Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

Tiago de Albuquerque Amorim

TEOREMA DO ÍNDICE DE MORSE PARA GEOMETRIA SEMI-RIEMANNIANA

Recife
2019

Tiago de Albuquerque Amorim

TEOREMA DO ÍNDICE DE MORSE PARA GEOMETRIA SEMI-RIEMANNIANA

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria.

Orientador(a): Henrique de Barros Correia Vitório.

Recife
2019

Catalogação na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

A524t Amorim, Tiago de Albuquerque
Teorema do índice de Morse para geometria Semi-Riemanniana / Tiago de Albuquerque Amorim. – 2019.
95 f.

Orientador: Henrique de Barros Correia Vitório.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, Recife, 2019.
Inclui referências e apêndice.

1. Geometria. 2. Índice de Morse. I. Vitório, Henrique de Barros Correia (orientador). II. Título.

516 CDD (23. ed.) UFPE- CCEN 2020 -18

Tiago de Albuquerque Amorim

Teorema do Índice de Morse para Geometria Semi-Riemanniana

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática

Trabalho aprovado. Recife - PE, 16 de julho de 2019:

Henrique de Barros Correia Vitório
Orientador

Hildeberto Eulalio Cabral
Convidado 1

Thiago Dias Oliveira Silva
Convidado 2

Recife - PE
16/07/2019

Este trabalho é dedicado aos meus pais,
Marina Judite e José Carlos

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais por tudo, principalmente, pelo amor e exemplo que levo por toda a minha vida.

Agradeço ao professor Henrique Vitório pela excelente orientação do meu mestrado e pelos cursos que foram divisores de águas na minha formação.

Agradeço a todos os professores do Dmat, principalmente, Antônio Carlos e Sérgio Santa Cruz por me mostrarem a maneira correta de estudar Matemática, e ao professor Hildeberto pela fantástica oportunidade de trabalhar com ele.

Agradeço também a todos os meus colegas (e agora amigos) de graduação e mestrado, principalmente, Rafael Holanda, Ricardo Francisco e Willikat com quem compartilhei 100 % da minha graduação.

Agradeço a minha excelente companheira e esposa, Milena Monique, com quem também divido a matemática.

Por fim, agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro prestado ao longo deste projeto.

RESUMO

Este trabalho estuda a versão Semi-Riemanniana do celebrado Teorema do Índice de Morse. O método para desenvolver este trabalho foi abrir as contas e os argumentos do artigo The Morse Index Theorem in Semi-Riemannian Geometry [1] do professor Paolo Piccione. A chave para essa teoria é a noção do Índice de Maslov de uma geodésica. Tal índice é um invariante homológico que substitui a noção do índice geométrico da geometria Riemanniana. Em situações bastante genéricas, o Índice de Maslov pode ser calculada como uma contágem algébrica de pontos conjugados ao longo da geodésica. O Teorema do Índice de Morse para Geometria Semi-Riemanniana estabelece que é possível decompor o espaço das variações de uma geodésica em dois subespaços, de dimensão infinita, tais que a Forma Índice tenha índice finito em um desses subespaços, coíndice finito no outro subespaço e o Índice de Maslov da geodésica coincide com a diferença entre esses dois números inteiros.

Palavras-chave: Semi-Riemanniana. Geodésica. Índice de Morse. Índice de Maslov.

ABSTRACT

The aim of this appresentation is to study the Semi-Riemannian version of the celebrated Morse Index Theorem. The method for developing this work was to open the accounts and arguments of the article The Morse Index Theorem in Semi-Riemannian Geometry [1] of the teacher Paolo Piccione. The key to this theory is the Maslov Index of geodesic. Such index is a homological invariant that replaces the notion of geometric index from Riemennian Geometry. In general terms, the Maslov Index can be computed as an algebraic counting of conjugate points along a geodesic. The Morse Index Theorem in Semi-Riemannian Geometry establishes that it is possible to decompose the space of the variations into two subspaces of infinite dimension such that the Index Form has finite index in one of these subspaces, finite coefficient in the other subspaceand the Maslov Index of the geodesic coincides with the difference between these two integers.

Keywords: Semi-Riemannian. Geodesic. Maslov index. Morse index.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Afim de motivar a teoria apresentada nessa dissertação, iremos apresentar um breve relato do histórico matemático do problema.

A origem da teoria do Índice pode ser encontrada na teoria de Sturm para equações diferenciais ordinárias (ver por exemplo [6]). O teorema de Oscilação de Sturm trata de equação diferencial de segunda ordem da forma $-(px')' + rx = \lambda x$, onde p e r são funções reais e $p > 0$, e λ é um parâmetro real. Este teorema afirma que o número de zeros no intervalo $[a, b]$ das soluções não nulas desta equação, satisfazendo $x(a) = 0$, é igual ao índice da Forma Índice $I(x_1, x_2) = \int_a^b [px_1'x_2' + rx_1x_2]dt$ no espaço $H_0^1([a, b]; \mathbb{R})$.

A extensão deste resultado para o caso de sistemas de equações é devido a Morse, obtendo o clássico teorema do Índice de Morse para a geometria Riemanniana (ver [5, 7]). Seja $(\mathcal{M}, g)$ uma variedade Riemanniana e $\gamma\colon [a, b] \to \mathcal{M}$ uma geodésica. O clássico teorema do Índice de Morse afirma que o número de pontos conjugados, que também são chamados de pontos focais e que são sempre discretos, contados com multiplicidade (índice geométrico de γ) é igual ao índice da segunda variação da ação Riemanniana $E(z) = \frac{1}{2}\int_a^b g(z', z')dt$ sobre o ponto crítico γ considerando apenas variação própria, denotada por I_γ. A forma bilinear simétrica I_γ, também chamada de Forma Índice, é dada por $I_\gamma(V, W) = \int_a^b [g(D_tV, D_tW) + g(\mathcal{R}(\gamma', V)\gamma', W)]dt$. No ponto de vista do cálculo variacional, o índice de I_γ é o número de direções essencialmente distintas nas quais γ pode ser deformada para obter uma curva de menor comprimento. O teorema foi depois estendido por Beem e Ehrlich (ver [8, 9]) para variedade Lorentzianas $(\mathcal{M}, g)$ no caso em que γ é causal (isto é, $g(\gamma', \gamma') \leq 0$). Mais precisamente, basta considerar a restrição de I_γ ao espaço dos campos ao longo de γ que são sempre ortogonais a γ. Porém, quando consideramos geodésicas Lorentziana tipo espaço ou variedades Semi-Riemannianas mais gerais, não se tem esperança de estender a formulação original por dois principais motivos:

- O conjunto dos pontos conjugados ao longo da geodésica pode não ser discreto;
- O índice de I_γ é sempre infinito, mesmo restrito aos campos que são sempre ortogonais a γ. Por isso é necessário trabalhar com Análise Funcional.

O caso das geodésicas Lorentzianas tipo-espaço foi estudado em [2], onde os autores consideram uma métrica estacionária, isto é, a métrica admite um campo de Killing Y. Este campo dá uma lei de conservação para as geodésicas: $g(\gamma', Y) = \textit{constante}$. O principal resultado de

[2] é que, se restringirmos a Forma Índice ao espaço dos campos variacionais ao longo de γ correspondentes a variação por curvas satisfazendo a lei de conservação, então o índice de tal restrição é igual a um invariante homológico da geodésica chamado de Índice de Maslov. A noção de Índice de Maslov associado a curvas de subespaços lagrangianos de um espaço simplético apareceu originalmente na literatura Russa (ver por exemplo [10]). Existe hoje em dia uma extensa literatura sobre aplicações do Índice de Maslov à teoria dos sistemas Hamiltoniano (ver por exemplo [12, 13, 15]). No contexto das geodésicas Semi-Riemannianas, o Índice de Maslov foi introduzido por Helfer em [11]. De modo geral, o Índice de Maslov é definido como o número de interseção de uma curva ℓ na Grassmanniana Lagrangiana com uma certa subvariedade de codimensão 1. A curva ℓ é obtida do fluxo da equação de Jacobi ao longo de γ. No capítulo 1 desta dissertação estudamos a estrutura diferenciável da Granssmanniana Lagrangiana e da subvariedade $\Lambda_1(\mathbb{L}_0)$ que tem codimensão 1. Também calculamos o grupo de homologia relativa da Granssmanniana Lagrangiana a um certo aberto. A partir daí definimos o Índice de Maslov de um curva de lagrangianos e sobre certas condições podemos fazer seu cálculo direto. No capítulo 2 desta dissertação definimos o Índice de Maslov de uma geodésica Semi-Riemanniana e mostramos um resultado sobre a sua estabilidade.

O artigo The Morse Index Theorem in Semi-Riemnnian Geometry, de Piccione e Tausk [1], tem como objetivo determinar a relação entre o Índice de Maslov de uma geodésica e o índice da Forma Índice I_γ, obtendo assim uma versão geral para o Teorema do Índice de Morse para Geometria Semi-Riemanniana. O objetivo desta dissertação é apresentar e demonstrar os resultado do artigo [1], bem como a construção do Índice de Maslov e de alguns resultados necessários para este teorema.

A demonstração apresentada neste trabalho para o caso clássico é diferente da encontrada em [5]. Apresentamos a demonstração encontrada em [2] corolário 3.7. A ideia é considerar uma curva de formas bilineares $I_{t\gamma}$ obtidas por tomar a restrição do sistema Morse-Sturm ao intervalo $[a,t]$, $t \leq b$, e assim estudar a evolução da função $n_-(I_{t\gamma})$ que é constante por partes e seus saltos ocorrem nos instantes conjugado. As ferramentas abstratas para essa construção estão expostas no capítulo 4 deste trabalho.

Para o caso geral, uma geodésica γ é ponto crítico da ação $E(z) = \int_a^b g(z', z')dt$. A segunda variação desta ação sobre γ, considerando o espaço $\mathcal{H}_\gamma^\mathcal{P}$ dos campos variacionais ao longo de γ que no instante $t = a$ são tangentes a uma subvariedade $\mathcal{P}$ fixada e que no instante $t = b$ são nulas, é $I_{\gamma\mathcal{P}}(V, W) = \int_a^b [g(D_tV, D_tW) + g(\mathcal{R}(\gamma', V)\gamma', W)]dt - \mathcal{S}^\mathcal{P}_{\gamma(a)}(V(a), W(a))$. A tese é que existe uma decomposição $\mathcal{H}_\gamma^\mathcal{P} = \mathcal{K}^\mathcal{D}_{\gamma,\mathcal{P}} \oplus \mathcal{G}^\mathcal{D}_\gamma$, que depende de uma escolha de uma distribuição negativa maximal $\mathcal{D}$ ao longo de γ, tal que $n_-(I_{\gamma\mathcal{P}}|_{\mathcal{K}^\mathcal{D}_{\gamma,\mathcal{P}}}), n_+(I_{\gamma\mathcal{P}}|_{\mathcal{G}^\mathcal{D}_\gamma}) < \infty$ e o

Índice de Maslov da geodésica vale

$$i_{Maslov}(\gamma) = n_{-}(I_{\gamma\,\mathcal{P}}|_{\mathcal{K}^{\mathcal{D}}_{\gamma,\mathcal{P}}}) - n_{+}(I_{\gamma\,\mathcal{P}}|_{\mathcal{G}^{\mathcal{D}}_{\gamma}}) - n_{-}(g|_{T_{\gamma(a)}\mathcal{P}}).$$

Transformamos este problema na variedade para um Sistema de Morse-Sturm no $\mathbb{R}^n$. Para calcular a primeira parcela consideramos uma curvas de restrições de formas bilineares a subespaços fechados obtidas por considerar a restrição dos sistemas Morse-Sturm ao intervalo $[a,t]$. Para calcular a segunda parcela, mostramos que a restrição $-I_{\gamma\,\mathcal{P}}|_{\mathcal{G}^{\mathcal{D}}_{\gamma}}$ coincide, atravéz de isomorfismo entre espaços de Hilbert, com a forma índice de um Sistemas Simplético Associado na qual podemos aplicar o caso clássico. Para tal, no capítulo 3 estudamos alguns aspectos dos Sistemas Simpléticos.

Os pré-requisitos para a leitura desta dissertação são: Geometria Semi-Riemannia-na (tensor curvatura e campos de Jacobi i, ver [7] e [22]), conceitos básicos em Análise Funcional (ver [14]), Ação de Grupo de Lie (conhecer a ação dos grupos lineares clássicos, ver [20]), Grupo Fundamental (conhecer o grupo fundamental dos grupos lineares clássicos, ver [17]) e Homologia Relativa (ver [18]).

2 A GRASSMANNIANA LAGRANGIANA E O ÍNDICE DE MASLOV

2.1 A Grassmanniana Lagrangiana

Nesta seção definimos a Grassmanniana Lagrangiana Λ e tratamos de sua estrutura diferenciável, deixando explícito as expressões de algumas aplicações pertinentes. Também estudamos a subvariedade $\Lambda_1(\mathbb{L}_0)$ de codimensão 1 que é de suma importância para a teoria do Índice de Maslov.

A principal referência para este capítulo é [4] seções 3 e 4.

Seja $\mathbb{V}$ um $\mathbb{R}$-espaço vetorial de dimensão $2n$. Uma forma simplética ω em $\mathbb{V}$ é uma forma bilinear, anti-simétrica e não-degenerada (se $dim(\mathbb{V})$ for impar, então uma forma bilinear anti-simétrica é necessariamente degenerada). Um subespaço $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ é dito ser isotrópico se $\omega|_{\mathbb{W}\times\mathbb{W}} = 0$. Uma subespaço $\mathbb{L} \subset \mathbb{V}$ é dito ser Lagrangiano se for isotrópico maximal. É bem conhecido na literatura que se $\mathbb{L}$ for Lagrangiano então $dim(\mathbb{L}) = n$ e existe outro Lagrangiano $\mathbb{L}'$ tal que $\mathbb{L} \oplus \mathbb{L}' = \mathbb{V}$(ou equivalentemente $\mathbb{L} \cap \mathbb{L}' = \{0\}$). Mais ainda, dados dois Lagrangiano $\mathbb{L}$, $\mathbb{L}'$ tais que $\mathbb{L} \cap \mathbb{L}' = \{0\}$, então existe base $\{e_1, \ldots, e_{2n}\}$ de $\mathbb{V}$ tal que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é base para $\mathbb{L}$, $\{e_{n+1}, \ldots, e_{2n}\}$ é base para $\mathbb{L}'$ e $\omega(e_i, e_{n+j}) = \delta_i^j$. Tal base é dita base simplética. Denotaremos por $\Lambda(\mathbb{V}, \omega)$ (ou apenas Λ se não houver ambiguidade) a coleção de todos os subespaços lagrangianos de $\mathbb{V}$ e chamaremos essa coleção de a Grassmanniana Lagrangiana de $\mathbb{V}$.

Sejam $(\mathbb{V}_1, \omega_1)$ e $(\mathbb{V}_2, \omega_2)$ espaços vetoriais simpléticos (espaços vetoriais munidos de uma forma simplética) de mesma dimensão $2n$. Uma transformação linear $T\colon \mathbb{V}_1 \to \mathbb{V}_2$ é um simplectomorfismo se vale, para todos $u, v \in \mathbb{V}_1$,

$$\omega_2(Tu, Tv) = \omega_1(u, v)$$

Note que um simplectomorfismo é necessariamente um isomorfismo, uma vez que a injetividade fica evidente na igualdade anterior. O conjunto de todos os simplectomorfismos, denotado por $Sp(\mathbb{V}, \omega)$ (ou só $Sp(\mathbb{V})$ se não houver ambiguidade), é o subgrupo de Lie do $Gl(\mathbb{V})$ chamado de grupo simplético de $\mathbb{V}$. Note também que se $\mathbb{L}$ é Lagrangiano, então para um simplectomorfismo T temos que $T(\mathbb{L})$ é também Lagrangiano. Assim temos uma ação de grupo Lie

$$\begin{array}{ccc} Sp(\mathbb{V}) \times \Lambda & \longrightarrow & \Lambda \\ (T, \mathbb{L}) & \longmapsto & T(\mathbb{L}) \end{array}.$$

Agora iremos dar à Λ uma estrutura de variedade diferenciável.

Denotaremos por $B(\mathbb{V};\mathbb{R})$ o espaço vetorial das formas bilineares a valores reais, e por $\mathcal{L}(\mathbb{V},\mathbb{W})$ o espaço vetorial das transformações lineares $\mathbb{V}\to\mathbb{W}$. Temos uma natural identificação $B(\mathbb{V};\mathbb{R})\cong\mathcal{L}(\mathbb{V},\mathbb{V}^*)$, que usaremos recorrentemente, dada por

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{L}(\mathbb{V},\mathbb{V}^*) & \to & B(\mathbb{V},\mathbb{R}) & & \\ T & \mapsto & b\colon \mathbb{V}\times\mathbb{V} & \to & \mathbb{R} \\ & & (u,v) & \mapsto & T(u)(v). \end{array}$$

Também denotaremos por $B_{sym}(\mathbb{V};\mathbb{R})$ o espaço das formas bilineares simétricas de $\mathbb{V}$ a valores reais.

Definição 2.1.1. *Fixado uma decomposição lagrangiana $\mathbb{V}=\mathbb{L}_0\oplus\mathbb{L}_1$, para cada $\mathbb{W}\subset\mathbb{V}$, com $\dim(\mathbb{W})=n$ e $\mathbb{W}\cap\mathbb{L}_1=\{0\}$, nos definimos*

$$\phi_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1}(\mathbb{W})=\mathcal{D}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1}\circ T\in B(\mathbb{L}_0;\mathbb{R}),$$

onde $T\colon\mathbb{L}_0\to\mathbb{L}_1$ é a única aplicação linear tal que $Graf_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1}(T):=\{u+T(u)\in\mathbb{L}_0\oplus\mathbb{L}_1|u\in\mathbb{L}_0\}=\mathbb{W}$ e $\mathcal{D}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1}:\mathbb{L}_1\to\mathbb{L}_0^*$ é o isomorfismo dado por

$$\mathcal{D}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1}(v)=\omega(v,\cdot)|_{\mathbb{L}_0},\quad \forall v\in\mathbb{L}_1.$$

Observação 2.1.1. $\mathcal{D}_{\mathbb{L}_1,\mathbb{L}_0}=-(\mathcal{D}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1})^*$. *De fato, dados $u\in\mathbb{L}_0$ e $v\in\mathbb{L}_1$,*

$$\mathcal{D}_{\mathbb{L}_1,\mathbb{L}_0}(u)(v)=[\omega(u,\cdot)|_{\mathbb{L}_1}](v)=\omega(u,v).$$

Por outro lado,

$$(\mathcal{D}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1})^*\colon(\mathbb{L}_0^*)^*=\mathbb{L}_0\to\mathbb{L}_1^*$$
$$\begin{array}{rccc} (\mathcal{D}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1})^*(u)\colon & \mathbb{L}_1 & \to & \mathbb{R} \\ & v & \mapsto & \mathcal{D}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1}(v)(u)=\omega(v,u) \end{array}$$

Note que $\mathbb{W}$ (como na Definição 2.1.1) é lagrangiano se, e somente se, $\phi_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1}(\mathbb{W})$ é uma forma bilinear simétrica. De fato,

$$\begin{aligned} \mathbb{W}=\{u+T(u)|u\in\mathbb{L}_0\}\text{ é lagrangiano} &\iff \\ \omega(x+T(x),y+T(y))=0,\quad\forall x,y\in\mathbb{L}_0 &\iff \\ \omega(x,T(y))+\omega(y,T(x))=0,\quad\forall x,y\in\mathbb{L}_0 &\iff \\ \omega(T(x),y)=\omega(T(y),x),\quad\forall x,y\in\mathbb{L}_0. & \end{aligned}$$

Portanto, para cada par de lagrangiano $\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1\in\Lambda$ tais que $\mathbb{L}_0\cap\mathbb{L}_1=\{0\}$, temos uma bijeção

$$\phi_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1}\colon\Lambda_0(\mathbb{L}_1):=\{\mathbb{L}\in\Lambda|\,\mathbb{L}\cap\mathbb{L}_1=\{0\}\}\longrightarrow B_{sym}(\mathbb{L}_0;\mathbb{R}).$$

Teorema 2.1.1. *A coleção* $\{(\phi_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1}, \Lambda_0(\mathbb{L}_1))\}$ *é uma atlas analítico para* Λ*. Em particular* $dim(\Lambda) = \frac{n}{2}(n+1)$*. Além disso, o isomorfismo* $T_{\mathbb{L}_0}\Lambda \cong B_{sym}(\mathbb{L}_0;\mathbb{R})$ *é canônico no sentido de que o isomorfismo dado pela diferencial de* $\phi_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1}$ *não depende do complemento* $\mathbb{L}_1$*, e é natural no sentido de que, dado um simplectomorfismo* ψ *de* $(\mathbb{V},\omega)$*, temos o seguinte diagrama comutativo:*

$$\begin{tikzcd} T_{\mathbb{L}_0}\Lambda \arrow[r, "d\widehat{\psi}_{\mathbb{L}_0}"] \arrow[d] & T_{\psi(\mathbb{L}_0)}\Lambda \arrow[d] \\ B_{sym}(\mathbb{L}_0;\mathbb{R}) \arrow[r, "\psi_*"] & B_{sym}(\psi(\mathbb{L}_0);\mathbb{R}) \end{tikzcd},$$

onde as setas verticais são os isomorfismos canônicos, $\widehat{\psi}\colon \Lambda \to \Lambda$ *é o difeomorfismo dado por* $\mathbb{L} \mapsto \psi(\mathbb{L})$*, e* ψ_* *é o operador de push-forward dado por* $B \mapsto B(\psi^{-1}(\cdot), \psi^{-1}(\cdot))$*.*

Demonstração: A demonstração de que $\{(\phi_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1}, \Lambda_0(\mathbb{L}_1))\}$ é um atlas para Λ é igual a demonstração de que a Grassmanniana $G_n(\mathbb{V}) = \{\mathbb{W} \subset \mathbb{V} |\, dim(\mathbb{W}) = n\}$ é variedade diferenciável (ver [19]).

Mostraremos que a diferencial $d\phi_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1}(\mathbb{L}_0)$ não depende da escolha do complemento $\mathbb{L}_1$. Sejam $\mathbb{L}_1$ e $\mathbb{L}_2$ lagrangianos transversais a $\mathbb{L}_0$, isto é, $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_0 = \{0\} = \mathbb{L}_2 \cap \mathbb{L}_0$. Temos que

$$\phi_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1}(\mathbb{L}_0) = 0,\ \ \phi_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_2}(\mathbb{L}_0) = 0.$$

Portanto basta mostrar que a diferencial do mapa de transição de $\phi_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1}$ para $\phi_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_2}$ na origem é a aplicação identidade de $B_{sym}(\mathbb{L}_0;\mathbb{R})$. Sejam $\pi\colon \mathbb{L}_0 \oplus \mathbb{L}_1 \to \mathbb{L}_0$ e $\rho\colon \mathbb{L}_0 \oplus \mathbb{L}_2 \to \mathbb{L}_2$ projeções. Se $B \in B_{sym}(\mathbb{L}_0,\mathbb{R})$, com

$$B = \mathcal{D}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1} \circ T, \quad Graf_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1}(T) = \widetilde{\mathbb{L}} \in \Lambda_0(\mathbb{L}_0),$$

tome

$$\widetilde{B} := \mathcal{D}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_2} \circ \overbrace{\rho \circ (id_{\mathbb{L}_0} + T) \circ (\pi \circ (id_{\mathbb{L}_0} + T))^{-1}}^{=:S} = \mathcal{D}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_2} \circ S \in B_{sym}\mathbb{L}_0, \mathbb{R}.$$

Note que satisfaz

$$Graf_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1}(T) = Graf_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_2}(S).$$

Como $\rho \circ id_{\mathbb{L}_0} = 0$ podemos escrever

$$\widetilde{B} = \mathcal{D}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_2} \circ \rho \circ T \circ (\pi \circ (id_{\mathbb{L}_0} + T))^{-1} = \mathcal{D}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_2} \circ S.$$

Portanto o mapa de transição é

$$\begin{array}{rccc} \eta\colon & B_{sym}(\mathbb{L}_0;\mathbb{R}) & \longrightarrow & B_{sym}(\mathbb{L}_0;\mathbb{R}) \\ & B & \longmapsto & \widetilde{B}. \end{array}$$

Daí,

$$\begin{aligned} d\eta(0)[B] = \frac{d}{dt}|_{t=0}\eta(tB) &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}(\mathcal{D}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_2} \circ \rho \circ (tT) \circ (\pi \circ (id_{\mathbb{L}_0} + tT))^{-1}) \\ &= \lim_{t\to\infty} \mathcal{D}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_2} \circ \rho \circ (T) \circ (\pi \circ (id_{\mathbb{L}_0} + tT))^{-1} \\ &= \mathcal{D}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_2} \circ \rho \circ (T) \circ (\pi \circ (id_{\mathbb{L}_0}))^{-1} \\ &= \mathcal{D}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_2} \circ \rho \circ (T) = \mathcal{D}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1} \circ (T) \\ &= B. \end{aligned}$$

Para ver que $\mathcal{D}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_2} \circ \rho|_{\mathbb{L}_1} = \mathcal{D}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1}$, observe que dado $x \in \mathbb{L}_1$ e escrevendo $x = x_0 + x_2 \in \mathbb{L}_0 \oplus \mathbb{L}_2$, para todo $y \in \mathbb{L}_0$, vale

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_2} \circ \rho(x))(y) = \mathcal{D}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_2}(x_2)(y) = \omega(x_2, y) &= \\ \omega(x_0 + x_2, y) = \omega(x, y) &= \mathcal{D}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1}(x)(y). \end{aligned}$$

Resta verificar a comutatividade do diagrama do enunciado. Dado $\mathbb{L} \in \Lambda_0(\mathbb{L}_1)$, se $Graf_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1}(T) = \mathbb{L}$, então $S := \psi \circ T \circ \psi^{-1} \colon \psi(\mathbb{L}_0) \to \psi(\mathbb{L}_1)$ satisfaz

$$Graf_{\psi(\mathbb{L}_0)\oplus\psi(\mathbb{L}_1)}(S) = \psi(\mathbb{L}).$$

De fato, $\forall x \in \mathbb{L}_0$,

$$\psi(x) + S(\psi(x)) = \psi(x) + \psi(T(x)) = \psi(x + T(x)).$$

Então:

- $\phi_{\psi(\mathbb{L}_0),\psi(\mathbb{L}_1)}(\widehat{\psi}(\mathbb{L})) = \phi_{\psi(\mathbb{L}_0),\psi(\mathbb{L}_1)}(\psi(\mathbb{L})) = \mathcal{D}_{\psi(\mathbb{L}_0),\psi(\mathbb{L}_1)} \circ S = \omega(S(\cdot), \cdot)$.
- $\psi_*(\phi_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1}(\mathbb{L})) = \psi_*(\omega(T(\cdot), \cdot)) = \omega(T \circ \psi^{-1}(\cdot), \psi^{-1}(\cdot))$
  $= \omega(\psi \circ T \circ \psi^{-1}(\cdot), \psi \circ \psi^{-1}(\cdot)) = \omega(S(\cdot), \cdot)$.

Isto nos dá o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda \supset \Lambda_0(\mathbb{L}_1) & \xrightarrow{\widehat{\psi}} & \Lambda_0(\psi(\mathbb{L}_1)) \subset \Lambda \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \phi_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \phi_{\psi(\mathbb{L}_0),\psi(\mathbb{L}_1)}} \\ B_{sym}(\mathbb{L}_0;\mathbb{R}) & \xrightarrow{\psi_*} & B_{sym}(\psi(\mathbb{L}_0);\mathbb{R}) \end{array} .$$

Passando o diagrama anterior para o diferencial em $\mathbb{L}_0$ (lembre que ψ_* é linear) concluímos o resultado.

Q.E.D.

O fato de que a ação

$$\begin{array}{ccc} Sp(\mathbb{R}^{2n},\omega_0)\times\Lambda(\mathbb{R}^{2n},\omega_0) & \longrightarrow & \Lambda(\mathbb{R}^{2n},\omega_0) \\ (\psi,\mathbb{L}) & \longmapsto & \psi(\mathbb{L}) \end{array}$$

é suave segue da seguinte proposição:

Proposição 2.1.1. *Fixe* $\mathbb{L}_0 \in \Lambda$ *e defina o mapa*

$$\begin{array}{rcl} \kappa_{\mathbb{L}_0}\colon Sp(\mathbb{V},\omega) & \longrightarrow & \Lambda \\ \psi & \longmapsto & \psi(\mathbb{L}_0) \end{array}.$$

A diferencial $d\kappa_{\mathbb{L}_0}(id)$ *de* $\kappa_{\mathbb{L}_0}$ *no elemento neutro de* $Sp(\mathbb{V},\omega)$ *mapeia cada* $H \in sp(\mathbb{V},\omega)$ *na forma bilinear simétrica* $d\kappa_{\mathbb{L}_0}(id)[H] \in B_{sym}(\mathbb{L}_0;\mathbb{R})$ *dada pela restrição de* $\omega(H(\cdot),\cdot)$ *ao subespaço* $\mathbb{L}_0$.

Lembre que a Álgebra de Lie de $Sp(\mathbb{V},\omega)$ é $sp(\mathbb{V},\omega) = \{H \in \mathcal{L}(\mathbb{V})|\,\omega(H(\cdot),\cdot) + \omega(\cdot,H(\cdot)) = 0\}$.

Demonstração: Escolha qualquer complemento lagrangiano $\mathbb{L}_1$ para $\mathbb{L}_0$. Sejam $\pi_0\colon \mathbb{L}_0 \oplus \mathbb{L}_1 \to \mathbb{L}_0$, $\pi_1\colon \mathbb{L}_0 \oplus \mathbb{L}_1 \to \mathbb{L}_1$ as projeções. Em termos da carta $\phi_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1}$, o mapa $\kappa_{\mathbb{L}_0}$ é escrito como

$$\begin{array}{rcl} Sp(\mathbb{V},\omega) \ni \psi & \longmapsto & \phi_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1} \circ \kappa_{\mathbb{L}_0}(\psi) = \\ & & \mathcal{D}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1} \circ \psi_{10} \circ \psi_{00}^{-1} \in B_{sym}(\mathbb{L}_0;\mathbb{R}), \end{array}$$

onde $\psi_{00} = \pi_0 \circ (\psi|_{\mathbb{L}_0})$ e $\psi_{10} = \pi_1 \circ (\psi|_{\mathbb{L}_0})$, e ψ é tomado próximo de $id \in Sp(\mathbb{V},\omega)$ o suficiente para que ψ_{00} seja inversível. Agora fixe $H \in sp(\mathbb{V},\omega)$. Daí, usando que $exp(tH) = id + tH + \frac{t^2}{2}H^2 + \ldots$, temos o seguinte limite

$$\begin{array}{rcl} \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{t}[\mathcal{D}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1} \circ \pi_1 \circ ((id+tH)|_{\mathbb{L}_0}) \circ (\pi_0 \circ ((id+tH)|_{\mathbb{L}_0})^{-1}] & = & \\ \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{t}[\mathcal{D}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1} \circ \overbrace{\pi_1 \circ (id|_{\mathbb{L}_0})}^{=0} \circ (\pi_0 \circ ((id+tH)|_{\mathbb{L}_0})^{-1} & + & \\ t\mathcal{D}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1} \circ \pi_1 \circ (H|_{\mathbb{L}_0}) \circ (\pi_0 \circ ((id+tH)|_{\mathbb{L}_0})^{-1}] & = & \\ \mathcal{D}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1} \circ \pi_1 \circ (H|_{\mathbb{L}_0}) = \omega(\pi_1 \circ H(\cdot),\cdot)|_{\mathbb{L}_0\times\mathbb{L}_0} & = & \omega(H(\cdot),\cdot)|_{\mathbb{L}_0\times\mathbb{L}_0} \end{array}$$

Q.E.D.

Observação 2.1.2. *Para o estudo do Índice de Maslov de uma geodésica será necessário calcular a forma bilinear* $d\kappa_{\mathbb{L}_0}(\psi)[H]$, *para um* $\psi \in Sp(\mathbb{V},\omega)$ *qualquer. Como* $dR_\psi(id)\colon sp(\mathbb{V},\omega) \to$

$T_\psi Sp(\mathbb{V},\omega)$ é um isomorfismo, onde R_ψ é o difeomorfismo de $Sp(\mathbb{V},\omega)$ dado pela multiplicação a direita por ψ, então $H = dR_\psi(id)[\widetilde{H}]$, para algum $\widetilde{H} \in sp(\mathbb{V},\omega)$ e daí temos que

$$\begin{aligned} d\kappa_{\mathbb{L}_0}(\psi)[dR_\psi(id)[\widetilde{H}]] = d(\kappa_{\mathbb{L}_0}\circ R_\psi)(id)[\widetilde{H}] &= \\ d\kappa_{\psi(\mathbb{L}_0)}(id)[\widetilde{H}] &= \omega(\widetilde{H}(\cdot),\cdot)|_{\psi(\mathbb{L}_0)}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Proposição 2.1.2. *Λ é difeomorfo a $U(n)/O(n)$. Em particular, Λ é compacto e conexo.*

Aqui $U(n)$ denota o grupo unitário de $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^n + i\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$ e $O(n)$ denota o grupo ortogonal de $\mathbb{R}^n$, como o produto Hermitiano $(\cdot,\cdot)$ e o produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ canônicos, respectivamente.

Demonstração: Escolhendo uma base simplética, podemos reduzir para o caso $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{2n}$, $\omega = \omega_0 := \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$, onde I é a matriz identidade $n\times n$. Como $(\cdot,\cdot) = \langle\cdot,\cdot\rangle + i\omega_0$, temos que se $T\colon \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ é unitária, então também é simplectomorfismo por preservar a parte imaginária do produto hermitiano. Isto é, $U(n) \subset Sp(\mathbb{R}^{2n},\omega_0)$.

Mostraremos agora que $U(n)$ age transitivamente em Λ. Fixe $\mathbb{L},\mathbb{L}' \in \Lambda$. Escolha bases β,β' de $\mathbb{L},\mathbb{L}'$, respectivamente, de modo que sejam $\langle\cdot,\cdot\rangle$-ortonormais. Desde que ω_0 é nula em $\mathbb{L}$ e $\mathbb{L}'$ e que ω_0 é parte imaginária de $(\cdot,\cdot)$, segue que β e β' são bases $(\cdot,\cdot)$-ortonormais de $\mathbb{C}^n$. Daí existe transformação unitária $T \in U(n)$ tal que $T(\beta) = \beta'$, isto é, $T(\mathbb{L}) = T(\mathbb{L}')$. Como o grupo de isotropia de $\mathbb{R}^n \oplus \{0\} \in \Lambda$ é $O(n) \equiv \{T\colon \mathbb{R}^n\oplus\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\oplus\mathbb{R}^n |\, T|_{\mathbb{R}^n\oplus\{0\}} \in O(\mathbb{R}^n\oplus\{0\})$ e $T|_{\{0\}\oplus\mathbb{R}^n} = id|_{\{0\}\oplus\mathbb{R}^n}\} \subset U(n)$, temos o resultado.

Q.E.D.

Definição 2.1.2. *Sejam $\mathbb{L}_0$ e $k = 1,2,\ldots,n$ fixados. Definimos*

- $\Lambda_k(\mathbb{L}_0) = \{\mathbb{L}\in\Lambda |\, dim(\mathbb{L}_0\cap\mathbb{L}) = k\}$;
- $\Lambda_{\leq k} = \bigcup_{i=0}^{k} \Lambda_k(\mathbb{L}_0)$;
- $\Lambda_{\geq k} = \bigcup_{i=k}^{n} \Lambda_k(\mathbb{L}_0)$.

Dado $\mathbb{L}_0 \in \Lambda$, denotaremos por $Sp(\mathbb{V},\omega,\mathbb{L}_0)$ o subgrupo de $Sp(\mathbb{V},\omega)$ formado pelos simplectomorfismos que preservam $\mathbb{L}_0$, isto é,

$$Sp(\mathbb{V},\omega,\mathbb{L}_0) = \{\psi \in Sp(\mathbb{V},\omega) |\, \psi(\mathbb{L}_0) = \mathbb{L}_0\}.$$

Denotaremos por $Sp_+(\mathbb{V},\omega,\mathbb{L}_0)$ o subgrupo de $Sp(\mathbb{V},\omega,\mathbb{L}_0)$ que preserva a orientação de $\mathbb{L}_0$. A álgebra de Lie $sp(\mathbb{V},\omega,\mathbb{L}_0)$ de ambos $Sp(\mathbb{V},\omega,\mathbb{L}_0)$ e $Sp_+(\mathbb{V},\omega,\mathbb{L}_0)$ é a subálgebra de $sp(\mathbb{V},\omega)$ formado pelos H tais que $H(\mathbb{L}_0) \subset \mathbb{L}_0$.

Sejam $\psi \in Sp(\mathbb{V}, \omega, \mathbb{L}_0)$ e $\mathbb{L} \in \Lambda_k(\mathbb{L}_0)$. Como ψ é isomorfismo temos que

- $\mathbb{L}_0 \cap \psi(\mathbb{L}) = \psi(\mathbb{L}_0) \cap \psi(\mathbb{L}) = \psi(\mathbb{L}_0 \cap \mathbb{L})$;
- $dim(\psi(\mathbb{L}_0 \cap \mathbb{L})\ ) = dim(\mathbb{L}_0 \cap \mathbb{L}) = k$.

Portanto $Sp(\mathbb{V}, \omega, \mathbb{L}_0)$ age em $\Lambda_k(\mathbb{L}_0)$.

Proposição 2.1.3. *$Sp_+(\mathbb{V}, \omega, \mathbb{L}_0)$ age transitivamente em $\Lambda_k(\mathbb{L}_0)$, $\forall k = 0, 1, \ldots n$.*

Demonstração: Por escolher uma base simplética de $(\mathbb{V}, \omega)$, podemos reduzir ao caso $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{2n}$, $\omega = \omega_0$ e $\mathbb{L}_0 = \mathbb{R}^n \oplus \{0\}$. Seja $\{e_1, \ldots, e_{2n}\}$ base canônica do $\mathbb{R}^{2n}$. Fixe $\mathbb{L} \in \Lambda_k(\mathbb{L}_0)$ e seja $\psi_0 \in SO(n)$ (grupo especial ortogonal do $\mathbb{R}^n$) tal que $\psi_0(\mathbb{L} \cap \mathbb{L}_0) = \mathbb{R}^k \oplus \{0\}$. Agora seja ψ a extensão complexa de ψ_0 à $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$. Temos que $\psi \in Sp(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0, \mathbb{L}_0)$, pois $\psi(\mathbb{L}_0) = \mathbb{L}_0$ por construção, e para ver que ψ preserva a forma simplética ω_0 basta fazer um cálculo direto: dados $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$, umas vez que $\psi \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_0(x) \\ \psi_0(y) \end{bmatrix}$, temos

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \psi_0(x) \\ \psi(y) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_0(x) \\ \psi(y) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\psi_0(y) \\ \psi(x) \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \psi_0(x) \\ \psi(y) \end{bmatrix} \\ = -\langle \psi_0(y), \psi_0(x') \rangle + \langle \psi_0(x), \psi_0(y') \rangle &= -\langle y, x' \rangle + \langle x, y' \rangle \\ &= \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Também, $\psi(\mathbb{L}) \cap \mathbb{L}_0 = \mathbb{R}^k \oplus \{0\}$.

Agora seja $\mathbb{L}_1 = span\{e_1, \ldots, e_k, e_{n+k+1}, \ldots, e_{2n}\}$. Note que $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_0 = \mathbb{R}^k \oplus \{0\}$, isto é, $\mathbb{L}_1 \in \Lambda_k(\mathbb{L}_0)$. Iremos mostrar que se $\mathbb{L}$ é um lagrangiano tal que $\mathbb{L} \cap \mathbb{L}_0 = \mathbb{R}^k \oplus \{0\}$, então $\exists \psi \in Sp_+(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0, \mathbb{L}_0)$ tal que $\psi(\mathbb{L}) = \mathbb{L}_1$. Observe que isto concluirá a demonstração. Sejam

$$\begin{aligned} V_1 &= span\{e_1, \ldots, e_k, e_{n+1}, \ldots, e_{n+k}\}, \\ V_2 &= span\{e_{k+1}, \ldots, e_n, e_{n+k+1}, \ldots e_{2n}\}, \\ W &= span\{e_1, \ldots, e_n, e_{n+k+1}, \ldots, e_{2n}\}. \end{aligned}$$

Observe que $W = (\mathbb{R}^k \oplus \{0\})^{\perp_{\omega_0}}$ e $\mathbb{R}^{2n} = V_1 \oplus V_2$. Além disso,$(V_1, \omega_0|_{V_1 \times V_1})$ e $(V_2, \omega_0|_{V_2 \times V_2})$ são espaços simpléticos e $V_1 = (V_2)^{\perp_{\omega_0}}$. Como $\mathbb{L}$ é lagrangiano e $\mathbb{L} \supseteq \mathbb{R}^k \oplus \{0\}$, então $\mathbb{L} = \mathbb{L}^{\perp_{\omega_0}} \subset (\mathbb{R}^k \oplus \{0\})^{\perp_{\omega_0}} = W$. Seja $\pi \colon W \to V_2$ a restrição da projeção $V_1 \oplus V_2 \to V_2$ ao subespaço W. Então, dados $x, y \in W$, temos que

$$\begin{aligned} \omega_0(x, y) = \omega_0(\pi(x) + (x - \pi(x)), \pi(y) + (y_-\pi(y))) &= \\ \omega_0(\pi(x), \pi(y)) + \omega_0(x - \pi(x), y - \pi(y)) &= \omega(\pi(x), \pi(y)), \end{aligned}$$

pois $x - \pi(x), y - \pi(y) \in \mathbb{R}^k \oplus \{0\}$ e este último é subespaço lagrangiano de V_1. Disto segue que $\pi(\mathbb{L})$ é subespaço lagrangiano de V_2. Note que, em $V_2 = \mathbb{R}^{n-k} \oplus \mathbb{R}^{n-k}$, vale que $\pi(\mathbb{L}) \cap (\mathbb{R}^{n-k} \oplus \{0\}) = \{0\}$, pois dado $x \in \mathbb{L} \subset W$ e escrevendo

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i + \sum_{j=n+k+1}^{2n} \lambda_j e_j,$$

temos

$$\pi(x) = \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i + \sum_{j=n+k+1}^{2n} \lambda_j e_j,$$

e como $\mathbb{L} \cap (\mathbb{R}^n \oplus \{0\}) = \mathbb{R}^k \oplus \{0\}$ temos que $\lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_n = 0$. Portanto podemos escolher um simplectomorfismo $\phi \colon V_2 \to V_2$ tal que é a identidade em $\mathbb{R}^{n-k} \oplus \{0\}$ e mapeia $\pi(\mathbb{L})$ em $\{0\} \oplus \mathbb{R}^{n-k}$. Seja $\psi \colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ dada por

$$\psi|_{V_1} = id_{V_1}, \qquad \psi|_{V_2} = \phi.$$

Note que $\psi \in Sp_+(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0, \mathbb{L}_0)$, uma vez que $\psi|_{\mathbb{L}_0} = id_{\mathbb{L}_0}$. Além disso, $\psi(\mathbb{L}) = \mathbb{L}_1$.

Q.E.D.

O corolário a seguir será usado em grande parte das demonstrações.

Corolário 2.1.1. *Dados quaisquer dois lagrangianos $\mathbb{L}_0, \mathbb{L}_1 \in \Lambda$, existe outro lagrangiano $\mathbb{L}$ que é transversal a ambos $\mathbb{L}_0$ e $\mathbb{L}_1$. Em particular, o domínio da carta coordenada $\phi_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}}$ contém ambos $\mathbb{L}_0$ e $\mathbb{L}_1$.*

Demonstração: Por escolha de base simplética, podemos reduzir ao caso $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{2n}$, $\omega = \omega_0$ e $\mathbb{L}_0 = \mathbb{R}^n \oplus \{0\}$. Seja $\{e_1, \ldots, e_{2n}\}$ base canônica e seja $\mathbb{L}_2 = span\{e_1, \ldots, e_k, e_{n+k+1}, \ldots, e_{2n}\}$, onde $k = dim(\mathbb{L}_0 \cap \mathbb{L}_1)$. Desde que $\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2 \in \Lambda_k(\mathbb{L}_0)$, a proposição anterior nos dá um simplectomorfismo ψ tal que $\psi(\mathbb{L}_0) = \mathbb{L}_0$ e $\psi(\mathbb{L}_2) = \mathbb{L}_1$. Note que o lagrangiano $\Delta = \{(v, v) \in \mathbb{R}^{2n} | \, v \in \mathbb{R}^n\}$ é transversal a ambos $\mathbb{L}_0$ e $\mathbb{L}_2$. Portanto, basta tomar $\mathbb{L} = \psi(\Delta)$.

Q.E.D.

Lema 2.1.1. $\Lambda_{\leq k}(\mathbb{L}_0) \subset \Lambda$ *é aberto.*

Demonstração: Fixe $\mathbb{L} \in \Lambda_{\leq k}(\mathbb{L}_0)$ e escolha $\mathbb{L}_1$ transversal a ambos $\mathbb{L}_0$ e $\mathbb{L}$. Portanto $\mathbb{L}$ pertence ao domínio $\Lambda_0(\mathbb{L}_1)$ da carta coordenada $\phi_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1}$. Daí, $\widetilde{\mathbb{L}} := Graf_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1}(T) \in \Lambda_{\leq k}(\mathbb{L}_0) \iff dim(ker(T)) \leq k$. Fixado bases de $\mathbb{L}_0$ e $\mathbb{L}_1$, podemos pensar $T \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Afirmação: $\{T \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n | \, dim(ker(T)) \leq k\} \subset M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é aberto.

Demonstração da Afirmação: $dim(ker(T)) \leq k \iff dim(Im(T)) \geq n-k \iff$ existe submatriz T' de ordem $(n-k) \times (n-k)$ tal que $det(T') \neq 0$. Para cada par de subconjuntos $\alpha, \beta \subset \{1, \ldots, n\}$, com k elementos cada um, temos uma função contínua

$$\begin{array}{rccc} \eta_{\alpha,\beta}\colon & M_{n\times n}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & T & \longmapsto & det(T_{\alpha,\beta}) \end{array}$$

onde a matriz $T_{\alpha,\beta}$ é a matriz obtida de T por excluir as linhas indicadas por α e as colunas indicadas por β. Portanto

$$\{T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n |\, dim(ker(T)) \leq k\} = \bigcup_{\alpha,\beta} \eta_{\alpha,\beta}^{-1}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$$

é um conjunto aberto.

Q.E.D.

Portanto $\{T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n |\, dim(ker(T)) \leq k\} \cap B_{sym}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ é um aberto relativo a $B_{sym}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$.

Q.E.D.

Corolário 2.1.2. $\Lambda_{\geq k}(\mathbb{L}_0)$ *é fechado.*

Demonstração: Uma vez que $\Lambda_{\geq k}(\mathbb{L}_0) = \Lambda\backslash\Lambda_{\leq k-1}(\mathbb{L}_0)$.

Q.E.D.

Proposição 2.1.4. *Para cada $k = 0, \ldots, n$ e cada $\mathbb{L}_0 \in \Lambda$, $\Lambda_k(\mathbb{L}_0)$ é uma subvariedade conexa e analítica de Λ de codimensão $\frac{k}{2}(k+1)$. Para cada $\mathbb{L} \in \Lambda_k(\mathbb{L}_0)$, o espaço tangente $T_{\mathbb{L}}\Lambda_k(\mathbb{L}_0) \subset B_{sym}(\mathbb{L};\mathbb{R})$ é formado pelas formas bilineares simétricas que se anulam em $\mathbb{L}\cap\mathbb{L}_0$.*

A subvariedade $\Lambda_1(\mathbb{L}_0)$, que tem codimensão 1, tem uma orientação transversal. De fato, para $\mathbb{L} \in \Lambda_1(\mathbb{L}_0)$ o vetor $B \in B_{sym}(\mathbb{L};\mathbb{R}) \cong T_{\mathbb{L}}\Lambda$ é positivo se B for positivo definido no subespaço unidimensional $\mathbb{L}\cap\mathbb{L}_0$. Mais ainda, a orientação transversal de $\Lambda_1(\mathbb{L}_0)$ em Λ é natural, no sentido de que, dado $\psi \in Sp(\mathbb{V},\omega,\mathbb{L}_0)$, o difeomorfismo $\mathbb{L} \mapsto \psi(\mathbb{L})$ de Λ preserva a orientação.

Demonstração: Da proposição anterior temos que $\Lambda_k(\mathbb{L}_0) = Sp_+(\mathbb{V},\omega,\mathbb{L}_0)\cdot\mathbb{L}$, onde $\mathbb{L} \in \Lambda_k(\mathbb{L}_0)$ é qualquer, porém fixado. Por [20] teorema 2.9.7, uma orbita de uma ação de um grupo de Lie é subvariedade mergulhada se e somente se é localmente fechada. Como

$\Lambda_k(\mathbb{L}_0) = \Lambda_{\leq k}(\mathbb{L}_0) \cap \Lambda_{\geq k}(\mathbb{L}_0)$, $\Lambda_{\leq k}(\mathbb{L}_0)$ é aberto e $\Lambda_{\geq k}(\mathbb{L}_0)$ é fechado, seque que $\Lambda_k(\mathbb{L}_0)$ é subvariedade mergulhada de Λ.

Fixe $\mathbb{L}_1$ qualquer complemento de $\mathbb{L}_0$.

Afirmação: Temos um difeomorfismo

$$\begin{array}{rccc} F\colon & Gl(\mathbb{L}_0) \times B_{sym}(\mathbb{L}_1;\mathbb{R}) & \longrightarrow & Sp(\mathbb{V},\omega,\mathbb{L}_0) \\ & (\alpha,\beta) & \longmapsto & F(\alpha,\beta) = \psi \end{array},$$

onde $\psi|_{\mathbb{L}_0} = \alpha$ e $\psi|_{\mathbb{L}_1} = \alpha \circ (\mathcal{D}_{\mathbb{L}_1,\mathbb{L}_0})^{-1} \circ \beta + (\mathcal{D}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1})^{-1} \circ (\alpha^*)^{-1} \circ \mathcal{D}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1}$.

Demonstração da Afirmação:

1) ψ é um simplectomorfismo: Fixe $v_1 \in \mathbb{L}_1$. A primeira parcela de $\psi|_{\mathbb{L}_1}(v_1)$ é

$$\begin{aligned} \alpha \circ (\mathcal{D}_{\mathbb{L}_1,\mathbb{L}_0})^{-1} \circ \beta(v_1) = \alpha \circ (\mathcal{D}_{\mathbb{L}_1,\mathbb{L}_0})^{-1}(\beta(v_1,\cdot)) &= \\ \alpha \circ (\mathcal{D}_{\mathbb{L}_1,\mathbb{L}_0})^{-1}(\omega(\overline{v}_1,\cdot)|_{\mathbb{L}_1}) &= \alpha(\overline{v}_1) \end{aligned}$$

para um único $\overline{v}_1 \in \mathbb{L}_0$ tal que $\beta(v_1,\cdot) = \omega(\overline{v}_1,\cdot)|_{\mathbb{L}_1}$. A segunda parcela de $\psi|_{\mathbb{L}_1}(v_1)$ é

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1})^{-1} \circ (\alpha^*)^{-1} \circ \mathcal{D}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1}(v_1) = (\mathcal{D}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1})^{-1} \circ (\alpha^*)^{-1}(\omega(v_1,\cdot)|_{\mathbb{L}_0}) &= \\ (\mathcal{D}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1})^{-1}(\omega(v_1,\alpha^{-1}(\cdot))) = (\mathcal{D}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1})^{-1}(\omega(\widetilde{v}_1,\cdot)|_{\mathbb{L}_0} &= \widetilde{v}_1 \end{aligned}$$

para um único $\widetilde{v}_1 \in \mathbb{L}_1$ tal que $\omega(v_1,\alpha^{-1}(\cdot)) = \omega(\widetilde{v}_1,\cdot)|_{\mathbb{L}_0}$. Estamos usando o fato de que ω é não degenerada para representar elementos de $\mathbb{L}_0^*$ utilizando vetores em $\mathbb{L}_1$, uma vez que $\mathbb{V} = \mathbb{L}_0 \oplus \mathbb{L}_1$. Para $v_1, v_2 \in \mathbb{L}_1$,

$$\begin{aligned} \omega(\psi(v_1),\psi(v_2)) = \omega(\alpha(\overline{v}_1) + \widetilde{v}_1, \alpha(\overline{v}_2) + \widetilde{v}_2) &= \omega(\alpha(\overline{v}_1),\widetilde{v}_2) + \omega(\widetilde{v}_1,\alpha(\overline{v}_2)) = \\ -\omega(v_2,\alpha^{-1}(\alpha(\overline{v}_1))) + \omega(v_1,\alpha^{-1}(\alpha(\overline{v}_2))) &= \omega(\overline{v}_1,v_2) - \omega(\overline{v}_2,v_1) = \\ \beta(v_1,v_2) - \beta(v_2,v_1) &= 0. \end{aligned}$$

Para $u \in \mathbb{L}_0$ e $v \in \mathbb{L}_1$,

$$\begin{aligned} \omega(\psi(u),\psi(v)) = \omega(\alpha(u),\alpha(\overline{v}) + \widetilde{v}) &= \\ \omega(\alpha(u),\widetilde{v}) = -\omega(v,\alpha^{-1}(\alpha(u))) = -\omega(v,u) &= \omega(u,v) \end{aligned}$$

Para $u_1, u_2 \in \mathbb{L}_0$, é claro que $\omega(\psi(u_1),\psi(u_2)) = 0$.

2) F é injetivo: Se $F(\alpha,\beta) = F(\alpha',\beta')$, então $\alpha = F(\alpha,\beta)|_{\mathbb{L}_0} = F(\alpha',\beta')|_{\mathbb{L}_0} = \alpha'$. Daí, $F(\alpha,\beta)|_{\mathbb{L}_1} = F(\alpha',\beta')|_{\mathbb{L}_1} \Rightarrow \alpha \circ \mathcal{D}^{-1}_{\mathbb{L}_1,\mathbb{L}_0} \circ \beta = \alpha \circ \mathcal{D}^{-1}_{\mathbb{L}_1,\mathbb{L}_0} \circ \beta' \Rightarrow \beta = \beta'$.

3) F é sobrejetivo: Seja $\psi \in Sp(\mathbb{V},\omega,\mathbb{L}_0)$. Como, em particular,$\psi \in Gl(\mathbb{V})$ e $\psi(\mathbb{L}_0) = \mathbb{L}_0$, segue que $\alpha := \psi|_{\mathbb{L}_0} \in Gl(\mathbb{L}_0)$. Usando a decomposição $\mathbb{V} = \mathbb{L}_0 \oplus \mathbb{L}_1$ obtemos únicas

aplicações $\psi_0\colon \mathbb{L}_1 \to \mathbb{L}_0$ e $\psi_1\colon \mathbb{L}_1 \to \mathbb{L}_1$ tais que $\psi|_{\mathbb{L}_1} = \psi_0 + \psi_1$. Iremos mostrar agora que $\psi_1 = (\mathcal{D}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1})^{-1} \circ (\alpha^*)^{-1} \circ \mathcal{D}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1}$. Para quaisquer $u \in \mathbb{L}_0$ e $v \in \mathbb{L}_1$,

$$\omega(v,u) = \omega(\psi(v),\psi(u)) = \omega(\psi_1(v),\alpha(u)).$$

Podemos escrever

- $\omega(v,u) = \mathcal{D}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1}(v)(u)$
- $\omega(\psi_1(v),\alpha(u)) = \mathcal{D}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1}(\psi_1(v))(\alpha(u)) = \alpha^* \circ \mathcal{D}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1} \circ \psi_1(v)(u)$.

Como u, v são arbitrários, temos que

$$\mathcal{D}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1} = \alpha^* \circ \mathcal{D}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1} \circ \psi_1.$$

Daí podemos tomar $\beta := \mathcal{D}_{\mathbb{L}_1,\mathbb{L}_0} \circ \alpha^{-1} \circ \psi_0$. Iremos mostrar agora que β é simétrica. Para quaisquer $v_1, v_2 \in \mathbb{L}_1$,

$$\begin{aligned}(\mathcal{D}_{\mathbb{L}_1,\mathbb{L}_0} \circ \alpha^{-1} \circ \psi_0(v_1))(v_2) = (\mathcal{D}_{\mathbb{L}_1,\mathbb{L}_0}(\psi|_{\mathbb{L}_0}^{-1}(\psi_0(v_1)))(v_2) &= \\ \omega(\psi^{-1}(\psi_0(v_1)),v_2) = \omega(\psi_0(v_1),\psi(v_2)) &= \omega(\psi_0(v_1),\psi_1(v_2)).\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$0 = \omega(v_1,v_2) = \omega(\psi(v_1),\psi(v_2)) = \omega(\psi_0(v_1),\psi_1(v_2)) + \omega(\psi_1(v_1),\psi_0(v_2)).$$

Portanto, $\omega(\psi_0(v_1),\psi_1(v_2)) = \omega(\psi_0(v_2),\psi_1(v_1))$.

4) A diferenciabilidade de F e F^{-1} são óbvias.

Q.E.D.

Portanto $dim(Sp(\mathbb{V},\omega,\mathbb{L}_0)) = n^2 + \frac{n}{2}(n+1)$. Também $Sp_+(\mathbb{V},\omega,\mathbb{L}_0) = F(Gl_+(\mathbb{L}_0) \times B_{sym}(\mathbb{L}_1;\mathbb{R}))$, que é conexo, e portanto $\Lambda_k(\mathbb{L}_0)$ é conexo.

Cálculo do grupo de Isotropia: Sejam $\{e_1,\dots,e_n\}$ base de $\mathbb{L}_0$ e $\{e_1^*,\dots,e_n^*\}$ base dual para $\mathbb{L}_0^*$. Considere $f_i = \mathcal{D}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1}^{-1}(e_i^*)$, $i = 1,\dots,n$. Note que $\{e_1,\dots,e_n,f_1,\dots,f_n\}$ é base simplética para $\mathbb{V} = \mathbb{L}_0 \oplus \mathbb{L}_1$. Desta forma podemos pensar $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$, $\omega = \omega_0$, $\mathbb{L}_0 = \mathbb{R}^n \oplus \{0\}$ e $\mathbb{L}_1 = \{0\} \oplus \mathbb{R}^n$. Calcularemos o grupo de isotropia ($\subset Sp_+(\mathbb{V},\omega,\mathbb{L}_0)$) de

$$\mathbb{L} = span\{e_1,\dots,e_k,f_{k+1},\dots,f_n\} = \mathbb{R}^k \oplus \{0\} \oplus \mathbb{R}^{n-k}.$$

Agora fixe $\psi = F(\alpha,\beta)$ e suponha que $\psi(\mathbb{L}) = \mathbb{L}$. Então:

a)$\psi(\mathbb{L}_0 \cap \mathbb{L}) = \psi(\mathbb{L}_0) \cap \psi(\mathbb{L}) = \mathbb{L}_0 \cap \mathbb{L} = \mathbb{R}^k \oplus \{0\}$. Isto é, $\alpha(\mathbb{R}^k \oplus \{0\}) = \mathbb{R}^k \oplus \{0\}$. Em termos de matriz temos

$$[\alpha]_{\{e_i\}} = \begin{bmatrix} A_{k\times k} & B_{k\times(n-k)} \\ 0 & C_{(n-k)\times(n-k)} \end{bmatrix},$$

com $det(A) \neq 0 \neq det(C)$.

b) Note que, em termos de matriz,

$$[\mathcal{D}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1}] = -I = [\mathcal{D}_{\mathbb{L}_1,\mathbb{L}_0}].$$

De fato, $\mathcal{D}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1} : \mathbb{L}_1 = \{0\} \oplus \mathbb{R}^n \to \mathbb{L}_0^* = \mathbb{R}^{n*} \oplus \{0\}$ e

$$(0, v) \longmapsto (0, v) \cdot \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} = (-v, 0)^T.$$

Analogamente para $\mathcal{D}_{\mathbb{L}_1,\mathbb{L}_0}$. Portanto

$$[\psi] = \begin{bmatrix} [\alpha] & [\alpha](-I)[\beta] \\ 0 & (-I)[(\alpha^*)^{-1}](-I) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\alpha] & -[\alpha][\beta] \\ 0 & [\alpha]^{-T} \end{bmatrix},$$

com $[\alpha]^{-T} = \begin{bmatrix} A^{-T} & 0 \\ -(A^{-1}BC^{-1})^T & C^{-T} \end{bmatrix}$. Agora escreva

$$[\beta]_{\{f_j\}} = \begin{bmatrix} E_{k\times k} & F \\ F^T & G_{(n-k)\times(n-k)} \end{bmatrix},$$

com E e G matrizes simétricas. Iremos mostrar que

$$\psi(\mathbb{L}) = \mathbb{L} \Rightarrow G = 0.$$

Mais precisamente, iremos mostrar que $\psi(\{0\} \oplus \mathbb{R}^{n-k}) \subset \mathbb{L} \Rightarrow G = 0$ usando a expressão matricial de α. Para cada $j = n + k + 1, \ldots, 2n$,

$$\psi(e_j) = \begin{bmatrix} [\alpha] & -[\alpha][\beta] \\ 0 & [\alpha]^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{n+k+1} \\ \vdots \\ a_{2n} \end{bmatrix}$$

(o índice no 1 indica a posição). Daí,

$$\begin{bmatrix} -[\alpha][\beta]\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1_{j-n} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ [\alpha]^{-T}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1_{j-n} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{n+k+1} \\ \vdots \\ a_{2n} \end{bmatrix}.$$

Daí, se $(H)_i$ denota a i-ésima coluna de uma matriz H, analisando a parte inferior da igualdade matricial anterior temos que

$$(C^{-T})_{j-n-k} = \begin{bmatrix} a_{n+k+1} \\ \vdots \\ a_{2n} \end{bmatrix}.$$

Da parte superior da penúltima igualdade matricial temos que

$$-[\alpha]\begin{bmatrix} (F)_{j-n-k} \\ (G)_{j-n-k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A(F)_{j-n-k} - B(G)_{j-n-k} \\ -C(G)_{j-n-k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como C é uma matriz inversível, segue que $(G)_{j-n-k} = 0$, . Portanto $G = 0$.

Por outro lado, usando a expressão matricial de α^{-*} temos que $G = 0 \Rightarrow \psi(\{0\} \oplus \mathbb{R}^{n-k}) \subset \mathbb{L}$. Basta analisar o cálculo anterior. Portanto a dimensão do grupo de isotropia é $(n^2 - k(n-k)) + (k(n-k) + \frac{k}{2}(k+1)) = n^2 + \frac{k}{2}(k+1)$. Daí, como $\Lambda_k(\mathbb{L}_0)$ é difeomorfo ao quociente de $Sp_+(\mathbb{V}, \omega, \mathbb{L}_0)$ pelo grupo de isotropia, segue que

$$dim(\Lambda_k(\mathbb{L}_0)) = (n^2 + \frac{n}{2}(n+1)) - (n^2 + \frac{k}{2}(k+1)) = \frac{n}{2}(n+1) - \frac{k}{2}(k+1).$$

Logo $codim_\Lambda(\Lambda_k(\mathbb{L}_0)) = \frac{k}{2}(k+1)$.

Agora iremos calcular o espaço tangente $T_{\mathbb{L}}\Lambda_k(\mathbb{L}_0)$ em um ponto $\mathbb{L} \in \Lambda_k(\mathbb{L}_0)$. Tal espaço é dado pela imagem de $sp(\mathbb{V}, \omega, \mathbb{L}_0)$ pela diferencial $d\kappa_{\mathbb{L}}(id)$, como definido na proposição 2.1.1:

$$T_{\mathbb{L}}\Lambda_k(\mathbb{L}_0) = \{\omega(H(\cdot), \cdot)|_{\mathbb{L}\times\mathbb{L}} |\, H \in sp(\mathbb{V}, \omega, \mathbb{L}_0)\}. \tag{2.2}$$

Como $H \in sp(\mathbb{V}, \omega, \mathbb{L}_0)$ é tal que $H(\mathbb{L}_0) \subset \mathbb{L}_0$, em particular se $u, v \in \mathbb{L}_0 \cap \mathbb{L}$, então $\omega(H(u), v) = 0$. Sabemos que $dim(T_{\mathbb{L}}\Lambda_k(\mathbb{L}_0)) = \frac{n}{2}(n+1) - \frac{k}{2}(k+1)$ e que $T_{\mathbb{L}}\Lambda_k(\mathbb{L}_0) \subset T_{\mathbb{L}}\Lambda = B_{sym}(\mathbb{L}; \mathbb{R})$. Se $b \in B_{sym}(\mathbb{L}; \mathbb{R})$ é identicamente nulo num subespaço de dimensão k, para uma base adequada de $\mathbb{L}$, temos que

$$[b] = \begin{bmatrix} 0_{k\times k} & N_{k\times(n-k)} \\ N^T_{(n-k)\times k} & M_{(n-k)\times(n-k)} \end{bmatrix}, \quad M = M^T.$$

Daí, a coleção das formas bilineares simétricas que se anulam num mesmo espaço de $dim = k$, é uma subespaço de dimensão $\frac{n}{2}(n+1) - \frac{k}{2}(k+1)$. Consequentemente

$$T_{\mathbb{L}}\Lambda_k(\mathbb{L}_0) = \{b \in B_{sym}(\mathbb{L}; \mathbb{R})|\, b|_{\mathbb{L}\cap\mathbb{L}_0\times\mathbb{L}\cap\mathbb{L}_0} = 0\}.$$

Para ver a naturalidade da orientação transversal, basta ver que a diferencial do mapa $\mathbb{L} \mapsto \psi(\mathbb{L})$ no ponto $\mathbb{L}$ é o mapa linear

$$B_{sym}(\mathbb{L}; \mathbb{R}) \ni B \longmapsto B(\psi^{-1}(\cdot), \psi^{-1}(\cdot)) \in B_{sym}(\psi(\mathbb{L}); \mathbb{R}).$$

Daí, B é positiva definida em $\mathbb{L} \cap \mathbb{L}_0$ se e somente se $B(\psi^{-1}(\cdot), \psi^{-1}(\cdot))$ é positiva definida em $\psi(\mathbb{L}) \cap \mathbb{L}_0$. Também, como o isomorfismo $T_{\mathbb{L}}\Lambda \cong B_{sym}(\mathbb{L}; \mathbb{R})$ não depende da carta segue que a orientação transversal de $\Lambda_1(\mathbb{L}_0)$ em Λ está bem definida.

Q.E.D.

Observação 2.1.3. *No capítulo do Índice de Maslov iremos considerar curvas de lagrangianos $\ell(t)$ e estudar o espaço $T_{\ell(t)}(\Lambda) \cong B_{sym}(\ell(t); \mathbb{R})$. Será muito conveniente considerar um identificação $T_{\ell(t)}(\Lambda) \cong B_{sym}(\mathbb{L}_0; \mathbb{R})$, para um $\mathbb{L}_0 \in \Lambda$ fixado. Tal identificação é dada da seguinte maneira:*
Seja $\mathbb{L}_1$ transversal a ambos $\mathbb{L}_0$ e $\mathbb{L} := \ell(t)$ e seja $\eta \colon \mathbb{L}_0 \to \mathbb{L}$ a restrição da projeção $\mathbb{L}\oplus\mathbb{L}_1 \to \mathbb{L}$ ao subespaço $\mathbb{L}_0$. O mapa de transição de $\phi_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1}$ para $\phi_{\mathbb{L},\mathbb{L}_1}$ é

$$B_{sym}(\mathbb{L}_0; \mathbb{R}) \ni B \longmapsto \phi_{\mathbb{L},\mathbb{L}_1}(\mathbb{L}_0) + \eta_*(B),$$

onde η_* é dado por $\eta_*(B) = B(\eta^{-1}, \eta^{-1})$. De fato, seja $\widetilde{B} = \phi^{-1}_{\mathbb{L},\mathbb{L}_1} \circ \phi_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1}$. Suponha que $B = \omega(u(\cdot), \cdot)$ e $\widetilde{B} = \omega(\widetilde{u}(\cdot), \cdot)$, com $u \colon \mathbb{L}_0 \to \mathbb{L}_1, \widetilde{u} \colon \mathbb{L} \to \mathbb{L}_1$ satisfazendo

$$\{x + u(x)|\, x \in \mathbb{L}_0\} = \{y + \widetilde{u}(y)|\, y \in \mathbb{L}\}$$

(lembre da definição 2.1.1 das cartas coordenas). Mais precisamente,

$$\widetilde{u} = \pi_1 \circ (id_{\mathbb{L}_0} + u) \circ (\pi \circ (id_{\mathbb{L}_0} + u))^{-1},$$

onde $\pi\colon \mathbb{L} \oplus \mathbb{L}_1 \to \mathbb{L}, \pi_1\colon \mathbb{L} \oplus \mathbb{L}_1 \to \mathbb{L}_1$ *são projeções. Observe que* $\eta = \pi \circ id_{\mathbb{L}_0} = \pi \circ (id_{\mathbb{L}_0} + u)$ *e assim*

$$\widetilde{u} = \pi_1 \circ id_{\mathbb{L}_0} \circ \eta^{-1} + \pi_1 \circ u \circ \eta^{-1} = \pi_1 \circ id_{\mathbb{L}_0} \circ \eta^{-1} + u \circ \eta^{-1}.$$

Observe também que

$$\omega(\pi_1 \circ id_{\mathbb{L}_0} \circ \eta^{-1}(\cdot), \cdot)|_{\mathbb{L}\times\mathbb{L}} = \phi_{\mathbb{L},\mathbb{L}_1}(\mathbb{L}_0)$$

e que

$$\omega(u \circ \eta^{-1}(\cdot), \cdot)|_{\mathbb{L}\times\mathbb{L}} = \omega(u \circ \eta^{-1}(\cdot), \eta^{-1}(\cdot))|_{\mathbb{L}\times\mathbb{L}} = \eta_*(B).$$

Note que este mapa de transição é uma translação de um mapa linear, portanto seu diferencial em qualquer ponto é η_* *e como* η *é a identidade em* $\mathbb{L}_0 \cap \mathbb{L}$ *temos que* $B = \eta_*(B)$ *em* $\mathbb{L}_0 \cap \mathbb{L}$*. Também (lembre da equação 2.2)*

$$d\phi_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1}(\mathbb{L})[T_{\mathbb{L}}\Lambda_k(\mathbb{L}_0)] = \{B \in B_{sym}(\mathbb{L}_0;\mathbb{R})|\ B \text{ se anula em } \mathbb{L}_0 \cap \mathbb{L}\}.$$

2.2 O grupo fundamental de Λ

Usaremos o seguinte Lema para calcular o grupo fundamental $\pi_1(\Lambda)$ da Granssmanniana Lagrangiana, cuja demonstração será omitida e pode ser encontrada [4] Lema 4.1.2.

Lema 2.2.1. *Seja* G *um grupo de Lie conexo e* K *um subgrupo fechado de* G*. Seja* $p\colon G \longrightarrow G/K$ *o mapa quociente. Sejam* $q\colon \widetilde{G} \longrightarrow G$ *o grupo de recobrimento universal de* G*,* $\widetilde{K} := q^{-1}(K)$ *e* $\widetilde{K}_0$ *a componente conexa do elemento neutro em* $\widetilde{K}$*. Então o grupo fundamental* $\pi_1(G/K)$ *é isomorfo ao grupo quociente* $\widetilde{K}/\widetilde{K}_0$*. O isomorfismo* $\xi\colon \widetilde{K}/\widetilde{K}_0 \longrightarrow \pi_1(G/K)$ *é definido como segue:*
Se $g\widetilde{K}_0$ *é qualquer elemento de* $\widetilde{K}/\widetilde{K}_0$*, seja* $c\colon [0,1] \to \widetilde{G}$ *qualquer curva contínua tal que* $c(0) = 1$ *e* $c(1) = g^{-1}$*. Então* $\xi(g\widetilde{K}_0)$ *é a classe de homotopia do loop* $p \circ q \circ c\colon [0,1] \longrightarrow G/K$ *com ponto base* $p(1)$*.*

Corolário 2.2.1. *Seja* $\{e_1, \ldots, e_{2n}\}$ *base simplética de* $(\mathbb{V}, \omega)$ *e seja* $\mathbb{L}_0 = span\{e_1, \ldots e_n\} \in \Lambda$*. Então* $\pi_1(\Lambda) \cong \mathbb{Z}$*. Um gerador de* $\pi_1(\Lambda)$ *é a classe de homotopia do loop* $\delta[0,1]\colon \longrightarrow \Lambda$ *dada por*

$$\delta(t) = span\{cos(\pi t)e_1 - sen(\pi t)e_{n+1}, e_2, \ldots, e_n\}. \tag{2.3}$$

Demonstração: Iremos assumir que $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{2n}, \omega = \omega_0$, com $\{e_1, \ldots, e_{2n}\}$ base canônica e portanto $\mathbb{L}_0 = \mathbb{R}^n \oplus \{0\}$. Vamos aplicar o lema anterior para $\Lambda = U(n)/O(n)$, onde iremos considerar a aplicação quociente

$$\begin{array}{rccc} p\colon & U(n) & \longrightarrow & \Lambda \\ & \psi & \longmapsto & \psi(\mathbb{L}_0) \end{array}.$$

Seja $SU(n)$ o grupo de Lie das matrizes unitárias $n \times n$ cujo determinante é 1. O recobrimento universal de $U(n)$ é $SU(n) \times \mathbb{R}$ com mapa de recobrimento

$$\begin{array}{rccc} p\colon & SU(n) \times \mathbb{R} & \longrightarrow & U(n) \\ & (A, t) & \longmapsto & e^{it}A \end{array}.$$

O grupo $\widetilde{K}$ é facilmente calculado como

$$\widetilde{K} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [e^{-1\frac{k\pi}{n}} O_k(n)] \times \{\frac{k\pi}{n}\},$$

onde $O_k(n)$ é $SO(n)$ se k for par ou é $O(n) \backslash SO(n)$ se k for impar. De fato, dado $O \in O(n)$ podemos escrever $O = e^{it}e^{-it}O$, daí $det(e^{-it}O) = 1 \Leftrightarrow t = \frac{k\pi}{n}$ e $O \in SO(n)$ se k for par ou $O \in O(n) \backslash SO(n)$ se k for impar. (Para saber mais sobre espaço de recobrimento no geral e o grupo fundamental de $SU(n)$ ver [17]) A componente de $\widetilde{K}$ que contém o elemento neutro é $\widetilde{K}_0 = SO(n) \times \{0\}$. O quociente $\widetilde{K}/\widetilde{K}_0$ é isomorfo a $\mathbb{Z}$, e o isomorfismo é dado por $g\widetilde{K}_0 \mapsto k$ se $g \in [e^{-i\frac{k\pi}{n}} O_k(n)] \times \{\frac{k\pi}{n}\}$. Um gerador para $\widetilde{K}/\widetilde{K}_0$ é $g\widetilde{K}_0$, onde $g = (e^{-iA}, \frac{\pi}{n})$ e

$$A = \begin{bmatrix} \pi(\frac{1-n}{n}) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{n} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{\pi}{n} \end{bmatrix}.$$

De fato, $iA \in su(n) = \{E \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) |\, E + E^* = 0 \text{ e } tr(E) = 0\}$, e portanto $e^{-iA} \in SU(n)$. Também

$$e^{-iA} = e^{-i\frac{\pi}{n}} \begin{bmatrix} e^{i\pi} & & & 0 \\ & e^{i0} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{i0} \end{bmatrix} = e^{-i\frac{\pi}{n}} \begin{bmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Seja $c(t) = (e^{itA}, -t\frac{\pi}{n})$, $t \in [0,1]$, então pelo lema a classe do loop $p \circ q \circ c$ é gerador de $\pi_1(\Lambda, \mathbb{L}_0)$. Mas precisamente

$$(e^{itA}, -t\frac{\pi}{n}) \xmapsto{q} e^{-it\frac{\pi}{n}} e^{itA} = e^{it(A - \frac{\pi}{n}I)} =$$

$$\begin{bmatrix} cos(t\pi) - isen(t\pi) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \xmapsto{p} \begin{bmatrix} cos(t\pi) - isen(t\pi) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} (\mathbb{L}_0) =$$

$$span\{cos(\pi t)e_1 - sen(\pi t)e_{n+1}, e_2, \dots, e_n\}.$$

Q.E.D.

2.3 O Índice de Maslov

Nesta seção trataremos da Boa Definição do Índice de Maslov de certas curvas de Lagrangianos. Para que tal índice seja um invariante topológico, definiremos a partir do grupo de homologia relativa $H_1(\Lambda, \Lambda_0(\mathbb{L}_1))$.

Do homomorfismo de Hurewicz

$$\pi_1(\Lambda, \mathbb{L}_0) \longmapsto H_1(\Lambda),$$

que é sobrejetivo e cujo núcleo é o comutador de $\pi_1(\Lambda, \mathbb{L}_0)$, segue que $H_1(\Lambda) \cong \mathbb{Z}$. Porém este isomorfismo não é unicamente determinado, depende de uma escolha de orientação. Assim cada loop em Λ com ponto base $\mathbb{L}_0$ tem um número inteiro associado bem definido. Tal número deve ser interpretado como o tipo de enlaçamento do loop. Usando homologia relativa, iremos estender a construção anterior para certas curvas não necessariamente fechadas. Fixe $\mathbb{L}_1 \in \Lambda$. Toda curva contínua $l\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{L}$ com pontos extremos (isto é, os pontos final e inicial) em $\Lambda_0(\mathbb{L}_1)$ define uma classe em $H_1(\mathbb{L}, \Lambda_0(\mathbb{L}_1))$. Desde que temos um difeomorfismo $\phi_{\mathbb{L},\mathbb{L}_1}\colon \Lambda_0(\mathbb{L}_1) \longrightarrow B_{sym}(\mathbb{L}; \mathbb{R})$, segue que $\Lambda_0(\mathbb{L}_1)$ é contractível, isto é, homotópico a um ponto. Em particular $H_1(\Lambda_0(\mathbb{L}_1)) = 0$. Da sequência longa exata do par $(\Lambda, \Lambda_0(\mathbb{L}_1))$ (ver [18] pg 154)

$$\dots \to 0 = H_1(\Lambda_0(\mathbb{L}_1)) \to H_1(\Lambda) \to H_1(\Lambda, \Lambda_0(\mathbb{L}_1)) \to 0$$

temos que $H_1(\Lambda, \Lambda_0(\mathbb{L}_1)) \cong \mathbb{Z}$. Se $\mathbb{L}_0$ for transversal a $\mathbb{L}_1$, então um gerador para $H_1(\Lambda, \Lambda_0(\mathbb{L}_1))$ é a classe de homologia do loop dado no corolário 2.2.1.

A seguir, algumas observações que decorrem diretamente das propriedades elementares da Teoria de Homologia: Seja $\ell\colon [a,b] \longrightarrow \Lambda$ contínua com $\ell(a), \ell(b) \in \Lambda_0(\mathbb{L}_1)$

1) Se $\sigma\colon [c,d] \longrightarrow [a,b]$ é contínua tao que $\sigma(c) = a, \sigma(d) = b$, então ℓ e $\ell \circ \sigma$ são homólogos em $H_1(\Lambda, \Lambda_0(\mathbb{L}_1))$;

2) Se $\sigma\colon [c,d] \longrightarrow [a,b]$ é contínua tao que $\sigma(c) = b, \sigma(d) = a$, então ℓ e $-\ell \circ \sigma$ são homólogos em $H_1(\Lambda, \Lambda_0(\mathbb{L}_1))$;

3) Se, para $u \in (a,b)$, $\ell(u) \in \Lambda_0(\mathbb{L}_1)$, então ℓ é homólogo a $\ell|_{[a,u]} + \ell|_{[u,b]}$;

4) Se $\ell(u) \in \Lambda_0(\mathbb{L}_1), \forall u \in [a,b]$, então ℓ é homólogo a 1-cadeia nula;

5) Se $\ell_1, \ell_2\colon [a,b] \longrightarrow \Lambda$ são contínuas e homotópicas com extremos em $\Lambda_0(\mathbb{L}_1)$, então definem a mesma classe de homologia em $H_1(\Lambda, \Lambda_0(\mathbb{L}_1))$.

Agora daremos uma condição suficiente para que duas curvas sejam homólogas em $H_1(\Lambda, \Lambda_0(\mathbb{L}_0))$.

No que segue $n_+(B), n_-(B), dgn(B)$ denota, respectivamente, a dimensão de de um subespaço maximal para o qual a forma bilinear B é positiva definida, negativa definida, nula.

Lema 2.3.1. *Seja $\ell_1, \ell_2\colon [a,b] \longrightarrow \Lambda$ curvas contínuas com pontos extremos em $\Lambda_0(\mathbb{L}_0)$. Suponha que exista complemento lagrangiano $\mathbb{L}_1$ para $\mathbb{L}_0$ tal que a imagem de ambas ℓ_1, ℓ_2 estejam no domínio $\Lambda_0(\mathbb{L}_1)$ da carta coordenada $\phi_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1}$. Sejam $\beta_i := \phi_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1} \circ \ell_i : [a,b] \longrightarrow B_{sym}(\mathbb{L}_0;\mathbb{R})$, $i = 1,2$. Então*

$$n_+(\beta_1(t)) = n_+(\beta_2(t)), t = a,b \Longrightarrow \ell_1 \text{ e } \ell_2 \text{ são homólogas em } H_1(\Lambda, \Lambda_0(\mathbb{L}_0)).$$

Demonstração: Definimos o espaço

$$B^{\geq 1}_{sym}(\mathbb{L}_0) = \{B \in B_{sym}(\mathbb{L}_0;\mathbb{R}) |\, dgn(B) \geq 1\}.$$

Sejam $\mathbb{L} \in \Lambda_0(\mathbb{L}_1)$ e $T\colon \mathbb{L}_0 \to \mathbb{L}_1$ tais que $Graf_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1}(T) = \mathbb{L}$. Então

$$\begin{aligned} Ker(\mathcal{D}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1} \circ T) = Ker(\omega(T(\cdot),\cdot)|_{\mathbb{L}_0}) = \{u \in \mathbb{L}_0 |\, T(u) = 0\} &= \\ \{u \in \mathbb{L}_0 |\, u = u + T(u)\} &= \mathbb{L} \cap \mathbb{L}_0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Portanto

$$B^{\geq 1}_{sym}(\mathbb{L}_0) = \phi_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1}(\Lambda_0(\mathbb{L}_1) \cap \Lambda_{\geq 1}(\mathbb{L}_0)).$$

Denotaremos por $B^0_{sym}(\mathbb{L}_0)$ o complemento de $B^{\geq 1}_{sym}(\mathbb{L}_0)$ em $B_{sym}(\mathbb{L}_0)$. Note que $B^0_{sym}(\mathbb{L}_0)$ é aberto (uma vez que $\Lambda_{\geq 1}(\mathbb{L}_0)$ é fechado). Além disso,

$$B^0_{sym}(\mathbb{L}_0) = \bigcup_{j=0}^{n} B^{0,j}_{sym}(\mathbb{L}_0),$$

onde $B^{0,j}_{sym}(\mathbb{L}_0) = \{B \in B^0_{sym}(\mathbb{L}_0, \mathbb{R}) |\, n_+(B) = j\}$. Pelo Teorema de Sylvester, temos que $Gl_+(\mathbb{L}_0)$ age transitivamente por conjugação em cada $B^{0,j}_{sym}(\mathbb{L}_0)$. Como $Gl_+(\mathbb{L}_0)$ é conexo por arcos, temos que $B^{0,j}_{sym}(\mathbb{L}_0)$ são as componentes conexas por arcos de $B^0_{sym}(\mathbb{L}_0)$. Sejam

$$i = n_+(\beta_1(a)) = n_+(\beta_2(a)) \quad \text{e} \quad j = n_+(\beta_1(b)) = n_+(\beta_2(b)).$$

Então podemos encontrar curvas β_3, β_4 em $B^{0,i}_{sym}(\mathbb{L}_0)$ e $B^{0,i}_{sym}(\mathbb{L}_0)$, respectivamente, tais que liguem $\beta_2(a)$ à $\beta_1(a)$ e $\beta_1(b)$ à $\beta_2(b)$, respectivamente. Defina

$$\ell_k = \phi^{-1}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1} \circ \beta_k, \quad k = 3, 4.$$

Note que as imagens de ℓ_3, ℓ_4 estão inteiramente em $\Lambda_0(\mathbb{L}_1) \cap \Lambda_0(\mathbb{L}_0)$, portanto $\ell = \ell_3 + \ell_1 + \ell_4$ é homóloga a ℓ_1 em $H_1(\Lambda, \Lambda_0(\mathbb{L}_0))$. Seja

$$\beta = \phi_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1} \circ \ell = \beta_3 + \beta_1 + \beta_4,$$

onde a soma no último termo da equação anterior significa a concatenação das curvas $\beta_3, \beta_1, \beta_4$ nesta ordem. Desde que β_2 e β são curvas contínuas em $B_{sym}(\mathbb{L}_0; \mathbb{R})$ com os mesmos pontos extremos, então existe uma homotopia de extremos fixados que deforma β_2 em β. Compondo essa homotopia com $\phi^{-1}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1}$ obtemos uma homotopia em Λ de pontos extremos em $\Lambda_0(\mathbb{L}_0)$ que deforma ℓ_2 em ℓ. Portanto ℓ e ℓ_2 definem a mesma classe de homologia em $H_1(\Lambda, \Lambda_0(\mathbb{L}_0))$.

Q.E.D.

Observação 2.3.1. *Dado $\psi \in Sp(\mathbb{V}, \omega_0)$ considere o difeomorfismo $\widehat{\psi}\colon \Lambda \longrightarrow \Lambda$ dado por $\mathbb{L} \mapsto \psi(\mathbb{L})$. Como $Sp(\mathbb{V}, \omega) \simeq Sp(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ é conexo por arcos, então ψ pode ser continuamente conectado ao elemento neutro de $Sp(\mathbb{V}, \omega)$ e isto dá uma homotopia entre $\widehat{\psi}$ e a identidade de Λ. Portanto $\widehat{\psi}$ e id_Λ definem o mesmo mapa na homologia $H_1(\Lambda)$. Se $\psi \in Sp(\mathbb{V}, \omega, \mathbb{L}_0)$, então $\widehat{\psi}(\Lambda_0(\mathbb{L}_0)) \subset \Lambda_0(\mathbb{L}_0)$ e do seguinte diagrama comutativo temos que o homomorfismo induzido $(\widehat{\psi})_*\colon H_1(\Lambda, \Lambda_0(\mathbb{L}_0)) \longrightarrow H_1(\Lambda, \Lambda_0(\mathbb{L}_0))$ é a identidade:*

$$\begin{tikzcd}
H_1(\Lambda) \arrow[r, "(\widehat{\psi})_* = (id_\Lambda)_*"] \arrow[d, "(i)_*"] & H_1(\Lambda) \arrow[d, "(i)_*"] \\
H_1(\Lambda, \Lambda_0(\mathbb{L}_0)) \arrow[r, "(\widehat{\psi})_*"] & H_1(\Lambda, \Lambda_0(\mathbb{L}_0)).
\end{tikzcd}$$

Lema 2.3.2. *Sejam Z uma espaço vetorial real de dimensão finita e $A\colon [0, r] \longrightarrow B_{sym}(Z; \mathbb{R})$ uma curva de classe C^1. Suponha que a restrição $\widetilde{A}$ da derivada $A'(0)$ ao núcleo $Ker(A(0))$ é não degenerada. Então, $\forall t \in (0, r)$ suficientemente pequeno, $A(t)$ é não degenerado e temos*

$$n_+(A(t)) = n_+(A(0)) + n_+(\widetilde{A}), \quad n_-(A(t)) = n_-(A(0)) + n_-(\widetilde{A}).$$

Demonstração: Será demonstrado no caso geral em que $dim(Z)$ pode ser infinito (ver proposição 5.1.1) .

Q.E.D.

A escolha de um isomorfismo $H_1(\Lambda, \Lambda_0(\mathbb{L}_0)) \simeq \mathbb{Z}$ é equivalente a escolha um dos dois geradores. Faremos tal escolha usando a orientação transversal de $\Lambda_1(\mathbb{L}_0)$.

Definição 2.3.1. *Seja $\ell\colon [a,b] \to \Lambda$ uma curva suave com $\ell(t_0) \in \Lambda_{\geq 1}(\mathbb{L}_0)$ para algum $t_0 \in [a,b]$. Dizemos que ℓ intersecta $\Lambda_{\geq 1}(\mathbb{L}_0)$ transvesalmente no instante t_0 se $\ell(t_0) \in \Lambda_1(\mathbb{L}_0)$ e $\ell'(t_0) \notin T_{\ell(t_0)}\Lambda_1(\mathbb{L}_0)$. Dizemos que esta intersecção é positiva (negativa) se $\ell'(t_0)$ é positivo (negativo) no sentido da orientação transversal de $\Lambda_1(\mathbb{L}_0)$ definida na proposição 2.1.4.*

Proposição 2.3.1. *Sejam ℓ_1, ℓ_2 duas curvas suaves em Λ, ambas com pontos extremos em $\Lambda_0(\mathbb{L}_0)$. Suponha que ambas intersectam $\Lambda_{\geq 1}(\mathbb{L}_0)$ uma única vez e tais intersecções são transversais e positivas (ou negativas). Então as curvas ℓ_1 e ℓ_2 definem a mesma classe de homologia em $H_1(\Lambda, \Lambda_0(\mathbb{L}_0))$. Além disso, esta classe de homologia é um gerador do grupo.*

Demonstração: Podemos supor que $\ell_1(t_0) = \ell_2(t_0)$. De fato, por uma reparametrização das curvas, podemos supor que a intersecção de ambas as curvas com $\Lambda_{\geq 1}(\mathbb{L}_0)$ correm num mesmo instante t_0. Também existe $\psi \in Sp_+(\mathbb{V}, \omega, \mathbb{L}_0)$ tal que $\psi(\ell_1(t_0)) = \ell_2(t_0)$, e pela Observação 2.3.1 segue que $\psi \circ \ell_1$ é homologo a ℓ_1. Seja $\mathbb{L}_1 \in \Lambda$ complementar a ambos $\mathbb{L}_0$ e $\ell_1(t_0) = \ell_2(t_0)$. Como ℓ_i tem uma única intersecção com $\Lambda_{\geq 1}(\mathbb{L}_0)$, então a restrição de ℓ_i a qualquer intervalo $[a,b]$ contendo t_0 no interior é homologo a ℓ_i. Portanto podemos supor que as imagens de ambas as curvas estão inteiramente contidas no domínio $\Lambda_0(\mathbb{L}_1)$ da carta coordenada $\phi_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1}$. Sejam $\beta_i = \phi_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1} \circ \ell_i$. $i = 1, 2$. Temos que $Ker(\beta_i(t_0)) = \ell_i(t_0) \cap \mathbb{L}_0$ e que $\beta_i(t)$ é não degenerado $\forall t \neq t_0$. Então, pelo lema anterior, temos que $n_+(\beta_i(t))$ é constante em $[a, t_0)$ e $(t_0, b]$. Pela hipótese de intersecção transversal positiva, temos que $\beta_i'(t_0)$ é positiva definida no espaço unidimensional $\ell_i(t_0) \cap \mathbb{L}_0$. Pelo lema anterior temos que

$$n_+(\beta_i(b)) = n_+(\beta_i(t_0)) + 1.$$

Fazendo $\widetilde{\beta_i}(t) = \beta(b + t(b-a)), t \in [0,1]$ (isto é, estamos percorrendo a curva β_i no sentido contrário), e para $s_0 = (t_0 - b)/(b-a)$ vale $\widetilde{\beta_i}'(s_0) = -(b-a)\beta_i'(t_0)$, que é negativa definida em $\ell_i(t_0) \cap \mathbb{L}_0$. Novamente pelo lema anterior

$$n_+(\beta_i(a)) = n_+(\widetilde{\beta_i}(s_0)) = n_+(\beta_i(t_0)).$$

Como $\beta_1(t_0) = \beta_2(t_0)$, segue que $n_+(\beta_1(a)) = n_+(\beta_2(a))$ e $n_+(\beta_1(b)) = n_+(\beta_2(b))$, daí pelo Lema 2.3.1 temos que ℓ_1 e ℓ_2 são homologas em $H_1(\Lambda, \Lambda_0(\mathbb{L}_0))$. Isto conclui a primeira parte.

Sejam $\{e_1, \ldots, e_{2n}\}$ base simplética de $\mathbb{V}$ e $\mathbb{L}_0 = span\{e_{n+1}, \ldots, e_{2n}\}$. Considere a curva $\ell\colon [0,1] \to \Lambda$ dada no corolário 2.2.1,

$$\ell(t) = span\{cos(t\pi)e_1 - sen(t\pi)e_{n+1}, \ldots, e_n\}.$$

Note que $\ell(\frac{1}{2}) = span\{e_{n+1}, e_2, \ldots, e_n\}$, assim $\ell(\frac{1}{2}) \cap \mathbb{L}_0 = span\{e_{n+1}\}$ e $\ell(t) \cap \mathbb{L}_0 = \{0\}$ se $t \neq \frac{1}{2}$. Resta ver que esta intersecção é transversal. Seja

$$\mathbb{L}_1 = span\{e_1 + e_{n+1}, \ldots, e_n + e_{2n}\} \in \Lambda$$

que é transversal a ambos $\ell(\frac{1}{2})$ e $\mathbb{L}_0$. Vamos trabalhar com a carta coordenada $\phi_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1}$: Para cada $t \in [0,1]$ seja $T_t\colon \mathbb{L}_0 \to \mathbb{L}_1$ tal que $Graf_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1}(T_t) = \ell(t)$. Mais precisamente

$$[T]^{\{e_1+e_{n+1},\ldots,e_n+e_{2n}\}}_{\{e_{n+1},\ldots,e_{2n}\}} = \begin{bmatrix} f(t) & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{bmatrix},$$

onde $f(t) = \frac{-cos(t\pi)}{cos(t\pi)+sen(t\pi)}$. Pois:

1) $T_t(e_{n+1}) = \frac{-cos(t\pi)}{cos(t\pi)+sen(t\pi)}(e_1 + e_{n+1}) \Leftrightarrow e_{n+1} + T_t(e_{n+1}) = \frac{1}{cos(t\pi)+sen(t\pi)}(-cos(t\pi)e_1 + sen(t\pi)e_{n+1})$,

2) se $i = 2, \ldots, n$, então $T_t(e_{n+i}) = -(e_i + e_{n+i}) \Leftrightarrow e_{n+i} + T_t(e_{n+i}) = -e_i$.

Daí, se $\beta(t) = \phi_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1} \circ \ell(t)$, na base $\{e_{n+1}, \ldots, e_{2n}\}$ temos

$$[\beta(t)] = \begin{bmatrix} -f(t) & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo $\beta'(\frac{1}{2})(e_{n+1}, e_{n+1}) = -f'(\frac{1}{2}) = -\pi < 0$.

Q.E.D.

Seja $\mu_{\mathbb{L}_0}\colon H_1(\Lambda, \Lambda_0(\mathbb{L}_0)) \to \mathbb{Z}$ o único isomorfismo tal que $\mu_{\mathbb{L}_0}(\kappa) = 1$, onde κ é a classe de homologia de qualquer curva ℓ em Λ com pontos extremos em $\Lambda_0(\mathbb{L}_0)$ que intersecta uma única vez $\Lambda_{\geq 1}(\mathbb{L}_0)$, e tal intersecção é transversal e positiva.

Definição 2.3.2. *Seja ℓ qualquer curva contínua em Λ cujos extremos estão em $\Lambda_0(\mathbb{L}_0)$. O Índice de Maslov de ℓ relativo a $\mathbb{L}_0$ é o valor de $\mu_{\mathbb{L}_0}$ na classe de homologia de ℓ, que será denotado por $\mu_{\mathbb{L}_0}(\ell)$.*

Se $\ell\colon [a,b] \to \Lambda$ é qualquer curva contínua tal que o conjunto $\{t \in (a,b) |\, \ell(t) \in \Lambda_{\geq 1}(\mathbb{L}_0)\}$ está contido em algum intervalo fechado $[c,d] \subset (a,b)$, então o Índice de Maslov $\mu_{\mathbb{L}_0}(\ell)$ de ℓ é definido com o Índice de Maslov da restrição $\ell|_{[c,d]}$.

É fácil de ver que o Índice de Maslov é aditivo por concatenação. Além disso, a proposição anterior nos dá uma interpretação geométrica do Índice de Maslov. Se ℓ é uma curva suave que tem apenas intersecções transversais com $\Lambda_{\geq 1}(\mathbb{L}_0)$, então $\mu_{\mathbb{L}_0}(\ell)$ é o número de intersecções positivas menos o número de intersecções negativas.

2.4 Cálculo do Índice de Maslov

Proposição 2.4.1. *Seja $\ell\colon [a,b] \to \Lambda$ qualquer curva contínua com pontos extremos fora de $\Lambda_{\geq 1}(\mathbb{L}_0)$. Se existe um subespaço lagrangiano $\mathbb{L}_1$ complementar a $\mathbb{L}_0$ e tal que a imagem de ℓ está inteiramente contida no domínio $\Lambda_0(\mathbb{L}_1)$ da carta $\phi_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1}$. Então:*

$$\mu_{\mathbb{L}_0}(\ell) = n_+(\beta(b)) - n_+(\beta(a)), \tag{2.5}$$

onde $\beta = \phi_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1} \circ \ell$.

Demonstração: Pelo Lema 2.3.1, o Índice de Maslov $\mu_{\mathbb{L}_0}(\ell)$ depende apenas dos números $n_+(\beta(a))$ e $n_+(\beta(b))$.

Para provar o resultado basta exibir para cada par $i, j = 0, \ldots, n$ uma curva $\beta_{i,j}\colon [a,b] \to B_{sym}(\mathbb{L}_0; \mathbb{R})$ tal que $n_+(\beta_{i,j}(a)) = i, n_+(\beta_{i,j}(b)) = j$ e tal que a curva $\ell = \phi^{-1}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1} \circ \beta_{i,j}$ tenha Índice de Maslov igual a $j - i$. Como podemos reparametrizar a curva no sentido contrário para trocar o sinal do Índice de Maslov, basta olhar para o caso $i \leq j$. Para o caso $i = j$, uma curva constante com coíndice n_+ igual a i resolve. Para o caso $j = i + 1$, escolhendo uma base qualquer de $\mathbb{L}_0$ e, em termos desta base, tomando

$$[\beta_{i,i+1}(t)] = diag(\overbrace{1, \ldots, 1}^{i \text{ vezes}}, t, -1, \ldots, -1),$$

com $t \in [-1, 1]$, teremos o desejado. De fato, pela equação 2.4 temos que

$$\ell(t) = \phi^{-1}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1} \circ \beta_{i,i+1}(t) \in \Lambda_k(\mathbb{L}_0) \Leftrightarrow dim(ker(\beta(t))) = k,$$

daí ℓ intersecta $\Lambda_{\geq 1}(\mathbb{L}_0)$ uma única vez e $\ell(0) \in \Lambda_1(\mathbb{L}_0)$. Além disso,

$$\beta'(0) = diag(0, \ldots, \overset{i\text{-ésimo}}{1}, \ldots, 0)$$

é positivo definido em $\ell(0) \cap \mathbb{L}_0$. Pela proposição 2.3.1 temos que $\mu_{\mathbb{L}_0}(\ell) = 1$. Para o caso $i+1 < j$ basta considerar $\beta_{i,j}$ como a concatenação das curvas $\beta_{i,i+1}, \beta_{i+1,i+2}, \dots, \beta_{j-1,j}$ obtidas anteriormente.

Q.E.D.

Corolário 2.4.1. *Seja $\ell\colon [a,b] \to \Lambda$ contínua com pontos extremos em $\Lambda_0(\mathbb{L}_0)$. Então*

$$|\mu_{\mathbb{L}_0}(\ell)| \leq \sum_{t\in(a,b)} dim(\ell(t) \cap \mathbb{L}_0).$$

Demonstração: Se existe um número infinito de valores $t \in (a,b)$ tais que $\ell(t) \in \Lambda_{\geq 1}(\mathbb{L}_0)$, então o lado direito da desigualdade é infinito, e portanto não há o que demostrar. Por outro lado, suponha que $t_0 \in (a,b)$ satisfaz $\ell(t_0) \in \Lambda_{\geq 1}(\mathbb{L}_0)$ e seja $\mathbb{L}_1$ transversal a ambos $\ell(t_0)$ e $\mathbb{L}_0$. Considere $\beta = \phi_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1} \circ \ell$ definido numa vizinhança de t_0.

Afirmação: $n_+(\beta(t_0)) \leq n_+(\beta(t)) \leq n_+(\beta(t_0)) + dgn(\beta(t_0))$.
Demonstração da afirmação: Seja $k = n_+(\beta(t_0))$. Se $k = 0$, a primeira desigualdade é trivial. Existe um subespaço $W \subset \mathbb{L}_0$ de dimensão k na qual $\beta(t_0)$ é positivo definido. Seja $\{e_1, \dots, e_k\}$ uma base qualquer de W. Pela continuidade da curva β temos que, para uma vizinhança suficientemente pequena de t_0, $\beta(t)(e_i, e_i) > 0$, $i = 1, \dots, k$. Portanto $n_+(\beta(t)) \geq k$, para t suficientemente próximo de t_0. O mesmo argumento mostrar que $n_-(\beta(t_0)) \leq n_-(\beta(t))$, para t suficientemente próximo de t_0. Com isso temos que $n_+(\beta(t)) \leq n - n_-(\beta(t_0)) = k + dgn(\beta(t_0))$.

Q.E.D.

Portanto, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno,

$$|n_+(\beta(t_0 - \varepsilon)) - n_+(\beta(t_0 + \varepsilon))| \leq dgn(\beta(t_0)) = dim(\ell(t_0) \cap \mathbb{L}_0).$$

Agora sejam $a < t_1 < t_2 < \ldots < t_m < b$ tais que $\ell(t_i) \in \Lambda_{\geq 1}(\mathbb{L}_0)$ e suponha que estes sejam todos com esta propriedade. Pela proposição 2.4.1 temos que, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno,

$$\mu_{\mathbb{L}_0}(\ell) = \sum_{i=1}^{m} n_+(\beta(t_i + \varepsilon)) - n_+(\beta(t_i - \varepsilon)).$$

Daí,

$$|\mu_{\mathbb{L}_0}(\ell)| \leq \sum_{i=1}^{m} |n_+(\beta(t_i + \varepsilon)) - n_+(\beta(t_i - \varepsilon))| \leq \sum_{i=1}^{m} dim(\ell(t_i) \cap \mathbb{L}_0).$$

Q.E.D.

Corolário 2.4.2. *Seja $\ell\colon [a,b] \to \Lambda$ uma curva de classe C^1 com pontos extremos em $\Lambda_0(\mathbb{L}_0)$. Se para todo $t \in (a,b)$ tal que $\ell(t) \in \Lambda_{\geq 1}(\mathbb{L}_0)$ nos tivermos que $\ell'(t)$ é não degenerada em $\ell(t) \cap \mathbb{L}_0$, então o número de intersecção de ℓ com $\Lambda_{\geq 1}(\mathbb{L}_0)$ é finito e*

$$\mu_{\mathbb{L}_0}(\ell) = \sum_{t \in (a,b)} sgn(\ell'(t)|_{\ell(t) \cap \mathbb{L}_0}).$$

Demonstração: Por um argumento análogo ao corolário anterior juntamente com o lema 2.3.2 temos que: Se $t_0 \in (a,b)$ é tal que $\ell(t_0) \in \Lambda_{\geq 1}(\mathbb{L}_0)$, então para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno nos temos que $\beta(t)$ é não degenerado para $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0) \cup (t_0, t_0 + \varepsilon]$ e

$$\begin{aligned} n_+(\beta(t_0 + \varepsilon)) &= n_+(\beta(t_0)) + n_+(\beta'(t_0)|_{ker(\beta(t_0))}) \\ n_+(\beta(t_0 - \varepsilon)) &= n_+(\beta(t_0)) + n_-(\beta'(t_0)|_{ker(\beta(t_0))}), \end{aligned}$$

onde $\beta = \phi_{\mathbb{L}_0, \mathbb{L}_1} \circ \ell$ definida no intervalo $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ e $\mathbb{L}_1$ é qualquer lagrangiano transversal a ambos $\ell(t_0)$ e $\mathbb{L}_0$. Em particular as intersecções são isoladas. Pela observação 2.1.3 temos que $\ell'(t_0) = \beta'(t_0)$ em $\ell(t) \cap \mathbb{L}_0 = ker(\beta(t_0))$, logo

$$\mu_{\mathbb{L}_0}(\ell) = \sum_{t \in (a,b)} n_+(\beta(t_i + \varepsilon)) - n_+(\beta(t_i - \varepsilon)) = \sum_{t \in (a,b)} sng(\ell'(t)).$$

Q.E.D.

Lema 2.4.1. *Sejam $\mathbb{L}, \mathbb{L}_*, \mathbb{L}_0, \mathbb{L}_1$ quatro subespaços lagrangianos de $\mathbb{V}$ tais que:*

- $\mathbb{L}_0 \cap \mathbb{L}_1 = \{0\}$*;*
- $\mathbb{L} \cap \mathbb{L}_0 = \{0\}$*;*
- $\mathbb{L}_* \cap \mathbb{L}_0 = \mathbb{L}_* \cap \mathbb{L} = \{0\}$.

Então

$$\phi_{\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_0}(\mathbb{L}_*) - \phi_{\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_0}(\mathbb{L}) = (\mathcal{D}_{\mathbb{L}_0, \mathbb{L}_1})^* \circ \phi_{\mathbb{L}_0, \mathbb{L}_*}(\mathbb{L})^{-1} \circ \mathcal{D}_{\mathbb{L}_0, \mathbb{L}_1}. \tag{2.6}$$

Demonstração: Sejam $T, S\colon \mathbb{L}_1 \to \mathbb{L}_0$, $U\colon \mathbb{L}_0 \to \mathbb{L}_*$ mapas lineares tais que

$$Graf_{\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_0}(T) = \mathbb{L}_*, Graf_{\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_0}(S) = \mathbb{L}, Graf_{\mathbb{L}_0, \mathbb{L}_*}(U) = \mathbb{L}.$$

Observe que U é inversível, pois $ker(U) = \mathbb{L}_0 \cap \mathbb{L} = \{0\}$.Daí, $\forall v \in \mathbb{L}_1$,

$$S(v) - T(v) = U^{-1}(v + T(v)),$$

pois $\mathbb{L} \ni v + S(v) = \overbrace{S(v) - T(v)}^{\in \mathbb{L}_0} + \overbrace{v + T(v)}^{\in \mathbb{L}_*}$, e também existe um único $x \in \mathbb{L}_0$ tal que $v + S(v) = x + U(x)$, portanto $x = S(v) - T(v)$ e $v + T(v) = U(S(v) - T(v))$. Também, $\forall v \in \mathbb{L}_1$,

$$\mathcal{D}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_*}(v + T(v)) = \omega(v + \overbrace{T(v)}^{\in \mathbb{L}_0}, \cdot)|_{\mathbb{L}_0} = \omega(v, \cdot)|_{\mathbb{L}_0} = \mathcal{D}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1}(v).$$

Portanto

$$\begin{aligned}\phi_{\mathbb{L}_1,\mathbb{L}_0}(\mathbb{L}) - \phi_{\mathbb{L}_1,\mathbb{L}_0}(\mathbb{L}_*) = \mathcal{D}_{\mathbb{L}_1,\mathbb{L}_0}(S) - \mathcal{D}_{\mathbb{L}_1,\mathbb{L}_0}(T) = \mathcal{D}_{\mathbb{L}_1,\mathbb{L}_0}(S - T) = \\ \mathcal{D}_{\mathbb{L}_1,\mathbb{L}_0}(U^{-1} \circ (id_{\mathbb{L}_1} + T)) = \mathcal{D}_{\mathbb{L}_1,\mathbb{L}_0} \circ \phi_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_*}(\mathbb{L})^{-1} \circ \mathcal{D}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_*} \circ (id_{\mathbb{L}_1} + T) = \\ \mathcal{D}_{\mathbb{L}_1,\mathbb{L}_0} \circ \phi_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_*}(\mathbb{L})^{-1} \circ \mathcal{D}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1}.\end{aligned}$$

Como $\mathcal{D}_{\mathbb{L}_1,\mathbb{L}_0} = -(\mathcal{D}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1})^*$ concluímos a demostração.

Q.E.D.

Corolário 2.4.3. *Nas mesma condições do lama anterior, temos*

$$n_+(\phi_{\mathbb{L}_1,\mathbb{L}_0}(\mathbb{L}_*) - \phi_{\mathbb{L}_1,\mathbb{L}_0}(\mathbb{L})) = n_+(\phi_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_*}(\mathbb{L})).$$

Demonstração: $n_+(\phi_{\mathbb{L}_1,\mathbb{L}_0}(\mathbb{L}_*) - \phi_{\mathbb{L}_1,\mathbb{L}_0}(\mathbb{L})) = n_+((\mathcal{D}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1})^* \circ \phi_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_*}(\mathbb{L})^{-1} \circ \mathcal{D}_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1}) = n_+(\phi_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_*}(\mathbb{L})^{-1}) = n_+(\phi_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_*}(\mathbb{L}))$. Lembre que $\phi_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_*}(\mathbb{L})$ é simétrica e portanto a última igualdade segue da Lei de Inercia de Sylvester (ver em qualquer livro de álgebra linear).

Q.E.D.

Observação 2.4.1. *Diretamente da definição 2.1.1 segue que*

$$\mathbb{L} \cap \mathbb{L}_* = \{0\} \Rightarrow \phi_{\mathbb{L}_1,\mathbb{L}_0}(\mathbb{L}_*) - \phi_{\mathbb{L}_1,\mathbb{L}_0}(\mathbb{L}) \text{ é não degenerada.}$$

O resultado a seguir será usado diretamente na demonstração do resultado principal.

Proposição 2.4.2. *Sejam $\mathbb{L}_0, \mathbb{L}_1 \in \Lambda$ com $\mathbb{L}_0 \cap \mathbb{L}_1 = \{0\}$, e seja $\ell\colon [a, b] \to \Lambda$ curva contínua tal que $\ell(t) \in \Lambda_0(\mathbb{L}_0)$ exceto possivelmente para $t = t_0 \in (a, b)$. Seja $\mathbb{L}_* \in \Lambda$ transversal a ambos $\ell(t_0)$ e $\mathbb{L}_0$. Então, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, nos temos*

$$\mu_{\mathbb{L}_0}(\ell) = n_-(\phi_{\mathbb{L}_1,\mathbb{L}_0}(\ell(t_0 + \varepsilon)) - \phi_{\mathbb{L}_1,\mathbb{L}_0}(\mathbb{L}_*)) - n_-(\phi_{\mathbb{L}_1,\mathbb{L}_0}(\ell(t_0 - \varepsilon)) - \phi_{\mathbb{L}_1,\mathbb{L}_0}(\mathbb{L}_*)). \tag{2.7}$$

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$ tal que $\ell(t) \in \Lambda_0(\mathbb{L}_*), \forall t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$. Desde que t_0 é o único instante no qual ℓ intersecta (possivelmente) $\Lambda_{\geq 1}(\mathbb{L}_0)$, então $\mu_{\mathbb{L}_0}(\ell) = \mu_{\mathbb{L}_0}(\ell|_{[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]})$. Usando a proposição 2.4.1 temos que

$$\mu_{\mathbb{L}_0}(\ell|_{[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]}) = n_+(\phi_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_*}(\ell(t_0 + \varepsilon))) - n_+(\phi_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_*}(\ell(t_0 - \varepsilon))).$$

A conclusão segue por aplicar o corolário anterior duas vezes, uma para $\mathbb{L} = \ell(t_0 + \varepsilon)$ e outra para $\mathbb{L} = \ell(t_0 - \varepsilon)$.

Q.E.D.

3 O ÍNDICE DE MASLOV DE UMA GEODÉSICA SEMI-RIEMANNIANA

Reservamos este capítulo para estudar os campos $\mathcal{P}$-Jacobi ao longo de uma geodésica e, a partir deles, definir os Índices Focal (que depende da geometria) e de Maslov (que depende da topologia) de uma geodésica semi-Riemanniana. Em certas condições, esses dois índices coincidem. As referências para este capítulo são [4] seções 2 e 5, e [1] seções 2 e 3.2.

Seja $(\mathcal{M}, g)$ uma variedade Semi-Riemanniana de dimensão n com o tensor métrico g de índice k, isto é,

$$n_-(g) = k.$$

Denotaremos por ∇ a conexão de Levi-Civita de g e por $\mathcal{R}$ o correspondente tensor curvatura com a seguinte escolha de sinal:

$$\mathcal{R}(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}.$$

3.1 O Índice Focal

Sejam $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}$ uma subvariedade e $\gamma\colon [a, b] \to \mathcal{M}$ uma geodésica com $\gamma(a) \in \mathcal{P}$ e $\gamma'(a) \in T_{\gamma(a)}\mathcal{P}^{\perp}$, onde $\perp$ denota ortogonalidade com respeito a g. Assumiremos que $\mathcal{P}$ é não degenerada em $\gamma(a)$, isto é, a restrição da forma bilinear $g(\gamma(a))$ ao subespaço $T_{\gamma(a)}\mathcal{P} \subset T_{\gamma(a)}\mathcal{M}$ é não degenerada. Para $p \in \mathcal{P}$ e $n \in T_p\mathcal{P}^{\perp}$, a *Segunda Forma Fundamental* $\mathcal{S}_n^{\mathcal{P}}$ é a forma bilinear em $T_p\mathcal{P}$ definido por

$$\mathcal{S}_n^{\mathcal{P}}(v_1, v_2) = g(\nabla_{v_1} V_2, n),$$

onde V_2 é qualquer campo suave em $\mathcal{P}$ tal que $V_2(p) = v_2$. Desde que $\mathcal{P}$ é não degenerado em $\gamma(a)$, então $\mathcal{S}_n^{\mathcal{P}}$ pode ser pensada como um endomorfismo g-simétrico em $T_{\gamma(a)}\mathcal{P}$. Mais precisamente, dado $v_1 \in T_p\mathcal{P}$, $\mathcal{S}_n^{\mathcal{P}}(v_1)$ é o único vetor de $T_p\mathcal{P}$ tal que $\mathcal{S}_n^{\mathcal{P}}(v_1, v_2) = g(p)(\mathcal{S}_n^{\mathcal{P}}(v_1), v_2)$, $\forall v_2 \in T_p\mathcal{P}$. Um *Campo de Jacobi* ao longo de γ é um campo vetorial suave J ao longo de γ satisfazendo a equação diferencial linear de segunda ordem

$$D_t^2 J = \mathcal{R}(\dot\gamma, J)\dot\gamma,$$

onde D_t denota a derivada covariante ao logo de γ. Um *Campo $\mathcal{P}$-Jacobi* é uma Campo de Jacobi que satisfaz a seguinte condição inicial

$$J(a) \in T_{\gamma(a)}\mathcal{P}, \quad \text{e} \quad D_t J(a) + \mathcal{S}^{\mathcal{P}}_{\gamma'(a)}(J(a)) \in T_{\gamma(a)}\mathcal{P}^{\perp}.$$

Relembre que campos $\mathcal{P}$-Jacobi são campos variacionais correspondente a variação de γ por geodésicas que começam ortogonal a $\mathcal{P}$.

Definição 3.1.1. *Denotaremos por $\Im$ o espaço vetorial dos campos $\mathcal{P}$-Jacobi ao longo de γ. Das condições iniciais de um campo $\mathcal{P}$-Jacobi temos que dim$(\Im) = n$. Para todo $t \in [a,b]$ definimos o conjunto*

$$\Im(t) = \{J(t) | \, J \in \Im\} \subset T_{\gamma(t)}\mathcal{M}.$$

Um ponto $\gamma(t)$, com $t \in (a,b]$, é dito $\mathcal{P}$-focal se existe um campo não nulo $J \in \Im$ tal que $J(t) = 0$, equivalentemente, se $\Im(t) \neq T_{\gamma(t)}\mathcal{M}$. A multiplicidade mul$(t)$ de uma ponto $\mathcal{P}$-focal $\gamma(t)$ é a dimensão do espaço dos $J \in \Im$ tais que $J(t) = 0$. Note que a multiplicidade de $\gamma(t)$ coincide com a codimensão de $\Im(t)$ em $T_{\gamma(t)\mathcal{M}}$. Definimos o Índice Geométrico $i_{geo}(\gamma)$ de γ por

$$i_{geo}(\gamma) = \sum_{t \in (a,b]} mul(t).$$

A assinatura sng(t) de um ponto $\mathcal{P}$-focal $\gamma(t)$ é a assinatura da restrição de g à $\Im(t)^{\perp}$:

$$sng(t) = sng(g|_{\Im(t)^{\perp}}).$$

Um ponto $\mathcal{P}$-focal $\gamma(t)$ é dito não degenerada se tal restrição for não degenerada. Se existem apenas um número finito de pontos $\mathcal{P}$-focais ao longo de γ, definimos o Índice Focal $i_{foc}(\gamma)$ de γ como a soma das assinaturas de todos os pontos $\mathcal{P}$-focais ao longo de γ:

$$i_{foc}(\gamma) = \sum_{t \in (a,b]} sng(t).$$

Se $(\mathcal{M}, g)$ for Riemanniana ($k = 0$), é claro que todo ponto $\mathcal{P}$-focal (se existir) é não degenerado e sua multiplicidade coincide com sua assinatura. Se $(\mathcal{M}, g)$ for Lorentziana ($k = 1$) e γ for uma curva causal, isto é, $g(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)) \leq 0$ para todo t, então todos os pontos $\mathcal{P}$-focais são não degenerados e sua multiplicidade coincide com sua assinatura. De fato, como $\dot\gamma \in \Im$ e $\dot\gamma(t) \neq 0$ (supondo γ não constante), então g é positiva definida em $\Im(t)^{\perp}$. Portanto, tanto no caso Riemanniano quando no caso Lorenziado causal, o Índice Geométrico conincide com o Índice focal.

Lema 3.1.1. *Dados $J_1, J_2 \in \Im$, então*

$$g(J_1(t), D_t J_2(t)) = g(D_t J_1(t), J_2(t)), \quad \forall t \in [a,b]. \tag{3.1}$$

Demonstração: Segue do fato de que $f(t) = g(J_1(t), D_t J_2(t)) - g(D_t J_1(t), J_2(t))$ é constante e que $f(a) = 0$.

- $f'(t) = g(D_t^2 J_1(t), J_2(t)) + g(D_T J_1(t), D_t J_2(t)) - g(D_t J_1(t), D_t J_2(t)) - g(J_1(t), D_t^2 J_2(t))$ $= g(\mathcal{R}(\dot\gamma, J_1(t))\dot\gamma, J_2(t)) - g(J_1(t), \mathcal{R}(\dot\gamma, J_2(t))\dot\gamma) = 0.$

- Sejam $V_1 := D_t J_1(a) + \mathcal{S}^{\mathcal{P}}_{\dot\gamma(a)}(J_1(a)), V_2 := D_t J_2(a) + \mathcal{S}^{\mathcal{P}}_{\dot\gamma(a)}(J_2(a)) \in T_{\gamma(a)}\mathcal{P}^{\perp}$, então $f(a) = g(J_1(a), D_t J_2(a)) - g(D_t J_1(a), J_2(a)) = g(J_1(a), V_2 - \mathcal{S}^{\mathcal{P}}_{\dot\gamma(a)}(J_2(a))) -$ $g(V_1 - \mathcal{S}^{\mathcal{P}}_{\dot\gamma(a)}(J_1(a)), J_2(a)) = -g(J_1(a), \mathcal{S}^{\mathcal{P}}_{\dot\gamma(a)}(J_2(a))) + g(\mathcal{S}^{\mathcal{P}}_{\dot\gamma(a)}(J_1(a)), J_2(a)) = 0$, pois $\mathcal{S}^{\mathcal{P}}_{\dot\gamma(a)}$ é simétrico com relação a g.

Q.E.D.

Escolhendo uma trivialização paralela para $T\mathcal{M}$ ao longo de γ, podemos identificar campos ao longo de γ com curvas no $\mathbb{R}^n$, g com uma forma bilinear simétrica (constante) em $\mathbb{R}^n$ (também denotaremos por g), $T_{\gamma(a)}\mathcal{P}$ com um subespaço $P \subset \mathbb{R}^n$, a segunda forma fundamental $\mathcal{S}^{\mathcal{P}}_{\dot\gamma(a)}$ com uma forma bilinear simétrica S em P e o tensor curvatura $\mathcal{R}(\dot\gamma, \cdot)\dot\gamma$ ao longo de γ com uma curva de endomorfismos simétricos (com relação a g) $R\colon [a,b] \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Também, $\mathfrak{I}$ tem o seu correspondente espaço de curvas suaves $\mathbb{J}$ em $\mathbb{R}^n$. Desde que a derivação covariante ao longo de γ é levada na derivação usual no $\mathbb{R}^n$, então $J \in \mathbb{J}$ se e somente se

$$J''(t) = R(t)(J(t)) \tag{3.2}$$

$$J(a) \in P, \quad J'(a) + S(J(a)) \in P^{\perp}. \tag{3.3}$$

Observação 3.1.1. *Escrevendo a equação (3.2) como uma EDO de primeira ordem (Sistema de Morse-Sturm),*

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ R(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{3.4}$$
$$x_0 \in P, \quad y_0 + S(x_0) \in P^{\perp}.$$

Da teoria das EDO's Lineares (ver [21]) existe uma curva de matrizes inversíveis $t \mapsto \xi(t)$, chamada de Matriz fundamental do sistema, tal que as soluções de (3.4) são da forma

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \xi(t) \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}. \tag{3.5}$$

Além disso, ξ satisfaz

$$\xi'(t) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ R(t) & 0 \end{bmatrix} \cdot \xi(t), \quad \xi(a) = I_{2n \times 2n}$$

Portanto será conveniente pensar $\mathbb{J}$ como o conjunto das curvas

$$(J(t), J'(t)) = \xi(t) \cdot (J(a), J'(a)) \in \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n \tag{3.6}$$

que satisfazem (3.2) e (3.3), pois, para cada $t \in [a,b]$ fixado, $dim(\{(J(t), J'(t)) |\, J \in \mathbb{J}\}) = n$.

Observação 3.1.2. *Dizemos que $t \in (a, b]$ é um instante (P, S)-focal se existir $J \in \mathbb{J}$ não identicamente nulo tal que $J(t) = 0$. Então t é um instante (P, S)-focal se e somente se $\gamma(t)$ for ponto $\mathcal{P}$-focal. Definimos $\mathbb{J}(t) = \{J(t) \in \mathbb{R}^n | \, J \in \mathbb{J}\}$. Claramente as multiplicidades de assinaturas de pontos $\mathcal{P}$-focais podem ser calculadas via $\mathbb{J}(t)$.*

Proposição 3.1.1. *Não existe instante (P, S)-focal t próximo de a. Pontos (P, S)-focais não degenerados são isolados.*

Demonstração: Seja $t_0 \in (a, b]$ um instante (P, S)-focal não degenerado com $mul(t) = n - k > 0$. Seja $\{J_1, \ldots, J_n\}$ base de $\mathbb{J}$ tal que $\{J_1(t_0), \ldots, J_k(t_0)\}$ é base para $\mathbb{J}(t_0)$ e $J_{k+1}(t_0) = 0, \ldots, J_n(t_0) = 0$. Os vetores $J'_{k+1}(t_0), \ldots, J'_n(t_0)$ formam uma base para $\mathbb{J}(t_0)^{\perp}$. Para ver isso, observe primeiro que $J'_{k+1}(t_0), \ldots, J'_n(t_0) \subset \mathbb{J}(t_0)^{\perp}$, pois se $i = 1, \ldots, k$ e $j = k + 1, \ldots, n$ temos pela equação (3.1) que

$$g(J'_j(t_0), J_i(t_0)) = g(J_j(t_0), J'_i(t_0)) = g(0, J'_j(t_0)) = 0.$$

Também, pela observação 3.1.1, temos que $\{(0, J'_{k+1}(t_0)), \ldots, (0, J'_n(t_0))\} \subset \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$ é um conjunto linearmente independente. Como $dim(\mathbb{J}(t_0)^{\perp}) = mul(t_0) = n - k$, segue que $J'_{k+1}(t_0), \ldots, J'_n(t_0)$ é base para $\mathbb{J}(t_0)^{\perp}$.

Agora definimos os campos contínuos $\widetilde{J}_1, \ldots, \widetilde{J}_n$ por:

$$\widetilde{J}_j = J_j, \quad \text{se } j = 1, \ldots, k$$

e

$$\widetilde{J}_i(t) = \begin{cases} \frac{J_i(t)}{t - t_0}, & \text{se } t \neq t_0 \\ J'_i(t_0) & \text{se } t = t_0 \end{cases},$$

para $i = k+1, \ldots, n$. Como g é não degenerada em $\mathbb{J}(t_0)$, então $\mathbb{R}^n = \mathbb{J}(t_0) \oplus \mathbb{J}(t_0)^{\perp}$ e portanto $\widetilde{J}_1(t_0), \ldots, \widetilde{J}_n(t_0)$ forma uma base para $\mathbb{R}^n$. Da continuidade segue que $\{\widetilde{J}_1(t), \ldots, \widetilde{J}_n(t)\}$ também é base para $\mathbb{R}^n$ (em particular $\{J_1(t), \ldots, J_n(t)\}$ é base), para t suficientemente próximo de t_0. Isto significa que se t está suficientemente próximo de t_0, então t não é instante (P, S)-focal.

O caso $t_0 = a$ é análogo, uma vez que $P = \mathbb{J}(a)$ e g é não degenerada em P.

Q.E.D.

Observação 3.1.3. *O conjunto dos instantes (P, S)-focais é precisamente o conjuntos dos zeros da função $r(t) = det(J_1(t), \ldots, J_n(t))$.*

Corolário 3.1.1. *Não existe ponto $\mathcal{P}$-focal $\gamma(t)$ próximo de $\gamma(a)$. Pontos $\mathcal{P}$-focais não degenerados são isolados. Além disso, se $(\mathcal{M}, g)$ for analítica real, então o conjunto dos pontos $\mathcal{P}$-focais é finito.*

Demonstração: A primeira parte segue diretamente da proposição anterior e da observação 3.1.2. Agora, se $(\mathcal{M}, g)$ for analítica real, a função $r(t)$ como na observação 3.1.3 será também analítica real e definida no intervalo compacto $[a, b]$. Portanto seu conjunto de zeros é finito.

Q.E.D.

3.2 O Índice de Maslov de uma Geodésica Semi-Riemanniana

Iremos considerar a estrutura simplética canônica ω do espaço vetorial $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n \oplus (\mathbb{R}^n)^*$ dada por

$$\omega((v_1, \alpha_1), (v_2, \alpha_2)) = \alpha_2(v_1) - \alpha_1(v_2). \tag{3.7}$$

Observação 3.2.1. *Identificando $\mathbb{R}^n \cong (\mathbb{R}^n)^*$ de maneira canônica, a forma ω fica determinada pela matriz*

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.8}$$

Daí para que $\phi = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$ seja um simplectomorfismo, isto é,

$$\begin{bmatrix} E^T & G^T \\ F^T & H^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix},$$

é necessário e suficiente que $G^T E = E^T G$, $H^T F = F^T H$ e $EH^T - G^T F = I$.

Para cada $t \in [a, b]$ nos definimos o espaço n-dimensional $\ell(t) \subset \mathbb{V}$ por

$$\ell(t) = \{(J(t), g(J'(t)))| \, J \in \mathbb{J}\}, \tag{3.9}$$

onde g é pensado como um isomorfismo linear $\mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^*$. Pelo lema 3.1.1 temos que ℓ é uma curva de subespaços lagrangianos de $(\mathbb{V}, \omega)$. Considere $\mathbb{L}_0 = \{0\} \oplus (\mathbb{R}^n)^*$. Note que t_0 é um instante (P, S)-focal se, e somente se, $\ell(t_0) \cap \mathbb{L}_0 \neq \{0\}$. Também $mul(t_0) = dim(\ell(t_0) \cap \mathbb{L}_0)$. Se b não for um instante (P, S)-focal, então pela proposição 3.1.1 e pela definição 2.3.2 podemos definir o Índice de Maslov da geodésica γ usando a restrição $\ell|_{[a+\varepsilon, b]}$ com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Definição 3.2.1. *Suponha que $\gamma(b)$ não é um ponto $\mathcal{P}$-focal. O Índice de Maslov $i_{Maslov}(\gamma)$ da geodésica γ é definido como*

$$i_{Maslov}(\gamma) = \mu_{\mathbb{L}_0}(\ell|_{[a+\varepsilon, b]}), \tag{3.10}$$

onde $\varepsilon > 0$ é escolhido de modo que $\gamma(t)$ não seja ponto $\mathcal{P}$-focal, para todo $t \in (a, a + \varepsilon]$.

É claro que esta definição não depende do ε escolhido. Para torna-la mais precisa precisamos da seguinte proposição.

Proposição 3.2.1. *O termo do lado direito da equação 3.10 não depende da escolha de trivialização paralela de $T\mathcal{M}$ ao longo de γ.*

Demonstração: Seja $\widetilde{\ell}\colon [a,b] \to \Lambda(\mathbb{R}^n \oplus (\mathbb{R}^n)^*, \omega)$ outra curva de lagrangianos obtidos por outra escolha de trivialização paralela de $T\mathcal{M}$ ao longo de γ. Seja $s\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o isomorfismo linear que relaciona essas duas trivializações paralelas. Então a relação entre $\widetilde{\ell}$ e ℓ é

$$\widetilde{\ell} = \sigma \circ \ell,$$

onde $\sigma\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ é o simplectomorfismo dado por $\sigma(v,\alpha) = (s(v), (s^*)^{-1}(\alpha))$. Note que σ fixa o lagrangiano $\mathbb{L}_0$. Portanto, pela observação 2.3.1 temos que ambas as curvas $\widetilde{\ell}$ e ℓ definem a mesma classe de homologia em $H_1(\Lambda, \Lambda_0(\mathbb{L}_0))$.

Q.E.D.

Proposição 3.2.2. *Suponha que $\gamma(b)$ não é ponto $\mathcal{P}$-focal e que todo ponto $\mathcal{P}$-focal é não degenerado. Então*

$$i_{Maslov}(\gamma) = i_{foc}(\gamma).$$

Demonstração: Primeiro, o conjunto dos instantes (P,S)-focais é um subconjunto finito de $[a,b]$ e nenhum deles é igual a a ou a b. De fato, suponha por absurdo que existam $t_n \in [a,b], n \in \mathbb{N}$ instantes (P,S)-focais. A menos de tomar uma subsequência, podemos supor que $t_n \to t \in [a,b]$. Seja $r(t)$ como na observação 3.1.3. então $r(t_n) = 0, \forall n$, e pela continuidade temos que $r(t) = 0$ e isto implica que t é ponto (P,S)-focal. Porém, como todo instante (P,S)-focal é não degenerado, pela proposição 3.1.1 temos que t é isolado, o que é uma contradição. Portanto $i_{foc}(\gamma)$ está bem definido.

Agora, pelo corolário 2.4.2, resta ver que $sng(\ell'(t_0)|_{\ell(t_0)\cap\mathbb{L}_0}) = sng(g|_{\mathbb{J}^\perp})$ sempre que $t_0 \in (a,b)$ for um instante (P,S)-focal. Temos que

$$\ell(t_0) \cap \mathbb{L}_0 = \{(0, g(J'(t_0))) |\, J \in \mathbb{J}, J(t_0) = 0\} = \{0\} \oplus g(\mathbb{J}(t_0)^\perp),$$

onde a última igualdade segue do que foi visto na demonstração da proposição 3.1.1. Pela observação 3.1.1 temos que

$$\ell(t) = G\xi(t)G^{-1}(\ell(a)), \tag{3.11}$$

onde a matriz $G = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix}$ é pensado como um mapa $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \oplus (\mathbb{R}^n)^*$ e $\ell(a) = \{(x_0, g(y_0)) | \, x_0 \in P, y_0 + S(x_0) \in P^\perp\}$.
Afirmação: $G\xi(t)G^{-1} \in Sp(\mathbb{V}, \omega), \forall t \in [a, b]$.

Demonstração da Afirmação: Seja $\{(L_1, L_1'), \dots, (L_{2n}, L_{2n}')\}$ base para o espaço das soluções do problema de Cauchy (3.4) com condições iniciais livres. Por analogia à demonstração do lema 3.1.1, temos que $f(t) = \omega((L_i(t), g(L_i'(t))), (L_j(t), g(L_j'(t))))$ é constante para quaisquer $i, j = 1, \dots, 2n$. Também $G\xi(t)G^{-1}(L_i(a), g(L_i'(a))) = (L_i(t), g(L_i'(t)))$ para qualquer $i = 1, \dots, 2n$. Como

$$\{(L_1(a), g(L_1'(a))), \dots, (L_{2n}(a), g(L_{2n}'(a)))\}$$

é base de $\mathbb{R}^n \oplus (\mathbb{R}^n)^*$ temos que $G\xi(t)G^{-1} \in Sp(\mathbb{V}, \omega)$, pois

$$\begin{aligned} \omega(G\xi(t)G^{-1}(L_i(a), g(L_i'(a))), G\xi(t)G^{-1}(L_j(a), g(L_j'(a)))) &= \\ \omega((L_i(t), g(L_i'(t))), (L_j(t), g(L_j'(t)))) &= \\ \omega((L_i(a), g(L_i'(a))), (L_j(a), g(L_j'(a)))) & \end{aligned}$$

Q.E.D.

Seja $\Psi(t) = G\xi(t)G^{-1}$ e $H \in sp(\mathbb{V}, \omega)$ tal que $\frac{d}{dt}(\Psi(t)) = dR_{\Psi(t)}(id)[H]$. Mais precisamente,

$$H = \begin{bmatrix} 0 & g^{-1} \\ gR(t) & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.12}$$

Usando a formula (2.1) temos que, para $(0, g(x)), (0, g(y)) \in \{0\} \oplus g(\mathbb{J}^\perp)$,

$$\begin{aligned} \ell'(t)((0, g(x)), (0, g(y))) = \frac{d}{dt}(\kappa_{\ell(a)}(\Psi(t))((0, g(x)), (0, g(y))) &= \\ d\kappa_{\ell(a)}(\Psi(t))[dR_{\Psi(t)}(id)[H]]((0, g(x)), (0, g(y))) &= \\ \omega(H(0, g(x)), (0, g(y))) = \omega((x, 0), (0, g(y))) = g(y, x) = g(x, y). & \end{aligned}$$

Q.E.D.

4 SISTEMAS SIMPLÉTICOS

4.1 Sistemas Simpléticos

Relembre que um elemento $X \in sp(\mathbb{R}^n \oplus (\mathbb{R}^n)^*, \omega)$ é um endomorfismo de $\mathbb{R}^n \oplus (\mathbb{R}^n)^*$ tal que $\omega(X(\cdot), \cdot)$ é simétrica. Na forma de matriz em bloco, X é da forma

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{bmatrix}, \tag{4.1}$$

onde $A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um mapa linear arbitrário e $B \colon (\mathbb{R}^n)^* \to \mathbb{R}^n, C \colon \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^*$ são simétricos vistos como formas bilineares.

Definição 4.1.1. *Um Sistema diferencial Simplético (ou apenas Sistema Simplético) em $\mathbb{R}^n$ é um sistema diferencial linear de primeira ordem em $\mathbb{R}^n \oplus (\mathbb{R}^n)^*$ cuja matriz dos coeficientes $X(t)$ é uma curva contínua, definida num intervalo $[a, b]$, em $sp(\mathbb{R}^n \oplus (\mathbb{R}^n)^*, \omega)$, onde os blocos $A(t), B(t)$ são de classe C^1 e $B(t)$ é invertível para todo $t \in [a, b]$:*

$$\begin{bmatrix} v'(t) \\ \alpha'(t) \end{bmatrix} = X(t) \begin{bmatrix} v(t) \\ \alpha(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t)v(t) + B(t)\alpha(t) \\ C(t)v(t) - A^*(t)\alpha(t) \end{bmatrix}, \tag{4.2}$$
$$t \in [a, b], v(t) \in \mathbb{R}^n, \alpha(t) \in (\mathbb{R}^n)^*.$$

Dizemos que uma curva $v \colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 é uma X-solução se existir uma curva $\alpha \colon [a, b] \to (\mathbb{R}^n)^*$ de classe C^1 tal que o par (v, α) é solução do sistema (4.2).

Uma vez que A e B são de classe C^1, a igualdade $v'(t) = A(t)v(t) + B(t)\alpha(t)$ nos dá que se v é uma X-solução, então é de classe C^2 e a única α_v tal que o par (v, α_v) é solução do sistema (4.2) é dada por

$$\alpha_v = B^{-1}(v' - Av). \tag{4.3}$$

Denotaremos por $\mathbb{V}_X$ o conjunto das X-soluções que se anulam em $t = a$:

$$\mathbb{V}_X = \{v | \, v \text{ é } X\text{-solução e } v(a) = 0\}.$$

Em particular, $dim(\mathbb{V}_X) = n$.

Lema 4.1.1. *Dados $v, w \in \mathbb{V}_X$, vale*

$$\alpha_v(w) = \alpha_w(v).$$

Demonstração: Em $t = a$ temos que $v(a) = 0 = w(a)$, assim $\alpha_v(a)(w(a)) = 0 = \alpha_w(a)(v(a))$. Para concluir, basta ver que $(\alpha_v(t)(w(t)))' = (\alpha_w(t)(v(t)))'$, isto é, $(\alpha_v(t)(w(t)))'$ é simétrico com relação a v e w independentemente de t. No que segue omitiremos a variável de derivação t para simplificar:

- $(\alpha_v(w))' = \alpha_v'(w) + \alpha_v(w') = (Cv - A^*\alpha_v)(w) + B^{-1}(v' - Av)(w') = \overbrace{C(v,w) + B^{-1}(v',w')}^{\text{simétrico}} - [A^*(\alpha_v)(w) + B^{-1}(Av,w')]$;
- $A^*(\alpha_v)(w) + B^{-1}(Av,w') = \alpha_v(Aw) + B^{-1}(Av, Aw + B(\alpha_w)) = \alpha_v(Aw) + B^{-1}(Av,Aw) + B^{-1}(Av, B(\alpha_w)) = \overbrace{\alpha_v(Aw) + B^{-1}(Av,Aw) + \alpha_w(Av)}^{\text{simétrico}}$.

Q.E.D.

Para cada $t \in [a,b]$ definimos o subespaço

$$\mathbb{V}_X(t) = \{v(t) |\, v \in \mathbb{V}_X\}.$$

Pelo lema 4.1.1, se $v(t) = 0$ então $\alpha_v(t) \in \mathbb{V}_X(t)^0$, e como $dim(\mathbb{V}_X(t)^0) = n - dim(\mathbb{V}_X(t))$ segue que

$$\mathbb{V}_X(t)^0 = \{\alpha_v(t) |\, v \in \mathbb{V}_X, v(t) = 0\} \tag{4.4}$$

Definição 4.1.2. *Um instante $t \in [a,b]$ é dito ser focal se existir $v \in \mathbb{V}_X$ não nulo tal que $v(t) = 0$, isto é, $\mathbb{V}_X(t) \neq \mathbb{R}^n$. A multiplicidade $mul(t)$ do instante focal t é definido como sendo a dimensão do espaço dos $v \in \mathbb{V}_X$ que se anulam em t, ou equivalentemente, a codimensão de $\mathbb{V}_X(t)$ em $\mathbb{R}^n$. A assinatura $sng(t)$ do instante focal t é a assinatura da restrição de $B(t)$ ao espaço $\mathbb{V}_X(t)^0$, ou equivalentemente, a restrição de $B(t)^{-1}$ ao complemento $B(t)^{-1}$-ortogonal $\mathbb{V}_X(t)^\perp$ de $\mathbb{V}_X(t)$. O instante focal t é dito não degenerado se tal restrição é não degenerada. Se existem apenas um número finito de instantes focais em $(a,b]$, definimos o Índice Focal $i_{foc} = i_{foc}(X)$ como a soma*

$$i_{foc}(X) = \sum_{t \in (a,b]} sng(t).$$

Definição 4.1.3. *A Forma Índice I_X associado ao sistema simplético (4.2) é a forma bilinear simétrica limitada definida no espaço $H_0^1([a,b];\mathbb{R}^n)$ dado por*

$$I_X(v,w) = \int_a^b B(\alpha_v, \alpha_w) + C(v,w)dt =$$
$$\int_a^b B^{-1}(v' - Av, w' - Aw)) + C(v,w)dt.$$

Do estudo das variações segue que, como $B(t)^{-1}$ é não degenerada para todo $t \in [a,b]$, $ker(I_X) \subset C^2([a,b])$ (ver Apêndice observação A.0.1). Mais precisamente

$$ker(I_X) = \{v \in \mathbb{V}_X |\, v(b) = 0\}. \tag{4.5}$$

De fato: $v, w \in H_0^1([a,b];\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}\int_a^b B(\alpha_w,\alpha_v) + C(w,v)dt = \int_a^b \alpha_v(w' - Aw) + (\alpha_v' + A^*\alpha_v)(w)dt +\\ \int_a^b C(w,v) - (\alpha_v' + A^*\alpha_v)(w)dt =\\ \int_a^b \alpha_v(w') - \alpha_v(Aw) + \alpha_v'(w) + A^*\alpha_v(w)dt + \int_a^b (Cv - \alpha_v' - A^*\alpha_v)(w)dt =\\ \int_a^b \frac{d}{dt}(\alpha_v(w))dt + \int_a^b (Cv - \alpha_v' - A^*\alpha_v)(w)dt = \int_a^b (Cv - \alpha_v' - A^*\alpha_v)(w)dt.\end{aligned}$$

Daí, se $v \in ker(I_X)$, então $0 = \int_a^b (Cv - \alpha_v' - A^*\alpha_v)(w)dt$ para todo $w \in H_0^1([a,b];\mathbb{R}^n)$ e portanto $Cv = \alpha_v' + A^*\alpha_v$.

Observação 4.1.1. *Se B é positivo definido e C é positivo semi-definido, para todo $t \in [a,b]$, então o sistema simplético (4.2) não possui instantes focais.*

De fato: Para $t \in (a,b]$, seja $I_X^t(v,w) = \int_a^t B(\alpha_v,\alpha_w) + C(v,w)dt$. Como antes, $ker(I_X^t) = \{v \in \mathbb{V}_X |\, v(t) = 0\}$. Daí $B > 0$ e $C \geq 0$ implica que $I_X^t(v,v) > 0$ para todo $v \in H^1([a,b];\mathbb{R}^n)$ não nulo, portanto $ker(I_X^t) = \{0\}$.

Existe uma natural noção de isomorfismo entre sistemas diferenciais simpléticos. A seguir enunciaremos esta noção e apresentaremos alguns resultados importante e que serão necessários.

Considere o lagrangiano $\mathbb{L}_0 = \{0\} \oplus (\mathbb{R}^n)^*$. Qualquer elemento $\phi \in Sp(\mathbb{R}^n \oplus (\mathbb{R}^n)^*, \omega, \mathbb{L}_0)$ é da forma

$$\phi = \begin{bmatrix} Z & 0 \\ Z^{*-1}W & Z^{*-1} \end{bmatrix}, \tag{4.6}$$

onde $Z\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo e W é uma forma bilinear simétrica no $\mathbb{R}^n$. Pois, pela Observação 3.2.1, $\phi(\mathbb{L}_0) = \mathbb{L}_0 \Rightarrow F = 0$ e com isto temos que $H = (E^T)^{-1}$. Também, $G = (E^T)^{-1}(G^T E)$.

Definição 4.1.4. *Dois sistemas diferenciais simpléticos com coeficientes X e $\widetilde{X}$ são ditos isomorfos se existe uma curva $\phi\colon [a,b] \to Sp(\mathbb{R}^n \oplus (\mathbb{R}^n)^*, \omega, \mathbb{L}_0)$ de classe C^1, cujo bloco superior não nulo é de classe C^2, tal que*

$$\widetilde{X} = \phi'\phi^{-1} + \phi X \phi. \tag{4.7}$$

Chamamos a curva ϕ de isomorfismo entre X e $\widetilde{X}$.

O lado direito da equação (4.7) sempre define um Sistema Simplético. Calculando ϕ^{-1}, $\phi'\phi^{-1}$ e $\phi X\phi$ obtemos:

- $\phi^{-1} = \begin{bmatrix} Z^{-1} & 0 \\ -WZ^{-1} & Z^T \end{bmatrix}$,
- $\phi'\phi^{-1} = \begin{bmatrix} Z'Z^{-1} & 0 \\ Z^{-T}W'Z^{-1} & (Z^{-T})'Z^T \end{bmatrix}$,
- $\phi X\phi = \begin{bmatrix} ZAZ^{-1} - ZBWZ^{-1} & ZBZ^{-1} \\ \begin{matrix} (Z^{-T}WA + Z^{-T}C)Z^{-1} \\ - \\ (Z^{-T}WB - Z^{-T}A^T)WZ^{-1} \end{matrix} & (Z^{-T}WB - Z^{-T}A^T)Z^T \end{bmatrix}$.

Daí os blocos $\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}$ de $\widetilde{X}$ são:

- $\widetilde{A} = Z'Z^{-1} + ZAZ^{-1} - ZBWZ^{-1}$ de classe C^1,
- $\widetilde{B} = ZBZ^{-1}$ de classe C^1,
- $\widetilde{C} = Z^{-T}(W' + WA + A^TW + C - WBW)Z^{-1}$ de classe C^0.

Resta verificar que o bloco inferior direito é igual a $-\widetilde{A}^*$. Derivando a igualdade $ZZ^{-1} = I$ obtemos que $(Z^{-1})' = -Z^{-1}Z'Z^{-1}$ e assim $(Z^{-T})'Z^T = ((Z^{-1})')^TZ^T = -Z^{-T}(Z')^T = -(Z'Z^{-1})^T$. As demais parcelas são óbvias (lembre que B e W são simétricas).

Proposição 4.1.1. *Sejam X e $\widetilde{X}$ matrizes de coeficientes de sistemas simpléticos isomorfos e seja ϕ um isomorfismo entre X e $\widetilde{X}$. Então os instantes focais correspondentes aos sistemas X e $\widetilde{X}$ são os mesmos e eles têm a mesma multiplicidade e assinatura. Mais ainda, o isomorfismo $v \mapsto Zv$ de $H_0^1([a,b];\mathbb{R}^n)$ leva a forma Índice I_X na forma Índice $I_{\widetilde{X}}$.*

Em particular, sendo finito os instantes focais, $i_{foc}(X) = i_{foc}(\widetilde{X})$.

Demonstração: Seja v uma X-solução. Iremos mostrar que Zv é uma $\widetilde{X}$-solução. Como Z é de classe C^2, então Zv é também de classe C^2 e podemos definir a curva de classe C^1

$$\widetilde{\alpha}_{Zv} = \widetilde{B}^{-1}((Zv)' - \widetilde{A}Zv).$$

Utilizando as expressões obtidas para $\widetilde{A}$ e $\widetilde{B}$ obtemos $\widetilde{\alpha}_{Zv} = Z^{-T}\alpha_v + Z^{-T}Wv$. Para veri-ficar se $(\widetilde{\alpha}_{Zv})' = \widetilde{C}(Zv) - \widetilde{A}^*\widetilde{\alpha}_{Zv}$ basta desenvolver ambos os membros utilizando as igualdades obtidas anteriormente.

Uma vez que Z é uma curva de isomorfismos de $\mathbb{R}^n$ a primeira parte está concluída.

O seguinte cálculo verifica a segunda parte:

$$\begin{aligned}
\widetilde{B}(\tilde{\alpha}_{Zv},\tilde{\alpha}_{Zv})+\widetilde{C}(Zv,Zv)&=\\
((Zv)'-\widetilde{A}Zv)^T\widetilde{B}^{-1}((Zv)'-\widetilde{A}Zv)+v^T(W'+WA+A^TW+C-WBW)v&=\\
(v'-Av+BWv)^TB^{-1}(v'-Av+BWv)+v^TW'v+v^TWAv&\\
+v^TA^TWv+v^TCv-v^TWBWv&=\\
(v'-Av)^TB^{-1}(v'-Av)+v^TCv+(v^TWv)'=B(\alpha_v,\alpha_v)+C(v,v)+(W(v,v))'&
\end{aligned}$$

Q.E.D.

4.2 Sistemas de Morse-Sturm

Uma classe especial de Sistemas Simpléticos são os Sistemas de Morse-Sturm que são equações diferenciais de segunda ordem no $\mathbb{R}^n$ do tipo $g^{-1}(gv')'=Rv$, onde $g(t)$ é uma C^1-curva de formas bilineares simétricas não degeneradas em $\mathbb{R}^n$ e $R(t)$ é uma curva contínua de operadores no $\mathbb{R}^n$ tal que $g(t)(R(t)\cdot,\cdot)$ é simétrico para todo t. Considerando $\alpha=gv'$ temos o Sistema Simplético, também chamado de Sistema Morse-Sturm

$$\begin{cases} v'=g^{-1}\alpha \\ \alpha'=gRv \end{cases}. \tag{4.8}$$

Compare com o sistema (3.4), no qual g é constante com respeito a t.

Proposição 4.2.1. *Todo Sistema Simplético (4.2) é isomorfo a um Sistema de Morse-Sturm, isto é, um Sistema simplético cuja matriz de coeficientes é da forma* $\widetilde{X}=\begin{bmatrix} 0 & \widetilde{B} \\ \widetilde{C} & 0\end{bmatrix}$.

Se B for de classe C^2, então $\widetilde{B}$ pode ser escolhido constante e igual a matriz

$$\widetilde{B}=\begin{bmatrix} -I_k & 0 \\ 0 & I_{n-k}\end{bmatrix},$$

onde $k=n_-(B)$.

Demonstração: Usando a notação da definição 4.1.4, para a primeira parte da proposição basta considerar $W=0$ e Z satisfazendo $Z'=-ZA, Z(a)=id$.

Agora suponha que $B(t)$ é de classe C^2. Como $B(t)$ é não degenerada para todo t, podemos usar teorema da Inércia de Sysvester e o teorema da aplicação implícita para garantir que existem campos de vetores $e_1(t), \dots, e_n(t)$ no $\mathbb{R}^n$ de classe C^2 tais que, para cada t, formam uma base do $\mathbb{R}^n$ e $B(t)$ nessa base é da forma $\begin{bmatrix} -I_k & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{bmatrix}$. Sejam $Z(t)$ a matriz de mudança de base (em particular é de classe C^2) e $W = 0$. Com isso $\widetilde{B}$ é como queríamos, porem $\widetilde{A}$ é não nulo. Então vamos supor que $B = \begin{bmatrix} -I_k & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{bmatrix}$. Denote por $O(k, n-k)$ o subgrupo do $Gl(n, \mathbb{R})$ consistindo dos mapas que preservam a forma simétrica B e por $o(k, n-k)$ sua álgebra de Lie. Mais precisamente

$$o(k, n-k) = \{H \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) |\, BH = -(BH)^T\}.$$

Agora considere $W = \frac{1}{2}(BA + A^*B)$ e Z satisfazendo $Z' = Z(BW - A), Z(a) = id$. Observe que $BW - A \in o(k, n-k)$, pois

$$\begin{aligned} (B(BW-A))^T = (W-BA)^T = -A^TB + W = \frac{1}{2}(BA - A^TB) &= \\ -\frac{1}{2}(BA + A^TB) + BA &= -B(BW-A). \end{aligned}$$

Portanto Z é uma curva em $O(k, n-k)$ e, em particular, $\widetilde{B} = ZBZ^{-1} = B$. Logo $\widetilde{A} = 0$.

Q.E.D.

Vale comentar que os Sistemas simpléticos aparecem naturalmente como linearizações de sistemas Hamiltonianos e também como equações de Jacobi (ver cap. 3) quando uma trivialização não paralela do fibrado tangente é escolhida. Além disso, a classe dos Sistemas Diferenciais Simpléticos é a classe mais natural para o qual é possível definir uma noção de Índice de Maslov.

4.3 Estabilidade do Índice de Maslov

Nesta seção iremos mostrar um resultado sobre a estabilidade do Índice de Maslov.

Para cada quádrupla (g, R, P, S), onde

- $g \in B_{sym}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ não degenerada;
- $R \in C^0([a, b]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$, $R(t)$ g-simétrico para todo $t \in [a, b]$;
- $P \subset \mathbb{R}^n$ tal que $g|_P$ é não degenerada;
- $S \in B_{sym}(P; \mathbb{R})$;

definimos um sistema como em (3.4) que também será denotado pela quádrupla (g, R, P, S), obtemos um curva de lagrangianos como em (3.9) e assim podemos definir o índice de Maslov da quádrupla (g, R, P, S) como na definição 3.10, sempre que $t = b$ não for instante (P, S)-focal do sistema (g, R, P, S).

O teorema a seguir admite uma versão mais geral, porém iremos apenas enunciar e demonstrar o caso no qual iremos usar para a conclusão do teorema 6.2.2.

Teorema 4.3.1. *Sejam (g, R, P, S) uma quádrupla satisfazendo as condições anteriores e $\{R_m\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C^0([a,b]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$ uma sequência tal que $R_m(t)$ é g-simétrico, para todos $m \in \mathbb{N}, t \in [a,b]$, e $R_m \to R$ uniformemente no intervalo $[a,b]$. Se $t = b$ não for um instante (P, S)-focal para o sistema (g, R, P, S), então $t = b$ também não é instante (P, S)-focal para o sistema (g, R_m, P, S) e*

$$i_{Maslov}(g, R_m, P, S) = i_{Maslov}(g, R, P, S),$$

para todo m suficientemente grande.

Demonstração: Sejam ξ, ℓ e G como nas seções anteriores ((3.5), (3.9), (3.11)) e defina analogamente ξ_m e ℓ_m relativos a (g, R_m, P, S). Observe que $\ell_m(a) = \ell(a)$. Uma vez que a matriz fundamental de um sistema depende continuamente das informações do sistema temos que $\xi_m \to \xi$ uniformemente no intervalo $[a,b]$ e também existe $\varepsilon > 0$ tal que ℓ_m não intercepta $\Lambda_{\geq 1}(\mathbb{L}_0)$ no intervalo $(a, a+\varepsilon]$ (ver Observação 3.1.3)
Afirmação 1: $\ell_m \to \ell$ na topologia compacto aberta de $C^0([a,b]; \Lambda)$.

Demonstração da Afirmação: Sejam $\delta \subset [a,b]$ compacto e $A \subset \Lambda$ aberto e suponha que $\ell(\delta) \subset A$, temos que mostrar que para m suficientemente grande $\ell_m(\delta) \subset A$. Como $Sp(\mathbb{R}^n \oplus (\mathbb{R}^n)^*, \omega)$ age continuamente em Λ, existe aberto $B \subset Sp(\mathbb{R}^n \oplus (\mathbb{R}^n)^*, \omega)$ tal que $T(\ell(a)) \in A$ sempre que $T \in B$ e $\{G\xi(t)G^{-1}\}_{t\in[a,b]} \subset B$. Uma vez que $\xi_m \to \xi$ uniformemente, existe m_0 tal que $\xi_m(t) \in B$, para todo, $t \in \delta$ e $m \geq m_0$.

Q.E.D.

A convergência compacto aberta implica na convergência pontual de $\ell_m \to \ell$, e portanto, para m suficientemente grande, $\ell_m(b) \in \Lambda_0(\mathbb{L}_0)$ uma vez que $\Lambda_0(\mathbb{L}_0) \subset \Lambda$ é aberto.
Afirmação 2: Para m suficientemente grande, ℓ_m é homotópica à ℓ no intervalo $[a+\varepsilon, b]$.

Demonstração da Afirmação: Como $\{\ell(t)\}_{t\in[a+\varepsilon,b]} \subset \Lambda$ é compacto podemos supor que

$$\{\ell(t)\}_{t\in[a+\varepsilon,b]} \subset \bigcup_{i=1}^{h} \Lambda_0(\mathbb{L}_i),$$

para certos lagrangianos $\mathbb{L}_i$, $i = 1, \ldots, h$ e sejam $t_0 = a + \varepsilon < t_1 < \ldots < t_h = b$ tais que

$$\ell(t) \in \Lambda_0(\mathbb{L}_i), \quad t_{i-1} \leq t \leq t_i.$$

Da Afirmação 1 segue que existe m_0 tal que

$$\ell_m(t) \in \Lambda_0(\mathbb{L}_i), \quad t_{i-1} \leq t \leq t_i, \quad m \geq m_0.$$

Como $\Lambda_0(\mathbb{L}_i)$ é simplesmente conexo, segue que ℓ_m é homotópico à ℓ no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, sempre que $m \geq m_0$.

Q.E.D.

Portanto $\mu_{\mathbb{L}_0}(\ell_m|_{[a+\varepsilon,b]}) = \mu_{\mathbb{L}_0}(\ell|_{[a+\varepsilon,b]})$ para m suficientemente grande.

Q.E.D.

5 ANÁLISE FUNCIONAL

5.1 Alguns resultados em Análise Funcional

Nesta seção iremos expor um método de calcular a evolução do índice n_- de uma família suave de formas bilineares simétricas limitadas num espaço de Hilbert real.

Seja $B \in B_{sym}(\mathbb{H}, \mathbb{R})$ fixado. Pelo teorema da representação de Riesz, existe um único operador limitado (necessariamente autoadjunto) $T_B \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$ tal que $B(x,y) = \langle T_B(x), y\rangle$, $\forall x, y \in \mathbb{H}$. Também, B é não degenerada se, e somente se, T_B é injetivo. Dizemos que B é *Fortemente não Degenerada* se, e somente se, T_B é isomorfismo.

Iremos considerar famílias a 1-parâmetro de formas bilineares definidas em domínio variável, e nós precisaremos da seguinte noção de uma C^1-família de subespaços fechados de um espaço de Hilbert.

Definição 5.1.1. *Sejam $\mathbb{H}$ espaço de Hilbert, $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $\{\mathbb{D}_t\}_{t\in I}$ uma família de subespaços fechados de $\mathbb{H}$. Dizemos que $\{\mathbb{D}_t\}_{t\in I}$ é uma C^1-família de subespaços fechados se para cada $t_0 \in I$ existe uma curva $\alpha\colon (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon) \to \mathcal{L}(\mathbb{H})$ de classe C^1 e um subespaço fechado $\widetilde{\mathbb{D}} \subset \mathbb{H}$ tais que $\alpha(t)$ é isomorfismo e*

$$\alpha(t)(\mathbb{D}_t) = \widetilde{\mathbb{D}}, \quad \forall t \in (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon).$$

Lema 5.1.1. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $\mathbb{H}, \mathbb{H}_1$ espaços de Hilbert e $F\colon I \to \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H}_1)$ uma aplicação C^1 tal que cada $F(t)$ é sobrejetivo para todo t. Então a família $\mathbb{D}_t = ker(F(t))$ é uma C^1-família de subespaços fechados de $\mathbb{H}$.*

Demonstração: Fixe $t_0 \in I$. O mapa $F(t_0)$ mapeia o complemento ortogonal $\mathbb{D}_{t_0}^{\perp}$ isomorficamente em $\mathbb{H}_1$. Como $\mathbb{D}_{t_0}^{\perp}$ é fechado, em particular é espaço de Hilbert, temos que $F(t_0)|_{\mathbb{D}_{t_0}^{\perp}} : \mathbb{D}_{t_0}^{\perp} \to \mathbb{H}_1$ é uma bijeção contínua entre espaços de Hilbert. Como a curva $F\colon I \to \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H}_1)$ é contínua, o mapa $F|_{\mathbb{D}_{t_0}^{\perp}} : I \to \mathcal{L}(\mathbb{D}_{t_0}^{\perp}, \mathbb{H}_1)$, dado por $F|_{\mathbb{D}_{t_0}^{\perp}}(t) = F(t)|_{\mathbb{D}_{t_0}^{\perp}}$, é também uma curva contínua. Considere

$$G(t) = (F(t_0)|^{\perp}_{\mathbb{D}_{t_0}})^{-1} \circ F(t)|_{\mathbb{D}_{t_0}^{\perp}} \in \mathcal{L}(\mathbb{D}_{t_0}^{\perp}), \quad t \in [a,b].$$

Temos que G é contínua e $G(t_0) = id_{\mathbb{D}_{t_0}^{\perp}}$
Afirmação: Dado espaço de Hilbert $\mathbb{H}'$, o subconjunto de $\mathcal{L}(\mathbb{H}')$ formado pelos isomorfismos é aberto.

Demostração da Afirmação: Primeiro, se $A \in \mathcal{L}(\mathbb{H}')$ é tal que $\|A\| < 1$, então $(I - A)^{-1}$ existe e é limitado. De fato, (Séries de Neuman)

$$(id_{\mathbb{H}'} - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

e

$$\|(id_{\mathbb{H}'} - A)^{-1}\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n < \infty.$$

Agora fixe $T \in \mathcal{L}(\mathbb{H}')$ invertível e seja $A \in \mathcal{L}(\mathbb{H}')$ com $\|A\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}$. Daí, $T + A = (id_{\mathbb{H}'} + AT^{-1})T$ e $\|AT^{-1}\| < 1$. Portanto $T + A$ é invertível.

Q.E.D.

A Afirmação implica que, para t suficientemente próximo de t_0, $G(t)$ é isomorfismo e portanto $F(t)|_{\mathbb{D}_{t_0}^{\perp}}$ é também isomorfismo. Daí temos a seguinte sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathbb{D}_t \longrightarrow \mathbb{H} \xrightarrow{f(t)} \mathbb{D}_{t_0}^{\perp} \longrightarrow 0\ ,$$

onde $f(t) = (F(t)|_{\mathbb{D}_{t_0}^{\perp}})^{-1} \circ F(t)$. Consequentemente temos a seguinte soma direta (não necessariamente ortogonal) $\mathbb{H} = \mathbb{D}_t \oplus \mathbb{D}_{t_0}^{\perp}$ e a projeção $\pi_t \colon \mathbb{D}_t \oplus \mathbb{D}_{t_0}^{\perp} \to \mathbb{D}_t \subset \mathbb{H}$ é dada por

$$\pi_t = id_{\mathbb{H}} - (F(t)|_{\mathbb{D}_{t_0}^{\perp}})^{-1} \circ F(t).$$

É fácil de ver que $\pi \colon (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to \mathcal{L}(\mathbb{H})$ é uma curva de classe C^1. Daí, para t suficientemente próximo de t_0, nos definimos

$$\alpha(t)^{-1} := (\pi_t + \pi_{\mathbb{D}_{t_0}^{\perp}}) \colon \mathbb{D}_{t_0} \oplus \mathbb{D}_{t_0}^{\perp} \to \mathbb{D}_t \oplus \mathbb{D}_{t_0}^{\perp},$$

onde $\pi_{\mathbb{D}_{t_0}^{\perp}} \colon \mathbb{D}_{t_0} \oplus \mathbb{D}_{t_0}^{\perp} \to \mathbb{D}_{t_0}^{\perp}$ é a projeção. A aplicação $\alpha(t)^{-1}$ é sobrejetiva por construção. Se $\alpha(t)^{-1}(\xi) = 0$, então $\pi_{\mathbb{D}_{t_0}^{\perp}}(\xi) = 0$ o que implica que $\xi \in \mathbb{D}_{t_0}$. Por outro lado,

$$\pi_t(\xi) = 0 \Rightarrow \xi = (F(t)|_{\mathbb{D}_{t_0}^{\perp}})^{-1} \circ F(t)(\xi) \in \mathbb{D}_{t_0}^{\perp}.$$

Portanto $\xi = 0$.

Claramente $\alpha(t)(\mathbb{D}_t) = \mathbb{D}_{t_0}$.

Q.E.D.

Proposição 5.1.1. *Sejam $\mathbb{H}$ um espaço de Hilbert real com um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $B \colon [t_0, t_0 + r] \to B_{sym}(\mathbb{H}, \mathbb{R})$, com $r > 0$, uma curva de clase C^1. Seja $\{\mathbb{D}_t\}_{t \in [t_0, t_0 + r]}$ uma C^1-família de subespaços fechados de $\mathbb{H}$ e denote por $\overline{B}(t)$ a restrição de $B(t)$ a $\mathbb{D}_t \times \mathbb{D}_t$. Assuma que as seguintes três hipóteses são satisfeitas:*

1) $\overline{B}(t_0)$ *é representado por um operador da forma* $L + K$*, com* $L\colon \mathbb{D}_{t_0} \to \mathbb{D}_{t_0}$ *um isomorfismo (autoadjunto) positivo e* $K\colon \mathbb{D}_{t_0} \to \mathbb{D}_{t_0}$ *um operador compacto auto-adjunto;*

2) A restrição $\widetilde{B}$ *de* $B'(t_0)$ *a* $ker(\overline{B}(t_0)) \times ker(\overline{B}(t_0))$ *é não degenerada;*

3) $ker(\overline{B}(t_0)) \subset ker(B(t_0))$*.*

Então, para $t > t_0$ *suficientemente próximo de* t_0*,* $\overline{B}(t)$ *é não degenerada e vale*

$$n_-(\overline{B}(t)) = n_-(\overline{B}(t_0)) + n_-(\widetilde{B}),$$

e todos os termos da igualdade anterior são finitos.

Demonstração: Apenas diminuindo um pouco mais o valor de r podemos assumir que existe uma curva $\alpha\colon [t_0, t_0 + r] \to \mathcal{L}(\mathbb{H})$ de isomorfismos tal que $\alpha(t)(\mathbb{D}_t) = \overline{\mathbb{D}}$, onde $\overline{\mathbb{D}}$ é um subespaço fechado fixado de $\mathbb{H}$. Então podemos trocar $B(t)$ pelo seu push-forward $B(t)(\alpha(t)^{-1}(\cdot), \alpha(t)^{-1}(\cdot))$ e cada $\mathbb{D}_t$ por $\overline{\mathbb{D}}$. É fácil ver que isto não muda as hipóteses 1) e 3). Para a hipótese 2), observe que, dados $V, W \in ker(B(t_0)(\alpha(t_0)^{-1}(\cdot), \alpha(t_0)^{-1}(\cdot)))|_{\overline{\mathbb{D}}\times\overline{\mathbb{D}}}$ temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|_{t=t_0} B(t)(\alpha(t)^{-1}(V), \alpha(t)^{-1}(W)) = B'(t_0)(\alpha(t_0)^{-1}(V), \alpha(t_0)^{-1}(W)) + \\ B(t)(\frac{d}{dt}|_{t=t_0}\alpha(t)^{-1}(V), \alpha(t_0)^{-1}(W)) + B(t)(\alpha(t_0)^{-1}(V), \frac{d}{dt}|_{t=t_0}\alpha(t)^{-1}(W)) = \\ B'(t_0)(\alpha(t_0)^{-1}(V), \alpha(t_0)^{-1}(W)), \end{aligned} \tag{5.1}$$

uma vez que $\frac{d}{dt}|_{t=t_0}\alpha(t)^{-1}(V), \frac{d}{dt}|_{t=t_0}\alpha(t)^{-1}(W) \in \mathbb{H}$ não necessariamente pertencem a $\overline{\mathbb{D}}$ e temos a hipótese 3). Portanto a hipótese 2) não é modificada. Como queremos olhar para um subespaço fechado de $\mathbb{H}$, podemos supor, sem perca de generalidade, que $\overline{\mathbb{D}} = \mathbb{H}$ e que $\overline{B}(t) = B(t)$. Observe também que as propriedades dos objetos mencionados até agora não dependem do produto interno do espaço $\mathbb{H}$, portanto podemos trocar o produto interno de modo que (hipótese 1)) $B(t_0)$ seja representada por uma pertubação compacta do operador identidade. De fato,

$$B(t_0) = \langle (L + K)(\cdot), \cdot\rangle = \langle L(\cdot), \cdot\rangle + \langle L(L^{-1}K)(\cdot), \cdot\rangle$$

e como L e um operador positivo a forma bilinear $\langle L(\cdot), \cdot\rangle$ define um produto interno e, como L é um homeomorfismo, não muda a topologia de $\mathbb{H}$. O subespaço $N := ker(B(t_0))$ é autoespaço de K associado ao autovalor -1 e pelas alternativas de FredHolm ([14], Teorema 6.6) temos que $dim(N) < \infty$. Seja S qualquer complemento de N. Em particular $B(t_0)$ é positiva definida em S.

Vamos começar com o caso em que $B(t_0)$ é positiva semi-definida e $\widetilde{B}$ é positiva definida em N. Para este caso, a tese significa que $B(t)$ é positiva definida para $t > t_0$ suficientemente próximo de t_0. Sendo K compacto e autoadjunto, o espaço $\mathbb{H}$ admite uma base $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ formada por autovetores de K associados ao autovalores $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Podemos supor que

$$N = span\{e_1, \dots, e_k\},\ S = span\{e_l\}_{l>k}\ \text{ e } \lambda_l \geq -1, \forall l > k.$$

Também,

$$B(t_0)(e_l, e_l) = (1 + \lambda_l)\langle e_l, e_l\rangle > 0,$$

o que implica que $(1 + \lambda) > 0$, $\forall l > k$. Como 0 é o único possível ponto de acumulação de $\{\lambda_n\}$, segue que $c_0 := \inf\{1 + \lambda_l |\, l > k\} > 0$. Daí, para $v = \sum_{l>k} \eta_l e_l \in S, \eta_l \in \mathbb{R}$, temos que

$$B(t_0)(v, v) = \langle\sum_{l>k}(1 + \lambda_l)\eta_l e_l, v\rangle = \sum_{l>k}(1 + \lambda_l)\langle\eta_l e_l, v\rangle \geq c_0 \sum_{l>k}\langle\eta_l e_l, v\rangle = c_0\langle v, v\rangle.$$

A continuidade da curva $B(t)$ no instante t_0 significa que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$t_0 < t < t_0 + \delta \Rightarrow sup\{|B(t)(\xi, \xi) - B(t_0)(\xi, \xi)| :\ \|\xi\| = 1, \xi \in \mathbb{H}\} < \varepsilon.$$

Escolhendo $\varepsilon_0 < c_0$ temos

$$B(t)(\xi, \xi) > B(t_0)(\xi, \xi) - \varepsilon\|\xi\|^2 \geq (c_0 - \varepsilon_0)\|\xi\|^2, \quad \forall\xi \in S, \forall t_0 < t < t_0 + \delta_0. \tag{5.2}$$

Isto é, $B(t)$ é positivo definido em S para $t_0 < t < t_0 + \delta_0$. Seja $c_1 = inf\{B'(t_0)(\xi, \xi)|\, \xi \in N, \|\xi\| = 1\} > 0$ (pois $dim(N) < \infty$). A diferenciabilidade da curva $B(t)$ no instante t_0 significa que

$$B(t)(\xi, \xi') = B(t_0)(\xi, \xi') + (t - t_0)B'(t_0)(\xi, \xi') + o(t - t_0)(t - t_0)\langle\xi, \xi'\rangle,\ \forall\xi, \xi' \in \mathbb{H},$$

onde $o(t - t_0) \to 0$ quando $t \to t_0$. Em particular, para $\xi \in N$,

$$B(t)(\xi, \xi) \geq (t - t_0)(c_1 + o(t - t_0))\|\xi\|^2.$$

Para $\delta_1 > 0$ tal que $|o(t - t_0)| < \frac{c_1}{2}$ sempre que $t - t_0 < \delta_1$, temos que

$$B(t)(\xi, \xi) \geq \frac{c_1}{2}(t - t_0)\|\xi\|^2, \quad \forall\xi \in N, \forall t_0 < t < t_0 + \delta_1. \tag{5.3}$$

Isto é, $B(t)$ é positivo definido em N para $t > t_0$ suficientemente próximo de t_0. Agora fixe $x \in S$ e $y \in N$. Resta mostrar que, para $t > t_0$ suficientemente próximo de t_0, temos

$$B(t)(x - y, x - y) > 0, \quad \forall x \in S, \forall y \in N.$$

Basta mostrar que

$$B(t)(x, y)^2 < B(t)(x, x)B(t)(y, y), \quad \forall x \in S, \forall y \in N. \tag{5.4}$$

Pois, sendo isto verdade,

$$\begin{aligned} B(t)(x-y,x-y) = B(t)(x,x) + B(t)(y,y) - 2B(t)(x,y) &> \\ B(t)(x,x) + B(t)(y,y) - 2\sqrt{B(t)(x,x)B(t)(y,y)} &= \\ (\sqrt{B(t)(x,x)} - \sqrt{B(t)(y,y)})^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Para mostrar (5.4) podemos supor que $\|x\| = \|y\| = 1$. Novamente pela diferenciabilidade da curva $B(t)$ no instante t_0 temos que

$$B(t)(x,y) = (t-t_0)B'(t_0)(x,y) + o(t-t_0)(t-t_0)\langle x,y\rangle.$$

Escolhendo $\delta_2 > 0$ tal que $|o(t-t_0)| < \|B'(t_0)\|$ sempre que $t_0 < t < t_0 + \delta_2$, temos

$$|B(t)(x,y)| \leq (t-t_0)\|B'(t_0)\| + |o(t-t_0)|(t-t_0) < 2\|B'(t_0)\|(t-t_0). \tag{5.5}$$

Daí, se $t - t_0 < min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2, \frac{(c_0-\varepsilon_0)c_1}{8\|B'(t_0)\|^2}\}$, as desigualdades (5.2),(5.3) e (5.5) nos dá

$$B(t)(x,y)^2 < 4\|B'(t_0)\|(t-t_0)^2 < \frac{c_1}{2}(t-t_0)(c_0-\varepsilon_0) < B(t)(x,x)B(t)(y,y).$$

Agora iremos mostrar o caso geral. Usando a decomposição espectral de K, temos $\mathbb{H} = S_- \oplus S_+ \oplus N$, onde S_- é soma dos autoespaços associados aos autovalores $\lambda < -1$, S_+ é a soma dos autoespaços associados ao autovalores $\lambda > -1$ e N é o autoespaço associado ao autovalor $\lambda = -1$. Observe que $dim(S_-) < \infty$, pois como 0 é o único ponto de acumulação dos autovalores de K existem apenas um número finito de autovalos $\lambda < -1$, e cada autoespaço tem dimensão finita. Consequentemente, $n_-(B(t_0)) = dim(S_-) < \infty$. Considere uma decomposição $N = N_- \oplus N_+$ tal que $B'(t_0)$ é negativo definido em N_- e positivo definido em N_+. Aplicando o caso anterior para $B(t)$ restrito a $S_+ \oplus N_+$, obtemos que $B(t)$ é positiva definida em $S_+ \oplus N_+$. Aplicando o caso anterior para $-B(t)$ restrita a $S_- \oplus N_-$, obtemos que $B(t)$ é negativa definida em $S_- \oplus N_-$. Portanto, para $t > t_0$ suficientemente próximo de t_0,

$$n_-(B(t)) = dim(S_-) + dim(N_-) = n_-(B(t_0)) + n_-(B'(t_0)|_N).$$

Q.E.D.

Proposição 5.1.2. *Suponha $B_n \to B$ em $B_{sym}(\mathbb{H};\mathbb{R})$ e $\mathbb{D}_n \to \mathbb{D}$ no sentido de que existem mapas $F_n\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}_1$ sobrejetivos tais que $D_n = ker(F_n)$ e $F_n \to F$ em $\mathcal{L}(\mathbb{H};\mathbb{H}_1)$, e além disso suponha que $B|_{\mathbb{D}}$ é não degenerada e é representada por uma pertubação compacta de um isomorfismo positivo. Então, para n suficientemente grande*

$$n_-(B_n|_{\mathbb{D}_n}) = n_-(B|_{\mathbb{D}}).$$

Demonstração: Segue de pequenas adaptações na demonstração da proposição anterior (até a equação (5.2)).

Q.E.D.

Definição 5.1.2. *Sejam $B\colon [t_0, t_0 + r] \to B_{sym}(\mathbb{H}, \mathbb{R})$, $r > 0$, um mapa de classe C^1 e $\{\mathbb{D}_t\}_{t\in[t_0,t_0+r]}$ uma C^1-família de subespaços fechado de $\mathbb{H}$ e denote $\overline{B}(t) := B(t)|_{\mathbb{D}_t\times\mathbb{D}_t}$. Definimos a forma bilinear simétrica $\overline{B'}(t_0)$ (abuso de notação) em $ker(\overline{B}(t_0))$ por*

$$\overline{B'}(t_0)(v_0, w_0) = \frac{d}{dt}|_{t=t_0}\overline{B}(t)(v(t), w(t)) = \\ B'(t_0)(v_0, w_0) + B(v'(t_0), w_0) + B(t_0)(v_0, w'(t_0)),$$

onde $v, w\colon [t_0, t_0 + r] \to \mathbb{H}$ são quaisquer curvas tais que $v(t_0) = v_0, w(t_0) = w_0 \in ker(\overline{B}(t_0))$ e $v(t), w(t) \in \mathbb{D}_t$.

Boa Definição: Fixe $v_0 \in ker(\overline{B}(t_0))$ e sejam $v_1, v_2\colon [t_0, t_0+r] \to \mathbb{H}$ tais que $v_1(t_0) = v_2(t_0) = v_0$ e $v_1(t), v_2(t) \in \mathbb{D}_t$. Sejam $\alpha\colon [t_0, t_0+r] \to \mathcal{L}(\mathbb{H})$ uma curva de isomorfismos e $\overline{\mathbb{D}} \subset \mathbb{H}$ subespaço fechado tais que $\alpha(t)(\mathbb{D}_t) = \overline{\mathbb{D}}$. Considere $\overline{v}_i(t) := \alpha(t)(v_i(t))$,$i = 1, 2$. Assim,

$$\begin{aligned}\overline{\mathbb{D}} \ni \overline{v}'_1(t_0) - \overline{v}'_2(t_0) = [\alpha(t)(v_1(t)) - \alpha(t)(v_2(t))]'|_{t=t_0} &= \\ \alpha'(t_0)(v_1(t_0) - v_2(t_0)) + \alpha(t_0)(v'_1(t_0) - v'_2(t_0)) &= \alpha(t_0)(v'_1(t_0) - v'_2(t_0)).\end{aligned}$$

Portanto $\tilde{v} := v'_1(t_0) - v'_2(t_0) \in \mathbb{D}_{t_0}$. Daí, para todo $w \in ker(\overline{B}(t_0))$,

$$\begin{aligned}B(t_0)(v'_1(t_0), w) = B(t_0)(v'_2(t_0) + \tilde{v}, w) &= \\ B(t_0)(v'_2(t_0), w) + B(t_0)(\tilde{v}, w) &= B(t_0)(v'_2(t_0), w)\end{aligned}$$

Proposição 5.1.3. *Com a definição 5.1.2, a proposição 5.1.1 é válida sem a hipótese 3).*

Demonstração: Sejam $\alpha(t)$ e $\overline{\mathbb{D}}$ como antes. Considere o push-forward $C(t) := B(t)(\alpha(t)^{-1}(\cdot), \alpha(t)^{-1}(\cdot))|_{\overline{\mathbb{D}}}$. Observe que a restrição $C'(t_0)$ ao subespaço $ker(C(t_0))$ é o push-forward de $\overline{B'}(t_0)$. Para ver isto, basta lembrar da (5.1) e da boa definição de $\overline{B'}(t_0)$. Agora basta aplicar a proposição 5.1.1 a curva $C(t)$.

Q.E.D.

Corolário 5.1.1. *Sejam $B\colon [t_0 - r, t_0 + r] \to B_{sym}(\mathbb{H}, \mathbb{R})$ e $\{\mathbb{D}_t\}_{t\in[t_0-r,t_0+r]}$ satisfazendo as mesmas hipóteses da proposição anterior. Então, nas notações da proposição anterior e para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos que*

$$n_-(\overline{B}(t_0 - \varepsilon)) - n_-(\overline{B}(t_0 + \varepsilon)) = sng(\overline{B'}(t_0)). \tag{5.6}$$

Demonstração: Basta aplicar a proposição anterior duas vezes, uma para $B|_{[t_0,t_0+r]}$ e outro para a reparametrização no sentido contrário de $B|_{[t_0-r,t_0]}$ (observe que repara-metrizar no sentido contrário muda apenas o sinal da forma bilinear $\overline{B'}(t_0)$).

Q.E.D.

Agora apresentaremos um critério para diferenciabilidade de curvas num espaço de Banach.

Lema 5.1.2. *Sejam E, E_0 espaços de Banach e $F, G\colon [a,b] \to E$ contínuas. Seja $\Phi \subset \mathcal{L}(E, E_0)$ uma separação de E, isto é, $\forall x, y \in E, x \neq y, \exists \phi \in \Phi$ tal que $\phi(x) \neq \phi(y)$. Se para todo $\phi \in \Phi$ a composição $\phi \circ F$ é de classe C^1 e vale $(\phi \circ F)'(t) = \phi \circ G(t), \forall t \in [a,b]$, então F é de classe C^1 e vale $F'(t) = G(t), \forall t \in [a,b]$.*

Demonstração: Primeiro vamos verificar que, para cada t,

$$F(t+\varepsilon) - F(t) = \int_t^{t+\varepsilon} G(s)ds. \tag{5.7}$$

Se fossem diferentes, haveria um $\phi \in \Phi$ tal que a suas imagens por ϕ também seriam deferentes. Portanto vamos verificar que, $\forall \phi \in \Phi$,

$$\phi(F(t+\varepsilon) - F(t)) = \phi(\int_t^{t+\varepsilon} G(s)ds).$$

Por um lado,

$$\phi(F(t+\varepsilon) - F(t)) = \phi \circ F(t+\varepsilon) - \phi \circ F(t) = \int_t^{t+\varepsilon} (\phi \circ G)(s)ds.$$

Por outro lado, pela linearidade e continuidade de ϕ temos

$$\int_t^{t+\varepsilon} (\phi \circ G)(s)ds = \phi(\int_t^{t+\varepsilon} G(s)ds).$$

Daí, pela continuidade de G e usando a equação (5.7),

$$\begin{gathered} \|\frac{F(t+\varepsilon) - F(t)}{\varepsilon} - G(t)\| \leq \frac{1}{\varepsilon}\| \int_t^{t+\varepsilon} G(s) - G(t)ds\| \leq \\ sup\{\|G(s) - G(t)\| | \, t \leq s \leq t+\varepsilon\} \to 0, \text{ quando } \varepsilon \to 0. \end{gathered}$$

Q.E.D.

Observação 5.1.1. *Dizemos que um operador linear limitado F entre espaços de Banach é Fredholm se sua imagem é fechada e seu núcleo e conúcleo têm dimensão finita. E definimos o seu índice de Fredholm por índice$(F) = dim(ker(F)) - dim(coker(F))$.*

Além disse, é sabido que o índice de Fredholm é estável para pertubações compactas, isto é, se K é um operador compacto então $F + K$ é também de Fredholm e índice$(F + K) =$ índice(F). Em particular, uma pertubação compacta de um isomorfismo é sempre Fredholm de índice zero. (Para mais detalhes ver [14] comentários do capítulo 6)

Observação 5.1.2. *Um critério para saber se um forma bilinear B contínua definida num subespaço fechado $E \subset H^1([a, b]; \mathbb{R}^n)$ é representado por um operador compacto é o seguinte: Sabemos que a inclusão $H^1([a, b]; \mathbb{R}^n) \overset{i}{\hookrightarrow} C^0([a, b]; \mathbb{R}^n)$ é compacta e denote por E_0 o espaço E munido da topologia de C^0. Se B é contínua em $E_0 \times E$, então o operador $T \in \mathcal{L}(E)$ é compacto uma vez que $T = T \circ i|_E$ e que $T \colon E_0 \to E$ é também contínuo.*

6 O TEOREMA DO ÍNDICE DE MORSE

Neste capítulo iremos enunciar e demonstrar o Teorema do Índice de Morse para geometria Semi-Riemanniana. Primeiro para o caso clássico e depois para o caso geral, uma vez que o caso geral faz uso do caso clássico numa versão para Sistemas Simpléticos.

6.1 O caso clássico

Seja $\gamma\colon [a,b] \to \mathcal{M}$ uma geodésica numa variedade Riemanniana $(\mathcal{M}, g)$. A esta geodésica associamos a Forma Índice I definida no espaço $\mathcal{H}$ dos campos vetorias de $\mathcal{M}$ definidos ao longo de γ, com regularidade H^1-sobolev que são nulos nos intantes $t = a$ e $t = b$, dada por

$$I(V, W) = \int_a^b g(D_t V, D_t W) + g(\mathcal{R}(\gamma', V)\gamma', W)dt.$$

Teorema 6.1.1. *Se $\gamma(b)$ não for ponto focal então o índice da forma I é finito e é igual ao número de pontos conjugados a $\gamma(a)$ ao longo de γ, contando com multiplicidade.*

Como comentado no capítulo 2, uma escolha de trivialização paralela ao longo de γ leva a equação de Jacobi num sistema Morse-Sturm, e consequentemente leva a forma I na forma Índice associada ao sistema Morse-Sturm estudado no capítulo 3. Reciprocamente, é possível mostrar que todo Sistema Morse-Sturm com coeficientes suaves é oriundo de uma equação de Jacobi ao longo de uma geodésica numa variedade semi-Riemanniana (ver [4] proposição 2.3.1). Então basta demonstrar a seguinte versão:

Teorema 6.1.2. *Considere um Sistema Morse-Sturm com matriz de coeficientes X, com R de classe C^1 e g positiva definida. Então o índice de I_X é finito e*

$$n_-(I_X) = \sum_{t \in (a,b)} mul_X(t).$$

Demonstração: A demonstração é feita através do colário 5.1.1, mas para isso precisamos criar as condições da proposição 5.1.3. Vamos considerar o intervalo $[0, 1]$ ao inver de $[a, b]$ por simplicidade. Para cada $t \in (0, 1]$ seja $\mathbb{H}_t = H_0^1([0, t]; \mathbb{R}^n)$ e considere o isomorfismo $\varphi_t\colon \mathbb{H}_1 \to \mathbb{H}_t$ dado por

$$\varphi_t(\hat{V})(s) = V(s) = \hat{V}(\frac{s}{t}), \quad s \in [0, t],$$

e também definimos a *Forma Índice* I_t em $\mathbb{H}_t$ por

$$I_t(V,W) = \int_0^t g(V'(s),W'(s)) + g(R(s)V(s),W(s))ds.$$

Observação 6.1.1. *Sendo g positiva definida, podemos considerar o seguinte produto interno em $\mathbb{H}_t$*

$$\langle V,W\rangle_{\mathbb{H}_t} = \int_0^t g(V'(s),W'(s))ds.$$

A segunda parte de I_t é contínua com relação a topologia C^0 e usando a observação 5.1.2, obtemos que I_t é representado por uma pertubação compacta da identidade de $\mathbb{H}_t$.

Defina a curva de formas bilineares simétricas $\hat{I}_t$ no espaço $\mathbb{H}_1$ dada, em cada instante $t \in (0,1]$, pelo pull-back de I_t através de φ_t. Mais explicitamente,

$$\begin{aligned} \hat{I}_t(\hat{V},\hat{W}) = I_t(\varphi_t(\hat{V}),\varphi_t(\hat{W})) &= \\ \int_0^t g(\frac{d}{ds}\hat{V}(\frac{s}{t}),\frac{d}{ds}\hat{W}(\frac{s}{t})) + g(R(s)\hat{V}(\frac{s}{t}),\hat{W}(\frac{s}{t}))ds &= \\ \int_0^t \frac{1}{t^2}g(\hat{V}'(\frac{s}{t}),\hat{W}'(\frac{s}{t})) + g(R(s)\hat{V}(\frac{s}{t}),\hat{W}(\frac{s}{t}))ds & \end{aligned} \tag{6.1}$$

Proposição 6.1.1. *O mapa $(0,1] \ni t \mapsto \hat{I}_t \in B_{sym}(\mathbb{H}_1,\mathbb{R})$ é de classe C^1. Mais ainda, o mapa*

$$(0,1] \ni t \mapsto C_t = t\hat{I}_t \in B_{sym}(\mathbb{H}_1,\mathbb{R})$$

admite uma extensão de classe C^1 em $t=0$ dada por

$$C_0(\hat{V},\hat{W}) = \int_0^1 g(\hat{V}'(u),\hat{W}'(u))du, \quad \hat{V},\hat{W} \in \mathbb{H}_1.$$

Demonstração: Iremos utilizar o lema 5.1.

Substituindo $u = \frac{s}{t}$ em (6.1) obtemos a seguinte expressão para $\hat{I}_t$:

$$\hat{I}_t(\hat{V},\hat{W}) = \int_0^1 \frac{1}{t}g(\hat{V}'(u),\hat{W}'(u)) + tg(R(tu)\hat{V}(u),\hat{W}(u))du. \tag{6.2}$$

Derivando com relação a t obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(\hat{I}_t(\hat{V},\hat{W})) = \\ \int_0^1 \Big[-\frac{1}{t^2}g(\hat{V}'(u),\hat{W}'(u)) + g(R(tu)\hat{V}(u),\hat{W}(u)) &+ tg(R'(u)\hat{V}(u),\hat{W}(u)\Big] du. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Com relação a notação do lema, 5.1 sejam

$$E = B_{sym}(\mathbb{H}_1,\mathbb{R}),\ E_0 = \mathbb{R},\ \Phi = \{\phi_{\hat{V},\hat{W}} | \hat{V},\hat{W} \in \mathbb{H}_1\},$$

onde $\phi_{\hat{V},\hat{W}}(B) = B(\hat{V},\hat{W})$ para $B \in B_{sym}(\mathbb{H}_1,\mathbb{R})$. Também considere $F(t) = \hat{I}_t$ e $\phi_{\hat{V},\hat{W}} \circ G(t)$ igual ao lado direito da igualdade (6.2). Claramente Φ é uma separação para $B_{sym}(\mathbb{H}_1,\mathbb{R})$ e F, G são contínuas. Isto conclui a primeira parte.

Para a segunda parte basta notar que a seguinte expressão de C_t

$$C_t(\hat{V},\hat{W}) = \int_0^1 g(\hat{V}'(u),\hat{W}'(u)) + t^2 g(R(tu)\hat{V}(u),\hat{W}(u))du$$

está definida para $t \in [0,1]$ e sua diferenciabilidade com relação a t é estabelecida analogamente a primeira parte.

Q.E.D.

Observe que $C_1 = \hat{I}_1 = I_1(\varphi_1,\varphi_1) = I_1$, como queremos calcular $n_-(I_X)$ basta calcular a evolução da função $[0,1] \ni t \mapsto i(t) = n_-(C_t) \in \mathbb{N}$ que será feito através do colário 5.1.1 cuja família de subespaços fechados será constante e igual a $\mathbb{H}_1 = H_0^1([0,1];\mathbb{R}^n)$. E para isto resta saber $n_-(C_t)$ para $t = 0$ e $t > 0$ suficientemente próximo de 0, e conhecer a forma bilinear $(C_t)'$ definida em $ker(C_t) \subset \mathbb{H}_1$ (ver definição 5.1.2). Da observação 6.1.1 temos que $C_0 = \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{H}_1}$ e portanto C_0 é fortemente não degenerada e positiva. Pela continuidade segue que o mesmo é verdade para C_t com $t > 0$ suficientemente pequeno. Portanto

$$n_-(C_t) = 0, \quad \forall t \in [0,\varepsilon]. \tag{6.4}$$

Pelas igualdades (4.4) e (4.5) temos, para cada $t \in (0,1]$, um isomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \psi_t\colon & ker(I_t) & \to & \mathbb{J}(t)^\perp \\ & V & \mapsto & V'(t). \end{array}$$

Defina também, para cada $t \in (0,1]$, $\mathcal{N}_t = ker(\hat{I}_t) \subset \mathbb{H}_1$. Obviamente φ_t determina um isomorfismo entre $\mathcal{N}_t$ e $ker(I_t)$. Logo $\psi_t \circ \varphi_t$ define um isomorfismo $\mathcal{N}_t \to \mathbb{J}(t)^\perp$, mais precisamente $\phi_t \circ \varphi_t(\hat{V}) = \frac{1}{t}\hat{V}'(1)$. Observe também que a forma bilinear $(C_t)'$ coíndice com a restrição de $\hat{I}_t'$ ao subespaço $\mathcal{N}_t$, pois dados $\hat{V},\hat{W} \in \mathcal{N}_t$,

$$\begin{aligned} (C_t)'(\hat{V},\hat{W}) &= \frac{d}{dt}(C_t(\hat{V},\hat{W})) + C_t(\frac{d}{dt}(\hat{V}),\hat{W}) + C_t(\hat{V},\frac{d}{dt}(\hat{W})) \\ &= \frac{d}{dt}(t\hat{I}_t(\hat{V},\hat{W})) = \hat{I}_t(\hat{V},\hat{W}) + \hat{I}_t'(\hat{V},\hat{W}) = \hat{I}_t'(\hat{V},\hat{W}) \end{aligned}$$

Proposição 6.1.2. *Para cada $t \in (0,1]$ o isomorfismo $\psi_t \circ \varphi_t$ leva a restrição de $\hat{I}_t'$ ao subespaço $\mathcal{N}_t$ na restrição de $-g$ ao subespaço $\mathbb{J}(t)^\perp$.*

Demonstração: Sejam $t \in (0,1]$ e $\hat{V},\hat{W} \in \mathcal{N}_t$ fixados. Observe que $\hat{V},\hat{W}$ são de classe C^2, pois são reparametrização suave de elementos de $ker(I_t) = \{$solução do sistema X

restrita ao intervalo $[0,t]$ e que é nula no instante $t\}$ (em particular $\mathcal{N}_t \neq \{0\}$ se, e somente se, t é um instante conjugado). Daí, se $\hat{V}(\frac{s}{t}) = V(s)$, temos que $\hat{V}(1) = 0$ e

$$\frac{d^2}{ds^2}(\hat{V}(\frac{s}{t})) = \frac{1}{t^2}\hat{V}''(\frac{s}{t}) = R(s)\hat{V}(\frac{s}{t}), \quad s \in [0,t]. \tag{6.5}$$

O mesmo vale para $\hat{W}$. Derivando a equação (6.1) com relação a t obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\hat{I}_t(\hat{V},\hat{W})) = \frac{1}{t^2}g(\hat{V}'(1),\hat{W}'(1)) + \int_0^t \frac{-2}{t^3}g(\hat{V}'(\frac{s}{t}),\hat{W}'(\frac{s}{t}))ds +\\ \int_0^t \frac{-s}{t^4}\left[g(\hat{V}''(\frac{s}{t}),\hat{W}'(\frac{s}{t})) + g(\hat{V}'(\frac{s}{t}),\hat{W}''(\frac{s}{t}))\right]ds +\\ \int_0^t \frac{-s}{t^2}\left[g(R(s)\hat{V}'(\frac{s}{t}),\hat{W}(\frac{s}{t})) + g(R(s)\hat{V}(\frac{s}{t}),\hat{W}'(\frac{s}{t}))\right]ds.\end{aligned}$$

Utilizando (6.5) obtemos que a última integral coincide com a penúltima e assim

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\hat{I}_t(\hat{V},\hat{W})) = \frac{1}{t^2}g(\hat{V}'(1),\hat{W}'(1)) + \int_0^t \frac{-2}{t^3}g(\hat{V}'(\frac{s}{t}),\hat{W}'(\frac{s}{t}))ds \quad +\\ \int_0^t \frac{-2s}{t^4}\left[g(\hat{V}''(\frac{s}{t}),\hat{W}'(\frac{s}{t})) + g(\hat{V}'(\frac{s}{t}),\hat{W}''(\frac{s}{t}))\right]ds \quad =\\ \frac{1}{t^2}g(\hat{V}'(1),\hat{W}'(1)) + \int_0^t \frac{d}{ds}\left[\frac{-2s}{t^3}g(\hat{V}'(\frac{s}{t}),\hat{W}'(\frac{s}{t}))\right]ds \quad =\\ -\frac{1}{t^2}g(\hat{V}'(1),\hat{W}'(1)).\end{aligned}$$

Como $\phi_t \circ \varphi_t(\hat{V}) = \frac{1}{t}\hat{V}'(1)$ concluímos a demonstração.

Q.E.D.

Sendo g positiva definida temos que se $t \in (0,1]$ é um instante focal, então é neces-sariamente isolado (ver proposição 3.1.1). Deste modo existem apenas um número finito de instantes focais no intervalo $[0,1]$. A proposição anterior nos dá que $sng(\hat{I}_t'|_{\mathcal{N}_t}) = n_-(\hat{I}_t'|_{\mathcal{N}_t}) = dim(\mathbb{J}(t)^\perp) = mul_X(t)$. Se $t = 1$ não for instante focal, por (6.4), o corolário 5.1.1 aplicado a curva de formas bilineares C_t nos dá que que a função $i(t) = n_-(C_t)$ é constante nos intervalos abertos entre instantes focais consecutivos e os saltos, que ocorrem nos instantes focais, é igual a $mul_X(t)$. Se $t = 1$ for instante focal, a proposição 5.1.3 também diz que a função i é contínua a esquerda no instante $t = 1$, isto é, $i(1) = i(1-\varepsilon)$ para qualquer $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, uma vez que reparametrizando a curva C_t no sentido contrário, isto é, considerando a curva $D(t) = C_{1-t}$, temos que $D'(0)$ restrita a $\mathcal{N}_1$ é positiva definida pela proposição anterior.

Q.E.D.

Corolário 6.1.1. *Para um Sistema simplético (4.2) com B de classe C^2 e positiva definida existem apenas um número finito de instantes focais, o índice da Forma Índice I_X é finito e é igual a soma das multiplicidades dos instantes focais em (a,b).*

Demonstração: Segue diretamente do teorema anterior com as proposições 4.1.1 e 4.2.1

Q.E.D.

6.2 O Caso Geral

Sejam $(\mathcal{M}, g)$ uma variedade Semi-Riemanniana, $\gamma\colon [a,b] \to \mathcal{M}$ uma geodésica e $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}$ uma subvariedade tais que $\mathcal{P}$ é não degenerada no ponto $\gamma(a) \in \mathcal{P}$, isto é, $g(\gamma(a))|_{T|_{\gamma(a)}\mathcal{P}}$ é não degenerado e $\gamma'(a) \in (T|_{\gamma(a)}\mathcal{P})^{\perp}$ (ver cap. 2). A essa geodésica e a esse subespaço associamos uma Forma Índice

$$I_\gamma^{\mathcal{P}}(V,W) = \int_a^b [g(D_tV, D_tW) + g(\mathcal{R}(\gamma', V)\gamma', W)]dt - \mathcal{S}^{\mathcal{P}}_{\gamma'(a)}(V(a), W(a))$$

definida no espaço de Hilbert $\mathcal{H}_\gamma^{\mathcal{P}}$ dos campos vetoriais V ao longo de γ com regularidade H^1-sobolev tais que $V(a) \in T_{\gamma(a)}\mathcal{P}$ e $V(b) = 0$. A forma $I_\gamma^{\mathcal{P}}$ é bilinear, simétrica e contínua no espaço $\mathcal{H}_\gamma^{\mathcal{P}}$.

A principal obstrução para uma generalização direta do caso clássico é a seguinte proposição.

Proposição 6.2.1. *Se $n_-(g) \leq 1$, então o índice de $I_\gamma^{\mathcal{P}}$ é infinito. Se $n_-(g) \geq 2$ ou $n_-(g) = 1$ e $g(\gamma', \gamma') > 0$, então $I_\gamma^{\mathcal{P}}$ tem índice infinito no subespaço fechado de $\mathcal{H}_\gamma^{\mathcal{P}}$ formados pelos campos vetorial que são sempre (isto é, para todo instante) ortogonais a γ'.*

Demonstração: Sejam Y uma campo de Jacobi ao longo de γ e $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função suave que se anula nos extremos. Então

$$I_\gamma^{\mathcal{P}}(fY, fY) = \int_a^b [g(f'Y + fD_tY, f'Y + fD_tY) + f^2 g(\mathcal{R}(\gamma', Y)\gamma', Y]dt =$$
$$\int_a^b [(f')^2 g(Y,Y) + 2ff' g(D_tY, Y) + f^2 g(D_tY, D_tY) + f^2 g(D_t^2 Y, Y)]dt$$
$$\int_a^b [(f')^2 g(Y,Y) + \frac{d}{dt}(f^2 g(D_tY, Y))]dt = \int_a^b (f')^2 g(Y,Y)dt.$$

Seja $t_0 \in (a,b)$ fixado. Se $n_-(g) \geq 1$ existe um campo de Jacobi Y tal que $g(Y,Y) < 0$ numa vizinhança de t_0. Se $n_-(g) \geq 2$ ou $n_-(g) = 1$ e $g(\gamma', \gamma') > 0$ então existe um campo de Jacobi Y sempre ortogonal a γ' tal que $g(Y,Y) < 0$ numa vizinhança de t_0. Como o conjunto das função suaves suportadas numa vizinhança de t_0 tem dimensão infinita, concluímos a demonstração.

Q.E.D.

Outra obstrução é que instantes $\mathcal{P}$-focais podem ser degenerados e portanto o conjunto dos instantes $\mathcal{P}$-focais pode ser infinito, porém no caso em que a variedade e a métrica forem analíticas esse conjunto é sempre finito, como visto no corolátio 3.1.1.

Mostraremos que é possível decompor o espaço $\mathcal{H}_\gamma^\mathcal{P}$ em dois subespaços fechados nos quais $I_\gamma^\mathcal{P}$ tem índice finito num e coíndice finito noutro. A definição desses subespaços depende de uma escolha de distribuição do fibrado tangente de $\mathcal{M}$ ao longo de γ.

Definição 6.2.1. *Dizemos que uma família $\mathcal{D}$ de subespaços $\mathcal{D}_t \subset T_{\gamma(t)}\mathcal{M}$, $t \in [a,b]$, ao longo da geodésica γ é suave se existe uma família $Y_1, \ldots, Y_r$ de campos vetoriais suaves ao longo de γ que pontualmente foram uma base para $\mathcal{D}$. Tal família é dita um referencial para $\mathcal{D}$. Dizemos que $\mathcal{D}$ é negativa maximal se $dim(\mathcal{D}_t) = n_-(g)$ e $g(\gamma(t))|_{\mathcal{D}_t}$ é negativa definida, $\forall t \in [a,b]$.*

Obviamente tais distribuições sempre existem, basta considerar o transporte paralelo ao longo de γ de um subespaço de $T_{\gamma(a)}\mathcal{M}$ de dimensão $n_-(g)$ no qual $g(a)$ é negativa definida nesse subespaço.

Dado uma distribuição negativa maximal $\mathcal{D}$ ao longo de γ, com um referencial $\{Y_1, \ldots, Y_k\}$, definimos os seguintes subespaços fechados de $\mathcal{H}_\gamma^\mathcal{P}$:

- $\mathcal{K}_{\gamma,\mathcal{P}}^\mathcal{D} = \{V \in \mathcal{H}_\gamma^\mathcal{P} \,|\, g(D_tV, Y_i)$ tem regularidade H^1-Sobolev e
$$(g(D_tV, Y_i))' = g(D_tV, D_tY_i) + g(\mathcal{R}(\gamma', V)\gamma', Y_i), \tag{6.6}$$
$i = 1, \ldots, r\}$;
- $\mathcal{G}_{\gamma,\mathcal{P}}^\mathcal{D} = \{V \in \mathcal{H}_\gamma^\mathcal{P} \,|\, V(a) = 0, V(t) \in \mathcal{D}_t, \forall t \in [a.b]\}$.

A definição do espaço $\mathcal{K}_{\gamma,\mathcal{P}}^\mathcal{D}$ não depende da escolha do referencial de $\mathcal{D}$. De fato, seja $\{Z_1, \ldots, Z_k\}$ outro referencial de $\mathcal{D}$ e escreva $Z_i = \sum_j \alpha_i^j Y_j$, se $v \in \mathcal{H}_\gamma^\mathcal{P}$ satisfaz a equação

(6.6) então

$$
\begin{aligned}
(g(D_tV, Z_i))' = [\sum_j \alpha_i^j g(D_tV, Y_j)]' = \\
\sum_j (\alpha_i^j)' g(D_tV, Y_j) + \sum_j \alpha_i^j [(D_tV, D_tY_i) + g(\mathcal{R}(\gamma', V)\gamma', Y_i)] = \\
g(D_tV, \sum_j \alpha_i^j Y_j + \alpha_i^j D_tY_j) + g(\mathcal{R}(\gamma', V)\gamma', \sum_j \alpha_i^j Y_i) = \\
g(D_tV, D_tZ_i) + g(\mathcal{R}(\gamma', V)\gamma', Z_i).
\end{aligned}
$$

Grosseiramente falando, o espaço $\mathcal{K}^{\mathcal{D}}_{\gamma,\mathcal{P}}$ é descrito como o espaços dos campos ao longo de γ que são "Jacobi na direção de $\mathcal{D}$". O que sustenta essa ideia é o fato de que se $V \in \mathcal{H}^{\mathcal{P}}_{\gamma}$ for de classe C^2, então $V \in \mathcal{K}^{\mathcal{D}}_{\gamma,\mathcal{P}}$ se, e somente se, $D_t^2 V - \mathcal{R}(\gamma', V)\gamma' \in \mathcal{D}^{\perp}$.

Teorema 6.2.1. *[Teorema do Índice de Morse para geometria Semi-Riemanniana] Se $\gamma(b)$ não for $\mathcal{P}$-focal então*

$$
i_{Maslov}(\gamma) = n_-(I^{\mathcal{P}}_{\gamma}|_{\mathcal{K}^{\mathcal{D}}_{\gamma,\mathcal{P}}}) - n_+(I^{\mathcal{P}}_{\gamma}|_{\mathcal{G}^{\mathcal{D}}_{\gamma,\mathcal{P}}}) - n_-(g|_{T_{\gamma(a)}\mathcal{P}}),
$$

onde todos os termos são números inteiros.

Como no caso clássico, iremos tratar desse problema numa versão para o $\mathbb{R}^n$. Escolhendo uma trivialização paralela do fibrado tangente de $\mathcal{M}$ ao longo de γ, além das identificações já comentadas na seção 2.1, podemos identificar:

- a distribuição negativa maximal $\mathcal{D}$ com curva suave $[a, b] \ni t \mapsto D_t \in Gr(\mathbb{R}^n; k)$, onde g é negativa definida em cada D_t e $\{Y_1, \dots, Y_k\}$ um conjunto de curvas suaves no $\mathbb{R}^n$ tais que $\{Y_1(t), \dots, Y_k(t)\}$ é base para D_t;
- o espaço $\mathcal{H}^{\mathcal{P}}_{\gamma}$ com

$$
\mathcal{H} = \{V \in H^1([a, b]; \mathbb{R}^n) |\, V(a) \in P, V(b) = 0\}; \tag{6.7}
$$

- o espaço $\mathcal{K}^{\mathcal{D}}_{\gamma,\mathcal{P}}$ com o seguinte subespaço fechado de $\mathcal{H}$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K} = \{V \in \mathcal{H} |\, g(V', Y_i) \in H^1([a, b]; \mathbb{R}), \\
(g(V', Y_i))' = g(V', Y_i') + g(RV, Y_i), i = 1, \dots, k\};
\end{aligned} \tag{6.8}
$$

- o espaço $\mathcal{G}^{\mathcal{D}}_{\gamma,\mathcal{P}}$ com o seguinte subespaço fechado de $\mathcal{H}$

$$
\mathcal{G} = \{V \in \mathcal{H} |\, V(a) = 0, V(t) \in D_t, t \in [a, b]\}; \tag{6.9}
$$

- e a Forma Índice definida em $H^1_P([a,b];\mathbb{R}^n)$ é

$$I(V,W) = \int_a^b [g(V',W') + g(RV,W)]dt - S(V(a),W(a)), \tag{6.10}$$

cujo núcleo é $ker(I) = \mathcal{H} \cap \mathbb{J}$.

Então, nosso objetivo é mostrar que

Teorema 6.2.2. *Num sistema Morse-Sturm para o qual R é de classe C^0 e $t = b$ não é instante focal temos a seguinte igualdade*

$$\mu_{\mathbb{L}_0}(\ell|_{[a+\varepsilon,b]}) = n_-(I|_{\mathcal{K}}) - n_+(I|_{\mathcal{G}}) - n_-(g|_P), \tag{6.11}$$

onde $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno para que não exista instantes P-focais no intervalo $(a, a+\varepsilon]$ e todos os termos são números inteiros.

6.2.1 O Sistema Simplético Reduzido Associado

A demonstração desse caso, em linhas gerais, é o mesmo do caso clássico. Iremos considerar uma certa curva de formas bilineares e calcular a sua evolução no intervalo $[a,b]$.

A partir de agora iremos construir os objetos e resultados necessário para a demonstração. Começaremos por determinar a interseção $\mathcal{K} \cap \mathcal{G}$ como o conjunto solução de um sistema simplético.

Lema 6.2.1. *Seja $V \in \mathcal{G}$ e escreva $V = \sum_i f_i Y_i$. Então $V \in \mathcal{K}$ se, e somente se, $f = (f_1, \dots, f_k)$ é nula nos extremos e é solução do seguinte Sistema Simplético:*

$$\begin{array}{rcc} f' = & -L^{-1}Mf & -L^{-1}h \\ h' = & (M^*L^{-1}M - N)f & +M^*L^{-1}h, \end{array} \tag{6.12}$$

onde L, N são curvas de formas bilineares simétricas no $\mathbb{R}^k$ e M é uma curva de mapas lineares de $\mathbb{R}^k$ para $(\mathbb{R}^k)^*$, cujas matrizes na base canônica são

$$L_{ij} = g(Y_i, Y_j), \quad M_{ij} = g(Y_i, Y_j'), \quad N_{ij} = g(Y_i', Y_j') + g(RY_i, Y_j). \tag{6.13}$$

Demonstração: Defina $h = -Lf' - Mf$, isto é,

$$\begin{aligned} h_i = &-\sum_j [g(Y_i, Y_j)f_j' + g(Y_i, Y_j')f_j] = \\ &-g(Y_i, \sum_j (f_j'Y_j + f_jY_j')) = -g(Y_i, V'). \end{aligned}$$

Daí, $V \in \mathcal{K}$ se e somente se para cada $i = 1, \ldots, k$ vale

$$h_i' = -(g(Y_i, V'))' = -g(V', Y_i') - g(RV, Y_i) =$$
$$-\sum [f_j' g(Y_j, Y_i') + f_j g(Y_j', Y_i') + f_j g(RY_j, Y_i)] =$$
$$-\sum_j g(Y_i', Y_j) f_j' + \sum_j [g(Y_j', Y_i') + g(RY_j, Y_i)] f_j.$$

Essa equação pode ser escrita matricialmente como

$$h' = -M^* f' - Nf = -M^*(-L^{-1}Mf - L^{-1}h) - Nf =$$
$$(M^* L^{-1} M - N) f - +M^* L^{-1} h.$$

Q.E.D.

Corolário 6.2.1. *A dimensão de $\mathcal{K} \cap \mathcal{G}$ é igual a multiplicidade de $t = b$ como instante focal do Sistema Simplético Reduzido Associado(6.12).*

Definição 6.2.2. *O sistema (6.12) é chamado de Simplético reduzido associado ao sistema Morse-Sturm, à distribuição negativa maximal D e ao referencial $Y_1, \ldots, Y_k$.*

Observação 6.2.1. *É possível mostrar que outra escolha de referencial para D daria um sistema simplético isomorfo a (6.12), portanto sempre que necessário podemos supor este referencial é g-ortogonal.*

A forma Índice do sistema simplético reduzido corresponde à restrição de $-I$ ao espaço $\mathcal{G}$.

Proposição 6.2.2. *O isomorfismo entre espaços de Hilbert*

$$\Phi \colon H_0^1([a, b]; \mathbb{R}^k) \ni f = (f_1, \ldots, f_k) \mapsto \sum_i f_i Y_i \in \mathcal{G}$$

leva a Forma Índice do sistema simplético reduzido (6.12) na restrição da forma $-I$ ao espaço $\mathcal{G}$.

Demonstração: Denote por I_X a Forma Índice do sistema (6.12) e sejam $u, v \in H_0^1([a, b]; \mathbb{R}^k)$. Então

$$I_X(u, v) = \int_a^b [-L^{-1}(h_u, h_v) + (M^* L^{-1} M - N)(u, v)] dt.$$

Manipulando matricialmente o integrando obtemos

$$-h_v^T L^{-1} h_u + v^T (M^T L^{-1} M - N) u =$$
$$(Lv' + Mv)^T L^{-1} h_u + v^T (M^T L^{-1} M) u - v^T N u =$$
$$(v')^T h_u + v^T M^T L^{-1}(-Lu' - Mu) + v^T (M^T L^{-1} M) u - v^T N u =$$
$$(v')^T h_u - v^T M^T u' - v^T N u.$$

Por outro lado, o integrando de $I(\Phi(u), \Phi(v))$ é

$$g(\sum_i (u_i' Y_i + u_i Y_i'), \sum_i (v_j' Y_j + v_j Y_j')) + g(\sum_i u_i R Y_i, \sum_i v_j Y_j) =$$

$$\sum_{i,j} [u_i' v_j' g(Y_i, Y_j) + u_i' v_j g(Y_i, Y_j') + u_i v_j' g(Y_i', Y_j) + u_i v_j g(Y_i', Y_j') + u_i v_j g(RY_i, Y_j)] =$$

$$\sum_j v_j \overbrace{\sum_i u_i [g(RY_i, Y_j) + g(Y_i, Y_j)]}^{j\text{-ésima coordenada de } Nu} + \sum_j v_j' \overbrace{\sum_i u_i' g(Y_i, Y_j) + u_i g(Y_i', Y_j)]}^{j\text{-ésima coordenada de } -h_u} +$$

$$\sum_j v_j \overbrace{\sum_i u_i' g(Y_i, Y_j')}^{j\text{-ésima coordenada de } M^T u'} = v^T N u - (v')^T h_u + v^T M^T u'.$$

Q.E.D.

Corolário 6.2.2. *O coíndice $n_+(I|_{\mathcal{G}})$ é finito e é igual a soma das multiplicidades dos instantes focais do sistema simplético reduzido (6.12) no intervalo (a, b).*

Demonstração: Pela proposição anterior temos que $n_+(I|_{\mathcal{G}}) = n_-(I_X)$. Como $-L$ é positivo definido, o resultado segue do corolário 6.1.1.

Q.E.D.

Corolário 6.2.3. *A restrição de I à $\mathcal{G}$ é representada por um operador autoadjunto de $\mathcal{G}$ que é uma pertubação compacta de um isomorfismo negativo.*

Demonstração: A forma Índice de qualquer Sistema Diferencial simplético com coeficientes B positivo definido é representada por uma pertubação compacta de um isomorfismo positivo de $H_0^1([a, b]; \mathbb{R}^k)$, e a demonstração desse fato é análoga à proposição 6.2.7. A conclusão segue da proposição 6.2.2.

Q.E.D.

6.2.2 Uma extensão necessária

A estratégia para demonstrar o Teorema 6.2.2 é aplicar a proposição 5.1.3 numa família I_t de formas bilineares simétricas no espaço de Hilbert $\mathcal{K}_t$ obtido por considerar a restrição do sistema Morse-Sturm ao intervalo $[a, t]$. Infelizmente, esta família falha em ser de classe C^1 próximo de instantes focais do sistema simplético reduzido associado. Para contornar este problema, consideraremos uma extensão artificial $I^\sharp$ da forma Índice I ao espaço $\mathcal{K}^\sharp$ que nos dará uma família $\mathcal{K}_t^\sharp$ de classe C^1.

Definiremos as versões "sustenida" dos objetos dessa teoria:

Definição 6.2.3. • $\mathcal{H}^\sharp = \{V \in H^1([a,b];\mathbb{R}^n) |\, V(a) \in P\}$;

- $\mathcal{K}^\sharp = \{V \in \mathcal{H}^\sharp |\, g(V', Y_i) \in H^1([a,b];\mathbb{R}), (g(V',Y_i))' = g(V', Y_i') + g(RV, Y_i), i = 1, \ldots, k\}$. *O fato de que* $\mathcal{K}^\sharp$ *é fechado (o mesmo para* $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$*) ficará evidente mais adiante;*

- $\mathcal{G}^\sharp = \{V \in \mathcal{H}^\sharp |\, V(a) = 0, V(t) \in D_t, t \in [a,b]\}$, *que é (sequencialmente) fechado uma vez que, a inclusão* $H^1([a,b];\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^0([a,b];\mathbb{R}^n)$ *é contínua e podemos usar a convergência uniforme, se* $V_m \in \mathcal{G}^\sharp$ *é uma sequência convergente para* $V \in \mathcal{H}^\sharp$, *então* $V_m(t) \to V(t) \in D_t$ *para todo* $t \in [a,b]$;

- *Para uma fixada forma bilinear simétrica* Θ *definida no* $\mathbb{R}^n$ *definimos*

$$I^\sharp(V,W) = \int_a^b g(V',W') + g(RV,W)dt + \Theta(V(b),W(b)) - S(V(a),W(a)),$$

  $V, W \in \mathcal{H}^\sharp$, *cujo núcleo é* $ker(I^\sharp) = \{J \in \mathbb{J} |\, g(J(b)) + \Theta(J(b)) = 0\}$.

Observe que $\mathcal{K} = \mathcal{K}^\sharp \cap \mathcal{H}$ e $\mathcal{G} = \mathcal{G}^\sharp \cap \mathcal{H}$ e que I é a restrição de $I^\sharp$ ao subespaço $\mathcal{H}$.

Considere o seguinte mapa linear $F\colon \mathcal{H}^\sharp \to L^2([a,b];(\mathbb{R}^k)^*)$, no qual para cada $V \in \mathcal{H}^\sharp$ a i-ésima função coordenada de $F(V)$, $i = 1, \ldots, k$, é dada por

$$[F(V)(t)]_i = g(V'(t), Y_i(t)) - \int_a^t g(V', Y_i') + g(RV, Y)ds. \tag{6.14}$$

Proposição 6.2.3. *O mapa F é limitado.*

Demonstração: Seja $\|\cdot\|$ a norma canônica do $\mathbb{R}^n$ e $\|\cdot\|_\infty$ a norma do supremo. Temos que $F(V) \in L^2([a,b];(\mathbb{R}^k)^*)$ se, e somente se, cada uma de suas funções coordenadas pertence a $L^2([a,b];\mathbb{R})$. Iremos mostrar que o quadrado da norma L^2 de cada uma das parcela de de $[F(V)]_i$ é limitada:

- $\int_a^b g(V'(t), Y_i(t))^2 dt \le |g| \|Y_i\|_\infty \int_a^b \|V'(t)\|^2 dt$;

- $\int_a^b (\int_a^t g(V'(s), Y_i'(s))ds)^2 dt \le \int_a^b (t-a) \int_a^t g(V'(s), Y_i'(s))^2 ds dt \le$
  $(b-a) \int_a^b \int_a^b g(V'(s), Y_i'(s))^2 ds dt \le (b-a)^2 |g| \|Y_i'\|_\infty \int_a^b \|V'(t)\|^2 dt$;

- $\int_a^b (\int_a^t g(R(s)V(s), Y_i(s))ds)^2 dt \le \int_a^b (t-a) \int_a^t g(R(s)V(s), Y_i(s))^2 ds dt \le$
  $(b-a) \int_a^b \int_a^b g(R(s)V(s), Y_i(s))^2 ds dt \le (b-a)^2 |g| \|R\|_\infty \|Y_i'\|_\infty \int_a^b \|V(t)\|^2 dt$.

Usamos que, para toda função integrável f no domínio $[a,t]$,

$$(\int_a^t f ds)^2 \le (t-a) \int_a^t f^2 ds. \tag{6.15}$$

Q.E.D.

Seja $\mathcal{C} \subset L^2([a,b];(\mathbb{R}^k)^*)$ o subespaço das constantes. Segue direto da definição de $\mathcal{K}^\sharp$ que $F^{-1}(\mathcal{C}) = \mathcal{K}^\sharp$ (aqui fica claro o fato de que $\mathcal{K}^\sharp$ é fechado).

Lema 6.2.2. *A restrição de F ao subespaço $\mathcal{G}^\sharp$ é um isomorfismo.*

Demonstração: Iremos identificar o espaço $\mathcal{G}^\sharp$ com o seguinte espaço $\chi := \{f \in H^1([a,b];\mathbb{R}^k) |\, f(a) = 0\}$ através do mapa

$$\mathcal{G}^\sharp \ni V = \sum_i^k f_i Y_i \mapsto (f_1, \ldots, f_k) = f \in \chi. \tag{6.16}$$

Usando (6.13) o mapa F pode ser escrito como

$$F(V)(t) = L(f')(t) + \Big(M(f)(t) - \int_a^t [M^*(f')(s) + N(f)(s)]ds \Big). \tag{6.17}$$

Note que a expressão que está dentro do parênteses na igualdade anterior determina um função de t de regularidade H^1-sobolev. Usando o fato de que a inclusão de $H^1([a,b];(\mathbb{R}^k)^*)$ em $L^2([a,b];(\mathbb{R}^k)^*)$ é compacta, é fácil ver que a restrição $F|_{\mathcal{G}^\sharp}$ é uma pertubação compacta do isomorfismo $\chi \ni f \mapsto L(f') \in L^2([a,b];(\mathbb{R}^k)^*)$. Portanto $F|_{\mathcal{G}^\sharp}$ é Fredholm de índice zero, e para provar o lema basta verificar que $F|_{\mathcal{G}^\sharp}$ é injetivo.

Seja $f \in ker(F|_{\mathcal{G}^\sharp})$, por (6.17) temos que $L(f') \in H^1([a,b];(\mathbb{R}^k)^*)$ e assim f satisfaz uma equação homogênica de segunda ordem

$$L(f')'(t) + (M(f)(t))' - M^*(f')(t) + N(f)(t) = 0,$$

com condição inicial $f(a) = 0, f'(a) = 0$. Logo, Pela unicidade de solução, temos que $f = 0$.

Q.E.D.

Corolário 6.2.4. *O mapa F é sobrejetivo, $\mathcal{H}^\sharp = \mathcal{K}^\sharp + \mathcal{G}^\sharp$ e $dim(\mathcal{K}^\sharp \cap \mathcal{G}^\sharp) = k$.*

Demonstração: O lema anterior implica que F é sobrejetivo. Note que $ker(F) = F^{-1}(\{0\}) \subset F^{-1}(\mathcal{C}) = \mathcal{K}^\sharp$, portanto $\mathcal{H}^\sharp = \mathcal{K}^\sharp + \mathcal{G}^\sharp$. Como F determina um isomorfismo de $\mathcal{K}^\sharp \cap \mathcal{G}^\sharp$ para $\mathcal{C}$, segue que $dim(\mathcal{K}^\sharp \cap \mathcal{G}^\sharp) = k$.

Q.E.D.

Lema 6.2.3. *Seja $q\colon L^2([a,b];(\mathbb{R}^n)^*) \to L^2([a,b];(\mathbb{R}^n)^*)/\mathcal{C}$ a aplicação quociente. Su-ponha que $\mathcal{K} \cap \mathcal{G} = \{0\}$, então $q \circ F$ mapeia $\mathcal{G}$ isomorficamente à $L^2([a,b];(\mathbb{R}^n)^*)/\mathcal{C}$.*

Demonstração: Via a identificação (6.16), o mapa

$$\mathcal{G} \ni f \mapsto [L(f')] \in L^2([a,b];(\mathbb{R}^n)^*)/\mathcal{C}$$

é um isomorfismo. De fato: Para sobrejetividade, dado $[u] \in L^2([a,b];(\mathbb{R}^n)^*)/\mathcal{C}$ tome $f(t) = \int_a^t L^{-1}uds - \frac{(t-a)}{b-a}\int_a^b L^{-1}uds$; Para a injetividade, se $[L(f')] = 0$, então $L(f') = c \in (\mathbb{R}^k)^*$ é constante. Se $c = 0$ então $f = 0$. Se $c \neq 0$, então $f' = L^{-1}c$ e assim

$$(c^T f)' = c^T f' = c^T L^{-1} c < 0.$$

Isto é, a função $t \mapsto c^T f(t)$ é estritamente decrescente. Porém $f(a) = 0 = f(b)$, o que é absurdo.

Novamente pela igualdade (6.17) temos que $q \circ F|_{\mathcal{G}}$ é uma pertubação compacta de um isomorfismo, portanto é Fredholm de índice zero. Observe que

$$ker(q \circ F|_{\mathcal{G}}) = F^{-1}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{G} = \mathcal{K}^\sharp \cap \mathcal{G} = \mathcal{K} \cap \mathcal{G} = \{0\}.$$

Portanto $q \circ F|_{\mathcal{G}}$ é isomorfismo.

Q.E.D.

Corolário 6.2.5. *Se $\mathcal{K} \cap \mathcal{G} = \{0\}$, então $q \circ F|_{\mathcal{H}}$ é sobrejetiva e $\mathcal{H} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{G}$.*

Lema 6.2.4. *O espaço $\mathcal{K}^\sharp + \mathcal{G}$ é fechado em $\mathcal{H}^\sharp$ e sua codimensão é igual a $dim(\mathcal{K} \cap \mathcal{G})$.*

Demonstração: Para mostrar que $\mathcal{K}^\sharp + \mathcal{G}$ é fechado utilizaremos o seguinte proposição sobre subespaços fechado num espaço de Banach (ver [14] proposição 11.7) cuja demonstração será omitida.

Proposição 6.2.4. *Sejam E uma espaço de Banach e $K, G \subset E$ subespaços fechado. Se $dim(K \cap G) < \infty$ e $codim_E(K + G) < \infty$, então $K + G$ é fechado em E.*

Pelo corolário 6.2.1 temos que $dim(\mathcal{K}^\sharp \cap \mathcal{G}) = dim(\mathcal{K} \cap \mathcal{G}) < \infty$. Também $codim_{\mathcal{G}^\sharp}(\mathcal{G}) = k$, uma vez que os elementos de $\mathcal{G}$ são os elementos de $\mathcal{G}^\sharp$ com a condição de que são nulos no instante $t = b$. Considerando o mapa sobrejetivo $j \colon \mathcal{G}^\sharp/\mathcal{G} \to (\mathcal{K}^\sharp + \mathcal{G}^\sharp)/(\mathcal{K}^\sharp + \mathcal{G})$, definido de maneira canônica, temos que

$$ker(j) = (\mathcal{G}^\sharp \cap (\mathcal{K}^\sharp + \mathcal{G}))/\mathcal{G} = ((\mathcal{G}^\sharp \cap \mathcal{K}^\sharp) + \mathcal{G})/\mathcal{G}$$

(pelo 2º teorema do isomorfismo, $A/(A \cap B) \cong (A + B)/B$)

$$\cong (\mathcal{G}^\sharp \cap \mathcal{K}^\sharp)/(\mathcal{G} \cap (\mathcal{G}^\sharp \cap \mathcal{K}^\sharp)) = (\mathcal{G}^\sharp \cap \mathcal{K}^\sharp)/(\mathcal{G} \cap \mathcal{K}).$$

Logo,

$$\begin{aligned} codim_{\mathcal{H}^\sharp}(\mathcal{K}^\sharp + \mathcal{G}) = dim(Im(j)) &= dim(\mathcal{G}^\sharp/\mathcal{G}) - dim(ker(J)) \\ &= k - (k - dim(\mathcal{G} \cap \mathcal{K})) = dim(\mathcal{G} \cap \mathcal{K}). \end{aligned}$$

Q.E.D.

Lema 6.2.5. *Os espaços $\mathcal{K}^\sharp$ e $\mathcal{G}$ são $I^\sharp$-ortogonais, isto é, $I^\sharp(V,W) = 0$, $\forall V \in \mathcal{K}^\sharp$, $\forall W \in \mathcal{G}$.*

Demonstração: Escrevendo $W = \sum_i^k f_i Y_i$, com $f_i \in H_0^1([a,b];\mathbb{R})$, temos

$$\begin{aligned} I^\sharp(V,W) = \sum_i \int_a^b g(V', f_i' Y_i + f_i Y_i') + f_i g(RV, Y_i) dt &= \\ \sum_i \int_a^b f_i' g(V', Y_i) + f_i [\overbrace{g(V', Y_i') + g(RV, Y_i)}^{=(g(V',Y_i))'}] dt &= \\ \sum_i \int_a^b \frac{d}{dt}(f_i g(V', Y_i)) dt &= 0 \end{aligned}$$

Q.E.D.

Proposição 6.2.5. *Se $\mathcal{K} \cap \mathcal{G} = \{0\}$, então o núcleo da restrição de I à $\mathcal{K}$ é igual ao núcleo de I em $\mathcal{H}$.*

Demonstração: Do corolário 6.2.5 já temos $\mathcal{H} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{G}$ e, pelo lema anterior, esta decomposição é ortogonal. Daí como $ker(I) = \mathcal{H} \cap \mathbb{J} \subset \mathcal{K}$ temos que $ker(I) \subset ker(I|_{\mathcal{K}})$. Portanto $ker(I) = ker(I|_{\mathcal{K}})$.

Q.E.D.

Proposição 6.2.6. *Suponha que $I^\sharp$ seja não degenerado em $\mathcal{H}^\sharp$. Então o núcleo da restrição $I^\sharp|_{\mathcal{K}^\sharp}$ é $\mathcal{K} \cap \mathcal{G}$.*

Demonstração: *Afirmação:* $I^\sharp$ é representado por uma pertubação compacta de um isomorfismo.

Demonstração da Afirmação: Como g é não degenerada em P temos a soma direta g-ortogonal $\mathbb{R}^n = P \oplus P^\perp$, e assim se $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é o mapa linear que representa a forma bilinear g, isto é $g(\cdot,\cdot) = \langle g(\cdot), \cdot \rangle$, então $g(P) = P$. Daí temos um isomorfismo $g\colon \mathcal{H}^\sharp \to \mathcal{H}^\sharp$ dado por $gV(t) = g(V(t))$. Logo, para $V, W \in \mathcal{H}^\sharp$,

$$\begin{aligned} \int_a^b g(V', W') dt = \int_a^b \langle gV', W' \rangle dt + \int_a^b \langle gV, W \rangle dt - \int_a^b g(V,W) dt &= \\ \langle gV, W \rangle_{H^1} - \int_a^b g(V,W) dt. \end{aligned}$$

Agora considere a forma bilinear

$$B_0(V,W)=\int_a^b -g(V,W)+g(RV,W)dt+\Theta(V(b),W(b))-S(V(a),W(a))$$

definido em $\mathcal{H}^\sharp$. Pela observação 5.1.2 temos que B_0 é representado por um operador compacto. Como $I^\sharp=\langle g\,\cdot,\cdot\rangle_{H^1}+B_0$ segue a afirmação.

Q.E.D.

O fato de que $I^\sharp$ é não degenerada significa que é representada por operador injetivo. Daí esta afirmação junto com a observação 5.1.1 implica que $I^\sharp$ é representado por um isomorfismo.

Se $V\in\mathcal{K}\cap\mathcal{G}$, pelo lema 6.2.5 vale que $V\in ker(I^\sharp|_{\mathcal{K}^\sharp})$. Por outro lado se $V\in ker(I^\sharp|_{\mathcal{K}^\sharp})$ também pelo lema 6.2.5 vale $I^\sharp(V,\mathcal{K}^\sharp+\mathcal{G})=0$. Portanto

$$\mathcal{K}\cap\mathcal{G}\subset ker(I^\sharp|_{\mathcal{K}^\sharp})\subset\{V\in\mathcal{H}^\sharp|\ I^\sharp(V,\mathcal{K}^\sharp+\mathcal{G})=0\}.$$

Uma vez que $I^\sharp$ é presentado por um isomorfismo e que $\mathcal{K}^\sharp+\mathcal{G}$ é fechado (ver lema 6.2.4) segue $dim(\{V\in\mathcal{H}^\sharp|\ I^\sharp(V,\mathcal{K}^\sharp+\mathcal{G})=0\})=codim(\mathcal{K}^\sharp+\mathcal{G})=dim(\mathcal{K}\cap\mathcal{G})$. Logo $\mathcal{K}\cap\mathcal{G}=ker(I^\sharp|_{\mathcal{K}^\sharp})$.

Q.E.D.

Proposição 6.2.7. *A restrição de $I^\sharp$ à $\mathcal{K}^\sharp$ (e também a restrição de I à $\mathcal{K}$) é representado por uma pertubação compacta de um isomorfismo positivo.*

Demonstração: Pela observação 5.1.2 basta mostrar que forma bilinear

$$I_0(V,W)=\int_a^b g(V',W')dt,\quad \forall V,W\in\mathcal{K}^\sharp,$$

é representada por uma pertubação compacta de um isomorfismo positivo.

Para cada t sejam $\pi(t)\colon\mathbb{R}^n\to D_t$ a projeção g-ortogonal no subespaço D_t e $r(t)$ o produto interno no $\mathbb{R}^n$ dado por

$$r(t)(x,y)=g(x,y)-2g(\pi(t)x,\pi(t)y),\quad x,y\in\mathbb{R}^n.$$

Obviamente $t\mapsto r(t)$ é contínua. Note que, para todos $t\in[a,b]$ e $x,y\in\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} r(t)(x,y)-2r(t)(\pi(t)x,\pi(t)y) &= \\ g(x,y)-2g(\pi(t)x,\pi(t)y)-2[g(\pi(t)x,\pi(t)y)-2g(\pi(t)(\pi(t)x),\pi(t)(\pi(t)y))] &= \\ g(x,y)-4g(\pi(t)x,\pi(t)y)+4g(\pi(t)x,\pi(t)y) &= g(x,y). \end{aligned}$$

Portanto

$$I_0(V,W)=\int_a^b r(V',W')-2r(\pi V',\pi W')dt.$$

Como

$$J(V, W) = \int_a^b r(V', W') + r(V, W)dt$$

define um produto interno em $\mathcal{K}^\sharp \subset H^1([a,b];\mathbb{R}^n)$, então J é representado por um isomorfismo positivo. Para concluir a demonstração, resta mostrar que o mapa

$$\begin{array}{rccc} \pi: & \mathcal{K}^\sharp & \rightarrow & L^2([a,b];\mathbb{R}^n) \\ & V & \mapsto & \pi V' \end{array}$$

é contínua quando consideramos $\mathcal{K}^\sharp$ munido da topologia de C^0. Suponha que o referencial $Y_1, \ldots, Y_k$ da família $D = \{D_t\}_{t\in[a,b]}$ serja g-ortogonal (ver observação 6.2.1), assim

$$\pi V' = \sum_i g(V', Y_i)Y_i.$$

Logo basta mostrar que, para cada $i = 1, \ldots, k$, o mapa $\mathcal{K}^\sharp \ni V \mapsto g(V', Y_i) \in L^2([a,b];\mathbb{R})$ é contínuo na topologia de C^0. Considere a aplicação F como definida na equação (6.14). Se $V \in \mathcal{K}_0^\sharp$ então temos um função constante

$$[F(V)]_i = g(V'(a), Y_i(a)).$$

Note que a integral na definição de F depende C^0-continuamente de $V \in \mathcal{K}^\sharp$, pois

$$\begin{aligned} \int_a^t g(V'(s), Y_i'(s)) + g(R(s)V(s), Y_i(s))ds = \\ \int_a^t \frac{d}{ds}[g(V(s), Y_i'(s))] - g(V(s), Y_i''(s)) + g(R(s)V(s), Y_i(s))ds = \\ g(V(t), Y_i'(t)) - g(V(a), Y_i'(a)) + \int_a^t -g(V(s), Y_i''(s)) + g(R(s)V(s), Y_i(s))ds. \end{aligned}$$

Também o mapa $\mathcal{K}^\sharp \ni V \mapsto [F(v)]_i \in L^2([a,b];\mathbb{R})$ é C^0-contínuo. Para ver isto primeiro reescrevemos seu expressão como

$$\begin{aligned} [F(V)(t)]_i = \frac{d}{dt}[g(V(t), Y_i(t))] - 2g(V(t), Y_i'(t)) + g(V(a), Y_i'(a)) + \\ \int_a^t g(V(s), Y_i''(s)) - g(R(s)V(s), Y_i(s))ds. \end{aligned}$$

Sendo $[F(V)]_i$ constante em t então

$$\|[F(V)]_i\|_{L^2}^2 = \int_a^b |[F(V)(t)]|^2 dt = \frac{1}{b-a}(\int_a^b |[F(V)]_i| dt)^2,$$

e assim fica fácil ver que a C^0-continuidade com relação a $V \in \mathcal{K}^\sharp$. Isto mostra que $g(V, Y_i)$ é C^0-contínua em $V \in \mathcal{K}^\sharp$.

Q.E.D.

Proposição 6.2.8. *Suponha que $t = b$ não é um instante P-focal do sistema Morse-Sturm. Então*

$$n_-(I^\sharp|_{\mathcal{K}^\sharp}) = n_-(I|_{\mathcal{K}}) + n_-(\Theta - \phi_{\mathbb{L}_1,\mathbb{L}_0}(\ell(b))),$$

onde $\mathbb{L}_0 = \{0\} \oplus (\mathbb{R}^n)^*, \mathbb{L}_1 = \mathbb{R}^n \oplus \{0\}$, $\phi_{\mathbb{L}_1,\mathbb{L}_0}$ é uma carta coordenada na Granssmaniana Lagrangiana Λ e $\ell\colon [a,b] \to \Lambda$ é a curva Lagrangianos dada pela igualdade (3.9).

Demonstração: Iremos denotar por β a forma bilinear em $\mathbb{L}_1$ dada por $\beta = \phi_{\mathbb{L}_1,\mathbb{L}_0}(\ell(b))$, também iremos pensar β como um mapa linear $\mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^*$ por identificar $\mathbb{L}_1 \cong \mathbb{R}^n$. Por definição da carta $\phi_{\mathbb{L}_1,\mathbb{L}_0}$ temos que

$$\ell(b) = \{(v,\alpha) \in \mathbb{R}^n \oplus (\mathbb{R}^n)^* |\, \alpha + \beta(v) = 0\},$$

pois se $Graf_{\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1}(T) = \ell(b)$, então $(v,\alpha) \in \ell(b) \Leftrightarrow \alpha = T(v)$, e por outro lado $\beta(v)(x) = \omega((0,T(v)),(x,0)) = -T(v)(x)$ (ver equação (3.7)). Daí, para cada $J \in \mathbb{J}$ temos

$$\beta(J(b)) = -gJ'(b).$$

Uma vez que $t = b$ não é instante P-focal nos temos que $\mathcal{K} \cap \mathbb{J} = \{0\}$, além disse se $V \in \mathcal{K}^\sharp$ podemos escolher $J \in \mathbb{J}$ tal que $J(b) = V(b)$ e assim $V - J \in \mathcal{K}$. Portanto $\mathcal{K}^\sharp = \mathcal{K} \oplus \mathbb{J}$. Uma simples verificação usando que $J'' = RJ$, para $J \in \mathbb{J}$, mostra que esta soma direta é $I^\sharp$-ortogonal. Portanto

$$n_-(I^\sharp|_{\mathcal{K}^\sharp}) = n_-(I|_{\mathcal{K}}) + n_-(I^\sharp|_{\mathbb{J}}).$$

Afirmação: A aplicação $\mathbb{J} \ni J \mapsto J(b) \in \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo e leva a restrição $I^\sharp|_{\mathbb{J}}$ na forma bilinear $\Theta - \beta$.

Demonstração da Afirmação: A injetividade da aplicação segue do fato de que $t = b$ não um instante P-focal e sobrejetividade segue do fato de que $dim(\mathbb{J}) = n$. Agora sejam $J_1, J_2 \in \mathbb{J}$. Então,

$$\begin{aligned} I^\sharp(J_1,J_2) = g(J_1'(b), J_2(b)) + \Theta(J_1(b), J_2(b)) = \\ -\beta(J_1(b), J_2(b)) + \Theta(J_1(b), J_2(b)). \end{aligned}$$

Q.E.D.

Q.E.D.

6.2.3 A Função Índice $i(t)$

Para cada $t \in (a,b]$ podemos considerar o sistema Morse-Sturm restrito ao intervalo $[a,t]$ e assim podemos definir os objetos $\mathcal{H}_t, \mathcal{H}_t^\sharp, I_t, I_t^\sharp, \mathcal{K}_t, \mathcal{K}_t^\sharp, \mathcal{G}_t, \mathcal{G}_t^\sharp, F_t$, como em (6.7), (6.8), (6.9), (6.10), (6.14) e na definição 6.2.3, por trocar b por t. A definição de $I_t^\sharp$ depende da escolha da forma bilinear simétrica Θ no $\mathbb{R}^n$, no qual será feita apropriadamente quando necessário. Obviamente, todos os resultados anteriores sobre o sistema Morse-Sturm continuam válidos quando restrito ao intervalo $[a, t]$.

Iremos estudar a evolução da Função Índice

$$i(t) = n_-(I_t|_{\mathcal{K}_t}), \quad t \in (a, b]. \tag{6.18}$$

Para trazer esta conta para um único espaço ambiante, iremos considerar, para cada $t \in (a, b]$, o isomorfismo $\Phi_t \colon \mathcal{H}^\sharp \to \mathcal{H}_t^\sharp$ (que também pode ser pensando como um isomorfismo $L^2([a, b]; (\mathbb{R}^k)^*) \to L^2([a, t]; (\mathbb{R}^k)^*)$) definido por

$$\Phi_t(\hat{V}) = V, \;\; V(s) = \hat{V}(u), \;\; u = u_s = a + \frac{b-a}{t-a}(s-a), \;\; s \in [a, t], u \in [a, b]. \tag{6.19}$$

Obviamente que $\Phi_t|_{\mathcal{H}} \colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}_t$ é um isomorfismo.

Considere agora as famílias de subespaços fechados de $\mathcal{H}^\sharp$ dados por

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{K}}_t = \Phi_t^{-1}(\mathcal{K}_t), \quad \hat{\mathcal{K}}_t^\sharp = \Phi_t^{-1}(\mathcal{K}_t^\sharp), \\ \hat{\mathcal{G}}_t = \Phi_t^{-1}(\mathcal{G}_t), \quad \hat{\mathcal{G}}_t^\sharp = \Phi_t^{-1}(\mathcal{G}_t^\sharp), \end{aligned} \tag{6.20}$$

e também as curvas de $\hat{I} \colon (a, b] \to B_{sym}(\mathcal{H}; \mathbb{R})$, $\hat{I}^\sharp \colon (a, b] \to B_{sym}(\mathcal{H}^\sharp; \mathbb{R})$, $\hat{F} \colon (a, b] \to \mathcal{L}(\mathcal{H}^\sharp; L^2([a, b]; (\mathbb{R}^k)^*))$ dadas por

$$\begin{aligned} \hat{I}_t = I_t(\Phi_t(\cdot), \Phi_t(\cdot)), \quad \hat{I}_t^\sharp = I_t^\sharp(\Phi_t(\cdot), \Phi_t(\cdot)) \\ \hat{F}_t = \Phi_t^{-1} \circ F_t \circ \Phi_t. \end{aligned} \tag{6.21}$$

Obviamente os índices e coíndices de $\hat{I}_t^\sharp$ e de suas restrições coíndice com os índices e coíndices de $I_t^\sharp$ e com suas correspondentes restrições. Usando (6.19) obtemos uma formula explícita para $\hat{I}_t^\sharp$:

$$\begin{aligned} \hat{I}_t^\sharp(\hat{V}, \hat{W}) = I_t^\sharp(\Phi_t(\hat{V}), \Phi_t(\hat{W})) = \\ \int_a^t [g(\frac{d}{ds}(\hat{V}(u_s)), \frac{d}{ds}(\hat{W}(u_s)) + g(R(s)\hat{V}(u_s), \hat{W}(u_s))]ds + \\ \Theta(\hat{V}(u_t), \hat{W}(u_t)) - S(\hat{V}(u_a), \hat{W}(u_a)) = \\ \int_a^t [\left(\frac{b-a}{t-a}\right)^2 g(\hat{V}'(u_s), \hat{W}'(u_s)) + g(R(s)\hat{V}(u_s), \hat{W}(u_s))]ds + \\ \Theta(\hat{V}(b), \hat{W}(b)) - S(\hat{V}(a), \hat{W}(a)). \end{aligned} \tag{6.22}$$

Podemos definir um valor inicial $i(a)$ para a função índice (6.18) considerando adequadas extensões dos objetos $\hat{I}_t, \hat{\mathcal{K}}_t, \hat{F}_t$ para o instante $t = a$. Sejam $\mathcal{I}_t = (t-a)\hat{I}_t$, $\mathcal{F}_t = (t-a)\hat{F}_t$, para $t \in (a,b]$. Dados $\hat{V}, \hat{W} \in \hat{\mathcal{H}}^\sharp$ e tomando a mudança de variável $s = s_u = a + \frac{t-a}{b-a}(u-a)$ na integral da equação (6.22) obtemos que

$$\mathcal{I}_t(\hat{V},\hat{W}) = \int_a^b [(b-a)g(\hat{V}(u),\hat{W}(u) + \frac{(t-a)^2}{b-a} g(R(s_u)\hat{V}(u),\hat{W}(u))]du + \\ (t-a)[\Theta(\hat{V}(b),\hat{W}(b)) - S(\hat{V}(a),\hat{W}(a))].$$

Fazendo $t = a$ na igualdade anterior, podemos definir

$$\mathcal{I}_a(\hat{V},\hat{W}) = (b-a)\int_a^b g(\hat{V}'(u),\hat{W}'(u))du. \tag{6.23}$$

Uma expressão explícita para $\mathcal{F}_t$ é dada por

$$[\mathcal{F}_t(\hat{V})(u)]_i = [(t-a)\hat{F}_t(\hat{V})(u)]_i = [(t-a)\Phi_t^{-1} \circ F_t \circ \Phi_t(\hat{V})(u)]_i = \\ [(t-a)F_t \circ \Phi_t(\hat{V})(s_u)]_i = [(t-a)F_t(\Phi_t(\hat{V}))(s_u)]_i = \\ (t-a)\left(g(\frac{d}{ds}(\Phi_t(\hat{V}))|_{s=s_u}, Y_i(s_u)) - \int_a^{s_u} g(\frac{d}{dx}(\Phi_t(\hat{V})), Y_i) + g(R\Phi_t(\hat{V}), Y_i)dx\right) = \\ (t-a)\left(g(\frac{b-a}{t-a}\hat{V}'(u), Y_i(s_u)) - \int_a^{s_u} g(\frac{b-a}{t-a}\hat{V}'(v_x), Y_i(x)) + g(R(x)\hat{V}(v_x), Y_i(x))dx\right),$$

onde na integração a relação entre v e x é $v = v_x = a + \frac{b-a}{v-a}(x-a)$ e daí, com a seguinte mudança na variável de integração $x = x_v = a + \frac{t-a}{b-a}(v-a)$, temos que

$$[\mathcal{F}_t(\hat{V})(u)]_i = (b-a)g(\hat{V}'(u), Y_i(s_u)) - \\ \int_a^{s_u} (t-a)g(\hat{V}'(v), Y_i(x_v)) + \frac{(t-a)^2}{b-a} g(R(x_v)\hat{V}(v), Y_i(x_v))dv. \tag{6.24}$$

Portanto, fazendo $t = a$ na igualdade anterior, podemos definir

$$\mathcal{F}_a \colon \mathcal{H}^\sharp \to L^2([a,b];(\mathbb{R}^k)^*)$$

por

$$[\mathcal{F}_a(\hat{V})(u)]_i = (b-a)g(\hat{V}'(u), Y_i(a)), \quad i = 0,\dots,k. \tag{6.25}$$

Como, para todo $t \in (a,b]$,

$$\hat{\mathcal{K}}_t = ker(q \circ \hat{F}_t|_{\mathcal{H}}) = ker(q \circ \mathcal{F}_t|_{\mathcal{H}}),$$

onde o mapa $q \colon L^2([a,t];(\mathbb{R}^k)^*) \to L^2([a,t];(\mathbb{R}^k)^*)/\mathcal{C}$ é a aplicação quociente e $\mathcal{C} \subset L^2([a,t];(\mathbb{R}^k)^*)$ é o subespaço das constantes, podemos definir o seguinte subespaço fechado de $\mathcal{H}$

$$\hat{\mathcal{K}}_a = ker(q \circ \mathcal{F}_a|_{\mathcal{H}}) = \{\hat{V} \in \mathcal{H} | \, g(\hat{V}'(\cdot), Y_i(a)) = \text{const.}, i = 1,\dots,k\}. \tag{6.26}$$

Para os resultados que seguem iremos supor que a curva de endomorfismos R é de classe C^1 e assim temos a seguinte proposição sobre a regularidade das famílias $\{\mathcal{I}_t\}_{t\in[a,b]}$ e $\{\hat{\mathcal{K}}_t\}_{t\in[a,b]}$.

Proposição 6.2.9. • *As curvas* $\hat{I}^\sharp\colon (a,b] \to B_{sym}(\mathcal{H};\mathbb{R})$ *e* $\mathcal{I}\colon [a,b] \to B_{sym}(\mathcal{H};\mathbb{R})$ *são de classe* C^1*;*

- *A família* $\{\hat{\mathcal{K}}_t^\sharp\}_{t\in(a,b]}$ *é uma* C^1*-família de subespaços fechados de* $\mathcal{H}^\sharp$*;*
- *Se não existir instantes focais do Sistema Simplético Reduzido Associado no no intervalo* $[c,d] \subset [a,b]$*, então* $\{\hat{\mathcal{K}}_t\}_{t\in[c,d]}$ *é uma* C^1*-família de subespaços fechado de* $\mathcal{H}$*.*

Demonstração: A primeira parte é análoga a proposição 6.1.1.

A segunda parte, usando a equação (6.24) e o lema 5.1.2 fica fácil de ver que $\hat{F}\colon (a,b] \to \mathcal{L}(\mathcal{H}^\sharp; L^2([a,b];(\mathbb{R}^k)^*))$ é de classe C^1. Pelo corolário 6.2.4 temos que $\hat{F}_t$ é sobrejetivo para todo $t \in (a,b]$. Portanto, com o lema 5.1.1, concluímos a segunda parte.

Para a terceira parte primeiro observe que $\hat{\mathcal{K}}_t = ker(q \circ \mathcal{F}_t|_{\mathcal{H}})$, para todo $t \in [a,b]$. O corolário 6.2.5 junto com o corolário 6.2.1 implica que $q \circ \mathcal{F}_t|_{\mathcal{H}}$ é sobrejetivo sempre que $t \in (a,b]$ não for instante focal do Sistema Simplético Reduzido Associado.
Afirmação: $\mathcal{F}_a$ é sobrejetiva.

Demonstração da Afirmação: Podemos supor que $\{Y_1(a),\ldots,Y_k(a)\}$ é uma base ortogonal para D_a (lembre da observação 6.2.1). Dado $f = (f_1,\ldots,f_k) \in L^2([a,b];(\mathbb{R}^n)^*)$ tome

$$V(u) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(b-a)g(Y_i(a),Y_i(a))}\left(\int_a^u f_i dv\right)Y_i(a) \quad -$$

$$\frac{(u-a)}{b-a}\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(b-a)g(Y_i(a),Y_i(a))}\left(\int_a^b f_i dv\right)Y_i(a), \quad u \in [a,b]. \tag{6.27}$$

Claramente $V(a) = 0$ e $V(b) = 0$, o que implica que $V \in \mathcal{H}$, e $\mathcal{F}_a(V) = f + c$, onde c é uma constante.

Q.E.D.

Isto conclui a terceira parte.

Q.E.D.

Corolário 6.2.6. *Considere um subintervalo* $[c,d] \subset (a,b]$*. Se nesse subintervalo não existe instante* (P,S)*-focal do Sistema Morse-Sturm e nem instante focal do Sistema Simplético Reduzido Associado, então a função índice (6.18) é constante nesse subintervalo.*

Demonstração: Seja $t \in [c,d]$ fixado. Pelo corolário 6.2.5 temos que $\mathcal{K}_t \cap \mathcal{G}_t = \{0\}$ e assim a proposição 6.2.5 nos dá que

$$ker(I_t|\mathcal{K}_t) = ker(I_t) = \mathcal{H}_t \cap \mathbb{J}|_{[a,t]} = \{0\}, \tag{6.28}$$

onde $\mathbb{J}|_{[a,t]} = \{J|_{[a,t]} \mid J \in \mathbb{J}\}$, e a última igualdade segue do fato de que t não é instante P-focal do sistema Morse-Sturm. Em particular $I_t|_{\mathcal{K}_t}$ é não degenerado. Iremos aplicar o lema 5.1.1. A proposição 6.2.7 verifica 1) do lema 5.1.1. Como $ker(I_t|_{\mathcal{K}_t}) = \{0\}$ as hipóteses 2) e 3) são verificadas, e também nos dá que $n_-(\widetilde{B}(t)) = 0$, onde $\widetilde{B}(t)$ é a restrição da derivada de I_t no instante t ao núcleo $ker(I_t|_{\mathcal{K}_t}) = \{0\}$. Portanto a função índice é constante numa vizinhança de t. Como $I_t|_{\mathcal{K}_t}$ é não degenerado para todo $t \in [c, d]$, então o corolário 5.1.1 implica que a função índice não tem saltos.

Q.E.D.

Relembre da definição 5.1.2 para o seguinte lema.

Lema 6.2.6. *Suponha que $t_0 \in (a, b]$ é instante focal do Sistema Simplético Reduzido Associado, em particular $\hat{\mathcal{K}}_{t_0} \cap \hat{\mathcal{G}}_{t_0} \neq \{0\}$ e fixe $\hat{V}_0, \hat{W}_0 \in \hat{\mathcal{K}}_{t_0} \cap \hat{\mathcal{G}}_{t_0} \subset ker(\hat{I}^\sharp_{t_0}|_{\hat{\mathcal{K}}^\sharp_{t_0}})$. Sejam $\tilde{V}, \tilde{W} \colon (a, b] \to \mathcal{H}^\sharp$ curvas de classe C^1 tais que $\tilde{V}_t, \tilde{W}_t \in \hat{\mathcal{K}}^\sharp_t, \forall t \in (a, b]$, e satisfazendo $\tilde{V}_{t_0} = \hat{V}_0, \tilde{W}_t = \hat{W}_0$. Então*

$$\frac{d}{dt}|_{t=t_0} \left(\hat{I}^\sharp_t(\tilde{V}_t, \tilde{W}_t)\right) = g(V_0'(t_0), W_0'(t_0)), \tag{6.29}$$

onde $V_0 = \Phi_{t_0}(\hat{V}_0), W_0 = \Phi_{t_0}(\hat{W}_0)$.

Demonstração: Como o lado esquerdo não depende das curvas $\tilde{V}, \tilde{W}$ considere a seguinte escolha:

Pelo lema 6.2.1 podemos escrever

$$V_0(s) = \sum_{i=1}^{k} v_i(s) Y_i(s), \quad W_0(s) = \sum_{i=1}^{k} w_i(s) Y_i(s), \quad s \in [a, t_0], \tag{6.30}$$

onde $v = (v_1, \ldots, v_k), w = (w_i, \ldots, w_k)$ são soluções do Sistema Simplético Reduzido Associado definidas no intervalo $[a, t_0]$, em particular são de classe C^2. Como o sistema está definido em todo o intervalo $[a, b]$, então podemos estender v e w ao intervalo $[a, b]$ e definir, para cada $t \in [a, b]$,

$$\bar{V}_t(s) = \sum_{i=1}^{k} v_i(s) Y_i(s), \quad \bar{W}_t(s) = \sum_{i=1}^{k} w_i(s) Y_i(s), \quad s \in [a, t].$$

Em outras palavras, $\bar{V}_t$ é a restrição, ou extensão, de V_0 ao intervalo $[a, t]$. O mesmo para $\bar{W}_t$. Claramente $\bar{V}_t, \bar{W}_t \in \mathcal{K}^\sharp_t$. Então considere $\tilde{V}_t = \Phi^{-1}(\bar{V}_t), \tilde{W}_t = \Phi^{-1}(\bar{W}_t) \in \mathcal{H}^\sharp$ e obviamente são de classe C^1 na variável t. Assim podemos calcular:

$$\frac{d}{dt}|_{t=t_0}\left(\hat{I}_t^\sharp(\tilde{V}_t,\tilde{W}_t)\right)=\frac{d}{dt}|_{t=t_0}\left(I_t^\sharp(\bar{V}_t,\bar{W}_t)\right)=$$
$$\frac{d}{dt}|_{t=t_0}\Bigg(\int_a^t g(\bar{V}_t'(s),\bar{W}_t'(s))+g(R(s)\bar{V}_t(s),\bar{W}_t(s))ds+$$
$$\Theta(\bar{V}_t(t),\bar{W}_t(t))-S(\overbrace{\bar{V}_t(a)}^{=0},\overbrace{\bar{V}_t(a)}^{=0})\Bigg)=$$
$$g(V_0'(t_0),W_0'(t_0))+g(R(t_0)V_0(t_0),\overbrace{W_0(t_0)}^{=0})+$$
$$\int_a^{t_0} g(\frac{d}{dt}|_{t=t_0}\bar{V}_t'(s),\bar{W}_{t_0}'(s))+g(R(s)\frac{d}{dt}|_{t=t_0}\bar{V}_t(s),\bar{W}_{t_0}(s))ds+$$
$$\int_a^{t_0} g(\bar{V}_{t_0}'(s),\frac{d}{dt}|_{t=t_0}\bar{W}_t'(s))+g(R(s)\bar{V}_{t_0}(s),\frac{d}{dt}|_{t=t_0}\bar{W}_t(s))ds+$$
$$\Theta(\frac{d}{dt}|_{t=t_0}\bar{V}_t(t),\overbrace{W_0(t_0)}^{=0})+\Theta(\overbrace{V_0(t_0)}^{=0},\frac{d}{dt}|_{t=t_0}\bar{W}_t(t)).$$

A conclusão segue do fato de que os valores de $\bar{V}_t(s),\bar{V}_t'(s),\bar{W}_t(s),\bar{W}_t'(s)$ não depende de t (sempre que estiverem definidos, isto é, $s\leq t$).

Q.E.D.

Corolário 6.2.7. *Seja $t_0\in(a,b]$ e suponha que $I_{t_0}^\sharp$ é não degenerado em $\mathcal{H}_{t_0}^\sharp$. Tomando $B(t)=\hat{I}_t^\sharp$ e $\mathbb{D}_t=\hat{\mathcal{K}}_t^\sharp$, então a forma bilinear $\bar{B}'(t_0)$, introduzida na definição 5.1.2 é negativa definida.*

Demonstração: Pela proposição 6.2.6 temos que $ker(\bar{B}(t_0))=\hat{\mathcal{K}}_{t_0}\cap\hat{\mathcal{G}}_{t_0}$. Dados $V_0,W_0\in\mathcal{K}_{t_0}\cap\mathcal{G}_{t_0}$ e escrevendo como em (6.30) fica fácil de ver que $V_0(t_0)=0=W_0(t_0)\Rightarrow V_0'(t_0),W_0'(t_0)\in D_{t_0}$. Daí, como g é negativo definido em D_{t_0}, o lema anterior nos dá que $\bar{B}'(t_0)$ é negativo semi-definido. Para verificar que $\bar{B}'(t_0)$ é não degenerada basta observar que, como V é de classe C^2 e é solução do Sistema Simplético Reduzido Associado (que é homogêneo) tal que se anula em t_0, se $V\in ker(\bar{B}'(t_0))$ o lema anterior nos dá que $V'(t_0)=0$ e então V é identicamente nula.

Q.E.D.

Agora iremos determinar o valor inicial da função índice.

Lema 6.2.7. *A restrição da forma bilinear $\mathcal{I}_a$ ao subespaço $\hat{\mathcal{K}}_a$ é representado por uma pertubação compacta de um isomorfismo positivo de $\hat{\mathcal{K}}_a$. Tal restrição é não degenerada e seu índice é igual ao índice de $g|_P$.*

Demonstração: A representação de $\mathcal{I}_a|_{\hat{\mathcal{K}}_a}$ é similar à proposição 6.2.7.

Escreva $P = P_+ \oplus P_-$, onde g é positiva definida em P_+ e negativa definida em P_-. Agora considere os seguinte subespaços de $\hat{\mathcal{K}}_a$:

$$\hat{\mathcal{K}}_+ = \{\hat{V} \in \hat{\mathcal{K}}_a | \, \hat{V}(a) \in P_+\},$$
$$\hat{\mathcal{K}}_- = \{\hat{V} \in \hat{\mathcal{K}}_a | \, \hat{V}(a) \in P_-, \hat{V}(b) = 0, \hat{V} \text{ é função afim }\}.$$

Afirmação 1: $\hat{\mathcal{K}}_a = \hat{\mathcal{K}}_+ \oplus \hat{\mathcal{K}}_-$.

Demonstração da Afirmação: Se $\hat{V} \in \hat{\mathcal{K}}_+ \cap \hat{\mathcal{K}}_-$, então $\hat{V}$ é uma função afim tal que $\hat{V}(a) = 0 = \hat{V}(b)$ e portanto é identicamente nula. Agora suponha que $\hat{V} \in \hat{\mathcal{K}}_a$ e escreva $\hat{V}(a) = \hat{V}_+(a) + \hat{V}_-(a)$, onde $\hat{V}_+(a) \in P_+$ e $\hat{V}_-(a) \in P_-$. Defina $\hat{W}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ por

$$\hat{W}(s) = \hat{V}_-(a) - \frac{s-a}{b-a}\hat{V}_-(a)$$

(em particular $dim(\hat{\mathcal{K}}_a) = dim(P_-)$). Obviamente que $\hat{W} \in \hat{\mathcal{K}}_a$ e que $\hat{V} - \hat{W} \in \hat{\mathcal{K}}_+$.

Q.E.D.

Para próxima Afirmação precisaremos o seguinte lema de caráter geral.

Lema 6.2.8. *Seja r um produto interno no $\mathbb{R}^n$ e $z\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ uma função integrável. então*

$$r(\int_a^b z, \int_a^b z) \le (b-a)\int_a^b r(z,z),$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, z for constante q.t.p.

Demonstração: Escrevendo a integral de z como uma limite de somas, $\int_a^b z = \lim_n \sum_{i\in P_n} z_{n,i}\Delta_{n,i}$, onde $\sum_{i\in P_n} \Delta_{n,i} = (b-a)$, temos que

$$r(\int_a^b z, \int_a^b z) = \lim_{m,n}\left(\sum_{j\in P_m}\sum_{i\in P_n} \Delta_j\Delta_i r(z_{m,j}, z_{n,i})\right) \le$$
$$\lim_{m,n}\left(\sum_{j\in P_m}\sum_{i\in P_n} \Delta_j\Delta_i \sqrt{r(z_{m,j}, z_{m,j})}\sqrt{r(z_{n,i}, z_{n,i})}\right) =$$
$$\left(\lim_m \sum_{j\in P_m} \sqrt{r(z_{m,j}, z_{m,j})}\Delta_j\right)\left(\lim_n \sum_{i\in P_n} \sqrt{r(z_{n,i}, z_{n,i})}\Delta_i\right) =$$
$$\left(\int_a^b \sqrt{r(z,z)}\right)^2 \le (b-a)\int_a^b r(z,z),$$

onde a primeira desigualdade seque da desigualdade de Cauchy-Schwarz e a última desigualdade segue de (6.15).

Q.E.D.

Afirmação 2: $\mathcal{I}_a$ é positivo definido em $\hat{\mathcal{K}}_+$ e negativo definido em $\hat{\mathcal{K}}_-$.

Demonstração da Afirmação: Dados $\hat{V}_0, \hat{W}_0 \in P_-$, sejam $\hat{V}, \hat{W} \in \hat{\mathcal{K}}_a$ definidos por $\hat{V}(s) = \hat{V}_0 - \frac{s-a}{b-a}\hat{V}_0$ e $\hat{W}(s) = \hat{W}_0 - \frac{s-a}{b-a}\hat{W}_0$. Daí,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_a(\hat{V}, \hat{W}) = (b-a)\int_a^b g(\hat{V}', \hat{W}')ds &= \\ (b-a)\int_a^b g(\frac{-1}{b-a}\hat{V}_0, \frac{-1}{b-a}\hat{W}_0)ds &= g(\hat{V}_0, \hat{W}_0). \end{aligned}$$

Esta igualdade mostra que $\mathcal{I}_a$ é negativa definida em $\hat{\mathcal{K}}_-$.

Agora suponha que $\hat{V} \in \hat{\mathcal{K}}_+$. Seja $\pi_a \colon \mathbb{R}^n \to D_a$ a projeção g-ortogonal sobre D_a e defina a forma bilinear r_a definida em $\mathbb{R}^n$ dada por

$$r_a(x, y) = g(x, y) - 2g(\pi_a(x), \pi_a(y)).$$

Observe que r_a é positiva definida e que $g(x, y) = r_a(x, y) - 2r_a(\pi_a(x), \pi_a(y))$ (ver demonstração da proposição 6.2.7). Assim,

$$\mathcal{I}_a(\hat{V}, \hat{V}) = (b-a)\left(\int_a^b r_a(\hat{V}', \hat{V}')ds - 2\int_a^b r_a(\pi_a(\hat{V}'), \pi_a(\hat{V}'))ds\right).$$

A primeira integral será estimada pelo lema anterior, a segunda integral pode ser calculada como se segue. Como $D_a \subset \mathbb{R}^n$ é negativa maximal, g é não degenerada e $\{Y_1(a), \ldots, Y_k(a)\}$ é base ortogonal para D_a, podemos completar esta última a uma base ortogonal do $\mathbb{R}^n$, digamos $\{Z_1 = Y_1(a), \ldots, Z_k = Y_k(a), Z_{k+1}, \ldots, Z_n\}$. Com isso, escrevendo $\hat{V} = \sum_{i=1}^n v_i Z_i$, obtemos que

$$\pi_a(\hat{V}) = \sum_{i=1}^k v_i Z_i, \qquad \pi_a(\hat{V}') = \sum_{i=1}^k v_i' Z_i.$$

Também

$$r_a(\pi_a(\hat{V}'), \pi_a(\hat{V}')) = -g(\pi_a(\hat{V}'), \pi_a(\hat{V}')) = -\sum_{i=1}^k v_1' g(\pi_a(\hat{V}'), Z_i) = -\sum_{i=1}^k v_1' g(\hat{V}', Z_i).$$

Como, para cada $i = 1, \ldots, k$, $g(\hat{V}', Z_i) = (g(\hat{V}, Z_i))'$ é constante (ver (6.26)), então podemos escreve-la como

$$g(\hat{V}', Z_i) = \frac{g(\hat{V}(b), Z_i) - g(\hat{V}(a), Z_i)}{b-a} = \frac{-g(\hat{V}(a), Z_i)}{b-a} = \frac{-g(\pi_a(\hat{V}(a)), Z_i)}{b-a}.$$

Portanto, a segunda integral vale

$$\begin{aligned} \int_a^b r_a(\pi_a(\hat{V}'), \pi_a(\hat{V}'))ds &= \sum_{i=1}^k \frac{g(\pi_a(\hat{V}(a)), Z_i)}{b-a}\int_a^b v_i' ds \\ \sum_{i=1}^k \frac{g(\pi_a(\hat{V}(a)), Z_i)}{b-a}(-v_i(a)) &= \frac{-g(\pi_a(\hat{V}(a)), \pi_a(\hat{V}(a)))}{b-a}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_a(\hat{V},\hat{V}) \geq r_a(\int_a^b \hat{V}', \int_a^b \hat{V}') + 2g(\pi_a(\hat{V}(a)), \pi_a(\hat{V}(a))) &= \\ r_a(\hat{V}(a),\hat{V}(a)) - 2r_a(\pi_a(\hat{V}(a)), \pi_a(\hat{V}(a))) = g(\hat{V}(a),\hat{V}(a)) &\geq 0,\end{aligned}$$

cuja a igualdade entre o primeiro e o último termo ocorre se, e somente se, $\hat{V}$ for uma função afim com $\hat{V}(a) = 0 = V(b)$, e consequentemente $\hat{V}$ é identicamente nula.

Q.E.D.

As afirmações 1 e 2 mostram o lema.

Q.E.D.

Corolário 6.2.8. *Para $t \in (a,b]$ suficientemente próximo de a, vale que $i(t) = n_-(g|_P)$.*

Demonstração: Segue diretamente dos lemas 6.2.7 e 5.1.1.

Q.E.D.

6.2.4 Demonstração do Teorema 6.2.2

Primeiro vamos considerar o caso em que R é de classe C^1 e existem apenas um número finito de instantes P-focais do sistema Morse-Sturm e que $t = b$ não é instante focal do Sistema Simplético Reduzido Associado. Pelo corolário 6.1.1 o número de instantes focais do Sistema Simplético Reduzido Associado. Do corolário 6.2.6, a função $i(t)$ é constante por partes com saltos nos instantes focais do Sistema Simplético Reduzido Associado ou do sistema Morse-Sturm.

Seja $t_0 \in (a,b)$ um instante focal do Sistema Simplético Reduzido Associado ou do sistema Morse-Sturm. Escolha um Lagrangiano $\mathbb{L}_*$ de $(\mathbb{R}^n \oplus (\mathbb{R}^n)^*;\omega)$ que seja transversal a ambos $\ell(t_0)$ e $\mathbb{L}_0 = \{0\} \oplus (\mathbb{R}^n)^*$ e considere a forma Índice estendida $I_t^\sharp$, para t numa vizinhança de t_0, definida em 6.2.3 correspondente a escolha da forma bilinear simétrica $\Theta = \phi_{\mathbb{L}_1,\mathbb{L}_0}(\mathbb{L}^*)$, onde $\mathbb{L}_1 = \mathbb{R}^n \oplus \{0\}$.
Afirmação: Com tal escolha, $I_t^\sharp$ é não degenerada em $\mathcal{H}_t^\sharp$, para todo t numa vizinhança de t_0.

Demonstração da afirmação: Temos que

$$\Theta(J(t)) = -g(J'(t)), \quad \forall J \in Ker(I_t^\sharp).$$

Lembrando que $\Theta = \phi_{\mathbb{L}_1,\mathbb{L}_0}(\mathbb{L}_*) = \omega(T(\cdot),\cdot)$, onde $T\colon \mathbb{L}_1 \to \mathbb{L}_0$ é tal que $Graf_{\mathbb{L}_1,\mathbb{L}_0}(T) = \mathbb{L}_*$, temos que para $w = (w,0) \in \mathbb{L}_1$,

$$\Theta(J(t), w) = \omega((0, T(J(t)), (w, o)) = -T(J(t))(w).$$

Portanto,

$$J \in ker(I_t^\sharp) \Longleftrightarrow T(J(t)) = g(J'(t)).$$

Daí se existe $J \in ker(I_{t_0}^\sharp) \subset \mathbb{J}|_{[a,t_0]}$ não nulo, em particular $J(t_0) \neq 0$, teremos que

$$\ell(t_0) \ni (J(t_0), gJ'(t_0)) = (J(t_0), T(J(t_0))) \in \mathbb{L}_*,$$

o que contraria a escolha de $\mathbb{L}_*$. Portanto $ker(I_{t_0}^\sharp) = \{0\}$. Por continuidade, para t suficientemente próximo de t_0,

$$T(J(t)) \neq g(J'(t)), \quad \forall J \in \mathbb{J}|_{[a,t]},$$

o que implica que $ker(I_t^\sharp) = \{0\}$.

Q.E.D.

Da proposição 6.2.8 temos que, para $t \neq t_0$ suficientemente próximo t_0,

$$i(t) = n_-(I_t|_{\mathcal{K}_t}) = n_-(I_t^\sharp|_{\mathcal{K}_t^\sharp}) - n_-(\phi_{\mathbb{L}_1,\mathbb{L}_0}(\mathbb{L}_*) - \phi_{\mathbb{L}_1,\mathbb{L}_0}(\ell(t))). \tag{6.31}$$

Para conhecer o salto da função índice através t_0 basta conhecer o salto de cada parcela do lado direito da igualdade anterior. Pela proposição 6.2.7 e pelo corolário 6.2.7 podemos aplicar o corolário 5.1.1, e assim temos temos que o salta da função $n_-(I_t^\sharp|_{\mathcal{K}_t^\sharp})$ através de t_0 é $dim(\mathcal{K}_{t_0} \cap \mathcal{G}_{t_0})$. Já a proposição 2.4.2 e observação 2.4.1 nos dizem que o salto de $n_-(\phi_{\mathbb{L}_1,\mathbb{L}_0}(\mathbb{L}_*) - \phi_{\mathbb{L}_1,\mathbb{L}_0}(\ell(t)))$ através de t_0 é $-\mu_{\mathbb{L}_0}(\ell|_{[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]})$, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Portanto

$$i(b) = n_-(I|_{\mathcal{K}}) = n_-(g|_P) + \sum_{t_0 \in (a,b)} dim(\mathcal{K}_{t_0} \cap \mathcal{G}_{t_0}) + \mu_{\mathbb{L}_0}(\ell).$$

O corolário 6.2.2 nos dá que $\sum_{t_0\in(a,b)} dim(\mathcal{K}_{t_0} \cap \mathcal{G}_{t_0}) = n_+(I|_{\mathcal{G}})$.

Agora considere o caso no qual R é de classe C^0 e que $t = b$ não é instante focal do Sistema Simplético Reduzido Associado. Considere uma sequência $R_m\colon [a,b] \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $m \in \mathbb{N}$, de curvas analíticas a valores nos endomorfismos g-simétricos tal que $R_m \to R$ uniformemente no intervalo $[a,b]$. Seja I_m a Forma Índice e $\mathcal{K}_m$ como em 6.8 para o Sistema Morse-Sturm relativo a R_m. Pela igualdade em (6.10) é fácil ver que $I_m \to I$ em $B_{sym}(\mathcal{H};\mathbb{R})$.
Afirmação 2: $\mathcal{K}_m \to \mathcal{K}$ no sentido da proposição 5.1.2

Demonstração da Afirmação: Da proposição 4.3.1 temos que $t = b$ não é instante (P, S)-focal do Sistema Simplético Reduzido Associado a quádrupla (g, R_m, P, S), para m suficientemente grande, uma vez que a matriz dos coeficientes do Sistema Simplético Reduzido Associado à quádrupla (g, R_m, P, S) converge uniformemente para a matriz dos coeficientes do Sistema Simplético Reduzido Associado à quádrupla (g, R, P, S) (ver equação (6.12)). Daí, pelos corolário 6.2.1 e 6.2.5 segue que $q \circ F_m$ é sobrejetiva, para m suficientemente grande. Também, pela formula (6.14), segue que $F_m \to F$ em $\mathcal{L}(\mathcal{H}^\sharp; L^2([a, b]; \mathbb{R}^k))$.

Q.E.D.

A Afirmação 2 junto coma proposição 6.2.7 nos permite aplicar a proposição 5.1.2 e assim $n_-(I_m|_{\mathcal{K}_m}) = n_-(I|_{\mathcal{K}})$, para m suficientemente grande. Da mesma forma, temos que para m suficientemente grande vale $n_+(I_m|_{\mathcal{G}}) = n_+(I|_{\mathcal{G}})$ (ver corolário 6.2.3). A proposição 4.3.1 conclui a demonstração desse caso.

O caso geral no qual $t = b$ pode ser instante focal do Sistema Simplético Reduzido Associado segue do fato de que $n_-(I_t|_{\mathcal{G}_t})$ e $i(t)$ são contínua a esquerda de $t = b$. A continuidade a esquerda de $n_-(I_t|_{\mathcal{G}_t})$ segue do corolário 6.1.1. Para $i(t)$ segue da formula (6.31), uma vez que $t = b$ não é instante (P, S)-focal do sistema Morse-Sturm e para $n_-(I_t^\sharp|_{\mathcal{K}_t^\sharp})$ segue da proposição 5.1.3 junto com o corolário 6.2.7.

Q.E.D.

6.2.5 Mais uma generalização

O teorema 6.2.1 pode ser generalizado para o caso em que se permite variação por geodésicas com o ponto final variando numa subvariedade.

Suponha que exista uma subvariedade $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ tal que $\gamma(b) \in \mathcal{N}$ e $\gamma'(b) \in T_{\gamma(b)}\mathcal{N}^\perp$. Definimos a Forma Índice

$$\begin{aligned} I_\gamma^{\mathcal{P},\mathcal{N}}(V, W) = \int_a^b g(D_t V, D_t W) + g(\mathcal{R}(\gamma', V)\gamma', W)dt + \\ \mathcal{S}_{\gamma'(b)}^{\mathcal{N}}(V(b), W(b)) - \mathcal{S}_{\gamma'(a)}^{\mathcal{P}}(V(a), W(a)), \end{aligned}$$

no espaço $\mathcal{H}_\gamma^{\mathcal{P},\mathcal{N}}$ dos campos vetorias ao longo de γ, de regularidade H^1-sobolev, que começam tangentes a $\mathcal{P}$ e terminam tangentes a $\mathcal{N}$. Em analogia a $\mathcal{K}_{\gamma,\mathcal{P}}^{\mathcal{D}}$ defina

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{\gamma,\mathcal{P},\mathcal{N}}^{\mathcal{D}} = \{V \in \mathcal{H}_\gamma^{\mathcal{P},\mathcal{N}} |\, g(V', Y_i) \in H^1([a, b]; \mathbb{R}), \\ g(V', Y_i)' = g(V', Y_i') + g(\mathcal{R}(\gamma', V)\gamma', Y_i), i = 1, \dots, k\}. \end{aligned}$$

Se $\gamma(b)$ não por $\mathcal{P}$-focal podemos definir o seguinte endomorfismo de $T_{\gamma(b)}\mathcal{M}$ dado por

$$\zeta_\gamma(J(b)) = D_t J(b), \quad J \in \Im.$$

Note que pelo lema 3.1.1, ζ_γ é g-simétrica e também denotaremos por ζ_γ a seguinte forma bilinear simétrica

$$\zeta_\gamma(J_1(b), J_2(b)) = g(J_1(b), D_t J_2(b)),$$

definida em $T_{\gamma(b)}\mathcal{M}$.

Teorema 6.2.3. *Sobre as hipóteses do teorema 6.2.1, supondo também que exite uma subvariedade $\mathcal{N}$ tal que $\gamma(b) \in \mathcal{N}$ e $\gamma'(b) \in T_{\gamma(b)}\mathcal{N}^\perp$. Então*

$$i_{Maslov}(\gamma) = n_-(I_\gamma^{\mathcal{P},\mathcal{N}}|_{\mathcal{K}^{\mathcal{D}}_{\gamma,\mathcal{P},\mathcal{N}}}) - n_+(I_\gamma^{\mathcal{P},\mathcal{N}}|_{\mathcal{G}^{\mathcal{D}}_\gamma}) - n_-(g|_{T_{\gamma(a)}\mathcal{P}}) - n_-(\mathcal{S}^{\mathcal{N}}_{\gamma'(b)} + \zeta_\gamma|_{T_{\gamma(b)}\mathcal{N}})$$

Demonstração: Defina $\Im_{\mathcal{N}} = \{J \in \Im |\, J(b) \in T_{\gamma(b)}\mathcal{N}\}$. Lembre que $\gamma(b)$ não ser ponto $\mathcal{P}$-focal significa que $\Im(b) = T_{\gamma(b)}\mathcal{M}$.
Afirmação: Vale a decomposição $I_\gamma^{\mathcal{P},\mathcal{N}}$-ortogonal $\mathcal{K}^{\mathcal{D}}_{\gamma,\mathcal{P},\mathcal{N}} = \mathcal{K}^{\mathcal{D}}_{\gamma,\mathcal{P}} \oplus \Im_{\mathcal{N}}$.

Demonstração da Afirmação: Dado $V \in \mathcal{K}^{\mathcal{D}}_{\gamma,\mathcal{P},\mathcal{N}}$, existe $J \in \Im_{\mathcal{N}}$ tal que $J(b) = V(b)$. É óbvio que $W = V - J \in \mathcal{K}^{\mathcal{D}}_{\gamma,\mathcal{P}}$. Como $\gamma(b)$ não um ponto $\mathcal{P}$-focal, temos que $\mathcal{K}^{\mathcal{D}}_{\gamma,\mathcal{P}} \cap \Im_{\mathcal{N}} = \{0\}$. Também,

$$\begin{aligned} I_\gamma^{\mathcal{P},\mathcal{N}}(J, W) = \int_a^b g(D_t J, D_t W) + g(\mathcal{R}(\gamma', J)\gamma', W)dt +\\ \mathcal{S}^{\mathcal{N}}_{\gamma'(b)}(J(b), W(b)) - \mathcal{S}^{\mathcal{P}}_{\gamma'(a)}(J(a), W(a)) =\\ \int_a^b \frac{d}{dt}[g(D_t J, W)]dt - \mathcal{S}^{\mathcal{P}}_{\gamma'(a)}(J(a), W(a)) =\\ -g(D_t J(a), W(a)) - \mathcal{S}^{\mathcal{P}}_{\gamma'(a)}(J(a), W(a)) =\\ g(\mathcal{S}^{\mathcal{P}}_{\gamma'(a)}(J(a)), W(a)) - \mathcal{S}^{\mathcal{P}}_{\gamma'(a)}(J(a), W(a)) = 0, \end{aligned}$$

pois $D_t J(a) + \mathcal{S}^{\mathcal{P}}_{\gamma'(a)}(J(a)) \in T_{\gamma(a)}\mathcal{P}^\perp$.

Q.E.D.

Portanto $n_-(I_\gamma^{\mathcal{P},\mathcal{N}}|_{\mathcal{K}^{\mathcal{D}}_{\gamma,\mathcal{P},\mathcal{N}}}) = n_-(I_\gamma^{\mathcal{P},\mathcal{N}}|_{\mathcal{K}^{\mathcal{D}}_{\gamma,\mathcal{P}}}) + n_-(I_\gamma^{\mathcal{P},\mathcal{N}}|_{\Im_{\mathcal{N}}})$. É obvio que $I_\gamma^{\mathcal{P},\mathcal{N}}|_{\mathcal{K}^{\mathcal{D}}_{\gamma,\mathcal{P}}} = I_\gamma^{\mathcal{P}}|_{\mathcal{K}^{\mathcal{D}}_{\gamma,\mathcal{P}}}$ e assim podemos aplicar o teorema 6.2.1 para esse índice. Para o outro índice, sejam $J_1, J_2 \in \Im_{\mathcal{N}}$ e por integração por partes

$$\begin{aligned} I_\gamma^{\mathcal{P},\mathcal{N}}(J_1, J_2) = g(D_t J_1(b), J_2(b)) + \mathcal{S}^{\mathcal{N}}_{\gamma'(b)}(J_1(b), J_2(b)) =\\ \zeta_\gamma(J_1(b), J_2(b)) + \mathcal{S}^{\mathcal{N}}_{\gamma'(b)}(J_1(b), J_2(b)) \end{aligned}$$

Logo $n_-(I_\gamma^{\mathcal{P},\mathcal{N}}|_{\Im_{\mathcal{N}}}) = n_-(\zeta_\gamma|_{T_{\gamma(b)}\mathcal{M}} + \mathcal{S}^{\mathcal{N}}_{\gamma'(b)})$, uma vez que $\Im_{\mathcal{N}} \ni J \mapsto J(b) \in T_{\gamma(b)}\mathcal{N}$ é um isomorfismo.

Q.E.D.

REFERÊNCIAS

[1] P. Piccione and D. V. Tausk, The Morse Index Theorem in Semi-Riemannian Geometry, Topology 41(6) (2002), 1123-1159. Citado 4 vezes nas páginas 6, 7, 10 e 38.

[2] F. Giannoni, A. Masiello, P. Piccione, D. Tausk, A generalized index theorem for Morse–Sturm systems and applications to semi-Riemannian geometry, Asian J. Math. 5 (3) (2001) 441–472. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 10.

[3] P. Piccione, D.V. Tausk, An index theorem for nonperiodic solutions of Hamiltonian systems, Proc. London Math. Soc. 83 (3) (2001) 351–389. Nenhuma citação no texto.

[4] F. Mercuri, P. Piccione, D. Tausk, Stability of the focal and the geometric index in semi-Riemannian geometry via the Maslov index, Technical Report RT-MAT 99-08, Mathematics Department, University of S~ao Paulo, Brazil, 1999 (LANL math.DG=9905096). Citado 4 vezes nas páginas 12, 26, 38 e 61.

[5] J. Milnor, Morse Theory, Princeton University Press, Princeton, 1969. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 10.

[6] E. A. Coddington, N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw–Hill Book Company, New York, Toronto, London, 1955. Citado na página 9.

[7] M. P. do Carmo, Geometria Riemanniana (2a edição), Projeto Euclides IMPA, 1988. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 11.

[8] J. Beem, P. Ehrlich, A Morse Index Theorem for Null Geodesics, Duke Math. J. 46 (1979), 561–569. Citado na página 9.

[9] J. K. Beem, P. E. Ehrlich, K. L. Easley, Global Lorentzian Geometry, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1996. Citado na página 9.

[10] V.I. Arnol'd, Characteristic class entering in quantization conditions, Funct. Anal. Appl. 1 (1967) 1–13 Citado na página 10.

[11] A.D. Helfer, Conjugate points on spacelike geodesics or pseudo-self-adjoint Morse–Sturm–Liouville systems, Pac. J. Math. 164 (2) (1994) 321–340. Citado na página 10.

[12] C. Conley, E. Zehnder, Morse-type index theory for Mows and periodic solutions for Hamiltonian equations, Commun. Pure Appl. Math. 37 (1984) 207–253. Citado na página 10.

[13] D. Salamon, E. Zehnder, Morse theory for periodic solutions of Hamiltonian systems and applications, Commun. Pure Appl. Math. 45 (1992) 1303–1360. Citado na página 10.

[14] H. Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differenctial Equations, Universitext, Springer, 2011. Citado 4 vezes nas páginas 11, 55, 60 e 73.

[15] Y. Long, A Maslov-type index theory for symplectic paths, Top. Methods Nonlinear Anal. 10 (1997) 47–78. Citado na página 10.

[16] M. Giaquinta, S. Hildebrandt, Calculus of Variation I (2a edition), A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 310, Springer, 2004. Citado na página 92.

[17] E. L. LIMA, – Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento. Projeto Euclides. Rio de Janeiro, IMPA, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 27.

[18] E. L. Lima, Homologia Básica. Rio de Janeiro: IMPA, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 28.

[19] E. L. Lima, Variedades Diferenciáveis. Rio de Janeiro: IMPA, 2007. Citado na página 14.

[20] V. S. Varadarajan, Lie Groups, Lie Algebras and Their Representations, Prentice-Hall series in Modern Analysis, 1974, New Jersey. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 20.

[21] J. SOTOMAYOR, Lições de equações diferenciais ordinárias. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1979. Citado na página 40.

[22] B. O'Neill, Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity, Academic Press, New York, 1983. Citado na página 11.

[23] B. Andrew, Matrix Group: An Intrduction to Lie Group Theory, Undergraduate Mathematics Series, Springer, 3rd Nenhuma citação no texto.

[24] J. Jost and X. Li-Jost, Calculus of Variations, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 64, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS Citado na página 92.

APÊNDICE A – REGULARIDADE NO CÁLCULO VARIACIONAL

Neste Apêndice iremos tratar da regularidade de mínimos de funcionais sobre o espaço das funções Absolutamente Contínuas. As referências para este apendice são [16], capítulo 1 secção 3, e [24], capítulo 1.

Lembre que o conjunto das funções $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ Absolutamente Contínuas, denotado por $AC([a,b];\mathbb{R}^n)$, é formado pelas funções contínuas tais que $f'(t)$ existe q.t.p $t \in [a,b]$ e é um número real. Tais funções satisfazem

$$f(t_2) - f(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f'(t)dt, \quad \forall t_1, t_2 \in [a,b].$$

Dado uma função $F\colon [a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ $(F(t,u,p))$ contínua, podemos definir um funcional (não necessariamente linear) $A\colon AC([a,b];\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ dado por

$$A(f) = \int_a^b F(t, f(t), f'(t))dt.$$

Afim de encontrar os extremos locais de A, no caso em que F é de classe C^1 com respeito a u e p, definimos a Primeira Variação A em $f \in AC([a,b];\mathbb{R}^n)$ na direção de $\eta \in AC_0([a,b];\mathbb{R}^n)$ por

$$\delta A(f,\eta) = \frac{d}{ds}|_{s=0} A(f + s\eta) = \int_a^b F_u(t, f(t), f'(t))\eta(t) + F_p(t, f(t), f'(t))\eta'(t)dt.$$

Se $f \in AC([a,b];\mathbb{R}^n)$ é um extremo de A, então

$$\delta A(f,\eta) = 0, \quad \forall \eta \in AC_0([a,b];\mathbb{R}^n). \tag{A.1}$$

Definição A.0.1.
- *Dizemos que $f \in C^1([a,b];\mathbb{R}^n)$ é um C^1-extremo fraco de A se satisfaz (A.1).*
- *Dizemos que uma função de Lipschitz $f \in AC([a,b];\mathbb{R}^n)$ é um L-extremo fraco de A se satisfaz (A.1).*

É bem conhecido o seguinte fato sobre extremos de funcionais, cuja demonstração será omitida.

Teorema A.0.1. *(Equação de Euler-Lagrange) Suponha que $F(t, u, p)$ é de classe C^1 com respeito a u e p, e seja f um AC-extremo fraco de A. Então, para quase todo ponto $t \in [a, b]$ vale*

$$\frac{d}{dt} F_p(t, f(t), f'(t)) = F_u(t, f(t), f'(t)). \tag{A.2}$$

Proposição A.0.1. *Suponha que F_p é de classe C^1 em $[a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Seja f um C^1-extremo fraco de A e suponha que a matriz Hessiana $F_{pp}(t, f(t), f'(t))$ é inversível para todo $t \in [a, b]$. Então f é de classe C^2 em $[a, b]$.*

Demonstração: Segue de (A.2) que, para todo $t \in [a, b]$,

$$F_p(t, f(t), f'(t)) = c + \int_a^t F_u(s, f(s), f'(s))ds, \tag{A.3}$$

para alguma constante $c \in \mathbb{R}^n$. A princípio temos que f' é apenas contínua e isto implica que

$$\alpha(t) := c + \int_a^t F_u(s, f(s), f'(s))ds \tag{A.4}$$

é de classe C^1. Em particular

$$F_p(t, f(t), f'(t)) - \alpha(t) = 0, \quad \forall t \in [a, b]. \tag{A.5}$$

Defina $G(t, p) = F_p(t, f(t), p) - \alpha(t)$, para $(t, p) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n$. Observe que G é de classe C^1 e além disso, como $G_p(t, p) = F_{pp}(t, f(t), p)$, satisfaz

$$det(G_p(t, f'(t))) \neq 0, \quad \forall t \in [a, b]$$

. Portanto podemos aplicar o Teorema da Função Implícita que nos dá que, para cada $t_0 \in [a, b]$ podemos definir $p(t)$, para t numa vizinhança suficientemente pequena de t_0, de modo que

$$G(t, p(t)) = 0, \quad p(t_0) = f'(t_0).$$

Além disso, p é única e é de classe C^1. Por unicidade, $p = f'$ nessa vizinhança, e portanto f é de classe C^2.

Q.E.D.

Proposição A.0.2. *Suponha que F_p é de classe C^1 em $[a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e que a matriz Hessiana $F_{pp}(t, u, p)$ é inversível para todo $(t, u, p) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Seja f um L-extremo fraco de A. Então f é de classe C^2 em $[a, b]$.*

Demonstração: Considere o mapa $\phi\colon [a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to [a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, dado por

$$\phi(t,u,p) = (t,u,F_p(t,z,p)).$$

Denotaremos $\sigma(t) = (t, f(t), f'(t))$ e $\beta(t) = F_p(\sigma(t))$, $\forall t \in [a,b]$. Pela equação (A.3) temos que

$$\phi(\sigma(t)) = (t, f(t), \alpha(t)), \quad \text{para q.t.p. } t \in [a,b], \tag{A.6}$$

onde $\alpha(t)$ é como definida em (A.4) e nesse caso é apenas contínua. O mapa ϕ é um difeomorfismo local uma vez que

$$D\phi(t,u,p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & F_{pt} \\ 0 & 1 & F_{pu} \\ 0 & 0 & F_{pp} \end{bmatrix}, \quad \forall (t,u,p) \in [a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n.$$

Agora fixe $t_0 \in (a,b)$ e seja $U \subset [a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ um fechado tal que $(t_0, f(t_0), f'(t_0)) \in int(U)$ e $\psi := \phi|_U\colon U \to \phi(U)$ é um difeomorfismo. Podemos supor que $U = [a_1,b_1]\times\Omega_1\times\Omega_2$, com $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ fechados. Sendo f uma função de Lipschitz, existem $N \subset [a_1,b_1]$ de medida nula tal que e um número real $k > 0$ tais que

$$|f'(t)| < k, \quad t \in (a_1,b_1)\backslash N. \tag{A.7}$$

Seja $K = \{\phi(t,u,p)|\,(t,u,p) \in U, \|p\| \leq k\}$. De (A.6) e (A.7) temos que $(t, f(t), \alpha(t)) \in K, \forall t \in [a_1,b_1]\backslash N$. Sendo K fechado e α contínua, temos que $(t, f(t), \alpha(t)) \in K, \forall t \in [a_1,b_1]$. Portanto $\psi^{-1}((t, f(t), \alpha(t))) \in U, \forall t \in [a_1,b_1]$ e também é contínua em $t \in [a_1,b_1]$. Mais precisamente,

$$\psi^{-1}(t, f(t), \alpha(t)) = (t, f(t), g(t)),$$

para alguma função contínua g definida em $[a_1,b_1]$. Daí, novamente por (A.6), temos que $f'(t)$ coíndice, para q.t.p. $t \in [a_1,b_1]$, com a função contínua g. Sendo f absolutamente contínua, temos que

$$f(t) = f(a_1) + \int_{a_1}^{t} f'(s)ds = f(a_1) + \int_{a_1}^{t} g(s)ds.$$

Logo, pela arbitrariedade de t_0, f é na verdade de classe C^1. Aplicando a proposição A.0.1 segue que f é de classe C^2.

Q.E.D.

Agora suponha que F é de classe C^2 com respeito a u e p e suponha que exista $f \in AC([a,b];\mathbb{R}^n)$ um C^1-extremo fraco de A. Definimos a Segunda Variação de A em f na direção de $\eta \in AC_0([a,b];\mathbb{R}^n)$ por

$$\delta^2 A(f,\eta) = \frac{d^2}{ds^2}|_{s=0} A(f + s\eta). \tag{A.8}$$

Mais precisamente (e omitindo os argumentos óbvios das funções)

$$\delta^2 A(f,\eta) = \int_a^b \eta'^T F_{pp}\eta' + 2\eta^T F_{pu}\eta' + \eta^T F_{uu}\eta dt.$$

Considere o seguinte funcional auxiliar

$$Q(\eta) = \int_a^b G(t,\eta(t),\eta'(t))dt$$

onde

$$G(t,u,p) = p^T F_{pp}(t,f(t),f'(t))p + 2u^T F_{pu}(t,f(t),f'(t))p + \\ u^T F_{uu}(t,f(t),f'(t))u$$

e $\eta \in AC([a,b];\mathbb{R}^n)$. Observe que $Q(\eta) = \delta^2 A(f,\eta) \geq 0$ (o lado direito de (A.8) continua fazendo sentido quando $\eta \in AC([a,b];\mathbb{R}^n)$).

Proposição A.0.3. *Suponha que F_{pp} e F_{pu} sejam de classe C^1, e também suponha que $F_{pp}(t,f(t),f'(t))$ é invertível para todo $t \in [a,b]$, onde f é um C^1-extremo fraco de A. Seja η um L-extremo fraco de Q. Então η de classe C^2.*

Demonstração: Observe que $G_{pp}(t,u,p) = F_{pp}(t,f(t),f'(t))$ é inversível para todo $(t,u,p) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Portanto estamos nas hipóteses da proposição A.0.2 para Q e η. Logo η é de classe C^2.

Q.E.D.

Observação A.0.1. *Observe que $\delta Q(\eta,\xi) = HessA(f)(\eta,\xi)$, assim dizer que $\delta Q(\eta,\xi) = 0, \forall \xi \in AC_0([a,b];\mathbb{R}^n)$ significa que $\eta \in ker(HessA(f))$.*

A Forma Índice de um Sistema Simplético (ver definição 4.1.3) pode ser visto como a Hessiana de um problema variacional. Para ver isto basta considerar

$$\begin{aligned} F(t,u,p) &= p^T B(t)^{-1} p \\ &+ \frac{1}{2} u^T (A(t)^T B(t)^{-1} + B(t)^{-1} A(t)) p \\ &+ u^T (A(t)^T B(t)^{-1} A(t) + C(t)) u. \end{aligned} \tag{A.9}$$

É fácil ver que $f(t) = 0$ é um C^1-extremo fráco para este problema variacional e sua Hessiana sobre f conincide com a Forma Íncide I_X