Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
EDUMATEC

Centro de Educação
Campus Universitário
Cidade Universitária
Recife- PE/BR CEP: 50.670-901
Fone/Fax: (81) 2126-8952
E-Mail: edumatec@ufpr.br
www.ufpe.br/ppgedumatec

ROSIVALDO SEVERINO DOS SANTOS

ANALISANDO AS ESTRATÉGIAS UTILIZADAS PELOS ALUNOS DA REDE MUNICIPAL DO RECIFE NA RESOLUÇÃO DE QUESTÕES DO SAEPE SOBRE NÚMEROS RACIONAIS

Recife

2011

ROSIVALDO SEVERINO DOS SANTOS

ANALISANDO AS ESTRATÉGIAS UTILIZADAS PELOS ALUNOS DA REDE MUNICIPAL DO RECIFE NA RESOLUÇÃO DE QUESTÕES DO SAEPE SOBRE NÚMEROS RACIONAIS

Dissertação apresentada ao Programam de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos

Recife

2011

Santos, Rosivaldo Severino dos

Analisando as estratégias utilizadas pelos alunos da rede municipal do Recife na resolução de questões do Saepe sobre números racionais / Rosivaldo Severino dos Santos. – Recife: O Autor, 2011.
120 f.:il.; quad.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, 2011.

Inclui Bibliografia e Anexos.

1. Matemática - Estudo e Ensino 2. Avaliação educacional 3. Números racionais I. Santos, Marcelo Câmara dos (Orientador) II. Título

CDD 372.7 UFPE (CE 2011-025)

Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
EDUMATEC

ALUNO

ROSIVALDO SEVERINO DOS SANTOS

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO

"Analisando as estratégias utilizadas pelos alunos da rede municipal do Recife na resolução de questões do SAEPE sobre números racionais."

COMISSÃO EXAMINADORA:

Presidente e Orientador
Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos

Examinador Externo
Profª. Drª. Tânia Maria Mendonça Campos

Examinador Interno
Prof. Dr. Paulo Figueiredo Lima

Recife, 21 de fevereiro de 2011.

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer a Deus, por tudo que tem acontecido em minha vida, e aproveitar esse momento para agradecer a todos, que direta ou indiretamente contribuiram para a relização deste trabalho.

RESUMO

A presente pesquisa trata da análise das estratégias utilizadas por alunos da Rede Municipal do Recife ao responderem questões de avaliações externas sobre números racionais, particularizando o SAEPE/Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco. Tomamos como objeto de estudo os Números Racionais, em virtude de que nas últimas avaliações do SAEPE, os itens referentes aos descritores relacionados a este componente curricular têm apresentado um baixo rendimento por parte dos alunos. Para alcançarmos o nosso objetivo, utilizamos como aporte teórico a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, pesquisas de alguns educadores matemáticos, que realizaram estudos à luz dessa Teoria, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval e a classificação teórica proposta por Nunes *et al.* (2003) para os diferentes sentidos da fração, contemplando cinco significados: parte-todo, medida, número, quociente e operador multiplicativo. A partir dos descritores do SAEPE referentes aos números racionais, elaboramos um instrumento com oito itens similares aos itens do SAEPE e aplicamos em 08 turmas do 9º ano do Ensino Fundamental de três escolas públicas da Rede Municipal do Recife, perfazendo um total de 276 alunos. Posteriormente realizamos 26 entrevistas com o objetivo de identificar as estrtégias utilizadas pelos alunos ao responderem os itens do instrumento de pesquisa. Na análise dos dados, realizamos um estudo comparativo dos resultados de nossa pesquisa com os resultados do SAEPE e analisamos as estratégias utilizadas pelos alunos aos responderem os itens do instrumento, com base nas entrevistas realizadas. Com relação aos resultados, observamos que no estudo comparativo, em sua maioria absoluta, os resultados de nossa pesquisa estão em consonância com os resultados do SAEPE. Já nas análises das estratégias utilizadas pelos alunos, observamos que os mesmos se utilizam de diferentes estratégias para responder o item que lhe é proposto. Concluimos que o ensino dos números fracionários deve ser realizado com situações-problemas em várias situações e em diferentes contextos e as estratégias utilizadas pelos alunos devem ser discutidas de forma coletiva, de modo que possam contribuir para o uso de estratégias eficientes.

Palavras-chave: Avaliação Educacional. Números Racionais. Estratégias.

ABSTRACT

The present research treats of the analysis of the strategies utilized by students from Recife's School District when they responded to external evaluation questions about rational numbers, specifically the SAEPE (Educational Evaluation System of Pernambuco). We took as our object of study the Rational Numbers, in virtue of that in the last SAEPE's evaluation, the items referring to descriptors related to this curricular component have presented a low feedback from the students. To reach our goal, we used as our theoretic contribution Verganaud's Conceptual Fields Theory, some mathematicians and educators' researches, who conducted studies in the light of that Theory, the Theory of the Semiotic Representation Registers of Raymond Duval and the theoretical classification proposed by Nunes *et al*. (2003) for the different meanings of the fraction, comprising five definitions: part-whole, measure, number, quotient and multiplying operator. Deriving out of the SAEPE's descriptors attributed to the rational numbers, we elaborated an equipment with eight items similar to the SAEPE's items and applied it in 08 9th grade classes of Elementary School from three public schools of Recife's School District, concluding with a total of 276 students. Subsequently, we did 26 interviews aiming to identify the strategies used by the students when answering the items from the research's tool. In the data analyses, we conducted a comparative study of the results of our research with the SAEPE's results and analyzed the strategies used by the students to respond the instrument's items, based on the previous interviews. Regarding the results, we observed than in the comparative study, in its absolute majority, our research's results are consistent with the SAEPE's results. Nevertheless, in the analysis of the strategies used by the students, we recognized they use different strategies to answer each proposed item. We established that the teaching of fractional numbers must be conducted with problem situations in several situations and in different contexts and the strategies used by the students must be discussed collectively, so that they can contribute to the use of effective strategies.

Key-words: Educational Evaluation. Rational Numbers. Strategies.

LISTA DE QUADROS

QUADRO 1 – Número de Estudantes que participaram do SAEPE em 2008.. 25

QUADRO 2 – Estudante que participaram do SAEPE por série e rede de ensino no ano de 2008.. 25

QUADRO 3 – Categoria de Desempenho e Níveis de Proficiência......... 27

QUADRO 4 – Médias comparadas da Rede Estadual de PE e Rede Municipal do Recife 28

QUADRO 5 – Resultado dos itens sobre números racionais no ano de 2008.. 29

QUADRO 6 – Resultado do SAEPE 2009.. 30

QUADRO 7 – Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático.. 39

QUADRO 8 – Registgros simbólicos numéricos ou algébricos.............. 42

QUADRO 9 – Registro Figural.. 43

QUADRO 10 – Registros na linguagem natural.................................... 43

LISTA DE GRÁFICOS

GRÁFICO 1 – Comparação do resultado do item 01 com o resultado de um item similar na avaliação do SAEPE... 81

GRÁFICO 2 – Comparação do resultado do item 02 com o resultado de um item similar na avaliação do SAEPE... 86

GRÁFICO 3 – Comparação do resultado do item 03 com o resultado de um item similar na avaliação do SAEPE... 91

GRÁFICO 4 – Comparação do resultado do item 05 com o resultado de um item similar na avaliação do SAEPE... 94

GRÁFICO 5 – Comparação do resultado do item 04 com o resultado de um item similar na avaliação do SAEPE... 98

GRÁFICO 6 – Comparação do resultado do item 08 com o resultado de um item similar na avaliação do SAEPE.. 103

GRÁFICO 7 – Comparação do resultado do item 06 com o resultado de um item similar na avaliação do SAEPE... 106

GRÁFICO 8 – Comparação do resultado do item 07 com o resultado de um item similar na avaliação do SAEPE.. 109

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – Campo Conveitual: Estruturas Multiplicativas.......................... 34

FIGURA 2 – Itens usados para estudar a compreensão
das crianças sobre frações.. 46

FIGURA 3 – Material utilizado para estudar divisão de
quantidades contínuas.. 48

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 11

2 AVALIAÇÃO EDUCACIONAL 14

2.1 AVALIAÇÃO EM LARGA ESCALA 19

2.2 SISTEMA DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL DE PERNAMBUCO 22

3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA 32

3.1 A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS DE VERGNAUD 32

3.2 A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA 38

3.2.1 A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO E OS NÚMEROS RACIONAIS.. 41

3.3 ASPECTOS COGNITIVOS DOS NÚMEROS FRACIONÁRIOS 45

3.4 CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS RACIONAIS 53

3.5 OS PCN's E OS NÚMEROS RACIONAIS.. 60

4. METODOLOGIA.. 63

4.1 O CONTEXTO DA PESQUISA... 63

4.2 O DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA 65

4.3 A REALIZAÇÃO DA COLETA.. 66

4.4 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DO INSTRUMENTO DE PESQUISA 67

5. ANÁLISE DOS RESULTADOS..79

5.1 QUESTÕES DO TIPO PARTE-TODO.. 80

5.2 QUESTÕES DE REPRESENTAÇÃO DE NÚMEROS RACIONAIS NA RETA NUMÉRICA 89

5.3 QUESTÕES SOBRE EQUIVALÊNCIA DE FRAÇÕES............................... 97

5.4 QUESTÕES SOBRE MUDANÇA DE REPRESENTAÇÃO (FORMA FRACIONÁRIA ⇒ FORMA DECIMAL) 104

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS 113

REFERÊNCIAS...117

ANEXOS..120

1 INTRODUÇÃO

O presente estudo trata da análise das estratégias utilizadas pelos alunos da Rede Municipal do Recife na resolução de questões do SAEPE, no eixo de Números e Operações sobre Números Racionais.

Nosso interesse por este tema emerge da prática pedagógica como professor de matemática na Rede Municipal do Recife, onde cotidianamente podemos constatar as dificuldades que os alunos têm em resolver questões referentes a números fracionários.

O ensino dos números fracionários no Ensino Fundamental tem início no 2º ciclo, conforme sugestão dos Parâmetros Curriculares Nacionais, quando o conceito de fração é formalmente apresentado aos alunos e continua até pelo menos o 3º ciclo do Ensino Fundamental

Entretanto, o que verificamos são os alunos chegarem ao final do Ensino Fundamental e Médio com muita dificuldade para resolver problemas que envolvam números racionais em sua forma fracionária e decimal.

Diversas pesquisas no âmbito da Educação Matemática sobre os números fracionários têm indicado que a forma como esses números são apresentados às crianças, normalmente com o significado parte-todo com quantidades contínuas e de forma descontextualizada, contribuem para que os alunos não superem as dificuldades apresentadas em lidar com problemas envolvendo números fracionários.

Kerslake (1986) em estudos com frações, concluiu que o único modelo de fração que os alunos sentiam-se familiarizados foi o de fração como parte de um todo, o que dificultou o entendimento do aspecto de divisão ou de distribuição.

Nunes e Bryant (1997) afirmam que uma forma comum de apresentar as frações às crianças é através de um todo dividido em partes, destacando algumas pintadas e informando as crianças que as partes pintadas representam o numerador e o total de partes é o denominador.

Campos e cols. (1995) demonstraram que a introdução de frações através do modelo parte-todo, simplesmente leva os alunos a aplicar um procedimento de dupla contagem sem entender o significado da fração.

Merlini (2005) investigou a formação e o desenvolvimento do conceito de fração com alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental e seus professores. Os resultados indicaram que, tanto na 5ª como na 6ª série, os percentuais de alunos que tiveram êxito foram baixos e próximos um do outro, ficando em média com 21,16% de acertos.

Essas dificuldades são refletidas nos baixos desempenhos dos alunos nas avaliações dos sistemas de ensino – avaliações em larga escala – que os mesmos participam, com destaque para as questões que envolvem números fracionários.

É a partir da avaliação do SAEPE/Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco, realizada em 2008, cujos resultados foram divulgados em 2009, onde a Rede Municipal do Recife obteve médias em Matemática de 169,3 para o 5º ano, e 210,7 para o 9º ano, quando o nível de proficiência desejável para esses anos são respectivamente valores acima de 250 e 325 pontos, que temos como problema de pesquisa: **analisar as estratégias utilizadas pelos alunos do 9º ano da Rede Municipal do Recife na resolução de questões do SAEPE sobre números racionais.**

Esta dissertação está dividida em seis capítulos. No primeiro capítulo apresentamos o nosso problema de pesquisa.

O segundo capítulo trata de Avaliação Educacional e está dividido em três seções. A primeira seção traz algumas reflexões sobre Avaliação Educacional, ressaltando a importância dessa avaliação para o sistema educacional, onde enfatizamos a avaliação interna, que é de responsabilidade do professor e da escola, com um breve histórico da avaliação e seus objetivos na visão de alguns autores, Miras e Solé (1996), Zabala, (1998), Nérici (1977), entre outros. A segunda seção trata da Avaliação em Larga Escala, que é uma avaliação externa realizada pelos órgãos responsáveis pela Educação em nosso país, em nível federal, estadual e municipal, onde traçamos um breve percurso dessa avaliação dos anos 80 até os dias de hoje. E na terceira seção abordamos o Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco/SAEPE, onde descrevemos o percurso do SAEPE desde a sua criação e apresentamos os resultados da edição de 2008, que foi divulgado em 2009, o qual deu origem a nossa pesquisa, e a título de informação trazemos os resultados da edição de 2009, divulgados em 2010 sobre os itens e descritores referentes ao eixo de números e operações sobre números racionais.

Para a Fundamentação Teórica é dedicado o terceiro capítulo, onde apresentamos a Teoria dos Campos Conceituais do Professor e Pesquisador Gerard Vergnaud (1988; 1990; 1996), alguns aspectos cognitivos e de construção dos números racionais, e por fim apresentamos as recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino dos números racionais.

No quarto capítulo, apresentamos a metodologia utilizada, onde descrevemos o contexto em que foi realizada a pesquisa e o seu desenvolvimento, bem como a descrição e análise do instrumento de pesquisa.

No quinto capítulo apresentamos a análise dos dados, onde faremos uma análise comparativa dos dados e a análise das estratégias utilizadas pelos alunos aos resolverem os itens constantes no protocolo de pesquisa.

E por fim, no sexto capítulo, apresentamos as considerações finais com base nos resultados obtidos e nas análises realizadas em nossa pesquisa.

2 AVALIAÇÃO EDUCACIONAL

Durante muito tempo o termo avaliar foi inevitavelmente associado a questões como realizar provas, atribuir uma nota e repetir ou passar de ano na escola. Essa associação, que ainda se faz presente em nossas escolas, é resultado de uma concepção pedagógica tradicionalmente dominante. Nela a educação é concebida como transmissão e memorização de conhecimentos prontos, e o aluno é visto como um ser passivo e receptivo.

Entretanto, atualmente, preconiza-se que a educação deve ser concebida como experiência de vivência multiplicada e variada, tendo em vista o desenvolvimento motor, cognitivo, objetivo e social do educando. Nessa abordagem o aluno deve ser visto como um ser ativo e dinâmico, que participa da construção do seu próprio conhecimento. Nessa visão, em que educar é formar e aprender é construir o seu próprio saber, a avaliação contempla outras dimensões, e não se reduz a apenas atribuir notas.

Se o objetivo de ensinar e aprender consiste na implementação de mudanças e aquisição de comportamentos motores, cognitivos, afetivos e sociais, o ato de avaliar deve consistir em verificar se esses objetivos estão sendo realmente atingidos e em que medida se dá essa consecução, para ajudar o aluno a avançar na aprendizagem e na construção do seu saber. Nessa perspectiva, a avaliação assume um sentido orientador e cooperativo. Assim a avaliação permite que o aluno tome consciência de seus avanços e dificuldades, para continuar progredindo na construção do seu conhecimento.

Em termos gerais, a avaliação é um processo de coleta e análise de dados, tendo em vista verificar se os objetivos propostos foram atingidos, sempre respeitando as características individuais e o ambiente em que o educando vive. A avaliação deve ser integral, considerando o aluno como um ser total e integrado, e não de forma fragmentada.

O ato de avaliar fornece dados que permitem verificar o nível de aprendizagem dos alunos, e, também, determinar a qualidade do processo de ensino. Ao avaliar o progresso de seus alunos na aprendizagem, o professor pode obter informações valiosas sobre seu próprio trabalho. Nesse sentido, a avaliação tem uma função de retroalimentação ou feedback, porque fornece ao professor dados para que ele possa repensar e replanejar sua atuação didática, visando aperfeiçoá-la, para que seus alunos obtenham mais êxito na aprendizagem.

Concordando com Zabala (1998), de que "não há docência sem discência" (p. 26), distinguimos dois processos avaliáveis e, pelo menos, dois sujeitos que devem ser avaliados: o aluno que aprende e o professor que ensina. Nessa perspectiva o desempenho do aluno pode e deve ser relacionado ao desempenho do professor, além de outros fatores e agentes intervenientes também influírem no resultado da aprendizagem do aluno.

Zabala (1998) também percebe que a avaliação escolar correta não deve se cingir apenas à relação entre esses dois protagonistas diretamente envolvidos no processo educativo – o aluno e o professor –, pois, na realidade, o ensino/aprendizagem em sala de aula inclui processos e relações pedagógicas grupais, considerando a classe como um todo. Mas essa visão de avaliação pode ser ampliada ainda mais, se não nos prendermos somente ao que acontece em sala de aula, possibilitando que tenhamos uma fotografia mais abrangente do processo de ensino/aprendizagem ao focalizar este como reflexo do todo, ou seja, a aprendizagem do aluno pode ser avaliada como resultante das condições gerais propiciadas pela instituição escolar e do esforço do próprio aluno para efetivá-la.

Um sistema de avaliação deve obter e organizar informações periódicas e comparáveis sobre diferentes aspectos do sistema educacional. Essas informações deverão servir para nortear intervenções que venham a melhorar a aprendizagem dos alunos.

Na visão de Miras e Solé (1996, p.375), os objetivos da avaliação são traçados em torno de duas possibilidades: emissão de “um juízo sobre uma pessoa, um fenômeno, uma situação ou um objeto, em função de distintos critérios”, e “obtenção de informações úteis para tomar alguma decisão”.

Para Nérici (1977), a avaliação é uma etapa de um procedimento maior que incluiria uma verificação prévia. A avaliação, para este autor, é o processo de ajuizamento, apreciação, julgamento ou valorização do que o educando revelou ter aprendido durante um período de estudo ou de desenvolvimento do processo de ensino/aprendizagem.

Segundo Bloom, Hastings e Madaus (1975), a avaliação pode ser considerada como um método de adquirir e processar evidências necessárias para melhorar o ensino e a aprendizagem, incluindo uma grande variedade de evidências que vão além do exame usual de ‘papel e lápis’. É ainda um auxílio para classificar os objetivos significativos e as metas educacionais, um processo para determinar em que medida os alunos estão se desenvolvendo dos modos desejados, um sistema de controle da qualidade, pelo qual pode ser determinada etapa por etapa do processo ensino/aprendizagem, a efetividade ou não do processo e, em caso negativo, que mudanças devem ser feitas para garantir sua efetividade.

Perrenoud (1999), evidencia que a avaliação escolar, mais cedo ou mais tarde, cria hierarquias de excelência em função das quais se decidirá o prosseguimento no curso seguido, o papel na sociedade e, também, a entrada no mercado de trabalho. Enfatiza que o que separa o êxito do fracasso é um ponto de ruptura. Introduzido em uma classificação e, qualquer que seja sua justificativa teórica ou prática, esta ruptura introduz uma dicotomia no conjunto de alunos. Se estiver acima do patamar do ponto de ruptura tem êxito, se estiver abaixo deste ponto é considerado como fracassado.

Guba e Lincoln (1989) descrevem quatro gerações de avaliações ao longo dos últimos cem anos que correspondem a diversas perspectivas, abordagens, significados e conceitualizações.

A primeira geração, conhecida como a geração medida, concebe avaliação e medida como sinônimos. Para essa geração a idéia que prevalecia era a de que a avaliação era uma questão essencialmente técnica que, por meio de testes bem construídos, permitia medir com rigor e isenção as aprendizagens escolares dos alunos. A concepção de avaliação e medida como sinônimos, ainda possui uma enorme influência nos sistemas educacionais atualmente. Ou seja, na prática da sala de aula, isto pode significar que a avaliação pode ser reduzida a aplicação de um ou vários testes e à atribuição de uma classificação em períodos previamente determinados. Essa concepção de avaliação como medida ainda encontra-se presente e com uma grande influência nos atuais sistemas educacionais, uma vez que ela é um dos pilares que sustentam a avaliação em larga escala, a qual será apresentada na próxima seção.

A segunda geração esforçou-se por conseguir superar algumas dificulddes detectadas nas avaliações da primeira. Por exemplo, conceber como único objeto de avaliação, o conhecimento dos alunos.

Em determinado momento, verificou-se que seria pouco significativo avaliar um sistema educacional apenas com base nos resultados dos alunos. Existem muitos outros fatores que devem ser considerados e envolvidos num processo que, por exemplo, tenha relação com a revisão dos currículos existentes. Essa geração passou a ser conhecida como a geração da descrição, uma vez que tinha como objetivo descrever padrões de pontos fortes e de pontos fracos, não se limitando a medir, mas avança um pouco à medida que procura descrever até onde os alunos podem atingir os objetivos previamente definidos.

Muitas das características da primeira geração continuaram presentes na segunda geração, como por exemplo, a medida não era mais o objetivo principal da avaliação, porém passou a ser um dos meios a serviço da geração da descrição. Ralph Tyler é considerado personagem de destaque nessa geração, uma vez que foi ele quem pela primeira vez falou da necessidade de se criarem objetivos que possibilitasse definir o que se estava avaliando. Já nos anos de 1930 e 40, Tyler compreendia que o currículo deveria ser um instrumento planejado e abrangente no que se refere as experiências formativas que ocoriam no âmbito da escola, com o objetivo de contribuir para que os objetivos que foram previamente definidos, pudessem ser atingidos pelos alunos. A expressão *Avaliação Educacional* foi escolhida por Tyler para designar o processo de avaliação do cumprimento ou não dos objetivos previamente definidos.

A terceira geração surge com o objetivo de superar as dificuldades da geração precedente e é denominada como geração da formulação de juízos de valor acerca das aprendizagens e do sistema educacional. É nessa geração que se distinguem os conceitos de avaliação somativa e avaliação formativa, a primeira mais voltada à prestação de contas, à seleção e à certificação e a segunda mais comprometida com o desenvolvimento, à melhoria das aprendizagens e à regulação dos processos de ensino e aprendizagem.

Bloom, Hastings e Madaus (1971) desenvolvem nessa fase um conjunto de perspectivas sobre a organização do ensino e sobre a avaliação das aprendizagens. Esses autores preconizam que a avaliação formativa tinha um papel crucial nas ações didáticas que o professor deveria empreender como resultado das eventuais dificuldades de aprendizagem dos alunos.

A quarta geração de avaliação proposta por Guba e Lincoln (1989) constitui uma verdadeira ruptura epistemológica com as anteriores, pois surge com o objetivo de superar as dificuldades das três gerações anteriores.

Grande parte da avaliação de quarta geração, de referência construtivista, preconiza que o professor não deve ser o único detentor do poder de avaliar, devendo partilhar esse poder com os alunos e outros atores e devem fazer uso de várias estratégias, técnicas e instrumentos de avaliação. A avliação formativa deve priorizar a melhoria e a regulação das aprendizagens e o feedback, nesta avaliação deve ser indispensável para que a avaliação se integre plenamente no processo de ensino-aprendizagem. Por fim, para essa geração, a avaliação deve ter como objetivo principal, ajudar as pessoas a desenvolver suas aprendizagens e não julgá-las ou classififá-las em uma escala, devendo para alcançar seus objetivos, fazer uso de métodos predominantemente qualitativos, não se excluindo o uso de métodos quantitativos.

2.1 AVALIAÇÃO EM LARGA ESCALA

A avaliação em larga escala enquanto política pública, tal como é hoje concebida, foi iniciada no Brasil, no início dos anos 80, quando o Ministério da Educação iniciou o desenvolvimento de estudos sobre avaliação educacional, movido pelo incentivo proveniente das agências financiadoras internacionais e, nessa época, foram lançados os pressupostos para a construção do que veio a se tornar mais tarde o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB). Esse tipo de avaliação é um dos principais instrumentos para a elaboração de políticas educacionais dos sistemas de ensino e redirecionamento das metas das unidades escolares. Seu foco é o desempenho da escola e o seu resultado é uma medida de proficiência que possibilita aos gestores a implementação de políticas públicas, e às unidades escolares um retrato de seu desempenho.

Nos anos 80 já se vivenciava, no Brasil, um processo gradual de redemocratização, o que gerava um clima tanto de busca da universalização e qualificação da educação, quanto de percepção da necessidade de se construir instrumentos para a avaliação em larga escala. (GOMES NETO; ROSEMBERG, 1985)

A partir da década de 90, o Estado passa a ser, o centro de avaliação das políticas e projetos implementados em todos os níveis e modalidades de ensino, principalmente, após a promulgação da segunda lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, lei nº 9394 em outubro de 1996.

Historicamente, desde a Constituição Federal de 1988, passando por sucessivas Medidas Provisórias, pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional de 1996, pelo Plano Nacional de Educação e por diversos Decretos do Poder Executivo, constata-se um avanço significativo no desenvolvimento e implementação de políticas de avaliação em larga escala para aferição quantitativa e qualitativa da educação nacional.

A avaliação em larga escala avalia as redes ou os sistemas de ensino, indo além da sala de aula, podendo ser censitária ou amostral. Por isso, ela requer metodologia e instrumentos específicos de análises que possibilitem a manutenção da comparabilidade e a confiabilidade dos resultados. Para efetivar a comparabilidade, os testes são construídos de forma padronizada e seus resultados são alocados em uma escala de proficiência que varia de zero a 500 com intervalos de 25 pontos. Os intervalos indicam a consolidação de competências e habilidades ao longo do processo de ensino e aprendizagem

A partir de 1990 foi implantado pelo Ministério da Educação, por meio do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB) que avalia, a partir de uma amostra representativa de sujeitos e utilizando uma amostragem matricial dos itens, alunos do 5º e do 9º anos do Ensino Fundamental e alunos do 3º ano do Ensino Médio, em Língua portuguesa e em Matemática e foi aplicado inicialmente em 1995.

Em 2005, com o objetivo de se obter dados mais detalhados sobre a realidade educacional, foi instituída a Prova Brasil, que tem como objetivo avaliar censitariamente, em Língua Portuguesa e Matemática, alunos do 5º e 9º anos do Ensino Fundamental em turmas de área urbana que tenham a partir de 30 alunos matriculados nestes anos de ensino.

A Prova Brasil é uma avaliação para diagnóstico, em larga escala, desenvolvida pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep/MEC). Ela tem o objetivo de avaliar a qualidade do ensino oferecido pelo sistema educacional brasileiro a partir de testes padronizados e questionários socioeconômicos. No questionário socioeconômico, os estudantes fornecem informações sobre fatores de contexto que podem estar associados ao desempenho. Professores e diretores das turmas e escolas avaliadas também respondem a questionários que coletam dados demográficos, perfil profissional e de condições de trabalho.

No ano de 2009 as escolas rurais de ensino fundamental também participaram da Prova Brasil e o número de alunos estabelecido como critério para participação passou a ser de 20 alunos nas séries avaliadas. Os resultados da Prova Brasil são comparáveis ao longo do tempo, ou seja, pode-se acompanhar a evolução dos desempenhos das escolas, das redes de ensino e do sistema como um todo.

Em 2008 foi aplicada a Provinha Brasil de português aos alunos que estão iniciando o 2º ano do Ensino Fundamental com o objetivo de diagnosticar o nível de alfabetização dos alunos, ainda no início da Educação Básica, viabilizando assim, a elaboração de ações que visem sanar possíveis insuficiências apresentadas nas áreas de leitura e escrita. Essa avaliação acontece em duas etapas, uma no início e a outra ao final do ano letivo. A aplicação em dois períodos distintos visa possibilitar aos professores e gestores educacionais a realização de um diagnóstico mais preciso que permita conhecer o que foi agregado na aprendizagem das crianças, em termos de habilidades de leitura dentro do período avaliado. Com relação ao componente curricular de matemática, ocorreu no ano de 2010, o processo de pré-testagem da Provinha Brasil de Matemática nas séries iniciais do Ensino Fundamental. A Provinha Brasil de Matemática tem como foco analisar as habilidades iniciais e as construídas no processo de alfabetização da Matemática, já que o propósito é avaliar os alunos no início do primeiro semestre letivo e no final do segundo semestre letivo, explorando diversos campos ou blocos da matemática, como se refere os Parâmetros Curriculares Nacionais.

Atualmente os Estados estão procurando desenvolver seus próprios sistemas de avaliação, estabelecendo metas e diretrizes específicas às suas realidades. A Universidade Federal de Juiz de Fora/UFJF, através da Faculdade de Educação/CAED- Centro de Políticas Públicas e Avaliação da Educação é responsável pela organização de alguns sistemas de avaliação em alguns estados, como por exemplo, o SAERJ-Sistema de Avaliação da Educação do Estado do Rio de Janeiro, o SAERS-Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Rio Grande do Sul, o SEAPE-Sistema Estadual de Avaliação da Aprendizagem no Acre, o SIMAVE-Sistema Mineiro de Avaliação da Educação Pública em Minas Gerais, o SPAECE-Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará e o SAEPE-Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco.

2.2 SISTEMA DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL DE PERNAMBUCO – SAEPE

Em Pernambuco, a consolidação da política de avaliação se dá com o surgimento do Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco (SAEPE) em 2000, mediante acordo de cooperação técnica com a UNESCO e o Ministério de Educação e Cultura, MEC/INEP e em regime de colaboração com os municípios, por meio da União Nacional dos Dirigentes Municipais de Educação, UNDIME/ PE.

Na primeira versão do SAEPE, em 2000, não houve a adesão da totalidade dos 184 municípios do Estado, participaram desta versão toda a rede estadual mais 68 municípios. A totalidade dos municípios só foi atingida na segunda versão, em 2002, e mantida na última versão, em 2010. Desde a sua primeira versão, o SAEPE trouxe avanços para o sistema de avaliação, por ter a iniciativa de realizar, em parceria com os municípios, uma avaliação conjunta. De certa forma, isso contribuiu para desenvolver uma cultura de avaliação nas redes públicas do estado de Pernambuco.

O SAEPE tem avaliado, de forma censitária, a eficiência e o desempenho de alunos das redes de ensino estadual e municipal sendo, no 3º ano, apenas em Língua Portuguesa, e no 5º e 9º anos do Ensino Fundamental e 3ª série do Ensino Médio, incluindo os projetos de correção de fluxo escolar, nas áreas curriculares de Língua Portuguesa e Matemática, com o objetivo de verificar a qualidade do ensino e o desempenho das escolas e monitorar o padrão de qualidade do ensino a fim de subsidiar políticas de melhoria da qualidade da educação oferecida pelas escolas públicas, passando a ser realizado anualmente a partir de 2008.

Além da aplicação dos testes, a avaliação do SAEPE inclui outros instrumentos como o questionário do estudante, cujo objetivo é traçar o perfil socioeconômico e sua trajetória escolar, os questionários do professor e do diretor, que têm o objetivo de traçar o perfil dos profissionais da educação de Pernambuco e o questionário da escola, com o objetivo de conhecer sua infraestrutura e os serviços oferecidos pela unidade de ensino, a fim de identificar os fatores que possam interferir no desempenho escolar dos estudantes.

Nos testes do SAEPE, os itens são elaborados a partir de uma Matriz de Referência, que é composta por um conjunto de descritores que explicitam dois pontos básicos do que se pretende avaliar: o conteúdo programático a ser avaliado em cada período de escolarização e o nível de operação mental necessário para a realização de determinadas tarefas. Vale salientar que a Matriz de Referência utilizada para elaborar os testes do SAEPE em língua portuguesa e matemática foi construída tendo como referência a Matriz de Referência do SAEPE 2002 e a Matriz de Referência do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica/SAEB, devendo, portanto, contemplar as habilidades consideradas fundamentais e passíveis de serem mensuradas em testes de múltipla escolha.

A matriz de referência do SAEPE é composta por quatro eixos que são Espaço e Forma; Grandezas e Medidas; Números, Operações e Álgebra; e Tratamento da Informação. Cada eixo é composto por competências, nas quais estão agrupados os descritores, que por sua vez, indicam o conhecimento que o aluno deve ter acerca do conteúdo matemático. Tais descritores são selecionados para compor a matriz, considerando-se aquilo que pode ser avaliado por meio de um teste de múltipla escolha, cujos itens implicam a seleção de uma resposta em um conjunto dado de respostas possíveis.

O comando para a resposta também é parte do enunciado e deve ser claro e objetivo, indicando de maneira precisa a tarefa a ser realizada, afastando qualquer fator complicador para a compreensão do item pelo estudante. Deve contemplar um único descritor da Matriz de Referência.

As alternativas de respostas, em princípio, devem ser elaboradas tendo-se em vista a produção de informações relevantes sobre o processo de construção da habilidade avaliada. Isso significa que a resposta correta – o gabarito – deve validar a capacidade do estudante em relação à determinada habilidade cognitiva. As demais alternativas são chamadas de distratores e produzem informações importantes para a avaliação, na medida em que apontam possíveis caminhos de raciocínio dos estudantes, delimitando a etapa do desenvolvimento da aprendizagem em que o estudante se encontra. Assim, os distratores que apresentam soluções supondo erros que os estudantes costumam cometer são mais plausíveis de serem escolhidos por aqueles que não consolidaram a habilidade requerida, oferecendo informações sobre as dificuldades encontradas. É a partir das respostas dos alunos a esses distratores, que pretendemos analisar as estratégias utilizadas pelos alunos para resolver as questões dos descritores sobre números racionais na avaliação do SAEPE/2008, cujos resultados foram divulgados no ano de 2009.

Em 2008, o número de escolas e estudantes que participaram do SAEPE por rede de ensino foi o seguinte:

QUADRO 1 NÚMERO DE ESCOLAS E ESTUDANTES QUE PARTICIPARAM DO SAEPE EM 2008			
Rede de Ensino	Escolas	Estudantes	
		Previsto	Realizado
Estadual	1 030	225 865	141 467
Municipal	5 679	339 659	274 247
Total	6 709	565 524	415 714
Fonte: Centro de Políticas Públicas e Avaliação da Educação da Universidade de juiz de Fora (www.caed.ufjf.br)			

No quadro a seguir descreveremos o número de estudantes que participaram do SAEPE 2008 por série e rede de ensino:

QUADRO 2 NÚMERO DE ESTUDANTES QUE PARTICIPARAM DO SAEPE POR SÉRIE E REDE DE ENSINO EM 2008				
	Ensino Fundamental			Ensino Médio
	3º ano	5º ano	9º ano	3º ano
Rede Estadual	12 713	22 653	49 347	56 754
Rede Municipal	126 518	108 264	35 634	3 831
Total	139 231	84 981	84 981	60 585
Fonte: Centro de Políticas Públicas e Avaliação da Educação da Universidade de juiz de Fora (www.caed.ufjf.br)				

Os estudantes dos programas de correção de fluxo “se Liga Pernambuco”[1] responderam aos instrumentos equivalentes à alfabetização (3º ano do Ensino Fundamental), já os estudantes do “Acelera Pernambuco”[2] responderam aos instrumentos relativos ao 5º ano do Ensino Fundamental e os do projeto “Travessia”[3] aos mesmos instrumentos utilizados pelos estudantes do 3º ano do Ensino Médio.

Os resultados do SAEPE são apresentados em uma escala de proficiência em níveis, revelando o desempenho dos alunos do nível mais baixo ao mais alto. A escala de proficiência em matemática varia de 0 a 500 pontos, de modo a conter, em uma mesma “régua”, a distribuição dos resultados do desempenho dos estudantes no período de escolaridade avaliado. Esses intervalos são chamados de níveis de proficiência. Como o desempenho é apresentado em ordem crescente e cumulativa, os estudantes posicionados em um nível mais alto da escala, demonstram ter desenvolvido não só as habilidades do nível que se encontram mas, também, aquelas dos níveis anteriores.

Na avaliação do 9º ano do Ensino Fundamental de Matemática do SAEPE, são considerados que estão na categoria desejável os estudantes que se encontram nos níveis acima de 325 pontos na escala onde os níveis de proficiência foram agrupados em categorias de desempenho.

No quadro a seguir estão descritos as categorias de desempenho e os níveis de proficiência correspondentes para os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental.

---

[1] Programa de correção de fluxo que equivale ao 3º ano do Ensino Fundamental.

[2] Programa de correção de fluxo que equivale ao 5º ano do Ensino Fundamental.

[3] Programa de correção de fluxo que equivale a conclusão do Ensino Médio.

QUADRO 3 Categorias de Desempenho e Níveis de Proficiência	
Categorias de Desempenho	**Níveis de Proficiência**
Elementar I	Até 225
Elementar II	225 até 275
Básico	275 até 325
Desejável	Acima de 325

Os resultados do SAEPE são divulgados por meio de boletins pedagógicos de avaliação, que são entregues às escolas pela Secretaria de Educação. Nesses boletins, os resultados são apresentados como média de proficiência da escola, do município e do Estado de Pernambuco. No quadro a seguir estão os resultados do SAEPE/2008, o qual foi divulgado no ano 2009 e serviu de base para a nossa pesquisa.

QUADRO 4
Médias Comparadas da Rede Estadual de PE e Rede Municipal do Recife

Etapa da escolaridade	Região	Média de proficiência	Número de alunos		
			Esperados para o teste	Fizeram o teste	%
9º ano EF	Estado de PE	218,5	49 698	35 709	72
	Município Recife	210,7	1 926	1 211	63

Fonte: Centro de Políticas Públicas e Avaliação da Educação da Universidade de juiz de Fora (www.caed.ufjf.br)

O resultado da rede municipal do Recife, 210,7 foi um resultado abaixo da rede estadual de Pernambuco, que foi de 218,5 e ambos ficaram muito aquém do nível de proficiência desejável para o 9º ano do Ensino Fundamental, segundo a escala de proficiência do SAEPE, que são valores acima de 325 pontos. Vale salientar que no ano de 2008 foi divulgado o resultado da Prova Brasil/SAEB realizada em 2007, e a média de proficiência da rede estadual de Pernambuco para os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental foi de 241,6 e da rede municipal de Recife foi de 237,6 de acordo com dados do INEP/MEC.

Analisando os resultados do SAEPE, comprovamos as dificuldades dos alunos em compreender os números racionais e suas operações, assim como a idéia de fração e a relação que se tem entre numerador e denominador. Por exemplo, na avaliação do SAEPE realizada no ano de 2008, o resultado dos quinze itens relacionados aos descritores que tratam de números racionais foi o seguinte:

QUADRO 5

Resultado dos Itens Sobre Números Racionais no ano de 2008

DESCRITOR	ITEM	% ACERTO
D17 – Identificar a localização de números racionais na reta numérica.	M45342	20,9
	M42430	41,1
D21 – Reconhecer as diferentes representações de um número racional.	M050280A8	36,0
	M28295	22,2
	M39065	40,9
D22 – Identificar fração como representação que pode estar associadoa diferentes significados.	M090059A8	6,4
	M5286	14,6
	M090248A8	18,9
D23 – Resolver problemas utilizando frações equivalentes.	M43725	18,6
	M090019PE	15,6
	M090304A8	22,0
D25 – Efetuar cálculos que envolvam operações com números racionais (adição, subtação, multiplicação, divisão, potenciação).	M25570	22,3
D26 – Resolver problema com números racionais envolvendo as operações (adição, subtação, multiplicação, divisão, potenciação).	M37632	42,0
	M43535	33,6
	M090010PE	39,3

Segundo Silva (1997) o conceito de número racional é considerado, entre muitos conceitos, uma das idéias matemáticas mais complexas que o aluno deve encontrar em sua escolaridade, isso sob as perspectivas prática, psicológica e matemática. Para Pais (2001, p. 55), “os conceitos são idéias gerais e abstratas desenvolvidas no âmbito de uma área específica de conhecimento”. Pais (2001, p.58) afirma que “existe dificuldade em compreender os conceitos, pois os mesmos não pertencem ao mundo imediato da materialidade”.

Silva (1997), em seu trabalho, cita que Hart (1981), em sua pesquisa, levantou algumas dificuldades com interpretações das frações e constatou que a maioria dos alunos considera a fração como dois números naturais, e que se podem somar os numeradores e os denominadores principalmente na adição de fração com denominadores diferentes.

Durante o ano de 2010 foi divulgado o resultado da avaliação do SAEPE realizado no ano de 2009. Mesmo tendo como base para a nossa pesquisa a avaliação realizada no ano de 2008, apresentamos no quadro a seguir o resultado dos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental na avaliação de matemática do SAEPE 2009.

QUADRO 6
RESULTADO DO SAEPE DE 2009

Etapa da escolaridade	Região	Média de proficiência
9º ano do EF	Estado de PE	228,3
	Rede Municipal do Recife	202,1

Fonte: Centro de Políticas Públicas e Avaliação da Educação da Universidade de juiz de Fora (www.caed.ufjf.br)

Podemos verificar que a média da rede estadual de ensino subiu de

218,5 na avaliação do SAEPE de 2008 para 228,3 nos exames realizados em 2009, enquanto na rede municipal do Recife essa média baixou de 210,7 no ano de 2008 para 202,1 na avaliação do SAEPE de 2009.

3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, apresentamos as bases teóricas que deram sustentação ao nosso objeto de pesquisa: analisando as estratégias utilizadas pelos alunos da rede municipal do Recife na resolução de questões sobre números racionais na avaliação do SAEPE.

Utilizamos a teoria dos campos conceituais do Professor e Pesquisador Gerard Vergnaud que, de acordo com essa teoria, o conhecimento de determinado conceito não deve ser considerado isoladamente. Ele deve ser considerado como inserido dentro de um campo conceitual, relacionando-se com outros conhecimentos, visto que os conceitos são interdependentes, ou seja, existe uma dependência recíproca. Utilizamos também a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval, que trata de aspectos cognitivos relacionados ao conhecimento matemático. Para Duval, o conhecimento matemático é uma análise do sistema de produção das representações semióticas referentes a esse conhecimento. Apresentamos, os aspectos cognitivos dos números fracionários, onde temos trabalhos de Nunes e Bryant (1997; 2003); Campos e cols. (1995); Lima (1982); Merlini (2005); e Kerslake (1986). Em seguida temos aspectos da construção dos números racionais, e por fim, apresentamos os números racionais na perspectiva dos Parâmetros Curriculares Nacionais.

3.1 A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS DE VERGNAUD

A Teoria dos Campos Conceituais do professor Gerard Vergnaud oferece uma estrutura que possibilita estudar as filiações e rupturas entre conhecimentos e as relações existentes entre os conceitos.

Um campo conceitual é o conjunto de situações, cuja compreensão necessita do domínio de vários conceitos de naturezas diferentes, de seus invariantes e por um conjunto de representações simbólicas.

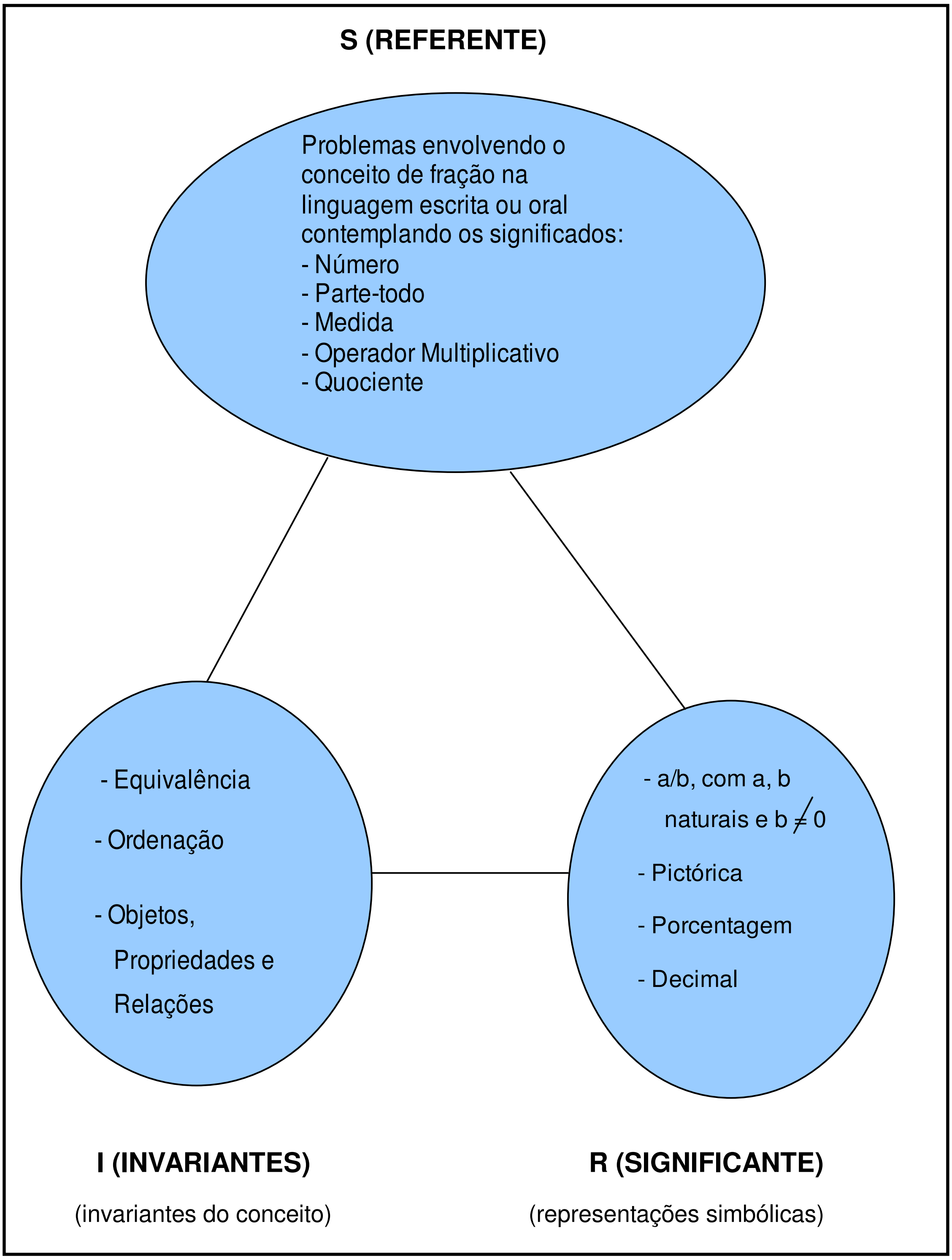
O desenvolvimento de um campo conceitual requer que o pesquisador veja um conceito como sendo formado por uma terna de três conjuntos (S, I, R), onde S é um conjunto de situações que tornam o conceito significativo; I é um conjunto de invariantes (objeto, propriedades e relações) que podem ser reconhecidas e usadas pelo sujeito para analisar e dominar essas situações e R é um conjunto de representações simbólicas que podem ser usados para pontuar e representar as situações e os procedimentos para lidar com eles.

O estudo do desenvolvimento de um campo conceitual considera que existe uma série de fatores que influenciam e interferem na formação e no desenvolvimento dos conceitos e que o conhecimento conceitual deve existir dentro de situações-problema.

No processo de aquisição do conhecimento, os conceitos matemáticos expressam seus sentidos a partir de uma variedade de situações que podem ser analisados com a ajuda de um conjunto de conceitos.

A figura 1 representa o conjunto de situações (S), o conjunto de invariantes (I) e o conjunto de representações (R) e sua relação com componentes do conceito de fração:

Figura 1- Campo Conceitual: Estruturas Multiplicativas



Fonte: Santos (2005)

Para Vergnaud (1990), é através das situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire sentido para o sujeito. Nesse contexto, podemos distinguir duas classes de situações:

- em uma dessas classes o sujeito dispõe em seu repertório, em um dado momento de seu desenvolvimento das competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação;

- na outra classe o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que o obriga a um tempo de reflexão, a hesitações, a tentativas frustradas que o leva, eventualmente ao sucesso ou ao fracasso.

Vergnaud (1988; 1990; 1996) esclarece que as competências e concepções são adquiridas pela criança por meio da formação de esquemas. Para entendermos o que vem a ser competência e sua relação com a concepção, é necessário primeiro entender o conceito de esquema.

Os esquemas são os procedimentos, as invariantes e as condutas organizadas por regras de ações sobre uma classe de situações dadas, isto é a forma estrutural de atividade e está acompanhado de um teorema-em-ação ou de um conceito-em-ação.

O conceito-em-ação é uma invariante operatória com suas propriedades e definições, quando são manifestados geralmente são explícitos (VERGNAUD, 1988; 1990; 1996).

Os teoremas-em-ação aparecem de modo intuitivo e, na maioria das vezes, são implícitos. Estão relacionados com as estratégias utilizadas pelo sujeito no momento de solucionar situações-problema, sem que consiga explicitá-los ou justificá-los (VERGNAUD, 1988; 1990; 1996).

Portanto, os teoremas-em-ação indicam um caminho para se analisarem as estratégias intuitivas dos alunos e ajudá-los a transformar conhecimento intuitivo em conhecimento explícito.

Para Vergnaud (1988; 1990;1996) as competências e as concepções dos alunos vão se desenvolvendo ao longo do tempo, por meio de experiências com um grande número de situações, tanto dentro quanto fora da escola. Em geral, quando se defronta com uma nova situação, o aluno usa o conhecimento desenvolvido em sua experiência em situações anteriores e tenta adaptá-los à nova situação. Esse conhecimento tanto pode ser explícito, no sentido de que pode ser expresso de forma simbólica, quanto pode ser implícito, no sentido de que pode ser usado na ação, durante a qual o aluno escolhe as operações adequadas, sem, contudo, conseguir expressar as razões dessa escolha.

De acordo com a Teoria dos Campos Conceituais, é a análise das tarefas matemáticas e o estudo da conduta do aluno, quando confrontado com essas tarefas, que nos permitem analisar a sua competência. A conduta do aluno pode ser analisada segundo três aspectos:

a) análise de acerto e erro, sendo considerado competente aquele que acerta;

b) análise do tipo de estratégia utilizada, podendo alguém ser mais competente que outro porque sua resolução foi mais rápida ou mais refinada;

c) análise da capacidade de escolher o melhor método para resolver um problema dentro de uma situação particular.

Segundo Vergnaud, dois grandes campos conceituais nos quais o conhecimento matemático está organizado são as estruturas aditivas e as estruturas multiplicativas. As estruturas aditivas são o conjunto de situações que implicam uma ou várias adições ou subtrações e o conjunto dos conceitos e teoremas que permitem analisar tais situações como tarefas matemáticas.

O campo conceitual das estruturas multiplicativas abrange os conceitos de multiplicação e divisão e o conjunto de conceitos e teoremas que permitem analisar essas situações: proporção, função, quociente e produto de dimensões, combinação linear, fração, relação, número racional, múltiplo, divisor, etc.

Para Vergnaud (1983), as estruturas multiplicativas assumem a forma de equivalência entre duas variáveis de relações binárias. Elas se referem a elementos de mesma natureza ou de natureza diferente, do que derivam diferentes classes e subclasses de problemas (isomorfismo de medidas, produtos de medidas) e a presença de números inteiros ou decimais, de grandezas discretas ou contínuas.

A divisão é um conceito importante inserido no campo das estruturas multiplicativas. Embora de natureza complexa, a divisão está presente, desde cedo, em diversas atividades do cotidiano das crianças, como dividir objetos com os amigos, repartir quantidades (discretas ou contínuas) em partes iguais e colocar uma mesma quantidade de objetos em diversos recipientes. Antes mesmo de entrar na escola, as crianças apresentam conhecimento informal sobre vários conceitos matemáticos. Esse conhecimento informal dará origem, posteriormente, ao conceito de fração (EMPSON, 1999).

Vergnaud (1982; 1985) afirma que a divisão envolve regras operatórias complexas (utilização de divisões sucessivas; multiplicação; subtração; busca de um quociente, que pode envolver um resto e resultar em números fracionários) e requer o estabelecimento de relações diversas (considerar o tamanho do todo; o número de partes; o tamanho das partes, que deve ser o mesmo; a relação direta entre o total de elementos e o tamanho das partes; a relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes).

3.2 A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval, é uma teoria que trata de aspectos cognitivos relacionados ao conhecimento matemático. Para Duval (2003), é importante que se faça uma distinção entre o objeto matemático e a sua representação, uma vez que é imprescindível não confundir o objeto com a sua representação. Aprender matemática é diferente de aprender outras disciplinas, pois requer uma atividade cognitiva diversa das requeridas em outros domínios do conhecimento. A diferença entre essas atividades não deve ser procurada nos conceitos, pois não há domínio de conhecimento que não desenvolva um contingente de conceitos mais ou menos complexo.

Para Duval (2003), essa diferença está na importância primordial das representações semióticas, e na grande variedade de representações semióticas utilizadas em matemática. Com relação à importância das representações semióticas, basta observar a história do desenvolvimento da matemática para ver que o desenvolvimento das representações semióticas foi uma condição essencial para a evolução do pensamento matemático. A matemática envolve diferentes representações semióticas, tais como os símbolos numéricos, as figuras geométricas, as escritas algébricas, as representações gráficas e a língua natural.

No quadro a seguir, estão os quatro tipos diferentes de registros:

QUADRO 7 **CLASSIFICAÇÃO DOS DIFERENTES REGISTROS MOBILIZÁVEIS NO FUNCIONAMENTO MATEMÁTICO**		
	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO-DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis	Língua natural Associações verbais (conceituais). Forma de raciocinar - argumentação a partir de observações, de crenças..., - dedução válida a partir de definição ou de teoremas	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2,ou 3) - apreensão operatória e não somente perceptiva - construção com instrumentos
REGISTROS MONOFUNCIONAIS Os tratamentos são principalmente algorítmos	Sistemas de escritas: - numéricas ((binária, decimal, fracionária...); - algébricas; - simbólicas (linguas formais). Cálculo	Gráficos cartesianos - mudança de sistema de coordenadas; - interpolação, extrapolação.

Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático (fazer matemático, atividade matemática). Fonte: Duval (2003)

No quadro acima, podemos observar que, segundo Duval, existem dois tipos de registro, os multifuncionais e os monofuncionais. Os registros multifuncionais são aqueles cujos tratamentos não são algoritmizáveis. Podem ser de representação discursiva: língua natural, ou de representação não discursiva: figuras geométricas planas ou em perspectivas. Já os registros monofuncionais são aqueles em que os tratamentos são, principalmente, algoritmizáveis. Podem ser de representação discursiva: são os sistemas de escrita – numérica, algébrica simbólica e os cálculos; e os de representação não discursivas são os gráficos cartesianos.

Dependendo do caso, em uma resolução de problema, um registro pode aparecer explicitamente privilegiado, mas deve existir sempre a possibilidade de passar de um registro ao outro, uma vez que a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representações semióticas.

Existem dois tipos de transformação de representações semióticas, que são os tratamentos e as conversões. Os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro (transformação interna). Por exemplo, o cálculo da resolução de uma expressão numérica, que se restringe a um único sistema de escrita ou de representação

$$3 + \{12 : [(3 \times 4 - 8) - (5 - 3)]\}$$

$$= 3 + \{12 : [(12 - 8) - 2]\}$$

$$= 3 + \{12 : [4 - 2]\}$$

$$= 3 + \{12 : 2\}$$

$$= 3 + 6$$

$$= 9$$

Para resolver a expressão numérica acima, as transformações necessárias à resolução aconteceram todas dentro do mesmo registro.

As conversões são transformações de representações que ocorrem com a mudança de registros, mas conservando a mesma referência ao objeto. Por exemplo, a passagem para a escrita algébrica ou gráfica de uma função descrita em um texto na linguagem natural são exemplos de conversão.

Podemos dizer que a conversão consiste em mudar a forma pela qual um objeto é representado. Segundo Duval (2003), a conversão pode ser analisada sob dois aspectos. Do ponto de vista matemático, a conversão é utilizada somente para a escolha de um determinado registro no qual se tenha um tratamento mais fácil, de forma menos trabalhosa possível, ou, ainda, para obter um segundo registro que serve de suporte ou de guia aos tratamentos que se efetuam em um outro registro. Por exemplo, na resolução da equação $x^2 - 4x + 4 = 0$ (registro 1) que também pode ser representada por $(x - 2) . (x - 2) = 0$ (registro 2), é possível resolver essa equação na primeira forma representada utilizando a fórmula de Bhaskara (tratamento 1), já na segunda forma, cuja resolução pode ser feita de forma menos trabalhosa, bastando para isso verificar a condição: $x - 2 = 0$ ou $x - 2 = 0$, para concluir que as raízes $x_1 = x_2 = 2$ (tratamento 2). Podemos comprovar que o tratamento 2 nos leva a uma solução de maneira menos trabalhosa.

Já do ponto de vista cognitivo, é a atividade de conversão que é responsável pelos mecanismos que conduzem os alunos à compreensão dos conceitos dos objetos matemáticos. É a atividade de conversão que aparece como atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

3.2.1 A Teoria dos Registros de Representação e os Números Racionais

Para Duval (1999), a análise do desenvolvimento cognitivo e as dificuldades encontradas na aprendizagem confrontam-se com três fenômenos interligados, os quais descreveremos a seguir com referência aos números racionais.

1. Existência de diversos registros de representação semiótica

O número racional, enquanto componente curricular do ensino fundamental, aparece representado pelos três tipos de registros de representação citados por Duval:

- Registro simbólico – numérico (fracionário e decimal) ou algébrico

  Nesse registro os números racionais aparecem em sua forma fracionária, decimal exato ou não-exato e em forma de potência de 10 ou notação científica, conforme exemplos no quadro abaixo.

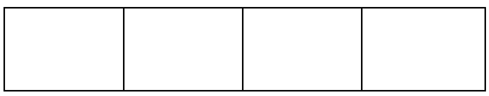
QUADRO 8
REGISTROS SIMBÓLICOS NUMÉRICOS OU ALGÉBRICOS

Fracionário		**Decimal exato**		**Decimal não-exato**
Numérico	Algébrico	Numérico	Algébrico	Numérico
$\frac{2}{3}$	$\frac{a}{b}$ $b \neq 0$ $a,b \in Z$	0,3	$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots a_0x^0 + \ldots$	$1,\overline{2}$

Potência de 10 ou Notação científica
$a \cdot 10^n$ ou $a \cdot 10^{-n}$

- Registro Figural

  Nesse resgistro a representação fracionária pode se referir a uma quantidade contínua ou a uma quantidade discreta.

QUADRO 9 **REGISTRO FIGUAL**	
Quantidade contínua	**Quantidade discreta**
	

Registro na língua natural

QUADRO 10 **REGISTROS NA LÍNGUA NATURAL**	
Um número racional escrito na forma $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros e b ≠ 0 está representado por uma fração.	Um número racional pode ser escrito seguindo as regras do sistema de numeração decimal.

2. Diferenciação entre o objeto representado e seus registros de representação semiótica

Dificuldades na aprendizagem relacionadas ao fenômeno da diferenciação entre representado e representantes.

Exemplo: $\frac{1}{2}$ e 0,5

O fato de o aluno não ter identificado as duas representações como sendo de um mesmo número, é um indício da ocorrência desse fenômeno.

3. Coordenação entre diferentes registros de representação semiótica

Uma atividade que solicite ao aluno representar um número decimal em sua forma fracionária envolve uma conversão. O registro de partida é nesse caso o número na sua forma decimal e o de chegada o número na sua forma fracionária. Outra atividade que solicite, por exemplo, a equivalência entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{8}$ é considerada tratamento.

Vale salientar que o conhecimento das regras de correspondência entre dois registros pode não ser suficiente para mobilizá-los e utilizá-los simultaneamente. Um aluno pode realizar a divisão de 1 por 4 e obter a representação decimal do racional $\frac{1}{4}$, mas pode ser que não reconheça 0,25 como sendo outro representante do mesmo número racional.

Segundo Duval (1999), uma dificuldade para a coordenação espontânea entre dois registros está relacionada aos fenômenos de não-congruência entre representações de dois sistemas semióticos.

As conversões são as mudanças de registro mais eficientes para a aquisição de um conceito. Existe uma maior possibilidade de mobilizar conhecimentos dos alunos visando à aquisição do conceito quando as conversões são feitas nos dois sentidos e não são congruentes. Porém a dificuldade não é necessariamente a mesma nos dois sentidos de uma conversão. Na pesquisa de Catto (2000) uma aluna ao comparar os números $(0,5)^2$ e $(1/2)^2$ para responder se eram iguais ou diferentes, deu a seguinte resposta:

$$(0,5)^2 = 0,25 \quad \text{que é diferente de} \quad 1/4 = 0,25$$

Num sentido ela identificou as duas representações como sendo de um mesmo número, mas no outro, lhe faltaram elementos para fazer a conversão de 0,25 para 25/100 (congruente) que só exigiria o tratamento (simplificação), nesse registro , para chegar a ¼.

3.3 ASPECTOS COGNITIVOS DOS NÚMEROS FRACIONÁRIOS

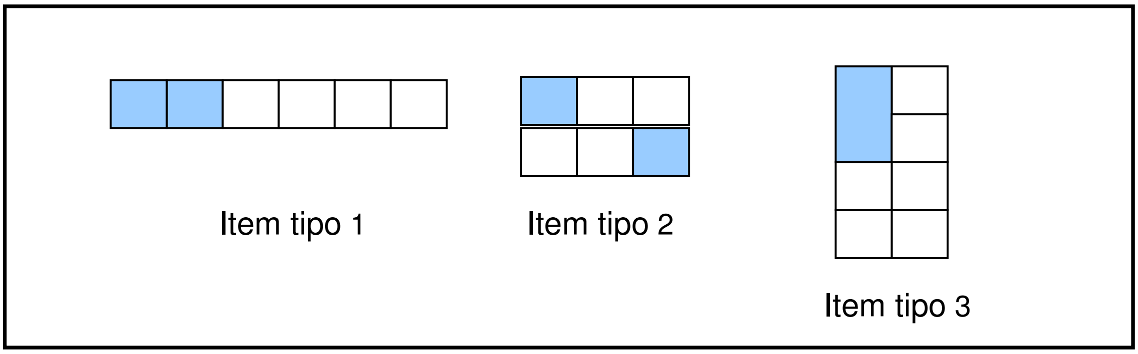
Nunes e Bryant (1997) afirmam que, com as frações, as aparências enganam e é possível que alguns alunos passem pela escola sem tomar conhecimento das dificuldades das frações e sem que ninguém perceba, embora use termos fracionários certos, fale coerentemente sobre frações e resolva alguns problemas envolvendo frações. Para esses autores,

> Uma forma comum de apresentar as crianças às frações é mostrar-lhes *todos* divididos em *partes*, alguns dos quais distinguidos do resto, por exemplo pintados. As crianças são informadas que o número total de partes é o denominador, então o número de partes pintadas é o numerador. Esta introdução junto com alguma instrução sobre algumas poucas regras para calcular, permite que as crianças transmitam a impressão de que sabem muito sobre fração. (Nunes e Bryant, 1997, p.191)

Para Nunes e Bryant (1997, p.191), a falsa impressão de crianças raciocinando com sucesso sobre frações pode ser observada no trabalho de Campos e cols., sobretudo quando os alunos aprendem a resolver problemas com frações utilizando o procedimento de dupla contagem, sem entender o significado do número fracionário.

No trabalho supracitado, Campos e cols. (1995) apresentaram os desenhos abaixo descritos a alunos de quinta série, com idade aproximada de 12 anos ou mais que haviam aprendido o procedimento de dupla contagem e então solicitou que os mesmos nomeassem as frações em cada um dos casos:

Figura 2: Itens usados para estudar a compreensão de crianças sobre frações.



FONTE: Campos e cols. (1995).

Os resultados do estudo mostraram que os alunos tiveram um bom desempenho nos itens tipo 1 e 2, embora alguns alunos tenham realizado a contagem dupla de uma forma diferente, contando as partes pintadas para o numerador e as não pintadas para o denominador. O item tipo 3 apresentou um nível de dificuldade maior que os outros dois e neste item o erro mais frequente foi indicar a fração que corresponderia ao procedimento de dupla contagem. No item tipo 3, 56% dos alunos escolheram 1/7 como a fração correspondente, 12% escolheram 2/8 e 4% responderam tanto 1/4 como 2/8 como respostas corretas. Esse resultado confirma a suspeita de que os alunos podem usar a linguagem das frações sem compreender completamente sua natureza.

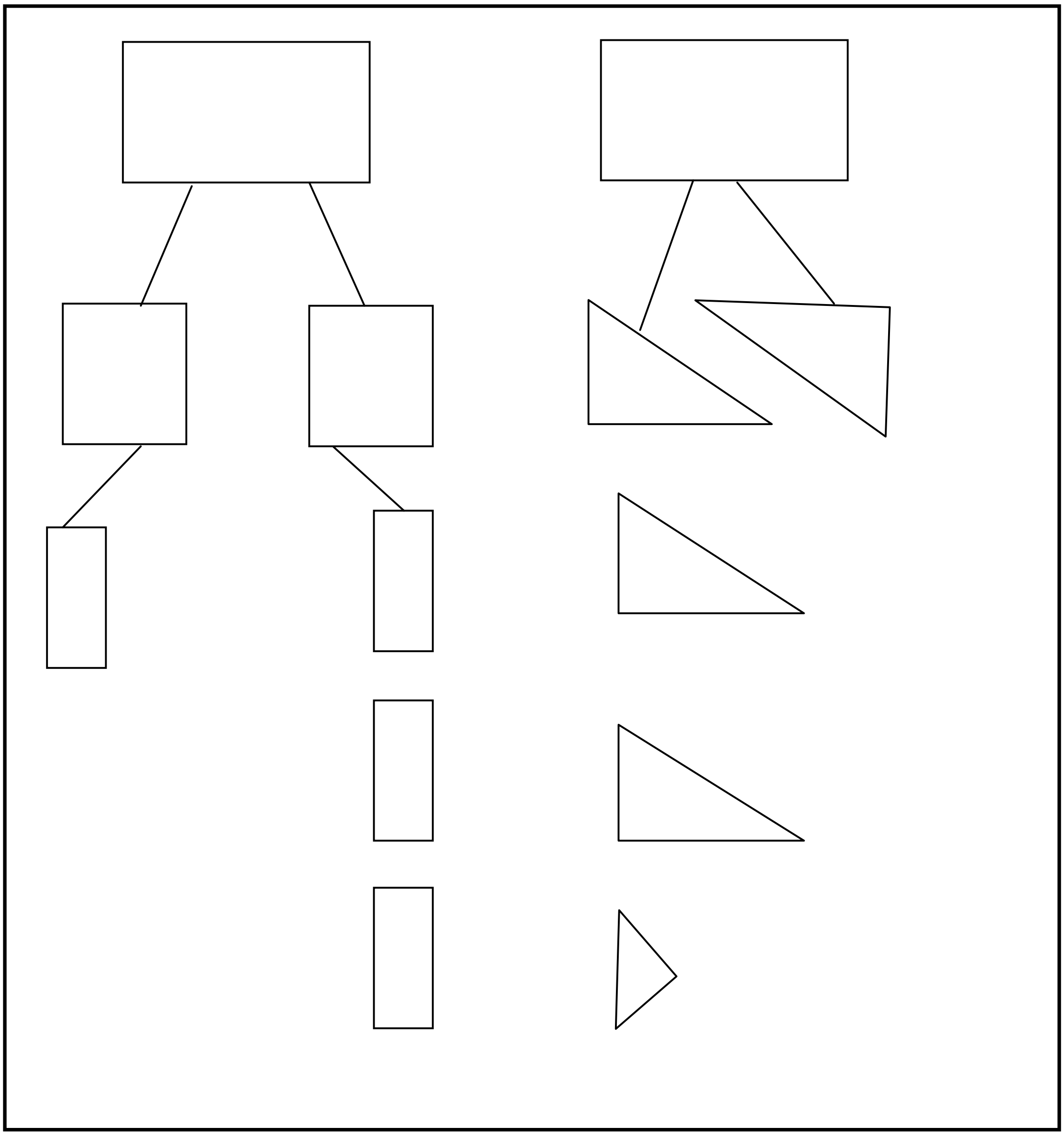
Podemos ratificar esse resultado da pesquisa de Campos e cols. (1995), em uma questão similar que foi aplicada aos alunos na avaliação do SAEPE de 2008, onde foi apresentado um retângulo dividido em dez partes com sete partes pintadas. Nele o aluno precisava perceber que duas das partes não pintadas tinham o tamanho igual ao dobro das outras partes do retângulo. E o resultado é que apenas 22,2% dos alunos que realizaram a avaliação obtiveram sucesso nesta questão do SAEPE, o que confirma que a maioria dos alunos leva em consideração o número de partes em que está dividida a figura sem qualquer ajustamento para a desigualdade das partes explicitamente indicada.

Lima (1982), em pesquisas com crianças brasileiras, retomou os estudos de Piaget (1960) com o intuito de verificar a equivalência de frações, onde o próprio pesquisador fez o corte dos conjuntos ou áreas para assegurar que a divisão estava sendo feita de forma correta. Lima pretendia, com seu estudo, investigar a habilidade das crianças de comparar partes do mesmo todo (aspecto extensivo) sem apoio perceptual, com base apenas no processo de divisão (aspecto intensivo); investigar a compreensão das crianças de equivalência quando as partes eram diferentes em tamanho e número; e, por fim, contrastar o desempenho das crianças na divisão de conjuntos com seu desempenho em tarefas sobre frações de quantidades contínuas.

A divisão de quantidades discretas envolveu uma série de comparações iniciando com dois conjuntos de bolinhas de gude com o mesmo número de elementos que foram colocadas em pequenas xícaras brancas pelas crianças, em que elas sabiam o número de elementos que estavam nas xícaras no começo. Depois das bolinhas terem sido colocadas nas xícaras, elas não podiam ver as bolinhas, mas tiveram permissão de olhar dentro, se desejassem. Após as crianças verificarem que o número de bolinhas era o mesmo nas duas xícaras, o conjunto de uma das xícaras foi dividido em dois, com as bolinhas sendo colocadas em duas xícaras azuis. Então as crianças foram solicitadas a comparar as bolinhas das xícaras azuis com as bolinhas da xícara branca, que continha o conjunto não dividido. Posteriormente o conjunto não dividido foi então dividido em duas xícaras e estes conjuntos foram divididos novamente em dois, onde cada uma das quartas partes foi colocada em uma xícara vermelha. Por fim, as crianças foram solicitadas a comparar os subconjuntos contidos em uma xícara azul e na xícara vermelha e depois entre uma xícara azul e duas vermelhas. As crianças eram solicitadas a justificar as suas respostas e também eram indagadas sobre quantas xícaras de cada uma das cores eram necessárias para formar uma coleção inteira. As crianças mais novas (7/8 anos) tiveram dificuldade em lidar com com o número de partes ou a quantidade de xícaras e negaram as equivalências. Já as crianças mais velhas (11/12 anos) não tiveram dificuldades em trabalhar com equivalência e foram capazes de usar a cor das xícaras para relacionar o subconjunto ao todo.

Para as quantidades contínuas, foi colocado um conjunto semelhante de tarefas. Havia dois inteiros que foram sendo divididos, conforme as figura abaixo:

fIgura 3 Material utilizado para estudar divisão de quantidades contínuas.



Fonte: Lima (1982)

As quantidades contínuas ficaram sempre disponíveis para que as crianças pudessem vê-las, o que não tornou a tarefa mais fácil, pois as partes, embora representando o resultado do mesmo processo de divisão eram percebidas de forma distinta.

No resultado de comparações envolvendo as mesmas frações do inteiro, Lima observou que as crianças mais novas, que tinham em média 07 ou 08 anos de idade, não obtiveram êxito em virtude da aparência das partes das quantidades contínuas e negaram a equivalência de metades com a aparência diferente do mesmo inteiro. Estas crianças tiveram dificuldade em perceber a conservação do todo quando ele foi dividido em partes diferentes e negaram que duas metades e quatro quartos formariam o mesmo todo. Já as crianças mais velhas conseguiram perceber a equivalência de duas metades que pareciam diferentes e de duas metades divididas em um número diferente de partes.

Desse modo, os estudos de Lima confirmaram e estenderam o trabalho de Piaget, mostrando que a equivalência de frações diferentes – aspecto extensivo das frações – foi entendida pelas crianças em conexão com sua análise das relações parte-todo – aspecto intensivo. Lima também observou que a divisão de quantidades discretas foi entendida antes da divisão de todos contínuos. Nesses estudos as justificativas oferecidas pelas crianças nas tarefas com quantidades discretas frequentemente apresentavam referências a números, o que permite a solução de equivalências simples, enquanto no contexto de quantidades contínuas nenhum suporte semelhante está disponível.

Quando as crianças resolvem tarefas experimentais sobre divisão e números racionais com materiais concretos dentro de um contexto que lhe é familiar, elas raciocinam sobre estas situações e conseguem, na maioria das vezes, obter êxito nestes experimentos. Em contrapartida, quando as crianças precisam resolver tarefas matemáticas em avaliações educacionais, elas se vêem em situações que precisam pensar que operações devem realizar com os números e como usar o que lhe foi ensinado na escola, e essa concentração na manipulação de símbolos pode levar os alunos a terem um desempenho muito abaixo do que teriam se tivessem se preocupado mais com a situação-problema.

Kerslake (1986) em trabalho com adolescentes de 12-14 anos apontou evidencias da falta de compreensão dos alunos com relação a equivalência de frações, mesmo quando eles tiveram êxito nos itens sobre equivalência e que alguns alunos tenham transformado as frações em frações equivalentes com o mesmo denominador, os mesmos parecem não perceber a conexão entre equivalência de fração e adição, e concluiu que o único modelo de fração que os alunos sentiam-se familiarizados foi o de fração como parte de um todo.

Merlini (2005) investigou a formação e o desenvolvimento do conceito de fração com alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental e seus professores. Os resultados indicaram que, tanto na 5ª como na 6ª série, os alunos que tiveram êxito foram baixos e próximos um do outro, ficando em média com 21,16% de acertos

A compreensão do conceito dos números racionais na representação fracionária e decimal depende do entendimento de alguns subconstrutos. Nunes *et al.* (2003) propõem uma classificação para os diferentes sentidos de fração, contemplando cinco significados: parte-todo, medida, número, quociente e operador multiplicativo.

Significado parte-todo

A idéia neste significado é da partição de um todo contínuo[4] ou discreto[5] em n partes iguais, onde cada parte pode ser representada como 1/n. Nunes (2003) salienta que parte-todo significa que um todo foi fatiado em *n* fatias, cada fatia é codificada como *1/n*. Se a pessoa se refere a várias (*k*) fatias,

---

[4] Quantidade contínua refere-se àquelas quantidades passíveis de serem divididas exaustivamente sem que percam suas características.

[5] Quantidade discreta refere-se àquelas quantidades enumeráveis, contáveis, que dizem respeito a um conjunto de objetos.

temos então, *k/n*. O inteiro 1 (1=*n/n*) é uma característica básica nesta representação. A autora exemplifica dizendo que, se um todo foi dividido em cinco partes iguais e duas foram pintadas, os alunos podem interpretar esta representação como um processo de dupla contagem, ou seja, acima do traço da fração se escreve o número de partes pintadas e abaixo escreve-se o número total de partes que o todo foi dividido.

Exemplo 1 – quantidade contínua: Uma pizza foi dividida em cinco partes. Que fração representa duas partes desta pizza?

Exemplo 2 – quantidade discreta: Em uma loja existem três camisas vermelhas e duas camisas verdes. Que fração representa a quantidade de camisas verdes com relação ao total de camisas da loja?

Sgnificiado medida

A fração assume um significado de medida em situações de quantidades intensivas[6] e extensivas[7]. A idéia de distribuição e de quanto é recebido por cada pessoa representa o aspecto da quantidade extensiva do número racional; a reconstrução do todo ou unidade em relação à parte representa os aspectos intensivos desses números. A idéia é de comparação de duas grandezas. Por exemplo, quantas vezes um palmo cabe no comprimento de uma mesa? Algumas medidas envolvem fração porque se referem a quantidades extensivas nas quais a quantidade refere-se à relação entre duas variáveis. Por exemplo, a probabilidade de um evento é medida pelo quociente entre o número de casos favoráveis dividido pelo número de casos possíveis.

---

[6] Quantidades intensivas baseiam-se na relação entre duas quantidades diferentes, portanto no raciocínio multiplicativo.

[7] Quantidades extensivas baseiam-se na comparação de duas quantidades de mesma natureza e na relação parte-todo, portanto no raciocínio aditivo.

Portanto, a probabilidade de um evento varia de 0 a 1 e a maioria dos valores com os quais trabalhamos são fracionários. Para Caraça (1951), é necessário que se estabeleça um termo de comparação único para todas as grandezas de mesma espécie, ou seja, uma unidade de medida como centímetros para comprimentos, gramas para massa, segundos para tempo, etc. A questão também exige uma resposta para a pergunta “quantas vezes?”, o que se faz dando um número que exprima o resultado da comparação. Esse número chama-se medida da grandeza em relação a esta unidade.

Significado número

Nesse caso, o aluno deverá reconhecer a princípio, a fração 2/3 como um número (significado) e não como uma superposição de dois números naturais. Deverá perceber ainda que todo número tem um ponto correspondente na reta numérica, e que sua localização depende do princípio de ordenação (invariante), ou seja, 1/3 é um número compreendido entre 0 e 1. Ao localizarmos a fração ou seu decimal equivalente na reta numérica, estaremos fazendo a correspondência biunívoca entre um ponto da reta e o número.

Significado quociente

Esse significado aparece em situações associadas à idéia da divisão como estratégia para resolver um determinado problema. Na idéia de quociente, ou divisão indicada, a fração é vista como uma divisão entre dois números inteiros; neste caso, o símbolo representa uma relação entre duas quantidades, *a* e *b* denotando uma operação. Em outras palavras, o símbolo seria usado como outra representação de *a:b* (esta é a divisão indicada). Essa situação aparece quando um ou alguns objetos precisam ser divididos igualmente em certo número de grupos (dividir uma quantidade é separá-la em partes de tamanhos iguais). É a idéia de partilha, de fazer agrupamentos, de divisão indicada. Isso quer dizer que, conhecido o número de grupos a serem formados, o quociente representa o tamanho de cada grupo.

Significado operador multiplicativo

Com esse significado a fração assume um papel de transformação, ou seja, a representação de uma ação que se deve imprimir sobre um número ou uma quantidade, tendo como produto final, o resultado de uma transformação. Nesse significado o número racional define uma estrutura multiplicativa em que o operador faz duas operações: uma de multiplicação por *p* e outra de divisão por *q*. Nesse caso, impõe aos números racionais uma interpretação algébrica, podendo ser pensado como uma função que transforma um conjunto em outro conjunto. O operador funciona em quantidades contínuas para reduzir ou ampliar a quantidade no processo; nas quantidades discretas, sua aplicação atua como um multiplicador divisor. A fração pode ser vista como valor escalar aplicado a uma quantidade.

3.4 CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS RACIONAIS

As mudanças ocorridas na vida moderna demandam que as coisas sejam práticas e venham a facilitar o cotidiano humano. Com o conhecimento matemático não é diferente e a notação matemática deve atender a essas mudanças, facilitando o entendimento e os processos de transcrição e cálculos.

A notação de fração nem sempre foi como conhecemos hoje e, certamente, passou por um longo processo de desenvolvimento para atender as necessidades da humanidade, à medida que as sociedades se desenvolviam. Ifrah (1997, p.327) afirma que:

> A notação moderna das frações ordinárias deve-se aos hindus, que devido a sua numeração decimal de posição, chegaram a simbolizar mais ou menos como nós uma fração como $\frac{34}{1265}$: onde 34 é o numerador e 1265 é o denominador. Esta notação foi depois adotada e aperfeiçoada pelos árabes, que inventaram a famosa barra horizontal.

O matemático russo George Cantor (1845-1918) publicou no ano de 1874 um trabalho sobre a comparação de coleções infinitas, que deu origem a Teoria dos Conjuntos. O trabalho publicado por Cantor apresentava uma forma de comparar conjuntos infinitos pelo “casamento” 1-1 entre os elementos destes conjuntos.

Esta aplicação da correspondência 1-1 permitiu a Cantor introduzir um método de diagonalização, que por contradição, permitia provar que o conjunto dos números reais não tinha correspondência 1-1 com o conjunto dos números inteiros.

Dado um número inteiro q $\neq$ 1 e -1, o inverso de q não existe em Z: $\frac{1}{q} \notin$ Z. Por isso não se pode definir em Z a operação de divisão, dando significado ao símbolo $\frac{p}{q}$.

Para superar essa dificuldade, vieram os números racionais. A fração é uma representação dos números racionais, cuja identificação é feita por meio do símbolo Q, que é definido como sendo: o conjunto dos pares ordenados (ou frações) $\frac{a}{b}$, em que $a,\ b \in Z$ e $b \neq 0$, ou ainda podemos dizer que Q

$= \left\{\frac{a}{b};\ a, b \in Z,\ b \neq 0\right\}$, na fração $\frac{a}{b}$, a é o numerador e b é o denominador. Para os números racionais adotam-se as seguintes definições:

(i) igualdade: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a.d = b.c$

(ii) adição: : $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a.d + b.c}{b.d}$

(iii) multiplicação: : $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$

No conjunto dos números racionais merecem destaque os subconjuntos:

Q_+ = conjunto dos racionais não negativos

Q_- = conjunto dos racionais não positivos

Q* = conjunto dos racionais não nulos

Na fração $\frac{a}{b}$, se a e b são primos entre si, isto é, mdc(a,b) = 1, dizemos que $\frac{a}{b}$ é uma fração irredutível.

Na comparação de números racionais em sua forma fracionária, deve-se observar as seguintes regras:

i) Quando os números possuem o mesmo denominador, será maior ou menor, o que tiver maior ou menor numerador;

ii) Quando os números possuem o mesmo numerador, será maior ou menor, o que tiver menor ou maior denominador; e

iii) Quando os números têm numeradores e denominadores diferentes, recomenda-se encontrar frações equivalentes que tenham o mesmo denominador e, só depois fazer a comparação.

Para uma melhor compreensão desse último item, tomemos dois números racionais distintos r e s, que serão representados respectivamente, pelas frações $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{q}$, sendo que: *m*, *n*, *p* e *q* $\in$ Z, com *n* e *q* $\neq$ *0*.

Para que tenhamos as frações representadas com denominadores iguais, vamos aplicar o seguinte recurso: o valor de um número racional não se altera, quando se multiplica ou se divide seu numerador e seu denominador por um mesmo número natural. Dessa forma, temos:

$$r = \frac{m.q}{n.q} \quad \text{e} \quad s = \frac{n.p}{n.q}$$

A partir daí dois números com denominadores iguais serão obtidos, e, portanto, pode-se comparar a fim de descobrir qual é o maior, o r ou o s. Do ponto de vista da matemática como ciência, precisamos de uma fundamentação teórica. Apresentaremos a seguir, a argumentação de que os números racionais possuem estrutura de corpo comutativo ordenado que segundo Ávila:

> Um corpo (comutativo) é um conjunto não vazio C, munido de operações, chamadas adição e multiplicação, cada uma delas fazendo corresponder um elemento de C a cada par de elementos C, as duas operações estando sujeitas aos axiomas de corpo listados a seguir. A soma

> de x e y de C é indicada por x + y e a multiplicação de x e y é indicada por xy. (ÁVILA, 1999, p. 15)

Portanto, se (Q, +, .) é um corpo comutativo, então, os axiomas que caracterizam esta estrutura são:

i) Associatividade

Dados quaisquer x, y, z $\in$ Q, em relação à operação de adição podem ser associadas as parcelas da seguinte maneira:

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

em relação à multiplicação, a associação será feita da seguinte maneira:

$$(x.y) . z = x . (y.z)$$

ii) Comutatividade

Quaisquer que sejam x, y $\in$ Q, pode-se fazer a comutatividade da ordem das parcelas, em relação à adição, de modo que se tenha:

$$x + y = y + x$$

em relação à multiplicação, pode-se comutar a ordem dos fatores, de forma, a obter o seguinte resultado:

$$x . y = y . x$$

iii) Distributividade da multiplicação em relação à adição

Quaisquer que seja x, y, z $\in$ Q, tem-se que:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

iv) Existência do elemento neutro

Na adição, existe um elemento em Q, chamado “zero” ou “elemento neutro”, indicado com o símbolo “0”, tal que $x + 0 = 0 + x = 0$ para todo $x \in Q$.

Na multiplicação, há um elemento em Q, designado “elemento unidade” e indicado com o símbolo “1”, tal que: $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ para todo $x \in Q$.

v) Existência do elemento oposto

A todo $x \in Q$ corresponde um elemento $x' \in Q$, tal que $x + x' = x' + x = 0$. O elemento x’, que se demonstra único para cada $x \in Q$, é indicado por $- x$.

vi) Existência do elemento inverso

Para todo elemento $x \in Q$, com $x \neq 0$, existe um elemento correspondente $x' \in Q$, com $x' \neq 0$, tal que $x \cdot x' = x' \cdot x = 1$. Esse elemento x’, que se demonstra único, para cada $x \in Q$, é indicado por x^{-1}.

O conjunto dos números racionais é um corpo ordenado, portanto, nele existe um certo conjunto P, chamado de conjunto dos elementos positivos, tal que:

a) A soma e o produto de elementos positivos resultam em elementos positivos;

b) Dado $x \in Q$, ou $x \in P$, ou $x = 0$, ou $-x \in P$

Portanto, com estas propriedades provaremos todas as operações algébricas, tais quais:

Proposição1. Os elementos neutros da adição e da multiplicação são únicos.

Proposição 2. O elemento oposto e o elemento inverso são únicos.

Proposição 3. Vale a lei do cancelamento em Q

$$\boxed{x + z = y + z \Rightarrow x = y}$$

Outras propriedades importantes são:

- $x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$
- $z > 0 \Leftrightarrow z^{-1} > 0$
- $z > 0 \Leftrightarrow -z < 0$
- $x < y$ ou $x = y$ ou $x > y$ (tricotomia)
- $x.y = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $y = 0$ (anulamento do produto)

3.5 OS PCN's E OS NÚMEROS RACIONAIS

Os parâmetros curriculares nacionais afirmam que, embora as representações fracionárias e decimais dos números racionais sejam ensinadas às crianças desde os ciclos iniciais de sua escolaridade, muitos alunos chegam ao terceiro ciclo do Ensino Fundamental sem que tenham compreendido os diferentes significados associados a este tipo de número e os procedimentos de cálculo, principalmente os que envolvem os números racionais em sua forma decimal.

A explicação apresentada pelos parâmetros curriculares nacionais para essa dificuldade pode ser que a aprendizagem dos números racionais necessita de uma ruptura com idéias construídas pelos alunos para os números naturais. E cita os seguintes obstáculos enfrentados pelos alunos ao trabalhar com os números racionais:

> 4. "cada número racional pode ser representado por diferentes (e infinitas) escritas fracionárias: por exemplo, $\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}$ ... são diferentes representações de um mesmo número;
>
> 5. a comparação entre racionais: acostumados com a relação 3 > 2, terão de compreender uma desigualdade que lhes parece contraditória, ou seja, $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$;
>
> 6. se o "tamanho" da escrita numérica, no caso dos naturais, é um bom indicador da ordem de grandeza (8345 > 83), a comparação entre 2,3 e 2,125 já não obedece ao mesmo critério;
>
> 7. se, ao multiplicar um número natural por outro número natural (sendo este diferente de zero ou 1) a expectativa é a de encontrar um número maior que ambos, ao multiplicar 10 por $\frac{1}{2}$ se surpreenderão ao ver que o resultado é menor que 10;

> 8. se a sequência dos números naturais permite estabelecer sucessor e antecessor, para os racionais isso não faz sentido, uma vez que entre dois números racionais quaisquer é sempre possível encontrar outro racional; assim, o aluno deverá perceber que entre 0,8 e 0,9 estão os números 0,81 e 0,815 ou 0,87.” (BRASIL, 1997)

No segundo ciclo, a construção do conceito de número racional pressupõe uma organização de ensino que possibilite experiências com diferentes significados e representações, o que demanda um razoável espaço de tempo, pois trata-se de um trabalho a ser consolidado nos ciclos finais.

Os parâmetros curriculares nacionais indicam que no terceiro e no quarto ciclos, o objetivo principal na abordagem dos números racionais é levar os alunos a perceberem que os números naturais são insuficientes para resolver determinados problemas como os que envolvem a medida de uma grandeza e o resultado de uma divisão. Neste sentido, é recomendado que a construção da idéia de número racional esteja relacionada à divisão entre dois números inteiros. Sugerem que a introdução do estudo dos números racionais seja feita pelo seu reconhecimento no contexto diário, observando que eles aparecem no cotidiano das pessoas, muito mais na sua representação decimal do que na forma fracionária.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais tratam dos significados dos números racionais em três contextos: relação parte/todo, divisão e razão.

Os PCN recomendam um outro significado dos números racionais, que deve ser trabalhado ao longo dos 3º e 4º ciclos, que é o significado de operador, ou seja, quando ele desempenha um papel de transformação em que atua sobre uma situação e a modifica. Essa idéia está presente, por exemplo, num problema do tipo “que número devo multiplicar po 5 para obter 2?” (BRASIL, 1997).

A recomendação é que na perspectiva do ensino, essas interpretações não sejam tratadas isoladamente porque a consolidação desses significados pelos alunos pressupõe um trabalho sistemático ao longo dos ciclos finais do ensino fundamental, possibilitando a análise e comparação de variadas situações-problema.

Os PCN (BRASIL, 1997) sugerem que, ao abordar o estudo dos números racionais, deve-se utilizar os problemas históricos envolvendo medidas, o que possibilita bons contextos para o seu ensino. Nesse sentido, pode-se discutir com os alunos, por exemplo, como os egípcios já os usavam, por volta de 2000 a.C., para operar com seus sistemas de pesos e medidas e para exprimir resultados. Eles utilizavam apenas frações unitárias, com exceção de $\frac{2}{3}$. Assim, em uma situação na qual precisavam dividir, por exemplo, 19 por 8, eles utilizavam um procedimento que, na nossa notação, pode ser expresso por: $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$. A sugestão dos PCN é que esse tipo de problema seja explorado e discutido com os alunos e seja solicitado aos mesmos que mostrem que a soma acima indicada é $\frac{19}{8}$.

As recomendações feitas pelos PCN propõem uma inovação para o ensino, se as analisarmos do ponto de vista da construção do conceito de fração. Essa inovação é traduzida pela ênfase dada ao ensino de fração baseado na resolução de situações-problema, levando-se em consideração dois aspectos fundamentais: os significados que a fração poderá assumir em cada situação e as diferentes formas para sua representação.

4. METODOLOGIA

Neste capítulo pretendemos apresentar os detalhes referentes ao tipo de pesquisa utilizado e tecer considerações sobre a metodologia empregada. Descreveremos o percurso metodológico escolhido para o desenvolvimento de nosso estudo, quando apresentamos o contexto no qual ocorreu a investigação; em seguida passamos a explicitar o método, incluindo os instrumentos que foram utilizados. O objetivo do nosso trabalho foi de analisar as estratégias utilizadas pelos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental na resolução de questões do SAEPE referentes ao conteúdo de números racionais.

4.1 O CONTEXTO DA PESQUISA

O campo de pesquisa foi a Rede de Ensino do Município de Recife[8], que é composta por 34 (trinta e quatro) escolas com 3º e 4º ciclos de aprendizagem, equivalente às séries finais do Ensino Fundamental.

A pesquisa foi desenvolvida especificamente em três escolas pertencentes a essa rede de ensino, que são localizadas na periferia da zona norte da cidade, no turno vespertino, conforme descrição a seguir:

- Escola Municipal Antônio Heráclio do Rego – localizada no bairro de Água Fria, possui aproximadamente novecentos alunos matriculados no

---

8 O Ensino Fundamental no município do Recife está organizado em quatro ciclos de aprendizagem, onde o 1º e 2º ciclos correspondem aos anos iniciais e o 3º e 4º ciclos correspondem aos anos finais do Ensino Fundamental.

Ensino Fundamental (1º ao 4º ciclos de aprendizagem) e Educação de Jovens e Adultos. O turno matutino atende 15 turmas com alunos matriculados no 1º, 2º e 3º ciclos do Ensino Fundamental. O turno vespertino atende 08 turmas com alunos matriculados no 2º e 4º ciclos do Ensino Fundamental e o turno da noite atende 05 turmas de Educação de Joves e Adultos – Módulos 2, 4 e 5 – equivalentes ao Ensino Fundamental.

- Escola Municipal Poeta Joaquim Cardoso – localizada no bairro de Nova Descoberta, possui aproximadamente mil alunos matriculados no Ensino Fundamental (2º, 3º e 4º ciclos de aprendizagem); e em Educação de Jovens e Adultos. O turno matutino atende 11 turmas com alunos matriculados no 2º e 3º ciclos do Ensino Fundamental. O turno vespertino atende 11 turmas com alunos matriculados no 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental e o turno da noite atende 11 turmas, sendo 5 turmas do 3º e 4º ciclos e 6 turmas de Educação de Joves e Adultos – Módulos 4 e 5 – equivalentes aos ciclos finais do Ensino Fundamental.

- Escola Municipal São Cristóvão – localizada no bairro da Guabiraba, possui aproximadamente mil e cem alunos matriculados no Ensino Fundamental (2º, 3º e 4º ciclos de aprendizagem) e em Educação de Jovens e Adultos. O turno matutino atende 12 turmas com alunos matriculados no 2º e 3º ciclos do Ensino Fundamental. O turno vespertino atende 12 turmas com alunos matriculados no 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental e o turno da noite atende 10 turmas, sendo 5 turmas do 3º e 4º ciclos e 5 turmas de Educação de Joves e Adultos – Módulos 4 e 5 – equivalentes aos ciclos finais do Ensino Fundamental.

Nossa escolha em realizar a pesquisa nessas três escolas se deu em virtude do baixo desempenho das mesmas na avaliação do SAEPE/2008, o qual foi divulgado no ano de 2009.

4.2 O DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA

Inicialmente, procedemos a um levantamento dos itens do SAEPE no eixo de Números e Operações, referentes aos números racionais. Após isso, selecionamos os itens correspondentes aos números racionais e identificamos o percentual assinalado pelos alunos em cada distrator das questões referentes a esse componente curricular. Foram identificados quinze itens referentes a seis descritores. A partir desses itens, foi elaborado o instrumento para pesquisa com base nos descritores do SAEPE e da avaliação da Prova Brasil. No caso do SAEPE, quando o item foi aberto, e é de domínio público, utilizamos o mesmo literalmente. Quando não, elaboramos itens similares para a composição do instrumento de coleta de dados. Nos itens que foram modificados, alteramos números, figuras e o comando do item, com o objetivo de preservar o banco de itens do SAEPE.

O instrumento foi elaborado com oito itens que contemplaram alguns subconstrutos dos números racionais, dois de reconhecimento de fração na idéia de parte de um todo, dois relativos à representação de números racionais na reta numérica, dois sobre equivalência de frações e dois sobre mudança de representação (forma fracionária $\Rightarrow$ forma decimal), e caracterizamos algumas hipóteses com relação a cada item. Cada subconstruto utilizado foi contemplado com um par de itens no instrumento de pesquisa.

4.3 A REALIZAÇÃO DA COLETA

A coleta de dados foi realizada com duzentos e setenta e seis alunos pertencentes às três escolas municipais do Recife – Escola Antônio Heráclio, Escola Poeta Joaquim Cardoso e Escola São Cristóvão.

A aplicação dos instrumentos aconteceu no horário e na sala de aula dos alunos e o professor da turma cedeu o horário para a realização da coleta, que foi realizada pelo pesquisador, de forma individual e sem consulta.

Após a aplicação do instrumento, foram selecionados vinte e seis alunos para a realização de entrevistas, com o objetivo de identificar as estratégias utilizadas pelos mesmos na resolução das questões constantes no protocolo.

Em seguida, realizamos as entrevistas com os alunos, em função de suas respostas ao instrumento de pesquisa, buscando identificar que estratégias estes alunos utilizavam ao resolverem as questões sobre números racionais, para confirmação/negação das hipóteses levantadas anteriormente com base nos percentuais assinalados em cada distrator dos itens do protocolo da pesquisa.

As entrevistas foram realizadas em ambientes como a biblioteca, o laboratório de informática e a sala de vídeo. Entrevistamos um aluno por vez, e todo o processo foi gravado em áudio e vídeo para análises posteriores. As gravações foram feitas com a devida autorização dos responsáveis pelos alunos e a sua imagem foi totalmente preservada.

Usamos a entrevista de explicitação, quando tentamos fazer com que os alunos explicassem as suas respostas ao protocolo, com o objetivo de confirmar ou não as hipóteses levantadas anteriormente e, a partir daí, buscar identificar as estratégias utilizadas pelos mesmos na resolução dos itens que versam sobre números racionais.

4.4 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DO INSTRUMENTO DE PESQUISA

Apresentaremos as questões que foram resolvidas pelos sujeitos da pesquisa, organizadas de acordo com os subconstrutos dos números racionais de fração na idéia de parte de um todo, representação de números racionais na reta numérica, equivalência de frações e mudança de representação (forma fracionária $\Rightarrow$ forma decimal), e caracterizamos algumas hipóteses com relação a cada item.

Questões do tipo parte-todo

Objetivo:

Verificar se o aluno consegue identificar o todo e as partes e utilizar a dupla contagem para representar uma fração.

Item 01 – Em qual das figuras abaixo o número de quadradinhos pintados representa $\frac{2}{3}$ do total de quadradinhos?

a) ■ ■ □ □ □ □

b) ■ ■ ■ □ □ □

c) ■ ■ ■ ■ □ □

d) ■ ■ ■ ■ ■ □

Possíveis hipóteses para cada distrator:

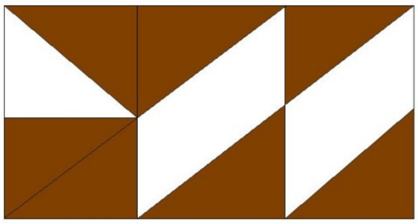
a) Indica que o aluno pode estar associando o número de quadradinhos pintados ao numerador da fração.

b) Indica que o aluno pode estar associando o número de quadradinhos pintados ao denominador da fração.

c) GABARITO. Indica que o aluno identificou o todo e as partes.

d) Indica que o aluno pode estar associando o número de quadradinhos pintados à soma do numerador com o denominador, que resultaria em cinco.

Item 02 – Observe as partes em que está dividida a figura



O número que representa a parte do retângulo que está sombreada é:

a) $\frac{5}{7}$

b) $\frac{7}{5}$

c) $\frac{7}{12}$

d) $\frac{12}{7}$

Possíveis hipóteses para cada distrator:

a) Indica que o aluno está estabelecendo uma relação parte-parte entre as partes em branco e as partes sombreadas da figura.

b) Indica que o aluno está estabelecendo uma relação parte-parte entre as partes sombreadas e as partes em branco da figura.

c) GABARITO. Indica que o aluno identificou o todo e as partes, percebendo a relação entre a parte sombreada e o todo.

d) Indica que o aluno está estabelecendo uma relação do todo com a parte, ou seja, a relação é estabelecida a partir do todo com a parte da área sombreada.

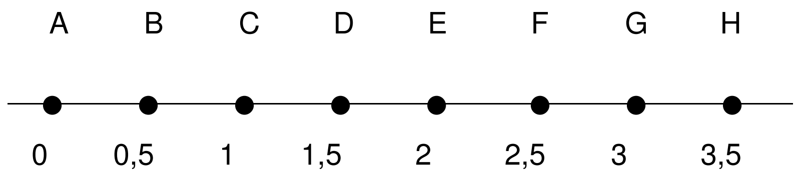
O primeiro item está associado a quantidades discretas e demanda o conceito do invariante equivalência (2/3 é equivalente a 4 quadradinhos em 6). Já no segundo item, que trata de quantidade contínua, o aluno deve identificar que o todo foi dividido em partes desiguais, e, portanto, não pode ser resolvido diretamente por um procedimento de contagem dupla. O número de partes precisa ser descoberto pelos alunos por meio de uma análise da relação parte-todo; posteriormente ele deve identificar que o número total de partes refere-se ao denominador e que as partes sombreadas referem-se ao numerador. Nesse item, o aluno precisa desenvolver algumas competências, tais como: a identificação de uma unidade (que o todo é tudo aquilo que se considera, como unidade em cada caso concreto), de realizar divisões (o todo se conserva, mesmo quando dividimos em partes, há a conservação da quantidade), manipular a idéia da conservação de área (no caso das representações contínuas). No estudo apresentado anteriormente, desenvolvido por Campos e cols. (1995), foi apresentada uma figura similar à figura constante no item 02, e 56% dos alunos não conseguiram identificar que a divisão da figura não estava feita em partes iguais. Nesse item 02 do SAEPE, talvez os alunos, ao apresentarem a mesma dificuldade, não cometeram o mesmo erro pelo fato de, nos distratores apresentados como alternativas de respostas, não constar a fração $\frac{7}{10}$.

Questões de representação de números racionais na reta numérica

Objetivo:

Verificar se o aluno consegue identificar a localização de números racionais na reta numérica.

Item 03 – Observe a reta numérica a seguir.



O número racional $\frac{53}{25}$ está localizado entre os pontos

a) A e E.

b) E e F.

c) F e G.

d) G e H

Possíveis hipóteses para cada distrator:

a) Indica que o aluno não consegue identificar que a fração representa um número na reta, e escolhe esta alternativa por representar o intervalo maior entre elas.

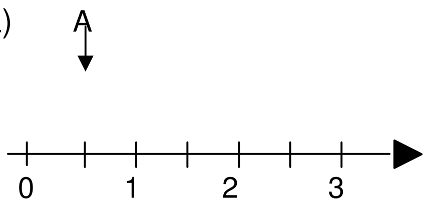
b) GABARITO. Indica que o aluno consegue identificar que a fração representa um número, bem como que o mesmo consegue estabelecer a correspondência biunívoca entre este valor e sua localização na reta numérica.

c) Indica que o aluno pode estar associando o valor constante no ponto F com o denominador da fração e o valor do ponto G com o algarismo 3 constante no numerador da mesma.

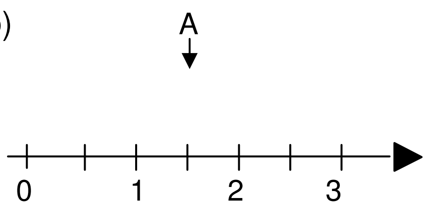
d) Indica que o aluno não consegue identificar que a fração representa um número.

Item 05 – O número $\frac{3}{2}$ está representado adequadamente pelo ponto A na seguinte reta numérica:

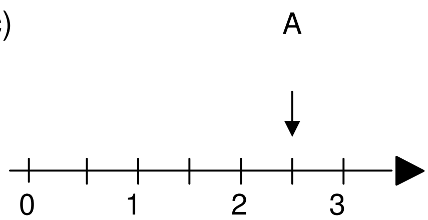
a)



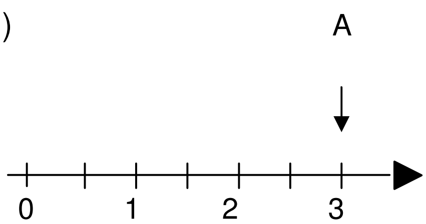
b)



c)



d)



Possíveis hipóteses para cada distrator

a) Indica que o aluno pode está associando à metade, por conta do denominador “2”.

b) GABARITO. Indica que o aluno consegue identificar que a fração representa um número, e que ele consegue estabelecer a correspondência biunívoca entre este valor e sua localização na reta numérica.

c) Indica que no aluno pode estar associando os pontos 2 e 3 ao denominador e ao numerador da fração.

d) Indica que o aluno pode estar associando o ponto A ao numerador da fração.

O aluno frente a esses problemas (situações) deverá reconhecer, a princípio, as frações $\frac{53}{25}$ e $\frac{3}{2}$ como números (significados) e não como uma superposição de dois números naturais. Deverá perceber, ainda, que todo número tem um ponto correspondente na reta numérica e que sua localização depende do princípio de ordenação (invariante), isto é, $\frac{53}{25}$ é um número compreendido entre 2 e 2,5 e $\frac{3}{2}$ é um número compreendido entre 1 e 2. Mesmo considerando este intervalo há a necessidade que o sujeito compreenda que à direita e à esquerda de $\frac{53}{25}$ e $\frac{3}{2}$ existem infinitos números. Terá ainda que admitir que há duas formas de representação fracionária, a ordinária e a decimal.

Questões sobre equivalência de frações

Objetivo:

Verificar se o aluno consegue resolver problemas utilizando frações equivalentes.

Item 04 – Observe a parte sombreada nas seguintes figuras.

Figura 1

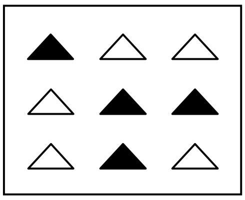


figura 2

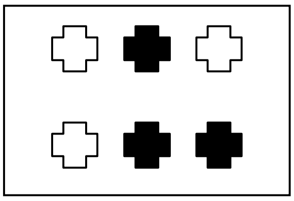


Figura 3

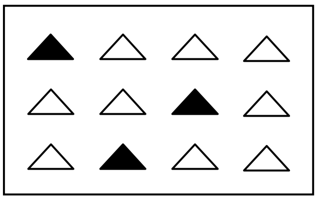
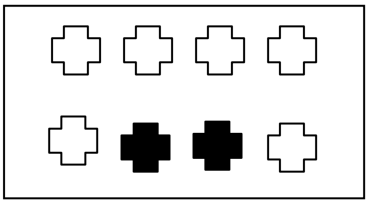


figura 4



A parte sombreada pode ser representada pela mesma fração nas figuras:

a) 1 e 3

b) 2 e 3

c) 2 e 4

d) 3 e 4

Possíveis hipóteses para cada distrator:

a) Indica que o aluno pode estar relacionando apenas pela forma das figuras, ou seja, as figuras 1 e 3 são formadas por triângulos.

b) Indica que o aluno pode estar levando em consideração a quantidades de figuras sombreadas.

c) Indica que o aluno pode estar relacionando apenas pelo fato das figuras 2 e 4 serem formadas por figuras em forma de cruz.

d) GABARITO. Indica que o aluno consegue entender corretamente a equivalência de frações, ou seja, ele consegue fazer a conversão do registro figural para o registro numérico fracionário e após o tratamento identifica as frações equivalentes.

Nos distratores constantes nas alternativas a, b e c, percebe-se que o aluno não consegue fazer a conversão do registro figural para o registro numérico fracionário, o que o leva a fazer associação entre os registros pictóricos.

Item 08 – Uma sorveteria realizou uma pesquisa com seus clientes para descobrir o sabor de sorvete preferido pela maioria deles. Os resultados dessa pesquisa estão representados no quadro abaixo:

$\frac{6}{9}$ preferem sorvete sabor chocolate
$\frac{3}{9}$ preferem sorvete sabor napolitano
$\frac{18}{27}$ preferem sorvete sabor morango
$\frac{15}{20}$ preferem sorvete sabor flocos

Dois sabores de sorvetes foram igualmente preferidos pelos clientes pesquisados. Quais são esses sabores?

a) Morango e chocolate.

b) Napolitano e flocos.

c) Napolitano e chocolate.

d) Chocolate e flocos.

Possíveis hipóteses para cada distrator:

a) GABARITO. Indica que o aluno consegue entender corretamente a equivalência de frações. Quando tratamos de equivalência de frações, devem ser considerados dois aspectos essenciais: equivalências em quantidades extensivas e em quantidades intensivas. Quantidades extensivas referem-se à comparação de duas quantidades de mesma natureza e na lógica parte-todo, e quantidades intensivas referem-se às medidas baseadas na relação entre duas quantidades diferentes.

c) Indica que o aluno pode estar estabelecendo relações entre os numeradores e os denominadores das frações, uma vez nos numeradores temos 6 que é múltiplo de 3 e nos denominadores temos um número em comum que é o 9.

Ao assinalar as alternativas (b) ou (d), não temos nenhuma hipótese plausível para esses distratores, entretanto o que constatamos é que esses alunos não conseguem perceber a equivalência de frações constante nesse item.

Questões sobre mudança de representação (forma fracionária $\Rightarrow$ forma decimal)

Objetivo:

Verificar se o aluno consegue reconhecer as diferentes representações de um número racional.

Item 06 – A professora Clotilde pediu que seus alunos escrevessem um número que representasse meio ou metade.

Geraldo	Cássio	Carla	Fernando
$\frac{1}{2}$	0,5	1,2	0,005

Os alunos que acertaram o exercício foram:

a) Cássio e Carla

b) Geraldo e Cássio

c) Carla e Geraldo

d) Geraldo e Fernando

Nesse item o aluno precisa fazer a conversão da língua natural “metade” ou “meio” para o registro numérico fracionário e decimal, onde o registro de partida é o número na linguagem natural e o de chegada o número na sua forma fracionária e decimal.

Possíveis hipóteses para cada distrator:

a) Indica que o aluno reconhece a representação 0,5, mas pode estar associando a fração $\frac{1}{2}$ à representação 1,2.

b) GABARITO. Indica que o aluno compreende corretamente a relação entre a forma fracionária e a forma decimal dos números racionais, uma vez ele reconhece que a metade de uma unidade pode ser representada pela fração $\frac{1}{2}$ e pelo número decimal 0,5.

c) Indica que o aluno, além de não estabelecer corretamente a relação entre a forma fracionária e a forma decimal dos números racionais, pode estar relacionando apenas pelo fato das duas opções apresentarem os algarismos 1 e 2.

d) Indica que o aluno consegue associar a fração $\frac{1}{2}$ à ideia de metade, mas não consegue associar o decimal 0,5 à ideia de metade.

Item 07 – O número 0,02 também pode ser escrito da seguinte forma:

a) $\frac{1}{5}$

b) $\frac{1}{20}$

c) $\frac{1}{50}$

d) $\frac{1}{200}$

Possíveis hipóteses para cada distrator:

a) Indica que o aluno pode ter efetuado a divisão de 1 por 5 e ter se confundido ao determinar o número de casas decimais.

b) Indica que aluno pode estar relacionando o algarismo 2, constante no número decimal do comando, com o 2 que está no denominador da fração.

c) GABARITO. Indica que o aluno compreende corretamente a relação entre a forma decimal e a forma fracionária dos números racionais, uma vez que o além da conversão é necessário realizar o tratamento de 2/100 para 1/50.

d) Indica que o aluno pode estar relacionando o 2 e os dois zeros do número decimal com o denominador.

Nesses dois itens, o aluno precisa reconhecer as representações decimais dos números racionais como uma extensão do sistema de numeração decimal, identificando a existência de “ordens” como décimos, centésimos e milésimos. O objetivo desses itens é avaliar se o estudante consegue identificar duas representações diferentes de um mesmo número racional. Para que o objetivo seja alcançado, o aluno precisa realizar a conversão de um registro ao outro, e nos dois itens aparecem, pelo menos três tipos de registros (língua natural, registro numérico fracionário e decimal),necessitando o aluno de passar de um registro ao outro, uma vez que a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representação semiótica.

5 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Nesta seção será feita uma análise dos dados obtidos na pesquisa. Apresentaremos uma tabulação dos resultados em termos de percentuais de acertos organizados por grupos de dois itens, de acordo com os subconstrutos dos números racionais. Tomando por base as entrevistas, serão apresentadas as estratégias utilizadas pelos alunos ao responderem os itens do instrumento de pesquisa.

Como já foi dito anteriormente, nosso objetivo foi de analisar as estratégias utilizadas pelos alunos da Rede Municipal do Recife ao responderem questões sobre números racionais na avaliação do SAEPE.

Após a análise das entrevistas, identificamos algumas estratégias utilizadas pelos alunos ao responderem as questões do instrumento sobre números racionais. Vale salientar que, para um mesmo significado dos números racionais, identificamos estratégias diferentes utilizadas pelos alunos na resolução dessas questões, assim como verificamos, também, o uso de uma mesma estratégia em questões com significados diferentes dos números racionais.

Merlini (2005), investigando as estratégias utilizadas por alunos, de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental em uma escola pública de São Paulo, concluiu que não houve regularidade no uso de estratégias, ou seja, para um mesmo significado dos números racionais foram encontradas diferentes estratégias de resolução utilizadas pelos alunos. Isso parece indicar que, ao menos para os números racionais, a escolha da estratégia, por parte do aluno, estaria mais ligada à tarefa a ser realizada que à ideia de racional envolvida.

5.1 Questões do tipo parte-todo

Objetivo:

Verificar se o aluno consegue identificar o todo e as partes e utilizar a dupla contagem para representar uma fração.

A seguir reproduzimos o item 01, que trata de quantidade discreta e demanda o conceito do invariante equivalência.

Item 01 – Em qual das figuras abaixo o número de quadradinhos pintados representa $\frac{2}{3}$ do total de quadradinhos?

a) ■ ■ □ □ □ □

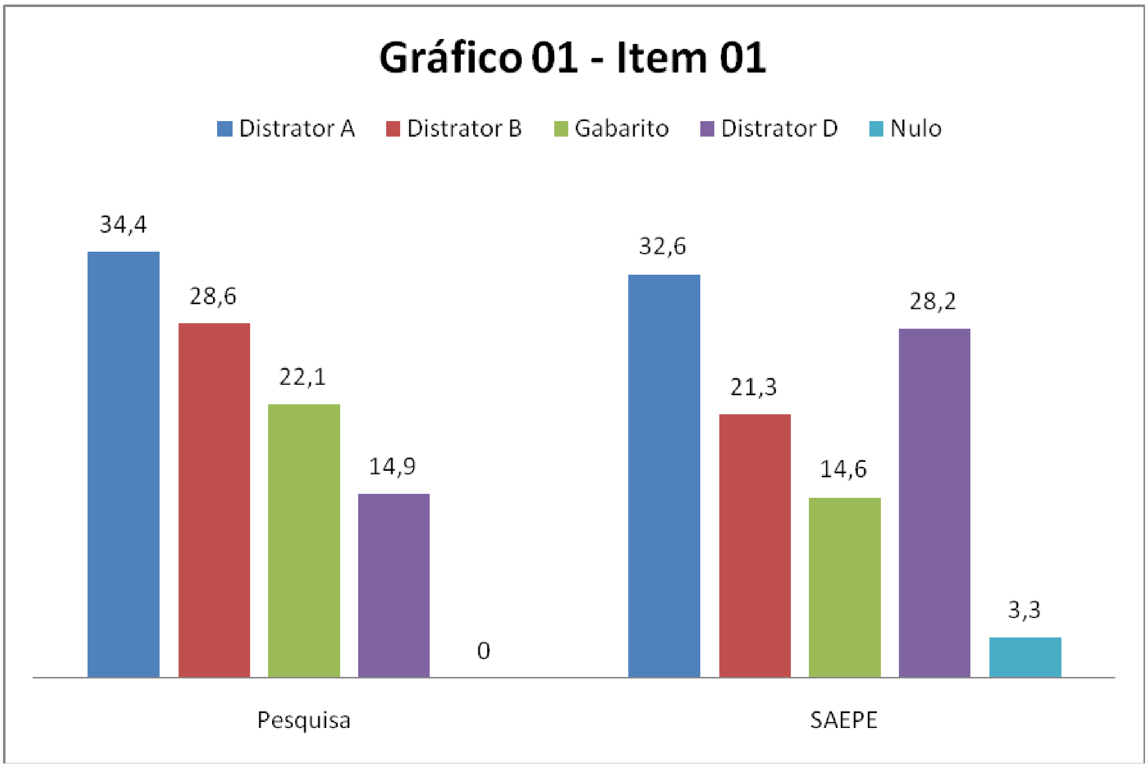
b) ■ ■ ■ □ □ □

c) ■ ■ ■ ■ □ □

d) ■ ■ ■ ■ ■ □

A questão aborda o significado parte-todo com quantidade discreta e o aluno poderia resolver essa questão por um processo de dupla contagem, em que o número de quadradinhos pintados seria o numerador e o total de quadradinhos seria o denominador, devendo em seguida simplificar a fração encontrada para chegar aos $\frac{2}{3}$. Já a partir do invariante equivalência, o aluno poderia identificar que quatro quadradinhos pintados equivalem a $\frac{2}{3}$ dos seis quadradinhos constantes em cada alternativa.

O gráfico 01 mostra que, em nossa pesquisa, 22,1% dos alunos acertou a questão, enquanto na avaliação do SAEPE/2008 o percentual de acerto foi de 14,6%. Em ambos os casos, um dado preocupante, de nosso ponto de vista, é que 77,9% e 82,1% dos alunos errou a questão em nossa pesquisa e no SAEPE, respectivamente, salientando que, no resultado do SAEPE, 3,3% dos alunos ainda deixou de responder esta questão. Com relação aos outros distratores, podemos observar que houve certa regularidade entre os índices assinalados, tanto em nossa pesquisa quanto na avaliação do SAEPE.



Nesse item, identificamos o uso do número racional como números sobrepostos. A principal característica do uso dessa estratégia é o fato de o aluno ter tratado a fração como dois números naturais e distintos, que são apenas separados por um traço. Silva (1997), em seu trabalho, cita que Hart (1981), em sua pesquisa, levantou algumas dificuldades com interpretações das frações e constatou que a maioria dos alunos considera a fração como dois números naturais, e que se podem somar os numeradores e os denominadores principalmente na adição de fração com denominadores diferentes.

Vasconcelos (2007), em pesquisa realizada com o objetivo de comparar estratégias cognitivas utilizadas por alunos de 4ª a 8ª séries do Ensino Fundamental, identificou que 4% dos alunos que participaram do seu estudo fizeram uso dessa estratégia.

A idéia de fração como dois números sem relação entre eles pode ser ilustrada pela fala do aluno A5, quando, durante a entrevista, ele diz que assinalou a letra D dessa questão porque tinha cinco quadradinhos pintados e ele somou dois mais três, que eram respectivamente o numerador e o denominador da fração que constava no comando da questão, ele deixa claro o raciocínio utilizado para fazer uso dessa estratégia.

> Pesquisador: *Nessa primeira questão aqui a gente tem o seguinte: Em qual das figuras abaixo, o número de quadradinhos pintados representa $\frac{2}{3}$ do total de quadradinhos? Ai você tem aqui quatro alternativas, daí você marcou a letra D que tem seis quadradinhos e cinco pintados. Por que você marcou essa alternativa? Como você raciocinou para chegar a essa resposta?*
>
> Aluno: *Eu peguei 2 e 3 ai fez 5 e aqui tem 5.*
>
> Pesquisador: *Onde é que tem 2 e 3? pode apontar pra mim?*
>
> Aluno: $\frac{2}{3}$
>
> Pesquisador: *Como faz pra chegar a 5?*
>
> Aluno: *3 + 2*
>
> Pesquisador: *Ai você somou e marcou 5 quadradinhos pintados?*

<u>Aluno</u>: *Foi.*

Aluno A5

Ainda com relação a esse item, identificamos também o uso da estratégia em que o aluno utiliza os dados contidos no problema sem construir um sentido para essa utilização. Essa estratégia consiste em o aluno elaborar sua resposta utilizando os dados contidos no enunciado do problema de maneira descontextualizada, sem se preocupar com a sua pertinência. Merlini (2005) encontrou estratégia similar em seu trabalho com a seguinte questão:

"Na escola de Pedro foi feita uma rifa e foram impressos 150 bilhetes. A mãe de Pedro comprou 20 bilhetes dessa rifa. Qual a chance da mãe de Pedro ganhar o prêmio?"

Fonte: Merlini, 2005.

A resposta dada por alguns alunos na pesquisa de Merlini (2005) foi 150/20, em que o aluno utilizou os dados do problema na ordem em que aparecem e elaborou a sua resposta.

O aluno A13, ao responder à entrevista, explica que marcou a alternativa A no item 01 porque a fração era $\frac{2}{3}$ e ele viu nessa alternativa 2 quadradinhos pintados. Esse aluno mostra o numerador da fração e aponta para os dois quadradinhos pintados que estão na alternativa A.

<u>Pesquisador</u>: *A questão número 01 pergunta em qual das figuras abaixo o número de quadradinhos pintados representa* $\frac{2}{3}$ *do total de quadradinhos? Você marcou a alternativa da letra A que tem seis quadradinhos e dois deles estão pintados. Como é que você fez pra chegar a essa resposta?*

<u>Aluno</u>: *Assim, porque tem 2 e 3 em baixo* (aponta para a fração $\frac{2}{3}$) *não é. Ai nos quadradinhos eu achei que era essa porque tem 2 quadradinhos pintados.*

Pesquisador: *Certo. Porque tem 2 pintados. Porque você viu esse 2 desse* $\frac{2}{3}$ *?*

Aluno: *Foi*

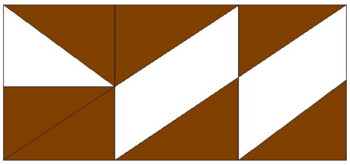
Aluno A13

Retomando a nossa questão de pesquisa, podemos ratificar as nossas hipóteses feitas na análise a priori, quando apresentamos o instrumento de pesquisa no capítulo 3, referente à metodologia. Com relação à alternativa A, a nossa hipótese era a seguinte: *Indica que o aluno pode estar associando o número de quadradinhos pintados ao numerador da fração,* e podemos validar essa hipótese através do que disse o aluno A13. Já com relação à alternativa D, a nossa hipótese era: *Indica que o aluno pode estar associando o número de quadradinhos pintados à soma do numerador com o denominador, que resultaria em cinco,* o que podemos confirmar com a entrevista do aluno A5.

Com relação à alternativa B, onde constam três quadradinhos pintados, não conseguimos validar ou negar a nossa hipótese, uma vez que o aluno que havia marcado essa alternativa, no momento da entrevista disse não lembrar como fez, e, quando insistimos, disse apenas que havia chutado.

O item 02 trata de quantidade contínua, em que o todo foi dividido em partes explicitamente desiguais.

Item 02 – Observe as partes em que está dividida a figura



O número que representa a parte do retângulo que está sombreada é

a) $\frac{5}{7}$

b) $\frac{7}{5}$

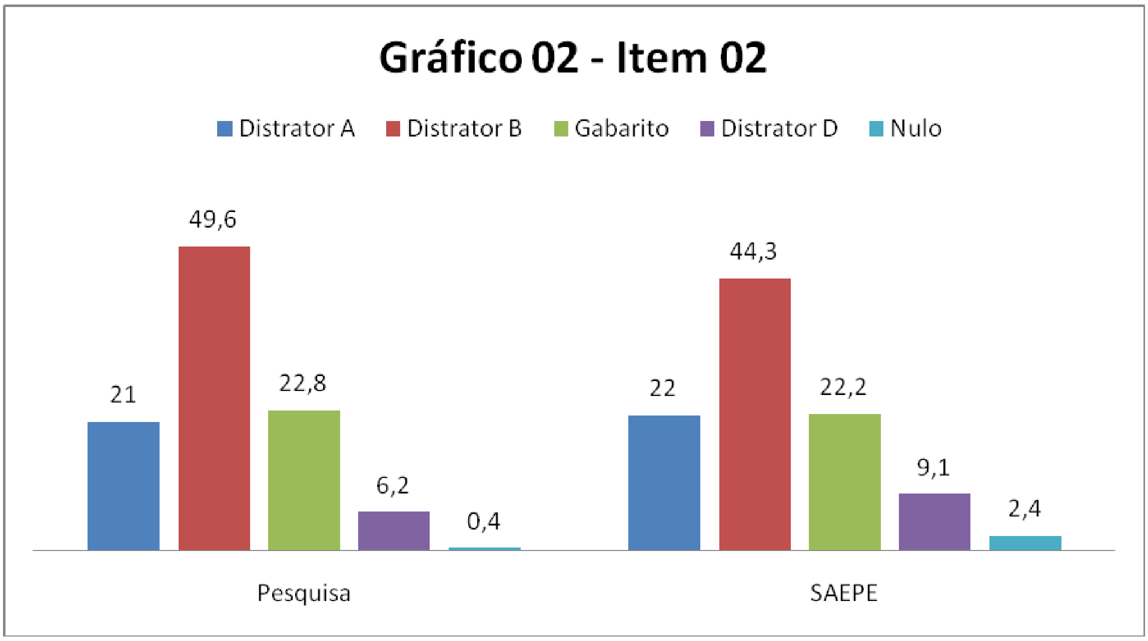
c) $\frac{7}{12}$

d) $\frac{12}{7}$

Nesse caso, o aluno necessita perceber previamente a identificação de uma unidade, a realização de divisões e ter idéia da conservação da área, já que se trata de quantidade contínua.

O gráfico 02 refere-se ao item 02, que apresenta um retângulo que não está explicitamente dividido em partes iguais e o número de partes precisa ser descoberto pelos alunos por meio de uma análise da relação parte-todo, para representar a fração indicada na figura. Nesse item, o percentual de alunos que obteve êxito em nossa pesquisa foi de 22,8% e, na avaliação do SAEPE, foi de 22,2%.

Comparando o item 01, que trata de quantidade discreta, com o item 02, que é referente a quantidade contínua, podemos observar que o resultado de nossa pesquisa mostra que os percentuais de alunos que obtiveram êxito estão muito próximos, uma vez que a diferença entre eles é de apenas 0,7 pontos percentuais. Já no resultado do SAEPE, esses itens apresentam uma diferença de 7,6 pontos.



Nesse item, identificamos o uso da contagem dupla parte-parte. O aluno faz uso dessa estratégia quando não considera o todo envolvido no problema e faz a contagem das partes sem relacioná-las com o todo.

Essa estratégia foi identificada em pesquisas realizadas anteriormente com o objetivo de estudar a compreensão dos números racionais por parte dos alunos. Campos e cols. (1995) realizaram um estudo com alunos de quinta série e idade aproximada de 12 anos. Nesse estudo foram apresentados três tipos de itens aos alunos que já haviam aprendido o processo de contagem dupla e foi solicitado que os mesmos nomeassem as frações em cada caso. No primeiro item o todo estava dividido em partes iguais e as partes destacadas eram contíguas. No segundo item o todo estava dividido em partes iguais, mas as partes pintadas não eram contíguas na figura. No terceiro item, o todo não estava explicitamente dividido em partes iguais e o número de partes total tinha que ser descoberto pelos alunos por meio de uma análise da relação parte-todo. O desempenho dos alunos no primeiro e no segundo item foi muito bom, entretanto, alguns alunos usaram a contagem dupla de uma forma diferente, contando as partes pintadas para o numerador e as partes não pintadas para o denominador, o que caracteriza a contagem dupla parte-parte.

Merlini (2005), em um estudo que investigou a formação e o desenvolvimento do conceito de fração com alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental, também identificou a estratégia de contagem dupla parte-parte, destacando um item em que são apresentados aos alunos quatro bonés vermelhos e dois bonés azuis. Em seguida pergunta-se que fração representa a quantidade de bonés azuis em relação ao total de bonés? Muitos alunos não consideram o todo e dão como resposta 2/4, caracterizando a relação parte-parte.

O uso da contagem dupla parte-parte, acontece quando um aluno, ao observar o retângulo que foi dividido em partes desiguais, consegue perceber a diferença no tamanho das partes. Entretanto, ao responder sobre a questão das partes sombreadas, ele faz a relação das partes sombreadas com as partes não sombreadas, não considerando todas as partes em que o todo foi dividido. Para Merline (2005), uma das estratégias cognitivas utilizada pelos alunos em problemas envolvendo a relação parte-todo, é que o aluno despreza o todo envolvido, fazendo a contagem das partes sem relacioná-las com o todo, tanto com quantidades discretas como em quantidades contínuas.

A seguir, temos o trecho da entrevista do aluno A2 que percebeu a divisão desigual das partes e marcou a alternativa B, que é $\frac{7}{5}$, no item 02:

> Pesquisador: *Essa questão de número 02, que tem aqui pedindo pra você observar as partes que está dividida a figura. A gente tem aqui um retângulo e tem algumas divisões, algumas áreas sombreadas. Ele pergunta o número que representa a parte do retângulo que está sombreada e lhe dá quatro opções. Você marcou a opção da letra B que tem* $\frac{7}{5}$ *. Então você consegue me dizer por que você marcou essa opção aqui?*
>
> Aluno: *Porque os que estão sombreados é a mesma quantidade que tem aqui no caso 7.*
>
> Professor: *Só por isso?*

Aluno: *Primeiro, porque estava essa divide-se aqui, ficaria 5* (O aluno divide as duas partes não sombreadas em quatro partes).

Professor: *Certo. Agora veja só esses 5 que ficaram aqui, eles são exatamente iguais a esses 7 que são sombreados?*

Aluno: *É.*

Aluno A2

Com relação à nossa hipótese, de que o aluno poderia assinalar as alternativas A ou B por estar realizando a contagem dupla parte-parte, podemos validar essa hipótese, uma vez que, em nossa pesquisa, 70,6% dos alunos assinalou uma dessas alternativas, o que pode ser ratificado com a entrevista do aluno A2.

Dentre os alunos que fazem a contagem dupla parte-parte, nos chamou atenção o fato de que alguns alunos não conseguem reconhecer a desigualdade do tamanho das partes, e conta apenas as partes que estão divididas, ignorando a diferença do tamanho das partes.

É o caso do aluno A14 que, demonstrando não perceber a diferença do tamanho das partes, ele conta as partes não sombreadas como sendo igual a três. Entretanto, como entre as alternativas ele não encontra o resultado $\frac{7}{3}$, ele assinala a alternativa $\frac{7}{5}$, justificando que é porque o cinco é o menor e que se aproxima do três.

A seguir um trecho da entrevista do aluno A14 sobre o item 02:

Pesquisador*: A questão de número 02 tem escrito assim; observe as partes em que está dividida a figura, você tem um retângulo que ele tem algumas divisões, certo? E ai ele está perguntando o número que representa a parte do retângulo que está sombreada e você marcou a letra B que é* $\frac{7}{5}$ *, como é que você fez pra chegar nessa resposta?*

Aluno: *Como é que eu fiz? Eu contei aqui sete, mas tinha três e não tinha três ai eu coloquei o mais próximo cinco.*

Pesquisador*: Você contou esses que estão sombreados e deu sete. E os brancos?*

> <u>Aluno</u>*: Deu três só que não tinha três ai eu coloquei o mais próximo que foi cinco.*
>
> **Aluno A14**

O fato de o aluno realizar a contagem dupla parte-parte, sem reconhecer a desigualdade das partes, pode ser objeto de novas investigações; dentre os alunos que fazem a contagem dupla parte-parte, que percentual consegue e qual não consegue reconhecer a igualdade das partes? Essa nova investigação poderia, por exemplo, considerar o mesmo item sendo apresentada a opção $\frac{7}{3}$ e a opção $\frac{7}{5}$.

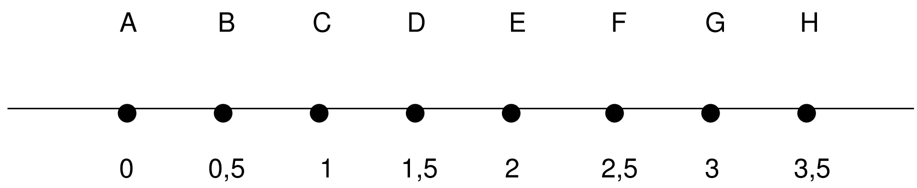
5.2 Questões de representação de números racionais na reta numérica

Objetivo:

Verificar se o aluno consegue identificar a localização de números racionais na reta numérica.

Apresentamos a seguir o item 03, em que o aluno deve localizar um número que está no registro simbólico numérico fracionário em uma reta, em que os pontos estão relacionados ao registro simbólico numérico decimal.

Item 03 – Observe a reta numérica a seguir.



O número racional $\frac{53}{25}$ está localizado entre os pontos:

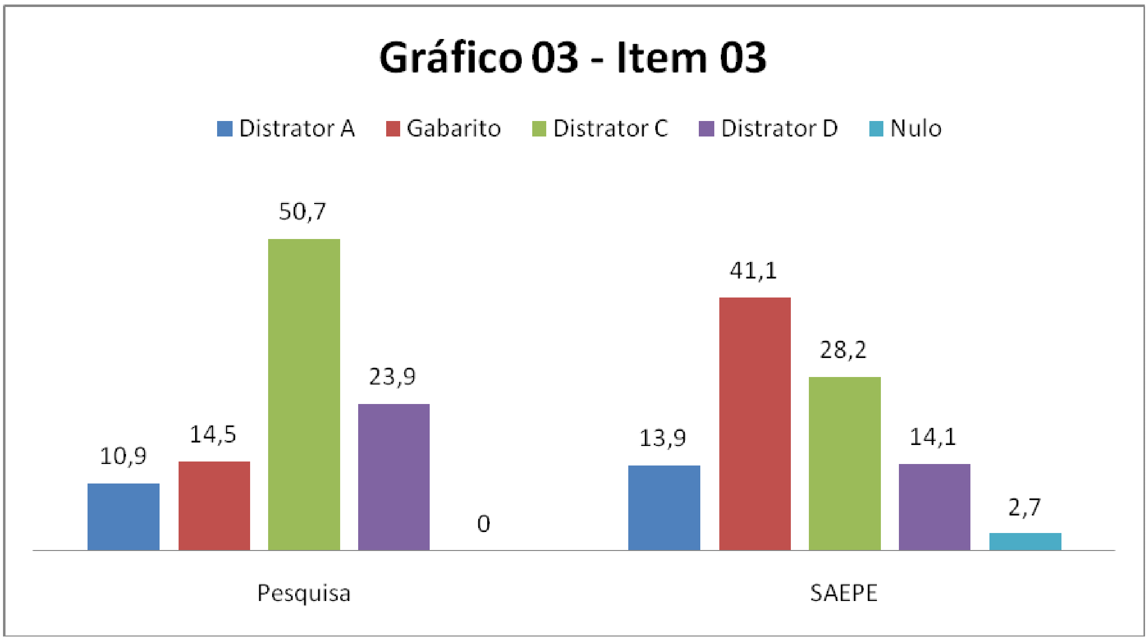
a) A e E.

b) E e F.

c) F e G.

d) G e H.

Com relação aos resultados apresentados no gráfico 03, observamos que os percentuais de acerto por parte dos alunos foi de 14,5% em nossa pesquisa e 41,1% no resultado do SAEPE.



A diferença entre os percentuais de acertos nos dois casos, que é de 26,6 pontos, talvez possa ser justificada pelo fato de que no comando do item, na avaliação do SAEPE, o numerador da fração tinha uma unidade a menos. Dessa forma, como o numerador é divisível por dois e o denominador é divisível por 25, o aluno pode ter sido atraído para o distrator B.

Entretanto, nos parece importante um estudo mais aprofundado para verificar se os alunos que acertaram o item conseguem relacionar a fração a um número decimal pouco maior que dois ou se, como temos visto em nosso trabalho, eles estão considerando os dois termos da fração de forma independente, sem perceber a relação entre eles.

O alto índice de alunos indicando a opção C como resposta, entre os nossos sujeitos, parece reforçar essa nossa hipótese. Nesse caso, o aluno pode estar indicando o intervalo entre 2,5 e 3 por uma associação aos algarismos dos termos da fração, o 25 e o 53.

Identificamos, nesse item, que o alunos fazem uso dos dados contidos no problema de forma descontextualizada para elaborar a sua resposta.

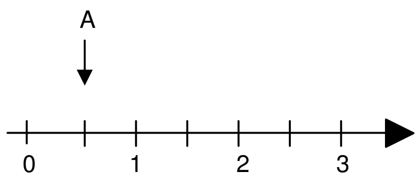
A seguir, temos o trecho da entrevista de um aluno, que demonstra o uso dessa estratégia.

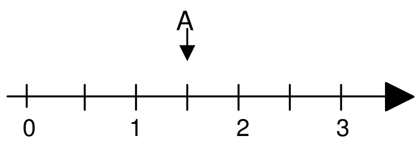
> Pesquisador*: A questão de número 03 diz o seguinte: observe a reta numérica e ela quer saber nessa reta onde está localizado o número* $\frac{53}{25}$ *. Você marcou a alternativa que diz entre os pontos A e E. Como você fez pra chegar a essa resposta?*
>
> Aluno*: Somei esse negócio ai, 0,5+1 e deu 5.*
>
> Pesquisador*: Você somou esses números ai e deu quanto essa soma?*
>
> Aluno*: Cinco*
>
> Professor*: E você marcou a letra A por quê?*
>
> Aluno*: Porque cinco vezes cinco é 25.*
>
> Professor*: Você somou esses números. E se somar esses números de A a E dá 5 é? E por que você multiplicou por 5. Você arranjou isso onde?*
>
> Aluno: *Porque cinco vezes cinco é vinte e cinco ai tem* $\frac{53}{25}$ *e eu marquei a letra A*
>
> **Aluno A12**

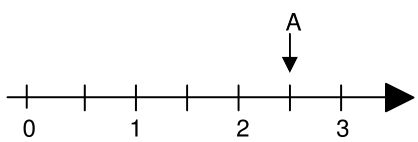
Podemos verificar que o aluno se apropria dos dados do problema de forma desconectada com o comando do item, e procura fazer operações matemáticas para, de alguma forma, chegar a uma resposta. Nesse caso, nós havíamos levantado a hipótese que, ao escolher essa alternativa de resposta, o aluno por não conseguir identificar que a fração representa um número na reta, escolheria esta alternativa por ela representar o intervalo maior entre as opções, o que não se confirmou, uma vez que o aluno demonstrou na entrevista que escolheu essa alternativa pelo fato de ter somado os valores associados a cada ponto nesse intervalo, obtendo cinco como resultado; daí ele realizou as operações explicitadas na entrevista e chegou a essa resposta.

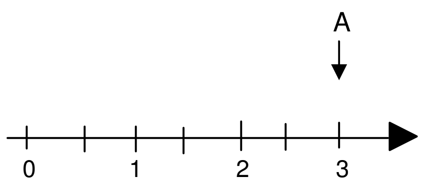
Apresentamos a seguir o item 05, em que o aluno deve localizar um número que está no registro simbólico numérico fracionário em uma reta, quando os pontos estão relacionados a números inteiros, porém o aluno precisa perceber que o número $\frac{3}{2}$ está associado a um número na reta no registro numérico simbólico decimal ou fracionário.

Item 05 – O número $\frac{3}{2}$ está representado adequadamente pelo ponto A na seguinte reta numérica:

a) 

b) 

c) 

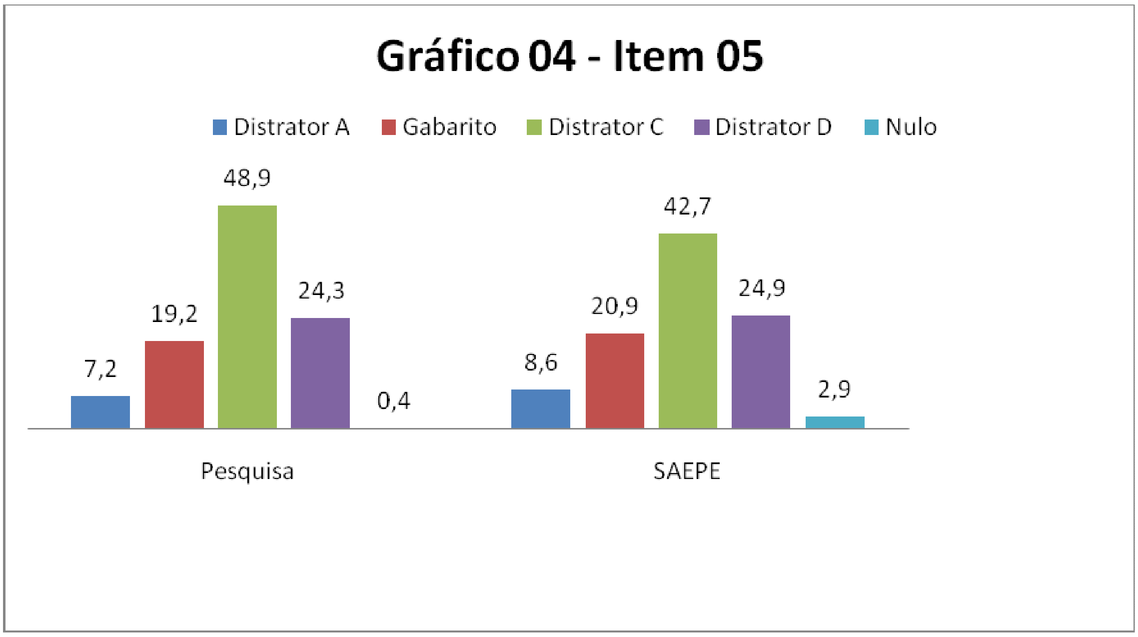
d) 

.

Os dados apresentados no gráfico 04, abaixo, referente ao item 05 de nossa pesquisa e uma questão similar do SAEPE, mostram que a diferença entre os percentuais de acertos nos dois casos, é de apenas 1,7 ponto, o que também gera certa regularidade com relação aos outros distratores.

O que nos chama atenção nesse item é o baixo número de alunos que acertou a questão, ou seja, tanto em nossa pesquisa quanto no resultado do SAEPE, apenas um em cada cinco alunos acerta o item. Por outro lado, poucos alunos deixam em branco, o que nos leva a supor que eles acreditam “saber” responder ao item.

Outro fato a ser observado é que a maioria dos alunos, 48,9% em nossa pesquisa, e 42,7% no resultado do SAEPE, optou pela alternativa C, em que o ponto A está representado na reta numérica entre os números 2 e 3.



Nossa hipótese para esse distrator foi a seguinte: Indica que o aluno pode estar associando os pontos 2 e 3 ao denominador e ao numerador da fração. Isso não se confirmou, pois, durante a entrevista, percebemos que o aluno busca operar com os termos da fração (2 e 3), associando o resultado à operação que ele realiza com os números 2 e 3 da reta numérica, onde está localizado o ponto A. A seguir, a entrevista com os alunos A4 e A6, que demonstram esse fato.

> <u>Pesquisador</u>: *A questão de número 05 diz o seguinte: o número $\frac{3}{2}$ está representado adequadamente pelo ponto A na seguinte reta numérica. Ai a gente tem quatro retas e você marcou a letra C, que o ponto A está aqui, me diga como é que você fez para marcar ai, qual foi o seu raciocínio?*
>
> <u>Aluno</u>: *Somei, de trás pra frente.*
>
> <u>Pesquisador</u>: *Somou de trás pra frente, como? Me explique.*
>
> <u>Aluno</u>: *dois mais três é cinco, ai eu botei porque lá em cima não é três e dois.* (O aluno aponta para a fração $\frac{3}{2}$.)
>
> <u>Pesquisador</u>: *Você fez três mais dois aqui de trás pra frente e três mais dois lá em cima?*
>
> <u>Aluno</u>: *Ai deu cinco.*
>
> **Aluno A4**

> <u>Pesquisador</u>: *Na questão de número 05 você tem ai quatro retas certo? E é solicitado pra que você localize onde está representado adequadamente o número $\frac{3}{2}$ na reta numérica. Você marcou a letra C que o ponto A está localizado entre o dois e o três. Como é que você fez pra chegar a essa resposta exatamente?*
>
> <u>Aluno</u>: *Vê o cálculo que a letra A está no meio com uma seta, ai eu fiz o cálculo do dois com o três e depois eu fiz o cálculo do três com o dois lá em cima.*
>
> <u>Pesquisador</u>: *O cálculo do três com o dois lá em cima, como?*
>
> <u>Aluno</u>: *Eu contei*
>
> <u>Pesquisador</u>: *Sim, mas contou como? É isso que eu preciso saber.*
>
> <u>Aluno</u>: *Veio na minha cabeça, eu fiz o cálculo do três com o dois ai deu cinco.*
>
> <u>Pesquisador</u>: *Você somou três mais dois, e onde é que está dizendo aqui pra somar?*
>
> *Aluno: Não sei não* (**Aluno A6)**

Já para o distrator da letra D, nossa hipótese foi: Indica que o aluno pode estar associando o ponto A ao numerador da fração, hipótese que foi confirmada, de acordo com a entrevista do aluno A9 seguir.

> Pesquisador: *A questão de número 05 diz o seguinte: o número $\frac{3}{2}$ está representado adequadamente pelo ponto A na seguinte reta numérica. Tem quatro retas e você marcou a letra D que o ponto A está aqui em cima do 3. Como é que você fez pra chegar nessa resposta?*
>
> Aluno: *Aqui tem $\frac{3}{2}$ ai eu coloquei 3 aqui coloquei porque o A está em cima do 3.*
>
> Pesquisador: *Porque está em cima do 3? mas o número não é $\frac{3}{2}$?*
>
> Aluno: *É. Mas nenhum está em cima do 2, ai eu marquei o 3.*
>
> **Aluno A9**

A representação de números fracionários na reta numérica pode ser considerada um caso particular da relação parte-todo. Podemos considerar como exemplo a representação de $\frac{2}{3}$ na reta numérica. O aluno pode tomar o segmento que vai de 0 a 1, dividi-lo em três partes e tomar duas delas, da esquerda para a direita. Nesse caso, o raciocínio utilizado pelo aluno é referente ao subconstruto parte-todo em quantidades contínuas. Já no caso da fração que aparece no item 05, $\frac{3}{2}$, seriam necessárias duas unidades, ou seja o segmento que vai de 0 a 2, dividi-lo em quatro partes e tomar três delas, da esquerda para a direita.

5.3 Questões sobre equivalência de frações

Objetivo:

Verificar se o aluno consegue resolver problemas utilizando frações equivalentes.

Apresentamos a seguir o item 04, que trata do invariante equivalência, em que o comando do item apresenta o registro figural discreto e o aluno deve fazer a conversão para o registro simbólico numérico fracionário.

Item 04 – Observe a parte sombreada nas seguintes figuras.

Figura 1

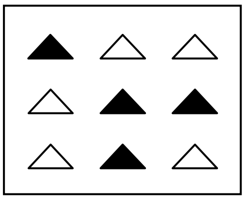


figura 2

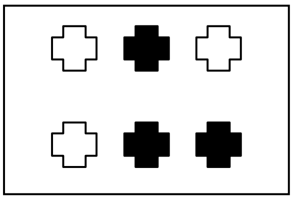


Figura 3

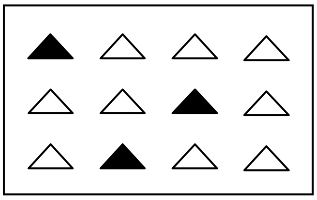
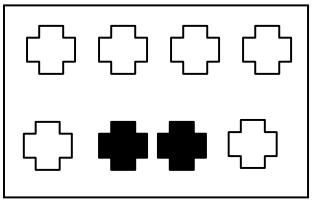


figura 4



A parte sombreada pode ser representada pela mesma fração nas figuras:

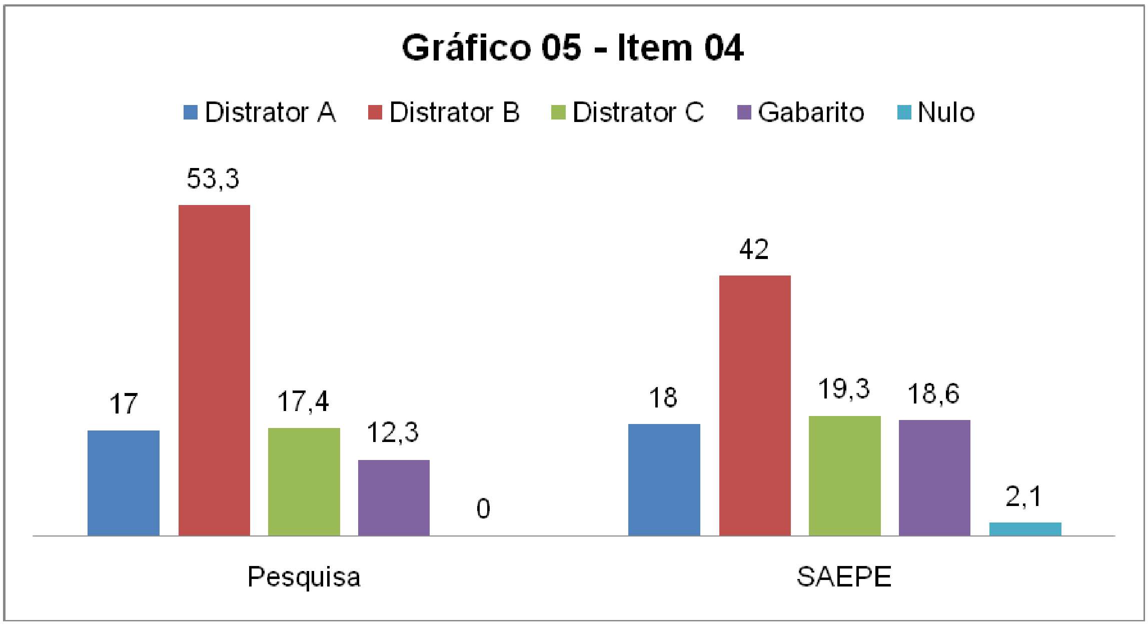
a) 1 e 3

b) 2 e 3

c) 2 e 4

d) 3 e 4

O gráfico 05, que trata do item 04 do nosso instrumento de pesquisa, mostra que o número de alunos que acertou a questão em nossa pesquisa e no SAEPE foi relativamente parecido, pois a diferença entre esses itens é de apenas 6,3 pontos. Com relação aos outros distratores, observamos que a estabilidade é alterada no distrator constante na segunda alternativa, em que a diferença nos dois casos é de 11,3 pontos. Entretanto, vale salientar que mesmo esse distrator apresentando a maior diferença, foi nessa alternativa que a maioria dos alunos, nos dois casos, concentrou as suas respostas. Provavelmente esse distrator deve contemplar erros que os alunos costumam cometer com maior frequência.



Nesse item, verificamos que o percentual de alunos que acertou foi muito baixo, 12,3% em nossa pesquisa e 18,6% no resultado do SAEPE. Creditamos esse baixo índice de acertos ao fato de que, nesse item, o aluno precisa fazer a conversão do registro figural discreto para o registro simbólico numérico fracionário, e, em seguida, fazer o tratamento para encontrar a resposta. Segundo Catto (2000), “observações realizadas em diferentes fases da aprendizagem Matemática têm demonstrado que essa atividade de conversão por meio de mudança de registro é de fato muito difícil".

Com relação ao distrator da alternativa B, observamos que a maioria dos alunos assinalou esta alternativa, tanto em nossa pesquisa, quanto no resultado do SAEPE. Nossa hipótese para esse distrator foi: Indica que o aluno pode estar levando em consideração a quantidades de figuras sombreadas. Essa hipótese foi confirmada, uma vez que, durante a realização das entrevistas, o aluno A3 afirma ter marcado essa alternativa pelo fato de as duas terem o mesmo número de figuras sombreadas.

> <u>Pesuisador</u>: *A questão de número 04 diz o seguinte: observe a parte sombreada nas seguintes figuras. Ele lhe dá 04 figuras certo? E ai ele diz que a parte sombreada pode ser representada pela mesma fração nas figuras:. diz que em duas dessas figuras a parte sombreada pode ser representada pela mesma fração ai você marcou a letra B que é a figura 2 e 3, então eu queria justamente saber por que você marcou essa resposta?*
>
> <u>Aluno:</u> *Porque aqui tem* $\frac{3}{3}$ *ai não é igual? Por isso que eu marquei esse daqui.*
>
> <u>Pesquisador</u>: *Como é* $\frac{3}{3}$ *ai, me explica que eu não entendi.*
>
> <u>Aluno</u>: *não é* $\frac{3}{3}$*. Aqui não são 6. não são 3 só que tão marcados?*
>
> <u>Pesquisador:</u> *Que estão sombreados são três.*
>
> <u>Aluno:</u> *Ai eu botei* $\frac{3}{3}$ *foi bem assim.*
>
> <u>Pesquisador</u>: *Mas* $\frac{3}{3}$ *não é 3 em cima e 3 em baixo? E aqui tem isso? Qual a relação dessa figura com essa?*
>
> <u>Aluno:</u> *Ai eu achei que tivesse representando assim. Porque não tem aqui 3, ai eu pensei que era* $\frac{3}{3}$ *.*
>
> <u>Pesquisador</u>: *Mas você marcou a 2 e a 3, marcou essas duas. Qual foi a relação que você encontrou nessas duas figuras?*
>
> <u>Aluno</u>: *Porque essa aqui também tem 3 sombreadas.*

Pesquisador*: E essa?*

Aluno*: Essa daí também. Ai foi esse raciocínio que levou, que eu fiz. Essa aqui não tem três marcadas e três em branco. Ai eu pensei assim, deve ser três e três. Ai por isso que eu marquei ali.*

Pesquisador: *Agora essa tem três sombreadas e quantos em branco?*

Aluno: *doze.*

Pesquisador: *Não. Se tem 3 sombreados, tem 9 em branco. Então está diferente dessa. A relação foi pela sombreada?*

Aluno*: Também. Essa daqui não tem nove sem estar marcado e 3 sombreado. Então foi esse o raciocínio que eu levei nesse, eu levei nesse também, só que esse tem um maior número de triângulos.*

Aluno A3

Outro exemplo do uso dessa estratégia é visto na entrevista do aluno A2 que diz:

Pesquisador*: Essa questão de número 04 ela diz o seguinte: observe a parte sombreada nas seguintes figuras, você tem quatro figuras certo? A figura 1 tem nove triângulozinhos pequenos e desses você tem quatro triângulos sombreados. Na figura dois você tem seis cruzinhas e três estão sombreadas. A figura três a gente tem doze triângulozinhos e três estão sombreados. A figura quatro nós temos oito cruzinhas com duas sombreadas. E ai ele diz o seguinte: a parte sombreada pode ser representada pela mesma fração nas seguintes figuras. Ai você marcou aqui que são as figuras dois e três. A figura dois é essa aqui e a figura três é essa aqui. Como é que você fez para chegar a essa resposta?*

Aluno: *Contei é... e marquei a resposta.*

Pesquisador*: Contou o que?*

Aluno*: Os quadradinhos que tem aqui, as cruzinhas, e as coisas que tem aqui.*

Pesquisador: *Contou as cruzinhas que tem aqui?*

Aluno*: Sim.*

Pesquisador*: E os triângulozinhos que tem aqui?*

Aluno: *Sim.*

Pesquisador: *Mas aqui tem seis cruzinhas, aqui tem doze. Como é que você contou? Qual foi o raciocínio que você fez para chegar aqui?*

Aluno: *Porque aqui tem dizendo sombreadas, ai eu peguei e fui... só nas sombreadas.*

Pesquisador: *Ah, você contou só as sombreadas? Mostra pra mim por favor.*

Aluno: *esse aqui tem três e aqui tem três, ai eu marquei aqui.*

Aluno A2

Com relação aos distratores A e C, a nossa hipótese também foi confirmada, já que a hipótese dizia que o aluno poderia estar relacionando apenas as formas das figuras, uma vez que na alternativa A a figura é composta por triângulos, e na alternativa C é composta por cruzinhas, e durante as entrevistas essa hipótese foi validada.

Apresentamos a seguir o item 08, que trata do invariante equivalência, em que, no comando, o número racional aparece em seu registro simbólico numérico fracionário, e o aluno necessita apenas fazer o tratamento para encontrar as frações equivalentes.

Item 08 – Uma sorveteria realizou uma pesquisa com seus clientes para descobrir o sabor de sorvete preferido pela maioria deles. Os resultados dessa pesquisa estão representados no quadro abaixo.

$\frac{6}{9}$ preferem sorvete sabor chocolate
$\frac{3}{9}$ preferem sorvete sabor napolitano
$\frac{18}{27}$ preferem sorvete sabor morango
$\frac{15}{20}$ preferem sorvete sabor flocos

Dois sabores de sorvetes foram igualmente preferidos pelos clientes pesquisados. Quais são esses sabores?

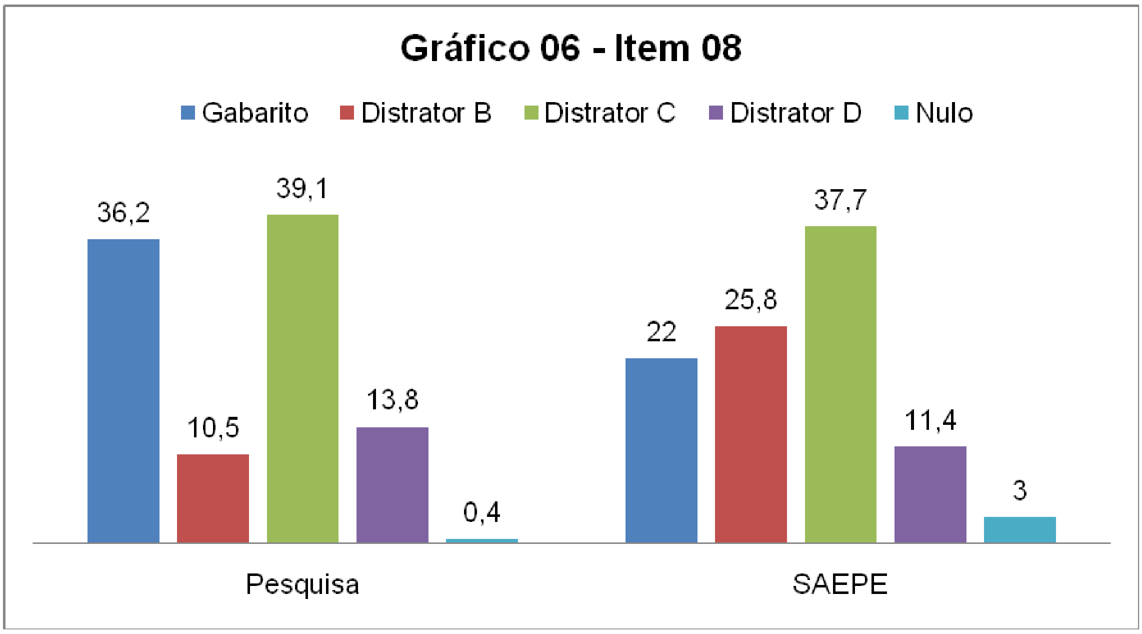
a) Morango e chocolate.

c) Napolitano e chocolate.

b) Napolitano e flocos.

d) Chocolate e flocos.

O gráfico a seguir é referente ao item 08, que trata do invariante equivalência com números racionais em sua representação fracionária. Podemos observar que houve uma variação com relação ao número de alunos que acertou esse item em nossa pesquisa e no resultado do SAEPE, uma vez que a diferença entre os percentuais de acertos nos dois casos é de 14,2 pontos. Com relação aos demais distratores, o que nos chama atenção é o distrator da letra C, pois tanto em nossa pesquisa, quanto no resultado do SAEPE, a maioria dos alunos escolheu esse distrator, 39,1% em nossa pesquisa e 37,7% no resultado do SAEPE.



Com relação a esse item, nossa hipótese para o distrator da alternativa C, é que o aluno podia estar estabelecendo relações entre os numeradores e os denominadores das frações, uma vez que nos numeradores temos 6, que é múltiplo de 3, e nos denominadores temos um número em comum, que é o 9. Entretanto, nossa hipótese não foi confirmada, pois o aluno A15, durante a entrevista, afirmou que marcou a alternativa C porque os sabores napolitano e chocolate apresentavam os números menores.

> Pesquisador: *A questão 08 diz o seguinte: uma sorveteria realizou uma pesquisa com seus clientes para descobrir o sabor de sorvete preferido pela maioria deles e o resultado dessa pesquisa está representado no quadro abaixo. Então você tem um número para cada sabor de sorvete do jeito ques está aqui nesse quadro. É dito que dois sabores foram preferidos igualmente pelos clientes. Eu queria saber como é que você fez pra marcar a alternativa C?*
>
> Aluno: *Porque vê o chocolate e o napolitano tem o número menor deles.*
>
> Pesquisador: *Não entendi. Número menor como?*
>
> Aluno: *Dos quatro, eles são o menor.*
>
> **Aluno A15**

Para os distratores das alternativas B e D, não encontramos nenhuma hipótese plausível para eles. Entretanto, ao entrevistar um aluno que assinalou a alternativa B do instrumento de pesquisa, verificamos que ele justificou a sua resposta dizendo que marcou porque eram o números mais altos. Inclusive, ele diz que queria marcar morango e flocos, mas como não tinha nas alternativas, optou por napolitano e flocos.

> Pesquisador*: A questão 08 diz o seguinte: uma sorveteria realizou uma pesquisa com seus clientes para descobrir o sabor de sorvete preferido pela maioria deles e o resultado dessa pesquisa está representado no quadro abaixo. Então você tem um número que representa pro chocolate, outro pro napolitano, outro pro morango e outro pro flocos. O que se quer saber é que dois sabores desses estão sendo preferidos pela mesma quantidade de pessoas. Ai você marcou a letra B, que é napolitano e flocos, como é que você chegou nessa resposta?*
>
> Aluno*: Cadê, eu ia colocar morango e flocos só que não tem, ai eu coloquei napolitano e flocos que é o que está com os números mais altos aqui.*
>
> Pesquisador: *Sim, mas como é que você fez pra chegar nessa resposta? Você disse que é o numero mais alto.*
>
> Aluno*: É os dois.*
>
> **Aluno A14**

5.4 Questões sobre mudança de representação (forma fracionária ⇒ forma decimal)

Objetivo:

Verificar se o aluno consegue reconhecer as diferentes representações de um número racional.

Apresentamos a seguir o item 06 do instrumento de pesquisa, que trata da mudança de registro simbólico dos números racionais na forma fracionária e decimal.

Item 06 – A professora Clotilde pediu que seus alunos escrevessem um número que representasse meio ou metade.

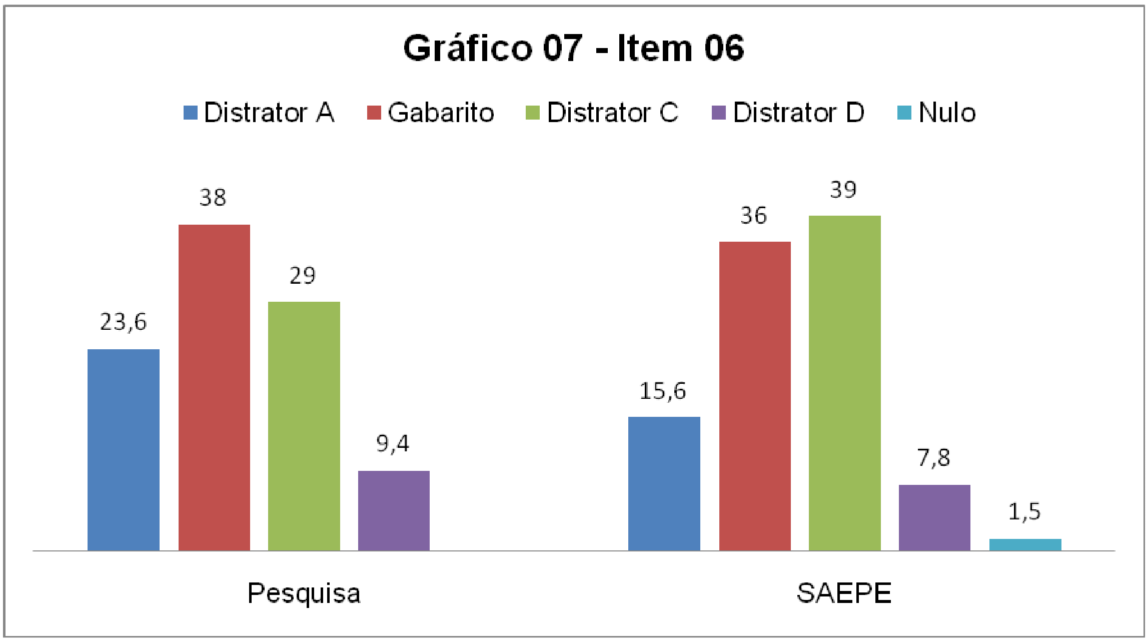
Geraldo	Cássio	Carla	Fernando
$\frac{1}{2}$	0,5	1,2	0,005

Os alunos que acertaram o exercício foram:

a) Cássio e Carla
c) Carla e Geraldo
b) Geraldo e Cássio
d) Geraldo e Fernando

Nesse item, o registro de partida aparece na linguagem natural, podendo ser associado a dois registros de chegada em linguagem simbólica, um registro fracionário e um registro decimal.

O gráfico 07 é referente aos dados do item 06 do instrumento de pesquisa. Com relação aos alunos que acertaram esse item, foi mantida a regularidade entre os percentuais de alunos em nossa pesquisa e na avaliação do SAEPE, uma vez que a diferença entre eles é de apenas 2 pontos.



Com relação ao distrator da alternativa A, a nossa hipótese foi a seguinte: Indica que o aluno reconhece a representação 0,5, mas pode estar associando a fração $\frac{1}{2}$ à representação 1,2. Entretanto, não conseguimos comprovar ou negar a nossa hipótese, uma vez que dois alunos que foram entrevistados sobre esse distrator, disseram que não sabiam e chutaram essa alternativa porque era a primeira.

Para o distrator da alternativa C, a nossa hipótese foi: Indica que o aluno, além de não estabelecer corretamente a relação entre a forma fracionária e a forma decimal dos números racionais, pode estar relacionando apenas pelo fato das duas opções apresentarem os algarismos 1 e 2. Nossa hipótese foi comprovada, pois, durante a entrevista, podemos observar a relação que os alunos fazem entre os algarismos 1 e 2 ao responderem essa questão e assinalarem a alternativa C, em que Carla escreveu 1,2 e Geraldo escreveu $\frac{1}{2}$, conforme entrevista a seguir.

> *<u>Pesquisador</u>: A pergunta diz o seguinte: a professora Clotilde pediu que seus alunos escrevessem um número que representasse meio ou metade. Geraldo escreveu um sobre dois; Cássio escreveu zero vírgula cinco; Carla escreveu um vírgula dois; e Fernando escreveu zero vírgula zero zero cinco. Os alunos que acertaram o exercício foram: Você marcou que foi Carla e Geraldo, como é que você chegou nessa resposta?*
>
> *<u>Aluno</u>: Pra ser igual assim o que eles responderam que um fez esse $\frac{1}{2}$ e o outro botou esse (1,2) ai eu vi que dá o mesmo cálculo dos dois.*
>
> *<u>Pesquisador</u>: Por que você achou que dá o mesmo cálculo?*
>
> *<u>Aluno</u>: Porque esse $\frac{1}{2}$ eu achei pela metade, o número pela metade, eu achei ele.*
>
> *<u>Pesquisador</u>: E o outro 1,2 por que você achou ele?*
>
> *<u>Aluno</u>: Porque eu achei também pela metade dos dois, o de Geraldo e o de Carla.*

Aluno A6

Para o distrator da alternativa D, a nossa hipótese foi: Indica que o aluno consegue associar a fração $\frac{1}{2}$ à ideia de metade, mas não consegue associar o decimal 0,5 à ideia de metade. Nossa hipótese foi confirmada, uma vez que durante a entrevista, o aluno disse ter marcado essa alternativa apenas pelo número correspondente a Geraldo.

> *<u>Pesquisador</u>: A questão 06 diz o seguinte: a professora Clotilde pediu que seus alunos escolhessem um número que representasse meio ou metade. Ai quatro alunos escreveram desse jeito. Os alunos que acertaram o exercício foram, ou seja, quais foram os alunos que escreveram o número que representava meio ou metade? Você marcou que foi Geraldo e Fernando. Por que você marcou essa alternativa?*
>
> *<u>Aluno</u>: Porque eu achei assim, que Geraldo era um meio.*
>
> *<u>Pesquisador</u>: Certo, e Fernando?*
>
> *<u>Aluno</u>: Eu achei só por Geraldo.*

<u>Pesquisador</u>: Por que você achou isso? Só por Geraldo.

<u>Aluno</u>: Porque eu fiz só por Geraldo.

Aluno A11

Apresentamos a seguir o item 07 do instrumento de pesquisa, que trata da mudança de registro simbólico dos números racionais da forma decimal para a forma fracionária.

Item 07 – O número 0,02 também pode ser escrito da seguinte forma:

a) $\frac{1}{5}$ -

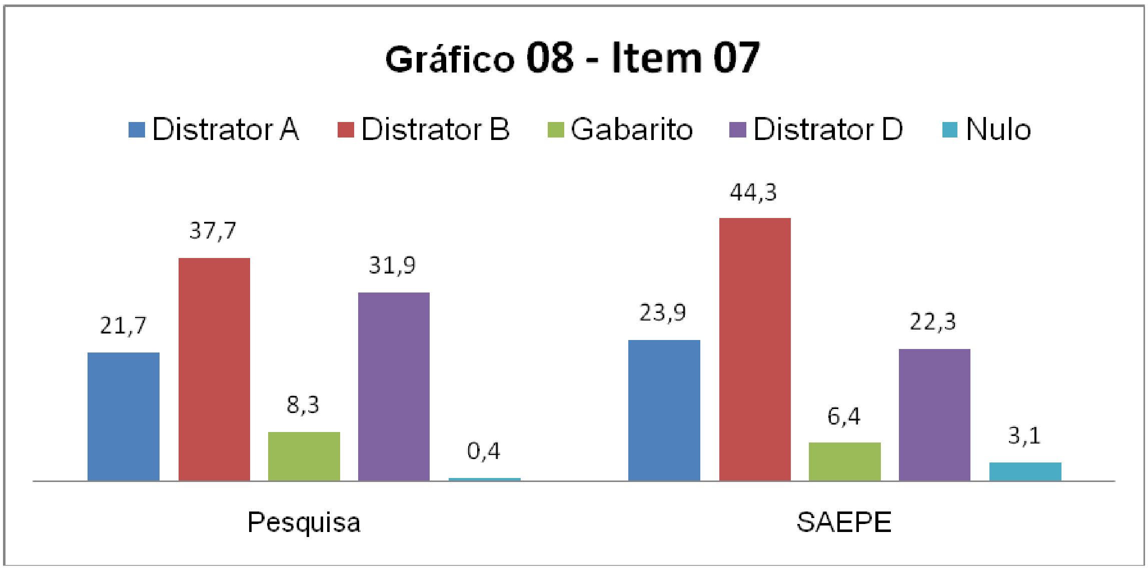
b) $\frac{1}{20}$ -

c) $\frac{1}{50}$ –

d) $\frac{1}{200}$ –

No gráfico 08, que trata do item 07 do instrumento de pesquisa, o que nos chama atenção é o baixo percentual de acertos, tanto em nossa pesquisa quanto no resultado do SAEPE, e a diferença dos percentuais de acertos nos dois casos é de apenas 1,9 ponto. Outro fato a ser observado é a diferença nos números de acertos entre os itens 06 e 07, que em nossa pesquisa é de 20,7 pontos e no resultado do SAEPE é de 29,6 pontos, já que esses dois itens tratam do mesmo significado dos números fracionários, ou seja, os itens versam sobre a mudança da forma fracionária para a forma decimal e vice-versa.

Acreditamos que essa diferença entre os percentuais de acertos nesses itens, deva-se ao fato de que, embora nos dois itens haja a necessidade de se efetuar a conversão da representação dos números racionais. No item 06, o aluno pode usar como registro de partida tanto a representação fracionária quanto a representação decimal. Entretanto, no item 07, pelo fato de no comando constar a representação decimal, o aluno tende a usá-la como registro de partida e por isso esse item apresenta um maior nível de dificuldade.



Com relação ao distrator da alternativa A, a nossa hipótese foi: Indica que o aluno pode ter efetuado a divisão de 1 por 5 e ter se confundido ao determinar o número de casas decimais. Entretanto, não conseguimos confirmar a nossa hipótese, uma vez que o aluno que entrevistamos não conseguiu explicar porque havia assinalado essa alternativa.

Já com relação ao distrator da alternativa B, a nossa hipótese foi: Indica que aluno pode estar relacionando o algarismo 2, constante no número decimal do comando, com o 2 que está no denominador da fração. Nossa hipótese não foi confirmada, pois na entrevista do aluno A18, o mesmo não deixa clara essa relação, e tenta explicar algumas operações matemáticas que nos deixam dúvidas quanto à confirmação de nossa hipótese.

> *Pesquisador: A questão de número 07 diz o seguinte: o número 0,02 também pode ser escrito da seguinte forma: você tem quatro alternativas para escrever esse número aqui, ai você marcou a letra B que tem* $\frac{1}{20}$ *. Qual o raciocínio que você usou para chegar a essa resposta?*
>
> *Aluno: Eu peguei, separei, mudei os números de posição, botei o zero atrás pra ficar 20 e esse zero eu fiz como se fosse 1 para ficar negativo, com o vinte negativo.*
>
> *Pesquisador: E onde é que tem número negativo aqui?*
>
> *Aluno: Não. A solução que eu fiz, a fórmula, eu mudei a posição só pra dá essa coisa assim. Eu botei no 0,2 botei no lugar do 0 botei o 2, botei vírgula um ai cheguei nessa resposta 2.*
>
> **Aluno A18**

Para o distrator da alternativa D, nossa hipótese foi: Indica que o aluno pode estar relacionando o 2 e os dois zeros do número decimal com o denominador. Entretanto, a mesma não foi comprovada, pois o aluno A19, ao ser entrevistado, disse que marcou essa alternativa porque tinha o maior denominador, sem fazer relação com o número decimal constante no comando do item.

Observamos a dificuldade que os alunos apresentam ao encontrarem situações envolvendo o conceito de fração (**referente**), seja na sua forma fracionária, decimal, ou pictórica (**significante**) para se apropriar dos invariantes das frações, que são ordem e equivalência (**invariantes**).

Podemos constatar, que os alunos se utilizam das mais variadas estratégias, mesmo de uma forma descontextualizada, para chegar a uma resposta. É comum, ao se depararem com uma situação em que os mesmos sentem algum tipo de dificuldade para resolvê-la, utilizarem os conhecimentos matemáticos que eles têm (como adição, subtração, multiplicação e divisão) para tentar encontrar uma resposta entre as alternativas propostas. Quando não encontram, procuram resolver por aproximação entre as respostas que eles têm disponíveis, no caso, os distratores, e as operações por eles realizadas, mesmo que de forma descontextualizada e sem ter nenhuma relação com o componente curricular em questão.

Com relação à análise comparativa dos resultados de nossa pesquisa com os resultados do SAEPE, verificamos que, em sua maioria, houve uma certa regularidade nos resultados apresentados em ambos os casos. Entretanto, vale salientar a dificuldade que os alunos apresentam em se apropriar da representação que lhes é apresentada para os números racionais e passar de um registro para outro. Outro aspecto a ser observado é com relação aos itens 06 e 07, em que a diferença entre os percentuais de acertos foi de 20,7 em nossa pesquisa e 29,6 no resultado do SAEPE. No item 06, em que o comando está com o registro na linguagem natural e o aluno precisa fazer a conversão para o registro numérico fracionário e decimal, os percentuais de acertos foram acima de 35 pontos nos dois casos. Já no item 07, em que a conversão precisa ser feita do registro numérico decimal para o fracionário, o número de acertos ficou abaixo de 10 pontos nos dois casos, o que nos mostra que, quando o registro de partida para a conversão foi o registro numérico decimal, os alunos apresentaram um maior nível de dificuldade.

Essas análises nos remetem ao objetivo de nossa pesquisa que é analisar as estratégias utilizadas pelos alunos da Rede Municipal do Recife ao resolverem questões do SAEPE sobre números racionais.

A análise comparativa nos permitiu verificar a regularidade dos resultados de nossa pesquisa com os resultados do SAEPE, o que aconteceu em sua maioria absoluta.

Com relação à análise das estratégias utilizadas pelos alunos na resolução dos itens do instrumento de pesquisa, ela nos permitiu validar as nossas hipóteses com relação a alguns distratores, por meio das entrevistas realizadas com os alunos. Em outros casos, as hipóteses não foram validadas, e os alunos chegam a nos surpreender com as sua criatividade para chegar a uma resposta que eles julgam estar correta. Por fim, no próximo capítulo, faremos a conclusão da análise das estratégias utilizadas pelos alunos na resolução dos itens que foram apresentados neste capítulo.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nosso objetivo foi analisar as estratégias utilizadas pelos alunos da rede municipal do Recife ao responderem questões na avaliação do SAEPE sobre números racionais.

O aporte teórico para o desenvolvimento do nosso estudo contemplou a Teoria dos Campos Conceituais, de Gerard Vergnaud, no que se refere à formação do conceito e suas interdependências. Utilizamos também as ideias de Nunes & Bryant e outros trabalhos de pesquisa desenvolvidos com relação aos números fracionários. Por fim, nos pareceu necessário contemplar alguns elementos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval, que trata dos diversos registros de apresentação dos números fracionários.

Para atingirmos nosso objetivo fizemos um levantamento de todos os itens da avaliação do SAEPE, realizada no ano de 2008, cujo resultado foi divulgado em 2009, referentes aos descritores que tratam dos números racionais. Posteriormente, realizamos um levantamento do número de acertos dos alunos com relação a esses itens, bem como do total assinalado em cada um dos distratores dos itens.

Em seguida elaboramos um instrumento formado por oito questões, envolvendo quatro ideias dos números racionais. Nele colocamos os itens do SAEPE relativos aos números racionais, quando esses itens estavam disponibilizados, ou itens semelhantes, quando pertencentes ao banco de itens do SAEPE. Esse instrumento foi aplicado em 276 sujeitos de quatro escolas da Rede Municipal de Ensino do Recife.

Após a aplicação dos instrumentos realizamos entrevistas com 26 alunos, buscando levar o aluno a explicitar as estratégias mobilizadas por eles ao responderem às questões do instrumento.

Com esse conjunto de dados nos foi possível estabelecer o confronto entre as estratégias que havíamos estabelecido a priori, a partir dos distratores dos itens, e as estratégias efetivamente mobilizadas pelos sujeitos.

No âmbito geral, podemos observar que, tanto em nossa pesquisa, quanto no resultado do SAEPE, em nenhum dos itens, o percentual de acerto chegou a 50%, o que é um dado preocupante, do ponto de vista do ensino. Isso porque, como vimos anteriormente, o ensino dos números racionais, na sua representação fracionária, inicia-se a partir do segundo ciclo do Ensino Fundamental, e os alunos que participaram desta pesquisa e da avaliação do SAEPE estão no último ano do Ensino Fundamental. Em outras palavras, nossos alunos estão terminando o ensino fundamental sem conseguir elaborar, minimamente, as ideias relativas aos números racionais.

Com relação às estratégias utilizadas pelos alunos ao responderem os itens do instrumento de pesquisa, verificamos que, mesmo sendo trabalhado ao longo de todo o Ensino Fundamental, os números fracionários continuam a ser um componente curricular que os alunos apresentam muita dificuldade ao término do Ensino Fundamental. Diante dessa dificuldade, podemos perceber que os alunos utilizam estratégias totalmente descontextualizadas dos problemas propostos, com o objetivo de encontrar uma resposta para a questão, mesmo que essa resposta nada tenha a ver com o comando do item.

Entre as estratégias identificadas em nossa pesquisa, a situação mais recorrente é a que o aluno faz uso dos dados contidos no problema sem elaborar nenhum significado para essa ação. Nesse procedimento, os alunos permanecem ligados ao contexto do problema sem dominar as relações entre os conceitos envolvidos, e tentam resolver a questão utilizando as operações matemáticas com as quais estão familiarizados para operar esses dados, e assim encontrar a resposta.

Como o nosso objetivo foi analisar as estratégias utilizadas pelos alunos da rede municipal do Recife ao responderem questões na avaliação do SAEPE sobre números racionais, verificamos que, as estratégias mobilizadas pelos alunos confirmaram algumas de nossas hipóteses. Por exemplo, o uso da contagem dupla parte-parte apareceu de forma muito forte em nosso trabalho. Dentre os alunos que fizeram uso dessa estratégia, alguns não conseguiram nem mesmo perceber que o todo estava dividido em partes explicitamente desiguais. Esse fato pode ser objeto de novas investigações, que busquem identificar, por exemplo, dentre os alunos que fazem a contagem dupla parte-parte, que percentual consegue e qual não consegue reconhecer a igualdade das partes no trabalho com quantidade contínua?

Outro ponto que merece ser objeto de futuras investigações é com relação à associação de números racionais a pontos na reta numérica. Nos parece importante um estudo mais aprofundado para verificar que elementos cognitivos os alunos mobilizam ao fazer essa associação. Por exemplo, será que eles conseguem relacionar a fração a um número decimal ou, como observamos em nosso trabalho, eles estão considerando os dois termos da fração de forma independente, sem perceber a relação entre eles.

Com relação às nossas hipóteses elaboradas previamente, com base nas estratégias que os alunos estariam mobilizando para resolver os itens, algumas foram confirmadas após a realização das entrevistas. Entretanto, outras hipóteses não foram confirmadas, uma vez que os alunos, no momento da entrevista, mostraram ter mobilizado estratégias que não foram contempladas em nossas hipóteses.

Essa situação nos remete ao fato de que, como foi dito no capíitulo 2, os distratores são elaborados com o objetivo de apontar possíveis caminhos de raciocínio dos estudantes, com base nas hipóteses do elaborador do item para cada distrator. Porém, em alguns casos, o raciocínio do aluno diverge da hipótese do elaborador do item, como aconteceu em nossa pesquisa.

Acreditamos que essa divergência entre a hipótese prevista pelo SAEPE e a estratégia efetivamente utilizada pelo aluno para cada distrator, precisa ser melhor investigada e considerada na análise dos resultados das avaliações em larga escala. A falta dessa consideração pode, em alguns casos, mascarar as dificuldades dos alunos no trato com aquele objeto de conhecimento.

No âmbito geral, verificamos que não houve regularidade na utilização das estratégias por parte dos alunos, uma vez que identificamos o uso de estratégias diferentes para tentar resolver uma mesma questão, assim como o uso da mesma estratégia em questões com significados diferentes.

Por fim, ressaltamos a importância do papel do professor como educador matemático, e a necessidade que ele tenha acesso às estratégias utilizadas pelos alunos nas avaliações de larga escala, para que, a partir dessas informações, possa repensar a sua prática de sala de aula. De posse dessas informações, o professor poderá discutir essas estratégias com os alunos, para que possa, como afirma Vergnaud, ajudá-los a transformar conhecimento intuitivo em conhecimento explícito.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. **Introdução à análise matemática**. 2ª ed. São Paulo: Edgar Blucher, 1999.

BLOOM, B.S., HASTINGS, J.T., MADAUS, G.F. **Evoluacion del aprendizaje**. Buenos Aires: Troquel, 1975.

BRASIL. Ministério da educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília, 1997.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática**. 9 ed. Lisboa: Livraria Sá da Costa, 1989.

CATTO, G. G. **Registros de representação e o número racional**: uma abordagem nos livros didáticos. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. São Paulo, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.

DUVAL, R. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, Sílvia Dias Alcântara (Org.), **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. Campinas: Papirus, 2003.

FERNANDES, D. **Avaliar para aprender**: fundamentos, práticas e políticas. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

IFRAH, G. **História Universal dos algarismos**: a inteligência dos homens contadas pelos números pelo cálculo. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. 2v

KERSLAKE, D. **Fractions: children's Strategies and errors**: a report of the strategies and errors in Secondary Mathematics Project. Windsor: NFER-Nelson, 1986.

MERLINI, V. L. **O conceito de fração em seus diferentes significados**: um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

MIRAS, M. e SOLÉ, I. A evolução da aprendizagem e a evolução no processo de ensino e aprendizagem. In: COOL, C.; PALACIOS, J.; MARCHESI, A. **Desenvolvimento Psicológico e Educação**: Psicologia Evolutiva. V. 2. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

NÉRICI, I. **Metodologia do Ensino**: Uma introdução. São Paulo, Atlas, 1977.

NUNES, T.; CAMPOS, T.; MAGINA, S.; BRYANT, P. **Educação Matemática 1**: númerose operações numéricas. São Paulo: Cortez, 2005.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação. **Boletim Pedagógico de Avaliação da Educação**: SAEPE – 2008 / Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Educação, CAEd. v. 1, Juiz de Fora, 2008.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação. **Boletim Pedagógico de Avaliação da Educação**: SAEPE – 2009 / Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Educação, CAEd. v. 3, Juiz de Fora, 2009.

PERRENOUD, Ph. **Avaliação. Da Excelência à Regulação das Aprendizagens**. Porto Alegre: Artmed, 1999.

SANTOS, A. **O conceito de fração em seus diferentes significados:** um estudo diagnóstico junto a profesoresque atuam no Ensino Fundamental. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

SILVA, M. J. F. **Sobre a introdução do conceito de número fracionário.** Dissertação de Mestrado em Ensino da Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.

VASCONCELOS, I. C. P. **Números Fracionários**: A construção dos diferentes significados por alunos de 4ª a 8ª séries de uma escola do Ensino Fundamental. Dissertação de Mestrado em Educação. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2007.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade**: problemas do ensino da matemática na escola elementar / tradução: Maria Lúcia Faria Moro. Curitiba: Ed. Da UFPR, 2009.

VERGNAUD, G. La theorie dês champs conceptueles. In. BRUN, J. **Didatique des mathématiques**. Paris: Delachaux et Niestlé, 1996.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos Conceituais. In: BRUN, Jean, **Didáctica das Matemáticas**. Instituto Piaget, 2001.

ZABALA, A. **A Prática Educativa**. Porto Alegre: Artmed, 1998.

Anexos

Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
EDUMATEC

PREFEITURA DO
RECIFE

<u>AUTORIZAÇÃO</u>

Autorizo o(a) aluno(a)____ a

participar da pesquisa intitulada "Analisando as Estratégias utilizadas pelos alunos da Rede Municipal do Recife ao responderem questão sobre números racionais na avaliação do SAEPE", realizada pelo professor Rosivaldo Severino dos Santos, sob a orientação do profº Dr. Marcelo Câmara dos Santos, com a devida autorização da Prefeitura do Recife, através da Secrfetaria de Educação.

Declaro estar ciente que a pesquisa tem como procedimento metodológico, a aplicação de avaliações similares às do SAEPE – Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco, com possibilidade de realização de entrevista com aluno, desde que o mesmo esteja de acordo em participar espontaneamente.

Declaro ainda ter conhecimento que as entrevistas serão vídeo-gravadas para análises posteriores, e que a identidade e a imagem do aluno serão preservadas.

Recife, _____ de ______________________ de 2010.

____

Assinatura do Pai/Mãe ou Responsável

ESCOLA____ DATA___/___/_______

ALUNO(a):_______________________________________ Ano Nasctº__________

MATEMÁTICA

a) 1) Em qual das figuras abaixo o número de quadradinhos pintados representa $\frac{2}{3}$ do total de quadradinhos?

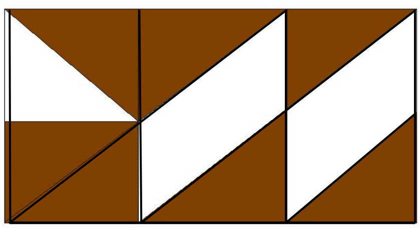
a) ■ ■ □ □ □ □

b) ■ ■ ■ □ □ □

c) ■ ■ ■ ■ □ □

d) ■ ■ ■ ■ ■ □

2) Observe as partes em que está dividida a figura



O número que representa a parte do retângulo que está sombreada é

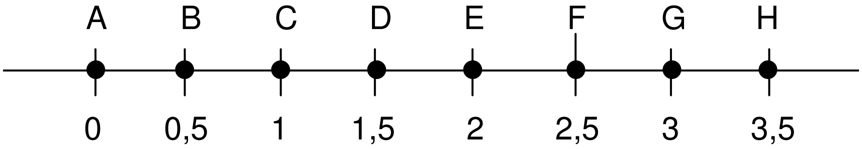
a) $\frac{5}{7}$

b) $\frac{7}{5}$

c) $\frac{7}{12}$

d) $\frac{12}{7}$

3) Observe a reta numérica a seguir.



O número racional $\frac{53}{25}$ está localizado entre os pontos

a) A e E.

b) E e F.

c) F e G.

d) G e H.

4) Observe a parte sombreada nas seguintes figuras.

Figura 1

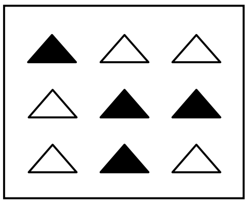


figura 2

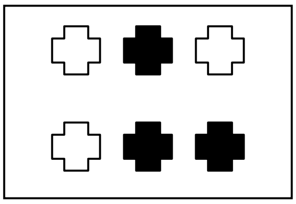


Figura 3

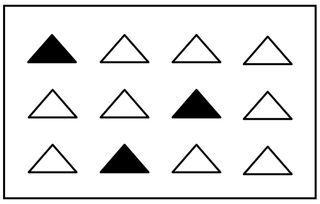
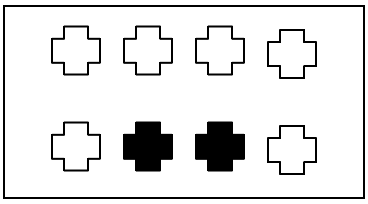


figura 4



A parte sombreada pode ser representada pela mesma fração nas figuras:

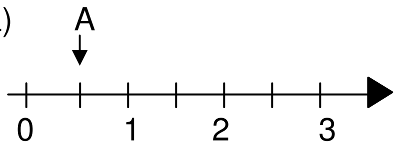
a) 1 e 3

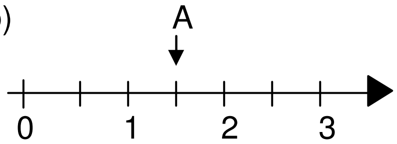
b) 2 e 3

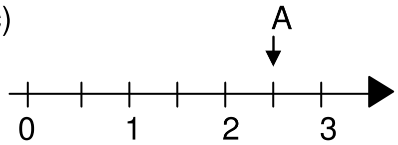
c) 2 e 4

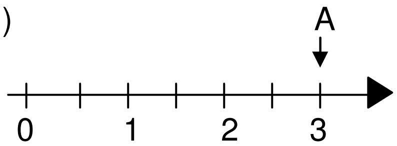
d) 3 e 4

5) O número $\frac{3}{2}$ está representado adequadamente pelo ponto A na seguinte reta numérica:

a) 

b) 

c) 

d) 

6) A professora Clotilde pediu que seus alunos escrevessem um número que representasse meio ou metade.

Geraldo	Cássio	Carla	Fernando
$\frac{1}{2}$	0,5	1,2	0,005

Os alunos que acertaram o exercício foram:

a) Cássio e Carla

b) Geraldo e Cássio

c) Carla e Geraldo

d) Geraldo e Fernando

7) O número 0,02 também pode ser escrito da seguinte forma:

a) $\frac{1}{5}$

b) $\frac{1}{20}$

c) $\frac{1}{50}$

d) $\frac{1}{200}$

8) Uma sorveteria realizou uma pesquisa com seus clientes para descobrir o sabor de sorvete preferido pela maioria deles. Os resultados dessa pesquisa estão representados no quadro abaixo.

$\frac{6}{9}$ preferem sorvete sabor chocolate
$\frac{3}{9}$ preferem sorvete sabor napolitano
$\frac{18}{27}$ preferem sorvete sabor morango
$\frac{15}{20}$ preferem sorvete sabor flocos

Dois sabores de sorvetes foram igualmente preferidos pelos clientes pesquisados. Quais são esses sabores?

a) Morango e chocolate.

b) Napolitano e flocos.

c) Napolitano e chocolate.

d) Chocolate e flocos.