



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA
CURSO DE MESTRADO

LARISSE VIEIRA DE MELO

**CONHECIMENTOS MOBILIZADOS POR ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO EM
SITUAÇÕES QUE ENVOLVEM VOLUME DO PARALELEPÍPEDO RETÂNGULO:
um Estudo Sob a Ótica das Imbricações entre Campos Conceituais**

Recife
2018

LARISSE VIEIRA DE MELO

**CONHECIMENTOS MOBILIZADOS POR ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO EM
SITUAÇÕES QUE ENVOLVEM VOLUME DO PARALELEPÍPEDO RETÂNGULO:
um Estudo Sob a Ótica das Imbricações entre Campos Conceituais**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco – Centro de Educação, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Área de Concentração: Ensino de Ciências e Matemática

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Rosinalda Aurora de Melo Teles

Recife
2018

Catálogo na fonte
Bibliotecária Amanda Nascimento, CRB-4/1806

M528c Melo, Larisse Vieira de
 Conhecimentos mobilizados por estudantes do ensino médio em situações que envolvem volume do paralelepípedo retângulo: um estudo sob a ótica das imbricações entre campos conceituais / Larisse Vieira de Melo. – Recife, 2018.
 154 f. : il.

 Orientadora: Rosinalda Aurora de Melo Teles
 Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2018.

 Inclui Referências e Apêndices.

 1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Paralelepípedo. 3. Educação - Matemática. 4. UFPE - Pós-graduação. I. Teles, Rosinalda Aurora de Melo (Orientadora). II. Título.

372.7 (22. ed.)

UFPE (CE2019-044)

LARISSE VIEIRA DE MELO

**CONHECIMENTOS MOBILIZADOS POR ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO EM
SITUAÇÕES QUE ENVOLVEM VOLUME DO PARALELEPÍPEDO RETÂNGULO:
um Estudo Sob a Ótica das Imbricações entre Campos Conceituais**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco – Centro de Educação, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Aprovada em: 09/03/18

BANCA EXAMINADORA

Prof^a. Dr^a. Rosinalda Aurora de Melo Teles (Presidente e orientadora)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof^a. Dr^a. Paula Moreira Baltar Bellemain (Examinadora Interna)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof^a. Dr^a. Veridiana Rezende (Examinadora Externa)
Universidade Estadual do Paraná

AGRADECIMENTOS

Ao meu bom Deus pela minha vida, por me proporcionar a concretização dessa conquista e de tantas outras, por ter me dado força no momento que mais precisei e por colocar pessoas especiais na minha vida. Sem Ele não estaria aqui.

À minha família, pai e mãe pelos seus ensinamentos, por me incentivaram aos estudos, por me apoiaram nas minhas decisões e por sempre compreenderem minha ausência nos momentos de estudos. Ao meu irmão (in memoriam) sempre aceitou minhas decisões e esteve disposto em me ajudar do jeito dele. Aos meus tios e primos que torceram por mim. À minha madrinha Lúcia (in memoriam) que sempre acreditou na minha capacidade.

Ao meu noivo Marcel, amor da minha vida, que sempre me apoiou, incentivou e acreditou em mim desde o momento da seleção do mestrado até a finalização da escrita e da defesa da dissertação. Obrigada por compartilhar comigo momentos de estudos desde o tempo da faculdade. Sou grata por você fazer parte da minha vida.

À minha orientadora professora Dra. Rosinalda Aurora de Melo Teles, pelos ensinamentos, orientação, disposição para me atender e tirar minhas dúvidas. Lembro do dia que fiquei sabendo que a senhora seria minha orientadora, como me senti feliz, pois apesar de não a conhecer direito, sabia da sua trajetória acadêmica e as pessoas já tinham me falado coisas boas ao seu respeito. Esses dois anos ao seu lado confirmaram o que as pessoas me falaram. Foi uma honra tê-la como orientadora, pois a senhora é um exemplo de profissional e pessoa. Gratidão por toda confiança depositada em mim.

Às professoras Dra. Veridiana Rezende e Dra. Paula Baltar por terem aceitado o convite de participarem da banca de defesa e de qualificação e pelas valiosas contribuições.

À professora Dra. Paula Baltar pelas sugestões de textos, pela leitura dos meus textos e os comentários nas apresentações em seminários, suas contribuições foram fundamentais no desenvolvimento desta pesquisa.

Aos participantes da pesquisa, diretores, coordenadores e professores das escolas participantes.

À Diógenes Maclyne e Lúcia Durão por me apresentar o Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (EDUMATEC), pelo incentivo, apoio e pelas contribuições no processo seletivo do mestrado. Obrigada Diógenes por ter aumentado ainda mais minha paixão pela Educação Matemática por meio de suas aulas na graduação em Licenciatura em Matemática. Gratidão por ter sido sua aluna.

À Marilene Rosa por todo suporte, contribuições e ensinamentos no período da seleção do mestrado.

À professora Dra. Cristiane Pessoa pela oportunidade de ser sua estagiária no estágio de docência na disciplina de Pesquisa e Prática Pedagógica V, pois foi uma experiência muito enriquecedora que contribuiu positivamente na minha vida acadêmica e profissional. Obrigada por todos os seus ensinamentos.

Ao Grupo Pró-Grandeza por toda aprendizagem e experiência que passei ao longo desses dois anos. Aos amigos do grupo Pró-Grandeza, em especial Aluska, André Costa, Marilene Rosa e Lúcia Durão pelas contribuições, pelo apoio e pelas conversas descontraídas.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (EDUMATEC), em especial a Cristiane Pessoa, Paula Baltar e Sérgio Abranches, por seus ensinamentos.

À secretaria do EDUMATEC, nas pessoas de Clara e Mário, pela atenção, paciência e disponibilidade de sempre esclarecer dúvidas.

À linha de pesquisa Didática da Matemática por toda aprendizagem, ensinamentos e contribuições durante as aulas de seminários.

À minha turma de Mestrado 2016 por todos os momentos compartilhados. Em especial Amanda por me ajudar com a construção dos sólidos geométricos e Anaelize (Ninha) por torcer por mim e por dividir momentos de aprendizagens no período de estágio de docência.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo apoio financeiro durante o período do mestrado.

Por fim, agradeço a todos meus amigos que de uma forma direta ou indireta contribuíram para realização desta pesquisa.

RESUMO

Neste estudo analisa-se conhecimentos mobilizados por alunos do Ensino Médio na resolução de problemas envolvendo volume do paralelepípedo retângulo, sob a ótica das Imbricações entre Campos Conceituais. Como aporte teórico, utiliza-se elementos da Teoria dos Campos Conceituais desenvolvida por Gérard Vergnaud, o olhar das Imbricações entre Campos Conceituais proposto por Teles e a conceituação de volume como grandeza adaptado do modelo didático de Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian sobre a conceituação de área como uma grandeza. Participaram deste estudo 107 alunos dos segundos e terceiros anos do Ensino Médio de três escolas públicas estaduais, localizadas no Agreste Meridional de Pernambuco. Foram utilizados dois instrumentos para coleta de dados: testes diagnósticos compostos por 5 problemas cada um envolvendo volume do paralelepípedo retângulo e entrevistas baseadas em alguns elementos de entrevista de explicitação. A análise dos dados permitiu identificar procedimentos mobilizados pelos alunos na resolução dos problemas, relacionados aos diferentes campos conceituais. Os resultados evidenciaram que nos procedimentos que conduziram as respostas corretas, os alunos mobilizaram conhecimentos do campo geométrico, do campo das grandezas, do campo algébrico e do campo numérico. Em relação aos procedimentos errôneos, identificamos erros referentes a todos esses campos, com ênfase maior em dificuldades relacionadas aos campos das grandezas, geométrico numérico. A partir dos resultados dessa análise foi possível identificar quatro teoremas em ação corretos e seis errôneos relacionados ao campo das grandezas e ao campo geométrico. Evidenciou-se que as fórmulas, as figuras, as unidades de medidas e os números foram as representações simbólicas utilizadas pelos alunos para resolver as questões dos testes. Dentre as considerações gerais realizadas sobre conhecimentos mobilizados pelos alunos, sob a ótica das imbricações entre campos conceituais, destacamos: no que diz respeito à influência do campo das grandezas e do campo geométrico o conceito de volume e de área, o emprego das unidades de medida correto e incorreto, a mobilização da fórmula do volume, na identificação dos sólidos geométricos e suas propriedades; e o fato que os maiores índices de ausência de resposta foram constatados nas questões que exigiam a mobilização de conhecimentos de diferentes campos conceituais.

Palavras-Chave: Ensino de Matemática. Imbricações entre Campos Conceituais. Volume do Paralelepípedo Retângulo. Teoremas em ação.

ABSTRACT

In this study the knowledge applied by high school students in solving problems involving the volume of the rectangle parallelepiped is analysed, from the perspective of Imbrications between Conceptual Fields. As a theoretical basis, elements of the Conceptual Field Theory developed by Gérard Vergnaud are used, also the concept of the Imbrications between Conceptual Fields exposed by Teles and also the concept of volume as a greatness adapted from Régine Douady and Marie-Jeanne Perrin-Glorian's didactic model about the understanding of area as a quantity. A total of 107 third and second year of high school students from three public state schools, located in the Southern Agreste region of Pernambuco State, participated of this study. Two instruments were used for data collection: diagnostic tests composed by 5 questions, each involving the volume of the rectangle parallelepiped and interviews based on some elements of the exploitation interview. Data analysis allowed the identification of procedures applied by students to solve problems related to different conceptual fields. The results showed that in the procedures that led to the correct answers, the students applied knowledge of the geometric field, the field of quantities, the algebraic field and the numerical field. Regarding the erroneous procedures, errors related to all these fields were identified, with greater emphasis on difficulties related to the fields of quantities and numerical geometric. From the results of this analysis it was possible to identify four correct theorems in action and six erroneous related to the field of quantities and the geometric field. It was evident that the formulas, figures, units of measurement and numbers were the symbolic representations used by students to solve the test questions. Among the general considerations made about the knowledge applied by the students, from the perspective of the imbrications between conceptual fields, it is important to highlight: with regard to the influence of the field of quantities and the geometric field, the concept of volume and area, the correct and incorrect use of units of measurement, the application of the volume formula in the identification of geometric solids and their properties; and the fact that the highest rates of non-response were found in the questions that required the application of knowledge from different conceptual fields.

Keywords: Mathematics Teaching. Imbrication between Conceptual Fields. Volume of the Rectangle Parallelepiped . Theorems in action.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Problema envolvendo volume do paralelepípedo retângulo.....	25
Figura 2 - Problema que possibilita a articulação dos aspectos unidimensional e tridimensional.....	34
Figura 3 - Organização conceitual de volume como grandeza.....	36
Figura 4 - Componentes das grandezas geométricas.....	37
Figura 5 - Prisma de base pentagonal.....	39
Figura 6 - Tipos de paralelepípedo	40
Figura 7 - Exemplo de atividade que explora o conceito de capacidade.....	41
Figura 8 - Exemplo de situação de comparação que favorece o procedimento medição e comparação das medidas.....	44
Figura 9 - Exemplo de situação de comparação que favorece o procedimento medição e comparação das medidas.....	45
Figura 10 - Exemplo de situação de medição que favorece o procedimento contagem das unidades de medida.....	47
Figura 11 - Princípio de Cavalieri	47
Figura 12 - Exemplo de situação de medição que proporciona o procedimento de imersão ...	48
Figura 13 - Exemplo de situação de produção que favorece o procedimento de composição e o de decomposição-recomposição.....	50
Figura 14 - Extrato do protocolo do aluno 45 na Q1T4	78
Figura 15 - Extrato do protocolo do aluno 32 Q1T3	79
Figura 16 - Extrato do protocolo do aluno 36 Q1T3	80
Figura 17 - Extrato do protocolo do aluno 26 Q1T2	80
Figura 18- Extrato do protocolo do aluno 4 Q5T1	81
Figura 19 - Extrato do protocolo do aluno 98 Q5T3	82
Figura 20 - Extrato do protocolo do aluno 14 Q5T2	83
Figura 21 - Extrato do protocolo do aluno 3 Q5T1	83
Figura 22 - Extrato do protocolo do aluno 8 Q5T1	84
Figura 23 - Extrato do protocolo do aluno 2 da Q2T1	87
Figura 24 - Extrato do protocolo do aluno 42 na Q2T4	87
Figura 25 - Extrato do protocolo do aluno 6 na Q2T1	88

Figura 26- Extrato do protocolo do aluno 76 na Q2T3	89
Figura 27 - Extrato do protocolo do aluno 1 na Q3T1	91
Figura 28 - Extrato do protocolo do aluno 31 na Q3T3	92
Figura 29 - Extrato do protocolo do aluno 12 na Q3T1	92
Figura 30- Extrato do protocolo do aluno 45 na Q3T4	93
Figura 31 - Extrato do protocolo do aluno 35 na Q3T3	94
Figura 32 - Extrato do protocolo do aluno 41 na Q4T4	96
Figura 33 - Extrato do protocolo do aluno 38 na Q4T3	97
Figura 34 - Extrato do protocolo do aluno 5 na Q4T1	97
Figura 35 - Extrato do protocolo do aluno 27 na Q4T3	98
Figura 36 - Extrato do protocolo do aluno 28 na Q4T3	98
Figura 37 - Extrato do protocolo do aluno 2 na Q4T1	99
Figura 38 - Extrato do protocolo do aluno 41 na Q4T4	99
Figura 39 - Extrato do protocolo do aluno 40 na Q4T4	100
Figura 40 - Extrato do protocolo do aluno 45 na Q4T4	101
Figura 41 - Extrato do protocolo do aluno 1 na Q1T1	106
Figura 42 - Extrato do protocolo do aluno 30 na Q3T3	107
Figura 43 - Extrato do protocolo do aluno 38 na Q4T3	108
Figura 44 - Extrato do protocolo do aluno 28 na Q4T3	109
Figura 45 - Extrato do protocolo do aluno 1 na Q4T1	109
Figura 46 - Extrato do protocolo do aluno 76 na Q3T3	111
Figura 47 - Extrato do protocolo do aluno 22 na Q1T2	112
Figura 48 - Extrato do protocolo do aluno 28 na Q4T3	113
Figura 49 - Extrato do protocolo do aluno 10 na Q4T1	113
Figura 50 - Extrato do protocolo do aluno 8 Q5T1	114
Figura 51 - Extrato do protocolo do aluno 29 Q4T3	116
Figura 52 - Extrato do protocolo do aluno 106 Q5T4	119
Figura 53 - Extrato do protocolo do aluno 31 Q2T3	119
Figura 54 - Extrato do protocolo do aluno 104 Q3T4	120
Figura 55 - Extrato do protocolo do aluno 37 Q2T3	121
Figura 56 - Extrato do protocolo do aluno 48 na Q1T4	123
Figura 57 - Extrato do protocolo do aluno 53 na Q1T1	124
Figura 58 - Extrato do protocolo do aluno 89 na Q4T1	125
Figura 59 - Extrato do protocolo do aluno 5 na Q4T1	126

Figura 60 - Extrato do protocolo do aluno 98 na Q4T3	126
Figura 61 - Extrato do protocolo do aluno 32 na Q1T3	127
Figura 62- Extrato do protocolo do aluno 14 Q1T2	129
Figura 63 - Extrato do protocolo do aluno 45 na Q4T4	130
Figura 64 - Extrato do protocolo do aluno 40 na Q4T4	130
Figura 65 - Extrato do protocolo do aluno 17 na Q4T2	131
Figura 66 - Extrato do protocolo do aluno 02 na Q5T1	131
Figura 67 - Extrato do protocolo do aluno 106 na Q5T4	132
Figura 68 - Extrato do protocolo do aluno 51 nas Q2 e Q3 do T4	133

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Exemplo de situação de produção que favorece o procedimento uso de fórmulas.....	50
Quadro 2 - Perfil dos Testes.....	59
Quadro 3 - Participantes da pesquisa	75
Quadro 4 - Variáveis com seus respectivos valores.....	102
Quadro 5 - Teoremas em ação corretos.....	110
Quadro 6 - Teoremas em ação errôneos.....	115

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Desempenho dos alunos nas questões de controle	77
Gráfico 2 - Resultados nos três tipos de situações	104
Gráfico 3 - Percentual dos alunos que desenharam figuras	118
Gráfico 4 - Uso das unidades de medida.....	128
Gráfico 5 - Percentual de ausência de resposta	134

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Respostas nas situações de comparação.....	86
Tabela 2 - Respostas nas situações de medição	90
Tabela 3 - Respostas nas situações de produção	95

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	22
2.1	Teoria dos Campos Conceituais	22
2.2	Revisão de Literatura	26
2.3	O Estudo de Vergnaud sobre Volume.....	31
2.4	Conceito de Volume como Grandeza	35
2.5	Paralelepípedo Retângulo	38
2.6	Volume e Capacidade	40
2.7	Situações que Dão Sentido ao Conceito de Volume	42
2.7.1	Situações de comparação	43
2.7.2	Situações de medição.....	46
2.7.3	Situações de produção.....	49
2.8	Objetivos	51
2.8.1	Objetivo geral:	51
2.8.2	Objetivos específicos:	52
3	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	53
3.1	Participantes da Pesquisa.....	53
3.2	Etapas da Pesquisa.....	54
3.3	Descrição das Variáveis.....	56
3.3.1	Construção dos testes diagnósticos.....	57
3.4	Apresentação e Análise a Priori das Questões dos Testes	60
3.4.1	Questão 1	60
3.4.2	Questão 2	62
3.4.3	Questão 3	64
3.4.4	Questão 4	67

3.4.5	Questão 5	72
4	ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS	75
4.1	Procedimentos de Resolução nas Questões de Controle.....	76
4.2	Procedimentos Mobilizados nos Três Tipos de Situações	84
4.2.1	Procedimentos mobilizados nas situações de comparação	85
4.2.1	Procedimentos mobilizados nas situações de medição	89
4.2.3	Procedimentos mobilizados nas situações de produção.....	94
4.2.4	Influência das variáveis didáticas na resolução de problemas envolvendo volume do paralelepípedo retângulo	101
4.2.5	Análise comparativa dos resultados obtidos nos três tipos de situações	103
4.3	Teoremas em Ação Mobilizados por Alunos em Problemas Envolvendo Volume do Paralelepípedo Retângulo	105
4.4	Representações Simbólicas Utilizadas por Alunos na Resolução de Problemas Envolvendo Volume Paralelepípedo Retângulo	116
4.5	Considerações Gerais sobre a Resolução de Problemas Envolvendo Volume Paralelepípedo Retângulo, sob a Ótica das Imbricações entre Campos Conceituais.....	122
4.5.1	Influência do campo das grandezas e do campo geométrico	122
4.5.2	Influência do campo algébrico.....	129
4.5.3	Influência do campo numérico.....	131
4.5.4	O papel das Imbricações na ausência de resposta.....	133
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	136
	REFERÊNCIAS	141
	APÊNDICE A - TESTE 1.....	145
	APÊNDICE B - TESTE 2	147
	APÊNDICE C - TESTE 3.....	148
	APÊNDICE D - TESTE 4.....	150
	ANEXO A - QUESTÕES RETIRADAS DO TRABALHO DE MORAIS (2013).152	

ANEXO B - QUESTÕES RETIRADAS DO TRABALHO DE FIGUEIREDO (2013).....	153
ANEXO C - QUESTÃO RETIRADA DO VESTIBULAR 2016 DO ENSINO TÉCNICO DO CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS.....	154

1 INTRODUÇÃO

Esta pesquisa tem por objetivo analisar conhecimentos mobilizados por alunos do Ensino Médio na resolução de problemas envolvendo volume do paralelepípedo retângulo, sob a ótica das Imbricações entre Campos Conceituais. Consideramos a grandeza volume pertencente ao campo conceitual das grandezas. No entanto, para ajudar na construção das ideias deste estudo e subsidiar a discussão sobre campo conceitual, inicialmente apresentaremos como os conteúdos matemáticos são organizados em documentos curriculares brasileiros.

Com a implantação dos Parâmetros Curriculares Nacionais, os PCN (BRASIL, 1997; 1998), os conteúdos do ensino escolar de matemática foram organizados em 4 blocos: Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação. Em documentos mais recentes, como os Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco (2012), o Guia do Programa Nacional do Livro Didático - PNLD 2012 (BRASIL, 2011), os conteúdos matemáticos são divididos em 5 eixos/campos: Geometria, Estatística e Probabilidade, Álgebra e Funções, Grandezas e Medidas e Números e Operações. Conforme apresentado, diferentes documentos curriculares utilizam nomenclaturas distintas para representar o agrupamento dos conteúdos matemáticos.

Entretanto, a existência desse agrupamento de conteúdos não implica que relações entre os eixos não possam ou não devam existir. Essas relações, em alguns casos, são fundamentais para a compreensão de determinados conceitos. Apresentando essa mesma preocupação, o guia dos livros do PNLD 2012 (BRASIL, 2011) aponta que a matemática escolar não deve ser considerada como justaposição de eixos estanques, mas sim como um conjunto de conhecimentos com muitas conexões entre si.

Nos PCN (BRASIL, 1998) afirma-se que o eixo das grandezas e medidas possibilita férteis articulações com os outros eixos da matemática, pois está conectado com o estudo da geometria e com os distintos conjuntos numéricos. Lima e Bellemain (2010) corroboram com essas ideias ao declararem que uma das razões de trabalhar com eixo das grandezas e medidas é a possibilidade das articulações deste com os outros eixos da matemática.

Neste trabalho, as palavras eixos e blocos de conteúdos são utilizadas para designar a organização e distribuição dos conteúdos matemáticos para o ensino. Por adotarmos a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Gérard Vergnaud como referencial teórico, a palavra

“campo” será utilizada no significado da TCC, como um conjunto de situações, de invariantes operatórios e de representações simbólicas que dão sentido a um conceito.

Os estudos de Vergnaud são amplamente divulgadas no meio acadêmico e também no ambiente escolar as definições para o campo conceitual das Estruturas Aditivas e para o campo das Estruturas Multiplicativas. No entanto, no trabalho de Teles (2007), a autora usa expressões como campos conceituais das grandezas, da geometria, numérico, algébrico e funcional na Matemática Escolar para designar a caracterização destes sob os pontos de vista histórico, conceitual, didático e cognitivo, ou seja, uma visão mais global destes campos, menos aprofundada e rigorosa cognitivamente que a definição de Vergnaud, mas ao mesmo tempo contemplando elementos importantes que extrapolam apenas a noção de “eixo ou bloco de conteúdos”. Neste sentido, por exemplo, as estruturas aditivas e as estruturas multiplicativas fariam parte do campo numérico.

Vergnaud (1996) considera que o conhecimento está organizado em campos conceituais. Um campo conceitual pode ser compreendido como conjuntos de situações estreitamente articuladas cujo domínio exige uma variedade de conceitos, procedimentos e representações (VERGNAUD, 1986). Diante disso, evidencia-se que um conceito pode pertencer a mais de um campo conceitual, assim como um teorema em ação pode ser mobilizado em relação a mais de um campo conceitual.

Além disso, os campos conceituais subtendem aspectos cognitivos complexos e completos para construção de um conceito, enquanto “eixos ou blocos de conteúdos” referem-se a um modo de organizar os temas que serão abordados na escola.

Diante disso, consideramos o conceito de volume enquanto componente do eixo das grandezas e medidas e do campo conceitual das grandezas, mas com fortes articulações com outros campos conceituais. Com o intuito de delimitar esta pesquisa, optamos em trabalhar o conceito de volume com foco em paralelepípedos retângulos. Esta escolha se justifica, dentre outros motivos, pelo fato deste sólido ser bastante abordado em diversas etapas da escolarização, além de ser possível associá-lo a diversos objetos do mundo físico.

A grandeza volume, assim como área, comprimento e abertura de ângulo faz parte do campo das grandezas geométricas e suas medidas. O estudo das grandezas geométricas é uma forma de promover a ligação entre o campo das grandezas e o campo da geometria (LIMA; CARVALHO, 2010). Esta ideia é reforçada por Figueiredo quando afirma que para a “construção de um conceito de grandeza geométrica é importante para o aluno saber relacionar os campos numérico e geométrico, e associá-los ao campo das grandezas” (2013, p. 26). Esta mesma autora constatou em seu estudo que em problemas que o aluno não

representava corretamente o sólido, errava também a fórmula para o cálculo do volume e não representava corretamente a unidade de medida. Isso evidenciou, para aquela autora, que o erro no problema de volume pode ter sua origem em dificuldades no campo geométrico (propriedades das figuras), ocasionando a mobilização da fórmula e da unidade de medida de modo equivocado.

Um reflexo da falta de articulação entre os campos conceituais pode ser observado, por exemplo, quando um aluno ao responder um problema envolvendo área ou volume das figuras geométricas erra a resolução desse problema por ter dificuldade no campo geométrico (propriedades das figuras) ou no campo numérico (operações com números reais) e não por dificuldade no campo das grandezas e medidas (área ou volume). Neste exemplo, o estudante além de mobilizar conceitos do campo das grandezas e medidas, precisaria mobilizar corretamente conceitos do campo geométrico e do campo numérico para resolver o problema envolvendo área ou volume.

Diante deste contexto, evidenciamos que dificuldades em determinados campos conceituais podem levar os alunos a errarem questões relacionadas a outro campo conceitual. Dessa forma, ratificamos que os campos conceituais são inter-relacionados, pois para resolver situações que envolvem conceito de um campo, o aluno precisa mobilizar conhecimentos de outros campos, como estudado por Teles (2007).

Para Teles (2007), estas relações entre campos que influenciam erros e procedimentos, podem ser chamadas de Imbricações entre Campos Conceituais, pois o termo imbricação caracteriza “um tipo de relação em que os campos conceituais se sobrepõem mutuamente, se articulam e a partir dessa “interconexão dinâmica” são gerados novos significados para os conteúdos matemáticos em foco” (TELES, 2007, p.18).

Ressaltamos que o presente trabalho foi motivado por reflexões de dificuldades que os alunos dos diferentes níveis de ensino apresentam em problemas envolvendo o conceito de volume, relatadas em diversas pesquisas (BARROS, 2002; OLIVEIRA, 2002, 2007; FIGUEIREDO, 2013) que abordaram esse objeto matemático, e propõe-se a investigar essas dificuldades sob a ótica das Imbricações ou articulações entre Campos conceituais.

Portanto, com base nos resultados de pesquisas anteriores, surgem alguns questionamentos: quais campos estariam envolvidos na resolução de situações relacionadas ao conceito de volume? Quais conhecimentos dos diferentes campos conceituais são mobilizados pelos alunos na resolução de situações que envolvem a grandeza volume?

A questão central deste estudo será, portanto: que conhecimentos dos campos conceituais das grandezas, da geometria, numérico e algébrico são mobilizados por alunos do

Ensino Médio na resolução de problemas que envolvem o volume do paralelepípedo retângulo?

No intuito de responder nossa questão de pesquisa, traçamos como objetivo geral: analisar conhecimentos mobilizados por alunos na resolução de problemas envolvendo volume do paralelepípedo retângulo, sob a ótica das imbricações entre campos conceituais. Para isso, utilizaremos a TCC de Gérard Vergnaud (1996), para identificar os invariantes operatórios e as representações simbólicas mobilizadas pelos alunos, e o olhar das Imbricações entre Campos Conceituais de Teles (2007) para identificar e analisar conhecimentos dos diferentes campos conceituais mobilizados por esses alunos.

Nosso texto está organizado em 5 capítulos. No capítulo 2 discorremos a fundamentação teórica e a revisão de literatura. Primeiramente, apresentamos elementos da TCC desenvolvida por Vergnaud (1996) e das Imbricações entre Campos Conceituais proposta por Teles (2007). Na sequência, discutimos a revisão de literatura das pesquisas que investigaram a grandeza volume; apresentamos alguns elementos da pesquisa de Vergnaud sobre volume; realizamos uma discussão sobre volume como grandeza de acordo com a organização conceitual de área como grandeza desenvolvida por Douady e Perrin-Glorian (1989).

Ainda nesse capítulo apresentamos algumas considerações sobre o paralelepípedo retângulo; volume e capacidade; realizamos uma discussão a respeito das situações que dão sentido ao conceito de volume proposta por Morais, Figueiredo e Bellemain (2012). Finalizamos o capítulo reapresentando os objetivos da pesquisa.

O capítulo 3 é destinado aos procedimentos metodológicos deste trabalho, no qual apresentamos os participantes, as etapas da pesquisa, a descrição das variáveis envolvidas nos testes diagnósticos. Para finalizar o capítulo explicitamos a construção e a análise a priori das questões dos testes diagnósticos.

No capítulo 4, discorremos a análise e a discussão dos dados, inicialmente destacamos a análise dos procedimentos de resolução nas questões de controle e nas situações que dão sentido ao conceito de volume. Posteriormente, apresentamos a influência das variáveis didáticas, a análise comparativa dos resultados obtidos nos três tipos de situações, os teoremas em ação identificados e a análise das representações simbólicas mobilizadas pelos alunos na resolução dos problemas. Finalizamos apresentando as considerações gerais sobre a resolução de problemas envolvendo volume do paralelepípedo retângulo, sob a ótica das Imbricações entre Campos Conceituais.

Por fim, no capítulo 5, sistematizamos nossas considerações finais com os resultados da pesquisa e com indicação para pesquisas futuras.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo abordaremos inicialmente elementos da Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1996) e das Imbricações entre Campos Conceituais (TELES, 2007). Posteriormente, apresentaremos na revisão de literatura alguns estudos que abordaram a grandeza volume. Entre elas, a pesquisa sobre volume realizada por Vergnaud (1983). Discutimos também o conceito de volume como grandeza, algumas considerações sobre o paralelepípedo retângulo, volume e capacidade e, finalmente, apresentamos um estudo sobre as situações que dão sentido ao conceito de volume categorizadas por Moraes, Figueiredo e Bellemain (2012).

2.1 Teoria dos Campos Conceituais

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC) foi desenvolvida por Gérard Vergnaud e os seus colaboradores. “Esta teoria visa fornecer um quadro coerente e alguns princípios de base para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem das competências complexas” (VERGNAUD, 1996, p.155).

Como citado anteriormente, Vergnaud (1996) considera que o conhecimento está organizado em campos conceituais que por sua vez podem ser compreendidos como conjuntos de situações. Para esse autor, um conceito é formado por um tripé de conjuntos:

S: conjunto das situações que dão sentido ao conceito (a referência);

I: conjunto formado por invariantes operatórios como propriedades, objetos e relações (o significado);

R: O conjunto das representações simbólicas do conceito, das suas propriedades, das situações e dos procedimentos de tratamentos das situações (o significante).

Isso implica que para o desenvolvimento de um conceito é preciso considerar esses três conjuntos de modo simultâneo, pois eles são indissociáveis. Para Vergnaud (1996), quando há interesse pelo ensino e aprendizagem de um conceito, não se pode restringir apenas à sua definição, visto que é por meio das resoluções das situações e dos problemas que um conceito adquire sentido para o aluno. Diante disso, consideramos o nosso objeto de estudo “volume” como um conceito.

O conjunto das situações permite atribuir sentido a um conceito e os invariantes operatórios são os conhecimentos que um sujeito mobiliza na ação de uma dada situação (VERGNAUD, 2009), ou seja, são os conhecimentos contidos nos esquemas, caracterizados pelos conceitos em ação e os teoremas em ação. Esquema é a “*organização invariante da conduta para uma dada classe de situações*”. São nos esquemas que se tem de procurar os conhecimentos em ação do sujeito, ou seja, os elementos cognitivos que permitem a ação do sujeito ser operatória” (VERGNAUD, 1996, p. 157). Para Magina *et al.* (2008), o termo esquema significa a forma como o sujeito (aluno) organiza seus invariantes de ação ao lidar com uma classe de situações.

Conceito em ação “é um conceito considerado pertinente na ação em situação. Um teorema em ação é uma proposição tida como verdadeira na ação em situação” (VERGNAUD, 2009, p.23). Segundo Magina *et al* (2004, p.16) os teoremas em ação são definidos “como relações matemáticas que são levadas em consideração pelos sujeitos, quando estes escolhem uma operação, ou sequência de operações, para resolver um problema”. Vale salientar que os teoremas em ação podem ser verdadeiros ou falsos (corretos ou errôneos), enquanto os conceitos em ação não possuem essa especificidade, no entanto, apresentam a particularidade de serem pertinentes ou não a determinada situação.

O conjunto das representações simbólicas é um sistema de símbolos com significados para o sujeito que representa um conceito, ou seja, representa as situações e os invariantes (VERGNAUD, 1996). Para representar o conceito de volume de paralelepípedos retângulos, por exemplo, o estudante pode utilizar como representações simbólicas as fórmulas, as unidades de medida, os números, o desenho do sólido, entre outras.

Vale ressaltar que consideramos o nosso objeto de estudo, a grandeza volume, como componente do campo conceitual das grandezas. No entanto, acreditamos que na resolução de situações envolvendo esse campo pode ter influências de outros campos conceituais, conforme o olhar das Imbricações entre Campos Conceituais. O estudo dessa temática, realizado por Teles (2007) na sua tese de doutoramento, situa-se na Teoria dos Campos Conceituais.

A pesquisa consistiu em investigar, em estudos teóricos e empíricos, as Imbricações entre os Campos Conceituais das grandezas, da geometria, numérico, algébrico e funcional na Matemática Escolar, por meio de análises de problemas envolvendo as fórmulas de área do quadrado, retângulo, paralelogramo e triângulo. Essa pesquisa possibilitou uma via inédita dentro da Teoria dos Campos Conceituais que consiste no estudo das Imbricações entre Campos Conceituais “como elemento que, pela variedade de abordagens possíveis, amplia as

possibilidades de compreensão dos sujeitos aprendizes e explica a complexidade de processos de aprendizagem de conteúdos matemáticos” (TELES, 2007, p.16).

A autora supracitada identificou três indicativos relativos às Imbricações entre Campos Conceituais: a ausência de resposta em determinadas questões; o percentual de erros nas questões de otimização e a diversidade de procedimentos mobilizados em determinadas questões.

A forma como os alunos tratam as situações nas quais estão envolvidas fortes imbricações, exige que eles naveguem de um campo conceitual para outros e que articulem os seus conhecimentos para tratar de maneira pertinente os problemas propostos. Vale ressaltar que “problemas aparentemente simples podem exigir que o aluno navegue de um campo conceitual para outro, ou seja, evidencia Imbricações entre os Campos Conceituais em foco” (TELES, 2007, p.122).

Teles e Bellemain (2013), ao olharem as fórmulas de área para otimização, sob a ótica das imbricações, identificaram nos erros apresentados pelos alunos, fortes Imbricações entre Campos Conceituais, evidenciado o papel das imbricações como entrave para resolução de determinadas situações.

Entretanto, as imbricações além de justificar alguns entraves e erros recorrentes da mobilização dos conhecimentos dos campos conceituais, podem ser vistas como “abertura de possibilidade de resolução evidenciada na variedade de tipos de procedimento de resolução” (TELES, 2007, p. 241).

Diante disso, neste estudo utilizaremos o olhar das Imbricações entre Campos Conceituais para analisarmos conhecimentos dos diferentes campos conceituais que são mobilizados por alunos ao resolverem situações envolvendo a grandeza volume.

Um exemplo das Imbricações entre Campos Conceituais pode ser observado quando o aluno erra um problema de volume por apresentar dificuldade em multiplicar números decimais. Esse erro está relacionado com dificuldade no campo numérico. Para Vergnaud, esse aluno errou o cálculo numérico.

Esse autor propôs a distinção entre cálculo numérico e cálculo relacional com base nas dificuldades dos alunos em resolver problemas e operações. Para Maginal *et al.* (2008, p. 24) “o cálculo numérico refere-se às operações usuais de adição, subtração, multiplicação, divisão, etc. O cálculo relacional refere-se às operações do pensamento necessário para que haja a manipulação das relações envolvidas nas situações”.

A classificação realizada por Vergnaud pode ser relacionada na resolução de problemas envolvendo diversos conceitos. Utilizando, como exemplo, nosso objeto de estudo,

volume do paralelepípedo retângulo, podemos analisar a resposta do aluno sob essa ótica, como ilustrado na Figura 1.

Figura 1 - Problema envolvendo volume do paralelepípedo retângulo

Um tanque em forma de paralelepípedo tem altura de 2 m e por base um retângulo, na posição horizontal, de lados 8 m e 4 m. Qual o volume desse tanque?

Fonte: Figueiredo (2013, p.60)

Para resolver o problema da Figura 1 corretamente, supomos que um aluno calculou o volume do sólido multiplicando o comprimento da altura pela medida da área da base (produto dos comprimentos dos seus lados), ou seja, realizou a multiplicação corretamente $2\text{m} \times 8\text{m} \times 4\text{m}$ e descobriu que o volume do tanque é 64 metros cúbicos (m^3). Diante disso, esse aluno acertou o cálculo numérico, pois realizou a multiplicação com números naturais de forma correta, e o cálculo relacional por ser adequado à situação, visto que para calcular a medida do volume do paralelepípedo retângulo é preciso realizar a multiplicação das medidas de comprimentos de suas arestas. Em relação aos teoremas em ação corretos, mobilizou o seguinte: a medida do volume do paralelepípedo retângulo é o produto das medidas de comprimento de suas arestas.

No entanto, admitimos que outro aluno cometeu erros relacionados ao cálculo numérico e errou a multiplicação envolvendo números naturais. Enquanto, seu amigo mostrou erros ligados ao cálculo relacional, como determinar o volume somando as medidas das dimensões ($2\text{m} + 8\text{m} + 4\text{m}$) do sólido. Um dos teoremas em ação errôneos que esse aluno empregou foi: a medida do volume do paralelepípedo retângulo é a soma das medidas de comprimento de suas arestas.

Apesar de acertar o cálculo numérico e o cálculo relacional, pressupomos que um terceiro aluno considerou que o volume é apenas 64 e não colocou o m^3 . Essa dificuldade está relacionada à álgebra das grandezas que se refere ao modo como os estudantes lidam com as unidades de medida (SOUZA, 2013), ou seja, como os estudantes operam com as unidades de medida, se eles indicam ou não as unidades ou se eles utilizam uma unidade de medida inadequada.

Com o olhar das Imbricações entre Campos Conceituais, evidenciamos que o aluno que acertou o cálculo numérico e o cálculo relacional, mobilizou conhecimentos do campo das grandezas, geométrico e numérico. No entanto, os três alunos que erraram o problema

apresentaram dificuldade no campo das grandezas (cálculo relacional e álgebra das grandezas) ou no campo numérico (cálculo numérico).

Souza (2013), em sua dissertação, analisou como estudantes do Ensino Médio técnico lidam com situações de cálculo da área de paralelogramos, sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais. Na análise dos dados foram utilizados três pontos de vista complementares: cálculo relacional, cálculo numérico e álgebra das grandezas. Dentre os resultados, constatou-se que os erros de cálculo numérico estavam relacionados com operações com números decimais e poucos alunos que acertaram o cálculo relacional lidaram adequadamente com unidades de comprimento.

Em nosso estudo, utilizaremos elementos da TCC, como as situações que dão sentido ao conceito de volume, os conceitos e os teoremas em ação mobilizados por alunos na resolução destas situações e as representações simbólicas usadas para representar tal conceito, além de analisar sob a ótica do cálculo numérico e da álgebra das grandezas.

2.2 Revisão de Literatura

Muitas pesquisas sobre a grandeza volume foram desenvolvidas no âmbito da Educação Matemática. Algumas delas realizaram estudos do tipo diagnóstico para analisar conhecimentos mobilizados por alunos e/ou por professores, em diferentes níveis de ensino, na resolução de problemas envolvendo volume (ANWANDTER-CUELLAR, 2008; BARROS, 2002; FIGUEIREDO, 2013; KALEFF, REI, GARCIA, 1996; MORAIS, BELLEMAIN, 2010; MORAIS, 2013; OLIVEIRA, 2002, 2007; ROLDÁN, 2003; VIANA, 2015). Já outras pesquisas analisaram a abordagem do conceito de volume em livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio aprovados pelo PNLD (FREITAS, 2015; MORAIS, BELLEMAIN, 2010; MORAIS, 2013).

Barros (2002) no curso de mestrado no Programa de Pós-Graduação em Educação (PPGE) da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), realizou um estudo com alunos do 8º ano de uma escola municipal de Recife, com objetivo de identificar conceitos e procedimentos mobilizados pelos alunos em atividades envolvendo volume ou capacidade de sólidos geométricos, tomando como marco teórico a TCC. Foi aplicado um estudo diagnóstico composto por uma sequência de oito atividades em uma turma de 45 alunos. A maior parte dessas atividades envolvia volume do bloco retangular (paralelepípedo retângulo). O resultado dessa pesquisa mostrou que muitos alunos não entendiam volume como grandeza e não sabiam dissociar e articular o sólido e a grandeza.

Assim como o autor supracitado, Oliveira (2002) também desenvolveu sua pesquisa no PPGE da UFPE. O autor investigou como os conceitos de figura, volume e medida se inter-relacionam num contexto de ensino através de um estudo de caso com alunos da 5ª Série (6º ano atualmente) do Ensino Fundamental, por meio de um diagnóstico exploratório de questões didáticas. Essas questões abordavam situações de conservação de volume, comparação de volume com grandezas massa e densidade, distinção entre volume e capacidade, situações que envolviam o emprego de medida com unidades não padronizadas e articulação e dissociação entre os quadros geométrico, numérico e de grandezas. Nessa pesquisa foram constatados entraves, ou seja, dificuldades específicas na articulação e dissociação entre volume e massa, volume e densidade, volume e capacidade, aspectos unidimensionais e tridimensionais do volume, e entre as figuras e as grandezas.

Em sua pesquisa de doutoramento, esse mesmo autor (OLIVEIRA, 2007) realizou um estudo de caso com alunos do ensino médio e estudantes de licenciatura em matemática com o objetivo de verificar como algumas grandezas físicas (massa, densidade e peso) interferem no conceito da grandeza volume. O autor utilizou neste estudo a TCC de Vergnaud e a Teoria dos Construtos Pessoais de Kelly. Dentre os resultados, constatou-se que os conceitos de medida, massa, peso, densidade, forma e dimensão se relacionam com a construção do conceito de volume e que os alunos do Ensino Médio apresentaram dificuldade em relacionar o conceito de volume com outros conceitos físico como o de massa e densidade.

Kaleff, Rei e Garcia (1996) desenvolveram uma pesquisa com estudantes do terceiro ano do Ensino Médio, alunos universitários e professores de matemática sobre a obtenção e melhoria da habilidade da visualização geométrica. Essa pesquisa está vinculada com as atividades no laboratório do ensino de geometria da Universidade Federal de Fluminense (UFF) e do Projeto Espaço da UFF de ciências. Foram aplicadas questões com desenhos que representavam sólidos construídos com empilhamento de cubos, para a contagem de cubos e cálculo do volume destes sólidos por meio do desenho. Esses pesquisadores obtiveram como resultado que os estudantes de ensino médio, alunos universitários e professores de matemática apresentaram dificuldades na interpretação dos desenhos, nos diversos conceitos matemáticos que possuem relação com a grandeza volume e na representação de sólidos geométricos.

Dificuldades como estas, em relação ao conceito de volume, foram identificadas nas análises no artigo de Roldán (2003) publicado na Revista Mexicana de Investigación Educativa. Esse estudo teve como objetivo investigar as concepções de professores primários (que atuavam nos anos iniciais do Ensino Fundamental) de uma escola do México sobre o

conceito de volume por meio da aplicação de exercícios que envolviam a medição de volume de sólidos geométricos. Os resultados apontaram que a maioria dos professores não sabe distinguir e articular volume e capacidade, volume e peso, volume e área de um corpo e esses professores só utilizavam as fórmulas para calcular o volume dos sólidos.

Viana (2015) publicou um artigo no VI Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática sobre desempenho de alunos do ensino médio no processo de solução de um problema que envolvia volume do paralelepípedo e do cilindro. Participaram dessa pesquisa 268 alunos do terceiro ano do Ensino Médio da rede municipal e estadual de Minas Gerais. O problema aplicado aos alunos era composto de duas partes, a primeira solicitava a quantidade de metros cúbicos de água que caberiam em uma caixa “A” na forma de um paralelepípedo e a segunda parte pedia a comparação dos volumes das caixas “A” e “B”, sendo esta última representada na forma de um cilindro. Dentre os resultados, constatou-se que os alunos apresentaram fraco desempenho na solução do problema proposto, consideravam volume como um número obtido a partir de cálculos com os dados numéricos apresentados no enunciado e alguns alunos utilizavam fórmulas que pareciam ter sido memorizadas sem atribuição de significados. Muitos alunos representaram os desenhos¹ no problema, no entanto eles pareciam não compreender o conceito de volume nem estabelecer relações entre as propriedades e as medidas dos sólidos apresentados.

Anwandter-Cuellar (2008), na sua dissertação de mestrado desenvolvida na França, pesquisou as concepções de alunos do ensino secundário francês (no ensino brasileiro equivale aos anos finais do Ensino Fundamental) em situações envolvendo o conceito de volume, com objetivo de identificar e caracterizar o conhecimento abordado nestas situações. Esta autora utilizou como referencial teórico a Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Chevallard e a TCC de Vergnaud. Ela categorizou nove concepções de volume mobilizadas por alunos dos anos finais do Ensino Fundamental:

- Volume delimitado: é um espaço delimitado por uma superfície;
- Volume ocupado: é um lugar ocupado por um corpo no espaço;
- Volume sólido: o volume confundido com o sólido;
- Volume número: o volume é considerado como um número obtido por uma fórmula;
- Volume medida: o volume é visto como o número de unidades necessárias para cobrir o sólido;

¹ A autora, Viana (2015), chamou os desenhos representados pelos participantes da pesquisa de representações pictóricas.

- Volume grandeza: o volume é considerado uma grandeza que pode ser medida, comparada, adicionada entre outras atribuições.
- Volume área: o volume é confundido com a área.
- Volume deslocado: este conceito vem do princípio de Arquimedes: “um corpo imerso num fluido recebe um impulso verticalmente para cima, cuja intensidade é igual ao peso do fluido deslocado (este volume é igual ao volume imerso do corpo). Neste caso, o volume do objeto é a quantidade de água deslocada quando objeto é imerso em água (ANWANDTER-CUELLAR, 2008).
- Volume interior: é a quantidade de material que constitui um objeto.

A autora apresentou em sua pesquisa um conjunto de problemas envolvendo volume que foram classificados, como:

- Problemas de comparação;
- Problemas de medir volume de um sólido;
- Problemas de variações de volume e de área;
- Problemas de produção de sólidos a partir de volume dado;
- Problemas de produção de sólido com volume maior ou menor de um sólido dado;
- Problemas de mudança de unidades.

Os resultados dessa pesquisa mostraram que os alunos confundiram a grandeza volume com o sólido e consideravam o volume como um número adquirido por uma fórmula, ou seja, apresentaram as concepções volume sólido e volume número.

Alguns resultados apontados nessa pesquisa foram evidenciados, no Brasil, na pesquisa de dissertação desenvolvida no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica (EDUMATEC) da UFPE, Figueiredo (2013), como a concepção de volume número e volume sólido. A autora analisou o modo como alunos do Ensino Médio lidam com problemas envolvendo a grandeza volume, sob a ótica da TCC. Nesse estudo foi aplicado um teste de sondagem juntamente com entrevistas aos alunos do terceiro ano do Ensino Médio de três instituições de ensino das redes privada, pública federal e pública estadual. Dentre os resultados, constatou-se que o campo numérico prevalece em relação ao campo geométrico e das grandezas, os alunos apresentam dificuldades nas situações de produções e não sabem dissociar e articular os quadros numérico, geométrico e das grandezas.

Cabe destacar que a pesquisa de Figueiredo (2013), se diferencia do nosso estudo por delimitarmos em apenas um sólido, paralelepípedo retângulo, pelos participantes serem

distintos por serem de escolas do Agreste Meridional de Pernambuco e sobretudo pela análise dos dados, especificamente o olhar das Imbricações entre Campos Conceituais.

Também com o olhar da TCC e no mesmo programa de Pós-Graduação e Universidade que a pesquisa citada anteriormente, Morais (2013) desenvolveu a sua dissertação com objetivo de analisar a abordagem da grandeza volume em sete livros didáticos de Matemática do Ensino Médio aprovados no PNLD 2012. Essa análise foi orientada por critérios agrupados em três categorias: a descrição da abordagem de volume, o volume como conceito e o componente do campo conceitual das grandezas geométricas e as fórmulas de volume. Os resultados apontaram que a distinção entre volume e o sólido e entre volume e a medida estão presentes em todas as coleções analisadas, porém de forma implícita, isto é, de maneira que não contribuíam na construção do conceito de volume como grandeza. A abordagem do volume nas coleções analisadas foi caracterizada por uma ênfase clara, nas situações de medição, no uso das fórmulas e no aspecto numérico.

Vale ressaltar que antes de fazer a pesquisa de mestrado, tal autor publicou um artigo, juntamente com a sua orientadora, no congresso de Iniciação científica com a mesma temática. Morais e Bellemain (2010) analisaram a abordagem do conceito de volume em livros didáticos para os anos finais do Ensino Fundamental, sob a ótica da TCC. Foram selecionadas cinco coleções aprovadas pelo PNLD 2008, nas quais foram analisadas as situações que dão sentido ao conceito de volume enquanto grandeza. Os resultados mostraram que o volume era pouco trabalhado nos anos finais do Ensino Fundamental e as situações que abordavam comparação de volume e articulação/dissociação entre o sólido geométrico, a grandeza volume e a medida eram pouco exploradas nos livros didáticos analisados.

A pesquisa de Freitas (2015) teve objetivos bem próximos do estudo de Morais (2013). O autor caracterizou o ensino de volume de sólidos geométricos em quatro livros didáticos do Ensino Médio aprovados pelo PNLD 2012, sob a ótica da organização praxeológica utilizando a TAD. Com o olhar da TAD, essa pesquisa identificou e analisou os conceitos, procedimentos e algoritmo do volume. Os resultados constataram que os capítulos iniciavam com demonstração da fórmula do volume de um sólido conhecido, a institucionalização dos algoritmos usuais nos cálculos de volume, e a relação entre os sólidos trabalhados em um capítulo com outros já abordados. Em relação ao princípio de Cavalieri foi evidenciado que nem sempre ele é abordado de maneira correta.

Com base nos resultados dos estudos supracitados, percebemos que alunos e /ou professores apresentaram entraves relacionados a conceito de volume. Diante disso, questionamos se esses entraves estão relacionados ao campo das grandezas e também a outros

campos conceituais, tendo em vista que as Imbricações entre Campos Conceituais podem justificar entraves e ausência de respostas.

Considerando as dificuldades constatadas nos estudos de Barros (2002), Anwandter-Cuellar (2008) e Figueiredo (2013), levantamos os seguintes questionamentos: quais campos conceituais estão envolvidos na resolução de problemas relacionadas ao conceito de volume? Que conhecimentos dos diferentes campos conceituais são mobilizados pelos alunos na resolução de problemas que envolvem a grandeza volume?

Com base nestes questionamentos, elaboramos a questão central desta pesquisa: *que conhecimentos dos campos conceituais das grandezas, da geometria, numérico e algébrico são mobilizados por alunos do Ensino Médio na resolução de problemas que envolvem o volume do paralelepípedo retângulo?*

2.3 O Estudo de Vergnaud sobre Volume

Vergnaud (1983) e seus colaboradores realizaram um trabalho sobre o conceito de volume com alunos de 12 a 13 anos de idade, publicado em 1983 no periódico *Recherches en Didactique des Mathématiques*, número 4.1, tendo como título *Une Experience Didactique Sur Le Concept de Volume en Classe de Cinquieme (12-13 ans)*. A finalidade desse trabalho foi investigar concepções de cinco turmas do primeiro ano da escola secundária francesa² em problemas que envolviam: cálculo do volume de paralelepípedo retângulo, definição do volume e a relação entre os volumes de dois sólidos geométricos.

Cabe salientar que, nesse trabalho, os autores se interessavam não só pela análise das concepções dos alunos, mas também pelos seus desenvolvimentos, em relação às situações propostas e aos problemas a serem resolvidos.

Na pesquisa desenvolvida pelos autores supracitados as atividades foram divididas em três tópicos principais, conforme descritos a seguir.

Comparar e medir volumes: medir é associar um número a um objeto, por isso é necessário identificar características deste objeto que a medida do volume levará em consideração. Portanto, estas características podem ser manipuladas sem ser necessário medir, pois são suficientes para comparar diretamente ou indiretamente os objetos volumétricos: dos quais há um problema de composição, a ordem que já não é suficiente, mas sim necessário

² No ensino brasileiro equivale ao 6º ano Ensino Fundamental.

associar-se a esses objetos volumétricos, aos números que serão suas medidas e que serão constituídos no sistema para medir (VERGNAUD, 1983).

- **Para uma concepção unidimensional a uma concepção tridimensional do volume:** a medida direta nem sempre é possível, é preciso elaborar as regras que devem ser desenvolvidas para deduzir determinadas medidas umas das outras, articulando entre si uma concepção unidimensional do volume e uma concepção tridimensional: construção da fórmula de volume do paralelepípedo e um exame do que representa sobre a dependência do volume versus dimensões lineares. Existem confusões entre as medidas das arestas, faces e volume de um paralelepípedo: manipular os três tipos de medidas espaciais ³(comprimento, área, volume) devem ser determinados e diferenciados uns dos outros, e esta é uma necessidade imperativa quando o conceito de volume está sendo desenvolvido.
- **Para uma concepção tridimensional do volume de bilinearidade em volume do prisma direito e a representação do por uma tabulação cruzada de dupla dependência:** a dependência do volume de medição em relação à medida dos elementos que definem o volume e as faces do objeto espacial conduz a um tipo misto, como a fórmula $S \times h$, nas quais as quantidades compostas não são as mesmas que representam, além disso, representa uma forma bilinear de tamanho tridimensional. Isso é uma oportunidade de olhar para um tipo de relacionamento frequente em física conceitualmente difícil: quando outras quantidades são independentes umas das outras é proporcional ao seu produto. A composição multiplicativa do processo no estudo da fórmula do volume do paralelepípedo; no caso do prisma de base triangular, fazemos o próprio princípio da construção (VERGNAUD, 1983).

Diante disso, percebemos que Vergnaud (1983) e seus colaboradores adotaram a concepção de volume como uma grandeza unidimensional que pode ser medida e comparada de forma direta e a transição de uma concepção unidimensional para a concepção tridimensional por meio da construção da fórmula do volume do paralelepípedo e da articulação das propriedades de outras grandezas (comprimento e área).

Em relação ao cálculo do volume do paralelepípedo retângulo, Vergnaud identificou 4 principais procedimentos utilizados pelos alunos: “perímetro”, no qual o aluno adicionou as

³ No Brasil equivale as grandezas geométricas.

medidas de duas ($a + b$) ou três arestas ($a + b + c$); o procedimento chamado “superfície”, em que o aluno calculou os três tipos de áreas (largura x altura, comprimento x altura e comprimento x largura) ou calculou e adicionou as áreas de duas faces (comprimento x largura + largura x altura), entre outras estratégias; o procedimento denominado “volume”, em que foram multiplicadas as medidas das três arestas (comprimento x largura x altura). E o procedimento chamado “misto”, em que foram adicionados comprimentos com áreas (perímetro x altura ou área + altura) (BARROS, 2002).

Com base nos resultados encontrados por Vergnaud, constatamos que alguns alunos desenvolveram o aspecto unidimensional (somaram as medidas das três arestas) e o tridimensional (multiplicou as medidas das três arestas), outros apresentaram dificuldades e confusões nesses aspectos (comprimento x largura + largura x altura).

Em síntese, a passagem de uma concepção unidimensional de volume para uma tridimensional está relacionada com a passagem do campo das estruturas aditivas⁴ para o campo das estruturas multiplicativas⁵.

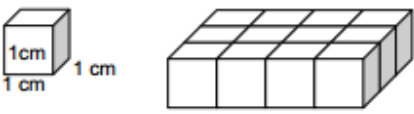
A seguir apresentamos um exemplo de problema que possibilita a articulação do volume enquanto grandeza unidimensional para volume como grandeza tridimensional.

⁴ Pessoa (2003, p.2), apoiada em Vergnaud, afirma que o campo conceitual das estruturas aditivas é formado pelas “situações que envolvem a adição e a subtração isoladamente ou a combinação dessas operações, bem como outros conceitos matemáticos”.

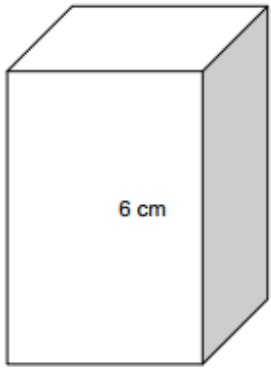
⁵ Para Vergnaud apud Pessoa (2009), o campo conceitual das estruturas multiplicativas é constituído por todas as situações que podem ser analisadas como proporções simples e múltiplas, as quais podem ser resolvidas por meio da multiplicação e/ou divisão. Os diferentes conceitos matemáticos que estão relacionados a estas situações são: as funções lineares e não lineares, espaços vetoriais, análise dimensional, número racional (em suas distintas formas: decimal, fração, razão, proporção), entre outros.

Figura 2 - Problema que possibilita a articulação dos aspectos unidimensional e tridimensional da grandeza volume

O bloco retangular abaixo tem uma só camada de cubinhos todos iguais a este



Juntando várias dessas camadas, montamos o bloco retangular desenhado a seguir



a) De quantas camadas foi formado esse bloco retangular maior?
 Resposta: _____
 Explique a resposta dada

b) Qual é o volume deste bloco maior ?
 Explique a resposta dada

Fonte: Barros (2002, p.85)

Para responder o item b da questão apresentada na Figura 2, o aluno pode desenvolver uma concepção unidimensional de volume ao contar as unidades do primeiro bloco retangular (camada) uma a uma e determinar o volume desse bloco; para calcular o volume do segundo bloco pode-se adicionar o volume das seis camadas, ou seja, $12\text{cm}^3 + 12\text{cm}^3 + 12\text{cm}^3 + 12\text{cm}^3 + 12\text{cm}^3 + 12\text{cm}^3$. No entanto, para responder utilizando uma concepção tridimensional, o volume do bloco maior pode ser obtido por um produto $6 \times 12\text{cm}^3$ ou, ainda, produto de três comprimentos $4\text{ cm} \times 3\text{ cm} \times 6\text{ cm}$ ao relacionar com o bloco menor. Poderiam aparecer como respostas, 72 cubinhos ou 72 cm^3 , visto que depende dos procedimentos de resolução utilizado.

Para Vergnaud (1983, p.116, tradução nossa⁶) volume “é um conceito vivo, que extrai sua riqueza na relação que permite estabelecer entre vários tipos de conceitos (magnitudes espaciais, proporção e linearidade, função de várias variáveis dependência e independência, dimensionalidade)”.

Por isso, o estudo do volume não pode ser independente do estudo da geometria dos sólidos, nem do estudo das funções lineares e de um dos conceitos de comprimento, área, dimensão (VERGNAUD, 1983). Nesse contexto, podemos afirmar que o conceito de volume possui conexão com outros conceitos matemáticos que no nosso estudo consideramos como Imbricações entre Campos Conceituais (TELES, 2007), ou seja, para responder um problema de volume é preciso a mobilização de conceitos de diferentes campos conceituais.

Nos trabalhos de Vergnaud, o pesquisador considera a medida do volume como sendo o próprio volume, isto é, seus estudos estão, em sua maioria, voltados para determinar a medida do volume. Veja o exemplo na citação a seguir: o “volume é o produto de uma área pelo comprimento, mas como a área é ela mesma o produto de um comprimento por outro comprimento, o volume é um comprimento ao cubo, o que dá sentido à escrita simbólica das unidades de volume: m^3 , dm^3 , cm^3 , etc”(VERGNAUD, 2009, p. 257).

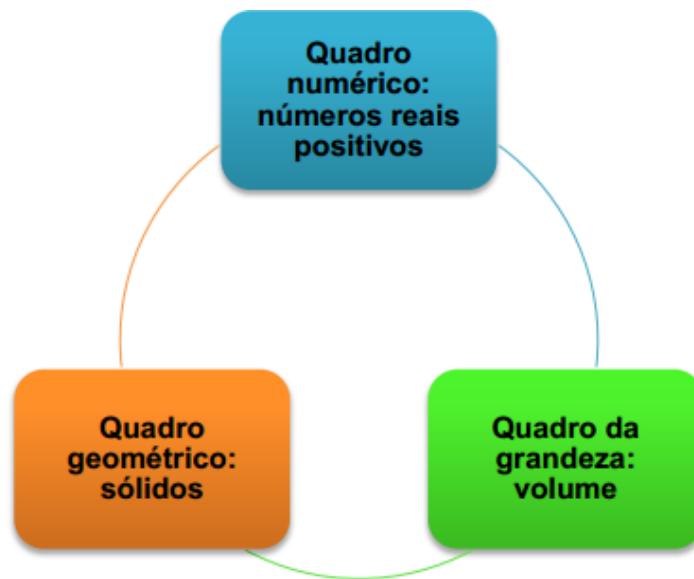
Contudo, em nosso estudo consideramos volume como grandeza na concepção de Douady e Perrin-Glorian, conforme apresentaremos no próximo tópico.

2.4 Conceito de Volume como Grandeza

O modelo proposto por Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian (1989) para a construção do conceito de área, estabelece a distinção entre três quadros: quadro geométrico, quadro das grandezas e quadro numérico. Várias pesquisas adotaram esse modelo como conceitualização e área (BALTAR, 1996; SANTOS, 2015; TELES, 2007) e volume (BARROS, 2002; FIGUEIREDO, 2013; MORAIS, 2013; OLIVEIRA, 2002, 2007). Assim como esses autores, adotaremos esse modelo para construção do conceito de volume. No entanto, o foco do nosso estudo reside na análise das imbricações entre os campos conceituais envolvidos no estudo do conceito de volume. Não intencionamos distinguir teoricamente jogo de quadros e campo conceitual, por considerarmos dois aspectos importantes da Didática da Matemática que instigam as nossas pretensões de pesquisas futuras.

⁶ Le volume est un concept vivant, qui puise sa richesse dans la relation qu'il permet d'établir entre divers types de concepts (grandeurs spatiales, proportion et linéarité, fonction de plusieurs variables dépendance et indépendance, dimensionalité...)

Figura 3 - Organização conceitual de volume como grandeza



Fonte: Morais (2013, p.32)

Na Figura 3, apresentamos o diagrama do modelo didático de quadros adaptado para volume elaborado por Morais (2013). O quadro geométrico é composto pelas figuras geométricas, tais como prismas, pirâmides, esferas, entre outros. O quadro numérico é composto pelos números reais positivos e o quadro das grandezas é formado pelas classes de equivalência de sólidos de mesmo volume, as quais podem ser representadas pelo par número/unidade de medida, por exemplo, 5 m^3 , 9 dm^3 , $1,5 \text{ m}^3$.

Quando o aluno considera que o volume é apenas o número, como o volume de um sólido é 10, ele não leva em consideração o quadro das grandezas, mas apenas o quadro numérico, ou seja, a medida.

Os quadros são independentes e precisam ser distinguidos. Sólidos diferentes podem ter mesmo volume, e se modificarmos a unidade de medida haverá mudança nos valores numéricos, mas a grandeza será a mesma, ou seja, o volume não vai mudar. Isso implica que ao variar a unidade de medida, a medida do volume muda, mas o volume continua o mesmo (MORAIS, 2013). Considere um paralelepípedo retângulo com 2 metros de largura, 4 metros de comprimento e 5 metros de altura. O sólido pertence ao quadro geométrico, a escolha da unidade medida e as classes de equivalência dos sólidos com o mesmo volume, 40 m^3 , que o paralelepípedo dado pertence ao quadro das grandezas e medida do seu volume, que nesse caso é 40, pertence ao quadro numérico.

Um quadro é formado por objetos de um campo da matemática, das relações entre esses objetos, das suas formulações eventualmente diversas e das imagens mentais que o sujeito associa a esses objetos e relações (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989).

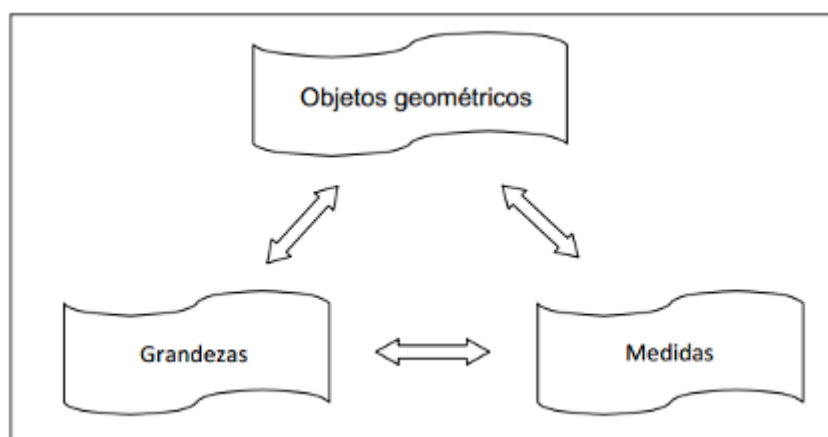
Segundo Lima e Bellemain (2010), no estudo da geometria e das grandezas e medidas é preciso considerar três tipos de objetos que são estritamente inter-relacionados: objetos matemáticos, objetos físicos e objetos gráficos.

Os objetos físicos são objetos do mundo físico que podemos manipular e visualizar, enquanto os objetos gráficos referem-se aos desenhos/imagens desses objetos, já os objetos matemáticos correspondem aos modelos abstratos dos objetos do mundo físico que apresentam determinadas propriedades matemáticas (LIMA; BELLEMAIN, 2010).

Diante disso, destacamos que uma caixa d'água e uma piscina, por exemplo, são objetos físicos, ao associamos seus desenhos apresentamos os objetos gráficos e os sólidos (paralelepípedos retângulos) são os objetos matemáticos.

Por outro lado, os conceitos envolvidos nos problemas sobre grandezas geométricas podem ser estruturados em três componentes: objeto geométrico, grandezas e medidas.

Figura 4 - Componentes das grandezas geométricas



Fonte: Lima e Bellemain (2010, p.175)

Conforme a Figura 4, ressaltamos que apesar de apresentarem distinção, esses universos são estreitamente ligados entre si e o grande desafio do ensino desses conceitos é a articulação e a distinção desses conceitos de forma simultânea (LIMA; BELLEMAIN, 2010).

De acordo com Figueiredo (2013), os alunos do Ensino Médio apresentam dificuldades em dissociar e articular os quadros numérico, geométrico e das grandezas nas situações de volume. Devido a isso, atividades referentes ao estudo da grandeza volume

devem favorecer a passagem de um quadro para o outro e a dissociação/articulação entre o número, a figura e a grandeza (MORAIS, 2013).

Diante disso, percebemos que para o aluno construir o conceito de volume como grandeza é de grande relevância que ele saiba articular/dissociar o quadro geométrico, o quadro numérico e o quadro das grandezas.

2.5 Paralelepípedo Retângulo

O paralelepípedo retângulo é um dos primeiros sólidos geométricos abordados nas aulas de matemática desde os anos iniciais do Ensino Fundamental até o Ensino Médio. Segundo Lima e Carvalho (2010), esse sólido é um exemplo de figura geométrica que possui uma simplicidade seguida por uma riqueza de propriedades, além de ter relação com os objetos comuns do nosso cotidiano. O paralelepípedo é um tipo de prisma que por sua vez faz parte da família dos poliedros. Diante disso, inicialmente apresentaremos uma breve discussão sobre poliedro e prisma para posteriormente abordar a definição dos tipos de paralelepípedos.

Uma definição mais simples para ser introduzida ao iniciar o estudo de poliedro é considerá-lo como um sólido limitado por polígonos, que são denominados de faces do poliedro. Esse sólido pode ser classificado em 3 grupos: prismas, pirâmides e outros que não são nem prismas nem pirâmides (FREITAS; BITTAR, 2013). No entanto, Lima *et al.* (2006, p.257) apresenta uma definição mais complexa para poliedro:

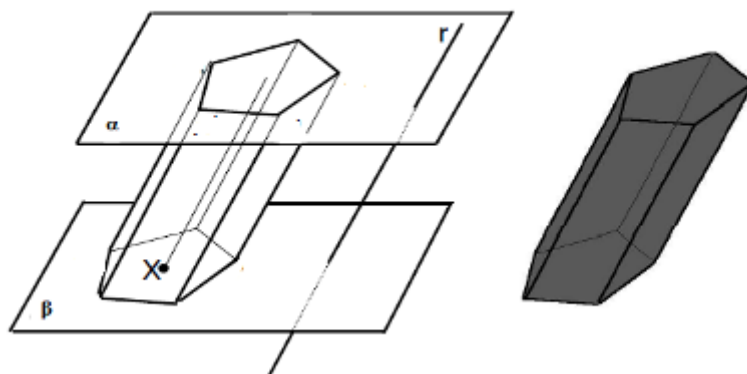
Poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos planos chamados faces onde: a) cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono; b) a interseção de duas faces quaisquer, ou é um lado comum, ou é um vértice ou é vazia.

Cada lado de um polígono, comum a exatamente duas faces, é chamado uma aresta do poliedro e cada vértice de uma face é um vértice do poliedro.

c) É sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra, sem passar por nenhum vértice (ou seja, cruzando apenas arestas).

Sejam dois polígonos iguais (congruentes) situados em planos paralelos α e β , (conforme a Figura 5) então chama-se de prisma um sólido formado pela reunião de todos os segmentos congruentes com extremos pertencentes a esses dois polígonos e que são paralelos a uma reta r que intercepta esses dois planos. Os polígonos localizados nos dois planos são denominados de bases do prisma. A altura do prisma é dada pela distância entre esses dois planos (FREITAS; BITTAR, 2013).

Figura 5 - Prisma de base pentagonal



Fonte: Ferreira (2007, p.109)

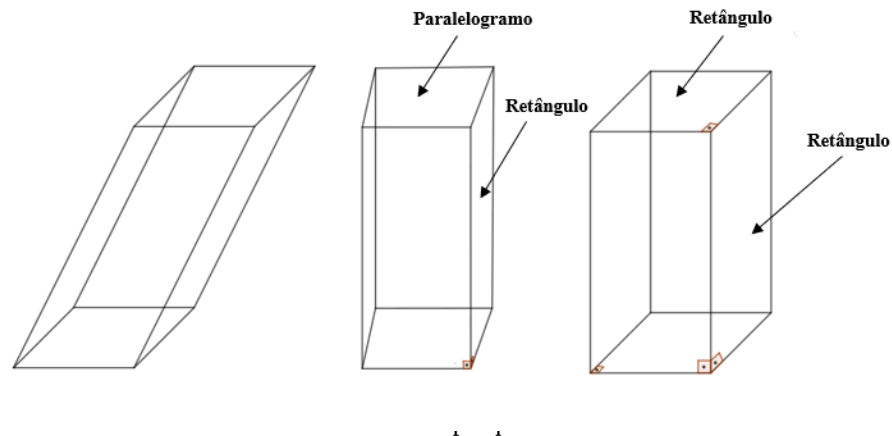
Um prisma é denominado reto se as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases (FERREIRA, 2007). E se as arestas não são perpendiculares aos planos da base o prisma é chamado de prisma oblíquo. Vale ressaltar que as faces laterais de um prisma reto são retângulos, enquanto as faces de um prisma oblíquo são paralelogramos. Em relação à natureza dos prismas, classificam-se de acordo com o formato de suas bases. Isto implica que quando a base de um prisma for um triângulo, um quadrado, um pentágono, etc., ele é denominado de prisma triangular, quadrangular, pentagonal, etc. respectivamente.

Os polígonos que limitam esses sólidos são suas faces (não são lados), o encontro de duas faces é uma aresta e o encontro de suas arestas são seus vértices (LIMA; CARVALHO, 2010).

O paralelepípedo é um tipo de prisma, cuja as bases são paralelogramos. Para Lima (2006) um paralelepípedo é um sólido (prisma) limitado por seis paralelogramos, ou seja, todas suas faces são paralelogramos. Estas faces agrupam-se em três pares, no qual em cada par duas faces são paralelas congruentes, e dizem-se opostas (LIMA, 2006). Ao falar de paralelepípedo nos referimos a região do espaço tridimensional do sólido e não apenas sua casca.

Há três tipos de paralelepípedo, a saber: paralelepípedo oblíquo é um prisma que possui todas as faces na forma de paralelogramos não retângulos, paralelepípedo reto é um prisma cujas bases são paralelogramos e faces laterais são retângulos, o paralelepípedo retângulo ou paralelepípedo reto-retângulo ou bloco retangular é um prisma cuja as faces são retângulos (DOLCE; POMPEU, 1993). Nesta pesquisa abordaremos apenas o paralelepípedo retângulo.

Figura 6 - Tipos de paralelepípedo



Para Lima (2006), o paralelepípedo retângulo ou bloco retangular é um sólido limitado por seis faces retangulares. Esses retângulos agrupam-se em três pares, no qual em cada par os retângulos são iguais, ou seja, as duas faces formadas pelo par de retângulos são paralelas e congruentes. O cubo é um caso particular do paralelepípedo retângulo em que suas arestas são congruentes e suas seis faces são quadradas (LIMA, 2006). Adotaremos em nosso estudo a definição de paralelepípedo retângulo apresentada por esse autor.

2.6 Volume e Capacidade

Inicialmente na Educação Básica a grandeza volume é abordada como capacidade, ou seja, o volume interno de um objeto, e posteriormente é introduzido o conceito de volume propriamente dito. No entanto, muitas vezes, os alunos confundem os conceitos de volume e capacidade, ou seja, não sabem distinguir e relacionar tais conceitos, como foi evidenciado na pesquisa de Oliveira (2002).

Capacidade é o volume da parte interna de um objeto. Capacidade e volume são a mesma grandeza, porém em contextos diferentes (LIMA; BELLEMAIN, 2010). Para Barros (2002) o termo capacidade é aplicado a um tipo específico de volume que consiste no volume interno de um objeto oco, enquanto o termo volume é utilizado em objetos ocos ou maciços. Corroborando com o autor supracitado, Moraes (2013) afirma que nos sólidos maciços e/ou ocos está relacionado o conceito de volume propriamente dito ou ao conceito de volume interno (capacidade), no entanto o conceito de capacidade só se associa aos sólidos ocos.

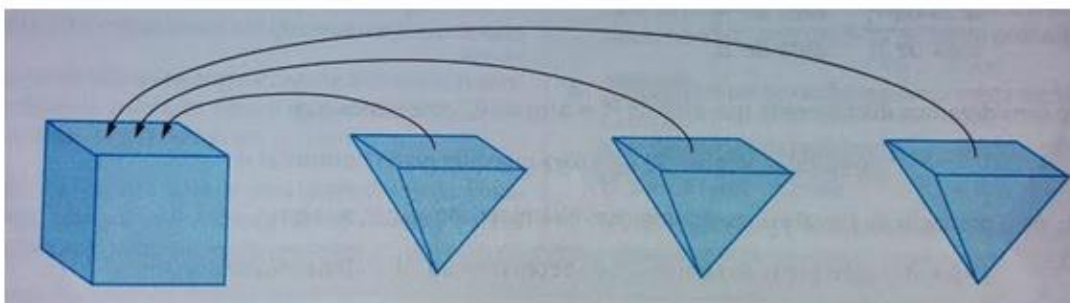
A distinção desses dois conceitos está relacionada com as situações presentes no mundo físico e as estratégias mobilizadas pelos alunos na resolução dessas situações. A unidade de medida mais utilizada para medir capacidade, no caso do sistema métrico decimal, é o litro (l). Ao adotar tal unidade, a capacidade de um recipiente resulta em uma grandeza unidimensional. Desse modo, os problemas que de uma forma geral envolvem o conceito de capacidade possuem aspecto unidimensional. Entretanto, ela pode ser considerada como uma grandeza tridimensional, pois a capacidade é um tipo de volume. Um exemplo disso pode ser observado ao empregar a unidade decímetro cúbico como unidade de capacidade (BARROS, 2002).

Para determinar o volume de um recipiente levamos em consideração suas dimensões e o cálculo de sua capacidade depende exclusivamente da unidade adotada, ou seja, de quantas vezes o menor cabe no maior. Por isso, é relevante que os alunos tenham vivências, experiências ou oportunidades de passar líquidos de um recipiente para outro, como, por exemplo atividades que abordem transvasamento de líquidos. Uma atividade que envolve escolher dois recipientes, um menor e outro, por exemplo, é muito comum nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Com a ajuda de um funil, pode-se fazer o transvasamento do produto escolhido e verificar quantas vezes o conteúdo do recipiente menor cabe no maior (MUNIZ; BATISTA; SILVA, 2008).

Com base no exemplo de atividade exposta, percebemos que a capacidade do recipiente maior é medida por meio da verificação da quantidade de vezes que o recipiente menor cabe no maior, ou seja, o recipiente menor foi a unidade de medida adotada. A seguir apresentamos um exemplo de atividade que explora o conceito de capacidade.

Figura 7 - Exemplo de atividade que explora o conceito de capacidade

Experimento: considere 2 recipientes, um em forma de paralelepípedo retângulo e outro em forma de pirâmide com mesma base e mesma altura. Se quiséssemos encher de água o paralelepípedo retângulo usando a pirâmide, quantas vezes seria necessário utilizá-la para encher completamente esse paralelepípedo?



Fonte: Adaptado de Dante (2013)

Na Figura 7, evidenciamos que a atividade explora o aspecto unidimensional da grandeza capacidade, visto que a capacidade foi medida por meio da soma da quantidade de vezes que o líquido do recipiente da pirâmide cabe no paralelepípedo, $1 \text{ pirâmide} + 1 \text{ pirâmide} + 1 \text{ pirâmide} = 3 \text{ pirâmides}$, conforme foi apresentado a resolução. Geralmente esse tipo de experimento é abordado para justificar a fórmula do volume dos sólidos geométricos, nesse caso é abordado para exemplificar a fórmula da pirâmide.

Como já mencionamos antes, alguns problemas exploram o aspecto tridimensional da grandeza capacidade. No exemplo a seguir, apresentamos um problema que explora o aspecto tridimensional da grandeza capacidade.

Considere um reservatório em forma de paralelepípedo retângulo, cujas medidas são 8 m de comprimento, 5m de largura e 1,2 m de profundidade. Qual a capacidade, em litros, desse reservatório?

Conforme observado no exemplo, para determinar a capacidade do reservatório é preciso determinar a medida do seu volume por meio do produto das medidas de suas dimensões ($8\text{m} \times 5\text{m} \times 1,2\text{m} = 48\text{m}^3$). Para encontrar a capacidade em litros é preciso converter m^3 em dm^3 e depois dm^3 em litros, isto é, 48 m^3 equivale a $48\,000 \text{ dm}^3$ que corresponde a $48\,000 \text{ l}$. Então, a capacidade desse reservatório é $48\,000$ litros. Vale ressaltar que a capacidade poderia ser em m^3 ou dm^3 entre outras unidades, pois “aquilo que medimos com unidades de medida de volume, podemos medir com unidades de medida de capacidade” (MUNIZ; BATISTA; SILVA, 2008, p.83).

Em síntese, capacidade e volume são conceitos que possuem muita relação e a diferenciação entre esses conceitos é delicada, no entanto consideramos que a distinção entre volume e capacidade depende dos contextos que esses conceitos estão inseridos, isto é, depende do que se quer medir. A relação dos sólidos ocos e maciços colabora na compreensão de capacidade e volume, mas não pode considerar que esses conceitos são grandezas diferentes.

2.7 Situações que Dão Sentido ao Conceito de Volume

Como vimos anteriormente, Vergnaud propõe que um conceito é formado por um tripé de conjuntos. Dentre estes conjuntos, temos o conjunto das situações que dão sentido ao

conceito. Com base nisso, Baltar (1996) propõe uma classificação das situações que dão sentido ao conceito de área, a saber: comparação, medida e produção. Ferreira (2010) sugere uma nova classe de situações baseada em Baltar (1996): a mudança de unidade.

Morais, Figueiredo e Bellemain (2012) por meio de um levantamento sobre situações de volume que utilizaram a Teoria dos Campos Conceituais (ANWANDTER-CUELLAR, 2008; BARROS, 2002; OLIVEIRA, 2002), classificaram as situações que dão sentido ao conceito de volume em: situações de comparação, medida, produção, transformação de unidades e operacionalização de volumes.

Entretanto, Moraes (2013) e Figueiredo (2013) consideraram em seus estudos que as situações de transformação de unidades e operacionalização de volumes pertencem às situações de medida, ou seja, estas situações são consideradas subtipos das situações de medida. Vale ressaltar que, assim como Moraes (2013), utilizamos o termo medição e não medida para classificar as situações, visto que segundo o autor o termo medição se refere ao tipo de situação que consiste em medir o volume, enquanto medida consiste em um número que é o resultado do processo de medição.

A seguir apresentamos cada tipo de situação de acordo com os trabalhos de Moraes (2013) e Figueiredo (2013).

2.7.1 Situações de comparação

As situações de comparação que envolvem dois sólidos consistem em determinar qual deles possui volume maior/menor ou se possuem volumes iguais. Por outro lado, se as situações abrangem mais de dois sólidos, é preciso ordená-lo de forma que justifique a transitividade da relação de ordem (FIGUEIREDO, 2013). Este tipo de situação possibilita ao aluno a mobilização dos conhecimentos do campo geométrico, campo das grandezas e alguns casos conhecimentos do campo geométrico e/ ou campo algébrico.

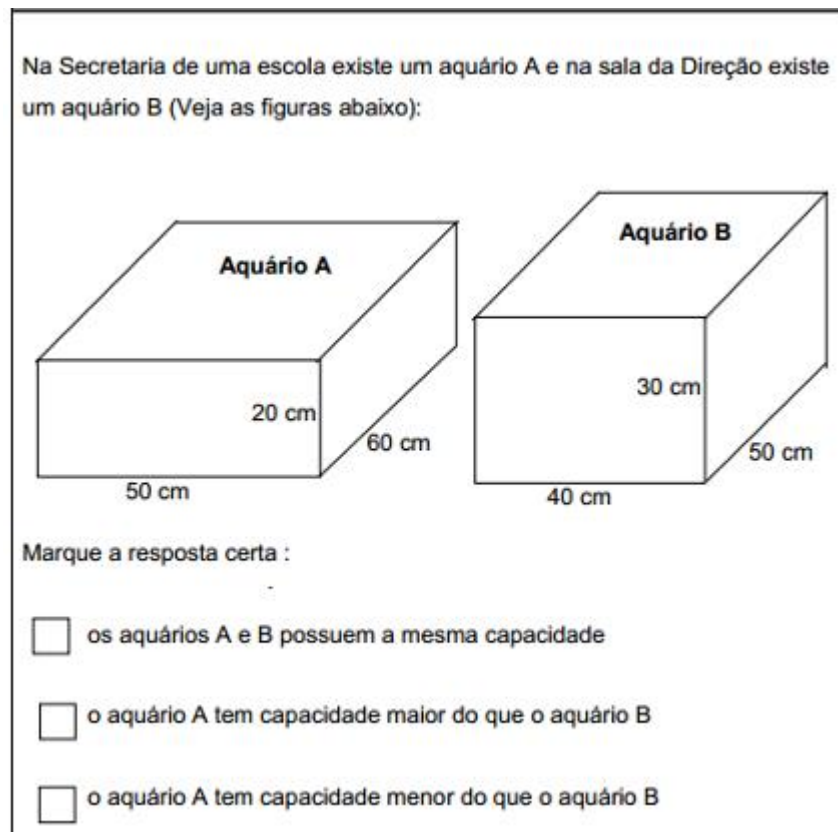
Para Figueiredo (2013), os procedimentos que podem ser utilizados para exploração desse tipo de situação são: visual perceptiva, decomposição-recomposição, inclusão, imersão, medição e comparação das medidas e comparação das massas. Para essa autora o procedimento visual trata-se de comparar os objetos por meio da visão e ordená-los de acordo com o seu volume. A decomposição-recomposição consiste em decompor um dos objetos para recompor um objeto conhecido para comparar.

A inclusão é um tipo de procedimento que consiste em comparar volume de sólidos por meio da observação se um dos sólidos pode ser inserido em outro de maior volume. Vale ressaltar que neste caso o sólido de maior capacidade precisar ser oco.

Na imersão, o aluno precisa de um recipiente com água no seu interior para imergir os objetos um a um e comparar o nível de água deixado por cada objeto submerso. Fazendo isto, o nível mais elevado será correspondente ao objeto de maior volume (FIGUEIREDO, 2013).

O procedimento medição e comparação das medidas consiste em determinar o volume dos sólidos, por meio da fórmula ou da contagem de cubinhos ou outra unidade de medida não convencional, para depois compará-los. Conforme ilustrado no exemplo a seguir.

Figura 8 - Exemplo de situação de comparação que favorece o procedimento medição e comparação das medidas



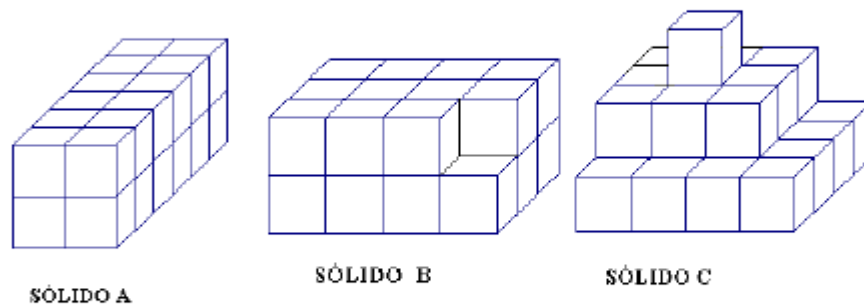
Fonte: Barros (2002, p.97)

Na Figura 8, percebemos que utilizando apenas o procedimento visual não é possível encontrar a resposta correta da comparação dos volumes dos dois aquários, visto que um dos possíveis erros é considerar, por meio desse procedimento, que o aquário B tem maior volume

interno (capacidade). Diante disso, para encontrar a resposta correta desse problema é preciso calcular o volume dos dois aquários, utilizando a fórmula, e depois compará-los.

Figura 9 - Exemplo de situação de comparação que favorece o procedimento medição e comparação das medidas

2) Os sólidos abaixo, são compostos por cubinhos de 1cm de aresta, sabendo que na parte escondida do desenho, há um cubo sob outro, até que fique visível o cubo do topo, e desta forma não há cubo suspenso e nem sobrando. Compare o volume dos sólidos abaixo e marque a alternativa correta:



- a) $V_a = V_b = V_c$
- b) $V_a < V_b < V_c$
- c) $V_a > V_b > V_c$
- d) $V_a = V_b > V_c$
- e) OUTROS

Fonte: Figueiredo (2013, p.51)

Conforme a Figura 9, observamos que um dos procedimentos de resolução do problema apresentado é a de contagem de cubinhos. Primeiramente é preciso realizar a decomposição de um dos sólidos, em cubinhos, e compor outro sólido parecido com os dois sólidos que restaram, então dessa forma é possível comparar o volume dos sólidos por meio da relação de ordem: maior, menor ou igual. Ao utilizar esse procedimento de resolução, o estudante mobiliza conhecimentos do campo geométrico, numérico e das grandezas.

A comparação de massas permite comparar o volume por meio da comparação dos objetos que possuem mesma densidade. Desse modo, objeto que possui maior massa terá maior volume (FIGUEIREDO, 2013).

Ao observar os tipos de procedimentos que podem ser abordados nas situações de comparação, percebemos que no visual perceptivo, na decomposição-recomposição, na

inclusão e na comparação de massas são mobilizados conhecimentos do campo das grandezas referente ao conceito de volume e do campo geométrico relacionado aos sólidos e suas propriedades. Em relação ao procedimento medição comparação das medidas, destacamos o emprego dos conhecimentos dos campos supracitados, além do campo algébrico ligados à escrita algébrica da fórmula.

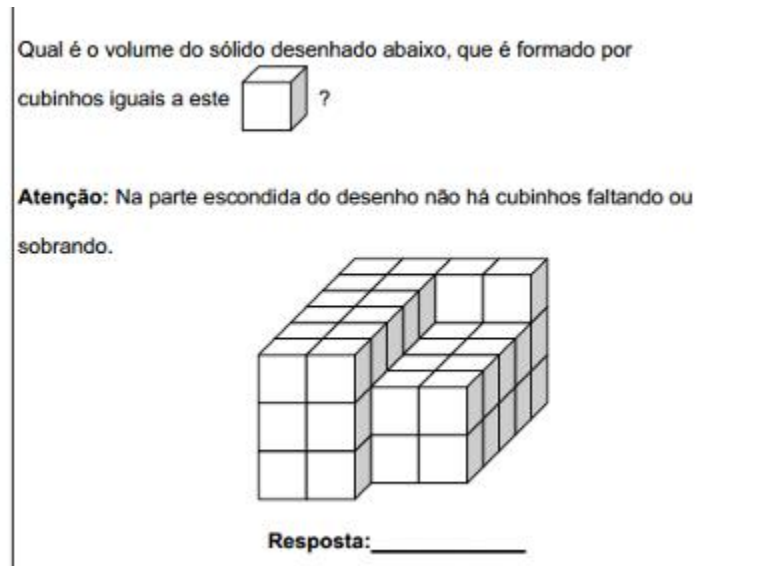
2.7.2 Situações de medição

São situações que permitem atribuir um número, numa dada unidade, ao volume de um sólido. Esta situação proporciona a articulação entre o quadro numérico, geométrico e das grandezas. Nesse tipo de situação, os discentes podem empregar distintos procedimentos de resolução, como: uso de fórmulas, contagem de unidades, princípio de Cavalieri, imersão, estimativas, preenchimento e transbordamento (MORAIS, 2013).

As fórmulas de volume são expressões algébricas que possibilitam determinar a medida de volume por meio dos comprimentos das arestas e/ou da área das faces do sólido. O reconhecimento e uso desse procedimento, em alguns casos podem ser influenciados pelo tipo de fórmula em jogo bem como pela posição da figura, ou seja, se o sólido é reto ou oblíquo ou se a sua base está numa posição prototípica (IBID). Neste tipo de procedimento, o aluno utiliza conhecimentos do campo geométrico (propriedades do sólido), do campo das grandezas (conceito de volume, área e comprimento), do campo algébrico (escrita da fórmula de volume) e do campo numérico (operações com números racionais ou irracionais).

A contagem das unidades de medida permite obter a medida de volume de um sólido contando a quantidade de unidades que o compõem. Esse procedimento é recomendado quando os sólidos apresentarem valores das dimensões em números inteiros positivos, pois dessa forma é possível determinar o seu volume pela decomposição em cubinhos unitários. No entanto, esse procedimento é menos viável quando as dimensões do sólido são medidas por números decimais não inteiros (MORAIS, 2013), pois se o sólido apresentar medidas não inteiras não é suficiente contar cubinhos unitários e para determinar o volume desse sólido é preciso decompor cubinhos unitários. Na Figura 10, apresentamos um exemplo de problema que dentre os procedimentos de resolução, a contagem das unidades de medida (neste caso a unidade são cubos unitários) pode ser utilizada para determinar o volume do sólido. Neste exemplo, observamos imbricações entre os campos conceituais das grandezas, geométrico e numérico.

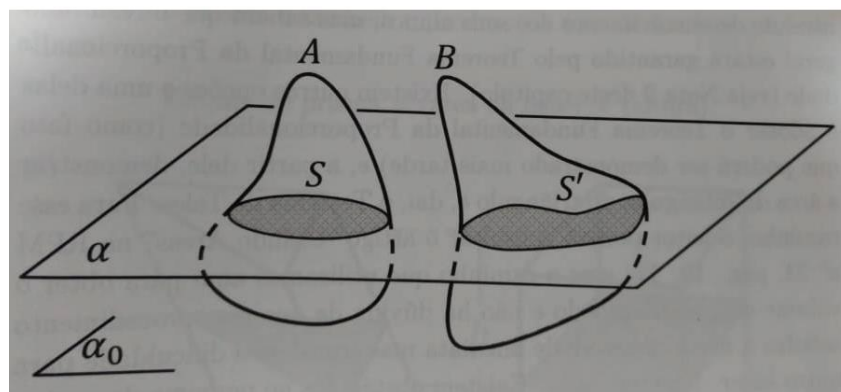
Figura 10 - Exemplo de situação de medição que favorece o procedimento contagem das unidades de medida



Fonte: Barros (2002, p.81)

O princípio de Cavalieri consiste: dados dois sólidos A e B, com mesma altura, e um plano horizontal, que chamaremos de plano α (de acordo com a ilustração da Figura 11). Esse plano secciona duas regiões planas nos sólidos A e B representada por S e S'. Essas regiões planas são as interseções do plano α com os sólidos A e B. Se para todos os planos horizontais, a figura plana S tem a mesma área que a figura S', o princípio de Cavalieri afirma que o volume do sólido A é igual ao sólido B. Diante disso, enuncia-se esse princípio: “sejam A e B dois sólidos. Se qualquer plano horizontal secciona A e B segundo figuras planas com áreas iguais, então o vol (A) = vol (B)” (LIMA, 2006, p. 84).

Figura 11 - Princípio de Cavalieri

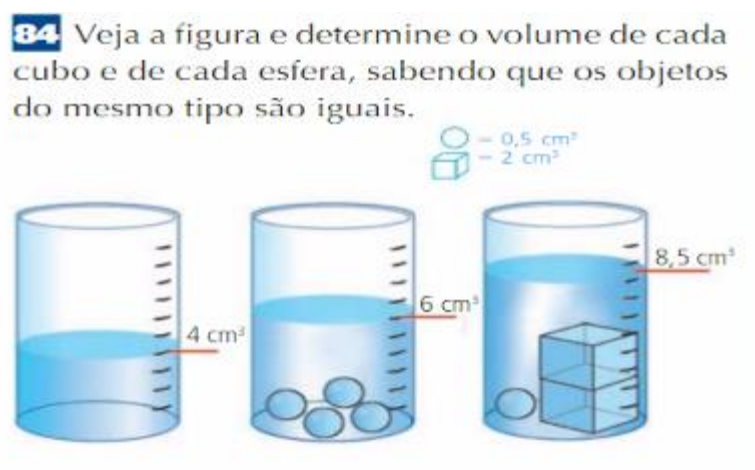


Fonte: Lima *et al* (2006, p.285)

Por meio do procedimento baseado no princípio de Cavalieri é possível determinar o volume de um sólido com base nas características de outro sólido, isto é, os dois sólidos terão volumes iguais se tiverem mesma altura e se suas secções planas horizontais possuírem a mesma área.

A imersão consiste em determinar o volume de um corpo observando-se o deslocamento de um líquido após a imersão do objeto (objeto no estado sólido) a ser medido. Na Figura 12, observamos um exemplo de um problema que o aluno precisa mobilizar o procedimento de imersão. Uma das possibilidades de resolver esse problema é medir o volume que foi aumentado ao colocar quatro esferas no recipiente; determinar o volume de cada esfera; determinar a medida de volume que foi aumentada ao adicionar dois cubos e uma esfera no recipiente e calcular o volume de cada cubo. Neste caso, percebemos que se o aluno optar por esse tipo de resolução, ele mobilizará conhecimentos do campo das grandezas relacionados ao conceito de volume e do campo numérico referente às operações com números racionais.

Figura 12 - Exemplo de situação de medição que proporciona o procedimento de imersão



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2012, p.261)

Os procedimentos de preenchimento e transbordamento permitem observar num recipiente cheio de líquido a quantidade que transborda após a imersão de um sólido. Para Moraes (2013, p. 47), esses procedimentos “podem ser favorecidos a partir das variações dos sólidos, ocios ou maciços (capacidade X volume propriamente dito)”.

As situações de transformações de unidades são consideradas como subtipo das situações de medição que possibilitam a passagem/conversão de uma unidade de volume dada para outra. Esse subtipo de situação tem como procedimentos medir o volume de um mesmo

sólido usando unidades distintas e converter uma unidade de volume em outra. Neste contexto, o campo das grandezas e o campo numérico possuem influência na resolução desse tipo de situação.

Nas situações de operacionalização de volumes, o aluno vai realizar uma operação matemática com volumes. Os procedimentos possíveis nesse subtipo de situação são adicionar/subtrair volumes e efetuar multiplicação/divisão volume por um escalar (MORAIS, 2013).

A respeito das situações de medição, constatamos nos procedimentos mencionados imbricações entre os campos conceituais das grandezas, da geometria, da álgebra e do numérico.

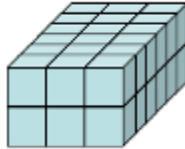
2.7.3 Situações de produção

As situações de produção se caracterizam pela produção de um sólido com volume maior, menor ou igual ao volume dado. Essas situações permitem que os estudantes mobilizem conhecimentos do campo das grandezas, geométrico, numérico e, em alguns casos, algébrico. Os possíveis procedimentos que podem ser utilizados pelos alunos são: composição, decomposição-recomposição e o princípio de Cavalieri (FIGUEIREDO, 2013).

O procedimento de composição possibilita produzir um sólido compondo as unidades de medida e o de decomposição-recomposição propõe produzir um novo sólido com volume maior/menor ou igual ao volume de um sólido dado (MORAIS, 2013). Na Figura 13, apresentamos um exemplo de um problema que utiliza esses dois procedimentos, visto que um dos procedimentos de resolução desse problema é utilizar a composição para construir sólidos distintos e a decomposição-recomposição para montar o sólido com 36 cubinhos e determinar os sólidos distintos com mesma quantidade de cubinhos, isto é, para formar todos os paralelepípedos retângulos com mesmo volume será necessário decompor e recompor os cubinhos (FIGUEIREDO, 2013). Para o aluno resolver esse problema por meio do procedimento citado, é necessário que ele mobilize conhecimentos do campo das grandezas, do campo geométrico e do campo numérico.

Figura 13 - Exemplo de situação de produção que favorece o procedimento de composição e o de decomposição-recomposição

João possui 36 cubinhos de 1cm de aresta. Ele quer organizá-los de modo a formar um paralelepípedo retângulo.



- Indique quantos paralelepípedos retângulos diferentes João poderá formar com os 36 cubinhos. *Explique sua resposta.*
- João acha que todos os paralelepípedos retângulos formados possuem o mesmo volume. O que você acha? *Explique sua resposta.*
- João acha que todos os paralelepípedos retângulos formados têm a mesma área total das faces, pois possuem a mesma quantidade de cubinhos. Você concorda com ele? *Explique sua resposta.*

Fonte: Adaptada de Anwandter-Cuellar (2008)

Para construir sólidos com volumes iguais pode-se utilizar o princípio de Cavalieri (conforme explicitado anteriormente). Por exemplo, dado um sólido A pode construir um sólido B com o mesmo volume de A, desde que eles tenham mesma altura e ao serem seccionados por planos horizontais apresentem regiões planas com áreas iguais.

Outro procedimento que pode ser utilizado e não foi citado nos estudos de Figueiredo (2013) e Morais (2013), é o uso de fórmula, visto que têm problemas que solicitam a construção de sólidos ou as medidas das suas dimensões dado seu volume ou sua capacidade. Cabe salientar que o aluno pode resolver situações de produção sem utilizar a fórmula, no entanto quando envolvem medidas não inteiras esse procedimento é mais viável não só para esse tipo de situação, mas para os outros. Conforme o exemplo no Quadro 1.

Quadro 1 - Exemplo de situação de produção que favorece o procedimento uso de fórmulas.

Carlos quer construir uma caixa-d'água cúbica com capacidade de 8 000 litros de água. Qual deve ser a medida da aresta dessa caixa ?

Fonte: adaptada de Morais (2013)

Para o aluno resolver o problema acima utilizando a fórmula, é preciso que ele identifique às propriedades do sólido (cubo) envolvido no problema (campo geométrico); mobilize o conceito de volume e de capacidade, fórmula do volume do cubo e a conversão de unidades de medida de capacidade (litros) para a de volume, neste caso é necessário escolher uma unidade, visto que o problema não especifica a unidade de medida de comprimento que aresta deve ter (campo das grandezas); modelize da escrita algébrica e resolva a expressão algébrica, ou seja, a equação (campo algébrico); realize operações com números racionais, tais como divisão e raiz cúbica de números racionais positivos (campo numérico).

Vale ressaltar que quando o ensino do volume é marcado somente pelas situações numéricas a dissociação e articulação entre o sólido, a grandeza e a medida não ocorrem. Essa ideia é reforçada por Moraes (2013) quando ele afirma que a ausência de situações de comparação e de produção não numérica e o destaque nas situações numéricas ocasionam um trabalho insuficiente para constituir as distinções e articulações entre o sólido, a grandeza e a medida.

Em síntese, podemos afirmar que os conhecimentos do campo geométrico possuem mais ênfase nas situações de produção, contudo, os outros campos conceituais possuem influências na resolução desse tipo de situação, tais como o campo das grandezas e o campo numérico e o algébrico.

Com base nos elementos que explicitamos neste capítulo, Teoria dos Campos Conceituais; Imbricações entre Campos Conceituais; revisão de literatura; volume como grandeza; propriedades do paralelepípedo retângulo; volume e capacidade; e a tipologia das situações, construímos os objetivos do nosso estudo que apresentaremos na próxima seção.

2.8 Objetivos

2.8.1 Objetivo geral:

Analisar conhecimentos mobilizados por alunos do Ensino Médio na resolução de problemas envolvendo volume do paralelepípedo retângulo, sob a ótica das Imbricações entre Campos Conceituais.

2.8.2 Objetivos específicos:

- Analisar os procedimentos de resolução mobilizados pelos alunos nos problemas envolvendo volume do paralelepípedo retângulo, sob a ótica das Imbricações entre Campos Conceituais.
- Identificar teoremas em ação corretos e errôneos mobilizados pelos alunos na resolução de problemas envolvendo volume do paralelepípedo retângulo.
- Analisar representações simbólicas utilizadas por alunos do Ensino Médio na resolução de problemas envolvendo volume paralelepípedo retângulo.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, apresentaremos o percurso metodológico da nossa pesquisa. Detalharemos os participantes e as etapas da pesquisa, descreveremos as variáveis didáticas com os seus respectivos valores envolvidos nas questões, a construção dos testes diagnósticos e a análise a priori de cada uma das questões.

3.1 Participantes da Pesquisa

Os participantes da pesquisa foram 107 alunos do Ensino Médio de três escolas estaduais das cidades de Saloá – PE, Lajedo – PE e Garanhuns – PE. Escolhemos essas três escolas, uma de cada município citado anteriormente, pois existem poucas investigações no Agreste Meridional do Estado de Pernambuco se compararmos com as pesquisas desenvolvidas tendo como foco a região metropolitana. Além disso, o fato de fazer parte do grupo de pesquisa SEMEAR⁷ que tem como um dos objetivos desenvolver estudos com a finalidade de subsidiar o ensino de Ciências e a Educação Matemática no Agreste Pernambucano, e também do Grupo Pró-Grandezas⁸, também instiga a investigação realizada nesta pesquisa.

Outro critério para selecionarmos essas escolas foi a acolhida e o apoio da gestão escolar, nas pessoas da Diretora e da Coordenadora Pedagógica, além da atenção e disponibilidade dos professores de cederam algumas aulas para a coleta de dados. A opção por três escolas não visou a realização de nenhum tipo de comparação, mas sim para analisarmos distintos procedimentos de resolução, e a possibilidade de identificarmos teoremas em ação mobilizados pelos alunos.

Sabemos que alguns documentos oficiais, como os Parâmetros Curriculares do Estado de Pernambuco (2012), recomendam que os conteúdos relacionados ao volume dos sólidos, juntamente com as suas propriedades sejam ensinados no 2º ano do Ensino Médio no final do

⁷ SEMEAR: Subsidiar o Ensino de Ciências e a Educação Matemática no Agreste Pernambucano Efetuando Aprofundadas Reflexões. Grupo de Pesquisa liderado pela Profª Rosinalda Aurora de Melo Teles. Grupo certificado pelo CNPq: <http://dgp.cnpq.br/dgp/espelhogrupo/0601058612653346>

⁸ Pró-Grandezas: Ensino e Aprendizagem das Grandezas e Medidas. Grupo de Pesquisa liderado pela Profª Paula Moreira Baltar Bellemain e pelo Profº Paulo Figueiredo Lima. Grupo certificado pelo CNPq: <http://dgp.cnpq.br/dgp/espelhogrupo/4433696342963268>

segundo semestre do ano letivo, no entanto o nosso critério de escolha baseou-se na informação se a turma do Ensino Médio já teria estudado tais conteúdos durante o ano letivo.

3.2 Etapas da Pesquisa

Para alcançar o nosso objetivo geral que consiste em analisar conhecimentos mobilizados por alunos do Ensino Médio na resolução de problemas envolvendo volume do paralelepípedo retângulo, sob a ótica das imbricações entre campos conceituais, utilizamos dois instrumentos de coleta de dados: testes diagnósticos e entrevistas baseadas em alguns elementos da entrevista de explicitação.

A aplicação dos instrumentos de coleta de dados aconteceu em duas etapas. Primeiramente foram propostos os testes aos alunos de turmas nas quais o conceito de volume do paralelepípedo retângulo e as suas propriedades, já tinham sido abordados durante o ano letivo de 2017. Ao responder as questões propostas, solicitamos aos alunos que justificassem, por escrito, o procedimento utilizado durante a resolução.

Os dados coletados foram analisados sob a ótica das Imbricações entre Campos Conceituais e com base no tripé dos conjuntos proposto por Vergnaud (1996): conjunto das situações, invariantes operatórios e das representações simbólicas. Vale ressaltar a relevância da escolha destes três conjuntos para esta análise, visto que para a construção de um conceito, que nesta pesquisa é o conceito de volume, é necessário considerar esses conjuntos.

O estudo das situações que atribuem sentido ao conceito de volume permitiu identificar os campos envolvidos na resolução dessas situações, sob a ótica das Imbricações entre Campos Conceituais. Os invariantes operatórios possibilitaram identificar teoremas em ação relacionados aos diferentes campos conceituais mobilizados pelos alunos e as representações simbólicas nortearam a análise sobre as formas de representações utilizadas na compreensão e na resolução dos problemas envolvendo volume do paralelepípedo retângulo.

A segunda etapa consistiu na realização de entrevistas com estudantes previamente selecionados que teve como objetivos comprovar ou não os teoremas em ação identificados na resolução dos problemas envolvendo volume do paralelepípedo retângulo e compreender os procedimentos de resolução utilizados por esses estudantes. O critério que norteou a escolha desses estudantes foi a identificação dos teoremas em ação errôneos mais mobilizados pelos participantes da pesquisa. Diante disso, optamos por estudantes que mobilizaram mais de uma vez esses teoremas em ação no conjunto das questões dos testes.

No nosso estudo nos "inspiramos" nas entrevistas de explicitação propostas por Pierre Vermersch. Esse tipo de entrevista permite uma conversação introspectiva detalhada da ação, ou seja, o participante vai explicitar sua experiência, uma vez que, "se por ação, eu designo a realização de uma tarefa, a entrevista de explicitação visa à descrição do desenvolvimento desta ação, tal qual ela tenha sido efetivamente colocada em prática em uma tarefa real"(VERMERSCH apud ALMEIDA, 2016, p.132-133).

Na entrevista de explicitação o papel do entrevistador é essencial, pois o acompanhamento realizado por ele tem a finalidade de ajudar o entrevistado a lembrar e explicitar uma ação já vivenciada em todas as suas dimensões (ALMEIDA, 2016).

Diante disso, as entrevistas buscavam a explicitação das resoluções desenvolvidas pelos estudantes participantes da pesquisa nas questões dos testes, isto é, como fez e o que pensou no momento de resolver as questões propostas para comprovarmos ou não a mobilização dos teoremas em ação pelos estudantes. No entanto, em virtude desse nosso objetivo, nem todas as características da entrevista de explicitação foram utilizadas.

Nesse contexto, selecionamos 20 alunos que mobilizaram teoremas em ação distintos que foram comuns no grupo dos participantes das três escolas⁹, no entanto só realizamos entrevistas com 9, pois 5 alunos faltaram no dia das entrevistas e os outros 6 estavam fazendo atividades escolares. As entrevistas foram realizadas individualmente na biblioteca da escola e aconteceram da seguinte forma: Inicialmente explicamos a finalidade das entrevistas e que ela seria gravada, mas que não divulgaríamos a identidade dos entrevistados; mostramos aos alunos seus testes com as suas respectivas respostas e solicitamos que eles explicassem os seus procedimentos de resolução em cada questão. Disponibilizamos papel ofício em branco e lápis para auxiliar na explicação da sua resposta. Estas entrevistas foram gravadas em áudio e transcritas para uma análise detalhada e criteriosa, possibilitando maior exatidão na compreensão das respostas apresentadas pelos alunos. Após a segunda etapa, analisamos os teoremas em ação e as representações simbólicas mobilizadas pelos alunos na resolução das questões dos testes.

Vale ressaltar que realizamos um estudo piloto, em dezembro de 2016, com 28 alunos do terceiro ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual do Agreste Meridional de Pernambuco. Foram propostos 4 tipos de testes e cada teste diagnóstico era composto por 3 questões envolvendo volume do paralelepípedo retângulo. Alguns resultados desse estudo

piloto foram apresentados e publicados¹⁰ em forma de artigo em 2017, no VII Encontro Pernambucano de Educação Matemática (EPEM). Com base nos resultados do estudo piloto, acrescentamos e modificamos algumas questões na busca de coletar dados que realmente atendessem ao objetivo dessa pesquisa.

3.3 Descrição das Variáveis

Neste tópico apresentaremos as escolhas realizadas para construção dos testes. (2008) define variáveis didáticas como um tipo particular de variável cognitiva¹¹ em que o professor determina e controla por meio dos valores atribuídos a essas variáveis. Isso quer dizer que as variáveis didáticas atuam como particularidades de um problema que provocam modificações nos procedimentos de resolução por meio dos valores que elas podem assumir. Consideramos essa definição neste estudo.

Diante disso, elegemos três variáveis, que explicitaremos a seguir, que perpassam pelo campo das grandezas, geométrico, algébrico e numérico. Cabe salientar que os valores que essas variáveis podem assumir estão relacionados aos aspectos que pretendemos analisar nas questões dos testes.

Variável 1: Tipo de situação

A primeira variável refere-se às situações que dão sentido ao conceito de volume, explicitadas na fundamentação teórica, e possui relação direta com o campo das grandezas, visto que está ligada ao conceito de volume. No entanto, na resolução dessas situações é preciso mobilizar conhecimentos dos diferentes campos conceituais. Diante disso, esta variável pode assumir três valores representados por cada tipo de situação, a saber: situações de comparação, de medição e situações de produção. Com base na análise dos valores desta variável é possível identificar qual ou quais situações os alunos apresentaram mais dificuldade ou melhores resultados.

¹⁰ Melo; Teles (2017). Volume do Paralelepípedo Retângulo: um estudo sobre conhecimentos mobilizados por alunos do ensino médio na resolução de situações de medição. Disponível em: <http://www.sbempe.com.br/epem/anaais/>.

¹¹ Brousseau chama de variável cognitiva a variável “que se encontra em situação tal que, pela escolha de valores diferentes, podem alterar o conhecimento ótimo” (2008, p.35).

Variável 2: Presença de figura

A figura pode ser apresentada no enunciado da questão ou estar ausente, ou seja, esta variável assume dois valores: presença e ausência de figura. Para identificar/mobilizar as propriedades da figura, que neste caso se trata de paralelepípedos retângulos, é preciso ter conhecimentos do campo conceitual geométrico. Diante disso, é possível identificar se os valores desta variável influenciam nos procedimentos de resolução.

Variável 3: Operações e valores numéricos

As operações envolvidas nos problemas podem ser multiplicação e/ou divisão com números naturais e números racionais (na forma decimal ou fracionária). A partir desta variável é possível evidenciar se as dificuldades dos alunos para resolver problemas envolvendo volume estão relacionadas ao campo numérico. As operações estão ligadas também ao campo algébrico.

3.3.1 Construção dos testes diagnósticos

Para elaborar os testes diagnósticos deste estudo, realizamos uma análise a priori inicial de 6 situações envolvendo volume do paralelepípedo retângulo, oriundas dos trabalhos de Mestrado de Ana Paula Braz Figueiredo e Leonardo Bernardo de Moraes, do curso de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica (EDUMATEC), defendidos no ano de 2013.

Figueiredo (2013) utilizou em seu estudo algumas questões de sua própria autoria, outras escolhidas em trabalhos que investigaram a grandeza volume, tais como Barros (2002) e Anwandter-Cuellar (2008) e outras questões foram selecionadas em exames de vestibulares. As questões analisadas na pesquisa de Moraes (2013) foram selecionadas em coleções de livros didáticos de Matemática do Ensino Médio aprovados pelo PNLD 2012.

Os resultados da primeira análise das questões a serem contempladas no teste diagnóstico foram apresentados¹² em 2016, no I Encontro Nacional da Didática da Geometria e das Grandezas e Medidas (EnDiGGraM).

A partir dessas análises, definimos alguns elementos a serem incorporados às adaptações e readequações daquelas situações com a finalidade de colocar em foco mais

¹² Melo; Teles (2016). Situações que Envolvem a Grandeza Volume: um olhar sob a ótica das imbricações entre campos conceituais.

efetivamente as variáveis, apresentadas anteriormente, e as Imbricações entre Campos Conceituais. Dentre as adaptações e readequações realizadas, destacamos: inclusão de medidas com números naturais e números racionais na forma decimal/ou fracionária com a finalidade de verificar se os alunos apresentam dificuldades nas operações com números racionais relacionadas ao campo numérico; presença e ausência de figuras no intuito de identificar se a utilização ou não do sólido influencia na resolução do problema referente ao campo geométrico; abordagem do conceito de volume e capacidade com objetivo de perceber se os alunos possuem dificuldades na relação/diferença entre os conceitos de volume e capacidade.

No Quadro 2 apresentamos o perfil de cada teste.

Quadro 2 - Perfil dos Testes

	Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	Questão 5
Teste 1	Controle	Variável 1 (situação de comparação), variável 2 (presença de figuras) e variável 3 (números racionais na forma decimal)	Variável 1 (situação de medição), variável 2 (presença de figuras) e variável 3 (números naturais)	Variável 1 (situação de produção), variável 2 (ausência de figuras) e variável 3 (números naturais)	Controle
Teste 2	Controle	Variável 1 (situação de comparação), variável 2 (presença de figuras) e variável 3 (números naturais)	Variável 1 (situação de medição), variável 2 (presença de figuras) e variável 3 (números racionais na forma decimal)	Variável 1 (situação de produção), variável 2 (ausência de figuras) e variável 3 (números racionais na forma fracionária)	Controle
Teste 3	Controle	Variável 1 (situação de comparação), variável 2 (ausência de figuras) e variável 3 (números racionais na forma decimal)	Variável 1 (situação de medição), variável 2 (ausência de figuras) e variável 3 (números naturais)	Variável 1 (situação de produção), variável 2 (presença de figuras) e variável 3 (números naturais)	Controle
Teste 4	Controle	Variável 1 (situação de comparação), variável 2 (ausência de figuras) e variável 3 (números naturais)	Variável 1 (situação de medição), variável 2 (presença de figuras) e variável 3 (números racionais na forma decimal)	Variável 1 (situação de produção), variável 2 (presença de figuras) e variável 3 (números racionais na forma fracionária)	Controle

Fonte: acervo da pesquisa.

O critério da composição do teste é contemplar todas variáveis com os seus respectivos valores. Devido a isso, decidimos propor 4 tipos de testes

Cabe salientar que decidimos propor nos testes questões de controle (a primeira e a quinta), conforme o Quadro 2. A primeira questão tinha o objetivo de verificar se os alunos sabem calcular o volume do paralelepípedo retângulo, enquanto a quinta questão possuía a finalidade de analisar os tipos de resolução mobilizados pelos alunos, visto que é uma questão que possibilita uma abertura para distintos procedimentos e possui um forte potencial de Imbricações entre os Campos Conceituais.

3.4 Apresentação e Análise a Priori das Questões dos Testes

Apresentamos a seguir a análise a priori das questões dos testes com o olhar da Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1996) e das Imbricações entre Campos Conceituais (TELES, 2007), antecipando conhecimentos que os estudantes podem mobilizar na resolução das questões; possibilidades de procedimentos de resolução relacionados a cada um dos campos; possíveis erros, representações simbólicas e teoremas em ação¹³ relacionados a cada um dos campos conceituais envolvidos nas questões.

3.4.1 Questão 1

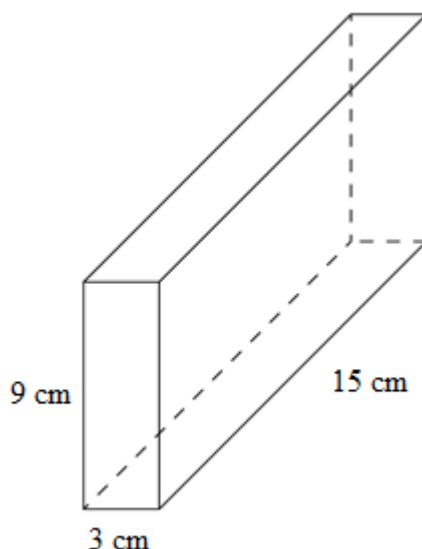
A questão 1 de todos os testes, como já mencionamos, funciona como uma questão de controle com objetivo de observar se o aluno sabe calcular o volume de um paralelepípedo retângulo. Para isso, optamos em elaborá-la de forma descontextualizada, com figura e com medidas inteiras, ou seja, uma questão simples e rotineiramente apresentada nas salas de aula.

A questão apresenta as seguintes características: situação de medição de volume, presença de figura, operações com números naturais, unidades de medida em centímetro sem necessidade de conversão, cada uma das dimensões (altura, largura e comprimento) são explicitadas na figura.

Questão 1 do teste 1(Q1T1), do teste 2 (Q1T2), do teste 3 (Q1T3) e do teste 4 (Q1T2) - Determine o volume do paralelepípedo retângulo a seguir:

Explique sua resposta.

¹³ Alguns teoremas em ação mencionados na análise a priori foram antecipados no estudo piloto.



Em relação aos elementos pertencentes a cada campo conceitual necessários para resolver esse problema, destacamos no campo geométrico: a identificação do sólido envolvido na questão (paralelepípedo retângulo) e suas propriedades, tais como sua altura, largura e comprimento; no campo das grandezas: conceito de volume e de capacidade, mobilização da fórmula correta do volume do paralelepípedo retângulo; no campo algébrico: a escrita da fórmula $V=a.b.c$; e no campo numérico: a multiplicação com números naturais para calcular o volume do sólido.

Um dos procedimentos que pode ser utilizado na questão 1 de todos os testes é o uso de fórmulas. Seguindo a ordem dos conhecimentos de cada campo conceitual apresentada anteriormente como procedimento, temos como cálculo de volume:

Cálculo de volume:

$$V = 3 \text{ cm} \times 15 \text{ cm} \times 9 \text{ cm} = 405 \text{ cm}^3$$

As possíveis representações simbólicas que o estudante pode utilizar, a saber: a unidade medida de comprimento (cm) e do volume (cm^3); a fórmula do volume do paralelepípedo ($V=a.b.c$) e os números naturais.

O aluno pode cometer erros, devido a algumas dificuldades no campo algébrico, como escrever a fórmula errada e no campo das grandezas, utilizar o princípio aditivo e somar as medidas do sólido apresentadas na questão. Outros possíveis erros podem estar ligados a dificuldade no campo geométrico, como identificação do sólido geométrico e de suas propriedades, do campo numérico relacionado a dificuldade em multiplicar com números naturais. Em relação ao campo das grandezas destacamos empregar a fórmula errada do

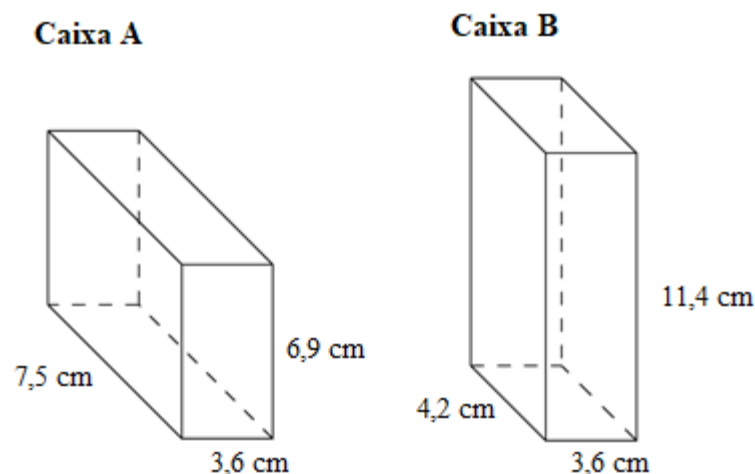
volume do paralelepípedo, como $V = b \cdot h$ ou $v = Ab/h$. Há também o aspecto da álgebra das grandezas, por exemplo, pode mobilizar a fórmula corretamente e realizar o cálculo numérico de forma correta, mas não atribuir a unidade de medida do volume cm^3 corretamente, ou seja, considerar que o volume é um número, 405 ou usar a unidade de medida inadequada como cm, por exemplo.

3.4.2 Questão 2

A questão 2 de todos os testes possui as seguintes particularidades: situação de comparação, presença ou ausência de figura, operações com números naturais ou com números racionais na forma decimal, unidades de medida em centímetro sem necessidade de conversão, cada uma das dimensões (profundidade, largura e comprimento) são explicitadas no enunciado e/ou na figura e o paralelepípedo retângulo é representado por um objeto da vida real (caixa).

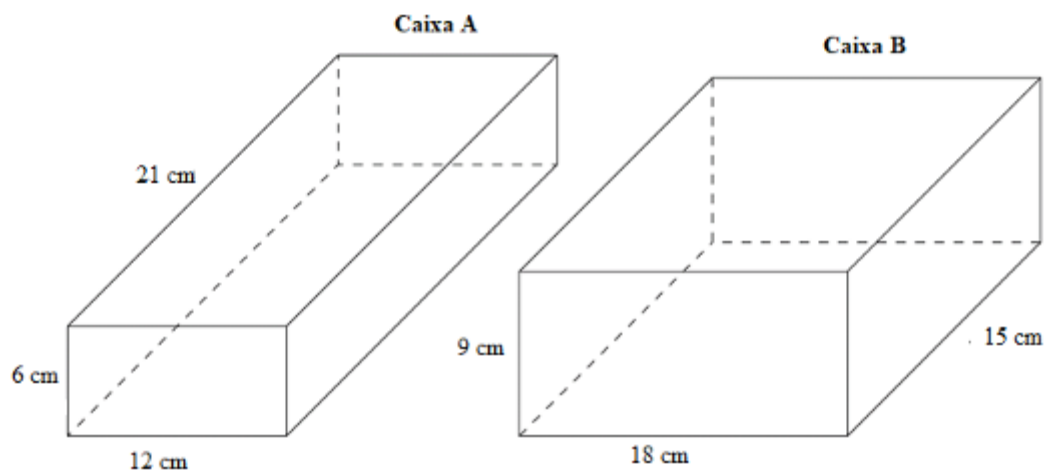
Questão 2 do teste 1 (Q2T1)

Imagine duas caixas, A e B, de vidro inteiramente fechadas. Sabe-se que caixa A tem 6,9 cm de altura, 3,6 cm de largura e 7,5 cm de comprimento enquanto a caixa B tem 11,4 cm de altura, 3,6 cm de largura e 4,2 cm de comprimento. Qual dessas caixas possui volume maior? *Explique sua resposta.*



Questão 2 do teste 2 (Q2T2)

Imagine duas caixas, A e B, de vidro inteiramente fechada. Sabe-se que caixa A tem 6 cm de altura, 12 cm de largura e 21 cm de comprimento enquanto a caixa B tem 9 cm de altura, 18 cm de largura e 15 cm de comprimento. Qual dessas caixas possui maior volume? *Explique sua resposta.*



Questão 2 do teste 3 (Q2T3) – Imagine duas caixas, A e B, de vidro inteiramente fechadas. Sabe-se que caixa A tem 6,9 cm de altura, 3,6 cm de largura e 7,5 cm de comprimento enquanto a caixa B tem 11,4 cm de altura, 3,6 cm de largura e 4,2 cm de comprimento. Qual dessas caixas possui volume maior? *Explique sua resposta.*

Questão 2 do teste 4 (Q2T4) – Imagine duas caixas, A e B, de vidro inteiramente fechada. Sabe-se que caixa A tem 6 cm de altura, 12 cm de largura e 21 cm de comprimento enquanto a caixa B tem 9 cm de altura, 18 cm de largura e 15 cm de comprimento. Qual dessas caixas possui maior volume? *Explique sua resposta.*

As situações de comparação foram construídas baseadas em Figueiredo (2013, p.63). Na questão presente no estudo da autora supracitada tratava-se de uma situação de medição, no entanto com objetivo de transformá-la em uma situação de comparação, acrescentamos duas caixas com dimensões distintas. Diante disso, essas situações têm a finalidade de comparar os volumes das duas caixas e identificar qual das caixas possui volume maior.

Para resolver a questão 2 de todos os testes, o aluno precisa mobilizar conhecimentos do campo geométrico relativos às propriedades das duas caixas (paralelepípedos retângulos); do campo das grandezas referente ao conceito de volume e a mobilização da fórmula do volume corretamente e gestão das unidades de medida; do campo algébrico relacionados aos cálculos algébricos realizados por meio da escrita da fórmula; e do campo numérico referente à multiplicação com números naturais ou números racionais na forma decimal. A seguir apresentamos uma possível resolução dessas questões utilizando o procedimento medição e comparação das medidas:

Cálculo de volume da caixa A:

$$VA = 7,5 \text{ cm} \times 3,6 \text{ cm} \times 6,9 \text{ cm} = 186,3 \text{ cm}^3$$

Cálculo de volume da caixa B:

$$VB = 4,2 \text{ cm} \times 3,6 \text{ cm} \times 11,4 \text{ cm} = 172,368 \text{ cm}^3$$

Logo, a caixa A tem o maior volume.

Cálculo de volume da caixa A:

$$VA = 12 \text{ m} \times 21 \text{ m} \times 6 \text{ m} = 1\,512 \text{ cm}^3$$

Cálculo de volume da caixa B:

$$VB = 18 \text{ m} \times 15 \text{ m} \times 9 \text{ m} = 2\,430 \text{ cm}^3$$

Logo, a caixa B tem o maior volume.

Em relação às representações simbólicas que o estudante pode utilizar, destacamos: as figuras dos paralelepípedos retângulos nos testes 3 e 4; a fórmula do volume do paralelepípedo ($V=a.b.c$); os números naturais e racionais na forma decimal; a unidade medida de comprimento (cm) e de volume (cm^3);

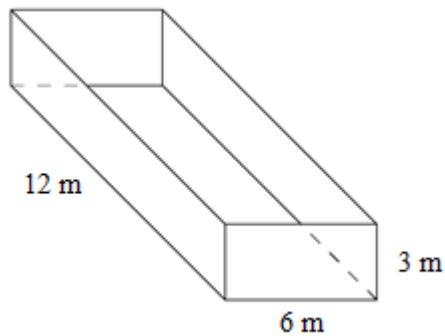
O aluno pode errar essa questão devido às dificuldades no campo geométrico, como não identificar que as caixas são paralelepípedos retângulos e não utilizar corretamente as suas propriedades. Em relação aos erros relacionados ao campo das grandezas, destacamos a possibilidade do aluno Sugiro: não utilizar a fórmula correta para cálculo do volume, por exemplo, utilizar o princípio para calcular os volumes das caixas, ou seja, somar as medidas dos comprimentos das arestas da caixa A (Q2T1 e Q2T3), por exemplo, $(7,5+3,6+6,9)$ e da caixa B $(20+30+40)$ e encontrar como resposta, respectivamente, 18 cm^3 e $19,2 \text{ cm}^3$. Diante disso, o aluno pode concluir que a caixa B possui volume maior. Ainda em relação ao campo das grandezas, o aluno pode encontrar a resposta correta, mas apresentar procedimentos errôneos devido à álgebra das grandezas, ou seja, não colocar a unidade de medida de volume considerar que o volume é um número ou utilizar uma unidade inadequada. Outros possíveis erros podem estar relacionados à dificuldade no campo numérico, como a multiplicação de números naturais ou números racionais na forma decimal.

3.4.3 Questão 3

A questão 3 de todos os testes apresenta as seguintes características: situação de medição, presença ou ausência de figura, operações com números naturais ou racionais na forma decimal, unidade de medida de comprimento em metros sem necessidade de conversão, abordagem da relação/diferença entre os conceitos de volume e capacidade, cada uma das dimensões (profundidade, largura e comprimento) são explicitadas na figura/ ou no enunciado da questão e o paralelepípedo retângulo é representado por um objeto da vida real (piscina).

Questão 3 do teste 1 (Q3T1)

Observe a piscina, na forma de um paralelepípedo retângulo, representada abaixo e as dimensões indicadas.

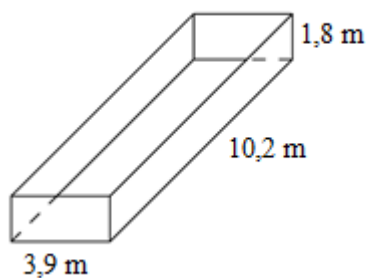


Responda:

- a) Qual o volume, em metros cúbicos, dessa piscina? *Explique sua resposta.*
- b) Qual a quantidade de água, em litros, necessária para encher completamente essa piscina? *Explique sua resposta.*

Questão 3 do teste 2 (Q3T2)

Observe a piscina, na forma de um paralelepípedo retângulo, representada abaixo e as dimensões indicadas.



Responda:

- a) Qual o volume, em metros cúbicos, dessa piscina? *Explique sua resposta.*
- b) Qual a quantidade de água, em litros, necessária para encher completamente essa piscina? *Explique sua resposta.*

Questão 3 do teste 3 (Q3T3)

Uma piscina na forma de um paralelepípedo retângulo tem profundidade 3 m, 6 m de largura e 12 m de comprimento. Com base nessas informações, responda:

- a) Qual o volume, em metros cúbicos, dessa piscina? *Explique sua resposta.*
- b) Qual a quantidade de água, em litros, necessária para encher completamente essa piscina? *Explique sua resposta.*

Questão 3 do teste 4 (Q3T4)

Uma piscina na forma de um paralelepípedo retângulo tem profundidade 1,8 m, 3,9 m de largura e 10,2 m de comprimento. Com base nessas informações, responda:

- a) Qual o volume, em metros cúbicos, desta piscina? *Explique sua resposta.*
- b) Qual a quantidade de água, em litros, necessária para encher completamente esta piscina? *Explique sua resposta.*

A questão que deu origem as situações de medição apresentadas anteriormente foi extraída do trabalho de Morais (2013, p.101). As modificações realizadas nessa questão foram as seguintes: solicitar o volume da piscina e sua capacidade em litros; construímos outra figura; modificamos os valores das dimensões da piscina. Vale ressaltar que essas alterações foram realizadas no intuito de explorar os 3 tipos de variáveis estabelecidas para a elaboração dos testes.

Em relação aos elementos pertencentes a cada campo conceitual necessários para resolver o item (a) e (b) das situações de medição, destacamos no campo geométrico: a identificação do sólido envolvido na questão (paralelepípedo retângulo) e suas propriedades, tais como sua altura, largura e comprimento; no campo das grandezas: conceito de volume e de capacidade, mobilização da fórmula correta do volume do paralelepípedo retângulo, uso adequado de unidades de medida e conversão de metros cúbicos para litros; no campo algébrico: a escrita da fórmula $V=a.b.c$; e no campo numérico: multiplicação com números naturais ou racionais na forma decimal.

Um dos procedimentos que pode ser utilizado na questão 3 de todos os testes é o uso de fórmulas. Seguindo a ordem dos elementos pertencentes a cada campo conceitual são possíveis os seguintes procedimentos para o cálculo do volume nesta questão:

Q3T1 e Q3T3*Cálculo de volume:*

$$V=a.b.c$$

$$V= 12m \times 6 m \times 3m= 216 m^3$$

Item (b)- transformando m^3 em l, temos que:

$$216$$

$$m^3=216\,000\,dm^3= 216\,000\,l$$

Q3T2 e Q3T4*Cálculo de volume:*

$$V=a.b.c$$

$$V= 10,2 m \times 3,9 m \times 1,8 m= 71,604 m^3$$

Item (b)- transformando m^3 em l, temos que:

$$71,604 m^3=71\,604\,dm^3= 71\,604\,l$$

As formas de representações simbólicas que o estudante pode mobilizar são: a figura do paralelepípedo retângulo nos testes 3 e 4; a fórmula do volume do paralelepípedo ($V=a.b.c$); os números naturais e racionais na forma decimal; a unidade medida de comprimento (m), a de volume (m^3) e a de capacidade (l).

O aluno pode cometer erros, devido as possíveis dificuldades no campo algébrico, como escrever a fórmula errada ligada à modelagem algébrica e no campo das grandezas não mobilizar a fórmula correta para o cálculo do volume, por exemplo, utilizar o princípio aditivo e somar as medidas do sólido apresentadas na questão. Outros possíveis erros podem estar ligados à falta de mobilização de conhecimentos do campo geométrico, como identificação do sólido geométrico e de suas propriedades; como também do campo numérico relacionados às dificuldades em multiplicar/dividir com números naturais/racionais na forma decimal. Outros erros relacionados ao campo das grandezas são: errar a conversão de unidades de medida de volume para unidade de medida de capacidade, apresentar dificuldade em relacionar, distinguir o conceito de volume e capacidade, expressar o volume sem unidade de medida ou com unidade inadequada.

3.4.4 Questão 4

Na questão 4 dos testes 1 e 3 estão envolvidas as seguintes características: situação de produção, presença ou ausência de figuras, operações com números naturais, unidades de medida em centímetros cúbicos ou cubinhos sem necessidade de conversão de unidades, as medidas das arestas do cubinho são explicitadas na figura/ou no enunciado da questão e as dimensões dos paralelepípedos retângulos são desconhecidas.

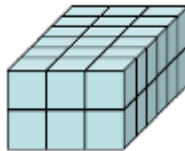
Questão 4 do teste 1 (Q4T1)

João possui 36 cubinhos de 1cm de aresta. Ele quer organizá-los de modo a formar um paralelepípedo retângulo.

- Indique quantos paralelepípedos retângulos diferentes João poderá formar com os 36 cubinhos. *Explique sua resposta.*
- João acha que todos os paralelepípedos retângulos formados possuem o mesmo volume. O que você acha? *Explique sua resposta.*
- João acha que todos os paralelepípedos retângulos formados têm a mesma área total das faces, pois possuem a mesma quantidade de cubinhos. Você concorda com ele? *Explique sua resposta.*

Questão 4 do teste 3 (Q4T4)

João possui 36 cubinhos de 1cm de aresta. Ele quer organizá-los de modo a formar um paralelepípedo retângulo.



- Indique quantos paralelepípedos retângulos diferentes João poderá formar com os 36 cubinhos. *Explique sua resposta.*
- João acha que todos os paralelepípedos retângulos formados possuem o mesmo volume. O que você acha? *Explique sua resposta.*
- João acha que todos os paralelepípedos retângulos formados têm a mesma área total das faces, pois possuem a mesma quantidade de cubinhos. Você concorda com ele? *Explique sua resposta.*

As Q4T1 e Q4T3 foram retiradas do trabalho de Figueiredo (2013, p.73), entretanto adaptamos o item c para deixar mais claro o enunciado, pois ao invés de ser “mesma área” alteramos para “mesma área total das faces”. Na Q3T3 acrescentamos a imagem do cubo no intuito de explorar a variável presença de figura.

Para responder essa situação, é preciso que o aluno mobilize conhecimentos do campo geométrico relacionados às propriedades do paralelepípedo retângulo nos três itens dessa questão (a, b e c).

Os conhecimentos necessários para resolver o item (a) estão relacionados ao campo das grandezas, geométrico e ao campo numérico são, respectivamente: conceito de volume, propriedades do paralelepípedo retângulo e números naturais e as suas decomposições.

Em relação às representações simbólicas que o estudante pode utilizar, destacamos: as figuras dos paralelepípedos retângulos; a fórmula do volume do paralelepípedo ($V=a.b.c$); os números naturais; a unidade medida de comprimento (cm) e de volume (cm^3) ou os cubinhos;

Dentre os possíveis procedimentos de resolução do item (a), destacamos composição e decomposição-recomposição, tentativa e erro e a decomposição do número 36. Utilizando a composição para construir sólidos distintos e a decomposição-recomposição para montar o sólido com 36 cubinhos e determinar os sólidos distintos com mesma quantidade de cubinhos, isto é, para formar todos os paralelepípedos retângulos com mesmo volume é necessário decompor e recompor os cubinhos. No método tentativa e erro, o aluno precisa compreender que as 3 dimensões do paralelepípedo retângulo equivalem ao comprimento, largura e a altura. Sabendo disso, ele deve perceber que para determinar o volume de um paralelepípedo basta multiplicar as suas dimensões (comprimento $\times$ largura $\times$ altura). Fazendo isso, o estudante começa a atribuir valores numéricos as dimensões do sólido de modo que o produto entre elas seja 36.

Para resolver o item (a) utilizando a decomposição do número 36 é preciso primeiramente mobilizar as propriedades do paralelepípedo retângulo e o conceito de volume. Na sequência, decompor o número 36 no produto de 3 números naturais que equivalem às 3 dimensões do paralelepípedo retângulo (comprimento $\times$ largura $\times$ altura) e encontrar como resposta 8 paralelepípedos retângulos com as seguintes dimensões: $(36 \times 1 \times 1)$, $(6 \times 6 \times 1)$, $(6 \times 2 \times 3)$, $(18 \times 2 \times 1)$, $(9 \times 2 \times 2)$, $(9 \times 4 \times 1)$, $(12 \times 3 \times 1)$ e $(3 \times 3 \times 4)$.

No item (b) e (c), os elementos do campo geométrico relacionados às propriedades dos paralelepípedos retângulos e do campo das grandezas referente ao conceito de volume estão ligados ao procedimento de resolução utilizado no item (a), pois é preciso distinguir e aplicar os conceitos de área total das faces e o volume do sólido em questão. Possíveis teoremas em ação corretos: paralelepípedos retângulos distintos podem ter mesmo volume e a medida da área total das faces de paralelepípedos retângulos de mesmo volume não é necessariamente igual.

Dentre os possíveis erros do item (a), citamos dificuldade em decompor o número 36 e não encontrar como resposta 8 paralelepípedos retângulos, relacionado ao campo numérico;

dificuldade nas propriedades do paralelepípedo retângulo e realização da composição e decomposição-recomposição dos sólidos, como considerar distintas posições de um mesmo paralelepípedo retângulo, formando sólidos de mesmo volume, mas com dimensões trocadas, isto é, um sólido de medidas $(6 \times 1 \times 6)$ de dimensões e outro de medidas $(1 \times 6 \times 6)$ como sendo distintos (FIGUEIREDO, 2013), em relação ao campo geométrico. Nos itens (b) e (c), destacamos possíveis dificuldades no conceito de volume o que implica que os alunos podem pensar que sólidos distintos não podem ter mesmo volume e a confusão entre área e volume. Estes erros são frutos de dificuldades no campo geométrico e no campo das grandezas. Com base nesses erros destacamos os teoremas em ação errôneos constatados nos trabalhos de Anwandter-Cuellar (2008) e Figueiredo (2013): sólidos diferentes têm necessariamente volumes diferentes e sólidos de mesmo volume têm a mesma área total das faces.

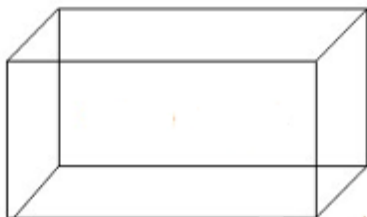
A questão 4 do teste 2 e 4 possui algumas peculiaridades, a saber: situação de produção, presença/ausência de figura, operações com números racionais na forma fracionária e decimal, unidades de medida de comprimento em metros, abordagem da relação/diferença entre os conceitos de volume e capacidade com necessidade de conversão da unidade de medida de capacidade para unidade de medida de volume, as dimensões do paralelepípedo retângulo são apresentadas no enunciado de forma implícita e o paralelepípedo retângulo é representado por um objeto da vida real (caixa-d'água).

Questão 4 do teste 2 (Q4T2)

Carlos quer construir uma caixa-d'água no formato de um paralelepípedo retângulo. Sabe-se que a medida do comprimento é o triplo da largura e que altura tem $\frac{1}{4}$ da largura. Determine as medidas das dimensões, em metros, dessa caixa-d'água para que ela possa conter 6 000 litros de água. *Explique sua resposta.*

Questão 4 do teste 4 (Q4T4)

Carlos quer construir uma caixa-d'água no formato de um paralelepípedo retângulo. Sabe-se que a medida do comprimento é o triplo da largura e que altura tem $\frac{1}{4}$ da largura. Determine as medidas das dimensões, em metros, dessa caixa-d'água para que ela possa conter 6 000 litros de água. *Explique sua resposta.*



As situações de produção Q3T2 e Q3T4 foram construídas a partir de uma junção com uma questão presente no trabalho de Moraes (2013, p.82) e outra do vestibular 2016 do Ensino Técnico do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG). Na questão do estudo de Moraes (2013) solicitava as dimensões de uma caixa-d'água cúbica para que ela possa ter capacidade de 8000 de litros, enquanto a questão do vestibular CEFET-MG perguntava a medida da largura, em metros, de uma caixa-d'água na forma de um paralelepípedo retângulo sabendo que a medida do comprimento é o dobro da largura, que altura tem $\frac{1}{3}$ da largura e que sua capacidade é 18 000 litros. Diante disso, juntamos essas duas questões e realizamos algumas alterações no enunciado, como a mudança dos valores que representavam a capacidade da caixa-d'água com objetivo de abordar números racionais na resolução da questão.

Os elementos presentes em cada campo conceitual que podem ser utilizados para resolver Q4T2 e Q4T4 são: no campo geométrico as propriedades do sólido envolvido no problema (paralelepípedo retângulo); no campo das grandezas o conceito de volume e de capacidade, a mobilização da fórmula do volume do paralelepípedo retângulo e a conversão de unidades de medida; no campo algébrico modelização da escrita algébrica, resolução da expressão algébrica (equação), interpretação dos dados presentes no enunciado da questão no campo numérico aplicação do princípio fundamental da proporção e resolução das multiplicações, divisão e raiz cúbica de números racionais positivos. Veja o procedimento de resolução que utiliza os elementos citados:

Converter 6000 l em m^3 :

6000l equivale a $6 m^3$

O volume da caixa é $6 m^3$.

Largura = L

Comprimento = $3L$

Altura = $\frac{1}{4}L$

Substituindo na fórmula de volume, temos:

$$V=a.b.c$$

$$6=3L.L. 1/4 L$$

$$24=3L^3$$

$$L^3 = 8$$

$$L= \sqrt[3]{8}$$

$$L= 2$$

Logo, a largura vale 2 m, o comprimento é de 6 m e altura é 0,5 m.

Dentre as possíveis representações simbólicas que o estudante pode utilizar, destacamos: a figura do paralelepípedo retângulo no testes 3; a fórmula do volume do paralelepípedo ($V=a.b.c$); os números naturais e racionais na forma fracionária; a unidade medida de capacidade (l), de volume (m^3) e de comprimento (m).

Em relação aos possíveis erros que o aluno pode cometer citamos: errar na modelização da escrita algébrica, resolver a expressão algébrica de maneira incorreta, mobilizar e escrever a fórmula do volume errada, não realizar conversão de unidade de medida por confundir volume e capacidade e encontrar que a largura mede 20 m; errar o cálculo da conversão de unidades de medidas; confundir raiz cúbica com raiz quadrada. Estes erros são resultados de dificuldades, respectivamente, no campo algébrico, no campo das grandezas e no campo numérico.

3.4.5 Questão 5

A questão 5 de todos os testes funciona como uma questão de controle visa analisar os diferentes procedimentos de resolução utilizados pelos alunos. Optamos por essa questão devido à abertura de possibilidades de procedimentos e a mobilização de conhecimentos de diferentes campos conceituais que ela oferece.

Essa questão tem as seguintes características: ausência de figura, números racionais na forma percentual e na forma decimal, sem unidades de medida, sem necessidade de conversão de unidades de medida e as dimensões do paralelepípedo retângulo não são explicitadas no enunciado.

Questão 5 do teste 1(Q5T1), do teste 2 (Q5T2), do teste 3 (Q5T3) e do teste 4 (Q5T2)

Se aumentarmos em 20% (vinte por cento) as arestas de um paralelepípedo retângulo, em quantos por cento o seu volume será aumentado? *Explique sua resposta.*

Extraímos tal questão do estudo de Figueiredo (2013, p.53), no entanto eliminamos as alternativas no intuito de dar mais possibilidades de procedimentos de resolução variados.

Os procedimentos possíveis de resolução estão relacionados aos conhecimentos dos campos conceituais que o estudante pode mobilizar: no campo das grandezas o conceito de volume e a fórmula de volume do paralelepípedo retângulo; no campo algébrico a escrita da fórmula do volume e conhecimentos sobre o caráter variável que a letra assume na representação dessa fórmula; no campo numérico, o conceito de porcentagem e as operações fundamentais com números racionais. A seguir apresentamos um possível procedimento de resolução:

Atribuindo valores numéricos às arestas, ou seja, desconsiderando o caráter variável da questão. Considerando os valores das arestas como $a=3$, $b=1$ e $c=2$, calculamos o volume inicial (V_i):

$$V_i = a \cdot b \cdot c$$

$$V_i = 3 \cdot 1 \cdot 2 = 6$$

Aumentando em 20% das arestas, logo:

$$a = 3,6, b = 1,2 \text{ e } c = 2,4$$

Calculando o Volume final (V_f), temos:

$$V_f = (3,6) \cdot (1,2) \cdot (2,4) = 10,368$$

Cálculo de porcentagem

$$6 \text{ ---- } 100\%$$

$$10,368 \text{ ---- } X$$

$$X = 172,8\%$$

Isso implica que o volume final do paralelepípedo aumentou 72,8%

Outro procedimento de resolução que pode ser utilizado nessa questão é utilizar o aspecto algébrico/funcional sem atribuir valores numéricos às arestas, ou seja, considerar utilizar o procedimento algébrico interpretar os dados do enunciado e escrever uma expressão algébrica. Ao resolver a questão dessa maneira, além de mobilizar conhecimentos do campo algébrico/funcional, o aluno mobiliza conhecimentos do campo das grandezas, e do campo numérico, mencionados anteriormente no primeiro procedimento.

Considerando as arestas medindo a , b e c , temos:

$$V_i = a \cdot b \cdot c$$

Se aumentamos 20% das arestas, logo as medidas das arestas serão:

1,2a, 1,2b e 1,2 c

$V_f = (1,2a) \cdot (1,2b) \cdot (1,2c)$

$V_f = 1,728 abc$

Realizando o cálculo de porcentagem, constatamos que o aumento do volume final foi de 72,8%.

Em relação às representações simbólicas que o estudante pode mobilizar, destacamos: a figura do paralelepípedo retângulo; a fórmula do volume do paralelepípedo ($V=a.b.c$); os números naturais e racionais na forma decimal, fracionária e percentual; alguma unidade medida de comprimento (cm ou m) e de volume (cm^3 ou m^3).

Diante desse contexto, esperamos que os alunos mobilizem o seguinte teorema em ação correto: o volume de um sólido não se altera na mesma proporção que seus comprimentos.

Vale ressaltar que as duas resoluções apresentadas estão relacionadas ao procedimento de medição e comparação das medidas.

Dentre os possíveis erros, destacamos o aluno pensar que a resposta é 20%, apresentando o teorema em ação errôneo de que o volume de um sólido se altera na mesma proporção dos seus comprimentos (FIGUEIREDO, 2013); o aluno pode refletir que se o comprimento aumenta 20% o volume aumentaria 60% ($20\%+20\%+20\%=60\%$). Ao responder a questão cinco desta maneira, o aluno desenvolve o princípio aditivo e o aspecto unidimensional da grandeza volume, pois soma o aumento das três arestas para encontrar o acréscimo do volume. Esses erros estão relacionados a dificuldades nos conhecimentos do campo das grandezas. Outros possíveis erros são: multiplicar $(0,2 a) \cdot (0,2b) \cdot (0,2c) = 0,0008 abc$ que equivale a 0,8% ao invés de $(1,2a) \cdot (1,2b) \cdot (1,2c)$, errar as operações fundamentais com números racionais (FIGUEIREDO, 2013) e não compreender o conceito de porcentagem. Este erro está ligado ao cálculo numérico, pois evidencia dificuldade no campo numérico, mais especificamente no cálculo de porcentagem.

A análise a priori das questões do instrumento de coleta de dados, entre outros aspectos, reforçou nossa hipótese inicial sobre a presença de imbricações entre campos conceituais em situações que envolvem o conceito de volume, pois para resolver 4 questões é preciso que o estudante mobilize conhecimentos do campo das grandezas, geométrico, algébrico. Quanto aos possíveis erros, constatamos que estão relacionados ao campo das grandezas, geométrico e numérico.

No próximo capítulo apresentamos os resultados obtidos na aplicação dos testes diagnósticos.

4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

Após a construção do instrumento de coleta de dados, foram aplicados testes diagnósticos para 107 alunos do Ensino Médio de três escolas públicas estaduais, localizadas no Agreste Meridional de Pernambuco. Dessas três escolas, duas funcionam em tempo integral (EREM).¹⁴

Como já mencionamos, nosso critério de escolha dos participantes da pesquisa se deu pelo fato deles terem estudado o conteúdo de volume dos sólidos geométricos durante o ano letivo. Diante disso, propomos os testes em turmas do segundo ano e terceiro ano do Ensino Médio, conforme a distribuição no Quadro 3.

Quadro 3 - Participantes da pesquisa

Escola	Série/Ano	Quantidade de alunos
Escola 1	2º ano	52
Escola 2	2º ano	32
Escola 3	3º ano	23
Total de Alunos		107

Fonte: acervo da pesquisa

¹⁴ Escola de Referência em Ensino Médio. As escolas de tempo integral começaram a ser implantadas em Pernambuco em 2008 por meio da Política Pública de Estado. A educação integral fundamenta-se na concepção da educação interdimensional, como espaço privilegiado do exercício da cidadania e o protagonismo juvenil como estratégia imprescindível para a formação do jovem autônomo, competente, solidário e produtivo. O tempo escolar nas Escolas de Referência em Ensino Médio (EREM) da Rede Estadual de Ensino é organizado da seguinte forma: Integral é uma escola funcionando com professores e estudantes, em tempo integral, de segunda a sexta obedecendo a carga horária de 45 horas aulas semanais; Semi-integral é uma escola funcionando com professores trabalhando cinco manhãs e três tardes ou cinco tardes e três manhãs, e os estudantes, cinco manhãs e duas tardes ou cinco tardes e duas manhãs com carga horária de 35 horas aulas semanais (SECRETARIA DE EDUCAÇÃO DE PERNAMBUCO).

Os 4 tipos de testes foram aplicados, em cada escola, individualmente, sem consulta com a presença do professor da turma e da pesquisadora. A distribuição do teste aconteceu de forma aleatória entre os alunos, buscando a equivalência entre as quantidades de aluno por turma. Desse modo, cada tipo de teste foi proposto a 27 alunos, com exceção do teste 4 que foi aplicado com 26 alunos.

Para análise dos dados utilizamos como aporte teórico a Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1996) e as Imbricações entre Campos Conceituais (TELES, 2007). Na análise categorizamos as respostas dos alunos em: *acerto pleno* apresenta procedimentos adequados (mobilização de conhecimentos adequados) que conduziram à resposta correta; *acerto parcial* abrange procedimentos inadequados, integra conhecimentos adequados e/ou inadequados, que conduziram ou não a resposta correta; *Erro* contempla a utilização de conhecimentos inadequados que conduziram à resposta errônea; e *ausência de resposta* se refere ao aluno que não respondeu à questão, ou seja, deixou em branco.

Primeiramente apresentaremos a análise dos procedimentos de resolução nas questões de controle, nas situações de comparação, medição e nas situações de produção. Na sequência, explicitaremos a influência das variáveis didáticas, a análise comparativa dos resultados obtidos nos três tipos de situações, os teoremas em ação corretos e errôneos e as representações simbólicas. Por fim, apresentaremos as considerações gerais em relação aos conhecimentos mobilizados por alunos do Ensino Médio na resolução de problemas envolvendo volume paralelepípedo retângulo, sob a ótica das imbricações entre campos conceituais.

4.1 Procedimentos de Resolução nas Questões de Controle

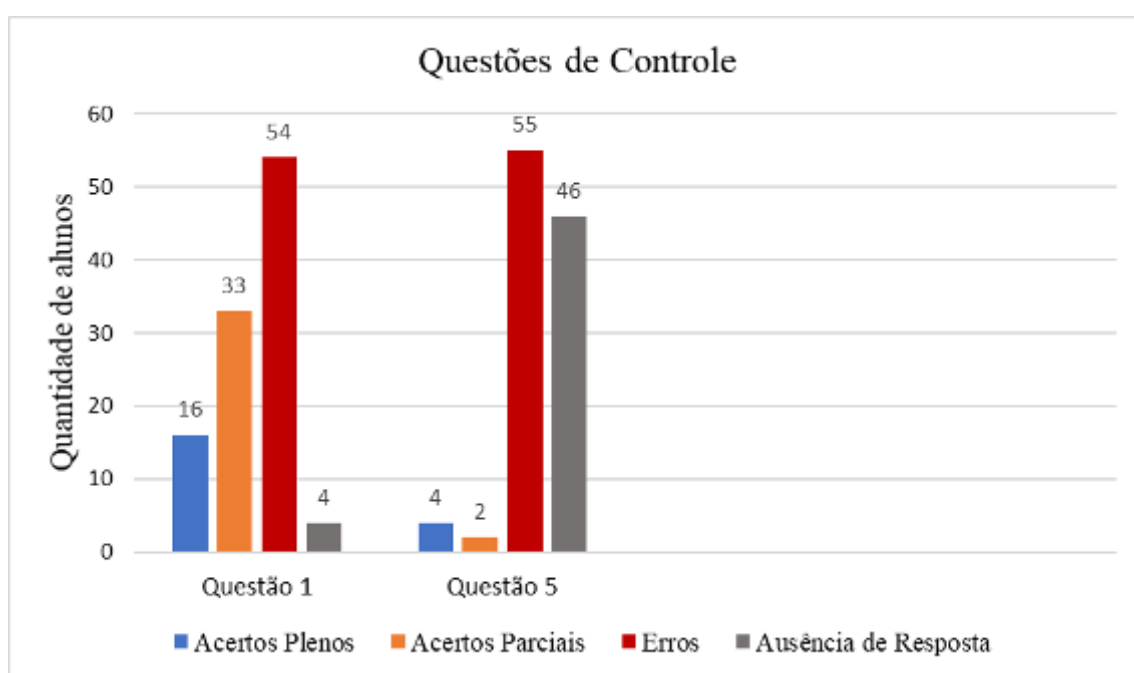
Neste estudo optamos em abordar duas questões comuns a todos os tipos de testes, as quais denominamos *questões de controle*. Nesta seção abordaremos a análise dos procedimentos de resolução utilizados pelos alunos em tais questões em todos os testes. Inicialmente, apresentaremos uma análise quantitativa e, no decorrer do texto, realizaremos uma análise qualitativa dos dados pela ótica das Imbricações entre os Campos Conceituais.

A primeira questão tinha o objetivo de verificar se os alunos sabiam calcular o volume do paralelepípedo retângulo. Ela solicitava o volume do paralelepípedo retângulo com dimensões indicadas na figura. A segunda questão de controle, referente à quinta questão dos

testes, era uma questão que possibilitava uma abertura para distintos procedimentos, um forte potencial de Imbricações entre os Campos Conceituais tinha como finalidade analisar os diferentes procedimentos de resolução mobilizados pelos alunos. Ela perguntava quantos por cento o volume de um paralelepípedo retângulo aumentaria, se aumentássemos 20% de suas arestas.

No Gráfico 1, apresentamos os resultados dos desempenhos dos alunos nessas questões.

Gráfico 1 - Desempenho dos alunos nas questões de controle



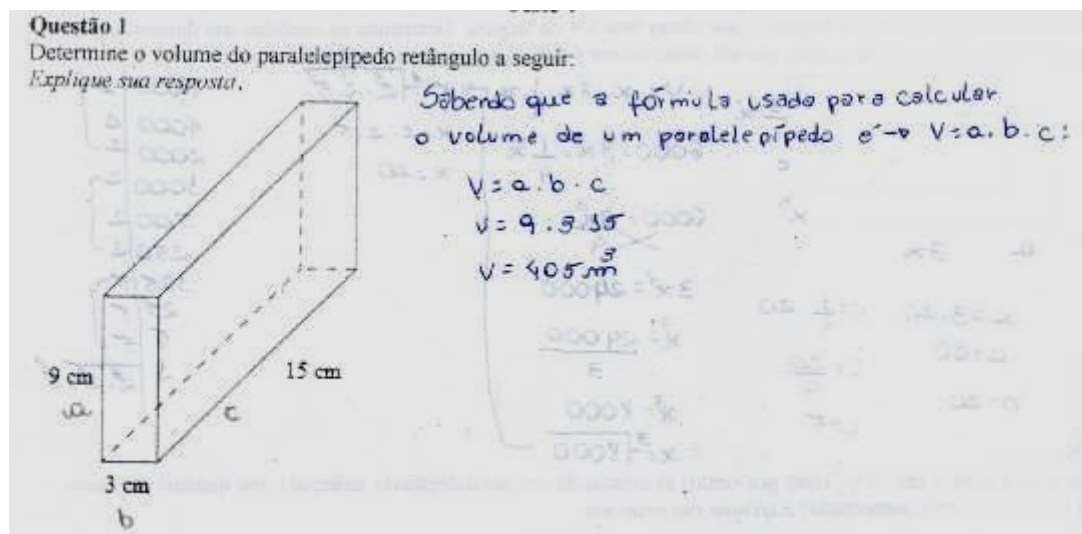
Fonte: acervo da pesquisa

Com base no Gráfico 1, constatamos que os estudantes apresentaram melhores resultados na questão 1, visto que foram registrados 16 acertos plenos e 33 acertos parciais, enquanto que na quinta questão 4 alunos acertaram plenamente e apenas 2 acertaram parcialmente. A quantidade de erros nas duas questões foi semelhante, no entanto, na ausência de resposta houve uma discrepância considerável, 4 alunos contra 46, ou seja, muitos alunos não responderam a questão cinco.

A justificativa para esses resultados é o nível de complexidade de cada questão. A questão 1 era mais simples, mas a questão 5 exigia a mobilização de conhecimentos dos diferentes campos conceituais. Evidenciando o papel das imbricações como entrave para resolução de determinadas situações, como analisado por Teles (2007).

Na Figura 14, apresentamos um exemplo do procedimento de resolução, que levou à resposta correta, mais mobilizado pelos alunos na questão 1. Em relação aos conhecimentos de cada campo, destacamos que todos os alunos, que acertaram plenamente a questão um, identificaram o sólido envolvido na questão (paralelepípedo retângulo) e suas propriedades, tais como sua altura (a), largura (b) e comprimento (c) referentes ao campo geométrico; mobilizaram o conceito de volume e a fórmula correta do volume do paralelepípedo retângulo (campo das grandezas); escreveram a fórmula $V=a.b.c$ (campo algébrico); e realizaram a multiplicação com números naturais de forma correta (campo numérico).

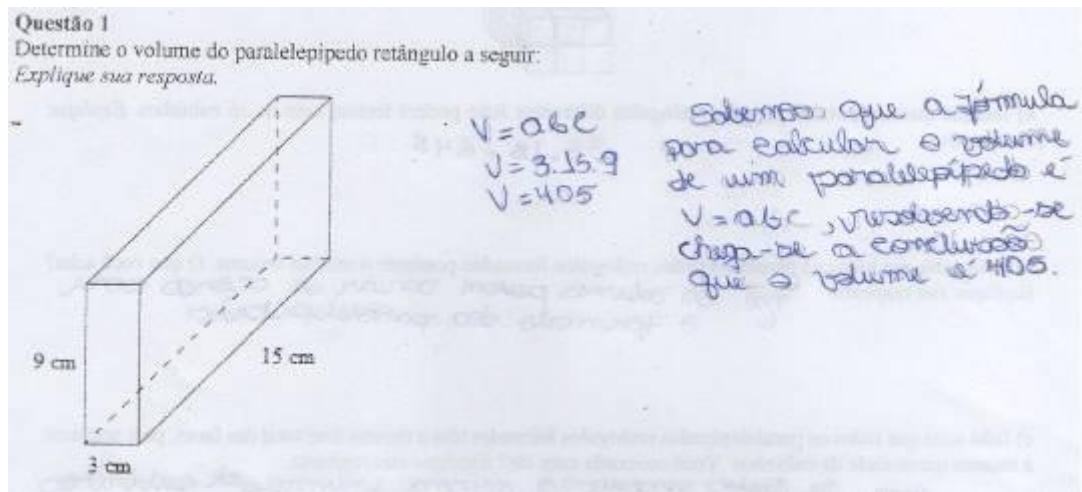
Figura 14 - Extrato do protocolo do aluno 45 na Q1T4



Fonte: acervo da pesquisa

Todos os acertos parciais na questão 1 não foram acertos plenos devido à ausência da unidade de medida de volume ou seu uso inadequado. Para Souza (2013) isso está relacionado com a álgebra das grandezas, que trata do modo como os alunos lidam com as unidades de medida. Veja o exemplo a seguir.

Figura 15 - Extrato do protocolo do aluno 32 Q1T3

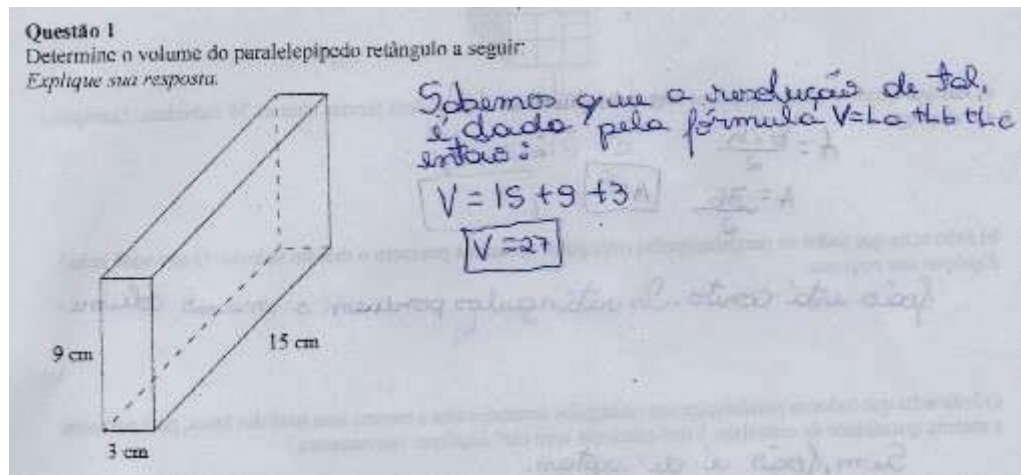


Fonte: acervo da pesquisa

Conforme a Figura 15, evidenciamos que o aluno considerou que o volume do paralelepípedo retângulo era 405, ou seja, que o volume é um número obtido a partir da resolução de uma fórmula. Diante disso, podemos afirmar que esse aluno mobilizou a concepção volume número classificada no estudo de Anwandter-Cuellar (2008) como considerar o volume com um número, visto que ele não apresenta a unidade de medida do volume. Esse resultado também foi evidenciado no trabalho de Figueiredo (2013). Isso corrobora com o olhar da álgebra das grandezas. Diante disso, podemos afirmar que o aluno que apresentou esse tipo de resolução tem dificuldade no campo das grandezas.

O erro mais comum na questão 1 estava relacionado à não mobilização da fórmula correta e à multiplicação com números racionais na forma decimal, conforme o exemplo da Figura 16.

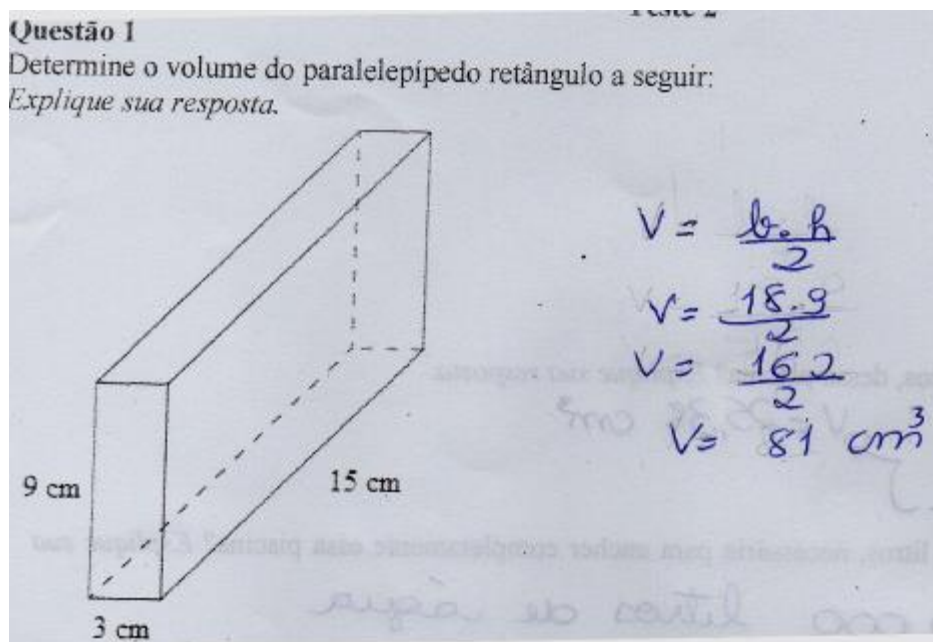
Figura 16 - Extrato do protocolo do aluno 36 Q1T3



Fonte: acervo da pesquisa

Observando a Figura 16, percebemos que o aluno considerou que a fórmula do volume do paralelepípedo retângulo é dada por $V = La + Lb + Lc$, ou seja, utilizou o princípio aditivo e o aspecto unidimensional da grandeza volume, pois somou as medidas das dimensões do sólido. Isso mostra dificuldade no campo das grandezas. Na Figura 17, apresentamos outro aluno que não mobilizou a fórmula correta para cálculo da medida do volume.

Figura 17 - Extrato do protocolo do aluno 26 Q1T2



Fonte: acervo da pesquisa

Na Figura 17, o aluno não mobilizou a fórmula correta do para o cálculo da medida do volume ($V=b.h/2$), no entanto utilizou a unidade de medida correta. Vale ressaltar que esse aluno considerou que a medida da base vale 18, ou seja, a medida da base é a soma do comprimento com a largura do paralelepípedo retângulo. Diante disso, constatamos que esse aluno apresenta dificuldade no campo das grandezas e no campo geométrico, visto que no ele utilizou usou uma fórmula errada para o cálculo da medida do volume, além de ter apresentado confusão em suas propriedades (comprimento e largura).

Como já mencionamos, o objetivo da primeira questão era verificar se os alunos sabiam calcular o volume do paralelepípedo retângulo. Com a análise dos dados evidenciamos que um pouco menos que a metade dos alunos (49 alunos de um total de 107) soube calcular o volume desse sólido, pois identificaram o sólido, mobilizaram a fórmula correta, realizaram a multiplicação e utilizaram a unidade de medida corretamente, porém 33 alunos não utilizaram a unidade de medida do volume ou colocaram a unidade errada. Diante disso, consideramos que esses alunos souberam calcular a medida do volume do paralelepípedo, mas apresentaram dificuldade no campo das grandezas, ou seja, não consideraram o volume como uma grandeza.

Em relação à questão cinco, como já mencionamos, 4 alunos acertaram plenamente. Esses alunos mobilizaram o mesmo procedimento de resolução, ou seja, atribuíram valores numéricos para cada aresta e aumentaram em 20% em cima desses valores. Como ilustrado na Figura 18.

Figura 18- Extrato do protocolo do aluno 4 Q5T1

Questão 5
Se aumentarmos em 20% (vinte por cento) as arestas de um paralelepípedo retângulo, em quantos por cento o seu volume será aumentado? Explique sua resposta.

Supondo que seja um paralelepípedo com medidas 5cm, 10cm, 20cm. Vamos ter volume de $5 \cdot 10 \cdot 20 = 1000 \text{ cm}^3$. Aumenta cada aresta em 20%

$5 + 20\% = 6$
 $10 + 20\% = 12$
 $20 + 20\% = 24$

$6 \cdot 12 \cdot 24 = 1728 \text{ cm}^3$
Regra de três
 $\frac{1000}{1728} = \frac{100\%}{x}$
 $1000x = 172800$
 $x = \frac{172800}{1000}$
 $x = 172,8$ *Logo o aumento de 172,8%*

Fonte: acervo da pesquisa

Conforme a Figura 18, previmos esse procedimento na análise a priori. Em relação aos conhecimentos dos diferentes campos conceituais contidos nos procedimentos que levaram a resposta correta, evidenciamos: no campo das grandezas o conceito de volume e a fórmula de volume do paralelepípedo retângulo; no campo algébrico a escrita da fórmula do volume e o caráter variável que a letra assume na representação dessa fórmula; no campo numérico, o conceito de porcentagem e as operações fundamentais com números racionais. Vale ressaltar que o problema não fornecia nenhuma medida da aresta e nem exigia a unidade de medida que deveria ter. Devido a isso, não analisamos essa questão pela ótica da álgebra das grandezas.

Figura 19 - Extrato do protocolo do aluno 98 Q5T3

Questão 5
Se aumentarmos em 20% (vinte por cento) as arestas de um paralelepípedo retângulo, em quantos por cento o seu volume será aumentado? Explique sua resposta.

41%

$V_1 = 2 \cdot 3 \cdot 6 \Rightarrow 36$

$V_2 = 2,4 \cdot 3,6 \cdot 7,2 \Rightarrow 62,2$

36×100
 $62,2 = x$

$x = \frac{6220}{36}$
 $x = 172,8$

$36 \overline{) 6220}$
 $\underline{36}$
 26
 $\underline{36}$
 252

$2,3,6$
 $\underline{2,4}$
 144
 $\underline{32}$
 1864
 $\underline{1728}$
 6048
 $\underline{6220}$
 $172,8$

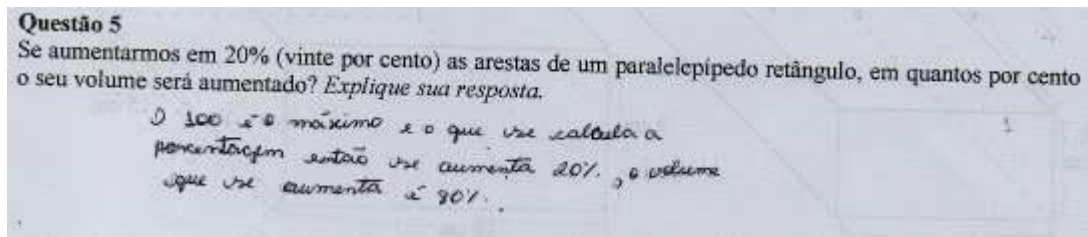
$6220 \overline{) 36}$
 $\underline{48}$
 142
 $\underline{124}$
 181
 $\underline{181}$
 000

Fonte: acervo da pesquisa

Na Figura 19, percebemos que o aluno mobilizou os conhecimentos mencionados acima, no entanto confundiu a divisão de 6.220 por 36, pois ao invés do resultado ser, aproximadamente, 172,8 ele colocou 171 e devido a isso considerou que a resposta da questão era 71%. Diante disso, consideramos que esse aluno acertou parcialmente a questão, visto que seu procedimento levaria a resposta correta.

Os erros mais comuns estavam relacionados à dificuldade ou ausência dos conhecimentos do campo das grandezas, geométrico e algébrico.

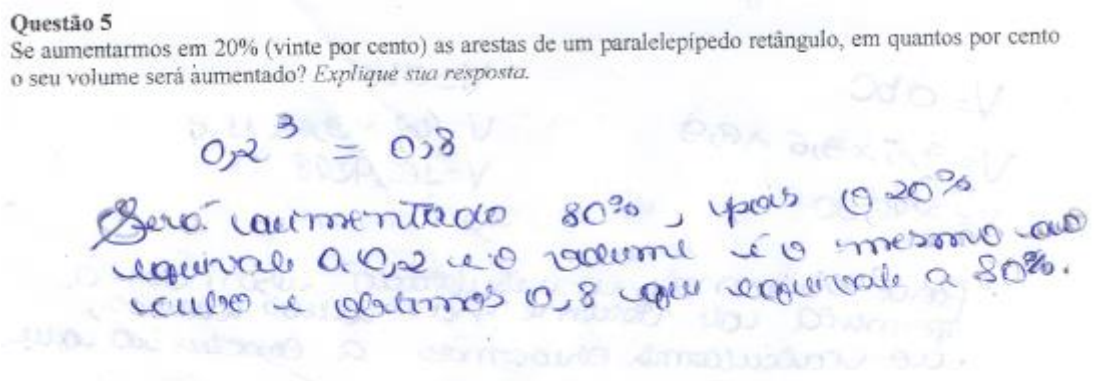
Figura 20 - Extrato do protocolo do aluno 14 Q5T2



Fonte: acervo da pesquisa

Na figura 20, observamos que o aluno só levou em consideração os conhecimentos do campo numérico, visto que resolveu o problema utilizando alguns conceitos de porcentagem. Entretanto, ele não observou que era 20% em cima do valor da aresta e simplesmente diminuiu 20% do total de 100%. Nesse caso, evidenciamos que tal aluno apresentou dificuldade no campo numérico e não mobilizou conhecimentos do campo das grandezas e do campo algébrico.

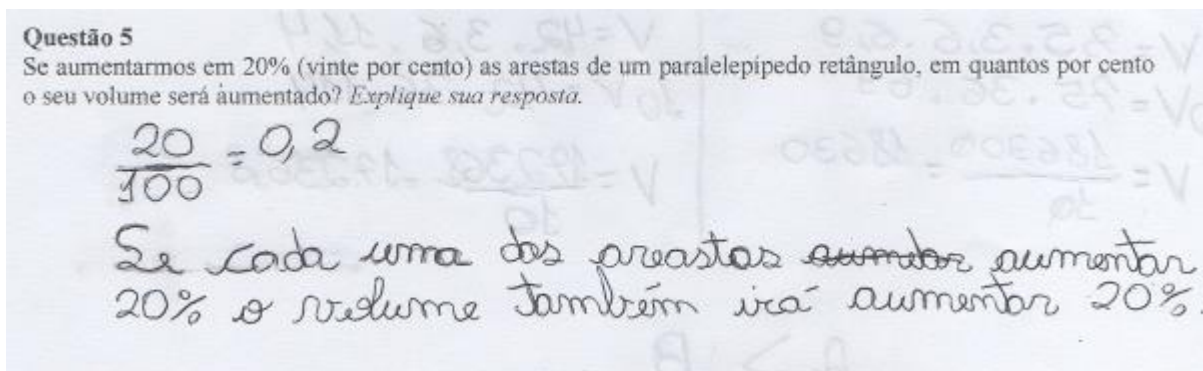
Figura 21 - Extrato do protocolo do aluno 3 Q5T1



Fonte: acervo da pesquisa

No exemplo da Figura 21, evidenciamos que o estudante mobilizou a fórmula correta do volume, transformou a forma percentual em números racionais na forma decimal a porcentagem e realizou os cálculos. No entanto, ele não compreendeu que deveria aumentar 20% em cima dos valores das arestas (que não eram dadas no enunciado da questão), ou seja, ele considerou que 0,2 como a medida da aresta do sólido. Notamos também que o estudante errou o cálculo numérico ao considerar que $(0,2)^3$ é igual a 0,8, visto que o correto seria 0,008, ou seja, apresentou dificuldade em multiplicar com números racionais na forma decimal.

Figura 22 - Extrato do protocolo do aluno 8 Q5T1



Fonte: acervo da pesquisa

Conforme o exemplo Figura 22, destacamos que alguns alunos consideraram que se as arestas aumentassem 20% o seu volume também aumentaria em 20%, ou seja, o volume do paralelepípedo retângulo se altera na mesma proporção que as suas arestas. Esse resultado mostra dificuldade no campo das grandezas e ausência de conhecimentos de outros campos conceituais. Cabe salientar que esse erro foi previsto na análise a priori e identificado na pesquisa de Figueiredo (2013).

Na análise das questões de controle, constatamos que nos procedimentos que levaram à resposta correta os alunos mobilizaram conhecimentos do campo geométrico, das grandezas, algébrico e numérico. Os resultados na primeira questão mostraram dados preocupantes, pois apenas 49 alunos¹⁵ do Ensino Médio de um total de 107 souberam calcular o volume do paralelepípedo e 58 não souberam. Em relação à questão cinco, apenas 6 alunos acertaram e 55 erraram. Os erros mais comuns nessa questão estavam ligados às dificuldades no campo das grandezas e no campo numérico, enquanto que na questão cinco estavam relacionados com as dificuldades ou ausência dos conhecimentos do campo das grandezas, geométrico e algébrico.

4.2 Procedimentos Mobilizados nos Três Tipos de Situações

Nesta seção analisaremos os procedimentos de resolução mobilizados pelos alunos em cada uma das situações que dão sentido ao conceito de volume. Vale ressaltar que tipo de situações, em nossa pesquisa, refere-se a variável 1. Apresentaremos uma análise quantitativa

¹⁵ Juntando a quantidade de acertos plenos e parciais

e qualitativa dos dados, sob a ótica das Imbricações entre Campos Conceituais. Para facilitar a organização, dividimos a análise das questões dos testes por tipo de situação, ou seja, pelos valores da variável 1: situações de comparação, situações de medição e situações de produção.

4.2. 1 Procedimentos mobilizados nas situações de comparação

Neste tópico analisaremos os procedimentos mobilizados pelos estudantes nas situações de comparação. Como já explicitado anteriormente, as situações de comparação que envolvem dois sólidos consistem em determinar qual deles possui volume maior/menor ou se possuem volumes iguais.

A questão 2, referente às situações de comparação, de todos os tipos de testes apresentava duas caixas e questionava qual dessas caixas possuía volume maior. A diferença nas situações de comparação em cada teste estava relacionada às variáveis e seus respectivos valores.

As questões dos testes 1 e 2 apresentavam as figuras (mesmo valor da variável 2), no entanto as dimensões dessas figuras na Q2T1 eram fornecidas em números racionais na forma decimal, enquanto que na Q2T2 em números naturais.

As figuras não estavam presentes nas Q2T3 e Q2T4. Devido a isso, as dimensões das caixas eram explicitadas no enunciado das questões. Essas dimensões apresentavam em números racionais na forma decimal no teste 3 e números naturais no teste 4.

Tabela 1 - Respostas nas situações de comparação¹⁶

Valores das Variáveis	Questão/ Teste	Acertos Plenos	Acertos Parciais	Erros	Ausência de Resposta
Presença de figuras e de números racionais na forma decimal	Q2T1	3,7 %	40,7%	37%	18, 5%
Presença de figuras e de números naturais	Q2T2	11,1%	59, 3%	18,5%	11,1%
Ausência de figuras e presença de números racionais na forma decimal	Q2T3	22,2%	29,6%	44,4%	3,7%
Ausência de figuras e presença de números naturais	Q2T4	7,7%	42, 3%	42,3 %	7,7 %

Q2T1- questão 2 do teste 1, Q2T2- questão 2 do teste 2, Q2T3- questão 2 do teste 3, Q2T4- questão 2 do teste 4

Fonte: acervo da pesquisa

Observando a Tabela 1, constatamos que na questão 2 do teste 3 foi constatado o maior percentual de acertos plenos, no entanto se consideramos as outras categorias identificamos que no teste 2 foi registrado os melhores resultados, pois 59, 3 % dos 27 alunos, que fizeram esse tipo de teste, acertaram parcialmente e apenas 18,5% erraram a questão. Enquanto que no teste 3, apesar de 22, 2% dos alunos acertarem plenamente essa questão, foi registrado o maior percentual de erros (44,4%).

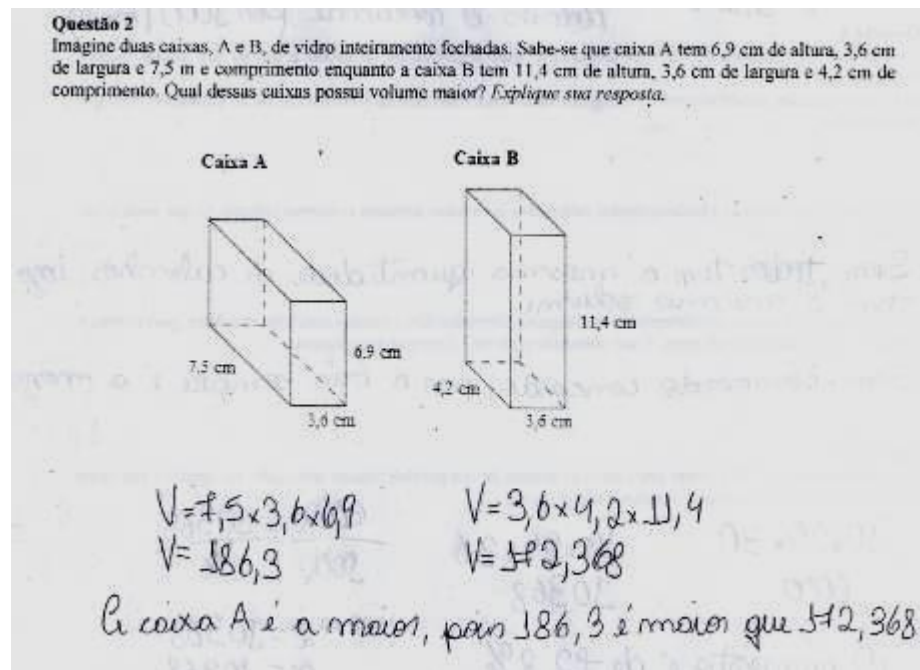
Cabe ressaltar que os valores das variáveis influenciaram esses resultados, uma vez que a situação de comparação no teste 2 apresentava presença de figuras e de números naturais e no teste 3 as figuras estavam ausentes e os números racionais na forma decimal estavam presentes no enunciado da questão.

Em relação aos acertos parciais, destacamos que todos estavam ligados a ausência da unidade de medida de volume (álgebra das grandezas), ou seja, os alunos consideraram o

¹⁶ Os resultados em porcentagem foram realizados com base da quantidade de alunos que responderam cada tipo de teste. Cada tipo de teste foi proposto a 27 alunos, com exceção do teste 4 que foi aplicado com 26 alunos.

volume como um número. Então, a falta da unidade de medida foi o motivo desses alunos não acertarem plenamente a questão, conforme a Figura 23.

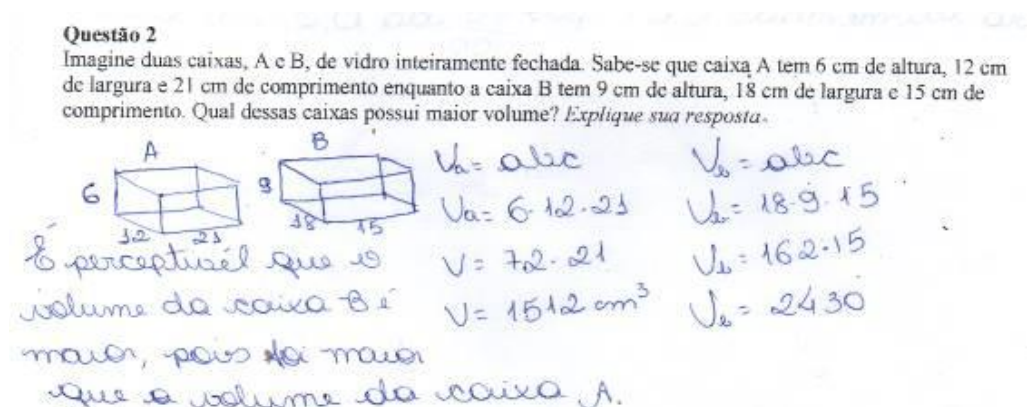
Figura 23- Extrato do protocolo do aluno 2 da Q2T1



Fonte: acervo da pesquisa

Na Figura 23, o aluno identificou a caixa que tem maior volume, no entanto realizou a comparação como se o volume fosse apenas um número. Fazendo a análise com o olhar das Imbricações entre Campos Conceituais, evidenciamos dificuldades nos conhecimentos do campo das grandezas.

Figura 24 - Extrato do protocolo do aluno 42 na Q2T4



Fonte: acervo da pesquisa

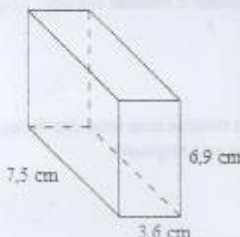
O procedimento de resolução mais mobilizado, pelos alunos, que levou à resposta correta em todos os testes (conforme a Figura 24), foi o previsto na análise a priori. Esses alunos identificaram as caixas como paralelepípedos retângulos e suas propriedades; mobilizaram o conceito de volume e a fórmula do volume correta; escreveram a fórmula corretamente; realizaram a multiplicação com números naturais ou com números racionais na forma decimal e compararam os volumes das caixas. Então, evidenciamos que os estudantes mobilizaram conhecimentos do campo geométrico, das grandezas, algébrico e do campo numérico.

Os erros estavam relacionados à mobilização da fórmula errada e a dificuldade em multiplicar com números naturais e racionais na forma decimal. Na figura a seguir apresentamos o protocolo de um aluno que errou a questão devido à dificuldade na multiplicação com números racionais na forma decimal.

Figura 25 - Extrato do protocolo do aluno 6 na Q2T1

Questão 2
Imagine duas caixas, A e B, de vidro inteiramente fechadas. Sabe-se que caixa A tem 6,9 cm de altura, 3,6 cm de largura e 7,5 cm de comprimento enquanto a caixa B tem 11,4 cm de altura, 3,6 cm de largura e 4,2 cm de comprimento. Qual dessas caixas possui volume maior? Explique sua resposta.

Caixa A



Caixa B



Caixa A
 $V = 7,5 \cdot 6,9 \cdot 3,6$
 $V = 32340 \text{ cm}^3$

Caixa B
 $V = 4,2 \cdot 3,6 \cdot 11,4$
 $V = 2416,80 \text{ cm}^3$

A caixa A tem o volume maior.

Fonte: acervo da pesquisa

No protocolo acima, percebemos que o aluno mobilizou a fórmula correta do volume, no entanto errou a multiplicação com números decimais e utilizou a unidade de medida de comprimento (cm) ao invés da unidade de volume (cm^3), isto é, errou pela álgebra das grandezas. Esses resultados mostram dificuldade no campo numérico e no campo das grandezas. Na Figura 26, apresentamos outro tipo de erro que envolve elementos diferentes do anterior.

Figura 26- Extrato do protocolo do aluno 76 na Q2T3

Questão 2
 Imagine duas caixas, A e B, de vidro inteiramente fechadas. Sabe-se que caixa A tem 6,9 cm de altura, 3,6 cm de largura e 7,5 cm de comprimento enquanto a caixa B tem 11,4 cm de altura, 3,6 cm de largura e 4,2 cm de comprimento. Qual dessas caixas possui volume maior? Explique sua resposta.

$$V_A = \sqrt{47,36 + 32,92 + 56,25}$$

$$V = \sqrt{136,82}$$

$$V \approx 11,68 \text{ cm}^3$$

$$V_B = \sqrt{15,4^2 + 3,6^2 + 4,2^2}$$

$$V_B = \sqrt{328,96 + 12,96 + 17,64}$$

$$V_B = \sqrt{359,58}$$

$$V_B \approx 18,96 \text{ cm}^3$$

A caixa B tem o maior volume

Fonte: acervo da pesquisa

Conforme observamos na Figura 26, o aluno errou a questão devido à não mobilização da fórmula correta, visto que confundiu a fórmula da diagonal do paralelepípedo retângulo ($D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$) com a da medida do volume ($V = a \cdot b \cdot c$). Acreditamos que um dos motivos dos estudantes terem confundido deve-se ao fato de estarem estudando sobre a diagonal do paralelepípedo nos dias em que foram aplicados os testes desta pesquisa. Em relação à álgebra das grandezas, evidenciamos que ele indica a unidade de medida de volume. Cabe salientar que esse tipo de erro foi mobilizado por 24 estudantes.

Os erros mais comuns identificados em todos os testes estavam ligados à não mobilização da fórmula correta para o cálculo da medida do volume do paralelepípedo retângulo ($V = L_a + L_b + L_c$ e $V = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$) e o erro na multiplicação com números naturais e racionais na forma decimal. Esses erros são frutos de dificuldades em conhecimentos do campo das grandezas e do campo numérico, já previstos na análise a priori.

4.2.1 Procedimentos mobilizados nas situações de medição

Neste tópico analisaremos os procedimentos mobilizados pelos estudantes nas situações de medição. Esse tipo de situação permite atribuir um número, numa dada unidade, ao volume de um sólido, conforme já mencionamos.

Neste estudo tínhamos quatro situações de medição distribuídas em quatro testes. No item (a) de todos os testes solicitava o volume de uma piscina e no item (b) perguntava a capacidade desta piscina.

Na tabela a seguir apresentamos as respostas dos alunos, na forma percentual, nas situações de medição.

Tabela 2 - Respostas nas situações de medição¹⁷

Valores das Variáveis	Questão/ Teste	Acertos Plenos	Acertos Parciais	Erros	Ausência de Resposta
Presença de figuras e de números naturais	Item A da Q3T1	33,3%	0%	44,4%	22,2%
	Item B da Q3T1	29,6%	14,8%	18,5%	37 %
Presença de figuras e de números racionais na forma decimal.	Item A da Q3T2	33,3%	0%	40,7%	25,9%
	Item B da Q3T2	22,2%	14,8%	22,2%	40,7%
Ausência de figuras e presença de números naturais	Item A da Q3T3	40,7%	0%	48,1%	11,1%
	Item B da Q3T3	29,6%	11,1%	19,7%	37,7%
Ausência de figuras e presença de números racionais na forma decimal.	Item A da Q3T4	19,2%	0%	65,4%	11,5%
	Item B da Q3T4	19,2%	19,2%	30,8%	30,8%

Q3T1- questão 3 do teste 1, Q3T2- questão 3 do teste 2, Q3T3- questão 3 do teste 3, Q3T4- questão 3 do teste 4.

Fonte: acervo da pesquisa

De acordo com a Tabela 2, constatamos que o item (a) do teste 3 apresentou o maior percentual de acerto pleno (40,7 %), enquanto que no teste 4 foi registrado a maior quantidade de erros, isto é, 65,4 % dos alunos.

Uma das justificativas para os alunos terem a maior quantidade de acertos no item (a) da situação de medição do teste 3, foi o valor da variável 3 (operações e valores numéricos), ou seja, a presença de números naturais, pois as dimensões do paralelepípedo retângulo (piscina) estavam explicitadas no enunciado da questão e para calcular o volume desse sólido

¹⁷ Os resultados em porcentagem foram realizados com base da quantidade de alunos que responderam cada tipo de teste. Cada tipo de teste foi proposto a 27 alunos, com exceção do teste 4 que foi aplicado com 26 alunos.

era preciso identificar as propriedades da figura, mobilizar a fórmula correta do volume e multiplicar as dimensões (representadas por números naturais). Em relação ao valor da variável presença de números decimais, destacamos que os erros relacionados à multiplicação foram maiores nas operações que envolviam tais valores (testes 1 e 4). Diante disso, evidenciamos que os valores das variáveis, nesses casos, influenciaram os resultados.

O procedimento de resolução que conduziu à resposta correta mais mobilizado pelos alunos, em todos os testes, foi o previsto na análise a priori, ou seja, os alunos identificaram o sólido envolvido na questão (paralelepípedo retângulo) e as suas propriedades, tais como a sua altura, largura e o seu comprimento (que estava explicitado na figura); mobilizaram a fórmula correta do volume do paralelepípedo retângulo, escreveram a fórmula ($V=a.b.c$ ou $V=A_b.h$); calcularam o volume multiplicando os valores das dimensões do sólido. Utilizando o olhar das Imbricações entre Campos Conceituais, evidenciamos, conforme o exemplo da Figura 27, que os estudantes mobilizaram conhecimentos, respectivamente, do campo geométrico, das grandezas, do algébrico e do numérico.

Figura 27 - Extrato do protocolo do aluno 1 na Q3T1

Questão 3
Observe a piscina, na forma de um paralelepípedo retângulo, representada abaixo e as dimensões indicadas.

12 m
6 m
3 m

Resposta:
a) Qual o volume, em metros cúbicos, dessa piscina? Explique sua resposta.
 $V = 12 \cdot 6 \cdot 3$ *Sei que a fórmula do volume é $(a \cdot b \cdot c)$*
 $V = 216 \text{ m}^3$ *Aplicando os valores propostos.*

Handwritten calculation on the right:

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 6 \\ \hline 72 \\ \times 3 \\ \hline 216 \end{array}$$

Fonte: acervo da pesquisa

Assim como nas situações de medição, constatamos que os erros mais comuns estavam ligados à mobilização de uma fórmula errada e à realização da multiplicação de números naturais e racionais na forma decimal. Isso evidencia dificuldades nos conhecimentos do campo das grandezas e no campo numérico.

Em relação ao item (b) da questão 3, conforme a Tabela 2, constatamos que os maiores índices de acertos (29,6%) foram registrados nos testes 1 e 3. Vale ressaltar que isso

também foi evidenciado no item (a). Isso se justifica pela dependência que o item (b) tinha sobre o item (a), pois o último era consequência do primeiro. Veja o exemplo na Figura 28.

Figura 28 - Extrato do protocolo do aluno 31 na Q3T3

Questão 3
Uma piscina na forma de um paralelepípedo retângulo tem profundidade 3 m, 6 m de largura e 12 m de comprimento. Com base nessas informações, responda:

a) Qual o volume, em metros cúbicos, dessa piscina? *Explique sua resposta.*

$V = a \cdot b \cdot c$
 $V = 3 \cdot 6 \cdot 12$
 $V = 18 \cdot 62$
 $V = 216 \text{ m}^3$

Sabemos que o volume de um paralelepípedo é dado pela fórmula: $V = a \cdot b \cdot c$, logo, a piscina é um paralelepípedo então tem $V = 216$.

b) Qual a quantidade de água, em litros, necessária para encher completamente essa piscina? *Explique sua resposta.*

$\frac{1}{216} \times 1000$
 $x = 216.000 \text{ litros}$

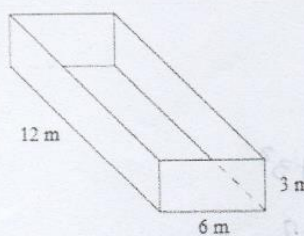
1 m^3 é igual a 1000 litros, então, 216 m^3 é igual a 216.000.

Fonte: acervo da pesquisa

Consideramos acertos parciais no item (b) quando os alunos erraram o cálculo do volume no item (a), mas realizaram a conversão de m^3 para l de forma correta. Contabilizamos que 16 alunos apresentaram esse tipo de resposta, conforme ilustrado na figura a seguir.

Figura 29 - Extrato do protocolo do aluno 12 na Q3T1

Questão 3
Observe a piscina, na forma de um paralelepípedo retângulo, representada abaixo e as dimensões indicadas.



Responda:

a) Qual o volume, em metros cúbicos, dessa piscina? *Explique sua resposta.*

$V = 12^2 + 6^2 + 3^2$ $V = 189 \text{ m}^3$
 $V = 144 + 36 + 9$

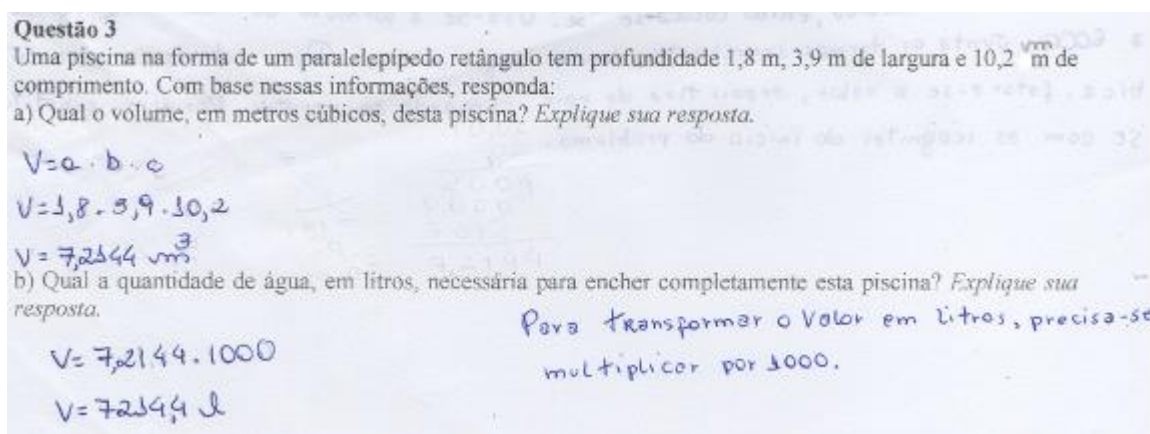
b) Qual a quantidade de água, em litros, necessária para encher completamente essa piscina? *Explique sua resposta.*

$189 \cdot 1000 = 189.000$
o resultado que der no volume vai multiplicar por 1000 que vai ser a quantidade de água em litros

Fonte: acervo da pesquisa

Na Figura 29, aluno errou o item (a) por não ter mobilizado a fórmula correta, ou seja, apresentou dificuldade no campo das grandezas. Devido a isso ele chegou na resposta correta do item (b), mas mostrou que sabe realizar a conversão de m^3 para litros. Na Figura a seguir apresentamos outro exemplo de protocolo que consideramos acerto parcial no item (b)

Figura 30- Extrato do protocolo do aluno 45 na Q3T4



Fonte: acervo da pesquisa

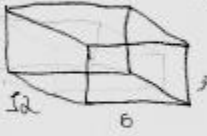
Observando a figura acima percebemos que o aluno que errou a multiplicação com números decimais no item (a), ou seja, teve dificuldade no campo numérico. Entretanto, realizou a conversão de m^3 para litro de forma correta.

Quanto aos erros mais comuns nesse item destacamos: errar a conversão de unidades de medida, consequência do erro do item (a) (pois a resposta do item (b) dependia da resposta do (a)), errar a multiplicação com números naturais ou racionais na forma decimal e não converter a unidade de medida de volume (m^3) para unidade de medida de capacidade (l). Na Figura 31, apresentamos um exemplo de alunos que acertaram o item (a) e erraram o item (b) por considerar que 1 metro cúbico equivale a 1 litro ou por considerar apenas o aspecto numérico.

Figura 31 - Extrato do protocolo do aluno 35 na Q3T3

Questão 3
 Uma piscina na forma de um paralelepípedo retângulo tem profundidade 3 m, 6 m de largura e 12 m de comprimento. Com base nessas informações, responda:

a) Qual o volume, em metros cúbicos, dessa piscina? *Explique sua resposta.*



$V = 3 \cdot 6 \cdot 12$
 $V = 216 \text{ m}^3$

b) Qual a quantidade de água, em litros, necessária para encher completamente essa piscina? *Explique sua resposta.*

216 l

Fonte: acervo da pesquisa

Conforme a Figura 31, constatamos que o aluno não justificou o item (b) e apenas colocou que a resposta é 216 litros, ou seja, apenas repetiu o valor numérico que obteve no item a. Foram identificados 5 alunos que apresentaram esse tipo de erro. Neste caso houve dificuldade no campo das grandezas e a predominância do aspecto numérico, pois os alunos não consideraram as relações de equivalência existentes entre as unidades de medidas (metros cúbicos e litros) envolvidas.

4.2. 3 Procedimentos mobilizados nas situações de produção

Nesta seção analisaremos os procedimentos de resolução empregados pelos estudantes nas situações de produção. Conforme explicitamos anteriormente, esse tipo de situação se caracteriza pela produção de um sólido com volume maior, menor ou igual ao volume dado.

A questão 4 de todos os testes era referente às situações de produção. Nos testes 1 e 3 a questão 4 apresentava a seguinte informação: João tem 36 cubinhos de 1 cm de aresta e quer organizá-lo de modo a formar paralelepípedos retângulos.

Com base nessas informações foram realizadas perguntas (em relação a construção dos paralelepípedos) distribuídas em três itens (a, b e c). Enquanto nos testes 2 e 4 solicitavam as dimensões de uma caixa de água no formato de um paralelepípedo retângulo com a capacidade de 6 000 litros sabendo que a medida do comprimento é o triplo da largura e que altura tem $\frac{1}{4}$ da largura.

Na tabela a seguir apresentamos as respostas dos alunos, na forma percentual, nas situações de produção.

Tabela 3 - Respostas nas situações de produção¹⁸

Valores das Variáveis	Questão/Teste	Acertos Plenos	Acertos Parciais	Erros	Ausência de Resposta
Ausência de figuras e presença de números naturais	Item A da Q4T1	0%	0%	48,1%	51,9%
	Item B da Q4T1	18,5%	26%	18,5%	37%
	Item C da Q4T1	11,1%	0%	51,9%	37%
Ausência de figuras e presença de números racionais na forma fracionária/decimal	Q4T2	3,7%	0%	33,3%	63%
Presença de figuras e presença de números naturais	Item A da Q3T3	0%	0%	48,1%	51,9%
	Item B da Q3T3	22,2%	14,8%	22,2%	40,7%
	Item C da Q4T3	11,1%	3,7%	51,9%	33,3%
Presença de figuras e de números na forma fracionária/decimal	Q4T4	3,8%	11,5%	42,3%	42,3%

Q4T1- questão 4 do teste 1, Q4T2- questão 4 do teste 2, Q4T3- questão 4 do teste 3, Q4T4- questão 4 do teste 4.
Fonte: acervo da pesquisa

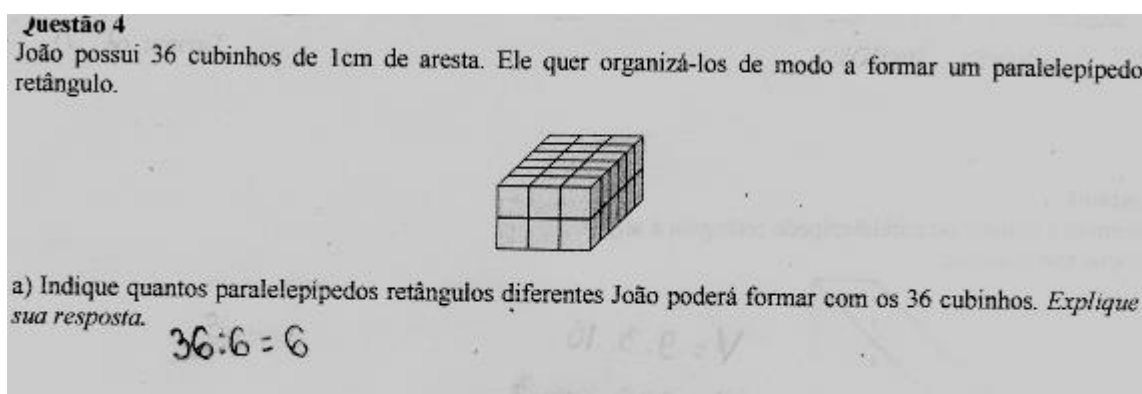
Conforme observado na Tabela 3, nenhum acerto foi registrado no item (a) da questão 4 nos testes 1 e 3, além da maioria não ter respondido, 48,1%, responderam esse item de forma errônea. Vale ressaltar que no estudo piloto que realizamos nenhum aluno acertou tal

¹⁸ Os resultados em porcentagem foram realizados com base da quantidade de alunos que responderam cada tipo de teste. Cada tipo de teste foi proposto a 27 alunos, com exceção do teste 4 que foi aplicado com 26 alunos.

item. Isso evidencia dificuldades nos conhecimentos dos diferentes campos que estão em jogo na resolução. Na análise a priori, constatamos que para resolver esse item era preciso que os alunos mobilizassem conhecimentos do campo das grandezas, geométrico e ao campo numérico.

Dentre os erros apresentados, destacamos dividir 36 por 4, por 6 e por 12; realizar combinação multiplicando 36 por 36 ou 36 por 18, aplicar uma fórmula qualquer e calcular o volume ou a medida da aresta.

Figura 32 - Extrato do protocolo do aluno 41 na Q4T4



Fonte: acervo da pesquisa

Na Figura 32, um dos alunos dividiu a quantidade de cubinhos (36) pelo número de faces (6) e encontrou como resposta 6 paralelepípedos retângulos. Durante as entrevistas pedimos para esse aluno explicar seu procedimento:

Aluno 41: *eu não sabia responder essa questão, mas como não gosto de deixar questões em branco eu pelo menos tentei para chegar algum resultado. O cubo tem 6 faces, então dividi 36 por 6.*

De acordo com o protocolo acima, evidenciamos que o aluno mobilizou apenas conhecimentos do campo geométrico e do campo numérico, ou seja, que o cubo tem 6 faces e como não queria deixar a questão em branco, dividiu corretamente 36 por 6. Diante disso, constatamos imbricações entre campos conceituais das grandezas, geométricos e numérico, visto que era preciso que esse aluno mobilizasse conhecimentos desses campos para chegar na resposta correta, ou seja, 8 paralelepípedos diferentes.

Vale ressaltar que os valores da variável 2, presença e ausência de figura, não influenciaram nos procedimentos de resolução dos testes 1 e 3, visto que teve erros comuns nos dois tipos de teste e o percentual de erros foi o mesmo (12, 1%).

Em relação aos acertos, os alunos apresentaram melhor desempenho no item (b) dos testes 1 e 3. Observe o protocolo de um dos alunos que acertaram esse item.

Figura 33 - Extrato do protocolo do aluno 38 na Q4T3

b) João acha que todos os paralelepípedos retângulos formados possuem o mesmo volume. O que você acha?
Explique sua resposta.

Sim, pois os paralelepípedos formados por João terão sempre 36 cubinhos de ~~mesmo~~ volume

Fonte: acervo da pesquisa

Observando a Figura 34, destacamos que o aluno apesar de não ter respondido o item (a) da Q4T3, ele acertou o item (b), pois considerou que todos os paralelepípedos retângulos, formados com os 36 cubinhos, possuem o mesmo volume.

Evidenciamos no item (b) das Q4T1 e Q4T3 que 5 alunos erraram possivelmente por pensar que os paralelepípedos retângulos formados não possuem o mesmo volume, uma vez que suas dimensões são diferentes. Esse erro está relacionado à dificuldade de conhecimentos do campo das grandezas e do campo geométrico. Observe o exemplo no protocolo da Figura 34.

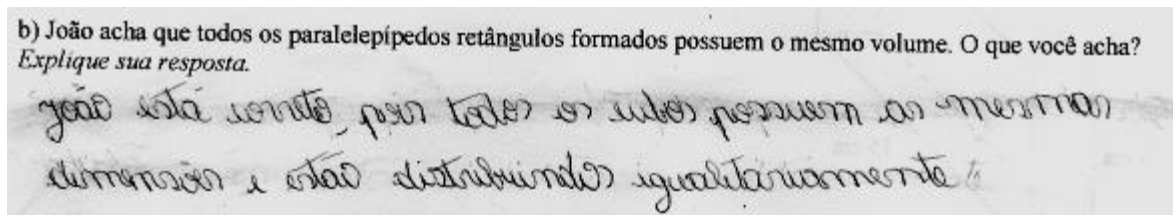
Figura 34 - Extrato do protocolo do aluno 5 na Q4T1

b) João acha que todos os paralelepípedos retângulos formados possuem o mesmo volume. O que você acha?
Explique sua resposta.
Eles não possuem o mesmo volume, pois a altura, o comprimento e a largura podem ser diferentes.

Fonte: acervo da pesquisa

Consideramos acertos parciais no item (b) das Q4T1 e Q4T1 quando o aluno concordou com a afirmação de João, mas sua justificativa não foi plausível com a situação. Observe o exemplo na Figura 35.

Figura 35- Extrato do protocolo do aluno 27 na Q4T3

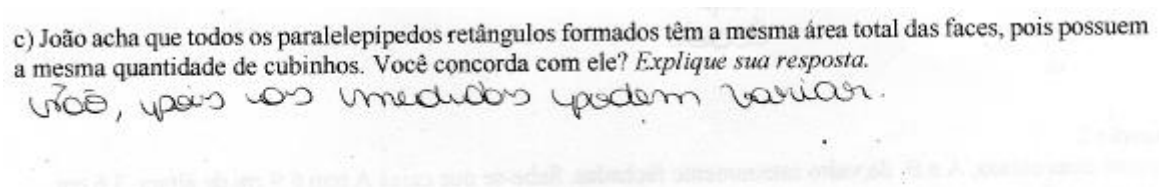


Fonte: acervo da pesquisa

Conforme a Figura 35, percebemos que o aluno concordou com João, no entanto na sua justificativa considerou as dimensões dos cubinhos de 1 cm, que estava exercendo a função de unidade de medida não padronizada nessa questão, e não dos paralelepípedos retângulos diferentes formados com os 36 cubinhos.

Poucos alunos acertaram o item (c) da questão 4 dos testes 1, apenas 2,8%. Veja o exemplo na Figura 36.

Figura 36 - Extrato do protocolo do aluno 28 na Q4T3

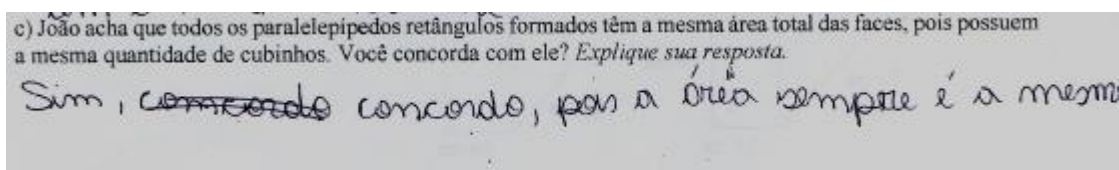


Fonte: acervo da pesquisa

Conforme a figura 36, constatamos que o aluno mobilizou conhecimentos do campo das grandezas e do campo geométrico para chegar nessa resposta, pois considerou que se os paralelepípedos retângulos têm mesmo volume, eles não terão necessariamente a mesma área total devido à variação de valores de suas medidas.

Em relação aos erros no item C, destacamos que foi registrado o índice maior de erros dentre os 3 itens da questão 4 nos testes 1 e 3, uma vez que 13,1% dos estudantes erraram tal item. Os erros mais comuns foram considerar que os paralelepípedos retângulos com mesmo volume possuem a mesma área total, pois a área não varia, e os sólidos têm as mesmas dimensões, tamanhos e possuem a mesma quantidade de faces.

Figura 37 - Extrato do protocolo do aluno 2 na Q4T1

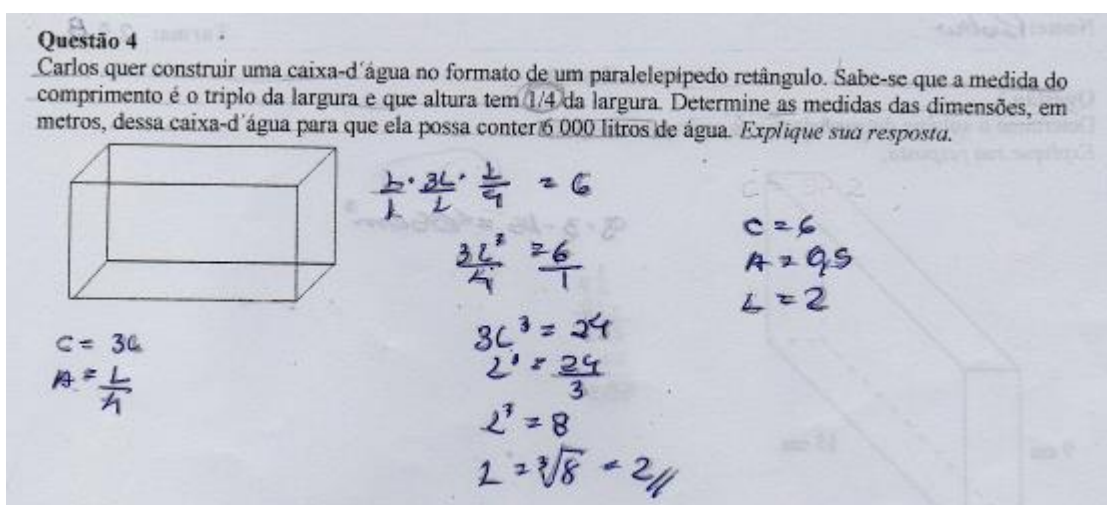


Fonte: acervo da pesquisa

Na Figura 37, apresentamos um exemplo de um aluno que considerou que a grandeza área não muda, ou seja, é invariante. Neste caso percebemos que esse aluno apresentou dificuldade no campo das grandezas.

Ainda de acordo com a Tabela 2, percebemos que o índice de acertos na questão 4 do teste 2 foi de apenas 3,8 % e o percentual de acertos parcialmente foi de 0 %. O percentual de acerto nessa questão no teste 4 foi o mesmo registrado no teste 2, no entanto, 11,5 % dos alunos apresentaram acertos parciais na questão. Cabe salientar que no teste 2 a figura estava presente na questão, enquanto que no teste 4 estava ausente. No entanto, evidenciamos que o valor da variável não teve influência nos resultados. Veja o exemplo de um aluno que acertou plenamente a questão 4.

Figura 38- Extrato do protocolo do aluno 41 na Q4T4



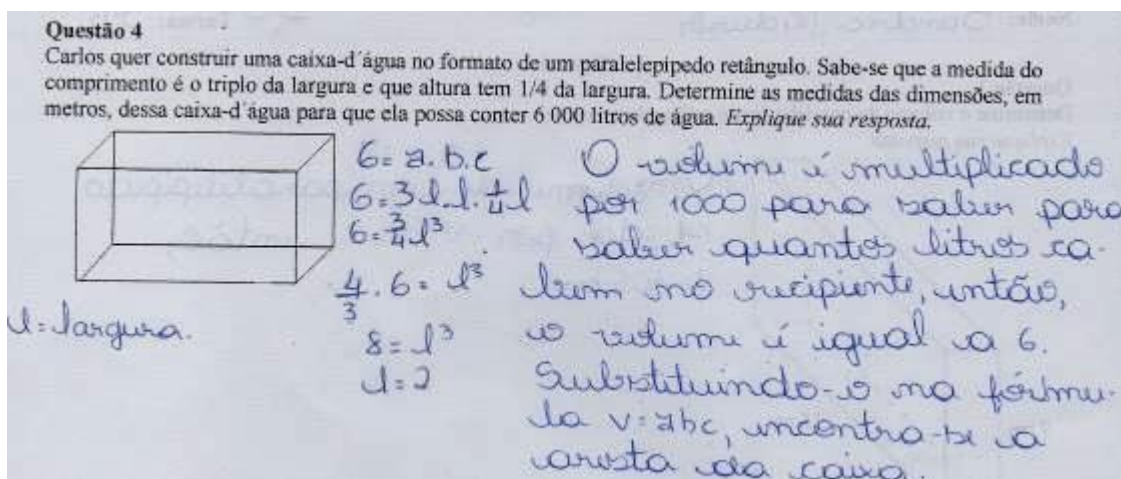
Fonte: acervo da pesquisa

Conforme a Figura 38, constatamos que o aluno identificou a altura, o comprimento e a largura do paralelepípedo retângulo (campo geométrico); mobilizou a fórmula correta do volume e transformou 6000 litros em 6 m^3 (campo das grandezas); escreveu a fórmula correta

(expressão algébrica) $V = a.b.c$, interpretou dos dados presentes no enunciado da questão por meio de representação algébrica e resolveu a equação (campo algébrico), utilizou o princípio fundamental da proporção e resolveu as multiplicações, divisão e raiz cúbica de números racionais positivos (campo numérico) e determinou as medidas das dimensões da caixa. Cabe ressaltar que esse aluno não colocou a unidade de medida nas medidas das dimensões da caixa-d'água, entretanto, consideramos como acerto pleno, visto que a questão no enunciado solicitava as medidas das dimensões da caixa d'água e deveria ser em metros, ou seja, a questão só perguntava as medidas das dimensões.

Na Figura 39, apresentamos um exemplo de acerto parcial. Nela, percebemos que o aluno mobilizou os mesmos conhecimentos que o aluno 41 (Figura 38), mas não determinou a medida do comprimento e da medida da altura da caixa. Devido a isso, consideramos acerto parcial.

Figura 39 - Extrato do protocolo do aluno 40 na Q4T4



Fonte: acervo da pesquisa

Dentre os erros mais comuns identificados nessa questão, destacamos não mobilizar a fórmula correta para o cálculo da medida do volume, calcular o volume e confundir unidades de medida de capacidade com unidades de medida de volume. Na Figura 40 apresentamos o protocolo de um aluno que errou a questão por confundir unidades de medida de capacidade com unidades de medida de volume.

Figura 40 - Extrato do protocolo do aluno 45 na Q4T4

Questão 4
 Carlos quer construir uma caixa-d'água no formato de um paralelepípedo retângulo. Sabe-se que a medida do comprimento é o triplo da largura e que altura tem $\frac{1}{4}$ da largura. Determine as medidas das dimensões, em metros, dessa caixa-d'água para que ela possa conter 6 000 litros de água. *Explique sua resposta.*

Diagram labels: $3x$, x , $\frac{1}{4}x$

Dimensions found:
 $a = 3.20$
 $b = 20$
 $c = 5$

Volume calculation:
 $V = x \cdot 3x \cdot \frac{1}{4}x$
 $6000 = 3x^2 \cdot \frac{1}{4}x$
 $6000 = \frac{3x^3}{4}$
 $3x^3 = 24000$
 $x^3 = \frac{24000}{3}$
 $x^3 = 8000$
 $x = \sqrt[3]{8000}$
 $x = 20$

Verification: $2 \cdot 2 \cdot 5^3 = 8000$

Fonte: acervo da pesquisa

Conforme a Figura 40, evidenciamos que o aluno identificou as propriedades do sólido, mobilizou a fórmula correta, interpretou os dados contidos no enunciado da questão por meio de representação algébrica e realizou os cálculos numéricos corretamente, porém não transformou litros em metros cúbicos, ou seja, considerou que as unidades de volume e capacidade são as mesmas. Nesse caso, podemos afirmar que esse aluno errou a questão por dificuldade no campo das grandezas.

4.2. 4 Influência das variáveis didáticas na resolução de problemas envolvendo volume do paralelepípedo retângulo

Nesta seção investigaremos a influência das três variáveis didáticas com seus respectivos valores distribuídas nos quatro tipos de testes diagnósticos. Os nomes das variáveis com seus respectivos valores estão representados no Quadro 4.

Quadro 4 - Variáveis com seus respectivos valores

Variável	Nome da variável	Valores da variável
1	Tipo de situações	Situações de comparação, medição e produção
2	Presença de Figura	Presença ou ausência de figura
3	Operações e valores numéricos	Multiplicação e/ou divisão com números naturais e números racionais (na forma decimal ou fracionária)

Fonte: acervo da pesquisa

Na Tabela 1, na página 85, ao analisar a interferência da variável figura, observamos que na situação de comparação do teste 2, presença de figura, os resultados foram melhores em comparação com o teste 4, que tinha ausência de figuras, pois o índice de acerto foi 11,1 % versus 7,7 % e o índice de acerto parcial foi de 59,3 % versus 42,3%. No entanto, a diferença considerada mais relevante foi a quantidade de erros, uma vez que no teste 4 foi registrado que 42,3 % dos alunos erraram a situação, enquanto que no teste 2 foi apenas 18,5 %. Evidenciamos que nos testes 1 e 3 os valores da variável figura não influenciaram nos resultados dos alunos.

Analisando os resultados nas situações de medição, conforme a Tabela 2 da página 89, evidenciamos que no teste 1, que a figura estava presente na questão, não obteve destaque se compararmos com teste 3, que a figura estava ausente, visto que o teste 3 obteve os maiores índices de acertos, 40,7 %. Entretanto, se compararmos os testes 2 e 4, percebemos que o teste 2 (presença de figura) teve maior índice de acertos plenos, 33,3 % e menores índices de erros, 40,7 % em relação ao teste 4 (ausência de figura).

Ao observar a influência dos valores da variável 3, destacamos que os alunos apresentaram melhores resultados nas situações de comparação que envolvia operações com números naturais (testes 2 e 3) se compararmos com as situações que exigiam operações com números racionais na forma decimal, conforme a Tabela 1. Esse resultado foi previsto na análise a priori e constatado no estudo piloto, pois identificamos e previmos erros relacionados às operações com números racionais.

Em relação às situações de medição, constatamos os valores dessa variável nos testes 1 e 2 não obtiveram diferenças entre situações envolvendo números naturais e números decimais. Enquanto que nos testes 3 (números naturais) e 4 (números racionais na forma

decimal), registramos relevância para a presença de números naturais ou decimais, visto que o índice de acerto foi maior no teste 3 (40,7 %) comparado com o teste 4 (19,2 %).

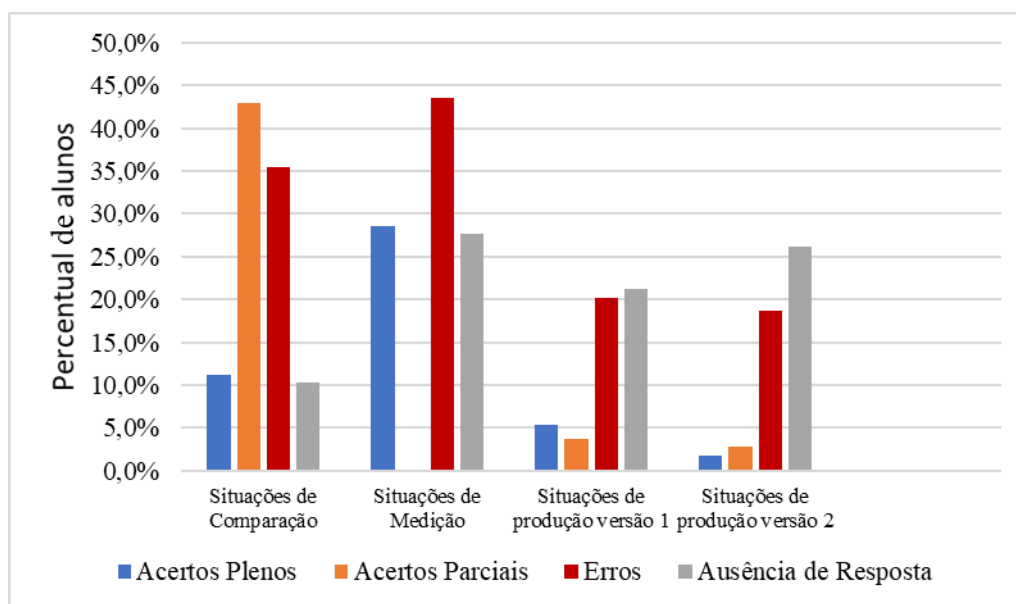
Nas situações de produção não foram evidenciadas influências nos valores das variáveis 2 e 3, uma vez que os resultados dos testes não apresentaram destaques em relação ausência/presença de figuras e presença de números naturais ou números racionais na forma decimal.

Ao analisar a interferência dos valores das variáveis em foco, constatamos que os valores das variáveis 2 e 3, ou seja, presença de figuras e operações com valores numéricos, influenciaram nos resultados das situações de comparação e medição de alguns testes. A análise da influência da variável 1 referente aos tipos de situações será apresentada na próxima seção, na qual realizaremos a comparação dos resultados encontrados nos três valores dessa variável.

4.2.5 Análise comparativa dos resultados obtidos nos três tipos de situações

Os valores da variável 1 (tipos de situações), em nosso estudo, eram as situações que dão sentido ao conceito de volume, ou seja, as situações de comparação, medição e produção. Nesse sentido, apresentaremos uma análise comparativa dos acertos, erros, ausência de respostas e procedimentos de resolução utilizados pelos alunos nos três tipos de situações.

Gráfico 2 - Resultados nos três tipos de situações



Fonte: acervo da pesquisa

No Gráfico 2, podemos observar que os melhores resultados foram registrados nas situações de comparação, uma vez que 43% dos alunos acertaram parcialmente e 11,2% acertaram plenamente essas situações. Apesar de as situações de medição terem apresentados maiores índices de acertos plenos, o percentual de erros e ausência de respostas foram maiores em comparação com os outros tipos de situações.

Cabe ressaltar que a diferença entre os resultados das situações de comparação e medição não foi significativa. Isso se justifica pelo fato que as duas necessitavam dos cálculos de volume do paralelepípedo retângulo. Nas situações de comparação precisavam determinar o volume das duas caixas e compará-los, enquanto que nas situações de medição necessitavam do cálculo do volume de uma piscina, em metros cúbicos, juntamente com sua capacidade em litros. Nesse contexto, evidenciamos que o valor da variável (tipo de situações) não teve muita influência.

Nas situações de produção tínhamos dois tipos de questões, o tipo 1 estava presente nos testes 1 e 3 e foi respondido por 50, 4% dos alunos, enquanto o tipo 2 foi respondido por aproximadamente 49, 6% nos testes 2 e 4. Optamos em abordar dois tipos dessas situações com a finalidade contemplar os valores das variáveis 2 e 3, ou seja, as variáveis presença de figura e operações e valores numéricos com seus respectivos valores. Contudo, não evidenciamos muita disparidade entre os resultados (conforme o Gráfico 2), visto que os

índices de acertos plenos, parciais e erros estão próximos. No entanto, constatamos que situações de produção obtiveram baixos índices de acertos plenos e parciais e consequentemente os alunos apresentaram mais dificuldade nessas situações. Vale ressaltar que os resultados do estudo de Figueiredo (2013) corroboram com esse obtido por nós neste estudo. A justificativa para isso é que as duas versões das situações de produção não necessitavam apenas do cálculo do volume. Na versão 1, era preciso construir paralelepípedos retângulos diferentes com volumes iguais (a pergunta central) e na versão 2 era necessário determinar as dimensões de uma caixa caixa-d'água sabendo sua capacidade. Diante disso, destacamos que o valor da variável, situações de produção, influenciou nos resultados.

Os três tipos de situações exigiam a mobilização de conhecimentos do campo geométrico, das grandezas, algébrico e numérico. No entanto, nas situações de produção o campo geométrico e o campo das grandezas se sobressaíam em relação aos demais, visto que, ao empregar conhecimentos, de forma adequada, desses campos, o procedimento de resolução fluiria. Isso não implica que um aluno não vai errar por dificuldade no campo numérico ou algébrico.

Em síntese, constatamos que nos procedimentos que conduziram a resposta correta, os alunos empregaram conhecimentos do campo das grandezas, geométrico, algébrico e numérico. Em relação aos procedimentos que levaram à resposta errônea, identificamos que os erros mais comuns estavam relacionados às dificuldades do campo numérico e no campo das grandezas. Em relação aos erros mais identificados nas situações de comparação e medição, constatamos que estavam ligados às dificuldades no campo das grandezas e no campo numérico, enquanto os erros das situações de produção faziam referência ao campo geométrico e o campo das grandezas.

4.3 Teoremas em Ação Mobilizados por Alunos em Problemas Envolvendo Volume do Paralelepípedo Retângulo

Neste tópico apresentaremos os teoremas em ação mobilizados por alunos participantes na resolução de problemas envolvendo volume do paralelepípedo retângulo.

Como já mencionado na fundamentação teórica, “teorema em ação é uma proposição tida como verdadeira na ação em situação” (VERGNAUD, 2009, p.23).

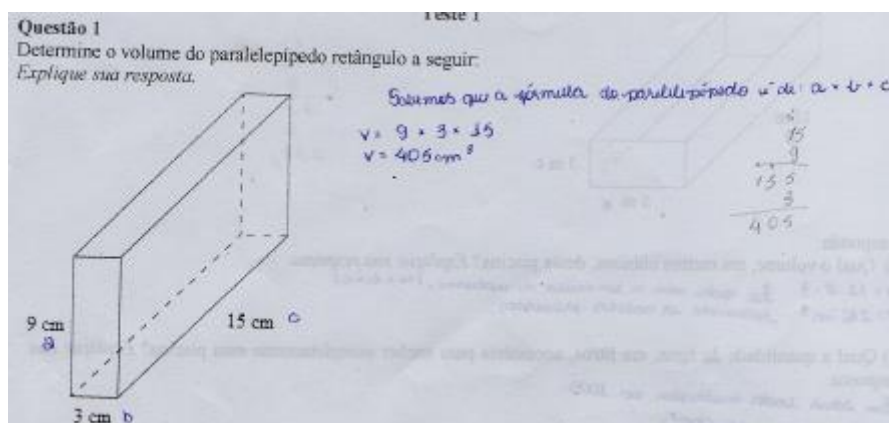
Identificamos, por meio da análise dos procedimentos de resolução apresentados por alunos nas questões dos testes e durante as entrevistas, teoremas em ação (corretos e errôneos) que explicitaremos a seguir. Para auxiliar a compreensão da análise, codificamos cada teorema em ação correto pela sigla TAC e cada teorema em ação errôneo por TAE seguida de número (“N”) que varia de 1 ao valor máximo dos teoremas identificados.

Inicialmente apresentaremos os teoremas em corretos e posteriormente os teoremas em ação errôneos.

TAC1: A medida do volume de um paralelepípedo retângulo é o produto das medidas de suas arestas.

Esse teorema em ação foi o mais mobilizado nas questões de controle e nas questões referentes às situações de medição e de comparação, visto que na resolução das questões dos testes necessitava do cálculo do volume do paralelepípedo retângulo. Estava previsto a mobilização do TAC1, pois os participantes eram estudantes do segundo e terceiro ano do Ensino Médio que já resolveram situações envolvendo fórmulas para o cálculo de volumes de sólidos geométricos. Vale ressaltar que evidenciamos estudantes que utilizaram esse teorema em mais de uma questão, visto que no conjunto de todos os testes e questões foram identificados 183 vezes, sendo mobilizados por 68 estudantes. Na figura a seguir apresentamos o protocolo de um aluno que mobilizou o TAC1.

Figura 41 - Extrato do protocolo do aluno 1 na Q1T1



Fonte: acervo da pesquisa

Para mobilizar esse teorema, conforme a Figura 41, os alunos colocaram em jogo conhecimentos do campo geométrico (identificação do paralelepípedo retângulo e suas propriedades) e do campo das grandezas (conceito de volume e mobilização da fórmula correta do volume do paralelepípedo retângulo). Cabe salientar que nem todos os alunos que mobilizaram tal teorema encontraram a resposta correta das questões, visto que apresentaram dificuldades nos conhecimentos dos outros campos conceituais, como, por exemplo, no campo numérico ao errar uma multiplicação com números decimais. Isso mostra a relevância das imbricações entre campos conceituais, uma vez que alguns alunos não encontraram a resposta correta devido à dificuldade no campo numérico.

TAC2: Um metro cúbico equivale a mil litros.

No item (b) da questão 3 (situação de medição) de todos os testes e na questão 4 (situação de produção) foram mobilizados o TAC2, visto que nessas questões necessitavam a conversão de metros cúbicos para litros. Sabemos do ponto de vista matemático o mais adequado é considerar que um metro cúbico equivale a mil decímetros cúbicos e que um decímetro cúbico representa um litro. No entanto, aceitamos que o TAC2 como correto. Veja um exemplo na Figura abaixo.

Figura 42 - Extrato do protocolo do aluno 30 na Q3T3

b) Qual a quantidade de água, em litros, necessária para encher completamente essa piscina? Explique sua resposta. m^3

Um litro equivale a 1000 ~~mm~~ ^L. Então 216 m^3 podem conter 21600 L.

Fonte: acervo da pesquisa

Conforme a Figura 42, evidenciamos que o aluno mobilizou o TAC2, no entanto percebemos que na hora de fazer a conversão, ou seja, multiplicar 216 por 1000, ele acaba errando e na sua resposta final, considerando que a capacidade da piscina era de 21600 litros ao invés de 216.000 litros. Esse aluno empregou os conhecimentos do campo das grandezas, mas apresentou dificuldade no campo numérico ao errar a multiplicação com números naturais. Este aspecto reforça o papel das imbricações entre campos conceituais: o aluno

mobilizou corretamente conhecimentos do campo das grandezas, mas comete erro relacionado ao campo numérico. Ressaltamos que 46 alunos empregaram tal teorema.

TAC3: Paralelepípedos retângulos distintos podem ter mesmo volume.

Esse teorema foi identificado na questão 4 dos testes 1 e 3. Os alunos que apresentaram esse teorema justificaram que os paralelepípedos retângulos distintos formados com a mesma quantidade de cubinhos podem ter mesmo volume, conforme explicitado no exemplo do protocolo da Figura 43.

Figura 43 - Extrato do protocolo do aluno 38 na Q4T3

b) João acha que todos os paralelepípedos retângulos formados possuem o mesmo volume. O que você acha?
Explique sua resposta.

Sim, pois os paralelepípedos formados por João terão sempre 36 cubinhos de ~~mesmo~~ volume.

Fonte: acervo da pesquisa

Para confirmar ainda mais esse teorema apresentamos um trecho da entrevista:

Aluno 38: *João acha que todos os paralelepípedos retângulos formados possuem o mesmo volume. O que você acha? O mesmo que João, pois se todos paralelepípedos têm os 36 cubinhos, terão o mesmo volume. É como eu tinha dito antes, são várias coisas que interferem no volume. Têm sólidos diferentes com mesmo volume, sólidos bem parecidos com volumes diferentes, ou seja, o volume é bastante variável.*

Observamos nesse protocolo a maneira como o aluno relacionou as propriedades do paralelepípedo retângulo com a grandeza volume. Percebemos claramente a mobilização dos conhecimentos do campo das grandezas e do campo geométrico. Cabe ressaltar que esse teorema foi previsto na análise a priori e identificado no trabalho de Figueiredo (2013). Tal teorema foi empregado por 19 alunos num total de 107, apenas no item (b) dessa questão.

TAC4: Em paralelepípedos retângulos de mesmo volume a soma das áreas de todas as faces não são necessariamente iguais.

No item (c) das questões referentes às situações de produção (testes 1 e 3), a maioria os alunos que acertou esse item, mobilizaram o TAC3. No entanto, apenas 11 alunos, dentre 107 participantes desta pesquisa, empregaram este teorema.

Figura 44 - Extrato do protocolo do aluno 28 na Q4T3

c) João acha que todos os paralelepípedos retângulos formados têm a mesma área total das faces, pois possuem a mesma quantidade de cubinhos. Você concorda com ele? *Explique sua resposta.*
 Não, pois as medidas podem variar.

Fonte: acervo da pesquisa

Na Figura 44, o aluno justificou que os paralelepípedos retângulos não possuem a mesma área total das faces, pois as medidas podem variar. Ao analisar essa resposta constatamos que o termo “as medidas podem variar” se refere às medidas das áreas totais das faces podem variar. Evidenciamos que nesse teorema há imbricações entre o campo das grandezas e o campo geométrico.

Figura 45 - Extrato do protocolo do aluno 1 na Q4T1

c) João acha que todos os paralelepípedos retângulos formados têm a mesma área total das faces, pois possuem a mesma quantidade de cubinhos. Você concorda com ele? *Explique sua resposta.*
 Não, pois aí neste caso as formas e medidas dos paralelepípedos vão ser distintas. Então acarretará uma mudança nos valores.

Fonte: acervo da pesquisa

Na Figura 45, temos mais um exemplo do TAC4. No entanto, ficamos confusas em relação à justificativa do aluno. Para esclarecer, realizamos entrevistas com esse aluno e ele explicou sua resposta da seguinte maneira.

Aluno 1: *João acha que todos os paralelepípedos retângulos formados têm a mesma área total das faces, pois possuem a mesma quantidade de cubinhos. Você concorda com ele? Não concordo com João porque depende da largura, comprimento e altura. Como seria um paralelepípedo retângulo a área de cada face seria base vezes altura. Ai iria mudar, por exemplo se a base fosse 2 e altura fosse 3 daria 6, mas se trocasse os valores para 6 cubinhos embaixo 3 em cima ia dá 18.*

De acordo com protocolo acima, confirmamos que o aluno mobilizou o TAC4, mesmo ele não falando da área total e da unidade de medida de área, compreendemos sua justificativa e consideramos válida, pois ele pensou que se as dimensões de cada face são diferentes e a medida da área pode variar.

No Quadro 5, apresentamos uma síntese dos teoremas em ação corretos identificados neste estudo, na qual apresentamos as situações e/ou questões que foram empregados, a quantidade de vezes que eles aparecem em todos os testes e número de alunos que mobilizaram tais teoremas.

Quadro 5 - Teoremas em ação corretos

Teoremas em ação Corretos	Situações/questões identificadas	Quantidade de vezes que os teoremas foram mobilizados	Quantidade de estudantes que mobilizaram os teoremas
TAC1: A medida do volume de um paralelepípedo retângulo é o produto das medidas de suas arestas	Questões de controle, situações de medição, comparação e produção	183	68
TAC2: Um metro cúbico equivale a mil litros	Item (b) das situações de medição e situações de produção	47	46
TAC3: Paralelepípedos retângulos distintos podem ter mesmo volume.	Item (b) das situações de produção	19	19
TAC4: Em paralelepípedos retângulos de mesmo volume a soma das áreas de todas as faces não são necessariamente iguais.	Item (c) das situações de produção	11	11

Fonte: acervo da pesquisa

Conforme o Quadro 5, destacamos que TAC1 foi o que apareceu em todas as questões e situações, pois necessitavam do cálculo de volume. Vale ressaltar que até mesmo nas

situações de produção esse teorema foi mobilizado. Neste caso, percebemos que ao mobilizar tal teorema os alunos utilizaram conhecimentos adequados do campo das grandezas.

Em relação aos teoremas em ação corretos, identificamos 4 teoremas e constatamos que nem sempre os TAC conduziram às respostas corretas para os problemas propostos. Vale reforçar o papel das imbricações entre campos conceituais evidenciados nos TAC, pois identificamos alunos que mobilizaram corretamente conhecimentos do campo das grandezas, mas cometeram erros relacionados a dificuldades no campo numérico.

Apresentaremos a seguir os teoremas em ação errôneos identificados neste estudo.

TAE1: A medida do volume de um paralelepípedo retângulo é a raiz quadrada da soma das medidas de cada aresta elevada ao quadrado.

Em relação à mobilização de fórmula incorreta esse teorema errôneo foi o mais mobilizado na primeira questão de controle e nas questões referentes as situações de medição e de comparação. Tal teorema foi utilizado por 24 estudantes e apareceu 61 vezes em todos os testes.

Figura 46 - Extrato do protocolo do aluno 76 na Q3T3

Questão 3
 Uma piscina na forma de um paralelepípedo retângulo tem profundidade 3 m, 6 m de largura e 12 m de comprimento. Com base nessas informações, responda:
 a) Qual o volume, em metros cúbicos, dessa piscina? *Explique sua resposta.*

$V = \sqrt{3^2 + 6^2 + 12^2}$ $V \approx 13,7 \text{ cm}^3$
 $V = \sqrt{9 + 36 + 144}$
 $V = \sqrt{189}$

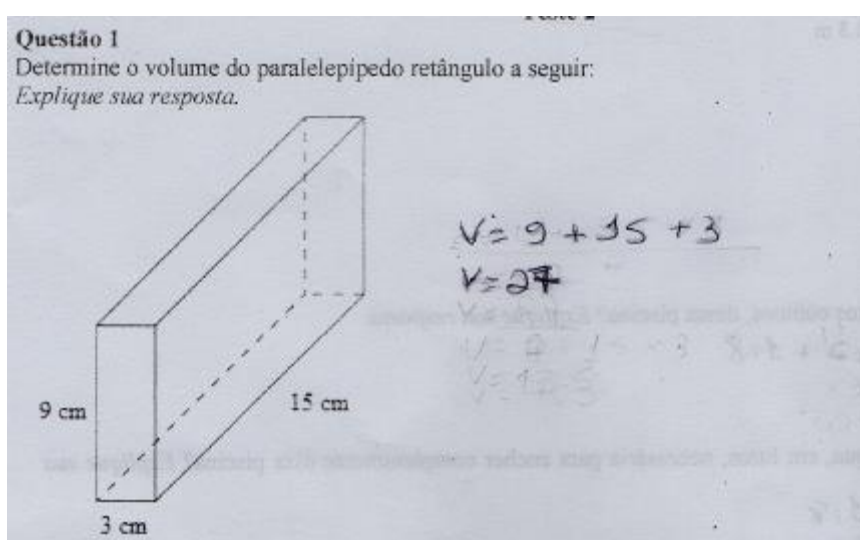
Fonte: acervo da pesquisa

Na figura 46, evidenciamos que o aluno empregou claramente TAE1 e realizou os cálculos de potência e raiz quadrada corretamente, ou seja, mobilizou conhecimentos do campo numérico. Isso mostra dificuldades no campo das grandezas e no campo geométrico. Vale ressaltar que ele utilizou esse mesmo teorema nas três primeiras questões do teste. Diante disso, afirmamos que os estudantes que mobilizaram esse teorema confundiram a fórmula do volume do paralelepípedo retângulo com a fórmula de sua diagonal ($D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$). Um das justificativas para isso ocorrer é o fato que os estudantes estavam estudando sobre a diagonal do paralelepípedo no período da coleta de dados.

TAE2: A medida do volume de um paralelepípedo retângulo é a soma das medidas de suas arestas.

Esse teorema foi empregado na primeira questão de controle, nas situações de comparação e de medição por 8 estudantes. A maioria desses estudantes utilizou o TAE2 em mais de uma questão do teste, pois tal teorema apareceu 16 vezes.

Figura 47 - Extrato do protocolo do aluno 22 na Q1T2



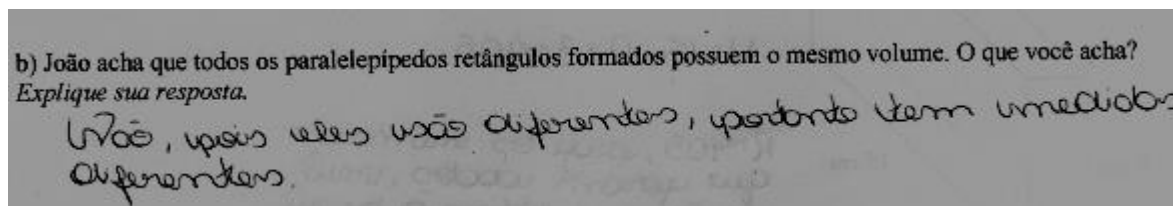
Fonte: acervo da pesquisa

Conforme a Figura 47, percebemos que o aluno somou as medidas das arestas do paralelepípedo retângulo, isto é, utilizou o princípio aditivo para calcular o volume por meio da soma de suas arestas. Esse erro é fruto de dificuldade em conhecimentos do campo das grandezas. Ainda observando a Figura 47, constatamos novamente a concepção volume número, visto que o volume é considerado como um número.

TAE3: Paralelepípedos retângulos diferentes têm necessariamente volumes diferentes.

Esse teorema em ação foi mobilizado por 11 alunos no item (b) das situações de produção dos testes 1 e 3. Ao empregar o TAE4 os alunos consideraram que figuras diferentes não podem ter mesmo volume. Veja o exemplo na Figura 48.

Figura 48 - Extrato do protocolo do aluno 28 na Q4T3



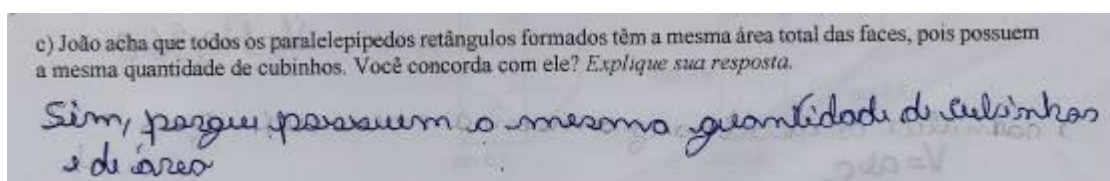
Fonte: acervo da pesquisa

Salientamos que tal teorema foi antecipado na análise a priori e identificado também no estudo de Figueiredo (2013). Com olhar das imbricações entre campos conceituais, constatamos dificuldade no campo das grandezas e no campo geométrico.

TAE4: Paralelepípedos retângulos de mesmo volume têm a mesma área total.

Esse teorema foi previsto na análise a priori e identificado no item (c) nas situações de produção dos testes 1 e 3. Vale ressaltar que Figueiredo (2013) constatou em seu estudo como teorema em ação errôneo que sólidos de mesmo volume têm a mesma área.

Figura 49 - Extrato do protocolo do aluno 10 na Q4T1



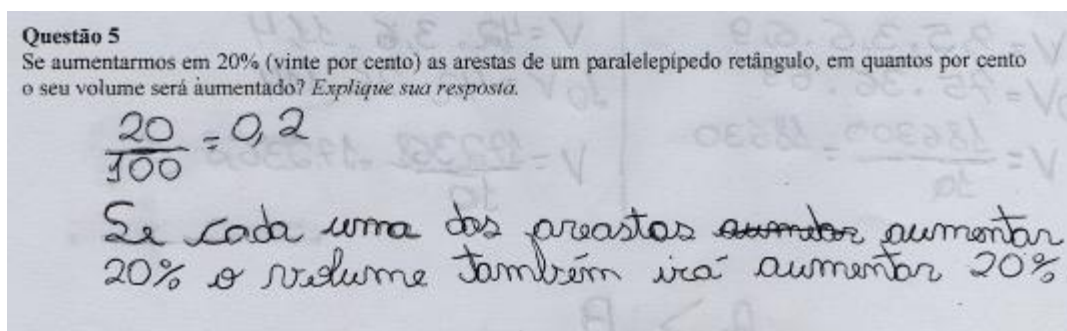
Fonte: acervo da pesquisa

Conforme a Figura 49, evidenciamos que o aluno considerou que os paralelepípedos retângulos têm a mesma quantidade de cubinhos (mesmo volume), então tem mesma área. Isso implica que esse aluno pensou que área e volume são grandezas distintas, mas que variam juntas, ou seja, se os paralelepípedos retângulos possuem mesmo volume, então têm mesma área total. Esse teorema em ação é fruto de dificuldades no campo das grandezas, especificamente nos conceitos de área e volume.

TAE5: O volume de um sólido se altera na mesma proporção que as medidas de suas arestas.

Esse teorema foi mobilizado por 17 alunos na segunda questão de controle (questão 5), pois a questão questionava em quantos por cento o volume de um paralelepípedo retângulo aumentaria se aumentassem 20% de suas arestas.

Figura 50 - Extrato do protocolo do aluno 8 Q5T1



Fonte: acervo da pesquisa

Observando a Figura 50, constatamos que o aluno considerou que se a medida da aresta do paralelepípedo retângulo aumentar 20%, então seu volume também aumentará 20%. Ressaltamos que esse mesmo teorema foi previsto na análise a priori, identificado no nosso estudo piloto e no trabalho de Figueiredo (2013). Para confirmar o TAE6 realizamos entrevista com um dos alunos que apresentou esse teorema em ação. Veja um trecho da entrevista:

Aluno 12: *Se aumentarmos em vinte por cento as arestas de um paralelepípedo retângulo, em quantos por cento o seu volume será aumentado? Acho que o volume tem relação com a aresta, então se a aresta aumenta vinte por cento seu volume também aumenta vinte por cento. Não precisa nem fazer cálculos.*

A mobilização do TAE5 explicitado na Figura 50 e no protocolo do aluno 12, evidencia dificuldades no campo geométrico relacionado às propriedades do sólido (arestas) e no campo das grandezas referentes ao conceito de volume, além da ausência de conhecimentos de outros campos conceituais.

Apresentamos no Quadro 6 uma síntese dos teoremas em ação errôneos identificados neste estudo. Observe a seguir.

Quadro 6 - Teoremas em ação errôneos

Teoremas em ação errôneos	Situações/questões Identificadas	Quantidade de vezes que os teoremas foram mobilizados	Quantidade de estudantes que mobilizaram os teoremas
TAE1: A medida do volume de um paralelepípedo retângulo é a raiz quadrada da soma das medidas de cada aresta elevado ao quadrado	Questões de controle, situações de medição, comparação e produção	61	24
TAE2: A medida do volume de um paralelepípedo retângulo é a soma das medidas de suas arestas	Primeira questão de controle, situações de medição e situações de produção	16	8
TAE3: Paralelepípedos retângulos diferentes têm necessariamente volumes diferentes	Item (b) das situações de produção	11	11
TAE4: Paralelepípedos retângulos de mesmo volume têm a mesma área total.	Item (c) das situações de produção	25	25
TAE5: O volume de um sólido se altera na mesma proporção que as medidas de suas arestas.	Segunda questão de controle	17	17

Fonte: acervo da pesquisa

No Quadro 6, que o TAE1 foi o mais mobilizado, visto que foi empregado 61 vezes por 24 estudantes. Isso implica que todos os alunos mobilizaram esse teorema mais de uma vez na resolução das questões dos testes. Enfatizamos que não previmos tal teorema na análise a priori e não verificamos em nosso estudo piloto. Diante disso, evidenciamos que os alunos que mobilizaram esse teorema apresentaram dificuldades no campo das grandezas.

Ao identificar os teoremas em ação corretos e errôneos na resolução das questões envolvendo volume do paralelepípedo retângulo, constatamos que os alunos mobilizaram

conhecimentos adequados e não adequados do campo das grandezas e do campo numérico. Enfatizamos que todos os teoremas em ação corretos e 4 dos 5 teoremas errôneos (TAE2, TAE4, TAE6) foram previstos na análise a priori e identificados no estudo piloto.

Em relação às imbricações entre campos conceituais, destacamos que nos teoremas em ação corretos, que não conduziram à resposta correta, foram identificadas dificuldades no campo numérico, enquanto que os teoremas em ação errôneos evidenciamos dificuldades no campo das grandezas e no campo geométricos.

4.4 Representações Simbólicas Utilizadas por Alunos na Resolução de Problemas Envolvendo Volume Paralelepípedo Retângulo

Nesta seção analisaremos as representações simbólicas utilizadas pelos alunos na resolução das situações envolvendo o volume do paralelepípedo retângulo. Para Vergnaud (1996), o conjunto das representações simbólicas é um sistema de símbolos com significados para o sujeito que representa um conceito, ou seja, representa as situações e os invariantes. No intuito de analisar a influência de algumas formas de representações simbólicas na compreensão e na resolução das questões, elegemos 3 variáveis, tipos de situações, presença de figuras e operações e valores numéricos que foram explícitas anteriormente, com seus respectivos valores.

Em relação às representações simbólicas utilizadas pelos alunos para resolver as questões dos testes, destacamos: as fórmulas, as figuras, as unidades de medidas e os números. Cabe salientar que a fórmula foi a representação mais utilizada em grande parte das questões, devido ao cálculo do volume. No entanto, na questão que não necessariamente precisava utilizá-la, ou seja, na questão de produção que era para indicar quantos paralelepípedos diferentes pode-se fazer com 36 cubinhos, que 2 alunos a empregaram. Veja o exemplo a seguir.

Figura 51 - Extrato do protocolo do aluno 29 Q4T3

Questão 4
João possui 36 cubinhos de 1cm de aresta. Ele quer organizá-los de modo a formar um paralelepípedo retângulo.



a) Indique quantos paralelepípedos retângulos diferentes João poderá formar com os 36 cubinhos. *Explique sua resposta.*

$$AB = \frac{1^2 \sqrt{3}}{4} \times 36 \rightarrow AB = \frac{1^2 \sqrt{3}}{4} \times 36 \rightarrow AB = 144\sqrt{3}$$

b) João acha que todos os paralelepípedos retângulos formados possuem o mesmo volume. O que você acha? *Explique sua resposta.*

Sim, pois ele equivale a mesma área.

c) João acha que todos os paralelepípedos retângulos formados têm a mesma área total das faces, pois possuem a mesma quantidade de cubinhos. Você concorda com ele? *Explique sua resposta.*

$$At = 2AB + Al$$

$$At = 2 \times 144\sqrt{3} + 36 \rightarrow At = 288\sqrt{3}$$

Fonte: acervo da pesquisa

Na Figura 51, o aluno mobilizou uma fórmula no item (a) e no item (c) utilizou a fórmula da área total do paralelepípedo retângulo. Isso mostra que esse aluno apresentou uma concepção volume número segundo Anwandter-Cuellar (2008). Observe o trecho da entrevista com esse aluno.

Aluno 29: Na letra (a) da questão 4 utilizei a fórmula da aresta da base. A aresta da base é igual ao lado ao quadrado vezes a raiz de três multiplicado por 36 sobre 4. Há uma junção da fórmula da área da base com o volume para calcular a aresta e descobrir quantos paralelepípedos irão formar. Na letra (c) utilizei a fórmula da área total que corresponde a duas vezes a área da base mais área lateral.

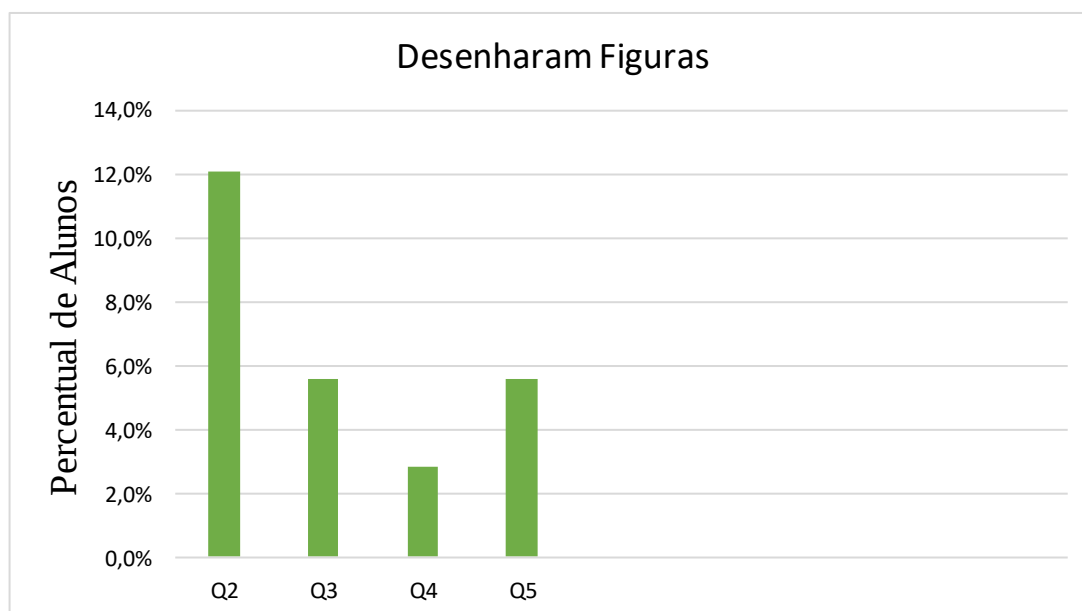
Entrevistadora: Qual a medida da área da base?

Aluno 29: A área da base é 144 raiz de 3 e a área lateral é 36.

No protocolo acima percebemos que o aluno utilizou uma fórmula (que ele chamou de fórmula da aresta da base) para responder o item (a), no entanto ele utilizou a resposta desse item (a), que para ele era medida da aresta da base: 144 raiz quadrada de 3, para responder o item (c) e considerou que 144 raiz quadrada de 3 como a medida da área da base. Nesse caso, evidenciamos que esse aluno se preocupou em responder as questões utilizando fórmulas, apresentou confusão nas fórmulas de área e nos significados das propriedades do sólido, ou seja, dificuldade no campo das grandezas e do geométrico.

Nas questões que apresentavam o valor da variável 2, ausência de figuras, alguns alunos desenharam a representação do paralelepípedo retângulo para auxiliarem suas resoluções.

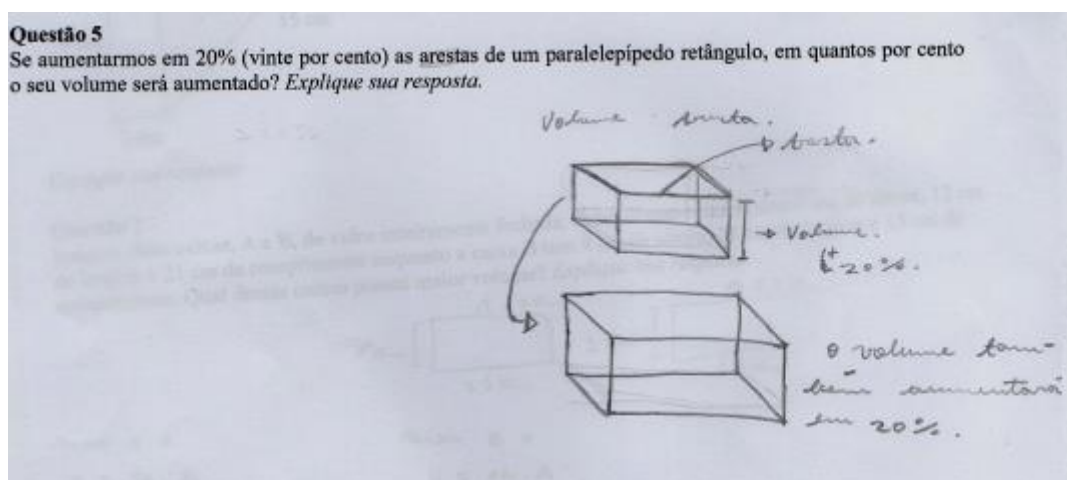
Gráfico 3 - Percentual dos alunos que desenharam figuras



Fonte: acervo da pesquisa

No Gráfico 3, apresentamos os índices dos alunos que desenharam as figuras para auxiliar nas resoluções das questões. Podemos observar que os alunos utilizaram mais a representação simbólica da figura na questão 2, referente às situações de comparação, enquanto que na questão 4 (situações de produção) que tratava da construção de sólidos com volume dado, 2,8 % dos 107 alunos desenharam essa representação.

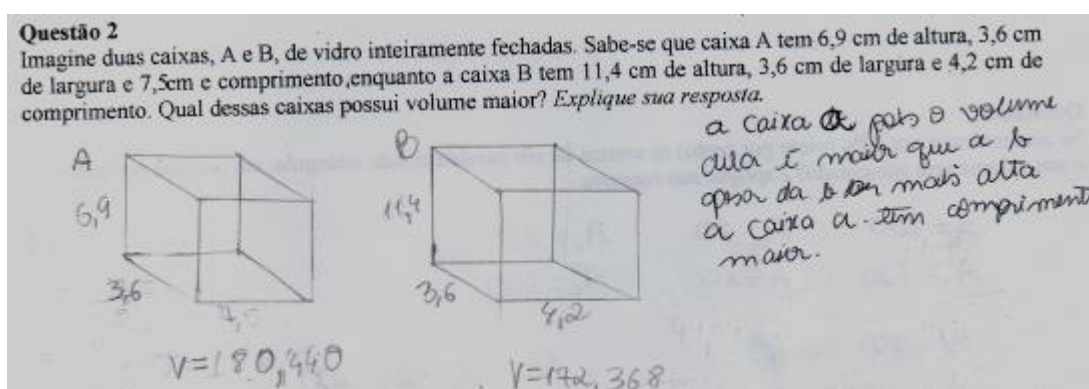
Figura 52 - Extrato do protocolo do aluno 106 Q5T4



Fonte: acervo da pesquisa

Na Figura 52, podemos observar que o aluno representou corretamente o paralelepípedo retângulo ao utilizá-lo na resolução da questão, no entanto errou a questão por considerar que o volume se altera na mesma proporção que as medidas das arestas. Isso mostra dificuldade no campo das grandezas.

Figura 53 - Extrato do protocolo do aluno 31 Q2T3



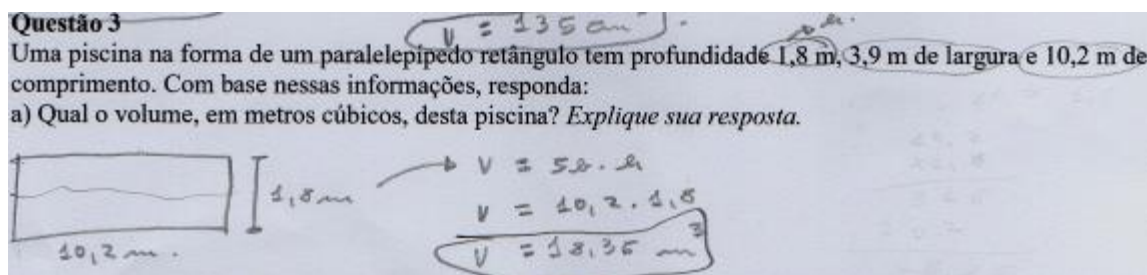
Fonte: acervo da pesquisa

Conforme a Figura 53, evidenciamos que o aluno representou corretamente os sólidos, mesmo que os desenhos não estejam na mesma escala, ao mobilizar conhecimentos do campo geométrico. No entanto, esse aluno não acertou plenamente a questão, pois apesar de acertar que a caixa A tem volume maior, ele não utilizou a unidade de medida de volume e na sua justificativa por escrito, apresentou um pensamento de volume unidimensional ao falar que a caixa B seja mais alta, a caixa A é maior por ter um comprimento maior, além de

errar a multiplicação com números racionais na forma decimal ao calcular o volume da caixa A. Devido a isso, constatamos que tal aluno apresentou dificuldade no campo das grandezas e no campo numérico.

Três alunos confundiram os sólidos (paralelepípedo retângulo) com figuras planas, como quadrados e retângulos. Observe o exemplo na Figura 54.

Figura 54 - Extrato do protocolo do aluno 104 Q3T4

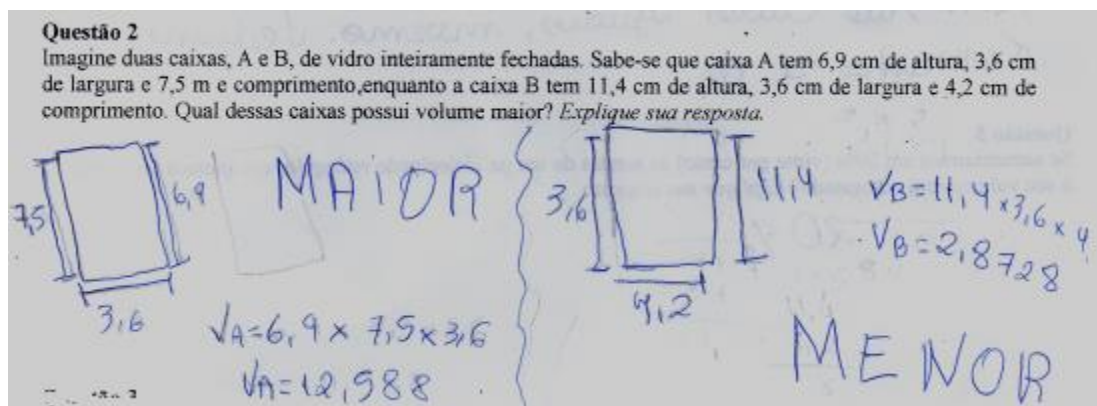


Fonte: acervo da pesquisa

Ao observar a Figura 54, percebemos que o aluno confundiu a figura plana, o retângulo, com a figura espacial, paralelepípedo retângulo. Apesar de utilizar a unidade de volume, ele determinou a área da figura que desenhou, pois realizou a multiplicação da base pela altura. Nesse caso, o aluno confundiu área com volume. Isso mostra dificuldade no campo geométrico e no campo das grandezas. A confusão entre sólido e sua forma geométrica também foi evidenciado nos trabalhos Kaleff, Rei e Garcia (1996), Barros (2002), de Oliveira (2002) e Figueiredo (2013).

Vale ressaltar que identificamos alunos que aparentemente representou de forma incorreta o sólido em questão, mas não por confundir figura plana com a figura espacial e sim por ter dificuldade em desenhar figura espacial. Observe o exemplo na Figura a seguir.

Figura 55 - Extrato do protocolo do aluno 37 Q2T3



Fonte: acervo da pesquisa

Na Figura 55, o aluno mobilizou corretamente a fórmula do volume, mas errou a multiplicação com números racionais na forma decimal e não utilizou a unidade de medida, ou seja, apresentou dificuldade no campo numérico e no campo das grandezas. Em relação à representação da figura, pensávamos inicialmente que esse aluno tinha confundido retângulo com paralelepípedo retângulo, no entanto ao analisar mais afundo cogitamos que ele poderia ter tido dificuldade ao desenhar o paralelepípedo, uma vez que ele considerou as três dimensões e mobilizou a fórmula correta do volume. Nas entrevistas confirmamos nossa hipótese, conforme ilustramos a seguir:

Entrevistadora: *Que figuras você desenhou na questão 2?*

Aluno 37: *Paralelepípedos. Fiz as figuras para ajudar comparar o volume das duas caixas. No volume são vários fatores que interferem. Eu tentei similar as figuras. Essas figuras representam os paralelepípedos que representam as caixas. Eu tenho dificuldade em matemática, então quanto mais imagens eu puder ver para associar com as questões, mais facilita para mim.*

De acordo com o protocolo acima, constatamos que o aluno teve dificuldade em desenhar os paralelepípedos retângulos e os representou na forma de retângulos. Cabe destacar que esse aluno utilizou a representação simbólica figura para ajudar na resolução das questões de matemática.

A respeito da natureza dos números e suas operações, evidenciamos que os alunos obtiveram melhores resultados nos problemas que envolviam números naturais, do que nos

problemas que abordavam números racionais na forma decimal, conforme mencionado na análise da interferência das variáveis.

Em síntese, ao analisarmos representações simbólicas utilizadas por alunos do Ensino Médio na resolução de problemas envolvendo volume, pudemos perceber que as fórmulas para calcular o volume, as figuras dos paralelepípedos retângulo, as unidades de medidas de comprimento (metro e centímetro), volume (centímetros e metros cúbicos) e capacidade (litros) e os números (naturais, racionais na forma decimal, fracionário e na forma percentual) foram as representações simbólicas mobilizadas por esses alunos. Entretanto, a fórmula foi a representação mais empregada, inclusive em questões que não necessitavam o seu uso. Em relação às figuras e os números, constatamos que o desenho da figura foi mais utilizado nas situações de comparação, que alguns alunos confundiram a figura espacial com a plana e que os problemas que envolviam números naturais e suas operações obtiveram melhores resultados.

4.5 Considerações Gerais sobre a Resolução de Problemas Envolvendo Volume Paralelepípedo Retângulo, sob a Ótica das Imbricações entre Campos Conceituais

Após analisar os procedimentos de resolução, identificar os teoremas em ação corretos e errôneos e analisar as representações simbólicas, foi possível estabelecer algumas considerações gerais em relação aos conhecimentos mobilizados por alunos do Ensino Médio na resolução de problemas envolvendo volume paralelepípedo retângulo, sob a ótica das imbricações entre campos conceituais. Dessa forma, nas próximas seções discutiremos conhecimentos adequados e inadequados, relacionados ao campo das grandezas, campo geométrico, campo algébrico e campo numérico, além do papel das Imbricações entre Campos Conceituais na ausência de resposta. Vale ressaltar que alguns aspectos já foram discutidos em outros tópicos, no entanto aprofundaremos essa discussão.

4.5.1 Influência do campo das grandezas e do campo geométrico

Identificamos na resolução dos problemas dos testes teoremas em ação corretos e errôneos relacionados à fórmula do volume de paralelepípedos retângulos, como explicitamos em tópicos anteriores.

Em relação à mobilização da fórmula correta, verificamos nas respostas dos estudantes, o teorema em ação correto (TAC1): a medida do volume de um paralelepípedo retângulo é o produto das medidas de suas arestas, ou seja, $V=a.b.c$. Em todos os testes, 63,6% dos 107 alunos utilizaram essa fórmula. Veja o exemplo na Figura 56.

Figura 56 - Extrato do protocolo do aluno 48 na Q1T4

Questão 1
Determine o volume do paralelepípedo retângulo a seguir:
Explique sua resposta.

$V = 9 \cdot 3 \cdot 15$
 $V = 27 \cdot 15$
 $V = 405$

Apenas multiplica-se as medidas uma pela outra.

Questão 2
Imagine duas caixas, A e B, de vidro inteiramente fechada. Sabe-se que caixa A tem 6 cm de altura, 12 cm de largura e 21 cm de comprimento enquanto a caixa B tem 9 cm de altura, 18 cm de largura e 15 cm de comprimento. Qual dessas caixas possui maior volume? Explique sua resposta.

$A = 6 \cdot 12 \cdot 21$ $B = 9 \cdot 18 \cdot 15$
 $A = 72 \cdot 21$ $B = 162 \cdot 15$
 $A = 1512$ $B = 2430$

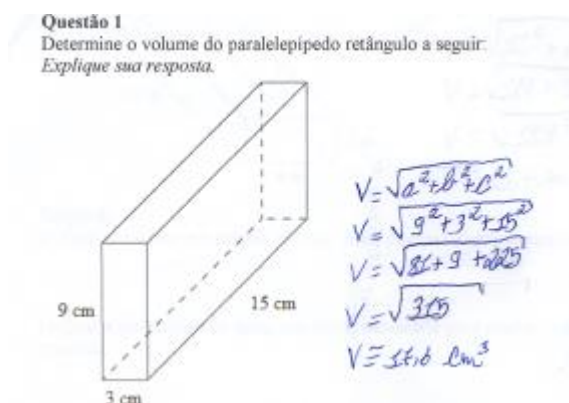
A caixa que tem maior volume é a caixa A

Fonte: acervo da pesquisa

Observando a Figura 56, percebemos que o aluno mobilizou o TAC1 para resolver as questões 1 e 2. No entanto, na resposta final considerou que o volume é apenas o número, pois não colocou a unidade de medida e empregou a concepção volume número. Diante disso, evidenciamos conhecimentos adequados na utilização da fórmula do paralelepípedo retângulo e dificuldade relacionada aos conhecimentos do campo das grandezas.

Ao analisar os dados dos alunos que não mobilizaram correta, identificamos dois teoremas em ação errôneos: a medida do volume de um paralelepípedo retângulo é a raiz quadrada da soma das medidas de suas arestas elevada ao quadrado (TAE1) e a medida do volume de um paralelepípedo retângulo é a soma das medidas de suas arestas (TAE2). O TAE1 foi utilizado por 22,4% dos alunos e TAE2 por 7,5%. Esses teoremas foram verificados nas questões de controle, situações de medição, comparação e produção. Interpretamos que esses erros estão relacionados com as imbricações com o campo das grandezas e o campo geométrico. Na Figura 57, apresentamos um exemplo da utilização do TAE1, visto que o aluno confundiu a fórmula do volume do paralelepípedo retângulo com a fórmula de sua diagonal.

Figura 57 - Extrato do protocolo do aluno 53 na Q1T1



Fonte: acervo da pesquisa

Os teoremas ação corretos referentes à mobilização dos conhecimentos adequados do campo das grandezas foram os seguintes: paralelepípedos retângulos distintos podem ter mesmo volume (TAC3) e em paralelepípedos retângulos de mesmo volume a soma das áreas de todas as faces não são necessariamente iguais (TAC4). O percentual dos alunos que empregaram o TAC3 foi de 17,8%, enquanto que o TAC4 foi de 10,3%. Tais teoremas foram registrados nas situações de produção dos testes 3 e 4 nos itens B e C. Como ilustrado no exemplo abaixo no qual um aluno mobilizou esses dois teoremas em ação.

Figura 58 - Extrato do protocolo do aluno 89 na Q4T1

Questão 4

João possui 36 cubinhos de 1cm de aresta. Ele quer organizá-los de modo a formar um paralelepípedo retângulo.

a) Indique quantos paralelepípedos retângulos diferentes João poderá formar com os 36 cubinhos. *Explique sua resposta.*

R₁: 9 paralelepípedos retângulos.

b) João acha que todos os paralelepípedos retângulos formados possuem o mesmo volume. O que você acha? *Explique sua resposta.*

Sim. Pois não importa o número de formas, contanto que o

c) João acha que todos os paralelepípedos retângulos formados têm a mesma área total das faces, pois possuem a mesma quantidade de cubinhos. Você concorda com ele? *Explique sua resposta.*

Não. Pois as formas não são diferentes.

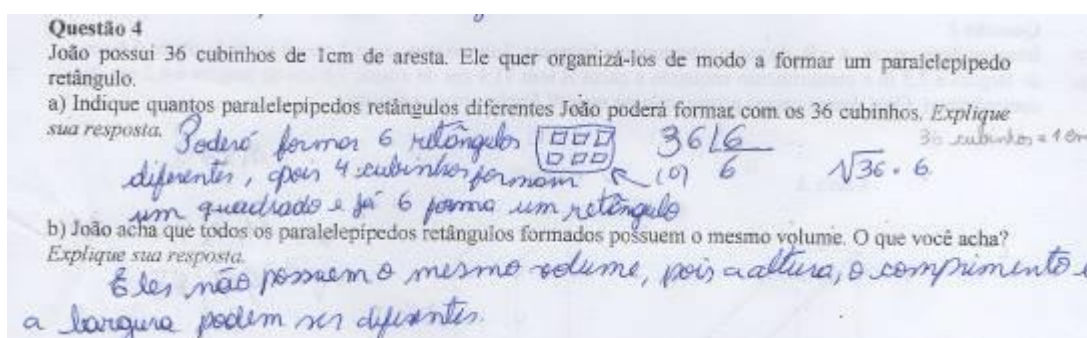
número cubinhos não 36.

Fonte: acervo da pesquisa

Conforme a Figura 58, notamos que o aluno empregou conhecimentos adequados dos campos das grandezas e geométrico nos itens b e c, uma vez que ele apresentou compreender as propriedades do paralelepípedo retângulo e o conceito de volume e área por ter considerado que os paralelepípedos retângulos diferentes formados com os 36 cubinhos possuem o mesmo volume, mas não têm a mesma área total. Julgamos a expressão “as formas são diferentes” referente à seguinte justificativa: os paralelepípedos são diferentes, então a área de cada face e área total serão distintas.

Evidenciamos teoremas em ação errôneos nos mesmos itens das situações de produção, a saber: paralelepípedos retângulos diferentes têm necessariamente volumes diferentes (TAE4) e paralelepípedos retângulos diferentes de mesmo volume têm a mesma área total (TAE5). O TAE4 foi empregado por 10,3 % dos alunos e o TAE5 por 23,4%. Observe o exemplo abaixo.

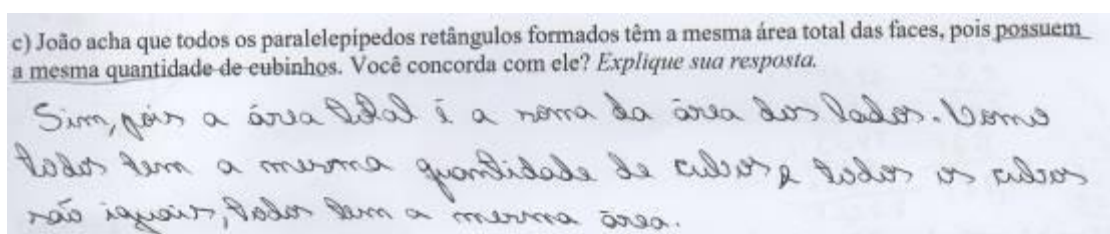
Figura 59 - Extrato do protocolo do aluno 5 na Q4T1



Fonte: acervo da pesquisa

Na Figura 59, evidenciamos que o aluno mobilizou o TAE, visto que considerou que se a medida das dimensões dos paralelepípedos é diferente, então o volume será distinto, ou seja, julgou apenas o aspecto numérico do volume e utilizou conhecimentos inadequados do campo das grandezas. No item c da questão apresentada na Figura 60, percebemos que o aluno confundiu a figura espacial (paralelepípedo retângulo) com a figura plana (retângulo), pois respondeu tal item considerando que poderia formar 6 retângulos, no item no b ele considera que as três dimensões do paralelepípedo retângulo (altura, comprimento e largura). Diante disso, constatamos que esse aluno no item a mobilizou conhecimentos inadequados referente ao campo geométrico.

Figura 60 - Extrato do protocolo do aluno 98 na Q4T3



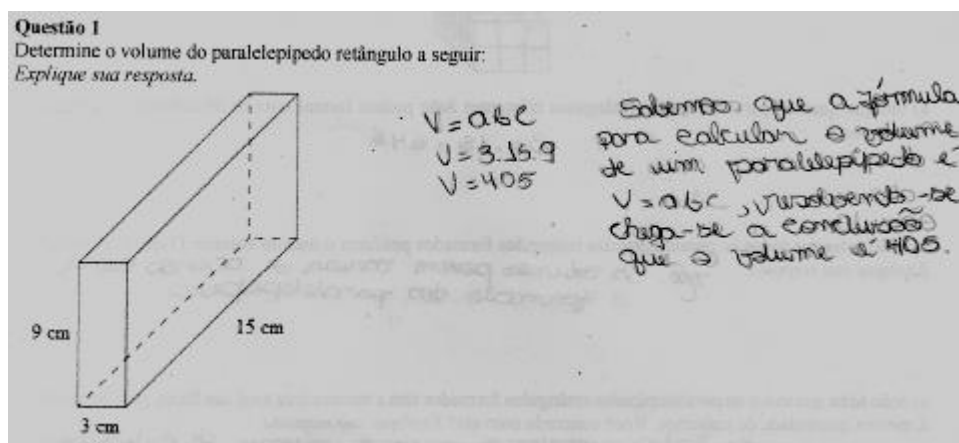
Fonte: acervo da pesquisa

Na Figura acima, observamos que o aluno pensou que se os paralelepípedos diferentes têm a mesma quantidade de cubinhos (volume), então todos têm a mesma área. Isso mostra dificuldade no campo das grandezas, pois tal aluno considerou que volume e área se refere a mesma grandeza ou variam no mesmo sentido.

Assim como nos trabalhos de Figueiredo (2013) e Anwandter-Cuellar (2008), constatamos a concepção de volume número. Tal concepção foi mobilizado devido à ausência da representação da unidade de medida de volume. Analisamos a utilização dessa concepção apenas nas questões 1 e 2 de todos os testes, visto que no enunciado das outras questões exigiam a unidade de medida específica, ou seja, solicitavam apenas a medida do volume ou capacidade ou as medidas das dimensões do sólido.

Todos os acertos parciais na primeira questão de controle estavam relacionados com a concepção volume número, pois os alunos identificaram as propriedades do sólido, mobilizaram a fórmula correta, escreveram fórmula corretamente, realizavam a multiplicação entre as medidas das arestas, no entanto não colocaram a unidade de medida de volume. Como já mencionamos, esse fato está ligado com a álgebra das grandezas, visto que os alunos consideraram o volume como um número e não indicaram a unidade de medida, como ilustrado na Figura 61.

Figura 61 - Extrato do protocolo do aluno 32 na Q1T3



Fonte: acervo da pesquisa

Na Figura 61, notamos que o aluno considerou que o volume como um número, além de não colocar a unidade de medida no final do cálculo, na sua justificativa ele reforça que o volume é 405. Durante as entrevistas, outro aluno confirmou que o volume é um número obtido por uma fórmula. Veja o trecho da entrevista abaixo.

Entrevistadora: *Como você resolveu a questão 1?*

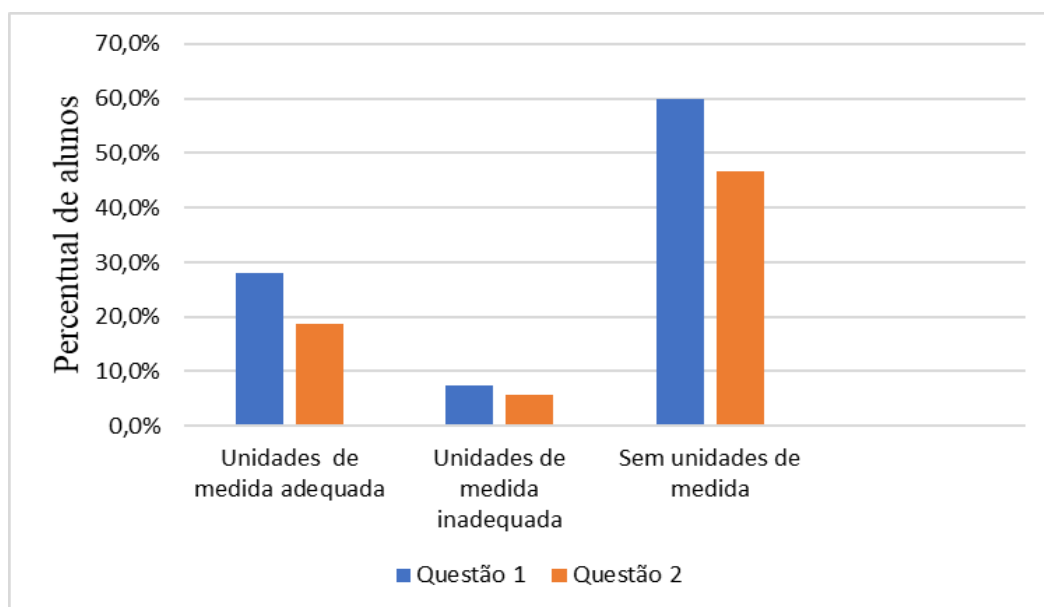
Aluno 05: *Usei a fórmula do volume e multipliquei tudo...Altura, comprimento e largura aí deu 405.*

Entrevistadora: *Qual o volume do sólido dessa questão?*

Aluno 05: *O volume é 405 porque a multiplicação de suas medidas deu isso.*

Em relação ao uso das unidades de medida, cabe destacar que 65 alunos não indicaram a unidade de medida de volume no total de 115 vezes, outros alunos empregaram a unidade de medida inadequada. No Gráfico 4 apresentamos o percentual de alunos que utilizaram as unidades de medida adequada, inadequada e não indicaram as unidades de medida.

Gráfico 4 – Uso das unidades de medida

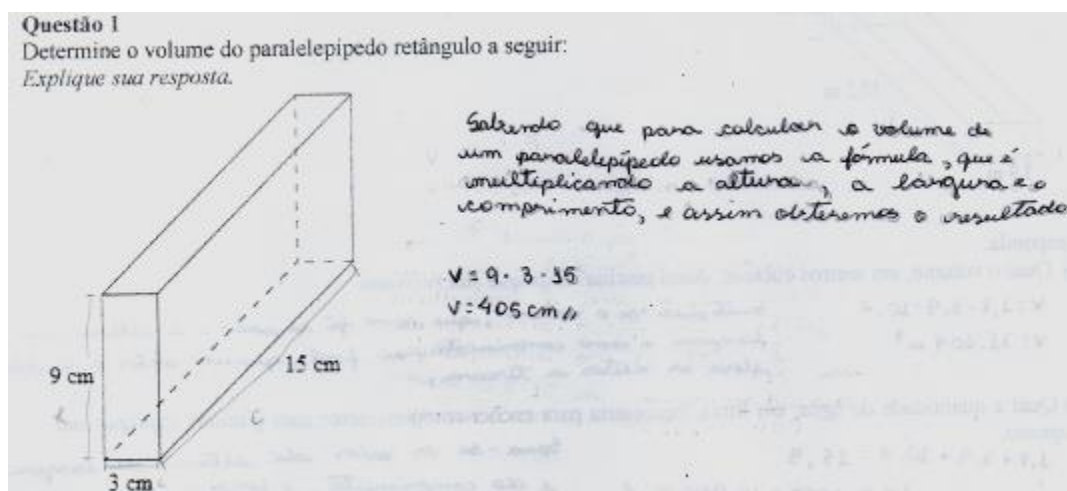


Fonte: acervo da pesquisa

Conforme o Gráfico 4, observamos que cerca de 60 % dos alunos não indicou a unidade de medida na primeira questão e 46,7% na segunda questão. Em relação à utilização da unidade de medida adequada, a questão 1 obteve um índice maior que a questão 2. A respeito da utilização da unidade da medida inadequada, destacamos que alguns alunos (7,5% na questão 1 e 5,6% na questão 2) indicaram a unidade de medida de comprimento ou confundiram centímetros cúbicos com metros cúbicos.

Veja o exemplo a seguir.

Figura 62- Extrato do protocolo do aluno 14 Q1T2



Fonte: acervo da pesquisa

Na Figura 62, podemos observar que o aluno utilizou a unidade de medida errada, pois empregou a unidade de medida de comprimento (centímetros), ao invés da unidade de volume (centímetros cúbicos). Nesse contexto, evidenciamos conhecimentos inadequados do campo das grandezas, visto que o aluno usou uma unidade de medida inadequada.

Portanto, os altos índices de alunos que não utilizaram as unidades de medida ou usaram as unidades inadequadas estão relacionados à álgebra das grandezas que se refere ao modo como os estudantes lidam com as unidades de medida (SOUZA, 2013), conforme já mencionamos.

Constatamos que o campo das grandezas e o campo geométrico influenciaram nos procedimentos de resolução que conduziram as respostas corretas ou errôneas em relação aos seguintes conhecimentos: no conceito de volume e área, no emprego das unidades de medida de volume, na mobilização da fórmula do volume, na identificação dos sólidos geométricos e suas propriedades.

4.5. 2 Influência do campo algébrico

Na questão 4 dos testes 2 e 4 previmos na análise a priori apenas o procedimento com ênfase no campo algébrico. Dos estudantes resolveram essa questão, 23 utilizaram tal procedimento.

Figura 63 - Extrato do protocolo do aluno 45 na Q4T4

Questão 4
Carlos quer construir uma caixa-d'água no formato de um paralelepípedo retângulo. Sabe-se que a medida do comprimento é o triplo da largura e que altura tem $\frac{1}{4}$ da largura. Determine as medidas das dimensões, em metros, dessa caixa-d'água para que ela possa conter 6 000 litros de água. *Explique sua resposta.*

Diagram labels: $a = 3x$, $b = x$, $c = \frac{1}{4}x$

Equations and calculations:

$$V = x \cdot 3x \cdot \frac{1}{4}x = \frac{3}{4}x^3$$

$$6000 = \frac{3}{4}x^3$$

$$x^3 = \frac{6000 \cdot 4}{3} = 8000$$

$$x = \sqrt[3]{8000} = 20$$

Dimensions found:

$$a = 3 \cdot 20 = 60$$

$$b = 20$$

$$c = \frac{1}{4} \cdot 20 = 5$$

Handwritten note: $x = 2 \cdot 2 \cdot 5$

Fonte: acervo da pesquisa

Na Figura 63, observamos que o aluno apresentou dificuldade na modelização da escrita algébrica em relação à diferença de unidades de medida de capacidade e volume, visto que ele considerou como 6000 l fossem equivalentes a 6000 m³. Isso evidencia dificuldade no campo das grandezas. No entanto, esse aluno resolveu a equação e interpretou os dados corretamente.

Figura 64 - Extrato do protocolo do aluno 40 na Q4T4

Questão 4
Carlos quer construir uma caixa-d'água no formato de um paralelepípedo retângulo. Sabe-se que a medida do comprimento é o triplo da largura e que altura tem $\frac{1}{4}$ da largura. Determine as medidas das dimensões, em metros, dessa caixa-d'água para que ela possa conter 6 000 litros de água. *Explique sua resposta.*

Diagram labels: $l = \text{largura}$, $3l = \text{comprimento}$, $\frac{1}{4}l = \text{altura}$

Equations and calculations:

$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$6000 = 3l \cdot l \cdot \frac{1}{4}l$$

$$6000 = \frac{3}{4}l^3$$

$$l^3 = \frac{6000 \cdot 4}{3} = 8000$$

$$l = \sqrt[3]{8000} = 20$$

Handwritten note: $l = 2$

Handwritten explanation: O volume é multiplicado por 1000 para valer para valer quantos litros a caixa ocupa, então, o volume é igual a 6. Substituindo na fórmula $V = abc$, encontra-se a arista da caixa.

Fonte: acervo da pesquisa

Conforme a Figura 64, evidenciamos que o aluno realizou a modelagem da expressão algébrica e resolveu a equação corretamente, mas não interpretou os dados, visto que a questão perguntava as dimensões (comprimento, largura e altura) caixa d'água e esse aluno só determinou a medida da largura.

Figura 65 - Extrato do protocolo do aluno 17 na Q4T2

Questão 4
 Carlos quer construir uma caixa-d'água no formato de um paralelepípedo retângulo. Sabe-se que a medida do comprimento é o triplo da largura e que altura tem $\frac{1}{4}$ da largura. Determine as medidas das dimensões, em metros, dessa caixa-d'água para que ele possa conter 6000 litros de água. Explique sua resposta.

$$6 = \frac{1}{4}l \cdot l \cdot 3l$$

$$6 = 0,25l \cdot l \cdot 3l$$

$$6 = 0,25l \cdot 3l^2$$

$$6 = \frac{1}{4}l^3$$

Fonte: acervo da pesquisa

No protocolo acima temos exemplo de um aluno que realizou a modelização da escrita algébrica de forma correta, mas errou a questão devido à dificuldade na resolução da equação e por isso não interpretou os dados da questão. Diante disso, evidenciamos imbricações entre o campo numérico e o campo algébrico.

Nesta seção, evidenciamos que o campo algébrico influenciou na modelização da escrita algébrica, na interpretação dos dados e na expressão algébrica (equação).

4.5. 3 Influência do campo numérico

Em relação ao campo numérico destacamos que na questão 5 de todos os testes, os alunos preferiram utilizar o procedimento numérico. Nessa questão foi previsto dois procedimentos de resolução, um numérico e um algébrico. Na análise dos dados, evidenciamos que os alunos priorizaram, em respostas erradas ou corretas, o procedimento numérico na questão 5, visto que nenhum aluno respondeu essa questão priorizando o aspecto algébrico.

Figura 66 - Extrato do protocolo do aluno 02 na Q5T1

Questão 5
 Se aumentarmos em 20% (vinte por cento) as arestas de um paralelepípedo retângulo, em quantos por cento o seu volume será aumentado? Explique sua resposta.

$$10 \times 20 \times 30 = 6000$$

$$12 \times 24 \times 36 = 10368$$

$$\frac{10368 - 6000}{6000} = \frac{4368}{6000} = 0,728$$

O aumento é de 72,8%

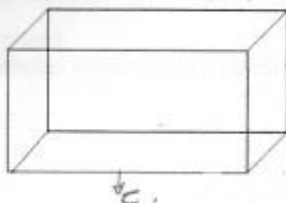
Fonte: acervo da pesquisa

Na Figura 67, podemos observar que o aluno atribuiu valores numéricos às medidas das arestas do paralelepípedo retângulo, calculou o volume antes e depois do aumento de 20% e determinou a porcentagem do volume que foi aumentado. Apesar desse aluno utilizar uma incógnita para o cálculo da porcentagem, seu procedimento tem ênfase no aspecto numérico. A maioria dos alunos que utilizou esse tipo de procedimento acertou a questão 5.

Na questão 4, apenas 2 alunos utilizaram o procedimento numérico, mas não encontraram a resposta correta. Veja o exemplo a seguir.

Figura 67 - Extrato do protocolo do aluno 106 na Q5T4

Questão 4
Carlos quer construir uma caixa-d'água no formato de um paralelepípedo retângulo. Sabe-se que a medida do comprimento é o triplo da largura e que altura tem 1/4 da largura. Determine as medidas das dimensões, em metros, dessa caixa-d'água para que ela possa conter 6 000 litros de água. Explique sua resposta.



$V = 50 \cdot 20$
 $V = 3000 \cdot 2$
 $V = 6.000 \text{ m}^3$

largura = 1.000 m², comprimento = 3.000 m²,
 altura = 2 m³.

Fonte: acervo da pesquisa

Conforme a Figura 67, constatamos que o aluno determinou as medidas das dimensões da caixa por tentativa, pois ele pensou nas medidas das dimensões que o resultado dá 6000. Entretanto, apresentou dificuldade no campo das grandezas por considerar que área da base é a medida do comprimento (3.000) e por pensar que um metro cúbico equivale a um litro.

A respeito dos erros relacionados ao campo numérico, destacamos dificuldade em multiplicar ou dividir com números naturais e racionais na forma decimal, pois 41,1% dos 107 alunos erraram o cálculo numérico. Porém, apenas um aluno errou o cálculo numérico referente a divisão com números racionais na forma decimal, visto que o restante dos erros estava ligado à multiplicação. Esse tipo de erro foi constatado na primeira questão de controle, nas situações de comparação, nas situações de medição e produção, no entanto 40% desses erros foram registrados nas situações de medição. Observe o exemplo a seguir.

Figura 68 - Extrato do protocolo do aluno 51 nas Q2 e Q3 do T4

Questão 2

Imagine duas caixas, A e B, de vidro inteiramente fechada. Sabe-se que caixa A tem 6 cm de altura, 12 cm de largura e 21 cm de comprimento enquanto a caixa B tem 9 cm de altura, 18 cm de largura e 15 cm de comprimento. Qual dessas caixas possui maior volume? *Explique sua resposta.*

$$A \quad 6 \times 12 \times 21 = 1462$$

$$B \quad 9 \times 18 \times 15 = 270$$

Caixa A, por seu volume ser maior

Questão 3

Uma piscina na forma de um paralelepípedo retângulo tem profundidade 1,8 m, 3,9 m de largura e 10,2 m de comprimento. Com base nessas informações, responda:

a) Qual o volume, em metros cúbicos, desta piscina? *Explique sua resposta.*

$$11,604 \text{ m}^3 \quad \text{multiplica tudo}$$

b) Qual a quantidade de água, em litros, necessária para encher completamente esta piscina? *Explique sua resposta.*

$$11604 \quad \text{multiplica tudo}$$

Fonte: acervo da pesquisa

Conforme observado na Figura 68, evidenciamos que o aluno errou a multiplicação com números naturais na questão 2, situação de comparação, e a multiplicação com números racionais na forma decimal na questão 3, situação de medição. Isso mostra dificuldades nos conhecimentos do campo numérico.

Em suma, constatamos influência do campo numérico na resolução da questão 5, pois alunos optaram pelo procedimento numérico e nos erros referentes à multiplicação com números naturais e números racionais na forma decimal.

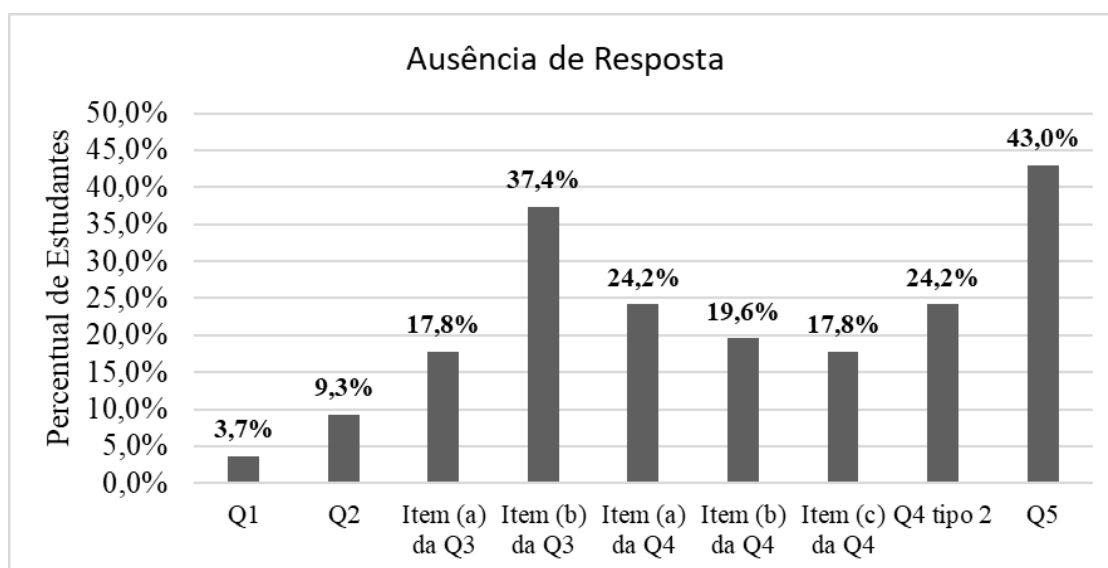
4.5. 4 O papel das Imbricações na ausência de resposta

Apesar das imbricações entre campos conceituais terem influenciado tanto nos erros cometidos pelos estudantes, quanto nas possibilidades de procedimentos escolhidas para obter respostas, faremos aqui um recorte em relação ao papel das imbricações na ausência de respostas, pois ao realizar a análise dos dados, percebemos que muitos alunos ficaram sem responder algumas questões dos testes. Diante disso, decidimos identificar quais questões com maiores e menores índices de ausência de respostas e qual o motivo disso ocorrer. Na

busca de responder essas indagações, realizamos a análise da ausência de resposta que apresentaremos nesse tópico.

No Gráfico 5, apresentamos os percentuais de ausência de respostas no conjunto de todos os testes.

Gráfico 5 - Percentual de ausência de resposta



Fonte: acervo da pesquisa

Conforme o Gráfico 5, observamos que os maiores índices de ausência de resposta foram registrados na quinta questão, 43%. Essa questão estava presente em todos os testes e questionava quantos por cento o volume de um paralelepípedo retângulo aumentaria se aumentássemos 20% de suas arestas. Evidenciamos que tal questão possibilita uma abertura para diversos procedimentos de resolução, ou seja, o estudante pode mobilizar conhecimentos de diferentes campos conceituais. Na análise a priori, apresentamos dois procedimentos de resolução que exigiam conhecimentos do campo das grandezas, geométrico, algébrico e do campo numérico. Diante disso, constatamos que os alunos que não responderam a questão 5 devido à dificuldade de lidar com os diferentes campos ao mesmo tempo. Esse resultado reforça um dos indicativos relativos às Imbricações entre os Campos Conceituais que corresponde a ausência de resposta em determinadas questões.

No item (a) da questão 3 foi registrado um percentual de 17,8% de ausência de resposta, enquanto o item (b) foi 37,4%. O item (a) perguntava o volume de uma piscina e o item (b) sua capacidade, em litros, ou seja, a resolução do item (b) dependia da resposta do

item (a). Nesse caso, percebemos que muitos alunos responderam o item (a) e não responderam o item (b). Isso pode ter ocorrido devido aos alunos não entenderem o conceito de capacidade ou não sabiam transformar metros cúbicos em litros. A dificuldade no campo das grandezas ocasionou resposta em branco.

O item (a) da questão 4, situação de produção nos testes 1 e 3, merece destaque, visto que nenhum aluno acertou esse item e 24,2 % dos alunos não a responderam. No estudo piloto que realizamos tivemos resultado semelhantes, pois nenhum aluno acertou esse item e os índices de respostas em branco foram altos. De acordo com a nossa análise a priori na resolução dessa questão era preciso mobilizar conhecimentos do campo geométrico, do campo das grandezas e do campo numérico. A questão 4 do tipo 2, situação de produção dos testes 2 e 4, apresentou o mesmo percentual de ausência de resposta do item (a).

A questão 1 apresentou o menor índice de resposta em branco apenas 3,7 %. Isso se justifica pelo fato que a questão perguntava o volume do retângulo com dimensões indicadas na figura. Vale ressaltar que aproximadamente 50% dos alunos erraram essa questão, mas poucos alunos deixaram a questão em branco.

Numa pesquisa anterior realizada por Moraes (2013) constatou-se que as situações de medição e uso de fórmulas são mais enfatizadas nos livros didáticos do Ensino Médio, neste sentido uma das possíveis justificativas para esses resultados descritos acima seriam as práticas de ensino desenvolvidas em da sala de aula, pois as situações de produção são poucas abordadas nos livros didáticos e possivelmente raramente vivenciadas durante as aulas.

Constatamos que as questões que apresentaram maior percentual de ausência de respostas foram as questões atípicas, ou seja, que não perguntavam simplesmente o volume do paralelepípedo retângulo, como as situações de produção e o item (b) das situações de medição. Essas questões exigiam a mobilização de conhecimentos dos diferentes campos conceituais. Os resultados da nossa análise corroboram com os resultados de Teles (2007), visto que a autora identificou que um dos indicadores relativos às Imbricações entre os Campos Conceituais é a ausência de resposta em determinadas questões.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nosso objetivo neste trabalho foi analisar conhecimentos mobilizados por alunos do Ensino Médio na resolução de problemas envolvendo volume do paralelepípedo retângulo, sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1996) e das Imbricações entre Campos Conceituais proposta por Teles (2007).

A revisão de literatura possibilitou tomar como base as pesquisas que investigaram a grandeza volume, distinguir e articular os resultados encontrados nessas pesquisas, e contribuiu na elaboração do instrumento de coleta de dados e na construção da questão central da nossa pesquisa.

Assim como nos estudos de Oliveira (2002, 2007), Barros (2002), Figueiredo (2013) e Moraes (2013), adotamos a conceituação de volume como uma grandeza adaptada da modelização da área como grandeza, com base em Douady e Perrin-Glorian (1989), para o volume. Essa conceituação permitiu que na análise dos dados considerássemos a dissociação e articulação do sólido, paralelepípedo retângulo, referente ao quadro geométrico, da grandeza volume indicado pelo quadro das grandezas e da medida (números racionais positivos).

O estudo das situações que dão sentido ao conceito de volume com o olhar das Imbricações entre Campos Conceituais proporcionou relacionar os possíveis procedimentos de resolução das situações aos conhecimentos dos diferentes campos conceituais que os estudantes poderiam mobilizar.

A escolha das variáveis didáticas e seus respectivos valores permitiram a construção dos testes que contribuíram para verificação da influência dos valores das variáveis nos procedimentos de resolução das questões. A análise a priori das questões dos testes possibilitou antecipar os possíveis conhecimentos de cada um dos campos conceituais que os estudantes poderiam mobilizar na resolução das questões, possibilidades de procedimentos de resolução relacionados a cada um dos campos, possíveis erros e invariantes operatórios, modelados na forma de teoremas em ação, relacionados a cada um dos campos conceituais.

Nesse contexto, propomos dois instrumentos de coleta de dados: testes diagnósticos e entrevistas baseadas em alguns elementos da entrevista de explicitação. Participaram deste estudo 107 alunos dos segundos e terceiros anos do Ensino Médio de três escolas públicas estaduais do Agreste Meridional de Pernambuco. Um dos critérios para selecionarmos essas

escolas foi a acolhida e o apoio da gestão escolar, nas pessoas da Diretora e da Coordenadora Pedagógica e dos professores das turmas. Cada teste diagnóstico era composto por 5 questões envolvendo volume do paralelepípedo retângulo, sendo que a primeira e última questão tratava de questões controle, enquanto as outras questões envolviam as situações que dão sentido ao conceito de volume. Os testes foram aplicados, em cada escola, individualmente, sem consulta com a presença do professor da turma e da pesquisadora. Realizamos as entrevistas com 9 alunos selecionados, com base nos teoremas em ação que foram comuns no grupo dos alunos das três escolas participantes.

Buscando atender nosso primeiro objetivo específico, analisar os procedimentos de resolução mobilizados pelos alunos nos problemas envolvendo volume do paralelepípedo retângulo, realizamos a análise dos procedimentos de resolução das questões de controle e das situações de comparação, medição e produção, sob a ótica das Imbricações entre Campos Conceituais.

Na análise das questões de controle, constatamos que nos procedimentos que conduziram à resposta correta os alunos mobilizaram conhecimentos do campo geométrico, das grandezas, algébrico e numérico. Os erros mais comuns na questão 1 estavam ligados às dificuldades no campo das grandezas e no campo numérico, enquanto que na questão 5 estavam relacionados com a dificuldade no campo das grandezas, geométrico e algébrico.

Quanto aos três tipos de situações, constatamos que nos procedimentos que conduziram à resposta correta os alunos empregaram conhecimentos do campo das grandezas, geométrico, algébrico e numérico. Em relação aos procedimentos que levaram à resposta errônea, identificamos que os erros mais comuns estavam relacionados às dificuldades do campo geométrico e no campo das grandezas. Em relação aos erros mais identificados nas situações de comparação e medição, constatamos que estavam vinculados às dificuldades no campo das grandezas e no campo numérico, enquanto os erros mais comuns nas situações de produção faziam referência ao campo geométrico e o campo das grandezas.

Com base nos resultados da análise dos procedimentos utilizados pelos alunos, identificamos quatro teoremas em ação corretos e cinco teoremas errôneos mobilizados pelos alunos na resolução de problemas envolvendo volume do paralelepípedo retângulo.

O teorema em ação correto mais utilizado pelos alunos foi o TAC1: “A medida do volume de um paralelepípedo retângulo é o produto das medidas de suas arestas”, uma vez que ele apareceu em todas as questões e 68 estudantes o mobilizaram num total de 183 vezes.

Nesse caso, podemos afirmar que os alunos utilizaram conhecimentos adequados do campo das grandezas.

Em relação aos teoremas em ação errôneo, evidenciamos que o mais mobilizado TAE1: “A medida do volume de um paralelepípedo retângulo é a raiz quadrada da soma das medidas de cada aresta elevada ao quadrado”, pois todos os alunos que empregaram esse teorema, utilizaram mais de uma vez na resolução das questões dos testes, visto que foi mobilizado 61 vezes por 24 estudantes. Diante disso, evidenciamos que os alunos que mobilizaram esse teorema em ação apresentaram dificuldades no campo das grandezas.

Ao analisar representações simbólicas utilizadas por alunos do Ensino Médio na resolução de problemas envolvendo volume do paralelepípedo retângulo, evidenciamos que as fórmulas, as figuras, as unidades de medidas e os números foram as representações mobilizadas por esses alunos. Entretanto, a fórmula foi a representação mais empregada, inclusive em questões que não necessitavam o seu uso. Em relação às figuras e aos números, constatamos que o desenho da figura foi mais utilizado nas situações de comparação, que alguns alunos confundiram a figura espacial com a plana e que os problemas que envolviam números naturais e suas operações obtiveram melhores resultados.

No que diz respeito à interferência das variáveis didáticas e seus respectivos valores, verificamos que nas situações de comparação e medição as variáveis presença de figuras e operações e valores numéricos influenciaram nos resultados dos testes. Ressaltamos que os alunos apresentaram mais dificuldades nas situações de produção, ou seja, o valor da variável, influenciou nos resultados.

Após analisar os procedimentos de resolução, identificar os teoremas em ação corretos e errôneos e analisar as representações simbólicas, construímos algumas considerações gerais em relação aos conhecimentos mobilizados por alunos do Ensino Médio na resolução de problemas envolvendo volume paralelepípedo retângulo, sob a ótica das imbricações entre campos conceituais.

Nesse caso, evidenciamos que o campo das grandezas e o campo geométrico influenciaram nos procedimentos de resolução que conduziram às respostas corretas ou errôneas em relação aos seguintes conhecimentos: no conceito de volume e área, no emprego das unidades de medida de volume, na mobilização da fórmula do volume, na identificação dos sólidos geométricos e suas propriedades. O campo algébrico influenciou na modelização da escrita algébrica, na interpretação dos dados e na expressão algébrica (equação). Em

relação ao campo numérico, constatamos influências na resolução da questão 5, pois os alunos optaram pelo procedimento numérico ao invés do procedimento algébrico e nos erros referentes à multiplicação com números naturais e números racionais na forma decimal.

Entretanto, identificamos altos índices de ausência de respostas em questões atípicas, ou seja, que não perguntavam simplesmente o volume do paralelepípedo retângulo, como as situações de produção e o item (b) das situações de medição. Essas questões exigiam a mobilização de conhecimentos dos diferentes campos conceituais.

Nesta pesquisa evidenciamos que nos procedimentos de resolução de problemas envolvendo volume do paralelepípedo retângulo estão em jogos conhecimentos dos diferentes campos conceituais. No entanto, é preciso aprofundar alguns aspectos que não foram contemplados em nosso estudo. Sugerimos pesquisas futuras que possam, entre outros aspectos, investigar o volume de outros sólidos geométricos, verificando se os estudantes mobilizam os mesmos teoremas em ação; analisar o impacto do ensino recebido pelos alunos, pois em nosso estudo não levamos em consideração a carga horária de matemática nas escolas de tempo integral; investigar os conhecimentos do professor em relação ao conteúdo e as práticas de ensino que são desenvolvidas em sala de aula; analisar conhecimentos dos alunos mobilizados em situações que abordem materiais concretos; e verificar a influência do conceito de área para a compreensão da grandeza volume.

Os dados de nossa pesquisa sugerem que ao analisar os erros cometidos por estudantes ao se depararem com problemas matemáticas envolvendo o volume do paralelepípedo retângulo não estão relacionados apenas com dificuldades no campo das grandezas. O professor deve estar ciente que ao trabalhar com distintos problemas, os alunos mobilizaram conhecimentos dos diferentes campos conceituais e não apenas do campo ao qual pertence aquele determinado conceito.

Portanto, esperamos que os professores possam se basear nos resultados de nossa pesquisa para refletirem sobre a sua prática e olharem para o procedimento de resolução dos problemas matemáticos de seus alunos e enxergarem a relação que existe entre os campos conceituais. Aliás, esse é um aspecto a ser destacado. Embora nossa pesquisa tenha abordado apenas um tipo específico de sólido geométrico para se trabalhar questões envolvendo a grandeza volume, acreditamos que as Imbricações entre os Campos Conceituais também atuem fortemente ao se trabalhar com outras figuras espaciais e também com outros conteúdos da matemática.

Sendo assim, uma das contribuições de nossa pesquisa é possibilitar aos professores de matemática um embasamento para que eles possam identificar, com uma maior riqueza de detalhes, o procedimento de resolução, as possíveis causas relacionadas aos erros cometidos por seus estudantes durante a resolução de alguma atividade matemática e o motivo da ausência de resposta em determinado problema. Dessa forma, acreditamos que ao analisar os conhecimentos mobilizados na resolução de determinados problemas e identificar a justificativa para ausência de respostas e a origem dos erros, melhores serão as possibilidades de elaborar uma estratégia para contornar essas situações e auxiliar os estudantes durante o processo de ensino e de aprendizagem.

Diante disso, finalizamos nossas considerações com a esperança de que os resultados desta pesquisa contribuam para as pesquisas em Educação Matemática e para o ensino e aprendizagem da grandeza volume.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, Jadilson Ramos de. **Níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico: um modelo para os problemas de partilha de quantidade.** 2016. 200f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2016.
- ANDRINI, Álvaro; VASCONCELLOS, Maria José. **Praticando matemática.** Vol.6, 3.ed. Renovada. São Paulo: Editora do Brasil, 2012.
- ANWANDTER-CUELLAR, Nathalie. **Étude de conceptions d'élèves à propos du concept de volume.** 2008. 96f. Dissertação (Mestrado) - Laboratoire Interdisciplinaire de Recherche en Didactique, Education et Formation. Université Montpellier 2, França, 2008.
- BALTAR, Paula Moreira. **Enseignement et apprentissage de la notion d'aire de surfaces planes : une étude de l'acquisition des relations entre les longueurs et les aires au collège.** Tese de Doutorado. Université Joseph Fourier. Grenoble, 1996.
- BARROS, José Severino de. **Investigando o conceito de volume no Ensino Fundamental: um estudo exploratório.** 2002.147f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2002.
- BRASIL, Ministério da Educação / Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** Brasília: MEC/SEF, 1998.
- _____. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Guia de livros didáticos: PNLD 2012: Matemática /** Brasília, 2011.
- BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao Estudo das Situações Didáticas: conteúdos e métodos de ensino.** São Paulo: Ática, 2008.
- DANTE, José Roberto. **Matemática: Contextos & Aplicações.** V.2, 2.ed. São Paulo: Ática, 2014.
- DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar: geometria espacial, posição e métrica.** vol. 10, 5.ed. São Paulo: Atual, 1993.
- DOUADY, Regine.; PERRIN-GLORIAN. Marie-Jeanne. **Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane.** In: Educational Studies in Mathematics. vol.20, n. 4, p. 387 424, 1989.
- FIGUEIREDO, Ana Paula Nunes Braz. **Resolução de problemas sobre a grandeza volume por alunos do Ensino Médio: um estudo sob a ótica da teoria dos campos conceituais.** 2013,182f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2013.
- FERREIRA, Edson Luiz Cataldo. **Geometria básica.** v.2 / 3.ed. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2007.

FERREIRA, Lúcia de Fátima Durão. **A construção do conceito de área e da relação entre área e perímetro no 3º ciclo do Ensino Fundamental:** estudos sob a ótica da teoria dos campos conceituais. 2010. 193f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2010.

FREITAS, José Luiz Magalhães de; BITTAR, Marilena. **Abordagem de geometria partindo de poliedros.** 6º Encontro da RPM - Revista do Professor de Matemática. 2013. Oficina.

FREITAS, Maxlei Vinícius Cândido de. **Um estudo sobre volume de sólidos geométricos em quatro coleções de livros didáticos do Ensino Médio.** 2015, 132f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Mato Grosso Sul, Campo Grande, 2015.

KALEFF, Ana Maria; REI, Dulce Monteiro; GARCIA, Simone dos Santos. Como adultos interpretam desenhos e calculam volumes de sólidos construídos por pequenos cubos. **Zetetikê**, Campinas, vol.4, n.6 . p. 135-152, Jul./Dez. 1996.

LIMA, Elon. Lages. **Medida e forma em geometria.** 4 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, Elon. Lages. et al. **A matemática para o Ensino Médio.** 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, Paulo Figueiredo; CARVALHO, João Bosco Pitombeira Fernandes de. Geometria. In: CARVALHO, João Bosco Pitombeira Fernandes de. (Org.). **Matemática: Ensino Fundamental** (Coleção Explorando o ensino). Brasília: Ministério da Educação: Secretaria da Educação Básica, 2010, v. 17, p.135-166.

LIMA, Paulo Figueiredo; BELLEMAIN, Paula Moreira Baltar. Grandezas e Medidas. In: CARVALHO, João Bosco Pitombeira Fernandes de. (Org.). **Matemática: Ensino Fundamental** (Coleção Explorando o Ensino). Brasília: Ministério da Educação: Secretaria da Educação Básica, 2010, v. 17, p. 167-200.

MAGINA, Sandra. et al. **Repensando adição e subtração:** contribuições da teoria dos campos conceituais. 3.ed. São Paulo: Proem, 2008.

MELO, Larisse Vieira de; TELES, Rosinalda Aurora de Melo. Situações que envolvem a grandeza volume: um olhar sob a ótica das Imbricações entre Campos Conceituais. In: ENCONTRO NACIONAL DE DIDÁTICA DA GEOMETRIA E DAS GRANDEZAS E MEDIDAS, 1., 2016, Recife. **Anais...** ainda não publicado.

MELO, Larisse Vieira de; TELES, Rosinalda Aurora de Melo. Volume do paralelepípedo retângulo: um estudo sobre conhecimentos mobilizados por alunos do Ensino Médio na resolução de situações de medição. In: Encontro Pernambuco de Educação Matemática, 6., 2017, Garanhuns - PE. **Anais...** Garanhuns: SBEM, 2017.

MORAIS, Leonardo Bernardo de; BELLEMAIN, Paula Moreira Baltar. Análise da abordagem do conceito de volume nos livros didáticos de matemática para os anos finais do

ensino fundamental sob a ótica da teoria dos campos conceituais. In: CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA, 18., 2010, Recife. Recife. **Anais...** Recife: UFPE, 2010.

MORAIS, Leonardo Bernardo; FIGUEIREDO, Ana Paula de Braz; BELEMAIN, Paula Moreira Baltar. Estudo das situações de volume como grandeza no Ensino Médio sob a ótica da teoria dos campos conceituais. In: ENCONTRO PARAIBANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2012, João Pessoa. **Anais...** João Pessoa: SBEM, 2012.

MORAIS, Leonardo Bernardo De. **Análise da abordagem da grandeza volume em livros didáticos de matemática do Ensino Médio**. 2013, 132f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2013.

MUNIZ, Cristiano Alberto; BATISTA, Carmyra Oliveira; SILVA, Erondina Barbosa da. **Matemática e Cultura: decimais, medidas e sistema monetário**. Pedagogia módulo IV do curso de Pedagogia para professores em início de escolarização (PIE). Brasília: Universidade de Brasília, 2008.

OLIVEIRA, Glauco Reinaldo Ferreira de. **Construção do conceito de volume no Ensino Fundamental: um estudo de caso**. 2002. 135 f. Dissertação (Mestrado em educação) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2002.

_____. **Investigação do papel das grandezas físicas na construção do conceito de volume**. 2007, 169f. Tese (Doutorado em Educação) -Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2007.

PERNAMBUCO. Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco. **Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio**. Secretaria de Educação do Estado. CAED Universidade Federal de Juiz de Fora, 2012.

Pernambuco. Site da Secretaria de Educação do Estado de Pernambuco. **Educação Integral e regime de atendimento nas Escolas de Referência**. Disponível em: <
<http://www.educacao.pe.gov.br/portal/?pag=1&men=70>> Acesso em: 13 de Fev. de 2018.

PESSOA, Cristiane. Resolução de problemas aditivos: uma análise do papel da interação social na superação de dificuldades. In: XI CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2003, Blumenau. **Anais...** Blumenau: Editora da Universidade Regional de Blumenau, p. 1-15, 2003.

PESSOA, Cristiane. **Quem dança com quem: o desenvolvimento do Raciocínio Combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio**. 2009. 267f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2009.

SANTOS, Marilene Rosa dos. **A transposição didática do conceito de áreas figuras geométricas planas no 6º ano do Ensino Fundamental: um olhar sob a ótica da teoria antropológica do didático**. 2015. 282f. Tese (Doutorado em Ensino das Ciências) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2015.

SOUZA, Emersson Rodrigues de. **Análise de estratégias de alunos do Ensino Médio em problemas de cálculo de área do paralelogramo**. 2013.108f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2013.

ROLDÁN, Mariana Sáiz. Algunos objetos mentales relacionados com El concepto volumen de maestros de primaria. **Revista Mexicana de investigación educativa**. México, v. 8, n. 018. p. 447-478. 2003.

TELES, Rosinalda Aurora de Melo. **A Influência de Imbricações entre Campos Conceituais na Matemática escolar**: um estudo sobre fórmulas de área de figuras geométricas planas. 2007. 297f. Tese (Doutorado em Educação) -Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2007.

TELES, Rosinalda Aurora de Melo; BELLEMAIN, Paula Moreira Baltar. A influência dos valores de variáveis didáticas num problema de área. In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2., 2008, Recife. **Anais...**Recife: UFPE, v. único. p. 1-10. 2008.

_____. Fórmulas de Área para Otimização: Um Olhar sob a Ótica das Imbricações entre Campos Conceituais. **Educação Matemática em Revista**. São Paulo, v.31, p.4 – 13. 2013.

VERGNAUD, Gérard. et al. Une Experience Didactique Sur Le Concecpt de Volume em Classe de Cinquieme (12-13 ans). In: Duady, Régine. Didactique et acquisition du concept de volume. **Recherches en Didactique dos Mathématiques** – RDM, v. 4, n. 1. Grenelobe, 1983.

VERGNAUD, Gérard. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise Psicológica**, 1, 1986, p. 75-90

_____. Teoria dos Campos Conceituais. In BRUNN. J. (Ed.) **Didáctica das Matemáticas**. V.62. Horizontes Pedagógicos, Lisboa, 1996. p.155-191.

_____. **A criança, a matemática e a realidade**; Tradução de Maria Lucia Faria Moro. 1 ed. Curitiba: UFPR, 2009.

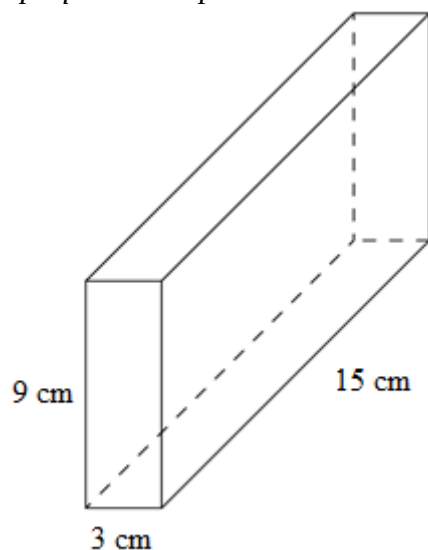
_____. O que é aprender? In. **A aprendizagem Matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais**. Org. BITTAR, Marilena, MUNIZ, Cristiano Alberto. Editora CRV, Curitiba, 2009.

VIANA, Odaléa **Aparecida. Situações de problemas geométricos envolvendo a noção de volume: um estudo exploratório com alunos do Ensino Médio**. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6., 2015, Pirenópolis. **Anais...** Pirenópolis: SBEM, 2015.

APÊNDICE A - TESTE 1**Questão 1**

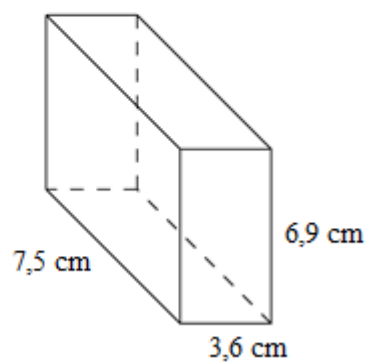
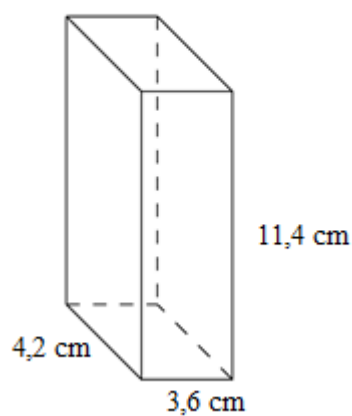
Determine o volume do paralelepípedo retângulo a seguir:

Explique sua resposta.

**Questão 2**

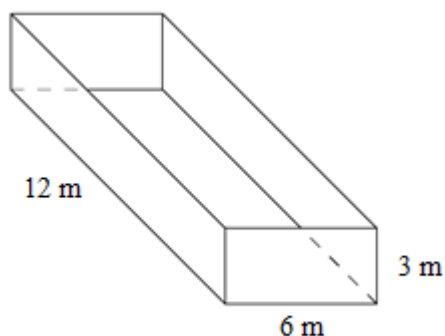
Imagine duas caixas, A e B, de vidro inteiramente fechadas. Sabe-se que caixa A tem 6,9 cm de altura, 3,6 cm de largura e 7,5 cm de comprimento enquanto a caixa B tem 11,4 cm de altura, 3,6 cm de largura e 4,2 cm de comprimento. Qual dessas caixas possui volume maior?

Explique sua resposta.

Caixa A**Caixa B**

Questão 3

Observe a piscina, na forma de um paralelepípedo retângulo, representada abaixo e as dimensões indicadas.



Responda:

a) Qual o volume, em metros cúbicos, dessa piscina? *Explique sua resposta.*

b) Qual a quantidade de água, em litros, necessária para encher completamente essa piscina? *Explique sua resposta.*

Questão 4

João possui 36 cubinhos de 1cm de aresta. Ele quer organizá-los de modo a formar um paralelepípedo retângulo.

a) Indique quantos paralelepípedos retângulos diferentes João poderá formar com os 36 cubinhos. *Explique sua resposta.*

b) João acha que todos os paralelepípedos retângulos formados possuem o mesmo volume. O que você acha? *Explique sua resposta.*

c) João acha que todos os paralelepípedos retângulos formados têm a mesma área total das faces, pois possuem a mesma quantidade de cubinhos. Você concorda com ele? *Explique sua resposta.*

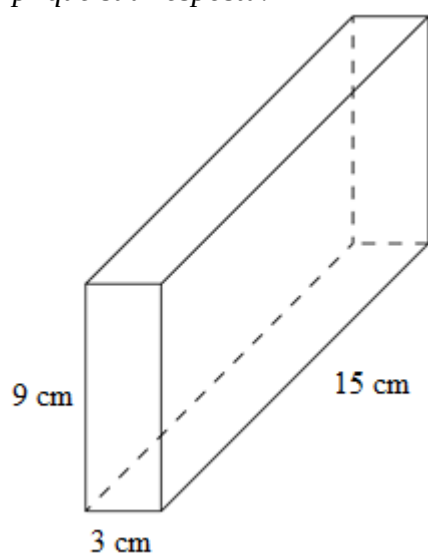
Questão 5

Se aumentarmos em 20% (vinte por cento) as arestas de um paralelepípedo retângulo, em quantos por cento o seu volume será aumentado? *Explique sua resposta*

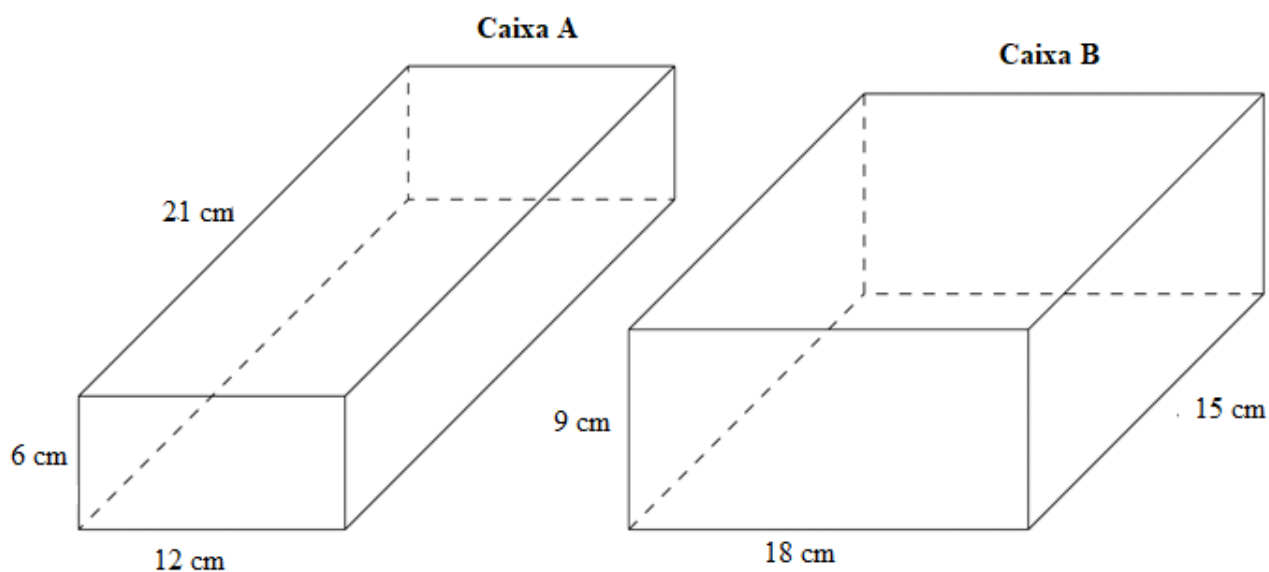
APÊNDICE B - TESTE 2**Questão 1**

Determine o volume do paralelepípedo retângulo a seguir:

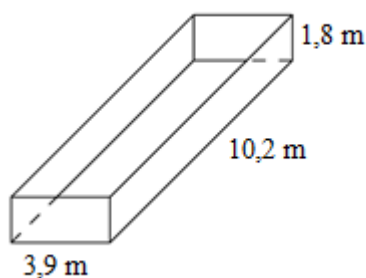
Explique sua resposta.

**Questão 2**

Imagine duas caixas, A e B, de vidro inteiramente fechada. Sabe-se que caixa A tem 6 cm de altura, 12 cm de largura e 21 cm de comprimento enquanto a caixa B tem 9 cm de altura, 18 cm de largura e 15 cm de comprimento. Qual dessas caixas possui maior volume? *Explique sua resposta.*

**Questão 3**

Observe a piscina, na forma de um paralelepípedo retângulo, representada abaixo e as dimensões indicadas.



Responda:

- a) Qual o volume, em metros cúbicos, dessa piscina? *Explique sua resposta.*
- b) Qual a quantidade de água, em litros, necessária para encher completamente essa piscina? *Explique sua resposta.*

Questão 4

Carlos quer construir uma caixa-d'água no formato de um paralelepípedo retângulo. Sabe-se que a medida do comprimento é o triplo da largura e que altura tem $\frac{1}{4}$ da largura. Determine as medidas das dimensões, em metros, dessa caixa-d'água para que ele possa conter 6000 litros de água. *Explique sua resposta.*

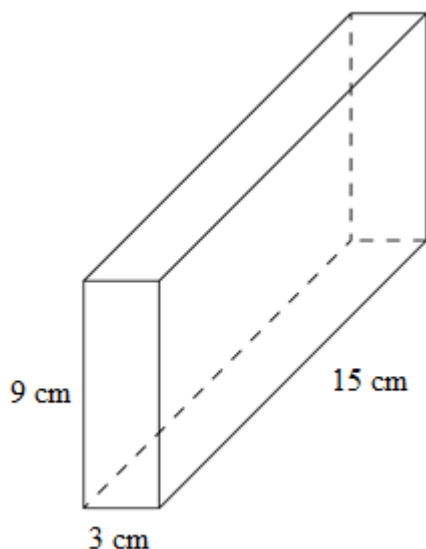
Questão 5

Se aumentarmos em 20% (vinte por cento) as arestas de um paralelepípedo retângulo, em quantos por cento o seu volume será aumentado? *Explique sua resposta.*

APÊNDICE C - TESTE 3

Questão 1

Determine o volume do paralelepípedo retângulo a seguir:
Explique sua resposta.



Questão 2

Imagine duas caixas, A e B, de vidro inteiramente fechadas. Sabe-se que caixa A tem 6,9 cm de altura, 3,6 cm de largura e 7,5 cm de comprimento enquanto a caixa B tem 11,4 cm de altura, 3,6 cm de largura e 4,2 cm de comprimento. Qual dessas caixas possui volume maior? *Explique sua resposta.*

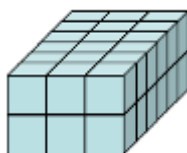
Questão 3

Uma piscina na forma de um paralelepípedo retângulo tem profundidade 3 m, 6 m de largura e 12 m de comprimento. Com base nessas informações, responda:

- Qual o volume, em metros cúbicos, dessa piscina? *Explique sua resposta.*
- Qual a quantidade de água, em litros, necessária para encher completamente essa piscina? *Explique sua resposta.*

Questão 4

João possui 36 cubinhos de 1 cm de aresta. Ele quer organizá-los de modo a formar um paralelepípedo retângulo.



- Indique quantos paralelepípedos retângulos diferentes João poderá formar com os 36 cubinhos. *Explique sua resposta.*
- João acha que todos os paralelepípedos retângulos formados possuem o mesmo volume. O que você acha? *Explique sua resposta.*

c) João acha que todos os paralelepípedos retângulos formados têm a mesma área total das faces, pois possuem a mesma quantidade de cubinhos. Você concorda com ele? *Explique sua resposta.*

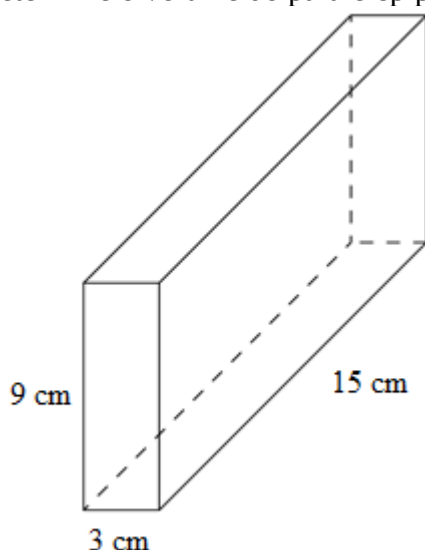
Questão 5

Se aumentarmos em 20% (vinte por cento) as arestas de um paralelepípedo retângulo, em quantos por cento o seu volume será aumentado? *Explique sua resposta.*

APÊNDICE D - TESTE 4

Questão 1

Determine o volume do paralelepípedo retângulo a seguir:



Explique sua resposta

Questão 2

Imagine duas caixas, A e B, de vidro inteiramente fechada. Sabe-se que caixa A tem 6 cm de altura, 12 cm de largura e 21 cm de comprimento enquanto a caixa B tem 9 cm de altura, 18 cm de largura e 15 cm de comprimento. Qual dessas caixas possui maior volume? *Explique sua resposta*

Questão 3

Uma piscina na forma de um paralelepípedo retângulo tem profundidade 1,8 m, 3,9 m de largura e 10,2 m de comprimento. Com base nessas informações, responda:

a) Qual o volume, em metros cúbicos, desta piscina? *Explique sua resposta.*

b) Qual a quantidade de água, em litros, necessária para encher completamente esta piscina? *Explique sua resposta.*

Questão 4

Carlos quer construir uma caixa-d'água no formato de um paralelepípedo retângulo. Sabe-se que a medida do comprimento é o triplo da largura e que altura tem $\frac{1}{4}$ da largura. Determine as medidas das dimensões, em metros, dessa caixa-d'água para que ela possa conter 6 000 litros de água. *Explique sua resposta.*

**Questão 5**

Se aumentarmos em 20% (vinte por cento) as arestas de um paralelepípedo retângulo, em quantos por cento o seu volume será aumentado? *Explique sua resposta.*

ANEXO A - QUESTÕES RETIRADAS DO TRABALHO DE MORAIS (2013)

p. 82

Figura 24 - Exemplo de situação de produção que requer medição

- 32.** Qual deve ser a medida da aresta de uma caixa-d'água cúbica para que ela possa conter 8 000 ℓ de água?

Fonte: Coleção D (2010, p. 222).

Questão retirada do trabalho de Morais (2013, p. 101)

Figura 52 - Exemplo de situação de medição que requer transformação de unidade

- 41.** Observe a piscina representada abaixo e as dimensões indicadas. Qual é a quantidade máxima de água, em litros, que essa piscina pode conter?



Fonte: Coleção D (2010, p. 223).

ANEXO B - QUESTÕES RETIRADAS DO TRABALHO DE FIGUEIREDO (2013)

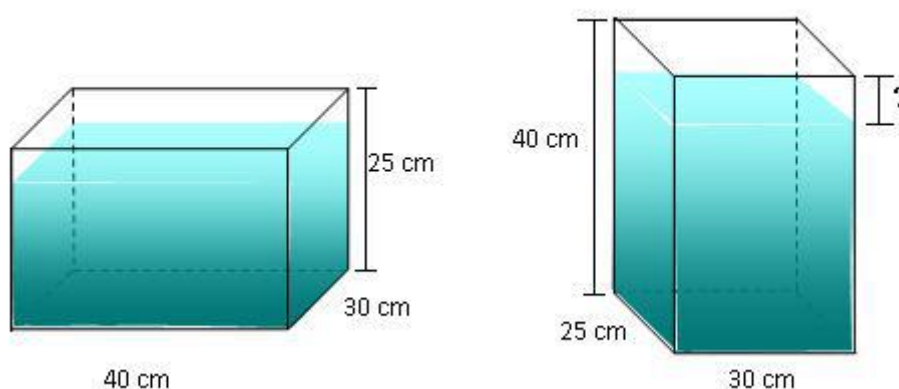
p. 53

3) Se aumentarmos em 20% (vinte por cento) as arestas de um paralelepípedo retângulo, em quantos por cento o seu volume será aumentado:

- A) 20%
- B) 0,8%
- C) 60%
- D) 72,8%
- E) OUTROS.

Questão retirada do trabalho de Figueiredo (2013, p. 63-64)

8) Imagine uma caixa de vidro inteiramente fechada e quase cheia de água, como mostra a figura. Observe que o nível da água está a 5 cm abaixo do máximo. Agora, vamos colocar a caixa em pé, para que fique com 40 cm de altura. Nesse caso, o nível da água ficará quantos centímetros abaixo do máximo?



- A) 5cm.
- B) 32cm.
- C) 8cm.
- D) 24000cm³.
- E) Outros.

Questão retirada do trabalho de Figueiredo (2013, p.73)

12) João possui 36 cubinhos de 1cm de aresta. Ele quer organizá-los de modo a formar um paralelepípedo retângulo.

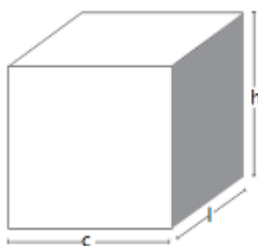
a) Indique quantos paralelepípedos retângulos diferentes João poderá formar com os 36 cubinhos.

b) João acha que todos os paralelepípedos retângulos formados possuem o mesmo volume. O que você acha?

c) João acha que todos os paralelepípedos retângulos formados têm a mesma área pois possuem a mesma quantidade de cubinhos. Você concorda com ele?

ANEXO C - QUESTÃO RETIRADA DO VESTIBULAR 2016 DO ENSINO TÉCNICO DO CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS

(CEFET-MG 2016) Deseja-se construir uma caixa d'água no formato de um paralelepípedo retângulo, que armazene 18 000 litros de água, como mostra a figura.



Sabe-se que o comprimento (c) é o dobro da largura (l), que a altura (h) é $1/3$ da medida da largura (l) e que 1 m^3 equivale a 1000 litros de água. Nessas condições, a largura dessa caixa d'água, em metros, é igual a

- a) 1,5.
- b) 1,8.
- c) 2,7.
- d) 3,0.