UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CENTRO DE EDUCAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA

CURSO DE MESTRADO

EWERTON RICARDO LAURENTINO GOMES DA SILVA

A ENGENHARIA DIDÁTICO- INFORMÁTICA COMO SUPORTE PARA DISCUTIR POTENCIALIDADES E LIMITES DO GEOGEBRA PARA O ESTUDO DE SISTEMAS LINEARES

Recife

2019

EWERTON RICARDO LAURENTINO GOMES DA SILVA

A ENGENHARIA DIDÁTICO-INFORMÁTICA COMO SUPORTE PARA DISCUTIR POTENCIALIDADES E LIMITES DO GEOGEBRA PARA O ESTUDO DE SISTEMAS LINEARES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Franck Gilbert René Bellemain.

Recife

2019

Catalogação na fonte
Bibliotecária Natália Nascimento, CRB-4/1743

S586e Silva, Ewerton Ricardo Laurentino Gomes da.
A engenharia didático-informática como suporte para discutir potencialidades e limites do geogebra para o estudo de sistemas lineares. / Ewerton Ricardo Laurentino Gomes da Silva. – Recife, 2019.
96f.

Orientador: Frankc Gilbert René Bellemain.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2019.

Inclui Referências e Apêndices.

1. Matemática – estudo e ensino. 2. Sistemas de Equação Linear. 3. Engenharia de Software 4. UFPE - Pós-graduação. I. Bellemain, Frankc Gilbert René. (Orientador). II. Título.

510 (23. ed.) UFPE (CE2020-026)

A ENGENHARIA DIDÁTICO-INFORMÁTICA COMO SUPORTE PARA DISCUTIR POTENCIALIDADES E LIMITES DO GEOGEBRA PARA O ESTUDO DE SISTEMAS LINEARES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Orientador: Prof. Dr. Franck Gilbert René Bellemain.

Aprovado em: 21/11/2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Franck Gilbert René Bellemain (Orientador e Presidente)
Universidade Federal de Pernambuco

Profa. Dra. Paula Moreira Baltar Bellemain (Examinadora Interna)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dra. Abigail Fregni Lins (Examinadora Externa)
Universidade Estadual da Paraíba

Dedico este trabalho ao meu Deus Todo-Poderoso.

AGRADECIMENTOS

Ao meu Deus Todo-Poderoso, pela dádiva da vida, por me permitir realizar os planos que sonhei para mim. Agradeço por Sua presença constante em todos os momentos, nos bons e, principalmente, nos ruins, pois Seu suave silêncio falava alto ao meu coração. Obrigado por me permitir crescer e desenvolver este trabalho.

Aos meus pais, Eliane e Laurentino, pelo apoio e confiança depositada. Aos meus irmãos e aos demais membros da minha família, instituição com a qual construí parte da minha formação como pessoa.

Ao meu conselheiro Franck Bellemain, pelo apoio, por me orientar nesse caminho de conhecimento e por acreditar que eu seria capaz de chegar até aqui.

Às professoras Paula Baltar, Abigail Lins e Verônica Gitirana, por todo conhecimento compartilhado.

À coordenação do programa Educação Matemática e Tecnológica, na pessoa do professor Sérgio Abranches, pelo qual estendo, aos demais professores, os mais sinceros votos de agradecimento.

À FACEPE, instituição que me forneceu o auxílio financeiro para a realização desta pesquisa.

A Letícia Silva, amiga e colega de trabalho. Enfim, agradeço a todos que contribuíram direta ou indiretamente para minha formação.

RESUMO

Esta pesquisa debruça-se sobre os elementos que possibilitam o desenvolvimento de uma prototipação de um micromundo matemático, para a abordagem da manipulação das representações gráfica e algébrica das soluções de um Sistema de Equação Linear. Como aporte teórico-metodológico, evidenciamos alguns princípios da Engenharia Didático-Informática, a qual, em uma perspectiva transdisciplinar, é o resultado da integração dos princípios da Engenharia Didática e os da Engenharia de Software, com vista a fornecer encaminhamentos teórico-metodológicos para a identificação das necessidades do domínio, mais especificamente, do nosso objeto de estudo. Dessa forma, desenvolvemos uma ampla abordagem dos Sistemas Linearespor meio da análise preliminar de suas dimensões epistemológica, cognitiva, didática e informática. À guisa de comentário, vale destacar que toda essa análise subsidia o processo de elaboração dos requisitos a serem contemplados na prototipação. Um segundo elemento que pomos em evidência se refere à análise dos software existentes que tratam do nosso objeto de estudo, uma vez que, em nossa pesquisa, mostrou-se deveras pertinente, pois nos possibilitou um panorama das atividades que já eram contempladas e das lacunas que eles apresentavam. Desse modo, propusemos uma proposta viável de um futuro software à luz dos elementos trazidos pelas quatro dimensões supracitadas, por meio da qual esperamos responder de uma certa forma às especificidades que esse tema exige.

Palavras-Chave: Matemática- Estudo e Ensino. Sistemas de Equação Linear. Engenharia de Software. Engenharia.

ABSTRACT

This research focuses on the elements that allow the development of a prototype of a mathematical microworld. It is related to the manipulation of graphical and algebraic representations of solutions in a Linear Equation System. As theoretical and methodological support, we focus on some principles of Didactic and Informatics Engineering, which, as a transdisciplinary perspective, is the result of the integration between Engineering Pedagogy and Software Engineering principles. Based on that, we developed a broad approach to Linear Systems from a preliminary analysis of its epistemological, cognitive, didactic, and informatics dimensions. It is important to note that this analysis subsidizes the process of elaboration of requirements to a prototype. The second element in this research is the analysis of software that deals with our object of study, which, in turn, allowed us an overview of the activities that it already contemplated and possible gaps. Thus, we proposed a future software from the elements of the four dimensions above, hoping to respond to the specifics features that this theme requires.

Key-words: Mathematical- Study and Teaching. Linear equation systems. Software Engineering. Engineering.

.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho, damos evidência a um conteúdo matemático cuja abordagem se inicia no 8º ano (antiga 7ª série) do Ensino Fundamental, estende-se ao Ensino Médio, chegando ao Ensino Superior em alguns cursos, mais especificamente na Licenciatura em Matemática, em disciplinas obrigatórias como: Álgebra Linear e Cálculo Numérico - os sistemas de Equações Lineares. Esse conteúdo tem grande aplicabilidade em contexto matemático e em situações aplicadas. Segundo Leon (2011):

> Provavelmente o problema mais importante da matemática é o da resolução de um sistema de equações lineares. Mais de 75% de todos os problemas matemáticos encontrados em aplicações científicas e industriais envolvem a resolução de um sistema linear em algum estágio. Usando métodos modernos da matemática, é frequentemente possível reduzir um problema sofisticado a um simples sistema de equações lineares (...) (LEON, 2011, p. 01).

E, ainda, segundo o Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLD), “A abordagem dos sistemas de equações lineares tem um papel importante não só para a formação matemática como na modelização algébrica de muitas situações das ciências e da Tecnologia” (BRASIL, 2005, p. 73).

O desejo em pesquisar sobre o objeto matemático, sistemas de equações lineares, surgiu na minha graduação em Licenciatura em Matemática, estendendo-se na Pós-Graduação (*lato sensu*) e culminando agora com esta dissertação. Sou professor de Matemática da Educação Básica (Ensino Fundamental anos finais e Ensino Médio) e, movido pelas inquietações suscitadas pelos alunos, haja vista a dificuldade que eles apresentam frente a esse objeto matemático, o que fez com que eu me debruçasse na busca da compreensão de tais questões. A título exemplificativo, menciono algumas recorrências que tenho verificado ao longo de minha prática docente, entre os alunos, quanto ao nosso objeto. Ei-las: alto índice de erros, em avaliações interna e externa, de questões que abordam, por exemplo, a solução de um sistema de equações lineares formado por três equações e três incógnitas; de reconhecer o ponto de interseção da representação gráfica do sistema linear como sua solução. Essas constatações nos forneceram encaminhamentos iniciais à identificação e à compreensão das necessidades do domínio.

Ao realizar uma busca na literatura, constatamos que, no Brasil, espera-se que o ensino de Sistemas Lineares se inicie no 4º ciclo do Ensino Fundamental (8º e 9º anos), segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). A proposta para esse ciclo é que sejam trabalhados sistemas com duas equações e duas incógnitas, abordados tanto no registro algébrico quanto no geométrico.

> Resolução de situações-problema por meio de um sistema de equações do primeiro grau, construindo diferentes procedimentos para resolvê-lo, inclusive o da representação das equações no plano cartesiano, discutindo o significado das raízes encontradas em confronto com a situação proposta (BRASIL, 1998, p. 88).

Essa ideia foi amplamente corroborada pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), propondo o início do ensino de Sistemas Lineares, também, no 8º ano do Ensino Fundamental e, para esse fim, é apontado como habilidade a ser desenvolvida nesse ano de escolarização. Dessa forma: “Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso” (BRASIL, 2018, p. 311).

Ainda no Ensino Fundamental, os documentos oficiais, como os PCN, apontam para a necessidade de se trabalhar o significado das soluções encontradas em face do sistema linear proposto.

Esse enfoque também é preconizado em documentos que se debruçam na etapa do Ensino Médio, como as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006), quando é proposto que os sistemas lineares sejam trabalhados algebricamente e geometricamente nessa etapa de escolarização. Assim, “No estudo de sistemas de equações, além de trabalhar a técnica de resolução de sistemas, é recomendável colocar a álgebra sob o olhar da geometria” (ibid., p. 77).

Tomando por base a abordagem evidenciada pelos currículos e documentos oficiais, de se trabalhar os Sistemas Lineares nos registros algébrico e gráfico, percebe-se, por meio dessa, uma clara sinalização a uma das características importantes da Matemática e, por consequência, do seu ensino, que são os vários sistemas de representação dos seus objetos de estudo. Disso, percebe-se que a Matemática apresenta uma particularidade que a torna bastante específica, a qual, por sua vez, se verifica pelo caráter abstrato de seus objetos de estudo, sendo essa constatação corroborada pelo fato de não termos um acesso direto a eles. Dessa forma, percebe-se a necessidade de representá-los tomando, para isso, os vários registros de representação. Dentre eles, chamamos atenção ao registro algébrico, ao gráfico e, também, ao registro por meio da língua natural.

Em sua teoria dos Registros das Representações Semióticas (TRRS), Duval (2004) propõe que todas essas representações possam ser evidenciadas por meio de sistemas semióticos. Propor-nos-emos, nesta pesquisa, a realizar uma abordagem para o ensino dos Sistemas Lineares nos registros gráfico e algébrico. Dessa forma, precisamos de uma teoria que fundamente e ajude-nos a entender a complexidade desses registros e, mormente, suas articulações. E, assim, a escolha da TRRS como nosso quadro teórico, nos parece bastante pertinente, pois ela nos fornece os elementos necessários para essa compreensão. A respeito da complexidade dos registros de representação e de suas articulações, encontramos em Freitas (1999):

> Observo que as razões das dificuldades dos alunos na interpretação dos resultados obtidos após a aplicação de um método de resolução a um sistema linear podem estar ligadas ao fato de que, métodos de resolução se reduzem a um algoritmo, enquanto que a interpretação dos resultados obtidos exige articulação entre diversos conceitos, que podem envolver diferentes quadros e registros de representação. Assim, as soluções de um sistema linear podem ser relacionadas, por exemplo, a pontos, retas e planos, o que permite se passar de uma manipulação algébrica a uma ilustração gráfica em dimensão 2 ou 3 (FREITAS, 1999, p. 24).

Eis que, neste momento, se faz profícua a evidenciação de nossa hipótese de pesquisa, a qual levou em consideração o que se espera, segundo os documentos oficiais, do ensino dos Sistemas Lineares no Ensino Fundamental anos finais e no Ensino Médio. Daí, a nosso ver, deve-se dar devida atenção aos vários registros de representação e a suas correspondentes articulações frente ao nosso objeto de pesquisa; e, igualmente, consideramos que sua inobservância poderá recrudescer um ensino que não explora todas as potencialidades de abordagem para um mesmo objeto matemático, redundando-o, muitas vezes, em um ensino limitado à abordagem de apenas um dos registros. Isso não favorece, a nosso ver, uma compreensão ampla do objeto em estudo. A título de ilustração, podemos citar a “mecanicidade” de como são trabalhados, reiteradamente, nessas etapas de ensino, os métodos de resolução dos sistemas de equações lineares. Isto é, dá-se uma ênfase muito grande aos algoritmos de resolução e às operações envolvidas, frequentemente, limitados ao campo algébrico. Disso, infere-se que a não abordagem dos vários registros de representação e suas articulações, como propõe Duval (2004), seja, de fato, uma das grandes causas para a não compreensão e a não interpretação dos resultados encontrados pelos alunos em face desse mesmo objeto.

Nesse sentido, uma proposta que gostaríamos de pôr em evidência, neste momento, faz referência à utilização de tecnologias digitais em contextos de Ensino-Aprendizagem. O levantamento dessa questão nos parece central, haja vista que os software educativos têm favorecido os professores e os alunos a “pensarem sobre os elementos da matemática”, conforme Gitirana (2009, p. 239). Estamos deveras interessados em analisar, mais especificamente, alguns software que se inserem como um suporte à interpretação da solução e à articulação dos registros de representação concernentes à abordagem dos Sistemas Lineares. Dessa forma, pretendemos evidenciar as potencialidades e as lacunas encontradas nesses software, em face dos objetos supracitados, ancoradas em nossa base teórica, a qual será elucidada no parágrafo seguinte.

A Engenharia Didática (ED) de Artigue (1990) trata-se de um modelo teórico-metodológico que se propõe a fornecer elementos que subsidiem a atividade do pesquisador na identificação das necessidades de um determinado domínio. Assim como a ED, a Engenharia de Software Educativo (ESE), semelhantemente, fornece-nos um caminho metodológico à identificação das necessidades do nosso objeto de estudo. Faz-se necessário ressaltar que os elementos, advindos desta última, enriquecem um trabalho em um ambiente computacional. Nesse sentido, Tibúrcio (2016) sugere articular as engenharias didática e de software educativo. Dessa forma, um resultado importante da articulação entre essas duas engenharias é a Engenharia Didático-Informática (EDI), a qual pode ser vista como uma metodologia, que busca agregar elementos da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996) à Engenharia de Software Educativo, com a finalidade de fornecer, inicialmente, os encaminhamentos para a análise de atuais software. Essa, por sua vez, fornece os elementos necessários que justificam a criação de novos software, além do delineamento para a concepção e o desenvolvimento de software educativos. Disso, a escolha da EDI como nosso referencial teórico-metodológico mostrou-se bastante pertinente, pois ela possibilitou-nos uma análise pormenorizada das necessidades do nosso objeto de estudo.

Com esse esboço teórico-metodológico em mente, procuramos identificar as necessidades do nosso objeto de estudo, e, dessa forma, encontramos, na EDI, os princípios que dão suporte a essa identificação. Para tanto, fizemos um levantamento das dimensões didática, cognitiva, epistemológica e informática do nosso objeto - essa última dimensão foi acrescentada por Tibúrcio (2016), como resultado da articulação entre a ED e a ESE.

Uma observação que vale a pena destacar, neste momento, refere-se ao olhar crítico que devemos ter para com os software. Antes de qualquer análise, precisamos saber o objetivo para o qual ele foi desenvolvido e, assim, não dificilmente encontraremos software que se limitam à dualidade entre corresponder às necessidades didáticas e às informáticas de um determinado objeto de estudo conforme Tibúrcio (2016), sem levar em consideração suas necessidades cognitiva e epistemológica. Dessa forma, observa-se que alguns pontos e/ou temáticas de um determinado objeto de pesquisa acabam por não serem contemplados por eles. Disso, justifica-se a criação permanente de novos software.

Após elucidar os elementos que contornam o nosso objeto de estudo por meio da análise das quatro dimensões, nós nos debruçamos acerca desses elementos e evidenciamo-los por meio de requisitos, os quais forneceram todo o suporte para o desenvolvimento de nossa prototipação, a qual consistiu em uma esquematização dos recursos (ainda não apresentados pelos atuais software) a serem implementados em um novo software.

Assim, nossa pesquisa teve como objetivo geral:

-Desenvolver uma prototipação com o auxílio do software GeoGebra, à luz da Engenharia Didático-Informática frente ao nosso objeto de estudo.

E tivemos os seguintes objetivos específicos:

-Explorar as potencialidades do software GeoGebra quanto à interpretação da solução e à articulação dos registros algébrico e gráfico concernentes aos Sistemas Lineares;

-Elicitar os requisitos, os quais serão evidenciados por meio da análise preliminar das dimensões (cognitiva, didática, informática e epistemológica) de nosso objeto de estudo;

-Confrontar os requisitos oriundos da análise preliminar com a análise feita no software GeoGebra, verificando, especificamente, as convergências e os distanciamentos que entre eles se estabelecem, sendo essa atividade evidenciada pela prototipação.

No capítulo seguinte, abordamos o quadro teórico-metodológico da pesquisa, constituído da Engenharia Didático-Informática e alguns princípios da Engenharia de Software Educativo.

No 3º capítulo, tratamos das análises preliminares, acerca do nosso objeto de estudo, considerando seus aspectos nas dimensões didática, cognitiva, epistemológica e informática; finalizando com a elicitação dos requisitos identificados na análise preliminar.

No capítulo 4º, dedicamo-nos à prototipação com o auxílio do software GeoGebra. Vale aqui destacar que todo o desenvolvimento está justificado nos princípios da EDI.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICO- METODOLÓGICA

Neste capítulo, debruçamo-nos sobre o quadro teórico-metodológico que adotamos para a realização desta pesquisa: a Engenharia de Software Educativo e a Engenharia Didático-Informática, que tomamos por base para a prototipação de um software educativo.

2.1 A ENGENHARIA DE SOFTWARE EDUCATIVO

Tendo em vista nosso objetivo de prototipar um software educativo, fez-se necessário o levantamento de alguns princípios da Engenharia de Software Educativo (ESE). Com esse cógnito propósito, consideramos proficiente abordarmos, em linhas gerais, a Engenharia de Software (ES), a qual se propõe a desenvolver princípios teórico-metodológicos para a concepção e desenvolvimento de Configurações Pedagógicas baseadas em computador (CBPS [1]), software educativo e software de suporte a ambientes pedagógicos (TCHOUNIKINE, 2011). Esses princípios, por sua vez, fornecem os elementos necessários quanto às questões de organização, manutenção e qualidade do software.

Uma das questões, evidenciada no parágrafo anterior, faz referência à qualidade do software. Essa, vale aqui destacar, configura todo o processo de desenvolvimento do software. Equivale ao cumprimento dos objetivos iniciais do software, de seu desempenho ou até mesmo se ele está sendo útil para o usuário. Nesse sentido:

> A qualidade do software pode ser vista como um conjunto de características que devem ser alcançadas em um determinado grau para que o produto atenda às necessidades de seus usuários (AMARAL e GUEDES, 2005, p.2).

Quanto à avaliação dos software educativos, alguns pontos devem ser considerados para esse fim. Ei-los: articulação entre teoria e prática, formalização da compreensão do fenômeno Ensino-Aprendizagem, multiplicidade de abordagens e tratamento das especificidades dos objetos por eles evidenciados etc. Disso, a qualidade dos software educativos é verificada por meio da abordagem de três dimensões e da relação que se estabelece entre elas: Tecnológica, Educativa e do Contexto de uso.

---

[1] Computer Based Pedagogical System

Não são raras as vezes que nos deparamos com um software cuja concepção/desenvolvimento foi pensada com o objetivo de responder a um aspecto informático de um determinado domínio, em detrimento dos demais aspectos. Dessa forma, configura-se uma abordagem tecnocentrada da ES, que trata de concepção/desenvolvimento de software que, inicialmente, não são pensados com finalidades educativas explícitas. A título de ilustração, podemos citar o Windows. Desse modo, a ESE surge exatamente no sentido de agregar aos aspectos informáticos, já considerados na ES, os aspectos cognitivos, didáticos, epistemológicos etc. de um determinado objeto de estudo, de modo a torná-los um suporte ao processo de ensino-aprendizagem. Uma observação profícua, quando tratamos de software atrelado ao contexto de ensino-aprendizagem, diz respeito à utilização daqueles (softwares com uma abordagem tecnocentrada) neste contexto (de ensino-aprendizagem), mesmo que inicialmente não fora proposto a esse fim, torna-se um software educativo. Nesse sentido:

> O *software* educativo é, primeiramente, um espaço para proporcionar a construção de conhecimentos. Nesse sentido, qualquer *software* pode ser considerado educativo, como um *software* aplicativo (um tratamento de textos ou uma planilha de cálculos), um *software* lúdico (um jogo, um simulador) ou um *software* de autoria (uma meta-linguagem de programação). Até um *software* básico (como o *Windows* ou o *DOS* ou, ainda, o *Linux)* pode ser utilizado com finalidades educativas. Entretanto, o *software* educativo propriamente dito é aquele desenvolvido com finalidades educativas explícitas demandando, para subsidiar sua produção, procedimentos específicos, relacionados a um conhecimento aprofundado dos processos cognitivos humanos, seja ele de natureza lúdica (um jogo educativo) ou de conteúdo escolar (um *software* para o ensino de química, por exemplo), seja ele estático (em *CD-ROM*) ou distribuído (para a *Internet*) (SANTOS, 2009, p.21).

Contudo, as concepções/desenvolvimentos que se limitam à unicidade de se trabalharem os aspectos informáticos ou a dualidade dos aspectos didático e informático de um determinado objeto, mais especificamente, matemático, dificilmente conseguirão abordar, de maneira adequada, as especificidades exigidas por ele. Uma abordagem de concepção/desenvolvimento que não leva em consideração os aspectos cognitivos e epistemológicos dos objetos, particularmente matemáticos, dificilmente subsidiará a superação de algumas dificuldades recorrentes apresentadas pelos alunos frente a esses. Conquanto que, vale aqui a ressalva, o advento de novas tecnologias em contextos de Ensino-Aprendizagem que não se debruçam nas principais reflexões oportunizadas pelas pesquisas, para a produção dos seus aportes efetivos, pode mostrar-se suficiente para a elaboração de situações interessantes e inovadoras. Ou de forma equivalente, também pode-se constatar que levar em consideração os principais resultados que são elaborados pela comunidade científica não lhes garantem qualidade e adequação do que é produzido. Dessa forma, um caminho, que nos parece imprescindível quanto à concepção/desenvolvimento de software educativos, é estabelecer uma correspondência dialética entre os princípios didáticos, cognitivos etc. e os princípios informáticos vinculados a um determinado objeto de estudo. Essa correspondência trata-se de uma conexão entre os princípios supracitados. Em Bellemain (2000, p.4), encontramos uma sinalização que corrobora as ideias defendidas neste parágrafo, que diz: “as maiores contribuições do computador, na educação, aparecem quando o processo de transposição didática considera a introdução do computador desde o seu início”, isto é, o computador não deve ser entendido como um mero instrumento que é aplicado para resolver e auxiliar na compreensão de certas questões já bem definidas, mas como um instrumento que estabelece uma relação dialética com os objetos de saber a ensinar, de modo que, por meio dessa relação, se estabeleçam novas questões e situações de uso.

Isso, tendo em vista a relação dialógica estabelecida entre os princípios introduzidos pela ESE à ES e aqueles já considerados pela ES, caracterizada como um processo de desenvolvimento que possibilita a integração e o “diálogo” entre eles, considerando as especificidades de cada um. De modo que os princípios se complementam e formam um arcabouço teórico-metodológico de desenvolvimento de software, que se propõe considerar os diferentes aspectos de um determinado domínio. Posto isto, infere-se que essa relação proporcionou à ESE, como engenharia, se debruçar na concepção/desenvolvimento de software educativos. Isso é claro, mas o principal contributo dessa relação, no qual reside a novidade, é oportunizar o aprimoramento da concepção e do desenvolvimento de software educativos.

Diante disso, percebemos que a ESE complementa, traz novos elementos que enriquecem a concepção e a realização de software na ES. Esses elementos, por sua vez, são fundamentados em análises cognitivas, didáticas, pedagógicas etc. acerca de um determinado objeto de estudo, como já foi citado. É por meio dessa configuração que a ESE faz emergir um arcabouço teórico-metodológico para a concepção e desenvolvimento de software educativos, tornando-se, assim, “[...] a maneira mais eficaz de produzir software de alta qualidade" (Sommerville, 2007, p.5).

Vale aqui destacar que, como todo processo de engenharia, a ESE é desenvolvida considerando-se um percurso teórico-metodológico em vista de um produto de software educativo. Nesse sentido:

> Um processo de software é um conjunto de atividades e resultados associados que geram um produto de software. Essas atividades são, em sua maioria, executadas por engenheiros de software. Há quatro atividades de processos fundamentais comuns a todos os processos de software. Essas atividades são: 1. Especificação do software. A funcionalidade do software e as restrições em sua operação devem ser definidas. 2. Desenvolvimento do software. O software deve ser produzido de modo que atenda a suas especificações. 3. Validação do software. O software tem de ser validado para garantir que ele faz o que o cliente deseja. 4. Evolução do software. O software deve evoluir para atender às necessidades mutáveis do cliente (SOMMERVILLE, 2003, p. 7).

Retomaremos tais atividades, com mais detalhes, quando abordarmos a articulação entre a ES e a ED, nas próximas seções. Destacamos que nossa proposta é integrar alguns elementos da ESE à Engenharia Didática, isso por meio da Engenharia Didático-Informática, a fim de prototipar um software educativo. Disso, vale aqui destacar que a utilização da EDI nesses contextos se mostra bastante pertinente, com real destaque aos que se debruçam no desenvolvimento de micromundo. Nesse sentido, faz-se profícua uma abordagem mais detalhada sobre micromundo, assunto tratado na próxima seção.

2.2 O PARADIGMA MICROMUNDO

Tomando por base nossa proposta de prototipar um software educativo, faz-se bastante pertinente situarmos as relações de ensino-aprendizagem que se configuram atualmente, por meio de um breve apanhado histórico. Na década de 1970, as relações de ensino eram fortemente marcadas pela unilateralidade: Professor → Aluno, ou seja, os professores eram vistos, naquele momento, como aqueles que transmitiam conhecimento. Já na década de 1980, vemos que o papel do professo, no processo ensino-aprendizagem, muda, visto que ele passa a assumir a tarefa de criar o conflito cognitivo e, dessa forma, favorecer o desequilíbrio cognitivo em seus alunos. Essa ação pode ser esquematicamente representada por: P → conflito cognitivo → desequilíbrio. Essas ideias foram fortemente influenciadas por Piaget, que vê o sujeito (S) como um sujeito epistêmico. Esse, por sua vez, constrói seu conhecimento na interação com o objeto (O) e, por meio dessa interação, constrói um conhecimento representacional da realidade (O'), esquematizando-a temos: S → O → O'. A década de 1980 também é caracterizada por se configurar uma nova compreensão do processo Ensino – Aprendizagem, visto, agora, como uma ação intencional que pode dar certo ou não, de modo a considerar que o ensino pode não implicar em aprendizagem, pelo fato de serem processos distintos com especificidades próprias. Para finalizarmos esse contexto histórico, vemos, na década de 1990, que a sala de aula se transforma em um palco de negociação, sendo essa ideia fortemente influenciada pelas concepções de Vygostsky. O peso fundamental agora é dado à cultura e à história, o conhecimento é visto agora como algo historicamente construído e culturalmente organizado. A cultura é um palco de construção de significado, sendo o conhecimento internalizado e apropriado pelo sujeito. A opção da Didática, vale aqui destacar, é pelo construtivismo, tendo em vista que o "pai" da Didática da Matemática, Guy Brousseau, "bebeu" da fonte piagetiana.

Quando nos debruçamos sobre um contexto de Ensino-Aprendizagem, não são raras as vezes em que estamos interessados em estudar um ou mais elemento(s) que o integra(m) e as relações que eles estabelecem. Não por acaso que tomamos essas decisões, pois, segundo Brousseau (1986), é justamente pelo estabelecimento das relações que se configuram entre professor, aluno e saber que se espera adquirir uma compreensão mais sólida das relações didáticas que lhes concernem. Uma situação didática, como a própria expressão faz referência, tem na criação de situações de aprendizagem a sua principal especificidade e é caracterizada por uma ação intencional ancorada em um sistema didático constituído por: S (X, Y, Z); tomando S como o meio onde ocorre o sistema didático, oportunamente podemos vê-lo, por exemplo, como o meio escolar. Dessa forma, X pode ser configurado como o estudante, Y como o professor, e Z o saber a ensinar. Posto isso, percebe-se que a relação de ensino, nessa perspectiva, é uma relação triangular de natureza didática. Dessa relação decorrem, segundo Brousseau (1986), três polos, a saber: pedagógico, epistemológico e psicológico. Sem a pretensão de desenvolvê-los em meio a uma ampla abordagem, apresentá-los-emos de forma sucinta como se segue: no polo pedagógico, estruturam-se as situações de ensino; no polo epistemológico, desenvolvem-se processos para a resolução de problemas práticos e elaboram-se soluções teóricas válidas; no polo psicológico, oportuniza-se uma reflexão de como os alunos aprendem.

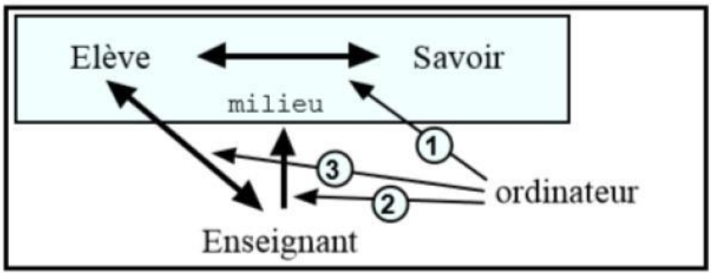
Tomando por base as diversas relações que os elementos constituintes do sistema didático supracitados estabelecem, focaremos na análise da possibilidade de integração do computador na relação que se efetiva entre o aluno e o saber, denominada por Bellemain (1992) como meio. Neste momento, faz-se profícuo evidenciar nossa pretensão de inserir o computador, em nossa abordagem, como elemento do meio. Vale aqui destacar que o computador permite, através de uma interação, que se configurem relações e situações de uso, de forma que nos interessamos pelas que são efetivadas pelos alunos.

A título de ilustração, ressaltamos que é da relação aluno ↔ saber e da inserção de um ambiente nessa relação que surgem o interesse das pesquisas e até mesmo a concepção de alguns software como elemento do meio. E, nesse sentido:

> "É pelo meio que se mediatiza a relação ao saber e, [...] é o meio que o professor configura, condiciona na sua encenação do saber. Por isso existe esse interesse em analisar a ação de tal ou tal ambiente sobre o meio" (ARTIGUE, 1991 apud RAMOS, 2014, p.37).

Assim, para ilustrar esquematicamente essa situação, tomemos a Figura abaixo:

Figura 1: Integração do Computador no Sistema Didático



1: *O computador como elemento do meio*
2: *O computador participa à organização do meio*
3: *O computador participa à avaliação das aprendizagens ou à institucionalização dos conhecimentos.*

Fonte: Bellemain (1992, p.75)

Um ponto importante, evidenciado no parágrafo anterior, diz respeito às interações oportunizadas pelo computador, visto como um ambiente do meio. Dessa forma, se pensarmos nos software educativos, verifica-se que a interação dos usuários com eles é possibilitada, por exemplo, por meio de um micromundo. Posto isso, faz-se necessário afirmar que o concebemos como um sistema que permite as situações de uso do software, mais especificamente, as que se configuram entre seus objetos, entre o usuário e os objetos etc. Nesse sentido, percebe-se facilmente a peculiaridade que o micromundo assume de possibilitar a interação entre o software e o usuário, com real destaque aos que serão inseridos em uma situação didática como elemento do meio, além de fornecer condições para o desenvolvimento de situações-problema, pelos alunos, acerca de um determinado objeto de estudo. Ainda segundo Bellemain (2002), o termo micromundo foi inicialmente usado para definir um sistema que permite simular e/ou reproduzir um domínio do mundo real, e que tem como objetivo abordar e resolver uma classe de problemas.

> Segundo Noss e Holyes (1996), a origem do termo micromundo remonta ao início dos anos 70, na comunidade de Inteligência Artificial, tendo como forte referência os trabalhos de Minsky e Papert. Nessa comunidade, o termo micromundo foi inicialmente usado para definir um sistema que permite simular e/ou reproduzir, um domínio do mundo real, e que tem como objetivo abordar e resolver uma classe de problemas (BELLEMAIN, 2002, p. 54).

Dessa forma, percebe-se que o objetivo do micromundo é criar condições para que o aluno possa desenvolver uma atividade em um ambiente computacional. Dentre as atividades possibilitadas pelo micromundo, chamamos atenção para as atividades matemáticas. Essas, por sua vez, são disponibilizadas pelo micromundo matemático. Assunto tratado na subseção seguinte.

2.2.1 Micromundo Matemático

O micromundo matemático visa favorecer a atividade matemática em um ambiente computacional. Dessa forma, como já evidenciado na introdução dessa pesquisa, a importância das representações para a atividade matemática. É exatamente nesse contexto que o micromundo matemático intervém, possibilitando novos sistemas de representação dos objetos matemáticos. Nesse sentido, os software de geometria dinâmica são exemplos clássicos de suporte a essas atividades.

Como já introduzido no início desta seção, a opção da Didática é pelo construtivismo, opção essa fortemente influenciada pela ideia piagetiana. Dessa forma, o micromundo matemático assume uma abordagem construtivista ao possibilitar a participação ativa do aluno na sua própria aprendizagem, sendo essa participação oportunizada por intermédio da resolução de problemas. Essa, por sua vez, pode ser vista como a atividade norteadora da interação entre os alunos e o ambiente computacional, permitindo, assim, o desenvolvimento conceitual dos objetos matemáticos representados.

Tendo em vista a particularidade que o micromundo matemático apresenta de trazer o aluno para a situação, de forma ativa, de proporcionar-lhe que lance mão de estratégias e situações de uso em face de uma situação proposta, permitindo-lhe a representação e a manipulação dos objetos representados, infere-se que toda essa abordagem favorece a construção de conhecimento acerca desses mesmos objetos e relações. Toda essa abordagem é defendida por Papert (1980) quando propõe que o aluno tenha papel ativo em sua aprendizagem frente à utilização dos micromundos.

Posto isto, vale aqui destacar que, ao passo que o micromundo matemático possibilita ao aluno sua interação de forma ativa, permite-lhe a tomada de decisões no ambiente computacional na resolução de situações-problema. Verifica-se que lhe é oportunizado, por intermédio dessa relação, o estabelecimento de novas conjecturas, novas estratégias e situações de uso, novas relações entre os objetos etc. Dessa forma, o micromundo se apresenta como um campo fértil para a remodelagem das estratégias de resolução em face das que anteriormente haviam sido consideradas, configurando, assim, uma permanente atualização das formas de se resolver problemas. Ao realizarmos uma busca na literatura, encontramos os trabalhos de Thompson (1987) e o de Laborde e Laborde (1991), que tratam de micromundo matemático e que, de uma certa forma, serviram de aporte para a justificação das ideias aqui levantadas. Respectivamente, assim o definiram: "Eu usaria "micromundo matemático" para significar um composto sistema de objetos, relações entre objetos, e operações que transformam objetos e relações – um ambiente de objetos e relações" (THOMPSON, 1987 apud BELLEMAIN, 2002, p.55, tradução nossa); "Um conjunto de operadores suscetíveis a operar sobre esses objetos criando novos, apresentando algumas novas relações" (LABORDE E LABORDE, 1991 apud BELLEMAIN,2002, p.55, *tradução nossa*).

Terminado o levantamento da concepção de micromundo matemático, tratamos, na próxima seção, das interações que se configuram nesses ambientes.

2.2.2 Interação com o Micromundo

Um dos pontos levantados na seção anterior faz referência à possibilidade de interação entre o usuário e o ambiente computacional. Possibilidade que, de forma ativa, permite ao usuário a tomada de decisões. Dessa forma, faz-se pertinente, em nossa pesquisa, a indicação de como ela é possibilitada. Diante desse cógnito propósito, propusemo-nos a evidenciá-la de forma sucinta, como se segue. A interação configura-se de duas formas: com o micromundo e com o computador. Com o micromundo, essa relação efetiva-se quando o usuário dá indicações da atividade que ele se propôs a realizar nesse ambiente. Essas indicações são verificadas através dos elementos que ele aciona para iniciar sua construção e que, de uma certa forma, se estende durante todo o processo de desenvolvimento da atividade. Exemplificando, podemos tomar um caso particular, quando ele aciona os operadores que permitem a manipulação de objetos e relações. Um ponto importante a ser considerado nessa abordagem, refere-se aos resultados dessas ações, que, no caso do exemplo supracitado, o usuário recebe diversas respostas, entre as quais podemos destacar: a representação e o movimento. Esse exemplo notoriamente mostra a interação que se estabelece entre o usuário e o computador, a qual se configura como uma relação dual: ação-reação, isto é, a cada tomada de decisão que o usuário configura no campo de entrada, corresponde a uma ou mais reações (respostas) no campo de saída. Segundo Bellemain (2002, p. 57), o par ação-reação favorece:

- A construção de conhecimentos sobre os objetos e relações, em função das suas reações (respostas) a ações e,
- A construção de conhecimentos, permitindo antecipações e a determinação das ações necessárias a uma resposta esperada.

Dessa forma, a relação dual ação-reação configura-se como um importante instrumento para o aprimoramento das concepções que o aluno porta consigo acerca de um determinado objeto de conhecimento, haja vista sua especificidade em lhe proporcionar a possibilidade de participar ativamente do seu processo de aprendizagem. Para uma melhor evidenciação, tomemos a seguinte situação: ao tomar uma decisão no campo de entrada, o aluno terá a chance de verificar como essa ação se efetiva no computador, a qual, por sua vez, lhe dá a oportunidade de rever e/ou adaptar a decisão tomada, se assim lhe for necessário. Igualmente, chamamos atenção para a tomada de decisões que, por alguma razão, estejam ancoradas em concepções preliminares não satisfatórias acerca do objeto em questão, semelhantemente, a relação dual ação-reação oportuniza-lhe o aprimoramento dessas concepções.

Um aspecto importante levantado no parágrafo anterior diz respeito à importância que a relação dual ação-reação assume no processo de aprendizagem dos alunos. Essa, por sua vez, é possibilitada, por exemplo, através da interação entre o micromundo matemático e o usuário, a qual pertinentemente pode ser reconfigurada como: simbolismo matemático e comando. Dessa relação configura-se a relação dual: comando simbólico-visualização (THOMPSON, 1987 apud BELLEMAIN, 2002 p.57), na qual se espera uma adequação dos comandos em face ao formalismo matemático implementado pelo micromundo matemático. Posto isso, verifica-se a relevância da relação dual para a significação de todo o processo de construção que os alunos desenvolvem no ambiente micromundo, além de constituir um elemento chave para o favorecimento de sua própria aprendizagem.

Pelo exposto, um questionamento pertinente que surge é: como se dá a interação com o micromundo? Bem, a resposta é pela interface a qual pode ser caracterizada como um produto de todo um trabalho de programação, é nela que os usuários realizarão as interações com o micromundo. Ela oportuniza a comunicação entre o universo interno e o universo externo, sendo essa atividade de interação possibilitada pelo micromundo.

Uma importante configuração que pode ser tomada, na elaboração da interface a fim de favorecer a interação com o micromundo, diz respeito à manipulação direta. Quanto a essa temática, destacamos a pesquisa de Laborde e Laborde (1991). O ponto chave da manipulação direta é a adequação da ação à reação e da reação à ação, que vemos como um ponto crucial para a evolução da atividade do sujeito. Nesse sentido, “uma interface está em manipulação direta se o usuário tem a impressão de agir diretamente sobre os objetos, sendo ator e regulador do movimento, manipulando os objetos do sistema" (NANARD, 1990 apud GAULIN et al. 1994, p. 64, *tradução nossa*).

Uma importante contribuição desse tipo de abordagem pode ser verificada, por exemplo, em software de geometria dinâmica, quando através da manipulação direta permitem a construção de figuras geométricas sem a necessidade de explicitar por via de comandos, por exemplo, suas propriedades.

É nesse contexto que situamos nossa pesquisa, haja vista nossa proposta de prototipação de um micromundo matemático cuja interação é dada pelo princípio da manipulação direta. Concluída a exposição de alguns princípios da Engenharia de Software Educativo, abordamos, na seção seguinte, alguns elementos das Engenharias Didática e Didático-Informática, pois elas fornecem o arcabouço teórico-metodológico desta pesquisa.

2.3 A ENGENHARIA DIDÁTICO-INFORMÁTICA

Iniciamos esta seção com uma abordagem sobre a Engenharia Didática, a qual pode ser considerada como um modelo teórico-metodológico que se propõe a fornecer elementos teórico-metodológicos que subsidiem a atividade do pesquisador na identificação das necessidades de um determinado domínio.

Tibúrcio (2016) acrescenta que esse modelo teórico-metodológico se torna de grande importância para o desenvolvimento de software educativos, por considerar "a pluralidade de usuários, as finalidades, os conhecimentos envolvidos, entre outros fatores" (TIBÚRCIO, 2016, p.43). Nesse sentido, ao considerarmos, por exemplo, o processo de concepção e desenvolvimento de um micromundo matemático, o qual, por suas especificidades, o diferencia do desenvolvimento de software de outra natureza, constataremos a necessidade de um modelo específico, mais precisamente, de princípios teórico-metodológicos específicos, e esse modelo é dado pela ED. Assim:

> A Engenharia Didática (ARTIGUE, 1990, 2011), que trata da construção de sequências de ensino-aprendizagem a partir da utilização de conceitos e resultados de pesquisa, é objeto de reflexão de inúmeros estudos em didática da matemática. Nossa posição epistemológica é considerar que a concepção e o desenvolvimento de softwares educativos exigem a mobilização de uma engenharia didática específica que deve integrar conceitos e métodos da informática. Esta engenharia também faz parte do

> domínio da engenharia de software, mas o desenvolvimento de um software educativo tem especificidades que o diferenciam de outros softwares (BELLEMAIN et al., 2014, p. 6).

Um ponto que se mostra bastante significativo, quanto à concepção e desenvolvimento de software educativos, diz respeito à articulação das Engenharias Didática e a de Software. Conforme Tibúrcio (2016), essa articulação pode ser caracterizada como um modelo que leva em consideração os princípios das engenharias supracitadas, de forma a atender às especificidades de um determinado domínio matemático em um contexto de ensino-aprendizagem.

Em uma perspectiva transdisciplinar, a Engenharia Didático-Informática (EDI) é o resultado da integração dos princípios da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996) e os da Engenharia de Software, com a finalidade de conceber e desenvolver software educativos.

A EDI fornece elementos que dão suporte à atividade de concepção e desenvolvimento de softwares educativos. Uma importante consideração é que todo o processo de concepção e desenvolvimento ancorado nos princípios do EDI leva em consideração as especificidades do ensino e da aprendizagem que cada objeto de saber exige.

Em sua pesquisa, Tibúrcio (2016) constatou, após uma análise em algumas pesquisas, que há uma lacuna quanto ao desenvolvimento de software educativos, mais especificamente, no que concerne aos processos de concepção e desenvolvimento que considerem, concomitantemente, as dimensões Didática, Cognitiva, Epistemológica e Informática de um determinado objeto de estudo. Segundo o autor, o desenvolvimento dos software analisados ora se baseia na dimensão informática, em detrimento das demais, ora se baseia nas dimensões Didática, Cognitiva e Epistemológica; porém, sem levar em consideração as potencialidades da dimensão informática. A partir dessas reflexões, sentimo-nos motivados a abordar, ao longo desta pesquisa, à luz dos princípios teórico-metodológicos da EDI, um modelo de desenvolvimento de software que contemple todas as dimensões supracitadas. Dessa forma, a princípio, expomos alguns elementos que possibilitam a integração entre a ED e a ESE.

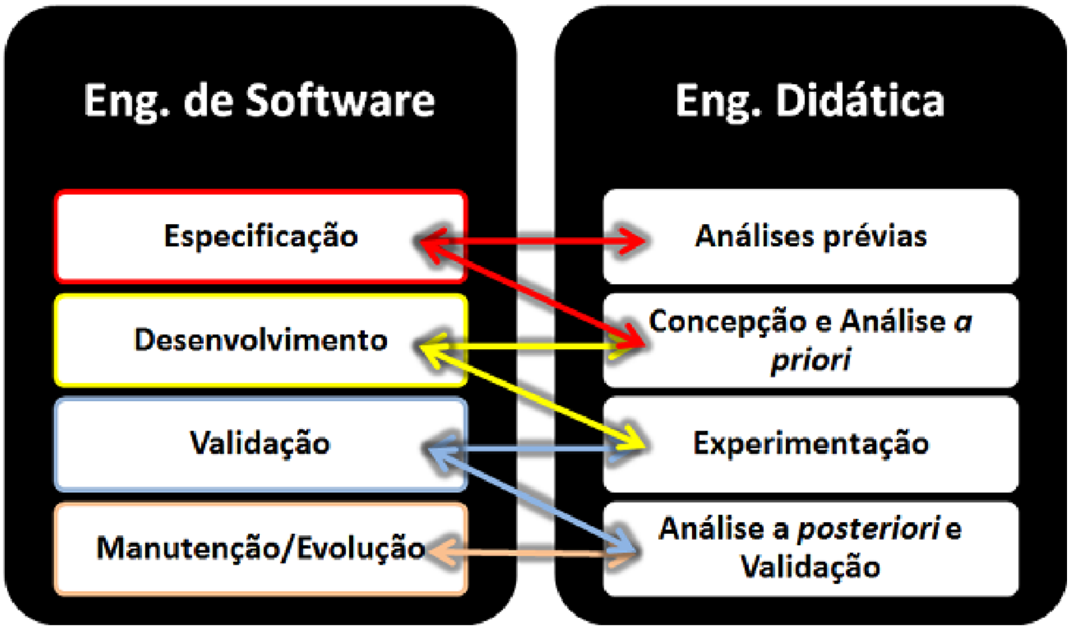
Pelo exposto, um questionamento pertinente que surge é: como se dá essa integração? Bem, Tibúrcio (2016) aponta a Engenharia de Requisitos (ER) como um dos caminhos para a integração entre a ED e a ESE. Por ser uma proposta válida, dentro da Engenharia de Software, a ER fornece requisitos para a especificação, desenvolvimento e validação de um software educacional. Ao debruçarmo-nos sobre a ER percebemos que, assim como a ED, a ER fornece um percurso metodológico para o controle das variáveis em estudo. Como metodologia, a ER fornece-nos os “feedbacks” do processo de desenvolvimento que foi atingido em um software educativo, por exemplo, em face do que inicialmente tinha se proposto realizar, levando em consideração, para isso, as exigências do usuário e as possibilidades de criação do software. Toda essa abordagem, vale aqui destacar, é muito bem delineada e justificada. Nesse sentido, conforme Nuseibeh e Easterbrook (2000):

> A principal medida de sucesso de um sistema de software é o grau em que se encontra com o propósito para o qual foi concebido. Em termos gerais, a engenharia de requisitos para sistemas de softwares - ER é o processo de descobrir a finalidade, através da identificação das partes interessadas e suas necessidades, e documentá-las de uma forma passível de análise, comunicação e posterior implementação (NUSEIBEH & EASTERBROOK, 2000 apud TIBÚRCIO, 2016, p.40).

Como visto, o parágrafo precedente oferece-nos fortes indícios de que a ER se dedica ao levantamento de requisitos que subsidiam o processo de desenvolvimento de software educativos.

Pelo exposto, infere-se que a ER enriquece a ESE, fornecendo elementos que lhe dão suporte na identificação das necessidades de um determinado domínio, por meio da elicitação de requisitos. Dessa forma, uma questão que ainda persiste em nossa abordagem refere-se a como se efetiva a integração entre a ED e a ESE suportada pela ER. A resposta a essa questão começa a ser evidenciada por meio de uma figura apresentada por Tibúrcio (2016), na qual são feitas as correspondências entre os principais elementos da ED e da ESE, que de uma certa forma mostra o quanto estão imbricados. Ei-la:

Figura 2: Comparativo entre as engenharias



Fonte: (TIBÚRCIO, 2016, p. 46)

O autor ressalta que apesar dos processos das engenharias não serem equivalentes, elas se articulam e se complementam.

Eis uma breve explicação sobre as relações evidenciadas acima: a especificação consiste em determinar a tipologia do software. A Engenharia de Requisitos tem um papel muito importante nessa fase, pois fornece elementos que subsidiam essa escolha. A especificação (ES) é articulada com as análises prévias (ED), a qual, por sua vez, consiste em uma ampla abordagem para a identificação dos aspectos cognitivo, epistemológico e didático deum determinado objeto de estudo. Quanto à etapa de desenvolvimento (ES), essa consiste na elaboração de um protótipo. Essa, por sua vez, toma por base os dados coletados na fase da especificação, a qual, por conseguinte, se articula com a Concepção e Análise a Priori (ED), que são etapas simultâneas.

A Validação do software (ES) consiste, segundo Tibúrcio (2016, p.47), em "... verificar se ele realiza o que se propôs a fazer. Fazem parte dessa fase os testes, a criação de situações de utilização, bem como a aplicação do software nas situações de uso." O autor articula a validação (ES) com as fases da experimentação e da Análise a posteriori e Validação da Engenharia Didática.

Por fim, Tibúrcio (2016) propõe a articulação entre a última fase da ES, que é definida como Manutenção/Evolução do software, com a Análise a posteriori e Validação da ED. Aquela (Manutenção/Evolução) consiste no constante aperfeiçoamento do software para que ele se adeque cada vez mais à proposta inicial. Esta (Análise a priori e validação) fornece os elementos que subsidiam o aprimoramento do software.

2.3.1 O Modelo de Software baseado na Engenharia Didático-Informática

Como já foi afirmado em seções anteriores, estamos interessados na prototipação de um software educativo sob a ótica de um modelo que esteja ancorado nas noções basilares das Engenharias Didática e de Software e que atenda às necessidades de ensino-aprendizagem das representações das soluções do sistema de equações lineares nos campos algébrico e gráfico, as quais serão evidenciadas em nossa análise preliminar, mais precisamente, na elicitação dos requisitos. Encontramos, na pesquisa de Tibúrcio (2016), esse modelo, que, por sua vez, busca articular os elementos essenciais dessas duas engenharias.

Além das dimensões didática, cognitiva e epistemológica que integram a Engenharia Didática, Tibúrcio (2016) acrescenta, a esse caminho metodológico, a dimensão informática. A inserção da informática toma um lugar de destaque nesse processo, pois a mesma, quando situada em um contexto integrado às dimensões supracitadas, pode favorecer significativamente a atividade matemática e levar-nos a pensar sobre os objetos de estudo da Matemática.

Fazemos referência a todas as dimensões que permearam o desenvolvimento do modelo de software tratado por Tibúrcio (2016), como ilustrado na Figura 3:

Figura 3: Versão final do Modelo de Processo de SE

Fonte: Tibúrcio (2016, p. 56)

Como exemplificado no modelo acima, temos que a primeira coisa a ser feita é a delimitação do campo matemático. Faz-se necessária, neste primeiro momento, a definição do tema que se pretende abordar com o software.

Logo em seguida, o autor apresenta-nos as fases que nortearão a concepção e o desenvolvimento do software, que são: a fase teórica e a fase experimental. A fase teórica, por sua vez, subdivide-se em: *Análises preliminares* - nessa etapa é realizado um amplo estudo sobre o tema pretendido, levando em consideração os aspectos cognitivos, didáticos, epistemológicos e informáticos em torno dele; *Análise de requisitos* - nessa fase é feito um estudo detalhado nos resultados encontrados nas análises preliminares, a fim de estabelecer o que já é feito e quais são as lacunas que ainda permeiam o tema em estudo; *Análise a priori + prototipação* - neste momento, são colocados em cena os requisitos levantados na fase anterior, por meio do desenvolvimento do modelo preliminar do software, e sua interface começa nesse momento a ser criada para que sejam explorados seus recursos. Ao mesmo tempo, “são pensadas situações de uso, problemas que podem surgir com sua utilização, hipóteses de respostas dos usuários finais e (...) verifica-se o funcionamento do protótipo para que eventuais erros sejam corrigidos...”(TIBÚRCIO, 2016, p. 58).

Já a fase experimental, como o próprio nome faz alusão, corresponde à experimentação do software por meio de testes. O autor faz referência ao primeiro teste como *piloto,* que corresponde a um teste inicial e, em seguida, o propõe aos professores e, por fim, aos alunos. Essa configuração toma um lugar de destaque na verificação das possíveis adequações e/ou inadequações dos recursos do software com os objetivos iniciais, coerência com o próprio objeto de conhecimento (matemático) abordado, entre outros.

Concluindo a explanação sobre esse modelo, vamos à última etapa, que é a *análise a posteriori e validação*. Neste momento, são confrontados os resultados obtidos na etapa anterior com o que foi produzido na análise a priori + prototipação. Por meio dessa comparação, o pesquisador tem condições de verificar se o software atende ao que foi proposto inicialmente, no que se refere ao ensino e à aprendizagem do seu objeto de estudo.

Finalizado o levantamento do quadro teórico-metodológico da nossa pesquisa, iniciamos, no próximo capítulo, a abordagem das análises preliminares do nosso objeto de estudo.

3. ANÁLISES PRELIMINARES

Neste capítulo, abordamos as análises preliminares do objeto de conhecimento matemático em que se propõe investigar seus aspectos nas dimensões didáticas, cognitiva, epistemológica e informática, a fim de obter requisitos para a prototipação de um software educativo.

3.1 SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Entre as aplicações mais básicas da Matemática está a resolução de equações algébricas. Nesse contexto, destacamos as equações lineares em n variáveis; isto é, equações do tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \tag{1}$$

Nessa equação, $a_1, a_2, \dots, a_n,\ b$ são elementos de um Corpo k, usualmente $k \in \{R, C\}$, enquanto que $x_1, x_2, \dots, x_n$ são as variáveis ou incógnitas da equação.

Uma solução da equação (1) consiste em uma n -upla $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in k^n$que satisfaz a equação; isto é

$$a_1s_1 + a_2s_2 + \dots + a_ns_n = b.$$

Um sistema de m equações lineares em n variáveis tem a forma genérica (2):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases},$$

Em que a_{ij} *e* b_{ij}, com *1 ≤ i ≤ m* e *1 ≤ j ≤ n*, são elementos de k. Como no caso de uma equação linear, soluções para esse sistema são dadas por n-uplas $s \in k^n$ que precisam satisfazer todas as equações simultaneamente.

Seja $S \subset k^n$ o conjunto formado pelas soluções do sistema (2). Certamente, podemos ter $S = \emptyset$, quando o sistema não possui solução ou, mais usualmente, que o sistema é impossível. Podemos ainda ter $S = \{s\}$, no caso em que o sistema possui solução única ou, mais usualmente, que o sistema é possível e determinado.

Finalmente, S pode ainda ser um conjunto infinito, o qual se configura como possível e indeterminado.

Considerando a forma matricial do sistema (2). Como usual, as matrizes

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, X = (x_j) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ e } B = (b_i) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

chamadas respectivamente de matriz dos coeficientes, matriz das variáveis e matriz dos termos independentes. Usando o produto usual de matrizes, podemos escrever o sistema (2) na chamada forma matricial (3):

$$A.X = B$$

Disso, temos que a matriz ampliada do sistema (2) é dada por:

$$A|B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

À guisa de comentário, vale aqui evidenciar que os sistemas de computação algébrica são bastante eficientes em manipular matrizes.

Considerando a representação matricial do sistema linear dada em (3), uma solução $S \; c \; k^n$ para o sistema agora será vista como uma matriz coluna

$$s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix},$$

de forma que

$$A \cdot s = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = B$$

3.2 DEPENDÊCIA E INDEPENDÊNCIA LINEAR

Neste momento, faz-se bastante pertinente a introdução do conceito de dependência e de independência linear, que são de extrema importância para a aprendizagem de Álgebra Linear. Em Boldrini et al. (1980, p.114), encontramos:

> Sejam V espaço vetorial e $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. Dizemos que o conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é linearmente independente (LI), ou que os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são LI se a equação $a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n = 0$, isso implica que $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$. No caso em que exista algum $ai \neq 0$, dizemos que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é linearmente dependente (LD) ou que os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são LD.

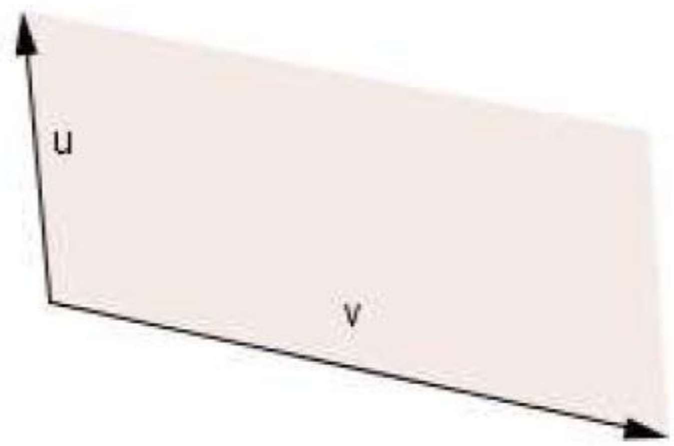
Percebemos que a essa definição associa-se a definição de combinação linear. Dessa forma, um dos resultados principais é concebermos uma equação como uma combinação linear de vetores. Nesse sentido, encontramos o seguinte teorema em Anton e Rorres (2001), o qual mostra que:

> Um conjunto S de dois ou mais vetores é:
>
> (a) Linearmente dependente se, e somente se, pelo menos um dos vetores de S pode ser escrito como combinação linear dos outros vetores de S.
>
> (b) Linearmente independente se, e somente se, nenhum vetor em S pode ser escrito como uma combinação linear de outros vetores de S. (p.170)

Além da abordagem algébrica, os autores supracitados trazem em suas referidas obras uma abordagem geométrica dos conceitos de dependência e independência linear, como podemos verificar abaixo.

Nesse sentido, um conjunto com dois vetores v_1 e v_2, no R^2, são ditos LI se, e somente se, os vetores não estão contidos em uma mesma reta suporte, isto é, não existe um $k \in R$ tal que $v_2 = k.v_1$ (caso exista, são ditos LD). Como podemos verificar na figura a seguir.

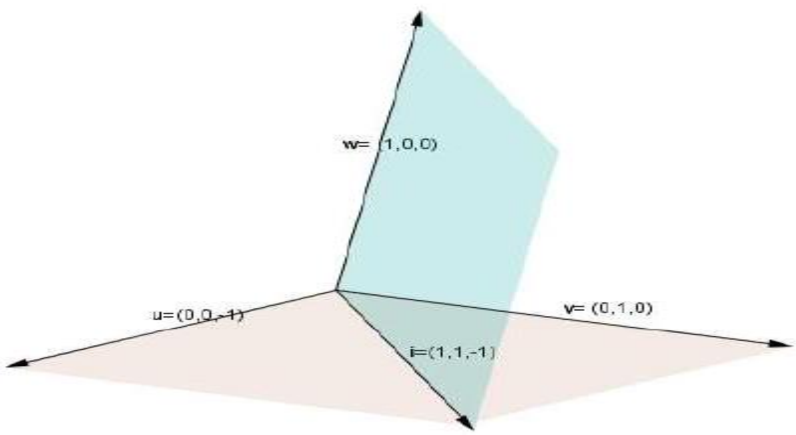
Figura 4: Representação Geométrica de vetores LI



Fonte: (ANDRADE, 2010, p. 21)

Para o espaço tridimensional, o R^3, a interpretação geométrica é análoga, isto é, um conjunto com três vetores são ditos LI se, e somente se, os vetores não estão contidos em um mesmo plano suporte. Esquematicamente, temos:

Figura 5: Representação Geométrica de vetores LI



Fonte: (ANDRADE, 2010, p. 21)

Um importante resultado que se pode verificar com essa abordagem refere-se à obtenção, tanto no R^2 quanto no R^3, de vetores que são escritos como uma combinação linear de outros vetores de um conjunto dado. Quanto às equações de um sistema linear, elas também podem ser escritas como uma combinação linear de uma outra equação do sistema? E as soluções, se manterão, quando substituirmos, por exemplo, as equações originais pelas equações equivalentes? Bem, a resposta é dada nas próximas seções.

3.3 MÉTODOS DIRETOS

Um método direto para a resolução de um sistema linear consiste em um procedimento que fornece as soluções exatas, dentre eles destacamos a Regra de Cramer e os Métodos de escalonamento.

A regra de Cramer é um resultado teórico preciso que tem sua utilidade limitada pelo alto custo computacional. Além do mais, ela só se aplica aos chamados sistemas lineares quadrados (m=n). Apesar disso, ela é usualmente abordada no Ensino Médio e, por essa razão, apresentá-la-emos na próxima seção.

Os métodos de escalonamento, por sua vez, correspondem a uma alternativa computacional viável para sistemas lineares com um grande número de equações e de variáveis. Funcionam tanto para sistemas quadrados quanto para sistemas retangulares (m ≠ n), os quais serão abordados nas próximas seções.

3.3.1 A Regra de Cramer

O matemático escocês Maclaurin escreveu um livro chamado Um tratado sobre a Álgebra. Nele, o autor apresenta o que chamou de “teoria geral”, para a eliminação de incógnitas de um sistema linear, fazendo a demonstração para as matrizes de ordem 2 e 3 e explica como fazê-la para as matrizes de ordem 4. Porém, não comenta se o resultado pode ser generalizado para matrizes de ordem n ≥ 4, segundo Sá (2004).

O “teorema geral de Maclaurin”, hoje conhecido como regra de Cramer, pois foi o matemático suíço Cramer quem publicou o resultado para as matrizes de ordem n, no apêndice de seu livro Introdução à Análise de Curvas Algébricas, de 1750. Na publicação, ele determinava que o valor das incógnitas encontradas eram frações, onde no numerador e no denominador apareciam certas combinações dos coeficientes do sistema linear. Hoje sabemos que essas combinações são chamadas de determinantes, conforme Sá (2004).

A regra de Cramer nos fornece a base teórica para determinar as soluções de um determinado sistema quadrado. Vale aqui ressaltar que um sistema admite solução única se, e somente se, o determinante da matriz dos coeficientes, associada ao sistema, é diferente de zero. Em Leon (1998, p.75), encontramos que as soluções desses sistemas podem ser obtidas pela fórmula:

$$x_j = \frac{det(A_j)}{det(A)}, j = 1, \ldots, n$$

Em que *det(A)* corresponde ao determinante da matriz *A*, enquanto A_j corresponde à matriz obtida de A substituindo a *i*-ésima coluna pela matriz *B* dos termos independentes.

O método usualmente empregado para resolver sistemas formados por m equações em n variáveis é conhecido como Método do Escalonamento ou Método de Eliminação Gaussiana.

A ideia básica desse procedimento é realizar operações sobre as equações do sistema, até que ele ganhe uma forma em que as soluções possam ser “facilmente” obtidas. Com isso em mente, duas perguntas surgem naturalmente:

(a) Qual é a forma em que se deseja que as equações do sistema estejam?
(b) Uma vez essas na forma esperada, como se obtém “facilmente” as soluções do sistema?

As respostas são inspiradas nos sistemas quadrados, mais especificamente os triangulares, os quais serão evidenciados na próxima seção.

3.3.2 Sistemas triangulares e os métodos das substituições regressivas e progressivas

Um sistema triangular superior de ordem 4 tem a forma:

$$\begin{cases} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3 + u_{14}x_4 = b_1 \\ \qquad\quad u_{22}x_2 + u_{23}x_3 + u_{24}x_4 = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad u_{33}x_3 + u_{34}x_4 = b_3 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad u_{44}x_4 = b_4 \end{cases}$$

Em condições adequadas um sistema desse tipo é resolvido facilmente. Da última equação encontramos:

$$x_4 = \frac{b_4}{u_{44}}.$$

Substituindo esse valor na terceira equação, obtemos:

$$x_3 = \frac{(b_3 - u_{34}x_4)}{u_{33}}.$$

De maneira geral, conhecendo-se os valores das variáveis $x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n$, o valor da variável x_i é obtido a partir da fórmula:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}x_j}{u_{ii}} = \frac{b_i - (u_{ii+1}x_{i+1} + u_{ii+2}x_{i+2} + \cdots + u_{in}x_n)}{u_{ii}}.$$

Esse é o chamado Método das Substituições Regressivas.

De maneira análoga, um sistema triangular inferior de ordem 4 tem a forma:

$$\begin{cases} l_{11}x_1 = b_1 \\ l_{21}x_1 + l_{22}x_2 = b_2 \\ l_{31}x_1 + l_{32}x_2 + l_{33}x_3 = b_3 \\ l_{41}x_1 + l_{42}x_2 + l_{43}x_3 + l_{44}x_4 = b_4 \end{cases}$$

Como antes, em condições adequadas um sistema desse tipo é resolvido facilmente. Da primeira equação, encontramos:

$$x_1 = \frac{b_1}{l_{11}}.$$

Substituindo esse valor na segunda equação, obtemos:

$$x_2 = \frac{(b_2 - l_{21}x_1)}{l_2 2}.$$

De maneira geral, conhecendo-se os valores das *i* – 1 variáveis anteriores, o valor da variável *i* é obtido a partir da fórmula:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}x_j}{l_{ii}} = \frac{b_i - (l_{i1}x_i + l_{i2}x_2 + \cdots + l_{ii-1}x_{i-1})}{l_{ii}}.$$

Esse é o chamado Método das Substituições Progressivas.

Uma vez que o sistema pode ser “facilmente” resolvido se ele estiver na forma triangular, como modificá-lo a fim de obtê-la, de modo que ele possua as mesmas soluções do sistema original?

Bem, a resposta é pelas Operações Elementares, assunto tratado na próxima seção.

3.3.3 Operações elementares em linhas

Em Boldrini (1986, p.5), dois sistemas lineares são ditos Sistemas Equivalentes se eles possuem as mesmas soluções. Para tais sistemas é possível passar de um para o outro, executando um número finito de operações nas equações do sistema, chamadas Operações Elementares. Assim, ao resolver um sistema linear, estamos, na verdade, transformando uma situação inicial em outra que lhe é equivalente, ou seja, com as mesmas soluções. Disso, faz-se necessário compreender as operações realizadas a cada etapa e o significado da solução final do problema.

Em Robbiano (2011, p. 52), uma operação elementar corresponde a uma operação do seguinte tipo:

(i) Permuta de linhas; ou seja, trocar a linha i pela linha s da matriz. Representamos esta operação na forma $Li \leftrightarrow s$.

(ii) Multiplicação de uma linha por um número k diferente de zero. Representamos esta operação na forma $Li \rightarrow k \cdot i$.

(iii) Substituição de uma linha por sua soma com um múltiplo não nulo de outra linha. Representamos esta operação na forma $Li \rightarrow i + k \cdot s$.

Pelo exposto, infere-se que essa abordagem favorece a compreensão de dependência linear, a qual consequentemente oportuniza uma compreensão mais ampla dos objetos da Álgebra Linear, mais especificamente, dos sistemas de equações lineares. Quanto a essa abordagem, o que é preconizado nos Documentos Oficiais?

3.4 DOCUMENTOS OFICIAIS

Como foi afirmado na introdução desta pesquisa, no Brasil é esperado que o ensino de Sistemas Lineares se inicie no 4º ciclo do Ensino Fundamental (8º e 9º anos), segundo os PCN e a BNCC. Neste momento, chamamos atenção para o que é preconizado nos documentos do estado de Pernambuco quanto ao ensino de Sistemas Lineares. Dentre eles, fazemos referência aos Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco (PCPE), no qual é dito que, para essa etapa de ensino (Ensino Fundamental anos finais, mais especificamente, 8º e 9º anos), é esperado que os alunos consigam:

> Resolver problemas envolvendo sistemas de equações de primeiro grau com duas incógnitas pelos métodos da adição, substituição e comparação, e representar sua solução no plano cartesiano, fazendo uso das representações simbólicas; associar a região do plano cartesiano à solução de um sistema de duas equações de primeiro grau e duas incógnitas. (PERNAMBUCO, 2012, p.105-106).

Já no Ensino Médio, os documentos oficiais como os PCN, PCPE e as Orientações Curriculares para o Ensino Médio trazem a necessidade de se debruçar, nessa etapa de ensino, sobre os Sistemas Lineares quanto a sua ampliação (para sistemas de 3 equações e três incógnitas), resolução e representação das soluções encontradas em face ao sistema linear proposto. Nessa etapa de ensino, ainda segundo os PCN, é necessário um resgate aos conhecimentos anteriores sobre os sistemas de equações lineares 2 por 2, para assim introduzir os sistemas 3 por 3, como explicitado a seguir.

> Com relação à Álgebra, há ainda o estudo de equações polinomiais e de sistemas lineares. Esses dois conteúdos devem receber um tratamento que enfatize sua importância cultural, isto é, estender os conhecimentos que os alunos possuem sobre a resolução de equações de primeiro e segundo graus e sobre a resolução de sistemas de duas equações e duas incógnitas para sistemas lineares 3 por 3, aplicando esse estudo à resolução de problemas simples de outras áreas do conhecimento(BRASIL, 2002, p.122).

No PCPE, são tratadas como habilidades para essa etapa de ensino no que se refere ao estudo dos sistemas de equações: “resolver sistema de duas (ou três) equações de primeiro grau e duas (ou três) incógnitas por escalonamento (método da adição); associar duas retas no plano cartesiano à representação de um sistema de duas equações de primeiro grau e duas incógnitas” (PERNAMBUCO, 2012, p. 130-131).

Quanto ao que é preconizado pelos documentos oficiais, no que se refere ao tratamento da resolução dos Sistemas Lineares, encontramos, nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM), o seguinte extrato:

> [...] A resolução de sistemas 2X3 ou 3X3 também deve ser feita via operações elementares (o processo de escalonamento), com discussão das diferentes situações (sistemas com uma única solução, com infinitas soluções e sem solução). Quanto à resolução de sistemas de equações 3X3, a regra de Cramer deve ser abandonada, pois é um procedimento custoso (no geral, apresentado sem demonstração, e, portanto, de pouco significado para o aluno), que só permite resolver os sistemas quadrados com solução única (BRASIL, 2006, p. 77-78).

E, dessa forma, corroborando o que fora discutido, no que se refere ao significado e à representação das soluções do sistema de equações, tomamos, mais uma vez, uma significativa contribuição das OCEM, em que é preconizado:

> O entendimento do significado de uma equação e de seu conjunto de soluções não é imediato, e isso é natural, pois esse significado não é explícito quando simplesmente se escreve uma equação (BRASIL, 2006, p. 77-78).

Sendo esse um ponto extensível aos sistemas lineares. Dessa forma, inferimos que os documentos oficiais propõem um trabalho, frente aos sistemas de equações lineares, que colabore para um entendimento mais amplo da Álgebra Linear, como o conceito de dependência linear.

Terminada essa exposição, uma pergunta surge naturalmente: Por que os alunos têm dificuldades em dar significado e representar as soluções do sistema? Abordaremos essa temática na próxima seção.

3.5 DIFICULDADES DOS ESTUDANTES EM DAR SIGNIFICDOS E REPRESENTAR AS SOLUCOES DO SISTEMA

Na busca de encontrar alguns elementos que nos possibilitem uma melhor compreensão das limitações mais recorrentes apresentadas pelos alunos frente ao objeto de estudo desta pesquisa, foram verificados em Herrero apud Pantoja (2008, p. 19) três pontos. Eles nos ajudam a entendê-las, ao apresentar algumas reincidências de respostas quando se trabalham os Sistemas Lineares:

1. dificuldade em usar operações aritméticas elementares para resolver problemas verbais envolvendo Equações e Sistemas de Equações;

2. dificuldade em converter a linguagem escrita para uma linguagem matemática;

3. falta de costume de verificar as respostas encontradas durante o processo de resolução dos Sistemas e, com isso, não têm clareza do que elas representam.

Reforçando essa ideia, Almouloud e Bianchini (1996) apresentam uma análise dos erros mais frequentes entre os alunos, quando se trata da resolução de Sistemas Lineares. Assim os elencamos: de cálculo numérico e algébrico; de método de resolução; de representação gráfica; ignoram que a solução de um sistema linear deve satisfazer todas as suas equações.

Dando continuidade à temática dos erros mais frequentes entre os alunos, quanto ao nosso objeto de estudo, citamos os resultados da pesquisa de Souza (2014), os quais são frutos de uma atividade aplicada em duas turmas do 8º ano do Ensino Fundamental. Eles são organizados por meio de um quadro, no qual se percebe que, quanto ao objetivo - Representar equações graficamente e analisar o seu comportamento, 53% dos alunos alcançaram esse objetivo, 13% apresentaram dificuldade e 34% não alcançaram; quanto a - Encontrar a solução do sistema de equações dando o seu significado, 53% dos alunos alcançaram esse objetivo, 6% apresentaram dificuldade e 41% não alcançaram; no que concerne a - Analisar o comportamento das retas pelo gráfico, 47% dos alunos alcançaram esse objetivo, 6% apresentaram dificuldade e 47% não alcançaram.

Com o intuito de evidenciar ainda mais essa temática, Freitas (1999), em sua pesquisa constata, por meio de um teste diagnóstico com alunos do Ensino Médio, que 86% dos alunos não relacionam a solução de um sistema linear com os pontos comuns entre as retas que o representam.

Ainda, debruçando-se sobre essa temática, Barros et al. (2012) realizam uma pesquisa com 239 alunos do Ensino Superior Politécnico matriculados nas disciplinas de Álgebra Linear e de Geometria Analítica. A metodologia utilizada pelos autores da pesquisa, para obter os dados, deu-se por meio de resolução de situações-problema e, essas, por sua vez, consolidavam-se através de apresentações orais. Essa dinâmica foi favorecida, pois uma das autoras lecionava as referidas disciplinas. Dos 239 alunos, 127 apresentaram raciocínios de resolução não válidos e 46 alunos não apresentaram justificativas ou não responderam. Após uma análise nas 127 respostas que apresentavam raciocínios de resolução não válidos, os autores categorizaram-nos por meio de uma tabela, como podemos conferir:

Tabela 1- Categorização dos raciocínios não válidos

Raciocínios não válidos	VA	VB	VC	VD	Total
Incompreensão do significado de sistema homogéneo	4	10	6	11	31
Interpretação incorreta da resolução efetuada	4	1	11	2	18
Comparação do número de incógnitas com o número de equações	–	7	1	5	13
Solução dada como vetor dos termos independentes	9	–	4	–	13
Conceções que envolvem o conceito de determinante	2	2	5	2	11
Incorreções na resolução pelo método de eliminação de Gauss	4	–	3	–	7
Enunciado de conceitos ou procedimentos sem os aplicar à situação	–	–	4	2	6

Fonte: Barros et al. (2012, p.340)

Chamamos atenção para os 2º, 3º e 4º raciocínios não válidos. Quanto à interpretação incorreta da resolução efetuada, os autores percebem que os alunos resolvem parcialmente os sistemas dados, aplicando, para esse fim, o método de eliminação Gaussiana ou o método da substituição ou, simplesmente, substituindo as incógnitas pela solução apresentada na questão, porém não interpretam corretamente o resultado obtido.

Quanto à comparação do número de incógnitas com o número de equações, os autores percebem que há uma forte tendência, entre os alunos, em considerar que para o conjunto solução ser, de fato, a solução do sistema dado e/ou para “resolver” o sistema, é necessário que o número de incógnitas seja igual ao número de equações.

No que concerne à solução dada como vetor dos termos independentes, verifica-se uma recorrência, entre os alunos, que é o fato de considerar o sistema, em sua forma matricial, como *Ax = vetor solução,* e, sendo a sua resolução ancorada nessa representação. Dessa forma, os autores inferem que há uma incompreensão do significado de solução por parte dos alunos pesquisados.

Nossa hipótese, como já foi abordada na introdução desta pesquisa, é que essas dificuldades são advindas do fato de que não se exploram atividades que favorecem os vários registros de representação dos sistemas de equações lineares (língua natural, algébrico, gráfico etc.) e muitos menos a conexão entre eles, como propõe Duval (2004). Segundo Machado (1996), elas seriam minimizadas se os alunos conseguissem converter as soluções do registro algébrico para o gráfico e vice-versa. Seguindo esse entendimento, trazemos mais uma pesquisa que evidencia a coordenação satisfatória dos diversos registros de representação semiótica como um caminho para enfrentar essas questões.

> As pesquisas de Pavlopoulou (1993) [...] estabeleceram a relação entre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de conceitos de álgebra Linear e a deficiência na coordenação satisfatória dos diversos registros de representação semiótica (Karrer, 2006, p. 59).

Haja vista que um dos caminhos para superar as dificuldades supracitadas é trabalhar os vários registros de representação e a conexão entre eles, uma pergunta que nos parece ser bem pertinente, neste momento, é: a utilização de um micromundo favorece esse trabalho?

3.6 O USO DAS TECNOLOGIAS NO TRATAMENTO DA REPRESENTAÇÃO DAS SOLUÇÕES DO SISTEMA

As tecnologias digitais possuem um papel fundamental em contextos de ensino e aprendizagem, como preconiza a BNCC (2018) em uma de suas competências gerais, mais precisamente a quinta, a qual é indicada no extrato a seguir:

> Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva (BRASIL, 2018, p.9).

Um aspecto muito importante do pensamento matemático é a abstração da invariância. Isso, de uma certa forma, justifica a concepção/desenvolvimento de software dinâmicos. Mas claro, para reconhecer invariância — para ver o que permanece o mesmo — é preciso haver variação. *Mídias dinâmicas facilitam o alcance da variação inerentemente* (KAPUT, 1992 apud SILVA, 2016, p.28).

Quanto às representações conectadas em mídias dinâmicas e interativas, ainda pode inferir-se que:

> Considerando dois sistemas, A e B, definimos "conexão a quente" a capacidade automática ou através de um comando, de refletir uma ação tomada em um sistema A no sistema conectado B (note a direcionalidade). É aqui onde a contribuição computacional se torna mais aparente em um meio dinâmico e interativo (KAPUT, 1992 apud SILVA, 2016, p. 28).

Dessa forma, acreditamos que a utilização de um micromundo que favoreça a coordenação dos diferentes registros de representação, de forma dinâmica e articulada, possa ser um suporte bastante significativo às representações e manipulações das soluções do sistema de equação linear, como pode ser observado no trabalho de Silva (2016).

A fim de enriquecer ainda mais nossa análise preliminar, debruçamo-nos sobre a análise das dimensões (cognitiva, didática, epistemológica e informática) do nosso objeto de estudo, que será evidenciada na próxima seção.

3.7 ANÁLISE DAS DIMENSÕES

Tentamos, ao longo das subseções subsequentes, responder os questionamentos levantados na análise preliminar da pesquisa de Tibúrcio (2016), os quais podem ser checados no quadro abaixo. Objetiva-se, por meio desse levantamento, estabelecer requisitos que subsidiem o processo de prototipação de um software.

Quadro 1- Reformulação da análise preliminar.

QUESTIONAMENTOS INICIAIS	QUESTIONAMENTOS REFORMULADOS
DIMENSÃO COGNITIVA	
1. Qual/quais teoria(s) cognitivas estão	1. Existem indicações na literatura de como o

envolvidas com a aprendizagem do domínio?	estudante aprende o conhecimento específico?
DIMENSÃO DIDÁTICA	
2. Qual é o estado atual do ensino do domínio? Quais são as contribuições e as principais dificuldades geradas pelo ensino atual?	2. Qual é o estado atual do ensino do domínio? Quais são as consequências desse ensino?
DIMENSÃO EPISTEMOLÓGICA	
3. Quais são as características do conhecimento que dificultam a aprendizagem e o ensino?	3. Quais são os aspectos do conhecimento que podem dificultar a aprendizagem?
DIMENSÃO INFORMÁTICA	
4. Como os recursos tecnológicos podem contribuir para o ensino e a aprendizagem do domínio?	4. Quais as características fundamentais que o ambiente deve conter para atender as necessidades/características que contribuam para o ensino e a aprendizagem do domínio?

Fonte: Tibúrcio (2016, p.67)

3.7.1 Aspectos Epistemológicos

Objetivávamos levantar alguns dados que nos dessem suporte à identificação dos aspectos epistemológicos que podem dificultar a aprendizagem dos Sistemas Lineares. Dessa forma, apresentamos, nesta subseção, alguns resultados importantes para nossa pesquisa.

Em sua pesquisa, Dias (1998) introduz uma divisão dos objetos de estudo do domínio da Álgebra Linear. Para esse fim, ela propõe a seguinte classificação: os arcabouços de álgebra linear, geometria afim euclidiana, sistemas lineares, matrizes e determinantes. Quanto aos registros de representação desses mesmos objetos, a autora indica:

- quatro registros de representação semiótica: a representação simbólica intrínseca, a representação pelas coordenadas, a representação por equações e a representação matricial.
- dois pontos de vista: cartesiano e paramétrico. A flexibilidade

entre esses dois pontos de vista opera tanto no registro algébrico quanto no registro geométrico, além das articulações possibilitadas entreos próprios registros.

Um dos primeiros a estudar a fundo as equações lineares, de forma qualitativa e bastante descritiva que se tem datado, foi Leonhard Euler. O termo: dependência linear aparece em um dos seus textos, uns dos primeiros a tratar do tema, e tem suas origens no estudo de sistemas de equações lineares e intitula-se: Em uma contradição aparente na doutrina das linhas curvadas, data de 1750. Euler trata do assim chamado paradoxo de Cramer. Nesse texto, ele aborda o fato de que um sistema de n equações lineares com n incógnitas determina sempre uma solução única, fato que, ao que parece, era no momento implicitamente aceito por todos. Ele começa examinando essa questão para n = 2; para isso, ele propõe, como exemplo, as seguintes equações:

3x-2y = 5 e 4y = 6x-10;

Eis o que ele diz: “Veremos que não é possível determinar as duas incógnitas *x* e *y*, pois eliminando o *x*, a outra desaparece de si mesma e obtemos uma equação idêntica, da qual estamos em posição de não determinar nada”. (EULER, 1750, p.226, *tradução nossa*).

A razão para isso vem do fato da segunda equação mudar para *6x-4y = 10*, que pode ser vista como a primeira equação multiplicada pelo escalar 2. Dessa forma, não diferem entre si. Esse fato não era uma revelação para os matemáticos da época, mas essa abordagem de que duas equações podiam ser idênticas não era um objeto de discussão. Até aquela época, não haviam desenvolvido uma teoria de equações lineares, mas apenas implementação de técnicas resolutivas.

Ao exemplificar para o caso *n = 3*, ele tomou um sistema que continha duas equações idênticas (chamaremos de $i\ e\ k$), e uma outra equação (que chamaremos de o) que era resultado da seguinte operação elementar: $Lo \rightarrow 2 \cdot (i + k)$. Disso, ele concluiu que: “Assim, quando dizemos que para determinar três incógnitas, basta ter três equações, devemos acrescentar esta restrição, que as equações diferenciem-se entre si, de tal modo, que nenhuma delas esteja incluída nas outras” (ibid., 226, *tradução nossa*).

Para os dias atuais, o "ser incluído em" configura-se como uma relação de dependência linear. No entanto, tomando por base o que foi concluído por Euler, que se encontra supracitado, corremos um grande risco ao resolvermos um sistema de equações lineares pelos métodos de eliminação e/ou substituição, de transformar a resolução em um “acidente”, o que significa que algumas incógnitas continuam indeterminadas. Com esse entendimento, o autor propôs a diferenciação entre: as propriedades de "dependência linear" e "ser incluído (fechado) em", que teve implicações significativas. De fato, seu ponto de vista estava inteiramente ligado à estrutura das equações, enquanto a dependência linear é um conceito mais amplo. Dessa forma, para dar significado ao que foi proposto pelo autor, ou seja, a propriedade que uma equação tem de estar “incluída em” ficou conhecida como dependência inclusiva.

O conceito de dependência inclusiva perdurou até a segunda metade do século XIX, sendo essa concepção matematicamente equivalente à dependência linear; além disso, era bastante significativa e adequada para o pensamento da época. Porém, foi percebido que essa concepção trazia uma limitação, pois ela não permitia fazer uma conexão entre as equações e as *n*-uplas de soluções e vice-versa, ou seja, não permitia conectar todos os sistemas equivalentes com o mesmo conjunto de soluções. Dessa forma, o modelo agora exige um raciocínio dual, ou seja, requerer a habilidade de transformar uma equação em *n*-upla e vice-versa, ou seja, unificar esses dois objetos sob um mesmo conceito linear. Esse passo foi dado em 1875, por Frobenius.

Em seu trabalho, Ousman (1996) mostrou que os estudantes universitários em seus primeiros anos, antes de cursarem Álgebra Linear, têm concepções semelhantes à dependência inclusiva de equações lineares. Nesse trabalho, ele percebeu que a resistência à concepção de dependência inclusiva não impede um bom uso da definição formal. Diante disso, constatou-se, do ponto de vista lógico, uma equivalência de concepções primitivas ao conceito formal, em cada um dos seus campos de aplicação. Dessa forma, o obstáculo, na verdade, está na natureza da generalização, e vários autores que se debruçaram sobre esse tema o classificaram como “o obstáculo do formalismo”. Pelo exposto, percebe-se que a dificuldade está em acessar o conceito formal por meio de um processo que leva em conta as concepções primitivas e as características epistemológicas desse tipo de generalização unificadora. Exemplificando o caso das equações, trata-se, portanto, de passar do conceito de dependência inclusiva para o conceito de dependência linear em um problema que mostra, de um lado, a interdependência entre as duas concepções e, de outro, a supremacia do conceito de dependência linear. Vale aqui destacar que essa passagem pode ser feita pelo método de Eliminação Gaussiana, o qual, no Ensino Médio, é conhecido como método do Escalonamento. Ele favorece a transição do conceito de dependência inclusiva para a definição formal do conceito de dependência linear. O algoritmo consiste em aplicações das operações elementares sobre as equações do sistema, ou, pertinentemente, podemos vê-lo como combinações lineares sucessivas sobre as linhas (equações), o qual se percebe a relação linear existente entre as equações do sistema. Portanto, uma análise mais aprofundada do algoritmo favorece a interpretação da dependência inclusiva em termos da dependência linear.

Por todo esse apanhado epistemológico, mais uma vez, chamamos atenção ao papel das operações elementares para a efetivação de uma abordagem que favoreça a conexão entre as equações e as *n*-uplas de soluções e vice-versa, de forma que essa abordagem proporciona a visualização da interdependência da solução com as equações do sistema e com as equações obtidas por meio de operações elementares, além de permitir a visualização da interdependência que se estabelece entre as próprias equações. Dessa forma, faz-se necessário um trabalho que coloque em evidência o papel que as operações elementares exercem sobre a solução, as equações e o próprio sistema, para que, assim, se configure uma abordagem necessária para a apropriação do conceito de dependência linear.

3.7.2 Aspectos Cognitivos

Nesta subseção, tentamos responder à pergunta da análise preliminar no que se refere à dimensão cognitiva. Vemos, na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Raymond Duval (2004), elementos que subsidiam e favorecem a compreensão das dificuldades cognitivas quanto às representações e manipulações das soluções do sistema de equação linear. Os diferentes tipos de representação de um determinado objeto matemático são designados por Duval como "registros de representação semiótica". Esses, por sua vez, são preconizados nos Documentos Oficiais, como se pode verificar a seguir.

> Podem ser utilizadas diferentes linguagens para representar os conteúdos símbolos: matemáticos, língua natural, desenhos, gráficos, ícones etc. Esse tratamento diversificado é apontado, atualmente, como um fator muito importante para a compreensão dos conceitos e dos procedimentos matemáticos (BRASIL, 2005, p. 75).

Haja vista que não temos um acesso direto aos objetos de estudo da Matemática e que a compreensão deles se dá pela mobilização de diferentes registros de representação. Percebemos, assim, que a Matemática, mais que qualquer outra ciência, faz uso desse simbolismo.

Segundo Duval (2003, p.13), há duas especificidades no processo de compreensão dos conceitos matemáticos que, de uma certa forma, os diferenciam dos demais processos de compreensão das demais áreas do conhecimento, a saber:

- Importância primordial das representações semióticas: ao se observar a história do desenvolvimento da matemática, verifica-se que ela está intimamente ligada às representações semióticas escolhidas. Nesse sentido, foi preciso levar em consideração as especificidades que cada representação semiótica colocaria em evidência ao representar um mesmo objeto matemático, pois apesar de elas apresentarem várias facetas de um mesmo objeto matemático, suas compreensões, muitas vezes, podem não ser tão simples. Vale aqui destacar que os objetos, números, conceitos e resultados da matemática não são diretamente perceptíveis, passam a existir por meio de suas representações semióticas.

- A grande variedade de representações utilizadas em matemática: existem diferentes tipos de registros de representações na matemática como, por exemplo, os números, a escrita algébrica, os desenhos geométricos, os gráficos, a linguagem natural (que é diferente da linguagem corrente).

Um ponto a ser destacado, refere-se à ideia que Duval desenvolve quando diferencia os sistemas semióticos utilizados na Matemática dos demais sistemas semióticos. Para isso, usa o termo “registro”, que categoriza as representações matemáticas. A título de ilustração, tomemos duas possíveis representações do nosso objeto de estudo, evidenciando o sistema semiótico e o registro de representação que abarcam cada uma dessas duas representações.

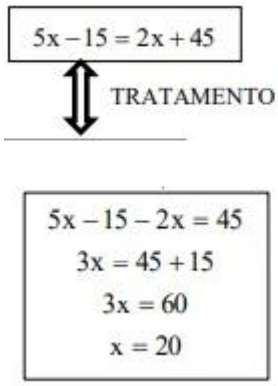
Quadro 2- Exemplificação da representação semiótica segundo Duval

	Representação algébrica de um Sistema de Equação Linear	Representação geométrica de um Sistema de Equação Linear
Objeto Matemático	Sistema de Equação Linear	Sistema de Equação Linear
Sistema Semiótico	Simbólico	Figural
Registro de Representação	Algébrico	Geométrico

Fonte: produzido pelo autor

Na tentativa de desenvolver uma abordagem que caracterizasse a atividade Matemática, Duval propõe que um dos principais desdobramentos desse tipo de atividade são as transformações sobre seus objetos de estudo, que, por sua vez, podem ser divididas em: tratamento e conversão. A transformação tratamento consiste em uma atividade de determinação das várias representações de um objeto matemático, dentro de um mesmo registro de representação. A título de exemplificação, tomemos o caso de resolução de um sistema linear quando, para esse fim, são utilizados apenas procedimentos algébricos, como pode ser verificado na Figura 6:

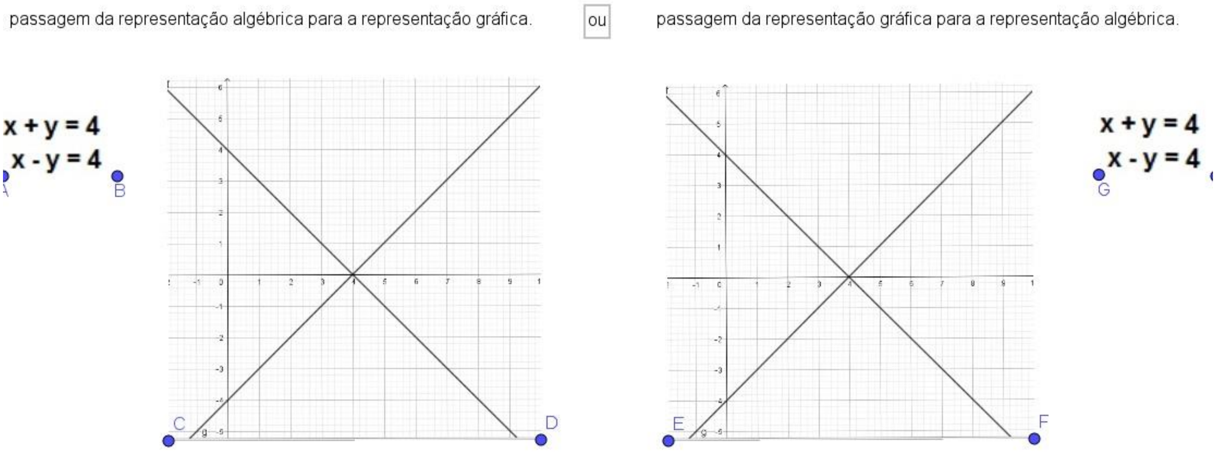
Figura 6: Tratamento de uma resolução de um Sistema Linear



Fonte: Lourenço et al. (2018, p. 86, adaptado)

Já a transformação conversão consiste em uma atividade de determinação dos vários registros de representação, por meio de suas correspondentes articulações, sendo toda essa atividade configurada sobre um mesmo objeto matemático. Quanto às articulações supracitadas, trata-se da passagem de um registro de representação para outro(s). Segundo Duval, é na mobilização dos diferentes registros que se encontra a chave para a aprendizagem matemática. Ele ainda enfatiza a importância dessa atividade como uma atividade necessária para permitir a compreensão das diferentes propriedades ligadas ao mesmo conceito. Para fins de esclarecimentos, exemplificamos essa atividade levando em consideração o nosso objeto de estudo e os campos algébrico e gráfico, como pode ser verificado na Figura 7:

Figura 7: Conversão dos registros algébrico e gráfico de um Sistema Linear



Fonte: produzida pelo autor

Um fato bastante pertinente que merece ser destacado frente à abordagem das conversões é o seguinte: qual é a atenção dada às conversões? É vista apenas como um suporte aos tratamentos realizados em um determinado registro?

A conversão não deve ser concebida como uma simples passagem de um registro a outro. Para isso, faz-se necessário pô-la em evidência por meio de uma abordagem que permita explorar as especificidades de cada registro, além de favorecer a percepção da articulação entre eles, ou seja, ao mobilizar um registro, possa-se compreender as relações, nele, que nos aportam a outro. Disso, infere-se que toda a atividade descrita neste parágrafo se situa como facilitadora dos processos cognitivos para a compreensão dos objetos de estudo da matemática.

> Há, por trás da aplicação de uma regra de codificação para passar de uma equação a um gráfico cartesiano, a necessária articulação entre as variáveis cognitivas que são específicas do funcionamento de cada um dos dois registros, pois são essas variáveis que permitem determinar quais as unidades de significado pertinentes, que devem ser levadas em consideração, em cada um dos registros de representação. A conversão das representações, quaisquer que sejam os registros considerados, é irredutível a um tratamento (DUVAL 2003, p. 17)

Ao nos debruçarmos sobre essa teoria, percebemos que nela nos é mostrada a necessidade de reconhecermos os diferentes registros de representação de um mesmo objeto matemático e a conversão entre eles, para uma compreensão integrativa do objeto matemático representado. É importante ressaltar que cada representação carrega sua especificidade e seu significado, isto é, diferentes representações portam consigo diferentes significados de um mesmo objeto.

> O conteúdo de uma representação depende mais do registro de representação do que o objeto representado. Porque passar de um registro de representação a outro não é somente mudar de modo de tratamento, é também explicar as propriedades ou os aspectos diferentes de um mesmo objeto. (DUVAL, 2003, p. 22).

A fim de exemplificar essa questão, tomamos os registros de representação gráfico e algébrico de dois Sistemas Equivalentes, como mostrados na Figura 8. Após uma análise neles, fica fácil perceber que cada registro evidencia propriedades diferentes do objeto representado. No registro gráfico, por exemplo, é perceptível que o ponto (4,0) satisfaz os dois sistemas. Logo, pode-se concluir que eles são equivalentes. Já no registro algébrico, nos é fornecida a oportunidade de verificarmos que a propriedade de uma equação está “incluída” em outra, o que justifica a equivalência dos sistemas.

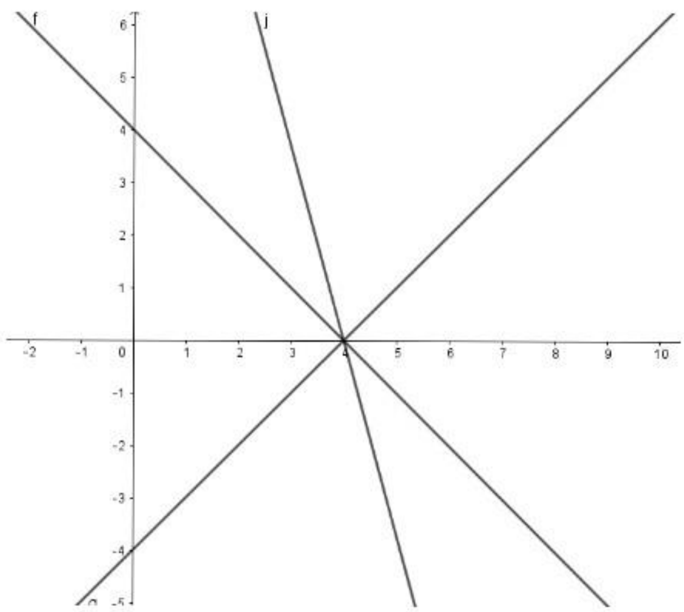
Figura 8: Registros algébrico e gráfico de dois Sistemas Equivalentes

Registro Algébrico

$x + y = 4$
$x - y = 4$

$x + y = 4$
$3.3x + 0.9y = 13.2$

Registro Gráfico



Fonte: produzida pelo autor

É da mobilização de diferentes registros de representação de um mesmo objeto matemático que surge o que Duval chama de “originalidade da atividade matemática”, que consiste exatamente na mobilização de, no mínimo, dois diferentes registros de representação de um mesmo objeto matemático, sendo trabalhados simultaneamente. Essa abordagem fornece suporte à atividade matemática, na medida em que a proporciona uma maior compreensão dos seus objetos de estudo, de forma a evitar uma confusão entre os objetos matemáticos e sua(s) representação(ões).

Duval (*apud* Machado, 2003) ainda afirma que, para analisar as dificuldades de aprendizagem de um determinado objeto matemático, é necessário analisar a atividade de conversão dos registros que lhes concernem. Dessa forma, para isso, deve-se, inicialmente, pôr em evidência o registro de saída e o de chegada. De forma que, quando o registro de chegada reflete o registro de partida, dizemos que há uma congruência. Porém, se o registro de chegada não reflete o de partida, dizemos que há uma não congruência. Duval (apud Karrer, 2006) afirma que é um grande equívoco achar que um estudante que estabeleceu uma conversão em um sentido, conseguirá rapidamente estabelecê-la no sentido contrário. O autor indica que existem conversões que são congruentes em um sentido, sendo a recíproca falsa. Para exemplificar essa questão, Duval (2003) apresenta um quadro que evidencia três fatores que indicam o grau de congruência ou não congruência em uma conversão da linguagem natural para uma representação algébrica. Nesse sentido, o adaptamos frente ao nosso objeto de estudo, como podemos verificar no quadro 3:

Quadro 3- Exemplos de congruência e não congruência

	Correspondência semântica das unidades de significado	A unidade semântica terminal	Conservação da ordem das unidades
Permuta das linhas (equações) do sistema.	Sim	Sim	Não
O produto de uma linha por um escalar$\alpha \neq 0$.	Sim	Sim	Não
A soma de uma linha com um múltiplo não nulo de outra linha.	Sim	Sim	Não

Fonte: Duval (2003, p.19, adaptado)

A correspondência semântica das unidades de significado corresponde à conexão entre uma unidade significante simples de uma representação e uma unidade significante elementar de uma outra representação. Segundo Duval (2009, p.68), uma unidade significante é vista como “toda unidade que se destaca do ‘léxico’ de um registro”. Nos três casos do nosso exemplo, foi verificada essa correspondência. No 2º caso, mais especificamente, percebe-se a correspondência de unidades significantes: produto e ×; linha e equação; escalar e número.

O segundo ponto refere-se à unidade semântica terminal, que corresponde à verificação de que, se a cada unidade significante do registro de partida corresponde a uma e, somente uma, unidade significante no registro de chegada. Nos três casos é verificada essa condição. No 2º caso, mais especificamente, percebe-se a univocidade de interpretação para cada unidade significante do registro de partida, sendo esse um enunciado em língua natural.

O terceiro ponto faz referência à conservação da ordem das unidades, que diz respeito à verificação se a ordem das unidades significantes do registro de partida é conservada no registro de chegada. Nos três casos do nosso exemplo, essa condição não é satisfeita. No 2º caso, mais especificamente, verifica-se que na língua natural a unidade produto é situada antes das unidades linha e escalar, enquanto na representação algébrica a unidade produto é resultado dessas duas unidades.

Pelo exposto, percebe-se, em muitos casos, que a conversão entre registros não é uma tarefa tão simples. Nesse sentido, Duval (2003, p.20) afirma que "Geralmente, no ensino, um sentido de conversão é privilegiado, pela ideia de que o treinamento efetuado em um sentido estaria automaticamente treinando a conversão no outro sentido". O que leva, muitas vezes, à opção pela conversão de maior congruência. Porém, segundo Duval, é na mobilização de atividades que privilegiam as conversões menos congruentes que reside a oportunidade de reconhecer um mesmo objeto matemático em suas diferentes representações semióticas, configurando-se, assim, uma compreensão do objeto matemático representado.

Um outro ponto bastante pertinente a ser destacado, neste momento, refere-se à face oculta da Matemática, que se caracteriza como sendo uma das formas que essa ciência se apresenta. E, assim, uma pergunta parece surgir naturalmente: Qual a importância de conhecê-la? A resposta é que ela nos leva a entender o processo que se dá na aprendizagem da Matemática. Dessa forma, ela pode ser vista como os "gestos intelectuais que constituem o caráter cognitivo e epistemológico específicos da matemática" (DUVAL, 2013, p. 9). Por sua vez, os gestos intelectuais mencionados por Duval, podem ser vistos como ações que estão intimamente relacionadas com a natureza do próprio conhecimento matemático. Nesse contexto, à guisa de sugestão, poderíamos destacar os obstáculos de aprendizagem que são advindos da natureza do próprio objeto de conhecimento da Matemática.

Ao estabelecer uma relação de todo o levantamento teórico desenvolvido até aqui, frente ao nosso objeto de estudo, percebe-se que há uma corroboração do que é preconizado por essas bases teóricas, com nossa ideia de trabalhar os diferentes registros de representação do sistema de equações lineares e as diferentes representações de suas soluções, como um caminho para se atingir, no campo cognitivo, a compreensão desses objetos matemáticos. Nesse sentido, Hillel e Sierpinska (1995) defendem que os alunos sejam capazes não apenas de encontrar uma representação de um dado operador linear ou vetor em relação a uma base dada, mas também de pensar sobre essas representações deles mesmos como objetos de pesquisa**.**

Interessados em identificar quais são as dificuldades de aprendizagem mais recorrentes entre os alunos, frente ao nosso objeto de estudo, encontramos em algumas pesquisas, que se debruçam sobre a observação do ensino, algumas limitações apresentadas pelos alunos que não favorecem, no campo cognitivo, uma compreensão do objeto de estudo em questão. Entre eles, podemos destacar: a incapacidade de conversão de um registro em outro, confusão implícita entre o objeto e sua representação. Dentre esses, a confusão entre um objeto e suas representações é identificada como a principal fonte de problemas. Dessa forma, ressalta-se a importância de um trabalho que leve em consideração os vários registros de representação para um mesmo objeto matemático, atividades essas, como já foram mostradas, necessárias para atingirmos, no campo cognitivo, a compreensão do objeto representado.

3.7.3 Aspectos Didáticos

Tendo em vista nosso objetivo de levantar alguns dados, que nos dessem suporte à identificação dos aspectos didáticos que configuram o estado atual do ensino dos Sistemas de Equações Lineares, apresentamos, nesta subseção, os resultados da pesquisa de Battaglioli (2008), na qual a autora se propôs a analisar três livros didáticos de Matemática do Ensino Médio aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). Categorizamos os livros analisados em: L1 - Volume 2 da coleção Matemática, Contexto e Aplicações, cujo autor é Luiz Roberto Dante, 4ª edição; L2 - Volume 2 da coleção Matemática Ensino Médio, cujas autoras são Kátia Smole e Maria Diniz, sendo editado em 2003 pela editora Saraiva, 3ª edição; L3 - Matemática Completa, cujos autores são José Giovanni, José Bonjorno e José Giovanni Júnior, editado em 2002 pela editora FTD.

Em um primeiro momento, nossa opção em trazer à luz essas análises é ancorada no papel que o livro didático exerce no ensino brasileiro, como ressaltam as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, indicado no extrato a seguir:

> [...] o livro didático vem assumindo, há algum tempo, o papel de única referência sobre o saber a ser ensinado, gerando, muitas vezes, a concepção de que “o mais importante no ensino da matemática na escola é trabalhar o livro de capa a capa”. [...] É importante, pois, que o livro didático de Matemática seja visto não como um substituto de orientações curriculares, mas como um recurso a mais (BRASIL, 2006, p. 86).

No Brasil, percebe-se que uma boa parte dos professores, sobretudo das escolas públicas, faz uso, quase que exclusivamente, do livro didático como um elemento norteador de sua atividade docente. À guisa de ilustração, citamos um extrato da pesquisa de Thomaz (2013), que evidencia o papel que os livros didáticos têm assumido no ensino brasileiro.

> [...] neste caso, o livro didático é o ‘carro chefe’, pois o mesmo é o principal, e às vezes, o único instrumento utilizado pelos professores em suas práticas de sala de aula, e eles ‘ditam’ os conteúdos e as metodologias a serem utilizadas (THOMAZ, 2013, p. 52).

Dessa forma, faz-se necessário um estudo mais aprofundado, a partir de análises, por exemplo, dos livros didáticos aprovados pelo PNLD, para entendermos quais são as vivências oportunizadas por eles a um determinado conteúdo de interesse; qual é o enfoque mais propagado pelos autores (tratamento ou conversão dos registros de representação?). Além disso, é importante evidenciar os avanços e as limitações que são apresentadas frente ao conteúdo de interesse. Um outro ponto a ser considerado é que toda essa análise não deve ser aleatória, deve ser respaldada por uma teoria, que, no nosso caso, está alicerçada nos princípios da Educação Matemática e, por esse fato, nos fornece requisitos que nos auxiliarão na prototipação do software.

À luz dos resultados evidenciados na pesquisa de Battaglioli (2008), consideramos pertinente listar, dentre eles, a proposta de apresentação do conteúdo de Sistemas de Equações Lineares nos livros analisados, o que, segundo a autora, assim se deram: os livros L1 e L3 apresentam-no em um único capítulo, intitulado Sistemas Lineares; o Livro L2 aborda o conteúdo em espiral, e, mais especificamente no capítulo intitulado Sistemas Lineares, foi encontrada uma proposta de revisão das representações gráfica e algébrica dos sistemas 2 por 2.

Quanto às atividades que inserem o computador em contextos de ensino e aprendizagem, foi constatado que nenhum dos livros analisados apresenta alguma atividade que o utiliza, frente a esses contextos, abordando nosso objeto de estudo.

No que se refere às transformações apresentadas pelos livros supracitados, frente a nosso objeto de estudo, verificou-se uma ênfase à transformação tratamento, que consideravelmente se consolidou por meio do tratamento algébrico dos Sistemas Lineares. Quanto a esse aspecto, foi evidenciado que o L1 apresenta dois métodos para a resolução de sistemas com três equações e três incógnitas: método de Gauss e a regra de Cramer. O L2, além dos métodos já citados, apresenta a resolução dos sistemas pelo método da adição e da substituição. O L3, por sua vez, aborda apenas a regra de Cramer.

Tendo em vista uma análise mais robusta da forma como nosso objeto de estudo é colocado pelos livros supracitados, faz-se necessário a evidenciação se eles tratam de outros registros de representação quanto à transformação tratamento. Nesse sentido, eis os resultados: quanto à abordagem dos sistemas de equações lineares no registro língua natural, foi verificado que os livros L1 e L2 utilizam-se desse registro. No livro L3, não foi constatada essa abordagem. Quanto à abordagem pelo registro gráfico, percebeu-se que os livros L1 e L2 utilizam-se desse registro de representação. No livro L3, novamente, não foi constatada essa abordagem.

Um outro elemento, bastante pertinente a ser realçado, coloca em evidência como a transformação conversão, frente a nosso objeto de estudo, é tratada por esses autores em suas respectivas obras. Dessa forma, verificou-se que as conversões foram apresentadas, por meio de exercícios, nos livros L1 e L2, todavia de “forma tímida”, predominando a conversão da língua natural para o registro algébrico. Foi encontrado apenas um exercício que apresentava o registro gráfico de um sistema de equação linear 3 por 3, como registro de chegada, e nenhum exercício foi encontrado quando se tomava o registro gráfico como registro de partida. No livro L3, não foi verificada essa abordagem.

Concomitantemente a todo o levantamento realizado até aqui, gostaríamos de complementá-lo chamando atenção para as potencialidades que os software de geometria dinâmica apresentam para abordar esse tema. Dessa forma, focaremos sobretudo nas que são oportunizadas pelo software GeoGebra. Essa preferência decorre da constatação feita por Tenório et. al (2016) em um grupo de 62 professores de Matemática da Educação Básica do Rio de Janeiro, dos quais 48, ou

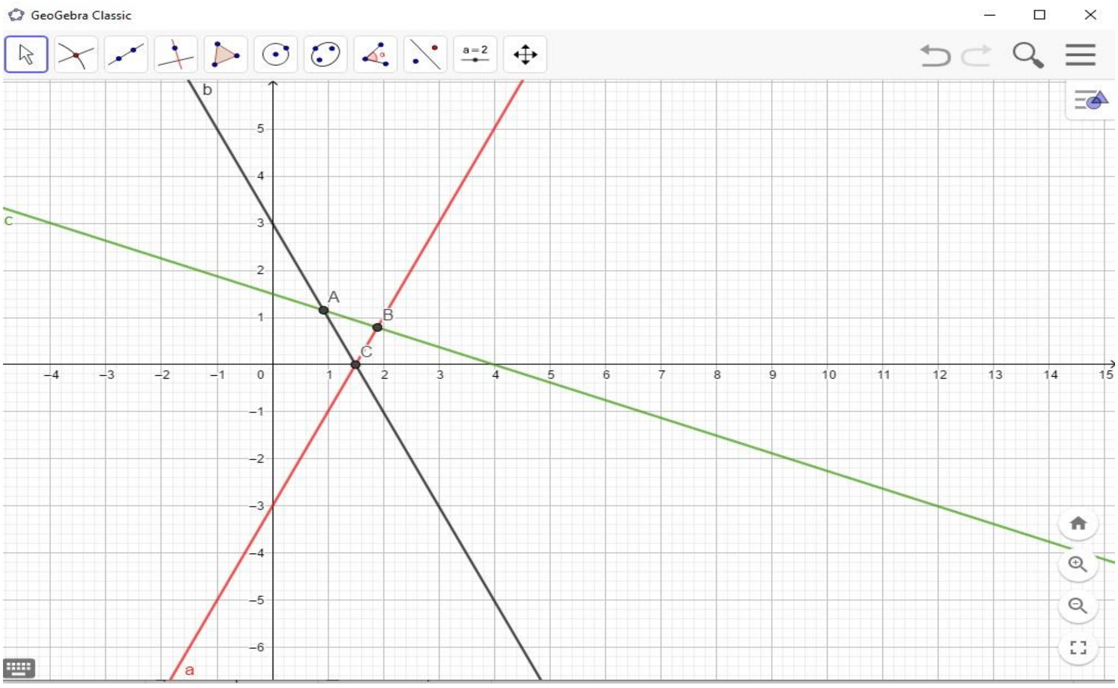
77,4% dessa amostra afirmaram que, dentre os software educativos de geometria dinâmica, o GeoGebra era o mais conhecido por eles, e sendo aquele que, possivelmente, nortearia suas atividades frente à utilização de um software como elemento do meio, em contextos de ensino e aprendizagem. Sua abordagem dar-se-á na próxima seção.

3.7.4 Dimensão Informática

Para a análise da Dimensão Informática do nosso objeto de estudo, pensamos em realizar um estado da arte em alguns software, com o intuito de percebermos o que eles já fazem e quais as lacunas ainda são encontradas no que se refere a uma compreensão satisfatória dos conceitos de dependência linear. Por compreensão satisfatória dos conceitos de dependência linear, sob a abordagem de um software, entendemos como todo o "trabalho" por ele possibilitado, que se propõe a fornecer significado ao processo de obtenção de sistemas equivalentes, com ênfase ao da obtenção da solução do sistema. O filtro que usamos para selecionar os software condiz com a adequação deles à Teoria dos Registros de Representação de Duval. Dessa forma, o software teria que satisfazer as seguintes condições, quanto à abordagem dos sistemas de equações lineares: realizar mais de um registro de representação (algébrico, gráfico etc.) e a conversão de pelo menos um registro de representação (algébrico→gráfico, por exemplo). Desse modo, foram escolhidos dois software: GeoGebra e Maple, sobre os quais nos debruçaremos a partir deste momento.

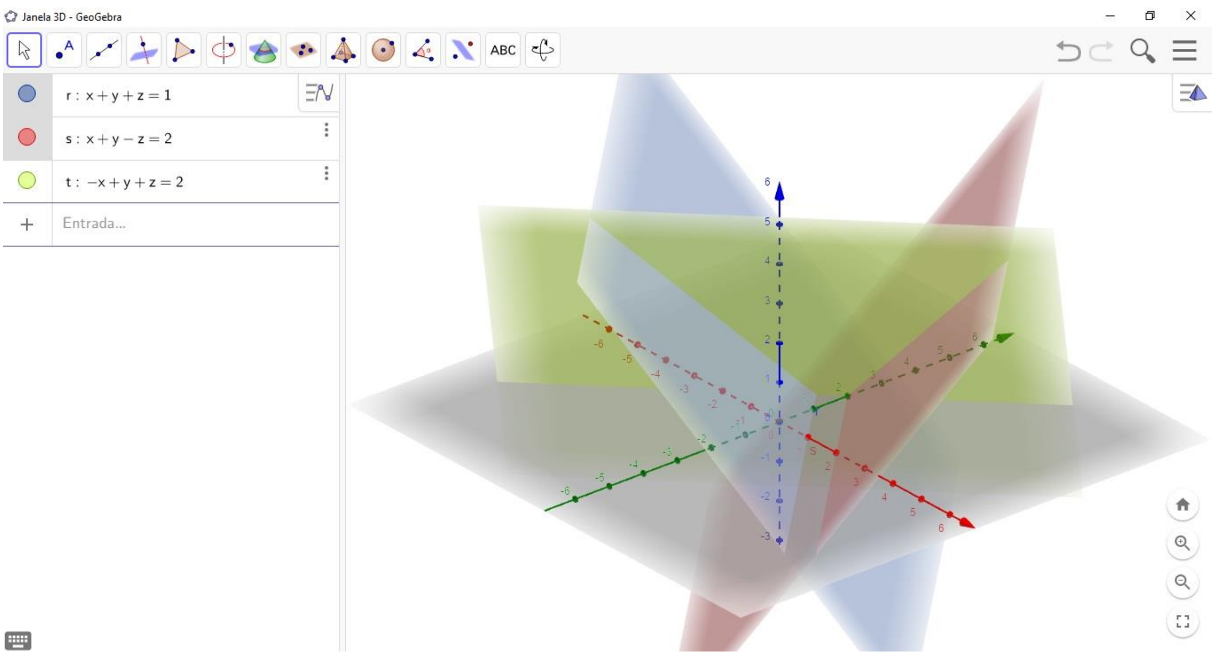
O GeoGebra é um software de geometria dinâmica de acesso livre (isto é, oferece uma distribuição livre do programa, porém não nos dá a possibilidade de alterá-lo ou criá-lo em uma versão pessoal) que pretende articular Álgebra e Geometria, fazendo essa articulação por meio de várias representações conectadas dinamicamente. Por ser um software gratuito, e com grandes potencialidades, encontramo-lo em vários estudos, sendo sua utilização configurada, na grande maioria das pesquisas, como um recurso didático. Segundo Hohenwarter et al. (2011), esse software tem foco na articulação álgebra-geometria dinâmica. Dessa forma, o software esboça graficamente as equações do sistema, nos espaços bi e tridimensionais, como ilustrado nas Figuras 9 e 10:

Figura 9: Sistema linear bidimensional sem solução



Fonte: produzida pelo autor

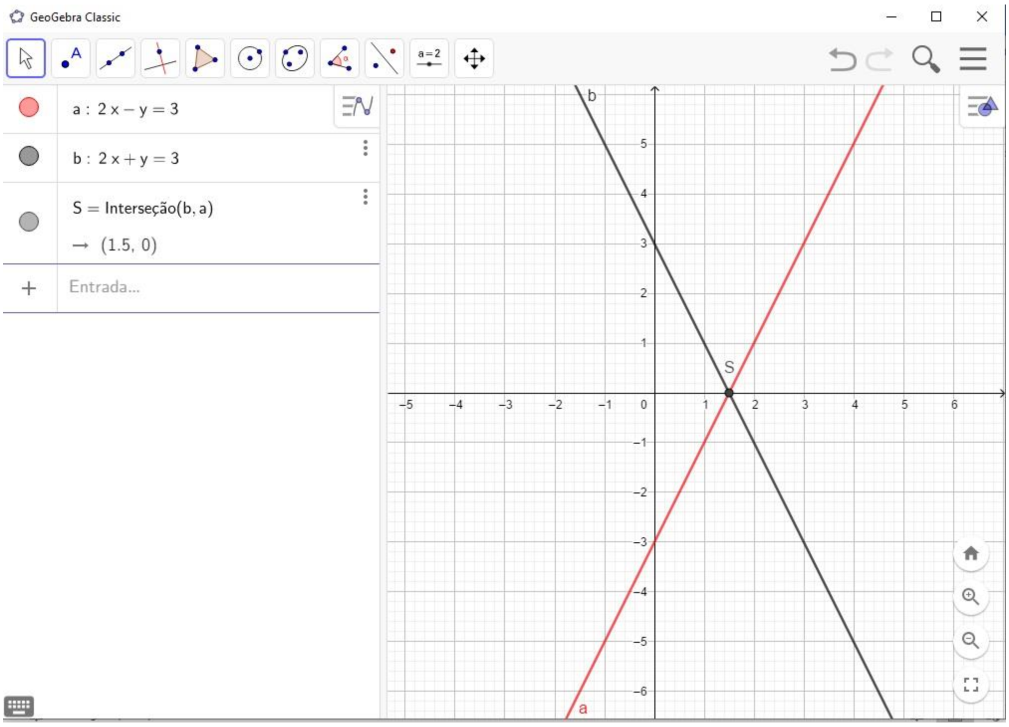
Figura 10: Sistema linear tridimensional com solução



Fonte: produzida pelo autor

Determina a solução do sistema por meio da ferramenta interseção de objetos disponibilizados na barra de ferramentas, como mostra a Figura 11:

Figura 11: Solução de um sistema dado como interseção entre retas



Fonte: produzida pelo autor

Tendo em vista nossa pretensão de conhecer a abordagem dada pelo Software GeoGebra às soluções do sistema e à obtenção de sistemas equivalentes, realizamos um amplo estudo sobre ele, o qual será evidenciado ao longo desta seção. Inicialmente, foi percebido que ele permite:

- As representações algébrica e gráfica das equações do sistema e suas conexões;

- A multiplicação das equações do sistema por um escalar inteiro α, sendo essa atividade disponibilizada, dentre os meios, por um controle deslizante que de forma dinâmica, permite-nos multiplicar, por exemplo, os dois membros da equação por α (nesse caso, obtínhamos a própria equação), uma ou, até mesmo, as duas variáveis por α.

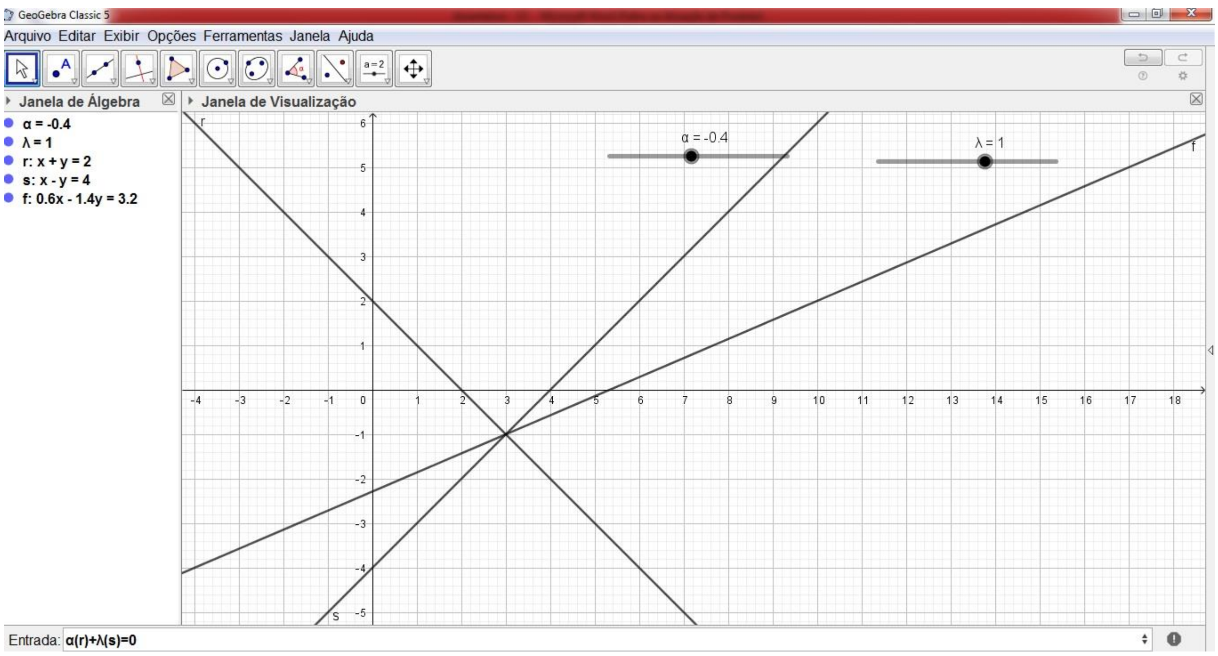
Como objetivávamos determinar sistemas equivalentes, isto é, sistemas que possuem o mesmo conjunto solução de um sistema inicial dado, lançamos mão de algumas estratégias. Dentre elas, tomamos, inicialmente, o feixe de retas determinado por meio de operações elementares sobre as equações do sistema, de modo que o ponto que representava a solução do sistema (formado pelas equações iniciais) pertencia a todas as retas do feixe. Disso, decorre que todas as retas do feixe, por sua vez, satisfaziam a condição de passar por esse ponto. Isso significa que, ao tomarmos duas retas quaisquer do feixe, obteremos um sistema equivalente ao inicial. Dessa forma, pretendíamos analisar como toda essa abordagem se configurava no software, para isso:

De início, tomamos um sistema de equação linear 2X2, expresso pelas retas r: x+y-2=0 e s: x-y-4=0. Em seguida, determinamos dois controles deslizantes caracterizados porα e λ. Após evidenciarmos os elementos constitutivos da nossa exemplificação, realizamos as seguintes operações:

- multiplicamos a reta r por α e a reta s por λ; e, concomitantemente, realizamos a soma desses resultados igualando a zero. Esquematicamente, podemos representar essas operações da seguinte forma: α(x+y-2) + λ(x-y-4) = 0.

Dessa forma, obtivemos o seguinte resultado:

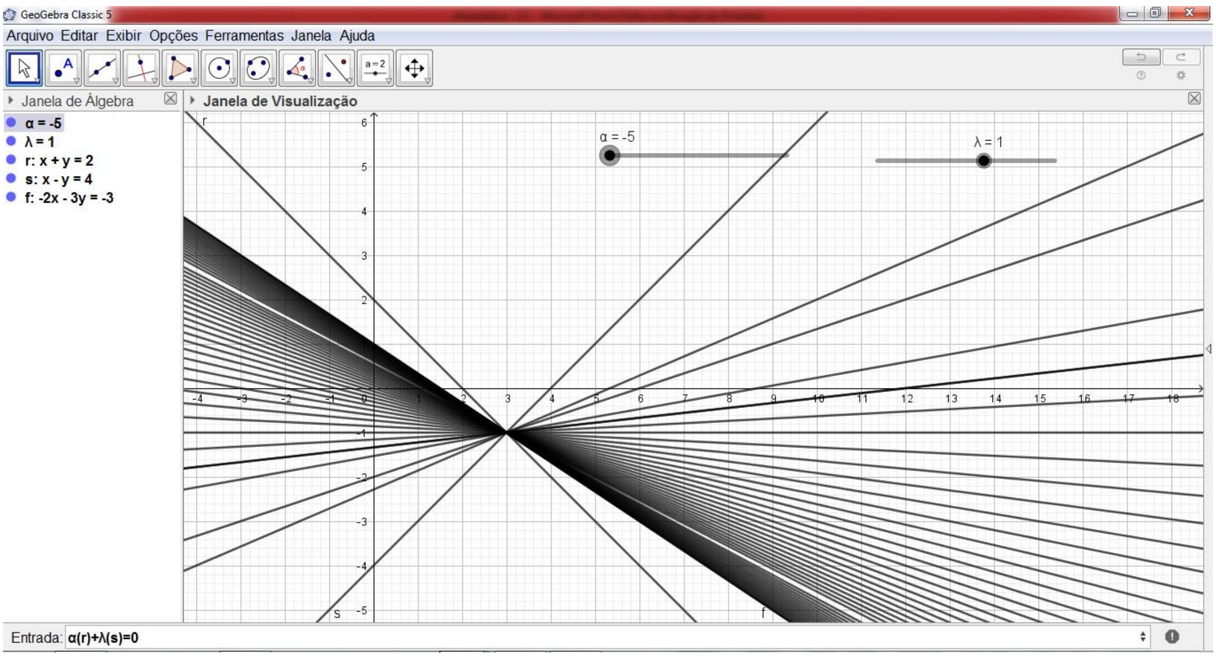
Figura 12: Construções com o GeoGebra



Fonte: produzida pelo autor

Conforme pode ser observado na Figura 12, o software apresenta, como resultado da operação supracitada, uma reta que satisfaz a condição de passar pelo ponto solução do sistema formado pelas retas r e s; e, à medida que alterávamos o valor de α e/ou λ (por meio dos controles deslizantes), obtínhamos o feixe de retas que satisfazia a condição acima mencionada, frente ao sistema inicialmente considerado, esse é o primeiro ponto a ser destacado. Dessa forma, com a pretensão de conhecer todas as potencialidades que o software nos oferecia frente a essa abordagem, verificamos que, na medida em que alterávamos os valores de α e/ou λ, os registros gráfico e algébrico anteriores à modificação não se conservavam, ou seja, não há um armazenamento das respostas dadas. Na tentativa de suprir essa limitação, constatamos que o software disponibiliza a ferramenta habilitar rastro. Porém, para nossa abordagem, pareceu-nos insuficiente. A Figura 13 nos dá indícios de como essa operação é processada no software:

Figura 13: Construções com o GeoGebra



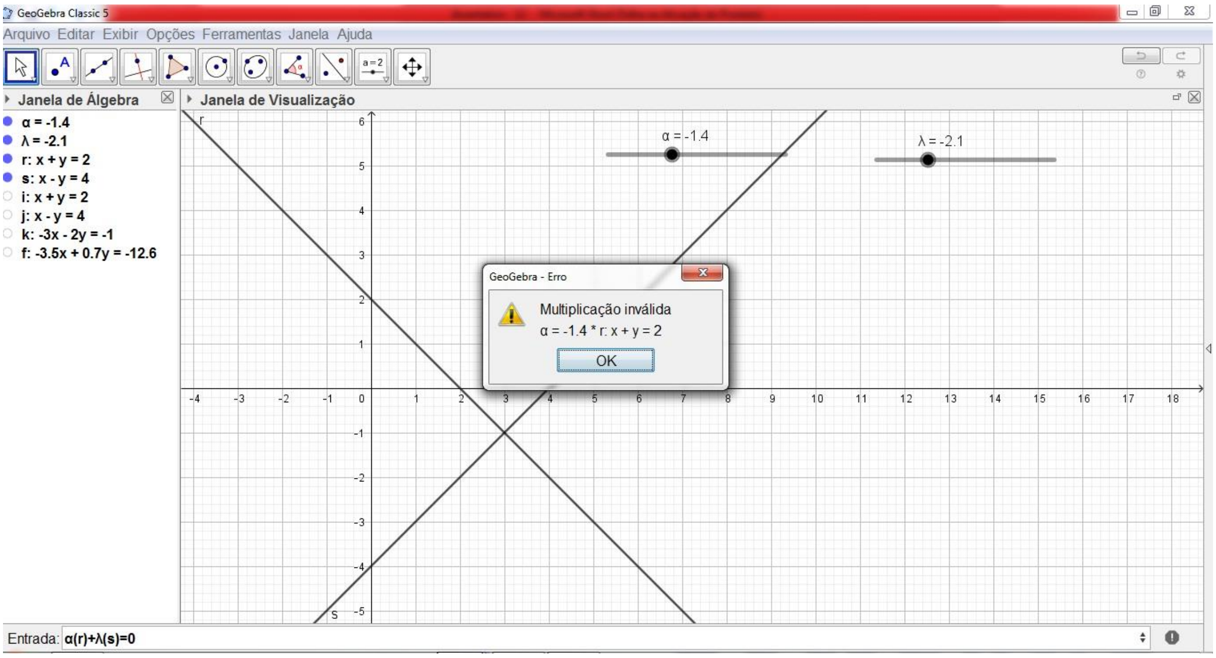
Fonte: produzida pelo autor

Como já foi mencionado nesta pesquisa, por meio dessa Figura fica claro perceber que o software não evidencia a sequência de decisões que vão sendo tomadas pelo usuário, em ambos os campos, algébrico e gráfico. Disso, constatamos que a ferramenta, habilitar rastro, faz uma ilustração do “caminho” percorrido pelo feixe de retas, mas sem nenhuma indicação das decisões tomadas. Essa abordagem, vale aqui destacar, se configura, no software, quando realizamos operações sobre as equações do sistema de forma dinâmica, que no nosso caso se deu por meio dos controles deslizantes. No entanto, ressaltamos que ele disponibiliza a opção de inserir as operações uma a uma, sem fazer uso dos controles deslizantes e, dessa forma, as representações gráfica e algébrica se conservam. Porém, não temos a possibilidade de alterá-las em ambos os registros, pois à medida que as alterarmos no campo algébrico, por exemplo, chegaremos ao mesmo dilema, ou seja, as representações (algébrica e gráfica) anteriores à modificação não serão conservadas e darão lugar a novas representações.

Outro ponto bastante pertinente, que foi percebido ao longo desse estudo, refere-se ao fato de o software não possibilitar uma conexão direta em ambos os campos algébrico e gráfico, entre as equações r e s do sistema com a equação que é resultante da determinação do feixe de retas, que para fins ilustrativos, como explicitada no início dessa exposição, essa equação é dada por: $\alpha(x+y-2) + \lambda(x-y-4) = 0$. Preconizando um melhor entendimento de como essa questão se configura no software, enumeraremos os resultados encontrados, por meio de três constatações que explicitaremos a seguir:

- 1ª constatação: Após inserirmos as retas r e s, tentamos proceder a seguinte operação: $\alpha(r) = 0$ e, em seguida, a operação: $\alpha(r)+\lambda(s)=0$. Porém, em ambas as situações,as operações não nos foram possibilitadas e obtivemos como resposta:

Figura 14: Construções com o GeoGebra



Fonte: produzida pelo autor

- 2ª constatação: Ao realizarmos a operação: α(x+y-2) + λ(x-y-4) = 0, obtivemos, como já mencionado, uma reta que, de maneira bem peculiar frente ao nosso exemplo, ficou caracterizada como f. Após algumas simulações, pudemos facilmente verificar que a reta f não estabelece uma conexão direta com as retas r e s propriamente ditas e, daí, decorre que qualquer alteração feita, no campo algébrico, naestrutura das retas r e/ou s, não repercute na reta f. À guisa de ilustração, salientamos que a recíproca é verdadeira, fato esse constatado tanto no campo algébrico, quanto no campo gráfico, causando assim um certo descompasso entre o pretendido e o representado.

- 3ª constatação*:* Um último elemento a ser destacado, faz referência a duas situações. A primeira, como já foi observada, reside no fato de o software permitir a criação de sistemas por meio de multiplicação nas equações por escalares, os quais designamos por α e λ, esses, por sua vez, eram manipuláveis, de forma dinâmica, por meio de controles deslizantes. A situação seguinte e, daí vem a novidade desta 3ª constatação, consiste na verificação que o GeoGebra não permite a manipulação direta, no registro gráfico, das representações das equações do sistema.

Mais um ponto a ser considerado, neste momento, frente aos resultados encontrados em nosso estudo, diz respeito às operações realizadas pelo software no campo algébrico. Percebemos que, ao realizar a operação: $\alpha(x+y-2) + \lambda(x-y-4) = 0$, ele nos apresenta, no campo algébrico, uma única equação, que, de forma mais específica, se refere à resposta final dessa operação e, disso, decorre uma não evidência das equações que vão sendo obtidas no desenrolar da resolução. Contudo, caso queiramos explicitá-las, ressaltamos que o software disponibiliza a opção de inseri-las uma a uma. A título de exemplificação, tomamos a operação supracitada e, dessa forma, inicialmente, inserimos a operação $\alpha(x+y-2)$, em seguida, a operação $\lambda(x-y-4)$, e concluímos com a operação $\alpha(x+y-2) + \lambda(x-y-4) = 0$. Disso, infere-se que essa abordagem se mostra muito mais eficiente na medida que possibilita à evidenciação das decisões tomadas pelo usuário, ao longo da resolução, tanto no campo algébrico quanto no gráfico. Esse fato será justificado no próximo parágrafo.

Após inseri-las uma a uma como proposto acima, motivados por uma certa inquietude, desejávamos saber quais os recursos a mais que o software nos disponibilizava. Percebemos que ele apresentava a mesma limitação que já foi evidenciada nesta pesquisa, isto é, a falta de uma conexão direta entre as equações do sistema e as operações que as colocam em evidência, sendo mais preciso indicarmos como isso é processado no software. Após inseridas as operações: $\alpha(x+y-2)$; $\lambda(x-y-4)$ e $\alpha(x+y-2) + \lambda(x-y-4) = 0$; contatamos que, se quiséssemos alterar uma das equações, seria necessário revisitarmos todas as demais equações, procedendo assim suas adequações, pois não há uma alteração automática nas demais equações. Dessa forma, percebe-se que a forma como o software desenvolve essa abordagem a configura em uma operação custosa e não tão imediata.

Só a título ilustrativo, ressaltamos que a compreensão e a verificação de todo o procedimento desenvolvido até se chegar à resolução, no nosso caso, se faz bastante pertinente, pois ele oportuniza uma maior clareza das operações envolvidas e essas, por sua vez, vão dando claras sinalizações de como vamos chegando à equação resultante.

Até o momento, como pode ser observado, fizemos a abordagem dos sistemas 2X2 possíveis e determinados. Enfatizamos que todos os pontos levantados com base nesse amplo estudo sobre as potencialidades do software GeoGebra frente ao nosso objeto de estudo, mais especificamente para os sistemas possíveis e determinados, são aplicáveis aos sistemas possíveis e indeterminados e sistemas impossíveis. Além disso, destacamos que as mesmas constatações supracitadas feitas aos sistemas 2X2 são verificadas nos sistemas 3X3.

A preferência pela determinação do feixe de retas das equações do sistema frente à compreensão das soluções e dos sistemas equivalentes decorre do fato desse procedimento ser eficiente, tanto do ponto de vista das aplicações das operações elementares sobre as equações do sistema, assunto tratado em seções anteriores, quanto de uma compreensão mais ampla de sistemas equivalentes e, consequentemente, de suas soluções. Esse método se justifica pela 2ª e pela 3ª operações elementares, pois dado um sistema de equação linear, como exemplificado abaixo:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

Se, sobre as equações do sistema, aplicarmos a 2º operação elementar que corresponde à multiplicação de uma linha (equação) por um número k diferente de zero, dada por: $Li \rightarrow k \cdot i$; em um contexto aplicado, essa operação pode ser vista como: $k(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - b_1)$, a qual resulta em um novo sistema, equivalente ao inicial.

Contudo, se optarmos pela 3ª operação elementar, que corresponde à substituição de uma linha (equação), por sua soma com um múltiplo não nulo de outra linha, sendo essa operação representada por: $Li \rightarrow i + k \cdot s$; em um contexto aplicado, essa operação pode ser vista como: $(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - b_1) + k(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 - b_2)$ e, dessa forma, mais uma vez, resulta em um novo sistema, equivalente ao inicial.

Levando em consideração os elementos evidenciados acima, fica fácil verificar que a equação resultante da operação: α($a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - b_1$) + λ($a_{21}x_1 + a_{22}x_2 - b_2$) = 0 é resultado das aplicações das 2ª e 3ª operações elementares sobre as equações do sistema, o que justifica a obtenção de sistemas equivalentes por meio dessa operação. Disso, inferimos que, se a essa abordagem, o software disponibilizar um número razoável de equações obtidas por meio da operação: α($a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - b_1$) + λ($a_{21}x_1 + a_{22}x_2 - b_2$) = 0, armazenando suas representações em ambos os registros gráfico e algébrico, oportunizará um entendimento mais amplo do significado da interdependência da solução do sistema com as equações obtidas por meio dessa operação e entre as próprias equações. Além dos pontos já citados, poderíamos, ainda, destacar o fato de essa abordagem favorecer uma ideia mais sólida do papel que as operações elementares exercem sobre a solução, nas equações e no próprio sistema.

Pelo exposto, percebemos que o software GeoGebra favorece atividades que envolvem as representações algébrica e geométrica das equações do sistema e as suas conversões, sendo esse o primeiro ponto a ser considerado; um segundo elemento percebido refere-se à compreensão mais ampla da estrutura das equações, das operações que as envolvem e de suas soluções e, concomitantemente, suas conexões. Quanto a essa abordagem (que se deu por meio da determinação do feixe de retas), foi percebido que o software apresenta algumas limitações, tanto na transformação tratamento, quanto na transformação conversão; atividades essas indispensáveis para a compreensão de um objeto matemático, mais especificamente, do nosso objeto de estudo.

O Maple é um software de computação algébrica de código fechado (isto é, não oferece uma distribuição livre do programa) que realiza cálculos matemáticos, numéricos e simbólicos, manipula expressões algébricas, deriva e integra funções e esboça gráfico de qualquer função dada, faz representação de objetos nos espaços bi e tridimensionais. Esta última opção é disponibilizada por meio do: Pacote **Student[LinearAlgebra],** o qual apresenta o comando **LinearSystemPlot(),** cujo objetivo é representar graficamente sistemas bi e tridimensionais. Para exemplificar, vamos considerar o sistema formado pelas equações *2x + y = 3* e *2x – y = 3*. Chamaremos as retas representadas algebricamente por essas equações de *r* e *s,* respectivamente. Criamos essas equações no Maple com os comandos:

r:= 2*x + y = 3:
s:= 2*x – y = 3:
r, s;

que retorna:

$$2x + y = 3,\ 2x - y = 3.$$

O comando **LinearSystemPlot()** espera, como argumento obrigatório, um sistema linear, o qual pode ser informado de diversas formas. A mais básica é usando uma lista (uma sequência de expressões separadas por vírgulas e envoltas por colchetes). Criamos o sistema com o comando:

sistema:= [r,s];

que retorna:

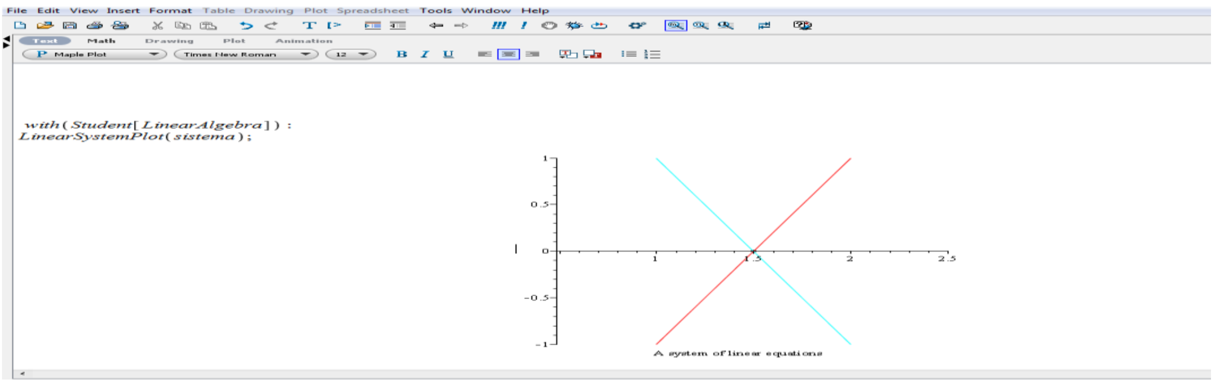
$$[2x + y = 3,\ 2x - y = 3].$$

Percebemos que um comando de um pacote específico pode ser utilizado de duas formas. Uma delas é incluir o pacote junto ao nome do comando. A outra forma é carregar o pacote inteiro com o comando **with(nomedopacote).** Com isso, todos os comandos do pacote ficam disponíveis durante a seção em uso. Vejamos um exemplo:

with(Student[LinearAlgebra]):
LinearSystemPlot(sistema);

Independentemente da forma escolhida, o resultado é a exibição de cada uma das retas que compõem o sistema, como mostra a Figura 15:

Figura 15: Construção de um Sistema bidimensional no Maple



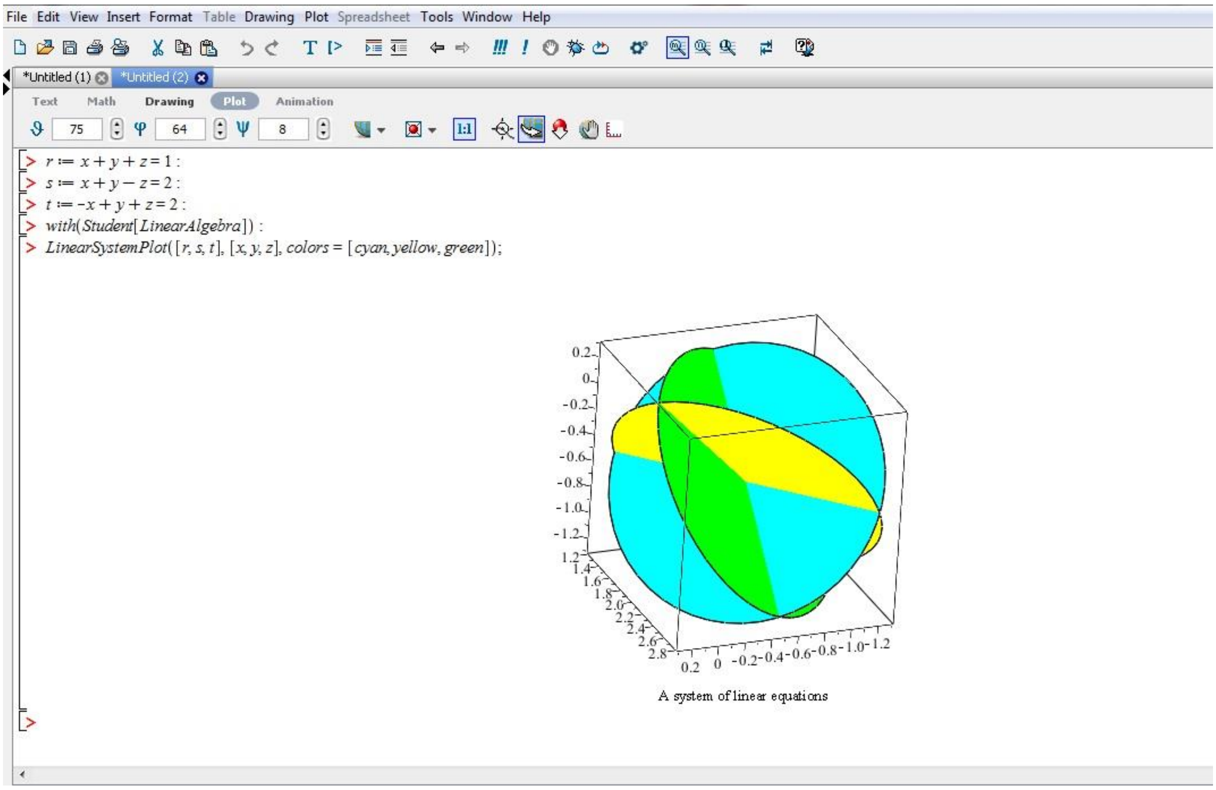
Fonte: produzida pelo autor

Para os sistemas tridimensionais, o procedimento é análogo. Dessa forma, tomando um sistema formado pelas equações: x + y + z = 1, x + y – z = 2 e -x + y + z = 2, temos que suas representações são obtidas, no software, por meio dos comandos:

```
r:= x + y + z = 1:
s:= x + y – z = 2:
t:= -x + y + z = 2:
with(Student[LinearAlgebra]):
LinearSystemPlot([r, s, t], [x, y, z], colors= [cyan, yellow, green]);
```

que resulta na Figura 16:

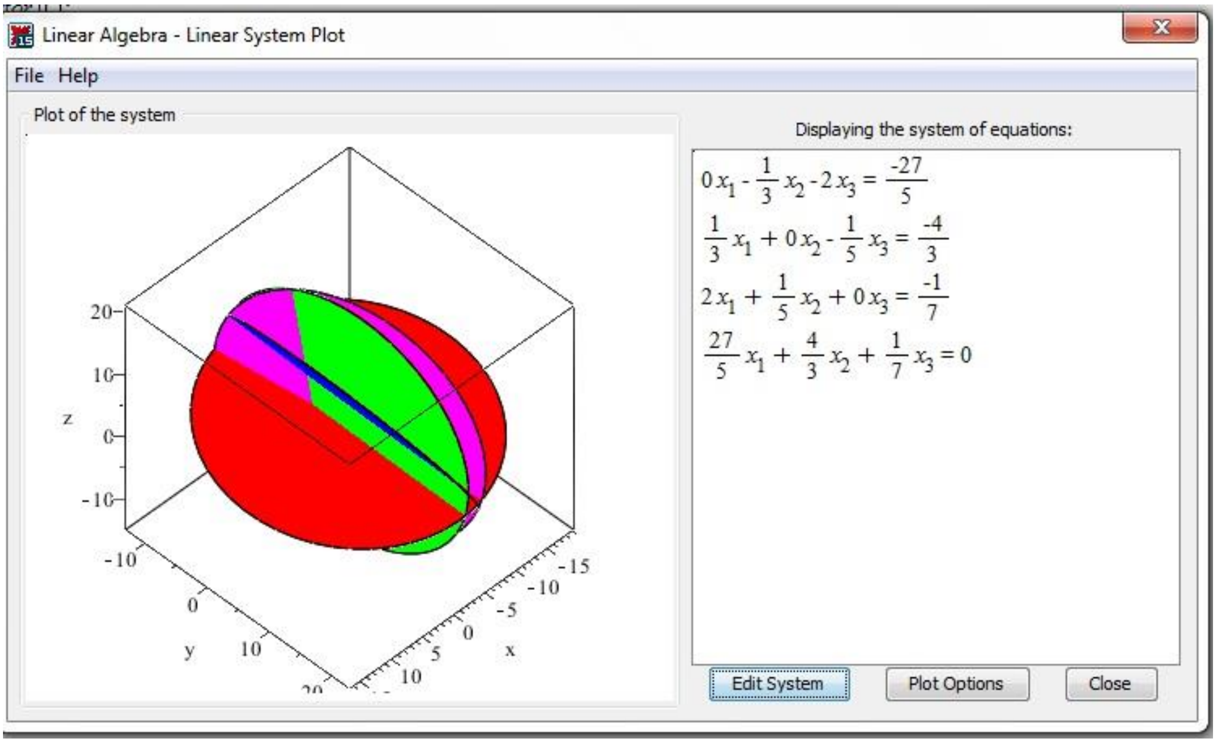
Figura 16: Construção de um Sistema tridimensional no Maple



Fonte: produzida pelo autor

Nos parágrafos anteriores, discutimos a representação gráfica de sistemas bi e tridimensionais, a partir da linha de comandos do Maple, com a utilização do comando **LinearSystemPlot()** do pacote **Student[LinearAlgebra]**. Para sistemas com, no máximo, quatro equações e quatro incógnitas, o Maple disponibiliza um tutorial que pode ser utilizado a partir de uma interface gráfica, sem a necessidade de digitar comandos. O tutorial pode ser acessado a partir da barra de menus do sistema que, após selecionado, apresenta-se como na Figura 17:

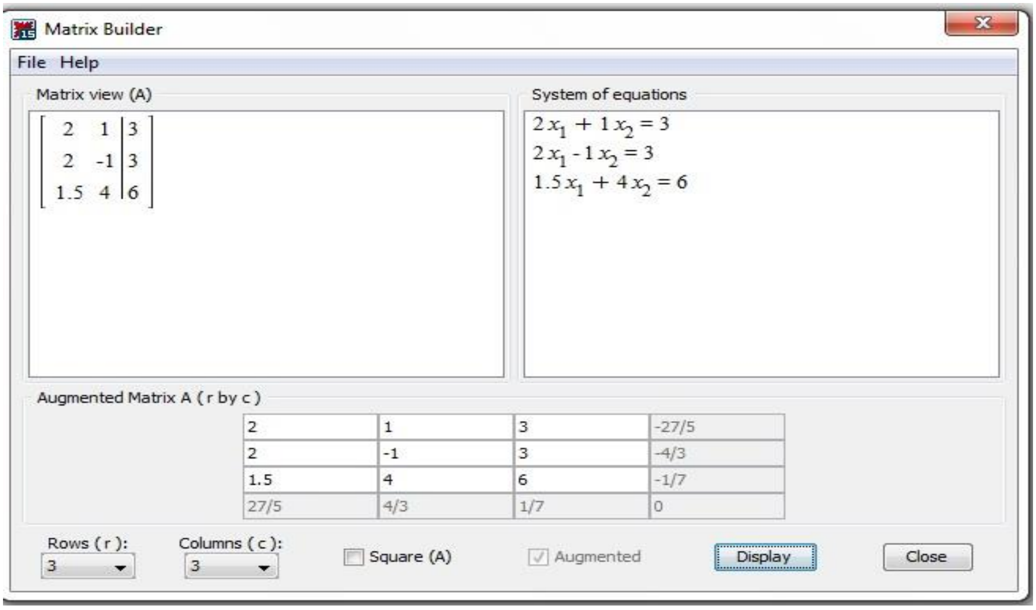
Figura 17: Janela do tutorial gráfico para a resolução de sistemas bi e tridimensionais



Fonte: produzida pelo autor

O botão <**Edit System**> abre o editor de equações, chamado **Matrix Builder,** o qual permite a inserção do sistema por meio de sua matriz ampliada, como mostra a Figura 18:

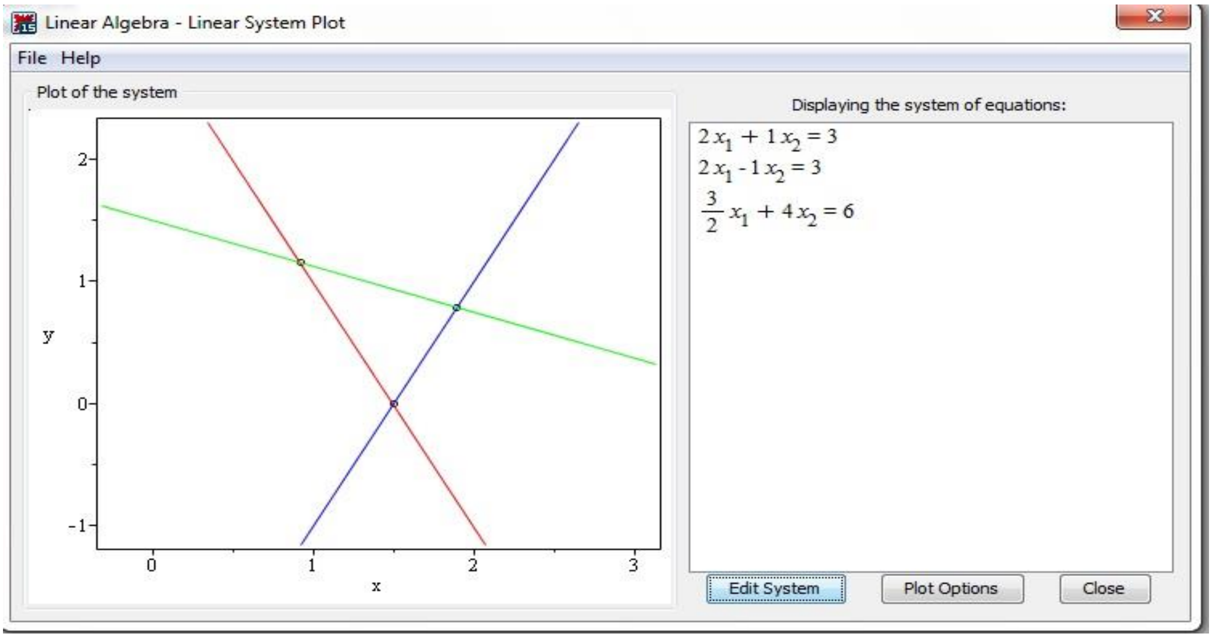
Figura 18: Janela do Editor de Matrizes



Fonte: produzida pelo autor

Após a inserção da matriz ampliada, pressionamos o botão <**close**>, de forma que as retas correspondentes a cada equação são exibidas, como mostra a Figura 19:

Figura 19: Janela de exibições gráfica e algébrica das equações do sistema



Fonte: produzida pelo autor

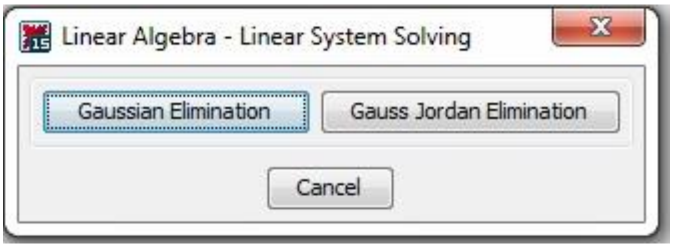
Situação análoga ocorre com os sistemas tridimensionais. Dessa forma, sua abordagem será omitida.

Quanto à resolução dos sistemas lineares, o Maple disponibiliza, no pacote **Student[LinearAlgebra],** comandos específicos para resolvê-lo via operações elementares.

Alternativamente, o Maple disponibiliza um tutorial para a resolução de sistemas lineares que tem como base a transformação da matriz ampliada do sistema em uma matriz triangular, em um processo de "eliminação de variáveis" conhecido na Educação Básica como O Método do Escalonamento. No Ensino Superior, é chamado de Método de Eliminação Gaussiana.

Ele é semelhante ao tutorial gráfico de sistemas bi e tridimensionais evidenciado. Consiste em uma interface gráfica que é utilizada sem a necessidade de digitar qualquer comando. Sua utilização limita-se aos sistemas com, no máximo, cinco equações e cinco incógnitas. Podemos acessá-lo a partir da barra de menus. Ao selecionarmos a opção: Resolução de Sistemas Lineares, nos é fornecida uma caixa de diálogo, a qual pergunta se queremos utilizar o Método de Eliminação Gaussiana ou o Método de Gauss- Jordan, como mostra a Figura 20:

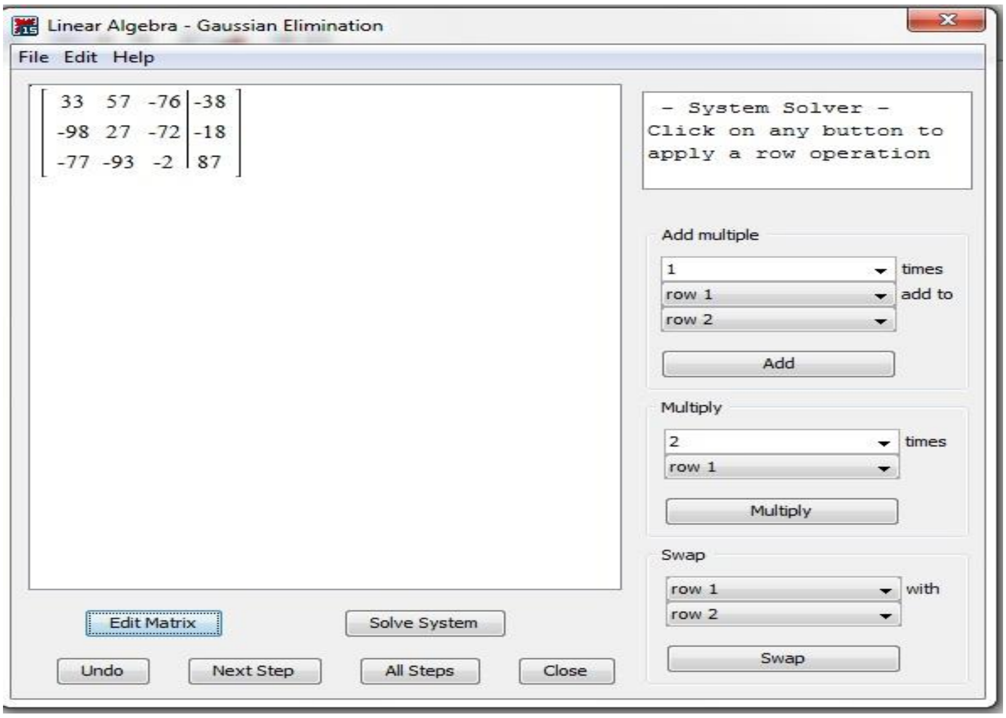
Figura 20: Caixa de diálogo do tutorial



Fonte: produzida pelo autor

Selecionando a opção Eliminação Gaussiana, é aberta uma janela com um tutorial onde a matriz possa ser criada e as operações elementares realizadas. A Figura 21 nos dá indicação dessa interface:

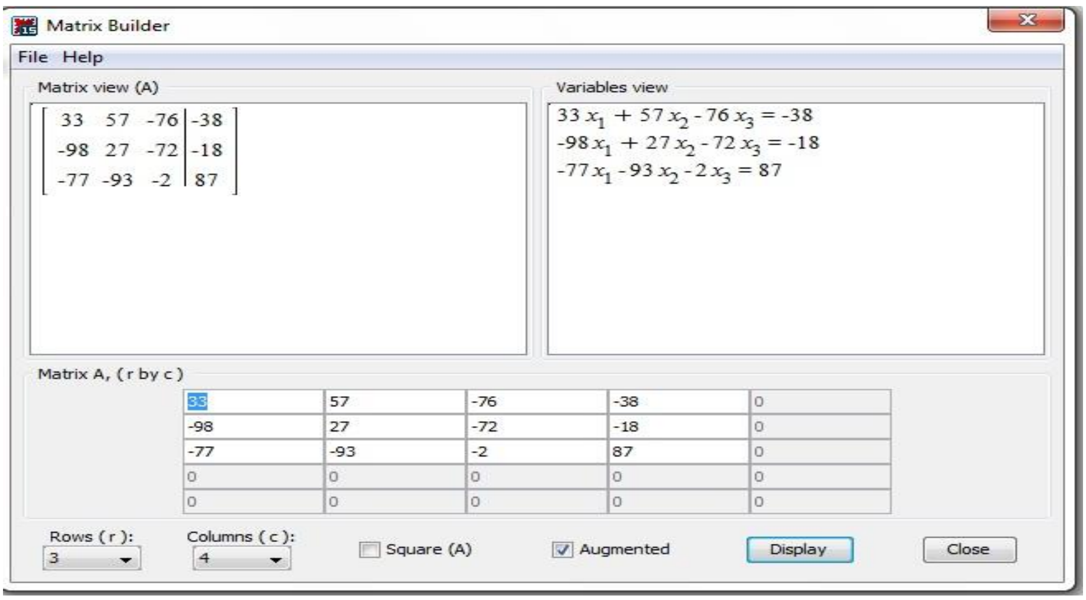
Figura 21: Janela do tutorial para a resolução de sistemas no Maple



Fonte: produzida pelo autor

A primeira coisa a fazer é entrar com a matriz. Essa ação é possibilitada pelo botão <**Edit Matrix**>. Ao clicá-lo, a janela do construtor de matrizes é exibida, como mostra a Figura 22:

Figura 22: Janela do editor de matriz do tutorial



Fonte: produzida pelo autor

Após inserir os dados, pressionamos o botão <**close**> e voltamos ao tutorial para iniciarmos o procedimento de resolução do sistema. A interface é autoexplicativa. Existe uma área que mostra (em inglês) a operação elementar aplicada.

No primeiro elemento da interface, digitamos o número real não nulo *k.* Depois, selecionamos a linha *s* que será multiplicada por esse número *k.* Finalmente, selecionamos a linha *i* que será adicionada à operação anterior. O segundo elemento da interface permite-nos executar a segunda operação elementar, isto é, a multiplicação de uma linha por um número real não nulo. Já o terceiro elemento da interface executa a permuta de linhas.

Na parte inferior da interface existem os seguintes botões:

(i) <**Edit Matrix**> para voltar ao construtor de matrizes;

(ii) <**Solve System**> para resolver o sistema linear, que só funciona se a matriz já estiver na forma triangular;

(iii) <**Undo**> para desfazer uma operação elementar que tenha sido aplicada, caso algum erro tenha sido cometido;

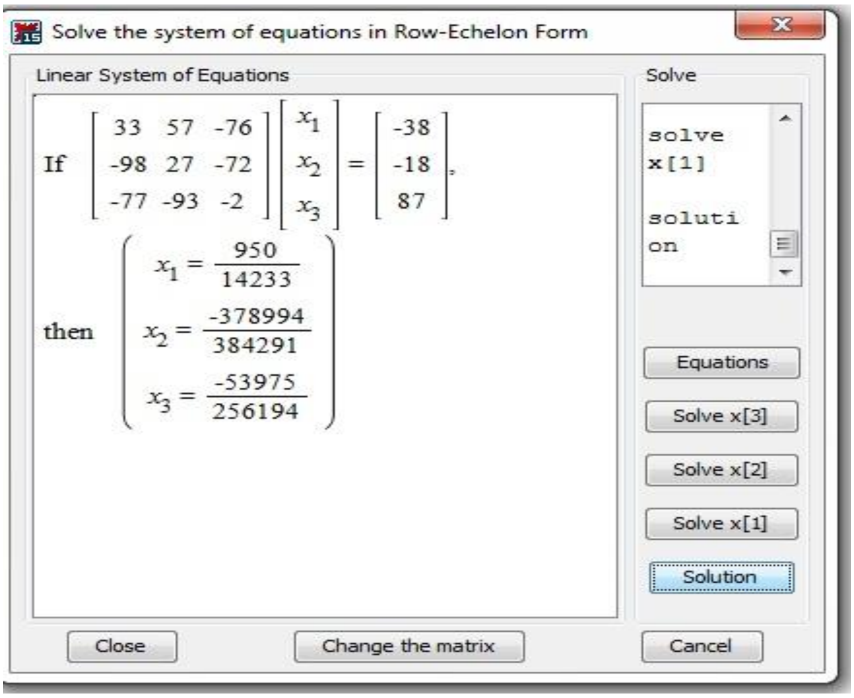
(iv) <**Next Step**> para pedir ao Maple para executar a próxima operação elementar automaticamente. Nesse caso, a indicação da operação aplicada é exibida na área correspondente;

(v) <**All Steps**> para pedir ao Maple para triangularizar a matriz automaticamente;

(vi) <**Close**> para finalizar o tutorial.

Com a matriz triangularizada passamos à resolução do sistema. Pressionar o botão <**Solve**> leva à janela de resolução do sistema pelo Método das Substituições. Após determinarmos os valores das incógnitas, o botão <**Solution**> será habilitado. Pressioná-lo consiste na exibição do sistema na sua formulação matricial e sua solução, como mostra a Figura 23:

Figura 23: Janela da forma matricial do sistema e de sua solução



Fonte: produzida pelo autor

Tomando por base todo o estudo desenvolvido, inferimos que o software Maple não fornece uma abordagem concomitante das representações algébrica e gráfica, sendo verificado que elas são feitas separadamente. Outro elemento percebido é que ele não permite uma manipulação direta entre as representações (gráfica e algébrica) do sistema, ou entre os elementos constituintes de cada campo de representação (pontos, retas, planos etc.), ou seja, pode ser caracterizado como um ambiente estático. Dessa forma, o software Maple satisfaz parcialmente os pontos levantados nas análises cognitiva e epistemológica e não atende especificamente nossos objetivos.

Por todo o exposto, fica claro a necessidade de nos debruçar sobre esta questão e apresentar um protótipo de software que atenda especificamente os nossos objetivos, que promova uma dinamicidade e interatividade entre as equações do sistema e a representação das soluções, que se proponha articular as equações do sistema linear com sua solução, de forma a perceber que a solução corresponde a sistemas equivalentes ao sistema original, obtidas pela aplicação das operações elementares. Todas essas proposições favorecem uma significação ao processo de obtenção de sistemas equivalentes, o qual vemos como o ponto central de nossa pesquisa. Concomitantemente, mostra-se, por esses encaminhamentos, a dependência linear das soluções às equações do Sistema Linear (e vice-versa), e entre as próprias equações do sistema.

3.8 ELICITAÇÃO DOS REQUISITOS

Nesta seção, apresentamos, resumidamente, por meio de um quadro, os requisitos que foram identificados na análise preliminar das quatro dimensões.

Quadro 4-Resumo dos requisitos

COGNITIVOS	DIDÁTICOS	EPISTEMOLÓGICOS	INFORMÁTICOS
Abordagem multi-representacional; Articulação entre as representações gráfica e algébrica; Manipulação e conexão entre os registros de representação.	Criação de situações que favoreçam a conversão entre as representações gráfica e algébrica; Criação de situações para a utilização das tecnologias em sala de aula.	Articulação entre as equações do sistema e o feixe de retas por elas determinado; Abordagem da dependência linear das equações, por meio das operações elementares.	Interatividade; Dinamicidade; Conexões.

Fonte: produzido pelo autor

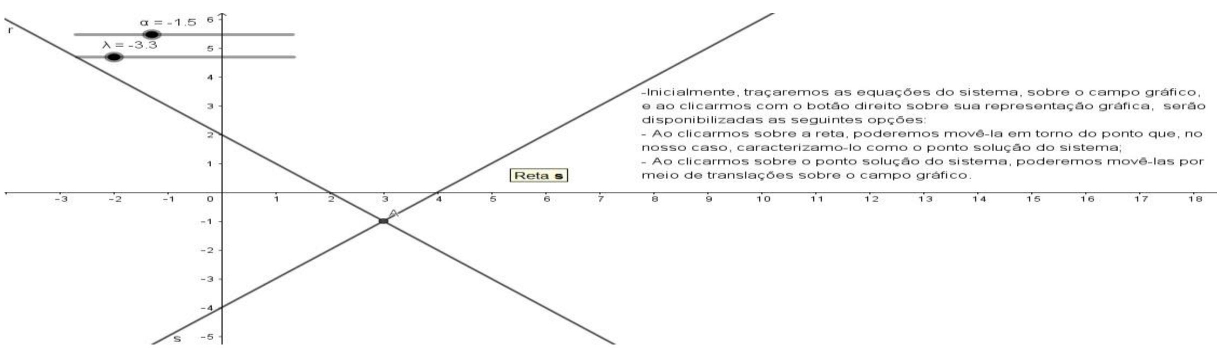
4. PROTOTIPAÇÃO COM O USO DO SOFTWARE GeoGebra

Neste capítulo, fazemos a prototipação de um software à luz da Engenharia Didático-Informática e para isso faz-se necessário debruçarmo-nos nas evidências que foram levantadas no decorrer de toda a análise preliminar, frente ao nosso objeto de estudo. Ressaltamos a importância desta etapa para o entendimento da funcionalidade do software a ser concebido. É neste momento que nós respondemos a perguntas do tipo: Como as necessidades do nosso objeto de estudo serão implementadas? Dentre as lacunas encontradas, nos atuais software, quais e como os recursos serão disponibilizados pelo software, a fim de superá-las? Dessa forma, é bastante pertinente a escolha de um atual software para a elaboração de um esboço do software idealizado. Diante desse fato, encontramos no GeoGebra aquele que melhor evidenciaria nossa prototipação, pois ele se situa em um contexto muito próximo de nossa abordagem e, dessa forma, o escolhemos.

Com o propósito de facilitar a compreensão de toda a exposição que será desenvolvida nesta seção, daremos destaque aos esboços realizados com o auxílio do GeoGebra, os quais objetivam a construção de situações que trazem à tona os recursos a serem implementados em um novo software. Diante disso, seguem as situações simuladas:

- Manipulação direta no registro gráfico: esse recurso reside no fato de o software permitir a criação de sistemas manipuláveis, de forma dinâmica, por meio de controles deslizantes e pela manipulação direta, nas representações gráficas das equações do sistema.

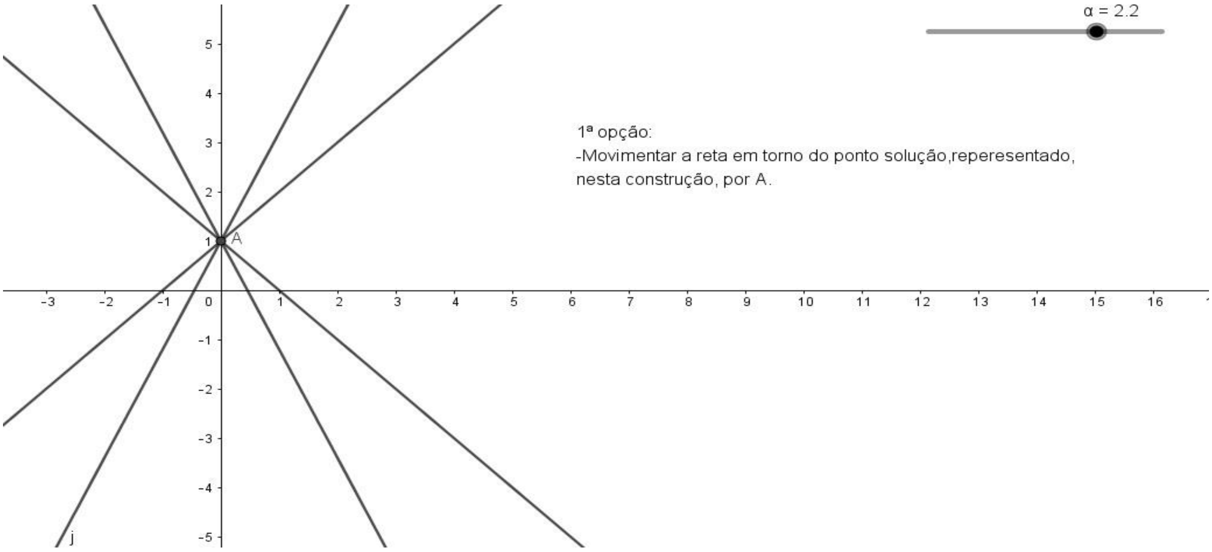
Figura 24: Simulação da manipulação direta no registro gráfico



Fonte: produzida pelo autor

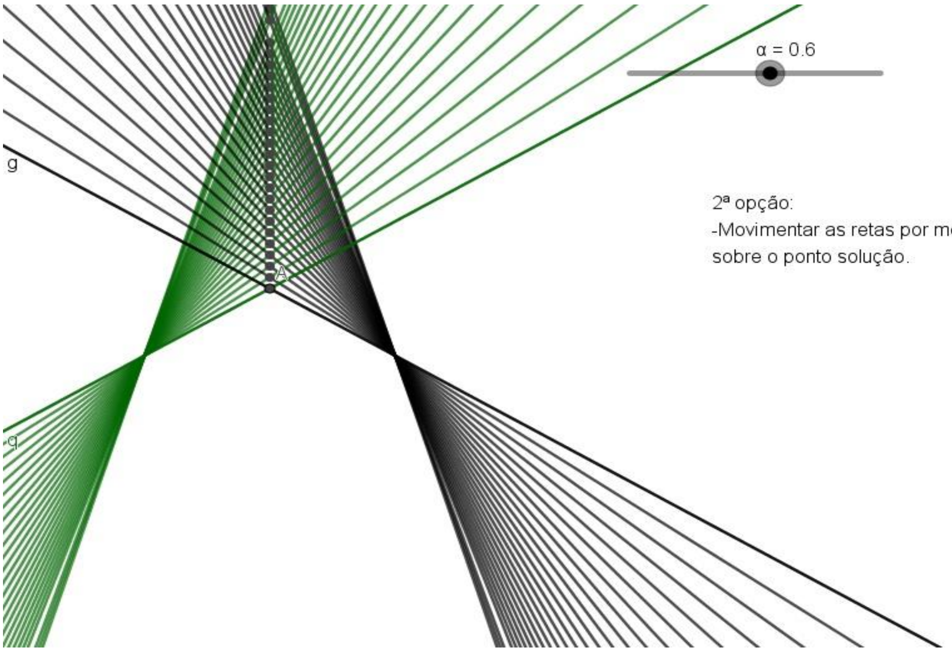
As duas opções, tratadas na Figura 24, serão exemplificadas nas construções a seguir:

Figura 25: continuação da simulação da manipulação direta no registro gráfico



Fonte: produzida pelo autor

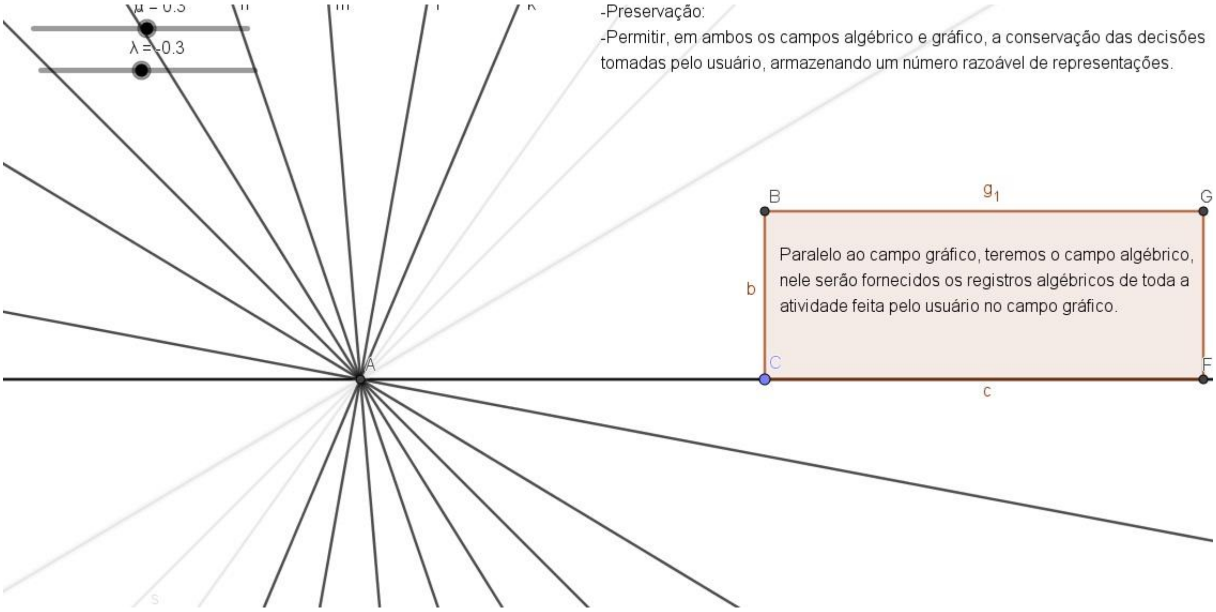
Figura 26: continuação da simulação da manipulação direta no registro gráfico



Fonte: produzida pelo autor

- Preservação dos registros gráfico e algébrico das equações: por meio desse recurso evidenciamos a sequência de decisões que vão sendo tomadas pelo usuário em ambos os campos algébrico e gráfico, desde que o usuário permaneça no mesmo sistema e, consequentemente, com o mesmo conjunto solução caracterizado na Figura abaixo por A, pois, na medida em que ele alterar o sistema ou o conjunto solução, as representações anteriores serão descartadas. Esse recurso caracteriza-se como uma ilustração do "caminho" percorrido pelo feixe de retas, no campo gráfico, com as respectivas indicações das decisões tomadas, no campo algébrico. Sendo essa abordagem satisfeita tanto pelos controles deslizantes, quanto pela manipulação direta sobre as representações gráficas das equações do sistema:

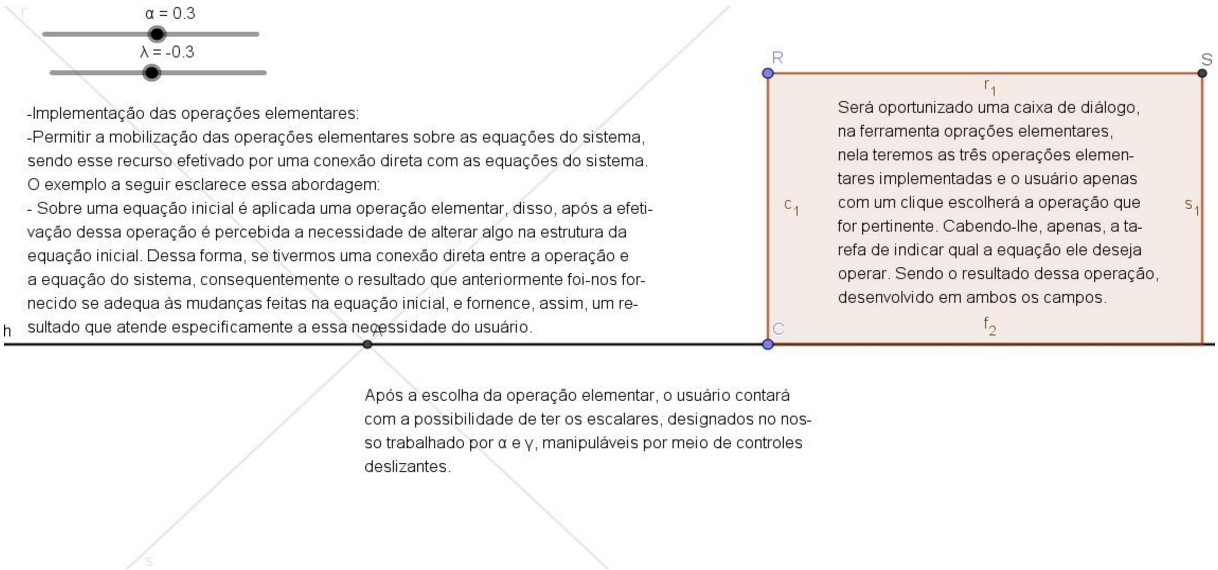
Figura 27: Simulação da preservação dos registros gráfico e algébrico das equações



Fonte: produzida pelo autor

- Implementação das operações elementares: O recurso da implementação das operações elementares visa favorecer uma ideia mais sólida do papel que as operações elementares exercem sobre a solução, as equações e no próprio sistema. Essa abordagem, por sua vez, feita nos campos algébrico e gráfico.

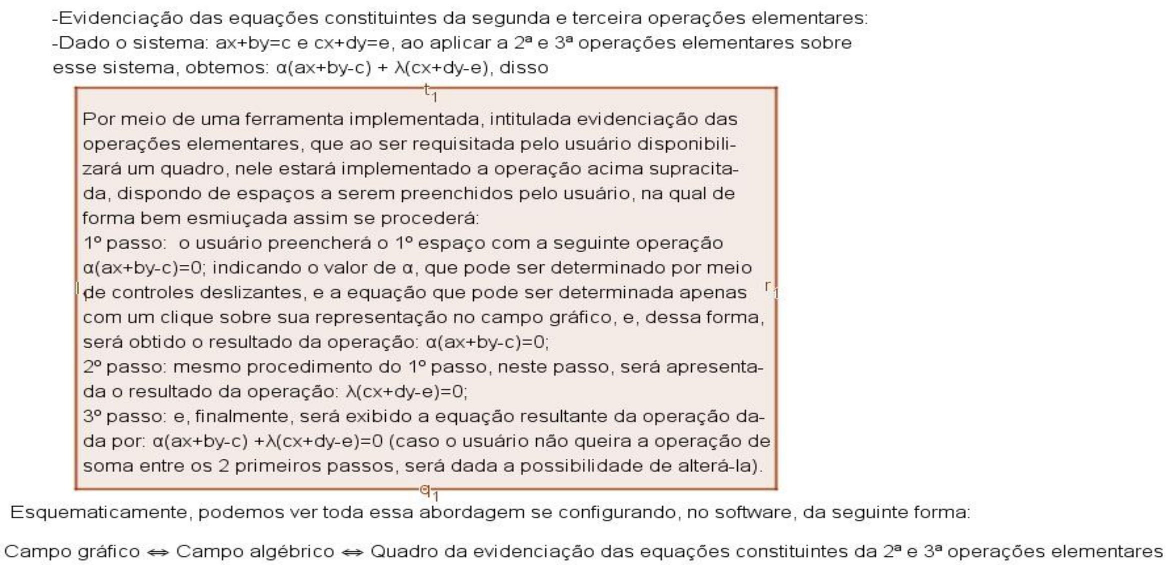
Figura 28: Simulação da implementação das operações elementares



Fonte: produzida pelo autor.

- Evidenciação das equações constituintes da segunda e terceira operações elementares: essa funcionalidade exerce um papel importantíssimo para uma maior clareza das operações que estão sendo aplicadas sobre as equações do sistema. Tal recurso permite visualizar todo o processo, desde a escolha da operação até a equação resultante dessa operação.

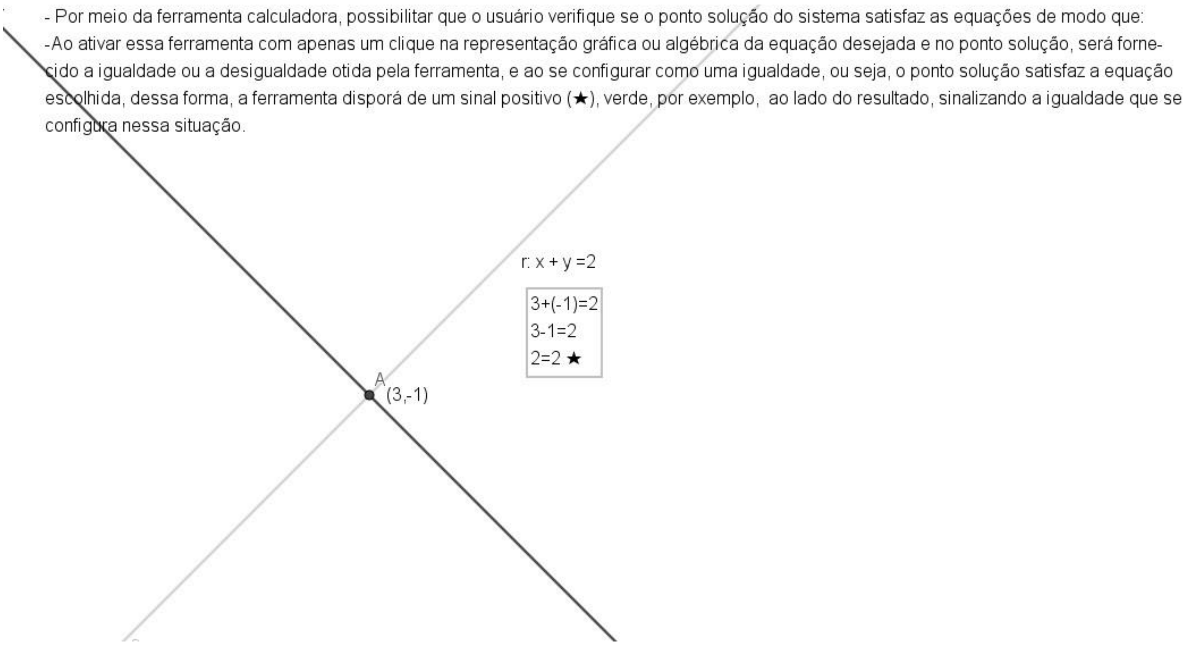
Figura 29: Simulação da evidenciação das operações elementares



Fonte: produzida pelo autor

- Calculadora: esse recurso se faz bastante pertinente para a implementação das operações elementares, sendo essa ferramenta inserida no quadro da evidenciação das operações elementares, explicitado na Figura anterior e, também, sendo disponibilizada como uma ferramenta à parte, fornecendo um suporte para a verificação de que o ponto solução do sistema satisfaz as equações do sistema e as que são obtidas pelas operações elementares e, por consequência, a constatação do seu não pertencimento às que não são obtidas por esse procedimento.

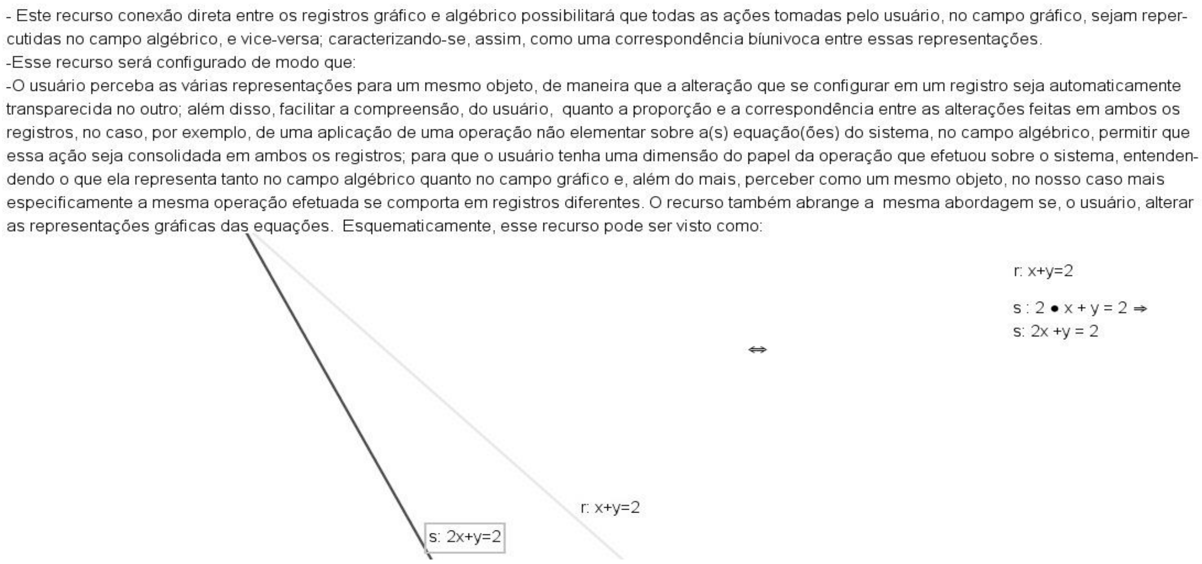
Figura 30: Simulação da calculadora



Fonte: produzida pelo autor

- Conexão entre os registros gráfico e algébrico das equações: o recurso conexão, entre os registros gráfico e algébrico das equações do sistema, reveste-se de um caráter imprescindível para a nossa abordagem, pois, como preconizado na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, e evidenciado na nossa análise preliminar, a originalidade da atividade matemática está na manipulação de diferentes representações para um mesmo objeto matemático, sendo esses trabalhados simultaneamente:

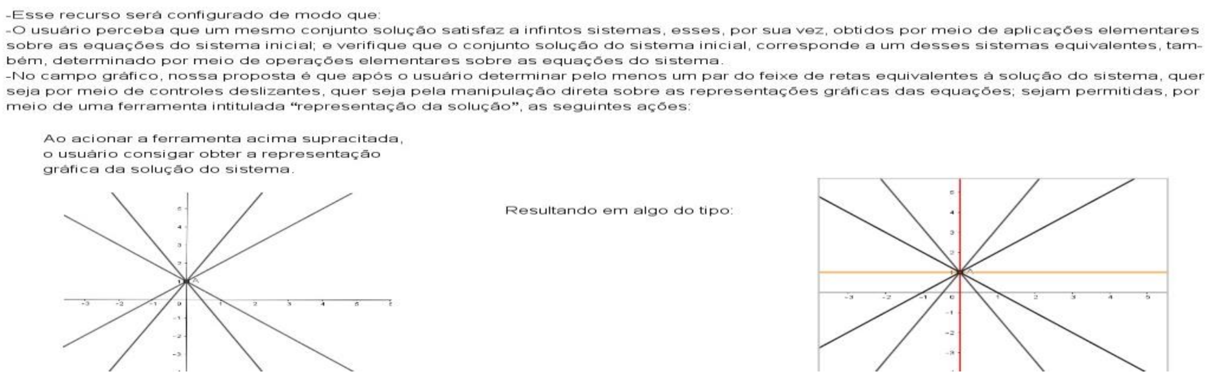
Figura 31: Simulação da conexão entre os registros gráfico e algébrico das equações



Fonte: produzida pelo autor

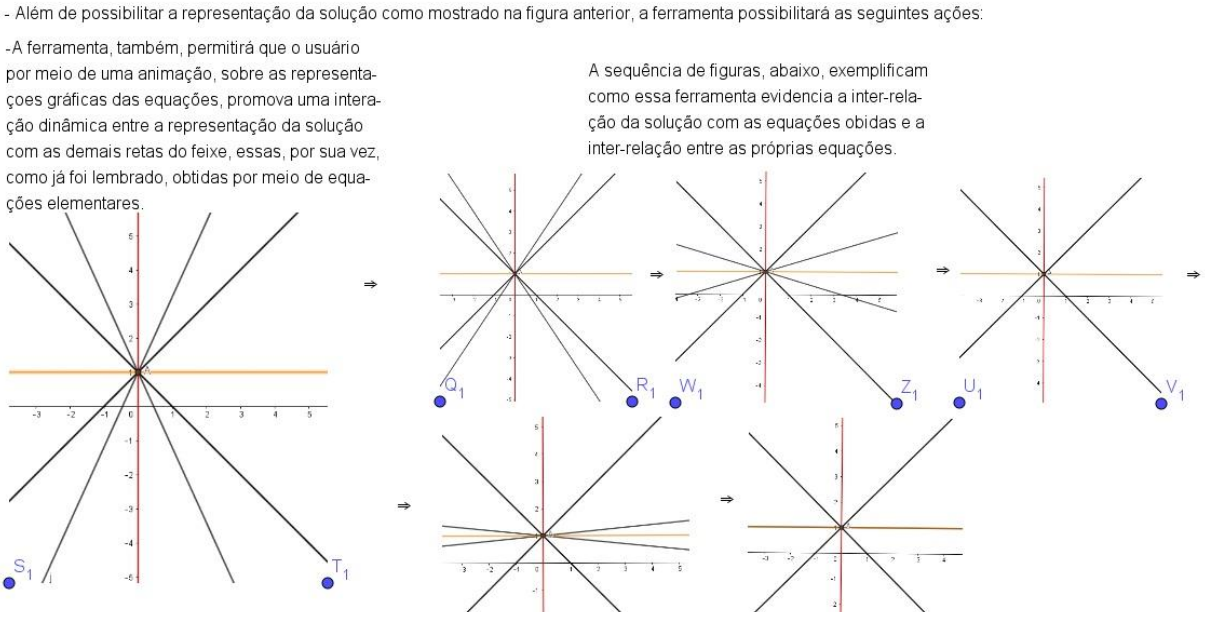
- Representar a solução do sistema: amplamente discutido ao longo desta pesquisa, esse recurso toma um lugar de destaque em nossa abordagem, por permitir uma compreensão mais ampla do significado das soluções, de perceber que um mesmo conjunto solução satisfaz a infinitos sistemas equivalentes ao sistema original e que ele pode ser visto como um desses sistemas. É nesse sentido que sua abordagem se efetiva em nossa prototipação, a fim de lhe possibilitar as representações das soluções e sua significação, especialmente no campo gráfico:

Figura 32: Simulação da representação da solução do sistema



Fonte: produzida pelo autor

Figura 33: Continuação da simulação da representação da solução do sistema



Fonte: produzida pelo autor

Uma importante observação a ser levantada, neste momento, corresponde ao fato de que todas as ações evidenciadas nas Figuras 32 e 33 no campo gráfico, serão igualmente tratadas no campo algébrico.

4.1 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa ora finalizada põe em evidência uma análise pormenorizada do objeto de estudo que nos impulsionava conhecer, certamente motivados por experiências profissionais. Desejávamos entender quais eram os impedimentos que o circundavam e quais eram os meios de superá-los em contextos de ensino e aprendizagem. Dessa forma, debruçamo-nos sobre um modelo teórico-metodológico que nos possibilitasse uma maior riqueza de detalhes dos elementos que o integravam.

À guisa de comentário, vale aqui reforçar que a escolha da Engenharia Didático-Informática como nosso referencial teórico-metodológico se mostrou bastante pertinente, pois ela nos forneceu os encaminhamentos necessários para a identificação das necessidades do nosso objeto, mais especificamente, por meio das análises preliminares, dentre as quais chamamos atenção para as análises epistemológica, cognitiva, didática e informática.

Da análise epistemológica adveio um resultado muito importante, que é o conceito de dependência linear, o qual coloca em evidência o papel das operações elementares como um meio eficaz para a obtenção de sistemas equivalentes ao sistema original. Dentre eles cabe aqui exemplificar o caso da solução do sistema. Para esse tipo de procedimento, é recomendável a utilização do Método do Escalonamento ou Método de Eliminação Gaussiana.

A análise cognitiva nos indicou um caminho para alcançarmos a originalidade da atividade matemática que se dá por meio da mobilização de vários registros de representação de um mesmo objeto matemático e suas respectivas conversões. Toda essa abordagem se justifica pelo fato de não termos um acesso direto a esses objetos.

Quanto à análise didática, que se consolidou por meio dos resultados das análise dos livros didáticos, se mostrou profícua na medida em que nos fez perceber a existência de uma abordagem extremamente propensa para o tratamento algébrico dos Sistemas Lineares, o qual frequentemente se reduz a uma aplicação de algoritmos para “resolver” o sistema. As conversões, por sua vez, são minimamente abordadas, quando não completamente suprimidas.

A meticulosa análise informática desenvolvida nos software GeoGebra e Maple mostrou-se bastante enriquecedora por nos possibilitar um panorama do que eles já faziam e quais eram as lacunas que apresentavam, frente à obtenção de Sistemas Equivalentes (com real destaque à solução do sistema). Sendo essa abordagem configurada nos campos algébrico e gráfico, com ênfase na manipulação direta entre essas representações. Ao levar em consideração todos os pontos aqui elucidados, foi percebido que os softwares analisados apresentavam algumas limitações, as quais, de uma certa forma, justificaram a elaboração de uma prototipação de software que atendesse especificamente nossos objetivos.

Como já mencionado no parágrafo anterior, sentimos a necessidade de apresentar uma prototipação de um software para a abordagem dos Sistemas Lineares pautada nos princípios da EDI, haja vista as lacunas, quanto a esse tema, evidenciadas à luz de toda a análise preliminar.

Dessa forma, pretendemos que esta pesquisa alcance principalmente os contextos de ensino e aprendizagem, fornecendo-lhes esta ampla abordagem do nosso objeto de estudo. Além disso, esperamos contribuir com o desenvolvimento dos software educativos, e, para isso, apresentamos uma proposta viável de um futuro software, a qual põe em evidência elementos das quatro dimensões que o integram. Também gostaríamos de expressar nosso desejo de continuar com esta pesquisa e, dessa forma, em pesquisas futuras, esperamos concluí-la com a concepção/desenvolvimento/validação do software evidenciado na nossa prototipação.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S A; BIANCHINI, B L. **O erro ligado ao ensino aprendizagem de sistemas lineares** in Anais do IV EPEM. SBEM São Paulo, 1996 p. 216- 223. Disponível em: <http://sbempaulista.org.br/wp-content/uploads/2015/04/IV_EPEM_2.pdf>. Acesso em: 28 maio 2018.

AMARAL, E. C.; GUEDES, U. T. V. **Análise de construção de software educativo com qualidade**: Sugestão de ficha para registro e avaliação de software educativo. 2005. Workshop dos Cursos de Computação Aplicada do INPE, 26 e 27 de outubro. São José dos Campos (SP). Disponível em: < dpi.inpe.br/hermes2@1905/2005/10.03.21.08> Acesso em 29 maio 2018.

ANDRADE, J P G. **Vetores: interações à distância para a aprendizagem de álgebra linear.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, UFPE, Recife, 2010. Disponível em: < https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/4038>. Acesso em: 11 jun. 2018.

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra linear com aplicações**. Porto Alegre, Ed: Bookman, 2001.

ARTIGUE, M. **Engenharia didática.** In: BRUN, J. Didática das Matemáticas. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. Cap. 4, p. 193- 217.

DIAS, M A**. Les problèmes d'articulation entre points de vue "cartésien" et "paramétrique" dans l'enseignement de l'algèbre linéaire.** 1998. 504 f. Tese (Doutorado), Université de Paris, Paris, 1996. Disponível em: <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01252758/document>. Acesso em: 10 jun. 2018.

BARROS, P M. et al. **Raciocínios desenvolvidos na verificação das soluções de sistemas de equações lineares.** In: XXXIII Seminário de Investigação em Educação Matemática, 2012, Lisboa. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/311954716_RACIOCINIOS_DESENVOLVIDOS_NA_VERIFICACAO_DAS_SOLUCOES_DE_SISTEMAS_DE_EQUACOES_LINEARES >. Acesso em: 12 jul. 2018

BATTAGLIOLI, C S M. **Sistemas lineares na segunda série do ensino médio: um olhar sobre os livros didáticos.** 2008. 101 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática, PUC, São Paulo, 2008. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11327>. Acesso em: 25 maio 2018.

BELLEMAIN, F. **Conception, réalisation et expérimentation d'un logiciel d'aide à l'enseignement de la géométrie**. Tese de doutorado. Université Joseph Fourier. Grenoble, 1992.

BELLEMAIN, F. **A transposição informática na engenharia de softwares educativos.** In: I Seminário Internacional de pesquisa em Educação Matemática, 2000, Serra Negra. Anais. São Paulo: Sbem, 2000. p. 198 - 204. Disponível em: file:///C:/Users/walter/Downloads/A_transposicao_informatica_na_engenharia.pdf. Acesso em: 12 jul. 2018.

BELLEMAIN, F. **O paradigma micromundo.** In: Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática, vol.1, 2002, Rio de Janeiro. Anais. Rio de Janeiro: Universidade Estadual do Rio de Janeiro, 2002. p. 51-62. CD-ROM.

BELLEMAIN, F.; BELLEMAIN, P. M. B.; GITIRANA, V. Elementos de engenharia de software educativos para a concepção de ferramentas computacionais para o CSCL. In ROSA, M.; BAIRRAL, M. A.; AMARAL, R. B. **Educação matemática, tecnologias digitais e educação a distância: pesquisas contemporâneas**. Natal (RN): Editora da Física, 2014.

BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. I. R.; FIGUEIREDO, V. L.; WETZLER, H. G**. Álgebra linear.** 3. ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1986.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular (BNCC).** Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/02/bncc-20dez-site.pdf> Acesso em 02 ago. 2018.

____________Secretaria de Educação Média e Tecnológica**. Parâmetros curriculares nacionais+ (PCN+) – ciências da natureza, matemática e suas tecnologias.** Brasília: MEC, 2002.

____________Secretaria de Educação Básica. **Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. – (Orientações curriculares para o ensino médio;** volume 2. Brasília: MEC, 2006.

____________Secretaria de Educação Fundamental. **parâmetros curriculares nacionais: matemática.** Brasília: MEC / SEF, 1998.

____________ Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **programa nacional do livro para o ensino médio - matemática (PNLEM).** Brasília: MEC, 2005. Disponível em http://ftp.fnde.gov.br/web/livro_didatico/guia_livro_didatico_pnlem_2006_mg.pdf Acesso em: 10 out. 2018.

BROUSSEAU, G. **Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques.** Revue Rdm**,** v. 7, n. 2, p.33-115, 1986.

DANTE, L R. **Matemática, contexto &aplicações.** Vol. 2. São Paulo: Ática, 2007.

DUVAL, R. **Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática.** In: MACHADO, S. D. A. Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica. Campinas: Editora Papirus, 2003, p.11-34.

DUVAL, R. **Semiosis y pensamiento humano: registros semioticos y aprendizajes intelectuales.** Cali, Colômbia: Universidade del Valle, 2004.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais**. Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria de Física, fascículo I, 2009.

DUVAL, R. **Les problèmes dans l'acquisition des connaissances mathématiques: apprendre comment les poser pour devenir capable de les résoudre?** Revemat, v. 8, n. 1, p.1 – 45, 2013. Disponível em: <http://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat>. Acesso em: 01 ago. 2018.

EULER L. **Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes.** Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin**,** 4, 219-223, 1750; ou in Opera omnia, 3 séries (57 vols), vol. 26, 33-45, Lausanne: Teubner – OrellFüssli – Turicini, 1911-76.

FREITAS, I M. **Resolução de sistemas lineares parametrizados e seu significado para o aluno.** Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade de São Paulo PUCSP. São Paulo, 1999.

GAULIN, C et al. **Actes de 7ème congrès internacional sur l'enseignement des mathématiques.** Québec. Les presses de L'Université Laval, Sainte-Foy, 1994, 261 p. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=xjf1OJGlihEC&pg=PA64&lpg=PA64&dq=Nanard+1990&sourc#v=onepage&q&f=false>. Acesso em: 20 nov. 2018.

GIOVANNI, J R; BONJORNO, J R; GIOVANNI, J R. **Matemática completa: ensino médio** – vol. Único. São Paulo: FTD, 2002.

HILLEL J., SIERPINSKA A. **One persistent mistake in linear algebra.** In Proceeding of PME 18 (4 vol), vol. 4, 65-72. Université de Lisbonne, 1995.

HOHENWARTER, M. et al**. Introduction to GeoGebra**. 2011. Disponível em: < https://static.geogebra.org/book/intro-en.pdf > Acesso em: 05 jan de 2019.

KAPUT, J. **Technology and mathematics education.** In: D.A.Grows (ED.) Handbook of research on Mathematicsteaching and learning, Anais. Macmillan, NY, 1992, p. 515-556.

KARRER, M. **Articulação entre álgebra linear e geometria: um estudo sobre as transformações lineares na perspectiva dos registros de representação semiótica**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, PUC, São Paulo, 2006. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11068>. Acesso em: 11 jun. 2018.

LABORDE, J M.; LABORDE, C. **Micromondes intelligents et environnement d'apprentissage**. In: Actes des XIII Journées francophones sur l'informatique. IMAG & Université de Genève, p. 57 – 177, Grenoble, 1991.

LEON, S. J. **Álgebra linear com aplicações.** 4.ed. Rio de Janeiro: LTC, 1998.

_________. **Álgebra linear com aplicações.** 8.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

LOURENÇO, E.H. et al. **Congruência semântica e equivalência referencial em problemas envolvendo equações de 1º grau**. Educação Matemática Pesquisa, v. 20, n. 1, pp. 084 – 109, 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2018v20i1p84-109>. Acesso em: 24 jul. 2019.

MACHADO, S. D. A. **Aprendizagem de matemática, registros de representações semióticas.** Campinas: Papirus, 2003.

___________. **O Universitário principiante x significado dos sistemas de equações** in Anais do IV EPEM – p. 241 - 248. São Paulo: SBEM, 1996. Disponível em: <http://sbempaulista.org.br/wp-content/uploads/2015/04/IV_EPEM_2.pdf>. Acesso em: 01 ago. 2018.

NANARD J. **La manipulation directe en interface homme-machine,** Thèse Université des sciences et techniques du Languedoc. Montpellier, 1990.

NUSEIBEH B., EASTERBROOK S. **Requirements engineering: aroadmap, the future of software engineering.** In: 22nd International Conference on Software Engineering, ACM-IEEE, 22. Anais. Irlanda: ICSE, 2000. Disponível em: <www.cs.toronto.edu/~sme/papers/2000/isce2000.pdf>. Acesso em: 20 ago. 2018.

OUSMAN R. **Contribution à l'enseignement de l'algèbre linéaire en première année d'université.** Thèse de doctorat, Rennes : Université de RennesI, 1996, 242 p. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=uuTMMgEACAAJ>. Acesso em: 15 jan. 2019.

PANTOJA, L. F. L. **A conversão de registros de representações semióticas no estudo de sistemas de equações algébricas lineares.** 2008. Dissertação de Mestrado em Educação em Ciências e Matemática do Núcleo de Pesquisa e Desenvolvimento da Educação Matemática e Científica - UFPA, Belém. Disponível em: <http://repositorio.ufpa.br/jspui/handle/2011/3092>. Acesso em: 10 jul. 2018.

PAPERT, S. **Mindstorms: children, computers and powerful ideas.** New York: Basic Books, 1980.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação. **Parâmetros para a educação básica do estado de Pernambuco: matemática.** Recife: PE, 2012.

RAMOS, C S. **Princípios da engenharia de software educativo com base na engenharia didática: uma prototipação do bingo dos racionais.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, UFPE, Recife, 2014. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/14051>. Acesso em: 11 jun. 2018.

SÁ, F L. **Estudos dos determinantes**. UFF, Rio de Janeiro, 2004. Disponível em: <http://www.uff.br/dalicenca/images/stories/caderno/volume5/Estudo_dos_Determinantes.pdf>. Acesso em: 29 jul. 2019.

SANTOS, G L. **Alguns princípios para situações de engenharia de softwares educativos**. Inter-ação, Goiás, v. 34, n. 1, 2009. Disponível em: <http://www.revistas.ufg.br/index.php/interacao/article/view/6540/4801>. Acesso em: 01 ago. 2018.

SILVA, C T J. **A engenharia didático-informática na prototipação de um software para abordar o conceito de taxa de variação.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, UFPE, Recife, 2016. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/19687>. Acesso em: 11 jun. 2018.

SMOLE, K S. et al. **Matemática ensino médio.** Vol. 2. São Paulo: Saraiva, 2003.

SOMMERVILLE, I**. Engenharia de software.** São Paulo. 6. ed. Pearson Education Companion, 2003.

_______________ **Engenharia de software.** São Paulo 8. ed. Pearson Education do Brasil, 2007.

SOUZA, M F B. **Softwares livres de matemática, um novo paradigma computacional e educacional.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, UFG, Goiânia, 2014. Disponível em: < http://repositorio.bc.ufg.br/tede/handle/tede/3983>. Acesso em: 01 ago. 2018.

ROBBIANO, L. **Álgebra linear para todos.** Itália: Editora Springer, 2011.

TCHOUNIKINE, P. **Computer science and educational software design:** A resource for Multidisciplinary work in Techonology Enhanced Learning. Ed. Springer, 2011.

TENÓRIO, A; NASCIMENTO, M L V; TENÓRIO, T**. Uso de softwares educativos por professores de matemática do Rio de Janeiro.** Disponível em: http://tecedu.pro.br/wp-content/uploads/2016/09/Art15-ano8-vol17-dez2016.pdf.Acesso em: 25 jul. 2018.

THOMAZ, D. **Do livro didático ao aluno: transposição didática na aula de matemática do ensino médio diurno e noturno.** Dissertação (Mestrado em Educação) - Programa de Pós-Graduação em Educação, UFMT, Cuiabá, 2013. Disponível em:
< https://www1.ufmt.br/ufmt/unidade/userfiles/publicacoes/513421273c13aed68be582a230d06138.pdf>. Acesso em: 26 jul. 2018

THOMPSON, P. W. **Mathematical microworlds and intelligent computer-assisted instruction,** in Kearsley G (ed), Artificial Intelligence & Instruction, applications and methods, Addilson Wesley, 83-109, 1987.

TIBÚRCIO, R. S. **Processo de desenvolvimento de software educativo: um estudo da prototipação de um software para o ensino de função.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, UFPE, Recife, 2016. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/17425>. Acesso em: 11 nov. 2018.