UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE ELETRÔNICA E SISTEMAS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

LUIZ CARLOS DA SILVA JUNIOR

Transformada numérica de Fourier quaterniônica: definições e cenários de aplicação

Recife

2019

LUIZ CARLOS DA SILVA JUNIOR

Transformada numérica de Fourier quaterniônica: definições e cenários de aplicação

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Comunicações.

Orientador: Prof. Dr. Juliano Bandeira Lima.

Recife

2019

Catalogação na fonte
Bibliotecária Margareth Malta, CRB-4 / 1198

S586m Silva Junior, Luiz Carlos da.
Transformada numérica de Fourier quaterniônica: definições e cenários de aplicação / Luiz Carlos da Silva Junior. - 2019.
85 f., figs., tabs., abrev. e siglas, simbol.

Orientador: Prof. Dr. Juliano Bandeira Lima.

Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, 2019.
Inclui Referências.

1. Engenharia Elétrica. 2. Quatérnios de Hamilton. 3. Quatérnios generalizados. 4. Corpos finitos. 5. Transformada de Fourier quaterniônica. 6. Transformada numérica de Fourier quaterniônica. 7. Processamento digital de imagens. I. Lima, Juliano Bandeira. (Orientador). II. Título.

UFPE

621.3 CDD (22. ed.) BCTG/2019-277

LUIZ CARLOS DA SILVA JUNIOR

Transformada numérica de Fourier quaterniônica: definições e cenários de aplicação

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Comunicações.

Banca examinadora

Aprovado em: 31 / 05 / 2019 .

Prof. Dr. Juliano Bandeira Lima. (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Ricardo Menezes Campello de Souza (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Daniel Pedro Bezerra Chaves (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Gilson Jerônimo da Silva Jr. (Examinador Externo)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Francisco Madeiro Bernardino Jr. (Examinador Externo)
Universidade de Pernambuco

Dedico esse trabalho primeiramente a Deus, que me deu forças, e à minha família, por me compreender e amar.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus por permitir essa realização e à minha família: Jaqueline (minha amada esposa), Luiz Carlos e Claudeci (meus pais), Luiz Fernando e Keyla (meu irmão e esposa), Geraldo e Isabel (meus sogros), Jhonatas (meu cunhado), aos meus discipuladores Carlsberg e Gilminha, aos meus tios e tias e a comunidade cristã em Jaboatão e Serra Talhada que sirvo com tanto amor.

Aos meus companheiros de ministério que foram tão pacientes com o meu processo, Anderson, Leandro e Daiane, Luciano e Fabiana, Érico e Daise e aos discípulos amados Rodolfo e Edilene, Luiz Henrique e Karine.

A minhas alunas e orientandas que tanto torceram pela minha formação e ao meu amigo e companheiro de trabalho e sua esposa, Mário e Poliana, por terem me apoiado nos momentos em que mais precisei.

Ao meu orientador Prof. Juliano, por ter me aceitado como orientando, mesmo eu sendo de uma área diferente durante toda a minha vida acadêmica; no campo acadêmico: o senhor é o exemplo de pesquisador, professor e orientador que pretendo tentar seguir. O senhor também é um exemplo de pessoa humilde, paciente (muito paciente) e bondoso; vejo que foi plano de Deus ter conhecido o senhor. Foi um grande prazer e honra ter trabalhado e ser orientado pelo senhor.

Aos professores e colaboradores do Grupo de Pesquisa em Processamento de Sinais, que influenciaram e ajudaram tanto nos resultados desse trabalho, quanto na minha formação; em especial aos colaboradores Ravi, Verusca, Guilherme e Neto e aos professores Ricardo Campello e Gilson Jerônimo que ajudaram diretamente neste trabalho.

A todos os professores que participaram da minha formação.

A todos os técnicos e funcionaários da UFPE que participaram da minha estadia de mais de quatro anos nesta universidade, principalmente os do DES.

RESUMO

A contribuição central desta tese é a introdução de uma transformada numérica de Fourier quaterniônica (QFNT, do inglês *quaternion Fourier number transform*), isto é, uma transformada definida sobre quatérnios cujos coeficientes se encontram num corpo finito primo. O estabelecimento de tal ferramenta preenche uma importante lacuna existente na literatura de processamento / análise de sinais, uma vez que, até então, apenas transformadas de Fourier sobre quatérnios de Hamilton haviam sido investigadas. A definição e a caracterização da QFNT requerem a derivação de diversos resultados referentes aos chamados quatérnios generalizados, como aqueles relacionados às suas ordens multiplicativas e a extensão a esse contexto de proposições associadas à trigonometria sobre corpos finitos; tais resultados, que também são introduzidos nesta tese, apoiam o desenvolvimento de propriedades da QFNT e sugerem cenários em que esta pode ser aplicável. Sobre este último ponto, o presente trabalho se volta especificamente ao processamento de imagens coloridas e demonstra, a partir de uma investigação preliminar, que a QFNT pode ser útil na uniformização de histogramas com vista à cifragem de tais imagens. Além disso, a QFNT é empregada como base de um esquema de marca d'água frágil e não-cego, em que a marca é inserida de forma "espalhada" em todos os canais de cor da imagem; os resultados obtidos demonstram que, utilizando o referido esquema, a marca pode ser inserida respeitando os limiares usuais de degradação da imagem que a recebe.

Palavras-chave: Quatérnios de Hamilton. Quatérnios generalizados. Corpos finitos. Transformada de Fourier quaterniônica. Transformada numérica de Fourier quaterniônica. Processamento digital de imagens.

ABSTRACT

This thesis has as its main contribution the introduction of a quaternion Fourier number transform (QFNT, *quaternion Fourier number transform*), that is, a transform defined over quaternions whose coefficients lie in a prime finite field. The establishment of such a mathematical tool fulfills an important existing gap in the literature of signal processing / analysis, since only Fourier transforms over Hamilton quaternions had been investigated until then. The QFNT definition and characterization require the derivation of several results regarding the so called generalized quaternions, such as those related to their multiplicative orders and the extension to the current context of propositions associated to finite field trigonometry; such results, which are also introduced in this thesis, support the development of QFNT properties and suggest scenarios in which the transform can be applied. With respect to the latter, this work specifically turns to the processing of color images and, based on a preliminary investigation, demonstrates that the QFNT, it can be useful in uniformizing histograms with a view to the encryption of such images. Moreover, the QFNT is employed as the basis of a fragile non-blind watermarking scheme, where the watermark is "spread" across all color channels of an image; the obtained results show that, using the referred scheme, the watermark can be embedded without considerable degrading the corresponding host image.

Keywords: Hamilton quaternions. Generalized quaternions. Finite fields. Quaternion Fourier transform. Quaternion Fourier number transform. Digital image processing.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

DCT	Transformada discreta do cosseno / Discrete cosine transform
DFT	Transformada discreta de Fourier / Discrete Fourier transform
DFrFT	Transformada discreta de Fourier fracionária / Discrete fractional Fourier transform
FNT	Transformada numérica de Fourier / Fourier number transform
MSE	Erro médio quadrático / Mean squared error
NTT	Transformada numérica / Number-theoretic transform
PSNR	Relação sinal-ruído de pico / Peak signal-to-noise ratio
QFNT	Transformada numérica de Fourier quaterniônica / Quaternion Fourier number transform
QFT	Transformada de Fourier quaterniônica / Quaternion Fourier transform
SSIM	Similaridade estrutural/ Structural similarity

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathcal{H}$	Quaternion usual de Hamilton.
$\mathbb{F}$	Um corpo arbitrário.
$\mathbb{F}_p$	Corpo finito de ordem p.
$\mathbb{I}_p$	Conjunto dos inteiros Gaussianos sobre $\mathbb{F}_p$.
$\mathfrak{R}\{\zeta\}$	Parte real de ζ
$\mathfrak{I}\{\zeta\}$	Parte imaginária de ζ.
$\mathrm{G}_{1,p}$	Conjunto unimodular de $\mathbb{I}_p$.
$(\frac{\alpha,\beta}{\mathbb{F}})$	Álgebra dos quatérnios generalizados.
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais.
$M_2(\mathbb{E})$	Álgebra de matrizes 2×2 sobre $\mathbb{E}$.
$(\frac{-1,-1}{\mathbb{R}})$	Anel de divisão usual dos quatérnios sobre os reais.
$\mathbf{J_Q}$	Matriz de Jordan.
$X^R(k)$	Transformada numérica de Fourier quaterniônica com núcleo a direita.
$\mathbf{F}$	Matriz da transformada numérica de Fourier.
$\mathbf{F}_q$	Matriz da transformada numérica de Fourier quaterniônica.
$\mathcal{E}\{\cdot\}$	Função que extrai a parte par do argumento.
$\mathcal{O}\{\cdot\}$	Função que extrai a parte ímpar do argumento.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

As transformadas estão entre as ferramentas matemáticas mais úteis em aplicações em Engenharia e, em particular, em processamento de sinais. O seu histórico tem origem na transformada (ordinária) de Fourier teste, que é aplicável a funções ou sinais de variável contínua, chegando, mais recentemente, às diversas transformadas discretas e suas generalizações (SCHAFER; OPPENHEIM, 1999). Em meio a esta variedade de definições foi introduzida, na década de 1970, a transformada de Fourier sobre corpos finitos (POLLARD, 1971), a qual, no campo de processamento digital de sinais, é normalmente considerada em versões mais específicas conhecidas como transformadas numéricas de Fourier. Mais recentemente, foram propostas transformadas de Fourier quaterniônicas, as quais são aplicáveis a funções ou sinais que assumem valores que podem ser descritos como quatérnios (ELL, 1993; ELL; SANGWINE, 2007).

Neste trabalho, introduz-se uma transformada numérica de Fourier quaterniônica (QFNT, do inglês *quaternion Fourier number transform*). São apresentados diversos resultados teóricos inéditos, com base nos quais se define a referida transformada e se investigam suas principais propriedades. A partir do conteúdo desenvolvido, são realizados experimentos computacionais que permitem avaliar o desempenho da QFNT em alguns cenários de aplicação relacionados a processamento de imagem.

A seguir, é apresentado um apanhado conciso a respeito das transformadas numéricas e das transformadas quaterniônicas. Além disso, é exposta a motivação para a realização deste trabalho; são listados seus objetivos e contribuições, e descrita a sua estrutura.

1.1 TRANSFORMADAS NUMÉRICAS

Desde a década de 1970, as transformadas numéricas (NTT, do inglês *number-theoretic transform*) têm sido amplamente investigadas e empregadas em diversos cenários de aplicação. Inicialmente, essas transformadas foram apresentadas como uma forma alternativa para calcular eficientemente convoluções livres de erro de arredondamento (POLLARD, 1971; REED; TRUONG, 1975; SHU; TIANREN, 1988, 1988; AGARWAL; BURRUS, 1974). Naquele tempo, essa possibilidade, que advém do fato de as referidas transformadas serem definidas sobre corpos finitos, era de fundamental importância, uma vez que o *hardware* disponível trabalhava apenas com aritmética de ponto fixo. Mais recentemente, as NTT têm sido usadas principalmente em cenários relacionados à segurança de informação, os quais incluem, por exemplo, a cifragem de imagens (LIMA; NOVAES, 2014), a ocultação de dados (marca d'água) (LIMA; CAMPELLO DE SOUZA, 2005; CINTRA et al., 2009; CHEDDAD et al., 2010) e o processamento de sinais no domínio cifrado (PEDROUZO-ULLOA; TRONCOSO-PASTORIZA; PÉFEZ-GONZÁLEZ, 2017).

Usualmente, uma NTT é definida como uma transformada do tipo da de Fourier, em que a N-ésima raiz complexa da unidade usada como núcleo da transformada discreta de Fourier[1] (DFT, do inglês *discrete Fourier transform*) é substituída pela N-ésima raiz da unidade numa estrutura algébrica finita (POLLARD, 1971). Entretanto, outros tipos de NTT têm sido definidos; pode-se mencionar, por exemplo, as transformadas numéricas do cosseno (CAMPELLO DE SOUZA et al., 2003; LIMA; BARONE; CAMPELLO DE SOUZA, 2016; LIMA; MADEIRO; SALES, 2015; LIMA, 2015), do seno (CAMPELLO DE SOUZA et al., 2005), de Hartley (CAMPELLO DE SOUZA et al., 2000) e de Hilbert (KAK, 2014), as quais são, em certo sentido, análogas às versões complexas e/ou reais das transformadas discretas com as nomenclaturas correspondentes. Generalizações das NTT também têm sido propostas; essas incluem, por exemplo, as transformadas numéricas fracionárias, as quais consistem em calcular potências racionais do operador matricial associado às NTT ordinárias correspondentes (LIMA; CAMPELLO DE SOUZA, 2016; LIMA; CAMPELLO DE SOUZA, 2013; LIMA; CAMPELLO DE SOUZA, 2012; LIMA; NOVAES, 2014; LIMA; LIMA; CAMPELLO DE SOUZA, 2017; OLIVEIRA NETO; LIMA; PANARIO, 2018).

1.2 TRANSFORMADAS QUATERNIÔNICAS

Como a própria terminologia indica, as transformadas quaterniônicas são definidas empregando números denominados quatérnios. Esses por sua vez, podem ser compreendidos como uma extensão dos números complexos, sendo escritos sob a forma

$$a + bi + cj + dk,$$

em que a, b, c, e d são números reais e i, j e k são operadores complexos (ELL; SANGWINE, 2007). Os quatérnios foram inicialmente descritos por William Rowan Hamilton, em 1843, e aplicados à Mecânica em espaços tridimensionais (MUKUNDAN, 2002). Também são encontradas aplicações dos quatérnios em computação gráfica tridimensional (MUKUNDAN, 2002), visão computacional (MUKUNDAN, 2002) e análise de textura cristalográfica (BACHMANN; HIELSCHER; SCHAEBEN, 2010), por exemplo.

Em trabalhos mais recentes, os quatérnios passaram a figurar na lista de ferramentas matemáticas importantes em aplicações relacionadas ao processamento de sinais. Como exemplos de tais aplicações, podem ser mencionados os algoritmos para filtragem quaterniônica adaptativa e filtragem quaterniônica distribuída (ORTOLANI et al., 2017; VARIDDHISAï et al., 2019; XIANG; KANNA; MANDIC, 2018; TALEBI; KANNA; MANDIC, 2016), as redes neurais com neurônios quaterniônicos (MINEMOTO et al., 2017; XIANG; SCALZO DEES; MANDIC, 2019; XU; XIA; MANDIC, 2016) e diversas técnicas para processamento de imagens coloridas (ELL; SANGWINE, 2007; SANGWINE, 1998; SANGWINE; ELL, 2000; SANGWINE,

[1] Nas próximas seções e no restante desta tese, esta transformada numérica do tipo da de Fourier é identificada pelo acrônimo FNT, do inglês *Fourier number transform*.

1996; FLETCHER, 2017). Nesse contexto, desempenha um papel de destaque a transformada de Fourier quaterniônica (QFT, do inglês *quaternion Fourier transform*), que tendo por núcleo um quatérnio unitário apropriado, é aplicável a funções ou sinais que assumem valores sobre os quatérnios (ELL, 1993; LIAN, 2018; GRIGORYAN; AGAIAN, 2015; BIE et al., 2015). Uma versão discreta dessa transformada, identificada como transformada discreta de Fourier quaterniônica (DQFT, do inglês *discrete quaternion Fourier transform*) também se encontra disponível, sendo aplicável a estruturas (vetores e matrizes) cujas entradas são quatérnios (SANGWINE, 1996; ELL; SANGWINE, 2007).

A última possibilidade mencionada, em particular, indica como uma imagem digital colorida (com três canais de cor, por exemplo) pode ser interpretada como uma matriz de quatérnios: os valores numéricos associados a cada um dos três canais de cor de um pixel numa posição específica da imagem correspondem às componentes b, c, e d de um quatérnio, enquanto se faz $a = 0$. Naturalmente, o mapeamento descrito é flexível e dá margem para que outras interpretações sejam empregadas; isso depende da aplicação, de que propriedades dos quatérnios e da respectiva transformada de Fourier que se pretende explorar.

1.3 MOTIVAÇÃO

As duas principais motivações para o desenvolvimento deste trabalho foram (i) o crescente interesse da comunidade científica, sobretudo da comunidade de processamento de sinais, em ferramentas matemáticas e aplicações relacionadas aos quatérnios e (ii) a verificação da existência de diversas lacunas teóricas nesse contexto. O ponto (i) tem reflexo no grande número de trabalhos recentes sobre o tema, que têm sido publicados em veículos importantes; além das referências já citadas nesta introdução, podem ser mencionados como exemplo disso os artigos que compõem (BIHAN et al., 2017), que corresponde a uma edição especial da importante revista *Signal Processing* voltada ao processamento de sinais hipercomplexos. Com respeito ao ponto (ii), o que chama mais atenção é a escassez de avanços e aplicações em que, em vez dos quatérnios usuais (de Hamilton), são considerados os chamados *quatérnios generalizados*. Mais especificamente, verifica-se que a transformada discreta de Fourier quaterniônica não encontra uma transformada análoga definida sobre quatérnios em que a, b, c e d, em vez de serem números reais, são tomados de um corpo finito; tal transformada seria uma espécie de versão quaterniônica da transformada numérica de Fourier.

1.4 OBJETIVOS

O objetivo geral deste trabalho é definir uma transformada numérica de Fourier quaterniônica. Os objetivos específicos são os seguintes:

1. Realizar uma investigação a respeito dos quatérnios, considerando, a partir dos quatérnios de Hamilton, a possibilidade de construir quatérnios generalizados sobre corpos finitos;

2. Identificar propriedades de quatérnios definidos sobre corpos finitos, avaliando a possibilidade de enunciar novos resultados nesse contexto;

3. Definir uma transformada numérica de Fourier quaterniônica, identificando suas variantes e estabelecendo suas propriedades;

4. Apresentar ideias preliminares a respeito dos cenários de aplicação da transformada numérica de Fourier quaterniônica, com ênfase no processamento digital de imagens coloridas;

5. Sugerir direções de pesquisa visando à extensão da definição da QFNT para outros tipos de transformadas numéricas quaterniônicas.

1.5 ESTRUTURA DA TESE E CONTRIBUIÇÕES

Esta tese está organizada da seguinte forma:

- No Capítulo 1, é feita uma introdução ao tema central do trabalho, sendo apresentados os principais motivos para o seu desenvolvimento, bem como seus objetivos, contribuições e estrutura de capítulos.

- No Capítulo 2, é apresentada uma revisão acerca da trigonometria sobre corpos finitos; é apresentada, também, a transformada numérica de Fourier (FNT, do inglês *Fourier number transform*), a qual é empregada como uma das referências para definição da transformada numérica de Fourier quaterniônica, e descrita sua autoestutrura (autovalores e autovetores do operador matricial associado à FNT).

- No Capítulo 3, um breve histórico dos quatérnios é apresentado; os quatérnios de Hamilton são caracterizados e os chamados quatérnios generalizados são descritos. Algumas propriedades desses últimos são listadas e questões relacionadas ao seu isomorfismo a estruturas algébricas formadas por matrizes são consideradas.

  A partir deste ponto, este trabalho põe o foco em quatérnios generalizados sobre corpos finitos primos, isto é, em quatérnios que possuem a forma $a + bi + cj + dk$, em que $a, b, c, d \in \mathbb{F}_p$ e $\mathbb{F}_p$ denota o corpo finito com p elementos (p é um número primo ímpar). Neste cenário, este capítulo apresenta, também, as primeiras contribuições originais desta tese[2]: (i) a derivação de uma série de resultados especificamente ligados a quatérnios sobre corpos finitos, que dão suporte à (ii) introdução de uma trigonometria associada a estes números e (iii) a sua caracterização com respeito à ordem multiplicativa.

- No Capítulo 4, apresenta-se a contribuição central deste trabalho: (iv) a definição da transformada numérica de Fourier quaterniônica. Para isso, é introduzido um novo lema, o

[2] Ao longo desta seção, as principais contribuições originais desta tese são indicadas por meio de uma numeração em algarismos romanos.

qual é demonstrado a partir do estudo sobre a ordem multiplicativa de quatérnios sobre corpos finitos realizado no capítulo anterior. Ainda neste capítulo, (v) são enunciadas algumas propriedades da nova transformada, (vi) é descrita a sua autoestrutura e (vii) são discutidas questões relacionadas ao seu cálculo.

- No Capítulo 5, é realizada uma discussão preliminar a respeito de possíveis aplicações da QFNT. O foco é o campo do processamento digital de imagens coloridas, em que, de modo mais específico, sugere-se o uso da transformada (viii) para uniformização de histogramas visando à cifragem de imagens e (ix) como base de um esquema de marca d'água frágil para imagens multicamada. São exibidos resultados de simulações e conduzidas reflexões sobre o potencial de uso da QFNT em cenários práticos.

- No Capítulo 6, são apresentadas as considerações conclusivas desta tese, indicadas direções para a realização de pesquisas futuras e listados os artigos científicos resultantes do desenvolvimento deste trabalho.

2 TRIGONOMETRIA SOBRE CORPOS FINITOS E A TRANSFORMADA NUMÉRICA DE FOURIER

Dentre as diversas transformadas discretas estudadas em Engenharia, transformadas definidas sobre corpos finitos desempenham um importante papel em muitas aplicações. Conforme indicado no capítulo introdutório desta tese, tais transformadas são de fundamental importância por não introduzirem erros de arredondamento (SILVA; CAMPELLO DE SOUZA; OLIVEIRA, 2001) e por possuírem propriedades que as tornam adequadas para uso em processamento de imagem, criptografia, codificação de canal etc. (CINTRA et al., 2009; LIMA; LIMA; MADEIRO, 2013; LIMA; NOVAES, 2014). Neste capítulo, é apresentada uma breve revisão acerca da transformada numérica de Fourier (FNT), a transformada sobre corpos finitos mais antiga e mais amplamente estudada. O capítulo é iniciado, na próxima seção, com a apresentação de conceitos relacionados à trigonometria sobre corpos finitos, os quais serão úteis ao longo desta tese e cujo conhecimento é importante para a definição e a caracterização da versão da FNT considerada neste documento.

2.1 TRIGONOMETRIA SOBRE CORPOS FINITOS

Nesta seção, são revisados os principais conceitos relacionados à trigonometria sobre corpos finitos. A ideia de descrever tal trigonometria foi originalmente proposta em (CAMPELLO DE SOUZA et al., 1998), onde ela foi empregada como requisito para definição de uma transformada de Hartley sobre corpos finitos. Em trabalhos subsequentes, a teoria foi expandida, provendo suporte para definição de outras ferramentas matemáticas sobre as referidas estruturas algébricas e para o estudo de suas aplicações (LIMA; CAMPELLO DE SOUZA, 2011; LIMA; PANARIO; CAMPELLO DE SOUZA, 2010; LIMA; PANARIO; CAMPELLO DE SOUZA, 2014).

Definição 2.1. O conjunto de inteiros Gaussianos sobre $\mathbb{F}_p$ é o conjunto denotado por $\mathbb{I}_p$ cujos elementos possuem a forma $a + bi$, em que $a, b \in \mathbb{F}_p$ e i^2 é um não-resíduo quadrático sobre $\mathbb{F}_p$ (LIMA; PANARIO; CAMPELLO DE SOUZA, 2014).

Um elemento $\zeta \in \mathbb{I}_p$ pode ser visto como um número "complexo", o qual possui parte real e parte imaginária dadas por $\mathfrak{R}\{\zeta\} = a$ e $\mathfrak{I}\{\zeta\} = b$, respectivamente; $\zeta^* = a - bi$ denota o conjugado em corpo finito de $\zeta = a + bi$. Adicionalmente, observa-se que $\mathbb{I}_p$ é isomórfico a $\mathbb{F}_{p^2}$.

Definição 2.2. O conjunto unimodular de $\mathbb{I}_p$ é o conjunto $\mathrm{G}_{1,p}$ de elementos $a + bi \in \mathbb{I}_p$, tais que $\zeta \cdot \zeta^* = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - b^2 i^2 \equiv 1 \pmod{p}$ (LIMA; PANARIO; CAMPELLO DE SOUZA, 2014).

Se $\zeta = a + bi$ for unimodular, então $\zeta^{-1} = \zeta^* = a - bi$.

Proposição 2.1. *A estrutura* $\langle \mathrm{G}_{1,p}, \cdot \rangle$ *é um grupo cíclico de ordem* $p+1$ *(LIMA; PANARIO; CAMPELLO DE SOUZA, 2014).*

A seguir, são definidas as funções trigonométricas sobre corpos finitos.

Definição 2.3. Seja $\zeta \in \mathbb{I}_p$ um elemento com ordem multiplicativa denotada por $\mathrm{ord}(\zeta)$. O cosseno e o seno sobre corpos finitos do ângulo relacionado a ζ^x, a x-ésima potência de ζ, são calculados módulo p, respectivamente, por

$$cos_\zeta(x) = \frac{\zeta^x + \zeta^{-x}}{2} \tag{2.1}$$

e

$$sen_\zeta(x) = \frac{\zeta^x - \zeta^{-x}}{2i}, \tag{2.2}$$

para $x = 0, 1, \ldots, \mathrm{ord}(\zeta) - 1$ (LIMA; PANARIO; CAMPELLO DE SOUZA, 2014).

Na Definição 2.3, uma referência explícita ao ângulo relacionado a ζ^x não é relevante; isso permite que se enxerguem os cossenos e os senos sobre corpos finitos como funções $(\mathrm{ord}(\zeta))$-periódicas de x, dado um elemento ζ. Tais funções satisfazem algumas propriedades análogas àquelas das funções correspondentes definidas segundo a trigonometria usual (sobre os reais) (CAMPELLO DE SOUZA et al., 1998; LIMA; PANARIO; CAMPELLO DE SOUZA, 2014). Como exemplo, pode-se considerar a propriedade de círculo unitário, a qual é escrita como

$$cos^2_\zeta(x) - i^2 sen^2_\zeta(x) = 1, \tag{2.3}$$

a fórmula de Euler

$$\zeta^x = cos_\zeta(x) + i sen_\zeta(x), \tag{2.4}$$

e o seno e o cosseno da soma de dois ângulos:

$$sen_\zeta(x+y) = sen_\zeta(x) cos_\zeta(y) + sen_\zeta(y) cos_\zeta(x), \tag{2.5}$$

$$cos_\zeta(x+y) = cos_\zeta(x) cos_\zeta(y) + i^2 sen_\zeta(x) sen_\zeta(y). \tag{2.6}$$

Note que, se $p \equiv 3 \pmod 4$ e $i = \sqrt{-1}$, as expressões (2.3) e (2.6) se tornam similares às identidades trigonométricas clássicas correspondentes. Propriedades de simetria das funções cosseno e seno são preservadas no contexto de corpos finitos, isto é, $cos_\zeta(-x) = cos_\zeta(x)$ e $sen_\zeta(-x) = -sen_\zeta(x)$.

A proposição a seguir estabelece uma particularidade no cálculo das funções cosseno e seno sobre corpos finitos, quando essas são avaliadas com respeito a um elemento pertencente a $\mathrm{G}_{1,p}$.

Proposição 2.2. *Seja $\zeta \in \mathbb{I}_p$ um elemento unimodular. A função cosseno e a função seno sobre corpos finitos do ângulo relacionado a ζ^x, podem ser calculadas respectivamente como*

$$cos_\zeta(x) = \mathfrak{R}\{\zeta^x\}$$

e

$$sen_\zeta(x) = \mathfrak{I}\{\zeta^x\},$$

para $x = 0, 1, \ldots, \mathrm{ord}(\zeta) - 1$ (LIMA; PANARIO; CAMPELLO DE SOUZA, 2014).

Outros diversos resultados da trigonometria sobre corpos finitos são omitidos nesta tese, mas podem ser consultados pelo leitor interessado. Esses incluem, por exemplo, a definição de polinômios de Chebyshev sobre corpos finitos segundo uma abordagem trigonométrica (LIMA; PANARIO; CAMPELLO DE SOUZA, 2010; LIMA; PANARIO; CAMPELLO DE SOUZA, 2014), a definição e a caracterização da função tangente sobre corpos finitos e de funções trigonométricas inversas sobre corpos finitos (LIMA; CAMPELLO DE SOUZA, 2019; LIMA; PANARIO; CAMPELLO DE SOUZA, 2014) e a definição dos diversos tipos de transformadas de Hartley, do cosseno e do seno sobre essas estruturas algébricas (CAMPELLO DE SOUZA et al., 1998; LIMA; CAMPELLO DE SOUZA, 2011).

2.2 A TRANSFORMADA NUMÉRICA DE FOURIER

Nesta seção, é brevemente revisada a transformada numérica de Fourier. Num escopo mais geral, esta ferramenta permite que vetores N-dimensionais cujas componentes pertencem a um corpo de extensão $\mathbb{F}_q$, $q = p^m$, m inteiro, sejam mapeados em vetores cujas componentes pertencem à mesma estrutura (POLLARD, 1971); esse é o caso em que a referida ferramenta recebe o nome de transformada de Fourier sobre corpos finitos. Por outro lado, podem ser consideradas versões dessas transformadas em que tanto as componentes do vetor original quanto as do vetor transformado correspondente pertençam ao corpo finito primo (corpo base) $\mathbb{F}_p$. Neste último caso, a transformada é normalmente conhecida como transformada numérica de Fourier.

No presente trabalho, considera-se uma transformada que mapeia vetores com componentes sobre $\mathbb{I}_p$ (ou $\mathbb{F}_{p^2}$) em vetores cujas componentes pertencem à mesma estrutura. Conforme o leitor poderá verificar ao longo dos próximos capítulos, tal escolha parece mais adequada ao estabelecimento de paralelos com as outras ferramentas que serão introduzidas e com as aplicações abordadas. Além disso, definir a transformada dessa forma permite analogias interessantes com a transformada discreta de Fourier, que realiza o mapeamento entre vetores com componentes complexas. Nesta tese, a transformada segundo a definição mencionada é chamada de *transformada numérica de Fourier* (embora não seja definida sobre um corpo primo simplesmente) e identificada pelo acrônimo FNT (do inglês *Fourier number transform*). Tal definição é formalizada a seguir.

Definição 2.4. A transformada numérica de Fourier de um vetor $\mathbf{x} = (x(n))$, $x(n) \in \mathbb{I}_p$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$, é o vetor $\mathbf{X} = (X(k))$, $X(k) \in \mathbb{I}_p$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, com componentes calculadas por

$$X(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\zeta^{kn}, \tag{2.7}$$

em que $\zeta \in \mathrm{G}_{1,p}$ é um elemento cuja ordem multiplicativa é $\mathrm{ord}(\zeta) = N$.

A invertibilidade da FNT é demonstrada empregando o resultado a seguir.

Lema 2.1. *Um elemento $\zeta \in \mathbb{I}_p$, com ordem $\mathrm{ord}(\zeta) = N$, satisfaz*

$$\sum_{m=0}^{N-1} \zeta^{rm} = \begin{cases} N, & \textit{se } r \equiv 0 \pmod{N}, \\ 0, & \textit{caso contrário}. \end{cases} \tag{2.8}$$

Teorema 2.1. *A transformada numérica de Fourier inversa de um vetor $\mathbf{X} = (X(k))$, $X(k) \in \mathbb{I}_p$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, é o vetor $\mathbf{x} = (x(n))$, $x(n) \in \mathbb{I}_p$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$, com componentes calculadas por*

$$x(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\zeta^{-kn}, \tag{2.9}$$

em que $\zeta \in \mathrm{G}_{1,p}$ é um elemento cuja ordem multiplicativa é $\mathrm{ord}(\zeta) = N$.

Pode-se expressar o cálculo da FNT de $\mathbf{x}$ por meio da equação matricial

$$\mathbf{X} = \mathbf{F}\mathbf{x}, \tag{2.10}$$

em que $\mathbf{F} = (F_{k,n})$, $F_{k,n} = \frac{1}{\sqrt{N}}\zeta^{kn}$, $k, n = 0, 1, \ldots, N-1$, denota a matriz de transformação da FNT.

A FNT possui diversas propriedades, a maior parte das quais está relacionada às propriedades da transformada discreta de Fourier (DFT) (BLAHUT, 2010). Na seção a seguir, é revisada a autoestrutura da FNT (BIRTWISTLE, 1982), a qual será importante quando do desenvolvimento de resultados sobre a autoestrutura da FNT quaterniônica no Capítulo 4.

2.2.1 Autoestrutura da FNT

A autoestrutura da FNT, isto é, de sua matriz de transformação $\mathbf{F}$, possui certa analogia com a autoestrutura da DFT (BIRTWISTLE, 1982; MCCLELLAN; PARKS, 1972); seus autovalores são dados na proposição a seguir.

Proposição 2.3. *Os autovalores da matriz $\mathbf{F}$ da transformada numérica de Fourier com dimensões $N \times N$ pertencem a $\{1, -1, \sqrt{-1}, -\sqrt{-1}\}$; as respectivas multiplicidades são mostradas na Tabela 1.*

Tabela 1 – Multiplicidades dos autovalores da matriz $\mathbf{F}$ da transformada numérica de Fourier com dimensões $N \times N$.

N	$\#\{1\}$	$\#\{-\sqrt{-1}\}$	$\#\{-1\}$	$\#\{\sqrt{-1}\}$
$4L$	$L+1$	L	L	$L-1$
$4L+1$	$L+1$	L	L	L
$4L+2$	$L+1$	L	$L+1$	L
$4L+3$	$L+1$	$L+1$	$L+1$	L

Fonte: MCCLELLAN; PARKS, 1972

Além disso, mostra-se que os seguintes resultados relacionados aos autovetores de $\mathbf{F}$ são válidos.

Qualquer sinal pode ser decomposto em uma soma de dois sinais, um com simetria par e outro com simetria ímpar, em que a função $\mathcal{E}\{\mathbf{x}\}$ extrai a parte par do argumento $\mathbf{x}$ e $\mathcal{O}\{\mathbf{x}\}$ extrai a parte ímpar do argumento $\mathbf{x}$ (SCHAFER; OPPENHEIM, 1999).

Proposição 2.4. *Todo autovetor de* $\mathbf{F}$ *possui simetria par, caso em que possui* 1 *ou* -1 *como autovalor associado, ou simetria ímpar, caso em que possui* $\sqrt{-1}$ *ou* $-\sqrt{-1}$ *como autovalor associado.*

Proposição 2.5. *Seja* $\mathbf{x}$ *um vetor arbitrário, com componentes pertencentes a* $\mathbb{I}_p$ *e comprimento* N*, e* $\mathbf{X}$ *sua FNT. Então,*

1. $\mathbf{u} = \mathcal{E}\{\mathbf{x}\} \pm \mathcal{E}\{\mathbf{X}\}$*, é um autovetor de* $\mathbf{F}$ *associado ao autovalor* ± 1*;*
2. $\mathbf{v} = \mathcal{O}\{\mathbf{x}\} \mp i\mathcal{O}\{\mathbf{X}\}$*, é um autovetor de* $\mathbf{F}$ *associado ao autovalor* $\pm\sqrt{-1}$*.*

2.2.2 Exemplos

Nesta seção, são apresentados exemplos ilustrativos acerca da definição de uma FNT e da construção de autovetores dessa transformada, associados a autovalores específicos.

Exemplo 2.1. *Seja* $\zeta = 2 + 2i \in \mathrm{G}_{1,7}$*,* $i = \sqrt{-1}$*, um elemento unimodular com ordem multiplicativa* $\mathrm{ord}(\zeta) = 8$ *empregado como núcleo de uma FNT. Então, a respectiva matriz de*

transformação (direta) é dada por

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2+2i & i & 5+2i & 6 & 5+5i & 6i & 2+5i \\ 1 & i & 6 & 6i & 1 & i & 6 & 6i \\ 1 & 5+2i & 6i & 2+2i & 6 & 2+5i & i & 5+5i \\ 1 & 6 & 1 & 6 & 1 & 6 & 1 & 6 \\ 1 & 5+5i & i & 2+5i & 6 & 2+2i & 6i & 5+2i \\ 1 & 6i & 6 & i & 1 & 6i & 6 & i \\ 1 & 2+5i & 6i & 5+5i & 6 & 5+2i & i & 2+2i \end{bmatrix}, \tag{2.11}$$

A matriz de transformação inversa é dada por

$$\mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2+5i & 6i & 5+5i & 6 & 5+2i & 1i & 2+2i \\ 1 & 6i & 6 & i & 1 & 6i & 6 & i \\ 1 & 5+5i & i & 2+5i & 6 & 2+2i & 6i & 5+2i \\ 1 & 6 & 1 & 6 & 1 & 6 & 1 & 6 \\ 1 & 5+2i & 6i & 2+2i & 6 & 2+5i & i & 5+5i \\ 1 & i & 6 & 6i & 1 & i & 6 & 6i \\ 1 & 2+2i & i & 5+2i & 6 & 5+5i & 6i & 2+5i \end{bmatrix}, \tag{2.12}$$

A FNT do vetor

$$\mathbf{x} = [1 \quad i \quad 1+2i \quad 3+4i \quad 5 \quad 5 \quad 6i \quad 1] \tag{2.13}$$

é dada por

$$\mathbf{X} = [2+6i \quad 4+3i \quad 1 \quad 3+6i \quad 5+3i \quad 3+6i \quad 2+5i \quad 2+6i]. \tag{2.14}$$

Exemplo 2.2. *Considere a FNT definida no último exemplo, o vetor com simetria par*

$$\mathbf{x_e} = [1 \quad 3 \quad 5 \quad 6 \quad 2 \quad 6 \quad 5 \quad 3] \tag{2.15}$$

e o vetor com simetria ímpar

$$\mathbf{x_o} = [0 \quad 3 \quad 5 \quad 6 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 4], \tag{2.16}$$

bem como suas respectivas transformadas

$$\mathbf{X_e} = [3 \quad 1 \quad 0 \quad 4 \quad 2 \quad 4 \quad 0 \quad 1] \tag{2.17}$$

e

$$\mathbf{X_o} = [0 \quad 4i \quad i \quad 5i \quad 0 \quad 2i \quad 6i \quad 3i]. \tag{2.18}$$

Então, os vetores

$$\mathbf{x_e} + \mathbf{X_e} = [4 \quad 4 \quad 5 \quad 3 \quad 4 \quad 3 \quad 5 \quad 4], \tag{2.19}$$

$$\mathbf{x_e} - \mathbf{X_e} = [5 \quad 2 \quad 5 \quad 2 \quad 0 \quad 2 \quad 5 \quad 2], \tag{2.20}$$

$$\mathbf{x_o} - i\mathbf{X_o} = [0 \quad 0 \quad 6 \quad 4 \quad 0 \quad 3 \quad 1 \quad 0] \tag{2.21}$$

e

$$\mathbf{x_o} + i\mathbf{X_o} = [0 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \quad 0 \quad 6 \quad 3 \quad 1] \tag{2.22}$$

são autovetores da FNT associados aos autovalores 1, -1, $\sqrt{-1} = i$ *e* $-\sqrt{-1} = -i$, *respectivamente.*

3 QUATERNIONS DE HAMILTON E SUA FORMA GENERALIZADA

Neste capítulo, são abordados os principais conceitos relacionados aos quatérnios, números sobre os quais são desenvolvidas as contribuições desta tese. Inicialmente, a título de revisão, apresenta-se um breve histórico, a definição e as propriedades dos quatérnios de Hamilton. Em seguida, são apresentados diversos resultados acerca dos chamados quatérnios generalizados. Alguns desses resultados já se encontram documentados na literatura ou tratam de meras extensões ao caso de interesse do presente trabalho: quatérnios sobre corpos finitos; outros resultados são contribuições originais desta tese, como, por exemplo, os conceitos e proposições envolvendo trigonometria sobre quatérnios generalizados em corpos finitos e o estudo sobre a ordem multiplicativa desses números. Ao longo do capítulo, a fim de situar o leitor, busca-se indicar com clareza o grau de novidade de cada resultado apresentado.

3.1 QUATÉRNIOS DE HAMILTON

Os números complexos tiveram origem na resolução de equações cúbicas em meados do século XVI (NEVES; GRIMBERG, 2008), problema ao qual se dedicaram nomes como Cardano, Bombelli e Tartaglia . Naquela época, a ideia era que qualquer solução algébrica deveria estar associada a uma representação geométrica; quando da impossibilidade de tais representações, a equação correspondente era considerada de solução inexistente, uma vez que, ainda que houvesse uma metodologia algébrica associada, esta não estaria "legitimada"; as equações cúbicas, por não possuírem uma representação geométrica, eram consideradas assim, sem solução.

René Descartes (1596-1650), em sua grandiosa obra *Discurso do Método*, foi o primeiro que identificou os, até então, chamados *números inexplicáveis* como *números imaginários*, os quais, na ocasião, eram entendidos como *números que poderiam ser imaginados* (e não como os números imaginários que se conhece hoje). Em algumas partes de sua obra, ele cita os números imaginários como uma forma de explicar a impossibilidade de representação geométrica para soluções de algumas equações cúbicas (DESCARTES, 1637). A possibilidade de representar geometricamente os *números imaginários* funcionaria, então, como uma confirmação da existência de tais entidades algébricas, bem como da corretude de sua caracterização; a ausência de tal representação era motivo de cautela para os matemáticos da época de Bombelli, Cardano e Tartaglia, quando da exposição de resultados tidos como novos nesse contexto.

John Wallis (1616-1703), em sua obra intitulada *Tratado de Álgebra* (1685), foi o primeiro a admitir uma construção geométrica para os números ditos até o momento como *números imaginários*. Entretanto, o matemático que primeiro expôs sua representação como se conhece hoje foi o norueguês Caspar Wessel (1745-1818), em sua obra apresentada à *Royal Danish Academy of Sciences and Letters*, em 1797 (WESSEL, 1797). Em sua pesquisa, o

francês Jean-Robert Argand (1768-1822) obteve a mesma percepção de Wessel; seu trabalho intitulado *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques* pode ser considerado como uma das grandes obras do século XIX, pois, até os dias atuais, ele repercute na forma da "representação de Argand-Gauss" ou "plano de Argand-Gauss" (MILIES, 2004).

O problema que deu origem aos números complexos tinha chegado ao fim com a sua representação geométrica. A interpretação geométrica desses números forneceu métodos analíticos simples para a realização de dois tipos de transformações no plano, as translações, por meio da adição, e as rotações, por meio da multiplicação. A partir desse modelo para o plano, um questionamento a respeito da possibilidade de se obter um modelo analítico similar para o espaço, com as mesmas interpretações geométricas, surgia. Com relação à propriedade aditiva, tanto o plano como o espaço tinham construções similares; tal similaridade, porém, não se confirmava na multiplicação.

Na tentativa de estender para o espaço as descobertas feitas até então, William Rowan Hamilton (1805-1865) criou uma nova classe de números imaginários denominados tripletos e denotados por (x, y, z); era uma tentativa de estender para o espaço as mesmas propriedades da multiplicação dos pares numéricos (x, y). Sua preocupação era definir uma multiplicação para esses novos números que pudesse ser interpretada como uma rotação no espaço. Não tendo obtido sucesso do ponto de vista geométrico, Hamilton passou a utilizar um modelo algébrico para representar os tripletos, escrevendo-os como $x + yi + zj$. Segundo ele, os tripletos também poderiam ser interpretados de maneira geométrica como uma linha orientada no espaço, sendo x, y, z suas "coordenadas retangulares" (HAMILTON, 2000b).

Hamilton propôs que a unidade j tivesse a mesma representação de i, ou seja, $\sqrt{-1}$. Além disso, as operações entre os tripletos deveriam ser análogas àquelas definidas para os números imaginários do tipo (x, y), o que lhes asseguraria propriedades de comutatividade, associatividade, existência de elemento identidade e de elementos simétricos; isso permitiria identificar os tripletos como um corpo (HAMILTON, 2000b). Todavia, conforme mencionado anteriormente, o estabelecimento da referida analogia encontrou obstáculo na operação de multiplicação. De modo mais específico, realizando o produto

$$(x_1 + y_1 i + z_1 j) \cdot (x_2 + y_2 i + z_2 j),$$

ter-se-ia como resultado

$$(x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i + (x_1 z_2 + z_1 x_2)j + (y_1 z_2 + y_2 z_1)ij.$$

Embora várias tentativas tenham sido feitas, não se pôde explicar o termo ij na última equação à luz da teoria dos tripletos; a conjectura estabelecida por Hamilton, de que o produto entre dois tripletos deveria resultar em um tripleto, tinha aparentemente falhado. Diante disso, Hamilton propôs que se tivesse $ij = -ji = k$, o que resultou no surgimento de uma nova dimensão e, por

conseguinte, na descoberta de um nova classe de números imaginários denominados quatérnios. Um quatérnio seria, então, expresso por

$$x_1 + y_1 i + z_1 j + w_1 k.$$

Em uma carta direcionada ao filho Archibaldi, ele narra a descoberta que realizou:

"Mas no dia 16 do mesmo mês (outubro de l843) - que era uma segunda-feira e dia de reunião do Conselho da Real Sociedade da Irlanda - eu ia andando para participar e presidir, e tua mãe andava comigo, ao longo do Royal Canal. Embora ela falasse comigo ocasionalmente, uma corrente subjacente de pensamento estava acontecendo na minha mente, que finalmente teve um resultado, cuja importância senti imediatamente. Pareceu como se um circuito elétrico tivesse se fechado; e saltou uma faísca, o arauto de muitos anos vindouros de pensamento e trabalho dirigidos, por mim, se poupado, e de qualquer forma por parte de outros, se eu vivesse o suficiente para comunicar minha descoberta. Nesse instante eu peguei uma caderneta de anotações que ainda existe e fiz um registro naquela hora. Não pude resistir ao impulso - tão não filosófico quanto possa ser - de gravar com um canivete numa pedra da ponte de Broome, quando a cruzamos, a fórmula fundamental dos símbolos i, j, k,

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$

que contém a solução do problema."

Assim, surgiram os quatérnios, os quais se conhece hoje como quatérnios de Hamilton (HAMILTON, 2000a; ELL; SANGWINE, 2007; SANGWINE; ELL, 2000; SANGWINE; ELL, 1999):

$$q = a + bi + cj + dk, \tag{3.1}$$

em que a, b, c e d são números reais e i, j e k são operadores complexos, que obedecem às seguintes regras:

$$ijk = i^2 = j^2 = k^2 = -1, \tag{3.2}$$

e

$$jk = -kj = i, \;\; ki = -ik = j, \;\; ij = -ji = k. \tag{3.3}$$

A adição entre dois quatérnios $q_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$ e $q_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$ segue a regra

$$q_1 + q_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k. \tag{3.4}$$

O produto entre os quatérnios q_1 e q_2 é dado por

$$\begin{aligned} q_1 q_2 = {} & (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2)i \\ & + (a_1 c_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2 - b_1 d_2)j + (a_1 d_2 + d_1 a_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2)k. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Um quatérnio pode ser divido em duas partes, uma parte real (ou escalar) representada por $S(q) = a$ e uma parte imaginária (ou vetorial), que possui três componentes, representada por $V(q) = bi + cj + dk$. Pode-se, dessa forma, reescrever (3.1) como

$$q = S(q) + V(q). \tag{3.6}$$

Um quatérnio com a parte escalar nula, ou seja, $S(q) = 0$ é chamado de quatérnio puro.

O produto escalar e o produto vetorial entre as partes vetoriais dos quatérnios q_1 e q_2, são calculados, respectivamente, por

$$V(q_1) \bullet V(q_2) := b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2 \tag{3.7}$$

e

$$V(q_1) \times V(q_2) = \begin{bmatrix} i & j & k \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{bmatrix} := (c_1d_2 - c_2d_1)i + (d_1b_2 - b_1d_2)j + (b_1c_2 - c_1b_2)k, \tag{3.8}$$

em que o símbolo $:=$ indica *igual por definição*. Com isso, pode-se expressar o produto entre dois quatérnios como

$$q_1q_2 = S(q_1)S(q_2) - V(q_1) \bullet V(q_2) + S(q_1)V(q_2) + V(q_1)S(q_2) + V(q_1) \times V(q_2). \tag{3.9}$$

O complexo conjugado do quatérnio $q_1 = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k$ é denotado por q_1^*, sendo dado por

$$q_1^* = S(q) - V(q) = a_1 - b_1i - c_1j - d_1k. \tag{3.10}$$

Mostra-se que $(q_1q_2)^* = q_2^*q_1^*$.

O módulo de um quatérnio q_1 é dada por $|q_1| = \sqrt{q_1^*q_1} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2}$ e sua norma é $||q|| = |q|^2$. Um quatérnio com norma unitária é chamado de quatérnio unitário.

O inverso de um quatérnio é dado por

$$q^{-1} = \frac{q^*}{|q|^2}, \tag{3.11}$$

de maneira que $q^{-1}q = qq^{-1} = 1$.

A fórmula de Euler na forma hipercomplexa é

$$e^{\mu\Phi} = cos\Phi + \mu sen\Phi, \tag{3.12}$$

em que μ é um quatérnio puro unitário. Um quatérnio pode ser representado na forma polar como

$$q = |q|e^{\mu\Phi}. \tag{3.13}$$

Pode-se, ainda, representar um quatérnio como uma combinação de dois números complexos. Essa forma é conhecida como forma de Cayley-Dickson (ELL; SANGWINE, 2007):

$$q = A + Bj, \tag{3.14}$$

em que $A = a + bi$ e $B = c + di$, de modo que se tem

$$q = (a + bi) + (c + di)j = a + bi + cj + dk. \tag{3.15}$$

A representação na forma de Cayley-Dickson pode ser generalizada empregando quatérnios puros unitários μ, tal que $\mu^2 = -1$ (os operadores i, j e k são casos especiais de μ). Escolhendo dois quatérnios μ_1 e μ_2 com as referidas propriedades e, ainda, que satisfaçam $\mu_1 \perp \mu_2$, pode-se representar um quatérnio arbitrário como

$$q = A' + B'\mu_2, \tag{3.16}$$

em que $A' = a' + b'\mu_1$ e $B' = c' + d'\mu_1$, de modo que

$$q = (a' + b'\mu_1) + (c' + d'\mu_1)\mu_2. \tag{3.17}$$

A representação (3.16) é denominada forma simplética; A' e B' são denominadas, respectivamente, parte simplex e parte perplex do quatérnio. Expandindo (3.17), obtém-se

$$q = a' + b'\mu_1 + c'\mu_2 + d'\mu_3,$$

em que $\mu_3 = \mu_1\mu_2$ e, além disso, $\mu_3 \perp \mu_1$ e $\mu_3 \perp \mu_2$. Dessa forma, o sistema baseado nos operadores μ_1, μ_2 e μ_3 é isomórfico àquele baseado em i, j e k. Consequentemente, a relação entre as quádruplas (a, b, c, d) e (a', b', c', d') equivale a uma mudança de base de (i, j, k) para (μ_1, μ_2, μ_3).

3.2 QUATÉRNIOS GENERALIZADOS

A álgebra usual de quatérnios, estabelecida sobre os números reais $\mathbb{R}$, pode ser estabelecida sobre um corpo arbitrário $\mathbb{F}$ com característica diferente de 2. Mais especificamente, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, em que α e β são não-nulos, pode-se definir uma álgebra de quatérnios denotada por $A = \left(\frac{\alpha,\beta}{\mathbb{F}}\right)$, onde A é um espaço com quatro dimensões, podendo ser denominado também como um $\mathbb{F}$-espaço com base $1, i, j, k$, em que os parâmetros i e j são geradores que satisfazem às seguintes relações (LAM, 2005):

$$i^2 = \alpha, \;\; j^2 = \beta, \;\; ij = -ji. \tag{3.18}$$

Define-se, ainda, $k := ij \in A$ e tem-se $k^2 = (ij)(ij) = -i^2j^2 = -\alpha\beta \in \mathbb{F}$, e $ik = -ki = \alpha j$, $kj = -jk = \beta i$, de modo que os elementos i, j, k são anticomutativos. É importante notar que, para o caso em que $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ e $\alpha = \beta = -1$, $\left(\frac{-1,-1}{\mathbb{R}}\right)$ é o anel de divisão usual dos quatérnios sobre os reais, isto é, os quatérnios de Hamilton que são descritos na última seção e que podem ser denotados por $\mathcal{H}$ (LAM, 2005). A estrutura denotada por $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathbb{F}}\right)$, estabelecida sobre $\mathbb{F}$, corresponde a uma generalização direta de $\mathcal{H}$.

Teorema 3.1. *O conjunto* $\{1, i, j, k\}$ *forma uma* $\mathbb{F}$*-base para* A*, de modo que* $\dim_{\mathbb{F}} A = 4$.

Demonstração. Sejam γ e δ pertencentes ao fecho algébrico[1] $\mathbb{E}$ de $\mathbb{F}$ tais que $\gamma^2 = -\alpha$ e $\delta^2 = \beta$; considere as matrizes

$$i_0 = \begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$j_0 = \begin{bmatrix} 0 & \delta \\ \delta & 0 \end{bmatrix}$$

em $M_2(\mathbb{E})$ (a álgebra das matrizes 2×2 sobre $\mathbb{E}$). Cálculos diretos mostram que $i_0^2 = \alpha\mathbf{I}$ e $j_0^2 = \beta\mathbf{I}$, em que $\mathbf{I}$ denota a matriz identidade 2×2 e

$$i_0 j_0 = \begin{bmatrix} \gamma\delta & 0 \\ 0 & -\gamma\delta \end{bmatrix} = -j_0 i_0.$$

Assim, existe um homomorfismo $\varphi : \left(\frac{\alpha,\beta}{\mathbb{F}}\right) \to M_2(\mathbb{E})$, com $\varphi(i) = i_0$ e $\varphi(j) = j_0$. Uma vez que o conjunto $\{\mathbf{I}, i_0, j_0, i_0 j_0\}$ é claramente linearmente independente sobre $\mathbb{E}$, o conjunto $\{1, i, j, ij\}$ é linearmente independente sobre $\mathbb{F}$. □

Conforme indicado anteriormente, $\mathcal{H}$ é uma álgebra de divisão, isto é, cada elemento não-nulo de $\mathcal{H}$ é inversível. Em geral, $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathbb{F}}\right)$ não precisa ser uma álgebra de divisão; isso depende da escolha de $\mathbb{F}$, α e β. De fato, há apenas duas possibilidades:

1. $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathbb{F}}\right)$ é uma álgebra de divisão;
2. $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathbb{F}}\right)$ é isomórfico a $M_2(\mathbb{F})$, a álgebra de matrizes 2×2 com entradas pertencentes a $\mathbb{F}$.

A forma mais rápida de enxergar as duas possibilidades enumeradas é notar que $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathbb{F}}\right)$ é uma álgebra simples central, ou seja, ela tem $\mathbb{F}$ como centro e é simples por não possuir ideais bilaterais não-triviais, e, então, empregar um famoso teorema estabelecido por J. H. M. Wedderburn em 1907. Este teorema afirma que qualquer álgebra simples central, com dimensão finita sobre seu centro, é isomórfica a uma álgebra $M_n(\mathbb{D})$ para algum inteiro n e alguma álgebra de divisão $\mathbb{D}$ sobre $\mathbb{F}$. Considerando que $\dim_{\mathbb{F}} \left(\frac{\alpha,\beta}{\mathbb{F}}\right) = 4$ e $\dim_{\mathbb{F}} M_n(\mathbb{D}) = n^2$, as únicas possibilidades são $n = 1$, $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathbb{F}}\right) = \mathbb{D}$ ou $n = 2$, $\mathbb{D} = \mathbb{F}$ (LAM, 2005).

A identificação do caso em que determinada álgebra de quatérnios se enquadra depende de propriedades da respectiva *norma*. Para esclarecer tal questão, considere $q \in \left(\frac{\alpha,\beta}{\mathbb{F}}\right)$, $q = a + bi + cj + dk$, e seu conjugado $q^* = a - bi - cj - dk$; considere também o mapeamento $N : \left(\frac{\alpha,\beta}{\mathbb{F}}\right) \to \mathbb{F}$, tal que $N(q) = q^* q$ para cada $q \in \left(\frac{\alpha,\beta}{\mathbb{F}}\right)$. Como

$$N(q) = q^* q = q q^* = a^2 - \alpha b^2 - \beta c^2 + \alpha\beta d^2,$$

[1] Uma extensão $\mathbb{E}$ de um corpo $\mathbb{F}$ é um fecho algébrico de $\mathbb{F}$ quando $\mathbb{E}$ é uma extensão algébrica que é algebricamente fechada, isto é, contém todas as raízes de polinômios com coeficientes em $\mathbb{F}$. Levando em conta a possibilidade de isomorfismo, cada corpo $\mathbb{F}$ tem apenas um fecho algébrico.

N pode ser visto como uma forma quadrática em quatro variáveis, a, b, c e d, a qual é conhecida como *forma de norma* da álgebra de quatérnios. Na notação padrão da teoria de formas quadráticas, essa forma é denotada por $\langle 1, -\alpha, -\beta, \alpha\beta \rangle$, o que corresponde a representar a forma quadrática por uma matriz diagonal com 1, $-\alpha$, $-\beta$ e $\alpha\beta$ como entradas (LAM, 2005).

Sempre que $N(q) \neq 0$, o elemento q é inversível; seu inverso é dado por $\left(\frac{1}{N(q)}\right) q^*$. De fato, q é inversível, se e somente se $N(q) \neq 0$, uma vez que $N(q) = 0$ implica que q é um divisor de 0. Com isso, tem-se o seguinte:

Teorema 3.2. *A álgebra de quatérnios* $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathbb{F}}\right)$ *é uma álgebra de divisão se e somente se sua forma de norma não representa zero não-trivialmente, isto é,* $N(q) = 0 \Rightarrow q = 0$ *(LAM, 2005).*

Na linguagem da teoria de formas quadráticas, uma forma que satisfaz à condição enunciada no Teorema 3.2 é dita ser anisotrópica. Empregando tal terminologia, pode-se afirmar, por exemplo, que a forma de norma de qualquer álgebra de quatérnios $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathbb{F}}\right)$, em que $\mathbb{F}$ é um corpo finito, é isotrópica; consequentemente, $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathbb{F}}\right)$ é isomórfico a $M_2(\mathbb{F})$. Esse isomorfismo pode ser explicitado mapeando-se, por exemplo, i em

$$\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

e j em

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Com isso, tem-se $k := ij = -ji$ mapeado em

$$\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, $q = a + bi + cj + dk$ é mapeado na matriz

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{bmatrix},$$

como visto em (LEWIS, 2006; ELL; BIHAN; SANGWINE, 2014).

De fato, ao longo deste trabalho, são considerados predominantemente quatérnios generalizados em que $\mathbb{F} = \mathbb{F}_p$ é um corpo finito primo (com característica ímpar p); isso porque é sobre esses quatérnios que se pretende definir uma transformada análoga à de Fourier. O estudo de operações e de propriedades envolvendo especificamente esses quatérnios, aparentemente, não se encontra disponível na literatura. De qualquer forma, algumas dessas operações e propriedades são meras extensões do que se tem para os quatérnios de Hamilton. A adição e os produtos, por exemplo, são efetuados conforme as regras anteriormente expostas neste capítulo, porém, considerando o uso da aritmética modular apropriada ao se somar, multiplicar ou tomar o

simétrico aditivo de elementos pertencentes a $\mathbb{F}_p$, e levando em conta o fato de que α e β não são necessariamente iguais a -1.

O complexo conjugado de um quatérnio generalizado sobre $\mathbb{F}_p$ também é dado como em (3.10), tomando-se os simétricos aditivos módulo p de b_1, c_1 e d_1, naturalmente. De modo semelhante, define-se a norma de um quatérnio generalizado sobre $\mathbb{F}_p$ bem como o seu inverso. Conforme anteriormente discutido, um desses quatérnios generalizados, ainda que não seja nulo, pode ter norma nula, o que, obviamente, implica em sua não invertibilidade. Um quatérnio sobre $\mathbb{F}_p$ unitário é aquele que tem norma igual a 1. As operações e propriedades mencionadas podem ser, respectivamente, efetuadas e verificadas considerando a representação matricial dos quatérnios em questão.

Um quatérnio generalizado $q = a + bi + cj + dk$ pode ser escrito em termos de suas partes escalar e vetorial como

$$q = S(q) + V(q),$$

em que $S(q) = a$ e $V(q) = bi + cj + dk$. Isso permite que se obtenha o seguinte desenvolvimento a respeito do produto entre dois quatérnios generalizados $q_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$ e $q_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$:

$$\begin{aligned} q_1 q_2 &= (S(q_1) + V(q_1))(S(q_1) + V(q_1)) \\ &= S(q_1)S(q_2) + S(q_1)V(q_1) + S(q_2)V(q_1) + V(q_1)V(q_2) \\ &= S(q_1)S(q_2) + S(q_1)V(q_2) + V(q_1)S(q_2) - V(q_1) \bullet V(q_2) + V(q_1) \times V(q_2). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Na última equação, $\bullet$ e $\times$ denotam respectivamente o produto escalar e o vetorial entre os operandos; no caso generalizado, tais produtos são calculados de acordo com

$$V(q_1) \bullet V(q_2) := -b_1 b_2 i^2 - c_1 c_2 j^2 - d_1 d_2 k^2 \tag{3.20}$$

e

$$V(q_1) \times V(q_2) = \begin{bmatrix} i & j & k \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{bmatrix} := (c_1 d_2 - c_2 d_1) i + (d_1 b_2 - b_1 d_2) j + (b_1 c_2 - c_1 b_2) k. \tag{3.21}$$

A proposição a seguir, que constitui uma contribuição original desta tese, é útil na caracterização de potências de um quatérnio generalizado sobre corpos finitos.

Proposição 3.1. *Seja $q = S(q) + V(q)$ um quatérnio sobre $\mathbb{F}_p$. Qualquer potência de q possui como sua parte vetorial $V(q^x)$, $x \in \mathbb{Z}$, um múltiplo escalar de $V(q)$, isto é, $V(q^x) = \rho V(q)$, $\rho \in \mathbb{F}_p$.*

Demonstração. Usando (3.19), q^2 pode ser escrito como

$$q^2 = S(q)S(q) - V(q) \bullet V(q) + S(q)V(q) + V(q)S(q) + V(q) \times V(q).$$

O último termo da última equação é nulo, de modo que se tem

$$q^2 = S(q^2) + V(q^2),$$

em que $S(q^2) = S(q)S(q) + V(q) \bullet V(q)$ e $V(q^2) = 2S(q)V(q)$. Considerando o fato de que o produto vetorial entre dois vetores que possuem a mesma direção é nulo, uma conclusão similar pode ser obtida para q^x, $x = 3, 4, \ldots$, de onde o resultado segue. □

A seguir, caracteriza-se o conjunto unimodular relacionado a quatérnios generalizados sobre $\mathbb{F}_p$.

Definição 3.1. O conjunto unimodular de $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathbb{F}_p}\right)$ é o conjunto $\mathrm{Q}_{1,p}$ formado pelos elementos $q = a+bi+cj+dk$, tais que $qq^* = (a+bi+cj+dk)(a-bi-cj-dk) = a^2-b^2i^2-c^2j^2-d^2k^2 \equiv 1 \pmod{p}$, isto é, $|q|^2 = 1$.

Na proposição a seguir, caracteriza-se o conjunto $\mathrm{Q}_{1,p}$ com respeito ao seu fechamento sob a operação de multiplicação.

Proposição 3.2. *O conjunto $\mathrm{Q}_{1,p}$ é fechado com respeito à operação de multiplicação.*

Demonstração. Seja $q_3 = q_1q_2$ um quatérnio generalizado sobre $\mathbb{F}_p$ e $q_1, q_2 \in \mathrm{Q}_{1,p}$. Claramente, tem-se $q_3^{-1} = q_2^{-1}q_1^{-1} = q_2^*q_1^*$. Se escrever-se $q_1 = a_1+b_1i+c_1j+d_1k$ e $q_2 = a_2+b_2i+c_2j+d_2k$, pode-se demonstrar diretamente que $q_3^* = (q_1q_2)^* = q_2^*q_1^* = q_3^{-1}$, de onde segue o resultado. □

As representações na forma de Cayley-Dickson e na simplética também são admissíveis para os quatérnios generalizados considerados. Observe que, nesta última representação, o que basicamente se tem é a escrita de um quatérnio numa base (μ_1, μ_2, μ_3) formada por quatérnios puros. Assim, diferentemente do que normalmente se estabelece no caso de quatérnios de Hamilton, não é necessário que μ_1, μ_2 e μ_3, vistos como vetores num espaço tridimensional, formem um conjunto ortonormal, isto é, sejam ortogonais e de norma unitária; é suficiente que eles formem um conjunto linearmente independente para que a referida representação seja factível.

3.2.1 Trigonometria sobre Quatérnios Generalizados em Corpos Finitos

Esta seção, é toda constituída de contribuições originais desta tese. São introduzidos conceitos relacionados à trigonometria sobre quatérnios cujas componentes pertencem a um corpo finito $\mathbb{F}_p$. Isso permitirá estender a fórmula de Euler ao cenário em questão e obter diversos outros resultados interessantes. Primeiramente, são definidas as funções cosseno e seno relacionadas ao ângulo de um quatérnio $q \in \left(\frac{\alpha,\beta}{\mathbb{F}_p}\right)$.

Definição 3.2. Seja $q \in \left(\frac{\alpha,\beta}{\mathbb{F}_p}\right)$ um quatérnio generalizado com ordem multiplicativa[2] denotada por $\mathrm{ord}(q)$ e μ um quatérnio puro pertencente à mesma estrutura. O cosseno e o seno quaterniônicos do ângulo relacionado a q^x, a x-ésima potência de q, são definidos respectivamente como

$$cos_q(x) = \frac{q^x + q^{-x}}{2} \tag{3.22}$$

e

$$sen_q(x) = \frac{q^x - q^{-x}}{2\mu}, \tag{3.23}$$

$x = 0, 1, \ldots, \mathrm{ord}(q) - 1$.

Usando a Definição 3.2, estabelece-se a seguinte generalização para a fórmula de Euler:

$$q^x = cos_q(x) + \mu\ sen_q(x). \tag{3.24}$$

Propriedades relacionadas às funções $cos_q(x)$ e $sen_q(x)$ também podem ser derivadas. De forma bem direta, verifica-se que tais funções possuem, respectivamente, simetria par e ímpar, isto é, $cos_q(x) = cos_q(-x)$ e $sen_q(x) = -sen_q(-x)$. Os argumentos do cosseno e do seno quaterniônicos são sempre calculados $(\mathrm{mod}\ \mathrm{ord}(q))$; a ordem $\mathrm{ord}(q)$ também corresponde ao período de tais funções. Se cossenos e senos quaterniônicos forem calculados com respeito a um quatérnio generalizado unimodular, a seguinte proposição pode ser estabelecida.

Proposição 3.3. *Sejam $q \in \mathrm{Q}_{1,p}$ um quatérnio generalizado unimodular com ordem multiplicativa denotada por $\mathrm{ord}(q)$ e $\mu = V(\mu)$ um quatérnio puro que satisfaz $\mu = \nu V(q)$, $\nu \in \mathbb{F}_p$ e $\nu \neq 0$. Então, o cosseno e o seno quaterniônicos do ângulo relacionado a q^x, $x = 0, 1, \ldots, \mathrm{ord}(q) - 1$, pertencem a $\mathbb{F}_p$. Mais especificamente, cosseno e seno são dados por*

$$cos_q(x) = S(q^x). \tag{3.25}$$

e

$$sen_q(x) = \frac{V(q^x)}{\mu} \tag{3.26}$$

Demonstração. Uma vez que $\mathrm{Q}_{1,p}$ é fechado com respeito à multiplicação (Proposição 3.2), se q é unimodular, então q^x também é unimodular. Dessa forma, se q^x for escrito como $q^x = a + bi + cj + dk$, tem-se $q^{-x} = (q^x)^* = a - bi - cj - dk$ e, portanto, (3.22) pode ser expressa como

$$cos_q(x) = \frac{a + bi + cj + dk + a - bi - cj - dk}{2} = a = S(q^x).$$

[2] Detalhes relacionados à ordem multiplicativa de quatérnios generalizados sobre $\mathbb{F}_p$ são discutidos na próxima seção; por enquanto, assume-se simplesmente que os quatérnios em questão possuem tal ordem.

De modo similar, (3.23) pode ser expressa como

$$sen_q(x) = \frac{a+bi+cj+dk-a+bi+cj+dk}{2\mu} = \frac{(bi+cj+dk)}{\mu} = \frac{V(q^x)}{\mu}.$$

Devido à Proposição 3.1, sabe-se que existe um elemento $\rho \in \mathbb{F}_p$, tal que $V(q^x) = \rho V(q)$. Portanto, a última equação pode ser reescrita como

$$sen_q(x) = \frac{\rho V(q)}{\nu V(q)} = \rho\nu^{-1}.$$

□

A seguinte proposição indica que é possível escolher um quatérnio generalizado unimodular q e um inteiro Gaussiano unimodular ζ sobre $\mathbb{F}_p$, de modo que se obtenha coincidência, para cada argumento inteiro x, entre os senos e cossenos calculados com respeito aos referidos elementos, isto é, $cos_q(x) = cos_\zeta(x)$ e $sen_q(x) = sen_\zeta(x)$.

Proposição 3.4. *Se $q = a+bi+cj+dk \in \mathrm{Q}_{1,p}$ é um quatérnio generalizado unimodular sobre $\mathbb{F}_p$ e $\zeta = a_1 + b_1 i \in \mathrm{G}_{1,p}$ é um inteiro Gaussiano unimodular sobre $\mathbb{F}_p$, tais que $a_1 = a = S(q)$ e $(b_1 i)^2 = V(q) \bullet V(q) = b^2i^2 + c^2j^2 + d^2k^2$, e $\mu = V(\mu)$ é um quatérnio puro que satisfaz $\mu = b_1^{-1}V(q)$, $b_1 \in \mathbb{F}_p$ e $b_1 \neq 0$, então $cos_q(x) = cos_\zeta(x)$ e $sen_q(x) = sen_\zeta(x)$, para todo $x \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Usando o Teorema Binomial, a seguinte expansão pode ser realizada:

$$q^x = (S(q)+V(q))^x = \sum_{k=0}^{x} \binom{x}{k} [S(q)]^{x-k}[V(q)]^k.$$

Uma vez que $[V(q)]^2 = V(q) \bullet V(q) + V(q) \times V(q) = V(q) \bullet V(q)$ (veja a prova da Proposição 3.1), sabe-se que $[V(q)]^k = [V(q) \bullet V(q)]^{\frac{k}{2}}$, se k for par, e $[V(q)]^k = [V(q) \bullet V(q)]^{\frac{k-1}{2}} V(q)$, se k for ímpar. Isso permite reescrever a última equação como

$$q^x = \sum_{k \text{ par}} \binom{x}{k} [S(q)]^{x-k}[V(q) \bullet V(q)]^{\frac{k}{2}} + \sum_{k \text{ ímpar}} \binom{x}{k} [S(q)]^{x-k}[V(q) \bullet V(q)]^{\frac{k-1}{2}} V(q),$$

a qual, juntamente com a Proposição 3.3, permite que se conclua que

$$cos_q(x) = \sum_{k \text{ par}} \binom{x}{k} [S(q)]^{x-k}[V(q) \bullet V(q)]^{\frac{k}{2}} \tag{3.27}$$

e

$$sen_q(x) = \frac{\sum_{k \text{ ímpar}} \binom{x}{k} [S(q)]^{x-k}[V(q) \bullet V(q)]^{\frac{k-1}{2}} V(q)}{\mu} \tag{3.28}$$

$$= \sum_{k \text{ ímpar}} \binom{x}{k} [S(q)]^{x-k}[V(q) \bullet V(q)]^{\frac{k-1}{2}} b_1. \tag{3.29}$$

De modo similar, obtém-se

$$\zeta^x = (a_1 + b_1 i)^x = \sum_{k=0}^{x} \binom{x}{k} a_1^{x-k} (b_1 i)^k \tag{3.30}$$

$$= \sum_{k \text{ par}} \binom{x}{k} a_1^{x-k} [(b_1 i)^2]^{\frac{k}{2}} + \sum_{k \text{ ímpar}} \binom{x}{k} a_1^{x-k} [(b_1 i)^2]^{\frac{k-1}{2}} b_1 i \tag{3.31}$$

e, usando a Proposição 2.2, conclui-se que

$$cos_\zeta(x) = \sum_{k \text{ par}} \binom{x}{k} a_1^{x-k} [(b_1 i)^2]^{\frac{k}{2}} = cos_q(x) \tag{3.32}$$

e

$$sen_\zeta(x) = \sum_{k \text{ ímpar}} \binom{x}{k} a_1^{x-k} [(b_1 i)^2]^{\frac{k-1}{2}} b_1 = sen_q(x). \tag{3.33}$$

□

3.2.2 Exemplos

Exemplo 3.1. *Neste exemplo, são ilustrados alguns conceitos relacionados a quatérnios generalizados sobre corpos finitos. É considerada a álgebra* $A = \left(\frac{6,6}{\mathbb{F}_7}\right)$*, o que significa que se tem* $i^2 = j^2 = \alpha = \beta = 6$*. No que se segue, todas as operações entre escalares são efetuadas utilizando aritmética módulo* 7 *(o símbolo "*$(\mathrm{mod}\ 7)$*" é omitido, exceto em pontos do texto em que seu uso seja útil para evitar interpretações errôneas). É considerado o quatérnio*

$$q_1 = 1 + 3i + 4j + 2k,$$

o qual pode ser mapeado na matriz

$$\begin{bmatrix} 1+3i & 4+2i \\ 3+2i & 1+4i \end{bmatrix}.$$

A parte real e a imaginária de q_1 *são* $S(q_1) = 1$ *e* $V(q_1) = 3i + 4j + 2k$*, respectivamente. O produto entre* q_1 *e um quatérnio* $q_2 = 3 + 3i + j + 6k$ *é dado por*

$$q_1 q_2 = 6 + 6i + j + 3k.$$

O complexo conjugado de q_1 *é* $q_1^* = S(q_1) - V(q_1) = 1 + 4i + 3j + 5k$*. O módulo de* q_1 *é calculada por*

$$|q_1| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{2} = \pm 4 \ (\mathrm{mod}\ 7).$$

Observe que, diferentemente do que acontece com os quatérnios de Hamilton, em que se toma o valor positivo da raiz quadrada da qual se calcula a norma de um quatérnio, quando quatérnios generalizados sobre corpos finitos são considerados, parece não haver um critério claro para

escolher entre os dois possíveis valores de tal raiz. Assim, em princípio, tal escolha seria arbitrária e, no exemplo, poder-se-ia deliberadamente considerar $|q_1| = 4$ *ou* $|q_1| = 3$*. Essa questão não influencia no cálculo do inverso de* q_1*, que é naturalmente único e dado por*

$$q_1^{-1} = \frac{q_1^*}{|q_1|^2} = 4 + 2i + 5j + 6k.$$

Na forma de Cayley-Dickson, q_1 *é escrito como*

$$q = (1 + 3i) + (4 + 2i)j.$$

Para expressar q_1 *numa forma simplética, pode-se considerar, por exemplo, os quatérnios puros unitários*

$$\mu_1 = 3i + 2j + 4k$$

e

$$\mu_2 = 4i + 4j + 2k,$$

para os quais se tem

$$\mu_1 \bullet \mu_2 = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 2 \equiv 0 \pmod 7$$

e, portanto, $\mu_1 \perp \mu_2$*. Obtém-se* $\mu_3 = \mu_1\mu_2 = 2i + 3j + 4k$*, o qual é também unitário e satisfaz* $\mu_3 \perp \mu_1$ *e* $\mu_3 \perp \mu_2$ *e, daí, a representação simplética de* q_1*, que é dada por*

$$q_1 = (1 + 4\mu_1) + (4 + 5\mu_1)\mu_2;$$

na última expressão, $A' = 1 + 4\mu_1$ *e* $B' = 4 + 5\mu_1$ *são, respectivamente, a parte simplex e a perplex do quatérnio. Expandindo a última equação, tem-se, naturalmente,*

$$q_1 = 1 + 4\mu_1 + 4\mu_2 + 5\mu_3,$$

cuja correspondência com a representação original de q_1*, isto é, na base* (i, j, k)*, pode ser verificada. A ordem multiplicativa de* q_1 *é* $\mathrm{ord}(q_1) = 24$*.*

3.3 ORDEM MULTIPLICATIVA DE QUATÉRNIOS GENERALIZADOS SOBRE $\mathbb{F}_p$

Nesta seção, que é preenchida apenas por contribuições originais desta tese, são abordados alguns aspectos importantes relativos à ordem multiplicativa de quatérnios generalizados sobre $\mathbb{F}_p$. Deste ponto em diante, considera-se especificamente que $\alpha = \beta = -1 \equiv (p-1) \pmod p$, ou seja, considera-se a álgebra $\left(\frac{-1,-1}{\mathbb{F}_p}\right)$, embora se possa atribuir outros valores a α e β. Inicialmente, considera-se o caso em que $p \equiv 3 \pmod 4$. São considerados quatérnios

$$q = a + bi + cj + dk, \tag{3.34}$$

em que $a, b, c, d \in \mathbb{F}_p$, que, na forma matricial, são escritos como

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{bmatrix}, \tag{3.35}$$

em que $i^2 \equiv (p-1) \pmod{p}$.

Calculando-se o polinômio característico de $\mathbf{Q}$ por $r(\lambda) = \det(\mathbf{Q} - \lambda\mathbf{I})$, obtém-se

$$r(\lambda) = \lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + b^2 + c^2 + d^2. \tag{3.36}$$

As raízes de $r(\lambda)$, que correspondem aos autovalores de $\mathbf{Q}$, são então dadas por

$$\lambda = a \pm \sqrt{-b^2 - c^2 - d^2}. \tag{3.37}$$

Excluindo os casos em que pelo menos um autovalor é nulo ($\mathbf{Q}$ não possuiria inversa e, portanto, também não possuiria ordem multiplicativa definida), são considerados os casos a seguir.

- Caso 1: $b^2 + c^2 + d^2 \equiv 0 \ (mod\ p)$. Neste caso, tem-se $\lambda = a \in \mathbb{F}_p$, isto é, $\mathbf{Q}$ possui dois autovalores iguais. Os dois subcasos a seguir são considerados.
  - Subcaso 1.1: $b = 0$ ou $c = 0$ ou $d = 0$. A condição que determina o presente subcaso, unida à condição que determina o caso 1, implica que $b = c = d = 0$. Assim, $\mathbf{Q}$ se reduz a uma matriz da forma
    $$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \tag{3.38}$$
    e, portanto, tem-se $\mathrm{ord}(\mathbf{Q}) = \mathrm{ord}(a)$.
  - Subcaso 1.2: $b \neq 0$ ou $c \neq 0$ ou $d \neq 0$. A condição que determina o presente subcaso, unida à condição que determina o caso 1, implica que $b \neq 0$, $c \neq 0$ e $d \neq 0$. Assim, denotando por $\mathbf{v} = [v(0)\ \ v(1)]$ um autovetor de $\mathbf{Q}$, pode-se escrever $\mathbf{Q}\mathbf{v}^T = a\mathbf{v}^T$, o que produz o sistema de equações
    $$\begin{cases} biv(0) + (c + di)v(1) = 0, \\ (-c + di)v(0) - biv(1) = 0. \end{cases} \tag{3.39}$$
    Do sistema acima, obtém-se a relação
    $$v(0) = \frac{bi}{-c + di} v(1), \tag{3.40}$$
    o que indica que a multiplicidade geométrica de $\lambda = a$ é igual a $m_g(a) = 1$. Assim, $\mathbf{Q}$ é não-diagonalizável e admite forma normal de Jordan
    $$\mathbf{J_Q} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}. \tag{3.41}$$
    Calculando $\mathbf{J_Q}^m$, para $m = 2, 3, 4, \ldots$, observa-se que, em geral, tem-se
    $$\mathbf{J_Q}^m = \begin{bmatrix} a^m & ma^{m-1} \\ 0 & a^m \end{bmatrix}. \tag{3.42}$$
    Portanto, $\mathbf{J_Q}^m = \mathbf{I}$ apenas quando $a^m \equiv 1 \pmod{p}$, isto é, quando m for um múltiplo de $\mathrm{ord}(a)$, e quando $ma^{m-1} \equiv 0 \pmod{p}$, isto é, quando $m \equiv 0 \pmod{p}$. Assim, $\mathrm{ord}(\mathbf{Q}) = \mathrm{ord}(\mathbf{J_Q}) = \mathrm{mmc}(\mathrm{ord}(a), p) = \mathrm{ord}(a) \times p$, em que mmc significa o mínimo múltiplo comum.

- Caso 2: $b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$. Neste caso, $\mathbf{Q}$ possui dois autovalores distintos e admite a forma diagonal

$$\mathbf{\Lambda_Q} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \tag{3.43}$$

em que $\lambda_1 = a + \sqrt{-b^2 - c^2 - d^2}$ e $\lambda_2 = a - \sqrt{-b^2 - c^2 - d^2}$. Assim, $\mathrm{ord}(\mathbf{Q}) = \mathrm{ord}(\mathbf{\Lambda_Q}) = \mathrm{mmc}(\mathrm{ord}(\lambda_1), \mathrm{ord}(\lambda_2))$.

É necessário considerar, também, o caso em que $p \equiv 1 \pmod 4$, quando, fazendo-se $i^2 \equiv (p-1) \pmod p$, tem-se $i = j = k = \sqrt{-1} \in \mathbb{F}_p$. A ordem multiplicativa de $\mathbf{Q}$ pode ser determinada de acordo com os seguintes casos.

- Caso 1: $b^2 + c^2 + d^2 = 0$. Neste caso, tem-se $\lambda_1 = \lambda_2 = a \in \mathbb{F}_p$. Os seguintes subcasos precisam ser considerados.

  - Subcaso 1.1: $b = c = d = 0$. A condição que determina este subcaso é idêntica àquela considerada no subcaso 1.1 para $p \equiv 3 \pmod 4$ e, portanto, leva ao mesmo resultado.
  - Subcaso 1.2: $b = 0$ e $c \neq 0$ e $d \neq 0$. Neste caso, tem-se $c^2 = -d^2 \Rightarrow c = \pm di$. Assumindo que $c = di$, $\mathbf{Q}$ se reduz a uma matriz na forma

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} a & 2di \\ 0 & a \end{bmatrix}. \tag{3.44}$$

Denotando por $\mathbf{v} = [v(0)\ v(1)]$ um autovetor de $\mathbf{Q}$, pode-se escrever $\mathbf{Q}\mathbf{v}^T = a\mathbf{v}^T$, o que produz o sistema de equações

$$\begin{cases} av(0) + 2div(1) = av(0), \\ av(1) = av(1). \end{cases} \tag{3.45}$$

A solução de (3.45) é simplesmente $v(1) = 0$, a qual indica que a multiplicidade geométrica de $\lambda_1 = \lambda_2 = a$ é $m_g(a) = 1$. Portanto, $\mathbf{Q}$ é não-diagonalizável e admite a forma normal de Jordan

$$\mathbf{J_Q} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}. \tag{3.46}$$

Analogamente ao subcaso 1.2 para $p \equiv 3 \pmod 4$, conclui-se que $\mathrm{ord}(\mathbf{Q}) = \mathrm{ord}(\mathbf{J_Q}) = \mathrm{mmc}(\mathrm{ord}(a), p)$. Obtém-se o mesmo resultado se $c = -di$ ou $c = 0$ e $b \neq 0$ e $d \neq 0$ ou $d = 0$ e $b \neq 0$ e $c \neq 0$.

  - Subcaso 1.3: $b \neq 0$ e $c \neq 0$ e $d \neq 0$. Neste caso, pode-se escrever $b^2 = -(c^2 + d^2) \Rightarrow b = \pm i\sqrt{c^2 + d^2}$, com $i \in \mathbb{F}_p$. Assumindo que $b = i\sqrt{c^2 + d^2}$, $\mathbf{Q}$ se reduz a uma matriz na forma

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} a - \sqrt{c^2 + d^2} & c + di \\ -c + di & a + \sqrt{c^2 + d^2} \end{bmatrix}. \tag{3.47}$$

Denotando por $\mathbf{v} = [v(0)\ v(1)]$ um autovetor de $\mathbf{Q}$, pode-se escrever $\mathbf{Q}\mathbf{v}^T = a\mathbf{v}^T$, o que produz o sistema de equações

$$\begin{cases} -\sqrt{c^2+d^2}v(0) + (c+di)v(1) = 0 \\ (-c+di)v(0) + \sqrt{c^2+d^2}v(1) = 0 \end{cases} \tag{3.48}$$

De (3.48), obtém-se a relação

$$v(0) = -\frac{\sqrt{c^2+d^2}}{-c+di}v(1),$$

a qual indica que a multiplicidade geométrica de $\lambda_1 = \lambda_2 = a$ é $m_g(a) = 1$. Portanto, $\mathbf{Q}$ é não-diagonalizável e admite a forma normal de Jordan (3.46). Analogamente ao subcaso 1.2 para $p \equiv 3 \pmod 4$, conclui-se que $\mathrm{ord}(\mathbf{Q}) = \mathrm{ord}(\mathbf{J_Q}) = \mathrm{mmc}(\mathrm{ord}(a), p) = \mathrm{ord}(a) \times p$. Obtém-se o mesmo resultado se $b = -i\sqrt{c^2+d^2}$. Um desenvolvimento similar é obtido se realizar-se, inicialmente, uma substituição conforme $c = \pm i\sqrt{b^2+d^2}$ ou $d = \pm i\sqrt{b^2+c^2}$.

- Caso 2: $b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$. Neste caso, $\mathbf{Q}$ possui dois autovalores distintos e admite forma diagonal

$$\mathbf{\Lambda_Q} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}. \tag{3.49}$$

Assim, $\mathrm{ord}(\mathbf{Q}) = \mathrm{ord}(\mathbf{\Lambda_Q}) = \mathrm{mmc}(\mathrm{ord}(\lambda_1), \mathrm{ord}(\lambda_2))$.

3.3.1 Exemplos

A seguir, são dados alguns exemplos de quatérnios generalizados sobre corpos finitos; para cada exemplo, indica-se em qual dos casos anteriormente analisados o quatérnio considerado se encaixa e fornece-se a sua ordem multiplicativa.

Exemplo 3.2. *Considere o quatérnio generalizado sobre* $\mathbb{F}_{11}$*,*

$$q = 2 + 0i + 0j + 0k, \tag{3.50}$$

em que $i = j = \sqrt{10} \pmod{11}$*. Na forma matricial,* q *é escrito como*

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}. \tag{3.51}$$

Este quatérnio, que se encaixa no Subcaso 1.1 para $p \equiv 3 \pmod 4$*, possui ordem multiplicativa coincidente com a ordem multiplicativa de* 2 *no grupo cíclico de* $\mathbb{F}_{11}$*, isto é,* $\mathrm{ord}(q) = \mathrm{ord}(2) = 10$.

Exemplo 3.3. *Considere o quatérnio generalizado sobre* $\mathbb{F}_{11}$*,*

$$q = 2 + 2i + 3j + 8k, \tag{3.52}$$

em que $i = j = \sqrt{10} \pmod{11}$*. Na forma matricial,* q *é escrito como*

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2+2i & 3+8i \\ -3+8i & 2-2i \end{bmatrix}. \tag{3.53}$$

Este quatérnio se encaixa no Subcaso 1.2 para $p \equiv 3 \pmod{4}$*, uma vez que* $2^2 + 3^2 + 8^2 \equiv 0 \pmod{11}$*. Sua ordem multiplicativa é, portanto, dada por* $\mathrm{ord}(q) = \mathrm{mmc}(\mathrm{ord}(a), p) = \mathrm{mmc}(\mathrm{ord}(2), 11) = \mathrm{ord}(2) \times p = 110$*.*

Exemplo 3.4. *Considere o quatérnio generalizado sobre* $\mathbb{F}_{11}$*,*

$$q = 1 + 2i + 3j + 4k, \tag{3.54}$$

em que $i = j = \sqrt{10} \pmod{11}$*. Na forma matricial,* q *é escrito como*

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1+2i & 3+4i \\ -3+4i & 1-2i \end{bmatrix}. \tag{3.55}$$

Este quatérnio se encaixa no Caso 2 para $p \equiv 3 \pmod{4}$*, uma vez que* $\mathbf{Q}$ *possui dois autovalores distintos* $\lambda_1 = 3$ *e* $\lambda_2 = 10$*; esses autovalores possuem ordens multiplicativas dadas, respectivamente, por* $\mathrm{ord}(3) = 5$ *e* $\mathrm{ord}(10) = 2$*. Assim, a ordem multiplicativa de* q *é dada por* $\mathrm{ord}(q) = \mathrm{mmc}(\mathrm{ord}(\lambda_1), \mathrm{ord}(\lambda_2)) = \mathrm{mmc}(5, 2) = 10$*.*

Exemplo 3.5. *Considere o quatérnio generalizado sobre* $\mathbb{F}_{11}$*,*

$$q = 0 + 2i + 3j + 4k, \tag{3.56}$$

em que $i = j = \sqrt{10} \pmod{11}$*. Na forma matricial,* q *é escrito como*

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2i & 3+4i \\ -3+4i & 2i \end{bmatrix}. \tag{3.57}$$

Este quatérnio se encaixa no Caso 2 para $p \equiv 3 \pmod{4}$*, uma vez que* $\mathbf{Q}$ *possui dois autovalores distintos* $\lambda_1 = 2$ *e* $\lambda_2 = 9$*; esses autovalores possuem a mesma ordem multiplicativa* $\mathrm{ord}(2) = 10$ *e* $\mathrm{ord}(9) = 5$*. Assim, a ordem multiplicativa de* q *é dada por* $\mathrm{ord}(q) = \mathrm{ord}(\lambda_1) = \mathrm{ord}(\lambda_2) = 10$*.*

Como os casos analisados para $p \equiv 1 (\mathrm{mod} 4)$ são similares àqueles em que $p \equiv 3 (\mathrm{mod} 4)$, a seguir, apresenta-se apenas um exemplo de ordem multiplicativa de um quatérnio generalizado sobre um corpo finito $\mathbb{F}_p$ em que $p \equiv 1 \pmod{4}$. O quatérnio em questão será usado na definição de uma transformada que pode ser aplicada ao processamento de imagens coloridas.

Exemplo 3.6. *Considere o quatérnio generalizado sobre* $\mathbb{F}_{257}$*,*

$$q = 7 + 8i + 4j + 8k, \tag{3.58}$$

em que $i = j = \sqrt{256} \pmod{257} \equiv 16 \pmod{257}$*. Na forma matricial,* q *é escrito como*

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 7+8i & 4+8i \\ 253+8i & 7+249i \end{bmatrix}. \tag{3.59}$$

Este quatérnio se encaixa no Caso 2 para $p \equiv 1 \pmod 4$*, uma vez que* $\mathbf{Q}$ *possui dois autovalores distintos* $\lambda_1 = 72$ *e* $\lambda_2 = 199$*; esses autovalores possuem a mesma ordem multiplicativa* $\operatorname{ord}(72) = \operatorname{ord}(199) = 128$*. Assim, a ordem multiplicativa de* q *é dada por* $\operatorname{ord}(q) = \operatorname{ord}(\lambda_1) = \operatorname{ord}(\lambda_2) = 128$*.*

Os casos analisados, tanto para $p \equiv 3 \pmod 4$ quanto para $p \equiv 1 \pmod 4$, dão suporte ao lema a seguir.

Lema 3.1. *Um quatérnio generalizado* q *sobre* $\mathbb{F}_p$*, com matriz associada* $\mathbf{Q}$ *e que possui ordem multiplicativa* $\operatorname{ord}(q) = \operatorname{ord}(\mathbf{Q}) = N$*, satisfaz*

$$\sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{Q}^{km} = \begin{cases} \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \ N \not\equiv 0 \pmod p, & \text{se } k = 0, \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}, & \text{se } k = 1, 2, \ldots, N-1, \end{cases} \tag{3.60}$$

se, e somente se

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \tag{3.61}$$

ou se $\mathbf{Q}$ *possuir dois autovalores distintos com ordens multiplicativas coincidentes.*

Demonstração. Seja $S_N(k) = \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{Q}^{km}$. Se $\mathbf{Q}$ for do tipo analisado nos subcasos 1.1 (vide parte inicial desta seção), então $\operatorname{ord}(\mathbf{Q}) = N = \operatorname{ord}(a)$ e, assim, $N|(p-1)$; se $\mathbf{Q}$ for do tipo analisado nos casos 2, com os autovalores λ_1 e λ_2 tendo ordens multiplicativas coincidentes, então $\operatorname{ord}(\mathbf{Q}) = N = \operatorname{ord}(\lambda_1) = \operatorname{ord}(\lambda_2)$ e, assim, $N|(p^2-1)$. Logo, se $\mathbf{Q}$ for de um dos dois tipos indicados no enunciado do lema, tem-se $\operatorname{ord}(\mathbf{Q}) = N \not\equiv 0 \pmod p$, e, portanto,

$$S_N(0) = \sum_{m=0}^{N-1} \left(\mathbf{Q}^0\right)^m = \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{I}^m = \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{I} = \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}.$$

Para $k = 1, 2, \ldots, N-1$, considerando o Lema 2.1, tem-se, se $\mathbf{Q}$ for do tipo analisado nos subcasos 1.1,

$$S_N(k) = \begin{bmatrix} \sum_{m=0}^{N-1} a^{km} & 0 \\ 0 & \sum_{m=0}^{N-1} a^{km} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

se $\mathbf{Q}$ for do tipo analisado nos casos 2, com os autovalores tendo ordens multiplicativas coincidentes, tem-se

$$S_N(k) = \mathbf{V} \begin{bmatrix} \sum_{m=0}^{N-1} \lambda_1^{km} & 0 \\ 0 & \sum_{m=0}^{N-1} \lambda_2^{km} \end{bmatrix} \mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{V}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

em que $\mathbf{V}$ é uma matriz cujas colunas são autovetores de $\mathbf{Q}$ associados aos autovalores λ_1 e λ_2.

Por outro lado, se $\mathbf{Q}$ não for de um dos tipos indicados no enunciado do lema, essa matriz se enquadra nos subcasos 1.2, no subcaso 1.3 ($p \equiv 1 \pmod 4$) ou nos casos 2, com os autovalores λ_1 e λ_2 tendo ordens multiplicativas distintas. Se $\mathbf{Q}$ for do tipo analisado nos subcasos 1.2 ou 1.3, tem-se $N = \mathrm{ord}(\mathbf{Q})|p$ e, assim, $S_N(0) = \mathbf{0}$; isso viola o que se estabelece na primeira parte de (3.60). Se $\mathbf{Q}$ for do tipo analisado nos casos 2, com $\mathrm{ord}(\lambda_1) \neq \mathrm{ord}(\lambda_2)$, pode-se assumir, sem perda de generalidade, que $\mathrm{ord}(\lambda_1) < \mathrm{ord}(\lambda_2) \leq \mathrm{ord}(\mathbf{Q}) = N$. Assim, tem-se

$$S_N(\mathrm{ord}(\lambda_1)) = \mathbf{V} \begin{bmatrix} \sum_{m=0}^{N-1} \lambda_1^{\mathrm{ord}(\lambda_1)m} & 0 \\ 0 & \sum_{m=0}^{N-1} \lambda_2^{\mathrm{ord}(\lambda_1)m} \end{bmatrix} \mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V} \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{V}^{-1} \neq \mathbf{0},$$

o que viola o que se estabelece na segunda parte de (3.60). □

4 A TRANSFORMADA NUMÉRICA DE FOURIER QUATERNIÔNICA

Neste capítulo, é introduzida uma transformada numérica de Fourier quaterniônica, a qual constitui a principal contribuição desta tese. A transformada é identificada pelo acrônimo QFNT, do inglês *quaternion Fourier number transform*. Os resultados derivados na Seção 3.3, sobre a ordem multiplicativa de quatérnios generalizados sobre corpos finitos, são essenciais para a definição da QFNT, a qual é apresentada na Seção 4.1. Na Seção 4.2, são discutidas as principais propriedades da QFNT; na Seção 4.3, são apresentadas proposições relacionadas aos autovalores e autovetores da matriz da QFNT; por fim, na Seção 4.4, são discutidas de forma preliminar algumas questões relacionadas ao cálculo da QFNT.

4.1 A TRANSFORMADA NUMÉRICA DE FOURIER QUATERNIÔNICA

A seguir, é introduzida uma definição para a transformada numérica de Fourier quaterniônica e determinada a respectiva transformada inversa. A transformada corresponde, a uma versão sobre corpos finitos da versão discreta da transformada de Fourier quaterniônica, conforme apresentado em (ELL; SANGWINE, 2007), por exemplo. De qualquer maneira, o estabelecimento da QFNT depende de todo o desenvolvimento realizado na Seção 3.3; sua invertibilidade depende, em particular, das condições dadas no Lema 3.1, as quais são completamente dissociadas do que se considera no cenário usual de definição da transformada, isto é, sobre quatérnios de Hamilton.

Definição 4.1. Seja q um quatérnio generalizado sobre $\mathbb{F}_p$, com ordem multiplicativa dada por $\mathrm{ord}(q) = N$ e que satisfaz às condições dadas no Lema 3.1. A transformada numérica de Fourier quaterniônica (à direita) de um vetor $\mathbf{x} = (x(n))$, $x(n) \in \left(\frac{-1,-1}{\mathbb{F}_p}\right)$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$, é o vetor $\mathbf{X}^R = (X^R(k))$, $X^R(k) \in \left(\frac{-1,-1}{\mathbb{F}_p}\right)$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, cujas componentes são dadas por

$$X^R(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) q^{kn}. \tag{4.1}$$

Teorema 4.1. *Seja q um quatérnio generalizado sobre $\mathbb{F}_p$, com ordem multiplicativa dada por $\mathrm{ord}(q) = N$ e que satisfaz as condições dadas no Lema 3.1. A transformada numérica de Fourier quaterniônica (à direita) inversa de um vetor $\mathbf{X}^R = (X^R(k))$, $X^R(k) \in \left(\frac{-1,-1}{\mathbb{F}_p}\right)$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, é o vetor $\mathbf{x} = (x(n))$, $x(n) \in \left(\frac{-1,-1}{\mathbb{F}_p}\right)$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$, cujas componentes são dadas por*

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^R(k) q^{-kn}. \tag{4.2}$$

Demonstração. Substituindo, em (4.2), $X^R(k)$ pela expressão (4.1) com n substituído por m, obtém-se

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{m=0}^{N-1} x(m)q^{km}\right)q^{-kn} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x(m)\left(\sum_{k=0}^{N-1} q^{k(m-n)}\right). \end{aligned}$$

Se as componentes do vetor $\mathbf{x}$ e o quatérnio q forem tratados em seus respectivos formatos matriciais, de acordo com o Lema 3.1, sempre que $m \neq n$ no primeiro somatório da última equação, o segundo somatório da mesma equação resulta numa matriz 2×2 nula; por outro lado, se $m = n$, o segundo somatório fornece a matriz $N \cdot \mathbf{I}_2$, em que $\mathbf{I}_2$ é a matriz identidade 2×2. Assim, a última equação se resume a

$$\frac{1}{N}x(n)\begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} = x(n).$$

□

O cálculo de uma QFNT pode ser expresso como um produto matricial entre o vetor $\mathbf{x}$ e uma matriz de transformação $\mathbf{F}_q$ cuja componente na n-ésima linha e na k-ésima coluna é dada por

$$F_q(n,k) = q^{kn}, \tag{4.3}$$

$n, k = 0, 1, \ldots, N-1$. Assim, tem-se

$$\mathbf{X}^R = \mathbf{x}\mathbf{F}_q.$$

Consequentemente, o cálculo de uma QFNT inversa pode ser expresso como

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}^R\mathbf{F}_q^{-1},$$

em que

$$F_q^{-1}(k,n) = \frac{1}{N}q^{-kn}.$$

A QFNT também pode ser definida à esquerda, bastando que, em (4.1) e (4.2), sejam permutadas as posições do núcleo da transformada e da componente do vetor que o está ponderando. Neste caso, o vetor da QFNT seria denotado por $\mathbf{X}^L = (X^L(k))$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Deste ponto em diante, sempre que se omitir o tipo da QFNT considerada, o leitor deve assumir que se está considerando a QFNT à direita. Ainda com relação à transformada definida, é relevante observar que a opção por representar os quatérnios generalizados envolvidos (componentes dos vetores e núcleo da transformada) como em (3.34) ou matricialmente, como em (3.35), é um aspecto puramente computacional, não influenciando nos resultados que têm sido obtidos.

Para manter a coerência com relação a isso, na escrita das equações, sempre que se optar pela representação matricial $\mathbf{Q}$ do núcleo q da transformada, assume-se que as componentes dos vetores também são representadas matricialmente, ainda que não se indique tal opção por meio de uma notação específica.

Exemplo 4.1. *Neste exemplo, é considerada a álgebra* $A = \left(\frac{6,6}{\mathbb{F}_7}\right)$*, de modo que se possa definir uma QFNT cujos quatérnios generalizados têm seus coeficientes sobre* $\mathbb{F}_7$*. Como núcleo da transformada, emprega-se* $q = 3 + 3i + j + 6k$*, que possui ordem multiplicativa* $\mathrm{ord}(q) = 16$ *e cuja forma matricial é*

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 3+3i & 6+i \\ 1+i & 3+4i \end{bmatrix}.$$

Assim, uma QFNT com comprimento $N = 16$ *pode ser obtida. Empregando a Definição 4.1, calcula-se a QFNT à direita* $\mathbf{X}^R = (X^R(k))$*,* $k = 0, 1, \ldots, 15$*, do vetor produzido aleatoriamente*

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5+6i+0j+6k \\ 4+0i+1j+3k \\ 6+6i+1j+6k \\ 6+3i+5j+0k \\ 2+6i+5j+6k \\ 4+0i+5j+6k \\ 4+5i+5j+2k \\ 4+1i+4j+0k \\ 1+0i+0j+5k \\ 4+2i+6j+0k \\ 3+2i+5j+5k \\ 1+3i+3j+4k \\ 4+5i+1j+4k \\ 4+1i+0j+3k \\ 6+2i+4j+1k \\ 5+1i+3j+4k \end{bmatrix}.$$

Obtém-se

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0+1i+6j+6k \\ 3+0i+1j+2k \\ 3+0i+5j+3k \\ 5+3i+5j+3k \\ 4+5i+5j+2k \\ 4+6i+5j+2k \\ 3+3i+6j+3k \\ 1+0i+2j+5k \\ 6+0i+1j+1k \\ 5+2i+3j+3k \\ 5+3i+0j+3k \\ 4+3i+5j+6k \\ 3+6i+5j+5k \\ 1+6i+1j+0k \\ 3+2i+0j+2k \\ 2+0i+6j+1k \end{bmatrix}.$$

4.2 PROPRIEDADES DA QFNT

Nesta seção, são desenvolvidas algumas propriedades da transformada numérica de Fourier quaterniônica. De modo análogo ao que acontece com a transformada numérica de Fourier ordinária em relação à transformada discreta de Fourier, essas propriedades guardam certa analogia com as propriedades da transformada discreta de Fourier quaterniônica. O destaque fica por conta da propriedade de convolução cíclica, a qual se imagina que, também no contexto quaterniônico, possa ser empregada para realizar filtragem empregando apenas operações de aritmética modular convenientemente adaptadas aos quatérnios generalizados definidos sobre corpos finitos.

Propriedade 4.1 (Linearidade)**.** *Se as QFNT dos vetores* $\mathbf{x}_1 = (x_1(n))$ *e* $\mathbf{x}_2 = (x_2(n))$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$, *cujas componentes são quatérnios sobre* $\mathbb{F}_p$, *forem, respectivamente,* $\mathbf{X}_1 = (X_1(k))$ *e* $\mathbf{X}_2 = (X_2(k))$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, *então, a transformada de* $\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2$, $c_1, c_2 \in \left(\frac{-1,-1}{\mathbb{F}_p}\right)$, *será* $\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2$.

Demonstração. A prova dessa propriedade decorre diretamente da Definição 4.1, sendo omitida neste trabalho. □

Propriedade 4.2 (Deslocamento)**.** *Seja* $\mathbf{x} = \mathbf{x}_a + \mathbf{x}_b i + \mathbf{x}_c j + \mathbf{x}_d k = (x(n))$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$, *um vetor de quatérnios, cujas componentes (vetoriais)* $\mathbf{x}_a$, $\mathbf{x}_b$, $\mathbf{x}_c$ *e* $\mathbf{x}_d$ *possuem QFNT identificadas respectivamente por* $\mathbf{X}_a^R$, $\mathbf{X}_b^R$, $\mathbf{X}_c^R$ *e* $\mathbf{X}_d^R$. *Então, a QFNT do vetor* $\mathbf{x}' = (x'(n)) =$

$(x(n+n_0))$*, em que* n_0 *é um inteiro, possui componentes dadas por*

$$X'^R(k) = q^{-kn_0}X_a^R(k) + iq^{-kn_0}X_b^R(k) + jq^{-kn_0}X_c^R(k) + kq^{-kn_0}X_d^R(k),$$

$k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Demonstração. Fazendo $x'(n) = x(n+n_0)$, tem-se

$$X'^R(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x'(n)q^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n+n_0)q^{kn}. \tag{4.4}$$

Substituindo, na última equação, $n + n_0 = n'$, obtém-se

$$X'^R(k) = \sum_{n'=0}^{N-1} x(n')q^{k(n'-n_0)} = \sum_{n'=0}^{N-1} x(n')q^{kn'}q^{-kn_0} = X'^R(k)q^{-kn_0}. \tag{4.5}$$

Ou escrevendo $x(n') = x_a(n') + x_b(n')i + x_c(n')j + x_d(n')k$ e expandindo a última equação em termos dos componentes do vetor $x(n')$, a equação se torna

$$X'^R(k) = \sum_{n'=0}^{N-1} \left[x_a(n') + x_b(n')i + x_c(n')j + x_d(n')k\right] q^{kn'}q^{-kn_0} \tag{4.6}$$

$$= q^{-kn_0}X_a^R(k) + iX_b^R(k)q^{-kn_0} + jX_c^R(k)q^{-kn_0} + kX_d^R(k)q^{-kn_0}. \tag{4.7}$$

Se $\mathbf{x}$ for uma sequência real, o resultado encontrado coincide com aquele obtido para a propriedade de deslocamento da FNT (naturalmente, com o quatérnio q no lugar do elemento que seria usado como núcleo da FNT). □

Propriedade 4.3 (QFNT do impulso)**.** *A QFNT do vetor* $\delta = [1\,0\,0\,\cdots\,0]$ *é o vetor* $\mathbf{X} = (X(k))$*,* $X(k) = 1$*,* $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Demonstração. A prova segue diretamente da Definição 4.1, visto que, em (4.1), para cada $k = 0, 1, \ldots, N-1$, o único termo não nulo no somatório é igual a $X(k) = x(0)q^{k\cdot 0} = 1$. □

Propriedade 4.4 (QFNT de uma linha da matriz de transformação)**.** *A QFNT do vetor* $\mathbf{x} = [q^{0m}q^{1m}q^{2m}\cdots q^{(N-1)m}]$*, correspondente à* m*-ésima linha da matriz da respectiva transformada, é o vetor* $\mathbf{X} = N\delta_m = (N\delta(-n-m))$.

Demonstração. O produto matricial correspondente ao cálculo da QFNT pode ser visto como o cálculo de somas de produtos ponto a ponto entre o vetor a ser transformado e cada coluna da matriz de transformação $\mathbf{F}_q$. Considerando a composição dessa matriz (vide (4.3)), sabe-se que sua m-ésima linha corresponde ao conjugado de sua $(N-m)$-ésima coluna. Assim, como as referidas somas de produtos podem ser vistas como produtos internos e as colunas de $\mathbf{F}_q$ constituem uma base ortogonal para o espaço formado por vetores N-dimensionais cujos componentes são quatérnios (na qual o vetor a ser transformado será expresso), a única

dessas somas de produtos a ser não-nula, quando o vetor de entrada é a m-ésima linha de $\mathbf{F}_q$, é aquela calculada com relação à $(N-m)$-ésima coluna da mesma matriz. O fator N aparece multiplicando o impulso deslocado δ_m pois a referida base não é ortonormal (vide Lema 3.1). □

Propriedade 4.5 (QFNT de um vetor constante)**.** *A QFNT do vetor constante* $\mathbf{x} = [1\ 1\ 1\ \cdots\ 1]$ *é o vetor* $N\delta = [N\ 0\ 0\ \cdots\ 0]$.

Demonstração. A prova segue diretamente do Lema 3.1. □

Em seguida, desenvolve-se a propriedade de convolução cíclica para a QFNT. Para isso, considera-se a definição à direita dessa transformada; o resultado da convolução cíclica de comprimento N entre $\mathbf{x} = (x(n))$ e $\mathbf{h} = (h(n))$ é denotado por $\mathbf{y} = \mathbf{x} \circ_N \mathbf{h}$, $\mathbf{y} = (y(n))$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$, e dado por

$$y(n) = x \circ_N h(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(n-m)h(m).$$

Observe que, em função da não-comutatividade entre as componentes de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{h}$, a última equação corresponde a uma espécie de convolução à direita; uma convolução à esquerda também poderia ser considerada.

Propriedade 4.6 (Convolução cíclica)**.** *Sejam* $\mathbf{x} = (x(n)) = (x_a(n)+x_b(n)i+x_c(n)j+x_d(n)k)$ *e* $\mathbf{h} = (h(n))$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$, *vetores cujas componentes são quatérnios generalizados sobre* $\mathbb{F}_p$. *A QFNT da convolução cíclica* $\mathbf{y}$ *de comprimento* N *entre* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{h}$ *é dada por*

$$Y^R(k) = H^R(k)X_a^R(k) + iH^R(k)X_b^R(k) + jH^R(k)X_c^R(k) + kH^R(k)X_d^R(k). \tag{4.8}$$

Demonstração. Da definição da QFNT, pode-se escrever

$$Y^R(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[x \circ_N h(n)\right] q^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^{N-1} x(n-m)h(m)\right] q^{kn}. \tag{4.9}$$

Na última equação, usando a substituição $n' = n - m$, obtém-se

$$Y^R(k) = \sum_{n'=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^{N-1} x(n')h(m)\right] q^{k(n'+m)} \tag{4.10}$$

$$= \sum_{n'=0}^{N-1} x(n') \left[\sum_{m=0}^{N-1} h(m)q^{km}\right] q^{kn'} \tag{4.11}$$

$$= \sum_{n'=0}^{N-1} x(n')H^R(k)q^{kn'}. \tag{4.12}$$

Escrevendo $x(n') = x_a(n') + x_b(n')i + x_c(n')j + x_d(n')k$, a última equação se torna

$$Y^R(k) = \sum_{n'=0}^{N-1} \left[x_a(n') + x_b(n')i + x_c(n')j + x_d(n')k\right] H^R(k) q^{kn'} \tag{4.13}$$

$$= H^R(k) \sum_{n'=0}^{N-1} x_a(n') q^{kn'} + iH^R(k) \sum_{n'=0}^{N-1} x_b(n') q^{kn'} \tag{4.14}$$

$$+ jH^R(k) \sum_{n'=0}^{N-1} x_c(n') q^{kn'} + kH^R(k) \sum_{n'=0}^{N-1} x_d(n') q^{kn'} \tag{4.15}$$

$$= H^R(k) X_a^R(k) + iH^R(k) X_b^R(k) + jH^R(k) X_c^R(k) + kH^R(k) X_d^R(k). \tag{4.16}$$

□

Se a QFNT de $\mathbf{x}$ for uma sequência real $\mathbf{X}^R = \mathbf{X}_a^R$, a última equação assume a forma

$$Y^R(k) = H^R(k) X^R(k),$$

a qual coincide com o resultado do Teorema da convolução cíclica para a FNT. Relações semelhantes são obtidas se se considerar a QFNT à esquerda.

Propriedade 4.7 (Teorema de Parseval)**.** *Seja* $\mathbf{x}$ *um vetor cujas componentes são quatérnios generalizados sobre* $\mathbb{F}_p$ *e* $\mathbf{X}^R$ *sua QFNT à direita, cujo núcleo é um quatérnio unitário* q*. Então, a relação*

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X^R(k)|^2$$

é satisfeita.

Demonstração.

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) x^*(n) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{k=0}^{N-1} X^R(k) q^{-kn}\right] x^*(n) \tag{4.17}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^R(k) \sum_{n=0}^{N-1} \left[q^{kn}\right]^* x^*(n) \tag{4.18}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^R(k) \sum_{n=0}^{N-1} \left[x(n) q^{kn}\right]^* \tag{4.19}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^R(k) \left[X^R(k)\right]^* = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X^R(k)|^2. \tag{4.20}$$

□

4.3 AUTOESTRUTURA DA QFNT

Nesta seção, são desenvolvidos resultados relacionados à autoestrutura da QFNT. O que se faz, basicamente, é demonstrar que qualquer autovetor da transformada numérica de Fourier é também um autovetor da QFNT; além disso, são identificados os autovalores aos quais esses autovetores estão relacionados, bem como suas multiplicidades. No que segue, considera-se uma versão unitária da QFNT, que consiste, basicamente, em incluir o fator de escala $1/\sqrt{N}$ em (4.1) e trocar o fator de escala $1/N$ por $1/\sqrt{N}$ em (4.2).

Proposição 4.1. *Seja* $\mathbf{v} = (v(n))$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$, *um autovetor associado ao autovalor* λ *de uma FNT definida com núcleo* $\zeta = a_1 + b_1 i \in \mathrm{G}_{1,p}$, *tal que* $\mathrm{ord}(\zeta) = N$; *seja QFNT uma transformada definida com núcleo* $q = a + bi + cj + dk \in \mathrm{Q}_{1,p}$, *tal que* $\mathrm{ord}(q) = N$, $a_1 = a$ *e* $(b_1 i)^2 = b^2 i^2 + c^2 j^2 + d^2 k^2$.

(a) Se $\mathbf{v}$ *tem simetria par (caso em que* $\lambda = \pm 1$*), então ele também é um autovetor com autovalor* λ *da QFNT indicada no enunciado da proposição.*

(b) Se $\mathbf{v}$ *tem simetria ímpar (caso em que* $\lambda = \pm\sqrt{-1}$*), então ele é um autovetor com autovalor* $i^{-1}\lambda\mu$, *em que* $\mu = b_1^{-1} V(q)$, *da QFNT indicada no enunciado da proposição.*

Demonstração. (a) Se $\mathbf{v}$ tem simetria par, i. e. $v(n) = v(N-n)$, $n = 1, \ldots, N-1$, então

$$\sum_{n=0}^{N-1} v(n) sen_q(kn) = 0. \tag{4.21}$$

Portanto, empregando (3.24), pode-se escrever

$$\begin{aligned} V^R(k) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} v(n) q^{kn} = \frac{1}{\sqrt{N}} \left[\sum_{n=0}^{N-1} v(n) \cos_q(kn) + \underbrace{\mu \sum_{n=0}^{N-1} v(n) sen_q(kn)}_{=0} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} v(n) \cos_q(kn). \end{aligned} \tag{4.22}$$

Da Proposição 3.4, tem-se que $\cos_\zeta(x) = \cos_q(x)$ e $sen_\zeta(x) = sen_q(x)$, $x = 0, 1, \ldots, N-1$. Então, (4.22) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} V^R(k) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \left[\sum_{n=0}^{N-1} v(n) \cos_\zeta(kn) + \underbrace{i \sum_{n=0}^{N-1} v(n) sen_\zeta(kn)}_{=0} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} v(n) \zeta^{kn} = \lambda v(k). \end{aligned}$$

(b) De modo análogo, se **v** tem simetria ímpar, i. e. $v(n) = -v(N-n)$, $n = 1, \ldots, N-1$ e $v(0) = 0$, então

$$\sum_{n=0}^{N-1} v(n) \cos_q(kn) = 0. \tag{4.23}$$

Portanto, pode-se escrever

$$\begin{aligned} V^R(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} v(n) q^{kn} &= \frac{1}{\sqrt{N}} \left[\underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} v(n) \cos_q(kn)}_{=0} + \mu \sum_{n=0}^{N-1} v(n) sen_q(kn) \right] \\ &= \frac{\mu}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} v(n) sen_q(kn). \end{aligned} \tag{4.24}$$

Mas, por hipótese,

$$V(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} v(n) \zeta^{kn} = \frac{i}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} v(n) sen_\zeta(kn) = \lambda v(k), \tag{4.25}$$

e, então,

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} v(n) sen_\zeta(kn) = i^{-1} \lambda v(k). \tag{4.26}$$

Utilizando a última equação, (4.24) pode ser reescrita como

$$V^R(k) = \mu i^{-1} \lambda v(k). \tag{4.27}$$

□

Na Tabela 2, são indicados os autovalores da QFNT e suas multiplicidades para diferentes comprimentos N; naturalmente, essas multiplicidades são determinadas com base na correspondência entre os referidos autovalores e os autovalores da FNT (vide Proposição 4.1). Autovetores associados a autovalores específicos da QFNT podem, então, ser construídos empregando as diferentes técnicas para construção de autovetores da FNT. Essas técnicas incluem o uso de matrizes geradoras, de fórmulas fechadas, de matrizes comutantes etc. (LIMA; CAMPELLO DE SOUZA, 2012; LIMA; NOVAES, 2014; LIMA; CAMPELLO DE SOUZA, 2016; OLIVEIRA NETO; LIMA; PANARIO, 2018). A seguir, um exemplo ilustrativo dos conceitos abordados nesta seção é provido.

Exemplo 4.2. *Neste exemplo, ilustra-se a associação entre autovetores e autovalores de uma QFNT de comprimento $N = 8$ sobre $\mathbb{F}_7$, observe que, neste caso, a QFNT como definida no início deste capítulo e a sua versão unitária, considerada nesta seção, coincidem; isso*

Tabela 2 – Multipicidades dos autovalores da matriz $\mathbf{F}_q$ da transformada numérica de Fourier quaterniônica com dimensões $N \times N$.

	$\#\{1\}$	$\#\{-\mu i^{-1}\sqrt{-1}\}$	$\#\{-1\}$	$\#\{\mu i^{-1}\sqrt{-1}\}$
$4L$	$L+1$	L	L	$L-1$
$4L+1$	$L+1$	L	L	L
$4L+2$	$L+1$	L	$L+1$	L
$4L+3$	$L+1$	$L+1$	$L+1$	L

Fonte: O Autor (2019).

acontece porque se tem $N = 8 \equiv 1 \pmod 7$. *O núcleo da transformada é o quatérnio* $q = 2 + 4i + 6j + k = a + bi + cj + dk$, *que possui ordem igual a* $\mathrm{ord}(q) = 8$, *naturalmente, e que é unimodular, isto é, pertence a* $\mathrm{Q}_{1,p}$. *A ideia é realizar um paralelo com a FNT apresentada no Exemplo 2.2, que é definida empregando o elemento* $\zeta = 2 + 2i = a_1 + b_1 i$, *que também possui ordem* $\mathrm{ord}(\zeta) = 8$ *e é unimodular, isto é, pertence a* $\mathrm{G}_{1,7}$. *Observe que* $a = a_1$ *e que* $b_1^2 = b^2 + c^2 + d^2$, *de modo que* q *e* ζ *se relacionam conforme indicado nas Proposições 3.4 e 4.1. Neste caso, tem-se* $\mu = b_1^{-1} V(q) = 2i + 3j + 4k$. *Assim, os vetores*

$$\mathbf{x_e} + \mathbf{X_e} = [4 \quad 4 \quad 5 \quad 3 \quad 4 \quad 3 \quad 5 \quad 4] \tag{4.28}$$

e

$$\mathbf{x_e} - \mathbf{X_e} = [5 \quad 2 \quad 5 \quad 2 \quad 0 \quad 2 \quad 5 \quad 2], \tag{4.29}$$

que são autovetores da FNT apresentada no Exemplo 2.2, com autovalores 1 *e* -1, *respectivamente, são também autovetores da QFNT deste exemplo, estando associados aos mesmos autovalores; os vetores*

$$\mathbf{x_o} - i\mathbf{X_o} = [0 \quad 0 \quad 6 \quad 4 \quad 0 \quad 3 \quad 1 \quad 0] \tag{4.30}$$

e

$$\mathbf{x_o} + i\mathbf{X_o} = [0 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \quad 0 \quad 6 \quad 3 \quad 1], \tag{4.31}$$

que são autovetores da FNT apresentada no Exemplo 2.2, com autovalores $\sqrt{-1} = i$ *e* $-\sqrt{-1} = -i$, *respectivamente, são autovetores da QFNT deste exemplo, estando associados aos autovalores*

$$\pm i^{-1}\sqrt{-1}\mu = \pm(2i + 3j + 4k).$$

4.4 CÁLCULO DA QFNT

Nesta seção, realiza-se uma discussão preliminar sobre formas de calcular a QFNT. O primeiro método apresentado é uma extensão, considerando a definição da transformada sobre

quatérnios generalizados em $\mathbb{F}_p$, de uma ideia que originalmente considera a QFT e demonstra que esta pode ser calculada por meio de duas DFT (ELL; SANGWINE, 2007). No presente contexto, o cálculo é feito empregando duas FNT, as quais, por sua vez, podem ser calculadas empregando algoritmos rápidos conhecidos e que demandam números reduzidos de operações aritméticas de adição e multiplicação, quando comparados com a complexidade de $\mathcal{O}(N^2)$ exigida pelo cálculo direto da transformada. A restrição deste método é que o núcleo da QFNT a ser calculada precisa ser um quatérnio puro (ELL; SANGWINE, 2007).

Considere um vetor $\mathbf{x} = (x(n))$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$, cuja transformada quaterniônica $\mathbf{X} = (X(k))$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, deseja-se calcular. Segundo a Definição 4.1, assumindo que o núcleo da transformada é um quatérnio puro q tal que $\mathrm{ord}(q) = N$, as componentes $X(k)$ são calculadas por

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) q^{kn}. \tag{4.32}$$

Se se fizer $\mu_1 = q$ e se encontrar um outro quatérnio puro μ_2 tal que $\mu_1 \perp \mu_2$, determina-se um terceiro quatérnio puro μ_3 e compõe-se a base ortogonal (μ_1, μ_2, μ_3), porém a condição $\mu_1 \perp \mu_2$ não precisa ser satisfeita; neste caso, a base (μ_1, μ_2, μ_3) não seria ortogonal, mas nada do que se considera no desenvolvimento que se apresenta em seguida, com respeito à representação simplética de quatérnios generalizados, seria alterado. Assim, é possível expressar as componentes $x(n)$ na forma simplética associada à referida base como

$$x(n) = (a'(n) + b'(n)\mu_1) + (c'(n) + d'(n)\mu_1)\mu_2$$

e reescrever (4.32) como

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} [(a'(n) + b'(n)\mu_1) + (c'(n) + d'(n)\mu_1)\mu_2]\mu_1^{kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} (a'(n) + b'(n)\mu_1)\mu_1^{kn} + \sum_{n=0}^{N-1} (c'(n) + d'(n)\mu_1)\mu_2\mu_1^{kn}. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Neste ponto, convém avaliar o comportamento de potências de μ_1 e, para isso, a representação matricial deste quatérnio, que é denotada por $[\mu_1]$, é considerada. Assumindo que $\mu_1 = b_{\mu_1} i + c_{\mu_1} j + d_{\mu_1} k$, tem-se

$$[\mu_1] = \begin{bmatrix} b_{\mu_1} i & c_{\mu_1} + d_{\mu_1} i \\ -c_{\mu_1} + d_{\mu_1} i & -b_{\mu_1} i \end{bmatrix}, \tag{4.34}$$

a qual pode ser expandida como

$$[\mu_1] = \mathbf{V} \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} \mathbf{V}^{-1}. \tag{4.35}$$

Na última equação, $\mathbf{V}$ é uma matriz cujas colunas são autovetores de $[\mu_1]$ associados aos autovalores λ e $-\lambda$, em que, segundo (3.37), $\lambda = \sqrt{-b_{\mu_1}^2 - c_{\mu_1}^2 - d_{\mu_1}^2}$. Sabe-se que $\lambda \neq 0$, pois,

caso contrário, q não seria inversível e a QFNT em questão não poderia ser definida. Vê-se, então, que dois casos precisam ser considerados, ao se elevar μ_1 a um expoente m. Se m for par, tem-se

$$[\mu_1]^m = \mathbf{V} \begin{bmatrix} \lambda^m & 0 \\ 0 & \lambda^m \end{bmatrix} \mathbf{V}^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda^m & 0 \\ 0 & \lambda^m \end{bmatrix} \tag{4.36}$$

ou, equivalentemente, $\mu_1^m = \lambda^m$. Neste caso, tem-se que $\mu_1^m = \lambda^m \in \mathbb{F}_p$. Se m for ímpar, tem-se

$$[\mu_1]^m = \mathbf{V} \begin{bmatrix} \lambda^{m-1}\lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{m-1}(-\lambda) \end{bmatrix} \mathbf{V}^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda^{m-1} & 0 \\ 0 & \lambda^{m-1} \end{bmatrix} [\mu_1] \tag{4.37}$$

ou, equivalentemente, $\mu_1^m = \lambda^{m-1}\mu_1$, em que $\lambda^{m-1} \in \mathbb{F}_p$.

Voltando a (4.33), observa-se que a expressão no primeiro somatório tem a mesma forma que a do cálculo de uma FNT definida com núcleo μ_1 e cujas componentes do vetor cuja transformada se deseja calcular são expressas na base $(1, \mu_1)$ de um espaço bidimensional sobre $\mathbb{F}_p$. Noutras palavras, identifica-se um isomorfismo entre o cálculo neste primeiro somatório e aquele realizado após a substituição de μ_1 por um imaginário puro $\alpha \in \mathbb{I}_p$. De modo mais específico, se se fizer

$$A' + B'\mu_1 = \sum_{n=0}^{N-1} (a'(n) + b'(n)\mu_1)\mu_1^{kn},$$

pode-se obter A' e B' escolhendo um elemento α tal que $\mathrm{ord}(\alpha) = N$ e $\alpha^m = \mu_1^m = \lambda^m$, para m par, isto é, $\alpha = \pm\lambda$, e calculando a FNT

$$A' + B'\alpha = \sum_{n=0}^{N-1} (a'(n) + b'(n)\alpha)\alpha^{kn}.$$

Algo semelhante pode ser obtido do segundo somatório de (4.33). Neste caso, é preciso mover μ_2 para fora do somatório (à direita). Isso pode ser feito considerando o fato de que, devido à não-comutatividade entre μ_1 e μ_2, se kn for par, tem-se

$$\mu_2\mu_1^{kn} = \mu_1^{kn}\mu_2,$$

e, se kn for ímpar, tem-se

$$\mu_2\mu_1^{kn} = -\mu_1^{kn}\mu_2.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} (c'(n) + d'(n)\mu_1)\mu_2\mu_1^{kn} &= \left[\sum_{n=0}^{N-1} (c'(n) + d'(n)\mu_1)(-1)^{kn}\mu_1^{kn}\right] \mu_2 \\ &= \left[\sum_{n=0}^{N-1} (c'(n) + d'(n)\mu_1)(-\mu_1)^{kn}\right] \mu_2 \end{aligned}$$

e, se se fizer,

$$C' + D'\mu_1 = \sum_{n=0}^{N-1} (c'(n) + d'(n)\mu_1)(-\mu_1)^{kn},$$

pode-se obter C' e D' usando o mesmo elemento $\alpha = \lambda$ anteriormente caracterizado e calculando a FNT

$$C' + D'\alpha = \sum_{n=0}^{N-1} (c'(n) + d'(n)\alpha)(-\alpha)^{kn}.$$

Como resultado, obtém-se a QFNT de $\mathbf{x}$ em sua forma simplética

$$\mathbf{X} = (A' + B'\mu_1) + (C' + D'\mu_1)\mu_2.$$

Do ponto de vista de complexidade aritmética associada ao cálculo propriamente dito da QFNT, o procedimento desenvolvido requer o cálculo de duas transformadas numéricas de Fourier de comprimento N sobre $\mathbb{I}_p$. Conforme mencionado anteriormente, este cálculo pode ser feito empregando algoritmos rápidos disponíveis na literatura (BLAHUT, 2010). Além disso, independentemente do algoritmo que se utilize para computar tais transformadas, deve-se observar que, como α é puramente imaginário, os elementos das respectivas matrizes de transformação são também puramente imaginários ou pertencentes a $\mathbb{F}_p$; assim, todos os produtos efetuados envolvem duas multiplicações em $\mathbb{F}_p$ (e não três ou quatro, que seria o número necessário caso os operandos fossem elementos de $\mathbb{I}_p$, com partes reais e imaginárias possivelmente não nulas).

Os passos do procedimento apresentado para o cálculo de $\mathbf{X}$, a QFNT de comprimento N com núcleo dado por um quatérnio puro $\mu_1 = b_{\mu_1} i + c_{\mu_1} j + d_{\mu_1} k$ de um vetor $\mathbf{x}$, são sumarizados a seguir:

1. Encontre um quatérnio puro μ_2, tal que $\mu_1 \perp \mu_2$, e obtenha a representação simplética

   $$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2\mu_2;$$

   as componentes de $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ pertencem ao plano $(1, \mu_1)$.

2. Expanda as componentes simpléticas

   $$\mathbf{x}_1 = a' + b'\mu_1$$

   e

   $$\mathbf{x}_2 = c' + d'\mu_1;$$

   as componentes a', b', c' e d' são escalares.

3. Faça $\alpha = \pm\lambda = \sqrt{-b_{\mu_1}^2 - c_{\mu_1}^2 - d_{\mu_1}^2}$ e construa os vetores complexos

   $$\mathbf{x}_1' = a' + b'\alpha$$

   e

   $$\mathbf{x}_2' = c' + d'\alpha.$$

4. Calcule as FNT com núcleos dados por α e $-\alpha$ de $\mathbf{x}'_1$ e $\mathbf{x}'_2$, respectivamente. Essas FNT são expressas como

$$\mathbf{X}'_1 = A' + B'\alpha$$

e

$$\mathbf{X}'_2 = C' + D'\alpha.$$

5. Obtenha as componentes da representação simplética de $\mathbf{X}$

$$\mathbf{X}_1 = A' + B'\mu_1$$

e

$$\mathbf{X}_2 = C' + D'\mu_1.$$

6. Obtenha $\mathbf{X}$ em sua forma simplética por

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2\mu_2.$$

Exemplo 4.3. *A fim de ilustrar a aplicação do procedimento descrito, considera-se a QFNT de comprimento* $N = 12$ *do vetor de quatérnios generalizados sobre* $\mathbb{F}_7$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5+6i+0j+1k \\ 4+0i+6j+4k \\ 6+6i+6j+1k \\ 6+3i+2j+0k \\ 2+6i+2j+1k \\ 4+0i+2j+1k \\ 4+5i+2j+5k \\ 4+1i+3j+0k \\ 1+0i+0j+2k \\ 4+2i+1j+0k \\ 3+2i+2j+2k \\ 1+3i+4j+3k \end{bmatrix}.$$

O quatérnio puro usado para definir a transformada é $q = 6i + 4j + 1k$*, o qual possui ordem*

multiplicativa $\mathrm{ord}(q) = 12$*. Diretamente da definição, obtém-se a QFNT de* $\mathbf{x}$*:*

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2+6i+2j+6k \\ 2+3i+5j+3k \\ 5+5i+0j+0k \\ 2+0i+6j+2k \\ 2+0i+2j+6k \\ 0+0i+4j+2k \\ 5+2i+1j+4k \\ 5+2i+6j+0k \\ 4+0i+4j+6k \\ 2+5i+6j+4k \\ 1+4i+3j+0k \\ 2+3i+3j+0k \end{bmatrix}.$$

Para aplicar o procedimento descrito e verificar que, como resultado, obtém-se o mesmo vetor transformado $\mathbf{X}$ *dado na última expressão, (1) faz-se, inicialmente,* $\mu_1 = q$ *e, escolhendo* $\mu_2 = 4i + 4j + 2k$*, obtém-se a representação simplética de* $\mathbf{x}$*, a qual é dada por*

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} (5+4\mu_1)+(5+1\mu_1)\mu_2 \\ (4+0\mu_1)+(4+3\mu_1)\mu_2 \\ (6+3\mu_1)+(1+3\mu_1)\mu_2 \\ (6+3\mu_1)+(6+6\mu_1)\mu_2 \\ (2+6\mu_1)+(6+4\mu_1)\mu_2 \\ (4+4\mu_1)+(3+5\mu_1)\mu_2 \\ (4+2\mu_1)+(3+4\mu_1)\mu_2 \\ (4+1\mu_1)+(2+2\mu_1)\mu_2 \\ (1+4\mu_1)+(4+4\mu_1)\mu_2 \\ (4+4\mu_1)+(5+0\mu_1)\mu_2 \\ (3+2\mu_1)+(6+2\mu_1)\mu_2 \\ (1+4\mu_1)+(6+1\mu_1)\mu_2 \end{bmatrix}.$$

(2) As componentes simplex e perplex de $\mathbf{x}$ *são dadas respectivamente por*

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 5+4\mu_1 \\ 4+0\mu_1 \\ 6+3\mu_1 \\ 6+3\mu_1 \\ 2+6\mu_1 \\ 4+4\mu_1 \\ 4+2\mu_1 \\ 4+1\mu_1 \\ 1+4\mu_1 \\ 4+4\mu_1 \\ 3+2\mu_1 \\ 1+4\mu_1 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 5+1\mu_1 \\ 4+3\mu_1 \\ 1+3\mu_1 \\ 6+6\mu_1 \\ 6+4\mu_1 \\ 3+5\mu_1 \\ 3+4\mu_1 \\ 2+2\mu_1 \\ 4+4\mu_1 \\ 5+0\mu_1 \\ 6+2\mu_1 \\ 6+1\mu_1 \end{bmatrix}.$$

(3) Faça $\alpha = \sqrt{-6^2 - 4^2 - 1^2} = \sqrt{-4} = 2i$ *e construa os vetores*

$$\mathbf{x}_1' = \begin{bmatrix} 5+4(2i) \\ 4+0(2i) \\ 6+3(2i) \\ 6+3(2i) \\ 2+6(2i) \\ 4+4(2i) \\ 4+2(2i) \\ 4+1(2i) \\ 1+4(2i) \\ 4+4(2i) \\ 3+2(2i) \\ 1+4(2i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+1i \\ 4+0i \\ 6+6i \\ 6+6i \\ 2+5i \\ 4+1i \\ 4+4i \\ 4+2i \\ 1+1i \\ 4+1i \\ 3+4i \\ 1+1i \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{x}_2' = \begin{bmatrix} 5+1(2i) \\ 4+3(2i) \\ 1+3(2i) \\ 6+6(2i) \\ 6+4(2i) \\ 3+5(2i) \\ 3+4(2i) \\ 2+2(2i) \\ 4+4(2i) \\ 5+0(2i) \\ 6+2(2i) \\ 6+1(2i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+2i \\ 4+6i \\ 1+6i \\ 6+5i \\ 6+1i \\ 3+3i \\ 3+1i \\ 2+4i \\ 4+1i \\ 5+0i \\ 6+4i \\ 6+2i \end{bmatrix}.$$

(4) Na Definição 2.4 embora se tenha imposto a restrição de que o núcleo da FNT predominantemente considerada neste trabalho seja unimodular, isto é, pertença ao conjunto $\mathrm{G}_{1,p}$*, nada impede que tal núcleo seja um elemento arbitrário pertencente a* $\mathbb{I}_p$*, como se faz nesta seção e, em particular, neste exemplo. Empregando a Definição 2.4 obtém-se a matriz da FNT com*

núcleo $\alpha = 2i$ a ser aplicada a $\mathbf{x}'_1$:

$$\mathbf{F}_{(2i)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2i & 3 & 6i & 2 & 4i & 6 & 5i & 4 & 1i & 5 & 3i \\ 1 & 3 & 2 & 6 & 4 & 5 & 1 & 3 & 2 & 6 & 4 & 5 \\ 1 & 6i & 6 & 1i & 1 & 6i & 6 & 1i & 1 & 6i & 6 & 1i \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4i & 5 & 6i & 4 & 2i & 6 & 3i & 2 & 1i & 3 & 5i \\ 1 & 6 & 1 & 6 & 1 & 6 & 1 & 6 & 1 & 6 & 1 & 6 \\ 1 & 5i & 3 & 1i & 2 & 3i & 6 & 2i & 4 & 6i & 5 & 4i \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 4 & 2 & 1 & 4 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1i & 6 & 6i & 1 & 1i & 6 & 6i & 1 & 1i & 6 & 6i \\ 1 & 5 & 4 & 6 & 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 6 & 2 & 3 \\ 1 & 3i & 5 & 1i & 4 & 5i & 6 & 4i & 2 & 6i & 3 & 2i \end{bmatrix};$$

analogamente, obtém-se a matriz da FNT com núcleo $\alpha = -2i$ a ser aplicada a $\mathbf{x}'_2$:

$$\mathbf{F}_{(-2i)} = \begin{bmatrix} 1 & 5i & 3 & 1i & 2 & 3i & 6 & 2i & 4 & 6i & 5 & 4i \\ 1 & 3 & 2 & 6 & 4 & 5 & 1 & 3 & 2 & 6 & 4 & 5 \\ 1 & 1i & 6 & 6i & 1 & 1i & 6 & 6i & 1 & 1i & 6 & 6i \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3i & 5 & 1i & 4 & 5i & 6 & 4i & 2 & 6i & 3 & 2i \\ 1 & 6 & 1 & 6 & 1 & 6 & 1 & 6 & 1 & 6 & 1 & 6 \\ 1 & 2i & 3 & 6i & 2 & 4i & 6 & 5i & 4 & 1i & 5 & 3i \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 4 & 2 & 1 & 4 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 6i & 6 & 1i & 1 & 6i & 6 & 1i & 1 & 6i & 6 & 1i \\ 1 & 5 & 4 & 6 & 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 6 & 2 & 3 \\ 1 & 4i & 5 & 6i & 4 & 2i & 6 & 3i & 2 & 1i & 3 & 5i \end{bmatrix};$$

daí, obtém-se

$$\mathbf{X}'_1 = \mathbf{F}_{(2i)}\mathbf{x}'_1 = \begin{bmatrix} 2+2i \\ 2+5(2i) \\ 5+4(2i) \\ 2+3(2i) \\ 2+0(2i) \\ 0+1(2i) \\ 5+5(2i) \\ 5+2(2i) \\ 4+2(2i) \\ 2+4(2i) \\ 1+2(2i) \\ 2+4(2i) \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{X}'_2 = \mathbf{F}_{(-2i)}\mathbf{x}'_2 = \begin{bmatrix} 2+0(2i) \\ 3+6(2i) \\ 6+5(2i) \\ 0+6(2i) \\ 6+1(2i) \\ 6+3(2i) \\ 6+1(2i) \\ 4+4(2i) \\ 0+4(2i) \\ 3+1(2i) \\ 0+5(2i) \\ 3+4(2i) \end{bmatrix}.$$

(5), (6) Assim, $\mathbf{X}$ *é dado em sua forma simplética por*

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} (2+2\mu_1)+(2+0\mu_1)\mu_2 \\ (2+5\mu_1)+(3+6\mu_1)\mu_2 \\ (5+4\mu_1)+(6+5\mu_1)\mu_2 \\ (2+3\mu_1)+(0+6\mu_1)\mu_2 \\ (2+0\mu_1)+(6+1\mu_1)\mu_2 \\ (0+1\mu_1)+(6+3\mu_1)\mu_2 \\ (5+5\mu_1)+(6+1\mu_1)\mu_2 \\ (5+2\mu_1)+(4+4\mu_1)\mu_2 \\ (4+2\mu_1)+(0+4\mu_1)\mu_2 \\ (2+4\mu_1)+(3+1\mu_1)\mu_2 \\ (1+2\mu_1)+(0+5\mu_1)\mu_2 \\ (2+4\mu_1)+(3+4\mu_1)\mu_2 \end{bmatrix},$$

a qual, se convertida para a base canônica (i, j, k)*, coincide com a representação de* $\mathbf{X}$ *dada no início do exemplo.*

O segundo método para implementação da QFNT é baseado nas ideias clássicas de dizimação no tempo e na frequência. A aplicação de tais ideias ao presente cenário é bastante direta, uma vez que o núcleo da transformada, assim como no caso da DFT e no da FNT, é uma raiz $\omega_N = q$ de ordem N da unidade na estrutura algébrica considerada, a qual pode ser usada para expressar, por exemplo, uma raiz $\gamma_{N'}$ de ordem $N' = N/2$ da unidade como $\gamma_{N'} = \omega_N^2$. Neste caso, agrupando as componentes de índice par e as de índice ímpar do vetor $\mathbf{x}$ cuja transformada se deseja obter, a expressão para o cálculo das componentes da QFNT pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N'-1} x(2n)\omega_N^{k(2n)} + \sum_{n=0}^{N'-1} x(2n+1)\omega_N^{k(2n+1)} \\ &= \sum_{n=0}^{N'-1} x_e(n)\gamma_{N'}^{kn} + \omega_N^k \sum_{n=0}^{N'-1} x_o(n)\gamma_{N'}^{kn}, \end{aligned} \tag{4.38}$$

$k = 0, 1, \ldots, N-1$, em que $x_e(n) = x(2n)$ e $x_o(n) = x(2n+1)$, $n = 0, 1, \ldots, N'-1$. Em (4.38), vê-se que o cálculo de uma QFNT de comprimento par N pode ser realizado por meio do cálculo de duas QFNT de comprimento $N' = N/2$; produtos entre ω_N^k e o segundo somatório da referida expressão precisam ser contabilizados. Essa ideia pode ser generalizada para valores de N com diferentes fatorações. Em particular, quando N é uma potência de 2, algoritmos com complexidade de $\mathcal{O}(N \log_2 N)$ operações entre quatérnios podem ser obtidos.

Em todo caso, se o objetivo for mensurar a complexidade aritmética deste segundo método de implementação da QFNT em termos de operações sobre o corpo base, é preciso considerar estratégias para calcular sobretudo produtos entre quatérnios de modo mais eficiente

que o direto, o qual emprega 16 multiplicações em $\mathbb{F}_p$ (vide (3.5)). Embora essa questão não seja abordada com profundidade no presente trabalho, é válido citar algumas referências que podem ser úteis ao leitor interessado. O problema de determinar a complexidade de um produto entre quatérnios é um caso especial do problema de determinar a complexidade de um conjunto de formas bilineares (HOWELL; LAFON, 1975). Outros casos especiais aparecem na literatura, como, por exemplo, o do cálculo do produto entre matrizes 2×2, que, segundo (STRASSEN, 1969), pode ser efetuado com 7 multiplicações. Em (HOPCROFT; KERR, 1971) e (WINOGRAD, 1971), mostra-se que o referido número é também necessário, tanto no caso geral (os elementos das matrizes podem pertencer a anéis comutativos ou não-comutativos) quanto no caso comutativo. Em (FIDUCCIA, 1972), o autor menciona que 10 multiplicações são suficientes para o produto quaterniônico e, em (GROOTE, 1975), demonstra-se que 10 é o número necessário e suficiente de multiplicações para calcular simultaneamente os produtos $q_1 q_2$ e $q_2 q_1$ entre dois quatérnios q_1 e q_2. Finalmente, em (MAKAROV, 1977), mostra-se que 8 é o número necessário e suficiente para realizar um produto quaterniônico no caso geral e que pelo menos 7 multiplicações são necessárias no caso comutativo. Em trabalhos futuros, pretende-se considerar as referências citadas e avaliar, inclusive, se o fato de, no cálculo de uma QFNT, estar-se realizando produtos basicamente por potências de um elemento q fixo empregado como núcleo, permite que o número global de operações no corpo base $\mathbb{F}_p$ requeridos pela transformada seja reduzido ainda mais.

5 APLICAÇÕES DA QFNT EM PROCESSAMENTO DE IMAGENS

Neste capítulo, são discutidas de forma preliminar algumas possíveis aplicações da transformada introduzida no Capítulo 4. O foco é no campo de processamento digital de imagens, em que a QFNT permite a manipulação simultânea de até quatro canais associados a algum espaço de cores. Essa ideia, que tem sido explorada em diversos trabalhos arquivados na literatura, faz contraponto à maioria das técnicas voltadas ao processamento digital de imagem, que são aplicáveis a imagens monocromáticas (imagens em escala de cinza, por exemplo); quando se trata de processar imagens coloridas, o que normalmente se faz é aplicar essas técnicas de forma independente a cada canal de cor.

Recorrendo aos quatérnios, o que se faz é mapear nas coordenadas de um quatérnio os valores numéricos associados a cada canal de cor de um pixel em determinada posição da imagem. No caso de uma imagem RGB (*red*, *green*, *blue*), pode-se, por exemplo, atribuir o valor zero à parte real do respectivo quatérnio, e atribuir os valores numéricos associados às camadas vermelha, verde e azul de um pixel aos coeficientes de i, j e k do mesmo quatérnio, respectivamente. No caso de uma imagem PNG (*portable network graphics*), além dos três canais de cor RGB, pode-se ter uma camada adicional de transparência que é aplicada às primeiras; essa camada de transparência seria associada à parte real dos quatérnios, que tinha sido anulada no caso de imagens RGB sem canal extra de transparência. Utilizando estratégias como essas, uma imagem colorida pode ser representada por uma matriz de quatérnios, cuja QFNT pode ser calculada. Observe que, se os quatérnios nessa matriz forem também representados matricialmente, ter-se-á a imagem representada como uma *matriz de matrizes* 2×2, cujos números de linhas e de colunas são o dobro dos números de linhas e colunas da imagem correspondente.

Naturalmente, a aplicação de uma QFNT a uma imagem requer uma versão bidimensional dessa ferramenta. De fato, versões 2D da QFT discreta têm sido extensivamente estudadas e aplicadas em cenários envolvendo processamento de imagem. A maior parte das propriedades dessas transformadas decorre de extensões relativamente simples a duas dimensões das respectivas propriedades da QFT unidimensional; algo semelhante deve ocorrer, quando são consideradas as versões em uma e em duas dimensões da QFNT. De qualquer forma, para o que se apresenta neste capítulo, é suficiente observar que uma QFNT bidimensional de uma imagem $\mathbf{y}$ quadrada com dimensões $N \times N$ pode ser calculada multiplicando a matriz de transformação da QFNT unidimensional e a sua versão transposta respectivamente à direita e à esquerda por $\mathbf{y}_q$, representação quaterniônica de $\mathbf{y}$. Dessa forma, a 2D-QFNT é calculada por

$$\mathbf{Y}_q = \mathbf{F}_q \mathbf{y}_q \mathbf{F}_q^T, \tag{5.1}$$

em que $\mathbf{F}_q$ é, conforme anteriormente estabelecido, a matriz da QFNT unidimensional. Da

matriz quaterniônica $\mathbf{Y}_q$, obtém-se a imagem (colorida) transformada $\mathbf{Y}$. A 2D-QFNT inversa é calculada trocando-se $\mathbf{F}_q$ por $\mathbf{F}_q^{-1}$. Note que, da forma como a última equação é escrita, a 2D-QFNT equivale ao cálculo da QFNT à esquerda das colunas de $\mathbf{y}_q$ e da QFNT à direita das linhas de $\mathbf{y}_q$ (visto que os respectivos produtos matriciais são não-comutativos). Embora neste trabalho se assuma que a referida forma é a que se usa para definir a 2D-QFNT, tal transformada poderia ser definida combinando de maneiras diferentes os tipos de QFNT unidimensionais aplicadas às linhas e colunas de $\mathbf{y}_q$.

Como consequência da possibilidade de se calcular a QFNT de imagens coloridas, algumas aplicações mais específicas podem ser vislumbradas. Dentre elas, podem ser mencionadas:

- A filtragem de imagens coloridas usando filtros cujos coeficientes sejam quatérnios generalizados sobre um corpo finito. É razoável esperar que uma filtragem desse tipo possa ser processada no domínio da 2D-QFNT, empregando alguma versão do Teorema da Convolução adaptado para essa transformada (SANGWINE; ELL, 2000);

- A inserção / extração de marcas d'água frágeis. Há artigos em que são documentados esquemas de marca d'água baseados em transformadas numéricas (TAMORI; AOKI; YAMAMOTO, 2002; TAMORI; YAMAMOTO, 2009; CINTRA et al., 2009). Usando a QFNT, talvez seja possível criar esquemas semelhantes diretamente aplicáveis a imagens coloridas;

- A cifragem de imagens coloridas. Recentemente, têm sido propostas técnicas para cifragem de imagens empregando transformadas numéricas e, em particular, versões fracionárias dessas transformadas (LIMA; LIMA; CAMPELLO DE SOUZA, 2017; LIMA; NOVAES, 2014). Isso é possível, basicamente, empregando a ordem fracionária como um parâmetro secreto, que muda a cada bloco de imagem processado. Introduzindo alguma espécie de parametrização na definição da QFNT, algo similar pode ser proposto.

Nas seções que se seguem, são apresentados resultados preliminares relacionados a dois dos pontos listados acima. Na Seção 5.1, é demonstrado que QFNT pode ser útil na uniformização de histogramas de imagens digitais coloridas; neste caso, ainda que não haja uma parametrização (para que se use uma chave-secreta) e outras operações que configurariam um esquema de cifragem propriamente dito, mostra-se que uma etapa de aplicação da QFNT pode contribuir para a robustez de tais esquemas contra ataques baseados em medidas estatísticas. Na Seção 5.2, revisita-se o método para marca d'água proposto em (CINTRA et al., 2009), porém, adaptando-o para inserção de marcas coloridas em imagens também coloridas, no domínio da QFNT; nesse contexto, são investigados aspectos relacionados à degradação que a inserção da marca impõe às imagens em questão e à possibilidade de identificação de regiões das mesmas imagens que tenham sofrido manipulação não-autorizada.

Figura 1 – Imagem original: camadas (a) vermelha, (b) verde e (c) azul.

(a) (b) (c)

Fonte: WIKIPÉDIA (2019).

5.1 UNIFORMIZAÇÃO DE HISTOGRAMAS PARA CIFRAGEM DE IMAGENS

Nesta seção, são apresentados alguns resultados ilustrativos da aplicação da QFNT a imagens coloridas, com vistas à uniformização de histogramas para cifragem dessas imagens. Define-se uma 2D-QFNT a partir de uma QFNT unidimensional cujo núcleo é o quatérnio $q = 7 + 8i + 4j + 8k$ sobre $\mathbb{F}_{257}$. A ordem multiplicativa de q é $\mathrm{ord}(q) = 128$ e, portanto, uma transformada com comprimento $N = 128$ é obtida. Essa transformada é, então, aplicada à representação quaterniônica de uma imagem PNG com dimensões 128×128 e com camada de transparência, conforme descrito anteriormente. Os pixels da imagem, em cada camada de cor e de transparência, são números inteiros de 0 a 255 (8 bits).

Nos experimentos computacionais realizados, considerou-se a imagem cujas camadas de cor são apresentadas na Figura 1. Na Figura 2a, é apresentada a respectiva imagem colorida, sem a inclusão da camada de transparência, que é mostrada isoladamente na Figura 2b. Nesta camada de transparência, que, alinhada com as camadas de cor, funciona como uma espécie de "janela", quanto mais próxima do branco for determinada região, mais se verá das cores que estão "por trás" dessa região; quanto mais próxima do preto for determinada região, menos se verá das cores que estão "por trás" dessa região, a qual, na imagem final, é substituída por uma região com tom igualmente próximo do branco. A referida imagem final, considerando a ação da camada de transparência, é apresentada na Figura 2c.

Figura 2 – Imagem original: (a) três camadas de cor (sem camada de transparência), (b) camada de transparência e (c) três camadas de cor (com camada de transparência).

(a) (b) (c)

Fonte: WIKIPÉDIA (2019).

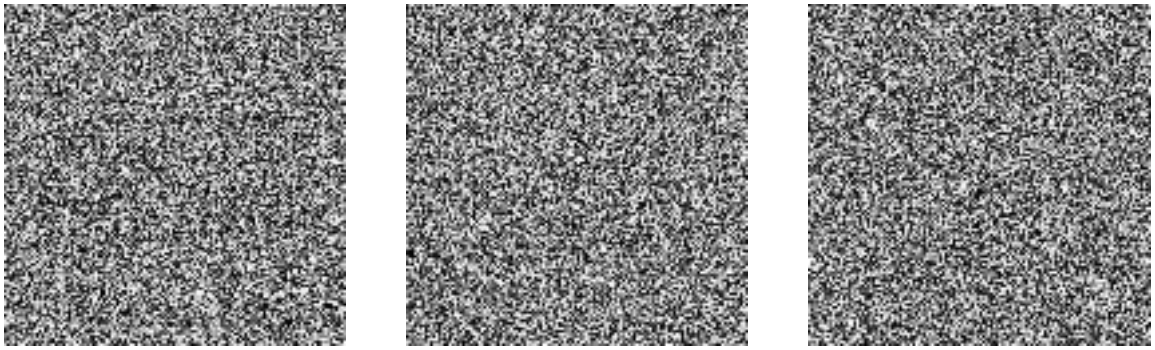
Nas Figuras 3 e 4, são apresentadas camadas e imagens correspondentes àquelas apresentadas nas Figuras 1 e 2, porém, considerando a versão transformada da imagem original. O que mais chama atenção nas últimas figuras é o aspecto visual ruidoso, que sugere uma degradação do conteúdo das camadas e imagens originais. Tal aspecto tem reflexo no histograma de cada uma das referidas camadas, conforme mostrado na Figura 5. Enquanto os histogramas das camadas de cor e de transparência da imagem original têm formatos arbitrários, os mesmos histogramas têm formato predominantemente uniforme na imagem transformada. A aparente ocultação, proporcionada pela aplicação da QFNT, da distribuição original dos valores dos pixels da imagem é um fenômeno desejado do ponto de vista criptográfico; ele está associado à robustez contra ataques estatísticos que um esquema para cifragem de imagens tendo a aplicação da QFNT como um dos seus blocos construtivos deve possuir.

Outra observação interessante pode ser feita ao se calcular os coeficientes de correlação para as camadas da imagem original e da imagem transformada. Este coeficiente mede a correlação entre pixels vizinhos de uma imagem (a vizinhança pode ser vertical, horizontal ou diagonal) e deve ser elevado (próximo de 1) em imagens que não tenham sido manipuladas ou construídas artificialmente (BLACKEDGE; AHMED; FAROOQ, 2010); isso é confirmado pelos valores obtidos e exibidos na primeira parte da Tabela 3. Por outro lado, ao se transformar a imagem com a QFNT, os coeficientes de correlação obtidos têm valor absoluto sempre menor que $0,05$, o que indica pouca dependência entre os valores assumidos por pixels vizinhos. Tal comportamento também é desejável do ponto de vista criptográfico.

Conforme exposto anteriormente, a simples aplicação da QFNT a uma imagem não constitui um esquema criptográfico. Seria necessária a inclusão de algum mecanismo dependente de uma chave secreta e de etapas que garantissem a satisfação de premissas básicas neste cenário.

Figura 3 – Imagem transformada: camadas (a) vermelha, (b) verde e (c) azul.

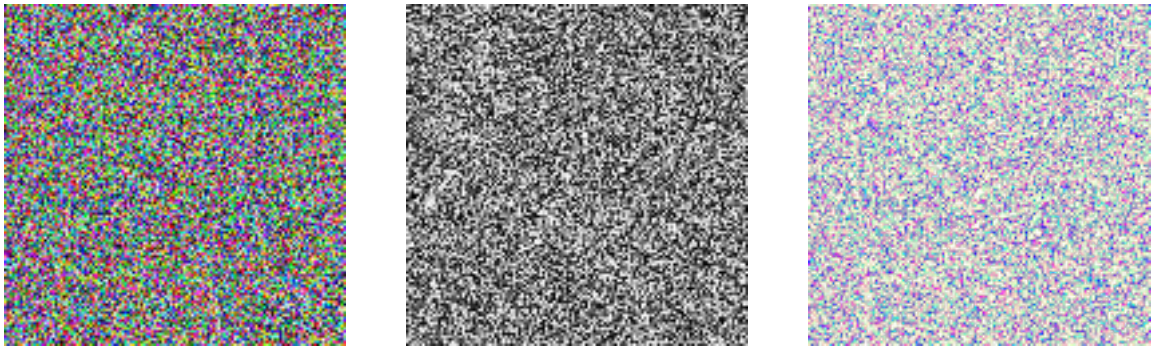
(a) (b) (c)



Fonte: O Autor (2019).

Figura 4 – Imagem transformada: (a) três camadas de cor (sem camada de transparência), (b) camada de transparência e (c) três camadas de cor (com camada de transparência).

(a) (b) (c)



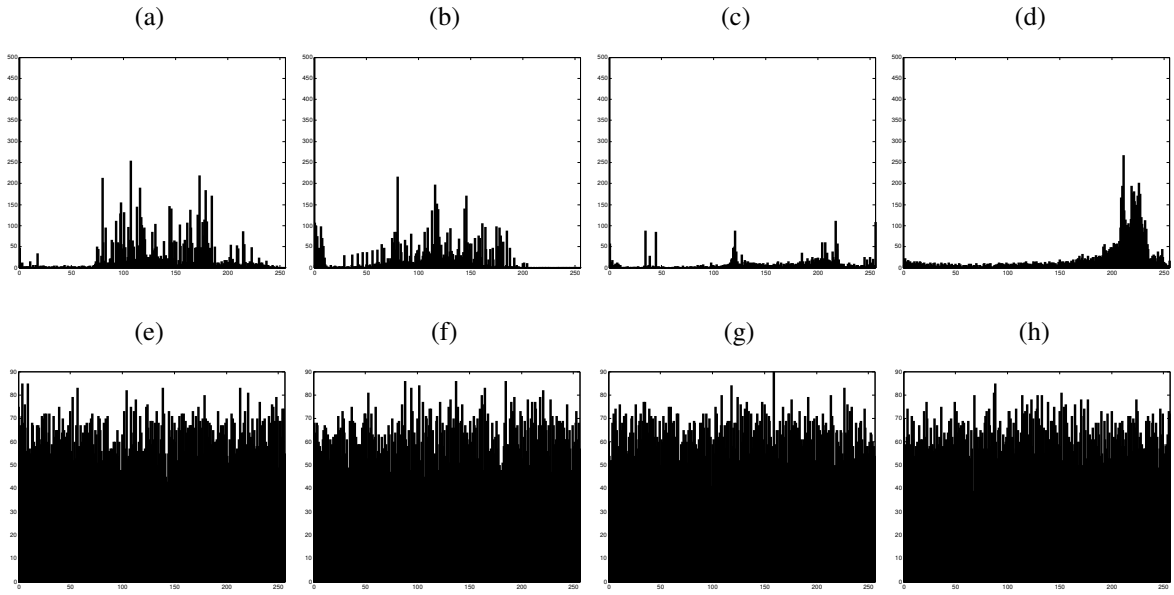
Fonte: O Autor (2019).

De qualquer forma, considerando os resultados apresentados nesta seção, pode-se observar indícios de que a QFNT é uma candidata em potencial a fazer parte de sistemas para cifragem de imagens, trazendo, inerentemente, a possibilidade de se processar de forma agregada todas as camadas de uma imagem colorida.

5.2 MARCA D'ÁGUA DIGITAL NO DOMÍNIO DA QFNT

Nas últimas décadas, tem sido cada vez mais fácil o compartilhamento de diversos tipos de arquivo por meio das redes de computadores; na Internet, em particular, têm aumentado em taxas crescentes os números de imagens, vídeos e áudio disponibilizados pelos usuários e, em velocidade semelhante, as estratégias para manipulação muitas vezes não-autorizadas

Figura 5 – Histogramas: camadas (a) vermelha, (b) verde, (c) azul e (d) de transparência da imagem original; camadas (d) vermelha, (e) verde, (f) azul e (g) de transparência da imagem transformada.



Fonte: O Autor (2019).

Tabela 3 – Coeficientes de correlação entre pixels vizinhos nas camadas da imagem original (r) e nas da imagem transformada ($\tilde{r}$). As letras v, h e d estão associadas às vizinhanças vertical, horizontal e diagonal, respectivamente.

	vermelha	verde	azul	transp.
r_v	0.9837	0.9937	0.9855	0.9700
r_h	0.9576	0.9620	0.9394	0.9723
r_d	0.9515	0.9589	0.9268	0.9487
$\tilde{r}_v$	0.0061	-0.0056	-0.0238	-0.0233
$\tilde{r}_h$	0.0052	0.0325	0.0401	-0.0048
$\tilde{r}_d$	0.0086	0.0117	-0.0244	0.0216

Fonte: O Autor (2019).

dessas mídias. Atualmente, tais manipulações têm estabelecido como alvo não apenas grandes produtoras de conteúdo ou pessoas em evidência na sociedade, mas atingido, também, pessoas comuns, as quais são, em não raras situações, vítimas de montagens de fotografia, por exemplo, e de toda sorte de vazamento de informação que deveria ser de cunho privado.

Nesse contexto, uma necessidade advinda de questões relacionadas à cópia e à divulgação irregular de mídias (pirataria digital) é a proteção e verificação de sua autenticidade. Quando se trata de imagens digitais, uma ferramenta muito útil na prevenção e detecção das ações mencionadas é a inserção de marcas que possam servir para sua identificação; tal processo, que é conhecido como marca d'água digital, possui algumas premissas, dentre as quais se pode

mencionar a facilidade de detecção por quem a utiliza (a parte que a inseriu ou uma segunda parte que deseje identificar a sua presença), a robustez contra alterações (maliciosas ou não) que uma imagem pode sofrer (compressão, filtragem, corte etc.), a invisibilidade estatística e a imperceptibilidade visual (LUO; HEILEMAN; PIZANO, 2004; NIKOLAIDIS; PITAS, 1998; VERMA; JHA; OJHA, 2015).

Existem dois grandes grupos de métodos para inserção de uma marca d'água em uma imagem: no primeiro grupo, a inserção da marca acontece no domínio espacial e, no segundo, a inserção da marca ocorre no domínio da frequência (da transformada). No primeiro caso, a marca é incluída pela realização direta de algum ajuste nos pixels (normalmente, em seus bits menos signficativos, a fim de que haja pouca alteração peceptível à visão humana) (LUO; HEILEMAN; PIZANO, 2004; NIKOLAIDIS; PITAS, 1998; VERMA; JHA; OJHA, 2015). No segundo grupo de métodos, os bits da marca são inseridos por meio de ajustes impostos em coeficientes selecionados no domínio de transformadas como a transformada discreta do cosseno (DCT) e a transformada discreta de Fourier (DFT) (LUO; HEILEMAN; PIZANO, 2004; NIKOLAIDIS; PITAS, 1998; VERMA; JHA; OJHA, 2015).

O método de inserção de uma marca d'água em uma imagem pode ser ainda dividido em duas classes distintas baseadas na necessidade de possuir ou não a imagem original para detecção da marca inserida; tais classes são identificadas, respectivamente, como não-cega e cega, respectivamente. Um método não-cego tem utilidade, por exemplo, num cenário em que o detentor dos direitos autorais de uma imagem, ao comercializá-la com determinado comprador, introduza um certo identificador associado à transação; posteriormente, se o referido detentor interceptar uma cópia não-autorizada da imagem, ele poderá, de posse da imagem original não-marcada, determinar a origem da cópia.

Marca d'água em imagens coloridas que não fazem uso de quatérnios, de uma forma geral, operam dividindo a imagem em suas respectivas camadas de cor e inserem a marca em uma ou mais dessas camadas; de modo similar, pode-se inserir a marca apenas na camada de luminância, por exemplo, o que normalmente é de fácil implementação, mas não utiliza o vínculo que existe entre as camadas de cores e nem explora o possível aumento na capacidade de informação inserida pelo uso de mais de uma camada (MA et al., 2008; RZADKOWSKI; SNOPEK, 2015).

Nos últimos anos, têm surgido alguns métodos que utilizam quatérnios como uma ferramenta que permite a inserção de uma marca d'água em todas as camadas de cor de uma imagem (MA et al., 2008; RZADKOWSKI; SNOPEK, 2015). A seguir, revisita-se o esquema de marca d'água frágil e não-cego proposto em (CINTRA et al., 2009), que, originalmente, emprega a transformada numérica do cosseno e se enquadra entre as técnicas voltadas à inserção de marcas em imagens monocromáticas (ou em camadas isoladas de imagens com múltiplas camadas). O esquema é adaptado a imagens coloridas por meio do emprego da QFNT definida no presente trabalho.

5.2.1 Marca d'água binária

Nesta parte do trabalho foi seguido o método desenvolvido por (CINTRA et al., 2009) adaptado para o caso quaterniônico.

5.2.1.1 Inserção de marca d'água binária

A imagem em que a marca será inserida é uma imagem colorida I no formato PNG, que possui uma quarta camada adicional denominada de transparência; ela é mapeada numa matriz de quatérnios Iq conforme descrito nas seções anteriores deste capítulo. A referida imagem na forma quaterniônica pode ser escrita como

$$Iq = Iq_R + Iq_M, \tag{5.2}$$

em que $Iq_R \equiv Iq\ (mod\ p)$ é o resíduo módulo p de Iq e Iq_M é uma matriz contendo elementos que são múltiplos de p. O que se pretende fazer é inserir uma marca d'água M no domínio da QFNT do resíduo de Iq. Mais especificamente, denotando por $\hat{I}q_R$ a QFNT bidimensional de Iq_R, tem-se

$$\hat{I'}q_R = \hat{I}q_R + Mq\ (\mathrm{mod}\ \ p) \tag{5.3}$$

em que Mq é a marca na forma quaterniônica; tal forma é obtida copiando nos quatro coeficientes do quatérnio associado a um dado pixel (binário) da marca o valor do respectivo bit. Se o bit for "1", o quatérnio associado é $1 + i + j + k$; se o bit for "0", o quatérnio associado será o quatérnio nulo. Aplicando a QFNT bidimensional inversa a $\hat{I'}q_R$, obtém-se $I'q_R$, a versão quaterniônica residual da imagem marcada no domínio de origem (espacial). Para se obter a imagem quaterniônica marcada final, $I'q$, faz-se

$$I'q = I'q_R + Iq_M. \tag{5.4}$$

Por fim, transforma-se a imagem quaterniônica marcada $I'q$ na imagem marcada I'.

5.2.1.2 Extração de marca d'água binária

A extração da marca d'água da imagem marcada percorre passos semelhantes aos que foram empregados na sua inserção. Inicialmente, versões quaterniônicas da imagem original e da imagem marcada são obtidas, bem como seus resíduos são calculados:

$$Iq_R = Iq\ (\mathrm{mod}\ \ p); \tag{5.5}$$

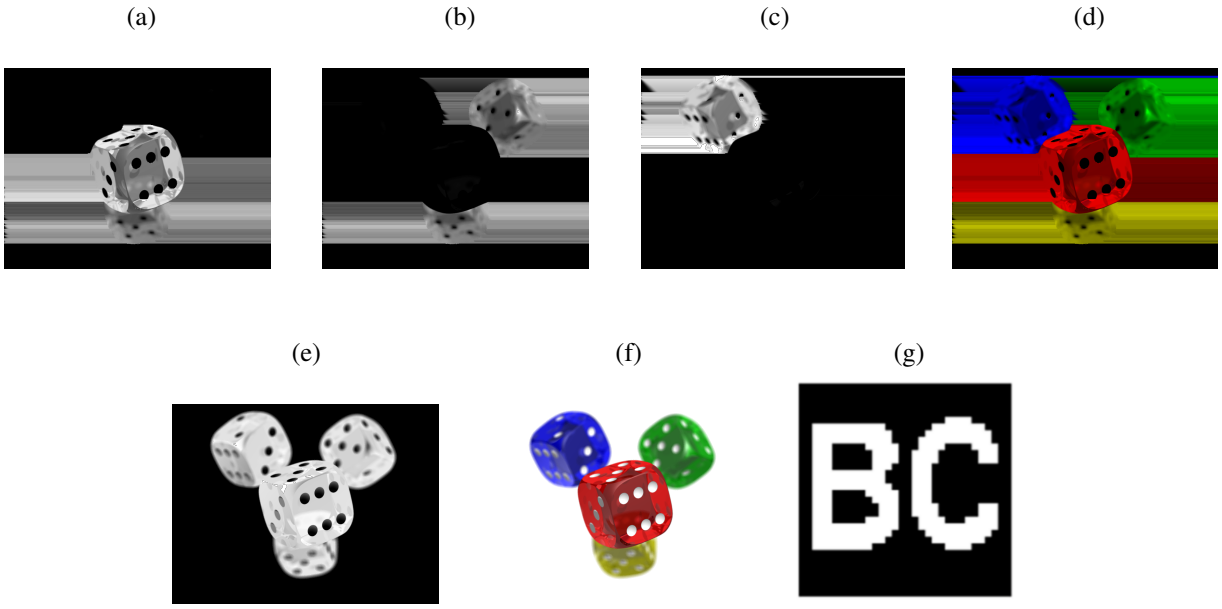
$$I'q_R = I'q\ (\mathrm{mod}\ \ p). \tag{5.6}$$

Após isso, aplica-se a QFNT a Iq_R e $I'q_R$, obtendo-se, respectivamente, $\hat{I}q_R$ e $\hat{I'}q_R$. Daí, obtém-se a marca em sua forma quaterniônica Mq calculando a diferença

$$Mq = \hat{I'}q_R - \hat{I}q_R\ (\mathrm{mod}\ \ p). \tag{5.7}$$

A marca M é obtida ao se converter Mq para o formato de imagem.

Figura 6 – Imagem original e imagem de marca d'água binária: (a) camada vermelha, (b) camada verde, (c) camada azul, (d) camadas RGB, (e) camada de transparência, (f) camada RGB juntamente com a transparência e (g) marca a ser inserida.



Fonte: WIKIPÉDIA (2019).

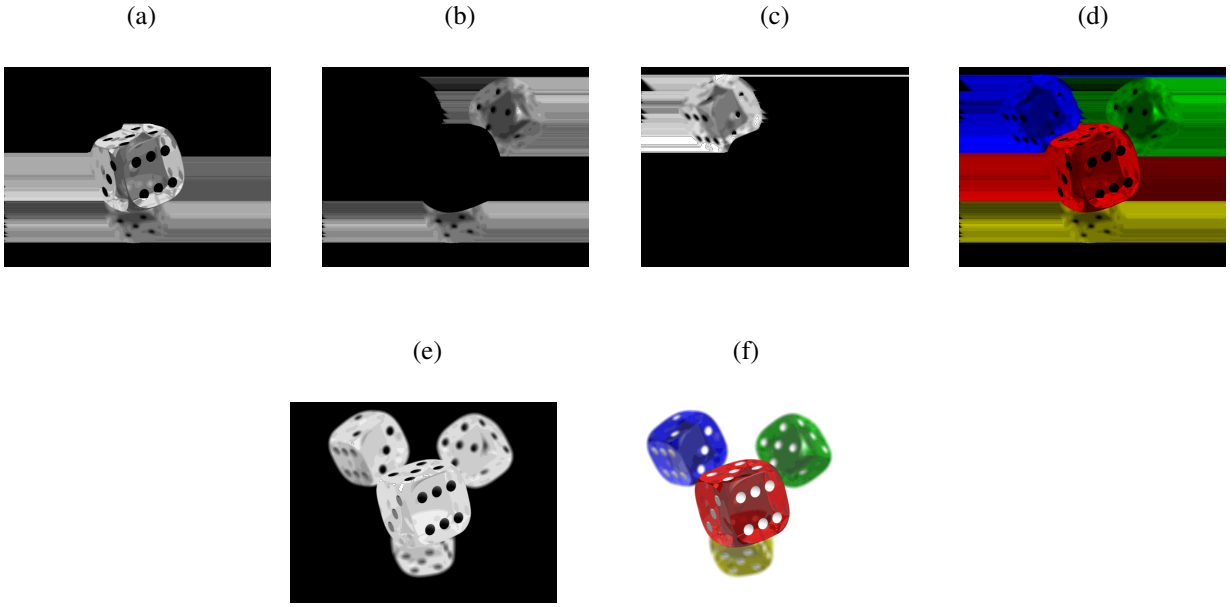
5.2.1.3 Simulações e resultados para marca d'água binária

Foram realizados experimentos em que uma imagem colorida do tipo PNG com tamanho 600×800 pixels e com uma camada adicional de transparência; cada pixel da imagem é codificado em 24 bits (8 bits para cada uma das três camadas de cor) e mais 8 bits são usados para impor alguma transparência. Noutras palavras, cada camada tem os valores de suas componentes quantizadas em 256 níveis. A marca a ser inserida é binária e possui dimensões 32×32 pixels.

Nas Figuras 6a, 6b e 6c, são apresentadas as camadas de cores correspondentes a imagem colorida e, na Figura 6e, mostra-se a camada de transparência; na figura 6d, é apresentada a versão colorida da imagem e, na Figura 6f, a imagem com a camada de transparência; na Figura 6g, é mostrada a marca a ser inserida na imagem em questão. O quatérnio utilizado como núcleo da transformada envolvida nos processos de inserção e extração da marca foi $q = 4 + 3i + 3j + 10k \in \left(\frac{16,16}{\mathbb{F}_{17}}\right)$, o qual possui ordem multiplicativa $\mathrm{ord}(q) = 16$. Isso significa que QFNT bidimensionais com dimensões 16×16 são aplicadas a cada bloco da versão residual da imagem original, a fim de que a imagem no domínio da transformada seja obtida (linhas nulas são acrescentadas à imagem para que a referida divisão por blocos seja exata). A imagem de marca d'água é replicada até que se obtenha uma "matriz de imagens" de marca d'água que possa ser diretamente somada à QFNT da versão residual da imagem a ser marcada, como indicado em (5.3).

Na Figura 7, são apresentadas as camadas de cor e de transparência, bem como as

Figura 7 – Imagem marcada: (a) camada vermelha, PSNR$= 32,01$, (b) camada verde, PSNR$= 32,75$dB, (c) camada azul, PSNR$= 36,85$dB, (d) camadas RGB, (e) camada de transparência, PSNR$= 33,95$dB e (f) camadas RGB com a camada adicional de transparência.



Fonte: WIKIPÉDIA (2019).

versões multicamada da imagem marcada. Para cada uma das referidas camadas, foi calculada a relação sinal-ruído de pico (PSNR, do inglês *peak signal-to-noise ratio*) por meio da expressão

$$\mathrm{PSNR} = 10\log_{10}\left(\frac{255^2}{\mathrm{MSE}}\right),$$

em que o erro médio quadrático, MSE (do inglês *mean squared error*), entre uma camada específica da imagem de referência I e sua versão modificada $\tilde{I}$, ambas com dimensões $L \times C$, é dado por

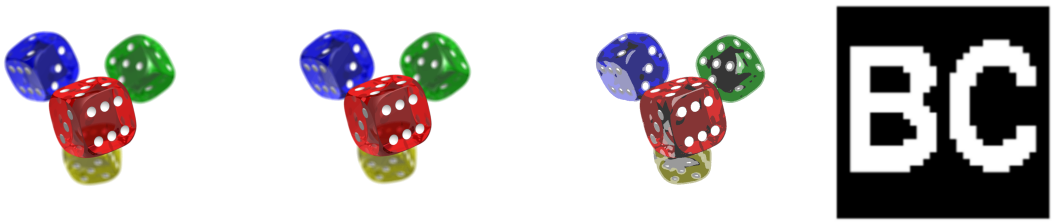
$$\mathrm{MSE} = \frac{1}{LC}\sum_{l=0}^{L-1}\sum_{c=0}^{C-1}[I(l,c) - \tilde{I}(l,c)]^2.$$

Os valores obtidos, que variam de $32,01$ dB a $36,85$ dB, são dados na legenda da Figura 7. Essa métrica permite avaliar o nível de degradação que a inserção da marca d'água introduz na imagem; nesse sentido, o fato de os valores de PSNR serem todos acima de 30 dB pode ser considerado como indicativo de que a referida degradação é tolerável (WELSTEAD, 1999). Além disso, inspecionando visualmente as imagens, não são percebidos traços de distorção que a marca possa ter provocado.

Como forma de averiguar outras configurações para inserção da marca d'água, nas Figuras 8b e 8c, são apresentadas imagens marcadas no domínio da QFNT definida utilizando como núcleo os quatérnios $q = 1i + 4j + 3k \in \left(\frac{4,4}{\mathbb{F}_5}\right)$ e $q = 7 + 1i + 2j + 2k \in \left(\frac{100,100}{\mathbb{F}_{101}}\right)$,

Figura 8 – (a) Imagem original (600 × 800), (b) imagem marcada, $p = 5$, (c) imagem marcada, $p = 101$, (d) marca d'água inserida (32 × 32).

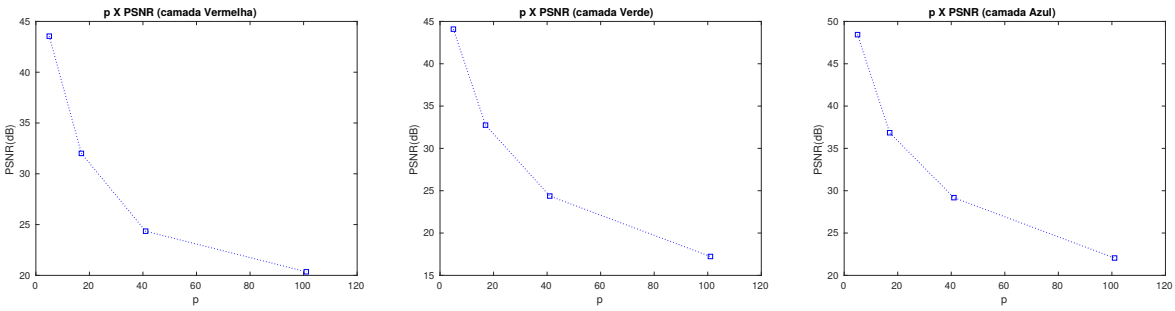
(a) (b) (c) (d)



Fonte: O Autor (2019).

Figura 9 – Curva PSNR $\times p$: (a) camada de transparência, (b) camadas RGB e (c) camadas RGB com transparência.

(a) (b) (c)

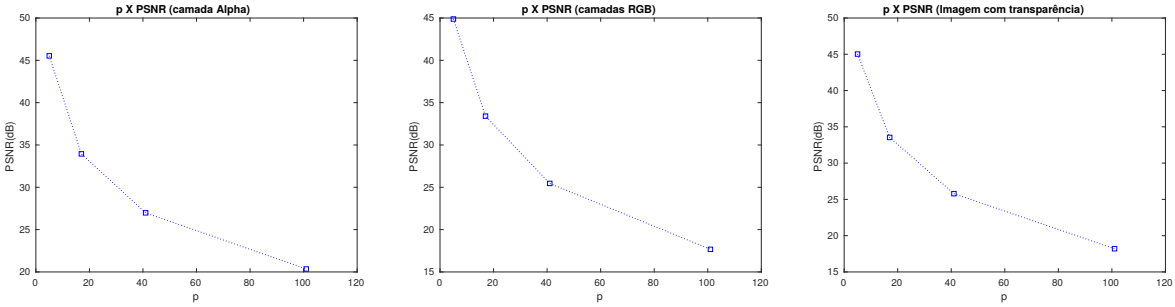


Fonte: O Autor (2019).

respectivamente. Mesmo visualmente, percebe-se que o aumento no valor de p acarreta, também, maior degradação na imagem marcada. Nas Figuras 10 e 9, são apresentadas curvas que indicam o PSNR relativo a cada camada de cor e de transparência, bem como às versões multicamada da imagem (comparando a imagem marcada com a imagem original), em função do número primo p que caracteriza o corpo em que se encontram os coeficientes dos quatérnios utilizados para representar os pixels das imagens. Além das configurações anteriormente mencionadas, considera-se também a inserção da marca no domínio de uma QFNT definida empregando como núcleo o quatérnio $q = 9 + 4i + 4k \in \left(\frac{40,40}{\mathbb{F}_{41}}\right)$. Observando as curvas, a tendência de diminuição de PSNR com o aumento de p é confirmada. Tal comportamento é explicado pelo fato de que, para um dado p, modificações de até $p - 1$ unidades no valor de cada pixel podem ser impostas pela inserção da marca.

Figura 10 – Curva PSNR $\times p$: camadas (a) vermelha, (b) verde e (c) azul.

(a) (b) (c)



Fonte: O Autor (2019).

5.2.2 Marca d'água colorida

Nesta parte do trabalho foi seguido o método desenvolvido por (CINTRA et al., 2009) adaptado para o caso quaterniônico, onde a marca inserida é uma imagem colorida.

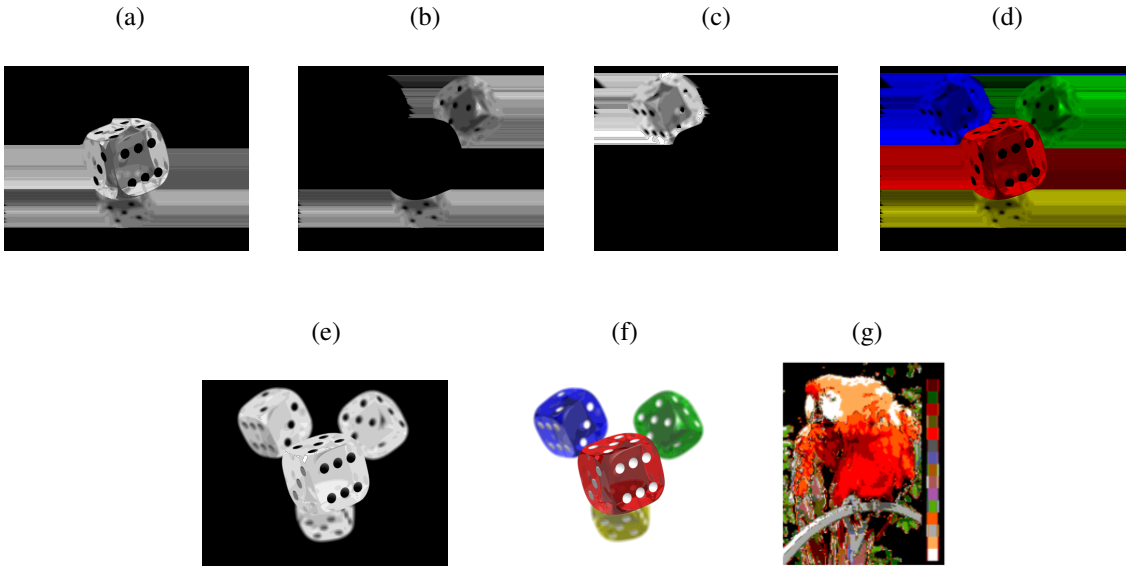
5.2.2.1 Inserção e extração de marca d'água colorida

Empregando uma metodologia análoga à descrita na última seção, é possível inserir numa imagem uma marca d'água colorida, em vez de binária. Neste caso, o que se assume é que a referida marca é uma imagem com 4 bits por pixel, isto é, com 16 cores. Daí, na conversão da marca para a forma quaterniônica, se um pixel for representado pelo número binário $b_3b_2b_1b_0$, o quatérnio correspondente será $b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k$. A inserção propriamente dita da marca ocorre no domínio da QFNT do resíduo da imagem original; a extração se processa de modo semelhante.

5.2.2.2 Simulações e resultados para marca d'água colorida

Nos experimentos realizados, considerou-se a mesma imagem original utilizada para inserção da marca d'água binária, uma imagem com dimensões 600×800 pixels e no formato PNG. A marca a ser inserida possui dimensões 200×160 pixels e também se encontra no formato PNG; no caso da marca, não há camada de transparência e cada pixel é identificado por um número binário com quatro bits, permitindo a aplicação da estratégia de conversão para o formato quaterniônico anteriormente descrita. O quatérnio utilizado como núcleo da transformada envolvida nos processos de inserção e extração da marca foi $q = 4 + 3i + 3j + 10k \in \left(\frac{16,16}{\mathbb{F}_{17}}\right)$, o qual possui ordem multiplicativa $\mathrm{ord}(q) = 16$. Os complementos de linhas e/ou colunas da imagem com zeros e as replicações da imagem de marca d'água, para adequação dos tamanhos das imagens às operações as quais estas são submetidas, são realizados de forma análoga ao que se fez no caso da marca d'água binária.

Figura 11 – Imagem marcada: (a) camada vermelha, (b) camada verde, (c) camada azul, (d) camadas RGB, (e) camada de transparência, (f) camadas RGB com camada adicional de transparência; (g) imagem de marca d'água colorida.



Fonte: O Autor (2019).

Nas Figuras 11a, 11b e 11c, são apresentadas as camadas de cor da imagem, após a inserção da marca d'água. Os valores de PSNR obtidos foram os seguintes: camada vermelha, PSNR$= 32,04$ dB; camada verde, PSNR$= 32,78$ dB; camada azul, PSNR$= 36,89$ dB. Na Figura 11e, apresenta-se a camada de transparência, para a qual se obteve PSNR$= 33,99$ dB; na Figura 11d, apresenta-se a versão multicamada RGB da imagem e, na Figura 11f, apresenta-se a versão multicamada da imagem, incluindo a camada de transparência; na Figura 11g, mostra-se a marca d'água colorida inserida na imagem hospedeira. Mais uma vez, os valores de PSNR obtidos comparando cada camada da imagem marcada com a respectiva camada da imagem original sugerem que a degradação da imagem em função da inserção da marca é aceitável.

5.2.3 Considerações sobre o esquema de marca d'água investigado

Nesta seção, foi realizada uma investigação preliminar a respeito do potencial de uso da QFNT para inserção de marcas d'água em imagens coloridas. Nesse contexto, é importante considerar os pontos a seguir. Em primeiro lugar, esclarece-se que as marcas d'água extraídas, tanto a binária quanto a colorida, correspondem exatamente às respectivas marcas inseridas; isso ocorre porque, além de as imagens marcadas não terem sido submetidas a qualquer tipo de manipulação, os passos executados no esquema estudado não envolvem arrendondamento ou qualquer outra operação que possa acarretar imprecisão.

Conforme anteriormente mencionado, o esquema estudado é frágil. Tal propriedade, que decorre basicamente da alta sensibilidade das operações de aritmética modular efetuadas no

cálculo da QFNT, implica que, caso a imagem marcada tivesse sofrido alguma manipulação, a marca extraída, provavelmente, teria sido afetada; a marca, poderia, inclusive, ser completamente destruída, dependendo do tipo de manipulação realizado. Em função disso, na prática, o esquema investigado serviria para identificar regiões da imagem marcada que tivessem sofrido determinada modificação, auxiliando, por exemplo, na detecção de montagens maliciosas ou de outros ajustes que tivessem sido praticados por partes não-autorizadas. A ideia é que, em trabalhos futuros, a possibilidade descrita seja averiguada.

Também em trabalhos futuros, métricas diferentes do PSNR devem ser empregadas para avaliação objetiva dos resultados alcançados. Pode-se usar, por exemplo, o índice de similaridade estrutural (SSIM, do inglês *Structural Similarity Index*) para avaliar a degradação provocada pela inserção da marca numa imagem e a correlação normalizada para avaliar quão semelhante à marca original é uma marca extraída após a imagem marcada ter sido processada.

6 CONCLUSÕES

Neste capítulo, são apresentadas as principais conclusões desta tese e indicadas direções para o desenvolvimento de pesquisas futuras. Realizando um paralelo com o que fora colocado como objetivo geral a ser alcançado pela execução deste trabalho, ratifica-se que se conseguiu definir uma transformada numérica de Fourier quaterniônica, a qual corresponde a uma versão quaterniônica da transformada numérica de Fourier, de modo análogo àquele em que a transformada discreta de Fourier quaterniônica corresponde à transformada discreta de Fourier. Tal definição preencheu uma lacuna teórica importante na área de ferramentas quaterniônicas aplicáveis ao processamento digital de sinais, vindo acompanhada da derivação de diversos outros resultados inéditos e igualmente relevantes. Nesse contexto, as seguintes contribuições específicas podem ser elencadas:

1. Partindo de um estudo sobre os quatérnio de Hamilton, foram desenvolvidos diversos resultados relacionados a quatérnios generalizados sobre corpos finitos, como, por exemplo, o estabelecimento de propriedades relativas ao cálculo de potências de um desses quatérnios e a caracterização do conjunto $\mathrm{Q}_{1,p}$ de quatérnios unimodulares;

2. Foi realizada uma extensão dos principais conceitos da trigonometria sobre corpos finitos à trigonometria sobre quatérnios generalizados (sobre corpos finitos). Mais especificamente, foram definidas as funções cosseno e seno calculadas com respeito a esses quatérnios e identificadas propriedades dessas funções quando computadas com respeito a quatérnios generalizados unimodulares sobre corpos finitos;

3. Realizou-se um estudo acerca da ordem multiplicativa dos quatérnios generalizados sobre corpos finitos e foram estabelecidos diversos resultados relacionados a isso. Conforme demonstrado ao longo da tese, tal estudo desempenha um papel fundamental na definição da transforma numérica de Fourier quaterniônica;

4. Foi definida a transformada numérica de Fourier quaterniônica e estudadas as suas propriedades de linearidade, deslocamento, transformação de sinais quaterniônicos específicos (impulso, linha da matriz de transformação e vetor constante), convolução cíclica e Teorema de Parseval;

5. Propriedades referentes à autoestrutura da QFNT foram estabelecidas e alternativas para implementacão da transformada foram indicadas;

6. Foi descrita uma estratégia para representação de imagens coloridas empregando quatérnios e com indícios que a QFNT pode ser empregada na uniformização de histogramas dessas imagens, visando à sua cifragem;

7. Uma investigação preliminar a respeito do uso da QFNT num esquema de marca d'água para imagens coloridas foi conduzida. Foram obtidos resultados que sugerem que o referido esquema atende os requisitos usuais de imperceptibilidade visual e quantitativa, e apresenta potencial de aplicabilidade prática no mapeamento de manipulações realizadas por partes não-autorizadas numa imagem.

6.1 CONTINUIDADE DA PESQUISA

Conforme enfatizado em diversos pontos da tese, o trabalho desenvolvido teve foco na definição da QFNT e no estudo de suas propriedades. Isso levou, naturalmente, à opção por uma abordagem mais teórica ao longo dos estudos e à necessidade de colocação de certos delimitadores a partir dos quais o trabalho poderia ser posteriormente continuado ou outros trabalhos relacionados poderiam ser iniciados. Nesse contexto, apresenta-se a seguir uma lista referente às perspectivas de trabalhos futuros relacionados a esta tese:

1. Estudo de outras propriedades dos quatérnios generalizados sobre corpos finitos, sobretudo aquelas relacionadas ao isomorfismo entre esses quatérnios e algumas estruturas algébricas conhecidas (grupos de matrizes, por exemplo);

2. Caracterização da QFNT com respeito ao lado em que esta é definida (à direita ou à esquerda), no sentido de esclarecer se a opção por uma dessas definições pode trazer alguma consequência importante nas propriedades, implementações e aplicações da transformada. Tal caracterização pode ser estendida também ao caso da QFNT bidimensional;

3. Estabelecimento de outras propriedades da transformada numérica de Fourier quaterniônica e investigação mais detalhada das propriedades introduzidas (outros tipos de convolução cíclica podem ser estabelecidos, por exemplo);

4. Estudo de forma mais detalhada das possibilidades de implementação da QFNT (inclusive em hardware), avaliando de modo criterioso a complexidade envolvida em cada alternativa;

5. Definição de outros tipos de transformadas numéricas quaterniônicas, como as do cosseno, as do seno e a de Hartley. Observe que, com o estabelecimento das funções cosseno e seno calculadas com respeito a quatérnios generalizados sobre corpos finitos, foi dado o principal suporte para definição das transformadas mencionadas;

6. Definição de versões fracionárias da QFNT. Observe que, com o estudo realizado sobre a autoestrutura da QFNT, a definição de uma dessas transformadas parece ser bastante direta;

7. Estudo mais detalhado de aplicações da QFNT sobretudo em processamento de imagens coloridas. Mais especificamente, pode-se estudar a possibilidade de empregar a QFNT para (i) realizar filtragem quaterniônica livre de erro de arredondamento (a ideia é semelhante

àquela em que o corpo finito é usado como *surrogate field* para calcular convoluções empregando a propriedade de convolução cíclica da transformada numérica de Fourier), (ii) realizar cifragem de imagens (neste caso, poder-se-ia utilizar uma QFNT fracionária em que a ordem fracionária seria usada como chave-secreta do esquema, como tem sido feito em alguns trabalhos recentes) e (iii) estabelecer o esquema de marca d'água frágil estudado no capítulo anterior, considerando o que foi observado na seção final do mesmo capítulo.

6.2 ARTIGO ASSOCIADO A ESTA TESE

Como resultado desta tese, foi publicado no periódico "Circuits, Systems and Signal Processing" (Qualis A2 em Engenharias IV; fator de impacto 1,998) o artigo intitulado "The Quaternion Fourier Number Transform" (Dezembro/2018, Volume 37, Número 12, p. 5486–5506). O autor desta tese é o primeiro autor do artigo, que foi escrito em coautoria com o seu orientador. No trabalho, é apresentado o estudo sobre as ordens multiplicativas de quatérnios generalizados sobre corpos finitos, é definida a QFNT, suas principais propriedades são derivadas e o uso da transformada na uniformização de histogramas de imagens coloridas é ilustrado.

REFERÊNCIAS

AGARWAL, R.; BURRUS, C. Fast convolution using Fermat number transforms with applications to digital filtering. **IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing**, v. 22, n. 2, p. 87–97, 1974. ISSN 0096-3518.

BACHMANN, F.; HIELSCHER, R.; SCHAEBEN, H. Texture analysis with mtex–free and open source software toolbox. **Solid State Phenomena**, v. 160, p. 63–68, 2010.

BIE, H. D. et al. Connecting spatial and frequency domains for the quaternion Fourier transform. **Applied Mathematics and Computation**, v. 271, p. 581 – 593, 2015.

BIHAN, N. L. et al. Hypercomplex signal processing. **Signal Processing**, v. 106, n. 7, p. 1–106, 2017.

BIRTWISTLE, D. The eigenstructure of the number theoretic transforms. **Signal Processing**, v. 4, n. 4, p. 287–294, 1982.

BLACKEDGE, J. M.; AHMED, M.; FAROOQ, O. Chaotic image encryption algorithm based on frequency domain scrambling. *In*: Dublin Institute of Technology. Articles School of Electrical Engineering systems, 2010. Paper 16. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/254584474_Chaotic_Image_Encryption _Algorithm_Based_on_Frequency_Domain_Scrambling. Acesso em: 03 Maio 2019.

BLAHUT, R. E. **Fast Algorithms for signal processing**. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2010. ISBN 0521190495.

CAMPELLO DE SOUZA, R. M. et al. A transformada discreta do seno em um corpo finito. *In*: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 28, 2005, São Paulo. **Anais**[...]. São Paulo: SBMAC . 2005.

CAMPELLO DE SOUZA, R. M. et al. Transformadas numéricas de hartley. *In*: Simpósio Brasileiro de Telecomunicações. **Anais** [...]. Gramado, 2000.

CAMPELLO DE SOUZA, R. M. et al. Trigonometry in finite fields and a new hartley transform. *In*: IEEE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON INFORMATION THEORY, 1998, Cambridge, MA,USA. **Proceedings** [. . .]. Cambridge, 1998. P. 293.

CAMPELLO DE SOUZA, R. M. et al. A transformada discreta do cosseno em um corpo finito. *In*: Simpósio Brasileiro de Telecomunicações. **Anais** [...]. Rio de Janeiro , 2003.

CHEDDAD, A. et al. Digital image steganography: Survey and analysis of current methods. **Signal processing**, ScienceDirect, v. 90, n. 3, p. 727–752, 2010.

CINTRA, R. J. et al. Fragile watermarking using finite field trigonometrical transforms, Image Communication, v. 24, p. 587–597. **Signal Processing:**, 2009.

DESCARTES, R. **Discours de la méthode pour bien conduire la raison, et chercher la verité dans les sciences**, Wentworth Press, 1637. ISBN 0341115150.

ELL, T. A. Quaternion-Fourier transforms for analysis of two-dimensional linear time-invariant partial differential systems. *In*: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 32, 1993, San Antonio, TX, USA. **Preceedings** [...]. Texas, USA: IEEE, 1993. p.1830-1841 .

ELL, T. A.; BIHAN, N. L.; SANGWINE, S. J. **Quaternion Fourier transforms for signal and image processing**. New Jersey, USA: John Wiley Sons, 2014.

ELL, T. A.; SANGWINE, S. J. Hypercomplex Fourier transforms of color images. **IEEE Transactions on image processing**, v. 16, n. 1, p. 22–35, 2007.

FIDUCCIA, C. M. On Obtaining Upper Bounds on the Complexity of Matrix Multiplication. *In*: MILLER, R. E.; THATCHER, J. W.; BOHLINGER, J. D. Complexity of Computer Computations. Proceedings of a symposium on the **Complexity of Computer Computations**, held March 20–22, 1972, at the IBM Thomas J. Watson Research Center, Yorktown Heights, New York, and sponsored by the Office of Naval Research, Mathematics Program, IBM World Trade Corporation, and the IBM Research Mathematical Sciences Department. Boston, MA: Springer, 1972. P. 31–40.

FLETCHER, P. Quaternion wavelet transforms of colour vector images. *In*: COMPUTER SCIENCE AND ELECTRONIC ENGINEERING, 9, 2017, Colchester, UK. **Proceedings** [. . .]. Colchester, UK: CEEC. 2017. p. 168–171.

GRIGORYAN, A. M.; AGAIAN, S. S. Tensor transform-based quaternion Fourier transform algorithm. **Information Sciences**, v. 320, p. 62 – 74, 2015.

GROOTE, H. F. de. On the complexity of quaternion multiplication. **Information Processing Letters**, v. 3, n. 6, p. 177 – 179, 1975.

HAMILTON, W. R. **The Mathematical Papers of Sir William Rowan Hamilton**. Cambridge: CUP Archive, 2000.

HAMILTON, W. R. Theory of conjugate functions, or algebraic couples; with a preliminary and elementary essay on algebra as the science of pure time. **Transactions of the Royal Irish Academy**, v. 17, part 1 (1837), p. 293–422, 2000.

HOPCROFT, J.; KERR, L. On minimizing the number of multiplications necessary for matrix multiplication. **SIAM Journal on Applied Mathematics**, v. 20, n. 1, p. 30–36, 1971.

HOWELL, T. D.; LAFON, J. **The Complexity of the Quaternion Product**. Ithaca, NY: Cornell University, 1975.

KAK, S. The number theoretic hilbert transform. **Circuits, Systems, and Signal Processing,** v. 33, n. 8, p. 2539–2548, 2014.

LAM, T.-Y. Introduction to quadratic forms over fields. (Graduate Studies in Mathematics 67). *In*: **Bulletin of the London Mathematical Society**, v. 37, n. 06, p. 948-951, Dec. 2005.

LEWIS, D. W. Quaternion algebras and the algebraic legacy of Hamilton's quaternions. **Irish Math. Soc. Bull**, v. 57, p. 41–64, 2006.

LIAN, P. Uncertainty principle for the quaternion Fourier transform. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 467, n. 2, p. 1258 – 1269, 2018.

LIMA, J. B. Fast algorithm for computing cosine number transform. **Electronics Letters**, v. 51, n. 20, p. 1570–1572, Oct. 2015. ISSN 0013-5194.

LIMA, J. B.; BARONE, M.; CAMPELLO DE SOUZA, R. M. Cosine transforms over fields of characteristic 2. **Finite Fields and Their Applications**, v. 37, p. 265–284, Jan. 2016.

LIMA, J. B.; CAMPELLO DE SOUZA, R. M. Uma marca d'água digital baseada na transformada do cosseno sobre corpos finitos. *In*: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE TELECOMUNICAÇÕES, 22, 2005, Campinas, SP. **Anais [...]**, Campinas, SP: SBrT, 2005.

LIMA, J. B.; CAMPELLO DE SOUZA, R. M. Finite field trigonometric transforms. **Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing**, v. 22, n. 5-6, p. 393–411, Dec. 2011.

LIMA, J. B.; CAMPELLO DE SOUZA, R. M. The fractional Fourier transform over finite fields. **Signal Processing**, v. 92, n. 2, p. 465 – 476, 2012. ISSN 0165-1684.

LIMA, J. B.; CAMPELLO DE SOUZA, R. M. Fractional cosine and sine transforms over finite fields. **Linear Algebra and its Applications**, v. 438, n. 8, p. 3217 – 3230, 2013. ISSN 0024-3795.

LIMA, J. B.; CAMPELLO DE SOUZA, R. M. Closed-form Hermite-Gaussian-like number-theoretic transform eigenvectors. **Signal Processing**, v. 128, p. 409–416, May. 2016.

LIMA, J. B.; CAMPELLO DE SOUZA, R. M. On the summation of fractional powers of matrices over finite fields. **Operators and Matrices**, CROATIA, v. 10, n. 1, p. 209–221, 2016.

LIMA, J. B.; CAMPELLO DE SOUZA, R. M. Tangent function and chebyshev-like rational maps over finite fields. **IEEE Transactions on Circuits and Systems II**: Express Briefs, p. 1-5, 2019.

LIMA, J. B.; LIMA, E.; MADEIRO, F. Image encryption based on the finite field cosine transform. **Signal Processing:** Image Communication, v. 28, n. 10, p. 1537–1547, Nov. 2013.

LIMA, J. B.; MADEIRO, F.; SALES, F. J. R. Encryption of medical images based on the cosine number transform. **Signal Processing**, v. 35, p. 1–8, Jul. 2015.

LIMA, J. B.; NOVAES, L. F. G. Image encryption based on the fractional Fourier transform over finite fields. **Signal Processing**, v. 94, p. 521–530, Jan. 2014.

LIMA, J. B.; PANARIO, D.; CAMPELLO DE SOUZA, R. M. Public-key encryption based on Chebyshev polynomials over GF(q). **Information Processing Letters**, v. 111, n. 2, p. 51–56, Dec. 2010.

LIMA, J. B.; PANARIO, D.; CAMPELLO DE SOUZA, R. M. A trigonometric approach for Chebyshev polynomials over finite fields. In: LARCHER, G. et al. (Ed.). **Applied Algebra and Number Theory**. Cambridge: Cambridge University Press, 2014. p. 255–279.

LIMA, P. H. E. S.; LIMA, J. B.; CAMPELLO DE SOUZA, R. M. Fractional Fourier, Hartley, cosine and sine number-theoretic transforms based on matrix functions. **Circuits, Systems, and Signal Processing**, v. 36, p. 2893–2916, Nov. 2017.

LUO, W.; HEILEMAN, G. L.; PIZANO, C. E. A fast and robust watermarking method for jpeg images. **Computer modeling & new Technologies**, p. 39–47, 2004.

MA, X. et al. Color image watermarking using local quaternion fourier spectral analysis. *In*: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON MULTIMEDIA AND EXPO, 2008, Hannover, DE. **Proceedings** [. . .]. Hannover, DE: ICME/ IEEE, 2008. P. 233-236.

MAKAROV, O. An algorithm for the multiplication of two quaternions. **USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics**, v. 17, n. 6, p. 221 – 222, 1977.

MCCLELLAN, J. H.; PARKS, T. W. Eigenvalue and eigenvector decomposition of the discrete Fourier transform. **IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics**, v. 20, n. 1, p. 66–74, 1972.

MILIES, C. P. Breve história da álgebra abstrata. *In*: BIENAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 2, 2004. **Anais**[. . .]. Salvador, BA: UFBA, 2004. Disponível em: http://www.bienasbm.ufba.br/M18.pdf. Acesso em: 11 de Maio 2019 .

MINEMOTO, T. et al. Feed forward neural network with random quaternionic neurons. **Signal Processing**, v. 136, p. 59–68, 2017.

MUKUNDAN, R. Quaternions: from classical mechanics to computer graphics, and beyond. *In*: ASIAN TECHNOLOGY CONFERENCE IN MATHEMATICS, 7, 2002. **Proceedings** [...], 2002. P. 97–105.

NEVES, R. C.; GRIMBERG, G. E. Os quatérnios de Hamilton e o espaço. 2008. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

NIKOLAIDIS, N.; PITAS, I. Robust image watermarking in the spatial domain. **Signal processing**, Elsevier, v. 66, n. 3, p. 385–403, 1998.

OLIVEIRA NETO, J. R.; LIMA, J. B.; PANARIO, D. A generating matrix method for constructing Hermite-Gaussian-like number-theoretic transform eigenvectors. **Signal Processing**, v. 152, p. 189 – 196, 2018. ISSN 0165-1684.

ORTOLANI, F. et al. Frequency domain quaternion adaptive filters: Algorithms and convergence performance. **Signal Processing**, Elsevier, v. 136, p. 69–80, 2017.

PEDROUZO-ULLOA, A.; TRONCOSO-PASTORIZA, J. R.; PÉFEZ-GONZÁLEZ, F. Number theoretic transforms for secure signal processing. **IEEE Transactions on Information Forensics and Security**, v. 12, n. 5, p. 1125–1140, 2017.

POLLARD, J. M. The fast Fourier transform in a finite field. **Mathematics of Computation**, American Mathematical Society (AMS), v. 25, n. 114, p. 365–374, April 1971.

REED, I.; TRUONG, T.-K. The use of finite fields to compute convolutions. **IEEE Transactions on Information Theory**, IEEE, v. 21, n. 2, p. 208–213, March 1975.

RZADKOWSKI, W.; SNOPEK, K. A new quaternion color image watermarking algorithm. *In*: INTERNATIONAL CONFERENCE ON INTELLIGENT DATA ACQUISITION AND ADVANCED COMPUTING SYSTEMS: Technology and Applications (IDAACS), 8, 2015, Warsaw, PL. **Proceedings** [. . .].Warsaw, PL: IEEE, 2015. v. 1, p. 245-250.

SANGWINE, S. J. Fourier transforms of colour images using quaternion or hypercomplex, numbers. **Electronics Letters**, v. 32, n. 21, p. 1979-1980. 10 Oct. 1996.

SANGWINE, S. J. Colour image edge detector based on quaternion convolution. **Electronics Letters**, v. 34, n. 10, p. 969–971, 1998.

SANGWINE, S. J.; ELL, T. Hypercomplex auto-and cross-correlation of color images. *In*: INTERNATIONAL CONFERENCE ON IMAGE PROCESSING (ICIP 99), 1999, Kobe, JP. **Proceedings**[. . .]. Kobe, JP: IEEE, 1999. V. 4, p. 319-322.

SANGWINE, S. J.; ELL, T. A. Colour image filters based on hypercomplex convolution. **IEE Proceedings-Vision, Image and Signal Processing**, v. 147, n. 2, p. 89–93, 2000.

SCHAFER, A. V.; OPPENHEIM, R. W. **Discrete-time signal processing**. 2nd. New Jersey: Prentice Hall, 1999. ISBN 8131704920.

SHU, W.; TIANREN, Y. Algorithm for linear convolution using number theoretic transforms. **Electronics Letters**, IET, v. 24, n. 5, p. 249–250, 1988.

SILVA, D.; CAMPELLO DE SOUZA, R. M.; OLIVEIRA, H. M. Transformadas em corpos finitos e grupos de inteiros gaussianos. *In*: XIX Simpósio Brasileiro de Telecomunicaçoes (Brazilian Symposium on Telecommunications), Fortaleza, Brasil. [S.l.: s.n.], 2001.

STRASSEN, V. Gaussian elimination is not optimal. **Numer. Math.**, Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, v. 13, n. 4, p. 354–356, August 1969.

TALEBI, S. P.; KANNA, S.; MANDIC, D. P. A distributed quaternion Kalman filter with applications to smart grid and target tracking. **IEEE Transactions on Signal and Information Processing over Networks**, v. 2, n. 4, p. 477–488, Dec 2016.

TAMORI, H.; AOKI, N.; YAMAMOTO, T. A fragile digital watermarking technique by number theoretic transform. **IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences**, E85.A, n. 8, p. 1902–1904, 2002.

TAMORI, H.; YAMAMOTO, T. Asymmetric fragile watermarking using a number theoretic transform. **IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences**, E92.A, n. 3, p. 836–838, 2009.

VARIDDHISAï, T. et al. Quaternion-valued adaptive filtering via Nesterov's extrapolation. *In*: ICASSP 2019 - 2019 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP). [S.l.: s.n.], 2019. p. 4868–4872.

VERMA, V. S.; JHA, R. K.; OJHA, A. Digital watermark extraction using support vector machine with principal component analysis based feature reduction. **Journal of Visual Communication and Image Representation**, v. 31, p. 75–85, 2015.

WELSTEAD, S. T. **Fractal and wavelet image compression techniques**. Washington: SPIE Optical Engineering Press Bellingham, 1999.

WESSEL, C. Essai sur la représentation analytique de la direction. [S.l.]: Bianco Luno (F. Dreyer), imprimeur, 1797.

WINOGRAD, S. On multiplication of 2×2 matrices. **Linear Algebra and its Applications**, v. 4, n. 4, p. 381 – 388, 1971.

XIANG, M.; KANNA, S.; MANDIC, D. P. Performance analysis of quaternion-valued adaptive filters in nonstationary environments. **IEEE Transactions on Signal Processing**, v. 66, n. 6, p. 1566–1579, March 2018.

XIANG, M.; SCALZO DEES, B.; MANDIC, D. P. Multiple-model adaptive estimation for 3-D and 4-D signals: A widely linear quaternion approach. **IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems**, v. 30, n. 1, p. 72–84, Jan 2019.

XU, D.; XIA, Y.; MANDIC, D. P. Optimization in quaternion dynamic systems: Gradient, hessian, and learning algorithms. **IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems**, v. 27, n. 2, p. 249–261, Feb 2016.