 84 \\
 42 \\
 21 \\
 \hline
 147
 \end{array}$$

Protocolo número 37

Analisando esses dois protocolos, percebemos que os dois sujeitos estão trabalhando unicamente no registro numérico. Eles se diferenciam pelo fato de realizar ou não a conversão para o registro numérico. O segundo não faz a conversão para o algébrico, apenas busca dividir o total por 3. Já o primeiro sujeito (14) está fazendo a conversão para o algébrico, mas não o representa

explicitamente. Podemos observar que ele dividiu o total por 7 ($2x+x+4x$). Isso é feito de forma implícita. Mas ele está pensando algebricamente, o que não é o caso do sujeito 37.

Em termos de performance, o sujeito 14 está correto, e o sujeito 37 está errado, em termos de realizar a conversão para o registro algébrico. No entanto, pelo fato de ser uma conversão implícita, mental, admitiremos que essas representações mentais são representações semióticas interiorizadas (DUVAL, 2007). Como não fizemos entrevista em nosso percurso metodológico para nos auxiliar na análise e interpretação dessas produções, estaremos considerando esse tipo de registro como numérico.

Ainda sobre esse ponto, reafirmamos que, na nossa pesquisa, algébrica será toda produção desenvolvida pelo sujeito com a utilização de sinal de igual, letras e sinais operatórios de adição, subtração, multiplicação ou divisão. Adotaremos como equação a representação convencional da álgebra escolar, com letras, números e sinais.

O registro algébrico é aquele em que o sujeito faz a conversão para a linguagem algébrica, de modo correto ou não e utilizando signos algébricos. O sujeito precisa lançar mão do sistema semiótico algébrico. Em virtude da qualidade dos registros algébricos dividimos em registro algébrico total (RACT), registro algébrico parcial (RACP) e registro algébrico incompatível (RACI). O registro algébrico será considerado total quando o sujeito fizer a conversão completa da equação em linguagem natural para a algébrica. O protocolo de número 12 se caracteriza por um registro algébrico de conversão total.

03) José, Augusto e Fábio produziram, juntos, 1400 peças na fábrica em que trabalham. Augusto produziu certa quantidade. Duas vezes o número de peças produzidas por Augusto dá a quantidade de Fábio. A metade do número de peças produzidas por Augusto é a quantidade fabricada por José. Quantos produtos foram fabricados, individualmente, por estes três funcionários?

Handwritten solution showing the problem and the algebraic steps:

1400

José = x

Augusto = $2x$

Fábio = $4x$

$$4x + 2x + x = 7x = 1400$$

$$x = 1400 : 7$$

$$x = 200$$

José = 200

Augusto = 400

Fábio = 800

Podemos perceber que o sujeito fez a conversão do problema para a linguagem algébrica, ao escrever $4x + 2x + x = 1400$.

Se o sujeito fizer a conversão correta das três quantidades do problema sem montar a equação, chamaremos o registro de algébrico parcial (RACP). Para efeito de pesquisa, se o sujeito fizer a conversão de uma ou duas relações chamaremos de RACP', com o intuito de verificar se ele esteve ou não próximo da conversão esperada. No protocolo de número 105 o sujeito apenas representou algebricamente as três quantidades de cada personagem, mas não montou a equação.

06) Os irmãos Juca, Rita e Márcia possuem juntos 120 brinquedos. Rita possui certa quantidade. O triplo da quantidade de brinquedos de Rita é igual a quantidade de brinquedos de Juca. O quádruplo do número de brinquedos de Rita é a de Márcia. Quantos brinquedos possui cada um?

$$\text{Juca} = x \cdot 3$$

$$\text{Rita} = x$$

$$\text{Márcia} = x \cdot 4$$

120

Protocolo número 105

No protocolo de número 132 o sujeito fez um registro de representação algébrica dos três personagens, no entanto, apenas o de Jô e o de Tiago estão corretos.

05) Tiago, Jô e Alfeu são colecionadores de selos. Eles vão repartir 84 selos de modo que Tiago possua três vezes a quantidade de selos de Jô, e Alfeu a quinta parte de selos de Jô. Quantos selos cada um vai receber?

$$\begin{aligned} \text{Jô} &= x \\ \text{Tiago} &= 3 \cdot x \\ \text{Alfeu} &= \frac{5}{x} \end{aligned}$$

Protocolo número 132

Desse forma, os protocolos 105 e 132 ilustram o que estamos considerando como RACP e RACP', respectivamente. Esses dois sujeitos concordam na medida em que ambos representaram algebricamente as duas relações, mas não representaram a equação. Entretanto, eles diferem na medida em que o sujeito 132 representa incorretamente uma das relações.

Outro registro algébrico encontrado foi aquele em que o sujeito não conseguiu representar nenhum dado corretamente. A este tipo de registro consideramos como registro algébrico conversão incompatível (RACI). O protocolo 62 ilustra este tipo de registro.

04) A soma das idades de Júlio, Abreu e Bruno é de 90 anos. A idade de Abreu é três vezes a de Julio, e a idade de Bruno é cinco vezes a de Julio. Qual a idade de cada um deles?

$$\begin{aligned} x \cdot 2 \cdot 5 &= 90 \\ x \cdot 30 &= 90 \\ x &= 90 \div 30 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Protocolo número 62

Outro registro que surgiu em nossa análise foi o registro pictórico. Esse registro se caracteriza pela utilização de uma representação que não é numérica e nem algébrica, mas sim figuras. É bem verdade que poderíamos considerar a representação no protocolo 92 como algébrica. No entanto, a teoria utilizada em nossa pesquisa, não nos dá condição de considerá-la como algébrica, uma vez que não se utiliza signos algébricos. Estas representações apareceram na forma de figuras, como se observa abaixo.

01) Três amigos, Jorge, Paulo e Felipe, possuem, juntos, 140 bonecos. Jorge possui uma certa quantidade de bonecos. Duas vezes a quantidade de Jorge é a quantidade de Paulo. A quantidade de bonecos de Jorge, vezes quatro, é a quantidade de bonecos de Felipe. Quantos bonecos possui cada um?

PROTOCOLO NÚMERO 92

As categorias que não estavam dentro das categorias anteriores, foram consideradas outros (B).

5.2 Análise inicial dos resultados

Nesta etapa da análise, procuraremos mostrar uma síntese dos resultados de modo a nos orientar para a análise geral.

O quadro a seguir mostra a análise quantitativa dos tipos de registros pelo respectivo número de sujeitos.

QUADRO 9 – Síntese dos registros

	<u>Q1</u>	<u>Q2</u>	<u>Q3</u>	<u>Q4</u>	<u>Q5</u>	<u>Q6</u>	<u>Q7</u>	<u>Q8</u>
RACP	49	29	31	35	30	35	33	26
RACP'	14	27	26	15	11	10	6	16
RACT	46	28	32	42	26	38	37	30
RACI	9	6	6	8	4	3	3	3
RN	42	55	42	43	55	57	59	45
RP	1	1	1	1	1	1	1	1
B	56	71	79	73	90	73	78	96
TOTAL	217	217	217	217	217	217	217	217

Pelo quadro acima podemos ver que a primeira questão possui uma maior percentagem para RACT, indicando que os sujeitos conseguiram representar as relações no registro algébrico. Ainda sobre esta questão, o fato de RACP também ter sido maior, indica que 23% dos sujeitos se aproximou do registro esperado.

A questão cinco possui a menor taxa percentual para RACT, mostrando que os dois fatores não conservados, neste caso, univocidade semântica terminal e conservação da ordem das unidades de significado, exerceram um pequeno grau de dificuldade para a representação no registro algébrico.

Outra questão que nos chama a atenção é a de número sete pelo fato de possuir a menor taxa percentual em relação a RACP'. Isso indica que os sujeitos fizeram poucas conversões de uma ou duas quantidades para o registro algébrico. Com exceção da questão um, a de número sete possui uma porcentagem de RACP e RACT, juntas, em torno de 32%, o que, quando comparado com as questões de dois a oito, é uma porcentagem considerável.

Por questões de objetivo, os protocolos dos sujeitos que lançaram mão de registros numéricos, pictóricos ou foram considerados branco, não foram levados em conta na percentagem das questões. Isso quer dizer que as percentagens dadas se referem às questões que tiveram algum tipo de registro algébrico.

O quadro abaixo sintetiza os resultados em função do tipo de registro algébrico utilizado e o número de sujeitos que estiveram em tal registro. Este quadro é que será utilizado para a análise das questões 02 a 08.

QUADRO 10 – Registros algébricos

Problema	Registros algébricos	RACT	RACP	RACP'	RACI
01	118	46	49	14	9
02	90	28	29	27	6
03	95	32	31	26	6
04	100	42	35	15	8
05	71	26	30	11	4
06	86	38	35	10	3
07	79	37	33	6	3
08	75	30	26	16	3

Este quadro nos permite verificar a frequência de registros algébricos em cada questão, além de identificar a porcentagem com que cada tipo de registro algébrico apareceu nos problemas.

Iniciaremos a discussão de cada problema sintetizando as informações estatísticas e, depois, discorreremos sobre a natureza dos erros mais frequentes. Ao fazermos isso, estaremos retomando nossa questão de pesquisa que é *investigar em que medida os critérios de não congruência influenciam na conversão da escrita natural para a escrita algébrica nos problemas envolvendo equações do primeiro grau*. Além disso, caso tenha surgido algum resultado relevante da análise da questão que não seja nosso objetivo, deixaremos para comentar nas considerações finais.

5.3 Análise e discussão do problema 01

O problema de número 01, cuja característica é ser totalmente congruente, ou seja, nenhum fator de congruência foi alterado, pode ter permitido ao sujeito identificar o objeto em duas representações distintas. Um número maior de RACT, pelo quadro 9, reafirma a possível facilidade de os sujeitos converterem problemas na linguagem natural para a algébrica quando as representações são totalmente congruentes.

Esse problema foi proposto com intuito de confirmar pesquisas anteriores, que apontam essa facilidade na conversão de representações congruentes (ANDRÉ, 2007). No entanto, esse problema não será foco de análise em nosso estudo, e muito menos de comparação entre as questões, pois queremos analisar a influência dos fatores de não congruência, variados nas questões de 02 a 08.

5.4 Análise e discussão do problema 02

Esse problema foi elaborado de modo a ser totalmente não congruente. Os três fatores de não congruência não foram conservados e, como já afirmava Duval (2004), é neste tipo de problema que se verifica um índice maior de dificuldade. Isso porque, o objeto matemático não transparece nas duas representações, o que acaba por não identificá-lo. É como se esses fatores de não congruência exigissem do sujeito um maior reconhecimento do objeto matemático em questão, o que, não acontecendo, demonstra a importância da investigação da natureza desses problemas pelo fato de se exigir um maior custo cognitivo.

Se para atingir a compreensão do objeto é necessário o sujeito se deparar com o maior número de representações possíveis desse objeto, então a natureza do problema 02 se confirma como uma boa estratégia para o aprofundamento das equações de primeiro grau, pois, nesse momento, os erros que emergem podem ser investigados com o intuito de compreendê-los.

Pelo QUADRO 10, percebemos que dos 90 registros algébricos, 31% dos sujeitos conseguiram fazer a conversão total do problema (solução esperada), sendo esta porcentagem a menor taxa de RACT nos oito problemas.

Além disso, RACP, que se refere a conversões parciais de duas relações, e RACP', a conversão de uma relação do problema sem montar a equação, mostram que o número de sujeitos que fizeram conversões parciais (RACP + RACP') de relações esteve em torno de 62% dos sujeitos, o maior número quando comparado com as outras questões.

O que podemos inferir dessas informações é que por mais que uma minoria não tenha conseguido fazer a conversão total para o registro algébrico, a maioria, em contrapartida, se aproximou da solução esperada, como vimos, ao somar RACP com RACP'. Podemos dizer que os fatores de não congruência foram os elementos que interferiram na taxa de sucesso dos sujeitos.

Os erros de natureza algébrica apareceram de várias formas. No entanto, nos centralizaremos em alguns mais relevantes de modo a investigar em que medida esses fatores influenciaram na conversão.

No protocolo de número 26 temos uma situação bastante interessante.

02) Geraldo, Marcos e Taís vão a um orfanato de crianças carentes entregar uma contribuição financeira, voluntária, equivalente a R\$ 1 100,00. Geraldo contribuiu quatro vezes mais que Marcos e Taís com a metade do que contribuiu Marcos. Com quantos reais contribuiu cada um?

$1100,00 \div 4 = 2640,00$

$\left. \begin{array}{l} \text{Geraldo} = 4x \text{ mais que} \\ \text{marcos} = \leftarrow \\ \text{Taís} = \text{metade} \end{array} \right\} 1100,00$

geraldo = 2640,00
 marcos = 2640,00
 taís = 1320,00

Protocolo número 26

Percebemos que o sujeito conseguiu identificar a natureza das relações entre Geraldo e Marcos e entre Taís e Marcos. Observe que quando ele escreve a quantidade de Geraldo por *4x mais que* e aponta para Marcos ele está dizendo que compreendeu a natureza multiplicativa existente nessa relação. Do mesmo modo

acontece quando ele representa a quantidade de Taís por *metade* e aponta para Marcos.

Além desse protocolo, o de número 159, 189 e 190 também ilustram esse modo de pensar.

02) Geraldo, Marcos e Taís vão a um orfanato de crianças carentes entregar uma contribuição financeira, voluntária, equivalente a R\$ 1 100,00. Geraldo contribuiu quatro vezes mais que Marcos e Taís com a metade do que contribuiu Marcos. Com quantos reais contribuiu cada um?

Geraldo = 4 x o valor de Marcos

Marcos = 1

Taís = a metade de Marcos

$$\begin{array}{r} 1100 \overline{) 2} \\ 10 \quad 550 \\ 10 \quad +550 \\ 10 \quad 1100 \end{array}$$

Protocolo número 159

02) Geraldo, Marcos e Taís vão a um orfanato de crianças carentes entregar uma contribuição financeira, voluntária, equivalente a R\$ 1 100,00. Geraldo contribuiu quatro vezes mais que Marcos e Taís com a metade do que contribuiu Marcos. Com quantos reais contribuiu cada um?

geraldo: 4. x

marcos: x

taís: x metade

$$\begin{array}{r} 200 \quad 200 \quad 200 \\ \hline 800 \\ 800 \\ 200 \\ 100 \\ \hline 1100 \end{array}$$

R: geraldo: 800,00, Marcos: 200,00 e taís: 100

Protocolo número 189

02) Geraldo, Marcos e Taís vão a um orfanato de crianças carentes entregar uma contribuição financeira, voluntária, equivalente a R\$ 1 100,00. Geraldo contribuiu quatro vezes mais que Marcos e Taís com a metade do que contribuiu Marcos. Com quantos reais contribuiu cada um?

R\$ 1.100,00

G = 4x mais que M. T

M = x

T = metade do que contribuiu M

Geraldo - 800
Marcos - 200
Taís - 100

800
+ 200

1000
+ 100

1100

Protocolo número 190

O que esses sujeitos têm em comum é a existência de dificuldades em converter o registro em língua natural para o registro algébrico. Pelo fato de não conseguirem encontrar um signo algébrico equivalente para representar a natureza das relações usaram palavras do texto como *metade*, *mais que* e *valor de Marcos*, por exemplo, como substitutos.

Um outro tipo de erro algébrico presente nesse problema está ilustrado nos protocolos 04 e 42.

02) Geraldo, Marcos e Taís vão a um orfanato de crianças carentes entregar uma contribuição financeira, voluntária, equivalente a R\$ 1 100,00. Geraldo contribuiu quatro vezes mais que Marcos e Taís com a metade do que contribuiu Marcos. Com quantos reais contribuiu cada um?

Geraldo = x . 4

Taís = x : 2

Marcos = x

Não consegui

Protocolo número 04

02) Geraldo, Marcos e Taís vão a um orfanato de crianças carentes entregar uma contribuição financeira, voluntária, equivalente a R\$ 1 100,00. Geraldo contribuiu quatro vezes mais que Marcos e Taís com a metade do que contribuiu Marcos. Com quantos reais contribuiu cada um?

$$x + 4x + 4x : 2 = 1100$$

$$x + 4x + 4x : 2 = 1100$$

$$5x + 2x = 1100$$

$$7x = 1100$$

$$x = 1100 : 7$$

$$x = 157$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ 157 \\ \cdot 4 \\ \hline 628 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 157 \cdot 2 \\ 17 \quad 785 \\ 10 \\ \hline 101 \end{array}$$

marcos R\$ 157,00 R

geraldo R\$ 628

Taís R\$ 78,5

Protocolo número 42

Esta natureza de erro confirma a solução incorreta apontada na análise *a priori*. Como, no texto, a relação entre Geraldo e Marcos aparece primeiro, o sujeito acaba por ser influenciado na relação seguinte, de modo que a quantidade referente a Taís se dá em função de Geraldo e não de Marcos. Por isso, que ele representa a relação de Taís por $x \cdot 4 \div 2$, a parte de Geraldo dividida por dois.

Nesse caso, a dificuldade não foi no sentido de não encontrar um signo algébrico, ainda que este não seja o correto, capaz de substituir as relações, pois ambos trabalham no registro algébrico. A dificuldade se deu por incompreensão da natureza das relações, estas, influenciadas pelos fatores de não congruência.

De um modo geral, o que podemos dizer sobre essa questão é que os fatores de não congruência interferiram na conversão para o registro algébrico de modo a não deixar transparecer uma possível equivalência entre as representações.

Ler o problema num sentido (esquerda para direita) e representá-lo algebricamente em outro (direita para esquerda), palavras antônimas que não conservam a univocidade semântica e o fato de ter dois signos no registro de partida e um no de chegada, são elementos preponderantes para dificultar essa conversão.

5.5 Análise e discussão do problema 03

Este problema se caracteriza pela conservação da correspondência semântica das unidades de significado. Isso significa que para cada signo na escrita natural teremos um signo equivalente no registro algébrico. A conservação da ordem das unidades de significado também se verifica, pois no sentido que se lê o problema se representa algebricamente. E o único fator que não é conservado é a univocidade semântica. Como já discutido, a presença de operações antônimas como multiplicar e dividir garante este fato.

Sobre a síntese desse problema, dos 95 registros algébricos presentes, cerca de 33% dos sujeitos conseguiram fazer a conversão total para a escrita algébrica. Esse número representa os alunos que atingiram a solução esperada. A mesma porcentagem se verificou para RACP e, de modo semelhante, para RACP'. Quando somamos RACP com RACP' temos 60% de registros parciais. Esse dado indica que mais da metade dos sujeitos esteve próxima do registro esperado. Depois da questão 02, esse problema foi o que possuiu uma maior porcentagem para RACP + RACP'.

O que podemos inferir dessas informações é que a não conservação do fator univocidade semântica terminal impede o sujeito de converter totalmente para o registro algébrico. Ele consegue representar uma relação ou até mesmo duas relações, mas não consegue montar a equação.

Pelo protocolo 29 temos uma noção da natureza de alguns registros.

03) José, Augusto e Fábio produziram, juntos, 1400 peças na fábrica em que trabalham. Augusto produziu certa quantidade. Duas vezes o número de peças produzidas por Augusto dá a quantidade de Fábio. A metade do número de peças produzidas por Augusto é a quantidade fabricada por José. Quantos produtos foram fabricados, individualmente, por estes três funcionários?

$$\text{José} = \frac{x}{2} \rightarrow 350$$

$$\text{Augusto} = x \rightarrow 350$$

$$\text{Fábio} = x \cdot 2 \rightarrow 700$$

$$2x + 2x = 4x$$

$$1400 \overline{) 4}$$

$$\begin{array}{r} 350 \\ 20 \\ 00 \end{array}$$

$$700 \overline{) 2}$$

$$\begin{array}{r} 350 \\ 10 \\ 00 \end{array}$$

Resposta = José = 350
 Augusto = 350
 Fábio = 700

Protocolo número 29

Podemos observar que esse sujeito representa a quantidade de Augusto por x e mostra que ele o considera como fonte, para, a partir disso, converter a quantidade de Fábio “Duas vezes o número de peças produzidas por Augusto” para $x \cdot 2$. Ele percebe que nessa relação a quantidade de Fábio está em função de Augusto. Esse fato esclarece que o sujeito está conseguindo visualizar um equivalente algébrico para essa relação.

Já na relação entre Augusto e José, o sujeito não consegue converter a relação totalmente para o registro algébrico. Para a relação “A metade do número de peças produzidas por Augusto é a quantidade de José” lhe faltam ferramentas para completar o registro. A palavra metade está associada à divisão e, por esse motivo, ele representa a quantidade de José por $\div x$. Além disso, a não conservação da univocidade semântica terminal traz à tona uma possível dificuldade em converter, para o registro algébrico, relações de natureza multiplicativa com operações contrárias.

Um fato semelhante acontece no protocolo 47.

03) José, Augusto e Fábio produziram, juntos, 1400 peças na fábrica em que trabalham. Augusto produziu certa quantidade. Duas vezes o número de peças produzidas por Augusto dá a quantidade de Fábio. A metade do número de peças produzidas por Augusto é a quantidade fabricada por José. Quantos produtos foram fabricados, individualmente, por estes três funcionários?

José $\rightarrow \frac{1}{2}$
 Augusto $\rightarrow x$
 Fábio $\rightarrow 2x$

\sum José = 200
 Augusto = 400
 Fábio = 800

800	400	400	Augusto
+400		x2	
1200		800	Fábio
+200			
1400		400	José
		200	

Protocolo número 47

Este sujeito encontra um signo algébrico equivalente para a relação entre Augusto e Fábio quando representa suas partes corretamente, mas tem dificuldade na relação entre Augusto e José. Pelo mesmo motivo apontado no protocolo 29, o sujeito não completa a relação e representa a parte de José por $\frac{1}{2}$, nem sequer usando uma incógnita.

Dificuldades em representar a parte de José foram evidenciadas também nos protocolos 35, 38, 48 e 143, como se vê abaixo.

03) José, Augusto e Fábio produziram, juntos, 1400 peças na fábrica em que trabalham. Augusto produziu certa quantidade. Duas vezes o número de peças produzidas por Augusto dá a quantidade de Fábio. A metade do número de peças produzidas por Augusto é a quantidade fabricada por José. Quantos produtos foram fabricados, individualmente, por estes três funcionários?

Juntos = 1400 peças

Augusto = x

Fábio = 2x Augusto

José = $\frac{1}{2}$ Augusto

Protocolo número 35

03) José, Augusto e Fábio produziram, juntos, 1400 peças na fábrica em que trabalham. Augusto produziu certa quantidade. Duas vezes o número de peças produzidas por Augusto dá a quantidade de Fábio. A metade do número de peças produzidas por Augusto é a quantidade fabricada por José. Quantos produtos foram fabricados, individualmente, por estes três funcionários?

$$\begin{aligned} \text{Augusto} &= x \\ \text{FABIO} &= 2x \\ \text{JOSÉ} &= \end{aligned}$$

Protocolo número 38

03) José, Augusto e Fábio produziram, juntos, 1400 peças na fábrica em que trabalham. Augusto produziu certa quantidade. Duas vezes o número de peças produzidas por Augusto dá a quantidade de Fábio. A metade do número de peças produzidas por Augusto é a quantidade fabricada por José. Quantos produtos foram fabricados, individualmente, por estes três funcionários?

$$\begin{aligned} \text{Augusto: } x & \quad x + 2x = 1400 & \text{Augusto} = 466 & \quad \begin{array}{r} 1400 \overline{) 3} \\ 20 \\ \underline{120} \\ 20 \\ \underline{20} \\ 0 \end{array} \\ \text{Fábio: } 2 \cdot x & \quad 3x = 1400 & \text{Fábio} = 466 \cdot 2 = 932 & \quad \begin{array}{r} 466 \\ \times 2 \\ \hline 932 \end{array} \\ \text{José: } 2 : x & \quad x = \frac{1400}{3} & \text{José} = 466 : 2 = 233 & \quad \begin{array}{r} 233 \\ + 466 \\ \hline 699 \\ + 932 \\ \hline 1631 \end{array} \end{aligned}$$

Protocolo número 48

03) José, Augusto e Fábio produziram, juntos, 1400 peças na fábrica em que trabalham. Augusto produziu certa quantidade. Duas vezes o número de peças produzidas por Augusto dá a quantidade de Fábio. A metade do número de peças produzidas por Augusto é a quantidade fabricada por José. Quantos produtos foram fabricados, individualmente, por estes três funcionários?

$$\begin{array}{l}
 J - x + 2 \\
 A - x \\
 F - x \cdot 2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 x + 2 + x + x \cdot 2 \\
 2x + x + 2x = 1400 \\
 2x + 2x + x = 1400 \\
 4x + x = 1400 \\
 x = 5 = 1400 \\
 x = 1395
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 1395 \overline{) 3} \\
 \underline{- 121} \\
 019 \\
 \underline{- 18} \\
 10 \\
 \underline{- 15} \\
 0
 \end{array}$$

Protocolo número 143

O que podemos dizer sobre este fato é que os sujeitos se aproximaram de RACT a partir do momento que RACP + RACP' chegou a 60%. Esses sujeitos lançaram mão do sistema semiótico algébrico como suporte, utilizaram signos pertinentes desse sistema, mostrando que visualizaram o mesmo objeto em representações distintas, no entanto se confundiram com a relação algébrica Augusto – José.

A relação Augusto – José se caracteriza pela presença da operação de divisão entre as partes. Mas a divisão não acontece do mesmo modo que na multiplicação. Enquanto existe comutatividade na multiplicação, o mesmo não podemos dizer da divisão. A não aceitação da não comutatividade na divisão, $4 \div x \neq x \div 4$, faz com que muitos sujeitos convertam da escrita natural para a algébrica de modo errado.

Apesar de não ser nosso objetivo buscar as causas desse erro, podemos apontá-lo com o intuito de ser útil para novas pesquisas.

5.6 Análise e discussão do problema 04

Esse problema foi estruturado não conservando a ordem das unidades de significado, ou seja, o sentido de se fazer o registro algébrico (direita para esquerda) é o inverso ao da leitura do problema (esquerda para direita).

Em síntese, obtivemos 42% de sujeitos dentro do registro esperado, conseguindo, com isso, fazer a mudança de sistema da escrita natural para a algébrica. Cerca de 50% (RACP + RACP') fizeram registros algébricos parciais e 8% fizeram conversões incompatíveis.

O que podemos inferir da natureza dos erros que surgiram nos protocolos seguintes são questionamentos que confirmam pesquisas anteriores e, ao mesmo tempo, interpretações que nos ajudam a compreender um pouco da natureza desses equívocos.

Um dos erros já discutido é o que aparece no protocolo 26.

04) A soma das idades de Júlio, Abreu e Bruno é de 90 anos. A idade de Abreu é três vezes a de Julio, e a idade de Bruno é cinco vezes a de Julio. Qual a idade de cada um deles?

total 90 anos
 Julio - X
 Abreu - três vezes a de julio
 Bruno - 5 vezes a de julio

Protocolo número 26

O sujeito encontra um equivalente algébrico para uma parte, mas tem dificuldade de encontrar para as outras. À parte de Júlio, ele atribui x. Isso se deve ao fato de Júlio ser a fonte das relações, conforme a lógica dos problemas de partilha. Já para as outras duas partes, a de Abreu e a de Bruno, o sujeito não consegue fazer a conversão da representação e escreve a quantidade de ambos literalmente.

Um dado bastante interessante é o que encontramos no protocolo 13.

04) A soma das idades de Júlio, Abreu e Bruno é de 90 anos. A idade de Abreu é três vezes a de Julio, e a idade de Bruno é cinco vezes a de Julio. Qual a idade de cada um deles?

$$J + A + B = 90.$$

$$A \cdot 3 = J \cdot 5 = J$$

Protocolo número 13

A equação montada demonstra uma prática comum, em que o sujeito, ao ler o problema, procura representá-lo no mesmo sentido da leitura. A frase “A idade de Abreu é três vezes a de Júlio” leva o sujeito, sem fazer uma reflexão prévia do texto, a representar $A \cdot 3 = J$. Ele faz a conversão para a escrita algébrica, no entanto, a não congruência é um elemento que muda a ordem convencional de representação.

Situação semelhante ao analisado no protocolo 13 também encontramos no protocolo 30.

04) A soma das idades de Júlio, Abreu e Bruno é de 90 anos. A idade de Abreu é três vezes a de Julio, e a idade de Bruno é cinco vezes a de Julio. Qual a idade de cada um deles?

$$\begin{array}{l}
 J + A + B = 90 \quad / \quad \text{Júlio} \rightarrow 10 \text{ anos,} \\
 3 \cdot A = \text{Júlio} = \quad \quad \quad \text{Abreu} \rightarrow 30 \text{ anos,} \\
 5 \cdot B = \text{Júlio} \quad / \quad \quad \quad \text{Bruno} \rightarrow 50 \text{ anos,}
 \end{array}$$

Protocolo número 30

Observe que o sujeito representa algebricamente as duas relações do problema. Mas pelo fato de representá-las no sentido da leitura o erro torna-se inevitável. O que podemos apontar sobre essa questão é o uso de “A” e “B” como rótulos. O “A” de $3 \cdot A = \text{Júlio}$ é o rótulo para a palavra Abreu, assim como “B” é rótulo para a palavra Bruno. Por isso que “A idade de Abreu é três vezes a idade Júlio” é traduzido por $3 \cdot A = \text{Júlio}$ e “a idade de Bruno é cinco vezes a de Júlio” por $5 \cdot B = \text{Júlio}$. Ao invés de incógnitas para representar “a idade de Abreu” e “a idade de Bruno” o “A” e o “B” estão sendo utilizados para identificar o nome das pessoas.

O protocolo 117 reforça o que estamos querendo mostrar sobre a troca rótulo – incógnita.

04) A soma das idades de Júlio, Abreu e Bruno é de 90 anos. A idade de Abreu é três vezes a de Julio, e a idade de Bruno é cinco vezes a de Julio. Qual a idade de cada um deles?

$$3 \cdot A = J \quad 5 \cdot J = B$$

$$A = 20$$

$$J = 40$$

Protocolo número 117

O que as representações 13, 30 e 117 têm em comum é o tipo de registro utilizado, algébrico. No entanto, as representações possuem naturezas bem distintas. No protocolo 117, os símbolos “A” e “J” são interpretados como rótulos para “Abreu” e “Júlio” na equação $3 \cdot A = J$ e na equação $5 \cdot J = B$, “J” e “B” são incógnitas.

Esse dado demonstra que um sujeito pode transitar de concepções quanto ao uso da letra quando se varia o grau de não congruência na questão. A confusão rótulo – incógnita deve-se ao fato de o sujeito não compreender o uso da letra e nem de reconhecer um equivalente algébrico na escrita natural. Por não encontrar um signo algébrico equivalente o sujeito, por conveniência de leitura, traduz o problema ao pé da letra.

Nos protocolos 205 e 210 temos um erro que se caracteriza pela forte tendência de se representar no sentido da leitura.

04) A soma das idades de Júlio, Abreu e Bruno é de 90 anos. A idade de Abreu é três vezes a de Julio, e a idade de Bruno é cinco vezes a de Julio. Qual a idade de cada um deles?

Handwritten solution for Protocolo número 205:

J
 $A = 3 \times J$
 $B = 5 \times J$

$20 \ 5 \ 15 \ J$
 15
 75
 15
 90

$A = 5$

$A = 5$
$J = 15$
$B = 75$

Protocolo número 205

04) A soma das idades de Júlio, Abreu e Bruno é de 90 anos. A idade de Abreu é três vezes a de Julio, e a idade de Bruno é cinco vezes a de Julio. Qual a idade de cada um deles?

Handwritten solution for Protocolo número 210:

$J + A + B = 90$

$A + 3x + J + B + 5x + J = 90$

30 anos

90

Protocolo número 210

O que todos os protocolos já mencionados nesse problema têm em comum, além do registro algébrico, é a confusão rótulo – incógnita. Os sujeitos representam “A idade de Abreu é três vezes a idade Júlio” pela sequência “A3xJ” demonstrando dificuldade em conceber a inversão como requisito necessário para a conversão, fazendo uma tradução simultânea para o registro algébrico. Encontramos isso bem explícito no protocolo 205.

A confusão rótulo – incógnita, emergida nos protocolos 13, 30, 117, 205 e 217, nos aponta caminhos quanto as concepções da álgebra (ver QUADRO 1) no ensino fundamental. Apesar de não ser objetivo de nossa pesquisa, não podemos deixar de apontar como um dado. Essas dificuldades nos ajudam a refletir sobre a possibilidade de coabitação de concepções por um mesmo sujeito e não necessariamente que ele “conquiste” essas concepções de modo separado no ensino fundamental. Sobre esse assunto, retomaremos mais adiante.

O problema 04 comprova dificuldades existentes quando se inverte a ordem de representação da ordem de leitura, segundo Lochhead e Mestre (1995) apontaram. Ao mesmo tempo, amplia novas formas de interpretação ao olharmos para esses erros na ótica da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. De fato, a justificativa mais comum na literatura é dizer que o sujeito não sabe interpretar o problema. À luz da teoria, podemos dizer que elementos como variação de congruência interferem na natureza da conversão de modo a não deixar transparecer o objeto em duas representações distintas.

Fazer a “tradução”, dito de muitos professores quando se ensina equação, não é a escolha didática correta quando se propõe fazer a conversão da escrita natural para a algébrica. Se assim fosse, os sujeitos 205 e 210 estariam corretos. Essa “tradução” acaba por gerar barreiras para a própria manipulação algébrica, pois os sujeitos não conseguem operar com o registro representado.

A teoria nos dá elementos para compreender a natureza desses erros. Converter de um registro para outro não é “traduzir”, “codificar”, principalmente quando as representações não são congruentes. Mas converter é mudar o registro de representação sem mudar o objeto. Dessa forma, a conversão se constitui como uma atividade cognitiva complexa e importante para a compreensão do conceito (DUVAL 2007, p.17)

O que essa questão nos mostra é que as conversões das relações não podem ser tratadas isoladamente. As duas relações, Abreu – Júlio e Bruno – Júlio foram representadas de modo bem distintas, o que favoreceu o erro. Deve-se levar em conta que a ligação dessas duas relações é Júlio, fonte do problema, para então iniciar a conversão. Ainda que para cada relação se tenha um representante algébrico, a soma das partes dá o total, e isso possibilita o equacionamento final.

Nesse sentido, a não congruência permitiu o surgimento de erros que possibilitaram novas leituras e interpretações quando o sentido da representação algébrica é o inverso da leitura.

5.7 Análise e discussão do problema 05

Dos 71 registros algébricos que surgiram nesse problema, 37% dos sujeitos fizeram a conversão para a solução esperada, ou seja, fizeram a conversão total (RACT), 42% dos sujeitos fizeram conversões das duas relações, mas não conseguiram montar a equação (RACP) e 15% fizeram a conversão de uma relação.

Este problema se caracteriza por não conservar a univocidade semântica e a ordem das unidades de significado, dois fatores analisados individualmente nas questões 03 e 04. Agora, na questão 05, eles aparecem em conjunto.

Uma dificuldade que persiste é o da insuficiência de completar a conversão da linguagem natural para o registro algébrico. Por não conseguirem encontrar um equivalente algébrico para as relações, os alunos acabam por misturar os dois sistemas semióticos, usando, o que passaremos a chamar de escrita de transição. É a escrita que o sujeito usa parte de um sistema semiótico em língua natural e parte em linguagem algébrica. O protocolo 190 ilustra bem o que chamamos de escrita de transição.

05) Tiago, Jô e Alfeu são colecionadores de selos. Eles vão repartir 84 selos de modo que Tiago possua três vezes a quantidade de selos de Jô, e Alfeu a quinta parte de selos de Jô. Quantos selos cada um vai receber?

84 selos

T - possuiu 3 x a quanti. de Jô

J - x

A - a quinta parte de selos de J

Tiago - T

Jô - J

Alfeu - A

Protocolo número 190

Podemos observar que a parte de Tiago, representada pela letra T, possui elementos da escrita natural – “possua a quanti. de Jô” – e elementos da escrita algébrica – “3x”.

O protocolo 189 reforça o uso dessa escrita de transição.

05) Tiago, Jô e Alfeu são colecionadores de selos. Eles vão repartir 84 selos de modo que Tiago possua três vezes a quantidade de selos de Jô, e Alfeu a quinta parte de selos de Jô. Quantos selos cada um vai receber?

$Tiago = 3x$
 $Jô = x$
 $Alfeu = \text{quinta parte } x$

$20 \overline{) 200}$
 $\underline{200}$
 0
 $20 \overline{) 200}$
 $\underline{200}$
 0
 $20 \overline{) 200}$
 $\underline{200}$
 0

Protocolo número 189

A parte de Alfeu foi representada por “*quinta parte x*”. A frase *quinta parte* é escrita natural e x é algébrica.

Se formos comparar os dois protocolos, perceberemos que os dois sujeitos compreenderam a natureza multiplicativa das relações. Além disso, podemos dizer que o fato deles discriminarem a parte de Tiago, Jô e Alfeu denota a compreensão da existência de duas relações. No entanto, a diferença está no fato do sujeito 189 se aproximar mais de RACT do que o sujeito 190. Enquanto o 190 encontra um equivalente algébrico apenas para a fonte do problema o 189 encontra para a fonte e para Tiago. Ele faz a conversão da relação Tiago – Jô.

Ainda sobre a escrita de transição, dado de nossa pesquisa, é que ela pode ser desencadeada quando o sujeito rotula as palavras do texto por uma letra, como no protocolo 175.

05) Tiago, Jô e Alfeu são colecionadores de selos. Eles vão repartir 84 selos de modo que Tiago possua três vezes a quantidade de selos de Jô, e Alfeu a quinta parte de selos de Jô. Quantos selos cada um vai receber?

Handwritten work for Protocolo número 175:

Equation in box: $3x + 9x + \frac{1}{5}x = 84$

Solution:

Tiago = 50
 Jô = 20
 Alfeu = 14

Protocolo número 175

A parte demarcada é a representação literal das duas relações do problema. Mais uma vez, como visto na análise do problema 04, o sujeito possui uma forte tendência de representar na ordem da leitura. A não conservação da ordem das unidades de significado faz com que este erro apareça.

Outro erro comum, decorrente da não conservação da univocidade semântica, foi a dificuldade de encontrar a parte de Alfeu. A presença de operações antônimas – multiplicar e dividir – desencadeia a incompreensão de encontrar um equivalente algébrico correto para “quinta parte de selos de Jô”.

Reforçado pela presença da não conservação da ordem das unidades de significado, o sujeito representa esta relação por $5/x$ ou por $5 \div x$, como vemos nos seguintes protocolos.

05) Tiago, Jô e Alfeu são colecionadores de selos. Eles vão repartir 84 selos de modo que Tiago possua três vezes a quantidade de selos de Jô, e Alfeu a quinta parte de selos de Jô. Quantos selos cada um vai receber?

Handwritten work for Protocolo número 132:

$Jô = x$
 $Tiago = 3 \cdot x$
 $Alfeu = \frac{5}{x}$

Protocolo número 132

05) Tiago, Jô e Alfeu são colecionadores de selos. Eles vão repartir 84 selos de modo que Tiago possua três vezes a quantidade de selos de Jô, e Alfeu a quinta parte de selos de Jô. Quantos selos cada um vai receber?

$$\begin{array}{l}
 \text{Jô: } x \\
 \text{Tiago: } 3 \cdot x \\
 \text{Alfeu: } 5 \cdot x
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 x + 3x = 84 \\
 4x = 84 \\
 x = \frac{84}{4} \\
 x = 21
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{Jô} = 21 \\
 \text{Tiago} = 63 \\
 \text{Alfeu} = 21 \cdot 5 = 4
 \end{array}$$

Protocolo número 48

05) Tiago, Jô e Alfeu são colecionadores de selos. Eles vão repartir 84 selos de modo que Tiago possua três vezes a quantidade de selos de Jô, e Alfeu a quinta parte de selos de Jô. Quantos selos cada um vai receber?

$$\begin{array}{l}
 \text{Tiago} - 3x \quad 60 \quad 60 \\
 \text{Jô} - x \quad 20 \quad 20 \\
 \text{Alfeu} - 5x \quad 4 \quad 4
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 84 \overline{) 84} \\
 \underline{84} \\
 0 \\
 \underline{0} \\
 0
 \end{array}$$

Protocolo número 10

Assim como na questão 03, essa dificuldade pode ser entendida pela não aceitação da comutatividade na divisão. Dizer que “*Tiago possui três vezes a quantidade de selos de Jô*” pode ser representada por $T = 3 \cdot J$ ou $T = J \cdot 3$, o que não pode acontecer na relação Alfeu – Jô. Não é nosso objetivo discutir a origem desse erro, no entanto, é um dado encontrado em nosso trabalho que pode servir de base para novas pesquisas.

O que podemos dizer sobre a característica desse problema é que, das questões que possuíram a não conservação de dois fatores de não congruência, 05, 07 e 08, a de número 05 teve um menor número de registros algébricos e um menor número de RACT, dando-nos uma ideia das dificuldades que emergem quando

esses fatores se combinam. Sobre este fato, deixaremos para tratar mais adiante, na análise e discussão geral.

5.8 Análise e discussão do problema 06

Dos 86 registros algébricos que surgiram neste problema, 44% dos sujeitos fizeram a conversão para a solução esperada, ou seja, fizeram a conversão total (RACT), 41% dos sujeitos fizeram conversões das duas relações, mas não conseguiram montar a equação (RACP) e 12% fizeram a conversão de apenas uma relação.

Fazendo uma rápida comparação com os problemas 03 e 04, por serem aqueles que só variam um fator de não congruência, a questão 03 não conserva a univocidade semântica, a 04, a ordem das unidades de significado e a 06, a correspondência semântica, podemos afirmar que o problema 06 possui a maior taxa de RACT e também a maior taxa de RACP. Isso significa que quando não se conserva a correspondência semântica os sujeitos tendem a se aproximar mais da conversão esperada.

Na questão 05, um dos erros presentes nos protocolos de nossa pesquisa surgiu em decorrência da não comutatividade da divisão. Acreditamos que a aproximação para a conversão esperada no problema 06 se justifique em função da inexistência da não conservação da univocidade semântica. Neste caso, a presença apenas da multiplicação nas relações pode ter contribuído para um aumento de RACT e RACP.

Os erros apontados em questões anteriores tornaram a aparecer, ainda que em escalas diferentes. Para que não sejamos repetitivos analisaremos alguns erros não discutidos, mas relevantes.

O primeiro é o que aparece no protocolo 210.

06) Os irmãos Juca, Rita e Márcia possuem juntos 120 brinquedos. Rita possui certa quantidade. O triplo da quantidade de brinquedos de Rita é igual a quantidade de brinquedos de Juca. O quádruplo do número de brinquedos de Rita é a de Márcia. Quantos brinquedos possui cada um?

$$R + 3 + J = 120$$

$$4 + R + M$$

Protocolo número 210

A correspondência semântica garante a associação binária entre signos. Um signo no registro natural deve possuir um único correspondente no registro algébrico. Nesse caso, triplo e quádruplo são signos que remetem a dois signos, vezes três (x3) e vezes quatro (x4), respectivamente. No entanto, o sujeito converte triplo para 3 e quádruplo para 4, não entendendo a natureza multiplicativa entre as relações.

O mesmo acontece com o sujeito 199.

06) Os irmãos Juca, Rita e Márcia possuem juntos 120 brinquedos. Rita possui certa quantidade. O triplo da quantidade de brinquedos de Rita é igual a quantidade de brinquedos de Juca. O quádruplo do número de brinquedos de Rita é a de Márcia. Quantos brinquedos possui cada um?

$$3 + 4 + X = 120$$

$$9X = 120$$

$$X = \frac{120}{9}$$

$$X = 13,3$$

Resposta = Rita = 13, Juca = 39, Márcia = 52

Protocolo número 199

Na equação destacada no protocolo 199, observamos que ele também associa triplo e quádruplo a 3 e 4, respectivamente.

O que podemos apontar de similaridade entre os registros semióticos desses dois sujeitos é que ambos não conseguiram identificar a fonte do problema. Apesar de o sujeito 210 usar R para representar a parte de Rita, ele assim o faz pela ordem de leitura do texto. “Rita possui uma certa quantidade” ele associa a R; “O triplo da

quantidade de brinquedos de Rita é igual a quantidade de brinquedos de Juca” ele associa a $3 + J$ e “O quádruplo do número de brinquedos de Rita é a de Márcia” a $4 + R + J$. Tanto é que ele não percebe que Rita é a fonte e que ele trata as duas relações de forma independente, sem nenhuma ligação. O mesmo acontece com o sujeito 199, que só representa as palavras triplo e quádruplo como já mencionado.

Um segundo erro que merece nossa atenção é o que aparece nos protocolos 55 e 15, adiante.

06) Os irmãos Juca, Rita e Márcia possuem juntos 120 brinquedos. Rita possui certa quantidade. O triplo da quantidade de brinquedos de Rita é igual a quantidade de brinquedos de Juca. O quádruplo do número de brinquedos de Rita é a de Márcia. Quantos brinquedos possui cada um?

JRM = 120 brinquedos

$$\begin{array}{r} 120 \overline{) 6} \\ \underline{00} \\ 20 \\ \underline{00} \\ 60 \end{array}$$

$$\begin{aligned} R &= X \\ J &= X^3 \\ M &= X^4 \end{aligned}$$

Protocolo número 55

06) Os irmãos Juca, Rita e Márcia possuem juntos 120 brinquedos. Rita possui certa quantidade. O triplo da quantidade de brinquedos de Rita é igual a quantidade de brinquedos de Juca. O quádruplo do número de brinquedos de Rita é a de Márcia. Quantos brinquedos possui cada um?

Resposta

$$\begin{aligned} \text{Juca } X^3 &\rightarrow 45 \text{ brinq.} \\ \text{Rita } X^1 &\rightarrow 45 \text{ brinq.} \\ \text{Marcia } X^4 &\rightarrow 60 \text{ brinq.} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 15 \overline{) 60} \text{ metade} \\ \underline{45} \\ 60 \text{ metade} \\ \underline{60} \\ 0 \end{array}$$

(60) 120 brinquedos

Protocolo número 15

Os sujeitos identificam Rita como fonte, pois representam as partes de Juca e Márcia em função de x , mas não corretamente. Representam a parte de Juca por x^3 e a de Márcia por x^4 .

Como nosso objetivo é investigar em que medida os fatores de não congruência influenciam na conversão da escrita natural para a algébrica, podemos perceber que a não conservação da correspondência semântica nos problemas de partilha de natureza multiplicativa desencadeou erros concernentes à associação incorreta entre um signo na língua natural e outro na algébrica.

5.9 Análise e discussão do problema 07

Esta questão se caracteriza por não conservar a correspondência semântica e nem a ordem das unidades de significado. Apesar de combinar dois fatores de não congruência, das oito questões esta é a que possui maior índice de RACT, 47%. Podemos inferir, com isso, que a presença desses dois fatores facilitou a conversão de representação de um registro para outro.

Mas apesar dessa facilidade na conversão, erros decorrentes da não congruência tornaram a aparecer, tais como escrita de transição, associação incorreta entre signos da escrita natural e algébrica, representação no sentido da leitura, bem como erros que emergiram quando da presença de cada um dos fatores.

Por este fato, apontaremos um erro muito freqüente nos registros, como no protocolo 30.

07) João, Ricardo e Mateus possuem juntos 126 bolas de gude. João tem o dobro de bolas de gude de Ricardo, e Mateus tem o quádruplo de bolas de gude de Ricardo. Quantas bolas de gude possui cada um?

$J + R + M = 126$ (bolas)

2. $J = 2R$

4. $M = 4R$

Ricardo = 18 bolas de gude,
 João = 36 bolas de gude,
 Márcia = 72 bolas de gude,

Protocolo número 30

O sujeito admite que “*João tem o dobro de bolas de gude de Ricardo*” é equivalente a “*O dobro de bolas de gude de João é a quantidade de Ricardo*”, por isso ele representa $2.J = R$. A não congruência causada pela não conservação dos fatores possibilita o surgimento desse erro.

Dessa forma, a influência dos fatores de não congruência na conversão da escrita natural para algébrica nos problemas de partilha de natureza multiplicativa, permite o surgimento de erros que carecem de investigação. O que levou o sujeito a fazer tal conversão? O que é preciso fazer para que essas dificuldades sejam minimizadas? Acreditamos que perguntas desse tipo permitem compreender melhor a natureza da conversão e podem ser explorados em pesquisas futuras.

5.10 Análise e discussão do problema 08

Neste problema, dos 75 registros algébricos 40% fizeram a conversão total (solução esperada), 35% a conversão de duas relações sem montar a equação e 21% a conversão de uma relação. Ele foi elaborado levando em conta apenas a conservação da ordem das unidades de significado.

Queremos ressaltar que as estratégias decorrentes da não conservação dos fatores em questão tornaram a surgir. Dessa forma, comentaremos uma estratégia que não apareceu em nenhuma questão anterior. Esta estratégia está presente apenas nos protocolos 12 e 23, como adiante.

08) Os amigos Maria, Roger e Caio compraram chocolates numa quantidade total de 68 chocolates. Roger comprou certa quantidade. O triplo da quantidade de chocolates de Roger é igual a quantidade de chocolates de Maria. A quarta parte dos chocolates de Roger é igual a de Caio. Quantos chocolates comprou cada um?

Handwritten solution for problem 08:

$$68 \mid$$

$$\begin{aligned} \text{Maria} &= 12X & 12X + X + 4X &= 17X \\ \text{Roger} &= 4X & 12X &= 68 : 17 \\ \text{Caio} &= X & \text{DE} &= \text{um} \quad X = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Maria} &= 48 \\ \text{Roger} &= 16 \\ \text{Caio} &= 4 \end{aligned}$$

08) Os amigos Maria, Roger e Caio compraram chocolates numa quantidade total de 68 chocolates. Roger comprou certa quantidade. O triplo da quantidade de chocolates de Roger é igual a quantidade de chocolates de Maria. A quarta parte dos chocolates de Roger é igual a de Caio. Quantos chocolates comprou cada um? $M=12, R=16, C=4$

$$\begin{aligned} M &= 12x \\ R &= 4x \\ C &= x \end{aligned}$$

$$12x + 4x + x = 68$$

$$17x = 68$$

$$x = \frac{68}{17}$$

$$x = 4$$

$$\begin{array}{r|l} 68 & 2 \\ \hline 34 & 2 \\ \hline 17 & 17 \\ \hline 1 & 4 \end{array}$$

Protocolo número 23

Consideramos este problema relevante pelo fato dos dois sujeitos admitirem a fonte do problema diferente da que admitimos na análise *a priori*. Elaboramos esta questão tomando Roger como fonte e, nesse sentido, a parte de Maria seria $3.R$ e a de Caio, $R/4$, sendo R a parte de Roger. Mas eles escolheram Caio como fonte.

Caio sendo a fonte, encontraram a parte de Maria, $12x$ e a parte de Roger, $4x$. Deram outro significado para a divisão. Não podemos dizer que eles não sabiam dividir, por que quando olhamos para o processo resolutivo, ainda que não seja nosso objetivo fazer essa análise, percebemos que sabem muito bem. Eles fazem a conversão esperada e nos deixam uma questão para ser investigada: que fatores os alunos consideram no momento de escolher a fonte em um problema de partilha?

Além disso, apesar deste problema conservar a ordem das unidades de significado, estes dois sujeitos convertem o problema em sentido contrário ao da leitura. Possivelmente começando por Caio e abstraído que se “*a quarta parte dos chocolates de Roger é igual a de Caio*” então, Roger tem quatro vezes mais, demonstrando compreensão da natureza do problema.

Então, o que concluímos sobre a estrutura desse problema, é que a variação de não congruência permitiu o surgimento de erros que apareceram quando os fatores em questão estiveram presentes em outras questões. Permitiu, também, levantar questionamentos sobre a escolha da fonte em um problema de partilha, pois muitos alunos optaram por adotar outra fonte, diferente da que tínhamos proposto na análise preliminar.

Vale salientar que a opção da escolha da fonte do problema se deu tomando por base as características de um problema de partilha e não aleatoriamente. Mas sobre essa modificação de escolha da fonte pelo sujeito retomaremos nas considerações finais.

5.11 Análise e discussão dos problemas 03, 04 e 06

Neste tópico, procuraremos fazer uma análise conjunta dessas questões por se caracterizarem pela presença de apenas um dos fatores de não congruência não conservados. Essa análise nos permitirá verificar a influência individual de um fator.

Abaixo, temos o quadro com a frequência absoluta nas três questões dos respectivos registros.

QUADRO 11 – Síntese dos problemas 03, 04 e 06

Problema	Registros algébricos	RACT	RACP	RACP'	RACI
03	95	32	31	26	6
04	100	42	35	15	8
06	86	38	36	9	3

Como bem observamos, o problema 03 é o que possui uma menor taxa de RACT, 33%. Na análise e discussão dessa questão, apontamos que o sujeito tem dificuldades em reconhecer totalmente o mesmo objeto nas duas representações e acaba por errar na conversão de uma das partes. Isso é confirmado pela taxa de RACP'. Como esta se refere à conversão de uma parte da relação, podemos observar que, quando comparada com as outras questões deste bloco, a questão 03 é a que possui uma maior taxa, 27%. Isso significa que dos 95 registros algébricos dessa questão, 27% se referem à conversão de uma parte.

Um erro muito comum, decorrente da presença da univocidade semântica, é a dificuldade de operar, ao mesmo tempo, com a multiplicação e divisão. A comutatividade é aceitável na multiplicação, pois $5 \cdot x = x \cdot 5$. Transpor esse conhecimento para a divisão, concebendo que $5 \div x = x \div 5$ faz com que a conversão seja incorreta. Esse foi um erro muito freqüente nos registros analisados.

Os problemas 04 e 06 possuem índices de RACT maiores e muito próximos entre si, nos dando a ideia de que a não conservação da ordem das unidades de significado e da correspondência semântica possibilitam ao sujeito visualizar o objeto em duas representações distintas.

Dessa forma, podemos concluir esse bloco de análise dizendo que, nos problemas de partilha, dos três fatores de não congruência, o que pode mais contribuir para que o sujeito não consiga ter sucesso na conversão das relações é a não conservação da univocidade semântica.

Significa que, se em um problema tivermos a não conservação desse fator, a taxa de sucesso será baixa, quando comparada com uma questão que não conserva a correspondência semântica e nem a ordem das unidades de significado.

5.12 Análise e discussão dos problemas 05, 07 e 08

Neste bloco, analisaremos a influência de dois fatores de não congruência numa única questão.

QUADRO 12 – Síntese dos problemas 05, 07 e 08

Problema	Registros algébricos	RACT	RACP	RACP'	RACI
05	71	26	30	12	4
07	79	37	33	6	3
08	75	30	27	16	3

O problema 05 se caracteriza pela não conservação da univocidade semântica e da ordem das unidades de significado; o problema 07, pela não conservação da correspondência semântica e da ordem das unidades de significado e o problema 08, pela não conservação da correspondência semântica e da univocidade semântica.

A influência dos fatores em cada uma dessas questões foi analisada anteriormente. Erros frequentes, possíveis caminhos para novas pesquisas e questionamentos foram apontados e serão retomados nas considerações finais.

Como percebemos pelo QUADRO 12, a questão 05 possui a menor taxa de RACT, 37%. Isso significa que tivemos um menor número de conversões totais, dando-nos a ideia de que esses dois fatores dificultaram no reconhecimento do objeto em representações diferentes. Concomitantemente, a questão 08 possui uma taxa de RACT muito próxima da questão 05.

Já a questão 07, se destaca pelo índice maior de RACT, quando comparada às outras duas questões. Some-se a isso, a taxa de sujeitos que fizeram conversões de uma relação, 7%, a menor dos três problemas e a menor taxa de RACT, 4%. Essas porcentagens mostram o quanto eles se aproximaram da solução esperada.

Tomando como base a análise da natureza dos erros dessas questões e as informações supracitadas, temos que, nos problemas de partilha, uma questão em que não se conserve a univocidade semântica e a ordem das unidades de significado, bem como uma questão em que não se conserve a univocidade semântica e nem a correspondência semântica, o sujeito terá mais dificuldade em compreender a existência de um objeto em dois registros de representação diferentes.

5.13 Análise e discussão geral dos problemas

Diante das análises por questão e por agrupamento de questões tivemos uma ideia da influência dos fatores de não congruência nos problemas de partilha. Vimos como as taxas de sucesso na conversão são alteradas à medida que se conserva ou não esses fatores. Quando um problema se caracteriza pela não conservação dos

três fatores, percebemos que a taxa de RACT é maior quando comparada no problema que não conserva dois fatores.

Além disso, em nossas análises, apontamos quais erros foram mais frequentes e relevantes. Esses erros, tais como a não associação de signos entre as escritas natural e algébrica, confusão rótulo-incógnita, entre outros, foram oriundos da variação de conservação dos fatores. Teoricamente, quando fazemos essa alteração, estamos mexendo na variação de congruência. Segundo Duval (2007), problemas não congruentes tendem a tornar a conversão mais complexa, no sentido de custo e funcionamento cognitivo, pois os sujeitos têm dificuldade em reconhecer o mesmo objeto em representações distintas.

O grau de não congruência tende a ser mais acentuado quando não se conserva os três fatores. O problema 03, em que nenhum dos fatores é conservado, possuiu a menor taxa de RACT dos oito problemas, indo na direção do que preconiza Duval. No entanto, podemos dizer que o grau de não congruência foi acentuado não apenas com a não conservação dos três fatores, mas também de um fator em particular. Este fator foi a univocidade semântica. Isso quer dizer que a taxa de sucesso na conversão se assemelha quando, no problema, não se conservam os três fatores e quando não se conserva apenas a univocidade semântica.

Comparando as questões 02 e 03, que apresentam univocidade semântica, podemos perceber o número de sujeitos que tiveram resultados de conversões muito próximos.

QUADRO 13 – Comparação entre os problemas 02 e 03

Problema	Registros algébricos	RACT	RACP	RACP'	RACI
02	90	28	29	27	6
03	95	32	31	26	6

Isso nos possibilita supor que na conversão de problemas de partilha a influência dos três fatores interfere tanto quanto a univocidade semântica.

Obviamente devemos levar em consideração quais os tipos de erros, em cada situação. Há erros que é característica de um determinado fator.

Nesse sentido, como o objetivo de nossa pesquisa é *investigar em que medida os fatores de não congruência influenciam na conversão da escrita natural para a escrita algébrica nos problemas envolvendo equações do primeiro grau*, e tendo já exposto questões dessa influência, no quadro abaixo elencamos quais influências foram mais freqüentes.

QUADRO 14 – Influência dos fatores

INFLUÊNCIA	FATOR RELACIONADO
Possível dificuldade quando o problema possui operações de multiplicação e divisão	Univocidade semântica
Confusão rótulo-incógnita	Ordem das unidades de significado
Não associação de signos	Correspondência semântica
Escrita de transição	Todos

No QUADRO 14, as quatro influências dos fatores estiveram presentes em várias questões. Mas, numa análise específica de cada questão, pudemos elencar que tipo de influência um determinado fator causou na conversão da representação em escrita natural para a algébrica. Lembramos que o que estamos chamando de influência são os erros que aparecem quando da presença dos fatores de não congruência.

Concluimos essa análise geral dos problemas ressaltando que tipo de influência os fatores de não congruência exercem na conversão da escrita natural para a escrita algébrica nos problemas de partilha com equações do primeiro grau.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nossa questão de pesquisa foi *investigar em que medida os fatores de não congruência influenciam na conversão da escrita natural para a escrita algébrica nos problemas envolvendo equações do primeiro grau* e, desse modo, sintetizaremos quais foram os percursos necessários para a obtenção desse objetivo.

Como tínhamos o objetivo de investigar como os alunos “passam” um problema da escrita materna para a matemática, percebemos que a teoria que nos auxiliaria nesse estudo seria a teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval.

Essa teoria nos possibilitaria que não estudássemos essa “passagem” de modo mecânico e espontâneo, mas que nos forneceria elementos cognitivos necessários para uma análise de quais fatores deveriam interferir na taxa de sucesso dos alunos, quando dessa “passagem”. Além disso, nos ajudaria a entender que a conversão da escrita natural para a algébrica trata de dois tipos de registros de representação diferentes, mas a um mesmo objeto.

A conversão foi muito importante para que pudéssemos perceber a grande variedade de representações que um objeto matemático pode ter. Na realidade, Duval (2007) aponta que essa foi uma questão preponderante para a construção do conhecimento matemático, e negar essa informação significaria desconsiderar a essência da evolução do pensamento matemático, que é toda pautada em representações.

Então, dessa forma, não poderíamos compreender o nosso objeto de estudo, equações do primeiro grau, sem antes ter a clareza que ele poderia ser representado de várias maneiras. Se assim não considerássemos, poderíamos reduzir o seu estudo apenas a manipulações algébricas e estaríamos, com isso, deixando de considerar a sua existência na forma de escrita natural, gráfica, pictórica, numérica, entre outras representações, capazes de apontar caminhos para a sua compreensão.

De acordo com Duval (2007), a necessidade de mudar de registros deve-se ao fato de evitar que o objeto seja reduzido à sua representação. Esse autor reforçou que “o enclausuramento de registro impede o aluno de reconhecer o mesmo objeto matemático em duas de suas representações bem diferentes” (p. 21).

Esse enclausuramento faz com que haja uma limitação na possibilidade do sujeito adquirir novos conhecimentos matemáticos, pois sua compreensão concernente a existência de um objeto matemático não vai até uma representação. Isso vai de encontro ao processo histórico de construção do conhecimento matemático.

Foi quando a teoria nos ajudou a entender que a peculiaridade da matemática está na mobilização simultânea de pelo menos dois registros de representação ao mesmo tempo, e, sem essa condição, ficaria difícil, ou quase impossível, compreender o objeto matemático.

Por essa razão, a teoria nos deu suporte também para explicar porquê não acontece de forma natural a conversão de uma equação em escrita natural para a algébrica. A justificativa é que na atividade de conversão existem os fatores de não congruência que impedem o sujeito de perceber o objeto em várias representações. Esses fatores agem como termômetros no grau de congruência ou não congruência dificultando ou deixando transparecer uma representação na outra.

Então, com o intuito de atender a nossa questão de pesquisa, pensamos em elaborar um instrumento que nos desse condições de verificar em que medida os fatores de não congruência influenciavam na conversão da escrita natural para a algébrica em problemas com equação do primeiro grau. Como desejávamos verificar em que medida esses fatores influenciavam na conversão, tínhamos que construir um instrumento que não privilegiasse um fator em particular. Como são três fatores: correspondência semântica das unidades de significado, univocidade semântica terminal e conservação da ordem das unidades de significado, elaboramos oito questões, variando a conservação desses fatores, de modo que nenhum fator aparecesse mais do que o outro. Essa variação está bem detalhada no QUADRO 4 (p.34).

Ainda sobre o intuito de atender nossa questão de pesquisa, para que tivéssemos uma unidade nos problemas precisávamos construir questões que tivessem o mínimo possível de interferência, pois queríamos investigar a influência dos fatores de não congruência na conversão, e se não atentássemos para esse detalhe, poderia ser que, além desses fatores, outros pudessem interferir na conversão e não teríamos como precisar como se deu essa influência, se pelos fatores ou por outros elementos.

Daí, então, escolhemos um dos problemas classificados por Marchand e Bednarz (1999). Essas autoras classificam os problemas em três tipos que são:

problemas de transformação, problemas de taxa e problemas de partilha. Optamos pelos de partilha com natureza multiplicativa.

Por essa razão é que escolhemos a teoria de Duval associada aos problemas de partilha.

Após essa discussão inicial, procedemos com a análise preliminar das questões, e consideramos que os sujeitos lançariam mão de dois tipos de registros semióticos na conversão. Ou eles converteriam a equação da escrita natural para o registro algébrico ou converteriam da escrita natural para o registro numérico. Após a aplicação das oito questões tivemos de considerar seis categorias, conforme observamos no QUADRO 8 (p.51).

Como queríamos investigar em que medida os fatores de não congruência influenciavam na conversão da escrita natural para a escrita algébrica, consideramos, para a análise desses fatores, a conversão apenas para o registro algébrico. Daí, obtivemos resultados que serão discutidos, de modo sintético, nos parágrafos seguintes.

A influência dos fatores de não congruência pode ter interferido na taxa de sucesso da conversão de modo que a presença de um fator, ou dois, ou três, e o tipo de fator que caracterizava a questão, variava a taxa dos registros esperados.

Porém, não foi possível investigar qual a influência que outros fatores como contexto e domínio numérico poderiam exercer. Ou seja, quais resultados poderíamos obter com esses fatores.

Nesse sentido, nossa pesquisa confirmou o que dizia a teoria com respeito a dificuldade do sujeito em representar o objeto em dois registros diferentes quando a conversão num sentido é totalmente não congruente. Foi o que aconteceu com a questão de número 02. Ela teve o menor valor percentual de registros esperados (RACT) quando comparada com as outras questões. Por não conservar nenhum fator, a representação de partida não transparecia na representação de chegada, o que levava o sujeito a não perceber o mesmo objeto nas duas representações.

Em termos percentuais, comparando entre si as questões que possuem a não conservação de apenas um fator, percebemos que a taxa de sucesso é a menor quando não se conserva a univocidade semântica terminal. Essa questão foi a de número 03. Esse fato quer dizer que os sujeitos podem ter tido mais dificuldade de converter o problema para o registro algébrico esperado, porque a presença do fator pode ter dificultado o reconhecimento do objeto em duas representações. Nessa

questão, uma das causas que podemos apontar em decorrência dessa dificuldade se encontrava no fato do aluno não conseguir operar, ao mesmo tempo, com duas operações inversas, nesse caso multiplicação e divisão. Porém, não podemos afirmar se a presença dessas operações exerceu influência significativa, já que não elaboramos nenhum problema apenas com divisão.

Em contrapartida, em termos percentuais, como mostrado no QUADRO 10 (p.57), os outros dois fatores exercem influências semelhantes, no que diz respeito à aproximação para o registro esperado. No entanto, eles conduzem a erros diferentes e, sobre esse fato, discutiremos no tópico seguinte.

Ainda em termos percentuais, comparando entre si as questões que possuem a não conservação de dois fatores, percebe-se que as de número 05 e 08 obtiveram os menores resultados percentuais para o registro algébrico esperado. A de número 05 não conserva a univocidade semântica e nem a ordem das unidades de significado. A de número 08 não conserva a univocidade semântica e nem a correspondência semântica. A presença desses fatores na questão contribuiu para que o sujeito não percebesse o mesmo objeto em duas representações distintas.

Dessa forma, procuramos sintetizar nossas impressões sobre as contribuições da teoria para o entendimento e resposta de nossa questão de pesquisa, bem como os resultados obtidos concernentes a influência dos fatores de não congruência na conversão da escrita natural para a escrita algébrica nos problemas envolvendo equações do primeiro grau.

Outro dado muito relevante em nossa pesquisa diz respeito ao tipo de influência mais freqüente causada por alguns fatores de não congruência nas conversões. Essas influências são os erros mais comuns que surgiram quando da presença de um ou mais fatores.

No QUADRO 14 (p.88), fizemos uma possível associação do tipo de influência em função do fator relacionado com o intuito de mostrar que erro foi esse.

A influência mais comum que o fator univocidade semântica gerou nos problemas pode ter sido o de operar com multiplicação e divisão ao mesmo tempo. Como esse fator se caracteriza pela presença de operações inversas, nesse caso a multiplicação e a divisão, o sujeito tende a acreditar que, assim como existe comutatividade na multiplicação, há também na divisão.

Outra influência muito comum, gerada pela presença do fator ordem das unidades de significado pode ter sido em relação a dificuldade estabelecida entre

rótulo e incógnita. Os sujeitos tendem a escolher uma letra para a parte de um personagem na questão e a usam com a ideia de incógnita. Por exemplo no problema 04, a relação “a idade de Abreu é três vezes a de Júlio” é convertida para o registro algébrico por $3.A = J$, em que **A** é rótulo para o nome de Abreu e **J** é rótulo para a palavra Júlio. Eles representam a equação no sentido que é feita a leitura, sem levar em conta a natureza multiplicativa entre as relações. Deveriam representar por **A** “a idade de Abreu” e por **J** “a idade de Júlio. Nesse sentido, a equação correta é $A = 3.J$.

Devido ao recorte que fizemos em nossa pesquisa não foi possível investigar o que leva o aluno a confundir incógnita com rótulo, mas sabemos que essa questão pode ser investigada em pesquisas futuras.

O fator correspondência semântica pode ter gerado nos problemas erros relacionados à não associação dos signos. Essa influência é desencadeada quando o sujeito faz uma associação incorreta entre signos da linguagem natural e signos da representação algébrica. Possivelmente por não compreender a natureza do problema, ele converte “o triplo da quantidade de Rita é igual a quantidade de brinquedos de Juca” por $R + 3 + J$, como vimos no protocolo 210. Como no registro de partida triplo é um signo (uma palavra) e é convertido para dois signos (vezes três) no registro de chegada, o aluno apresenta dificuldade em realizar a conversão. Por que isso ocorre?

Uma última influência observada não se caracteriza por um fator em especial, mas por todos. A influência é a escrita de transição. Em todos os problemas foi observada, nos registros de chegada, uma mistura de sistema semiótico algébrico com escrita natural. Os alunos iniciam a conversão para o registro algébrico, mas quando lhes falta o conhecimento de um signo no registro algébrico para substituir da escrita natural, eles escrevem as palavras por extenso, literalmente. Essa influência já foi confirmada pela pesquisa de André (2007).

Um segundo dado importante que encontramos, ocorreu com relação à fonte do problema. Baseado nas pesquisas de Marchand e Bednarz (1999), elaboramos oito problemas tipo fonte, em que as grandezas de um problema são originadas em função de uma única grandeza. Dessa forma, cada problema tem uma fonte específica.

Em nosso trabalho verificamos que os sujeitos 12 e 23, como vimos na análise da questão 08, foram os únicos que representaram a parte de Caio como

fonte do problema e não Roger, como tínhamos previsto na análise preliminar. Entretanto, devido ao recorte que fizemos em nossa pesquisa, não foi possível investigar de que forma o aluno faz a escolha da fonte. Além disso, não foi possível investigar qual resultado obteríamos se a ordem das questões fossem alteradas, bem como se houvesse mudança nos valores das variáveis adotadas.

Dessa forma, acreditamos que nossa questão de pesquisa foi respondida, mas temos a perfeita clareza que ela não se esgotou com essas páginas e muito menos procurou colocar um ponto final nessa questão. Muito pelo contrário, essa pesquisa foi mais uma pedra colocada na formação de um grande edifício que se chama Educação, e em particular, Educação Matemática. As inúmeras pesquisas subsequentes também farão o mesmo, colocarão mais uma pedra e, dessa forma, todos contribuem para a construção do grande projeto chamado Educação.

REFERÊNCIAS

- ANDRÉ, R. C. de M. **Investigando a transição da linguagem natural para a linguagem algébrica: o equacionamento de enunciados de problemas à luz dos registros de representação semiótica.** Dissertação de Mestrado. PPGE, Recife/PE, 2007.
- ARAÚJO, C. R. de; ROCHA FALCÃO, J. T. da; BRITO LIMA, A. P. de A.; LINS LESSA, M. M. Contribuições da psicologia da educação matemática para o ensino da matemática: a introdução à álgebra no ensino fundamental. In: **Anais do V Encontro Pernambucano de Educação Matemática (EPEM)**, Recife, SBEM, 2002.
- ARAÚJO, M. R. O. P. de. **A geometria escolar: uma análise dos estudos sobre o abandono de seu ensino.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. São Paulo, PUC, 2001.
- BOOTH, L. Dificuldade das crianças que se iniciam em álgebra. In: **As idéias da Álgebra.** Organizado por Coxford, A. F & Shulte, A. P. São Paulo, Atual, 1995.
- BRANDT, C. F. **Contribuições dos Registros de Representação Semiótica na conceituação do sistema de numeração.** Tese de doutorado. São Paulo, PUC, 2005.
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática (5ª a 8ª séries).** Brasília: MEC / SEF, 1998.
- BUEHRING, R. S. **Análise de dados no início da escolaridade: uma realização de ensino por meio dos registros de representação semiótica.** Dissertação de Mestrado em Educação científica e tecnológica. Florianópolis, UFSC, 2006.
- CASTRO, M. **Educação algébrica e resolução de problemas.** Disponível em: <<http://www.tvebrasil.com.br/salto/boletins2003/eda/>>. Acesso em 07 fev. 2010.

- CATTO, G. G. **Registros de representação e o número racional: uma abordagem nos livros didáticos**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. São Paulo, PUC, 2000.
- COXFORD, A. F. e SHULTE, A. P. **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.
- DAMM, R. F. Registro de Representação. In: MACHADO, Sílvia Dias Alcântara et al. **Educação Matemática: Uma introdução**. São Paulo, Educ, 1999, p. 135 – 153.
- DUVAL, R. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, Sílvia Dias Alcântara (Org.), **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. Campinas: Papyrus, 2003.
- _____. **Semiosis y pensamiento humano – Registros semióticos y aprendizajes intelectuales**. (Peter Lang). Tradução: Myrian Vega Restrepo (1999). Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía – Grupo de Educación Matemática. 2ª Edición. Santiago de Cali, Colombia: 2004.
- _____. **Registres de représentation sémiotique e fonctionnement cognitif da La pensée**. Annales de didactique et de sciences cognitives, v 5. 1993.
- FALCÃO, J. **Alfabetização algébrica nas séries iniciais. Como começar?** Boletim GEPEM, 2003. (pp. 42, 27 – 36).
- FLORES, C. R. Registros de representação semiótica em matemática: história, epistemologia, aprendizagem. In: **Bolema** (Boletim de Educação Matemática), ano 19, Universidade Estadual Paulista – Campus de Rio Claro, 2006.
- FREGE, G. **Lógica e filosofia da linguagem**. Tradução de Paulo Alcoforado. São Paulo: Cultrix, 1978.

- FREITAS, J. L. Raymond. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, Sílvia Dias Alcântara (Org.), **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. Campinas: Papyrus, 2003.
- FREITAS, M. A. de. **Equação do 1º grau: métodos de resolução e análise de erros no Ensino Médio**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. São Paulo, PUC, 2002. (pp. 146).
- FOUCAULT, M. **As palavras e as coisas**. 6. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1992.
- JACOMELLI ALVES, K. Z. **A linguagem natural e a linguagem algébrica: nos livros didáticos e em uma classe de 7ª série do ensino fundamental**. Dissertação de Mestrado em Educação científica e tecnológica. Florianópolis, UFSC, 2006.
- JUNIOR, A. T. **Sistema de inequações do 1º grau: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem focando os registros de representação**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. São Paulo, PUC, 2002, pp. 120.
- KIERAN, C. Duas Abordagens Diferentes entre os Principiantes em Álgebra. In **As idéias da Álgebra**. Organizado por Coxford, A. F & Shulte, A. P. São Paulo, SP. Atual. 1995.
- LINS, R. C. & GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI**. Campinas, SP. 5ª Edição. Papyrus, 2005.
- LOCKHEAD, J. ; MESTRE, J. P. Das Palavras à Álgebra: corrigindo concepções erradas. In **As idéias da Álgebra**. Organizado por Coxford, A. F & Shulte, A. P. Tradução de Domingues, H. H. São Paulo, SP. Atual. 1995.

- MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica**. Campinas, SP: Papyrus, 2003.
- MIGUEL, Antônio; FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela. **Álgebra ou Geometria: Para onde pende o pêndulo? Pró-posições**. v.3, n.1, p.39 – 54, mar. 1992.
- MODEL, S. L. **Dificuldades de alunos com a simbologia matemática**. Dissertação de Mestrado em Educação em Ciências e Matemática. Porto Alegre, PUC, 2005.
- MORETTI, M. T. **O papel dos registros de representação na aprendizagem de matemática**. Itajaí, ano 2, n. 6, p. 343-362. Contrapontos, 2002.
- MORETTI, M. T.; FLORES, C. R. **O funcionamento cognitivo e semiótico das representações gráficas: ponto de análise para a aprendizagem matemática**. In: Anais da 28ª reunião da Anped. Rio de Janeiro. 2005. v. 1.
- NETTO, J. T. C. **Semiótica, informação e comunicação: diagrama da Teoria do Signo**. 5. ed. São Paulo: Perspectiva, 2001.
- PEIRCE, C. S. **Semiótica**. São Paulo: Perspectiva, 2000.
- RIBEIRO, A. J. **Equação e seus multisignificados no ensino de matemática: contribuições de um estudo epistemológico**. Tese de doutorado em Educação Matemática. São Paulo, PUC, 2007.
- SADOVSKY, P. **Alguns elementos para discutir o papel das representações no trabalho matemático”, Ensenar Matemática hoy. Miradas, sentidos e desafios**, Ed. Zorzal.(2005).
- SCHOEN, H. L. A resolução de problemas em álgebra. In **As idéias da Álgebra**. Organizado por Coaxford, A. F & Shulte, A. P. Tradução de Domingues, H. H. São Paulo, SP. Atual. 1995.

- SERFATI, M. **La question de la “chose”**. **Actes du Colloque Inter-Irem, Histoire et Épistémologie des Mathématiques**. Estrasburgo: Irem de Estrasburgo, 1987, p.309-335.
- SESSA, Carmem: **Uma entrada a Álgebra através da generalização, Iniciación al estudio didáctico del álgebra: Orígenes y Perspectivas**, Ed. Zorzal, 2005.
- SILVA, C. R. **Explorando equações cartesianas e paramétricas em um ambiente informático**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. São Paulo, PUC, 2006.
- SILVA, J. R. D. **Um estudo de registros de representação semiótica na aprendizagem dos conceitos de máximos e mínimos de funções**. Dissertação de Mestrado em Educação. Campina Grande, UFMT, 2005.
- USISKIN, Z. O Que É Álgebra Da Escola Média? In **As idéias da Álgebra**. Organizado por Coxford, A. F & Shulte, A. P. Tradução de Domingues, H. H. São Paulo, SP. Atual. 1995.
- VERTUAN, R. E. **Um olhar sobre a Modelagem Matemática à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica**. Dissertação – Programa Ensino de Ciências e Educação Matemática. Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2007.

ANEXO 1
CATEGORIAS DA PESQUISA

	<u>Q1</u>	<u>Q2</u>	<u>Q3</u>	<u>Q4</u>	<u>Q5</u>	<u>Q6</u>	<u>Q7</u>	<u>Q8</u>
RACP	49	29	31	35	30	35	33	26
RACP'	14	27	26	15	11	10	6	16
RACT	46	28	32	42	26	38	37	30
RACI	9	6	6	8	4	3	3	3
RN	42	55	42	43	55	57	59	45
RP	1	1	1	1	1	1	1	1
B	56	71	79	73	90	73	78	96
TOTAL	217	217	217	217	217	217	217	217

ALUNO	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8
1.	RA,CP							
2.	RA,CP							
3.	RA,CT	RA,CT	RA,CT	RA,CT	RA,CP	RA,CT	RA,CT	RA,CP
4.	RA,CP	RA,CP'	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CP
5.	RN	RN	RN	RN	B	B	B	B
6.	RN	RN	RN	B	RN	B	B	B
7.	RA,CT							
8.	RA,CT	RA,CT	RA,CP'	RA,CP	B	RA,CP	RA,CT	B
9.	B	B	B	B	B	B	B	B
10.	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CP'	RA,CP	RA,CP	RA,CP'
11.	RA,CT							
12.	RA,CT							
13.	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CI	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CP
14.	RN	RN	RN	RN	B	RN	RN	RN
15.	RA,CP'	RACP'	RA,CP'	B	RN	RA,CP'	RA,CP'	RA,CP'
16.	B	B	B	B	B	B	B	B
17.	RN	B	B	B	B	RN	B	RN
18.	RN	RN	B	RN	RN	RN	RN	RN
19.	B	B	B	B	B	B	B	B
20.	RN	RN	RN	RN	B	RN	RN	RN

54.	RA,CT	RA,CT	RA,CT	RA,CT	RA,CT	RA,CT	RA,CT	RA,CT
55.	B	RN	RA,CP	RA,CP	RN	RA,CP'	B	B
56.	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CP'	RA,CP	RA,CP	RA,CP'
57.	RN	B	RN	RN	RN	RN	B	RN
58.	RA,CT	RA,CT	RA,CT	RA,CT	RA,CT	RA,CT	RA,CT	RA,CT
59.	B	RN	RN	B	B	B	B	B
60.	RA,CP	RN	RN	RN	RN	RN	RN	RN
61.	RA,CP	B	RN	RA,CP	B	RA,CP'	RA,CP	B
62.	RA,CI	B	B	RA,CI	RA,CI	RA,CI	RA,CI	B
63.	RA,CT	RA,CT	RA,CT	RA,CT	RA,CT	RA,CT	RA,CT	RA,CT
64.	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CP
65.	RA,CP	B	RA,CP	B	B	RA,CP	B	B
66.	RN	B	B	B	B	RN	B	B
67.	RN	RN	RN	RN	RN	RN	RN	B
68.	RA,CT	RA,CT	RA,CP	RA,CT	B	RA,CT	RA,CT	RA,CT
69.	RA,CP	RA,CP'	RA,CI	B	RN	B	RN	RN
70.	B	RN	RN	B	RN	RN	RN	B
71.	B	RN	RN	B	B	B	B	B
72.	B	RN	RA,CP'	B	B	B	B	B
73.	B	B	B	B	B	B	B	B
74.	RA,CP	RA,CP'	RA,CP	RA,CP	RN	RN	B	B
75.	RA,CP'	RA,CI	RA,CP'	RA,CP'	RA,CP'	RA,CP'	RA,CI	RA,CI
76.	B	B	B	B	B	B	B	B
77.	RA,CT	B	B	RA,CT	B	RA,CT	RA,CT	B
78.	B	B	B	RN	RN	RN	RN	RN
79.	RA,CT	RA,CP'	RA,CT	RA,CT	B	RA,CP	RA,CT	RA,CT
80.	RN	B	B	B	RN	B	B	B
81.	RA,CT	B	B	RA,CT	B	RA,CT	RA,CT	B
82.	B	B	B	B	B	B	B	B
83.	RN	RN	B	B	B	B	B	B
84.	B	B	B	B	B	B	B	B
85.	B	B	B	B	B	B	B	B
86.	B	B	B	B	B	B	B	B

87.	B	RA,CP'	RN	RN	RN	RN	RN	RN
88.	RP	RP	RP	RP	RP	RP	RP	RP
89.	RA,CP'	RN	B	B	RN	RN	RN	RN
90.	RN	B	RN	B	RN	RN	RN	RN
91.	RA,CT	RA,CT	RA,CT	RA,CT	RA,CT	RA,CT	RA,CT	RA,CT
92.	RQ	RN	B	B	RN	RN	RN	RN
93.	RA,CP'	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CT
94.	RA,CT	RA,CP'	RA,CP	RA,CT	RA,CP'	RA,CT	RA,CT	RA,CP
95.	RA,CT	B	B	B	B	B	RA,CP	B
96.	RA,CT	RN	RA,CI	RA,CT	RN	RA,CT	RN	RA,CP'
97.	RN	RN	B	B	B	B	B	B
98.	RA,CT	RA,CT	RA,CT	RA,CT	RA,CT	RA,CT	RA,CT	RA,CT
99.	RA,CP	B	RA,CP	RA,CP	B	RA,CP	RA,CP	RA,CP'
100.	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CP'	RA,CP	B	B
101.	RN	RN	RN	RN	RN	B	B	B
102.	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CP
103.	RA,CT	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CP
104.	B	RA,CP'	B	B	B	B	B	B
105.	RA,CT	RA,CP	RA,CP'	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CP
106.	RA,CP	RN	RA,CP'	RA,CP	B	RA,CP'	RA,CP	RA,CP'
107.	B	B	B	B	B	B	B	B
108.	RA,CT	RN	RA,CI	RA,CP	RN	RN	RN	RN
109.	RN	RN	RN	RN	RN	RN	RN	RN
110.	RA,CT	RA,CT	RA,CT	RA,CT	RA,CT	RA,CT	B	B
111.	RN	RN	RN	RN	RN	RN	RN	RN
112.	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CP
113.	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CP
114.	RA,CT	RA,CP'	RN	B	B	B	B	B
115.	RA,CT	RA,CP	RA,CT	RA,CT	RA,CT	RA,CT	RA,CT	RA,CT
116.	RN	RN	RN	RN	RN	RN	RN	RN
117.	RA,CI	RA,CP'	RA,CP'	RA,CP'	RN	B	B	B
118.	RA,CP	RN	RN	RN	B	RN	RN	B
119.	RN	RN	RN	RN	RN	RN	RN	RN

120.	RA,CT	RA,CP'	RN	RA,CT	RN	RN	RN	RN
121.	RN	RN	RN	RN	RN	RN	RN	RN
122.	RN	RN	RN	RN	RN	RN	RN	RN
123.	RN	RN	RN	RN	RN	RN	RN	RN
124.	RA,CP	RN	B	RN	RA,CP	B	RN	B
125.	RN	RN	B	B	RN	RN	RN	RN
126.	RA,CP	RN	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CP'
127.	RA,CP	RA,CT	RA,CT	RA,CT	RA,CP	RA,CT	RA,CT	RA,CT
128.	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CP	B	B	B	RACP
129.	RN	B	RN	RN	RN	RN	RN	RN
130.	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CP
131.	RA,CP'	RA,CP'	RN	B	RA,CP	RN	RN	B
132.	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CP'	RA,CP	B	B
133.	RA,CI	RA,CI	RA,CI	RA,CI	RA,CI	B	B	B
134.	RA,CT	RA,CT	RA,CT	RA,CT	RA,CT	RA,CT	RA,CT	RA,CT
135.	B	B	B	B	B	B	B	B
136.	B	B	B	B	B	B	B	B
137.	RA,CP'	RA,CP'	B	RA,CI	B	RA,CP	RA,CP	RA,CP'
138.	RA,CT	RA,CP	RA,CT	RA,CT	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CP
139.	RA,CT	RA,CP'	RA,CT	RA,CT	RA,CT	RA,CT	RA,CT	RA,CT
140.	RA,CP	B	B	B	RN	RN	RN	B
141.	RN	RN	B	B	B	B	B	B
142.	RQ	RQ	RQ	RQ	RN	RN	RN	RN
143.	RA,CP	RA,CP'	RA,CP'	RA,CP	B	RN	RN	RN
144.	RN	RN	RN	B	RN	RN	RN	B
145.	RA,CP	B	RA,CT	RA,CT	RA,CP	RA,CP	RN	RA,CP
146.	B	B	B	B	B	RN	RN	B
147.	RA,CP	RA,CP	RA,CP'	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CP
148.	RA,CP	RA,CP	RA,CP	RA,CT	RA,CP	RA,CT	RA,CT	RA,CP
149.	RA,CT	RA,CT	RA,CT	RA,CT	RA,CP	RA,CT	RA,CT	RA,CT
150.	RN	B	B	B	RN	RN	RN	B
151.	B	B	B	B	B	B	B	B
152.	B	B	B	RN	B	RN	B	B

153.	B	B	B	B	RN	B	B	B
154.	B	B	B	B	B	B	B	B
155.	B	B	B	B	B	B	B	B
156.	RN	RN	RN	RN	RN	RN	RN	RN
157.	RA,CT	RA,CT	RA,CT	RA,CT	RA,CT	RA,CT	RA,CT	RA,CT
158.	B	B	B	B	B	B	B	B
159.	RA,CP	RN	RA,CP'	RA,CP	RN	RA,CP	RA,CP	RA,CP
160.	RN	B	B	RN	RN	RN	RN	RN
161.	B	B	B	B	B	B	B	B
162.	RA,CP'	B	B	B	B	B	B	B
163.	RA,CT	RN	RA,CT	RA,CT	RA,CT	RA,CT	RA,CT	RA,CT
164.	RN	RN	RA,CP	RA,CP	RN	RN	RN	RN
165.	B	B	B	B	B	B	B	B
166.	RA,CT	RA,CT	RA,CT	RA,CP'	RA,CT	RA,CP	RA,CP	RA,CP
167.	RA,CP'	RA,CT	RA,CT	RA,CT	RA,CP	RA,CT	RA,CT	RA,CP
168.	RA,CP	RA,CI	B	B	B	B	B	B
169.	B	B	B	B	B	B	B	B
170.	B	B	B	B	B	B	RN	B
171.	B	B	B	B	B	B	B	B
172.	RA,CI	B	B	RA,CP'	B	B	B	B
173.	RA,CP	B	B	B	B	B	B	B
174.	RA,CT	B	B	B	B	RA,CT	RA,CP	B
175.	B	RN	RN	B	B	B	B	B
176.	B	B	B	B	B	B	B	B
177.	B	B	B	B	B	B	B	B
178.	B	RN	B	B	B	B	B	B
179.	B	B	B	RN	RN	RN	RN	RN
180.	RN	RN	B	RN	RN	B	B	B
181.	B	B	B	B	B	B	B	B
182.	B	B	B	B	B	B	B	B
183.	RN	RN	RA,CP'	RA,CP	B	RN	RN	RN
184.	B	B	B	B	B	B	B	B
185.	B	B	RN	B	RN	B	RN	B

