



Centro de Educação
Campus Universitário
Cidade Universitária
Recife-PE/BR CEP: 50.670-901
Fone: (81) 2126-8952
e.mail: edumatec@ufpe.br
www.ufpe.br/ppgedumatec

JOSÉ IVANILDO FELISBERTO DE CARVALHO

MÉDIA ARITMÉTICA NOS LIVROS DIDÁTICOS DOS ANOS FINAIS
DO ENSINO FUNDAMENTAL

RECIFE

2011

JOSÉ IVANILDO FELISBERTO DE CARVALHO

MÉDIA ARITMÉTICA NOS LIVROS DIDÁTICOS DOS ANOS FINAIS
DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Orientador: Professora Doutora Verônica Gitirana Gomes Ferreira

Recife

2011

Carvalho, José Ivanildo Felisberto de

Média aritmética nos livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental / José Ivanildo Felisberto de Carvalho. – Recife: O Autor, 2011.

139 f.:il.; quad.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Verônica Gitirana Gomes Ferreira

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, 2011.

Inclui Bibliografia.

1. Matemática - Ensino e Estudo 2. Média aritmética
3. Ensino fundamental I. Ferreira, Verônica Gitirana Gomes (Orientadora) II. Título

CDD 372.7

UFPE (CE 2011-026)



ALUNO

JOSÉ IVANILDO FELISBERTO DE CARVALHO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO

“A média aritmética nos livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental.”

COMISSÃO EXAMINADORA:

Presidente e Orientador
Profª. Drª. Verônica Gitirana Gomes Ferreira

Examinador Externo
Profª. Drª. Cileda de Queiroz e Silva Coutinho

Examinador Interno
Profª. Drª. Gilda Lisbôa Guimarães

Recife, 21 de fevereiro de 2011.

DEDICATÓRIA

Quem não sonha o azul do voo,
perde seu poder de pássaro.

“Thiago de Mello”

Dedico este trabalho aos meus pais,
que sempre torceram e lutaram pela
concretização dos meus sonhos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço,

a minha professora orientadora – Prof^ª Dr^ª Verônica Gitirana, por possibilitar a construção de novos conhecimentos, pela orientação nesta pesquisa, pela motivação e incentivo nos estudos acadêmicos.

a Prof^ª Dr^ª Gilda Guimarães pelo olhar atencioso e contribuições ao longo do processo de construção deste trabalho.

a Prof^ª Dr^ª Cileda de Queiroz e Silva Coutinho pelas considerações e contribuições atribuídas a este estudo.

a todos os colegas do GREF – Grupo de Estudo em Educação Estatística no Ensino Fundamental do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica – Edumatec/UFPE, bem como aos colegas de turma do Edumatec/UFPE.

Agradeço,

a Gerência Regional de Educação Metropolitana Norte, principalmente na pessoa do Gestor Sinésio Monteiro de Melo Filho e do Prof^º Reginaldo Salvino pela compreensão e espaço para a realização de mais uma conquista no âmbito da educação.

Agradeço,

a Escola Municipal Santa Maria, onde fui aluno e professor.

a Escola Estadual Prof. Motta e Albuquerque, espaço em que vivenciei diversas realidades do fazer educacional.

Agradeço,

em especial, a minha mãe - Maria Helena de Azevedo, por todo cuidado e atenção, pela minha educação e por todo o carinho ao longo da vida.

a Danielly Maria, querida irmã.

aos familiares e amigos que torceram e compartilharam angústias, mas também momentos de alegria no decorrer deste trabalho.

RESUMO

No estudo de um conjunto de dados diversas medidas podem ser tomadas. Uma delas é a média aritmética, um conceito crucial na ciência estatística. Apesar da simplicidade do seu algoritmo de resolução a média apresenta dimensões conceituais que precisam de um estudo mais sistemático em todos os níveis escolares. E é nesse contexto, que se aponta a importância dos livros didáticos como suporte à atividade docente. Dentre essas dimensões, diversos invariantes do conceito são apontados como importantes em seu ensino. Juntamente com a história do conceito, pesquisas veem demarcando as diversas situações que dão significados aos diversos conceitos. Além disso, assim como todos os outros conceitos matemáticos, a média aparece a partir de diferentes representações. A presente pesquisa analisou a abordagem de média aritmética presente nos livros didáticos de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental, aprovados pelo PNLD 2011, tendo como base a Teoria dos Campos Conceituais. A metodologia adotou uma pesquisa censitária, com a análise de todos os volumes das dez coleções aprovadas no PNLD 2011. Inicialmente, foram identificados todos os capítulos, seções e atividades que tratavam de média aritmética. Foram identificadas 454 atividades que envolviam tal conceito, tanto nos capítulos destinados ao Tratamento da Informação, como em outros capítulos destinados a outros campos da matemática. Após uma primeira análise qualitativa da abordagem, foi montado um banco de dados a partir da análise das atividades classificando a abordagem ou não dos invariantes prescritos, os significados envolvidos, as representações exploradas, o tipo de contexto, o tipo de variável envolvida. A partir da comparação com os dados do piloto, feito com o PNLD 2008, evidenciou-se aumento da abordagem por ano e o desaparecimento de coleções que não a abordavam. Além disso, os dados revelam uma tendência das coleções em distribuir melhor ao longo dos volumes a abordagem de média. A partir dos resultados, as coleções foram agrupadas em 5 grupos: coleções com foco nos volumes do 7º e 9º ano; com maior foco no volume do 6º ano; com abordagem em três volumes e foco no 7º ou 8º ano; com abordagem em um único volume e por fim, com abordagem de forma equilibrada entre os volumes. Os dados referentes ao conjunto dos invariantes, significados e representações demonstram limitações na exploração dos elementos destes conjuntos. Dos invariantes levantados por Strauss e Bichler (1988) identificou-se um enfoque mais centrado em atividades explorando os seguintes invariantes: *a média é influenciada por cada um e por todos os valores* e *a média não precisa, necessariamente, coincidir com um dos valores a partir do qual foi calculada*. O significado mais explorado nas atividades faz parte das situações levantadas por BATANERO (2000), a saber: *a média como elemento representativo de um conjunto de dados*. Dentre as representações, a mais frequente foi a linguagem materna. As representações gráficas e tabulares ainda são deixadas de lado por algumas coleções. O campo conceitual da média nos livros didáticos é visto de forma fragmentada, sem propiciar uma compreensão da média com uma medida estatística.

PALAVRAS CHAVE: média aritmética, livros didáticos, invariantes, significados, representações, teoria dos campos conceituais

ABSTRACT

In order to investigate a data set, some measures are important; one of them is the arithmetic mean, a crucial concept for Statistic Science. Despite its simple algorithm, arithmetic mean presents conceptual dimensions which need more reflexive study in all school levels. In this context, textbook plays an important role as a didactic support of teacher's practice. Among this dimensions, some invariants of the concept are pointed as important to be approached at schools. Also, the history of this concept and statistic education researches, both reveals some situations which attributes different means for this concept. Moreover, as the others mathematics and statistics concepts, means is investigated and communicated using different representations. This research analyzed Brazilian mathematics textbooks for the last grades of elementary schools, approved by PNLD 2011 – the national program of textbooks, based on the Theory of Conceptual Fields. A census of the textbooks was preceded, all the volumes of all the ten mathematics textbooks approved by PNLD 2011 was analyzed. First, in a scanning reading of the textbooks all chapters, sections and activities which deal with arithmetic means was identified and analyzed. Then, a qualitative analyze of each textbook collection approach of arithmetic mean was proceed. Afterwards, 454 mapped activities, into chapters or sections of Statistics as well as outside them, were analyzed. The database classified the activities according invariants promoted, meaning attributed, representations used, the context and type of the variable involved. A comparison with the pilot database, built with PNLD 2008, an increasing of activities by volume was evidenced as well as the disappearance of textbooks collection with do not approach arithmetic means. Moreover, the results reveal a tendency of the textbooks collections for a better distribution of the mean approach along the volumes. The analyzes also allow a classification of the collections into five classes, according its distributions: (A) those focusing mean in the volumes of 7th and 9th grades; (B) those which concentrate the approach in the 6th grade; (C) those approaching mean in three volumes with focus in 7th or 8th grade; (D) those approaching mean in a single volume; and (E) those with an equal focus in all the volumes. The analyses of the invariants, means and representations shows textbook's limitations on approaching mean. The results show that the textbooks emphasize activities which exploit the following two invariants, among those pointed by Strauss e Bichler (1988): *the mean is influenced by each and by all the values* and *the mean do not necessarily coincides with any of the values from which it was calculated*. The most exploited meanings in the activities belong to the set of situations pointed out by BATANERO (2000): *the mean as a representative element of a data set*. As regards the representations, the most frequent in the textbooks was the mother language. Moreover, some textbooks collections do not use graphs and/or tables connected with means. The conceptual field of means in the textbooks approach still needs improvement to promote a comprehension of mean as a statistic measure.

KEYWORDS: average, textbooks, invariants, meanings, representations, Theory of Conceptual Fields

Lista de Figuras

Figura 1: Definição da média aritmética segundo Triola	29
Figura 2: Definição da mediana segundo Triola	30
Figura 3: Definição da moda segundo Triola	30
Figura 4: Definição de ponto médio segundo Triola	30
Figura 5: A média como um ponto de equilíbrio.....	34
Figura 6: Exemplo de Campo Conceitual da Média Aritmética	50
Figura 7: Exemplo da área triangular em um estádio de futebol	56
Figura 8: Média como estimativa da variável para tempo futuro.....	59
Figura 9: Percentual das obras dedicadas a cada um dos campos.	62
Figura 10: Fluxograma da análise das coleções	68
Figura 11: A média é de um valor entre os extremos da distribuição.	73
Figura 12: A média é influenciada por cada um e por todos os valores.....	75
Figura 13: A média não precisa, necessariamente, coincidir com um dos	78
Figura 14: A média pode ser um valor que não pode corresponder	79
Figura 15: No cálculo da média, devem ser incluídos os valores nulos e os negativos.	80
Figura 16: A média é um representante dos dados a partir da qual foi calculada.	81
Figura 17: Média como a melhor estimativa de um valor desconhecido	88
Figura 18: Média como um valor equitativo.	89
Figura 19: Média como elemento representativo de um conjunto de valores.	90
Figura 20: Média como estimativa da variável para tempo futuro.....	91
Figura 21: Média aritmética ponderada utilizando frequências como pesos.....	97
Figura 22: Média Aritmética utilizada como um contexto	98
Figura 23: Atividade fora de TI articulada com o capítulo em questão.	102
Figura 24: Atividade fora de TI sem articulação com o capítulo em questão.	103

Lista de Gráficos

Gráfico 1: Abordagem da média por ano nos PNLD 2008 e 2011.....	69
Gráfico 2: Distribuição das propriedades por coleção.....	71
Gráfico 3: Porcentagem das propriedades exploradas por coleção	72
Gráfico 4: Total das atividades que exploram a propriedade 3 de forma reflexiva nas coleções	76
Gráfico 5: Box plot das propriedades por coleção, considerando as atividades que exploram as propriedades 3 e 4 de forma mais reflexiva.....	77
Gráfico 6: Porcentagem e total de atividades por quantidade de propriedades exploradas	82
Gráfico 7: Total de atividades de propriedades exploradas com reflexão por coleção	83
Gráfico 8: Boxplot das atividades que exploram cada propriedade por coleção.....	84
Gráfico 9: Percentual de atividades por significado atribuído à média no total de atividades	85
Gráfico 10: Frequência absoluta dos significados por coleção	86
Gráfico 11: Total de atividades que exploram cada significado por volume	87
Gráfico 12: Frequência relativa das representações por coleção.....	94
Gráfico 13: Frequência relativa das atividades por volume	95
Gráfico 14: Frequência absoluta da média ponderada.....	96
Gráfico 15: Total das atividades de média nos capítulos/seções de TI por ano e por coleção	103
Gráfico 16: Frequência absoluta das atividades de média por ano e por coleção	104
Gráfico 17: Frequência relativa das atividades por ano – C1; C2; C4 e C8.....	105
Gráfico 18: Frequência relativa das propriedades por coleção.....	106
Gráfico 19: Frequência relativa das atividades por ano – C3 e C5	112
Gráfico 20: Frequência relativa das propriedades por coleção – C3 e C5	113
Gráfico 21: Frequência relativa das atividades por ano do grupo de coleções – C6 e C7	117
Gráfico 22: Frequência relativa das propriedades por coleção – C6 e C7	118
Gráfico 23: Frequência relativa das propriedades na coleção C9	123
Gráfico 24: Frequência relativa das atividades por volume	125
Gráfico 25: Frequência relativa das propriedades na coleção C10	125

Lista de Tabelas e Quadros

Tabela 1: Propriedades Estatísticas da Média Aritmética	32
Tabela 2: Propriedades Abstratas da Média Aritmética	32
Tabela 3: Frequência relativa dos contextos.....	100
Tabela 4: Frequência relativa do tipo de dado.....	101
Quadro 1: Lista das coleções aprovadas no PNLD 2011.....	63

SUMÁRIO

RESUMO

ABSTRACT

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO 12

CAPÍTULO 2

EDUCAÇÃO ESTATÍSTICA 18

2.1 Origens da Estatística 18

2.2 A historicidade do conceito de média aritmética 19

2.3 Educação Estatística 24

2.4 Educação Estatística no Ensino Fundamental 25

2.5 Medidas de Tendência Central

2.5.1 Definições 29

2.5.2 A média a partir de outras relações 31

2.6 Estudos sobre a média aritmética 35

2.6.1 Os estudos de Strauss e Bichler 35

2.6.2 Nos anos iniciais do Ensino Fundamental 37

2.6.3 Nos anos finais do Ensino Fundamental 40

2.6.4 No Ensino Médio e Superior 43

2.6.5 Síntese dos estudos 45

CAPÍTULO 3

A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS 47

3.1 A Teoria dos Campos Conceituais 47

3.2 Os invariantes operatórios da média aritmética 51

3.3 Os significados da média aritmética 53

CAPÍTULO 4

PROGRAMA NACIONAL DO LIVRO DIDÁTICO – PNLD 60

CAPÍTULO 5

METODOLOGIA 64

CAPÍTULO 6

ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS 69

6.1 Os invariantes prescritos da média aritmética nos livros didáticos	70
6.2 O conjunto dos significados da média nos livros didáticos	85
6.3 A média aritmética e a representação utilizada nos livros	93
6.4 A média aritmética ponderada	96
6.5 A média aritmética utilizada apenas como contexto	98
6.6 O Contexto das atividades de média	99
6.7 A natureza dos dados nas atividades de média	101
6.8 Atividades de média em outros campos da matemática nos livros didáticos	102
6.9 Resenha das coleções	103

CAPÍTULO 7

CONSIDERAÇÕES FINAIS 129

REFERÊNCIAS 132

Introdução

Todos os dias somos confrontados com uma série de informações que vão desde a economia, passando por temas como saúde, educação, trabalho e até informações sobre comportamentos sociais. Arraigada ao nosso cotidiano, essa gama de informações interfere sempre em nossas decisões, enquanto cidadãos, e chegam até nós através dos meios de comunicação. Muitas dessas informações derivam ou trazem consigo tratamentos estatísticos de dados, levando em conta representações como tabelas e gráficos ou índices e medidas. Em momentos de eleições e/ou situações envolvendo temas polêmicos, as pesquisas de opinião pública são exemplos de como a estatística interfere no cotidiano das pessoas, sobretudo em seus diversos papéis sociais. Um cidadão com conhecimento estatístico tem a possibilidade de compreender que pesquisas eleitorais, por exemplo, são realizadas com uma amostra da população e que a confiabilidade vai depender muito de como essa amostra foi selecionada e como os dados foram coletados, além de compreender o significado do erro amostral.

No universo das profissões, os cidadãos podem ser postos frente às informações sobre as demandas do mercado de trabalho, taxa de jovens que ocupam determinados postos de trabalhos e/ou necessidade de entenderem as variações das bolsas financeiras, previsões de lucro ou venda. Se almejarmos mudar de emprego ou mudar de região, certamente analisaremos informações estatísticas sobre custo de vida, regiões vulneráveis à criminalidade e ofertas de trabalho. Até mesmo nas atividades de lazer, como ir à praia, poderemos nos confrontar com informações estatísticas sobre as condições de banho interferindo nas nossas escolhas pessoais. Quando decidimos fazer determinadas dietas ou decidir sobre a aceitação de determinados produtos de consumo alimentar, lançamos mão das informações estatísticas, tais como: média de aceitação e venda dos produtos, índice e gráficos sobre alimentos calóricos, média de tempo da dieta versus objetivo, etc. Nessa atmosfera, os educadores no âmbito da sua profissão são constantemente bombardeados por estatísticas educacionais em todos os níveis escolares que norteiam as políticas públicas de educação. Além disso, necessitam ainda compreender criticamente as pesquisas que envolvem os comportamentos emergentes da juventude.

Assim, são inegáveis as contribuições da Estatística no desenvolvimento da sociedade, bem como na interpretação e compreensão da vida social do ponto de vista histórico, cultural

e científico. Desde a época dos primeiros censos realizados pelas civilizações antigas que a estatística vem desempenhando um papel inenarrável na compreensão dos fenômenos sociais, culturais e políticos de um país. De modo que, ainda hoje, as ferramentas que fazem parte do bojo desta ciência, cada vez mais aprimoradas com o advento da tecnologia, constituem-se em elemento importante no desenvolvimento da sociedade, a qual está marcada pelo crescimento exponencial das novas Tecnologias de Informação e Comunicação, tais como o uso crescente de computadores, celulares e acesso ao mundo virtual proporcionado pela internet. Dessa forma, uma condição para o avanço da sociedade da informação é a possibilidade de todos os cidadãos poderem aceder às Tecnologias de Informação e Comunicação, na qual temos a informação como uma peça chave na produção e contribuição de riquezas, bem-estar e qualidade de vida dos cidadãos.

Gráficos, tabelas e medidas estatísticas como a média aritmética são comumente utilizadas pelos meios de comunicação com objetivos de oferecer uma representação mais sintética das informações e alcançar um maior entendimento da informação pelos cidadãos. No entanto, a Estatística muitas vezes é utilizada com propósitos que nada dignificam os objetivos deste campo de conhecimento, ao se aproveitar das lacunas do saber estatístico de uma sociedade. Cazorla (2008) nos alerta para este fato.

Quando discursos, propagandas, manchetes e notícias veiculadas pela mídia, utilizam informações estatísticas (números, tabelas ou gráficos), essas ganham credibilidade e são difíceis de serem contestadas pelo cidadão comum, que chega até a questionar a veracidade dessas informações, mas ele não está instrumentalizado para argüir e contra argumentar (p.46).

A utilização de gráficos, tabelas e medidas estatísticas são cada vez mais empregadas por revistas, jornais e “outdoors” apresentando um “design” mais arrojado, mais sofisticado e empolgante, mas nem sempre fidedignos (CAZORLA, 2008).

Posto tudo isso, percebe-se a importância dos cidadãos serem letrados estatisticamente para estarem aptos a lidar com o grande número de informações que circulam na sociedade, tomando decisões em nível pessoal e profissional baseado nas informações e estando aptos para se situarem nas situações da vida cotidiana em que a variabilidade se expressa. Em outras palavras, é importante saber se comunicar diante de dados específicos. A Estatística por si só é crítica, mas na sistematização de ensino na escola, ela perde essa dimensão, ou seja, trabalha-se apenas a dimensão matemática. E quando se pergunta, por exemplo: “Para

que uso a média?” ou “Em que situações a média é mais conveniente?” não se sabe responder. Clarificamos que estatística não é matemática, ela apenas faz parte do currículo de matemática. Estatística é a ciência que tem como objetivo desenvolver métodos para coletar, organizar e analisar dados. Assim, é de grande valia que tal conhecimento passe a fazer parte do currículo escolar e que os estudantes desde os anos iniciais entrem em contato com os saberes estatísticos.

Dentre estes saberes estatísticos, a média aritmética constitui-se como uma importante mensuração numérica descritiva. Apesar da simplicidade do algoritmo do cálculo, “somar todos os números e então dividir pela quantidade de números somados”, é um conceito que apresenta suas complexidades quando objetivamos uma compreensão conceitual mais ampla. Segundo Mokros e Russell (1995, p.37) a média “é um objeto matemático de complexidade não reconhecida, que engana pela simplicidade do algoritmo de solução”. Pesquisas revelam um bom domínio do algoritmo da média pelos estudantes, mas também revelam dificuldades de compreensão conceitual dos mesmos sobre diversos aspectos do conceito de média (STRAUSS E BICHLER, 1988; MAYÉN, COBO, BATANERO E BALDERAS, 2007; MOKROS E RUSSEL, 1995; CARZOLA, 2008; MELO, 2010). Watson (2007) acrescenta que tem sido marcante a dificuldade encontrada por estudantes de todas as idades em lidar com a natureza representativa da média e uma compreensão além do algoritmo do cálculo. Também são encontradas limitações conceituais em pesquisas realizadas com professores (MELO, 2010; MAGINA, CAZORLA, GITIRANA E GUIMARÃES, 2008).

É típico o ensino da média aritmética a partir do algoritmo, enfatizando o uso apenas procedimental da fórmula matemática. Desta forma, a compreensão do conceito vê-se afetada. A literatura atual aponta que é mais benéfico para os estudantes compreender a diversidade de significados inerentes ao conceito de média do que como um resultado de uma operação matemática (CORTINA, 2002; BAKKER, 2006). As crianças, no início de suas experiências de vida, constroem uma ideia intuitiva da média com base em conceitos de “tipicidade” ou “representatividade”. Essa noção intuitiva de média é frequentemente expressa como "mais" ou "meio", que são ideias relacionadas aos conceitos formais de média, moda e mediana (WATSON E MORITZ, 2000). Em certo sentido, a maioria das pessoas tem familiaridade com o conceito de média de forma intuitiva. Em nosso dia a dia, estamos constantemente, mesmo sem perceber, fazendo estimativas, tais como o tempo médio que levamos para atravessar uma rua, gasto médio com alimentação, dentre outras estimativas. Cazorla (2003, p.2) aponta que “muitas dessas pessoas nem conhecem o algoritmo da média, mas continuam a utilizar seu conhecimento intuitivo no planejamento de suas atividades rotineiras”.

A média, como uma das principais medidas estatísticas, é requisito para a compreensão de outros conceitos da estatística, a saber: cálculo de desvios-padrões, coeficiente de variação, intervalos de confiança, testes de hipóteses dentre outros.

Os documentos oficiais do Ministério da Educação do Brasil explicitam a importância do letramento estatístico dos estudantes no Ensino Fundamental, incluindo o conceito de média aritmética (BRASIL, 1997/1998). Apesar dos documentos oficiais indicarem fortemente a necessidade de uma maior abordagem da estatística, desde anos iniciais do Ensino Fundamental, a sua efetivação perpassa pelo desenvolvimento de pesquisas e abordagens de ensino adequadas a esta função.

Os livros didáticos têm um papel importante no fornecimento de situações que orientem e ajudem professores e alunos na construção do campo conceitual da média aritmética, mas, explicitamente situações com diversos significados, mobilização das propriedades e também variadas representações.

Estudo realizado por Stella (2003), com os livros didáticos de matemática destinados ao Ensino Médio aponta que, na abordagem do conceito de média, prevalece a forma algorítmica, com situações em que todos os valores são explicitados, cabendo ao aluno apenas o cálculo, além do que tal conceito não é muito enfatizado nos livros. No estudo realizado por Anjos e Gitirana (2008), com os livros didáticos de matemática destinados aos anos finais do Ensino Fundamental, foi constatado que o trabalho com as propriedades da média (STRAUSS E BICHLER, 1988) não atingiram índices satisfatórios ou quando exploradas, mas não realizadas da forma esperada. Os autores ainda concluem que os livros não enfatizaram a propriedade representativa ligada à função estatística da média. Anjos e Gitirana (2008) observaram que a abordagem dos livros pode ser considerada satisfatória apenas na contextualização. No total de 273 atividades analisadas 92,3% delas eram contextualizadas.

Diante deste quadro, e pelo motivo da defesa da escola pública de qualidade, vamos analisar a abordagem de média dos livros didáticos de matemática destinados aos estudantes das escolas públicas dos anos finais do Ensino Fundamental.

Para isso, nos sustentamos na Teoria dos Campos Conceituais, proposta por Vergnaud (1991), que apresenta a formação de um conceito a partir de três conjuntos, a saber: significados, invariantes e representações.

Desta forma, a presente pesquisa tem como objetivo responder a seguinte questão:

- ✚ Como se dá a abordagem da média aritmética, ancorada na Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1991), nas coleções de livros didáticos de matemática dos anos finais aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático – PNLD 2011?

Para tanto, o estudo foi realizado com as 10 coleções aprovadas no PNLD 2011 e seguindo os objetivos específicos abaixo:

- ✚ Mapear as atividades de média nos livros
- ✚ Analisar os conjuntos dos invariantes operatórios prescritos, significados e representações nas atividades mapeadas;
- ✚ Analisar os contextos e tipos de variáveis das atividades de média nos livros;
- ✚ Analisar a abordagem que cada coleção faz da média.

Doravante, iremos descrever a estrutura da dissertação.

No presente capítulo situamos a problemática e introduzimos o objeto de pesquisa para o leitor.

No segundo capítulo contextualizamos as origens da estatística e canalizamos para uma discussão da historicidade da média aritmética. O conceito da média é construindo ao longo dos anos desde as civilizações antigas a partir de diversas situações, principalmente as que envolviam a necessidade do homem de estimar valores desconhecidos. Na Astrologia é que o método da média para redução de erros de observação foi bem desenvolvido. Discutimos também outros significados que emergem a partir das situações históricas. Ainda neste capítulo, trazemos à baila os estudos na área da educação estatística e como a mesma vem se consolidando nos últimos anos. Apresentamos uma seção sobre a estatística e a média no currículo escolar. Pontuamos a média com suas definições e conceitos, além das definições da moda, mediana e ponto médio. Levantamos estudos recentes sobre a média aritmética e que de algum aspecto tivesse conexão com a nossa pesquisa.

A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1991) é abordada no terceiro capítulo, no qual poderemos compreender o tripê que forma um campo conceitual. A referida teoria é que da a base para a nossa pesquisa. Dessa forma, após a apresentação da teoria, apresentamos os invariantes operatórios da média a partir dos estudos de Strauss e Bichler (1998), bem como os significados da média levantados por Batanero (2000).

Já no quarto capítulo discorreremos sobre a criação do Programa Nacional do Livro Didático – PNLD. Iniciamos com um levantamento sobre o livro didático no Brasil e partimos

para um resumo histórico sobre o PNLD de Matemática para os anos finais do Ensino Fundamental. Aqui apresentamos as dez coleções que foram pesquisadas com referidos autores e editoras.

O quinto capítulo contém o nosso percurso metodológico alinhado na perspectiva de encontrar as repostas levantadas nos objetivos do estudo.

No sexto capítulo apresentamos as análises e as referidas discussões. Na primeira seção temos os resultados encontrados nas análises dos invariantes, significados e representações da média aritmética nas atividades dos livros didáticos pertencente às coleções aprovados no PNLD 2011. Ainda aqui, discorremos sobre a abordagem da média aritmética ponderada nos livros; da média utilizada apenas como um contexto; dos contextos das atividades pesquisadas; da natureza dos dados e das atividades de média em outros campos da matemática. Dando prosseguimento, apresentamos as resenhas dos agrupamentos de coleções.

As Considerações Finais estão postas no sétimo capítulo, levantando os resultados mais importantes, além das limitações deste estudo e as possibilidades deixadas para estudos futuros.

Educação Estatística

2.1 - Origens da Estatística

Uma preocupação latente nas civilizações antigas era a necessidade de contagem da população. Pagan, Leite e Perleto (2010) nos revelam que tais inquietações surgiram muito antes de Cristo, apontando como um dos primeiros recenseamentos, o realizado na Suméria por volta de 5.000 a 2.000 a.C. Os recenseamentos não paravam de acontecer nas civilizações antigas em todo o mundo com os mais diversificados objetivos, focados principalmente no aumento das riquezas e na manutenção do poder sobre as populações. A passagem a seguir esclarece ainda mais esta questão.

Em Roma, os recenseamentos aconteceram de 750 a.C até 476 a.C., para que os cidadãos declarassem sua fortuna. Na Índia Antiga ocorreu um recenseamento chamado de Tratado de Arthasástra (tratado de ciência e do progresso) em 313-289 a.C., cujo objetivo era aumentar incessantemente o seu reino (PAGAN et al, 2010, p.2).

Na Inglaterra, em 1085, foi feito um dos primeiros registros de levantamento estatístico, intitulado “Doomsday Book”, no qual constavam informações sobre terras, proprietários, empregados, animais, etc. (LOPES E MEIRELLES, 2005).

O emprego da palavra estatística, para Lopes e Meirelles (2005, p.2) “no sentido que ela tem hoje, deve-se ao economista alemão Gottfried Achenwall que, entre 1748 e 1749, registrou em seu livro a palavra “statistik”, que vem de "status" que, em latim, significa Estado.” Nos séculos XVII e XVIII a Estatística era considerada a arte de governar, servindo como meio de manipulação dos povos pelos dirigentes públicos da época. Logo, fica conhecida com “a função de servir como olhos e ouvidos do governo” (BATANERO E GODINO, 2001, pp.1-3).

Em 1834, século XIX, com a fundação do Royal Statistical Society a partir de uma seção criada na Associação Britânica para o Avanço da Ciência no ano anterior, tem início um movimento de consolidação da Estatística enquanto ciência. Hoje a associação já conta com membros em mais de 50 países. Tal associação tem como missão organizar reuniões

internacionais relacionados ao estudo e aplicação da estatística, apoiando interesses profissionais e acadêmicos. Além disto, divulga e incentiva o conhecimento estatístico na sociedade em geral.

Já no século XX, a Estatística tem um avanço considerável devido a sua utilização nas diversas áreas de pesquisa e construção do conhecimento científico, tecnológico e social. Desta forma, a Estatística foi qualificada como sendo uma das ciências metodológicas fundamentais e base do método científico experimental (BATANERO, 2001).

2.2- A historicidade do conceito de média aritmética

A média aritmética, juntamente com a moda e a mediana, se configura como uma das principais medidas para representar a tendência central de localização de dados estatísticos. Atualmente podemos encontrar mais de dez medidas que representam o centro de um conjunto de dados, mas a média aritmética é a mais utilizada. Apesar dos estudos que envolvem as implicações da média aritmética e sua importância no currículo escolar, a sua origem, a partir de situações sócio-históricas, consta de muitos anos antes de Cristo. Nesta pesquisa trabalhamos com as situações diversas que conferem significados à média aritmética. Convém dessa forma, levantar alguns estudos que buscam compreender a historicidade do conceito da média aritmética.

Bakker (2003) apresenta algumas situações em que a média aritmética foi utilizada em problemas de estimativa, envolvendo situações para encontrar a altura da parede ou até a quantidade de homens em cada navio, extraído do texto História da Guerra de Peloponeso de Thucydides (cerca de 400-460 a.C). Seguem dois exemplos que envolvem a média para estimar quantidades totais, encontrados nos estudos de Bakker:

Em uma antiga história indiana, Rtuparna estimou o número de folhas e frutos em dois grandes ramos de uma árvore frondosa. Ele estima o número com base em um único ramo, que, multiplicado pelo número estimado de galhos nos ramos encontra um número, que depois de uma noite de contagem acabou por ser muito próximo do número real. Poderia muito bem ser que ele escolheu um galho típico ou médio, desde que realmente dê uma boa estimativa. Isso, então, pode ser visto como um antecessor intuitivo da média aritmética, porque um número médio representa todos os números de outro galho e este número médio é de alguma forma "no meio" dos outros. A escolha é feita de modo que, presumivelmente, o que é contado muito, por um lado é contado muito pouco, por outro lado. Olhando hoje para este uso da média aritmética, percebemos que a situação tem a ver com compensação, equilíbrio e representatividade (2003, p.2; tradução nossa).

O outro exemplo de estimativa que citaremos tem origem nos estudos do historiador grego Heródoto (cerca de 485-420 a.C.) sobre os egípcios e foi encontrado por Rubin:

"Eles declaram que 341 gerações separam o primeiro rei do Egito a partir do último mencionado (Hefesto) - e que houve um rei e um sumo sacerdote correspondente a cada geração. Agora conto que três gerações fazem cem anos, trezentas gerações fazem dez mil anos, e os restantes quarenta e uma gerações fazem mais 1.340 anos, assim obtém-se um total de 11.340 anos ...
" O ponto estatisticamente importante nesta citação é a suposição de que três gerações foi contada como 100 anos. Esta suposição foi feita para estimar a quantidade total de anos entre o primeiro rei do Egito e Hefesto. Claro, três gerações nem sempre eram exatamente cem anos, às vezes um pouco menos, às vezes um pouco mais, mas os erros são mais ou menos equilibrados. É por isso que este método pode ser visto como uma fase preliminar de desenvolvimento da média aritmética. Tal como no primeiro exemplo, vemos o aspecto da compensação e de representatividade (número típico de ano para as gerações). (1968 apud BAKKER, 2003, p.3; tradução nossa)

Outra observação feita por Bakker (2006) pontua que, na história das estimativas, a média aritmética também foi utilizada para encontrar um valor total, e como exemplo cita uma atividade adaptada por ele para estudantes do Ensino Médio, em que os mesmos estimam a quantidade total de elefantes em uma imagem, dividindo a imagem em quadrados e daí estimando o valor total.

Outro estudo (PONTES E OLIVEIRA, 2003) revela que o problema da estimativa de valores verdadeiros a partir de dados observacionais foi abordado primeiramente pelos astrônomos babilônicos, entre 500 e 300 anos antes de Cristo. A metodologia de utilizar a média aritmética de um conjunto de observações, como um princípio geral, foi apresentada primeiramente pelos astrônomos Hiparco (180-125 a.C.) e seu maior seguidor, Ptolomeu (100-175 d.C.), ao fazerem observações da localização de estrelas e planetas utilizando instrumentos graduados (PLACKETT, 1958). Segundo Plackett (1958), Neugebauer, em 1951, analisou placas de argila contendo inscrições cuneiformes que apresentavam uma sistemática de cálculo matemático, capaz de estimar a posição de alguns corpos celestes (estrelas e planetas), em intervalos de tempo regulares, utilizando para tal propósito, a média aritmética dos valores observados. Usando a média de vários valores medidos, os cientistas supõem que os erros somam um número relativamente pequeno quando comparado com o total de todos os valores medidos. O método de tomar a média reduzindo os erros de observação foi de fato desenvolvido principalmente em astronomia.

Esse problema ressurgiu no final do século XVI na Europa Ocidental em várias áreas do conhecimento além da astronomia, como, por exemplo, na navegação e na metalurgia. Porém, o uso da média aritmética como procedimento estatístico, só foi reconhecido a partir da segunda metade do século XVIII (EISENHART, 1974).

Plackett (1958) ainda ressalta sobre a expedição francesa à Lapônia, chefiada por Maupertuis, em 1736 e 1737. Essa expedição tinha por principal objetivo medir o comprimento de 1 grau de latitude e comparar com a correspondente medida realizada na França, a fim de verificar se a Terra era achatada nos pólos (segundo Newton) ou na Linha do Equador (conforme a família Cassini). De acordo com o autor, cada observador ao fazer suas análises das medidas do ângulo, anotou-as a parte, e então, calculou-se a média dessas observações para cada ângulo.

Nos estudos de Bakker (2003) encontramos a citação de Aristóteles (384-322 a.C.) definindo uma forma filosófica da média, ou seja, a “média em relação a nós.” Com esta ideia, Aristóteles explica o que é virtude. Sobre a diferença entre a média aritmética e “a média em relação a nós”, escreve Aristóteles (1994, Livro II, Capítulo VI, p.5 apud BAKKER, 2003, p.3):

Pela média de uma coisa eu denoto um ponto equidistante dos extremos, que é um e o mesmo para todos; pela média em relação a nós, essa quantidade *que não é nem muito nem pouco*, e não é um e o mesmo para todos. Por exemplo, deixe que 10 seja muito e 2 poucos, então toma a média em relação à coisa e se encontra um 6; uma vez que $10 - 6 = 6 - 2$, esta é a média de acordo com a proporção aritmética (progressão). Mas não se pode chegar por este método na média em relação a nós. Suponhamos que 10 £ (kg) de comida é uma quantidade grande e 2 £ (kg) uma quantidade pequena; segue que um treinador não vai prescrever 6 £ (kg), por que, dependendo do atleta (a pessoa) esse valor poderá ser uma grande ou pequena quantidade de comida. Pode ser pequena para um atleta antigo, mas grande demais para quem está iniciando o atletismo (tradução nossa).

Outros valores médios eram conhecidos pelos gregos, tais como a média harmônica e a geométrica. No entanto, a matemática grega tinha objetivo e forma diferente da matemática moderna, pois era altamente geométrica e visual. Esta diferença, entre ambas, também pode ser ilustrada com a diferença de definições de média aritmética (BAKKER, 2003).

A definição grega como vimos na citação de Aristóteles, é a seguinte: o número médio b de a e c é chamado de média aritmética se e somente se $a - b = b - c$. Tal definição mostra que a média se localiza entre os dois extremos e é difícil generalizar. A definição que é mais comum na matemática de hoje $b = (a + c) / 2$ destaca o cálculo e é fácil de generalizar. Por

exemplo, se $b = (a+c)/2$ logo, se tivermos três valores, a média será $(a+b+c)/3$ e assim, sucessivamente até n casos.

Outra forma de utilização foi a média para representar pontos equidistantes de dois extremos, ou a média de apenas dois valores extremos (valores máximos e mínimos de um conjunto de dados) – “midrange”, que assume vários significados, mas definimos para este estudo como ponto médio. Tal medida não é muito utilizada na estatística hoje em dia, pois é altamente sensível a valores discrepantes, assim não é uma medida robusta. Porém, tornou-se importante do ponto de vista da construção do significado da média aritmética.

Um dos significados pesquisados neste estudo “a média como um valor equitativo para uma distribuição uniforme” pode ser mais bem compreendido a partir da ideia de partes justas no comércio e em contextos de seguros. Na literatura encontramos o termo em inglês “fair share” que apresenta tradução como partes justas, participação equitativa, distribuição compartilhada, entre outros. Nesse estudo traduzimos “fair share” no sentido da média como um valor equitativo proveniente da necessidade de uma distribuição uniforme, como explica a citação a seguir:

No primeiro milênio antes de Cristo, pequenos navios navegaram com mercadorias valiosas de porto para porto. Os capitães destes navios encontraram muitos perigos como tempestades repentinas. O perigo de naufragar, por vezes, obrigou a cortar o mastro. Durante uma tempestade, o capitão, por vezes, decidiu lançar alguma carga ao mar para salvar o resto da carga (...). De cerca de 700 a.C., os comerciantes e os transportadores concordaram que o dano à carga e navio deverá ser dividido em partes iguais entre si (BAKKER, 2003, p.9).

Podemos ver que situações como essas amadurecem ao longo das épocas, construindo um significado para a média como um meio para resolver determinadas situações. Como ainda explicita Bakker (2003), o dicionário Oxford inglês escreve que um dos significados de média nas leis do direito marítimo é a distribuição equitativa dos custos ou perdas, quando da incidência geral, entre todas as partes interessadas, na proporção de seus interesses diversos. No seu uso significou dizer: “A distribuição das perdas totais (em quantidade, qualidade, intensidade, etc) de uma série de coisas entre todos os membros da série, de modo a igualar-vos e verificar sua quantidade comum ou obter assim a média aritmética”.

A origem etimológica exata da média é incerta. Alguns autores pensam que a média, em última análise, deriva do árabe awariyah – mercadorias danificadas, mas sem muitas certezas dessa afirmação.

Lavoie e Gattuso (1998) apresentam os diversos sentidos que na história a palavra média associava-se. Na Idade Média, por exemplo, a média se referia àquilo que é mais frequente ou típico, ou ao se falar que uma pessoa é menor em tamanho do que a média, se tinha como propósito afirmar que a pessoa se diferenciava em relação ao tamanho da altura que representava todo o grupo. Nesta época ora a média era utilizada como o conceito de média, ora como o de moda.

Até o século XVI não tinha sido reconhecida ainda que a média aritmética pudesse ser estendida a n casos ($MÉDIA = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$). O conceito de média aritmética torna-se mais difundido a partir do século XIX devido a um maior desenvolvimento da estatística enquanto ciência. O termo “average” começa a ser utilizado na língua inglesa para representar a média. O termo surge com base na expressão “average speed” que significa velocidade média.

Os exemplos históricos merecem uma maior atenção e não devem ser deixados a parte pela escola, onde os estudantes ficam limitados ao algoritmo da adição de todos os valores e divisão pelo número de valores. Nos exemplos antigos, a média foi utilizada como um meio para um fim (BAKKER, 2006), ou seja, como uma ferramenta para resolver determinadas situações.

Lavoie e Gattuso (1998) realizaram uma pesquisa em que constataram que o conceito de média aritmética foi introduzido nas escolas a partir de um contexto comercial. Os autores encontraram em um livro destinado à *Commercial Schools and Business Men* a primeira menção ao conceito de média aritmética com uma situação envolvendo a média aritmética ponderada. Em 1935, surge a menção de média de notas em um livro didático da escola elementar francesa. Neste mesmo período, primeira parte do século XX, no Canadá e nos Estados Unidos, os livros didáticos apresentam abordagens com um cunho mais pedagógico, exemplificando o algoritmo da média “somar e dividir” a partir de um contexto, e em seguida, atribui um significado para a média aritmética encontrada. Lavoie e Gattuso (1998) ainda apresentam que em um dos livros didáticos dessa época, os alunos do nível elementar são convidados a não só calcular a média, mas também calcular o valor que falta no conjunto de dados. Nos livros didáticos do Ensino Fundamental pesquisados por Lavoie e Gattuso (1998) as tentativas de explicação verbal com o objetivo de dar um sentido para o cálculo da média somente aparecem em meados do século XX. Os autores ainda observam que com os anos setenta, a média aritmética se torna parte do capítulo de estatística, mas perde algumas das aplicações interessantes que tinham sido anteriormente associadas ao conceito.

2.3 - Educação Estatística

O campo da Educação Estatística toma forma a partir da década de 1970 em nível internacional contribuindo com os processos de ensino-aprendizagem e com a formação do letramento estatístico dos cidadãos.

Concordando com as ideias apresentadas por Cazorla, Kataoka e Silva (2010, p.22), e neste trabalho entendemos por:

Estatística como uma ciência que tem como objetivo desenvolver métodos para coletar, organizar e analisar dados. Já a Educação Estatística é uma nova área de pesquisa que tem como objetivo estudar e compreender como as pessoas ensinam e aprendem Estatística, o que envolve os aspectos cognitivos e afetivos do ensino-aprendizagem, além da epistemologia dos conceitos estatísticos e o desenvolvimento de métodos e materiais de ensino etc., visando o letramento estatístico.

No que tange ao entendimento do que é o Letramento Estatístico, temos que é “a capacidade de uma pessoa interpretar e avaliar criticamente informações estatísticas, levando em consideração os argumentos relacionados aos dados ou aos fenômenos apresentados em qualquer contexto” (GAL, 2002 apud CAZORLA et al, 2010, p.22).

Assim, discutir criticamente os dados de uma pesquisa, analisar e se posicionar realizando considerações referentes às informações estatísticas integram o arcabouço de um cidadão letrado estatisticamente.

Cabriá (1994 apud BATANERO E GODINO, 2001) concebe a Estatística como a ciência que,

estuda o comportamento dos fenômenos denominados de coletivos. Está caracterizada por uma informação acerca de um coletivo ou universo, o que constitui seu objeto material; um modo próprio de raciocínio, o método estatístico, o que constitui seu objeto formal e algumas previsões de frente com o futuro, o que implica um ambiente de incerteza, que constitui seu objeto ou causa final (p.6).

Esse modo próprio de raciocínio torna-se uma questão ímpar no processo de ensino-aprendizagem da estatística na escola. O elemento incerteza é o ponto chave que diferencia o raciocínio estatístico do matemático.

Com uma linha de investigação, com características próprias (BATANERO, 2001) a Educação Estatística vem delineando um maior espaço de estudos e pesquisas em diversos países. Conferências como o ICOTS – International Conference on Statistical Education, que teve sua 8ª edição em 2010, publicou mais de 310 trabalhos. O ICOTS destaca-se pela contribuição refletida na discussão qualitativa de trabalhos envolvendo o ensino-aprendizagem da estatística, a formação do professor, pesquisas e estudos no vários níveis do ensino formal etc., além de reunir pesquisadores em Educação Estatística de mais de 50 países. O International Congress on Mathematical Education – ICME, congresso direcionado para a Educação Matemática, realiza uma série de conferências produzindo um rico debate no grupo de estudo Investigação e Desenvolvimento no Ensino e na Aprendizagem da Estatística.

A criação em 1991 do IASE – International Association for Statistical Education com objetivos de reunir cientistas e profissionais, para um melhor desenvolvimento da Educação Estatística, fortalece as discussões ao nível internacional. O IASE é o responsável pela publicação da revista *Statistics Education Research Newsletter* com sua primeira publicação em 2002. Outros congressos têm incluído em seus grupos de trabalho temas que versam sobre a preocupação com o ensino-aprendizagem da estatística, tais como o *Psychology on Mathematics Education – PME* e o *Simpósio Internacional de Pesquisas em Educação Matemática – SIPEM*. Este último destaca-se pelo Grupo de Trabalho em Ensino de Probabilidade e Estatística ligado à Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM com um número considerável de pesquisadores e publicações na área.

No Brasil, existem alguns grupos de pesquisa relacionados ao ensino-aprendizagem da Estatística. Esta pesquisa está imersa em um processo de discussão sobre Educação Estatística proveniente do GREF – Grupo de Estudo em Educação Estatística no Ensino Fundamental do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da UFPE.

2.4 – Educação Estatística no Ensino Fundamental

Devido à necessidade de letramento estatístico da sociedade, os currículos de matemática de inúmeros países começam a implantar os conteúdos estatísticos em seus programas. Mesmo assim, ainda é possível verificar que tais conteúdos não são contemplados de forma significativa nos processos de ensino-aprendizagem dos estudantes. Na melhor das hipóteses, o ensino da estatística é um pretexto para outros temas matemáticos e exercita apenas a capacidade do cálculo e/ou atividades com representações gráficas, esquecendo o trabalho com dados reais e o aspecto do raciocínio estatístico (COBO e BATANERO, 2004).

Ao longo das duas últimas décadas do século XX, a estatística tornou-se um componente chave no currículo de matemática americano, motivados pelos avanços tecnológicos nas técnicas de análise de dados dos anos 1980 juntamente com o advento da era da informação (FRANKLIN, 2007). Com vistas a este movimento os conceitos estatísticos foram introduzidos no currículo americano desde o Ensino Fundamental. Em 1989 o National Council of Teachers of Mathematics – NCTM incluiu a Análise de Dados e Probabilidade como um dos cinco eixos do conteúdo a ser desenvolvido no Ensino Fundamental nas escolas americanas. Em 2000, o NCTM aprova o *Principles and Standards for School Mathematics*, que ainda hoje é base para a reforma de currículos de matemática em diversos países, incluindo os conteúdos de Estatística de forma contundente.

A American Statistical Association – ASA com objetivo de ratificar a importância do trabalho com os conteúdos do Tratamento da Informação no currículo escolar - aprova em 2005 o *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) Report: a Pré-K-12 Curriculum Framework*. Este documento apresenta um quadro conceitual para a Educação Estatística complementando o *National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)*. Segundo o referido documento, os programas de ensino devem tornar os estudantes capazes de:

- formular questões que podem ser tratadas com dados e coletar, organizar e apresentar dados para respondê-las;
- selecionar e utilizar métodos estatísticos apropriados para analisar os dados;
- desenvolver e avaliar inferências e previsões que são baseadas em dados; e
- compreender e aplicar conceitos básicos de probabilidade (FRANKLIN, 2007, p.5).

No Brasil, a mais de uma década, esses temas vêm sendo indicados para serem ensinados na disciplina de Matemática dos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental a partir dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática – PCN (BRASIL/MEC/SEF, 1997, 1998). Nos PCN, o bloco denominado Tratamento da Informação, integram os estudos relativos aos conteúdos de estatística, de probabilidade e de combinatória.

A Estatística, nas diretrizes curriculares da Educação Básica no Brasil, como afirma Cazorla et al (2010, p.20) “tem um papel fundamental no desenvolvimento da interdisciplinaridade, da transversalidade, do espírito científico e da formação dos alunos para a cidadania.”

Nos Parâmetros Curriculares de Matemática (BRASIL, 1997) propostos para os anos iniciais (1º e 2º ciclos) sugere-se o trabalho com o bloco Tratamento da Informação enfatizando a importância do ensino destes conteúdos desde os primeiros anos de escolaridade. Neste nível de escolaridade Guimarães, Gitirana, Marques e Cavalcanti (2009) realizaram um estudo no qual apresentam o Estado da Arte das pesquisas sobre Educação Estatística na Educação Infantil e nos anos iniciais do Ensino Fundamental, tomando por base as publicações em anais de congressos e em periódicos científicos nacionais, do período de 2001 a 2006, relacionados à área de Educação e Educação Matemática. As autoras observaram a existência de uma lacuna na divulgação de pesquisas no que concerne à importância do ensino dos conceitos relacionados ao bloco Tratamento da Informação nos anos iniciais, principalmente com relação aos artigos que trabalhem as habilidades de representação gráfica (GUIMARÃES et al, 2009).

Com relação à Estatística nos anos finais do Ensino Fundamental, os Parâmetros Curriculares de Matemática (BRASIL, 1998) justificam o estudo, nos terceiro e quarto ciclos, dos conteúdos estabelecidos no Tratamento da Informação, por possibilitar o desenvolvimento de formas particulares de pensamento e raciocínio para resolver determinadas situações-problema que envolvem fenômenos aleatórios, nos quais é necessário coletar, organizar e apresentar dados, interpretar amostras, interpretar e comunicar resultados por meio da linguagem estatística.

Esse documento apresenta habilidades que devem ser construídas pelos estudantes em situações de aprendizagem no bloco Tratamento da Informação. O terceiro ciclo corresponde ao 6º e 7º anos e o quarto ciclo ao 8º e 9º anos.

“TERCEIRO CICLO: coleta, organização e análise de informações; construção e interpretação de tabelas e gráficos; formulação de argumentos convincentes, tendo por base a análise de dados organizados em representações matemáticas diversas; formulação de questões pertinentes para um conjunto de informações; elaboração de algumas conjecturas e comunicação de modo convincente; interpretação de diagramas e fluxogramas. No decorrer deste trabalho é possível iniciar o estudo das medidas estatísticas, como a média aritmética que possibilitará uma interpretação mais aperfeiçoada dos dados” (BRASIL, 1998, p. 69-70).

“QUARTO CICLO: construção de tabelas de frequência e representação gráfica de dados estatísticos, utilizando diferentes recursos; elaboração de conclusões a partir da leitura, análise, interpretação de informações apresentadas em tabelas e gráficos; desenvolver

pesquisas sobre sua própria realidade e interpretação, utilizando-se de gráficos e algumas medidas estatísticas. Obtenção das medidas de tendência central de uma pesquisa (média, moda e mediana), compreendendo seus significados para fazer inferências” (BRASIL, 1998, p. 82;85;90).

No decorrer do 3º ciclo é desejável que o aluno amplie o contato com a média aritmética juntamente com a moda e a mediana compreendendo-a como uma medida de tendência central dos dados. O aluno deve compreender a média como uma medida que propicia uma análise mais aprimorada dos dados de uma pesquisa, “como um indicador da tendência de uma pesquisa” (BRASIL, 1998, p.74).

No 4º ciclo os alunos já estão mais familiarizados com a coleta de dados e com a construção de gráficos e tabelas. Assim, a média deve continuar a ser utilizada para que os alunos ampliem a compreensão do seu significado como uma medida representativa dos dados e como uma poderosa ferramenta na interpretação dos dados estatísticos.

Os PCN também indicam a importância de, no trabalho com os conteúdos do bloco Tratamento da Informação, estabelecer ligações entre a matemática e outros contextos tais como Saúde, Meio Ambiente, Trabalho e Consumo, etc. Nestes contextos, “os conceitos e procedimentos estatísticos ganham significados” (BRASIL, 1998, p. 85).

Outro documento oficial é a Base Curricular Comum de Pernambuco. A Base Curricular Comum para as redes públicas de Ensino de Pernambuco – BCC-PE é um documento que apresenta os componentes curriculares de matemática para o ensino público do estado de Pernambuco – Brasil, aprovada no ano de 2008. No espírito do regime de colaboração preceituado pela Lei de Diretrizes e Base da Educação – LDB, o documento da BCC-PE responde em primeiro plano, à aspiração dos sistemas públicos de ensino localizado no estado de Pernambuco de disponibilizar uma base curricular que sirva de referência à formação educacional do conjunto de crianças, jovens e adultos neles inseridos com vistas a contribuir para responder aos desafios da educação do estado. Apresenta os eixos de saberes divididos em “Números e Operações”, “Álgebra e Funções”, “Grandezas e Medidas”, “Geometria” e “Estatística, probabilidade e combinatória”.

A BCC-PE, no eixo denominado Estatística, Probabilidade e Combinatória, orienta que o trabalho desenvolvido nos anos finais do Ensino Fundamental envolva temas mais gerais na contextualização, tais como preservação da natureza; reciclagem; sexualidade na adolescência. No que tange às competências necessárias destaca a necessidade de ampliação e aprofundamento de itens como:

- a) formular questões que envolvam a obtenção de dados da realidade;
- b) coletar, organizar e apresentar informações;
- c) observar e interpretar fenômenos (PERNAMBUCO, 2008, p.102).

A BCC-PE enfatiza que ao utilizar informações obtidas do ambiente social do aluno o professor poderá promover situações que permitam a compreensão de algumas medidas estatísticas, como, por exemplo, médias aritméticas e ponderadas (PERNAMBUCO, 2008, p.103).

Tanto os PCN como a BCC-PE são documentos que, para o ensino-aprendizagem da estatística nos anos fundamentais, instigam o trabalho com a estatística pontuando a abordagem da média aritmética nestes anos de escolaridade.

2.5 – Medidas de tendência central

2.5.1 Definições

O foco do presente estudo está na média aritmética, porém, uma vez que há diversas concepções relacionadas às medidas de tendência central, torna-se singular neste momento explicitar as definições das medidas de tendência centrais mais utilizadas nos livros didáticos de estatística e matemática.

Triola (1999) discorre que há diferentes maneiras de definir o centro de um conjunto de dados e, assim, há diferentes medidas de tendência central, inclusive a média, a mediana, a moda e o ponto médio.

O autor apresenta que,

A **média aritmética** de um conjunto de valores é o valor obtido somando-se todos eles e dividindo-se o total pelo número de valores.

$$MÉDIA = \frac{\sum x}{n}$$

“x” é a variável usada para representar valores individuais dos dados e “n” representa o número de valores em uma amostra.

Figura 1: Definição da média aritmética segundo Triola (1999, p.32)

Outra medida utilizada é a mediana:

A **mediana** de um conjunto de valores é o valor do meio desse conjunto, quando os valores estão dispostos em ordem crescente (ou decrescente).

Figura 2: Definição da mediana segundo Triola (1999, p.33)

Para o cálculo da mediana, é necessário primeiramente dispor os valores em ordem (crescente ou decrescente); em seguida aplicar um dos procedimentos abaixo:

1. Se o número de valores é ímpar, a mediana é o número localizado exatamente no meio da lista.
2. Se o número de valores é par, a mediana é a média dos dois valores do meio.

A terceira é a Moda:

A **moda** de um conjunto de dados é o valor que ocorre com maior frequência. Quando dois valores ocorrem com a mesma frequência máxima, cada um deles é uma moda, e o conjunto se diz bimodal. Se mais de dois valores ocorrem com a mesma frequência máxima, cada um deles é uma moda, e o conjunto é multimodal. Quando nenhum valor é repetido, o conjunto não tem moda.

Figura 3: Definição da moda segundo Triola (1999, p.33)

Mesmo que o ponto médio não seja muito utilizado, é importante incluí-lo para enfatizar de que há diferentes maneiras de definir o centro de um conjunto de dados.

O **ponto médio** é o valor que está a meio caminho entre o maior e o menor valor. Para obtê-lo, somamos esses valores extremos e dividimos o resultado por 2, como na fórmula a seguir:

$$\text{ponto médio} = \frac{\text{menor valor} + \text{maior valor}}{2}$$

Figura 4: Definição de ponto médio segundo Triola (1999, p.33)

Não podemos determinar qual a melhor medida de tendência central. A média apresenta uma vantagem por, no cálculo, levar em conta todos os valores, mas uma

desvantagem é não ser uma boa representante quando se tem valores muito extremos no conjunto de dados. No caso da mediana, costuma ser uma boa escolha quando se tem valores muitos dispersos; já a moda é apropriada para variáveis qualitativas e quantitativas discretas que tomam poucos valores.

Ainda torna-se importante apresentar a média aritmética ponderada, bem como a média aritmética calculada a partir de uma tabela de frequências.

Média aritmética ponderada.

Com base em Triola (1999) sabemos que em certas situações, os valores têm graus de importância diferentes, o que nos leva a calcular uma média ponderada, que é uma média dos valores afetados de pesos diferentes. O procedimento para o cálculo da média aritmética ponderada é o seguinte:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n k_i x_i}{\sum_{i=1}^n k_i} = \frac{k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_n x_n}{k_1 + k_2 + \dots + k_n}$$

Podemos observar que, no caso em que todos os k_i são iguais a 1, a média aritmética ponderada reduz-se à média aritmética simples.

Temos as situações em que a média pode ser calculada com os dados apresentados numa tabela de frequências ou até mesmo em um rol de dados com as frequências destes. Nesses casos, o procedimento é multiplicar cada valor da variável por sua frequência absoluta e somar todos os produtos obtidos. Em seguida dividir pela soma das frequências. Estes são casos em que a frequência não assume o sentido de “peso” informado acima.

Segue a fórmula:

$$\bar{x} = \frac{\sum x \cdot f}{\sum f}$$

2.5.2 A média a partir de outras relações

Nesse momento faremos uma breve discussão sobre a média, tanto do ponto de vista matemático, quanto do estatístico. Para isto, corroboramos com as ideias de educadores estatísticos que ela, a estatística, não é um ramo da matemática, mas que em vez disso é uma ciência que utiliza ferramentas matemáticas para desenvolver seus conceitos, tal como a Física. Strauss e Bichler (1988), por exemplo, ao apresentarem em sua pesquisa as sete propriedades da média aritmética, trazem a tona os elementos matemáticos, os elementos

estatísticos e o elemento de representatividade. Segue abaixo duas tabelas com as propriedades referentes aos elementos matemáticos (propriedades abstratas) e aos elementos estatísticos (propriedades estatísticas):

Tabela 1: Propriedades Estatísticas da Média Aritmética

PROPRIEDADES	EXPLANAÇÃO
A média está localizada entre os valores extremos da distribuição.	A média aritmética não pode está localizada acima da maior valor ou abaixo do menor valor, e de fato não pode ser igual a um valor extremo, a menos que todos os dados do conjunto sejam iguais.
A soma dos desvios dos dados em relação à média é zero.	A soma das diferenças da média subtraída de cada valor dos dados é zero.
A média é influenciada por cada um e por todos os valores.	Qualquer novo dado adicionado ao conjunto de dados original altera a média, a menos que o novo dado seja de valor igual ao da média.

Nota: As propriedades são citadas de Strauss e Bichler (1988). As explicações de Marnich (2008).

Tabela 2: Propriedades Abstratas da Média Aritmética

PROPRIEDADES	EXEMPLOS
A média não precisa, necessariamente, coincidir com um dos valores que a compõem.	A média de 10 e 20 é de 15 (que não é um dos pontos de dados).
A média pode ser um valor que não pode corresponder a um dado dentre o conjunto de dados reais	Se uma escola tem duas turmas de primeiro grau com 22 e 25 alunos em cada sala de aula, o número médio de alunos em cada sala é de 23,5 alunos, uma impossibilidade física.
No cálculo da média, devem ser incluídos os valores nulos e os negativos.	Perguntou-se a cinco crianças quantos livros de matemática elas têm em suas casas. As respostas foram de 1; 0; 4; 2 e 0. Ao calcular a média a soma não é afetada pelo valor zero ($1+0+4+2+0 = 1+4+2$) mas os valores zero devem ser considerados como parte do divisor ($n=5$).

Nota: As propriedades são citadas de Strauss e Bichler (1988). Os exemplos de Marnich (2008).

As propriedades abstratas são de natureza matemática, no entanto, apresentam aspectos da estatística, pois sugerem a qualidade representativa da média. E ainda, as propriedades estatísticas necessitam de cálculos e provas matemáticas, logo tem raiz no domínio matemático (MARNICH, 2008).

Cobb e Moore (1997) discorrem que a grande diferença entre a Estatística e a Matemática é o papel do contexto. Em outras palavras, na matemática o contexto sofre um

processo de descarte com objetivo de encontrar o cerne da estrutura Matemática abstrata, já na Estatística o contexto confere significado aos dados analisados, ou seja, “os dados não são apenas números, mas números em um contexto” (COBB E MOORE, 1997, p. 801).

Portanto, torna-se necessário tanto o conhecimento da dimensão matemática como o da dimensão estatística da média aritmética, com vistas a uma melhor utilização desta medida, ressaltando que a média é uma das mais importantes medidas de tendência central e que é utilizada no cálculo de desvios-padrões, no trabalho com os intervalos de confiança e em testes de hipóteses. Pesquisas comprovam que os estudantes conseguem se sair bem no procedimento de cálculo da média, mas tem dificuldade em compreender conceitualmente o que ela representa (MOKROS E RUSSEL, 1995; CAZORLA, 2003).

O conhecimento do conceito da média aritmética deve superar o simples procedimento de cálculo “somar e então dividir” e penetrar a natureza estatística com a variedade de significados que a compõe como uma medida estatística. “A média é um conceito estatístico definido fora do campo da matemática, mas que usa a matemática extensivamente em seu cálculo” (MARNICH, 2008, p.16).

Marnich (2008) também discorre que é fundamental desenvolver o conceito de média com os estudantes a partir da conexão entre o conhecimento matemático – tanto aritmético como algébrico – e o conhecimento estatístico da média. Abaixo o texto do autor apresentando em detalhes tal reflexão.

No tocante ao conhecimento matemático a média é enraizada na aritmética (adição, multiplicação e divisão) e na álgebra (manipulação da fórmula, propriedades matemáticas da fórmula, as relações e as propriedades dos grupos da matemática). No que diz respeito ao conhecimento estatístico, o conceito de média aritmética utiliza uma entidade quantitativa para representar, localizar, qualificar, descrever, interpretar e/ou significar um conjunto de dados (MARNICH, 2008, p.17).

Essa relação simbiótica entre a Matemática e a Estatística é que vai contribuir para uma compreensão completa do conceito de média aritmética. Cortina (2002) defende que, em certo sentido, a média aritmética tem diversas “personalidades matemáticas” das quais podem ser associadas a diferentes práticas estatísticas que envolvem o seu uso.

Ainda é pertinente, quando discutimos sobre as definições que a média tem, explanar duas ideias que, segundo Marnich (2008), são essenciais para articular os domínios matemáticos e estatísticos da média, que são a ideia de “divisão equitativa” e a de “centro de equilíbrio”. A ideia de divisão equitativa é um modelo que é caracterizado por um objeto ou

uma coleção de objetos que são divididos e distribuídos em partes iguais, ou em um número igual de subcoleções. A ideia de centro de equilíbrio pode ser utilizado como um modelo que melhor representa a distribuição do conjunto de dados. A figura 5 ilustra a média como centro do conjunto de dados, no sentido de que é um ponto de equilíbrio dos mesmos. Esses modelos ajudam na compreensão da representatividade da média aritmética.

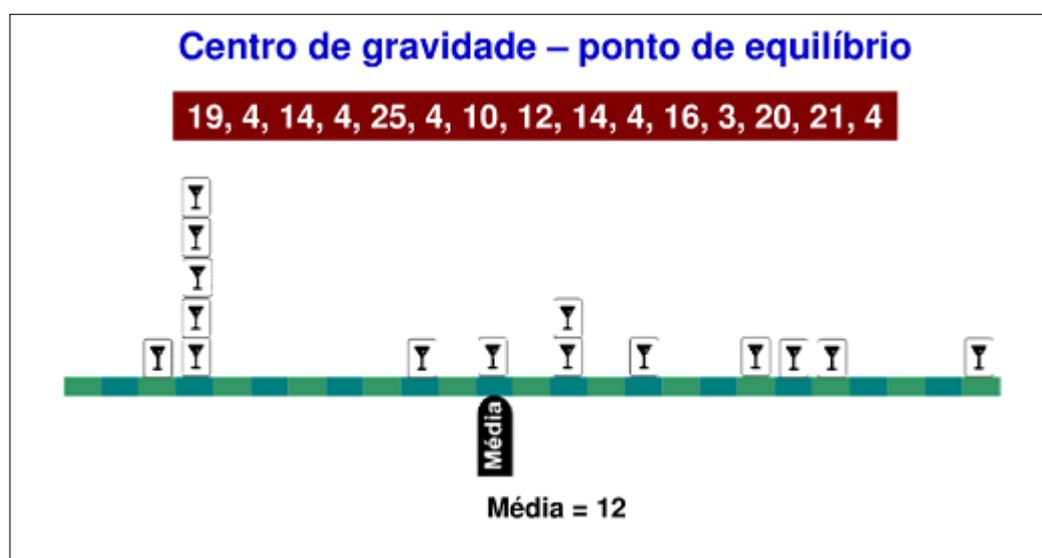


Figura 5: A média como um ponto de equilíbrio

Fonte: <<http://www.slideshare.net/wkoliveira/medidas-de-tendencia-central-e-disperso>>

Nesta figura, temos a média apresentada como ponto de equilíbrio no valor 12. Aqui a mediana coincide com a média. Tal exemplo é interessante no que concerne a visualização da distribuição dos dados e como se distribuem no entorno da média.

Cortina (2002) pontua situações em que a média é utilizada como "um índice que mede o desempenho do grupo em relação ao número de contribuintes do grupo." (p.2) Nestes casos, a média aritmética pode ser pensada como um caso especial de uma relação normalizada, em que uma das quantidades originais que compõem o índice é uma acumulação total de uma propriedade (ou seja, a soma dos valores), e o outro o número de valores discretos que contribuíram para esse total (ou seja, "n"). Podemos citar como exemplo "renda per cápita" e "velocidade média" que como veremos mais a frente, são contextos utilizados pelos livros didáticos. No caso da renda per cápita, a renda total pode ser pensada como a soma da renda pessoal (ou seja, a soma dos valores), e o "tamanho da população", como o número de rendimentos pessoais que estavam envolvidos na soma (ou seja, "n"). O autor ainda clarifica que entender a média como uma relação de normalização auxilia em certos tipos de análises estatísticas (CORTINA, 2002).

2.6 – Estudos sobre a média aritmética

Destacamos aqui estudos sobre o ensino-aprendizagem de média aritmética e que tem conexão com a nossa pesquisa. Procuramos discutir resultados de estudos que em cada nível de escolaridade envolvem invariantes, significados e representações da média. Iniciamos com os estudos de Straus e Bichler (1988). Nos anos iniciais temos os estudos de Melo (2010) que discorre sobre invariantes, significados e representações da média com professores das séries iniciais e alunos do 3º e 5º ano do Ensino Fundamental e os estudos de Magina et al (2008) que tem foco nos equívocos das concepções sobre a média aritmética dos professores e alunos nos anos iniciais. Para os anos finais do Ensino Fundamental apresentamos a pesquisa de Anjos e Gitirana (2008) com livros didáticos, em seguida temos Bakker (2003) em que realizou um estudo com alunos na Holanda e ainda um resumo sobre duas pesquisas apresentadas no último ICOTS em 2010. No Ensino Médio e Superior fizemos referência à pesquisa realizada por Cazorla (2003) com estudantes universitários, em seguida Cobo e Batanero (2004) com pesquisa sobre livros didáticos no contexto espanhol, Mayén (2007) com investigação no ensino secundário mexicano, e por fim Garret e Cruz (2008) com estudantes dos dois níveis de ensino em Angola.

2.6.1 Os estudos de Strauss e Bichler (1988)

Um estudo realizado por Strauss e Bichler (1988) em Israel investigou a compreensão do conceito de média em 80 alunos com idades dos 8 aos 12 anos. Para isto, analisou as propriedades e características da média aritmética. A pesquisa teve dois objetivos: um foi o de analisar as propriedades do conceito de média e outro as influências que poderiam exercer os tipos de dados (contínuo-discreto) e o meio de apresentação (verbal, concreto, e numérico).

As propriedades levantadas por Strauss e Bichler nesta pesquisa estão descritas abaixo:

1. A média está localizada entre os valores extremos
(menor valor < média < maior valor).
2. A soma dos desvios a partir da média é igual a zero.
3. A média é influenciada por cada um e por todos os valores.
4. A média não precisa, necessariamente, coincidir com um dos valores a partir do qual foi calculada.

5. A média pode ser um valor que não pode corresponder a um dado dentre o conjunto de dados reais.
6. No cálculo da média, devem ser incluídos os valores nulos e os negativos.
7. A média é um valor representativo dos dados, ou seja, é o valor que está mais próximo de todos (aspecto espacial).

Strauss e Bichler (1988) para cada propriedade utilizaram diversas tarefas variando o tipo de dados e o meio de apresentação. Apresentamos um exemplo deste estudo abordando a Propriedade 1 – A média está localizada entre os valores extremos:

Alunos de uma turma decidiram realizar uma festa na praia. Todos trouxeram batatas para colocar para assar para um lanche durante a festa. Yael trouxe a maioria das batatas - 3. Quando as batatas estavam prontas para comer, os estudantes decidiram distribuir todas as batatas, para que todos tivessem a mesma quantidade. Cada estudante recebeu 4 batatas.

Você acha que isso é possível?

Por que você acha que isso pode (ou não) ter acontecido?

(Fonte: Strauss e Bichler, 1988, p.69)

Nesta atividade está em jogo o meio verbal e dados do tipo discreto. Os autores analisaram a compreensão dos estudantes de acordo com as idades. No caso deste exemplo, foi observado que um alto percentual de alunos em todas as idades respondeu corretamente a questão usando a propriedade 1, conforme justificativas dos alunos descritas abaixo. Outras justificativas incorretas também foram encontradas pelos autores.

i) É impossível que todos fiquem com mais batatas do que a quantidade trazida por Yael, que foi a pessoa que trouxe mais.

8 anos (33%) - 10 anos (62%) – 12 anos (55%) – 14 anos (50%)

ii) Não pode ser que todos fiquem com mais do que o que cada aluno trouxe.

8 anos (25%) – 10 anos (27%) – 12 anos (22%) – 14 anos (10%)

Straus e Bichler (1988) não encontraram efeitos significativos na compreensão dos alunos no que concerne ao tipo de dado e ao meio de apresentação utilizado nas questões. Os resultados indicam que quanto maior a idade há uma melhor compreensão das propriedades. Os resultados também demonstram diferentes dificuldades na compreensão das propriedades,

no entanto as propriedades P2 - *a soma dos desvios a partir da média é igual a zero*, P6 - *no cálculo da média, devem ser incluídos os valores nulos e os negativos* e P7 - *a média é um valor representativo dos dados, ou seja, é o valor que está mais próximo de todos (aspecto espacial)*, os alunos apresentam maiores dificuldades.

2.6.2 Nos anos iniciais do Ensino Fundamental

Melo (2010), em sua dissertação de mestrado desenvolvida no âmbito do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica – EDUMATEC, buscou investigar como o conceito de média aritmética é compreendido por alunos e professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, considerando diferentes invariantes, significados e representações. O estudo foi realizado com 210 sujeitos de seis escolas públicas do Município de Moreno – Pernambuco - Brasil, sendo 75 alunos do 3º ano, 104 alunos do 5º ano do Ensino Fundamental e 31 professores desse mesmo nível de ensino.

O estudo foi desenvolvido tomando por base a Teoria dos Campos Conceituais criada por Vergnaud (1991), a qual entende que um conceito compreende um conjunto de situações, invariantes e representações. Dessa forma, o instrumento diagnóstico utilizado pela pesquisadora visou compreender o que sabem alunos e professores sobre o conceito de média aritmética a partir de seis das sete propriedades deste conceito levantadas por Strauss e Bichler (1988), dos quatro significados apresentados por Batanero (2000) e manipulando os tipos de representações – ora gráfico de colunas ora enunciado escrito.

A autora destaca que em relação ao desempenho dos grupos observou-se que nenhum dos sujeitos dos três grupos investigados respondeu corretamente a todas as questões que compõe o instrumento diagnóstico. Constata-se também a existência de sujeitos que não acertaram nenhuma questão nos três grupos. Os resultados mostraram um desempenho muito fraco dos alunos e não foram observadas diferenças significativas entre os níveis de escolaridade do 3º e 5º anos. Com relação aos professores, os mesmos apresentaram um desempenho na maioria das questões superior ao dos alunos, evidenciando uma maior compreensão do conceito de média aritmética. Entretanto, ressalta-se que o desempenho destes ainda foi aquém do desejado.

Professores e alunos apresentaram dificuldades diferentes em relação aos significados da média. No grupo dos professores a autora constatou que eles foram bem sucedidos na questão que inclui o significado da *média como uma quantidade equitativa a repartir para conseguir uma distribuição uniforme*. Contudo, em uma das questões que envolvia esse

mesmo significado, observou-se que os professores apresentaram um desempenho maior. A autora acredita que esta diferença pode ter sido motivada nesta questão pela presença do invariante que *no cálculo da média devem-se considerar todos os valores inclusive os nulos*. Em outra questão que mobiliza um significado mais complexo da média: *a necessidade de conhecer o que se irá obter com maior probabilidade ao contar com um dado faltando em uma distribuição*, foi a questão que apresenta maior dificuldade pelo grupo de professores. Melo (2010) traz à tona que o fato desse insucesso tem a ver não só com a complexidade deste significado, mas com o fato dele não ser sistematicamente ensinado.

No caso dos grupos dos alunos do 3º e 5º ano foi observado um desempenho um pouco melhor na questão que envolve a aplicação da média como *estimativa de uma quantidade desconhecida em presença de erros de medida*. Em contrapartida, a dificuldade mais explícita dos alunos de ambos os anos de escolaridade foi com a mobilização da *média como elemento representativo de um conjunto de valores com distribuição aproximadamente simétrica*.

No que tange aos invariantes pesquisados pela autora, o aspecto considerado complicado para os três grupos (professores, alunos do 3º ano e alunos do 5º ano) diz respeito ao invariante que explora que *a média pode ser um dado que não tenha sentido para o conjunto de dados da variável*. No grupo dos professores foi bastante difícil lidar com o reconhecimento de que *a média está localizada entre os valores extremos*. Em ambos os grupos de alunos são apresentados percentuais bastante baixos quanto aos invariantes de forma geral, porém, destaca-se a dificuldade em entender *a média como um valor representativo dos dados a partir dos quais ela foi calculada*, ou seja, a propriedade que expressa a representatividade da média.

Com relação ao tipo de representação a autora apresenta que esta variável não foi um fator determinante na compreensão do conceito de média, mas que a representação tem influência na estratégia utilizada pelos sujeitos na resolução das questões. Todavia, foram constatadas diferenças significativas apenas nas questões que envolviam enunciado escrito, nas quais os desempenhos dos professores foram superiores.

Melo (2010) constata ainda a existência de várias concepções em relação à média aritmética, inclusive concepções sem validade estatística. A autora assevera que na maioria das situações, a média foi considerada como soma dos valores da variável, sobretudo quando os dados foram apresentados por meio do enunciado escrito. Por outro lado, outra concepção equivocada surgiu quando a situação envolvia o gráfico de colunas, neste caso, entendia-se que a média correspondia ao valor da maior coluna ou ponto máximo.

Magina, Cazorla, Gitirana e Guimarães (2008) no artigo *Conceptions and Misconceptions of average: a comparative study between teachers and students* analisaram os equívocos na concepção do conceito de média aritmética de professores e alunos do ensino primário na cidade de São Paulo - Brasil. A pesquisa articulou pesquisadores do âmbito da Educação Estatística ligados a três instituições nacionais – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo; Universidade Estadual de Santa Cruz e Universidade Federal de Pernambuco. O estudo foi realizado com 54 alunos do 5º ano das séries iniciais, 47 alunos do 6º ano das séries finais, 61 alunos de graduação em Pedagogia no início do curso, 82 alunos de graduação em Pedagogia concluindo o curso e 43 professores do ensino primário.

A pesquisa se deu através de um teste com sete atividades sobre a leitura, interpretação e construção de tabelas e gráficos e três atividades envolvendo o conceito de média aritmética. O referido artigo faz uma análise das três atividades de média aritmética.

Nos resultados, observou-se que nenhum aluno de ambos os grupos acertaram todas as três questões. O grupo de professores apresentou um desempenho significativamente superior com relação aos demais, apesar de que apenas 18,6% acertaram as três questões.

Segundo as autoras, em geral, a média foi apresentada como um conceito difícil para ser compreendido. Descobriu-se também que professores do ensino primário em exercício da profissão ainda apresentam concepções sem validade estatística com respeito à média.

Também foi encontrado um grande número de sujeitos que ficaram confusos com a média e a soma dos valores. Outra concepção encontrada foi a confusão entre a média e o valor máximo dos dados, relacionado com a falta de compreensão com a propriedade da média, apontada por Strauss e Bichler (1988) que *a média está localizada entre os valores extremos da distribuição*. As autoras observaram que as concepções equivocadas mais frequentes foram a média como a soma de valores ou como um ponto máximo.

Uma das questões da pesquisa utilizou a representação do gráfico de barras solicitando o cálculo da média. As autoras verificaram um melhor desempenho nesta atividade, discorrendo que é possível que se tenha a representação visual do aspecto espacial da média aritmética, no qual o gráfico parece ter ajudado na compreensão deste conceito.

Também vários indivíduos deste estudo demonstraram a crença que a média tem que coincidir pelo menos com um dos valores dos dados, o que contradiz outra propriedade apresentada por Strauss e Bichler (1988) que *a média não precisa, necessariamente, coincidir com um dos valores que a compõem*.

Magina et al (2008) ao constatarem os resultados encontrados asseveram a necessidade de investimento na formação de professores e de encontrar meios para que as

pesquisas acadêmicas cheguem no professor que está em sala de aula se constituindo como material de subsídio para sua prática pedagógica.

2.6.3 *Nos anos finais do Ensino Fundamental*

Anjos e Gitirana (2008) realizaram uma pesquisa com os livros didáticos do PNLD 2008. Podemos considerar esta pesquisa como um dos embriões desta dissertação. Anjos e Gitirana observaram como o conceito de média era introduzido nas séries finais do Ensino Fundamental, a partir da análise das atividades relativas ao conceito, propostas nas coleções de livros didáticos aprovada pelo Programa Nacional do Livro Didático – PNLD 2008, focado nas sete propriedades do conceito anunciadas por Strauss e Bichler (1988) como importantes para a compreensão da média aritmética.

Os autores apresentam que certamente, o fato de uma má formação do pensamento estatístico em alunos do Ensino Médio ou superior, tem sua origem na formação inicial do conhecimento estatístico, iniciado de forma elementar nos ensino primário e trabalhado com maior ênfase nos anos finais do Ensino Fundamental (ANJOS E GITIRANA, 2008).

Nesse estudo foram analisadas as 16 coleções de livros didáticos aprovadas pelo PNLD 2008. Os autores focalizaram os capítulos ou unidades destinados ao tratamento da informação, considerando todas as atividades que o conceito da média foi trabalhado, entendendo por atividade explicações teóricas, exemplos, exercícios resolvidos ou exercícios deixados para o aluno resolver. As atividades foram analisadas de acordo com a contextualização e com as propriedades listadas por Strauss e Bichler (1988), e em cada uma delas, foi observado se a atividade explorava, ou não, cada uma das propriedades.

Anjos e Gitirana (2008) apresentam que, após a análise dos livros didáticos, alguns resultados puderam ser observados. Primeiro, das propriedades de Strauss e Bichler (1988), apenas as propriedades 3 - *a média é influenciada por cada um e por todos os valores*, a propriedade 4 - *a média não precisa, necessariamente, coincidir com um dos valores que a compõem* e a 5 - *a média pode ser um valor que não pode corresponder a um dado dentre o conjunto de dados reais*, foram contempladas de forma satisfatória e, em compensação, as demais não atingiram índices satisfatórios ou foram exploradas, mas não da forma esperada. Os livros não utilizaram valores negativos no cálculo da média e também não enfatizaram o seu caráter representativo nem sua função estatística.

Os autores ainda afirmam que a maioria dos livros faz uso constante de situações contextualizadas, nenhuma das coleções apresentou menos de 75% de suas atividades na

forma contextualizada. Porém este tratamento não é da forma desejada, resumindo-se ao cálculo mecânico.

Anjos e Gitirana ainda salientam que “uma forma não comum nos livros é a comparação entre as medidas de tendência central, moda, média e mediana, através de situações em que é necessário decidir qual delas representa melhor certa amostra, sob diferentes pontos de vista.” (2008, p.11).

Dessa forma, fica factível a importância do referido estudo para nossa pesquisa, uma vez que os autores no PNLD 2008 já iniciam um trabalho de análise do conceito de média nos livros didáticos aprovados pelo PNLD.

Bakker (2003) na Holanda realizou entrevistas exploratórias com 26 alunos dos anos finais do Ensino Fundamental em cinco salas de aulas, realizando de 12 a 15 aulas em cada sala. A pesquisa baseou-se no processo de “reinvenção guiada” defendido por Freudenthal (1991 apud BAKKER, 2003) que é coerente com o desenvolvimento histórico do conceito e leva em conta a diferença do contexto atual dos alunos e do passado histórico.

O autor selecionou exemplos da história que poderiam ser vistos em etapas e que fossem relevantes para o ensino de alunos do nível de ensino referido acima. Com base nos exemplos históricos, utilizou atividades que tocassem na mesma problemática, mas de forma a respeitar o contexto dos estudantes. Uma das atividades foi estimar o tamanho de uma grande manada de elefantes em uma imagem, pois é um contexto mais atraente para os estudantes pesquisados. Com isso pretende desafiar os alunos a desenvolver e utilizar noções intuitivas da média, para apoiar o processo de reinvenção guiada, além de trabalhar o significado representativo da média aritmética, pois tal noção de representatividade já estava presente nas tarefas de estimação dos exemplos históricos.

Outra atividade solicitava aos estudantes estimar a temperatura média na Holanda a partir de um gráfico de barras. O autor identificou a utilização espontânea dos alunos da estratégia da compensação. Os estudantes puderam perceber a média visualmente, sem cálculos, pois, da forma que a atividade foi aplicada, poderiam ir manipulando os dados. Eles entenderam que a média está em algum lugar no meio dos dados e que é fortemente influenciada por valores discrepantes (*outliers*). A hipótese de que utilizando barras, como faziam os gregos, pode ajudar os alunos a perceber que a média está entre os valores extremos é confirmada neste estudo. Além da ajuda na estratégia para estimativa visual da média, o que leva a contribuir na compreensão mais ampla da média aritmética.

Quando foi solicitado aos alunos em outra atividade explicar o que significa “que as famílias têm em média 2,5 pessoas”, diversos estudantes diziam que a família era constituída

por dois adultos e uma criança. Este é um momento em que o processo de ensino-aprendizagem segundo Bakker (2003) precisa ser revisto. Além de que fica claro a falta de compreensão da propriedade em que *a média pode ser um valor que não pode corresponder a um dado dentre o conjunto de dados reais*.

O trabalho de Bakker (2003) torna-se importante ser mencionado, uma vez que os significados, propriedades e representações discutidas no decorrer deste estudo têm conexão estrita com a gênese conceitual da média aritmética. Vergnaud (1991) pontua a importância de diferentes situações que explicitem propriedades e significados que fazem parte de determinado campo conceitual, além da exploração de diferentes representações. Bakker (2003) finaliza dizendo que um estudo histórico pode ajudar a distinguir os aspectos relacionados ao conceito e as fases intermediárias do desenvolvimento deste conceito. Em outras palavras, pode ajudar-nos as estratégias e formas de pensamento utilizadas pelos alunos.

Neste ponto, destacamos dois estudos apresentados recentemente na International Conference on Statistical Education - ICOTS-8 no ano de 2010. Tais pesquisas envolvem alunos do Ensino Fundamental e revelam o grau de compreensão deles sobre a média.

Sirnik e Kmeitè (2010) realizaram um estudo diagnóstico na Slovenia com 27 alunos do Ensino Fundamental – 13 anos e 20 alunos do Ensino Médio – 18 anos. Os estudantes resolveram um total de 10 questões. Tais questões foram criadas envolvendo três contextos diferenciados, nos quais os autores denominaram de contexto matemático, contexto do cotidiano dos estudantes e também com o contexto da Física. Sirnik e Kmeitè (2010) encontraram dificuldades dos alunos de ambos os grupos em resolver a questão que envolvia média aritmética ponderada, já que o índice de acertos ficou em 35% para os alunos do Ensino Fundamental e 48% para os alunos do Ensino Médio. Para os autores, os alunos de ambos os níveis de ensino parecem estar no mesmo nível de escolaridade quanto à compreensão do conceito de média. Os mesmos desenvolvem o algoritmo do cálculo nas atividades, mas não conseguem se sair bem nas aplicações da média principalmente nas situações do contexto cotidiano.

Os estudos de Chatzivasileiou, Michalis e Tsaliki (2010) pesquisaram o grau de compreensão do conceito de média aritmética em alunos do Ensino Fundamental, com idade entre 10 e 12 anos, correspondente a 4ª e 6ª série do Ensino Fundamental. A amostra foi composta de 208 alunos de seis escolas da região da Salónica - Grécia. Responderam ao questionário 109 alunos da 4ª série e 99 alunos da 6ª série. Os autores asseveram que os alunos

aprendem facilmente a calcular a média de um conjunto de dados, porém, eles, quando solicitados para uma reflexão maior sobre a utilização da média, não são bem sucedidos.

Com a pesquisa, os autores comprovam ainda, que os alunos de 12 anos, apresentam ausência de um pensamento estatístico mais elaborado. Os autores afirmam que as crianças parecem estar limitadas ao mero conhecimento do algoritmo do cálculo da média, que é o nível mais baixo de compreensão de um conceito.

2.6.4 No Ensino Médio e Superior

Cazorla (2003) pesquisou o nível de conhecimento sobre a média aritmética em 840 estudantes de diversos cursos de graduação da Universidade Estadual de Santa Cruz – UESC na cidade de Ilhéus-BA. A autora constatou que o nível de conhecimento de média pode ser considerado razoável, uma vez que a maioria (95,2%) dos estudantes conhecia o algoritmo da média simples, 79,5% conseguiu recalculá-la quando um novo dado era incorporado ao conjunto de dados e 86,4% conseguiu encontrar algum valor a partir do conhecimento de média e dos valores restantes. Contudo, apenas um terço dos alunos conseguiu resolver problemas de média ponderada e apenas 2,5% conseguiu interpretar adequadamente a média de uma variável discreta. A autora ainda ressalta que lacunas encontradas no entendimento conceitual da média em estudantes do Ensino Fundamental e médio, ainda persistem no ensino superior. Observa-se que se cidadãos que cursaram uma disciplina de Estatística ainda apresentam graves lacunas na leitura de informações estatísticas, provavelmente cidadãos com menor nível de instrução apresentem maiores dificuldades nesse processo.

Cobo e Batanero (2004) realizaram uma pesquisa em 22 livros didáticos destinados aos alunos do Ensino Secundário na Espanha. Investigaram sobre o significado da média aritmética, analisando situações, definições, propriedades, representações e argumentos ligados a este conceito. Os resultados encontrados pelas autoras evidenciam que os livros focalizam a média a partir do cálculo sem uma exploração de importantes propriedades da média. A pesquisa revela a ausência de elementos nos livros didáticos que podem tornar o ensino de média mais significativo, tais como atividades que explorem o significado da média como a melhor estimativa de um valor na presença de erros de medidas.

Mayén, Cobo, Batanero e Balderas (2007) investigaram em estudantes concluintes do ensino secundário no México a compreensão acerca das medidas de tendência central. As autoras aplicaram um questionário a 125 estudantes com idades entre 17 e 18 anos pertencentes a sete centros de ensino público. No que diz respeito às propriedades da média,

as autoras encontraram dificuldades dos estudantes em compreender que todos os valores do conjunto de dados influenciam no cálculo da média, bem como que a média não é a medida mais indicada quanto se tem valores atípicos. Em contrapartida, os alunos apresentaram facilidade em reconhecer problemas de estimação de uma quantidade desconhecida e problemas de distribuição equitativa associados à média aritmética. Constataram ainda que os estudantes não conseguem identificar situações em que é necessária a utilização do cálculo da média ponderada.

Um estudo desenvolvido por Garret e Cruz (2008) com 227 estudantes do Ensino Médio e universitário em Angola confirmam diferentes tipos de dificuldades encontradas pelos alunos ao conceituar média aritmética, além de observar que não existem diferenças significativas entre as respostas dos estudantes do nível secundário com a dos estudantes do nível universitários. Do total dos participantes da pesquisa 130 eram estudantes do Ensino Médio com idades variando entre 16 e 21 anos e 97 eram estudantes de uma faculdade de educação subdividindo-se em 31 estudantes de matemática e 66 de pedagogia. O autor ressaltou que tanto os alunos do Ensino Médio como os estudantes universitários cursaram disciplinas relacionadas a estatística ou no ano anterior ou no período anterior da pesquisa.

Este trabalho ainda é parte de um estudo mais amplo que os autores estão realizando sobre a média aritmética. Assim, os resultados aqui apresentados partiram de uma análise de três questões de média aritmética apresentados aos participantes da pesquisa.

Os autores encontraram resultados que revelam que os estudantes não estão familiarizados com a noção do valor atípico, pois os mesmos não têm ideia de como atuar com estes dados no cálculo da média aritmética. Observou-se também que os estudantes não reconhecem quando a média é a medida de tendência central que possui a característica de melhor estimador. Em situações onde deviam usar esta medida, preferiram a moda, que não tem a propriedade de melhor estimador (BATANERO, GODINO, GREEN, HOLMES E VALLECILOS, 1994) ou indicaram um valor que não reunia as características exigidas.

Outra dificuldade apresentada por Garret e Cruz (2008) no estudo, é que os estudantes não são conscientes de duas das sete propriedades levantadas por Strauss e Bichler (1988) que é *o da influência dos valores nulos no cálculo da média ou que a média pode ser um número decimal que não corresponde aos dados do conjunto de dados da variável*. Tanto no grupo de estudantes secundários como nos universitários, foi de 39% as respostas em que os estudantes não consideram o valor nulo afetando o resultado, além de arredondarem o valor médio encontrado para um número inteiro, o que parece mostrar que não aceitam que a média pode ser um valor decimal.

2.6.5 – Síntese dos estudos

No que diz respeito aos estudos levantados nos anos iniciais do Ensino Fundamental destacamos que nos estudos de Strauss e Bichler (1988), os autores encontraram que os alunos dos anos iniciais apresentaram maiores dificuldades nas propriedades *P2 – a soma dos desvios a partir da média é igual a zero*, *P6 – no cálculo da média, devem ser incluídos os valores nulos e os negativos* e *P7 – a média é um valor representativo dos dados, ou seja, é o valor que está mais próximo de todos (aspecto espacial)*. Nos estudos de Melo (2010) fica evidente o fato de que no caso dos alunos não são observadas diferenças significativas na compreensão da média entre os níveis de escolaridade do 3º e 5º anos. Nesta pesquisa também é afirmada a dificuldade dos alunos com relação à propriedade *P7 – a média é um valor representativo dos dados a partir dos quais ela foi calculada*. O referido estudo ainda aponta dificuldades no que diz respeito à compreensão da média com relação aos significados e representações deste conceito. A dificuldade de compreensão do conceito de média em alunos e professores do ensino primário foi constatado em pesquisa realizada por Magina et al (2008). As autoras identificaram professores primários em exercício da profissão que apresentam concepções sem validade estatística com respeito à média. A propriedade *P4 – a média não precisa, necessariamente, coincidir com um dos valores que a compõem*, não era bem compreendida por vários sujeitos da pesquisa.

Nos anos finais, Anjos e Gitirana (2008) constataram que, das propriedades da média, poucas são exploradas de forma satisfatórias pelos livros didáticos, além do que, as que atingem maiores índices de abordagem, não são exploradas da forma esperada, com vistas a uma compreensão da média enquanto conceito estatístico. Bakker (2003) ao realizar um estudo com alunos dos anos finais defende a importância da historicidade do conceito da média aritmética. O autor destaca a falta de compreensão dos alunos com relação a propriedade *P5 – a média pode ser um valor que não pode corresponder a um dado dentre o conjunto de dados reais*. Os estudos de Sirnik e Kmeitè (2010) e Chatzivasileiou et al (2010) apontam as dificuldades na compreensão do conceito de média. Os alunos conseguem se sair bem em atividades envolvendo apenas o algoritmo da média, mas não são bem sucedidos quando se solicita uma reflexão maior sobre o conceito.

No Ensino Médio e Superior, foram observados que os alunos não apresentam significativas diferenças com relação à compreensão da média aritmética. Em ambos os níveis, as dificuldades de compreensão são semelhantes, tais como a ideia de não aceitar que a

média pode ser um valor decimal, contrariando a propriedade *P5* – *a média pode ser um valor que não pode corresponder a um dado dentre o conjunto de dados reais*, além dos casos em que a média não é a medida mais indicada quando se tem valores atípicos. Ainda, com a pesquisa de Cobo e Batanero (2004) pudemos observar que os livros destinados ao Ensino Secundário na Espanha não exploram propriedades importantes do conceito de média.

Desde as pesquisas citadas sobre a historicidade do conceito da média aritmética, até os estudos focalizados por níveis de ensino, demonstram, por um lado, a importância da compreensão da função estatística da média aritmética pelos estudantes, e, por outro lado, demonstra as fragilidades e lacunas no ensino-aprendizagem deste conceito. Os referidos estudos têm contribuição significativa para nossa pesquisa por apresentar resultados de pesquisas que corroboram os nossos resultados, como poderemos ver adiante.

A Teoria dos Campos Conceituais

3.1 – A Teoria dos Campos Conceituais

Uma vez que a pesquisa tem como objetivo fazer uma análise censitária do conteúdo de média aritmética nos livros didáticos pertencentes ao PNLD 2011, precisa-se contar com uma teoria que ofereça possibilidades de compreensão da formação conceitual da média aritmética a qual integra, junto com a moda e mediana, as medidas de tendência central. Assim, a pesquisa tem como sustentação a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1991).

A Teoria dos Campos Conceituais tem contribuído de forma significativa com o campo da Educação Matemática, ajudando no entendimento de educadores e pesquisadores com relação ao desenvolvimento e a formação dos conceitos matemáticos pelos estudantes. Os conceitos matemáticos traçam seus sentidos a partir de uma variedade de situações, e cada situação normalmente não pode ser analisada com a ajuda de apenas um conceito. Conjunto de conceitos inter-relacionados com conjuntos de situações (MAGINA, CAMPOS, NUNES E GITIRANA, 2001).

Vergnaud, em sua teoria, faz uma delimitação do significado de situação, entendendo-a como um fator que influencia os processos cognitivos e as respostas dos sujeitos. Considera duas ideias principais:

1. a ideia de variedade: existe uma grande variedade de situações num dado campo conceitual, e as variáveis de situação são um meio de gerar de forma sistemática o conjunto das classes possíveis.
2. a ideia de história: os conhecimentos dos alunos são formados pelas situações com que eles depararam e que progressivamente dominaram, nomeadamente pelas primeiras situações susceptíveis de dar sentido aos conhecimentos e aos procedimentos que pretende ensinar-lhes (VERGNAUD, 1991, p. 171).

Vergnaud salienta que deve ser um objetivo prioritário, na investigação em didática, investigar, analisar e diversificar, tão exaustivamente e quanto possível, as situações-problemas que confere significação e função a um conceito (VERGNAUD, 1982, p.76). Logo, percebemos a importância de aprofundar a epistemologia de um conceito, isto é, de

aprofundar a gênese conceitual do conhecimento em referência. Para a compreensão do desenvolvimento de um saber e a devida apropriação pelos estudantes, é de relevante importância o estudo de conjuntos vastos de situações e conceitos ou como denominado “os campos conceituais”.

Campo conceitual é, para Vergnaud, “um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição” (MOREIRA, 2002, p. 4). Não é, no entanto, uma teoria de ensino de conceitos explícitos e formalizados. A sua principal finalidade é fornecer um quadro que permita compreender as filiações e as rupturas entre conhecimentos, nas crianças e nos adolescentes, entendendo por conhecimentos, tanto o saber fazer como os saberes expressos (VERGNAUD, 1991, p. 155). A teoria dos campos conceituais é uma teoria considerada *neopiagetiana*, e retoma em seus estudos os princípios da teoria dos estágios. Segundo Franchi (1999, pg. 133),

é uma teoria cognitivista que visa a fornecer um quadro coerente e alguns princípios de base para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem de competências complexas, notadamente das que relevem das ciências e das técnicas.

A operacionalidade de um conceito abrange uma diversidade de situações manifestando-se sob uma variedade de ações e esquemas (FRANCHI, 1999). Pode-se dizer que as competências matemáticas são sustentadas por esquemas organizadores da conduta (VERGNAUD, 1991, p. 157).

Vergnaud considera a formação de um conceito a partir do trigêmio de três conjuntos (1991):

S: conjunto das *situações* que dão sentido ao conceito;

I: conjunto de *invariantes* (objetos, propriedades e relações) sobre os quais repousa a operacionalidade do conceito ou o conjunto de invariantes que podem ser reconhecidos e usados pelos sujeitos para analisar e dominar as situações do primeiro conjunto;

R: conjunto de *representações simbólicas* (linguagem natural, gráficos e diagramas, sentenças formais, etc.) que podem ser usadas para indicar e representar esses

invariantes e, conseqüentemente, representar as situações e os procedimentos para lidar com elas.

Essa terna pode ainda ser apresentada a partir do ponto de vista da psicologia, levando em conta os elementos básicos da função simbólica. Assim, se expressa como apresentado em Magina et al (2001, p. 9):

“S referindo-se à realidade ou referente;
(I,R) referindo-se à representação.”

No que concerne ao conjunto das situações que dão sentido ao conceito, ou seja, o referente, o sentido não está nele mesmo. O sentido será construído na relação do indivíduo com as situações e os significantes. Vergnaud esclarece ainda mais esta afirmação ao dizer que “mais precisamente, são os esquemas evocados, no sujeito individual, por uma situação ou um significante que constituem o sentido dessa situação ou desse significante para esse indivíduo” (1991, p.179).

Como apresenta Moreira (2002), a ideia de campo conceitual envolve o tripleto: referente, significado e significante; porém, como são as situações que dão sentido ao conceito, chegamos ao conceito de situação e dele ao de esquema, pois são os esquemas evocados no sujeito que dão sentido a uma dada situação. Vergnaud chama de esquema a organização invariante do comportamento para uma determinada classe de situações (VERGNAUD, 1991, p. 157). Segundo ele, é nos esquemas que se devem pesquisar os conhecimentos-em-ação do sujeito, isto é, os elementos cognitivos que fazem com que a ação do sujeito seja operatória. “Não é o comportamento que é invariante, mas a organização do comportamento” (VERGNAUD, 1998, p. 172). Os invariantes “são expressos por palavras e/ou outras representações simbólicas” (Magina et al, 2001, p. 12).

Como componentes dos esquemas, os invariantes podem ser implícitos, quando estão ligados aos esquemas de ação do aluno, ou explícitos, quando estão ligados a uma concepção. Nesta pesquisa, ao investigar os invariantes do conceito, estaremos nos referindo aos invariantes explícitos.

As expressões conceito-em-ação e teorema-em-ação designam os conhecimentos contidos nos esquemas. São também designados, por Vergnaud, pela expressão mais global invariantes operatórios. “Teorema-em-ação é uma proposição considerada como verdadeira sobre o real; conceito-em-ação é uma categoria de pensamento considerada como pertinente”

(VERGNAUD, 1998, p. 172). Há uma relação dialética entre conceitos-em-ação e teoremas-em-ação, uma vez que conceitos são ingredientes de teoremas e teoremas são propriedades que dão aos conceitos seus conteúdos, mas seria um erro confundi-los (1998, p. 174). Moreira (2002) afirma que esquemas são fundamentais porque geram ações, incluindo operações intelectuais, mas podem gerá-las porque contêm invariantes operatórios (teoremas e conceitos-em-ação) que formam o núcleo da representação.

Neste sentido, a Teoria dos Campos Conceituais é uma ferramenta poderosa para a referida análise das atividades apresentadas, investigando invariantes, significados e representações, e como os livros didáticos propiciam a formação do conceito de média aritmética a partir das atividades.

Apresentamos como exemplo um campo conceitual da média aritmética e que vamos desenvolver neste estudo.

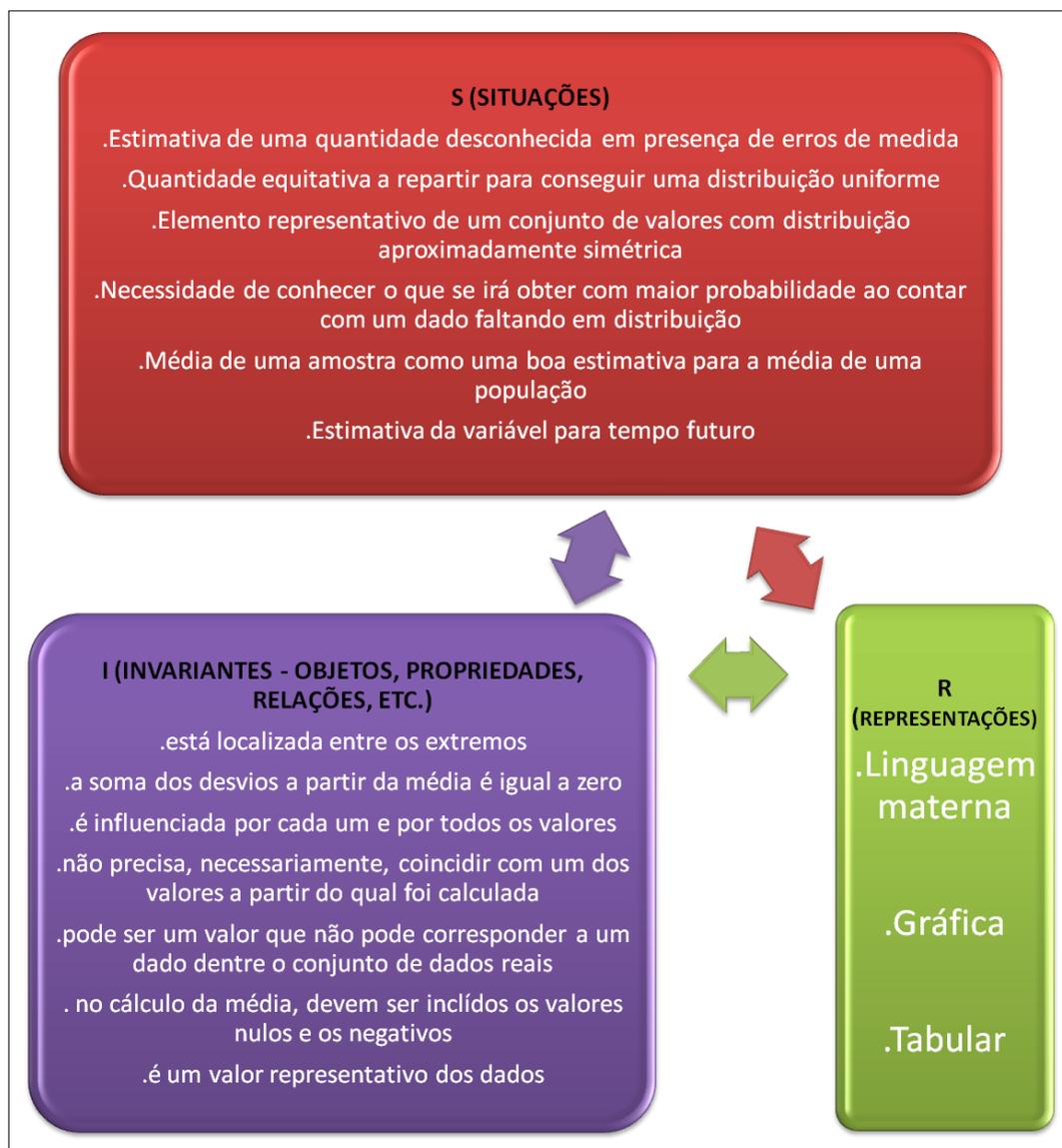


Figura 6: Exemplo de Campo Conceitual da Média Aritmética

Como posto na figura o triplete formado pelo S;I;R estão interligados no momento da aquisição e construção do conhecimento. Um campo conceitual para a média aritmética requer um conjunto vasto de situações que conferem significados a este conceito, como por exemplo, a média como estimativa da variável para tempo futuro. Requer o uso de representações simbólicas, como os gráficos, linguagem materna e/ou tabelas, onde contêm os invariantes operatórios que repousam os teoremas-em-ação e os conceitos-em-ação.

Analisando as situações que conferem significado ao conceito, os invariantes operatórios e as representações deste conceito, empregadas nas atividades dos livros didáticos, poderemos tecer o campo conceitual da média aritmética nos livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental. É preciso clarificar que, no que concerne aos invariantes operatórios, estaremos focalizados nos invariantes operatórios prescritos do conceito – as propriedades, uma vez que estamos trabalhando com as atividades dos livros didáticos e não com a organização invariante do sujeito em ação.

3.1.- Invariantes operatórios prescritos do conceito de Média Aritmética

Na Teoria dos Campos Conceituais, as propriedades de um conceito estão inseridas no conjunto dos invariantes operatórios. Em nosso estudo não estamos analisando a organização invariante do sujeito em ação, mas a organização operatória nas atividades, ou seja, se o livro didático dá condições para que o aluno construa o campo conceitual. Assim, tratamos as propriedades como a parte prescrita dos invariantes operatórios ligados ao conceito de média. Segundo Strauss e Bichler (1988), as propriedades essenciais para a construção do conceito de média englobam três aspectos:

- Aspecto Estatístico – essas propriedades são fundamentais para a média aritmética como uma função matemática.
1. A média está localizada entre os valores extremos da distribuição (valor mínimo < média < valor máximo).

O valor da média estará sempre entre o menor e o maior valor do conjunto de dados. Segue um exemplo: analisando a altura de todos os jogadores de um time de futebol e

desejando obter a média da altura dos jogadores, essa média com certeza estará entre a altura do jogador mais baixo e a altura do jogador mais alto.

2. A soma dos desvios dos dados em relação à média é zero.

$$\left[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \right] = 0$$

Se a média de 3, 5 e 7 é 5, então ocorre que $(3-5) + (5-5) + (7-5) = 0$. Esta propriedade provém do cálculo que os gregos faziam para encontrar a média aritmética: a média b de a e c seria um número b que cumprisse a equação $a - b = b - c$.

3. A média é influenciada por cada um e por todos os valores.

$$(MÉDIA = \frac{\sum x_i}{n}).$$

Assim, se um valor for modificado, a média será alterada; ou também se um valor for adicionado ou excluído do conjunto, a média também será alterada. Exceção para os casos em que esse valor seja igual à média, logo a mesma não se altera - este aspecto diz respeito à condição de “robustez”. Por exemplo: A idade de 5 adolescentes correspondem à 12 anos, 13 anos, 13 anos, 15 anos e 17 anos. A média das idades é de 14 anos. Se algum destes valores for alterado, a média também será alterada; da mesma forma que se excluirmos ou adicionarmos mais algum valor, a média também será modificada.

- Aspecto Abstrato

4. A média não precisa, necessariamente, coincidir com um dos valores que a compõem.

Podem ocorrer que a média seja um valor que não pertença ao conjunto numérico dos elementos levados em conta na realização do cálculo, ou seja, pode ser diferente dos valores do conjunto em questão. Utilizando o exemplo acima, a idade 14 anos não pertence ao conjunto dos valores da amostra.

5. A média pode ser um valor que não pode corresponder a um dado dentro o conjunto de dados reais.

Refere-se ao fato de que a média pode assumir um valor, em forma de decimal ou fração, que o valor da média não possa ser igual a um valor real do conjunto de dados. Um exemplo típico é o cálculo da média do número de filhos por família ou o número de irmãos que cada aluno possui em uma sala de aula. Um resultado tipo: 1,8 filhos, não tem sentido na vida real, mas mostra a característica representativa que a média possui.

6. No cálculo da média, devem ser incluídos os valores nulos e os negativos.

No cálculo da média deve considerar todos os valores nulos e negativos. Por exemplo, ao calcular a quantidade média de filhos por família que uma cidade possui, devemos incluir no cálculo da média todas as famílias que não têm filho.

- Aspecto Representativo

7. A média é um "representante" dos dados a partir da qual foi calculado, ou seja, é o valor que está mais próximo de todos os demais dados (aspecto espacial).

Pode-se dizer que o valor da média é o valor que está mais próximo de todos os outros no conjunto de dados que estão sendo calculados. É uma propriedade fundamental, pois trata a média sob o aspecto espacial. Essa propriedade sugere também os casos em que a média aritmética não é o melhor valor que representa um conjunto e, neste caso, devemos optar por outras medidas de tendência central tais como a moda ou mediana para melhor representá-los.

A seguir trabalharemos com os significados que dão sentido ao conceito de média.

3.3 – Os significados da média aritmética

Com base nos estudos de BATANERO (2000), apresentamos os significados em que o conceito de média aritmética progressivamente emerge:

1. Estimação de uma quantidade desconhecida na presença de erros de medição – cálculo da melhor estimativa de um valor desconhecido.

Um objeto pequeno é pesado com um mesmo instrumento por oito estudantes de uma classe, obtendo-se os seguintes valores em gramas: 6,2; 6,0; 6,3; 6,1; 6,23; 6,15; e 6,2. Qual seria a melhor estimativa do peso real do objeto?

Segundo Batanero (2000), em muitas situações, necessitamos medir uma quantidade x desconhecida de certa magnitude. Porém, devido à imperfeição dos instrumentos, com medições sucessivas, obtemos distintos valores como medidas de x . Problemas similares eram resolvidos em várias áreas do conhecimento, como a astronomia, a navegação e a metalurgia. O procedimento empregado era a observação sucessiva e em seguida a soma total destas observações era dividida pelo número de dados.

2. Necessidade de obter um valor justo/equitativo para uma distribuição uniforme.

Algumas crianças trazem doces para sala de aula. André leva 5, Maria 8, José 6, Carmem 1 e Daniel não leva nenhum. Como repartir os doces de forma equitativa?

Quando precisamos obter uma quantidade equitativa a repartir para conseguir uma distribuição uniforme, como no exemplo acima, utilizamos a média aritmética. Este significado tem haver com partes justas/valor equitativo (tradução nossa de “fair share”) no comércio e em contextos de seguros.

3. Servir de elemento representativo de um conjunto de dados, cuja distribuição é simétrica.

Ao medir a altura em cm, que podem saltar um grupo de estudantes, antes e depois de realizado um treinamento esportivo, se obteve os valores abaixo. O treinamento é efetivo, o que achas?

ALTURA SALTADA EM CM.										
ALUNO	ANA	BIA	CAROL	DIANA	ELENA	FANNY	GIA	HILDA	INES	JUANA
ANTES DO TREINAMENTO	115	112	107	119	115	138	126	105	104	115
DEPOIS DO TREINAMENTO	128	115	106	128	122	145	132	109	102	117

Devido a sua propriedade de localização central, toma-se a média para representar um conjunto de dados. Se o conjunto for formado por valores muito discrepantes, ou seja, uma

distribuição assimétrica, é mais recomendável o uso da moda ou mediana. Devido a limitações deste tipo, outros conceitos atrelam-se ao conceito da média aritmética constituindo as medidas de tendência central.

4. Valor mais provável quando aleatoriamente tomamos um elemento de uma população.

A altura média dos alunos de um colégio é de 1,40m. Se extraímos uma mostra aleatória de 5 estudantes, resultando que a altura dos quatro primeiros é de 1,38m; 1,42m; 1,60m e 1,40m. Qual será a altura mais provável do quinto estudante?

Outros exemplos seriam o cálculo da esperança de vida ou o benefício esperado em um investimento. Para Batanero (2000) do conceito de valor esperado se derivam muitos modelos de predição, com tipos distintos de regressão.

Agora apresentaremos as situações que não se encaixam nas situações apresentadas por Batanero (2000) e a forma, como categorizamos, também será explicitada logo abaixo.

5. A média de uma amostra como uma boa estimativa para a média de uma população.

Esta situação surge com base em um exemplo de Vergnaud explicitado em um curso sobre a Teoria dos Campos Conceituais (2010) levantando a ideia de média como elemento para se encontrar o total numa região triangular. Segue o exemplo citado:

- Contando as cadeiras de um estádio?

Uma solução seria dividir o estádio em setores como apresentado na figura abaixo:

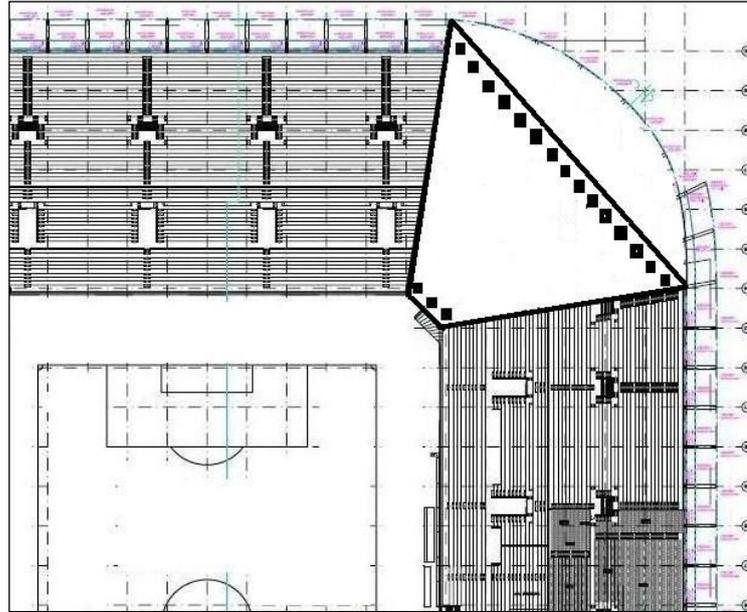


Figura 7: Exemplo da área triangular em um estádio de futebol

Como encontrar o total de cadeiras no setor triangular determinado sem precisar contar uma a uma as cadeiras?

Para contar a quantidade das cadeiras em uma região triangular pode-se tirar a média somando a quantidade de cadeiras na fileira superior e a quantidade da fileira inferior: média = (s.máximo + s.mínimo) / 2. Com o valor da média multiplica-se pelo quantitativo de fileiras e encontramos a quantidade total.

Refletindo sobre tal questionamento, desenvolvemos a ideia da Progressão Aritmética de n termos, resultando na resolução abaixo.

Iniciando com a adição de n termos

$$1 + 2 = 3$$

$$1 + 2 + \dots + n = \left(\frac{n+1}{2}\right) \cdot n$$

$$1 + 2 + \dots + (n-1) + n = \left(\frac{(n-1)+1}{2}\right) \cdot (n-1) + n$$

$$\begin{aligned} &= \frac{[(n-1)+1] \cdot (n-1) + 2n}{2} \\ &= \frac{n(n-1) + 2n}{2} \end{aligned}$$

Da Progressão Aritmética temos que

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_n = a_1 + (n - 1).r$$

Em toda P.A. de número ímpar de termos, o termo central ou termo médio é a média aritmética dos extremos.

$$\frac{a_1 + a_n}{2} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

Substituindo $a_2 \dots a_n$ pelo respectivo termo, ficamos com

$$= \frac{a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) + \dots + (a_1 + (n - 1).r)}{n}$$

e colocando r em evidência

$$= \frac{na_1 + (1 + 2 + \dots + (n - 1)).r}{n}$$

Substituindo o coeficiente de r , que definimos anteriormente ficamos com

$$= \frac{na_1 + \left[\left(\frac{(n - 1) + 1}{2} \right) \cdot (n - 1) \right] \cdot r}{n}$$

$$= \frac{na_1 + \left[\frac{n(n - 1)}{2} \right] \cdot r}{n}$$

Dividindo tudo por n , temos

$$= a_1 + \frac{(n - 1).r}{2} \quad \text{operando com o m.m.c.}$$

$$= \frac{2a_1 + (n - 1).r}{2} = \frac{a_1 + [a_1 + (n - 1).r]}{2}$$

$$= \frac{a_1 + a_n}{2}$$

E assim, chegamos na fórmula do termo médio como queríamos demonstrar.

Logo, chamando de A_n a soma dos termos inferiores e B_m a soma dos termos superiores, ficamos com

$$\frac{A_1 + \dots + A_n}{n} + \frac{B_1 + \dots + B_m}{m} = \frac{m(A_1 + \dots + A_n) + n(B_1 + \dots + B_m)}{(n \cdot m) \cdot 2}$$

Demonstrando assim que a média aritmética é uma boa medida para se encontrar uma quantidade total.

Quando tomamos a média do valor máximo e do mínimo, ou seja, o ponto médio, consideramos que ele é a média do grupo todo. Em outros casos, podemos considerar que é uma boa aproximação da média do grupo todo, para se estimar o todo.

No caso de Vergnaud, não se calcula a média. Utiliza-se a média de dois casos e observando a distribuição dos objetos, sabe-se que coincide com a média do grupo, pois é uma distribuição nos moldes de uma Progressão Aritmética. A média utilizada não é a média do grupo todo (no caso do exemplo: de todas as cadeiras), é a média de outro grupo, mas que coincide com a média do grupo todo.

Assim temos a média de um grupo como um bom representante de outro grupo, ou mesmo, para estimar a média de outro grupo.

Se entendermos os valores máximos e mínimos como uma amostra, podemos dizer que a partir de uma amostra fez-se uma inferência para a população. A média da amostra torna-se uma boa estimativa para a média da população.

Ainda, o que acontece na Progressão Aritmética é que os pontos extremos são excelentes amostras, pois a média dos extremos coincide exatamente com a média da população.

O ponto-chave é que você transfere a média de um grupo (amostra) para outro (população) e funciona por que a distribuição é do tipo progressão aritmética. Essencialmente é um elemento representando o outro – estatística inferencial, mas utilizando elementos matemáticos.

Desta forma, denominamos essa situação como “a média de uma amostra como uma boa estimativa para a média de uma população.”

6. A média como uma estimativa da variável para tempo futuro.

Este significado foi levantado mediante o estudo das atividades das coleções em análise.

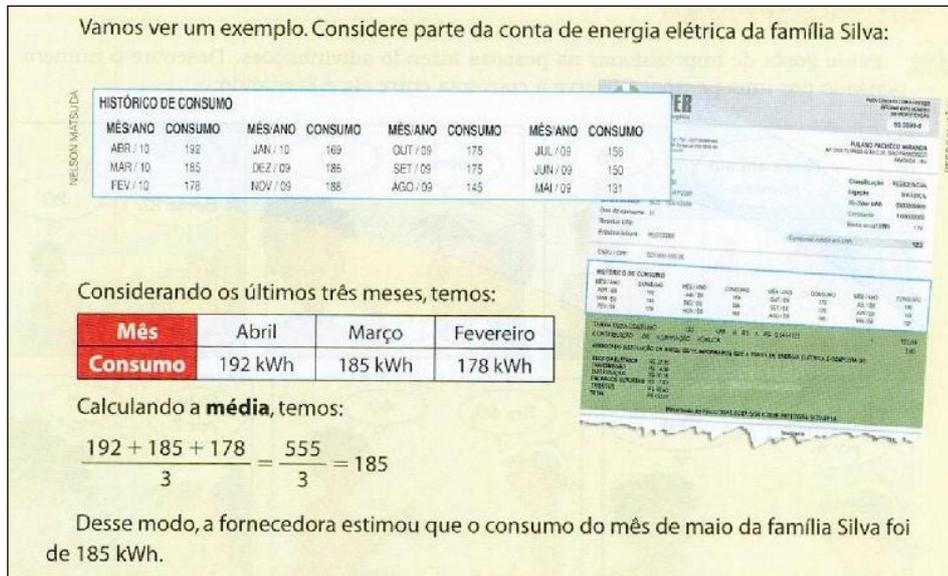


Figura 8: Média como estimativa da variável para tempo futuro.

(Fonte: Coleção 24799, vol.7, p.116.)

Para estimar o valor do consumo do mês de maio é calculada a média dos três meses anteriores. Este mês seguinte ainda não é concreto, é uma projeção que pode ou não acontecer, ou seja, uma extrapolação temporal. Como se pode observar na atividade a média é utilizada como uma previsão para um tempo futuro, uma extrapolação temporal. Desta forma compreendemos que a referida situação abarca um significado que não se adéqua aos outros significados trabalhados.

O PROGRAMA NACIONAL DO LIVRO DIDÁTICO – PNLD

A definição do termo “Livro Didático” se dá pela primeira vez na década de 30, em virtude do Decreto-Lei nº 1.006 de 30 de dezembro de 1938. Nesta época, o livro didático é convencionado como o livro destinado à escola, com objetivo de ensinar e cuja proposta deve obedecer aos currículos educacionais do país. Desta forma, os livros didáticos se constituem como um artefato tecnológico com propósito de ensinar os conhecimentos construídos ao longo do desenvolvimento da humanidade.

Os livros didáticos desempenham um papel essencial no sistema escolar, sendo assim, motivo de inúmeras pesquisas acadêmicas. No dia-a-dia da sala de aula, o livro didático tornou-se uma ferramenta ímpar no trabalho do professor, e na maioria das vezes, a única ferramenta pedagógica. É exatamente isto que Guimarães, Gitirana, Cavalcanti e Marques descrevem no trecho abaixo.

O livro didático se constitui em um importante recurso utilizado por professores na condução e/ou elaboração das abordagens de ensino, em parte pela ausência de outros materiais que orientem os professores sobre o quê e como ensinar, e em parte pela frequente dificuldade de acesso do aluno a outras fontes de estudo e pesquisa (GUIMARÃES et al, 2008, p. 3).

Com as indicações constantes nos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCNs urge identificar se os livros didáticos estão ou não incorporando os novos paradigmas educacionais, principalmente com relação ao ensino-aprendizagem do Tratamento da Informação, em nosso caso, particularmente o da média aritmética.

Lopes afirma a respeito do livro didático que,

ele sempre representou – e continua representando – para o professor, o complemento de sua formação acadêmica e o apoio na prática escolar, principalmente pelas condições de trabalho, não tão favoráveis, que o professor enfrenta (2000, p. 224).

A importância do livro didático aumenta de forma significativa em países como o

Brasil, onde temos ainda uma situação educacional precária com relação às diversas tecnologias de ensino, fazendo com que ele condicione e determine conteúdos e estratégias de ensino. De forma histórica e cultural se associou uma imagem do professor dependente do livro didático. Silva descreve esta reflexão.

Não é a toa que a imagem estilizada do professor apresenta-o com um livro nas mãos, dando a entender que o ensino, o livro e o conhecimento são elementos inseparáveis, indicotomizáveis. E aprender, dentro das fronteiras do contexto escolar, significa atender às liturgias dos livros (...) (SILVA, 1996, p.8).

O mesmo autor ainda acrescenta que “De meio (que deveria ser), o livro didático passa a ser visto e usado como um fim em si mesmo” (SILVA, 1996, p.8).

Após o decreto acima mencionado, uma série de leis e outros decretos estabeleceram políticas para a produção e distribuição dos livros didáticos.

Observando o livro didático como um elemento referencial com relação ao saber a ser ensinado, bem como, um condutor dos conteúdos e processos envolvidos na prática pedagógica do professor, torna-se pertinente analisar como a média aritmética está organizada e estruturada nos livros didáticos, destinados às escolas públicas brasileiras.

Com a criação dos PCNs, pelo Ministério da Educação, com objetivos de reorganização do currículo de matemática no Ensino Fundamental, acaba-se também orientando os autores dos livros didáticos nas reformulações necessárias dos mesmos. Todavia, essa influência dos PCNs não se manifesta de forma brusca em todas as coleções, mas de forma processual e com diferentes abordagens entre as coleções.

No Brasil, o Programa Nacional do Livro Didático – PNLD desde o ano 1999 publica o Guia Nacional do Livro Didático. As coleções são analisadas com base em critérios estabelecidos que visem as adequações de aspectos teórico-metodológicos, estrutura editorial e manual do professor.

Cabe a Secretaria de Educação Básica ligada ao Ministério da Educação, a coordenação do processo de avaliação das obras inscritas no PNLD. O guia é publicado a cada 03 anos contendo as resenhas das coleções aprovadas. Como apresentado no próprio guia, o mesmo é a etapa final de um longo e cuidadoso processo de avaliação, que reúne professores de diversas instituições educacionais de várias regiões de nosso país, todos eles com larga experiência no ensino-aprendizagem da matemática escolar (GUIA DE LIVROS DIDÁTICOS, 2010, p.11).

Friolani (2007) discorre que as análises dos livros didáticos começaram em 1995, mas só em 1999 que ocorre a análise dos primeiros livros didáticos destinados às séries na época denominadas de 5^a a 8^a série, com a respectiva publicação do guia classificando as obras como: recomendadas com distinção; recomendadas; recomendadas com ressalvas e excluídas. Após um período de interrupção, só voltam a ser analisadas em 2002. Daí em diante à cada três anos é publicado um novo guia para atender ao PNLD que após a escolha do professor envia os livros para as escolas públicas do Brasil. Em 2005 deixa de existir as menções citadas acima e as obras passam a ser aprovadas ou excluídas.

No caso de matemática, para os anos finais do Ensino Fundamental temos que em 2002 o PNLD recomenda 13 coleções, em 2005 aprova 23 coleções e em 2008 aprova 16 coleções. No PNLD 2011 esse número fica em 10 coleções.

O guia do PNLD 2011 destaca que um dos aspectos fundamentais da Matemática é a diversidade de formas simbólicas presentes em seu corpo de conhecimentos. Linguagem natural, linguagem simbólica, desenhos, gráficos, tabelas, diagramas, ícones, entre outros, desempenham papel central, tanto na representação dos conceitos, relações e procedimentos, quanto na própria formação desses conceitos. No tocante ao Tratamento da Informação, o qual inclui estatística, probabilidade e combinatória, o guia discorre que são cada vez mais relevantes questões relativas a dados da realidade física ou social, que precisam ser coletados, selecionados, organizados, apresentados e interpretados criticamente. Fazer inferências com base em informações qualitativas ou dados numéricos e saber lidar com os conceitos de chance e de incerteza também são competências de grande utilidade que os livros didáticos devem explorar. Um conceito nunca é isolado, mas se integra a um conjunto de outros conceitos por meio de relações, das mais simples às mais complexas.

Apresentamos abaixo a distribuição dos campos da matemática no PNLD 2011.

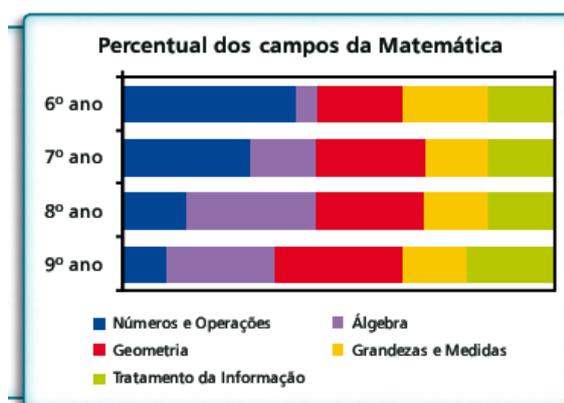


Figura 9: Percentual das obras dedicadas a cada um dos campos.

Em relação ao Tratamento da Informação e aos outros eixos de conteúdos matemáticos (números e operações, álgebra, geometria e grandezas e medidas), o PNLD 2011 adotou como satisfatório em torno de 10% do trabalho com este conteúdo. O quadro abaixo apresenta todas as coleções de livros aprovados no PNLD 2011.

Número	Coleção	Autores	Editora
24799	Matemática	Edwaldo Bianchini	Moderna
24802	A Conquista da Matemática – edição renovada	José Ruy Giovanni Jr. e Benedicto Castrucci	FTD
24810	Aplicando a Matemática	Reis e Trovon	Casa Public. Brasileira
24928	Matemática Ideia e Desafios	Iracema e Dulce	Saraiva
24929	Novo Praticando Matemática	Imenes e Lellis	Moderna
24931	Matemática e Realidade	Iezzi, Dolce e Machado	Saraiva
24935	Matemática na Medida Certa	Jacobovick e Centurión	Scipione
24993	Projeto Radrix	Jackson da Silva Ribeiro	Scipione
25014	Tudo é Matemática	Luiz Roberto Dante	Ática
25020	Vontade de Saber Matemática	Souza e Pataro	FTD

Quadro 1: Lista das coleções aprovadas no PNLD 2011

Metodologia

Neste capítulo apresentaremos os procedimentos metodológicos empregados na análise dos livros didáticos, com a finalidade de responder nossa questão de pesquisa: Como se dá a abordagem da média aritmética, ancorada na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1991), nas coleções de livros didáticos de matemática dos anos finais aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático – PNLD 2011?

No Brasil, já existe uma tradição de avaliação dos livros didáticos que é o Programa Nacional do Livro Didático – PNLD, conforme apresentado no capítulo anterior. Logo, partimos do princípio de uma primeira avaliação qualitativa dos livros que é dada por este programa nacional que avalia e escolhe livros para a escola pública. Por mais um motivo da defesa da escola pública de qualidade vamos olhar para esse livro que é destinado a ela. Assim, o PNLD torna-se um critério de escolha dos livros didáticos editados no Brasil.

Do ponto de vista dos procedimentos de coleta de dados, caracteriza-se como uma pesquisa documental feita a partir da análise de materiais já publicados como é o caso dos livros didáticos.

Dentro da perspectiva de obtenção de um panorama geral da abordagem da média aritmética nos livros, decidiu-se por uma estatística censitária, na qual todos os quatro volumes pertencentes a todas as coleções aprovadas foram analisados, perfazendo um total de 40 volumes de 10 coleções de livros didáticos, cada uma com 4 volumes.

Foram contabilizadas 454 atividades dentro e fora dos capítulos e/ou seções destinados ao Tratamento da Informação. Apesar de denominar atividades, nelas incluímos exemplos, exercícios a resolver, exercícios resolvidos e explicações teóricas. Observamos todas as atividades que trabalham com as medidas de tendência central – mesmo quando a atividade solicitava apenas o cálculo.

Como a base teórica da pesquisa é a Teoria dos Campos Conceituais, apresentamos aqui os passos para a abordagem dos elementos que configuram a teoria, ou seja, os invariantes, significados e representações. Para análise dos invariantes tomamos por base os estudos de Strauss e Bichler (1988) que apresentam sete propriedades, invariantes do conceito de média aritmética. São elas:

1. A média está localizada entre os valores extremos
(menor valor < média < maior valor).
2. A soma dos desvios a partir da média é igual a zero.
3. A média é influenciada por cada um e por todos os valores.
4. A média não precisa, necessariamente, coincidir com um dos valores a partir do qual foi calculada.
5. A média pode ser um valor que não pode corresponder a um dado dentro o conjunto de dados reais.
6. No cálculo da média, devem ser incluídos os valores nulos e os negativos.
7. A média é um valor representativo dos dados, ou seja, é o valor que está mais próximo de todos (aspecto espacial).

Em relação aos significados, Batanero (2000) pontua quatro significados do conceito de média, a saber:

- a média como uma estimativa de uma quantidade desconhecida, em presença de erros de medida;
- a média como uma quantidade equitativa a repartir, para conseguir uma distribuição uniforme;
- a média como elemento representativo de um conjunto de valores dados;
- a média como necessidade de conhecer o valor que se irá obter com maior probabilidade, ao contar com um dado faltando em uma distribuição.

Além dos significados apresentados por Batanero (2000) acrescentamos mais três significados conforme descrição abaixo:

- A média de uma amostra como uma boa estimativa para a média de uma população – a partir de um curso realizado com Vergnaud no ano de 2010.
- a média como uma estimativa da variável para tempo futuro – a partir da análise das atividades.
- a média com significado procedimental – para os casos em que a atividade solicita apenas o procedimento de cálculo sem contextualização.

No que concerne às representações utilizadas nas atividades, as categorias de análise foram construídas mediante o contato com as atividades, são elas:

1. Linguagem materna
2. Quadro e/ou rol de dados
3. Gráfico de barras ou colunas
4. Tabela de frequências
5. Gráficos de linha
6. Pictogramas
7. Gráfico de setores

Porém, para uma melhor análise desta variável reagrupamos os dados em 3 categorias mais abrangente, tais como descrito abaixo. Acatamos tanto quando a atividade utilizava a referida representação ou se solicitava ao estudante tal representação na resolução das atividades.

1. Linguagem materna
2. Representação gráfica
3. Representação tabular

O processo de análise desenvolveu-se em três momentos:

 1º Momento:

Com a finalidade de atender ao objetivo de fazer o mapeamento das atividades de média nos livros didáticos a partir dos conjuntos dos invariantes operatórios prescritos, significados e representações, procedemos aos seguintes passos:

- Piloto com os dados do PNLD 2008.
- Leitura das resenhas das 10 coleções dos livros didáticos de matemática aprovados pelo PNLD 2011.
- Seleção dos capítulos e/ou seções destinados ao bloco Tratamento da Informação.

- Leitura aprofundada dos capítulos e/ou secções que tratam do tema identificando as atividades que abordam a média aritmética.
- Seleção das atividades que aparecem fora dos capítulos e/ou secções destinados ao bloco Tratamento da Informação.
- Identificação das atividades que utilizam a média apenas como um contexto, estas atividades foram contabilizadas separadas do quantitativo das atividades analisadas.
- Categorização das atividades com relação aos invariantes prescritos (propriedades), significados e representações envolvidas com base no quadro teórico já explicitado. A categorização foi realizada nas atividades tanto dentro dos capítulos e/ou secções destinados ao bloco Tratamento da Informação bem como nas atividades que aparecem fora dos capítulos e/ou secções destinados ao bloco Tratamento da Informação.

2º Momento:

Aqui, focalizamos o objetivo do mapeamento dos contextos e tipos de variáveis das atividades de média nos livros. Assim com as atividades já selecionadas nos procedimentos anteriores procedemos aos seguintes passos:

- Categorização dos contextos das atividades. As categorias foram criadas no processo de análise das atividades conforme capítulo 6.
- Classificação dos tipos de variáveis em discreta, contínua e sem contexto. No capítulo 6 discutiremos as referidas classificações.

3º Momento:

Neste momento escrevemos a resenha sobre a abordagem que cada coleção faz da média e categorizamos as coleções em agrupamentos de coleções. Isto nos propiciou uma melhor visão das características semelhantes ou não das coleções.

Segue esquema do percurso da análise das atividades nas coleções:

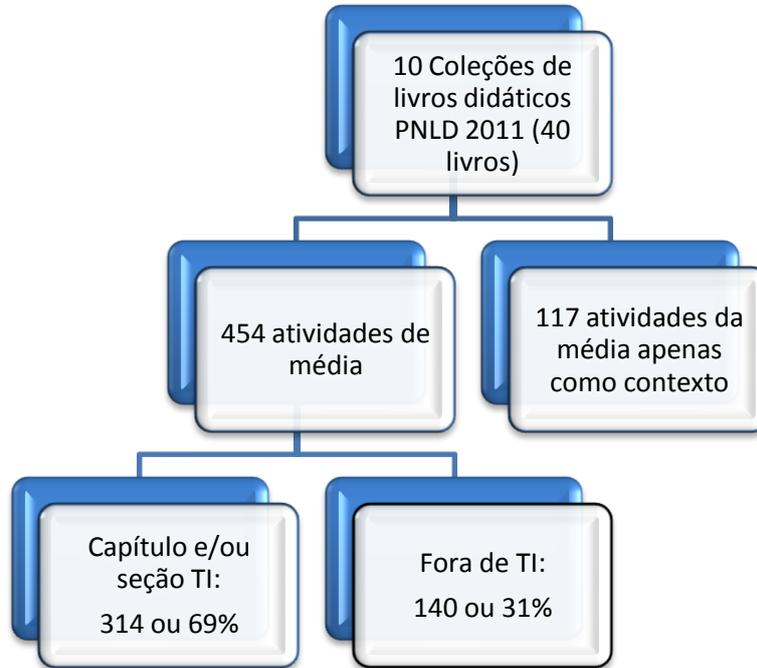


Figura 10: Fluxograma da análise das coleções

Os dados foram inseridos no programa estatístico *Statistical Package for Social Sciences* – *SPSS* para o procedimento das análises. Criamos gráficos e tabelas para uma melhor apresentação das informações e conclusões visando compreender como se configura o trabalho com a média aritmética nos livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental do PNLD 2011 ancorados pela Teoria dos Campos Conceituais.

Análise e Discussão dos Resultados

Neste capítulo vamos nos adentrar nas análises e discussões dos resultados encontrados nos livros didáticos aprovados pelo PNLD 2011.

Dentro dos capítulos destinados ao Tratamento da Informação podemos observar ao comparar o PNLD 2011 com o piloto realizado com o PNLD 2008 que existe um aumento das coleções que abordam a média em quatro ou três anos. Abaixo segue o gráfico que traz essa comparação.

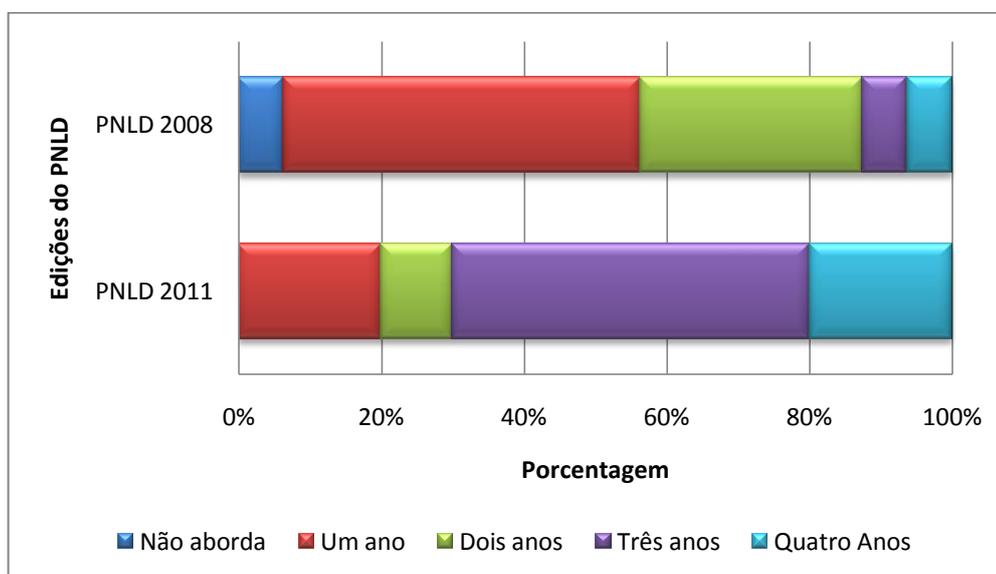


Gráfico 1: Abordagem da média por ano nos PNLD 2008 e 2011

Constatamos também que no PNLD 2011 desaparecem as coleções que não abordam a média em nenhum momento, além do que fica explícita a mudança de enfoque na abordagem da média trabalhada nos capítulos ou seções de Tratamento da Informação ao longo dos anos nas referidas obras do PNLD. Citamos, por exemplo, as coleções que trabalham a média em três anos, no PNLD 2008 tinham frequência de 6,25% das coleções, no entanto no PNLD 2011 temos 50% das coleções. Também no caso da média ser abordada nos quatro anos salta no PNLD 2008 de 6,25% para 20% no PNLD 2011.

Doravante, vamos tratar do PNLD 2011, foco da nossa pesquisa. A partir deste ponto também estamos olhando para a coleção como um todo, incluindo todas as atividades de

média quer esteja em capítulo de TI quer esteja fora deste capítulo. Foram identificadas 454 atividades de média nas 10 coleções, nas quais temos:

- i) Média de atividades por coleção: 45,4 atividades
- ii) Média de atividades por volume: 113,5 atividades

Apresentamos neste ponto a análise dos invariantes operatórios.

6.1 Os invariantes operatórios prescritos da média aritmética nos livros didáticos

A sustentação da nossa pesquisa é a Teoria dos Campos Conceituais, na qual temos que a formação de um conceito perpassa por três conjuntos distintos, a saber: invariantes operatórios, significados e representações. Neste momento vamos apresentar as análises no que concerne aos invariantes da média aritmética. Devido a natureza da análise, na qual os sujeitos da pesquisa são as atividades dos livros didáticos, vamos trabalhar com os invariantes operatórios prescritos do conceito de média, ou seja, as propriedades do conceito. Para isso assumimos as sete propriedades descritas por Strauss e Bichler (1988), conforme abaixo, já apresentadas no capítulo 3:

- P1. A média está localizada entre os valores extremos
- P2. A soma dos desvios a partir da média é igual a zero
- P3. A média é influenciada por cada um e por todos os valores
- P4. A média não precisa, necessariamente, coincidir com um dos valores a partir do qual foi calculada
- P5. A média pode ser um valor que não pode corresponder a um dado dentre o conjunto de dados reais
- P6. No cálculo da média, devem ser incluídos os valores nulos e os negativos
- P7. A média é um valor representativo dos dados, ou seja, é o valor que está mais próximo de todos (aspecto espacial)

Ressaltamos que uma única atividade pode expressar mais de um invariante. No total de 454 atividades observamos nas obras analisadas uma maior exploração de dois invariantes, conforme gráfico box plot abaixo:

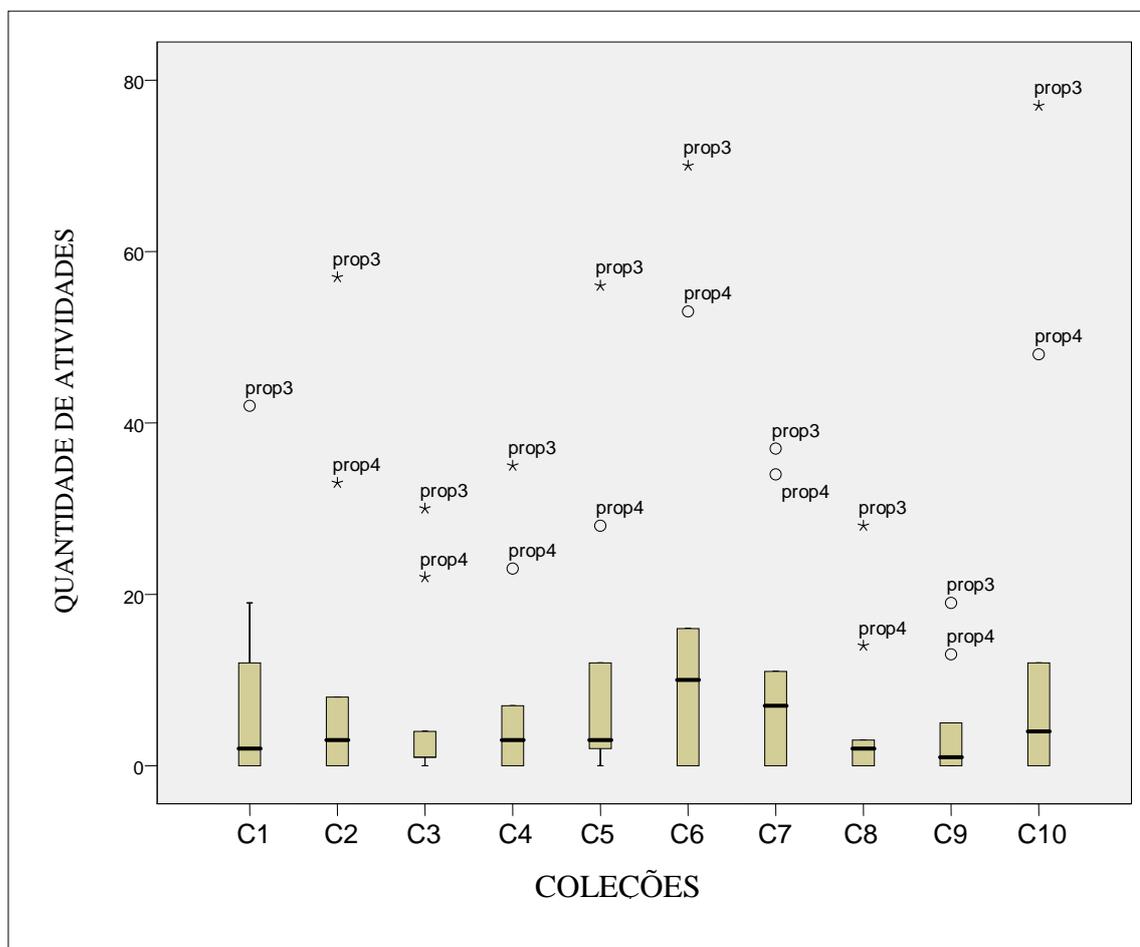


Gráfico 2: Distribuição das propriedades por coleção

O box plot nos fornece uma indicação clara dos valores extremos ou atípicos, denominados de *outlier*. O traço na caixa indica a mediana. A presença dos *outliers* (superiores) indica as propriedades que são trabalhadas numa quantidade bem maior. Assim, as propriedades 3 e 4 são exploradas com destaque em relação à exploração das demais propriedades em todas as coleções, com exceção da coleção 24799 (C1) em que a propriedade 4 não é um valor extremo. O gráfico mostra também a pouca exploração de outras propriedades em todas as coleções. Nas coleções C6 e C7 a mediana fica em torno de 10 atividades, nas outras coleções a mediana fica abaixo de 10 atividades. No gráfico a seguir podemos conferir a frequência relativa das propriedades por coleção.

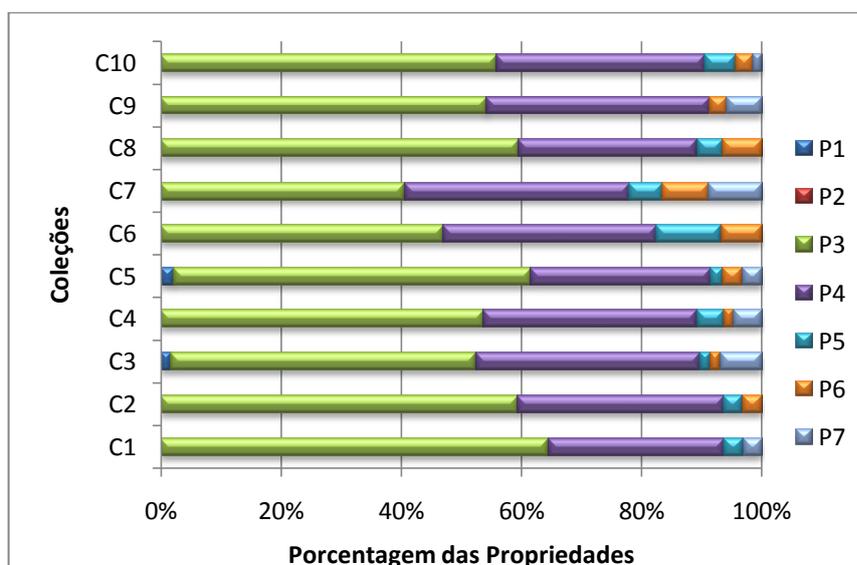


Gráfico 3: Porcentagem das propriedades exploradas por coleção

Como podemos observar no gráfico, cada coleção no mínimo aborda quatro das propriedades em estudo com foco nas propriedades 3, 4, 5 e 6. No que diz respeito à propriedade 1, acreditamos que a falta de atividades que promovam a exploração deste invariante vai interferir na compreensão do aluno com relação à validação da média encontrada. Muitas vezes, o aluno calcula a média encontrando um valor errado, fora do intervalo entre máximo e mínimo, e isto não é usado por ele para perceber a existência de erros de cálculo. No tocante a propriedade 2 é até natural não encontramos nenhuma coleção com referência a este invariante, pois pouco se trabalha nos anos finais do Ensino Fundamental o desvio padrão ao qual a propriedade tem relação. Este conceito é mais abordado no Ensino Médio. Já no caso da propriedade 7, que é a propriedade que explora o caráter representativo da média e sua relação com a distribuição dos dados, poderá facilitar a compreensão dos estudantes ao utilizar a média como uma medida de representação do conjunto de dados. Vamos agora discutir os resultados sobre cada propriedade.

Propriedade 1 – A média está localizada entre os valores extremos da distribuição. (valor mínimo < média < valor máximo).

A propriedade nos diz que o valor da média estará sempre entre o menor e o maior valor do conjunto de dados. Do total de atividades apenas três atividades (0,7%), em duas

coleções distintas, trabalham esta propriedade. Anjos e Gitirana alertam que “o fato de essa propriedade poder ser construída intuitivamente por alguns alunos e ser até óbvia para outros pode contribuir para o pequeno número de atividades mencionando tal aspecto” (2008, p.8). Entretanto, Melo (2010) apresenta que professores das séries iniciais demonstraram maior dificuldade neste invariante. Logo, mesmo com este caráter intuitivo, o invariante, precisa ser trabalhado de forma reflexiva, para que estudantes mobilizem-no em situações em que ele seja útil, sem grandes dificuldades. Segue um exemplo demonstrando a importância desta propriedade na validação das respostas pelos estudantes.

18. Em 2005, a seleção brasileira feminina de vôlei conquistou nada menos que a Copa dos Campeões, superando as melhores equipes do mundo. Veja as atletas convocadas para a Copa:

Jogadora	Posição	Altura (m)	Idade (anos)	Peso (kg)	Jogadora	Posição	Altura (m)	Idade (anos)	Peso (kg)
Carol Albuquerque	Levantadora	1,82	28	79	Natalia	Ponta	1,83	16	76
Carol	Meio	1,91	24	87	Raquel	Oposto	1,91	27	69
Fabi	Libero	1,69	25	59	Renatinha	Oposto	1,81	24	78
Fabiana	Meio	1,93	20	76	Sheila	Oposto	1,85	22	64
Fernanda	Ponta	1,89	20	74	Valeskinha	Meio	1,80	29	62
Jaqueline	Ponta	1,84	22	73	Sassá	Ponta	1,80	23	73
Marcelle	Levantadora	1,81	29	69					

Confederação Brasileira de Vôlei

a) Qual é a altura média das atletas convocadas? **Sugestão:** use calculadora.
 b) Uma pessoa calculou a idade média dessas jogadoras e obteve o valor 29 anos. Sem fazer cálculos, explique por que esse resultado está errado.

Figura 11: A média é de um valor entre os extremos da distribuição.
(Fonte: Coleção 24810, 2009, vol.6, p.276.)

O item b da atividade solicita ao estudante explicar por que o valor 29 não é a média. O estudante deverá analisar os dados da coluna idade e perceber que 29 é o valor máximo, logo a média deverá ser menor que este valor uma vez que representa uma medida de localização central dos dados do conjunto, que só pode ser igual ao extremo, caso todos os valores dos dados sejam iguais.

Propriedade 2 - A soma dos desvios dos dados em relação à média é zero.

$$\left[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \right] = 0$$

O invariante do conceito desenvolvido por esta propriedade é o de que, somando os desvios de todos os valores com relação à média, o resultado da soma será igual a zero. Provém, e é uma generalização, do cálculo que os gregos faziam para encontrar a média: o

número médio b de a e c é chamado de média aritmética se e somente se $a - b = b - c$. Neste caso, nenhuma atividade trabalha a referida propriedade. Acredita-se que a mesma está atrelada ao ensino do desvio padrão. A referida propriedade é bastante útil quando conhecemos a média de alguns valores, mas não conhecemos um destes valores e queremos encontrá-lo.

As duas propriedades acima lidam com a ideia de distribuição dos dados, tais propriedades, junto com a propriedade três, refletem como aponta Strauss e Bichler (1988), o aspecto estatístico da média.

Propriedade 3 - A média é influenciada por cada um e por todos os valores.

$$(MÉDIA = \frac{\sum x_i}{n}).$$

A propriedade três ressalta que se um valor do conjunto de dados for modificado, a média será alterada. E se um valor for adicionado, ou excluído do conjunto, a média também será alterada; exceção para os casos em que esse valor seja igual à média, que neste aspecto diz respeito à condição de “robustez”.

No total de atividades analisadas 99,3% utilizaram esta propriedade. Considerando que dentre essas atividades temos as atividades que trabalham apenas o cálculo procedimental. Então, procuramos analisar as atividades e observar aquelas que exigem outras habilidades, tais como o trabalho com o cálculo inverso, ou seja, dado o valor médio, encontrar um dos valores que faltam, bem como a discussão do que significa isto. Desta forma, encontramos que apenas 18,7% das atividades que mobilizam a referida propriedade, o fazem de forma mais significativa. Resultados como este corroboram com os de Cazorla (2003) quando apontam as dificuldades dos estudantes com esta propriedade, salientando que conhecer a forma de calcular a média não implica a sua compreensão. A atividade abaixo explicita tal propriedade envolvendo outras habilidades além do simples algoritmo do cálculo.



Figura 12: A média é influenciada por cada um e por todos os valores.
(Fonte: Coleção 24935, 2009, vol.7, p. 89).

Podemos observar que nesta atividade o aluno deverá utilizar o valor médio dado e proceder ao cálculo inverso, ou seja, precisa compreender que são 10 empregados e que 1 ganha 7.300 e os outros 9 ganham X . Logo, cada empregado ganha R\$ 300,00. Esta atividade estimula o aluno a refletir sobre a distribuição dos dados e a representatividade da média.

O gráfico seguinte demonstra a distribuição das atividades que exploram a propriedade três de forma mais reflexiva dentro (TI) ou fora (FTI) do capítulo/seção destinado ao Tratamento da Informação.

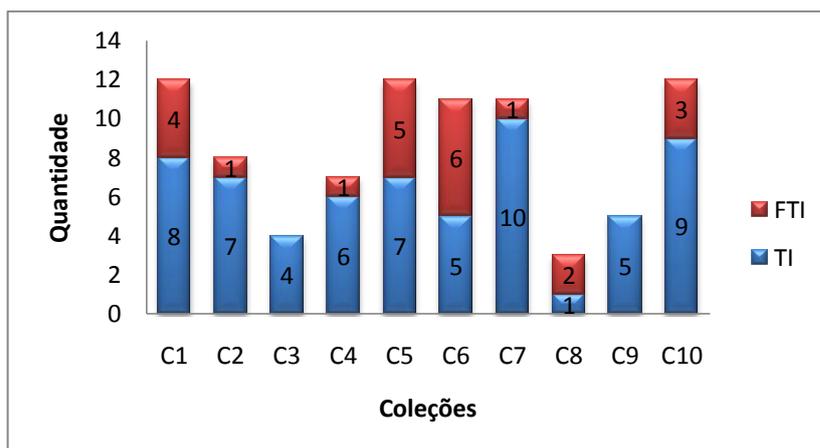


Gráfico 4: Total das atividades que exploram a propriedade 3 de forma reflexiva nas coleções.

Podemos observar que tais atividades se concentram dentro dos capítulos de TI e que todas as coleções abordam, mesmo em uma pequena quantidade, alguma atividade que envolva um aspecto mais qualitativo deste invariante. Entretanto, apresentamos um box plot da distribuição destas atividades que trabalham as propriedades por coleção, de forma mais reflexiva por coleção.

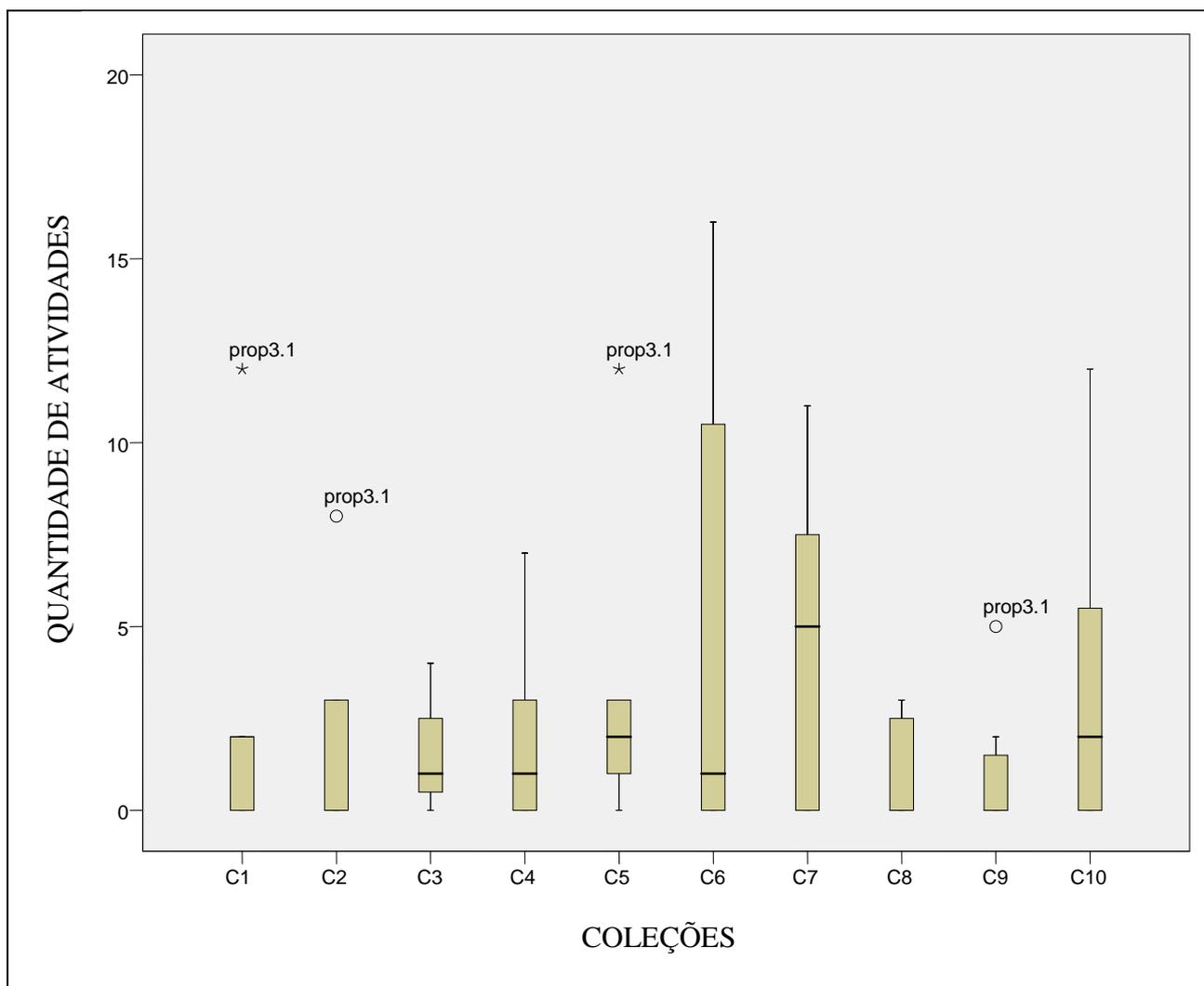


Gráfico 5: Box plot das propriedades por coleção, considerando as atividades que exploram as propriedades 3 e 4 de forma mais reflexiva

Nas coleções C1, C2, C5 e C9 a propriedade 3.1 aparece como *outlier*, destacando-se da média de exploração das demais propriedades. As coleções C6, C7 e C10, mesmo sem apresentar *outlier*, destacam-se na exploração da referida propriedade. Podemos observar que em cinco coleções a mediana não passa de duas ou três atividades, o que confirma a baixa exploração pelas coleções da propriedade 3.1.

Propriedade 4 - A média não precisa, necessariamente, coincidir com um dos valores que a compõem.

Pode ocorrer que a média seja um valor que não pertença ao conjunto numérico dos elementos levados em conta na realização do cálculo, ou seja, pode ser diferente dos valores do conjunto em questão. Em 63,5% das atividades analisadas ocorre a utilização desta propriedade. Deste total, apenas 1% promove uma reflexão em torno da mesma, chamando atenção para esta característica. Esse invariante contribui no sentido de que, se a média encontrada não for igual a um dos valores da amostra, deve-se buscar um significado interpretativo para ela, principalmente nos casos discretos. Esta propriedade aparece sempre concomitantemente com a propriedade 3 o que poderia ajudar em uma maior ênfase para a característica em questão, de busca da compreensão da representatividade da média. Ressaltamos ainda que a propriedade 3 está inclusa na dimensão estatística e a propriedade 4 na dimensão abstrata.

Trabalhando com média

Joana, mãe de Tiago e Clara, ficou “de cabelo em pé” ao ver a conta do celular do filho Tiago, referente ao mês de abril. Ele gastou o dobro da conta de Clara. Tiago, muito esperto, resolveu provar que Clara havia gasto por mês mais do que ele, considerando as contas desde o início do ano. Veja:

	TIAGO	CLARA
JANEIRO:	R\$ 42,00	JANEIRO: R\$ 53,00
FEVEREIRO:	R\$ 43,00	FEVEREIRO: R\$ 52,00
MARÇO:	R\$ 22,00	MARÇO: R\$ 50,00
ABRIL:	R\$ 80,00	ABRIL: R\$ 40,00

Tiago somou o valor de cada mês da conta do celular dele. Em seguida, dividiu o total obtido por 4, pois foram considerados 4 meses:

$$(42 + 43 + 22 + 80) : 4 = 187 : 4 = 46,75$$

Da mesma forma, somou o valor de cada mês da conta do celular de Clara e, depois, dividiu o total obtido por 4:

$$(53 + 52 + 50 + 40) : 4 = 195 : 4 = 48,75$$

Ao somar o valor da conta de cada mês e dividir o total obtido pela quantidade de meses considerada, Tiago obteve o **gasto médio** desse período, ou seja, ele calculou a **média aritmética** dos valores no período de 4 meses.

Observe que os gastos médios obtidos (R\$ 46,75 e R\$ 48,75) podem ser diferentes dos valores das contas apresentadas.

Assim, Tiago provou que tinha razão, pois **em média** gastou menos que Clara ($46,75 < 48,75$).

Figura 13: A média não precisa, necessariamente, coincidir com um dos valores que a compõem.

(Fonte: Coleção 24799, 2009, Vol. 6, p.245.)

Propriedade 5 – A média pode ser um valor que não pode corresponder a um dado dentro o conjunto de dados reais.

Refere-se ao fato que a média pode assumir um valor, que não terá sentido no conjunto de dados da variável considerada. Pode por exemplo assumir valores decimais ou em fração, e isto poderá não fazer sentido no conjunto dos dados que originou a média. Tal propriedade foi trabalhada em 9,2% das atividades analisadas. Esta propriedade também influencia fortemente no sentido de se buscar um significado ou explicação para o valor encontrado, induzindo a ideia da média como uma tendência dos valores da amostra. Cazorla (2003) apresenta a fragilidade de alunos universitários em dominar esta propriedade. O que corrobora a necessidade de desde os anos iniciais começar um trabalho mais reflexivo sobre tal invariante. Se ainda no ensino superior a dificuldade persiste, o que dizer dos anos finais, bem como do Ensino Médio. A atividade abaixo deixa explícito para o estudante o aspecto desta propriedade:

Note que a soma de todos os salários é R\$ 57600,00. Se cada empregado ganhasse R\$ 900,00 por mês, a soma seria essa. Ou seja, a média R\$ 900,00 é o que cada empregado ganharia se o dinheiro gasto em salários fosse dividido igualmente entre todos eles.

Mas, na verdade, nenhum deles ganha R\$ 900,00 por mês. A média, portanto, pode ser um número que não ocorre na realidade.

Veja este outro exemplo:

Luana tem 3 irmãos, Danilo tem 4, Renata tem 2 e Paola tem apenas 1 irmão. Em média, quantos irmãos tem cada um?

Como $\frac{3 + 4 + 2 + 1}{4} = \frac{10}{4} = 2,5$, em média cada um tem 2,5 irmãos. A afirmação é

errata, mesmo que ninguém possa ter 2,5 irmãos.

Figura 14: A média pode ser um valor que não pode corresponder a um dado dentro o conjunto de dados reais

(Fonte: 24931, 2009, Vol. 8, p. 148)

Temos acima dois exemplos, um que o valor poderia fazer parte do conjunto de dados da variável salário, porém na realidade não se tem nenhum empregado que ganhe o valor da média – R\$ 900,00 e então o autor reforça que a média pode ser um número que não ocorre na realidade. Esta situação também explora a propriedade 4 em que a média não precisa, necessariamente, coincidir com um dos valores que a compõe. O outro exemplo da figura 14 fica óbvio a exploração deste invariante, em que o valor de 2,5 irmãos encontrados não pode corresponder ao conjunto dos dados reais, ou seja, da variável número de irmãos. Na coleção 24935 temos uma atividade mencionada também na resenha em que traz a baila este invariante com o texto “veja como a média é abstrata, ninguém tem 1,6 irmãos”.

Em outras atividades encontramos situações envolvendo variáveis como jogos (1,4 gols), idade (23,75 anos), quantidade de computadores por pessoa (0,89 microcomputadores) e até venda de automóveis (7,5 automóveis), dentre outras situações.

Propriedade 6 - No cálculo da média, devem ser incluídos os valores nulos e os negativos.

No cálculo da média se deve considerar todos os valores, incluindo os nulos e negativos. Algumas situações presentes no cotidiano dos alunos podem ser utilizadas na exploração dessa propriedade da média aritmética, como aquelas que envolvem lucro ou prejuízo de uma empresa (ANJOS E GITIRANA, 2008). Também outras atividades que envolvem, por exemplo, os contextos meteorológicos se tornam importantes para a exploração desta atividade.

As atividades que trabalharam com números nulos e negativos correspondem a 7,2% do total de atividades. Segue um exemplo utilizando a representação gráfica onde é requisitado o cálculo das três medidas de tendência central. No cálculo da média o estudante deverá levar em conta os valores negativos e nulos.

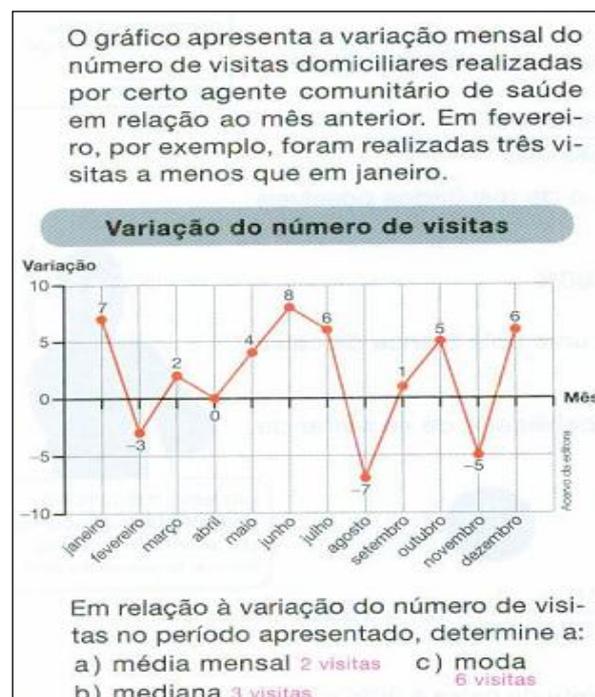


Figura 15: No cálculo da média, devem ser incluídos os valores nulos e os negativos.

(Fonte: Coleção 25020, 2009, Vol. 9, p. 177.)

Os estudantes não são conscientes da influência do valor zero no cálculo da média e revelam dificuldade na mobilização deste invariante, talvez por conta do seu caráter abstrato (STRAUSS E BICHLER, 1988; GARRET E CRUZ, 2008).

Propriedade 7 - A média é um "representante" dos dados a partir da qual foi calculada, ou seja, é o valor que está mais próximo de todos os demais dados (aspecto espacial).

Neste invariante consideramos as atividades focalizando a relação entre a média e os valores do conjunto inicial, assim 5,3% das atividades desenvolvem este aspecto. Destas atividades, boa parte apresentava que nem sempre a média é a melhor medida para a representação da tendência central dos dados da amostra, como no diálogo abaixo:

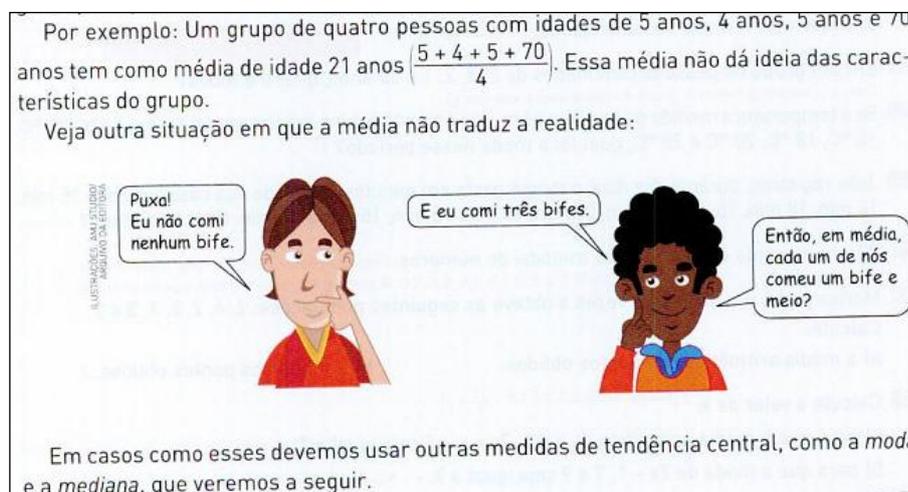


Figura 16: A média é um representante dos dados a partir da qual foi calculada.

(Fonte: Coleção 25014, 2009, Vol. 9, p.285.)

Strauss e Bichler (1988) constataram que esta foi uma das propriedades mais difíceis para as crianças entenderem. Pontuamos aqui a necessidade desde os anos iniciais de um trabalho voltado para o contato com situações que levem os estudantes a compreenderem a dimensão representativa, também no sentido espacial, da média.

No estudo pudemos observar que uma única atividade pode apresentar mais de uma propriedade. Ao analisarmos as atividades a partir das combinações de propriedades, percebemos que a propriedade 3 e 4 aparece com um percentual maior nas atividades, no geral todos os volumes abordam a combinação propriedade 3 + 4, ou seja, uma propriedade da dimensão estatística e outra da dimensão abstrata. O que nos revela os dados é que parece que ambas as propriedades estão correlacionadas nas atividades. Cerca de 15% das atividades

desenvolve concomitantemente mais de três propriedades em uma única atividade. No entanto, ressalta-se que 63% das atividades não buscam reflexão de nenhuma das propriedades, focando apenas o cálculo. Apesar de muitas vezes, uma coleção trazer a reflexão de uma propriedade a grande maioria das atividades não promovem reflexão de nenhuma das propriedades como mostra o gráfico abaixo.

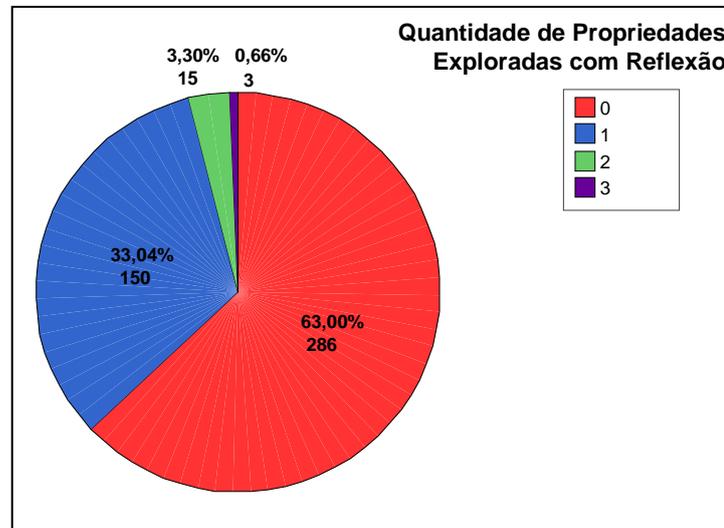


Gráfico 6: Porcentagem e total de atividades por quantidade de propriedades exploradas

Os resultados mostram que 63% das atividades analisadas não promovem reflexão das propriedades analisadas. Portanto, apenas 37% das atividades propostas buscam tal promoção. Olhando tal distribuição por coleção temos:

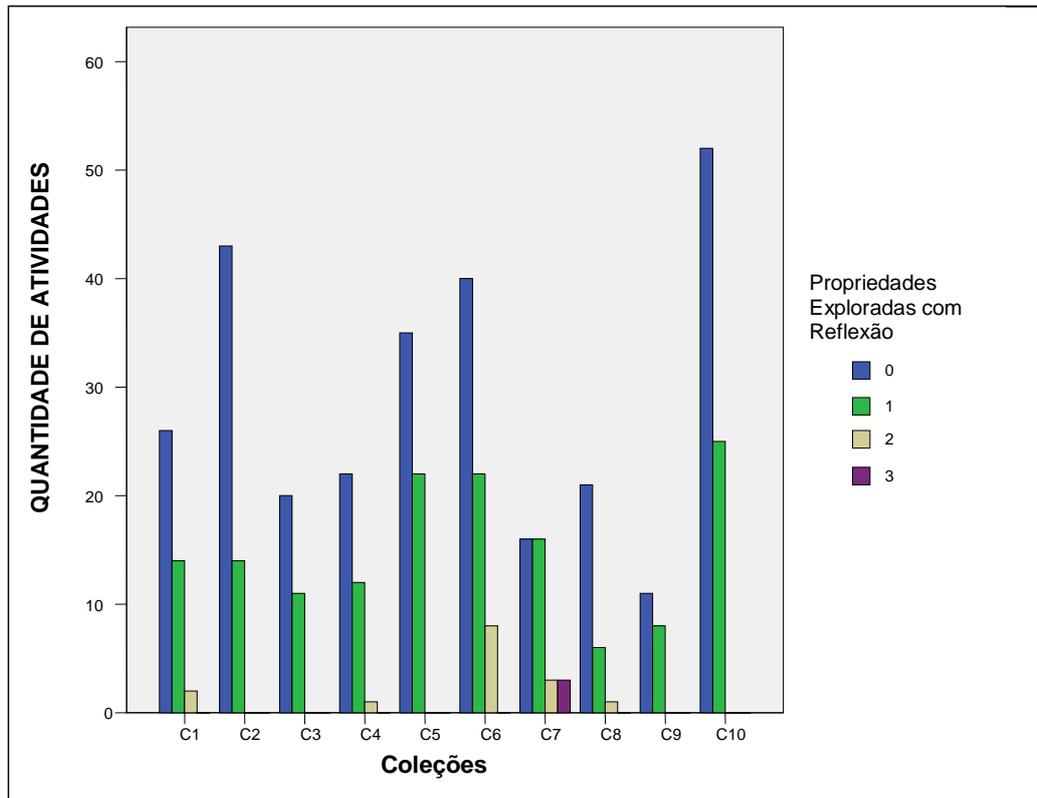


Gráfico 7: Total de atividades de propriedades exploradas com reflexão por coleção

Em 9 das coleções a quantidade de atividades que não se promove reflexão sobre nenhuma das propriedades é maioria absoluta. Em uma das coleções - C7, apesar da pequena quantidade de atividades, a maioria delas explora alguma propriedade.

Para visualizar as diferenças nas quantidades trabalhadas em cada uma das propriedades geramos um box plot com as coleções no eixo:

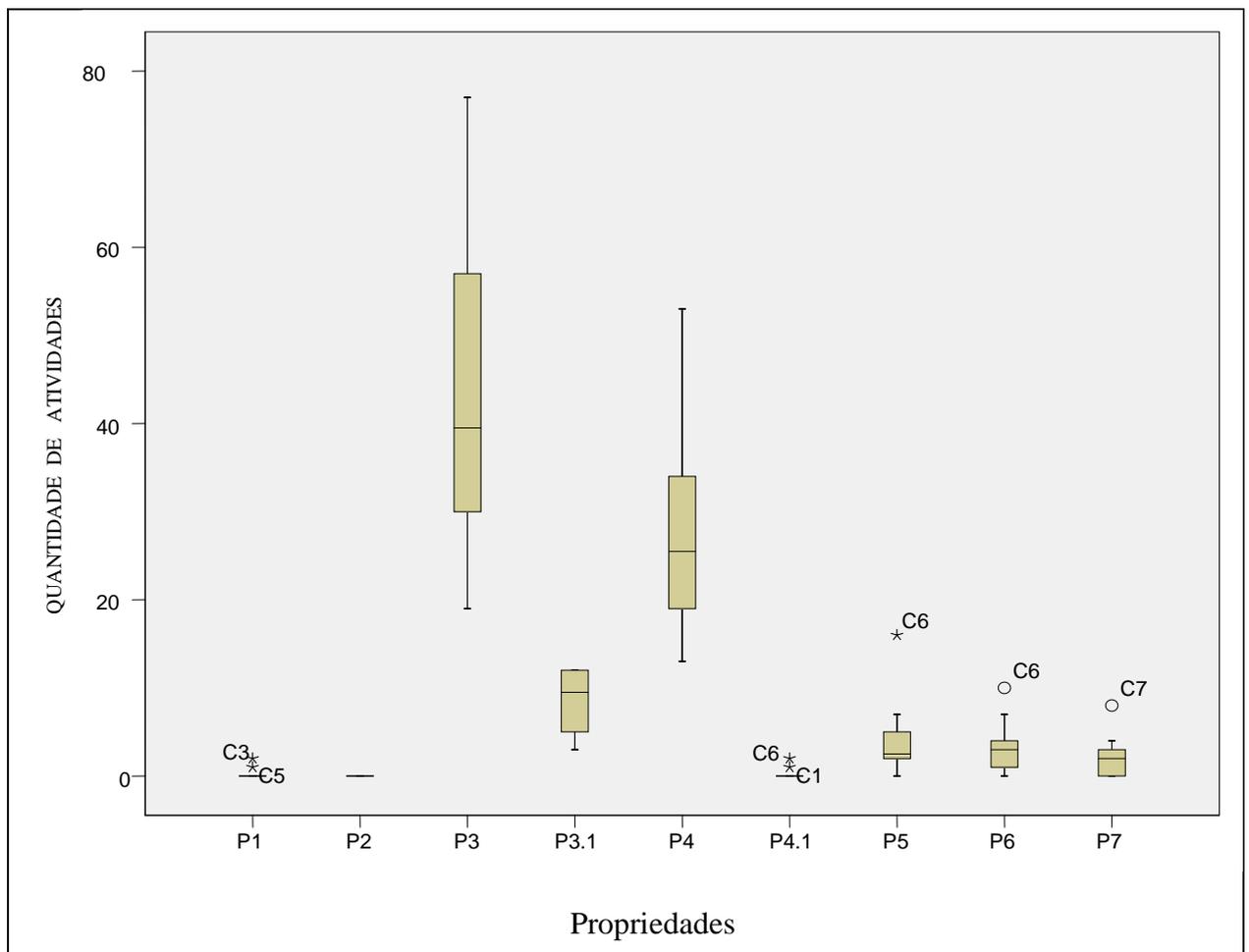


Gráfico 8: Boxplot das atividades que exploram cada propriedade por coleção

O gráfico reforça um dos pontos que já mencionamos, ou seja, há uma tendência na concentração das propriedades 3 e 4 em todas as coleções. Clarifica também as propriedades que precisam de uma abordagem mais contundente nos livros didáticos, tais como a propriedade 1, 5, 6 e 7. No caso da propriedade 3 o quantitativo é grande, mas a variante 3.1 indica a necessidade da abordagem mais reflexiva. A propriedade 2, como já mencionamos não é explorada em nenhuma das atividades, no entanto ela poder ser melhor desenvolvida juntamente com o conceito de desvio padrão no Ensino Médio. Todavia percebemos que a coleção 24931 destaca-se na propriedade 5 e também na propriedade 6 e a coleção 24935 na propriedade 7. Estas duas coleções compõem o mesmo agrupamento de coleções.

6.2 – O conjunto dos significados da média nos livros didáticos

Para esta análise utilizamos a classificação de significados da média aritmética feita por Batanero (2000). A partir de situações que não foram possíveis de classificar com as já levantadas por Batanero acrescentamos mais dois significados, a saber: a média de uma amostra como uma boa estimativa para a média de uma população e a média tomada como estimativa de uma variável para tempo futuro, isto é, uma extrapolação temporal. Ainda apusemos o significado procedimental para aquelas atividades que se enquadram no contexto numérico sem contextualização agregada. Assim, os significados foram pesquisados a partir destes abaixo, já apresentado no capítulo 3:

- S1. Estimação de uma quantidade desconhecida na presença de erros de medição – cálculo da melhor estimativa de um valor desconhecido
- S2. Necessidade de obter um valor justo/equitativo para uma distribuição uniforme
- S3. Servir de elemento representativo de um conjunto de dados
- S4. Valor mais provável quando aleatoriamente tomamos um elemento de uma população
- S5. A média de uma amostra como uma boa estimativa para a média de uma população
- S6. A média como uma estimativa da variável para tempo futuro
- S7. Significado procedimental

Abaixo apresentamos a frequência relativa dos significados nas atividades:

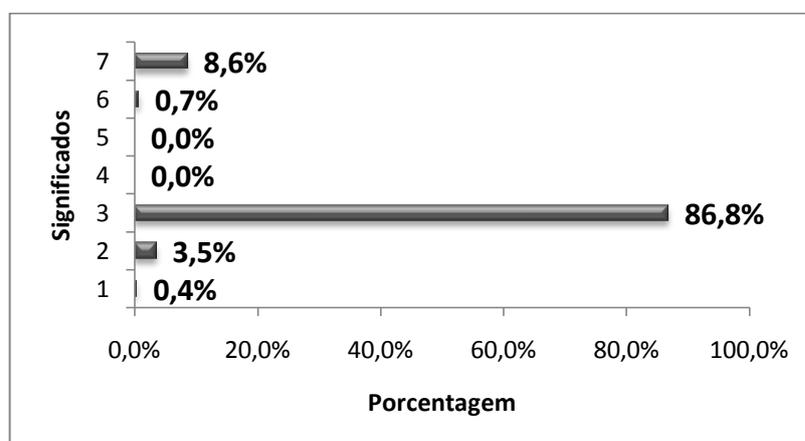


Gráfico 9: Percentual de atividades por significado atribuído à média no total de atividades

Como podemos observar o significado mais explorado no total das 454 atividades é o significado da média como um elemento representativo. Os significados 1, 2, 6 e 7 são explorados num percentual muito baixo e ainda há uma lacuna na abordagem do significado 4 e 5. Para uma melhor clarificação segue a quantidade de atividades dos significados pesquisados por coleção.

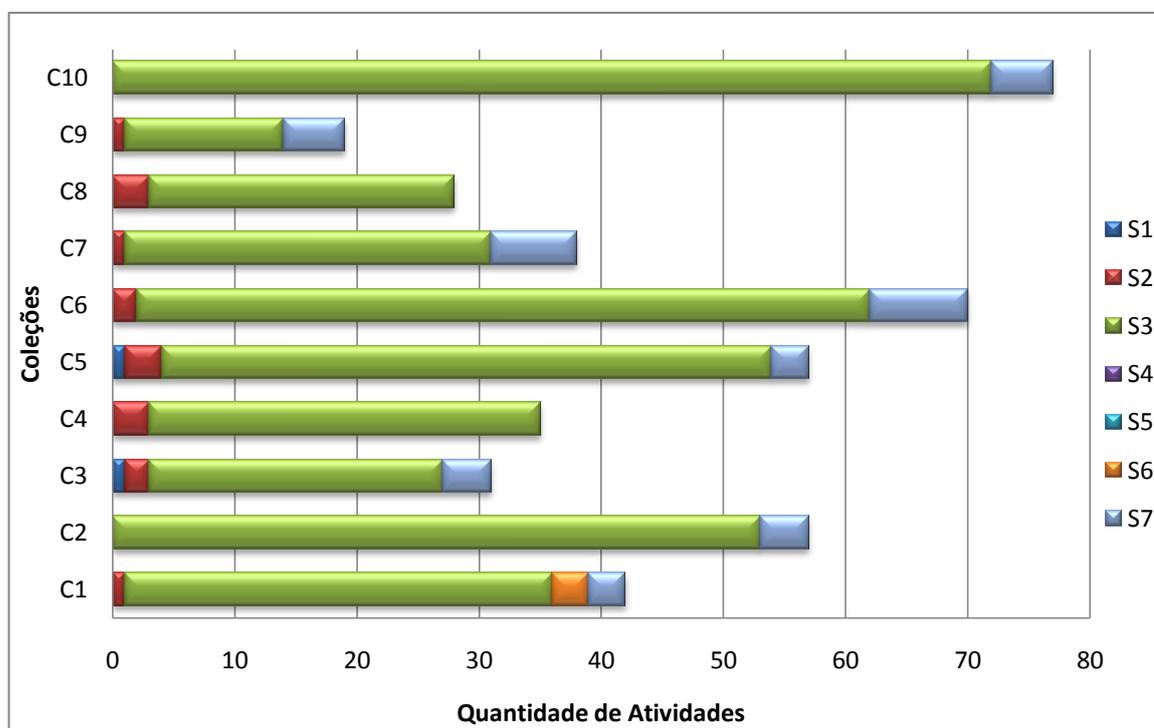


Gráfico 10: Frequência absoluta dos significados por coleção

Observamos que a tendência das coleções está na ênfase do significado da média como um elemento representativo. O fato deste significado (S3) ser trabalhado por todas as coleções, é um bom sinal, pois enfatiza o caráter representativo desta medida. Outra significação explorada por oito das dez coleções é o *significado procedimental*, apenas C4 e C8 não apresentam atividades do tipo puramente numérico. C1, C3 e C5 são as coleções que passam por quatro significados. Ainda em C1 identificamos e classificamos o significado da média como uma *estimativa da variável para tempo futuro* (S6). Observamos também que quatro coleções desenvolvem apenas dois significados. Deve-se atentar para este fato, uma vez que trabalhar apenas um ou dois significados pode comprometer a compreensão dos estudantes com relação ao campo conceitual de média aritmética. Vamos agora analisar os significados por volume, segue gráfico da frequência absoluta dos significados por volume:

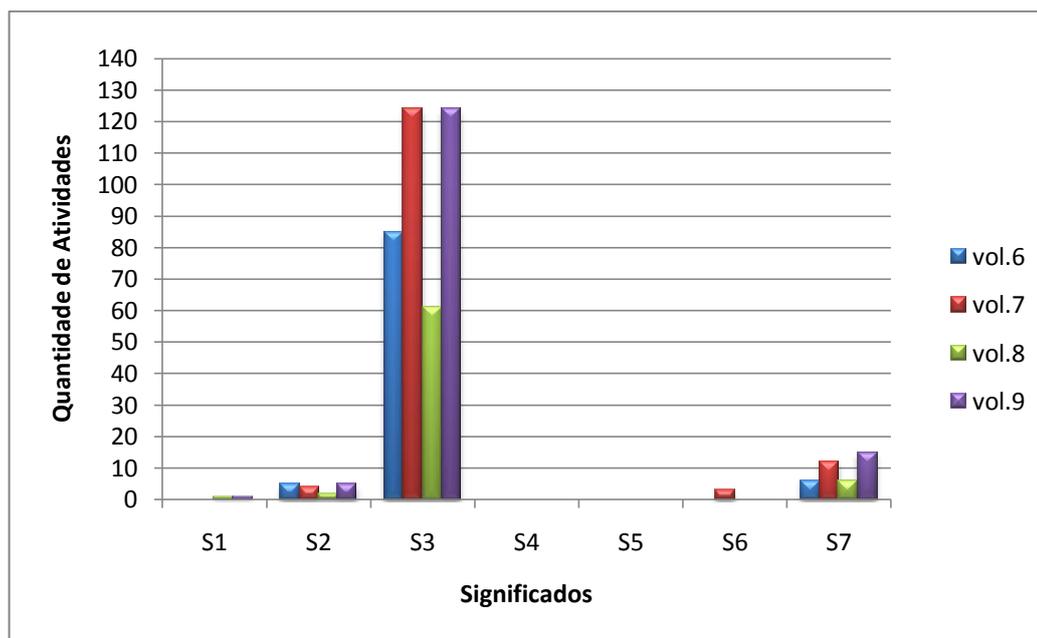


Gráfico 11: Total de atividades que exploram cada significado por volume

Quando nos debruçamos para observar a abordagem dos significados por volume no geral das 10 coleções, encontramos que as situações da média como *cálculo da melhor estimativa de um valor desconhecido* (S1) aparece apenas nos volumes do 8º e 9º anos. A *média como uma estimativa da variável para tempo futuro* (S6) consta unicamente no volume do 7º ano. Já os significados *necessidade de obter um valor justo/equitativo para uma distribuição uniforme* (S2), *servir de elemento representativo de um conjunto de dados* (S3) e o *significado procedimental* (S7) aparecem em todos os volumes.

Passemos para a análise das situações que conferem significados ao conceito de média discutindo um a um.

S1 - Estimação de uma quantidade desconhecida na presença de erros de medição – cálculo da melhor estimativa de um valor desconhecido.

Como citado anteriormente, este significado é que historicamente dá origem ao conceito de média. Problemas que envolvem a melhor estimativa de um valor desconhecido aparecem na Física e em modelos estatísticos, constituindo-se, desta forma, num importante campo de problema a ser desenvolvido com os alunos.

Apenas duas atividades são encontradas nas coleções analisadas que trabalhe a média como a melhor estimativa de um valor desconhecido. Em concordância com Cobo e Batanero (2004) pensamos que este tipo de problema deveria apresentar-se com maior frequência no

ensino das medidas de tendência central, por permitir a construção da ideia de média como melhor estimador de uma quantidade desconhecida. Segue uma das referidas atividades:

Para determinar a densidade da Terra, Cavendish utilizou o método da amostragem. Com base em sua pesquisa estatística, ele obteve os seguintes valores como possibilidades para a densidade da Terra:

5,50	5,57	5,42	5,61	5,53	5,47
4,88	5,62	5,63	4,07	5,29	5,34
5,26	5,44	5,46	5,55	5,34	5,30
5,36	5,79	5,75	5,29	5,10	5,86
5,58	5,27	5,85	5,65	5,39	

a) Utilizando uma calculadora, descubra a média dos valores da tabela, dando o resultado com 4 casas depois da vírgula.

Figura 17: Média como a melhor estimativa de um valor desconhecido na presença de erros de medição.

(Fonte: Coleção 24810, vol. 9, p.234.)

A atividade cita que foi utilizado o método da amostragem e apresenta os dados que foram coletados. Após isto, o aluno deverá proceder ao cálculo da média dos dados. No entanto, não faz uma reflexão do valor encontrado. Segue solicitando ao aluno utilizar a densidade média encontrada e realizar outros cálculos para encontrar a massa da terra. Garret e Cruz (2008), em pesquisa realizada com estudantes secundários e universitários, apresentaram resultados que evidenciaram que os alunos desconhecem o uso da média como uma melhor estimadora de um conjunto de dados em presença de erros de medição. Resultados como esse, afirmam ainda mais a valor de atividades que perpassem também por esse significado nos livros didáticos do Ensino Fundamental.

S2 - Necessidade de obter um valor justo/equitativo para uma distribuição uniforme.

A média, como um valor equitativo para uma distribuição uniforme, é encontrada em 3,5% das atividades analisadas. Apesar de pouco enfatizado, este significado aparece em todos os volumes e em 8 das coleções. Nestas situações, ao se calcular a média do conjunto de dados, estão contidas as ideias de uniformizar os valores da variável. Consideramos aqui, as atividades que faziam referência a este significado de forma explícita, mencionando a

distribuição uniforme com frases tipo: se todos tivessem feito o mesmo número; se todos tivessem o mesmo peso; se os pontos fossem divididos igualmente; etc. Vejamos um exemplo utilizando o significado acima:



Figura 18: Média como um valor equitativo.

(Fonte: Coleção 24929, vol.6, p. 188.)

A atividade acima traz à baila a ideia da média como um valor equitativo para ser ter uma distribuição uniforme dos dados no momento em que o personagem diz: “imaginando que todos os alunos tivessem comido o mesmo tanto”. E ainda as palavras “imaginando” e “tivessem” estão em negrito para chamar a atenção do aluno para este caráter da média.

S3 - Servir de elemento representativo de um conjunto de dados.

Este significado apresenta a média aritmética como um elemento representativo de um conjunto de dados, desde que a distribuição dos dados deste conjunto seja simétrica. Mas é preciso ressaltar que na pesquisa olhamos para as atividades de forma a identificar se o significado mobilizava a representatividade da média, porém não foi nosso foco observar o conjunto de dados e verificar se os mesmos tinham a característica da simetria ou não. Embora, na resenha das coleções fizemos citações quando a coleção propunha atividades em que faz a comparação da média como a melhor representante ou não conforme a natureza dos

dados e a apresentação da moda e da mediana como outras medidas que cumprem melhor esta função.

Posto isto, doravante S3 fica entendido como a média *servindo como elemento representativo de um conjunto de dados*.

Tal significado foi trabalhado em 86,8% do total das atividades analisadas e apresenta-se na maioria das atividades de forma explícita. A seguir, apresentamos um exemplo de atividade em que é preciso encontrar a média como representante das idades de cinco jogadores.

UM FENÔMENO ESTATÍSTICO: O ESTUDO DE MÉDIAS

Quando pretendemos estudar um fenômeno estatisticamente, recorremos a certos valores que representam, de forma precisa, como se dá a distribuição dos dados relativos a esse fenômeno. Um desses valores é a **média aritmética**.

Acompanhe a situação a seguir.

As idades dos jogadores titulares de uma equipe de basquete são: 25 anos, 27 anos, 22 anos, 30 anos e 31 anos. Qual é a idade média dos jogadores titulares dessa equipe?

Para resolver esse problema, devemos fazer: $\frac{25 + 27 + 22 + 30 + 31}{5} = \frac{135}{5} = 27$.

Então, a idade média dos jogadores titulares dessa equipe é 27 anos.
O número 27 é chamado de média aritmética dos números 25, 27, 22, 30 e 31.

Figura 19: Média como elemento representativo de um conjunto de valores.

(Fonte: Coleção 24802, vol. 6, p. 112.)

No referido exemplo o autor cita valores que representam de forma precisa como se dá a distribuição dos dados. Entretanto, poderia ainda apresentar uma melhor discussão sobre este valor encontrado.

S4 -Valor mais provável quando aleatoriamente tomamos um elemento de uma população.

Não foram encontradas atividades que apresentassem este significado. Nosso resultado iguala-se ao resultado apresentado por Cobo e Batanero (2004) em que não encontrou nenhuma atividade que fizesse referência a este significado em uma pesquisa com 22 livros-textos no contexto espanhol. Este significado também é de valiosa importância considerando que os estudantes, nos anos finais do Ensino Fundamental, poderiam facilmente compreender. Os estudantes poderiam se deparar com atividades envolvendo o cálculo da esperança de vida ou até mesmo da estimação da duração de tempo de uma lâmpada.

S5 - A média de uma amostra como uma boa estimativa para a média de uma população.

Também não encontrada nenhuma atividade que aludisse a este significado. Situações que mobilizem este significado trabalhariam com os estudantes a ideia de ponto médio, bem como a relação entre amostra e população. Além da utilização da média da amostra estimando a média da população com o intuito de encontrar a quantidade total da população em estudo. Pontuamos neste momento que a referida situação propícia o contato dos estudantes com os conceitos de amostra e população, uma vez que este significado é uma particularidade dos casos em que precisamos encontrar a média da população e, para isto, calculamos as médias de várias amostras, para depois calcular a média destas médias amostrais.

S6 - A média como uma estimativa da variável para tempo futuro.

Este significado foi levantado mediante o estudo das atividades das coleções em análise. Neste caso temos 3 atividades (0,7%) que trabalham este significado. Segue uma destas atividades:

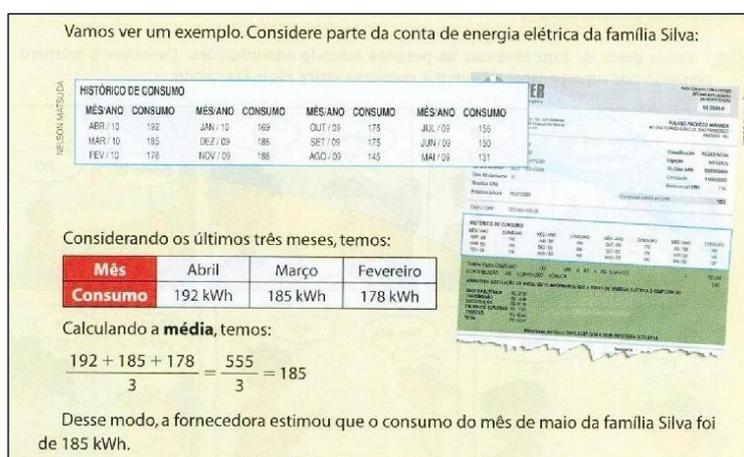


Figura 20: Média como estimativa da variável para tempo futuro.

(Fonte: Coleção 24799, vol.7, p.116.)

Ao utilizar o consumo dos três últimos meses, o valor médio encontrado passa a ser o valor estimado para o mês seguinte. Este mês seguinte ainda não é concreto, é uma projeção que pode ou não acontecer, ou seja, uma extrapolação temporal. Com base na média, o valor será o valor médio encontrado, por isso dizemos que a média é utilizada como uma previsão para um tempo futuro. Essa é uma estratégia muito utilizada pelas companhias quando não

consegue ter acesso ao medidor de energia em um dado mês, o que é compensado no mês seguinte.

S7 – Significado Procedimental

Na classificação das atividades quanto aos significados, percebemos que algumas atividades não envolviam os significados descritos acima e utilizam apenas o cálculo em si mesmo, assim chamamos de significado procedimental, ou seja, apenas o procedimento do cálculo. Neste caso, temos um quantitativo de atividades que representa 8,6% do total de atividades analisadas. Ainda nestes casos em que a média é trabalhada apenas como procedimento do cálculo, deve ser questionado, uma vez que não agrega situações contextualizadas das quais ajudem os alunos na construção de sentidos.

Melo (2010) constatou que os professores do ensino primário apresentaram melhor desempenho ao lidarem com a ideia de *média como uma quantidade equitativa a repartir para conseguir uma distribuição uniforme* (S2). Os resultados encontrados por Mayén et al (2007) afirmam que estudantes mexicanos de bacharelado, apresentaram melhor desempenho em situações que envolviam a ideia de *melhor estimativa de uma quantidade desconhecida em presença de erros de medidas* (S1), os resultados sugerem que situações como essa são intuitivas para os estudantes. As autoras também constatam que a ideia de média como a *necessidade de obter um valor justo/equitativo para uma distribuição uniforme* (S2) e a média como *o valor mais provável quando aleatoriamente tomamos um elemento de uma população* (S4) foram especialmente fáceis para os estudantes.

Melo (2010) ainda assevera que, com relação aos alunos do 3º e 5º anos participantes de sua pesquisa, eles obtiveram um desempenho relativamente melhor com relação às situações que a média é utilizada para *estimativa de uma quantidade desconhecida em presença de erros de medidas* (S1). Isto posto reforça a ideia de que os estudantes dos anos finais poderiam ser confrontados com atividades que envolvem o referido significado. Contudo, nos nossos resultados encontramos apenas duas atividades fazendo referência a este significado. Um significado que se mostrou de difícil compreensão, principalmente no grupo dos professores pesquisados pela autora, foi o que se refere à necessidade de se conhecer o que irá se *obter com maior probabilidade ao se contar com um dado faltando em uma distribuição* (S4). Aventamos que se a partir dos livros didáticos, professores e alunos, entram em contato com tais situações, iremos avançar na construção conceitual da média.

Assim é de grande importância que o trabalho com média nas escolas revise a gênese conceitual da média aritmética, de modo que os estudantes não aprendam apenas os passos do algoritmo “somar e então dividir”, isto leva ao trabalho perpassando os significados apresentados acima. Os resultados apontam que o trabalho com a média realizado pelos livros didáticos encontra-se concentrado em um significado (S3). Pontuamos a necessidade de maiores atenções a abordagens que explorem a média aritmética privilegiando diferentes significados.

6.3 - A média aritmética e a representação utilizada nos livros didáticos

Na teoria dos campos conceituais, Vergnaud (1991) enfatiza o importante papel que a dimensão representativa exerce no processo de conceitualização do real. Moreira (2002) destaca que

Nessa perspectiva, concordamos com Vergnaud ao destacar a necessidade de “identificar e classificar situações adequadas à aprendizagem de determinado conceito, pesquisar os invariantes operatórios usados pelos alunos e procurar entender como, por que, e quando uma certa representação simbólica pode ajudar na conceitualização” (p. 27).

Dessa forma, além de mapearmos os invariantes operatórios prescritos e os significados da média nos livros didáticos, mapeamos também as representações utilizadas nas 454 atividades de nosso estudo.

1. Linguagem materna
2. Representação gráfica
3. Representação tabular

Na representação em linguagem materna consideramos o enunciado escrito, muitas vezes auxiliado com fórmulas e símbolos inerentes a dimensão matemática da média aritmética. Do total das 454 atividades esta foi a representação mais encontrada com 56% do total.

A representação gráfica agrupa as atividades que envolvem gráficos de barras ou colunas, de linhas, setores e pictogramas, perfazendo o total de 14%. Nos casos em que se

utiliza este tipo de representação é comum atividades em que é solicitado aos estudantes extraírem informações do gráfico para o cálculo da média. Vale ressaltar que é essencial um trabalho sistematizado com leitura e interpretação de gráficos para uma melhor compreensão da média nas situações que utilizam esta representação.

Por fim, a representação tabular aparece em 30% das atividades, nas quais envolvem a representação através de tabelas de frequência e quadro/rol de dados.

Guimarães et al (2008) esclarece a importância do trabalho com representações gráficas e tabulares articuladas com outros conceitos, como podemos ver abaixo:

Além de diversas habilidades envolvidas, o trabalho com representações gráficas e tabular pode ajudar os estudantes a apreciar a matemática como caminho de compreender o mundo articulando ideias matemáticas e possibilitando um trabalho conjunto com outros conceitos matemáticos como adição, subtração, multiplicação, divisão, números, frações, formas geométricas, medidas, porcentagem etc. (Guimarães et al, 2008, p. 2).

Como vemos o trabalho com a média aritmética também deve envolver de forma expressiva as representações gráficas e tabulares, visando à construção de diversas habilidades pelos estudantes.

Segue gráfico da porcentagem de abordagem das representações por coleção:

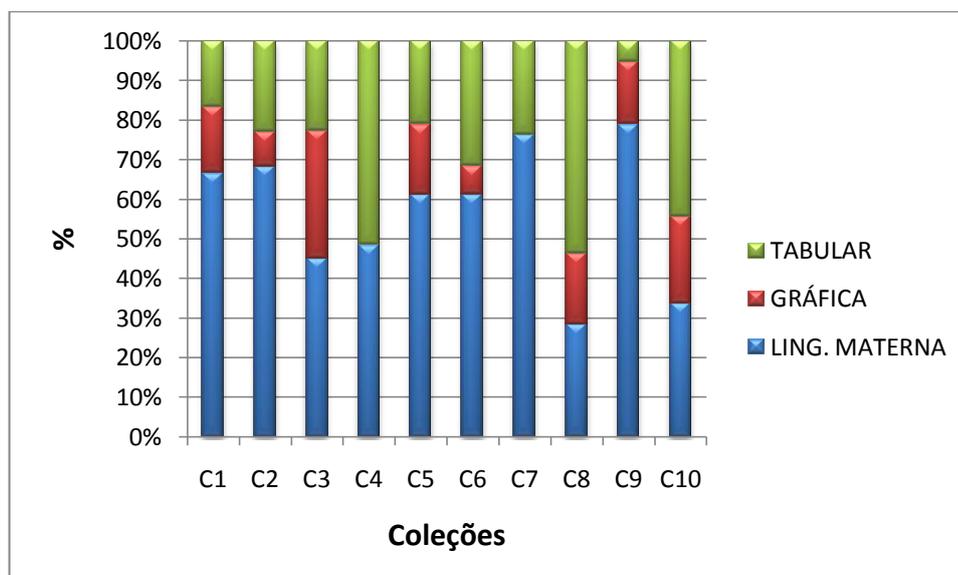


Gráfico 12: Frequência relativa das representações por coleção

Com base no gráfico, podemos confirmar que a representação mais utilizada no total das 454 atividades é a linguagem materna, mas essa mesma tendência se confirma quando

olhamos coleção por coleção. Com ressalva para as coleções C4 e C8, na C4 as representações estão distribuídas equilibradamente entre a linguagem materna e a tabular; já na C8 a representação tabular excede os 50% das atividades da referida coleção. As 10 coleções desenvolvem atividades tanto com a representação em linguagem materna como com a tabular. No entanto, duas coleções não desenvolvem nenhuma atividade utilizando a representação gráfica, a saber: C4 e C7.

Também foi nosso interesse analisar se alguma das representações destacava-se na abordagem com relação ao volume das coleções. Para esta análise segue o gráfico abaixo:

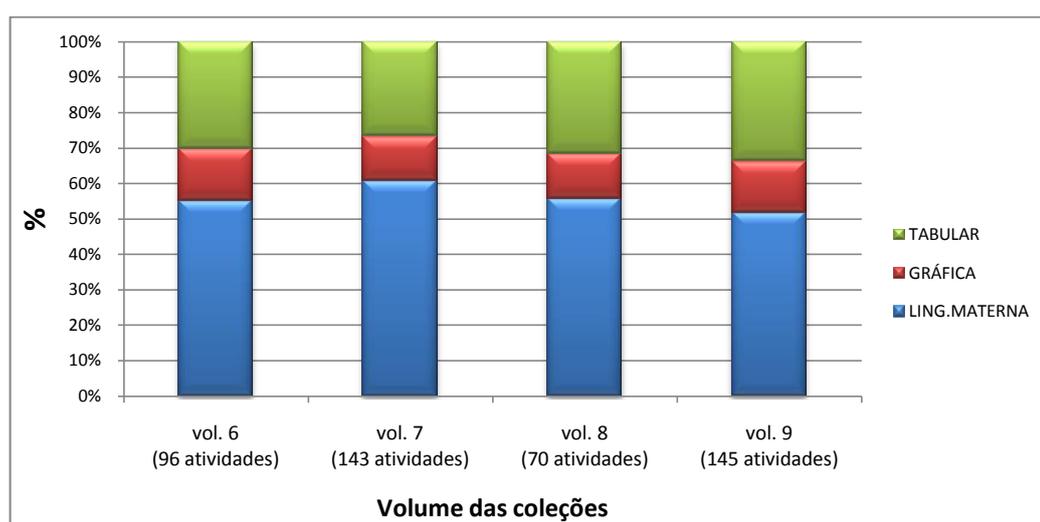


Gráfico 13: Frequência relativa das atividades por volume

Em todos os anos aparecem atividades utilizando as três representações. Percentualmente, considerando o total de atividades, as representações tendem a um equilíbrio na abordagem distribuída ao longo dos anos. Entretanto, seguimos pontuando a importância de um trabalho mais diversificado com as representações quando da abordagem da média. Com isso, os estudantes poderão desenvolver também habilidades relacionadas com a leitura e interpretação de representações gráficas, organização, interpretação e manipulação de tabelas, bem como características da linguagem materna. Melo esclarece ainda mais este ponto.

Se os dados estatísticos, em geral, são apresentados através de tabelas e/ou gráficos é coerente pensar que os alunos devem aprender desde cedo como a partir da leitura e interpretação dessas representações é possível obter outros conceitos como as medidas de tendência central e também fazer previsões para o futuro. Vale destacar, a importância do domínio da leitura e interpretação de tabelas e gráficos ao se trabalhar as medidas de tendência central a partir dessas representações (2010, p.33).

Melo (2010) também discorre que o tipo de representação exerce uma forte influência na estratégia de resolução das atividades de média. As representações ajudam na compreensão dos estudantes, já que traz à tona a dimensão estatística do conceito e podem contribuir na ilustração de alguns invariantes. Nesse sentido, Moreira (2002, p.27) destaca a necessidade de procurar entender como, por que e quando certa representação simbólica pode ajudar na conceitualização.

Acreditamos, a partir dos dados encontrados, que os livros didáticos devem desenvolver um trabalho mais urdido com as representações nas atividades de média, principalmente no tocante às gráficas e tabulares.

6.4 – A média aritmética ponderada

Como um dos conteúdos cerne da estatística, é sabido que a média tem muitas aplicações no contexto real, estendendo-se isto também à média aritmética ponderada. Tomamos como exemplo o cálculo de notas em concursos que utilizam a ponderação para encontrar uma medida representativa atribuindo pesos aos dados do conjunto de acordo com a natureza do problema, dentre outras situações.

Em nossos dados a média aritmética ponderada é abordada em 6,6% das 454 atividades. Uma situação particular são os casos de algumas coleções abordarem a média de frequências considerando as frequências como pesos, no qual apresentamos a seguir um exemplo. Em tais atividades, ora chama a atenção para este fato, ora deixa implícita esta situação. E 1,1% (5 atividades) utilizam a média de frequência como um caso da média aritmética ponderada. Segue o gráfico de abordagem da média ponderada (MP) e média ponderada de frequência (MP FREQ):

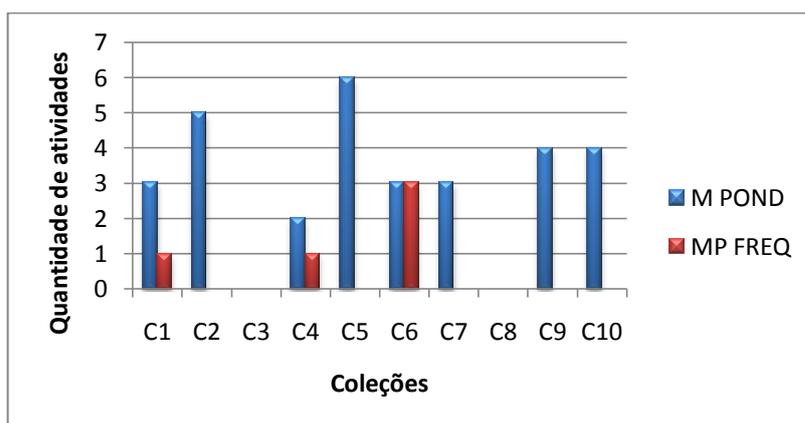


Gráfico 14: Frequência absoluta da média ponderada

Das dez coleções apenas duas não desenvolvem nenhuma atividade abordando a média aritmética ponderada – a coleção C3 e C8. No entanto, as atividades com média ponderada utilizando as frequência como pesos aparecem no 8º e 9º ano das coleções C1, C4 e C6. Abaixo segue exemplo de uma atividade que aborda o caso da média ponderada utilizando frequências como peso:

Situação 2

Durante o último mês, o número de atendimentos diários realizados em um consultório odontológico foi:

6	8	9	9	6
9	10	9	8	9
7	7	6	8	8
10	10	8	6	7

Para determinar a média diária de atendimentos realizados nesse consultório, podemos verificar a quantidade de atendimentos diários e calcular a média. Veja:

- 6 aparece 4 vezes
- 7 aparece 3 vezes
- 8 aparece 5 vezes
- 9 aparece 5 vezes
- 10 aparece 3 vezes

Então:

$$\text{média} = \frac{4 \times 6 + 3 \times 7 + 5 \times 8 + 5 \times 9 + 3 \times 10}{4 + 3 + 5 + 5 + 3} =$$

$$= \frac{24 + 21 + 40 + 45 + 30}{20} = \frac{160}{20} = 8$$

Logo, a média diária de atendimentos realizados nesse consultório odontológico foi 8. Toda média calculada como nas duas situações apresentadas é chamada de **média aritmética ponderada**.



Figura 21: Média aritmética ponderada utilizando frequências como pesos.

(Autor: Coleção 24799, 2009, vol.9, p.90)

Na atividade é apresentada ao aluno a quantidade de atendimento diário em um consultório, em seguida é feita a sistematização de quantas vezes aparece o mesmo número com relação a estas quantidades. Em seguida procede ao algoritmo do cálculo da média ponderada. Por fim, discorre que toda média calculada assim é chamada de média aritmética ponderada. Entretanto, acreditamos na importância de clarificar para o aluno quando as frequências podem ser consideradas como pesos. Isto também para que o sentido da ponderação não se esvaia.

Nos estudos de Mayén et al (2007) no que concerne a média aritmética ponderada, os dados revelam que alunos concluintes do ensino secundário, não conseguem identificar

situações em que é necessária a utilização do cálculo da média ponderada. Assim, pontuamos mais uma vez a importância de um trabalho sistematizado nos livros didáticos dos anos finais para que os estudantes ingressem no Ensino Médio e superior com uma melhor construção do campo conceitual da média aritmética.

6.5 – A Média Aritmética utilizada apenas como contexto

No estudo dos livros didáticos encontramos ainda 117 atividades que utilizam a média apenas como um contexto, ou seja, na atividade a média é citada, no entanto o objetivo é a compreensão e a mobilização de outros conceitos. Vale salientar que todas estas atividades estão em capítulos de outros campos da matemática e não foram contabilizadas no nosso banco de dados.

Na casa de Pedro, eram gastos, em média, 960 quilowatts-hora de energia elétrica por mês. Com a mudança de alguns hábitos, como a redução no tempo de banho e o uso de lâmpadas fluorescentes, o consumo foi reduzido em 20%.

a) Essa redução corresponde a quantos quilowatts-hora? 192 quilowatts-hora

b) Sabendo que o chuveiro elétrico representa, em média, 30% do consumo de energia elétrica em uma residência, calcule quantos quilowatts-hora são gastos, aproximadamente, na casa de Pedro com o uso de chuveiro.
230,4 quilowatts-hora

Figura 22: Média Aritmética utilizada como um contexto

(Fonte: Coleção 24799, 2009, vol.7, p.220)

Nesta atividade para encontrar a solução da letra “a” o aluno precisa calcular 20% de 960 e encontrar a resposta de 192 quilowatts-hora; na letra “b” subtraem-se os 20% dos 960 e em seguida calcula os 30% encontrando 230,4 quilowatts-hora. Assim, a média é apenas um contexto nesta atividade. Não obstante a isto, atividades em que a média é citada contribui para a percepção mais aguçada do aluno com respeito a diversidades de situações envolvendo esta medida.

O interessante nestas atividades é que em algumas coleções, elas aparecem antes do estudo da média – que se utilizando do censo comum já existente nos estudantes ou da certeza

dos conhecimentos prévios dos mesmos vão preparando o terreno para quando chegar ao capítulo destinado para o estudo o aluno já tenha se deparado com o conteúdo. E em outros casos, aparecem depois do capítulo destinado ao estudo da média.

6.6 - Contexto das atividades

Uma vez que os conceitos estatísticos emergem de forma intrínseca aos conhecimentos do cotidiano, o ensino-aprendizagem deste eixo deve perpassar pela variedade de contextos, principalmente, daqueles que fazem parte do dia a dia dos estudantes. Como enfatizado pela Base Curricular de Pernambuco, com relação ao Tratamento da Informação “ao utilizar informações obtidas do ambiente social do aluno, o professor poderá promover situações que permitam a compreensão de algumas medidas estatísticas, como, por exemplo, médias aritméticas e ponderadas” (PERNAMBUCO, 2008, p.103).

Vergnaud (1991) nos coloca a importância de na conceitualização contemplar uma diversidade de situações que confirmem significados ao conceito. Isto implica necessariamente o trabalho com diversos contextos no que concerne a construção de um conceito matemático. Com objetivos de que os estudantes construam o conceito da média aritmética é emergente que os livros didáticos ofereçam, a partir de suas atividades, uma gama de situações com contextos que levem a compreensão da utilidade da média aritmética no cotidiano conectado também à compreensão conceitual deste construto.

Os contextos foram categorizados conforme contato com as atividades nos livros pesquisados. Segue tabela abaixo com os contextos e as respectivas frequências relativas.

Tabela 3: Frequência relativa dos contextos

CONTEXTO DAS ATIVIDADES	%
Escolares	20,5
preços, comércio	12,8
Velocidade	11,9
esportivas; jogos	11,2
Outros	9,3
Numérico	8,1
salário; trabalho	4,8
indústria; fabricação produtos	4,2
Familiar	4,0
Meteorologia	2,9
Idade	2,6
corporal (massa, altura)	2,6
pesquisas de opinião	1,1
Lazer	0,9
aplicação geométrica	0,9
renda per capita	0,9
Saúde	0,7
Alimentação	0,4

A maior frequência está expressa nos contextos escolares com 20,5% do total de 454 atividades. Isto se dá por conta dos livros didáticos comumente utilizarem como exemplo para os estudantes a situação tradicional da média das notas escolares como índice de aprovação escolar, lembrando que o contexto escolar não abarca só este tipo de exemplo. Assim, tanto nos exemplos com média aritmética simples, quanto com a ponderada, encontramos atividades para exemplificar tais conteúdos utilizando as situações escolares. Algumas delas envolvendo, por exemplo, o contexto geométrico é destacado nas resenhas das coleções. Acreditamos na importância do trabalho com os contextos diversificados e que os livros didáticos não se limitem aos contextos habituais, pois também limitaria a compreensão destes. A diversidade de contextos proporcionará aos estudantes uma base significativa para compreender uma rede de tipos distintos de problemas de média aritmética.

Aproveitamos no que diz respeito aos contextos para fazer um comentário sobre as situações que abordam velocidade. Boa parte destas atividades solicita ao estudante o cálculo da velocidade média. Aqui, trazemos novamente à tona, a média sendo utilizada como uma relação entre duas grandezas. São situações em que a média é usada como “índice de normalização é que a variabilidade em toda a dimensão das acumulações individuais que

criam a soma é negligenciada” (CORTINA, 2002, p.2). No caso da velocidade média significa que não é necessário saber a distância percorrida em cada ponto/momento de tempo, ou seja, a variação não precisa ser reconhecida. Volta-se o olhar para a relação de proporção entre as duas grandezas em jogo – distância percorrida e tempo gasto.

6.7 – A Natureza dos dados nas atividades de média

Triola (1999) classifica os dados estatísticos apresentando que alguns conjuntos de dados consistem em números, enquanto outros são não-numéricos, assim aplicam-se as expressões *dados quantitativos e dados qualitativos* para distinguir esses dois tipos. No que concerne aos dados quantitativos podemos fazer uma distinção entre o tipo *discreto* e *contínuo*. Posto isto, decidimos mapear a natureza dos dados utilizados nas atividades dos livros didáticos.

Na análise, categorizamos o tipo de dado discreto, contínuo e acrescentamos o sem contexto. Neste último caso são as atividades que apresentam apenas o contexto numérico, tipo sem grandeza associada; citamos como exemplo: Calcule a média dos números 3, 4 e 5. No levantamento encontramos que o tipo de dado empregado nas atividades tem maior frequência o do tipo *contínuo* com 68,7% das 454 atividades pesquisadas. Segue tabela abaixo da frequência relativa dos tipos de dados:

Tabela 4: Frequência relativa do tipo de dado

Tipo de dado	%
Contínuo	68,7
Discreto	23,1
sem contexto	8,1

Existem atividades que o dado envolvido pode, dependendo do contexto, ser contínuo ou ser discreto. A variável “idade”, por exemplo, é contínua, no entanto em algumas atividades é tratada como discreta, ocorrendo o que podemos denominar de uma forma de “discretização do contínuo”.

O tipo *discreto* correlaciona-se com dois tipos de significados, o da média enquanto valor equitativo e a media na sua função de representatividade dos dados. Já o tipo *contínuo* aparece correlacionado com os outros significados presentes nas referidas atividades.

Nos invariantes da média em que *a média é influenciada por cada um e por todos os valores e a média encontrada não coincide com um dos valores do conjunto* em 90% utiliza-se o tipo de dado contínuo. Convém destacar que todas as atividades que aborda o invariante “*a média pode ser um valor que não pode corresponder a um dado dentre o conjunto de dados reais*” utilizam os dados do tipo discreto, acreditamos que para enfatizar este aspecto no qual o invariante procura desenvolver.

6.8 - Atividades de média em outros campos da matemática

As atividades que aparecem em outros campos da matemática, no nosso banco de dados denominados de atividades fora de TI (FTI), assim, 31% das 454 atividades de média encontram-se fora dos capítulos/seções destinados ao estudo deste conteúdo. Convém destacar que algumas atividades fora de TI, aparecem em articulação com o capítulo na qual a atividade está inserida. Trouxemos o exemplo abaixo retirado do capítulo Classificação dos números – seção Reta Numérica.

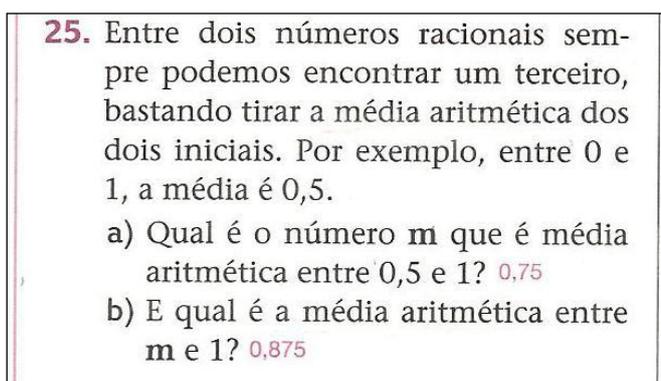


Figura 23: Atividade fora de TI articulada com o capítulo em questão.

(Fonte: Coleção 24929, 2009, vol.9, p.249)

Existem os casos em que as atividades aparecem fora de TI e sem fazer articulação com o capítulo em estudo. Segue exemplo de uma atividade pertencente ao capítulo Potência de Expoente Natural e apresentada ao estudante como um desafio.

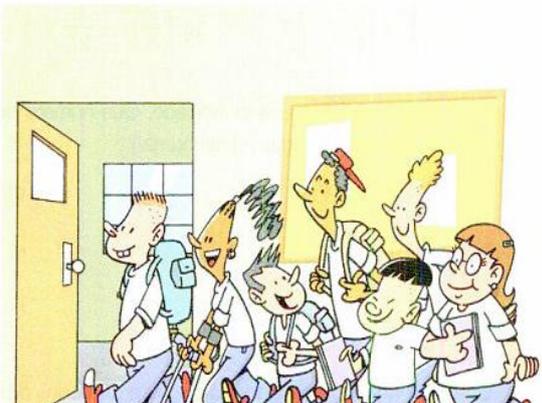
Desafio

Fazendo média...

A estatura média dos 24 alunos de uma classe é 175 cm.

a) Certo dia, faltaram Zé Grandão, o mais alto da turma, e Rapidinho, o mais baixo, cujas alturas são, respectivamente, 198 cm e 152 cm. Qual a estatura média dos alunos presentes? *175 cm*

b) E qual seria a estatura média dos alunos num dia em que apenas o Zé Grandão faltasse? *174 cm*



Luigi Piccolo

Figura 24: Atividade fora de TI sem articulação com o capítulo em questão.

(Fonte: Coleção 24931, 2009, vol. 7, p. 130)

Neste caso o desafio não propõe uma interligação entre o conteúdo das potências e a média. Contudo, é uma boa atividade apresentando-se como desafio para os alunos.

6.9 – Resenha das coleções

Doravante, apresentamos as resenhas das coleções.

Primeiro procedemos à análise de como as coleções se comportam com relação ao quantitativo de atividades por ano e por coleção, dentro dos capítulos destinados ao Tratamento da Informação. Segue gráfico abaixo:

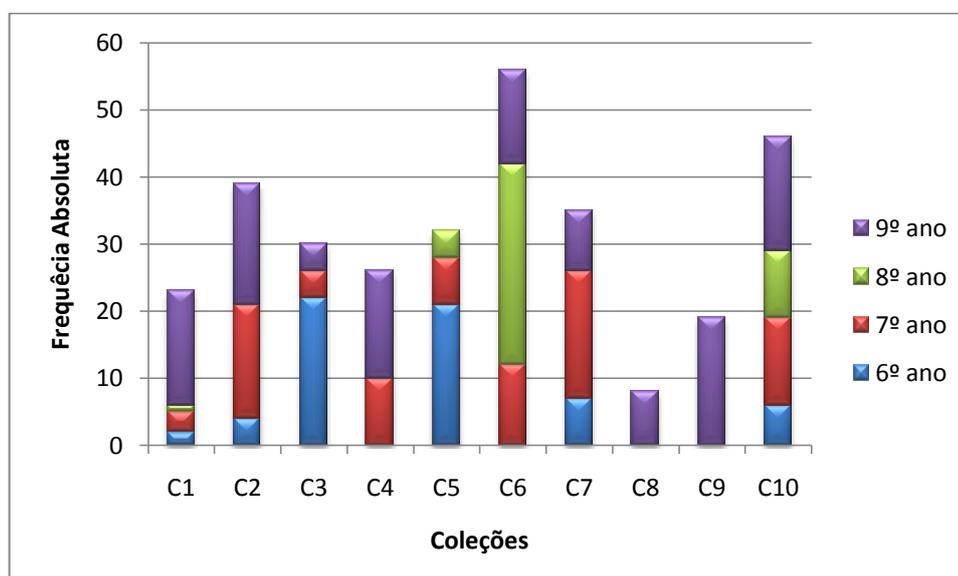


Gráfico 15: Total das atividades de média nos capítulos/seções de TI por ano e por coleção.

Destacamos que as coleções não seguem uma tendência no que concerne a abordagem da média por ano, no entanto, pontuamos que há uma convergência para se abordar a média no 9º ano, uma vez que 39% das atividades dentro de Tratamento da Informação constam neste volume. No 6º, 7º e 8º ano as porcentagens são de 20%, 27% e 14%, respectivamente.

É conveniente neste ponto, apresentar o gráfico da frequência absoluta das atividades no geral por ano e por coleção:

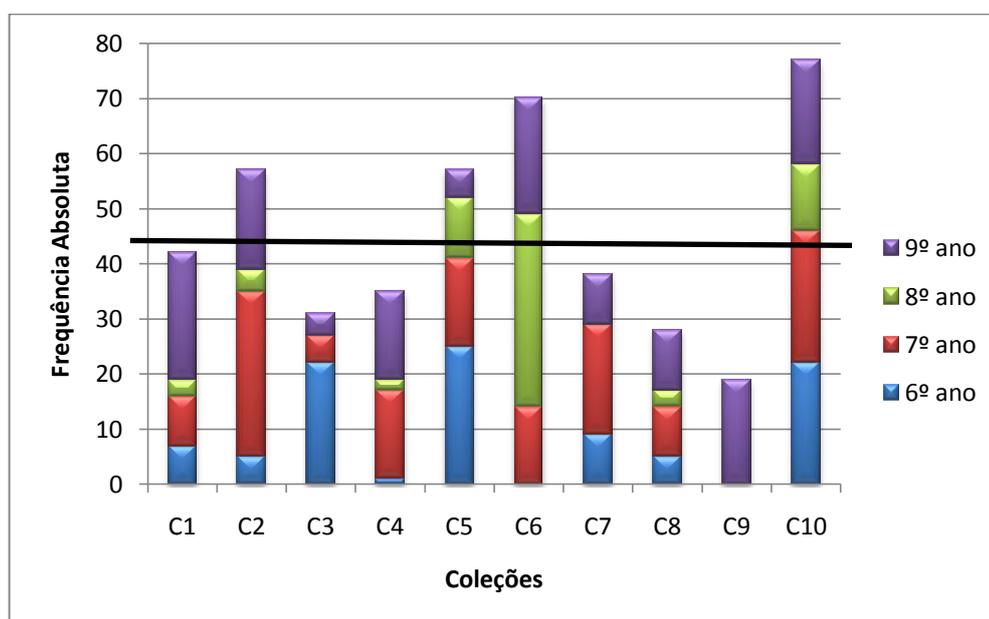


Gráfico 16: Frequência absoluta das atividades de média por ano e por coleção

Ainda assim, quando comparamos as atividades por ano e por coleção, observamos que não existe um consenso de quando se deve abordar a média. Podemos constatar que seis coleções abordam a média nos quatro anos, mesmo que em determinados anos a frequência de atividades seja muito baixa. Três em três anos e uma em um único ano. O traço na cor preta indica a média de 45,4 atividades. A coleção que mais se distancia da média é a C9 em que faz a abordagem apenas em um volume.

Para uma melhor análise da abordagem das atividades de média nas coleções criamos agrupamentos de coleções utilizando a distribuição das atividades nos volumes. E em seguida, a escrita das resenhas por agrupamento. O gráfico 3 acima, da frequência absoluta das atividades de média por ano e por coleção nos dá um melhor direcionamento para a referida categorização. Segue a denominação das categorias dos grupos de coleções:

AGRUPAMENTO 1 – Coleções com foco nos volumes do 7º e 9º anos

AGRUPAMENTO 2 – Coleções com maior foco no volume do 6º ano

AGRUPAMENTO 3 – Coleções que abordam a média em três volumes e maior foco no 7º ou 8º ano

AGRUPAMENTO 4 – Coleção que aborda a média em um único volume

AGRUPAMENTO 5 – Coleção que aborda a média de forma equilibrada entre os volumes

As resenhas foram escritas de modo a destacar a exploração de invariantes, utilização de significados e representações. Ao final da resenha dos grupos, citamos, por coleção, como as atividades de média são exploradas ao longo dos volumes. Em alguns momentos são citados exemplos para uma clarificação da abordagem.

AGRUPAMENTO 1 – Coleções com foco nos volumes do 7º e 9º anos.

Este grupo é constituído pelas coleções 24799 que identificamos como C1; 24802 como C2, 24928 como C4 e 24993 como C8. Ambas abordam a média nos quatro volumes da coleção. As coleções C1, C2, C4 e C8 apresentam uma média de 40,5 atividades por coleção e mediana de 38,5 distribuídas da seguinte forma: 42, 57, 35 e 28 atividades, respectivamente. Abaixo segue o percentual da frequência das atividades por ano deste agrupamento de coleções.

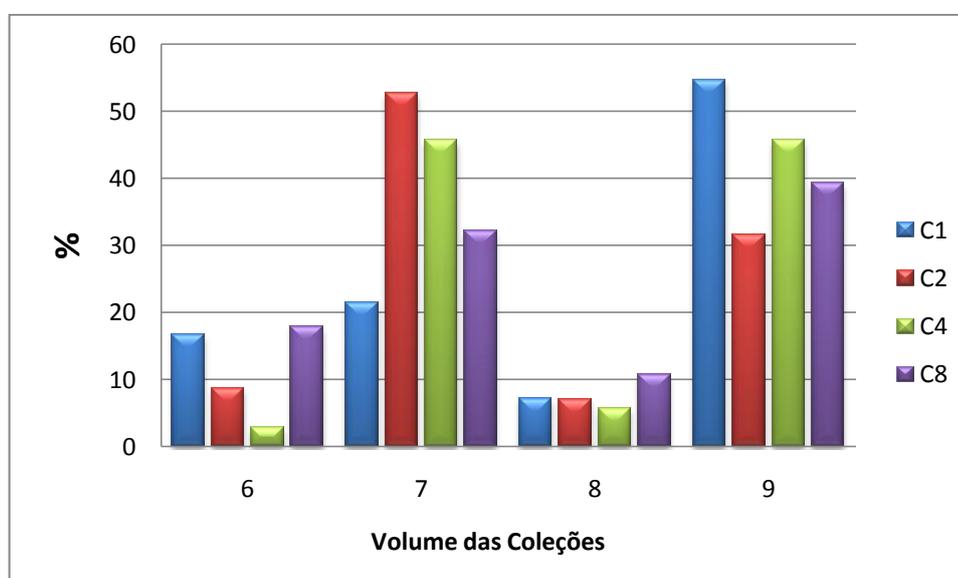


Gráfico 17: Frequência relativa das atividades por ano – C1; C2; C4 e C8.

A tendência destas coleções é concentrar as atividades de média nos volumes do 7º e 9º ano. Mais especificamente temos duas coleções com ênfase maior no 9º ano (C1 e C8), uma com ênfase igual no 7º e 9º ano (C4) e outra com maior ênfase no 7º ano (C2).

Vale ressaltar que no caso de C1 só encontramos um capítulo destinado ao estudo da média no volume do 9º ano, no qual se concentra mais de 50% das atividades relacionadas à média desta coleção. Em C4 os volumes do 6º e do 8º ano não destinam nenhum capítulo ou seção para o estudo da média aritmética, contudo encontramos três atividades de média nestes volumes.

É comum nos livros destas coleções encontrarmos atividades de média em capítulos de outros campos da matemática, ora com atividades fazendo articulação com o tema do capítulo ao qual estão inseridos, ora sem articulação com o referido capítulo.

No que concerne às propriedades em estudo, todas as coleções desse agrupamento apresentam atividades desenvolvendo as propriedades 3, 4 e 5, como podemos observar no gráfico abaixo. Para uma melhor compreensão retomamos as quantidades de cada coleção: C1 – 42 atividades, C2 – 57 atividades, C4 – 35 atividades e C8 - 28 atividades.

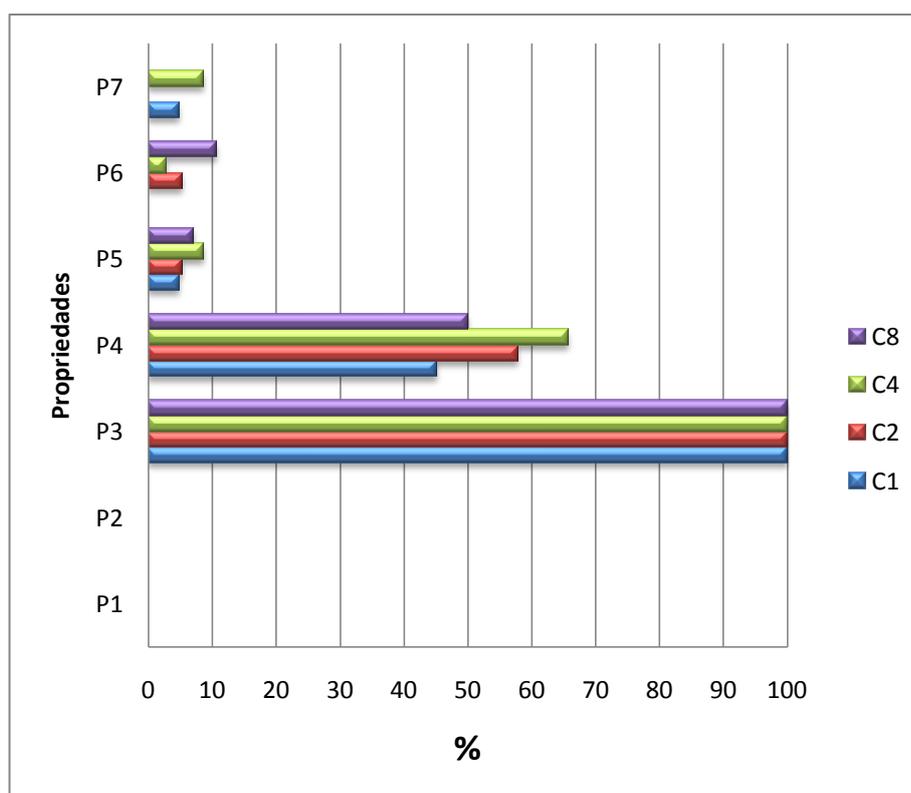


Gráfico 18: Frequência relativa das propriedades por coleção

O invariante *a média é influenciada por cada um e por todos os valores* (PROP3) é mobilizado em 100% das atividades de todas as coleções, porém fazendo uma refinação daquelas atividades que explicitam ou trabalham tal invariante de forma mais reflexiva; o percentual máximo obtido foi em C1, com 28,6%. Outro invariante que aparece sempre com o destacado acima é o de que *a média não precisa, necessariamente, coincidir com um dos valores que a compõem* (PROP4) variando entre 45% e 66%. Não obstante, na maioria dessas atividades esse invariante não é desenvolvido de forma intencional ou reflexiva. Apenas duas atividades em C1 apresentam uma intencionalidade no tocante a este invariante. O invariante *a média pode ser um valor que não pode corresponder a um dado dentre o conjunto de dados reais* (PROP5) é abordado em menos de 10% das atividades destas coleções. É explorado a partir de situações com o contexto de jogos (1,4 gols), idade (23,75 anos) e até o número médio de pessoas por residência numa avenida (4,45 pessoas). No volume do 9º ano de C8 observa-se uma atividade que solicita ao aluno encontrar a média de visita a um site, neste caso, é chamada a atenção do aluno para o arredondamento dos valores médios obtidos, o que pode interferir na compreensão deste invariante. Apenas C1 não explora o invariante que discorre que *no cálculo da média, devem ser incluídos os valores nulos e os negativos* (PROP6). As outras coleções apresentam atividades que exploram este invariante envolvendo contextos como o de temperatura, no qual solicita a temperatura média aos alunos e os mesmos devem considerar os valores negativos. Contudo nas atividades da coleção C2 é apresentado ao aluno o conjunto de dados apenas com valores negativos, o valor nulo não é explorado. Por fim, a presença do invariante *a média é um "representante" dos dados a partir da qual foi calculada, ou seja, é o valor que está mais próximo de todos os demais dados (aspecto espacial)* (PROP7) é explorado por apenas duas coleções – C1 e C4 também numa frequência menor que 10% do total de atividades por coleção. Como exemplo na atividade do 6º ano em C1 é solicitado o cálculo das alturas médias de jogadores de duas equipes e em seguida pede-se ao aluno quantos jogadores tem altura acima da média e quantos tem abaixo da média.

Quanto aos significados, as coleções centram no significado da *média como elemento representativo de um conjunto de dados*, no qual a menor frequência de abordagem fica em 83% em C1. As coleções também apresentam atividades envolvendo o significado da média enquanto *necessidade de obter um valor justo/equitativo para uma distribuição uniforme*, apesar de que neste caso a frequência é bem tímida não ultrapassando três atividades e, ainda, C2 não explora este significado. Ainda podemos destacar que foi em C1 que pudemos identificar e classificar o significado da média como uma *estimativa da variável para tempo*

futuro. É plausível o fato de C4 não apresentar atividades utilizando apenas o que chamamos de significado procedimental, ou seja, situações que trabalham apenas o procedimento de cálculo, uma vez que com base na literatura atual o algoritmo da média deve aparecer como uma ferramenta para as situações contextualizadas e com significados agregados.

No que concerne às representações temos três coleções que abordam as três representações pesquisadas – a linguagem materna, a gráfica e a tabular. E ainda, todas as coleções abordam a representação em linguagem materna. No entanto, a coleção C1 e C2 dão uma maior ênfase na representação em linguagem materna com 67% e 68% respectivamente do seu total de atividades. Podemos considerar como um viés, ainda que tímido, que já se atenta para a importância das variadas representações na construção conceitual. Porém, C4 não aborda a representação gráfica. Destaque para C8 pela importância dada à representação tabular (53,7%) a partir de quadros de dados e tabelas de frequências, que se destacam quando comparamos com as outras coleções. O contexto mais frequente nas quatro coleções é o de velocidade média, mas também ficam entre os mais abordados os contextos com preços/comércio, situações escolares e situações esportivas.

Abaixo as especificidades de cada coleção por volume.

C1. Coleção 24799 – Matemática - Edwaldo Bianchini

O volume do 6º ano não apresenta um capítulo específico para o Tratamento da Informação. O conceito de média aparece na seção “Para saber mais”, na qual é apresentada uma situação contextualizada de gasto médio trabalhando o significado representativo para uma comparação de gastos. Apresenta ainda cinco atividades fora desta seção destinada ao estudo da média, dentro de outros capítulos, a saber: Divisão; Comprimento e áreas; Outras unidades de medida. Tais atividades de média fazem relação com o tema onde a atividade se situa.

No volume do 7º ano, também não há um capítulo destinado ao Tratamento da Informação. A média aparece na seção “Para saber mais” intitulada de “Média e Estimativa”. É nesta seção que surge um dos significados da média – *a média enquanto estimativa da variável para tempo futuro*. São encontrados alguns exemplos de média dentro do capítulo de Razões entre Grandezas de Naturezas Diferentes com situações envolvendo, por exemplo, velocidade média ou consumo médio.

No volume destinado ao 8º ano, encontramos na seção “Para saber mais” a média articulada com o gráfico de setores. Em outra atividade no estudo de determinação de ângulos

em um gráfico de setores trabalha a média da variável pesquisada. E ainda no capítulo de Números Reais na seção “Pense mais um pouco...” apresenta uma atividade envolvendo a média de dois números e sua localização na reta real para a compreensão dos números racionais na reta real.

Por fim, o volume do 9º ano apresenta um capítulo específico para Estatística e Probabilidade, bem como uma seção para as Medidas de Tendência Central ou Medidas-resumo como denomina este autor. Neste volume detectamos um número maior de atividades com relação aos outros volumes da coleção agregando mais de 50% das atividades de toda coleção. Aborda a média com o exemplo clássico de nota escolar. Em seguida faz uma explicação aludindo ao caráter da média enquanto valor equitativo. Define a média aritmética da seguinte forma: *Para calcular a média aritmética de dois ou mais números, dividimos a soma desses números pela quantidade de números dados.* Discute as três medidas e apresenta situação com a média ponderada. Numa terceira situação apresenta o cálculo da média envolvendo valores que se repetem e chama de ponderada a média de frequências.

C2. COLEÇÃO 24802 – A Conquista da Matemática – Giovanni Jr. e Castrucci

No 6º ano não existe um capítulo específico de Tratamento da Informação. O estudo da média na seção “Tratando a Informação” encontra-se no final do capítulo de Critérios de Divisibilidade, com o título “Um fenômeno estatístico: o estudo de médias”. Apresenta um exemplo refletindo sobre a representatividade da média numa situação com idades. A partir deste exemplo define: *a média aritmética de n números representa a soma de todos os números, dividida por n .* Em seguida apresenta três atividades, uma delas com quadro de dados. Fora desta seção destinada ao estudo da média, encontramos uma atividade na seção “Brasil Real” articulada a uma situação de meio ambiente.

Na obra destinada ao 7º ano é apresentado um capítulo para a média dentro da unidade “O Conjunto dos Números Racionais”. Aborda a média simples e a ponderada. Utiliza um mesmo exemplo com notas escolares para abordar as duas situações. Repete a definição do conceito da mesma forma que no volume anterior. Nas suas atividades encontramos números negativos e frações. Na seção “Tratando a Informação” continua abordando a média com o tema “O uso da média”. Utiliza alguns gráficos e quadro de dados. Há uma quantidade significativa de atividades nos capítulos de outros campos da matemática. Tais atividades aparecem nos capítulos de Fórmulas Matemáticas e em Grandezas proporcionais. A maioria das atividades é de cálculo de velocidade média.

No volume do 8º ano a obra não apresenta nenhuma atividade de média dentro das seções destinadas ao Tratamento da Informação. No entanto, apresenta quatro atividades em outros capítulos, a saber: Polinômios, Estudo das Frações Algébricas, Ângulos e Equações. Neste último, a atividade está articulada com o conteúdo em estudo.

E no 9º ano temos a unidade “Noções Elementares da Estatística” no qual inclui um capítulo específico para a média. Apresenta exemplos envolvendo a média simples e a ponderada fazendo uma reflexão sobre o uso de cada. Novamente repete a mesma definição conceitual dada no volume do 6º ano. Na seção “Brasil Real” envolve o cálculo da altura média e de número médio de calçados numa atividade na qual se articula conteúdos da geografia.

C4. COLEÇÃO 24928 – Ideias e Desafios – Iracema e Dulce

Com relação ao volume do 6º ano existe uma única atividade no capítulo de Operações com Números Naturais que envolve média, a saber velocidade média.

Dentro da unidade de estudo dos Números Racionais no 7º ano é apresentado um capítulo destinado ao Tratamento da Informação. A abordagem da média neste capítulo acontece a partir de frases comuns no dia a dia. Em seguida, começa a exemplificar utilizando uma situação com gols da qual utiliza o algoritmo da média e trabalha o significado de distribuição uniforme. Logo adiante, faz a definição da média aritmética: *A média aritmética de n valores é o quociente que obtemos dividindo a soma dos valores por n .* Algumas atividades aparecem com os dados em quadros, mas não apresenta gráficos articulado com o cálculo da média. As atividades que estão em outros campos da matemática aparecem no capítulo intitulado “Algumas razões especiais” e no capítulo de Grandezas Proporcionais – em ambos os casos envolve velocidade média.

No volume do 8º ano também não existe nenhum capítulo ou seção destinado ao estudo da média aritmética. Entretanto, encontramos duas atividades. Uma delas, dentro da revisão cumulativa do capítulo de Triângulos e Quadriláteros, incentiva uma reflexão do aluno para explicar o que significa o valor encontrado no cálculo da média.

No que diz respeito ao volume do 9º ano encontramos na unidade de Tratamento da Informação o capítulo “Leitura e análise da informação organizada”. O referido capítulo se divide em quatro seções – uma para cada medida de tendência central e um para a comparação das três medidas. Na abordagem da média traz informações do cotidiano para uma melhor contextualização. Apresenta uma situação questionando qual o valor mais

adequado para representar o crescimento de um grupo. Faz o cálculo da média com os valores do quadro e em seguida apresenta a definição da média: *a média aritmética de n valores é o quociente que se obtém dividindo a soma desses valores por n*. Apresenta um exemplo de forma bem explicativa do cálculo da média a partir de uma tabela de distribuição de frequências. Doravante faz a apresentação da média aritmética ponderada sem confundir com a média a partir de uma distribuição de frequências. Apesar de que no final das explicações o autor diz que pode considerar as frequências do exemplo anterior como pesos. Após apresentar moda e mediana, em outra seção, faz a comparação utilizando uma mesma situação para as três medidas indicando em que momento é adequado utilizar cada uma. Neste volume não encontramos atividades em outros campos da matemática.

C8. COLEÇÃO 24993 – Projeto Radix

No 6º ano, no capítulo denominado *Interpretando Informações* não encontramos nenhuma atividade de média, são focalizados os conteúdos de gráficos e tabelas. Em contrapartida, antes deste capítulo encontramos cinco atividades de média, distribuídas nos capítulos de Operações com Naturais e Operações com Decimais. No de Operações com Naturais, vale destacar a atividade que faz o aluno percorrer os passos do algoritmo da média através de um esquema, além de incluir outros valores e solicitar o cálculo da média.

No volume do 7º ano também não há atividades no capítulo destinado ao Tratamento da Informação que além do foco em gráficos e tabelas, amplia para probabilidade. No entanto, existem nove atividades em outros campos da matemática na coleção, a saber: Operações com decimais; Os números positivos e negativos; Medidas de capacidade e em Proporção. Uma destas atividades faz o aluno percorrer os passos do algoritmo, explicando cada momento do cálculo da média. Outra atividade que é pertinente ressaltar é a que solicita uma média de quilobits articulando temas da tecnologia.

No 8º ano, encontramos apenas três atividades nos capítulos de Equações e Inequações e no capítulo denominado Regra de Três, porém as atividades não trazem reflexões profundas.

No 9º ano, o capítulo de Tratamento da Informação apresenta um tópico que aborda a média: “Média, moda e mediana”. Inicia a abordagem deste conceito com três notícias envolvendo a palavra média. Em seguida define a média como: *a média aritmética é o quociente obtido ao se dividir a soma dos valores da variável pela quantidade de valores*. As atividades são contextualizadas e envolvem gráficos e tabelas. Apresenta três atividades após o capítulo de estudo da média no capítulo destinado ao estudo das Funções.

AGRUPAMENTO 2 – Coleções com maior foco no volume do 6º ano

As coleções 24810 e 24929 são as que constituem este grupo de coleções nas quais denominamos C3 e C5 respectivamente. O que caracteriza este conjunto de coleções é o fato de concentrar as atividades de média no volume do 6º ano. Em C3 a unidade destinada ao estudo da média encontra-se na unidade 9 do volume do 6º ano com o tema “Analisando Informações”, onde temos 71% das 31 atividades de média da referida coleção. No caso de C5, o conceito de média aritmética é visto em todos os volumes, porém com um maior quantitativo de atividades no volume do 6º ano, agregando 44% das 57 atividades de média que a coleção apresenta. A coleção C5 não explicita por extenso a definição da média, porém isto não afeta a construção do conhecimento desta medida. O gráfico em seguida confirma tal característica das coleções.

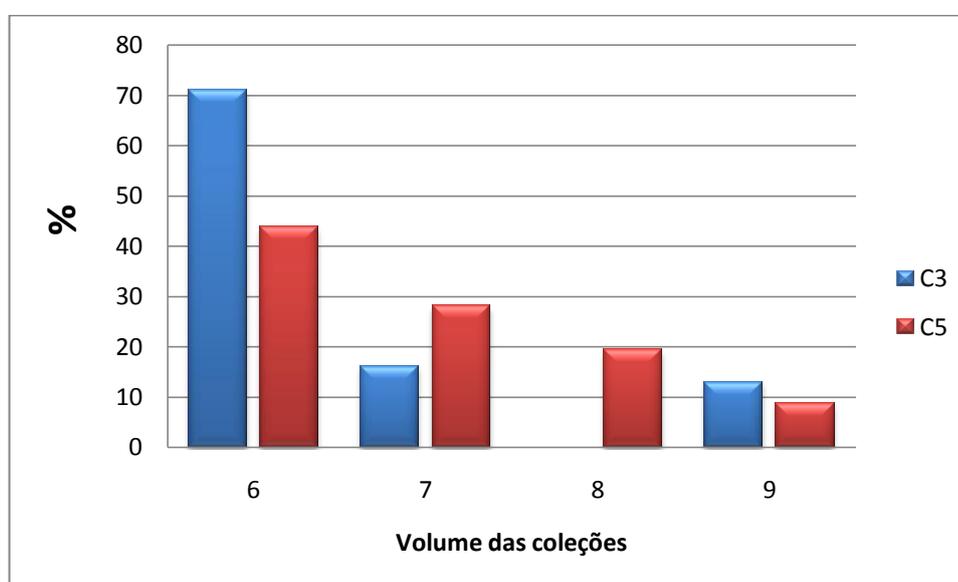


Gráfico 19: Frequência relativa das atividades por ano – C3 e C5.

Destacamos ainda que C3 apresenta atividades em apenas três volumes, mas em ambas as coleções mais de 70% das atividades concentram-se no volume do 6º e 7º ano.

A distribuição da exploração dos invariantes pode ser conferida no gráfico abaixo. Convém explicitar novamente o quantitativo total de atividades por coleção: C3 com 31 e C5 com 57 atividades sobre média na coleção.

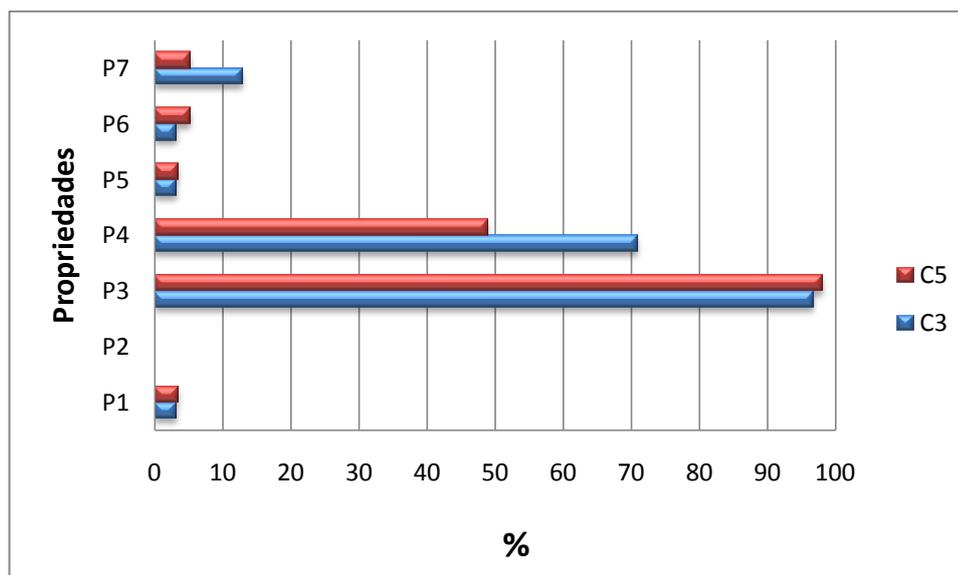


Gráfico 20: Frequência relativa das propriedades por coleção – C3 e C5

As duas coleções abordam as mesmas propriedades e deixa de fora a propriedade 2. O invariante que se expressa como *a média está localizada entre os valores extremos da distribuição* (PROP1) não ultrapassa 4% em ambas as coleções. Uma atividade em C3 faz uma reflexão questionando o aluno se a média encontrada pode ser igual ao maior valor ou igual ao menor valor. Em C5 configura-se em duas atividades da coleção, uma no 6º ano e outra no 9º ano. Utilizando o exemplo da atividade do 6º ano, temos um quadro de dados que é apresentado com diversas variáveis, entre elas as idades de 13 jogadoras. Daí solicita-se ao aluno explicar o porquê que uma pessoa que calculou a média dessas idades e encontrou 29 anos está errado. O aluno deverá perceber que 29 é o dado de valor máximo não podendo corresponder a média das idades do grupo em questão, para isso deve mobilizar o invariante em questão. *A média é influenciada por cada um e por todos os valores* (PROP3) em ambas as coleções esta propriedade é explorada acima dos 96% do total das atividades, entretanto C3 mobiliza este invariante de forma intencional em 13,3% e C5 em 21,4% destas atividades que envolvem a propriedade 3. No caso do invariante *a média não precisa, necessariamente, coincidir com um dos valores que a compõem* (PROP4) consta em 71% das atividades de C3 e 49% das atividades de C5, ainda aferimos aqui que nenhuma destas atividades apresenta intencionalidade com respeito a este invariante. *A média pode ser um valor que não pode corresponder a um dado dentre o conjunto de dados reais* (PROP5) percentualmente fica no mesmo patamar da propriedade 1 não ultrapassando os 4% das atividades das referidas coleções. O mesmo é explorado em atividades utilizando o contexto de gols (tipo 0,93 gols) e também no consumo de refrigerantes. O invariante que faz a exploração de que *no cálculo da*

*média, devem ser incluídos os valores nulos e os negativos (PROP6) em C3 é de 3,2% e C5 de 5,3%. Todas as atividades incluem no conjunto de dados os valores nulos e negativos. Uma destas atividades é apresentada em C5 através de um exemplo em que três irmãos juntos têm em média 60 reais, no entanto, um deles não tem nenhum valor, mas é incluído no cálculo da média. O invariante que discorre que a média é um "representante" dos dados a partir da qual foi calculada, ou seja, é o valor que está mais próximo de todos os demais dados (aspecto espacial) (PROP7) é explorado pelas duas coleções com um percentual um pouco maior com relação as propriedade 5 e 6. Destacamos um exemplo de C5 que é uma atividade em que aparece o significado da média enquanto *necessidade de obter um valor justo/equitativo para uma distribuição uniforme*. Neste exemplo é explicado ao aluno o sentido da compensação num contexto de venda de uma boiada, onde é esclarecido que “os bois mais pesados compensam os mais leves” (IMENES E LELLIS, vol.6, p.189). Já em C3 uma das atividades questiona o aluno indagando se é possível ter uma ideia da distribuição dos dados e em seguida com o auxílio de uma área quadriculada faz a movimentação das barras.*

No que concerne aos significados, às coleções exploram o mesmo conjunto de significados. O significado da média como *estimação de uma quantidade desconhecida na presença de erros de medição* é explorado por cada coleção a partir de uma única atividade. Em C3 tal atividade é articulada com o campo da ciência. Posta o seguinte desafio para o aluno “Quanto pesa a Terra?” e daí o aluno precisa calcular a média a partir do quadro de dados dos variados valores de medição da terra. Já em C5 tal significado é abordado em uma atividade no 8º ano na qual solicita ao aluno calcular o valor aproximado para π a partir da média de vários valores obtidos numa medição anterior. Outro significado encontrado nas duas coleções são as situações da média como *necessidade de obter um valor justo/equitativo para uma distribuição uniforme*. O exemplo mencionado acima, da venda de uma boiada, é uma destas atividades, na qual explica ao aluno que “se todos tivessem o mesmo peso cada um teria 18 arrobas” (IMENES E LELLIS, vol.6, p.189). Por fim, as situações da média *servindo como elemento representativo de um conjunto de dados* são exploradas em 77,4% das atividades de C3 e 87,7% de C5. O significado que denominamos de procedimental, onde se utiliza apenas o cálculo numérico, também aparece nas duas coleções.

No caso das representações, tem maior frequência a linguagem materna, mas as gráficas e tabulares são abordadas de forma equilibrada o que também confirma a caracterização deste grupo de coleções. Com relação aos contextos a tendência aqui é a

utilização das situações escolares. Contudo em C5 encontramos uma maior variação de contextos incluindo o contexto geométrico e o corporal.

Segue as especificidades das coleções.

C3. COLEÇÃO 24810 – Aplicando a matemática – Trovon e Reis

Como vimos anteriormente, a unidade destinada ao estudo da média encontra-se no volume do 6º ano com o tema “Analisando Informações”. O conceito é introduzido a partir de um diálogo explicando o que a média tem haver com a estatística. Em seguida apresenta três situações contextualizadas, onde na primeira intenciona que o estudante compreenda a partir do diálogo a definição da média: *é só somar os valores e dividir pelo número deles*. Nestas situações traz a tona a média enquanto ponto de equilíbrio e faz esta explicitação. Não apresenta atividades em outros campos da matemática na obra.

No volume do 7º ano a unidade destinada para o Tratamento da Informação não estuda a média. Apresenta apenas três atividades solicitando o cálculo da média sem uma explanação conceitual. Traz ainda uma atividade dentro da seção Multiplicação e Divisão da unidade de “Números negativos”.

No 9º ano, o foco da unidade de Tratamento da Informação é a Probabilidade, porém apresenta atividades de média, misturadas a outras atividades – surge como um resgate. É nesta obra que apresenta uma atividade como desafio bem contextualizado e envolvendo o significado da média como a *estimativa de uma quantidade desconhecida na presença de erros de medição*.

C5. COLEÇÃO 24929 – Matemática - Imenes e Lellis

No 6º ano já apresenta um item específico para a média dentro do capítulo de Estatística. A abordagem feita por esta obra torna-se interessante por ser bem ilustrativa com diálogos entre adultos e crianças utilizando-se da linguagem em quadrinhos. O “tópico conversando sobre o texto” complementa a compreensão do estudante com outros exemplos. Uma charge também é utilizada para contribuir no entendimento do conceito. Não explicita por extenso a definição de média aritmética, contudo fica clara a compreensão a partir dos exemplos que são discutidos. Apresenta problemas com gráficos, tabelas e também extratos de reportagens. Tais problemas propiciam uma reflexão da aplicação da média. Neste ano temos quatro atividades que estão distribuídas em outros capítulos, a saber: Operações

Fundamentais com uma atividade sobre velocidade média; Divisão com Números Decimais também com uma atividade sobre velocidade média; no capítulo Linguagem Matemática apresenta uma atividade demonstrando a média ponderada, é uma atividade significativa, pois solicita a tradução da maneira de calcular a nota final (a média) por meio de uma expressão numérica; e a última atividade aparece nos testes do capítulo denominado “Generalizações”, na qual questiona o aluno se a média de três números consecutivos será sempre o número do meio.

No volume do 7º ano, no item de Informações Numéricas, aborda um exemplo utilizando a renda per capita e explicitando a média envolvida neste raciocínio. Traz atividades com consumo médio, densidade demográfica, média salarial e velocidade média. Também nesta coleção encontramos atividades em outros capítulos ao longo da obra, citamos a seguir: Operações com números decimais; Medidas; Multiplicação e Divisão de números com sinais; Volume; Usando letras em Matemática. Neste último - Usando letras em matemática - apresenta uma atividade similar a do 6º ano, em que no decorrer da atividade, faz uma explicação da média aritmética ponderada e solicita ao aluno a criação de uma fórmula para o cálculo da média.

No 8º ano a média é abordada nos problemas e exercícios dentro do item Tratamento de Dados. Alguns problemas para a resolução do aluno funcionam como exemplos, pois vai discutindo passo a passo a resolução. Apresenta também uma atividade solicitando a média de porcentagens. Aparecem algumas atividades em outros capítulos tais como: Aplicações da Matemática; Retomando a Álgebra e Geometria Experimental. Este último destaca-se por solicitar a média dos valores obtidos para π numa experiência com latas de tamanhos variados.

O capítulo de Estatística no volume do 9º ano é destinado ao conteúdo de probabilidade. Porém no volume do 9º ano encontramos atividades de média em outros campos da matemática, tais como no capítulo de Medidas; Matemática, Comércio e Indústria; Funções e Classificação dos Números. Este último no item a Reta Numérica aborda que entre dois números racionais sempre podemos encontrar um terceiro bastando tirar a média, e assim, solicita ao aluno encontrar alguns números racionais.

AGRUPAMENTO 3 – Coleções que abordam a média em três volumes e maior foco no volume do 7º ou 8º ano.

Este grupo é formado pelas coleções 24931 (C6) e 24935 (C7). O ponto comum destas coleções é a abordagem da média em três volumes, além de apresentar uma maior concentração das atividades no 7º ou 8º ano.

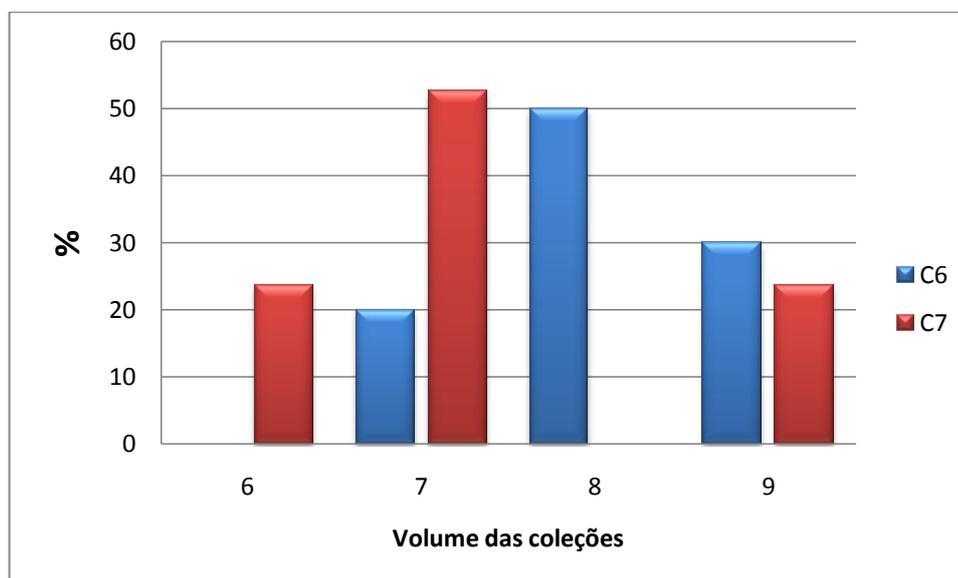


Gráfico 21: Frequência relativa das atividades por ano do grupo de coleções – C6 e C7

A primeira coleção – C6 distribui as atividades de média ao longo dos volumes do 7º, 8º e 9º ano, no entanto, tem maior frequência de atividades o volume do 8º ano abrangendo 50% do total de 70 atividades trabalhadas na coleção. No volume do 6º ano temos a unidade de Estatística, entretanto, os capítulos desta unidade contemplam somente os conteúdos de Porcentagens e Gráficos. A coleção no 7º ano contextualiza e define a média aritmética dentro do capítulo específico, adiante apresenta dois desafios para os alunos com o intuito de ampliar a compreensão sobre a média aritmética simples e a ponderada. Retoma no 8º ano a média simples e a ponderada através de exemplos contextualizados, contudo faz uma maior abordagem inclusive com um tópico em que convida o aluno para interpretar a média e outro sobre o cálculo da média a partir de uma tabela de frequência. E no 9º ano apresenta sucintamente a média com o objetivo de situá-la como uma medida de tendência central, logo aborda a moda e a mediana para compor este quadro. No final do referido capítulo ainda é sugerida uma pesquisa para os alunos realizarem em que instiga os mesmos a calcularem as médias dos dados levantados.

A outra coleção – C7 utiliza os volumes do 6º, 7º e 9º ano para abordagem da média e centraliza as atividades no volume do 7º ano contabilizando 52,6% das 38 atividades de média da coleção. No 6º ano a coleção apresenta a média juntamente com o conteúdo de porcentagens. A média não vista de forma aprofundada. No 7º ano é que a média é mais desenvolvida conceitualmente, inclusive com a definição formal do conceito. Ainda é demonstrada para o aluno a média aritmética ponderada trazendo a tona o que significa ponderar. Nesta coleção também no 9º ano é feita a apresentação da média juntamente com a moda e a mediana, isto, para que os alunos compreendam as medidas que podem ser utilizadas para a compreensão do comportamento dos dados de uma pesquisa.

No estudo dos invariantes encontramos que as duas coleções não abordam as propriedades 1 e 2. Além do que C6 explora quatro propriedades e C7 cinco propriedades, como podem ser analisadas no gráfico em seguida:

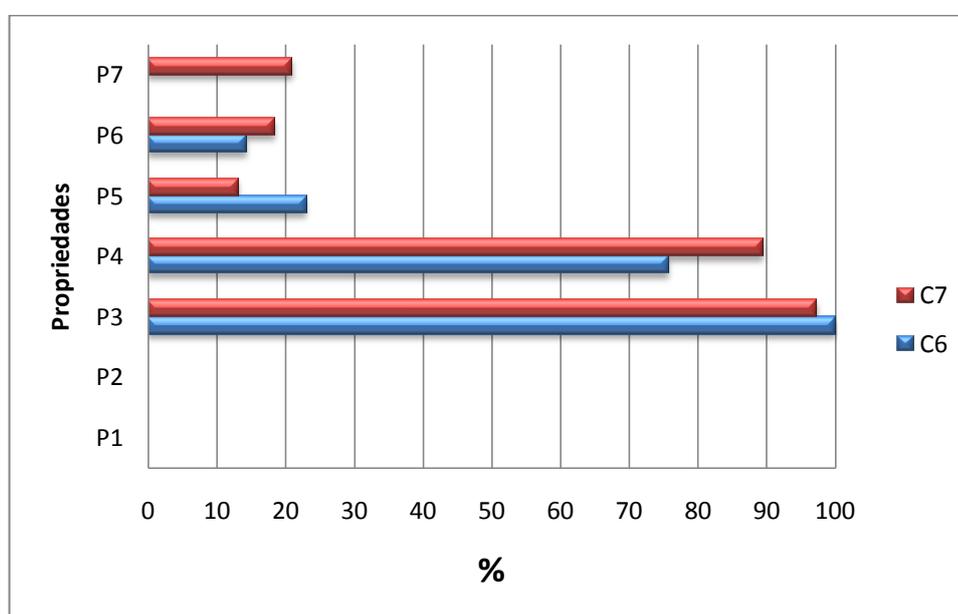


Gráfico 22: Frequência relativa das propriedades por coleção – C6 e C7

O invariante no qual trabalha que *a média é influenciada por cada um e por todos os valores* (PROP3) aparece em 100% das atividades de C6 e em 97,4% de C7, porém de forma intencional e significativa consta apenas em 15,7% e 29,7% respectivamente. Outro invariante *a média não precisa, necessariamente, coincidir com um dos valores que a compõem* (PROP4) aparece em 76% das atividades em C6 e 89,5% em C7, mas ressaltamos que apenas uma atividade chama a atenção do aluno para este invariante no volume do 8º ano de C6, onde diz que “na verdade, nenhum deles ganha R\$ 900,00 por mês” (IEZZI et al, v.8, p.148).

O invariante *a média pode ser um valor que não pode corresponder a um dado dentro o conjunto de dados reais* (PROP5) é explorado em 23% e 13,2% das atividades de C6 e C7, respectivamente. Tal invariante emerge em atividades com contexto de situações esportivas, situações escolares e familiares. Em C6 temos situações, tipo 2,5 irmãos para a média de irmãos de um grupo de amigos, 3,3 pessoas por carro num feriado prolongado ou até mesmo o número médio de microcomputadores de candidatos sendo de 0,89 microcomputadores. De C7 tiramos o exemplo com o número de irmãos, em que chama a atenção do aluno com o texto: “veja como a média é abstrata, ninguém tem 1,6 irmãos” (JAKUBOVIC E CENTURIÓN, v.9, p.229). No cálculo da média, devem ser incluídos os valores nulos e os negativos (PROP6) é um invariante abordado por 14,3% das atividades da coleção C6 e a coleção C7 por 18,4%. A diferença entre as coleções com respeito a este invariante é que em C6 temos atividades com valores nulos contribuindo na utilização pelo aluno deste invariante, porém não apresenta atividades com valores negativos; já no caso de C7 é trabalhado no conjunto dos dados tanto os valores nulos como os negativos. E o invariante *a média é um "representante" dos dados a partir da qual foi calculada, ou seja, é o valor que está mais próximo de todos os demais dados (aspecto espacial)* é explorado apenas por C7 com frequência de 21% do total de atividades, o que é um bom sinal levando em consideração a ausência desta propriedade em outras coleções. Como exemplo destas atividades, temos uma que utiliza o contexto de salários/trabalho e reflete junto aos alunos se a média representa o ganho da maioria dos funcionários da empresa, discutindo o aspecto de representatividade da média com relação aos dados; outra que solicita ao aluno as idades mais próximas da média, e ainda uma que discute valores “a mais” e “a menos” que se compensam.

As situações que conferem significados ao conceito de média neste agrupamento se concentram nas situações da *média como elemento representativo de um conjunto de dados* explorado por 86% das atividades de C6 e por 79% de C7. De forma tímida as coleções apresentam duas atividades em C6 e uma em C7 com o significado da *média como necessidade de obter um valor justo/equitativo para uma distribuição uniforme*. Uma destas atividades aparece no contexto de fabricação de garrafas pet e solicita ao aluno a partir da noção de que as garrafas pet têm o mesmo peso, qual seria o peso médio. No tocante ao significado procedimental é explorado por 11,4% das atividades em C6 e por 18,5% em C7, onde convém trazer a tona que atividades sem contexto não contribuem para a construção do campo conceitual da média.

Completando o tripé do campo conceitual temos as representações, onde neste agrupamento observamos uma tendência para o trabalho com a representação em linguagem

materna e a tabular. A gráfica em C6 é abordada em apenas 7% das atividades e em C7 constatamos a lacuna desta representação, que vai de encontro à importância do trabalho com diversas representações para a construção de um conceito pelos estudantes.

Também neste grupo o contexto mais explorado é o de situações escolares com 24,3% e 35% respectivamente em C6 e C7. Ambas as coleções exploram o contexto numérico numa alta frequência quando comparamos com outras coleções. Dizemos alta por que estamos nos referimos à necessidade de situações contextualizadas, no qual salientamos a importância de atividades que explorem situações que contribuam na construção de significados.

C6. COLEÇÃO 24931 – Matemática e Realidade – Iezzi, Dolce e Machado

No volume do 7º ano é destinada uma unidade para Estatística com o capítulo de gráficos abordando especificamente os diversos tipos de gráficos estatísticos. No entanto, a média aritmética não está fora deste volume. O capítulo de média está incluso na unidade de Números Racionais e intitulado de “Média aritmética e Porcentagem”. Apresenta um exemplo com três informações: quantidade de gols por time, idade dos jogadores e custo em reais com as despesas dos times. Com isto vai resolvendo e apresentando ao aluno: a média de idades, a média de gols e despesa média mensal. Logo em seguida faz a definição da média aritmética da seguinte maneira: *Se temos alguns números racionais e dividimos a sua soma pelo número de parcelas, obtemos um número chamado média aritmética dos números dados.* Apresenta atividade envolvendo o cálculo apenas procedimental e também a média com os dados organizados em quadros. As atividades apresentadas no “Teste seu conhecimento” são interessantes para que os estudantes compreendam a média como uma representante do conjunto de dados e a necessidade do cálculo inverso para uma compreensão além do algoritmo do cálculo da média. Em outros campos da matemática encontramos duas atividades como “desafio” para os estudantes. A primeira delas é intitulada “Fazendo Média” e solicita aos alunos, com o valor dado da média, encontrar valores que faltam no conjunto de dados. Este desafio se encontra no final do capítulo dos Estudos das Potências. Já o outro desafio tem como título “Equacionando a média” e apresenta um exemplo utilizando o raciocínio da média aritmética ponderada, mas sem explicitá-la em forma de definições. No entanto, é uma boa atividade, em que solicita ao aluno encontrar uma expressão algébrica que dê a nota, logo o aluno encontrará o algoritmo da resolução da média ponderada. Este segundo desafio aparece no final do capítulo de Equações.

No 8º ano a unidade de Estatística aborda exclusivamente a média aritmética. Neste capítulo apresenta 35 atividades de média. Aborda a média utilizando dois exemplos: um com média simples e o outro com média ponderada. Com o exemplo intitulado “O Critério da Professora Eliete” apresenta o algoritmo do cálculo e define a média como: *A média aritmética de n números reais é o número que se obtém somando os n números e dividindo o resultado por n .* Em seguida com o exemplo intitulado “O Critério do Professor Antônio” demonstra o procedimento de cálculo e define média ponderada: *A média ponderada de n números reais é o número que se obtém multiplicando cada número pelo seu peso, somando esses produtos e dividindo o resultado pela soma dos pesos.* Faz uma ressalva interessante com relação à média de muitos números repetidos informando que podemos considerar como uma média ponderada. Tem um tópico que diz “Vamos interpretar a média” do qual realiza uma discussão sobre o caráter representativo da mesma. Explora neste capítulo a média geométrica que não é o foco do nosso estudo. Utiliza nas atividades um número considerável de tabelas e gráficos. Depois do capítulo de média apresenta cinco atividades em outros capítulos, muitas vezes, no final do referido capítulo sem fazer articulação com o mesmo, como no caso do capítulo de Fatoração. Aparece também na parte do estudo das equações. E outra vez como Matemática em Notícia.

Por fim no volume do 9º ano a média aparece nas seções do capítulo de Noções Estatísticas, onde também tem a moda e a mediana. Não faz uma discussão aprofundada, apresenta a média para poder puxar a moda e a mediana. É comum nas atividades solicitar o cálculo das três medidas. Nas atividades que aparecem em outros capítulos, uma das atividades faz um comentário para o aluno de como se calcula a média de dois números. Depois comenta sobre a média de “ n ” números positivos. Existe também uma atividade articulada com o conteúdo Função do 1º Grau.

C7. COLEÇÃO 24935 – Matemática na medida certa – Jakubovic e Centurión

No volume do 6º ano encontramos o capítulo denominado Tratamento dos Dados e um tópico intitulado de “Média Aritmética e Porcentagens.” Inicia o exemplo de média dizendo para o aluno “essa média você já conhece” (JAKUBOVIC E CENTURIÓN, v.6, p.200), pois faz referência ao cálculo da nota média que o aluno realiza para saber se foi aprovado de ano escolar. Apresenta o algoritmo do cálculo da média. Faz uma explicação da média como representante. Não faz apresentação por extenso da definição. Logo em seguida apresenta a porcentagem como uma forma útil na apresentação de dados. Algumas atividades

acompanham tabelas e quadro de dados. Antes do capítulo destinado ao Tratamento da Informação já apresenta uma atividade envolvendo o cálculo da média das notas de um aluno. No capítulo de Medidas é apresentada uma atividade envolvendo um quadro de dados de forma interdisciplinar, neste exercício faz uma reflexão sobre o dado mais próximo ou mais distante da média.

No volume do 7º ano o capítulo destinado ao Tratamento da Informação trabalha com diversos tipos de gráficos, mas sem articulações com a média. O tópico da média aritmética encontra-se no capítulo de Números Racionais. Desta forma acredito ser interessante por que articula a média a outros conteúdos. Apresenta um exemplo envolvendo o cálculo de notas escolares e logo em seguida faz a definição do que é média aritmética: *A média aritmética de n números é a soma de todos eles dividida por n .* Em um tópico intitulado de Curiosidade trabalha o desvio dos dados para mais e para menos da média, além de dizer ao aluno se tiver dúvidas o mesmo pode fazer as contas. Logo após apresenta um exemplo e define a média aritmética ponderada. Em forma de lembrete coloca que o significado de ponderar é “dar peso”, “dar importância”. Depois apresenta diversas atividades. Em uma delas a situação faz o aluno refletir que às vezes a média nem sempre é uma boa medida e que depende da distribuição dos dados. Apresenta uma atividade em outro capítulo articulada com o conteúdo de equação do 1º grau.

Já no 9º ano, a média aritmética aparece como um tópico dentro do capítulo de TI, junto com a moda e a mediana. Não apresenta atividades em outros campos da matemática. Utiliza um exemplo para mostrar que a média nem sempre é uma boa medida dependendo da característica dos dados e que algumas vezes temos que lançar mão da moda ou mediana. Logo em seguida define a média aritmética com o seguinte texto: *Média aritmética é a soma de todos os valores numéricos obtidos dividida pelo número deles.* Utiliza-se da charge para apresentar alguns exemplos. As atividades solicitam o cálculo da média, moda e mediana para que o aluno faça as devidas comparações, mas não propicia maiores reflexões, ou seja, privilegia os procedimentos de cálculo.

AGRUPAMENTO 4 – Coleção que aborda a média em um único volume.

Neste conjunto temos apenas a coleção 25014 – C9, que tem como característica não apresentar nenhuma atividade, seja em capítulos de Tratamento da Informação ou em outros campos da matemática, nos volumes dos anos 6º, 7º e 8º. Apresenta ao todo 19 atividades de

média apenas no volume do 9º ano. Neste momento não geramos gráfico devido à natureza de abordagem em apenas um único volume.

Dos sete invariantes pesquisados encontramos nesta coleção a exploração de quatro invariantes. Segue gráfico do percentual das propriedades abordadas nesta coleção.

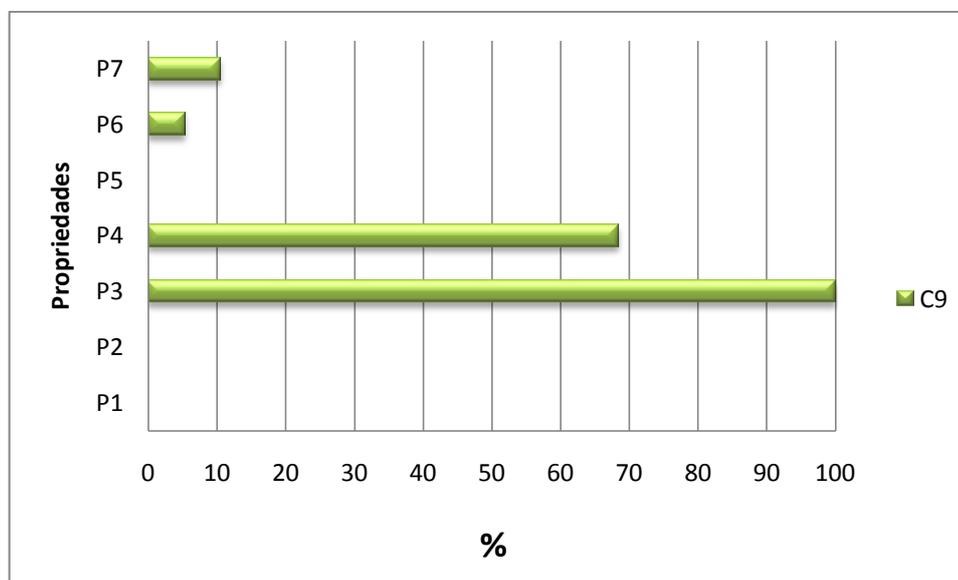


Gráfico 23: Frequência relativa das propriedades na coleção C9

Como podemos observar, a coleção não explora as propriedades 1, 2 e 5. *A média é influenciada por cada um e por todos os valores (PROP3)* aparece em 100% das atividades, contudo ao observamos as referidas atividades encontramos que apenas 26,3% destas atividades realizam um estudo deste invariante de forma intencional ou reflexiva. *A média não precisa, necessariamente, coincidir com um dos valores que a compõem (PROP4)* aparece em 68,4% das atividades. O invariante que *no cálculo da média, devem ser incluídos os valores nulos e os negativos (PROP6)* é expresso a partir de uma única atividade numa situação com o cálculo da média de gols, não trabalhando com valores negativos. No caso do invariante de que *a média é um "representante" dos dados a partir da qual foi calculada, ou seja, é o valor que está mais próximo de todos os demais dados (aspecto espacial) (PROP7)* aparece em duas atividades chamando a atenção do aluno para o caso de quando a média não é a mais recomendada para representante da tendência central do conjunto de dados.

No que concerne aos significados temos o seguinte: o mais abordado é o significado da média como *elemento representativo de um conjunto de dado*, com frequência de 68,4% das 19 atividades da coleção, seguido de 5 atividades com cálculo apenas procedimental que equivale a 26,3% das atividades. Ainda existe uma única atividade que apresenta uma

situação que confere o significado da média como *necessidade de obtenção de um valor justo/equitativo para uma distribuição uniforme*, esta atividade é a mesma que citamos acima onde faz a reflexão que nem sempre a média é uma boa medida para a caracterização do grupo.

No caso das representações, temos a linguagem materna com 79% de frequência e a gráfica com 15,8% de frequência nas atividades desta coleção. A representação tabular aparece apenas em uma atividade. Os contextos apresentados são reduzidos e a maior frequência é a do contexto numérico com 26,3%. Segue empatados o contexto escolar e o contexto esportivos/jogos com frequência de 15,8%.

No volume do 9º ano no capítulo de “Noções de Estatística e Probabilidade” apresenta a seção “Medidas de Tendência Central: média, moda e mediana.” Faz uma rápida explicação que a média é usada para por meio de um único número, da uma ideia das características de um grupo de números. Em seguida algumas atividades são apresentadas e uma delas envolve gráfico de barras. Dando prosseguimento faz uma explicação da média aritmética ponderada, porém utiliza expressões numéricas como dados para o cálculo da média, o que pode dificultar a compreensão dos alunos. Muitas atividades fazem também com que o aluno calcule a média, a moda e a mediana. Apresenta uma situação para a compreensão dos estudantes em que a média não é uma boa medida, para isto é preciso conhecer a moda e a mediana.

AGRUPAMENTO 5 – Coleção que aborda a média de forma equilibrada entre os volumes.

Aqui também temos uma única coleção. A coleção 25020 – C10 tem o perfil de uma distribuição equilibrada das atividades de média ao longo dos quatro volumes.

No conjunto de atividades propostas aos alunos, indiferente do conteúdo estudado existe um tópico chamado de Tratando a Informação, o qual permeia toda a coleção. É neste tópico que encontramos algumas das atividades de média nos outros campos da matemática. De forma geral os exemplos são bem ilustrados e abordam contextos atuais. A coleção contém 77 atividades de média, segue o gráfico da distribuição percentual ao longo dos volumes:

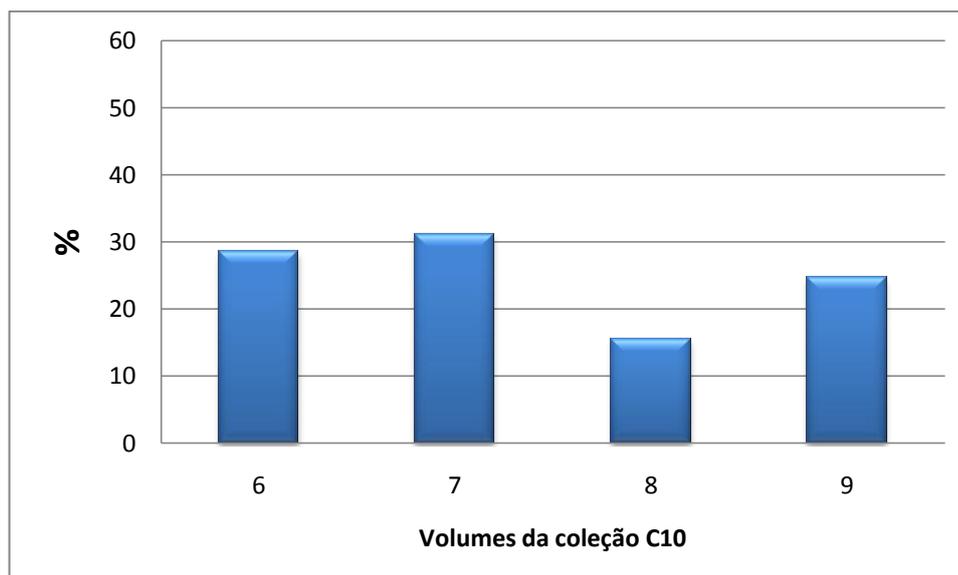


Gráfico 24: Frequência relativa das atividades por volume

Como podemos observar a menor abordagem acontece no volume do 8º ano. Contudo a distribuição das atividades se mantém equilibrada sem uma grande tendência para determinado volume.

No caso dos invariantes, a coleção não explora as propriedades 1 e 2. Segue o gráfico do percentual das propriedades exploradas nas atividades em C10:

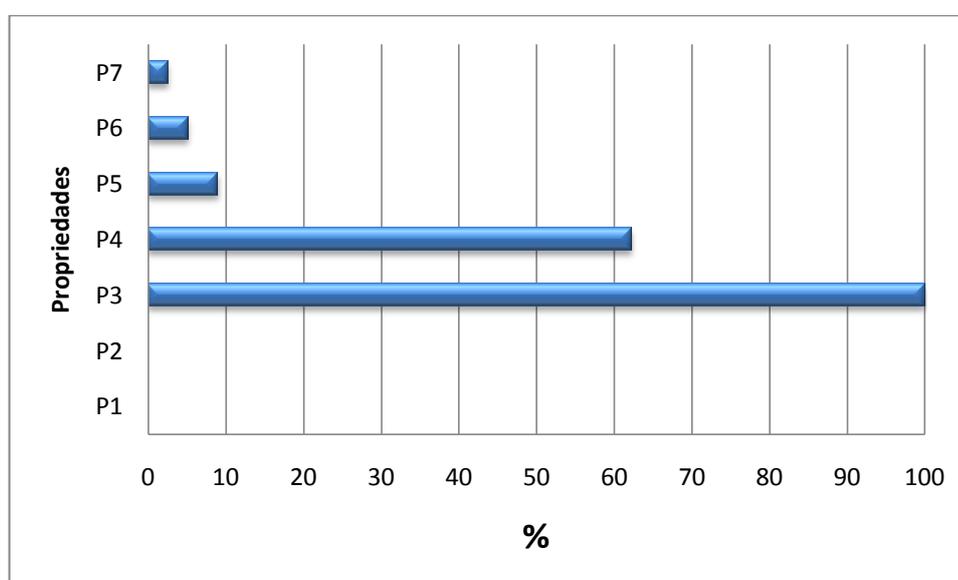


Gráfico 25: Frequência relativa das propriedades na coleção C10

Os invariantes nesta coleção também se concentram em dois: *a média é influenciada por cada um e por todos os valores (PROP3) e a média não precisa, necessariamente,*

coincidir com um dos valores que a compõem (PROP4) com frequência de 100% e 62,3%, respectivamente. Atividades que discutem a influência dos valores que compõem a média aparecem em 15,6% do total das atividades. O invariante de que a média pode ser um valor que não pode corresponder a um dado dentre o conjunto de dados reais (PROP5) é abordado em 9% das atividades e distribuídos em três volumes - 6º, 7º e 9º anos. Tais atividades permeiam situações escolares com a média do número de alunos por ano em uma escola (100,25 alunos), situações de jogos (3,17 gols) ou até mesmo situações de vendas de automóveis (média de 7,5 automóveis), entre outras situações aludindo a este invariante. Outro invariante também presente é o de que no cálculo da média, devem ser incluídos os valores nulos e os negativos (PROP6), este numa frequência menor do que o desejado com base no quantitativo total de atividades, ou seja, aparece em 5,2% das atividades, distribuídas em três volumes, a saber: 7º, 8º e 9º anos. São atividades que envolvem o cálculo do saldo médio, média da profundidade de minas, número médio de visitas de um agente comunitário e quilometragem média de um taxista. A média é um "representante" dos dados a partir da qual foi calculada, ou seja, é o valor que está mais próximo de todos os demais dados (aspecto espacial) (PROP7) neste caso a frequência é de apenas duas atividades, uma no volume do 7º ano e outra no volume do 8º ano. Em ambas as atividades, tal invariante se expressa através da solicitação ao aluno no que diz respeito à média de consumo de energia elétrica, em quais meses o consumo foi inferior ou superior à média encontrada.

Com relação aos significados temos que 93,5% das atividades abordam o significado da *média como elemento representativo de um conjunto de dados*. Atividades apenas de cálculo procedimental aparecem em 6,5% do total de atividades sobre média desta coleção. Percebemos que com relação aos significados esta coleção ainda está aquém do desejado.

As representações estão bem distribuídas entre linguagens materna, gráficas e tabulares, com 34%, 22% e 44% respectivamente. Os contextos abordados ao longo das coleções são bem diversificados, porém podemos inferir um maior foco nos escolares (21%) e nos de preços/comércio (19%). Cabe ressaltar os contextos de meteorologia, pesquisa de opinião, corporal e aplicação geométrica.

No que concerne ao 6º ano, o volume apresenta capítulo destinado ao Tratamento da Informação. Neste capítulo apresenta a média dentro dos estudos de gráficos e tabelas, salientando que a média pode ser obtida a partir de dados do gráfico. Assim todas as atividades estão correlacionadas com um gráfico ou uma tabela de dados, o que torna a abordagem mais significativa. Todas as atividades são bem ilustradas. As atividades que aparecem em outros campos da matemática que não são os de Tratamento da Informação são

bem expressivas com relação ao quantitativo. Destas, algumas guiam o percurso do aluno na resolução para o mesmo compreender o algoritmo do cálculo da média através de um esquema, além de envolver o contexto de internet. Em outra atividade abre um tópico para chamar a atenção do aluno com o seguinte texto: *Lembre-se de que a média aritmética, ou simplesmente média, é obtida adicionando os valores e dividindo o resultado pelo número de valores adicionados.* Encontramos aqui uma demonstração do cálculo da média atrelada a um exercício antes mesmo da definição formal no capítulo específico para o estudo deste conteúdo.

No volume do 7º ano apresenta uma seção específica para a média simples e ponderada. Os exemplos são contextualizados com situações atuais e apresentam-se utilizando quadros ou tabelas. Define a média como: *Média aritmética (M_a) é a soma de dois ou mais números dividida pela quantidade de números somados. A média, em geral, tem como objetivo apresentar de maneira resumida um conjunto de dados.* Em seguida trabalha um exemplo de média ponderada de notas da prova de um concurso. Diz que *O cálculo da média ponderada (M_p) pode ser realizado adicionando o produto de cada número pelo seu peso correspondente e dividindo o resultado pela soma dos pesos. A média ponderada é utilizada nos casos em que as ocorrências têm importâncias diferentes, devendo ser levado em consideração o peso de cada ocorrência.* Em um dos exemplos faz uma comparação da média simples para a ponderada com intuito de uma melhor compreensão pelos estudantes. As atividades para o aluno também seguem a mesma tendência de sempre utilizar os dados da tabela ou de gráficos, inclusive nos exercícios de revisão e testes. Encontramos atividades antes e depois do capítulo destinado ao estudo de TI, justamente no tópico Tratando a Informação, que está incluso no bloco de atividades dos capítulos. Estas atividades estão correlacionadas com o tema em estudo. Temos um exemplo de uma atividade no capítulo de Operações com Números Positivos e Negativos, no qual os valores dos dados da tabela são positivos e negativos, o que faz também que o aluno mobilize propriedades importantes (PROP6) do conceito de média.

Para o 8º ano, o volume apresenta um tópico específico para a média e outro já introduzindo os conceitos de mediana e moda dentro do capítulo de TI. Repete a mesma definição de média do volume anterior, porém apresenta um exemplo interessante por envolver contexto da tecnologia como número de acesso a um determinado site. As atividades são bem contextualizadas e envolvem gráficos e tabelas. Nas duas atividades que aparecem em outros capítulos, as mesmas estão correlacionadas com os temas em estudo, tais como Equações e Medidas de Superfície.

O 9º ano no capítulo de Tratamento da Informação trabalha a média na seção “Media, mediana e moda”. As atividades continuam sendo trabalhadas com gráficos, tabelas e quadros com bastantes ilustrações. Em algumas é solicitado o cálculo das três medidas. Apresenta a definição das três medidas. No caso da média diz o seguinte: *A média aritmética (Ma), ou simplesmente média, é dada pelo quociente da soma dos valores atribuídos à variável pela quantidade de valores adicionados.* Também apresenta duas atividades em outros capítulos, tais como o de Circunferência e Círculo e o de Medidas de Volume.

Considerações Finais

Nos dias de hoje é notório que a Estatística contribui de forma contundente na compreensão e interpretação dos fenômenos sociais. Urge ser letrado estatisticamente, uma vez que a interpretação de dados e informações, a partir de representações (gráficos, tabelas, e etc), e índices estatísticos (medidas, desvio padrão, etc) torna-se tão necessário diante das situações do cotidiano que nos defrontamos, seja no campo pessoal ou profissional.

No estudo de um conjunto de dados diversas medidas podem ser tomadas, uma delas, que diz respeito à análise da localização do conjunto de dados, foca na tendência de centralização dos dados. Outra tendência importante é a dispersão desses dados. Em ambos os casos, a média aritmética é considerada crucial no trabalho de análise e interpretação do comportamento de dados estatísticos.

Apesar da simplicidade do seu algoritmo de resolução, a média apresenta dimensões conceituais que necessitam de um estudo mais sistemático em todos os níveis escolares. Por ser um construto que mobiliza uma faceta matemática, muitas vezes, esse passa a ser o enfoque do seu ensino. No entanto, como um conceito estatístico, sua construção conceitual é mais complexa. A historicidade da média nos levanta que a sua gênese conceitual abrange uma diversidade de significados que vai além da compreensão do algoritmo “somar e então dividir”. Situações como a necessidade de estimar valores desconhecidos a partir de observações repetidas, método bastante difundido entre os astrônomos ou até as situações que necessitam de uma divisão equitativa com vistas a uma distribuição uniforme.

Estudos citados neste trabalho mostram que a ênfase dada, no ensino-aprendizagem da média é ao algoritmo do cálculo desta medida. Tais pesquisas também ratificam as lacunas conceituais da média encontradas em alunos e professores, bem como ausência de um trabalho sistematizado nos livros didáticos.

Os documentos oficiais recomendam, a mais de uma década, a inserção de tópicos relativos ao Tratamento da Informação no trabalho com alunos dos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental (BRASIL, 1997; 1998) incluindo a média aritmética. Contudo, tal orientação ainda não se concretiza de forma desejável no que tange às possibilidades de em sala de aula os estudantes construírem um conhecimento de média além do algoritmo do cálculo.

No que concerne aos livros didáticos no Brasil, o Programa Nacional de Livro Didático – PNLD tem a função de avaliar e selecionar os livros que chegam às mãos dos estudantes das escolas públicas brasileiras. Neste contexto, levantando a bandeira da escola pública de qualidade, esta tese investigou a abordagem de média nos livros de matemática aprovados pelo PNLD 2011.

Pesquisa realizada com os livros de matemática aprovados no PNLD 2008 revelou que o trabalho mobilizado com as propriedades da média aritmética não é eficaz na construção de um entendimento conceitual pelos estudantes. Os resultados encontrados clarificam que, no que diz respeito ao trabalho com as propriedades da média aritmética, os livros não desenvolvem um trabalho sistemático que perpassa por todas as propriedades. Propriedades cruciais foram exploradas em índices insatisfatórios ou foram exploradas quantitativamente, mas não da forma esperada.

Mediante o quadro acima problematizamos a seguinte questão de pesquisa:

- ✚ Como se dá a abordagem da média aritmética, ancorado na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1991), nas coleções de livros didáticos de matemática dos anos finais aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático – PNLD 2011?

Desta forma, a pesquisa sustentou-se na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1991), na qual considera um conceito como um triplete dos conjuntos das situações que dão sentido ao conceito (S), dos invariantes (objetos, propriedades e relações) sobre os quais repousa a operacionalidade deste conceito (I) e o conjunto das representações numéricas que podem ser usadas para indicar e representar esses invariantes e, conseqüentemente, representar as situações e os procedimentos para lidar com elas (R).

Como a base na pesquisa é a Teoria dos Campos Conceituais, logo olhamos para as atividades de média identificando os invariantes prescritos, os significados e as representações.

No que tange a abordagem que cada coleção por volume faz da média aritmética, destacamos que as coleções não seguem uma tendência no que concerne a abordagem por ano. Contudo, existe um aumento das coleções que abordam a média em quatro ou três anos, além de não mais existir coleções que não trabalhe com a média no mínimo em um único volume. Com relação à localização das atividades dentro dos capítulos/seções destinados ao Tratamento da Informação ou fora destes, não encontramos uma diferença de abordagem

qualitativa, ou seja, as coleções não tendem a apresentar boas atividades apenas na parte destinada ao Tratamento da Informação, ou vice-versa. Tal abordagem vai depender muito da coleção observada. As atividades de média situadas em outros campos da matemática, ora fazem articulação com a temática do capítulo, ora não articula com o referido conteúdo. Porém temos atividades que mesmo sem fazer articulação com o conteúdo do capítulo ao qual estão inseridos são bem elaboradas e desafiadoras para os estudantes.

Desta forma, categorizamos as coleções em cinco agrupamentos, a saber: coleções com foco nos volumes do 7º e 9º anos; coleções com maior foco no volume do 6º ano; coleções que abordam a média em três volumes e foco no 7º ou 8º ano; coleção que aborda a média em um único volume e coleção que aborda a média de forma equilibrada entre os volumes.

É positiva a presença das 117 atividades que utilizam a média apenas como um contexto, por que contribuem para a compreensão com respeito à diversidade de situações que envolvem a média. Estas atividades estão situadas em outros campos da matemática e não foram contabilizadas no nosso banco de dados.

Partindo para o conjunto dos invariantes, assumimos as sete propriedades descritas por Strauss e Bichler (1988):

- i. a média está localizada entre os valores extremos;
- ii. a soma dos desvios a partir da média é igual a zero;
- iii. a média é influenciada por cada um e por todos os valores;
- iv. a média não precisa, necessariamente, coincidir com um dos valores a partir do qual foi calculada;
- v. a média pode ser um valor que não pode corresponder a um dado dentre o conjunto de dados reais;
- vi. no cálculo da média, devem ser incluídos os valores nulos e os negativos
- vii. média é um valor representativo dos dados, ou seja, é o valor que está mais próximo de todos (aspecto espacial)

Nossos dados revelam uma concentração quantitativa na abordagem das propriedades *a média é influenciada por cada um e por todos os valores* e da propriedade *a média não precisa, necessariamente, coincidir com um dos valores a partir do qual foi calculada*. Todavia, no caso da propriedade *a média é influenciada por cada um e por todos os valores* o quantitativo é bem superior às outras propriedades, mas ao investigarmos tais atividades

encontramos que um percentual aquém do desejado é que aborda este invariante de forma mais qualitativa e reflexiva. Fica explícito a necessidade de uma abordagem que explore mais outros invariantes tais como os que discorrem que *a média está localizada entre os valores extremos; a média pode ser um valor que não pode corresponder a um dado dentre o conjunto de dados reais; o de que no cálculo da média devem ser incluídos os valores nulos e os negativos* e o invariante que explora a representatividade da média *como o valor que está mais próximo de todos*.

No invariante *a soma dos desvios a partir da média é igual a zero* não é explorada em nenhuma das atividades, entretanto o mesmo poder ser desenvolvido juntamente com o conceito de desvio padrão no Ensino Médio.

No mapeamento dos significados utilizamos a classificação realizada por Batanero (2000) incluindo também outros significados por nós levantados. Assim, os significados pesquisados foram os seguintes: estimação de uma quantidade desconhecida na presença de erros de medição; necessidade de obter um valor justo/equitativo para uma distribuição uniforme; servir de elemento representativo de um conjunto de dados; valor mais provável quando aleatoriamente tomamos um elemento de uma população; a média de uma amostra como uma boa estimativa para a média de uma população; a média como uma estimativa da variável para tempo futuro e o significado procedimental.

Os resultados apontam que o trabalho com a média realizado pelos livros didáticos encontra-se concentrado em um significado – *a média como elemento representativo de um conjunto de dados*. Outros significados são explorados num percentual muito baixo, além de uma lacuna na abordagem de dois significados, a saber: *a média como um valor mais provável quando aleatoriamente tomamos um elemento de uma população* e *a média de uma amostra como uma boa estimativa para a média de uma população*.

As atividades apenas de cunho procedimental, utilizando apenas o cálculo numérico em si, não devem ser enfatizadas, uma vez que conforme literatura pesquisada, os alunos podem até dominar o procedimento do algoritmo do resultado da média, no entanto a dimensão estatística do conceito não é dominada por eles. Logo, o trabalho com as situações que conferem significados ao conceito de média deve perpassar por situações que sejam análogas ao surgimento da média como conceito até as situações mais atuais como é o caso do exemplo da contagem das cadeiras de um estádio de futebol proferido por Vergnaud (2010).

Observamos também que quatro coleções desenvolvem apenas dois significados. Deve-se atentar para este fato uma vez que trabalhar apenas um ou dois significados pode comprometer a compreensão dos estudantes com relação ao campo conceitual de média

aritmética. São necessárias maiores atenções por parte dos livros didáticos a abordagens que explorem a média aritmética privilegiando diferentes significados, dos quais o trabalho com os estudantes não se limite aos passos do algoritmo “somar e então dividir”. Isto leva ao trabalho perpassando os significados apresentados acima. Outro ponto é que alguns significados da média, alunos e professores já o possuem de forma intuitiva, logo os livros didáticos podem trazer à baila tais situações para aprofundar e solidificar tais conhecimentos.

Em relação ao último elemento do tripé da Teoria dos Campos Conceituais temos as representações. A classificação das representações se deu mediante o contato com as atividades. A representação mais utilizada no geral é a linguagem materna. Quando analisamos coleção por coleção essa tendência se repete em oito coleções, no entanto, duas coleções abordam a representação em linguagem materna e a tabular de forma equilibrada. Uma das coleções se destaca por apresentar um foco na representação tabular. As dez coleções abordam tanto a linguagem materna como a tabular, mas constatamos a lacuna da representação gráfica em duas coleções. Asseveramos, a partir dos dados encontrados, que os livros didáticos devem desenvolver um trabalho mais urdido com as representações nas atividades de média, principalmente no tocante às gráficas e tabulares, mais entrelaçado com os diversos significados e invariantes da média. Os alunos, por exemplo, podem ser colocados diante de situações onde necessitem localizar dados em gráficos, calcularem a média e interpretar as informações advindas destas representações.

A média aritmética ponderada deve ser bem desenvolvida nos anos finais do Ensino Fundamental, inclusive como uma forma de ampliação conceitual da média. Contudo, o índice de abordagem da média ponderada ainda é muito baixo nos livros didáticos. Encontramos atividades que ao abordar a média, utiliza a frequência dos dados como pesos, no entanto, acreditamos na importância de deixar claro para o aluno nos casos em que se está considerando as frequências como pesos. A preocupação é que o sentido da ponderação não se esvaia na compreensão dos estudantes.

Com relação aos contextos, estes foram categorizados conforme contato com as atividades nos livros pesquisados. Apesar de termos mais de 90% das atividades contextualizadas, o que podemos considerar como um avanço ao olhar as coleções como um todo, mas na observação dos contextos, os mesmos não são diversificados. Concentram-se nos contextos escolares, preços/comércio, velocidade média e contextos esportivos. A maior frequência está expressa nos contextos escolares. A diversidade dos contextos nas atividades possibilitará aos alunos o contato com tipos distintos de problemas de média e a apropriação de diferentes significados.

Mapeamos também o tipo de dado das atividades, classificados em discreto, contínuo e sem contexto. Encontramos que o que tem maior frequência é o do tipo *contínuo*. Este tipo aparece nas atividades independentes dos significados. Alguns invariantes utilizam especificamente o dado do tipo *discreto* como é o caso em que *a média pode ser um valor que não pode corresponder a um dado dentre o conjunto de dados reais*. Este caso se deve a necessidade de enfatizar o aspecto no qual o invariante procura desenvolver.

Diante de todos os dados encontrados e respondendo ao nosso objetivo geral, constatamos que a abordagem da média aritmética nos livros didáticos dos anos finais aprovados pelo PNLD 2011 apresenta avanços, mas também limitações. Avança quando todas as coleções abordam de alguma forma a média aritmética. A localização destas atividades também tem um caráter positivo em boa parte dos livros como pudemos constatar nas resenhas, não aparecendo, por exemplo, apenas no último capítulo do livro. E como já mencionado, é positivo o aumento na abordagem por ano e o não aparecimento de coleções que não tratem a média em nenhum dos volumes.

No que tange aos conjuntos dos invariantes, significados e representações, os livros apresentam limitações na exploração dos elementos destes conjuntos. Logo, o campo conceitual da média nos livros didáticos é visto sem propiciar uma compreensão da média visando o seu caráter como uma medida estatística, ou seja, há poucas atividades na composição da abordagem das coleções que propiciem a compreensão por parte do aluno da função estatística da média aritmética.

Aventamos que se a partir dos livros didáticos, professores e alunos, entram em contato com tais situações, iremos avançar no ensino-aprendizagem do conceito de média aritmética. No entanto, não pretendemos com este estudo canalizar os fracassos e lacunas de compreensão conceitual da média nos livros didáticos, mas enfatizar que a partir deles poderemos caminhar para melhores abordagens didáticas no trabalho com a média aritmética nos anos finais. Percebemos que é possível o desenvolvimento de um trabalho nos livros didáticos que possibilite a construção do conceito de média ao longo dos anos finais do Ensino Fundamental focado no conjunto das situações, invariantes e representações, base da teoria defendida por nós e por Vergnaud (1991).

Uma limitação foi ainda neste momento não ter possibilidades, devido ao prazo inerente ao mestrado, de analisar a abordagem destes livros no que diz respeito à moda e a mediana, completando o estudo com as medidas de tendência central; bem como a correlação entre as variáveis pesquisadas, nas quais deixamos como perspectivas de estudos futuros.

Referências

ANJOS, D.; GITIRANA, V. Exploração do conceito de média nos em livros didáticos das séries finais do Ensino Fundamental. **Anais do 2º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática – SIPEMAT**, 2008, PP.1-9.

ARISTÓTELES. **Nicomachean Ethics**. Cambridge, MA: Harvard University Press. 1994. Disponível em <<http://classics.mit.edu/Aristotle/nicomachaen.5.v.html>> Acessado em 22 de dezembro de 2010.

BAKKER, A. **The Early History of Average Values and Implications for Education**. Journal of Statistics Education, Volume 11, Número1, 2003. Disponível em <www.amstar.org/publications/jse/v11n1/bakker.html> Acessado em 10 de janeiro de 2011.

BAKKER, A; GRAVEMEIJER, K. P. E. **An Historical Phenomenology of mean and median**. Educational Studies in Mathematics, vol. 62, p.149–168, 2006.

BRASIL. Secretaria de Educação do Ensino Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática, 1a a 4a série**. Brasília, MEC/ SEF, 1997.

_____. Secretaria de Educação do Ensino Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática, 5ª a 8ª série**. Brasília: MEC-SEF. 1998.

BATANERO, C. **Significado y comprensión de las medidas de posición central**. Departamento de Didáctica de La Matemática, Universidade de Granada. UNO, 2000, 25, p. 41-58. Disponível em <<http://www.ugr.es/~batanero>>. Acessado em 07 de dezembro de 2009.

_____. **Didáctica de la estadística**. Grupo de Investigación en Educación Estadística. Departamento de Didáctica de lá Matemática. Granada, 2001.

BATANERO, C.; GODINO, J. D. **Análisis de datos y su didáctica**. Departamento de Didáctica de La Matemática, Universidade de Granada, 2001. Disponível em <<http://www.ugr.es/~batanero>>. Acessado em 07 de dezembro de 2009.

BATANERO, C; GODINO, J. D.; GREEN, D. R.; HOLMES, P.; VALLECILOS, A. Errores y dificultades en la comprensión de los conceptos estadísticos elementares. **Internation Journal of Mathematics Education in Science and Technology**, 25(4), p. 527-547. 1994.

CABRIÁ, S. **Filosofía de la estadística**. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Valencia, 1994.

CAZORLA, I. M. Média aritmética: um conceito prosaico e complexo. In: IX Seminário de Estatística Aplicada, 2003, Rio de Janeiro. **Anais do IX Seminário de Estatística Aplicada**, 2003.

CAZORLA, I. M; KATAOKA, V. I; SILVA, C. B. Trajetória e perspectivas da educação estatística no Brasil: um olhar a partir do GT 12. In: LOPES, C. E; COUTINHO, C. Q. S; ALMOULOUD, S. A. (orgs) **Estudo e Reflexões em Educação Estatística**. 1. ed. Campinas,

SP: Mercado de Letras, 2010.

CAZORLA, I. M.; CASTRO, F.C. de O papel da Estatística na leitura do mundo: o letramento estatístico. **Publicitário UEPG Ci. Hum; Ci. Soc; Ling; Letras e Artes**. Ponta Grossa, 16 (1) p.45-53, junho, 2008.

CHATZIVASILEIOU, E. et al. **Elementary school students understanding of concepto f arithmetic mean**. In C. Reading (Ed.), Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS8, July, 2010), Ljubljana, Slovenia. 2010. Disponível em <www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.php>. Acessado em 20 de outubro de 2010.

COBO, B; BATANERO, C. Significado de La média em los libros de texto de secundaria. **Ensenanza de las Ciências**. v.22 (1). 2004.

COBB, G; MOORE, D.S. **Mathematics, statistics and teaching**. The American Mathematical Monthly, 104, pp. 801-823, 1997.

CORTINA, J.L. **Developing instructional conjectures about how to support student understanding of the arithmetic mean as a ratio**. Anais da 6ª Conferência Internacional de Educação Estatística – ICOTS6. 2002. Disponível em <http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/1/2a2_cort.pdf>. Acessado em 15 de dezembro de 2010.

EISENHART, C. **The development of the concept of the best mean of a set of measurements from antiquity to the present day**. American Statistical Association Presidential Address, unpublished manuscript, 1974.

FRANKLIN, C. et al. **Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: a pre-k–12 curriculum framework**. American Statistical Association. Alexandria, 2007. Disponível em <www.amstat.org/education/gaise>. Acessado em 11 de novembro de 2010.

FRANCHI, A; Considerações sobre a Teoria dos Campos Conceituais. In: **Educação Matemática: uma introdução**. MACHADO, S. D. A et al. São Paulo: EDUC, 1999.

FRIOLANI, L. C. **O pensamento estocástico nos livros didáticos do Ensino Fundamental**. 2007. 150 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo/SP, 2007.

GAL, I. **Adults statistical literacy: meanings, components, responsibilities**. International Statistical Review, vol.70, nº1, pp.1-25.

GARRET, A.J. CRUZ J.A.G. **Algunos resultados sobre promedios con estudiantes de Luanda y Tenerife**. Actas de las XII Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, 683-690. Universidad de Castilla-La Mancha. Albacete. 2007. Disponível em <<http://webpages.ull.es/users/jagcruz/>>. Acessado em 20 de dezembro de 2009.

GUIA DE LIVROS DIDÁTICOS: **PNLD 2011. Matemática**. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. 2010.

GUIMARÃES, G.; GITIRANA, V.; CAVALCANTI, M. e MARQUES, M. Análise das atividades sobre representações gráficas nos livros didáticos de matemática. **Anais do 2º Simpósio Internacional de Educação Matemática – SIPEMAT**. UFRPE. 2008.

GUIMARÃES, G.; GITIRANA, V.; MARQUES, M. e CAVALCANTI, M. A Educação Estatística na Educação Infantil e nos anos iniciais. **Revista Zetetiké**. Cempem – FE – Unicamp. V.17, n.32. jul/dez, 2009.

IMENES, L.M; LELLIS, L.M. **Matemática**. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2009.

IEZZI, G; DOLCE, O; MACHADO, A. **Matemática e Realidade**. 6.ed. São Paulo: Atual, 2009.

JAKUBOVI, J; CENTURIÓN, M. R. **Matemática na medida certa**. 11 ed. São Paulo: Scipione, 2009.

LAVOIE, P; GATTUSO, L. **An historical exploration of the concept of average**. Anais da 5ª Conferência de Educação Estatística. Singapura, 1998. Disponível em <<http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.php>> Acessado em 20 de abril de 2010.

LOPES, J. A. **Livro didático de matemática: concepção, seleção e possibilidades frente a descritores de análise e tendências em educação matemática**. Tese de Doutorado em Educação Matemática – Universidade Estadual de Campinas. São Paulo, 2000.

LOPES, C. E; MEIRELLES, E. Estocástica nas séries iniciais. **Anais do XVIII Encontro Regional de Professores de Matemática**. Unicamp. 2005.

MAGINA, S; CAMPOS, T.M.M; NUNES, T; GITIRANA, V. **Repensando adição, subtração: contribuições da teoria dos campos conceituais**. 2ª edição. São Paulo: PROEM, 2001.

MAGINA, S; CAZORLA, I; GITIRANA, V; GUIMARÃES, G; **Conceptions And Misconceptions Of Average: A Comparative Study Between Teachers And Students**. Anais do ICME 11, p.1-8, 2008.

MAYÉN, S; COBO, B; BATANERO, C; BALDERAS, P. Compreensão das medidas de posição central em estudantes mexicanos. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**. N.9, abril, 2007, p.187-201.

MARNICH, M. A. **A knowledge structure for the arithmetic mean: relationships between statistical conceptualizations and mathematical concepts**. 2008. 195 f. Tese (Doctor of Education) – Graduate Faculty of the School of Education. University of Pittsburgh. Pittsburgh/Pennsylvania, 2008.

MELO, M. C. M. **Fazendo média: compreensões de alunos e professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental**. 125 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Centro de Educação. Universidade Federal de Pernambuco. Recife/PE, 2010.

MOKROS, J; RUSSELL, S. J. Children's Concepts of Average and Representativeness. **Journal for Research in Mathematics Education**, 26(1), p.20-39, 1995

MOREIRA, M. **A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área.** Investigações em Ensino de Ciências – V7(1), p. 7-29, 2002. Disponível em: <www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol7/n1/v7_n1_a1.html>. Acesso em: 20 de outubro de 2009.

PAGAN, A.; LEITE, A. P.; PERLETO, R. **A Evolução Temporal, Social e Educacional da Estatística.** X Encontro Nacional de Educação Matemática. Bahia, 2010.

PERNAMBUCO. **Base Curricular Comum para as Redes Públicas de Ensino de Pernambuco: matemática.** Secretaria de Educação. 134 p. Recife : SE. 2008.

PLACKETT, R.L. The principle of the arithmetic mean. **Oxford Journals Biometrika**, vol.45, p.130-135, 1958.

PONTES, J. M; OLIVEIRA, M. S. de. **Do uso da média aritmética à curva normal.** Anais da 48ª Reunião Anual da Região Brasileira da Sociedade Internacional de Biometria e 10º Simpósio de Estatística Aplicada à Experimentação Agrônômica. 2003. Acessado em 20 de abril de 2010 <http://www.tibs.org/48thRBRAS.htm>.

ROY, J.L. **Quick at figures, designed especially for commercial schools and business men.** Montreal: Lovell and Son. 1892.

RUBIN, E. The Statistical World of Herodotus. **The American Statistician**, 22(1), 31-33. 1968.

SILVA, E. T. **Livro didático: do ritual de passagem à ultrapassagem.** In: Em Aberto. Ministério da Educação e Desporto SEDIAE/INEP, v. 16. N.69, 1996.

SIRNIK, M; KMETI, S. **Understanding of arithmetic mean.** In C. Reading (Ed.), Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS8, July, 2010), Ljubljana, Slovenia. 2010. Disponível em <www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.php> Acessado em 20 de outubro de 2010.

STELLA, C.A. **Um estudo sobre o conceito de média com alunos do Ensino Médio.** São Paulo, 2003. 181 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2003.

STRAUSS, S; BICHLER, E. The development of children's concepts of the arithmetic average. **Journal for Research in Mathematics Education**, vol. 19, 64-80. 1988.

TRIOLA, M. F. **Introdução à Estatística.** 7ª edição. Rio de Janeiro: Editora LTC, 1999.

VERGNAUD, G. **A teoria dos campos conceituais.** Recherches em didactique des mathématiques, vol. 10`23, 133-170, Grenoble, La Pensée Sauvage éditions, 1991. In: Didáctica das Matemáticas. Direção de Jean Brun. Horizontes Pedagógicos. 1996.

_____. Psicologia do Desenvolvimento Cognitivo e Didática das Matemáticas. Um Exemplo: As estruturas aditivas. **Revista Análise Psicológica**, Vol.1, p. 75-90. 1982.

_____. A comprehensive theory of representation for mathematics education. **Journal of Mathematical Behavior**, 17(2): 167-181. 1998.

_____. **Curso Teoria dos Campos Conceituais**. Escola de Altos Estudos da CAPES. Universidade Bandeirante de São Paulo. São Paulo. Agosto. 2010.

WATSON, J. M.; MORITZ, J. B. The longitudinal development of understanding of average. **Mathematical Thinking and Learning**. 2(1 e 2), 11-50. 2000.

WATSON, J.M. The role of cognitive conflict in developing students' understanding of average. **Educational Studies in Mathematics**, vol. 65, p.21-47, 2007.