UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CENTRO DE EDUCAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS- GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA

CURSO DE MESTRADO

ANDRÉ FELLIPE QUEIROZ ARAÚJO

A INTER-RELAÇÃO ENTRE A ESTATÍSTICA E A PROBABILIDADE: um estudo com professores de matemática do ensino médio sobre a curva normal

RECIFE

2020

ANDRÉ FELLIPE QUEIROZ ARAÚJO

A INTER-RELAÇÃO ENTRE A ESTATÍSTICA E A PROBABILIDADE: um estudo com professores de matemática do ensino médio sobre a curva normal

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Área de Concentração: Ensino de Ciências e Matemática

Orientador: Profº Dr. José Ivanildo Felisberto de Carvalho.

RECIFE

2020

Catalogação na fonte
Bibliotecária Natália Nascimento, CRB-4/1743

A663 Aráujo, André Fellipe Queiroz.
A inter-relação entre a estatística e a probabilidade: um estudo com professores de matemática do ensino médio sobre a curva normal. / André Fellipe Queiroz Araújo. – Recife, 2020.
188f.

Orientador: José Ivanildo Felisberto de Carvalho.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2020.

Inclui Referências e Apêndices.

1. Probabilidade – Curva Normal. 2. Estatística. 3. Matemática - Docentes. 4. Ensino Médio. 5. UFPE - Pós-graduação. I. Carvalho, José Ivanildo Felisberto de. (Orientador). II. Título.

519.2 (23. ed.) UFPE (CE2020-030)

ANDRÉ FELLIPE QUEIROZ ARAÚJO

A INTER-RELAÇÃO ENTRE A ESTATÍSTICA E A PROBABILIDADE: um estudo com professores de matemática do ensino médio sobre a curva normal

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Orientador: Prof. Dr. José Ivanildo Felisberto de Carvalho.

Aprovado em: 23/03/2020

BANCA EXAMINADORA

____

Professor Dr. José Ivanildo Felisberto de Carvalho (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

____

Professora Drª. Gilda Lisbôa Guimarães (Examinadora Interna)
Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

____

Professora Drª. Adriana Breda (Examinadora Externa)
Universitat de Barcelona - Universitat de Barcelona - Espanha

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus pelo dom da vida, pelo seu infinito amor e por ter me guiado e concedido saúde, força, graça e sabedoria, permitindo-me concluir mais uma etapa na minha trajetória acadêmica.

Aos meus pais, Joás Araújo e Léa Maria, e irmãos, Débora Raquel e Samuel Marcos, pelo incentivo e investimento na minha educação, sempre me apoiando durante toda a trajetória. Especialmente, também agradeço a Stephany Karoline por todo amor, companheirismo, apoio e conselhos que muito me ajudaram durante todo o desenvolvimento desse estudo. Minha imensa gratidão!

Ao meu orientador, professor Dr. José Ivanildo Felisberto de Carvalho pelo acolhimento, paciência, profissionalismo e pelas ricas orientações e ensinamentos que ao longo desses dois anos me proporcionaram muito aprendizado e que contribuíram imensamente para a realização dessa pesquisa. Muito obrigado por tudo!

A todos que fazem o grupo de estudos em Educação Estatística no Ensino Fundamental - GREF pelas importantes contribuições e sugestões durante o andamento desse estudo.

As professoras Gilda Guimarães e Adriana Breda por aceitarem compor a banca examinadora e pelas valiosas contribuições para o aprimoramento desse trabalho. Muito obrigado!

Aos professores de Matemática do Ensino Médio da rede pública de Nazaré da Mata e a Gerência Regional da Educação na Mata Norte, por contribuírem, gentilmente, com o desenvolvimento da pesquisa.

Aos amigos de turma e professores do programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica- EDUMATEC da Universidade Federal de Pernambuco- UFPE, que direta ou indiretamente contribuíram durante o meu curso de mestrado. Obrigado pela amizade, atenção e consideração.

RESUMO

A presente pesquisa teve como objetivo investigar os conhecimentos didático-matemáticos de professores de Matemática do Ensino Médio para abordagem da inter-relação entre a Estatística e a Probabilidade por meio da Curva Normal. Para isso, este estudo está fundamentado no modelo teórico de Conhecimentos e Competências Didático-Matemáticos do professor - CCDM, desenvolvido no âmbito da teoria do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática - EOS. Tal modelo contempla os conhecimentos e as competências relativos ao campo matemático e ao ensino da Matemática que devem fazer parte do domínio do professor de Matemática para que o mesmo possa exercer sua função docente de modo eficiente. Em termos metodológicos, a pesquisa possui um cunho qualitativo e teve o seu desenvolvimento pautado em duas etapas. Na primeira, realizamos uma análise, por meio de um estudo diagnóstico, dos conhecimentos didático-matemáticos iniciais de professores de Matemática do Ensino Médio sobre a inter-relação entre a Estatística e a Probabilidade por meio da Curva Normal. Os resultados dessa etapa indicaram que os professores apresentavam lacunas nos conhecimentos didático-matemáticos sobre o tema pautado. Com base nesse diagnóstico, realizamos a segunda etapa, na qual desenvolvemos uma proposta de ensino voltada para a abordagem articulada entre a Estatística e a Probabilidade por meio da Curva Normal, através de um encontro formativo. Esse encontro foi pautado na realização de uma sistematização teórica e de três atividades sobre o referido tema. A partir das análises de dados das discussões e das respostas das atividades realiza das nessa segunda etapa, concluímos que os professores conseguiram avançar na construção, ressignificação e ampliação de seus conhecimentos sobre a articulação entre a Estatística e a Probabilidade por meio da Curva Normal, tanto na perspectiva Matemática, envolvendo o conceito da Curva Normal, sua representação gráfica, os conceitos estatísticos e probabilísticos presentes nesse modelo, como também, na perspectiva didática, com a compreensão e domínio de aspectos e possibilidades didáticas para o ensino deste tema no Ensino Médio da escolarização básica.

Palavras - Chave: Probabilidade-Curva Normal. Estatística. Matemática-Docentes. Ensino Médio.

ABSTRACT

The present research aimed to investigate a teaching proposal for the articulated approach between Statistics and Probability through the Normal Curve with High School Mathematics teachers, problematizing and discussing the didactic - mathematical knowledge of these teachers about this topic. For this, this study is based on the theoretical model of the Didactic-Mathematical Knowledge and Competences of the teacher - CCDM, developed within the framework of the theory of Ontosomatic Approach to Knowledge and Mathematical Instruction - EOS. This model includes the knowledge and skills, related to the mathematical field and the teaching of Mathematics, which must be part of the domain of the Mathematics teacher so that he can perform his teaching function efficiently. In methodological terms, the research has a qualitative nature and its development was guided in two stages. In the first, we carried out an analysis, through a diagnostic study, of the didactic - mathematical knowledge of high school mathematics teachers on the interrelationship between Statistics and Probability through the Normal Curve. The results of this stage indicated that the teachers had gaps in their didactic-mathematical knowledge on the subject. Based on this diagnosis, we carried out the second stage, where we developed a teaching proposal focused on the articulated approach between Statistics and Probability through the Normal Curve, through a formative meeting. This meeting was based on the realization of a theoretical systematization and three activities on the referred topic. From the analysis of data from the discussions and responses to the activities carried out in this second stage, we conclude that the teachers were able to advance in the construction, reframing and expansion of their knowledge about the articulation between Statistics and Probability through the Normal Curve, both from the perspective Mathematics, involving the concept of the Normal Curve, its graphic representation, the statistical and probabilistic concepts present in this model and the quantification of probabilities, as well as, in the didactic perspective, with the understanding and mastery of aspects and didactic possibilities for teaching this theme in the High school of basic schooling.

Keywords: Normal Curve-Probability. Statistic. Mathematics-Teachers. High school.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Frequentemente, em diversos meios de comunicação e setores de nossa sociedade, nos deparamos com uma gama de dados e informações de natureza estatística e probabilística sobre diferentes aspectos que permeiam nossas vidas e que exigem de nós, enquanto cidadãos, conhecimentos e habilidades necessários para interpretar e compreender o mundo ao nosso redor. Esse entendimento denota que o conhecimento estatístico e probabilístico se constitui, fundamentalmente, como um saber necessário e pertinente tanto para a nossa formação escolar quanto para nossas relações em sociedade.

Deste modo, compreende-se que a Estatística e a Probabilidade, enquanto áreas de conhecimento, exercem um relevante papel em nossa vida cotidiana. Além de subsidiarem diversos tipos de estudos e pesquisas científicas, o conhecimento que as permeiam é essencial para o desenvolvimento de habilidades, reflexões, a argumentação e o senso crítico que possam propiciar, aos indivíduos, a capacidade de analisar, interpretar e compreender uma variedade de fenômenos, dados e informações, além de favorecer a tomada de decisões e fazer previsões que influenciam na sua vida pessoal e social.

Nesse contexto, acreditamos que a escola, na qualidade de instituição de ensino, por meio da Educação Matemática e, em particular, através do ensino de Estatística e da Probabilidade, deve ter como um de seus objetivos, na Educação Básica, oferecer, aos estudantes, condições para o desenvolvimento do letramento estatístico e probabilístico e, assim, favorecer a apropriação e compreensão dos significados e características dos conceitos estatísticos e probabilísticos inseridos em diferentes contextos e situações.

Nesse sentido, em se tratando do processo de ensino e aprendizagem da Estatística e da Probabilidade na Educação Básica, a Base Nacional Comum Curricular (2017, 2018), principal documento orientador para o ensino no Brasil, propõem que esse processo deve ser iniciado já nos primeiros anos do Ensino Fundamental, e, em seguida, aprimorado e ampliado no Ensino Médio. Esse documento, em linhas gerais, destaca a necessidade da abordagem de conceitos, fatos e procedimentos relativos a essas áreas de conhecimentos que estão presentes em muitas situações-problema do nosso dia a dia.

Lopes (2008) destaca a importância dessa inserção do ensino da Estatística e da Probabilidade na Educação Básica, ao citar a constante necessidade de leitura e interpretação de dados estatísticos em muitas profissões e na vida cotidiana das pessoas, bem como o importante papel do raciocínio probabilístico na tomada de decisões. A autora também aponta a pertinência de se desenvolver o estudo da Estatística interligado ao da Probabilidade, tendo em vista que informações provenientes de situações que envolvem a aleatoriedade, geralmente, necessitam da Estatística para serem analisadas e interpretadas, através da organização e representação dos dados (LOPES, 2012).

Souza, Mendonça e Lopes (2013) enfatizam que o ensino da Estatística e da Probabilidade é, na Educação Básica, de suma importância para que os estudantes a partir do entendimento do mundo e do conhecimento relativo a essas duas áreas, sejam capazes de generalizar resultados observados em diversas situações e fenômenos, além de aplicá-los a acontecimentos de seus respectivos contextos sociais, compreendendo a incerteza presente neles.

Entretanto, ainda com relação ao processo de ensino e aprendizagem da Estatística e da Probabilidade na Educação Básica, alguns estudos apontam lacunas nesse processo. Segundo Silva (2015) e Santana (2016), o ensino de Estatística ainda está pautado em uma abordagem tradicional, não promovendo a articulação com a Probabilidade, sendo essas duas áreas ensinadas de forma separada e independente. Assim, em sala de aula, é comum ser dada uma ênfase aos conteúdos da Estatística Descritiva, abordados através da aplicação de algoritmos e técnicas operatórias das medidas de tendência central, dispersão, construção de gráficos, etc. Os autores ainda aludem que este ensino, por muitos professores, é baseado unicamente no livro didático, que pouco aborda a realidade do contexto social dos estudantes e não propicia a interdisciplinaridade e contextualidade da Estatística com as diversas áreas de conhecimento as quais ela pode ser aplicada.

Corroborando com as informações supracitadas, Coutinho, Almouloud e Silva (2012) argumentam que os professores ainda não se sentem confortáveis para o ensino de Estatística e há uma forte tendência para esse ensino ser centrado nas atividades com cálculos matemáticos e análise de gráficos, sem uma orientação para o estudo e análise sobre o contexto no qual os dados estatísticos estão inseridos. Já Utsumi, Cazorla e Kataoka, (2014) indicam que ainda falta uma preparação mais adequada durante a formação inicial dos professores que atuam na

Educação Básica, para possibilitar que os mesmos possam ir além do domínio conceitual e passem a adotar ações metodológicas que tornem interessante aos alunos o estudo de conteúdos da Estatística.

Batanero e Díaz (2012) constataram que geralmente o ensino de Probabilidade tem como foco, unicamente, o tratamento de técnicas operatórias e procedimentos mecanizados, em detrimento a um ensino contextualizado que propicie a abordagem dos significados do conceito de probabilidade, sua utilidade e aplicação em situações do nosso cotidiano. Além disso, os autores constataram que muitos docentes apresentam conhecimentos probabilísticos inconsistentes, apresentando fragilidades na resolução de situações-problemas probabilísticas.

Pietropaolo, Campos, Carvalho e Teixeira (2013, p.2) verificaram que muitos docentes ainda não estão convencidos de que seja importante e necessário a abordagem da Probabilidade no Ensino Médio. Além disso, argumentam que para promover um ensino de Probabilidade, de modo satisfatório, torna-se necessário inicialmente convencer nossos professores que aprendizagem desta área de conhecimento não está ligada apenas a aplicação de técnicas operatórias para resolver situações problemas de nosso cotidiano. Tem-se em vista que o ensino de probabilidade é relevante porque promove o desenvolvimento de importantes habilidades, competências cognitivas e formas de pensar.

Por fim, Carvalho (2017) pontua que os professores apresentam dificuldades tanto com o conceito de Probabilidade na perspectiva da Matemática, como da sua didática; advoga, entretanto, que mediante processos formativos idôneos, os professores podem avançar na construção e ressignificações dos seus conhecimentos matemáticos e didáticos sobre probabilidade.

Diante desse cenário, acreditamos que é oportuna a realização de investigações que tratem dos conhecimentos de professores relativos ao campo estatístico e probabilístico, considerando que os mesmos exercem um papel primordial no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, sendo os principais responsáveis por apresentar o conhecimento matemático e que suas ações determinam, em grande medida, os resultados desse processo.

Nessa direção, no nosso estudo, focamos no conceito da Curva Normal, por considerá-lo o principal modelo de análise de dados presente na Inferência Estatística (Batanero, Tauber y Sánchez, 2004), e por acreditar que seu processo de ensino e aprendizagem possibilita a abordagem da inter-relação entre a Estatística e a Probabilidade, áreas que, como visto, comumente são ensinadas por muitos docentes, na Educação Básica, de forma totalmente independente.

Diante disso, com vistas a contribuir com os processos de ensino e de aprendizagem da Matemática e mais especificamente da Curva Normal, o presente estudo buscou responder as seguintes problemáticas: Quais os conhecimentos didático-matemáticos de professores de Matemática do Ensino Médio concernentes ao Conceito da Curva Normal e aos conceitos estatísticos e probabilísticos que estão presentes nesse modelo? Como uma proposta de ensino, desenvolvida através de um encontro formativo, favorece a construção/ampliação dos conhecimentos didático-matemáticos de professores de Matemática do Ensino médio sobre a abordagem articulada da Estatística com a Probabilidade por meio da Curva Normal?

Para responder tais questionamentos, buscamos, enquanto objetivo geral:

- Investigar os conhecimentos didático-matemáticos de professores de Matemática do Ensino Médio para abordagem da inter-relação entre a Estatística e a Probabilidade por meio da Curva Normal.

Nessa perspectiva, buscaremos, enquanto objetivos específicos:

- Analisar os conhecimentos didático-matemáticos iniciais de professores de Matemática do Ensino Médio sobre a inter-relação entre a Estatística e a Probabilidade por meio da Curva Normal.
- Analisar uma proposta de ensino para professores de Matemática do Ensino Médio com vistas à construção/ampliação dos conhecimentos didático-matemáticos desses professores sobre a abordagem articulada entre a Estatística e a Probabilidade por meio da Curva Normal.

Para isso, fundamentamos a nossa pesquisa no modelo de Conhecimentos e Competências Didático-Matemático do professor - CCDM, proposto por Godino e Pino-Fan (2015); Godino, Batanero, Font, Giacomone (2016, 2017), que está embasado na Teoria do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática - EOS, (GODINO, 2012). A partir desse modelo, os autores advogam que para o professor de Matemática exercer sua a função docente de modo eficiente, faz-se necessário o domínio de conhecimentos e competências que englobam tanto o conhecimento matemático, como também o conhecimento sobre o ensino da Matemática.

Em termos metodológicos, esse estudo se enquadra em pesquisa do tipo qualitativa. Seu universo foi composto por um grupo de 12 professores que ensinam Matemática no Ensino Médio da rede pública do estado de Pernambuco. O desenvolvimento dessa pesquisa se deu em duas etapas: Na primeira, realizamos o estudo diagnóstico, o qual propiciou a análise dos conhecimentos didático-matemáticos de professores de Matemática no Ensino Médio sobre a inter-relação entre a Estatística e a Probabilidade por meio da Curva Normal. Posteriormente, na segunda etapa, realizamos o encontro formativo, no qual colocamos em prática uma proposta de ensino para a abordagem articulada entre a Estatística e a Probabilidade por meio da Curva Normal, com vistas à construção/ampliação dos conhecimentos didático-matemáticos dos professores sobre esse tema.

Diante dessas informações, a fim de cumprir com as propostas mencionadas anteriormente, estruturamos o presente estudo da seguinte maneira: No segundo capítulo, abordamos a Estatística enquanto ciência e sua inter-relação com a Probabilidade. O capítulo três, por sua vez, foi destinado para a apresentação do Letramento Estatístico e Probabilístico segundo a perspectiva de Gal (2002; 2005) e também para a apresentação e análise das recomendações dos documentos curriculares oficiais para o ensino dessas áreas de conhecimento no Ensino Médio.

No quarto capítulo é apresentado o modelo matemático da Distribuição Normal ou Curva Normal, abordando sua definição, características, propriedades, cálculos de probabilidades e estudos antecedentes que versam sobre o seu processo de ensino e aprendizagem. No quinto capítulo, apresentamos nosso referencial teórico, abordando o Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (GODINO, 2012) e o modelo de Conhecimentos e Competências Didático-Matemáticos do professor, proposto por Godino e Pino-Fan (2015).

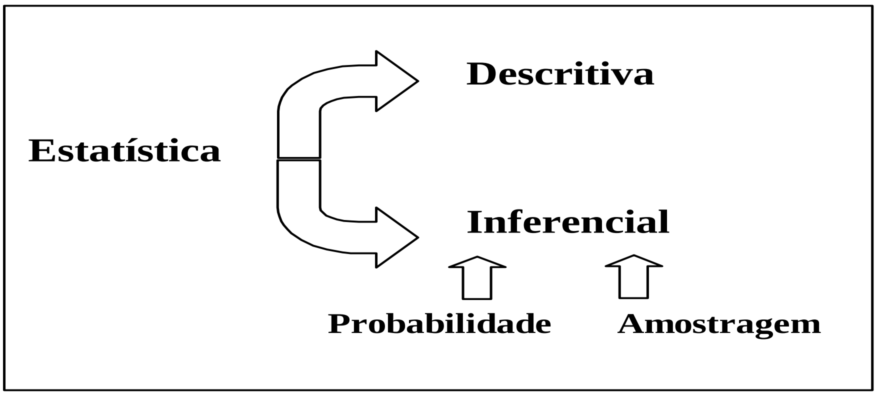
No capítulo seis, há o registro da metodologia utilizada nesse estudo, destacando o tipo, o campo e os participantes da pesquisa, bem como, o instrumento de coleta de dados e os critérios de análise de dados. Em seguida, o capítulo sete foi destinado para a nossa análise de dados que, nesse presente trabalho, contempla a apresentação da análise do nosso estudo diagnóstico e do encontro formativo. Desta forma, no oitavo e último capítulo desse estudo estão dispostas as considerações finais e sendo sucedido com as Referências Bibliográficas e Apêndices.

2 A ESTATÍSTICA ENQUANTO CIÊNCIA E SUA INTER-RELAÇÃO COM A PROBABILIDADE

A Estatística está presente em inúmeros ramos de nossa sociedade. Além de ser aplicada em diversas áreas de conhecimento, servindo de subsídio para a realização de pesquisas científicas, o conhecimento que a envolve é fundamental para a observação e interpretação de uma variedade de fenômenos, dados e informações.

Nesse sentido, de acordo com Bayer, Echeveste, Bittencourt e Rocha (2005), a Estatística é classificada como a ciência que se ocupa da coleta, organização, análise e o tratamento de dados e informações e que também lida com situações envolvendo a incerteza, ou seja, não-determinísticas. Ainda segundo estes autores, conforme apresentado na figura a seguir, a Estatística, em sua estrutura, contempla duas áreas de conhecimento: Descritiva e Inferencial.

Figura 1 – A Estrutura da Estatística



Fonte: Bayer, Echeveste, Bittencourt e Rocha, 2005, p. 2.

A Estatística Descritiva reúne métodos para organização, resumo e descrição de dados e informações, como por exemplo, tabelas, gráficos, medidas de tendência central (médias, moda e mediana) e medidas de variabilidade ou dispersão (desvio padrão e variância), ou seja, técnicas comumente utilizadas para descrever o comportamento de conjuntos de dados. Por sua vez, a área Inferencial é responsável por dar suporte ao pesquisador, apresentando um conjunto de métodos que buscam caracterizar e projetar o comportamento de uma população a partir dos parâmetros observáveis de uma parte dela, ou seja, uma amostra dessa população.

Ainda de acordo com Bayer *et al* (2005), subjacentes à Estatística Inferencial estão outros dois campos de conhecimento: a Amostragem e a Probabilidade. A primeira é definida como a área responsável pelo desenvolvimento de "técnicas para seleção das unidades populacionais que formarão a amostra, de maneira que as mesmas sejam representativas de suas respectivas populações." Bayer *et al* (2005, p.2). Deste modo, a partir das amostras é possível obter conclusões fidedignas que possam caracterizar e representar as suas respectivas populações. Esse tipo de situação pode ser observado, por exemplo, em pesquisas de opinião pública, nas quais, o estatístico, com base nos resultados observáveis em uma amostra populacional, prevê o resultado e as características gerais da pesquisa para toda a população.

Por sua vez, a Probabilidade é a área de conhecimento que trata de fenômenos aleatórios. Ela contempla aspectos de análise combinatória, experimentos aleatórios, espaço amostral, operações com eventos e modelos probabilísticos de variáveis discretas e contínuas (BAYER *et al*, 2005). Em complemento, trazemos a definição adotada por Bayer, Bittencourt, Rocha e Echeveste, (2015, p.04) que classifica a teoria das probabilidades como

> [...] um estudo teórico de fenômenos envolvendo a incerteza utilizando ferramentas básicas do Cálculo Matemático. Esses fenômenos, conhecidos como aleatórios, estocásticos ou não-determinísticos, são aqueles que a sua repetição, em condições idênticas,produzem resultados diferenciados, isto é, não é possível determinar, com exatidão, qual o seu resultado. Esses fenômenos, na verdade, são predominantes em todas as áreas do conhecimento.

Deste modo, a probabilidade, por se ocupar do estudo e modelagem de fenômenos aleatórios, está inter-relacionada com a Estatística servindo de alicerce para a Estatística Inferencial, possibilitando a formulação de técnicas e modelos matemáticos que possibilitam o cálculo da probabilidade de eventos, inferir e caracterizar uma população.

Em continuidade, explorando um pouco do contexto histórico da Probabilidade, cabe destacar que nem sempre a mesma esteve associada à Estatística. Os primeiros conceitos e aplicações da Probabilidade surgiram a partir do século XV em situações envolvendo jogos de azar. De acordo com Bayer *et al* (2015), os matemáticos da época, de forma mais empírica, buscaram responder questionamentos sobre a incerteza através dos jogos, na tentativa de obter vantagens nas disputas e evitar perdas ligadas à experimentos imprevisíveis.

No século XVI, a Probabilidade foi ganhando um caráter mais científico e um formalismo matemático. Segundo Silveira (2001), o matemático italiano Girolamo Cardano foi o pioneiro no desenvolvimento de estudos probabilísticos para responder problemas matemáticos envolvendo aleatoriedade:

> Cardano foi o primeiro a introduzir técnicas de combinatória para calcular a quantidade de probabilidades favoráveis num evento aleatório e, assim, poder calcular a probabilidade de ocorrência do evento como razão entre a quantidade de possibilidades favoráveis e a quantidade total de possibilidades (SILVEIRA, 2001, p. 01).

Com base nos estudos Cardano, outros matemáticos como Pacioli, Tataglia, Galileu, Pascal, Fermat, J. Bernoulli, Bayes, Laplace e Kolmogorov deram continuidade ao desenvolvimento de estudos probabilísticos, culminando na atual Teoria das Probabilidades. Ao longo dessa trajetória, esses matemáticos desenvolveram teoremas e responderam a problemas que envolviam a Matemática e o acaso. Atualmente, a Teoria das Probabilidades é aplicada em situações com fenômenos determinísticos e os não-determinísticos, ou aleatórios, e permeia diversas áreas do conhecimento, entre elas, a Estatística, que por sua vez utiliza-se da probabilidade para organizar, analisar e explicar dados e informações estatísticas, buscando estimar a ocorrência de fenômenos futuros e prever suas conclusões.

No presente estudo, temos como foco a relação entre a Estatística e a Probabilidade através da Distribuição Normal ou Curva Normal, classificada como o principal modelo matemático presente na Estatística Inferencial que abarca e relaciona mutuamente conceitos estatísticos e probabilísticos (GONÇALVES, 2014).

Sobre esta temática, diversos estudos presentes na literatura, tais como Lopes (2010) e Batanero (2001, 2002) apontam a necessidade e importância da inserção do estudo da Probabilidade, da Estatística e da relação entre elas na Educação Básica. Entre as várias razões, os autores citam que há uma interseção entre a Estatística e a Probabilidade, pois o pensamento estatístico abarca noções e conceitos relativos à incerteza e a inferência. Assim, os pensamentos estatísticos e probabilísticos atuam juntos no processo de leitura e interpretação de dados estatísticos e probabilísticos em muitas profissões e na vida cotidiana das pessoas, bem como no importante papel de tomada de decisões.

3 O ENSINO DA ESTATÍSTICA E DA PROBABILIDADE

Este capítulo é destinado para a apresentação da concepção de Letramento Estatístico e Probabilístico a partir da ótica de Gal (2002, 2005) e das recomendações curriculares oficiais para o ensino de Estatística e da Probabilidade, com ênfase para a abordagem do conceito da Curva Normal, no Ensino Médio da Educação Básica.

3.1 O LETRAMENTO ESTATÍSTICO E PROBABILÍSTICO

No âmbito da Educação Básica, o letramento pode ser compreendido como a capacidade de ler e interpretar diversos tipos de informações que levem a compreensão dos significados dos conceitos em diferentes situações, possibilitando uma aprendizagem que responda as demandas sociais e propicie o senso crítico. Em acréscimo, destacamos que para Kleimann (1995, p. 19) o letramento é “um conjunto de práticas sociais que usam a escrita, enquanto sistema simbólico e enquanto tecnologia, em contextos específicos, para objetivos específicos”.

De modo mais específico, no âmbito da Educação Estatística, Gal (2002) enfatiza que os conhecimentos básicos de Estatística são uma capacidade essencial que se espera que os cidadãos possam ter nas sociedades saturadas de informação. Nessa perspectiva, o autor concebe o Letramento Estatístico como:

> A capacidade de uma pessoa interpretar e avaliar criticamente informações estatísticas, levando em consideração os argumentos relacionados aos dados ou aos fenômenos apresentados em qualquer contexto quando relevante; suas capacidades para discutir ou comunicar suas reações a essas informações estatísticas, tais como suas compreensões do significado das informações, as suas opiniões sobre as implicações desta informação ou considerações sobre a aceitabilidade de determinadas conclusões. Gal (2002, p. 4).

Assim, para Gal (2002), o indivíduo é considerado letrado estatisticamente quando detém conhecimento mínimo de conceitos e ideias estatísticas além de dominar alguns procedimentos e técnicas matemáticas. No modelo proposto por este autor, sintetizado no quadro a seguir, o Letramento Estatístico contempla dois componentes que se relacionam entre si, a saber: *Elementos de Conhecimento* e *Elementos de Disposição*.

Quadro 1– Modelo do Letramento Estatístico

Elementos de Conhecimento	**Elementos de Disposição**
• Habilidades de Letramento • Conhecimento Estatístico • Conhecimento Matemático • Conhecimento do Contexto • Questionamentos Críticos	• Crenças e Atitudes • Postura Crítica
Letramento Estatístico	

Fonte: Gal, 2002, p.4.

Explorando cada componente do modelo supracitado, destacamos que os *Elementos de Conhecimento* estão relacionados com a capacidade de o indivíduo ler, interpretar e analisar de forma crítica uma informação ou dado estatístico. Esse campo contempla cinco elementos que não são independentes e se inter-relacionam, a saber: habilidades de letramento, conhecimento estatístico, conhecimento matemático, conhecimento do contexto e questionamentos críticos.

As *Habilidades de Letramento,* por sua vez, dizem respeito às habilidades gerais que os indivíduos devem possuir para se comunicar de forma oral ou escrita, compreender as informações estatísticas de diferentes níveis de complexidade, veiculadas por diversos instrumentos, como textos virtuais, orais e escritos, gráficos e tabelas, que abarcam uma gama de conceitos estatísticos relativos a um dado contexto.

Já o *Conhecimento Estatístico*, considerado essencial para a formação de um indivíduo letrado estaticamente, está fundamentado em cinco partes: 1- Saber por que os dados são necessários e como podem ser produzidos; isto envolve a ideia de sentido numérico dos dados, compreensão de variáveis e do processo de análise de dados. 2 - Familiaridade com conceitos e ideias básicas relacionadas à Estatística Descritiva; 3 - Familiaridade com conceitos básicos e ideias relacionadas a representações gráficas e tabulares; 4 - Compreensão de noções básicas de Probabilidade e sua relação com a Estatística para determinar amostras aleatórias, teste de significância e o raciocínio inferencial, como intervalos de confiança ou teste de hipóteses. E por fim, 5 - Saber como as conclusões ou inferências estatísticas são obtidas.

Assim, podemos inferir que a compreensão e interpretação de informações e dados estatísticos emergem do conhecimento de conceitos e técnicas estatísticas relativas às áreas Descritiva e Inferencial. No entanto, a construção do conhecimento estatístico e, por conseguinte, o Letramento Estatístico, também requer o domínio de ferramentas e conceitos matemáticos. Logo, o *Conhecimento Matemático* é responsável por dar suporte necessário para o conhecimento estatístico e está direcionado para compreensão da ideia de número, seja ele natural, fracionário, decimal ou percentual com diferentes significados e quantidades, como, por exemplo, a ideia de média, quantificação de variância e probabilidade, possibilitando ao indivíduo, o desenvolvimento de habilidades e competências matemáticas que corroborem com a formação de seu Letramento Estatístico.

Em continuidade, o *Conhecimento de Contexto* também é necessário para a construção do Letramento Estatístico, tendo em vista que toda informação estatística está relacionada ao um determinado contexto. Assim, quando o indivíduo o conhece,é possível dar significado e compreender tal informação. Deste modo, esse conhecimento é o principal determinante da familiaridade do leitor com as fontes que veiculam informações e dados estatísticos. Além disso, como último elemento de conhecimento, o autor aponta que os *Questionamentos Críticos* compreendem a capacidade de o indivíduo analisar de forma crítica as informações estatísticas veiculadas por diversos meios, avaliando a origem, construção e formulação, como também o propósito e a veracidade dessas informações.

Por fim, os *Elementos de Disposição* referem-se à postura crítica, disposição e concepções dos indivíduos frente à determinada informação estatística. O autor enfatiza que

> “é difícil descrever uma pessoa como totalmente letrada estatisticamente se essa pessoa não mostrar a disposição para ativar as cinco bases de conhecimento descritas anteriormente ou compartilhar com outras pessoas suas opiniões, julgamentos ou interpretações críticas”.(Gal, 2002 p. 17)

Logo, espera-se que o indivíduo letrado estatisticamente tenha a capacidade de analisar criticamente informações relativas ao campo estatístico, além de demonstrar vontade e interesse em “pensar estatisticamente” em diferentes situações.

Além do mais, o referido autor também apresenta, de modo semelhante, o modelo para o Letramento Probabilístico. Segundo Gal (2005) o indivíduo é considerado letrado em Probabilidade quando detém um conjunto de habilidades básicas que o possibilita ler e interpretar informações e dados probabilísticos presentes no seu cotidiano e na tomada de decisões.

Deste modo, o modelo de Letramento Probabilístico, sistematizado no quadro adiante, contempla dois componentes essenciais: O primeiro trata dos *Elementos Cognitivos* e contempla cinco elementos mais específicos: *Grandes Ideias, Figurando Probabilidades, Idiomas, Contexto e Questões Críticas*. Já os *Elementos da Disposição*, por sua vez, estão relacionados com as crenças, atitudes e hábitos envolvendo os conceitos probabilísticos. Este elemento contempla outros dois mais específicos, *Postura Crítica e Crenças e Atitudes.*

Quadro 2 – Modelo do Letramento Probabilístico

Elementos Cognitivos	**Elementos da Disposição**
1**- Grandes ideias**: Variação, Aleatoriedade, incerteza, etc. 2**- Figurando probabilidades**: Maneiras e encontrar ou estimar probabilidades de eventos 3- **Idiomas**: Os termos e métodos utilizados para comunicar sobre chance. 4 – **Contexto**: Compreender o papel e as implicações de questões probabilísticas no discurso pessoal e público 5- **Questões Críticas**: Questões para se refletir quando se lida com probabilidades	1- **Postura Crítica**: Comportamento crítico que se espera do indivíduo frente a situações probabilísticas. 2- **Crenças e Atitudes**: Sentimentos pessoais sobre a incerteza e o risco.

Fonte: Gal, 2005, p. 51.

Explorando um pouco mais o modelo proposto, destacamos que o primeiro elemento, *Grandes Ideias,* está relacionado com o domínio por parte do indivíduo de tópicos fundamentais para a compreensão do conceito de probabilidade, do quais destacamos a variação, aleatoriedade e a incerteza.

No que diz respeito ao elemento *Figurando Probabilidades*, Gal (2005) argumenta que os indivíduos devem compreender as diferentes formas para o cálculo de probabilidade de eventos, para que a partir dessa compreensão possam entender e comunicar sobre as informações e dados probabilísticos. Assim, de forma paralela, o elemento cognitivo *Idiomas* se faz necessário para o desenvolvimento da linguagem probabilística, pois em nossa sociedade precisamos frequentemente representar, comunicar e dialogar sobre conceitos e resultados probabilísticos.

Em continuidade, o quarto elemento cognitivo, *Contexto*, está relacionado com a compreensão do papel e dos significados das informações e dados probabilísticos em diferentes contextos, isto é, nas situações que abarcam as noções de acaso e de probabilidade que podem aparecer no nosso dia a dia de. O autor também aponta que paralelamente à compreensão dos conceitos probabilísticos, torna-se necessário a compreensão do contexto em que este conceito está inserido, tornando-o significativo, pois “há uma necessidade de aprender sobre probabilidade ou incerteza em diferentes circunstâncias da vida” (GAL, 2005, p. 52).

O último elemento cognitivo do Letramento Probabilístico, *Questões Críticas,* está relacionado com a capacidade dos indivíduos desenvolverem um pensamento crítico sobre as informações e dados probabilísticos. Este elemento é necessário porque os questionamentos críticos também podem estar relacionados a julgamento equivocados relativos às estimativas de probabilidades. Pois muitos indivíduos “tendem a estimar as probabilidades de forma imprecisa ou pensar sobre aleatoriedade, independência, variação ou riscos desvinculados dos aspectos formais” (GAL, 2005 p. 55).

Além disso, como citado anteriormente, o modelo de Letramento Probabilístico também contempla os *Elementos da Disposição*, que por sua vez, é formado pelos elementos “Postura Crítica” e “Crenças e Atitudes”. Logo, espera-se que o indivíduo letrado probabilisticamente tenha a capacidade de analisar criticamente informações relativas ao campo probabilístico, ou seja, possuir uma postura crítica em situações envolvendo o conceito de probabilidade. De igual modo, é importante levar em consideração, na construção desse letramento, as concepções, crenças e atitudes pessoais envolvendo o pensamento probabilístico, isto é, o sentimento e comportamentos de cada indivíduo, bem como a vontade e o interesse em pensar sobre a probabilidade e seus significados em diferentes situações.

Apresentados os modelos do Letramento Estatístico e Probabilístico proposto por Gal (2002, 2005), cabe ainda destacarmos que apesar de abordarmos esses elementos separadamente, eles se interligam e interagem entre si de forma complexa. Disto, devemos compreender que o ensino de Estatística e Probabilidade deve oferecer ferramentas para o desenvolvimento de tais elementos, em sua totalidade, a fim de propiciar a construção do Letramento Estatístico e Probabilístico dos estudantes.

O autor ainda concebe que os tais letramentos devem começar a serem construídos pelos indivíduos desde o início de sua escolarização até a vida adulta, tendo em vista que na fase escolar, os estudantes já se deparam com situações envolvendo conceitos estatísticos e probabilísticos. Assim, ao abordar tais conceitos em sala de aula, é necessário levar em conta os diferentes significados que eles podem assumir, a linguagem e o contexto em que os conceitos estão inseridos, como também os questionamentos críticos envolvendo tais conceitos e significados.

Por fim, concordamos com o referido autor ao argumentar que as experiências de aprendizagem desses conceitos devem ser pautadas no contexto de situações significativas do cotidiano e da vida do aluno e desta forma "exige-se atenção para a questão da transferência de competências na sala de aula para aprender as situações fora da sala de aula" (GAL, 2005, p. 58).

3.2 Recomendações dos documentos oficiais sobre o ensino da Estatística e da Probabilidade

Diante do que abordamos, dada a notável importância da Estatística e da Probabilidade, enquanto áreas de conhecimento, apresentaremos, nessa seção, as recomendações dos documentos oficiais para Educação Básica, veiculadas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's), Parâmetros Curriculares para a Educação Básica do Estado de Pernambuco (PCPE) e a Base Nacional Curricular Comum (BNCC) que buscam propiciar o desenvolvimento do Letramento Estatístico e Probabilístico e a formação educacional dos indivíduos. Deste modo, analisaremos, especificamente, as expectativas de aprendizagem e as recomendações para ensino de Estatística e Probabilidade para o Ensino Médio, com foco nos conteúdos curriculares propostos para cada uma dessas áreas, as possibilidades para o ensino e abordagem da relação entre elas e as possíveis recomendações para o ensino sobre a Curva Normal, temática que se constitui o escopo do nosso estudo.

Inicialmente, pontuamos que os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2000), não são mais considerados como documento norteador para a Educação Básica no Brasil, mas o abordaremos no presente estudo por considerar que muitos dos atuais professores tiveram suas formações pautadas em suas diretrizes e que desde a sua elaboração, o Governo Federal, via Ministério da Educação, objetivou orientar a prática docente desses professores e assegurar aos estudantes o acesso aos conteúdos curriculares. Deste modo, esse documento apresenta, de forma sistematizada, os blocos de conteúdos e as competências e habilidades que devem ser desenvolvidos e contemplados em cada ciclo da Educação Básica.

Focando nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio - PCNEM (BRASIL, 2000), cabe destacar que os mesmos caracterizam, de modo geral, o conhecimento matemático como um saber que permeia diversas áreas do conhecimento, tornando-se uma necessidade humana para a construção de uma visão de mundo e o desenvolvimento de capacidades e habilidades que propiciem, aos estudantes, a leitura, interpretação e compreensão de nossa realidade. Deste modo, o referido documento indica três competências gerais a serem alcançadas nessa etapa de escolarização com o ensino de Matemática:

> • Representação e comunicação, que envolvem a leitura, a interpretação e a produção de textos nas diversas linguagens e formas textuais características dessa área do conhecimento;
> • investigação e compreensão, competência marcada pela capacidade de enfrentamento e resolução de situações-problema, utilização dos conceitos e procedimentos peculiares do fazer e pensar das ciências;
> • contextualização das ciências no âmbito sócio-cultural, na forma de análise crítica das ideias e dos recursos da área e das questões do mundo que podem ser respondidas ou transformadas por meio do pensar e do conhecimento científico. (BRASIL, 2000, p. 101).

Diante disso, os PCNEM (BRASIL, 2000) propõem para o ensino de Matemática, a divisão de conteúdos em três blocos distintos: Álgebra, Geometria e Medidas e Análise de dados. Este último contempla os conteúdos de Estatística, Probabilidade e Contagem. Assim, no que diz respeito ao ensino de Estatística e Probabilidade, além da apropriação e ampliação do conhecimento sobre os conceitos relativos a esses campos de conhecimento, abordados no Ensino Fundamental, os estudantes do Ensino Médio, devem desenvolver, em linhas gerais, competências e habilidades relativas à interpretação e compreensão de informações e dados estatísticos e probabilísticos presentes em gráficos, tabelas e diversos meios de comunicação midiáticos.

Além disso, objetiva-se que o estudante do Ensino Médio analise com criticidade os significados de informações e dados, de forma a contemplar toda a investigação sobre os mesmos e propiciar a tomada de decisões. Na mesma direção, destacamos segundo Brasil (2000, p. 123) que:

> A Estatística e a Probabilidade devem ser vistas, então, como um conjunto de ideias e procedimento que permitem aplicar a Matemática em questões do mundo real, mais especialmente aquelas provenientes de outras áreas. Devem ser vistas também como formas de a Matemática quantificar e interpretar um conjunto de dados ou informações que não podem ser quantificados diretamente ou exatamente.

Explorando um pouco mais o bloco Análise de dados, os PNCEM (BRASIL, 2000) orientam para o ensino da Estatística e Probabilidade, uma abordagem nas aulas de Matemática voltada para a descrição de dados, representações gráficas, análise de dados, contemplando os conceitos de médias, moda e mediana, variância e desvio padrão, bem como, a ideia de possibilidades e o cálculo de probabilidades. Deste modo, objetiva-se, nesta etapa de escolarização, com o ensino de Estatística e Probabilidade:

> • Identificar formas adequadas para descrever e representar dados numéricos e informações de natureza social, econômica, política, científico-tecnológica ou abstrata.
> • Ler e interpretar dados e informações de caráter estatístico apresentados em diferentes linguagens e representações, na mídia ou em outros textos e meios de comunicação.
> • Obter médias e avaliar desvios de conjuntos de dados ou informações de diferentes naturezas.
> • Compreender e emitir juízos sobre informações estatísticas de natureza social, econômica, política ou científica 6apresentadas em textos, notícias, propagandas, censos, pesquisas e outros meios.
> • Reconhecer o caráter aleatório de fenômenos e eventos naturais, científico-tecnológicos ou sociais, compreendendo o significado e a importância da probabilidade como meio de prever resultados.
> • Quantificar e fazer previsões em situações aplicadas a diferentes áreas do conhecimento e da vida cotidiana que envolvam o pensamento probabilístico.
> • Identificar em diferentes áreas científicas e outras atividades práticas modelos e problemas que fazem uso de estatísticas e probabilidades. (Brasil, 2000, p. 127, 128).

Além dos conteúdos propostos e as competências e habilidades a serem alcançadas, elencadas anteriormente, cabe destacarmos que o referido documento ainda apresenta orientações didático-pedagógicas para seleção, apresentação e sistematização dos conteúdos a serem abordados concomitantemente nas três séries que compõem o Ensino Médio. Assim, com ênfase na metodologia de resolução de problemas, espera-se que o estudante do Ensino Médio possa utilizar-se do conhecimento matemático para interpretar e compreender a sua realidade e partir das habilidades e competências matemáticas desenvolvidas, resolver situações-problemas relativas ao seu cotidiano, além de representar e se comunicar matematicamente.

No entanto, a partir dessas recomendações, podemos observar que os PNCEM (BRASIL, 2000) não apresentam de forma explícita alguma orientação para o ensino do conceito da Curva Normal. Apesar disso, podemos considerar que as orientações para esse ensino estão pautadas de forma implícita, por este documento, através de alguns tópicos de recomendações, como em “Identificar em diferentes áreas científicas e outras atividades práticas modelos e problemas que fazem uso de estatísticas e probabilidades” (Brasil, 2000, p.128), que abarca o conceito da Curva Normal, tendo em vista que a mesma se trata de um modelo presente na inferência estatística, fazendo uso de estatísticas e probabilidades e que está presente em diferentes áreas científicas. Diante disso, podemos concluir que cabe unicamente ao professor reconhecer e compreender o conceito da Curva Normal tratado de forma implícita por algumas das recomendações presentes no referido documento, o que pode não garantir a sua abordagem em sala de aula, e, por conseguinte, não favorecer a aprendizagem dos estudantes sobre esse tópico conceitual.

Em continuidade a temática abordada, com a intenção de aprimorar e aperfeiçoar o trabalho docente em sala de aula e difundir as propostas veiculadas pelos PCN’s (BRASIL, 1998, 2000), o estado de Pernambuco desenvolveu os “Parâmetros Curriculares para a Educação Básica do Estado de Pernambuco”-PCPE (PERNAMBUCO, 2012, 2013). O referido documento contempla os blocos de conteúdos curriculares para cada disciplina, as expectativas de aprendizagem dos estudantes, ano a ano, do Ensino Fundamental ao Ensino Médio, bem como orientações voltadas para o processo de ensino e aprendizagem e as práticas pedagógicas a serem desenvolvidas em sala de aula.

Nesse contexto, no que diz respeito à disciplina de Matemática, o PCPE (PERNAMBUCO, 2013) propõe a divisão de conceitos matemáticos em cincos blocos de conteúdos, a saber: Geometria, Estatística e Probabilidade, Álgebra e Funções, Grandezas e Medidas e Números e Operações. Desta forma, cada referido bloco é subdivido por tópicos de conteúdos, expectativas de aprendizagem e orientações para o ensino. Tal organização permeia todas as etapas da escolarização básica, isto é, do 1º ano dos anos iniciais do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio, de forma que conceitos matemáticos sejam retomados e ampliados, progressivamente, a cada ano escolar. Desta forma, "o objetivo é o de que, independente da etapa em que o professor lecione, ele conheça as orientações dos outros anos e das outras etapas, para se apropriar da lógica interna de construção dos conceitos matemáticos" (PERNAMBUCO, 2013, p. 15).

Nessa perspectiva, explorando especificamente o bloco de conteúdos "Estatística e Probabilidade" destaca-se, a seguir, a divisão de conteúdos em tópicos gerais que devem ser abordados ao longo das etapas da Educação Básica, retomando e aprofundando os mesmos, a cada ano escolar:

> • <u>Coleta e organização de dados</u>: elaboração de problemas e planos de pesquisas; organização e categorização de dados; população e amostra; análise de dados coletados; tipos de variáveis; frequências absoluta, relativa e acumulada.
> • <u>Representação de dados</u>: construção de tabelas e gráficos; identificação e interpretação de informações apresentadas em tabelas e gráficos; comparação e conversão de diferentes representações de dados; elementos constitutivos de gráficos; agrupamento de dados em classes.
> • <u>Medidas estatísticas:</u> média, moda, mediana e quartil; comparação de conjuntos de dados por meio de medidas de tendência central; amplitude, desvio médio, variância e desvio padrão.
> • <u>Probabilidade</u>: eventos determinísticos e aleatórios; resultados possíveis de um experimento; cálculo de probabilidades. (PERNAMBUCO, 2013, p.18 e 19).

No que diz respeito ao ensino de Estatística e Probabilidade no Ensino Médio, foco do nosso estudo, os PCPE (PERNAMBUCO, 2013) apresentam as expectativas de aprendizagem a serem alcançadas e desenvolvidas pelos estudantes nas três séries que compõem esse nível de escolarização, as quais destacamos, a seguir:

> •Realizar uma pesquisa considerando todas as suas etapas (planejamento, seleção de amostras, elaboração e aplicação de instrumentos de coleta, organização e representação dos dados,

> interpretação, análise crítica e divulgação dos resultados).
> •Selecionar uma amostra adequada para uma determinada pesquisa
> •Construir tabelas e gráficos de diferentes tipos (barras, colunas, setores e gráficos de linha, histograma), preferencialmente utilizando recursos tecnológicos.
> •Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.
> •Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.
> •Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.
> •Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.
> •Determinar frequências relativas, acumuladas e acumuladas relativas de dados agrupados.
> •Calcular e interpretar medidas de tendência central (média, moda e mediana) para um conjunto de dados numéricos não agrupados.
> •Resolver e elaborar problema que envolva a interpretação de tabelas e gráficos de diferentes tipos.
> •Calcular e interpretar medidas de dispersão (amplitude, desvio médio, variância e desvio padrão) para um conjunto de dados numéricos não agrupados.
> •Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento, explorando representações diversas.
> •Determinar a probabilidade da união de dois eventos, explorando representações diversas.
> •Organizar tabelas com dados numéricos agrupados ou não agrupados.
> •Determinar a probabilidade da união e da intersecção de eventos.
> •Determinar a probabilidade condicional (PERNAMBUCO, 2013, p.18e 19).

Além disso, os PCPE (PERNAMBUCO, 2013) para o ensino de Matemática, apresentam orientações metodológicas gerais para a prática docente em sala de aula, objetivando o sucesso na aprendizagem matemática. Essas orientações alertam, de modo geral, de que professor de Matemática deve levar em consideração, ao lecionar essa disciplina, o conhecimento que o estudante traz de suas práticas sociais, a necessidade do estudante desenvolver sentidos para os conceitos matemáticos estudados e de se utilizar da representação matemática para compreender e se apropriar desses conceitos.

Nesse contexto, de modo mais específico, o documento em pauta ainda contempla orientações metodológicas e de ensino para cada tópico pertencente aos blocos de conteúdo mencionados anteriormente, buscando orientar o professor sobre o processo de ensino aprendizagem de cada tema matemático abordado ao longo da escolarização básica. Logo, no tocante às orientações metodológicas e de ensino voltadas para bloco “Estatística e Probabilidade” no Ensino Médio, destacamos as direcionadas para o ensino da Curva Normal, objeto matemático do nosso estudo. Assim, o tópico de conteúdo denominado “Representação de dados” traz que:

> A ideia de que os fenômenos na natureza seguem um determinado padrão (assemelhando-se à curva normal, em formato de sino), em que os valores extremos têm menor frequência e os valores mais próximos da média ocorrem em maior número de vezes (maior frequência) deve ser destacada e discutida. (PERNAMBUCO, 2013 p.45)

Deste modo, o PCPE cita e orienta explicitamente o ensino da Curva Normal para o Ensino Médio e, baseado neste documento, espera-se que o professor de Matemática aborde o conceito da Curval Normal, em sala de aula, contemplando os diversos fenômenos do nosso cotidiano em que esse conceito pode ser aplicado, enfatizando os conceitos estatísticos, como a frequência de dados de forma simétrica em torno da média. Mas em contrapartida, essa orientação não faz referência ao conceito e o cálculo de probabilidade que podem ser abordados através da Curva Normal. Logo, aqui também cabe ao professor ter domínio necessário sobre o tema para também abordá-los, e, assim, articular a Probabilidade com a Estatística na abordagem do modelo da Curva Normal.

Em continuidade, ainda sobre os documentos oficiais para a Educação Básica, o Governo Federal, através do Ministério da Educação, elaborou, mais recentemente, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para a Educação Básica (BRASIL, 2018) com o objetivo de reformular o currículo e apresentar as competências (gerais e específicas), habilidades e aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver durante cada etapa da Educação Básica. A BNCC é considerada atualmente, o documento norteador e que vem servindo de base para a reformulação e desenvolvimento dos currículos estaduais e dos livros didáticos.

Neste documento, a área de conhecimento denominada “A matemática e suas tecnologias” propõe a estrutura curricular da disciplina de Matemática no Ensino Médio, em três blocos de conteúdos, a saber: Números e Álgebra, Geometria, e Medidas, e Probabilidade e Estatística. Nesta última etapa da escolarização básica, a BNCC propõe que o conhecimento matemático, construído no Ensino

Fundamental, seja consolidado, ampliado e aprimorado, buscando propiciar aos estudantes a ampliação do conhecimento matemático, a capacidade de resolver situações-problemas com mais autonomia e segurança e a construção de uma visão de que a Matemática é essencialmente aplicada à realidade em diferentes contextos. Deste modo, o referido documento destaca as competências específicas de Matemática e suas tecnologias a serem desenvolvidas no Ensino Médio:

> 1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
> 2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
> 3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
> 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
> 5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL,2018. p. 533)

Dando prosseguimento à nossa análise, no que diz respeito ao ensino de Estatística e Probabilidade no Ensino Médio, a BNCC (BRASIL, 2018) orienta a ampliação, consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos e conceitos estatísticos e probabilísticos vistos ao longo dos anos escolares no Ensino fundamental, com vistas para o desenvolvimento do Letramento Estatístico e Probabilístico. Logo, espera-se que o estudante do Ensino Médio desenvolva, no âmbito da Estatística e Probabilidade, as seguintes competências e Habilidades:

> (EM13MAT102) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como

> escalas e amostras não apropriadas.
> (EM13MAT202) Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.
> (EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.
> (EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
> (EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).
> (EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
> (EM13MAT316) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).
> (EM13MAT406) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de softwares que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.
> (EM13MAT407) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (box-plot), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.
> (EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades. (BRASIL, 2018, p 546)

Diante disso, percebe-se que com relação aos PNCEM (BRASIL, 2000), houve um aumento nas competências e habilidades a serem alcançadas pelos estudantes do Ensino Médio. A BNCC (BRASIL, 2018) indica, em linhas gerais, que o ensino de Estatística e Probabilidade deve estar voltado para o estudo e análise de dados estatísticos presentes em diferentes tipos de diagramas e gráficos (barras, colunas, setores, linhas, histogramas, etc.), para o planejamento e execução de pesquisas estatísticas, compreendendo cada uma de suas etapas, para a elaboração e resolução de problemas envolvendo as medidas de tendências centrais e dispersão e para a elaboração e resolução de problemas envolvendo o cálculo de probabilidades, compreendendo os diferentes tipos de eventos, espaços amostrais e a noção do conceito de probabilidade presente em diferentes situações do nosso cotidiano.

No entanto, podemos observar que de modo semelhante aos PNCEM (BRASIL, 2000), esse documento não traz explicitamente alguma orientação para o ensino e abordagem da Curva Normal. Logo, também cabe ao professor, tendo esse documento como meta, compreender essa orientação de modo implícito em algumas competências e habilidades, como as “EM13MAT202”, “EM13MAT316” e “EM13MAT311” que, em síntese, recomendam o trabalho com pesquisas amostrais, a resolução de problemas com a utilização de gráficos que envolva o cálculo e a interpretação das medidas de tendência central e de dispersão e a identificação de espaços amostrais em eventos aleatórios para o cálculo de probabilidades, o que, deste modo, abarca, a Curva Normal, pelo fato da mesma tratar da modelagem de fenômenos por meio da Estatística Inferencial e que contempla os conceitos e os cálculos das medidas de centralidade e dispersão e de Probabilidades, os quais serão apresentados no capítulo 3 deste estudo.

Em síntese, ao observarmos as diretrizes e recomendações propostas pelos três documentos oficiais para a Educação Básica, abordados e analisados anteriormente, podemos concluir que os mesmos se constituem como importantes materiais de apoio ao professor, ao apresentarem de forma sistematiza orientações sobre o currículo da disciplina de Matemática, expectativas de aprendizagem a serem alcançadas e orientações didático-pedagógicas inerentes à prática docente. No entanto, com relação ao tema do presente estudo, ao analisar tais documentos, cabe destacarmos que os mesmos não apresentam explicitamente as possíveis relações entre a Estatística e a Probabilidade, como áreas de conhecimento da Matemática. Assim, não há de forma explícita orientações didáticas e de conteúdo que abarquem da articulação da Estatística com a Probabilidade.

Além disso, sobre o conceito da Curva Normal, como vimos, há uma recomendação para o seu ensino explícita unicamente nos PCPE (PERNAMBUCO, 2013). No entanto, essa recomendação só faz referência à distribuição dos dados, a simetria e o conceito de média, presentes na Curva Normal, não enfatizando o conceito e o cálculo de probabilidades que podem ser realizados através desse modelo. Em relação aos PNCEM (BRASIL, 2000), e a BNCC (BRASIL, 2018), como também destacado anteriormente, neles há orientações mais gerais para o ensino de Estatística e Probabilidade que contemplam de forma implícita a abordagem da

Curva Normal, o que gera a dependência do domínio conceitual dos professores para reconhecer e abordar esse tema em sala de aula. Neste cenário, compreendemos que os referidos documentos, sobretudo os PNCEM (BRASIL, 2000), e a BNCC (BRASIL, 2018), podem deixar lacunas sobre o tema proposto em nosso estudo, o que pode acarretar, por parte dos estudantes, na não compreensão da importância e aprendizagem da inter-relação entre a Estatística e Probabilidade por meio da Curva Normal, tendo em vista que a mesma pode ser observada, comumentemente, em diversas áreas de conhecimento e fenômenos do nosso cotidiano.

Nesta direção, apresentamos no capítulo a seguir a Curva Normal, contemplando a sua definição conceitual, o contexto histórico, o modelo matemático e a representação gráfica, os conceitos estatísticos e probabilísticos presentes nela, o cálculo de probabilidade através da Curva e por fim, alguns estudos científicos anteriores que versam sobre o processo de ensino e aprendizagem da Curva Normal.

4 A CURVA NORMAL

A Curva Normal ou Distribuição Normal pode ser definida como um modelo matemático que descreve o comportamento de variáveis aleatórias e tem uma importância grande para a área da Estatística Inferencial. Através desse modelo, é possível a construção de intervalos de confiança e também calcular probabilidades (GONÇALVES, 2014).

Inicialmente, explorando seu contexto histórico, de acordo com Duarte (2010) a Curva Normal se originou no século XVIII através da observação do erro de mensuração, também conhecido por “lei do erro”. Segundo o autor, alguns registros históricos apontam que os erros de mensuração eram observados por astrônomos da época na tentativa de estimar as órbitas dos corpos celestes.

Posteriormente, através do matemático francês Abraham de Moivre (1667 – 1754), a Curva Normal foi introduzida a um formalismo matemático. Em um artigo impresso no livro “A doutrina do acaso”, Moivre foi o primeiro matemático a trabalhar com a “lei do erro” e procurou apresentar de forma algébrica a teoria das probabilidades. (BITTENCOURT E VIALI, 2006).

O matemático francês Laplace, em 1842, deu continuidade às ideias desenvolvidas por Moivre, ao publicar em seu livro, Teoria Analítica da Probabilidade, o atualmente denominado teorema de Moivre-Laplace. Este matemático demonstrou que se uma determinada distribuição é anormal, a média de repetidas amostras dessa distribuição é aproximadamente normal, ou seja, tende à normalidade. Assim, Laplace compreendeu que quanto maior o tamanho de uma determinada amostra, mais ela se aproximará de uma Distribuição Normal. (BITTENCOURT E VIALI, 2006).

Ainda de acordo com Bittencourt e Viali (2006), a primeira aplicação da Curva Normal foi realizada pelo matemático belga Adolph Quetelet (1796 –1874), ao coletar dados relativos a medidas do tórax de soldados escoceses e da altura de soldados franceses, assim ele verificou que os dados dessas medidas obedeciam a uma Distribuição Normal.

Além disso, a Curva Normal também é denominada de Distribuição Gaussiana. Este fato deve-se ao matemático alemão Karl F. Gauss (1777 – 1855) que realizou relevantes estudos formais sobre a lei dos erros. Gauss desenvolveu a “equação da distribuição” que modelava muito bem os erros de observações astronômicas. Por fim, é pertinente pontuarmos que a denominação atualmente utilizada de Distribuição Normal ou Curva Normal foi dada por volta de 1875 pelo filosofo americano Charles S. Peirce (1839 – 1914), pelo antropólogo e geneticista britânico Francis Galton (1822 – 1911) e pelo economista alemão Wilhelm Lexis (1837 – 1914). Por sua vez, a terminologia de Curva em Forma de Sino foi adotada em 1872 pelo Frances Esprit Pascal Jouffret. (BITTENCOURT e VIALI, 2006).

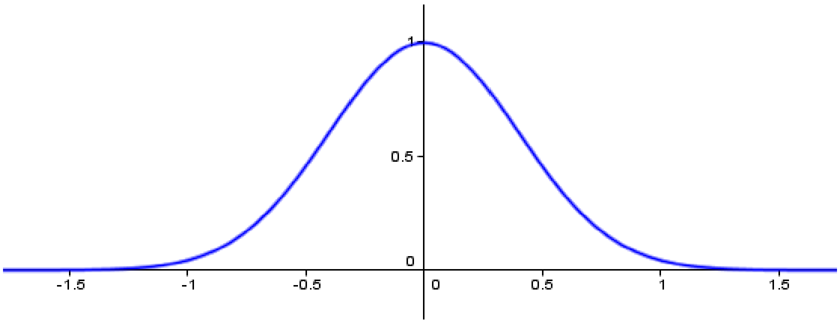
4.1 O modelo Normal

Como visto, a Curva Normal é um modelo matemático que descreve o comportamento de variáveis aleatórias. Sua representação algébrica é definida pela seguinte função de densidade de probabilidade: (DUARTE, 2010).

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-u)^2}{2\sigma^2}}$$

Graficamente, em termos de exemplo, a Curva Normal possui a seguinte representação:

Figura 2 – Representação gráfica da Curva Normal



Fonte: O autor, 2019.

A partir dessas informações, devemos compreender que a função densidade de probabilidade supracitada é uma função sempre não negativa e a área sob seu gráfico e o eixo das abscissas é sempre igual a 1. Assim, em termos matemáticos, tal função satisfaz as seguintes condições:

1) $f(x) \geq 0, para\ todo\ x\ \in$ ®

2) A área definida por $f(x)$ é igual a 1.

Além disso, a Curva Normal é uma distribuição continua, ou seja, sua variável pode assumir qualquer valor real dentro do intervalo (−∞,+∞). Em termos matemáticos, trata-se de uma função exponencial de uma variável real, que fica determinada a partir dois parâmetros, a μ (média) e σ (Desvio padrão). Em termos conceituais, Carzola e Santana (2006, p.18) definem a média como uma medida que "resume e representa um conjunto de dados em um único valor". E o seu cálculo "remete à divisão em partes iguais do todo entre seus componentes. Assim, seu algoritmo consiste em somar todos os valores da variável e dividir pelo número de dados". No que diz respeito ao Desvio Padrão, Martins (2013, p. 01) o conceitua como "uma medida de dispersão dos dados relativamente à média", ou seja, representa a distância de um dado em relação à média do conjunto ao qual esse dado pertence.

Deste modo, uma variável aleatória apresenta uma distribuição normal com os parâmetros citados se sua função densidade de probabilidade e dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-u)^2}{2\sigma^2}} \; para \; x \in R, -\infty < \mu < \infty \; e \; \sigma > 0$$

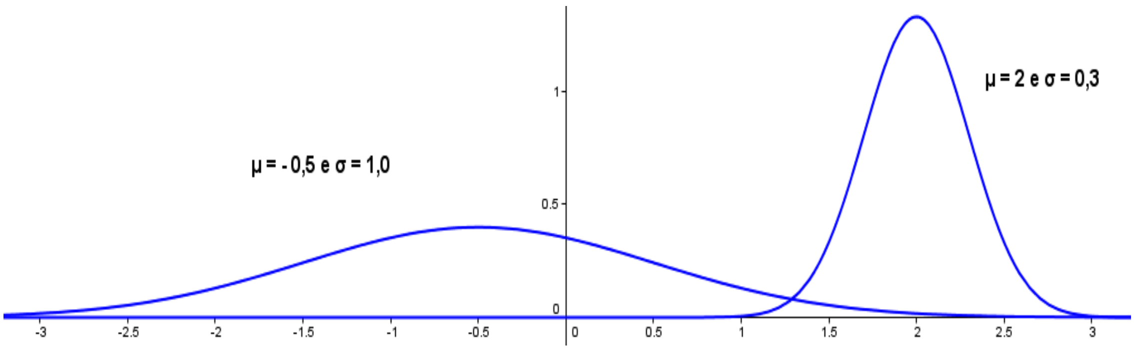
Além do mais, para indicar que uma determinada variável (X) possui uma distribuição normal a partir da média e do Desvio Padrão, utiliza-se a notação $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Nesta direção, o modelo da Curva Normal descreve o comportamento de variáveis aleatórias contínuas e é uma aproximação de outros tipos de distribuições, como a Binomial, Poisson e T de Student para certos valores de seus parâmetros (TAUBER, 2001). Além das informações abordadas até aqui, cabe destacarmos ainda que a Curva Normal possui as propriedades elencadas a seguir. (DUARTE, 2010).

1) $f(x)$ é simétrica em relação a μ (média), ou seja, ao centro.
2) Em uma Curva Normal, os valores de média, moda e mediana coincidem.
2) $f(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \pm\infty$.
3) o valor máximo de $f(x)$ é obtido quando $x = \mu$.
5) A área total sob curva e o eixo da abscissas é igual a 1 ou 100%.
6) A Curva Normal possibilita determinar probabilidades associadas aos valores da área de intervalos da distribuição.

7) A probabilidade de uma variável assumir um valor entre dois pontos é determinada pela área sob a curva que os contêm.
8) A Curva Normal e assintótica em relação ao eixo das abscissas.

Em acréscimo, devemos compreender que como o formato da Curva Normal depende dos parâmetros média (μ) e desvio padrão (σ) estabelecidos em cada situação, ao variá-los, o gráfico apresentará movimentos de translação e achatamento. Isso significa que o valor da media (μ) estabelece o centro da Curval Normal e o desvio padrão (σ) indica a dispersão do conjunto. Deste modo, quanto maior o *Desvio Padrão*, maior será a dispersão do conjunto e a amplitude dos dados, e consequentemente a Curva Normal será mais comprimida verticalmente e mais expandida horizontalmente. Em contrapartida, quanto menor o *Desvio Padrão*, menor será a dispersão do conjunto e a amplitude dos dados e, consequentemente, a Curva Normal será mais expandida verticalmente e mais comprimida horizontalmente. Essas informações podem ser observadas, a seguir, com dois exemplos distintos de Curvas Normais com seus respectivos parâmetros:

Figura 3 – Representação de diferentes Curvas Normais

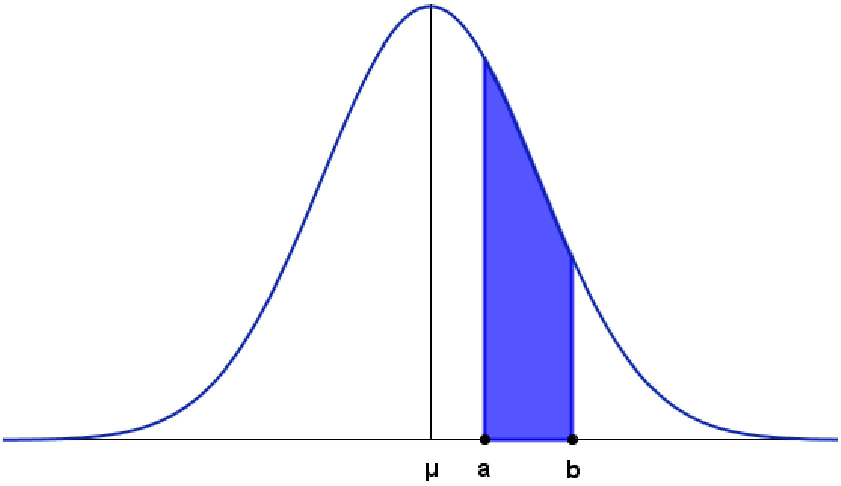


Fonte: O autor, 2019.

4.2 O Cálculo de probabilidades

Como abordado anteriormente, a Curva Normal possibilita determinar probabilidades associadas aos valores da área sob a curva e o eixo das abscissas. Assim, para quaisquer que sejam os valores da media (μ) e do desvio padrão (σ) de uma Curva Normal, a área total da Curva será sempre igual a 1 ou 100% de probabilidade. Neste raciocínio, a área sob a Curva Normal entre dois pontos quaisquer se configura a probabilidade da variável tomar um valor entre esses pontos, como podemos observar na imagem adiante, a área sob a curva determinada pelo intervalo entre dois pontos a e b em uma Curva Normal.

Figura 4 – Área sob a curva entre os pontos a e b.



Fonte: O autor, 2019.

Nesta direção, o cálculo da área de um dado intervalo (a, b) $\in R$ de uma Curva Normal, que corresponde à probabilidade da variável em questão assumir valor nesse intervalo, é determinado formalmente por:

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx$$

Deste modo, conhecidos os parâmetros media (μ) e o desvio padrão (σ), a função de densidade de probabilidade, f(x), e o intervalo de interesse sob a Curva Normal, utiliza-se recursos do cálculo diferencial integral para determinar a área e, consequentemente, a probabilidade da variável assumir valor no intervalo estabelecido.

Além das informações supracitadas, tendo em vista que a Curva Normal fica completamente especificada por sua média e seu desvio padrão, devemos compreender ainda que em todo modelo normal, aproximadamente 68% da área total da curva está localizada no intervalo $\mu \pm \sigma$. Por sua vez, o intervalo $\mu \pm 2\sigma$, isto é, a área sob a Curva compreendida entre a média e duas vezes o valor do desvio padrão tanto para mais como para menos, contempla aproximadamente 95%

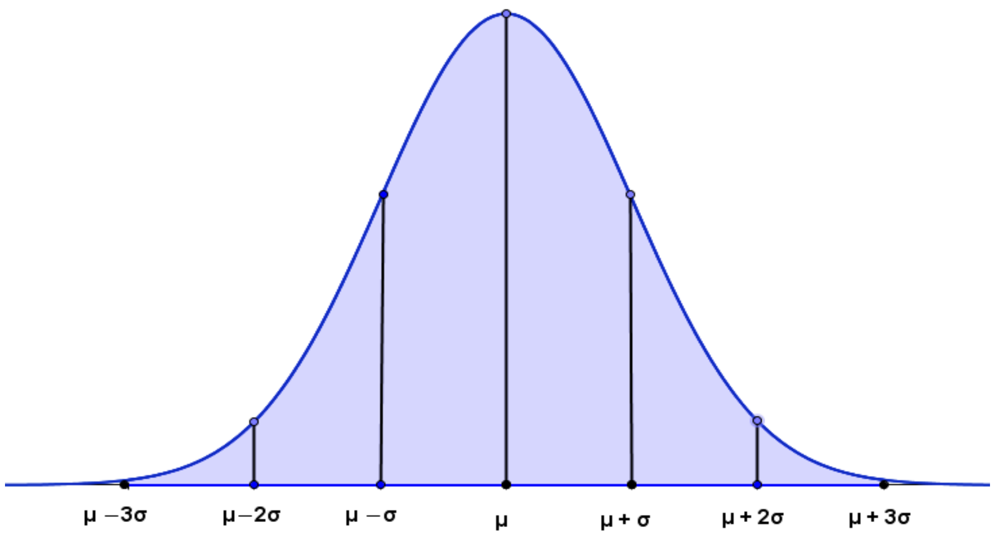
da área total. Por fim, o intervalo $\mu \pm 3\sigma$, ou seja, a área sob a curva compreendida entre a média e três vezes o valor do desvio padrão tanto para mais como para menos, abrange aproximadamente 99,7% da área total compreendida sob a curva e o eixo *(x)*. Esses valores podem ser determinados e observados pelo cálculo formal da integral da função de densidade através dos referidos limites estabelecidos e da representação gráfica, abordados a seguir.

$$P(\mu - \sigma < x < \mu + \sigma) = \int_{\mu - \sigma}^{\mu + \sigma} f(x)dx = 0{,}6826 = 68{,}26\%$$

$$P(\mu - 2\sigma < x < \mu + 2\sigma) = \int_{\mu - 2\sigma}^{\mu + 2\sigma} f(x)dx = 0{,}9545 = 95{,}45\%$$

$$P(\mu - 3\sigma < x < \mu + 3\sigma) = \int_{\mu - 3\sigma}^{\mu + 3\sigma} f(x)dx = 0{,}9973 = 99{,}73\%$$

Figura 5 – A Curva Normal e pontos notórios



Fonte: O autor, 2019.

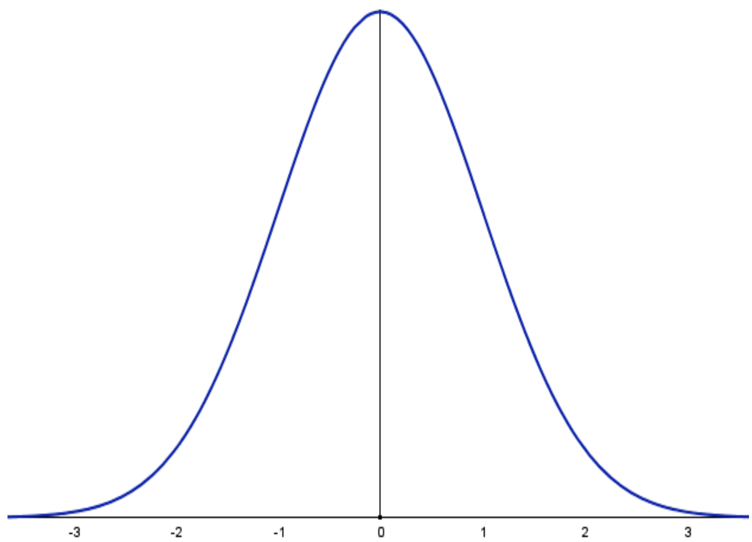
Em continuidade a temática abordada, de modo alternativo, mais simples e prático, o cálculo da área entre dois pontos quaisquer de uma Curva Normal e consequentemente a probabilidade da variável tomar valor no intervalo estabelecido por esses pontos, pode ser obtido através de dois métodos. O primeiro é a Curva Normal Padronizada *(z)*, que consiste em efetuar a mudança da variável, transformando a variável aleatória *(x),* normalmente distribuída, em uma variável aleatória *(z),* também normalmente distribuída*,* através da seguinte expressão:

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Desta forma, padronizar uma variável aleatória (x) de média (μ) e desvio padrão (σ) consiste em determinar a partir desta, uma nova variável aleatória (z), cujos valores são obtidos subtraindo-se de cada valor de (x) da media populacional e posteriormente, dividi-se o resultado pelo desvio padrão.

Assim, para o cálculo de probabilidades, devemos inicialmente transformar a variável aleatória *(x),* através da expressão indicada*,* em uma distribuição equivalente e padronizada de variável (z). Com essa transformação, o valor encontrado (z) indica a intensidade de afastamento do ponto de variável *(x)* até a média *(μ)*, em relação ao desvio padrão *(σ)*, isto é, o comprimento relativo em termos de desvios padrões, entre a média (*μ)* até o ponto *(x)*. A distribuição normal padronizada (z), representada na imagem a seguir, possui sempre parâmetros *N (0,1),* isto é, média $\mu = 0$ *e desvio padrão* $\sigma = 1$*.*

Figura 6 – Curva Normal padronizada



Fonte: O autor, 2019.

Após realizarmos essa transformação e determinados o valor do ponto da variável z, a segunda etapa do cálculo consiste em consultar a tabela da Distribuição Normal padronizada (z), apresentada a seguir, que contempla os valores da área ou probabilidade entre a média (u = 0) e qualquer ponto (z) e assim, encontrar o valor da probabilidade desse ponto determinado. Deste modo, esse método possibilita, através de qualquer Distribuição Normal, com seus respectivos valores da média e do desvio padrão, a transformação da variável aleatória *(x)* em questão em uma variável padronizada *(z)* e com o respectivo valor de *(z),* encontrar a área e a probabilidade desejada entre qualquer intervalo da Distribuição Normal.

Figura 7 – Tabela Z com a Área ou Probabilidade para a Curva Normal padronizada

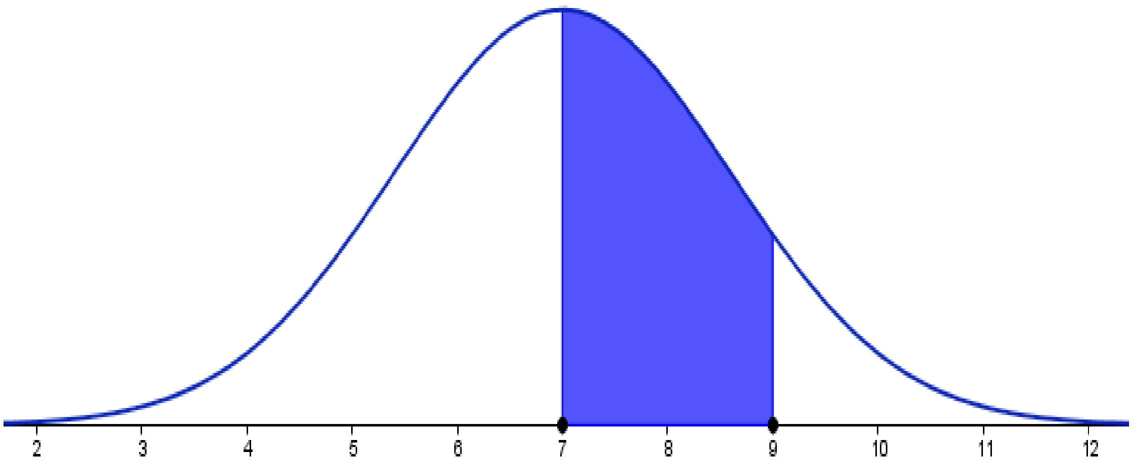
z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2518	0,2549
0,7	0,2580	0,2612	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4986	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990

Fonte: Anderson *et al,* 2002.

Diante disso, para uma melhor compreensão de todo esse processo de cálculo de probabilidades, através da Distribuição Normal padronizada, exemplificaremos a aplicação do referido método na seguinte situação problema: Em um Banco de crédito financeiro, o tempo de duração necessário para o atendimento aos clientes é normalmente distribuído, com média igual a 7 minutos e desvio padrão de 1,6 minutos. Qual a probabilidade de que um atendimento dure de 7 a 9 minutos?

Interpretando os dados do problema, podemos compreender de que a variável em questão, normalmente distribuída, possui média μ = 7 e desvio padrão $\sigma = 1,6$ e pergunta-se a probabilidade de que um atendimento dure de 7 a 9 minutos, ou seja, a área compreendida entre a média e o ponto x = 9, representada na imagem abaixo:

Figura 8 – Área sob a curva entre os pontos 7 e 9



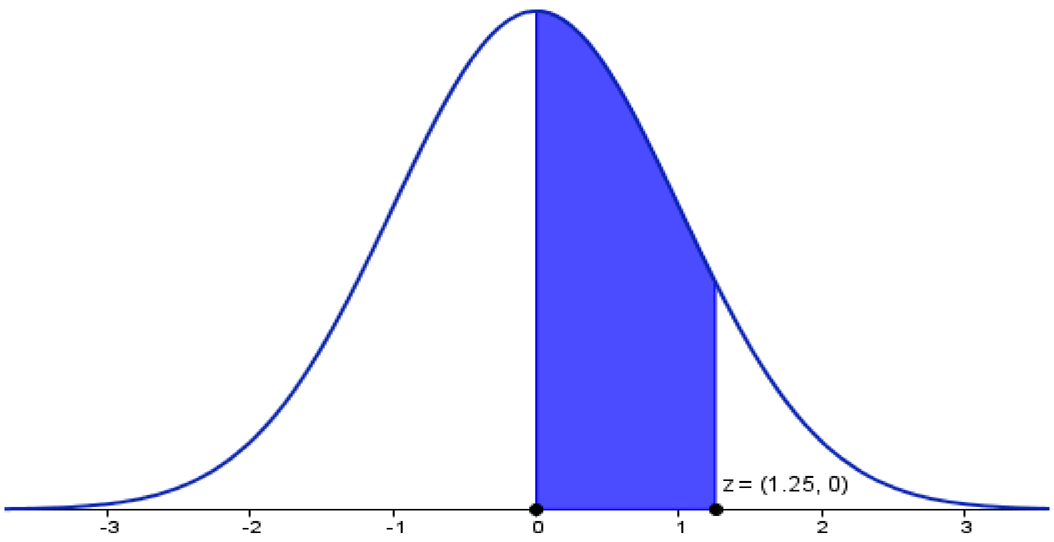
Fonte: O autor, 2019.

Inicialmente, aplicando o método da transformação da variável, obtemos o valor z para o ponto x = 9, e como sabemos, o valor da média na distribuição normal padronizada é igual a 0. Deste modo, o valor de z é igual a:

$$Z = \frac{9-7}{1,6} = 1,25$$

Desta forma, após a padronização da variável, a área que corresponde a probabilidade desejada está compreendida entre a média $\mu = 0$ e o ponto z = 1,25, como representado na imagem a seguir:

Figura 9 – Área sob a Curva Normal padronizada entre os pontos 0 e 1,25.



Fonte: O autor, 2019.

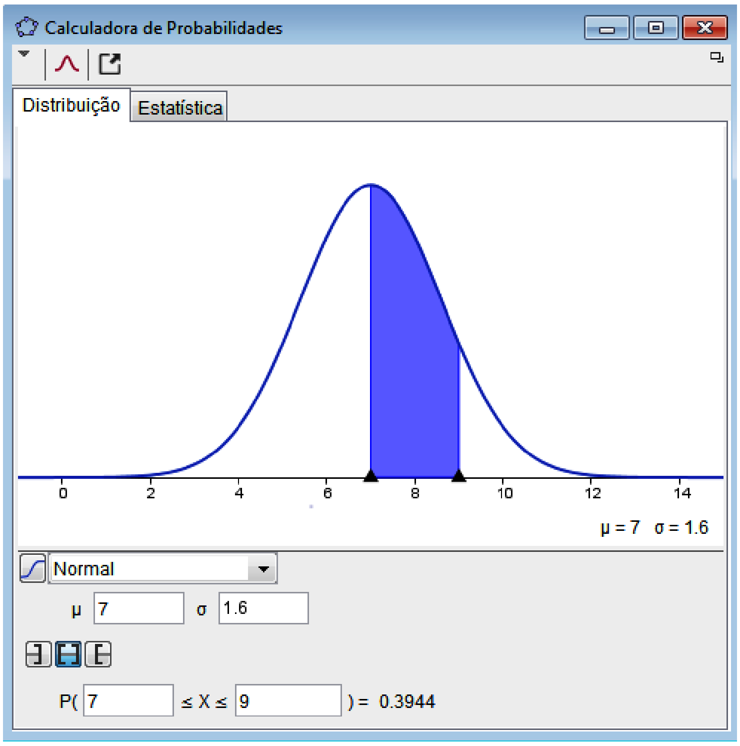
Como escala padronizada (z) permite associar os valores de qualquer variável aleatória (x), com os valores de sua escala, a partir dos parâmetros média (μ) e desvio padrão (σ), devemos compreender que as duas áreas apresentadas anteriormente da referida situação problema são equivalentes, ou seja, possuem a mesma medida. Em continuidade, para encontrarmos o valor da área determinada pela Distribuição Normal padronizada (z), devemos consultar na tabela dessa Distribuição, apresentada anteriormente, que contempla os valores da área ou probabilidade entre a média (u = 0) e qualquer ponto (z).

Nesta direção, ao analisar a tabela e buscarmos a área deseja, devemos observar a primeira coluna, que contempla a parte inteira e a primeira decimal do ponto z, e a primeira linha que contempla segunda decimal desse ponto. Assim, a área ou a probabilidade desejada estará na interseção entre a coluna e a linha relativas ao ponto z analisado.

Retornado a nossa situação problema, desejamos encontrar a área correspondente ao ponto z = 1,25. Como este ponto, (1,25 = 1,2 + 0,05), possui a parte inteira e primeira decimal igual a 1,2 e a segunda decimal igual a 0,05, ao analisarmos a tabela, podemos compreender que a área correspondente a esse ponto está na interseção entre a décima terceira linha (1,2) e a sexta coluna (0,05). Assim, a área procurada é igual a 0,3944, ou seja, a probabilidade de que o atendimento dure de 7 a 9 minutos é de 39,44%.

O segundo método para o cálculo de probabilidades associada a intervalos sob a Curva Normal, se dá através da utilização do Software Geogebra. Esse programa computacional possui, dentre inúmeras ferramentas, uma denominada “Calculadora de Probabilidades” que contempla, em sua layout, opções para o preenchimento dos dois parâmetros da Curva Normal, a Média e o Desvio Padrão, que consequentemente, estabelece a Curva e o intervalo de interesse para o cálculo da área. Assim, de forma mais prática e dinâmica é possível determinar a área que corresponde à probabilidade associada a esse intervalo. A Figura, a seguir, demonstra a utilização desse método para a resolução da mesma situação problema abordada anteriormente, na qual foi indagada a probabilidade de que um atendimento bancário dure de 7 a 9 minutos, sabendo que nesse banco, o atendimento aos clientes é normalmente distribuído, com a média igual a 7 minutos e desvio padrão de 1,6 minutos.

Figura 10 – Cálculo da área de um intervalo sob a Curva Normal com a utilização do Geogebra



Fonte: O autor, 2019.

Como podemos observar, com o preenchendo no Geogebra dos campos média (μ) o desvio padrão (σ) e o intervalo de interesse $(7 \leq x \leq 9)$, o programa determina, assim como no método da Curva Normal Padronizada, a área igual a

0,3944, ou seja, a probabilidade de que o atendimento dure de 7 a 9 minutos é de 39,44%.

Diante desse contexto, acreditamos que o conceito da Curva Normal, contemplando conjuntamente os conceitos estatísticos das medidas de tendência e dispersão e o cálculo de probabilidades, pode ser amplamente abordado no Ensino Médio, através de diferentes recursos didáticos, como a realização de pesquisas estatísticas com dados reais de varáveis aleatórias, para que os estudantes compreendam os fundamentos da Estatística Inferencial e o modelo da Curva Normal, como também a utilização da tabela de Curva Normal padronizada e o software Geogebra para o cálculo de probabilidades. Logo, acreditamos que a abordagem desses conceitos possibilita ir além do ensino mecânico, voltado unicamente para aplicação das técnicas operatórias, o que pode tornar as aulas mais atrativas e contextualizadas, destacando a importância da Curva Normal para a inferência Estatística, bem como os inúmeros fenômenos e situações do nosso cotidiano podem ser modelados e abordados por esse tipo de distribuição. Nesta direção, apresentaremos na seção, a seguir, algumas considerações a respeito do processo de ensino e aprendizagem da Curva Normal, com base em alguns estudos científicos presentes na literatura.

4.3 Alguns estudos anteriores sobre o ensino e aprendizagem da Curva Normal

No que diz respeito ao processo de ensino e aprendizagem da Curva Normal, abordaremos, a seguir, alguns estudos anteriores que versam sobre a compreensão de estudantes e professores sobre este modelo e a importância e possibilidades de seu ensino e abordagem em sala de aula.

Tauber (2001) realizou um estudo sobre a Curva Normal com 57 graduandos de diferentes áreas, como Matemática, Ciências Econômicas e Empresariais e Ciências Sociais recém ingressos na Universidade de Granada, na Espanha, que cursaram a disciplina “Análises de dados e eu ensino”. Nesse estudo, inicialmente, a autora realizou um diagnóstico sobre o tema com os estudantes e percebeu que os mesmos, apesar serem recém concluintes da escola secundária, equivalente ao Ensino Médio, apresentaram inconsistências no conhecimento sobre a Estatística Inferencial, Amostragem e a Curva Normal. Tauber (2001) aponta que essa dificuldade decorreu porque o ensino de Estatística na Educação Básica estava restrito unicamente a área Descrita, não sendo comum os professores explorarem a Estatística Inferencial e importantes conceitos como a Curva Normal, a Amostragem e Intervalos de confiança.

Na segunda etapa da pesquisa, a autora desenvolveu uma sequência didática com 10 sessões. Nas 5 primeiras, abordou, aos estudantes, os fundamentos teóricos da Curva Normal. As 5 últimas foram voltadas para a utilização do software Statgraphics, que consiste em um pacote de dados estatísticos reais, que executa e explica funções estatísticas, e a realização de três atividades que foram resolvidas pelos estudantes com a utilização do software e que contemplaram perguntas sobre leitura direta de dados estatísticos, definições, reconhecimento das propriedades e a representação gráfica da Curva Normal e o cálculo de probabilidades.

A partir da respostas fornecidas pelos estudantes às atividades e ao questionário avaliativo, aplicado após a sequência didática, a autora conclui que eles apresentaram um avanço e foram capazes de trabalhar com os dados reais, reconhecer e compreender o conceito da Curva Normal e a sua representação e realizar o cálculo de probabilidades associado à Curva. Além disso, verificaram que a utilização do computador como recurso didático serviu de elemento motivador para a compreensão do significado da Curva Normal, uma vez que foi possível enxergar de forma mais dinâmica e exploratória os elementos da Curva Normal, como as medidas de centralidade e dispersão, e o gerenciamento das distribuições dos dados para a resolução dos problemas relacionados com a Curva.

Diante disso, Tauber (2001) conclui que o ensino da Curva Normal deve ser iniciado já na Educação Básica, cuja relevância na Estatística se deve ao fato de que muitos fenômenos físicos, biológicos e sociológicos do nosso cotidiano podem ser modelados através da Curva Normal, haja vista que grande parte das variáveis aleatórias encontra-se distribuídas em uma distribuição normal e que muitos métodos estatísticos exigem a condição de normalidade para sua correta aplicação, o que permite o seu uso em diferentes áreas do conhecimento.

Por fim, a autora pontua que, para o ensino da Curva Normal, é importante a realização de sequências didáticas que envolvam a utilização lúdica de recursos computacionais que possibilitem o envolvimento dos estudantes com a coleta, organização e análise exploratória e significativa de dados reais, tendo em vista que há uma complexidade do significado e entendimento do conceito da Curva Normal, pois ela não pode ser reduzida apenas à sua definição, mas inclui um sistema interligado de conceitos estatísticos e probabilísticos que os estudantes devem reconhecer e ser capazes de se relacioná-los para resolução de problemas envolvendo esse tipo de distribuição.

Já Valdez Monroy e Salinas Herrera (2019) realizaram um estudo com 53 estudantes mexicanos, divididos em dois grupos, que cursaram o Bachillerato, equivalente aos dois últimos anos do Ensino Médio no Brasil e destinado para quem pretende ingressar na Universidade. Nesse estudo, os autores buscaram investigar o conhecimento desses estudantes a partir da resolução com lápis e papel de um questionário contendo três problemas sobre a Curva Normal que exigiam o cálculo de probabilidades a partir do método da Curva Normal Padronizada. Essa pesquisa foi realizada após ambos os grupos terem estudado sobre a Curva Normal no âmbito da disciplina Estatística e Probabilidade, porém com abordagens de ensino distintas. O professor que ensinou o primeiro grupo utilizou como recurso didático apenas o software Fathom. Já o segundo grupo, teve o ensino pautado pelo professor apenas com a utilização de atividades com lápis e papel.

Ao analisar as respostas dos estudantes, os autores observaram que a maioria dos estudantes soube aplicar corretamente, a nível processual, a fórmula e a tabela da Curva Normal Padronizada para o cálculo da área e consequente a probabilidade de intervalos sob a Curva, mas em ternos conceituais, os estudantes apresentaram dificuldades em reconhecer o significado e algumas etapas dos procedimentos e a importância da padronização para análises estatísticas em uma distribuição de dados. Além disso, os autores verificaram que, de modo geral, os estudantes do segundo grupo tiveram um melhor desempenho do que os do primeiro. Esse fato, segundo os autores, decorreu porque o professor que ensinou ao primeiro grupo abordou a Curva Normal unicamente a partir do software e não teve a oportunidade de trabalhar a resolução de problemas por meio de atividades impressas para que os estudantes resolvessem problemas aplicando o método da padronização da Curva Normal.

Diante disso, os autores concluem que é pertinente a abordagem do conceito da Curva Normal na Educação Básica e que esse ensino tenha um equilíbrio e integração entra a utilização de recursos computacionais e de atividades por escrito que propiciem aos estudantes a compreensão da representação gráfica e dos significados que podem ser observados em situações com a Curva Normal e a capacidade de resolver problemas envolvendo o cálculo de probabilidades associado a intervalos sob a Curva.

Gonçalves (2014), por sua vez, realizou um estudo bibliográfico, no qual destaca a importância do ensino da Curva Normal, pois ela é essencial para a inferência estatística, mas que ainda é pouco abordada nas aulas de Matemática no Ensino Médio no Brasil. Diante disso, em seu estudo, é apresentada uma proposta de ensino da Curva Normal a ser abordada nessa etapa de ensino, através da resolução de uma situação problema que indagava a massa média de uma população de 40 kg de laranjas e a estimação da quantidade de laranjas dessa população. O processo para a resolução desse problema inclui a seleção aleatória de uma amostra de laranjas, a construção da tabela de frequência com a massa das laranjas da amostra, a construção do histograma dessas massas e, posteriormente, a verificação de padrões, o cálculo de medidas estatísticas, a aplicação do modelo da Curva Normal e a construção de intervalos de confiança. Após a seleção da mostra de laranjas, todas as etapas seguintes contaram com a utilização do programa Geogebra para a análise e descrição dos dados.

Por fim, o autor destaca que através de propostas de ensino como essa, o professor tem a oportunidade de abordar, em sala de aula, o conceito da Curva Normal e outros conceitos pertencentes à Estatística Inferencial, tendo em vista que no Brasil, ainda é comum o ensino de Estatística ser restrito apenas a área descritiva. Dessa forma, a proposta de estudo apresentada, com a utilização prática e lúdica do Geogebra, busca propiciar aos alunos do Ensino Médio, o conhecimento relativo ao campo da Inferência Estatística, abarcando a Curva Normal e sua aplicabilidade em situações do nosso cotidiano, abordando os conceitos estatísticos e probabilísticos presentes nesse tipo de distribuição.

Em continuidade, Lima (2009) realizou um estudo, com 11 alunos da cidade de São Paulo e egressos do terceiro ano do Ensino Médio, no qual desenvolveu uma sequência didática para o ensino da Curva Normal, baseada na utilização do software Excel e na resolução de atividades interativas envolvendo análises exploratórias de dados reais. A realização dessa sequência didática foi pautada em cinco etapas: na primeira, os estudantes fizeram a coleta da medida de 40 palmos (cm). A partir desses dados, com a utilização do Excel, os alunos a realizaram uma atividade que envolveu a construção da tabela de distribuição das frequências e do histograma desses dados, o cálculo da média e do desvio padrão das medidas e a interpretação dos intervalos de normalidade e da simetria do gráfico.

Na segunda etapa, os alunos fizeram simulações de Curvas Normais, utilizando o Excel, a partir das médias e dos desvios padrões das medidas dos palmos de um banco de dados elaborado pelo pesquisador. Nessa etapa, os alunos compreenderam o papel da média e do desvio padrão como parâmetros para a formação e representação gráfica da Curva Normal. Na terceira etapa, os alunos realizaram uma atividade com papel quadriculado, na qual deveriam esboçar o gráfico da Curva Normal a partir das medidas da média e do desvio padrão fornecidos pelo pesquisador. Logo, essa atividade teve o objetivo de verificar se os alunos assimilaram as ideias apresentadas a partir da visualização gráfica da Curva Normal no Excel na etapa anterior e se eram capazes de interpretar e desenhar a Curva Normal por meio de tais medidas.

A quarta etapa envolveu a resolução de exercícios, por partes dos alunos, a partir de uma situação problema que contemplou o gráfico da Curva Normal com os dados do horário de pico no trânsito da cidade de São Paulo. A partir das informações contidas no gráfico, os alunos responderam questões que exigiam a observação de intervalos de normalidade e leitura de forma intuitiva da área e, consequentemente, da probabilidade associada a intervalos sob a Curva Normal. Por fim, a última etapa foi destinada para a aplicação de um questionário avaliativo, com o objetivo de verificar as possíveis contribuições da sequência didática para a apropriação, por parte dos alunos, dos conceitos da Curva Normal e dos conceitos estatísticos e probabilísticos que estão presentes nesse modelo.

Diante das respostas apresentadas nas atividades e no questionário avaliativo, o autor concluiu que, mediante a sequência didática desenvolvida, os alunos foram capazes de compreender e reconhecer a representação gráfica, as propriedades e as características da Curva Normal. O autor ainda conclui que foi possível relacionar conteúdos de Estatística com os de Probabilidade e que os alunos compreenderam a relação entre essas áreas de conhecimento a partir da Curva Normal. Por fim, Lima (2009) aponta que o Excel se configurou com um recurso didático que facilitou o estudo sobre a Curva Normal, promovendo uma melhor interação dos alunos com esse objeto matemático.

Bansilal (2014) desenvolveu um estudo com 290 professores de Matemática do Ensino Médio da África do Sul que participaram de um programa de aperfeiçoamento para o ensino de Matemática, no qual cursaram módulos voltados para o estudo de tópicos conceituais de Estatística e de Probabilidade que contemplaram as medidas centrais e de dispersão, agrupamento de dados, dados bivariados, conceitos de probabilidade e distribuições de probabilidades. Nesse estudo, a autora aborda o desempenho desses professores a um teste, feito com lápis e papel, aplicado no decorrer programa que continha duas situações problemas sobre a Curva Normal e que exigiam a utilização do método da Curva Normal Padrozinada e da tabela z para o cálculo de probabilidades associadas às áreas de intervalos sob a Curva.

Ao analisar as respostas apresentadas pelos professores, a autora constatou que apenas 27% deles conseguiram resolver o primeiro problema e apenas 14% tiveram sucesso na resolução do segundo. Diante disso, ela aponta que a maioria dos professores, apesar de terem formação para o ensino de matemática, não possuíam domínio conceitual sobre a Curva Normal e, em particular, sobre a Curva Normal Padronizada, enquanto método para o cálculo de probabilidades. Além disso, Bansilal (2014) verificou que a maior dificuldade apresentada pelos professores foi na aplicação das propriedades da Curva Normal e no reconhecimento da probabilidade associada à área intervalos sob a Curva. Por fim, a autora conclui que é necessário que se desenvolvam cursos de aperfeiçoamento profissional para o professor de Matemática que abordem o conceito da Curva Normal, incluindo a representação gráfica, as propriedades básicas, a relação entre os conceitos estatísticos e probabilísticos e o cálculo de probabilidades para que, quando lecionarem a Estatística e a Probabilidade, tenham o domínio dessa temática e consigam resolver problemas semelhantes ao abordado nesse estudo.

González, Ojeda e Palacios (2018) realizaram uma pesquisa com dois professores de matemática mexicanos, sendo um atuante no Ensino Médio e o outro no Nível Superior. Ambos os professores tinham experiência com o ensino de Estatística e Probabilidade e, mais especificamente, com o ensino da Curva Normal em seus respectivos níveis de atuação. Nesse estudo, os autores realizaram uma entrevista semiestruturada e individual com cada professor. Na primeira pergunta os professores deveriam responder com lápis e papel e em seguida explicar como responderam uma situação problema sobre a Curva Normal que envolvia a interpretação dos significados das medidas de centralidade e dispersão e o cálculo de probabilidades utilizando o método da Curva Normal Padronizada. As demais perguntas indagaram, aos professores, a forma como eles abordavam o tópico da Curva Normal, em sala de aula, e qual livro adotavam como recurso didático.

Ao analisar as respostas apresentadas na entrevista, os autores constataram que os professores tiveram dificuldades de interpretar a situação problema e, consequentemente, não aplicaram corretamente o método da Curva Normal Padronizada para solucionar a questão. Além disso, ficou evidenciado que as mesmas dificuldades apresentadas pelos professores foram observadas em seus respectivos alunos, na resolução de um problema semelhante, (GONZÁLEZ E OJEDA, 2017). Diante disso, os autores pontuam que esses alunos repetiam e o colocavam em prática aquilo que é ensinado. Ademais, foi constatado que os dois professores, em sala de aula, replicavam o discurso apresentado pelos livros que eles adotavam como referência e que o ensino da Curva Normal tinham como foco, apenas a operacionalização e tratamento das fórmulas e cálculos. Deste modo, os autores concluem que o ensino da Curva Normal, desde a Educação Básica, também deve incluir a compreensão dos significados desse conceito e dos conceitos estatísticos e probabilísticos abarcados nesse modelo em diversos contextos, para que seja possível a correta interpretação dos fenômenos e problemas que fazem uso da Curva Normal.

Macedo (2016) realizou um estudo com um grupo de 15 professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio da rede pública do estado de São Paulo, com o objetivo de investigar a ampliação da base de conhecimento desses professores sobre o ensino de noções estatísticas relativas à Curva Normal, por meio de uma formação continuada, baseada no compartilhamento de reflexões e vivências desses professores sobre o ensino desta temática. A pesquisa foi desenvolvida em duas etapas. Na primeira, o autor realizou um estudo diagnóstico com os professores, com o objetivo de identificar o conhecimento estatístico sobre o conceito da Curva Normal e das medidas de centralidade e dispersão, como foco na Média e no Desvio Padrão, como também, as noções pedagógicas dos professores inerentes ao processo ensino desse tema. Os resultados dessa primeira etapa do estudo indicaram que a maioria dos professores não tinha conhecimento sobre o currículo do proposto para o ensino da Curva Normal e que não priorizavam o ensino deste tema em suas aulas. Além disso, os professores apresentaram lacunas no conhecimento sobre os conceitos estatísticos da Média e Desvio Padrão presentes na Curva Normal.

A partir desse diagnóstico, o autor desenvolveu o processo formativo, como segunda etapa da pesquisa, pautado em uma sequência que atividades que abordaram situações- problemas que envolviam o gráfico da Curva Normal, os conceitos e significados das medidas de centralidade e de dispersão e a relação estabelecida entre elas nesse tipo de distribuição. Além disso, esse processo incluiu discussões e reflexões de possibilidades para o ensino e aprendizagem desse tema, em sala de aula, a partir das propostas veiculadas pelo currículo de Matemática do estado de São Paulo. Diante da análise do processo formativo realizado, o autor conclui que os professores ressignificaram os conceitos estatísticos destacados anteriormente e compreenderam a importância do ensino da Curva Normal e, assim, ampliaram a base de conhecimentos relativa ao ensino da Estatística. Macedo (2016) ainda destaca a necessidade da realização de processos formativos sobre este tema para os professores de Matemática que contemplem diferentes abordagens, estratégias, contextos e materiais direcionados ao ensino e aprendizagem da Curva Normal na escolarização básica.

Diante desse contexto, dada a importância do ensino da Curva Normal, cujo conceito e sua aplicação permeiam diversas situações e fenômenos do cotidiano, além de propiciar a inter-relação entre a Estatística e a Probabilidade, áreas de conhecimento que comumente são ensinadas no Brasil de forma independente, o presente estudo teve o propósito de investigar os conhecimentos didático-matemáticos de professores de Matemática do Ensino Médio para abordagem da inter-relação entre a Estatística e a Probabilidade por meio da Curva Normal. Para isso, nos apoiamos na perspectiva teórica do modelo de conhecimentos e competências didático-matemáticos do professor de Matemática e, nessa direção, passaremos a apresentar no capítulo, a seguir, a teoria do Enfoque Ontosemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática - EOS a qual fundamenta e apresenta esse modelo.

5 MARCO TEÓRICO

Este capítulo dedica-se ao desenvolvimento de um referencial teórico, tendo como base alguns estudos científicos que possibilitem fundamentar a presente pesquisa. A sua composição dividi-se em duas partes: a primeira apresenta o Enfoque Ontosemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática-EOS elaborado por Godino, Batanero e Font (2008); Godino (2011, 2012). A segunda contempla o modelo de Conhecimentos e Competências Didático-Matemáticos do professor de Matemática – CCDM, elaborado a partir do referido Enfoque.

5.1 Enfoque Ontosemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática-EOS

A Educação Matemática, enquanto campo de ensino e estudo, tem desenvolvido e proposto, ao longo das últimas décadas, várias investigações e teorias visando a compreensão de diversos fenômenos e aspectos inerentes ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Inseridos nesse contexto, desde o início dos anos 90, o grupo de pesquisa “Teoría y Metodología de Investigación Educación Matemática” da Universidade de Granada-Espanha, liderado pelo educador Juan Godino, tem desenvolvido um marco teórico denominado Enfoque Ontosemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática-EOS, como resulto da articulação de diferentes bases teóricas que se ocupam do estudo e análise sobre o conhecimento matemático e seu processo de ensino e aprendizagem.

Por meio de estudos realizados pelo referido grupo, Godino e seus colaboradores enxergaram a necessidade de comparar e articular algumas bases teóricas presentes na Educação Matemática, como a Teoria das Situações Didáticas, Teoria Antropológica do Didático, Teoria dos Campos Conceituais e Teoria dos Registros de Representações Semióticas, almejando formular um enfoque teórico integrador, direcionado para a cognição e a instrução Matemática, que contemplasse essas noções teóricas e respondesse a algumas indagações e lacunas existentes nessas bases.

Deste modo, de acordo com Godino (2012), o Enfoque Ontosemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática-EOS se constitui um modelo teórico que foi elaborado com base nos pressupostos da Didática da Matemática, com vistas a qualificar o processo de ensino e aprendizagem desta disciplina, a partir de concepções pragmáticas e realistas sobre o significado dos objetos matemáticos, levando em consideração o contexto em que estes objetos estão inseridos e as concepções antropológicas e semióticas do conhecimento matemático, tanto do ponto de vista institucional, socialmente construído, quanto do pessoal, concebido pelo indivíduo.

Conforme Godino, Batanero e Font (2008), o EOS tem como ponto de partida, a formulação de uma ontologia para os objetos matemáticos que contemple um triplo aspecto da Matemática: como atividade socialmente compartilhada de resolução de problemas, como linguagem simbólica, e como sistema conceitual logicamente organizado. Nesta direção, o desenvolvimento deste Enfoque se iniciou com estudos direcionados para responder questões epistemológicas que explicassem aspectos relativos à natureza do objeto matemático:

> Problema Epistemológico: O que é um objeto matemático? Ou, de outra forma, qual é o significado de um objeto matemático (número, derivada, média, etc.) em um contexto ou marco institucional determinado? Este problema epistemológico, isto é, referente ao objeto matemático como entidade cultural ou institucional, complementa-se dialeticamente com o problema cognitivo associado, ou seja, o objeto como entidade pessoal ou psicológica. Problema Cognitivo: o que significa o objeto O para um sujeito em um determinado momento e numa determinada circunstância dada? (GODINO, 2012, p.52). (tradução nossa).

A partir desses questionamentos, os estudos deste Enfoque foram direcionados para o desenvolvimento de modelos ontológicos e semióticos mais detalhados. Deste modo, foi construída uma ontologia matemática, isto é, a descrição, em termos operacionais, dos tipos de objetos e processos matemáticos, como também do significado do objeto matemático, tanto no âmbito institucional, como no pessoal. Além disso, foram aprofundados estudos sobre a relação entre o pensamento matemático, a linguagem matemática, constituída através de diversos tipos de representações e signos, e as situações problemas.

> [...] estudar globalmente e com mais profundidade as relações dialéticas entre o pensamento (as ideias matemáticas), a linguagem matemática (sistemas de signos) e as situações-problemas, para as quais se inventam tais recursos. Em consequência, neste período tratamos de progredir no desenvolvimento de uma ontologia e uma

> semiótica específica que estudem os processos de interpretação dos sistemas de signos matemáticos postos em jogo na interação didática (GODINO; BATANERO; FONT, 2008, p. 10). (tradução nossa).

Baseado nesses construtos, O EOS formulou e apresenta noções teóricas voltadas para os processos de instrução matemática envolvendo a dimensão epistemológica e cognitiva do conhecimento matemático. De acordo com Godino (2012) o conjunto de noções teóricas que compõem o EOS está articulado em cinco níveis, apresentados na figura a seguir.

Figura 11 – Organização em níveis das noções teóricas que compõem o EOS

Fonte: Font, Planas e Godino, 2010.

O referido modelo, o qual deve ser lido de forma ascendente, através dos cinco níveis, permite a análise do processo de ensino e aprendizagem da Matemática, direcionados para descrever, explicar e avaliar as interações e práticas educativas presentes nesse processo nas salas de aula. Ainda sobre esses níveis, os autores ressaltam que os mesmos possuem perspectivas diferentes dentro do processo de ensino e aprendizagem. Nesse sentido, os quatro primeiros – Sistemas de Práticas, Configurações de Objetos e Processos, Trajetórias Didáticas e Dimensão Normativas são ferramentas direcionas para uma didática descritivo-explicativa, contemplando aspectos da organização e prática do ensino. O quinto nível, Idoneidade Didática, está baseado nos quatros primeiros níveis e se constitui de uma ferramenta de análise e síntese que possibilita orientar e avaliar o trabalho em sala de aula, verificando se as atividades desenvolvidas são idôneas (adequadas) e identificando as possíveis melhorias, a fim de potencializar e qualificar o ensino de Matemática. A Seguir, passaremos a apresentar, em síntese, as características de cada nível, a partir da ótica de Godino, Batanero e Font (2008), Godino (2002, 2011 e 2012) e Andrade (2014).

- *Sistema de Práticas:* Este nível está direcionado para análise das práticas matemáticas realizadas em um processo de estudo de uma noção, conceito ou conteúdo matemático, partindo da premissa que uma prática mobiliza diferentes elementos: um agente que realiza a prática, que pode ser uma pessoa ou uma instituição (conjuntos de pessoas), um contexto em que essa prática está inserida e as finalidades, intenções, objetos e processos matemáticos.

Nesse sentido, a partir desse marco teórico, a prática matemática é definida como toda ação, manifestação ou expressão (verbal, gestual, gráfica, etc.) realizada por um agente, que pode ser um indivíduo (pessoal) ou uma instituição (conjunto de pessoas afins e inseridas em um mesmo grupo de situações problemas) com o intuito de resolver problemas matemáticos, socializar a solução obtida, e validar ou generalizar para outros contextos e problemas.

Ainda de acordo com os autores, é por meio das práticas matemáticas que emergem os objetos matemáticos, que por sua vez, são concebidos como qualquer entidade ou coisa sobre a qual mencionamos, ou falamos, seja real, imaginária ou de qualquer outro tipo, que intervêm de alguma forma na atividade matemática. Assim, Godino (2002, p. 06) adota a seguinte tipologia do objeto matemático, também chamados de objetos primários:

> (1) **Linguagem** (termos, expressões, anotações, gráficos). Em um texto na forma escrita ou gráfica, mas em um trabalho matemático podem ser usados outros registros (oral, gestual). através da linguagem.
> (2) **Situações-problemas (**problemas mais ou menos aberto, aplicações extra-matemáticas ou intramatemáticas, exercícios...); são as tarefas que induzem a atividade matemática.
> (3) **Procedimentos** (operações, algoritmos, técnicas computacionais, procedimentos).
> (4) **Conceitos-definição** (número, ponto, reta, média, função ...).
> (5) **Propriedades** ou atributos dos objetos acima mencionados, que muitas vezes ocorrem como declarações ou proposições.
> (6) **Argumentos** utilizados para validar e explicar as proposições (dedutivos ou de outro tipo). (tradução nossa)

Nesse contexto, os autores apresentam uma distinção entre a prática matemática pessoal e institucional. A primeira é entendida como aquela realizada pelo indivíduo, e que, portanto, pode variar de um sujeito para outro, considerando suas particularidades. Já a segunda, é a prática matemática partilhada e realizada socialmente por um grupo de pessoas com mesmas características e objetivos e, assim, estabelecem uma instituição. Deste modo, Godino, Batanero e Font (2008, p. 12) pontuam que esses objetos matemáticos, isto é, os tipos de problemas, as linguagens, procedimentos, definições, proposições e argumentos se relacionam dentre da prática matemática, configurando um "sistema de práticas que realiza uma pessoa (significado pessoal) ou que é compartilhado no âmbito de uma instituição (significado institucional) para resolver um tipo de situação-problema".

Logo, os significados pessoais, os quais os estudantes devem se apropriar, dependem dos significados institucionais, ou seja, aqueles pretendidos e relacionados aos sistemas de práticas e que devem ser implementados e abordados pelos docentes em um processo de estudo sobre um conteúdo matemático. Dessa forma, essa relação entre os tipos de significados inerentes a prática matemática, estabelece que a aprendizagem do estudante se dá por meio da apropriação dos significados institucionais a partir da participação do mesmo nas práticas matemáticas que abarcam e compartilham tais significados.

- *Configurações de Objetivos e Processos*: Este nível está centrado nos objetos matemáticos e nos processos que intervêm na realização das práticas e o que emerge delas. Tem a finalidade de descrever a complexidade das práticas como fator explicativo dos conflitos semióticos produzidos em sua realização.

No que diz respeito aos tipos de objetos primários, elencados no tópico anterior, os autores ainda apontam que eles estabelecem uma relação entre si e dessa forma, "as situações-problema são a origem ou razão de ser da atividade; a linguagem representa as demais entidades e serve de instrumento para a ação; os argumentos justificam os procedimentos e proposições que relacionam os conceitos entre si" (GODINO; BATANERO; FONT, 2008, p. 14).

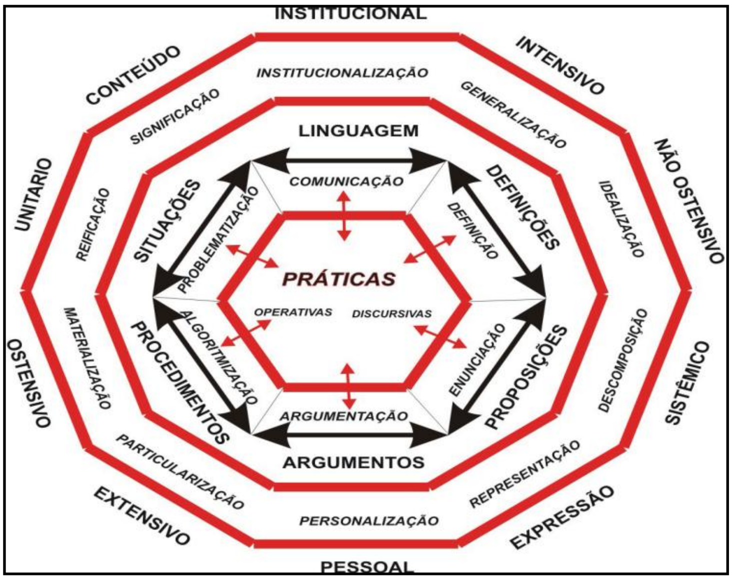
Deste modo, podemos compreender que na resolução de qualquer situação-problema, os elementos linguísticos são utilizados para representar os demais objetos que dela emergem e servem como instrumentos para a ação do agente, ao mesmo tempo em que os procedimentos e as proposições se relacionam com os conceitos, que, por sua vez, são justificados pela argumentação produzida durante essa resolução. Essa relação entre os objetos primários, denominada no EOS de função semiótica, formula configurações que permitem entender mais a fundo as características evidenciadas nas práticas matemáticas.

Nesse sentido, tendo em vista que as *Configurações de Objetivos e Processos* buscam descrever a complexidade semiótica dos objetos e significados das práticas matemáticas realizadas, esse nível de análise apresenta cinco dimensões duais, também denominadas de atributos contextuais, que dão embasamentos aos objetos matemáticos, a saber:

- Pessoal/institucional: Está relacionado com a origem dos sistemas de práticas. Se forem de um indivíduo, são considerados "objetos pessoais". Caso forem emergentes e compartilhados em uma instituição, são considerados "objetos institucionais".
- Ostensivo/não ostensivo: Um objeto matemático é considerado ostensivo quando pode ser observado por outro agente, ou seja, é público (notações, símbolos, gráficos, etc). Os objetos institucionais e pessoais têm uma natureza não ostensiva (não perceptíveis por si mesmos), mas, são utilizados em práticas públicas por meio de seus respectivos ostensivos associados (notações, símbolos, gráficos, etc).
- Expressão/conteúdo: Essa dualidade se estabelece por meio de funções semióticas, entendidas como uma relação entre um objeto antecedente (expressão, significante) e um consequente (conteúdo, significado), estabelecida por um sujeito (pessoa ou instituição), de acordo com certo critério ou código de correspondência.
- Extensivo/intensivo: Essa dualidade trata da relação entre elementos particulares que caracterizam os gerais, sendo utilizada para explicar uma das características básicas da atividade matemática: do caso particular à generalização.
- Unitário/sistêmico: Em algumas circunstâncias, os objetos matemáticos participam como entidades unitárias que se supostamente são conhecidas previamente, enquanto, em outras, intervêm como sistemas, não conhecidos em sua totalidade e que devem ser decompostos para seu estudo.

Nesse sentido, a articulação entre essas 5 dimensões duais e os objetos matemáticos primários, juntamente com os sistemas de práticas está esquematizado na imagem, a seguir.

Figura 12 – Modelo Ontosemiótico dos conhecimentos matemáticos



Fonte: Godino, Batanero e Font, 2008.

Como podemos observar, as práticas matemáticas, que podem ser do tipo operativas ou discursivas, estão no centro do processo de construção do conhecimento matemático. Dessas práticas matemáticas, que tem como foco a resolução de problemas, emergem os objetos matemáticos primários que, por sua vez, se relacionam entre si, promovendo as dimensões duais e processos de natureza tanto pessoal quanto institucional.

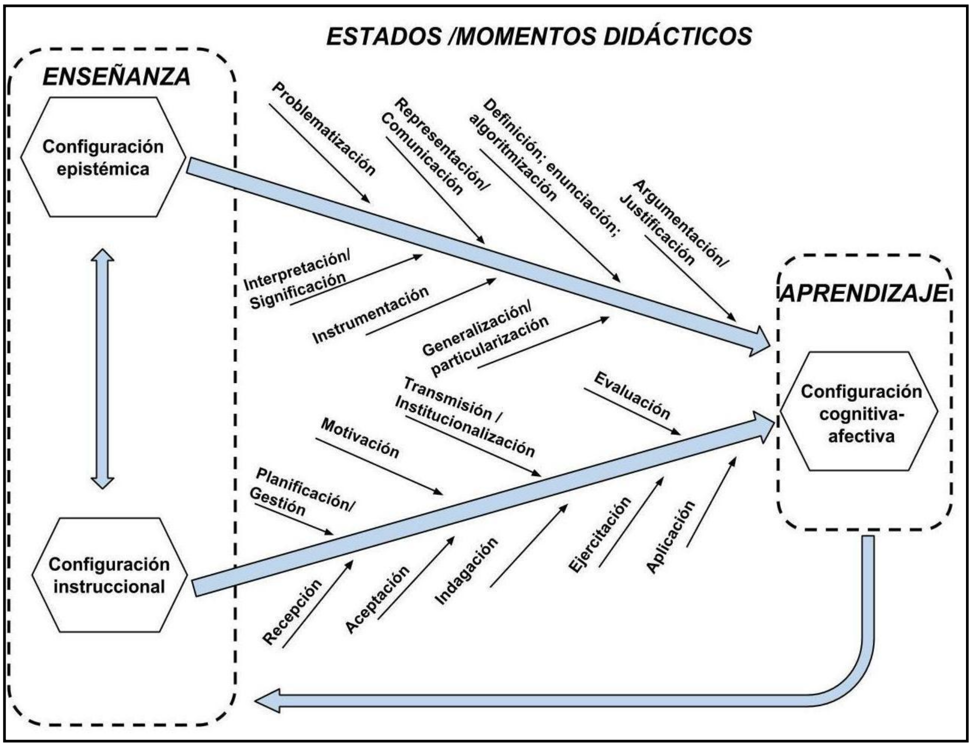
Além disso, os autores argumentam que os objetos matemáticos primários também estão relacionados com práticas didáticas utilizadas no processo de estudo e instrução matemática, envolvendo diferentes tipos de interações que podem ser estabelecidas entre o professores e o estudante, no decorrer desse processo. Nesse sentido, a seguir, apresentamos o terceiro nível de análise proposto pelo EOS, denominado de trajetórias didáticas.

- *Trajetórias Didáticas*: Esse nível está centrado nas interações entre o professor e estudantes que são realizadas no processo de ensino e Instrução Matemática. Deste modo, objetiva a identificação e descrição dessas interações, relacionando-as com a aprendizagem dos estudantes.

De acordo com Godino, Batanero, e Font (2008), as trajetórias didáticas se constituem como uma sequência de configurações didáticas que são implementadas para o processo de estudo de um conteúdo, objeto matemático ou uma situação problema. As configurações didáticas, por sua vez, são entendidas como um conjunto de interações que são realizadas entre o professor e aluno durante todo esse processo e, deste modo, ela contempla as ações desses sujeitos, assim como os meios e recursos que permeiam essas interações.

Os autores pontuam que toda configuração didática é composta por três tipos de configurações que estão relacionadas entre si no processo de estudo: A configuração epistêmica, entendida como uma tarefa matemática que engloba situações problemas e os objetos matemáticos necessários para a sua resolução, isto é, as linguagens, definições/conceitos, proposições, procedimentos e argumentações. A configuração instrucional, entendida como um conjunto de objetos docentes, discentes e mediacionais, que dizem respeito às ações desses dois sujeitos que são colocadas em jogo a partir da realização de uma tarefa matemática. E por fim, configuração cognitivo-afetiva que engloba os objetos que interagem e emergem dos sistemas de práticas dos alunos e que permitem a descrição de suas aprendizagens a partir da implantação da tarefa matemática. A relação entre esses três tipos de configurações está esquematizada na figura a seguir.

Figura 13 – Configurações didáticas



Fonte: Godino, 2014.

- *Dimensões Normativas*: Esse nível refere-se ao sistema de normas referentes a convenções, hábitos, costumes, leis, diretrizes curriculares que regulam o processo de ensino e aprendizagem e que condicionam as configurações e trajetórias didáticas.

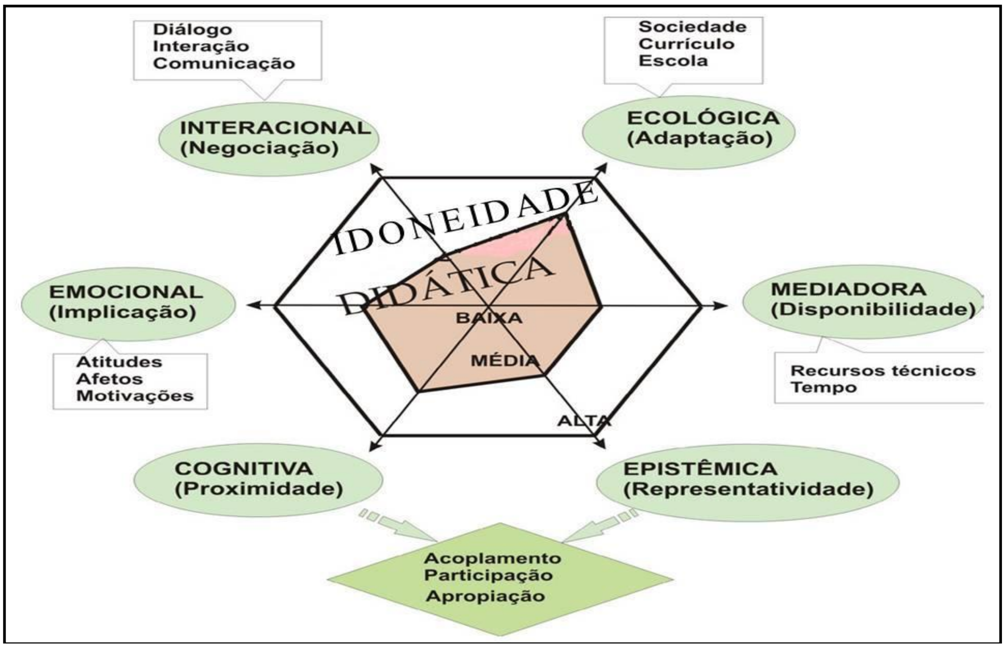
Godino, Batanero, e Font (2008) apontam que qualquer processo de ensino e aprendizagem é pautado por normas sociais que regulam o seu andamento e os comportamentos de professores e estudantes. Em se tratando do processo de ensino de Matemática, os autores defendem que ele deve ser regulado por normas sociomatemáticas que, na ótica do EOS, constituem a Dimensão Normativa que facilitam o desenvolvimento e análise dos processos de ensino e aprendizagem da Matemática.

Logo, as normas sociomatemáticas são entendidas como as regras gerais que estão relacionadas com as configurações didáticas elencadas anteriormente e que devem regular no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, por exemplo, as interações entre professor e aluno e entre os próprios alunos, as normas que condicionam a utilização de recursos didáticos, como os materiais e ferramentas tecnológicas, as normas relacionadas com as atitudes e deveres dos alunos e as regras relacionadas com o contexto, englobando as normas sobre o currículo de matemática a ser ensinado, o ambiente e comunidade escolar e os aspectos culturais que estão relativos ao lugar em que o referido processo é realizado.

- *Idoneidade Didática*: Este nível se baseia nas quatro análises anteriores e constitui-se como uma ferramenta de análise e avaliação, que possibilita orientar o trabalho docente e identificar novas implementações e as potenciais melhorias do processo de ensino da Matemática.

Godino (2011) argumenta que a Idoneidade ou Adequação Didática está desdobrada em seis facetas ou dimensões que devem estar relacionadas e articuladas entre si no processo de ensino e aprendizagem e que podem ser percebidas a partir de diferentes graus de adequação (alta, média e baixa), a saber: Idoneidade Epistêmica; Idoneidade Cognitiva; Idoneidade Interacional; Idoneidade Mediacional; Idoneidade Emocional e Idoneidade Ecológica. A articulação estabelecida entre elas está representada na imagem, a seguir:

Figura 14 – A Idoneidade Didática



Fonte: Godino, Batanero e Font, 2008.

Diante disso, Godino, Batanero e Font (2008) enfatizam que a Idoneidade Didática pode ocorrer em níveis baixo, médio ou alto. Assim, o hexágono regular externo, apresentado na imagem anterior, diz respeito ao processo de ensino e aprendizagem pretendido ou programado, no qual se espera atingir um grau máximo das idoneidades. Por sua vez, o hexágono irregular interno corresponde às adequações efetivamente conseguidas na realização deste processo. Além disso, os autores aludem que o alto grau adequação de uma única dimensão não propicia a adequação das demais e, por conseguinte, não garantirá a qualidade do processo de ensino e aprendizagem. Deste modo, dentro deste processo, torna-se necessário o equilíbrio no grau de qualidade de todas essas dimensões.

Discorrendo sobre cada uma dessas facetas, o autores apontam que a *Idoneidade Epistêmica* refere-se ao grau de representatividade dos significados institucionais implementados, ou pretendidos, com relação ao significado de referência. Como exemplo, o ensino da Curva Normal pode ser limitado à aprendizagem dos algoritmos e aplicações mecânicas para o calculo de probabilidades (baixa adequação/idoneidade), ou contemplar a justificativa desses algoritmos e aplicações e os diferentes significados que a Curva pode abarcar quando abordada em varias situações (alta adequação/idoneidade).

A *Idoneidade Cognitiva* revela o grau de proximidade dos significados pessoais atingidos pelos alunos aos significados pretendidos/implementados. Ainda no ensino da Curva Normal, como exemplo, um processo de ensino e aprendizagem com alto grau de idoneidade cognitiva partiria das noções básicas sobre o conceito e a representação desse modelo, considerando e avaliando os conhecimentos prévios dos alunos sobre o mesmo, para em seguida, aprofundar os fundamentos conceituais, o cálculos de probabilidades e a resolução de problemas que desenvolvam a argumentação e a generalização das propriedades relativas a este tópico matemático.

No que diz respeito à *Idoneidade Emocional/ Afetiva*, Godino (2011) aponta que ela está relacionada com o grau de interesse e motivação dos estudantes no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Segundo o autor, essa dimensão contempla fatores relacionados tanto com a instituição que desenvolve o ensino, com o estudante e sua trajetória escolar. Deste modo, o auto grau desse tipo de idoneidade pode ser estabelecido com a utilização de recursos didáticos, atividades ou situações problemas que motivem e sejam interessantes aos estudantes.

Já a *Idoneidade Interacional* está relacionada às interações, dos estudantes com outros sues pares, com o professor e com os materiais didáticos, que podem ser realizadas no processo de ensino da Matemática e que visam possibilitar a resolução de conflitos semióticos produzidos antes e durante esse processo. Logo, o ensino matemático que leve em consideração as crenças e os conhecimentos prévios dos estudantes, bem como as suas dificuldades que permeiam a sua aprendizagem e os diferentes tipos de interações que podem ocorrer em sala de aula, possui um maior grau de adequação do que aquele não leva em consideração esses aspectos.

A *Idoneidade Mediacional*, por sua vez, refere-se ao grau de adequação e disponibilidade de recursos didáticos que podem ser utilizados para potencializar o processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Nesse sentido, a utilização de software que demonstrem, de forma interativa, os elementos e a representação gráfica da Curva Normal, por exemplo, poderia ter, em um determinado momento da abordagem desse tema, uma maior adequação didática do que outro recurso tradicional, como o lápis e o papel.

Por fim, a *Idoneidade Ecológica* diz respeito ao grau em que o processo de ensino e aprendizagem de Matemática está relacionado com as diretrizes curriculares desta disciplina, ao projeto educacional da instituição em que ele se desenvolve, a comunidade escolar e ao contexto social em que a escola está inserida. Assim, ao considerar todos esses aspectos, o referido processo terá um auto grau de adequação ecológica.

Explicados cada um dos 5 níveis que compõem as noções teóricas do EOS, isto é, Sistema de Práticas, Configurações de Objetos e Processos, Trajetória Didáticas Dimensão Normativa e Idoneidade Didática, finalizamos essa seção destacando que eles também estão relacionados entre si no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Godino, Batero e Font, (2008), destacam essa relação pontuando que se considerarmos inicialmente um *sistema de práticas* matemáticas*,* devemos compreender que desse sistema emergem objetos e processos matemáticos. Esses objetos e processos, por sua vez, relacionam-se entre si formando *configurações* produzidas a partir das interações didáticas, ou seja, redes de objetos que intervêm e emergem dos sistemas de práticas e suas relações. Em continuidade, uma sequência de configurações didáticas, direcionadas à aprendizagem de um tipo de situação-problema, ou de um conteúdo específico, constitui uma *trajetória didática.* Além disso, permeando todo esse processo, estão as *normas* que regulam as interações e participação dos sujeitos envolvidos. Por fim, A *Idoneidade didática* possibilita o planejamento, a implementação e avaliação do referido processo de ensino e aprendizagem.

Nesse contexto, na seção, a seguir, passaremos a abordar o modelo Conhecimentos e Competências Didático-Matemáticos – CCDM do professor de Matemática, proposto por Godino e Pino-Fan (2015) e que está embasado no EOS. Neste modelo, os autores contemplam os conhecimentos e a competências necessárias para que o professor de Matemática possa exercer a função docente, o que inclui tanto o conhecimento matemático, como também o conhecimento didático relacionado ao ensino de Matemática, contemplando as facetas da idoneidade didática.

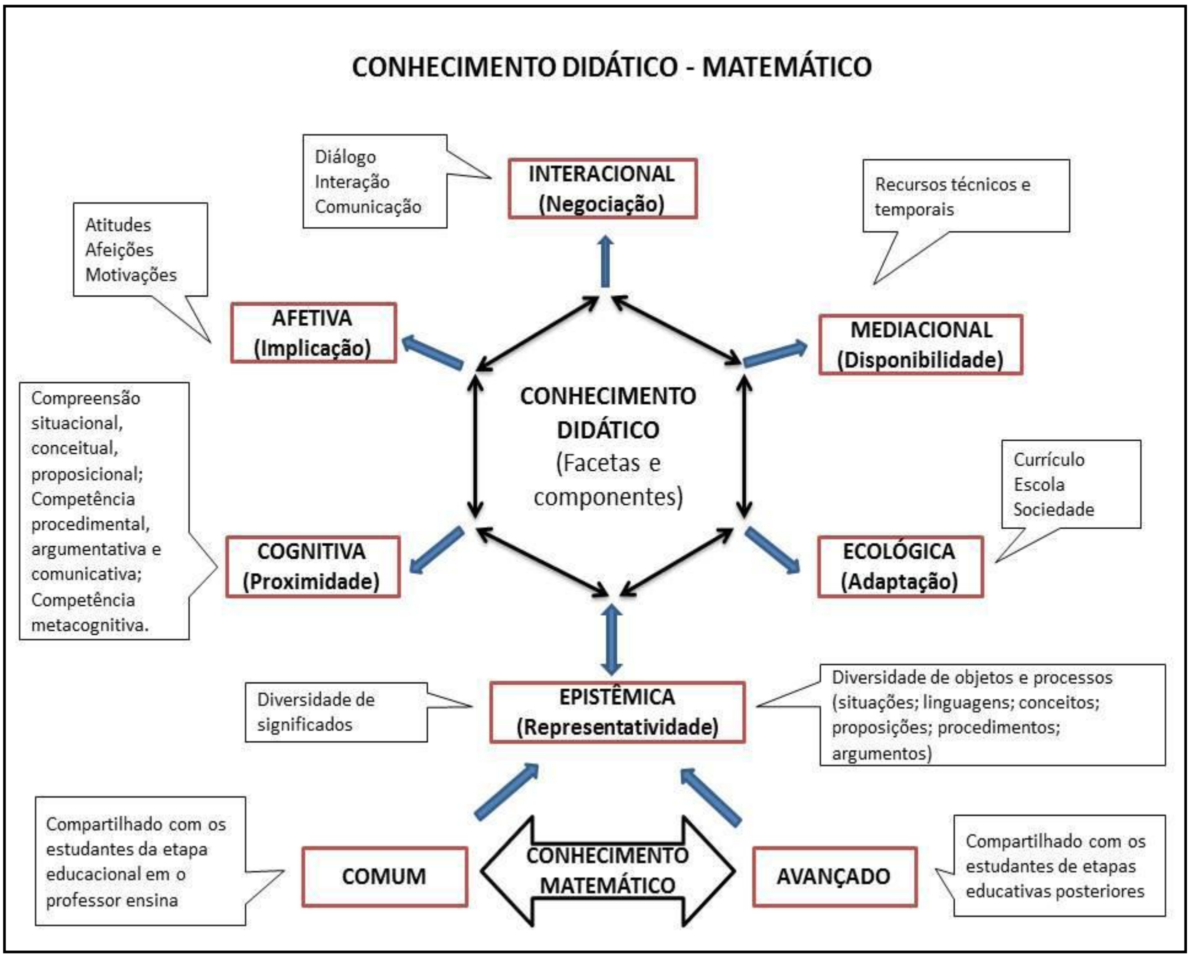
5.2 Conhecimentos e Competências Didático-Matemáticos - CCDM

Como visto na seção anterior, o EOS se configura com um marco teórico integrador voltado para o estudo e análise sobre o conhecimento matemático e seu processo de ensino e aprendizagem. Baseado neste enfoque, Godino e Pino-Fan (2015), Godino, Batanero, Font e Giacomone (2016, 2017), elaboraram o modelo

Conhecimentos e Competências Didático - Matemático – CCDM, o qual contempla os conhecimentos e as competências que o professor de Matemática deve conhecer, compreender, saber aplicar e avaliar para que possa exercer sua prática docente de forma eficiente.

No referido modelo, o conhecimento didático-matemático é classificado como o saber docente relativo à Matemática e ao seu ensino e que estão relacionados entre si no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Já a competência, diz respeito uma "ação efetiva realizada em um contexto específico com um propósito específico" (FONT, 2011, p. 18). No entanto, diante do objetivo do nosso estudo, focaremos, nesta pesquisa, apenas no modelo de conhecimentos didático-matemáticos do professor de Matemática. A imagem, a seguir, esquematiza e apresenta os componentes e as facetas didático-matemáticos que compõem esse modelo.

Figura 15 – Facetas e Componentes do Conhecimento Didático-Matemático



Fonte: Carvalho, 2017, adaptado de Godino *et al*, 2016.

Nesta direção, discorrendo sobre as características das categorias de conhecimento matemático, Pino-Fan e Godino (2015); Godino, Batanero, Font e Giacomone (2016, 2017) enfatizam que o conhecimento matemático Comum do conteúdo corresponde ao conhecimento do professor sobre um objeto específico matemático, capaz de resolver problemas ou atividades matemáticas relacionadas a esse objeto, e que deve ser abordado com os alunos em cada etapa da escolarização em que o professor se propõe a desenvolver o processo de ensino e aprendizagem sobre esse conteúdo. No ensino da Curva Normal, por exemplo, o conhecimento matemático Comum do conteúdo diz respeito ao domínio de conceitos, definições, procedimentos operatórios e algoritmos a serem abordados nas etapas escolares e suficientemente para resolver problemas e interpretar dados e informações estatísticas e probabilísticas apresentadas nesse tipo de Distribuição.

O conhecimento matemático Avançado do conteúdo, por sua vez, corresponde ao conhecimento que professor deve ter sobre a relação entre os conteúdos matemáticos abordados em diferentes níveis de ensino. Através desse conhecimento, por exemplo, o professor tem domínio da relação entre as noções conceituais da Curva Normal abordadas no Ensino Médio e como elas serão ampliadas e aprofundadas em determinados cursos de nível superior. Logo, este tipo de conhecimento fornece ferramentas para o professor, em sala de aula, propor desafios matemáticos aos alunos e relacionar o objeto matemático que está sendo estudado com outras noções matemáticas sobre este objeto a serem estudadas nas subsequentes etapas de escolarização.

Em relação às facetas do conhecimento didático-matemático, os autores aludem que a faceta *Epistêmica* compreende um conhecimento em que.

> O professor, além da matemática que lhe permite resolver problemas em que ele mobiliza seu conhecimento comum e avançado, deve ter uma certa dose de conhecimento matemático"Perfil" para o ensino; isto é, o professor deve ser capaz de mobilizar diversos representações de um objeto matemático, resolver a tarefa por diferentes procedimentos, vincular o objeto matemático com outros objetos matemáticos do nível educacional em que ensina ou a partir de níveis anteriores e posteriores, compreender e mobilizar a diversidade de significados parciais para o mesmo objeto matemático (que integra o significado holístico para este fim), fornecer várias justificações e argumentos, e identificar os conhecimento colocado em jogo durante a resolução de uma tarefa matemática. (PINO-FAN E GODINO, 2015, p. 99) (tradução nossa).

Deste modo, os autores apontam que esta faceta contempla um conhecimento que vai além daqueles abarcados pelas categorias de conhecimento Comum de conteúdo e conhecimento Avançado do conteúdo. Assim, trata-se "do conhecimento didático-matemático sobre o conteúdo em si, ou seja, a maneira particular como o professor de matemática entende e conhece a matemática."(GODINO *ET AL,* 2017, p. 96).

A faceta cognitiva, por sua vez, "Implica o conhecimento de como os alunos aprendem, raciocinam e entendem a Matemática e como progridem no aprendizado" (GODINO *ET AL*, 2017, p. 97). Logo, essa faceta está relacionada com o conhecimento que permite, o professor de Matemática, compreender o conhecimento pessoal dos alunos sobre um objeto matemático, contemplando aspectos e a forma como eles assimilam a Matemática e como se dá sua aprendizagem.

Já a faceta *afetiva (emocional)* "Inclui conhecimento sobre os aspectos afetivos, emocionais, as atitudes e as crenças dos alunos em relação a objetos matemáticos e ao processo de estudo desenvolvido" (GODINO *ET AL*, 2017, p. 97). Dessa forma durante o processo de ensino e aprendizagem de um objeto matemático também é necessário que o professor tenha conhecimento relacionados as aspectos emocionais e as atitudes e as crenças que são postas em evidências durante esse processo.

Em continuidade, a faceta *mediacional* corresponde "ao conhecimento dos recursos (tecnológicos, materiais e temporais) apropriados para melhorar a aprendizagem dos alunos" (GODINO *ET AL*, 201, p. 97). Assim, através desse conhecimento, o professor deve ter domínio sobre a disponibilização e utilização de recursos didáticos que podem ser utilizados para abordagem de objetos matemáticos, a fim de potencializar o processo de ensino e aprendizagem.

Em relação à faceta *interacional*, ela "refere-se ao conhecimento sobre o ensino da matemática, organização das tarefas, resolução das dificuldades dos alunos e as interações que podem ser estabelecidas na sala de aula". (GODINO *ET AL*, 2017, p. 97). Deste modo, também é essencial para processo de ensino aprendizagem da Matemática, o professor ter o conhecimento sobre o ensino dessa disciplina, a organização de atividades para esse ensino e os diversos tipos de interações que podem ocorrer na sala de aula, isto é, aluno com o professor, alunos entre si e entre os alunos com os recursos didáticos.

E a última faceta, a *Ecológica* “implica as relações do conteúdo matemático com outras disciplinas e os fatores curriculares, sócio-profissionais, políticos e econômicos que condicionam os processos de instrução Matemática”. Logo, através desse conhecimento o professor deve ser capaz de relacionar um conteúdo matemático com outras áreas de conhecimento, compreender o currículo proposto para o ensino de Matemática, bem como, os fatores sociais, incluindo a comunidade escolar, políticos e econômicos que estão subjacentes ao processo de ensino aprendizagem dessa disciplina.

Por fim, Godino *et al* (2017), ainda enfatizam que todas essas facetas devem estar relacionas entre si no processo de ensino e aprendizagem e domínio de todas elas faz parte do conhecimento especializado do professor de Matemática. Desta forma, ao abordar um conteúdo matemático, em sala de aula, o professor deve ser capaz de mobilizar e reconhecer tais dimensões. Tomando o ensino da Curva Normal no Ensino Médio, como exemplo, ao abordar esse conteúdo o professor deve apresentar os diferentes significados e representações desse conceito, reconhecer a relação entre a Estatística e a Probabilidade presente nesse modelo e deve resolver as situações problemas por diferentes procedimentos (faceta Epistêmica). Além do mais, deve organizar estratégias e interações para a abordagem e ensino desse conteúdo, elaboração de atividades, bem como, compreender como os alunos entendem e raciocinam sobre tal conteúdo e como se dá o progresso de suas aprendizagens (faceta Interacional e Cognitiva). Para isso, deve também levar em consideração as crenças e atitudes dos alunos em relação à Curva Normal (faceta Afetiva) e fazer uso de determinados recursos didáticos (softwares, materiais concretos) para abordagem desse tema (faceta Mediacional). Por fim, deve relacionar a Curva Normal com outras disciplinas, além de compreender como esse conteúdo está proposto no currículo de Matemática e como ele implica e significa nos contextos sociais dos alunos (faceta ecológica).

6 MÉTODO

Este capítulo é dedicado à abordagem dos procedimentos metodológicos adotados para o desenvolvimento deste estudo. Para tanto, apresentamos, a seguir, o tipo e o campo da pesquisa, bem como, os participantes, as etapas, os procedimentos e os métodos adotados para coletas e análises dos dados.

6.1 Tipo de Pesquisa

Em termos metodológicos, esta pesquisa utiliza uma abordagem qualitativa. Esse tipo de abordagem tem como principal característica a investigação de um ambiente natural ou um fenômeno, cabendo ao pesquisador interpretar e caracterizar os dados. Sobre a abordagem qualitativa, Oliveira (2011, p. 28) a classifica "como sendo um processo de reflexão e análise da realidade através da utilização de métodos e técnicas para compreensão detalhada do objeto de estudo em seu contexto histórico e/ou segundo a sua estruturação".

Em complemento, ainda sobre este tipo de abordagem metodológica, Neves (1996, p.1) afirma que ela

> [...] faz parte a obtenção de dados descritivos mediante contato direto e interativo do pesquisador com a situação objeto de estudo. Nas pesquisas qualitativas, é frequente que o pesquisador procure entender os fenômenos, segundo a perspectiva dos participantes da situação estudada e, a partir, daí situe sua interpretação dos fenômenos estudados.

Nesse sentido, no presente estudo, tivemos o interesse de investigar os conhecimentos didático-matemáticos de professores de Matemática do Ensino Médio para abordagem da inter-relação entre a Estatística e a Probabilidade por meio da Curva Normal. Deste modo, almejamos analisar os conhecimentos didático-matemáticos iniciais dos professores sobre a Curva Normal e como uma proposta de ensino pode contribuir para a construção/ampliação dos conhecimentos didático-matemáticos, desses professores, sobre essa temática.

6.2 Etapas da Pesquisa

Estruturamos e desenvolveremos a presente pesquisa em duas etapas, as quais estão sistematizadas e descritas a seguir:

Quadro 3 – Etapas da pesquisa

ETAPAS DA PESQUISA	
1º Etapa	Estudo Diagnóstico
2º Etapa	Encontro Formativo

Fonte: O autor, 2019.

A primeira etapa de nossa pesquisa, Estudo Diagnóstico, teve seu desenvolvimento compreendido a partir da aplicação de dois questionários diagnósticos (Apêndice A), sendo um sobre o perfil docente, que nos auxiliou na apresentação do perfil dos professores investigados, e outro sobre o objeto do nosso estudo, o qual propiciou a investigação dos conhecimentos didático-matemáticos iniciais de professores de Matemática no Ensino Médio sobre a inter-relação entre a Estatística e a Probabilidade por meio da Curva Normal, a fim de compreender o significado que os professores atribuem a este modelo matemático, aos conceitos estatísticos e probabilísticos que o mesmo abarca e as noções didáticas relativas ao seu processo de ensino e aprendizagem.

A segunda etapa, Encontro Formativo, foi realizada com base nas análises dos dados obtidos na etapa anterior. Sobre essa etapa, vale ressaltar que, como Freire (1996, p. 43) destaca, “na formação permanente dos professores, o momento fundamental é a reflexão crítica sobre a prática. É pensando criticamente a prática de hoje ou de ontem que se pode melhorar a próxima prática”, isso demonstra a grande importância existente na formação contínua de professores.

Nesta direção, construímos e realizamos, nessa etapa da pesquisa, uma proposta de ensino, voltada para a abordagem articulada entre a Estatística e a Probabilidade por meio da Curva Normal, com o objetivo de investigar a construção/ampliação dos conhecimentos didático-matemáticos dos professores participantes sobre essa temática. O desenvolvimento dessa proposta se deu através de um encontro formativo, com duração de 4h. Esse encontro de formação foi pautado através de uma vivência de 4 momentos que contemplaram a realização de três atividades e uma sistematização teórica, seguidas de discussões coletivas sobre as ideias abordadas em cada momento, como descritos no quadro adiante.

Quadro 4 – Momentos do Encontro Formativo

SESSÕES DO ENCONTRO FORMATIVO			
1º Momento	2º Momento	3º Momento	4º Momento
Atividade 1 + Discussão coletiva	Sistematização Teórica + Discussão coletiva	Atividade 2 + Discussão Coletiva	Atividade 3 + Discussão Coletiva

Fonte: O autor, 2019.

Como visto, nesse encontro, os professores participantes realizaram 3 atividades (Apêndice B), em forma de questionários e impressas, sobre a inter-relação entre a Estatística e a Probabilidade por meio da Curva Normal e possibilidades didáticas para o seu processo de ensino e aprendizagem no Ensino Médio. Essas atividades foram permeadas pela abordagem de uma sistematização teórica, realizada pelo autor desse estudo, sobre o tema citado.

No primeiro momento, a atividade 1 se apresentou com o objetivo de iniciarmos as reflexões e discussões sobre alguns conceitos estatísticos e probabilísticos que estão presentes no modelo da Curval Normal. Logo, os professores foram convidados a responder 2 questões. A primeira solicitava que, individualmente, cada professor fornecesse a sua altura (cm), e, em dupla, solicitamos que determinassem a média aritmética, a moda, a mediana e o desvio-padrão das alturas do conjunto de professores participantes daquele encontro. Posteriormente, ainda na primeira questão, solicitamos que cada dupla esboçasse em um gráfico de barras as medidas das alturas (cm) do referido conjunto. A segunda questão, por sua vez, solicitou que cada dupla apresentasse a probabilidade de se escolher uma pessoa dentre todos os professores participantes ao acaso e ela possuir a altura maior que a média do conjunto.

O segundo momento contemplou a abordagem de uma sistematização teórica sobre a articulação entre a Estatística e a Probabilidade por meio da Curva Normal e possibilidades didáticas para o seu processo de ensino e aprendizagem no Ensino Médio. Desse modo, esse momento se iniciou com a apresentação teórica da inter-relação entre a Estatística e a Probabilidade, descrita no capítulo 2 desse estudo. Em seguida, abordamos a definição e os tipos de variáveis estatísticas, com ênfase para a variável contínua, por se tratar de uma variável modelada pela Curva Normal.

Após esse tópico, apresentamos o conceito da Curva Normal, sua representação gráfica, exemplos de fenômenos modelados por ela (Pressão Arterial, Massa e Nota escolar), as propriedades, conceitos estatísticos e probabilísticos presentes nesse modelo, a Curva Normal Padronizada e o Cálculo de probabilidades associado à Curva através de uma situação problema. Por fim, nesse segundo momento, abordamos e discutimos as orientações curriculares veiculadas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2000), Parâmetros Curriculares para a Educação Básica do Estado de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2013) e a Base Nacional Curricular Comum (BRASIL, 2018) para o ensino e aprendizagem da Curva Normal. Todos esses tópicos foram permeados com indagações do pesquisador aos professores participantes sobre as possibilidades de se abordar essa temática no Ensino Médio da Escolarização Básica.

No terceiro momento, atividade 2 teve como objetivo emergir os conhecimentos didático-matemáticos sobre o tema abordado e discutido na sistematização teórica. Logo, os professores foram convidados para, novamente em dupla, responder a 3 questões. As duas primeiras envolviam situações problemas sobre o conceito da Curva Normal, os conceitos estatísticos e o cálculo de probabilidades na Curva. A última questão apresentava um protocolo com a resposta de um estudante a uma situação problema envolvendo a Curva Normal; nela os professores foram indagados a apresentar suas avaliações e explicações para a resposta desse estudante e como procederiam com a discussão em classe diante da resposta apresentada.

No quarto e último momento, a atividade 3 foi realizada com o objetivo de que os professores apresentassem, individualmente, suas avaliações pessoais sobre o encontro formativo e a proposta de ensino abordada. Nesse sentido, indagamos quais as contribuições que a temática abordada e a sequência de atividades proporcionaram, aos professores, para a construção/ampliação de seus conhecimentos, na perspectiva do conhecimento matemático e didático.

Diante disso, em linhas gerais, esses momentos buscaram propiciar discussões e reflexões, que contemplaram o conceito da Curva Normal, os conceitos estatísticos e probabilísticos inseridos nesse modelo matemático, o cálculo de probabilidades em situações problemas envolvendo a Curva Normal e as possibilidades e aspectos relacionados ao seu processo de ensino e aprendizagem no Ensino Médio. Além disso, frisamos que todos esses momentos contaram com a intervenção do pesquisador, as atividades impressas foram recolhidas, as discussões e socializações foram gravadas e estão descritas e analisadas no presente texto. Em acréscimo, salientamos que o Encontro Formativo foi previamente testado através da realização de duas oficinas acadêmicas direcionadas a um público semelhante, nas quais validamos o modelo do encontro estabelecido, bem como, a adequação das atividades e da sistematização teórica.

Por fim, destacamos que os questionários diagnósticos, as atividades do encontro formativo, a sistematização teórica e os dados produzidos nas duas etapas dessa pesquisa estão melhores descritos e apresentados nas seções “Critério de Análise” e “Análise de dados” mais adiante.

6.3 Campo e Participantes da Pesquisa

O estudo foi realizado na cidade de Nazaré da Mata, localizada na Zona da Mata Norte do estado de Pernambuco, região a qual o autor exerce a prática docente e realizou estágios supervisionados durante o curso de graduação em Licenciatura em Matemática. Durante esses estágios, foi possível perceber que o ensino de Estatística e Probabilidade, de modo geral, tem sido pautado de forma independente, priorizando a abordagem e aplicação das técnicas operatórias em detrimento da compreensão dos significados dos conceitos relativos a essas áreas de conhecimento. Além disso, percebe-se também o desempenho insatisfatório por partes dos estudantes na resolução de problemas que envolvem raciocínio estatístico e probabilístico. Assim, a realização desse estudo pode contribuir com a promoção de discussões e reflexões sobre o ensino de Estatística e Probabilidade e a inter-relação entre elas, através da Curva Normal, que favoreçam e potencializem o processo de ensino e aprendizagem, na Educação Básica, dos conceitos relativos a esse tema e dos conteúdos envolvidos nessas áreas de conhecimento.

Nesse sentido, o universo desta pesquisa foi composto por 12 professores de Matemática do Ensino Médio, os quais constituem o universo de professores que atuam nas escolas da rede pública de ensino da cidade supracitada. Os mesmos estão identificados no presente texto pela letra P e um índice subscrito, como segue: P_1, P_2, P_3,..., P_{12}, para fins de apresentação e tratamento de dados. A escolha por professores desse nível de escolarização se deve ao fato de o estudo da Curva Normal, através do ensino da Estatística e da Probabilidade, ser apresentado e recomendado para essa etapa de ensino, como visto nas diretrizes veiculadas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (Brasil, 2000), Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2013) e a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018), conforme apresentado no capítulo 3 deste estudo.

A primeira etapa da pesquisa, Estudo Diagnóstico, teve a participação dos 12 professores, os quais, como já mencionado, responderam aos questionários sobre o perfil docente (Apêndice A) e sobre os conhecimentos didático-matemáticos relativos à inter-relação entre a Estatística e a Probabilidade através da Curva Normal (Apêndice B).

A segunda etapa da pesquisa, o Encontro formativo, contou coma participação de 7 dos professores participantes da primeira etapa. Desse modo, destacamos que de um total de doze professores convidados para a participação, de forma voluntária, nas duas etapas da nossa pesquisa, sete participaram efetivamente deste estudo, por terem se engajado em todas as etapas. Para o melhor entendimento, destacamos a seguir a identificação da participação dos professores em cada um das etapas do nosso estudo.

Quadro 5 – Participação dos professores nas etapas da pesquisa

Professores	Etapa 1	Etapa 2
P_1	X	X
P_2	X	X
P_3	X	
P_4	X	X
P_5	X	
P_6	X	
P_7	X	X
P_8	X	X
P_9	X	
P_{10}	X	X

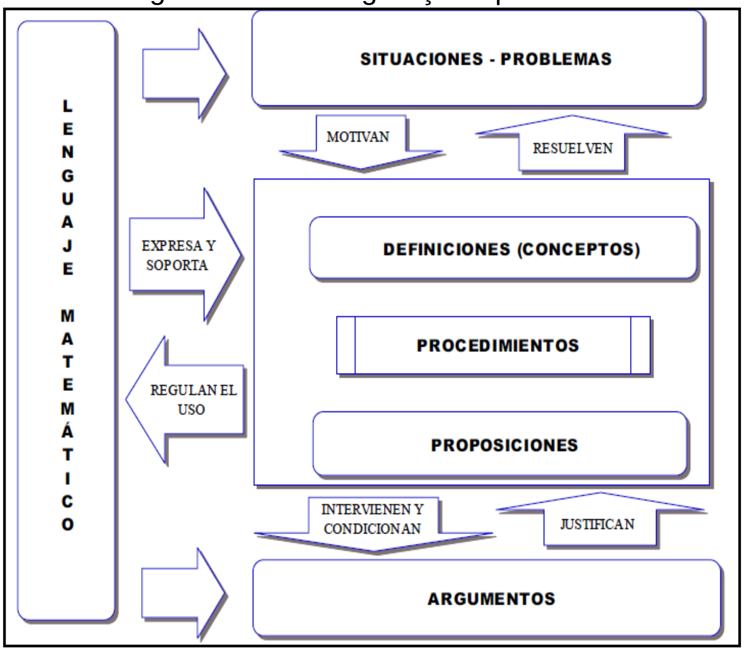
P_{11}	X	
P_{12}	X	X

Fonte: O autor, 2019.

6.4 Critérios de Análise

Para análise dos dados dos questionários diagnósticos utilizados nas duas etapas da pesquisa, estabelecemos dois critérios. O primeiro trata-se da Configuração Epistêmica proposta pelo EOS. Esse tipo de configuração é concebido como uma ferramenta de análise que permite descrever as práticas matemáticas e os objetos matemáticos primários (Linguagens, Situação – problema, Procedimentos, Conceitos/Definições, Propriedades e Argumentos) que emergem delas e estão relacionados entre si durante essa prática, conforme descrito no capítulo da fundamentação teórica desse estudo e esquematizado na figura, a seguir.

Figura 16 – Configuração Epistêmica



Fonte: Font e Godino, 2006.

Em síntese, Font e Godino (2006) apontam que para o indivíduo realizar ou analisar uma prática matemática se faz necessário ter o domínio dos objetos matemáticos que a compõe, isto é, as <u>*Situações-problemas*</u>, entendidas como as tarefas, exercícios e problemas matemáticos que induzem a prática matemática. As *Linguagens*, ou seja, os termos, expressões, anotações, gráficos, entre outros, utilizados para expressar e representar os conceitos, propriedades e procedimentos inerentes à situação. As *Definições/Conceitos* que englobam as entidades conceituais ou definições que são postas em jogo na prática matemática. As *Proposições/Propriedades*, que englobam os enunciados das Definições e Conceitos, como também as regras e propriedades que são relativas aos mesmos. Os *procedimentos* contemplam as técnicas, algoritmos, operações que podem ser utilizados na prática matemática para solucionar a situação problema. Por fim, os *Argumentos* são as justificativas utilizadas para validar e explicar as proposições e o procedimento adotados para solucionar a situação problema. Deste modo, quando um indivíduo se coloca frente a uma situação-problema, ele deve utilizar uma série de linguagens para representar um conjunto de conceitos, proposições e procedimentos inerentes aos argumentos postos que buscam solucionar a referida situação.

Paralelamente à análise epistêmica, como segundo critério de análise, também utilizamos as ideias proposta por Bardin (2011), que concebe a etapa de análise de dados de uma pesquisa como:

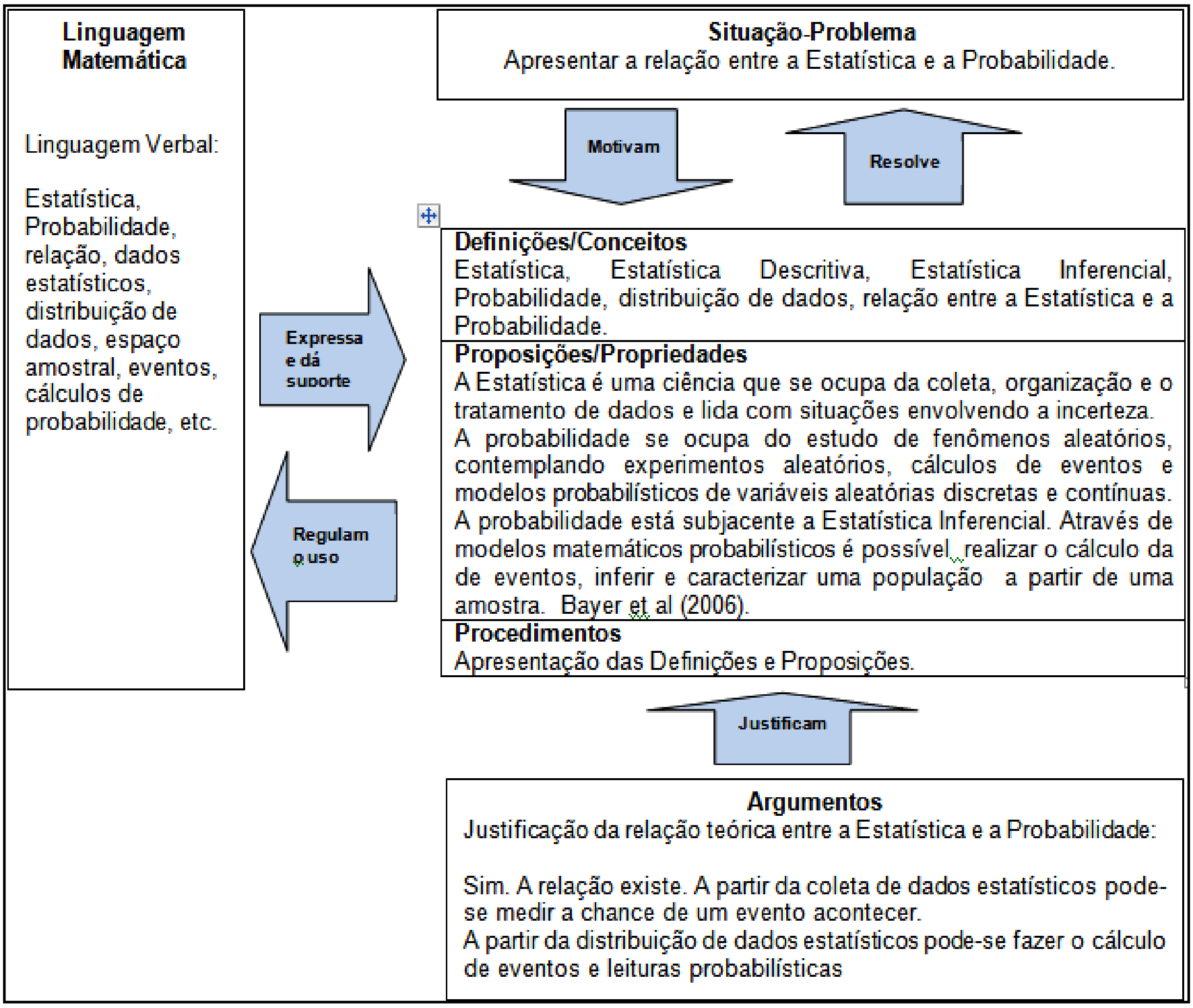
> [...] um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando a obter, por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens (BARDIN, 2011, p. 47)

Deste modo, o autor propõe para o desenvolvimento de uma análise de uma pesquisa, a formação de categorias que possibilitem identificar e caracterizar os dados. Diante disso, salientamos que, na duas etapas da pesquisa, para análise das questões em que envolviam o conhecimento matemático, ou seja, trataram de uma tarefa matemática, fizemos uso das configurações epistêmicas e das categorias de análise. Já nas questões que envolviam apenas o conhecimento didático, por não se tratarem de uma tarefa matemática, fizemos uso apenas das categorias de análise. Nessa perspectiva, passaremos a apresentar, a seguir, cada uma das questões do nosso questionário diagnóstico e das atividades do encontro, juntamente com seus respectivos critérios de análise.

6.4.1 Questionário Diagnóstico

1º) Você acredita que existe alguma relação entre a Estatística e a Probabilidade? Em Caso positivo, como compreendes essa relação? Justifique sua resposta.

Figura 17 – Configuração Epistêmica da 1º Questão



Fonte: O autor, 2019.

A primeira questão tem como objetivo identificar o conhecimento Epistêmico sobre a relação entre a Estatística e a Probabilidade. Para analisar essa questão, a categorização das respostas será feita da seguinte maneira:

Resposta Adequada (RA) - Quando o participante diz acreditar na existência da relação entre a Estatística e a Probabilidade e justifica sua resposta apresentando noções de conhecimento Epistêmico sobre essa relação.

Resposta Parcialmente Adequada (RPA) - Quando o participante diz acreditar que existe alguma relação teórica entre a Estatística e a Probabilidade, mas não consegue apresentar em sua justificativa, um conhecimento Epistêmico sobre a relação teórica entre a Estatística e a Probabilidade

Resposta Inadequada (RI) - Quando o participante não acredita na existência de alguma relação entre a Estatística e a Probabilidade.

Não Respondeu (NR) - Quando o participante não responde a questão.

Segunda Questão:

2º) De que forma você abordaria uma proposta de aula articulando a Estatística com a Probabilidade em uma aula de Matemática com estudantes do Ensino Médio? Se desejar, pode incluir exemplos de atividades.

A segunda questão, por sua vez, solicitou aos professores que elaborassem uma proposta de aula para o Ensino Médio que articulasse a Estatística e a Probabilidade. Logo, objetivamos, através dessa proposta de aula, analisar o conhecimento didático dos professores envolvendo todas as seis facetas: Epistêmica, Cognitiva, Afetiva, Interacional, Mediacional e Ecológica. Desse modo, a categorização das respostas será feita da seguinte maneira:

Resposta Adequada (RA) - Quando o participante consegue apresentar uma proposta de aula/atividade que articule a Estatística e a Probabilidade, contemplando noções de conhecimento didático sobre as seis facetas.

Resposta Parcialmente Adequada (RPA) - Quando o participante consegue apresentar uma proposta de aula que articule a Estatística e a Probabilidade, contemplando noções de conhecimento didático envolvendo alguma(s) das seis facetas.

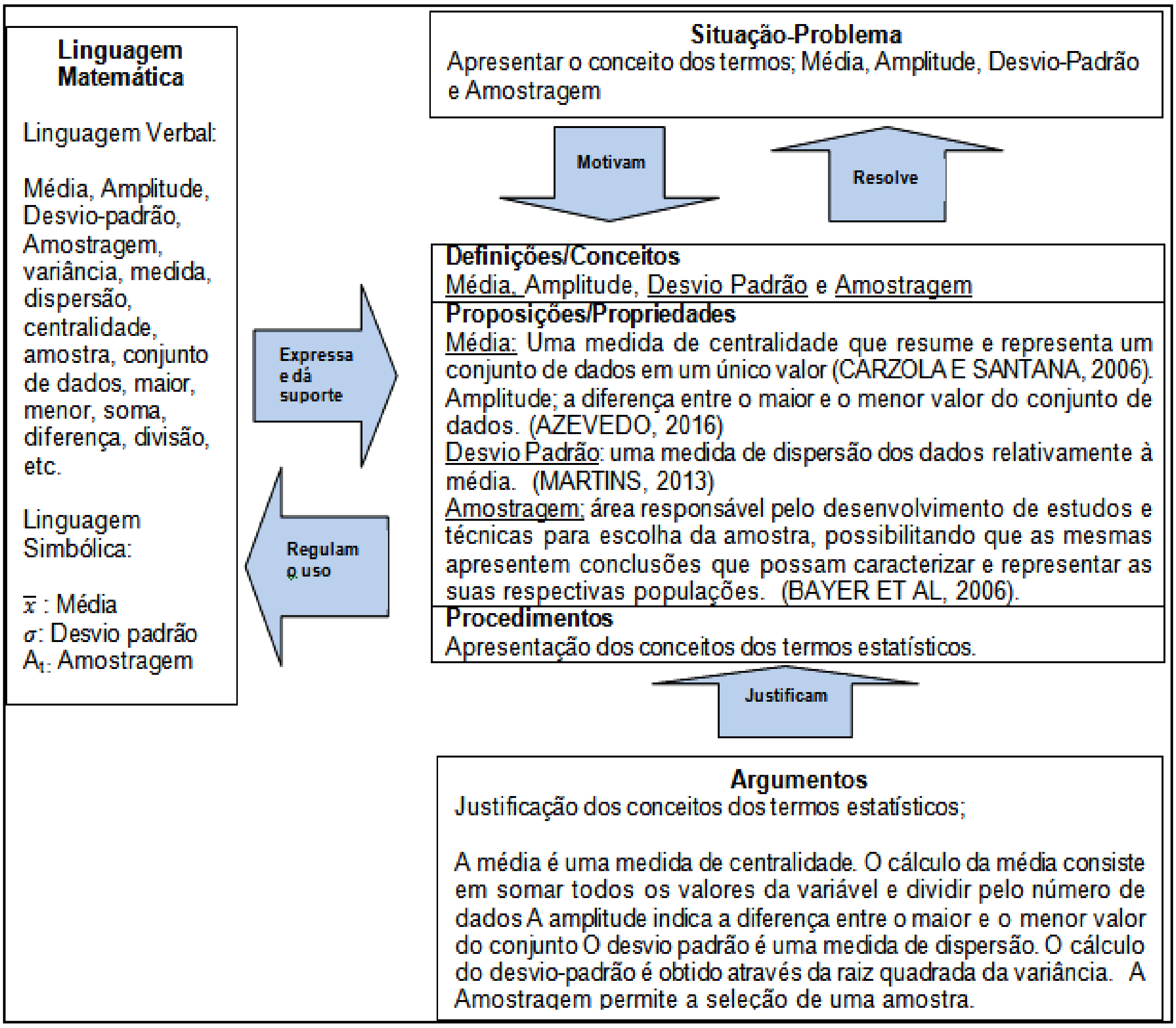
Resposta Inadequada (RI) - Quando o participante não consegue apresentar uma proposta de aula/atividade que contemple a relação entre Estatística e a Probabilidade

Não Respondeu (NR) - Quando o participante não responde a questão.

3º) Conceitue os termos, utilizados em Estatística, a seguir:

- Média
- Amplitude
- Desvio padrão
- Amostragem

Figura 18 – Configuração Epistêmica da 3º Questão



Fonte: O autor, 2019.

A terceira questão se apresenta com o objetivo de analisar o conhecimento matemático Comum de conteúdo dos professores sobre alguns termos conceituais presentes na Estatística: Média, Amplitude, Desvio Padrão e Amostragem. Logo, para analisar essa questão a categorização das respostas será feita da maneira a seguir.

Resposta Adequada (RA) - Quando o participante conceitua de modo adequado todos os termos mencionados, apresentando noções de conhecimento matemático Comum sobre esses termos.

Resposta Parcialmente Adequada (RPA) - Quando o participante conceitua de modo adequado, apresentando noções de conhecimento matemático Comum, algum(s) dos termos mencionados.

Resposta Inadequada (RI) - Quando o participante não conceitua nenhum dos termos mencionados na questão.

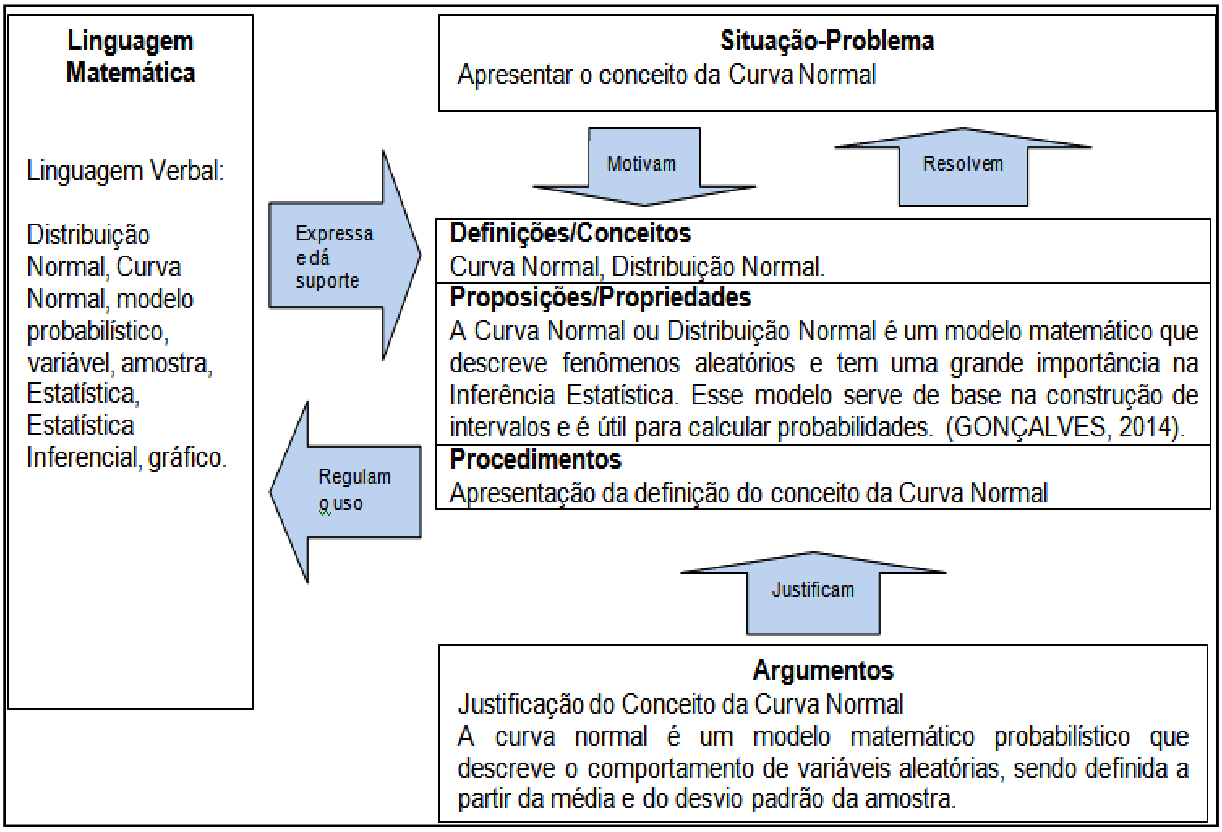
Não Respondeu (NR) - Quando o participante não responde a questão.

4ª)

a) De que modo você conceitua a Distribuição Normal ou Curva Normal?

b) Acreditas que a Distribuição Normal ou Curva Normal deve ser trabalhada com os estudantes na etapa de escolarização do Ensino Médio? Justifique sua resposta

Figura 19 – Configuração Epistêmica da 4º Questão – Alternativa A



Fonte: O autor, 2019.

A quarta questão contempla duas alternativas. A primeira tem por objetivo analisar o conhecimento matemático Comum e o conhecimento Epistêmico dos professores sobre a Curva Normal. Já a segunda tem por objetivo analisar o conhecimento didático dos mesmos, envolvendo a faceta Ecológica, ou seja, conhecimento sobre o currículo de matemática para o ensino e abordagem da Curva Normal no Ensino Médio da Educação Básica. Desse modo, a categorização será feita da seguinte forma:

Categorizações de Análise da Questão 4 - alternativa A:

Resposta Adequada (RA) - Quando o participante apresenta noções de conhecimento matemático Comum e conhecimento Epistêmico sobre o conceito da Curva Normal.
Resposta Adequada (RPA) - Quando o participante apresenta noções de conhecimento matemático Comum ou conhecimento Epistêmico sobre o conceito da Curva Normal.
Resposta Inadequada (RI) - Quando o participante não apresenta noções de conhecimento matemático Comum e conhecimento Epistêmico sobre o conceito da Curva Normal.
(NR) - Quando o participante não responde a questão.

Categorizações de Análise da Questão 4 - alternativa B:

Resposta Adequada (RA) - Quando o participante acredita que a Curva Normal deve ser ensinada no Ensino Médio e justifica sua resposta apresentando noções de conhecimento didático envolvendo a faceta Ecológica.
Resposta Parcialmente Adequada (RPA) - Quando o participante acredita que a Curva Normal deve ser ensinada no Ensino Médio, mas não justifica sua resposta apresentando noções de conhecimento didático envolvendo a faceta Ecológica.
Resposta Inadequada (RI) - Quando o participante não acredita que a Curva Normal deve ser ensinada no Ensino Médio e não justifica a sua resposta.
Não Respondeu (NR) - Quando o participante não responde a questão.

5º) Foi medida a temperatura (em graus Celsius) em duas cidades no horário das 6:00 da manhã e os resultados estão apresentados nas Figuras a e b.

Figura a - Medidas de temperatura da cidade A no período de 46 dias.

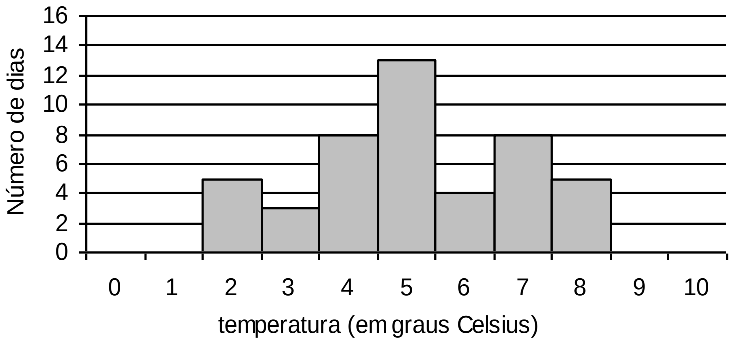
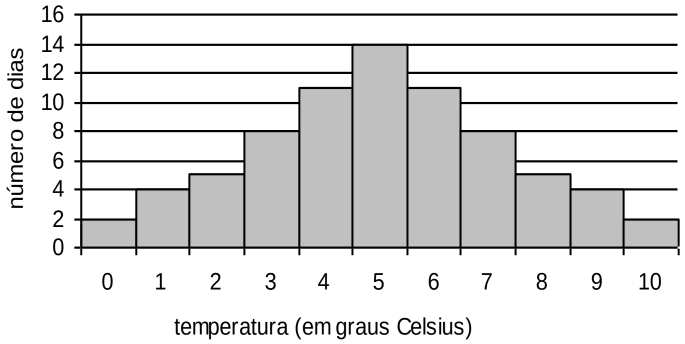


Figura b - Medidas de temperatura da cidade B no período de 74 dias



Sabendo que a média da temperatura das duas cidades é 5, **é CORRETO** afirmar que:

(a) O desvio padrão da temperatura é maior na cidade A, pois o gráfico tem um formato irregular.

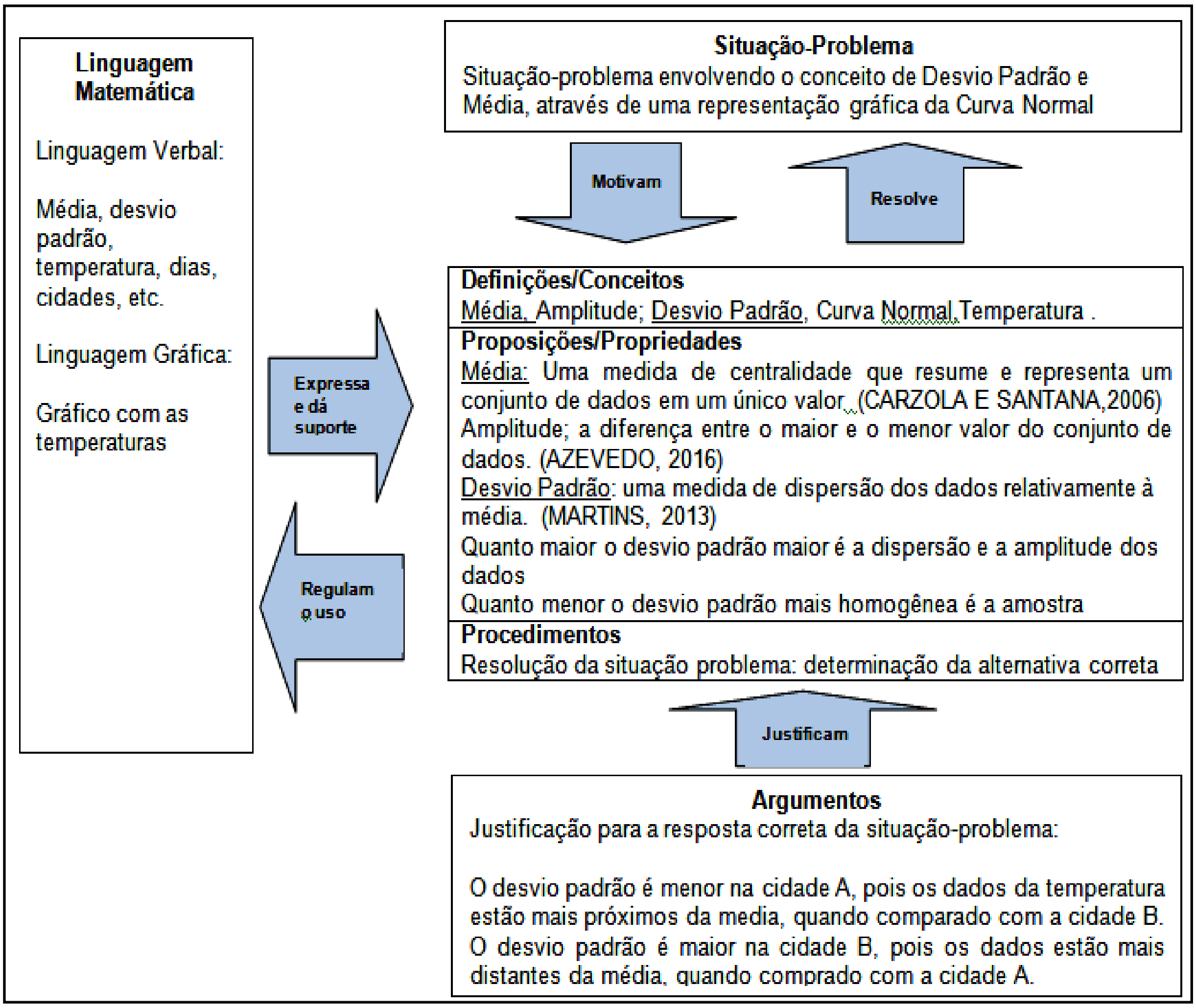
(b) O desvio padrão da temperatura é maior na cidade B, pois a menor temperatura foi zero e a maior temperatura foi 10.

(c) O desvio padrão da temperatura é menor em B, porque na maioria dos dias a temperatura ficou perto de 5.

(d) O desvio padrão da temperatura é menor em A, porque na maioria dos dias não houve temperaturas abaixo de 2 e nem acima de 9.

(e) O desvio padrão é menor em A, pois na maioria dos dias a temperatura ficou próxima de cinco e não houve dias com temperaturas abaixo de 2 e nem acima de 9.

Figura 20 – Configuração Epistêmica da 5º Questão



Fonte: O autor, 2019.

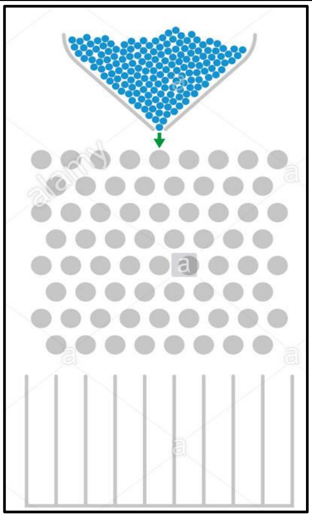
Na quinta questão, por meio de uma situação-problema envolvendo representações gráficas, sendo uma delas, uma Curva Normal, o objetivo é a análise do conhecimento matemático Comum dos professores sobre o conceito de desvio-padrão e média. Seguem suas categorizações:

Resposta Adequada (RA) - Quando o participante assinala a alternativa contendo a resposta correta da questão.

Resposta Inadequada (RI) - Quando o participante assinala uma alternativa que não contém a resposta correta da questão.

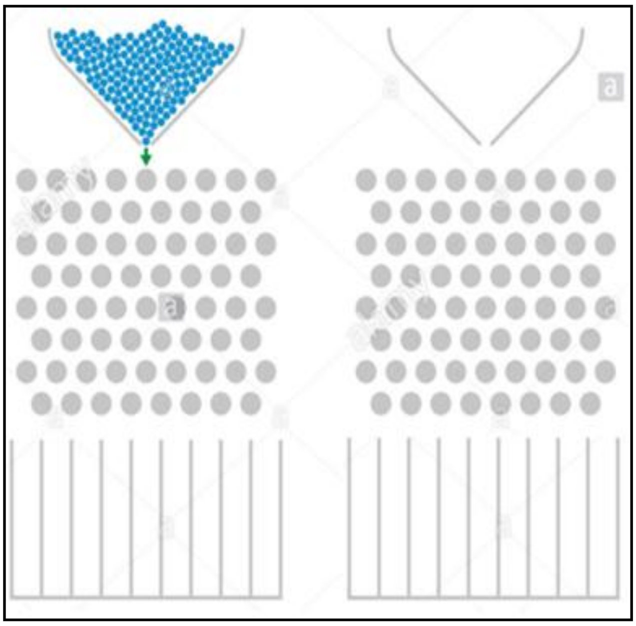
Não Respondeu (NR) - Quando o participante não responde a questão.

6º)



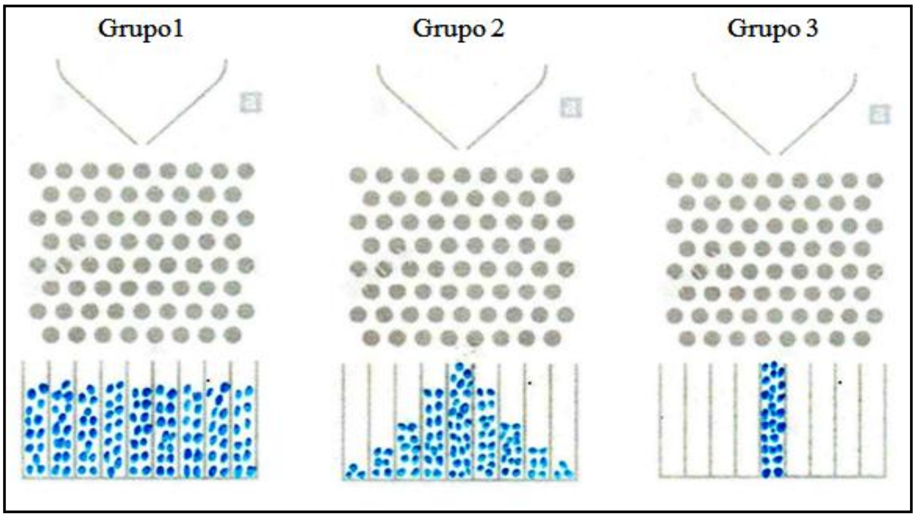
Vamos introduzir bolas em tabuleiro retangular como este. Em seu interior há obstáculos circulares de cor cinza, como mostra a figura. O tabuleiro é colocado verticalmente de forma que, quando se introduz uma bola, ela desliza entre os obstáculos até atingir a parte inferior do tabuleiro, formada por recipientes retangulares. Deste modo, durante sua trajetória de descida, a bola pode se chocar com alguns dos obstáculos circulares e se dirigir para a direita ou para esquerda para, em seguida, tropeçar de novo e mudar de direção até chegar a um dos recipientes retangulares na parte inferior da tabuleiro e parar.

a) Você pode fazer uma distribuição de como as bolas ficaram organizadas nas recipientes retangulares finais, após todas as bolas terem caído?



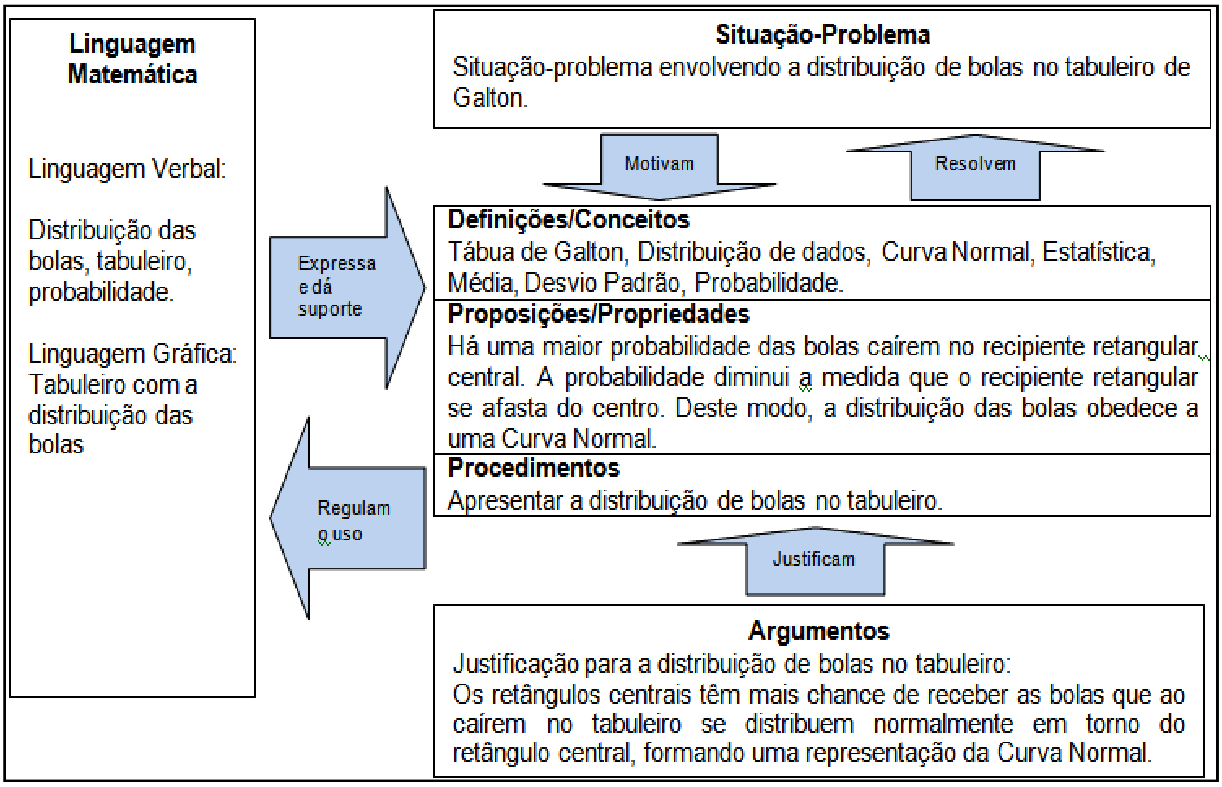
Fonte: Furian, 2013.

b) Professor(a), imagine que você está ensinando Matemática em uma turma do Ensino Médio e colocastes este problema anterior para os alunos resolverem. A seguir, estão as respostas de três grupos diferentes. A partir das respostas apresentadas, como você prosseguiria com a discussão em classe?



Fonte: O autor, 2019.

Figura 21 – Configuração Epistêmica da 6 º Questão – Alternativa A



Fonte: O autor, 2019.

Por fim, a questão 6 contempla duas alternativas. A primeira tem por objetivo analisar o conhecimento matemático Comum dos professores sobre a Curva Normal, através de uma situação problema envolvendo o tabuleiro de Galton, dispositivo desenvolvido pelo matemático inglês Francis Galton, que demonstra em sua funcionalidade, a Distribuição Normal. A segunda alternativa, por sua vez, tem por objetivo analisar o conhecimento didático envolvendo todas as seis facetas: Epistêmica, Cognitiva, Afetiva, Mediacional, Interacional e Ecológica dos professores ao indagar aos mesmos como prosseguiriam a discussão desse tema, em sala de aula, a partir de respostas de grupos de estudantes a mesma situação problema. Diante disso, seguem as categorias de análise para essa questão:

Categorizações de Análise da Questão 6 - alternativa A:

Resposta Adequada (RA) - Quando o participante apresenta a distribuição das bolas em forma de uma Curva Normal.
Resposta Inadequada (RI) - Quando o participante apresenta a distribuição das bolas não obedecendo a uma Curva Normal.
Não Respondeu (NR) - Quando o participante não responde a questão.

Categorizações de Análise da Questão 6 - alternativa B:

Resposta Adequada (RA) - Quando o participante consegue mencionar a forma como prosseguiria a discussão com a classe, apresentando noções de conhecimento didático envolvendo todas as seis facetas, contemplando as respostas dos três grupos.
Resposta Parcialmente Adequada (RPA) - Quando o participante consegue mencionar a forma como prosseguiria a discussão com a classe, apresentando noções de conhecimento didático envolvendo alguma(s) da(s) seis faceta(s), contemplando as respostas dos três grupos.
Resposta Inadequada (RI) - Quando o participante diz não saber a forma como prosseguiria a discussão com a classe.
Não Respondeu (NR)- Quando o participante não responde a questão.

6.4.2 Atividades do Encontro Formativo

Atividade 1

1º Caro participante, para darmos início a nossa formação, reúna-se em dupla e realize os seguintes procedimentos:

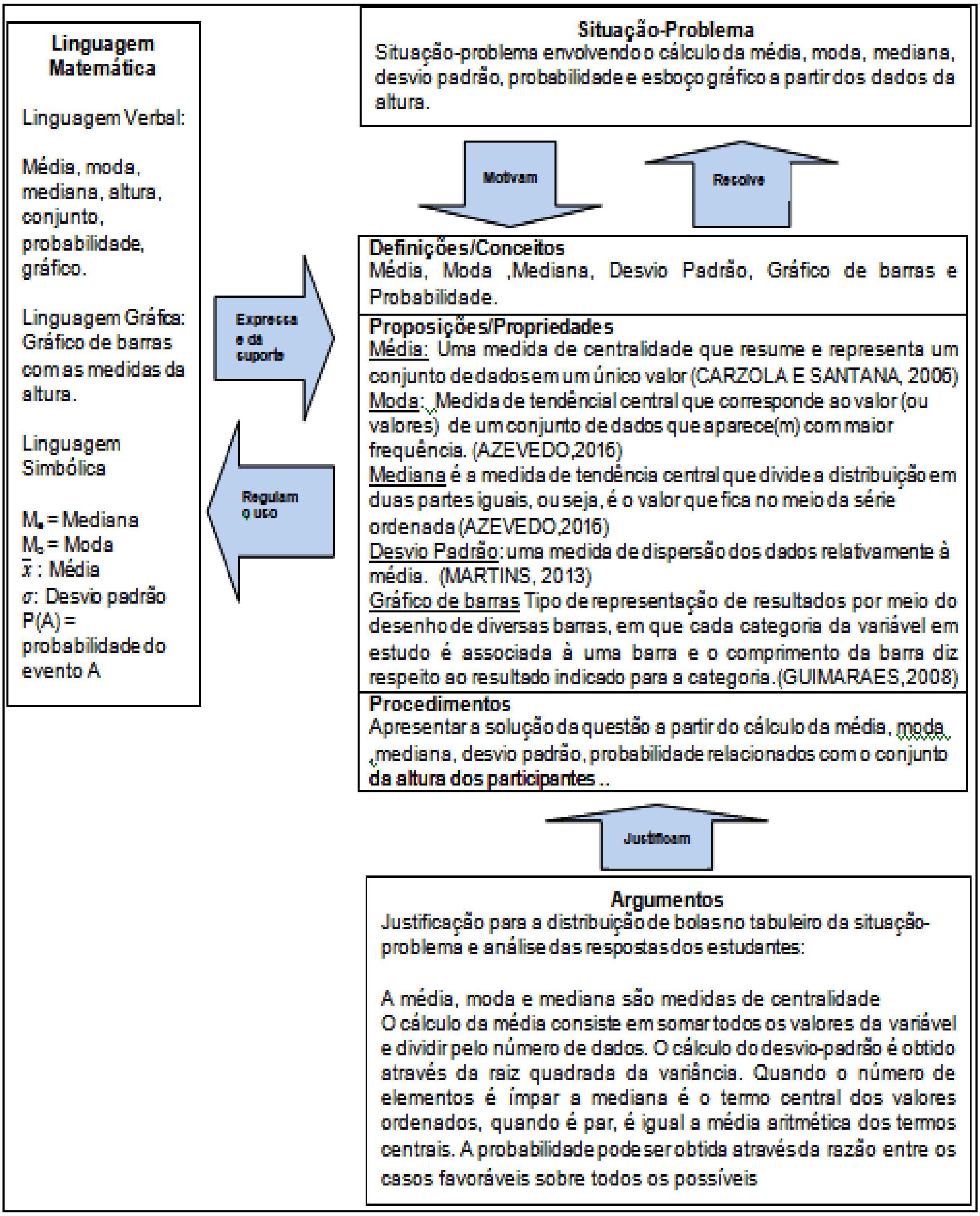
a) Preencha seu nome e sua altura (cm) em cada um dos quadros distribuídos as duplas de participantes, de modo que os integrantes de todas as duplas tenham acesso às informações solicitadas de todos os participantes desse estudo.

b) Com a dupla em que você está fazendo parte, determine a Média, a Moda, a Mediana e o Desvio-Padrão de todas as alturas (cm) informadas.

c) Esbocem em um gráfico de barras as medidas das alturas (cm) dos participantes.

2º Analisando as informações fornecidas, se escolhermos uma pessoa dentre todos os participantes ao acaso, qual a probabilidade de que ela possua a altura maior que a média do grupo?

Figura 22 – Configuração Epistêmica da Atividade 1



Fonte: O autor, 2019.

A atividade 1 se apresentou com o objetivo de iniciarmos as reflexões e discussões sobre o conhecimento matemático Comum relativo a alguns conceitos estatísticos e probabilísticos. Para tanto, solicitamos que cada professor fornecesse a sua altura (cm) e em seguida resolvesse as questões que envolviam o cálculo da média, moda, mediana, desvio padrão, o esboço de um gráfico de barras e o cálculo de probabilidade. A partir disso, para analisar essa primeira atividade a categorização das respostas será feita da seguinte maneira:

Primeira Questão- Alternativa A

Na primeira questão, a análise da alternativa A não se apresenta categorizada por contemplar respostas pessoais. Nela, objetivamos o levantamento de dados reais, através de uma variável contínua, isto é, a altura (cm) de cada um dos participantes. Desse modo, cada um foi convidado a preencher, em um quadro impresso, o seu nome e a sua altura (cm), de modo que os integrantes de todas as duplas tiveram acesso às informações solicitadas de todos os professores participantes do estudo. A partir desses dados, cada dupla deu prosseguimento a atividade 1 respondendo as demais alternativas da 1º questão e a questão dois.

Primeira Questão- Alternativa B

Resposta Adequada (RA) - Quando o participante determina de modo adequado a Média, a Moda, a Mediana e o Desvio-Padrão de todas as alturas (cm)
Resposta Parcialmente Adequada (RPA) - Quando o participante determina de modo adequado a Média, a Moda, a Mediana ou Desvio-Padrão de todas as alturas (cm)
Resposta Inadequada (RI) - Quando o participante não determina o valor de nenhum dos termos estatísticos mencionados na questão.
Não Respondeu (NR) - Quando o participante não responde a questão.

Primeira Questão- Alternativa C

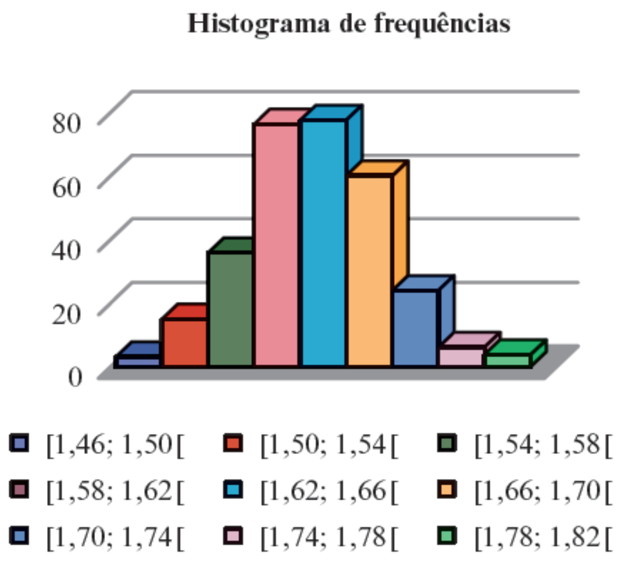
Resposta Adequada (RA) - Quando o participante esboça de modo adequado o gráfico de barras com as alturas (cm) dos participantes
Resposta Inadequada (RI) - Quando o participante não esboça de modo adequado o gráfico de barras com as alturas (cm) dos participantes
Não Respondeu (NR) - Quando o participante não responde a questão.

Segunda Questão:

Resposta Adequada (RA) - Quando o participante determina modo adequado a probabilidade de se escolher uma pessoa ao acaso, dentre todos os participantes, e ela possuir a altura maior que a média do grupo
Resposta Inadequada (RI) - Quando o participante determina modo adequado a probabilidade de se escolher uma pessoa ao acaso, dentre todos os participantes, e ela possuir a altura maior que a média do grupo.
Não Respondeu (NR) - Quando o participante não responde a questão.

Atividade 2

1º) O gráfico, a seguir, representa a distribuição das alturas(m) de uma amostra de 307 pessoas. A partir dessas informações, é correto afirmar que se escolhemos uma pessoa dessa amostra ao acaso, a maior probabilidade é que ela tenha a altura entre [1, 62 ; 1,66 [? Justifique sua resposta!



Fonte: São Paulo, 2014.

2º Em uma escola, um professor realizou um estudo em que foi medida a altura, em cm, de todos os estudantes do Ensino Fundamental. A tabela, a seguir, apresenta algumas estatísticas obtidas através desse estudo:

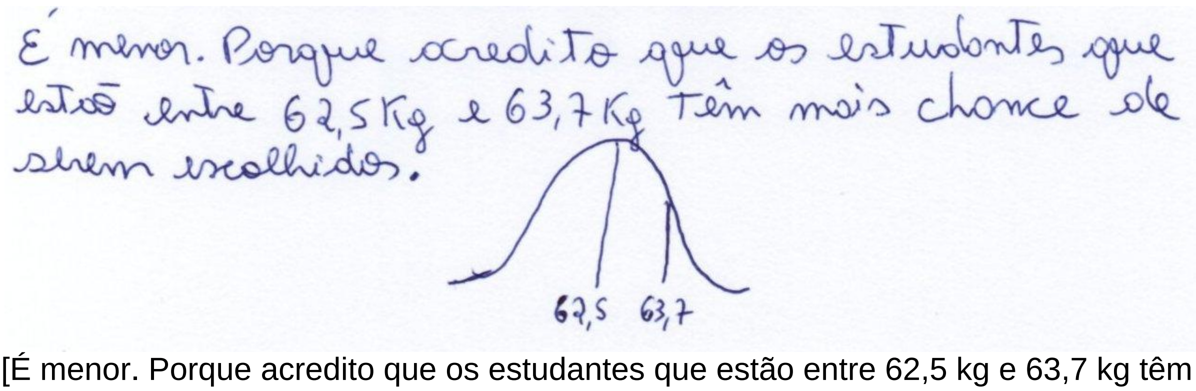
Medidas Estatísticas \ Nível de escolaridade	Ensino Fundamental
Média	155 cm
Desvio Padrão	4 cm

Fonte: O autor, 2019.

A partir dessas informações, determine:

a) Se o professor escolher um aluno do Ensino Fundamental ao acaso, qual a probabilidade que o aluno escolhido tenha a altura entre 155 cm e 164 cm?
b) qual a probabilidade de um aluno do Ensino Fundamental ter a altura maior ou igual a 155 cm?

3º Caros participantes, imaginem que vocês estão ensinando a Curva Normal em uma turma do Ensino Médio. A seguir, está a resposta de um estudante a um problema envolvendo este tema:
Questão: Os pesos dos alunos de uma escola distribuem-se normalmente, com média aritmética igual a 62,5 kg e desvio padrão igual a 1,2 kg. Se a probabilidade de escolhermos, ao acaso, um aluno dessa escola que possua o peso no intervalo entre 62,5 kg a 63,7 kg (62,5 kg + 1,2 kg) é igual aproximadamente 34%, a probabilidade de alunos que, provavelmente, encontram-se entre 62,5 kg a 61,3 kg (62,5kg – 1,2kg) é igual, maior, ou menor que 34% ? Por quê?

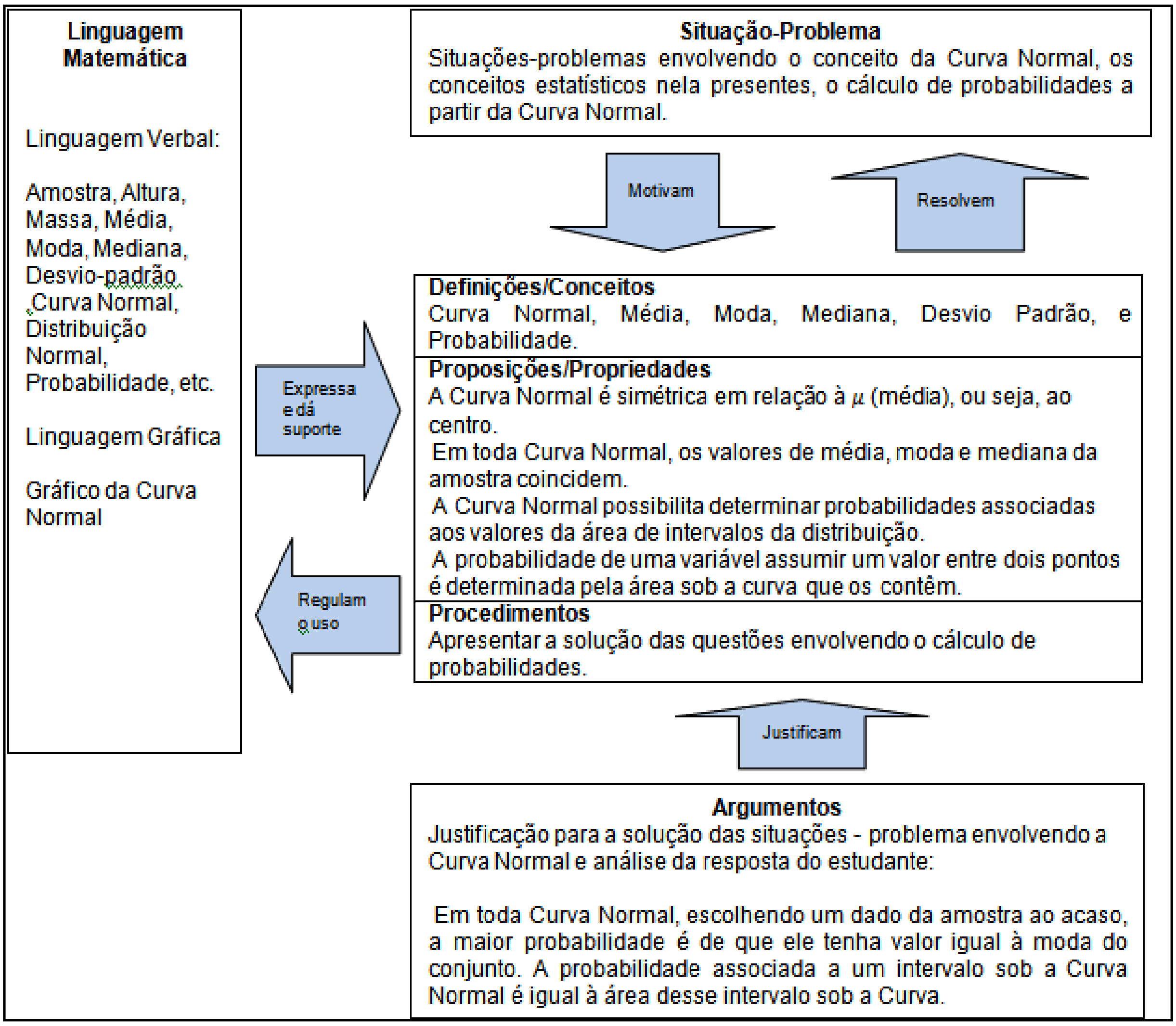


[É menor. Porque acredito que os estudantes que estão entre 62,5 kg e 63,7 kg têm mais chance de seres escolhidos.]

Fonte: O autor, 2019.

Professores, quais seriam suas avaliações e explicações para a resposta desse estudante? Como vocês procederiam com a discussão em classe diante da resposta apresentada?

Figura 23 – Configuração Epistêmica da Atividade 2 – 1º e 2º Questões



Fonte: O autor, 2019.

A atividade 2 foi realizada após a sistematização teórica e envolveu três questões. As duas primeiras tiveram o objetivo de analisar o conhecimento matemático Comum e o conhecimento Epistêmico relativo ao conceito da Curva Normal, alguns conceitos estatísticos e probabilísticos presentes na mesma e o cálculo de probabilidades associado a intervalos sob a Curva Normal. A Terceira questão teve como objetivo analisar o conhecimento didático envolvendo todas as seis facetas: Epistêmica, Cognitiva, Afetiva, Mediacional, Interacional e Ecológica dos professores a partir de uma resposta de um estudante a uma situação problema envolvendo o conceito da Curva Normal. Diante disso, seguem as categorias de análise para essas questões:

Primeira Questão:

Resposta Adequada (RA) - Quando o participante responde positivamente e justifica sua resposta, indicando que se escolhermos uma pessoa da amostra ao acaso, a maior probabilidade é que ela tenha a altura entre o intervalo [1, 62 ; 1,66 [, por ser esse intervalo a moda da amostra.
Resposta Adequada (RPA) - Quando o participante responde positivamente mas não justifica sua resposta.
Resposta Inadequada (RI) - Quando o participante responde negativamente e justifica não reconhecendo que se escolhermos uma pessoa da amostra ao acaso, a maior probabilidade é que ela tenha a altura entre o intervalo [1, 62 ; 1,66 [, por ser esse intervalo a moda da amostra.
Não Respondeu (NR) - Quando o participante não responde a questão.

Segunda Questão- Alternativa A:

Resposta Adequada (RA) - Quando o participante responde adequadamente a probabilidade de se escolher um aluno do Ensino Fundamental ao acaso e ter a altura entre 155 cm e 164 cm.
Resposta Adequada (RI) - Quando o participante não responde adequadamente a probabilidade de se escolher um aluno do Ensino Fundamental ao acaso e ter a altura entre 155 cm e 164 cm.
Não Respondeu (NR) - Quando o participante não responde a questão.

Segunda Questão- Alternativa B:

Resposta Adequada (RA) - Quando o participante responde adequadamente a probabilidade de se escolher um aluno do Ensino Fundamental ao acaso e ter a altura maior ou igual a 155 cm.
Resposta Adequada (RI) - Quando o participante não responde adequadamente a

probabilidade de se escolher um aluno do Ensino Fundamental ao acaso e ter a altura maior ou igual a 155 cm.
Não Respondeu (NR) - Quando o participante não responde a questão.

Terceira Questão:

Resposta Adequada (RA) - Quando o participante consegue avaliar e explicar a resposta do estudante e menciona a forma como prosseguiria a discussão com a classe, apresentando noções de conhecimento didático envolvendo todas as seis facetas.
Resposta Parcialmente Adequada (RPA) - Quando o participante consegue avaliar e explicar a resposta do estudante ou menciona a forma como prosseguiria a discussão com a classe, apresentando noções de conhecimento didático envolvendo alguma(s) das facetas.
Resposta Inadequada (RI) - Quando o participante diz não saber como avaliar e explicar a resposta do estudante e nem descreve a forma como prosseguiria a discussão com a classe.
Não Respondeu (NR) - Quando o participante não responde a questão.

Atividade 3

1º) Caro professor(a), diante do que estudamos nessa formação, quais as contribuições que a temática abordada e a sequência de atividades proporcionaram para o desenvolvimento de seus conhecimentos na perspectiva do:

a) Conhecimento Matemático

b) Conhecimento para o ensino desta temática

A análise dessa última atividade não se apresenta a partir da configuração epistêmica nem das categorizações pelo fato dela sustentar a pesquisa ao questionar os valores observados e descritos pelos professores diante da relevância desse estudo para construção e/ou ampliação dos seus conhecimentos matemáticos e didáticos. Portanto, cabe salientar que, nessa atividade as respostas são consideradas pessoais e foram apresentadas aqui de maneira a destacar a possível relevância, denotada pelos participantes, do estudo sobre o tema abordado, agregando valor ao mesmo.

Diante disso, apresentados os critérios de análise para os questionários utilizados nas duas etapas do nosso estudo, passaremos, no capítulo a seguir, a analisar e caracterizar os dados produzidos nessas etapas.

7 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Este Capítulo é destinado para a análise dos dados levantados nas duas etapas da pesquisa, o Estudo Diagnóstico e o Encontro Formativo. Aqui, passaremos a apresentar, analisar e discutir as respostas fornecidas pelos professores de Matemática do Ensino Médio, participantes deste estudo, aos questionários utilizados no Estudo Diagnóstico, de perfil docente e de conhecimentos didático-matemáticos relativos à inter-relação entre a Estatística e a Probabilidade através da Curva Normal, bem como aos questionários e atividades utilizados no Encontro Formativo. Além disso, também apresentaremos a transcrição e análise das gravações de áudios, com os registros das discussões e reflexões realizadas nessa última etapa da pesquisa.

7.1 Caracterização do Perfil Docente

Com intuito de levantar as características do perfil dos professores participantes do nosso estudo, utilizamos, nesta etapa, um questionário como instrumento de coleta de dados composto das sete seguintes perguntas: 1- Em qual curso de Ensino Superior você possui formação? 2 - Qual o ano de conclusão do seu curso de Ensino Superior? 3 - Quantos anos de atuação profissional você possui como professor? 4 - Quantos anos de atuação profissional você possui como professor do Ensino Médio? 5 - Há quanto tempo trabalha nesta escola? 6 - Você possui curso(s) de pós-graduação? Em caso afirmativo, qual (ais)? 7 - Em sua formação acadêmica, você cursou alguma(s) disciplina(s) ou curso que contemplasse a Estatística e a Probabilidade? Caso positivo, pode nos falar sobre a abordagem dessas disciplinas?

Assim, para uma melhor apresentação das respostas fornecidas pelos professores, dividiremos essa sessão em duas partes. Na primeira, apresentaremos um quadro que contempla o perfil dos professores, construído diante das respostas dadas pelos mesmos às seis primeiras questões do questionário. E, na segunda parte trouxemos uma observação às respostas dos professores referentes à sétima questão do referido questionário.

Tabela 1 – Caracterização do Perfil Docente

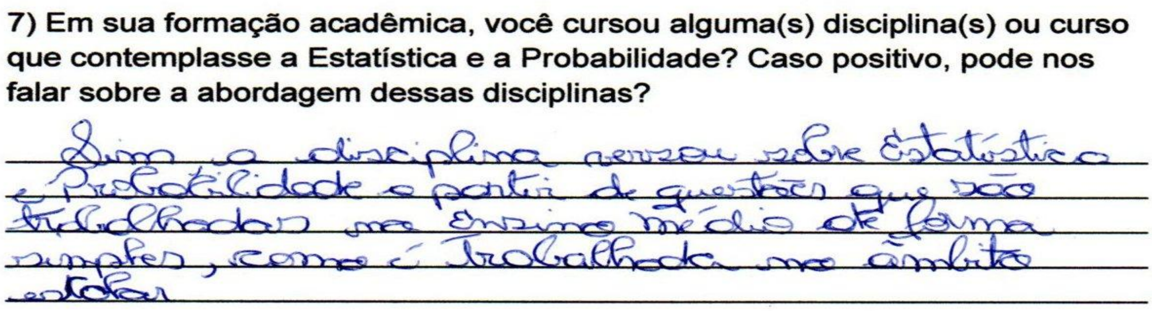
Especificação / Docente	Curso de Formação	Ano de conclusão do Curso de formação	Tempo de experiência de prática docente	Tempo de experiência no Ensino Médio	Tempo de Atuação na atual escola	Pós-Graduação
P_1	Licenciatura em Matemática	2015.1	6 anos	2 anos	2 anos	Sim
P_2	Licenciatura em Matemática	2015.2	2 anos	2 anos	6 meses	Não
P_3	Licenciatura em Matemática	1984.1	38 anos	38 anos	4 anos	Não
P_4	Licenciatura em Matemática	2007.2	10 anos	4 anos	4 anos	Sim
P_5	Licenciatura em Matemática	2016.2	2 anos	2 anos	2 anos	Sim
P_6	Licenciatura em Matemática	2005.2	15 anos	8 anos	4 meses	Sim
P_7	Licenciatura em Matemática	2012.2	8 anos	6 anos	2 anos	Sim
P_8	Licenciatura em Matemática	2019.1	5 anos	1 ano	1 ano	Não
P_9	Licenciatura em Matemática	2017.2	11 anos	4 anos	2 anos	Não
P_{10}	Licenciatura em Matemática	2017.2	6 anos	6 anos	5 anos	Não
P_{11}	Licenciatura em Matemática	2015.1	5 anos	3 anos	2 anos	Sim
P_{12}	Licenciatura em Matemática	2014.2	5 anos	4 anos	4 anos	Sim

Fonte: O autor, 2019.

Com a apresentação desse quadro, que corresponde a primeira parte de análise do perfil dos participantes desta pesquisa, destacamos que todos os 12 professores participantes possuem formação em Licenciatura em Matemática e têm pelo menos um ano de experiência de prática docente no Ensino Médio da Educação Básica. Além disso, sete desses professores possuem curso de pós-gradução, os professores P_1,P_4,P_5, P_6, P_7, P_{11}, P_{12} de especialização na área atuante e o professor P_1 possui formação em curso de Mestrado.

Em continuidade, a sétima questão foi apresentada aos professores participantes com o objetivo de entendermos se, em suas formações acadêmicas, teriam cursado alguma disciplina que contemplasse a Estatística e a Probabilidade. Nesse sentido, para observação da segunda parte, trouxemos dois excertos[1] das respostas dos professores P_1 e P_{10} a essa questão.

Figura 24 – Resposta do professor P_1 à sétima questão



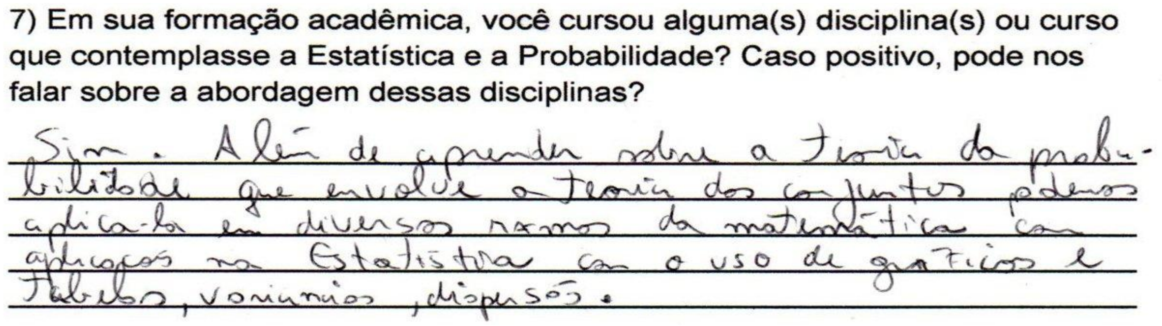
7) Em sua formação acadêmica, você cursou alguma(s) disciplina(s) ou curso que contemplasse a Estatística e a Probabilidade? Caso positivo, pode nos falar sobre a abordagem dessas disciplinas?

Sim a disciplina versou sobre Estatística e Probabilidade a partir de questões que são trabalhadas no Ensino Médio de forma simples, como é trabalhada no âmbito escolar

[Sim, a disciplina versou sobre Estatística e Probabilidade a partir de questões que são trabalhadas no Ensino Médio de forma simples, como é trabalhada no âmbito escolar.]

Fonte: Professor P_1, 2019.

Figura 25 – Resposta do professor P_{10} à sétima questão



7) Em sua formação acadêmica, você cursou alguma(s) disciplina(s) ou curso que contemplasse a Estatística e a Probabilidade? Caso positivo, pode nos falar sobre a abordagem dessas disciplinas?

Sim. Além de aprender sobre a teoria da probabilidade que envolve a teoria dos conjuntos podemos aplicá-la em diversos ramos da matemática com aplicações na Estatística com o uso de gráficos e tabelas, variâncias, dispersões.

[Sim.. Além de aprender sobre a teoria da probabilidade que envolve a teoria dos conjuntos, podemos aplicá-la em diversos ramos da matemática, com aplicações na Estatística com o uso de gráficos e tabelas, variâncias e dispersões.]

Fonte: Professor P_{10}, 2019.

Ao analisarmos as respostas de todos os professores, constatamos que o professor P_6 foi o único a afirmar que em sua formação não cursou alguma disciplina

[1]Para melhor visualização/compreensão, apresenta-se, após os excertos, a reescrita das respostas dos participantes dessa pesquisa.

que contemplasse a Estatística e a Probabilidade. Assim, em relação aos demais, percebemos que as suas respostas se assemelham a apresentada pelos Professores P_1 e P_{10}. Os professores indicaram que, em suas respectivas formações acadêmicas, as disciplinas voltadas para a Estatística e a Probabilidade foram pautadas através de uma abordagem simples, com aulas expositivas, voltadas para a abordagem teórica, ênfase na análise de gráficos, organização de dados e aplicação de técnicas e algoritmos operatórios para a resolução de listas e exercícios e problemas, cenário semelhante aos discutidos Santana (2016) e Batanero e Díaz (2012), ao realizarem estudos sobre, respectivamente, o ensino de Estatística e Probabilidade na Educação Básica.

Além disso, a maioria dos professores relatou que tais disciplinas não contemplaram a relação entre a Estatística e a Probabilidade e, deste modo, foram abordadas de forma independentes. Diante disso, acreditamos que esse dado sinaliza que, possivelmente, essas disciplinas, pelo modo que foram pautadas, podem não ter contribuído de maneira satisfatória para a formação acadêmica desses professores, na perspectiva de não apenas corroborar com aplicação e o tratamento de técnicas e algoritmos operatórios, mas também com a apropriação dos reais significados dos conceitos estatísticos e probabilísticos abarcados em diferentes contextos, a relação entre eles e suas diversas aplicações.

Diante do exposto, com base no perfil docente delineado pelas respostas dos professores, passaremos a analisar, na seção a seguir, o Questionário Diagnóstico aplicado aos mesmos.

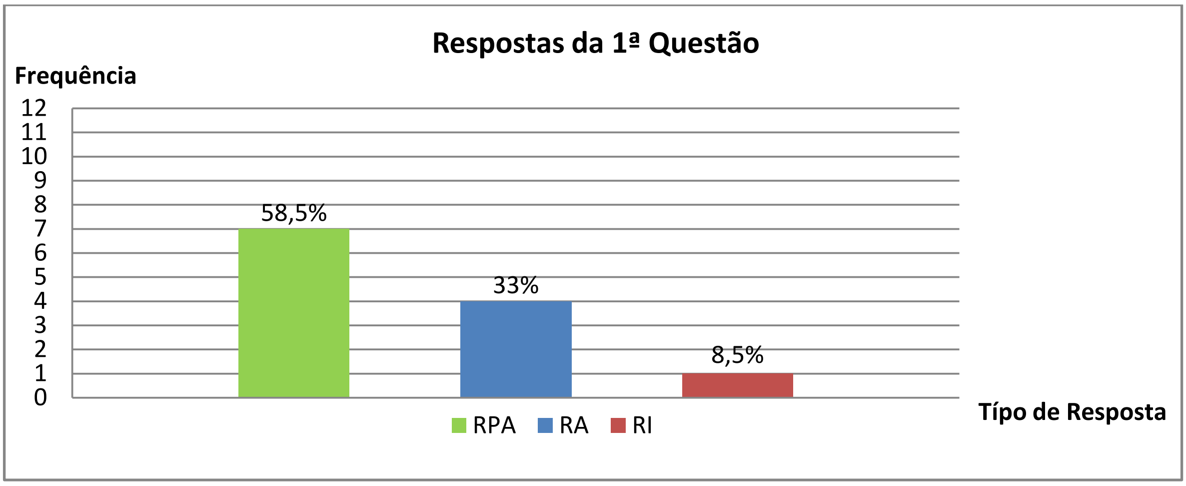
7.2 Análise do Questionário Diagnóstico

Para a análise das respostas dos professores participantes do nosso estudo ao Questionário Diagnóstico acerca dos conhecimentos didático-matemáticos sobre a inter-relação entre a Estatística e Probabilidade por meio da Curva Normal, tomaremos como base nas configurações epistêmicas e as categorias de análise apresentadas e descritas anteriormente na seção “Critérios de Análise”.

Análise da 1ª questão

Nessa questão, indagamos aos professores se eles acreditam que há alguma relação entre a Estatística e a Probabilidade, e pedimos para que, caso a resposta fosse positiva, explicassem como compreendem essa relação. Deste modo, objetivamos investigar o conhecimento Epistêmico sobre a relação entre essas áreas de conhecimento. Nessa perspectiva, o gráfico, a seguir, apresenta a classificação das respostas dos 12 professores para essa questão.

Gráfico 1 – Respostas dos professores à 1ª questão

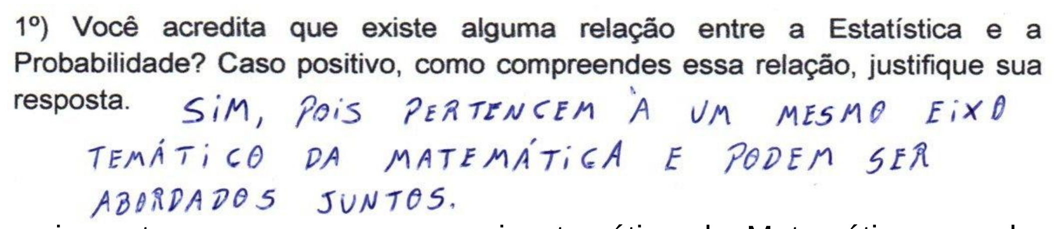


Fonte: O autor, 2019.

Observa-se que 7 professores responderam parcialmente adequado por afirmar que acreditam que há uma relação entre a Estatística e a Probabilidade, mas não apresentaram, em suas justificativas, noções envolvendo o conhecimento Epistêmico sobre a delimitação teórica da supracitada relação, conforme está descrita na análise epistêmica dessa questão e no capítulo 2 deste estudo. Em termos de exemplificação, esse tipo de categorização pode ser observado na resposta do professor P_2 apresentada a seguir:

.

Figura 26 – Resposta RPA do professor P_2 à 1ª questão

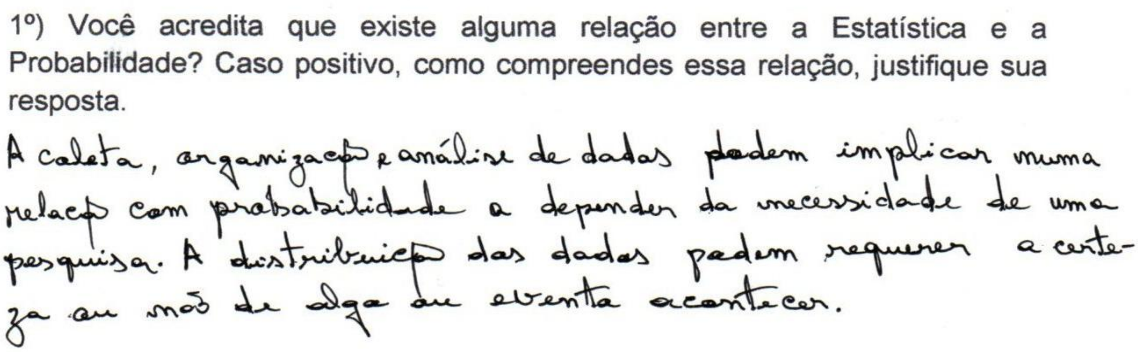

1º) Você acredita que existe alguma relação entre a Estatística e a Probabilidade? Caso positivo, como compreendes essa relação, justifique sua resposta. SIM, POIS PERTENCEM À UM MESMO EIXO TEMÁTICO DA MATEMÁTICA E PODEM SER ABORDADOS JUNTOS.

[Sim, pois pertencem a um mesmo eixo temático da Matemática e podem ser abordados juntos.]

Fonte: Professor P_2, 2019.

Em contrapartida, constatamos que 4 professores responderam de modo adequado por, em suas justificativas, apresentarem noções do conhecimento Epistêmico sobre a relação teórica entre a Estatística e a Probabilidade. De modo geral, os mesmos compreendem que a Estatística se ocupa da coleta, organização e o tratamento de dados e que através da distribuição desses dados estatísticos podemos realizar análises e cálculos de probabilidades, como visto no modelo da Curva Normal. A imagem a seguir, exemplifica a resposta adequada do professor P_4 para essa questão.

Figura 27 – Resposta RA do professor P_4 à 1ª questão


1º) Você acredita que existe alguma relação entre a Estatística e a Probabilidade? Caso positivo, como compreendes essa relação, justifique sua resposta.

A coleta, organização e análise de dados podem implicar numa relação com probabilidade a depender da necessidade de uma pesquisa. A distribuição dos dados podem requerer a certeza ou não de algo ou evento acontecer.

[A coleta, organização e análise de dados podem exemplificar numa relação com a probabilidade a depender da necessidade de uma pesquisa. A distribuição de dados pode requerer a certeza ou não de algo ou evento acontecer.]

Fonte: Professor P_4, 2019.

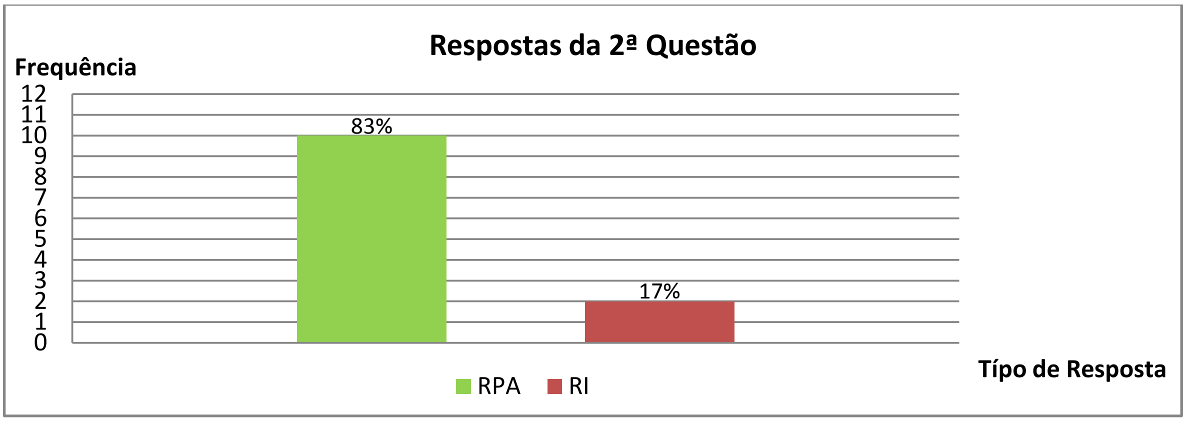
Além disso, 1 professor afirmou não saber se há relação entre a Estatística e a Probabilidade, configurando sua resposta como inadequada. Diante das respostas dos 12 professores apresentadas, em linhas gerais, evidencia-se que a maioria deles apesar de afirmar que acreditam na relação entre a Estatística e a Probabilidade não compreendia como se dá essa relação. Desse modo, esse dado pode sinalizar que os mesmos não tiveram uma formação acadêmica voltada para essa relação conceitual e, por conseguinte, possivelmente, não abordavam essa relação durante suas aulas na escolarização básica.

Análise da 2ª questão

Na segunda questão do nosso questionário diagnóstico, solicitamos aos professores que apresentassem uma proposta de aula para o Ensino Médio que contemplasse a articulação entre a Estatística e a Probabilidade. Deste modo, através da proposta de aula a ser apresentada, objetivamos investigar o conhecimento didático desses professores envolvendo todas as seis facetas: Epistêmica, Cognitiva e Afetiva Interacional, Mediacional e Ecológica, as quais de acordo com Godino e Pino-Fan (2015) devem fazer parte do domínio do professor de Matemática para o exercício sua prática docente.

Nessa direção, ao analisarmos a respostas dos professores, constatamos que 2 responderam inadequadamente (RI) por afirmarem não saber apresentar uma proposta de aula que articulasse a Estatística com a Probabilidade no Ensino Médio. Além disso, verificamos que os outros 10 professores responderam parcialmente adequado (RPA), por apresentarem noções de conhecimento didático envolvendo algumas das seis facetas destacadas anteriormente.

Gráfico 2 – Respostas dos professores à 2ª questão



Fonte: O autor, 2019.

Em linhas gerais, os professores que responderam parcialmente adequado, em suas respectivas propostas de aulas, contemplaram de modo razoável noções de conhecimento didático envolvendo apenas as facetas Mediacional, Ecológica e Epistêmica, não evidenciando noções de conhecimento que envolvesse as facetas Cognitiva, Afetiva e Interacional, ou seja, não apresentaram a forma como eles buscariam interagir com os estudantes e analisariam as crenças e a aprendizagem dos mesmos. Para exemplificar esse tipo de categorização apresentamos, a seguir, a resposta do professor P_2.

Figura 28 – Resposta RPA do professor P_2 à 2ª questão

2º) De que forma você abordaria uma proposta de aula articulando a Estatística com a Probabilidade em uma aula de Matemática com estudantes do Ensino Médio? Se desejar, pode incluir exemplos de atividades.

PODERIA SER TRABALHADA UMA ATIVIDADE PARA SE CALCULAR PROBABILIDADES DE UM DETERMINADO EVEN QUE IRIA VARIAR DE ACORDO COM O NÚMERO DE ELEMENTOS DO ESPAÇO AMOSTRAL, GERANDO DIFERE TES PROBABILIDADES E ESSES DIFERENTES RESULTADO DEVERIAM SER MOSTRADOS ATRAVÉS DE GRÁFICOS OU TABELAS.

[Poderia ser trabalhada uma atividade para se calcular probabilidades de um determinado evento que iria variar de acordo com o número de elementos do espaço amostral, gerando diferentes probabilidades e esses diferentes resultados deveriam ser abordados através de gráficos ou tabelas.]

Fonte: Professor P_2, 2019.

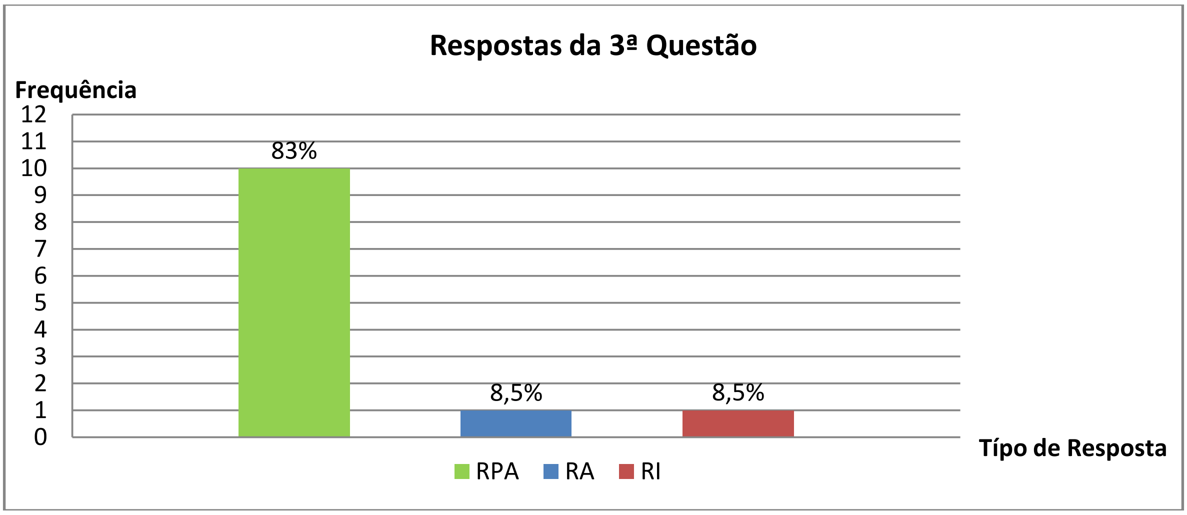
Como podemos observar, o professor P_2 apresenta uma proposta de aula pautada na aplicação de uma atividade como recurso didático para a articulação entre a Estatística e a Probabilidade através da abordagem de conceitos probabilísticos, como o número de elementos do espaço amostral, cálculos de probabilidades de eventos e a representação dos mesmos por meio de gráficos e tabelas. É possível notar, de modo razoável, a presença de noções de conhecimento didático envolvendo a faceta Mediacional, ao utilizar uma atividade como recurso didático, a faceta Ecológica, ao demonstrar noções do currículo de Matemática para o Ensino Médio sobre estudo de Probabilidade e a faceta Epistêmica, ao relacionar a Estatística e a Probabilidade através da atividade proposta.

Além disso, destacamos que os demais professores apresentaram propostas de aulas semelhantes, ou seja, com apenas a aplicação de uma atividade, envolvendo o contexto dos estudantes, como recurso didático para a abordagem da articulação da Estatística e a Probabilidade. Esse dado sinaliza que os professores demonstraram ter noções de conhecimento didático envolvendo algumas das facetas para o ensino de Estatística e Probabilidade, mas que possivelmente não eram habituados a ensinar a relação entre essas duas áreas, e, em particular, a Estatística Inferencial. As análises das respostas dos docentes aqui observadas corroboram, em parte, com as conclusões delineadas na primeira questão. As lacunas no conhecimento matemático Comum ou no conhecimento Epistêmico sobre a relação entre a Estatística e a Probabilidade podem acarretar em possíveis dificuldades para o ensino deste tema em sua prática docente. Esse dado pode ainda estar relacionado com a formação acadêmica desses professores, tendo em vista que os mesmos relataram que durante suas formações acadêmicas, a disciplinas que tratavam do tema não contemplaram a abordagem da supracitada relação.

Análise da 3ª questão

Na terceira questão, solicitamos aos professores que conceituassem os termos estatísticos: Média, Amplitude, Desvio Padrão e Amostragem. Deste modo, objetivamos investigar o conhecimento matemático Comum dos professores sobre esses termos estatísticos que estão relacionados com o modelo da Curva Normal. Nesse sentido, ao analisarmos as respostas dos 12 professores, verificamos que 1 professor respondeu adequadamente por conceituar de modo adequado todos os 4 termos estatísticos abordados na questão, 1 professor respondeu inadequado por informar não saber conceituar os termos estatísticos e os 10 professores restantes responderam parcialmente adequado por apresentarem de modo adequado o conceito de algum(ns) dos referidos termos estatísticos.

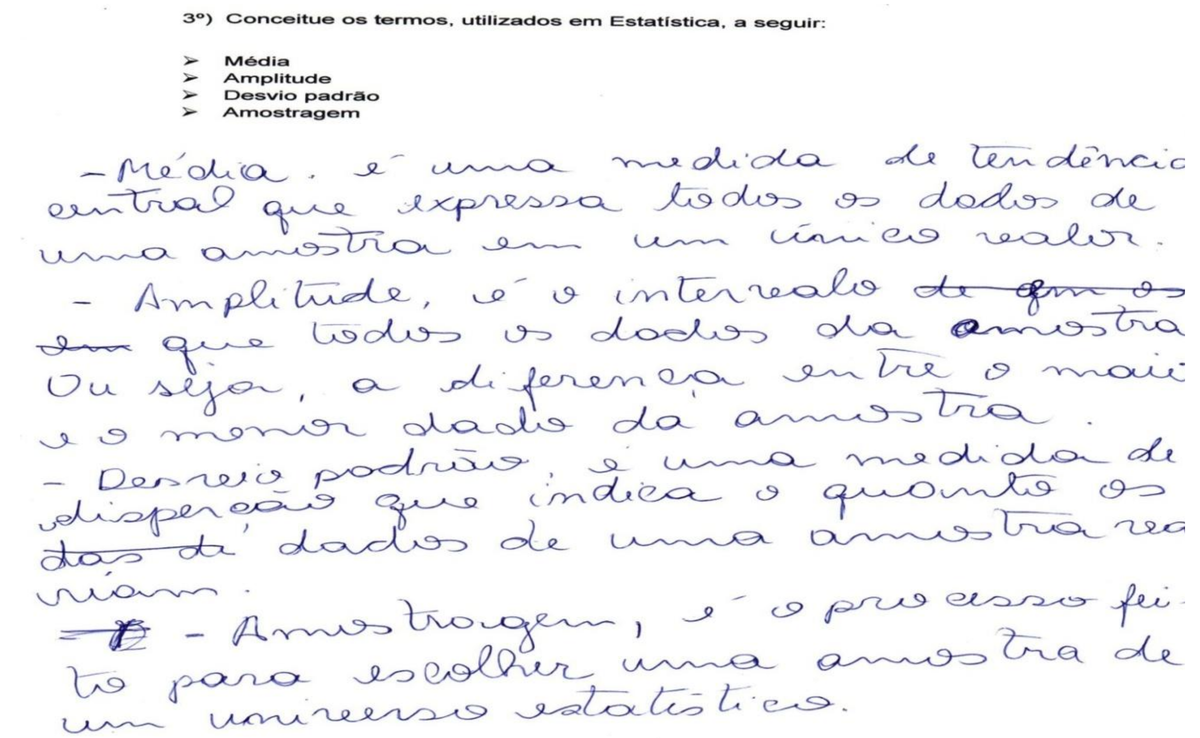
Gráfico 3 – Respostas dos professores à 3ª questão



Fonte: O autor, 2019.

Para exemplificar essas categorizações, destacamos inicialmente a resposta adequada do professor P_8 que, como é possível observar na imagem, a seguir, apresentou de modo adequado noções de conhecimento matemático Comum sobre os conceitos dos quatro termos estatísticos abordados nessa questão.

Figura 29 – Resposta RA do professor P_8 à 3ª questão


3º) Conceitue os termos, utilizados em Estatística, a seguir:

- Média
- Amplitude
- Desvio padrão
- Amostragem

- Média. é uma medida de tendência central que expressa todos os dados de uma amostra em um único valor.
- Amplitude, é o intervalo ~~de que os~~ ~~em~~ que todos os dados da ~~amostra~~ amostra Ou seja, a diferença entre o maior e o menor dado da amostra.
- Desvio padrão, é uma medida de dispersão que indica o quanto os ~~dos~~ da dados de uma amostra variam.
- Amostragem, é o processo feito para escolher uma amostra de um universo estatístico.

[Média; é uma medida de tendência central que expressa todos os dados de uma amostra em um único valor
Amplitude: È o intervalo que todos os dados da amostra. Ou seja, a diferença entre o maior e o menor dado da amostra.
Desvio Padrão: E uma medida de dispersão que indica o quanto os dados de uma amostra variam
Amostragem: É o processo feito para escolher uma amostra de um universo Estatístico.]

Fonte: Professor P_8, 2019.

Como visto, 10 professores responderam parcialmente adequado. Desse grupo, verificamos que 1 professor apresentou de modo adequado o conceito de Média e Desvio Padrão, 1 professor apresentou de modo adequado o conceito de Média, Amplitude e Desvio-padrão, 2 professores apresentaram de modo adequado o conceito apenas de Média e 6 professores apresentaram de modo adequado o conceito de Média e Amplitude e,assim, verificamos que nenhum deles apresentou de modo adequado o conceito de Amostragem. Para exemplificar essa categorização, apresentamos, a seguir, a resposta do professor P_1 que respondeu de modo adequado apenas o conceito de Média e Desvio Padrão e do professor P_7 que respondeu de modo adequado apenas o conceito de Média e Amplitude.

Figura 30 – Resposta RPA do professor P_1 à 3ª questão

3º) Conceitue os termos, utilizados em Estatística, a seguir:

- **Média**
- **Amplitude**
- **Desvio padrão**
- **Amostragem**

média - é o valor equidistante dos extremos das grandezas, na maioria das vezes é calculada pela soma de todos os valores dividida pela quantidade deles.

Desvio padrão - é o valor que ~~indique~~ indica a variação da medida em relação a média.

Amostragem - é a separação ou união de dados a partir de suas características, semelhanças e diferenças.

[Média: É o valor equidistante dos extremos das grandezas, na maioria das vezes é calculada pela soma de todos os valores dividida pela quantidade deles.
Amplitude: É o valor que indica a variação da medida em relação a média
Amostragem: É a separação ou união de dados a partir de suas características, semelhantes e diferenças]

Fonte: Professor P_1, 2019.

Figura 31 – Resposta RPA do professor P_7 à 3ª questão

3º) Conceitue os termos, utilizados em Estatística, a seguir:

- **Média**
- **Amplitude**
- **Desvio padrão**
- **Amostragem**

1) MÉDIA: O RESULTADO DA SOMA DE TODOS OS TERMOS DIVIDIDO PELO NÚMERO DE TERMOS QUE APARECEM. É O VALOR MÉDIO.

2) AMPLITUDE: O INTERVALO ENTRE O MAIOR E O MENOR TERMO.

3) NÃO RECORDO.

4) AMOSTRAGEM: PARTE DIVERSIFICADA DE UM TODO.

[Média: O resultado da soma de todos os termos dividido pelo número de termos que aparecem. È o valor médio.
Amplitude: O intervalo entre o maior e menor termo
Desvio Padrão: Não Recordo
Amostragem: Parte diversificada de um todo]

Fonte: Professor P_7, 2019.

A partir dessa análise, podemos inferir que dos 12 professores, 11 conseguiram conceituar de modo adequado o termo Média, 8 o termo Amplitude, 2 o termo Desvio Padrão e nenhum deles o termo Amostragem. Logo, esse dado pode indicar um domínio conceitual dos mesmos sobre as medidas de tendência central (Média, Moda e Mediana) e Amplitude e serem esses os termos, entre os quatro abordados na questão, que os professores mais conheciam e que vinham privilegiando ao lecionar quando abordavam a Estatística na disciplina de Matemática. Em contrapartida, os professores demonstraram não ter o domínio conceitual sobre Desvio padrão e Amostragem e que, possivelmente, pouco abordavam os mesmos em sala de aula, não contemplando as diversas situações e fenômenos do nosso cotidiano que, comumente, a amostragem e o desvio padrão estão presentes.

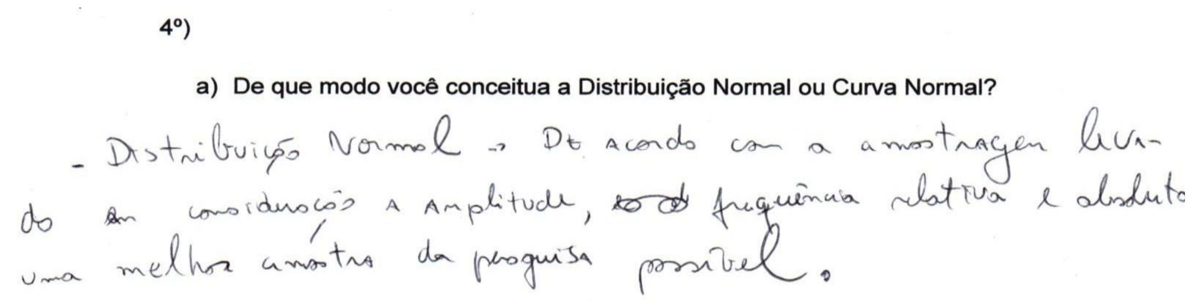
Análise da 4ª questão - Alternativa A

Na primeira alternativa da quarta questão, indagamos aos professores de que modo eles conceituavam, naquele momento, a Distribuição Normal ou Curva Normal. Logo, eles deveriam responder como compreendiam este conceito, podendo apresentar os significados e as diferentes representações do mesmo. Dessa forma, objetivamos analisar o conhecimento matemático Comum e conhecimento Epistêmico dos professores sobre o conceito da Curva Normal.

Ao analisarmos as respostas dos 12 professores participantes do nosso estudo, constatamos que todos eles responderam de modo inadequado por não apresentarem noções de conhecimento matemático Comum e conhecimento Epistêmico sobre o conceito da Curva Normal. Além disso, verificamos que 8 professores, em suas respostas, se limitaram a informar que não sabiam ou não conheciam o referido conceito e apenas 4 destes professores buscaram, mesmo que sem êxito, apresentar uma conceitualização para a Curva Normal.

Para exemplificar essa categorização, apresentamos adiante as respostas dos professores P_{10}, P_3 e P_6. É possível perceber que o professor P_{10} buscou apresentar a conceitualização, mas a sua resposta foi considerada inadequada por não contemplar o conceito da Curva Normal, haja vista que o mesmo afirmou que a Distribuição Normal é uma melhor amostra de uma pesquisa, que leva em consideração a amplitude e frequência dos dados, configurando uma resposta inadequada para essa questão. Já os professores P_3 e P_6 também tiveram suas respostas classificadas como inadequadas por, assim como os demais professores, se limitaram a informar, respectivamente, que não recordavam e não se lembravam do conceito da Curva Normal.

Figura 32 – Resposta RI do professor P_{10} à 4ª questão - A


4º)

a) De que modo você conceitua a Distribuição Normal ou Curva Normal?

- Distribuição Normal → De acordo com a amostragem leva-do em consideração a Amplitude, frequência relativa e absoluta uma melhor amostra da pesquisa possível.

[Distribuição Normal: De acordo com a amostragem leva-se em consideração a amplitude, frequência relativa e absoluta, uma melhor amostrra da pesquisa possível]

Fonte: Professor P_{10}, 2019.

Figura 33 – Resposta RI do professor P_3 à 4ª questão - A


4º)

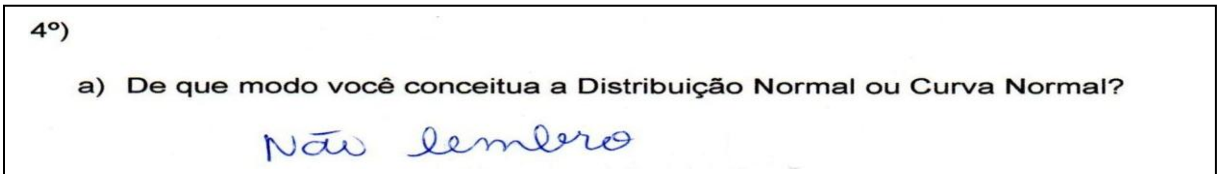
a) De que modo você conceitua a Distribuição Normal ou Curva Normal?

NÃO RECORDO

[Não Recordo]

Fonte: Professor P_3, 2019.

Figura 34 – Resposta RI do professor P_6 à 4ª questão - A


4º)

a) De que modo você conceitua a Distribuição Normal ou Curva Normal?

Não lembro

[Não Lembro]

Fonte: Professor P_6, 2019.

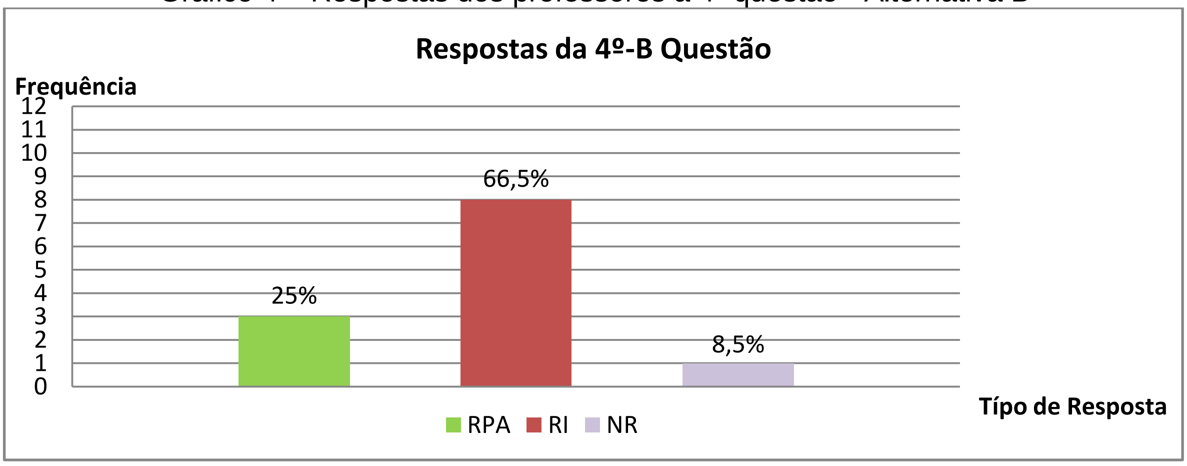
Diante desses dados, evidencia-se que todos os 12 professores não conheciam o conceito da Curva Normal e que, possivelmente, não tiveram formação voltada para este conceito durante suas trajetórias acadêmicas, acarretando na não apropriação do mesmo. Logo, esses dados também indicam que, provavelmente, esses professores não abordavam esse conceito no Ensino Médio da escolarização básica, quando lecionavam os conteúdos de Estatística e da Probabilidade. Assim como aponta Gonçalves (2014) e Macedo (2016), ainda não é comum, no Brasil, o conceito da Curva Normal, sua representação gráfica, os conceitos estatísticos e o cálculo de probabilidades presente nesse modelo matemático, serem abordados nessa etapa de ensino.

Análise da 4ª questão - Alternativa B

Na segunda alternativa da quarta questão, perguntamos aos professores se eles acreditavam que Curva Normal deve ser trabalhada com os estudantes na etapa de escolarização do Ensino Médio, com o objetivo de analisar o conhecimento didático dos professores envolvendo a faceta Ecológica, a qual contempla o conhecimento sobre o currículo proposto para o ensino de Matemática, e nesse caso, sobre a abordagem da Curva Normal no Ensino Médio da Educação Básica.

Nessa direção, ao realizarmos a análise das respostas dos professores, constatamos que 1 professor não respondeu essa questão e 3 professores responderam parcialmente adequado (RPA) por informarem que a Curva Normal deve ser ensinada no Ensino Médio, mas não justificaram as respectivas respostas apresentando noções de conhecimento didático envolvendo a faceta Ecológica, ou seja, noções sobre o currículo de matemática sobre este conceito proposto para o Ensino Médio. Além disso, verificamos que as respostas de 8 professores se classificaram modo inadequado (RI) por se limitarem a responder a questão informando que não sabiam ou não lembravam.

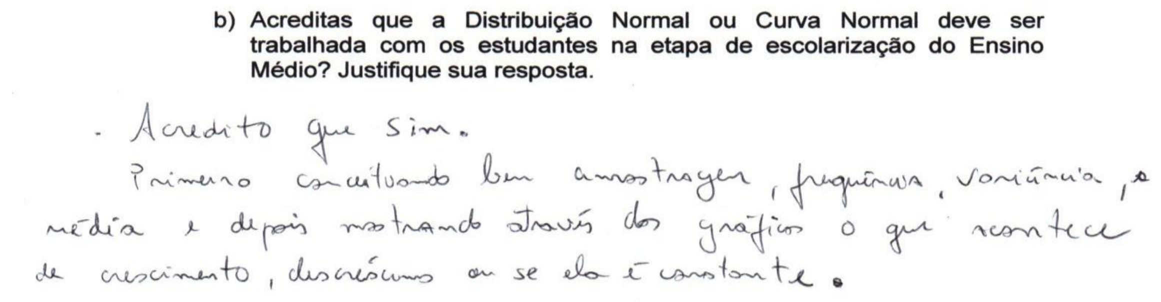
Gráfico 4 – Respostas dos professores à 4ª questão - Alternativa B



Fonte: O autor, 2019.

Para exemplificar as categorizações observadas nessa questão, apresentamos, a seguir, a resposta RPA do professor P_{10} e a reposta RI do professor P_6.

Figura 35 – Resposta RPA do professor P_{10} à 4ª questão - B

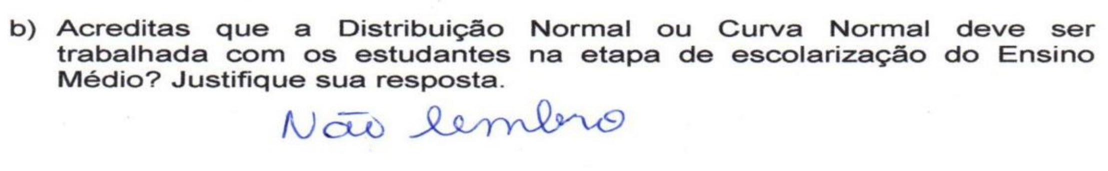

b) Acreditas que a Distribuição Normal ou Curva Normal deve ser trabalhada com os estudantes na etapa de escolarização do Ensino Médio? Justifique sua resposta.

· Acredito que sim.
Primeiro conceituando bem amostragem, frequência, variância, a média e depois mostrando através dos gráficos o que acontece de crescimento, decréscimo ou se ela é constante.

[Acredito que sim. Primeiro conceituando bem amostragem, frequência variância ,a média e depois mostrando através dos gráficos o que acontece de crescimento, decréscimo ou se ela é constante.]

Fonte: Professor P_{10}, 2019.

Figura 36 – Resposta RI do professor P_6 à 4ª questão - B


b) Acreditas que a Distribuição Normal ou Curva Normal deve ser trabalhada com os estudantes na etapa de escolarização do Ensino Médio? Justifique sua resposta.

Não lembro

[Não Lembro]

Fonte: Professor P_6, 2019.

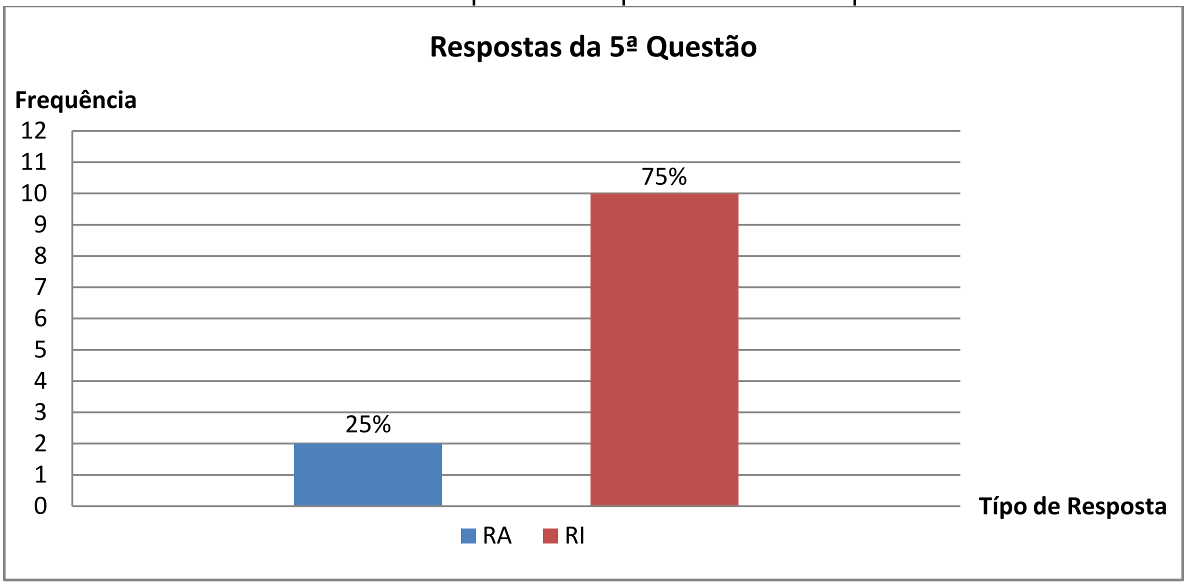
A partir desses dados, podemos concluir que os professores participantes não possuíam noções de conhecimento didático envolvendo a faceta Ecológica sobre o conceito da Curva Normal, como é pautado nas normas e expectativas de aprendizagem presentes nos currículos e documentos oficiais da educação, como a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018) e os Parâmetros Curriculares para a Educação Básica do Estado de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2013), que indicam, respectivamente, implicitamente e explicitamente, a abordagem deste conceito para a etapa do Ensino Médio. Diante disso, assim como visto na alternativa anterior da quarta questão, essa conclusão também indica que, possivelmente, não abordavam esse conceito no Ensino Médio da escolarização Básica, ao lecionarem temas de Estatística e da Probabilidade.

Análise da 5ª questão

Nessa questão, é abordada uma situação-problema envolvendo o conceito de Desvio Padrão e Média, através de duas representações gráficas, sendo uma delas uma aproximação e a outra uma Curva Normal dos dados da temperatura de duas cidades. Através dessa questão, objetivamos analisar o conhecimento matemático Comum dos professores sobre os referidos conceitos. Por se tratar de uma questão objetiva e de múltipla escolha, os professores deveriam, como base em seus conhecimentos e na análise das informações e dados contidos nos gráficos, marcar uma das alternativas como resposta, sendo a alternativa “b” a resposta correta da referida questão.

Nesse sentido, ao analisarmos as respostas dos professores, constatamos que 3 professores responderam adequadamente, assinalando a alternativa “b” como a resposta correta para a questão. Em contra partida, verificamos que 9 professores responderam de modo inadequado por não assinalarem a referida alternativa como a resposta da questão. Esses dados estão sistematizados no gráfico a seguir.

Gráfico 5 - Respostas dos professores à 5ª questão



Fonte: O autor, 2019.

Como exemplo, apresentamos, a seguir, a resposta RA do professor P_9 e a resposta RI do professor P_{12}.

Figura 37 – Resposta RA do professor P_9 à 5ª questão

Sabendo-se que a média de temperatura das duas cidades é 5, **é CORRETO** afirmar que:

(a) O desvio padrão da temperatura é maior na cidade A, pois o gráfico tem um formato irregular.

(b) O desvio padrão da temperatura é maior na cidade B, pois a menor temperatura foi zero e a maior temperatura foi 10.

(c) O desvio padrão da temperatura é menor em B, porque na maioria dos dias a temperatura ficou perto de 5.

(d) O desvio padrão da temperatura é menor em A, porque na maioria dos dias não houve temperaturas abaixo de 2 e nem acima de 9.

(e) O desvio padrão é menor em A, pois na maioria dos dias a temperatura ficou próxima de cinco e não houve dias com temperaturas abaixo de 2 e nem acima de 9.

Fonte: Professor P_9, 2019.

Figura 38 – Resposta RI do professor P_{12} à 5ª questão

Sabendo-se que a média de temperatura das duas cidades é 5, **é CORRETO** afirmar que:

(a) O desvio padrão da temperatura é maior na cidade A, pois o gráfico tem um formato irregular.

(b) O desvio padrão da temperatura é maior na cidade B, pois a menor temperatura foi zero e a maior temperatura foi 10.

(c) O desvio padrão da temperatura é menor em B, porque na maioria dos dias a temperatura ficou perto de 5.

(d) O desvio padrão da temperatura é menor em A, porque na maioria dos dias não houve temperaturas abaixo de 2 e nem acima de 9.

(e) O desvio padrão é menor em A, pois na maioria dos dias a temperatura ficou próxima de cinco e não houve dias com temperaturas abaixo de 2 e nem acima de 9.

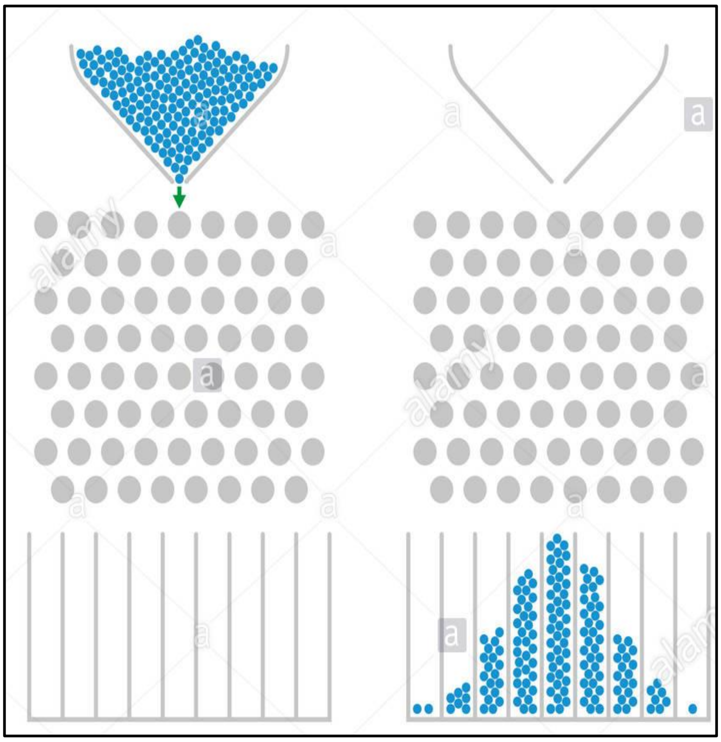
Fonte: Professor P_{12}, 2019.

Como visto, três professores assinalaram como resposta para a questão a alternativa “b”. Isso sinaliza que os mesmos compreenderam corretamente o significado da representação gráfica das distribuições das temperaturas das duas cidades e o conceito de Desvio Padrão e da Média envolvido na questão e concluíram a partir das informações e dados contidos nos gráficos apresentados, que o maior Desvio Padrão da temperatura é o da cidade B, ou seja, expressa um maior grau de dispersão dos dados da temperatura em relação à média, quando comparado com os dados da cidade A. Os demais professores que responderam de modo inadequado, possivelmente, não compreenderam o significado das representações gráficas, do Desvio Padrão e da Média referente à distribuição dos dados da temperatura. Assim, por se tratar de uma situação problema, podemos concluir que os mesmos não interpretaram ou compreenderam corretamente as informações expostas nos gráficos da referida questão.

Análise da 6ª questão - Alternativa A

A primeira alternativa da 6ª questão abordou uma situação-problema envolvendo o tabuleiro de Galton, dispositivo desenvolvido pelo matemático inglês Francis Galton. Nele, bolas são jogadas a partir do topo e ao descerem batem em pinos e se distribuem para a esquerda ou para a direita. Ao caírem nas bandejas inferiores, as bolas acumuladas apresentam uma Distribuição Normal, formando uma curva em forma de sino, ou seja, a Curva Normal, como indica a figura a seguir:

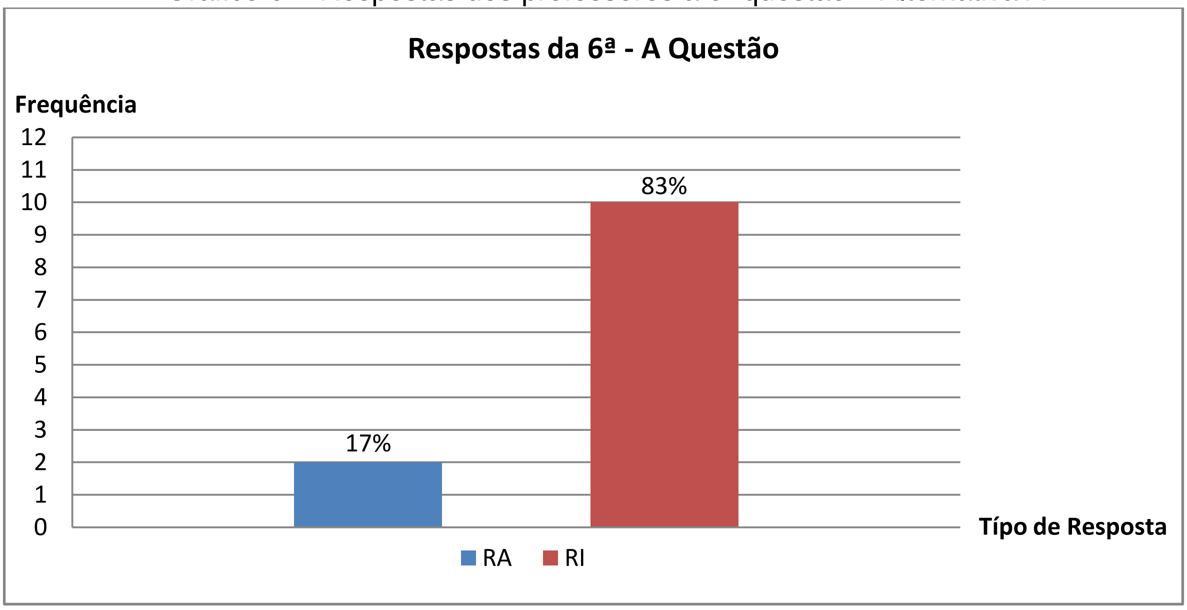
Figura 39 – Distribuição das bolas no tabuleiro de Galton



Fonte: Furian, 2013.

Nota-se então que, nesta questão, os professores foram convidados a desenhar como as bolas ficariam distribuídas após descerem pelo tabuleiro e caírem nas bandejas inferiores e deste modo, objetivamos analisar o conhecimento matemático Comum dos professores sobre o conceito da Curva Normal. Diante disso, ao analisarmos as respostas dos 12 professores, observamos que 2 deles responderam de modo adequado por apresentarem a distribuição das bolas conforme uma Curva Normal. Em contrapartida, os outros 10 professores responderam de modo inadequado por apresentarem a distribuição das bolas não obedecendo a uma Curva Normal.

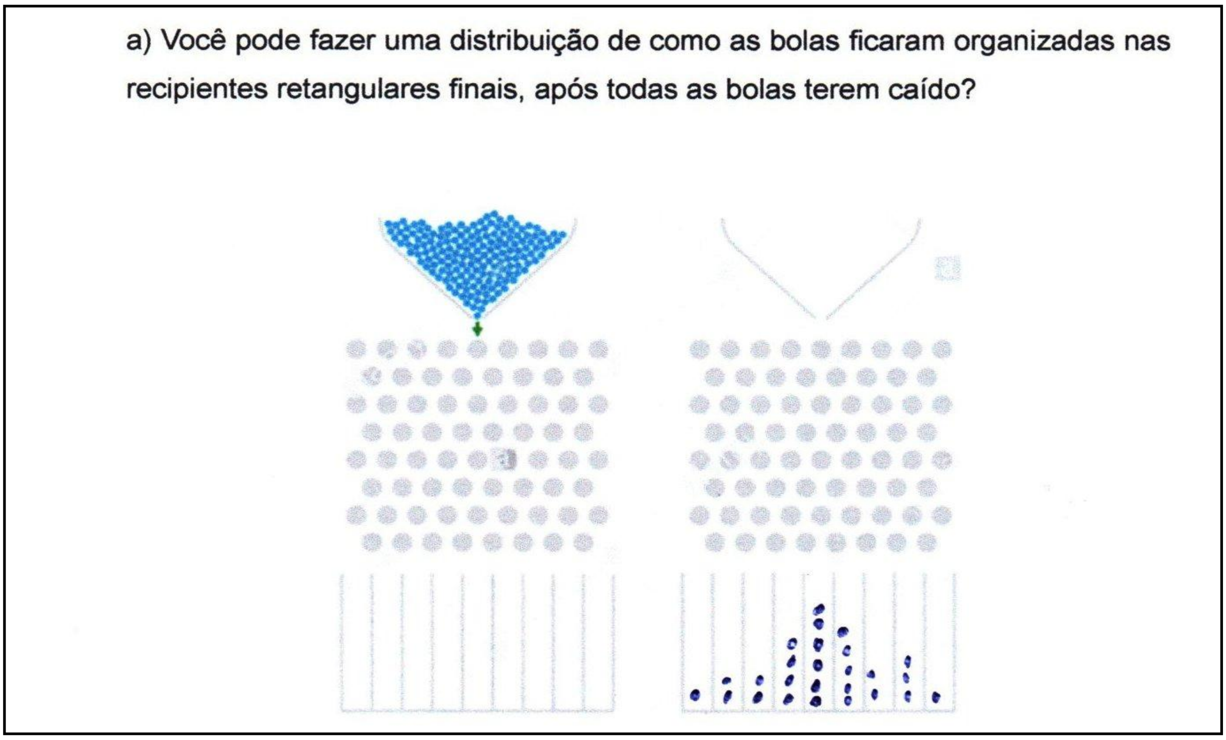
Gráfico 6 – Respostas dos professores à 6ª questão – Alternativa A



Fonte: O autor, 2019.

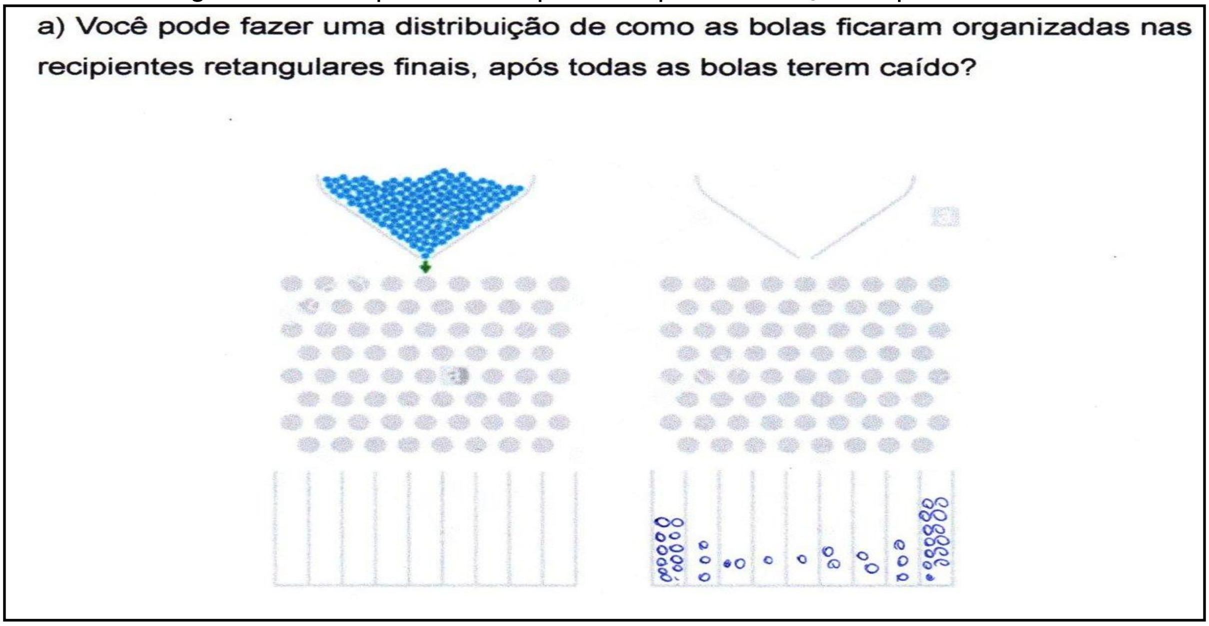
Em caráter de exemplo, apresentamos, adiante, a resposta adequada do professor P_2 e a resposta inadequada do professor P_8.

Figura 40 – Resposta adequada do professor P_2 à 6ª questão – A



Fonte: Professor P_2, 2019.

Figura 41 – Resposta inadequada do professor P_8 à 6ª questão – A



Fonte: Professor P_8, 2019.

Diante desses excertos, nota-se o professor P_2 desenha a distribuição das bolas obedecendo a uma Curva Normal, já o professor P_8 acredita que as bolas têm maior probabilidade de caírem nas bandeiras retangulares localizadas mais nos extremos do tabuleiro e têm uma menor probabilidade de caírem nas bandejas centrais, não configurando, dessa forma, uma Curva Normal.

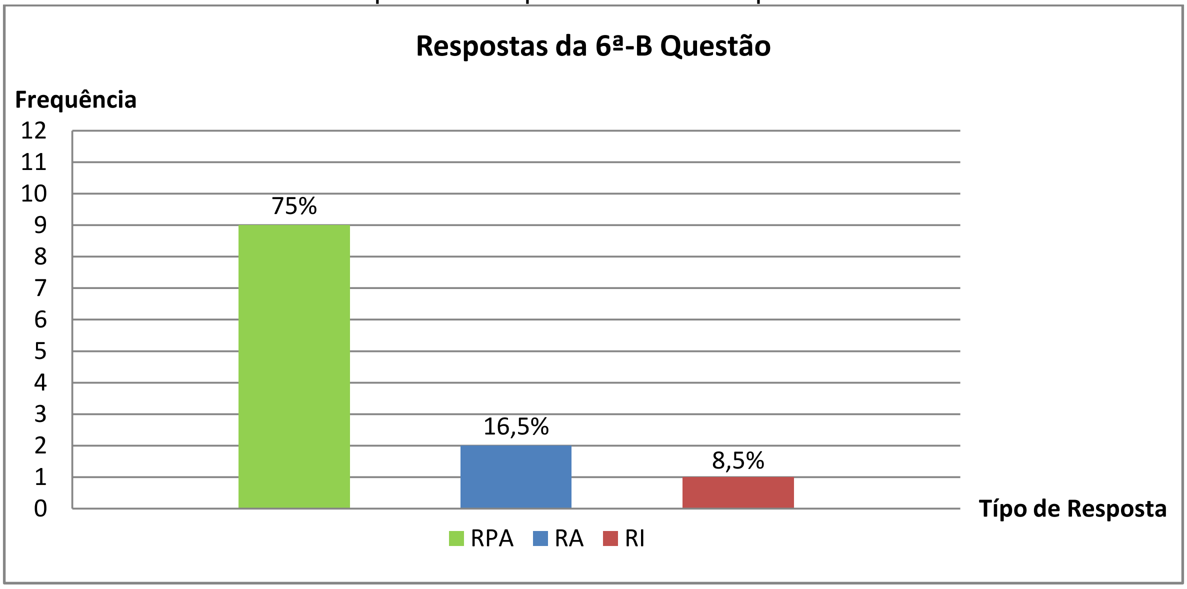
Além disso, destacamos que o fato da maioria dos professores responderem essa questão de modo inadequado corrobora com as conclusões levantadas nas questões anteriores, mais especificamente com a questão quatro do nosso questionário. Haja vista que os professores não apresentavam um conhecimento matemático Comum sobre o conceito de Curva Normal e, possivelmente, não abordavam esse conceito em sala de aula, não compreendiam também algumas situações ou fenômenos que abarcam tal modelo, como o tabuleiro de Galton.

Análise da 6º questão - Alternativa B

Neste item, apresentamos exemplos de respostas de três grupos de estudantes à questão abordada no item anterior e indagamos aos professores a forma como eles prosseguiriam a discussão com classe de alunos a partir das respostas apresentas pelos grupos. Deste modo, objetivamos analisar o conhecimento didático envolvendo as seis facetas: Epistêmica, Cognitiva, Afetiva, Mediacional, Interacional e Ecológica dos professores a partir de respostas de grupos de estudantes às mesmas situações-problemas proposta aos professores.

Ao analisarmos as respostas dos professores, constatamos que 2 responderam de modo adequado, por conseguirem mencionar a forma como prosseguiriam a discussão com a classe, apresentando noções de conhecimento didático envolvendo todas as facetas. Além disso, verificamos que 9 professores responderam parcialmente adequado por conseguirem mencionar a forma como prosseguiriam a discussão com a classe, apresentando noções de conhecimento didático envolvendo alguma(s) da(s) seis facetas citadas anteriormente e um professor respondeu de modo inadequado por não saber dizer a forma como prosseguiria a discussão com a classe.

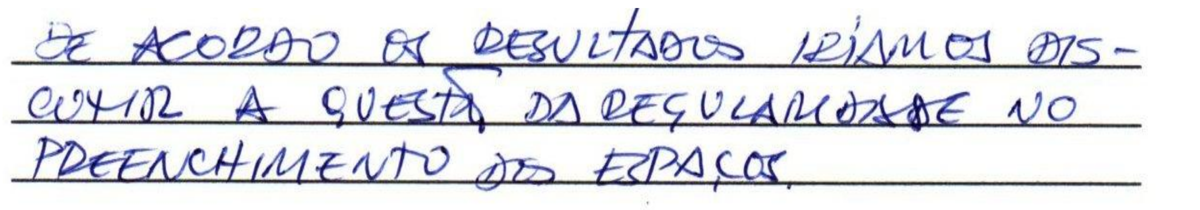
Gráfico 7 – Respostas dos professores à 6ª questão - Alternativa B



Fonte: O autor, 2019.

Para exemplificar essas três categorizações observadas nessa questão, apresentamos a seguir a resposta parcialmente adequada do professor P_3, a resposta adequada do Professor P_7 e a resposta inadequada do professor P_6.

Figura 42 – Resposta RPA do professor P_3 à 6ª questão - B



[De acordo os resultados iriamos discutir a questão da regularidade no preenchimento dos espaços]

Fonte: Professor P_3, 2019.

Figura 43 – Resposta RA do professor P_7 à 6ª questão – B

SOLICITARIA AOS ALUNOS PARA OBSERVAREM OS DETALHES DAS DISTRIBUIÇÕES. NO GRUPO 1, QUESTIONARIA COMO PODERIA TODAS AS BOLINHAS SEREM DISTRIBUÍDAS COM A MESMA QUANTIDADE NOS RETÂNGULOS, DIANTE DOS OBSTÁCULOS E DAS MUDANÇAS DE DIREÇÃO. NA OBSERVAÇÃO DO 2º GRUPO, QUESTIONARIA COMO AS BOLINHAS FORAM DISTRIBUÍDAS PROPORCIONALMENTE DO MEIO PARA AS EXTREMIDADES. E PARA FINALIZAR, O GRUPO 3, FARIA A ANÁLISE DE COMO TODAS AS BOLINHAS ESTAREM EM UM ÚNICO RETÂNGULO, E NOS DEMAIS, NÃO CAIU NENHUMA BOLINHA? ISSO QUER DIZER QUE OS OBSTÁCULOS SÓ LEVARIA AS BOLINHAS PARA UM DESTINO? E DEPOIS, FARIA DE FORMA PRÁTICA ESTE PROBLEMA.

[Solicitaria aos alunos para observarem os detalhes das distribuições, no grupo 1, questionaria como poderia todas as bolinhas serem distribuídas com a mesma quantidade nos retângulos, diante dos obstáculos e das mudanças de direção. Na observação do 2º grupo, questionaria como as bolinhas foram distribuídas proporcionalmente do meio para as extremidades e para finalizar, o grupo 3, faria a análise de como todas as bolinhas estarem em um único retângulo, e nos demais, não caiu nenhuma bolinha? Isso quer dizer que os obstáculos só levariam as bolinhas para um destino? E depois, faria de forma prática este problema]

Fonte: Professor P_7, 2019.

Figura 44 - Resposta RI do professor P_6 à 6ª questão - B

A probabilidade é algo incerto onde em um jogo tudo pode acontecer o mesmo aconteceu com a questão existe vários obstáculos mas as bolas tem o mesmo objetivo então tudo pode acontecer.

[A probabilidade é algo incerto onde em um jogo tudo pode acontecer o mesmo aconteceu com questão, existe vários obstáculos mas as bolas têm o mesmo obetivo, então tudo pode acontecer].

Fonte: Professor P_6, 2019.

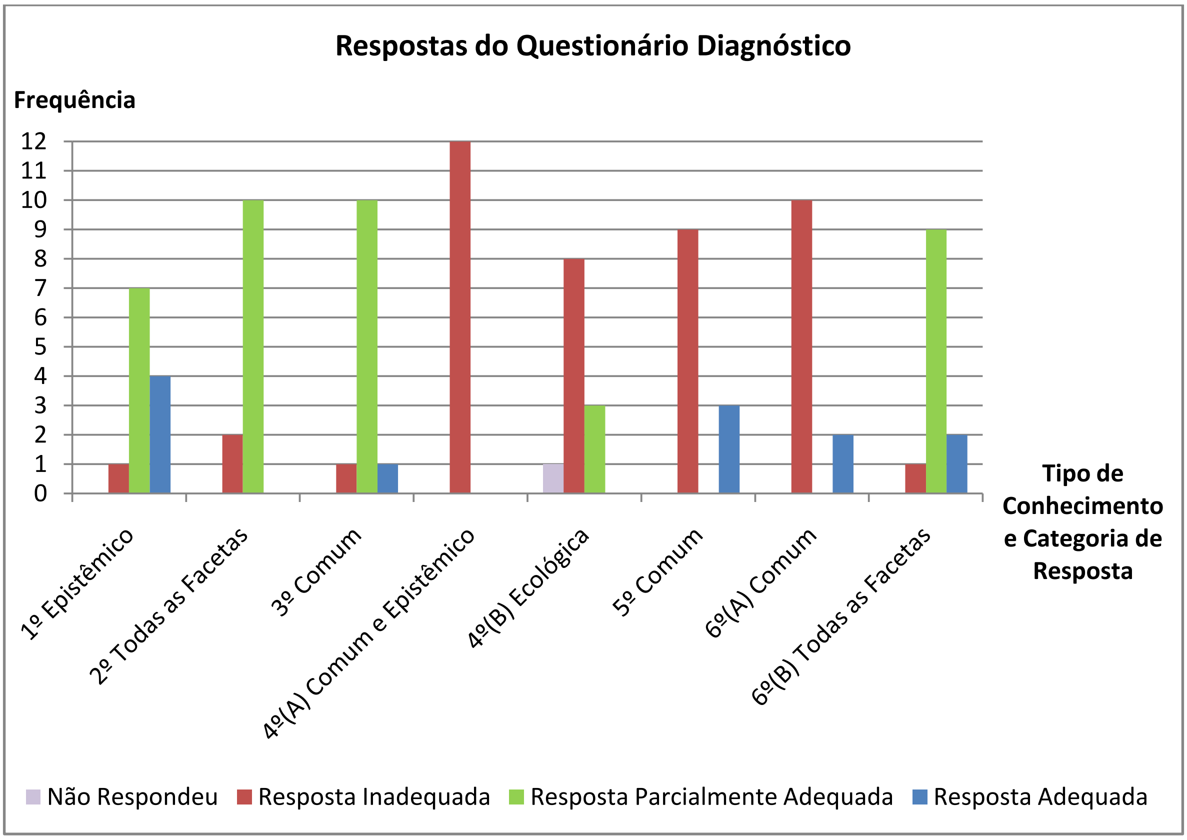
A partir de tais respostas, nota-se que o professor P_3 propõe uma discussão com a classe acerca da regularidade da distribuição das bolas. Desse modo, ficam evidente noções de conhecimento didático envolvendo apenas a faceta Interacional, ou seja, a forma como o professor iria interagir com os alunos durante a aula. Além disso, constatamos que as demais respostas parcialmente adequadas se assemelham a do professor $P_{3,}$ contemplando noções de conhecimento didático apenas da faceta Interacional.

Já o professor P_7 propõe uma discussão mais ampla, como forma de interagir com a classe, questionando acerca das respostas de cada um dos três grupos e assim, refletir com toda a turma sobre a forma como os estudantes de cada grupo apresentam seu conhecimento pessoal, suas crenças e atitudes diante do objeto matemático abordado. Por fim, o professor propõe um teste prático como recurso didático para a resolução da situação-problema e assim, abordar o conceito da Curva Normal. Dessa forma, evidenciam-se noções de conhecimento didático envolvendo todas as seis facetas o que classifica a sua resposta na categoria RA.

Por fim, o professor $P_{6,}$ em sua resposta, não apresentou a forma como discutiria a questão com a classe a partir das respostas dos três grupos de estudantes. Percebe-se que o professor buscou apresentar apenas uma definição para a probabilidade presente na situação-problema, o que classifica sua resposta como inadequada.

Diante disso, após analisarmos as respostas fornecidas pelos professores ao nosso questionário diagnóstico, apresentamos, a seguir, um gráfico que resume o desempenho e a classificação das categorias dessas respostas, de acordo com o tipo de conhecimento didático-matemático contemplado em cada uma das seis questões do nosso questionário que versou sobre a inter-relação entre a Estatística e a Probabilidade por meio da Curva Normal.

Gráfico 8 – Respostas dos professores ao Questionário Diagnóstico



Fonte: O autor, 2019.

Diante desses dados, nota-se que há uma predominância no desempenho dos professores de respostas do tipo Parcialmente Adequada (RPA) e do tipo Inadequada (RI). Dentre as oitos perguntas presentes no questionário diagnóstico, esses dois tipos de categorizações foram as mais frequentes, sendo observada com o maior índice, cada uma, em quatro questões. No que diz respeito a categoria RA, podemos verificar que ela só esteve presente em cinco questões e em nenhuma delas apresentou a maior frequência dentre os tipos de categorias de respostas.

Diante desse diagnóstico, concluímos, nessa primeira etapa da pesquisa, que os professores apresentavam lacunas nos conhecimentos didático-matemáticos necessário para a abordagem da inter-relação entre a Estatística e a Probabilidade por meio da Curva Normal no Ensino Médio e necessitavam de um acompanhamento formativo sobre o tema. Diante disso, na próxima seção, passaremos a descrever e analisar a segunda etapa da nossa pesquisa, o Encontro Formativo, no qual construímos e realizamos, a partir do diagnóstico levantado, uma proposta de ensino sobre a referida temática.

7.3 Análise do Encontro Formativo

Nesta seção, passaremos a analisar e descrever o Encontro Formativo, no qual desenvolvemos uma proposta de ensino para a abordagem da articulação entre a Estatística e a Probabilidade por meio da Curva Normal. Nessa etapa, objetivamos investigar a construção/ampliação dos conhecimentos didático-matemáticos dos professores sobre o referido tema. Como já descrito no capítulo anterior, a realização dessa proposta se deu através de um encontro com duração de quatro horas que, por sua vez, foi subdividido em quatro momentos que contemplaram a realização de três atividades e a abordagem de uma sistematização teórica sobre o tema em pauta. Além disso, destacamos que para a realização das atividades foi solicitado que os professores se organizassem em duplas e, como esta etapa da pesquisa contou com a participação de sete professores, a saber: P_1, P_2, P_4, P_7, P_8, P_{10} e P_{12}, eles se dividiram em duas duplas e um trio. A primeira dupla foi constituída pelos professores P_1 e P_{12}, a segunda dupla foi formada pelos professores P_4 e P_{10} e o trio foi composto pelos professores P_2, P_7, P_8. A seguir, analisaremos as atividades, a abordagem da sistematização teórica e as transcrições das discussões mais pertinentes realizadas entre o pesquisador e os professores participantes em cada momento.

1º Momento – Atividade 1

O Encontro formativo se iniciou com a realização da primeira atividade. Através dela, objetivamos instigar nos professores a reflexão sobre o conhecimento matemático Comum de alguns conceitos estatísticos e probabilísticos que estão presentes no modelo da Curval Normal. Inicialmente, foram distribuídos três quadros iguais entre os grupos formados, de modo que cada professor participante preenchesse o seu nome e sua altura (cm) em cada um deles, para que todos os grupos tivessem acesso às informações solicitadas de todos os professores participantes do encontro. A escolha da altura (cm) como variável a ser trabalhada foi dada pela mesma se tratar de uma variável contínua e a Curva Normal ser o modelo que descreve o comportamento de variáveis com essa característica. Nesse sentido, os dados reais com as alturas dos professores e as respostas apresentadas pelos mesmos às questões presentes nessa primeira atividade denotaram o conhecimento matemático Comum sobre os conceitos de Média, Moda, Mediana, Desvio Padrão, Probabilidade e gráfico de barras, servindo de base para uma reflexão inicial, o que possibilitou, posteriormente, a abordagem da sistematização teórica sobre o tema. A seguir, destacamos o quadro com as alturas (cm) apresentadas por cada um dos professores.

Quadro 7 – Altura (cm) dos professores participantes do Encontro Formativo

Professores	Altura(cm)
P_1	164
P_2	161
P_4	187
P_7	171
P_8	160
P_{10}	175
P_{12}	165

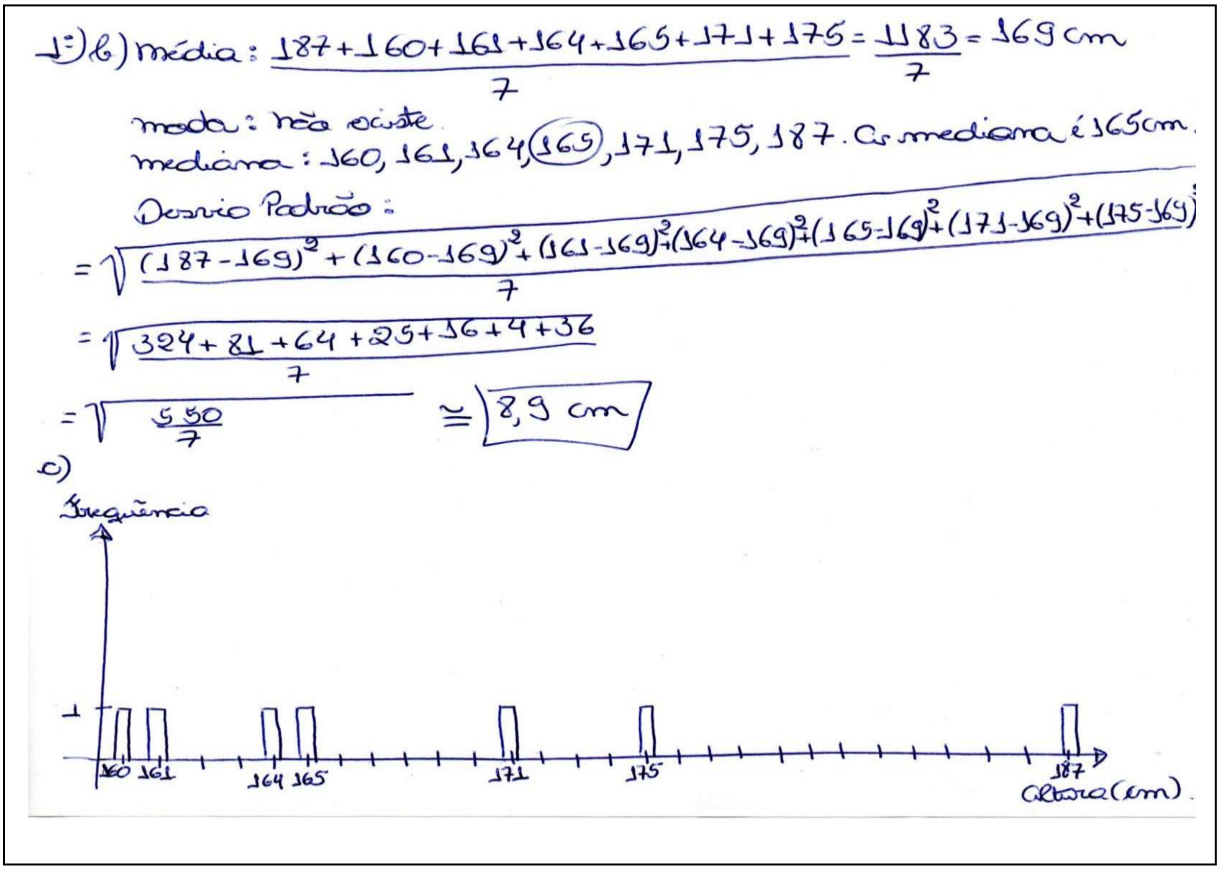
Fonte: O autor, 2019.

Com base nesses dados, cada um dos grupos de professores responderam os itens “b” e “c” da primeira questão e a segunda questão da Atividade 1. Isto é, determinaram a média aritmética, a moda, a mediana e o desvio-padrão das alturas do conjunto (questão 1 item “b”), esboçaram em um gráfico de barras as medidas dessas alturas (questão 1 item “c”) e determinaram a probabilidade de se escolher uma pessoa dentre todos os professores participantes ao acaso e ela possuir a altura maior que a média do conjunto (questão 2).

Ao verificarmos as respostas apresentadas pelos grupos de professores, constatamos que todas elas se classificam na categoria Resposta Adequada, ou seja, os professores apresentaram de modo adequado a Média, a Moda, a Mediana e o Desvio-Padrão de todas as alturas (cm), o esboço do gráfico de barras com as medidas dessas alturas, e a probabilidade de se escolher uma pessoa ao acaso, dentre todos os participantes, com a altura maior que a média do grupo. Nesse momento inicial, os sete professores demonstraram possuir noções do conhecimento matemático Comum sobre esses conceitos.

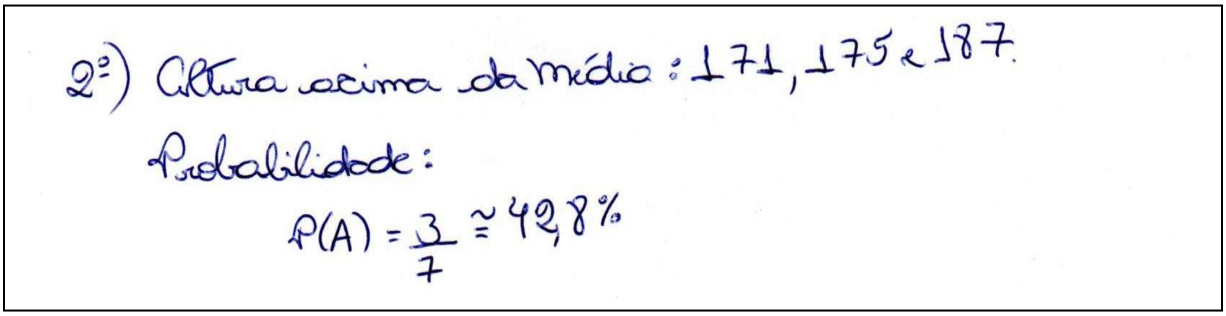
Como exemplo, apresentamos, abaixo, dois excertos com as respostas de uma dupla de professores às duas questões da primeira atividade do nosso Encontro formativo.

Figura 45 – Resposta RA da Dupla 1à 1ª questão da Atividade 1



Fonte: Dupla 1, 2019.

Figura 46 - Resposta RA da Dupla 1 à 2ª questão da Atividade 1



Fonte: Dupla 1, 2019.

Como podemos observar, a Dupla 1, assim como os demais grupos, respondeu de modo adequado as duas questões da primeira atividade. Após isso, o primeiro momento do nosso encontro prosseguiu com a socialização e discussão entre o pesquisador e os professores sobre as questões presentes nessa atividade inicial. A seguir, destacamos os diálogos mais pertinentes ocorridos nesse momento.

Pesquisador: *Então, colegas professores, sobre essa primeira atividade, o que podemos dizer sobre esses conceitos? Na alternativa b, quanto deu o valor da Média, Moda, Mediana e do Desvio-padrão das alturas?*

P_2: *A média deu 169 cm, a mediana 165 cm, a Moda não existe e o desvio padrão aproximadamente 8,9 cm.*

Pesquisador: *Ok. Todos os grupos encontraram esses mesmos valores?*

Todos os professores: *Sim.*

Pesquisador: *Certo. Agora indo além do valor numérico, o que significa cada um desses conceitos? O que podemos compreender a partir deles?*

[Silêncio...]

Pesquisador: *Qual o significado da média nesse conjunto das alturas?*

$P_{4:}$, *A média, moda e mediana são medidas de tendência central, né? E o desvio-padrão é uma medida de dispersão, mas eu sei mais o cálculo deles. O significado assim, da média, por exemplo, eu não lembro.*

Pesquisador: *Isso. A média, moda e a mediana são medidas de tendência central. Ou seja, são medidas que resumem e representam um conjunto de dados em um único valor. Sobre a média, quando aplicamos o seu cálculo de somar todos os valores de um conjunto e dividir pela quantidade deles, iremos determinar uma medida que representa esse conjunto. A média das alturas dos sete professores aqui presentes é 169 cm. Isso significa que essa medida resume e representa a altura desse grupo. Além da média, para representar um grupo, podemos utilizar a mediana, que é a medida que divide em duas partes iguais um conjunto de dados, ou seja, a mediana é o valor que fica no meio da sequência desses dados ordenados. E a moda é a medida de tendência central que corresponde ao valor ou valores que aparecem com maior frequência, os que mais se repetem em um conjunto. No entanto, é importante a gente compreender que a escolha da medida de tendência central, dentre essas três, para representar o grupo, irá depender sempre dos dados do conjunto. A média, por exemplo, é uma medida bastante utilizada mais nem sempre ela será ideal, principalmente se tivermos valores atípicos no conjunto, também chamados de discrepantes. E sobre o desvio padrão, o que podemos compreender a partir dele? O que esse conceito significa?*

P_1: *É uma medida de dispersão. Acho que ele indica o quanto os dados de um grupo estão dispersos ou não.*

P_7:*Também penso assim.*

Pesquisador: *Ok. O desvio padrão, como falaram os professores, é uma medida que indica o grau de variabilidade dos dados de um conjunto. Ou seja, irá indicar a dispersão, o distanciamento dos dados em relação à média desse conjunto. Por exemplo, o desvio padrão da altura que vocês determinaram foi igual a aproximadamente 8,9 cm. O que esse valor significa?*

P_8: *Nesse caso, o distanciamento padrão das sete alturas da média que foi 169 cm. O quanto eles se desviam da média.*

Pesquisador: *Bom, além disso, por que é importante relacionarmos as medidas de tendência central com as medidas de dispersão? Por exemplo, a média e o desvio padrão?*

[Silêncio...]

Pesquisador. *Por exemplo, imaginem a seguinte situação: três alunos ao longo de uma unidade letiva* realizaram quatro provas *de Matemática. As notas dessas provas foram diferentes entre cada aluno, mas a média final da unidade dos três alunos coincidentemente foi igual 7,0. A partir dessa média, eu posso dizer que eles alunos tiveram o mesmo desempenho nas provas?*

P_8: *Não. Porque as médias no final fora iguais, mas as notas em cada prova não. Então, acho que teria que ver, nesse caso, dispersão das notas de cada um.*

Pesquisador: *Exatamente. Então isso significa que apenas a média é insuficiente para descrever esses dados. Então, poderíamos medir o desvio padrão das notas de cada aluno e aquele que tivesse o menor desvio padrão seria aquele que teria o desempenho mais regular, com as notas mais próximas da media final. Então, em sala de aula, com nossos estudantes também é interessante e importante trabalharmos as medidas de tendência central juntamente com as de dispersão para que eles compreendam o significado desses conceitos e a relação entre eles.*

P_8: *Iss*o.

Pesquisador: *E como vocês têm abordado esses conceitos nas aulas de Matemática.*

P_4: *Eu abordo muito de forma mecânica.*

P_{10}: *Eu também.*

P_{12}: *Eu também.*

***P_4*:** *Eu não chego a aprofundar isso que você abordou aí. Acho interessante levar isso para sala de aula. Ir além do cálculo em si. Acho importante.*

Pesquisador: *ok. Isso mesmo. Abordarmos tanto a aplicação das fórmulas e algoritmos, mas também entender o que aquele conceito está significando naquela situação. E na alternativa c da primeira questão ainda, como vocês construíram o gráfico de barras?*

***P_1*:** *Eu e minha colega fizemos os eixos, né? Sendo o eixo vertical a frequência e o eixo vertical os valores das alturas. Como a frequência de cada valor das alturas foi igual a 1, todas as barras tiveram a mesma altura.*

Pesquisador: *Todos os demais fizeram assim ou de modo diferente?*

Demais professores: *Assim também.*

Pesquisador: *Ok. E na segunda questão, Qual foi a probabilidade encontrada.*

Todos os professores: *três sétimos* $\left(\frac{3}{7}\right)$.

Pesquisador: *E o que isso significa.*

***P_4*:** *Como essa fração é igual aproximadamente 42,8% essa é a chance de escolhermos uma pessoa desse grupo e ela ter a altura maior que a média.*

Pesquisador: *Ok. Todos concordam com o professor* P_4*?*

Todos os professores: *Sim.*

Pesquisador: *E como vocês têm abordado o conceito de probabilidade no Ensino Médio? Vocês conseguem relacioná-lo com a Estatística?*

***P_1*:** *Acho que não relaciono não. Eu abordo sempre com uma razão mesmo. Aquela definição dos casos favoráveis sobre todos os casos possíveis, podendo o resultado ser escrito por uma fração ou por uma porcentagem.*

Pesquisador: *Os demais professores ensinam dessa forma ou de uma abordagem diferente?*

Todos os professores: *Assim também.*

Pesquisador: *Ok. Bem, pessoal. Essa primeira atividade serviu para refletirmos um pouco sobre esses conceitos E Para encerrar esse momento inicial, gostaria de fazer uma pergunta a vocês: E se em vez de sete pessoas, esse conjunto tivesse 2000 pessoas, ou 5000 pessoas, ou ainda 10000 pessoas?, Como vocês acham que ficaria a representação gráfica das alturas desses dados e como poderíamos fazer a análise desses conceitos estatísticos e o cálculo de probabilidades?*

***P_4*:** *Acho que ficaria difícil, André, por conta do número grande de valores. A não ser* *que se usasse algum recurso para fazer esses cálculos.*

P_{10}: *É. Ficaria complicado mesmo.*

Pesquisador: *Para responder a essa pergunta, nós vamos estudar nesse encontro um modelo de distribuição de probabilidades, chamado de Curva Normal que permite relacionar a Estatística com a probabilidade, a análise desses conceitos estatísticos e o cálculo de probabilidades a partir de um conjunto de dados. Então, vamos compreender a relação entre a Estatística e a Probabilidade, a importância e o que é a amostragem, a amostra, e uma variável estatística e também modelo da Curva Normal e as possibilidades para o seu ensino no Ensino Médio, ou seja, iremos construir uma proposta de ensino para esse tema a ser abordado nas aulas de matemática no Ensino Médio.*

Diante disso, através da realização da primeira atividade, as respostas apresentadas pelos professores e as discussões realizadas fizeram emergir o conhecimento matemático Comum entre os mesmos sobre os conceitos de média, moda, mediana, desvio-padrão, probabilidade e a representação gráfica de barras. Além disso, as discussões evidenciaram que esses professores priorizavam a abordagem mecânica em sala de aula, com a aplicação das fórmulas e técnicas operatórias desses conceitos e não relacionavam as medidas de centralidade com a dispersão e a Estatística com a Probabilidade. No entanto, eles refletiram no quanto a Estatística e Probabilidade estão presentes em nosso meio, na importância que os conceitos pertencentes a esses campos têm para descrever um conjunto de dados, na necessidade de também abordar, em sala de aula, os significados que esses conceitos podem assumir em diferentes situações, como também, nas relações entre si que eles podem estabelecer. Deste modo, com a reflexão inicial sobre esses conceitos e o esboço da representação gráfica das alturas, esse primeiro momento também serviu de pontapé inicial para a introdução da sistematização teórica do nosso encontro formativo.

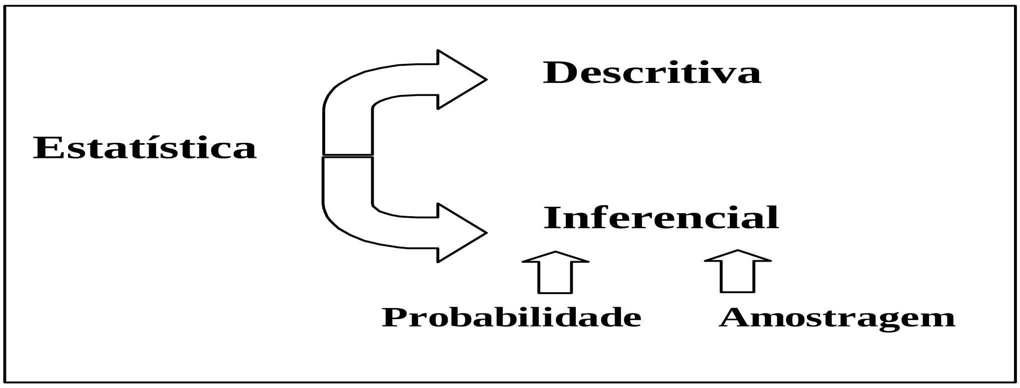
2º Momento – Sistematização Teórica

Para a realização do segundo momento do nosso encontro formativo, o qual contemplou a abordagem da sistematização teórica sobre a inter-relação entre a Estatística e a Probabilidade por meio da Curva Normal, utilizamos o recurso Data-show para a apresentação em slides dos tópicos conceituais sobre este tema.

A abordagem se iniciou com uma pergunta que buscou estimular a fala, a reflexão e a participação dos professores: Qual a relação entre a Estatística e a Probabilidade? No entanto, nenhum professor respondeu, ou seja, não teceram alguma opinião sobre tal indagação, esse fato corroborou com as conclusões já observadas na primeira etapa da pesquisa, especificamente na primeira questão do questionário diagnóstico e nas discussões no primeiro momento do encontro formativo.

A partir desse questionamento, passamos a apresentar a referida relação, através da imagem destacada, a seguir, o qual é proposto por Bayer et al (2005) e que também está apresentado no capítulo 2 deste estudo. Nesse momento inicial da sistematização teórica, buscamos proporcionar, aos professores, a construção do conhecimento Epistêmico sobre a relação entre a Estatística e a Probabilidade.

Figura 47- A Estrutura da Estatística



Fonte: Bayer et al, 2005.

A partir desse anagrama, destacamos que a Estatística é classificada como uma ciência que reúne métodos e técnicas para a coleta, organização, tratamento de dados e informações, e também lida com situações não determinísticas, isto é, sujeitas à incerteza. Em continuidade, apresentamos que essa ciência, em sua composição, é dividida em duas grandes áreas: a Descritiva e a Inferencial. A primeira, em linhas gerais, se ocupa da organização e descrição de dados estatísticos e das informações que esses dados transmitem através das medidas de tendência central, medidas de dispersão, gráficos, tabelas, dentre outros. A inferencial, por sua vez, reúne métodos e técnicas que buscam fazer inferências, ou seja, conclusões e estimativas para uma população a partir de uma amostra, que é classificada com um subconjunto de uma população.

Dando um foco para Estatística Inferencial, abordamos que ela está apoiada em outras duas grandes áreas: Amostragem e Probabilidade. A primeira delas, a amostragem, contempla o processo de seleção e escolha de uma amostra, possibilitando que a mesma apresente conclusões que possam caracterizar e representar a sua respectiva população. Nesse momento, ressaltamos a importância de compreender o conceito de amostragem e de amostra para a Estatística Inferencial, tendo em vista que os professores, no estudo diagnóstico, demonstraram não conhecê-los. Além disso, abordamos a diferença entre Censo, quando se investiga todos os elementos de uma população, e Amostra, quando se investiga uma parte da população, enfatizando também a necessidade de uma amostra ser representativa de sua população para que seja possível estimar comportamento da mesma.

Nesse momento, a apresentação se prosseguiu com exemplos de amostras representativas em nosso cotidiano, como as escolhidas para a realização de pesquisas eleitorais e de opinião. Além disso, esclarecemos que o termo população, na Estatística Inferencial, não se remete apenas a pessoas, mas ao conjunto universo dos elementos que serão investigados, assim, a população de uma pesquisa estatística, pode envolver pessoas ou outro tipo de objeto de estudo. Discutimos também a importância da Estatística Inferencial em otimizar o processo de se obter inferências de uma população, pois considerando o tempo e o custo de uma pesquisa, a depender do tamanho da população, a seleção de amostra que a represente é essencial para caracterizá-la.

Por fim, demos ênfase a Probabilidade como a outra área que está subjacente à Estatística Inferencial e dessa forma, como ela se relaciona com a Estatística. Abordamos que a Probabilidade é responsável por possibilitar a formulação de técnicas e modelos matemáticos que possibilitam o cálculo da probabilidade de eventos, inferências e caracterizações de uma população a partir de uma amostra.

Logo, destacamos que toda amostra apresenta uma estimativa para a sua respectiva população e sempre haverá uma probabilidade da estimativa ser verdadeira ou não, remetendo a abordagem inicial, na qual classificamos a Estatística como uma ciência que contempla situações que envolvem a incerteza, ou seja, eventos aleatórios. Após esse momento explicativo, realizaram-se algumas discussões entre o pesquisador e os professores, as quais destacamos, a seguir:

***Pesquisador:** Bom, pessoal. Diante do que compreendemos aqui, gostaria de saber de vocês se tem sido possível abordar, em sala de aula, a Estatística Descritiva e a Inferencial. Como vocês têm ensinado Estatística no Ensino Médio?*

***P_1:** Não. Eu mesma priorizo mais, nesse caso, a Descritiva. O trabalho de interpretação de gráficos e tabelas, o cálculo de Média, Moda e Mediana e mais raramente o de Desvio Padrão.*

***P_7:** Eu também.*

***P_{10}:** Eu também faço assim.*

***P_8:** Eu acho que a maioria vai acabar abordando mais a Descritiva. Mas acho interessante isso que você falou de se trabalhar também a Inferencial.*

Nesse momento inicial da sistematização teórica, os professores passaram a compreender o conhecimento Epistêmico sobre a Estatística enquanto ciência e a sua relação com a Probabilidade. No entanto, através das discussões realizadas foi possível perceber que os professores abordavam unicamente a estatística descritiva, em sala de aula, com foco na interpretação e análise de gráficos e tabelas, e o cálculo das medidas de centralidade e, menos frequentemente, as medidas de dispersão. Mas, a partir do que foi apresentado, refletiram na necessidade e importância de se também abordar a Estatística inferencial. Em continuidade, o diálogo prosseguiu com as discussões voltadas para a abordagem da Estatística Inferencial em sala de aula.

***Pesquisador:** E como podemos trabalhar a Inferencial em sala de aula? O que vocês acham que poderíamos fazer para ensinar essa área da Estatística aos estudantes?*

***P_4:** Acho que poderíamos fazer tipo uma pesquisa, coletando dados como você fez aqui inicialmente com as alturas. E a partir desses dados poderíamos interagir em sala com os alunos, perguntando a eles, o processo da pesquisa e esses conceitos que você falou, a amostra, a amostragem, as medidas de tendência central e de dispersão também, o porquê da amostra e a como a probabilidade entra nesse contexto, algo desse tipo.*

***P_8:** Acho isso também. Poderia fazer uma pesquisa com os próprios colegas da escola, de outras turmas, ou pessoas que moram nos bairros e diante dos dados* *que eles forem coletando, podemos trabalhar o conceito da amostra, na ideia que ela vai representar o todo, não com a precisão de 100%, porque vai ter sempre uma margem de erro, uma probabilidade associada a isso, mas mesmo assim, vai mostrar aproximadamente o todo.*

Pesquisador: *E é exatamente isso que os currículos para o ensino de Matemática, como Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e os parâmetros curriculares de Pernambuco para o Ensino Médio também propõem. Dentre várias recomendações, está a orientação de que os alunos possam realizar pesquisas com dados reais. Contemplando todo processo de se realizar uma pesquisa, que envolve a seleção de uma amostra, coleta e análise dos dados, representação e interpretação desses dados. E como os professores falaram, a partir dessa pesquisa podemos abordar, a importância e os significados dos conceitos de população, amostragem, amostra, como a probabilidade associada a estatística inferencial, leituras estatísticas, como o cálculos das medidas de centralidade, de dispersão, a representação gráfica desses dados e também o cálculo de probabilidades de determinados eventos associados a amostra coletada.*

P_8: *Isso é um bom caminho. Acho que é bom apresentar em sala isso*

Pesquisador: *Ok*

Nesse momento, através das discussões sobre o tema, também emergiram noções de conhecimento didático envolvendo as facetas Interacional, Mediacional e Ecológica, ao proporem o desenvolvimento de pesquisas com dados reais, tópico presente nos documentos curriculares para o ensino de estatística na disciplina de Matemática, como recurso didático para a interação e abordagem, em sala de aula, dos conceitos de amostragem, amostra e de como a probabilidade está subjacente a Estatística Inferencial.

Em continuidade, a abordagem da sistematização teórica prosseguiu com a apropriação do conhecimento matemático Comum sobre variável estatística, a partir da definição proposta por Cazorla, Magina, Gitirana e Guimarães, (2017, p.29), as quais concebem uma variável estatística como “uma característica da população que assume diferentes valores ou categorias” e a classificam em diferentes tipos, que estão apresentados na imagem mais adiante. Para a descrição desse momento apresentamos a transcrição dos diálogos entre o pesquisador e os professores.

Pesquisador: *Bem, pessoal. Como a gente compreendeu anteriormente, é necessário abordarmos também em sala de aula, a Estatística Inferencial. E um dos caminhos para isso, levantados aqui, é a realização de pesquisas com os nossos estudantes. Mas para que possamos realizar uma pesquisa, necessitamos compreender o que é uma variável estatística. Então, gostaria de perguntar isso a vocês: O que é uma variável, em Estatística?*

P_8: *Acho que é o objeto de estudo. Aquilo que se irá pesquisar.*

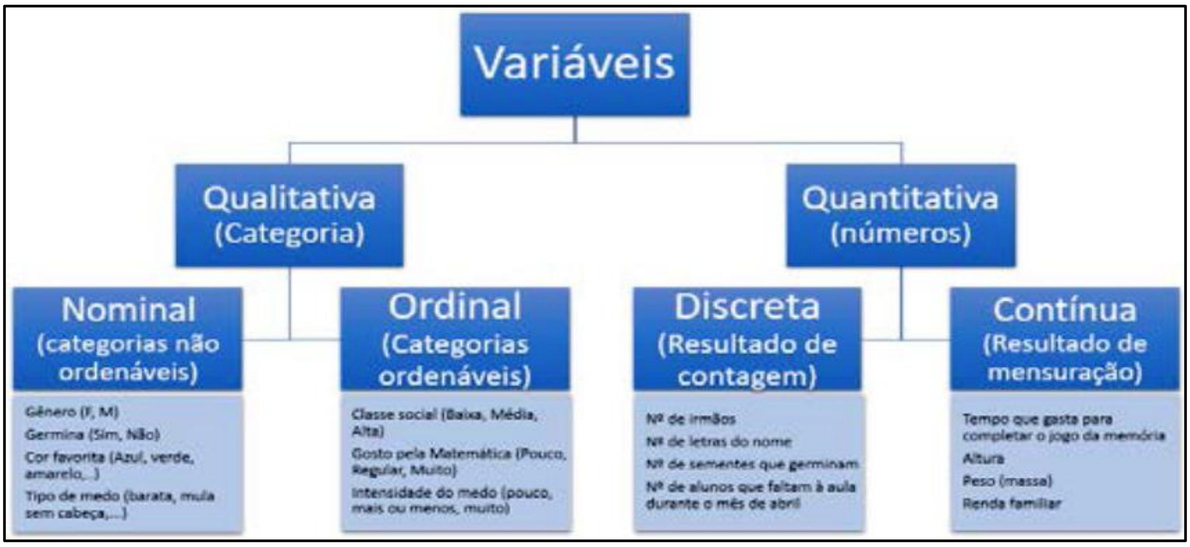
Pesquisador: *Isso. Exatamente. E trazendo a definição mais formal, Cazorla, Magina, Gitirana e Guimarães (2017, p.29), definem a variável, em Estatística, como é uma característica da população que assume diferentes valores ou categorias. Então, quando realizamos uma pesquisa, estamos levantando variáveis, ou seja, características de uma determinada população. Por exemplo, qual foi a variável que foi pesquisada aqui com vocês nesse encontro na primeira atividade?*

Todos os professores: *A altura.*

Pesquisador: *Correto. A altura é um tipo de variável, como também, por exemplo, o sexo, a idade, a massa, a classe social, também são. Então, existem inúmeros tipos de variáveis e por isso, além da definição, precisamos entender a classificação desses tipos de variáveis, que estão nessa imagem.*

Nesse momento, apresentamos a classificação dos tipos de variáveis, por meio da imagem destacada, adiante, proposta pelas autoras mencionadas anteriormente.

Figura 48 – Classificação dos tipos de Variáveis Estatísticas



Fonte: Cazorla, Magina, Gitirana e Guimarães, 2017, p.29.

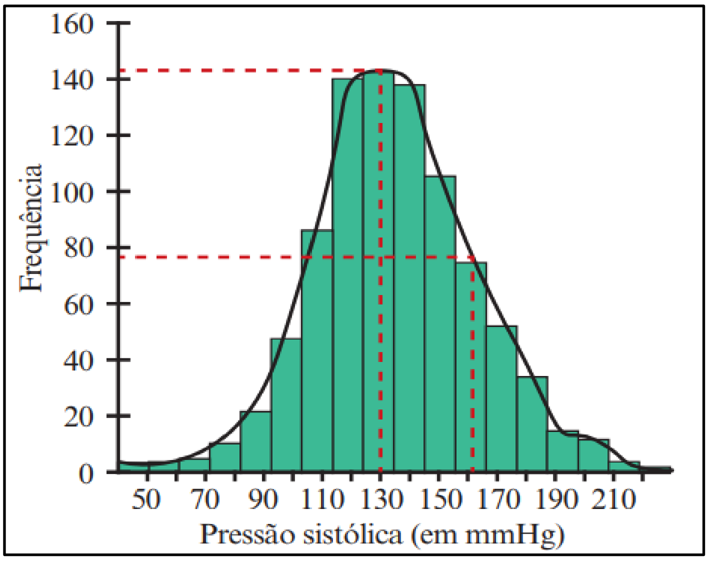
Nesse sentido, procedemos com a abordagem e discussão da classificação dos tipos de variáveis estatísticas, verbalizando que elas se dividem em qualitativas e quantitativas. As variáveis qualitativas são aquelas que apresentam resultados em categorias, podendo ser ordinais, quando as categorias obedecem a uma ordenação, como, por exemplo, a classe social (baixa, média, alta) e gosto pela Matemática (pouco, regular, muito) e nominais, quando as categorias não obedecem a uma ordenação, tendo como exemplo, a nacionalidade (Brasileira, Canadense, Espanhola, etc..) e a cor favorita (azul, verde, amarelo, etc..). Já as variáveis quantitativas são aquelas que apresentam resultados em valores numéricos, podendo ser do tipo discreta, quando os valores são resultados de uma contagem, como, por exemplo, o número de irmãos e número de letras do nome e do tipo contínua, quando os valores são resultados de uma mensuração, como a altura, a massa e a pressão arterial.

Diante disso, após fazermos a abordagem da relação entre a Estatística e a Probabilidade (BAYER et al., 2005), a qual contemplou a Estatística enquanto ciência, a definição das Estatísticas Descritiva e Inferencial, dos conceitos que as compõem e também sobre o entendimento do que significa e quais são os tipos de uma variável estatística (CAZORLA, MAGINA, GITIRANA e GUIMARÃES,2017), salientamos aos professores que a partir daquele momento iríamos focar na variável do tipo contínua e passar a compreender o modelo da Distribuição Normal de probabilidades, ou simplesmente, Curva Normal, o qual se trata do principal modelo de probabilidade presente na Estatística Inferencial, e que descreve o comportamento de diversos fenômenos, dentre eles, os de variáveis contínuas.

Nessa direção, nessa etapa da sistematização teórica tivemos o objetivo de proporcionar aos professores a apropriação do conhecimento Comum e o conhecimento Epistêmico sobre a Curva Normal, isto é, seu conceito, significados e representações. Logo, iniciamos a abordagem do modelo da Curva Normal apresentando a conceitualização do mesmo, proposta por Gonçalves (2014), o qual classifica a Curva Normal como um modelo matemático que descreve fenômenos aleatórios e tem uma grande importância na Inferência Estatística, servindo de base para a construção de intervalos e é útil para calcular probabilidades.

Em continuidade, para exemplificar o modelo da Curva Normal, aos professores, apresentamos a imagem destacada abaixo. Logo, ressaltamos que ela retrata a distribuição dos dados da pressão arterial de uma amostra de 900 pessoas, através de um histograma, que é classificado como uma representação gráfica de distribuição de frequências em barras, construída com intervalos de classes, no qual não há espaços entre as barras. Esses intervalos são colocados no eixo horizontal e as frequências são colocadas no eixo vertical, e essas podem ser absolutas ou relativas, (FERREIRA, 2015).

Figura 49 – Curva Normal da pressão arterial de uma amostra de 900 pessoas

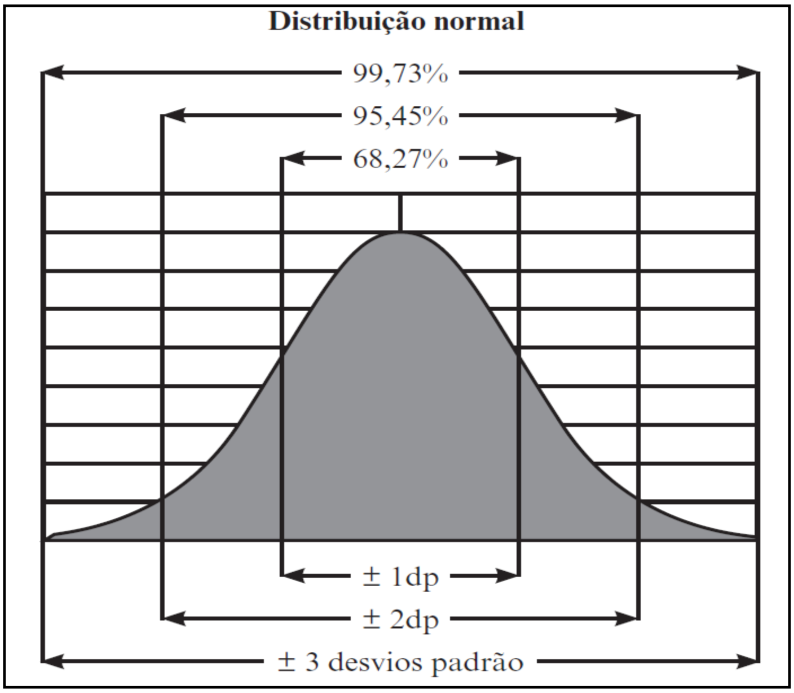


Fonte: São Paulo, 2014.

A partir desse exemplo, discutimos que, por se tratar de uma variável contínua, a distribuição dos dados graficamente obedece a uma curva, que chamamos de Curva Normal. Além disso, ressaltamos que quanto maior for a amostra, mais haverá uma tendência que sua representação gráfica seja uma Curva Normal. Nesse momento, voltamos a discussão sobre a representação gráfica das alturas construída na Atividade 1 e chamamos a atenção que a mesma não apresenta uma curva por se tratar de uma amostra de apenas 7 pessoas, caso aumentássemos consideravelmente os elementos da amostra, certamente, ela passaria a apresentar uma Curva na representação de seus dados.

Em continuidade, destacamos a importância da Curva Normal por se tratar do principal modelo presente na Estatística Inferencial, que modela uma gama de fenômenos do nosso cotidiano e que permite abordagem, em sala de aula, da relação entre a Estatística e a Probabilidade que, comumentemente, são ensinadas de forma independente. Nesse momento, os professores foram convidados a entender os conceitos estatísticos e probabilísticos presentes na Curva Normal e como se dá essa relação. Para isso, fizemos uso de outra imagem que apresenta, de forma geral, a representação da Curva Normal, conforme evidenciado, a seguir:

Figura 50 – Representação da Curva Normal



Fonte: São Paulo, 2014.

Por meio dessa imagem, verbalizamos que em toda Curva Normal a Média, Moda e a Mediana possuem o mesmo valor e são iguais ao seu ponto central. Além do mais, destacamos que a Curva Normal é determinada por dois parâmetros: a Média e o Desvio Padrão da amostra, e ela é sempre simétrica em relação à Média. Desse modo, a partir da Média, quanto maior for o Desvio Padrão mais a frequência dos dados diminuem de forma simétrica em torno dessa Média. Em seguida, pontuamos que o nome da Curva é Normal porque se espera que a curva contemple aproximadamente 100% dos dados em até mais ou menos 3 Desvios Padrões em relação à Média, o que estabelece um grau de normalidade. Logo, ressaltamos que se tivermos um dado estatístico com o Desvio Padrão muito alto em relação à Média, além de 3 Desvios Padrões, teremos um ponto fora da Curva, algo que foge da normalidade. A partir da abordagem desses conceitos, retornamos para o slide com a representação gráfica, com a amostra da pressão arterial e foram realizadas algumas discussões, apresentadas adiante.

Pesquisador: *Diante do que a gente aprendeu aqui, qual é a Média, Moda e Mediana da amostra da pressão arterial das 900 pessoas?*

Todos os professores: *Cento e trinta.*

Pesquisador: *Por quê?*

P_{2}: *Porque esse é o valor central da Curva Normal*

P_{10}: *Exato.*

Pesquisador: *Todos concordam com essa afirmação?*

Todos os professores: *Sim.*

Pesquisador*: E o que o Desvio Padrão significa nesse gráfico dessa amostra?*

P_{8}: *No caso, quando o Desvio Padrão vai aumentando em relação à Média, a regularidade dos dados diminui.*

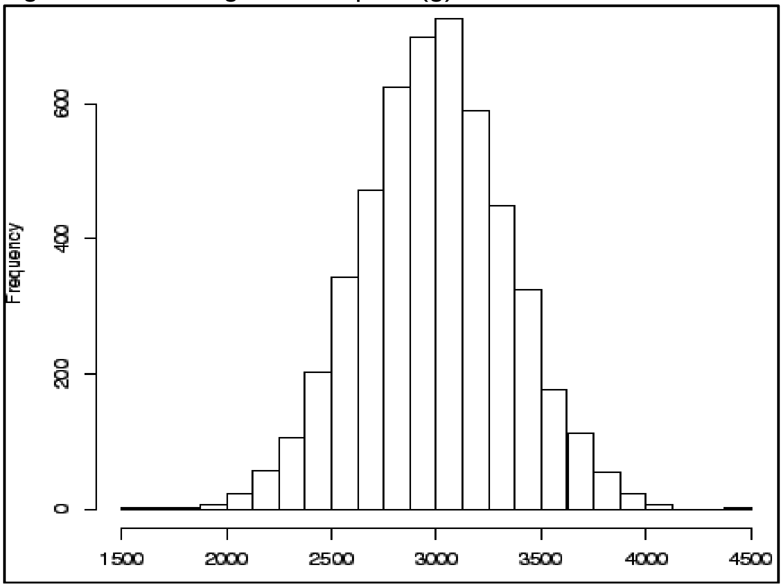
P_{4}: *Quanto maior o Desvio Padrão dos dados, como você falou, mais a frequência dos dados vai diminuindo tanto acima da Média, que é 130, quanto abaixo também.*

Pesquisador: *Exatamente. Muito bem.*

A partir dessas abordagens, os professores passaram a compreender o significado da Curva Normal, sua representação gráfica e os conceitos estatísticos, mais precisamente, as medidas de tendência central e o Desvio Padrão que estão presentes na Curva. Em continuidade, apresentamos, aos professores, duas imagens, com a representação gráfica em forma de histogramas que retratam a modelagem da Curva Normal como fenômenos do nosso dia a dia.

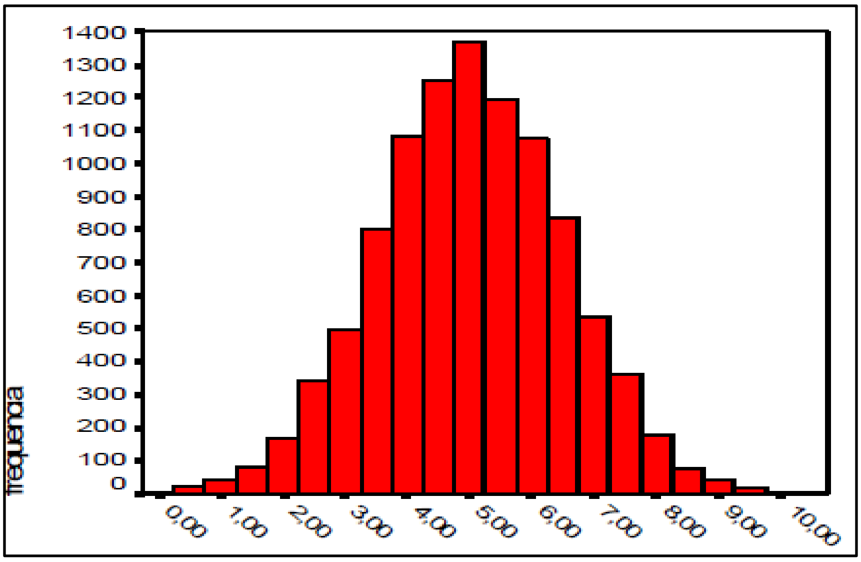
A primeira apresenta a distribuição dos dados das massas, em gramas, de 5000 recém nascidos. A segunda apresenta as notas de 10000 estudantes em um determinado exame escolar. Deste modo, como a massa (g) e a nota em uma prova se tratam de duas variáveis contínuas, a representação desses dados obedecem a uma Curva Normal, na qual o termo central representa a Média, Moda e Mediana das respectivas amostras e a partir do Desvio Padrão em relação a essas Médias, a frequência dos dados vai diminuindo de forma simétrica, caracterizando a representação de uma Curva Normal, como podemos observar, a seguir.

Figura 51 – Histograma do peso(g) de 5000 recém nascidos



Fonte: Shimakura, 2005.

Figura 52 – Histograma das notas de 10000 estudantes em um vestibular



Fonte: Cosomilo, 2008.

A partir da apresentação desses dois exemplos, que retratam a modelagem da Curva Normal a situações do nosso cotidiano, foram realizadas algumas discussões com os professores, as quais estão destacadas adiante:

Pesquisador: *Diante do que a gente já estudou sobre a Curva Normal, o que podemos compreender sobre esses gráficos? Que leituras estatísticas podemos fazer deles?*

P_7: *É... No primeiro, a Média, Moda e Mediana é igual a 3kg e no segundo é igual a nota 5,0.É o termo central a Curva Normal. Então essas são as medidas que podem, por exemplo, representar esses grupos.*

P_{10}: *Correto. É o valor central de cada Curva Normal.*

Pesquisador: *Certo. Além disso, o que podemos compreender mais?*

P_1: *Além disso, que eles falaram, é a ideia do Desvio Padrão. Porque nos dois gráficos há uma concentração maior dos dados em torno da Média e quando o Desvio Padrão vai aumentando a frequência de dados vai diminuindo, acima e abaixo da Média, formando a Curva.*

P_4: *E isso de fato retrata o nosso cotidiano, né? No primeiro gráfico mesmo no nosso dia a dia é mais comum nascerem bebês em torno de 3kg e se a gente olhar no gráfico essa é a Média e há uma certa frequência próximo a esse valor e é menos comum bebês acima de 4 kg e menos que 2 kg. Isso é interessante, porque dá a ideia de como as coisas geralmente acontece, dentro da normalidade, como você falou antes.*

P_8: *E se por acaso tiver um bebê com mais que 4kg ou 5kg e menos que 2kg que nasça naturalmente dentro desse exemplo aí, como você explicou, vai ser um ponto fora da Curva Normal, aquele valor que é difícil de acontecer.*

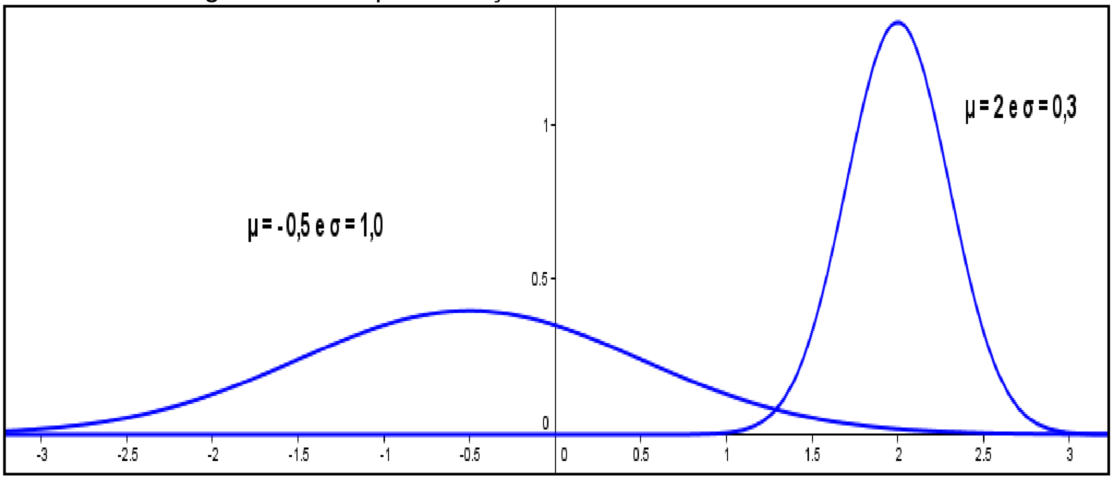
P_1: *E a mesma coisa é no outro gráfico das notas. Temos a nota média que também é a que mais aparece nesse conjunto, há também uma concentração em torno dessa média porque o Desvio Padrão é pequeno, mas quando ele vai aumentando, a ocorrência das notas vai diminuindo sendo difícil de ocorrer uma nota muito baixa ou muito alta, né isso? Interessante mesmo.*

Pesquisador: *Ok. Isso mesmo. É essa leitura estatística que gostaria que vocês fizessem mesmo. Tanto das medidas de tendência central, como o Desvio Padrão, enquanto medida de dispersão, e o que eles significam em cada caso. Muito bem.*

Com a apresentação desses dois exemplos e através da discussão realizada foi possível perceber que os professores demonstraram compreender o conceito da Curva Normal, além de serem capazes de fazer as leituras estatísticas e compreender os significados de cada gráfico e dos conceitos estatísticos abarcados por cada um deles. Após essa discussão, demos prosseguimento com abordagem de algumas propriedades presentes no modelo da Curva Normal e com o conceito de probabilidade presente na Curva Normal, juntamente com o cálculo de probabilidades.

Logo, a partir da imagem adiante, discutimos que como a representação gráfica da Curva Normal fica determinada pelos parâmetros *Mé*dia e o *Desvio Padrão*, ela pode ter diferentes formatos, a depender dos valores desses dois conceitos. A *Mé*dia sempre irá indicar o ponto central da Curva Normal e o *Desvio Padrão* indicará a amplitude, isto é, a diferença entre o maior e menor valor do conjunto, (AZEVEDO, 2016). Assim, salientamos que quanto maior o *Desvio Padrão*, maior será a dispersão do conjunto e a amplitude dos dados, e consequentemente a Curva Normal será mais comprimida verticalmente e mais expandida horizontalmente. Do contrário, quanto menor o *Desvio Padrão*, menor será a dispersão do conjunto e a amplitude dos dados e consequentemente a Curva Normal será mais expandida verticalmente e mais comprimida horizontalmente. Além disso, debatemos que toda Curva Normal é sempre simétrica em relação à *Mé*dia e também é assintótica em relação ao eixo das abscissas, ou seja, a Curva se aproxima, mas nunca intercepta esse eixo.

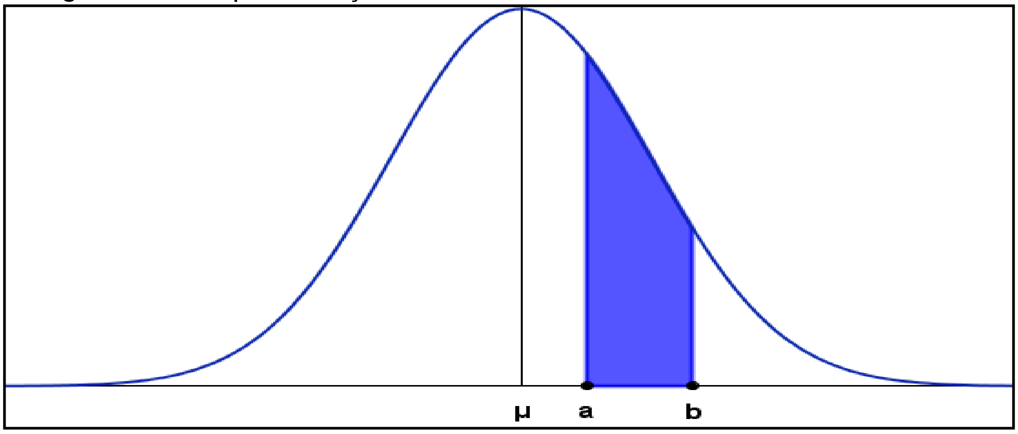
Figura 53 – Representação de diferentes Curvas Normais



Fonte: O autor, 2019.

Em continuidade, abordados, por meio da imagem apresentada, a seguir, o conceito de probabilidade presente na Curva Normal e em seguida o cálculo de probabilidades.

Figura 54 – Representação da área de um intervalo sob a Curva Normal



Fonte: O autor, 2019.

De início, apresentamos aos professores algumas propriedades da Curva Normal que remetem ao conceito de probabilidade: 1) A Curva Normal reúne 100% dos dados da amostra e a área sob seu gráfico e o eixo das abscissas é sempre igual a 1. **2)** A Curva Normal possibilita determinar probabilidades associadas aos valores da área de intervalos da distribuição. **3)** A área sob a curva entre dois pontos é a probabilidade de uma variável normalmente distribuída tomar um valor entre esses pontos.

Diante disso, com a utilização da referida imagem, salientamos, aos professores, que no gráfico da Curva Normal, o conceito da Probabilidade está associado à área sob a Curva. Deste modo, como a probabilidade varia de 0 a 1, a área total da curva, reunindo 100% os dados da amostra, é sempre igual 1. Destacamos também que, como a Curva Normal é simétrica em relação à Média, a metade da Curva, abaixo e acima da Média, reúne 50% dos dados e tem área igual a 0,5. Além disso, pontuamos que a probabilidade de uma determinada variável X tomar um valor em um intervalo específico ($x_1 \leq x \leq x_2$) é igual a área da determinada por esse intervalo, destacada em azul na Curva Normal presente na imagem.

Após isso, procedemos com o cálculo de probabilidades. Para isso, apresentamos os dois métodos que estão abordados na fundamentação teórica deste estudo, a tabela normal padronizada Z e o software Geogebra. Esses dois recursos permitem o cálculo da área de um determinado intervalo sob a Curva e, consequentemente, a probabilidade de um elemento da amostra pertencer a esse determinado intervalo. Nesse momento, buscamos propiciar aos professores, além do conhecimento matemático Comum e do conhecimento Epistêmico já pontuado ao longo dessa seção, a apropriação do conhecimento envolvendo a faceta mediacional. Dessa forma, apresentamos aos professores, a tabela e o Geogebra como recurso didático para a abordagem da Curva Normal e o cálculo de probabilidades em sala de aula.

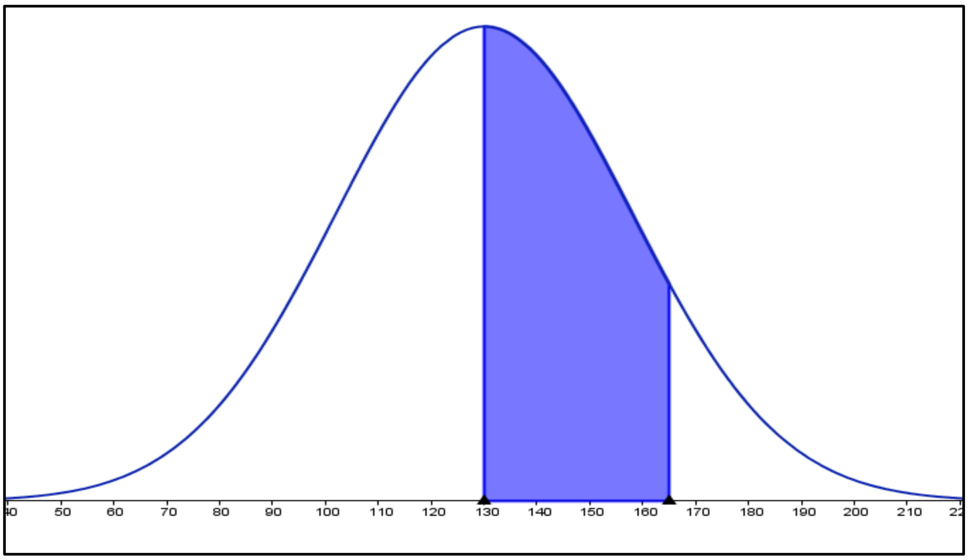
Para explicar e exemplificar o conceito de probabilidade e aplicação dos dois métodos, aos professores, retomamos o gráfico com a Curva Normal da pressão arterial da amostra das 900 pessoas, apresentado anteriormente, cujo a Média e o Desvio Padrão são iguais a 130 mmHg e 28 mmHg, respectivamente, e fizemos, aos professores, os seguintes questionamentos probabilísticos: 1) Escolhendo uma pessoa da amostra ao acaso, qual o valor da pressão arterial com a maior probabilidade de ser observado? 2) Se escolhemos uma pessoa dessa amostra ao acaso, qual a probabilidade de que ela tenha a pressão arterial entre 130 mmHg, e 165 mmHg ?.

No que diz respeito a primeira pergunta, observamos que nenhum professor emitiu uma resposta, assim, para respondê-la, pontuamos que apenas precisaríamos reconhecer o valor da Moda a partir do gráfico da amostra, pois como esse valor é o mais frequente na mesma, ele tem mais chance de ser observado, ao selecionarmos uma pessoa da amostra ao acaso. Deste modo, a partir dessa primeira pergunta, verbalizamos que apenas com a observação do gráfico da Curva Normal é possível proceder com leituras probabilísticas, frisando ainda, como exemplo, que a chance de se escolher uma pessoa ao acaso e ela possuir a pressão arterial maior que a Média, é de 50%, cuja probabilidade também é a mesma para valores menores que a Média, por se tratarem da metade da área de toda a Curva Normal.

Ao fazermos a segunda indagação, os professores afirmaram que era necessário encontrar a área do intervalo entre os pontos 130 e 165 sob a Curva Normal, e assim determinar a probabilidade associada a área desse intervalo. Deste modo, procedemos com a explicação do método da Curva Normal Padronizada, e como já apresentado na fundamentação teórica deste estudo, esse método consiste em efetuar a mudança da variável, transformando a variável aleatória (x), em uma variável aleatória (z), através da seguinte expressão: $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$, na qual x é um valor de um ponto do intervalo pertence à variável x, μ é a Média e σ Desvio Padrão da amostra. Através dessa expressão, determinados uma nova distribuição equivalente a anterior e padronizada de variável (z), possuindo sempre a Média $\mu = 0$ e o Desvio Padrão $\sigma = 1$. Em continuidade, explicamos aos professores que a última etapa do método consiste em consultar a tabela da Distribuição Normal padronizada (z), que contempla os valores da área ou probabilidade entre a Média (u = 0) e qualquer ponto (z) e assim, encontrar o valor da probabilidade de um intervalo determinado.

Após essa explicação, procedemos com a resolução da segunda indagação para elucidar a aplicação desse método. Como visto, devemos determinar a probabilidade de se escolher uma pessoa ao acaso e ela possuir a pressão entre o intervalo 130 e 165. Assim, a probabilidade desejada corresponde à área compreendida entre esses pontos, representada no gráfico adiante.

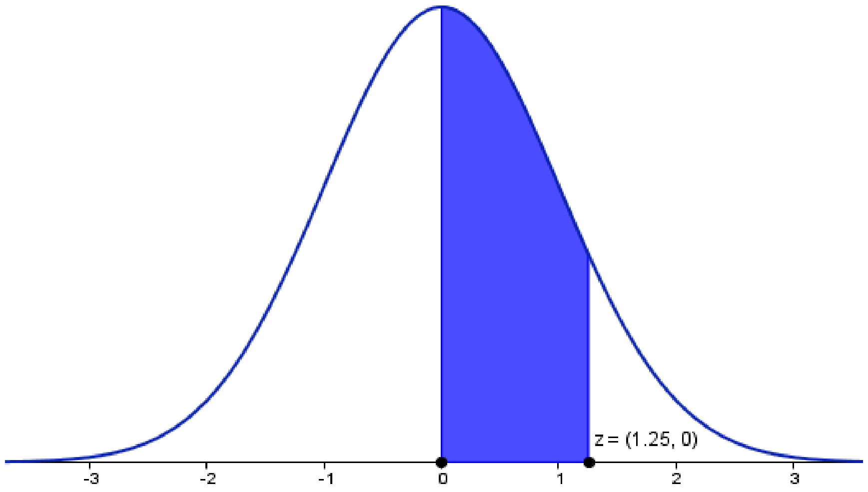
Figura 55 – Área sob a Curva Normal entre os pontos 130 e 165



Fonte: O autor, 2019.

Logo, procedemos, juntamente com os professores, com a explicação e aplicação do método, que tem como primeira etapa a padronização da variável, através da fórmula destacada anteriormente, determinando uma nova Curva Normal, como a mesmo valor para área do intervalo desejado, como indicado na figura a seguir.

Figura 56 – Área sob a Curva Normal padronizada entre os pontos 0 e 1,25.



$$Z_1 = \frac{130 - 130}{28} = 0 \qquad Z_2 = \frac{165 - 130}{28} = 1{,}25$$

Fonte: O autor, 2019.

Assim, através da aplicação da fórmula, transformamos o intervalo da variável X (130 ≤ X ≤ 165) em um intervalo padronizado (z) (0 ≤ Z ≤ 1,25) e para determinarmos a área correspondente a esse intervalo consultamos a tabela Z, a qual contempla os valores da área ou probabilidade entre a Média (u = 0) e qualquer ponto (z). Logo, com um dos pontos do intervalo padronizado já é Média (u = 0), devemos proceder determinando o valor da área correspondente ao ponto 1,25 na tabela. Em seguida, salientamos aos professores que ao analisarmos a tabela, devemos observar a primeira coluna, que contempla a parte inteira e a primeira decimal do ponto z, e a primeira linha, que contempla segunda decimal desse ponto. Logo, a área ou a probabilidade desejada estará na interseção entre a coluna e a linha relativas ao ponto z analisado. Deste modo, consultando a tabela encontramos o valor da área entre o intervalo 0 ≤ Z ≤ 1,25; como indica a seguinte figura que apresenta um recorte da tabela com o ponto desejado.

Figura 57 – Recorte da tabela Z com o ponto 1,25.

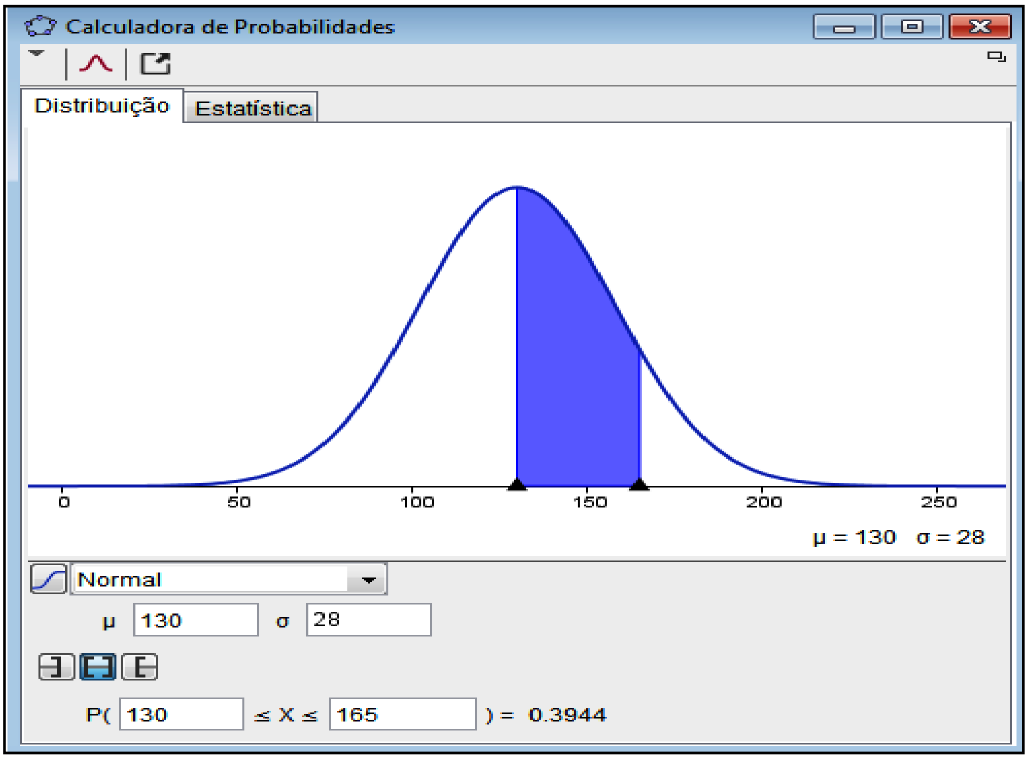
	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,01331	0,1368	0,1406
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2010	0,2054	0,2088	0,2123
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131

Fonte: São Paulo, 2014.

Como desejamos encontrar a área correspondente ao ponto z = 1,25. Observa-se que este ponto, (1,25 = 1,2 + 0,05), possui a parte inteira e primeira decimal igual a 1,2 e a segunda decimal igual a 0,05, ao analisarmos a tabela, podemos compreender que a área correspondente a esse ponto está na interseção entre a décima terceira linha (1,2) e a sexta coluna (0,05). Assim, a área procurada é igual a 0,3944, ou seja, a probabilidade de se escolher uma pessoa ao acaso e ela possuir a pressão entre o intervalo 130 e 165 é de 39,44%.

Após a explicação e aplicação do primeiro método, procedemos com a explicação, aos professores, do segundo método para o cálculo de probabilidades associada a intervalos sob a Curva Normal, que consiste na utilização do Software Geogebra. Esse programa tem, dentre inúmeras ferramentas, uma denominada “Calculadora de Probabilidades” que possui, em sua layout, opções para o preenchimento dos parâmetros Média e o Desvio Padrão, estabelecendo a Curva Normal e o intervalo que buscamos calcular a área. Assim, de forma mais prática e dinâmica é possível determinar a área que corresponde à probabilidade associada a esse intervalo. Na imagem, a seguir, destacamos a utilização desse recurso para o mesmo cálculo da probabilidade entre o intervalo 130 e 165, do questionamento abordado anteriormente.

Figura 58 – Área sob a Curva entre o intervalo 130 e 165 a partir do Geogebra



Fonte: Geogebra, 2019.

Dando prosseguimento a nossa sistematização teórica, após aplicação do software Geogebra, enquanto segundo método para o cálculo de probabilidades na Curva Normal, passamos abordar as diretrizes curriculares, que orientam implicitamente e explicitamente o ensino da Curva Normal no Ensino Médio da escolarização básica, veiculadas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2000), Parâmetros Curriculares para a Educação Básica do Estado de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2103) e a Base Nacional Curricular Comum (BRASIL, 2018).

Destacamos adiante três recortes que retratam a abordagem e o ensino da Curva Normal no Ensino Médio segundo as bibliografias mencionadas anteriormente.

Brasil (2000, p. 128) traz para os professores tal recomendação: “Identificar em diferentes áreas científicas e outras atividades práticas, modelos e problemas que fazem uso de estatísticas e probabilidades”, propondo que se deve identificar, modelos que fazem o uso de estatísticas e probabilidades, contemplando, implicitamente, o ensino da Curva Normal, tendo em vista que a mesma é classificada como o principal modelo probabilístico presente na Estatística Inferencial e que está presente em diferentes área de conhecimento. Em continuidade, destacamos:

> A ideia de que os fenômenos na natureza seguem um determinado padrão (assemelhando-se à curva normal, em formato de sino), em que os valores extremos têm menor frequência e os valores mais próximos da média ocorrem em maior número de vezes (maior frequência) deve ser destacada e discutida. (PERNAMBUCO, 2013, p.45).

Nesse caso, discutimos que os Parâmetros Curriculares para a Educação Básica do Estado de Pernambuco (2013) para o Ensino Médio orientam explicitamente o ensino da Curva Normal, ao proporem que devem ser destacados e discutidos os fenômenos da natureza que seguem um determinado padrão, ou seja, a uma Curva Normal.

Por fim, enfatizamos que a Base Nacional Curricular Comum para o Ensino Médio (BRASIL, 2018, p. 533), que traz, dentre algumas recomendações, de forma implícita a abordagem da Curva Normal para o Ensino Médio:

> (EM13MAT202) Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.
> (EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade
> (EM13MAT316) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão), (BRASIL, 2018,p.546).

No entanto, os professores, de modo geral, afirmaram não conhecer tais recomendações curriculares. Esse fato corrobora com as conclusões levantadas na primeira etapa dessa pesquisa, estudo diagnóstico, no qual apontamos que os professores por não conhecerem o conceito da Curva Normal, consequentemente, também não o ensinavam. Deste modo, a partir dessa abordagem sobre o currículo, buscamos propiciar, aos professores, a apropriação do conhecimento didático envolvendo a faceta Ecológica que contempla o conhecimento sobre o currículo proposto para o ensino de Matemática, e nesta oportunidade, mais especificamente, sobre as orientações para o ensino da Curva Normal.

Após esse momento de apresentação das orientações curriculares, prosseguimos com encontro formativo, debatendo com os professores sobre a temática abordada até aquele momento, ou seja, o conceito da Curva Normal, o cálculo de probabilidades e orientações para o seu ensino.

Pesquisador: *Colegas professores, irei fazer uma pergunta e gostaria de ouvir cada um de vocês. Diante do que estudamos aqui sobre o conceito da Curva Normal, o cálculo de probabilidades e as orientações curriculares para o seu ensino, o que vocês podem dizer sobre esse tema, pensando no seu ensino em sala de aula?*

P_7: *Eu achei bem interessante. Eu não conhecia a Curva Normal. Nunca tinha estudado, nem na graduação, mas é interessante entender o quanto assim... a Curva Normal ela está presente no nosso dia a dia em diversas situações. Também não conhecia essas recomendações do currículo. É bem interessante. Eu gostei de apreender isso.*

P_2: *Eu já tinha ouvido falar, mas não sabia o que era a Curva Normal, mas também achei muito interessante, a ideia das medidas de tendência central, a média, moda e mediana, do desvio padrão, da probabilidade, a relação entre eles e o significado de cada um na Curva Normal, é muito interessante e como a professora falou, isso está bem presente no nosso cotidiano. Acho importante abordar isso em sala sim, dando exemplos do dia a dia em que a Curva Normal está presente.*

P_4: *Eu também, particularmente, nunca estudei nem ensinei sobre a Curva Normal e na época da faculdade também não estudamos sobre isso. Mas é interessante a gente trazer isso em sala de aula porque é uma maneira diferente assim... de abordar a medidas de tendência central e de dispersão e a probabilidade. Eu também acho isso bem interessante e importante de se ensinar. Foi bom você trazer essas orientações que estão no currículo, como disse antes, eu também não conhecia, é bom para trabalharmos em sala de aula.*

A partir dos relatos desses professores, podemos reafirmar que os mesmos não conheciam o conceito da Curva Normal, incluindo sua representação gráfica os conceitos das medidas de centralidade e dispersão e o cálculo de probabilidades e probabilísticos presentes na Curva Normal e as recomendações curriculares oficiais para o seu ensino na Educação Básica. Além disso, ficou evidente, mais uma vez, que eles não tiveram oportunidade de estudar tais conceitos em suas respectivas formações acadêmicas e, consequentemente, não os ensinavam em sala de aula. A seguir, destacamos os relatos dos professores P_{12}, P_8 e P_{10} para a mesma pergunta destacada anteriormente.

P_{12}: *Eu também acho interessante porque é uma maneira diferente de compreender a probabilidade. E como foi falado aqui, muitas vezes a gente ensina a probabilidade só como aquela ideia da razão. Então achei interessante porque é importante os alunos entenderem também sobre isso.*
P_8: *Eu concordo com o que os colegas falaram. Principalmente porque se a gente for parar para pensar, há inúmeros fenômenos que são retratados pela Curva Normal. Então isso faz parte do nosso cotidiano, então é interessante levar gráficos como exemplos, feito você abordou e fazer com que os alunos entendam a ideia da Curva Normal e os conceitos da estatística e da probabilidade e também o cálculo da probabilidade entre dois pontos na Curva Normal.*
P_{10}: *Eu penso como o pessoal falou aqui. Concordo com eles. Assim, eu também não conhecia a Curva Normal, eu já vi esse gráfico no livro de Matemática, mas também nunca ensinei. Consegui entender o que você ensinou e acho importante também ensinar isso aos meninos, de trazer essa ideia de relacionar a Estatística com a Probabilidade.*

Os relatos desses professores denotam que a sistematização teórica realizada também propiciou a compreensão de que a abordagem da Curva Normal, em sala de aula, se trata de mais uma possibilidade para o ensino do conceito da Probabilidade, o que permite o professor não restringir o mesmo apenas a razão clássica, como comumente é ensinado na Educação Básica. Além disso, os professores refletiram na importância do ensino do modelo da Curva Normal para uma melhor interpretação do vários fenômenos do nosso cotidiano que obedecem a esse modelo matemático e para o entendimento de como se dá a relação entre a Estatística e a Probabilidade, na Estatística Inferencial, representa na Curva.

Após esse momento de debate, finalizamos a sistematização teórica e convidamos os professores para nos seus grupos responderem a Atividade 2. Desse modo, demos início ao terceiro momento de nosso encontro formativo, no qual cada grupo de professores responderam a Atividade 2, com o objetivo de sedimentar e colocar em prática os conhecimentos didático-matemáticos propiciados pela sistematização teórica abordada. Na seção adiante, passaremos a descrever e analisar as respostas dos grupos de professores a referida atividade e a discussão realizada no momento da socialização da mesma.

3º Momento – Atividade 2

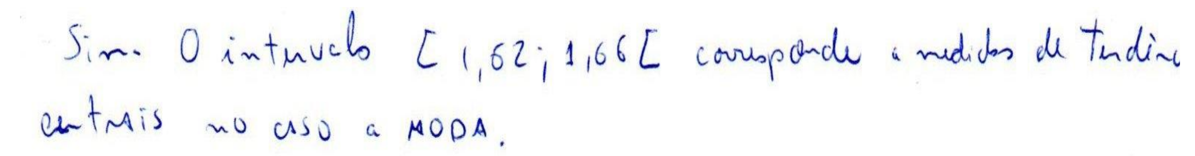
Como apresentado no capítulo da metodologia deste estudo, a atividade 2 foi composta por três questões. As duas primeiras tiveram o objetivo de analisar o conhecimento matemático Comum e o conhecimento Epistêmico relativo à Curva Normal, envolvendo alguns conceitos estatísticos e probabilísticos presentes na mesma e o cálculos de probabilidades associados à intervalos sob a Curva Normal. Já a terceira questão teve como objetivo analisar o conhecimento didático envolvendo todas as seis facetas: Epistêmica, Cognitiva, Afetiva, Mediacional, Interacional e Ecológica dos professores a partir de uma resposta de um estudante a uma situação problema envolvendo o conceito da Curva Normal.

Na primeira questão foi apresentada uma situação-problema que contemplou uma representação, em histograma, das alturas(m) de uma amostra de 307 pessoas. Tendo em vista que a altura se trata de uma variável contínua, a distribuição dos dados, no gráfico abordado na questão, se aproxima de uma Curva Normal. A partir desse contexto, foi solicitado aos professores que respondessem e justificassem, em suas respostas, se é correto afirmarmos que ao fazer a escolha de uma pessoa dessa amostra ao acaso, a maior probabilidade é que ela tenha a altura entre o intervalo [1, 62 ; 1,66 [.

Ao analisarmos as respostas dos grupos de professores, isto é, as duas duplas e o trio, constatamos que todos os professores responderam de modo adequado por afirmarem e justificarem sua resposta, indicando que se escolhermos uma pessoa da amostra ao acaso, a maior probabilidade é que ela tenha a altura entre o intervalo [1, 62 ; 1,66 [, por ser esse intervalo a moda da amostra.

Para exemplificarmos essa categorização, apresentamos, a seguir, a resposta da Dupla 2, na qual afirma que está correta a informação posta na questão, de que se escolhermos uma pessoa da amostra ao acaso, a maior probabilidade é que ela tenha altura entre o intervalo [1, 62 ; 1,66 [, por esse intervalo se tratar da moda da amostra e estar no centro da Curva Normal das alturas, representada na questão. Deste modo, infere-se que os professores se apropriaram do conhecimento matemático Comum e do conhecimento Epistêmico sobre a Curva Normal e as medidas tendências centrais presentes nela. Neste caso, eles foram capazes de reconhecer que o ponto central do gráfico também representa a moda da amostra, e por sua vez, por se tratar do valor mais frequente, há uma maior probabilidade desse valor ser observado se escolhermos uma pessoa dessa amostra ao acaso.

Figura 59 – Resposta RA da Dupla 2 à 1ª questão da Atividade 2


Sim. O intervalo [1,62 ; 1,66 [corresponde a medidas de Tendência centrais no caso a MODA.

Sim. O intervalo [1,62 , 1,66 [corresponde a medidas de tendência centrais, no caso a moda.

Fonte: Dupla 2, 2019.

Em continuidade, na segunda questão, apresentamos uma situação problema abordando uma tabela com a média e o desvio padrão das alturas de uma amostra de estudantes. A partir dessas informações, na alternativa a, indagamos aos professores qual a probabilidade de se escolher um estudante ao acaso e ele possuir a altura entre 155 cm e 164 cm. Na alternativa b, perguntamos qual a probabilidade de se escolher um estudante e ele ter a altura maior ou igual a 155 cm. Logo, na primeira alternativa, utilizando os dois parâmetros da Curva Normal, a média e o desvio padrão, os professores deveriam utilizar a tabela da Curva Normal padronizada e calcular a área sob a curva entre o intervalo solicitado. Na segunda alternativa, de forma mais intuitiva, os professores deveriam reconhecer que o intervalo maior ou igual que 155 cm, ou seja, a média, representa a metade da curva e, portanto, a área é igual a 0,5 ou 50% de probabilidade.

Ao analisarmos as respostas dos professores, verificamos que nas duas alternativas, todos os grupos responderam de forma adequada. Logo, na alternativa (a), eles foram capazes de determinar corretamente a probabilidade de se escolher um estudante ao acaso e ter a altura entre o intervalo de 155 cm e 164 cm. Já na alternativa (b), foram capazes de reconhecer intuitivamente a probabilidade de se escolher um estudante ao acaso e ele ter a altura maior ou igual que a média da amostra dos estudantes. Em termos de exemplo, apresentamos abaixo a resposta adequada do trio de professores para as alternativas (a) e (b) dessa questão.

Figura 60 – Resposta RA do Trio de professores à 2ª questão (a) da Atividade 2

a) $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma} \Rightarrow Z = \dfrac{164 - 155}{4} = 2{,}25$

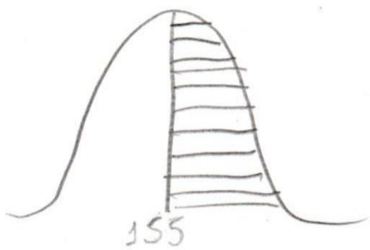
$Z_0 = 0$

$Z_1 = 2{,}25$, logo: $P = 48{,}78\%$

Fonte; o Trio, 2019.

Figura 61 – Resposta RA do Trio de professores à 2ª questão (b) da Atividade 2

b) Uma altura maior ou igual a 155cm repre-senta metade da curva normal, logo a Probabilidade será de 50%.



b) Uma altura maior ou igual a 155 cm represente metade da curva normal, logo a probabilidade será de 50%.

Fonte; o Trio, 2019.

Como podemos observar, para responder a primeira alternativa, o grupo utilizou corretamente o método da Curva Normal padronizada. Inicialmente fizeram a equivalência do intervalo (155, 164) para o intervalo padronizado (0, 2,25), através da expressão de transformação da Curva Normal Padronizada, $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$, já apresentada e explicada anteriormente, no presente texto. Posteriormente, consultaram a tabela Z fornecida a cada grupo e determinaram a área correspondente ao ponto 2,25, encontrando como valor da probabilidade, associada à área, de 48,78%. Na letra b, os professores argumentaram corretamente que o intervalo que contempla um valor maior ou igual a 155 cm, que é a média da amostra, é igual a metade da Curva Normal e, desse modo, a probabilidade é igual a 50%. Além disso, ainda na alternativa b, o grupo fez uma representação do gráfico da Curva Normal para exemplificar á área, que corresponde a probabilidade, da metade da Curva. Diante disso, podemos inferir que os professores apropriam-se do conhecimento matemático Comum e do conhecimento Epistêmico relativo ao conceito da Curva Normal, os conceitos de média e desvio padrão e o que eles representam na Curva Normal, e o cálculo de probabilidades.

A terceira questão, por sua vez, apresentou uma resposta de um estudante a uma situação-problema envolvendo a Curva Normal. Nesse contexto, indagamos aos professores quais seriam suas avaliações e explicações para a resposta apresentada e, imaginando que estivessem em sala de aula, como procederiam com a discussão em classe diante de tal resposta. Desse modo, objetivamos analisar o conhecimento didático envolvendo todas as seis facetas: Epistêmica, Cognitiva, Afetiva, Mediacional, Interacional e Ecológica, ou seja, noções de conhecimento didático sobre os aspectos e a forma como o estudante entende sobre a Curva Normal, suas crenças e atitudes sobre esse objeto matemático, bem como, os recursos didáticos e os tipos de interações que poderiam ser utilizados para a discussão e abordagem do tema com a classe de estudantes.

Nessa direção, ao analisarmos as respostas do grupo de professores, observamos que todos eles apresentaram respostas do tipo parcialmente adequadas por se deterem apenas a avaliar e explicar a resposta do estudante, não apresentando a forma como discutiriam com a classe de estudantes sobre o objeto matemático abordado na questão a partir da resposta apresentada.

De modo geral, as respostas dos grupos de professores foram semelhantes e, como exemplo, apresentamos, a seguir, a resposta da dupla 1, que em suas considerações se detém apenas a avaliar o conhecimento e a crença do estudante diante do objeto matemático contemplado na questão, apresentando apenas noções de conhecimento didático relativo as facetas Afetiva e Cognitiva, não pontuando a forma como prosseguiria a discussão em classe, o que classifica a resposta como parcialmente adequada.

Figura 62 – Resposta RPA da Dupla 1 à 3ª questão da Atividade 2

Avalia-se que a ideia de simetria não
é compreendida pelo aluno pois a relação
com o desvio padrão para mais ou para
menos deve ser relacionada diante da
mesma porcentagem já que a curva é
apresentada no mesmo padrão, simétrica.

Avalia-se que a ideia de simetria não é compreendida pelo aluno pois a relação com o desvio padrão para mais ou para menos deve ser relacionada diante da mesma porcentagem, já que a Curva é apresentada no mesmo padrão, simétrica.

Fonte: Dupla 1, 2019.

Após os grupos finalizarem a Atividade 2, prosseguimos o encontro formativo com uma socialização e discussão, descritas adiante, sobre essa segunda atividade, contemplando aspectos relacionados aos conhecimentos didático-matemáticos sobre a Curva Normal.

Pesquisador: *Bem, pessoal, a partir dessa atividade 2 que vocês resolveram, gostaria que agora nós fizéssemos um momento de socialização sobre essa atividade. Na 1ª questão, o que vocês responderam? A afirmação é verdadeira ou falsa?*

Todos os professores: *Verdadeira.*

Pesquisador: *Por quê?*

P₂: *Porque esse intervalo aqui ente 1,62 e 1,66 é a moda da amostra por estar no centro da Curva Normal então ele tem uma maior probabilidade.*

P₄: *Isso mesmo. Como esse valor é a moda, ele vai ter a maior frequência, então tem a maior probabilidade.*

Pesquisador: *Exatamente. Como a gente aprendeu, a altura é uma variável contínua e então podemos perceber que o gráfico tende a obedecer a uma Curva Normal. E também vimos que o ponto central da Curva é sempre igual a média, a moda e a mediana da amostra. Como esse intervalo ele está no centro, então ele é a moda dessa amostra, e então terá a maior probabilidade de ser essa a altura, quando uma pessoa for escolhido ao acaso, como vocês falaram.*

Pesquisador: *E na segunda questão, na letra a, quanto deu a probabilidade?*

P₇: *No meu cálculo deu 48,78%.*

P₁₂: *O da gente também.*

P_1: *O nosso aqui também.*

Pesquisador: E como vocês chegaram a esse valor?

P_7: *Primeiro a gente fez a transformação do intervalo entre 155 e 164 na Curva Normal padronizada. E aí o primeiro ponto de Z deu 0 e o segundo 2,25, então o novo intervalo ficou entre 0 e 2,25. Depois olhamos na tabela a área que corresponde ao ponto 2,25 e encontramos o valor da probabilidade que deu esse valor de 48,78%.*

Pesquisador: *Ok. Muito bem. É assim mesmo o método da Curva Normal padronizada. Todos fizeram dessa mesma maneira?*

Todos os professores: *Sim.*

Pesquisador: *E na alternativa b, quanto é o valor da probabilidade?*

Todos os professores: *50%.*

Pesquisador: *Por quê?*

P_4: *É a metade da curva o intervalo maior ou igual à média, então é 50%, a metade.*

P_7: *Também colocamos isso.*

P_1: *A gente também.*

Pesquisador: *Ok. Agora eu vou mostrar para vocês como determinar essas probabilidades caso nós fossemos utilizar o Geogebra.*

Nesse instante, demos uma pausa na discussão para a utilização do Geogebra, por parte do pesquisador, para demonstrar, nesse software, o cálculo da área sob a Curva Normal entre os intervalos desejados nas duas alternativas. Destaca-se aqui, que os professores não fizeram uso do Geogebra, durante o encontro formativo, mas puderam visualizar o mesmo, através da apresentação em data-show, enquanto o pesquisador conduzia a sua utilização. Assim, utilizando o Geogebra encontramos as mesmas respostas determinadas pelos professores e ressaltamos sobre a possibilidade de utilização em sala de aula, tanto a tabela Z como o esse software, como recurso didático para abordagem do cálculo de probabilidades na Curva Normal. Após essa demonstração, retomamos a discussão, descrita a seguir, sobre a segunda atividade.

Pesquisador: *E sobre a terceira questão? A primeira pergunta pediu para vocês avaliarem a resposta do estudante. E aí? O que podemos dizer sobre essa resposta?*

P_1: *Ele errou porque como a Curva Normal é simétrica com relação à média, então a probabilidade é a mesma para mais ou para menos um desvio.*

P_4: *Colocamos isso também. Aí ele não percebeu que um desvio acima e um desvio abaixo da média dá a mesma área, então é a mesma probabilidade.*

Pesquisador*: Ok. Muito bem. Ele errou porque não compreendeu a ideia da simetria da Curva Normal em relação à média, o ponto central. Então como vocês falaram, um desvio a mais ou um desvio a menos a partir da média, contempla a mesma área sob a Curva e então a probabilidade é a mesma. Bem, e sobre a segunda pergunta? Como vocês discutiriam com a classe de estudantes a partir dessa resposta?*

[Silêncio...]

Pesquisador: *Como poderíamos, em sala de aula, discutir, abordar esse tema a partir dessa resposta?*

P_8: *Acho que teria que abordar a ideia da simetria, fazer eles entenderem que a área é a mesma.*

P_{10}: *Também acho que deveria ensinar isso, mostrar pelo gráfico, o Desvio padrão e a simetria que fica a partir da média.*

P_4: *Acho que primeiro poderia perguntar por que ele respondeu isso, porque nesse caso ele não entende a simetria que fica na Curva e depois mostraria o correto*

P_2: *Nesse caso poderia abordar essa simetria com os valores iguais das áreas no Geogebra, né? Acho que seria melhor.*

Pesquisador: *É nesse sentido mesmo. Acredito que é importante primeiramente, nós professores, indagarmos, ao aluno, o porquê que ele apresentou aquela resposta, o que isso significa para ele, a partir do contexto desse estudante, compreendendo o modo como ele aprendeu, como ele raciocina sobre isso, a sua crença em relação a esse conteúdo matemático, e partir disso, prosseguir com a interação com a turma, podendo utilizar um recurso didático,o Geogebra, como foi falado, para demonstrar a simetria, entre um desvio para mais e para menos e mostrar a eles que consequentemente a área será a mesma. Tudo isso faz parte de aspectos relacionados ao ensino, ou seja, um conhecimento para o ensino que também devemos ter e colocar em prática.*

P_8: *Até porque se ele respondeu isso é porque não aprendeu sobre a questão da simetria. Então é bom mesmo questionar o que ele já sabe e então demonstrar.*

Pesquisador: *Isso. Exatamente. E vocês acham possível trabalhar essas atividades em sala de aula, na abordagem da Curva Normal?*

P_7; *Sim, é possível sim. Achei a primeira bem legal para pensar na probabilidade. A segunda eu acho que tem um grau de dificuldade maior, mas é possível sim aplicar todas.*
P_1: *Eu também acho interessante trabalhar elas. É interessante porque é uma maneira não comum assim... de abordar a probabilidade e acho que os alunos irão gostar.*
P_4:*É possível sim. É interessante levarmos isso para sala de aula.*
Pesquisador: *Ok.*

Através da realização da segunda atividade, podemos observar que os professores foram capazes de colocar em prática o conhecimento matemático Comum e o conhecimento Epistêmico sobre o conceito da Curva Normal, os conceitos estatísticos e probabilísticos abarcados por esse modelo, bem como o cálculo de probabilidades. Além disso, mais especificamente na terceira questão, os professores apresentaram noções de conhecimento didático envolvendo as facetas Cognitiva e Afetiva, mas apresentaram dificuldades de responder, tanto na folha da atividade, já destacada anteriormente, como na socialização, a forma como prosseguiria a discussão com a classe a partir da resposta apresentada por um estudante. No entanto, durante o debate realizado, emergiram noções de conhecimento didático sobre as facetas Epistêmica, Cognitiva, Afetiva, Interacional, Mediacional e Ecológica. Nesse momento, destacamos a importância de interagir com os estudantes, em sala, questionando o porquê da resposta apresentada, levando em consideração o seu contexto, a suas crenças, atitudes e significados sobre a Curva Normal, e a utilização de recursos didáticos para abordagem do conteúdo matemático.

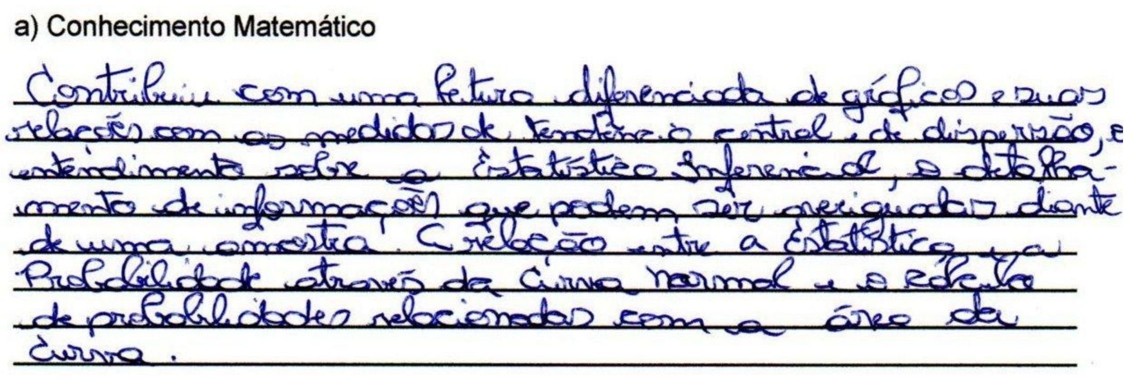
4ª Momento – Atividade 3

Finalizada a socialização e discussão sobre a atividade 2, iniciamos o quarto e último momento do nosso encontro formativo, no qual os professores, individualmente, responderam a Atividade 3. Nela, eles foram convidados a apresentar quais as contribuições que a temática e a sequência de atividades, abordadas no encontro formativo, proporcionaram para o desenvolvimento de seus conhecimentos, na perspectiva do conhecimento matemático e no conhecimento para o ensino da temática, ou seja, o didático.

Como já enfatizamos no capítulo da metodologia, as respostas para essa questão não se apresentam categorizadas porque elas denotam a opinião dos professores sobre a relevância do estudo realizado e as possíveis contribuições do mesmo para a construção e/ou aprimoramento de seus conhecimentos didático-matemáticos sobre o tema.

Nesse sentido, na perspectiva do conhecimento matemático, as respostas dos professores P_1, P_8 e P_{12}, apresentadas adiante, apontaram que a proposta de ensino realizada proporcionou a construção do conhecimento matemático sobre a Curva Normal, a compreensão das medidas de tendência central e de dispersão e o cálculo de probabilidades a partir da Curva Normal como também, o entendimento sobre a relação entre a Estatística e a Probabilidade, estabelecida na Estatística Inferencial, contemplando importantes conceitos como Amostragem e Amostra. No que diz respeito ao conhecimento didático, em linhas gerais, esses três professores argumentaram que a proposta de ensino realizada proporcionou o entendimento de novas possibilidades para a abordagem da Estatística, da Probabilidade e da relação entre ambas através da Curva Normal, possibilitando o entendimento de aspectos didáticos relacionados ao currículo de Matemática, aos recursos didáticos que podem ser utilizados e as diferentes maneiras de abordar essa temática com os estudantes em sala de aula.

Figura 63 – Resposta do professor P_1 à Atividade 3 – Alternativa A

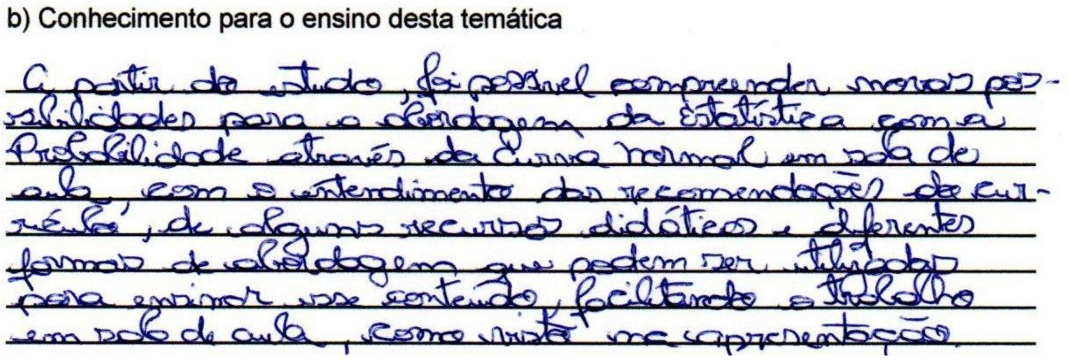

a) Conhecimento Matemático

Contribuiu com uma leitura diferenciada de gráficos e suas relações com as medidas de tendência central e de dispersão, e entendimento sobre a Estatística Inferencial, o detalhamento de informações que podem ser averiguadas diante de uma amostra. A relação entre a Estatística e a Probabilidade através da Curva Normal e o cálculo de probabilidades relacionadas com a área da Curva.

[Contribuiu com uma leitura diferenciada de gráficos e suas relações com as medidas de tendência central e de dispersão, o entendimento sobre a Estatística Inferencial, o detalhamento de informações que podem ser averiguadas diante de uma amostra. A relação entre a Estatística e a Probabilidade através da Curva Normal e o cálculo de probabilidades relacionado com a área da Curva.]

Fonte: Professor P_1, 2019.

Figura 64 – Resposta do professor P_1 à Atividade 3 – Alternativa B

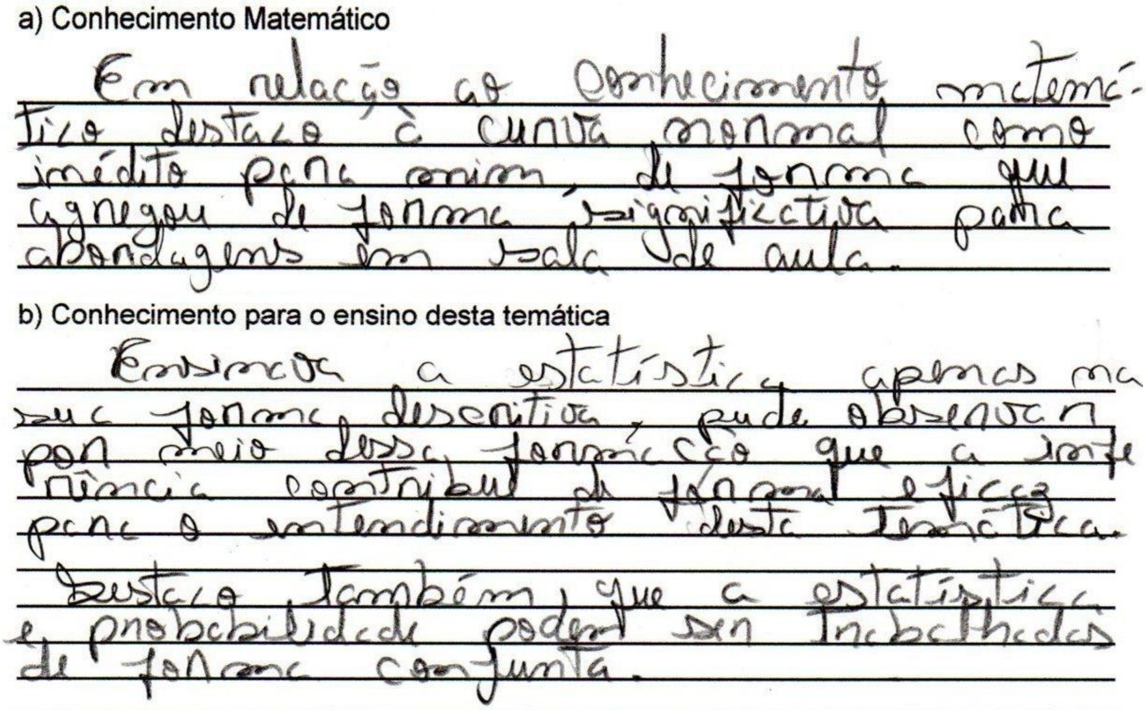

b) Conhecimento para o ensino desta temática

A partir do estudo, foi possível compreender novas possibilidades para a abordagem da Estatística com a Probabilidade através da Curva Normal em sala de aula, com o entendimento das recomendações do currículo, de alguns recursos didáticos e diferentes formas de abordagem que podem ser utilizados para ensinar esse conteúdo, facilitando o trabalho em sala de aula, como visto na apresentação.

[A partir do estudo, foi possível compreender novas possibilidades para a abordagem da Estatística com a Probabilidade através da Curva Normal em sala de aula, com o entendimento das recomendações do currículo, de alguns recursos didáticos e diferentes formas de abordagem que podem ser utilizadas para ensinar esse conteúdo, facilitando o trabalho em sala de aula, como visto na apresentação.]

Fonte: Professor $P_{1,}$ 2019.

Figura 65 – Resposta do Professor P_8 à Atividade 3


a) Conhecimento Matemático

Em relação ao conhecimento matemático destaco a curva normal como inédito para mim, de forma que agregou de forma significativa para abordagens em sala de aula.

b) Conhecimento para o ensino desta temática

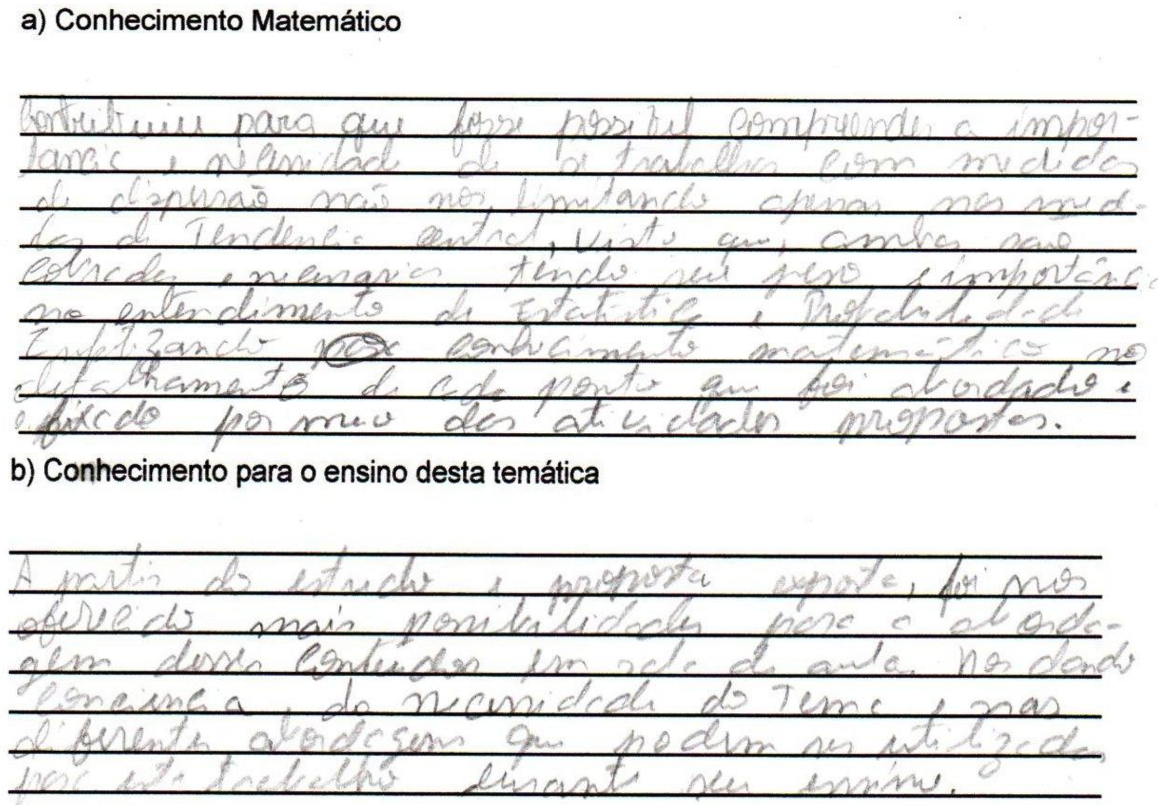
Ensinava a estatística apenas na sua forma descritiva, pude observar por meio dessa formação que a inferência contribui de forma eficaz para o entendimento desta temática. Destaco também, que a estatística e probabilidade podem ser trabalhadas de forma conjunta.

[a) Em relação ao conhecimento matemático, destaco a Curva Normal como inédito para mim, de forma que agregou de forma significativa para abordagens em sala de aula.

b) Ensinava a Estatística apenas na sua forma descritiva, pude observar por meio dessa formação que a inferência contribui de forma eficaz para o entendimento desta temática. Destaco também que a Estatística e Probabilidade podem ser trabalhadas de forma conjunta.]

Fonte: Professor P_8, 2019.

Figura 66 – Resposta do Professor P_{12} à Atividade 3



a) Contribuiu para que fosse possível compreender a importância e necessidade de se traalhar com as medidas de dispersão não nos limitando apenas nas medidas de tendência central, visto que ambas são cobradas e necessárias tendo seu peso e importância no entendimento da Estatística e da Probabilidade. Enfatizando o conhecimento matemático no detalhamento de cada pontoque foi abordado e fixado por meios das atividades propostas.

b) A partir do estudo e proposta exposta foi nos oferecido mais possibilidades para a abordagem desses conteúdos em sala de aula. Nos dando consciência da necessidade do tema e nas diferentes abordagens que podem ser utilizadas para este trabalho durante o seu ensino.

Fonte: Professor $P_{12,}$ 2019

Em linhas gerais, constatamos que as respostas dos demais professores se assemelharam as três apresentadas anteriormente, e assim, todos os professores participantes do Encontro Formativo denotaram que com relação ao conhecimento matemático, o estudo realizado possibilitou a construção do conhecimento sobre a Curva Normal, tendo em vista que eles demonstraram, inicialmente, não conhecer este modelo. Além disso, pontuaram o entendimento sobre relação entre as medidas de centralidade e de dispersão presentes na Curva Normal e na importância de se abordar, em sala de aula, conjuntamente os conceitos dessas medidas, haja vista que o mesmos reconheceram que é comum no ensino da Estatística se dada uma ênfase unicamente na abordagem das medidas de tendência central, (SANTANA, 2016). Em acréscimo, os professores também afirmaram que o estudo possibilitou o entendimento da Estatística Inferencial, contemplando importantes conceitos presentes nesse campo e a relação da Estatística com a probabilidade.

Com relação ao conhecimento didático, em linhas gerais, os professores foram unânimes em afirmar que passaram a compreender novas possibilidades didáticas para a abordagem da Estatística e da Probabilidade e mais especificamente para o ensino do conceito da Curva Normal, contemplando noções de conhecimento sobre o currículo proposto para o ensino desse tema, a utilização de recursos didáticos para a sua abordagem, aspectos relacionados a diferentes métodos e interações que podem ser adotados, em sala de aula, e as crenças e atitudes dos estudantes que podem surgir no processo de ensino e aprendizagem da Curva Normal. Por fim, destacaram que também refletiram na necessidade de ensinar a relação entre a Estatística e Probabilidade, estabelecida na Estatística Inferencial, tendo em vista que comumente é priorizado unicamente o ensino da Estatística Descritiva e que, além disso, a Estatística é totalmente ensinada desassociada da Probabilidade.

Após a finalização da terceira atividade, para dar encerramento ao Encontro Formativo, apresentamos, aos professores, a tábua de Galton (Figura 67), enquanto uma curiosidade relacionada ao tema, por meio da imagem destacada adiante. A tábua de Galton é um dispositivo desenvolvido pelo matemático inglês Francis Galton, e foi apresentada como mais um recurso didático trazido para complementar e, possivelmente, enriquecer as ideias de abordagens didáticas dos professores, de maneira que os mesmos consigam vislumbrar a Curva Normal com sua utilização. Esse recurso fez parte da composição da 6º questão do nosso questionário diagnóstico, na qual a maioria dos professores respondeu de forma inadequada por não conhecê-lo. Deste modo, ao apresentá-lo, enfatizamos que a tábua de Galton se trata de um dispositivo prático, no qual bolas são jogadas a partir do topo e ao descerem batem em pinos, e se distribuem para a esquerda ou para a direita. Ao caírem nas bandejas inferiores, as bolas acumuladas apresentam uma Distribuição Normal, logo, elas têm uma maior probabilidade de serem acumuladas nas bandejas centrais e essa probabilidade vai diminuindo de forma simétrica a medida que as bandejas se afastam do centro, apresentando graficamente uma Curva Normal.

Figura 67 – Tábua de Galton

Fonte: Argenton, 2017.

Nesse sentindo, ao apresentarmos esse dispositivo, buscamos, além de torná-lo conhecido pelos professores, enfatizar que o mesmo se trata de mais um recurso didático que pode ser aplicado em sala de aula para descrever de modo prático a formação e representação gráfica da Curva Normal, bem como os conceitos estatísticos das medidas de tendência central e dispersão e o conceito de Probabilidade. Por fim, os professores argumentaram que até então não conheciam a tábua de Galton, mas a reconheceram como mais um recurso didático, ou seja, como mais uma possibilidade didática para abordagem da Curva Normal em sala de aula.

Diante disso, após a realização do quarto momento, finalizamos o encontro formativo com a certeza de que conseguimos realizar a abordagem uma proposta de ensino sobre a abordagem articulada entre a Estatística e a Probabilidade por meio da Curva Normal para os professores de Matemática do Ensino Médio. Destaca-se que durante todo o encontro formativo os professores foram bem participativos nas discussões realizadas e demonstraram estar bem instigados e dispostos a aprender ou aprimorar seus conhecimentos sobre a temática abordada, o que contribuiu de maneira positiva para o andamento e realização da nossa proposta. Logo, concluímos que por meio das atividades, das discussões e reflexões realizadas nesse encontro, os professores conseguiram avançar na construção e ressignificação de seus conhecimentos nos âmbitos matemático e didático.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Partindo de algumas ferramentas do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática - EOS e mais especificamente do modelo de Conhecimentos e Competências Didático-Matemáticos do professor de Matemática - CCDM, essa pesquisa investigou os conhecimentos didático-matemáticos de professores de Matemática do Ensino Médio para abordagem da inter-relação entre a Estatística e a Probabilidade por meio da Curva Normal e seu desenrolar foi contemplado em duas etapas, respectivamente, o Estudo Diagnóstico e o Encontro Formativo, e nesse ultimo capítulo, apresentamos as considerações e reflexões finais sobre esse estudo.

Na primeira etapa, realizada com os 12 professores de Matemática do Ensino Médio que constituíram o universo de professores que atuavam nas escolas da rede pública de ensino da cidade de Nazaré da Mata– PE durante essa pesquisa, constatou-se, quanto ao perfil docente, que todos os professores possuem formação em Licenciatura em Matemática e experiência na prática docente no Ensino Médio da Escolarização Básica, mas, apenas um professor afirmou não ter cursado alguma disciplina que contemplasse a Estatística e a Probabilidade em sua formação acadêmica. Já, os demais, em linhas gerais, relataram que a abordagem das disciplinas com essa temática em suas formações acadêmicas se deu de forma básica, com aulas expositivas, voltadas para a abordagem teórica, com ênfase na análise de gráficos, organização de dados e aplicação de técnicas e algoritmos operatórios para a resolução de exercícios e problemas.

Depois de delinear o perfil docente, ainda na primeira etapa da pesquisa, o estudo se voltou para a análise dos conhecimentos didático-matemáticos iniciais dos professores, através do questionário diagnóstico, no qual constatamos que, de forma geral, os professores apresentaram lacunas no conhecimento didático-matemático sobre a inter-relação entre a Estatística e a Probabilidade por meio da Curva Normal. Verificamos que a maioria dos professores demonstrou não conhecer relação teórica entre a Estatística e a Probabilidade, os conceitos de Amostragem, Amplitude e Desvio-Padrão, o conceito da Curva Normal, juntamente com o conhecimento didático sobre as possibilidades de sua abordagem, em sala de aula, e as orientações curriculares para a sua abordagem no Ensino Médio, presentes nos documentos oficiais para a Educação Básica.

Por vez, ainda com relação às respostas dos professores ao questionário diagnóstico, percebemos que o conceito de média, como medida de tendência central, demonstrou ser aquele que os professores mais conheciam e dominavam, enquanto conhecimento matemático Comum. Ademais, noções de conhecimento didático envolvendo as facetas Mediacional, Ecológica e Epistêmica permearam as propostas de aula de alguns professores em suas repostas ao questionário diagnóstico. Assim como, alguns professores evidenciaram noções de conhecimento didático envolvendo as facetas Cognitiva, Afetiva, Mediacional e Interacional quando indagados sobre o procedimento de discussão com a classe de alunos a partir das respostas apresentadas pelos grupos de estudantes a uma situação-problema envolvendo a Curva Normal.

Em linhas gerais, a análise realizada na primeira etapa da pesquisa indicou, veementemente, que a maioria dos professores não tinha domínio conceitual e não era habituada, em sala de aula, a ensinar a Estatística articulada com a Probabilidade, e, em particular, a Estatística Inferencial, bem como o conceito da Curva Normal, contemplando os conceitos estatísticos e probabilísticos presentes nesse modelo. Logo, essas conclusões sinalizaram que os professores investigados necessitavam de um acompanhamento formativo que contemplasse o estudo sobre o tema pautado.

Nesse sentido, efetivamos a segunda etapa da pesquisa, o Encontro Formativo, com o objetivo de investigar a construção/ampliação dos conhecimentos didático-matemáticos dos professores sobre o tema investigado, sendo realizado em um único encontro dividido em quatro momentos, no qual contamos com a participação de sete dos 12 professores. No primeiro momento, as respostas apresentadas e as discussões realizadas entre os professores participantes evidenciaram que os mesmos estavam habituados, em sala de aula, a abordar a Estatística totalmente independente da probabilidade, com foco apenas nas medidas de tendência e na aplicação das fórmulas e técnicas operatórias. Assim, eles refletiram na necessidade de também compreender e abordar as medidas de dispersão relacionadas com as de centralidade, os significados desses conceitos inseridos em diferentes contextos e como se dá a relação entre a Estatística e a Probabilidade, refletindo sobre o conhecimento matemático Comum de alguns conceitos estatísticos e probabilísticos que estão presentes no modelo da Curval Normal, como as medidas de tendência central e dispersão, o conceito de probabilidade e a representação gráfica desses dados.

No segundo momento, realizamos a abordagem da sistematização teórica sobre a articulação entre a Estatística e a Probabilidade por meio da Curva Normal e as possibilidades didáticas para o seu processo de ensino e aprendizagem no Ensino Médio. Logo, esse momento envolveu o estudo sobre a Estatística enquanto ciência, contemplando a área descritiva e Inferencial, sua relação com a Probabilidade, o conceito da Curva Normal e sua representação gráfica, as propriedades, conceitos estatísticos e probabilísticos presentes nesse modelo e o cálculo de probabilidades associado à área sob a Curva. Por fim, abordamos e discutimos sobre o ensino da Curva Normal no Ensino Médio, o que contemplou o conhecimento sobre as orientações curriculares para o tema, recursos didáticos, atividades e interações que podem ser adotadas em sala de aula. As discussões realizadas, nesse momento, indicaram que os professores até então não tinham conhecimento sobre o tema, mas que a partir do estudo teórico desenvolvido passaram compreendê-lo tanto no aspecto matemático quanto no didático.

O resultado do terceiro momento foi observado a partir das respostas apresentadas na segunda atividade e nas discussões durante a socialização da mesma. A partir desses dados, observamos que os professores demonstraram compreender e se apropriar do conhecimento matemático Comum e do conhecimento Epistêmico sobre o tema supracitado, ou seja, avançaram na construção e compreensão da relação entre a Estatística e a Probabilidade estabelecida na Estatística inferencial, o conceito da Curva Normal, bem como sua representação gráfica, os conceitos estatísticos e probabilísticos, as propriedades e o cálculo de probabilidades associado à área sob a Curva Normal.

Além disso, verificamos que os professores também avançaram na construção e ampliação dos conhecimentos didáticos envolvendo todas as seis facetas, ao levantarem e compreenderem as possibilidades didáticas para o ensino da relação entre a Estatística e a Probabilidade através da Curva Normal no Ensino Médio, o que contemplou o conhecimento sobre o currículo proposto sobre o tema para esta etapa de ensino, recursos didáticos e atividades que podem ser utilizados para a abordagem do mesmo, a análise de uma resposta de um estudante a uma situação-problema sobre a Curva Normal, compreendendo sobre aspectos e formas relacionados à aprendizagem e as atitudes e crenças que podem surgir no processo de ensino, seguida do levantamento das possibilidades para a discussão e formas interação, em sala de aula, ao lecionarem o referido tema.

No quarto e último momento do Encontro formativo, através da atividade 3, os professores expressaram suas opiniões sobre as contribuições da proposta de ensino abordada para o desenvolvimento de seus conhecimentos matemáticos e didáticos sobre o tema pautado. Em linhas gerais, verificamos que essas opiniões corroboram com as considerações pontuadas anteriormente.

Na perspectiva do conhecimento matemático, os professores apontaram que o estudo desenvolvido propiciou o entendimento da relação entre Estatística e a Probabilidade, por meio da Estatística Inferencial, contemplando importantes conceitos, até então pouco conhecidos, como a Amostragem e Amostra. Além disso, destacaram a construção do conhecimento matemático sobre a Curva Normal, tendo em vista que eles não conheciam este modelo, como também a compreensão dos conceitos e significados das medidas de tendência central e de dispersão e o cálculo de probabilidades a partir da Curva Normal.

Com a relação ao conhecimento didático, os professores destacaram que o estudo proporcionou o entendimento de novas possibilidades didáticas para o ensino da Estatística e da Probabilidade no Ensino Médio e da relação entre ambas através da Curva Normal, abarcando a compreensão de aspectos didáticos relacionados ao currículo de Matemática para a referida etapa de ensino, dos recursos didáticos que podem ser utilizados para robustecer a prática docente e as diferentes maneiras de interagir e abordar essa temática com os estudantes em sala de aula.

Desta forma, concluímos que através da realização pesquisa, os professores participantes conseguiram avançar na construção, ressignificação e ampliação de seus conhecimentos didático-matemáticos sobre a articulação entre a Estatística e a Probabilidade por meio da Curva Normal. Acreditamos ainda que os resultados aqui observados possam promover novas discussões e reflexões sobre o ensino da Estatística e da Probabilidade, ampliando a base de conhecimentos de professores de Matemática do Ensino Médio relativa ao campo Estatístico e Probabilístico, como também favorecer a qualidade das ações docente em sala de aula, potencializando as tarefas didático-pedagógicas e de aprendizagem, em favor do letramento estatístico e probabilístico dos estudantes.

Diante dos resultados desse estudo, acreditamos que é pertinente o investimento nas formações acadêmicas e em formações continuadas, de estudos semelhantes que possibilitem a apropriação e ampliação dos conhecimentos didático-matemáticos, por parte dos professores de Matemática do Ensino Médio, principalmente sobre a Inferência Estatística e o modelo da Curva Normal, tendo em vista que ainda é comum, em sala de aula, o ensino dessas áreas de conhecimento ser restrito apenas a Estatística Descritiva e a Probabilidade como uma razão, possibilitando aos estudantes o entendimento da relação entre a Estatística e a Probabilidade e dos fenômenos e situações do nosso cotidiano que comumente explicitam essa relação.

Por fim, destacamos que essa pesquisa foi de grande importância para nossa formação acadêmica e profissional, na qual podemos compreender e aprimorar nossos conhecimentos sobre a relação entre a Estatística e a Probabilidade através do modelo da Curva Normal e, ao mesmo tempo, contribuir com a construção e ampliação dos conhecimentos dos professores de Matemática do Ensino Médio da Cidade de Nazaré da Mata, sobre este tema, tanto no âmbito matemático quanto no didático. Além disso, o estudo do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática e do modelo de Conhecimentos e Competências Didático-Matemáticos do professor de Matemática nos deu uma visão mais crítica quanto aos conhecimentos necessários para o exercício da prática docente do professor de matemática, servindo de base para atuarmos de modo mais eficaz em nossas aulas, desenvolvendo estratégias e buscando inovações para o estudo e análise sobre o conhecimento matemático e seu processo de ensino e aprendizagem.

REFERÊNCIAS

ANDERSON, David Ray. SWEENEY, Dennis J. WILLIANS, Thomas Arthur. **Estatística aplicada à administração e economia**. 2º ed. São Paulo: Pioneira. 2002.

ANDRADE, L. S. **Currículos de Matemática no Ensino Médio:** um olhar sob s perspectiva do Enfoque Ontosemiótico do Conhecimento e a Instrução Matemática. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) –Universidade Luterana do Brasil, Canoas. 2014.

ARGENTON, T. R. **Um tabuleiro de Galton apresentando uma distribuição distribuição normal,** 2017**.** Disponível em: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tabuleiros_de_Galton_(antes_e_depois).jpg . Acesso em: 23 de Junho de 2018.

BANSILAL, S. **Using an APOS framework to understand teachers' responses to questions on the normal distribution**. Statistics Education Research Journal, 13 (2), p. 42-57, 2014.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2011.

BATANERO, C., *et al* **Significado y compreensión de la distribución normal en un curso introductorio de análisis de datos.** Quadrante. v. 10, n. 1, p. 59-92, 2001.

BATANERO, C. Los retos de la cultura estadística. In: **JORNADAS INTERAMERICANAS DE ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA**, Buenos Aires. Conferência inaugural. Buenos Aires, 2002.

BATANERO, C., TAUBER, L. y SÁNCHEZ, V. **Students' reasoning about the normal distribution**. En D. Ben-Zvi and J. Garfield (Eds.), The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking, p. 257–276, 2004.

BATANERO, C.;DÍAZ, C. Training school teachers to teach probability: reflections and challenges. **Chilean Journal of Statistics**, Granada-ESP, v.3, n.1, p.3-13, Abril, 2012.

BAYER et al. **Preparação do formando em Matemática-licenciatura plena para lecionar Estatística no Ensino Fundamental e Médio,** 2005. Disponível em: <www.nutes.ufrj.br/abrapec/venpec/conteudo/artigos/3/doc/p508.doc> Acesso em: 10 Abr 2018.

BAYER et al. **Probabilidade na Escola**, 2015. Disponível em: <http://exatas.net/ artigo_ciem2.pdf>. Acesso em: 10 Mar. 2018.

BITTENCOURT, H., VIALI l. **Contribuições para o ensino da distribuição normal ou curvade gauss em cursos de graduação.** Anais do III SIPEM-SBEM,São Paulo, 2006.

BRASIL, Ministério da Educação e da Secretaria do Ensino Médio. **Parâmetros Curriculares Nacionais,** 2000. Disponível em: <portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf.> Acesso em: 12 Maio 2018.

BRASIL, Ministério da Educação e da Secretaria de Educação, **Base Nacional Curricular Comum**, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/> Acesso em: 27 de Dezembro de 2018.

CARVALHO, J. I. F. **Um estudo sobre os conhecimentos didáticos-matemáticos de probabilidade com professores de matemática dos anos finais do ensino fundamental.** Tese de doutorado em Educação Matemática, Faculdade Anhanguera de São Paulo, 2017.

CAZORLA, I., MAGINA, S. GITIRANA, V. GUIMARÃES, G. **Estatística para os anos iniciais do ensino fundamental** [livro eletrônico] . -- 1. ed. - Brasília : Sociedade Brasileira de Educação Matemática - SBEM, 2017.

CAZORLA, I.; SANTANA, E. **Tratamento da informação para o ensino fundamental e médio**. Itabuna: Via Litterarum, 2006.

CERVO, A. L.; BERVIAN, P. A. **Metodologia Cientifica**. 4. ed. MAKRON Books, SãoPaulo, 1996.

COUTINHO, C.Q.S. , ALMOULOUD S. A. , E SILVA M. J. F. **O Desenvolvimento do Letramento Estatístico a partir do uso do Geogebra: um estudo com professores de Matemática**.REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática 7, p. 246-265, 2012.

DUARTE, L. R. **A utilização do software Geogebra no ensino da distribuição normal de probabilidade: uma aproximação entre a geometria dinâmica e a educação estatística.** Dissertação (Mestrado) – PUC. Minas Gerais, 2010.

FERREIRA, V. **Estatística básica**. Vol 1, Ed.. Seses, Rio de Janeiro, 2015.

FONT, V.; PLANAS, N.; GODINO, J. D. **Modelo para el análisis didáctico en educación matemática.** Infancia y Aprendizaje**,** v.33, n.1, p.89-105, 2010.

FONT, V. **Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria**. Unión, San Cristóbal de La Laguna, n. 26, p. 9-25, 2011.

FONT, GODINO, J. D.; GALLARDO, J. **The emergence of objects from mathematical practices**. Educational Studies in Mathematics, vol. 82, p. 97–124. 2013.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa**. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

FURIAN, H. P. **A tábua de Galton,** 2013. Disponível em: https://www.canstockphoto.com.br/galton-distribui%C3%A7%C3%A3o-normal-sino-

47908603.html. Acesso em: 10 de janeiro de 2018

GAL, I. Adult's Statistical Literacy: Meanings, Components, Responsibilities – Appeared, **Internacional Statistical Review** Australia, v. 70 1 -33, Abril, 2002.

GAL, I. Towards 'probability literacy' for all citizens. In: Jones, G.A (ed.), **Exploring probability in school:** Challenges for teaching and learning. USA: Springer:. p. 39-63, 2005.

GODINO, J. D., BATANERO, C. **Significado institucional y personal de los objetos Matemáticos.**Recherches en Didactique des Mathématiques**,** Vol. 14, nº 3, p. 325-355, 1994.

GODINO, J. D **Um Enfoque Ontológico y Semiótico de La Cognicion Matemática.** Recherches en Didactique des Mathématiques, vol.22, nº 23, p. 39-88, 2002.

GODINO, J. .C. BATANERO; FONT, V. **Um enfoque ontossemiótico do conhecimento e a instrução matemática.***Acta Scientiae*– Revista de Ensino de Ciências e Matemática,Canoas, v.10, n.2, jul./dez. p. 7-37, 2008.

GODINO, J. D. **Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas**. XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil, 2011.

GODINO, J. D. **Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en didáctica de la matemática**. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds**.), Investigación en Educación Matemática** XVI(pp. 49 - 68). Jaén: SEIEM. 2012.

GODINO, J. D. **Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática: motivación, supuestos y herramientas teóricas.** Universidad de Granada. 2014. Disponible en, http://www.ugr.es/local/jgodino/eos/sintesis_EOS_24agosto14.pdf

GODINO, J D., BATANERO, C., FONT, V. y GIACOMONE, B. (2016). **Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM**. Investigación en Educación Matemática XX, p. 285-294. Málaga: SEIEM, 2016.

GODINO, J. D.; GIACOMONE, B.; BATANERO, C.; FONT, V**. Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas.** Bolema, Rio Claro (SP), v. 31, n. 57, p. 90 - 113, abr. 2017.

GODINO, J. D.; GIACOMONE, B.; FONT, V. y PINO-FAN, L.. **Conocimientos profesionales en el diseño y gestión de una clase sobre semejanza de triángulos. Análisis con herramientas del modelo CCDM.**Avances de Investigación en Educación Matemática, nº 13, p.63 – 83, 2018.

GONÇALVES, P. **Uma abordagem da distribuição normal através da resolução de uma situação problema com a utilização do software geogebra**. 102f. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática), Universidade Federal de Goiás, 2014.

GONZÁLEZ, Y. K. OJEDA, A. M. (2018) PALACIOS, J. L. **Comprensión de Profesores de la Distribución Normal.** Acta Latinonamerica de Matemática Educativa**.** VOL 31, número 2, 2018.

GONZÁLEZ, Y. y Ojeda, A. M. **Comprensión de la distribución normal en bachillerato.** Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 30. México, 2017.

KLEIMANN, A. B. **Modelos de Letramento e as práticas de alfabetização na escola.** In: KLEIMANN, A. B. (org.). Os Significados do Letramento:uma nova perspectiva sobre a prática social da escrita. Campinas, SP: Mercado das Letras, 1995.

LOPES, C. **O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores**, 2008. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/ccedes/v28n74/v28n74a05.pdf > Acesso em: 30 jun.2018.

LOPES, C. Os desafios para Educação Estatística no currículo de Matemática. In: LOPES, C; COUTINHO, C. ; ALMOULOUD, S. A**. Estudos e reflexoes em Educacao Estatistica**. Campinas, Mercado de Letras, p.47-64, 2010.

LOPES, C. **A Educação Estocástica na Infância**. Revista Eletrônica de Educação, vol 6, nº 1, São Carlos, p.160 -174, 2012

LOPES, C. E. **Educação Estatística no Curso de Licenciatura em Matemática.** Bolema - Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v. 27, n. 47, p. 901-915, dez. 2013.

LIMA, O. A. **Distribuição Normal: Uma introdução voltada ao Ensino Médio por simulações via planilha eletrônica e exercícios interativos**. Dissertação de Mestrado. PUC, São Paulo, 2009.

MACEDO, R. C.. **Conhecimentos de professores de matemática sobre o processo de ensino e de aprendizagem de noções estatísticas– curva normal**. 206f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)- Universidade Anhanguera de São Paulo, 2016.

MARTINS, G. E. **Desvio padrão amostral**, Revista de Ciência Elementar,Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.Vol 1, p. 01. Lisboa, 2013.

NEVES, J. L. Pesquisa Qualittiva – Características, Usos e Possibilidades. **Caderno dePesquisas em Administração**, v.1, n. 3, p. 1-5. 1996.

OLIVEIRA, M. M. **Como fazer projetos, relatórios, monografias, dissertações**, teses.5. ed.Elsevier, 197 p. Rio de Janeiro, 2011.

PERNAMBUCO. **Parâmetros para a Educação Básica do Estado de**

Pernambuco, Parâmetros na sala de aula Matemática para o Ensino Fundamental e Médio, Secretaria de Educação, Pernambuco, 2013.

PIETROPAOLO, C.; CAMPOS, M.; FELISBERTO DE CARVALHO, J. ; TEIXEIRA, P. In :IV SEMINÁRIO DO OBSERVATÓRIO DA EDUCAÇÃO DA CAPES, IV, Brasília, 2013. **Um estudo sobre os conhecimentos necessários ao professor para ensinar noções concernentes à probabilidade nos anos iniciais.**Brasília, 2013.

PINO-FAN, L. e GODINO, J. D. **Perspectiva ampliada Del conocimiento didáctico-matemático Del profesor**. Paradigma, 36 (1), p.87-109. 2015.

SANTANA, M. S. **Traduzindo Pensamento e Letramento Estatístico em Atividades para Sala de Aula: construção de um produto educacional,**
Bolema, Rio Claro (SP), v. 30, n. 56, p. 1165 - 1187, dez. 2016.

SILVA, C. R. **Da teoria à prática: uma proposta pedagógica para o ensino da estatística nos anos finais do ensino fundamental**, trabalho de conclusão de curso, Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Rio Grande, 2015.

SILVEIRA, J. F. **Os jogos de azar**. Rio Grande do Sul: UFRGS. 2001. Disponível em: <http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/histo2c.html> . Acesso em: Julho de 2018.

TAUBER, L. **La Construcción del Significado de La Distribución Normal a partir de Actividades de Análisis de Datos**. Universidad de Servilla, Servilla, 2001.

UTSUMI, M. C. ; CAZORLA, I. M. E KATAOKA, V. Y. Statistical training of pre-service teachers with application in school practice. American Review of Mathematics and Statistics, vol. 2, nº 1, Madison, p. 55-66, 2014.

VALDEZ MONROY, J. C. y SALINAS HERRERA, J. **Análisis de las respuestas de estudiantes de bachillerato a problemas sobre la distribución normal**. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López- Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística, 2019.

APÊNDICES

APÊNDICE A : Instrumento de Coleta 1

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA

EDUMATEC UFPE

Caracterização do Perfil Docente

1) Em qual curso de Ensino Superior você possui formação?

____

2) Ano de conclusão do seu curso de Ensino Superior?

____

3) Quantos anos de atuação profissional você possui como professor?

____

4) Quantos anos de atuação profissional você possui como professor do Ensino Médio?

____.

5) Há quanto tempo trabalha nesta escola?

____

6) Você possui curso(s) de pós-graduação? Em caso afirmativo, qual (ais)?

____

7) Em sua formação acadêmica, você cursou alguma(s) disciplina(s) ou curso que contemplasse a Estatística e a Probabilidade? Caso positivo, pode nos falar sobre a abordagem dessas disciplinas?

____
____
____
____
____

Instrumento de Coleta 2

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA
EDUMATEC UFPE

Questionário Diagnóstico

1º) Você acredita que existe alguma relação entre a Estatística e a Probabilidade? Caso positivo, como compreendes essa relação?, justifique sua resposta.

2º) De que forma você abordaria uma proposta de aula articulando a Estatística com a Probabilidade em uma aula de Matemática com estudantes do Ensino Médio? Se desejar, pode incluir exemplos de atividades.

3º) Conceitue os termos, utilizados em Estatística, a seguir:

- Média
- Amplitude
- Desvio padrão
- Amostragem

4º)
a) De que modo você conceitua a Distribuição Normal ou Curva Normal?

b) Acreditas que a Distribuição Normal ou Curva Normal deve ser trabalhada com os estudantes na etapa de escolarização do Ensino Médio? Justifique sua resposta.

5º) Foi medida a temperatura (em graus Celsius) em duas cidades no horário das 6:00 da manhã e os resultados estão apresentados nas Figuras 3a e 3b.

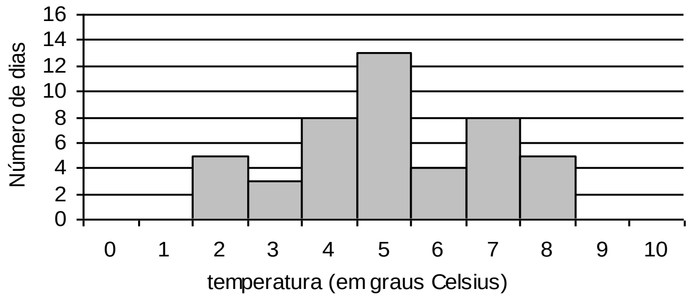


Figura 3a - Medidas de temperatura da cidade A no período de 46 dias.

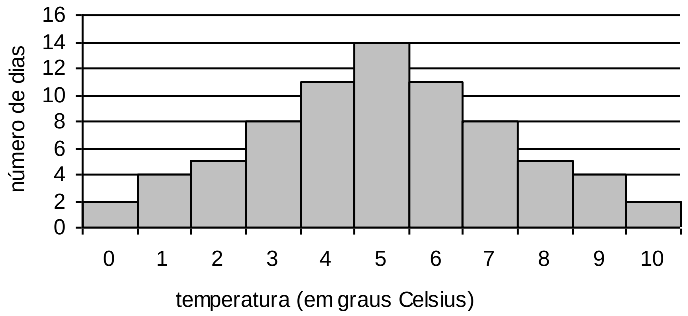


Figura 3b - Medidas de temperatura da cidade B no período de 74 dias.

Sabendo-se que a média de temperatura das duas cidades é 5, **é CORRETO** afirmar que:

(a) O desvio padrão da temperatura é maior na cidade A, pois o gráfico tem um formato irregular.

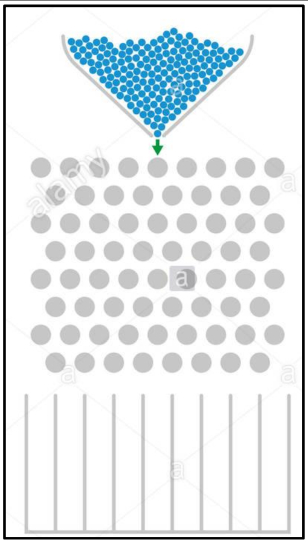
(b) O desvio padrão da temperatura é maior na cidade B, pois a menor temperatura foi zero e a maior temperatura foi 10.

(c) O desvio padrão da temperatura é menor em B, porque na maioria dos dias a temperatura ficou perto de 5.

(d) O desvio padrão da temperatura é menor em A, porque na maioria dos dias não houve temperaturas abaixo de 2 e nem acima de 9.

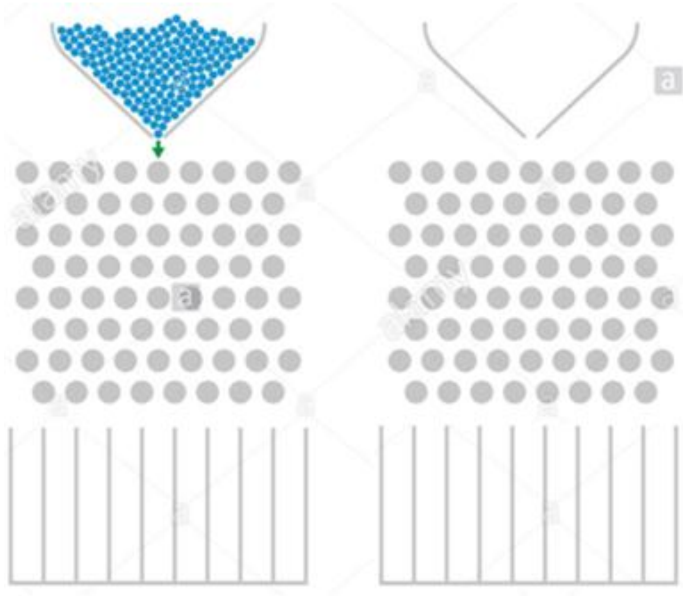
(e) O desvio padrão é maior em A, pois na maioria dos dias a temperatura ficou próxima de cinco e não houve dias com temperaturas abaixo de 2 e nem acima de 9.

6º)

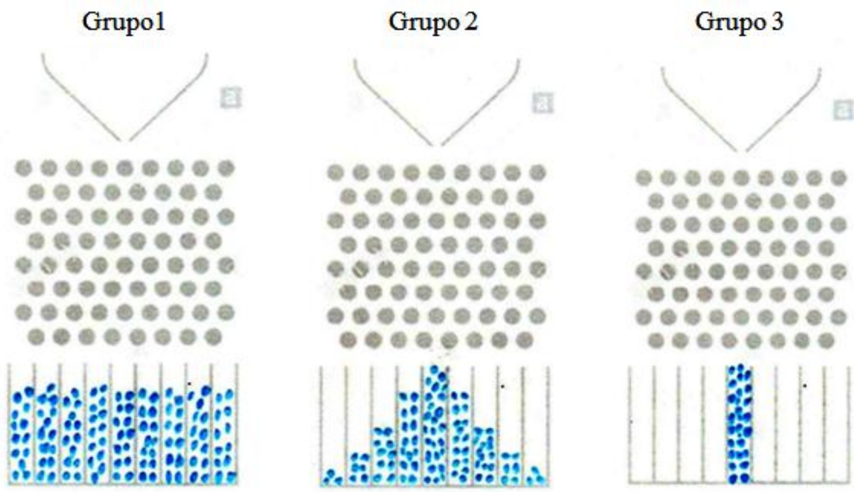


Vamos introduzir bolas em tabuleiro retangular como este. Em seu interior há obstáculos circulares de cor cinza, como mostra a figura. O tabuleiro é colocado verticalmente de forma que, quando se introduz uma bola, ela desliza entre os obstáculos até atingir a parte inferior do tabuleiro, formada por recipientes retangulares. Deste modo, durante sua trajetória de descida, a bola pode se chocar com alguns dos obstáculos circulares e se dirigir para a direita ou para esquerda para, em seguida, tropeçar de novo e mudar de direção até chegar a um dos recipientes retangulares na parte inferior da tabuleiro e parar.

a) Você pode fazer uma distribuição de como as bolas ficaram organizadas nas recipientes retangulares finais, após todas as bolas terem caído?



b) Professor(a), imagine que você está ensinando Matemática em uma turma do Ensino Médio e colocastes este problema anterior para os alunos resolverem. A seguir, estão as respostas de três grupos diferentes. A partir das respostas apresentadas, como você prosseguiria com a discussão em classe?



____
____
____

APÊNDICE B: Atividades do Encontro Formativo

Atividade 1

1º Caro participante, para darmos início a nossa formação, reúna-se em grupos de três participantes e realize os seguintes procedimentos:

a) Preencha seu nome e sua altura (cm) em cada um dos quadros distribuídos aos grupos participantes, de modo que os integrantes de todos os grupos tenham acesso às informações solicitadas de todos os participantes desse estudo.

b) Com o grupo que você está fazendo parte, determine a Média, a Moda, a Mediana e o Desvio-Padrão de todas as alturas (cm) informadas no quadro.

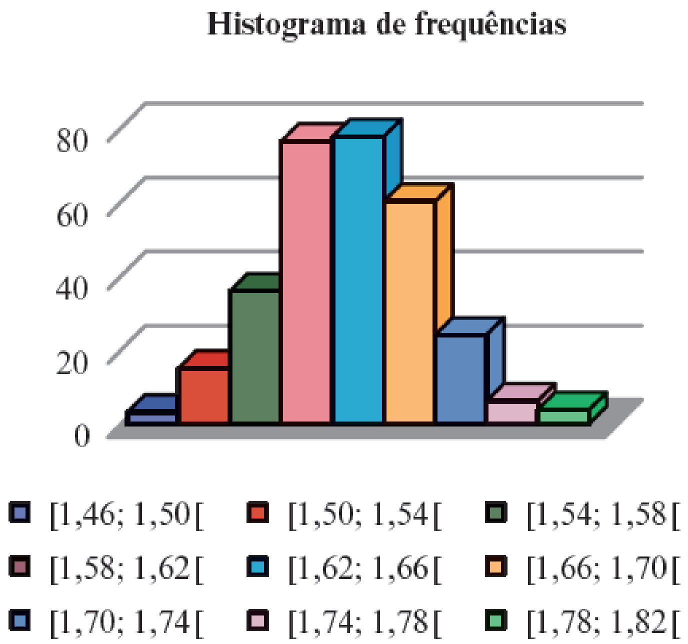
c) Analisando as informações fornecidas, se escolhermos uma pessoa dentre todos os participantes ao acaso, qual a probabilidade de que ela possua a altura maior que a média do grupo?

QUADRO

Participante	Nome	Altura (cm)
Grupo 1		
Grupo 2		
Grupo 3		
Grupo 4		
Grupo 5		
Grupo 6		

Atividade 2

1º) O gráfico, a seguir, representa a distribuição das alturas(m) de uma amostra de 307 pessoas. A partir dessas informações, é correto afirmar que se escolhemos uma pessoa dessa amostra ao acaso, a maior probabilidade é que ela tenha a altura entre [1, 62 ; 1,66 [? Justifique sua resposta!



Fonte: São Paulo, 2014.

2º Em uma escola, um professor realizou um estudo em que foi medida a altura, em cm, de todos os estudantes do Ensino Fundamental. A tabela, a seguir, apresenta algumas estatísticas obtidas através desse estudo:

Nível de escolaridade / Medidas Estatísticas	Ensino Fundamental
Média	155 cm
Desvio Padrão	4 cm

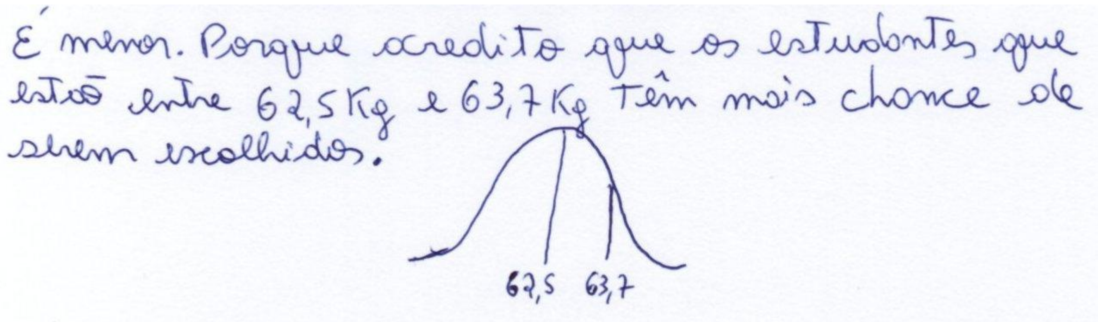
A partir dessas informações, determine:

a) Se o professor escolher um aluno do Ensino Fundamental ao acaso, qual a probabilidade que o aluno escolhido tenha a altura entre 155 cm e 164 cm?

b) qual a probabilidade de um aluno do Ensino Fundamental ter a altura maior ou igual a 155 cm?

3º Caros participantes, imaginem que vocês estão ensinando a Curva Normal em uma turma do Ensino Médio. A seguir, está a resposta de um estudante a um problema envolvendo este tema:

Questão: Os pesos dos alunos de uma escola distribuem-se normalmente, com média aritmética igual a 62,5 kg e desvio padrão igual a 1,2 kg. Se a probabilidade de escolhermos, ao acaso, um aluno dessa escola que possua o peso no intervalo entre 62,5 kg a 63,7 kg (62,5 kg + 1,2 kg) é igual aproximadamente 34%, a probabilidade de alunos que, provavelmente, encontram-se entre 62,5 kg a 61,3 kg (62,5kg – 1,2kg) é igual, maior, ou menor que 34% ? Por quê?



[É menor. Porque acredito que os estudantes que estão entre 62,5 kg e 63,7 kg têm mais chance de seres escolhidos.]

Professores, quais seriam suas avaliações e explicações para a resposta desse estudante? Como vocês procederiam com a discussão em classe diante da resposta apresentada?

Atividade 3

1º) Diante do que estudamos nessa formação, quais as contribuições que a temática abordada e a sequência de atividades proporcionaram para o desenvolvimento de seus conhecimentos na perspectiva do:

a) Conhecimento Matemático

b) Conhecimento para o ensino desta temática

APÊNDICE C: Termo de Consentimento

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA
EDUMATEC
UFPE

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO
(Elaborado de acordo com a Resolução 466/2012-CNS/CONEP)

Convidamos V.Sa. a participar da pesquisa A INTER-RELAÇÃO ENTRE A PROBABILIDADE E A ESTATÍSTICA: CONHECIMENTOS DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO SOBRE A CURVA NORMAL, sob responsabilidade da pesquisador André Fellipe Queiroz Araújo, orientada pelo Professor Dr. José Ivanildo Felisberto de Carvalho tendo por objetivo compreender os conhecimentos matemáticos e didáticos de professores de Matemática no Ensino Médio sobre a inter-relação entre a Estatística e a Probabilidade por meio da Curva Normal; analisar a compreensão dos professores sobre a inter-relação entre a Estatística e a Probabilidade por meio da Curva Normal; analisar os conhecimentos dos professores envolvendo os conceitos de Estatística e de quantificação de probabilidades e investigar como uma proposta formativa favorece a construção dos conhecimentos matemáticos e didáticos para a articulação entre a Estatística e a Probabilidade por meio da Curva Normal.

Para realização deste trabalho, usaremos questionários, atividades didático-pedagógicas e entrevistas semi estruturadas. Esclarecemos que manteremos em anonimato, sob sigilo absoluto, durante e após o término do estudo, todos os dados que identifiquem o sujeito da pesquisa, usando apenas para divulgação os dados inerentes ao desenvolvimento do estudo. Informamos também que após o término da pesquisa, será arquivado todo e qualquer tipo de mídia que possa vir a identificá-lo tais como filmagens, fotos, gravações, etc., Deste modo, nos responsabilizaremos em garantir o anonimato de sua participação neste estudo.

Os benefícios esperados com o resultado desta pesquisa estão baseados na elaboração de uma formação continuada que possa promover novas discussões e reflexões sobre o ensino de Estatística e Probabilidade, ampliando a base de conhecimentos dos professores participantes relativa a conceitos estatísticos e probabilísticos abarcados pela curva normal, como também favorecer a qualidade das ações docente em sala de aula, ampliando a potencialidade das tarefas didático-pedagógica e de aprendizagem em favor da construção do conhecimento matemático relativo ao campo Estatístico e Probabilístico por meio da curva normal.

Estão assegurados a cada professor participante desta pesquisa os seguintes direitos: a garantia de esclarecimento e resposta a qualquer pergunta; a liberdade de abandonar a pesquisa a qualquer momento sem prejuízo para si ou para seu tratamento (se for o caso); a garantia de que em caso haja algum dano a sua pessoa (ou o dependente), os possíveis prejuízos serão assumidos pelos pesquisadores ou pela instituição responsável.

Nos casos de dúvidas e esclarecimentos, o professor participante desta pesquisa deve procurar os pesquisadores (Mestrando André Fellipe Queiroz Araújo e Dr. José Ivanildo Felisberto de Carvalho.

Consentimento Livre e Esclarecido

Eu ____, após ter recebido todos os esclarecimentos e ciente dos meus direitos, concordo em participar desta pesquisa, bem como autorizo a divulgação e a publicação de toda informação por mim transmitida, exceto dados pessoais, em publicações e eventos de caráter científico. Desta forma, assino este termo, juntamente com o pesquisador, em duas vias de igual teor, ficando uma via sob meu poder e outra em poder dos pesquisadores.

Local: ____________________________________
Data:___/___/___

____
Assinatura do sujeito (ou responsável)

____
Assinatura do pesquisador

APÊNDICE D: Termo de Confidencialidade

TERMO DE CONFIDENCIALIDADE
(Elaborado de acordo com a Resolução 466/2012-CNS/CONEP)

Em referencia a pesquisa intitulada A INTER-RELAÇÃO ENTRE A PROBABILIDADE E A ESTATÍSTICA: CONHECIMENTOS DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO SOBRE A CURVA NORMAL, eu André Fellipe Queiroz Araújo, e meu orientador Professor Doutor José Ivanildo Felisberto de Carvalho, nos comprometemos a manter em anonimato, sob sigilo absoluto, durante e após o término do estudo, todos os dados que identifiquem o sujeito da pesquisa, usando apenas para divulgação os dados inerentes ao desenvolvimento do estudo. Comprometemo-nos também com o arquivamento, após o término da pesquisa, de todo e qualquer tipo de mídia que possa vir a identificá-lo tais como filmagens, fotos, gravações, questionários, formulários e outros.

Local: ________________________________
Data:___/___/___

____

Assinatura do Pesquisador

____
Assinatura do Pesquisador