Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
EDUMATEC

Centro de Educação
Campus Universitário
Cidade Universitária
Recife-PE/BR CEP: 50.670-901
Fone/Fax: (81) 2126-8952
E. Mail: edumatec@ufpe.br
www.gente.eti.br/edumatec

Cristiane de Arimatéa Rocha

FORMAÇÃO DOCENTE E O ENSINO DE PROBLEMAS COMBINATÓRIOS: diversos olhares, diferentes conhecimentos

Recife

2011

Cristiane de Arimatéa Rocha

FORMAÇÃO DOCENTE
E O ENSINO DE PROBLEMAS COMBINATÓRIOS:
diversos olhares, diferentes conhecimentos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Orientadora: Profª. Dra. Rute Elizabete de Souza Rosa Borba

Recife

2011

Rocha, Cristiane de Arimatéa
Formação docente e o ensino de problemas combinatórios : diversos olhares, diferentes conhecimentos / Cristiane de Arimatéa Rocha. – Recife: O Autor, 2011.
191 f.: il.

Orientadora: Profª. Drª. Rute Elizabete de Souza Rosa Borba.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2011.
Inclui Bibliografia.

1. matemática – estudo e ensino 2. combinatória I. Borba, Elizabete de Souza Rosa (Orientador) II. Título

CDD 372.7 UFPE (CE 2011-021)

Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
EDUMATEC

ALUNA

CRISTIANE DE ARIMATÉA ROCHA

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO

"FORMAÇÃO DOCENTE E O ENSINO DE PROBLEMAS COMBINATÓRIOS: diversos olhares, diferentes conhecimentos."

COMISSÃO EXAMINADORA:

Presidente e Orientador
Profª. Drª. Rute Elizabete de Souza Rosa Borba

Examinador Externo
Profª. Drª. Cileda de Queiroz e Silva Coutinho

Examinador Interno
Profª. Drª. Verônica Gitirana Gomes Ferreira

Recife, 21 de fevereiro de 2011.

AGRADECIMENTOS

Deus sem o qual nada é possível.

Aos meus pais
À minha mãe Áurea pelo exemplo de perseverança e orientações
para me fazer gente que estuda e que faz
e meu pai Arimatéa pelas caronas elucidativas e discussões
que me encaminharam na matemática da vida.
Apoio, torcida, companheiros e exemplos sem os quais não seria ninguém.

Aos meus irmãos:
Hugo, o mais cuidadoso, pela parceria
desde os nossos primeiros passos
e Eudes, meu primeiro aluno, experiência de tentativas e erros,
fui me descobrindo professora.

A Rute minha orientadora, pela parceria na academia e debates em cima do objeto dessa pesquisa, caminhando juntas nas definições de hipóteses, palavras de incentivo e encaminhamento nessa jornada de trabalho

Às professoras Cileda de Queiroz Coutinho e Verônica Gitirana Gomes Ferreira pela valorosa colaboração no processo de realização dessa pesquisa.

Aos professores Gilda Guimarães e Carlos Monteiro e aos amigos e professores de Seminários pela atenção e cuidados empregados no desenvolvimento do meu objeto de pesquisa.

A Fabiana pela companhia nesse curso com quem aprendi
a me ver pesquisadora
com quem compactuei dos longos debates, trabalhos e,
porque não, brincadeiras durante o curso de Mestrado.
Admiração e amizade sempre

A Menezes, Alexandre, Claudio, Matheus e Adriano amigos de graduação e profissão, Evanilson, Andreia, João Rocha, João Neto, João Paulo, Fátima, Renata companheiros desse processo de mestrado, sem os quais não poderia concluir.
Àqueles que demonstram o dito popular: mais vale um amigo que dinheiro no bolso
Por isso sou riquíssima.

Às amigas e companheiras do Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório do Centro de Educação (GERAÇÃO-UFPE) com as quais compartilhei momentos riquíssimos e aprendi muitas coisas.
Rita pela paciência e calma necessária de pesquisadora;
Glauce a garra e luta e a capacidade de ser sempre chique de doer;
Mika, pessoa sempre disponível nas ligações fora de hora;

Cris, um exemplo de mãe-pesquisadora pela
Indicação do caminho no início dessa vida acadêmica;
Martha, a voz da experiência,
o contraponto entre a prática docente e a pesquisa;
Juliana e Thalita pela lembrança que há sempre um novo ponto de partida
após um ponto final
Lembranças de um tempo que sempre estará no meu coração.

Aos professores Adriano Pedrosa, Airton Castro, Paulo Figueiredo
e demais amigos do LEMAT pelo tempo compartilhado no
Laboratório de Ensino de Matemática da UFPE, lugar no qual aprendi muito,
exemplos de professores e contribuições frutíferas
na evolução de minha formação acadêmica;

À Capes pelo financiamento que permitiu
maior dedicação a essa pesquisa

Aos amigos das turmas de 2008, 2009 e 2010 pelas celebrações de início, durante
e final de mestrado, nas partilhas dos caminhos de construção
de uma pesquisadora e de sua pesquisa.

À vovó Adrina, minhas tias Arlene e Vilma, meus tios Beninho, Alex, Robson,
Mandinho pelas torcidas e orações no caminhar de toda minha vida.
Ao vovô Inácio, exemplo de vida, e meus tios e primos que com certeza
compartilham mais essa alegria comigo.

A Elidiane pelos reforços alimentícios e ânimo no período de conclusão

A todos que fazem parte do Programa de Pós-graduação do Edumatec
por permitir sonhar novos caminhos para o ensino de Matemática.

A todos os professores e professoras que um dia compartilharam seus conhecimentos
e saberes comigo e depositaram a esperança
de novos dias, muitos começos
e infinitas possibilidades
Muito obrigada!

RESUMO

Experiências de prática docente têm evidenciado que problemas de Combinatória despertam nos alunos curiosidades e grande participação em sala de aula. No entanto, mesmo com essas características, o número de erros cometidos na resolução de situações de Combinatória ainda é muito grande, o que indica dificuldades no ensino e/ou na aprendizagem desse conteúdo. Nesse sentido, a presente pesquisa busca analisar os conhecimentos que professores do Ensino Fundamental e Médio têm sobre a Combinatória e seu ensino. O quadro teórico foi constituído pelos trabalhos de Shulman e seus colaboradores na compreensão dos conhecimentos do conteúdo e dos conhecimentos didáticos do conteúdo dos professores em exercício, bem como pelos trabalhos de Ball e seus colaboradores, os quais propõem um modelo de caracterização dos conhecimentos associado aos professores que ensinam Matemática. Para entender as escolhas docentes na construção do raciocínio combinatório em alunos, utilizamos a ideia da construção dos conceitos definida pela Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, além da classificação dos tipos de problemas combinatórios (*produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação*) fundamentada nas pesquisas desenvolvidas no Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório do Centro de Educação (Geração- UFPE) sob a orientação de Borba. Utilizamos como procedimento metodológico a entrevista semi-estruturada, realizada com seis professores (dois dos anos iniciais, dois dos anos finais do Ensino Fundamental e dois do Ensino Médio) na qual responderam questões referentes aos tipos de problemas combinatórios, aos procedimentos de resolução utilizados por alunos e às formas de ensino para a superação de dificuldades. A pesquisa revelou que, apesar das diferentes formações, quase todos os professores apresentaram dificuldades na diferenciação de problemas de *arranjo* e *combinação*, tanto na leitura do enunciado do problema quanto na correção de estratégia do aluno, denotando desconhecimento de situações nas quais o invariante do conceito de *ordenação* implica ou não, em possibilidades distintas. Constatou-se, também, que os professores dos anos iniciais na análise dos tipos de problemas elegeram a forma do enunciado como diferenciador, enquanto que professores de formação em Matemática apontaram aspectos de suas estruturas. No que diz respeito às estratégias priorizadas pelos professores para a resolução de problemas combinatórios por alunos dos diferentes níveis, há indícios de que estas são determinadas em função do nível de dificuldades do problema por eles concebidas e das suas expectativas em relação aos alunos inseridos nos diferentes anos de escolaridade. Dessa forma, as respostas dos professores indicam uma articulação entre suas experiências de formação e de prática docente. Conclui-se que para a condução de um trabalho que permita maior desenvolvimento do raciocínio combinatório pelos alunos, é necessário, por parte dos professores, um mais aprofundado nível de conhecimento das estruturas combinatórias, do conhecimento dos alunos e de suas estratégias de resolução, ressaltando-se a necessidade de mais trabalhos científicos que busquem auxiliar professores em seus conhecimentos de conteúdo e pedagógico referentes à Combinatória.

Palavras-chave: Ensino de Combinatória - Conhecimentos de conteúdo e pedagógico - Ensino Fundamental e Médio.

ABSTRACT

Experiences of teaching practice have shown that combinatorial problems raise curiosity in students and great participation in the classroom. However, even with these characteristics, the number of existing errors in situations of Combinatorics is still very large, which indicates difficulties in the teaching / learning of that content. In that sense, this research aims to analyze the knowledge that teachers of Elementary and High school have concerning Combinatorics and its teaching. The theoretical framework was based on Shulman and his colleagues in teachers' content knowledge and instructional knowledge of content; as well as in Ball and his colleagues, which propose a model to characterize the knowledge associated with teachers who teach Mathematics. To understand the choices teachers make concerning the construction of combinatorial reasoning in students, we used the idea of concept development defined by Vergnaud, besides the classification of types of combinatorial problems (Cartesian product, permutation, combination and arrangement) based on research carried out by the Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório do Centro de Educação (Geração- UFPE) under the guidance of Borba. The basic methodological procedure were semi-structured interviews conducted with six teachers (two of the early years, two of the final years of Elementary School and two from High School) who answered questions regarding the types of combinatorial problems, the resolution procedures used by students and ways of teaching to overcome difficulties. The survey showed that despite different backgrounds, almost all teachers had difficulties in differentiating arrangement and combination problems, both in reading the statement of the problem and in correcting students' strategies, denoting lack of knowledge of situations in which the concept of the invariant ordering implies, or not, in distinct possibilities. It was also noted that in the analysis of the types of problems, the teachers of the early years elected sentence form as a differentiator, while teachers trained in Mathematics talked more about aspects of problem structures. Concerning the strategies prioritized by teachers to solve combinatorial problems by students of different levels, there are indications that these were determined by the level of difficulty of the problem conceived by them and their expectations of students of different years of schooling. Thus, the feedback from teachers indicates a link between their experiences of training and teaching practice. We conclude that the conduction of work that permits further development of combinatorial reasoning by the students, requires, by teachers, a more detailed level of knowledge of combinatorial structures, knowledge of students and their resolution strategies, emphasizing the need for more scientific studies that seek to assist teachers in their knowledge and pedagogical content related to Combinatorics.

Keywords: Combinatorics teaching – Content and teaching knowledge – Elementary and High School.

LISTA DE QUADROS

QUADRO 1: ORGANIZAÇÃO DO SIGNIFICADO *PRODUTO CARTESIANO* 42

QUADRO 2: ORGANIZAÇÃO DO SIGNIFICADO *PERMUTAÇÃO* 43

QUADRO 3: ORGANIZAÇÃO DO SIGNIFICADO ARRANJO 44

QUADRO 4: ORGANIZAÇÃO DO SIGNIFICADO DE COMBINAÇÃO 45

QUADRO 5: CÓDIGO DOS PARTICIPANTES DA PESQUISA 79

QUADRO 6: DESCRIÇÃO DOS OBJETIVOS DE CADA MOMENTO DA ENTREVISTA 81

QUADRO 7: CODIFICAÇÃO DOS PROBLEMAS UTILIZADOS NA ENTREVISTA 84

QUADRO 8: CARACTERIZAÇÃO DOS PARTICIPANTES DA PESQUISA 93

QUADRO 9: SINOPSE DE ANÁLISE DE NOMENCLATURAS DO CAPÍTULO DO LIVRO SUGERIDA PELOS PROFESSORES NOS DIFERENTES NÍVEIS 99

QUADRO 10: SINOPSE DE ANÁLISE DA ESTRUTURA DOS PROBLEMAS POR PARTE DOS PROFESSORES ENTREVISTADOS 102

QUADRO 11: SINOPSE DE ANÁLISE DOS PROFESSORES QUANTO À PROPRIEDADE DE ORDENAÇÃO EM RELAÇÃO A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ARRANJO OU COMBINAÇÃO 112

QUADRO 12: SINOPSE DE ANÁLISE INÍCIO DO ENSINO DE COMBINATÓRIA 117

QUADRO 13: SINOPSE DE ANÁLISE DO SIGNIFICADO DE MAIOR DIFICULDADE DE COMPREENSÃO PELOS PROFESSORES 120

QUADRO 14: SINOPSE DO PARECER DOS PROFESSORES EM RELAÇÃO A COMPREENSÃO DOS ALUNOS 127

QUADRO 15: SINOPSE DE ANÁLISE DAS ESTRATÉGIAS PRIVILEGIADAS PELOS PROFESSORES NO SIGNIFICADO DE *PRODUTO CARTESIANO* 137

QUADRO 16: SINOPSE DE ANÁLISE DAS ESTRATÉGIAS PRIVILEGIADAS PELOS PROFESSORES NO SIGNIFICADO DE *PERMUTAÇÃO* 144

QUADRO 17: RESUMO DE DIFICULDADES DOS ALUNOS PREVISTAS PELOS PROFESSORES NOS DIFERENTES NÍVEIS E SUGESTÕES PARA SUPERAÇÃO 161

QUADRO 18: SINOPSE DE ANÁLISE DAS ÊNFASES DADAS EM AULAS DE COMBINATÓRIA 163

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1: DIAGRAMA DOS DOMÍNIOS DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO PARA O ENSINO 29

FIGURA 2: ESTRUTURA DOS PROBLEMAS DE SELEÇÃO DA CLASSIFICAÇÃO DE BATANERO ET AL (1996) 41

FIGURA 3: PARTE REFERENTE ÀS SOMAS POSSÍVEIS DO LANÇAMENTO DE TRÊS DADOS EXISTENTE NO DE VETULA NA VERSÃO IMPRESSA DE 1534 COM MARGINALIA 48

FIGURA 4: LAYOUT DO SOFTWARE DIAGRAMA DE ARBOL 61

FIGURA 5: MODELO PARA SISTEMATIZAR A ANÁLISE DA ENTREVISTA 82

FIGURA 6: RELAÇÕES ENTENDIDAS NA ENTREVISTA COMO CONHECIMENTO DO CONTEÚDO DE COMBINATÓRIA DOS PROFESSORES 83

FIGURA 7: PROTOCOLO ESCOLHIDO DA PESQUISA DE PESSOA (2009) PARA DIFERENCIAR PROBLEMAS DE ARRANJO E COMBINAÇÃO 85

FIGURA 8: RELAÇÕES ENTENDIDAS NA ENTREVISTA COMO CONHECIMENTO PEDAGÓGICO DO CONTEÚDO DE COMBINATÓRIA DOS PROFESSORES 85

FIGURA 9: PROTOCOLOS DE RESOLUÇÃO POR ALUNOS DE UM PROBLEMA DE ARRANJO, ... 86

FIGURA 10: PROTOCOLOS DE RESOLUÇÃO POR ALUNOS DE UM PROBLEMA DE PRODUTO CARTESIANO, RETIRADOS DE PESSOA (2009) 87

FIGURA 11: PROTOCOLOS DE RESOLUÇÃO POR ALUNOS DE UM PROBLEMA DE PERMUTAÇÃO, ... 88

FIGURA 12: RELAÇÕES ENTENDIDAS NA ENTREVISTA COMO POSSÍVEIS AÇÕES PEDAGÓGICAS DOS PROFESSORES 89

FIGURA 13: POSSÍVEIS RESPOSTAS DO PROBLEMA 8 105

FIGURA 14: RESOLUÇÃO DO PROBLEMA 7(CM) PELO PROFESSOR PAF_2 107

FIGURA 15: RESOLUÇÃO DO PROBLEMA 7 (CM) PELO PROFESSOR PEM_1 108

FIGURA 16: PROTOCOLO PARA ENTREVISTA SOBRE PROBLEMAS DE *ARRANJO* E *COMBINAÇÃO* RETIRADO DO ESTUDO DE PESSOA (2009) 111

FIGURA 17: ESTRATÉGIAS ESCOLHIDAS DE *ARRANJO* PARA SUBSIDIAR AS DISCUSSÕES COM PROFESSORES 125

FIGURA 18: ESTRATÉGIAS ESCOLHIDAS PARA SUBSIDIAR AS DISCUSSÕES COM PROFESSORES 135

FIGURA 19: ESTRATÉGIAS ESCOLHIDAS DE *PERMUTAÇÃO* PARA SUBSIDIAR AS DISCUSSÕES COM PROFESSORES 143

FIGURA 20: RESOLUÇÃO DO PROBLEMA 8 PROPOSTA POR PEM_1 145

FIGURA 21: RESOLUÇÃO DO PROBLEMA 8 PELO PROFESSOR PEM_2 145

FIGURA 22: ESTRATÉGIA DO ALUNO A PARA PROBLEMA DE *ARRANJO* 147

FIGURA 23: DIAGRAMA DE FLECHAS 148

FIGURA 24: REPRESENTAÇÃO DO PROBLEMA 5(AM) COM O USO DA ÁRVORE DE POSSIBILIDADES 149

FIGURA 25: ESTRATÉGIA DO ALUNO A PARA PROBLEMA DE *COMBINAÇÃO* 150

FIGURA 26: ESTRATÉGIAS DOS ALUNOS REFERENTE À DIFICULDADE DE ESGOTAMENTO DE POSSIBILIDADES 152

FIGURA 27: SITUAÇÃO PROPOSTA PELO PROFESSOR PAF_2 158

FIGURA 28: ESTRATÉGIA DO ALUNO O REFERENTE A DIFICULDADE DE ESGOTAMENTO DE POSSIBILIDADES . 159

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO **11**

OBJETIVO GERAL 14

OBJETIVOS ESPECÍFICOS 14

CAPÍTULO 1 ..... **17**

PANORAMA DE ELEMENTOS CONSTITUINTES DA FORMAÇÃO DE PROFESSORES **17**

CAPÍTULO 2 ..... **25**

A FORMAÇÃO DO PROFESSOR QUE ENSINA MATEMÁTICA **25**

CAPÍTULO 3 ..... **35**

ENSINO E APRENDIZAGEM DE COMBINATÓRIA: DIFERENTES OLHARES **35**

3.1. CONSTRUÇÃO DE UM CONCEITO EM MATEMÁTICA 37

3.1.1. Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas e a Classificação de Problemas Combinatórios 39

3.2. A COMBINATÓRIA E SUA INSERÇÃO NA MATEMÁTICA 46

3.3. O ENSINO DE COMBINATÓRIA E SUA INSERÇÃO NA ESCOLA 50

3.4. UM PANORAMA DE PESQUISAS NO ENSINO DE COMBINATÓRIA 57

3.4.1. Ensino de Combinatória e a Análise de Recursos Didáticos 57

3.4.2. Ensino de Combinatória e a Investigação de Conhecimentos de Alunos 63

3.4.3. Ensino de Combinatória e a Formação de Professores 71

CAPÍTULO 4 ..... **76**

MÉTODO **76**

4.1. PERCURSO METODOLÓGICO 77

4.2. CRITÉRIOS DE SELEÇÃO DOS PARTICIPANTES DA PESQUISA 78

4.3. ORGANIZAÇÃO DO INSTRUMENTO DE COLETA E ANÁLISE 80

CAPÍTULO 5 ..... **91**

APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS **91**

5.1. FORMAÇÃO E ATUAÇÃO PROFISSIONAL DOS PARTICIPANTES DA PESQUISA 92

5.1.1. Experiências de aprendizagem de combinatória: contribuições da escolaridade e da formação inicial 94

5.2. CONHECIMENTOS DE PROFESSORES SOBRE COMBINATÓRIA 97

5.2.1. Sobre o Título do Capítulo dos Livros Didáticos de Matemática 98
5.2.2. Sobre os Diferentes Tipos de Significados dos Problemas Combinatórios 101
5.2.3. Sobre o Invariante de Ordenação nos Problemas de *Arranjo* ou *Combinação* 110
5.3. CONHECIMENTOS PEDAGÓGICOS DE COMBINATÓRIA DOS PROFESSORES 115
5.3.1. Conhecimentos sobre o Currículo de Combinatória 116
5.3.2. Conhecimentos Pedagógicos de Combinatória e seus Alunos 119
5.3.2.1. DIFICULDADES DOS ALUNOS NOS PROBLEMAS COMBINATÓRIOS 119
5.3.2.2. COMPREENSÃO DO DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO DOS ALUNOS 125
5.3.3. Conhecimentos Pedagógicos de Combinatória e o Ensino nos Diferentes Níveis 134
5.3.3.1. ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMBINATÓRIOS PRIVILEGIADAS 134
5.3.3.1.1. Estratégias privilegiadas nos problemas de produto cartesiano 135
5.3.3.1.2. Estratégias privilegiadas nos problemas de permutação 142
5.3.3.2. IDEIAS DE PRÁTICAS PARA A SUPERAÇÃO DE DIFICULDADES EVIDENCIADAS 146
5.3.3.2.1. Cópia ou reprodução de possibilidades 147
5.3.3.2.2. Ordenação 150
5.3.3.2.3. Esgotamento de possibilidades na estratégia de listagem 152
5.3.3.2.4. Compreensão de possibilidades 157
5.3.3.2.5. Multiplicação inadequada 159
5.4. REFLEXÕES SOBRE A AÇÃO DOCENTE ENTRE CONHECIMENTOS DO CONTEÚDO E CONHECIMENTOS PEDAGÓGICOS DE COMBINATÓRIA 162
5.4.1. O que professores falam sobre a aula de Combinatória 162
5.4.2. Sobre a utilização de recursos didáticos 166
CONSIDERAÇÕES FINAIS 170
REFERÊNCIAS 177
APÊNDICE A: ROTEIRO DA ENTREVISTA 185

INTRODUÇÃO

Debates recentes sobre a formação de professores que ensinam Matemática e sobre o ensino desta disciplina trazem diversas incertezas e levantam questionamentos que são bases para diferentes pesquisas na Educação Matemática. Experiências de docentes e expectativas de discentes incentivam ainda mais pesquisas, em particular para realizar mudanças efetivas nos cursos de formação de professores.

Em nossa prática de professora de Matemática no Ensino Fundamental e Médio e quando formadora de professores[1] tivemos a oportunidade de presenciar diversas vezes situações desafiadoras. A busca pelo interesse de nossos alunos em seu aprendizado e a procura incessante por atividades que despertem a curiosidade dos mesmos fazem parte de nossas inquietações profissionais.

Pesquisas em Educação Matemática trazem alguns elementos alternativos para o trabalho diário do professor que leciona Matemática. No entanto, nem sempre os resultados obtidos atingem de imediato as necessidades da formação de professores e da dinâmica de ensino.

Dentre as variadas temáticas pesquisadas, nos interessamos especificamente pelo ensino de Combinatória e pelo processo de construção do raciocínio combinatório. Esse modo de pensar promove o desenvolvimento de uma maneira sistemática para a organização de dados e escolha de conjuntos ou subconjuntos em diversas situações no dia-a-dia dos alunos, constituindo-se um instrumento importante na formação da cidadania.

Especificamente, em nossa prática docente, vivenciamos, por um lado, as expectativas e curiosidades dos alunos em resolver problemas de Combinatória, perdendo, na maioria das vezes, o medo de se expor durante as aulas de Matemática e, por outro lado, as dúvidas e as queixas de professores ao se deparar com esse ensino, por causa da quantidade de erros recorrentes dos alunos nesses problemas.

Muitas práticas no ensino de Combinatória ainda incentivam o uso abusivo de fórmulas, retirando o sentido das situações e apresentando apenas uma possível representação. Outras, no momento da avaliação, só observam o resultado, desvalorizando a construção feita até o momento e assumindo como certo apenas um tipo de solução, desconsiderando a criação do aluno.

[1] Curso de formação continuada de professores em diferentes regionais do estado de Pernambuco

De acordo com o National Council of Teachers of Mathematics - NCTM (2000) “é importante que alunos tenham oportunidades não somente de aprender formas convencionais de representação, mas também para construir, refinar e utilizar suas próprias representações como ferramenta para fundamentar o saber e o fazer da Matemática”[2] (p.68).

Outros organizadores curriculares, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997), incentivam o ensino de Combinatória desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Essa proposta ainda se verifica na presença significativa de problemas combinatórios diversificados em livros didáticos de Matemática nesse nível de ensino, conforme constatado por Barreto, Amaral e Borba (2007).

Apesar destas recomendações, sabemos que propostas que lidem com o ensino de Combinatória nos cursos de formação de professores ainda são poucas, ou começam a vislumbrar pequenas iniciativas nas práticas individuais de professores formadores.

Nesse contexto, alguns questionamentos permeiam nossos pensamentos: *Como vêm sendo tratadas as dificuldades dos alunos pelos professores que ensinam Matemática, durante o trabalho com problemas combinatórios? Que contribuições as experiências de ensino vivenciadas trazem para esse objetivo? Quais estratégias de resolução desses problemas são valorizadas pelos professores para minimizar tais dificuldades? Como esses saberes são constituídos pelos professores se geralmente não acontecem práticas formadoras específicas para esses objetivos? Que dificuldades os professores têm no ensino desse conteúdo?*

Tais questionamentos, e tendo em vista a necessidade de delimitarmos uma temática nos fizeram refletir e definir a seguinte pergunta para investigação, foco da presente pesquisa:

Que conhecimentos sobre Combinatória e seu ensino têm professores que ensinam Matemática no Ensino Fundamental e Médio?

[2] Tradução nossa: The NCTM (2000) states, “It is important that students have opportunities not only to learn conventional forms of representations, but also to construct, refine, and use their own representations as tools to support learning and doing mathematics” (p. 68)

Pesquisar sobre os conhecimentos necessários para ensinar Matemática implica em se preocupar com vários aspectos da formação do professor. Por exemplo, como os vários níveis de ensino são influenciados nesse aspecto? No Brasil, há professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental e da Educação Infantil, os quais possuem formação geralmente em Pedagogia, professores dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio com formação em Licenciatura em Matemática, além do próprio professor formador de tais professores, o que demanda uma variedade de olhares na pesquisa desses conhecimentos.

No presente estudo, fixamos o olhar para os professores graduados nas licenciaturas de Pedagogia e de Matemática, cujo campo de atuação é o Ensino Fundamental e Médio. Apesar de não focalizarmos comparações entre as formações dos professores, alguns comentários serão produzidos no sentido de que elas influenciam na apreensão dos conhecimentos de professores e suas possíveis práticas de ensino e docente de problemas combinatórios no Ensino Fundamental e Médio.

Descrevemos, a seguir, nossos objetivos, de modo a delimitar a questão de pesquisa levantada.

Objetivo Geral

- Analisar os conhecimentos que professores do Ensino Fundamental e Médio têm sobre Combinatória e seu ensino.

Objetivos Específicos

- Identificar as características do conhecimento de problemas combinatórios por parte de professores em seus diferentes níveis;
- Verificar como professores analisam as dificuldades que alunos apresentam na resolução desse tipo de problemas;
- Identificar como os professores compreendem o desenvolvimento do raciocínio combinatório de alunos;

- Analisar como professores de diferentes níveis sugerem estratégias de ensino para a superação de dificuldades dos alunos

Nesse sentido, partimos do pressuposto que existe uma forte influência da formação inicial e da experiência vivenciada pelos professores na construção de seus conhecimentos.

A seguir apresentamos os capítulos constituintes da presente dissertação.

No primeiro capítulo, *Panorama de Elementos Constituintes da Formação de Professores*, iniciamos a discussão sobre os aspectos do conhecimento do professor e sua formação acadêmica, além de apresentarmos as contribuições de Shulman (1986, 2005) que nos deram subsídios para uma nova perspectiva de formação.

O segundo capítulo trata da *Formação de professores que ensinam Matemática.* Nele apresentamos a categorização dos conhecimentos dos professores que ensinam Matemática, fundamentada na pesquisa de Ball e seus colaboradores (1991, 2008) e algumas contribuições das pesquisas relacionadas com Matemática.

Ensino e Aprendizagem de Combinatória: diferentes olhares é a temática do terceiro capítulo no qual procuramos discutir o campo conceitual das estruturas multiplicativas de Vergnaud (1991) e as pesquisas de Combinatória fundadas em Batanero e seus colaboradores (1996). Apresentamos, ainda, os tipos de problemas combinatórios baseados na pesquisa de Pessoa e Borba (2009a). Trazemos algumas contribuições das orientações curriculares, da história desse conteúdo e de pesquisas relativas aos recursos didáticos, ao conhecimento dos alunos sobre raciocínio combinatório e sobre os indicativos de práticas de Combinatória relativas aos professores e futuros professores de Matemática.

No quarto capítulo, *Método*, descrevemos a maneira pela qual desvelamos o objeto pesquisado, bem como os procedimentos metodológicos que orientaram o processo de construção da pesquisa.

A *Apresentação e análise dos resultados* constituem a temática do quinto capítulo, no qual apresentamos os resultados da pesquisa, a análise detalhada das falas dos professores e seus conhecimentos em relação à Combinatória e ao seu ensino.

Por fim, no sexto capítulo, apresentamos algumas considerações finais a partir do que a pesquisa revelou em relação ao conhecimento de Combinatória dos professores que ensinam Matemática no Ensino Fundamental e Médio. Finalizamos com alguns questionamentos surgidos durante a pesquisa, que possibilitarão futuras contribuições sobre a temática.

CAPÍTULO 1

PANORAMA DE ELEMENTOS CONSTITUINTES DA FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Diversos fatos históricos e sociais proporcionam sinais da delicada e complexa tarefa de formar professores. A partir dos anos 1990, insurgem novas demandas educacionais marcadas pela ruptura da corrente positivista e a valorização de outras formas de produção do conhecimento. O avanço da ciência e de novas tecnologias marca ainda mais o momento de crítica e busca de novas alternativas para a superação do modelo ainda prevalecente (ROCHA, 2008).

Nas décadas recentes, pesquisadores de diferentes nacionalidades demonstram interesse e destacam a necessidade de compreensão do fenômeno da formação de professores e suas especificidades. Entidades que estudam a formação de professores, como ANPEd[3] e ANFOPE[4] trazem, a partir de pesquisas, as contribuições e contradições existentes nas diferentes concepções e perspectivas nesse campo.

Desde sua criação em 1980, a ANFOPE entende a docência como fator primordial do curso de formação de professores, assim como o trabalho docente como fundamento da formação do profissional da educação. Essa organização tem se guiado por alguns princípios, dos quais se destacam a indissociabilidade teoria-prática e a formação teórica consistente e coerente com as necessidades sociais, econômicas, políticas e educacionais exigidas para o professor atual.

De acordo com esses princípios, no documento ANFOPE (2000) defende-se que o professor possua características e especificidades em sua natureza e no exercício da profissão, independente da licenciatura, ou da função que execute, incentivando a superação da fragmentação do processo da formação inicial e criação do ideal epistemológico e pedagógico da identidade profissional, abolindo a falsa compreensão de que o professor é um bacharel com licença para ensinar.

Podemos dizer que a formação de professores é um processo contínuo, sistemático, organizado e complexo, que perpassa toda a carreira docente e que, se existe a pretensão de formar professores e mantermos a qualidade de ensino, necessário se faz criar um elo coerente de aperfeiçoamento desde a formação inicial.

Pesquisadores como Sacristán (1990), Nóvoa (1992) e Zeichner (1993), trazem contribuições para a formação de professores que se complementam e

[3] Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação
[4] Associação Nacional pela Formação dos Profissionais da Educação

promovem novos questionamentos para esse campo saturado de dúvidas e incertezas.

Zeichner (1993) aponta que programas de formação de professores podem motivar futuros professores na pesquisa e aperfeiçoamento de sua tarefa, responsabilizando-os pelo seu crescimento profissional. Nóvoa (1999) destaca, ainda, o papel das instituições de formação de professores na construção e reconstrução dos saberes e sistemas de regras da profissão docente, sendo fundamental “na elaboração dos conhecimentos pedagógicos e de uma ideologia comum” (p.18).

Este quadro atual aponta necessidades às instituições formadoras. Então, é preciso despertar a curiosidade epistemológica indispensável à apreensão dos saberes e modificar a perpetuação daqueles saberes prontos, finitos, acabados, trazidos por outros ou por aqueles que os detêm.

Outro fator importante para as instituições de formação dos professores é ressaltado por Sacristán (1990), que indica a proposta de situações que possibilitem a conscientização das limitações sociais, culturais e ideológicas da profissão docente, originando a aquisição de atitudes ideológicas, epistemológicas, culturais em relação ao ensino, ao professor e aos estudantes.

Esses elementos apresentados são imprescindíveis para a construção de uma prática educacional que esteja próxima à realidade das escolas, para não promover certos estereótipos profissionais que acabam contribuindo para a atual situação do ensino brasileiro.

No Brasil, a Lei nº 9.394/96 estipula para professores que atuam na educação básica o curso de licenciatura de graduação plena em universidades e Institutos Superiores de Educação.

Os Institutos Superiores de Educação (ISE) foram criados para suprir a necessidade de formar em nível superior um grande contingente de professores. Além disso, em seu Artigo 65º, explicita aspectos para a prática de ensino dessa formação docente, instituindo, no mínimo, trezentas horas para essa componente curricular. De acordo com o Conselho Nacional de Educação (CNE), a prática se define como “o espaço por excelência da vinculação entre formação teórica e início da vivência profissional, supervisionada pela instituição formadora”[5].

[5] Parecer CES n.º 744/97, aprovado em 03/12/97.

Nesse sentido, destacamos a preocupação em reformas dos cursos de Pedagogia e das Licenciaturas, propostas pelo CNE, visando novas perspectivas para a formação de professores, principalmente, no que se refere à prática pedagógica.

Nos Referenciais para Formação de Professores (BRASIL, 1999) são promovidas discussões sobre a formação permanente do professor, as quais priorizam na sua formação inicial, entre outras, a reflexão contínua sobre os conteúdos e sobre o ensino dos mesmos, que direciona a relação teoria-prática.

Quanto a essa relação, Schön (2000) chama a atenção para o fato que a formação dos professores não se dá em momentos distintos, mas no diálogo, o que, reafirma a ideia de que a teoria e a prática se constituem unidades indissociáveis. Estas unidades estão intimamente referendadas na constituição dos saberes dos professores, que integram o saber ao saber-fazer.

Outros pesquisadores como Shulman (1986 e 2005), Gauthier (1998) e Tardif (2002) trazem considerações importantes sobre os conhecimentos e saberes docentes. Os olhares destes pesquisadores contribuem para a complementaridade de questões a serem consideradas na formação de professores.

Shulman defende que a análise dos saberes docentes é feita a partir da relação entre o conhecimento e os dispositivos didáticos. Dessa forma, Shulman (2005) afirma ser necessária a construção do *knowledge base* (base do conhecimento) para o professor.

Nesse sentido, Tardif (2002) elucida que a expressão *knowledge base*, pode ser compreendida de dois modos: no sentido restrito, se refere aos saberes do professor relativo à gestão da classe e da matéria durante uma aula; no sentido amplo estabelece o conjunto de saberes abalizados na ação de ensinar. , ou seja, um conjunto de compreensões, conhecimentos, habilidades e disposições necessárias aos professores para a ação de ensinar.

Para Shulman (2005) essa base de conhecimento é constituída de categorias que promovem uma organização para o saber do professor. Assim apresenta as seguintes categorias:

> a) *conhecimento do conteúdo*; b) *conhecimento didático geral,* tendo em conta especialmente aqueles princípios e estratégias gerais de manejo e organização da classe que transcendem o âmbito da disciplina; c) *conhecimento do currículo*, com um especial domínio dos materiais e dos programas que servem como “ferramentas para

> o ofício" do docente; d) *conhecimento didático do conteúdo*: esse especial amálgama entre matéria e pedagogia que constitui uma esfera exclusiva dos professores, sua própria forma especial de compreensão profissional; e) *conhecimento dos alunos e de suas características*; f) *conhecimento dos contextos educativos*, que abarcam desde o funcionamento do grupo classe, a gestão e financiamento dos distritos escolares até o caráter das comunidades e culturas; e g) *conhecimento dos objetivos, das finalidades e dos valores educativos, e de seus fundamentos filosóficos e históricos*. (SHULMAN, 2005, p.11)[6]

Shulman (2005) elege, dentre essas características da base do conhecimento, *o conhecimento didático do conteúdo*. Esse conhecimento abrange a maneira de pensar do professor e reflete nas escolhas das ações para formular e apresentar a matéria, ou seja, refere-se ao ensino da disciplina.

Segundo esse autor, o *conhecimento didático do conteúdo* provavelmente proporciona aspectos para diferenciar a compreensão de um pesquisador da compreensão de professor. Shulman (2005) ainda define:

> O conhecimento didático do conteúdo representa a mistura entre a matéria e didática porque se chega a uma compreensão de como determinados temas e problemas se organizam, se representam e se adaptam para os diversos interesses e capacidades dos alunos, e se expõe no seu ensino (SHULMAN, 2005, p.11)[7].

Percebemos, então, a importância desse conhecimento para formação do exercício profissional do professor. Além disso, a influência determinada pela especificidade da disciplina a ser ensinada promove transformações no conhecimento didático do conteúdo, por causa das relações existentes entre o conteúdo e seu ensino. Relações que, por vezes, são indissociáveis e estão imbricadas como a relação entre teoria e prática, mas que possuem origens diferenciadas. O conhecimento didático (ou pedagógico) do conteúdo se justifica na profissão do professor, na ação docente, enquanto que o conhecimento do conteúdo se explica pelo conhecimento científico, mas muito se tem a pesquisar sobre a relação entre eles e sua implicação para a prática docente, bem como sobre a recíproca: como a prática docente interfere nesses conhecimentos?

Shulman (2005) também explicita quatro fontes para o conhecimento base do professor para ensinar: a primeira é a formação acadêmica, a segunda são as orientações curriculares, os livros didáticos, entre outros; a terceira é a pesquisa de

[6] Tradução nossa
[7] Tradução nossa

escolarização e de elementos diretamente relacionados ao professor e a última a sabedoria da própria prática.

Notamos aqui que a discussão sobre a construção dos saberes docentes é evidenciada, principalmente no que diz respeito ao conhecimento necessário para o exercício profissional, ou seja, na área de conhecimento específica e na maneira de ensinar. Acreditamos ser necessário alertar para outras competências que o professor necessita enquanto profissional, que prevê relações com alunos, coordenadores, pais e a comunidade, ou seja, enquanto ser social.

Gauthier (1998) defende que alguns dos maiores desafios para a profissionalização docente provêm de dois erros fundamentais, aos quais denomina *ofício sem saberes* e *saberes sem ofício*. O primeiro recai sobre o exercício da atividade docente, a qual é feita sem dar-se conta dos saberes ligados ao conteúdo, à experiência e à cultura, essenciais nessa atividade. O segundo está ligado ao conhecimento, por vezes produzido em universidades e centros de pesquisa, que desassocia os saberes das condições reais de seu ensino.

Desse modo, recomenda-se um *ofício feito de saberes*, que, segundo Gauthier (1998), se organiza em distintos saberes, quais sejam: a) disciplinar – que se refere ao conhecimento a ser ensinado; b) curricular – que diz respeito à transformação da disciplina em programas de ensino das Ciências da Educação relacionados ao saber profissional específico, mas que não está diretamente relacionado com a ação pedagógica; c) da tradição pedagógica – relativo ao saber *dar aula*s, que será modificado e/ou adaptado pelo saber experiencial; d) da experiência – produzido pelo professor de forma particular; e, e) da ação pedagógica – os saberes experienciais testados e tornados públicos.

Tardif (2002) define o saber docente como:

> ... um saber sempre ligado a uma situação de trabalho com outros (estudantes, colegas, pais, gestores, etc.), um saber ancorado numa tarefa complexa (ensinar), situado num espaço de trabalho (a sala de aula, a escola), enraizado numa instituição e numa sociedade (TARDIF, 2002, p.15).

Com relação aos saberes dos professores, Tardif (2002) também propôs um modelo tipológico para classificá-los: a) *saberes* da *formação profissional* – advindos das ciências da educação e da ideologia pedagógica; b) *saberes pedagógicos* – provenientes das reflexões sobre a prática educativa; c) *saberes disciplinares* –

correspondem aos diversos campos do conhecimento; d) *saberes curriculares* – correspondentes aos programas escolares e livros didáticos; e) *saberes experienciais* – que se fundamentam na sua prática do ofício de ser professor.

A partir do exposto, podemos observar diferentes classificações do conhecimento do professor que explanam uma diversidade de tentativas de compreender o saber do professor. Embora sejam pesquisas que se fundamentam em diferentes elementos: *epistemológicos* (SHULMAN, 1986), *correntes filosóficas* (GAUTHIER, 1998) e *pluralismo profissional* (TARDIF, 2002), podemos vislumbrar os mesmos objetivos que é reconhecer os saberes e conhecimentos necessários ao professor para o exercício de sua profissão.

Em relação à experiência do professor, Shulman (1986) afirma que o conhecimento dos professores se constrói com o ensino. Portanto, os conhecimentos advindos da prática docente são com certeza múltiplos e fonte essencial do conhecimento do professor, precisando ser valorizado por instituições de formação continuada e ainda por pesquisadores.

Tardif (2002) acrescenta aos saberes experienciais do professor a característica de se fundamentar tanto na ação de ensinar quanto nas "preconcepções do ensino e da aprendizagem escolar herdadas da história escolar" (p.72).

Ao trazer para o diálogo essa relação teoria-prática, no contexto em que se evidencia a prática docente-discente e a troca das diferentes vivências, percebemos que a noção de experiência traz a compreensão de uma pedagogia que interage e dialoga com a construção dos saberes ao longo do processo vivenciado. Portanto, é da experiência que acumula em sua vida, refletida, submetida a análises, confrontando as teorias, as próprias práticas e as de outros, bem como avaliando seus resultados, que o professor vai construindo o seu *jeito de ser professor*, ou seja, sua identidade profissional.

Observamos, portanto, que os conhecimentos produzidos para e pelos professores são diferenciados e dimanam de diversos lugares. Desse modo, quando pensamos nas especificidades de cada disciplina, de cada conteúdo, de cada sala de aula, de cada aluno e nas pesquisas que estão sendo desenvolvidas, agregando os diferentes níveis e os diversos saberes específicos, nos deparamos com a amplitude de inseguranças, incertezas e dúvidas que permeiam essa construção de saberes docentes.

O acima exposto demonstra, em parte, o panorama da formação de professores e de algumas pesquisas que contribuem para essa reflexão. A partir de agora, discutimos especificamente a pesquisa sobre a formação do professor que ensina Matemática, na busca de investigar como pode ocorrer a relação entre o *conhecimento de conteúdo* e o *conhecimento didático do conteúdo,* proposto por Shulman (1986), e suas especificidades no âmbito da disciplina Matemática.

CAPÍTULO 2

A FORMAÇÃO DO PROFESSOR QUE ENSINA MATEMÁTICA

Nas últimas décadas, há um novo olhar direcionado à *formação do professor que ensina Matemática*[8], mostrando ser importante que docentes reflitam sobre suas práticas e investiguem suas salas de aula, propiciando um conhecimento sobre como os alunos produzem saberes, repercutindo sobre as atitudes tomadas nos processos de ensino e de aprendizagem.

Esta perspectiva atual se apresenta devido aos questionamentos levantados por quem ensina Matemática e pelos formadores destes professores que buscam alternativas às situações que se apresentam na formação deste professor. Paiva (2002) apresentou um diagnóstico dos problemas enfrentados na formação inicial de professores que ensinam Matemática que ainda hoje são bastante atuais:

> [...] as crenças e concepções desses alunos, futuros professores não são consideradas nem discutidas, não propiciando uma formação reflexiva; [...] o ensino não parte dos conhecimentos prévios desses alunos, que já cursaram todo o Ensino Fundamental e médio e, além disso, não levam em consideração que a maioria deles já possui experiências profissionais como professores (PAIVA, 2002, p.95).

Outro aspecto que deve ser acrescido é que os professores conheçam as pesquisas e estudos que são realizados em Educação Matemática, a fim de proporcionar a reflexão e a discussão sobre seus resultados, estimulando o professor a assumir uma postura de investigador – de seus próprios conhecimentos, dos de seus alunos e da sua prática docente. Essas discussões nos cursos de formação de professores ou em formação continuada podem auxiliar na re-elaboração das crenças e concepções desses professores, permitindo uma postura de professor enquanto pesquisador.

Recentemente, Borba e Guimarães (2006), preocupadas com esses aspectos na formação do professor que ensina Matemática nos anos iniciais, investigaram a importância da pesquisa como modo de propiciar aos professores possibilidades de reflexão que melhorariam sua ação de ensino. As autoras defendem que para professores adotarem a postura de pesquisadores, é necessária constante reflexão sobre sua sala e pensar na pesquisa não como “algo inacessível”, mas sim fazendo de suas ações alvo de investigações que, quando coletadas e analisadas, levem a redirecionamentos de suas práticas.

---

[8] Professores de todos os níveis de ensino – da Educação Infantil ao Ensino Superior – que estejam envolvidos com o Ensino de Matemática.

Ferreira (2003) acrescenta a essa discussão as muitas tentativas de reformas de ensino serem feitas *de fora para dentro*, ou seja, que “o ensino e a aprendizagem nas escolas podem ser controlados pela regulação de fora da escola, por exemplo, via currículo” (p.35). Nessa perspectiva, a autora indica a ausência de consideração em relação às concepções dos professores do que seja “um bom ensino de Matemática” devido às possíveis crenças ligadas a tais concepções e reforçadas pelas próprias experiências de ensino.

Desse modo, deve-se procurar estudar as potencialidades de cada professor, respeitando sua individualidade. Ferreira (2003), nesse sentido, defende o desenvolvimento profissional do professor como:

> ...um processo que se inicia muito antes da formação inicial e que se estende durante toda a trajetória do professor, ou seja, que se preocupa menos com o produto e mais com o processo que se desenrola por meio de um contínuo movimento de dentro para fora, valorizando o professor pelo seu potencial, no qual a prática é a base para um relacionamento dialético entre teoria e prática e, muitas vezes, ponto de partida (FERREIRA, 2003, p.35).

Entende-se o processo de desenvolvimento profissional como variado, porque depende do tempo de profissão exercido, das experiências vivenciadas, das oportunidades surgidas, da maneira pessoal de ações e reações ao lidar com dificuldades.

No sentido de suprir algumas dificuldades enfrentadas na formação de professores, Nacarato e Paiva (2006) apontam algumas tendências de pesquisas sobre a formação de professores que ensinam Matemática no Grupo de Trabalho do II SIPEM[9], que se constituem nos seguintes focos temáticos: o professor como produtor de saberes; o professor como agente de sua própria formação e a relação entre o professor e a pesquisa.

Com relação à produção de saberes do professor, estudos demonstram que para ser um bom professor não basta apenas saber os conteúdos, mas também conhecer a natureza dessa profissão e que outros saberes são indispensáveis. De acordo com Sztajin (2002):

> ... inicialmente, o professor deve compreender a disciplina que irá ensinar. Mais ainda, deve compreendê-la de diversos modos, a partir de diferentes perspectivas, estabelecendo relações entre os vários

[9] II Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática realizado em novembro de 2000, na cidade de Santos, São Paulo.

> tópicos e entre sua disciplina e as demais. O professor, entretanto, deve ser capaz de transformar esse seu conhecimento em algo pedagogicamente útil e adaptável aos diversos níveis de habilidade, conhecimento e formação de seus alunos (SZTAJIN, 2002, p.19).

Torna-se indispensável para a profissão docente a habilidade de propor situações diferenciadas para se conseguir êxito na construção de conceitos pelos alunos e, ainda, é necessário ter consciência de qual a situação mais adequada para cada momento, para cada dificuldade apresentada.

Sztajin (2002) dialoga com Shulman (2005) quando explicita a importância do conhecimento do conteúdo (compreensão da disciplina) e o conhecimento pedagógico do conteúdo (transformação do conteúdo para o ensino).

Especificamente, quais os conhecimentos necessários ao professor de Matemática? O que é conhecer Matemática e o que significa saber ensinar Matemática?

Sztajin (2002) considera que a procura "pelo que deve compor e de como se constrói essa faceta do saber do professor de Matemática (o saber pedagógico-disciplinar) parece ser uma busca de novas ideias para a melhora da formação desse professor" (p.27).

Ball (1991) defende que o conhecimento de Matemática que o professor possui se relaciona com seus pressupostos e suas crenças sobre o ensino e a aprendizagem, sobre os alunos e sobre o contexto da sala de aula, diferenciando, assim, a maneira como cada professor ensina Matemática.

Grossman, Wilson e Shulman (2005), na tentativa de "desbaratar o status quo" envolvido no relacionamento entre didática e conhecimentos do conteúdo propõem algumas dimensões dos conhecimentos necessários para o ensino, enfatizando, ainda, o papel das crenças sobre a matéria de ensino, pontuando que:

> A habilidade para transformar o conhecimento da matéria requer algo mais que o conhecimento de sua substância e síntaxe; requer conhecimentos dos aprendizes e da aprendizagem do currículo e do contexto, dos fins e objetivos da ação didática. Requer também um conhecimento da ação didática específico da matéria (GROSSMAN et al, 2005 pp 20-21).

Sistematizando essa discussão Hill, Rowan e Ball (2005) propõem uma definição para o conhecimento matemático necessário ao professor no exercício da sua profissão:

> ...como o conhecimento matemático usado para ensinar a matemática. Por exemplo, neste trabalho de ensino inclui a explicação de termos e conceitos aos alunos, a interpretação de suas afirmações e soluções, analisar e corrigir a abordagem que os manuais trazem sobre determinado tópico, utilizar representações coerentes na aula, bem como proporcionar aos seus alunos exemplos de conceitos matemáticos, algoritmos e demonstrações (HILL, ROWAN, BALL, 2005, p.373)[10].

Na mesma direção, pesquisas avançam na tentativa de descrever esse conhecimento como multidimensional. No caso específico do ensino de Matemática Ball et al (2008) indica uma série de outros domínios de conhecimentos como apresentam resumidos no diagrama a seguir:

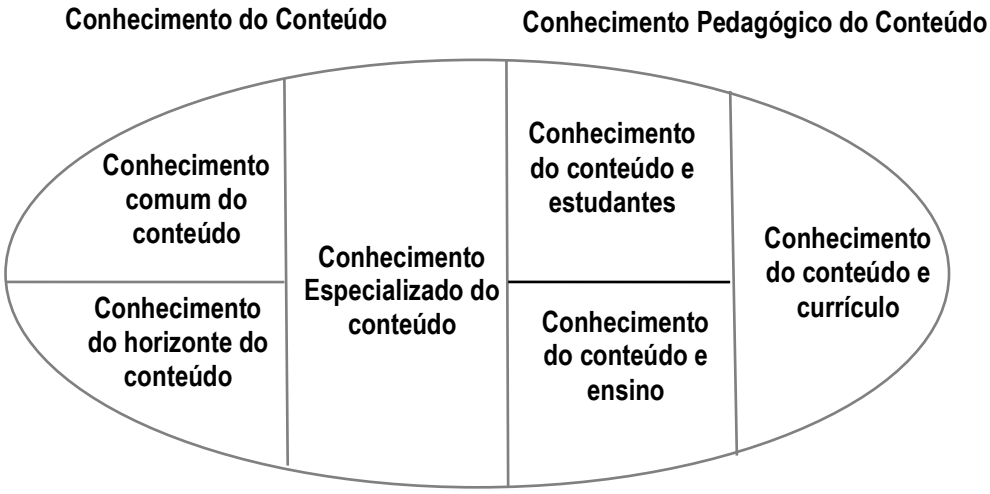


Figura 1: Diagrama dos Domínios do Conhecimento Matemático para o ensino

Fonte: BALL, THAMES e PHELPS (2008) p.404

O panorama acima parece iniciar com as pesquisas sobre a construção dos saberes docentes, algumas das quais já relatadas no capítulo anterior. No que diz respeito à Matemática, já em 1991, Ball advogava que o saber disciplinar de Matemática apresentava três dimensões: *o conhecimento substantivo*, relativo às proposições, conceitos e procedimentos utilizados em Matemática; *o conhecimento da natureza da Matemática e do discurso matemático,* referente ao fazer Matemática, sua organização como ciência e como área de conhecimento; e *o conhecimento de suas atitudes perante o assunto*, que diz respeito às ações

[10] Tradução nossa

pessoais, às respostas emocionais que a pessoa tem diante da Matemática e sua percepção sobre tais ações.

Na Figura 1 está proposto um avanço nessa investigação no sentido de delimitar, mais precisamente, no caso específico do professor que ensina Matemática, quais os conhecimentos de fato relacionados com esse processo de ensino. Adiante-se que o mesmo conteúdo de ensino pode perpassar por vários dos domínios acima relatados, mais a classificação de fato permite uma melhor compreensão do problema por trás de tal delimitação. Nela temos como alicerce o *conhecimento comum do conteúdo,* sobre o qual recai qualquer compreensão dos conhecimentos necessários ao ensino de Matemática.

Nesse domínio estariam os conhecimentos não necessariamente específicos ao ensino de Matemática ou ao especialista dessa disciplina, o que não quer dizer que todos sejam possuidores desse conhecimento. Por exemplo, a resolução de cálculos básicos está nessa esfera de conhecimento. No caso de Combinatória a resolução de problemas elementares utilizando o princípio multiplicativo.

Um segundo domínio de conhecimento, o *conhecimento especializado do conteúdo*, encontra-se necessariamente como um domínio ligado ao ensino. Primeiro, ele é um conhecimento da matéria, ou seja, a Matemática, e, segundo, ele não é requerido em outra ação que não a de ensino. Por exemplo, ao analisar padrões em erros de alunos resolvendo situações-problema, o professor faz uso desse domínio de conhecimento. No caso da Combinatória, quando um professor nota o uso indevido de uma estratégia na resolução de um problema pelo aluno – como um procedimento aditivo incorreto, por exemplo – ele está imerso nesse tipo de domínio de conteúdo.

O domínio chamado *conhecimento do conteúdo e estudantes* combina o conhecimento sobre o ensino e sobre os alunos desse ensino. Um professor deve antecipar quando alunos estão motivados na resolução de tarefas escolares ou não. Também deve propor situações alternativas para elevar tal motivação ou mesmo gerir a sala de aula. A compreensão de um erro, por parte de um aluno na resolução de um problema, ou de estratégia inovadora nessa resolução, faz parte desse domínio. Numa situação de Combinatória em que o professor insista em certas estratégias, como por exemplo, a utilização de fórmulas, ele buscar entender outras estratégias de resolução por parte dos alunos, como a utilização da árvore de possibilidades, está fazendo uso desse domínio de conhecimento.

A combinação de conhecimento sobre ensino e conhecimento sobre Matemática formam o domínio denominado *conhecimento do conteúdo e ensino.* Boa parte das tarefas de ensinar requer esse domínio. O planejamento de ensino, a preparação de uma sequência didática para determinado conteúdo, a elaboração de uma avaliação, a determinação de uma estratégia de superação das dificuldades dos alunos ou a escolha de um recurso didático fazem parte desse domínio. Um professor que deseje preparar uma ação pedagógica sobre Combinatória para turmas diferenciadas – de Ensino Regular ou de Educação de Jovens e Adultos – fará uso desse domínio.

Inicialmente, os quatro domínios mencionados foram relatados por Ball et al (2008) como aqueles intrínsecos ao conhecimento necessário ao ensino de Matemática. De um refinamento de categorias de conhecimento de Shulman (1986), surgiu a divisão proposta na Figura 1. Por *conhecimento de horizonte do conteúdo*[11] os autores entendem aquele conhecimento envolvido no encadeamento dos conteúdos curriculares. Por exemplo, professores que ensinam Combinatória no 4º ano, podem querer saber como tais conhecimentos serão abordados por professores que ensinarão tal conteúdo no 2º ano do Ensino Médio e vice-versa.

O último conhecimento proposto, o *conhecimento do conteúdo e do currículo*, é, evidentemente, fruto do refinamento mencionado anteriormente. Ele poderia estar contido no quarto domínio de conhecimento o *conhecimento do conteúdo e de ensino*, mas representa um avanço nesse processo de categorização. Recentemente, a consciência da proposta de introduzir o ensino da Combinatória desde os anos iniciais do Ensino Fundamental faz parte desse tipo de conhecimento.

Compreender estas dimensões e suas especificidades proporciona ao professor assumir posturas que apresentem a Matemática como *algo mais* que um conjunto de regras e fórmulas prontas e acabadas. Mais que isso, o avanço proporcionado por essas e outras pesquisas determinam um qualificador naquilo que é, talvez, um problema muito relevante da docência: o desenvolvimento profissional de um professor que ensina Matemática.

Desse modo, pesquisas como de Shulman (1986 e 2005) e de Ball e seus colaboradores (2008) estão sendo utilizados como fundamento em vários estudos

[11] Traduzido de Horizon Contet Knowledge no sentido de um conhecimento mais amplo

realizados para identificar, nos professores em exercício, características desses conhecimentos no ensino de conteúdos específicos (MA, 2009), ou como esses conhecimentos podem se apresentar em cursos de formação (CURI, 2005). Apresentamos esses estudos a seguir.

Ma (2009) elaborou um estudo comparativo sobre os conhecimentos de professores dos Estados Unidos e da China, não com intenção de avaliá-los, mas para descobrir exemplos de conhecimentos adequados desses professores sobre conteúdos matemáticos.

Essa pesquisadora adotou como instrumento metodológico uma entrevista, com 23 professores americanos e 72 professores chineses, na qual utilizava as questões do TELT[12]. Nessa entrevista foi proposto aos professores que analisassem quatro situações típicas da sala de aula, que, segundo Ma (2009), se propunham a "ensinar um tópico, reagir a um erro dos alunos, criar uma representação de um determinado tópico e responder a uma nova ideia apresentada por um aluno" (p.28).

O resultado dessa investigação evidencia que embora professores americanos estudassem uma Matemática mais avançada durante a escolaridade e universidade, os professores chineses apresentavam um conhecimento mais amplo de conteúdos de Matemática do Ensino Básico.

Curi (2005) traz importantes considerações para a formação inicial do professor polivalente. Em sua pesquisa, a partir de uma entrevista semi-estruturada, ela analisa os conhecimentos para ensinar Matemática de 12 alunas-professoras dos anos iniciais e suas crenças e atitudes em relação a essa disciplina e como essas crenças interferem na formação dos mesmos.

Além das entrevistas, foram analisados os materiais produzidos na formação e os portfólios das alunas. Esses portfólios, produzidos durante o curso de formação, constavam de narrativas de suas memórias do período de escolaridade, relatórios das atividades realizadas com alunos e reflexões sobre os textos da formação vivenciada.

A análise das influências das crenças e atitudes dos professores em sua formação se balizou em Gómez-Chacón (2002). De acordo com Curi (2005), esses

[12] TELT- Teacher Education and Learning to Teach - desenvolvido por Ball (1988) no intuito de testar o conhecimento matemático que os professores adotam no processo de ensino abrangendo os conceitos matemáticos de subtração com reagrupamento, a multiplicação com números de vários algarismos, a divisão por fração e o perímetro e área de figuras fechadas.

autores defendem que essas crenças fazem parte do domínio cognitivo do professor e são compostas por elementos afetivos, avaliativos e sociais.

Nesse sentido, Curi (2005) observou nas narrativas das alunas-professoras que elementos da formação no magistério podem interferir nas relações com o conteúdo da Matemática e, por consequência, nas escolhas de práticas para ensinar essa disciplina. Aspectos como: *o que* e *como* aprenderam, metodologia de ensino centrada na confecção de materiais didáticos, do *ser bom* ou não em Matemática, insegurança ao resolver problemas, de tornar a disciplina útil e prazerosa para os alunos, são alguns dos elementos discutidos pela autora como influência na relação docente com a Matemática.

Curi (2005) considera, ainda, que embora esses conhecimentos "apareçam imbricados nas ações dos professores, são uma ferramenta muito útil no processo de seleção e organização dos conteúdos a ensinar, tanto os conceituais, como os procedimentais e atitudinais" (p.18).

Essa autora observou nas entrevistas realizadas, que, provavelmente pelos saberes experienciais das entrevistadas, suas narrativas se destinavam geralmente *aos conhecimentos didáticos dos conteúdos matemáticos.* Outro elemento interessante foi a relação entre o processo de construção dos conhecimentos matemáticos, quando alunas da escolaridade básica, e o processo de construção dos conhecimentos por seus alunos.

Curi (2005) defende que na proposta de formação de professores os conhecimentos dos conteúdos matemáticos e os conhecimentos didáticos dos conteúdos devam estar articulados. Além disso, considera que conteúdos atitudinais e procedimentais devam ser acrescentados aos conteúdos conceituais, pois "é necessário também que em sua formação o professor polivalente desenvolva ou aprimore capacidades como resolver problemas, argumentar, estimar, raciocinar matematicamente, comunicar-se matematicamente" (CURI, 2005, p.157).

Dessa forma, reafirma a necessidade de um maior tempo na formação desses professores destinado ao tema de Matemática, na qual sejam discutidos a natureza dos conhecimentos matemáticos, seus aspectos históricos e as aplicações na sociedade. Dentre os temas estudados no curso de formação analisado, a autora observa que os conteúdos ligados ao tratamento dos conteúdos geométricos e dos conteúdos referentes à Estatística, Combinatória, Probabilidade precisam de maior ênfase, pois geralmente são desconhecidos pelo professor.

Portanto, no contexto acima delineado, o professor que ensina Matemática, precisa se apropriar de conhecimentos de diferentes naturezas, tais como: o conhecimento específico dos conteúdos a serem trabalhados em sala de aula – em termos de significados, que os conceitos podem assumir as relações e propriedades destes conceitos e as formas de representação simbólica que podem ser utilizadas para registro e operacionalização do conceito; o conhecimento de como um conceito se desenvolve e de fatores que podem influenciar este desenvolvimento.

Curi (2005) encaminha, ainda, que pesquisas sobre a formação de professores “representam um avanço muito importante, mas precisam ser aprofundadas em suas especificidades, como é o caso do nível de escolaridade em que o profissional professor atua e a(s) disciplina(s) que ensina” (CURI, 2005, p.149)

Na busca de conhecer essas especificidades, é preciso entender sobre a natureza do conteúdo matemático em questão no presente estudo, no caso a Combinatória. Além disso, é necessário compreender as particularidades de seu ensino e aprendizagem nos diferentes níveis de escolaridade e as pesquisas desenvolvidas em relação a esse conteúdo. Nesse contexto, focalizamos essa discussão no capítulo que segue.

CAPÍTULO 3

ENSINO E APRENDIZAGEM DE COMBINATÓRIA: diferentes olhares

Grandes desafios se impõem à Educação Matemática nos dias atuais. Apesar do crescimento das pesquisas apresentadas em congressos especificamente de Educação Matemática, voltadas para o conhecimento sobre os processos de construção dos conceitos matemáticos, ou para as questões que permeiam o ensino e aprendizagem dessa disciplina, ainda nos deparamos com escolas nas quais, muitas vezes, o ensino de Matemática fica reduzido à transmissão e memorização de informações. O processo longo e complexo de mudanças exige da escola e dos professores a participação ativa do aluno nessa construção, proporcionando significados ao que é ensinado na escola.

Alguns subsídios para teorização e pesquisa no ensino da Matemática são oferecidos por diferentes domínios científicos articulados com a Educação Matemática, dentre estas a Psicologia da Educação Matemática. Nesse sentido Rocha Falcão (2003) explica que o surgimento dessa área de pesquisa enfatiza diferenças existentes em sua contribuição para a Educação Matemática, posto que, reúne a *atividade mental do sujeito, a conceitualização em Matemática e a construção de conhecimento científico.*

Para esse autor, a atividade Matemática permeia três contextos: *Matemática Escolar*: interações na aula regidas por normas, como as presentes no contrato didático (BROUSSEAU, 1986); *Matemática Extra-Escolar*: interações no dia-a-dia, no comércio, na rua, regidas por características próprias (SAXE, 1991; LAVE, 1988) e *Matemática dos matemáticos*: conteúdos que são adaptados pelos professores para a aula, por meio de transposição didática (CHEVALLARD, 1991). Não obstante dessas diferenças da atividade Matemática, esses contextos se misturam na ação diária do docente que tem por objetivo ensinar Matemática.

Chamamos a atenção que as pesquisas desenvolvidas devem considerar saberes dos professores. Seguindo essa ideia, Ball (1991) indica que “pesquisadores devem criar oportunidades para explorar o conhecimento que o professor tem de determinado conceito em diversos contextos e a partir de vários pontos de vista” (p.17).

Outro aspecto a ser considerado na pesquisa e no ensino de Matemática são os erros ou dificuldades dos alunos, as quais demonstram suas concepções sobre conceitos e situações e evidenciam obstáculos. Duroux (1983) define obstáculos como uma concepção e não uma falta de conhecimento. Nesse sentido,

consideramos que os erros são elementos significativos que devem fazer parte da reflexão e análise de professores e fomentar a discussão entre alunos.

Para modificar antigas perspectivas de ensino, uma solução será que os docentes tenham uma visão de conceitos interligados em campos, para que possam acompanhar o desenvolvimento conceitual de seus alunos e, para tanto, necessitam assumir uma postura investigativa como a de um pesquisador. Aspectos dessa visão serão discutidos na seção que segue.

3.1. CONSTRUÇÃO DE UM CONCEITO EM MATEMÁTICA

Como ocorre o processo de construção dos conhecimentos matemáticos? Como professores que ensinam Matemática podem auxiliar efetivamente nestes processos? Estas questões nos remetem, por outra perspectiva, à caracterização de uma identidade própria do ensino da Matemática, a Didática da Matemática, a partir da compreensão dos alunos. Entender, por essa perspectiva, como acontece a aprendizagem e a construção de um conceito por alunos, pode subsidiar algumas das escolhas realizadas pelos professores.

Nesse sentido, Vergnaud (2008) em entrevista recente afirma que:

> ...gerenciar o aprendizado é gerenciar ao mesmo tempo a desestabilização e a estabilização. Portanto, temos de pensar mais e propor situações corriqueiras aos que estão aprendendo... O que minha teoria propõe é que precisamos pensar de forma mais sistemática. O grande desafio do professor é ampliar as dificuldades para as crianças, mas sabendo o que está fazendo e onde quer chegar (VERGNAUD, 2008, p.34).

Portanto, é essencial que os professores em seu trabalho docente tenham condições de conhecer melhor seu trabalho, as possibilidades e os limites de suas ações, as dificuldades que vão encontrar e as formas de incentivar a evolução das turmas. Também é preciso perceber que ampliar as dificuldades não é dificultar o trabalho do aluno, e, sim criar novas situações de aprendizagem que desafiem o aluno a buscar estratégias de solucionar o problema de maneira singular.

Com a Teoria dos Campos Conceituais, Vergnaud (1986) contribui para esse trabalho, estudando a construção dos conceitos matemáticos envolvidos em situações-problema, na qual identifica três dimensões que influenciam sua apreensão: *significados envolvidos* (podem ser explícitos ou implícitos à situação dada); *propriedades invariantes* (relações conservadas mesmo diante de certo conjunto de transformações); e *representações simbólicas* (desenhos, símbolos matemáticos, escrita, linguagem oral, dentre outras formas).

Esse autor estimulou a pesquisa sobre o desenvolvimento conceitual, posto que a construção de um conceito só ganha sentido para o aluno a partir de sua experiência com uma variedade de situações que envolvem o conceito e suas relações com outros conceitos, auxiliando, assim, os professores no papel de mediar essa construção. Desse modo, a escola possui um papel de apresentar situações variadas nas quais estejam presentes uma diversidade de conceitos, o que necessita clareza das relações existentes na elaboração de conceitos.

Dessa forma, Vergnaud (1986) defende que o conhecimento se organiza em campos conceituais, sendo campo conceitual definido como um conjunto de situações, cujo domínio necessita de uma variedade de conceitos, de procedimentos e representações simbólicas em estreita ligação.

A aprendizagem de conceitos dentro de um campo conceitual não ocorre em meses ou mesmo em anos. Para que isso aconteça, torna-se necessário estudar novos problemas e novas propriedades ao longo de vários anos. A construção de conceitos matemáticos se dá por meio da proposta de uma gama de situações que proporcionem a oportunidade para os alunos reconhecerem os invariantes e utilizarem variadas representações simbólicas, permitindo aos mesmos a visão do conhecimento matemático com sentido e significados.

Vergnaud (1991) apresenta, ainda, importantes abordagens para os processos de ensino e de aprendizagem da Matemática, ressaltando a organização de conceitos aritméticos nos campos conceituais das estruturas aditivas e estruturas multiplicativas, nos quais considera diferentes tipos de situações com suas especificidades. A seguir, apresentaremos o campo conceitual das estruturas multiplicativas, a fim de delinear as particularidades da classificação dos problemas combinatórios.

3.1.1. Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas e a Classificação de Problemas Combinatórios

Um dos aspectos básicos na formação de conceitos combinatórios diz respeito à própria aprendizagem das estruturas multiplicativas e sobre o aprendizado de problemas de multiplicação, divisão e outros conceitos relacionados. Diversos autores pesquisadores têm trazido contribuições referentes a este campo conceitual (Vergnaud, 1983; Nunes e Bryant, 1997 dentre diversos outros).

Sobre o campo conceitual das estruturas multiplicativas, Vergnaud (1991) explica que este é constituído de situações que podem ser analisadas como proporções simples e múltiplas para as quais, normalmente, é preciso multiplicar e/ou dividir. O referido autor afirma também que, diferentes conceitos matemáticos estão relacionados a estas situações, como as funções lineares e não-lineares, espaços vetoriais, análise dimensional, fração, razão, proporção, números racionais, além da multiplicação e divisão, dentre outros conceitos.

Vergnaud (1991) descreve classes de problemas multiplicativos, identificando *os problemas de isomorfismo de medidas* (os quais abrangem uma relação quaternária entre quantidades, que envolvem uma proporção direta simples) e *os problemas de produtos de medidas* (os quais detêm uma relação entre três variáveis sendo que uma quantidade é o produto das outras duas) e os *problemas de proporções múltiplas* (nos quais as medidas de quantidade em um campo são proporcionais às medidas em dois tipos de quantidades independentes).

Problemas como esses se resolvem por multiplicação ou divisão, dependendo de como a situação os envolve. No entanto, a estrutura do problema pode causar dificuldades, principalmente no que diz respeito ao cálculo relacional dos problemas, que consiste na decisão de que estratégia de resolução, ou seja, na escolha do procedimento adequado (via enumeração ou desenho, por exemplo) ou a operação aritmética pode ser utilizada para resolver a situação (multiplicação ou divisão).

Outros pesquisadores também classificaram as estruturas dos problemas multiplicativos. Nunes e Bryant (1997) os dividem em: (a) *correspondência um-a-muitos* (que apresentam situações de proporção e que se apresentam das seguintes formas – multiplicação direta, problema inverso de multiplicação (também conhecido como divisão quotitiva) e *produto cartesiano*); (b) *Relação entre variáveis* ou *co-variação* (que relacionam duas ou mais variáveis, diferenciando-se da classificação

anterior por envolverem números racionais); (c) *Distribuição e cortes sucessivos* (na qual se apresenta três valores: o total, o número de receptores e o tamanho da distribuição).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) também apresentam outra classificação para os problemas de multiplicação e divisão: *multiplicação comparativa* (na qual se estabelece uma comparação entre as quantidades trabalhadas, como por exemplo: o dobro de...), *ideia de proporcionalidade* (na qual são incorporadas a ideia de comparação entre razões), *configuração retangular* (na qual se estabelece a quantidade de pontos dispostos numa malha quadriculada) e *ideia de Combinatória* (que consiste em combinar elementos entre conjuntos).

Para Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) a partir dos fundamentos da álgebra dos conjuntos, se apresentam as três regras básicas para a Combinatória elementar: a *regra da soma* (equivale ao principio aditivo de dois ou mais conjuntos); a *regra do produto* (equivale ao número de elementos do produto cartesiano de dois ou mais conjuntos) e a *regra do quociente* (regra subjacente ao cálculo de *combinações* como o quociente do número de *arranjos* pelo número de *permutações*).

Nessas classificações, chamamos a atenção para os problemas multiplicativos de *produto cartesiano*, segundo Nunes e Bryant (1997), de *produto de medidas*, segundo Vergnaud (1991), e *ideia de Combinatória*, segundo os PCN (BRASIL, 1997) e a *regra do produto* indicada por Batanero et al (1996) que representam a mesma estrutura multiplicativa, ou seja, consistem na estrutura cartesiana de duas ou mais medidas para encontrar uma terceira.

Morgado, Pitombeira de Carvalho, Pinto de Carvalho e Fernandez (1991) denominam esta estrutura multiplicativa de *princípio da multiplicação* ou *princípio fundamental da enumeração.* Também conhecido como Princípio Fundamental da Contagem (PFC)[13]. Esse princípio pode ser entendido como uma maneira de resolução de problemas combinatórios e não como um tipo específico de problema, uma vez que o PFC se aplica não só para problemas de *produto cartesiano*, mas também a outros problemas combinatórios. No presente estudo, escolhemos tratar este tipo de problema de *produto cartesiano*.

[13] Se existem x modos de tomar a decisão D1, e tomada a decisão D1, existem y modos de tomar a decisão D2, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D1 e D2 é xy.

Em relação à Combinatória, Batanero et al (1996) propõem outro tipo de modelização, na qual se fundamentam na proposta de Dubois (1984). Segundo tais autores esta proposta apresenta quatros modelos diferentes e relacionados para problemas simples de Combinatória:

> a) *Seleção* de uma amostra a partir de um conjunto de objetos; b) *Colocação* de objetos em urnas; c) *Partição* em subconjuntos de objetos; d) *Decomposição*[14] de um número natural em parcelas (BATANERO et al, 1996; p.31).

Nessa classificação, os problemas do tipo de *seleção* são os que equivalem aos problemas combinatórios simples. Batanero et al. (1996) indicam ainda que para resolver esses tipos de problema temos que considerar se a amostra a escolher é ordenada ou não, ou se podemos repetir os elementos nessa escolha. Para representar as estruturas dos problemas de seleção, esses autores apresentam o diagrama abaixo:

Figura 2: Estrutura dos problemas de seleção da classificação de Batanero et al (1996)

Fonte: Batanero et al (1996) p.32

Essa classificação inclui os problemas de *permutação simples e* pode ser entendida segundo os autores como um problema de *arranjo com todos os elementos*, ou seja, apenas a ordenação de objetos distintos. Contudo, se faz necessário acrescentar aos problemas de *permutação* as suas possibilidades de variação. Por exemplo, quando existe em seu conjunto algum elemento igual, denomina-se *permutação com repetição*. Os problemas de *seleção*, portanto apresentam estruturas combinatórias diferenciadas que precisam ser consideradas

[14] Esta última classificação é um caso particular da Partição, portanto os autores consideram apenas *Seleção, Colocação e Partição*

no momento de ensino e se faz necessário analisar outras representações além das mais usuais.

Pessoa e Borba (2007) apresentam outra abordagem para a compreensão dos problemas de Combinatória, na qual foram estudadas as estratégias de alunos na resolução dos mesmos, incluindo-se o *produto cartesiano* (apontado nas classificações anteriormente apresentadas), bem como o *arranjo*, a *permutação* e a *combinação* (tipos de problemas combinatórios trabalhados explicitamente no Ensino Médio). Esses tipos de problemas combinatórios são frequentes em livros didáticos e se apresentam em diferentes anos do Ensino Fundamental e Médio. Essa classificação é que referendamos, no presente estudo, e, assim, comentamos a partir dos estudos de Pessoa e Borba (2007, 2009a, 2009b) aspectos para delinear os diferentes *significados* (produto cartesiano, *permutação*, *arranjo*, *combinação*) a partir de suas situações-problema, invariantes do conceito e algumas representações.

Quadro 1: Organização do significado *Produto Cartesiano*

EXEMPLO DE SITUAÇÃO – PROBLEMA: Maria tem 3 saias (uma azul, uma preta e uma verde) e 5 blusas (nas cores amarela, bege, branca, rosa e vermelha). Quantos trajes diferentes ela pode formar combinando todas as saias com todas as blusas?

EXEMPLO DE REPRESENTAÇÃO						**INVARIANTES**
TABELA DE DUPLA ENTRADA Essa representação possibilita a listagem organizada de todas as possibilidades e ainda pode indicar a multiplicação						Se a escolha de blusas pode ser tomada de 5 modos e a escolha de saias pode ser tomada de 3 modos, o numero de maneiras de se tomar as duas decisões é 3 x 5 maneiras distintas. -- Dado dois (*ou mais*) conjuntos disjuntos: se temos n elementos para escolher no primeiro e p elementos no segundo, para escolher um elemento de cada temos n x p possibilidades; - A natureza dos conjuntos é distinta do novo conjunto
	Blusa amarela	**Blusa bege**	**Blusa branca**	**Blusa rosa**	**Blusa vermelha**	
Saia azul						
Saia preta						
Saia verde						

Além dessa representação, podemos utilizar a multiplicação, a listagem de possibilidades, a utilização do diagrama de árvores, dentre outras.

Quadro 2: Organização do significado *Permutação*

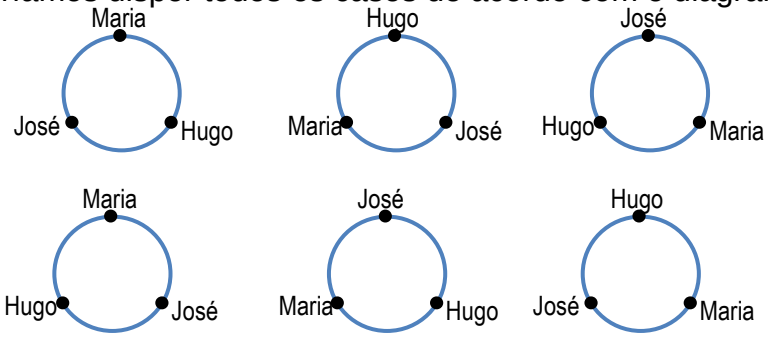
EXEMPLO DE SITUAÇÃO – PROBLEMA: De quantas formas diferentes poderei arrumar as fotos de meu irmão, meu pai e minha mãe na estante, de modo que elas fiquem lado a lado?

EXEMPLO DE REPRESENTAÇÃO	**INVARIANTES**
ÁRVORE DE POSSIBILIDADES Essa representação possibilita a listagem organizada de todas as possibilidades e ainda pode indicar a multiplicação **1º FOTO** **2º FOTO** **3º FOTO** *Mãe* → *Pai* → *Irmão* *Mãe* → *Irmão* → *Pai* *Pai* → *Mãe* → *Irmão* *Pai* → *Irmão* → *Mãe* *Irmão* → *Pai* → *Mãe* *Irmão* → *Mãe* → *Pai* **6 possibilidades**	Ordenação de todos elementos de um mesmo conjunto; Não há escolhas de subgrupo de elementos;

Além dessa representação, outras também são possíveis, tais como: a utilização do principio multiplicativo, o uso das fórmulas e da listagem. Não podemos desconsiderar as situações nas quais o conjunto possui elementos iguais (*permutação* com repetição) e aquelas cuja disponibilização é de forma circular (*permutação* circular) que não foram objetos de nossas observações.

Um exemplo de permutação circular: De quantos modos podemos formar uma roda de ciranda com 3 crianças (Maria, José, Hugo)?

Se fossemos fazer uma permutação das crianças dispostas em roda seria 3!, ou seja 6. E poderíamos dispor todos os casos de acordo com o diagrama abaixo:



Entretanto, as três primeiras disposições podem coincidir a partir da rotação e o mesmo acontece nos demais exemplos, de modo que a permutação circular tem o total de duas possibilidades.

Morgado et al (1991) indicam que na *permutação circular* “o que importa é a posição relativa dos objetos entre si” (p.42). Nas três primeiras os círculos em sentido anti-horário, Maria precede José, que precede Hugo, que precede Maria; portanto a posição relativa das crianças é a mesma. Nas três últimas, Maria que precede Hugo, que precede José, que precede Maria, do mesmo modo a posição relativa é idêntica.

Quadro 3: Organização do Significado Arranjo

EXEMPLO DE SITUAÇÃO – PROBLEMA: Para representante de turma da sala de aula se candidataram 3 pessoas (Joana, Mário e Vitória). De quantas maneiras diferentes poderão ser escolhidos o representante e o vice representante?

EXEMPLO DE REPRESENTAÇÃO	**INVARIANTES**
LISTAGEM Pode ser considerada como a estratégia que deve ser valorizada porque promove a ideia de sistematização	Ordenação de elementos de um mesmo conjunto gera novas possibilidades; Há escolhas de subgrupo de elementos;
Joana e Mário Joana e Vitória Mário e Joana Mário e Vitória Vitória e Mário Vitória e Joana } 6 possibilidades **Observação:** Primeiro nome é o representante e o segundo o vice-representante, representando a ordenação	

Nesta situação podemos utilizar também outros tipos de representação, como a própria árvore de possibilidades. Salientamos, contudo, que para essa pesquisa não consideramos o *arranjo* com repetição.

Quadro 4: Organização do Significado de Combinação

EXEMPLO DE SITUAÇÃO – PROBLEMA: Uma escola tem 9 professores (Cristiano, Isabel, Laura, Mateus, Nívea, Pedro, Roberto, Sandra e Vítor), dos quais 5 devem representar a escola em um congresso. Quantos grupos diferentes de 5 professores pode se formar?

EXEMPLO DE REPRESENTAÇÃO	**INVARIANTES**
PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM, DIVISÃO COMO UM PROCESSO DE REDUÇÃO DE AGRUPAMENTOS REPETIDOS.	Ordenação de elementos de um mesmo conjunto **não** gera novas possibilidades;
Para escolher 5 professores em 9 temos inicialmente , 9 possibilidades para o primeiro, 8 para o segundo e assim sucessivamente $9.8.7.6.\mathbf{5}$ No entanto nessa disponibilização, (Cristiano, Isabel, Pedro, Roberto e Vitor) é diferente de (Isabel, Cristiano, Pedro, Roberto e Vitor). Nessa situação a ordenação não gera novas possibilidades, portanto para desordená-lo dividimos pela *permutação* dos objetos $\frac{9.8.7.6.\mathbf{5}}{5.4.3.2.\mathbf{1}} = 126\ possibilidades$	Há escolhas de subgrupo de elementos;

Essa representação indicada pela Base Curricular Comum de Pernambuco para Matemática no Ensino Médio (PERNAMBUCO, 2008), é importante, pois utiliza a relação que indica que a *combinação* é o quociente entre o número de *arranjos* e o número de *permutações*, explicitando o motivo da fórmula de *combinação*. Além dessa representação por causa da quantidade de possibilidades a estratégia de listagem torna-se mais cansativa. Ressalta-se que a presente pesquisa não se ateve à combinação com repetição.

Esses diferentes significados, representações e invariantes dos problemas combinatórios refletem na compreensão dos alunos e nas escolhas de ação dos professores. Portanto, observamos que os problemas de Combinatória possuem aspectos comuns (alguns tipos de representações), mas também diferenciadores em suas particularidades (invariantes). Conhecer os diferentes tipos de problema pode ajudar na escolha de situações-problema que permitam a construção desse tipo de raciocínio nos alunos.

Segundo Borba, o raciocínio combinatório pode ser:

> ...entendido como um modo de pensar presente na análise de situações nas quais, dados determinados conjuntos, deve-se agrupar os elementos dos mesmos, de modo a atender critérios específicos (de escolha e/ou ordenação dos elementos) e determinar-se – direta ou indiretamente – o número total de agrupamentos possíveis (BORBA, 2010, p.3).

É importante observar que os conceitos matemáticos nascem devido às necessidades da humanidade e são construídos a partir de aspectos de sua história, de sua apresentação social (na escola e fora da escola) e, ainda, pelas pesquisas que são desenvolvidas ao longo dos anos. Assim, acontece a construção do raciocínio combinatório. Essa maneira de pensar e agir durante a resolução de problemas combinatórios ocorre carregado de outras necessidades, aspectos históricos, olhares curiosos de alunos, professores e pesquisadores sobre esse conteúdo matemático, repleto de conceitos combinatórios. Em seguida, teceremos algumas considerações no que se constitui a Combinatória nessa pesquisa, e alguns aspectos específicos deste conteúdo matemático.

3.2. A COMBINATÓRIA E SUA INSERÇÃO NA MATEMÁTICA

A Combinatória pode ser definida como o ramo da Matemática que estuda coleções finitas de objetos que satisfaçam certos critérios específicos, e podem se apresentar por meio de situações que solicitem a contagem de elementos ou a enumeração desses elementos, além de situações que promovam a elaboração de uma solução ótima, ou a classificação de elementos de um determinado conjunto e situações que requeiram questionamentos sobre a existência ou não de elementos que satisfaçam a mesma (BATANERO et al, 1996).

Morgado *et al* (1991) indicam seu “crescimento explosivo nas últimas décadas”, destacando a utilização de problemas de enumeração na teoria dos grafos e na análise de algoritmos, além de implicações no cálculo de probabilidades e na Teoria dos Números. Com amplas aplicações atuais, podemos interrogar como ocorreu a inserção da Combinatória na Matemática?

Tavares e Brito (2005) indicam que os problemas de Combinatória remontam à Antiguidade Clássica, quando Arquimedes (287 a.C - 212 a.C) propôs um problema conhecido como *Stomachion*[15] no qual se "desejava determinar de quantas formas distintas poderiam ser encaixadas 14 peças para formar um quadrado". Os mesmos autores citam, ainda, outro fator importante para o desenvolvimento da Combinatória: *os jogos de azar, pois os jogadores queriam achar maneiras seguras de ganhar em jogos de cartas, dados ou moedas.*

Batanero et al (1996) escrevem que o cálculo dos números de permutações dispostos numa circunferência aparece no documento chinês 'Pa Kua" que data do século III a.C., o que demonstra o interesse de diferentes culturas através dos tempos pela Combinatória.

Morgado *et al* (1991) indicam que o cálculo do número de permutações, *arranjo*s e combinações de n objetos já era conhecido pelo matemático hindu Báskhara (1114-1185) e pelo matemático francês Levi Bem Gerson (1288-1344).

Corroborando a intrínseca relação entre a Combinatória e a Probabilidade, o poema *De Vetula* apresenta explicitamente a descrição das possibilidades das somas do lançamento de três dados, como vemos no extrato a seguir:

> Talvez, diremos que certos números são melhores
> Do que outros para uso em jogos, pela razão que,
> Desde que um dado tem seis lados e seis números unitários,
> Em três dados existem dezoito,
> Dos quais apenas três podem estar nas faces superiores dos dados.
> Eles variam em diferentes maneiras e deles,
> Dezesseis números compostos são produzidos. Eles não são, porém,
> De igual valor, desde que o maior e o menor deles
> Ocorre raramente e os do meio mais frequentemente,
> E o restante, o quanto mais próximo estão daqueles do meio,
> Melhores são e mais frequentemente ocorrem.
> Esses, quando ocorrem, têm apenas uma configuração de faces nos dados,
> Aqueles são seis, e os restantes têm configurações intermediárias entre os dois,
> Tal que existem dois números maiores e exatamente a mesma quantidade de menores,
> E esses têm uma configuração. Os dois seguintes,
> O maior, e o outro menos, têm duas configurações de faces nos dados cada um.
> Novamente, depois deles existem três cada um, então quatro cada um.
> E cinco cada um, como eles seguem em sucessão de aproximação

[15] O *Stomachion* é um jogo constituído de quatorze peças que devem ser encaixadas para formar um quadrado, semelhante ao conhecido Tangram que é constituído de sete peças.

> Os quatro números do meio têm seis configurações de faces nos dados cada um [....] (BELLHOUSE, 2000, p.134).

Após essa transcrição no poema em latim existe a listagem das possíveis somas do lançamento de três dados, como podemos observar na Figura 3.

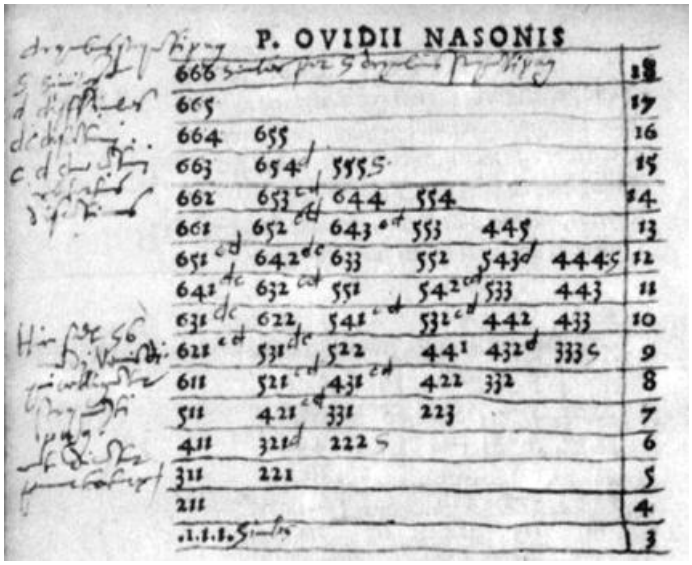


Figura 3: Parte referente às somas possíveis do lançamento de três dados existente no De Vetula na versão impressa de 1534 com Marginalia

Fonte: Bellhouse (2000) p.131

Segundo Bellhouse (2000) este poema foi amplamente divulgado na Europa, por volta de 1250, o que para esse autor, evidencia que os cálculos probabilísticos elementares já eram conhecidos desde essa data.

A aplicabilidade da Combinatória aos problemas de Probabilidade finita foi ainda mais acrescida pela troca de correspondências entre Pascal (1623-1662) e Fermat (1601-1665), quando discutiam a respeito da possibilidade de ganhos em jogos de azar.

Luca Pacioli (1445-1517) também discutia o ganho em jogos no seu livro *Summa* que continha entre outros tópicos a Matemática Recreativa. Nesse tópico existe o problema do jogo interrompido, o qual se fundamenta no desenvolvimento da Teoria das Probabilidades. Santos, Neto e Silva explicam a ideia do jogo interrompido:

> “Dois jogadores lançam uma moeda ao ar repetidamente. O jogo acaba quando um jogador tiver acertado três vezes no resultado do lançamento (cara ou coroa). O vencedor recebe uma quantia pré-estabelecida. Suponhamos que o resultado está 2-1 e o jogo tem de terminar abruptamente. Qual é a divisão justa da quantia entre os dois jogadores?” (SANTOS, NETO e SILVA, 2007, p.18)

O triângulo de Pascal (1623-1662), segundo Tavares e Brito (2005), já era conhecido pelo árabe Al-Kajari no século XI e pelo chinês Chu Shï-kié que deixou uma escrita datada de 1303 e que se relaciona aos coeficientes do Binômio de Newton, que foi assim nomeado pela grande contribuição de Newton (1646-1727) ao obter a fórmula de expansão do binômio.

Segundo Gomes (2003), a imperatriz Catarina II incumbiu ao francês Diderot (1713-1784) a missão de reformular o ensino da Rússia. Nesta reformulação, Diderot promoveu o aspecto utilitário da Matemática e escreveu o motivo de acrescentar Combinatória ao currículo:

> Eu acrescentei à aritmética, à álgebra e à geometria, a ciência das combinações ou o cálculo das probabilidades, porque tudo se combina e porque, fora das Matemáticas, o resto não é senão probabilidade, porque essa parte do ensino é de uso imenso nos negócios da vida, porque ela envolve as coisas mais graves e as mais frívolas, porque ela se estende às nossas ambições, aos nossos projetos de fortuna e de glória, e aos nossos divertimentos (DIDEROT, 1875, Tomo III, p.456, citado por GOMES, 2003, p.45, grifo nosso).

Em 1713 foi publicado o livro *Ars Conjectandi* de Jakob Bernoulli (1654-1705) no qual dedica a segunda parte de seu trabalho à teoria das combinações e permutações. É nesse livro que, de acordo com Batanero *et al* (1996), Bernoulli descreve que "grande parte da beleza do Universo se deve à variedade de modos diferentes nos quais suas diversas partes podem mesclar-se ou se justapor"[16] (p.17).

Nesse sentido, ressaltamos a importância da Combinatória para a Matemática, pois, essa não se resume as técnicas de *arranjos*, *permutações* e *combinações*. Um problema resolvido por Euler (1707-1783) em 1736 foi o problema das sete pontes de Könisberg[17] considerado o inicio da Teoria dos Grafos. Esses grafos possibilitam uma simplificação de problemas combinatórios complexos ou não, pois apresentam um tipo de visualização por uma representação geométrica, constituídos por vértices (pontos) e arestas.

Rocha (2006) considera a Combinatória como "uma das mais profícuas teorias Matemáticas do mundo moderno" (p.19), pois se constitui em sua maioria por

[16] Tradução nossa.

[17] A cidade de Königsberg é banhada pelo rio Pregel formando uma ilha que está ligada ao resto da cidade por sete pontes. O problema proposto por Euler era o de efetuar um percurso que atravessasse todas as pontes, mas apenas uma vez em cada uma, retornando ao ponto inicial. Euler demonstrou que essa travessia é impossível, com essas condições.

problemas matemáticos aplicados. Um exemplo é o caso do famoso problema das quatro cores[18] lançado por Francis Guthrie (1831-1899) em 1850 enquanto coloria o mapa da Inglaterra, despertando o interesse de matemáticos como Augustus De Morgan (1806 - 1871) e Arthur Cayley (1821 - 1895), transformando uma aplicação em ciência pura, relacionada com a Topologia, a Teoria dos Grafos e a Computação entre outras (EVES, 2004).

Além disso, Batanero *et al*.(1996) reafirmam o papel fundamental da Combinatória no desenvolvimento de outros ramos da Matemática e enfatizam sua relação com diversas disciplinas como a Física (na mecânica de partículas), a Química (busca de isômeros), a Biologia (difusão das epidemias, Genética), a Economia e Gestão (estudos de armazenamento e otimização), entre outras.

Encontramos, nos fatos descritos, as sutilezas da construção de conceitos perante a história, suas relações fundamentais, alguns de seus primeiros autores e diferentes situações que descrevem como surgiu o interesse pela Combinatória. Observamos, ainda, as relações que existe entre a Combinatória e jogos de azar e entre diferentes ramos da Matemática e outras ciências. Discutiremos, a seguir, situações que podem desencadear a aquisição de conceitos combinatórios por nossos alunos.

3.3. O ENSINO DE COMBINATÓRIA E SUA INSERÇÃO NA ESCOLA

Diversos questionamentos permeiam a construção de um conceito pelos alunos, principalmente no momento em que professores começam a refletir sobre sua aquisição. Com a Combinatória não é diferente: *O que dizem os Parâmetros Curriculares Nacionais sobre o ensino de Combinatória? Como ocorre o processo de ensino de Combinatória? Como ensinar a Combinatória nos diferentes níveis? Como auxiliar na construção desse conceito?*

Desde 1989, o NCTM recomenda que a Combinatória seja parte integrante do Currículo de Matemática, enfatizando a importância deste ramo no desenvolvimento do raciocínio lógico dos alunos nos diversos níveis de escolarização.

[18] Segundo o qual qualquer mapa plano ou sobre uma superfície esférica pode ser colorido com no máximo quatro cores.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) dos anos iniciais do Ensino Fundamental reconhecem a importância da Combinatória e indicam a necessidade dos alunos aprenderem “a lidar com situações-problema que envolvam *combinações, arranjos, permutações* e, especialmente, o *princípio multiplicativo* da contagem” (BRASIL, 1997, p.40).

A Base Curricular Comum do Estado de Pernambuco (BCC), orientação feita para as escolas públicas desse estado, considera uma “oportunidade privilegiada” a conexão do campo das operações numéricas com as ideias combinatórias para os anos iniciais do Ensino Fundamental e propõe ao professor desse nível do ensino a criação de “situações em que o aluno seja levado a realizar diferentes combinações” (PERNAMBUCO, 2008, p 92).

O Guia do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD 2010) que recentemente analisou os livros de Alfabetização Matemática e Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental acrescenta e adverte, ainda, que:

> É inegável a importância de se incluírem nesta fase de escolaridade as primeiras ideias nas áreas de Estatística, Combinatória e Probabilidade. No entanto, a apresentação dos conceitos básicos desses campos – possibilidade, chance, probabilidade, entre outros – contém, por vezes, erros ou indução ao erro (BRASIL, 2009, p.31).

Portanto, o ensino de problemas combinatórios, de acordo com as orientações curriculares, deve ser iniciado a partir dos anos iniciais do Ensino Fundamental e ainda, devemos atentar para as escolhas das situações de aprendizagem para que não se fixem em equívocos como citados pelo Guia do PNLD.

Para os anos finais do Ensino Fundamental, os PCN afirmam que o trabalho com problemas de Combinatória auxilia os alunos a desenvolver:

> (...) desde cedo, procedimentos básicos como a organização dos dados em tabelas, gráficos e diagramas, bem como a classificação de eventos segundo um ou mais critérios, úteis não só em Matemática como também em outros campos, o que reforça a argumentação dos defensores de seu uso desde as séries iniciais do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998, p.137).

Os PCN nos anos finais recomendam ainda, o trabalho com problemas combinatórios no intuito de desenvolver o *princípio multiplicativo,* visando sua aplicação no cálculo de probabilidades.

Concordando com os PCN, a Base Curricular Comum sugere ainda atividades para exploração da representação e a contagem em problemas combinatórios, a fim de proporcionar ao aluno “a construção do conceito do princípio multiplicativo como recurso fundamental, mas não único, na resolução de diversos problemas” (PERNAMBUCO, 2008, p.103).

Segundo o Guia do PNLD 2008, quase todas as coleções de livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental apresentam atividades relacionadas ao ensino de Combinatória. Apesar disso, esse documento alerta para a necessidade de mudanças nestas obras:

> No trabalho com Combinatória são frequentemente encontradas deficiências, além de uma exploração muito superficial. Chamam a atenção as aplicações escolhidas, muitas vezes, inadequadas ou artificiais, usadas tanto para introduzir o conceito e os procedimentos de contagem, quanto nos problemas propostos aos alunos (BRASIL, 2007, p. 52).

Assim, segundo esses documentos deve ser dada ênfase as atividades exploratórias e ao princípio multiplicativo nesse nível de escolaridade.

No Ensino Médio, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNEM) advertem para o crescimento das questões mundiais que priorizam as noções de “descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as ideias de Probabilidade e Combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano” (BRASIL, 2000, p.44).

Os PCN+ do Ensino Médio indicam, ainda, novas possibilidades para o ensino da Combinatória como apresentado a seguir:

> A Contagem, ao mesmo tempo em que possibilita uma abordagem mais completa da Probabilidade por si só, permite também o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática, denominada raciocínio combinatório (BRASIL, 2002, p.126).

Nesse sentido, para auxiliar na construção do raciocínio combinatório, os PCN+ do Ensino Médio advertem sobre a função das fórmulas indicando que as mesmas:

> ...devem ser consequência do raciocínio combinatório desenvolvido frente à resolução de problemas diversos e devem ter a função de simplificar cálculos quando a quantidade de dados é muito grande. Esses conteúdos devem ter maior espaço e empenho de trabalho no Ensino Médio, mantendo de perto a perspectiva da resolução de

> problemas aplicados para se evitar a teorização excessiva e estéril (BRASIL, 2002, p.127).

Concordando com os PCN + do Ensino Médio, a indicação da BCC é a consolidação de noções combinatórias na qual para o aluno se faz necessária a ampliação das “estratégias básicas de contagem, evitando-se o ensino restrito a uma extensa lista de fórmulas que não apresentem significado para o aluno” (PERNAMBUCO, 2008, p.111)

As orientações curriculares para o Ensino Médio sugerem a ênfase a outras questões, além das de Contagem, como as Pontes de Könisberg, para o ensino de Combinatória nesse nível. Nesse sentido, apresentam justificativas para esse trabalho:

> Problemas dessa natureza podem ser utilizados para desenvolver uma série de habilidades importantes: modelar o problema via estrutura de grafo; [...] convergir para a descoberta da condição geral de existência de uma tal solução [...] Muitos outros exemplos de problemas combinatórios podem ser tratados de modo semelhante, tais como determinar a rota mais curta em uma rede de transportes ou determinar um eficiente trajeto para coleta de lixo em uma cidade (BRASIL, 2006, p.94).

Pouco se comenta sobre a Combinatória no catálogo dos livros didáticos para Ensino Médio de Matemática (PNLEM 2009), mas algumas coleções são avaliadas positivamente em relação à utilização do Princípio Fundamental de Contagem e de maneira negativa pela utilização excessiva de fórmulas. Nesse contexto, verificamos que nos documentos do Ensino Médio a indicação de problemas diferenciados, que não se resolvam apenas com fórmulas incentivando a criatividade e a percepção do aluno.

Portanto, observamos que o ensino de Combinatória está presente em diferentes propostas curriculares ao longo de todo Ensino Fundamental e Médio – na Educação Básica – e também em outros documentos oficiais, como os Guias do PNLD, nos quais se apresenta a importância deste conteúdo para o desenvolvimento de noções, habilidades e de raciocínio crítico em Matemática. Dessa maneira, tem-se defendido que antes do ensino de Combinatória ser formalizado, o que geralmente acontece no Ensino Médio, outras práticas devem ser integradas ao Ensino Fundamental para que haja uma melhor compreensão dessa temática por alunos e professores.

Os Guias do PNLD (BRASIL, 2008) e PNLEM (BRASIL, 2009) acrescentam, ao acima exposto, elementos que devem ser revisados nos livros didáticos de Matemática em relação a esse conteúdo, principalmente aos conceitos de chance, possibilidade, aos contextos escolhidos no Ensino Fundamental e ao uso de fórmulas no Ensino Médio.

Concordamos com Fischbein, no prefácio de Batanero et al (1996), quando este escreve que o ensino de Combinatória mais eficaz pode promover benefícios para outros ramos da Matemática.

Nesse contexto, Problemas de Combinatória são, por natureza, desafiadores e interessantes (como a análise da possibilidade de se ganhar em loterias e sorteios e da forma de se organizar em chapas eleitorais, dentre diversas situações), por serem, na maioria das vezes, questões práticas e associadas ao cotidiano extra-escolar. Os alunos podem, assim, se desinibir mais e opinarem sobre formas de analisar e resolvê-las. Complementando a ideia, Batanero et al (1996) indicam problemas como "um meio excelente para que alunos realizem atividades de matematização (modelagem, representação, formulação, abstração, validação, generalização...)" (p.14).

Por isso é importante ressaltar que as diferentes formas de organizar e resolver problemas combinatórios geram estratégias que não são apenas aplicáveis à Combinatória, auxiliando na aprendizagem de técnicas gerais de resolução de problemas. Todavia, para isso, se faz necessário conhecer as características de cada um dos tipos de problemas combinatórios.

Batanero et al (1996) mais uma vez, contribuem com a seguinte classificação para esses problemas: *problemas de existência*, de *enumeração*, de *contagem*, de *classificação* e de *otimização*. Dessa forma, pode-se: solicitar a verificação se determinado tipo de estrutura discreta existe; requerer que sejam listadas (enumeradas) possibilidades dentro de situações propostas; pedir que se determine (se conte) o número total de possibilidades de um evento; solicitar que sejam classificados os diferentes casos possíveis; ou, ainda, que se escreva uma função que represente conjuntos soluções de maneira ordenada (otimizados) para determinar valores máximos e mínimos.

Nessa compreensão, os problemas de *produto cartesiano*, *arranjo*, *combinação* e *permutação* podem, assim, dependendo da situação ou da questão elaborada, pertencer a qualquer uma das categorias apontadas. Dessa forma,

Batanero et al (1996) acreditam que os problemas de Combinatória são “um excelente meio para que os alunos realizem atividades Matemáticas” e que muitas vezes as situações combinatórias dão sentido a outros conceitos básicos da Matemática atual.

É nesse sentido que Pessoa e Borba (2007) defendem que a tomada de consciência sobre o que vai ser contado influi na escolha da maneira de contar. Determinados tipos de problemas requerem dos alunos diferentes intuições e estratégias para resolvê-los, e dos professores, a capacidade de acompanhar esses procedimentos e criar atividades que auxiliem na compreensão de propriedades e na sistematização dessas estratégias.

Todavia, professores e alunos apresentam dificuldades no tratamento de conceitos combinatórios, pois muitas vezes são priorizadas abordagens de ensino que recorre apenas à aplicação de fórmulas, na qual não existe uma preocupação genuína com a construção de conceitos, nem de relações existentes entre esses conceitos. Esse ensino mecanizado, segundo Morgado et al (1991), prioriza situações padronizadas e transforma a Combinatória em apenas “um jogo de fórmulas complicadas” (p.2).

Seguindo essa linha de raciocínio, Oliveira e Ribeiro (2004) defendem a exploração de certas situações para o ensino de Combinatória nos primeiros anos do Ensino Fundamental que seriam “as regras de um jogo, escolha de vestimentas, combinações de sucos e sanduiches em uma lanchonete ou de sabores de sorvetes (p.7)”, que possibilitam atividades ricas que incentivem a reflexão dos alunos em detrimento da memorização de fórmulas.

Outro possível problema para o ensino de Combinatória é apontado por Batanero et al (1996), quando assinalam que no Ensino Médio o seu tratamento é realizado “como um tópico separado do restante dos conteúdos e problemas matemáticos” (p.28). A relação entre o ensino de Combinatória e o ensino de outros assuntos de Matemática, como probabilidade, é uma das relações que deve ser enfatizada. Este fato é ressaltado nas palavras de Piaget e Inhelder (1951) quando afirmam que “a formação das ideias do acaso e de Probabilidade depende, em estreita medida, da evolução das próprias operações combinatórias” (p.227).

Nesse sentido, Sabo (2007) destaca que o desenvolvimento da proposta curricular em diferentes países, e particularmente no Brasil, “não estabelece mesmo uma relação entre a recursividade e a indução com as operações combinatórias,

sendo estes conteúdos desenvolvidos independentemente um do outro" (p.17), o que também é uma preocupação apresentada por pesquisadores do grupo de Batanero.

Lima, Carvalho, Wagner e Morgado (2004) defendem que a Combinatória precisa de técnicas diferenciadas, sendo necessário aos alunos "colocar em jogo seu raciocínio crítico e criativo com muito mais frequência do que nos anos anteriores" (prefácio). Para isso, advertem os professores sobre a necessidade de um "bom domínio" do conteúdo a ser ensinado. No entanto alertam que

> Não é suficiente que o professor simplesmente saiba resolver os problemas comumente apresentados no livro-texto. Sem uma orientação adequada, corre-se o risco de transmitir para os alunos a ideia de que esses assuntos requerem o uso de um enorme manancial de truques, reforçando a ideia que a Matemática é um assunto difícil e exclusivo de uns poucos (LIMA et alii, 2004, prefácio).

Ao explicitarmos a preocupação existente quanto ao domínio do conteúdo pelo professor, acreditamos, como foi dito anteriormente, que esse não é o único saber utilizado na ação docente, mas ainda é o mais avaliado em alguns cursos de licenciatura. Nesse sentido, observamos que o ensino de Combinatória precisa de um *olhar mais cuidadoso* em relação ao livro didático dos diferentes níveis e no direcionamento das diferentes formações (inicial e continuada) dos professores que ensinam Combinatória, que busque incentivar a reflexão sobre perspectivas dos pesquisadores, auxiliando a reconfiguração da prática docente daqueles envolvidos nesse processo.

Portanto, apesar dessas contribuições, ainda necessitamos de mais pesquisas que abordem o ensino de Combinatória na Educação Básica e, principalmente, que se tornem conhecidas pelos professores que ensinam Matemática, para que estes tenham condições de provocar mudanças no aprendizado de seus alunos. Interessante seria que professores que lidem com a formação de futuros professores comecem a promover mudanças deste ensino desde a graduação, para que a Matemática possa ser vista com novas perspectivas e não apenas como tediosa e desinteressante. Assim, no próximo segmento apresentaremos um pouco do panorama de pesquisas no ensino de Combinatória.

3.4. UM PANORAMA DE PESQUISAS NO ENSINO DE COMBINATÓRIA

Na tentativa de auxiliar a compreensão do desenvolvimento do raciocínio combinatório e como ocorre à preparação e os procedimentos de ensino-aprendizagem na construção de conceitos de Combinatória apresentamos, a seguir, alguns resultados de pesquisas realizados por estudiosos dessa temática.

As pesquisas sobre o ensino de Combinatória tem se desenvolvido com diferentes enfoques. Para demonstrar o panorama geral dessas pesquisas, utilizaremos as seguintes seções: (1) as análises de recursos didáticos, nas quais se examinam as propostas de livros didáticos e a utilização de softwares, na qual acrescentaremos propostas com a utilização de diferentes metodologias; (2) as investigações de conhecimentos de alunos, em diferentes níveis de ensino; e (3) as reflexões sobre a formação e a prática docente.

3.4.1. Ensino de Combinatória e a Análise de Recursos Didáticos

Os recursos didáticos são geralmente utilizados na busca do sentido das atividades propostas pelos professores em sala de aula. Alguns dos mais requisitados atualmente para o ensino de Matemática são os livros didáticos, os objetos de aprendizagem e os softwares livres desenvolvidos para atender os apelos tecnológicos, bem como os materiais manipulativos, ainda muito utilizados para auxiliar na compreensão de modelos.

O Guia do PNLD (BRASIL, 2006) destaca que o livro didático tem um papel fundamental no ensino e aprendizagem, mas não pode ser a única fonte do trabalho docente. Belfort (2003) afirma que a maioria dos professores de Matemática utiliza esse recurso e que nenhum argumento faz com que desistam do uso desse material. No entanto, para o trabalho adequado com o livro didático, o professor deve complementá-lo com outras atividades, suprindo e adequando-o às necessidades dos alunos que também o utilizam. Para o ensino de Combinatória não pode ser diferente.

No que diz respeito aos livros didáticos, Barreto, Amaral e Borba (2007) analisaram cinco coleções aprovadas pelo PNLD (BRASIL, 2007) com objetivo de observar como problemas de Combinatória aparecem nos livros dos anos iniciais de Matemática e nos respectivos manuais do professor, identificando também que formas de representação simbólica são sugeridas pelos autores.

Esses autores observaram que esses problemas (*produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação*) se apresentavam em outros tópicos (como na seção destinada ao estudo do Sistema de Numeração Decimal e as estruturas aditivas) ainda que em número reduzido.

Os autores constataram que problema de maior concentração nas coleções analisadas foi os de *combinação,* seguidos por *produto cartesiano*, *permutação* e, por fim, os problemas de *arranjo*.

Outro elemento observado nos livros didáticos desse nível foi à ausência de abordagens sobre os invariantes de conceito dos problemas de Combinatória, como por exemplo, a propriedade de ordenação gerar ou não novas possibilidades. Para esses autores esses invariantes não são o objetivo desse nível de ensino, entretanto, os manuais dos professores deveriam conter informações que auxiliassem professores nessa tarefa.

A análise efetuada evidenciou, ainda, que o trabalho com as representações simbólicas se mostrou bastante diversificado, com a utilização de desenhos, tabelas e até mesmo a presença, em alguns livros, do diagrama de árvores de possibilidades, mas a maior incidência ainda foi somente de enunciados de problemas.

Albuquerque e Silva (2010) analisaram cinco coleções de livros didáticos dos anos finais aprovados no Guia do PNLD (BRASIL, 2008) em relação à presença dos tipos de problema combinatórios (produto cartesiano, *arranjo*, *permutação*, *combinação*) identificando sua incidência ao longo dessas coleções.

Para tratamento de análise dos dados utilizaram o programa SPSS[19] na qual evidenciaram um gráfico para cada coleção que apresenta a distribuição heterogênea dos tipos de problema em relação a cada coleção. Fundamentada nos dados apresentados nesse artigo elaboramos a Tabela 1 que apresenta essa incidência ao longo das coleções.

[19] Statistical Package for the Social Sciences

Tabela 1: Relação entre os tipos de problemas e a incidência nos diferentes anos

Tipo de problema\Anos	6 ano	7 ano	8 ano	9 ano	TOTAL
Produto cartesiano	15	4	16	0	**35**
Arranjo	4	2	6	0	12
Permutação	7	0	13	2	22
Combinação	7	2	23	4	**36**
TOTAL	**33**	8	**58**	6	105

Nota-se que ao longo das coleções analisadas o problema com maior incidência é o de *combinação*, seguido pelos problemas de *produto cartesiano*, *permutação* e *arranjo.* Além disso, os anos que se apresentam todos os tipos de problemas são o 8º ano e o 6º ano, sendo encontradas não necessariamente em capítulos destinados à Combinatória e Probabilidade, mas também capítulos como o de geometria, álgebra, dentre outros.

Contudo, os autores observaram na maioria das coleções que o quantitativo de questões por volume é pequeno e em alguns casos o volume não contempla os variados tipos de problemas.

Carvalho (2010) apresentou, ainda, uma análise das habilidades requisitadas nos problemas de Combinatória por cinco coleções de livros didáticos dos anos finais. Para esse autor, as habilidades não podem ser distanciadas das ações, portanto, devem ser relacionadas ao saber-fazer. Para elaborar a análise, classificou inicialmente oito habilidades relacionadas ao trabalho dos livros didáticos as quais indica:

> 1. Mapear todas as possibilidades; 2. Decidir a quantidade total de possibilidades; 3. Decidir se um resultado é possível; 4. Mapear e decidir a quantidade total de possibilidades; 5. Modelagem de fórmula algébrica; 6. Calcular a quantidade total a partir de fórmula dada; 7. Fazer cálculos de probabilidade; 8. Identificar a posição de uma possibilidade no mapeamento. (CARVALHO, 2010, p.3)

Nesse estudo, o autor constatou que apenas as habilidades “mapear todas as possibilidades” e “decidir a quantidade” contemplam os quatro tipos de problemas combinatórios e são aquelas que apresentaram maior frequência em todos eles. O que nos parece com a atividade de enumeração de elementos e de contagem dos elementos, natural dos problemas de Combinatória.

Verificou-se ainda, que algumas habilidades aconteceram em apenas um tipo de problema, como por exemplo: no problema de *permutação* ocorreu a habilidade de “identificar a posição de uma possibilidade no mapeamento”; no caso de

combinação foi a habilidade de “calcular a quantidade total a partir de fórmula dada” e no problema de *arranjo* apareceu a habilidade “fazer cálculos de probabilidades”.

Sabo (2007) analisou a proposta do ensino de Combinatória em três livros didáticos do 2º ano do Ensino Médio utilizados pela rede pública de São Paulo, embasado pela Teoria Antropológica do Didático (TAD), proposta por Chevallard (1999).

Nesse estudo, constatou que os livros analisados valorizam, na abordagem de Combinatória, a aplicação de fórmulas algébricas, implicando numa redução de estratégias de resolução, não favorecendo a utilização de árvores de possibilidades ou a enumeração dos agrupamentos. Além disso, os exercícios valorizam tarefas semelhantes e por consequência, técnicas também semelhantes não propiciando o desenvolvimento do raciocínio combinatório e, ainda, enfatizando uma prática docente que se fundamenta em um padrão improdutivo.

Identificamos que por meio da análise de livros didáticos, pesquisadores têm apontado que, apesar da presença de atividades didáticas nas coleções analisadas, pouco se contribui com o estímulo ao uso de estratégias diferenciadas.

Contudo verificamos, que nos livros didáticos do Ensino Fundamental não existe uma idéia de em que ano o ensino de problemas combinatórios deve iniciar e algumas coleções não apresentam todos os tipos de problema, ficando muitas vezes a critério do autor do livro didático.

Constatamos que nos livros didáticos do Ensino Médio há demasiada ênfase no formalismo nem sempre amparada na compreensão das fórmulas, não promovendo um amplo desenvolvimento do raciocínio combinatório. Portanto, fundamentadas nessas pesquisas, podemos inferir que os professores precisam de outras fontes, além dos livros didáticos, para promover uma prática que incentive esse desenvolvimento.

Em relação aos softwares e objetos de aprendizagem no ensino de Combinatória, Leite, Pessoa, Ferraz e Borba (2009) analisaram cinco softwares/objetos de aprendizagem, procurando verificar as situações (*produto cartesiano, permutação, arranjo, combinação*) e se promovem o uso de diferentes representações (pictórica, fórmulas, explicitação de possibilidades, diagrama de árvores e tabelas) no sentido de Vergnaud (1991).

Os softwares educativos analisados foram o *Diagrama de* Arbol, ML Combiner, enquanto que os objetos de aprendizagem foram *Combinação*,

Permutação e *Arranjo*, esses últimos retirados da Rede Interativa Virtual de Educação (RIVED).

As autoras verificaram que os recursos tecnológicos analisados não estimulam o usuário à criação de estratégias próprias, induzindo o uso de fórmulas. Devido a isso, indicam, inicialmente, a exploração da representação, antes mesmo de formalizar o conceito. Assim, defendem que os softwares educacionais precisam fazer o aluno criar, a partir de tentativas, sua própria estratégia de resolução.

Alguns dos recursos tecnológicos buscam outras abordagens que não seja o de fórmulas, como o discutido por Sandoval, Trigueros e Lozano (2007). Segundo as autoras, o software *Diagrama de Arbol* apresenta como proposta para o trabalho com problemas combinatórios a árvores de possibilidades, como mostra a Figura 4.

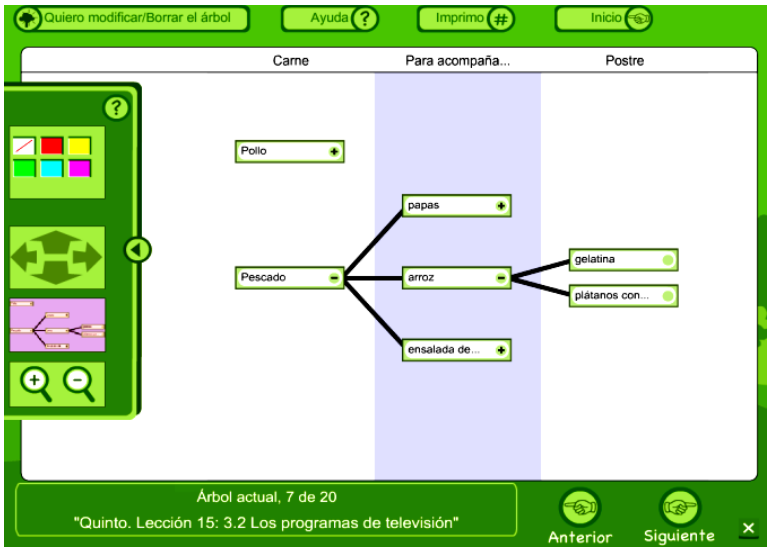


Figura 4: Layout do software Diagrama de Arbol

Nesse estudo, as autoras relatam a experiência realizada com 25 estudantes mexicanos de 5º e 6º anos que utilizaram o software, na resolução de problemas combinatórios, utilizando cores na diferenciação das possibilidades geradas. As autoras observaram que o software permitiu que os alunos representassem os problemas e desenvolvessem estratégias de resolução mais eficientes.

Este software possibilita o trabalho com diferentes problemas combinatórios, mas faltam feedbacks às situações específicas – como no caso das combinações nas quais é preciso atentar para os casos que não constituem possibilidades distintas.

Notamos a presença de poucos estudos que relacionem o ensino de Combinatória aos softwares livres ou objetos de aprendizagem que promovam

estudos sobre a aprendizagem de alunos, e os que o fazem, como o *Arbol*, ainda, precisam do domínio do professor sobre esses softwares e sobre a Combinatória para permitir um diálogo que possibilitem a criação das estratégias dos próprios alunos.

Em relação aos materiais manipulativos, algumas pesquisas propõem a utilização de jogos como ponto de partida para a discussão das propriedades que envolvem os conceitos de Combinatória.

Lopes (2008) indica para o trabalho com a Combinatória o jogo SIM. Este jogo é disputado por dois jogadores e possui um tabuleiro no qual estão os vértices de um polígono. O objetivo é ligar os vértices de modo que perde aquele que primeiro formar todos os lados de um mesmo triângulo e cujos vértices são pontos quaisquer do tabuleiro. A partir da exploração desse jogo, o autor propõe questões para auxiliar alunos na construção do conceito de *combinação*, de modo a diferenciar as estruturas de *arranjo*s e combinações. No entanto, o autor não apresenta nesse estudo resultados da aplicação desse jogo com alunos.

Em outra proposta, Lopes (2007) propõe a utilização de um jogo com dados para a discussão de problemas de Combinatória para o Ensino Médio e os 8º e 9º anos do Ensino Fundamental, propondo a exploração do Princípio Multiplicativo ou de listagens das possibilidades de cada problema geradas a partir do jogo.

Segundo o autor, o jogo consiste no lançamento de dois dados (vermelho e branco) por dois jogadores. A pontuação do jogo se compõe pelo número constituído pelas faces dos dados vermelho e branco, respectivamente. Cada jogador pode realizar dois lançamentos, escolhendo se lança os dois dados ou apenas um. Perde o jogo quem obtiver menor pontuação.

Portanto, a partir da enumeração das possíveis jogadas de cada partida permite-se a construção do princípio multiplicativo. Nesse sentido, defende que “as fórmulas de contagem devem aparecer naturalmente como consequência do Princípio Multiplicativo e nunca serem “jogadas” no início dos estudos, como tradicionalmente é feito” (LOPES, 2007, p.6).

Pedrosa Filho (2008) realizou um estudo com 20 alunos de sete e oito anos utilizando materiais manipulativos, com o objetivo de estudar a aquisição e o desenvolvimento de noções introdutórias ao raciocínio combinatório.

Para isso, elaborou um material didático, manipulável em duas versões denominado: “Tabuleiro das combinações” e “Tabuleiro Cara ou Coroa”. O primeiro

tinha por objetivo o número de combinações de roupas em modelos, utilizando peças com ímãs e a figura de atrizes e atores famosos. O segundo trabalhava com o número de caminhos possíveis para um destino, usando malhas quadriculadas, a partir de lançamentos de uma moeda.

Os alunos trabalharam em duplas durante a aplicação dos materiais com objetivo de interagir. Cada dupla recebeu uma cópia do material e folhas de registro para que pudessem pintar os modelos e discutir sobre as cores. O autor observou que após algumas tentativas as duplas escolhiam a cor da calça e depois iam variando a cor da blusa, obtendo as possibilidades.

Os resultados evidenciaram que a utilização de materiais manipuláveis favoreceu o desenvolvimento de ideias de organização, leitura, contagem e visualização de resultados. Além de possibilitar, para o autor, o tratamento e a conversão de diferentes tipos de registros de representação (linguagem natural, desenho e numérico).

No contexto delineado, observamos que os jogos e os materiais manipuláveis podem fomentar a discussão que viabilize o interesse dos alunos e auxiliar o desenvolvimento do raciocínio combinatório nos diferentes níveis. No entanto, ainda, se faz necessário mais estudos que observem como esses recursos podem auxiliar nessa construção. Muitas são as possibilidades dos jogos de azar devido ao caráter histórico desse conteúdo, mas pouco se chega aos livros didáticos e menos ainda, na sala de aula. Vimos, portanto, propostas diferenciadas para o ensino de Combinatória, mas como a divulgação é escassa, muitas não chegam aos professores nem durante a formação inicial, nem continuada. A seguir trataremos do ensino de Combinatória e a investigação de conhecimentos de alunos.

3.4.2. Ensino de Combinatória e a Investigação de Conhecimentos de Alunos

Evidências de que problemas de Combinatória devem ser iniciados desde os primeiros anos do Ensino Fundamental é trazida por diferentes pesquisadores. A necessidade da exploração e da elaboração de variadas estratégias de resolução

pelos alunos, tanto para problemas combinatórios, quanto para o desenvolvimento de outras habilidades, como o levantamento de possibilidades, a busca sistemática das mesmas e a escolha de alternativas válidas, são atividades que devem fazer parte de todo o Ensino Fundamental e Médio.

Apresentamos a seguir, investigações sobre conhecimentos de alunos no processo de desenvolvimento do raciocínio Combinatório. Essas pesquisas se dividem nos níveis de ensino: nos anos iniciais do Ensino Fundamental, Pereira, Gago e Guerreiro (2008), Soares e Moro (2006), Pessoa e Borba (2009a), Pessoa (2009); nos anos finais do Ensino Fundamental, Moro e Soares (2006), Frant, Castro e Lima (2001), Esteves (2001), Pessoa e Borba (2009b), Pessoa (2009); e no Ensino Médio, Navarro-Pelayo & Godino (1996), Sturm (1999), Pessoa (2009).

Pereira et al (2008) estudaram as verbalizações dos alunos durante o 1º ano de escolaridade que representam evidências da construção do pensamento combinatório durante todo o ano letivo.

Para isso esses professores elaboraram diferentes tarefas a fim de viabilizar essa construção, como por exemplo, pintar com apenas uma cor bandeiras de 3 faixas, a fim de sistematizar o modo de pintar; depois progressivamente pediam para os alunos pintarem bandeiras de 4 faixas, ou mesmo 4 pétalas de uma flor, para gerar diferentes modelos de sistematização; a organização de três árvores a partir das paredes da escola, originando discussões a respeito das estratégias utilizadas, caminhando para a sistematização das atividades.

O foco da pesquisa foi à multiplicação, no sentido combinatório, também apoiada na pintura de gravuras de saias e blusas ou mesmos nos elementos constituintes de um sorvete (copo, casquinho e três diferentes sabores).

De acordo com os autores, essa abordagem resultou num progressivo crescimento do pensamento combinatório dos alunos que estruturavam e justificavam as soluções apresentadas numa perspectiva de padrão organizacional das combinações de cores, sabores ou localização de elementos. Verificaram ainda, a presença de relações entre o conceito de simetria e a disponibilização das pinturas dos alunos.

Soares e Moro (2006) investigaram como ocorre a construção do raciocínio combinatório em 50 alunos de 4º e 5º anos na resolução de problemas do tipo de *produto cartesiano*. Para isso aplicaram um teste composto de quatro problemas que continham duas ou três variáveis, alternavam a ordem de grandeza e um deles

possuía valores distractores. No momento de aplicação do teste as autoras indicaram a utilização de diferentes formas de expressar a solução: desenhos, gráficos e escritas (numérica e alfabética).

As autoras dividiram a análise em três etapas: a descrição das características das soluções apresentadas; a verificação dos traços e significados comuns, a estas soluções, fundamentados em eixos (pertinência à pergunta do problema; presença de um ou mais casos de *combinação* de valores das variáveis; presença de cálculo relacional aditivo e/ou multiplicativo) para obtenção dos níveis e/ou sub-níveis prováveis na construção do raciocínio combinatório; e a verificação desses níveis a fim de observar uma hierarquia nessa construção.

A partir dessa análise, as autoras observaram a presença de quatro níveis de solução: Resposta alheia ao contexto; Resposta contextualizada sem indício de combinação (escolha de variáveis, adição de valores, composições numéricas em diferentes formas de cálculos); Respostas com as primeiras aproximações da Combinatória (do caso favorito, dos casos favoritos conforme valor distractor ou de variável estranha, dos casos favoritos ignorados os distractores); Da obtenção de algumas combinações (combinações distorcidas pelos distractores, das aproximações aditivas, multiplicativas e por divisão, das muitas combinações aditivo-multiplicativas com três variáveis); e o último da presença de solução combinatória.

Segundo Soares e Moro (2006) a estrutura do problema de produto cartesiano permeia algumas questões particulares “como as da passagem do pensar as variáveis e seus valores de um plano linear, aditivo, para um plano bidimensional, multiplicativo” (p.14). Essas autoras apontam o diagrama cartesiano como ferramenta para resolução desse tipo de problema.

Como resultado, as autoras abalizam a necessidade de falar em momentos progressivos de obtenção de soluções que apresentem o raciocínio combinatório pontuado em relação ao tipo de tarefa ou teste associado. Nesse sentido Moro e Soares (2006) complementam:

> Se crianças pequenas obtêm, com material manipulativo, pares combinados conforme dois ou mais critérios ao menos, apoiadas em disposição espacial de marca cartesiana, isto pode não significar domínio conceitual combinatório em planos mais adiantados (SOARES e MORO, 2006, p.14)

A análise proposta em muito pode auxiliar professores a acompanharem os processos de desenvolvimento dos raciocínios combinatórios de seus alunos.

Pessoa e Borba[20] (2009a) analisaram as estratégias e os desempenhos de 99 alunos de 2º ao 5º ano na resolução de problemas combinatórios (*produto cartesiano*, *permutação*, *arranjo* e *combinação*).

Para isso, elaboraram um teste composto de oito questões duas de cada tipo de problema, variando a ordem de grandeza entre os mesmos. Nesse estudo as autoras verificaram que os problemas que os alunos desse nível de ensino sentem mais dificuldades são os de *permutação* (3%) e os que sentem menos dificuldades são os de *produto cartesiano* (29%). Indicam como principal motivo da dificuldade nos problemas de *permutação* o esgotamento de possibilidades a partir de listagens.

A variedade de estratégias que os alunos desse nível de ensino desenvolvem também é observada pelas autoras. Nesse contexto, Pessoa (2009) apresenta como estratégias mais frequentes dos alunos dos anos iniciais na resolução desses problemas a listagem. Sobre a utilização dessa estratégia a autora considera

> ...os alunos, que ainda não foram introduzidos formalmente ao conceito de Combinatória, demonstram perceber que os problemas tratam de contagem de elementos de conjuntos, geralmente realizam um *cálculo relacional* (Vergnaud, 1991) adequado, isto é, estabelecem as relações, compreendem do que trata o problema e buscam estratégias válidas para resolvê-los (PESSOA, 2009, p.202).

Como resultado, as autoras indicaram que o desenvolvimento da compreensão de problemas de Combinatória por alunos de anos iniciais ocorre:

> ... ora diretamente influenciados pela escola (como no caso dos problemas de *produto cartesiano* – trabalhados explicitamente nas séries iniciais), ora como resultado de experiências escolares não necessariamente relacionadas à Combinatória ou, ainda, pelas suas vivências extra-escolares (como no caso de alguns problemas de combinações, *arranjo*s e permutações – não trabalhados explicitamente nas séries iniciais) (PESSOA e BORBA, 2009a, p.142).

Observamos, a partir do exposto, que alunos dos anos iniciais resolvem os diferentes tipos de problemas combinatórios em situações de teste e utilizam diferentes estratégias de resolução. Verificamos, também, que situações que envolvam desenhos e pintura auxiliam na escolha e sistematização de elementos de construção desse raciocínio.

[20] Esse estudo apresenta o resultado parcial da tese de doutorado de Pessoa (2009).

As avaliações do nível de compreensão e desempenho desses alunos proposta nessas pesquisas podem auxiliar os professores no momento de avaliação das diferentes estratégias.

Nos anos finais do Ensino Fundamental, Moro e Soares (2006), continuando pesquisas anteriores, apresentaram níveis e sub-níveis da construção inicial do raciocínio combinatório de 60 alunos dos atuais 6º e 7º ano do Ensino Fundamental, a fim de proporcionar uma possível descrição psicogenética do raciocínio combinatório. Os participantes tiveram que responder quatro problemas de *produto cartesiano* com duas e/ou três variáveis e valores numéricos pequenos e/ou grandes, sem e com presença de valores distractores.

As autoras categorizaram quatro níveis de construção de raciocínio combinatório: a ausência de solução combinatória; os primeiros indícios de soluções combinatórias; alguma aproximação de soluções combinatórias e a presença de soluções combinatórias. Moro e Soares (2006) apresentaram, ainda, um indício de relação negativa no avanço de escolaridade, o que resulta na necessidade do ensino de problemas de *produto cartesiano* desde os anos iniciais, devendo ocorrer de maneira espiral durante os anos, com intenção voltada ao seu significado matemático específico, como circunstância de construção do raciocínio combinatório, entre outras relações significativas ao desenvolvimento cognitivo do aluno, com prováveis reflexos em outras áreas de sua aprendizagem escolar.

Frant et al (2001) acompanharam três alunos do 7º ano, durante a resolução de um problema de *combinação* e analisaram o processo de desenvolvimento das argumentações e ações destes alunos.

Essa pesquisa procurou verificar como acontece a construção de significados em campos semânticos distintos e na preparação de atividades que não encubram o processo de construção. Para isso as autoras utilizaram o Modelo da Estratégia Argumentativa (MEA) que utiliza a análise do discurso em sala de aula, investigando a partir dos argumentos ao invés das palavras. Para observar esses argumentos foram analisados os trabalhos escritos em aula, trabalho de discussão em grupo, entrevistas individuais e em grupo, o diário de bordo da pesquisadora, além de vídeos.

As autoras escolheram para a entrevista o problema de aperto de mão, conforme extrato a seguir:

> Em uma reunião, algumas pessoas compareceram. Elas se cumprimentavam umas as outras apertando suas mãos. Uma pessoa observa que no total foram 66 apertos de mãos. Quantas pessoas estavam nesta reunião? Como você pensou para resolvê-lo? (FRANT et al, 2001,p.4)

Nesse estudo, as autoras constataram que os princípios aditivos e multiplicativos são utilizados com diferentes justificativas e argumentos, e produziram, a partir dessa abordagem com argumentações, a troca entre diferentes representações simbólicas.

Esteves (2001), em sua pesquisa, teve o objetivo de investigar a aquisição e o desenvolvimento de conceitos de Combinatória em alunos do 9º ano. Para isso construiu uma sequência de ensino com base na Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1990), na transposição didática (CHEVALLARD, 1991) e no contrato didático (BROUSSEAU, 1986).

A pesquisa foi realizada em dois grupos: um experimental composto por 28 alunos do 9º ano e outro grupo de referência constituído de 30 alunos do 2º ano do Ensino Médio.

A sequência confeccionada foi aplicada em sete encontros que priorizavam situações-problemas de contagem direta, o princípio multiplicativo ou princípio fundamental da contagem; reconhecer características para diferenciar *arranjo* e *combinação*; e ainda, a institucionalização de *arranjo*, *permutação* e *combinação*.

A autora constatou dificuldades em adolescentes de 14 anos na resolução de problemas que envolvem o princípio fundamental da contagem, principalmente *arranjo*, *permutação* e *combinação*, e apontou como necessário que o aluno organize sistematicamente os dados do problema, além de perceber diferenças significativas na compreensão das propriedades de cada tipo de problema (como a questão de ordem e a interpretação do problema).

Pessoa e Borba (2009b), em outro artigo, se propuseram a analisar o desempenho e as estratégias de alunos do 6º ao 9º na resolução de problemas combinatórios (produto cartesiano, *arranjo*, *permutação* e *combinação*). Nesse estudo foram analisados as resoluções de 174 alunos no mesmo teste anteriormente descrito.

As autoras observaram que o tipo de problema que os alunos apresentam maior dificuldades é o de *combinação* e o de menor dificuldades são os de *produto cartesiano*. As estratégias de escrita de possibilidades e ainda, a multiplicação

adequada ou inadequada foi a mais observada na resolução desses problemas. A partir desse fato as autoras consideram que grande parte dos alunos desse nível estabelece relação dos problemas combinatórios e com a multiplicação, no entanto, alertam para sua utilização que por vezes é inadequada.

As autoras indicaram que os alunos dos anos finais elaboraram estratégias diferenciadas na resolução dos diferentes tipos de problemas combinatórios. Além disso, o papel da argumentação e da sequência de ensino sistematizada pode auxiliar nesse desenvolvimento. Questões como a diferenciação dos problemas e a estratégia de multiplicação inadequada devem ser observadas.

No Ensino Médio, Navarro-Pelayo et al (1996) avaliaram as estratégias produzidas por 720 alunos de 14 a 15 anos, dos quais 352 haviam estudado Combinatória e os demais (368) não tinham. Nesse estudo, os autores descrevem um modelo combinatório implícito (seleção, colocação e partição) fundamentado em Dubois (1984).

Abalizados em outras pesquisas construíram um questionário com 13 problemas distribuídos entre combinações, permutações com repetição, *arranjo*s com repetição, permutações e *arranjo*s simples que pertenciam aos diferentes modelos combinatórios implícitos.

Os principais erros encontrados nas soluções desses problemas pelos alunos foram: a troca entre os três modelos a partir do enunciado do problema; o erro de ordenação; o erro de repetição; confundir o tipo de objetos (idênticos quando diferentes, ou diferentes quando iguais); enumeração não sistemática; não lembrar da fórmula dos problemas combinatórios; não lembrar o significado dos valores dos parâmetros das fórmulas; resposta intuitiva errada; interpretação equivocada do diagrama de árvore.

Sturm (1999) analisou uma proposta de ensino de Combinatória que enfatizava o uso do Princípio Fundamental da Contagem, em detrimento do uso de fórmulas, com 33 alunos do 2º ano do Ensino Médio, identificando os limites e possibilidades dessa proposta.

Os instrumentos escolhidos nessa pesquisa foi um diário para registrar as atividades realizadas, dois testes sobre as atividades e ainda, um questionario sobre as opiniões dos alunos. O autor constatou a utilização do princípio multiplicativo na resolução dos problemas combinatórios como positiva.

Sturm (1999) identificou em alguns alunos dificuldades na resolução de problemas combinatórios, o que não acontecia em relação a outros conteúdos matemáticos. Para isso justifica: “em Combinatória, a maioria das vezes cada exercício é um novo exercício (p.84)”, se posicionando em relação ao caráter diferenciado dos problemas combinatórios. Esse autor ainda reflete sobre a dificuldade de analisar a própria prática.

Pessoa (2009)[21] em sua tese investigou o desenvolvimento do raciocínio combinatório em 568 alunos que estudavam do 2º ano do Ensino Fundamental até o final do Ensino Médio ao resolverem problemas combinatórios, classificados em *produto cartesiano*, *permutação*, *arranjo* e *combinação*. Em relação aos alunos do Ensino Médio, a autora verificou que os problemas combinatórios que possuem mais dificuldades é o problema de *combinação* e o de menor dificuldade é o de *produto cartesiano*.

A estratégia que os alunos do Ensino Médio mais evidenciaram foi a multiplicação inadequada, seguida da estratégia de listagem e da multiplicação adequada, mas pouco se evidenciou o uso de fórmulas ou mesmo do princípio multiplicativo. A autora justifica esse dado porque no período da aplicação do teste os alunos do 2º ano não haviam estudado Combinatória. O uso de fórmulas foi mais frequente no 3º ano do Ensino Médio porque haviam vivenciado esse ensino de Combinatória, no entanto muitos alunos utilizaram as fórmulas de maneira inadequada (trocando os tipos de problemas).

Nessa tese, a autora evidencia que o desempenho dos alunos é influenciado pelo tipo de escola que frequentam, o tempo de escolaridade, o tipo de problema combinatório que se apresenta a forma de representação simbólica utilizada para a resolução e a ordem de grandeza dos números envolvidos.

Em relação ao ensino de Combinatória, Pessoa (2009) considera que:

> ...é importante que o professor perceba o nível em que o aluno se encontra e entenda as relações Matemáticas que correspondem a cada uma das estratégias utilizadas. Compreender essas relações auxilia o professor a criar situações-problema que ajudem na expansão dos conhecimentos matemáticos do aluno para situações mais elaboradas, propiciando que ele avance em seu processo de aprendizagem (PESSOA, 2009, p.213).

[21] Alguns outros resultados dessa tese estão apresentados em Pessoa e Borba(2009a) e Pessoa e Borba (2009b)

Observamos que no Ensino Médio os alunos possuem dificuldade em relação à utilização de fórmulas e do princípio multiplicativo. Os estudos trazem considerações importantes sobre as principais dificuldades no ensino de Combinatória nesse nível. Sugestões de trabalho que priorizem diferentes estratégias também são verificadas como a utilização do principio multiplicativo e até mesmo o diagrama de árvores.

Os erros e dificuldades observados podem ser foco dos professores nesse nível de ensino. Portanto, essas pesquisas trazem importantes contribuições para o ensino de Combinatória nos diferentes níveis.

3.4.3. Ensino de Combinatória e a Formação de Professores

A formação de professores que ensinam Matemática, anteriormente discutida, prescinde de investigações que demonstrem as diversas relações entre o conhecimento do conteúdo do professor e o conhecimento pedagógico do conteúdo, além do conhecimento sobre a construção de conceitos pelos alunos.

Nesse contexto, identificamos alguns estudos que tratam desses conhecimentos durante o Ensino Superior. Roa, Batanero, Godino, Cañizares (1997); e Rocha (2006) investigaram turmas de licenciandos em Matemática enquanto que Costa (2003), Pinheiro e Sá (2007), Sabo (2010) e Rocha e Ferraz (2010) pesquisaram sobre os professores que ensinam Matemática, relacionado as perspectivas para a formação de professores e o ensino de Combinatória.

Roa et al (1997) investigaram as estratégias de 29 estudantes de Licenciatura em Matemática do 5º ano, utilizadas para resolução de 13 problemas de Combinatória, alicerçados nos modelos combinatórios implícitos de Dubois(1984).

Os autores evidenciaram grandes dificuldades, até em alunos com uma sólida preparação Matemática, pois não conseguiram identificar o tipo de problema. Faltava-lhes a capacidade de enumeração sistematizada (fixar o elemento), bem como a capacidade de generalização ou na redução do problema dado para um problema de menos elementos, além de falhas de tipo aritmético.

Estes resultados confirmam a complexidade de alguns problemas combinatórios e as dificuldades persistentes em lidar com estas situações.

Rocha (2006), em sua dissertação, teve o objetivo de analisar a construção do conhecimento de Combinatória em duas turmas de licenciandos em Matemática, dividida em dois momentos: um dedicado à observação de uma turma de licenciandos durante uma prática tradicional de ensino de Combinatória e outro, relativo à utilização do Ciclo da Experiência de Kelly.

No primeiro momento observou-se que existe necessidade de práticas diferenciadas para aprendizagem de Combinatória; no segundo momento indicou uma possível forma de organizar as ações de práticas que focavam numa aula ministrada pelos alunos da turma, denominada Encontro com o Acontecimento. Nessa aula os alunos agiram como se professores fossem, o que ocasionou uma melhor aprendizagem evidenciada nos bons resultados no pós-teste.

A pesquisa evidenciou o papel do Princípio Fundamental da Contagem ou Princípio Multiplicativo como “uma das bases para fundamentar dentro do ponto de vista pedagógico a classe de problemas de contagem abordada pela Análise Combinatória” (ROCHA, 2006, p.96).

Nessa investigação, Rocha (2006) apresenta as dificuldades na resolução de problemas dos licenciandos na aprendizagem da Análise Combinatória simples, apesar dos sujeitos acreditarem na importância desse ensino.

Costa (2003) em sua pesquisa investigou como os professores estão instrumentalizados para ensinar Combinatória no Ensino Fundamental, as concepções dos professores sobre a prática pedagógica e como uma formação continuada pode alterar ou não essas concepções.

Para isso analisou a Proposta Curricular do Estado de São Paulo para o Ensino de Matemática, os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental e alguns livros didáticos para verificar como os professores desse nível de ensino estão instrumentalizados. Nesse sentido, constatou que tanto os Parâmetros quanto as coleções analisadas enfatizam a contagem direta e o uso de representações para após utilizarem o princípio multiplicativo. Observou também que não há a preocupação em definir arranjo, permutação e combinação nesse nível de ensino.

Costa (2003) ainda propôs dois questionários para 37 professores que participaram de um momento de formação continuada. O primeiro para identificar os participantes da pesquisa e o segundo o qual constatou algumas dificuldades nos professores em relação ao ensino de Combinatória: a falta de um procedimento

sistemático que os auxiliem na listagem de possibilidades, a ausência de justificativa na solução apresentada, a não utilização da árvore de possibilidades ou a sua utilização de forma inadequada e, ainda, a dificuldade em reconhecer nos agrupamentos a presença da ordenação quando está é relevante ou não.

Essa pesquisa assinalou a necessidade de melhor preparo da formação Matemática e Didática dos professores que apresentam dificuldades em explicitar as suas práticas possuindo uma relação insatisfatória com as propriedades de Combinatória.

Pinheiro e Sá (2007) apresentaram uma pesquisa realizada com 20 professores de Ensino Médio de Belém do Pará, com o objetivo de determinar a prática pedagógica utilizada no trabalho de ensino de Combinatória no Ensino Médio. Foi utilizado um questionário fechado no qual se verificou a presença de questionamentos direcionados aos dados pessoais, à formação e atuação profissional e aos procedimentos metodológicos desenvolvidos durante as aulas ministradas pelos participantes dessa pesquisa.

Apesar de alguns dos docentes possuírem especialização na área de Matemática ou em Educação, os autores indicaram que a ferramenta principal para a elaboração das aulas foi o livro didático, utilizando em sua maioria a prática estruturada a partir de métodos formais para as aulas de Combinatória. Já os que apresentam menos tempo lecionando Combinatória (quatro professores), indicaram que partiam de uma situação-problema para, em seguida, formalizar os conceitos.

Embora alguns professores assinalarem a resolução de problemas ou a modelagem como possíveis práticas pedagógicas para o tratamento da Combinatória, Pinheiro e Sá (2007) observaram a forte incidência da apresentação de fórmulas e, a seguir, aplicações das mesmas.

Sabo (2010) em sua investigação se propõe a identificar os saberes do professor do Ensino Médio, em relação ao ensino e à aprendizagem de Análise Combinatória por meio de entrevistas semi-estruturadas.

A entrevista realizada com seis professores foi subdividida em quatro etapas: a primeira em relação à identificação do entrevistado; a segunda em relação às influências das experiências e da vida profissional e escolar do professor no ensino de combinatória; a terceira sobre os saberes docentes e a quarta sobre a prática do professor (planejamento, preparação de aula, livro didático, atitudes dos alunos e avaliação).

Para isso, utilizou-se como aporte teórico os *Saberes Docentes,* segundo a categorização de Tardif (2002), o processo de *Formação e Desenvolvimento Profissional* do docente, conforme autores como: Ponte (1998); Nacarato e Paiva (2006) e outros. Em relação ao objeto matemático Combinatória apresenta-se a partir da *Teoria Antropológica do Didático (TAD)*, fundamentada em Chevallard (1999), aspectos que podem influenciar o *Desenvolvimento do Raciocínio Combinatório,* conforme Batanero et al. (1996).

Sabo (2010) verificou que alguns professores valorizam a memorização e a aplicabilidade de fórmulas. Além disso, a importância de formações continuadas e das trocas entre colegas de profissão como possíveis modificadores favorecendo a construção dos saberes profissionais.

Sabo (2010) apresentou algumas situações diferentes:

> "alguns professores disseram valorizar o uso do Princípio Fundamental da Contagem em detrimento do emprego da fórmula, e outros valorizam o uso das fórmulas, mas não mostraram saber justificar e validar sua origem (SABO, 2010, p. 187).

Rocha e Ferraz (2010) analisaram a compreensão de professores de formação em Matemática e em Pedagogia possuem na resolução de problemas de combinatória. Para isso as autoras reaplicaram o teste de problemas combinatórios de Pessoa e Borba (2009) em 29 professores para avaliar o desempenho e as estratégias priorizadas na resolução desses problemas.

A análise realizada utilizou o programa SPSS para o qual foram eleitas como variáveis a formação inicial, os significados dos problemas de combinatória (arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano) e a ordem de grandeza dos números envolvidos nesses problemas.

As autoras constataram que os professores de Matemática privilegiaram na resolução dos problemas o princípio multiplicativo, seguido pelo uso de fórmulas, enquanto que professores de Pedagogia utilizaram a listagem.

Também foi averiguado que quando a ordem de grandezas dos números envolvidos nos problemas é menor não existe diferença significativa entre as médias de acertos entre professores de Pedagogia ou Matemática. Entretanto torna-se significativa quando a ordem de grandeza aumenta.

Quanto à formação de professores, Borba, Rocha, Martins e Lima (2009) apontam a necessidade de uma formação docente mais aprofundada em

Combinatória para que, ao invés de uma prática baseada exclusivamente em aplicação de fórmulas, seja vivenciado um “ensino amparado em princípios da Combinatória que auxiliem os alunos na resolução de problemas desta natureza” (p.7).

Nesse contexto, ressaltamos que apesar de experiências de professores que evidenciam o caráter dinâmico e desafiador que o ensino de Combinatória promove, despertando nos alunos curiosidade e grande participação na sala de aula, ainda são poucas as pesquisas que tratam da formação de professores e o ensino de Combinatória, principalmente no que se refere ao Ensino Fundamental, anos iniciais e/ou finais.

Essas pesquisas apontaram dificuldades dos professores e de futuros professores na resolução desses problemas e na explicitação de práticas relativas ao ensino desse conteúdo e auxiliam nos debates relativos a formação de professores em relação ao ensino de Combinatória, principalmente na discussão e análise dos dados encontrados nessa investigação.

Observamos ainda a ausência de pesquisas que tratem de como esses problemas combinatórios são apresentados nos diferentes níveis de ensino, principalmente que analisem as dificuldades dos professores de diferentes formações no tratamento desses problemas e na avaliação de erros dos alunos, ou seja, quais elementos do ensino e aprendizagem de Combinatória são valorizados por esses professores.

Ainda assim, as pesquisas apresentadas versam sobre diferentes aspectos relativos ao ensino de Combinatória: recursos didáticos (livros didáticos, objetos de aprendizagem, jogos matemáticos), dificuldades de compreensão dos alunos e professores sobre problemas combinatórios e nos levam aos seguintes questionamentos: Até que ponto as dificuldades elencadas nessas pesquisas influenciam a avaliação de atividades dos alunos e as proposições de atividades para ensinar Combinatória? Quais são no âmbito do conhecimento do professor as ideias e destrezas importantes para possibilitar o desenvolvimento do raciocínio combinatório nos alunos? Essas indagações permeiam toda a pesquisa e é o que buscamos tratar nos capítulos que se seguem.

CAPÍTULO 4

MÉTODO

Nesse capítulo apresentamos o percurso metodológico que foi adotado. Em seguida, apresentamos os critérios de seleção dos participantes da pesquisa, posteriormente o instrumento de coleta de dados e a organização da análise.

Nessa investigação, o percurso metodológico foi se construindo na medida em que o diálogo com os dados coletados foram se delineando, de forma a atender as inquietações, em busca de apreender *o conhecimento dos professores sobre Combinatória e seu ensino*, que se constituiu no objeto dessa pesquisa.

4.1. PERCURSO METODOLÓGICO

Várias pesquisas refletem sobre o aprender a ensinar e sobre o conhecimento matemático que professores necessitam para ensinar essa disciplina. Estas reflexões se ampliaram na direção dos processos pelos quais os professores geram conhecimento, além de buscar identificar quais tipos de conhecimento eles adquirem no exercício de sua profissão.

A presente pesquisa iniciou-se em 2008 com o levantamento, em anais de congressos nacionais e internacionais, de artigos relativos ao ensino de Combinatória como parte integrante das pesquisas desenvolvidas no Grupo de Estudos de Raciocínio Combinatório do Centro de Educação (GERAÇÃO–UFPE).

Conforme apresentamos no Capítulo 1, pesquisadores como Shulman (2005) evidenciam a necessidade de investigações que versem sobre a base do conhecimento dos professores. Ball (1991), Sztajin (2002), Curi (2005) e Ma (2009) questionam mais especificamente sobre os conhecimentos de professores que ensinam Matemática nos diferentes níveis de ensino.

Percebemos, ainda, a necessidade de pesquisas que enfoquem as diferentes especificidades do conhecimento de um conteúdo, em particular, e o conhecimento didático desse conteúdo de professores, para identificar diferentes relações entre as variadas formações iniciais e experiências de ensino diversificadas e os efeitos que essas podem ter nos processos de aprendizagem matemática.

Compreendemos, então, que a Combinatória e o seu ensino abrangem diferentes objetivos durante o processo de escolaridade, ditadas, geralmente, pelas orientações curriculares. No entanto, os professores são os que escolhem, de fato, os conteúdos que são vivenciados em sala de aula.

Assim, a partir do cenário descrito pelas pesquisas e investigações anteriormente apresentadas, indicamos a necessidade de outras pesquisas que versem sobre o ensino de Combinatória, em especial, na perspectiva dos professores. Delimitamos como foco para essa pesquisa o conhecimento dos professores sobre Combinatória e seu ensino desde o Ensino Fundamental até o Ensino Médio devido às orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) de antecipar o ensino de Combinatória para os anos iniciais e a presença de problemas combinatórios nos livros didáticos desse nível de escolaridade (BARRETO et al, 2007). Portanto, objetivamos analisar os conhecimentos que professores do Ensino Fundamental e Médio têm sobre Combinatória e seu ensino.

4.2. CRITÉRIOS DE SELEÇÃO DOS PARTICIPANTES DA PESQUISA

Os participantes da pesquisa foram selecionados entre professores que ensinam Matemática no Ensino Fundamental (nos anos iniciais e nos anos finais) e no Ensino Médio e que possuíam ou possuíram vínculos no setor público e em escolas particulares da Região Metropolitana do Recife[22].

Portanto, selecionamos professores com Licenciatura em Pedagogia porque atuam nos anos iniciais do Ensino Fundamental e professores com Licenciatura em Matemática que lecionam nos anos finais do Ensino Fundamental ou no Ensino Médio. Essa seleção se justifica por pensarmos ser possível um ensino de Combinatória nos diferentes níveis de ensino, conforme apresentam as orientações curriculares, os Guias do Plano Nacional de Livros Didáticos, a Base Curricular Comum de Pernambuco e pesquisadores que confirmam serem os alunos capazes, desde os anos iniciais, de resolver diferentes tipos de problemas combinatórios com estratégias eficientes.

Em relação aos professores de Pedagogia, apesar da Lei nº 9.394/96 em seu Art.62 indicar como formação mínima para atuação na Educação Infantil e nos primeiros anos do Ensino Fundamental a modalidade Normal, oferecida em nível

[22] Sabemos que nessa Região poderemos encontrar professores de outras formações ensinando Matemática nesses níveis, mas somente foram escolhidos os de formação em Pedagogia e Licenciatura em Matemática.

médio, escolhemos os professores com graduação em Pedagogia para garantirmos que os professores participantes tivessem o mesmo nível de formação inicial.

Inicialmente havíamos pensado em 24 professores o que após a qualificação foi descartado devido ao volume de dados a serem analisados. Optamos por uma análise mais aprofundada e elegemos seis professores que atuavam em diferentes níveis de ensino, dois nos anos iniciais com formação inicial em Pedagogia; dois nos anos finais do Ensino Fundamental e dois no Ensino Médio com formação inicial em licenciatura em Matemática.

Estabelecemos também como critério de seleção dos professores, que estivessem ensinando Matemática nos últimos cinco anos, uma vez que teríamos a possibilidade de que os mesmos utilizariam livros didáticos mais recentes. Além disso, esse critério nos remete ao tempo de experiência dos professores (mínimo de cinco anos), para o qual nos referendamos em Nóvoa (1992) quando afirma que, nestes primeiros anos de exercício profissional, os professores estão aprendendo os saberes necessários aos processos de ensinar e aprender.

Durante a procura dos participantes da pesquisa, tivemos algumas dificuldades em encontrar professores que preenchessem os critérios e se dispusessem a participar da entrevista, principalmente por causa da disponibilidade de tempo dos mesmos. Portanto, a disponibilidade e o interesse em participar da pesquisa também foram elementos a serem considerados na seleção.

Os professores participantes foram codificados e identificados por siglas, compostas por letras e números, utilizadas para resguardar suas identidades, conforme descriminação no quadro a seguir:

Quadro 5: Código dos participantes da pesquisa

Código dos professores	Níveis em que atuam
PAI_1	Professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental
PAI_2	
PAF_1	Professores dos anos finais do Ensino Fundamental
PAF_2	
PEM_1	Professores do Ensino Médio
PEM_2	

4.3. ORGANIZAÇÃO DO INSTRUMENTO DE COLETA E ANÁLISE

Para coletar os dados dessa pesquisa, utilizamos como procedimento básico a entrevista semi-estruturada, pois compreendemos que este procedimento pode possibilitar a realização de inferências quanto aos conhecimentos dos sujeitos pesquisados, caracterizando-os.

A entrevista semi-estruturada, de acordo com Bogdan e Biklen (1994), possibilita “a certeza de se obter dados comparáveis entre vários sujeitos” (p.135). Para Minayo (1998), “facilita a abertura, a ampliação e o aprofundamento da comunicação”, contribuindo para orientar uma “conversa com finalidade”, não permitindo cercear a comunicação entre os interlocutores, dando “tom e forma” ao objeto de pesquisa.

Justificamos a escolha da entrevista como instrumento metodológico pelo fato do ensino de Combinatória no Ensino Fundamental aparecer de maneira implícita nos processos de ensino e aprendizagem, sendo formalizado apenas no Ensino Médio

Em um primeiro momento, elaboramos um estudo piloto o qual nos permitiu efetuar alterações no instrumento de coleta proposto. Nesse estudo-piloto realizamos três entrevistas com professores que atuam em níveis diferentes de escolaridade. A partir da análise do estudo-piloto, decidimos acrescentar algumas questões relativas ao tipo específico de problemas combinatórios, para que os professores opinassem sobre cada significado especificamente.

A entrevista inicialmente foi pensada ser desenvolvida dentro da escola, mas, por ser longa, precisamos combinar com o professor o horário e espaço para realizá-la, de forma que se proporcionasse um grau de liberdade para que os professores falassem sem inibição.

Conforme Bogdan e Biklen (1994), o papel do entrevistador foi definido de forma a não persuadir os entrevistados, nem inibi-los, de modo que os professores se mostrassem participativos durante toda entrevista. Além disso, a elaboração das perguntas visava interessantes discussões e não a obtenção de respostas prontas.

Os participantes foram entrevistados individualmente em salas isoladas, o que proporcionou um diálogo sem interrupções. Essas entrevistas foram audiogravadas mediante autorização de cada professor e tiveram duração, de no mínimo 80 e no máximo 120 minutos o que foi propício para a investigação. Alguns participantes já

nos conheciam o que de certa forma ajudou na receptividade o que viabilizou um clima de confiança e 'disposição na participação' dessa pesquisa. O trabalho de transcrição das entrevistas ocorreu posteriormente à realização das mesmas, constituindo-se em um primeiro contato com os dados coletados.

O instrumento de coleta foi organizado a partir dos problemas combinatórios retirados da pesquisa de Pessoa e Borba (2009b) e de protocolos selecionados da pesquisa de Pessoa (2009). O quadro a seguir apresenta os objetivos da entrevista em cada um dos momentos e sua relação com a descrição da análise:

Quadro 6: Descrição dos objetivos de cada momento da entrevista

Fases de Análise	Momentos da Entrevista	Objetivos
Sobre formação e experiência docente	1º momento	Conhecer a formações e atuações profissionais do docente.
Sobre o conhecimento do conteúdo de Combinatória	2º momento	Identificar os conhecimentos dos tipos de problemas combinatórios.
	3º momento	Diferenciar os problemas de *arranjo* e *combinação*
Sobre o conhecimento pedagógico de Combinatória	4º momento	Analisar as perspectivas dos professores sobre o desenvolvimento do raciocínio combinatório.
	5º momento	Verificar as estratégias de resolução privilegiadas pelos participantes
	6º momento	Levantar estratégias de superação das dificuldades dos alunos observadas pelos professores
Ação pedagógica de Combinatória evidenciada nas falas dos professores	7º momento	Averiguar sugestões de práticas para o ensino de Combinatória

A seguir descrevemos brevemente os diferentes momentos realizados na entrevista em cada uma das fases de análise.

Na primeira fase buscamos conhecer as formações e atuações profissionais do docente e sua experiência, relativa à aprendizagem de Combinatória. Para isso questionamos os professores em relação a sua formação inicial e continuada, o tipo de escola que lecionava e o tempo de experiência.

No final desse momento da entrevista, pedimos que os participantes relembrassem as experiências de escolaridade que tiveram enquanto alunos sobre o ensino e aprendizagem de Combinatória, verificando o que os professores falavam da sua escolaridade (quando estudante de Combinatória no Ensino Básico) e/ou sua formação (em seu curso de graduação).

Na segunda fase de análise, procuramos identificar algumas características do conhecimento de problemas combinatórios por parte de professores em seus diferentes níveis.

Acreditarmos que o ensino de Combinatória pode desenvolver o papel de despertar no desenvolvimento do indivíduo a presença de um tipo de raciocínio específico, o raciocínio combinatório, ou seja, uma lógica de levantamento de possibilidades, considerando-se escolha de elementos, repetição e ordem dos mesmos. Por isso, a importância de reconhecermos diferentes aspectos referentes ao ensino desse conteúdo, pontuados pelos professores entrevistados, a fim de identificar o que pode permear esse ensino nos dias atuais.

Nesse sentido, entendemos que *o conhecimento do professor sobre o conteúdo e sobre seu ensino* pode auxiliar nas escolhas de ações prática para o ensino de Matemática. Assim, elaboramos um modelo de análise de entrevista no qual buscamos explicar o aparecimento dessas relações em professores de diferentes formações e diversos conhecimentos, sistematizado na Figura 5:

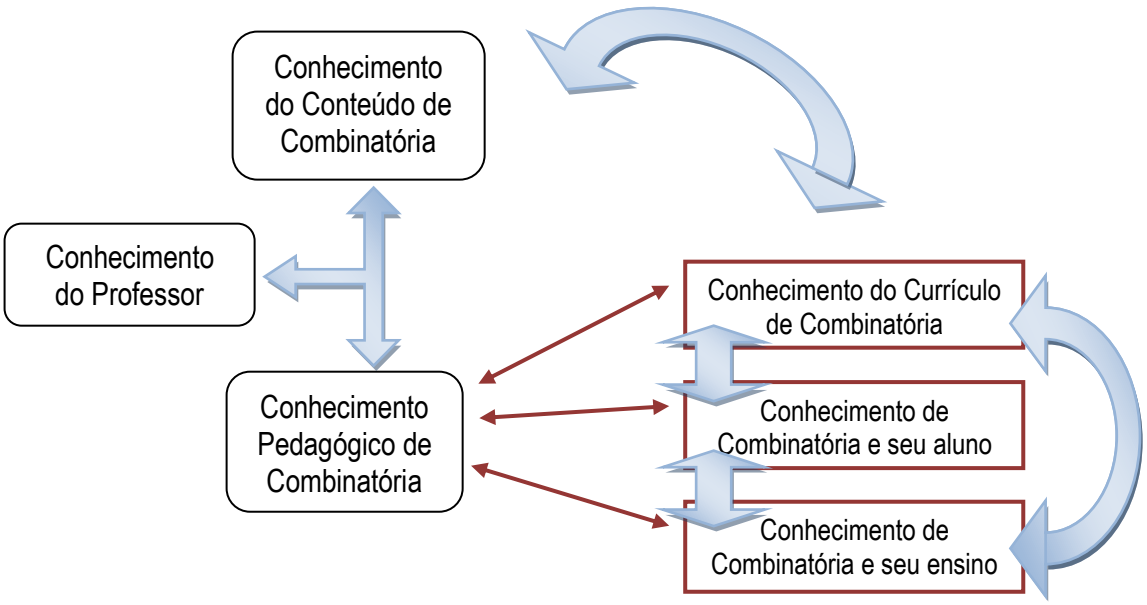


Figura 5: Modelo para sistematizar a análise da entrevista

Esse modelo foi proposto a partir das considerações de Shulman (2005) e Ball (1991) sobre o conhecimento do professor. No entanto, apesar de separar o conhecimento dos professores em *conhecimento* pedagógico de Combinatória e o *conhecimento do* conteúdo de Combinatória, sabemos da natureza processual e não linear desses conhecimentos, um amálgama de diferentes fundamentos e

características que permeiam “o ser e estar professor” que por vezes não conseguimos diferenciá-los, ou pelo menos separá-los nos discursos dos professores participantes dessa pesquisa.

Para fins de análise, propomos a distinção dos tipos de conhecimentos dos professores. Assim, sistematizamos uma organização dos diferentes momentos da entrevista, conforme indicado na Figura 6.

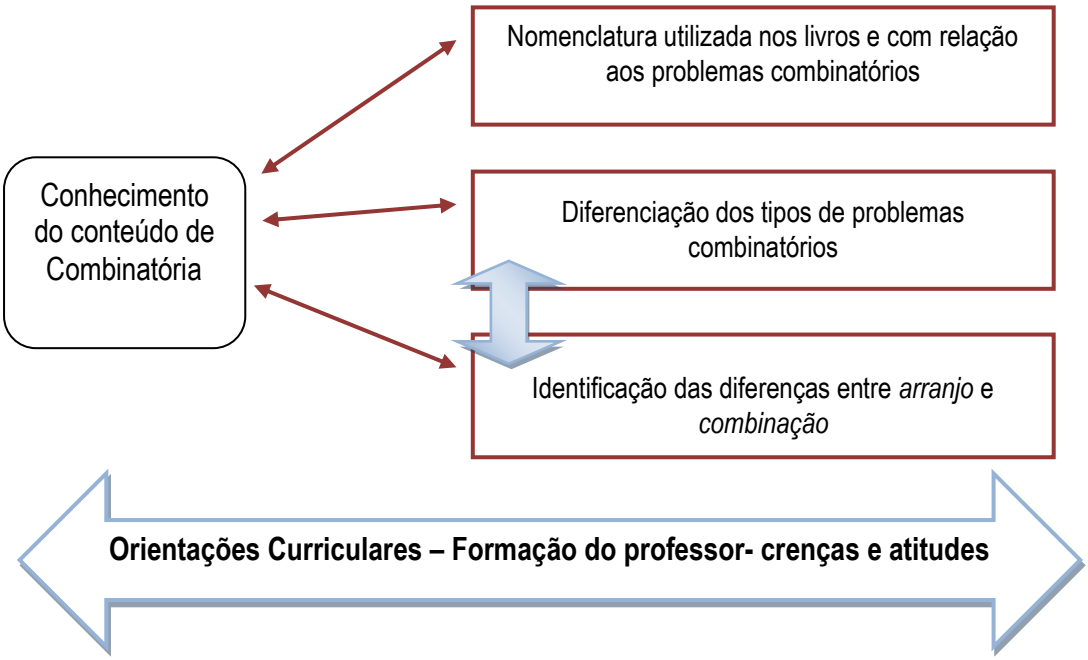


Figura 6: Relações entendidas na entrevista como conhecimento do conteúdo de combinatória dos professores

Nesse sentido, observamos que os conteúdos de Combinatória que nos propomos a identificar, dizem respeito à nomenclatura utilizada, às diferenças dos problemas combinatórios e, ainda, à diferença específica dos problemas de *arranjo* e *combinação*, no caso a propriedade ou *invariante do conceito* que é a *ordenação*.

Apesar de compreendermos que existem diferenças entre os participantes entrevistados no que se refere ao nível de atuação dos professores (anos iniciais, finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio), à formação inicial diferenciada (Pedagogia e Matemática), suas crenças, atitudes e história de vida dos professores e que elas coexistem, analisamos especificamente o conhecimento de Combinatória conforme exposto na Figura 6.

Para tanto, utilizamos na primeira etapa os problemas combinatórios (*arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano*) retirados da pesquisa de Pessoa e Borba (2009b). Para tal pedimos aos professores que sugerissem o nome, capítulo do livro que os problemas pertenciam. Após esse momento, entregamos os problemas separados e pedimos aos professores que os classificasse e separassem de acordo com semelhanças, caracterizando alguns conhecimentos desses professores sobre a Combinatória. Os problemas utilizados estão caracterizados para essa pesquisa com a utilização de siglas dispostas no Quadro 7 a seguir.

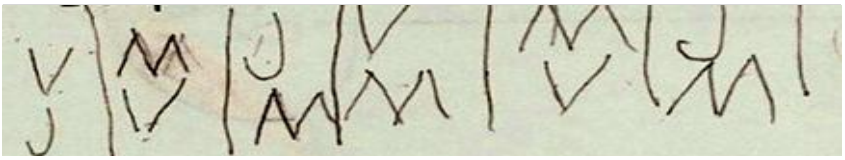
Quadro 7: Codificação dos problemas utilizados na entrevista

Tipo de problema	Código	Problema
Produto cartesiano – Maior ordem de grandeza	**PCM**	**1.** Maria tem 3 saias (uma azul, uma preta e uma verde) e 5 blusas (nas cores amarela, bege, branca, rosa e vermelha). Quantos trajes diferentes ela pode formar combinando todas as saias com todas as blusas?
***Permutação* – Maior ordem de grandeza**	**PM**	**2.** Quantas palavras diferentes (com ou sem sentido) poderei formar usando as letras da palavra AMOR?
***Arranjo* – Maior ordem de grandeza**	**AM**	**3.** As semifinais da Copa do Mundo serão disputadas pelas seguintes seleções: Brasil, França, Alemanha e Argentina. De quantas maneiras diferentes podemos ter os três primeiros colocados?
***Combinação* – Maior ordem de grandeza**	**CM**	**4.** Uma escola tem 9 professores (Cristiano, Isabel, Laura, Mateus, Nívea, Pedro, Roberto, Sandra e Vítor), dos quais 5 devem representar a escola em um congresso. Quantos grupos diferentes de 5 professores pode se formar?
***Arranjo* – menor ordem de grandeza**	**Am**	**5.** Para representante de turma da sala de aula se candidataram 3 pessoas (Joana, Mário e Vitória). De quantas maneiras diferentes poderão ser escolhidos o representante e o vice-representante?
Produto cartesiano – menor ordem de grandeza	**PCm**	**6.** Para a festa de São João da escola, tem 3 meninos (Pedro, Gabriel e João) e 4 meninas (Maria, Luíza, Clara e Beatriz) que querem dançar quadrilha. Se todos os meninos dançarem com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados?
***Combinação* – menor ordem de grandeza**	**Cm**	**7.** Três alunos (Mário, Raul e Júnior) participam de um concurso em que serão sorteadas duas bicicletas. Quantos resultados diferentes podem ser obtidos no concurso?
***Permutação* – menor ordem de grandeza**	**Pm**	**8.** De quantas formas diferentes poderei arrumar as fotos de meu irmão, meu pai e minha mãe na estante, de modo que elas fiquem lado a lado?

Além disso, propomos identificar a diferença específica dos problemas de *arranjo* e *combinação*, no caso a propriedade ou *invariante do conceito* que é a

ordenação. Para fomentar essa discussão, escolhemos da pesquisa de Pessoa (2009) os protocolos de um mesmo aluno resolvendo os problemas de arranjo e combinação e pedimos aos professores que verificassem a estratégia utilizada pelo Aluno A e o nível de compreensão dos mesmos.

ALUNO A
5. Para representantes de turma da sala de aula se candidataram 3 pessoas (Joana, Mario e Vitória). De quantas maneiras diferentes poderão ser escolhidos o representante e o vice-representante?



ALUNO A
7. Três alunos (Mário, Raul e Júnior) participam de um concurso em que serão sorteadas duas bicicletas. Quantos resultados diferentes podem ser obtidos no concurso?

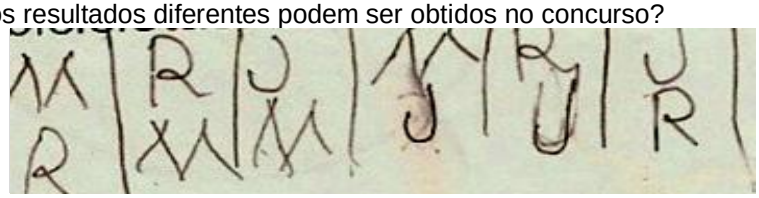


Figura 7: Protocolo escolhido da pesquisa de Pessoa (2009) para diferenciar problemas de Arranjo e Combinação

Na terceira fase de análise, buscamos caracterizar o *conhecimento pedagógico de Combinatória* dos professores, para a qual elaboramos uma síntese das etapas identificadas na entrevista (FIGURA 8) e detalhadas a seguir:

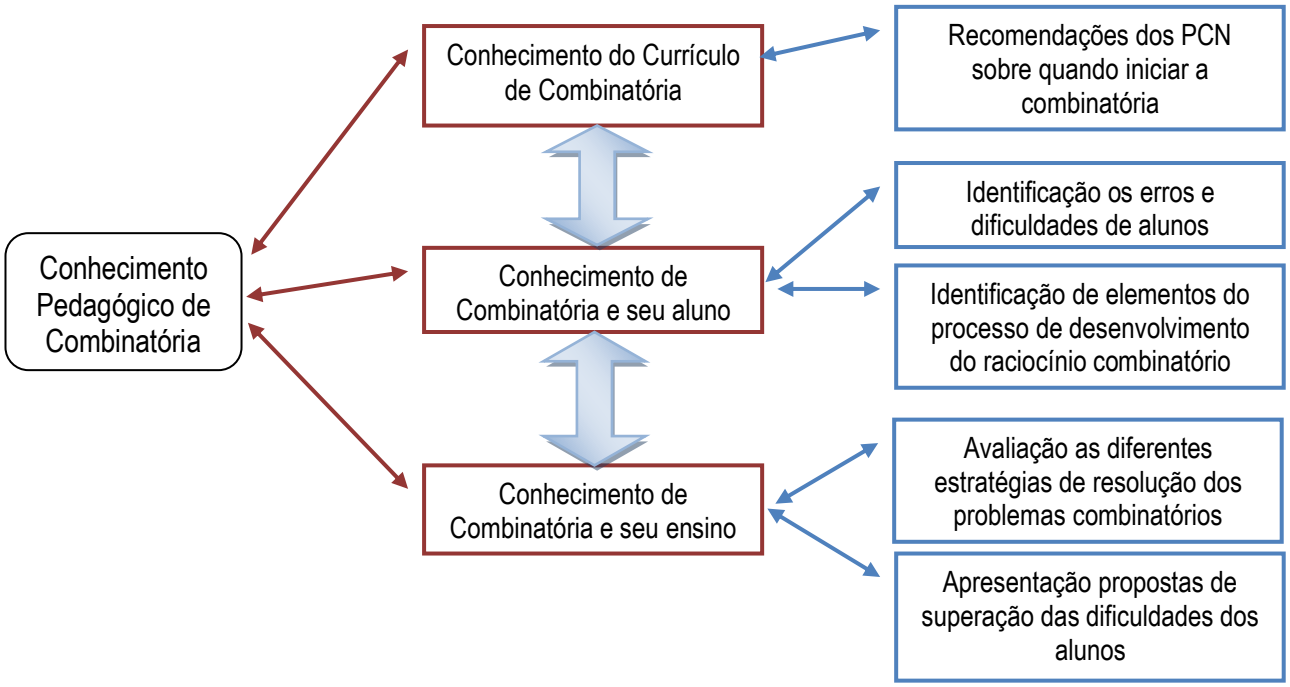


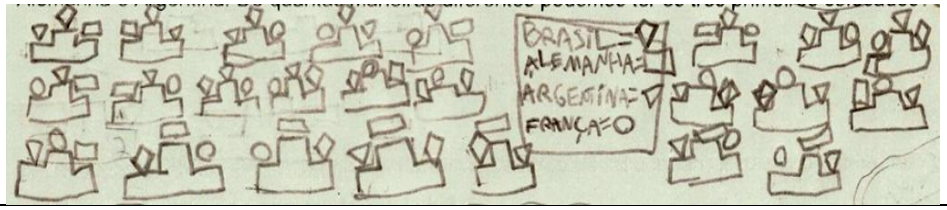
Figura 8: Relações entendidas na entrevista como conhecimento pedagógico do conteúdo de Combinatória dos professores

A primeira etapa dessa fase foi realizada a partir dos problemas combinatórios (Quadro 7) sobre os quais pedimos para que os professores antecipassem sua compreensão sobre os problemas que apresentariam um nível de maior dificuldade para os alunos; sobre a possibilidade de erros dos alunos e, ainda, a partir de que ano poderíamos iniciar o ensino de problemas combinatórios.

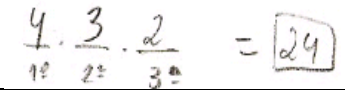
Na segunda etapa dessa fase tivemos o objetivo de analisar as perspectivas dos professores sobre o desenvolvimento do raciocínio combinatório. Para isso escolhemos alguns protocolos de alunos, extraídos da pesquisa de Pessoa (2009), que apresentavam diferentes níveis de compreensão na resolução de um mesmo problema (Figura 9).

3. As semifinais da Copa do Mundo serão disputadas pelas seguintes seleções: Brasil, França, Alemanha e Argentina. De quantas maneiras diferentes podemos ter os três primeiros colocados?

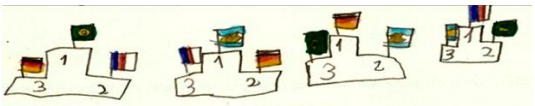
ALUNO B



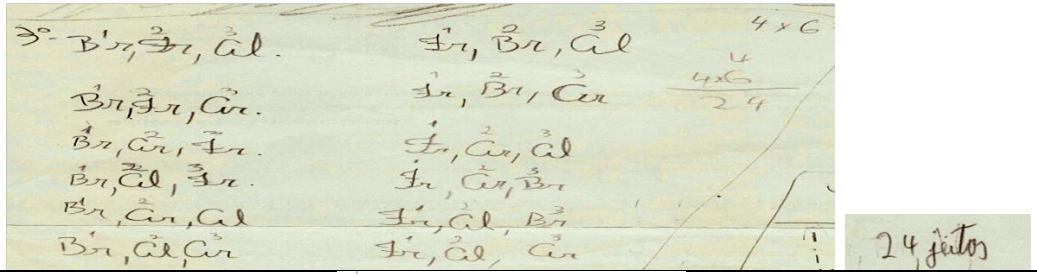
ALUNO C



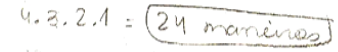
ALUNO D



ALUNO E



ALUNO F



ALUNO G

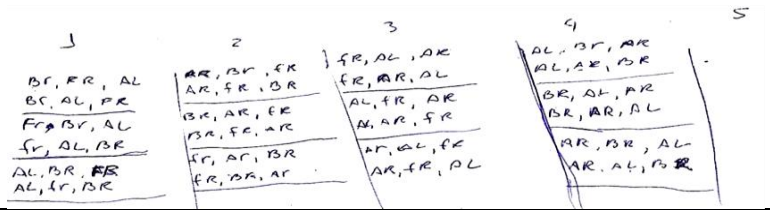
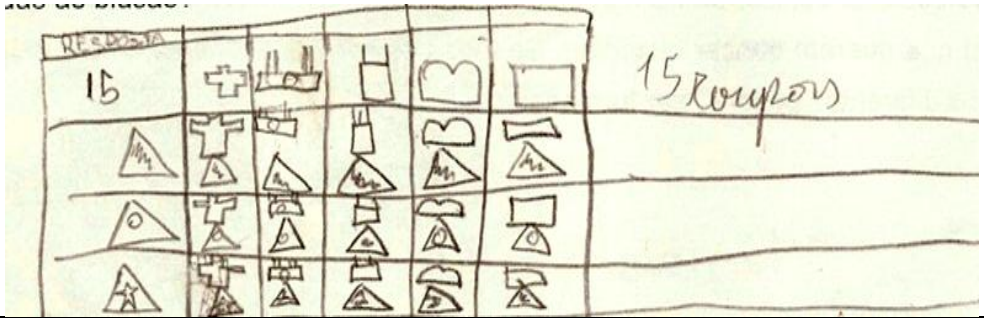


Figura 9: Protocolos de resolução por alunos de um problema de arranjo, retirados de Pessoa (2009)

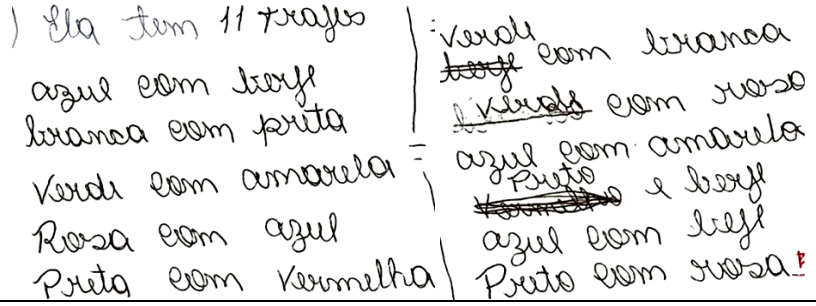
Na terceira etapa, propomos aos professores que analisassem estatégias de resolução apresentadas pelos alunos, com a intenção de verificar que tipo de estratégia foi priorizada pelos entrevistados no ensino de problemas combinatórios. Para isso escolhemos diferentes tipos de protocolos que utilizassem representações diferenciadas, conforme apresenta as Figura 10 e 11.

1. Maria tem 3 saias (uma azul, uma preta e uma verde) e 5 blusas (nas cores amarela, bege, branca, rosa e vermelha). Quantos trajes diferentes ela pode formar combinando todas as saias com todas as blusas?

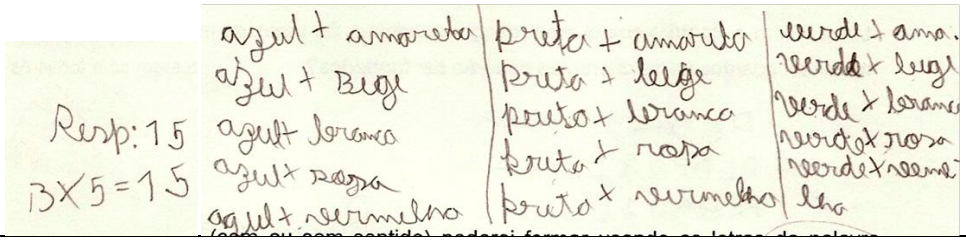
ALUNO H



ALUNO I



ALUNO J



ALUNO L

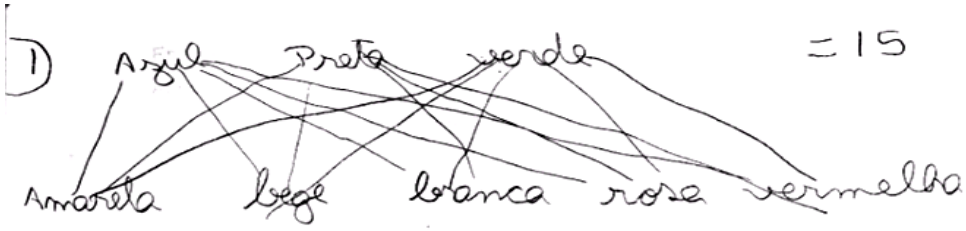


Figura 10: Protocolos de resolução por alunos de um problema de produto cartesiano, retirados de Pessoa (2009)

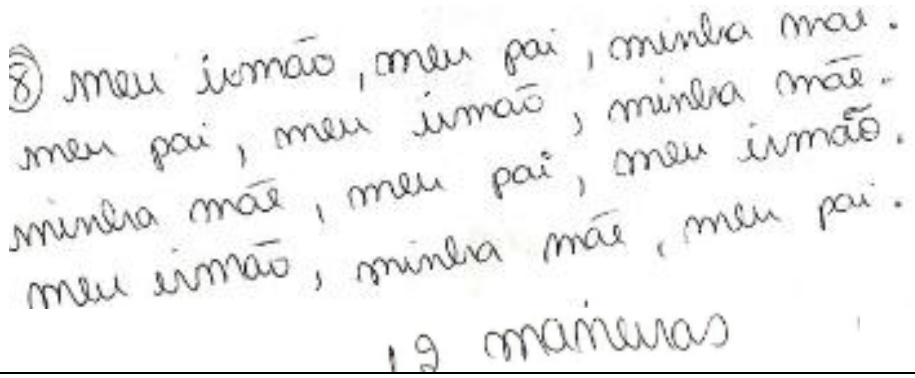
Sentimos a necessidade de apresentarmos resoluções dos problemas de produto cartesiano e permutação proporcionando comentários sobre as diferentes

representações de tabela de dupla entrada (Aluno H) e árvore de possibilidades (Aluno L) e, ainda, diferentes situações de listagem como as apresentadas na Figura 11.

8. De quantas formas diferentes poderei arrumar as fotos de meu irmão, meu pai e minha mãe na estante, de modo que elas fiquem lado a lado?

ALUNO M

ALUNO N



ALUNO O

ALUNO P

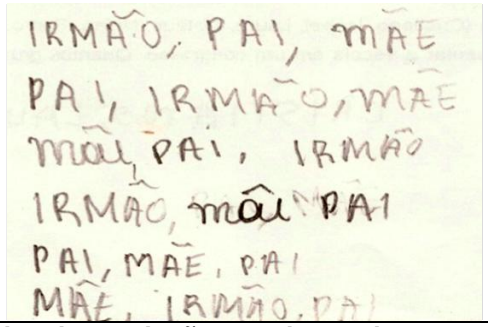


Figura 11: Protocolos de resolução por alunos de um problema de permutação, retirados de Pessoa (2009)

Em seguida, propomos, a partir dos protocolos selecionados que apresentavam alguns equívocos dos alunos (Aluno A (dois protocolos), Aluno D,

Aluno F, Aluno I, Aluno N e Aluno O), que professores indicassem os erros, analisassem e sugerissem propostas de intervenção, a fim de identificar estratégias de superação das dificuldades dos alunos encontradas pelos professores. Não evidenciamos, durante a entrevista, os anos de escolaridade que os alunos frequentavam, visto que isso poderia camuflar algumas justificativas. Entendemos que as expectativas dos professores geradas sobre os anos de escolaridade denotam importantes elementos de comparação e de postura em relação às estratégias explicitadas.

Com base nas discussões acima delineadas procuramos identificar possiveis relações com as ações pedagógicas, ou ideia de prática que os professores evidenciaram a partir de suas falas, as quais apresentamos na Figura 12.

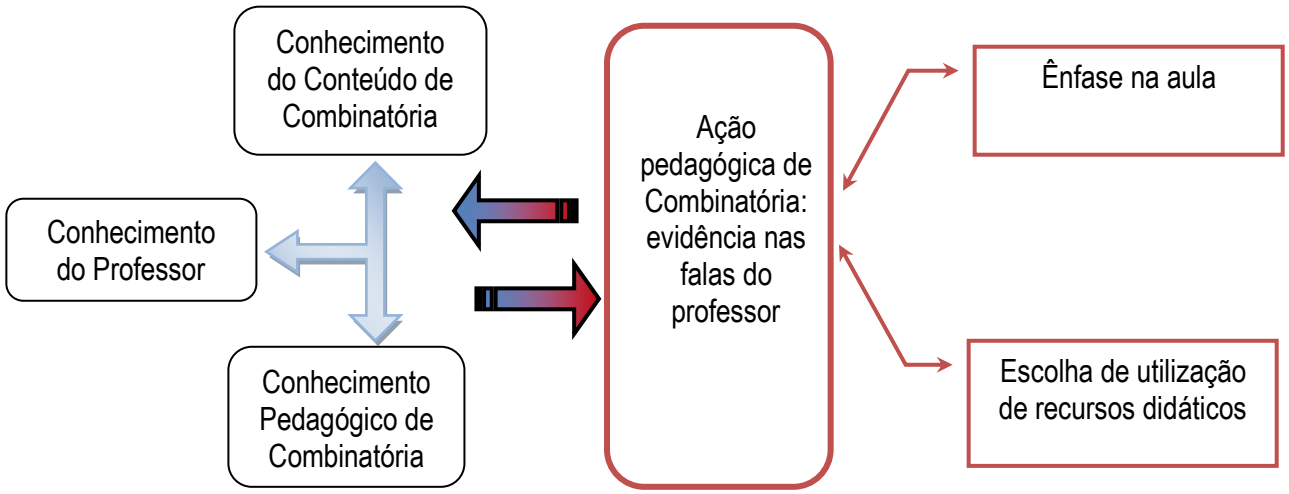


Figura 12: Relações entendidas na entrevista como possíveis ações pedagógicas dos professores

Observamos que o conhecimento do professor – tanto de conteúdo quanto pedagógico – é considerado nas decisões das possíveis ações pedagógicas, quando seus comentários enfatizam a sua aula e sobre a sua utilização de recursos didáticos.

A partir dessas considerações sobre a entrevista e a sua relação com o aporte teórico, delineamos a apresentação das análises realizadas. Cada momento da entrevista foi explicitado e analisado no capítulo 5.

Para análise dos dados coletados, organizamos sinopses dos diferentes momentos da entrevista. Essas sinopses foram organizadas e referendadas em

Guerra (2006) que as define como “síntese dos discursos que contém a mensagem essencial da entrevista e são fiéis ao que disseram os entrevistados” (p.73).

Vale salientar que os sentidos das respostas dos participantes da pesquisa não podem ser interpretados de forma linear, pois entendemos que o modo de responder é singular e diverge de um sujeito para outro. Assim, cada resposta é única e representa o contexto de cada professor, suas vivencias e suas concepções política, social e cultural. Contudo, apesar de conclusivas, as análises possuem o caráter provisório que é dado ao conhecimento, pois estão abertas ao diálogo a partir de novos olhares e em face da complexidade do objeto em estudo.

CAPÍTULO 5

APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

A presente pesquisa teve como principal objetivo analisar os conhecimentos que professores do Ensino Fundamental e Médio têm sobre Combinatória e seu ensino. Os objetivos específicos foram identificar as características do conhecimento de problemas combinatórios por parte de professores em seus diferentes níveis; verificar como professores analisam as dificuldades que alunos apresentam na resolução desse tipo de problemas; identificar como os professores compreendem o desenvolvimento do raciocínio combinatório de alunos; e analisar como professores de diferentes níveis sugerem estratégias de ensino para a superação de dificuldades dos alunos

Nesse sentido, foram entrevistados professores de diferentes formações, diversas vivências e variadas práticas docentes. Os professores participantes da pesquisa se diferiam pelo tipo de atuação nos diferentes níveis de ensino: professores que atuavam nos anos iniciais e nos anos finais do Ensino Fundamental, bem como, professores do Ensino Médio.

Os dados foram analisados de maneira predominantemente qualitativa, a partir das falas dos professores que participaram de uma entrevista semi-estruturada, na qual discutiram sobre diferentes tipos de problemas combinatórios, analisaram as estratégias de alunos na resolução desses problemas e sugeriram propostas de práticas para superação das dificuldades de compreensão desses alunos.

A seguir, apresentamos e discutimos os dados resultantes das entrevistas realizadas com seis professores que corresponderam aos critérios de seleção citados anteriormente. Desse modo, os participantes da pesquisa foram codificados de acordo com o nível de escolaridade que atuavam, conforme pode ser observado no Quadro 5 (p.79). Na apresentação dos dados realizamos a transcrição das falas dos participantes e salientamos que extratos destas, foram grifadas para dar destaque nas análises efetuadas.

5.1. FORMAÇÃO E ATUAÇÃO PROFISSIONAL DOS PARTICIPANTES DA PESQUISA

Nessa fase da entrevista procuramos identificar as diferentes formações e atuações profissionais dos docentes participantes do estudo. Questionamos a

respeito da formação dos entrevistados, sobre suas experiências de ensino de Matemática, quanto às redes de ensino nas quais lecionavam, sobre formações continuadas vivenciadas e quanto à preferência de atuação[23].

Os professores participantes da pesquisa tinham diferentes formações, possuindo, cada um, os requisitos exigidos para atuação nos níveis nos quais trabalhavam. Salientamos que todos buscaram estudos de pós-graduação – evidenciando desejo de melhores atuações no campo profissional. Assim, todos os participantes já haviam concluído cursos de Mestrado ou estavam em processo de conclusão. Esse fato auxiliou o desenvolvimento da entrevista, pois os professores compreendiam o objetivo de um trabalho de pesquisa. No Quadro 8 podem ser observadas informações que caracterizam os participantes do presente estudo.

Quadro 8: Caracterização dos Participantes da Pesquisa

Prof.	Formação	Anos de Ensino	Atuação	Preferência de Atuação	Rede
PAI_1	Pedagogia (FACHO[24]); Especialização em Orientação Educacional (UFRPE) e em Gestão Educacional (UPE); Mestrado em andamento - Ciências da Educação na Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias[25], Campo Grande (em Lisboa).	25 anos	Anos iniciais do Ensino Fundamental.	----------	Pública
PAI_2	Pedagogia (FAFIRE); Mestrado em Educação (UFPE).	12 anos	Anos iniciais do Ensino Fundamental	---------	Pública, Particular
PAF_1	Licenciatura em Ciências com habilitação em Matemática (UPE - Nazaré da Mata); Especialização em Matemática (UFRPE); Mestrado em Andamento (EDUMATEC-UFPE)	12 anos	4º e 5º anos, Anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio	Ensino Fundamental	Pública, Particular
PAF_2	Licenciatura em Ciências com habilitação em Matemática (UPE-Petrolina); Especialização em Matemática (UPE-Petrolina); Mestrado em Andamento (EDUMATEC -UFPE)	10 anos	4º e 5º anos, Anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio	Ensino Fundamental	Pública, Particular
PEM_1	Licenciatura em Matemática (UFPE) Mestrado em Educação (UFPE)	8 anos	Anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio	Ensino Médio	Pública
PEM_2	Licenciatura em Ciências com habilitação em Matemática (UEAL); Especialização em Programação de Ensino de Matemática (UPE-Garanhuns); Mestrado em Andamento (EDUMATEC - UFPE)	16 anos	Anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio	Ensino Médio	Pública, Particular

[23] A pergunta sobre preferência de atuação foi feita apenas aos professores com formação em Matemática. As preferências apontadas serviram como critério para separar os professores do Ensino Médio e os professores dos anos finais do Ensino Fundamental.
[24] Faculdade de Ciências Humanas de Olinda
[25] Convênio com a FATIN (Faculdade de Teologias Integradas em Boa Viagem).

Durante as entrevistas, percebemos que as dissertações dos professores de Matemática versam sobre temáticas diferenciadas em Educação Matemática, mas constatamos que nenhuma direciona o olhar para o estudo de Combinatória. Apesar das dissertações dos professores dos anos iniciais discutirem também diferentes temáticas, estas não se relacionam diretamente à Educação Matemática. A dissertação do professor PAI_1 discorre sobre a formação de professores e a do professor PAI_2 sobre linguagem. Já o professor PAF_1 teve como temática: A formação à distância de professores de Matemática e o tema desenvolvido pelo professor PAF_2 foi a construção do conceito de números inteiros na Educação de Jovens e Adultos. O professor PEM_1 em sua pesquisa realizou análise de livros didáticos no eixo de grandezas e medidas e o professor PEM_2 desenvolve sua investigação sobre as concepções dos professores de matemática dos anos finais sobre formação continuada.

Outro elemento observado foi a atuação dos professores em diferentes redes de ensino. Apenas os participantes PAI_1 e PEM_1 atuavam exclusivamente na rede pública. No momento da entrevista, o professor PAI_2 lecionava nas duas redes e os professores PAF_1, PAF_2, PEM_2 desenvolviam suas atividades na rede pública de ensino. O grupo de entrevistados, portanto, variou em termos de atuação docente, o que pode ser mais uma variável a ser considerada nas análises do conhecimento dos professores.

Observamos, ainda, que as instituições de graduação dos participantes são diversas, porém todos eles tiveram experiência em instituições públicas.

5.1.1. Experiências de aprendizagem de combinatória: contribuições da escolaridade e da formação inicial

Shulman (2005) explicita que uma das fontes da base do conhecimento do conteúdo dos professores é sua formação acadêmica. No entanto, o processo de aprender a ensinar Matemática se inicia muito antes da formação acadêmica desde a vivência na escola básica, como entende Tardif (2002).

Nesse momento da entrevista procuramos identificar nos professores informações sobre a experiência de aprendizagem de Combinatória e como esta influencia nas atividades de ensino que dizem adotar. Salientamos que não

esperávamos que todos os professores tivessem vivenciado experiências específicas de aprendizado desse conteúdo, nem que se lembrassem das mesmas. Entretanto, todos os professores de formação em Matemática tiveram um componente curricular específico de Combinatória na sua formação. Quanto aos professores de formação em Pedagogia, diferentemente dos de Matemática, não vivenciaram na sua formação inicial experiências em Combinatória.

Tardif (2002) considera que a experiência profissional dos professores é uma *fonte* privilegiada de seu saber-ensinar em relação aos conhecimentos adquiridos durante a universidade e na vivência de sua escolaridade. Essa natureza de fonte pode ser confirmada no depoimento do professor PAF_1:

> **E:** *Você se lembra o que foi necessário para você aprender esse assunto?*
> **PAF_1:** *No 6º ano não me lembro de ver esse assunto. No Ensino Médio e na faculdade foi sentar e resolver. Foi por repetição. Foi por osmose de tanto resolver acabou entrando na corrente sanguínea. Eu aprendi, digamos assim.*
>
> **E:** *Essa vivência auxilia na preparação e formato de sua aula?*
> **PAF_1**: *Essa vivência de treinar e repetir? ... infelizmente auxilia. Sabemos que tem outras estratégias para compreender o assunto, mas para resolver determinadas questões têm técnicas, algoritmos dos mais variados. Não se tem uma só maneira de resolver e algumas ajudam a sair mais rápido. Às vezes o objetivo é realmente conhecer esse tipo de técnica. Então eles dizem – posso resolver assim? – pode. Acabo sendo tradicional, ou taxado de chato. Meu objetivo não é entender o princípio fundamental da contagem, não é saber se ele consegue entender, é saber se ele conhece e sabe usar a técnica especifica, uma fórmula do arranjo, ou do princípio multiplicativo*. [...] No Ensino Fundamental não. Vai ter que ser por tentativa ou no máximo utilizar o princípio multiplicativo, 4 blusas e 3 saias. 3 x 4 = 12

Por outro lado, no processo de formação inicial e continuada desses professores, os conhecimentos construídos na sua história de vida merecem ser discutidos, refletidos, revistos e reelaborados.

Outros professores identificam também as dificuldades vivenciadas no período da formação, em relação ao ensino de Combinatória, como vemos no fragmento a seguir:

> **PAF_2:** *Na graduação teve uma cadeira de Matemática IV que tratava dessas questões de Combinatória, já considerando aqueles problemas do livro de Ensino Médio. Ninguém estava muito preocupado com ensino. A gente mal estava aprendendo, quanto mais ensinando para alguém.... Lembro até mesmo da professora. Não sei se eu aprendi naquele momento, mas foi quando eu vi pela primeira vez. Eu tenho impressão que só compreendi essas coisas quando comecei a dar aula....nem sei se eu aprendi mesmo, mas melhorou um pouco eu acho.... eu me lembro que eu ficava com essa questão de diferenciar o que era*

> *arranjo, combinação e permutação na minha cabeça. Eu ficava com essa questão e em cada problema querer saber que fórmula usar. Porque a gente vê um monte de coisa: permutação simples e com repetição, arranjo simples e com repetição.Quando mistura tudo, quando vamos ser avaliados, por exemplo, a gente fica com a preocupação de que em cada questão uma palavrinha chave, uma estratégia, uma coisa particular para identificar o problema com a fórmula. No arranjo a ordem importa, na combinação a ordem não importa; a permutação é um arranjo com todos os elementos. Mas era muito essa coisa de resolver questão, de resolver baterias de exercícios.*

Grossman et al (2005) acreditam que devido à matriz curricular extensa a ser vivenciada, provavelmente muitos professores iniciantes necessitam de aprofundar e até apreender novos conhecimentos do conteúdo e aprender a ensiná-lo, pois o olhar do aluno é diferente do olhar do professor sobre o conteúdo, e este, necessita ser construído durante sua formação acadêmica. Dessa forma, o olhar do professor sobre o conteúdo é construído durante sua formação acadêmica e no exercício da prática docente.

De acordo com Pires (2002), quando trata sobre os princípios norteadores para um curso de formação de professores, "é imprescindível que haja coerência entre a formação oferecida e a prática esperada do futuro professor" (p.45). Nesse sentido, vejamos o fragmento abaixo:

> **E:** *Você acredita que sua formação foi suficiente?*
> **PEM$_1$**: *A minha formação do Ensino Médio não. Mas a formação na graduação, pelo fato de também nós nos sentarmos e nos reunirmos e de certa forma estarmos aplicando as teorias cognitivas de Vygotsky, quando fala a questão do uso da linguagem como intermediação. Então nós tínhamos o monitor, os colegas de classe, isso ajudou muito. Acredito que nosso trabalho fez com que a nossa formação terminasse sendo uma formação que nos deu subsídios para que hoje em dia nós consigamos trabalhar sem muita dificuldade. Mas assim foi um trabalho de complementação.*
>
> **E:** *Especialmente no dar aula ou no conteúdo?*
> **PEM$_1$**: *Não, eu estou falando em relação ao domínio de conteúdo mesmo e não no dar aula. Até porque nossa grade curricular de graduação tem pouca experiência prática de "dar aula". Aula, aula mesmo eu só dei uma ou duas aulas em Prática de Ensino 2 e teve o Estagio Supervisionado. Mas o Estágio Supervisionado, infelizmente, como ocorre com a maioria dos graduandos, ele lança você à turma. O coordenador na época fazia restrições sobre qual tipo de escola você poderia trabalhar. Ele preferia que você trabalhasse em escola publica porque provavelmente seria a realidade que nós poderíamos pegar. A gente chega numa escola dessas, ele diz: olha as turmas são aquelas, e você está lançado.*

Observamos a crítica que o professor entrevistado teceu em relação à sua formação no que se refere ao direcionamento do conhecimento pedagógico. As

questões ligadas ao processo de aprender a ensinar parece-nos nesse depoimento que ficam relegadas ao segundo plano. Entretanto, observamos também que em relação ao conhecimento de Combinatória, esse professor considera a formação inicial positiva, muito mais pelo fato de complementação pelos estudos e trocas entre colegas de turma e monitoria.

Curi (2005) afirma que a influência de professoras dos anos iniciais "*do que* e *de como* aprenderam" Matemática pode ser considerada positiva quando as alunas afirmaram que não gostariam que seus alunos tivessem a mesma experiência que elas, o que fica evidenciado no extrato abaixo:

> **E:** *Essa vivência te ajuda a preparar suas aulas hoje em dia?*
> **PAI$_2$**: *Não como eu trabalho. Mas eu lembro, com certeza, no Ensino Fundamental II. Como a gente não tinha esse trabalho inicial com o concreto eu tinha certa dificuldade de resolver da forma que o professor estava querendo. Ele queria uma única resposta e eu dizia que dessa forma aqui eu consigo.*

Em síntese, esses professores apresentaram diferentes experiências de ensino, vivências de diversas realidades e formações, o que atende ao critério de seleção de sujeitos colaboradores e ao objeto de estudo da nossa pesquisa: *o conhecimento de professores sobre Combinatória e seu ensino*.

A partir de agora apresentamos a análise do que consideramos o *conhecimento do conteúdo de Combinatória* dos professores, a seguir o *conhecimento pedagógico de Combinatória* e, por fim, apresentamos algumas reflexões sobre a relação entre a ação docente e os conhecimentos identificados.

5.2. CONHECIMENTOS DE PROFESSORES SOBRE COMBINATÓRIA

Diversos estudos revelam algumas dificuldades de alunos na resolução de problemas combinatórios nos diferentes níveis de escolaridade a exemplo de English (2005), Moro e Soares (2006), Esteves (2001), Frant, Castro e Lima (2001), Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) e Pessoa (2009), entre outros. Refletindo sobre os resultados desses estudos, sentimos a necessidade de pesquisarmos o conhecimento de Combinatória por parte dos professores, uma vez que compreendemos que tal investigação pode nos fornecer elementos que apontem para uma possível relação entre o conhecimento dos professores, o conhecimento dos alunos e o processo de ensino de tal conteúdo.

Assim, compreendemos que alguns aspectos podem ser caracterizados como *conhecimento do conteúdo de Combinatória* por parte do professor dos quais elegemos para nossa pesquisa as nomenclaturas utilizadas referente à Combinatória; a diferenciação dos problemas combinatórios a partir dos enunciados de problemas; e, ainda, a percepção da propriedade de ordenação a partir de problemas resolvidos por alunos (diferença entre os problemas de *arranjo* e *combinação*).

Refletimos junto aos entrevistados sobre a utilização de nomenclaturas dos problemas combinatórios e as diferenças de estruturas dos problemas, cuja análise das respostas dadas pelos professores é apresentada a seguir.

5.2.1. **Sobre o Título do Capítulo dos Livros Didáticos de Matemática**

Nesse aspecto, pensamos evidenciar o conhecimento dos professores sobre os problemas combinatórios e sua apresentação nos livros didáticos de Matemática. Nesse sentido, nos apoiamos em Barreto, Amaral e Borba (2007) sobre os livros dos anos iniciais do Ensino Fundamental, nos anos finais com Albuquerque e Silva (2010) e Sabo (2007) no Ensino Médio. Esses estudos indicam os tipos de problemas combinatórios e a abordagem dada aos mesmos em distintos níveis de ensino.

Nos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental os livros didáticos trazem em relação aos títulos no que se referem à Combinatória, preferência por termos mais gerais. Por exemplo, Imenes e Lellis (2010) utilizam no volume do 7º ano o título “Divisibilidade: Contagem; árvores de possibilidades” e Padovan, Guerra e Milan (2001) no volume referente ao 5º ano trata de modo não específico como “Resolvendo problemas” (p.41). Os livros de Ensino Médio geralmente trazem o capítulo denominado de Análise Combinatória (IEZZI et al, 2001), mas o livro de Smole e Diniz (2007), diferentemente, traz o título de “Contagem”.

No Quadro 9, apresentamos uma sinopse da análise de nomenclaturas do capítulo do livro sugerido pelos professores. A pergunta no momento da entrevista foi: *Se esses problemas estivessem num mesmo capítulo de um livro de Matemática, qual poderia ser o titulo desse capítulo? Justifique.*

Quadro 9: Sinopse de análise de nomenclaturas do capítulo do livro sugerida pelos professores nos diferentes níveis

N	ANÁLISE	FRAGMENTOS DAS ENTREVISTAS
ANOS INICIAIS	Ambos os professores demonstraram preocupação com a interdisciplinaridade com outras áreas quando no trabalho com esse tipo de problemas.	**PAI_1:** Pode ser questão de números, relação, correspondência. Pode ser a questão de maior ou menor; comparação; pode ser também a ideia de sequência; da relação de quantidade... Eu colocaria em vários capítulos porque você não só utilizaria em Matemática, mas em Língua Portuguesa, de História não só de Matemática. **PAI_2:** Análise Combinatória todos eles tratam disso... a gente tem projetos que buscam fazer uma seleção de conteúdos, além disso, a gente busca fazer a conexão entre as áreas.
ANOS FINAIS	Apresentaram títulos diferenciados dependendo do nível de escolaridade na qual a Combinatória se apresenta.	**PAF_1:** Combinatória, raciocínio combinatório alguma coisa assim, mas usaria no Ensino Fundamental Princípio Multiplicativo, mas na verdade esse princípio é uma estratégia. **PAF_2:** Tanto poderia ser de Estruturas Multiplicativas no Ensino Fundamental (anos iniciais e finais); e Combinatória ou ideia de Combinatória ou Problemas de Combinatória no Ensino Médio;
ENSINO MÉDIO	Apresentaram a nomenclatura padrão em livros didáticos de Matemática no Ensino Médio.	**PEM_1:** Pelo que eu observo aqui, essas questões são do tópico que os livros intitulam de Análise Combinatória... ou o Princípio de Contagem (também pode ser o nome do tópico a ser ensinado). **PEM_2:** Sim, seria Análise Combinatória ou só Combinatória

Excetuando o professor PAI_1, os professores reconheceram os problemas como sendo de Análise Combinatória ou Combinatória.

Não esperávamos que os professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental utilizassem a nomenclatura de Análise Combinatória, por geralmente, não haver na sua formação inicial disciplinas que se refiram a esse tipo de conteúdo. Além disso, geralmente, os livros didáticos desse nível não apresentam títulos que se refiram à Combinatória. Ao ser questionado sobre o conhecimento do termo, o professor PAI_2 explicou:

> ***E:*** *De onde você conhece esse termo?*
> ***PAI_2:*** *Por dois motivos. Lá na escola onde a gente trabalha, temos a preocupação com a questão do conteúdo. Então a gente tem projetos que buscam fazer uma seleção de conteúdos, além disso, a gente busca fazer a conexão entre as áreas. Como eu trabalhei também em escola particular a gente sempre parava para pensar sobre como fazer, ou como desenvolver as atividades e principalmente os conteúdos que devem ser trabalhados e a relação deles com o projeto. Era uma coisa em que o nível de dificuldades vai aumentando até a 4ª série*.

> ***E:*** *Vocês começaram como a fazer isso?*
> ***PAI_2:*** *A gente adaptava o problema para ser mais elaborado para séries mais avançadas. Nível de dificuldades agora era cada professor que selecionava seus problemas, elaborava para sua sala. A minha sala era o 2º ano, antiga primeira série Era um trabalho bem interessante mais concreto com relação a Análise Combinatória. A relação de problemas era muito forte com o material concreto.*

Nesse extrato, o professor PAI_2 evidenciou a sua experiência de ensino e a preocupação em termos da escolha de conteúdos e também com o saber-fazer, tentando buscar a relação entre a teoria e a prática. Ele chamou a atenção para sua experiência em escola particular na qual discutia as atividades e suas relações com projetos e diferentes níveis para cada ano de escolaridade. Ressaltamos a importância do trabalho do professor em selecionar atividades adequadas e as relações entre as áreas, de forma que promovam a aprendizagem do aluno. Este trabalho faz parte do oficio do professor que para Tardif (2002) é uma fonte social de aquisição do *saber da experiência*.

Fica evidenciada nas falas dos professores dos anos finais do Ensino Fundamental (Quadro 9) a diferença de como os livros didáticos se referem à Combinatória nos dois níveis de ensino. No Ensino Médio geralmente os livros didáticos trazem capítulos denominados Combinatória ou Análise Combinatória, enquanto que no Ensino Fundamental não aparecem em capítulos e geralmente não utilizam essas nomenclaturas, pois os autores de livros didáticos preferem adotar outros títulos mais gerais.

O professor PAF_2 relacionou corretamente esses problemas com as *estruturas multiplicativas*. Nesse sentido, Borba (2010) considera que “as situações combinatórias possuem particularidades e relações que os diferenciam entre si, mas estas se unem por aspectos em comum, constituintes, portanto de um mesmo campo conceitual – o das estruturas multiplicativas” (p.4). Assim observamos que os problemas de *produto cartesiano* se equivalem aos problemas de *produto de medidas* no campo das estruturas multiplicativas, classificados por Vergnaud (1991, 2009) e, ainda, que os problemas de *permutação*, *arranjo* e *combinação* todos se fundamentam no raciocínio multiplicativo.

O professor PAF_1 relacionou esses problemas com o Princípio Multiplicativo. Nesse sentido, English (2005) apresenta que esse princípio, também chamado de *princípio fundamental da contagem* se relaciona a todos os problemas combinatórios, em especial, ao *produto cartesiano*. Essas relações podem

representar diferenças de objetivos nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Parece indicar que os professores tratam no Ensino Fundamental os problemas combinatórios relacionando-os com a multiplicação. Nesse sentido, ressaltamos a importância da continuação dessa relação no ensino de Combinatória no Ensino Médio, pois as fórmulas trabalhadas nesse nível de ensino podem ser construídas com base em raciocínios multiplicativos.

5.2.2. Sobre os Diferentes Tipos de Significados dos Problemas Combinatórios

A literatura tem apontado que a diferenciação entre os problemas combinatórios de *produto cartesiano, arranjo*, *permutação* e *combinação* é, geralmente, feita com dificuldades. English (2005) indica que em muitos estudos relacionados aos problemas combinatórios os alunos apresentam dificuldades na identificação das estruturas relativas a esses problemas e indica que é importante que os alunos conheçam as propriedades estruturais dos problemas combinatórios. Concordando com essa afirmação Batanero et al (1996) o aspecto considerado como mais difícil na resolução dos problemas combinatórios por professores e futuros professores é a identificação das operações combinatórias a partir do enunciado de um problema.

Nesse momento pretendemos identificar que conhecimentos professores possuem acerca dos diferentes tipos dos problemas combinatórios. Buscamos as características dos *significados* desses problemas que professores dos diversos níveis de ensino evidenciaram nas suas falas.

Para este propósito entregamos aos professores os oito problemas de Combinatória separados e pedimos, inicialmente, que os agrupassem de acordo com a sua estrutura. Tais problemas estão numerados de 1 (um) a 8 (oito) e estes números serão referendados quando da análise, pois eram eles que identificarão as inferências e falas dos professores pesquisados. Salientamos, entretanto, que eles estão apresentados no capítulo que se refere ao método (Quadro 7, p.84).

No Quadro 10 apresentamos, a seguir, uma análise do conhecimento dos professores a respeito dos significados dos problemas combinatórios e quais características dessas diferentes estruturas são comentadas.

Quadro 10: Sinopse de análise da estrutura dos problemas por parte dos professores entrevistados

N	ANÁLISE	FRAGMENTOS DAS ENTREVISTAS
ANOS INICIAIS DO ENS. FUND.	Agruparam por semelhança de quantidades e características de enunciados	**PAI_1:** Os problemas 2(PM) e 4(CM) eu posso agrupar porque são grupos de palavras, trabalhar para formar também outras palavras a ideia da Língua Portuguesa; mas também posso agrupar os problemas 4 (CM) e 6(PCm) a ideia de correspondência... posso agrupar os problemas 3(AM) e 7(Cm) porque são três alunos e aqui sairão os três primeiros colocados; os problemas 5(Am) e 8(Pm) é porque o 5(Am) tem um comando e o 8(Pm) também tem um comando lado a lado e representante e vice (organização). **PAI_2:** Os problemas 2(PM) e 8 (Pm) o sentido da pergunta, o nível da pergunta é mais elementar...ele não faz comparativo entre grupos que os outros fazem; os problema 3(AM), 5(Am) e 7(Cm) todos eles dão uma quantidade específica de pessoas e de elementos e pede quantas maneiras diferentes esses elementos podem ser agrupados... Também como o outro não tem comparativos entre mais grupos dentro do problema. Sempre assim tantos elementos e de quantas formas diferentes podem ser agrupados; os três têm essa mesma característica; os problemas 7(Cm) e 5(Am) estão até mais próximos que o 3(AM) na verdade, porque estão trabalhando com a mesma quantidade, mas a pergunta tem a mesma característica; os problemas 1(PCM), 6 (PCm) e 4 (CM); aqui faz um comparativo entre grupos e a pergunta é mais elaborada.
ANOS FINAIS ENS.FUND.	Os professores desse nível de ensino se aproximaram da classificação convencional em alguns aspectos, embora em outros não, mas não usaram a nomenclatura convencional.	**PAF_1:** Eu agrupei inicialmente um grupo com os problemas 1(PCM), 6(PCm); depois o problema 8(Pm) saiu e ficou com o 2(PM); porque eu vi que era só fazer a troquinha como a palavra AMOR, eu podia trocar as fotos. Depois os problemas 3(AM) e 5(Am) e por último os problemas 4(CM) e 7(Cm); **PAF_2:** O primeiro grupo de problemas com 1(PCM) e 8(Pm) é uma multiplicação direta; o segundo grupo de problemas com 4(CM),6(PCm), 7(Cm) com repetição - *combinação* que a ordem é indiferente e o terceiro com problemas 2(PM), 3(AM), 5(Am), 7(Cm) - sem repetição) seria uma *combinação* em que o elemento não pode se repetir.
ENSINO MÉDIO	Esses professores agruparam os problemas pela classificação usual dos problemas combinatórios, utilizando a nomenclatura formal	**PEM_1:** Tem aqui algumas questões que são clássicas. As questões 1(PCM), 3(AM), 6 (PCm) e 8 (Pm) seriam de princípio aditivo/multiplicativo. A 8(Pm) e a 2(PM) seria de *permutação* que tem a ver com ideia do princípio multiplicativo; a 4(CM) e a 7 (Cm) seria de *combinação*, pois a ordem não está interferindo aqui na escolha; e a 5(Am) seria de *arranjo*. **PEM_2:** O grupo do 1(PCM) e do 6(PCm) acho que se aplica o Princípio Fundamental da Contagem, o segundo grupo das questões 2(PM) e 8(Pm) chamarei do grupo das Permutações e o terceiro grupo 3(AM),4(CM),5(Am) e 7(Cm) eu ainda estava querendo dividi-los, mas eles tem a ver com *combinação*. *Arranjo* e *combinação*. Eu vou deixar os quatro juntos.

Não esperávamos que professores dos anos iniciais utilizassem as nomenclaturas dos diferentes tipos de problemas combinatórios, pois, em sua maioria, não trabalham com os termos usuais de Combinatória, nem em sua

formação, nem em sua prática cotidiana. Além disso, os livros didáticos desse nível não apresentam elementos que auxiliem professores nessa tarefa, como afirmam Barreto, Amaral e Borba (2007):

> No que diz respeito à abordagem dos quatro significados que envolvem raciocínio combinatório (*Produto cartesiano, Permutação, Arranjo e Combinação*) nenhuma das coleções apresentou orientações para o professor sobre tais significados, e consequentemente, não foi abordada nenhuma das propriedades invariantes do conceito. Já se esperava que as propriedades invariantes não fossem explicitadas no livro do aluno, uma vez que não seria condizente com os objetivos das séries iniciais. Entretanto, é importante que o professor possa receber orientações sobre os significados e propriedades invariantes dos conceitos (BARRETO, AMARAL e BORBA, 2007, p.20).

Em relação aos objetivos dos anos iniciais para o ensino de Combinatória o PCN aspira um trabalho que não se fundamente "na definição de termos ou de fórmulas envolvendo tais assuntos" (BRASIL, 1997, p.56). Entretanto, os parâmetros defendem a necessidade dos alunos resolverem situações de combinações, *arranjo*s, permutações, valorizando o princípio multiplicativo. Entendemos, portanto que a distinção dos significados dos problemas combinatórios pelo professor é necessária, para que assim tenha possibilidade de auxiliar nas propostas de situações-problema diversificadas, além de verificar o desempenho dos alunos nas soluções e acompanhar o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Podemos ver que PAI_1 se propôs a fazer relações desses problemas com outras disciplinas, especialmente a Língua Portuguesa. Observamos, no fragmento abaixo, no momento em que o professor PAI_1 comentou sobre o quarto problema:

> ***Problema 4.*** *Uma escola tem 9 professores (Cristiano, Isabel, Laura, Mateus, Nívea, Pedro, Roberto, Sandra e Vítor), dos quais 5 devem representar a escola em um congresso. Quantos grupos diferentes de 5 professores pode se formar?*
>
> ***PAI_1:*** *..Porque você junta Cristiano com mais 4 professores. Depois você pode pegar os que não entraram e vê quem ficou de fora e formar com outros grupos. Vai ter vários grupos, muitos grupos... é tão bom fazer isso com os alunos. Porque eles vão aprender o que: a questão da quantidade, conjuntos; a questão de nomes próprios; a questão de grupos de homens e mulheres; eles podem fazer grupos de consoantes; por quantitativos de letras; até a questão de sílabas. Vão ser vários tipos de grupos. É riquíssimo. Como só tem 5 homens, pode colocar um homem em cada grupo de mulheres. Que tenham a mesma quantidade de letras; Dependendo é só o professor dar o comando. Por exemplo, que tenham cinco letras no nome; que tenha a vogal A; eles vão listando e saber se tem os grupos formados ou não. Ai tudo isso o professor vai explorar. Vai depender do que você quer naquele dia, porque você pode na questão de Matemática você pode avaliar e direcionar naquilo que você queira.*

> *Por exemplo: se ele sabe diferenciar vogal de consoante, encontro consonantal...*

PAI_1 alertou para a possibilidade de alterar o enunciado e relacionar com o objetivo que o professor escolheu para a aula, explorando no problema relações com outras disciplinas.

Portanto, há evidências de que esse professor priorizou uma classificação em que a forma, e não o conteúdo. Ressaltamos que as sugestões de classificações do professor são possíveis, mas em nenhuma delas ele atentou para os diferentes significados dos problemas combinatórios.

Já o professor PAI_2 separou em três grupos os problemas combinatórios. Os problemas de *permutação* (2(PM) e 8(Pm)), os problemas que priorizam o significado de *arranjo* (3(AM), 5(Am) e 7(Cm)) e o terceiro constituído pelos problemas que priorizam o significado de *produto cartesiano* (1(PCM), 6(PCm) e 4(CM)) demonstrando perceber diferenças mais significativas entre os problemas expostos. Ele agrupou primeiramente os problemas de *permutação* corretamente, mas não utilizou essa nomenclatura. No entanto, na justificativa utilizou a questão do enunciado como principal característica para a distinção dos problemas.

O professor PAI_2 apresentou, de certo modo, conhecimento sobre o problema do tipo *produto cartesiano,* apesar de não denominar desse modo, pois ele utiliza, aparentemente, como critério de distinção entre os grupos propostos a ideia de *comparativos entre grupos*, sobre a qual explicou:

> **PAI_2:** *A criança ela vai ter que fazer uma relação entre um quantitativo e um quantitativo seguinte para poder fazer as combinações; tem uma variação entre quantidades, mas tem o mesmo fundamento.*

Esse professor, PAI_2, pareceu entender os conjuntos envolvidos nesses problemas, ou seja, nos problemas do tipo *produto cartesiano*, existem dois conjuntos diferentes envolvidos na situação, enquanto que problemas do tipo de *combinação*, *arranjo* e *permutação* existe apenas um tipo de conjunto em cada situação (pessoas, fotos, letras, times). Esse professor apresentou maiores evidencias de perceber diferentes estruturas entre os problemas e não apenas de forma.

Nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio esperávamos encontrar a utilização das nomenclaturas referentes aos diferentes tipos de problemas, devido à formação específica desses professores em relação ao

conteúdo investigado. Observamos, no entanto, diferentes propostas de organização das estruturas.

O professor PAF_1 agrupou de acordo com a estrutura dos problemas, demonstrando entender as diferenças entre elas. Portanto, preferiu agrupá-los pela classificação mais convencional. No entanto, quando questionado sobre as nomenclaturas dos problemas indicou:

> ***Entrevistador:*** *Você conseguiria nomear esses problemas?*
> ***PAF_1:*** *Penso que não!*

O professor PAF_2 apresentou uma distribuição dos problemas diferente. O primeiro grupo, que ele denominou *multiplicação direta*, parece ser dado pela estratégia adotada para a resolução dos problemas, que o professor julgou adequada para os problemas do tipo de *permutação* (8) e *produto cartesiano* (1). Os dois casos podem ser resolvidos por um produto de dois fatores, o que parece ser o que o professor denominou de *multiplicação direta*.

O Problema 8 (Pm), por se tratar de uma *permutação* com número menor de elementos (apenas três fotos), pode ser resolvido com uma multiplicação de dois elementos, porém dessa forma não é evidenciado que todos os elementos, no caso as três fotos, devem ser ordenadas. O produto que indica a ordenação dessas três fotos é 3 x 2 x 1, que são os números de escolhas da primeira, segunda e terceira fotos, respectivamente. Como o terceiro fator é a unidade, não afeta o resultado final, mas indica que há apenas uma foto a ser escolhida se as outras duas já foram designadas. Observemos o esquema para o Problema 8 a seguir:

Multiplicação direta	***Permutação* de 3 elementos**
$3 \cdot 2 = 6$	$3 \cdot 2 \cdot 1 = \cdot 6$

Figura 13: Possíveis respostas do Problema 8

O segundo grupo foi chamado pelo professor PAF_2 de *combinação em que a ordem é indiferente*. Esse grupo traz outro elemento essencial das estruturas dos problemas que é a ordenação, no entanto os problemas selecionados também apresentam duas estruturas diferentes a de *combinação* (4(CM) e 7(Cm) com repetição) e a de *produto cartesiano* (6). Nesse sentido, o Problema 6 apesar de ser um problema de *produto cartesiano* não intervém a questão da ordem de escolha de

um casal, visto que João dançar com Maria ou Maria dançar com João é o mesmo casal, não havendo diferença. Apesar disso, são estruturas diferentes, pois o Problema 6 (PCm) abrange inicialmente dois conjuntos (meninos e meninas) que devem ser agrupados em pares, enquanto que a *combinação* trabalha apenas com um conjunto do qual serão escolhidos subconjuntos do mesmo.

O terceiro grupo foi nomeado pelo professor PAF_2 de *combinação em que o elemento não pode se repetir,* no qual são agrupados problemas de três diferentes estruturas *arranjo*, *combinação* e *permutação*. PAF_2 quando questionado a respeito do nome desse grupo, respondeu conforme o fragmento abaixo:

> ***Entrevistador:*** *Você consegue nomear eles?*
> ***PAF_2:*** *Eu não sei o nome técnico. Seria de arranjo só que eu não sei se tem um nome menos formal porque arranjo é um nome muito matemático. Não sei se seria uma situação de multiplicação, onde você teria que excluir o elemento anterior, alguma coisa desse tipo. Excluir o elemento que já foi utilizado. Se eu tenho três opções para ser representante e vice e Cris já é um candidato então para o vice Cris não pode ser representante e vice, tem que ser feita a exclusão porque Cris não pode assumir as duas posições assim como, por exemplo, na classificação aqui (Problema 3) dos times também, Brasil, França, Argentina e Alemanha, se o Brasil for o primeiro ele não pode ser segundo. Teria que diferenciar como o AMOR também. Se eu peguei a letra A e tenho só as opções de letras e todas diferentes, se o anagrama começa por A, então eu não vou usar nas outras posições. É questão da escolha do elemento já ter sido usado.*

A ideia de exclusão de elementos muito utilizada na listagem de possibilidades quando utilizamos o Princípio Fundamental da Contagem foi bastante evidenciada por PAF_2, sendo a questão da ordenação, essencial na diferenciação de problemas de *arranjo* e *permutação* dos problemas de *combinação*, deixada em segundo plano por esse professor. A repetição ou não de elementos numa mesma possibilidade foi destacada pelo mesmo para a separação dos problemas, mas percebe-se, contudo que o sentido que PAF_2 deu para o termo repetição não é o mesmo adotado nos manuais de ensino, ou na Teoria Combinatória. Portanto, esse professor chamou atenção para um aspecto essencial a problemas de Combinatória (ordenação), mas preferiu agrupar os elementos de forma menos convencional.

O professor PAF_2 apresenta comentários sobre o enunciado do Problema 7 (*Cm*). Ele indica a possibilidade de diferentes interpretações como podemos observar no fragmento abaixo:

> **PAF_2:** *Esse 7(Cm) tem duas interpretações para ele tem a ideia de você geralmente a mais lógica no sorteio vamos supor Cris, João Paulo e Fabiana.*

> *Você tira Cris. Ela ganhou uma bicicleta, ela não volta mais e depois tira outro; e a ideia de voltar e você poder concorrer de novo;*

Nesse sentido, escolheu separar o Problema 7 (Cm) em duas situações: uma que evidencia o senso comum (sem a repetição de pessoas) e outro que indica a repetição de pessoas durante o sorteio. Vejamos a resolução desse exercício proposta por professor PAF_2 na Figura 14:

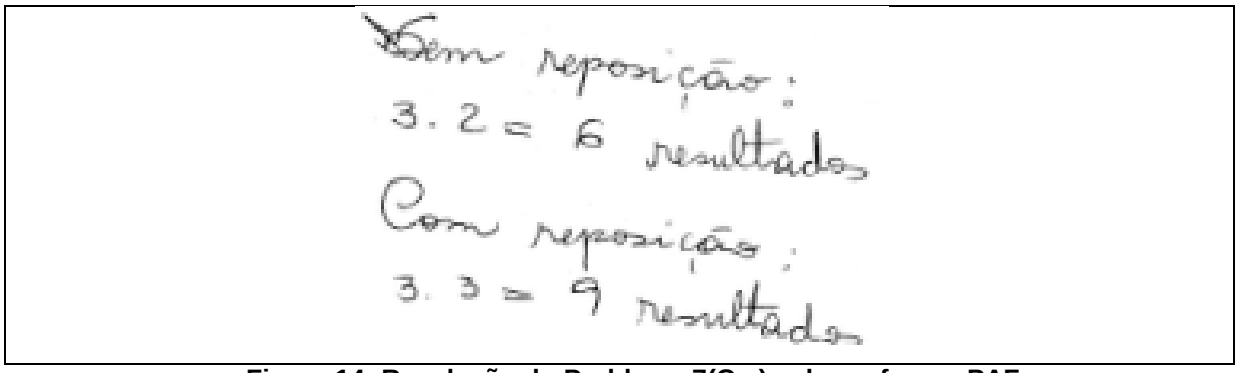


Figura 14: Resolução do Problema 7(Cm) pelo professor PAF_2

Observamos, nessa representação, que o professor PAF_2 apesar de chamar o problema de combinação, resolveu como se fosse um problema de *arranjo*, considerando a ordenação nas duas propostas. Contudo, ele representou a possibilidade de repetição, ou não, de elementos do conjunto, fato também evidenciado em Rocha e Ferraz (2010), no qual observam que alguns professores de formação em Matemática resolvem essa questão, analisando diferentes invariantes do problema, posicionando-se criticamente em relação ao enunciado do mesmo (p.22).

Essa posição crítica em relação ao problema 7 (Cm) também é explicitada pelo professor PEM_1, sobre o qual explicou:

> **PEM_1:** *... Na sétima questão ele também assimilou isso. Mas a questão não fala que as duas bicicletas podem ir para uma mesma pessoa. Como a gente trabalha muito essa questão de repetição, permutação com repetição la no início. Então geralmente como não vem dizendo nada, até eu comento algumas vezes com os alunos, quando não vem dizendo nada dá a entender que poderia se repetir. Então o aluno: -Ah poxa será que o Mario não foi o sortudo e ganhou as duas bicicletas, a questão não vem dizendo nada. Agora puxando mais para o senso comum que em geral num sorteio são pessoas diferentes que ganham. É o conhecimento que o aluno adquire na rua, em geral são duas pessoas diferentes que ganham. Fazendo uma análise mais profunda dessa questão a gente teria que puxar para esse lado, apesar de acreditar que poucos alunos que*

> *tenham despontado na hora, porque os alunos têm essa noção de sempre são pessoas diferentes que ganham o sorteio.*

E observou:

> **PEM$_1$:** *O Problema 7(Cm) se ele, por exemplo, dissesse assim a primeira pessoa recebesse a bicicleta azul; e a segunda pessoa uma bicicleta verde ai já seria ao meu ver um problema de arranjo.*

Portanto, observamos que esse professor também considerou a questão da ordenação e repetição, ou não, dos elementos dessa questão. Ele conseguiu refletir corretamente sobre o enunciado da questão e propôs as seguintes resoluções:

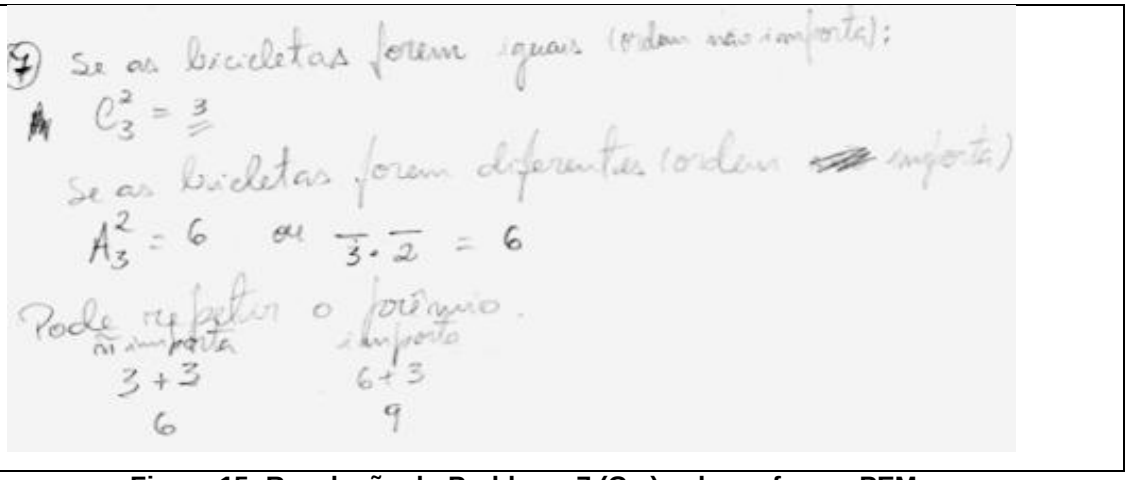


Figura 15: Resolução do Problema 7 (Cm) pelo professor PEM$_1$

Esse professor apresentou a habilidade de comentar o enunciado do problema em relação ao conhecimento de Combinatória, variando entre os significados dos problemas combinatórios, identificando a presença de diferentes invariantes (ordenação e repetição). Portanto, PEM$_1$ pareceu avaliar criticamente explanações matemáticas, notações e linguagens utilizadas e, ainda, fazer elos entre diferentes representações para o desenvolvimento de uma idéia. Isso é um dos trabalhos específicos do professor que ensina matemática que, segundo Ball et al.(2008) representa um *conhecimento do conteúdo especializado.*

Apesar de terem formação em Matemática, os professores PAF$_1$ e PAF$_2$ parecem ter preferido não utilizar a nomenclatura usual dos diferentes tipos de problemas, podendo evidenciar que a atuação no Ensino Fundamental influencia os conhecimentos do professor. Além disso, pode ter uma interferência dos livros didáticos, pois esse conteúdo aparece fluido nas coleções de livros didático de Matemática, como aponta Albuquerque e Silva (2010), pois se apresenta de maneira

distribuída nas diferentes coleções sem ter definido em que ano e de que modo os tipos de problemas combinatórios devem ser abordados no Ensino Fundamental.

Nesse contexto, Shulman (2005) afirma que os saberes adquiridos pela prática é a fonte da *base de conhecimento* menos codificada, o que denota que a experiência dos professores em um nível de escolaridade no qual o ensino de Combinatória não é tão evidenciado quanto no Ensino Médio, pode fazer com que o professor não se preocupe em utilizar a nomenclatura usual.

Salientamos ainda que, de acordo com os PCN dos anos finais do Ensino Fundamental, o ensino de problemas combinatórios no primeiro momento necessita

> ...ter como objetivo a familiarização com a contagem de agrupamentos de objetos, de maneira formal e direta - fazer uma lista de todos os agrupamentos possíveis e depois contá-los. A exploração dos problemas de contagem levará o aluno a compreender o princípio multiplicativo (BRASIL, 1998 p.137).

No Ensino Médio, a presença da nomenclatura dos problemas combinatórios é mais evidente. Entretanto, o professor PEM_1 preferiu agrupar os problemas pela estratégia utilizada na resolução do mesmo e não pela estrutura dos problemas. Nesse sentido, ele denotou os problemas 1(PCM), 3(AM), 6(PCm) e 8 (Pm) como *princípio multiplicativo*.

A escolha do professor PEM_1 pode evidenciar a preferência pela utilização do *princípio multiplicativo* na resolução dos problemas combinatórios, o que já é apontado na pesquisa de Rocha e Ferraz (2010).

O professor PEM_2 mesmo que inicialmente não tenha separado em quatro grupos de problemas, já nomeou cada tipo de problema. Posteriormente ele comentou:

> **PEM_2:** *No caso aqui não sei se poderia voltar?*
> **E:** *Pode sim.*
> **PEM_2:** *Eu separaria aqui em mais um grupo... No caso, o Problema 4 (CM) de combinação e os Problemas 3 (AM), 5(Am) e 7 (Cm) de arranjo.*

Parece haver indicação de uma dificuldade desse professor que é recorrente em alunos do Ensino Médio: a diferenciação dos problemas de *arranjo* e *combinação*. Sabo (2010) também observou essa dificuldade no grupo de professores de Matemática que atuam no Ensino Médio, entrevistados em sua pesquisa, ou seja, a dificuldade em indicar quando a ordenação gera ou não novas possibilidades a partir da leitura dos enunciados dos problemas. A seguir abordamos

as diferenças que professores dos diferentes níveis percebem entre esses dois tipos de problema *arranjo* e *combinação.*

5.2.3. **Sobre o Invariante de Ordenação nos Problemas de *Arranjo* ou *Combinação***

Nesse momento da entrevista, visamos verificar o quanto os docentes dos diferentes níveis de ensino distinguiam os problemas de *arranjo* e *combinação,* identificando a presença ou não de ordenação nas situações propostas. Para isso entregamos o protocolo do Aluno A, retirado do estudo de Pessoa (2009). Nesse protocolo o aluno resolveu do mesmo modo os dois problemas diferentes, não levando em consideração a importância, ou não, da ordem nos problemas. Esse aluno, na época do estudo de Pessoa, cursava o 3º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública.

Assim, pedimos para o professor interpretar a compreensão desse aluno na resolução dos problemas e para falar da estratégia escolhida em relação a possível diferença das estruturas apresentadas. O Problema 5 (Am) é de *arranjo simples* enquanto que o Problema 7 (Cm) pode ser de *Combinação*[26], ambos de menor ordem de grandeza. Escolhemos esse protocolo por se tratar de uma estratégia de *listagem* que se apresenta em todos os níveis de escolaridade.

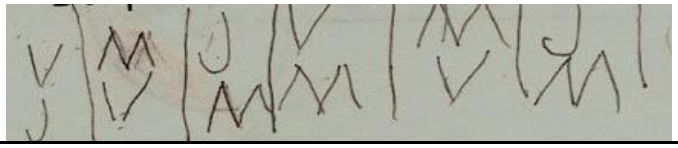
Acreditamos que a diferença entre *arranjo* e *combinação* merece um enfoque maior, pois a ordenação, ou não, de elementos de um subconjunto é um fator que deve ser considerado no momento da resolução dessas situações de contagem.

Na elaboração dessa parte da entrevista, procuramos no estudo de Pessoa e Borba (2007) problemas que possuíssem dificuldades similares, como é o caso dos problemas selecionados, pois possuem menor número de possibilidades. Além disso, verificamos a igualdade entre a quantidade de elementos do conjunto inicial e a quantidade de elementos do subconjunto formado, ou seja, no quinto problema temos três alunos para escolher dois cargos (representante e vice), enquanto que no sétimo problema temos três crianças para sortear duas bicicletas. Esses problemas apresentam as diferenças nos contextos e na questão de ordenação ou não.

[26] Utilizamos para esse estudo a classificação dos problemas proposta por Pessoa (2009), mas compreendemos que o Problema 7 pode ser entendido como de Combinação se consideramos as bicicletas iguais ou de Arranjo se considerarmos as bicicletas diferentes.

ALUNO A

5. Para representantes de turma da sala de aula se candidataram 3 pessoas (Joana, Mario e Vitória). De quantas maneiras diferentes poderão ser escolhidos o representante e o vice-representante?



ALUNO A

7. Três alunos (Mário, Raul e Júnior) participam de um concurso em que serão sorteadas duas bicicletas. Quantos resultados diferentes podem ser obtidos no concurso?

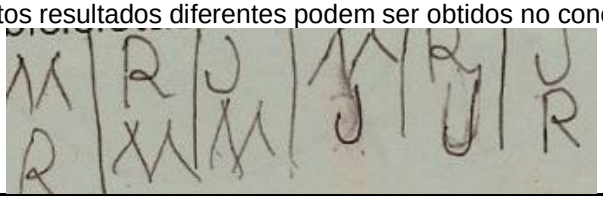


Figura 16: Protocolo para entrevista sobre problemas de *arranjo* e *combinação* retirado do estudo de Pessoa (2009)

Nos protocolos de Pessoa (2009) foi selecionado um aluno que tivesse cometido erros em relação à propriedade de ordenação, questão essencial na diferenciação dos problemas do tipo *arranjo* e *combinação*.

Nas transcrições do Quadro 11, observamos que os professores entrevistados, exceto PEM_1, tiveram dificuldades em distinguir esses significados, tanto a partir do enunciado, quanto na etapa de correção da resolução desses problemas por alunos. Esse último aspecto pode ser justificado pela ausência do número total de agrupamentos enumerados na resolução do problema, pois a enumeração não garante a informação se a ordem foi considerada ou não.

No momento evidenciado no Quadro 11 questionamos os professores: *a estratégia utilizada é valida para os dois problemas?*

Observamos, a partir desse quadro que a propriedade de ordenação pode oferecer obstáculos, como se acredita ter acontecido com o professor PAF_1 que no primeiro momento separou corretamente esses dois problemas, no entanto, posteriormente quando pedido para corrigir o Aluno A no Problema 7(Cm), considerou conforme o exposto, a presença de ordenação, analisando como um problema de arranjo.

O professor PEM_2, no momento em que se deparou com as resoluções do Aluno A, considerou que são problemas de natureza diferentes, o que anteriormente não o tinha feito.

Quadro 11: Sinopse de análise dos professores quanto à propriedade de ordenação em relação a resolução de problemas de arranjo ou combinação

N	ANÁLISE	FRAGMENTOS DAS ENTREVISTAS
ANOS INICIAIS	Não aparentaram diferenciar os problemas pela presença de ordenação	**PAI_1:** Acho que no final os dois eles tem que refazer. Tem que organizar essa maneira de fazer. Não está legal não**.** **PAI_2:** Com certeza. É uma estratégia bem elaborada. Dessa forma o aluno ele conseguiu visualizar e fazer todos os agrupamentos. Facilita a não repetição. Na listagem isso é muito mais comum porque é difícil de visualização rápida
ANOS FINAIS DO E.F.	Observaram apenas a resolução do aluno A, não se detendo nas diferenças dos significados envolvidos	**PAF_1:** Eu vejo aqui no Problema **5(Am)** que ele colocou JM, JM duas vezes ele tá repetindo. O que aconteceu com o primeiro lugar? Parece que ele confundiu na metade do caminho... Os três primeiros ele colocou representante e vice e nos três últimos ele trocou vice e representante. Ele mudou a ordem no meio do andar da carruagem. O **7º** problema **(Cm)** ele está utilizando a mesma estratégia. Só que ele não errou, ele conseguiu pensar direitinho. Ele pensou o primeiro sorteio e o segundo sorteio. Porque isso muda não é, a ordem eu ser o primeiro a ganhar bicicleta e você ser o segundo a ganhar bicicleta. Então ele fez assim. Mario primeiro e Raul em segundo depois Raul em primeiro e Mario em segundo. **Entrevistador:** Essa estratégia é valida pra os dois problemas? **PAF_1:** Sim é válida para os dois, embora eu tentasse fazer esses problemas pelo diagrama de flechas. **PAF_2:**O procedimento do **5(Am)** é correto, ele compreendeu o problema, mas assim para um estágio inicial a criança consegue fazer...ele está numa fase inicial de compreensão desse problema, com o raciocínio manual. Só que a gente fica na dúvida. Será que ele realmente compreendeu o procedimento de resolução como uma multiplicação ou está só vendo as possibilidades?...Ele compreendeu o raciocínio, mas não tinha como a gente saber se ele resolveria outra situação com outros elementos como uma multiplicação é diferente ou se ele só conseguiu fazer assim combinando os jogadores [...] No **7º** problema **(Cm)** ele conseguiu entender o enunciado. Só que ele entende o enunciado assim, ele consegue entender o enunciado sem reposição. Porque você vê que em nenhuma situação ele coloca a mesma pessoa, nem na primeira bicicleta, nem na segunda, é sempre excluindo. Então se Mário ganhou então só falta agora Raul e Júnior, se Raul ganhou então Mário e ai por diante. **PAF_2:** Sim, totalmente válida, mas não permite a gente, sem conhecer o aluno, sem entrevistar sem nada saber se ele compreendeu ou não a ideia de *combinação* ou não.
ENSINO MÉDIO	Identificaram os problemas como significados diferentes	**PEM_1:** A estratégia é válida, o que, a meu ver, deixou ele numa situação complicada, a título de um erro total foi o fato dele ter se perdido na primeira questão e repetido. E a questão 7 é uma questão se o aluno não tiver cuidado da ordem importar até um aluno já de Ensino Médio que tenha trabalhado ele pode se complicar e dar 6 possíveis soluções. **PEM_2:** Não é valida porque no quinto ela se encaixa, mas no 7(Cm) não. Veja que ele utilizou a mesma ideia, mas não percebeu, como eu inicialmente não tinha percebido que eram problemas de contextos diferentes que no caso agora, ele vai se juntar agora com o 4(CM).

Apenas os professores que atuam no Ensino Médio observaram a estrutura dos problemas e a propriedade de *ordenação*. O professor PAI_1 pareceu atentar para a possível ausência de ordenação no Problema 7 (Cm) quando comentou:

> **PAI_1:** *No Problema 7(Cm) ele fez correspondência mesmo com cada um. Depois ele coloca Mario com Junior e depois Junior com Mario. Não já tem aqui? Porque ele fez? Ele só mudou a posição, mas é a mesma coisa...*

No entanto, quando justificou essa ideia não explicitou a ordem e, sim, a noção de chance, como observado no extrato a seguir:

> **PAI_1:** *Eu acho que ele fez uma estratégia mais difícil, porque ele pegaria Mario e fazer correspondência com os outros; depois pegava Raul e fazia também e ver o que não coincidia aqui. Parece que um deles vai ter mais chance de ganhar... é um resultado diferente, mas parece que Raul vai ter mais chance, porque ele aparece 4 vezes. [conta quantas vezes os outros aparecem] É tem a mesma chance. Se pegarmos os três primeiros, Mario vai ter mais chances e o coitado do Junior não. Já no final, ele vai ter mais chances. Então, não está bem distribuído não.*

Essa noção de chance[27] pode ser explicada pelo Problema 7 (Cm) que traz como contexto um concurso, no qual a sorte (o acaso) pode ser considerada. No entanto, o enunciado pede apenas a questão da quantidade de possibilidades, ou seja, o número de elementos de certo espaço amostral. Logo, podemos observar, mais uma vez, a dificuldade de se diferenciar as relações de proximidade que existem entre a Combinatória e a Probabilidade, indicada por diversos autores.

Assim é que essa proximidade, quando não bem trabalhada e apreendida pelo professor, reflete-se, por vezes, na compreensão de alunos. Nesse exemplo, notamos a confusão entre possibilidades e probabilidade, que também pode ser percebida em alguns materiais didáticos.

De acordo com Curi (2005), o conhecimento 'de e sobre' Matemática é pouco destacado nos cursos de formação de professores dos anos iniciais (Normal Médio e Pedagogia). Assim, considera que, provavelmente, professores em formação inicial terminam a graduação sem os conteúdos matemáticos necessários para ensinar. Portanto, podemos supor que essa não clara distinção do professor PAI_1 advém da formação, ou da dificuldade desse professor em encontrar materiais que auxiliem nessa tarefa.

PEM_1 identificou desde o primeiro momento a presença da ordenação na estratégia do aluno como se pode verificar no extrato a seguir:

> **PEM_1:** *O que eu vejo aqui no quinto é o aluno tentar descrever todas as possíveis soluções; ele ordenou colocando um em cima e outro embaixo, acredito que isso está sendo importante para ele a título de ordem, o primeiro representante e o segundo vice, colocando as iniciais como sendo os nomes..Ele tentou fazer a exaustão de todas as possibilidades. O comando*

[27] Ver Batanero, Henry e Parzysz (2005) The Nature of Chance and Probability p.17

> *básico ele entendeu, porque se você tem 3 pessoas para escolher 2 então sempre tem uma que vai ficar de fora. No Problema 7 ele também entendeu isso. Ele começou dessa vez com a preocupação em trocar logo com as duas pessoas... A meu ver já se percebe uma evolução no ordenamento da resolução nessa questão em relação à anterior..um cuidado maior do aluno.*

Constatamos nas falas desse professor a preocupação evidente com a propriedade de ordenação no tratamento desses problemas, durante o processo de listagem do aluno A, o que parece apontar o domínio do conhecimento desse professor sobre a diferença entre os problemas de *arranjo* e *combinação*, além de enfatizar uma compreensão sobre a aprendizagem e as dificuldades que o aluno A apresenta.

O professor PEM_2 também pareceu entender os problemas e seus significados diferentes, como indicou no fragmento abaixo:

> **PEM_2:** (*Lê o enunciado do Problema 5(Am)) Ele colocou as seis maneiras aqui. Olhe esses dois aqui são os mesmos. Está repetindo... Ele aqui ele repetiu Mario e Vitória, mas a estratégia foi boa. Em relação ao Problema 7((Cm) que é um quesito bem parecido com três alunos para ganhar duas bicicletas. [...] Quase a mesma. Já achei uma diferença aqui do problema está vendo. [...] Porque aqui o cara pode ganhar as duas bicicletas. Eu tinha falado que parece, mas agora analisando com mais tempo, com mais propriedade, o Mario pode ganhar as duas bicicletas, porque é um sorteio quer dizer não tem nada dizendo contra. Diferente desse 5 onde um é representante e o outro é vice. Bem isso está claro para mim, ai para o aluno eu acho que a estratégia escolhida para o primeiro foi bom e no sétimo parece que ele quis responder do mesmo jeito assim como eu tinha feito essa comparação e eu agora já estou vendo que ele não é mais daquele grupo. Então o 7 já pode sair daquele grupo 3!*

No entanto, na sua justificativa esse professor evocou a repetição ou não de elementos e não a ordenação. O professor pareceu não discernir a propriedade de diferenciação nos agrupamentos, sugerida a partir das estruturas dos problemas de *arranjo* e *combinação*. Essa outra propriedade pode também se caracterizar como uma dificuldade na resolução de problemas combinatórios, na compreensão dos alunos em relação à Combinatória, como apontam Batanero et al (1996) nos estudos por eles realizados.

Os professores com formação Matemática ou em Pedagogia apresentam algumas dificuldades na diferenciação dos significados dos problemas em relação à ordenação. No entanto, os professores de Matemática em seu discurso consideram essa questão da ordenação: PAF_1, no momento de separação dos problemas, separou corretamente; PAF_2 na proposta da Figura 14 e na distinção dos problemas; e PEM_2 no momento de correção das estratégias do Aluno A. Apenas PEM_1 fez a

análise da presença ou não de ordenação considerando todas as possibilidades de compreensão. Esse fato parece denotar que mesmo os professores que têm formação inicial em Matemática possuem dificuldades em analisar quando a ordenação pode gerar ou não novas possibilidades, tanto a partir da leitura dos enunciados dos problemas, quanto na correção das resoluções dos alunos. Note-se que, no grupo pesquisado, todos os professores de Matemática tiveram disciplinas de Combinatória em sua graduação.

Numa outra direção, os professores sugeriram, a partir dos diálogos, elementos interessantes sobre o *conhecimento pedagógico de Combinatória*, como podemos verificar na seção a seguir.

5.3. CONHECIMENTOS PEDAGÓGICOS DE COMBINATÓRIA DOS PROFESSORES

Ball et al (2008) subdividem o conhecimento pedagógico do conteúdo em *conhecimento dos conteúdos e seus estudantes; conhecimento do conteúdo e seu ensino* e o *conhecimento do currículo*. Essa ideia apresenta algumas das muitas dimensões que perpassam os saberes do professor no momento do exercício da profissão, ou na preparação para esse momento.

Shulman (1987) reforça que a função de ensinar é específica ao professor e que outros sujeitos que possuírem apenas conhecimentos do conteúdo idênticos, não necessariamente conseguirão fazê-lo. Dessa forma, o professor não define a especificidade da sua função pelo domínio do conteúdo da matéria que apresenta ou expõe, mas pela especificidade de saber-fazer com que o conteúdo possa ser aprendido e apreendido, através da ação de ensinar.

Em relação ao professor que ensina Matemática, Garcia Blanco (2003) explica que o *conhecimento pedagógico do conteúdo matemático* apreende a dimensão do conhecimento da Matemática como matéria a ser ensinada, ou seja, a maneira de apresentar e de abordar o conteúdo para que seja compreensível aos alunos.

Nesse sentido, a Combinatória também pode ser apresentada com diferentes abordagens. A escolha das ações didáticas geralmente é feita pelo professor que se fundamenta em sua formação inicial e/ou continuada, em sua experiência enquanto

docente, nas informações adquiridas no livro didático ou mesmo nos documentos curriculares e também nas expectativas que ele possui em relação às dificuldades de compreensão dos seus alunos.

Daí, termos adotado tais diferenças e possíveis semelhanças na escolha de ações didáticas pelos professores para o ensino de Combinatória como a categoria *conhecimento pedagógico de Combinatória* subdividindo-a em *conhecimento* sobre *o currículo de Combinatória*; o conhecimento *pedagógico da Combinatória* e seus alunos e o *conhecimento pedagógico da Combinatória e seu ensino* as quais focalizamos nas seções a seguir.

5.3.1. Conhecimentos sobre o Currículo de Combinatória

Observamos que o ensino de Combinatória está presente em diferentes propostas curriculares ao longo de toda a Escola Básica. Nos PCN (BRASIL, 1997) e na BCC (PERNAMBUCO, 2008) além de outros documentos oficiais como os Guias do PNLD (BRASIL, 2008), nos quais se acentuam a importância deste conteúdo para o desenvolvimento de noções, de habilidades e de raciocínio crítico em Matemática. Dessa maneira, tem-se defendido que antes do ensino de Combinatória ser formalizado, o que geralmente ocorre no Ensino Médio, outras práticas devem ser integradas ao Ensino Fundamental para que haja uma melhor compreensão dessa temática por alunos e professores.

Shulman (1986), em seu programa de pesquisa, considera o conhecimento curricular como uma das categorias indispensáveis à formação do professor. Nele elucida a necessidade de se conhecer as orientações curriculares da matéria a ser ensinada, entendendo o currículo como um conjunto de programas elaborados para o ensino e a variedade de recursos disponíveis sobre a matéria. Pensamos na realidade ser isso um dado para cada conteúdo de ensino.

Complementando, Curi (2005), a partir de análises feitas nas ementas de cursos de Pedagogia, assinala a necessidade de reflexão nesses cursos, sobre as organizações curriculares as quais são pouco valorizadas e devido a isso supõe que futuros professores ficam à margem dessas discussões. Tal fato, em nossa opinião, implica em uma lacuna para a formação dos mesmos no sentido do desenvolvimento de sua reflexão sobre sua futura tarefa de ensino.

Assim pensamos durante a realização da entrevista questionar a partir de que ano poder-se-ia iniciar o ensino de Combinatória. Organizamos as respostas na sinopse apresentadas no Quadro 12 a seguir.

Quadro 12: Sinopse de análise início do Ensino de Combinatória

NÍ-VEL	ANÁLISE	FRAGMENTOS DAS ENTREVISTAS
ANOS INICIAIS DO EF.	Não há consenso, mas indicaram que pode-se trabalhar com esses tipos de problemas mais cedo.	**PAI_1:** Eu trabalharia a partir de uma turma de alfabetização. Só não essa questão de palavra porque eles estão começando a ler. A quarta questão se for uma primeira série boa eles conseguem. As vezes uma alfabetização boa já no segundo semestre aonde eles vêem a diferença entre consoante e vogal, se o professor trabalhar nessa prática eles conseguem. **PAI_2:** Desde o maternal. Agora claro que tem que fazer uma *combinação*. Até mesmo uma música para uma criança pequena na fase inicial também envolve muito essa questão, das rimas que complementam... Você pode também está fazendo o trabalho de agrupamento, de relação, de *combinação*... muito com brincadeiras, a própria roupa das bonecas que as crianças estão brincando, num contexto de uma história.
ANOS FINAIS.	Indicaram que deve-se iniciar a partir do 4º ano quando os alunos já devem conhecer a operação de multiplicação	**PAF_1:** A partir do 4º e 5º ano. Porque eu já dei aula numa escola particular nessas duas séries e tinha questões parecidas no livro didático. O livro era Problemas Mais Problemas. Tinha também num que eu não lembro que eu usava como complementar **PAF_2:** Com a maior parte deles a partir do 4º ano, quando tem a ideia de multiplicação já dá pra trabalhar. Não sei se no 3º ano ele já trabalha multiplicação, mas no 4º ano já trabalha. No 4º ano eles trabalham as quatro operações tranquilas.
ENSINO MÉDIO	Indicaram que o trabalho pode ser iniciado desde o Ensino Fundamental com algumas restrições	**PEM_1:** No Ensino Médio, em geral, vem no segundo ano, mas nada impede de vir no primeiro ano. Eu não vejo nenhum problema de vir primeiro ano. Se nós fossemos trabalhar no Ensino Fundamental II eu acredito que já na sexta série (agora sétimo ano) daria para trabalhar algumas dessas questões com alunos, não vou dizer a questão de escolha, como a questão 4, por exemplo. Mais um problema como 1(PCM) ou 2(PM) daria para os alunos pelo menos tentar construir as ideias fazendo aquelas árvores de possibilidades. **PEM_2:** Depende...a meu ver podemos trabalhar o Problema 3(AM) das semifinais copa do mundo, instiga muito, talvez não trabalhar ele de fórmulas, mas podemos trabalhar desde o 6º ano do Ensino Fundamental. O Problema 1 (PCM) desde o início, porque você pode fazer uma coisa bem intuitiva.

Como notamos os entrevistados não indicaram o mesmo ano para iniciar o ensino de Combinatória, mas há um consenso de que pode ser iniciado muito antes do Ensino Médio, concordando com o que indicam os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) e a Base Curricular Comum de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2008) e discordando da atual prática de sala de aula na qual os

diferentes tipos de problemas combinatórios só são introduzidos explicitamente a partir do 2º ano do Ensino Médio.

Observamos que os professores dos anos iniciais apresentaram uma preocupação com o nível de compreensão dos alunos e com os recursos para propor as atividades. Ressaltam algumas adaptações para a questão da linguagem no 1º ano do Ensino Fundamental e apresentaram relações com o brincar na Educação Infantil e até mesmo com a música, características que são evidenciadas pelo Referencial Curricular da Educação Infantil (BRASIL, 1998).

Como podemos perceber, os professores dos anos finais do Ensino Fundamental identificaram o início da multiplicação como requisitos necessários para o tratamento desses problemas e elegem o 4º ano para o ensino de problemas combinatórios. Nesse sentido, o professor PAF_1 justificou a escolha pela presença no livro didático desse nível, o que foi verificado por Barreto, Amaral e Borba (2007):

> Os maiores percentuais de todos os significados ocorrem nos livros da terceira série. É nesta série que, geralmente é ampliado o estudo de significados da multiplicação, havendo a introdução formal da multiplicação enquanto raciocínio combinatório (BARRETO, AMARAL e BORBA, 2007, p.17)

Nesse contexto, percebemos que por serem, na maioria das vezes questões práticas e associadas ao cotidiano extra-escolar, os alunos podem se desinibir mais e opinarem sobre formas de analisar e resolvê-las. É importante ressaltar que as diferentes formas de organizar e resolver problemas combinatórios gera estratégias que não são apenas aplicáveis à Combinatória, auxiliando na aprendizagem de técnicas gerais de resolução de problemas. Todavia, para isso, se faz necessário conhecer as características de cada um dos tipos de problemas combinatórios.

Os resultados obtidos, como vemos, implicam em necessidades de pesquisas que delineiem o desenho do conteúdo de Combinatória ao longo dos anos escolares, bem como das ações didáticas para implementar seu ensino. Implicam ainda na necessidade de uma discussão maior sobre a formação do professor, tanto no Ensino Fundamental como no Ensino Médio. Esse trabalho desde o momento da formação inicial dos professores permite a reflexão a respeito da forma de como o conteúdo de Combinatória “evolui” ao longo da escolaridade, caracterizando o *conhecimento do horizonte do conteúdo*, indicado por Ball et al (2008). Uma visão mais ampla da hierarquização e dos encadeamentos necessários ao ensino de

Combinatória e que é um domínio de conhecimento importante para o professor que ensina matemática em diferentes níveis.

5.3.2. **Conhecimentos Pedagógicos de Combinatória e seus Alunos**

Como observa Grossman, Wilson e Shulman (2005) não há uma relação causal entre o conhecimento do conteúdo por parte do professor e o sucesso em aprendê-lo por parte do aluno. Decorre desta constatação que o sucesso de aprendizagem por parte do aluno deve-se em maior parte ao modo de como o professor age sobre o conteúdo a ser ensinado, seu conhecimento sobre os alunos, suas crenças, sua experiência docente, em suma sobre aqueles domínios designado por Ball et al (2008) de *conhecimento de conteúdo e seus estudantes* e o *conhecimento do conteúdo e do ensino.*

Especificamente, o professor com base em suas ações sobre o conteúdo e seu ensino e ainda no que supõe sobre o conhecimento de seus alunos, pode inferir sobre o problema de maior dificuldade para seus alunos, pode supor, fundamentado em sua experiência, formação e conhecimentos, alguns procedimentos de ensino e avaliar a compreensão dos alunos a partir de suas soluções de um problema.

O embasamento da problemática levantada acima deve partir da análise das dificuldades apresentadas pelos alunos em um dado conteúdo de ensino. Daí pensarmos enfocar tais dificuldades no caso dos problemas combinatórios.

5.3.2.1. DIFICULDADES DOS ALUNOS NOS PROBLEMAS COMBINATÓRIOS

O passo seguinte na nossa pesquisa foi pedir aos professores que antecipassem prováveis dificuldades e erros de seus alunos ao resolver situações. Questionamos então, a respeito do tipo de problemas que os alunos teriam maior dificuldades. Os resultados são apresentados no quadro abaixo.

Para confrontar os depoimentos dos professores sobre as dificuldades dos alunos em relação aos diferentes tipos de problemas combinatórios, utilizamos a pesquisa de Pessoa (2009). Essa autora, em sua pesquisa, indica que o menor desempenho dos alunos dos anos iniciais na resolução desses tipos de problema, foi de *permutação* (2,5% de acertos), seguidos pelos problemas de *combinação* (5,2%), *arranjo* (10,5%) e *produto cartesiano* (42,3%).

Quadro 13: Sinopse de análise do significado de maior dificuldade de compreensão pelos professores

N	ANÁLISE	FRAGMENTOS DAS ENTREVISTAS
ANOS INICIAIS DO EF.	Esse professor indicou que os alunos sentem maior dificuldade são os problemas de ***produto cartesiano***	**O professor PAI_1 preferiu não responder** **PAI_2:** O grupo que eles vão ter mais dificuldades é 1(PCM), 4(CM) e 6(PCm); e aquele que vai ter menos dificuldades seria o 2(PM) e 8(Pm); Porque além de ter um comparativo entre os elementos quantitativos dentro do problema, a pergunta é mais elaborada porque está dando um direcionamento, como é que eu posso dizer... principalmente a 6(PCm) tem um *se* na história ... faz o aluno pensar em diferentes possibilidades... eu acho que o enunciado é mais elaborado. Este aqui vai dá mais problema, aqui o professor vai ter que ter uma preparação maior, vai ter que ter um nível de intervenção maior, para poder esse aluno chegar no objetivo desse trabalho, chegar em todas as possíveis possibilidades. O grupo 3(AM), 5(Am) e 7(Cm) vai ter um nível mediano de dificuldade eu acho.... Vai ser assim... complicado mais não como o outro...
ANOS FINAIS DO EF.	Os professores dos anos finais indicaram que os problemas que os alunos têm mais dificuldades de compreensão são os de ***combinação***	**PAF_1:** Provavelmente seriam os dois últimos grupos. Os problemas 4(CM) e 7(Cm) e os problemas 2(PM) e 8(Pm); o problema 4(CM) porque é grande demais, o 7(CM) muito embora ele pareça com o da copa. Esse 2(PM) e 8(Pm) porque eu não vou utilizar apenas os diagramazinhos, eu vou usar estratégias diferentes uma coisa mais difícil. Esse tipo de coisa eu vejo mais no Ensino Médio. Eu nunca vi problemas como esse no Ensino Fundamental não **PAF_2:** Vai. O grupo que ele teria mais dificuldades seria o 4(CM) e 6(PCm), justamente pela essa ideia de como a ordem não vai interferir, na resolução ele vai ter consideração isso. Dividir as quantidades de solução. Vamos supor se A e B , e B e A e isso pra mim é a mesma coisa então eu teria que dividir pela metade, por 2. Porque eu teria o dobro das opções possíveis. Essa estrutura nesse caso seria o mais complexo para ele. O segundo lugar ficaria como os problemas 2 (PM), 3(AM) e 5(Am) e por ultimo o 1(PCM) porque eles fazem sem bronca.
ENSINO MÉDIO	Os professores do Ensino Médio indicaram que os problemas mais difíceis são os problemas de ***combinação*** e justificaram pela sequência apresentada nos livros didáticos	**PEM_1:** Em geral, os livros que eu já vi até um pouco da minha formação a gente começa a estudar a Análise Combinatória[...]a primeira parte é retomar o princípio aditivo/ multiplicativo.[...] Então as questões 1(PCM), 8(Pm) e 3(Am) viriam nesse primeiro tópico; o segundo tópico poderia levar o nome de *permutação* ou permutações viriam as questões 2(PM) e a 8(Pm) também; logo após viria o *Arranjo* com a questão 5(Am) e depois a questão 4 (CM) com a *Combinação*. **PEM_2:** Eu acho que é o terceiro grupo de *arranjo* e *combinação*. E: Por quê? PEM_2: Veja... comparando ... Esses grupos 1(PCM) e 6(PCm), e o 2(PM) e 8(Pm) de uma maneira intuitiva, eu não digo nem intuitiva, até de você escrever, até pela quantidade de número é mais fácil. Parece que eles querem que se prove. Quando esses números aumentam aqui eles teriam mais dificuldades em relação a esses outros dois grupos... Olha, se a gente utilizar uma sequência que vêm nos livros que é: primeiro o princípio fundamental da contagem, depois a *permutação*, depois o *arranjo* que me parece ser esses três 3(AM), 5(Am) e7(CM). Parece-me que este aqui exige um grau maior de compreensão 4(CM) porque você tem 9 professores que podem ser agrupados de 5 em 5 diferente dos outros três. No caso aqui não sei se poderia voltar?

Os dados evidenciados no Quadro 13, comparados com a pesquisa de Pessoa (2009) representam certa contradição com o que indicou o professor PAI_2 ao supor os problemas de *produto cartesiano* como os de estrutura mais elaborada. Tal fato só ressalta a necessidade de inferir o que professores pensam sobre as dificuldades dos alunos como relevante para desenvolver ações de ensino.

Esse resultado corrobora com à pesquisa de Pessoa, Silva e Matos Filho (2005) a qual analisando entre os problemas de *produto cartesiano*, *relação um-a-muitos*, *divisão por cotição* e *divisão por partição* apresentam como os de estrutura mais difícil aqueles de *produto cartesiano*. Isso procede quando se compara problemas multiplicativos de modo geral, dentre os quais o de *produto cartesiano* (como único representante de problemas combinatórios) se destaca como o mais difícil. O mesmo não é observado quando se compara o *produto cartesiano* aos outros tipos de problemas combinatórios.

De fato, a categorização de uma série de problemas quanto ao nível de dificuldades supõe um conhecimento da estrutura dos mesmos que é fundamental em ações docentes, tais como, elaboração de sequências de ensino, preparação de testes avaliativos, seleção de recursos didáticos, entre outras. Quando o professor PAI_2 demonstrou a preocupação da intervenção do professor no esgotamento de possibilidades, de fato, ele estava exercitando parte de tais ações.

Noutra direção, PAI_1 pontuou a prática docente, por ele observada, como unicamente determinada pelo livro didático, ressaltando o desafio de levar o aluno a pensar e ver sentido no que está aprendendo conforme vemos no fragmento abaixo:

> ***PAI_1:*** *Ainda hoje a gente vê professor que não trabalha desse jeito, trabalha simplesmente pelo livro didático e pronto. Não explora essas questões. O grande desafio nosso é trabalhar questões dessa natureza, em que o aluno pense. Em que o aluno tenha a capacidade dele, ver sentido naquilo que ele esta fazendo. Explorar a questão do pensar do aluno é muito importante.*

Outro aspecto mencionado por PAI_1, que pode justificar as dificuldades dos alunos, foi a provável falta de trabalho específico na formação dos professores em problemas combinatórios, como se vê no recorte a seguir:

> ***PAI_1:*** *Com essas questões, hoje em dia, de Prova Brasil, ENEM e SAEPE, os alunos também não se saem bem porque os professores não foram trabalhados nessas questões...O interessante dessas questões é que se você faz isso durante as suas aulas no cotidiano escolar, então se cair uma questão dessa, o*

> *aluno vai se sair super bem na prova. Então você vai ver que se no cotidiano você utiliza esse saber, então você sabe a resposta que seu aluno vai dar, você sabe que ele vai se sair bem, porque foi trabalhado durante sua prática cotidiana.*

Depoimentos como esse retratam a preocupação sobre a formação de professores que ensinam Matemática indicada, como vimos, por pesquisadores tais como Ball (1991) que defende o conhecimento de e sobre a matéria e Shulman (1986 e 2005) que advoga sobre a base de conhecimento para os professores, e Curi (2005) que considera um desafio para formação inicial dos professores a interação das especificidades do conhecimento matemático que faz parte do trabalho do docente.

Pessoa (2009) indica que nos anos finais do Ensino Fundamental, o menor desempenho dos alunos em problemas combinatórios ocorre no problema de *combinação* (11,4% de acertos), seguidos por *permutação* (20,4%), *arranjo* (32,1%) e *produto cartesiano* (68,9%). Os problemas de *combinação* são constatados nas expectativas dos professores desse nível de ensino como o de maior dificuldade de compreensão, no entanto as justificativas desses professores diferem.

Interessante observarmos que PAF_1 indicou que a dificuldade nesse tipo de problemas pode ser gerada pelo grande número de elementos do problema 4(CM). PAF_2 afirmou que a dificuldade dos alunos nos problemas de *combinação* acontece por sua diferente estrutura e pela propriedade de ordenação não gerar novas possibilidades. Vemos, então, que os professores dos anos finais indicaram que a estrutura dos problemas é o principal motivo para os erros dos alunos.

Em síntese, constatamos que em relação aos outros tipos de problema e às dificuldades dos alunos, os professores dos anos finais discordam. PAF_1 indicou que o próximo tipo de problema que os alunos terão dificuldades seriam os problemas de *permutação,* corroborando com os resultados apresentados por Pessoa (2009). Entretanto, o professor explicou que essa dificuldade de compreensão dos alunos decorre do conflito entre os significados dos problemas de *permutação* e *produto cartesiano*, em que os alunos podem se confundir e utilizar a mesma estratégia de resolução.

Além disso, professor PAF_1 chamou a atenção para a ausência de problemas de *permutação* nos livros didáticos de Matemática no Ensino Fundamental. De fato, Albuquerque e Gomes (2010) afirmam que os problemas de *permutação* não se apresentam igualmente nos diferentes anos do Ensino Fundamental, nem nas

diferentes coleções de livros didáticos avaliadas, podendo haver coleções que não apresentam esse tipo de problema. No entanto, das cinco coleções analisadas, foram observados 22 problemas de *permutação* de um total de 105 problemas combinatórios.

Prosseguindo, PAF_2 acreditou que também haverá dificuldades de compreensão nos problemas de *arranjo* e *permutação* para os quais apresenta um possível erro:

> ***E:*** *Que possível erro o aluno pode ter nesses problemas 2 (PM), 3(AM) e 5(Am)?*
> ***PAF₂:*** *Seria o de não excluir o elemento anterior, isso seria até um erro comum. Por exemplo, você tem a situação da palavra AMOR então ele pode contar com A e depois utilizar o A em outra situação. Repetir um elemento quando não era permitido fazer isso nessa categoria.*

Esse fragmento da entrevista parece simular a estratégia de resolução através de princípio multiplicativo, ressaltando a questão da repetição de alguns elementos. PAF_2 acrescentou aos problemas de *arranjo* e *permutação* a possibilidade de poder repetir ou não de elementos do conjunto. No entanto, essa propriedade não pertence apenas a esses dois significados, também pode ser aplicada aos problemas de *combinação*, mas lembramos que os *arranjo*s e *combinação* com repetição não foram objetos de nossa pesquisa.

Contudo, a dificuldade indicada pelo professor PAF_2 corrobora com Batanero *et al* (1996) e Sturm (1999) que elegem como condições necessárias para resolver uma situação simples de Combinatória as condições de ordenação e de repetição dos elementos desse conjunto.

Quanto ao Ensino Médio, a pesquisa de Pessoa (2009) aponta que o menor desempenho dos alunos nos diferentes significados de problemas combinatórios é no problema de *Combinação* com (12,2% de acertos), seguidos por *Permutação* (38,4%), *Arranjo* (43,1%) e o de *Produto cartesiano* (81,2%).

No nosso caso, observamos que os professores do Ensino Médio indicaram o problema de *combinação* como o mais difícil para seus alunos e o problema de *produto cartesiano* como sendo o mais fácil, justificando essa compreensão pela sequência, geralmente evidenciada nos livros didáticos do Ensino Médio. Tal sequência apresenta, em geral, a seguinte ordenação: *princípio fundamental da contagem, permutação, arranjo* e *combinação.*

Portanto, verificamos que os professores desse nível de ensino reforçam o que diz a pesquisa de Pessoa (2009) ao afirmarem que os problemas de *combinação* são considerados os de maior dificuldade de compreensão e os de *produto cartesiano* os de melhor desempenho, porém divergem no que se refere aos problemas de *permutação e arranjo* por considerarem que os problemas de *permutação* são mais difíceis de serem compreendidos por seus alunos que os de problemas de *arranjo*.

Ainda em relação ao professor do Ensino Médio, buscamos compreender um pouco da estratégia que este utiliza na sala de aula. É nesse sentido que consideramos o que nos diz PEM_1 ao apresentar mais uma preocupação sobre a utilização de fórmulas para qual indicou:

> ***PEM_1:*** *Eu geralmente coloco muitas questões nessa parte de Princípio Multiplicativo, até dando aula algumas vezes eu tento aproximar para não ficar tantas fórmulas. Uma fórmula para combinação, uma formula de permutação... Eu tento resolver pelo princípio multiplicativo ou o princípio aditivo.*

Compreendemos que essa utilização do princípio multiplicativo é positiva, uma vez que auxilia no tratamento dos problemas combinatórios sem incentivar apenas a aplicação de fórmulas na sua resolução, podendo estimular o interesse e a autonomia do aluno, como também indica Sturm (1999). Segundo PEM_1 o trabalho com o princípio multiplicativo pode subsidiar a diferenciação entre problemas de *arranjo e combinação* conforme nos explicou:

> ***PEM_1:*** *Eu estou utilizando o princípio multiplicativo como estratégia de resolução e acredito que ele serve como base pra você entender um pouco o que está por detrás dessas noções de arranjo e combinação.*

Observamos também que professor PEM_2 alerta para o aumento da quantidade de elementos nos problemas, pode trazer dificuldades para os alunos, como observamos no fragmento a seguir:

> ***PEM_2:*** *Eu acho que o mais difícil aqui seria esse (o quatro). Talvez pela quantidade de números. Agora eu to observando que são números até pequenos eu tinha até falado de números grandes, mais não são números muito grande não, ou seja, três alunos, três pessoas, três representantes. Mais o 4(CM) com certeza ele é o mais difícil. Você tem aqui 9 professores que vão se organizar de 5 em 5 então você tem números maiores.*

Esse relato também apóia os resultados indicados por Pessoa (2009) os quais apresenta que os desempenhos dos alunos são, de fato, influenciados pela ordem

de grandeza dos números. Nesse sentido, ao ampliar a quantidade de possibilidades que resultam das situações, os alunos demonstraram maiores dificuldades, que em situações com menor número de possibilidades.

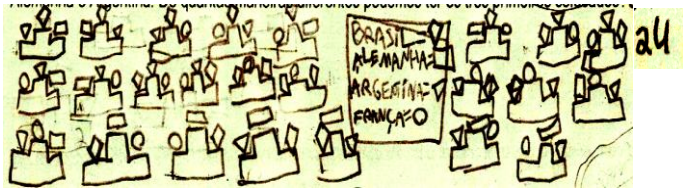
5.3.2.2. COMPREENSÃO DO DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO DOS ALUNOS

Nessa seção discutimos com os professores a relação existente entre as diferentes estratégias de resolução do Problema 3(AM) e a compreensão do raciocínio combinatório pelos alunos.

Nesse momento da entrevista solicitamos aos professores para observar e comentar sobre os protocolos de resolução do Problema 3 (*Arranjo* Maior ordem de Grandeza) pelos alunos (B, C, D, E, F, G), como podemos visualizar na Figura 17 logo a seguir.

3. As semifinais da Copa do Mundo serão disputadas pelas seguintes seleções: Brasil, França, Alemanha e Argentina. De quantas maneiras diferentes podemos ter os três primeiros colocados?

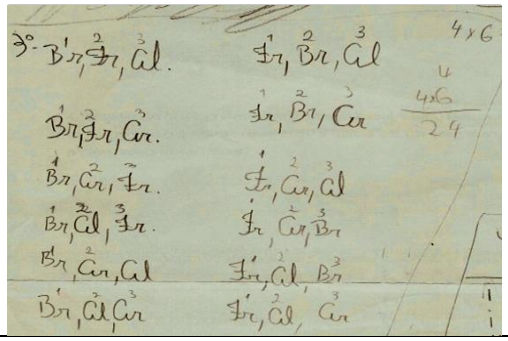
ALUNO B



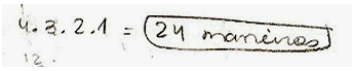
ALUNO C

ALUNO D

ALUNO E



ALUNO F



ALUNO G

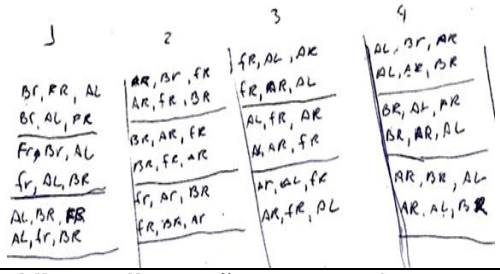


Figura 17: Estratégias escolhidas de *arranjo* para subsidiar as discussões com professores

Para que um professor avalie esses protocolos é necessário a articulação de conhecimentos o que envolve à compreensão do significado envolvido; o conhecimento do ensino de Combinatória voltado para a avaliação das possíveis estratégias de resolução e da operacionalização de sua resolução (a escolha da estratégia e sua execução); o entendimento do processo de apreensão desse conteúdo e o conhecimento sobre as possíveis dificuldades dos alunos e das expectativas do professor em relação à sua aprendizagem (o que se espera que o aluno apresente).

A nossa escolha dos protocolos visava à possibilidade da discussão dos professores sobre os mesmos e sua inferência sobre a compreensão do problema pelos alunos. Como se vê todos os alunos escolhidos se encontravam em fase de construção do raciocínio combinatório, utilizando diferentes representações as quais conduzem a diferentes etapas de conscientização até alcançar a utilização consciente do conceito.

A estratégia de *listagem* é bastante utilizada para que os alunos percebam o que a situação pede e como acontecem as escolhas. No entanto poucos são os casos que essa listagem ocorre de maneira sistemática e organizada, que promova a percepção de padrões e de generalizações.

Nesse sentido escolhemos protocolos de alunos que evidenciassem as diferentes propostas dessa estratégia (os Alunos B, D, E, G). Apenas o Aluno D não esgota as possibilidades.

Dentre as estratégias de resolução de problemas combinatórios escolhidas, percebemos que aquelas que proporcionem a percepção da generalização, tal qual a apresentada pelo Aluno E, é um dos elementos que auxiliam alunos no desenvolvimento do raciocínio dedutivo, em especial, do raciocínio combinatório nos diferentes níveis de escolarização.

A fim de proporcionar a análise dessa seção organizamos no Quadro 14 recortes dos comentários desses professores, no que diz respeito ao aluno que melhor demonstra compreender o problema.

Quadro 14: Sinopse do parecer dos professores em relação a compreensão dos alunos

NÍ-	ANÁLISE	FRAGMENTOS DAS ENTREVISTAS
ANOS INICIAIS DO EF.	Justificaram a escolha a partir de elementos pontuais observados na organização das estratégias.	**PAI$_1$** Pela compreensão o Aluno B é o melhor. Porque ele fez legenda, finalizou, ele colocou o 1º, 2º e 3º. Ele finalizou aqui o [aponta para o 24] De acordo com o comando dado na questão ele fez seu próprio comando para chegar o resultado. **PAI$_2$:** Os Alunos E e G organizam a estrutura do quantitativo de seleções e formam as quatro colunas com as seleções inicialmente sem ser o pódio e a relação disso com outras seleções. Eu acho que fica mais fácil e de conclusão mais rápida da *combinação*, quando se disponibiliza em forma de coluna.
ANOS FINAIS DO EF.	As expectativas dos professores divergiram em relação ao seu nível de ensino. Observamos que os professores não identificaram a utilização inadequada do princípio multiplicativo	**PAF$_1$:** Eu ensinaria como o Aluno G. Parece que o Aluno C e o Aluno F são do Ensino Médio e conhecem bem o assunto, a fórmula. Também estão corretos. O Aluno E usou uma estratégia um pouco diferente, não está errado. Deve ter permutado depois a posição de alguém. O Aluno B e o Aluno D não faria dessa forma porque nunca tinha pensado assim, mas estão certos também. Agora, não vou dizer que é primária, porque ele usou bandeira. É tão igual ao Aluno G. Assim se nós fossemos pelo rigor matemático então o Aluno C e o Aluno F foi quem abstraiu mesmo. Porque eles pegaram e usaram a fórmula e conseguiram simplificar aquilo. **PAF$_2$:** Eu escolheria o do Aluno E, porque deixa evidente o quanto já sabe o modo econômico de resolver, quando ele faz aqui a multiplicação, ele generaliza. Também deixa evidente que compreendeu o que significa essa disposição dos times para ocupar a 1ª, 2ª e 3ª colocação. Poderia fazer escrevendo, ele começa com o Brasil e percebe que tem 6 opções. Será que isso acontece com todos? Vamos testar com mais um país e testa com a França. Então realmente para cada time tem 6 opções. Então 4 vezes 6 = 24[...]. Os alunos C e F estão certos, porém ficamos na dúvida se realmente compreenderam ou se eles estão treinados. Aprenderam a lógica da coisa. E fosse fazer 4x3x2 que vai dá certo ou já entendeu realmente como os outros alunos E ou B. Então como já entendeu só faz a parte econômica
ENSINO MÉDIO	Elegeram para este nível o procedimento do Aluno C, primeiro pela formalização apresentada e por causa do objetivo que esperam para o ensino de Combinatória no Ensino Médio.	**PEM$_1$:** Os que melhor compreenderam o problema foram os alunos B,C, E e G e o que compreendeu em parte foi o Aluno D que se prendeu a parte final do países, embora tenha observado que eram 4 países e o Aluno F que ficou preso somente a parte inicial do problema. **E:** Existe alguma ordem nessa compreensão? A título de compreensão seria o Aluno E, mas a título de estrutura elaborada na resolução poderia ser diferente. O Aluno F seria o mais longe, depois o Aluno D porque pegou a parte inicial, leu, deu uma interpretação e foi para parte final e ficou apenas na parte final; depois o Aluno B porque utilizou todas as possibilidades e a questão do princípio aditivo; posteriormente o Aluno G que também utilizou o princípio aditivo, estaria numa situação parecida ao aluno B; depois disso o Aluno E porque já observou no seu processo de exaustão uma generalização quando indicou o 4 vezes 6 aqui, foi ótimo ter indicado isso aqui; E por último o Aluno C que seria a estratégia que eu iria cobrar do aluno do Ensino Médio quando eu já tivesse trabalhando há algum tempo. **PEM$_2$:** Eu acho que o aluno C. **E:**E em relação ao procedimento? Também é o aluno C **E:** Por quê? - Pela questão da formalização. O que eu elejo como objetivo para o Ensino Médio. O Aluno C organiza, primeiro, segundo e terceiro. Coloca as possibilidades de quantos podem ocupar o primeiro lugar, o segundo lugar, então isso está bem claro... O Aluno F parece que pensou somente no cumprimento da formalização que havia estudado. Tem esse um nele. Ora se são três lugares para quê esse um aqui. Parece que ele esta fazendo uma *permutação* com o número de 4

Enfatizamos ainda a utilização inadequada do princípio fundamental da contagem, ou princípio multiplicativo, apresentada pelo Aluno F. Nessa estratégia apesar do aluno representar a notação do princípio multiplicativo, não apresenta a relação com a estrutura do problema de *arranjo*. Pessoa (2009) identificou que a utilização de fórmulas só é escolhida pelos alunos do 3º ano do Ensino Médio e estes quando utilizam não mostram saber usá-las adequadamente. Pretendemos então verificar se os professores de formação Matemática identificam essa utilização equivocada.

Entendemos ainda, que a ausência na formação inicial de situações de ensino específico de Combinatória, proporciona dificuldades no desempenho dos professores que atuam nos anos iniciais do Ensino Fundamental na análise da estratégia do Aluno F.

Percebemos a partir do Quadro 14 que apenas professores PAF_2 e PEM_1 observaram a generalização apresentada pelo Aluno E. Além disso, apesar de PAI_2 escolher o Aluno E como um dos alunos que melhor compreende o problema, não mencionou a percepção da regularidade. Os demais professores também não observaram nessa estratégia a generalização apresentada.

Vejamos no fragmento a seguir as considerações apresentadas sobre a estratégia do Aluno E pelo professor PAI_1:

> **PAI_1:** *O Aluno E não entendi como ele chegou essa conta. Esse aqui eu não sei como ele chegou a esse número 24 jeitos [lê as possibilidades]....ele não está compreendendo não...Ele teve o conhecimento dele mais acho que esse conhecimento priorizou só o Brasil e França, ele direcionou o resultado. O aluno B fez todas as possibilidades de cada um e esse Aluno E não. Eu não compreendi a estratégia dele não ....*

Esse fato parece decorrer da falta de alguns elementos relativos à compreensão do raciocínio combinatório por parte do professor, ou seja, detectamos certa ausência do que Ball et al(2008) indica como domínio referente ao *conhecimento especializado do conteúdo*. Nesse sentido, Grossman, Wilson e Shulman (2005) consideram que o conhecimento do conteúdo, ou a ausência dele "pode afetar como os professores criticam os livros textos, como selecionam o material pra ensinar, como estruturam seus cursos e como conduzem a instrução" (p.13).

Decorre dessas considerações que o *conhecimento de Combinatória* ou falta dele por parte do professor pode comprometer a análise e ou avaliação de estratégias evidenciadas pelos alunos.

Além disso, consideramos que existe uma divergência na expectativa de compreensão dos alunos pelos professores dos anos iniciais. Enquanto PAI_2 evidencia a estratégia do Aluno E como de melhor compreensão, PAI_1 indica a falta de compreensão desse aluno.

Essa divergência também aconteceu em relação à estratégia do Aluno G, sobre a qual PAI_1 comentou:

> **PAI_1:** *O Aluno G será que ele fez como eu pensei com cada um. Ele não demonstrou até o final ele não fez a legenda não deu as conclusões. Ele só colocou lá e não finalizou. Eu não entendi muito a estratégia dele não porque ele não chegou ao final. Talvez por tempo, ele usou uma estratégia muito longa enfim ele não chegou o resultado.*

Nesse ponto, também há evidências da necessidade de conhecimentos de Combinatória para avaliar a questão. Pessoa (2009) acredita na importância do professor identificar "o nível em que o aluno se encontra e entenda as relações Matemáticas que correspondem a cada uma das estratégias utilizadas" (p.219). Essa compreensão pode auxiliar na escolha de atividades direcionadas às dificuldades evidenciadas pelos alunos.

Em relação à estratégia evidenciada pelo Aluno F, apenas os professores do Ensino Médio observaram o mau uso do princípio multiplicativo. Os professores dos anos finais, mesmo apresentando a formação inicial em Matemática, nada mencionaram sobre o equívoco da estratégia do Aluno F.

Essa diferença parece denotar um *saber da experiência* de acordo com Tardif (2002), o que para Shulman (2005) é uma das possíveis fontes para a *base de conhecimento* do professor. Portanto, esse saber da experiência pode contribuir na consolidação do *conhecimento de Combinatória de professores*. Isso se torna evidente, no momento em que professores possuidores da experiência de ensinar Combinatória, observaram aspectos referentes à utilização correta do princípio multiplicativo.

Observamos ainda a perspectiva de formalização adotada pelos professores do Ensino Médio, quando os professores PEM_1 e PEM_2 adotaram a estratégia do Aluno C como melhor procedimento para esse nível de ensino (Quadro 14).

Em relação à compreensão evidenciada pelo Aluno C e F o professor PAF_2, advertiu sobre a estratégia de utilização de fórmula. Ele questionou sobre a real aprendizagem desses alunos. Nesse sentido, sinalizamos a importância de vislumbrar a construção de um conceito indicada por Vergnaud (1991) que nos remete a ideia de processo, da ideia de conscientização. Ainda sobre essa temática o professor considerou:

> **PAF_2:** *Assim como a gente professor, não vai fazer desenhando, você sabe que poderia ter essa compreensão ou essa representação. Se a gente for resolver vamos utilizar o método de C ou de F. Se alguém chegar e analisar essa questão. Ah! Será que Cris está entendendo esse problema, mas acho que você não vai resolver desenhando as opções, nem pintar as bandeirinhas. Você vai economizar tempo, mas você compreende as questões. Do mesmo modo que a gente pode ter as situações contrárias. A gente pode ter uma pessoa que não compreenda, que já resolveu um monte de questões parecidas e que já sabe que geralmente pega a quantidade que está la descrita: se são 4 tipos então 4x3x2x1, se são 3 então 3x2x1. Ele pega a quantidade de opções que tem lá e percebe essa lógica e só faz aplicar.*

Esse professor alertou para a prática de repetição de situações similares o que promove nos alunos a cópia de procedimentos em detrimento da compreensão. Contudo essa prática de mecanização não auxilia na compreensão dos alunos sobre os diferentes problemas combinatórios, pois prioriza o domínio do procedimento, assim como discutido nas pesquisas de Esteves (2001), Sturm (1999) e Sabo (2010).

Corroborando com a ideia apresentada pelo professor PAF_2, o professor PAI_2, também advertiu sobre a compreensão dos alunos quando na utilização da estratégia mais econômica como vemos no extrato a seguir:

> ***PAI_2:*** *Com uma conta você poderia resolver, mas acho que essa não é a melhor forma de se resolver. Pelo menos não inicialmente. Acho que é essa forma dos Alunos E e G porque fica mais fácil assim de checar a conclusão.*

Portanto admitiu a necessidade de outras estratégias, além das que evidenciam procedimentos de cálculos, para construção desse conceito. E continuou alertando sobre as diferenças existentes entre o processo de construção de um conceito dos alunos:

> ***PAI_2:*** *Tem alunos que até o fim da vida estão muito mais no concreto, muito mais na visualização, na disponibilização para poder ter a certeza da sua resposta. Todo professor de Ensino Médio quer isso, ele quer uma coisa prática, uma coisa arrumadinha porque ai ele tem o raciocínio mais rápido, ai ele já*

> *conseguiu, ai ele aprendeu e ai ele sabe Matemática, mas a coisa não é bem assim.*

Observamos acima a presença de uma expectativa relativa a postura do professor de Matemática do Ensino Médio. Tal professor em que pese não ter ensino específico de Combinatória em sua formação inicial indicou está naquele domínio do conteúdo que Ball et al (2008) *conhecimento do conteúdo e seu ensino.*

Assim, como os professores dos anos iniciais, os professores dos anos finais do Ensino Fundamental também apresentaram algumas divergências sobre a estratégia que representa a melhor compreensão.

Em relação à escolha do professor PAF_1 (Aluno G) observamos que este não considerou a compreensão do aluno e sim evidenciou como justificativa a utilização da estratégia para o ensino. Esse professor não comentou sobre a compreensão dos alunos e não observou a falta de esgotamento das possibilidades do Aluno D. Sobre a estratégia do Aluno G o professor PAF_2 considerou:

> **PAF_2:** *O Aluno G compreendeu. Ele não colocou a resposta aqui, mas ele compreendeu. Ainda está com aquele procedimento assim como o Aluno B de expor pra poder perceber quantas opções vai ser... No Ensino Fundamental, a mais comum seria a do Aluno G, que é o mesmo procedimento do Aluno B.*

Notamos que o professor PAF_2 confirmou a indicação do professor PAF_1 para o Aluno G e a identificou como estratégia mais evidente Ensino Fundamental. Contudo defendeu a percepção de generalização do Aluno E como a de compreensão mais apurada (Quadro 14).

> **PAF_2:** *A estratégia do Aluno E é bem comum, principalmente quando a gente está trabalhando com um número de elementos que não é tão grande. Você consegue fazer essa organização de você está escrevendo manualmente às possibilidades.*

Assim, diante do exposto, apresentamos que não há consenso entre os professores entrevistados, sobre um aluno que apresenta melhor compreensão, principalmente se evidenciarmos o critério dos níveis de atuação. Acreditamos, portanto, que as diferenças se apóiam nas diversidades dos conhecimentos de Combinatória e das experiências de cada professor.

Em relação ao desenvolvimento do raciocínio combinatório, o professor PEM_2 sintetizou uma sequência que evidencia a sua perspectiva do processo de construção da compreensão dos conceitos de Combinatória. A sequência proposta por ele iniciou com Aluno F e seguida pelos alunos D, B, G, E, C a qual justificou

pelos procedimentos utilizados, pelo objetivo do Ensino Médio e pela compreensão dos alunos no problema de *arranjo*. Essa conclusão parece evidenciar a presença de conhecimento de conteúdo, como também a compreensão sobre o conhecimento dos alunos e suas características. Essa percepção remete a classificação de Ball et al (2008) como o domínio do *conhecimento do conteúdo e estudantes*.

O professor PAI_1 também apresentou considerações que indicam uma sequência de compreensão por parte dos alunos, de acordo com o extrato apresentado a seguir:

> ***E:*** *Se nós aumentássemos aqui o número de países?*
> ***PAI$_1$:*** *Ai seria mais difícil aqui para o Aluno B. porque talvez a partir disso aqui ele não pudesse fazer todas. Ele teria que ter outras abstrações. O Aluno C já passou desse passo do Aluno B, já está compreendendo esse estágio e passou para outro. O Aluno D ele está na fase inicial precisa ser muito trabalhado ainda. Ele está mostrando que tem uma compreensão, mas só que ele ainda não chegou ao final da conclusão. O Aluno E teve o conhecimento dele mais acho que esse conhecimento priorizou só o Brasil e França, ele direcionou o resultado. E o aluno F ele fez direto fez a mesma coisa que o Aluno C, ele já tem um conhecimento mais concreto mesmo. E ao aluno G não entendi muito a estratégia dele não porque ele não chegou ao final. Talvez por tempo, ele usou uma estratégia muito longa enfim ele não chegou o resultado.*
> *Então a ordem seria D, G, E, B, C ou F*

A partir disso, observamos uma proposta de ordenação por PAI_1. Nessa proposta o professor evidenciou a compreensão sobre a estratégia do Aluno D. Identificou ainda a necessidade de abstrações do Aluno B se aumentarmos o número de países. Mesmo assim não evidenciou a compreensão das estratégias dos Alunos E e G.

Segundo a compreensão do Problema 3 (AM), antes da apresentação dessas estratégias o professor PAI_1 comentou a sua resolução, como verificamos a seguir:

> Comentários do Problema 3: **PAI$_1$**: *São 3 maneiras. Brasil joga com França, Brasil joga com Argentina, Brasil joga com Alemanha... peraí com cada um não é! Então 3, 6, 9, 12 maneiras....Esse é mais chatinho né. Essas questões têm que fazer uma relação, uma organização... Os dois primeiros colocados Brasil joga com França ai sai um, ou Brasil ou França; Brasil joga com Alemanha ai não sei se sair Brasil. O segundo lugar pode sair da França com Alemanha ou França com Argentina; .... Os alunos eles fazem isso, ele de início vai fazer pra cada um Brasil com França, Brasil com Argentina e Brasil com Alemanha; depois eles vão ver que nessa correspondência ele já casou o Brasil e França eles não podem casar como Brasil porque já casou lá, mas podem casar com a Alemanha e Argentina. Por outro lado a Argentina já não pode casar com o Brasil, já não pode casar com a França, mas ele pode casar com a Alemanha.*

Esse professor tentou responder esse problema, mas o contexto da questão confundiu a sua solução, entretanto admitiu que seus alunos sejam capazes de resolvê-lo.

Os demais professores não propuseram sequência que considerassem uma ordenação de compreensão.

Em relação aos procedimentos evidenciados, os professores PAI_1, PAF_2, PEM_2 ao analisarem a estratégia do Aluno G, observaram a ausência da finalização, nessa estratégia de listagem, o que podemos constatar no fragmento em que PEM_2 indicou essa característica.

> **PEM_2:** *O Aluno G não atribui resposta. Segundo ele aqui tem 12 jeitos não é? Ah! Não, tem 24. O Aluno G parece muito com o E.*

Nesse sentido, a ausência de finalização, parece ser uma preocupação dos professores que ensinam Matemática nos diferentes níveis.

Em relação às estratégias ou procedimentos privilegiados pelos professores nos diferentes níveis a partir das resoluções do problema de *arranjo,* identificamos que nos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental os professores, em geral, procuraram incentivar as estratégias de *listagem*.

O professor PAI_2 apesar disso, acreditou que a organização em forma de colunas facilitou a descoberta da solução. O professor PAF_2 indicou que a estratégia de listagem na resolução em problemas de menor número de possibilidades pode promover a generalização.

Em contrapartida, os professores de Ensino Médio, priorizaram a utilização de estratégia, como a do Aluno C, de princípio multiplicativo, como podemos observar no comentário a seguir:

> **PEM_1:** *Eu gostaria muito que ele começasse a fazer por aqui, por que não vai perder tempo. A gente sabe o interessante é que ele pegue o que já amadureceu cognitivamente e consiga realmente aplicar nas questões que virão.*

Os professores do Ensino Médio justificaram essa escolha pela formalização que, de acordo com os mesmos, é um dos objetivos para o ensino de Combinatória nesse nível. No entanto, esses professores em seu discurso valorizaram as diferentes estratégias, ao menos inicialmente. Esses resultados podem representar considerações sobre as estratégias privilegiadas pelos professores para o problema de *arranjo*. Observamos, ainda, que os professores fazem essas considerações a

partir dos protocolos apresentados, assim representam possibilidades e não a realidade.

5.3.3. Conhecimentos Pedagógicos de Combinatória e o Ensino nos Diferentes Níveis

Como vimos, Ball e seus colaboradores confirmam não ser a categorização por eles descriminada quanto aos conhecimentos do professor disjuntiva, portanto, nossa tentativa de análise necessariamente implica em alguma interseção de conhecimentos. Nessa seção, tentamos transversalizar os diferentes níveis de ensino pesquisados com dados revelados pelos professores, que representam alguns dos domínios de conhecimento necessários relação ao ensino de Combinatória. Um dado que nos parece relevante é se intrinsecamente os professores reconhecem determinadas estratégias de resolução de problemas combinatórios como mais “eficazes” ou “melhores”. Chamaremos a estas, de estratégias privilegiadas, sobre o que nos deteremos a seguir.

5.3.3.1. ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMBINATÓRIOS PRIVILEGIADAS

Nesse momento, pretendemos identificar as diferentes estratégias consideradas pelo professor nos diferentes níveis escolares como privilegiadas. Além disso, tivemos a intenção de verificar a partir das considerações dos professores que relações estes apontam entre estratégias e tipos de problemas combinatórios. Para isso, selecionamos entre os protocolos de Pessoa (2009) estratégias que pensamos ser relevantes para propiciar os comentários. Pessoa (2009) indica que as estratégias de “*árvore de possibilidades,* a *listagem,* a *multiplicação adequada* e a *percepção ou busca de regularidade* são, de um modo geral, as estratégias com maior percentual de acertos” (p.211).

Para analisar os depoimentos dos professores dividimos este momento em duas seções: a primeira, referente às estratégias relacionadas aos problemas de *produto cartesiano*; a segunda relacionada aos problemas de *permutação.*

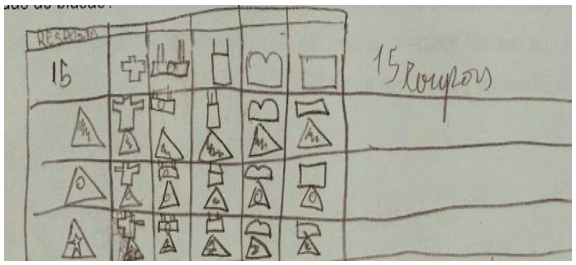
5.3.3.1.1. Estratégias privilegiadas nos problemas de produto cartesiano

Nesse momento da entrevista, solicitamos aos professores que observassem e comentassem os protocolos de resolução do problema 1 (*Produto Cartesiano* Maior ordem de Grandeza) pelos alunos (H, I J, L). Selecionamos estratégias com diferentes representações de alunos do Ensino Fundamental.

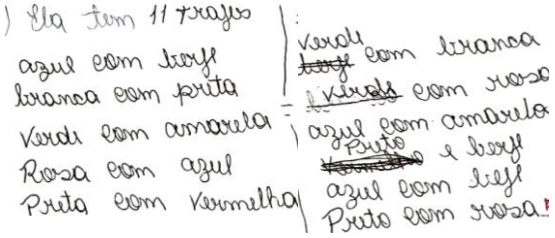
Para o significado de *produto cartesiano* selecionamos estratégias de tabela de dupla entrada com a utilização de desenhos (Aluno H), a listagem sem o esgotamento de possibilidades (Aluno I), a listagem para auxiliar a multiplicação adequada (Aluno J) e a árvore de possibilidades (Aluno L). Para observar as diferentes estratégias apresentadas veja Figura 18 a seguir.

1. Maria tem 3 saias (uma azul, uma preta e uma verde) e 5 blusas (nas cores amarela, bege, branca, rosa e vermelha). Quantos trajes diferentes ela pode formar combinando todas as saias com todas as blusas?

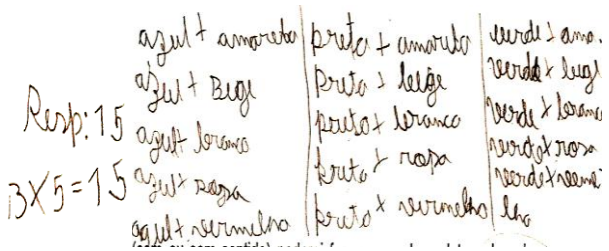
ALUNO H



ALUNO I



ALUNO J



ALUNO L

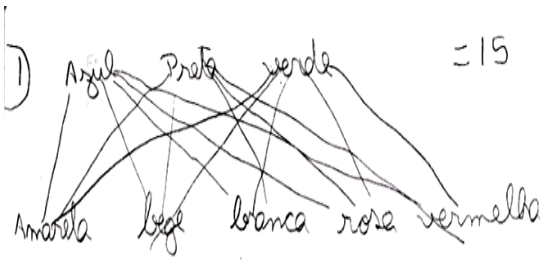


Figura 18: Estratégias escolhidas para subsidiar as discussões com professores

De acordo com o evidenciado por Pessoa (2009), nos problemas de *produto cartesiano* nos anos iniciais, das 15 estratégias encontradas para os problemas combinatórios, as mais habituais são a estratégia não explicitada, seguida de desenho, listagem, adição/subtração, multiplicação adequada e árvores de possibilidades. Nos anos finais do Ensino Fundamental essa ordem de frequência se modifica, adotando a estratégia não explicitada, multiplicação adequada, listagem, árvore de possibilidades e adição adequada de parcelas repetidas. No Ensino Médio as estratégias mais utilizadas são a multiplicação adequada, estratégia não explicitada árvore de possibilidades, listagem, adição adequada de parcelas repetidas.

Observamos, entretanto, que apesar dessas estratégias serem as mais empregadas nos diferentes níveis de escolaridade, isso não quer dizer que sua utilização garanta acertos.

Em relação às estratégias utilizadas corretamente para o problema de produto cartesiano com maior ordem de grandeza 1(PCM), Pessoa (2009) indica que o maior percentual[28] foi em relação a multiplicação adequada (21,6%), seguida pela estratégia não explicitada (9,3%), árvore de possibilidades (6,6 %) e listagem (4,2%). Notamos a diferença de percentuais de acertos de acordo com a estratégia escolhida. Entendemos que a estratégia não explicitada não proporciona o diálogo com os professores.

Pessoa (2009) considera ainda que a estratégia árvore de possibilidades é pouco frequente, contudo, é mais evidente nos problemas de produto cartesiano e indica essa possibilidade ao trabalho da escola.

Essas considerações podem ser contrapostas aos comentários dos professores entrevistados. Nesse momento de entrevista pedimos para os professores observassem esses protocolos e indicassem a melhor estratégia para resolver esse tipo de problema. Vejamos fragmentos no Quadro 15 a seguir.

[28] Os demais percentuais são distribuídos entre as outras estratégias não evidenciadas, mas apresentam percentuais abaixo de 4%. A estratégia de percepção de generalização apresenta o percentual de acertos de 2,1% e a de quadros/tabelas apenas 1, 4% de acertos.

Quadro 15: Sinopse de análise das estratégias privilegiadas pelos professores no significado de *produto cartesiano*

NÍ-VEL	ANÁLISE	FRAGMENTOS DAS ENTREVISTAS
Anos iniciais	Discordaram sobre a que é mais utilizada Ficavam entre a listagem e a árvore de possibilidades	**PAI_1:** O Aluno J do mesmo jeito a mesma coisa do Aluno H só que ele usou as cores. O Aluno J foi mais prático é como eu passaria para o meu aluno. Porque ai ele tem as maiores possibilidades porque para cada um vai fazendo a correspondência. O Aluno L também utilizou uma estratégia boa. Porque ele colocou as 3 saias e foi fazendo a correspondência com as blusas. Foi ligando as alternativas. **PAI_2:** Verdadeiramente a que é mais utilizada pelos meus alunos é como o Aluno L. Na verdade, eu procurei desenvolver um trabalho com a estratégia do Aluno H, porque eu acho que para todas as análises, de todos os conteúdos isso aqui é mais fácil. Eles resolvem isso aqui em um segundo. O Aluno L ele é mais confuso mais ele consegue ver a disponibilidade, ele faz mais rápido.
Anos finais.	Ambos identificaram priorizar as estratégias dos alunos tabela e árvore	**PAF_1:** Eu utilizo geralmente a estratégia para ensinar do Aluno H e do Aluno L. A do Aluno J e o do Aluno I eu não uso não. É a que eu acho mais simples. Você gasta menos tempo e você consegue visualizar melhor. **$PAF_{2:}$:** Nessas series de 6º ano a 9º ano eu fico em dúvida entre as estratégias de o Aluno H e o Aluno L. Mas, para essas séries e para esse tipo de problema, eu escolheria a do Aluno H.
Ensino Médio	Também discordaram. Indicam como possibilidade de prioridade a estratégia de tabela.	**PEM_1:** Aqui o que seria a estratégia mais comum para eles até pela própria natureza dessa situação vai ser a estratégia da tabela. **PEM_2:** ... a estrutura, mas organizada é a do Aluno J para o Ensino Médio. A questão mais do formal, escreveu, separou, colocou a listagem de cada coisa. Mas o Aluno H eu fiquei encantado com esquema que ele fez ai.

Observamos que no problema de *produto cartesiano* os professores dos anos iniciais conseguiram entender as estratégias utilizadas e elaboraram sugestões para o ensino desse tipo de problema nas suas aulas. Como indicou o fragmento do professor PAI_1:

> ***E:*** *Você prefere a estratégia do Aluno L ou a do Aluno J?*
> ***PAI_1:*** *Eu prefiro a do Aluno J porque está listando tudo; depois eu chegaria a do Aluno L iria por partes. Porque ele vai vendo as possibilidades.... Aqui ele vai sabendo cada conjuntinho. Vai formando os conjuntinhos. Na estratégia do Aluno J ele está fazendo a correspondência e a abstração porque ele mostra até o cálculo mesmo, de uma maneira que ele compreendeu.*

Esse professor priorizou a estratégia de listagem para auxiliar na visualização das possibilidades desse problema e indicou relações entre as representações de listagem com a de árvore de possibilidades.

PAI_2 vai além e apresentou na análise dessas estratégias considerações em relação ao desenvolvimento da compreensão dos alunos para os problemas de *produto cartesiano*, como observamos no fragmento a seguir:

> **PAI_2:** *O Aluno J ele coloca o nome, mas coloca sinais, usa cálculo. Está bem elementar a estratégia dele. Este seria o primeiro. Se ele fosse mais sintético ele poderia fazer bem mais rápido, mas dificilmente ele vai fazer alguma troca.*
> *O Aluno L seria digamos o segundo. Eu acho que o Aluno H é a mais completa. É uma síntese bastante interessante elaborada com relação a combinação de roupas, principalmente de roupas. Ele falta concluir de forma completa.*

Na situação de *arranjo* esse professor não mencionou a questão do processo de desenvolvimento do raciocínio combinatório. Novamente, há evidências que o conhecimento do conteúdo e seu ensino podem permitir ao professor mais elementos para identificar o que o aluno precisa para sistematizar e desenvolver o raciocínio combinatório e que situações o professor pode propor para mediar esse processo.

Apesar dos professores dos anos iniciais discordarem em relação à estratégia que deveria ser mais utilizada, eles consideraram a de listagem evidenciada pelo Aluno J como aquela que devem enfatizar inicialmente.

Os professores dos anos finais consideraram o ensino tanto pela representação de *tabela* quanto pela representação em *árvore de possibilidades*. Evidenciamos, no entanto, a proposta inicial feita pelo professor PAF_1 sobre a estratégia do *diagrama de flechas* no trabalho com esse tipo de problema. Esse professor pareceu demonstrar em seu discurso que o tempo utilizado para produzir a estratégia é um elemento a ser considerado na escolha da mesma, como indicado no extrato a seguir:

> **PAF_1:** *As estratégias do Aluno I e do Aluno J perde mais tempo. As outras são mais rápidas. É certo que a estratégia do Aluno H também perdeu muito tempo porque ele está desenhando.*

Os professores dos anos finais do Ensino Fundamental tendem a concordar que o professor tem um papel importante no desenvolvimento de diferentes estratégias para resolução de problemas combinatórios, principalmente no desenvolvimento das estratégias de tabela e de árvores de possibilidades. Vejamos o fragmento abaixo:

> **E:** Os alunos quando vão resolver problemas desse tipo, que estratégias eles mais utilizam?
> **PAF_2:** *Depende muito do professor. Digamos que o professor não trabalhou esse assunto ainda na sala de aula, ai o aluno vai utilizar realmente a compreensão da realidade. Mas muitas vezes alguns alunos reproduzem o mote que o professor faz. Nesse caso do Aluno H deixa claro que o professor trabalhou essa tabelinha na sala de aula para mostrar possibilidade. Acho que dificilmente um aluno vai chegar na tabelinha numa forma interessante de representar possibilidades. A opção do Aluno I é uma opção mais natural de realmente sair compondo as roupas. É mais desse aluno, não é muito do professor não. Assim como a do Aluno J. Já a do Aluno L é meio que uma estratégia ligada a alguma estratégia utilizada pelo professor na sala. Você faz as ligações e depois conta a quantidade de ligações.*

Alertamos, no entanto, para que essa influência do professor na aprendizagem e compreensão dos alunos aconteça de maneira positiva e que não se fundamente em propostas de modelos para ser repetidos. Essas propostas podem não auxiliar no desenvolvimento do raciocínio combinatório, pois prioriza a repetição de procedimentos, como podemos observar no comentário do professor abaixo:

> **E:** *Eles resolvem por listagem alguma coisa?*
> **PAF_1:** *Nunca vi, aluno meu, resolvendo por listagem não. Sempre assim do jeito que eu tenha explicado, mostrado que é melhor. Eles vão induzido por mim a fazer assim também. Do jeito que o Aluno J fez, claro que eu vou dizer que está certo. Mas talvez tu ganhasses mais tempo se tu fizesses por outra forma. O que eu busco muito é o raciocínio lógico. Eu não busco muito que o aluno faça aquela coisa ou gaste muito tempo. – vamos tentar ver se tem uma lógica aqui? Se tiver uma lógica, porque você não busca essa lógica para resolver? As vezes eu faço questão em alguma coisa: - Escreve como foi que você pensou para eu entender se o pensamento está correto.*

No Ensino Médio, observamos no Quadro 15(p.136) que o professor PEM_2, em seu discurso, prioriza o formalismo indicando a estratégia do Aluno J como a mais organizada para esse nível de ensino.

Contudo, no fragmento a seguir o professor PEM_1 vai além das estratégias apresentadas identificando nos seus alunos habilidades que se diferenciam das apresentadas.

> **PEM_1:** *Eles não querem utilizar essas estratégias. O pessoal do Ensino Médio até pelo fato de já terem passado por muitos conteúdos têm estruturas cognitivas um pouco mais elaboradas, o processo de generalização, eles tem um feeling para isso maior. Então quando eles começam a observar a 3 vezes 5 dá 15, ai já desiste disso aqui. Então se você passar outra atividade ele já tenta assimilar. As vezes bota só o 15. Ai você fica: - Gente bota pelo menos de onde foi que vocês colocaram isso, porque depois a gente fica realmente sem saber como foi que*

> *você fez isso. Porque quando tem um erro na multiplicação a gente fica sem saber.*

Notamos que esse professor, pareceu compreender o processo de desenvolvimento cognitivo de seus alunos, indicando novas possibilidades de estratégias fundamentadas na compreensão dos alunos do Ensino Médio. Esse professor está apresentando um *conhecimento de Combinatória e seu aluno.*

Agora, vamos discutir sobre a estratégia de utilização da tabela de dupla entrada (Aluno H) e a de árvores de possibilidades (Aluno L). Sobre a proposta de estratégia do Aluno H, os professores consideraram positiva por diferentes aspectos.

PAI_2 considerou a visualização e a relação entre a adição e a multiplicação pontos que são evidenciados a partir da utilização da estratégia de tabela. Como ponto negativo indicou:

> **PAI_2:** *Os alunos maiores eles já conseguem montar uma tabela desenhando de um lado a quantidade de saia e do outro a quantidade de blusas que é a questão do tratamento também de relacionar com a soma e com a multiplicação e o registro da tabela fica mais fácil de visualização... quando eles têm algum tipo de trabalho assim eles usam... Não é fácil de organizar dessa forma.*

PAF_2 indicou que a utilização desse tipo de registro permite a discussão sobre a noção de possibilidade. Conforme fragmento a seguir:

> **PAF_2:** *A vantagem da estratégia do Aluno H é que a gente consegue entender as possibilidades, porque as vezes eles demoram para entender isso. Por exemplo, que usando a saia azul com a blusa preta então não posso usar a saia azul de novo. As vezes eles demoram um pouco pra entender que isso é apenas uma possibilidade, porque se eu usei a saia azul com uma blusa preta posso usar de novo a saia azul com uma blusa de outra cor. Os Alunos demoram um pouco pra entender que isso é uma possibilidade, para abstrair essa ideia.*

Segundo síntese no Quadro 15(p.136), o professor PEM_1 fez relação entre essa representação (tabela) e a natureza do problema, provavelmente se referindo a estrutura dos problemas de *produto cartesiano.* Questionamos ao professor se ele encontrou alunos de Ensino Médio utilizando esse tipo de representação. Ele teceu as seguintes considerações:

> **PEM_1:** *Nesse tipo de questão não. Mas eu já vi usando em situações com dados. Outras situações que são comuns, por exemplo, o lançamento de dois dados tem muitas questões de Análise Combinatória assim. Então você vê o aluno montando os pares ordenados como sendo o primeiro o lançamento do primeiro dado e o segundo o lançamento do segundo dado. Você observa mais nesse tipo de situação.*
> **E:** *Você observa alguma dessas estratégias em livro didático?*

> **PEM_1:** *Geralmente quando não é essa de tabela é aquela que eu acho que não facilita muito, que é aquela de notação de conjunto mesmo, de listar, abre chaves e sai listando com pares ordenados ou não. Deixar sempre o espaço amostral, ou no caso o conjunto de todas as possíveis soluções para isso aqui. Utilizando sempre aquela notação de conjunto.*

Notamos, nesse discurso, que o professor identificou a estratégia de tabela e suas relações com situações de possibilidade (espaço amostral do lançamento de dois dados) e ainda, apresentou um contraponto sobre a listagem a partir da notação de subconjuntos.

Portanto, podemos dizer que esse professor reconheceu diferentes representações, indicou como os livros didáticos as representavam e fez possíveis conexões entre os diferentes conteúdos. Embora essas relações sejam provenientes da própria Matemática, podemos dizer que provavelmente isso se deva ao conhecimento sobre a Combinatória e seu ensino.

A árvore de possibilidades é considerada por Batanero et al (1996), Esteves (2001), Pessoa (2009) e Sabo (2010) como uma estratégia que possibilita a enumeração sistemática das possibilidades. Essa relação é pouco discutida pelos professores participantes, embora estabeleçam comentários positivos nas avaliações, no geral, preferem outras estratégias parecendo não enfatizá-la.

O professor PAI_2 foi o único que considerou a árvore de possibilidades como a mais utilizada pelos seus alunos (Quadro 15). PAI_1 a considerou uma estratégia final após o trabalho com a listagem. Nesse sentido, vejamos que considerações trazem os demais professores:

> **PAF_2**: *Para mim o único aluno aqui que parece do Ensino Médio é o Aluno L, porque isso aqui lembra a árvore de possibilidades.*

Notamos que esse professor dos anos finais foi o único a utilizar a nomenclatura de árvores de possibilidades. Apesar de considerá-la uma estratégia possível no Ensino Fundamental, indicou a possibilidade do Aluno L pertencer ao Ensino Médio.

Os professores do Ensino Médio fazem comentários em relação à estrutura apresentada pelo Aluno L na utilização dessa estratégia.

> **PEM_1:** *O Aluno L também obteve êxito a título de número e também de estratégia porque listou. É uma opção também que a gente solicita aos alunos. Liste e tente fazer as ligações.*

> **PEM_2:** *O Aluno L achei muito legal porque ele fez as ligações e percebe nessas ligações, ligando cada saia com cada blusa. Ele não fez desenho e sim com os nomes. Essa L eu achei ótima.*

Rocha e Ferraz (2010) identificam que professores de Matemática na resolução desse Problema 8 (Pm) utilizam a estratégia de multiplicação adequada (62,5%), seguida de árvores de possibilidades (31,25%). Esse fato se contrapõe ao evidenciado e parece indicar diferentes perspectivas do professor uma enquanto ensina, outra enquanto solucionador de problemas.

Assim, constatamos a estratégia de *tabela de dupla entrada* como a mais evidenciada por esses professores, mesmo que por motivos diferenciados. PAI_2 pela organização e possível relação entre adição e multiplicação; PAF_2 por auxiliar na definição de possibilidades e PEM_2 por evidenciar aspectos relativos a estrutura do problema. Vale ainda ressaltar que poucos alunos da pesquisa de Pessoa (2009) evidenciaram a utilização de quadros e tabelas nesse problema (apenas 1,4% acertaram utilizando essa estratégia). Podemos supor que um dos fatos para essa escolha, seja a crença dos professores PEM_1 e PAF_2 apresentaram sobre a sua presença nos livros didáticos, ou ainda, o evidenciado por $PAF_{1,}$ o tempo associado a essa estratégia.

5.3.3.1.2. Estratégias privilegiadas nos problemas de *permutação*

Destacamos os problemas de *permutação* por eles terem sido indicados na pesquisa de Pessoa e Borba (2009a) como o mais difícil para os alunos dos anos iniciais, o que não ocorre nos demais anos de escolaridade. Nesse momento da entrevista solicitamos aos professores para observar e comentar sobre os protocolos de resolução do Problema 8 (*Pm*) pelos alunos (M, N, O, P). Selecionamos estratégias de diferentes representações de alunos do Ensino Fundamental e Médio.

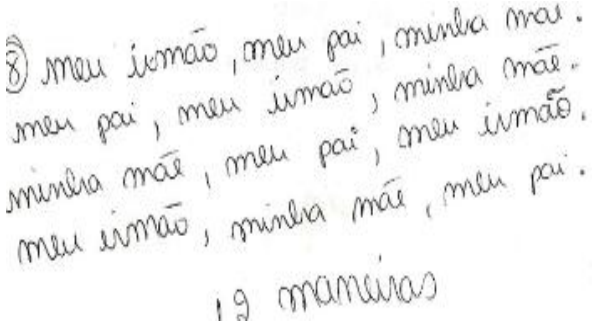
Para o significado de *permutação* selecionamos prioritariamente estratégias de listagem. Nesse sentido a listagem por meio de desenho (Aluno M); a listagem sem esgotamento de possibilidades e sem a definição correta das possibilidades (Aluno N); a multiplicação inadequada (Aluno O) e por último a listagem por meio de

palavras com esgotamento de possibilidades (Aluno P). Para observar essas estratégias veja Figura 19.

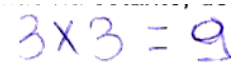
8. De quantas formas diferentes poderei arrumar as fotos de meu irmão, meu pai e minha mãe na estante, de modo que elas fiquem lado a lado?

ALUNO M

ALUNO N



ALUNO O



ALUNO P

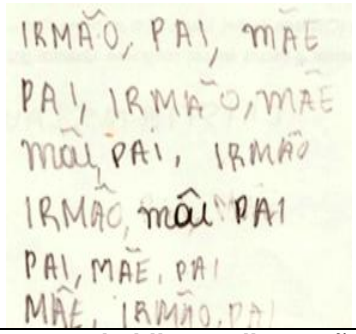


Figura 19: Estratégias escolhidas de *permutação* para subsidiar as discussões com professores

Sobre as estratégias utilizadas para a resolução do Problema 8 (Pm) Pessoa (2009) ressalta que alunos dos anos iniciais evidenciaram as estratégias de listagem, desenho e multiplicação inadequada. Nos anos finais a estratégia mais frequentemente utilizada foi à multiplicação inadequada seguida de listagem. No Ensino Médio as estratégias comumente utilizadas foram a listagem e a multiplicação inadequada. Essas estratégias foram bastante utilizadas pelos alunos dos diferentes níveis de escolaridade.

Assim, pretendemos perceber se os professores identificavam a noção de possibilidade equivocada trazida no protocolo do Aluno N e, ainda, se tinham condições de propor diferentes estratégias além da evidenciada para o trabalho com esse tipo de problema. A seguir apresentamos as transcrições de fragmentos desse momento da entrevista.

Quadro 16: Sinopse de análise das estratégias privilegiadas pelos professores no significado de *permutação*

NÍVEL	ANÁLISE	FRAGMENTOS DAS ENTREVISTAS
ANOS INICIAIS	Ambos escolheram a estratégia do Aluno M	**PAI_1:** O aluno M conseguiu usar todas as possibilidades ele esta organizado. O aluno P esta quase a mesma coisa que o Aluno M. **PAI_2:** O aluno N e o aluno P precisam de um trabalho de intervenção do professor porque eles estão listando de forma que não facilita a conclusão completa da questão. O aluno M foi mais feliz nesse aspecto.
ANOS FINAIS DO EF.	Ambos escolheram a estratégia do Aluno M	**PAF_1:**. O aluno M eu não olhei não. Está todo engarranchado aqui. Mas parece que quem acertou foi o aluno M. pelo que eu estou olhando rapidinho. Que ele fez as trocas todinhas aqui. Então são 18 mesmo e não 15 do Aluno P. É que a letrinha do Aluno P esta melhor organizada. Embora eu resolveria como o aluno M só com a inicial sem escrever o nome todo. **PAF_2:**. Para essa situação que trabalha com poucos elementos a estratégias do Aluno M é uma estratégia, assim como a do Aluno P, que só abreviou são estratégias válidas. Dá pra se entender que aqui (aponta pra listagem) que é uma possibilidade, e aqui são duas possibilidades, que é o que falta pra o Aluno N.
ENSINO MÉDIO	Ambos escolheram a estratégia do Aluno M	**PEM_1:** Você observa que os alunos M, N e P responderam de forma semelhante. A título de usar de alguma forma ou utilizando as palavras, ou a inicial ou a palavra meu, eles saíram ordenando sabendo que era as 3 fotos lado a lado. O aluno M colocou a resposta certa 6 possibilidades, o Aluno P também obteve a resposta 6. **PEM_2:**. Eu posso fazer por escrito. Parece que a gente sente essa necessidade. (Faz o problema através de árvore de possibilidade) A melhor estratégia é do Aluno M; o Aluno P acerta mais assim ele não organizou. Quer dizer essa estratégia do aluno M é mais fácil de entender. O aluno P aqui acertou, mais fica até duvidando como foi que ele fez isso. Mas com certeza ele conseguiu. Pelo menos para mim é mais difícil de compreender isso aqui.

Como podemos observar, os professores evidenciaram como a melhor estratégia a do Aluno M. Uma listagem que se apresenta a partir de iniciais e utiliza sistematização, ou seja, uma estratégia inicial para solucionar o problema. O aluno M fixou inicialmente uma das fotos e distribuiu as fotos restantes (mãe e pai).

Alguns professores sentiram necessidade de outro tipo de estratégia como o professor PAI_1 apresentou no extrato abaixo:

> **PAI_1:** *Eu buscaria outras estratégias de listar os três nomes... eu colocaria la as fotos dos três, e iria listando e alternando. Escrito ou então utilizando uma legenda, ou uma imagem o desenho da mãe, o desenho do pai e desenho do irmão para eles iniciarem, uma figura. Faria o pai, a mãe e o irmão; depois vem o pai, o irmão e a mãe. O pai pode vir com alguém mais? – não! Então vamos pegar a mãe. A mãe, o pai e o irmão; depois vem a mãe, o irmão e o pai...*

> *Fazendo assim eles vão compreender que só troca o lugar mais eles vão ficar na mesma estante, numa linha só, lado a lado.*

Assim, podemos constatar o cuidado desse professor dos anos iniciais em proporcionar a utilização de recursos didáticos que representem para o aluno as diferentes possibilidades. Mesmo assim, evidenciou a estratégia de *listagem* e a tentativa de fazer com que os alunos cheguem ao esgotamento de possibilidades. Acreditamos que em todos os níveis de ensino a estratégia de listagem deve ser evidenciada e ainda, os recursos didáticos podem sim, auxiliar os alunos dos anos iniciais na sistematização dessa listagem. Contudo, devem ser pensados para não gerar equívocos, como por exemplo, na noção de possibilidades.

Nesse sentido, observamos a explicitação equivocada da noção de possibilidade apresentada no Quadro 16, pelo professor PAF_2. Ele contou separadamente a organização das possibilidades propostas pelo Aluno M e pelo Aluno P. Apresentou assim o mesmo erro do Aluno N. Essa dificuldade de percepção sobre o significa possibilidades foi apresentada pelo professor PAF_2 nesse quadro e supomos ser um ponto que merece atenção dos professores.

Os professores do Ensino Médio propõem diferentes estratégias das apresentadas para o Problema 8. O professor PEM_1 ao resolver esse problema utilizou o princípio multiplicativo, como mostra a Figura 20:

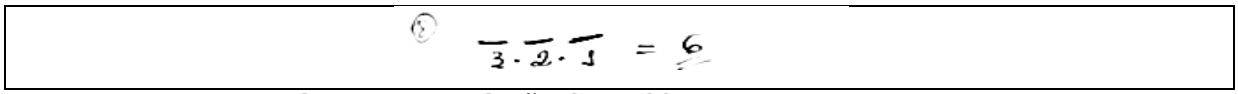


Figura 20: Resolução do Problema 8 proposta por PEM_1

O professor PEM_2 que sente a necessidade de resolver o Problema 8, no momento da entrevista. Essa resolução é evidenciada na Figura 21.

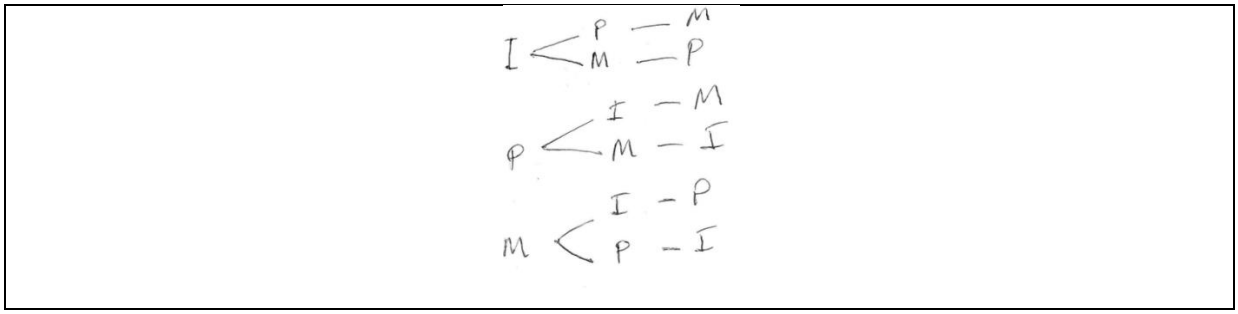


Figura 21: Resolução do Problema 8 pelo professor PEM_2

Sobre a Figura 21, para a solução do Problema 8 (Pm), o professor PEM_2 escolheu uma estratégia que utiliza a árvore de possibilidades. Questionado o

professor sobre sua preferência em relação às estratégias, apresentou a seguinte justificativa:

PEM_2: *A minha. Por causa da minha organização.*

Sobre as diferentes estratégias evidenciadas pelos professores podemos dizer que são pouco apresentadas pelos alunos. Pessoa (2009) indica que na resolução do Problema 8 (Pm) apenas 6% dos alunos do Ensino Médio utilizam o uso do *princípio multiplicativo* como estratégia e 3% empregam a *árvore de possibilidades*. Rocha e Ferraz (2010) identificam nesse problema que a estratégia mais evidenciada pelos professores de licenciatura em Matemática é o princípio multiplicativo e nenhum utilizou a árvore de possibilidades.

Assim, para além das resoluções dos protocolos dos alunos escolhidas, os professores do Ensino Médio apresentaram diferentes possibilidades de resolução, diferentes dos professores dos outros níveis de ensino que recomendam a estratégia de listagem como a mais indicada.

5.3.3.2. IDEIAS DE PRÁTICAS PARA A SUPERAÇÃO DE DIFICULDADES EVIDENCIADAS

O conhecimento didático do conteúdo e seu ensino representam a relação do conteúdo matemático em jogo, com o conhecimento do ensino desse conteúdo. Nesse sentido, acreditamos fundamentados em Delaney, Ball, Hill, Schilling e Zopf (2008), que a relação entre o *conhecimento pedagógico de Combinatória e seu ensino,* demanda para o professor dos diferentes níveis, o saber que possibilite a construção a partir do raciocínio dos alunos e das estratégias utilizadas por eles, de processos que possibilitem a superação de dificuldades desses alunos.

Portanto, entendemos que para sugerir situações para auxiliar os alunos na construção do raciocínio combinatório, é indispensável que o professor compreenda o processo de aprendizagem que o aluno está vivenciando, propondo a partir de diferentes recursos, um diálogo entre o ensino que ele propõe e a aprendizagem a que se objetiva.

Dessa forma, os professores necessitam relacionar o conhecimento de Combinatória com o conhecimento do ensino desse conteúdo; além de entender o processo de construção do raciocínio dos alunos e analisar as estratégias de resolução dos mesmos para propor sugestões de superação.

Nesse momento da entrevista, pedimos aos professores que com base nas dificuldades apresentadas pelos alunos nas fases anteriores, propusessem situações que contribuíssem para a superação das mesmas.

Apresentamos durante a entrevista seis protocolos de estratégias de alunos que evidenciavam diferentes erros ou dificuldades, sobre os quais, a partir da análise dos protocolos denominamos de: *Cópia ou reprodução de possibilidades*, no qual o aluno A repete a mesma possibilidade durante a listagem; a questão da *ordenação* em relação ao significado de *combinação* utilizada por A; *esgotamento de possibilidades* na estratégia de listagem indicadas pelo Aluno D e pelo Aluno I; compreensão *de possibilidades* evidenciada pelo Aluno N e *a multiplicação inadequada* evidenciada pelo Aluno O. A seguir discutiremos sobre os tratamentos dados pelos professores na proposta de superação dos erros ou dificuldades apresentadas.

5.3.3.2.1. Cópia ou reprodução de possibilidades

Apresentamos os comentários dos professores em relação aos alunos que evidenciam nas suas estratégias de resolução alguma dificuldade. Vejamos os comentários dos professores sobre o Aluno A, em relação a reprodução de possibilidades na Figura 22.

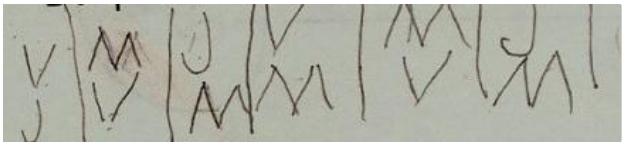
5. Para representantes de turma da sala de aula se candidataram 3 pessoas (Joana, Mario e Vitória). De quantas maneiras diferentes poderão ser escolhidos o representante e o vice-representante?	
ALUNO A 	Reprodução de possibilidades

Figura 22: Estratégia do Aluno A para problema de *arranjo*

Os professores PAI_2 e PAF_2 não observaram a repetição de possibilidades do Aluno A. Os demais professores observaram a repetição, mas apenas PAF_1 e PEM_1 propõem sugestões. O professor PAF_1 recomendou o procedimento a seguir:

> **PAF_1**: *Tentar perguntar a ele como foi que ele fez. Porque foi que ele repetiu. Se ele tinha esquecido aquele outro. Porque no final ele achou as possibilidades todas. Só que ai se a gente for contar isso ai ele tem possibilidades repetidas e tem uma que está em excesso que é o MV e VM que ele colocou mais de uma vez. Eu iria tentar fazer isso aqui pelo diagrama de flechas*.

Logo, procurou, a partir do diálogo com aluno, possibilitar reflexão e a explicação do próprio sobre o processo adotado, o que pode permitir a discussão e socialização de diferentes estratégias em sala. No entanto, ele não mencionou essa prática. Indicou outra estratégia, o *diagrama de flechas*.

Percebemos, entretanto, que apesar de ser possível responder utilizando essa estratégia e auxiliar na sistematização da estratégia de listagem, algumas considerações em relação à estrutura do problema de *arranjo* têm que ser evidenciada.

Vale salientar que o Problema 5(Am) é um problema de *arranjo*. Este significado se diferencia em ordenar o conjunto inicial (Joana, Mario e Vitória) em pares ordenados, compostos pelos subconjuntos de cardinalidade igual a 2, nos quais o primeiro nome pode ser o representante e o segundo o vice. A diferença entre o *produto cartesiano* e o *arranjo* se encontra ainda na solução dos problemas, a seguir analisamos um problema cujo significado é *produto cartesiano*:

> **Exemplo:** *Maria tem 3 saias (uma azul, uma preta e uma verde) e 2 blusas (nas cores amarela, e vermelha). Quantos trajes diferentes ela pode formar combinando todas as saias com todas as blusas?*

Neste caso notamos a presença de dois conjuntos: um conjunto de saias, outro de blusas, podemos então utilizar o que PAF_1 chamou de diagrama de flechas.

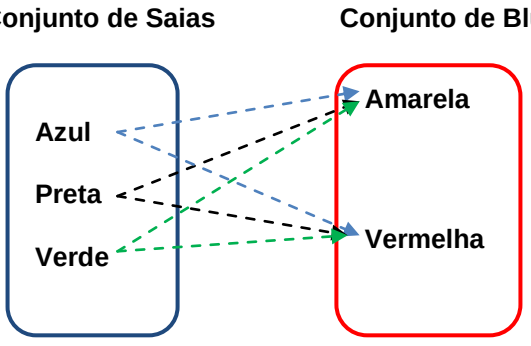


Figura 23: Diagrama de flechas

Observamos que a solução é também pares ordenados, compostos pelo *produto cartesiano* de dois conjuntos, mas que a mudança de posição entre seus elementos não formam um novo elemento saia azul e blusa vermelha é a mesma possibilidade de blusa vermelha e saia azul, o que não ocorre no problema de *arranjo*.

O problema de *arranjo* indica a seleção dos elementos de um mesmo conjunto, em subconjuntos ordenados, ou seja, dado o conjunto inicial de alunos da sala (Joana, Mario e Vitória) devemos quantificar os pares ordenados (representante, vice-representante) que podemos identificar. O diagrama de flechas sugere a utilização de dois conjuntos nos quais serão distribuídos os elementos entre eles, e não a seleção de subconjuntos ordenados. Uma estratégia de resolução mais natural utilizaria o diagrama de árvores, ou a árvore de possibilidades, conforme a Figura 24.

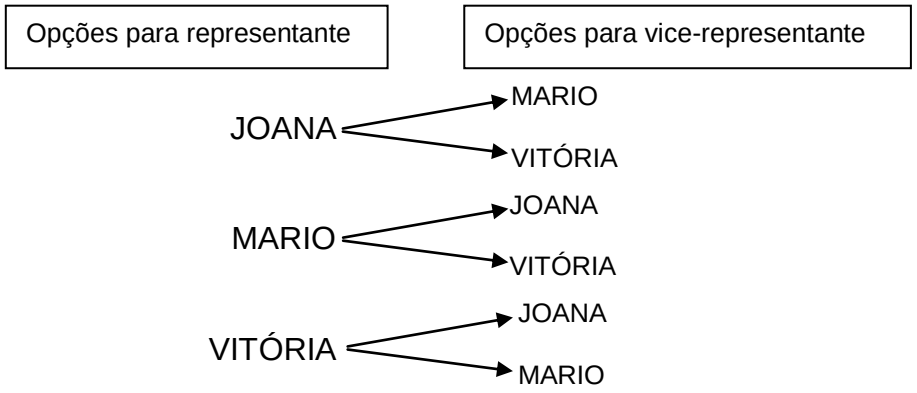


Figura 24: Representação do Problema 5(Am) com o uso da árvore de possibilidades

Constatamos que apesar de ter inicialmente diferenciado os tipos de problemas combinatórios, ou seja, ter conhecimento dos problemas combinatórios o professor sugeriu uma estratégia que pode confundir ou não os alunos nessa diferenciação.

Vejamos agora a sugestão do professor PEM_1:

> **PEM_1:** *Aparentemente ele esta diferenciando... na verdade tem resposta que está se repetindo, não sei se fosse algum equívoco dele... Ele repetiu. Não sei se o aluno se confundiu, não teve a preocupação de retomar para vê se realmente não tem uma resposta igual a outra. Ele aparentemente foi só listando, ele listou sem observar se a resposta que ele colocou não foi algo que ele tinha escrito anteriormente. Ele compreendeu que de 3 pessoas ele escolhe 2, ele entendeu isso. Ele tentou fazer a exaustão de todas as possibilidades. O comando básico ele entendeu, porque se você tem 3 pessoas pra escolher 2 então sempre tem uma que vai ficar de fora.*

O cuidado para retomar ao final da listagem pode auxiliar o aluno no processo de sistematização. Essa estratégia de revisar a solução de um problema é defendida por muitos pesquisadores, em especial, Batanero et al (1996) quando explicita no currículo[29] de Matemática da Espanha, as atitudes necessárias ao bloco de Número e operações. Dentre elas destaca “disposição favorável a revisão e melhora do resultado de qualquer contagem” (BATANERO et al, 1996, p.81).

Contrapondo-se a essa atitude, para o professor PAI_2, está o aluno, quando adota a postura que descreveu:

> **PAI_2:** ...O aluno tem a mania de querer terminar logo as coisas. Não tem esse cuidado de retomar o que foi feito.

Observamos que os professores trouxeram propostas diferentes para a dificuldade de reprodução de possibilidades. PAF_1 enfatizou a mudança da estratégia de listagem e PEM_1 escolheu a retomada da resolução ao fim do trabalho. Entretanto, devemos levar em consideração os diferentes significados de problemas combinatórios para não proporcionarmos estratégias que gerem equívocos nos alunos. Ressaltamos, ainda, que mesmo professores com formação específica para o ensino de Combinatória podem não levar em consideração nas suas propostas os significados dos problemas combinatórios.

5.3.3.2.2. Ordenação

Analisamos agora as sugestões de prática com objetivo de identificar no problema combinatório à presença ou não de ordenação. A seguir evidenciamos a dificuldade do Aluno A na Figura 25.

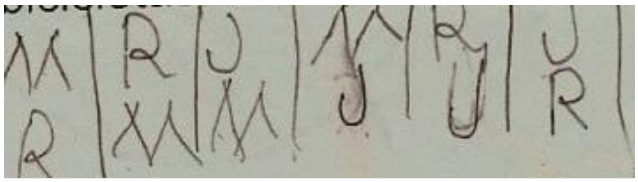
7. Três alunos (Mário, Raul e Júnior) participam de um concurso em que serão sorteadas duas bicicletas. Quantos resultados diferentes podem ser obtidos no concurso?	
ALUNO A 	A ordenação nessa estratégia esta sendo considerada. Erro em relação a estrutura do problema; Enunciado

Figura 25: Estratégia do Aluno A para problema de *combinação*

[29] Currículo oficial de Matemáticas para a Enseñanza Secundaria Obligatoria (niveles 12-16) (MEC, 1992)

Os professores dos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental não observaram os erros a partir da ordenação, portanto não sugeriram atividades nessa direção. Entretanto, em relação à temática de ordenação PAF_2 exemplificou:

> **PAF_2:** *Para o grupo... são aqueles em que a ordem não vai fazer diferença, Então acho que nesse caso seria pegar essas situações de exemplo como de representante de classe, que tanto faz ser Maria e João como João e Maria poderia começar com essa ideia deixar evidente que a ordem não vai influenciar e pegar também situações em que a ordem influencia. Por exemplo, a disputa de um campeonato de futebol Palmeiras em primeiro e Corinthians em segundo, é uma situação que vai se alterar: uma coisa é ser o primeiro, outra coisa é ser diferente.*

Notamos a proposta de discutir por meio de situações-problema de Combinatória a propriedade de ser ou não ser ordenada. Embora a resolução de problemas seja característica do fazer Matemática é importante que o professor reflita sobre a escolha das situações para que possibilite a aprendizagem de propriedades dos problemas de *arranjo* e *combinação*.

Em relação aos contextos propostos notamos que tanto a ideia de representantes de classe, quanto à disputa de um campeonato em 1º e 2º lugares são situações que representam a propriedade de ordenação.

Observemos a proposta do professor PEM_1, que no primeiro momento diferenciou corretamente problemas de *arranjo* e *combinação*:

> **PEM_1:** *O Problema 7 (Cm) se ele, por exemplo, dissesse assim a primeira pessoa recebesse a bicicleta azul; e a segunda pessoa uma bicicleta verde ai já teria ao meu ver um problema de arranjo. Se Mario recebe primeiro e Raul recebe depois seria a mesma coisa de Raul receber primeiro e Mario depois. Então não posso contar como sendo situações diferentes e sim a mesma situação. Isso é o que eu comento com meus alunos que a principal diferença entre problemas de arranjo e combinação é se a ordem importa ou não*

Desse modo, ele propôs a discussão do problema diferenciando a partir do enunciado a propriedade da ordenação, exemplificando corretamente as diferenças entre os problemas de *arranjo* e *combinação*. Alertamos, entretanto, para a valorização do conhecimento prévio do aluno, ou mesmo a estratégia de listagem, para que primeiro discutam em pequenos grupos o que acontece ao problema se tiverem bicicletas semelhantes ou diferentes e socializar o que foi produzido pelos alunos.

Assim, observamos que, para os professores PAF_2 e PEM_1 os aspectos de contexto e de enunciado pareceram ser enfatizados no trabalho com os alunos para auxiliar na dificuldade de diferenciar os problemas de *arranjo e combinação.*

O Aluno A, cometeu nesse caso, um erro de origem conceitual, portanto pensamos que o conhecimento limitado de Combinatória pelos professores pode restringir a atuação do professor na proposição de atividades de superação. Nesse contexto concordamos com Ma (2009) quando afirma que mesmo um professor "com um forte sentimento de *ensinar Matemática para a compreensão* não pode remediar ou complementar uma limitação de um professor no conhecimento da matéria "(p.83)

5.3.3.2.3. Esgotamento de possibilidades na estratégia de listagem

Nessa seção, observamos as sugestões dos professores para que os alunos consigam esgotar as possibilidades no processo de listagem, comum nos anos iniciais do Ensino Fundamental e ainda presente no Ensino Médio. Nesse aspecto escolhemos o protocolo de dois alunos para propiciar a discussão: o Aluno D referente ao problema de *arranjo* com maior número de possibilidades e o Aluno I referente ao problema de *produto cartesiano*, como podemos observar na Figura 26.

Queremos analisar como os professores observam a estratégia de enumeração não sistemática.

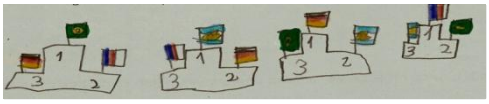
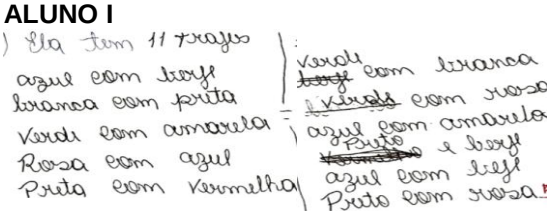
<table>
<tr><td colspan="2">3. As semifinais da Copa do Mundo serão disputadas pelas seguintes seleções: Brasil, França, Alemanha e Argentina. De quantas maneiras diferentes podemos ter os três primeiros colocados?</td></tr>
<tr><td>ALUNO D
  </td><td>Esgotamento de possibilidade</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. Maria tem 3 saias (uma azul, uma preta e uma verde) e 5 blusas (nas cores amarela, bege, branca, rosa e vermelha). Quantos trajes diferentes ela pode formar combinando todas as saias com todas as blusas?</td></tr>
<tr><td>ALUNO I
  </td><td>Esgotamento de possibilidade</td></tr>
</table>

Figura 26: Estratégias dos alunos referente à dificuldade de esgotamento de possibilidades

Exceto o professor PAF_1, os demais professores evidenciaram as dificuldades desses alunos em esgotar as possibilidades do Aluno D. Vejamos suas considerações:

Para que o Aluno D conclua a listagem o professor PAI_1

> **PAI_1:** *O aluno D até iniciou, tentou se organizar. Talvez seja um aluno desatento. Ele criou alguma coisa, só iniciou o pensamento. Ele não concluiu... Eu queria falar sobre o trabalho de ensino para esses problemas com os alunos. Por exemplo, algum material concreto. A questão do Aluno D então a gente podia fazer as bandeirinhas e eles irem mexendo. Figuras geométricas como esse aluno B, as estratégias eles mesmos já criaram.*

Constatamos nesse depoimento a sugestão de materiais concretos, para que os alunos possam verificar as diferentes possibilidades utilizando os objetos que se relacionam com o contexto da questão. Entretanto, acreditamos que esses materiais precisam de planejamento para que a ação proposta seja sistematizada. Vejamos a proposta de PAI_2, em relação ao Aluno D:

> **PAI_2:** *Acho que o* Aluno *D está incompleto. Aqui são estratégias que são diferentes sobre o que o aluno atingiu. O professor não pode está, acredito eu, direcionando, ele não pode mostrar, por isso é bom um trabalho que envolva toda sala. Um trabalho em grupo. Cada grupo tem uma forma de chegar a uma resposta diferente do outro. Essas possibilidades não devem ser eliminadas. elas devem ser valorizadas e socializadas. Para que num outro momento ele utilize outra forma, e outra, e outra...para posteriormente eles terem noção de diferentes situações que eles vão se deparar com outros conteúdos Na Matemática é bem interessante que tem uma relação muito grande com a forma ...porque não existe uma única forma de realizar, existem várias formas... e na concepção atual nossa ..a coisa não é bem assim existem situações ...esse salto aqui verdadeiramente está errado, mas existem possibilidades para que se cheguem essa conclusão completa.*

Esse professor atentou para a ideia de processo de construção do conceito e propõe um trabalho fundamentado na resolução de problemas em grupo e na socialização das descobertas. Uma proposta assim parece valorizar o conhecimento prévio do aluno, além das estratégias por eles apresentadas.

Diferente dos professores dos anos iniciais, os professores de formação em Matemática não propuseram para o esgotamento de possibilidades o trabalho com material concreto, nem o trabalho sistemático a partir de resolução dos problemas, conforme apresentamos no recorte abaixo:

> **PAF_2:** ... *ele já entendeu a ideia de possibilidades que ele deixa evidente com algumas situações que ele faz. Se ele tivesse escrito 4 ai deixava claro que ele já tinha isso aqui como certo. Vamos partir do pressuposto que ele acredita que*

> *são 4 possibilidades. Acho que a gente precisaria tentar mostrar que existe outro tipo de possibilidades, que assim como Brasil em primeiro, França em segundo e Argentina em terceiro e pedindo outras situações para ir ampliando e ampliando as possibilidades, questionando e perguntando. Primeiro ele tem que compreender a ideia de possibilidade.*
>
> **PEM_1:** *O Aluno D se focou num pedaço da questão....São os significados das expressões. O que significa para ele três primeiros colocados. Tenho que perguntar aos alunos o que essa questão está querendo dizer para você? De repente algum aluno diz só são 4 opções. Tem aluno que realmente diz, são 4 opções. Quais são as quatro? Brasil em primeiro, França em primeiro, Argentina em primeiro e Alemanha em primeiro. E eu faço o questionamento e os outros e saio permutando. Ai o aluno opa! ai ele vai começar a se questionar que tem algo mais além do que ele está pensando. Queremos que ele desenvolva isso.*
>
> **PEM_2:** *O Aluno D parece que ele não está compreendendo o que deve ser feito. Ele fez assim pegou 4 seleções ... Ele deixou uma fora... Aqui precisava perguntar mesmo o que ele estava fazendo aqui. Ele sempre deixou um de fora do pódio e não pensou na possibilidade de estar no pódio em outra posição.*

Notamos que inicialmente, professores PAF_2 e PEM_1 focalizaram a noção de possibilidades. O professor PEM_1 ainda ressaltou a dificuldade de compreensão do enunciado, isso relacionando aos conhecimentos do conteúdo. Eles parecem assumir uma atitude investigativa com o aluno, procuraram saber o que ele fez e como o que fez pode auxiliar nas propostas de aprendizagem.

Observemos agora se essas sugestões a situação do Aluno I, ou se confirmam. Vejamos os comentários dos professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

> **PAI_1:** *O que está com mais dificuldade é o Aluno I. Ele não está fazendo essa correspondência, nem essa ligação das possibilidades...Eu tenho que trabalhar mais questões como essa. Como é que ele vai chegar a dedução e a abstração? Como é que ele vai vê as possibilidades? Você vê que ele começa com o azul, depois pega blusa. Está difícil até de entender quem é saia e quem é blusa. Está faltando estratégia. Trabalho com outras questões dessa natureza e até mostrar a ele. Você utilizando assim você vai chegar ao ponto que ele vai esquecer e passar batido. Ele não tem a compreensão de quantas combinações se pode fazer entre saias e blusas.*
>
> **PAI_2:** *O Aluno I não concluiu. Ele vai ter que se deparar com outras estratégias. Eu acho que fazer trabalhos em grupos no qual o professor perceba que existem crianças que já conseguem fazer determinadas sínteses e levar esse aluno para esse grupo já facilita. A gente fazer trabalhos em grupo e exposição oral disso, com o professor sistematizando as diferentes estratégias que os diferentes grupos fizeram, também ajuda o aluno a utilizar outras formas. O professor pode fazer até o comparativo digamos- Gente que estratégia seria mais rápida? E efetivamente eficaz? Da melhor forma de concluir? O professor pode até expor depois, expor não, até fazer com que eles mesmos digam Acho que essa seria uma estratégia mais interessante para não acontecer trocas. E assim acho que*

> *no chegar junto, mostrar, apresentar outro problema com a mesma estrutura eu acho que isso é muito importante. As vezes o professor diversifica demais a estrutura do enunciado e as crianças nas séries iniciais ela tem dificuldade, ela tem que vivenciar mais aquela mesma estrutura mais com outros conteúdos digamos assim.*
>
> ***E:*** *Seria você pegar outro problema desse grupo que você separou como similares?*
> **PAI_2:** *Exatamente. E colocar para esses alunos estar vivenciando esse tipo de enunciando, ter uma autonomia e ter a possibilidade de outras pra resposta, porque no primeiro não foi, mais no segundo já vai...Porque criança é muito esperta e inteligente para isso. E depois ir apresentando outras estruturas e outras formas mais complexas. Eu acho que também é interessante agrupar é que os meninos faziam muito. Selecionar não só pra analise Combinatória mais para qualquer tipo conteúdo, selecionar problemas de diferentes níveis para diferentes objetivos. O professor não tem tempo de fazer isso. Isso é fundamental acho que algum grande politicamente falando, que ai atinge estado e município, pensasse numa forma de um momento no mínimo de 15 em 15 dias, para o professor sentar junto com outro e pensar numa atividade em conjunto, a educação ia pra frente. Meus alunos agora na atualidade eles estão dificílimos, eles tem uma liberdade muito grande, uma falta de respeito muito grande e a gente escuta muito isso. – começa a fazer uma atividade diferenciada ai o aluno vira bagunça. – o aluno não está acostumado a esse tipo de coisa. – Eu faço trabalho em grupo nada, tu é doida pra começar a gritaria em sala de aula. – porque você não está ensinando ao aluno a trabalhar em grupo, tem que ter o controle, senão depois vai ser mais difícil.*

Ressaltamos nos professores dos anos iniciais, a perspectiva de trabalhar com problemas similares, no entanto a abordagem ocorre de maneiras diferenciadas. O professor PAI_1 não mencionou o procedimento desse trabalho, entretanto o professor PAI_2 mencionou todo o procedimento, trabalhando a partir da resolução de problemas em grupos e na comparação das estratégias explicitadas pelos alunos de modo que possibilite trocas de conhecimentos e discussão entre os pares.

Corroborando com essas propostas, English (2005) adverte que é imperativo nas experiências combinatórias realizadas com alunos, sejam incluídos problemas que variem os contextos, porém de mesma estrutura. Complementa ainda que a inclusão de novas características nessa estrutura pode ser um entrave ao desenvolvimento do raciocínio combinatório e na sua transferência para novas situações problema em Combinatória.

Ainda, o professor PAI_2, apresentou um compromisso com o ato de ensinar, identificando diferentes papeis dos professores, principalmente em relação ao planejamento e escolhas das atividades. Verificamos nesse professor um

conhecimento pedagógico de Matemática, ligado a resolução de problemas com os alunos que está diretamente imbricado com a natureza do ensino de Combinatória.

A seguir apresentamos as considerações dos professores dos anos finais do Ensino Fundamental:

> **PAF_1:** *O Aluno I não terminou...Eu ia fazer feito o Aluno L. Eu ia tentar mostrar com os três pilotos (um azul, um verde e um preto) e tentaria fazer as ligações do que ele fez pra contar o que foi que ele esqueceu. E mostraria que talvez contar situações fosse melhor que listar e escrever todas as possibilidades.*
>
> **PAF_2:** *Ele esqueceu algumas combinações. Ele esta compreendendo a questão, a ideia ele compreendeu, mas parece que a quantidade de elementos que tem 3 saias e 5 blusas eu já vai da um número maior de possibilidades. Ele começa a fazer pelas saias ai, depois ele pega a branca que é uma cor de blusas. Ele compreendeu a ideia de possibilidades. Mas como é um trabalho um pouco desgastante ele acabou pulando algumas possibilidades. O problema de sair escrevendo você tem mais chances de esquecer alguma possibilidade e se for contar aqui não vai chegar a terminar a resposta, mas não quer dizer que ele não compreendeu a ideia do problema.*

Os professores desse nível pareceram entender que o problema do aluno está na estratégia escolhida para resolução e na quantidade de possibilidades para fazer a listagem. Para resolver essa dificuldade, o professor PAF_1 sugeriu a troca de estratégia utilizada pelo aluno, para isso apresentou a estratégia de *árvore de possibilidades,* evidenciada pelo Aluno L.

Nesse contexto, os professores do Ensino Médio, concordaram com os professores dos anos finais em modificar a estratégia utilizada pelo aluno, entretanto parecem sugerir a troca entre pares, ou seja, um trabalho em dupla dos alunos I e J, como vemos, no fragmento abaixo:

> **PEM_1:** *Se o Aluno I tivesse contato com o Aluno J, eu ia dizer assim olha vamos discutir essas duas soluções. Porque se o Aluno I tivesse o zelo que o Aluno J teve, ele teria acertado. O Aluno J está bem organizado, ele pegou o azul e tentou fazer a exaustão com tudo que era blusa em relação a saia azul, ai pegou a outra cor de saia. Enquanto que o aluno I não, ele pegou já azul com bege, já esqueceu a amarela e assim se perdeu...Ele compreendeu que ele tinha dois conjuntos, um conjunto de saia e tinha que combinar um com um. É só o zelo mesmo de organizar bem direitinho, se ele tivesse organizado... Se você olhar a resposta é 15 e ele chegou até 11. Ele chegou muito perto. Se na estratégia ele tivesse um pouquinho mais de zelo, algumas vezes é comum um aluno quando ta resolvendo uma equação de primeiro grau e ele soma equivocado. Teve algum descuido, não teve zelo*
>
> **PEM_2:** *O Aluno I errou. Aqui ele não se organizou e ficou repetindo azul com bege, branco com preto, verde... Ele devia ter feito assim azul com todas as outras possibilidades, depois outro com todas as outras e assim por diante. O Aluno I eu acredito que ele não conseguiu achar a resposta certa. Ele tentou*

> *fazer a combinação da saia com a blusa, mas ai como ele não seguiu uma sequência. Se ele tivesse segurado a azul e combinando com a amarela, branca, beje, vermelha, rosa. Depois ido como o Aluno J talvez ele tivesse mais sucesso.*

Portanto, podemos observar que os professores do Ensino Médio tentavam direcionar o olhar do aluno para a sistematização da enumeração. Esse trabalho de confrontar as estratégias foi ainda enfatizado pelo professor PEM_1, quando comparou as estratégias dos Alunos H, I, J e L, conforme fragmento abaixo:

> **PEM_1:** *Todos os 4 compreenderam que a pessoa ia sair vestindo essas roupas ninguém aparentemente esqueceu de nada. Só que uma (Aluno L) listou como se fosse o diagrama ligando com seta; o Aluno H já fez uma tabela; nós podemos fazer analogias entre um elemento dessa tabela do H e uma seta do L; O Aluno J ficou colocando"o sinalzinho de mais" indicando que é uma mais a outra, ou seja aquilo ali indicava uma opção. Eu acho que só o Aluno I por algum motivo se perdeu. Talvez ele não tenha tido o cuidado se ele tivesse começado assim: azul com amarelo azul com branco....assim bem cuidadoso ai ele tinha chegado até lá, que foi o que o Aluno J fez ai não se perdeu.*

Observamos, nesse comentário a relação entre as diferentes estratégias utilizadas pelos alunos. Essa relação, se trabalhada em sala de aula, pode se refletir no desenvolvimento do raciocínio combinatório. Isso se justifica quando Vergnaud (1991) indica que o raciocínio do aluno consiste não apenas em passar de uma situação real à representação, mas em passar de uma representação à outra e a ela retornar (p.301).

5.3.3.2.4. Compreensão de possibilidades

Os professores dos anos iniciais e do Ensino Médio apenas observam a necessidade da intervenção do professor, em relação a uma listagem sistemática do problema, não mencionam a questão da possibilidade. O professor PAF_1 também parece não entender a noção de possibilidades, conforme observado anteriormente. Portanto, apresentamos as considerações do professor PAF_2 no que diz respeito a análise do protocolo do Aluno N:

> **PAF_2** *Já o Aluno N, apesar de está errado, demonstra que compreendeu, porque ele está organizando. Ele até muda a ordem, que é a lógica da questão, simplesmente a ordem. Só que quando ele vai dar a resposta, ele esquece duas possibilidades e conta como se tivesse contando os elementos. Acho que ele*

> *precisa amadurecer mais para entender realmente o que ele está querendo, para entender as possibilidades. Porque ele conta uma possibilidade como se fosse 3, porque tem 3 pessoas. Acho que ele está começando a entender. Ele entendeu a lógica da questão, mas falta entender o que é que se quer, que é a ideia de possibilidade. Acho que ele está no processo de chegar lá... Talvez se você tentar pegar algumas situações parecidas também resolvendo desse modo, enumerando os elementos e talvez você organizar. Vamos supor [faz uma tabela] na linha escreve situação, elementos e possibilidades. Na situação 1 com 3 elementos dá 6 possibilidades; na situação 2 com 4 elementos dá 24 possibilidades. Já dá trabalho pra fazer. Situação 3 com 2 elementos dá 2 possibilidades. Então fazer assim pegar várias situações e ver que relações que existem entre a quantidade de elementos e a quantidade de possibilidades. Fazer uma generalização. Explorar mais isso pra perceber algumas semelhanças. A gente vai conversando e vai precisar trabalhar bastante essa noção pra que você chegue essa relação de 3 x2x1 ou 4x3x2x1 vai ter que ter uma mãozinha pra poder chegar a isso. Porque inicialmente ele pode pensar 3 x2 pra dá seis, mas quando ele pensa que 4 ele pode pensar que dá 8, porque 4 x2 dá 8. A gente pode ver assim, como é que podemos obter 24 com multiplicação, 4 x6... 4 x2x3....*

Observamos que o professor PAF_2 sugeriu uma ideia recursiva a partir de uma tabela de possibilidades de *permutação*, vejamos a seguir a proposta:

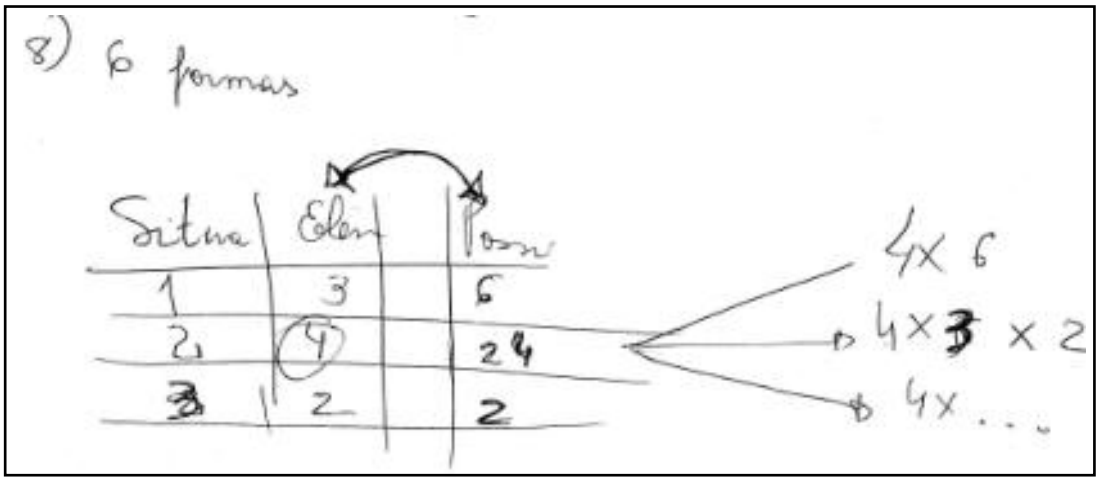


Figura 27: Situação proposta pelo professor PAF_2

Corroborando com a ideia do professor, Batanero et al. (1996) afirmam que as aulas de Combinatória deveriam enfatizar a utilização do raciocínio recursivo dos alunos, ou seja utilizar de uma situação com um número menor de elementos para gerar a próxima. Essa sugestão pode possibilitar a relação entre a listagem e o raciocínio multiplicativo.

5.3.3.2.5. Multiplicação inadequada

A seleção do protocolo apresentado pelo Aluno O, se fundamentou na pesquisa de Pessoa (2009) que apresentou a multiplicação inadequada como uma das estratégias mais utilizadas na resolução do Problema 8, de permutação. Em relação a situações de superação de dificuldades os professores do Ensino Médio e o professor PAI_1 não fizeram comentários.

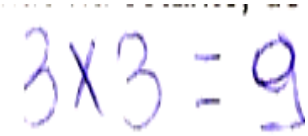
8. De quantas formas diferentes poderei arrumar as fotos de meu irmão, meu pai e minha mãe na estante, de modo que elas fiquem lado a lado?	
ALUNO O 	Multiplicação inadequada Enunciado

Figura 28: Estratégia do Aluno O referente a dificuldade de esgotamento de possibilidades

Vejamos as demais propostas:

> **PAI $_2$:** *No Aluno O eu perguntaria como ele pensou para fazer isso aqui e que outra forma ele poderia responder. Agora teria que ser um trabalho bem planejado pelo professor: uma vez na semana, duas vezes na semana tenha que se deparar com situações problemas assim toda semana em algumas das aulas de Matemática tem que ter resolução de problema. E ai que é mais difícil para o professor, não supervalorizar um conteúdo do outro e esse é um desafio muito grande pra a coisa seja bem distribuída. E ai é que tem que buscar a relação pra que um conteúdo trabalhe outros trabalhos, outros conteúdos. Isso é muito mais fácil nos anos iniciais que ele tem esse poder e não usa.*
>
> **PAF_1:** Para o Aluno O a gente tinha que ver o que foi que ele pensou para depois vê e completar o raciocínio dele com o raciocínio dos outros. Ai perguntar esta faltando alguma coisa e depois ver.

A partir dessas considerações, observamos que os professores acima, embora de diferentes níveis, utilizam a mesma proposta para superação. Notamos, que os professores, sugeriram a elaboração de questões para guiar a descoberta do erro. Evidenciamos ainda, a importância de PAI_2 com o papel da resolução de problemas na aula de Matemática, contrapondo-se ao evidenciado na pesquisa de Curi (2005) que indica a pouca predisposição das alunas-professoras na escolha de diferentes estratégias para a resolução de problemas. Podemos supor que essa

postura do professor PAI_2 se justifica pelas experiências pessoais e profissionais diferenciadas das alunas-professoras que possuíam cerca de 20 anos de experiência de magistério.

> **PAF_2:** *É aquele aluno de Ensino Médio que já viu uma bateria de situações de Combinatória que ele não consegue mais diferenciar as particularidades de cada uma.[...] A gente precisaria confrontar se são nove vamos descrever como ficaria assim como o Aluno M, ele poderia usar essa estratégia do Aluno M porque pode ser uma estratégia mais infantil, mais para o Aluno O é preciso. Porque ele está tão apegado a Matemática da coisa que ele não está respeitando a lógica. Como são poucos elementos ele poderia até perceber que 9 são muitas possibilidades. Talvez ele escrever seja melhor para ele ver que são mais possibilidades do que realmente são.*

A estratégia proposta por PAF_2 apresentou elementos para contrapor a resposta apresentada pelo Aluno O. Portanto, pode proporcionar ao aluno a descoberta do próprio erro a partir da verificação a partir da enumeração e comparação com a estratégia elaborada.

Observamos que os professores dos anos finais do Ensino Fundamental se fundamentaram nas trocas de estratégias entre os alunos e na ideia de resolução de problemas, indicando como estratégia de superação de dificuldades na maioria dos erros superados, a relação entre essa estratégia de ensino e a própria natureza dos problemas combinatórios.

Sistematizando alguns momentos da entrevista organizamos o Quadro 17 representando um resumo das dificuldades mencionadas pelos professores em relação ao ensino de Combinatória, as dificuldades dos alunos e propostas de superação.

Quadro 17: Resumo de dificuldades dos alunos previstas pelos professores nos diferentes níveis e sugestões para superação

Prof.	Fontes de algumas dificuldades dos professores (provenientes do conhecimento do conteúdo e do cotidiano escolar)	Dificuldades previstas para os alunos (conhecimento de Combinatória e alunos)	Sugestões para superação (conhecimento de Combinatória e ensino)
PAI_1	Ausência de um trabalho de problemas combinatórios na Formação dos prof. de pedagogia-	Cópia ou reprodução da mesma possibilidade	Utilização de materiais manipulativos
		Esgotamento de possibilidades	
PAI_2	**Postura da Escola**: Tem que possuir unidade; Trabalho coletivo dos professores; **Natureza dos problemas:** Devem ser trabalhados desde cedo **Postura do Aluno:** Imediatismo; não possui hábito de retomar a resolução; **Postura do Professor do Ensino Médio:** Valorizar a estratégia mais econômica, não considerando igualmente outras estratégias	Compreensão da estrutura do problema de *produto cartesiano*	Intervenção pedagógica: PAI_2: não se pode dá de inicio a autonomia aos alunos; Pode ser formados pequenos grupos para resolução de problemas e socialização das estratégias em sala;
		Compreensão do enunciado do problema de *produto cartesiano*	Retomar enunciado tanto no quadro quanto oralmente
		Inicio de como formar o registro, como elaborar uma estratégia para resolver	Não podemos dá o modelo e sim possibilitar que o aluno crie. O professor deve está acompanhando o aluno
		Sintetizar a estratégia de listagem, daí segue: -visualização de todas as possibilidades; -busca por cópia de possibilidades; -esgotamento de possibilidades	Processo pedagógico que propicie a resolução de problemas para auxiliar na sistematização; Socialização das estratégias diferentes; Apresentar problemas de mesma estrutura ou invés de diversificar
PAF_1	Postura do aluno: Resolver as situações de uma única maneira.	Ampliação da ordem de grandeza	Faz necessária a utilização de fórmulas
		Cópia de possibilidades	Utilizar o diagrama de flechas
		Esgotamento de possibilidades	Apresentar a estratégia do diagrama de flechas e pedir ao aluno para fazer a associação
PAF_2	Trabalho do professor quando: incentiva a memorização em detrimento da dedução Promove resolução de exercícios repetitivos Postura do aluno quando apenas reproduz os modelos apresentados em sala	Repetição de elementos ou não	Exemplificar proporcionando a discussão de outros problemas
		Influência do contexto	
		Interpretação do enunciado	
		Identificar a presença da ordenação ou não nas situações	
		Conseguir passar da estratégia de listagem para uma multiplicação; generalização	Discutir novas possibilidades de resolução; aumentar o número de possibilidades para ser listada *PAF_2: Não se pode chegar direto porque senão perde a graça*
		Definição de possibilidade que o aluno possui	Utilizar a estratégia de tabela de dupla entrada; trabalhar com diferentes situações
		Esgotamento de possibilidades	Apresentar que existem outras possibilidades
PEM_1	- Natureza diferenciada dos problemas combinatórios que exige um raciocínio lógico e dedutivo; - Os alunos que não foram trabalhados desde no Ensino Fundamental, sentem maior dificuldades -Postura do aluno do Ensino Médio, em geral, buscar soluções mais econômicas e rápidas	-diferença entre *arranjo* e *combinação*	Adverte seus alunos sobre a possibilidade de ordenação ou não dos elementos
		-repetição ou não de elementos do conjunto;	Apresenta uma regra: Quando o problema não diz nada em relação a repetição então vale repetir; Discute outros problemas para auxiliar na compreensão
		- contexto social pode vir a influenciar as escolhas na hora de resolução de exercícios	Apresenta para discussão outros problemas para auxiliar
		interpretação textual, entendimento do enunciado da questão	Discute o significado das expressões, o que o problema está querendo dizer
PEM_2	Diferenças entre os problemas combinatórios	Adequação do contexto porque pode facilitar, ou dificultar no momento de resolução de exercícios	Discussão com os alunos
		Aumento do nº de possibilidades, ou da ordem de grandeza dos problemas	Aplicação de fórmulas

5.4. REFLEXÕES SOBRE A AÇÃO DOCENTE ENTRE CONHECIMENTOS DO CONTEÚDO E CONHECIMENTOS PEDAGÓGICOS DE COMBINATÓRIA

Segundo Pimenta (2002) a ação desenvolvida pelos professores envolvida no processo de ensino, mostra-nos uma prática rica de possibilidades e limitações. O professor ao se defrontar com os problemas da sala de aula utiliza os conhecimentos que possui (conhecimento do conteúdo e pedagógico de Combinatória) para escolher a atividade que se adéqua a realidade de seus alunos.

Essa atividade pode ser desenvolvida pelo professor a partir de criação e da organização e sistematização de suas próprias estratégias, no entanto segundo a autora, por ser empírica, falta-lhe uma organização do saber construído, pois a construção do conhecimento requer pesquisa e sistematização desenvolvida em base metódica.

Nessa fase da entrevista apresentamos as ideias de prática identificadas nas falas dos professores. Focalizamos o planejamento da aula, a identificação de recursos pelos professores entrevistados direcionada segundo a atuação nos diferentes níveis.

5.4.1. O que professores falam sobre a aula de Combinatória

Reconhecemos que existem diferenças entre o pensar e o agir e ainda diferenças entre se falar sobre a aula e o fazer a aula.

Essas diferenças refletem nos diferentes aspectos necessários para que uma aula aconteça, por exemplo, a escolha do tipo de abordagem de como iniciar a temática, a quantidades de alunos na sala, os conhecimentos prévios dos mesmos, a metodologia e a escolha de recursos didáticos que possibilitem esse ensino, a avaliação dos alunos e da aprendizagem de cada aluno, a relação professor-aluno-conhecimento, os contratos didáticos estabelecidos ou implícitos, a reflexão sobre a ação de dar aula, entre outros.

Assim ao questionamos os professores sobre o planejamento de suas aulas, não esperamos que indicassem todos os elementos e sim que identificassem que aspecto da aula de Combinatória seria priorizado pelo professor. Portanto, organizamos o Quadro 18 no qual sintetizamos seus comentários.

Quadro 18: Sinopse de análise das ênfases dadas em aulas de Combinatória

NÍ-VEL	ANÁLISE	FRAGMENTOS DAS ENTREVISTAS
ANOS INICIAIS DO EF.	Os professores enfatizaram no início o material concreto, as diferentes estratégias e não mencionaram conceitos de Combinatória	**PAI_1:** Eu acho que se você trabalhar com a questão do material concreto de imagem faz com que a abstração deles seja mais rápida. Explorar as possibilidades, o trabalho com a legenda, para que o aluno ele saiba o que o problema está pedindo. A gente tem que ficar muito atento ao comando ... A gente sabe que todos os aluno não são iguais, você vê as estratégias diferentes, as possibilidades, o uso do pensamento e ainda da criatividade **PAI_2:** Eu acho que a questão que é mais significativa seria o professor poder possibilitar uma reflexão autônoma do aluno, nessa determinada situação e ele poder retomar, esquematizando as atividades com os alunos. É fundamental isso. E a utilização de material concreto também inicialmente. E até aluno de 5º ano que tem dificuldade, porque vai ter aluno com dificuldade, mesmo que você trabalhe, que a escola trabalhe com esse objetivo e você vai ter usar de todas as estratégias do mundo para fazer com que ele chegue lá. É fundamental também ouvir o aluno sobre o problema, trabalhar o enunciado, mostrar o enunciado e fazer uma leitura com os alunos refletindo esse enunciado, fazendo uma reflexão de inicialmente como eles resolveriam isso.
ANOS FINAIS DO EF.	Observaram a questão do conteúdo de Combinatória: o princípio multiplicativo e possibilidades. A noção de contexto também foi enfatizada por PAF_1	**PAF_1:** Eu tentaria fazer assim considerar o que ele usa no dia a dia dele apesar de ser hipotético. Por exemplo: se a gente estivesse com dinheiro e fosse lanchar no Mc Donalds agora. E tivessem algumas opções de hambúrguer e outras opções de refrigerante. Vamos dizer que seja na cantina da escola hoje tem arroz, feijão, macarrão, galinha ou carne o que é que você pode escolher para seu prato? Só pode escolher 1. Depois eu usaria o princípio multiplicativo. **PAF_2:** Acho que enfatizaria a ideia de compreender o que é possibilidades, porque parece que é um pouco complicado de entender. Eles associam muito possibilidades com coisa real. Então eles têm essa dificuldade de entender que a possibilidade não quer dizer de fato que tem que ser todos e sim que pode ser ou não. Porque se ele consegue entender essa possibilidade então ele vai decolar
ENSINO MÉDIO	Enfatizaram aspectos referentes ao conteúdo de Combinatória Princípio multiplicativo, questões clássicas; Natureza diferenciada da Combinatória Uso de jogos e roleta, contexto, dificuldade de diferenciar problemas	**PEM_1:** Olha a título de conteúdos eu procurei trabalhar com eles a parte do princípio multiplicativo,permutações, *arranjo* e combinações, tudo sem repetição, nada de circular, sem repetição, tudo simples como a gente chama *arranjo* simples e *combinação* simples.[..]Outro aspecto que eu tentei enfatizar são aquelas questões que eu costumo apelidar de questões clássicas. E o próprio vocabulário, o que é um anagrama que é um vocábulo da língua portuguesa que só aparece na Matemática na Análise Combinatória. É o único local. As questões clássicas como placas de carro, de anagrama, as estradas com cidades que vai e vem com situações diferentes; aquelas outras de comissão que também são na parte de *arranjo* e *combinação* são as que mais evidencio. **PEM_2:** Primeiro esse assunto de Combinatória e jogos a gente vê reportagens, tem gente que ganha em jogos utilizando isso. Primeiro colocaria essa ideia de jogos numa questão social, hoje muito utilizado em concursos. E é um assunto que está bem conectado a problemas da realidade. Isso seria enfatizado. Agora, uma coisa que eu lembro é perceber que é um assunto que tem coisas semelhantes, próximas e ao mesmo tempo diferentes. São estratégias diferentes de resolução então é um assunto que tem diferentes situações para serem propostas. Às vezes você pensa que é um *arranjo* e é uma *combinação*; você pensa que é uma *permutação* e é outra coisa mais arrojada.

Observamos que a ênfase dos professores dos anos iniciais foi colocada no desenvolvimento do conceito pelo aluno utilizando recursos didáticos e as diferenças entre os alunos nas estratégias utilizadas. A busca é pela autonomia do aluno na resolução de problemas, pois como diz Freire (1998) ensinar exige respeito a autonomia do educando. Nessa direção para ensinar a Combinatória é imprescindível que o professor respeite essa autonomia de escolha das representações e procedimentos de enumeração em todos os níveis.

Concordando com a ênfase nas diferentes estratégias Pessoa e Borba (2009) defendem que a escola esteja atenta as diferentes formas de *representação* apresentadas pelos alunos, pois estas conjecturam os diversos modos de pensar sobre um mesmo problema. As autoras ainda refletem que sobre o papel da escola em aproveitar as estratégias desenvolvidas para auxiliá-los na construção da compreensão dos diversos tipos de problemas e no seu desenvolvimento conceitual.

Notamos ainda, que os professores de formação em Matemática enfatizavam os conceitos como a compreensão de possibilidades e a diferenciação dos problemas combinatórios, ainda a utilização na resolução dos problemas combinatórios o uso de princípio multiplicativo. A noção de contextualização buscando situações da realidade dos alunos e dos jogos também é mencionada, porém não explicitadas.

Ainda em relação à aula de Combinatória os professores teceram considerações sobre a forma que iniciam essa temática:

> **PAI_2:** *Inicialmente também com relação à forma dessa análise Combinatória, a professora tem que ter muito mais intervenção nessa turma de primeiro ano pra questão da forma que vai fazer esse registro eu acho. Vai ter que dá, não é dar o modelo ao aluno, é trabalhar o aluno para ele criar sua autonomia. Então inicialmente o professor tem que esta muito junto do aluno para esse trabalho se desenvolver bem. Porque até a gente quando vai fazer se atrapalha, passa um tempo olhando aqui outro ali. Tem que ter uma estratégia maior de calcular mentalmente e isso não quer dizer que a gente tenha muita facilidade não. Tem que ser um trabalho bem pensado, bem desenvolvido na escola com crianças pequenas mesmo, porque se isso for trabalhado La posteriormente a coisa muda e esse bicho papão da Matemática é visto de outra forma. Não só para esse conteúdo de análise Combinatória, mas pra todas as outras questões. Eu acho que esse conteúdo é básico pra questão da evolução do raciocínio lógico, o raciocínio da estratégia, da sistematização e da capacidade de síntese e de agrupamento dos alunos.*

Observamos que é primordial nessa consideração o papel do professor, em escolher as atividades, acompanhar o processo de sistematização e registro dos alunos. Parece se preocupar com o desenvolvimento de cada aluno.

> **PAF_2:** *Eu utilizaria quase tudo, eu iniciaria com as estratégias do Aluno B e G. Enfatizaria depois bastante a estratégia do Aluno E que consegue trabalhar com a ideia de compreender as possibilidades como a ideia de economizar tempo, usando a estratégia de calculo da multiplicação. Depois a partir de um amadurecimento já puxar para uma estratégia do tipo do Aluno C e Aluno F fizeram....Acho que depois de você ter trabalhado com diversas situações e eles compreendem a ideia de possibilidade. Acho difícil toda vez você ter que ficar enumerando toda situação, até porque tem situação que fica complicado. No final de tudo eu chegaria com as estratégias dos alunos C e F*

Observamos que esse professor se fundamentou nos protocolos da entrevista para propor a atividade inicial e descreve um caminho para o desenvolvimento de uma aula em Combinatória. Mas a ideia de possibilidades e de economizar tempo são destacadas. Percebe-se na sua fala uma idéia de aceleração do processo de aprendizagem, o que nos leva a supor que as etapas de compreensão pelo aluno são minimizadas em função do processo de ensino. Percebemos a dicotomia entre o processo de aprender e o processo de ensinar, que apesar de serem o mesmo processo tem suas especificidades.

> **PEM_1:** *Como eu começo minhas aulas de Análise Combinatória, um exemplo. Olha você tem 4 calças e 3 camisas e você quer sair vestindo as 4 calças e as 3 camisas. Quais são as opções diferentes? Ah é assim e vamos começar discutindo. Outro momento. Se você tem as 4 calças e 3 camisas . De quantas formas diferentes você pode sair vestindo as 4 calças* ***ou*** *as 3 camisas? Já começo a fazer essa coisa das preposições E e OU que permeia muito o princípio aditivo e o princípio multiplicativo. Para eles começarem a ir se acostumando a no inicio eles vão pegando. Ai depois a gente tem que ir sofisticando, ai vamos passar, pegando as permutações com as placas de carros vamos pegar os concurso. Ai eles ih rapaz o senhor começou simples e agora já ta ficando complicado. Mas é assim a gente tem que começar a fazer uma construção pra chegar até um nível mais apurado, um nível um pouco mais evoluído a nível de estrutura mesmo de pensamento deles. Porque eles não vão ficar só enfrentando questões de saia e blusa infelizmente, vai de repente se parar com coisas mais elaboradas. Como por exemplo, você tem 5 homens e 5 mulheres pra formar comissões ai você tem que escolher tanto de homens e tanto de mulheres e fulano tem que estar. São questões mais elaboradas e eles têm que pegar isso tudinho e tentar sair do canto, esquematizar.*

O professor propôs um processo baseado no nível de dificuldade dos problemas combinatórios, no qual priorizou ou pareceu priorizar apenas o conteúdo a ser vivenciado se detendo aos tipos de problemas. Priorizo as regras prontas

(princípio aditivo (ou) e princípio multiplicativo (e)) e indica que a aprendizagem tem que vir do aluno, mas não apresenta nesse momento situações que possibilitem essa construção. Vale salientar Morgado et al.(1991) consideram importante a utilização desses dois princípios (aditivo e multiplicativo) no ensino de Combinatória

Observamos como as diferentes realidades dos níveis de escolaridade modificam as propostas de intervenção e principalmente a postura que professores assumem diante da aula e do conteúdo. Parece-nos que, a especificidade da formação, e o modelo que é adotado pelos professores na universidade, interferem de forma decisiva nas práticas dos professores da escola básica. A vida acadêmica, os exemplos da forma como foi ensinado este ou aquele conteúdo, parece interferir no momento de decisão sobre a estratégia a ser utilizada. Associado a isto se somam o domínio do conhecimento do conteúdo e o conhecimento do ensino, que surge como um desafio na construção dessas aulas.

5.4.2. Sobre a utilização de recursos didáticos

A utilização de recursos didáticos pode proporcionar o interesse e participação dos alunos no trabalho do professor e tornar as aulas mais significativas ao ensinar Combinatória. O panorama de pesquisas sobre os recursos didáticos apresentam algumas propostas. Costa (2003) defende que é possível criar situações com a utilização de materiais manipuláveis e a utilização de grupos que possibilitem a construção do raciocínio combinatório em alunos de 7 e 8 anos. Outra proposta de recurso para o ensino de Combinatória é evidenciada por Sandoval, Trigueiros e Lozano (2007) a partir da utilização do software *Diagrama de Arbol.*

As questões a seguir tratam sobre diferentes tipos de recursos didáticos para o ensino de Combinatória, vejamos o que dizem os professores.

> **PAI_1:** *Olhe eu acho que se você trabalhar com a questão do material concreto de imagem faz com que a abstração deles seja mais rápida. Explorar as possibilidades, o trabalho com a legenda, para que o aluno saiba o que o problema ta pedindo..[...]. O professor não usava no seu cotidiano explorar pra poder numa prova ele solicitar um comando numa prova que ele não dava.*

> **PAI_2:** *Você pode pedir também inicialmente que o aluno ele resolva só com aquele concreto e depois você vai para o papel para vê o que ele está pensando a relação desse concreto e a esquematização da escrita. Também é uma estratégia boa. Inicialmente esse concreto vai ser muito forte depois você vai eliminando aos poucos, utilizando outras estratégias.*

Observamos nos professores dos anos iniciais a presença da utilização dos materiais manipulativos para auxiliar na abstração dos alunos. PAI_2 atenta também para o trabalho do registro para auxiliar ao aluno, concordando com Costa (2003) No entanto apresentam propostas que se adéquam a qualquer resolução de problemas.

Nesse contexto, Ma (2009) chama a atenção para as atividades propostas envolvendo materiais manipuláveis por que

> "os alunos levantam questões que poderão levar a uma compreensão mais profunda da Matemática. A concretização do potencial de aprendizagem de tais questões pode ainda depender em grande parte da qualidade do conhecimento dos professores sobre a matéria" (p.69).

Semelhante aos professores dos anos iniciais, o professor PAF_1 também se deteve nos materiais manipulativos, no entanto pareceu ser diretivo na proposta quando comentou:

> **PAF_1:** *A ideia que seria boa é utilizar as tampinhas de garrafa pegaria tampinhas de certo tipo para representar a mãe, o pai e o irmão. Poderia usar garrafinha, palitinhos e copinhos para ajudar eles se fosse usar no 5º ano ou 6º ano no máximo. Fora isso eu já ia puxar para abstração, ia usar o lápis mesmo e sair escrevendo feito o Aluno M fez. Uma tampinha seria o irmão, outro tipo o pai, outro tipo a mãe pra eles irem fazendo as permutações. Mostraria para eles como fazer com o material concreto.*

Em contrapartida ao afirmado pelos professores acima PAF_2 indicou a necessidade de pensar sobre a utilização de materiais manipuláveis, como apresentou a seguir:

> **PAF_2**: *Fica até complicado de a gente trabalhar com um material palpável. Estava até pensando quando a gente estava falando da tabelinha, porque se você pegasse um material palpável fica até complicado porque digamos se a saia azul vai combinar com a blusa preta e depois eu pegaria a saia azul pra combinar coma blusa verde. Se eu pegar várias saias azuis pode até distanciar a ideia de possibilidade. Acho assim, fica parecendo que desenhar num papel é mais interessante do que ter a figurinha da blusa. Porque assim corre o risco de você pegar uma representação de blusas e saias de cada cor e mostrar blusa azul com saia branca ai desmancha essa possibilidade para fazer outra aí poderia perder. Pode ser que não compreenda essa ideia e na tabelinha não fica o desenho e fica fixo. A não ser que ele vá anotando cada vez que fizer. Mas eu não conheço não nenhum material, nenhum joguinho ou algum material. Não me lembro de ter visto nada nos livros. Tem alguns conteúdos que a gente uma gama de material para trabalhar e tem outros que não.*

Portanto, é cauteloso quanto à utilização desses materiais relativo à ideia de possibilidade, os registros das mesmas. Podemos identificar a ênfase dos conceitos em jogo, ou seja, parece ser devido ao conhecimento de Combinatória do professor.

> **PEM_1** *Não utilizo nenhum material para esse assunto. Que eu lembre para Análise Combinatória, não. Seria até um desafio interessante se a gente conseguiria vê alguma coisa nesse sentido. A gente até utiliza às vezes os assuntos de Combinatória para outros tópicos já como base. Por exemplo: a fórmula da diagonal de polígonos você pode fazer aquilo com fórmulas de Análise Combinatória, pega os pontos faz a combinação e subtrai do número de lados. Agora de Análise Combinatória eu não lembro.*
>
> **PEM_2:** *Eu conheço em nível elementar uma roleta, o trabalho com jogos. Mais eu nunca utilizei, sempre utilizei o livro didático eu não vou mentir*.

Observamos que na prática do Ensino Médio os recursos didáticos são menos utilizados, talvez pela ênfase aos problemas combinatórios.

Ressaltamos, portanto, que poucos materiais manipulativos são pensados para o ensino de combinatória. O recurso de utilização de jogos de azar incentivado pelo próprio histórico de Combinatória, mesmo indicado pelo professor PEM_2 afirmou nunca tê-los utilizado como fonte de debate.

Outro aspecto evidenciado é a dificuldade ao acesso das informações e a divulgação sobre pesquisas que nem sempre chegam aos professores que ensinam Matemática E mesmo gerando comentários os professores dos anos iniciais não explicitaram como utilizam os recursos (se como suporte ou mobilizador de discussões sobre).

Em relação aos livros didáticos, utilizaram, os mesmos como suporte na escolha das questões. Como vimos anteriormente apesar de está presente nos livros didáticos dos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental, os problemas combinatórios não são comuns a todas as coleções, ficando a critério do autor do livro e do professor o ensino de Combinatória

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Chegar nessa etapa da pesquisa significa que afinal podemos tecer considerações sobre o que a imersão nesses dois anos de estudos, nos possibilita responder: Que conhecimentos os professores que ensinam Matemática *no Ensino Fundamental e Médio têm de Combinatória e seu ensino?*

Compreendemos que a maneira como enfrentamos as diferentes situações depende, e muito, do conhecimento que possuímos das mesmas. É nesse sentido que consideramos de extrema importância que na formação de professores estes sejam preparados para enfrentar os desafios do processo de ensinar e aprender.

Nesse contexto, os dados revelaram características do *conhecimento de problemas combinatórios dos professores* e do *conhecimento pedagógico de Combinatória* nos diferentes níveis, pontuando aspectos sobre as *orientações curriculares*, os problemas de maior *dificuldade*, estratégias de ensino privilegiadas, a possibilidade de superações das dificuldades apresentadas e sobre a utilização de recursos didáticos.

Em relação ao conhecimento de Combinatória, eles demonstraram inicialmente que os professores dos anos iniciais entrevistados não utilizam a nomenclatura dos problemas combinatórios, os separam devido à forma do enunciado e ressaltam possibilidades interdisciplinares do trabalho com a Combinatória. No entanto, um professor dos anos iniciais (PAI_2) pareceu entender aspectos da estrutura do problema de *produto cartesiano*.

Por outro lado, os professores dos anos finais entrevistados não utilizam as nomenclaturas dos problemas, mas parecem diferenciar os aspectos de sua estrutura (ordenação e repetição), enquanto os professores do Ensino Médio entrevistados utilizam nomenclaturas usuais e ainda separam a partir das estruturas dos tipos de problemas, revelando aspectos de sua formação e/ou experiência.

Identificamos ainda que quase todos os professores participantes apresentaram dificuldades na diferenciação de problemas de *arranjo* e *combinação,* tanto na leitura do enunciado do problema, quanto na correção de estratégia do aluno, confundindo quando o invariante do conceito *ordenação*, implica, ou não, em possibilidades distintas, o que identifica uma lacuna no domínio desse saber.

As diferenças de conhecimento do conteúdo explicitadas pelos professores de Matemática dos anos finais e do Ensino Médio são indicativas de conhecimentos adquiridos na experiência, como evidencia Shulman (2005), pois nos anos finais não há ensino extensivo de Combinatória, como existe no Ensino Médio.

Identificamos nos professores a importância dada ao exercício de sua função, pois na preparação e/ou planejamento das aulas de Combinatória os professores entrevistados, em particular os dos anos finais, ressaltam que nesse momento percebem a importância e necessidade do domínio do conteúdo e sua relação com o domínio pedagógico do conteúdo, o saber e o saber ensinar, pois pensam que o momento de dar aula foi imprescindível para a compreensão do conteúdo de Combinatória.

Sobre as orientações curriculares referentes ao ensino de Combinatória, os entrevistados defenderam que este pode ser iniciado muito antes do Ensino Médio, concordando com o que indicam os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) e a Base Curricular Comum de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2008) e discordando da atual prática de sala de aula na qual os problemas combinatórios como *arranjo*, *combinação* e *permutação* só são introduzidos a partir do 2º ano do Ensino Médio.

Constatamos também que os professores, de acordo com os diferentes níveis, indicam a necessidade de alguns requisitos para o trabalho no nível anterior. Por exemplo, na Educação Infantil indicou-se a necessidade de recursos didáticos tais como músicas, rimas, que tornem mais atrativo esse desenlace de ensino.

Os professores de outros níveis de ensino enxergaram outras necessidades: professores dos anos finais indicaram ser necessário pelo menos o conhecimento da multiplicação, enquanto que os do Ensino Médio indicaram trabalhar apenas com o *produto cartesiano* nos anos finais do Ensino Fundamental, pois a compreensão dos outros problemas é mais difícil. Notamos uma convergência de opiniões, pois esses professores acreditam haver a necessidade de algum pré-requisito, mas esses pré-requisitos são distintos, por nível de ensino.

A pesquisa revelou que professores de Matemática de mesma formação e de experiência em diferentes níveis indicaram o princípio multiplicativo como estratégia positiva na resolução de problemas combinatórios, o que concorda com Sturm (1999) e BCC (PERNAMBUCO, 2008).

Na análise de estratégias dos alunos, os professores apresentaram justificativas pontuais e concernentes ao domínio da construção de conceitos, como defendido por Vergnaud (1991). Indicaram invariantes do conceito – como a repetição de elementos e a ordenação dos mesmos – ressaltaram as representações simbólicas dos alunos – como a utilização de tabelas, árvores de

possibilidades e linguagem natural – e, ainda, pontuaram a necessidade de situações que promovam a escolha de estratégias de resolução de problemas combinatórios vinculadas aos níveis de ensino nos quais os alunos se encontram.

Vimos também que as estratégias de resolução priorizadas pelos professores dos diferentes níveis parecem ser decididas a partir da concepção que eles têm do problema quanto ao nível de dificuldade e das suas expectativas em relação aos seus alunos, pois mesmo professores do mesmo nível de ensino escolhem estratégias diferenciadas.

Nos anos iniciais, os professores, em relação ao *produto cartesiano*, apontam como estratégias o uso da listagem, das tabelas e da árvore de possibilidades. Os professores dos anos finais priorizam a tabela de dupla entrada e a árvore de possibilidades. No Ensino Médio preferem a apresentação do princípio multiplicativo.

Em relação aos problemas de maior dificuldade, os professores de formação em Matemática indicaram que o problema combinatório de maior dificuldade é o de *combinação*, confirmando os resultados da pesquisa de Pessoa (2009). No entanto, os professores dos anos iniciais apontaram que o problema mais difícil é o de *produto cartesiano*, contrariando a citada pesquisa em relação a esse nível de ensino, uma vez que seus resultados indicam ser os de *permutação.* Vale a pena ressaltar que os professores dos anos iniciais estão corretos ao afirmarem que o produto cartesiano é um problema multiplicativo complexo, mas não é o mais complexo dentre os problemas combinatórios.

A pesquisa ainda assinalou em relação à condução de um trabalho que permita à compreensão do desenvolvimento do raciocínio combinatório pelos alunos, ser necessário maior nível de conhecimento das estruturas combinatórias, das estratégias evidenciadas e do conhecimento dos alunos. Evidencia-se nesse caso os quatro domínios essenciais para o conhecimento do ensino indicados por Ball et al (2008), ou seja, para avaliar corretamente uma estratégia do aluno se faz necessário o conhecimento do conteúdo, mas também o conhecimento do aluno e sua compreensão, como salientado por PAI_1. Muito fortemente evidenciou-se que para entender o erro do aluno faz-se necessária a utilização daquele domínio de conteúdo designado por Ball et al (2008) de conhecimento do conteúdo especializado.

Contudo, para propor situações de superação não adianta somente o conhecimento do conteúdo, faz-se necessária a visão do todo que se quer chegar.

Enxergar o aluno e sua necessidade, entender que tipo de erro ocorre e por que ele está cometendo tal erro.

Mais do que buscar do aluno o que ele está pensado no problema, precisamos manter o diálogo com ele. A estratégia evidenciada por PAI_2 de resolução de problemas pode ser uma alternativa para manter esse diálogo. A troca entre elementos de diferentes representações dos alunos pode ser outra (PEM_1), mas é preciso pensar antes (planejar) e essa reflexão pode vir dos professores quando na formação inicial e, ainda, sistematizada na formação continuada dos professores que ensinam Matemática.

Portanto, o formato dado para os cursos de formação parece ser um fator decisivo nas escolhas de suas práticas. Por exemplo, se aprendo a ensinar em um ambiente democrático, tenderei a ser democrático quando for ensinar. Uma sugestão para formação de professores é que essas propostas de superação de dificuldades dos alunos sejam discutidas com futuros professores e professores em exercício, proporcionando momentos de análise e reflexão sobre o ensino de Combinatória.

Reforçando a ideia acima, em um dado aparentemente contraditório, identificamos na fala de PAI_2, quando indagado sobre estratégia de superação para o Aluno N, evidencia que o ser professor, mesmo quando este está imerso em um domínio de conteúdo específico superficial, permite-lhe indagações, tecer considerações e mesmo indicar práticas para o ensino desse conteúdo. Novamente há indicativos de um conhecimento surgido a partir da prática, um saber da experiência.

O acima exposto, nos remete ao pressuposto sobre as influencias da formação inicial e das experiências vividas para o ensino de Combinatória. Nesse sentido, verificamos que *professores que atuam nos anos iniciais*, geralmente, possuem uma formação inicial menos aprofundada em relação ao conteúdo de Combinatória. Dessa maneira, abordam os problemas combinatórios de modo mais superficial (sem diferenciar características específicas dos problemas combinatórios), no entanto, sugerem atividades que utilizam recursos variados (contextos diferenciados, relações entre outras áreas, materiais manipulativos, resolução de problemas e socialização das estratégias criadas pelos alunos).

Ainda, *professores dos anos finais do Ensino Fundamental e do Médio,* valorizam aspectos mais formais em relação aos problemas combinatórios

(ordenação, repetição, possibilidade, princípio multiplicativo), vivenciados geralmente em suas formações ou em livros didáticos e propõem atividades menos variadas (variação de contexto, resolver “questões clássicas”, o recurso aos jogos, regras para facilitar a compreensão dos problemas).

Se tivéssemos que escolher um momento de nossa pesquisa que resuma o todo de nossa problemática, talvez seja aquele em que, quando da nossa indagação sobre o papel do professor no ensino de Combinatória, já no final da entrevista, o professor PEM_1 como que ratificando a essência do ser e para que ser professor, envereda por uma série de considerações apropriadas ao nosso ver, como descrito a seguir.

> **PEM_1:** No nível da natureza dos conteúdos matemáticos, as situações problemas se apresentam enquanto desafios para gente. O professor está ali no mínimo para saber o que deve propor. De que adiantaria nós chegarmos e na primeira aula de Análise Combinatória o professor passasse um problema de um nível mais avançado? O aluno não ia ter suas estruturas cognitivas, não ia sofrer nada. - O que é isso aqui? Eu era para saber disso? [...] Por outro lado também, a gente não pode vir só sempre com questão mais simples. Até porque no nível de Ensino Médio, eu comento com eles que daqui a pouco eles estão para vida, para os concursos públicos e isso não é fácil. Não é difícil, nem bicho de sete cabeças. Mas tem que ter uma postura de pontualidade, de assiduidade e de compromisso com as coisas que você faz. A vida vai te cobrar isso depois. Você depois, vai querer cobrar das pessoas compromisso.

Nesse depoimento vê-se o desafio do ser professor. O professor vivencia o conflito de decidir: O que é melhor e como é melhor chegar ao aluno? Como atender as cobranças dos alunos, da natureza dos problemas combinatórios, da escola, da aula, da vida? Quem pode auxiliar o professor nessa tarefa? A escola? Os livros didáticos? A formação inicial? A formação continuada? A pesquisa sobre sua prática? Os pesquisadores? A troca de experiência entre pares?

O professor diante de sua tarefa, da sua responsabilidade pela aprendizagem de alunos e pelo o conteúdo, se preparando para questões sobre as quais pensa que sua formação não foi suficiente e que ele tem que assumir a responsabilidade, pergunta-se: O que aprendi? Como aprendi o conteúdo? O que vai me dar condições de saber como transpor esse conteúdo para que promova o interesse e desafio para o aluno em construção? Esse conteúdo não se refere apenas aos conceitos, mas também aos procedimentos que se tornam necessários no desenvolvimento e na identidade do ser docente. Como articular esses

conhecimentos de forma que possa atender de fato à realidade do processo de aprendizagem?

Tudo isso, nos leva a confirmar a complexidade da formação do professor que ensina Matemática e reforçam a necessidade de:

- ✓ Pesquisas acadêmicas no que tange os domínios de conhecimentos matemáticos indicados por Ball et al (2008) necessários à função de ensino;
- ✓ Ressignificar a prática docente a partir dos cursos de formação, priorizando a análise e discussão da própria prática dos professores formadores;
- ✓ Instrumentalizar os cursos de formação inicial e continuada na construção de estratégias que fomentem a necessidade da pesquisa como meio de intervenção nas próprias ações de ensino e os recursos didáticos utilizados;
- ✓ Compreender a influência que cada conteúdo traz para o processo de seu ensino e, vice-versa, entender que contribuições o ensino de um conteúdo matemático traz para o conteúdo propriamente dito.

Por fim, é preciso ressaltar a dimensão humana do ensino de Matemática, no sentido de priorizar as necessidades determinadas pelos alunos, possibilitando-os conviver e transformar o meio que os cerca.

REFERÊNCIAS

ANFOPE. Documento final do X Encontro Nacional da Associação Nacional dos Profissionais da Educação. Brasília, 2000.

ALBUQUERQUE, A.G.; SILVA, J.V.G. Analisando questões em livros didáticos de Matemática de séries finais do Ensino Fundamental, acerca do raciocínio combinatório. In: **Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática**: Salvador, 2010.

BALL, D.L. Research on teaching mathematics: making subject matter knowledge part of the equation. In: BROPHY, J. (Ed.) **Advances in research on teaching***:* Teachers' subject matter knowledge and classroom instruction*.* Greenwich, CT: JAI Press, 1991.V.2. pp.1- 47. Disponível em: http://www.teo-education.com/teophotos/albums/userpics/10_1_1_118_4400.pdf

BALL, D.L.; THAMES, M.H. e PHELPS, G. Content Knowledge for Teaching: what makes it special? In: **Journal of teacher educacion**. 2008 v.59 n.5 pp. 389-407. Disponível em: http://jte.sagepub.com/content/59/5/389

BARRETO, F.; AMARAL, F. & BORBA, R. Como o raciocínio combinatório tem sido apresentado em livros didáticos de séries iniciais. **Caderno de Trabalhos de Conclusão de Curso de Pedagogia.** Recife: UFPE, 2007 v. 2, p. 1-21.

BATANERO,C.; GODINO, J. & NAVARRO-PELAYO, V. **Razonamiento combinatorio**. Madri: Ed. Sintesis, 1996.

BELFORT, E. Reflexões sobre o Papel do Livro Texto em Matemática: um Carcereiro ou um Bom Companheiro? **Anais do XI Congresso Inter-Americano de Educação Matemática**. Blumenau: FURB-CIAEM, 2003.

BELLHOUSE, D.R. Bellhouse D.R. De Vetulla: a medieval manuscript containing propability calculations. In: **International Statistical Review**, 68/2, 2000, pp. 123-136

BOGDAN, R; BIKLEN, S.; **Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos**, Porto: Porto Editora, 1994

BORBA, R. O raciocínio combinatório na educação básica. In: **Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática**: Salvador, 2010(Palestra).

BORBA, R; ROCHA, C.A.; MARTINS, G.V. & LIMA, R. O que dizem estudos recentes sobre o Raciocínio Combinatório. **Anais do X Encontro Gaúcho de Educação Matemática**, Ijuí, Rio Grande do Sul, 2009.

BORBA, R. & GUIMARÃES, G. A formação continuada de professores de séries iniciais pela e para a pesquisa. **Cadernos de Estudos Sociais**, Vol 22, no. 2, jul/dez, 2006, pp. 179-198

BRASIL. CNE. CP. Lei nº 9394, 20 de dezembro de 1996.

____. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais,** 3 Matemática. Brasília: 1997.

____. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

____. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Referencial curricular nacional para educação infantil**. Brasília: MEC/SEF,1998a. V.3

____. Secretaria da Educação Básica. **Referenciais para a formação de Professores**. Brasília: MEC, SEB, 1999.

____. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)**. Brasília: MEC, 2000.

____. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais+ (PCN+)** – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2002.

____. Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, Vol 2, Brasília: SEF/MEC. 2006

____. Ministério da Educação. **Guia de livros didáticos** PNLD 2008 : Matemática / Ministério da Educação. — Brasília: MEC, 2007. (Anos Finais do Ensno Fundamental)

____. Secretaria de Educação Básica. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. **Matemática: catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio:** PNLEM/2009. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2008.

____. Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica. **Guia de livros didáticos**: PNLD 2010: Alfabetização Matemática e Matemática. Brasília: MEC, SEB, 2009.

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. In **Recherches en Didactique des Mathématiqu**es. Vol 7, nº 2, p. 33-115 Grenoble, 1986.

CARVALHO, J.I.F. Análise das habilidades em problemas de Combinatória nos livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental. . In: **Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática**: Salvador, 2010.

CHEVALLARD, Y. **La Transposícion didática, del saber sábio al sabel ensinãdo**. Buenos Aires: Aique, 1991.

COSTA, C.A. **As concepções dos professores de Matemática sobre o uso da modelagem no desenvolvimento do raciocínio combinatório no Ensino Fundamental**. São Paulo, 2003, 151f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2003

CURI, E. **A Matemática e os professores dos anos iniciais**. São Paulo:Ed. Musa, 2005.

DELANEY, S; Ball,D .L; Hill,H.C; Schilling,S.G. ,& Zopf,D. Mathematical knowledge for teaching: Adapting U.S. measure for use in lreland. **Journal Mathematics Teacher Education**, 2008, 11 (3), 171-197.

DUBOIS, J.G. Une systématique des configurations combinatoires simples. **Educational Studies in Mathematics**, 1984 v. 15, n. 1, pp. 37-57.

DUROUX, Alain. La valeur absolue: difficultés majeures pour une notion mineure. **Petit x** nº 3, IREM de Grenoble, 1983.

ENGLISH, l. D. Combinatorics and the development of Children's Combinatorial Reasoning. In: JONES, G. A (Ed) **Exploring Probability in School**: Challenges for Teaching and Learning. New York: Springer, 2005.

ESTEVES, I. **Investigando os fatores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos**-8º série do Ensino Fundamental. Dissertação de Mestrado, Pontifica Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), São Paulo, 2001.

EVES, H. **Introdução a história da Matemática**. São Paulo: Ed.da Unicamp, 2004

FERREIRA, A.C. Um olhar retrospectivo sobre a pesquisa brasileira em formação de professores de Matemática. In: FIORENTINI, D. (org) **Formação de professores de Matemática:** explorando novos caminhos com outros olhares. Campinas, São Paulo: Mercado de Letras, 2003.

GARCIA BLANCO, M.M. A formação inicial de professores de Matemática: fundamentos para a definição de curriculum. In: FIORENTINI, D. (org) **Formação de professores de Matemática:** explorando novos caminhos com outros olhares. Campinas, São Paulo: Mercado de Letras, 2003.

GAUTHIER, C. **Por uma teoria da pedagogia**: pesquisas contemporâneas sobre o saber docente. Trad. Francisco Pereira. Ijuí: UNIJUÍ, 1998. (Coleção fronteiras da educação).

GOMES, M.L.M. **Quatro visões iluministas sobre Educação Matemática:** Diderot, d'Alambert, Condillac, Condorcet. 2003. Tese (Doutorado em Educação) FE, Unicamp.

GÓMEZ-CHACÓN, I.M. Cuestiones afectivas em La enseñanza de lãs Matemáticas: uma perspectiva para el profesor. In: CONTRERAS, L; BLANCO, L. (org) **Aportaciones a la formación inicial de maestros en el área de Matemáticas**: una mirada a la práctica docente. Cáceres: Universidad de Extremadura, 2002. pp.23-58

GROSSMAN, P.L.; WILSON, S.M.; SHULMAN, L.S. Profesores de sustancia: el conocimiento de la materia para la enseñanza. ***Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado****, 9, 2 (2005)*

GUERRA, I.C**. Pesquisa Qualitativa e Análise de Conteúdo:** sentidos e formas de uso. São Paulo: Principia, 2006.

HILL, H., ROWAN, B., & BALL, D. Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. **American Educational Research Journal**, 2005. 42(2), 371-406. Disponível em http://sitemaker.umich.edu/lmt/files/hillrowanball.pdf

IEZZI, G.; DOLCE, O; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. **Matemática**: ciência e aplicações. São Paulo: Atual, 2001. V.2

IMENES, L.M. & LELLIS, M.C. **Matemática**. São Paulo: Ed. Moderna, 2010.

LAVE, J. **Cognition in practice:** mind, mathematics and culture in everyday life. Cambridge, Massachusetts: Cambridge University Press, 1988.

LEITE, M., PESSOA, C., FERRAZ, M. e BORBA, R. Softwares educativos e objetos de aprendizagem: um olhar sobre a análise Combinatória. In: **Anais do X Encontro Gaúcho de Educação Matemática**. Ijuí, 2009.

LIMA, E.L; CARVALHO, P.C.P; WAGNER, E. & MORGADO, A.C. A **Matemática para o Ensino Médio,** vol 2. Rio de Janeiro: SBM, 2004.

LOPES, J.M. Combinações Simples por meio de um jogo e da resolução de problemas. **Anais do XXXI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (**CNMAC), Belém, Pará, 2008. In: http://www.sbmac.org.br/eventos/cnmac/xxxi_cnmac/PDF//179.pdf. Acesso em 20/10/2009.

____. Raciocínio combinatório por meio da resolução de problemas. **Anais do XXX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional** (CNMAC), Florianópolis, Santa Catarina, 2007 In: http://www.sbmac.org.br/eventos/cnmac/xxx_cnmac/PDF/706.pdf. Acesso em 20/10/2009.

MA, L. **Saber e ensinar Matemática elementar**. Lisboa: Gradiva, 2009.

MARZANO, R. J.; PICKERING, D. J.; POLLOCK, J. E. **Ensino que funciona**: estratégias baseadas em evidências para melhorar o desempenho dos alunos. Porto Alegre: Artmed, 2008.

MINAYO, M. C. de S. (org.) **Pesquisa social**: teoria, método e criatividade. 10° ed. Petrópolis, Rio de Janeiro: Editora Vozes, 1998.

MORGADO, A.C.; PITOMBEIRA, J.C.; CARVALHO, P.C.P. & FERNADEZ, P. **Análise**. **Combinatória e Probabilidade**. IMPA/SBM, Rio de Janeiro, 1991.

MORO, Maria Lúcia & SOARES, Maria Tereza. Níveis de raciocínio combinatório e produto cartesiano na escola fundamental. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo: v. 8, n.1, pp. 99-124, 2006.

NACARATO, A. M. (Org.); PAIVA, M. A. V. (Org.) **A formação do professor que ensina Matemática: perspectivas e pesquisas**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006. v. 1. p. 1. ed.

NAVARRO-PELAYO, BATANERO, C. &GODINO, J. Razonamiento Combinatorio en Alumnos de Secundaria. **Educación Matemática**, 1996. v.8 (1), pp. 26-39.

NÓVOA, A. **Os professores e sua formação**. Lisboa, Portugal: Publicações Dom Quixote, 1992.

____ **Profissão professor**. 2 ed. Porto: Porto Editora, 1999

NCTM**. National Council of Teachers of Mathematics:** Principles and standards for school mathematics**,** 2000.

NUNES, T. & BRYANT, P. **Crianças fazendo Matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

OLIVEIRA, J. B. de & RIBEIRO, L. M. Matemática X Leitura: Contando histórias para introduzir noções de Combinatória e Probabilidade**. Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática**, Recife, 2004.

PADOVAN, D; GUERRA, I. & MILAN, I. **Matemática**. São Paulo: Ed. Moderna, 200

PAIVA, M. A. V. Saberes do Professor de Matemática: uma reflexão sobre a licenciatura. **Educação Matemática em Revista***.* Ano 9, n. 11a. São Paulo, abr.2002. p. 95-104.

PEDROSA FILHO, C. **Uma experiência de introdução do raciocínio combinatório com alunos do primeiro ciclo do Ensino Fundamental (7 - 8 anos).** Mestrado Profissional em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC/SP, 2008.

PEREIRA, E.; GAGO, L.; GUERREIRO, A. **Primeiros Passos no Pensamento Combinatório**: Uma experiência na sala de aula do 1.º ano de escolaridade, 2008. In: http://www.apm.pt/files/_Co_Guerreiro_Pereira_Gago_486fe457b684b.pdf acesso em 20/01/2010.

PERNAMBUCO. Secretária de Educação. **Base Curricular Comum para as Redes públicas de Ensino Pernambuco:** Matemática. Recife: SE, 2008.

PESSOA, C. **Quem dança com quem:** o desenvolvimento do Raciocínio Combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio. Tese. Pós-graduação em Educação da UFPE. Recife: UFPE, 2009.

PESSOA, C. & BORBA, R. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. **ZETETIKÉ** – Cempem – FE – Unicamp, v. 17, jan-jun, 2009a.

PESSOA, C. & BORBA, R. Resolução de problemas de raciocínio combinatório por alunos do 6º ao 9º ano. **Anais do 19º Encontro de Pesquisa Educacional do Norte e Nordeste**, João Pessoa, 2009b.

PESSOA, C.; SILVA, C. & MATOS FILHO, M. Como os alunos de 3ª e 5ª série resolvem os problemas de estrutura multiplicativa? **Anais do XI Encontro Baiano de Educação Matemática**, Salvador, 2005.

PESSOA, C. & BORBA, R. Estratégias de Resolução de Problemas de Raciocínio Combinatório por Alunos de 1ª À 4ª série. **Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática**, Belo Horizonte, 2007.

PIAGET, J & INHELDER, B. **A origem da ideia do acaso na criança**. Rio de Janeiro: Distribuidora Record, 1951.

PIMENTA, S.G. (org.) **Saberes pedagógicos e atividade docente**. 3ª ed.São Paulo: Ed. Cortez, 2002.

PINHEIRO, C.A.M.; & SÁ, P.F. O ensino de análise Combinatória: a prática pedagógica predominante segundo os docentes. **Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática**, Belo Horizonte, 2007.

PIRES,C.M.C. Reflexões sobre os cursos de licenciatura em Matemática. **Educação Matemática em Revista** – Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, nº 11A – Edição Especial, abril de 2002. pp.44-56

ROA, R; BATANERO, C.; GODINO, J. & CAÑIZARES, J. Estrategias en la Resolución de Problemas Combinatórios por Estudiantes con Preparación Matemática Avançada. In: **Epsilon**, 1997. v 36, pp.433-446.

ROCHA FALCÃO, J.T. da **Psicologia da Educação Matemática**: uma introdução. Belo Horizonte: Autêntica, 2003

ROCHA, J. de A. **Investigando a Aprendizagem da Resolução de Problemas Combinatórios em Licenciandos em Matemática**. 140f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências) Recife: UFRPE, 2006.

ROCHA, A.M.C. **A Formação dos Professores e a construção dos saberes da docência no curso de Pedagogia da UFPE**. 166f. Dissertação. Mestrado em Educação. Recife:UFPE, 2008.

ROCHA, C.A. e FERRAZ, M.C. **A compreensão de professores com diferentes formações sobre o ensino de problemas combinatórios**. Relatório entregue para disciplina Tópicos em Educação Matemática do Programa de Pós-graduação de Educação Matemática e Tecnológica. Recife, 2010

SABO, R.D. **Saberes docentes: a análise combinatória no Ensino Médio**.208f. Dissertação. Mestrado em Educação Matemática. São Paulo: PUC/SP, 2010.

_____. **Análise de livros didáticos do Ensino Médio:** um estudo dos conteúdos referentes à. combinatória. Monografia (Especialização em Educação Matemática) Fundação Santo André, 2007

SACRISTÁN, J. Gimeno. Consciencia y acción sobre la pratica como liberación profesional de los profesores. In **Jornada sobre Modelos y estratégias em la formación permanente** del profesorado em los paises de la CEE. Barcelona, 1990.

SANDOVAL, I.; TRIGUEIROS, M. & LOZANO, D. Uso de un interactivo para el aprendizaje de algunas ideas sobre combinatoria en primaria. **Anais do XII Comitê Interamericano de Educação Matemática**, Querétaro, México, 2007.

SANTOS, C.P.; NETO, J.P.; SILVA, J.N. **Matemática Recriativa**. Norprint, 2007. Disponível em http://wwmat.mat.fc.ul.pt/~jnsilva/hm2008_9/Livro7.pdf

SAXE, G. **Culture and cognitive development**: studies in mathematical understanding. Hillsdale, New Jersey: Erlbaum, 1991.

SCHÖN, D. A. **Educando o profissional reflexivo:** um novo design para o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artes Médicas, 2000.

SHULMAN, L.S. **Those who understand: knowledge growth in teaching.** Educational Researcher. V.15. 1986.

____. Knowledge and teaching: foundation of the new reform. **Havard Education Review** , vol 57, n.1 p.313-333, fev.1987

____. Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. In: **Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado**. V 9,2, 2005 (p.1-30)

SMOLE,K.S. & DINIZ, M.I. **Matemática**. São Paulo: Ed. Saraiva, 2007. Vol 2

SOARES, M.T. e MORO, M.L. Psicogênese do raciocínio combinatório e problemas de *produto cartesiano* na escola fundamental. **Anais do III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática.** Águas de Lindóia, SP, 2006.

SZTAJIN, P. O que precisa saber um professor de Matemática? Uma revisão da literatura americana dos anos 90. **Educação Matemática em Revista** – Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, nº 11A – Edição Especial, abril de 2002. pp.17-28

TARDIF, M**. Saberes docentes e formação profissional**. Petrópolis, Rio de Janeiro: Editora Vozes, 2002.

TAVARES, C. & BRITO, F.R.M. Contando a história da contagem. In **Revista do Professor de Matemática** v. 57, 2005 (p. 33-37)

TEIXEIRA, B.R. & CYRINO, M.C.C.T. Estágio de Docência e a Formação do Professor de Matemática: Uma Experiência com Análise Combinatória por Meio da Resolução de Problemas**. Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática**, Belo Horizonte, 2007.

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. In: R. Lesh & M. Landau (Eds.). **Acquisition of mathematics:** Concepts and process. New York : Academic Press, 1983.

VERGNAUD, G. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das Matemáticas Um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise Psicológica***, 1,* 1986, p 75-90.

VERGNAUD, G. **El niño, las Matemáticas y la realidad** - Problemas de la enseñanza de las Matemáticas en la escuela primaria. Mexico : Trillas, 1991.

VERGNAUD, G. Todos perdem quando não usamos a pesquisa na prática **Revista Nova Escola.** Ed.215, setembro de 2008. In http://revistaescola.abril.com.br/matematica/fundamentos/todos-perdem-quando-nao-usamos-pesquisa-pratica-427238.shtml Acesso: 20/09/2009.

ZEICHNER, K. M. **A formação reflexiva de professores**: ideias e práticas. Lisboa: Educa e autor, 1993.

APÊNDICE A: ROTEIRO DA ENTREVISTA

SOBRE FORMAÇÃO E EXPERIÊNCIA DOCENTE

1º momento: **Conhecer as formações e atuações profissionais do docente e suas experiências relativa a aprendizagem de Combinatória**.

- ✖ Qual é sua formação inicial?
- ✖ Há quanto tempo você leciona?
- ✖ Participa ou participou de momentos de formação continuada? Quais?
- ✖ Em que colégio(s) leciona? Particular ou Público?
- ✖ Em que anos(s) leciona? Há quanto tempo você trabalha nessa série?

No final da entrevista fizemos algumas perguntas sobre a aprendizagem de Combinatória.

- ✖ Aonde você encontrou questões como essas?
- ✖ Você se lembra como ocorreu sua aprendizagem dessa temática?
- ✖ O que foi necessário para você aprender? Quanto tempo durou?
- ✖ Como essa vivência auxilia no formato de sua aula?

SOBRE O CONHECIMENTO DO CONTEÚDO DE COMBINATÓRIA

2º momento: **Identificar os Conhecimentos dos tipos de Problemas Combinatórios**

Leia atentamente cada uma das questões abaixo

1. Maria tem 3 saias (uma azul, uma preta e uma verde) e 5 blusas (nas cores amarela, bege, branca, rosa e vermelha). Quantos trajes diferentes ela pode formar combinando todas as saias com todas as blusas?

2. Quantas palavras diferentes (com ou sem sentido) poderei formar usando as letras da palavra AMOR?

3. As semifinais da Copa do Mundo serão disputadas pelas seguintes seleções: Brasil, França, Alemanha e Argentina. De quantas maneiras diferentes podemos ter os três primeiros colocados?

4. Uma escola tem 9 professores (Cristiano, Isabel, Laura, Mateus, Nívea, Pedro, Roberto, Sandra e Vítor), dos quais 5 devem representar a escola em um congresso. Quantos grupos diferentes de 5 professores pode
se formar?

5. Para representante de turma da sala de aula se candidataram 3 pessoas (Joana, Mário e Vitória). De quantas maneiras diferentes poderão ser escolhidos o representante e o vice representante?

6. Para a festa de São João da escola, tem 3 meninos (Pedro, Gabriel e João) e 4 meninas (Maria, Luíza, Clara e Beatriz) que querem dançar quadrilha. Se todos os meninos dançarem com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados?

7. Três alunos (Mário, Raul e Júnior) participam de um concurso em que serão sorteadas duas bicicletas. Quantos resultados diferentes podem ser obtidos no concurso?

8. De quantas formas diferentes poderei arrumar as fotos de meu irmão, meu pai e minha mãe na estante, de modo que elas fiquem lado a lado?

Conhecimento sobre a nomenclatura utilizada

✖ Se esses problemas estivessem num mesmo capítulo de um livro de Matemática, qual poderia ser o titulo desse capítulo? Justifique.

Conhecimento sobre a as diferenças entre problemas combinatórios

✖ Agrupe os problemas pela estrutura que eles possuem!

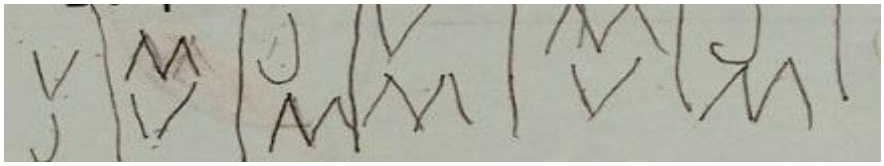
1. Maria tem 3 saias (uma azul, uma preta e uma verde) e 5 blusas (nas cores amarela, bege, branca, rosa e vermelha). Quantos trajes diferentes ela pode formar combinando todas as saias com todas as blusas?
2. Quantas palavras diferentes (com ou sem sentido) poderei formar usando as letras da palavra AMOR?
3. As semifinais da Copa do Mundo serão disputadas pelas seguintes seleções: Brasil, França, Alemanha e Argentina. De quantas maneiras diferentes podemos ter os três primeiros colocados?
4. Uma escola tem 9 professores (Cristiano, Isabel, Laura, Mateus, Nívea, Pedro, Roberto, Sandra e Vítor), dos quais 5 devem representar a escola em um congresso. Quantos grupos diferentes de 5 professores pode-se formar?
5. Para representante de turma da sala de aula se candidataram 3 pessoas (Joana, Mário e Vitória). De quantas maneiras diferentes poderão ser escolhidos o representante e o vice-representante?
6. Para a festa de São João da escola, tem 3 meninos (Pedro, Gabriel e João) e 4 meninas (Maria, Luíza, Clara e Beatriz) que querem dançar quadrilha. Se todos os meninos dançarem com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados?
7. Três alunos (Mário, Raul e Júnior) participam de um concurso em que serão sorteadas duas bicicletas. Quantos resultados diferentes podem ser obtidos no concurso?
8. De quantas formas diferentes poderei arrumar as fotos de meu irmão, meu pai e minha mãe na estante, de modo que elas fiquem lado a lado?

3º momento: **Diferenciar os problemas de *arranjo* e *combinação***

O aluno A escolheu essa estratégia para resolver as duas questões.

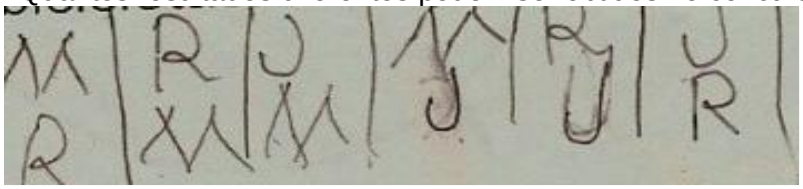
ALUNO A

5. Para representantes de turma da sala de aula se candidataram 3 pessoas (Joana, Mario e Vitória). De quantas maneiras diferentes poderão ser escolhidos o representante e o vice-representante?



ALUNO A

7. Três alunos (Mário, Raul e Júnior) participam de um concurso em que serão sorteadas duas bicicletas. Quantos resultados diferentes podem ser obtidos no concurso?



✖ Como você interpreta a compreensão desse aluno nesses problemas?

✖ O que você pode dizer sobre a estratégia escolhida?

✖ A estratégia é válida para os dois problemas? Por que?

SOBRE O CONHECIMENTO PEDAGÓGICO DE COMBINATÓRIA

Conhecimento sobre orientações curriculares

✖ A partir de que ano podemos trabalhar com esses problemas? Por quê?

Conhecimento sobre os alunos e suas dificuldades

✖ Qual desses grupos de problemas você acredita que seus alunos terão mais dificuldades? Por quê?

✖ Que erros você acredita que eles poderiam cometer em cada um deles?

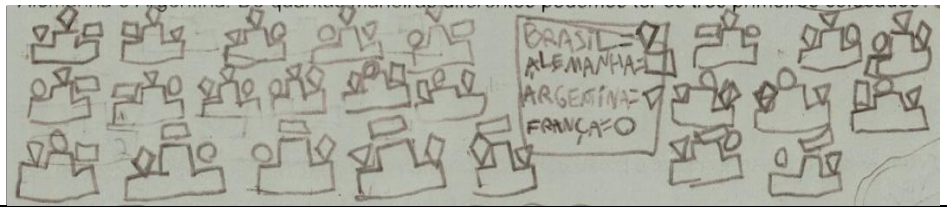
4º momento: **Analisar as perspectivas dos professores sobre o desenvolvimento do raciocínio combinatório.**

SEIS ALUNOS RESOLVERAM ESSE PROBLEMA

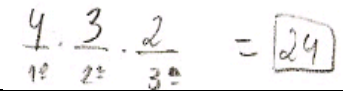
3. As semifinais da Copa do Mundo serão disputadas pelas seguintes seleções: Brasil, França, Alemanha e Argentina. De quantas maneiras diferentes podemos ter os três primeiros colocados?

Observe a seguir as suas estratégias:

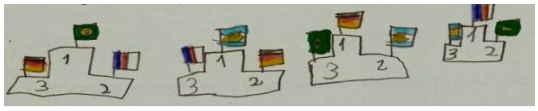
ALUNO B



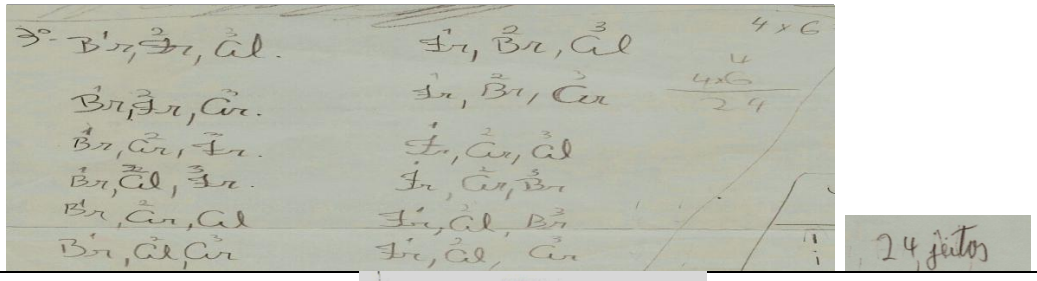
ALUNO C



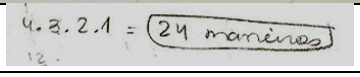
ALUNO D



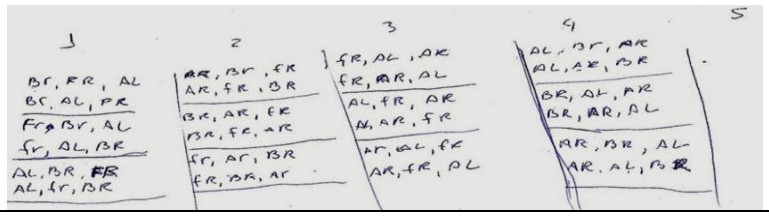
ALUNO E



ALUNO F



ALUNO G



- ✖ Qual aluno está compreendendo melhor o problema? Por que?
- ✖ Qual é o melhor procedimento? Por que?
- ✖ O que falta aos outros ou eles estão igualmente certos?

SOBRE O CONHECIMENTO DE COMBINATÓRIA E SEU ENSINO

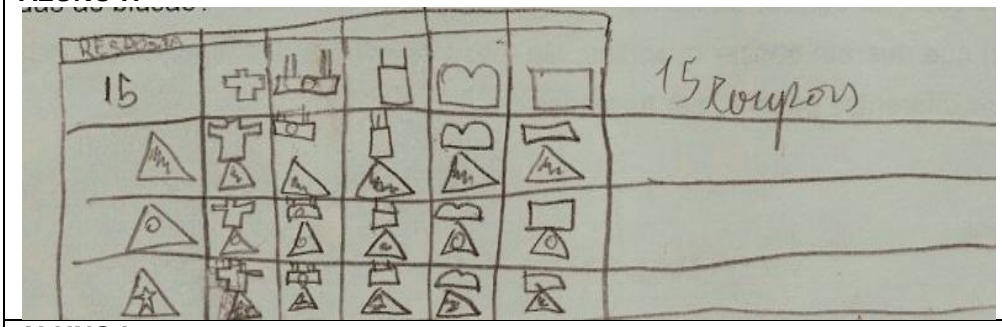
5º momento: **Verificar as Estratégias de Resolução privilegiadas pelos participantes**

QUATRO ALUNOS RESOLVERAM ESSE PROBLEMA

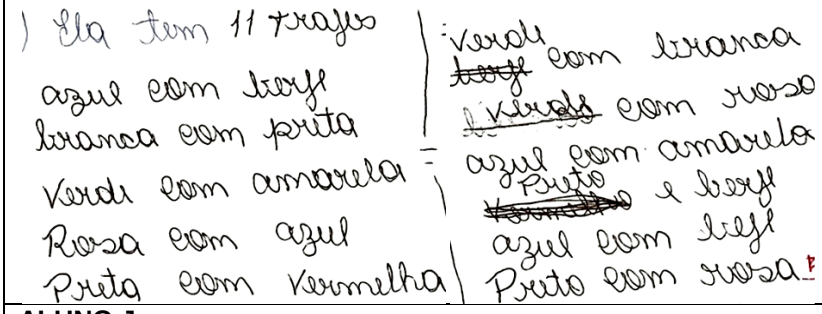
1. Maria tem 3 saias (uma azul, uma preta e uma verde) e 5 blusas (nas cores amarela, bege, branca, rosa e vermelha). Quantos trajes diferentes ela pode formar combinando todas as saias com todas as blusas?

Observe a seguir as suas estratégias:

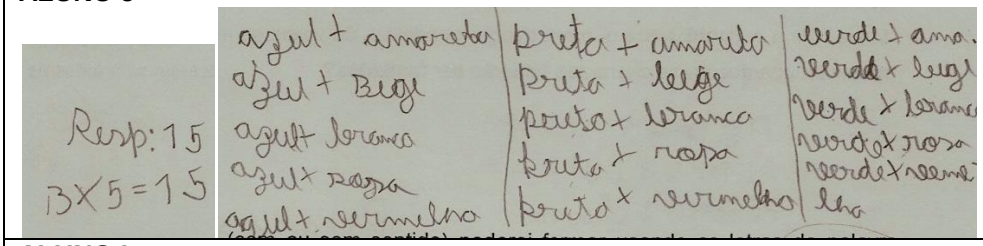
ALUNO H



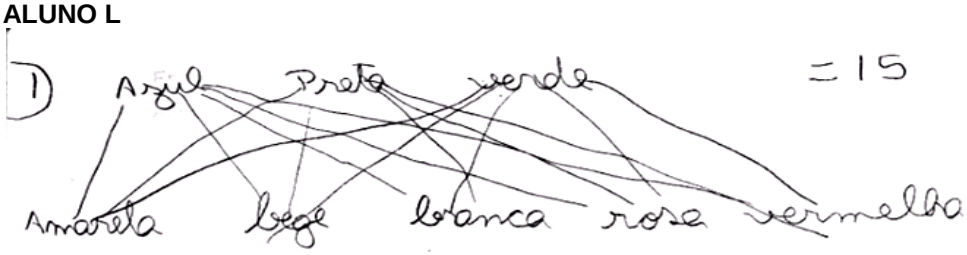
ALUNO I



ALUNO J



ALUNO L



- ✖ O que você observa quanto à estratégia utilizada pelos alunos a seguir?
- ✖ Qual é a que representa melhor a estrutura do problema?
- ✖ O que falta aos outros ou eles estão igualmente certos?

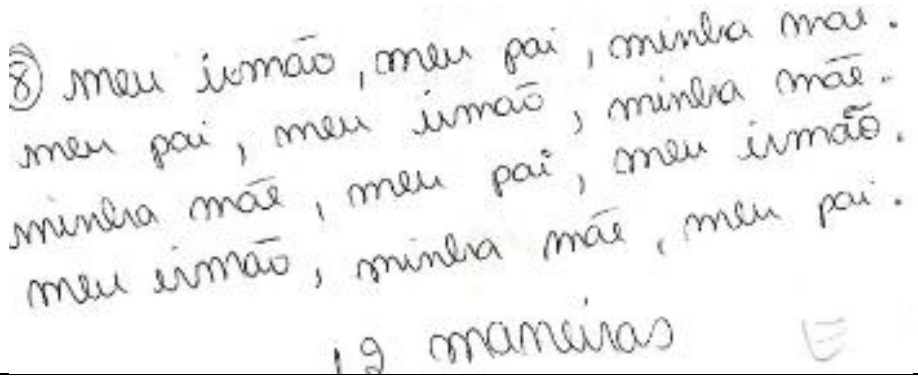
QUATRO ALUNOS RESOLVERAM ESSE PROBLEMA

8. De quantas formas diferentes poderei arrumar as fotos de meu irmão, meu pai e minha mãe na estante, de modo que elas fiquem lado a lado?

Observe a seguir as suas estratégias:

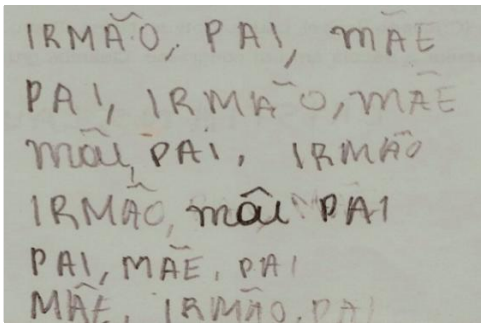
ALUNO M

ALUNO N



ALUNO O

ALUNO P



- ✖ O que você observa quanto à estratégia utilizada pelos alunos a seguir?
- ✖ Qual é a que representa melhor a estrutura do problema?
- ✖ O que falta aos outros ou eles estão igualmente certos?

6º momento: **Levantar estratégias de superação das dificuldades dos alunos encontradas pelos professores**

✖ Com base nos alunos com mais dificuldade que você selecionou como podemos trabalhar as dificuldades especificas.
✖ Como você poderia ajudar esse aluno a progredir?
✖ Quais as estratégias possíveis de se utilizar para trabalhar esse tipo de problema com seus alunos? Como?

SOBRE A AÇÃO PEDAGÓGICA DE COMBINATÓRIA: EVIDÊNCIA NAS FALAS DO PROFESSOR

7º momento: **Averiguar sugestões de práticas para o ensino de combinatória**

✖ Se você fosse planejar uma aula sobre essa temática que aspectos você consideraria mais importante, o que você enfatizaria?
✖ Que recurso você poderia utilizar para auxiliar seu aluno nesses problemas?
✖ Poderia descrever esse procedimento?