



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

Cláudia Priscila Nunes Silva

**Equações de segunda ordem de evolução em tempo discreto
em espaços ponderados via teoria de regularidade maximal
discreta**

Recife
2015

Cláudia Priscila Nunes Silva

**Equações de segunda ordem de evolução em tempo discreto
em espaços ponderados via teoria de regularidade maximal
discreta**

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática
da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos re-
quisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Airton Castro

Recife
2015

Catálogo na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

S586e Silva, Cláudia Priscila Nunes
Equações de segunda ordem de evolução em tempo discreto em espaços ponderados via teoria de regularidade maximal discreta / Cláudia Priscila Nunes Silva. – 2015.
42 f.

Orientador: Airton Castro.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, Recife, 2015.
Inclui referências.

1. Matemática. 2. Equações de evolução. I. Castro, Airton (orientador). II. Título.

510 CDD (23. ed.) UFPE- MEI 2019-130

CLÁUDIA PRISCILA NUNES SILVA

EQUAÇÕES DE SEGUNDA ORDEM DE EVOLUÇÃO EM TEMPO
DISCRETO EM ESPAÇOS PONDERADOS VIA TEORIA DE REGULARIDADE
MAXIMAL DISCRETA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado em Matemática.

Aprovado em: 17/07/2015.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Airton Temistocles Gonçalves de Castro (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Claudio Rodrigo Cuevas Henriquez (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Marcos Napoleão Rabelo (Examinador Externo)
Universidade Federal de Goiás

A minha mãe e a minha filha, minhas flores preferidas.

AGRADECIMENTOS

A Deus porque Ele é amor.

À toda a minha família, especialmente a minha mãe, meu pai, Cecília, tia Diva, tia Darçy, Mirella e Heber.

Ao professor Airton pela orientação do trabalho.

A Thiago Tanaka pela ajuda, amizade, apoio e direcionamento.

À banca, por todo tempo e trabalho para analisar a dissertação e aos professores César Castilho e Henrique Araújo.

Aos colegas do departamento: Michelle, Ludmila, Ricardo, Tiago, Willikat, Reinaldo, Estevan, Hugão, Serginei, Laudelino, Milena, Josué, Rubya, Marcelo Pirôpo, Marcelo Carielo, Nico, Bob, João Gondim, Charlinho, João Júnior, Thiago Fiel, Islanita, Jaime, Elaine, Gigante, Manaíra, Binho, Deibson, Felipe e tantos outros pelo companheirismo.

À família 212: Alan, Aninha, Edgar, Eudes, Gilson, Kamilla, Laura, Lorena, Luiz Filipe, Rafael, Renato e Wagner. A vida com eles é mais bela.

Aos colegas do DM da UFRPE, especialmente a Adriano, Anetinha, Antonio, Clessius, Gabriel, Hebe, Isis, Karla, Maité, Marcia, Maria Eulália, Tarciana, Thiago Dias e Tiago Duque.

A meus companheiros de trabalho que lutam e acreditam na luta pela educação, especialmente a Cícero, Flávio, Maria, Márcia, Ricardo e Rosângela, pelo apoio, pelo estímulo e pela ajuda. Eles foram, certamente, essenciais para essa etapa da minha vida e aos amigos de sempre: Antônio, Biu, Caio, Claudinho, Celinha, Esso, Ju, Nyly e Seu Colega.

Aos amigos da igreja, de forma especial a Aninha e vovó netinha, Milkinha, Sandra, Yuri e Carol. Bons exemplos pra mim.

Aos funcionários do dmat. Principalmente a Amaro, Cláudia, Cynthia, Nilza e Tânia, por fazerem diferença no nosso departamento.

Por fim, agradeço a todos que direta ou indiretamente contribuíram para este trabalho.

Claudia Priscila Nunes Silva

RESUMO

O trabalho é composto do estudo de dois tipos de equações de evolução de segunda ordem em tempo discreto em espaços com a propriedade “unconditional martingale differences” (espaços UMD): um caso linear, onde mostramos a única solução para o nosso problema e no caso de condições iniciais nulas caracterizamos o problema de maneiras diferentes, duas delas utilizando teoria de multiplicadores do tipo $l_p - l_p$, uma trabalhando o conceito de equações bem postas; e outro problema é o caso semilinear que depende do tempo, estado e velocidade. Além do interesse em discutir existência e unicidade de solução e algumas estimativas,, temos teoremas de caracterização do nosso problema. Em particular, centralizamos nossa atenção no recente conceito de Regularidade Maximal Discreta (RMD), que descreve basicamente um comportamento regular no sentido de circunstâncias que garantem que certas qualidades de (f_n) sejam também qualidades da solução, envolvendo para isso os conceitos de R-limitação, Teoria de Multiplicadores do tipo $l_p - l_p$ e Teoria de Equações Bem Postas.

Palavras-chave: Equações de Evolução. Regularidade Maximal Discreta. R-limitação. Equações Bem Postas.

ABSTRACT

In this work, we study two types of evolution equations of the second-order in discrete time spaces with “unconditional martingale differences” spaces (also known as UMD spaces): one linear case where our problem has only solution and in the case of null initial conditions we characterize the problem in different ways, two of them using $l_p - l_p$ multiplier theory, and another working on the concept of well-posed equations, and another semilinear depending of the time, space and velocity. We are interested in discuss about the existence and uniqueness of the solutions and some estimations and also characterization theorems for our problem. In particular, we center our attention on recent concepts of Discrete Maximal Regularity, which basically describes regular behavior towards circumstances that ensure that certain qualities of (f_n) are also qualities of the solution, involving also the concept of R-boundedness, $l_p - l_p$ multiplier theory and Well Posed Equations theory.

Keywords: Evolution Equations. Discrete Maximal Regularity. R-boundedness. Well Posed Equations.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	CONCEITOS BÁSICOS	12
2.1	R- Limitação	12
2.2	Espaços UMD	14
2.3	Transformadas	14
2.3.1	Propriedades da Z-transformada	14
2.4	Multiplicadores	17
2.5	Teoremas de Ponto Fixo	18
3	O PROBLEMA LINEAR DE SEGUNDA ORDEM	19
3.1	Existência e Unicidade de Solução	19
3.2	Caracterização	23
4	PROBLEMA SEMILINEAR DE SEGUNDA ORDEM	34
	REFERÊNCIAS	42

1 INTRODUÇÃO

Em 2001, Sönke Blunck no artigo “Maximal regularity of discrete and continuous time evolution equations” (ver (1)) considerou o seguinte problema:

$$\begin{cases} \Delta x_n - (T - I)x_n = f_n \\ x_0 = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Aqui Δ é o operador de derivada discreta também conhecido como operador de derivação a frente ou mais comum operador de diferença que é dado por $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$. No seu artigo ele caracterizou o conceito de Regularidade Maximal Discreta (RMD) de diversas maneiras equivalentes, por exemplo utilizando o conceito de R-limitação do conjunto resolvente que define o problema. Aqui, dados $T \in B(X)$ com X um espaço de Banach e $f = (f_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ estamos interessados em descobrir uma solução $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ com condição inicial nula, $x_0 = 0$ e isso pode ser feito de maneira simples através do estudo da recorrência que defina o sistema acima, de forma que obtemos solução dada por:

$$x_{n+1} = T^{n+1}x_0 + \sum_{k=0}^n T^k f_{n-k}$$

O termo RMD, como o nome já sugere, descreve basicamente um comportamento regular o qual pode ser descrito formalmente com a seguinte pergunta: se a condição (f_n) tiver alguma qualidade especial, será que a solução x também possui alguma qualidade especial? Já adiantando, sob determinadas circunstâncias, as quais mostraremos no trabalho, é possível mostrar que isso de fato ocorre!

O conceito de R-limitação foi introduzido por Berkson e Gillespie em 1994 no artigo “Spectral decompositions and harmonic analysis on UMD spaces”, como pode ser visto em (2), mas foi implicitamente considerado diversos anos antes, em 1986 por Bourgain no artigo, “Vector-valued singular inetegrals and the $H^1 - BMO$ duality” (ver (3)).

Os trabalhos de Blunck acrescentaram aspectos referente ao tema de Regularidade Maximal no sentido discreto e tiveram por base os artigos: “Operator-valued Fourier multiplier theorems and maximal L^p -regularity” e “A new approach to maximal regularity” (ver (4) e (5)) ambos de Luth Weis por volta dos anos de 1998 a 2000.

Por ser uma teoria recente e com muitos aspectos a serem explorados, nos anos seguintes a 2001 diversos trabalhos em relação a esse mesmo tema foram publicados mas agora envolviam outros tipos de equações, considerando espaços diferentes e sistemas com ordem maiores. Nesse contexto, os pesquisadores da UFPE Airon Castro e Cláudio Cuevas em parceria

direta entre si e com outro pesquisador da Universidad de Santiago de Chile, Carlos Lizama, trabalharam diretamente acerca dessas novas ideias. Isso pode ser visto nos artigos [(6), (7), (8), (9), (10)]. Esses e outros estudos foram recentemente mais detalhados e compilados em 2014 num livro publicado na Springer que pode ser visto em (11).

No contexto mais local da pos graduação da UFPE o aluno Bruno de Andrade, atualmente professor e pesquisador da Universidade Federal de Sergipe, durante o seu mestrado sob a orientação de Claudio Cuevas estudou os artigos (6) e (7) ao qual fez sua dissertação de nome “Equações de Evolução Discretas de Segunda Ordem: Regularidade Maximal e Teoria de Perturbação” defendendo seu mestrado em 2008.

Em 2014 em sua defesa de mestrado, Thiago Tanaka, orientando de Ailton Castro, conseguiu generalizar parte da teoria dos artigos citados anteriormente mas no caso de uma dimensão maior, basicamente foram três problemas estudados: o linear que é o caso análogo ao de Blunck, o semilinear que depende do tempo, espaço, velocidade e aceleração e por fim o linear em espaços ponderados dados respectivamente por,

$$\Delta^3 x_n - (T - I)x_n = f_n,$$

$$\Delta^3 x_n - (T - I)x_n = f(n, x_n, \Delta x_n, \Delta^2 x_n)$$

e por fim,

$$\Delta_r^3 x_n - r^3(T - I)x_n = f_n.$$

Sua dissertação teve o título de “Equações de Evolução Discretas Lineares e Semilineares de Terceira Ordem”.

Nossos principal objetivo nesse trabalho é discutir sobre os outros dois artigos citados que não foram estudados por Bruno e que foram publicados logo em seguida ao seu ano de conclusão de mestrado, que são os artigos (9) e (10) e que são problema consideravelmente mais difíceis dos que os estudados por Bruno. O primeiro é o estudo da seguinte equação de evolução:

$$\begin{cases} \Delta_r^2 x_n - r^2(I - T)x_n = f_n \\ x_0 = 0, \Delta_r x_0 = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Agora trabalharemos com o r -operador de diferença, $\Delta_r x_n = x_{n+1} - rx_n$. A dificuldade reside no fato de estarmos caracterizando o resultado não mais em espaços l^p usuais, mas sim em espaços l_r^p que são espaços ponderados, ou seja, esse trabalho inclui todos os outros publicados anteriormente (por exemplo a dissertação de Bruno) quando consideramos o caso $r = 1$, aqui,

$$l_p^r(\mathbb{Z}_+, X) = \{(x_n); (r^{-n}x_n) \in l_p(\mathbb{Z}_+, X)\}, \quad r > 0.$$

Nesse estudo iremos encontrar a única solução para o nosso problema e no caso de condições iniciais nulas iremos caracterizar o problema de quatro maneiras diferentes, duas delas não

havam sido estudadas antes de 2008 que é utilizando teoria de multiplicadores do tipo $l_p - l_p$, que iremos descrever detalhadamente no capítulo 2, e também o conceito de equações bem postas (Well-Posed). Em seguida, no capítulo 3, faremos uma aplicação com um estudo ainda mais aprofundado e difícil para um problema de ordem dois que depende do tempo, do estado e também da velocidade. É o problema da equação de evolução semilinear dada por:

$$\begin{cases} \Delta^2 x_n - (I - T)x_n = f(n, x_n, \Delta_r x_n) \\ x_0 = 0, \Delta_r x_0 = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

ao qual daremos uma condição para existência e unicidade de solução e também estudaremos alguns aspectos qualitativos do sistema.

Inicialmente, daremos as ferramentas básicas mas específicas que o leitor precisa para seguir com um bom entendimento do trabalho e isso será feito no capítulo 1.

2 CONCEITOS BÁSICOS

Como em todo trabalho, a grande maioria dos conceitos realmente mais básicos serão assumidos. No nosso caso, aspectos mais básicos vistos em um curso de Introdução a Análise Funcional que são espaços normados, espaços de Banach, operadores lineares contínuos, básica teoria espectral e teoremas clássicos da análise funcional, em particular o Teorema do Gráfico Fechado. Nos conceitos mais específicos faremos, assim como dito na introdução, uma abordagem geral mas satisfatória para o entendimento da dissertação.

Basicamente sobre os assuntos específicos trataremos sobre o conceito de R-limitação, espaços UMD, resultados sobre a transformada Z que no nosso caso coincidirá com a transformada de Fourier discreta pois nos inteiros negativos a sequência considerada é sempre nula, alguns resultados chave sobre teoria de multiplicadores e teoremas de ponto fixo. Para não ficar muito solto no texto, em cada uma das seções indicaremos algumas referências em caso de o leitor querer se aprofundar nessas questões.

2.1 R- Limitação

Utilizaremos o conceito de R-limitação do conjunto resolvente que define o nosso problema para caracterizar a regularidade maximal discreta. O conceito de Regularidade Maximal Discreta será apresentado mais a frente no capítulo dois para que o entendimento do trabalho seja facilitado. Lembramos aqui que para melhores informações sobre o conceito de R-limitação o leitor poderá procurar os artigos já citados anteriormente e suas referências, em especial (12), (1), (13), (4) e (5).

Definição 2.1.1. *Sejam X e Y espaços de Banach. Dizemos que uma família $\tau \subset B(X, Y)$ é R-limitada se existe uma constante c tal que*

$$\|(T_1 x_1, \dots, T_n x_n)\|_R \leq c \|(x_1, \dots, x_n)\|_R, \quad (2.1)$$

para todo $T_1, \dots, T_n \in \tau$, $x_1, \dots, x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$.

Vamos representar por $R(\tau)$ a menor constante para a qual a desigualdade acima é válida.

Agora, vamos citar algumas propriedades que decorrem da definição de R-limitação

a) Toda família finita $\mathcal{F} \subset B(X, Y)$ é R-limitada

Como $\|Tx\|_Y \leq \|T\|_{B(X, Y)}\|x\|_X$, para todo $T \in B(X, Y)$ e $x \in X$, dado $q \in [1, \infty)$, tome $C_q = \max\{\|T\|_{B(X, Y)}; T \in \mathcal{F}\}$.

b) Se $\mathcal{F} \subset B(X, Y)$ é R-limitada, então é uniformemente limitada com

$$\sup\{\|T\|_{B(X, Y)}; T \in \mathcal{F}\} \leq \mathcal{R}(\mathcal{F})$$

Tomando $q = 1$ e $n = 1$, temos:

$$\begin{aligned} \|Tx\|_Y &= \|Tx\|_Y \int_0^1 |r_1(u)| du \\ &= \int_0^1 \|r_1(u)Tx\|_Y du \\ &\leq \mathcal{R}(\mathcal{F}) \int_0^1 \|r_1(u)x\|_X du \\ &= \mathcal{R}(\mathcal{F})\|x\|_X \int_0^1 |r_1(u)| du \\ &= \mathcal{R}(\mathcal{F})\|x\|_X \end{aligned}$$

Para todo $T \in \mathcal{F}$ e $x \in X$, daqui segue o resultado.

c) Se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{S}$ são famílias R-limitadas, então também serão para as famílias

$$\mathcal{F} \pm \mathcal{S} = \{T \pm S; T \in \mathcal{F}, S \in \mathcal{S}\}$$

e

$$\mathcal{F} \cdot \mathcal{S} = \{T \circ S; T \in \mathcal{F}, S \in \mathcal{S}\}$$

Obviamente onde fizer sentido para a família $\mathcal{S}$. A primeira asserção decorre da desigualdade triangular e a segunda usando R-limitação para a família $\mathcal{F}$ e em seguida para a família $\mathcal{S}$.

d) Quando X e Y são espaços de Hilbert, $\mathcal{F} \subset B(X, Y)$ é R-limitada se, e somente se, $\mathcal{F}$ é uniformemente limitado.

e) Todo subconjunto $M \subset B(X)$ da forma

$$M = \{\lambda I; \lambda \in \Omega\}$$

é R-limitado, quando $\Omega \in \mathbb{C}$ é limitado.

f) Se $\mathcal{F}$ é R-limitada na topologia de operadores, o seu fecho também o é.

2.2 Espaços UMD

Os espaços de Banach com a propriedade UMD (unconditionally Martingale difference) serão considerados pois usaremos por base os teoremas do artigo de Blunck. Em particular a teoria sobre espaços UMD pode ser vista nos artigos (2), (14) e nas referências dada em (1).

Definição 2.2.1. *Seja X um espaço de Banach. Dizemos que X tem a propriedade UMD se, para cada $p \in (1, \infty)$, existe uma constante positiva C_p tal que, para qualquer sequência $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega, \Sigma, \mu; X)$ e qualquer escolha de sinais $(\xi_n)_{n \geq 0} \subset -1, 1$ e todo natural N , a seguinte estimativa é válida:*

$$\|f_0 + \sum_{n=1}^N (\xi_n)(f_n - f_{n-1})\|_{L^p(\Omega, \Sigma, \mu; X)} \leq C_p \|f_N\|_{L^p(\Omega, \Sigma, \mu; X)}$$

2.3 Transformadas

Como uma ferramenta de transformar o nosso problema num formato mais algébrico e consequentemente facilitar o desenvolvimento, utilizaremos as transformadas $\mathbb{Z}$ e a transformada de Fourier discreta. Em particular, descreveremos sobre propriedades dessas transformadas.

Definição 2.3.1. *Seja X um espaço de Banach. A Z -transformada de $x(n) \in X$ (ou em $B(X)$)*

$$\tilde{x}(z) \equiv Z[x(n)] = \sum_{j=0}^{\infty} z^{-j} x(j)$$

onde z é um número complexo.

2.3.1 Propriedades da Z -transformada

Vejamos algumas das propriedades da Z -transformada as quais utilizaremos fortemente no capítulo 2 quando formos calcular a transformada dos operadores que surgem ao obtermos a solução para o problema linear em espaços ponderados.

- (a) [Linearidade] Sejam $\tilde{x}(z)$ a Z -transformada de $x(n)$ com raio de convergência R_1 e $\tilde{y}(z)$ a Z -transformada de $y(n)$ com raio de convergência R_2 . Então para quaisquer números complexos a, b , nós temos

$$Z[ax(n) + by(n)] = a\tilde{x}(z) + b\tilde{y}(z),$$

para $|z| > \max\{R_1, R_2\}$.

(b) Seja R o raio de convergência de $\tilde{x}(z)$. Se $x(-i) = 0$ para $i = 1, 2, \dots, k$ então

$$Z[x(n-k)] = z^{-k}\tilde{x}(z), \text{ para } |z| > R \quad (2.2)$$

(c) Seja R o raio de convergência de $\tilde{x}(z)$ Então

$$Z[x(n+k)] = z^k\tilde{x}(z) - \sum_{r=0}^{k-1} x(r)z^{k-r}, \text{ para } |z| > R \quad (2.3)$$

(d) [Teorema do Valor Inicial]

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \tilde{x}(z) = x(0) \quad (2.4)$$

(e) [Teorema do Valor Final]

$$x(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)\tilde{x}(z) \quad (2.5)$$

(f) [Teorema da convolução] Uma convolução $*$ de uma sequência de números reais ou complexos $a(n)$ e uma sequência $y(n)$ é definida por

$$(a * y)(n) \equiv a(n) * y(n) = \sum_{j=0}^n a(n-j)y(j).$$

Agora

$$Z[a(n) * y(n)] = \tilde{a}(z)\tilde{y}(z).$$

A mesma fórmula é válida se a convolução é definida como

$$a(n) * y(n) = \sum_{j=0}^{\infty} a(n-j)y(j).$$

(g) [Unicidade] Suponha que existam duas sequências $x(n)$ e $y(n)$ tais que $\tilde{x}(z) = \tilde{y}(z)$ para $|z| > R$. Então, $x(n) \equiv y(n)$.

Proposição 2.3.1. *Sejam X um espaço de Banach e T um operador limitado definido em X . Então*

$$(a) \quad Z[T^n] = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}T^n = z(zI - T)^{-1}, \text{ para } |z| > \|T\|$$

$$(b) \quad Z[nT^n] = zT(z - T)^{-2}, \text{ para } |z| > \|T\|$$

$$(c) \quad Z[n^2T^n] = zT(z + T)(z - T)^{-3}, \text{ para } |z| > \|T\|$$

$$(d) \quad Z[T^{n+1}] = z^2(zI - T)^{-1} - zI, \text{ para } |z| > \|T\|$$

Definição 2.3.2. Um operador $S \in B(X)$ é chamado analítico se o conjunto $\{n(S-I)S^n : n \in \mathbb{N}\}$ é limitado.

Lema 2.3.1. Seja $T \in B(X)$ analítico. Então $\sigma(I-T) \subset \mathbb{B}(1,1) \cup \{0\}$. Em particular, $(z-1)^2 \in \rho(I-T)$ sempre que $|z| = 1, z \neq 1$.

Demonstração. Visto que T é analítico, existe $M > 0$ tal que

$$\|(T-I)T^n\| \leq \frac{M}{n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definindo o polinômio $p(z) = z^{n+1} - z^n$, segue que

$$\begin{aligned} \|(T-I)T^n\|_{B(X)} &= \|p(T)\|_{B(X)} \\ &= \sup_{x \in X} \|p(T)x\| \\ &\geq \sup_{\lambda \in \sigma(p(T))} |\lambda| \\ &= \sup_{\lambda \in p(\sigma(T))} |\lambda|, \text{ pelo teorema espectral} \\ &= \sup\{|z^n(z-1)|; z \in \sigma(T)\}, \text{ fazendo } z = 1-w \\ &= \sup\{|1-w|^n|w|; w \in \sigma(I-T)\} \\ &\geq |1-w|^n|w|, \forall \end{aligned}$$

Assim, tem-se

$$|1-w|^n|w| \leq \|(T-I)T^n\|_{B(X)} \leq \frac{M}{n}$$

Portanto, $|1-w| \leq 1 \Rightarrow \sigma(I-T) \subset \mathbb{B}(1,1) \cup \{0\}$ e $|1-w| = 1 \Leftrightarrow w = 0$. $\square$

Proposição 2.3.2. Seja $T \in B(X)$ um operador analítico. Então $\sigma(r^2(I-T)) \subset \mathbb{B}(r^2, r^2) \cup \{0\}$. Em particular, $(z-r)^2 \in \rho(r^2(I-T))$ sempre que $|z| = \alpha r, z \neq \alpha r, \alpha = 1 + \sqrt{2}$.

Demonstração. Seja $z \notin \mathbb{B}(r^2, r^2) \cup \{0\}$. Então $\frac{z}{r^2} \notin \mathbb{B}(1,1) \cup \{0\}$. Pelo lema (2.3.1), temos que $\frac{z}{r^2} \in \rho(r^2(I-T))$. Assim, $\sigma(r^2(I-T)) \subset \mathbb{B}(r^2, r^2) \cup \{0\}$.

Além disso, note que $|(z-r)^2 - r^2| = |z||z-2r| \geq \alpha(\alpha-2)r^2 = (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)r^2 = r^2$. Portanto, $(z-r)^2 \in \rho(r^2(I-T))$ sempre que $|z| = \alpha r, z \neq \alpha r$, com $\alpha = 1 + \sqrt{2}$. $\square$

A partir daqui, assumiremos que

$$\alpha = 1 + \sqrt{2}, r \geq r_0, \frac{1}{(1+\sqrt{2})} < r_0 < 1. \quad (2.6)$$

2.4 Multiplicadores

Sejam X e Y espaços de Banach. Considere o espaço de Schwartz $\mathcal{S}(X) = \mathcal{S}(\mathbb{R}, X)$ das funções de decrescimento rápido, ou seja,

$$\mathcal{S}(X) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow X; \|f\|_{\alpha, \beta} := \sup_{t \in \mathbb{R}} \|t^\beta D^\alpha f(t)\|_X < \infty, \alpha, \beta \in \mathbb{N}\}$$

Relembramos aqui que a transformada de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{R}, X)$ é definida por

$$\mathcal{F}f(t) := \int_{\mathbb{R}} f(s) e^{-i2\pi ts} ds$$

Definição 2.4.1. Um Multiplicador de Fourier sobre $L^p(\mathbb{R}, X)$ é uma função

$$M : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow B(X, Y)$$

para a qual a expressão

$$\mathcal{F}(T_M f) = M(\bullet)[\mathcal{F}f(\bullet)], \quad f \in \mathcal{S}(X)$$

está bem definida e T_M estende-se a um operador limitado em $L^p(\mathbb{R}, X)$, ou seja, $T_M \in B(L^p(\mathbb{R}, X))$

O resultado a seguir é devido a L. Weis (vide (4)).

Teorema 2.4.1 (L. WEIS). Se X e Y são espaços de Banach e $M : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow B(X, Y)$ é tal que

$$\{M(t), t \in \mathbb{R}\} \text{ e } \{tM'(t); t \in \mathbb{R}\}$$

são R -limitados então M é um Multiplicador de Fourier sobre $L^p(\mathbb{R}, X)$ para todo $p \in (1, \infty)$.

Posteriormente, Sönke Blunck demonstrou em (1) uma versão do teorema acima sobre Multiplicadores de Fourier para $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$. Em particular, ele considerou o espaço

$$l_p(\mathbb{Z}, X) = \left\{ f : \mathbb{Z} \rightarrow X; \|f\|_p := \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|f(n)\|_X^p < \infty \right) \right\}, \quad p \in (1, \infty)$$

E relembramos aqui que a transformada de Fourier Discreta sobre $\mathbb{T}$ é dada por

$$\mathcal{F}f(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} z^{-j} f(j), \quad z \in \mathbb{T}$$

2.5 Teoremas de Ponto Fixo

Por fim, iremos exibir sem demonstração dois grandes resultados sobre pontos fixos. Seguiremos basicamente o livro (15), de forma que as demonstrações poderão ser encontradas nessa referência. Esses resultados serão utilizados nos capítulos 2 e 3 quando faremos algumas estimativas sobre a solução.

Definição 2.5.1. *Seja X um conjunto, dizemos que $x \in X$ é um ponto fixo da função $f : X \rightarrow X$ se:*

$$f(x) = x$$

Definição 2.5.2. *Dizemos que $f : X \rightarrow X$ é uma contração se existir uma constante $c \in (0, 1)$ tal que*

$$\|f(x) - f(y)\|_X \leq c\|x - y\|_X, \quad \forall x, y \in X$$

Teorema 2.5.1 (Princípio da Contração de Banach). *Sejam X um espaço métrico completo e $f : X \rightarrow X$ uma contração. Então f possui único ponto fixo em X .*

Teorema 2.5.2 (Princípio dos Iterados). *Sejam X um espaço métrico completo e $f : X \rightarrow X$ uma função contínua. Se existir $m \in \mathbb{Z}_+$ tal que a iteração f^m (composição) seja uma contração, então f possui único ponto fixo em X .*

3 O PROBLEMA LINEAR DE SEGUNDA ORDEM

Em 2007, Claudio Cuevas e Carlos Lizama consideraram em (6) as problemáticas análogas estudadas por Blunck 2001 (ver (1)). Apesar do trabalho seguir a mesma direção, eles generalizaram o trabalho para uma ordem superior, considerando o seguinte problema,

$$\begin{aligned}\Delta^2 x_n - (I - T)x_n &= f_n \\ x_0 &= \Delta x_0 = 0.\end{aligned}$$

Nosso estudo segue a evolução natural desse problema, num espaço muito mais geral do que o que foi trabalhado e com um problema muito mais difícil de se caracterizar. Em (6) foram dadas apenas duas equivalências no teorema de caracterização, nesse capítulo construiremos quatro equivalências, sendo as outras duas utilizando conceitos recentes de teorias de multiplicadores e também o das equações bem postas.

3.1 Existência e Unicidade de Solução

Seja X um espaço de Banach. Vamos denotar por $\mathbb{Z}_+$ o conjunto dos números inteiros positivos e Δ_r o operador r -diferença de primeira ordem, ou seja, $\Delta_r x_n = x_{n+1} - rx_n$, $r \in \mathbb{R}_+$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$. Quando $r = 1$, denotamos $\Delta \equiv \Delta_1$. Além disso, denotaremos $\Delta_r^2 x_n = \Delta_r(\Delta_r x_n)$.

Considere, para todo $n \in \mathbb{Z}_+$, o problema:

$$\begin{cases} \Delta_r^2 x_n - r^2(I - T)x_n = f_n \\ x_0 = a, \Delta_r x_0 = b \end{cases}, \quad (3.1)$$

onde $f : \mathbb{Z}_+ \rightarrow X$ e $T \in B(X)$.

Estaremos interessados em discutir nesse capítulo a existência e unicidade de solução para esse problema e, principalmente, dar um teorema de caracterização que descreva de maneiras equivalentes aspectos qualitativos do problema acima mas com condições iniciais nulas, ou seja, $a = b = 0$.

Assim como a interação entre o lema (1.3.1) e a proposição (1.3.2), precisaremos do resultado “mais simples” para em seguida mostrar o resultado mais complexo. Nos concentremos então no seguinte problema

$$\begin{cases} \Delta^2 x_n - (I - T)x_n = f_n, & \forall n \in \mathbb{Z}_+ \\ x_0 = a, \Delta x_0 = b \end{cases} \quad (3.2)$$

Para isso, defina os operadores $\mathcal{S}$ e $\mathcal{C}$ por

$$\mathcal{S}(n) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} (I - T)^k, & \text{se } n \geq 0; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\mathcal{C}(n) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (I - T)^k, & \text{se } n \geq 1; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.4)$$

Podemos assim considerar a seguinte proposição:

Proposição 3.1.1. *A única solução do problema (3.2) é da forma*

$$x_{m+1} = \mathcal{C}(m+1)a + \mathcal{S}(m+1)b + (\mathcal{S} * f)_m. \quad (3.5)$$

Além disso,

$$\Delta x_{m+1} = (I - T)\mathcal{S}(m+1)a + \mathcal{C}(m+1)b + (\mathcal{C} * f)_m. \quad (3.6)$$

Demonstração. Há diversas maneiras de se demonstrar esse fato. O modo como faremos nos dará informações não apenas da solução (x_n) mas também da sua velocidade (Δx_n) . Basicamente iremos reduzir de forma adequada para o problema de primeira ordem.

Considere $X_n = [x_n, \Delta x_n] \in X \times X$, $F_n = [0, f_n] \in X \times X$ e $R_T \in B(X \times X)$ dado por

$$R_T = \begin{bmatrix} I & I \\ I - T & I \end{bmatrix}$$

assim é fácil mostrar que (x_n) é solução de (3.2) se, e somente se, (X_n) é solução de:

$$\begin{cases} X_{n+1} - R_T X_n = F_n \\ X_0 = [x_0, \Delta x_0] = [a, b] \end{cases}, \quad (3.7)$$

De fato, basta expandir a segunda equação e verificar a correspondência. É fácil ver, por iteração, e em seguida demonstrar, por indução, que a solução de (3.7) é:

$$X_{m+1} = R_T^{m+1} X_0 + \sum_{i=0}^m R_T^i F_{m-i}$$

Portanto, nosso problema reside em encontrar a m -ésima potência da matriz R_T . Note que, a fim de facilitar os cálculos, podemos escrever

$$R_T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I \\ I-T & 0 \end{bmatrix} = I_2 + P_T$$

onde I_2 é a identidade em $B(X \times X)$.

Visto que I_2 comuta com P_T , reduzimos nosso problema para encontrar a m -ésima potência de P_T pois, por expansão binomial, temos que:

$$R_T^m = (I_2 + P_T)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} P_T^k.$$

Rapidamente, obtemos que:

$$P_T^2 = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I-T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I-T & 0 \\ 0 & I-T \end{bmatrix} = (I-T)I_2$$

Escrevemos $m = 2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + s$, onde $s = m - 2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor \in \{0, 1\}$ e $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ é o maior número inteiro menor que $\frac{m}{2}$.

$$P_T^m = (T-I)^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} P_T^{m-2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$$

Daí,

$$R_T^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (T-I)^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} P_T^{k-2\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}$$

Existem apenas duas possibilidades para k

1. k é múltiplo de 2 $\Rightarrow k = 2n$ e $k - 2\lfloor \frac{k}{2} \rfloor = 0$
2. k deixa resto 1 quando dividido por 2 $\Rightarrow k = 2n + 1$ e $k - 2\lfloor \frac{k}{2} \rfloor = 1$

Assim,

$$R_T^m = \left(\sum_{n=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \binom{m}{2n} (I-T)^n \right) I_2 + \left(\sum_{n=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \binom{m}{2n+1} (T-I)^n \right) P_T$$

Portanto, assumindo $\mathcal{C}(m)$ e $\mathcal{S}(m)$ como foram definidos anteriormente, temos

$$R_T^m = \mathcal{C}(m)I_2 + \mathcal{S}(m)P_T$$

Cujo resultado matricial nos dá o formado já escrito:

$$R_T^m = \begin{bmatrix} \mathcal{C}(m) & 0 \\ 0 & \mathcal{C}(m) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{S}(m) \\ (I-T)\mathcal{S}(m) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{C}(m) & \mathcal{S}(m) \\ (I-T)\mathcal{S}(m) & \mathcal{C}(m) \end{bmatrix}$$

Da relação

$$X_{m+1} = R_{T,r}^{m+1} X_0 + \sum_{k=0}^m R_{T,r}^k F_{m-k}$$

Obtemos:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_{m+1} \\ \Delta x_{m+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathcal{C}(m+1) & \mathcal{S}(m+1) \\ (I-T)\mathcal{S}(m+1) & \mathcal{C}(m+1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ \Delta x_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^m \mathcal{S}(i) f_{m-i} \\ \sum_{i=0}^m \mathcal{C}(i) f_{m-i} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathcal{C}(m+1)x_0 + \mathcal{S}(m+1)\Delta x_0 + \sum_{i=0}^m \mathcal{S}(i) f_{m-i} \\ (I-T)\mathcal{S}(m+1)x_0 + \mathcal{C}(m+1)\Delta x_0 + \sum_{i=0}^m \mathcal{C}(i) f_{m-i} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Substituindo $x_0 = a$, $\Delta x_0 = b$ e escrevendo a última parcela de cada somatório como uma expressão de convolução, temos então o resultado esperado. A unicidade da solução segue diretamente pela recorrência uma vez estabelecida as condições iniciais. $\square$

Feito o caso mais difícil, podemos agora considerar o seguinte teorema:

Teorema 3.1.1. *[Existência e Unicidade] A única solução do problema (3.11) é da forma*

$$x_{m+1} = r^{m+1} \mathcal{C}(m+1)x + r^m \mathcal{S}(m+1)y + (r^{\bullet-1} \mathcal{S}(\bullet) * f)_m. \quad (3.9)$$

Além disso,

$$\Delta_r x_{m+1} = r^{m+2} (I-T) \mathcal{S}(m+1)x + r^{m+1} \mathcal{C}(m+1)y + (r^{\bullet} \mathcal{C}(\bullet) * f)_m. \quad (3.10)$$

Demonstração. Assim como na proposição anterior, vamos reduzir a ordem do problema. Considere $X_n = [x_n, \Delta_r x_n] \in X \times X$, $F_n = [0, f_n]$ e o operador $R_{T,r} \in B(X \times X)$ pondo:

$$R_{T,r} = \begin{bmatrix} rI & I \\ r^2(I-T) & rI \end{bmatrix}$$

então o problema (3.11) é equivalente ao problema de primeira ordem

$$\begin{cases} X_{n+1} - R_{T,r} X_n = F_n \\ X_0 = [a, b] \end{cases}, \quad (3.11)$$

A qual, como já falamos, tem solução dada por:

$$X_{m+1} = R_{T,r}^{m+1} X_0 + \sum_{k=0}^m R_{T,r}^k F_{m-k}$$

Um cálculo análogo ao que foi feito na proposição anterior nos mostra que

$$R_{T,r}^m = r^m \begin{bmatrix} \mathcal{C}(m) & \frac{1}{r} \mathcal{S}(m) \\ r(I-T)\mathcal{S}(m) & \mathcal{C}(m) \end{bmatrix}$$

O resultado segue diretamente por expansão dos cálculos. A unicidade segue diretamente por um argumento indutivo análogo ao anterior. $\square$

3.2 Caracterização

A partir de agora iremos nos concentrar em estudar aspectos qualitativos do problema, mas perceba que no formato em que se encontra com condições iniciais e o valor r quaisquer, teríamos diversas dificuldades em tentar controlar a solução quando o tempo vai para infinito. Dessa maneira, pediremos condições iniciais nulas, para nos concentrarmos apenas na convolução. Considere o seguinte problema de Cauchy com condições iniciais nulas

$$\begin{cases} \Delta_r^2 x_n - r^2(I - T)x_n = f_n \\ x_0 = \Delta_r x_0 = 0 \end{cases}, \quad (3.12)$$

$n \in$

$$\begin{aligned} x_{m+1} &= (r^{\bullet-1} \mathcal{S}(\bullet) * f)_m, \\ \Delta_r x_{m+1} &= (r^{\bullet} \mathcal{C}(\bullet) * f)_m \end{aligned} \quad (3.13)$$

Definição 3.2.1. *Seja $1 < p < +\infty$. Dizemos que a equação (3.12) tem regularidade maximal discreta se $\mathcal{K}^r f := (I - T)r^{\bullet+1} \mathcal{S} * f$ define um operador linear limitado $\mathcal{K}^r \in B(l_p(\mathbb{Z}_+; X))$.*

Uma consequencia imediata dessa definição é que se (3.12) tem RMD, então $(\Delta_r^2 x_n) \in l_p(\mathbb{Z}_+, X)$.

Com efeito, de

$$\Delta_r^2 x_n - r^2(I - T)x_n = f_n,$$

e da solução

$$x_n = (r^{\bullet-1} S(\bullet) * f)_{n-1}$$

obtemos que

$$\begin{aligned} \Delta_r^2 x_n &= r^2(I - T)x_n + f_n \\ &= r^2(I - T)[(r^{\bullet-1} S(\bullet) * f)_{n-1}] + f_n \\ &= (I - T)r^{\bullet+1}(\mathcal{S} * f)_{n-1} + f_n \\ &= \mathcal{K}^r f(n-1) + f_n \end{aligned}$$

Assim, sabemos que se $(f_n) \in l_p$ e (3.12) com RMD, então $\mathcal{K}^r \in B(l_p(\mathbb{Z}_+; X))$, logo o lado direito inteiro pertence a l_p e, portanto, $\Delta_r^2 x_n \in l_p(\mathbb{Z}_+; X)$.

A proposição a seguir será de extrema importância para estabelecer o resultado principal deste capítulo.

Proposição 3.2.1. *Seja $T \in B(X)$ um operador analítico, então*

$$\mathcal{F}(r^{\bullet-1} \mathcal{S}(\bullet))(z) = zR((z-r)^2; r^2(I - T)), \quad z \in \mathbb{T}_r^\alpha \setminus \{\alpha r\} \quad (3.14)$$

e

$$\mathcal{F}(r^{\bullet} \mathcal{C}(\bullet))(z) = z(z-r)R((z-r)^2; r^2(I - T)), \quad z \in \mathbb{T}_r^\alpha \setminus \{\alpha r\} \quad (3.15)$$

Demonstração. Dado $x \in X$ defina a sequência (f_n) pondo,

$$f_n = \begin{cases} x, & \text{se } n = 0; \\ 0, & \text{se } n \neq 0. \end{cases}$$

Note que, por definição,

$$\mathcal{F}(f_n)(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} z^{-j} f_j = x.$$

Considere agora o seguinte problema,

$$\begin{cases} \Delta_r^2 x_n - r^2(I - T)x_n = f_n \\ x_0 = \Delta_r x_0 = 0 \end{cases}, \quad (3.16)$$

Sabemos, pelo teorema (3.1.1), que a única solução será dada por $x_{n+1} = (r^{\bullet-1} \mathcal{S} * f)_n$. Assim,

$$\begin{aligned} z\mathcal{F}(x_n)(z) &= \mathcal{F}(x_{n+1})(z) \\ &= \mathcal{F}(r^{\bullet-1} \mathcal{S} * f)(z) \\ &= (\mathcal{F}(r^{\bullet-1} \mathcal{S}(\bullet))(z)) (\mathcal{F}(f_n)(z)) \\ &= (\mathcal{F}(r^{\bullet-1} \mathcal{S}(\bullet))(z)) x, \quad z \in \mathbb{T}_r^\alpha \end{aligned}$$

Usamos acima a propriedade da transformada de Fourier discreta em relação a convolução. Note também que por linearidade,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\Delta_r x_n)(z) &= \mathcal{F}(x_{n+1} - rx_n)(z) \\ &= \mathcal{F}(x_{n+1})(z) - r\mathcal{F}(x_n)(z) \\ &= z\mathcal{F}(x_n)(z) - r\mathcal{F}(x_n)(z) \\ &= (z - r)\mathcal{F}(x_n)(z), \quad \forall z \in \mathbb{T}_r^\alpha \end{aligned}$$

Portanto, aplicando a transformada de Fourier discreta em (3.16), obtemos:

$$\mathcal{F}(\Delta_r^2 x_n - r^2(I - T)x_n)(z) = \mathcal{F}(f_n)(z)$$

Donde

$$(z - r)^2 \mathcal{F}(x_n)(z) - r^2(I - T)\mathcal{F}(x_n)(z) = x$$

Multiplicando a expressão acima e multiplicando por z , obtemos:

$$z((z - r)^2 - r^2(I - T))\mathcal{F}(x_n)(z) = zx$$

E assim,

$$((z - r)^2 - r^2(I - T))\mathcal{F}(r^{\bullet-1} \mathcal{S}(\bullet))(z)x = zx, \quad z \in \mathbb{T}_r^\alpha$$

Como T é um operador analítico, temos pela proposição (2.3.2) que o operador $(z - r)^2 - r^2(I - T)$ é inversível, daqui segue o resultado. O cálculo para o outro operador é completamente análogo, mas no final, ao invés de organizar a expressão multiplica-se por $z(z - r)$ e não apenas por z . Os cálculos seguem diretamente. $\square$

Considere os seguintes espaços:

$$\begin{aligned} l_{p,r}^1(\mathbb{Z}_+; X) &:= \{y = (y_n)/y_0 = 0, (\Delta_r y_n) \in l_p(\mathbb{Z}_+; X)\} \\ l_{p,r}^2(\mathbb{Z}_+; X) &:= \{y = (y_n)/y_0 = y_1 = 0, (\Delta_r^2 y_n) \in l_p(\mathbb{Z}_+; X)\} \\ l_{p,I-T}(\mathbb{Z}_+; X) &:= \{y = (y_n)/((I-T)y_n) \in l_p(\mathbb{Z}_+; X)\} \end{aligned}$$

Nosso objetivo agora será o de mostrar que a transformada de Fourier discreta está bem definida nos espaços considerados acima.

Proposição 3.2.2. *Assuma que (2.6) é satisfeito. Para cada $y \in l_{p,r}^1(\mathbb{Z}_+; X)$, $i = 1, 2$, a Z-transformada de y está bem definida em $\mathbb{T}_r^\alpha$.*

Demonstração. De fato, se $y \in l_{p,r}^1(\mathbb{Z}_+, X)$, temos a seguinte estimativa,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(y_n)(z)\|_X &= \left\| \sum_{j=0}^{\infty} z^{-j} y_j \right\|_X \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} |z|^{-j} \|y_j\|_X \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha r} \right)^j \left\| \sum_{i=0}^{j-1} r^i \Delta_r y_{j-1-i} \right\|_X \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(\alpha r)^j} \right) \sum_{i=0}^{j-1} r^i \|\Delta_r y_{j-1-i}\|_X \\ &\leq C_1(\alpha, r) \|\Delta_r y_\bullet\|_\infty, \end{aligned}$$

aqui $C_1(\alpha, r)$ é uma constante que depende tanto de α quanto de r .

Para o outro caso, note agora que se $(y_n) \in l_{p,r}^2(\mathbb{Z}_+, X)$, obtemos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(y_n)(z)\|_X &= \left\| \sum_{j=0}^{\infty} z^{-j} y_j \right\|_X \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} |z|^{-j} \|y_j\|_X \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha r} \right)^j \sum_{i=0}^{j-1} r^i \|\Delta_r y_{j-1-i}\|_X \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha r} \right)^j \sum_{i=0}^{j-1} r^i \left\| \sum_{k=0}^{j-i-2} r^k \Delta_r^2 y_{j-i-2-k} \right\|_X \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha r} \right)^j \sum_{i=0}^{j-1} r^i \sum_{k=0}^{j-i-2} r^k \|\Delta_r^2 y_{j-i-2-k}\|_X \\ &\leq C_2(\alpha, r) \|\Delta_r^2 y_\bullet\|_\infty, \end{aligned}$$

com $C_2(\alpha, r)$ novamente uma constante dependendo de tais parâmetros e a demonstração está terminada. $\square$

A seguir introduziremos sobre a teoria de multiplicadores do tipo l_p .

Definição 3.2.2. Dizemos que $\{Q(z)\}_{z \in \mathbb{T}_r^\alpha}$ é um $l_p - l_{p,r}^i$ -multiplicador, $i = 1, 2$, se cada $f = (f_n) \in l_p(\mathbb{Z}_+; X)$, existe uma sequência $y = (y_n) \in l_{p,r}^i(\mathbb{Z}_+; X)$ tal que $\hat{y}(z) = Q(z)\hat{f}(z)$, $z \in \mathbb{T}_r^\alpha$.

Proposição 3.2.3. Assuma (2.6) é satisfeita. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) $\{Q(z)\}_{z \in \mathbb{T}_r^\alpha}$ é um $l_p - l_{p,r}^i$ -multiplicador, $i = 1, 2$;
- (ii) $\{(z-r)^i Q(z)\}_{z \in \mathbb{T}_r^\alpha}$ é um $l_p - l_p$ -multiplicador, $i = 1, 2$

Demonstração. Inicialmente, consideraremos o caso $i = 1$.

Vamos mostrar que (i) $\Rightarrow$ (ii):

Por definição, se $\{Q(z)\}_{z \in \mathbb{T}_r^\alpha}$ é um $l_p - l_{p,r}^1$ -multiplicador, para $f = (f_n) \in l_p(\mathbb{Z}_+; X)$, existe uma $y = (y_n) \in l_{p,r}^1(\mathbb{Z}_+; X)$ tal que $\hat{y}(z) = Q(z)\hat{f}(z)$, $z \in \mathbb{T}_r^\alpha$. Fazemos $x_0 = 0$, $x_n = \Delta_r y_n$, para $n \geq 1$. Temos que $x = (x_n) \in l_p(\mathbb{Z}_+; X)$ e $\hat{x}(z) = \Delta_r \hat{y}(z)$. Sabemos que $\Delta_r \hat{y}(z) = Z[y(n+1)] - rZ[y(n)] = z\hat{y}(z) - r\hat{y}(z) = (z-r)\hat{y}(z)$. Daí, obtemos

$$\Delta_r \hat{y}(z) = (z-r)Q(z)\hat{f}(z).$$

Assim, para cada $f = (f_n) \in l_p(\mathbb{Z}_+; X)$, existe uma sequência $x = (x_n) \in l_p(\mathbb{Z}_+; X)$ tal que $\hat{x}(z) = (z-r)Q(z)\hat{f}(z)$, $z \in \mathbb{T}_r^\alpha$.

Ainda no caso $i = 1$, vamos agora mostrar (ii) $\Rightarrow$ (i):

Existe, para cada $f = (f_n) \in l_p(\mathbb{Z}_+; X)$, uma sequência $y = (y_n) \in l_p(\mathbb{Z}_+; X)$ tal que $\hat{y}(z) = (z-r)Q(z)\hat{f}(z)$.

Seja $x = (x_n) \in l_p(\mathbb{Z}_+; X)$ tal que $x_0 = 0$, $y_n = \Delta_r x_n$. Temos que $\Delta_r \hat{x}(z) = (z-r)\hat{x}(z)$ e $\Delta_r \hat{x}(z) = \hat{y}(z) = (z-r)Q(z)\hat{f}(z)$. Daí, $\hat{x}(z) = Q(z)\hat{f}(z)$. Portanto, $\{Q(z)\}_{z \in \mathbb{T}_r^\alpha}$ é um $l_p - l_{p,r}^1$ -multiplicador.

Vamos agora mostrar o caso $i = 2$:

($\Rightarrow$) $\{Q(z)\}_{z \in \mathbb{T}_r^\alpha}$ é um $l_p - l_{p,r}^2$ -multiplicador. Por definição, para cada $f = (f_n) \in l_p(\mathbb{Z}_+; X)$, existe uma sequência $y = (y_n) \in l_{p,r}^2(\mathbb{Z}_+; X)$ tal que $\hat{y}(z) = Q(z)\hat{f}(z)$, $z \in \mathbb{T}_r^\alpha$. Fazemos $x_n = \Delta_r^2 y_n \in l_p(\mathbb{Z}_+; X)$. Sabemos que

$$\Delta_r^2 y_n = y(n+2) - 2ry(n+1) + r^2 y(n).$$

Por (2.3), temos que $Z[y(n+2)] = z^2\hat{y}(z) - z^2y(0) - y(1)$ e $Z[y(n+1)] = z\hat{y}(z) - zy(0)$. Assim,

$$\begin{aligned}\hat{x}(z) &= \Delta_r^2 y(z) \\ &= Z[y(n+2) - 2ry(n+1) + r^2y(n)] \\ &= [z^2\hat{y}(z) - z^2y(0) - y(1)] - 2r[z\hat{y}(z) - zy(0)] + r^2y(n) \\ &= (z-r)^2\hat{y}(z) - z^2y(0) - zy(1) + 2rzy(0)\end{aligned}$$

Por outro lado, $\hat{\Delta}_r y(z) = (z-r)\hat{y}(z) - zy(0)$ e, portanto,

$$\begin{aligned}(z-r)\hat{\Delta}_r y(z) - z(y(1) - ry(0)) &= (z-r)^2\hat{y}(z) - z(z-r)y(0) - z(y(1) - ry(0)) \\ &= (z-r)^2\hat{y}(z) - z^2y(0) - zy(1) + 2rzy(0) \\ &= \hat{x}(z)\end{aligned}$$

Além disso, sabemos que $\hat{y}(z) = Q(z)\hat{f}(z)$. Assim,

$$(z-r)\hat{\Delta}_r y(z) = (z-r)^2Q(z)\hat{f}(z) - z^2y(0) - zy(1) + 2rzy(0).$$

Daí, concluímos que

$$\hat{x}(z) = (z-r)\hat{\Delta}_r y(z) - z(y(1) - ry(0)) = (z-r)^2Q(z)\hat{f}(z).$$

Assim, $(z-r)^2Q(z)$ é um $l_p - l_p$ - multiplicador.

($\Leftarrow$) Para cada $f = (f_n) \in l_p(\mathbb{Z}_+; X)$, existe uma sequência $y = (y_n) \in l_p(\mathbb{Z}_+; X)$ tal que

$$\hat{y}(z) = (z-r)^2Q(z)\hat{f}(z)$$

Seja $x = (x_n) \in l_{p,r}^2(\mathbb{Z}_+; X)$ tal que $\Delta_r^2 x_n = y_n$, $x_0 = x_1 = 0$.

Assim, $\hat{y}(z) = \hat{\Delta}_r^2 x(z) = (z-r)^2\hat{x}(z)$. Portanto, $(z-r)^2\hat{x}(z) = (z-r)^2Q(z)\hat{f}(z)$. Logo,

$$\hat{x}(z) = Q(z)\hat{f}(z).$$

□

A definição a seguir nos dá a noção sobre o problema ser bem posto.

Definição 3.2.3. Dizemos que o problema (??) é bem posto se para cada $f = (f_n) \in l_p(\mathbb{Z}_+; X)$ existe uma única solução $x = (x_n) \in l_{p,r}^2(\mathbb{Z}_+; X) \cap l_{p,I-T}(\mathbb{Z}_+; X)$ da equação (??).

Proposição 3.2.4. $||| \cdot |||$ definido por

$$|||x||| := \|\Delta_r^2 x\|_p + \|r^2(I-T)x\|_p \quad (3.18)$$

é uma norma em $l_{p,r}^2(\mathbb{Z}_+; X) \cap l_{p,I-T}(\mathbb{Z}_+; X)$:

Demonstração. (i) Para todo x , temos $|||x||| \geq 0$. Além disso, $|||x||| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) [Homogeneidade] Para todo $x \in l_{p,r}^2(\mathbb{Z}_+; X) \cap l_{p,I-T}(\mathbb{Z}_+; X)$, para todo $k \in \mathbb{R}$, vale $|||kx||| = |k| |||x|||$.

(iii) [Desigualdade Triangular] Para todos os $x, y \in l_{p,r}^2(\mathbb{Z}_+; X) \cap l_{p,I-T}(\mathbb{Z}_+; X)$, vale $|||x + y||| \leq |||x||| + |||y|||$.

De fato, $\|\Delta_r^2 x\|_p \geq 0$ e $\|r^2(I - T)x\|_p \geq 0$. Logo, $|||x||| \geq 0$. Temos ainda

$$\begin{aligned} |||x||| = 0 &\Leftrightarrow \|\Delta_r^2 x\|_p = 0 \text{ e } \|r^2(I - T)x\|_p = 0 \\ &\Leftrightarrow \Delta_r^2 x = 0 \text{ e } r^2(I - T)x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Assim (i) é válida.

Visto que

$$\begin{aligned} |||kx||| &= \|\Delta_r^2 kx\|_p + \|r^2(I - T)kx\|_p \\ &= \|k\Delta_r^2 x\|_p + \|kr^2(I - T)x\|_p \\ &= |k| \|\Delta_r^2 x\|_p + |k| \|r^2(I - T)x\|_p \\ &= |k| (\|\Delta_r^2 x\|_p + \|r^2(I - T)x\|_p) \\ &= |k| |||x|||, \end{aligned}$$

temos (ii).

Além disso, temos também

$$\begin{aligned} |||x + y||| &= \|\Delta_r^2(x + y)\|_p + \|r^2(I - T)(x + y)\|_p \\ &= \|\Delta_r^2 x + \Delta_r^2 y\|_p + \|r^2[(I - T)x + (I - T)y]\|_p \\ &\leq \|\Delta_r^2 x\|_p + \|\Delta_r^2 y\|_p + \|r^2(I - T)x\|_p + \|(I - T)y\|_p \\ &= |||x||| + |||y||| \end{aligned}$$

Como o espaço é interseção de dois espaços completos, concluímos que ele também o é.

□

Proposição 3.2.5. *O espaço $l_{p,r}^2(\mathbb{Z}_+; X) \cap l_{p,I-T}(\mathbb{Z}_+; X)$ é um espaço de Banach munido da norma*

$$|||x||| := \|\Delta_r^2 x\|_p + \|r^2(I - T)x\|_p \quad (3.19)$$

Enunciaremos agora dois resultados obtidos por Blunck que foram utilizados para caracterizar o problema de primeira ordem:

Proposição 3.2.6. *Sejam $p \in (1, \infty)$, $\Omega \subset \mathbb{C}$, X um espaço de Banach com a propriedade UMD e $(f_n) \subset X$. Suponha que existe um operador $T_M \in B(l_p(\mathbb{Z}_+, X))$ tal que*

$$\mathcal{F}(T_M f)(z) = M(z) \mathcal{F}(f_n)(z)$$

e $\mathcal{F}f \in L^\infty(\Omega, X)$ de suporte compacto, onde $M \in L^1_{Loc}(\Omega, B(X))$. Então o conjunto $\{M(t); t \in \Omega\}$ é R -limitado.

Teorema 3.2.1. *Sejam $p \in (1, \infty)$, X um espaço de Banach com a propriedade UMD e $(f_n) \subset X$. Se $M : (-\pi, \pi) \setminus \{0\} \rightarrow B(X)$ é uma aplicação diferenciável e suponha que o conjunto*

$$\{M(t), (e^{it} - 1)(e^{it} + 1)M'(t); t \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\}\}$$

é R -limitado. Então existe um operador $T_M \in B(l_p(\mathbb{Z}_+, X))$ tal que

$$\mathcal{F}(T_M f)(e^{it}) = M(t) \mathcal{F}(f_n)(e^{it})$$

$t \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\}$ e $\mathcal{F}f \in L^\infty(\mathbb{T}, X)$ de suporte compacto.

Lema 3.2.1 (Teorema do gráfico fechado). *Sejam X e Y espaços de Banach e $T : X \rightarrow Y$ um operador linear. Então, T é limitado se, e somente se, o seu gráfico $G(T) = \{(x, Tx) : x \in X\} \subset X \times Y$ é fechado na topologia produto.*

Teorema 3.2.2. *Sejam X um espaço UMD e $T \in B(X)$ um operador analítico. Assuma que $\alpha = 1 + \sqrt{2}$, $r \geq r_0$ e $\frac{1}{1+\sqrt{2}} < r_0 < 1$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *O problema (3.16) é bem-posto;*

(ii) *$\{M(z) := (z - r)^2((z - r)^2 - r^2(I - T))^{-1} : z \in \mathbb{T}_r^\alpha, z \neq \alpha r\}$ é $l_p - l_p$ -multiplicador;*

(iii) *O conjunto $\{M(z) : z \in \mathbb{T}_r^\alpha, z \neq \alpha r\}$ é R -limitado;*

(iv) *O problema (3.11) tem regularidade maximal discreta.*

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii)

Aplicando a transformada de Fourier à equação (3.16), para $z \in \mathbb{T}_r^\alpha, z \neq \alpha r$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\Delta_r^2 x_n - r^2(I - T)x_n)(z) &= \mathcal{F}(f_n)(z) \\ (z - r)^2 \hat{x}(z) - r^2(I - T)\hat{x}(z) &= \hat{f}(z) \end{aligned}$$

Pela proposição (2.3.2), temos $\hat{x}(z) = R((z - r)^2, r^2(I - T))\hat{f}(z)$ sempre que $z \in \mathbb{T}_r^\alpha, z \neq \alpha r$. Consequentemente, $R((z - r)^2, r^2(I - T))$ é um $l_p - l_{p,r}^2$ -multiplicador. Pela proposição (3.2.3), concluímos a prova.

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Pela proposição (3.2.3), $R((z-r)^2, r^2(I-T))$ é um $l_p - l_{p,r}^2$ -multiplicador. Assim, para toda $f = (f_n) \in l_p(\mathbb{Z}_+; X)$, existe uma sequência $x = (x_n) \in l_{p,r}^2(\mathbb{Z}_+; X)$ tal que

$$\begin{aligned}\hat{x}(z) &= R((z-r)^2, r^2(I-T))\hat{f}(z) \\ ((z-r)^2 - r^2(I-T))\hat{x}(z) &= \hat{f}(z) \\ (z-r)^2\hat{x}(z) - r^2(I-T)\hat{x}(z) &= \hat{f}(z)\end{aligned}$$

Pela unicidade da Transformada de Fourier, $x = (x_n)$ é solução de (3.16). Em particular,

$$r^2(I-T)x_n = \Delta_r^2 x_n - f_n \in l_p(\mathbb{Z}_+; X).$$

(i) $\Rightarrow$ (iii)

Como mostramos acima, se a equação (3.16) é bem-posta, existe uma sequência $g \in l_p(\mathbb{Z}_+; X)$ tal que $\hat{g}(z) = M(z)\hat{f}(z)$ sempre que $z \in \mathbb{T}_r^\alpha, z \neq \alpha r$.

Vamos definir o operador $\mathcal{L}_M : l_p(\mathbb{Z}_+; X) \longrightarrow l_p(\mathbb{Z}_+; X)$ tal que $\mathcal{L}_M f(z) = M(z)\hat{f}(z)$. Pela unicidade da transformada de Fourier, $\mathcal{L}_M \equiv g$ está definida. Pelo lema (3.2.1), $\mathcal{L}_M \in B(l_p(\mathbb{Z}_+; X))$. A conclusão é consequência da proposição 1.4 de (1).

(iii) $\Rightarrow$ (iv)

Defina $k_r : \mathbb{Z} \longrightarrow B(X)$ por

$$k_r(n) = \begin{cases} r^2(I-T)r^{n-1}\mathcal{S}(n), & \text{se } n \in \mathbb{Z}_+; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

e o operador correspondente $K^r : l_p(\mathbb{Z}_+; X) \longrightarrow l_p(\mathbb{Z}_+; X)$ com

$$[K^r f](n) = \sum_{j=0}^n k_r(j)f_{n-j} = (k_r * f)(n), n \in \mathbb{Z}_+.$$

Sabemos que $[(z-r)^2 I - r^2(I-T)]R((z-r)^2, r^2(I-T)) = I$. Portanto,

$$r^2(I-T)zR((z-r)^2, r^2(I-T)) = z(M(z) - I).$$

Então, pela proposição (3.2.1),

$$\hat{k}_r(z) = r^2(I-T)\mathcal{F}(r^{\bullet-1}\mathcal{S}(\bullet))(z) = r^2(I-T)zR((z-r)^2, r^2(I-T)) = z(M(z) - I).$$

Definamos $M(t) := M(\alpha re^{it})$ com $t \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$. Temos, então,

$$M(\alpha re^{it}) = (\alpha re^{it} - r)^2((\alpha re^{it} - r)^2 - r^2(I-T))^{-1}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
M'(t) &= 2(\alpha re^{it} - r)\alpha rie^{it}((\alpha re^{it} - r)^2 - r^2(I - T))^{-1} - (\alpha re^{it} - r)^2 \\
&\quad ((\alpha re^{it} - r)^2 - r^2(I - T))^{-2}(\alpha re^{it} - r)(2\alpha re^{it}i) \\
&= 2(\alpha re^{it} - r)\alpha rie^{it}[((\alpha re^{it} - r)^2 - r^2(I - T))^{-1} - (\alpha re^{it} - r)^2 \\
&\quad ((\alpha re^{it} - r)^2 - r^2(I - T))^{-2}] \\
&= 2(\alpha re^{it} - r)\alpha rie^{it}(\alpha re^{it} - r)^2(\alpha re^{it} - r)^{-2}[((\alpha re^{it} - r)^2 - r^2(I - T))^{-1} \\
&\quad - (\alpha re^{it} - r)^2((\alpha re^{it} - r)^2 - r^2(I - T))^{-2}] \\
&= 2\alpha rie^{it}(\alpha re^{it} - r)^{-1}[(\alpha re^{it} - r)^2((\alpha re^{it} - r)^2 - r^2(I - T))^{-1} - (\alpha re^{it} - r)^4 \\
&\quad ((\alpha re^{it} - r)^2 - r^2(I - T))^{-2}] \\
&= 2\alpha rie^{it}(\alpha e^{it} - 1)^{-1}(M(t) - M(t)^2)
\end{aligned}$$

Defina $N(t) := \alpha re^{it}[M(t) - I]$. Pelas propriedades de R-limitação, $N(t)$ é R-limitado.

$$N'(t) = \alpha rie^{it}[M(t) - I] + \frac{2\alpha^2 rie^{2it}}{(\alpha e^{it} - 1)}[M(t) - M(t)^2].$$

Logo,

$$(e^{it} - 1)(e^{it} + 1)N'(t) = \alpha rie^{it}(e^{it} - 1)(e^{it} + 1)[M(t) - I] + \frac{2\alpha^2 rie^{2it}(e^{it} - 1)(e^{it} + 1)}{(\alpha e^{it} - 1)}[M(t) - M(t)^2].$$

Como $\alpha = 1 + \sqrt{2}$, temos que $|\alpha e^{it} - 1| \geq \sqrt{2}$. Assim, o conjunto

$$\left\{ \frac{2i\alpha^2 re^{2it}(e^{it} - 1)(e^{it} + 1)}{\alpha e^{it} - 1} \right\}$$

é limitado por $4\alpha^2 r \sqrt{2}$. Usando novamente as propriedades de R - limitação, concluímos que $\{(e^{it} - 1)(e^{it} + 1)N'(t)\}$ é R-limitação. Portanto, usando o teorema (3.2.1), temos que existe $T_N \in B(l_p(\mathbb{Z}_+, X))$ tal que $\mathcal{F}(T_N g)(e^{it}) = N(t)\mathcal{F}(g)(e^{it})$ para toda $g \in l_p(\mathbb{Z}_+, X)$.

$$\mathcal{F}[(\alpha r)^{-\bullet} T_N((\alpha r)^{-\bullet} f)](z) = \mathcal{F}[T_N(\alpha r)^{-\bullet} f](e^{it}).$$

Pelo teorema (3.2.1),

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[T_N(\alpha r)^{-\bullet} f](e^{it}) &= N(t)\mathcal{F}[(\alpha r)^{-\bullet} f](e^{it}) \\
&= N(t)\mathcal{F}[f](\alpha re^{it}) \\
&= \mathcal{F}[k_r](\alpha re^{it})\mathcal{F}[f](\alpha re^{it}).
\end{aligned}$$

Do teorema da convolução, tem-se

$$\mathcal{F}[k_r](\alpha re^{it})\mathcal{F}[f](\alpha re^{it}) = \mathcal{F}[k_r * f](\alpha e^{it}).$$

Pela definição do operador concluímos que

$$\mathcal{F}[k_r * f](\alpha e^{it}) = \mathcal{F}[K^r f](z),$$

isto é,

$$\mathcal{F}[(\alpha r)^{\bullet} T_N((\alpha r)^{-\bullet} f)](z) = \mathcal{F}[K^r f](z).$$

Pela unicidade da transformada, temos que

$$(\alpha r)^{-\bullet} K^r f = T_N((\alpha r)^{-\bullet} f).$$

Portanto,

$$\|(\alpha r)^{-\bullet} K^r f\|_p = \|T_N((\alpha r)^{-\bullet} f)\|_p$$

$$\|T_N((\alpha r)^{-\bullet} f)\|_p \leq M \|(\alpha r)^{-\bullet} f\| \leq M \|f\|_p$$

Assim, $(\alpha r)^{-\bullet} K^r \in B(l_p(\mathbb{Z}_+; X))$. Segue então do teorema do gráfico fechado que

$$K^r \in B(l_p(\mathbb{Z}_+; X)).$$

(iv) $\Rightarrow$ (i)

Já sabemos que a única solução de (3.16) é dada por

$$x(n) = (r^{\bullet-1} s * f)(n-1)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \Delta_r^2 x(n) &= r^2 (I - T)(r^{\bullet-1} s * f)(n-1) + f(n) \\ &= [K^r f](n-1) + f(n). \end{aligned}$$

Logo, $x = x(n) \in l_{p,r}^2(\mathbb{Z}_+; X) \cap l_{p,I-T}(\mathbb{Z}_+; X)$. □

Como todo espaço de Hilbert é um espaço UMD e em tais espaços os conceitos de R-limitação e limitação são equivalentes, ou seja, um conjunto é limitado se, e somente se, é R-limitado, então ganhamos o seguinte corolário para espaços de Hilbert,

Corolário 3.2.1. *Seja H um espaço de Hilbert e $T \in B(H)$ um operador linear analítico, Assume que $\alpha = 1 + \sqrt{2}$, $r \geq r_0$ e $\frac{1}{1+\sqrt{2}} < r_0 < 1$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *O problema (3.16) é bem-posto;*

(ii) *$\{M(z) := (z-r)^2((z-r)^2(I-T))^{-1} : z \in \mathbb{T}_r^\alpha, z \neq \alpha r\}$ é $l_p - l_p$ -multiplicador;*

(iii) *$\sup\{\|(z-r)^2((z-r)^2 - r^2(I-T))^{-1}\| : z \in \mathbb{T}_r^\alpha, z \neq \alpha r\} < \infty$*

(iv) *O problema (3.11) tem regularidade maximal discreta.*

Note aqui que se (3.16) possui RMD, então $(x_n) \in l_{p,r}^2(\mathbb{Z}_+, X) \cap l_{p,I-T}(\mathbb{Z}_+, X)$ sempre que $(f_n) \in l_p(\mathbb{Z}_+, X)$ e isso estabelece um isomorfismo entre o conjunto dos dados (f_n) e o conjunto das soluções (x_n) . Outra observação interessante a se fazer é que nas condições do teorema, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|\Delta_r^2 x\|_p + \|r^2(I - T)x\|_p \leq C\|f\|_p,$$

para todo $x = (x_n) \in l_{p,r}^2(\mathbb{Z}_+, X) \cap l_{p,I-T}(\mathbb{Z}_+, X)$, ou seja, a aplicação de $l_p(\mathbb{Z}_+; X)$ em $l_{p,r}^2(\mathbb{Z}_+, X) \cap l_{p,I-T}(\mathbb{Z}_+, X)$ dada por $(f_n) \mapsto (x_n)$ é uma aplicação contínua.

4 PROBLEMA SEMILINEAR DE SEGUNDA ORDEM

Proposição 4.0.1. Para cada $y \in l_{p,r}^2(\mathbb{Z}_+, X)$ e $n \in \mathbb{Z}_+$, vale a seguinte estimativa:

$$\|y_n\|_X + \|\Delta_r y_n\|_X \leq \theta(r) \gamma(r, n) \|\Delta_r^2 y_\bullet\|_p \quad (4.1)$$

Solução.

A demonstração segue analisando as normas $\|y_n\|_X$ e $\|\Delta_r y_n\|_X$. Em seguida ficará evidente a necessidade de definirmos as funções θ e γ .

Inicialmente, iremos considerar o caso $r < 1$. Temos:

$$\begin{aligned} \|y_n\|_X &\leq \left\| \sum_{i=0}^{n-1} r^i \sum_{j=0}^{n-2-i} r^j \Delta_r^2 y_{n-2-i-j} \right\|_X \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} r^i \sum_{j=0}^{n-2-i} r^j \|\Delta_r^2 y_{n-2-i-j}\|_X \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} r^i \sum_{j=0}^{n-2-i} r^j \|\Delta_r^2 y_\bullet\|_p \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} r^i \left(\sum_{j=0}^{n-2-i} r^{jq} \right)^{1/q} \|\Delta_r^2 y_\bullet\|_p \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} r^i \left(\sum_{j=0}^{\infty} r^{jq} \right)^{1/q} \|\Delta_r^2 y_\bullet\|_p \\ &\leq \frac{1}{1-r} \frac{1}{(1-r^q)^{1/q}} \|\Delta_r^2 y_\bullet\|_p \end{aligned}$$

Se agora $r = 1$, então,

$$\begin{aligned} \|y_n\|_X &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2-i} \|\Delta_r^2 y_{n-2-i-j}\|_X \\ &\leq \left(\sum_{i=0}^{n-1} i \right) \|\Delta_r^2 y_\bullet\|_p \\ &= \frac{n(n-1)}{2} \|\Delta_r^2 y_\bullet\|_p \end{aligned}$$

Por fim, se $r > 1$, temos:

$$\begin{aligned}
\|y_n\|_X &\leq \sum_{i=0}^{n-1} r^i \left(\sum_{j=0}^{n-2-i} r^{qj} \right)^{1/q} \|\Delta_r^2 y_\bullet\|_p \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} r^i \left(\frac{r^{q(n-2-i)r^q-1}}{r^q-1} \right)^{1/q} \|\Delta_r^2 y_\bullet\|_p \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} r^i \frac{r^{n-1-i}}{(r^q-1)^{1/q}} \|\Delta_r^2 y_\bullet\|_p \\
&\leq \frac{nr^{n-1}}{(r^q-1)^{1/q}} \|\Delta_r^2 y_\bullet\|_p
\end{aligned}$$

Um cálculo análogo pode ser feito para estimar $\|\Delta_r y_n\|_X$ em termos de $\|\Delta_r^2 y_\bullet\|_p$ para os mesmos três casos:

Novamente, inicialmente, iremos considerar o caso $r < 1$,

$$\begin{aligned}
\|\Delta y_n\|_X &= \left\| \sum_{i=0}^{n-1} r^i \Delta_r^2 y_{n-1-i} \right\|_X \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} r^i \|\Delta_r^2 y_{n-1-i}\|_X \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} r^i \|\Delta_r^2 y_\bullet\|_p \\
&\leq \left(\sum_{i=0}^{n-1} r^{iq} \right)^{1/q} \|\Delta_r^2 y_\bullet\|_p \\
&\leq \frac{1}{(1-r^q)^{\frac{1}{q}}} \|\Delta_r^2 y_\bullet\|_p \\
&\leq \frac{1}{(1-r)^{1-\frac{1}{p}}} \|\Delta_r^2 y_\bullet\|_p
\end{aligned}$$

E se $r = 1$, então,

$$\begin{aligned}
\|\Delta y_n\|_X &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \|\Delta_r^2 y_{n-1-i}\|_X \\
&\leq n \|\Delta_r^2 y_{n-1-i}\|_X \\
&\leq n \|\Delta_r^2 y_\bullet\|_p
\end{aligned}$$

Por fim, se $r > 1$, temos:

$$\begin{aligned}
\|\Delta y_n\|_X &\leq \left(\sum_{i=0}^{n-1} r^{qi} \right)^{1/q} \|\Delta_r^2 y_\bullet\|_p \\
&\leq \left(\frac{r^{nq} - 1}{r^q - 1} \right)^{1/q} \|\Delta_r^2 y_\bullet\|_p \\
&\leq \left(\frac{r^{nq}}{r^q - 1} \right)^{1/q} \|\Delta_r^2 y_\bullet\|_p \\
&\leq \frac{r^n}{(r^q - 1)^{1/q}} \|\Delta_r^2 y_\bullet\|_p \\
&\leq \frac{r^n}{(r - 1)^{1/p}} \|\Delta_r^2 y_\bullet\|_p
\end{aligned}$$

Obtemos, portanto, as seguintes estimativas:

$$\|y_n\|_X \leq \begin{cases} \frac{1}{(1-r)^{2-1/p}} \|\Delta_r^2 y_\bullet\|_p, & \text{se } r < 1; \\ \frac{1}{(r-1)^{2-1/p}} n r^n \|\Delta_r^2 y_\bullet\|_p, & \text{se } r > 1; \\ \frac{n(n-1)}{2} \|\Delta_r^2 y_\bullet\|_p, & \text{se } r = 1, n \geq 1. \end{cases} \quad (4.2)$$

Analogamente,

$$\|\Delta_r y_n\|_X \leq \begin{cases} \frac{1}{(1-r)^{1-1/p}} \|\Delta_r^2 y_\bullet\|_p, & \text{se } r < 1; \\ \frac{r^n}{(r-1)^{1-1/p}} \|\Delta_r^2 y_\bullet\|_p, & \text{se } r > 1; \\ n \|\Delta_r^2 y_\bullet\|_p, & \text{se } r = 1, n \geq 1. \end{cases} \quad (4.3)$$

Somando agora as duas parcelas, e organizando em termos comuns, podemos estimar a soma das normas de y_n e $\Delta_r y_n$ em termos das funções θ e γ . E temos o resultado.

□

Corolário 4.0.1. Com as mesmas hipóteses do teorema (se o problema (é bem posto, então para cada $x \in X$ e $n \in \mathbb{Z}_+$, temos a seguinte estimativa:

$$\|r^{n-1} \mathcal{J}(n)x\|_X + \|r^n \mathcal{C}(n)x\|_X \leq (1 + \|\mathcal{K}^r\|_{B(X)}) \theta(r) \gamma(r, n+1) \|x\|_X \quad (4.4)$$

Solução.

De fato, dado $x \in X$ seja

$$f_n = \begin{cases} x, & \text{se } n = 0; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Considere agora o seguinte problema:

$$\Delta_r^2 x_n - r^2(I - T)x_n = f_n, \forall n \in \mathbb{Z}_+, x_0 = \Delta x_0 = 0 \quad (4.5)$$

Pela proposição a única solução será dada por

$$x_{n+1} = (r^{\bullet+1} \mathcal{S} * f)(n) = \sum_{k=0}^n r^{k-1} \mathcal{S}(k) f_{n-k} = r^{n-1} \mathcal{S}(n) x$$

e mais,

$$\Delta_r x_{n+1} = (r^{\bullet} \mathcal{C} * f)(n) = \sum_{k=0}^n r^k \mathcal{C}(k) f_{n-k} = r^n \mathcal{C}(n) x$$

E portanto, usando (4.0.1) e que $\Delta_r^2 x_n = r^2(I - T)x_n + f_n$, obtemos:

$$\begin{aligned} \|x_{n+1}\|_X + \|\Delta_r x_{n+1}\|_X &\leq \theta(r) \gamma(r, n+1) \|\Delta_r^2 x_{\bullet}\|_p \\ &= \theta(r) \gamma(r, n+1) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|\Delta_r^2 x_n\|_X^p \right)^{1/p} \\ &= \theta(r) \gamma(r, n+1) \|\Delta_r^2 x_0\|_X \\ &= \theta(r) \gamma(r, n+1) \|x + r^2(I - T)r^{n-1} \mathcal{S}(n)x\|_X \\ &= \theta(r) \gamma(r, n+1) \|x(I + r^{n+1}(I - T)\mathcal{S}(n))\|_X \\ &\leq \theta(r) \gamma(r, n+1) \|x\|_X (1 + \|\mathcal{K}^r\|_{B(X)}) \end{aligned}$$

Iremos agora descrever o resultado principal deste capítulo que garante existência (única) de solução para o problema (??) e ainda nos dará uma estimativa sobre a solução.

Teorema 4.0.1. Assuma que a condição (2.7) é satisfeita. Seja X um espaço UMD e $T \in B(X)$ um operador analítico. Assuma que:

1. A Propriedade (A) é satisfeita;
2. O conjunto $\{M(z); |z| = \alpha r, z \neq \alpha r\}$ é R -limitado, com

$$M(z) = (z - r)^2((z - r)^2 I - r^2(I - T))^{-1}, z \in \mathbb{T}_r^\alpha, z \neq \alpha r$$

Então existe uma única solução $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ para o problema (4.1) tal que $(\Delta_r^2 x_n)_{n \in \mathbb{Z}_+} \in ((I - T)x_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ pertence a $l_p(\mathbb{Z}_+, X)$. Ainda mais, vale a seguinte estimativa:

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \left[\frac{1}{\gamma(r, n)} (\|x_n\|_X + \|\Delta_r x_n\|_X) \right] \leq \|G(\bullet, 0, 0)\|_1 \|\rho_\bullet \gamma(r, \bullet)\|_1^{-1} e^{2A(r)} \quad (4.6)$$

e

$$\|\Delta_r^2 x_\bullet\|_p + \|r^2(I - T)x_\bullet\|_p \leq C(r) \|G(\bullet, 0, 0)\|_1 e^{2A(r)}, 1 < p < \infty \quad (4.7)$$

Onde $C(r)$ é uma constante que depende de r e $A(r) = 2(1 + 2\|\mathcal{K}^r\|)\theta(r)\|\rho_\bullet \gamma(r, \bullet)\|_1$.

Solução.

Seja $y \in l_{p,r}^2(\mathbb{Z}_+, X) \cap l_{p,I-T}(\mathbb{Z}_+, X)$. Então, usando a propriedade (A) e a proposição (4.0.1), temos:

$$\begin{aligned}
\|G(\bullet, y_\bullet, \Delta_r y_\bullet)\|_p^p &= \sum_{n=0}^{\infty} \|G(n, y_n, \Delta_r y_n)\|_X^p \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \|G(n, y_n, \Delta_r y_n) - G(n, 0, 0) + G(n, 0, 0)\|_X^p \\
&\leq 2^p \sum_{n=0}^{\infty} \|G(n, y_n, \Delta_r y_n) - G(n, 0, 0)\|_X^p + 2^p \sum_{n=0}^{\infty} \|G(n, 0, 0)\|_X^p \\
&\leq 2^p \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n^p \|(y_n, \Delta_r y_n)\|_{X \times X}^p + 2^p \sum_{n=0}^{\infty} \|G(n, 0, 0)\|_X^{p-1} \|G(n, 0, 0)\|_X \\
&\leq 2^p \sum_{n=0}^{\infty} (\|y_n\|_X + \|\Delta_r y_n\|_X)^p + 2^p \|G(\bullet, 0, 0)\|_{\infty}^{p-1} \sum_{n=0}^{\infty} \|G(n, 0, 0)\|_X \\
&\leq 2^p \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n^p \theta(r)^p \gamma(r, n)^p \|\Delta_r y_\bullet\|_p^p + 2^p \|G(\bullet, 0, 0)\|_{\infty}^{p-1} \|G(\bullet, 0, 0)\|_1 \\
&\leq 2^p \|\rho_\bullet \gamma(r, \bullet)\|_p^p \theta(r)^p \|\Delta_r y_\bullet\|_p^p + 2^p \|G(\bullet, 0, 0)\|_{\infty}^{p-1} \|G(\bullet, 0, 0)\|_1
\end{aligned}$$

Portanto, $G(\bullet, y_\bullet, \Delta_r y_\bullet) \in l_p(\mathbb{Z}_+, X)$. Pelo teorema 3.2, garantimos que o problema

$$\Delta_r^2 z_n - r^2(I - T)z_n = G(n, y_n, \Delta_r y_n), n \in \mathbb{Z}_+, z_0 = \Delta z_0 = 0 \quad (4.8)$$

Possui uma única solução $z = (z_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ tal que $(\Delta_r^2 z_n)$ e $((I - T)z_n)$ estão em $l_p(\mathbb{Z}_+, X)$ a qual é dada por:

$$z_n = [\mathcal{K}y]_n = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, 1; \\ [r^{\bullet-1} \mathcal{S} * G(\bullet, y_\bullet, \Delta_r y_\bullet)]_{n-1}, & \text{se } n \geq 2. \end{cases} \quad (4.9)$$

Procederemos a mostrar que o operador

$$\mathcal{K} : l_{p,r}^2(\mathbb{Z}_+, X) \cap l_{p,I-T}(\mathbb{Z}_+, X) \rightarrow l_{p,r}^2(\mathbb{Z}_+, X) \cap l_{p,I-T}(\mathbb{Z}_+, X)$$

Possui um único ponto fixo.

Dados $y^1, y^2 \in l_{p,r}^2(\mathbb{Z}_+, X) \cap l_{p,I-T}(\mathbb{Z}_+, X)$ e fazendo um breve cálculo usando a definição acima que:

$$\Delta_r^2 [\mathcal{K}y^1]_n - \Delta_r^2 [\mathcal{K}y^2]_n \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0; \\ [\mathcal{K}^r (G(\bullet, y_\bullet^1, \Delta_r y_\bullet^1) - G(\bullet, y_\bullet^2, \Delta_r y_\bullet^2))]_{n-1} \\ + G(n, y_n^1, \Delta_r y_n^1) - G(n, y_n^2, \Delta_r y_n^2), & \text{se } n \geq 1. \end{cases} \quad (4.10)$$

Como $\mathcal{K}^r$ é um operador limitado em $l_p(\mathbb{Z}_+, X)$ e tendo em vista a propriedade (A), a proposição (4.0.1), segue que:

$$\begin{aligned}
|||\mathcal{K}y^1 - \mathcal{K}y^2||| &\leq (1 + 2||\mathcal{K}^r||) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|G(n, y_n^1, \Delta_r y_n^1) - G(n, y_n^2, \Delta_r y_n^2)\|_X^p \right)^{1/p} \\
&\leq (1 + 2||\mathcal{K}^r||) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^p \|((y^1 - y^2)_n, (\Delta_r(y^1 - y^2))_n)\|_{X \times X}^p \right)^{1/p} \\
&\leq (1 + 2||\mathcal{K}^r||) \theta(r) \|\rho_\bullet \gamma(r, \bullet)\|_p \|\Delta_r^2 y^1 - \Delta_r^2 y^2\|_p \\
&\leq A(r) |||y^1 - y^2|||
\end{aligned}$$

Pelo corolário (4.0.1) em conjunto com o fato de que $\gamma(r, n)$ é não decrescente com respeito a segunda variável e usando a proposição (4.0.1) temos:

$$\begin{aligned}
&|||[\mathcal{K}y^1]_n - [\mathcal{K}y^2]_n||| \\
&\leq (1 + ||\mathcal{K}^r||) \theta(r) \gamma(r, n) \sum_{s=0}^{n-1} \rho_s \|((y^1 - y^2)_s, \Delta_r(y^1 - y^2)_s)\|_{X \times X} \\
&\quad (1 + ||\mathcal{K}^r||) \theta(r)^2 \gamma(r, n) \left(\sum_{s=0}^{n-1} \rho_s \gamma(r, s) \right) |||y^1 - y^2|||
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\|\Delta_r[\mathcal{K}y^1]_n - \Delta_r[\mathcal{K}y^2]_n\|_X \leq (1 + ||\mathcal{K}^r||) \theta(r)^2 \gamma(r, n) \left(\sum_{s=0}^{n-1} \rho_s \gamma(r, s) \right) |||y^1 - y^2|||$$

Pelas duas estimativas anteriores, obtemos:

$$\begin{aligned}
&\|([\mathcal{K}y^1 - \mathcal{K}y^2]_n, \Delta_r[\mathcal{K}y^1 - \mathcal{K}y^2]_n)\|_{X \times X} \\
&\leq 2(1 + ||\mathcal{K}^r||) \theta(r)^2 \gamma(r, n) \left(\sum_{s=0}^{n-1} \rho_s \gamma(r, s) \right) |||y^1 - y^2|||
\end{aligned}$$

Onde por fim, concluímos:

$$\begin{aligned}
|||\mathcal{K}y^1 - \mathcal{K}y^2||| &\leq (1 + 2||\mathcal{K}^r||) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^p \|([\mathcal{K}y^1 - \mathcal{K}y^2]_n, \Delta_r[\mathcal{K}y^1 - \mathcal{K}y^2]_n)\|_{X \times X}^p \right)^{1/p} \\
&\leq [2(1 + 2||\mathcal{K}^r||) \theta(r)]^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\rho_n \gamma(r, n))^p (\rho_s \gamma(r, s))^p \right)^{1/p} |||y^1 - y^2||| \\
&\leq \frac{1}{2} A(r)^2 |||y^1 - y^2|||
\end{aligned}$$

Um argumento indutivo, nos dá o seguinte resultado,

$$|||\mathcal{K}^n y^1 - \mathcal{K}^n y^2||| \leq \frac{1}{n!} A(r)^n |||y^1 - y^2||| \quad (4.11)$$

Fixado $r \in \mathbb{R}$, sabemos que $A(r)$ é uma constante e portanto, para n suficientemente grande é possível obter

$$\frac{1}{n!} A(r)^n < 1$$

Assim, pelo Princípio dos Iterados, temos que o operador $\mathcal{K}$ admite único ponto fixo $x \in l_{p,r}^2(\mathbb{Z}_+, X) \cap l_{p,I-T}(\mathbb{Z}_+, X)$. Resta mostrar a estimativa dada em (4.7). Com efeito, x o único ponto fixo de $\mathcal{K}$, então pelo corolário (4.0.1), temos:

$$\begin{aligned} \|x_n\|_X &= \|[r^{\bullet-1} \mathcal{S} * G(\bullet, x_\bullet, \Delta_r x_\bullet)]_{n+1}\|_X \\ &\leq (1 + \|\mathcal{K}^r\|) \theta(r) \gamma(r, n) \left(\sum_{s=0}^{n-1} \rho_s \|(x_s, \Delta_r x_s)\|_{X \times X} + \|G(\bullet, 0, 0)\|_1 \right) \end{aligned}$$

E de maneira análoga, obtemos:

$$\|\Delta_r x_n\|_X \leq (1 + \|\mathcal{K}^r\|) \theta(r) \gamma(r, n) \left(\sum_{s=0}^{n-1} \rho_s \|(x_s, \Delta_r x_s)\|_{X \times X} + \|G(\bullet, 0, 0)\|_1 \right) \quad (4.12)$$

Pelas duas estimativas anteriores, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma(r, n)} \|(x_n, \Delta_r x_n)\|_{X \times X} &\leq 2(1 + \|\mathcal{K}^r\|) \theta(r) \|G(\bullet, 0, 0)\|_1 \\ &\quad + 2(1 + \|\mathcal{K}^r\|) \theta(r) \left(\sum_{s=0}^{n-1} \rho_s \gamma(r, s) \frac{\|(x_s, \Delta_r x_s)\|_{X \times X}}{\gamma(r, s)} \right) \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Gronwall em seu fomato discreto conforme o apêndice, garantimos que:

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \left[\frac{1}{\gamma(r, n)} (\|x_n\|_X + \|\Delta_r x_n\|_X) \right] \leq \|G(\bullet, 0, 0)\|_1 \|\rho_\bullet \gamma(r, \bullet)\|_1^{-1} e^{2A(r)}$$

Por fim, como

$$\Delta_r^2 x_n = [\mathcal{K}^r G(\bullet, x_\bullet, \Delta_r x_\bullet)]_{n-1} + G(n, x_n, \Delta_r x_n)$$

Usando a estimativa anterior, concluímos que

$$\begin{aligned} \|\Delta_r^2 x_\bullet\|_p &\leq (r^2 + 1 + \|\mathcal{K}^r\|) \sum_{n=0}^{\infty} \|G(n, x_n, \Delta_r x_n)\|_X \\ &\leq (r^2 + 1 + \|\mathcal{K}^r\|) \left(\sum_{s=0}^{\infty} \rho_s \gamma(r, s) \frac{\|(x_s, \Delta_r x_s)\|_{X \times X}}{\gamma(r, s)} + \|G(\bullet, 0, 0)\|_1 \right) \\ &\leq (r^2 + 1 + \|\mathcal{K}^r\|) (1 + e^{2A(r)}) \|G(\bullet, 0, 0)\|_1 \end{aligned}$$

Separando as constantes em função de r e reescrevendo a constante resultante como $C(r)$, temos o resultado.

□

REFERÊNCIAS

- 1 BLUNCK, S. *Maximal regularity of discrete and continuous time evolution equations.* Studia Mathematica, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, v. 146, p. 157–176, 2001.
- 2 PIE, T. G. *Spectral decompositions and harmonic analysis on umd spaces.* 1994.
- 3 BOURGAIN, J. *Vector-valued singular integrals and the h^1 -bmo duality.* Probability theory and harmonic analysis, Marcel Dekker, p. 1–19, 1986.
- 4 WEIS, L. *Operator-valued fourier multiplier theorems and maximal l_p -regularity.* Mathematische Annalen, Springer, v. 319, n. 4, p. 735–758, 2001.
- 5 WEIS, L. *A new approach to maximal l^p -regularity.* Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, New York; Marcel Dekker; 1999, p. 195–214, 2001.
- 6 CUEVAS, C.; LIZAMA, C. *Maximal regularity of discrete second order cauchy problems in banach spaces.* Journal of Difference Equations and Applications, Taylor & Francis, v. 13, n. 12, p. 1129–1138, 2007.
- 7 CUEVAS, C.; LIZAMA, C. *Semilinear evolution equations of second order via maximal regularity.* Advances in Difference Equations, Springer, v. 2008, n. 1, p. 316207, 2008.
- 8 CUEVAS, C.; PINTO, M. *Asymptotic properties of solutions to nonautonomous volterra difference systems with infinite delay.* Computers & Mathematics with Applications, Elsevier, v. 42, n. 3, p. 671–685, 2001.
- 9 CASTRO, A.; CUEVAS, C.; LIZAMA, C. *Well-posedness of second order evolution equation on discrete time.* Journal of Difference Equations and Applications, Taylor & Francis, v. 16, n. 10, p. 1165–1178, 2010.
- 10 CASTRO, A.; CUEVAS, C. *Perturbation theory, stability, boundedness and asymptotic behaviour for second order evolution equation in discrete time.* Journal of Difference Equations and Applications, Taylor & Francis, v. 17, n. 03, p. 327–358, 2011.
- 11 AGARWAL, R. P.; CUEVAS, C.; LIZAMA, C. *Regularity of Difference Equations on Banach Spaces.* [S.l.]: Springer, 2014.
- 12 DENK, R.; HIEBER, M.; PRÜSS, J. *R-boundedness, Fourier multipliers and problems of elliptic and parabolic type.* [S.l.]: American Mathematical Soc., 2003. v. 166.
- 13 HYTÖNEN, T. *R-boundedness and multiplier theorems.* [S.l.]: Helsinki University of Technology, 2001.
- 14 BOURGAIN, J. *Some remarks on banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional.* Arkiv för matematik, Springer, v. 21, n. 1-2, p. 163, 1983.
- 15 GRANAS, A.; DUGUNDJI, J. *Fixed point theory.* [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013.