



**Universidade Federal de Pernambuco  
Centro de Educação  
Programa de Pós-Graduação em Educação  
Matemática e Tecnológica  
Curso de Mestrado**

**DACYMERE DA SILVA GADELHA**

**RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMBINATÓRIOS NOS ANOS INICIAIS: uso de  
material manipulável concreto (fichas) e de material manipulável virtual  
(Pixton©)**

**RECIFE**

**2020**

**DACYMERE DA SILVA GADELHA**

**RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMBINATÓRIOS NOS ANOS INICIAIS: uso de material manipulável concreto (fichas) e de material manipulável virtual (Pixton©)**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

**Área de Concentração:** Ensino de Ciências e Matemática

**Orientadora:** Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Rute Elizabete de Souza Rosa Borba

**Co-orientadora:** Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Juliana Azevedo Montenegro

**RECIFE**

**2020**

Catálogo na fonte  
Bibliotecária Natália Nascimento, CRB-4/1743

- G124 Gadelha, Dacymere da Silva.  
Resolução de problemas combinatórios nos anos iniciais: uso de material manipulável concreto (fichas) e de material manipulável virtual (Pixton©). / Dacymere da Silva Gadelha. – Recife, 2020.  
167f.
- Orientadora: Rute Elizabete de Souza Rosa Borba.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE.  
Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2020.
- Inclui Referências e Apêndices.
1. Matemática – Estudo e Ensino. 2. Ensino Fundamental. 3. Análise Combinatória. 4. UFPE - Pós-graduação. I. Borba, Rute Elizabete de Souza Rosa. (Orientadora). II. Título.
- 510 (23. ed.) UFPE (CE2020-031)

**DACYMERE DA SILVA GADELHA**

**RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMBINATÓRIOS NOS ANOS INICIAIS: uso de material manipulável concreto (fichas) e de material manipulável virtual (Pixton©)**

**BANCA EXAMINADORA:**

---

**(Orientadora)**

Profa. Dra. Rute Elizabete de Souza Rosa Borba  
Universidade Federal de Pernambuco

---

**(Co-orientadora e Presidente)**

Profa. Dra. Juliana Azevedo Montenegro  
Universidade Federal de Pernambuco

---

**(Examinadora Interna)**

Profa. Dra. Gilda Lisbôa Guimarães  
Universidade Federal de Pernambuco

---

**(Examinadora Externa)**

Profa. Dra. Juliana Ferreira Gomes da Silva  
Universidade Federal de Alagoas

**Recife, 13 de março de 2020.**

## RESUMO

Com o objetivo de analisar o uso do material manipulável concreto (com fichas) e do material manipulável virtual (com o *software* Pixton©) na aprendizagem de problemas combinatórios, a presente pesquisa teve como principal aporte teórico a Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1996), sobre a qual são discutidas três dimensões fundamentais – situações (*S*), invariantes (*I*) e representações simbólicas (*R*). Foram investigadas situações combinatórias, conforme Borba (2010) classifica em organização única – *arranjo*, *combinação*, *permutação* e *produto de medidas*. A investigação também se fundamentou em outros autores que utilizaram fichas, além dos autores que apontam características de material manipulável virtual (MOYER; BOLYARD; SPIKELL, 2002). Mediante a abordagem dos autores supracitados, foi utilizado o Pixton©. A pesquisa contou com a participação de 36 estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental de duas escolas do Município do Recife, Pernambuco. A partir dos resultados observados no pré-teste – estruturado por oito situações combinatórias – os estudantes foram divididos equiparadamente em três grupos: dois grupos experimentais, GE1 (fichas) e GE2 (Pixton©); e um grupo controle, GC (sem intervenção). Os grupos experimentais foram emparelhados em duplas, as quais participaram de dois momentos interventivos para solucionarem as mesmas situações do pré-teste com a mediação da pesquisadora e com o auxílio do material manipulável – concreto ou virtual. Em seguida, todos os estudantes realizaram o pós-teste. As análises estatísticas realizadas mostraram que os grupos experimentais obtiveram avanços significativos nos diferentes tipos de situações combinatórias, sem diferença entre eles. Evidenciou-se, também, uma melhor compreensão sobre os invariantes combinatórios e uma grande variedade de representações simbólicas, sendo a *listagem* a mais frequente no uso e nos acertos das questões, como também, verificou-se a construção de estratégias de organização das respostas, a exemplo da sistematização. Diferentemente, o grupo controle permaneceu sem avanços quantitativos e qualitativos. Concluiu-se que os problemas combinatórios podem e devem ser trabalhados desde os anos iniciais do Ensino Fundamental e que os recursos didáticos testados são facilitadores para esse processo de aprendizagem.

**Palavras-chave:** Matemática – Estudo e Ensino. Ensino Fundamental. Análise Combinatória. Pixton©.

## ABSTRACT

In order to analyze the use of concrete manipulative material (with cards) and virtual manipulable material (with Pixton © software) in the learning of combinatorial problems, the present research had as main theoretical support the Theory of Conceptual Fields (VERGNAUD, 1996), on which three fundamental dimensions are discussed - situations (*S*), invariants (*I*) and symbolic representations (*R*). Combinatorial situations were investigated, as Borba (2010) classifies them in a single organization - *arrangement, combination, permutation and product of measures*. The investigation was also based on other authors who used cards, in addition to the authors who point out characteristics of virtual manipulable material (MOYER; BOLYARD; SPIKELL, 2002). Through the approach of the aforementioned authors, Pixton © was used. The survey counted on the participation of 36 students from the 5th year of elementary school from two schools in the city of Recife, Pernambuco. Based on the results observed in the pre-test - structured by eight combinatorial situations - the students were divided into three groups: two experimental groups, EG1 (cards) and EG2 (Pixton ©); and a control group, CG (without intervention). The experimental groups were paired, who participated in two interventional moments to solve the same situations of the pre-test with the mediation of the researcher and with the help of manipulable material - concrete or virtual. Then, all students took the post-test. The statistical analysis carried out showed that the experimental groups achieved significant advances in different types of combinatorial situations, with no difference between them. There was also a better understanding of combinatorial invariants and a wide variety of symbolic representations, with the list being the most frequent in the use and correctness of the answers, as well as the construction of strategies for organizing responses, such as systematization. In contrast, the control group remained without quantitative and qualitative advances. It was concluded that combinatorial problems can and should be addressed since the early years of elementary school and that the tested teaching resources are facilitators for this learning process.

**Keywords:** Mathematics – Study and Teaching. Elementary School. Combinatorial Analysis. Pixton©.

“A vida é um grande espetáculo. Só não consegue homenageá-la quem nunca penetrou dentro de seu próprio ser e percebeu como é fantástica a construção da sua inteligência.”

**Augusto Cury**

## AGRADECIMENTOS

Toda honra e glória, primeiramente, ao Deus todo poderoso, autor da minha Fé! Obrigada, Senhor, por seus sonhos serem maiores que os meus.

Ao meu maior exemplo aqui na terra, Mãe (Rosimere). Que desde sempre tem sonhado junto comigo e acreditado no meu crescimento em todos os âmbitos da vida. “Tem alguém orando, posso sentir, tem alguém orando por mim.”  
Sei que sempre foi você!

Ao meu pai, Dacio, em quem me inspiro pela dedicação profissional. Meu Herói! Obrigada por me apoiar mesmo quando não entende os meus sonhos e objetivos.

Ao meu irmão, David, por compreender todas as vezes que precisei lhe deixar sem o notebook.

À minha mãe acadêmica, Rute Borba, que mais do que orientar, a todo tempo, teve a sensibilidade de me ensinar e ajudar em todas as fases que percorri ao longo do Mestrado. Agradeço a Deus pela honra de ter conhecido essa pessoa tão querida, que vive o maior mandamento pregado por Jesus Cristo, o amor.

À minha co-orientadora, Juliana Montenegro, carinhosamente, Jú! Que desde a graduação tem se disponibilizado a me ajudar e contribuir no meu crescimento acadêmico. Mais do que isso, tem sido uma amiga com quem posso contar em todas as horas (literalmente! Pois boa parte das dúvidas é sanada pelo whatsapp, independente do dia e horário).

Às professoras, Gilda Guimarães e Juliana Ferreira pelas preciosas contribuições com a minha pesquisa.

À turma 2018.1 do mestrado e doutorado do EDUMATEC, professores e colegas, pelas contribuições ao longo dos seminários. Em especial meus colegas de trabalhos André e Helena, por quem tenho um carinho enorme.  
Meu muito obrigada, às Professoras Auxiliadora Padilha e Rosilângela Lucena que sempre se dispuseram a me ajudar.

Às geracionetes mais pupurinadas do mundo da Combinatória e da Probabilidade: Ari, Ewe, Flavinha, Glauce, Jaque, Mika, Paulinha, Rita e Tiane. Em especial, à minha irmã acadêmica, que tem me orientado desde a graduação, Ewe!

Às escolas participantes dessa pesquisa e a cada estudante que permitiu sua realização.

À FACEPE pelos financiamentos que permitiram maior dedicação a essa  
pesquisa.

Aos patriarcas da família, meus avós que amo com todas as minhas forças,  
Vó, Vó Maria e Vô Lourenço.

Aos meus tios: Antônio, Luzene, Petrócio e Rita e seus esposos e esposas.  
Por serem meus amigos e irmãos mais velhos.

Aos meus primos: Gybson, Nyvson e Raul. Sim, eu sou a princesinha da  
família!

A Cleide, tia do coração, por toda preocupação e acolhimento.

À minha amiga-irmã, Bel, que mesmo “distante” é presente na minha vida.

Aos parceiros de rolês, Estefani (que me arranca gargalhadas como quase  
ninguém), Isabele e Victor. As distrações de vocês foram e são fundamentais  
para meu equilíbrio mental.

Ao girassol mais lindo de todos, Tarciane Couto (in memoriam) por sempre  
ter ficado feliz com as minhas conquistas.

Às minhas amigas para além dos muros da UFPE, da graduação para a  
vida (Águida, Amanda, Cinthia, Day e Flávia). Em especial, às amigas das  
confraternizações: Águida, Amanda e Cinthia).

Às minhas amigas desde o Ensino Médio, Thais e Bruna, que sempre  
arrumam um tempinho para jogarmos conversa fora e para batermos  
pernas.

A Rozima que torce e vibra por mim!

Às professoras Rosa e Nalva, por terem sido o motivo da minha paixão pela  
Educação.

A todos que direta e/ou indiretamente contribuíram com a realização de  
mais um sonho, ainda que não tenham tido seus nomes mencionados por  
falha da memória.

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1</b>	Tripé da formação dos conceitos segundo a TCC.	<b>26</b>
<b>Figura 2</b>	Listagem de três dentre quatro sabores de bombons.	<b>32</b>
<b>Figura 3</b>	Permutação de três algarismos representados em árvore de possibilidades.	<b>33</b>
<b>Figura 4</b>	Diagrama de dois conjuntos (dois tipos de pão e três tipos de queijo).	<b>34</b>
<b>Figura 5</b>	Fichas do material manipulável concreto para um problema no qual são solicitadas as diferentes maneiras de obter o primeiro e o segundo lugares em uma corrida entre três amigos: Beto, Lucas e Chico.	<b>38</b>
<b>Figura 6</b>	Recorte do site: <i>Reconhecer frações</i> , como exemplo de material manipulável estático.	<b>40</b>
<b>Figura 7</b>	Recorte da etapa de seleção do cenário no Pixton©.	<b>43</b>
<b>Figura 8</b>	Recorte da etapa de escolha do quadrinho no Pixton©.	<b>43</b>
<b>Figura 9</b>	Painéis de quadrinhos no Pixton© e serviços de edições.	<b>44</b>
<b>Figura 10</b>	Ilustração (editada) no Pixton© de representação combinatória de diferentes maneiras de três crianças ocuparem duas cadeiras em um carrinho de montanha russa.	<b>45</b>
<b>Figura 11</b>	Resolução de um problema de <i>arranjo</i> pela dupla E22 + E20, no primeiro momento de intervenção com o uso de fichas.	<b>93</b>
<b>Figura 12</b>	Resolução de um problema de <i>combinação</i> pela dupla E1 + E6, no primeiro momento de intervenção com o uso de fichas.	<b>94</b>
<b>Figura 13</b>	Resolução de um problema de <i>permutação</i> pela dupla E2 + E8, no primeiro momento de intervenção com o uso de fichas.	<b>96</b>
<b>Figura 14</b>	Resolução de um problema de <i>produto de medidas</i> pela dupla E2 + E8, no primeiro momento de intervenção com o uso de fichas.	<b>96</b>

<b>Figura 15</b>	Resolução de um problema de <i>produto de medidas</i> pela dupla E1 + E6, no segundo momento de intervenção com o uso de fichas.	<b>98</b>
<b>Figura 16</b>	Resolução de um problema de <i>produto de medidas</i> pela dupla E27 + E30, no primeiro momento de intervenção com o uso do Pixton©.	<b>101</b>
<b>Figura 17</b>	Resolução de um problema de <i>arranjo</i> pela dupla E9 + E4, no primeiro momento de intervenção com o uso do Pixton©.	<b>102</b>
<b>Figura 18</b>	Resolução de um problema de <i>permutação</i> pela dupla E28 + E33, no primeiro momento de intervenção com o uso do Pixton©.	<b>103</b>
<b>Figura 19</b>	Resolução de um problema de <i>arranjo</i> pela dupla E9 + E4, no segundo momento de intervenção com o uso do Pixton© <i>Situação</i> .	<b>104</b>
<b>Figura 20</b>	Ilustração (editada) da explicação dada pelo estudante E17 a sua dupla E10, no segundo momento de intervenção com o uso do Pixton©.	<b>105</b>
<b>Figura 21</b>	Resolução de um problema de <i>produto de medidas</i> pela dupla E27 + E30, no segundo momento de intervenção com o uso do Pixton©.	<b>106</b>
<b>Figura 22</b>	Resolução de um problema de <i>arranjo</i> com resposta <i>incorreta</i> , pelo estudante E5 (GE2 – <i>software</i> ), no pré-teste.	<b>120</b>
<b>Figura 23</b>	Resolução de um problema de <i>combinação</i> com resposta <i>incorreta</i> , pelo estudante E2 (GE2 – <i>software</i> ), no pré-teste.	<b>121</b>
<b>Figura 24</b>	Resolução de um problema de <i>permutação</i> com resposta <i>incorreta</i> , pelo estudante E7 (GE2 – <i>software</i> ), no pré-teste.	<b>121</b>
<b>Figura 25</b>	Resolução do segundo problema de <i>combinação</i> com resposta <i>incorreta</i> , pelo estudante E9 (GE2 – <i>software</i> ), no pós-teste.	<b>122</b>

<b>Figura 26</b>	Rascunho da resolução de um problema de <i>combinação</i> com resposta <i>incorreta</i> , pelo estudante E9 (GE2 – <i>software</i> ), no pós-teste.	<b>123</b>
<b>Figura 27</b>	Resolução de um problema de <i>permutação</i> com <i>acerto parcial I</i> , pelo estudante E25 (GE1 – fichas), no pré-teste.	<b>124</b>
<b>Figura 28</b>	Resolução de um problema de <i>permutação</i> com <i>acerto parcial I</i> , pelo estudante E16 (GE2 – <i>software</i> ), no pós-teste.	<b>125</b>
<b>Figura 29</b>	Resolução de um problema de <i>produto de medidas</i> com resposta de <i>acerto parcial II</i> , pelo estudante E24 (GE2 – <i>software</i> ), no pré-teste.	<b>126</b>
<b>Figura 30</b>	Resolução de um problema de <i>combinação</i> com resposta de <i>acerto parcial III</i> , pelo estudante E32 (GC – controle), no pré-teste.	<b>127</b>
<b>Figura 31</b>	Resolução de um problema de <i>combinação</i> com resposta de <i>acertos parciais IV</i> , pelo estudante E28 (GE2 – <i>software</i> ), no pré-teste.	<b>129</b>
<b>Figura 32</b>	Resolução de um problema de <i>permutação</i> com <i>acertos parciais IV</i> , pelo estudante E20 (GE1 – fichas), no pós-teste.	<b>129</b>
<b>Figura 33</b>	Resolução de um problema de <i>produto de medidas</i> com <i>acertos parciais IV</i> , pelo estudante E2 (GE1 – fichas), no pós-teste.	<b>130</b>
<b>Figura 34</b>	Resolução de um problema de <i>produto de medidas</i> com resposta de <i>acertos totais</i> , pelo estudante E22 (GE1 – fichas), no pré-teste.	<b>131</b>
<b>Figura 35</b>	Resolução de um problema de <i>produto de medidas</i> com <i>acertos totais</i> , pelo estudante E13 (GE1 – fichas), no pré-teste.	<b>132</b>
<b>Figura 36</b>	Rascunho da resolução de um problema de <i>produto de medidas</i> com <i>acertos totais</i> , pelo estudante E13 (GE1 – fichas), no pós-teste.	<b>133</b>

<b>Figura 37</b>	<i>Frase de senso comum</i> como representação simbólica, utilizada pela estudante E15 (GC – controle), no pré-teste.	<b>135</b>
<b>Figura 38</b>	<i>Quantidade de possibilidades</i> como representação simbólica, pelo estudante E6 (GE1 – fichas), no pré-teste.	<b>136</b>
<b>Figura 39</b>	<i>Operações aritméticas</i> como representação simbólica, pela estudante E16 (GC – controle), no pré-teste.	<b>137</b>
<b>Figura 40</b>	Operações como representação simbólica, pela estudante E22 (GE1 – fichas), no pré-teste.	<b>138</b>
<b>Figura 41</b>	Listagem como representação simbólica, pela estudante E24 (GE2 – <i>software</i> ), no pré-teste.	<b>139</b>
<b>Figura 42</b>	Diagrama como representação simbólica, pela estudante E32 (GC – controle), no pré-teste.	<b>140</b>
<b>Figura 43</b>	Listagem como representação simbólica, pela estudante E21 (GE1 – fichas), no pós-teste.	<b>142</b>
<b>Figura 44</b>	Listagem como representação simbólica, pela estudante E13 (GE1 – fichas), no pós-teste.	<b>143</b>
<b>Figura 45</b>	Listagem e desenhos como representação simbólica, pela estudante E9 (GE2 – <i>software</i> ), no pós-teste.	<b>143</b>
<b>Figura 46</b>	<i>Frase de senso comum</i> como representação simbólica, pela estudante E12 (GC – controle), no pós-teste.	<b>144</b>
<b>Figura 47</b>	<i>Quadro, listagem e operações aritméticas</i> como representação simbólica, pela estudante E17 (GE2 – <i>software</i> ), no pós-teste.	<b>145</b>
<b>Figura 48</b>	<i>Frase de senso comum</i> como representação simbólica, pela estudante E31 (GC – controle), no pós-teste.	<b>148</b>
<b>Figura 49</b>	<i>Quantidade de possibilidades</i> como representação simbólica, pela estudante E8 (GE1 – fichas), no pós-teste.	<b>149</b>
<b>Figura 50</b>	<i>Listagem</i> como representação simbólica, pela estudante E8 (GE1 – fichas), no pós-teste.	<b>149</b>
<b>Figura 51</b>	Quantidade de possibilidades a partir da representação simbólica <i>diagrama</i> , pela estudante E9 (GE1 – fichas), no	<b>151</b>

pós-teste.

**Figura 52** *Diagrama* como representação simbólica, pela estudante **151**  
E9 (GE1 – fichas), no pós-teste.

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 1</b>	Emparelhamento das duplas dos grupos experimentais e controle (com indicação da pontuação de cada estudante).	<b>87</b>
<b>Tabela 2</b>	Porcentagens de acertos nas situações do pré-teste.	<b>89</b>
<b>Tabela 3</b>	Porcentagens de acertos do pré-teste e do pós-teste, por grupo.	<b>109</b>
<b>Tabela 4</b>	Médias obtidas no pré-teste e no pós-teste, por grupo.	<b>109</b>
<b>Tabela 5</b>	Médias por tipo de problema no pré-teste e no pós-teste, por grupo.	<b>115</b>
<b>Tabela 6</b>	Porcentagens de acertos nas situações do pós-teste.	<b>112</b>
<b>Tabela 7</b>	Porcentagens de acertos para cada questão do pré-teste e do pós-teste no GE1.	<b>117</b>
<b>Tabela 8</b>	Porcentagens de acertos para cada questão do pré-teste e do pós-teste no GE2.	<b>118</b>
<b>Tabela 9</b>	Porcentagens de acertos para cada questão do pré-teste e do pós-teste no GC.	<b>119</b>
<b>Tabela 10</b>	Representações simbólicas utilizadas no pré-teste em função dos tipos de respostas dadas.	<b>134</b>
<b>Tabela 11</b>	Representações simbólicas utilizadas no pós-teste em função dos tipos de respostas dadas.	<b>141</b>

## LISTA DE GRÁFICOS E QUADROS

<b>Gráfico 1</b>	Comparação dos grupos nos diferentes tipos de situações nos testes.	<b>114</b>
<b>Gráfico 2</b>	Quantitativo de representações simbólicas utilizadas por cada grupo no pré-teste.	<b>146</b>
<b>Gráfico 3</b>	Quantitativo de representações simbólicas utilizadas por cada grupo no pós-teste.	<b>147</b>
<b>Quadro 1</b>	Quadro de dupla entrada dos cargos de representante e vice representante.	<b>32</b>
<b>Quadro 2</b>	Situações-problema do pré-teste, por tipo de situação, e total de possibilidades.	<b>72</b>
<b>Quadro 3</b>	Situações-problema do pós-teste, por tipo de situação, e total de possibilidades.	<b>78</b>
<b>Quadro 4</b>	Classificação e pontuação por tipo de resposta	<b>83</b>

## SUMÁRIO

1	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>18</b>
2	<b>REFERÊNCIAL TEÓRICO</b>	<b>25</b>
2.1	Teoria dos Campos Conceituais	25
2.2	Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas	27
2.3	Situações combinatórias	29
2.3.1	<i>Invariantes das situações combinatórias</i>	30
2.3.2	Representações simbólicas na Combinatórias	34
2.4	Representando e resolvendo problemas com material manipulável concreto	36
2.5	Representando e resolvendo problemas com material manipulável virtual	39
2.5.1	<i>O uso do Pixton© como material manipulável virtual</i>	41
3	<b>REVISÃO DA LITERATURA</b>	<b>47</b>
3.1	Propostas curriculares para a Combinatória	47
3.2	Propostas curriculares referentes ao uso de recursos didáticos no ensino e na aprendizagem	51
3.3	Revisão sistemática	54
3.4	Estudos anteriores	57
4	<b>OBJETIVOS E MÉTODO</b>	<b>69</b>
4.1	Objetivos	69
4.1.1	<i>Geral</i>	69
4.1.2	<i>Específicos</i>	69
4.2	Método	70
4.2.1	<i>Participantes</i>	70
4.3	Coleta de dados	71
4.4	Etapas de pesquisa	71
4.4.1	<i>Pré-teste</i>	71
4.4.2	<i>Intervenções</i>	74
4.4.3	<i>Pós-teste</i>	77

4.5	Proposta de análise de dados	79
<b>5</b>	<b>APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DE RESULTADOS</b>	<b>82</b>
5.1	Análises do pré-teste	86
5.2	Análises das intervenções	90
5.2.1	<i>Manipulando as fichas</i>	91
5.2.2	<i>Manipulando o software Pixton©</i>	99
5.3	Análises comparativas do pré e pós-teste	108
5.4	Análises das respostas apresentadas no pré e no pós-teste	116
5.4.1	<i>Resposta incorreta: escolha incorreta; ordenação incorreta; sem esgotamento das possibilidades</i>	119
5.4.2	<i>Acerto parcial I: escolha adequada, mas limita-se a uma possibilidade</i>	123
5.4.3	<i>Acertos parciais II: escolha adequada, mas apresenta número de possibilidades limitado ao número de elementos</i>	125
5.4.4	<i>Acerto parcial III: escolha adequada, ordenação incorreta</i>	127
5.4.5	<i>Acertos parciais IV: escolha adequada ou correta e ordenação correta, esgotamento das possibilidades incorreto</i>	128
5.4.6	<i>Acertos totais: escolha correta, ordenação correta e esgotamento das possibilidades</i>	131
5.5	Análises das representações simbólicas no pré e no pós-teste	134
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>152</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>159</b>
	<b>APÊNDICES</b>	<b>164</b>

## 1. INTRODUÇÃO

O raciocínio combinatório é um modo de pensar sobre as diferentes maneiras de combinar elementos de um ou mais grupos. O levantamento das possibilidades e análise dos agrupamentos estimula a atenção, a construção de hipóteses e deduções que são confrontadas conforme os sujeitos se deparam com novos desafios. Essa forma de pensamento é, assim, importante ao desenvolvimento lógico-matemático.

A Combinatória é um conteúdo matemático pertencente ao campo conceitual das estruturas multiplicativas. Há, entretanto, diferentes modos de abordagem de seu ensino, incluindo sem o uso de fórmulas, o que permite que esse conteúdo seja trabalhado nos anos iniciais da escolarização. Conforme observado em estudos anteriores (MONTENEGRO; BORBA, 2018; BORBA, 2016; MELO; SILVA; SPINILLO, 2016; SILVA; FEITOSA; PEREIRA, 2016; PESSOA; SANTOS, 2015; SANTOS; PESSOA, 2014), se problemas combinatórios possuem valor reduzido de possibilidades, algumas crianças conseguem solucioná-los por diferentes estratégias, tais como desenhos ou listagens. Entretanto, muitas crianças – embora sejam capazes de iniciar a solução de problemas combinatórios – não conseguem determinar o número total de possibilidades.

As orientações curriculares incentivam que o ensino da Matemática esteja contextualizado com as vivências das crianças dos Anos Iniciais, lhes tornando mais significativa a ampliação do saber. No documento curricular mais próximo ao vigente, por isso a necessidade de considerá-lo neste estudo – Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997, p. 21), é mencionada a “importância de se trabalhar com um amplo espectro de conteúdos, incluindo-se, já no ensino fundamental, elementos de [...] combinatória, para atender à demanda social que indica a necessidade de abordar esses assuntos”. Ressalta-se que a Combinatória está presente nas situações do cotidiano das crianças, ocorrendo quando elas precisam escolher entre opções de  $n$  possibilidades de combinação de elementos de um ou mais conjuntos.

De modo semelhante, o documento local mais atual (PERNAMBUCO, 2012, p. 58) ainda que tenha diminuído a abordagem da Combinatória, em

relação aos PCN nos Anos Iniciais, traz indícios desse conteúdo como articulação privilegiada com a Probabilidade e a Estatística, além de mencionar algumas das diferentes maneiras de representações menos formais, tais como “o suporte de imagens ou materiais de manipulação” (p. 87). Sendo o 5º ano o último dos Anos Iniciais, em transição para os Anos Finais, deve-se preparar os estudantes para uma maior formalização da Combinatória (a qual deve ocorrer mais sistematicamente nos Anos Finais e no Ensino Médio).

Na proposta curricular nacional (BRASIL, 2018, p. 57) é defendido que sejam considerados a curiosidade do estudante, seus interesses e expectativas, como também o que precisam aprender.

Recomenda-se uma progressiva sistematização e ampliação das representações e estratégias no conhecimento matemático, mediante o estímulo de operações cognitivas gradativamente mais complexas ao longo dos anos. Portanto, conforme o avançar dos anos, os estudantes precisam lidar com desafios maiores a partir do que já sabem e dos conceitos que precisarão se apropriar como continuidade ao desenvolvimento de novas aprendizagens.

Além da ênfase para os conteúdos a serem trabalhados em cada etapa de escolarização, os três documentos analisados nessa dissertação (Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN, Base Nacional Curricular Comum Curricular – BNCC e Parâmetros Curriculares da Educação Básica de Pernambuco – PCPE) trazem discursos, em maior ou menor intensidade, sobre as novas tecnologias no ensino e na aprendizagem escolar. São propostos os usos do computador e do *software*, e, também, a utilização de recursos mais clássicos, tais como os jogos e os materiais concretos. Nos PCN (BRASIL, 1997), é mencionada a importância das pesquisas que são desenvolvidas contemplando finalidades de *softwares* e de como podem ser trabalhados pelos educadores junto a estudantes. Na BNCC (BRASIL, 2018) são citados vários recursos didáticos (“malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e *softwares* de geometria dinâmica” p. 274), considerados como aliados na compreensão de noções matemáticas por meio das situações trabalhadas. Para o PCPE (PERNAMBUCO, 2019), em consonância aos novos conteúdos curriculares, é implementado o debate referente às novas tecnologias e aos demais recursos já mencionados.

O contexto escolar é um espaço também social que precisa relacionar o ensino com aspectos da sociedade. Se as tecnologias digitais têm sido cada dia mais presente nos locais frequentados pelos estudantes e se podem ser relacionadas com a prática didática, é preciso serem consideradas e pensadas para o trabalho em sala de aula.

Diante da importância do pensamento combinatório e da possibilidade de desenvolvimento desse raciocínio desde cedo, é objetivo desta dissertação propor intervenções com estudantes do 5º Ano dos Anos Iniciais nas situações de *arranjo, combinação, permutação e produto de medidas*, nas quais se faz presente o raciocínio combinatório. Busca-se, assim, meios de auxiliar crianças a superarem suas dificuldades diante de situações combinatórias.

O 5º Ano do Ensino Fundamental geralmente é composto por estudantes com faixa etária entre os 10 a 12 anos de idade. Nessa etapa de escolarização, passados os anos que possuem o foco na alfabetização, busca-se consolidar o que foi apreendido anteriormente.

A Combinatória é um conteúdo que nos currículos é mais evidenciado durante o 4º e 5º anos, mas, além de ser possível de ser introduzido desde a Educação Infantil (MATIAS; SANTOS; PESSOA, 2011; PESSOA; BORBA, 2012; FLORENCIO ; GUIMARÃES, 2017; SILVA, 2018), se faz necessário seu ensino desde os anos iniciais tendo em vista que as crianças são capazes de compreender e solucionar, como também, por fazer parte de suas vivências. Desse modo, é esperado que sejam contemplados avanços sucessivos ao longo do Ensino Fundamental até o Ensino Médio. Ressalta-se que o pensamento lógico dedutivo desenvolvido através do raciocínio combinatório é essencial para outros conteúdos para além da Matemática, o que reforça a necessidade de ser trabalhado desde cedo.

A partir dos resultados de dois estudos piloto (GADELHA; VICENTE; MONTENEGRO, 2017; GADELHA, 2018) e de um Trabalho de Conclusão de Curso (GADELHA; VICENTE; MONTENEGRO, 2018), verificou-se que os estudantes do 5º Ano do Ensino Fundamental pesquisados demonstravam pouca compreensão Combinatória. Os levantamentos foram realizados em três diferentes turmas de duas escolas da Rede Municipal do Recife. Assim, mesmo a Combinatória sendo um conteúdo recomendado em Números e Operações

ou em Tratamento da Informação para esse ano nos documentos curriculares, ainda não tem sido introduzida amplamente nas escolas.

Dessa forma, defende-se que desde o início da escolarização sejam trabalhados problemas combinatórios simples junto às crianças. No princípio não é esperado que as crianças necessariamente esgotem todas as possibilidades, mas que se dê início ao desenvolvimento de seus raciocínios combinatórios. No final dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental pode-se, assim, trabalhar situações combinatórias de modo sistematizado a partir de representações mais formais, a exemplo do princípio fundamental da contagem.

Nesse sentido, é justificado o 5º Ano do Ensino Fundamental como escolha da presente pesquisa, a qual teve como objetivo oportunizar momentos de intervenção/de ensino, fazendo uso de recursos didáticos como facilitadores na compreensão dos invariantes combinatórios, na formulação de estratégias e na ampliação de alternativas para o professor ensinar Combinatória.

No presente estudo dois recursos didáticos foram tratados: 1) material manipulável concreto, fichas, contendo ilustrações das pessoas e objetos citados nos enunciados de problemas combinatórios; e 2) material manipulável virtual, que não tem sido discutido diretamente nas propostas curriculares, mas tem sido abordado por autores que buscam definir e caracterizá-lo (MOYER; BOLYARD; SPIKELL, 2002). O uso desse material requer a utilização de plataformas digitais, no caso dessa pesquisa, o *software* Pixton<sup>1</sup>. Ressalta-se que o foco esteve nas suas contribuições desses recursos para a solução de situações combinatórias.

A escolha das fichas como material manipulável é decorrente da facilidade de serem representados os elementos das questões combinatórias por imagens. As fichas são também de fácil manuseio, pelo modo como o material foi confeccionado, contendo velcro para as fichas serem fixadas e/ou removidas do feltro (sem velcro) sempre que necessário.

Acredita-se que o *software* Pixton<sup>©</sup>, segundo as perspectivas apresentadas por Moyer, Bolyard e Spikell (2002), atende as concepções referentes a material manipulável virtual, “nova categoria de materiais que tem

---

<sup>1</sup> Link de acesso: <<https://www.pixton.com/br/>>. Acesso em: 24 fev. 2020.

emergido com as inovações tecnológicas (computadores, Internet) que vão ganhando terreno dentro das salas de aula” (BOTAS; MOREIRA, 2013, p. 261), por sua condição de interação. Além disso, há nele uma grande disponibilidade de ilustrações, opção não identificada em *softwares* analisados em uma pesquisa anterior (AZEVEDO, 2013).

Segundo Chamorro (2003), “todos os recursos que sejam criados, produzidos e aplicados na ação educativa e que promovam o desenvolvimento do processo cognitivo são recursos que servem de apoio ao professor enquanto leciona.” Dessa forma, já era esperado que tanto as fichas quanto o *software* pudessem promover o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de anos iniciais.

Como aporte teórico, a presente pesquisa está embasada na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1996) por entender que todo conhecimento está estruturado em campos conceituais que são apreendidos ao longo do tempo, mediante os avanços cognitivos, as experiências e aprendizagens do sujeito. Ainda de acordo com o teórico supracitado, a construção de conceitos envolve três principais dimensões: (*S*) as situações que dão sentido ao conceito; (*I*) os invariantes que caracterizam as propriedades do conceito e (*R*) as representações simbólicas pelas quais são representadas o conceito, que devem ser consideradas simultaneamente.

Os conceitos envolvidos no raciocínio combinatório são construídos por meio das diferentes situações (*S*), que são estruturadas em organização única (BORBA, 2010): *arranjos, combinações, permutações e produtos de medidas*. As singularidades de cada significado são determinadas por seus invariantes (*I*) de *ordem, escolha* e o *esgotamento das possibilidades*, e nas representações simbólicas (*R*), desde as menos para as mais formais. Com o tempo, vivências e experiências de resoluções combinatórias as respostas são aprimoradas conforme destacado em estudos anteriores (BORBA, 2010; PESSOA; BORBA, 2010; MONTENEGRO, 2018).

No primeiro capítulo deste texto é apresentada e discutida a perspectiva do principal teórico que fundamenta este trabalho (VERGNAUD, 1996). Discute-se a Teoria dos Campos Conceituais em maior detalhamento e como se organiza no que é definido como tripé do conceito. Além da relação dos três conjuntos desse tripé na construção dos conceitos combinatórios nos

diferentes tipos de situações – conforme a classificação de Borba (2010). Por fim, é discutido o pensamento de alguns autores sobre o uso de material manipulável concreto e de material manipulável virtual para o ensino e a aprendizagem da Matemática, em particular para a Combinatória.

No Capítulo 2 são postos os resultados de uma breve revisão sistemática, na busca de artigos que tratem do *software* Pixton© na Matemática ou referente a ilustrações virtuais. Em seguida, foram acrescentadas buscas sobre a utilização de materiais manipuláveis na resolução de problemas combinatórios. Também são apresentados estudos anteriores que propuseram o uso de material concreto no ensino da Combinatória, estudos que relacionaram o Pixton© para finalidades matemáticas e o estudo de uma autora brasileira que desenvolveu sua dissertação sobre o material manipulável virtual na Estatística, pois não foi identificado nenhum trabalho que indicasse esse recurso para a Combinatória.

O terceiro capítulo contém o objetivo geral e os objetivos específicos que direcionam o presente estudo, como também a descrição do método experimental da pesquisa e as situações-problema que compuseram os testes como instrumentos de coleta de dados. Seguindo a classificação de Borba (2010), são mostrados os problemas elaborados, sendo duas questões para cada tipo de situação combinatória. A fim de ser investigada a compreensão dos estudantes, público alvo deste trabalho, foi proposto que solucionassem tais problemas combinatórios. É descrito também, como foi pensado os momentos interventivos para os grupos experimentais.

No Capítulo 4 são apresentados e discutidos os resultados à luz da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1996). A análise dos dados quantitativos foi realizada a partir da elaboração de uma classificação de respostas, com pontuações de 0 a 5 a partir das compreensões dos invariantes combinatórios, e a partir do *software Statistical Package for the Social Sciences* (SPSS). Também são apresentadas e discutidas análises qualitativas antes, durante e após as intervenções, comparando o desempenho dos grupos participantes e sobre as percepções dos recursos didáticos manuseados em relação aos avanços dos estudantes.

Finaliza-se o texto com as Considerações Finais. Nesse capítulo são trazidas reflexões sobre o que os dados e as análises evidenciam sobre o uso

de materiais manipuláveis (concreto e virtual) no possível avanço da compreensão de situações combinatórias por parte de estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental.

## 2. REFERÊNCIAL TEÓRICO

Neste capítulo será apresentado e discutido o principal aporte do presente estudo, o qual, advém da Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Gérard Vergnaud, na qual tem-se a preocupação em entender como são construídas pelos indivíduos compreensões, principalmente de conceitos matemáticos. Como também, na seção posterior, será abordado sobre a finalidade das fichas como material manipulável concreto e do *software* Pixton© enquanto material manipulável virtual, os quais foram utilizados pelos grupos experimentais ao longo da intervenção. Tendo como base os autores que já utilizaram um desses recursos em seus estudos (BATISTA; SPINILLO, 2008; SANTOS; SILVA; LUCENA, 2016; MOURA; FRANCA, 2016; ABREU; LUCENA, 2016) e os autores Moyer; Bolard; Spikell (2002) como principais pesquisadores sobre o papel do manipulável virtual no ensino matemático.

Na TCC advoga-se que os conceitos são desenvolvidos dentro de campos conceituais, dentre eles há o campo das estruturas multiplicativas constituído de problemas que têm como base a relação ternária ou quaternária, conforme o cálculo relacional das variáveis envolvidas. Dentre as classes de problemas ternários são tidas as situações de raciocínio combinatório que serão discutidas a partir da organização proposta por Borba (2010).

E por fim, são explicitadas as funções disponibilizadas pelos materiais manipuláveis, concreto e virtual, utilizados neste estudo como recursos auxiliares no ensino-aprendizagem dos conceitos combinatórios. Como também, o discurso dos autores Botas e Moreira (2013), entre outros, sobre o uso do material manipulável concreto e o de Moyer, Bolyard e Spikell (2002) a respeito dos materiais definidos como manipulável virtual.

### 2.1 A teoria dos Campos Conceituais (TCC)

De acordo com Vergnaud, autor dessa teoria, o conhecimento está estruturado em campos conceituais, os quais podem ser entendidos como conjuntos de situações, problemas, conceitos e operações do pensamento que

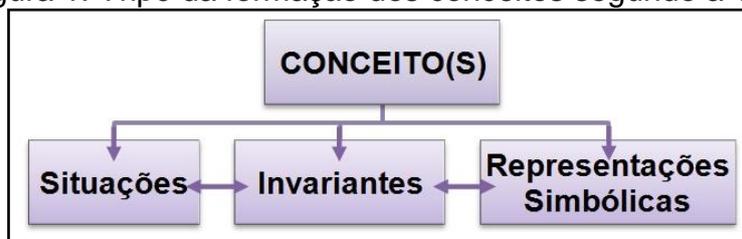
se relacionam entre si. É necessário considerar que um campo conceitual na Matemática, como em qualquer outra área, envolve mais de uma situação. É um conjunto de situações em suas diversidades que viabiliza a construção de vários conceitos.

Um conceito não assume a sua significação numa única classe de situações, e uma situação não se analisa com o auxílio de um único conceito. É necessário, pois, estabelecer como objectos de investigação conjuntos relativamente amplos de situações e de conceitos. (Vergnaud, 1996, p. 190)

Dessa forma, os conceitos só terão sentido pelo contato com variadas situações. Percebe-se então, que as situações são um fator chave na Teoria dos Campos Conceituais. Mais do que explicações advindas do professor em sala de aula, o confronto dos estudantes na interação com as situações lhes permitem serem sujeitos ativos na organização e estruturação dos pensamentos em resposta a problemas, a partir das concepções já construídas e das que ainda serão compreendidas.

Vergnaud (1996) apresenta três principais estruturas presentes em um campo conceitual, as quais se relacionam entre si no desenvolvimento da conceitualização. Essas três estruturas são referidas como um *tripé*, constituído de *situações* (S), *invariantes* (I) e *representações simbólicas* (R) conforme é apresentado na Figura 1. Dessa forma, em um campo conceitual há uma variedade de problemas os quais envolvem conceitos (com distintas relações e propriedades), procedimentos de resolução e representações – sendo esses de diferentes tipos, mas intimamente relacionados.

Figura 1: Tripé da formação dos conceitos segundo a TCC



Fonte: A autora, 2019 (VERGNAUD, 1996).

Essas dimensões (S, I e R) não devem ser consideradas de modo fragmentado, pois se encontram articuladas na constituição e no entendimento de conceitos. A partir desse tripé, Vergnaud sugere a identificação e

classificação de situações associadas a conceitos, recomenda a pesquisa de invariantes usados ou a serem usados por sujeitos ao tratarem os conceitos e indica que se procure entender como as representações simbólicas ajudam na conceitualização.

Dentre os campos conceituais na Matemática, há o campo conceitual das estruturas multiplicativas no qual se desenvolve o raciocínio combinatório, objeto de estudo que será melhor detalhado nas próximas seções.

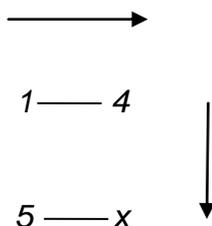
## 2.2 Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas

Os problemas multiplicativos são classificados por Vergnaud (1982) em quatro tipos: *comparação multiplicativa*, *proporção simples*, *função bilinear*, *proporcionalidade múltipla e produto cartesiano* (também denominado de *produto de medidas*), os quais envolvem os conceitos interligados à multiplicação e à divisão ou a junção dessas duas operações.

Essas classificações de problemas envolvem relações ternárias e quaternárias, sendo a primeira, de base mais complexa por envolver a combinação de duas variáveis resultando, numa terceira variável (produto de medidas). E a quaternária, de base mais simples, assumindo a ideia de proporcionalidade simples ou múltipla (isomorfismo de medidas). Tais definições são explicitadas nos seguintes exemplos:

- Isomorfismo de medidas (multiplicação)

Exemplo: Se um carro tem quatro rodas. Quantas rodas há em cinco carros?



Pela ideia de proporcionalidade, percebe-se que um valor está relativamente ligado a outros, 1 está para 4, assim como, 5 está para 'x', como também, 5 corresponde a 5 vezes 1 e X a 5 vezes 4, formando uma relação quaternária por envolver quatro variáveis. Logo, em resposta a este problema, cinco carros totalizam 20 rodas ( $x = 20$ ).

- Produto de medidas (multiplicação)

Exemplo: *Dora comprou duas blusas – uma rosé e uma branca – e duas saias – uma poá e uma listrada. De quantas maneiras diferentes Dora poderá se vestir?*

Observe que o produto deste problema será decorrente da combinação de duas variáveis, blusas (A) e saias (B), ou seja, a multiplicação entre o número de elementos contidos em cada variável resultará numa terceira variável diferente, conjuntos (C) – blusa e saia. Sendo assim,  $A \times B = C$  ( $2 \times 2 = 4$ ).

Desse modo, percebe-se que os problemas de produtos de medidas são mais complexos de serem analisados, por envolverem duas medidas diferentes da qual é decorrente uma terceira medida, a exemplo de outros problemas de área e volume. Essa breve abordagem serve para ressaltar a natureza (ternária) dos problemas combinatórios que serão discutidos a seguir.

Alguns estudos demonstraram a dificuldade dos estudantes da escolarização básica em solucionar os problemas de *produto de medidas*. Gitirana, Campos, Magina e Spinillo (2014) verificaram que dos diferentes tipos de problemas multiplicativos, os estudantes do Ensino Fundamental, participantes do estudo, tiveram grande dificuldade em solucionar o problema de produto cartesiano (voltado à combinação dos elementos de um ou mais conjuntos - cujo dito: *produto de medidas*).

O mesmo resultado já havia sido demonstrado no estudo de Lima (2010), no qual, concluiu-se, que, os estudantes apresentaram um desempenho melhor nos problemas de multiplicação direta, quotição e partição. Isso porque geralmente são trabalhados desde os anos iniciais. Indicado que os problemas de *produto cartesiano* (*produto de medidas*) são tidos como os mais difíceis de serem solucionados entre os demais problemas multiplicativos.

Desse modo, o presente estudo reforça a necessidade dos problemas multiplicativos de relação ternária, em específico os de *produto de medidas* (ou *produto cartesiano*) envolvendo a ideia de agrupamentos, serem introduzidos e explorados desde o início da escolarização.

A seguir são mencionados outros problemas, além de *produto de medidas* que envolvem o raciocínio de agrupamento dos elementos, demonstrado no último exemplo. Sendo, portanto, todos de uma mesma natureza, ternária. São apresentadas, também, a definição e as propriedades em comuns e divergentes entre cada tipo de problema combinatório.

### 2.3 Situações combinatórias

A Combinatória, conteúdo que será explorado nas situações-problemas propostas no presente trabalho, “[...] é conhecida como a arte de contar, pois nas situações combinatórias são enumeradas maneiras possíveis de agrupar dados objetos” (BORBA, 2010). Portanto, é uma maneira diferente de se pensar sobre todas as possibilidades de organização de uma ou mais quantidades de elementos.

Esse modo de pensar estimula a elaboração de hipóteses e deduções dos sujeitos sobre uma realidade sem necessariamente estarem nela. Isso torna significativo e necessário o desenvolvimento deste raciocínio lógico para a aprendizagem de outros conteúdos matemáticos ou de outras áreas do conhecimento e nas vivências diárias. Afinal, mesmo que de modo inconsciente, as pessoas lidam constantemente com a necessidade de optar por uma dentre tantas outras possibilidades, por isso, devem ser estimuladas a refletirem sobre o levantamento de possibilidades.

No ensino escolar a ideia de possibilidades é melhor evidenciada por serem trabalhadas todas as maneiras dos elementos serem agrupados em resposta aos problemas propostos, que geralmente partem de contextos da vivência dos estudantes. As autoras Borba, Pessoa e Rocha (2013) argumentam que o raciocínio combinatório:

[...] leva um longo tempo para se desenvolver e no início da escolarização situações combinatórias simples podem ser propostas, de modo a prover estudantes com noções iniciais sobre como combinar elementos e considerar combinações válidas que atendem a determinadas condições. (p. 896)

Anteriormente às investigações de Pessoa e Borba (2009) e Borba (2010), era visto que o ensino combinatório nos anos iniciais detinha-se mais ao tipo produto de medidas, enquanto os demais tipos de situações-problemas

só eram abordados nos anos finais da escolarização básica. No entanto, Pessoa e Borba (2009) classificam em uma organização única as situações que envolvem o raciocínio combinatório e que devem ser introduzidas desde os primeiros anos escolares.

Os problemas combinatórios são organizados numa classificação única em *arranjo, combinação, permutação e produto de medidas* (PESSOA; BORBA, 2009). Esses quatro tipos, estão interligados em uma mesma lógica no raciocínio combinatório, com base nas formas de *escolha* e de *ordenação* dos elementos. Cada tipo dispõe de modo diferenciado de *escolha* e *ordenação*, e em comum têm a condição de *esgotamento das possibilidades* para se obter os respectivos resultados.

Oportunizar diferentes situações que envolvam os quatro tipos de problemas combinatórios é o caminho para que as crianças compreendam as singularidades de cada tipo e considerem os invariantes que os diferenciam entre si. O uso de representações simbólicas variadas (desenhos, listagens, expressões numéricas) também deve ser incentivado na resolução desses tipos de problemas.

Mediante a compreensão de que as situações combinatórias são caracterizadas pelos invariantes, ou seja, a partir da relação de *escolha* e de *ordenação* de elementos, a seguir são apresentados os tipos de situações combinatórias, em função de seus invariantes.

### *2.3.1 Invariantes das situações combinatórias*

Todo conceito tem como singularidade os invariantes que os distingue de outros conceitos, os quais se apresentam implicitamente e/ou explicitamente nas soluções de situações-problemas por meio das representações simbólicas. Os invariantes inicialmente podem ser utilizados pelos estudantes sem a plena consciência de que sejam relações que se mantêm constantes e que proporcionam a distinção entre os diferentes tipos de situações.

Porém, é ressaltado que não há a necessidade dos estudantes explicitarem entendimento do que seja invariantes combinatórios, tendo em vista que são capazes de considerá-los no ato da resolução dos problemas sem esclarecer percepção de cada um. No entanto, o mediador precisa chamar

a atenção dos estudantes sobre a relação de *escolha* e *ordenação* dos elementos para cada tipo de situação (AZEVEDO, 2013).

Vergnaud (1996, p. 166) define as singularidades das situações como “conjunto das invariantes nas quais assenta a operacionalidade dos esquemas”. O autor completa a definição, destacando que essa dimensão (*I*) não se reduz e nem inferioriza as demais – situações (*S*) e as representações simbólicas (*R*).

Borba (2013, 2016) ressalta que os invariantes conceituais básicos que caracterizam os problemas combinatórios são as propriedades de *escolha* e de *ordenação* dos elementos. A autora também ressalta que uma característica essencial dos problemas combinatórios é que se deseja determinar o número total de combinações possíveis, ou seja, é preciso atentar para o *esgotamento das possibilidades*. A seguir são caracterizados os distintos tipos de situações combinatórias (*arranjos*, *combinações*, *permutações* e *produtos de medidas*), em função dos invariantes de *escolha* e de *ordenação*.

- *Arranjos*

Para as situações de *arranjo*, são escolhidos alguns elementos dentre os elementos de um dado conjunto e a ordenação dos elementos indica possibilidades distintas.

Exemplo: *Helena, Joana e Maria estão concorrendo nas eleições de representante e vice representante dos moradores do bairro. Quais as diferentes maneiras de serem ocupados os dois cargos?*

Das três personagens mencionadas, apenas duas deverão ser escolhidas por vez para indicar as possíveis formas de ter o resultado. Dizer que Helena e Joana foram as vencedoras não é o mesmo que dizer Joana e Helena, pois a primeira pessoa mencionada assumirá o cargo de representante e a segunda de vice representante. Logo, a colocação/ordenação dos nomes proporciona possibilidades distintas. Nesse caso, totalizam-se seis possibilidades distintas, como se pode observar no Quadro 1.

Quadro 1: Quadro de dupla entrada dos cargos de representante e vice representante

	<b>Helena</b>	<b>Joana</b>	<b>Maria</b>
<b>Helena</b>	---	Helena e Joana	Helena e Maria
<b>Joana</b>	Joana e Helena	---	Joana e Maria
<b>Maria</b>	Maria e Helena	Maria e Joana	---

Fonte: A autora, 2019

- *Combinação*

Neste tipo de situação, também são escolhidos alguns elementos dentre os elementos de um dado conjunto, mas, diferentemente dos *arranjos*, nas *combinações* a ordenação dos elementos não indica possibilidades distintas.

Exemplo: *Alice presenteará sua amiga secreta com uma caixinha contendo três bombons, dos quatro sabores disponíveis na loja (maracujá, avelã, côco, e brigadeiro). De quantas maneiras ela poderá decidir os três diferentes sabores?*

A escolha dos sabores em cada possibilidade é de três dentre os quatro diferentes sabores. Já a ordenação dos sabores não determina possibilidades distintas. A possibilidade (avelã, maracujá e brigadeiro) é a mesma que (maracujá, brigadeiro e avelã). Nesse caso há, no total, quatro possibilidades, como se pode observar na Figura 2:

Figura 2: Listagem de três dentre quatro sabores de bombons

(avelã, coco e brigadeiro);
(avelã, coco e maracujá);
(avelã, brigadeiro e maracujá);
e (coco, brigadeiro e maracujá).

Fonte: A autora, 2019

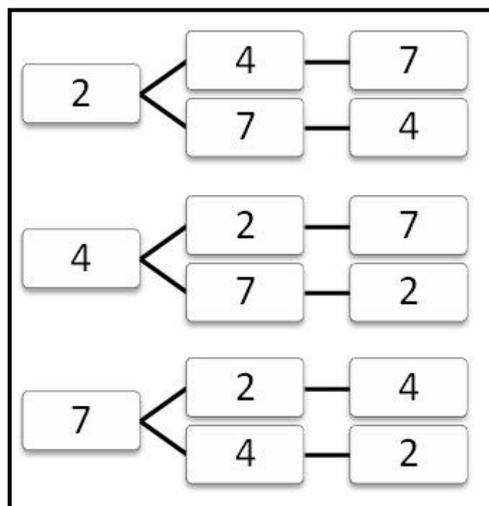
- *Permutação*

É a única situação da Combinatória na qual se utiliza todos os elementos do conjunto agrupando-os entre si. Nessa situação, a ordenação dos elementos indica possibilidades distintas.

Exemplo: *Quais as diferentes maneiras de construir uma senha de celular com três dígitos, utilizando os algarismos 2, 4 e 7?*

Considerando o uso dos três algarismos (2, 4 e 7), são seis as possibilidades de obter uma senha de três dígitos, conforme demonstrado na Figura 3.

Figura 3: Permutação de três algarismos representados em árvore de possibilidades



Fonte: A autora, 2019

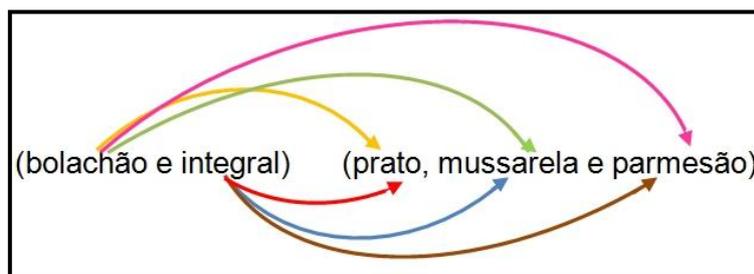
- *Produto de medidas*

Em *produto de medidas* é apresentado mais de um conjunto de elementos, sendo escolhido um elemento de cada um dos conjuntos. Nesse tipo de situação, a *ordenação* dos elementos não indica possibilidades distintas.

Exemplo: *Para o lanche da tarde, Lucas possui como opções dois tipos de pães (bolachão e integral) e três tipos de queijos (prato, mussarela e parmesão). De quantas maneiras Lucas poderá formar seu lanche optando por um tipo de pão e um recheio?*

Neste caso há seis diferentes possibilidades, combinando tipos de pães, queijos e sucos, como se pode observar na Figura 4.

Figura 4: Diagrama de dois conjuntos (dois tipos de pão e três tipos de queijo)



Fonte: A autora, 2019

Como demonstrado nos exemplos anteriores, a solução das situações combinatórias pode ser apresentada por diferentes formas de representações simbólicas. Conforme são apreendidas as relações dos invariantes para cada tipo de situação – arranjo, combinação, permutação e produto de medidas -, as representações podem ser aprimoradas e sistematizadas. A seguir, serão apresentados os recursos didáticos escolhidos para os momentos interventivos e sua funcionalidade para a construção de possibilidades.

### 2.3.2 Representações simbólicas na Combinatória

A sequência na qual as estruturas do tripé (*situações, invariantes e representações simbólicas*) são apresentadas neste trabalho não diz respeito à importância de uma estrutura sobre a outra, pois as três são igualmente relevantes e a relação entre as mesmas é que dá sustentação à conceitualização. Essas estruturas definem os variados conceitos.

As representações simbólicas são as formas pelas quais os conceitos são registrados como solução das situações-problemas. Dentre as representações simbólicas, tem-se as mais formais, (linguagens matemáticas escolares) e as menos formais, as quais normalmente são utilizadas enquanto o sujeito se apropria dos invariantes conceituais.

Tais registros também podem servir como feedback para o professor averiguar as compreensões e dificuldades dos estudantes frente às situações-problemas, tendo em vista que por meio delas (representações simbólicas) são explicitados os conceitos apreendidos e os que estão sendo estruturados, e também, pode ser o caminho de intervenção por meio de ensino.

Esse plano do tripé – representações simbólicas - da TCC permite ao professor e/ou pesquisador perceber ambiguidades nos enunciados das

questões, pois a solução proposta pelos estudantes retrata a compreensão que tiveram sobre o contexto do enunciado. Desse modo, é entendido que por meio das representações é possível verificar a necessidade de ajustes dos problemas para que o desenvolvimento do raciocínio não seja dificultado.

Nos anos iniciais de escolarização, os tipos de representações que são apresentadas ou solicitadas às crianças para resolverem as situações da Combinatória são menos formais, como: desenhos, listagens, quadros e árvores de possibilidades, que podem variar entre os anos escolares, de acordo com o conhecimento já construído pelos estudantes. Nesse sentido, recomenda-se que sejam propostos problemas com o total de possibilidades reduzido, ou seja, quantitativos que possam ser explorados o esgotamento de todas as possibilidades por meio dessas representações menos formais.

Os documentos curriculares – os PCN, a BNCC e os PCPE – e alguns autores como Azevedo e Borba (2011) enfatizam que os recursos didáticos também são facilitadores para que os estudantes dos Anos Iniciais compreendam situações-problemas complexas, a exemplo da Combinatória. Entretanto, é um suporte que por si só não garante a aprendizagem, sendo crucial a mediação do professor para que intervenha durante o manuseio desses recursos, despertando a reflexão – em particular no que concerne às diferenciadas relações de *escolha* e de *ordenação* de elementos dentro de cada possibilidade. Dentre os recursos de ensino, pode-se ter o uso dos mais usuais, lápis e papel (para a produção de desenhos e listagens), fichas e, também, os recursos tecnológicos digitais, como o uso de *softwares*.

Sendo assim, considera-se *representação* aquilo que assume o papel do real a partir de símbolos e signos. As *representações virtuais* possuem esse mesmo significado, porém se encontram disponíveis em versão online ou são projetadas por aparelhos tecnológicos digitais, a exemplo de slides, fotos, figuras, imagens e similares. Portanto, os materiais manipuláveis virtuais são tidos como uma versão dos materiais manipuláveis concretos (fichas, material dourado, ábaco, blocos Lego etc) que se estruturam em representações virtuais, com a mesma finalidade de auxiliar na compreensão de conceitos. Esses recursos visam contemplar o ensino e a aprendizagem, a partir do manuseio do material pelos estudantes e pelas interações fornecidas.

## 2.4 Representando e resolvendo problemas com material manipulável concreto

Para uma melhor compreensão sobre manipuláveis concretos, consideremos o estudo de Botas e Moreira (2013), no qual inicialmente se fez uma explanação de vários termos que são tidos como sinônimos de materiais manipuláveis, de acordo com a perspectiva de diferentes autores, os quais categorizam e exemplificam como tipos de objetos que atendem a finalidade de auxiliar. Mesmo sendo abordagens mais amplas e outras mais específicas, as autoras complementam que em todos os posicionamentos é tido em comum o objetivo de serem objetos que contemplem o ensino e a aprendizagem.

As autoras adotam o termo *material didático*, o qual é mais abrangente, e tratam de material manipulável como recurso, concluindo que os mesmos auxiliam “[...] na concretização e construção dos conceitos matemáticos.” (BOTAS; MOREIRA, 2013, p. 262)

Botas e Moreira (2013) caracterizam os *materiais didáticos* como complementares enquanto “formas de promover diferentes experiências de aprendizagem matemática enriquecedoras [...] os quais assumem um papel ainda mais determinante por força da característica abstrata da matemática” (p. 254). Tais materiais despertam a reflexão, conforme os estudantes solucionam as situações-problemas, por meio dos quais também observam, manuseiam, experimentam e exploram.

Neste sentido, Gellert (2004), ressalta que considerar materiais mais inovadores poderia tornar a aprendizagem matemática mais significativa. Entretanto, muitos professores se atêm ao quadro e ao lápis, entre outros recursos mais comuns e de fácil acesso em sala de aula. Essas autoras ressaltam que planejar aulas que considerem a proposta de *recursos didáticos* requer sair da zona de conforto e construir relações com os conteúdos pedagógicos, bem como compreender como utilizar materiais de maneira motivadora aos estudantes (BOTAS; MOREIRA, 2013).

Batista e Spinillo (2008), em seu estudo propuseram dois tipos de materiais manipuláveis concretos, o definido, definição dada aos objetos utilizados em miniatura (carrinhos, caixas, flores e jarros, retratando os objetos presentes nos enunciados dos problemas) e o indefinido (fichas plásticas sem

figuras) para a resolução de problemas multiplicativos por dois grupos de estudantes de oito anos.

De acordo com as autoras, o tipo de material utilizado pode contribuir mais ou menos na construção de relações necessárias à resolução de problemas, pois, os resultados do estudo mostraram que o material concreto definido foi mais eficaz do que o uso do material concreto indefinido. Justifica-se que devido o material definido se referir diretamente aos objetos físicos envolvidos na questão, a compreensão dos estudantes foi facilitada.

Entretanto, duas ressalvas precisam ser consideradas. O conteúdo trabalhado com os estudantes que manusearam os materiais concretos definidos ou indefinidos não foi especificamente a Combinatória, e as fichas manipuladas não possuíam ilustrações, eram todas na cor vermelha, diferentes das fichas propostas no presente estudo.

Sendo assim, a hipótese era de que as fichas utilizadas no presente estudo atenderiam às considerações preestabelecidas, por servir como suporte de representação e referenciais para a solução dos problemas propostos – situações combinatórias. Isso se amparou no entendimento de fichas ilustrativas dos objetos dos enunciados como meio termo entre o que as autoras - Batista e Spinillo (2008) - definem como material indefinido (sem nenhuma referência aos objetos envolvidos) e material definido (os objetos em estreita relação com os presentes nos enunciados), pois, as figuras inseridas em cada ficha estiveram associadas aos elementos das situações-problemas.

A partir das caracterizações evidenciadas pelas autoras supracitadas, Botas e Moreira (2013), o material manipulável concreto pode ser entendido como um tipo de recurso didático que visa representar os elementos de dados problemas e pode ser movido, manipulado e rearranjado pelos usuários, servindo como suporte para a solução de problemas, como as situações combinatórias, quando proposto por um mediador.

Foi tido como hipótese que a manipulação de fichas ilustrativas seria um facilitador para a compreensão dos invariantes que compõem cada tipo de problema combinatório – no que se refere à *escolha* de elementos e à *ordenação* dos mesmos.

Nesse sentido, como recurso didático de amparo ao ensino combinatório foram utilizadas fichas. Na Figura 5 tem-se o exemplo de fichas que

constituíram o material manipulável concreto no caso de um problema no qual se solicitava as diferentes maneiras de obter o primeiro e o segundo lugares em uma corrida apostada entre três amigos: Beto, Lucas e Chico.

Figura 5: Fichas do material manipulável concreto para um problema no qual são solicitadas as diferentes maneiras de obter o primeiro e o segundo lugares em uma corrida entre três amigos: Beto, Lucas e Chico



Fonte: A autora, 2019

Percebe-se então, que cada personagem mencionado na questão (Beto, Lucas e Chico) foi ilustrado nas fichas, facilitando a organização dos agrupamentos e a representação das seis diferentes possibilidades. Desse modo, o usuário consegue visualizar o que já foi construído, o que resta fazer e o caso de alguma possibilidade repetida.

Logo, defende-se, aqui, que esse é um material que os estudantes do 5º Ano do Ensino Fundamental não apresentariam dificuldades de explorar e associar à solução de problemas combinatórios, mas reforça-se que por si só o material não garante o desenvolvimento do raciocínio combinatório. Para isso, aliado ao uso do material, é preciso considerar os invariantes de cada tipo de situação combinatória. Portanto, o material não é suficiente para garantir a aprendizagem, mas se apresenta como auxílio para situar o contexto e condições do problema proposto, possibilitando o levantamento de reflexões, para que os estudantes possam perceber pontos a serem considerados.

No presente estudo é tratado o material manipulável concreto – mais usualmente trabalhado em sala de aula – e também o material manipulável virtual – ainda não muito utilizado como recurso de ensino. As tecnologias digitais têm sido inseridas timidamente no espaço escolar mesmo com décadas

de presença na sociedade. Desse modo, também na pesquisa se proporá a interação com material de manipulável virtual, o qual será abordado a seguir.

## 2.5 Representando e resolvendo problemas com material manipulável virtual

Anteriormente foi discutido que o material concreto permanece sendo uma opção de recurso a ser utilizado em sala de aula. No entanto é importante que outros meios também sejam considerados por poderem contribuir no processo de ensino e aprendizagem dos estudantes. As autoras Leite, Pessoa, Ferraz e Borba (2009) destacam que:

Atualmente jovens, adolescentes e crianças têm acesso cada vez mais cedo aos recursos tecnológicos, seja porque são oferecidos pelas escolas – públicas e privadas – seja pela possibilidade de acesso através de meios comerciais como as lan-houses espalhadas pelas cidades, seja em sua própria casa. Neste sentido, a tecnologia faz parte da vida do aluno, é um bem social e não pode, nem deve ser negada. (p. 1)

Desse modo, é pontuada a importância desses recursos tecnológicos digitais serem pensados como uma opção a mais para auxiliar o professor em seu trabalho pedagógico. Dentre os programas disponibilizados nesse meio faz-se menção aos *softwares*, os quais precisam ser analisados e avaliados antes de serem propostos para que os objetivos sejam alcançados.

Com base nas reflexões de Clements e McMillen (1996) sobre ferramentas advindas das tecnologias digitais enquanto recurso didático, com enfoque para aquelas que contemplam a finalidade de material manipulável, os autores Moyer, Bolyard e Spikell (2002) buscaram enriquecer a proposta ao retratar o material manipulável na versão virtual.

Esse tipo de material manipulável está atrelado ao meio de acesso, ou seja, às plataformas digitais. Essas possibilitam a interatividade do usuário no manuseio e alteração da representação visual por meio de comandos em aparelhos digitais – smartphone, iPhone, tablet, monitor, notebook, computador, e etc. O material virtual, assim como os concretos, também depende da ação palpável, seja pelo click do mouse/teclado ou pelo *touch screen*. No entanto, o manuseio não é realizado diretamente sobre a representação como no caso das fichas. Essa principal diferença também foi

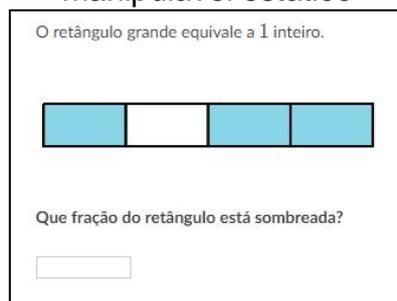
objeto deste estudo para averiguar se influenciaria na compreensão dos estudantes.

Os autores supracitados buscaram definir duas categorias de *manipulável virtual*, de acordo com a funcionalidade do material: *representação visual estática* e *representação visual dinâmica*. As quais se diferenciam conforme a interatividade concedida ao usuário, podendo ser mais limitada ou viabilizando maior participação. Essas são distinções importantes na construção de conceitos matemáticos (MOYER; BOLYARD; SPIKELL, 2002).

De acordo com Moyer, Bolyard e Spikell (2002), os materiais com representação estática não são considerados tão vantajosos quanto o outro tipo por serem fixos, sem nenhuma alteração por quem as visualiza e as utiliza. Mesmo que contribuam nas aprendizagens dos estudantes. A exemplo do site: *Reconhecer frações*<sup>2</sup>, demonstrado na Figura 6.

Na imagem exemplificada (Figura 6) são expostas representações de frações sobre as quais o usuário não tem acesso para alterar e nem mover, cabendo ao participante responder o valor correspondente a imagem.

Figura 6: Recorte do site: *Reconhecer frações*, como exemplo de material manipulável estático



Fonte: Khan, 2005

Já os materiais manipuláveis virtuais considerados dinâmicos são aqueles que possibilitam o manuseio e modificação dos objetos, alterando seus tamanhos, movimentando-os no espaço, girando-os ou alterando as suas cores. Portanto, o controle do usuário sobre os comandos viabilizados nas plataformas digitais é que possibilita dar sentido e significado aos conceitos estudados (MOYER; BOLYARD; SPIKELL, 2002).

Saber distinguir os materiais estáticos dos dinâmicos na escolha do recurso a ser utilizado nas aulas, optando pelo o que de fato pode ser definido

<sup>2</sup> Disponível em: [https://pt.khanacademy.org/math/arithmetic/fraction-arithmetic/arith-review-fractions-intro/e/recognizing\\_fractions\\_0.5](https://pt.khanacademy.org/math/arithmetic/fraction-arithmetic/arith-review-fractions-intro/e/recognizing_fractions_0.5)

como material manipulável e não apenas como representação virtual, é conceder oportunidades aos estudantes de interagirem conforme as compreensões que estão sendo construídas. Para ser considerado manipulável, deve-se considerar o envolvimento do usuário no comando sobre o material.

Moyer, Bolyard e Spikell (2002) exploram a disponibilidade de materiais manipuláveis virtuais que assumam as características acima citadas de modo que auxiliem especificamente no conhecimento matemático. Os autores enfatizam a escassez de estudos já publicados, mas afirmam que é uma temática que tem sido debatida e está em desenvolvimento em várias universidades.

De acordo com Moyer, Bolard e Spikell (2002), existem algumas vantagens do trabalho com materiais manipuláveis virtuais sobre os concretos. Muitas vezes os professores justificam o não uso dos materiais concretos pela quantidade insuficiente. Já os virtuais não possuem essa limitação e estão disponíveis em plataformas de fácil acesso que podem ser acessadas em sala de aula ou nos computadores particulares na residência dos estudantes. Outra vantagem é a durabilidade do material pela possibilidade de gravar e armazenar as atividades realizadas virtualmente, permanecendo disponíveis on-line e/ou off-line.

Em consonância ao que seja material manipulável virtual no modo dinâmico e a sua relevância na construção de conceitos, é sugerido, no presente estudo, o manuseio do *software* Pixton© – plataforma disponível na versão online e como aplicativo – por apresentar funcionalidades semelhantes às descritas acima.

Em continuidade a essa discussão, será apresentado uma breve descrição do *software* Pixton© em sua versão online, destacando a forma de acesso ao site e as opções de itens pré-definidos para a elaboração de ilustrações na finalidade de representar possibilidades combinatórias.

### *2.5.1 O uso do Pixton© como material manipulável virtual*

Azevedo (2013) analisou alguns *softwares* que foram pensados para a Combinatória, buscando identificar suas limitações para selecionar o que fosse mais adaptável para o público alvo da sua pesquisa com estudantes do 5º Ano

do Ensino Fundamental. Nenhum dos *softwares* localizados possuía as funções acima mencionadas, que caracterizam uma manipulação virtual dinâmica. Os *softwares* criados para a solução de problemas combinatórios normalmente já definem certas propriedades da Combinatória por serem específicos, como, por exemplo, o Árvore que é limitado à árvore de possibilidades como representação simbólica e restringido para tal finalidade.

A partir de alguns estudos matemáticos (SANTOS; SILVA; LUCENA, 2016; MOURA; FRANCA, 2016; ABREU; LUCENA, 2016) foi localizado o Pixton®, *software* educativo que foi criado para a construção de histórias em quadrinhos (HQ), presente na versão online e como aplicativo no *Play Store*<sup>3</sup> e no *iOS*<sup>4</sup> – atendendo as finalidades de diversão, escolar e empresarial –, que mesmo não tendo sido elaborado para solucionar situações matemáticas, mostrou contemplar objetivos para esse campo de ensino a partir dos serviços oferecidos. Sendo assim, foi despertada a hipótese de ser um *software* facilitador para a representação de soluções combinatórias.

O Pixton® tem como principal objetivo ofertar serviços de ilustrações, ocorrendo desde a escolha do painel do quadrinho aos personagens que podem ter alterados expressões, cores e tamanhos, além de poder inserir objetos e acessórios, entre outras figuras. Com o uso dessas ferramentas, torna-se dispensável a habilidade de desenhar para ilustrar. Essas funções permitem a interação do usuário com o material.

Para acessar, o usuário precisa criar uma conta ou realizar o *login* pelas plataformas sugeridas. Os criadores de HQ podem disponibilizar a visualização de suas obras, compartilhando-as na plataforma, função definida como *colaborar*, como também podem armazenar os quadrinhos para fazer alterações futuras. Para iniciar a edição, são disponibilizadas 69 temas para ser escolhido o cenário da ilustração (dentre eles há também a opção de um plano de fundo apenas em cores) conforme demonstrado na figura 7.

---

<sup>3</sup> Loja virtual de aplicativos para Android.

<sup>4</sup> Sistema operacional da Apple.

Figura 7: Recorte da etapa de seleção do cenário no Pixton©



Fonte: Pixton©, 2020

Ao selecionar o tema, são disponibilizados outros cenários relacionados para ser definido o fundo do quadrinho. Em seguida, o usuário pode escolher entre três modelos de quadrinhos – o mais simples no estilo de tirinhas, quadrinhos com espaço para legenda e o *graphic novel* – conforme exibidos na Figura 8. Além disso, pode-se optar por dezenas de idiomas no lado direito da tela.

Considerando que o intuito deste estudo não foi a criação de histórias em quadrinhos, se deterá ao modelo básico de quadrinho e com o foco mais voltado às ilustrações. Em continuidade, o usuário precisa selecionar de um à três personagens para serem inseridos no quadrinho, podendo ser retirados ou acrescentados mais adiante.

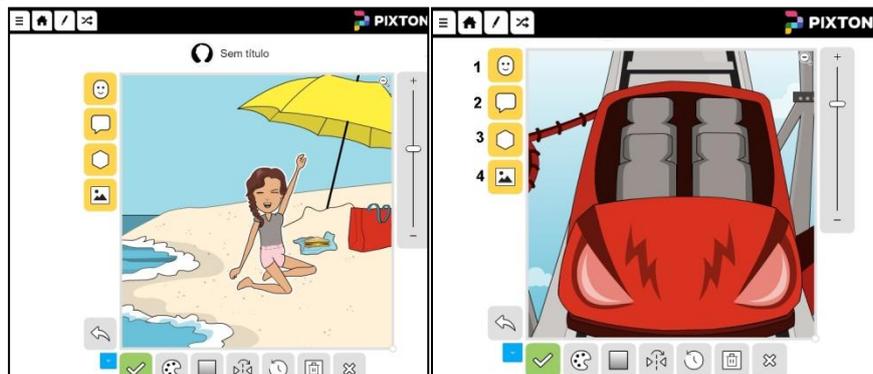
Figura 8: Recorte da etapa de escolha do quadrinho no Pixton©



Fonte: Pixton©, 2020

Na Figura 9 são vistos dois exemplos de plano de fundo – praia e parque. Prosseguindo com a exploração dos serviços disponibilizados no Pixton©, observa-se o quadrinho com a representação de um carrinho na montanha russa, localizado na temática: parque de diversões.

Figura 9: Painéis de quadrinhos no Pixton© e serviços de edições



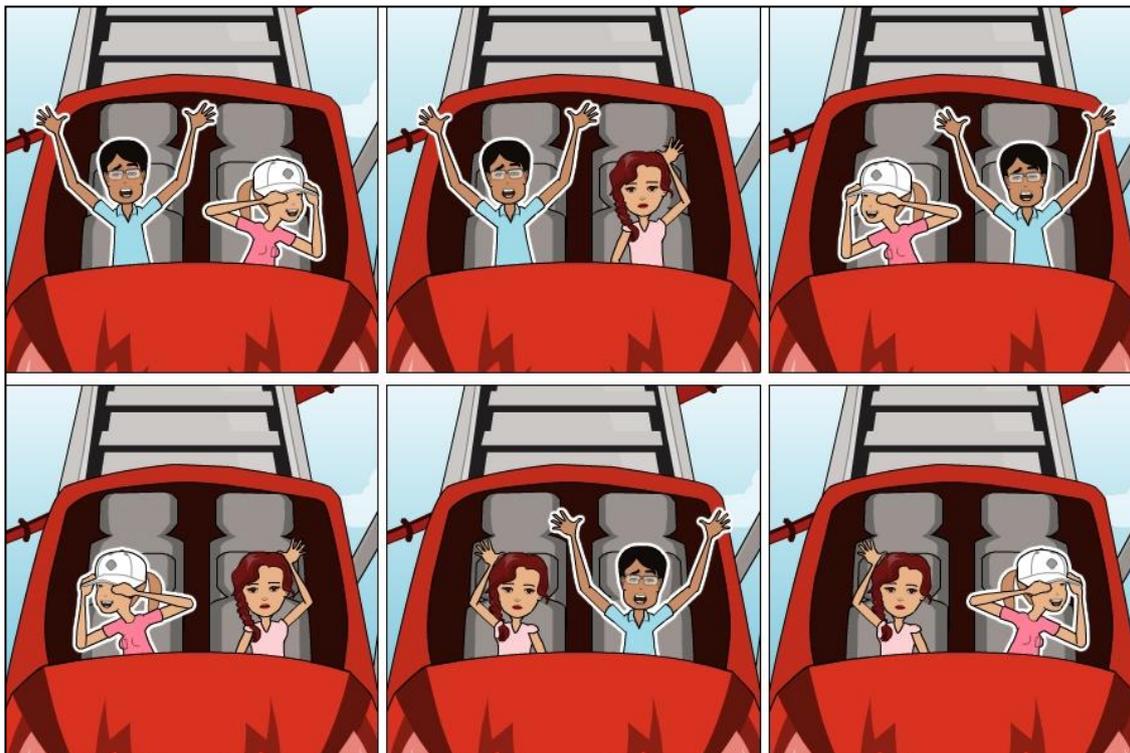
Fonte: Pixton©, 2020

Dos ícones numerados de um a quatro no lado direito da figura temos as seguintes opções de edições: 1 – adicionar personagem; 2 – adicionar fala em diferentes estilos de balões; 3 – adicionar objeto, disposto de 17 temas e objetos correlacionados (aleatório, comida, efeitos, novas, tecnologia, formas, natureza, urbano, linhas, trabalho, artes, escola, combate, casa, moda, esportes e feriado); e 4 – adicionar fundo, ou seja, o painel pode ser modificado a qualquer momento. As quatro opções detalhadas são movíveis e podem ter o tamanho e a cor alterada. Quando clicado no personagem, uma opção a mais é disponibilizada: editar expressão. Nessa opção, o usuário pode optar por expressões e poses pré-definidas ou arrastar o membro do corpo para a pose pretendida.

De acordo com o objetivo da presente pesquisa sobre a intervenção com o manuseio de um material manipulável virtual para a resolução de problemas combinatórios, foi proposta a representação das possibilidades de cada tipo de problema combinatório por meio de *software* Pixton©, como exemplificado na Figura 10.

Na figura 10 é visto que cada possibilidade combinatória foi representada em um quadrinho, resultando em seis quadrinhos com as seis diferentes maneiras dos personagens ocuparem as duas primeiras cadeiras. O resultado final dessa ilustração muito se assemelha às fichas do material concreto. No entanto, na versão virtual o estudante é responsável pela elaboração das ilustrações e pela organização dos agrupamentos em resposta à situação combinatória.

Figura 10: Ilustração (editada) no Pixton© de representação combinatória de diferentes maneiras de três crianças ocuparem duas cadeiras em um carrinho de montanha russa.



Fonte: Pixton©, 2020

Vale ressaltar que, a partir da criação do primeiro quadrinho, do segundo em diante - nesse exemplo acima - o estudante só tem o trabalho de alterar os personagens de lugar, pois o painel é mantido e os personagens também. Torna-se, assim, fácil e prática a representação da solução dos problemas.

Entende-se, que por meio das ilustrações, das soluções combinatórias, nesse *software* são comunicadas as ideias e compreensões conceituais, mas também, é tida uma transformação na forma como os estudantes aprendem e como os professores ensinam.

Os pressupostos discutidos sobre o uso de materiais manipuláveis (concreto e virtual) apresentam suas principais vantagens. Entretanto, a utilização desses materiais não garante que os estudantes compreendam os conceitos como também os procedimentos a serem adotados na resolução de problemas. Portanto, para garantir a aprendizagem dos alunos é primordial que sejam acompanhados e estimulados a refletirem sobre suas ações durante a interação com o material manipulável, tornando significativos os procedimentos adotados. Nessa direção, Leite, Pessoa, Ferraz e Borba (2009) destacam a

importância do aparato de um professor bem preparado para o uso de tais recursos.

No próximo capítulo, são apresentadas as propostas curriculares (PCN, BNCC e PCPE) sobre o ensino da Combinatória nos anos iniciais e o que abordam sobre recursos didáticos. Em seguida, são descritos os resultados da revisão sistemática que buscou identificar artigos relacionados à presente pesquisa, na busca de suporte teórico e metodológico. São também apresentados estudos anteriores que propuseram o uso do material manipulável concreto para a Combinatória, os trabalhos que envolveram o *software* Pixton© na educação, além de se discutir o material manipulável virtual a partir de uma dissertação. Com isso, tem-se como intuito averiguar o que já foi concluído em estudos anteriores e as contribuições que podem trazer à dissertação em questão.

### 3. REVISÃO DA LITERATURA

Na primeira seção deste capítulo é apresentado o que trazem documentos curriculares, sendo dois nacionais e um estadual, sobre a abordagem de situações combinatórias nos anos iniciais da escolarização, com foco no 5º ano do Ensino Fundamental. Também são apresentadas propostas para o trabalho com recursos didáticos em sala de aula enquanto auxílio para o ensino e a aprendizagem. Os documentos aqui discutidos são: os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997), a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018 e os Parâmetros Curriculares da Educação Básica de Pernambuco – PCPE (PERNAMBUCO, 2019).

Na seção seguinte do capítulo, são apresentados os resultados da revisão sistemática que buscou investigar o que tem sido produzido na literatura nas temáticas do presente estudo, por meio de buscas em plataformas digitais que disponibilizam trabalhos científicos publicados.

Por fim, são apresentados recortes de estudos anteriores localizados no Google acadêmico<sup>5</sup>, no blog GERAÇÃO<sup>6</sup> e também oriundos do contato com a autoria por e-mail. Desses, há os que utilizaram material manipulável concreto no ensino da Combinatória na escolarização básica, estudos de como o *software* Pixton© tem sido utilizado em propostas de trabalhos de conteúdos matemáticos, estudo sobre o uso do material manipulável virtual na Educação Matemática e um estudo que investigou diferentes *softwares* para o ensino da Combinatória.

#### 3.1 Propostas curriculares para a Combinatória

- Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN

Mesmo não sendo o documento vigente, a proposta apresentada pelos PCN foi levada em consideração por ter sido o modelo norteador dos

---

<sup>5</sup> Ferramenta de pesquisa disponibilizada pelo website da Google para a busca de artigos entre outros trabalhos acadêmicos.

<sup>6</sup> Link de acesso ao blog Geração - <http://geracaoufpe.blogspot.com>

professores até pouco tempo atrás, além de servir como subsídio comparativo do que tem sido proposto no documento atual.

Nos PCN referentes ao ensino da Matemática nos dois primeiros ciclos do Ensino Fundamental, atualmente definido como os Anos Iniciais que comporta do 1º ao 5º Ano do Ensino Fundamental, trata-se brevemente e isoladamente o ensino da Combinatória. Mesmo sendo posta a importância de trabalhar a Combinatória desde o início da escolarização, o conteúdo só é tratado na parte destinada ao segundo ciclo, ou seja, nos últimos anos dos Anos Iniciais. Desse modo, com base nos PCN, já era esperado que os estudantes do 5º ano apresentassem desenvolvimentos iniciais de raciocínio combinatório.

Nesse documento a Combinatória é tratada no bloco de conteúdos Tratamento da Informação – TI –, do segundo ciclo. É mencionado um exemplo de problema combinatório dentro das situações pertencentes às estruturas multiplicativas. Justifica-se a inserção em – TI – por se considerar a relação da Combinatória com a Estatística e a Probabilidade, conteúdos que também são sugeridos a serem introduzidos nesse nível de ensino.

Um olhar mais atento para nossa sociedade mostra a necessidade de acrescentar a esses conteúdos aqueles que permitam ao cidadão “tratar” as informações que recebe cotidianamente, aprendendo a lidar com dados estatísticos, tabelas e gráficos, a raciocinar utilizando idéias relativas à probabilidade e à combinatória. (BRASIL, 1997, p. 38)

No documento é destacado também, em concordância à perspectiva deste estudo, que nessa etapa de escolarização não se tem a pretensão de serem exploradas as definições dos termos, nem envolver as fórmulas, mas, sim, um trabalho prático com as situações-problemas (BRASIL, 1997, p. 40). Tem-se em vista, portanto, que não há a necessidade das crianças distinguirem o tipo de situação por sua nomenclatura – *arranjo*, *combinação*, *permutação* e *produto de medidas* -, mas sim, de compreender as relações implícitas para a compreensão e resolução dos problemas.

Sobre a Combinatória, ainda no documento fica explícito que distintas situações-problemas devem ser tratadas. “Relativamente à combinatória, o objetivo é levar o aluno a lidar com situações-problema que envolvam *combinações*, *arranjos*, *permutações* e, especialmente, o *princípio multiplicativo da contagem (produto de medidas)*.” (BRASIL, 1997, p. 40), não se restringindo

ao *produto de medidas* (tratado nos PCN como *princípio multiplicativo da contagem*<sup>7</sup> e, em outros textos, como *produto cartesiano*) – única situação combinatória usualmente explorada explicitamente nos anos iniciais de escolarização. No entanto, cabe ao professor se apropriar dos demais tipos de problemas e explorá-los em sala de aula, pois no PCN só é exemplificada uma situação de produto de medidas.

- Base Nacional Comum Curricular – BNCC

Mesmo sendo a proposta curricular nacional mais recente, observa-se na BNCC alguns retrocessos em relação à abordagem da Combinatória nos Anos Iniciais, a qual é abordada sem muita ênfase nos objetos de conhecimento do 4º e 5º ano na unidade temática *Números*.

Nesse documento, desconsidera-se a possibilidade de introduzir esse conteúdo em anos anteriores mesmo que possua relação com o eixo da Probabilidade, a qual na BNCC é tratada antes do 4º ano. No estudo da Probabilidade, há forte associação com o levantamento de possibilidades, realizado em problemas combinatórios. Portanto, acredita-se, para além do que indica a BNCC, que os três conteúdos (Números e Operações, Combinatória e Probabilidade) devem ser trabalhados simultaneamente.

Estudos anteriores, explorados nas seções seguintes deste capítulo, concluíram que a Combinatória pode e deve ser trabalhada desde a Educação Infantil (MATIAS; SANTOS; PESSOA, 2011; FLORENCIO; GUIMARÃES, 2017; SILVA, 2019), pois, além dos estudantes demonstrarem capacidade de solucionar situações combinatórias, o desenvolvimento desse raciocínio auxilia no desenvolvimento do pensamento hipotético-dedutivo das crianças, favorecendo na aprendizagem de outros conteúdos.

---

<sup>7</sup> O Princípio Multiplicativo da Contagem, também conhecido como Princípio Fundamental da Contagem (PFC), é entendido no presente de trabalho como um procedimento de cálculo e não um tipo de problema combinatório. Esse princípio aplica-se aos quatro tipos de problemas: *arranjo*, *combinação*, *permutação* e *produto de medidas*. (LIMA, CARVALHO, WAGNER e MORGADO, 2006, P. 125). Por exemplo, dada uma situação de *arranjo*: “Em uma corrida, 10 corredores disputam os três primeiros lugares. De quantas formas diferentes podemos obter estas colocações? Qualquer um dos corredores pode chegar em primeiro lugar e tem-se, assim, 10 possibilidades de corredores para esta colocação; para o segundo lugar haverá nove corredores, uma vez que um dos corredores já terá sido o primeiro colocado; e, para o terceiro lugar, tem-se oito corredores, uma vez que dois dos que disputam a corrida já ocupam o primeiro e segundo lugares. Neste caso, a solução poderia ser representada pelo PFC da seguinte maneira:  $10 \times 9 \times 8$ , ou seja, teríamos 720 maneiras diferentes de formação do pódio.” (LIMA, 2015)

Pela forma como são descritos na BNCC os *problemas de contagem*, se subentende que esteja-se referindo especificamente ao tipo *produto de medidas*, por definir que são agrupados os elementos de dois conjuntos, sendo produto de medidas a única situação combinatória que envolve mais de um conjunto. A indicação do trabalho exclusivo com esse tipo de problemas é reforçado também no quadro dos *objetos de conhecimento*, ao exemplificar com o seguinte problema: “*Se cada objeto de uma coleção A for combinado com todos os elementos de uma coleção B, quantos agrupamentos desse tipo podem ser formados?*” (BRASIL, 2018, p. 292). Essa é uma situação também representada nos Parâmetros Curriculares Nacionais, mas nos PCN propõe-se trabalho com os quatro tipos de problemas da Combinatória, pois cada um se constitui de diferentes propriedades que os estudantes precisam se apropriar gradativamente, conforme os avanços de cada ano escolar, o que não fica claro na BNCC.

- Parâmetros Curriculares da Educação Básica de Pernambuco – PCPE

O currículo de Pernambuco se assemelha com as propostas da BNCC sobre o ensino da Combinatória nos Anos Iniciais. É uma temática que se insere no campo: Números e Operações, no qual são trabalhadas as quatro operações, incluindo as estruturas multiplicativas, que contemplam as situações combinatórias.

Os PCPE se aproximam da perspectiva da BNCC pelo fato de apenas indicar o trabalho com a Combinatória a partir do 4º Ano, mas não fica clara a sua continuidade no 5º Ano. Fica, assim, a critério do reconhecimento do professor essa continuidade, por entender que é um conteúdo apreendido ao longo dos anos escolares e que requer o enfrentamento das diferentes situações para a melhor clareza durante o Ensino Médio no uso das fórmulas.

Os PCPE não contextualizam a ligação da Combinatória com os demais conteúdos (Probabilidade e Estatística) do ensino nos Anos Iniciais do bloco Tratamento da Informação, atualmente denominado de Educação Estatística. Porém, no corpo do texto é reconhecido que há vantagem na articulação desse bloco (Tratamento da Informação) com o campo das *operações numéricas* e com as ideias envolvidas na Combinatória (PERNAMBUCO, 2019, p. 58).

Outro aspecto percebido nesse documento estadual é a falta de referência aos diferentes tipos de situações que dão significado à Combinatória - *arranjo, combinação, permutação e produto de medidas* -, os quais só são mencionados na parte do documento referentes aos Anos Finais do Ensino Fundamental e ao Ensino Médio. Nesse sentido, os exemplos de problemas combinatórios apresentados nos PCPE referentes aos Anos Iniciais, são sempre sobre *produto de medidas*, assim como no PCN. Na maioria das vezes, o repertório das situações-problemas apresenta o mesmo contexto nos enunciados: a combinação de peças de roupas. Porém, esse não é o único contexto no qual as crianças se deparam com a necessidade de pensar diferentes combinações (possibilidades de agrupamentos) envolvendo mais de um conjunto de elementos.

### 3.2 Propostas curriculares referentes ao uso de recursos didáticos no ensino e na aprendizagem

Os três documentos discutidos nessa pesquisa – os PCN, a BNCC e os PCPE – reconhecem os recursos didáticos como aliados ao ensino e à aprendizagem. Esses documentos reforçam também, a perspectiva de que esses recursos não anulam a intervenção do professor e nem tão pouco o substituem, mas devem ser vistos como facilitadores na compreensão dos estudantes sobre conceitos trabalhados nas diversas áreas do conhecimento.

Os recursos didáticos são essenciais principalmente na introdução de conteúdos mais complexos de serem compreendidos, ressaltando que os resultados da apreensão são alcançados através da mediação de quem ensina e da ação reflexiva de quem aprende. Os instrumentos não são suficientes para proporcionar conhecimento, apenas informações, que podem proporcionar o saber a partir do planejamento didático do professor (BRASIL, 1998, p. 45; PERNAMBUCO, 2019, p. 33). Desse modo, o recurso será uma ponte a partir dos objetivos e de quem articula o que se pretende ser dialogado no processo de desenvolvimento cognitivo.

Observam-se, nos documentos curriculares analisados (PCN, PCPE e BNCC), alguns recursos como: jogos, calculadora, livros e materiais

manipuláveis. Em relação ao material audiovisual, os vídeos são os mais mencionados e quanto aos recursos das tecnologias digitais, tem-se: os computadores e os *softwares*. Segundo os PCN (Brasil, 1997) esses recursos:

[...] têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem. Contudo, eles precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão, em última instância, a base da atividade matemática. (p. 19)

Sendo assim, sobre a escolha dos recursos e principalmente de *software*, os PCN falam da necessidade do professor conhecer e explorar suas potencialidades antes de serem propostos em sala de aula. Por isso também a importância de pesquisas que analisem as possibilidades e limitações desses recursos no subsídio ao trabalho do professor. A falta de clareza quanto às potencialidades desse recurso é um dos fatores dos *softwares* serem usados de forma inadequada sem relação aos conteúdos de ensino, criando expectativas que não são atendidas ou simplesmente não serem utilizados, pela falta de segurança e domínio de quem leciona.

Os computadores, assim, são indicados como suporte, os quais podem ser manuseados coletivamente, de modo que os estudantes se ajudem durante as atividades. A proposta do uso do computador se justifica por sua forte presença na sociedade e acredita-se que com o tempo ocupará também mais espaço nas escolas de acordo com os PCN (BRASIL, 1997, p. 35).

Convém lembrar que as tecnologias digitais não anulam as já existentes. Os três documentos curriculares aqui analisados, trazem trechos que citam, tanto recursos mais antigos, como os mais atuais. São mencionados a calculadora, o material de manipulação (tratado como material manipulável no presente estudo), os jogos, o computador e os *softwares*, a depender de qual atenderá melhor aos objetivos do conteúdo a ser trabalhado.

Em concordância aos PCPE, reforça-se que as tecnologias digitais não são autossuficientes para ensinarem Matemática, ou seja, segundo esse documento, o papel do professor não diminui diante do uso dos *softwares*, mas sim, amplia o leque de possibilidades por meio de ferramentas que complementam o planejamento didático (PERNAMBUCO, 2019).

No entanto, em específico aos problemas da Combinatória, os documentos curriculares não preestabelecem relação ao uso dos recursos

tecnológicos digitais. Na BNCC e nos PCPE é recomendado o uso de imagens visuais e/ou material manipulável na estruturação dos agrupamentos de possibilidades, nos PCN não são sugeridos recursos especificamente para este conteúdo. Porém, há trabalhos científicos como o da autora Azevedo (2013) que pontua *softwares* para o trabalho combinatório, o qual será apresentado nas seções posteriores.

De modo geral, mediante as buscas sobre recursos didáticos, dos recursos utilizados neste estudo, apenas o material concreto é proposto nos documentos investigados (PCN, PCPE, BCC). Dos recursos tecnológicos digitais mencionados, não foi verificada nenhuma caracterização na perspectiva de materiais manipuláveis virtuais, pontuada por Botas e Moreira (2013) e discutida por Moyer, Bolard e Spikell (2002). Mesmo sendo as representações visuais aspectos presentes no contexto virtual, pouco são reconhecidas como um tipo de recurso manipulável, em comparação aos recursos manipuláveis concretos.

Conclui-se que não é novidade a finalidade dos recursos didáticos como contribuintes no processo de ensino e aprendizagens, dentre eles o computador e o material manipulável concreto – sejam fichas ou imagens. Esses recursos são reconhecidos como aliados à prática do professor. Tal recurso – fichas – servirá como representação simbólica das situações combinatórias durante a etapa de intervenção dos estudantes do 5º Ano do Ensino Fundamental da presente pesquisa, como também, o computador como instrumento de acesso ao material manipulável na versão virtual. No estudo serão, assim, exploradas as dificuldades e potencialidades desses recursos.

Verifica-se também, a necessidades dos professores não se limitarem às propostas curriculares aqui discutidas. O professor, enquanto pesquisador, deve se aprofundar nas discussões apresentadas nos trabalhos científicos para que levem em consideração aspectos como a importância da introdução das situações combinatórias desde os primeiros anos de escolarização.

### 3.3 Revisão sistemática

Nesta seção são apresentados os resultados do levantamento de estudos anteriores, efetuado via revisão sistemática – RS. Foi objetivo da RS identificar se há e quais são as propostas de manuseio do *software* Pixton© em trabalhos matemáticos, na intenção de identificar algum com foco nas ilustrações do *software*, considerando que, mesmo não sendo pensado para o ensino matemático o *software* pode ser articulado a essa área de ensino a partir de suas funções.

Para a realização da revisão sistemática, foram utilizados descritores que se julgava melhor descreverem o que se buscava, sendo os seguintes descritores para os trabalhos nacionais: Pixton; matemática; anos iniciais; combinatória; raciocínio combinatório; *software*; histórias em quadrinhos; ilustrações; interpretação; e resolução de problemas; material manipulável virtual; material manipulável; material concreto; e manipulativo. Por ser constatada a carência de estudos nacionais sobre o material manipulável virtual, buscaram-se também, em trabalhos internacionais, os descritores: *virtual manipulative material*; *manipulative material*; e *manipulative*.

Foram realizadas buscas dos artigos mais atuais, ou seja, dos últimos cinco anos para os repositórios de artigos e para as edições de cada evento, por considerar que o conhecimento está sempre sendo aprimorado, investigando o que já foi realizado relacionado à pesquisa da presente dissertação de mestrado. Os objetivos da revisão sistemática foram, portanto, o de levantar artigos que utilizaram o *software* Pixton© no contexto combinatório ou de outros conteúdos, e, também, investigar embasamentos teóricos da contextualização e/ou interpretação de ilustrações virtuais. Posteriormente foram acrescentadas buscas referentes ao uso de material manipulável virtual, tanto referente à Combinatória, quanto sobre outros conteúdos, no intuito de verificar o que já foi contemplado por esses estudos.

Para a RS optou-se em utilizar, como bases de busca, o Portal de Periódicos da CAPES e publicações científicas dos anais dos dois últimos eventos do Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM) e do Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM) – por

serem considerados os maiores eventos em Educação Matemática no Brasil, os quais ocorrem a cada três anos, em anos alternados. A RS foi expandida com as buscas nos anais da Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), por dispor de uma grande quantidade de trabalhos a nível internacional, voltados também, ao ensino matemático e pelo uso de materiais manipuláveis.

Foram definidos alguns critérios para a pré-seleção, a exclusão e a leitura na íntegra dos artigos encontrados, conforme atendessem, ou não, aos critérios. Foram excluídos os artigos que estavam fora do prazo determinado, artigos repetidos e os artigos que apenas mencionavam as palavras descritoras, sem uma discussão sobre o papel delas no processo de ensino e aprendizagem. Após os descritores serem identificados nos títulos dos trabalhos, como pré-seleção, foi realizada a leitura do resumo e o processo de busca dos descritores no interior de cada texto, na intenção de averiguar se havia alguma contextualização dos descritores como pretendida. Foram selecionados para a leitura completa os artigos que possuíam clara relação aos objetivos de busca.

A seguir são brevemente descritas as conclusões da revisão sistemática realizada.

- **Periódicos da CAPES**

Os únicos artigos encontrados tendo como descritor o termo Pixton são referentes à Matemática pura e fazem menção a um autor com sobrenome Pixton, ou seja, sem relação nenhuma com os objetivos do presente estudo. Sobre material manipulável também foi escassa a identificação de artigos referentes ao ensino da Combinatória. Alguns trabalhos foram localizados por trazerem os termos descritores ao longo do corpo do texto, mas foram desconsiderados por não levantarem nenhuma discussão das vertentes pretendidas no resumo e no percorrer do texto. Apenas três artigos foram selecionados para a leitura na íntegra, mas foram desconsiderados após a leitura completa por não terem ligação com o pretendido. Logo, nenhuma contribuição foi localizada no Portal de Periódicos da Capes para a presente pesquisa.

- **Anais dos artigos científicos do XI e XII Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM, 2013 e 2016)**

Dos 1543 artigos das duas edições do ENEM analisadas nenhum possui a palavra Pixton e/ou ilustrações no título. A partir de outros descritores foram pré-selecionados 21 artigos. Desses nenhum se enquadrou como suporte para o andamento da dissertação. O GeoGebra foi um dos *softwares* mais presentes nas pesquisas, mas o Pixton não apareceu nem para a finalidade que mais é utilizado, ou seja, na elaboração de Histórias em Quadrinhos (HQ).

- **Anais dos artigos científicos do VI e VII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM, 2015 e 2018)**

Em comparação ao ENEM, nesse evento o número de artigos disponíveis é mais reduzido. Na busca efetuada, apenas dois artigos foram encontrados com o termo *software* no título, mas não sendo o *software* Pixton©. Também não foi encontrado nenhum artigo referente a material manipulável.

- **Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME, 2015, 2016, 2017, 2018 e 2019)**

O descritor *virtual manipulative material*, não foi identificado em nenhum dos trabalhos publicados no período de tempo preestabelecido, e dos trabalhos localizados pelo descritor *manipulative*, não foi verificado o uso de materiais propostos neste estudo – fichas e *software*. Em alguns casos o termo – *manipulative* - não estava relacionado a recursos didáticos, a exemplo de *manipulative activities*, ou apenas foi mencionado sem nenhuma discussão que contemplasse os objetivos de busca. Logo, percebe-se que os materiais manipuláveis virtuais não têm sido discutidos nos eventos investigados na RS.

A partir das buscas realizadas, conclui-se que o *software* Pixton© ainda é pouco explorado, principalmente no âmbito da Educação Matemática. Na próxima seção são resumidos alguns artigos já realizados com o Pixton©, entretanto não sendo para o ensino da Combinatória, geralmente sendo utilizado para contextualizações matemáticas nas histórias em quadrinhos com

diferentes públicos alvo, os quais foram localizados no Google Acadêmico<sup>8</sup>. Já sobre o material manipulável concreto são descritas pesquisas em situações combinatórias, as quais estão disponibilizadas no blog GERAÇÃO<sup>9</sup> (Grupo de Estudos em Raciocínios Combinatório e Probabilístico), da UFPE, e também oriundas do contato com a autoria por e-mail. Desse modo, pela identificação de número reduzido de estudos na temática, é reforçada a importância da presente pesquisa que visa discutir a proposta do uso de material manipulável concreto e do material manipulável virtual nas ferramentas ilustrativas do *software* Pixton©.

### 3.4 Estudos anteriores

Nesta seção são abordados estudos anteriores que possuem relação com a presente pesquisa. Inicialmente, são discutidos estudos que foram realizados na Combinatória fazendo uso do material manipulável concreto nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Em seguida, é apresentado um trabalho voltado para a manipulação virtual, ainda que seja em Estatística. Será apresentada a plataforma virtual utilizada e as possíveis considerações sobre esse recurso didático enquanto material manipulável virtual.

Em continuidade, é descrito um estudo que buscou analisar as opções de *softwares* disponíveis para o ensino da Combinatória e, por fim, o estudo que deu origem a este trabalho de dissertação. As pesquisas serão apresentadas em ordem cronológica.

- Estudos sobre o uso de material manipulável concreto para aprendizagem da Combinatória

Pessoa e Santos (2015), tiveram como público alvo estudantes do 5º Ano do Ensino Fundamental, os quais foram divididos entre os que usaram apenas o lápis e papel e aqueles que utilizaram material de manipulação (chamado de material manipulável no presente estudo) - fichas correspondendo aos elementos do enunciado. Todos os estudantes

---

<sup>8</sup> Ferramenta de pesquisa disponibilizada pelo website da Google para a busca de artigos entre outros trabalhos acadêmicos.

<sup>9</sup> Link de acesso ao blog Geração - <http://geracaoufpe.blogspot.com>

participaram de pré-teste, intervenção e pós-teste de situações de *arranjo*, *combinação*, *permutação* e *produto de medidas*. A intervenção ocorreu em dois momentos, primeiro com o número de possibilidades reduzidos até 10 e depois com a grandeza numérica variando até 30.

Nos resultados quantitativos para acertos totais, o equivalente a esgotamento das possibilidades, as crianças que apenas utilizaram o lápis e papel em todos os momentos se sobressaíram sobre as que receberam intervenções com o material manipulável. Uma provável explicação para esse resultado pode ser a mesma conclusão do estudo de Azevedo (2013), ou seja, a dificuldade dos que manusearam o material pode ser devido ao fato dos estudantes precisarem ressignificar o que foi apreendido na intervenção do material manipulável para o lápis e papel no pós-teste. Isto coloca em condições diferentes comparando com os que utilizaram o mesmo instrumento da intervenção (lápis e papel) no pós-teste.

Após realizarem uma análise mais aprofundada sobre o que os estudantes passaram a considerar no pré-teste, entre os invariantes, sistematização e generalização nas respostas, foi possível perceber que mesmo sem acertos totais, alguns estudantes avançaram qualitativamente em suas respostas no pós-teste. Ressalta-se que as conclusões contempladas nesse estudo pode ser uma particularidade do perfil da turma investigada que pode se repetir com outros estudantes ou ser diferente.

Florencio e Guimarães (2017) tiveram como objetivo analisar como crianças do Grupo 5 da Educação Infantil responderiam a uma situação de *produto cartesiano* (*produto de medidas*). Foram constituídos dois grupos, um grupo que solucionou o problema com lápis e papel e outro grupo que respondeu utilizando material de manipulação que extrapolava a quantidade necessária para o levantamento de possibilidades.

Na situação problema foi questionado quais seriam as diferentes maneiras de arrumar os acessórios (gravatas e chapéus) de um palhaço a partir de um conjunto de três chapéus e outro conjunto de duas gravatas. Dentre as categorias de respostas obtidas no lápis e papel, a mais frequente foi a combinação de um elemento de um conjunto (dos chapéus) com um elemento do outro conjunto (das gravatas). Dessa forma, as crianças não repetiam nenhum dos elementos já utilizados, pois não percebiam a

possibilidade de agrupar um mesmo chapéu com uma gravata diferente. Já as crianças que manipularam o material concreto repetiram as combinações já construídas. Entretanto, as crianças não conseguiram esgotar todas as possibilidades.

A disponibilidade do material de manipulação concreta contribuiu para que as crianças demonstrassem a ideia de agrupamento da Combinatória e não se limitassem à quantidade de elementos do enunciado, como fizeram as que desenharam.

Mesmo a diferença entre os resultados dos recursos utilizados pelos dois grupos de crianças não serem muito diferentes, foram observadas estratégias diferentes nas resoluções dos grupos. Foram observadas, assim, diferenças qualitativas. As crianças que utilizaram material concreto, mesmo sem indicarem todas as possibilidades, se aproximaram mais do esgotamento das possibilidades.

No estudo de Silva e Bôas (2019) foram analisadas as contribuições de materiais manipuláveis para estudantes do Ensino Médio que ainda não tivessem estudado a Análise Combinatória nessa etapa de ensino. Participaram da pesquisa quatro estudantes com a proposta de solucionar, em conjunto, situações combinatórias em diferentes graus de dificuldades a partir dos materiais disponibilizados junto à intervenção da pesquisadora.

Foram utilizadas variedades de materiais concretos representando os elementos de cada questão, desde bonecos em miniaturas a fichas coloridas. A variedade de grandezas numéricas envolvidas nas situações teve como objetivo verificar se interferiria na escolha dos estudantes em solucionarem com o auxílio do material ou se recorreriam às operações matemáticas.

Inicialmente verificou-se que a manipulação dos materiais serviu para que os estudantes desenvolvessem compreensões acerca dos problemas combinatórios em relação à *escolha* e à *ordenação* dos elementos. Os estudantes buscaram associar as propriedades envolvidas na representação com os materiais às operações que respondessem aos problemas. Para determinadas situações envolvendo um grande valor de possibilidades, os estudantes recorreram a generalizações e às operações multiplicativas.

Mesmo com o auxílio dos materiais manipuláveis e o trabalho em coletivo, se fez necessário a mediação da pesquisadora que além de intervir

apresentou a definição do Princípio Fundamental da Contagem, relacionando as decisões tomadas nos problemas solucionados pelos participantes.

De modo geral, é visto que, o estudo aponta a eficácia do material manipulável utilizado para a compreensão da Combinatória por estudantes dos anos finais da escolarização básica que não haviam tido contato com este conteúdo. No entanto, o material foi um facilitador para a aprendizagem inicial - dos invariantes combinatórios -, mas não sendo adequado para solucionar situações com um grande número de possibilidades, por isso a necessidade dos estudantes dessa etapa de escolarização estarem familiarizados com as situações combinatórias para que seja aprofundado o uso do PFC – princípio fundamental da contagem.

Silva (2019), buscando reforçar a ideia da introdução combinatória desde a Educação Infantil, investigou o uso do material manipulável concreto e do desenho como recursos auxiliares para o desenvolvimento desse raciocínio. O estudo foi realizado com 20 crianças da Educação Infantil, as quais participaram de etapas de pesquisa semelhantes ao presente estudo.

Como primeira etapa, foi proposta a solução de um pré-teste contendo quatro situações combinatórias, uma de cada tipo – *arranjo*, *combinação*, *permutação* e *produto de medidas* – com questões adequadas para o público alvo e realizadas no lápis e papel. Em seguida, na segunda etapa, foram constituídos dois grupos para o momento de ensino, os quais foram mediados a solucionarem as situações a partir de diferentes representações, sendo o G1 – composto pelas crianças que manipularam as fichas com ilustrações dos elementos das situações e o G2 – formado pelas crianças que solucionaram as situações por meio do desenho.

Como etapa final, as crianças realizaram um pós-teste com a mesma estrutura do pré-teste, com o objetivo de analisar os possíveis avanços a partir da vivência de ensino. Os resultados mostram que os dois grupos obtiveram melhora no desempenho e que as representações utilizadas no momento de ensino foram eficazes para proporcionar aprendizados combinatórios. No entanto, percebeu-se que as crianças que solucionaram as situações por meio de fichas apresentaram um desempenho melhor do que as crianças que desenharam, pois essas últimas acabaram se cansando durante suas produções.

Mesmo com a melhora nos desempenhos, as crianças continuaram demonstrando dificuldades em relacionar o invariante de *ordenação* à situação combinatória e em contemplar o esgotamento de possibilidades. Logo, é visto a necessidade desses tipos de situações permanecerem sendo exploradas ao longo dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. O estudo de Silva (2019) se aproxima do presente estudo por considerar o recurso didático – fichas – como aliado para o ensino-aprendizagem das propriedades combinatórias. Porém, não teve como objetivo investigar o uso de uma mesma representação a partir de materiais diferentes – concreto e virtual – conforme analisado neste estudo e foi realizado com estudantes da Educação Infantil.

Nos estudos apresentados nessa seção observa-se a flexibilidade do material manipulável, o qual possibilita trabalhos que contemplam alunos da Educação Infantil, dos Anos Iniciais e Anos Finais do Ensino Fundamental, bem como do Ensino Médio. Verifica-se, também, como tem sido um aliado no trabalho de situações combinatórias. Entretanto, os instrumentos utilizados se restringiram ao material manipulável concreto, e nas pesquisas com mais de um grupo experimental foi optado pelo uso do lápis e papel como instrumento comparativo.

Acredita-se, assim, que as diferentes representações, mediante a intervenção do professor e com a continuidade de propor diferentes situações, possam contribuir para que as crianças passem a perceber como a *escolha* e a *ordenação* dos elementos leva a diferentes possibilidades. A presente pesquisa irá ater-se a duas perspectivas de materiais manipuláveis: concreto e virtual. Mediante os resultados dos grupos que manusearão fichas, concreta ou virtualmente, serão observadas as aproximações e distanciamentos com esses estudos anteriores.

- Estudo sobre material manipulável concreto e virtual

Pereira (2017) propôs, em sua pesquisa de dissertação, uma formação para licenciandos em Matemática no 3º ano do curso. Tinha-se como objetivo obter *feedback* dos participantes sobre a proposta de manuseio de material manipulável concreto, chamado de manipulação concreto, (palpável) e de manipulação virtual (visual e tátil) para o ensino de estimativa de proporção populacional, conteúdo da Estatística pouco explorado na Educação Básica, até mesmo no Ensino Médio. Apesar de ser um estudo com estudantes de uma

faixa etária distante do público alvo da presente pesquisa, se fez necessário considerá-lo por ter sido o único estudo encontrado com o uso do material manipulável virtual, para melhor entender a finalidade desse recurso.

A pesquisadora fez um levantamento sobre a disponibilidade de materiais de manipulação para o ensino da Estatística nos anais do ENEM, 2016. Observou-se que boa parte dos trabalhos que utilizaram tais recursos, incluindo os tecnológicos digitais, estiveram voltados para outros conceitos matemáticos – como a Geometria.

Sendo assim, a autora optou em utilizar um recurso elaborado pela Professora Lisbeth Cordani, constituído de duas pranchas de madeiras com diferentes quantidades de orifícios de acordo com o tamanho da amostra a ser coletada, um saquinho de tecido contendo várias bolinhas em duas cores distintas, representando os eleitores que votaram no candidato A e os eleitores que votaram no candidato B. Ao inserir a prancha no saquinho com bolinhas, o participante movimentou o recipiente fechado até serem preenchidos os orifícios da raquete, com as bolas encaixadas, representando a amostra coletada.

Como material manipulável virtual, com base em Moyer, Bolyard e Spikell (2002), foi desenvolvido um programa pela pesquisadora e acadêmicos de Ciência da Computação, de modo que atendesse à mesma lógica do material concreto. Para isso o usuário precisava preencher algumas informações sobre a situação-problema para obter o resultado.

A pesquisa se deu em quatro aulas e os materiais foram utilizados para a concretização do conteúdo estatístico abordado durante as duas primeiras aulas. Na terceira aula ocorreu a exploração do material manipulável concreto e o virtual a partir da resolução de situações. E na última aula os graduandos escreveram suas perspectivas sobre a relevância de propor o uso de material de manipulação concreta e do material virtual nas aulas de Estatística.

Pereira (2017) concluiu que, mediante a análise das respostas, obteve-se um retorno satisfatório, pois os futuros professores reconheceram que a interação com os recursos pode possibilitar aos estudantes da Educação Básica construir uma relação empírica da teoria a ser ensinada. Os licenciandos também ressaltaram que os materiais são motivadores e podem despertar o interesse dos estudantes pelo conteúdo. Desse modo, a autora

reforça a necessidade de outros pesquisadores ampliarem as possibilidades de uso de materiais de manipulação em práticas pedagógicas.

A partir do que se entende de manipulável virtual, pode-se supor que outras pesquisas podem ter sido realizadas na perspectiva da definição dos manipuláveis virtuais, mas não descreveram com essa nomenclatura e nem interpretaram com o mesmo fundamento considerado na presente pesquisa. Ressalta-se que os manipuláveis virtuais não devem ser confundidos com qualquer *software* ou plataforma digital, pois sua principal ideia é a representação visual podendo ser manipulada a exemplo do concreto, mas não da mesma forma.

- Estudo sobre o uso de *softwares* para o ensino de Combinatória

Azevedo (2013) investigou a construção de árvores de possibilidades na resolução de situações combinatórias com estudantes do 5º Ano do Ensino Fundamental. Buscando propor diferentes meios de representação para os grupos experimentais durante a intervenção, a autora verificou as análises de estudos anteriores sobre a proposta de *softwares* educativos para o ensino de Combinatória em sites governamentais da Educação.

As buscas resultaram em poucos achados sobre recursos que auxiliem no desenvolvimento deste raciocínio, além de requerer conhecimentos formais e não contemplarem as propriedades dos diferentes tipos de situações combinatórias. Desse modo, com base na explanação sobre o *software* Árbol identificada em estudos anteriores, Azevedo (2013) escolheu o Árbol por possibilitar o trabalho com os diferentes tipos de situações combinatórias.

Os 40 participantes da pesquisa foram organizados em quatro grupos: G1 (grupo experimental) – construção de árvores de possibilidades por meio do *software* Árbol; G2 (grupo experimental) – construção de árvores de possibilidades com lápis e papel; G3 (grupo controle) – resolução de situações multiplicativas; e G4 (grupo controle) – grupo controle desassistido. Inicialmente os estudantes realizaram um pré-teste com lápis e papel e, em seguida, foram distribuídos nos quatro grupos conforme as distintas formas de intervenção, mencionadas.

As intervenções foram realizadas em um encontro, sendo investigados dois meios de representação – escrita (lápis e papel) e virtual (*software*) – para

a resolução das situações do pré-teste. Por fim, todos os estudantes realizaram um pós-teste com lápis e papel.

Os resultados do pós-teste mostraram que os dois grupos experimentais avançaram significativamente em relação ao desempenho do pré-teste. No entanto, o G2 apresentou mais avanços do que o G1. A autora concluiu que mesmo os recursos testados sendo eficazes para a aprendizagem combinatória, o grupo que manteve o mesmo tipo de representação – lápis e papel – dos testes na intervenção, obteve vantagem por não precisar transformar o conhecimento apreendido em outro tipo de representação.

Desse modo, com base nos resultados obtidos no estudo de Azevedo (2013), a presente pesquisa buscou analisar se o trabalho com diferentes formas de manipulação – concreta e virtual – permite avanços mesmo sendo utilizada outra representação, lápis e papel, no pós-teste.

- Estudos sobre o Pixton© na Matemática

No que diz respeito ao uso do Pixton© na Educação Matemática, foi localizado um estudo que utilizou o *software* com enfoque para a construção de Histórias em Quadrinhos (HQ). Os resultados do Trabalho de Conclusão do Curso (TCC) de Santos, Silva e Lucena (2016) apresentam como se deu o andamento de um experimento com seis participantes, sendo três licenciandos em Matemática, dois graduados em Matemática e uma licenciada em Pedagogia. A referida TCC tinha o objetivo de analisar produções de histórias em quadrinhos (HQ), por meio do Pixton©, que contextualizassem alguma função matemática.

A vivência do experimento ocorreu em quatro horas divididas em quatro momentos, primeiramente os pesquisadores fizeram uma breve apresentação sobre a contextualização matemática, considerando os equívocos que normalmente são repercutidos, tais como, “o uso inadequado de situações do cotidiano ou mesmo irreais, como tentativa forçada de inserir a matemática” (SANTOS; SILVA; LUCENA, 2016, p.2), e superficialidades ao deter o contexto da situação às particularidades de determinada região do país. Em seguida, os participantes tiveram alguns minutos para explorar o *software* Pixton©, o qual foi escolhido por suas ferramentas facilitarem a criação de HQ em curto período de tempo e ser de fácil acesso. Como terceiro momento foi proposto

que construíssem uma HQ que contextualizasse os conceitos da função pretendida pelo grupo. No final, o grupo socializou as três HQ construídas.

Os pesquisadores analisaram o conhecimento matemático dos participantes, as contribuições do HQ para contextualizar matematicamente as funções escolhidas e como o Pixton© auxiliou como instrumento para a construção das HQ. No texto de Santos, Silva e Lucena (2016) foi analisada apenas a produção de HQ da participante que trabalhou sozinha. A participante fez uso de dois cenários disponibilizados pelo *software*, duas personagens já pré-estabelecidas e dos balões para narrar a história. No relato, implicitamente a personagem faz referência à função exponencial ao explicar como as bactérias se reproduzem.

Os autores concluíram ser possível contextualizar funções matemáticas por meio de histórias em quadrinhos. Também constataram que o experimento funcionou como feedback referente às compreensões, por quem construiu as HQ, dos conceitos matemáticos trabalhados. Dessa forma, a construção de HQ com o Pixton© alcançou dupla função: reflexão por parte dos participantes quanto às funções matemáticas trabalhadas e acompanhamento dos pesquisadores quanto às compreensões demonstradas pelos participantes.

O estudo permite constatar que o Pixton© é uma ótima opção de *software* para a elaboração de HQ devido às opções de ferramentas do *software* e à fácil familiarização de quem o manuseia. Entretanto, as escritas nos balões limitaram-se aos registros de representação matemática disponíveis no teclado do computador. Sendo assim, a autora da HQ contextualizou a definição de função exponencial sem apresentá-la no texto dos balões.

Outro estudo foi identificado como relato de experiência, tendo como proposta a contextualização de situações-problemas por meio do *software* Pixton©, sendo também, a partir das construções de HQ. Os autores Felix, Sodré, Souza, Farias, Coimbra e Rezende (2016), participantes de um grupo de Inicia o   Docência, desenvolveram um projeto visando explorar as potencialidades do HQ no ensino da Matemática.

Para isso foram vivenciados seis momentos, que envolveram 1) o mapeamento de histórias em quadrinhos já existentes que contextualizem situa es matemáticas, 2) a elabora o de problemas a partir dessas HQ, 3)

roteiro de construção de personagens, 4) roteiro de novas HQ com situações e soluções, 5) consolidação das HQ e 6) a padronização do material no Pixton®.

Mediante as experiências do projeto desenvolvido, com o objetivo de propor o recurso para os professores dos Anos Finais do Ensino Fundamental, as conclusões preliminares indicam que é possível abordar situações matemáticas por meio de HQ. Conclui-se que o *software* Pixton® foi um aliado na padronização das HQ, no que diz respeito à representação das expressões faciais e corporais dos personagens no contexto das histórias, sendo visto também, como um *software* facilitador e prático por dispensar a habilidade de desenhar, e pela facilidade em manuseá-lo na construção das HQ.

Os estudos apresentados mostram a versatilidade do *software* Pixton® para abordagens matemáticas, no entanto, é visto que seu uso esteve atrelado apenas à construção de HQ, diferente da perspectiva do presente estudo que buscou ampliar a utilização deste *software* para aprendizagens de Combinatória sem a necessidade de construção de HQ, tendo como foco as ilustrações disponibilizadas no Pixton®.

No entanto, os estudos mencionados anteriormente, serviram para reforçar que o êxito da pesquisa esteve relacionada à diversidade de comandos disponibilizados no *software*, dentre eles, os cenários, as expressões faciais e corporais para os personagens e a variedade de objetos, como também, a alteração das cores.

As funções pontuadas sobre o *software* foram suficientes para o desenvolvimento do estudo de Gadelha, Vicente e Montenegro (2017, 2018). As autoras verificaram a possibilidade de representar agrupamentos de situações combinatórias no *software* Pixton®. Estudantes de uma turma do 5º ano do Ensino Fundamental participaram de um pré-teste contendo oito situações-problemas, duas questões de cada (*arranjo*, *combinação*, *permutação* e *produto de medidas*), para que fossem selecionados, para manusearem o *software*, aqueles que demonstrassem alguma compreensão do enunciado e/ou algum raciocínio combinatório.

Quatro duplas vivenciaram a intervenção manuseando o Pixton®, solucionando as mesmas questões do pré-teste. Cada dupla teve dois momentos interventivos. No primeiro foi disponibilizado um tempo para o conhecimento do *software* e, juntamente com as pesquisadoras, foram

resolvidas quatro situações do pré-teste. No segundo momento, foi proposto que solucionassem as demais situações com mais autonomia, mas, sempre que necessário, as crianças eram levadas a refletirem sobre suas respostas, a partir de questionamentos das pesquisadoras. O trabalho coletivo muito contribuiu para que as duplas de estudantes ajudassem um ao outro a perceberem pontos desconsiderados nas construções das suas respostas iniciais. Ao final da intervenção, os estudantes participaram de um pós-teste com a mesma estrutura do pré-teste, realizado com lápis e papel.

Mediante a análise das etapas da pesquisa, observaram-se avanços quantitativos e qualitativos do pré ao pós-teste. Os estudantes demonstraram melhor compreensão do invariante de *ordenação* a partir da organização dos elementos no Pixton©, ao visualizarem que para determinadas situações a alteração da *ordenação* dos elementos importariam, ou não. Como estratégia, passaram a sistematizar suas respostas, por compreenderem que facilitaria a contemplação de todas as possibilidades. Em seguida, conferiam se cada elemento aparecia a mesma quantidade de vezes, direcionamentos que permitem o esgotamento das possibilidades da situação. Vale ressaltar que em estudos anteriores (PESSOA; BORBA, 2010; PESSOA; SANTOS, 2015) são apontados resultados diferentes desse estudo, pois os estudantes tiveram dificuldades em desenvolver a estratégia de sistematização e não tiveram grandes avanços nos diferentes tipos de situações.

O Pixton© foi tido como uma ferramenta que auxilia na compreensão da Combinatória e, para os objetivos da pesquisa, não apresentou nenhuma limitação. As representações simbólicas ampliaram-se nas soluções do pós-teste e os estudantes não se limitaram ao desenho, representação utilizada no manuseio do *software* durante as intervenções. Os estudantes passaram a utilizar mais desenhos, listagens e o quadro de possibilidades, o qual, não havia sido utilizado no pré-teste.

A presente pesquisa tem como diferencial, em relação à pesquisa de Gadelha, Vicente e Montenegro (2018), a utilização do material manipulável concreto e também do *software* Pixton© como material manipulável virtual. A presente proposta leva em consideração que nos relatos dos estudos anteriores o uso do material concreto é avaliado como útil e eficaz no ensino da Combinatória ao longo da escolarização básica e, quanto aos estudos que

utilizaram o Pixton© para diversos fins (incluindo matemáticos) é enfatizada a variedade de ferramentas na elaboração de contextualizações, o que é essencial para atender aos objetivos da presente pesquisa em criar ilustrações.

A partir dos achados na revisão da literatura será posto qual a possível contribuição da presente pesquisa em relação ao que já foi investigado por outros autores no que diz respeito à resolução de problemas combinatórios por estudantes do 5º Ano do Ensino Fundamental, através do manuseio do material concreto ou do *software* Pixton©, enquanto possibilidades de recursos didáticos para auxiliar no ensino-aprendizagem de análise Combinatória, tendo como características em comum, a ilustração e o manuseio manipulável. No próximo capítulo são postos os objetivos e método do estudo proposto.

## 4. OBJETIVOS E MÉTODO

O presente capítulo está subdividido em cinco seções, sendo a primeira a apresentação do objetivo geral e os objetivos específicos que delinearão o presente trabalho de dissertação.

Em continuidade, na Seção 4.2 é caracterizado o campo de coleta de dados e os participantes das investigações, estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental.

Na Seção 4.3 justificam-se os procedimentos utilizados nas etapas pelas quais a pesquisa esteve organizada, em consonância aos objetivos em questão.

Na Seção 4.4 são descritas detalhadamente as etapas de pesquisa – pré-teste, intervenções e pós-testes – e são apresentadas as situações-problemas que compuseram os testes, enquanto instrumento de coleta de dados, como também, como foram realizados os momentos interventivos com o aparato dos materiais manipuláveis – concreto e virtual – e a organização de cada grupo experimental e controle.

Por fim, na última seção são discutidos os critérios de análises dos dados obtidos em cada etapa, visando contemplar os objetivos traçados no presente estudo.

### 4.1 Objetivos

#### 4.1.1 Geral

Analisar o uso do material manipulável concreto e material manipulável virtual na aprendizagem de problemas combinatórios por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental.

#### 4.1.2 Específicos

- Verificar se, e como, o material manipulável concreto (fichas) e o material manipulável virtual (*software* Pixton©), podem facilitar a compreensão dos invariantes combinatórios.

- Analisar se, e como, as resoluções de problemas combinatórios com uso dos recursos (Pixton© e fichas) propostos podem auxiliar na construção de novas estratégias e representações simbólicas.
- Verificar se há avanços para cada tipo de situação combinatória, entre o pré e o pós-teste, no desempenho dos participantes.
- Comparar desempenhos, referentes à resolução dos problemas combinatórios, dos grupos experimentais (com uso de materiais manipuláveis) entre si e desses com o grupo controle (sem intervenção).

## 4.2 Método

### 4.2.1 Participantes

Participaram da pesquisa estudantes do 5º Ano do Ensino Fundamental com idades entre 9-11 anos de duas escolas da Rede Municipal do Recife. De modo, que, a quantidade de sujeitos fosse suficiente para a realização de análises estatísticas, conforme detalhado mais adiante. Optou-se, então, por uma turma da manhã em uma escola (que possuía duas turmas no mesmo turno) e uma turma no turno da tarde em outra escola, para que fosse atendido o período preestabelecido .

O interesse de investigação com os estudantes dessa etapa de escolarização se deu por acreditar que os estudantes do 5º ano já possuem maior autonomia e conhecimento básico em problemas multiplicativos, para que a partir dos recursos didáticos utilizados nos momentos interventivos avançassem em seus raciocínios combinatórios.

Após a autorização da gestão de cada escola para a realização da pesquisa, ficaram acordados, com os professores, os dias para a realização de cada etapa, de acordo com suas disponibilidades e de modo que fosse mantido um período aproximado de realização de cada etapa da pesquisa entre as escolas.

Vale ressaltar que as escolas dispuseram os equipamentos utilizados para o manuseio do *software*, tanto o notebook como o modem de acesso à internet e o mouse USB<sup>10</sup>. Além disso, cada escola cedeu uma sala para a

---

<sup>10</sup> Sigla para Universal Serial Bus, modelo de cabo conector para dispositivos eletrônicos.

realização dos momentos interventivos, de modo que os ruídos externos não interferissem no desenvolvimento das atividades.

### 4.3 Coleta de dados

Como já mencionado, a coleta de dados esteve organizada em três etapas: pré-teste, momentos de intervenções e pós-teste. O período interventivo foi o mais longo, com duração de um mês, enquanto cada teste ocorreu em um momento único. O período de realização das três etapas de pesquisa durou aproximadamente um mês e três semanas. Todos os participantes realizaram o pré e o pós-teste, no entanto, dos momentos interventivos só participaram os estudantes que compuseram os grupos experimentais, conforme apresentado mais adiante.

Essa estrutura remete ao modelo experimental, pois se acreditou que melhor atenderia aos objetivos da pesquisa. Teve-se o intuito de verificar inicialmente as compreensões combinatórias dos participantes a partir do pré-teste, seguido pela proposta de intervenção para proporcionar avanços nas compreensões sobre as situações combinatórias, e, por fim, o pós-teste com a finalidade de averiguar o quanto os grupos experimentais, em comparação ao grupo controle, foram capazes de avançar a partir do ensino proporcionado.

A seguir, serão descritas cada uma das três etapas e como se constituíram os grupos experimentais que interagiram com duas perspectivas de manipuláveis: por meio do uso de material concreto e do uso de material virtual.

## 4.4 Etapas de pesquisa

### 4.4.1 Pré-teste

Os testes foram estruturados em oito situações combinatórias, duas de cada tipo de problema – *arranjo*, *combinação*, *permutação* e *produto de medidas* –, variando de quatro a 12 possibilidades como resposta. As situações foram solucionadas individualmente com lápis e papel sem o auxílio de outros

recursos didáticos. Após a entrega dos testes aos estudantes, os enunciados das questões foram lidos coletivamente pela pesquisadora.

No Quadro 2 são apresentadas as situações combinatórias propostas (também apresentadas no Apêndice A) no pré-teste, e o resultado de cada questão. Tais problemas também foram utilizados durante os momentos interventivos.

Quadro 2: Situações-problema do pré-teste, por tipo de situação, e total de possibilidades.

<b>CC</b>	<b>Situação-problema</b>	<b>T</b>
<b>A</b>	Três amigos (Beto, Liz e Chico) apostaram corrida na praia de Boa Viagem. De quantas maneiras diferentes se pode ter o primeiro e o segundo lugares?	06
<b>C</b>	D. Marta levou seus quatro filhos (Bianca, Sabrina, Diego e Felipe) ao parque e no brinquedo pula-pula só podem entrar três crianças por vez. De quantas maneiras diferentes três crianças brincarão por vez no pula-pula?	04
<b>P</b>	Três irmãos (Igor, Léo e Tina) querem se sentar nos três últimos lugares disponíveis no cinema. De quantas maneiras diferentes os três irmãos podem se sentar nos lugares disponíveis?	06
<b>PM</b>	Na loja Quero Mais estão disponíveis três tipos de botas (marrom, preta e vinho) e dois tipos de gorros (cinza e rosa). De quantas maneiras diferentes pode-se comprar uma bota e um gorro?	06
<b>A</b>	Há quatro alunos (César, Lay, Bete e Luan) concorrendo ao cargo de representante e vice representante. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos um representante e um vice representante?	12
<b>C</b>	Na barraca Espaço Drinks há cinco frutas (acerola, caju, laranja, limão e maracujá) e os sucos são preparados misturando duas das frutas. De quantas maneiras diferentes os sucos podem ser preparados com duas frutas?	10
<b>P</b>	Na prateleira da casa de Edson estão três objetos (uma bola de futebol, um troféu e uma bola de basquete). De quantas maneiras diferentes ele pode colocar os três objetos lado a lado na prateleira?	06
<b>PM</b>	Na lanchonete Oba-oba há quatro sabores de suco (graviola, laranja, morango e uva) os quais são servidos em copos de três tamanhos (pequeno, médio e grande). De quantas maneiras diferentes pode-se tomar um suco de um sabor em um tamanho de copo?	12

CC » Classificação do Problema Combinatório; T » Total de possibilidades; A » Arranjo; C » Combinação; P » Permutação; PM » Produto de Medidas

Fonte: A autora, 2019

Na organização dos testes foram levados em consideração os resultados de alguns estudos anteriores – Pessoa e Borba (2010) e Gadelha, Vicente e Montenegro (2018) –, os quais, concluíram que os estudantes

apresentam mais familiaridade em solucionar problemas de *produto de medidas*, em relação aos demais tipos. Sendo assim, cada questão de *produto de medidas* foi deixada por último para que o cansaço não interferisse na resolução dos problemas considerados mais complexos. As situações de *permutação* foram as penúltimas por envolverem um número reduzido de possibilidades. Enquanto os problemas de *arranjo* e de *combinação* foram as questões iniciais. Desse modo, os testes ficaram estruturados da seguinte forma, na primeira página, uma situação de cada tipo, seguindo o critério estabelecido – *arranjo, combinação, permutação e produto de medidas* –, com o menor número de possibilidades. E na segunda página, as demais questões na mesma ordem e com o total de possibilidades maior.

A grandeza numérica foi definida até 12 possibilidades, com o intuito de que fosse entendido pelos participantes a diferenciação das propriedades de *ordenação* e de *escolha* entre os problemas, sem tornar cansativo o esgotamento das possibilidades.

A elaboração dos enunciados seguiu uma mesma lógica: no início da questão é apresentado o contexto do problema e os elementos a serem combinados e no final é questionada a quantidade de possibilidades. Os mesmos testes (pré e pós) foram utilizados no estudo piloto e ajustados como instrumento de coleta de dados para o estudo efetivo.

Entre cada problema dos testes foi deixado um espaço para que os estudantes construíssem suas soluções, como também um espaço para definirem suas respostas. Esse modelo de organização se fez necessário para identificar se o participante sentia dificuldade de distinguir o número de agrupamentos do número de elementos utilizados, ou caso a representação não estivesse clara o suficiente para o pesquisador compreender os agrupamentos e subconjuntos formados.

De acordo com os resultados do pré-teste, foram selecionados os 36 estudantes e divididos por turma (18 estudantes de cada escola), compondo os três grupos da pesquisa (seis estudantes de cada escola em cada grupo), GE1 – grupo experimental para o manuseio das fichas; GE2 – grupo experimental para a manipulação do *software* Pixton©; e o GC – grupo controle que não participou de nenhuma das intervenções. Os estudantes foram emparelhados

em duplas com médias próximas, sem diferença significativa, conforme apresentado no capítulo de análises dos resultados.

#### 4.4.2 Intervenções

A intervenção teve início um mês após a realização do pré-teste. Durante esse tempo foi realizada uma análise do pré-teste para que fossem escolhidos e agrupados os alunos em cada grupo, de modo que os grupos partissem de médias de desempenho próximas. Os momentos interventivos ocorreram em três dias da semana com duração de aproximadamente uma hora e meia por dia para cada dupla, sendo realizada com duas duplas por turno durante um mês. Vale ressaltar que a finalidade do pré-teste foi a de averiguar a compreensão inicial de cada estudante, portanto, o tempo para o início da intervenção não influenciaria nos resultados posteriores.

Os dias e horários das intervenções foram definidos em acordo com a gestão escolar e os professores das duas turmas, de modo que cada dupla vivenciasse os dois momentos de intervenção em um mesmo intervalo de tempo e sem atrapalhar a dinâmica do professor.

Durante as intervenções foram solucionadas as mesmas situações do pré-teste – com cada dupla –, no entanto, com a mediação da pesquisadora e com o auxílio de recursos didáticos. Dos dois grupos experimentais, um grupo utilizou fichas – manipulável concreto – com ilustrações dos objetos/personagens mencionados nos enunciados dos problemas – e o outro grupo manuseou o *software* Pixton© – recurso adotado como material manipulável virtual, o qual dispõe de ilustrações virtuais (objetos e personagens).

Um terceiro grupo, constituído pela mesma quantidade de estudantes e com média próxima ao dos demais grupos no pré-teste, foi formado para compor o grupo controle, os quais não vivenciaram nenhum tipo de intervenção, apenas realizaram os testes para servir como parâmetros comparativos sobre os demais grupos, os experimentais.

Para definir os estudantes de cada grupo, as respostas do pré-teste foram categorizadas e pontuadas, sendo realizada também, uma breve análise qualitativa das respostas, de maneira que cada grupo apresentasse uma média similar em termos de pontuação e de compreensão sobre os problemas, conforme demonstrado no próximo capítulo.

A partir de análises quanti e qualitativa, foram escolhidos participantes que demonstraram, ou não, alguma compreensão dos problemas, sendo mantido o equilíbrio entre as médias dos grupos. A participação dos estudantes que não apresentaram raciocínio combinatório no pré-teste foi decorrente de se acreditar que os momentos interventivos propiciariam avanços para todos os envolvidos, tendo em vista que a interferência da pesquisadora buscou contemplar as necessidades de cada um, além do trabalho em pares ter sido um fator contribuinte.

- Fichas

Para cada elemento nos enunciados das questões do pré-teste, foram confeccionadas 12 fichas, somando um total de 408 fichas, de modo que extrapolassem a quantidade necessária para representar as possibilidades solicitadas nos problemas. Esse critério foi considerado para que os estudantes não fossem induzidos ao resultado a partir da quantidade de fichas fornecidas, mas que buscassem compreender as propriedades do problema.

As figuras relacionadas ao enunciado de cada questão foram impressas em papel fotográfico e fixadas no emborrachado com velcro colado no avesso, formando as fichas. Como suporte, foi utilizada uma folha de emborrachado coberta por feltro – sem ser definido com o velcro o modo de organização das fichas para não induzir ao formato de listagem – de modo que as fichas não se desorganizassem facilmente.

Cada dupla participou de dois momentos interventivos em dois dias distintos. Buscou-se manter um mesmo período de tempo entre o pré e o pós-teste para que nenhuma dupla se sobressaísse com vantagem.

No primeiro dia ocorreu o contato inicial com o material disponibilizado – concreto ou virtual, cujo grupo a dupla pertencesse. Para esse momento foi solucionado um problema de cada situação – *arranjo, combinação, permutação e produto de medidas* – do pré-teste. A princípio, a interferência da pesquisadora se deu de modo mais ativa para que os estudantes entendessem a dinâmica de representar as distintas possibilidades por meio das fichas e se atentassem aos invariantes – *escolha, ordenação e esgotamento das possibilidades*.

Desse modo, eram feitos alguns questionamentos para que a dupla refletisse durante a construção de suas respostas. Para a percepção da

*escolha* de elementos eram solicitados a mencionarem um exemplo de resposta/possibilidade. Caso fossem inseridos elementos com menos ou além do necessário, a dupla deveria reler o enunciado e explicar o que pedia a questão. Para perceberem a relação do invariante de *ordenação*, era posto um exemplo dos elementos intercalados em posições diferentes das já construídas e questionados se seria igual ou diferente das outras possibilidades. Tal reflexão também contribuiu para que fosse contemplado o esgotamento das possibilidades, além de precisarem justificar como tinham a certeza de que não havia outras possibilidades a serem construídas.

No segundo momento de intervenção foi concedida mais autonomia para que as duplas solucionassem os demais problemas do pré-teste. No entanto, sempre que necessário eram confrontados e interrogados pela pesquisadora sobre suas soluções para o acompanhamento de seus raciocínios e/ou para que refletissem sobre suas respostas. Vale ressaltar que as perguntas realizadas pela pesquisadora não foram pré-definidas, sendo traçadas a partir da condição apresentada pelos estudantes, as quais são detalhadas no capítulo seguinte.

Durante as intervenções foram realizadas observações dos avanços e dificuldades individuais e registros escritos e fotográficos daquilo que foi denotado como relevante para as análises posteriores, tais como as etapas de levantamento de possibilidades pelas duplas de estudantes.

- *Software Pixton*©

No cabeçalho do pré-teste, além dos participantes se identificarem e informarem sua idade, também foram questionados sobre seus usos do computador ou notebook. Esse questionamento foi pensado com o intuito de auxiliar na definição das duplas que manuseariam o material manipulável virtual, de modo que, pelo menos um participante de cada dupla soubesse ao menos manejar o *mouse USB*.

A mediação da pesquisadora procedeu de modo semelhante à intervenção com as fichas. Foi necessário, porém, um pouco mais de tempo para ser apresentado o *software* à dupla e concedido um espaço de tempo para que interagissem livremente, de modo que os participantes entendessem e conseguissem dar continuidade à utilização do recurso. Logo após, foi

proposto que solucionassem as quatro primeiras situações do pré-teste, uma de cada tipo – *arranjo, combinação, permutação e produto de medidas*.

No segundo momento, em outro dia, os participantes deram continuidade solucionando os demais problemas com a mediação da pesquisadora que interferiu sempre que necessário, além de realizar anotações sobre os avanços e/ou limitações identificados.

A mediação, nos dois grupos experimentais, teve como objetivo que os estudantes compreendessem os invariantes combinatórios, sem a necessidade de utilizar as definições dessas relações e propriedades. Mesmo não tendo sido trabalhada a sistematização das respostas, o esperado ao longo das intervenções nos dois grupos experimentais e no pós-teste foi que os participantes desses grupos passassem a usar estratégias de esgotamento das possibilidades conforme se apropriassem dos invariantes combinatórios.

#### 4.4.3 Pós-teste

O pós-teste foi realizado com todos os estudantes das duas turmas cinco dias após a finalização da intervenção. As situações do pós-teste seguiram a mesma organização do pré-teste, contendo entre 4 a 12 possibilidades e duas questões de cada tipo – *arranjo, combinação, permutação e produto de medidas*.

Essa proposta foi para não criar um impacto inicial com a quantidade de possibilidades, sendo o número de possibilidades proposto nas situações-problemas deste estudo suficiente para ser possível esgotar todas as possibilidades, ao serem percebidas as relações combinatórias de cada situação.

No Quadro 3 são explicitadas as oito situações-problema do pós-teste (também apresentadas no Apêndice B), na mesma organização do pré-teste, e o resultado de cada problema.

Quadro 3: Situações-problema do pós-teste, por tipo de situação, e total de possibilidades

<b>CC</b>	<b>Situação-problema</b>	<b>T</b>
<b>A</b>	Em um estacionamento chegaram três carros (prata, vermelho e branco), porém apenas dois poderão estacionar. De quantas maneiras diferentes as duas vagas poderão ser preenchidas?	06
<b>C</b>	Na sorveteria Julieta's dos sabores de sorvete se tem as quatro opções: amendoim, cajá, coco e morango. De quantas maneiras se poderá escolher três bolas de sorvetes de diferentes sabores?	04
<b>P</b>	No porta-escova de dentes da Suzy, há suporte para até três escovas de dentes (vermelha, azul e lilás). De quantas maneiras diferentes Suzy pode organizar as escovas de dentes?	06
<b>PM</b>	Em um final de semana, Luiza foi para casa de sua tia e em sua mochila levou suas três blusas (branca, cinza e rosa) e dois shorts (preto e azul). De quantas maneiras diferentes Luiza poderá se vestir com uma blusa e um short?	06
<b>A</b>	Em um bingo quatro pessoas (Juca, Rita, Lena e Carol) empataram prestes a vencer, porém apenas os dois primeiros colocados receberão os brindes. De quantas maneiras diferentes podemos ter o primeiro e segundo lugar?	12
<b>C</b>	Para brincar no carrinho bate-bate, quatro amigos (Liz, Joel, Edu e Ana) precisarão se organizar de modo que cada um forme diferentes duplas para cada rodada. De quantas maneiras poderão se organizar as diferentes duplas?	06
<b>P</b>	Na recepção de uma festa há uma mesa com três cadeiras disponíveis. De quantas maneiras esses lugares poderão ser ocupados pelo avô, avó e seu neto?	06
<b>PM</b>	Pati ganhou três vestidos (azul, roxo e bege), e três tipos de calçados (sandália, sapato e bota). De quantas maneiras diferentes ela poderá se arrumar com um vestido e um calçado?	09

CC » Classificação do Problema Combinatório; T » Total de possibilidades; A » Arranjo; C » Combinação; P » Permutação; PM » Produto de Medidas.

Fonte: A autora, 2019

Assim como o pré, o pós-teste também foi realizado individualmente com lápis e papel, sem o auxílio dos recursos didáticos das intervenções. Desse modo, foi mantida a mesma representação na realização dos testes, diferente da representação manuseada nas intervenções. Logo, todos os participantes dos grupos experimentais precisaram ressignificar suas compreensões ao solucionar os problemas com o lápis e papel.

A seguir, é descrito a maneira pela qual os dados obtidos em cada parte do estudo – pré-teste, momentos interventivos e pós-teste – foram analisados, em resposta aos objetivos do estudo.

#### 4.5 Proposta de análise de dados

Os dados coletados durante todo o processo da pesquisa foram analisados quantitativamente e qualitativamente conforme seu caráter de investigação que esteve para além das pontuações classificatórias dos testes.

Inicialmente, as respostas obtidas no pré-teste foram classificadas e pontuadas em incorretas, em diferentes níveis de acertos parciais, conforme as compreensões sobre os invariantes combinatórios – *escolha* e *ordenação* para o *esgotamento das possibilidades* –, e em acertos totais. Os níveis de compreensão foram estabelecidos a partir dos resultados de estudos anteriores que verificaram ser mais fácil *escolher* elementos corretamente do que *ordenar*, ou não, conforme o tipo de situação e *esgotar as possibilidades* das situações combinatórias. Desse modo, as análises não se detiveram à quantidade de possibilidades construídas, mas, sim, à compreensão implícita em cada situação-problema.

Os dados de cada estudante do pré-teste foram organizados no banco de dados do *software* SPSS - *Statistical Package for the Social Sciences*, por meio do qual, inicialmente, foi verificado não haver diferença significativa entre as médias dos grupos – experimentais e controle –, a partir de análises inferenciais pela Anova (Análise de Variância). Desse modo, foram constituídos grupos que partiram de uma mesma condição e puderam ser equiparados ao longo das etapas de pesquisa.

Ressalta-se que este estudo não teve como objetivo analisar os grupos por escola nem por cada dupla isoladamente, mas, sim, conforme o recurso didático utilizado. Ao longo das análises de cada etapa de pesquisa, os estudantes foram investigados a partir do grupo pertencente – GE1 (fichas), GE2 (*software*) ou GC (controle) – e os estudantes não emparelhados não

foram considerados por não terem alcançado pontuações suficientes para o emparelhamento ou por terem se sobressaído sobre os demais.

Como etapa decorrente ao pré-teste, os momentos interventivos foram analisados a partir das observações e anotações realizadas pela pesquisadora, considerando frases chaves do diálogo dos estudantes em relação a suas percepções e dificuldades sobre os invariantes combinatórios. As intervenções também foram analisadas por meio de registros fotográficos no manuseio das fichas e pelas construções salvas no *software* utilizado pelos participantes. Essa etapa de pesquisa foi de cunho qualitativo, não havendo o estabelecimento de pontuações.

No pós-teste, as análises foram de natureza quanti-qualitativa, ao serem verificados os avanços do desempenho de cada grupo, a partir das médias e porcentagens de respostas incorretas e de acertos, além das análises descritivas sobre as compreensões dos invariantes combinatórios, bem como a ampliação de representações simbólicas e as estratégias utilizadas para se buscar o esgotamento das possibilidades. A porcentagem de representações simbólicas foi analisada de acordo com os erros e acertos, através do SPSS.

Por fim, foi realizado um levantamento estatístico por meio do *software* (SPSS) para verificar se houve avanços significativos entre o pré e pós-teste (comparando os grupos experimentais entre si e com o grupo controle), como também foi analisado o desempenho nas diferentes situações combinatórias.

Portanto, comparou-se o que os participantes demonstravam compreender no pré-teste com o que foi apreendido ao longo das intervenções e o que passaram a sinalizar no pós-teste.

De maneira geral, as compreensões combinatórias em cada situação-problema (do pré e do pós-teste) nas etapas de pesquisa – pré-teste, intervenções e pós-teste - foram analisadas à luz da Teoria dos Campos Conceituais, ao serem consideradas as três dimensões – situações (*S*), invariantes (*I*) e representações simbólicas (*R*) –, propostas por Vergnaud (1996) como processo de desenvolvimento conceitual, bem como, dos autores citados na revisão da literatura (AZEVEDO, 2013; PESSOA; SANTOS, 2015; FELIX; SODRÉ; SOUZA; FARIAS; COIMBRA; REZENDE, 2016; SANTOS; SILVA; LUCENA, 2016; FLORENCIO; GUIMARÃES, 2017; PEREIRA, 2017;

GADELHA; VICENTE; MONTENEGRO, 2018; SILVA; BÔAS, 2019; SILVA, 2019).

A partir dos procedimentos de análises aqui destacados, no próximo capítulo são apresentados e discutidos os resultados decorrentes desta pesquisa.

## 5. APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DE RESULTADOS

Neste capítulo, são apresentados resultados obtidos no pré e pós-testes solucionados pelos 36 participantes da pesquisa, bem como dados das intervenções (sessões de ensino) realizadas junto às crianças participantes. São discutidos dados quantitativos por meio de análises no *software Statistical Package for the Social Sciences* (SPSS), além de análises qualitativas a partir das soluções apresentadas das situações propostas. Sobre os invariantes combinatórios – *escolha e ordenação de elementos*, de acordo com o tipo de problema, e o *esgotamento de possibilidades* – foram verificadas as compreensões iniciais e finais nos testes e durante as intervenções, considerando o auxílio dos recursos didáticos utilizados e a mediação ocorrida junto aos grupos experimentais.

O presente capítulo apresenta cinco seções. Na primeira seção, são apresentadas e discutidas as análises estatísticas dos resultados do pré-teste por tipo de problema e o conhecimento inicial implícito nas resoluções dos estudantes do 5º ano. Na seção seguinte, conforme os resultados do pré-teste, é descrito como se deu o emparelhamento das duplas que constituíram os grupos GE1 e GE2 – grupo experimental que manipulou as fichas e o grupo experimental que manuseou o *software*, respectivamente – e o GC – grupo controle desassistido, como também, são retratadas as dificuldades e os avanços identificados ao longo das intervenções. Na terceira seção, são comparados os resultados do pós-teste com os do pré-teste, por tipo de problema (situação combinatória), tendo como objetivo verificar se houve progresso significativo dos estudantes que participaram das intervenções, no que diz respeito aos invariantes das distintas situações, como também, averiguar se o grupo controle permaneceu com o desempenho semelhante ao inicial. Na penúltima seção, com um olhar mais qualitativo, são destacados os níveis gradativos de respostas observadas no pré e no pós-teste. E, por fim, na última seção apresenta-se a classificação de representações simbólicas utilizadas no pré e no pós-teste e sua relação com os resultados por tipo de resposta.

As análises quantitativas e qualitativas realizadas nesta pesquisa tiveram como fundamento os aspectos destacados por Vergnaud (1996) em sua Teoria dos Campos Conceituais sobre o processo de construção de

conceitos. Desse modo, foi considerada a relevância de solucionar os diferentes tipos de situações combinatórias – *arranjo*, *combinação*, *permutação* e *produto de medidas* – como elemento para dar sentido ao conceito, além das compreensões apreendidas sobre as particularidades de cada tipo de situação – os invariantes – como singularidade de cada uma, e as representações simbólicas utilizadas no registro das soluções e dos resultados. Dessa forma, os domínios dos elementos do tripé (*S*, *I* e *R*) foram considerados como principais fatores para um melhor desempenho na Combinatória, em consonância ao processo de conceitualização.

As respostas dos testes foram classificadas e pontuadas conforme apresentadas no Quadro 4.

Quadro 4: Classificação e pontuação por tipo de resposta

<b>Classificação</b>	<b>Tipo de resposta</b>	<b>Pontuação</b>
<b>Incorreta</b>	Escolha incorreta; ordenação incorreta; sem esgotamento das possibilidades.	0
<b>Acerto parcial I</b>	Escolha adequada, mas limita-se a uma possibilidade.	1
<b>Acerto parcial II</b>	Escolha adequada, mas apresenta número de possibilidades limitado ao número de elementos.	2
<b>Acerto parcial III</b>	Escolha adequada, ordenação incorreta.	3
<b>Acerto parcial IV</b>	Escolha correta ou adequada e ordenação correta, esgotamento das possibilidades incorreto.	4
<b>Acerto total</b>	Escolha correta, ordenação correta e esgotamento das possibilidades.	5

Fonte: A autora, 2019

Observa-se, então, que as respostas foram classificadas como incorreta, sem relação com a Combinatória, e em diferentes níveis de acertos parciais, de

acordo com a etapa de compreensão explícita, sobre os invariantes combinatórios (*escolha e/ou ordenação e/ou esgotamento de possibilidades*), e acertos totais para os casos de relação correta dos invariantes combinatórios no tipo de situação.

Chama-se de escolha adequada, nesta classificação de respostas, os casos em que mesmo o número de elementos agrupados estando de acordo com o enunciado não há exatidão no total de possibilidades.

Nas respostas limitadas a uma possibilidade (*acerto parcial I*), um ou mais elementos não são agrupados, logo, a escolha não está totalmente correta. Por exemplo, dado um problema no qual quatro crianças – (Ana, Bia, Mel e Léo) – precisarão ser organizadas para brincar na cama elástica, sendo três crianças por vez, apresentar um trio (Ana, Mel e Léo) como resposta, é considerada uma *escolha* adequada por terem sido agrupadas três das quatro crianças, conforme solicitado no enunciado. No entanto, a *escolha* não é tida como correta por desconsiderar outras possibilidades de *escolha* que deveriam ser apresentadas. Nesse caso, também, o esgotamento de possibilidades é tido como ‘incorreto’, pois o número de possibilidades apresentadas é inferior ao número total, logo, não há o esgotamento. Para que fossem tidos como corretos, seria preciso considerar as demais possibilidades – (Ana, Bia e Mel); (Ana, Bia e Léo) e (Bia, Mel e Léo).

O mesmo ocorre quando as possibilidades são limitadas ao número de elementos (*acerto parcial II*), no qual um ou mais elementos sobra porque não são construídas todas as possibilidades, ou a *escolha* deixa de ser considerada no reagrupamento de um mesmo elemento com um outro. Em relação ao primeiro caso, geralmente ocorre quando é tido um número ímpar de elementos. Por exemplo, quando questionado os nomes que poderão ser dados a duas irmãs a partir de cinco opções – (Ana, Mel, Nai, Lia e Ula) – são agrupados pares (Ana e Mel) e (Nai e Lia) sem serem intercalados – (Ana e Nai); (Ana e Lia); (Ana e Ula); (Mel e Nai); (Mel e Lia); (Mel e Ula); (Nai e Ula) e (Lia e Ula). Logo, restará um personagem (nesse caso, Ula). Sendo assim, a *escolha* das duas possibilidades, dentre as 10 no total, é tida apenas como adequada, mas não é tido *acerto total* devido as possibilidades não terem sido esgotadas. O segundo caso, pode ser observado quando solicitadas as diferentes maneiras de quatro amigos – (Ana, Bia, Mel e Léo) se

cumprimentarem com um aperto de mão. Cada personagem ser agrupado numa única maneira (Ana e Bia) e (Mel e Léo) não responde ao problema, tendo em vista que, Ana também pode cumprimentar Mel ou Léo e assim sucessivamente. Logo, as demais escolhas deixam de ser contempladas – (Ana e Mel); (Ana e Léo); (Bia e Mel) e (Bia e Léo) – embora o invariante *escolha* é tido como adequado.

É considerada *escolha* adequada, também, nos casos em que se extrapola o total de possibilidades e são feitas escolhas além das necessárias (*acerto parcial III*). Isso ocorre nas situações em que a *ordenação* está incorreta por não ser necessário reagrupar os elementos em posições diferentes. Por exemplo, para o preparo de uma salada de frutas com duas frutas dentre três opções (abacaxi, banana e maçã), as possibilidades são: (abacaxi e banana); (abacaxi e maçã); (banana e maçã). Variar a *ordenação* dos elementos não é necessário, embora a *escolha* seja adequada, pois o número de elementos em cada agrupamento está certo, mas as possibilidades a mais são desnecessárias. Nesse sentido, o esgotamento de possibilidades excede o número total de possibilidades.

Portanto, entende-se como ordenação incorreta, as respostas com possibilidades repetidas. Seja por repetir a mesma sequência dos elementos ou por não perceber que a variação na colocação dos elementos não leva a possibilidades distintas. Fazendo uso de um problema já mencionado, no qual é tido que quatro crianças – (Ana, Bia, Mel e Léo) – precisarão ser organizadas para brincar na cama elástica, sendo três crianças por vez, pode ocorrer de o estudante responder: (Ana, Bia, Mel); (*Bia, Mel e Léo*); (Ana, Mel e Léo) e (*Bia, Mel e Léo*). Observa-se que as possibilidades em destaque são iguais. Esse erro pode ser mais presente nos problemas que envolvem um número maior de possibilidades e a resposta não esteja sistematizada, aumentando a dificuldade de o estudante visualizar todas as possibilidades sem repeti-las. Para o citado problema, a resposta correta seria: (Ana, Bia, Mel); (Ana, Bia e Léo); (Bia, Mel e Léo) e (Mel, Léo e Ana), ou seja, quatro possibilidades. Desse modo, qualquer possibilidade construída a mais, intercalando a colocação dos elementos – (*Ana, Mel e Bia*); (*Ana, Mel e Léo*); (*Ana, Léo e Bia*); (*Ana, Léo e Mel*); (*Bia, Ana e Mel*); (*Bia, Ana e Léo*); (*Bia, Mel e Ana*); (*Bia, Léo e Ana*); (*Bia, Léo e Mel*); (*Mel, Ana e Bia*); (*Mel, Ana e Léo*); (*Mel, Bia e Ana*); (*Mel, Bia*

e Léo); (Mel, Léo e Bia); (Léo, Ana e Bia); (Léo, Ana e Mel); (Léo, Bia e Ana); (Léo, Bia e Mel); (Léo, Mel e Ana); (Léo, Mel e Bia) –, estará replicando as possibilidades anteriores.

Ainda sobre o esgotamento de possibilidades incorreto, essa condição também foi atribuída às respostas (em números ou por extenso) que não estejam de acordo com o valor total de possibilidades (*acerto parcial IV*). Assim, ainda que a *escolha* e a *ordenação* estejam corretas, se o total de possibilidades é atribuído ao número de elementos agrupados, o esgotamento de possibilidades é tido como incorreto. Portanto, ainda que o estudante apresente as quatro possibilidades de como organizar três dentre quatro crianças na cama elástica, pode ocorrer de responder: 12 maneiras diferentes. Isso porque não distingue o número de possibilidades da quantidade de elementos envolvidos – (Ana, Bia, Mel); (Ana, Bia e Léo); (Bia, Mel e Léo) e (Mel, Léo e Ana), quatro possibilidades são confundidas com 12 elementos.

Sendo assim, percebe-se que os invariantes combinatórios – *escolha*, *ordenação* e o *esgotamento de possibilidades* – precisam ser contemplados simultaneamente para que seja obtido *acerto total*.

Acredita-se, conforme evidenciado por Borba (2016), que os estudantes em início de escolarização, mesmo sem o conhecimento formal de Combinatória, tenham mais facilidade em fazer a *escolha* correta dos elementos do que associar a *ordenação* ao tipo de problema e tenham maior dificuldade no *esgotamento* das possibilidades. Sendo assim, a classificação de respostas desta pesquisa foi pontuada hierarquicamente de zero a cinco, de acordo com os acertos relativos aos invariantes combinatórios.

Na próxima seção, é tido um panorama diagnóstico inicial dos grupos experimentais e do grupo controle, com o objetivo de averiguar suas compreensões iniciais sobre os diferentes tipos de situações combinatórias.

### 5.1 Análises do pré-teste

Os dados obtidos no pré-teste foram apresentados a partir do emparelhamento dos grupos experimentais e do grupo controle. Portanto, faz-se necessário apresentar inicialmente como se deu a formação dos grupos.

Foram organizados três grupos com 12 estudantes cada, como é possível visualizar na Tabela 1, sendo dois grupos experimentais e um grupo controle o qual não participou de momentos interventivos.

Tabela 1: Emparelhamento das duplas dos grupos experimentais e controle (com indicação da pontuação de cada estudante)

<b>Grupo / Recurso didático</b>	<b>Pontuação das duplas</b>		<b>Média</b>
<b>GE1 (FICHAS)</b>	1 + 0	6 + 3	<b>4,3</b>
	3 + 0	9 + 7	
	5 + 0	18 + 0	
<b>GE2 (SOFTWARE)</b>	0 + 4	3 + 2	<b>6,2</b>
	9 + 0	9 + 5	
	0 + 15	26 + 2	
<b>GC (CONTROLE)</b>	0 + 4	0 + 26	<b>4,0</b>
	0 + 2	2 + 6	
	1 + 2	4 + 1	

GE1: Grupo Experimental 1; GE2: Grupo Experimental 2; GC: Grupo Controle.

Fonte: A autora, 2019

Os estudantes foram emparelhados em duplas de acordo com as pontuações no pré-teste de modo que os grupos fossem formados por uma média aproximada. A partir da realização de uma análise de variância (ANOVA) sendo,  $(F(2,35) = ,382; p = ,685)$ , verificou-se que não houve no pré-teste diferença significativa entre as médias dos três grupos – fichas, *software* e controle. Visto que, para GE1xGC:  $(F(2,35) = ,382; p = ,992)$ , para GE2xGC:  $(F(2,35) = ,382; p = ,699)$  e entre os grupos experimentais, GE1xGE2:  $(F(2,35) = ,382; p = ,771)$ . Portanto, no geral, nenhum grupo iniciou com desvantagem e a definição do recurso utilizado por cada grupo nas intervenções pôde ser aleatória.

O pré-teste serviu como sondagem das compreensões dos estudantes sobre as situações combinatórias. Em cada teste podia ser obtido até 40 pontos, de acordo com o quadro de classificação das respostas, uma vez que havia oito questões e a pontuação máxima em cada era de cinco pontos. Após a correção, as respostas foram transformadas em porcentagens por tipo de situação para uma melhor visualização do desempenho inicial dos grupos.

Observa-se, nos três grupos, que as frequências percentuais de acerto foram muito baixas, como também outros níveis de compreensão mais elaborados. Foram baixos os quantitativos de *acertos parciais* e *acerto total*, nos quais a compreensão dos invariantes de *escolha*, *de ordenação* e o *esgotamento de possibilidades* passam a ser melhor evidenciados. Esses foram pouco contemplados pelos três grupos no pré-teste, sendo bem mais frequentes as respostas incorretas. Tais resultados também foram observados nos estudos de Pessoa e Santos (2015) e Gadelha, Vicente e Montenegro (2018), ao verificarem que os estudantes desse nível de escolarização, apresentaram algumas dificuldades em solucionar situações combinatórias no pré-teste.

O índice de respostas classificadas como incorretas foi bastante elevado, nos três grupos, nas diferentes situações – *arranjo*, *combinação*, *permutação* e *produto de medidas*. No entanto, é possível notar que a dificuldade foi um pouco maior em *arranjo*. Nas subseções posteriores podem ser verificados exemplos de respostas sem relação combinatória dadas a essa situação. Os estudantes recorreram a soluções pensadas para eventualidades do cotidiano, logo, entende-se que não compreendiam o problema.

De maneira geral, é possível perceber, também, uma variedade maior de *acertos parciais* em *combinação*, mesmo sendo porcentagens pequenas em comparação ao elevado número de respostas *incorretas*. Esse percentual pode ser justificado pelo fato de serem problemas com um número menor de possibilidades a serem enumeradas – de 4 a 10 possibilidades. Porém, cabe ressaltar que esses acertos se restringiram a uma pequena parcela de participantes, em relação ao total de 36 estudantes da pesquisa, que por apresentarem noções combinatórias se aproximaram do esgotamento das possibilidades. Sendo assim, chama-se a atenção, o fato de serem pouquíssimos os estudantes que a princípio compreenderam as situações-problemas sem nenhum direcionamento interventivo. Conforme demonstrado na Tabela 2.

Tabela 2: Porcentagens de acertos nas situações do pré-teste

Grupo	Tipo de problema	Porcentagem por resposta					
		I	AP I	AP II	AP III	AP IV	AT
GE1	A	83,3	16,7	---	---	---	---
	C	66,7	12,5	8,3	4,1	8,3	---
	P	75,0	20,8	---	---	---	4,1
	PM	75,0	4,1	8,3	---	---	12,5
GE2	A	75,0	4,1	---	---	20,8	---
	C	66,6	8,3	4,1	8,3	12,5	---
	P	58,3	26,6	---	---	---	---
	PM	62,5	16,7	12,5	---	8,3	4,1
GC	A	83,3	8,3	---	---	4,1	4,1
	C	75,0	12,5	8,3	4,1	---	---
	P	79,1	16,6	---	---	4,1	---
	PM	70,8	12,5	4,1	---	4,1	8,3

G1, grupo de fichas; G2, grupo do *software*; GC, grupo controle. A, situação de *arranjo*; C, situação de *combinação*; P, situação de *permutação*; PM, situação de *produto de medidas*. I, *incorreta*; AP I, *acerto parcial I*; AP II, *acerto parcial II*; AP III, *acerto parcial III*; AT *acerto total*.

Fonte: A autora, 2019

Em continuidade, é visto que mesmo com o baixo desempenho houve alguns *acertos totais* – quando há o esgotamento das possibilidades – sendo mais presente nas situações de *produto de medidas*, nas quais o desempenho foi um pouco melhor. O mesmo foi evidenciado em estudos anteriores (PESSOA; BORBA, 2009; PESSOA; SANTOS, 2015). Sobre isso, as autoras Pessoa e Borba (2009), justificam que esse seja “[...] um tipo de problema trabalhado explicitamente nas séries (*anos*) iniciais”. A familiaridade dos

estudantes com esse tipo de situação pode justificar o porquê deles terem mais facilidade nas situações de *produto de medidas*.

Esses resultados reforçam que os diferentes tipos de situações combinatórias não têm sido trabalhados o suficiente para que os estudantes do 5º ano dos anos iniciais demonstrem uma boa compreensão sobre os invariantes combinatórios. Entretanto, ainda assim é notado um princípio de raciocínio combinatório ao serem contemplados *acertos*, ou seja, mesmo sem instrução específica os estudantes demonstravam algumas compreensões.

Como indicado anteriormente, é objetivo desta pesquisa, analisar o quanto intervenções diferenciadas podem contribuir para o aprimoramento do desempenho de estudantes. Estudos anteriores, como o de Azevedo (2013), indicam que estudantes de início de escolarização são capazes de terem seus conhecimentos combinatórios mais aprofundados, quando adequadamente mediados, e o presente estudo propõe analisar a influência que recursos variados podem ter nos desempenhos desses estudantes.

Na próxima seção é descrito como se deu a formação dos grupos experimentais e do grupo controle, como os materiais manipuláveis – concreto (fichas) e virtual (*software*) – foram utilizados em prol da resolução de situações combinatórias e os principais indícios de compreensão dos invariantes: *escolha*, *ordenação* e o *esgotamento de possibilidades*, observados ao longo dos momentos interventivos.

## 5.2 Análises das intervenções

Cada dupla, dos grupos experimentais, participou de dois momentos de intervenção em dias distintos, nos quais foram retomadas as situações do pré-teste. Os estudantes tiveram acesso a seus testes para a leitura das questões e para a comparação das respostas realizadas anteriormente no teste e as obtidas posteriormente nas intervenções.

No primeiro momento foi apresentado o recurso didático – para o G1 as fichas e para o G2 o *software* – para a resolução das quatro primeiras situações do pré-teste, sendo uma de cada tipo – *arranjo*, *combinação*, *permutação* e *produto de medidas*. As fichas, em específico, eram entregues conforme os elementos do enunciado em questão, para que os estudantes não

perdessem tempo selecionando as fichas correspondentes ao problema, tendo em vista a grande quantidade de fichas correspondentes às oito situações do pré-teste. E para o G2 foram demonstrados os comandos e as opções de edições no *software* para a representação das possibilidades combinatórias.

No primeiro momento houve mais interferências pela pesquisadora para que os estudantes compreendessem como solucionar os problemas e estarem atentos à relevância da *escolha* dos elementos e da sua *ordenação* em cada tipo de situação, e desse modo ser contemplado o *esgotamento das possibilidades*. As perguntas reflexivas eram mais voltadas à *ordenação* e ao *esgotamento de possibilidades* porque os estudantes mostravam mais facilidade sobre o invariante de *escolha*. Quando havia erro na *escolha* dos elementos, a dupla era solicitada a reler a situação e explicar o que pedia o problema. Dos questionamentos feitos para a reflexão dos agrupamentos construídos, foram tidas: *Neste problema, alterar a ordem dos objetos dá no mesmo ou é diferente? Por quê?; Como vocês têm certeza que não há outras maneiras diferentes a serem construídas? Vale ressaltar que esse formato de mediação não era definitivo para todas as duplas, o andamento ocorreu de acordo com a realidade/necessidade de cada dupla.*

Como segundo momento de intervenção, foi cedido mais espaço aos participantes para que tivessem mais autonomia em suas resoluções, considerando que já haviam compreendido a dinâmica dos problemas. Em continuidade, as duplas solucionaram as quatro demais situações do pré-teste, entretanto, sempre que necessário eram mediados pela pesquisadora. A seguir, é descrito com mais precisão como ocorreram as intervenções com cada tipo de material manipulável e as possíveis relações e distanciamentos entre os recursos utilizados, além das contribuições para a compreensão dos invariantes combinatórios.

### *5.2.1 Manipulando as fichas*

A finalidade para qual foi pensada o uso das fichas (com ilustrações referentes aos elementos dos enunciados das questões) no presente estudo, vai ao encontro da perspectiva apresentada por Pessoa e Santos (2015), ao considerarem como recurso pedagógico que propicia sentido aos estudantes que manuseiam por intermédio do professor mediador.

No primeiro momento de intervenção foi vivenciada a dificuldade de algumas duplas em perceberem a utilidade das fichas para a resolução dos problemas, mesmo sendo entregues apenas as fichas correspondentes à situação em questão. Diferente da hipótese levantada em um estudo piloto (GADELHA, 2019) sobre as fichas serem autoexplicativas, no presente estudo foi evidenciado, mediante o número maior de participantes, a necessidade de explicações sobre a finalidade das fichas para a resolução dos problemas.

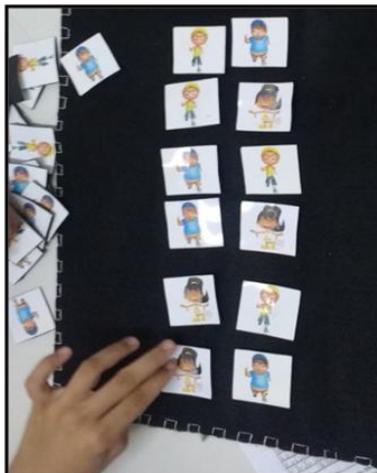
Na primeira situação de *arranjo* – *Três amigos (Beto, Liz e Chico) apostaram corrida na praia de Boa Viagem. De quantas maneiras diferentes se pode ter o primeiro e o segundo lugares?* – por exemplo, algumas duplas persistiam em mencionar soluções dadas às eventualidades do cotidiano, ou seja, sem relação com o raciocínio combinatório, o mesmo tipo de respostas apresentadas no pré-teste, sendo desconsiderado o uso das fichas entregues. Como resposta, foram mencionadas as seguintes soluções, dentre outras: *“Vence quem correr mais rápido!”* (E3 + E13); *“Vence o mais forte, ou, é só olhar os nomes dos vencedores no pódio.”* (E1 + E6). Pessoa e Borba (2009) já haviam categorizado esse tipo de resposta – “incorreta, sem o estabelecimento de relação” – como uma resposta possível na resolução de problemas combinatórios, sendo decorrente da falta de compreensão da proposta do problema. Dessa forma, as fichas não eram associadas de imediato à situação combinatória em questão.

Para mediar as duplas que apresentaram dificuldades na primeira questão, a pesquisadora sugeriu que os estudantes nomeassem os personagens ilustrados nas fichas de acordo com os nomes do enunciado da questão. Em seguida, foram solicitados a demonstrarem com as fichas qual personagem poderia ocupar o primeiro lugar e qual seria o outro personagem a ocupar o segundo lugar. Desse modo, era formada uma, das seis possibilidades que deveriam ser construídas para resolver o problema. Em continuidade, foram questionados se havia alguma outra maneira diferente de ser ocupado o primeiro e o segundo lugar, logo, mostraram ter identificado outras maneiras e prosseguiram ordenando os personagens em posições diferentes até o esgotamento das possibilidades.

É importante ressaltar que alguns estudantes e/ou duplas tiveram facilidade imediata em conciliar o uso das fichas à construção de

possibilidades. Na Figura 11 é demonstrado que além de esgotar as possibilidades a dupla sistematizou a resposta na primeira situação.

Figura 11: Resolução de um problema de *arranjo* pela dupla E22 + E20, no primeiro momento de intervenção com o uso de fichas



Situação de *arranjo* - *Três amigos (Beto, Liz e Chico) apostaram corrida na praia de Boa Viagem. De quantas maneiras diferentes se pode ter o primeiro e o segundo lugares?*  
Fonte: A autora, 2019

Possivelmente, a mediação inicial foi suficiente para que a estudante compreendesse como utilizar as fichas para solucionar os problemas. Ao longo das resoluções a participante se deu conta dos erros cometidos na sua solução do pré-teste, principalmente em relação a *ordenação* dos elementos.

A interferência da pesquisadora e o uso do recurso didático foram primordiais para que os estudantes compreendessem o problema e passassem a apresentar respostas com relação combinatória. No entanto, o desafio estava em distinguir as relações de *escolha* e de *ordenação* para cada tipo de situação combinatória, mas conforme solucionavam as diferentes situações, os estudantes passaram a compreender melhor, como pode ser observado nos próximos exemplos.

Na situação de *combinação* – *D. Marta levou seus quatro filhos (Bianca, Sabrina, Diego e Felipe) ao parque e no brinquedo pula-pula só podem entrar três crianças por vez. De quantas maneiras diferentes três crianças brincarão por vez no pula-pula?* – algumas duplas não se atentaram à *escolha* dos elementos e iniciaram agrupando todos os elementos simultaneamente. Por isso, foi preciso a releitura do enunciado e os seguintes questionamentos: “O que pede o problema?”; “As quatro crianças podem brincar ao mesmo tempo no pula-pula? Por quê?”. A releitura dos enunciados, seguido pelos

questionamentos da pesquisadora, contribuíram para que percebessem o erro na organização das fichas e efetuassem as devidas alterações. E quando necessário eram instigados a perceberem as informações do problema, por partes, através de perguntas como as já mencionadas.

Nesses casos, em que houve a necessidade da releitura e dos breves questionamentos sobre o contexto do enunciado foi visto que os estudantes poderiam compreender as relações envolvidas na situação a partir de algumas indagações: Quantas crianças podem brincar? Todas ou algumas? Logo, demonstravam facilidade em identificarem tais respostas no enunciado.

Na Figura 12 é visto que a dupla não tinha compreensão sobre a relação de *ordem* para a situação de *combinação*, pois neste tipo de situação a *ordenação* dos elementos não viabiliza possibilidades distintas. Ao serem questionados, perceberam que o reagrupamento dos elementos em posições diferentes levou a possibilidades repetidas.

Para contornar o equívoco dos estudantes, questionou-se se todas as maneiras construídas eram diferentes. Os mesmos observaram novamente as fichas e afirmaram que eram diferentes porque as crianças estavam em lugares diferentes. No entanto, a pesquisadora prosseguiu questionando se fazia diferença a colocação em que as três crianças brincassem no pula-pula. Por entenderem que não havia diferença, desfizeram as possibilidades repetidas e acrescentaram a possibilidade que faltava.

Figura 12: Resolução de um problema de *combinação* pela dupla E1 + E6, no primeiro momento de intervenção com o uso de fichas



Em destaque na cor verde estão as possibilidades corretas e na cor vermelha as possibilidades repetidas.

Situação de *combinação* - D. Marta levou seus quatro filhos (Bianca, Sabrina, Diego e Felipe) ao parque e no brinquedo pula-pula só podem entrar três crianças por vez. De quantas maneiras diferentes três crianças brincarão por vez no pula-pula?

Fonte: A autora, 2019

Essa dificuldade de relacionar a *ordenação* à situação, também foi percebida no problema de permutação, no qual, a ordem dos elementos gera possibilidades distintas. Dada a questão – *Três irmãos (Igor, Léo e Tina) se sentaram nas poltronas 11, 12 e 13 no cinema. Trocando os irmãos de lugares em quais diferentes ordens poderão se sentar?* –, a dupla E2 + E8, propôs como resposta, três possibilidades: (Igor, Léo e Tina); (Léo, Igor e Tina) e (Tina, Igor e Léo). Mesmo apresentando três diferentes maneiras de agrupar os elementos, a dupla não percebeu que ainda restavam outras três maneiras diferentes. Para confrontá-los e levá-los à reflexão, a pesquisadora acrescentou mais uma possibilidade, mantendo Igor como primeira opção e alterando a colocação dos outros dois elementos (Igor, Tina e Léo). Em seguida, foram questionados se essa seria uma possibilidade diferente ou igual a anterior. Um dos estudantes afirmou que eram possibilidades diferentes e deram continuidade até o esgotamento das possibilidades, demonstrando, haver compreendido a situação.

Percebe-se, que através do exemplo dado com o acréscimo de uma das possibilidades, não construída pela dupla, os estudantes notaram a necessidade de intercalarem a *ordenação* dos personagens por gerar diferentes maneiras que não haviam sido consideradas. Silva (2010) já havia concluído em seu estudo que a explicitação dos invariantes (na demonstração de mais uma possibilidade, por exemplo) parece ser suficiente para que a criança compreenda o raciocínio envolvido na situação-problema.

Desse modo, é reforçada a perspectiva de Vergnaud (1996) sobre os invariantes, assim como as demais dimensões do tripé (*S* e *R*), estarem diretamente associados à construção de conceitos e precisarem ser explorados por um longo período de tempo para que seja desenvolvida a conceitualização. Salienta-se ainda, que no exemplo mencionado não foi preciso a explicitação do termo *ordenação* para que os participantes compreendessem as relações envolvidas na situação.

Na Figura 13 é apresentado o registro final da organização das fichas. Nota-se que a segunda coluna de possibilidades, do lado direito, foi construída após a mediação da pesquisadora. Desse modo, a dupla seguiu a mesma lógica, mantendo o primeiro elemento e alterando a colocação dos demais.

Após concluírem as seis possibilidades, a dupla afirmou ter terminado a questão e justificaram que qualquer outra possibilidade repetiria a forma como os elementos já haviam sido colocados.

Figura 13: Resolução de um problema de *permutação* pela dupla E2 + E8, no primeiro momento de intervenção com o uso de fichas



Situação de *permutação* - Três irmãos (Igor, Léo e Tina) se sentaram nas poltronas 11, 12 e 13 no cinema. Trocando os irmãos de lugares em quais diferentes ordens poderão se sentar?

Fonte: A autora, 2019

Das seis duplas que manipularam as fichas, quatro delas finalizaram com facilidade a última questão da primeira sessão de intervenção, a qual era do tipo *produto de medidas*. É preciso considerar que mediante a vivência com as situações anteriores, já era esperado que os estudantes estivessem mais familiarizados com esse tipo de problema e seus invariantes de *escolha*, *ordenação* e a necessidade do *esgotamento de possibilidades*. Na Figura 14 é possível perceber que a dupla sistematizou a resposta, mesmo sem ter sido algo ensinado nas mediações.

Figura 14: Resolução de um problema de *produto de medidas* pela dupla E2 + E8, no primeiro momento de intervenção com o uso de fichas



Situação de *produto de medidas* - Na loja Quero Mais estão disponíveis três tipos de botas (marrom, preta e vinho) e dois tipos de gorros (cinza e rosa). De quantas maneiras diferentes pode-se comprar uma bota e um gorro?

Fonte: A autora, 2019

No segundo momento de intervenções, as duplas demonstraram manter as compreensões construídas no primeiro momento, como também, apresentaram avanços no domínio do invariante de *escolha* e algumas duplas passaram a sistematizar as possibilidades. É importante destacar que as

quatro últimas situações do pré-teste, uma de cada tipo – *arranjo, combinação, permutação e produto de medidas* –, solucionadas nesse momento, possuíam maiores números de possibilidades em comparação às anteriores.

Algumas duplas passaram a sistematizar ao longo das resoluções, sendo essa uma estratégia fundamental para o esgotamento das possibilidades por facilitar a visualização das diferentes maneiras de agrupar os elementos. Em dada situação, um dos estudantes usou o termo ‘organizar’ para se referir à sistematização, pois havia percebido que desse modo nenhuma possibilidade passaria despercebida.

Uma das duplas que teve dificuldade no primeiro momento de intervenção em relacionar o uso das fichas à resolução do problema, na última situação de *combinação* – *Na barraca Espaço Drinks há cinco frutas (acerola, caju, laranja, limão e maracujá) e os sucos são preparados misturando duas das frutas. De quantas maneiras diferentes os sucos podem ser preparados com duas frutas?* – do segundo momento de intervenção, mostrou ter compreendido e percebido que a *ordenação* dos elementos, nesse caso, não interfere em novas possibilidades e que a *escolha* do elemento já agrupado, é diminuída conforme são construídas as possibilidades. Por exemplo, após ter agrupado cada fruta com acerola – quatro possibilidades –, nos agrupamentos com caju não será necessário repetir acerola – logo, serão mais três possibilidades –, para as opções com laranja não é necessário repetir acerola e nem caju, por já terem sido agrupados – mais duas possibilidades com laranja –, e assim por diante.

Porém, para confirmar que estavam certos de suas respostas, a pesquisadora indagou: “*Escolher caju e acerola, ou, acerola e caju, não seriam maneiras diferentes?* Um dos participantes respondeu: “*Olhando assim (as fichas fixadas) são diferentes, mas fazendo o suco é a mesma coisa.*”. Desse modo, é perceptível que o estudante considerou o contexto do problema, não se restringindo à ilustração das frutas nas fichas.

A mediação da pesquisadora permaneceu sendo crucial para auxiliar as duplas que continuavam com dificuldade em relacionar a relevância da *ordenação* em cada tipo de situação. Entretanto, nem sempre a interferência se fez necessária porque alguns dos participantes ao perceberem o erro alertava o(a) colega. Por exemplo, na situação de *produto de medidas* – *Na lanchonete*

*Oba-oba há quatro sabores de suco (graviola, laranja, morango e uva) os quais são servidos em copos de três tamanhos (pequeno, médio e grande). De quantas maneiras diferentes pode-se tomar um suco de um sabor em um tamanho de copo?* – E6 iniciou agrupando duas frutas como possibilidade, logo, E1 interrompeu: “*Não! Não é para colocar duas frutas, é uma fruta e um copo.*”. E6 conferiu o enunciado novamente e concordou que era preciso alterar a resposta, e por fim, finalizaram com facilidade. Esse caso pode ser observado na Figura 15.

No entanto, é importante destacar que em uma das questões anteriores era solicitado as diferentes maneiras de escolher duas dentre cinco frutas. Desse modo, pode ter ocorrido do estudante não ter prestado atenção ao enunciado do problema e ter associado ao contexto anterior. Logo, é reforçada a necessidade de diversificar os problemas para que as crianças tenham a necessidade de ler atentamente cada uma das situações propostas.

Figura 15: Resolução de um problema de *produto de medidas* pela dupla E1 + E6, no segundo momento de intervenção com o uso de fichas



*Situação de produto de medidas – Na lanchonete Oba-oba há quatro sabores de suco (graviola, laranja, morango e uva) os quais são servidos em copos de três tamanhos (pequeno, médio e grande). De quantas maneiras diferentes pode-se tomar um suco de um sabor em um tamanho de copo?*

Fonte: A autora, 2019

Embora não faça parte dos objetivos deste estudo analisar a interação dos estudantes, por meio das descrições dos momentos interventivos, é possível verificar que além das mediações da pesquisadora, o trabalho em dupla contribuiu para que os estudantes se ajudassem na compreensão dos problemas combinatórios enquanto solucionavam a questão. Nem sempre a participação dos dois estudantes foi efetiva na manipulação das fichas por retração de um dos estudantes que mesmo assim, se posicionava quando percebia algum erro, detalhe já visto no estudo piloto.

Os desdobramentos aqui destacados trazem um panorama das dificuldades apresentadas no início das intervenções sobre a *escolha e ordenação* dos elementos e no *esgotamento das possibilidades*, como também, a importância do uso do material e da mediação da pesquisadora com questionamentos reflexivos, estimulando a percepção e compreensão dos invariantes combinatórios, bem como o papel das interações na melhoria dos desempenhos das crianças.

De encontro aos estudos anteriores (PESSOA; SANTOS, 2015; FLORENCIO; GUIMARÃES, 2017), é reforçado que as fichas são um bom recurso para as soluções combinatórias, em seus diferentes tipos de situações, por estudantes dos anos iniciais de escolarização, desde que haja adequada mediação pelo educador. No entanto, há outros recursos didáticos que podem contemplar objetivos semelhantes ao uso das fichas. Adiante será descrito o processo de intervenção com as duplas que utilizaram o *software Pixton*®.

### 5.2.2 Manipulando o software Pixton®

No estudo de Pereira (2017) também se teve como objetivo verificar as contribuições tanto do material manipulável na versão concreta, como na virtual, para o ensino matemático. Segundo a autora, supracitada, o material virtual é uma réplica do material concreto, ou seja, atende os mesmos objetivos, distinguem-se, porém, pela forma de manuseio (palpável e virtual). Desse modo, tendo como base os documentos curriculares – PCN (BRASIL, 1997) e o documento local (PARANÁ, 2008) –, que incentivam o uso de recursos didáticos tradicionais e os digitais, Pereira (2017) achou pertinente considerar as duas formas de acesso em seu estudo.

De igual modo, tendo como parâmetro os autores Moyer, Bolyard e Spikell (2002), no presente estudo foi proposto também o uso de material manipulável virtual. Para essa finalidade utilizou-se o Pixton®, o qual já havia sido trabalhado anteriormente na solução de situações combinatórias (GADELHA; VICENTE; MONTENEGRO, 2018). Com base em alguns estudos (BOTAS; MOREIRA, 2013; MOYER; BOLARD; SPIKELL, 2002) passou-se a perceber o *software Pixton*® como uma plataforma digital que atende a finalidade de manuseio de material virtual, podendo ser melhor explorado.

No presente estudo, as duplas que foram destinadas ao uso do *software* Pixton© na resolução dos problemas combinatórios, nos momentos interventivos precisaram ter um momento para conhecer e explorar as ferramentas do *software* e compreender sua finalidade como material manipulável virtual (não necessariamente, conhecendo o termo). Desse modo, a pesquisadora apresentou o passo a passo para o manuseio das opções de edições disponíveis, atendendo as mesmas funções das fichas, porém, na versão virtual.

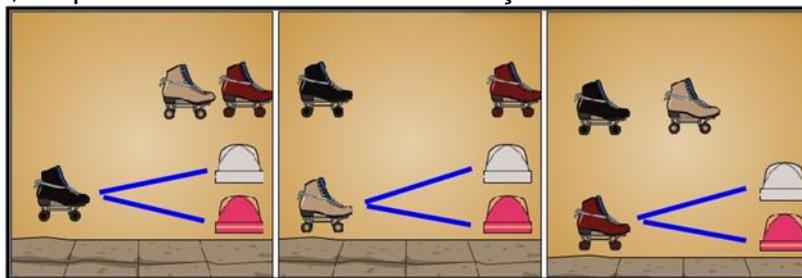
Na etapa de seleção do cenário para os quadrinhos em que são construídas as representações, foi esclarecido que não era preciso se ater a cenários que contemplassem o contexto dos problemas, pois poderiam optar pelo fundo de cores e inserir posteriormente os elementos necessários. Esse primeiro momento durou, em média, meia hora porque foram cedidos alguns minutos para que os estudantes interagissem com o Pixton©.

Ao iniciar as resoluções, os estudantes que haviam pontuado no pré-teste não apresentaram dificuldades em iniciar a construção de possibilidades. As crianças que tinham dificuldades passavam a compreender ao acompanhar a lógica das outras crianças com as quais formavam duplas. Entretanto, em determinadas situações, por não ordenarem e nem escolherem corretamente, a mediação da pesquisadora foi necessária para que compreendessem os invariantes em cada tipo de situação.

Essa cooperação entre os participantes da dupla foi vivenciada com a primeira dupla da intervenção com o material manipulável virtual (Pixton©) na seguinte questão de *produto de medidas* – *Na loja Quero Mais estão disponíveis três tipos de botas (marrom, preta e vinho) e dois tipos de gorros (cinza e rosa). De quantas maneiras diferentes pode-se comprar uma bota e um gorro?* –.

Um dos estudantes (E27) demonstrou ter entendido o problema ao corrigir seu colega (E30) que havia inserido personagens no lugar dos objetos do enunciado (botas e gorros) e por não saber proceder com a resolução. Logo, E27 afirmou que seria necessário escolher os objetos correspondentes ao enunciado da questão e concluiu a resolução. Chama-se a atenção o fato do estudante ter solucionado por diagrama, como é visto na Figura 16.

Figura 16: Resolução de um problema de *produto de medidas* pela dupla E27 + E30, no primeiro momento de intervenção com o uso do Pixton©



*Situação de produto de medidas - Na loja Quero Mais estão disponíveis três tipos de botas (marrom, preta e vinho) e dois tipos de gorros (cinza e rosa). De quantas maneiras diferentes pode-se comprar uma bota e um gorro?*

Figura editada com os traços azuis em destaque.

Fonte: A autora, 2019

Esse tipo de representação simbólica não é comum no manuseio do Pixton©, pois, diferente do *software Árbol*, proposto no estudo de Azevedo (2013), o qual é programado para a construção de árvores de possibilidades, no Pixton© há tendência dos estudantes solucionarem na lógica das listagens, mesmo sendo possível a formação de diagramas.

Ao invés de inserir apenas os objetos correspondentes a cada possibilidade, como fazem a maioria dos participantes, ou replicar os objetos para agrupá-los em um só quadrinho, o estudante optou em colocar a quantidade de objetos mencionados no enunciado, destacando as possibilidades para cada opção de bota em três quadrinhos, correspondendo ao total de seis possibilidades (duas possibilidades por quadrinho). Para verificar se o participante tinha a compreensão da quantidade de possibilidades ou se basearia sua resposta na quantidade de quadrinhos, a pesquisadora questionou quantas maneiras diferentes o estudante tinha construído e, imediatamente, recebeu como resposta, seis possibilidades.

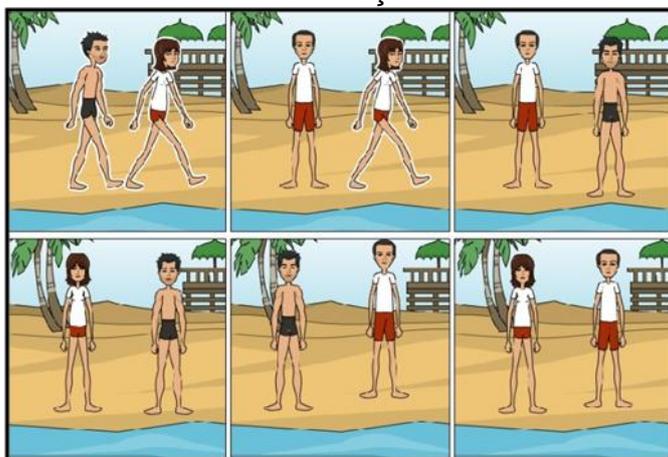
Com duas duplas foi comum se dispersarem na escolha de um cenário que estivesse de acordo com o contexto da situação de *produto de medidas*. Para uma das duplas foi preciso a pesquisadora ressaltar que poderiam escolher um cenário de cores sem ser temático. Já no caso da outra dupla, um dos participantes (E5) lembrou ao colega que não era preciso procurar um cenário com as características do enunciado, pois tinham um problema a resolver. Entretanto, inseriram os elementos e ficaram sem saber iniciar a resolução, sendo preciso reler várias vezes o enunciado da questão para entenderem que deveriam agrupar uma bota com um gorro.

O estudante E5 demonstrou entusiasmo durante o manuseio do material manipulável virtual (Pixton©), sugerindo ser uma ótima opção para realizar as atividades escolares em casa. Observou-se, assim, que além do destaque em imagem, o fato de ser um recurso digital, uma das inovações tecnológicas nos dias atuais, o *software* desperta o engajamento dos estudantes em utilizá-lo.

Assim como no uso das fichas (material concreto), mesmo algumas duplas apresentando equívocos na *escolha* dos elementos, a maior dificuldade no manuseio no Pixton© esteve na *ordenação* e no *esgotamento* das possibilidades. Todavia, conforme eram mediados pela pesquisadora, os estudantes finalizavam as resoluções e, sempre que preciso, eram confrontados a justificarem suas respostas.

Diferente das duplas que utilizaram fichas, os participantes do material manipulável virtual (Pixton©) não mencionaram soluções dadas às eventualidades do cotidiano como resposta, apenas duas duplas não souberam como iniciar a resolução. Sendo assim, a pesquisadora interrogou, no problema de *arranjo*, quais dos nomes citados no enunciado poderiam ser os prováveis vencedores da corrida. Ao responderem, a pesquisadora solicitou que escolhessem dois personagens no material manipulável virtual (Pixton©) para representarem os campeões. Desse modo, a dupla prosseguiu e finalizou a resolução, como pode ser visto na Figura 17.

Figura 17: Resolução de um problema de *arranjo* pela dupla E9 + E4, no primeiro momento de intervenção com o uso do Pixton©



Situação de *arranjo* - Três amigos (Beto, Liz e Chico) apostaram corrida na praia de Boa Viagem. De quantas maneiras diferentes se pode ter o primeiro e o segundo lugares?

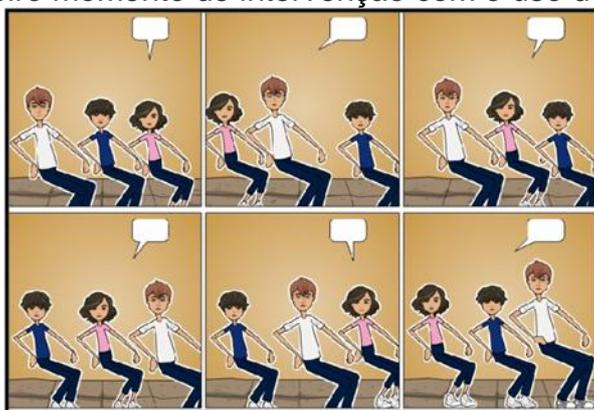
Fonte: A autora, 2019

Nota-se que um mesmo personagem se encontra em posições diferentes nos quadrinhos, devido à curiosidade dos participantes em fazer uso

das opções de movimento dos personagens. Tais variações não alteram a solução do problema. No entanto, evidencia a necessidade dos estudantes que utilizam recursos como este serem acompanhados para não se dispersarem dos problemas a serem solucionados.

Sobre a relação de *ordenação*, na situação de *permutação* - *Três irmãos (Igor, Léo e Tina) querem se sentar nos três últimos lugares disponíveis no cinema. De quantas maneiras diferentes os três irmãos podem se sentar nos lugares disponíveis?* – a dupla E28 e E33 limitou-se, inicialmente, a quatro possibilidades. A pesquisadora apontou para uma das possibilidades construída e perguntou se a alteração da colocação de um elemento formaria uma maneira diferente ou se seria a mesma coisa. Os estudantes mostraram perceber que seriam maneiras distintas. A pesquisadora questionou se eles haviam feito essa possível maneira. Ao conferirem, os estudantes identificaram, além dessa, outras maneiras e prosseguiram até o esgotamento das possibilidades, como é posto na Figura 18.

Figura 18: Resolução de um problema de *permutação* pela dupla E28 + E33, no primeiro momento de intervenção com o uso do Pixton©



*Situação de permutação - Três irmãos (Igor, Léo e Tina) querem se sentar nos três últimos lugares disponíveis no cinema. De quantas maneiras diferentes os três irmãos podem se sentar nos lugares disponíveis?*

Os balões fazem parte das ferramentas do *software*, neste caso em específico os estudantes não apagaram.

Fonte: A autora, 2019

Em continuidade, após a dupla afirmar que havia terminado as diferentes maneiras, a pesquisadora confrontou como tinham certeza de que o total eram seis possibilidades. E28 respondeu que cada personagem já tinha ocupado duas vezes o mesmo assento nas diferentes possibilidades, alterando apenas a colocação dos outros dois personagens e que qualquer outro agrupamento

levaria a uma possibilidade repetida. A justificativa foi coerente ao tipo de problema solucionado, no qual a *ordenação* gera novas possibilidades.

Um caso observado no estudo piloto foi a dificuldade da dupla que manuseou o *software* em esgotar as possibilidades, porque não conseguia visualizar os quadrinhos enquanto um quadrinho estivesse aberto para edições. Sendo assim, não conseguiam observar e nem se lembrar das possibilidades que já haviam construído. Porém, neste estudo não foi tida essa dificuldade, mesmo a resposta não estando sistematizada. Antes de iniciar a construção do agrupamento, os participantes conferiam qual possibilidade ainda não tinha sido feita para dar continuidade.

Na Figura 19 é visto um exemplo de *arranjo* com o total de 12 possibilidades – valor máximo nos testes aplicados. Mesmo sem fazer uso da estratégia de sistematização dos agrupamentos, a dupla não repetiu possibilidades e nem demonstrou dificuldades para o esgotamento. Desse modo, observou-se que o manuseio do *material manipulável virtual* possibilitou o domínio sobre os invariantes combinatórios, *ordem*, *escolha* e a compreensão do *esgotamento de possibilidades*, sendo o principal fator para que os estudantes tivessem sucesso na finalização do problema.

Figura 19: Resolução de um problema de *arranjo* pela dupla E9 + E4, no segundo momento de intervenção com o uso do Pixton©



*Situação de arranjo - Há quatro alunos (César, Lay, Bete e Luan) concorrendo ao cargo de representante e vice representante. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos um representante e um vice representante?*

Fonte: A autora, 2019

Conforme os estudantes solucionavam os problemas, foram verificadas algumas conclusões formuladas. Uma dessas conclusões foi apresentada por E17 enquanto observava e opinava sobre a formação dos agrupamentos na situação de *combinação* – *Na barraca Espaço Drinks há cinco frutas (acerola, caju, laranja, limão e maracujá) e os sucos são preparados misturando duas das frutas. De quantas maneiras diferentes os sucos podem ser preparados com duas frutas?* A criança que fazia dupla com ele iniciou inserindo os elementos mencionados no enunciado da questão. E17 destacou que as maneiras de escolher as duas frutas iam diminuindo, conforme fossem agrupadas, “Se acerola (primeira fruta escolhida) já foi com todas as outras frutas, a uva (segunda fruta escolhida para ser agrupada a outras frutas) só poderá ir com três frutas porque já foi com acerola. É diferente do outro problema.”, se referindo à situação de *arranjo*, na qual a ordenação leva a possibilidades distintas. Acredita-se que tal percepção tenha sido facilitada pela função móvel e ilustrativa do material manipulável virtual utilizado. Abaixo na Figura 20 é ilustrada a explicação de E17.

Figura 20: Ilustração (editada) da explicação dada pelo estudante E17 a sua dupla E10, no segundo momento de intervenção com o uso do Pixton©



*Situação de combinação - Na barraca Espaço Drinks há cinco frutas (acerola, caju, laranja, limão e maracujá) e os sucos são preparados misturando duas das frutas. De quantas maneiras diferentes os sucos podem ser preparados com duas frutas?*

Fonte: A autora, 2019

Em continuidade às resoluções, o mesmo estudante observou que na situação de *permutação* – *Na prateleira da casa de Edson estão três objetos (uma bola de futebol, um troféu e uma bola de basquete). De quantas maneiras diferentes ele pode colocar os três objetos lado a lado na prateleira?* – a forma como os elementos eram ordenados levava a diferentes possibilidades e afirmou: “Aqui é um caso de posição!”. Desse modo, corrobora-se a perspectiva teórica de Borba (2010) ao afirmar que, “o raciocínio combinatório – como um dos componentes do pensamento formal – possui um caráter

fundamentalmente hipotético-dedutivo, sendo, portanto, base de raciocínio científico” ao estimular o levantamento de hipóteses e conclusões, conforme realizadas as tentativas de resoluções.

Dentre as duplas que manusearam o Pixton®, algumas apresentaram dificuldades, não identificados no grupo das fichas, na resolução da última situação de *produto de medidas* – *Na lanchonete Oba-oba há quatro sabores de suco (graviola, laranja, morango e uva) os quais são servidos em copos de três tamanhos (pequeno, médio e grande). De quantas maneiras diferentes pode-se tomar um suco de um sabor em um tamanho de copo?* –, podendo ser decorrente da quantidade de elementos envolvidos na questão, contendo sete elementos, dentre os sabores de suco e os tamanhos de copos. Portanto, ao procurar cada elemento e inserir no quadrinho de edição, os participantes não sabiam como proceder porque já não lembrava qual era o problema em questão e, por isso, precisaram retomar a leitura do enunciado várias vezes. Esse procedimento foi diferente do grupo das fichas que tinham os elementos já definidos, prontos para serem agrupados após a leitura do problema.

Na Figura 21 são vistas as possibilidades construídas pela dupla, uma possibilidade por quadrinho.

Figura 21: Resolução de um problema de *produto de medidas* pela dupla E27 + E30, no segundo momento de intervenção com o uso do Pixton®



*Situação de produto de medidas – Na lanchonete Oba-oba há quatro sabores de suco (graviola, laranja, morango e uva) os quais são servidos em copos de três tamanhos (pequeno, médio e grande). De quantas maneiras diferentes pode-se tomar um suco de um sabor em um tamanho de copo?*

Fonte: A autora, 2019

Além da facilidade em resolver, sistematizou a resposta organizando cada sabor de suco (representado por frutas) por um tamanho de copo. Nota-se que no primeiro quadrinho os participantes inseriram todos os elementos e conforme abriam um novo quadrinho, para uma nova possibilidade, alteravam apenas os elementos correspondentes à possibilidade.

De maneira geral, percebe-se, que, assim como os estudantes que utilizaram o material concreto (fichas), a maioria dos que manusearam o material manipulável virtual optaram por listagens, como em estudos anteriores (PESSOA; BORBA, 2009; AZEVEDO; BORBA, 2013). Tendo em vista, que essa é uma representação espontaneamente utilizada no Ensino Fundamental e pode ser inicialmente explorada no ensino de Combinatória.

Por fim, indo de encontro ao estudo de Gadelha; Vicente; Montenegro (2018), as dificuldades dos estudantes estiveram direcionadas à incompreensão dos invariantes combinatórios e não ao *software* utilizado, isso porque não foi identificada nenhuma limitação que interferisse no desenvolvimento do raciocínio combinatório. No entanto, algumas ferramentas poderiam ser aprimoradas se o *software* fosse voltado para a resolução de problemas combinatórios, a exemplo do espaço para o agrupamento das possibilidades não ser em um pequeno quadrinho ou em vários quadrinhos, mas, sim, a um único espaço, podendo potencializar outras representações simbólicas além dos desenhos em listagem.

A partir das análises sobre o uso dos recursos didáticos como aparato no processo de compreensão dos invariantes combinatórios, é percebido que, independente da condição, os materiais manipuláveis aqui testados foram eficazes no que concerne ao objetivo de solucionar diferentes tipos de situações combinatórias. Entretanto, a disponibilização dos recursos aos estudantes não teria sido suficiente para o desenvolvimento das respostas e muito menos na compreensão dos invariantes combinatórios. Logo, é enfatizado o papel da pesquisadora como mediadora para que o ensino ocorresse. A realização das intervenções em duplas, também contribuiu para que os participantes compartilhassem seus entendimentos.

Em relação às fichas como material manipulável concreto, nota-se que, mesmo os elementos já estando definidos/ilustrados, os estudantes cometeram os mesmos erros do grupo que precisou identificar elementos no Pixton, tanto

na *escolha* de personagens, além do necessário, como na *ordenação* incorreta ou agrupando os elementos de um mesmo conjunto em *produto de medidas*, quando deveria ser agrupado um elemento de cada conjunto. No entanto, a visualização sobre as fichas pareceu ser um facilitador para a estratégia de sistematização por boa parte das duplas.

A lógica interativa de 'manipulável virtual' permitiu que as duplas construíssem suas próprias fichas virtuais no Pixton©, tendo em vista que precisaram definir as ilustrações no(s) quadrinho(s) para representar a resposta. Logo, pode-se inferir que apenas manipular as fichas concretas é mais simples.

No entanto, a finalidade maior não é definir se dentre os recursos didáticos há o mais eficaz a partir dos momentos interventivos, mas sim, verificar se os dois recursos testados são eficazes de modo a proporcionar melhora no desempenho dos dois grupos. Será, assim, observado se houve diferença significativa na aprendizagem dos que manipularam as fichas, dos que manusearam o Pixton e dos integrantes do grupo controle, comparando-se os desempenhos no pré e no pós-teste.

Após as intervenções, todos os estudantes realizaram um pós-teste com a mesma estrutura do teste anterior, respondido individualmente com lápis e papel, sem o auxílio dos recursos didáticos usados nas intervenções. Logo, na seção seguinte são apresentados e discutidos os dados quantitativos contemplados no pós-teste e as análises comparativas aos resultados do pré-teste. Busca-se, dessa forma, evidenciar o quanto os grupos experimentais avançaram a partir dos dois momentos interventivos e averiguar se o grupo controle manteve os resultados anteriores. Para isso, foram feitas análises estatísticas no *software* SPSS (*Statistical Package for the Social Sciences*) para verificar se as diferenças entre os grupos foram significativas.

### 5.3 Análises comparativas do pré e pós-teste

Assim como na tabela do pré-teste, os resultados do pós-teste foram organizados por grupos – GE1 (fichas); GE2 (*software*); GC (controle). De

maneira sucinta, na Tabela 3 são apresentadas e comparadas as frequências de respostas do pré-teste e do pós-teste.

Tabela 3: Porcentagens de acertos do pré-teste e do pós-teste, por grupo

GRUPO	Porcentagem por resposta no pré-teste e no pós-teste											
	I		AP I		AP II		AP III		AP IV		AT	
	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós
GE 1	75,0	14,5	13,5	8,3	4,1	---	1,0	4,2	2,1	44,8	4,2	28,1
GE 2	66,0	7,3	16,6	3,1	4,2	1,0	2,1	11,5	10,1	44,8	1,0	32,3
GC	77,1	66,0	12,5	16,7	3,1	2,0	1,0	3,0	3,1	7,3	3,1	5,0

GE1, grupo de fichas; GE2, grupo do *software*; GC, grupo controle. I, *incorreta*; AP I, *acerto parcial I*; AP II, *acertos parciais II*; AP III, *acertos parciais III*; AT *acertos totais*.

Fonte: A autora, 2019

No pré-teste, os grupos experimentais e o grupo controle apresentavam a maior porcentagem em respostas *incorretas* (sem relação combinatória). Porém, quando comparado com os resultados do pós-teste dos grupos experimentais, chama-se a atenção ao acréscimo de *acerto parcial IV* e de *acerto total*. O mesmo não ocorreu com o grupo controle, no qual o percentual de respostas *incorretas* permaneceu acima de 50%, evidenciando a ausência de avanços no desempenho desse grupo que não passou por nenhuma intervenção.

Outra forma de perceber o melhor desempenho dos grupos experimentais é a partir das médias apresentadas na Tabela 4.

Tabela 4: Médias obtidas no pré-teste e no pós-teste, por grupo

Grupo	Média	
	Pré-teste	Pós-teste
GE1	4,3	27,0
GE2	6,2	30,4
GC	4,0	6,4

GE1, grupo de fichas; GE2, grupo do *software*; GC, grupo controle.

Fonte: A autora, 2019

Tendo em vista que os três grupos partiram de uma mesma condição sem diferenças significativas. Destaca-se, que, cada grupo composto pelos 12 estudantes poderia obter até 40 na média, considerando o valor máximo de pontuação por questão (5). Nota-se, pois, que o grupo controle, o qual não teve intervenção, permaneceu com o resultado distante (no pós-teste) quando

comparado com os grupos experimentais. Neste sentido, é reforçada a necessidade do ensino combinatório desde os anos iniciais, visto que os estudantes são capazes de compreender os diferentes tipos de situações combinatórias.

De modo geral, as análises no SPSS apontaram haver diferença significativa entre os testes (pré x pós) do GE1 ( $t(11) = 7,864$ ;  $p = ,001$ ) e do GE2 ( $t(11) = 9,880$ ;  $p = ,001$ ), diferente do GC que não apresentou avanços significativos ( $t(11) = 1,158$ ;  $p = ,271$ ).

Os desempenhos também foram analisados por tipo de situação entre o pré-teste e o pós-teste, por grupo, conforme se pode observar na Tabela 5.

Tabela 5: Médias por tipo de problema no pré-teste e no pós-teste, por grupo

Grupos	Tipo de problema (pré-teste)			
	Arranjo	Combinação	Permutação	Produto de Medidas
GE1	0,3	1,5	0,8	1,6
GE2	1,7	1,8	0,8	1,8
GC	0,9	0,8	0,6	1,5
	(pós-teste)			
GE1	6,6	5,6	6,8	7,9
GE2	8,1	6,4	7,4	8,4
GC	1,0	1,5	1,1	2,6

GE1, grupo de fichas; GE2, grupo do *software*; GC, grupo controle.

Fonte: A autora, 2019

Mediante a leitura da Tabela 5, é possível verificar que os grupos experimentais tiveram muito mais avanços do pré-teste ao pós-teste (considerando que a pontuação máxima era 10, somando os cinco pontos das duas questões de cada tipo), nos diferentes tipos de situações – *arranjo*, *combinação*, *permutação* e *produto de medidas*. A partir de T-test de amostras em pares, constatou-se que os aumentos nas médias denotaram avanços significativos nos quatro tipos de situações. No GE1 observou-se em *arranjo* (APRÉxAPÓS),  $t(11) = 5,928$ ;  $p = ,001$ ; *combinação* (CPRÉxCPÓS),  $t(11) = 4,305$ ;  $p = ,001$ ; *permutação* (PPRÉxPPÓS),  $t(11) = 7,433$ ;  $p = ,001$ ; e em produto de medidas (PMPRÉxPMPÓS),  $t(11) = 5,503$ ;  $p = ,001$ .

A melhora no desempenho do GE2 também evidenciou avanços significativos, conforme mostram as análises. Em *arranjo* (APRÉxAPÓS),  $t(11) = 6,300$ ;  $p = ,001$ ; em *combinação* (CPRÉxCPÓS),  $t(11) = 5,463$ ;  $p = ,001$ ; nas situações de *permutação* (PPRÉxPPÓS),  $t(11) = 9,536$ ;  $p = ,001$ ; e, também, em *produto de medidas* (PMPRÉxPMPÓS),  $t(11) = 6,512$ ;  $p = ,001$ . Logo,

entende-se que os momentos interventivos – com o auxílio das fichas e do *software* – contribuíram na aprendizagem combinatória dos estudantes participantes.

No entanto, o mesmo não foi observado quando comparados os desempenhos do pré-teste com as do pós-teste do grupo controle. Este grupo não apresentou avanços significativos em nenhuma das situações, conforme verificado nas análises T-test de amostras em pares. Observou-se para *arranjo* (APRÉxAPÓS),  $t(11) = ,146$ ;  $p = ,886$ ; em *combinação* (CPRÉxCPÓS),  $t(11) = ,950$ ;  $p = ,362$ ; em *permutação*, (PPRÉxPPÓS),  $t(11) = ,623$ ;  $p = ,546$ ; e em *produto de medidas* (PMPRÉxPMPÓS),  $t(11) = 2,049$ ;  $p = ,065$ . Portanto, o grupo que não participou de intervenção permaneceu com baixo desempenho em todos os tipos de situações nos dois testes.

Na Tabela 6 são apresentadas as porcentagens de erros e de acertos, por grupo – GE1, GE2 e GC –, nas situações do pós-teste, de acordo com a classificação de respostas.

Nos diferentes tipos de situações combinatórias, quase não houve *acerto parcial II* (número de possibilidades limitadas ao número de elementos). Para o grupo controle é justificado que o índice de respostas incorretas permaneceu sendo frequente. Já para os grupos experimentais, entende-se que os participantes passaram a compreender o sentido de agrupamento envolvendo os invariantes – escolha e ordenação – por situação. Sendo assim, deixaram de limitar as possibilidades ao número de elementos. Essa afirmação é comprovada pelo aumento de *acertos parciais IV* e pelos *acertos totais*.

*Combinação* foi o único tipo de situação em que os grupos experimentais demonstraram *acerto parcial III* (escolha adequada e ordenação inadequada), o qual muito se aproxima do *acerto total* quando a relação dos invariantes (*escolha, ordenação* e conseqüentemente o *esgotamento de possibilidades*) é correspondida ao tipo de situação. A dificuldade de esgotar as possibilidades nesse tipo de situação pode ser justificada por não perceberem que a *ordenação* dos elementos não gera novas possibilidades. É importante salientar que o tempo de intervenção foi curto e que a exploração desse conteúdo por mais tempo provavelmente resultaria em maiores avanços.

Tabela 6: Porcentagens de acertos nas situações do pós-teste

Grupo	Tipo de problema	Porcentagem por resposta					
		I	AP I	AP II	AP III	AP IV	AT
GE1	Arranjo	16,6	12,5	---	---	33,3	37,5
	Combinação	20,8	4,1	4,1	16,7	50,0	4,1
	Permutação	12,5	8,3	---	---	66,7	12,5
	Produto de medidas	12,5	4,1	---	---	25,0	58,3
GE2	Arranjo	8,3	---	---	---	50	41,6
	Combinação	8,3	---	4,1	45,8	33,3	8,3
	Permutação	4,1	12,5	---	---	58,3	25,0
	Produto de medidas	4,1	---	---	---	37,5	54,1
GC	Arranjo	83,4	8,3	---	---	---	8,3
	Combinação	66,6	12,5	8,3	---	12,5	---
	Permutação	66,6	25	---	---	8,3	---
	Produto de medidas	50	20,8	8,3	---	8,3	12,5

G1, grupo de fichas; G2, grupo do *software*; GC, grupo controle. I, *incorreta*; AP I, *acerto parcial I*; AP II, *acerto parcial II*; AP III, *acerto parcial III*; AT *acerto total*.

Fonte: A autora, 2019

Nas situações de *produto de medidas*, na qual a *ordenação* tem a mesma relação que em *combinação*, os estudantes demonstraram ter mais facilidade em notar que a colocação dos elementos de uma possibilidade já construída, não formaria uma nova possibilidade ao serem alternados de lugar. Por isso, foi tida uma porcentagem elevada de *acerto total* no pós-teste em *produtos de medida*. Não é desconsiderado que os estudantes dos anos iniciais apresentem familiaridade com esse tipo de situação em termos de saber agrupar um elemento de cada conjunto. Porém, a mediação do professor ajuda o estudante a entender que há um total de possibilidades a serem contempladas, percebendo que um elemento já agrupado deve ser reagrupado com outros elementos.

Os grupos experimentais se destacaram no acréscimo de *acertos parciais IV* (escolha adequada ou correta e ordenação correta, esgotamento das possibilidades incorreto). Neste tipo de resposta demonstra-se certo domínio sobre os invariantes combinatórios, mas ainda não se esgota as possibilidades. Pessoa e Santos (2015) ressaltam que os “avanços ocorrem ainda que não haja o esgotamento correto e completo das possibilidades, tendo em vista que a compreensão combinatória ocorre paulatinamente, requerendo tempo e trabalho com os invariantes, de modo que seja possível a apropriação”.

Os resultados em *produto de medidas* confirmam que os estudantes têm mais facilidade em solucionar este tipo de problema, pois no pré-teste os três grupos já apresentavam uma pequena porcentagem de *acertos parciais e/ou totais*. Não se sabe ao certo se isso é decorrente das vivências do cotidiano ou do ensino (uma vez que esse é o único tipo de problema combinatório explicitamente trabalhado no início da escolarização). Após as intervenções as compreensões foram aprofundadas e os grupos experimentais mais do que duplicaram a porcentagem de *acertos totais*. Esse mesmo tipo de problema foi o que apresentou a maior média entre os tipos de situações no pós-teste.

No Gráfico 1<sup>11</sup> pode-se observar a diferença entre as médias do pré para o pós-teste e o quanto os estudantes avançaram nos diferentes tipos de situações combinatórias – *arranjo, combinação, permutação, produto de medidas*. As médias foram mais do que duplicadas no pós-teste.

Para o grupo fichas, no pós-teste quase não é visto diferença entre as médias de *arranjo e permutação*, enquanto no pré-teste as médias dessas mesmas situações foram as mais baixas. Mesmo a média em *combinação* estando abaixo das demais situações do pós-teste, quando comparado à média do pré-teste fica nítido que houve avanço no desempenho.

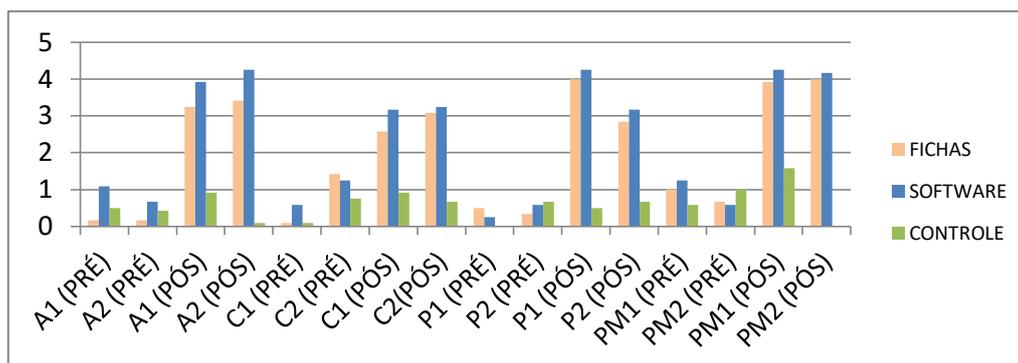
Tais avanços são confirmados quando realizado o teste estatístico de comparação das médias de cada problema por grupo. No pré-teste as médias variaram entre 0 e 1,3. Porém, no pós-teste os grupos que tiveram a mediação da pesquisadora e o auxílio dos materiais manipuláveis, conseguiram se

---

<sup>11</sup> Valor máximo para cada questão: 5.

destacar conforme é visto na comparação com o grupo controle, que, mesmo apresentando um pouco de avanço não ultrapassou mais do que 1,6.

Gráfico 1: Comparação dos grupos nos diferentes tipos de situações nos testes



Fonte: A autora, 2019

Mediante a análise de comparação t - teste de amostras em pares, os resultados apontaram para diferenças significativas entre o pré-teste e o pós-teste em função do desempenho dos 36 participantes. Sendo:  $t(35) = 7,520$ ;  $p = ,001$ . Sabe-se, que esse grau de significância foi decorrente dos avanços apresentados pelos grupos experimentais que receberam intervenções. Conforme indicado nas análises de variância (ANOVA), tem-se para o GE1xGC e para o GE2xGC:  $f(2,17) = 39,907$ ;  $p = ,001$ ; observando-se, assim, diferença significativa nos desempenhos do pós-teste entre os dois grupos experimentais e o grupo controle. Enquanto, entre os dois grupos experimentais, GE1xGE2, indica-se, que não houve diferença significativa entre os desempenhos dos dois grupos:  $f(2,17) = 39,907$ ;  $p = ,446$ .

Desse modo, percebe-se que os momentos interventivos propostos para os dois grupos experimentais, foram eficientes para que os estudantes demonstrassem melhoras de desempenho no pós-teste, quando comparado com o pré-teste. No entanto, acredita-se que mais tempo de mediação poderia levar a um desempenho ainda melhor, considerando que a partir de duas sessões de intervenção, os estudantes já demonstraram avanços em suas compreensões combinatórias. Vale ressaltar que questionamentos quanto às três dimensões propostas por Vergnaud (1996) – situações (*S*), invariantes (*I*) e representações simbólicas (*R*) – foram fundamentais para o acompanhamento dos participantes da presente pesquisa.

Assim, pode-se afirmar que os estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental são capazes de solucionar situações combinatórias em seus diferentes tipos, quando mediados, sem a necessidade do uso de operações formais.

É importante ressaltar, que além do papel fundamental da pesquisadora como mediadora, os materiais manipuláveis utilizados contribuíram no processo de ensino e aprendizagem dos participantes sobre os diferentes tipos de situações combinatórias – *arranjo, combinação, permutação, produto de medidas* – na compreensão dos invariantes – *escolha, ordenação* e o *esgotamento de possibilidades* – e de suas relações, como também, na representação das soluções de cada problema. Desse modo, percebe-se que as três dimensões tratadas por Vergnaud (1996) puderam ser trabalhadas junto ao material manipulável concreto (fichas) e ao material manipulável virtual (*software Pixton*©) propostos no presente estudo.

Mediante os resultados do grupo que utilizou as fichas, verifica-se que o material atendeu ao objetivo de auxiliar na compreensão combinatória dos estudantes. Os achados da presente pesquisa vão ao encontro dos resultados já apresentados por outros autores (PESSOA; SANTOS, 2015; FLORENCIO; GUIMARÃES, 2017) que também fizeram uso do material manipulável concreto para a solução de situações combinatórias nos anos iniciais da escolarização.

Na mesma direção, os resultados do grupo que manipulou o *software Pixton*© corroboram com os resultados da pesquisa de Gadelha, Vicente e Montenegro (2018), ao defenderem e concluírem que o recurso didático utilizado para a solução das situações combinatórias, mesmo o *software* não tendo sido criado para o trabalho com esse tipo de situação, é eficaz, principalmente fazendo uso das ferramentas disponibilizadas no *software* e, sobretudo, pela mediação promovida pela pesquisadora.

Em consonância às propostas curriculares - PCN (BRASIL, 1997), BNCC (BRASIL, 2018) e PCPE (PERNAMBUCO, 2019) - ao sugerirem o uso de recursos didáticos no ensino da Matemática nos anos iniciais, os dados analisados nas intervenções, e também no pós-teste desta pesquisa, mostraram que os materiais utilizados foram um aliado na aprendizagem dos participantes.

#### 5.4 Análises das respostas apresentadas no pré e no pós-teste

As análises anteriores estiveram voltadas a aspectos quantitativos da porcentagem de respostas alcançados pelos grupos durante o pré e o pós-teste. Esta seção é direcionada às análises qualitativas das respostas, tendo em vista que entre os tipos de acertos e de erros há estratégias implícitas, tipos de respostas e de concepções sobre as situações combinatórias. Desse modo, segue-se uma abordagem qualitativa dos tipos de respostas no pré-teste e dos avanços contemplados após as intervenções.

Pessoa e Borba (2009) chamam a atenção para a importância da análise dos tipos de respostas e estratégias dos estudantes, mesmo quando não apresentam *acertos totais*. Algumas resoluções são iniciadas corretamente, evidenciando compreensões iniciais de situações combinatórias. As análises qualitativas podem servir de subsídios para se compreender os principais motivos das dificuldades dos estudantes em esgotarem as possibilidades mesmo após as intervenções.

Embora seja reforçada a relevância na verificação das respostas e estratégias dos estudantes, Moro e Soares (2006) esclarecem não ser fácil classificá-las, tendo em vista os diferentes tipos de respostas que os estudantes podem apresentar para um mesmo problema. No estudo, as autoras classificam os níveis e subníveis de raciocínios combinatórios das soluções apresentadas por estudantes dos anos iniciais na solução de problemas de *produto de medidas*.

Antes de serem expostos os exemplos de cada categoria de resposta identificada no pré-teste e no pós-teste, se fez necessária a apresentação de três tabelas, as quais, detalham as frequências por questão (totalizando oito questões, duas de cada tipo de situação – *arranjo*, *combinação*, *permutação*, *produto de medidas*), por situação e por grupo. A organização de tais dados, foram estruturadas por grupo, facilitando a visualização e comparação das porcentagens dos testes.

Na Tabela 7 são apresentados os dados do GE1 (grupo experimental que manuseou o material manipulável concreto durante as intervenções).

Tabela 7: Porcentagens de acertos para cada questão do pré-teste e do pós-teste no GE1

CR	GE 1 (material manipulável concreto – fichas)							
	Pré-teste							
	A1	A2	C1	C2	P1	P2	PM1	PM2
I	83,3	83,3	91,7	41,7	83,3	66,7	75,0	75,0
API	16,7	16,7	8,3	16,7	8,3	33,3	---	8,3
APII	---	---	---	16,7	---	---	8,3	8,3
APIII	---	---	---	8,3	---	---	---	---
APIV	---	---	---	16,7	---	---	---	---
AT	---	---	---	---	8,3	---	16,7	8,3
CR	Pós-teste							
	A1	A2	C1	C2	P1	P2	PM1	PM2
I	25,0	8,3	25,0	16,7	8,3	16,7	16,7	8,3
API	8,3	16,7	8,3	---	---	16,7	---	8,3
APII	---	---	---	8,3	---	---	---	---
APIII	---	---	16,7	16,7	---	---	---	---
APIV	16,7	50,0	50,0	50,0	66,7	66,7	25,0	25,0
AT	50,0	25,0	---	8,3	25,0	---	58,3	58,3

CR, classificação de resposta; G1, grupo de fichas; G2, grupo do *software*; GC, grupo controle. A1, questão 1 de *arranjo*; A2, questão 2 de *arranjo*; C1, questão 1 de *combinação*; C2, questão 2 de *combinação*; P1, questão 1 de *permutação*; P2, questão 2 de *permutação*; PM1, questão 1 de *produto de medidas*; PM2, questão 2 de *produto de medidas*. I, *incorreta*; AP I, *acerto parcial I*; AP II, *acerto parcial II*; AP III, *acerto parcial III*; AT *acerto total*.

Fonte: A autora, 2019

O grau de dificuldade em cada questão variou entre os grupos. Porém, é verificado que no pré-teste a Questão 2 de *combinação*, de maneira geral, teve percentagens menores de respostas *incorretas*, quando comparada com as demais questões nessa mesma categoria de resposta. Isso ocorreu mesmo sendo um dos problemas que envolvia um total maior de possibilidades (10), mas não necessariamente gerou acertos totais.

Na Tabela 8 são apresentados os dados do GE2 (grupo experimental que manuseou o material manipulável virtual durante as intervenções).

Tabela 8: Porcentagens de acertos para cada questão do pré-teste e do pós-teste no GE2

CR	GE 2 (material manipulável virtual – Pixton©)							
	Pré-teste							
	A1	A2	C1	C2	P1	P2	PM1	PM2
I	66,7	83,3	83,3	50,0	75,0	41,7	50,0	75,0
API	8,3	---	---	16,7	25,0	58,3	16,7	16,7
APII	---	---	---	8,3	---	---	16,7	8,3
APIII	---	---	8,3	8,3	---	---	---	---
APIV	25,0	16,7	8,3	16,7	---	---	8,3	8,3
AT	---	---	---	---	---	---	8,3	---
CR	Pós-teste							
	A1	A2	C1	C2	P1	P2	PM1	PM2
I	16,7	---	8,3	8,3	---	8,3	8,3	8,3
API	---	---	---	---	---	25,0	---	---
APII	---	---	---	8,3	---	---	---	---
APIII	---	---	50,0	41,7	---	---	---	---
APIV	25,0	75,0	41,7	25,0	75,0	41,7	33,3	41,7
AT	58,3	25,0	---	16,7	25,0	25,0	58,3	50,0

CR, classificação de resposta; G1, grupo de fichas; G2, grupo do *software*; GC, grupo controle. A1, questão 1 de *arranjo*; A2, questão 2 de *arranjo*; C1, questão 1 de *combinação*; C2, questão 2 de *combinação*; P1, questão 1 de *permutação*; P2, questão 2 de *permutação*; PM1, questão 1 de *produto de medidas*; PM2, questão 2 de *produto de medidas*. I, *incorreta*; AP I, *acerto parcial I*; AP II, *acerto parcial II*; AP III, *acerto parcial III*; AT *acerto total*.

Fonte: A autora, 2019

Os dados do GC (grupo controle que não participou da intervenção) são apresentados na Tabela 9.

De modo geral, pode ser observado que após os momentos interventivos, os dois grupos experimentais obtiveram mais acertos, principalmente *acerto parcial IV* e *acerto total*, nos diferentes tipos de situações combinatórias e tiveram redução nas *incorretas*. Diferente do GC que permaneceu com a concentração de respostas em *incorretas* e *acerto parcial I* – quando se limita a uma possibilidade.

Tabela 9: Porcentagens de acertos para cada questão do pré-teste e do pós-teste no GC

CR	GC (sem intervenção)							
	Pré-teste							
	A1	A2	C1	C2	P1	P2	PM1	PM2
I	83,3	83,3	91,7	58,3	100	58,3	75,0	66,7
API	8,3	8,3	8,3	16,7	---	33,3	16,7	8,3
APII	---	---	---	16,7	---	---	---	8,3
APIII	---	---	---	8,3	---	---	---	
APIV	---	8,3	---	---	---	8,3	---	8,3
AT	8,3	---	---	---	---	---	8,3	8,3
CR	Pós-teste							
	A1	A2	C1	C2	P1	P2	PM1	PM2
I	75,0	91,7	58,3	75,0	75,0	58,3	41,7	58,3
API	8,3	8,3	25,0	---	16,7	33,3	25,0	16,7
APII	---	---	---	16,7	---	---	8,3	8,3
APIII	---	---	---	---	---	---	---	---
APIV	---	---	16,7	8,3	8,3	8,3	8,3	8,3
AT	16,7	---	---	---	---	---	16,7	8,3

CR, classificação de resposta; G1, grupo de fichas; G2, grupo do *software*; GC, grupo controle. A1, questão 1 de *arranjo*; A2, questão 2 de *arranjo*; C1, questão 1 de *combinação*; C2, questão 2 de *combinação*; P1, questão 1 de *permutação*; P2, questão 2 de *permutação*; PM1, questão 1 de *produto de medidas*; PM2, questão 2 de *produto de medidas*. I, *incorreta*; AP I, *acerto parcial I*; AP II, *acerto parcial II*; AP III, *acerto parcial III*; AT *acerto total*.

Fonte: A autora, 2019

A seguir são apresentados exemplos dos tipos de respostas das resoluções das situações combinatórias (*arranjos, combinações, permutações e produto de medidas*) dos participantes deste estudo.

#### 5.4.1 Resposta incorreta: escolha incorreta; ordenação incorreta; sem esgotamento das possibilidades

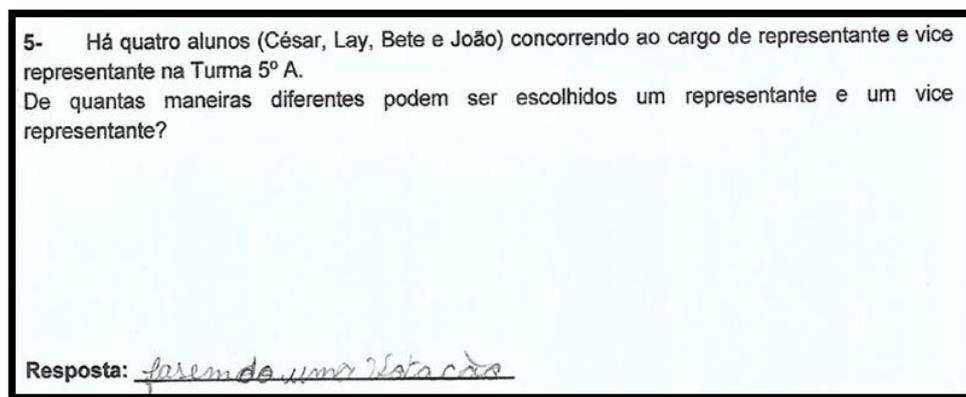
As respostas sem relação combinatória são comuns aos estudantes dos anos iniciais que ainda não assimilaram a lógica combinatória, conforme

evidenciado no estudo piloto e em estudos anteriores (GADELHA; BORBA, 2019; GADELHA; VICENTE; MONTENEGRO, 2018; PESSOA; BORBA, 2009).

No pré-teste, essa classificação de resposta foi frequente nos diferentes tipos de situações combinatórias, sendo, porém, mais presente em uma das questões de combinação e nas situações de *arranjo*, a exemplo da seguinte questão e resposta – *Há quatro alunos (César, Lay, Bete e Luan) concorrendo ao cargo de representante e vice representante. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos um representante e um vice representante? –.*

Dentre as respostas apresentadas pelos estudantes, a mais recorrente foi a ilustrada na Figura 22.

Figura 22: Resolução de um problema de *arranjo* com resposta *incorreta*, pelo estudante E5 (GE2 – *software*), no pré-teste



Resposta: *Fazendo uma votação.*  
Fonte: A autora, 2019

Para essa solução o estudante não demonstrou nenhuma relação combinatória, ou seja, não escolheu, não ordenou e principalmente, não esgotou as possibilidades. Logo, não houve a construção de possibilidades, mas, sim, o que é considerada, neste estudo, como solução dada a eventualidades do cotidiano. O estudante não considerou os nomes mencionados no enunciado para apresentar os possíveis representantes e vice-representantes, apenas citou uma forma dos cargos serem preenchidos, sugerindo uma votação.

Na Figura 23 é visto uma situação de *combinação* – *D. Marta levou seus quatro filhos (Bianca, Sabrina, Diego e Felipe) ao Parque Diversão e no brinquedo pula-pula só podem entrar três crianças por vez. De quantas maneiras diferentes três crianças podem brincar por vez no pula-pula? –*, na qual houve uma grande porcentagem de respostas *incorretas*. Pois, boa parte

dos estudantes desconsiderou a quantidade de elementos que deveriam ser agrupados por possibilidade, conforme solicitado no enunciado da questão. Além de terem proposto soluções sem fazer menção ao nome dos personagens.

Figura 23: Resolução de um problema de *combinação* com resposta *incorreta*, pelo estudante E2 (GE2 – *software*), no pré-teste

2- D. Marta levou seus quatro filhos (Bianca, Sabrina, Diego e Felipe) ao Parque Diversão e no brinquedo pula-pula só podem entrar três crianças por vez.  
De quantas maneiras diferentes três crianças podem brincar por vez no pula-pula?

Resposta: entra primeiro duas e depois mais uma.

Resposta: *Entra primeiro duas e depois mais uma.*

Fonte: A autora, 2019

Esse exemplo de resposta demonstra que os estudantes não relacionaram corretamente a *escolha* dos elementos, conforme explícito no enunciado, nas possibilidades apresentadas.

Em uma das situações de *permutação* – *Três irmãos (Igor, Léo, e Tina) querem se sentar nos três últimos lugares disponíveis no cinema. De quantas maneiras diferentes os três irmãos podem se sentar nos lugares disponíveis?*, a percentagem de respostas *incorretas* também foi elevada. Na Figura 24 é possível visualizar a solução proposta pelo estudante.

Figura 24: Resolução de um problema de *permutação* com resposta *incorreta*, pelo estudante E7 (GE2 – *software*), no pré-teste

3- Três irmãos (Igor, Léo, e Tina) querem se sentar nos três últimos lugares disponíveis no Cine Royal.  
De quantas maneiras diferentes os três irmãos podem se sentar nos lugares disponíveis?

Resposta: reserva três lugares

Resposta: *Reserva três lugares.*

Fonte: A autora, 2019

Os estudantes que responderam dessa forma se concentraram em propor sugestões de como garantir os assentos no cinema. São respostas próprias às estratégias utilizadas e/ou vistas no cotidiano. O estudante não compreendeu que o contexto do problema pede as diferentes maneiras de organizar os personagens nos três lugares que já estão disponíveis. Assim, não é evidenciado raciocínio combinatório nesse tipo de resposta.

No pós-teste houve redução das respostas *incorretas* pelos grupos experimentais nos diferentes tipos de situações, incluindo as mencionadas nos exemplos anteriores (*arranjo, combinação e permutação*). Portanto, essa categorização de resposta permaneceu frequente pelo grupo que não participou das intervenções (grupo controle). Nas Figuras 25 e 26, referente à resolução de um problema de *combinação* – *Para preparar a salada de frutas, Júlia precisa escolher três frutas das quatro opções: abacaxi, banana, laranja e mamão. De quantas e quais maneiras ela poderá escolher três diferentes frutas?* – é possível observar o equívoco na resposta de uma estudante.

No rascunho é verificado que antes de realizar a operação, a estudante desenhou algumas possibilidades, porém, apagou e optou em fazer uma multiplicação com os valores do enunciado provavelmente por serem valores fixos, total de frutas (4) e a quantidade a ser escolhida (3). No entanto, a estudante desconsiderou que a alternância na *ordenação* das frutas não geram possibilidades distintas. Mesmo que a operação respondesse à situação, ainda assim o resultado estaria incorreto, tendo em vista que  $4 \times 3$  resulta em 12.

Figura 25: Resolução do segundo problema de *combinação* com resposta *incorreta*, pelo estudante E9 (GE2 – *software*), no pós-teste

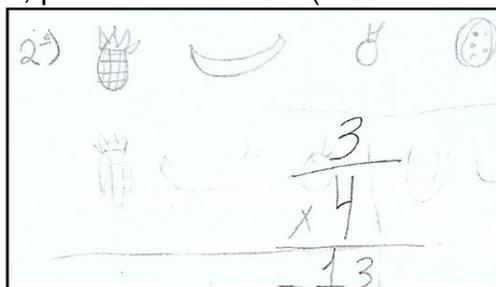
2- Para preparar a salada de frutas, Júlia precisa escolher três frutas das quatro opções: abacaxi, banana, laranja e mamão.  
De quantas e quais maneiras ela poderá escolher três diferentes frutas?

**Resposta:** 13 maneiras diferentes de escolher três diferentes frutas.

Resposta: 13 maneiras diferentes de escolher três diferentes frutas.

Fonte: A autora, 2019.

Figura 26: Rascunho da resolução de um problema de *combinação* com resposta *incorreta*, pelo estudante E9 (GE2 – *software*), no pós-teste



Resposta: 13 maneiras diferentes de escolher três diferentes frutas.  
Fonte: A autora, 2019

É válido destacar que em comparação às respostas do pré-teste, nas respostas do pós-teste têm implícito a compreensão de possibilidades e *escolha* dos elementos. No entanto, nos exemplos acima, mesmo sendo recortes do pós-teste de um mesmo estudante são vistos erros de diferentes naturezas. Na Figura 26 o estudante percebeu uma natureza multiplicativa para o problema, porém, na Figura 25 não é identificada essa mesma percepção de como resolver matematicamente. Acredita-se que o estudante esteja em processo de compreensão das propriedades multiplicativas.

Diferentemente do ocorrido nos grupos experimentais, os estudantes do grupo controle mantiveram as dificuldades refletidas nas respostas *incorretas* em todos os quatro tipos de situações combinatórias.

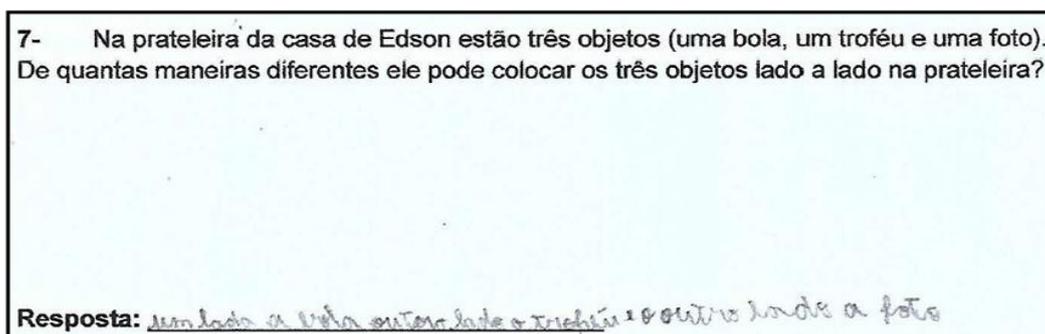
#### 5.4.2 Acerto parcial I: escolha adequada, mas limita-se a uma possibilidade

No cotidiano as crianças não são sempre estimuladas a pensarem nas suas diferentes possibilidades, além da dificuldade de pensar num plano hipotético. Desse modo, é esperado que inicialmente no contexto escolar seja apresentado apenas uma possibilidade como resposta nas situações combinatórias. No pré-teste, essa classificação de resposta – *acerto parcial I* -, esteve mais presente em um problema de *permutação*. Na Figura 27 pode ser observado um exemplo.

O estudante não percebe que o intuito da questão é que seja dito quais são as diferentes maneiras dos objetos serem organizados na prateleira. Desse modo, apresentou uma das maneiras como podem ser organizados, seguindo a mesma colocação do enunciado. A lógica utilizada pelos estudantes pode estar relacionada à organização de seus brinquedos, pois, no dia a dia,

difícilmente são estimulados a pensarem nas diferentes maneiras dos brinquedos serem postos, sendo suficiente estarem organizados.

Figura 27: Resolução de um problema de *permutação com acerto parcial I*, pelo estudante E25 (GE1 – fichas), no pré-teste



Resposta: *Em um lado a bola, ao lado o troféu e no outro lado a foto.*

Fonte: A autora, 2019

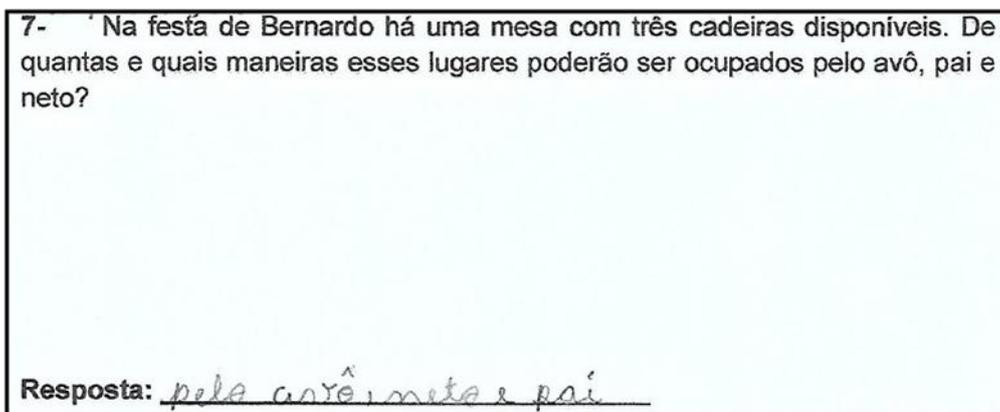
No entanto, é preciso considerar que a *escolha* dos elementos, nesta resposta, está adequada por todos terem sido considerados simultaneamente, porém, a falta de variação na *ordenação* dos elementos é um fator que impediu o esgotamento das possibilidades e outros modos dos elementos serem escolhidos. No entanto, é destacado um princípio de compreensão dos invariantes combinatórios nessa classificação de resposta.

A interação com situações combinatórias e o desenvolvimento deste raciocínio viabiliza a clareza das diversas possibilidades que podem ser construídas por um ou mais conjuntos de elementos, seja no contexto escolar ou no cotidiano. Desse modo, percebe-se a necessidade dos estudantes, desse ano de escolarização, serem levados a refletirem na resolução dessas situações.

No pós-teste, os estudantes dos grupos experimentais passaram a apresentar mais acertos. Desse modo, boa parte das respostas limitadas a uma possibilidade foram dadas pelo grupo controle, como exemplificadas na Figura 28. Dos poucos casos de *acerto parcial I* pelos grupos experimentais, boa parte ocorreu nas últimas questões do pós-teste pelos mesmos estudantes que tiveram acertos totais ou se aproximaram do esgotamento de possibilidades nas questões anteriores, provavelmente por serem vencidos pelo cansaço embora o contexto de todas as questões tenha sido pensado para o público participante, ou seja, a partir de situações do dia a dia.

Acredita-se que os estudantes estejam em processo de apropriação das propriedades combinatórias e, conforme são confrontados com as diferentes situações, mais aptos estarão de solucionarem corretamente esses tipos de problemas. Defende-se, com isso, que mais desenvolvidos estarão em seus raciocínios hipotético-dedutivos.

Figura 28: Resolução de um problema de *permutação com acerto parcial I*, pelo estudante E16 (GE2 – *software*), no pós-teste



Resposta: Poderão ser ocupados pelo avô, neto e o pai.  
Fonte: A autora, 2019

Diferente dos grupos experimentais, mesmo os estudantes do grupo controle apresentando um princípio de raciocínio combinatório em algumas questões, como a exemplificada acima, nos problemas anteriores foram apresentadas respostas sem relação combinatória.

#### 5.4.3 Acertos parciais II: escolha adequada, mas apresenta número de possibilidades limitado ao número de elementos

No pré-teste, essa classificação de resposta foi mais identificada nas situações de *combinação* e *produto de medidas*, nas quais, a ordenação dos elementos não gera novas possibilidades. Os participantes escolhem uma possibilidade com cada elemento e deixam o elemento que não consegue agrupar de fora, ou seja, sobrando.

A Figura 29 ilustra a resolução de um estudante que seguiu este raciocínio, o qual não considerou que um mesmo elemento sendo agrupado com outro elemento – de outro conjunto, para as situações de *produto de medidas* - resultaria em uma nova possibilidade. Porém é notado que há

compreensão sobre a ideia de possibilidades por não se deter a uma possibilidade única como resposta.

Figura 29: Resolução de um problema de *produto de medidas* com resposta de *acerto parcial II*, pelo estudante E24 (GE2 – *software*), no pré-teste

4- Na loja Quero Mais estão disponíveis três tipos de botas (marrom, preta e vinho) e dois tipos de gorros (cinza e rosa).  
De quantas maneiras diferentes pode-se comprar uma bota e um gorro?

Resposta: marrom e cinza preto e rosa e um fica sobrando

Resposta: Marrom e cinza, preto e rosa e um fica sobrando.

Fonte: A autora, 2019

Nesse problema – *Na loja Quero Mais estão disponíveis três tipos de botas (marrom, preta e vinho) e dois tipos de gorros (cinza e rosa). De quantas maneiras diferentes pode-se comprar uma bota e um gorro?* – é visto que o estudante solucionou escolhendo um elemento de cada conjunto – botas e gorros. No entanto, devido ao número de botas (3) não ser igual ao número de gorros (2), um elemento sobrou sem ser agrupado. Isso porque o estudante teve dificuldade de perceber que a modificação de um dos elementos do agrupamento viabiliza possibilidades diferentes das construídas, ou seja, *bota marrom e gorro cinza; bota marrom e gorro rosa*, são duas maneiras possíveis e distintas.

Após as intervenções, esta classificação de resposta quase não foi identificada nas resoluções de nenhum estudante dos grupos experimentais. Desse modo, os estudantes passaram a compreender que independente do número de elementos na questão, é possível serem reorganizados em diferentes possibilidades de acordo com as propriedades de cada tipo de situação.

Os poucos *acertos parciais II* foram apresentados nos mesmos tipos de situações apenas pelo grupo controle e por um estudante do grupo que manuseou o *software*. Como explicado anteriormente, os momentos interventivos foram um princípio para o processo de aprendizagem da

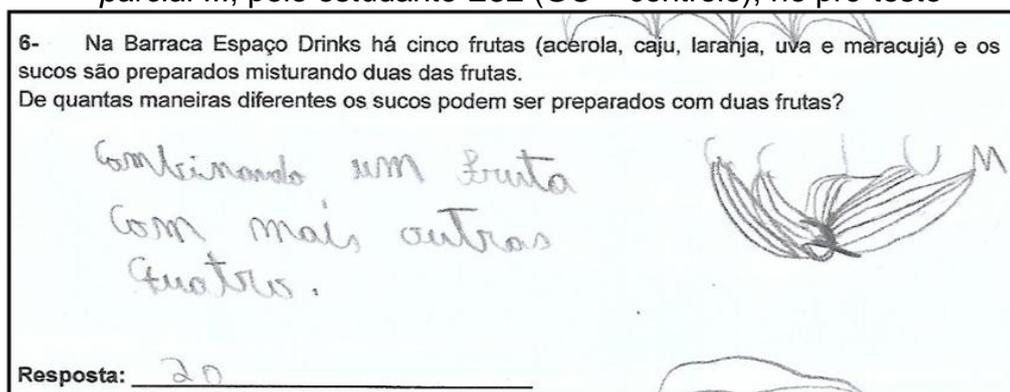
Combinatória e esse é um processo que perdura durante toda escolarização básica. Por isso a necessidade deste conteúdo ser trabalhado ao longo dos anos escolares desde a Educação Infantil, a partir dos erros e aprendizagens dos estudantes.

#### 5.4.4 Acerto parcial III: escolha adequada, ordenação incorreta

Esta classificação de resposta foi a menos frequente no pré-teste. Como já mencionado, a relação dos invariantes combinatórios de *escolha* e *ordenação*, variam para cada tipo de situação combinatória. Na construção dos agrupamentos pode passar despercebido ou o estudante ainda não ter compreendido as situações em que a alternância da *ordenação* dos elementos não indica diferentes possibilidades, como é o caso dos problemas de *combinação* e *produto de medidas*, ou as situações em que a *ordenação* gera diferentes possibilidades, *arranjo* e *permutação*.

Na Figura 30 é possível observar que a estudante ultrapassou as possibilidades necessárias em uma situação de *combinação*.

Figura 30: Resolução de um problema de *combinação* com resposta de *acerto parcial III*, pelo estudante E32 (GC – controle), no pré-teste



Resposta: Combinando uma fruta com as outras quatro frutas; 20 possibilidades.

Fonte: A autora, 2019

Dada a questão, – Na barraca Espaço Drinks há cinco frutas (acerola, caju, laranja, limão e maracujá) e os sucos são preparados misturando duas das frutas. De quantas maneiras diferentes os sucos podem ser preparados com duas frutas? – é possível verificar que a estudante entende que um mesmo elemento pode ser agrupado várias vezes com outros elementos, porém, não percebeu que conforme um determinado elemento (acerola) é

agrupado com algum outro (caju), os mesmos não poderão ser reconsiderados, ainda que seja numa *ordenação* inversa (caju e acerola) porque neste caso seria uma repetição do mesmo caso, ou seja, não são possibilidades diferentes. Logo, os sucos podem ser preparados apenas por 10 maneiras diferentes – *(acerola e caju)*; *(acerola e laranja)*; *(acerola e uva)*; *(acerola e maracujá)*; *(caju e laranja)*; *(caju e uva)*; *(caju e maracujá)*; *(laranja e uva)*; *(laranja e maracujá)*; *(uva e maracujá)*.

Em alguns momentos acontece de uma possibilidade repetida passar despercebida pelo estudante. Mas neste caso acima, foi constatado que a relação de *ordenação* para esse tipo de situação não foi compreendida pela estudante, pois, houve repetição de todas as possibilidades. Mesmo não sendo um invariante explícito no enunciado da questão, poderia ser entendido através do contexto do problema, tendo em vista que, no preparo do suco as frutas serão misturadas.

#### *5.4.5 Acertos parciais IV: escolha adequada ou correta e ordenação correta, esgotamento das possibilidades incorreto.*

Para essa classificação de resposta o estudante mostra compreensão dos invariantes – *escolha* e *ordenação* – mas erra no esgotamento das possibilidades, seja porque não esgotou todas as possibilidades ou por não distinguir a quantidade de possibilidades construída do número de elementos utilizados, mesmo demonstrando ter esgotado as possibilidades.

A principal hipótese para os casos em que o estudante não esgotou as possibilidades, mesmo demonstrando entender a relação dos invariantes, é a falta de sistematização. Quando o estudante não segue uma lógica de organização há maiores chances de algumas possibilidades passarem despercebidas, principalmente quando envolve um maior número de possibilidades.

Outro fator a ser considerado é que os estudantes que não estão familiarizados com a resolução de problemas combinatórios no contexto escolar, não estão preocupados em contemplar todas as maneiras possíveis na construção dos agrupamentos, sendo assim, apresentam algumas das possibilidades como resposta suficiente. No entanto, provavelmente seriam

capazes de esgotar todas as possibilidades, se instigados. Na Figura 31 é ilustrada a resolução de um estudante que não esgotou as possibilidades.

Figura 31: Resolução de um problema de *combinação* com resposta de *acertos parciais IV*, pelo estudante E28 (GE2 – *software*), no pré-teste

6- Na Barraca Espaço Drinks há cinco frutas (acerola, caju, laranja, uva e maracujá) e os sucos são preparados misturando duas das frutas.  
De quantas maneiras diferentes os sucos podem ser preparados com duas frutas?

Resposta: 1- acerola e laranja 2- uva e maracujá  
3- caju e acerola 4- maracujá e laranja

Resposta: 1- acerola e laranja; 2- uva e maracujá; 3- caju e acerola; 4- maracujá e acerola.  
Fonte: A autora, 2019

O estudante percebe que uma mesma fruta já agrupada (acerola e laranja) pode ser reagrupada a outra fruta (caju e acerola) e em nenhum momento repetiu a mesma possibilidade. Mesmo apresentando tais compreensões é necessária uma apropriação mais aprofundada sobre as propriedades da Combinatória para que o estudante seja capaz de esgotar mesmo sem sistematizar, conforme os resultados do pós-teste mais adiante.

No pós-teste, essa classificação de resposta – *acertos parciais IV* – foi uma das mais frequentes. Conforme os estudantes foram se apropriando dos invariantes combinatórios, a partir das intervenções, passaram a errar menos e a se aproximar do esgotamento das possibilidades. Na Figura 32 é ilustrado tal avanço.

Figura 32: Resolução de um problema de *permutação* com *acertos parciais IV*, pelo estudante E20 (GE1 – *fichas*), no pós-teste

3- No porta-escovas de dentes da Suzy, há suporte para até três escovas de dentes (azul, lilás e vermelha).  
De quantas e quais maneiras diferentes ela pode organizar as três escovas de dentes?

vermelha	azul	lilás
azul	lilás	vermelha
lilás	azul	vermelha
azul	vermelha	lilás
vermelha	lilás	azul

Resposta: 5 maneiras

Resposta: vermelha, azul e lilás; azul, lilás e vermelha; lilás, azul e vermelha; azul, vermelha e lilás; lilás, vermelha e azul.

Fonte: A autora, 2019

Das seis possibilidades, cinco foram contempladas, atendendo às relações de *escolha* e *ordenação*, conforme o tipo de problema. Acredita-se que ao longo da exploração das situações combinatórias, o estudante mais se aproximará do esgotamento das possibilidades e poderá desenvolver a estratégia de sistematizar as respostas, de modo que facilite a visualização de todas as possibilidades. Como já esperado, essa classificação de resposta foi muito mais evidenciada pelos grupos experimentais.

No que diz respeito à incompreensão de possibilidades, é exemplificada a resposta na Figura 33. Um estudante que mesmo tendo agrupado todos os elementos corretamente, na contagem das possibilidades construídas somou os elementos, como pode ser observado.

Figura 33: Resolução de um problema de *produto de medidas com acertos parciais IV*, pelo estudante E2 (GE1 – fichas), no pós-teste

4- Em um final de semana, Luiza foi para casa de sua tia e em sua mochila levou três blusas (branca, cinza e rosa) e dois shorts (preto e azul). De quantas e quais maneiras diferentes ela poderá se vestir com uma blusa e um short?

Blusa | Branca | Cinza | rosa | Branca | cinza | rosa  
Shorts | Preto | Preto | azul | azul | azul

12 maneiras diferentes dela se vestir com 3 blusas e 2 shorts

Resposta: blusa branca e short preto; blusa cinza e short preto; blusa rosa e short preto; blusa branca e short azul; blusa cinza e short azul; blusa rosa e short azul.

Fonte: A autora, 2019

No entanto, é possível notar que mesmo realizando a soma dos elementos, o estudante demonstrou ter se atrapalhado na contagem, pois registrou total 12, enquanto na imagem são contabilizados 14 (número de elementos agrupados nas seis possibilidades). Porém, é preciso considerar que o estudante apresentou melhoras no desempenho ao relacionar corretamente os invariantes de *escolha* e *ordenação*, além do cuidado em listar por conjunto (blusas e saias).

E2 organizou sistematicamente as possibilidades, mas não as distinguiu dos elementos agrupados ao registrar o total de possibilidades, conforme verificado na explicação da resposta: *12 maneiras diferentes dela se vestir com 3 blusas e 2 shorts*. No entanto, há fortes indícios de avanços na compreensão dos invariantes de *escolha* e *ordenação*.

#### 5.4.6 Acertos totais: escolha correta, ordenação correta e esgotamento das possibilidades

Os *acertos totais* são contemplados quando os invariantes combinatórios são considerados de acordo com o tipo de situação. Logo, ao *escolher* e ordenar corretamente, todas as possibilidades são apresentadas. Esse nível de compreensão pouco foi identificado no pré-teste. Dos 36 estudantes participantes, apenas 11,1% (4) conseguiu acertar a questão esgotando todas as possibilidades. Grande parte – 60% – dessa classificação de resposta – *acertos totais* – foi identificada nas situações de *produto de medidas*, conforme o exemplo na Figura 34.

Figura 34: Resolução de um problema de *produto de medidas* com resposta de *acertos totais*, pelo estudante E22 (GE1 – fichas), no pré-teste

4- Na loja Quero Mais estão disponíveis três tipos de botas (marrom, preta e vinho) e dois tipos de gorros (cinza e rosa).  
De quantas maneiras diferentes pode-se comprar uma bota e um gorro?

1 Marrom	2 cinza
1 Preta	2 cinza
1 vinho	2 cinza
1 Marrom	2 Rosa
1 Preta	2 Rosa
1 vinho	2 Rosa

Resposta: 6 Maneiras

Resposta: bota marrom e gorro cinza; bota preta e gorro cinza; bota vinho e gorro cinza; bota marrom e gorro rosa; bota preta e gorro rosa; bota vinho e gorro rosa.

Fonte: A autora, 2019

Mediante a questão – *Na loja Quero Mais estão disponíveis três tipos de botas (marrom, preta e vinho) e dois tipos de gorros (cinza e rosa). De quantas maneiras diferentes pode-se comprar uma bota e um gorro?* –, a estudante agrupou todas as opções de botas com uma opção de gorro e em seguida listou todas as botas novamente, com a outra opção de gorro. A estudante enumerou os elementos distinguindo-os entre os dois conjuntos, 1 para botas e 2 para gorros, uma maneira de organização não verificada nos testes dos demais estudantes.

No entanto, as demais resoluções da turma apontam que ainda não havia total compreensão sobre os problemas combinatórios, o que também foi

comprovado nas análises estatísticas na qual a diferença desta turma no pré-teste com as demais turmas não foi significativa.

Com exceção do grupo controle, os estudantes dos grupos experimentais apresentaram, no pós-teste, acertos totais nos diferentes tipos de situações combinatórias, conforme verificado nas Tabelas 7, 8 e 9. Observou-se, também, a maior porcentagem de acertos nas situações de *produto de medidas*, mesmo com a grandeza numérica 12. Logo, percebe-se que foi mais fácil agrupar na situação com mais de um conjunto (como se dá em *produtos de medidas*), do que nas situações com um conjunto único (como ocorre em *arranjos, combinações e permutações*).

Dado um problema de *produto de medidas* - *Pati ganhou quatro vestidos (azul, cinza, roxo e preto), e três tipos de calçados (chinelo, sapato e bota). De quantas e quais maneiras diferentes ela poderá se arrumar com um vestido e um tipo de calçado?* – última situação do pós-teste – o mesmo estudante que havia zerado no pré-teste, sistematizou e esgotou as 12 possibilidades no pós-teste, como pode ser observado nas Figuras 35 e 36.

O estudante – participante dos momentos interventivos - organizou cada cor de vestido com as três opções de calçados e enumerou as possibilidades. Nesta resolução fica explícito que o estudante compreendeu quais elementos escolher por agrupamento e a relação da *ordenação* para esse tipo de situação, ou seja, a alternância na *ordenação* dos elementos não leva há possibilidades diferentes. Desse modo, ao relacionar as propriedades da situação esgotou as possibilidades.

Figura 35: Resolução de um problema de *produto de medidas* com *acertos totais*, pelo estudante E13 (GE1 – fichas), no pré-teste

<p>8- Pati ganhou quatro vestidos (azul, cinza, roxo e preto), e três tipos de calçados (chinelo, sapato e bota). De quantas e quais maneiras diferentes ela poderá se arrumar com um vestido e um tipo de calçado?</p> <p>Resposta: <u>12 formas diferentes</u></p>
--

Resposta: 12 formas diferentes.

Fonte: A autora, 2019

Figura 36: Rascunho da resolução de um problema de *produto de medidas* com *acertos totais*, pelo estudante E13 (GE1 – fichas), no pós-teste

8.	vestidos	calçados	
	azul	chinelo	1
	azul	sapato	2
	azul	bota	3
	cinza	chinelo	4
	cinza	sapato	5
	cinza	bota	6
	roxo	chinelo	7
	roxo	sapato	8
	roxo	bota	9
	preto	chinelo	10
	preto	sapato	11
	preto	bota	12

Resposta: vestido azul e chinelo; vestido azul e sapato; vestido azul e bota; vestido cinza e chinelo; vestido cinza e sapato; vestido cinza e bota; vestido roxo e chinelo; vestido roxo e sapato; vestido roxo e bota; vestido preto e chinelo; vestido preto e sapato; vestido preto e bota.

Fonte: A autora, 2019

De maneira geral, as análises qualitativas das respostas apresentadas no pré e pós-teste, indicaram que houve avanços nas compreensões sobre os problemas combinatórios, de modo que os estudantes dos grupos experimentais passaram a contemplar mais *acertos parciais* (III e IV) e *acertos totais*. Isso porque os invariantes, de *escolha* e de *ordenação*, foram relacionados corretamente ao tipo de situação e as possibilidades se aproximaram do total ou foram esgotadas. Vale ressaltar que a melhora no desempenho foi verificada nas resoluções dos participantes das intervenções, tanto os que manusearam o material concreto, quanto os que manipularam o material virtual.

Desse modo, percebe-se que os dois momentos interventivos para cada dupla, foi significativo para o processo de construção dos conceitos, levando em consideração a proposta de resolver diferentes tipos de situações e contemplar as propriedades de cada uma por meio do uso das fichas e do *software*. Esse resultado corrobora com Vergnaud (1996), ao ressaltar que trabalhar a variedade de situações, das propriedades das situações e de representações simbólicas são fundamentais e para a conceitualização. “Estudar o desenvolvimento e o funcionamento de um conceito, no decurso de aprendizagem ou aquando da sua utilização, é necessariamente considerar estes três planos ao mesmo tempo.” (VERGNAUD, 1996, p. 166).

Na próxima seção o enfoque é na variedade de representações simbólicas utilizadas pelos participantes no pré e no pós-teste e sua repercussão na classificação de respostas, como também, as possíveis relações com as representações utilizadas nas intervenções – fichas e *software*.

### 5.5 Análises das representações simbólicas no pré e no pós-teste

Na Tabela 10, são apresentadas as representações utilizadas no pré-teste e sua frequência para cada classificação de resposta.

Tabela 10: Porcentagens das representações simbólicas utilizadas no pré-teste em função dos tipos de respostas dadas

Representações simbólicas	Pré-teste					
	I	AP I	AP II	AP III	AP IV	AT
Em branco	1,1	---	---	---	---	---
Desenhos	0,3	---	---	---	---	---
Diagramas	---	---	---	0,3	0,6	0,9
Listagem	10,6	9,1	3,9	0,9	4,5	1,3
Listagem e desenhos	---	0,3	---	---	---	---
Operações aritméticas	2,6	---	---	---	---	0,3
Operações aritméticas e resposta do senso comum	4,6	---	---	---	---	---
Quadro e listagem	---	---	---	---	---	---
Quadro, listagem e operações	---	---	---	---	---	---
Quantidade de possibilidades	17,7	---	---	---	---	---
Frase de senso comum	38,3	2,7	---	---	---	---

RS, Representações Simbólicas. I, *incorreta*; AP I, *acerto parcial I*; AP II, *acerto parcial II*; AP III, *acerto parcial III*; AP IV, *acertos parciais IV*; AT *acertos totais*.

Fonte: A autora, 2019

Em estudo anterior (GADELHA; VICENTE; MONTENEGRO, 2008) foi verificado que com o aprimoramento do raciocínio combinatório, os estudantes passaram a responder corretamente, utilizando representações simbólicas mais adequadas aos variados tipos de situações e organizando os dados do enunciado, sem necessariamente se aterem à representação utilizada nas intervenções. Isso porque ao se apropriarem de propriedades das situações combinatórias, os estudantes podem utilizar representações que julgam melhor de serem usadas.

*Frase de senso comum* foi a representação mais utilizada no pré-teste, no entanto, a utilização dessa representação resultou em respostas classificadas como *incorretas*. Esse resultado foi decorrente à falta de familiaridade dos estudantes com as situações combinatórias, tendo em vista que, ao invés de apresentarem possibilidades, registraram explicações de como o problema poderia ser solucionado com base nas vivências do cotidiano. Esse tipo de representação não deve ser confundida com a listagem, pois nesse caso os estudantes não listaram possibilidades e, sim, elaboraram explicações para possíveis soluções. Tal afirmação é observada no seguinte exemplo na Figura 37.

Figura 37: *Frase de senso comum* como representação simbólica, utilizada pela estudante E15 (GC – controle), no pré-teste

3- Três irmãos (Igor, Léo, e Tina) querem se sentar nos três últimos lugares disponíveis no Cine Royal.  
De quantas maneiras diferentes os três irmãos podem se sentar nos lugares disponíveis?

*chegando por último ou*

Resposta: comprando o ingresso mais cedo

Resposta: *Chegando por último ou comprando o ingresso mais cedo.*

Fonte: A autora, 2019

Em respostas como esta percebe-se que o estudante não compreendeu a pergunta da questão ao propor opções de solução que não respondem ao problema. Na *frase de senso comum*, mais do que um valor como resposta, o estudante tenta argumentar como contornar o que foi entendido como

problema e para isso considera as práticas do dia a dia. Na questão acima o estudante se preocupou em mencionar maneiras de como conseguir os assentos no cinema e não se atenta em dizer como os três personagens poderiam ser organizados nos lugares que já estão disponíveis.

Esse modo de representar não foi eficaz para a resolução dos problemas combinatórios pelos participantes desta pesquisa. Nos casos identificados no pós-teste, boa parte pelo grupo controle como veremos mais adiante, se manteve nas respostas enquadradas como *incorretas*, ou seja, os estudantes do 5º ano não obtiveram acertos através de *frases de senso comum*, pois não contemplavam as diferentes maneiras solicitadas. A redução do uso dessa representação no pós-teste dos participantes dos grupos experimentais é justificada pela preferência por outras formas de representar a resolução da questão mediante a compreensão do problema.

Outra representação utilizada no pré-teste que não apresentou coerência ao problema foi a *quantidade de possibilidades*. Os estudantes escreveram o número total de possibilidades como resposta à questão, mas não justificaram e nem explicitaram como chegaram ao resultado, conforme o exemplo na Figura 38.

Figura 38: *Quantidade de possibilidades* como representação simbólica, pelo estudante E6 (GE1 – fichas), no pré-teste

<p>2- D. Marta levou seus quatro filhos (Bianca, Sabrina, Diego e Felipe) ao Parque Diversão e no brinquedo pula-pula só podem entrar três crianças por vez. De quantas maneiras diferentes três crianças podem brincar por vez no pula-pula?</p> <p>Resposta: <u>16 maneiras</u></p>
---

Fonte: A autora, 2019

Dos valores escritos como resposta, dificilmente algum esteve correto. Subtende-se que os números foram escolhidos aleatoriamente, variando entre números mais baixos a números mais elevados. Logo, foram consideradas como *incorretas*, mesmo nas questões em que coincidiu com o resultado da questão, por ser entendido que o estudante não apresentou procedimento que

justificasse sua resposta na questão em pauta ou em outras nas quais apresentou quantidades incorretas de possibilidades.

As *operações aritméticas* também foram utilizadas no pré-teste, representação também verificada no estudo de Pessoa e Santos (2015), e, na maioria das vezes, sendo sem relação com a situação, por meio de adições, subtrações, multiplicações e divisões. Para realizar o procedimento, os estudantes utilizaram os valores mencionados nos enunciados, mas nem sempre correspondiam aos dados quantitativos da questão.

Na Figura 39 é possível observar que a estudante utilizou uma *operação aritmética* inadequada, não sendo eficaz para solucionar o problema. Para a realização da *operação*, E16 somou três valores. Destes, apenas dois correspondiam às quantidades mencionadas no enunciado da questão. O número 3 correspondia à quantidade de botas e o número 2 à quantidade de gorros, mas não se sabe a procedência do número 1 utilizado na operação:  $3 + 2 + 1 = 6$ .

Figura 39: *Operações aritméticas* como representação simbólica, pela estudante E16 (GC – controle), no pré-teste

4- Na loja Quero Mais estão disponíveis três tipos de botas (marrom, preta e vinho) e dois tipos de gorros (cinza e rosa).  
De quantas maneiras diferentes pode-se comprar uma bota e um gorro?

$$\begin{array}{r} 3 \\ + 2 \\ \hline 6 \end{array}$$

Resposta: Podem ser vendidas 6 botas.

Resposta: Podem ser vendidas 6 botas.

Fonte: A autora, 2019

Pela descrição no espaço da resposta é verificado que a estudante não havia compreendido o contexto do problema, pois na situação foram solicitadas as diferentes maneiras de se comprar uma bota e um gorro a partir das opções mencionadas. Porém, após obter o resultado, a estudante respondeu: “Podem ser vendidas seis botas.”, resposta que não responde a situação.

Um caso diferenciado foi o da estudante que utilizou dois tipos de operações (multiplicação e adição) para solucionar uma situação de *produto de*

*medidas*. A lógica pensada pela estudante foi considerada adequada, pois além de encontrar a resposta exata é possível perceber que houve compreensão sobre o contexto do problema. Nas demais situações foram realizadas outro tipo de representação considerada eficaz para qualquer tipo de situação combinatória de grandeza numérica reduzida – a *listagem*. Sendo assim, é visto que a representação simbólica utilizada por essa estudante esteve associada à sua compreensão sobre o problema desde o pré-teste.

Na Figura 40 é ilustrada a resolução mencionada. É visto que E22 realizou três multiplicações em busca da quantidade de possibilidades de sucos para os três tamanhos de copos. Em seguida, somou os três resultados, chegando à resposta final. Este foi o único caso de operação adequada no pré-teste. Para as demais situações do teste, E22 construiu *listagens*, provavelmente por entender que a multiplicação não responderia à questão. No entanto, não havia total compreensão dos invariantes de *escolha* e *ordenação* nas *listagens* construídas.

Figura 40: Operações como representação simbólica, pela estudante E22 (GE1 – fichas), no pré-teste

8- Na Lanchonete Oba-Oba há quatro sabores de suco (graviola, laranja, morango e uva) os quais são servidos em copos de três tamanhos (pequeno, médio e grande). De quantas maneiras diferentes pode-se tomar um suco de um sabor em um tamanho de copo?

Pequeno	Médio	grande	
$\begin{array}{r} 4 \\ \times 1 \\ \hline 4 \end{array}$	$\begin{array}{r} 4 \\ \times 1 \\ \hline 4 \end{array}$	$\begin{array}{r} 4 \\ \times 1 \\ \hline 4 \end{array}$	$\begin{array}{r} 4 \\ +4 \\ +4 \\ \hline 12 \end{array}$

Resposta: 12 maneiras

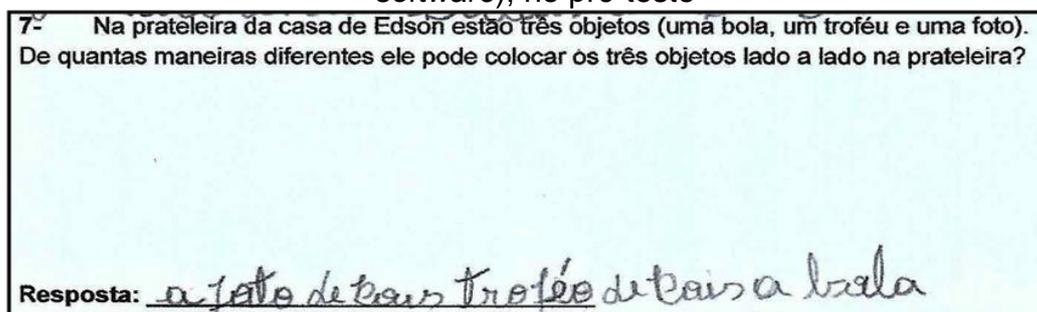
Resposta: 12 maneiras.

Fonte: A autora, 2019

Diferente das representações mencionadas anteriormente, a *listagem* foi uma representação que, além de ser bastante utilizada no pré-teste, resultou em diferentes níveis de acertos. Essa é uma representação recorrente em estudos anteriores (AZEVEDO, 2013; PESSOA; SANTOS, 2015; GADELHA, 2019) pelos estudantes dessa etapa de escolarização nos testes de sondagem. Mesmo às vezes estando limitada a uma possibilidade, conforme mostra a Tabela 4 anteriormente, mas é evidenciado um princípio de raciocínio combinatório.

Entende-se que essa forma de representar seja espontânea, desenvolvida a partir de conhecimentos anteriores, não necessariamente mediante o ensino de Combinatória. A seguir, é ilustrado na Figura 41 esse modo de representar soluções combinatórias, na qual a estudante listou apenas uma possibilidade.

Figura 41: Listagem como representação simbólica, pela estudante E24 (GE2 – *software*), no pré-teste



Resposta: A foto, depois o troféu e depois a bola.

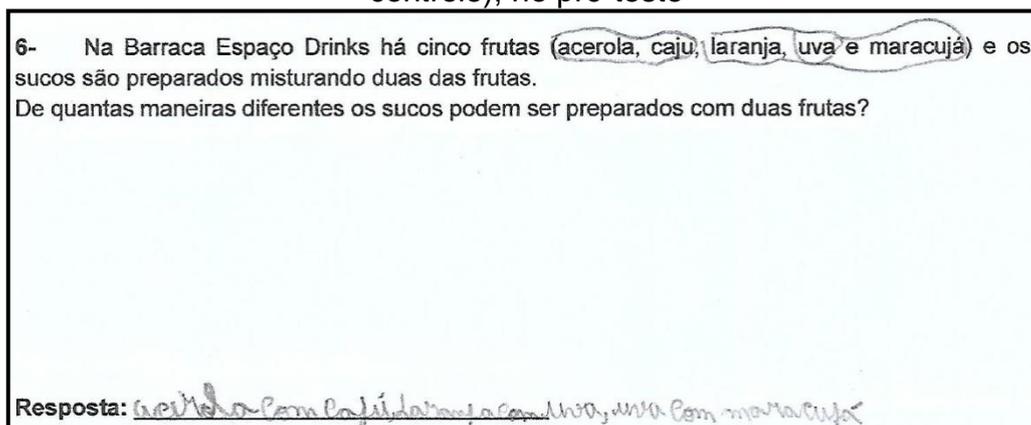
Fonte: A autora, 2019

No exemplo acima é visto o modo mais recorrente no pré-teste, no qual a possibilidade é listada pelos nomes dos objetos. Conforme o estudante avança em suas compreensões combinatórias, mais aprimoradas são as representações das soluções. Esse avanço é observado no modo como alguns estudantes construíram as listagens no pós-teste.

Na resolução por *diagramas* é notado que o uso dessa representação está associado ao entendimento sobre agrupamentos e por isso são construídas ramificações que interligam os elementos, como se pode observar na Figura 42.

Os estudantes que demonstraram esse raciocínio no pré-teste contemplaram *acertos parciais* e *totais*. Na resposta exemplificada é visto que o estudante considerou que a *ordenação* das frutas neste problema não gera possibilidades diferentes, mas não esgotou as possibilidades, pois não explicitou todas as maneiras diferentes de agrupar os elementos. Sendo assim, é destacada a importância da compreensão sobre as relações combinatórias – nesse caso, o esgotamento de possibilidades –, pois, não basta utilizar uma representação simbólica que responda às situações combinatórias, é necessário compreender a relação de cada invariante para cada tipo de situação. Para isso, é necessário o enfrentamento de diferentes tipos de situações, conforme argumentado por Vergnaud (1996).

Figura 42: Diagrama como representação simbólica, pela estudante E32 (GC – controle), no pré-teste



Resposta: acerola com caju, laranja com uva e uva com maracujá.

Fonte: A autora, 2019

Por fim, como já descrito anteriormente, após o pré-teste os participantes dos grupos experimentais manusearam recursos didáticos – fichas (material manipulável concreto) e *software* (material manipulável virtual) – sendo diferentes na forma de acesso, mas com o mesmo objetivo de manipulação pelo estudante. Em seguida, todos os participantes da presente pesquisa realizaram o pós-teste com lápis e papel.

A seguir, na Tabela 11, são apresentadas as frequências de representações simbólicas usadas do pós-teste.

Observou-se no estudo de Azevedo (2013) que o grupo que precisou ressignificar a representação utilizada na intervenção (*árvore*) para o lápis e papel, no pós-teste, teve maior dificuldade, pois mesmo não tendo diferença significativa para o outro grupo experimental (lápis e papel), não apresentou desempenho significativo quando comparado com os grupos controle no pós-teste posterior. Desse modo, no presente estudo foram pensadas representações diferenciadas dos testes para as intervenções, de modo que, ambos os grupos experimentais precisassem repensar o modo de representar simbolicamente, no lápis e papel, suas soluções no pós-teste.

No pós-teste foi verificado as mesmas representações simbólicas utilizadas no pré-teste sendo acrescida a representação: *quadro*, *listagem* e *operações aritméticas*, que envolveu três opções de representações para a solução do problema e confirmação do resultado. É possível observar na Tabela 11 que as maiores porcentagens passaram a ser mais frequentes nos

*acertos parciais* e *totais*. Também é destacado que as representações simbólicas mais eficazes no pré-teste foram as mesmas no pós-teste.

Tabela 11: Porcentagem das representações simbólicas utilizadas no pós-teste em função dos tipos de respostas dadas

Representações simbólicas	Pós-teste					
	I	AP I	AP II	AP III	AP IV	AT
Em branco	0,3	---	---	---	---	---
Desenhos	0,6	---	---	0,6	---	0,9
Diagramas	---	---	---	---	---	1,9
Listagem	6,9	1,7	7,6	4,3	25	22
Listagem e desenhos	0,6	0,6	---	0,3	4,6	2,7
Operações aritméticas	4,3	---	---	---	---	---
Operações aritméticas e frase de senso comum	2,3	0,3	---	---	---	---
Quadro e listagem	---	---	---	---	---	0,3
Quadro, listagem e operações aritméticas	---	---	---	---	---	0,3
Quantidade de possibilidades	4,9	---	---	---	---	---
Frase de senso comum	6,7	0,3	---	---	---	---

RS: Representações Simbólicas. I: *incorreta*; AP I: *acerto parcial I*; AP II: *acerto parcial II*; AP III: *acerto parcial III*; AP IV: *acerto parcial IV*; AT: *acerto total*.

Fonte: A autora, 2019

A porcentagem de *listagens* (no pós-teste) se destacou das demais representações simbólicas, e foi a mais frequente nos *acertos parciais IV*, ou seja, se aproximando dos *acertos totais*, no qual é demonstrado total compreensão sobre o problema. As representações utilizadas nas intervenções podem ter contribuído para que os estudantes mantivessem o uso dessa representação, tendo em vista o modo como os agrupamentos são formados (nas fichas e no *software*) remetendo à ideia de *listagem*, mesmo tendo espaço suficiente para outras formas de representação. Na Figura 43 é demonstrada uma solução por meio da *listagem*.

Figura 43: Listagem como representação simbólica, pela estudante E21 (GE1 – fichas), no pós-teste

8- Pati ganhou quatro vestidos (azul, cinza, roxo e preto), e três tipos de calçados (chinelos, sapato e bota).  
De quantas e quais maneiras diferentes ela poderá se arrumar com um vestido e um tipo de calçado?

Resposta: 12 maneiras

A, C	C, B	P, B
A, S	R, C	
A, B	R, S	
C, C	R, B	
C, S	P, C	
	P, S	

Fonte: A autora, 2019

Os estudantes demonstraram ter facilidade em apresentar suas compreensões combinatórias por meio da *listagem*, principalmente no pós-teste. No exemplo acima é visto que as possibilidades foram listadas apenas pela letra inicial dos elementos, como também, a resposta foi sistematizada, mesmo não sendo uma estratégia trabalhada nas intervenções. O estudante apresentou uma resposta sistemática na qual primeiro enunciou as opções com o vestido azul, depois com o cinza, com o roxo e com o preto. Desse modo, é percebido que outras noções são construídas pelos estudantes além das questões trabalhadas diretamente nos momentos interventivos.

Alguns estudantes tiveram o cuidado de organizar as possibilidades em grades, e, em um determinado caso, o estudante também numerou as possibilidades, evitando que a quantidade de elementos agrupados fosse confundida com o número de possibilidades. Esse modo de organizar não teve relação com o recurso didático utilizado, considerando o exemplo da Figura 44 de uma estudante que manipulou as fichas. Logo, é evidenciado que a organização foi pensada e desenvolvida pelos estudantes, servindo como um facilitador na visualização dos agrupamentos e na relação de cada invariante – *escolha, ordenação, esgotamento de possibilidades* – com a situação em questão.

Figura 44: Listagem como representação simbólica, pela estudante E13 (GE1 – fichas), no pós-teste

3. 3 escovas de dentes

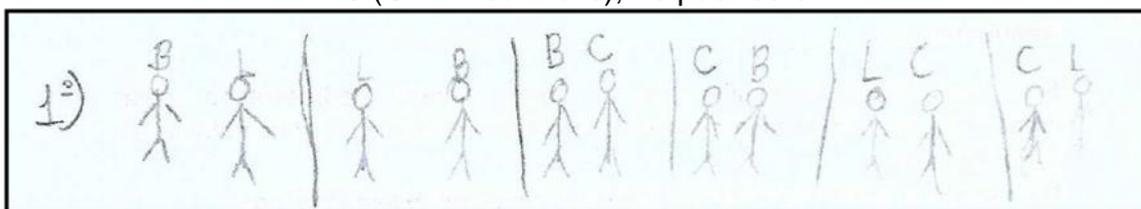
azul	lilás	vermelha	1
azul	vermelha	lilás	2
lilás	azul	vermelha	3
lilás	vermelha	azul	4
vermelha	lilás	azul	5
vermelha	azul	lilás	6

Situação de *permutação* - No porta-escovas de dentes da Suzy, há suporte para até três escovas de dentes (azul, lilás e vermelha). De quantas e quais maneiras diferentes ela pode organizar as três escovas de dentes?

Fonte: A autora, 2019

Outros estudantes utilizaram a *listagem* para distinguir os elementos desenhados na solução, inserindo a letra inicial correspondente ao personagem/objeto, ou seja, a *listagem* também se manteve presente junto a outras representações simbólicas para que o problema fosse solucionado, como pode ser observado na Figura 45.

Figura 45: Listagem e desenhos como representação simbólica, pela estudante E9 (GE2 – software), no pós-teste



Situação de *arranjo* - Na Competição Show de Calouros três candidatos (Lia, Breno e Caio) estão na final. De quantas e quais maneiras diferentes se pode ter o primeiro e o segundo lugares?

Fonte: A autora, 2019

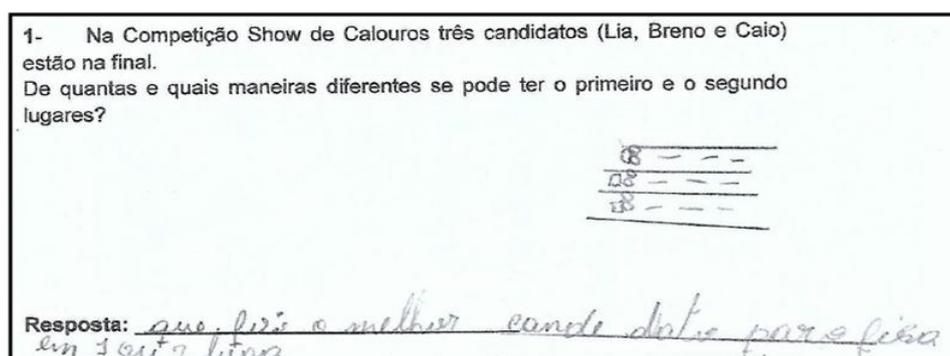
Neste caso, a *listagem* seria suficiente para solucionar a questão. No entanto, o desenho foi o ponto de partida e a listagem serviu como complemento para o resultado. A escolha do *desenho* na representação simbólica pode estar interligada ao manuseio dos materiais manipuláveis, pois tanto o *software* quanto as fichas possuem como principal ferramenta a ilustração dos elementos. Porém, o desenho não foi uma representação muito utilizada no pós-teste pelos grupos experimentais, logo, entende-se que os

estudantes não aprenderam um método de resolução, mas sim, compreenderam melhor relações combinatórias.

Mesmo a *listagem* ganhando destaque na representação das soluções do pré-teste, a *frase de senso comum* também foi utilizada no pós-teste. No entanto, não foi registrada com a mesma frequência, mas continuou resultando em respostas classificadas como *incorretas*. Tendo em vista que nesse tipo de representação as respostas não possuíam relação combinatória, a *frase de senso comum* permaneceu sendo apresentada pelos estudantes do grupo controle que não compreenderam as propriedades combinatórias. Na Figura 46 é demonstrado como o estudante buscou solucionar o problema.

Além da *frase de senso comum*, a estudante fez um desenho sobre o contexto do problema. No entanto, esse desenho não foi considerado como representação simbólica para solucionar o problema. No desenho foram representados os três corredores mencionados no enunciado, mas na frase, em resposta, a estudante demonstra ter percebido que no problema são questionados os dois primeiros lugares. Apesar dessa percepção, a condição proposta como solução não responde ao problema por não estar relacionada às possibilidades solicitadas.

Figura 46: *Frase de senso comum* como representação simbólica, pela estudante E12 (GC – controle), no pós-teste



Resposta: Quem foi o melhor candidato para ficar em 1º ou 2º lugar.  
Fonte: A autora, 2019

Logo, entende-se que a resolução por *frase de senso comum* não foi uma representação que levou a acertos pelos estudantes desta pesquisa, considerando a necessidade de generalização das possibilidades que pode ser mais difícil para os estudantes dessa etapa de escolarização que estão no processo de desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Os estudantes que passaram a relacionar as propriedades combinatórias aos diferentes tipos de situações optaram pelas representações simbólicas que permitem a construção dos agrupamentos, evidenciando a *escolha*, *ordenação* e o *esgotamento das possibilidades*. Uma delas foi a representação, *quadro*, *listagem* e *operações aritméticas*, acrescida no pós-teste, que resultou em acerto total, como pode ser observado na Figura 47.

Figura 47: *Quadro*, *listagem* e *operações aritméticas* como representação simbólica, pela estudante E17 (GE2 – *software*), no pós-teste

4- Em um final de semana, Luiza foi para casa de sua tia e em sua mochila levou três blusas (branca, cinza e rosa) e dois shorts (preto e azul). De quantas e quais maneiras diferentes ela poderá se vestir com uma blusa e um short?

$2 + 2 + 2 = 6$   
 $3 + 3 = 6$

$2 + 2 + 2 = 6$   
 $3 + 3 = 6$

	P	A
B	BP	BA
C	CP	CA
R	RP	RA

R: 6 maneiras (branca e preto, branca e azul, cinza e preto, cinza e azul, rosa e preto, rosa e azul)

Resposta: 6 maneiras, branca e preto; branca e azul; cinza e preto; cinza e azul; rosa e preto; rosa e azul.

Figura editada para a legibilidade da resposta dada pelo estudante.

Fonte: A autora, 2019

O estudante solucionou por meio do quadro, agrupando o elemento da linha com o das colunas. Também realizou operações de adição e, por fim, expôs o valor total de possibilidades e as listou. O participante demonstrou ter percebido que há uma variedade de representações simbólicas que levam ao resultado. Tal percepção se faz necessária para que o estudante compreenda a lógica das situações combinatórias, o que auxiliará na construção das operações formais, incluindo-se o princípio fundamental da contagem – a serem tratados em etapas futuras de escolarização.

De modo geral, é visto que a melhora no desempenho dos grupos experimentais esteve relacionada às compreensões combinatórias apreendidas nos momentos interventivos e à representação simbólica utilizada. Isso porque algumas representações mostram serem mais eficazes para a resolução das situações combinatórias do que outras.

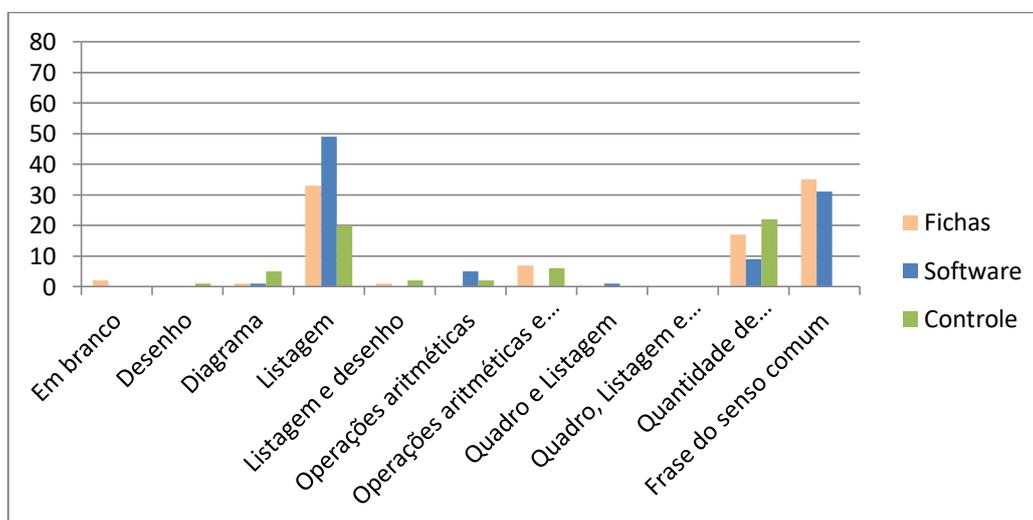
Como já evidenciado, a *listagem* foi a representação que mais proporcionou acertos e a mais utilizada no pós-teste. Subentende-se que os direcionamentos dados nas intervenções e os recursos didáticos utilizados – fichas e *software* – estejam atrelados a esses resultados. No entanto, os

estudantes não se detiveram à estrutura dos materiais manipuláveis, que tanto no concreto como no virtual possuem como característica principal a ilustração.

No estudo de Montenegro e Borba (2018) foi concluído, também, que a *listagem*, uma das representações trabalhadas, é uma boa opção para o ensino e o desenvolvimento inicial do raciocínio combinatório, corroborando com os resultados do presente estudo. Os resultados do pós-teste, também confirmam a perspectiva de Vergnaud (1986) sobre a apreensão de conceitos por meio das representações simbólicas, como também, para a verificação das compreensões conceituais dos estudantes.

No Gráfico 2 é possível verificar detalhadamente o número de vezes que cada representação foi utilizada por cada grupo. A representação: *quantidade de possibilidades* foi bastante apresentada pelos grupos experimentais e pelo grupo controle, provavelmente, pelo mesmo motivo já justificado anteriormente. Por terem a necessidade de apresentar alguma solução, tais participantes se detiveram à resposta final, ou seja, apresentando apenas o total de maneiras diferentes, sem explicitá-las. Por essa razão, para os enunciados do pós-teste foi acrescido o seguinte questionamento: De quantas e quais maneiras diferentes... Com o objetivo de verificar se o estudante havia refletido sobre as possibilidades e registrado apenas o número total ou se a resposta foi sem nenhum fundamento, só para não deixar o teste em branco.

Gráfico 2: Quantitativo de representações simbólicas utilizadas por cada grupo no pré-teste.

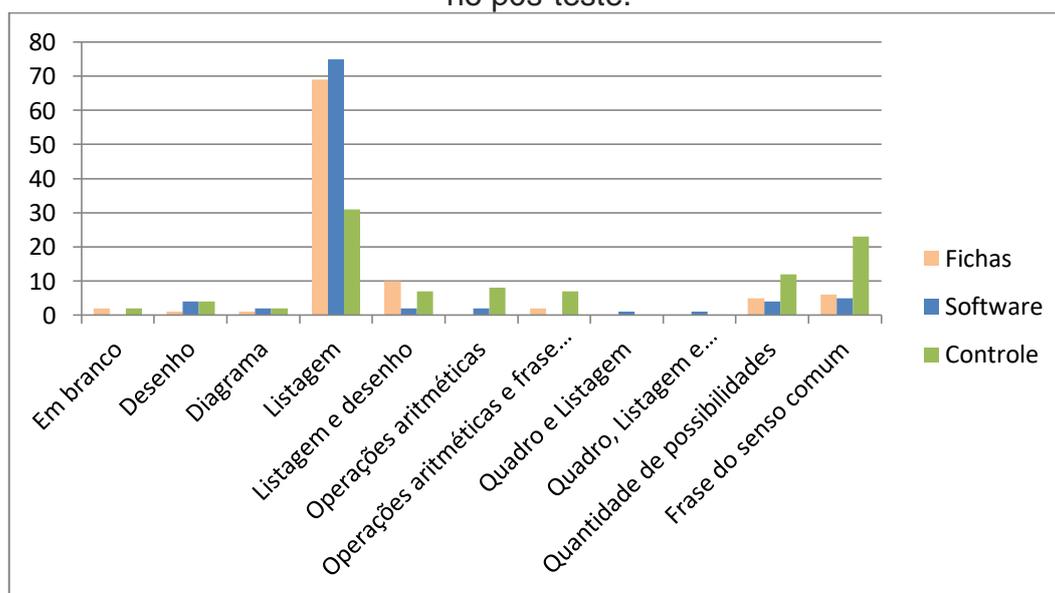


Em branco; desenho; diagrama; listagem; listagem e desenho; operações aritméticas; operações aritméticas e frase do senso comum; quadro e listagem; quadro, listagem e operações aritméticas; quantidade de possibilidades; frase do senso comum.

Fonte: A autora, 2019

A seguir, no Gráfico 3, é possível observar e analisar detalhadamente quais dessas representações permaneceram sendo utilizadas por cada grupo no pós-teste, considerando se houve diferença nas representações apresentadas pelos grupos que participaram da intervenção, para o grupo controle. É possível também, identificar se as representações que mais resultaram em respostas sem relação combinatória (*quantidade de possibilidades e frase de senso comum*), no pré-teste, permaneceram sendo usadas pelos grupos experimentais.

Gráfico 3: Quantitativo de representações simbólicas utilizadas por cada grupo no pós-teste.



Em branco; desenho; diagrama; listagem; listagem e desenho; operações aritméticas; operações aritméticas e frase do senso comum; quadro e listagem; quadro, listagem e operações aritméticas; quantidade de possibilidades; frase do senso comum.

Fonte: A autora, 2019

Na Figura 48 é exemplificada a resposta de uma estudante, do grupo controle, no pós-teste, o qual representou todas as soluções do pré-teste com a *quantidade de possibilidades*.

É possível ver que com o acréscimo nos enunciados do pós-teste, houve a tentativa de complementar a resposta ao ser utilizado o *desenho* e *frase de senso comum*, porém, o problema permaneceu sem ser solucionado. Desse modo, entende-se que solicitar a explicitação das diferentes maneiras (no enunciado das questões do pós-teste), instigou os estudantes a

complementarem suas respostas, como também, confirmou que o total de possibilidades apresentadas no pré-teste, havia sido um número aleatório.

Figura 48: *Frase de senso comum* como representação simbólica, pela estudante E31 (GC – controle), no pós-teste

1- Na Competição Show de Calouros três candidatos (Lia, Breno e Caio) estão na final.  
De quantas e quais maneiras diferentes se pode ter o primeiro e o segundo lugares?



Resposta: diminuir

Resposta: Diminuir.  
Fonte: A autora, 2019

Mesmo a *frase de senso comum* permanecendo utilizada no pós-teste é visto que houve uma redução considerável no uso dessa representação e da *quantidade de possibilidades*. Isso porque os participantes dos grupos experimentais passaram a recorrer às representações eficazes para a solução das situações trabalhadas. Mesmo sendo um quantitativo baixo quando comparado com o do Gráfico anterior (2), verifica-se que alguns estudantes permaneceram apresentando tais representações (*quantidade de possibilidades e frases do senso comum*) após as intervenções.

O motivo de alguns estudantes do grupo experimental ter demonstrado apenas a quantidade de possibilidades em uma das questões do pós-teste, é desconhecida. Uma estudante apresentou essa representação na primeira questão e, desse modo, não há como justificar que tenha sido decorrente do cansaço. Como também, não se pode dizer que a estudante não tenha compreendido as propriedades combinatórias ao longo das intervenções, considerando, que, nas demais questões ela utilizou outras representações (a exemplo da *listagem*) e contemplou *acertos parciais* e *acerto total* de modo sistematizado. As Figuras 49 e 50 mostram o caso retratado.

Figura 49: *Quantidade de possibilidades* como representação simbólica, pela estudante E8 (GE1 – fichas), no pós-teste

1- Na Competição Show de Calouros três candidatos (Lia, Breno e Caio) estão na final.  
De quantas e quais maneiras diferentes se pode ter o primeiro e o segundo lugares?

Resposta: 3 maneiras diferentes

Fonte: A autora, 2019

Figura 50: *Listagem* como representação simbólica, pela estudante E8 (GE1 – fichas), no pós-teste

4- Em um final de semana, Luiza foi para casa de sua tia e em sua mochila levou três blusas (branca, cinza e rosa) e dois shorts (preto e azul).  
De quantas e quais maneiras diferentes ela poderá se vestir com uma blusa e um short?

BRANCA BRANCA CINZA CINZA ROSA ROSA  
AZUL AZUL PRETO PRETO AZUL AZUL

Resposta: 6 maneiras diferentes

Fonte: A autora, 2019

Pela resposta observada na Figura 49, percebe-se que além de não explicitar as possibilidades, a estudante não contemplou o número de possibilidades que responde ao problema, ou seja, seis possibilidades. Enquanto na Figura 50, a mesma estudante listou as possibilidades por blusa e esgotou as seis diferentes maneiras, obtendo *acerto total*.

Desse modo, é enfatizado mais uma vez que o período interventivo foi curto para que os participantes se apropriassem mais plenamente do conteúdo trabalhado. Percebe-se, então, que a construção do conhecimento de conteúdos complexos é demorada e requer um mais longo período de tempo para que sejam explorados e aprofundados.

Em relação às demais representações simbólicas no Gráfico 3, nota-se que a concentração esteve no uso da *listagem* pelos grupos experimentais, ultrapassando o dobro do número de vezes que foi utilizada pelo grupo controle. Esse resultado, já justificado, se deu pela percepção, dos estudantes

de início de escolarização, de que essa seja uma representação que melhor corresponda à solução dos tipos de situações combinatórias – *arranjo*, *combinação*, *permutação* e *produto de medidas*. Essa representação é desenvolvida pelos estudantes através de seus conhecimentos prévios, sem necessariamente ter sido ensinada por um mediador. Diferentemente, árvores de possibilidades e operações formais requerem instrução para sua aprendizagem. As representações *desenho*, e *listagem e desenho* passaram a ser mais utilizadas no pós-teste. Talvez como estratégia de organização, por serem representações simbólicas que facilitam a visualização dos agrupamentos construídos, principalmente quando envolve um número reduzido de possibilidades. Diferentemente do pré-teste, quando não havia compreensão dos invariantes combinatórios por boa parte dos participantes da presente pesquisa, logo, não se pensava em estratégias de organização.

Vale destacar, que nem todos os estudantes que utilizaram *diagramas* para solucionar o pré-teste foram os que permaneceram usando essa representação no pós-teste. E mesmo os que continuaram usando, deram preferência a outras representações. Por exemplo, a estudante E32 do grupo controle usou apenas uma vez o diagrama no pós-teste (e obteve *acerto total*) e nas demais questões passou a apresentar a *quantidade de possibilidades* incorretamente.

No entanto, nas Figuras 51 e 52 são apresentados recortes do pós-teste de um caso diferente do anterior.

E9, estudante (do grupo fichas) que não havia respondido por diagramas no pré-teste, passou a representá-lo no pós-teste, obtendo *acerto total*. Na folha de rascunho, a estudante inseriu as letras iniciais referente às quatro cores de vestidos (azul, cinza, roxo e preto) e desenhou os três tipos de calçados (sandália, sapato e bota) mencionados no enunciado do problema, e fez ligações entre os elementos dos dois conjuntos. Em seguida, contabilizou e registrou a resposta final (Figura 51). Essa era uma das questões com o maior número de possibilidades (total 12), mesmo assim, E9 não se atrapalhou na construção do *diagrama* e nem na contagem das possibilidades.

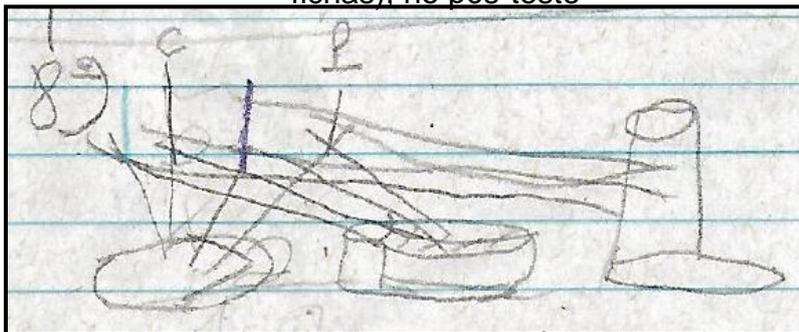
Figura 51: Quantidade de possibilidades a partir da representação simbólica *diagrama*, pela estudante E9 (GE1 – fichas), no pós-teste

8- Pati ganhou quatro vestidos (azul, cinza, roxo e preto), e três tipos de calçados (chinelo, sapato e bota).  
De quantas e quais maneiras diferentes ela poderá se arrumar com um vestido e um tipo de calçado?

Resposta: 12 maneiras

Fonte: A autora, 2019

Figura 52: *Diagrama* como representação simbólica, pela estudante E9 (GE1 – fichas), no pós-teste



Fonte: A autora, 2019

Desse modo, concluí-se a apresentação e descrição de análises quantitativas e qualitativas neste capítulo, tendo como propósito atender os objetivos delineados na presente pesquisa. Em resposta ao objetivo geral, verificou-se que o material manipulável concreto (fichas) e o material manipulável virtual (Pixton©) auxiliaram significativamente na compreensão combinatória dos participantes da intervenção.

A seguir, nas considerações finais serão retomados os principais resultados analisados e discutidos neste capítulo. Também, são destacadas as implicações educacionais decorrentes do presente estudo e indicadas questões de futuras investigações.

## 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante dos dados apresentados e analisados, conclui-se que os estudantes dos grupos experimentais participantes dos momentos interventivos, ocorridos em dois dias distintos com cada dupla desenvolveram seus raciocínios combinatórios. Foram evidenciadas mais amplas compreensões dos invariantes – *escolha*, *ordenação* e o *esgotamento de possibilidades* – durante e após o manuseio dos materiais – concreto (fichas) e virtual (*software Pixton*©).

Inicialmente, no pré-teste, foi verificado que boa parte dos 36 estudantes teve dificuldade em solucionar as situações propostas e de apresentar respostas com relação combinatória. Nesse teste de sondagem inicial foi bastante elevada a frequência de respostas categorizadas como *incorretas*.

Os dois grupos experimentais e o grupo controle foram constituídos com médias equiparadas para serem comparados após o pós-teste. Mediante as análises estatísticas no SPSS, percebeu-se haver diferença significativa, no teste final, entre os resultados dos grupos experimentais e do grupo controle que não participou da intervenção. Mesmo os participantes do grupo controle tendo obtido algum acréscimo em suas pontuações no pós-teste, não foi suficiente para ser tido como estatisticamente significativo e muito se distanciou dos grupos experimentais que avançaram consideravelmente.

Há, portanto, fortes evidências de que os momentos interventivos surtiram grandes efeitos nos desempenhos dos estudantes dos grupos experimentais.

As médias do grupo experimental que manuseou o material concreto (fichas) e do grupo experimental que utilizou o material virtual (*software Pixton*©) não tiveram diferenças significativas. Esse resultado indica que as fichas cumpriram bem o papel de material concreto servindo como um recurso facilitador ao contemplar a finalidade para qual foi pensada e o *software Pixton*© atendeu ao objetivo de material manipulável virtual, segundo a perspectiva de Moyer, Bolyard e Spikell (2002) sobre ser semelhante ao concreto e se distinguir na forma de acesso, como também, por sua característica dinâmica que viabilizou espaço para o usuário interagir. Essa conclusão tem em vista que não foram observadas dificuldades no manuseio

dos recursos (fichas e *software*) e considerando-se que com a mesma proposta de mediação, tanto os avanços quantitativos quanto os qualitativos foram semelhantes nos dois grupos experimentais.

É importante ressaltar que mesmo os estudantes que utilizaram o Pixton© tendo o trabalho a mais de organizar as ilustrações correspondentes aos elementos dos enunciados das questões para, em seguida, formar os agrupamentos, esgotando as possibilidades, diferente dos que manusearam as fichas que já as receberam com as ilustrações correspondentes ao problema, os que manusearam o *software* não tiveram dificuldades em se apropriar das relações combinatórias e demonstraram entusiasmo durante o manuseio.

Outro fator importante foi perceber que o uso de uma forma de representação para os grupos experimentais na intervenção e outra forma diferente (lápiz e papel) nos testes, não gerou diferença no desempenho dos grupos experimentais, pois a média foi quase a mesma para os dois grupos – GE1 e GE2. Portanto, percebe-se que ambos os grupos foram capazes de usar, no pós-teste, uma forma diferente de representação simbólica da que usaram nos momentos interventivos. Evidenciando que não aprenderam uma forma de representar, mas passaram a ter uma melhor compreensão dos invariantes das situações combinatórias e demonstraram um modo mais eficiente no uso da *listagem*, também utilizada no pré-teste.

No presente estudo concluiu-se, portanto, que os diferentes meios – concreto e virtual – de representar os agrupamentos dos elementos foi um aspecto positivo para a aprendizagem combinatória.

Destaca-se também, que as perguntas norteadoras feitas pela pesquisadora durante os momentos interventivos, a partir das dificuldades de cada dupla, foram fundamentais para que os estudantes percebessem e atentassem para as relações de *escolha* e de *ordenação* para cada situação combinatória – *arranjo*, *combinação*, *permutação* e *produto de medidas* – e para contemplarem o *esgotamento das possibilidades*.

É importante enfatizar que os recursos didáticos por si só não contemplariam os objetivos de ensino e aprendizagens almejados. Conforme as descrições dos momentos interventivos, percebeu-se a necessidade inicial da pesquisadora para instruir alguns estudantes no manuseio tanto das fichas como do *software* Pixton©. Observou-se que nenhum desses materiais se

mostrou autoexplicativo para a solução de situações combinatórias e nem para a compreensão das propriedades envolvidas. Portanto, é ratificado junto aos documentos curriculares – PCN (BRASIL, 1997), BNCC (BRASIL, 2017), PCPE (PERNAMBUCO, 2018) – que a proposta dos recursos didáticos é o de auxiliar e facilitar a compreensão dos estudantes, carecendo da intervenção do professor e da interação entre os estudantes.

As fichas e o *software*, a partir da visualização da ilustração concreta e virtual, bem como a mediação da pesquisadora, por meio dos questionamentos realizados, auxiliaram os estudantes a compreenderem as relações dos invariantes combinatórios. Por meio dessas formas de representação e da mediação da pesquisadora, após realizar a *escolha* dos elementos a serem agrupados, os participantes conseguiam refletir em quais casos a alternância da *ordenação* dos elementos resultava em novas possibilidades, assim como, os casos em que as possibilidades haviam sido repetidas e as desfaziam.

Em relação aos diferentes tipos de situações – *arranjo*, *combinação*, *permutação* e *produto de medidas*, verificou-se que no pré-teste não houve diferenças significativas de desempenho para nenhuma das situações combinatórias dentre os grupos. O GE1 (fichas) apresentou mais dificuldade nas duas questões de *arranjo*, diferente do GE2 e o GC, que mesmo não tendo média tão baixa quanto o GE1 nesse tipo de situação, tiveram as médias mais baixas em *permutação*. Tais dificuldades foram decorrentes de interpretações incorretas nas duas questões do teste em ambas as situações mencionadas (*arranjo* e *permutação*). O total de possibilidades não foi um fator de dificuldade, mas sim, a relação de *escolha* e *ordenação*. Na primeira questão de *arranjo* boa parte dos estudantes errou na *escolha* dos elementos por não considerar/perceber que eram solicitados apenas os dois primeiros colocados da competição. Na segunda questão, se detiveram a soluções do senso comum para a definição dos representantes. Nas situações de *permutação*, os elementos não foram reordenados, ou seja, os estudantes não perceberam que a *ordenação* geraria possibilidades diferentes.

Já no pós-teste, os grupos experimentais apresentaram avanços significativos nos quatro tipos de situações, sem diferença significativa entre eles (GE1xGE2). sendo a maior média em *produto de medidas* para os dois grupos. Porém, a melhora no desempenho foi bem distribuída entre as

situações – *arranjo, combinação, permutação e produto de medidas* –, ou seja, os estudantes passaram a relacionar melhor os invariantes. O GE2 também demonstrou melhoras na situação que anteriormente tinha dificuldades – *permutação*. Como esperado, o GC não avançou e continuou com baixo desempenho nas quatro situações, obtendo resultados melhores em *produto de medidas*, mas sem ser estatisticamente significativa a diferença de desempenho.

A classificação de respostas teve como parâmetro avaliar e pontuar a provável compreensão dos estudantes sobre os invariantes combinatórios. No pós-teste foi visto que a concentração percentual do GE1 e do GE2 esteve nas duas últimas categorias de respostas, *acerto parcial IV – escolha correta ou adequada e ordenação correta, esgotamento das possibilidades* incorreto – e em *acerto total – escolha correta, ordenação correta e esgotamento das possibilidades*. Isso revela que, mesmo com o curto período de intervenção, os estudantes avançaram em suas compreensões e provavelmente teriam avançado mais se explorassem as situações combinatórias por mais tempo. Salienta-se também, que, mesmo sendo complexo, o raciocínio combinatório pode ser estimulado quando trabalhado ao longo dos anos de escolarização.

Diferentemente, o GC permaneceu, no pós-teste, com a concentração de respostas *incorretas – escolha incorreta; ordenação incorreta; sem esgotamento das possibilidades e acerto parcial I – escolha adequada*, mas limita-se a uma possibilidade. Evidencia-se, desse modo, incompreensões sobre os invariantes combinatórios, assim como os três grupos haviam demonstrado no pré-teste. Do pouquíssimo acréscimo obtido de acertos pelo GC, não houve avanços significativo, e essa pequena percentagem de melhoria no teste final, foi apresentada pelos os estudantes que já demonstravam certa compreensão anteriormente.

Tais análises sobre as compreensões em cada tipo de situação e sobre os respectivos invariantes foram realizadas a partir das representações simbólicas registradas pelos participantes nos testes. No pré-teste foi notado uma grande variedade de representações, porém, a *listagem* e a *frase de senso comum* foram as mais utilizadas. Verificou-se que mesmo os estudantes fazendo uso da listagem, a qual é adequada para solucionar situações combinatórias, a incompreensão dos problemas e a dissociação dos

invariantes resultaram em respostas categorizadas como *incorretas*. Concluiu-se também que as frases de senso comum tendo como base as vivências do dia a dia não foram eficientes para a obtenção de acertos.

Passados os momentos interventivos, os grupos experimentais optaram em utilizar, em boa parte das questões do pós-teste, a *listagem* e contemplaram muito mais acertos do que erros. Isso porque passaram a compreender melhor as situações e notaram que essa forma de responder (através da *listagem*) respondia a todas as situações-problemas e era um meio mais organizado de verificarem a *escolha*, a *ordenação* e o *esgotamento das possibilidades*. Alguns estudantes dos grupos experimentais apresentaram *frases de senso comum*, mas além de ter sido em poucos casos, nas demais questões obtiveram acertos. Portanto, conclui-se que o contato com o conteúdo combinatório por mais tempo, com uso de eficientes recursos, mediação e representações simbólicas, pode levar as crianças a aprimorarem sua maneira de solucionar problemas da Combinatória.

Alguns estudantes desenvolveram a estratégia de sistematização das respostas, durante e após os momentos interventivos, mesmo não sendo algo ensinado e nem demonstrado durante a mediação da pesquisadora. Entende-se que a escolha da representação simbólica além de ter sido decorrente do conhecimento adquirido, também foi uma estratégia de organização. Essa afirmação foi evidenciada a partir da produção dos estudantes que agruparam as possibilidades em *quadros* e as numeraram, e os que listaram a partir da letra inicial do nome dos elementos.

Destaca-se, que os estudantes que manusearam o material concreto (fichas) e o material manipulável virtual (*software Pixton*©) não se detiveram à representação ilustrativa para responder ao pós-teste. Houve certo aumento no uso de desenhos, do pré-teste para o pós-teste, mas permaneceu sendo muito distante do número de vezes que a *listagem* foi utilizada.

Acrescenta-se, ainda, que, a *frase de senso comum* foi a representação mais utilizada pelo grupo controle no pré-teste e permaneceu sendo demonstrada na maioria das questões do pós-teste desse grupo. Logo, foi observado que se manteve um baixo nível qualitativo das respostas dentre os estudantes que não vivenciaram momentos interventivos. Há, portanto,

evidências da necessidade de ensino específico para que as crianças avancem em seus conhecimentos das situações combinatórias.

É importante destacar que o acréscimo do questionamento – *e quais maneiras diferentes?* – no enunciado do pós-teste, devido ao quantitativo de respostas que só apresentava o número de possibilidades como resposta no pré-teste, dá indícios que os estudantes haviam escolhido valores aleatórios para responder os problemas. No pós-teste, mesmo percebendo a necessidade de explicitar as diferentes maneiras, os estudantes que apenas indicaram a quantidade de possibilidades complementaram suas respostas sem relação combinatória.

Em linhas gerais, as conclusões aqui apresentadas foram resultantes das análises realizadas sobre o auxílio do material manipulável concreto (fichas) e do material manipulável virtual (*software* Pixton©) conforme a perspectiva de estudos anteriores e dos autores Moyer; Bolyard; Spikell (2002). As análises se basearam principalmente sobre as três dimensões apresentadas na teoria de Vergnaud: situações (*S*), invariantes (*I*) e representações simbólicas (*R*), as quais foram fundamentais para averiguar a compreensão dos participantes do presente estudo sobre situações combinatórias.

Salienta-se, que, mesmo não sendo pensado para a solução de situações combinatórias, o *software* Pixton©, assim como outros possíveis recursos didáticos, podem ser utilizados mediante as funções disponibilizadas, de modo que os objetivos do educador sejam contemplados, conforme indicado nas propostas curriculares.

O presente estudo tem como implicações educacionais, demonstrar que tanto o material manipulável concreto – fichas -, quanto o material manipulável virtual – *software* Pixton© –, são recursos didáticos que auxiliam na compreensão da Combinatória dos estudantes dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Desse modo, esses recursos podem ser utilizados simultaneamente pelos educadores para que sejam explorados os diferentes meios de acesso aos materiais. É importante salientar que o uso dos recursos aqui testados precisa ser repensado para o contexto da sala de aula, ou seja, sem a necessidade de ser confeccionado um número elevado de fichas e nem o de se deter a equipamentos – de acesso às plataformas digitais – para todos

os estudantes. Pois o modo como a intervenção foi realizada nessa pesquisa (por dupla em dias distintos) teve como intuito explorar e perceber detalhadamente as possíveis contribuições dos recursos para a aprendizagem combinatória e afirmá-los como eficazes, se bem direcionados pelo mediador.

Por fim, mediante os resultados apresentados, se propõe como investigação futura, verificar se a utilização dos materiais manipuláveis – concreto (fichas) e virtual (*software* Pixton©) – pelo mesmo grupo proporcionaria melhores avanços no desempenho dos participantes. Também se pode investigar se a realização de momentos interventivos mais longos proporcionará uma apropriação mais significativa dos invariantes combinatórios ou se a realização dos momentos interventivos com perguntas reflexivas mais direcionadas aos invariantes combinatórios, sem o uso de recursos, são suficientes para serem obtidos avanços tão significativos quanto os dos grupos experimentais desse estudo. Uma outra pesquisa pode ser realizada com grupos maiores e até mesmo com classes completas de estudantes.

Acredita-se que a presente pesquisa tenha alcançado seus objetivos e, dessa forma, contribuído para uma mais ampla apreensão de como situações combinatórias podem ser trabalhadas nos anos iniciais de escolarização, de modo a promover o amplo desenvolvimento do raciocínio combinatório dos estudantes da educação básica. Defende-se, também, que o trabalho com situações combinatórias seja um meio rico de explorar problemas matemáticos, levantando possibilidades e explorando diferentes recursos de resolução. Atividades dessa natureza poderão servir de incentivo ao desenvolvimento de diversos tipos de pensamento de estudantes – modos úteis de raciocínio em contextos escolares e extraescolares.

## REFERÊNCIAS

- ABREU, D.; LUCENA, R. Representações Semióticas da Parábola com o Geogebra. In: **Encontro Nacional de Didática da Geometria e das Grandezas e Medidas**, 2016, Recife.
- ACOSTA, J.; SOUZA, A. **Programa Pixton**: promovendo o letramento multissemiótico por meio da produção de tiras em quadrinhos online. Disponível em: <[https://www.ucpel.tche.br/senale/cd\\_senale/2013/Textos/trabalhos/1.pdf](https://www.ucpel.tche.br/senale/cd_senale/2013/Textos/trabalhos/1.pdf)>. Acesso em 28 de agosto de 2018.
- AZEVEDO, J. Alunos de anos iniciais construindo árvores de possibilidades: É melhor no papel ou no computador? (**Dissertação de Mestrado**) **Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica da UFPE**. Recife: UFPE. 2013.
- AZEVEDO, J.; BORBA, R. O Uso de Árvores de Possibilidades – Com e Sem Recurso Tecnológico – No Ensino da Combinatória Com Alunos dos Anos Iniciais de Escolarização. **Anais... XV Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática**. Campina Grande, 2011. Disponível em: <[https://docs.google.com/file/d/0B3nOb\\_rG1DUhdjVWcy1ZRjVOMGc/edit?pli=1](https://docs.google.com/file/d/0B3nOb_rG1DUhdjVWcy1ZRjVOMGc/edit?pli=1)> Acesso em 15 de junho de 2018.
- AZEVEDO, J.; BORBA, R. Combinatória: a construção de árvores de possibilidades por alunos dos anos iniciais com e sem uso de software. Alexandria. **Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v.6, n.2, p. 113-140, 2013.
- BATISTA, B.; SPINILLO, A. Nem todo material concreto é igual: a *importância dos referentes na resolução de problemas*. **Estudos de Psicologia (UFRN)**, v. 13, p. 13-21, 2008.
- BORBA, R. O raciocínio combinatório na educação básica. In: X Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM. Salvador, 2010. **Anais... Educação Matemática, Cultura e Diversidade**. Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2010.
- BORBA, R. Vamos combinar, arranjar e permutar: aprendendo combinatória desde os anos iniciais de escolarização. In: XI Encontro Nacional de Educação Matemática – XI ENEM. Curitiba, 2013. **Anais... Educação Matemática: Retrospectivas e Perspectivas**. Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2013.
- BORBA, R. *Antes cedo do que tarde: o aprendizado da combinatória no início da escolarização*. In: I Encontro de combinatória, estatística e probabilidade nos anos iniciais – I ENCEPAI. Recife, 2016. **Anais... Encontro de combinatória, estatística e probabilidade nos anos iniciais**, 2016.
- BORBA, R. PESSOA, C.; ROCHA, C. Como estudantes e professores de anos iniciais pensam sobre problemas combinatórios. **Educação Matemática Pesquisa** (Online). São Paulo, v. 15, n. 4. pp. 895-908. Número Especial, 2013.

BOTAS, D.; MOREIRA, D. A utilização dos materiais didáticos nas aulas de Matemática – Um estudo no 1º Ciclo. **Revista Portuguesa de Educação**, 26(1), 2013, p. 253-286.

BRASIL, M. E.; S. E. B. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Matemática. 1º e 2º ciclos. Brasília, DF, 1997.

BRASIL, S. E. F. **Base Nacional Curricular Comum - BNCC**. Brasília, 2018.

CHAMORRO, M. C. **Didáctica de las Matemáticas para Primaria**. Madrid: Pearson Educación, 2003.

CLEMENTS, H., & MCMILLEN, S. Rethinking "concrete" manipulatives. **Teaching Children Mathematics**, 1996, 2(5), 270-279.

FELIX, G.; SODRÉ, G.; SOUZA, L.; FARIAS, D.; COIMBRA, L.; REZENDE, W. A produção de histórias em quadrinhos para a resolução de problemas matemáticos: o relato de uma experiência na iniciação à docência. In: XII Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM. São Paulo, 2016. **Anais...** Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades. Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2016.

FLORENCIO, R; GUIMARÃES G. A resolução de problemas de Produto Cartesiano na Educação Infantil. **Caderno de Trabalho de Conclusão de Curso de Pedagogia – UFPE**. Recife, 2017.

GADELHA, D. Resolução de problemas combinatórios nos anos iniciais: uso do software pixton©. In: XXII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-graduação em Educação Matemática – XXII EBRAPEM. Belo Horizonte, 2018. **Anais...** do XXII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-graduação em Educação Matemática, n. 22, 2018, p. 1-12.

GADELHA, D. Contribuições do Material Manipulável Concreto e Virtual na Resolução de Problemas Combinatórios. In: XIII Encontro Nacional de Educação Matemática – XIII ENEM. Cuiabá, 2019. **Anais...** do XIII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2019.

GADELHA, D.; MONTENEGRO, J. Interfaces das representações simbólicas por crianças antes e depois de um processo de intervenção em Combinatória. In: VII Encontro de Pesquisa Educacional em Pernambuco – EpePE. Recife, 2018. **Anais...** Diálogos entre saberes, 2018, p. 1-21.

GADELHA, D.; VICENTE, D.; MONTENEGRO, J. O uso do software pixton© no ensino-aprendizagem de situações combinatórias. In: VII Encontro Pernambucano de Educação Matemática – EPEM, 2017, Garanhuns. **Anais...** do VII Encontro Pernambucano de Educação Matemática, 2017, p. 1-10.

GADELHA, D.; VICENTE, D.; MONTENEGRO, J. Software pixton©: resolução de problemas combinatórios por crianças do 5º ano do ensino fundamental. In: **Revista Cadernos para o Professor**, 2018, n. 36, p. 77-90.

GELLERT, U. Didactic material confronted with the concept of mathematical literacy. **Educational Studies in Mathematics**, 55, 163-179, 2004.

GITIRANA, V.; CAMPOS, T.; MAGINA, S.; SPINILLO, A. **Repensando Multiplicação e Divisão: Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais**. - 1. ed. - São Paulo: PROEM, 2014.

- KHAN, S. **Khan Academy**. 2005. Disponível em: <<https://pt.khanacademy.org/>>. Acesso em 26 de fevereiro de 2020.
- LEITE, M.; PESSOA, C.; FERRAZ, M.; BORBA, R. Softwares Educativos e Objetos de Aprendizagem: um olhar sobre a análise combinatória. **Anais...** do X Encontro Gaúcho de Educação Matemática – X EGEM. Ijuí, 2009.
- LIMA, A. Princípio Fundamental da Contagem: Conhecimentos de professores de Matemática sobre seu uso na resolução de situações combinatórias. **(Dissertação de Mestrado) Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica da UFPE**. Recife: UFPE. 2015.
- LIMA, R. O raciocínio Combinatório de Alunos da Educação de Jovens e Adultos: do início da escolarização até o ensino médio. **(Dissertação de Mestrado) Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica da UFPE**. Recife: UFPE. 2010.
- LIMA, E.; CARVALHO, P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. Temas e problemas elementares. **Sociedade Brasileira de Matemática** – SBM, 12 ed. Rio de Janeiro, 2006.
- MATIAS, P.; SANTOS, M.; PESSOA, C. Crianças de educação infantil resolvendo problemas de arranjo. In: XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática – XIII CIAEM. Recife, 2011. **Anais...** do XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática, 2011.
- MELO, L.; SILVA, J.; SPINILLO, A. Raciocínio combinatório em crianças: uma análise dos efeitos da explicitação dos princípios invariantes. In: **I Encontro de Combinatória, Estatística e Probabilidade dos Anos Iniciais** – I ENCEPAI, 2016, Recife. v. 1.
- MONTENEGRO, J. Identificação, Conversão e Tratamento de Registros de Representações Semióticas Auxiliando a Aprendizagem de Situações Combinatórias. **(Tese de Doutorado) Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica da UFPE**. Recife: UFPE. 2018
- MONTENEGRO, J.; BORBA, R. Representações auxiliares de transição e a aprendizagem de situações combinatórias por alunos de 5º ano do ensino fundamental. In: VII Encontro de Pesquisa Educacional em Pernambuco – EpePE. Recife, 2018. **Anais...** Diálogos entre saberes, 2018, p. 1-18.
- MORO, M; SOARES, M. Níveis de raciocínio combinatório e produto cartesiano na escola fundamental. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 8, p. 99-124, 2006.
- MOYER, P. S.; BOLYARD, J. J.; SPIKELL, M. A. **What are virtual manipulatives? Teaching Children Mathematics**, 8(6), 372-377, 2002.
- MOURA, M.; FRANCA, A. Contextualização das Grandezas e Medidas em Quadrinhos. In: **Encontro Nacional de Didática da Geometria e das Grandezas e Medidas**, 2016, Recife.
- PARANÁ, S. E. E. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica: matemática**. Paraná: SEED/DEB, 2008.
- PEREIRA, C. Material Manipulável e Manipulável Virtual para o Ensino de Estimativa de Proporção Populacional na Formação Inicial de Professores. **(Dissertação de Mestrado) Programa de Pós-graduação em Ensino de**

**Ciências e Tecnologia da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.**  
Ponta Grossa – PR, 2017.

PERNAMBUCO. **Parâmetros Curriculares de Matemática – Ensino Fundamental e Médio.** 2019.

PESSOA, C.; BORBA, R.. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. p.105-150. **Zetetiké: Revista de Educação Matemática**, Campinas, SP, v. 17, n. 31, dez. 2009.

PESSOA, C.; BORBA, R. O desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, América do Norte, 1, jun. 2010.

PESSOA, C.; BORBA, R. Do young children notice what combinatorial situations require? In **Tso, T. Y. (Ed.). Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, Taipei, Taiwan: PME. 1-261. Vol. 1, 2012, pp. 261.

PESSOA, C.; SANTOS, L. Resolução de problemas combinatórios a partir de material manipulativo e de lápis e papel: intervenções no 5º ano do ensino fundamental. In: **Revista Educação Online**, n. 18, 2015, pp. 1-26.

PIXTON, C. **A melhor maneira de criar quadrinhos.** Disponível em: <<https://www.Pixton.com/br/>> Acesso em 18 de fevereiro de 2020.

SANTOS, H.; SILVA, R.; LUCENA, R. Funções matemáticas em quadrinhos: contextualização com o Pixton. In: XIV Congresso Internacional de Tecnologia na Educação. Recife, 2016. **Anais...** Educação e Tecnologia na Era do Conhecimento, 2016.

SANTOS, P.; PESSOA, C. A influência do contexto e do tipo de problema na compreensão de problemas combinatórios por alunos do 5º ano do ensino fundamental. In **Cadernos de trabalho de conclusão do curso de graduação em Pedagogia da UFPE.** Recife, 2014.

SILVA, J. O efeito da explicitação da correspondência um-para-muitos na resolução de problemas de produto cartesiano por crianças. **(Dissertação de Mestrado) Programa de Pós-graduação em Psicologia Cognitiva da UFPE.** Recife: UFPE. 2010.

SILVA, A. Um estudo exploratório e interventivo sobre conhecimentos iniciais de combinatória na educação infantil in: XXII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática. Belo Horizonte, 2018. **Anais...** do XXII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, 2018, p. 1-12.

SILVA, L.; BÔAS, J. Contribuições do Uso de Manipuláveis como Estratégia na Resolução de Problemas sobre o Princípio Multiplicativo. In: **Revista Ensino em Foco**, Salvador, v. 2, n. 4, 2019, pp. 85-98.

SILVA, J.; FEITOSA, D.; PEREIRA, J. O raciocínio combinatório: crianças dos anos iniciais em atividade. In: XII Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM. São Paulo, 2016. **Anais...** Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades. Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2016.

VERGNAUD, G. A Classification os Cognitive Tasks and Operations of Thought Involved in Addition and Subtraction Problems. **In: Addition and Subtraction: a cognitive perspective.** Lawrence Erlbaum Hillsdale, USA, 1982.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos Conceptuais. In: BRUM, Jean, (org.) Didáctica das Matemáticas. **Horizontes Pedagógicos**, Lisboa, 1996.

**APÊNDICE A – Pré-teste**

Nome: \_\_\_\_\_ Idade: \_\_\_\_\_

Faz uso do computador ou notebook? ( ) Sim ( ) Não

1- Três amigos (Beto, Liz e Chico) apostaram corrida na praia de Boa Viagem.

De quantas maneiras diferentes se pode ter o primeiro e o segundo lugares?

**(Arranjo; 06 possibilidades)**<sup>12</sup>

Resposta: \_\_\_\_\_

2- D. Marta levou seus quatro filhos (Bianca, Sabrina, Diego e Felipe) ao Parque Diversão e no brinquedo pula-pula só podem entrar três crianças por vez.

De quantas maneiras diferentes três crianças podem brincar por vez no pula-pula? **(Combinação, 04 possibilidades)**

Resposta: \_\_\_\_\_

3- Três irmãos (Igor, Léo, e Tina) querem se sentar nos três últimos lugares disponíveis no Cine Royal.

De quantas maneiras diferentes os três irmãos podem se sentar nos lugares disponíveis? **(Permutação; 06 possibilidades)**

Resposta: \_\_\_\_\_

4- Na loja Quero Mais estão disponíveis três tipos de botas (marrom, preta e vinho) e dois tipos de gorros (cinza e rosa).

De quantas maneiras diferentes pode-se comprar uma bota e um gorro?

**(Produto de medidas; 06 possibilidades)**

---

<sup>12</sup> A classificação e a resposta dos problemas não foram explícitas nos testes dos estudantes.

**Resposta:** \_\_\_\_\_

5- Há quatro alunos (César, Lay, Bete e João) concorrendo ao cargo de representante e vice representante na Turma 5ª A.

De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos um representante e um vice representante? (**Arranjo; 12 possibilidades**)

**Resposta:** \_\_\_\_\_

6- Na barraca Espaço Drinks há cinco frutas (acerola, caju, laranja, uva e maracujá) e os sucos são preparados misturando duas das frutas.

De quantas maneiras diferentes os sucos podem ser preparados com duas frutas? (**Combinação; 10 possibilidades**)

**Resposta:** \_\_\_\_\_

7- Na prateleira da casa de Edson estão três objetos (uma bola, um troféu e uma foto).

De quantas maneiras diferentes ele pode colocar os três objetos lado a lado na prateleira? (**Permutação; 06 possibilidades**)

**Resposta:** \_\_\_\_\_

8- Na lanchonete Oba-oba há quatro sabores de suco (graviola, laranja, morango e uva) os quais são servidos em copos de três tamanhos (pequeno, médio e grande).

De quantas maneiras diferentes pode-se tomar um suco de um sabor em um tamanho de copo? (**Produto de medidas; 12 possibilidades**)

**Resposta:** \_\_\_\_\_

**APÊNDICE B – Pós-teste**

**Nome:** \_\_\_\_\_ **Idade:** \_\_\_\_\_

1- Na competição Show de Calouros três candidatos (Lia, Breno e Caio) estão na final.

De quantas e quais maneiras diferentes se pode ter o primeiro e o segundo lugares?

**(Arranjo; 06 possibilidades)**

**Resposta:** \_\_\_\_\_

2- Para preparar a salada de frutas, Júlia precisa escolher três frutas das quatro opções: abacaxi, banana, laranja e mamão.

De quantas e quais maneiras ela poderá escolher três diferentes frutas?

**(Combinação; 06 possibilidades)**

**Resposta:** \_\_\_\_\_

3- No porta-escovas de dentes da Suzy, há suporte para até três escovas de dentes (azul, lilás e vermelha).

De quantas e quais maneiras diferentes ela pode organizar as três escovas de dentes? **(Permutação; 06 possibilidades)**

**Resposta:** \_\_\_\_\_

4- Em um final de semana, Luiza foi para casa de sua tia e em sua mochila levou três blusas (branca, cinza e rosa) e dois shorts (preto e azul).

De quantas e quais maneiras diferentes ela poderá se vestir com uma blusa e um short? **(Produto de medidas; 06 possibilidades)**

**Resposta:** \_\_\_\_\_

5- Na Corrida Derby Dourado há quatro cavalos (representados pelas cores: azul, branca, laranja e verde) que estão disputando o primeiro lugar e o segundo lugar.

De quantas e quais maneiras podemos ter o primeiro e segundo lugar?

**(Arranjo; 12 possibilidades)**

**Resposta:** \_\_\_\_\_

6- Para brincar no carrinho bate-bate do Parque Fantástico, cinco amigos (Ana, Edu, Joel, Liz e Victor) precisarão se organizar, já que cabem apenas duas crianças em cada carrinho.

De quantas e quais maneiras poderão se organizar as diferentes duplas?

**(Combinação; 10 possibilidades)**

**Resposta:** \_\_\_\_\_

7- Na festa de Bernardo há uma mesa com três cadeiras disponíveis. De quantas e quais maneiras esses lugares poderão ser ocupados pelo avô, pai e neto? **(Permutação; 06 possibilidades)**

**Resposta:** \_\_\_\_\_

8- Pati ganhou quatro vestidos (azul, cinza, roxo e preto), e três tipos de calçados (chinelo, sapato e bota).

De quantas e quais maneiras diferentes ela poderá se arrumar com um vestido e um tipo de calçado? **(Produto de medidas; 12 possibilidades)**

**Resposta:** \_\_\_\_\_