



Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós Graduação em Matemática

Izabelly Cristina Nascimento Silva

Finitude de Equilíbrios Relativos no Problema Restrito Planar de Quatro Corpos

Recife

2017

Izabelly Cristina Nascimento Silva

Finitude de Equilíbrios Relativos no Problema Restrito Planar de Quatro Corpos

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Mecânica Celeste

Orientador: Eduardo Shirlippe Góes Leandro

Recife

2017

Catálogo na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

S586f Silva, Izabelly Cristina Nascimento
Finitude de equilíbrios relativos no problema restrito planar de quatro corpos / Izabelly Cristina Nascimento Silva. – 2017.
60 f.

Orientador: Eduardo Shirlippe Goes Leandro.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, Recife, 2017.
Inclui referências e apêndices.

1. Matemática. 2. Mecânica celeste. I. Leandro, Eduardo Shirlippe Goes (orientador). II. Título.

510

CDD (23. ed.)

UFPE- MEI 2019-117

IZABELLY CRISTINA NASCIMENTO SILVA

**FINITUDE DE EQUILÍBRIOS RELATIVOS NO PROBLEMA RESTRITO
PLANAR DE QUATRO CORPOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado em Matemática.

Aprovado em: 22/02/2017

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Eduardo Shirlippe Góes Leandro (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Fernando Antonio Nóbrega Santos (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Roberto Callejas Bedregal (Examinador Externo)
Universidade Federal da Paraíba

AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer à Deus por todas essas conquistas, pois sem sua bênção, não chegaria até aqui. Agradeço aos meus familiares, por todo o apoio dado e por sempre acreditarem na minha capacidade. Em especial, além de agradecer, gostaria de dedicar esse trabalho a três pessoas: a minha mãe Tereza, por toda sua força e dedicação, a minha avó Clarazeta e a minha irmã Flávia. Pois sem elas eu não teria motivos para continuar.

Minha infinita gratidão aos professores que me ajudaram nessa dissertação, Thiago Dias e Marcelo Pedro. Obrigada por acreditarem em mim e por abraçar esse trabalho junto comigo, me coorientando com extrema dedicação e generosidade. São exemplos como esses que quero e vou seguir na minha vida profissional.

Agradeço também ao meu orientador, Eduardo Leandro, outro exemplo de profissionalismo que seguirei. Obrigada por acreditar nesse trabalho e por todas as correções construtivas que contribuíram para a minha melhoria profissional.

Não chegaria até aqui se não fosse os professores que passaram pela minha vida. Ao meu professor de matemática do segundo ano do ensino médio, Allyson; aos professores do departamento de matemática da UFRPE que contribuíram para minha excelente formação na graduação; e por fim, mas não menos importante, aos professores da pós-graduação em matemática da UFPE; deixo aqui minha eterna gratidão.

Quando se obtém uma vitória desta, não se pode esquecer dos amigos. Primeiramente, gostaria de agradecer e dedicar esse trabalho a um grande amigo que a matemática me deu, por todos seus conselhos, por toda sua confiança e por todo seu cuidado, Ribamar Neves. Agradeço também a minha amiga Camila Rabelo, companheira de graduação. Do mestrado, deixo meus agradecimentos a: João Gondim, por toda a sua disposição em ajudar; Nicolas pela ajuda prestada no latex e a todos alunos que contribuíram de alguma forma para esse feito. Aos amigos da vida, agradeço por todo apoio, confiança e compreensão, em especial a Augusto Paes e Raylene Henrique.

Finalizando, deixo meus sinceros agradecimentos as pessoas especiais da minha vida que não pude mencionar.

RESUMO

O problema de determinar se é finito o número de equilíbrios relativos de N massas que se atraem segundo a lei da gravitação universal é um problema clássico da Mecânica Celeste, e está em aberto no caso geral. Nesse trabalho é apresentada uma solução para o caso de quatro corpos no plano, sendo um deles com massa nula. Esse problema é conhecido como o problema restrito de quatro corpos no plano, ou ainda por PR4CP. O PR4CP já foi consideravelmente estudado por alguns pesquisadores da área. O principal resultado foi obtido numericamente por Pedersen, (PEDERSEN, 1944), e analiticamente por Barros e Leandro em (BARROS; LEANDRO, 2014), o qual afirma que existem 8, 9 ou 10 equilíbrios relativos no PR4CP. No entanto, em (KULEVICH; ROBERTS; SMITH, 2009), há um diferencial que é a técnica utilizada. Kulevich, Roberts e Smith, por meio da teoria BKK, fornece um critério suficiente de finitude e estimativa para o número de soluções de sistemas de equações polinomias. A sigla BKK se refere aos nomes Bernstein, Khovansky e Kushnirenko. Um dos primordiais resultados dessa teoria é o teorema de Bernstein, o qual fornece uma cota superior para o número de soluções no toro algébrico de um sistema polinomial com n equações em n variáveis. A imprescindível hipótese desse teorema é a finitude de soluções do sistema. A teoria BKK fornece um método para determinar se um dado sistema de equações polinomiais possui um número finito de soluções com todas as variáveis diferentes de zero. As principais ferramentas que essa teoria utiliza estão desenvolvidas nesse trabalho. O objetivo desse trabalho é mostrar como esse problema foi resolvido utilizando a teoria BKK, provando a finitude dos equilíbrios relativos do problema e a existência de no máximo 196 equilíbrios relativos.

Palavras-chave: Problema de N -corpos. Equilíbrios relativos. Finitudes. Teoria BKK.

ABSTRACT

The problem to determine whether the number of relative equilibria of N masses that attract each other by the law of universal gravitation is a classical problem in Celestial Mechanics, and it is open in the general case. In this work, a solution is presented for the case of four bodies on the plane, one of them with null mass. This problem is known as the restricted four-body problem on the plane, or R4BPP. The R4BPP has been considerably studied by some researchers. The main result was achieved numerically by Pedersen (PEDERSEN, 1944), and analytically by Barros and Leandro in (BARROS; LEANDRO, 2014), which asserts that there are 8, 9 or 10 relative equilibria in the R4BPP. However, in (KULEVICH; ROBERTS; SMITH, 2009), there is a differential, which is the technique that was used. Kulevich, Roberts and Smith, by means of BKK theory (Bernstein-Kushnirenko-Khovanski), provides a sufficient criterion of finiteness and an estimate for the number of solutions of systems of polynomial equations. The initials BKK refer to Bernstein, Khovansky and Kushnirenko. One of this theory's main results is Bernstein's theorem, which provides an upper bound for the number of solutions in an algebraic torus of a polynomial system with n equations in n variables. This theorem's indispensable hypothesis is the finiteness of the system's solutions. BKK theory provides a method to determine whether a given system of polynomial equations has a finite number of solutions with nonzero variables. The main tools of this theory are developed in this work. The goal of this work is to show how this problem was solved using BKK theory, proving the finiteness of the relative equilibria of the problem and the existence of at most 196 relative equilibria.

Keywords: N -body problem. Relative equilibria. Finiteness. BKK Theory.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	8
2	O PROBLEMA RESTRITO DE QUATRO CORPOS NO PLANO .	10
2.1	Configuração Central	10
2.2	Formulação do Problema	12
2.3	Equilíbrios	18
2.4	Massas iguais	22
3	TEORIA BKK	25
3.1	Politopos	25
3.2	Faces de um politopo	27
3.3	Politopo de Newton de um polinômio de Laurent	34
3.4	Soma de Minkowski	36
3.5	Volume misto e Teorema de Bernstein	40
4	SÉRIES DE PUISEUX	45
4.1	O corpo das séries de potências formais	45
4.2	O Corpo das séries de Puiseux	48
5	TEORIA BKK NO PROBLEMA RESTRITO DE QUATRO COR- POS NO PLANO	49
6	CONCLUSÃO	58
	REFERÊNCIAS	59

1 INTRODUÇÃO

Finitude de equilíbrios relativos no problema de n -corpos é um importante problema da Mecânica Celeste. Em 1998, Smale (SMALE, 1998) incluiu este problema na lista de problemas matemáticos do século com a seguinte formulação: “No problema do n -corpos da mecânica celeste, é finito o número de equilíbrio relativos, para qualquer escolha de números reais positivos m_1, \dots, m_n como massas?”.

O objetivo desse trabalho é mostrar como esse problema foi resolvido no caso $n = 4$, contudo, com uma pequena diferença, considerando $m_4 = 0$. Esse problema é conhecido como o problema restrito de quatro corpos no plano, ou ainda por PR4CP. O PR4CP já foi consideravelmente estudado por alguns pesquisadores da área. Entre os mais conhecidos trabalhos relacionados estão os dois de Pedersen, (PEDERSEN, 1944; PEDERSEN, 1952), um de Leandro, (LEANDRO, 2006), e finalmente, aquele que será apresentado nessa dissertação, (KULEVICH; ROBERTS; SMITH, 2009). O principal resultado foi obtido numericamente por Pedersen, (PEDERSEN, 1944), e analiticamente por Barros e Leandro em (BARROS; LEANDRO, 2014), o qual afirma que existem 8, 9 ou 10 equilíbrios relativos no PR4CP. No entanto, em (KULEVICH; ROBERTS; SMITH, 2009) há um diferencial que é a técnica utilizada para obter o resultado de finitude e encontrar uma cota superior para o número de equilíbrios relativos do problema, a teoria BKK.

Os resultados da teoria BKK foram cruciais para resolver certas questões no campo da Mecânica Celeste. Moeckel, (MOECKEL, 2005), aplica esta teoria para provar a conjectura de Saari no caso de três corpos no plano. Em seguida Hampton e Moeckel, (HAMPTON; MOECKEL, 2006), utilizam a teoria para resolver o problema proposto por Smale no caso $n = 4$. É importante ressaltar que o trabalho que será apresentado aqui difere desse último, uma vez que uma das massas é nula, caso necessariamente excluído por Moeckel e Hampton. Todavia, vários resultados utilizados seguem diretamente dos resultados apresentados em (HAMPTON; MOECKEL, 2006). Também foi possível mostrar, utilizando a teoria BKK, a conjectura de Saari para o caso restrito de três corpos no plano, (ROBERTS; MELANSON, 2007).

A sigla BKK se refere aos nomes Bernstein, Khovansky e Kushnirenko. Um dos primordiais resultados dessa teoria é o teorema de Bernstein, o qual fornece uma cota superior para o número de soluções no toro algébrico de um sistema polinomial com n equações em n variáveis. A imprescindível hipótese desse teorema é a finitude de soluções do sistema. A teoria BKK fornece um método para determinar se um dado sistema de equações polinomiais possui um número finito de soluções com todas as variáveis diferentes de zero. As principais ferramentas que essa teoria utiliza estão desenvolvidas nesse trabalho.

O objetivo crucial do capítulo 1 é apresentar o problema restrito de quatro corpos no plano e formular o método de como são encontrados os pontos de equilíbrios relativos do problema. Chegaremos em dois importantes sistemas de equações polinomiais equivalentes aos quais, adiante, será aplicada a teoria BKK. No capítulo 2 são apresentadas as ferramentas mais elementares desse trabalho, a teoria de politopos e o teorema de Bernstein, as referências seguidas nesse capítulo foram: (COX; LITTLE; O'SHEA, 2006), (GÜNTER, 1996), (BOUREL, 2005) e (SANTOS, 2009) . Uma pequena introdução à séries de Puiseux é encontrada no capítulo 3. Esse conceito terá um papel indispensável para concluir a finitude de soluções não-triviais do sistema polinomial, e aqui utilizamos como referência (WALKER, 1978). Por fim, veremos no capítulo 4 a intenção central dessa dissertação, ou seja, provaremos a finitude dos equilíbrios relativos do problema e a existência de no máximo 196 equilíbrios relativos, tudo isso aplicando a teoria BKK.

2 O PROBLEMA RESTRITO DE QUATRO CORPOS NO PLANO

2.1 Configuração Central

Considere n pontos com massas positivas m_1, \dots, m_n localizadas nas posições x_1, \dots, x_n em um espaço Euclidiano de dimensão d . Definimos o centro de massa da configuração $x = (x_1, \dots, x_n)$ por $c = \frac{1}{M} \sum_i m_i x_i$, sendo $M = m_1 + \dots + m_n$ a massa total.

A força exercida no i -ésimo corpo é

$$F_i = \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j}{\|x_i - x_j\|^3} (x_j - x_i),$$

$i = 1, \dots, n$. De acordo com as leis de Newton, a posição do i -ésimo corpo, $x_i = x_i(t)$, satisfaz a equação do movimento

$$\ddot{x}_i = \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{\|x_j - x_i\|^3} (x_j - x_i), \quad (2.1)$$

$i = 1, \dots, n$.

Definição 2.1. Uma configuração $x = (x_1, \dots, x_n)$ é **central** se existe uma constante $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sum_{j \neq i} \frac{m_j}{\|x_j - x_i\|^3} (x_j - x_i) + \lambda(c - x_i) = 0, \quad (2.2)$$

com $i = 1, \dots, n$.

(1.2) é chamada de **equação de configuração central**.

Proposição 2.1. $x = (x_1, \dots, x_n)$ é configuração central com massas m_1, \dots, m_n se, e somente se, $x = (x_1, \dots, x_n)$ é configuração central com massas km_1, \dots, km_n , com $k \in \mathbb{R}^*$.

Demonstração.

$$\begin{aligned} \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{\|x_j - x_i\|^3} (x_j - x_i) + \lambda \left(\frac{1}{M} \sum_i m_i x_i - x_i \right) &= 0 \\ \Downarrow \\ \sum_{j \neq i} \frac{km_j}{\|x_j - x_i\|^3} (x_j - x_i) + k\lambda \left(\frac{1}{M} \sum_i m_i x_i - x_i \right) &= 0 \end{aligned}$$

□

Com isso, sempre podemos estudar as configurações centrais do problema de n -corpos considerando $M = m_1 + \dots + m_n = 1$.

Definição 2.2. Uma configuração central plana, isto é, uma solução de (2.1) em \mathbb{R}^2 é chamada de **equilíbrio relativo**.

Proposição 2.2. As equações de configurações centrais são invariantes por transformações de rotação, translação e dilatação no plano.

Demonstração. Seja $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ um equilíbrio relativo. Inicialmente iremos considerar T uma transformação de dilatação por $\alpha > 0$ a partir do centro de massa. Então,

$$T(x_j) = c + \alpha(x_j - c) \implies -\frac{1}{\alpha}(c - T(x_j)) = (x_j - c).$$

Temos ainda que

$$\begin{aligned} \|T(x_i) - T(x_j)\| &= \|c + \alpha(x_i - c) - (c + \alpha(x_j - c))\| \\ &= \|\alpha(x_i - x_j)\| = \alpha\|x_i - x_j\| \end{aligned}$$

Portanto, usando que $T(c) = c$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{\|T(x_j) - T(x_i)\|^3} (T(x_j) - T(x_i)) &= \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{\alpha^3 \|x_j - x_i\|^3} \alpha(x_j - x_i) \\ &= \frac{1}{\alpha^2} \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{\|x_j - x_i\|^3} (x_j - x_i) \\ &= \frac{1}{\alpha^2} (-\lambda)(c - x_i) \\ &= -\frac{\lambda}{\alpha^3} (c - T(x_i)). \end{aligned}$$

Logo $T(x)$ é equilíbrio relativo.

Suponha agora que T é uma rotação ou uma translação. Sabemos que rotação e translação preservam distâncias, isto é,

$$\|T(x_j) - T(x_i)\| = \|x_j - x_i\|.$$

Logo,

$$\begin{aligned} -\lambda(T(c) - T(x_i)) &= T(-\lambda(c - x_i)) = T\left(\sum_{j \neq i} \frac{m_j}{\|x_j - x_i\|^3} (x_j - x_i)\right) \\ &= \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{\|T(x_j) - T(x_i)\|^3} (T(x_j) - T(x_i)). \end{aligned}$$

Potanto, $T(x)$ é equilíbrio relativo. □

Dois equilíbrios relativos são considerados equivalentes se um deles pode ser obtido do outro por uma rotação, translação ou dilatação do plano. No estudo de equilíbrios relativos, basta considerar classes de equivalências módulo essas transformações.

2.2 Formulação do Problema

O problema restrito planar de quatro corpos, conhecido como PR4CP, consiste de quatro partículas em um plano rotatório, onde uma delas possui massa nula. A partícula de massa nula está sujeita à atração gravitacional das outras três, mas não interfere no movimento das mesmas. Logo, podemos considerar configurações centrais do PR4CP como soluções de dois tipos de equações: equações de configuração central do problema de três corpos e equações correspondentes à ação gravitacional que as três partículas exercem na partícula de massa nula. As soluções do primeiro tipo de equações citadas anteriormente são conhecidas como: configuração do triângulo equilátero de Lagrange e configuração colinear de Euler. Ambas existem para qualquer valor das massas.

Nesse trabalho, consideraremos a configuração central do problema de três corpos como configuração do triângulo equilátero de Lagrange. Isto é, as três partículas com massas positivas arbitrárias (m_1, m_2, m_3) , chamadas de partículas primárias, localizadas nos vértices de um triângulo equilátero rotacionando em movimento circular uniforme em torno do seu centro de massa.

Classes de configurações centrais são invariantes por homotetias e invariantes por rotações. Logo, podemos considerar, sem perda de generalidade, que os lados do triângulo equilátero são iguais a 1 e, nesse plano rotatório, as três primárias m_1, m_2 e m_3 estão fixadas nas respectivas posições: $q_1 = (\frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$, $q_2 = (-\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2})$ e $q_3 = (-\frac{\sqrt{3}}{6}, -1/2)$. Podemos supor também que a massa total $M = m_1 + m_2 + m_3$ e a velocidade angular são iguais a 1. Sejam a, b e c as distâncias, respectivas, das partículas q_1, q_2 e q_3 a $q = (x, y)$ de massa nula, como mostra a figura (1.1). Essas distâncias não são independentes. Adiante, veremos que elas devem satisfazer uma importante condição.

Definição 2.3. Seja $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma configuração de n corpos em \mathbb{R}^d . A dimensão de x , $\delta(x)$, é a dimensão do menor subespaço afim de \mathbb{R}^d que contém x .

Definição 2.4. Seja $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma configuração de n corpos. Definimos a matriz $(n+1) \times (n+1)$ de Cayley-Menger associada a x por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & S_{12} & S_{13} & \dots & S_{1n} \\ 1 & S_{12} & 0 & S_{23} & \dots & S_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & S_{1n} & S_{2n} & S_{3n} & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

onde $S_{ij} = \|x_i - x_j\|^2$.

Proposição 2.3. Seja $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma configuração de n corpos e seja F o determinante da matriz de Cayley-Menger associado a x . Então $\delta(x) \leq n-2$ se, e somente se, $F = 0$.

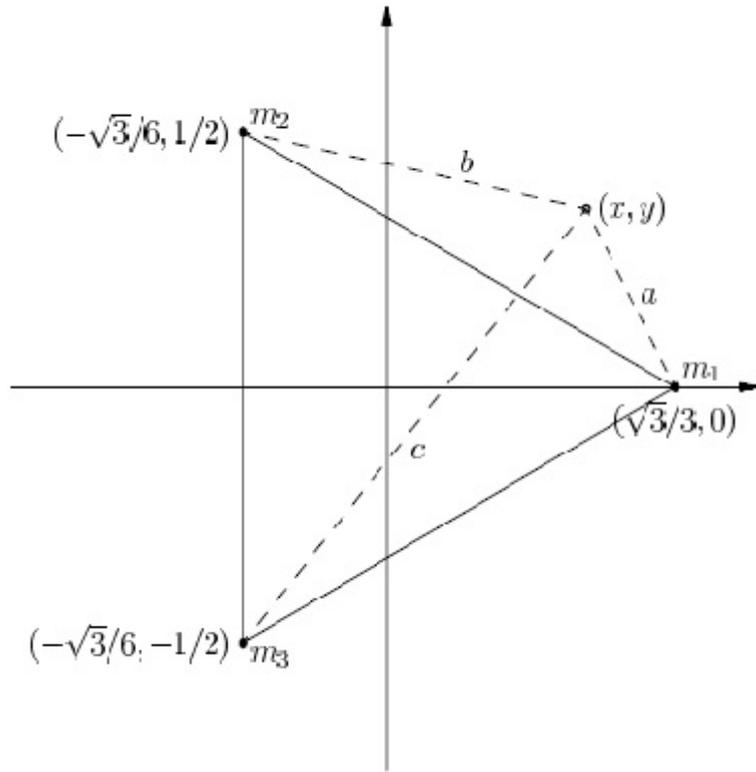


Figura 1: Formulação do PR4CP.

Demonstração. Podemos considerar que $x_i \in \mathbb{R}^{n-1}$ para todo $i = 1, \dots, n$. De fato, basta fixar algum x_i , digamos x_n , assim podemos considerar esses vetores no espaço afim gerado por $(x_1 - x_n, x_2 - x_n, \dots, x_{n-1} - x_n)$. Munido dessa informação, considere a seguinte matriz $n \times n$:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}.$$

Fazendo algumas operações elementares com as colunas de X , chegaremos à seguinte matriz $n \times n$:

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ x_1 - x_n & x_2 - x_n & \dots & x_n \end{pmatrix}.$$

Claramente $\text{posto}(X') = \delta(x) + 1$. E ainda, utilizando que $\text{posto}(X') = \text{posto}(X)$, concluímos que

$$\delta(x) = \text{posto}(X) - 1$$

Portanto, temos que $\delta(x) \leq n-2$ se, e somente se, existe um vetor não-nulo $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_n)$ no núcleo de X , isto é, existe um vetor não-nulo $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_n)$ que satisfaz o seguinte

conjunto de equações

$$\begin{cases} \Delta_1 + \cdots + \Delta_n = 0, \\ \Delta_1 x_1 + \cdots + \Delta_n x_1 = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Observe que

$$S_{ij} = \|x_i - x_j\|^2 = \|x_i\|^2 - 2\langle x_i, x_j \rangle + \|x_j\|^2,$$

então, para todo i temos que

$$\sum_{j=1}^n S_{ij} \Delta_j = \|x_i\|^2 \sum_{j=1}^n \Delta_j - \langle 2x_i, \sum_{j=1}^n x_j \Delta_j \rangle + \sum_{j=1}^n \|x_j\|^2 \Delta_j. \quad (2.4)$$

Se $\delta(x) \leq n - 2$, então (2.3) tem uma solução não-nula $(\Delta_1, \dots, \Delta_n)$. Com essa informação podemos concluir que (2.4) é constante independente da escolha de i , isto é,

$$\sum_{j=1}^n S_{ij} \Delta_j = \sum_{j=1}^n \|x_j\|^2 \Delta_j := -\Delta_0 \quad \forall i.$$

Logo, temos que o vetor $(\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_n)$ é um vetor não-nulo do núcleo A , onde A é a matriz de Cayley-Menger associada a configuração x . Concluimos que $F = 0$.

Suponhamos agora que $F = 0$. Logo, existe um vetor não-nulo $(\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_n)$ no núcleo de A . Isso garante que

$$\sum_{j=1}^n \Delta_j = 0, \quad (2.5)$$

$$\sum_{j=1}^n S_{ij} \Delta_j = -\Delta_0. \quad (2.6)$$

Então, comparando (2.4) com as equações (2.5) e (2.6), temos que

$$2\langle x_i, \sum_{j=1}^n x_j \Delta_j \rangle = \Delta_0 + \sum_{j=1}^n \|x_j\|^2 \Delta_j := \beta, \quad (2.7)$$

para todo i . Perceba que $(\Delta_1, \dots, \Delta_n)$ é um vetor não-nulo. Caso contrário, por (2.6), teríamos que $(\Delta_0, \dots, \Delta_n)$ seria nulo, contradizendo a suposição.

Seja $\alpha = \sum_{j=1}^n x_j \Delta_j$. Iremos provar que $\sum_{j=1}^n x_j \Delta_j = 0$. Usando (2.5) e (2.7), temos que

$$\begin{aligned} \|\alpha\|^2 &= \langle \alpha, \alpha \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \Delta_i, \sum_{j=1}^n x_j \Delta_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \langle x_i \Delta_i, \sum_{j=1}^n x_j \Delta_j \rangle = \\ &= \sum_{i=1}^n \Delta_i \langle x_i, \sum_{j=1}^n x_j \Delta_j \rangle = \sum_{i=1}^n \Delta_i \frac{\beta}{2} = \left(\sum_{i=1}^n \Delta_i \right) \frac{\beta}{2} = 0 \frac{\beta}{2} = 0. \end{aligned}$$

Podemos concluir que $\alpha = 0$, logo $\sum_{j=1}^n \Delta_j = 0$ e $\sum_{j=1}^n x_j \Delta_j = 0$. Concluimos que $(\Delta_1, \dots, \Delta_n)$ é um vetor não-nulo que satisfaz (2.3), portanto $\delta(x) \leq n - 2$. \square

Voltando ao nosso problema inicial, considere a matriz 5×5 de Cayley - Menger associada a configuração $x = (q_1, q_2, q_3, q)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ 1 & S_{12} & 0 & S_{23} & S_{24} \\ 1 & S_{13} & S_{23} & 0 & S_{34} \\ 1 & S_{14} & S_{24} & S_{34} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

onde $S_{ij} = \|q_i - q_j\|^2$ e $S_{i4} = \|q_i - q\|^2 \forall i = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2, 3$. Podemos reescrever (2.8) da seguinte maneira

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & a^2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & b^2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & c^2 \\ 1 & a^2 & b^2 & c^2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Temos que $\delta(x) = 2$, então pela proposição anterior, o determinante de Cayley-Menger de (2.8) é nulo, ou seja, determinante de (2.9) é zero. Isto é,

$$F = a^4 + b^4 + c^4 - (a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^2 + b^2 + c^2) + 1 = 0. \quad (2.10)$$

Concluimos que as distâncias da 4ª partícula q das 3 primárias satisfazem a equação (2.10).

Podemos considerar essas distâncias como coordenadas. Isto é, determinar a coordenada de $q = (x, y)$ em função de a, b e c . Temos o seguinte sistema:

$$(x - \sqrt{3}/3)^2 + y^2 = a^2 \quad (2.11)$$

$$\Leftrightarrow (x + \sqrt{3}/6)^2 + (y - 1/2)^2 = b^2 \quad (2.12)$$

$$\Leftrightarrow (x + \sqrt{3}/6)^2 + (y + 1/2)^2 = c^2. \quad (2.13)$$

Subtraindo a equação (2.13) da equação (2.12), temos as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned} (y - 1/2)^2 - (y + 1/2)^2 &= b^2 - c^2 \\ \Leftrightarrow y^2 - y + 1/4 - y^2 - y - 1/4 &= b^2 - c^2 - 2y = b^2 - c^2 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{2}(c^2 - b^2). \end{aligned}$$

Fazendo (2.11) - (2.12), temos

$$\begin{aligned} (x - \sqrt{3}/3)^2 + y^2 - (x + \sqrt{3}/6)^2 - (y - 1/2)^2 &= a^2 - b^2 \\ \Rightarrow x^2 - 2\sqrt{3}x/3 + 1/3 - x^2 - \sqrt{3}x/3 - 1/12 + y^2 - y^2 + y - 1/4 &= a^2 - b^2 \\ \Rightarrow -\sqrt{3}x &= a^2 - b^2 - y. \end{aligned}$$

Substituindo o y encontrado, temos:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{1}{-\sqrt{3}}(a^2 - b^2 - \frac{1}{2}(c^2 - b^2)) \\
 &= \frac{1}{-\sqrt{3}}(a^2 - \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}c^2) \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{3}}(b^2 + c^2 - 2a^2) \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{6}(b^2 + c^2 - 2a^2).
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{6}(b^2 + c^2 - 2a^2) \\ y = \frac{1}{2}(c^2 - b^2) \end{cases} . \quad (2.14)$$

Sejam x_1, x_2, x_3 e x_4 as posições dos corpos em \mathbb{R}^2 fixo. Então a posição da quarta partícula no plano rotatório entorno do centro de massa das primárias é dada por

$$q - c = R(x_4 - c), \quad (2.15)$$

com $c = (c_x, c_y)$ sendo o centro de massa das partículas primárias e

$$R = \begin{pmatrix} \cos(-t) & -\text{sen}(-t) \\ \text{sen}(-t) & \cos(-t) \end{pmatrix}$$

a matriz rotação. Temos então

$$\dot{q} = \dot{R}(x_4 - c) + R\dot{x}_4, \quad (2.16)$$

$$\ddot{q} = \ddot{R}(x_4 - c) + 2\dot{R}\dot{x}_4 + R\ddot{x}_4. \quad (2.17)$$

Isolando x_4 em (2.15) e substituindo em (2.16), chegaremos que

$$\dot{x}_4 = R^t(\dot{q} - \dot{R}R^t(q - c)).$$

Substituindo x_4 e \dot{x}_4 em (2.17), temos que

$$\ddot{q} = (\ddot{R}R^t - 2(\dot{R}R^t)^2)(q - c) + 2\dot{R}R^t\dot{q} + R\ddot{x}_4.$$

Calculando as matrizes, iremos encontrar os seguintes valores

$$\ddot{R}R^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I, \quad \dot{R}R^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = J \quad \text{e} \quad (\dot{R}R^t) = J^2 = -I.$$

Portanto,

$$\ddot{q} = (q - c) + 2J\dot{q} + R\ddot{x}_4 \Rightarrow \ddot{x}_4 = R^t(\ddot{q} - 2J\dot{q} - (q - c)).$$

Utilizando a equação (2.1), temos que

$$\begin{aligned} R^t(\ddot{q} - 2J\dot{q} - (q - c)) &= \frac{m_1}{a^3}(x_1 - x_4) + \frac{m_2}{b^3}(x_2 - x_4) + \frac{m_3}{c^3}(x_3 - x_4) \\ &\Downarrow \\ (\ddot{q} - 2J\dot{q} - (q - c)) &= \frac{m_1}{a^3}(q_1 - q) + \frac{m_2}{b^3}(q_2 - q) + \frac{m_3}{c^3}(q_3 - q). \end{aligned}$$

Portanto, se $q = (x, y)$, a equação do movimento que descreve a trajetória de q no sistema rotatório é dada por:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\dot{y} + V_x, \\ \ddot{y} &= -2\dot{x} + V_y, \end{aligned}$$

onde

$$V = V(x, y) = \frac{1}{2}((x - c_x)^2 + (y - c_y)^2) + \frac{m_1}{a} + \frac{m_2}{b} + \frac{m_3}{c}.$$

V é chamado de **potencial eficaz**. Perceba que $c = (c_x, c_y)$ só depende das massas, pois

$$c = m_1(\sqrt{3}/3, 0) + m_2(-\sqrt{3}/6, 1/2) + m_3(-\sqrt{3}/6, -1/2) = \left(\frac{\sqrt{3}}{6}(2m_1 - m_2 - m_3), \frac{1}{2}(m_2 - m_3)\right).$$

Podemos também expressar V em termo das coordenadas a , b e c . Para isto, provaremos o seguinte lema.

Lema 2.1. *Se $I = \frac{1}{2}((x - c_x)^2 + (y - c_y)^2)$ e $I' = \frac{1}{2}(m_1a^2 + m_2b^2 + m_3c^2)$, então $I - I'$ não depende de a , b e c . Isto é, é constante em relação às coordenadas a , b e c .*

Demonstração. Utilizando $m_1 + m_2 + m_3 = 1$, $\|q_i\|^2 = \frac{1}{3}$, para todo $i = 1, 2$ e 3 , e $\mathbf{C} = \sum_{i=1}^3 m_i q_i$, obtemos que

$$\begin{aligned} I' &= \frac{1}{2}(m_1\|q - q_1\|^2 + m_2\|q - q_2\|^2 + m_3\|q - q_3\|^2) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^3(m_i\|q\|^2 - 2m_i\langle q, q_i \rangle + m_i\|q_i\|^2) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^3 m_i\|q\|^2 - 2\sum_{i=1}^3 m_i\langle q, q_i \rangle + \sum_{i=1}^3 m_i\|q_i\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\|q\|^2 - 2\langle q, \sum_{i=1}^3 m_i q_i \rangle + \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\|q\|^2 - 2\langle q, \mathbf{C} \rangle + \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\|q - \mathbf{C}\|^2 - \|\mathbf{C}\|^2 + \frac{1}{3}\right). \end{aligned}$$

Sendo $I = \frac{1}{2}\|q - \mathbf{C}\|^2$, então

$$\begin{aligned} I - I' &= \frac{1}{2}\left(\|q - \mathbf{C}\|^2 - \|q - \mathbf{C}\|^2 + \|\mathbf{C}\|^2 - \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\|\mathbf{C}\|^2 - \frac{1}{3}\right). \end{aligned}$$

\mathbf{C} é um vetor em função apenas das massas m_1 , m_2 e m_3 . Logo $\|\mathbf{C}\|^2$ não depende de a , b e c . Concluimos que $I - I' = K$ é constante. \square

Sendo assim, o potencial eficaz transforma-se facilmente em

$$V = \frac{1}{2}(m_1 a^2 + m_2 b^2 + m_3 c^2) + \frac{m_1}{a} + \frac{m_2}{b} + \frac{m_3}{c} + K, \quad (2.18)$$

onde K é constante.

2.3 Equilíbrios

Qualquer ponto crítico de $V(x, y)$ é imediatamente um ponto de equilíbrio para o PR4CP. Vimos que V também pode ser escrito em função das distâncias a , b e c . Veremos que encontrar os pontos críticos de V nas variáveis a , b e c é equivalente encontrar os pontos críticos nas variáveis x e y . Como segue na proposição a seguir.

Proposição 2.4. *Sejam a , b e c números reais positivos. (a, b, c) é um ponto crítico de $V = V(a, b, c)$ se, e somente se, (x, y) dado pela fórmula (2.14) é ponto crítico de $V(x, y)$.*

Demonstração. Temos que $V = V(x(a, b, c), y(a, b, c)) = V(a, b, c)$ onde $x = x(a, b, c)$ e $y = y(a, b, c)$ é dado pela fórmula (2.14). Pela regra da cadeia concluímos

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial a} &= \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a} \\ &= \frac{\partial V}{\partial x} (-4a) \frac{\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial b} &= \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial b} \\ &= \frac{\partial V}{\partial x} \frac{2b\sqrt{3}}{6} + \frac{\partial V}{\partial y} (-b) \\ &= b \left(\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\partial V}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial c} &= \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial c} \\ &= \frac{\partial V}{\partial x} \frac{c\sqrt{3}}{3} + \frac{\partial V}{\partial y} c \\ &= c \left(\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\partial V}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Utilizando o fato que a , b e c são não-nulos, as três equações acima garantem que

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y} \right) = (0, 0) \Leftrightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial a}, \frac{\partial V}{\partial b}, \frac{\partial V}{\partial c} \right) = (0, 0, 0).$$

\square

O nosso objetivo agora é encontrar os pontos críticos do potencial eficaz $V(a, b, c)$ restrito à superfície:

$$F = a^4 + b^4 + c^4 - (a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^2 + b^2 + c^2) + 1 = 0.$$

A fim de encontrar tais pontos, desenvolveremos o seguinte sistema

$$\begin{cases} (V_a, V_b, V_c) + \frac{1}{2}\lambda(F_a, F_b, F_c) = 0 \\ F = 0 \end{cases},$$

com λ o multiplicador de Lagrange.

$$\begin{aligned} V_a &= \frac{1}{2}(m_1 2a) - \frac{m_1}{a^2} = m_1 a \left(1 - \frac{1}{a^3}\right), \\ V_b &= \frac{1}{2}(m_2 2b) - \frac{m_2}{b^2} = m_2 b \left(1 - \frac{1}{b^3}\right), \\ V_c &= \frac{1}{2}(m_3 2c) - \frac{m_3}{c^2} = m_3 c \left(1 - \frac{1}{c^3}\right). \end{aligned}$$

E ainda,

$$\begin{aligned} F_a &= 4a^3 - 2ab^2 - 2ac^2 - 2a = 4a^3 - 2a(b^2 + c^2 + 1) = 2a(2a^2 - b^2 - c^2 - 1), \\ F_b &= 4b^3 - 2ba^2 - 2bc^2 - 2b = 4b^3 - 2b(a^2 + c^2 + 1) = 2b(2b^2 - a^2 - c^2 - 1), \\ F_c &= 4c^3 - 2ca^2 - 2cb^2 - 2c = 4c^3 - 2c(a^2 + b^2 + 1) = 2c(2c^2 - a^2 - b^2 - 1). \end{aligned}$$

Munido disso, surge o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} m_1 a \left(1 - \frac{1}{a^3}\right) + \lambda \frac{1}{2} 2a(2a^2 - b^2 - c^2 - 1) = 0 \\ m_2 b \left(1 - \frac{1}{b^3}\right) + \lambda \frac{1}{2} 2b(2b^2 - a^2 - c^2 - 1) = 0 \\ m_3 c \left(1 - \frac{1}{c^3}\right) + \lambda \frac{1}{2} 2c(2c^2 - a^2 - b^2 - 1) = 0 \\ a^4 + b^4 + c^4 - (a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^2 + b^2 + c^2) + 1 = 0 \end{cases}$$

\Updownarrow

$$\begin{cases} m_1 \left(1 - \frac{1}{a^3}\right) + \lambda(2a^2 - b^2 - c^2 - 1) = 0 \\ m_2 \left(1 - \frac{1}{b^3}\right) + \lambda(2b^2 - a^2 - c^2 - 1) = 0 \\ m_3 \left(1 - \frac{1}{c^3}\right) + \lambda(2c^2 - a^2 - b^2 - 1) = 0 \\ a^4 + b^4 + c^4 - (a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^2 + b^2 + c^2) + 1 = 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

Eliminando os denominadores, temos um sistema de quatro equações polinomiais em quatro variáveis a , b , c e λ . Somando as 3 primeiras equações do sistema acima temos

$$\begin{aligned} m_1\left(1 - \frac{1}{a^3}\right) + m_2\left(1 - \frac{1}{b^3}\right) + m_3\left(1 - \frac{1}{c^3}\right) + \\ \lambda(2a^2 - b^2 - c^2 - 12b^2 - a^2 - c^2 - 12c^2 - a^2 - b^2 - 1) = 0 \\ \Updownarrow \\ m_1\left(1 - \frac{1}{a^3}\right) + m_2\left(1 - \frac{1}{b^3}\right) + m_3\left(1 - \frac{1}{c^3}\right) - 3\lambda = 0. \end{aligned}$$

Isolando o λ e usando o fato que $m_1 + m_2 + m_3 = 1$, concluímos que

$$\lambda = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{m_1}{a^3} - \frac{m_2}{b^3} - \frac{m_3}{c^3}\right). \quad (2.20)$$

Substituindo (2.20) nas duas primeiras equações de (2.19) e eliminando os denominadores, produziremos o seguinte sistemas de três equações polinomiais em três variáveis a , b e c :

$$\begin{cases} 2a^5b^3c^3 - 2m_3a^5b^3 - 2m_2a^5c^3 - a^3b^5c^3 + m_3a^3b^5 - a^3b^3c^5 \\ + (3m_1 - 1)a^3b^3c^3 + m_3a^3b^3c^2 + m_3a^3b^3 + m_2a^3b^2c^3 + m_2a^3c^5 \\ + m_2a^3c^3 - 2m_1a^2b^3c^3 + m_1b^5c^3 + m_1b^3c^5 - 2m_1b^3c^3 = 0 \\ 2a^3b^5c^3 - 2m_3a^3b^5 - 2m_1b^5c^3 - a^5b^3c^3 + m_3a^5b^3 - a^3b^3c^5 \\ + (3m_2 - 1)a^3b^3c^3 + m_3a^3b^3c^2 + m_3a^3b^3 + m_1a^2b^3c^3 + m_1b^3c^5 \\ + m_1b^3c^3 - 2m_2a^3b^2c^3 + m_2a^5c^3 + m_2a^3c^5 - 2m_2a^3c^3 = 0 \\ a^4 + b^4 + c^4 - (a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^2 + b^2 + c^2) + 1 = 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

Observe que as duas primeiras equações do sistema acima estão escritas em uma ordem de importância tal que, fazendo $a \longleftrightarrow b$ e $m_1 \longleftrightarrow m_2$, a primeira equação se transforma na segunda e a segunda equação se transforma na primeira.

Visto que a , b e c são as distâncias da partícula q das três partículas primárias, podemos desconsiderar qualquer solução que possua pelo menos uma variável nula. Claramente os sistemas (2.19) e (2.21) são equivalentes. Afirmamos mais ainda que $(a, b, c) \in (\mathbb{C}^*)^3$ é solução do sistema (2.21) se, e somente se, $(a, b, c, \lambda) \in (\mathbb{C}^*)^4$ é solução do sistema (2.19), com λ dado pela equação (2.20) e $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$. O único problema estaria no fato de λ ser nulo, o lema abaixo garante que isso não pode acontecer.

Lema 2.2. *Não existe solução real ou complexa do sistema (2.19) com $\lambda = 0$.*

Demonstração. Suponhamos que existe uma solução (a, b, c, λ) para o sistema (2.19) tal

que $\lambda = 0$. Então

$$\begin{aligned} m_1\left(1 - \frac{1}{a^3}\right) &= 0 \Leftrightarrow a^3 = 1 \\ m_2\left(1 - \frac{1}{b^3}\right) &= 0 \Leftrightarrow b^3 = 1 \\ m_3\left(1 - \frac{1}{c^3}\right) &= 0 \Leftrightarrow c^3 = 1. \end{aligned}$$

Ou seja, a , b e c são raízes cúbicas da unidade. Considere a matriz A (2.9):

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & a^2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & b^2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & c^2 \\ 1 & a^2 & b^2 & c^2 & 0 \end{pmatrix},$$

temos que $1, a^2, b^2, c^2$ devem ser raízes cúbicas da unidade. O determinante de A' pode ser expandido em somas cujas parcelas são monômios onde as variáveis serão raízes cúbicas da unidade. Logo, esse determinante será uma soma de múltiplos inteiros de $1, \omega$ e ω^2 , onde $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. De fato, temos que

$$\det(A') = \sum_{\sigma \in S_5} (-1)^{s(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{5\sigma(5)}.$$

Como as entradas de A' são raízes cúbicas da unidade ou zero, podemos classificar os $\sigma \in S_5$ da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \sigma \in S_5 & \text{ tas que } a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{5\sigma(5)} = 0 \\ \sigma_1 = \sigma \in S_5 & \text{ tas que } a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{5\sigma(5)} = 1 \\ \sigma_2 = \sigma \in S_5 & \text{ tas que } a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{5\sigma(5)} = \omega \\ \sigma_3 = \sigma \in S_5 & \text{ tas que } a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{5\sigma(5)} = \omega^2 \end{aligned}$$

Logo,

$$\det(A') = \sum_{\sigma_1} (-1)^{s(\sigma_1)} + \sum_{\sigma_2} (-1)^{s(\sigma_2)} \omega + \sum_{\sigma_3} (-1)^{s(\sigma_3)} \omega^2,$$

ou seja, $\det(A') = \alpha + \beta\omega + \gamma\omega^2$, onde α, β e γ são números inteiro. Observe que $\alpha + \beta + \gamma$ não depende da particular escolha de a, b e c . Já vimos que $\det(A') = F = 0$, temos assim que $\alpha + \beta\omega + \gamma\omega^2 = 0$. Uma expressão desse tipo se anula se, e somente se, for múltiplo do polinômio mínimo de ω , $1 + \omega + \omega^2$, ou seja, se, e somente se, $\alpha = \beta = \gamma$. Concluimos que $\alpha + \beta + \gamma$ é divisível por 3. Por outro lado, considerando a matriz A' tomando $a^2 = 1, b^2 = 1$ e $c^2 = 1$, temos que $\alpha + \beta + \gamma = \det(A') = -2$, contradizendo a conclusão anterior. Logo a, b e c não podem ser raízes cúbicas da unidade, ou seja, λ deve ser diferente de zero. \square

2.4 Massas iguais

Um exemplo interessante do PR4CP é quando consideramos as massas das 3 primárias iguais. Estudaremos agora o caso em que $m_1 = m_2 = m_3 = \frac{1}{3}$ e mostraremos que existem precisamente 10 pontos de equilíbrio. Antes, iremos observar alguns resultados importantes que essa condição garante.

Proposição 2.5. *No caso de massas iguais, o sistema (2.19) é invariante por qualquer permutação de (a, b, c) .*

Demonstração. Primeiro perceba que o determinante de Cayley-Menger $F = a^4 + b^4 + c^4 - (a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^2 + b^2 + c^2) + 1$ não muda para qualquer permutação de (a, b, c) . Considere agora $a = a_1, b = a_2$ e $c = a_3$ e chame

$$\begin{aligned} f_1 &= m_1\left(1 - \frac{1}{a^3}\right) + \lambda(2a^2 - b^2 - c^2 - 1), \\ f_2 &= m_2\left(1 - \frac{1}{b^3}\right) + \lambda(2b^2 - a^2 - c^2 - 1), \\ f_3 &= m_3\left(1 - \frac{1}{c^3}\right) + \lambda(2c^2 - a^2 - b^2 - 1). \end{aligned}$$

Seja a permutação (a_i, a_j, a_k) com $i \neq j \neq k$ e $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$. Considerando que $m_1 = m_2 = m_3$, temos que

$$\begin{aligned} f_1(a_i, a_j, a_k) &= f_i, \\ f_2(a_i, a_j, a_k) &= f_j, \\ f_3(a_i, a_j, a_k) &= f_k. \end{aligned}$$

Logo, o sistema (2.19) é invariante a qualquer permutação de (a, b, c) . □

Proposição 2.6. *No caso em que $m_1 = m_2 = m_3 = \frac{1}{3}$, todas soluções reais e positivas do sistema (2.19) estão em uma linha de simetria, isto é, $a = b, a = c$ ou $b = c$.*

Demonstração. Para uma demonstração consultar (LEANDRO, 2008), theorem 3.1. □

Munido desses dois importantes resultados, podemos concluir que, no caso em que $m_1 = m_2 = m_3 = \frac{1}{3}$, soluções reais positivas do sistema (2.19) vêm em grupo de três: (α, α, β) , (α, β, α) ou (β, α, α) . Portanto, podemos considerar, sem perda de generalidade, o caso em que $a = b$.

Fazendo $m_1 = m_2 = m_3 = \frac{1}{3}$ e $a = b$ no sistema (2.21), as duas primeiras equações tornam iguais, então

$$\begin{cases} a^8 c^3 - \frac{1}{3}a^8 - \frac{2}{3}a^5 c^3 - a^6 c^5 + \frac{1}{3}a^6 + \frac{1}{3}a^6 c^2 + \frac{2}{3}a^3 c^5 - \frac{1}{3}a^3 c^3 & = 0 \\ a^4 - 2a^2 c^2 - 2a^2 + c^4 - c^2 + 1 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3a^8 c^3 - a^8 + a^6 - 2a^5 c^3 - 3a^6 c^5 + a^6 c^2 + 2a^3 c^5 - a^3 c^3 & = 0 \\ a^4 - 2a^2 c^2 - 2a^2 + c^4 - c^2 + 1 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a^3(a - c)(3a^4 c^3 - a^4 + 3a^3 c^4 - a^3 c + a^2 - 2ac^3 + ac - 2c^4 + c^2) & = 0 \\ a^4 - 2a^2 c^2 - 2a^2 + c^4 - c^2 + 1 & = 0 \end{cases}.$$

Podemos separar em dois sistemas. Do primeiro sistema,

$$\begin{cases} a^3(a - c) & = 0 \\ a^4 - 2a^2 c^2 - 2a^2 + c^4 - c^2 + 1 & = 0 \end{cases},$$

pode-se concluir que $a = c$. E assim, substituindo na última equação, temos que

$$\begin{aligned} a^4 - 2a^4 - 2a^2 + a^4 - a^2 + 1 &= 0 \\ -3a^2 &= -1 \\ a &= \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Logo, $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$ é um ponto crítico e assim nos fornece um equilíbrio na origem, no centro do triângulo formado pelas três primárias. O segundo sistema é

$$\begin{cases} 3a^4 c^3 - a^4 + 3a^3 c^4 - a^3 c + a^2 - 2ac^3 + ac - 2c^4 + c^2 & = 0 \\ a^4 - 2a^2 c^2 - 2a^2 + c^4 - c^2 + 1 & = 0 \end{cases}. \quad (2.22)$$

Chamaremos

$$\begin{aligned} g_1 &= 3a^4 c^3 - a^4 + 3a^3 c^4 - a^3 c + a^2 - 2ac^3 + ac - 2c^4 + c^2, \\ g_2 &= a^4 - 2a^2 c^2 - 2a^2 + c^4 - c^2 + 1. \end{aligned}$$

A fim de resolver o sistema (2.22), iremos calcular a resultante de g_1 e g_2 considerando-os como polinômios apenas em a , ou seja, veremos a variável c como constante. Lembrando que a resultante de g_1 e g_2 é o determinante da matriz C , matriz de Sylvester associada a

esses polinômios. C é definida da seguinte maneira

$$C = Syl(g_1, g_2) = \begin{pmatrix} a_n & 0 & \dots & 0 & b_m & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & \ddots & \vdots & b_{m-1} & b_m & \ddots & \vdots \\ \vdots & a_{n-1} & \ddots & 0 & \vdots & b_{m-1} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_n & \vdots & \vdots & \ddots & b_m \\ a_0 & \vdots & & a_{n-1} & b_0 & \vdots & & b_{m-1} \\ 0 & a_0 & & \vdots & 0 & b_0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_0 & 0 & \dots & 0 & b_0 \end{pmatrix},$$

vendo g_1 e g_2 como

$$\begin{aligned} g_1 &= a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0 X^0, \quad a_n \neq 0 \\ g_2 &= b_m X^m + b_{m-1} X^{m-1} + \dots + b_0 X^0, \quad b_m \neq 0. \end{aligned}$$

O determinante de C será um polinômio na variável c , como segue

$$\begin{aligned} P(c) &= -243c^{26} + 810c^{24} + 324c^{23} - 1701c^{22} - 972c^{21} + 2241c^{20} \\ &\quad + 1944c^{19} + 243c^{18} - 2376c^{17} - 405c^{16} + 972c^{15} - 999c^{14} \\ &\quad - 108c^{13} - 243c^{12} + 540c^{11} + 351c^{10} - 54c^8 - 108c^7 + 9c^4. \end{aligned}$$

As raízes de $P(c)$ correspondem aos valores de c tais que g_1 e g_2 possuem raízes em comum. Logo, encontrado esses valores, basta substituir no sistema (2.22) e resolver o sistema apenas na variável a . Para calcular essas raízes resolveremos a equação $P(c) = 0$. A equação possui 22 soluções complexas não-nulas, cinco delas são reais positivas, mas apenas 3 correspondem ao valor de a não-nulo. As três soluções relevantes (a, c) do sistema (2.22) são

$$\begin{aligned} \{ & (0.502465683134481, 0.816308578384975), (1.55145156726892, 0.602648135699807), \\ & (0.817298143882299, 1.51253623586187) \}. \end{aligned}$$

Cada uma das três soluções encontradas anteriormente produz mais duas soluções para o problema (por meio de permutação). Somando essas soluções com a solução da origem, temos exatamente dez pontos de equilíbrios. Vale ressaltar que todos os cálculos e valores encontrados acima foram feitos utilizando o programa sagemath.

3 TEORIA BKK

3.1 Polítopos

Definição 3.1. Dizemos que um conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ é um **conjunto convexo** se dados dois pontos quaisquer em C , o segmento que os une, $[A, B]$, também está em C . Isto é, dados A e B em C , então

$$tA + (1 - t)B \in C, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Definição 3.2. Seja X um subconjunto qualquer de \mathbb{R}^n . Chamaremos de **fecho convexo** de X o seguinte conjunto

$$\text{Conv}(X) = \left\{ \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n : x_i \in X, \lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \forall i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}.$$

Os elementos de $\text{Conv}(X)$ são chamados de combinação linear convexa de X . Estamos interessados em saber qual é o menor conjunto convexo que contém o subconjunto X de \mathbb{R}^n . Veremos que esse conjunto coincide com o fecho convexo de X .

Lema 3.1. Se $X = \{A, B\} \in \mathbb{R}^n$, então o fecho convexo de X é $[A, B]$.

Demonstração. Temos que $\text{Conv}(X) = \{\lambda_1 A + \lambda_2 B : \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}$. Portanto, $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$. Logo,

$$\text{Conv}(X) = \{\lambda_1 A + (1 - \lambda_1)B : \lambda_1 \in [0, 1]\} = [A, B].$$

□

Lema 3.2. Se X é convexo, então $X = \text{Conv}(X)$.

Demonstração. Temos de forma trivial que $X \subset \text{Conv}(X)$. Basta provar que $\text{Conv}(X) \subset X$. Seja $\alpha \in \text{Conv}(X)$, então $\alpha = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ com $x_i \in X$ e $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Iremos provar por indução em n que $\alpha \in X$.

Se $n = 2$, como X é convexo temos

$$\alpha = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1)x_2 = [x_1, x_2] \subset X.$$

Suponhamos que para n , $\alpha \in X$. Seja $\alpha = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$ com $x_i \in X$ e $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$. Ao menos um λ_i é menor que 1, digamos, λ_{n+1} . Observe que, por hipótese de indução, $\beta = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_{n+1}} x_j \in X$, repare que $\sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_{n+1}} = 1$. Portanto,

$$\alpha = \lambda_{n+1} x_{n+1} + (1 - \lambda_{n+1})\beta \in X,$$

pois X é convexo e $\lambda_{n+1} \in [0, 1]$.

□

Lema 3.3. $\text{Conv}(X)$ é convexo.

Demonstração. Sejam $x, y \in \text{Conv}(X)$. Queremos mostrar que $tx + (1-t)y \in \text{Conv}(X)$ para todo $t \in [0, 1]$. Temos que

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, \quad y = \sum_{j=1}^m \mu_j y_j,$$

onde $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, $\sum_{j=1}^m \mu_j = 1$ e $x_i, y_j \in X$.

Seja $t \in [0, 1]$. Logo,

$$\beta = tx + (1-t)y = t \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + (1-t) \sum_{j=1}^m \mu_j y_j = \sum_{i=1}^n t \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^m (1-t) \mu_j y_j.$$

Repare que $t \lambda_i, (1-t) \mu_j \geq 0 \forall i, j$. E ainda

$$\sum_{i=1}^n t \lambda_i + \sum_{j=1}^m (1-t) \mu_j = t \sum_{i=1}^n \lambda_i + (1-t) \sum_{j=1}^m \mu_j = t + (1-t) = 1.$$

Portanto, β é uma combinação linear convexa de X , assim $\beta \in \text{Conv}(X)$, como queríamos demonstrar. \square

Proposição 3.1. $\text{Conv}(X)$ é o menor conjunto convexo que contém X .

Demonstração. Pela definição de fecho convexo é fácil ver que se $X \subset Y$, então $\text{Conv}(X) \subseteq \text{Conv}(Y)$. Seja Y um subconjunto convexo tal que

$$X \subset Y \subset \text{Conv}(X),$$

então

$$\text{Conv}(X) \subseteq \text{Conv}(Y) \subseteq \text{Conv}(\text{Conv}(X))$$

\Downarrow

$$\text{Conv}(X) \subseteq Y \subseteq \text{Conv}(X).$$

Portanto, $Y = \text{Conv}(X)$. \square

Concluimos da proposição 7 que

$$\text{Conv}(X) = \cap \{C : C \text{ é convexo e } X \subset C\}.$$

Definição 3.3. Um **politopo** Q é o fecho convexo de um subconjunto finito do \mathbb{R}^n . Ou seja,

$$Q = \text{Conv}(A), \text{ no qual } A = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Para nós, os polítopos mais importantes serão os que são fechos convexos de subconjuntos finitos onde todos os elementos possuem coordenadas inteiras. Isto é, $Q = \text{Conv}(P)$, com $P \subset \mathbb{Z}^n$ e P finito. Estes polítopos são chamados de **polítopos inteiros**. O conceito de dimensão pode ser dado a um polítopo e, mais para frente, será de extrema importância.

Definição 3.4. Seja Q um polítopo de \mathbb{R}^n . Definimos **dimensão** de Q como a dimensão do menor subespaço afim de \mathbb{R}^n que contém Q . Notação: $\dim(Q)$.

Definição 3.5. Dizemos que um polítopo é **r-simplexo** de \mathbb{R}^n se for fecho convexo de $\{x_1, \dots, x_{r+1}\} \subset \mathbb{R}^n$ e $\{x_2 - x_1, \dots, x_{r+1} - x_1\}$ é linearmente independente em \mathbb{R}^n .

3.2 Faces de um polítopo

Se observarmos um polítopo em \mathbb{R}^3 , notaremos subconjuntos particulares: vértices que são os pontos extremos do polítopo, arestas que são os segmentos de reta e faces que são polígonos contidos em um plano. Observe que tais conjuntos podem ser vistos como polítopos de dimensão 0, 1 e 2 respectivamente. A eles chamaremos de faces k -dimensionais do polítopo, no qual k é a dimensão correspondente.

Considere o hiperplano $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle = a\}$, onde $a \in \mathbb{R}$ e u um vetor não-nulo de \mathbb{R}^n . Podemos definir dois semi-espacos relacionados a H

$$\begin{aligned} H_+ &= \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle \geq a\}, \\ H_- &= \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle \leq a\}. \end{aligned}$$

Definição 3.6. Um hiperplano H de \mathbb{R}^n é dito **hiperplano de apoio** para um subconjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ fechado e convexo, se $K \cap H \neq \emptyset$ e $K \subset H_+$ ou $K \subset H_-$. Neste caso, dizemos que H_+ e H_- são semi-espacos de apoio.

Seja H um hiperplano de apoio para um subconjunto K fechado e convexo do \mathbb{R}^n . Por conveniência iremos considerar que $K \subset H_-$. Logo mais, no entanto, veremos que podemos equivalentemente considerar $K \subset H_+$.

Definição 3.7. Seja $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle = a\}$ um hiperplano de apoio para um subconjunto K . O vetor u é dito **vetor externo normal** a K e o vetor $(-u)$ é dito **vetor interno normal** de K .

Considere a função contínua, de $K \subset \mathbb{R}^n$ em \mathbb{R} , dada por $f_u(x) = \langle x, u \rangle$, para algum vetor u não-nulo do \mathbb{R}^n . Se K for compacto, a função $f_u(x)$ atinge um máximo e um mínimo. Isso motiva a seguinte definição.

Definição 3.8. Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto. A função h_K de \mathbb{R}^n em \mathbb{R} dada por $h_K(u) = \max_{x \in K} \{f_u(x)\}$ é chamada de **função suporte** de K .

Proposição 3.2. *Seja K um subconjunto compacto e convexo de \mathbb{R}^n .*

1. *Para todo $u \neq 0$, $H_K(u) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle = h_K(u)\}$ é um hiperplano de apoio de K .*
2. *Todo hiperplano de apoio de K pode ser escrito como no item anterior.*

Demonstração. Sabemos que existe um $x_0 \in K$ tal que $f_u(x_0) = \langle x_0, u \rangle = h_K(u)$, logo $K \cap H_K(u) \neq \emptyset$. E ainda, $\forall x \in K$ temos que $f_u(x) = \langle x, u \rangle \leq h_K(u) = \max\{f_u(x)\}$, logo $K \subset H_K(u)_-$, provando o item 1 da proposição.

Seja $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle = a\}$ um hiperplano de apoio para K . Suponha $K \subset H_-$, ou seja, $\forall x \in K \quad \langle x, u \rangle \leq a$. Como $H \cap K \neq \emptyset$, então existe um $x_0 \in K$ tal que $\langle x_0, u \rangle = a$. Portanto $a = h_K(u)$ e $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle = h_K(u)\}$, provando o item 2. \square

Observação: Seja $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle = a\}$ um hiperplano de apoio de K compacto e convexo. Se $K \subset H_-$, $\forall y \in K$ temos $\langle y, u \rangle \leq a = h_K(u)$. Considere agora, $H' = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, -u \rangle = -a\}$. Claramente $H = H'$. Porém, se $y \in K$, então $\langle y, -u \rangle \geq -a$. Assim, $K \subset H'_+$ e $-a = \min\{f_{-u}(x)\}$.

Definição 3.9. *Seja H um hiperplano de apoio de um politopo P de dimensão n . Chamaremos $F = P \cap H$ de **face** P .*

Veremos adiante que F também é um politopo. Já sabemos que F é convexo, pois é interseção de conjuntos convexos. Mais especificamente, iremos provar que F é o fecho convexo dos pontos que estão em $H \cap C$, com $P = \text{Conv}(C)$.

Também iremos ver que P é compacto. Portanto, pela proposição anterior, deduzimos que para todo vetor não-nulo $u \in \mathbb{R}^n$, temos que $F_P(u) = P \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle = h_P(u)\}$ é uma face de P .

Definição 3.10. *Dizemos que $F_P(u)$ é a **face determinada por u** , ou **face induzida por u** .*

Teorema 3.1. *As faces de um politopo são politopos. Em particular, existe uma quantidade finita de faces.*

Demonstração. Sejam $P = \text{Conv}(\{x_1, \dots, x_r\})$ um politopo e $F = P \cap H$ uma face de P , com $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle = a\}$ hiperplano de apoio de P . Sendo $P \subset H_-$, considere o caso em que $x_1, \dots, x_s \in H$ e $x_{s+1}, \dots, x_r \in \text{int}(H_-)$. Se $x_1, \dots, x_r \in H$, teríamos que $F = P$, e assim o teorema estaria demonstrado. Voltando ao caso a ser considerado, segue que

$$\begin{aligned} \langle x_i, u \rangle &= a \quad \forall i = 1, \dots, s, \\ \langle x_j, u \rangle &< a \quad \forall j = s+1, \dots, r. \end{aligned}$$

Defina $b_j = a - \langle x_j, u \rangle$, $\forall j = s + 1, \dots, r$, logo $b_j > 0$. Se $x \in P$, então $x = \sum_{i=1}^r \lambda_i x_i$, com $\sum_{i=1}^r \lambda_i = 1$ e $\lambda_i \geq 0$, $\forall i = 1, \dots, r$. Logo,

$$\begin{aligned} \langle x, u \rangle &= \sum_{i=1}^s \lambda_i \langle x_i, u \rangle + \sum_{j=s+1}^r \lambda_j \langle x_j, u \rangle \\ &= \sum_{i=1}^s \lambda_i a + \sum_{j=s+1}^r \lambda_j (a - b_j) \\ &= \sum_{i=1}^r \lambda_i a - \sum_{j=s+1}^r \lambda_j b_j \\ &= a - \sum_{j=s+1}^r \lambda_j b_j \leq a. \end{aligned}$$

Portanto,

$$x \in H \Leftrightarrow \sum_{j=s+1}^r \lambda_j b_j = 0 \Leftrightarrow \lambda_{s+1} = \dots = \lambda_r = 0.$$

Concluimos que, se $x \in F$, então $x = \sum_{i=1}^s \lambda_i x_i$, com $\sum_{i=1}^s \lambda_i = 1$ e $\lambda_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, s$. Isto é, $F = \text{Conv}(\{x_1, \dots, x_r\})$, assim F é um politopo.

Podemos concluir ainda que, como o conjunto das partes de $\{x_1, \dots, x_r\}$ é finito, então a quantidade de faces de P é finita. Pois, se F é uma face de P , então é fecho convexo de algum subconjunto de $\{x_1, \dots, x_r\}$. \square

Proposição 3.3. *Sejam F_0 e F_1 faces de um politopo P tal que $F_0 \subset F_1$. Então F_0 é uma face de F_1 .*

Demonstração. Seja H_0 o hiperplano de apoio de P tal que $F_0 = P \cap H_0$. Então, $F_0 \subset H_0$ e $F_1 \subset P$ (pois F_1 é face de P). Logo,

$$F_1 \cap H_0 \subset P \cap H_0 = F_0 \subset F_1 \cap H_0.$$

Portanto, $F_0 = F_1 \cap H_0$ e assim F_0 é uma face de F_1 . \square

Definição 3.11. A **dimensão da face** de um politopo é definida como a dimensão do menor subespaço afim que contem a mesma.

Classificaremos algumas faces de um politopo mediante sua dimensão:

1. Faces de dimensão 0 serão chamadas de **vértices** do politopo. $\text{Vert}(P)$ denota o conjunto de todos os vértices de um politopo P .
2. Faces de dimensão 1 serão chamadas de **arestas** do politopo.
3. Se um politopo tem dimensão n , as faces de dimensão $n - 1$ serão chamadas de **facetas**.

Observação: No caso em que $P \subset \mathbb{R}^n$ é um politopo de dimensão n , o vetor normal que induz uma faceta de P é único, a menos de multiplicação por constante. De fato, se F é uma faceta de P , só existe um único hiperplano de apoio H tal que $F = H \cap P$, pois a dimensão de H também é $n - 1$. Com isso, o vetor normal a H , e portanto à faceta, deve ser único.

Definição 3.12. Seja P um politopo. Denotamos por $f_k(P)$ a quantidade de faces k -dimensionais do politopo P . O vetor $f(P) := (f_0(P), \dots, f_{n-1}(P))$ será chamado de **f -vetor** de P .

Já sabemos que um politopo tem uma quantidade finita de faces, e portanto de vértices. Podemos dizer mais ainda, que todo politopo é fecho convexo dos seus vértices. É o que veremos a seguir.

Lema 3.4. *Seja K um conjunto fechado e convexo em \mathbb{R}^n . Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, existe um único $x' \in K$ tal que*

$$\|x - x'\| \leq \|x - z\|, \quad \forall z \in K. \quad (3.1)$$

Demonstração. K ser um conjunto compacto garante a existência de x' . Suponhamos que exista $x'' \in K$ tal que $x' \neq x''$ satisfazendo (3.1). Logo, $\|x - x'\| = \|x - x''\|$. Considere o triângulo isósceles de vértices x , x' e x'' . Como K é convexo, temos que o ponto médio $m = \frac{1}{2}(x' + x'')$ do segmento $[x', x'']$ deve pertencer a K . No entanto

$$\|x - m\| < \|x - x'\| = \|x - x''\|,$$

contradizendo (3.1). Portanto, $x' = x''$. □

Definição 3.13. Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ fechado e convexo. A função p_K , de \mathbb{R}^n em K , dada por $p_K(x) = x'$, x' como no lema anterior, é chamada de **função do ponto mais perto**.

Observação: É fácil ver que $p_K(x) = x \Leftrightarrow x \in K$. Em particular, p_K é sobrejetiva.

Lema 3.5. *Seja $x \in \mathbb{R}^n - \{K\}$, com K um subconjunto não-vazio fechado e convexo. O hiperplano H que contém $p_K(x) = x'$ e é perpendicular ao vetor $x - x'$, é um hiperplano de apoio de K . Mais ainda, $H = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, u \rangle = 1\}$, onde $u = \frac{x - x'}{\langle x', x - x' \rangle}$.*

Demonstração. Claramente $x' \in H$ e $x - x'$ é perpendicular a H . Iremos mostrar que H é hiperplano de apoio de K .

Afirmção: $x \in \text{int}(H_+)$.

De fato, como $x \neq x'$, então

$$\langle x - x', x - x' \rangle > 0 \Rightarrow \langle x, x - x' \rangle > \langle x', x - x' \rangle \Rightarrow \langle x, u \rangle > 1$$

Logo, $x \in \text{int}(H_+)$.

Suponhamos, que $K \not\subseteq H_-$. Isto é, existe $y \in K$, $y \neq x$, tal que $y \in \text{int}(H_+)$. Considere a bola fechada B centrada em x de raio $\|x - x'\|$. Com certeza existe $z \in [x', y] \cap B$ tal que

$$\|x - z\| < \|x - x'\|. \quad (3.2)$$

Mas K é convexo, então z deve pertencer a K . Logo, (3.2) não pode acontecer, c ontradição. Portanto, H é hiperplano de apoio de K . \square

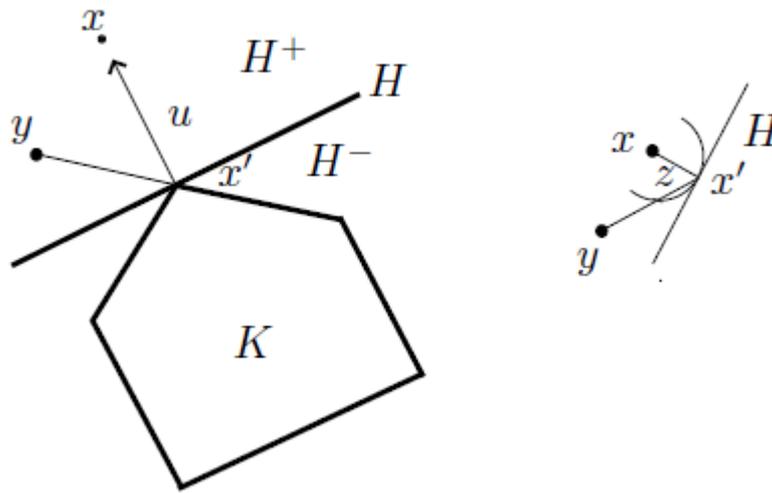


Figura 2: Hiperplano de apoio de K perpendicular a $x - x'$.

Teorema 3.2. *Um polítopo P é o fecho convexo do conjunto dos seus vértices. Isto é, $P = \text{Conv}(\text{Vert}(P))$.*

Demonstração. Temos que $\text{Vert}(P) \subset P$. Então, $\text{Conv}(\text{Vert}(P)) \subset P$. Resta provar que $P \subset \text{Conv}(\text{Vert}(P))$. Seja $P = \text{Conv}(\{x_1, \dots, x_r\})$. Pela minimalidade do conjunto gerador $\{x_1, \dots, x_n\}$, podemos considerar que, para todo $i = 1, \dots, r$,

$$x_i \notin P_i = \text{Conv}(\{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_r\}).$$

Considere H_i o hiperplano de apoio de P_i que contém $p_{P_i}(x_i) = x_i'$ e é perpendicular a $x_i - x_i'$. Logo, $P_i \subset H_{i-}$ e $x_i \in \text{int}(H_{i+})$. Transladando H_i por $x_i - x_i'$ obtemos um hiperplano H_i' , que é hiperplano de apoio de P .

Afirmção: $P \cap H_i' = \{x_i\}$.

De fato, sendo, pelo lema 1.5,

$$H_i = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, x_i - x_i' \rangle = \langle x_i', x_i - x_i' \rangle\}.$$

Logo,

$$H_i' = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, x_i - x_i' \rangle = \langle x_i, x_i - x_i' \rangle\}.$$

Ou ainda

$$H_i' = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x - x_i, x_i - x_i' \rangle = 0\}.$$

Como $x_i = x_i' + (x_i - x_i')$, é fácil ver que $x_i \in H_i'$. Logo, $\{x_i\} \subset P \cap H_i'$. Seja x_j , com $j \neq i$. Sabemos que $x_j \in H_{i-}$. Então,

$$\begin{aligned} \langle x_j, x_i - x_i' \rangle &\leq \langle x_i', x_i - x_i' \rangle \\ &\Downarrow \\ \langle x_j - x_i + x_i, x_i - x_i' \rangle &\leq \langle x_i', x_i - x_i' \rangle \\ &\Downarrow \\ \langle x_j - x_i, x_i - x_i' \rangle &\leq \langle x_i' - x_i, x_i - x_i' \rangle = -\|x_i - x_i'\| < 0 \end{aligned}$$

Concluimos que $x_j \in \text{int}(H_{i-})$, para todo $j \neq i$. Considere $y \in P$. Então $y = \sum_{j=1}^r a_j x_j$ tal que $\sum_{j=1}^r a_j = 1$ e $a_j \geq 0$, $\forall j = 1, \dots, r$. Se $\sum_{j \neq i} a_j \neq 0$, então

$$\begin{aligned} \langle y, x_i - x_i' \rangle &= \sum_{j=1}^r a_j \langle x_j, x_i - x_i' \rangle = \sum_{j \neq i} a_j \langle x_j, x_i - x_i' \rangle + a_i \langle x_i, x_i - x_i' \rangle \\ &< \sum_{j \neq i} a_j \langle x_i, x_i - x_i' \rangle + a_i \langle x_i, x_i - x_i' \rangle = \langle x_i, x_i - x_i' \rangle. \end{aligned}$$

Concluimos que para $y \in H_i'$, $\sum_{j \neq i} a_j = 0$. Ou seja, $y = x_i$. Portanto, $P \cap H_i' = \{x_i\}$. A afirmação anterior garante que $\{x_1, \dots, x_r\} \subset \text{Vert}(P)$. Logo, $P \subset \text{Conv}(\text{Vert}(P))$. \square

Definição 3.14. Se x_1, \dots, x_r são os vértices de um politopo P . Chamaremos o conjunto $\{x_1, \dots, x_r\}$ de **gerador** de P .

Estamos interessados agora em determinar um politopo P em termos de suas facetas. Digamos que $\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_n$ são as facetas de P com vetores normais externos v_1, \dots, v_n correspondentes. Veremos que

$$P = \bigcap_{j=1}^n \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, v_j \rangle \leq a_j\},$$

para o qual $a_j = h_P(v_j)$ $\forall j = 1, \dots, n$.

Definição 3.15. A interseção finita de semi-espacos fechados em \mathbb{R}^n é chamada de **conjunto poliedral**.

Observação: Um conjunto poliedral será um subconjunto fechado e convexo do \mathbb{R}^n , pois é interseção finita de conjuntos fechados e convexos. Portanto, podemos estender os conceitos de hiperplano de apoio, faces e dimensão para um conjunto poliedral, de maneira similar ao politopo.

Lema 3.6. *Seja $x \in \mathbb{R}^n - K$, com K subconjunto fechado e convexo do \mathbb{R}^n . Suponha que y pertença à semi-reta de origem em $x' = p_K(x)$ e que passa por x . Então, $x' = y' = p_K(y)$.*

Demonstração. Primeiro, considere o caso em que $y \in [x', x]$. Se $x' \neq y'$, então

$$\|x - x'\| = \|x - y\| + \|y - x'\| > \|x - y\| + \|y - y'\| \geq \|x - y'\|,$$

que é uma contradição. Logo, $x' = y'$. Suponha $x \in [x', y]$ e $y' \neq x'$. Então, a reta paralela a $[y, y']$ que passa por x corta o segmento $[x', y']$ em um ponto x_0 . Como K é convexo, então $x_0 \in K$. Usando semelhança de triângulos, segue que

$$\frac{\|x - x_0\|}{\|x - x'\|} = \frac{\|y - y'\|}{\|y - x'\|} \iff \|x - x_0\| = \|x - x'\| \frac{\|y - y'\|}{\|y - x'\|}.$$

Por hipótese, $\|y - y'\| < \|y - x'\|$. Logo,

$$\|x - x_0\| < \|x - x'\|,$$

que é uma contradição. Portanto, $x' = y'$. □

Lema 3.7. *A função p_K é Lipschitz com constante de Lipschitz igual a 1. Em particular, p_K é uniformemente contínua.*

Demonstração. Para uma demonstração consultar (GÜNTER, 1996), página 13. □

Teorema 3.3. *Todo conjunto fechado e convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ possui um hiperplano de apoio em cada um dos seus pontos de fronteira.*

Demonstração. Seja $x_0 \in \partial K$. Existe uma sequência $\{z_i\}$ que converge para x_0 com $z_i \in \mathbb{R}^n - K$, $\forall i$. Como p_K é contínua, então $\{x_i\}$ converge para x_0 , sendo $p_K(z_i) = x_i$. Considere S a esfera centrada em x_0 de raio $r > 0$. Com i suficiente grande, s_i , a semi-reta com origem em x_i que passa por z_i , intercepta a superfície da esfera no ponto y_i . Perceba que $\{y_i\}$ converge para um ponto de acumulação y_0 , tal que $y_0 \neq x_0$. Sabemos, pelo lema 1.6, que $p_K(y_i) = x_i$. Usando a continuidade de p_K mais uma vez, temos que x_i deve convergir para $p_K(y_0)$. Portanto, $p_K(y_0) = x_0$. Temos ainda que $y_0 \notin K$, caso contrário

$$p_K(y_0) = y_0 = x_0,$$

que é uma contradição. Logo, pelo lema 1.5, existe um hiperplano de apoio de K que passa por x_0 . □

Observação: O teorema anterior garante que $\partial K \subset \cup_{i \in I} H_i$, com H_i hiperplanos de apoio de K .

Teorema 3.4. *Todo politopo P é um conjunto poliedral limitado.*

Demonstração. Para uma demonstração consultar (BOUREL, 2005), teorema 1.31 \square

Teorema 3.5. *Todo conjunto poliedral limitado é um politopo.*

Demonstração. Iremos provar por indução completa na dimensão do conjunto poliedral. Seja P um conjunto poliedral limitado. Se P tem dimensão 0, claramente P é um politopo. Suponhamos que todo conjunto poliedral limitado de dimensão até $n - 1$ seja um politopo e suponha P de dimensão $n > 0$. Então,

$$P = H_{1-} \cap H_{2-} \cap \dots \cap H_{s-},$$

com H_i hiperplanos em \mathbb{R}^n .

Faça $F_j = H_j \cap P$. Perceba que F_j é um conjunto poliedral limitado de dimensão menor igual a $n - 1$. Por hipótese de indução, F_j é um politopo, para todo j . Como $\cup_{j=1}^s F_j \subset P$, então $\text{Conv}(\cup_{j=1}^s F_j) \subset \text{Conv}(P) = P$.

Afirmção: Sejam $x \in \text{int}(P)$ e σ uma semi-reta com origem em x . Então σ intercepta ∂P em um único ponto x_σ .

De fato, seja Δ a reta que contém σ . Sabemos que P é fechado, convexo e limitado. Portanto, P é compacto e convexo. Logo, a interseção de Δ com P deve ser um conjunto compacto e convexo de dimensão 1, isto é, deve ser $[x_\tau, x_\sigma]$. Isso implica que $\sigma \cap \partial P = x_\sigma$. Como $\partial P \subset \cup_{j=1}^s F_j$ (teorema 1.3), x_σ pertence a alguma face F_{j_σ} . De maneira análoga podemos concluir que $x_\tau \in F_{j_\tau}$. Segue que

$$x \in [x_\tau, x_\sigma] \subset \text{Conv}(F_{j_\tau} \cup F_{j_\sigma}) \subset \text{Conv}(\cup_{j=1}^s F_j),$$

isto é,

$$P = \partial P \cup \text{Int}(P) \subset \text{Conv}(\cup_{j=1}^s F_j).$$

Portanto,

$$P = \text{Conv}(\cup_{j=1}^s A_j),$$

com A_j finito e $\text{Conv}(A_j) = F_j$. Logo, P é politopo. \square

3.3 Politopo de Newton de um polinômio de Laurent

Uma conexão entre polinômios e politopos inteiros é um dos pontos mais importante desse capítulo. Antes, introduziremos a seguinte notação para polinômios em n variáveis sobre \mathbb{C} ,

$$f = \sum_{\alpha \in S} c_\alpha X^\alpha,$$

com $\alpha = (k_1, \dots, k_n) \in S$, S é um subconjunto finito de $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ chamado de **suporte** de f , $X^\alpha = X_1^{k_1} \dots X_n^{k_n}$ e $c_\alpha \in \mathbb{C}^*$.

Definição 3.16. O **politopo de Newton** de um polinômio $f \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$, denotado por $NP(f)$, é o fecho convexo do suporte de f . Isto é,

$$NP(f) = \text{Conv}(S),$$

onde S é conjunto suporte de f .

Perceba que os valores dos coeficientes c_α não importam na definição de $NP(f)$.

Exemplo 3.1. Considere $f \in \mathbb{C}[x, y, z]$ tal que

$$f = axyz + bxy + cz + d,$$

$a, b, c, d \in \mathbb{C}^*$. Então

$$NP(f) = \text{Conv}(\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 0, 0)\}).$$

Observe que $NP(f)$ é um politopo em \mathbb{R}^3 de dimensão 2.

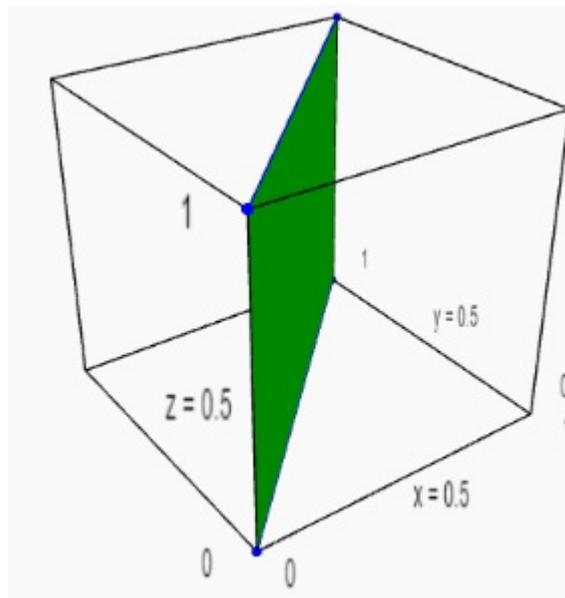


Figura 3: Politopo $NP(f)$ do exemplo 1.

Podemos ainda associar um subconjunto finito $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ a um \mathbb{C} -espaço vetorial $L(A)$, definido da seguinte maneira

$$L(A) = \{c_1 X^{\alpha_1} + \dots + c_l X^{\alpha_l} : c_i \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n].$$

Note que $\dim(L(A)) = l$ e $NP(f) \subseteq \text{Conv}(A)$ para todo $f \in L(A)$. A igualdade nem sempre acontece, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 3.2. Seja $A = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 0, 0)\} \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}^3$. Observe que $f = c_1xyz + c_2xy + c_3z + c_4 \in L(A)$. Caso algum $c_j = 0$, para algum $j = 1, 2, 3, 4$, então o conjunto S , suporte de f , é um subconjunto próprio de A . Portanto,

$$NP(f) \subsetneq Conv(A).$$

Concluiremos essa seção com uma pequena generalização da noção de politopo de Newton. Visto que os vértices de um politopo inteiro podem ter coordenadas inteiras negativas, seria bastante útil ter uma correspondência entre politopos inteiros e polinômios. Isto motiva a seguinte definição.

Definição 3.17. Seja $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ um vetor inteiro. $X^\alpha = X_1^{a_1} \dots X_n^{a_n}$ é chamado de **monômio de Laurent** associado a α . Uma combinação linear finita de monômios de Laurent com coeficientes em \mathbb{C} é chamado de **polinômio de Laurent** sobre \mathbb{C} .

Denotamos polinômio de Laurent sobre \mathbb{C} por

$$f = \sum_{\alpha \in S} c_\alpha X^\alpha,$$

com $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in S$, S é um subconjunto finito de \mathbb{Z}^n chamado de suporte de f , X^α monômio de Laurent associado a α e $c_\alpha \in \mathbb{C}^*$. Definimos

$$X^\alpha \cdot X^\beta = X^{\alpha+\beta} \quad \text{e} \quad X^\alpha \cdot X^{-\alpha} = 1, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n.$$

A coleção de todos polinômios de Laurent sobre \mathbb{C} forma um anel comutativo com a soma e o produto usuais. Denotaremos esse anel por $\mathbb{C}[X_1^\pm, \dots, X_n^\pm]$. A definição de politopo de Newton é a mesma para polinômios de Laurent. Assim como, dado um conjunto finito $A \subset \mathbb{Z}^n$, podemos associar um \mathbb{C} - espaço vetorial $L(A)$ composto por todos os polinômios de Laurent com expoentes em A .

3.4 Soma de Minkowski

Definição 3.18. Sejam $P_1, P_2 \subset \mathbb{R}^n$ politopos. Definimos como **soma de Minkowski** de P_1 e P_2 o seguinte conjunto

$$P_1 + P_2 = \{x + y : x \in P_1 \quad \text{e} \quad y \in P_2\}.$$

Podemos definir ainda o conjunto

$$\lambda P_1 = \{\lambda x : x \in P_1\},$$

com $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Teorema 3.6. Se P_1 e P_2 são politopos, então $P_1 + P_2$ e λP_1 são politopos, com $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Demonstração. Suponha $P_1 = \text{Conv}(\{x_1, \dots, x_r\})$ e $P_2 = \text{Conv}(\{y_1, \dots, y_k\})$. Claramente $\lambda P_1 = \text{Conv}(\{\lambda x_1, \dots, \lambda x_r\})$. Iremos mostrar que $P_1 + P_2 = \text{Conv}(C)$, onde $C = \{x_i + y_j : i = 1, \dots, r \text{ e } j = 1, \dots, k\}$. Se $z \in P$, podemos escrever $z = x + y$ com $x \in P_1$ e $y \in P_2$. Isto é,

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^r \lambda_i x_i, \quad \text{com } \lambda_i \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^r \lambda_i = 1, \\ y &= \sum_{j=1}^k \alpha_j y_j, \quad \text{com } \alpha_j \geq 0 \text{ e } \sum_{j=1}^k \alpha_j = 1. \end{aligned}$$

Faça $\gamma_{ij} = \lambda_i \alpha_j$, temos que $\gamma_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j$ e ainda

$$\sum_{i,j} \gamma_{ij} = \sum_{i,j} \lambda_i \alpha_j = \sum_i \lambda_i \sum_j \alpha_j = 1.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \gamma_{ij} (x_i + y_j) &= \sum_{i,j} \lambda_i \alpha_j x_i + \sum_{i,j} \lambda_i \alpha_j y_j \\ &= \sum_{j=1}^k \alpha_j \sum_{i=1}^r \lambda_i x_i + \sum_{i=1}^r \lambda_i \sum_{j=1}^k \alpha_j y_j \\ &= \sum_{i=1}^r \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^k \alpha_j y_j = z. \end{aligned}$$

Logo, $z \in \text{Conv}(C) \therefore P_1 + P_2 \subset \text{Conv}(C)$. Sabemos que $C \subset P_1 + P_2$, para provar que $\text{Conv}(C) \subset P_1 + P_2 = P$, basta concluir que P é convexo. De fato, dado $x, y \in P$, então

$$x = x' + x'' \quad \text{e} \quad y = y' + y'' \quad \text{com } x', y' \in P_1 \text{ e } x'', y'' \in P_2.$$

Então,

$$tx + (1-t)y = t(x' + x'') + (1-t)(y' + y'') = z' + z''.$$

com

$$\begin{aligned} z' &= tx' + (1-t)y', \\ z'' &= tx'' + (1-t)y''. \end{aligned}$$

Como P_1 e P_2 são politopos, podemos concluir que, para todo $t \in [0, 1]$, temos que $z' \in P_1$ e $z'' \in P_2$. Logo, $tx + (1-t)y \in P$, para todo $t \in [0, 1]$. Portanto P é convexo, demonstrando o teorema. \square

Perceba que o teorema anterior nos fornece um método eficaz de encontrar a soma de Minkowski de dois politopos. Basta somar seus vértices e tomar o fecho convexo. Outra consequência importante é que a soma de Minkowski de politopos inteiros resulta em um politopo inteiro.

Exemplo 3.3. Sejam

$$P_1 = \text{Conv}(\{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}) \text{ e}$$

$$P_2 = \text{Conv}(\{(2, 1), (2, 2), (3, 2), (3, 1)\}).$$

Então

$$P_1 + P_2 = \text{Conv}(\{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 2), (3, 1), (4, 1), (4, 2)\})$$

$$= \text{Conv}(\{(2, 1), (2, 3), (3, 3), (4, 2), (4, 1)\}).$$

Proposição 3.4. Sejam P_1, \dots, P_r polítopos em \mathbb{R}^n e $P = P_1 + \dots + P_r$ a sua soma de Minkowski. Se F é uma face de P , então

$$F = F_1 + \dots + F_r,$$

com F_i face de P_i .

Demonstração. Suponhamos $r = 2$; para $r > 2$ a demonstração é similar. Seja $F_P(u)$ uma face de P induzida pelo vetor u . Então

$$F_P(u) = H_P(u) \cap P = \{x \in P : \langle x, u \rangle = h_P(u)\}.$$

Perceba que

$$h_P(u) = \max_{y \in P} \langle y, u \rangle = \max_{y_1 \in P_1} \langle y_1, u \rangle + \max_{y_2 \in P_2} \langle y_2, u \rangle = h_{P_1}(u) + h_{P_2}(u).$$

Portanto,

$$F_P(u) = \{x \in P : \langle x, u \rangle = h_{P_1}(u) + h_{P_2}(u)\}.$$

Mas,

$$F_{P_1}(u) + F_{P_2}(u) = \{x_1 + x_2 : (x_1 \in P_1 : \langle x_1, u \rangle = h_{P_1}(u) \text{ e } x_2 \in P_2 : \langle x_2, u \rangle = h_{P_2}(u))\}.$$

Podemos concluir que

$$F_{P_1}(u) + F_{P_2}(u) \subset F_P(u).$$

Seja $x \in F_P(u)$. Então $x = x_1 + x_2$ com $x_i \in P_i$. Temos que $\langle x_i, u \rangle \leq h_{P_i}(u)$, com $i = 1, 2$. Caso $\langle x_1, u \rangle < h_{P_1}(u)$ ou $\langle x_2, u \rangle < h_{P_2}(u)$, então

$$\langle x, u \rangle = \langle x_1, u \rangle + \langle x_2, u \rangle < h_{P_1}(u) + h_{P_2}(u),$$

o que seria uma contradição, pois $x \in F_P(u)$. Portanto,

$$\langle x_1, u \rangle = h_{P_1}(u),$$

$$\langle x_2, u \rangle = h_{P_2}(u).$$

Logo, $x \in F_{P_1}(u) + F_{P_2}(u) \therefore F_P(u) = F_{P_1}(u) + F_{P_2}(u)$. □

Proposição 3.5. *Sejam P_1, \dots, P_r politopos em \mathbb{R}^n e $P = P_1 + \dots + P_r$ sua soma de Minkowski. Se $F_P(\beta) \subset F_P(\alpha)$, então $F_{P_i}(\beta) \subset F_{P_i}(\alpha)$, para todo $i = 1, \dots, r$.*

Demonstração. Suponhamos $r = 2$; para $r > 2$ a demonstração é similar. Por hipótese,

$$F_{P_1}(\beta) + F_{P_2}(\beta) \subset F_P(\alpha) = F_{P_1}(\alpha) + F_{P_2}(\alpha).$$

Seja $v_1 + v_2$, com $v_i \in F_{P_i}(\beta)$. Como $v_1 + v_2 \in F_{P_1}(\alpha) + F_{P_2}(\alpha)$, então $v_1 + v_2 = w_1 + w_2$, com $w_i \in F_{P_i}(\alpha)$. Logo,

$$\langle v_1, \alpha \rangle + \langle v_2, \alpha \rangle = \langle w_1, \alpha \rangle + \langle w_2, \alpha \rangle.$$

Temos ainda que

$$\begin{aligned} \langle v_1, \alpha \rangle &\leq \langle w_1, \alpha \rangle = h_{P_1}(\alpha), \\ \langle v_2, \alpha \rangle &\leq \langle w_2, \alpha \rangle = h_{P_2}(\alpha). \end{aligned}$$

Caso $\langle v_1, \alpha \rangle < \langle w_1, \alpha \rangle$ ou $\langle v_2, \alpha \rangle < \langle w_2, \alpha \rangle$, então

$$\langle v_1, \alpha \rangle + \langle v_2, \alpha \rangle < \langle w_1, \alpha \rangle + \langle w_2, \alpha \rangle,$$

que é uma contradição. Portanto,

$$\begin{aligned} \langle v_1, \alpha \rangle &= \langle w_1, \alpha \rangle = h_{P_1}(\alpha), \\ \langle v_2, \alpha \rangle &= \langle w_2, \alpha \rangle = h_{P_2}(\alpha), \end{aligned}$$

isto é, $v_i \in F_{P_i}(\alpha)$, para todo $i = 1, 2$. □

Proposição 3.6. *Sejam $f_1, f_2 \in \mathbb{C}[X_1^\pm, \dots, X_n^\pm]$ polinômios de Laurent. Então,*

$$NP(f_1 \cdot f_2) = NP(f_1) + NP(f_2).$$

Demonstração. Considere $f_1 = \sum_{\alpha \in S_1} c_\alpha X^\alpha$ e $f_2 = \sum_{\beta \in S_2} c_\beta X^\beta$ com $S_i \subset \mathbb{Z}^n$ finitos e $c_\alpha, c_\beta \in \mathbb{C}^*$. Logo,

$$f_1 \cdot f_2 = \sum_{\alpha \in S_1, \beta \in S_2} c_\alpha c_\beta X^{\alpha+\beta}.$$

Assim, o conjunto S , suporte de $f_1 \cdot f_2$, será

$$S = \{\alpha + \beta : \alpha \in S_1 \text{ e } \beta \in S_2\},$$

isto é,

$$NP(f_1 \cdot f_2) = \text{Conv}(S).$$

Como $\alpha \in S_1$ e $\beta \in S_2$ são vértices de $NP(f_1)$ e $NP(f_2)$, respectivamente, então já sabemos que

$$NP(f_1) + NP(f_2) = Conv(S).$$

Portanto,

$$NP(f_1 \cdot f_2) = NP(f_1) + NP(f_2).$$

□

O corolário seguinte é uma consequência imediata da proposição anterior.

Corolário 3.1. *Se $f \in \mathbb{C}[X_1^\pm, \dots, X_n^\pm]$, então*

$$NP(f \cdot X^\beta) = \beta + NP(f) \quad e \quad NP(f^\alpha) = \alpha NP(f),$$

com $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e $\beta \in \mathbb{Z}^n$.

3.5 Volume misto e Teorema de Bernstein

Vimos que um politopo é um conjunto poliedral limitado, portanto um conjunto compacto. Faz sentido medir o volume n -dimensional de cada politopo.

Definição 3.19. Seja P um politopo em \mathbb{R}^n . Definimos o **volume n -dimensional** de P por

$$Vol_n(P) = \int \int \dots \int_P dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Definição 3.20. Sejam P_1, \dots, P_r politopos em \mathbb{R}^n e $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$. $Vol_n(\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_r P_r)$ será o **volume n -dimensional do politopo soma de Minkowski** $\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_r P_r$ em \mathbb{R}^n .

Proposição 3.7. *Considere qualquer coleção P_1, \dots, P_r de politopos em \mathbb{R}^n , e sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ números reais não-negativos. Então, $Vol_n(\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_r P_r)$ é uma função polinomial homogênea de grau n nas variáveis $\lambda_1, \dots, \lambda_r$.*

Demonstração. Para uma demonstração consultar (COX; LITTLE; O'SHEA, 2006) página 337 ou (GÜNTER, 1996) página 116. □

Definição 3.21. O **volume misto n -dimensional** de uma coleção de n politopos P_1, \dots, P_n em \mathbb{R}^n , denotado por $MV_n(P_1, \dots, P_n)$, é o coeficiente do monômio $\lambda_1 \dots \lambda_n$ em $Vol_n(\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n)$.

Este invariante geométrico ganha um papel crucial nesse trabalho por estar relacionado com o Teorema de Bernstein, teorema de principal importância para nós. Antes de abordarmos esse assunto, veremos algumas propriedades e exemplos do volume misto.

Teorema 3.7. 1. O volume misto $MV_n(P_1, \dots, P_n)$ é invariante se os P_{i_s} são substituídos por suas imagens por transformações que preservem volume.

2. $MV_n(P_1, \dots, P_n)$ é simétrico e linear em cada variável.

3. $MV_n(P_1, \dots, P_n) \geq 0$. Além do mais, se algum P_i têm dimensão zero (isto é, P_i consiste de um único ponto), então $MV_n(P_1, \dots, P_n) = 0$. Se todos os P_i tem dimensão n , então $MV_n(P_1, \dots, P_n) > 0$.

4. O volume misto de qualquer coleção de polítopos pode ser calculado como

$$MV_n(P_1, \dots, P_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\}, \\ |I|=k}} Vol_n(\sum_{i \in I} P_i).$$

Demonstração. Para uma demonstração consultar (COX; LITTLE; O'SHEA, 2006) página 338. □

Corolário 3.2. No caso em que $n = 2$, a fórmula do item 4 do teorema anterior se reduz a

$$MV_2(P_1, P_2) = -Vol_2(P_1) - Vol_2(P_2) + Vol_2(P_1 + P_2).$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} MV_2(P_1, P_2) &= \sum_{k=1}^2 (-1)^{2-k} \sum_{\substack{I \subset \{1,2\} \\ |I|=k}} Vol_2(\sum_{i \in I} P_i) = \\ &= (-1)^1 \sum_{\substack{I \subset \{1,2\} \\ |I|=1}} Vol_2(\sum_{i \in I} P_i) + (-1)^0 \sum_{\substack{I \subset \{1,2\} \\ |I|=2}} Vol_2(\sum_{i \in I} P_i) = \\ &= -(Vol_2(P_1) + Vol_2(P_2)) + Vol_2(P_1 + P_2). \end{aligned}$$

□

Exemplo 3.4. Sejam $f_1, f_2 \in \mathbb{C}[X, Y]$ dados por

$$\begin{aligned} f_1(X, Y) &= aX^3Y^2 + bX + cY^2 + d, \\ f_2(X, Y) &= eXY^4 + fX^3 + gY, \end{aligned}$$

com $a, \dots, g \in \mathbb{C}^*$. Sejam $P_1 = NP(f_1)$, $P_2 = NP(f_2)$ e $P_1 + P_2$, como mostra na figura 4, respectivamente.

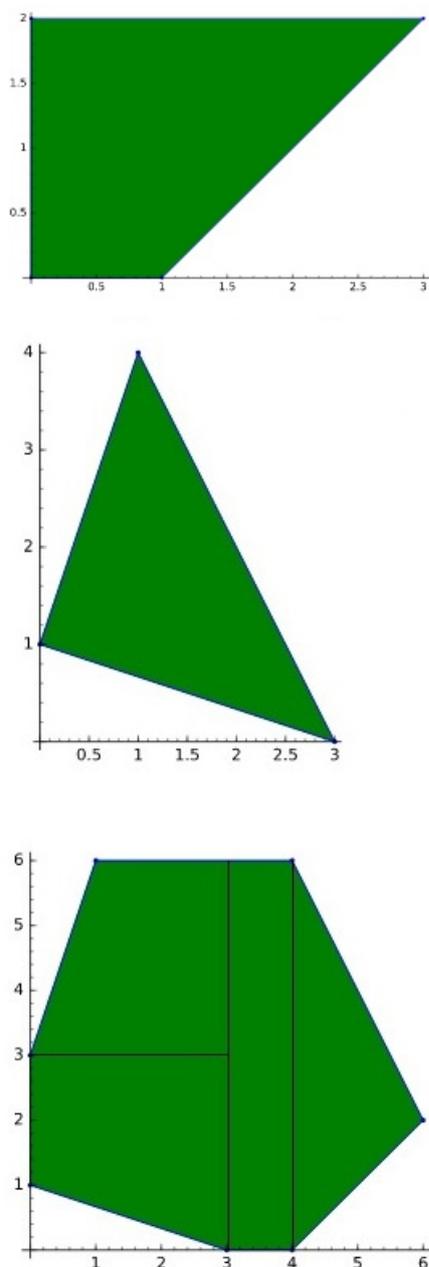


Figura 4: Politopos P_1 , P_2 e $P_1 + P_2$.

Podemos concluir, utilizando noções básicas de cálculo de áreas de figuras planas, que $Vol_2(P_1) = 4$ e $Vol_2(P_2) = 5$. Dividindo a área de $P_1 + P_2$ em quatro figuras (como mostra na figura), podemos também concluir que

$$Vol_2(P_1 + P_2) = 6 + 6 + \frac{15}{2} + \frac{15}{2} = 27.$$

Portanto, de acordo com o corolário anterior, temos

$$MV_2(P_1, P_2) = -4 - 5 + 27 = 18.$$

Dados subconjuntos finitos $A_1, \dots, A_l \subset \mathbb{Z}^n$. Considere agora os \mathbb{C} -espaços vetoriais $L(A_1), \dots, L(A_l)$ de polinômios de Laurent, isto é

$$L(A_i) = \left\{ f_i = \sum_{k \in A_i} c_{i,k} X^k : c_{i,k} \in \mathbb{C} \right\}.$$

Definição 3.22. Uma propriedade é dita **valer genericamente** para todo $(f_1, \dots, f_l) \in L(A_1) \times \dots \times L(A_l)$, se existe um polinômio p não-nulo nas variáveis dos coeficientes dos polinômios $f_{i's}$, tal que a propriedade vale para toda l -upla (f_1, \dots, f_l) cujo os coeficientes dos polinômios $f_{i's}$ não anulam p .

Exemplo 3.5. Sejam $A_1 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, $A_2 = \{\beta_1, \beta_2\}$ e $A_3 = \{\gamma_1\}$ subconjuntos do \mathbb{Z}^4 . Considere $(f_1, f_2, f_3) \in L(A_1) \times L(A_2) \times L(A_3) = L$. Então,

$$\begin{aligned} f_1 &= a_1 X^{\alpha_1} + a_2 X^{\alpha_2}, \\ f_2 &= b_1 X^{\beta_1} + b_2 X^{\beta_2}, \\ f_3 &= c_1 X^{\gamma_1}, \end{aligned}$$

com a_1, a_2, b_1, b_2 e $c_1 \in \mathbb{C}$.

Afirmamos que a propriedade $P := a_1^2 + b_2^2 \neq 0$ vale genericamente para todos $(f_1, f_2, f_3) \in L$. Antes, perceba que nem todos elementos de L satisfazem P . De fato, tome

$$(X^{\alpha_2}, X^{\beta_1}, X^{\gamma_1}) \in L,$$

temos que $a_1^2 + b_2^2 = 0$. Considere o polinômio não-nulo $h(X_1, \dots, X_5) = X_1^2 + X_4^2$. Todos $(f_1, f_2, f_3) \in L$ tais que $h(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1) = a_1^2 + b_2^2 \neq 0$ satisfazem a propriedade P . Isto é, a propriedade P vale para toda tripla (f_1, f_2, f_3) cujos coeficientes não anulam h . Ou seja, P vale genericamente para todo elemento de L .

O próximo teorema é conhecido como **Teorema de Bernstein**.

Teorema 3.8. *Dados polinômios de Laurent f_1, \dots, f_n sobre \mathbb{C} em n variáveis com uma quantidade finita de zeros comuns em $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$, seja $P_i = NP(f_i)$ o politopo de Newton de f_i em \mathbb{R}^n . Então o número de zeros comuns dos $f_{i's}$ em $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$ é limitado superiormente pelo volume misto $MV_n(P_1, \dots, P_n)$. Além do mais, para escolhas genéricas dos coeficientes dos $f_{i's}$, o número de soluções comuns é exatamente $MV_n(P_1, \dots, P_n)$.*

Demonstração. Consultar (COX; LITTLE; O'SHEA, 2006) página 346. □

Exemplo 3.6. Seja seguinte sistema de equações polinomiais:

$$\begin{cases} f_1 &= x + y - 3 = 0 \\ f_2 &= x + y + xy - 2 = 0 \end{cases}. \quad (3.3)$$

Podemos concluir, sem muitas dificuldades, que o sistema acima possui finitas soluções em $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$. Se $P_1 = NP(f_1)$ e $P_2 = NP(f_2)$, então $Vol_2(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = \lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_1^2$. Pela definição de volume misto, temos que $MV_2(P_1, P_2) = 2$. Aplicando o teorema de Bernstein, podemos concluir que o sistema (3.3) possui no máximo duas soluções em $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$.

4 SÉRIES DE PUISEUX

4.1 O corpo das séries de potências formais

Fixemos um domínio D . Uma sequência infinita (a_0, a_1, \dots) , denotada por (a_n) , com $a_i \in D$, $\forall i$, é chamado de **série de potência formal** sobre D . Denotaremos por $D[[X]]$ o conjunto de todas as séries de potências formais sobre D , onde X é uma variável independente. Convencionamos escrever cada elemento $(a_n) \in D[[X]]$ como a expressão simbólica

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n + \dots$$

Dados $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ e $g = \sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i \in D[[X]]$. Podemos definir em $D[[X]]$ duas operações de soma e multiplicação, ambas herdadas das operações do domínio D . Vejamos:

$$f + g = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) X^i,$$

$$f \cdot g = \sum_{i=0}^{\infty} c_i X^i, \quad \text{com} \quad c_i = \sum_{j=0}^i a_j b_{i-j}.$$

Pode ser verificado, sem muita dificuldade, que $D[[X]]$ munido das operações acima é um anel comutativo com unidade, onde $1 = (1, 0, 0, \dots)$ e $0 = (0, 0, 0, \dots)$. Seja $D[X]$ o conjunto de todos elementos $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i$, isto é, o conjunto de todas as séries de potências formais com $a_i \neq 0$ somente para um número finito de índices. $D[X]$ é subanel de $D[[X]]$ chamado de anel dos polinômios na variável X sobre D .

Definição 4.1. Seja $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \in D[[X]]$, $f \neq 0$. A **ordem** de f , denotada por $o(f)$, é o menor inteiro n tal que $a_n \neq 0$. É conveniente definir $o(0) = \infty$, no qual o símbolo ∞ possui as seguintes propriedades:

1. $\infty > n$, para todo inteiros n .
2. $\infty + n = n + \infty = \infty$, para todo inteiro n .

Proposição 4.1. $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ e $g = \sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i \in D[[X]]$. Então

1. $o(f \cdot g) = o(f) + o(g)$,
2. $o(f \pm g) \geq \min\{o(f), o(g)\}$.

Demonstração. 1. Primeiro iremos mostrar que se $o(f) = 0$ ou $o(g) = 0$, digamos $o(f) = 0$, então

$$o(f \cdot g) = o(f) + o(g) = o(g).$$

Sendo $o(f) = 0$, então $a_0 \neq 0$. Sendo $o(g) = k$, então $b_k \neq 0$. Suponha $f \cdot g = \sum_{i=0}^{\infty} c_i X^i$. Se $i < k$ temos

$$c_i = a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + \dots + a_i b_0 = 0,$$

pois $b_i = 0, \quad \forall i < k$. Se $i = k$, temos

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_k b_0 = a_0 b_k \neq 0.$$

Portanto, $o(f \cdot g) = k = o(g)$, como queríamos. Agora, considere $o(f) = n > 0$ e $o(g) = m > 0$. Logo,

$$\begin{aligned} f &= X^n(a_n + a_{n+1}X + \dots), \\ g &= X^m(a_m + a_{m+1}X + \dots), \end{aligned}$$

com $a_n, a_m \neq 0$. Portanto,

$$f \cdot g = X^{n+m} h_1 h_2,$$

onde $o(h_1) = 0 = o(h_2)$. Isto é, $f \cdot g$ pode ser escrito como um produto do monômio X^{n+m} com uma série h de ordem igual a 0. Ou seja,

$$o(f \cdot g) = o(X^{n+m} h) = O(X^{n+m}) = n + m = o(f) + o(g).$$

2. Suponha que $o(f \pm g) = m < \min\{o(f), o(g)\}$. Então $(a_m \pm b_m) \neq 0$. Absurdo, pois $m < o(f), o(g)$. Logo, $o(f \pm g) = m \geq \{o(f), o(g)\}$.

□

Teorema 4.1. $D[[X]]$ é um domínio.

Demonstração. Se $f, g \in D[[X]]$ tal que $f \cdot g = 0$, então $o(f \cdot g) = o(f) + o(g) = o(0) = \infty$. Portanto, $o(f) = \infty$ ou $o(g) = \infty$. Isto é, $o(f) = 0$ ou $o(g) = 0$. □

Teorema 4.2. $a_0 + a_1 X + \dots$ é uma unidade em $D[[X]]$ se, e somente se, a_0 é uma unidade em D .

Demonstração. Se a_0 é uma unidade em D , definimos b_0, b_1, \dots por

$$\begin{aligned} a_0 b_0 &= 1, \\ a_0 b_1 + a_1 b_0 &= 0, \\ &\vdots \\ a_n b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 &= 0, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Então,

$$(a_0 + a_1X + \dots)(b_0 + b_1X + \dots) = 1. \quad (4.1)$$

Reciprocamente, se (5.4) acontece, então $a_0b_0 = 1$ e a_0 é unidade em D . \square

Teorema 4.3. *Se K é um corpo, qualquer elemento do corpo de frações de $K[[X]]$, denotado por $K((X))$, pode ser escrito na forma*

$$\frac{a_0 + a_1X + \dots}{X^h}, \quad h \geq 0.$$

Demonstração. Seja $f = \frac{g}{p} \in K((X))$ com $h = o(p) \geq 0$. Logo, $p = X^h(c_h + c_{h+1}X + \dots)$, $c_h \neq 0$. Como K é um corpo, então c_h possui inverso em K e, pelo teorema anterior, $(c_h + c_{h+1}X + \dots)$ possui um inverso $S \in K[[X]]$. Portanto,

$$f = \frac{g \cdot S}{X^h(c_h + c_{h+1}X + \dots)S} = \frac{a_0 + a_1X + \dots}{X^h}.$$

\square

Podemos escrever

$$\frac{a_0 + a_1X + \dots}{X^h} = X^{-h}(a_0 + a_1X + \dots) = a_0X^{-h} + a_1X^{-h+1} + \dots$$

Isto é, $K((X))$ consiste de séries de potência formal com um número finito de termos com expoentes negativos. Qualquer elemento não-nulo de $K((X))$ pode ser expresso de maneira única na forma

$$f = X^k(a_0 + a_1X + \dots),$$

com k um número inteiro e $a_0 \neq 0$. Com essa motivação, podemos estender a noção de ordem para elementos de $K((X))$.

Definição 4.2. Seja $f = X^k(a_0 + a_1X + \dots)$ um elemento não-nulo de $K((X))$. k é chamado de **ordem** de f , denotado por $o(f)$.

Observe que, assim como em $K[[X]]$, podemos concluir que para todo $f, g \in K((X))$ temos

$$\begin{aligned} o(f \cdot g) &= o(f) + o(g), \\ o(f \pm g) &\geq \min\{o(f), o(g)\}. \end{aligned}$$

4.2 O Corpo das séries de Puiseux

Uma **série de Puiseux** é uma modesta extensão do conceito de série de potência formal. Vamos usar no lugar da variável X o símbolo $X^{\frac{1}{n}}$. Agora, introduziremos uma relação entre os símbolos $X^{\frac{1}{n}}$, $n = 1, 2, \dots$, definida por

$$X^{\frac{1}{1}} = X, \quad (4.2)$$

$$(X^{\frac{1}{rn}})^r = X^{\frac{1}{n}}, \quad (4.3)$$

$$X^{\frac{m}{n}} = (X^{\frac{1}{n}})^m. \quad (4.4)$$

Das equações (4.3) e (4.4) segue que

$$X^{\frac{rm}{rn}} = X^{\frac{m}{n}}.$$

Considere o corpo de frações $K((X^{\frac{1}{n}}))$. Perceba que a relação (4.3) fornece que $K((X^{\frac{1}{n}})) \subset K((X^{\frac{1}{rn}}))$, para todo n .

Proposição 4.2. $K((X))' = \cup_{n=1}^{\infty} K((X^{\frac{1}{n}}))$ é um corpo.

Demonstração. Basta provar que $K((X))'$ é fechado para soma, produto e quociente. De fato, sejam $y, z \in K((X))'$. Logo $y \in K((X^{\frac{1}{n}}))$ e $z \in K((X^{\frac{1}{m}}))$, para $m, n \geq 1$ inteiros. Portanto,

$$y, z \in K((X^{\frac{1}{nm}})) \subset K((X))'.$$

Como $K((X^{\frac{1}{nm}}))$ é um corpo, então

$$y + z, \quad yz, \quad \text{e} \quad \frac{y}{z} \quad (\text{quando } z \neq 0) \in K((X^{\frac{1}{nm}})) \subset K((X))'.$$

□

$K((X))'$ é chamado de **corpo das séries de Puiseux** na variável X sobre o corpo K .

Definição 4.3. Seja $a(X)$ um elemento não-nulo de $K((X))'$. Então,

$$a(X) = a_1 X^{\frac{m_1}{n_1}} + a_2 X^{\frac{m_2}{n_2}} + \dots,$$

com $a_1 \neq 0$ e $\frac{m_1}{n_1} < \frac{m_2}{n_2} < \dots$. O número racional $\frac{m_1}{n_1}$ é chamado de **ordem** de $a(X)$, denotado por $o(a(X))$. $K((X))^*$ é chamado de corpo das séries de Puiseux.

Teorema 4.4. $K((X))'$ é algebricamente fechado.

Demonstração. Consultar (WALKER, 1978) página 98. □

Observação: É possível mostrar que o conjunto das séries de Puiseux complexas convergentes em alguma vizinhança de um ponto $\alpha \in \mathbb{C}$, formam um corpo, e mais, que esse corpo é algebricamente fechado. Para uma demonstração consultar (LEFSCHETZ, 1953) página 103 ou Picard citado em (WALKER, 1978).

5 TEORIA BKK NO PROBLEMA RESTRITO DE QUATRO CORPOS NO PLANO

Definição 5.1. Chamaremos o conjunto $\Gamma := (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$ de **toro algébrico**.

Definição 5.2. Seja $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Q}^n$. Para um polinômio em n variáveis $f = \sum_{k \in S} c_k X^k$, o **polinômio α -reduzido** de f é definido por

$$f_\alpha = \sum_{\langle k, \alpha \rangle = \varphi} c_k X^k,$$

com $\varphi = \min_{k \in S} \{\langle \alpha, k \rangle\}$.

Exemplo 5.1. Considere a restrição do nosso problema

$$F = a^4 + b^4 + c^4 - (a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2) - (a^2 + b^2 + c^2) + 1.$$

Para os vetores $\alpha = (1, 1, 0)$, $\beta = (2, 1, 0)$ e $\gamma = (1, 1, 1)$, temos

$$F_\alpha = F_\beta = c^4 - c^2 + 1 \quad \text{e} \quad F_\gamma = 1.$$

Podemos estender a noção de polinômio α -reduzido para sistemas. Considere o seguinte sistema de m equações polinomiais complexas em n variáveis:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

O **sistema de equações α -reduzido** correspondente é definido por:

$$\begin{cases} f_{1\alpha}(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_{m\alpha}(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

Definição 5.3. Considere $\Upsilon = \mathbb{C}((t))^*$ o corpo das séries de Puiseux na variável t sobre \mathbb{C} . Seja $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \Upsilon^n$. Chamaremos de **ordem** de $x(t)$ a n -upla

$$o(x(t)) = (o(x_1(t)), \dots, o(x_n(t))) \in \mathbb{Q}^n.$$

Proposição 5.1. *Se existir $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \Upsilon^n$ uma série-solução para o sistema (5.1) de ordem $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, então existe uma solução $(a_1, \dots, a_n) \in \Gamma$ para o sistema (5.2).*

Demonstração. Seja $f = \sum_{k \in S} c_k X^k \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ e seja $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \Upsilon^n$, tal que

$$x_i(t) = a_i t_i^\alpha + \dots \quad \text{com} \quad a_i \neq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (5.3)$$

Iremos mostrar que se $f(x(t)) = 0$, então $f_\alpha(a_1, \dots, a_n) = 0$. Por conveniência, considere $S = \{k_1, \dots, k_m\} \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$, então podemos escrever f da seguinte maneira

$$f = \sum_{i=1}^m c_{k_i} X_1^{k_{i1}} \dots X_n^{k_{in}}.$$

Logo,

$$f(x(t)) = \sum_{i=1}^m c_{k_i} x_1(t)^{k_{i1}} \dots x_n(t)^{k_{in}}.$$

Observe que, para cada i , o termo

$$c_{k_i} x_1(t)^{k_{i1}} \dots x_n(t)^{k_{in}}$$

é um elemento de Υ com o termo de menor grau igual a

$$c_{k_i} a_1^{k_{i1}} \dots a_n^{k_{in}} t^{\alpha_1 k_{i1} + \dots + \alpha_n k_{in}}.$$

Então, o menor termo de $f(x(t))$ é

$$\left(\sum_{\langle k_i, \alpha \rangle = \varphi} c_{k_i} a_1^{k_{i1}} \dots a_n^{k_{in}} \right) t^\varphi,$$

com $\varphi = \min_{k_i \in S} \{\langle \alpha, k_i \rangle\}$. Portanto, se $f(x(t)) = 0$, então

$$\sum_{\langle k_i, \alpha \rangle = \varphi} c_{k_i} a_1^{k_{i1}} \dots a_n^{k_{in}} = f_\alpha(a_1, \dots, a_n) = 0.$$

□

Observação: O próximo teorema utiliza alguns conceitos de geometria algébrica cujas definições e propriedades se encontram em (IGOR, 1994) e (FULTON, 2008).

Teorema 5.1. *Suponha que o sistema (5.1) tenha infinitas soluções no toro algébrico Γ . Então existe um vetor $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ com $\alpha_i \in \mathbb{Q}$ e $\alpha_j = 1$, para algum j , tal que o sistema α -reduzido (5.2) tenha solução em Γ .*

Demonstração. Utilizando a proposição anterior, basta provar que existe uma série-solução para (5.1) de ordem $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ com $\alpha_i \in \mathbb{Q}$ e $\alpha_j = 1$, para algum j .

Seja $S \subset \mathbb{C}^n$ a variedade algébrica definida pelas equações $f_j = 0$ do sistema (5.1). Ou seja, S é o conjunto de todas as soluções do sistema (5.1) em \mathbb{C}^n . As variedades algébricas induzem uma topologia em \mathbb{C}^n , no qual seus complementares definem os conjuntos abertos.

Essa topologia é chamada de topologia de Zariski. Considere agora $V = S \cap \Gamma$. Observe que Γ é o complementar de uma variedade algébrica definida pela equação $X_1 \dots X_n = 0$. Portanto Γ é um aberto de Zariski, o que implica V ser um aberto relativo na topologia induzida em S . Esses abertos relativos são chamados de variedades quase-projetivas.

Por hipótese, V é infinito. Segue que existe alguma coordenada x_l , tal que o conjunto imagem da projeção de V em x_l , $\Pi_l(V)$, é infinito.

Os únicos fechados de Zariski não-triviais em \mathbb{C} são os conjuntos finitos. Portanto, o fecho (na topologia de Zariski) de $\Pi_l(V)$ deve ser igual a \mathbb{C} . Logo, o conjunto $\Pi_l(V)$ é complementar de um conjunto finito de \mathbb{C} (ver teorema 6, página 63 de (IGOR, 1994)). Segue que $\Pi_l(V)$ é denso na topologia clássica em \mathbb{C} . Indexando novamente, podemos assumir $l = n$.

Considere $x_n(t) = t$ e seja

$$F_j(X_1, \dots, X_{n-1}) = f_j(X_1, \dots, X_{n-1}, x_n(t)), \quad \forall j = 1, \dots, m.$$

F_j podem ser vistos como elementos no anel $R = \mathbb{P}[X_1, \dots, X_{n-1}]$ dos polinômios em $n-1$ variáveis sobre \mathbb{P} , com \mathbb{P} sendo o corpo das séries de Puiseux complexas convergentes em uma vizinhança perfurada de 0. As equações $F_j = 0$ definem uma variedade algébrica no espaço \mathbb{P}^{n-1} . Nosso objetivo é mostrar que essa variedade contém pelo menos um ponto com todas as coordenadas não-nulas (não esqueça que um "ponto" nessa variedade algébrica é um vetor cujas coordenadas são séries de Puiseux complexas convergentes em uma vizinhança perfurada de 0).

Para isto, introduziremos outra variável X_0 e outra equação

$$F_0(X_0, X_1, \dots, X_{n-1}) = X_0 X_1 \dots X_{n-1} - 1 = 0.$$

Basta provar que a variedade algébrica $W \subset \mathbb{P}^n$ definida por $F_0 = F_1 = \dots = F_m = 0$ é não-vazia. De fato, seja um elemento $x(t) = (x_0(t), \dots, x_{n-1}(t)) \in W$. Então, $F_j(x(t)) = 0$, para todo j e $x_i(t) \neq 0$ para todo $i = 0, \dots, n-1$. Caso contrário $F_0(x(t)) = 1$, o que seria uma contradição.

Aplicando o teorema dos zeros (ver (FULTON, 2008), página 10), W é vazio se, e somente se,

$$1 = F_0 G_0 + F_1 G_1 + \dots + F_m G_m, \quad (5.4)$$

com $G_0, \dots, G_m \in \mathbb{P}[X_0, \dots, X_{n-1}]$. Como $\Pi_n(V)$ é denso na topologia clássica em \mathbb{C} , temos que, para quase todo $t_0 \in \mathbb{C}$, existe x_i , $i = 1, \dots, n-1$, tal que $f_j(x_1, \dots, x_{n-1}, t_0) = 0$, para todo $j = 1, \dots, m$. Sabemos que os coeficientes dos G_j são elementos de \mathbb{P} . Logo, basta escolher um $t_0 \in \mathbb{C}$ que esteja na interseção de todas as regiões de convergências de todos os coeficientes dos G_j , para todo j , que aparecem em (5.4). Assim, substituindo esse t_0 e

seus respectivos valores x_i no segundo membro de (5.4), concluímos que $F_1G_1 + \dots + F_mG_m$ converge para 0. Façamos agora, $x_0 = (x_1x_2 \dots x_{n-1})^{-1} \in \mathbb{C}$ e assim $F_0 = 0$. Portanto (5.4) não pode acontecer e assim $W \neq \emptyset$. \square

Utilizando esse teorema, podemos estabelecer um método para provar que um dado sistema polinomial $f_j = 0$ possui finitas soluções em Γ . Considere α um vetor racional com pelo menos uma coordenada positiva. Veremos se o sistema de equações α -reduzido correspondente possui soluções em Γ . Se não possuir, então α e todos os outros vetores que induzem o mesmo sistema reduzido são excluídos como possibilidades de ordens para série-soluções do sistema. Se o sistema α -reduzido possuir soluções em Γ , basta provar que não pode existir série-solução para o sistema com ordem α .

Felizmente, embora existam infinitas possibilidades para α , existem possibilidades finitas de sistemas reduzidos para checar. Veremos adiante o porquê.

Definição 5.4. Seja P um politopo em \mathbb{R}^n . Para toda face F de P definimos o conjunto de todos vetores normais internos que induzem a face F ,

$$N_F := \{u \in \mathbb{R}^n : F_P(-u) = F\}.$$

Então, o **leque normal** de P será definido por

$$N(P) := \{N_F : F \text{ face de } P\}.$$

Perceba que se $P = NP(f)$, então todo o vetor $\alpha \in N_F$ induz o mesmo polinômio α -reduzido f_α . Isto é, existe uma quantidade finita de polinômios reduzidos correspondentes a f , tantos quantos o número de elementos de $N(P)$.

Definição 5.5. Sejam P_1, \dots, P_m politopos e $N(P_1), \dots, N(P_m)$ seus respectivos leques normais. Definimos seu **refinamento comum** por

$$N(P_1) \wedge \dots \wedge N(P_m) := \{N_{F_1} \cap \dots \cap N_{F_m} : N_{F_i} \in N(P_i)\}.$$

Observe que, dado um sistema polinomial $f_j = 0$, existe um número finito de sistemas reduzidos correspondentes, tantos quantos a quantidade de elementos do refinamento comum $N(P_1) \wedge \dots \wedge N(P_m)$, com $P_j = NP(f_j)$.

Teorema 5.2. *O leque normal de uma soma de Minkowski é o refinamento comum de seus leques normais. Isto é,*

$$N(P_1 + \dots + P_m) = N(P_1) \wedge \dots \wedge N(P_m).$$

Demonstração. Ver (ZIEGLER, 1995), proposition 7.12, página 198. \square

Portanto, provar finitudes de soluções em Γ de um sistema polinomial $f_j = 0$, se resume em analisar soluções em Γ dos sistemas α -reduzidos, no qual α é um vetor representante do conjunto de todos os vetores internos normais que unduz cada face da soma de Minkowski dos politopos $NP(f_j)$. Lembrando que α deve ser um vetor racional com pelo menos uma coordenada positiva.

Iremos utilizar esse método para provar o principal teorema do nosso trabalho. Antes, lembremos dos dois sistemas polinomiais do PR4CP:

$$\begin{cases} m_1(1 - \frac{1}{a^3}) + \lambda(2a^2 - b^2 - c^2 - 1) & = 0 \\ m_2(1 - \frac{1}{b^3}) + \lambda(2b^2 - a^2 - c^2 - 1) & = 0 \\ m_3(1 - \frac{1}{c^3}) + \lambda(2c^2 - a^2 - b^2 - 1) & = 0 \\ F = a^4 + b^4 + c^4 - (a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^2 + b^2 + c^2) + 1 & = 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

e

$$\begin{cases} 2a^5b^3c^3 - 2m_3a^5b^3 - 2m_2a^5c^3 - a^3b^5c^3 + m_3a^3b^5 - a^3b^3c^5 \\ + (3m_1 - 1)a^3b^3c^3 + m_3a^3b^3c^2 + m_3a^3b^3 + m_2a^3b^2c^3 + m_2a^3c^5 \\ + m_2a^3c^3 - 2m_1a^2b^3c^3 + m_1b^5c^3 + m_1b^3c^5 - 2m_1b^3c^3 = 0 \\ 2a^3b^5c^3 - 2m_3a^3b^5 - 2m_1b^5c^3 - a^5b^3c^3 + m_3a^5b^3 - a^3b^3c^5 \\ + (3m_2 - 1)a^3b^3c^3 + m_3a^3b^3c^2 + m_3a^3b^3 + m_1a^2b^3c^3 + m_1b^3c^5 \\ + m_1b^3c^3 - 2m_2a^3b^2c^3 + m_2a^5c^3 + m_2a^3c^5 - 2m_2a^3c^3 = 0 \\ F = a^4 + b^4 + c^4 - (a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^2 + b^2 + c^2) + 1 = 0 \end{cases} \quad (5.6)$$

Teorema 5.3. *O número de equilíbrios relativos no problema restrito de quatro corpos no plano é finito para qualquer escolha de massas não-nulas.*

Demonstração. Como os dois sistemas são equivalentes, é suficiente provar finitude de soluções em Γ do sistema (5.6). Todos os cálculos dessa demonstração foram feitos pelo programa Sagemath.

Calculando a soma de Minkowski dos politopos de Newton de cada um dos três polinômios do sistema, obtemos um politopo MS dimensão 3 com $f(MS) := (12, 24, 14)$, isto é, 12 vértices, 24 arestas e 14 facetas.

Primeiramente, iremos analisar os sistemas α -reduzidos, com α vetor interno normal de cada faceta de MS . Lembramos que cada faceta possui um único vetor interno normal, a menos de múltiplos. Podemos desconsiderar os vetores com todas as coordenadas negativas. Logo, a lista de vetores internos normais das facetas que devemos considerar se resume a

$$(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1).$$

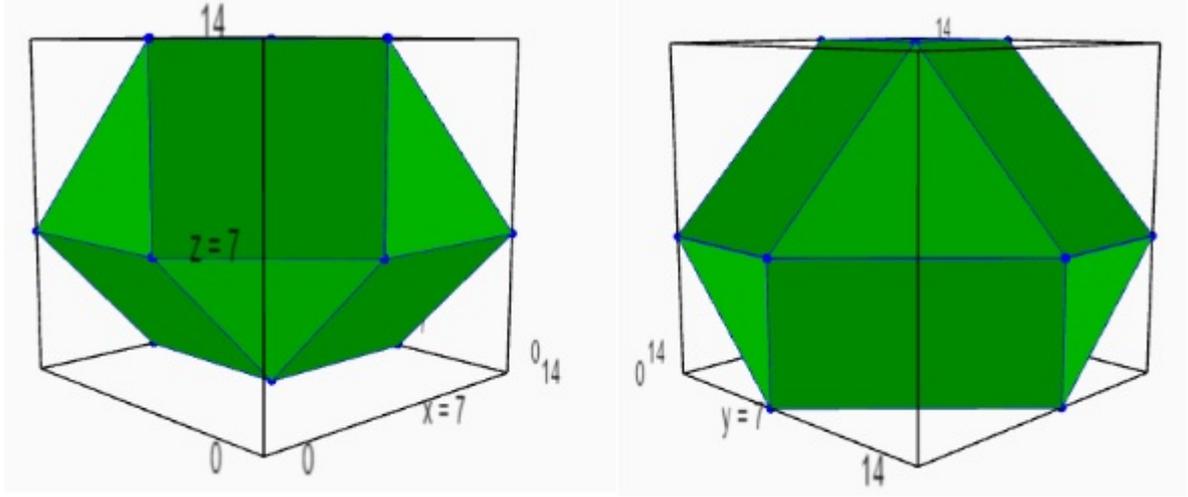


Figura 5: A soma de Minkowski MS , pela frente e por trás, respectivamente.

Perceba que o sistema (5.6) é invariante pela transformação $a \longleftrightarrow b$, $m_1 \longleftrightarrow m_2$. Com isso, o método de analisar as soluções do sistema α -reduzido considerando $\alpha = (a, b, c)$ e $\alpha = (b, a, c)$ é o mesmo. Por exemplo, com $\alpha = (0, 1, 1)$ temos o seguinte sistema reduzido correspondente

$$-a^3(2a^2 - 1)(m_3b^3 + m_2c^3) = 0, \quad (5.7)$$

$$a^3(m_3a^2b^3 + m_2a^2c^3 + m_3b^3 - 2m_2c^3) = 0, \quad (5.8)$$

$$a^4 - a^2 + 1 = 0. \quad (5.9)$$

Note que os polinômios $a^4 - a^2 + 1$ e $2a^2 - 1$ não possuem raízes comuns. Pela equação (5.7), isso implica que $m_3b^3 = -m_2c^3$. Substituindo na equação (5.8), chegaremos em $-3m_2a^3c^3 = 0$, o que implica que $c = 0$ e $b = 0$. Portanto, o sistema α -reduzido não possui solução em Γ . O caso em que $\alpha = (1, 0, 1)$, o sistema reduzido correspondente será o mesmo, basta fazer $a \longleftrightarrow b$, $m_1 \longleftrightarrow m_2$. E assim, utilizando o mesmo argumento, iremos concluir que $c = 0$ e $a = 0$, isto é, não existem soluções no toro algébrico para o sistema.

Para $\alpha = (1, 0, 1)$, temos o seguinte sistema

$$m_1b^3(-2c^3 + c^5) + m_2a^3(c^3 + c^5) = 0, \quad (5.10)$$

$$m_2a^3(-2c^3 + c^5) + m_1b^3(c^3 + c^5) = 0, \quad (5.11)$$

$$c^4 - c^2 + 1 = 0. \quad (5.12)$$

Somando as duas primeiras equações, produziremos o sistema

$$c^3(m_1b^3 + m_2a^3)(-1 + 2c^2) = 0,$$

$$c^4 - c^2 + 1 = 0.$$

Como os polinômios $(-1 + 2c^2)$ e $c^4 - c^2 + 1$ não possuem soluções comuns, $m_1b^3 = -m_2a^3$. Substituindo em (5.10), chegaremos que $3m_2a^3c^3 = 0$, o que implica $a = 0$ e $b = 0$.

O vetor interno normal $\alpha = (1, 1, 1)$ produz um sistema reduzido inconsistente, pois o polinômio α -reduzido de F , F_α , é igual a 1. Um fato importante a ser observado é que, pela proposição 2.5, podemos eliminar todos os vetores internos normais das arestas e vértices que estão contidos nessa faceta. A proposição garante que qualquer vetor interno normal α correspondente a uma face de dimensão menor contida nessa faceta, produzirá também um sistema inconsistente com $F_\alpha = 1$.

Restaram os vetores $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$. Já observamos que a análise dos vetores $(0, 1, 0)$ e $(1, 0, 0)$ é a mesma (basta fazer $a \longleftrightarrow b$, $m_1 \longleftrightarrow m_2$). Então, só iremos analisar os casos em que $\alpha = (1, 0, 0)$ e $\alpha = (0, 0, 1)$.

Quando $\alpha = (1, 0, 0)$, o sistema α -reduzido é

$$\begin{cases} b^4 - b^2c^2 - b^2 + c^4 - c^2 + 1 = 0, \\ m_1b^3c^3(b^2 + c^2 - 2) = 0, \\ m_1b^3c^3(-2b^2 + c^2 + 1) = 0. \end{cases} \quad (5.13)$$

Quando $\alpha = (0, 0, 1)$ o sistema α -reduzido é

$$\begin{cases} b^4 - a^2b^2 - b^2 + a^4 - a^2 + 1 = 0, \\ m_3a^3b^3(-2a^2 + b^2 + 1) = 0, \\ m_3a^3b^3(-2b^2 + a^2 + 1) = 0. \end{cases}$$

Sendo $m_1, m_3 \neq 0$, as soluções do primeiro sistema em Γ são da forma $(a, \pm 1, \pm 1)$ com $a \in \mathbb{C}^*$ e a do segundo sistema é da forma $(\pm 1, \pm 1, c)$, com $c \in \mathbb{C}^*$. Temos que provar que não existe uma série-solução para o sistema (5.6) de ordem $(1, 0, 0)$ e $(0, 0, 1)$. O argumento que iremos utilizar a seguir serve para os dois casos, a menos de pequenas modificações.

Iremos provar para o caso $\alpha = (1, 0, 0)$. Suponhamos que exista uma solução para o sistema (5.6) da forma $a = t$, $b = \pm 1 + \dots$ e $c = \pm 1 + \dots$. De maneira mais conveniente, podemos escrever essa série-solução na forma

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = (t, \pm 1 + \dots, \pm 1 + \dots),$$

com $x_1(t)$ e $x_2(t)$ séries de Puiseux. Fazendo a substituição $(a, b, c) = (t, z_1, z_2)$ no sistema (5.6), obtemos um sistema de três equações polinomiais em duas variáveis, $z = (z_1, z_2)$, com coeficientes que são polinômios em t . Vamos representar esse sistema da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} G_1(t, z) \\ G_2(t, z) \\ G_3(t, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{01}(z) \\ G_{02}(z) \\ G_{03}(z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_{21}(z) \\ G_{22}(z) \\ G_{23}(z) \end{pmatrix} t^2 + \dots + \begin{pmatrix} G_{51}(z) \\ G_{52}(z) \\ G_{53}(z) \end{pmatrix} t^5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que não existe termos com apenas t como coeficiente e que o sistema

$$G_0 = \begin{pmatrix} G_{01}(z) \\ G_{02}(z) \\ G_{03}(z) \end{pmatrix} = 0$$

é precisamente igual ao sistema α -reduzido (5.13), pois cada equação é a soma dos monômios em que a variável a tem grau 0. Então $z = (\pm 1, \pm 1)$ é solução para o sistema $G_0 = 0$.

Agora, defina a função

$$G = G(t, z) = (f_1, f_2),$$

com $f_1 = G_2(t, z)$ e $f_2 = G_3(t, z)$. Temos então que $G(0, -1, 1) = 0$ e analisando a matriz jacobiana

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1}(0, -1, 1) & \frac{\partial f_1}{\partial z_2}(0, -1, 1) \\ \frac{\partial f_2}{\partial z_1}(0, -1, 1) & \frac{\partial f_2}{\partial z_2}(0, -1, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_{02}}{\partial z_1}(-1, 1) & \frac{\partial G_{02}}{\partial z_2}(-1, 1) \\ \frac{\partial G_{03}}{\partial z_1}(-1, 1) & \frac{\partial G_{03}}{\partial z_2}(-1, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m_1 & -2m_1 \\ -4m_1 & -2m_1 \end{pmatrix},$$

concluimos que seu posto é máximo. Logo, pelo teorema da função implícita, existe uma função $h(t) = (h_1(t), h_2(t))$ de classe C^∞ , tal que $G(t, h(t)) = 0$ para todo $t \in B$, com $B \subset \mathbb{C}$ uma vizinhança aberta de 0. O teorema ainda garante que $h(t)$ é única.

Visto que $h(t)$ possui derivadas de todas as ordens, $h_1(t)$ e $h_2(t)$ são funções analíticas, logo, são séries de potências formais com expoentes positivos. Como $G(x(t)) = 0$, podemos concluir pela unicidade de $h(t)$ que $x_2(t) = h_1(t)$ e $x_3(t) = h_2(t)$. Isto é, as séries de Puiseux $x_2(t) = \pm 1 + \dots$ e $x_3(t) = \pm 1 + \dots$ são séries de potências formais com expoentes positivos. Podemos representá-las da seguinte maneira

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \pm 1 + v_1 t + u_1 t^2 + \dots, \\ x_3(t) &= \pm 1 + v_2 t + u_2 t^2 + \dots \end{aligned}$$

Um cálculo feito pelo programa Sagemath conclui que, para $x(t) = (t, x_2(t), x_3(t))$ ser solução do sistema (5.6), $v_1 = 0 = v_2$. Segue que,

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \pm 1 + u_1 t^2 + \dots, \\ x_3(t) &= \pm 1 + u_2 t^2 + \dots \end{aligned}$$

Outro cálculo mostra que $x(t)$ não pode ser solução da última equação do sistema, $F = 0$, pois produz uma equação inconsistente $-3t^2 + \dots = 0$. Concluimos assim, que não existe série-solução para o sistema (5.6) de ordem $(1, 0, 0)$.

Devemos agora checar os sistemas reduzidos correspondentes às faces de dimensões menores. Observe que apenas as arestas devem ser consideradas, pois cada vetor α que induz um vértice, produz um sistema α -reduzido onde as equações possuem apenas um único monômio. Portanto, esse sistema só possui soluções triviais (com alguma coordenada nula).

Para encontrar um vetor interno normal de cada aresta, basta somar os vetores internos normais das duas facetadas adjacentes à aresta. Das vinte e quatro facetadas, nove não

possuem vetores internos normais com pelo menos uma coordenada positiva. Três arestas estão contidas na faceta correspondente ao vetor $(1, 1, 1)$. Cinco podem ser desconsideradas pelo fato do sistema ser invariante pela transformação $a \longleftrightarrow b$ e $m_1 \longleftrightarrow m_2$. Portanto, segue a lista dos vetores que são suficientes, escritos como soma dos vetores internos normais das duas facetas adjacentes:

$$\begin{aligned} (2, 1, 0) &= (1, 0, 0) + (1, 1, 0), \\ (2, 0, 1) &= (1, 0, 0) + (1, 0, 1), \\ (1, 0, 2) &= (0, 0, 1) + (1, 0, 1), \\ (1, -1, -1) &= (1, 0, 0) + (0, -1, -1), \\ (-1, -1, 1) &= (0, 0, 1) + (-1, -1, 0), \\ (1, -1, 1) &= (1, 0, 1) + (0, -1, 0), \\ (1, 1, -1) &= (1, 1, 0) + (0, 0, -1). \end{aligned}$$

O sistema reduzido correspondente a cada vetor acima não possui solução no toro algébrico Γ . Por exemplo, para $\alpha = (2, 1, 0)$, o sistema α -reduzido

$$\begin{cases} c^4 - c^2 + 1 & = 0 \\ m_1 b^3 c^3 (c^2 - 2) & = 0, \\ m_1 b^3 c^3 (c^2 + 1) & = 0 \end{cases}$$

requer $b = 0$. Similarmente, o vetor $\alpha = (1, -1, -1)$ produz o sistema reduzido

$$\begin{cases} b^4 - b^2 c^2 + c^4 & = 0 \\ m_1 b^3 c^3 (b^2 + c^2) & = 0, \\ -m_1 b^3 c^3 (2b^2 - c^2) & = 0 \end{cases}$$

que requer $b = c = 0$. Considerando $\alpha = (1, 1, -1)$, temos a última equação $F_\alpha = c^4 = 0$, que implica $c = 0$. O cálculo para eliminar os vetores restantes é completamente similar. E assim, provamos a finitude do conjunto de equilíbrios relativos PR4CP. \square

Teorema 5.4. *Existem no máximo 196 classes de equilíbrios relativos no PR4CP.*

Demonstração. Para obter uma cota superior de pontos de equilíbrios do problema, aplicaremos o teorema de Bernstein no sistema (5.5). O Lema 1.2 garante a finitude de soluções em Γ desse sistema, pois é provado que não existe solução $(a, b, c) \in \Gamma$ tal que $\lambda = 0$. Calculando o volume misto, encontraremos o valor de 196. Esse valor dá uma cota superior de números de soluções em Γ (reais ou não-reais) do sistema (5.5) e para escolhas genéricas dos coeficientes, esse valor é número total de soluções. Ou seja, existem no máximo 196 pontos equilíbrios no PR4CP. \square

6 CONCLUSÃO

Esta dissertação de mestrado assumiu como objetivo central mostrar a utilidade da teoria de BKK no estudo, ainda escorregadio, da finitude de equilíbrios relativos na Mecânica Celeste. Para tal, apoiou-se no problema restrito de quatro corpos no plano, o PR4CP, mostrando a eficiência da técnica em determinar se um sistema polinomial possui finitas soluções em um determinado conjunto, o toro algébrico.

Polítopos de Newton, séries de Puiseux, algumas noções e resultados de geometria algébrica, forneceram um método para verificar que um dos sistemas de equações polinomiais cujo o conjunto solução contém os equilíbrios relativos do PR4CP possui um número finito de soluções complexas não-triviais, isto é, que o número de equilíbrios relativos do problema deve ser finito. Calculando o volume misto dos polítopos de Newton, conseguimos, utilizando o teorema de Bernstein, uma cota superior para a quantidade desses equilíbrios.

Sem dúvidas, a maior limitação da técnica foi a extrema necessidade de softwares matemáticos para encontrar os vetores internos normais de cada face do polítopo soma de Minkowski, e assim, analisar as soluções dos sistemas reduzidos correspondentes a esses vetores. Tudo isso nos faz pensar na dificuldade de aplicar essa teoria aos problemas de finitude da Mecânica Celeste envolvendo mais corpos. Certamente, nesse caso, os sistemas polinomiais teriam mais variáveis e o polítopo soma de Minkowski possuiria dimensão maior e, portanto, mais faces, dificultando assim o estudo dos sistemas reduzidos correspondentes aos vetores internos normais.

Apesar das limitações verificadas, considera-se que a teoria BKK, unida a novas tecnologias, permanece uma ferramenta de alto nível no âmbito do estudo das raízes de sistemas polinomiais. Mais especificamente, na área da Mecânica Celeste, essa teoria deixa um esperançoso mecanismo para os futuros desfechos de problemas de finitude ainda abertos.

REFERÊNCIAS

- BARROS, J. F.; LEANDRO, E. S. Bifurcations and enumeration of classes of relative equilibria in the planar restricted four-body problem. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, SIAM, v. 46, n. 2, p. 1185–1203, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 5, 6 e 8.
- BOUREL, M. Ecuaciones polinomiales y polítopos: una aproximación al teorema de bernstein. UR. FC, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 34.
- COX, D. A.; LITTLE, J.; O'SHEA, D. *Using algebraic geometry*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006. v. 185. Citado 4 vezes nas páginas 9, 40, 41 e 43.
- FULTON, W. Algebraic curves: an introduction to algebraic geometry. 2008. *Author's version*, v. 258, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 51.
- GÜNTER, E. Combinatorial convexity and algebraic geometry. *Graduate Texts in Mathematics*, v. 168, 1996. Citado 3 vezes nas páginas 9, 33 e 40.
- HAMPTON, M.; MOECKEL, R. Finiteness of relative equilibria of the four-body problem. *Inventiones mathematicae*, Springer, v. 163, n. 2, p. 289–312, 2006. Citado na página 8.
- IGOR, R. *Shafarevich. Basic algebraic geometry. 1*. [S.l.]: Springer-Verlag, Berlin,, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 51.
- KULEVICH, J. L.; ROBERTS, G. E.; SMITH, C. J. Finiteness in the planar restricted four-body problem. *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, Springer, v. 8, n. 2, p. 357–370, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 5, 6 e 8.
- LEANDRO, E. On the dziobek configurations of the restricted $(n+1)$ -body problem with equal masses. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S*, v. 4, p. 589–595, 2008. Citado na página 22.
- LEANDRO, E. S. On the central configurations of the planar restricted four-body problem. *Journal of Differential Equations*, Elsevier, v. 226, n. 1, p. 323–351, 2006. Citado na página 8.
- LEFSCHETZ, S. Algebraic geometry (1953). *P3538*, 1953. Citado na página 48.
- MOECKEL, R. A computer-assisted proof of saari's conjecture for the planar three-body problem. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 357, n. 8, p. 3105–3117, 2005. Citado na página 8.
- PEDERSEN, P. Librationspunkte im restringierten vierkoerperproblem. *Publikationer og mindre Meddelel fra Kobenhavns Observatorium*, v. 137, p. 1–80, 1944. Citado 3 vezes nas páginas 5, 6 e 8.
- PEDERSEN, P. Stabilitätsuntersuchungen im restringierten vierkörperproblem. *Publikationer og mindre Meddelel fra Kobenhavns Observatorium*, v. 159, p. 1–38, 1952. Citado na página 8.

- ROBERTS, G.; MELANSON, L. Saari's conjecture for the restricted three-body problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Springer, v. 97, n. 3, p. 211–223, 2007. Citado na página 8.
- SANTOS, M. Pedro dos. Teoria bkk e a solução do sexto problema de smale no caso $n=4$. Universidade Federal de Pernambuco, 2009. Citado na página 9.
- SMALÉ, S. Mathematical problems for the next century. *The Mathematical Intelligencer*, Springer, v. 20, n. 2, p. 7–15, 1998. Citado na página 8.
- WALKER, R. J. *Algebraic Curves. 1978*. [S.l.]: Springer-Verlag, New York, 1978. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 48.
- ZIEGLER, G. M. *Lectures on polytopes*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1995. v. 152. Citado na página 52.