



Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Luiz Filipe de Andrade Guerra

Teoria de Redes no Espaço Hiperbólico e Aplicações

Recife
2019

Luiz Filipe de Andrade Guerra

Teoria de Redes no Espaço Hiperbólico e Aplicações

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

Orientador: Prof. Dr. Fernando A. Nóbrega Santos

Recife
2019

Catálogo na Fonte

Bibliotecário Vimário Carvalho CRB4/1204

G934t Guerra, Luiz Filipe de Andrade.
Teoria de redes no espaço hiperbólico e aplicações /
Luiz Filipe de Andrade Guerra. - 2019.
53 f.: il., fig.

Orientador: Prof. Dr. Fernando A. Nóbrega Santos.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de
Pernambuco. CCEN, Matemática. Recife, 2019.
Inclui Referências e apêndices.

1. Álgebra. 2. Grafos. 3. Teoria de redes. I. Santos,
Fernando A. Nóbrega (orientador). II. Título.

512 CDD (22. ed.) UFPE-MEI 2019-135

LUIZ FILIPE DE ANDRADE GUERRA

TEORIA DE REDES NO ESPAÇO HIPERBÓLICO E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado em Matemática.

Aprovado em: 31/01/2019

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Fernando Antônio Nóbrega Santos (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Eduardo Shirlippe Góes Leandro (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Fernando Jorge Sampaio Moraes (Examinador Externo)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

*Aos meus pais Jôsy e Luiz Guerra,
por sempre estarem comigo em todos os momentos.*

Agradecimentos

Agradeço a Deus.

Agradeço aos meus pais, Jôsy e Luiz Guerra, por sempre terem acreditado em mim.

Agradeço ao meu orientador, Fernando Nóbrega, por todos os conselhos, pela paciência e ajuda nesse período.

Ao Prof. Aníbal, pelas valiosas contribuições na escrita deste trabalho.

Aos professores Fernando Moraes e Antônio Pádua por compartilharem seus conhecimentos em Cosmologia, enriquecendo esta dissertação.

Aos meus amigos de Departamento, em especial da sala 212, pelo companheirismo de todos os momentos.

Resumo

O objetivo desta dissertação é estudar os aspectos topológicos das redes e verificar essas propriedades em um modelo hiperbólico para no Universo de Milne. Para tanto, apresentamos propriedades básicas dos grafos e algumas de suas propriedades topológicas. Os conceitos de complexo simplicial e complexo simplicial abstrato são ligadas à teoria de grafos e servem de base para o conceito de Característica de Euler de um grafo. Através de métodos computacionais em Python, aplicamos estes conceitos ao Universo de Milne, encontramos transições de fase muito similares ao problema de percolação (o sistema passa de uma macrocomponente que detém quase todos os elementos para várias microcomponentes), contudo não foi possível estender essa mesma conclusão a transições de fase associadas à característica de Euler por limitações computacionais. Assim, foram confirmadas transições de fase devido à comunicação imperfeita dos observadores no Universo de Milne e cabe continuar a investigação de demais transições associadas à característica de Euler da rede.

Palavras-chaves: Grafos. Teoria de Redes. Cosmologia. Topologia. Plano Hiperbólico.

Abstract

The purpose of this dissertation is to study topological aspects of networks and to verify those properties in the Milne Universe. To this aim, we present standard properties of graphs and some of their topological invariants. The simplicial complex and abstract simplicial complex concepts are linked to graph theory and endorse Euler characteristic definition for a Graph. Using computational methods in Python, we apply these concepts to a cosmological model in the hyperbolic space, the so-called Milne Universe. We found phase transitions very similar to the percolation problem (system shifts from a macrocomponent to several microcomponents), but it was not possible to extend this same conclusion to phase transitions associated with the Euler characteristic due to computational limitations. Thus, phase transitions were confirmed due to the imperfect communication of observers in Milne Universe and further studies are necessary to continue the investigation of other transitions associated with the Euler characteristic for the network.

Keywords: Graphs. Network Theory. Cosmology. Topology. Hyperbolic Plane.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Etapas para criação da rede de neurônios - Blue Brain Project. Figura retirada da referência REIMANN et al. (2017).	14
Figura 2 – Diferentes cliques extraídos de (Trusted Analytics Platform Package,)	15
Figura 3 – Rede com duas componentes. Este grafo não orientado contém duas componentes A e B , cada uma com 3 e 4 vértices, respectivamente. Figura retirada da referência NEWMAN (2018), página 143.	16
Figura 4 – Figura adaptada a partir da referência NEWMAN (2018).	18
Figura 5 – Figura adaptada a partir da referência NEWMAN (2018).	19
Figura 6 – Simplexos. Figura retirada de EDELSBRUNNER; HARER (2010). . .	22
Figura 7 – Complexo simplicial adaptado de BINCHI et al. (2014)	23
Figura 8 – Grafo $ER(100, 0, 3)$ gerado com o pacote <i>Networkx</i> implementado na linguagem de programação <i>Python</i>	29
Figura 9 – Grafo de Watts-Strogatz $WS(100, 2, 0, 3)$ gerado com o pacote <i>Networkx</i> implementado na linguagem de programação <i>Python</i>	30
Figura 10 – <i>Curvas de Lorenz</i> para redes livres de escala.	33
Figura 11 – Grafo $BA(100, 4, 4)$ gerado com o pacote <i>Networkx</i> implementado na linguagem de programação <i>Python</i>	34
Figura 12 – Modelo de Milne e superposição dos horizontes de acordo com observador central.	36
Figura 13 – Representação no plano hiperbólico de nossa rede cosmológica	38
Figura 14 – Distribuição cumulativa gerada da rede.	40
Figura 15 – Note que apesar da menor quantidade de pontos da rede, o comportamento scale-free se manteve.	41
Figura 16 – Característica de Euler em função do tempo para alguns valores de β . .	43

Sumário

1	GRAFOS, COMPLEXOS SIMPLICIAIS E TEORIA DE REDES . . .	10
1.1	Grafos	10
1.2	Complexos simpliciais	20
1.3	Teoria de Redes	26
1.4	Redes Aleatórias Clássicas (Random Networks)	27
1.5	Redes de pequeno mundo (<i>Small-world networks</i>)	30
1.6	Redes livres de escala (<i>Scale-free networks</i>)	31
2	TEORIA DE REDES APLICADA A UMA REDE COSMOLÓGICA .	35
2.1	Modelo de Boguñá para redes cosmológicas	35
2.2	Nossa contribuição à investigação do modelo de Boguñá	40
3	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	44
	REFERÊNCIAS	45
	APÊNDICE A – CÓDIGO PYTHON	48
	APÊNDICE B – CÁLCULO DO RAIOS HIPERBÓLICO	53

1 Grafos, complexos simpliciais e teoria de redes

1.1 Grafos

A teoria de grafos é um campo da Matemática, relacionada à Topologia e Combinatória, com vasta aplicação nas ciências em geral. Podemos citar, por exemplo, contribuições em Física, Química, Biologia e Engenharia e Ciência da Computação (HANSEN; JURIS, 1988, 1988; BALABAN, 1985; BALASUBRAMANIAN, 1985; DEO, 2017), bem como às Ciências Sociais (BORGATTI et al., 2009; HARARY; NORMAN, 1953), por exemplo.

Mas, afinal, à luz da matemática aplicada, o que é um grafo?

Um grafo pode ser visto como a representação de um conjunto de dados que apresentam relações entre seus elementos, no todo ou em parte. Por exemplo, seja um banco de dados formado pelos aeroportos do Brasil. Imagine que cada aeroporto é representado por um nó e que, se existir um voo ligando dois aeroportos, há uma aresta entre eles. Outros tipos de informações podem ser representadas a partir de grafos, desde a descrição de sinapses em redes neuronais, passando por malhas de transmissão elétrica de um país até comparativos entre a distribuição de renda e perfis sociodemográficos (renda, grau de instrução escolar, localização geográfica) de determinada região. A associação de um conjunto de dados a um grafo é normalmente simples e intuitiva, ao contrário de abordagens que dependem do conhecimento de todas as interações em um sistema. Por exemplo, enquanto é praticamente impossível de se conhecer exatamente as interações entre os neurônios no cérebro, podemos associar naturalmente um grafo ao cérebro, onde os neurônios seriam os vértices enquanto as sinapses seriam as arestas. O sucesso e facilidade em associar um grafo a um conjunto de dados, quando comparado com outras metodologias quantitativas, deu origem a uma área de pesquisa intrinsecamente interdisciplinar, onde problemas, como DNA, genoma, e neurociência podem ser modelados via teoria de grafos e, muito recentemente, topologia algébrica.

Cada dado ou informação isolada, entendida como bloco fundamental do conjunto, constitui um vértice. Por sua vez, existindo relação entre dois vértices, esta é representada por uma aresta. Cada aresta liga, no máximo, dois vértices que, se distintos, são chamados *vértices adjacentes*. A seguir apresentaremos algumas definições pertinentes ao estudo de grafos que serão úteis ao longo deste texto.

Definição 1.1.1 (Grafo). Um grafo $G = (V, E)$ é um conjunto V de vértices e um conjunto E de arestas.

O grafo pode ser separado em grafos menores, aos quais chamamos subgrafos. Assim,

Definição 1.1.2 (Subgrafo).

Um subgrafo H de um grafo G é um grafo formado por um subconjunto dos vértices e arestas de G . Assim, $H = (\tilde{V}, \tilde{E}) \Rightarrow \tilde{V} \subset V$ e $\tilde{E} \subset E$.

Definição 1.1.3 (Vértices adjacentes). Dois vértices u, v são adjacentes se unidos por uma aresta $e = (u, v) \mid e \in E$.

Uma classificação útil para o estudo de grafos os separa em *orientados* e *não orientados*. Grafos orientados (ou *digrafos*) possuem arestas com uma direção associada no elo entre dois vértices adjacentes; um dos vértices será a origem e o outro a extremidade desse tipo de aresta. A rede social *Twitter* é um exemplo de grafo orientado, posto que um usuário A pode seguir outro usuário B , sem que, necessariamente, B seja seguidor de A . Matematicamente,

Definição 1.1.4 (Grafos orientados ou *digrafos*). Sejam os vértices $u, v \in V$, as arestas $e = (u, v)$ e $e' = (v, u)$, com $e, e' \in E$, e o grafo $G = (V, E)$. Se G for um grafo orientado, então $e \neq e'$, posto que $e \in E$, é uma seta que começa no vértice u e termina no vértice v , ao passo que $e' \in E$, é uma seta que começa no vértice v e termina no vértice u .

Grafos não orientados, por sua vez, não têm arestas direcionadas. Ou seja, para $e \equiv (u, v)$ e $e' \equiv (v, u)$, temos $e = e'$. As malhas aeroviária e metroviária de um país, bem como a rede social *Facebook* poderiam ser representados por grafos não orientados.

Definição 1.1.5 (Grafos não orientados). Sejam os vértices $u, v \in V$, as arestas $e = (u, v)$ e $e' = (v, u)$, com $e, e' \in E$, e o grafo $G = (V, E)$. Se G for um grafo não orientado, então $e = e'$.

Outro conceito importante é o de vizinhança $N(v)$ de um vértice v em um grafo G . Desse modo,

Definição 1.1.6. Seja $N(v) = \{u \in V \mid \exists e = (v, u), e \in E\}$. Dizemos que $N(v)$ é a vizinhança de v em G .

Percebe-se que quanto mais arestas ligam o vértice aos demais, mais elementos terá $N(v)$ – dito de outra forma, maior é a cardinalidade do conjunto $N(v)$. Portanto, mais conectado (a outros vértices) será v .

A título de comparação com a rede aeroviária brasileira, existe voo direto entre os aeroportos de Recife/PE e Salvador/BA; logo os vértices que representariam tais aeroportos em um grafo são adjacentes, ligados por uma única aresta. Por sua vez, não há voo direto

entre os aeroportos de Recife/PE e Rio Branco/AC; logo para ir de um aeroporto a outro faz-se necessário voar para um aeroporto (vértice) intermediário, o que faz com que a ligação entre este último par de aeroportos seja feita por meio de duas ou mais arestas ligando Recife/PE e Rio Branco/AC¹.

É possível que em uma rede haja vértices mais conectados do que outros. Vértices bastante conectados terão mais arestas passando por eles do que a maioria dos demais. Desse modo é interessante definir o chamado grau de um vértice.

Definição 1.1.7 (Grau do vértice).

Grau de um vértice v é a cardinalidade de $N(v)$, ou seja, $\delta(v) = |N(v)|$.

Lembrando, por exemplo, da configuração da rede aeroportuária brasileira, percebemos que há certos aeroportos com maior frequência de voos e que são utilizados para boa parte das conexões e escalas em voos pelo Brasil. Tais aeroportos funcionam como *hubs* e, geralmente, quando há algum problema que afete o funcionamento dos mesmos, mau tempo, por exemplo, os passageiros sofrem com cancelamentos e atrasos. Podemos citar os aeroportos de Guarulhos (São Paulo), dos Guararapes (Recife) e do Galeão (Rio de Janeiro) como exemplos de *hubs* na rede aérea brasileira. Por outro lado, uma falha em vértice com conectividade menor tem potencial para gerar um efeito apenas local no grafo. Mantendo a analogia com a rede de aeroportos, uma falha no aeroporto de Rio Branco, apenas afetará a conectividade de poucas cidades no país, dada a menor frequência de voos deste aeroporto quando comparada aos *hubs*.

Outro exemplo que podemos utilizar é o da rede de transporte público urbano de Recife. Na integração entre os modais metrô e ônibus, temos os casos das estações de integração como Joana Bezerra, Barro e Tancredo Neves que conectam várias linhas que ligam esta cidade.

Cabe ainda citar a utilização da informação de grau de um vértice na análise de perfil de usuários de redes sociais para estratégias comerciais, de *marketing* ou disseminação de informações. Pegando o caso do *Twitter*, os chamados *influenciadores digitais* contam com um grande número de seguidores. Por isso muitas empresas acabam patrocinando tais influenciadores; em troca, estes últimos fazem propaganda de produtos da empresa.

Passemos à discussão de uma outra situação exemplificativa. Imagine agora que se queira viajar de Aracaju/SE até Natal/RN de carro sob a condição de transitar apenas em rodovias federais. Considere ainda que o carro só realizará paradas nas capitais de estados incluídos em tal percurso e que, durante a viagem, percorre cada capital uma única vez. Portanto, trajeto escolhido será realizado através da BR-101. Adicionalmente,

¹ Para encontrar outros exemplos de como se desdobram as ligações entre aeroportos no Brasil, pode-se, por exemplo, consultar o site *Decolar.com* (<https://www.decolar.com/passagens-aereas/>)

os vértices (paradas) constituem a seguinte *sequência*: (Aracaju, Maceió, Recife, João Pessoa, Natal). Vemos que o trajeto entre Aracaju e Natal, sob as condições impostas inicialmente, tem uma “ordem preestabelecida”. Além disso, a ligação entre os vértices (não-adjacentes) correspondentes às capitais Aracaju/SE e Natal/RN é obtida a partir da união de 4 (quatro) arestas que interligam certos vértices adjacentes. Podemos representar o exemplo acima a partir de um *caminho* representando o subgrafo com vértices em uma sequência.

Definição 1.1.8 (Caminho em um grafo).

Um caminho C , ligando o vértice v_1 ao vértice v_n , de um grafo $G = (V, E)$ é um subgrafo cujos vértices formam uma sequência v_1, \dots, v_n e as arestas são dadas por $e = (v_i, v_{i+1})$; $i = 1, \dots, n - 1$.

Muitos problemas que são representados por grafos como as rotas mais curtas para viagem entre cidades ficam bem representados se atribuirmos as arestas do grafo valores pertinentes ao problema, como a distância entre as cidades que a aresta liga ou o tempo da viagem. Isso nos motiva a definir um grafo ponderado.

Definição 1.1.9 (Grafo ponderado).

Um grafo ponderado é um grafo $G = (V, E)$ munido de uma função $w : E \rightarrow M$ que associa a cada aresta e de G um valor numérico m pertencente a um conjunto numérico M .

As informações ou dados representados pelos vértices têm suas relações (ligações) expressas a partir das arestas que constituem o grafo. Podemos construir uma matriz mensurando algum parâmetro que permita estimar a influência de um vértice (informação/dado) sobre outro vértice (informação/dado), em um par de vértices (cor)relacionados. A essa matriz chamamos *matriz de adjacência*, conforme definido a seguir.

Definição 1.1.10 (Matrizes de adjacência).

No caso de um grafo não ponderado, a matriz de adjacência $A = a(i, j)$ de um grafo é dada pelo número de arestas que ligam o vértice i ao vértice j .

Quando se trata de um grafo ponderado, a quantidade $a(i, j)$ representa o peso da aresta que liga o vértice i ao vértice j .

Modelos envolvendo probabilidades de conexão entre neurônios no córtex somatosensorial de um animal é um exemplo de aplicação de matriz de adjacência (MARKRAM et al., 2015). Em tais modelos, cada neurônio ocupa um vértice de certo grafo ponderado; arestas têm pesos maiores quanto maior a probabilidade de conexão entre dois vértices i e j quaisquer. Ver Figura 1.

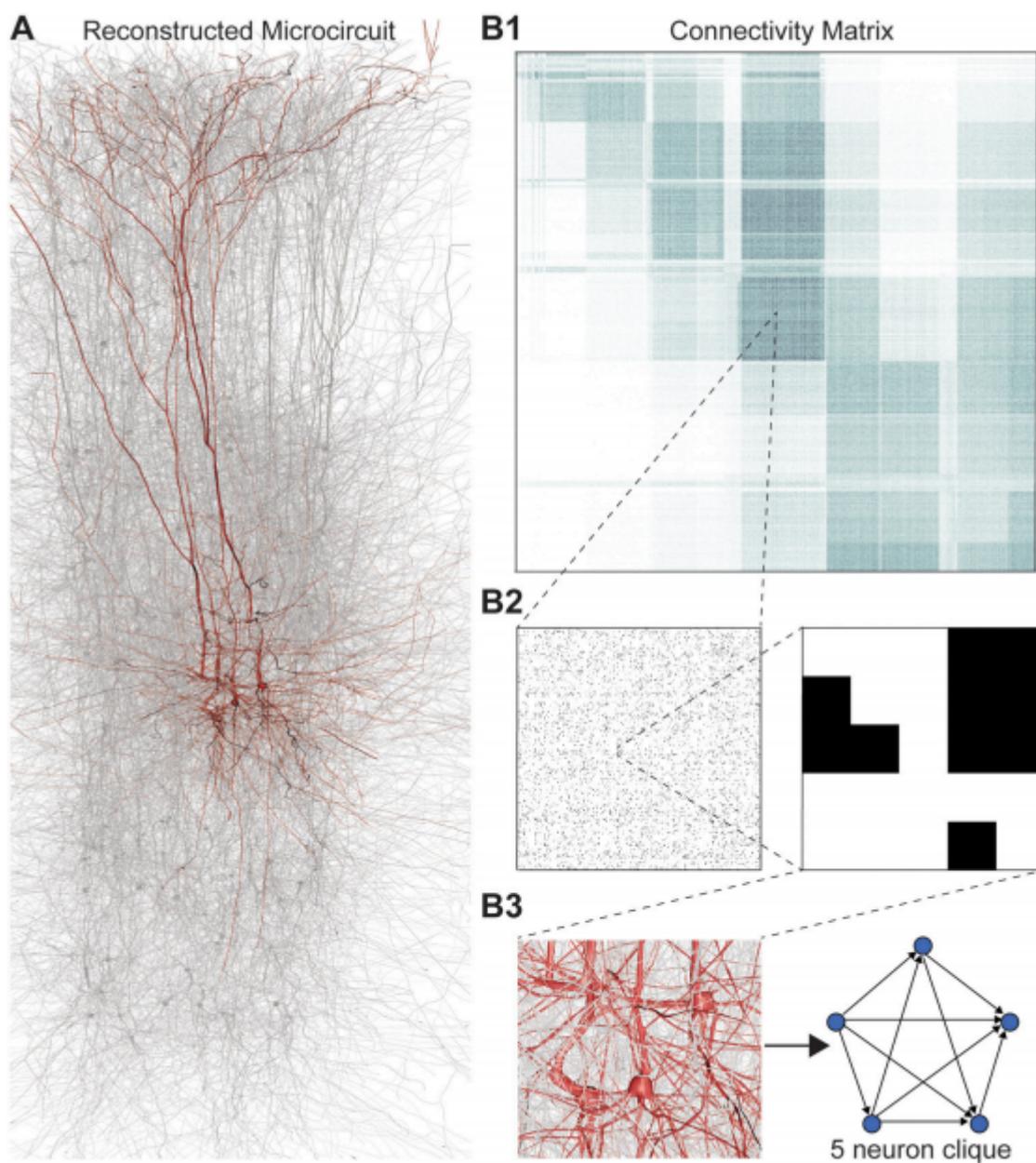


Figura 1 – Etapas para criação da rede de neurônios - Blue Brain Project. Figura retirada da referência REIMANN et al. (2017).

Um outro aspecto que pode ser analisado no estudo de grafos é se todos os vértices estão conectados entre si por arestas ou se há “vazios” na ligação entre eles.

Analisando o caso do córtex somatossensorial, é possível que, quando há lesões no tecido cerebral, haja redução, mesmo que temporária, da probabilidade de conexão entre neurônios na parte lesionada. Portanto, o grafo que representa o córtex terá arestas ausentes na ligação entre vértices correspondentes à região cortical lesada².

Definição 1.1.11 (Grafo completo).

Um grafo é dito completo se, dados dois vértices quaisquer, existe uma aresta que os une. Para o caso de grafos orientados, devem existir arestas para as duas orientações de ligação entre vértices. Portanto, dados os vértices u e v , existem $e_1 = (u, v)$ e $e_2 = (v, u)$.

Em nossa abordagem utilizando a teoria de redes, buscamos calcular propriedades do grafo correspondente que nos tragam informações sobre os dados em análise. Nessa esteira, um dos comportamentos a ser observado é se e como ocorre o agrupamento (*clustering*) de vértices no grafo, observando o quão conectados eles estão. Para tal finalidade, é interessante entender o conceito de *clique* de um grafo.

Definição 1.1.12 (Clique de um grafo não orientado). Clique de um grafo não orientado é um subgrafo completo. Um k -clique é um clique formado por k vértices³.

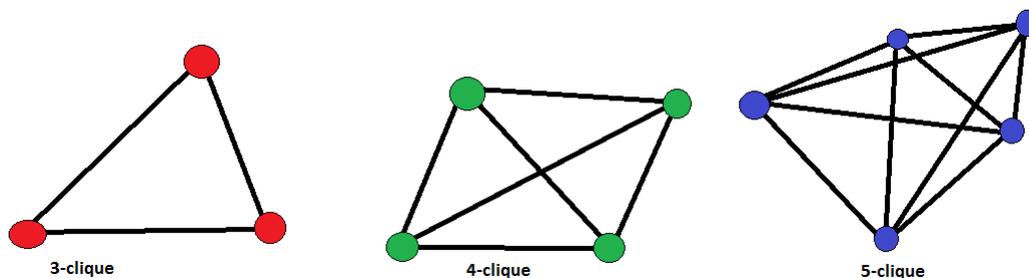


Figura 2 – Diferentes cliques extraídos de (Trusted Analytics Platform Package,)

Por sua vez, a definição do que seja um clique para grafos orientados não é tão simples, existindo uma diversidade de escolhas possíveis. Para maiores detalhes, recomendamos, por exemplo, a leitura da referência SEIDMAN; FOSTER (1978).

Uma definição que será útil adiante é a de grafo orientado acíclico, a qual apresentamos a seguir.

Definição 1.1.13 (Grafo orientado acíclico). Dizemos que um grafo orientado H é acíclico se todo caminho C em H não possui vértices repetidos.

² Vale lembrar que a neurogênese pode ocorrer também na idade adulta (PAREDES et al., 2016)

³ O conceito de clique também é definido como o subgrafo completo maximal. Entretanto, não adotaremos essa definição, pois ela não nos permite calcular a característica de Euler da rede.

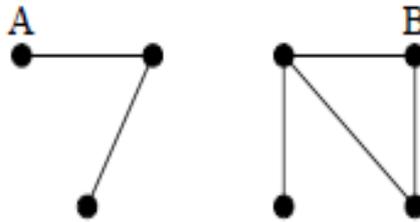


Figura 3 – Rede com duas componentes. Este grafo não orientado contém duas componentes A e B , cada uma com 3 e 4 vértices, respectivamente. Figura retirada da referência NEWMAN (2018), página 143.

A seguir apresentamos a definição de *clique* para um grafo orientado que serão utilizadas nesta dissertação.

Definição 1.1.14 (Clique de um grafo orientado). Um *clique* S de um grafo orientado G é um subgrafo acíclico de G em que seus vértices estão dois a dois conectados.

Outra definição importante é a de componente de um grafo. Antes de apresentar tal conceito, olhemos para o grafo representado na Figura 3.

Vemos que o grafo aí representado é formado por dois subconjuntos, A e B , cujos elementos são vértices.

Definição 1.1.15 (Componente de um grafo não orientado). Componente é um subconjunto de vértices de um grafo tal que existe, para todo par de vértices, pelo menos um caminho que leva de um vértice a outro, e de modo que nenhum outro vértice pode ser adicionado ao subconjunto enquanto esta propriedade for preservada.

Importa mencionar que subconjuntos para os quais nenhum outro vértice possa ser adicionado enquanto certa propriedade for preservada são chamados *subconjuntos maximais*. A matriz de adjacência de um grafo com mais de uma componente tem a forma de uma matriz bloco diagonal.

Passemos agora à discussão sobre como definir componente em um grafo orientado, que é algo mais sutil. Para nortear nossa escolha, ressaltamos que, em nosso trabalho, estamos interessados nos vértices que se pode atingir em um grafo via caminhos com um ponto de partida especificado. Tal situação é similar, por exemplo, à de alguém que navega na *internet* e quer saber quais páginas pode acessar a partir dos *links* presentes em determinada página inicial (o ponto de partida especificado) (NEWMAN, 2018).

Nessas condições podemos definir dois tipos de componentes para o grafo orientado, as componentes de saída (*out-component*) e de entrada (*in-component*) (NEWMAN, 2018).

Definição 1.1.16 (*Out-component* de um grafo orientado). A componente de saída (*out-component*) é o conjunto de vértices que podem ser atingidos a partir de um vértice de partida A , incluindo o próprio vértice A .

Definição 1.1.17 (*In-component* de um grafo orientado). A componente de entrada (*in-component*) de um vértice especificado A é o conjunto de todos os vértices a a partir dos quais existe um caminho orientado para A , incluindo o próprio vértice A .

Podemos destacar algumas características comuns às componentes de saída (*out-component*) e de entrada (*in-component*):

- (i) As arestas que conectam a componente de determinado tipo a outros vértices só apontam para membros (vértices) internos à mesma componente, nunca para vértices que não a constituem.
- (ii) A componente de saída, assim como a componente de entrada, são propriedades da estrutura da rede e do vértice de partida, não apenas da estrutura da rede. Como consequências disso, os elementos da componente de saída podem mudar se escolhermos um ponto de partida diferente; um mesmo vértice pode pertencer a mais de uma componente de saída. Raciocínio análogo se aplica à componente de entrada.

Dois conceitos que serão importantes mais adiante são os de *caminho* e de *comprimento de caminho*, os quais definimos a seguir.

Definição 1.1.18 (Comprimento de caminho). O comprimento de um caminho em uma rede é o número de arestas percorridas ao longo do caminho (não o número de vértices). Dito de outra forma, o comprimento de um caminho representa o número de “saltos” que se dá no percurso, indo de um vértice ao vértice adjacente.

Uma propriedade muito importante no estudo de redes sociais é a transitividade. Conforme lembrado por NEWMAN (2018), na Matemática, dizemos que uma relação “ \circ ” é transitiva se $a \circ b$ e $b \circ c$ juntas implicam $a \circ c$.

Em uma rede é possível encontrar várias relações entre pares de vértices. A relação mais simples (entre vértices) é a existência (ou não) de uma aresta ligando pares de vértices. Quando, em determinada rede, a relação “ligado por uma aresta” é transitiva, então para três vértices u , v e w , se u está ligado por uma aresta a v e v está ligado por uma aresta a w , *consequentemente* u está ligado por uma aresta a w . O caráter “ligado por uma aresta”

poderia ser entendido, por exemplo, quando se quer saber se é sempre válida a condição de que “um amigo de meu amigo também é meu amigo” para determinada rede social.

Definição 1.1.19 (Transitividade). Sejam três vértices u , v e w quaisquer em um grafo e determinada relação \circ . Se para todos u , v , w temos $u \circ v$ e $v \circ w$ implicando $u \circ w$, então a relação \circ é dita transitiva.

A definição acima poderia ser aplicada tanto a grafos orientados quanto para grafos não orientados. Mas olhemos, por um momento, para o caso não orientado, por questão de simplicidade.

A transitividade perfeita, conforme se percebe, somente ocorreria quando cada componente é um clique, algo que não ocorre em regra. Mas poderíamos analisar casos de transitividade *parcial*. É quando $u \circ v$ e $v \circ w$ não garantem $u \circ w$, mas torna esta última relação mais provável. Em outras palavras, um amigo de meu amigo não é necessariamente meu amigo; mas um amigo de meu amigo *tem maior probabilidade* de ser meu amigo do que uma pessoa escolhida aleatoriamente na cidade em que moro.

A seguir apresentamos uma forma de medir a transitividade de forma quantitativa. Utilizemos o caso dos três vértices u , v e w , tal que $u \circ v$ e $v \circ w$ provavelmente implique $u \circ w$. Podemos ter duas situações:

- (a) $u \circ v$ e $v \circ w$ **não** implica $u \circ w$, ou;
- b) $u \circ v$ e $v \circ w$ implica $u \circ w$.

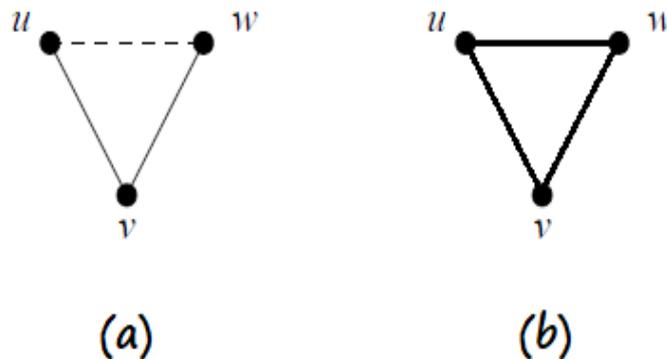


Figura 4 – Figura adaptada a partir da referência NEWMAN (2018).

Podemos representar as possibilidades (a) e (b) acima a partir da Figura 4. É possível observar que se $u \circ w$ temos um caminho fechado; neste caso, um caminho fechado de tamanho 3 ou triângulo esse é o caso da Figura 4(b).

Ante o exposto, definimos o coeficiente de agrupamento (*clustering coefficient*) C como a fração dos caminhos de comprimento dois (arestas) que são fechados. Ou seja,

$$C = \frac{\text{número de caminhos fechados de comprimento dois}}{\text{número de caminhos de comprimento dois}}. \quad (1.1)$$

Quando $C = 1$ temos a transitividade perfeita, em que todas as componentes da rede são cliques. Quando $C = 0$, não temos tríades fechadas; por exemplo, esse é o caso de redes quadradas, que têm caminhos fechados apenas para número par de vértices e não têm tríades fechadas.

Uma forma alternativa de escrever o coeficiente de agrupamento é

$$C = \frac{\text{número de triângulos} \times 6}{\text{número de caminhos de comprimento dois}}. \quad (1.2)$$

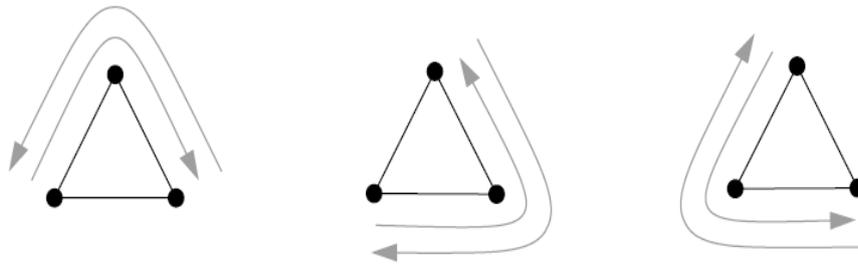


Figura 5 – Figura adaptada a partir da referência NEWMAN (2018).

Ressalte-se que o fator 6 surge porque cada triângulo é contado seis vezes quando computamos o número de caminhos fechados de comprimento dois, haja vista que podemos percorrer cada triângulo no sentido horário ou no sentido anti-horário, partindo de um mesmo vértice.

Há ainda uma outra forma de calcular o coeficiente de agrupamento. Considere que uvw é um caminho de comprimento dois. Nesse caso, é correto afirmar que os vértices u e w têm um “vizinho” em comum, isto é, o vértice v . Se o caminho uvw é fechado, então existe uma aresta entre u e w . Desse modo, podemos imaginar o coeficiente de agrupamento como

$$C = \frac{\text{número de triângulos} \times 3}{\text{número de triplos conectados}}, \quad (1.3)$$

onde triplo conectado é entendido como os três vértices uvw com arestas (u, v) e (v, w) , com ou sem a presença da aresta (u, w) . O fator três que aparece na expressão acima se deve ao fato de que cada triângulo acaba contado três vezes quando contamos os triplos conectados da rede.

Por sua vez, o cálculo do coeficiente de agrupamento para grafos orientados é relativamente simples. Basta trocar o termo “caminho” por “caminho orientado” na expressão (1.1). Assim,

$$C = \frac{\text{número de caminhos orientados fechados de comprimento dois}}{\text{número de caminhos orientados de comprimento dois}}. \quad (1.4)$$

1.2 Complexos simpliciais

Complexos simpliciais são estruturas de importante aplicação na Topologia Algébrica, na Combinatória e, evidentemente, na Teoria de Redes. Em geral, os complexos se apresentam como espaços topológicos cuja estrutura mais simples permite analisar com mais facilidade propriedades de espaços homeomorfos. Ver EDELSBRUNNER; HARER (2010).

Calcular invariantes topológicos a partir de um grafo permite determinar propriedades geométricas dos dados trazidos pelo grafo. Nesse ínterim, citamos a referência MASSULLI; VILLA (2016) como exemplo de trabalho utilizando cliques para a identificação de invariantes topológicos.

Agora, apresentamos os conceitos necessários à definição formal de um complexo simplicial e, ao longo do capítulo, a aplicação dos complexos em teoria de redes. Introduziremos os simplexos (ou complexos simpliciais), como estruturas topológicas a serem identificadas em nosso grafo.

Definição 1.2.1 (Combinação afim). Seja $x = \sum_{i=0}^k \lambda_i v_i$, em que v_0, \dots, v_k são pontos do \mathbb{R}^n e $\lambda_0, \dots, \lambda_k$ pertencem a \mathbb{R} . Se $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$, então x é uma combinação afim de v_0, \dots, v_k .

Definição 1.2.2 (Pontos afim independentes). Dizemos que v_0, \dots, v_k são pontos afim independentes do \mathbb{R}^n se nenhum ponto v_i é uma combinação afim dos outros pontos v_j .

Definição 1.2.3 (Combinação convexa). Uma combinação convexa $x = \sum_{i=0}^k \lambda_i v_i$ é uma combinação afim em que $\lambda_i \geq 0$.

Definição 1.2.4 (Simplexo de dimensão k). Um k -simplexo ou simplexo de dimensão k é o conjunto das combinações convexas de $k + 1$ pontos afim independentes.

Sejam v_0, \dots, v_k pontos afim independentes. Adotamos a seguinte notação para representar o conjunto das combinações convexas dos pontos em questão: $\text{conv}[v_0, \dots, v_k]$.

A seguir, algumas propriedades de pontos afim independentes.

Proposição 1.2.1. *São equivalentes as afirmações:*

1. v_0, \dots, v_k são pontos afim independentes do \mathbb{R}^n ;

2. Os k vetores $v_i - v_0$, são linearmente independentes no \mathbb{R}^n ;

3. Os vetores $(1, v_0), \dots, (1, v_k)$ são linearmente independentes no \mathbb{R}^{n+1} .

Demonstração. (1 \implies 2) Sabemos que v_0, \dots, v_k são pontos afim independentes. Suponha por absurdo que os vetores $v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0$ são linearmente dependentes. Assim, sem perda de generalidade, existe uma combinação linear tal que

$$\lambda_1 (v_1 - v_0) + \dots + \lambda_{k-1} (v_{k-1} - v_0) = v_k - v_0$$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i v_i \right) - \left(\sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i v_0 \right) + v_0 &= v_k \\ \left(\sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i v_i \right) + \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i \right) v_0 &= v_k \end{aligned}$$

Como $\left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i \right) + \left(\sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i \right) = 1$, v_k é uma combinação afim de v_0, \dots, v_{k-1} (absurdo!). Logo, $v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0$ são linearmente independentes. \square

Demonstração. (1 \Leftarrow 2) Suponha, por absurdo e sem perda de generalidade, que v_k seja uma combinação afim de v_0, \dots, v_{k-1} . Então, existem $\lambda_i, i = 0, \dots, k-1, \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i = 1$, tais que

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i v_i &= v_k \\ \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i v_i - \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i v_0 &= v_k - \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i v_0 \\ \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i (v_i - v_0) &= v_k - v_0 \end{aligned}$$

Absurdo, pois $v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0$ são linearmente independentes. Assim, v_0, \dots, v_k são afim independentes. \square

Demonstração. (2 \implies 3) Temos que

$$(0, v_1 - v_0), \dots, (0, v_k - v_0)$$

são LI em \mathbb{R}^{n+1} . O vetor $(1, v_0)$ não se escreve como combinação linear dos vetores acima; basta ver que a primeira entrada do vetor é não nula. Portanto, $(1, v_0), (0, v_1 - v_0), \dots, (0, v_k - v_0)$ são LI em \mathbb{R}^{n+1} . Segue que

$\lambda_0 (1, v_0) + \lambda_1 (0, v_1 - v_0) + \dots + \lambda_k (0, v_k - v_0) \neq 0$, para $\lambda_i, i = 1, \dots, k$, não todos nulos.

$$\implies \lambda_0 (1, v_0) + \lambda_1 [(1, v_1) - (1, v_0)] + \dots + \lambda_k [(1, v_k) - (1, v_0)] \neq 0$$

$$\Rightarrow \left(\lambda_0 - \sum_{j=1}^k \lambda_j \right) (1, v_0) + \lambda_1 (1, v_1) + \dots + \lambda_k (1, v_k) \neq 0$$

$$\Rightarrow \beta_0 (1, v_0) + \beta_1 (1, v_1) + \dots + \beta_k (1, v_k) \neq 0$$

em que $\beta_i, i = 0, \dots, k$ são números reais quaisquer, não todos nulos. Basta ver que

$$\begin{cases} \lambda_i = \beta_i, i > 0 \\ \lambda_0 = \sum_{i=0}^k \beta_i \end{cases}$$

Assim, $(1, v_0), \dots, (1, v_k)$ são linearmente independentes em \mathbb{R}^{n+1} . □

Demonstração. (3 \implies 2) Ora,

$$\lambda_0 (1, v_0) + \lambda_1 (1, v_1) + \dots + \lambda_k (1, v_k) \neq 0, \text{ para } \lambda_i, i = 0, \dots, k, \text{ não todos nulos.}$$

Em particular, para $\lambda_0 = -(\lambda_1 + \dots + \lambda_k)$, vem que

$$\lambda_1 (0, v_1 - v_0) + \lambda_2 (0, v_2 - v_0) + \dots + \lambda_k (0, v_k - v_0) \neq 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 (v_1 - v_0) + \lambda_2 (v_2 - v_0) + \dots + \lambda_k (v_k - v_0) \neq 0$$

Como a condição acima é válida para $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ não todos nulos $\Rightarrow v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0$ são linearmente independentes. □

Seguem alguns exemplos de simplexos.

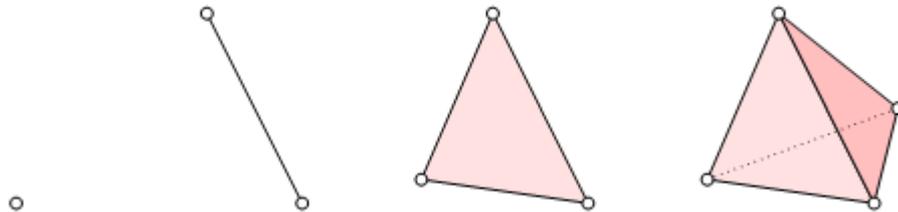


Figura 6 – Simplexos. Figura retirada de EDELSBRUNNER; HARER (2010).

Definição 1.2.5 (Face de um simplexo). Seja σ um k – *simplexo* gerado a partir de um conjunto de pontos afim independentes $\alpha = \{v_0, \dots, v_k\}$. Uma face τ de σ é definida como o conjunto das combinações convexas geradas a partir de β , em que β é um subconjunto não vazio de α , ou seja, $\beta \subset \alpha, \beta \neq \emptyset$.

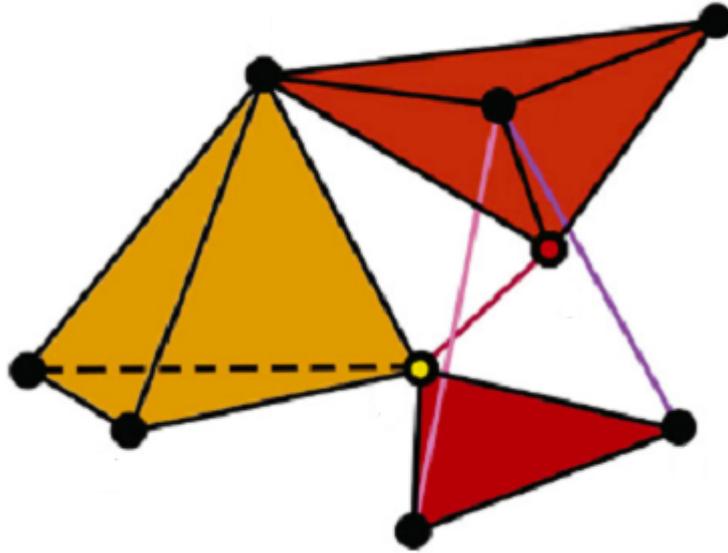


Figura 7 – Complexo simplicial adaptado de BINCHI et al. (2014)

Nota. Note que τ também é um simplexo, inclusive podemos ter $\tau = \sigma$.

Usualmente escrevemos $\tau \leq \sigma$ para nos referimos a uma face τ de um k -simplexo σ .

Definição 1.2.6 (Complexo simplicial ou simplexo). Complexo simplicial ou simplexo K é um coleção finita de simplexos, tal que se $\sigma \in K$ e $\tau \leq \sigma \Rightarrow \tau \in K$ e $\sigma_1, \sigma_2 \in K \Rightarrow \sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$ ou $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \tau$, em que $\tau \leq \sigma_1$ e $\tau \leq \sigma_2$. Aqui, τ representa uma face comum a σ_1, σ_2 . Ver Figura 7

Definição 1.2.7 (Dimensão de um complexo simplicial). A dimensão do complexo K é definida como a maior dimensão dos simplexos que formam K .

Definição 1.2.8 (Vértices de um complexo simplicial). Vértices de um *complexo simplicial* são o conjunto definido por $\text{Vert}(K) = \{\sigma \in K \mid \dim(\sigma) = 0\}$.

Podemos estender a definição de *complexo simplicial*, eliminando a necessidade um espaço euclidiano. Definamos, então, *complexo simplicial abstrato*.

Definição 1.2.9 (Complexo simplicial abstrato). Complexo simplicial abstrato A é uma coleção finita de conjuntos finitos tais que $\alpha \in A$ e $\beta \subseteq \alpha \Rightarrow \beta \in A$.

Nota. Cada elemento de A constitui um simplexo abstrato.

Os conjuntos que formam A são os simplexos, sendo que a dimensão de um simplexo é dada por $\dim(\alpha) = \text{card}(\alpha) - 1$. A dimensão do complexo A , analogamente ao caso geométrico, é igual à maior dimensão de seus simplexos. Também análoga ao caso geométrico, uma face β de um simplexo α é um subconjunto não vazio de α , $\beta \subseteq \alpha$.

Definição 1.2.10 (Vértices de um complexo simplicial abstrato). O conjunto dos vértices de um complexo simplicial abstrato A é a união de todos os simplexos que formam A , ou seja, $\text{Vert}(A) = \bigcup A$.

Relacionamos os complexos simpliciais abstratos com os complexos simpliciais “geométricos” através de uma realização geométrica.

Definição 1.2.11 (Realização geométrica). Sejam K um complexo simplicial e A um complexo simplicial abstrato, e $\text{Vert}(K)$, $\text{Vert}(A)$ seus respectivos conjuntos dos vértices. Caso exista bijeção f

$$f : \text{Vert}(A) \longrightarrow \text{Vert}(K)$$

tal que $\alpha \in A \iff \text{conv}\{f(\alpha)\} \in K$, dizemos que K juntamente com a função f formam uma realização geométrica de A .

Inversamente, se existe $f^{-1} : \text{Vert}(K) \longrightarrow \text{Vert}(A)$, dizemos que A é uma abstração de K . Assim, podemos transitar entre os complexos abstratos e geométricos. De fato, dado um complexo simplicial abstrato A sempre obtemos uma realização geométrica de A em \mathbb{R}^{2n+1} , Teorema da Realização Geométrica que será demonstrado adiante.

Lema 1.2.2. *Considere a função injetiva*

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^n \mid f(x) = (x, x^2, \dots, x^n).$$

Qualquer subconjunto da $\text{Im}(f)$ com $n + 1$ elementos é afim independente.

Demonstração. Sejam x_1, \dots, x_{n+1} números naturais distintos quaisquer. Pela Proposição 1.2.1, $f(x_1) = (x_1, x_1^2, \dots, x_1^n), \dots, f(x_{n+1}) = (x_{n+1}, x_{n+1}^2, \dots, x_{n+1}^n)$ são afim independentes em $\mathbb{R}^n \iff (1, x_1, x_1^2, \dots, x_1^n), \dots, (1, x_{n+1}, x_{n+1}^2, \dots, x_{n+1}^n)$ são linearmente independentes em \mathbb{R}^{n+1} . Calculando o determinante,

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n+1} & \dots & x_{n+1}^n \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq q < p \leq n+1} (x_p - x_q) \neq 0$$

Portanto, $f(x_1), \dots, f(x_{n+1})$ são afim independentes em \mathbb{R}^n . □

Teorema 1.2.3. *Todo complexo simplicial abstrato de dimensão m possui realização geométrica em \mathbb{R}^{2m+1} .*

Demonstração. Seja A um complexo simplicial abstrato de dimensão m . Como $\text{Vert}(A)$ é um conjunto finito, podemos ordená-lo e então obtemos $\text{Vert}(A) = \{v_1, \dots, v_k\}$. Construamos agora a função:

$$f : \text{Vert}(A) \longrightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$$

$$f(v_p) = (p, p^2, \dots, p^{2m+1}), \quad p = 1, \dots, k.$$

Note que, dados $\alpha, \beta \in A$, temos $\text{card}(f(\alpha) \cup f(\beta)) = \text{card}(f(\alpha)) + \text{card}(f(\beta)) - \text{card}(f(\alpha) \cap f(\beta)) = \text{card}(\alpha) + \text{card}(\beta) - \text{card}(\alpha \cap \beta) \leq m + 1 + m + 1 = 2m + 2$. Assim, pelo Lema 1.2.2, $f(\alpha)$, $f(\beta)$ e $f(\alpha) \cup f(\beta)$ são conjuntos afim independentes.

Agora vamos provar que os simplexes $\sigma = \text{conv}[f(\alpha)]$, em que $\alpha \in A$, atendem as condições para formar um complexo simplicial geométrico.

(i) Sejam $\sigma = \text{conv}[f(\alpha)]$ e $\tau = \text{conv}[B]$ tais que $\tau \subset \sigma \Rightarrow \text{conv}[B] \subset \text{conv}[f(\alpha)]$, em que $B \subset f(\alpha)$. Como f é injetiva, $f^{-1}(B) \subset \alpha \Rightarrow f^{-1}(B) \in A \Rightarrow \tau$ pertence ao complexo simplicial geométrico.

(ii) Se $\sigma = \text{conv}[f(\alpha)]$ e $\tau = \text{conv}[f(\beta)] \Rightarrow \sigma \cap \tau = \text{conv}[f(\alpha) \cap f(\beta)]$. Se $x \in \text{conv}[f(\alpha) \cap f(\beta)] \Leftrightarrow$ as combinações convexas que descrevem x tanto em $f(\alpha)$ como em $f(\beta)$ são idênticas, uma vez que $f(\alpha) \cup f(\beta)$ é afim independente $\Leftrightarrow x \in \text{conv}[f(\alpha) \cap f(\beta)] \Leftrightarrow x \in \text{conv}[f(\alpha \cap \beta)]$. O que satisfaz a condição de interseção entre dois simplexes ser vazia ou um simplexo pertencente ao complexo simplicial. \square

O teorema anterior é de fundamental importância para o cálculo dos invariantes topológicos do grafo. Um aspecto relevante é a conexão com a emergente área de análise topológica de dados. Uma implicação imediata do teorema da realização geométrica é o fato de podermos associar uma estrutura isomorfa a \mathcal{R}^N a um conjunto de dados. Essa implicação coloca a análise de dados sobre um prisma mais profundo, uma vez que várias teorias axiomáticas em física, por exemplo, são formuladas em um espaço de configurações, que em geral é uma hiper-superfície de \mathcal{R}^N . Além disso, considerando os vértices que compõem os *cliques* do grafo como um complexo simplicial abstrato, garantimos a existência de complexo simplicial geométrico associado ao grafo. Então, podemos determinar os invariantes topológicos que desejarmos. Um desses invariantes topológicos é a característica de Euler.

A característica de Euler, χ , surge como uma forma de classificar estruturas que sejam topologicamente semelhantes. Empregaremos a seguinte definição de HATCHER (2002) para o nosso trabalho: a soma alternada

$$\chi = \sum_{m=0}^n (-1)^m K_m$$

em que K_m é o número de m -simplexos no complexo simplicial de dimensão n .

Podemos estudar um grafo não orientado como um complexo simplicial abstrato em que os seus simplexes são os *cliques* do grafo. De fato, para um grafo não orientado, definimos o *clique* como um subgrafo completo, ver Definição 1.1.12. Assim, a intersecção de dois subgrafos completos de um mesmo grafo é vazia ou um subgrafo completo. Além disso, podemos fazer uma realização geométrica para o grafo e determinar sua característica de Euler. No caso dos grafos orientados, existe um conceito similar ao *complexo simplicial abstrato*; trata-se do *complexo simplicial orientado abstrato*.

Definição 1.2.12 (Complexo simplicial orientado abstrato). Sejam S uma coleção finita de conjuntos finitos *ordenados* e $\sigma \in S$. Se $\tau \subseteq \sigma$ herdou a ordem de σ , e $\forall \tau \subseteq \sigma, \tau \in S$; então S é um *complexo simplicial orientado abstrato*.

Os elementos σ de S , nas condições dadas na definição acima, são os simplexes do complexo simplicial orientado abstrato, bem como τ é definida como uma face de σ . Podemos tratar os elementos σ de S como *ênuplas* ordenadas, a fim de melhor destacar a condição imposta pela ordem a S .

Por exemplo, sejam $\sigma_1 = (v_1, v_2)$, $\sigma_2 = (v_2, v_1) \in S$. Dessa forma, σ_1, σ_2 são dois 1 – simplexes distintos de S , apesar de possuírem o mesmo conjunto de vértices.

De maneira análoga ao caso de um *complexo simplicial abstrato*, podemos fazer uma realização geométrica do nosso *complexo simplicial orientado abstrato*. Entretanto, quando se trata de grafos orientados, é comum existirem limitações computacionais na detecção dos cliques, devido à complexidade do algoritmo.

1.3 Teoria de Redes

A teoria de redes é útil para a descrição de sistemas complexos. Na abordagem de sistemas complexos, estuda-se como as partes (de um sistema complexo) e as relações entre elas explicam o comportamento coletivo do sistema (complexo) e a relação deste com o ambiente que o circunda (BAR-YAM, 2002). De maneira geral, em um sistema complexo, como o cérebro, o DNA, a bolsa de valores, etc., as interações entre os constituintes não são exatamente conhecidas, como é o caso de sistemas cuja equação da dinâmica pode ser escrita. De maneira geral, a teoria de grafos é o melhor candidato para estudar sistemas complexos e, muito recentemente, a topologia algébrica pode dar um caráter mais profundo à análise de sistemas complexos.

Dentre os trabalhos que aplicam teoria de redes, podemos citar estudos sobre: redes sem escala (*scale-free networks*) (BARABÁSI; BONABEAU, 2003; BARABÁSI, 2009); organização hierárquica de redes complexas (RAVASZ; BARABÁSI, 2003); mecânica estatística de redes complexas (ALBERT; BARABÁSI, 2002); estrutura funcional e celular de redes biológicas (BARABASI; OLTVAI, 2004) e arquitetura de redes bioló-

gicas (WUCHTY; RAVASZ; BARABÁSI, 2006); doenças originadas por fatores que os pacientes tenham em comum (BARABÁSI, 2007); vínculos geográficos e sua influência em redes sociais (ONNELA et al., 2011); em problemas de interesse para a Física, como sincronicidade e percolação (NÉDA et al., 2000; BARABÁSI, 2001; SCHWARTZ et al., 2002)

Para uma visão geral da gama de aplicações da teoria de redes nos mais variados campos do saber, indicamos, por exemplo, alguns trabalhos de Barabási (BARABASI; FRANGOS, 2014; BARABÁSI, 2016), de van Steen (STEEN; STEEN, 2010) e Newman (NEWMAN, 2003; NEWMAN, 2018).

Ocorre um *boom* da teoria de redes, área intrinsecamente multidisciplinar. A despeito disso, muitos cientistas permanecem isolados em suas disciplinas, algo contraproducente para avançar nos estudos de sistemas complexos (BARABÁSI, 2005).

Podemos definir qualitativamente uma rede como uma coleção de objetos interconectados. De fato, os conceitos de rede e grafo são, em muitas obras, indistinguíveis. Os objetos são os vértices do grafo que representa a rede e as conexões suas arestas.

No restante deste capítulo, discutiremos sucintamente os três modelos mais comuns de redes complexas, a saber, redes aleatórias clássicas (*random networks*), *small-world networks* e redes sem escala (*scale-free networks*).

1.4 Redes Aleatórias Clássicas (Random Networks)

Redes aleatórias clássicas (*random networks*) são representados por grafos em que a existência de uma aresta entre dois nós depende de uma distribuição de probabilidade. Nesta seção veremos algumas de suas características e propriedades.

Conforme NEWMAN (2018) aponta, os pioneiros no estudo sobre grafos aleatórios seriam Solomonoff e Rapoport (SOLOMONOFF; RAPOPORT, 1951), embora tal pioneirismo seja comumente associado aos nomes de Paul Erdős e Alfréd Rényi, com seus aclamados artigos nas décadas de 1950 e 1960 (PAUL; ERDOS, 1959; ERDOS; RÉNYI, 1960; ERDŐS; RÉNYI, 1964).

Há pelo menos duas maneiras de definir grafos aleatórios de Erdős e Rényi (ER *random graphs*) que consideramos equivalentes nesta dissertação. A primeira ocorre quando consideramos um grafo não orientado $G_{n,p}$ onde a probabilidade de conexão entre dois vértices *distintos* quaisquer é p . A segunda, quando dada uma quantidade M de arestas, a escolha de qualquer aresta incidindo em um par de vértices, *distintos ou não*, é aleatória.

Passemos à apresentação de algumas das propriedades dos grafos aleatórios de Erdős e Rényi.

A distribuição do grau dos vértices em um grafo $ER(n, p)$ é dada por

$$\mathbb{P}(k) = \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} . \quad (1.5)$$

O valor médio do grau dos vértices será dado por

$$\begin{aligned} \bar{\delta} &= \sum_{k=1}^{n-1} k \mathbb{P}(k) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} k p^k (1-p)^{n-1-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-1}{k} \frac{(n-2)!}{(k-1)!(n-1-k)!} k p \cdot p^{k-1} (1-p)^{n-1-k} \\ &= p(n-1) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-2)!}{(k-1)!(n-1-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-1-k} \\ &= p(n-1) \sum_{m=0}^{n-2} \binom{n-2}{m} p^m (1-p)^{n-2-m} \\ &= p(n-1) \end{aligned}$$

O valor médio do grau de uma rede aleatória clássica é frequentemente simbolizado por c na literatura. Poder-se-ia, portanto, seguir essa convenção e escrever

$$c = (n-1)p . \quad (1.6)$$

O resultado acima nos diz que o número de arestas conectadas a um vértice (grau do vértice) é igual ao número esperado p entre o vértice e qualquer outro vértice, multiplicado pelo número $n-1$ de outros vértices (NEWMAN, 2018).

Podemos escrever, a partir de 1.6, que $p = \frac{c}{n-1}$. Percebe-se que para um grande número de vértices ($n \rightarrow \infty$), teremos $p \rightarrow 0$. A partir desta última condição, podemos escrever

$$\begin{aligned} \ln \left[(1-p)^{n-1-k} \right] &= (n-1-k) \ln \left(1 - \frac{c}{n-1} \right) \\ &\simeq - (n-1-k) \frac{c}{n-1} \simeq -c , \end{aligned}$$

onde foi feita uma expansão em série de Taylor.

Tomando a exponencial de ambos os lados da última expressão acima, obtemos $(1-p)^{n-1-k} = e^{-c}$. Além disso, para n muito grande, temos

$$\binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} \simeq \frac{(n-1)^k}{k!} .$$

Dessa maneira, podemos reescrever a distribuição de grau para um grande número de vértices ($n \rightarrow \infty$) na seguinte forma:

$$\mathbb{P}(k) = \frac{(n-1)^k}{k!} p^k e^{-c} = \frac{(n-1)^k}{k!} \left(\frac{c}{n-1}\right)^k e^{-c} = e^{-c} \frac{c^k}{k!}. \quad (1.7)$$

Observe que a expressão 1.7 é a distribuição de Poisson. Ou seja, para grande número n de vértices, $G_{n,p}$ tem uma distribuição de grau de Poisson. Daí, o porquê $G_{n,p}$ também ser chamado de grafo aleatório de Poisson.

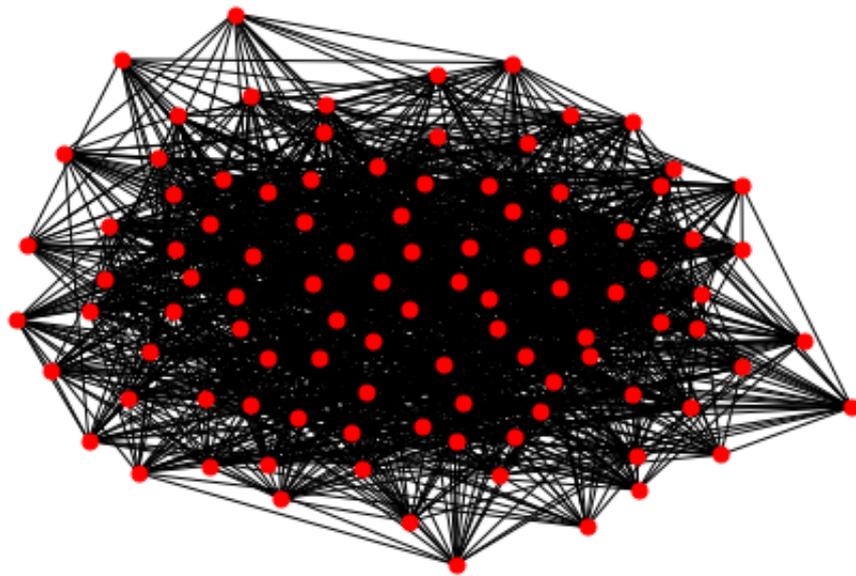


Figura 8 – Grafo $ER(100, 0, 3)$ gerado com o pacote *Networkx* implementado na linguagem de programação *Python*.

Para finalizar esta seção, cabe ressaltar que, apesar de muito estudados, grafos aleatórios (de Poisson) apresentam vários problemas (NEWMAN, 2018). Nessa esteira, esse modelo apresenta discordâncias com amostras reais. Dentre tais discordâncias, citamos algumas a seguir.

Grafos aleatórios não apresentam correlação entre os graus de vértices adjacentes, comportamento oposto ao de redes reais. Além disso, enquanto muitas – se não a maioria – das redes reais apresentem agrupamentos de vértices em “comunidades”, grafos aleatórios não apresentam tal comportamento. Mas talvez o maior desacordo entre grafos aleatórios e grafos reais esteja em suas distribuições de grau. Isso porque, por exemplo, boa parte das redes reais apresentam distribuição de cauda longa (ou *right-skewed distribution*)⁴, onde a maioria dos vértices têm baixo grau e poucos vértices, na cauda da distribuição, possuem alto grau⁵. Redes aleatórias clássicas, por sua vez, apresentam uma distribuição

⁴ Vale lembrar que a “cauda longa” fica mais à direita no eixo horizontal que representa o valor do grau dos vértices contemplados na distribuição.

⁵ Tais vértices com alto grau também podem ser chamados de *hubs*.

de grau do tipo Poisson, sem grandes discrepâncias de valor de grau dos vértices.

1.5 Redes de pequeno mundo (*Small-world networks*)

As chamadas redes de pequeno mundo *small-worlds* apresentam grande similaridade com os grafos aleatórios ER. Temos de fato um valor baixo para o caminho médio mínimo, porém existe a tendência de se formar pequenos clusters na rede. Um exemplo de redes de mundo pequeno é o experimento de Milgram, em que pessoas escolhidas aleatoriamente trocavam cartas até se chegar a um destinatário preestabelecido. Watts e Strogatz (WATTS; STROGATZ, 1998) foram os primeiros a criar um algoritmo para este tipo de rede. Segue a descrição do algoritmo:

Considere um conjunto de n vértices $\{v_1, \dots, v_n\}$ e um número par k . Para garantir que o grafo terá poucas arestas, escolha $n \gg k \gg \ln(n) \gg 1$.

1º passo: Ordene os n vértices em uma circunferência e, para cada vértice, ligue os primeiros $k/2$ vértices vizinhos no sentido horário e depois os $k/2$ vértices vizinhos no sentido anti-horário.

2º passo: Com uma probabilidade p , troque a aresta (u, v) por uma aresta (u, w) , em que w é um vértice diferente de u e (u, w) é uma aresta ainda não existente do grafo.

Vamos nos referir ao grafo aleatório de Watts-Strogatz por $WS(n, p, k)$.

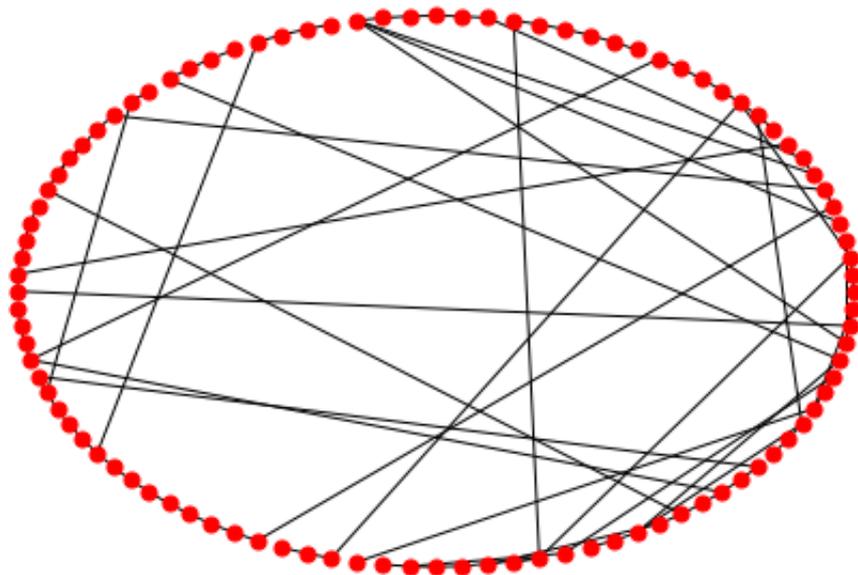


Figura 9 – Grafo de Watts-Strogatz $WS(100, 2, 0, 3)$ gerado com o pacote *Networkx* implementado na linguagem de programação *Python*.

A seguir apresentamos dois aspectos vantajosos do modelo WS em relação a outros modelos de rede, caso do ER, por exemplo.

A primeira é que redes WS apresentam transitividade⁶ compatível com redes reais, propriedade mensurável a partir do coeficiente de agrupamento da rede. Redes reais costumam ter alto coeficiente de agrupamento (NEWMAN, 2018). A segunda vantagem é a possibilidade em observar, em redes WS, o efeito de mundo pequeno (*small-world effect*). Esse efeito faz com que o comprimento de caminho entre qualquer par de vértices na rede seja pequeno (BARABASI; FRANGOS, 2014), mesmo em redes com uma grande quantidade de vértices.

1.6 Redes livres de escala (*Scale-free networks*)

Dizemos que uma rede segue uma lei de potência se a distribuição dos graus de seus vértices segue uma lei de potência. Assim, a probabilidade de um nó arbitrário ter grau k é dada por

$$\mathbb{P}(k) = C k^{-\alpha} \quad (1.8)$$

onde α e C são duas constantes, respectivamente, expoente de escala e constante de normalização. Observa-se que muitas redes no mundo real descritas por modelos livres de escala possuem $2 < \alpha < 3$.

É comum adjetivar como livres de escala (*scale-free*) as redes que seguem uma distribuição de lei de potência. A razão disso é que uma lei de potência é a única distribuição que tem a mesma forma qualquer que seja a escala em que olhemos (NEWMAN, 2005).

Há algumas maneiras de visualizar e detectar leis de potência associadas a redes livres de escala. A seguir apresentamos algumas (NEWMAN, 2018).

Uma primeira e mais simples forma de analisar leis de potência para redes livres de escala é utilizar um histograma da distribuição do grau com retângulos (*bins*) de largura maior, para que mais amostras sejam abrangidas por cada retângulo. Essa escolha implica em menos ruído (oscilações) na cauda do histograma, mas reduz o nível de detalhamento da amostra. Por sua vez, uma alternativa para superar esse último problema seria utilizar retângulos de tamanhos diferentes em diferentes regiões do histograma.

Uma segunda forma de explorar leis de potência para redes livres de escala é construir uma *função de distribuição cumulativa*, definida por

$$\mathcal{P}(k) = \sum_{k'=k}^{\infty} \mathbb{P}(k') . \quad (1.9)$$

⁶ Relembrando, transitividade é a propriedade de dois vértices u e w , ambos adjacentes a um vértice v também serem adjacentes um ao outro (“vizinhos” um do outro).

Aqui $\mathcal{P}(k)$ representa a fração dos vértices que possuem grau maior ou igual a k , ou, de outra forma, a probabilidade de que um vértice escolhido aleatoriamente tenha grau maior ou igual a k .

Uma das vantagens de se construir uma função de distribuição cumulativa $\mathcal{P}(k)$ é que quando a distribuição de grau $\mathbb{P}(k')$ segue uma lei de potência com expoente de escala α , $\mathcal{P}(k)$ também segue uma lei de potência. A diferença é que o expoente de escala para $\mathcal{P}(k)$ é igual a $\alpha - 1$. Outra vantagem é que não é necessário se preocupar com a melhor escolha da largura dos retângulos em um histograma, preocupação associada à alternativa anterior.

Contudo, a escolha pela construção da função de distribuição cumulativa também tem suas desvantagens. A mais séria delas é que pontos consecutivos em um gráfico cumulativo são correlacionados e valores adjacentes não são todos independentes. Consequentemente, não se pode, por exemplo, extrair o valor do expoente de escala α da distribuição de lei de potência a partir do ajuste da inclinação da porção “reta” da curva e igualando o resultado a $\alpha - 1$ ⁷. Em vez disso, podemos obter o expoente de escala α diretamente a partir dos dados, via expressão (NEWMAN, 2018; CLAUSET; SHALIZI; NEWMAN, 2009)

$$\alpha = 1 + N \left[\sum_i \ln \frac{k_i}{k_{min} - \frac{1}{2}} \right]^{-1}, \quad (1.10)$$

onde k_{min} é o grau mínimo para o qual a lei de potência vale e N é o número de vértices com grau maior ou igual a k_{min} .

Por sua vez, o erro estatístico σ na obtenção de α via expressão 1.10 é dado por

$$\sigma = \sqrt{N} \left[\sum_i \ln \frac{k_i}{k_{min} - \frac{1}{2}} \right]^{-1} = \frac{\alpha - 1}{\sqrt{N}}. \quad (1.11)$$

Passemos agora à apresentação de duas das principais propriedades das distribuições de grau que seguem uma lei de potência, a saber, normalização e “regra 80/20”.

A primeira propriedade é a normalização. Quando adicionamos todas as frações de vértices tendo todos os valores possíveis de grau, de zero a infinito, devemos obter 1:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(k) = 1. \quad (1.12)$$

Se substituirmos o valor de $\mathbb{P}(k)$ dado pela expressão 1.8 na expressão 1.12, encontraremos $C \sum_k k^{-\alpha} = 1$, ou

$$C = \frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha}} = \frac{1}{\zeta(\alpha)}, \quad (1.13)$$

⁷ Pelo menos considerando métodos padrão que demandem a independência dos pontos que constituem o gráfico.

onde $\zeta(\alpha)$ é a função zeta de Riemann. Assim, a distribuição de lei de potência normalizada é dada por

$$\mathbb{P}(k) = \frac{k^{-\alpha}}{\zeta(\alpha)}. \quad (1.14)$$

Um outro aspecto importante é onde a maior parte da distribuição está localizada. Para obter essa informação, inicialmente lembremos que, para qualquer lei de potência $\mathbb{P}(k)$ com expoente de escala $\alpha > 1$, a mediana $k_{\frac{1}{2}}$ associada à distribuição é bem definida (NEWMAN, 2005). Assim, existe um ponto, a mediana, para o qual metade da distribuição é maior que a mediana e a outra metade da distribuição é menor que a mediana. Conforme NEWMAN (2005), a relação entre a mediana e o expoente de escala é dada por

$$k_{1/2} = 2^{\frac{1}{\alpha-1}} k_{min}, \quad (1.15)$$

onde k_{min} é o menor valor de grau para o qual a lei de potência é obedecida.

Além disso, para uma distribuição de grau completamente descrita por uma lei de potência, a fração W das arestas que se conectam a uma fração P dos vértices de maior grau na rede é dada pela relação

$$W = P^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}}. \quad (1.16)$$

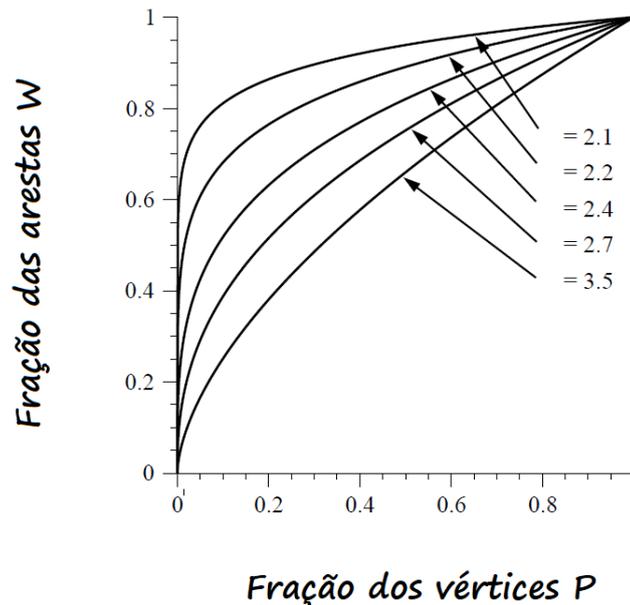


Figura 10 – Curvas de Lorenz para redes livres de escala.

As curvas W versus P para valores distintos de α , mostradas na Figura , são chamadas *curvas de Lorenz*. Tais curvas apresentam concavidade para baixo para todos

os valores do expoente de escala α . E, para valores ligeiramente acima de 2, as curvas apresentam uma subida inicial muito rápida, significando que uma grande fração das arestas são conectadas a uma pequena fração dos nós com grau mais elevado.

Utilizando expoentes de escala α , tais que $2 \leq \alpha \leq 3$, para alguns exemplos de distribuições reais, NEWMAN (2005) mostrou que aproximadamente 80% das arestas estão conectadas a 20% dos vértices com maior grau (“regra 80/20”).

As redes de Barabási-Albert representam um modelo de rede livre de escala que utilizam um mecanismo de adição preferencial (de arestas e de vértices). Isso significa que, nesse paradigma, quanto maior o grau do nó – ou seja, mais conectado – maior a probabilidade desse nó receber novas arestas.

O algoritmo de Barabási-Albert para geração do grafo é descrito como segue. Considere um grafo $ER(n_0, p)$. Para cada etapa $s > 0$:

1º passo: Adicione um vértice v_s ;

2º passo: Adicione $m \leq n_0$ arestas ao grafo, em que cada aresta é incidente em v_s e escolha um vértice u presente na etapa $s - 1$ com probabilidade $\mathbb{P}(u) = \frac{\delta(u)}{\sum_{w \in s-1} \delta(w)}$

3º passo: Repita os dois passos anteriores até n vértices serem adicionados.

O grafo resultante é “scale-free” e adotamos a notação $BA(n, n_0, m)$.

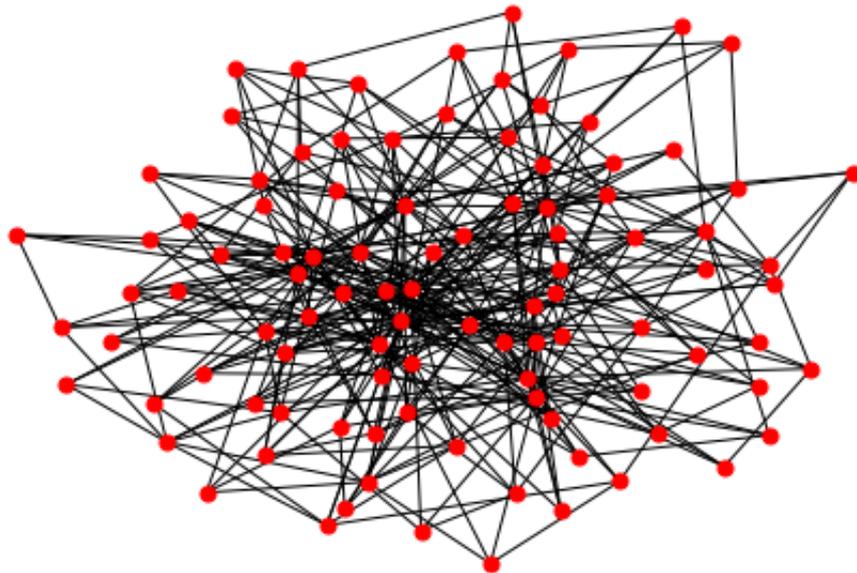


Figura 11 – Grafo $BA(100, 4, 4)$ gerado com o pacote *Networkx* implementado na linguagem de programação *Python*.

2 Teoria de redes aplicada a uma rede cosmológica

2.1 Modelo de Boguñá para redes cosmológicas

Nesta seção abordaremos o modelo de redes cosmológicas proposto por Boguñá e colaboradores (BOGUÑÁ; KITSACK; KRIOUKOV, 2014).

O Universo de Milne é um modelo cosmológico que obedece a relatividade especial e o princípio cosmológico. A relatividade especial é baseada em dois postulados:

- As leis da física são invariantes para todo referencial inercial;
- A velocidade da luz no vácuo é a mesma para qualquer observador, independente da velocidade da fonte luminosa.

Já o princípio cosmológico afirma que a distribuição de matéria no universo é homogênea e isotrópica, quando considerada uma escala suficientemente grande.

Do ponto de vista matemático, o modelo de Milne é um caso particular do modelo de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW), sendo obtido quando se considera a densidade de energia igual a zero.

Aplicaremos alguns conceitos presentes na Teoria de Redes a um sistema descrito pelo modelo de Milne com superposição de horizontes (Figura 12), seguindo a metodologia de Boguñá (BOGUÑÁ; KITSACK; KRIOUKOV, 2014).

Nossa abordagem escreve uma rede cosmológica composta por um conjunto de observadores relativísticos. Nesse paradigma, cada observador representará um nó na rede e dois vértices distintos podem ter uma ligação, ou não. Cada ligação é representada por uma aresta direcionada. Assim, por exemplo, a ligação entre dois vértices A e B é dada por uma aresta orientada de A para B , se A está contido no cone de luz do passado de B , ou conforme nomenclatura utilizada por Boguñá, *horizonte atrasado*.

A construção da rede cosmológica é feita via discretização do espaço tridimensional, que é homogêneo e isotrópico. O tempo, por sua vez, é uma variável contínua. Adicionalmente, os vértices representarão uma classe específica de observadores, os chamados observadores comóveis. Nesse ínterim, dizemos que, se dois observadores quaisquer são comóveis, eles não apresentam movimento relativo entre si.

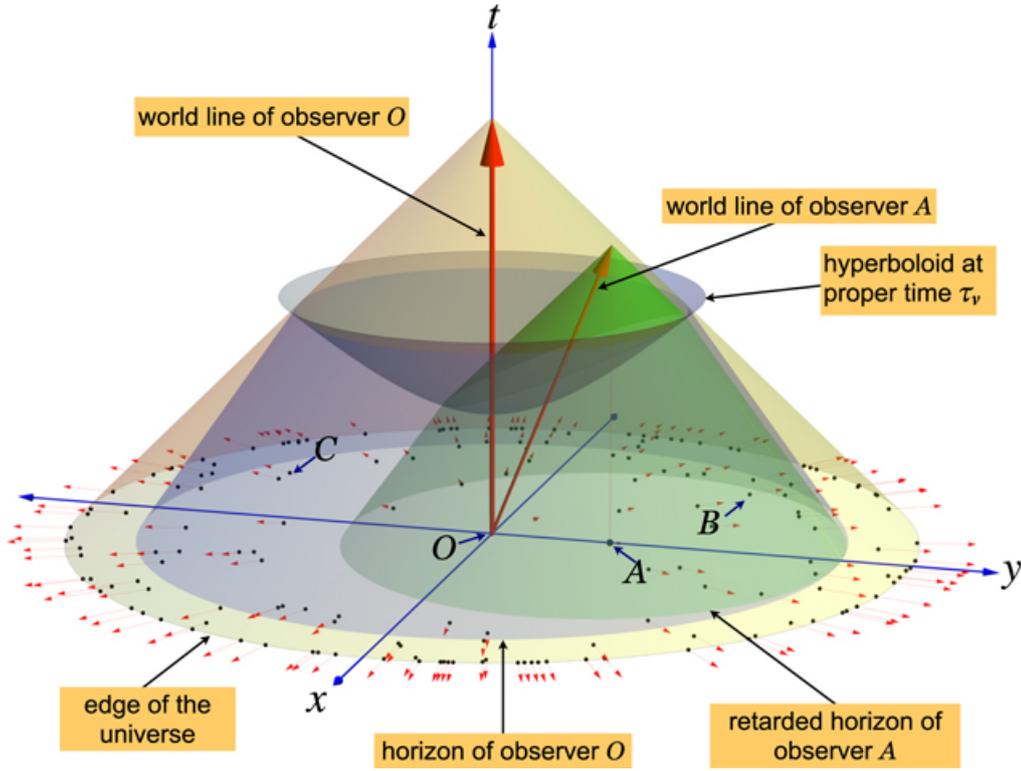


Figura 12 – Modelo de Milne e superposição dos horizontes de acordo com observador central.

Por sua vez, a relação entre dois observadores comóveis é representada por uma aresta direcionada entre dois vértices A e B , por exemplo. Nesse caso, há uma aresta que aponta de nó A para o nó B , desde que A esteja contido no cone de luz do passado de B .

O modelo de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW) aberto permite descrever um espaço-tempo homogêneo e isotrópico, tal qual visamos. A métrica para tal espaço-tempo pode ser representada por

$$ds^2 = -d\tau^2 + R(\tau)^2 \left[d\chi^2 + \text{senh}^2\chi \, d\Omega_{d-1}^2 \right], \quad (2.1)$$

onde (χ, Ω_{d-1}) são coordenadas para um espaço hiperbólico d -dimensional de curvatura $K = -1$. Observe-se que parâmetro $R(\tau)$ é fator conforme da parte espacial da métrica 2.1 e, assim, para τ fixo (ou seja, $d\tau \equiv 0$), teremos várias “fotos” do espaçotempo. Cada “foto” (ou seja, cada folheação em um tempo τ') representa um espaço hiperbólico d -dimensional de curvatura constante $R = -\frac{1}{R(\tau')}$. Seguiremos a escolha de BOGUÑÁ; KITSACK; KRIOUKOV (2014), escolhendo $R(\tau) \equiv \tau$.

Os parâmetros χ e τ representam, respectivamente, a coordenada “radial” e o tempo cósmico; $d\Omega_{d-1}^2$ corresponde à métrica sobre uma esfera unitária $(d-1)$ -dimensional; e $R(\tau)$ é o fator de escala do universo dado pelas chamadas equações de Friedmann (BOGUÑÁ; KITSACK; KRIOUKOV, 2014; WEINBERG, 2008). Fazendo a restrição $R(\tau) = \tau$, obtemos um modelo de universo vazio, sem massa nem energia escura: o universo de Milne.

Podemos estudar o caso de um espaço $(2 + 1)$ -dimensional, ou seja, com duas dimensões de espaço e uma de tempo, e aplicar a transformação de coordenadas a 2.1 dada por

$$\begin{cases} x = \tau \sinh(\chi) \cos(\theta) \\ y = \tau \sinh(\chi) \sin(\theta) \\ t = \tau \cosh(\chi) \end{cases} \quad (2.2)$$

obtemos a métrica

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2. \quad (2.3)$$

Esta última métrica 2.3 não mapeia todo o espaçotempo relacionado à métrica FLRW original, mas apenas o cone de luz do futuro para um evento em $t = x = y = 0$.

Olhando para a métrica FLRW, a coordenada radial de Minkowski de um evento de coordenadas (τ, χ, θ) é $r = t \tanh(\chi)$. Dessa forma, um observador em repouso nas coordenadas comóveis (χ, θ) em um espaço hiperbólico \mathbb{H}^2 se afasta da origem $x = y = 0$ com velocidade constante $\nu = t \tanh(\chi)$.

Cabe ainda ressaltar que, associado à velocidade de expansão ν , há o tempo de corte τ_ν , o qual determina um hiperboloide invariante dado por $t^2 = \tau_\nu^2 + x^2 + y^2$. A interseção desse hiperboloide com o cone de luz do passado delimita duas coisas: o horizonte do observador e a velocidade máxima de uma partícula dentro desse horizonte. Por sua vez, o horizonte de um observador O é o raio da região do universo que ele pode observar, até o tempo de corte τ_ν , com $0 < \tau_\nu < \tau$.

Na cosmologia de Milne, esse evento localiza inúmeros observadores comóveis na origem das coordenadas – o “Big Bang” – que, em seguida, passam a se mover em todas as direções dentro de um disco em \mathbb{R}^2 , o qual se expande à velocidade da luz.

Consideremos que a evolução de nossa rede comece a partir de um nó O na origem do sistema de coordenadas. Assim, teremos o tempo próprio τ coincidindo com o tempo t medido no espaço-tempo de Minkowski.

Seguindo o modelo de superposição de horizontes, a partícula mais afastada que O pode observar está a uma distância

$$\chi_h = \ln \left(\frac{\tau}{\tau_\nu} \right). \quad (2.4)$$

em que τ é o tempo próprio de O , e τ_ν é um valor temporal tal que a luz consegue viajar de χ_h em τ_ν e atingir $\chi = 0$ em τ . Evidente que $0 < \tau_\nu < \tau$. Ver Apêndice B.

O número total de partículas que O consegue observar em um instante τ_ν é dado

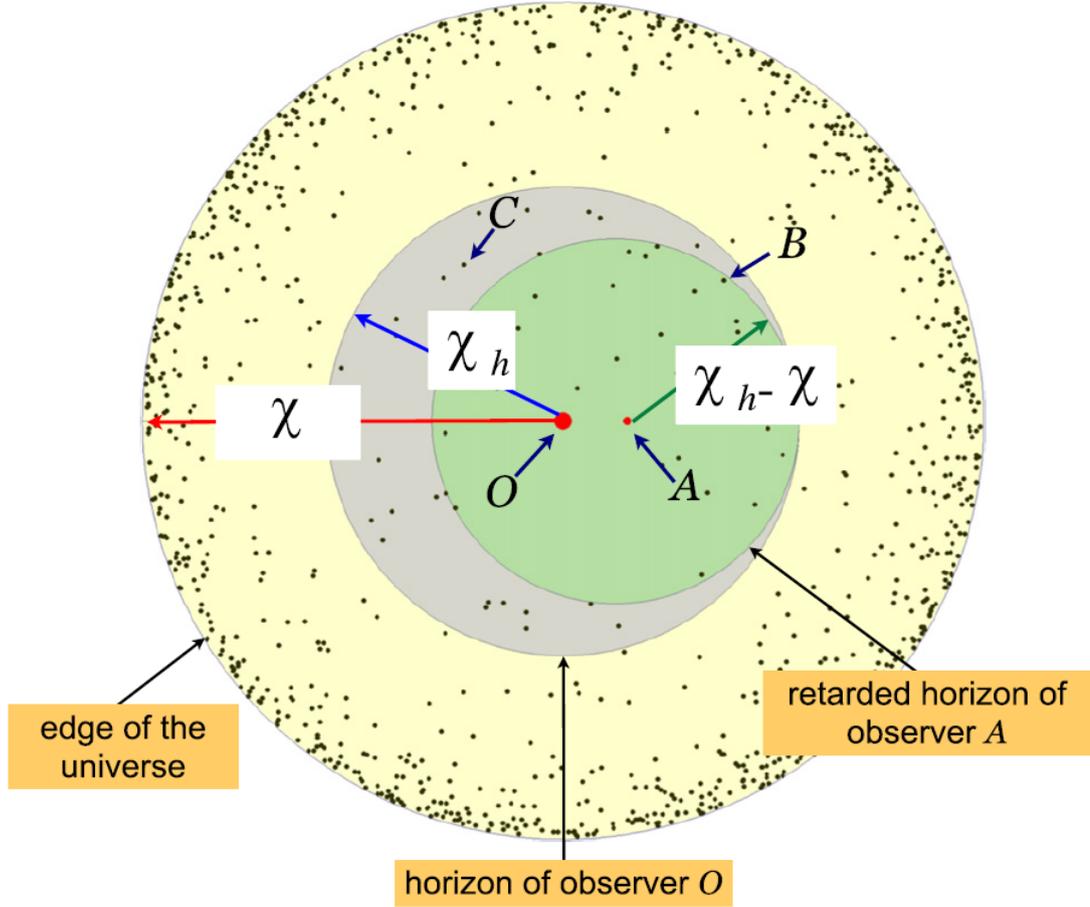


Figura 13 – Representação no plano hiperbólico de nossa rede cosmológica

por

$$N = 2\pi\delta (\cosh(\chi_h) - 1) = \pi\delta \left(\frac{\tau}{\tau_v} + \frac{\tau_v}{\tau} - 2 \right). \quad (2.5)$$

Podemos interpretar esse surgimento de partículas na rede como círculos concêntricos centrados em O ($\chi = 0$), resultados da projeção do universo de Milne no plano hiperbólico, ver Figura 13.

Conseguimos já determinar a quantidade de vértices da rede, equação 2.5. Precisamos então caracterizar como esses vértices estão interligados. Conceitualmente, o horizonte retardado de uma partícula A presente no horizonte de O é a parte do universo que pode interferir indiretamente em O através de A . Geometricamente, interpretamos como um disco de raio $\chi - \chi_h$ centrado em A , cuja coordenada é χ , resultado de uma projeção no plano hiperbólico, ver Figura 13. Dizemos que duas partículas distintas A e B presentes no horizonte de O estão interligadas caso uma delas repouse no horizonte atrasado (ou seja, o cone de luz do passado) da outra. Suponha, sem perda de generalidade, que B repouse no horizonte retardado de A . Então teremos uma ligação direcional de B para A , $B \rightarrow A$. Caso A também repouse no horizonte atrasado de B , existirá uma ligação

bidirecional entre A e B .

Um dos aspectos a se observar é se todos os observadores – os vértices nessa rede cosmológica – que estão no horizonte de algum observador podem ser detectados (BOGUÑÁ; KITSACK; KRIOUKOV, 2014). Em termos de probabilidade, se a detecção depender de uma probabilidade p , há duas possibilidades. A primeira é de que p seja sempre igual à unidade e, assim, a comunicação será dita *perfeita*. A segunda possibilidade é que a probabilidade não seja necessariamente igual à unidade, ao que podemos chamar *comunicação imperfeita*. Foquemos por um momento nesta segunda situação.

É razoável, quando se observa os mais variados tipos de redes reais e não apenas uma rede cosmológica, supor que a ligação entre vértices muito distantes seja menos provável do que aquela entre vértices mais próximos, ou seja, que estão separados por um comprimento de caminho menor. Dessa forma, podemos supor, por exemplo, que a probabilidade de detecção é dependente da distância hiperbólica x entre observadores segundo a relação

$$p(x) = p e^{-\beta x}, \quad (2.6)$$

em que p é a probabilidade de detecção assumida para a rede e β é um expoente que determina a influência da distância na comunicação.

Nessas condições, sem esquecer das definições 1.1.17 e 1.1.7, respectivamente, de componente de entrada e de grau do vértice, observamos que BOGUÑÁ; KITSACK; KRIOUKOV (2014) mostram que o grau médio de entrada de um observador localizado em χ , ou seja, (\bar{k}_{in}) , é obtido a partir da expressão

$$\bar{k}_{in}(\chi) = 2\pi\delta p \frac{1 - e^{\beta(\chi - \chi_h)} [\beta \sinh(\chi_h - \chi) + \cosh(\chi_h - \chi)]}{\beta^2 - 1}. \quad (2.7)$$

A partir da expressão 2.7, temos pelo menos dois casos interessantes, observados por BOGUÑÁ; KITSACK; KRIOUKOV (2014).

No primeiro caso, se $\beta \geq 1$ e $\chi_h \gg 1$, \bar{k}_{in} será constante e a rede fica similar a um grafo geométrico aleatório, no qual dois vértices são conectados se a distância entre eles no espaço estiver abaixo de determinado limiar (*threshold*). BOGUÑÁ; KITSACK; KRIOUKOV (2014) mostraram que a distribuição de grau dos vértices para essa rede cosmológica, considerando comunicação imperfeita e $\beta \geq 1$ é do tipo Poisson, qual acontece para um grafo geométrico aleatório (PENROSE, 2003). Tal resultado, para a configuração desse primeiro caso, mostra que vértices são conectados a outros vértices que estejam nas suas vizinhanças.

O segundo caso é aquele em que $\beta < 1$, quando $\bar{k}_{in} \sim e^{(1-\beta)(\chi_h - \chi)}$. A consequência disso é que a distribuição do grau de entrada será uma lei potência do tipo

$$\mathbb{P}(\bar{k}_{in}) \sim \bar{k}_{in}^{-\gamma}, \quad (2.8)$$

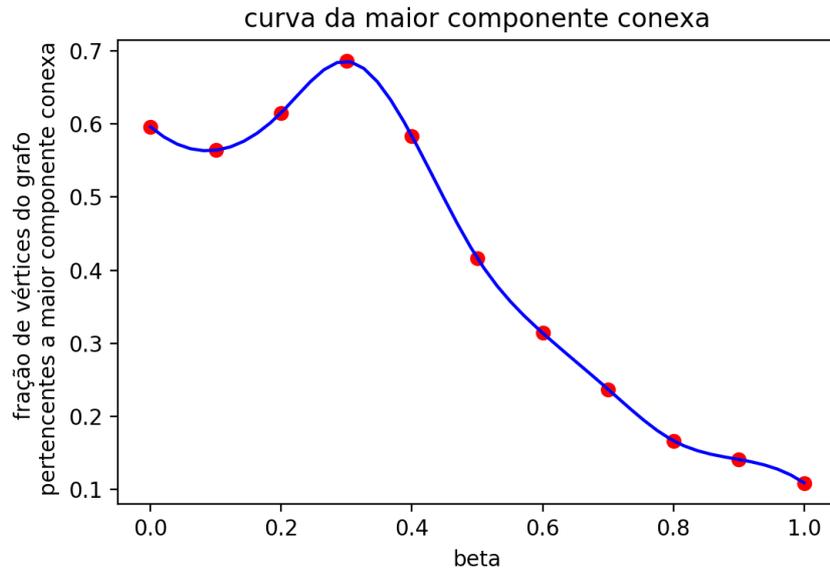


Figura 14 – Distribuição cumulativa gerada da rede.

com

$$\gamma = 2 + \frac{\beta}{1 - \beta}. \quad (2.9)$$

O segundo caso acima é interessante quando se pergunta qual parte do universo (a rede) cada vértice (o observador) pode detectar (observar). Fato interessante é que, olhando apenas os vértices que estão no horizonte de eventos do observador, vemos que a fração de universo à qual o observador se comunica diretamente ¹ é proporcional a $\frac{N^{1-\beta}}{N}$; fração esta que tende a zero com o passar do tempo. Assim, o problema da fração de universo detectável para cada observador se apresenta como um possível problema de percolação.

2.2 Nossa contribuição à investigação do modelo de Boguñá

Nesta seção apresentamos alguns dos resultados que obtivemos a partir do estudo do modelo de Boguñá (BOGUÑÁ; KITSACK; KRIOUKOV, 2014) para a construção de redes cosmológicas.

Inicialmente atribuímos $p = 1$ e $\beta \in (0, 1)$ para a probabilidade de ligação de uma partícula presente no universo de outra, considerando a expressão 2.6.

Esta condição de comunicação imperfeita, nos leva a um problema interessante: a transição de fase de um sistema. Existirá um valor crítico de β , β_c , tal que $\beta < \beta_c$ implica que a maior parte dos vértices da rede pertence a uma única parte conexa e $\beta > \beta_c$ implica que a rede está dividida em várias partes pequenas conexas.

¹ Ou seja, observa.

De fato, reproduzimos esta condição de comunicação imperfeita em nosso código para avaliar o comportamento do universo de Milne. Inicialmente, fizemos o gráfico da distribuição cumulativa do grau de entrada para um número $N = 10^3$ de vértices (vide Figura 14).

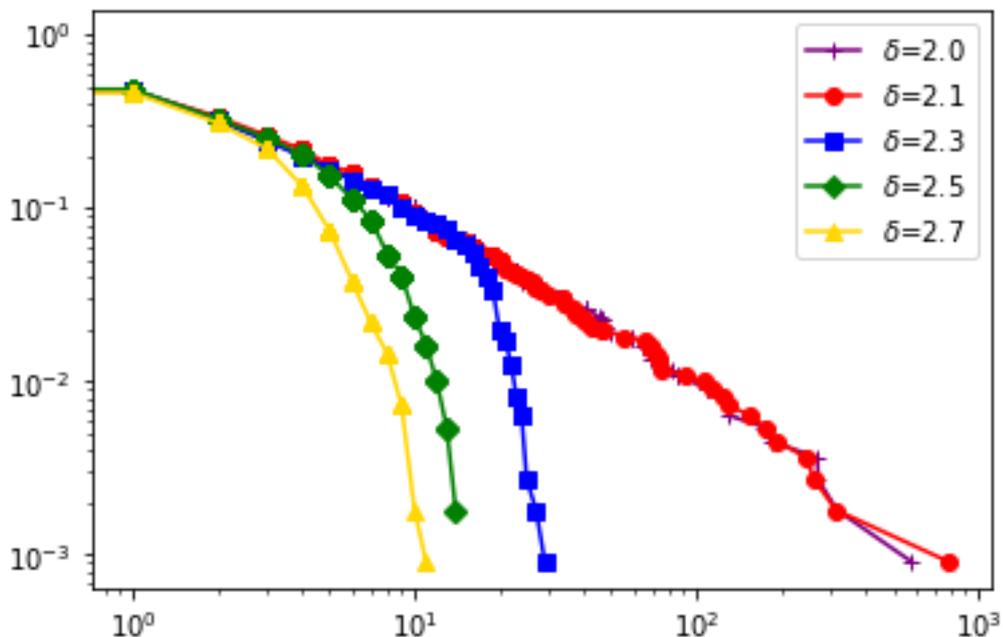


Figura 15 – Note que apesar da menor quantidade de pontos da rede, o comportamento scale-free se manteve.

Por limitações computacionais, não conseguimos rodar o código para $N = 10^5$, tal qual BOGUÑÁ; KITSÁK; KRIOUKOV (2014) fizeram. Entretanto foi possível verificar o comportamento de "lei de potência" para diferentes valores de γ , ver equações 2.8, 2.9 e Figura 15. Convém ressaltar que esta característica de uma lei de potência é reduzida para valores maiores de γ , nosso expoente de escala.

Outro ponto que merece destaque é o valor δ utilizado na simulação. O parâmetro δ representa a densidade de pontos (vértices) do universo, a qual consideramos constante de acordo com o Princípio Cosmológico (WEINBERG, 2008). Adotamos $\delta = 0,35$ por uma questão de viabilidade computacional.

Entretanto, podemos ter duas redes distintas com iguais quantidade de vértices. Um valor de δ menor para um tempo maior, por exemplo. Neste caso, uma maior escala de tempo permitiria observar uma parte maior do universo, mesmo que a densidade de vértices fosse menor.

A curva de distribuição cumulativa da probabilidade se altera para diferentes valores de δ . Inclusive no que concerne ao caráter de lei de potência previsto no artigo de BOGUÑÁ; KITSÁK; KRIOUKOV (2014).

Observamos também o percentual de vértices pertencentes à maior componente conexa do nosso sistema, em função de β e com β variando no intervalo $[0, 1]$. Encontramos um comportamento próximo ao de uma transição de fase, existindo uma grande parte conexa próximo a $\beta = 0,3$. Por sua vez, para $\beta > 0,3$ esse valor começa a decair de forma significativa. Intuitivamente, interpretamos esse resultado a partir de uma analogia com o escoamento em um meio poroso, o problema de percolação. Ainda que existam restrições ao escoamento ($\beta > 0$), tal escoamento ainda é possível, mesmo que por um caminho maior (uma maior componente conexa em nosso gráfico).

Do ponto de vista cosmológico, uma fração macroscópica do universo pode ser detectada por qualquer observador em uma condição de comunicação imperfeita, de tal modo que esta fração é maior do que na situação de comunicação perfeita.

Procuramos também por outras transições de fase na rede. Para isso investigamos variações abruptas da característica de Euler para nossa rede cosmológica, que indicariam possíveis transições de fase no sistema (SANTOS et al., 2018).

Calculando a característica de Euler para a rede em função do tempo, obtivemos um conjunto de curvas para diferentes valores de β , ver Figura 16. De fato, percebemos um pequeno decaimento próximo ao tempo $\tau = 90$, mas que, por si só, não caracteriza uma transição de fase. Por limitações computacionais, geramos apenas 31 pontos na rede ($\delta = 0,1$); talvez, para uma quantidade maior de pontos, esse decaimento fosse mais pronunciado. Outra hipótese a ser considerada é o comportamento expansivo do universo – ou seja, no decorrer do tempo mais observadores surgem em nossa rede – não sendo possível tirar conclusões significativas sobre propriedades topológicas como a característica de Euler.

Ainda sobre a figura, relacionamos o artigo de LIU et al. (2019), que cita múltiplas transições de fase em redes orientadas. Por essa perspectiva, as interseções entre as curvas da característica de Euler, para diferentes valores de β , implicariam em mudanças de fase da rede. Reforçando o entendimento anterior, ao se comparar a figura da maior componente conexa em função do tempo, notamos uma correlação para valores similares de β . O caso da componente conexa já é previsto por BOGUÑÁ; KITSACK; KRIOUKOV (2014), apenas encontramos uma forma de evidenciá-lo.

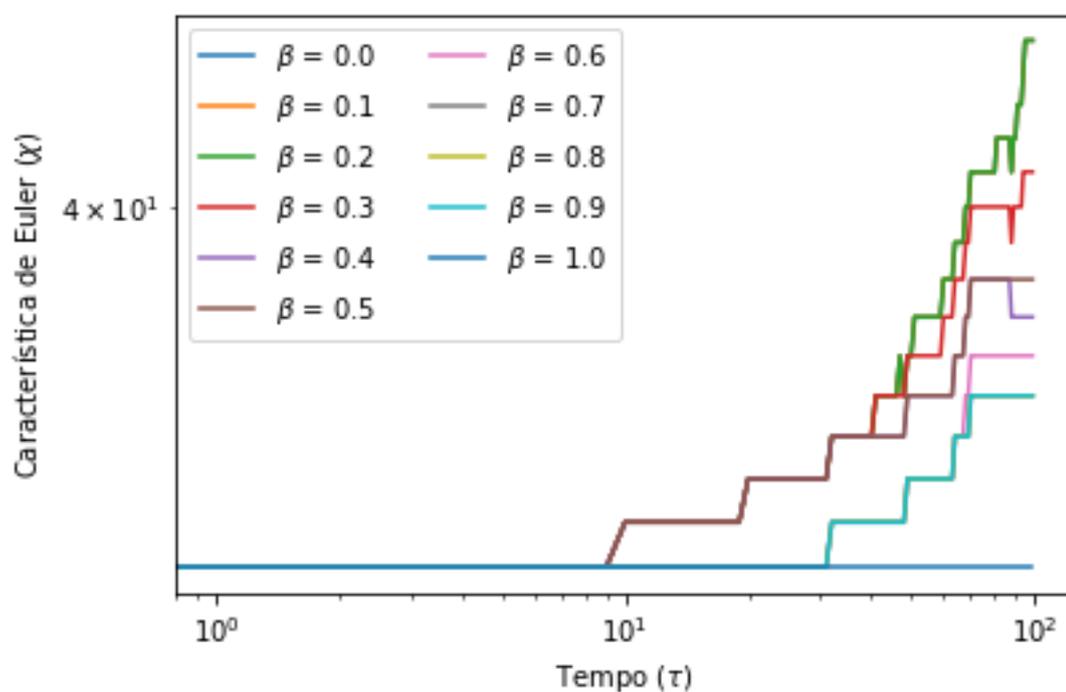


Figura 16 – Característica de Euler em função do tempo para alguns valores de β .

3 Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho aplicamos aspectos da teoria de redes ao modelo de rede cosmológica proposto por BOGUÑÁ; KITSACK; KRIOUKOV (2014).

Por questão de simplicidade e de limitação de infraestrutura computacional disponível, só conseguimos efetuar simulações para uma rede com quantidade de vértices N da ordem de 10^3 .

Conseguimos identificar o comportamento de lei de potência para diferentes valores do expoente de escala γ . Verificamos também que o comportamento do tipo de lei de potência é mitigado para valores maiores de γ .

Escolhendo a densidade de pontos δ constante e seu valor igual $\delta = 0,35$ por limitação de infraestrutura computacional, observamos que a curva de distribuição cumulativa muda à medida que δ muda e também o caráter de lei de potência.

Encontramos comportamento próximo ao de uma transição de fase para $\beta = 0,3$, via observação da maior componente conexa do sistema.

Identificamos que a fração de universo que pode ser observada por um observador (cada vértice na rede cosmológica) é maior quando consideramos a hipótese de comunicação imperfeita do que na de comunicação perfeita.

Calculando a característica de Euler em função do tempo para a rede cosmológica, obtivemos curvas para diferentes valores de β . Com isso, percebemos um decaimento na região próxima a $\tau = 80$, o que não necessariamente significa a ocorrência de transição de fase. Ademais, visto que conseguimos gerar poucos pontos por limitações computacionais, uma perspectiva futura seria investigar se, para um número maior de pontos, esse decaimento seria mais pronunciado.

Referências

- ALBERT, R.; BARABÁSI, A.-L. Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of modern physics*, APS, v. 74, n. 1, p. 47, 2002. Citado na página 26.
- BALABAN, A. T. Applications of graph theory in chemistry. *Journal of chemical information and computer sciences*, ACS Publications, v. 25, n. 3, p. 334–343, 1985. ISSN 0095-2338. Citado na página 10.
- BALASUBRAMANIAN, K. Applications of Combinatorics and Graph Theory to Spectroscopy and Quantum Chemistry. *Chemical Reviews*, ACS Publications, v. 85, n. 6, p. 599–618, 1985. ISSN 15206890. Citado na página 10.
- BAR-YAM, Y. General features of complex systems. 2002. Citado na página 26.
- BARABÁSI, A.-L. The physics of the Web. *Physics World*, IOP Publishing, v. 14, n. 7, p. 33, 2001. ISSN 2058-7058. Citado na página 27.
- BARABÁSI, A.-L. Taming complexity. *Nature physics*, Nature Publishing Group, v. 1, n. 2, p. 68, 2005. ISSN 1745-2481. Citado na página 27.
- BARABÁSI, A.-L. *Network medicine—from obesity to the “diseasome”*. [S.l.]: Mass Medical Soc, 2007. Citado na página 27.
- BARABÁSI, A.-L. Scale-free networks: a decade and beyond. *science*, American Association for the Advancement of Science, v. 325, n. 5939, p. 412–413, 2009. ISSN 0036-8075. Citado na página 26.
- BARABÁSI, A.-L. *Network science*. [S.l.]: Cambridge university press, 2016. ISBN 1107076269. Citado na página 27.
- BARABÁSI, A.-L.; BONABEAU, E. Scale-free networks. *Scientific american*, JSTOR, v. 288, n. 5, p. 60–69, 2003. ISSN 0036-8733. Citado na página 26.
- BARABASI, A.-l.; FRANGOS, J. *Linked: The New Science Of Networks Science Of Networks*. [S.l.]: Basic Books, 2014. ISBN 0465038611. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 31.
- BARABASI, A.-L.; OLTVAI, Z. N. Network biology: understanding the cell’s functional organization. *Nature reviews genetics*, Nature Publishing Group, v. 5, n. 2, p. 101, 2004. ISSN 1471-0064. Citado na página 26.
- BINCHI, J. et al. jHoles: A tool for understanding biological complex networks via clique weight rank persistent homology. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, Elsevier, v. 306, p. 5–18, 2014. ISSN 1571-0661. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 23.
- BOGUÑÁ, M.; KITSACK, M.; KRIOUKOV, D. Cosmological networks. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 16, n. 9, p. 93031, 2014. Citado 7 vezes nas páginas 35, 36, 39, 40, 41, 42 e 44.
- BORGATTI, S. P. et al. Network analysis in the social sciences. *science*, American Association for the Advancement of Science, v. 323, n. 5916, p. 892–895, 2009. ISSN 0036-8075. Citado na página 10.

CLAUSET, A.; SHALIZI, C. R.; NEWMAN, M. E. J. Power-law distributions in empirical data. *SIAM review*, SIAM, v. 51, n. 4, p. 661–703, 2009. ISSN 0036-1445. Citado na página 32.

DEO, N. *Graph theory with applications to engineering and computer science*. [S.l.]: Courier Dover Publications, 2017. ISBN 0486820815. Citado na página 10.

EDELSBRUNNER, H.; HARER, J. *Computational topology: an introduction*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 2010. ISBN 0821849255. Citado 3 vezes nas páginas 8, 20 e 22.

ERDŐS, P.; RÉNYI, A. On the strength of connectedness of a random graph. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica*, Springer, v. 12, n. 1-2, p. 261–267, 1964. ISSN 0001-5954. Citado na página 27.

ERDOS, P.; RéNYI, A. On the evolution of random graphs. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci*, v. 5, n. 1, p. 17–60, 1960. Citado na página 27.

HANSEN, P. J.; JURIS, P. C. Chemical applications of graph theory. Part I. Fundamentals and topological indices. *Journal of Chemical Education*, ACS Publications, v. 65, n. 7, p. 574, 1988. ISSN 0021-9584. Disponível em: <<http://pubs.acs.org/doi/abs/10.1021/ed065p574>>. Citado na página 10.

HARARY, F.; NORMAN, R. Z. Graph theory as a mathematical model in social science. *Xerox University Microfilms*, p. 1–45, 1953. Citado na página 10.

HATCHER, A. *Algebraic Topology*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2002. ISBN 0521795400. Citado na página 25.

LIU, X. et al. Multiple phase transitions in networks of directed networks. *Physical Review E*, APS, v. 99, n. 1, p. 012312, 2019. Citado na página 42.

MARKRAM, H. et al. Reconstruction and simulation of neocortical microcircuitry. *Cell*, Elsevier, v. 163, n. 2, p. 456–492, 2015. ISSN 0092-8674. Citado na página 13.

MASULLI, P.; VILLA, A. E. P. The topology of the directed clique complex as a network invariant. *SpringerPlus*, Springer, v. 5, n. 1, p. 388, 2016. ISSN 2193-1801. Citado na página 20.

NÉDA, Z. et al. Physics of the rhythmic applause. *Physical Review E*, APS, v. 61, n. 6, p. 6987, 2000. Citado na página 27.

NEWMAN, M. *Networks*. [S.l.]: Oxford university press, 2018. ISBN 0192527495. Citado 10 vezes nas páginas 8, 16, 17, 18, 19, 27, 28, 29, 31 e 32.

NEWMAN, M. E. J. The structure and function of complex networks. *SIAM review*, SIAM, v. 45, n. 2, p. 167–256, 2003. ISSN 0036-1445. Citado na página 27.

NEWMAN, M. E. J. Power laws, Pareto distributions and Zipf's law. *Contemporary physics*, Taylor & Francis, v. 46, n. 5, p. 323–351, 2005. ISSN 0010-7514. Citado 3 vezes nas páginas 31, 33 e 34.

ONNELA, J.-P. et al. Geographic constraints on social network groups. *PLoS one*, Public Library of Science, v. 6, n. 4, p. e16939, 2011. ISSN 1932-6203. Citado na página 27.

- PAREDES, M. F. et al. Brain size and limits to adult neurogenesis. *Journal of Comparative Neurology*, Wiley Online Library, v. 524, n. 3, p. 646–664, 2016. ISSN 0021-9967. Citado na página 15.
- PAUL; ERDOS, A. R. On random graphs I. *Publ. Math. Debrecen*, v. 6, p. 290–297, 1959. Citado na página 27.
- PENROSE, M. *Random geometric graphs*. [S.l.]: Oxford university press, 2003. ISBN 0198506260. Citado na página 39.
- RAVASZ, E.; BARABÁSI, A.-L. Hierarchical organization in complex networks. *Physical Review E*, APS, v. 67, n. 2, p. 26112, 2003. Citado na página 26.
- REIMANN, M. W. et al. Cliques of neurons bound into cavities provide a missing link between structure and function. *Frontiers in computational neuroscience*, Frontiers, v. 11, p. 48, 2017. ISSN 1662-5188. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 14.
- SANTOS, F. A. et al. Topological phase transitions in functional brain networks. *bioRxiv*, Cold Spring Harbor Laboratory, p. 469478, 2018. Citado na página 42.
- SCHWARTZ, N. et al. Percolation in directed scale-free networks. *Physical Review E*, APS, v. 66, n. 1, p. 15104, 2002. Citado na página 27.
- SEIDMAN, S. B.; FOSTER, B. L. A graph-theoretic generalization of the clique concept. *Journal of Mathematical sociology*, Taylor & Francis, v. 6, n. 1, p. 139–154, 1978. ISSN 0022-250X. Citado na página 15.
- SOLOMONOFF, R.; RAPOPORT, A. Connectivity of random nets. *The bulletin of mathematical biophysics*, Springer, v. 13, n. 2, p. 107–117, 1951. ISSN 0007-4985. Citado na página 27.
- STEEN, M. V.; STEEN, M. v. Graph theory and complex networks. *An introduction*, v. 144, 2010. Disponível em: <<http://www.di.unipi.it/~ricci/book-watermarked.pdf>>. Citado na página 27.
- Trusted Analytics Platform Package. *Graph kclique percolation*. Disponível em: <https://pythonhosted.org/trustedanalytics/python_api/graphs/graph-kclique_percolation.html>. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 15.
- WATTS, D. J.; STROGATZ, S. H. Collective dynamics of ‘small-world’ networks. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 393, n. 6684, p. 440, 1998. Citado na página 30.
- WEINBERG, S. *Cosmology*. [S.l.]: Oxford University Press, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 41.
- WUCHTY, S.; RAVASZ, E.; BARABÁSI, A.-L. The architecture of biological networks. In: *Complex systems science in biomedicine*. [S.l.]: Springer, 2006. p. 165–181. Citado na página 27.

APÊNDICE A – Código Python

```

'''Codigo para gerar a rede cosmologica do Universo de Milne no
plano hiperbolico e determinar seus cliques'''

import math
import numpy as np
import networkx as nx
import itertools
from multiprocessing import Pool

''' Os modulos math e numpy sao empregados para trabalhar com
funcoes matematicas. O modulo networkx eh usado para
determinar propriedades da rede cosmologica. Por fim, o
modulo itertools eh usado para criar iterators no python e a
classe Pool para multiprocessamento de dados'''

def distancia(r1, t1, r2, t2):
    d = math.acosh(math.cosh(r1)*math.cosh(r2) - math.sinh(r1)*
        math.sinh(r2)*math.cos(t1-t2))
    return d

''' A funcao distancia calcula a distancia entre dois pontos na
rede atraves da lei dos cossenos hiperbolica. r: coordenada
radial, t: coordenada angular'''

def matrizesgrafo(ti = 1, q = 100, delta = 3.3, beta = .3):

    t = [ti + 1 + a for a in range(q)]
    qv = [t[a]/ti for a in range(q)]
    xh = [math.log(qv[a]) for a in range(q)]
    N = [round((math.pi)*delta*(qv[a] + qv[a]**(-1) - 2)) for a
        in range(q)]

    raios = [xh[0]*np.random.random() for a in range(N[0])]
    args = [2*(math.pi)*np.random.random() for a in range(N[-1])
    ]

    for b in range(q-1):

```

```

        for a in range(N[b], N[b+1]):
            raios.append((xh[b+1]-xh[b])*np.random.random() + xh
                [b])

M = np.zeros((q, N[-1], N[-1]))

for c in range(q):
    for a in range(N[c]):
        for b in range(N[c]):
            if (a != b) and (distancia(raios[a], args[a],
                raios[b], args[b]) < xh[c] - raios[a]):
                M[c][b][a] = np.exp(-beta*distancia(raios[a]
                    ], args[a], raios[b], args[b]))

    return M
''' A funcao matrizesgrafo determina as matrizes de adjacencia
da rede cosmologica. O numpy array M armazena cada matriz de
adjacencia da formacao da rede (no caso padrao acima, 100
intervalos de tempo) para um dado valor de beta (expoente
referente a comunicacao imperfeita)'''

def montecarlo(M):
    S = np.zeros(np.shape(M))
    for k in range(10000):
        p = np.random.random()
        S = (M>p) + S

    T = (S>5000) + np.zeros(np.shape(S))
    return T
''' A funcao montecarlo realiza um teste de Monte Carlo. Em
nosso codigo eh empregada para determinar quais arestas
efetivamente existiram no caso de comunicacao imperfeita'''

def nCr(n,r):
    if n >= r:
        f = math.factorial
        result = f(n) // f(r) // f(n-r)
    else:
        result = 0
    return result

```

```
''' A funcao nCr calcula a combinacao de n elementos r a r.
Facilita alguns calculos durante o codigo '''
```

```
def cliquesund(G):
    cliques_max = nx.find_cliques(G)
    cliques_max = [tuple(sorted(c)) for c in cliques_max]
    cliques_total = []
    for k in range(0, max(len(s) for s in cliques_max)):
        Sk = set(c for mc in cliques_max for c in itertools.
            combinations(mc, k+1))
        assert(all(list(s)==sorted(s) for s in Sk))
        cliques_total.append(dict(zip(range(0, len(Sk)), sorted(
            Sk))))
    return cliques_total
''' A funcao cliquesund determina os cliques de um grafo nao-
orientado G '''
```

```
def cliquedir(Gd, lista):
    cliques_direct=[]
    for each in lista:
        for a in range(len(each)):
            H = Gd.subgraph(each[a])
            F = itertools.combinations(H.edges(), nCr(lista.
                index(each)+1, 2))
            for k in F:
                P = nx.DiGraph()
                P.add_edges_from(k)
                if nx.is_directed_acyclic_graph(P):
                    cliques_direct.append(list(P.nodes()))
    return cliques_direct
''' A funcao cliquedir determina os cliques de um grafo
orientado a partir de uma lista de cliques do grafo nao-
orientado induzido. Chamamos de grafo nao-orientado induzido
o grafo nao-orientado gerado a partir de um grafo orientado,
removendo-se a orientacao das arestas deste. No caso de
existirem arestas duplas, consideramos apenas uma unica
aresta '''
```

```
def digrafo(T):
```

```

lista_Gd=[]
for a in range(np.shape(T)[0]):
    lista_beta=[]
    for b in range(np.shape(T)[1]):
        Gd=nx.DiGraph(T[a][b])
        lista_beta.append(Gd)
        if (b==np.shape(T)[1]-1):
            lista_Gd.append(lista_beta)
    return lista_Gd
''' A funcao digrafo cria um grafo orientado a partir de uma
matriz de adjacencia '''

```

```

def undirect(lista_Gd):
    lista_G=[]
    for a in range(len(lista_Gd)):
        lista_beta=[]
        for b in range(len(lista_Gd[0])):
            G=lista_Gd[a][b].to_undirected()
            lista_beta.append(G)
            if (b==len(lista_Gd[0])-1):
                lista_G.append(lista_beta)
    return lista_G
''' A funcao undirect cria grafos nao-orientados induzidos a
partir de uma lista de grafos orientados '''

```

```

betas = np.arange(0, 1.1, 0.1)
dados = [(1, 100, 0.35, round(betas[a],1)) for a in range(len(
    betas))]
with Pool() as pool:
    M = pool.starmap(matrizesgrafo, dados)
    T = pool.map(montecarlo, M)

```

```

lista_Gd = digrafo(T)
lista_G = undirect(lista_Gd)

```

```

cliques_total_all_betas=[]
cliques_direct_all_betas=[]
for a in range(len(lista_G)):

```

```
lista_beta=[]
lista_beta_dir=[]
for b in range(len(lista_G[1])):
    cliques_total = cliquesund(lista_G[a][b])
    lista_beta.append(cliques_total)
    cliques_direct = cliquedir(lista_Gd[a][b], cliques_total
    )
    lista_beta_dir.append(cliques_direct)
if (b==len(lista_G[1])-1):
    cliques_total_all_betas.append(lista_beta)
    cliques_direct_all_betas.append(lista_beta_dir)

np.save("cliques_total_all_betas", cliques_total_all_betas)
np.save("cliques_direct_all_betas", cliques_direct_all_betas)
''' A resposta que temos do programa eh uma lista com todos os
cliques e outra com todos os cliques diretos para todos os
valores de beta escolhidos '''
```

APÊNDICE B – Cálculo do Raio Hiperbólico

Sabemos que o raio hiperbólico é determinado pela interseção entre o cone de luz passado de O em $t = \tau$ e o hiperboloide invariante

$$\begin{cases} \text{hiperboloide : } & t^2 = \tau_\nu^2 + x^2 + y^2 \\ \text{cone : } & (t - \tau)^2 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

Note que as equações acima foram obtidas após mudança de coordenadas da equação (2) de (Boguña, 2014). Também vale ressaltar, a diferença entre os valores $t = \tau$ nas coordenadas (x, y, t) do Espaço de Minkowski e a variável τ do sistema de coordenadas original (τ, χ, θ) do Universo de Milne.

Do sistema acima, igualando os valores de $x^2 + y^2$, vem que

$$t = \frac{\tau^2 + \tau_\nu^2}{2\tau} \quad (\text{B.1})$$

$$\implies \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\tau^2 - \tau_\nu^2}{2\tau} \quad (\text{B.2})$$

As mudanças de coordenadas em (2) de (Boguña, 2014) nos trazem que

$$\sqrt{x^2 + y^2} = t \cdot \text{tgh}(\chi) \quad (\text{B.3})$$

Assim, por B.1, B.2 e B.3, temos

$$\begin{aligned} \text{tgh}(\chi) &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{t} \\ &= \frac{\tau^2 - \tau_\nu^2}{\tau^2 + \tau_\nu^2} \\ &= \frac{\left(\frac{\tau}{\tau_\nu}\right)^2 - 1}{\left(\frac{\tau}{\tau_\nu}\right)^2 + 1} \\ \implies \chi &= \ln\left(\frac{\tau}{\tau_\nu}\right) \end{aligned}$$

□