UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CENTRO DE EDUCAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

MATEMÁTICA E TECNOLOGICA

CURSO DE MESTRADO

ARIEDJA DE CARVALHO SILVA

O USO DE MATERIAL MANIPULATIVO E A PRODUÇÃO DE DESENHOS NO DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO NA EDUCAÇÃO INFANTIL

Recife

2019

ARIEDJA DE CARVALHO SILVA

O USO DE MATERIAL MANIPULATIVO E A PRODUÇÃO DE DESENHOS NO DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO NA EDUCAÇÃO INFANTIL

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Área de concentração: Educação Matemática e Tecnológica

Orientadora Profª. Drª. Rute Elizabete de Souza Rosa Borba

Recife

2019

Catalogação na fonte
Bibliotecária Amanda Nascimento, CRB-4/1806

S586u Silva, Ariedja de Carvalho
O uso de material manipulativo e a produção de desenhos no desenvolvimento do raciocínio combinatório na educação infantil / Ariedja de Carvalho Silva. – Recife, 2019.
139 f. : il.

Orientador: Rute Elizabete de Souza Rosa Borba
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2019.
Inclui Referências e Apêndices.

1. Educação infantil. 2. Análise combinatória. 3. Matemática – Estudo e ensino. 4. UFPE - Pós-graduação. I. Borba, Rute Elizabete de Souza Rosa (Orientadora). II. Título.

372.2 (22. ed.) UFPE (CE2019-040)

ARIEDJA DE CARVALHO SILVA

O USO DE MATERIAL MANIPULATIVO E A PRODUÇÃO DE DESENHOS NO DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO NA EDUCAÇÃO INFANTIL

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Aprovada em: 26/04/2019.

COMISSÃO EXAMINADORA

____

Profª Drª Rute Elizabete de Souza Rosa Borba (Orientadora)
Universidade Federal de Pernambuco

____

Profª Drª Maria Auxiliadora Soares Padilha (Examinadora Interna)
Universidade Federal de Pernambuco

____

Profª Drª Síntria Labres Lautert (Examinadora Externa)

Universidade Federal de Pernambuco

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela dádiva de poder realizar a caminhada acadêmica, sempre me mostrando que é possível transpor barreiras.

A minha orientadora, Rute Borba, por todo seu respeito, carinho, o cuidado de suas palavras sempre gentis, mesmo com puxões de orelhas necessários (se houve, não sei!), e sempre muito cheias de amor. Pude entender o porquê de tanto carinho das pessoas ao citar o nome Rute Borba. Perdi-me a trajetória e, com todo cuidado, fui guiada de volta. Quando anjos assim passam em nossas vidas, apenas agradecemos a Deus e o universo por estarem ao nosso favor. Com todo meu carinho, OBRIGADA por me acolher.

Aos meus amores que me protegem, ensinam, ajudam e são todo esse amor incondicional em forma de FAMÍLIA: PAINHO, MAINHA e você minha irmã querida, Deisy. Sem vocês nada seria possível. Obrigada por estarem ao meu ladoe ajudarem a trilhar meus caminhos.

Ao meu companheiro e parceiro Fábio, que desde quando decidi que queria fazer uma faculdade embarcou comigo em apoio, incentivando, quando necessário, e fazendo dos meus sonhos, os nossos. Como no primeiro dia, eu e você, nossas risadas e agora nós cinco. “Do nosso amor a gente é quem sabe”. Aos meus sogros também por serem tão preocupados e especiais com o nosso núcleo familiar e sempre tão protetores.

A minha família Carvalho, matriarcal e cheia de mulheres fortes, e a mais forte delas, minha vozinha Mariana que é exemplo de como somos senhoras de nossos destinos.

Aos amigos, família que escolhemos amar. Barbara, irmã querida que a vida me deu. As minhas bests Karina, Glória, Priscilla, Valéria e Tayanne - vocês são especiais.

Ao grupo Geração que contribuiu tanto, mulheres tão inteligentes e cheias de amor, obrigada meninas. Estou levando um pouquinho de cada uma no meu coração.

À Profª Síntria Lautert por ter me dado a chance de conhecer e participar do meu primeiro grupo de pesquisa e assim iniciar minha caminhada no mundo da pesquisa, trabalhando com pessoas tão especiais. À Profª Síntria e à Profª Auxiliadora Padilha pelas contribuições na qualificação do projeto de mestrado.

À diretoria, professoras e crianças da escola municipal que se disponibilizaram a participar de toda a pesquisa. Mesmo com todas as dificuldades e desafios diários seguem firmes na luta por uma educação melhor e mais digna.

À FACEPE por financiar toda pesquisa e assim permitir-me uma maior dedicação durante a pesquisa.

RESUMO

A pesquisa desenvolvida, nesta dissertação de mestrado, se apoia na ideia de que as crianças desde a Educação Infantil podem ter acesso aos conteúdos matemáticos específicos. A abordagem deste estudo está voltada para o ensino da *Combinatória* com atividades adequadas a essa faixa etária, buscando incentivar nas crianças modos de pensar acerca das situações em que os elementos são combinados (*arranjos, combinações, permutações e produto de medidas*), pois estudos anteriores vêm demonstrando que as crianças novas já dão indícios de raciocínio combinatório, e este é um modo de pensar que necessita de longo período para se desenvolver. Para viabilizar este aprendizado, no presente estudo foi pensado o trabalho com dois recursos – material de manipulação e desenho – como potencializadores no processo de aprendizagem da Combinatória. Participaram 20 crianças da Educação Infantil, com cinco anos de idade, divididas igualmente em dois grupos, o primeiro - G1 - utilizou material de manipulação e o segundo - G2 - utilizou o desenho para representar suas resoluções. Foram realizadas três etapas (teste inicial, sessão de ensino e teste final), nas quais eram resolvidos quatro problemas combinatórios, um de cada tipo, com objetivo central de analisar a influência do uso de material de manipulação e da produção de desenhos na resolução de problemas combinatórios e, de modo mais especifico, sondar quais aspectos do raciocínio combinatório já se encontram em processo inicial de construção; verificar se e como o material de manipulação e a produção de desenhos podem auxiliar na ampliação dos raciocínios combinatórios e, por fim, analisar os desempenhos destas crianças por tipo de problema combinatório. Baseado no que vem sendo proposto por estudos anteriores, foi criada uma tabela de pontuação a partir das respostas dadas – variando de respostas não combinatórias, passando por respostas parcialmente corretas (com algumas combinações repetidas, ou não), chegando à pontuação máxima para as respostas de esgotamento de possibilidades. Os principais resultados encontrados corroboram com estudos anteriores de que desde o início da escolarização é possível ~~o~~ propor a resolução de situações combinatórias mais simples~~.~~ O estudo evidencia o uso de material de manipulação e de desenhos como propulsores e facilitadores do aprendizado combinatório. A pesquisa aponta, ainda, o esgotamento de possibilidades como dificuldade a ser superada; o invariante de ordenação ainda pouco compreendido, principalmente nos problemas de *arranjo, combinação e permutação*; a falta de sistematização como dificultadora no levantamento de possibilidades; e o invariante de escolha como propriedade mais facilmente entendida pelas crianças. Conclui-se, assim, a possibilidade de trabalhar com material de manipulação e de desenhos como recursos de iniciais de ensino da Combinatória na Educação Infantil.

Palavras-chave: Ensino-aprendizagem da Combinatória. Educação Infantil. Material de manipulação e desenhos.

ABSTRACT

The research developed, in this Master's thesis, is based on the idea that children from Early Childhood Education can have access to specific mathematical contents. The approach of this study is directed to the teaching of Combinatorics with activities appropriate to this age group, seeking to encourage in children ways of thinking about the situations in which the elements are combined (*arrangements*, *combinations*, *permutations* and *product of measures*), since previous studies have already shown that young children give indications of combinatorial reasoning, and this is a way of thinking that needs a long period to develop. In order to make this learning possible, it was thought to work with two resources – manipulation material and drawings – as potentializers in the learning process of Combinatorics. Twenty children from Kindergarten, aged five years old, were equally divided into two groups, the first - G1 - using manipulative material and the second - G2 - participated in the study using drawings to represent their responses. Three stages were performed (initial test, teaching session and final test), in which four combinatorial problems were solved, one of each type, with the central aim of analysing the influence of the use of manipulation material and the production of drawings in the resolution of combinatorial problems and, in a more specific way, to verify which aspects of combinatorial reasoning are already in initial construction process; to verify if and how the use of material of manipulation and the production of drawings can help in the amplification of combinatorial reasoning and, finally, to analyze the performance of these children by type of combinatorial problem. Based on what has been proposed by previous studies, a score table was created based on the answers given – varying from non-combinatorial answers, passing through partially correct answers (with some repeated, or not, combinations), arriving to the maximum points corresponding to exhaustion of possibilities. The main results corroborate with previous studies that, from the beginning of schooling, it is possible to propose the resolution of simpler combinatorial situations. The study shows the use of manipulative material and drawings as propellers and facilitators of combinatorial learning. The research also points out the exhaustion of possibility as a difficulty to be overcome; the ordering invariant as still poorly understood, especially in the problems of *arrangement*, *combination*, and *permutation*; the lack of systematization making it difficult to raise possibilities; and the invariant of choice as the best property perceived by children. The conclusion is that it is possible to work with manipulation material and drawing as initial resources to teach Combinatorics in Early Childhood Education.

Keywords: Teaching-learning Combinatorial. Early Childhood Education. Manipulation material and drawings.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Dentre os muitos objetivos da Educação Matemática, tem-se o de desenvolver formas de pensar. Almeja-se, assim, desenvolver nos alunos diversificados modos de raciocínio: senso numérico, relacional, algébrico, funcional, probabilístico e combinatório, dentre outros (BORBA, 2016). Como o desenvolvimento desses modos de pensamento/raciocínio se constitui em um processo longo, é desejável que desde a Educação Infantil seja iniciado, a partir de atividades adequadas, o ensino de conteúdos diversificados. Assim, Borba (2016) ressalta que, noções básicas de conceitos, mesmo alguns mais complexos, podem ser trabalhadas desde o início da escolarização, com o objetivo de desenvolver gradativamente modos diversificados de pensamento dos alunos.

O Referencial Curricular Nacional da Educação Infantil (RCNEI, BRASIL, 1998) afirma que as diferentes aprendizagens ocorrem por intermédio de reorganizações sucessivas de conhecimentos e que crianças da Educação Infantil podem vivenciar experiências de contato com conteúdos de forma simplificada e associada a práticas sociais reais. O RECNEI destaca, ainda, que não há aprendizagem sem conteúdos e, assim, defende-se que, desde o início da escolarização, conceitos das diversas áreas do conhecimento sejam trabalhadas junto às crianças. Por um lado, o trabalho com noções matemáticas na Educação Infantil atende às necessidades das crianças de construção de variados conhecimentos e diversificados modos de pensamento e, por outro lado, há necessidade social de preparar as crianças para viverem de modo participativo no mundo no qual há exigência de diferentes conhecimentos e habilidades.

A Educação Infantil (EI) é uma das três etapas da Educação Básica, sendo as outras duas etapas o Ensino Fundamental (anos iniciais do 1º ao 5º ano e anos finais do 6º ao 9º ano) e o Ensino Médio (com três anos). A EI atende crianças de até 5 anos de idade em creches (de 0 a 3 anos) e em pré-escolas (de 4 a 5 anos). O objetivo da EI, segundo a Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB, Brasil, 1996), é promover o desenvolvimento global das crianças, a partir da integração social em complemento à ação da família e da comunidade, considerando aspectos físicos, psicológicos e intelectuais nos quais também se encontram o raciocínio lógico-matemático das mesmas – incluindo-se, por conseguinte, o raciocínio necessário para lidar com situações combinatórias.

A partir do defendido por pesquisadores da área e do exposto em documentos oficiais, propõe-se investigar, no presente estudo, o aprendizado da Combinatória por parte de crianças da Educação Infantil. Busca-se, assim reforçar a possibilidade de trabalho com situações combinatórias junto a crianças bem novas em início de processo de escolarização.

Quanto ao raciocínio combinatório, especificamente, justifica-se a inserção de atividades que busquem desenvolver nos alunos modos de pensar a respeito de situações nas quais elementos são combinados. A combinação de elementos é uma prática social cotidiana e, desde cedo, as crianças podem ser levadas a pensar sobre modos diferenciados de realizar combinações, como a combinação de distintas peças de vestuário, a combinação de alimentos diversificados de uma refeição, a organização de crianças em filas, a escolha de alunos para a participação em equipes e a classificação de participantes de um torneio, dentre diversos outros contextos sociais reais (BORBA, 2016).

Borba, Rocha e Azevedo (2015) afirmam que o raciocínio combinatório leva um longo tempo para se desenvolver e essas pesquisadoras defendem que desde o início da escolarização pode-se propor às crianças a resolução de situações combinatórias mais simples. Desse modo, pode-se promover o desenvolvimento de noções iniciais sobre como elementos podem ser combinados e como as crianças podem considerar combinações válidas que atendam às condições enunciadas nas situações propostas. O trabalho com raciocínio combinatório envolvendo alunos em início de escolarização e durante todo percurso na educação básica, com variadas situações combinatórias (*arranjos*, *combinações*, *permutações* e *produto de medidas*), pode propiciar ao longo de toda a escolarização básica um grande avanço no desenvolvimento desta maneira específica de raciocínio.

As situações combinatórias se caracterizam como problemas, na essência do que significa uma problematização matemática e, assim, trabalhar com a Combinatória pode auxiliar os alunos em suas primeiras tentativas de resolver problemas matemáticos. Ao se deparar com um problema combinatório, não se sabe de início qual a solução, mas há como se determiná-la, seja por estratégias mais informais (como uso de material manipulativo, desenhos ou listas) ou por procedimentos mais formais (operações aritméticas, princípio fundamental da contagem ou fórmulas). As estratégias, informais ou formais, são aplicáveis aos diferentes tipos de problemas multiplicativos: *arranjos* (nos quais se escolhem elementos a partir de um conjunto único e nos quais a ordem dos elementos determina possibilidades distintas), *combinações* (nas quais também se escolhem elementos a partir de um conjunto único, mas nas quais a ordem dos elementos não determina possibilidades distintas), *permutações* (nas quais todos os elementos de um conjunto são permutados entre si) e *produtos cartesianos* (nos quais são escolhidos um elemento de cada um dos dois ou mais conjuntos enunciados).

Dentre os modos de resolução de situações combinatórias adequados a crianças novas – as quais não dominam, ainda, a escrita – tem-se o uso de material manipulativo e a produção de desenhos. Na presente pesquisa pretende-se analisar o uso desses dois recursos no aprendizado da Combinatória por parte de crianças da Educação Infantil. Acredita-se que esses recursos podem ser potencializadores de desenvolvimento gradativo e contínuo de ideias e procedimentos matemáticos.

Pais (2001) reconhece que pode haver o aprendizado de conceitos matemáticos mediante a manipulação orientada de objetos. Para esse autor, essa manipulação pode se constituir em um vínculo próximo entre a operação sobre o objeto e a acomodação dos conceitos[1]. Com isso, o uso do material de manipulação

---

[1] Segundo Piaget (1983), na *assimilação* busca-se introduzir novas informações aos esquemas já existentes e na *acomodação* muda-se o modo de comportar (os esquemas já existentes) para a resolução de novos problemas.

pode promover uma participação mais ativa do sujeito na atividade que está sendo desenvolvida, uma vez que há não apenas ações internas ao sujeito, mas também externas, como quando em interação com outro sujeito precisa-se entender o que o outro faz/diz e justificar as suas próprias escolhas ao outro.

No início do processo de alfabetização, quando os alunos ainda estão se apropriando da escrita, pode-se estimular outras formas de abordagem de problemas matemáticos. Como o desenho é o primeiro registro em papel desenvolvido pelas crianças, Smole, Diniz e Cândido (2000) recomendam a proposição de situações-problema para crianças não-leitoras nas quais se tem no desenho uma forma de registrar suas estratégias e resoluções.

Diante do exposto, tem-se como objetivo desenvolver uma investigação junto a crianças da Educação Infantil, no sentido de sondar quais aspectos do raciocínio combinatório já se encontram em processo inicial de construção. Também objetiva-se verificar se e como o uso de material de manipulação e a produção de desenhos podem auxiliar na ampliação dos raciocínios combinatórios de alunos no início da escolarização.

O alvo maior da pesquisa é o de promover reflexões a respeito de como se pode desde cedo auxiliar crianças no desenvolvimento de seus raciocínios matemáticos, propiciando, assim, melhores condições de aprendizagem da Matemática. Reforça-se que o raciocínio combinatório também possibilita o avanço em outras áreas da Matemática, tais como a Probabilidade e a Estatística, dentre outras áreas, ao longo de toda a escolarização básica. Amparado pela discussão trazida nos documentos oficiais que direcionam o ensino na EI, juntamente com outros estudos, mostrando que é possível trazer conteúdos matemáticos, aqui trata-se especificamente da Combinatória como mais um objeto de incentivo aos variados tipos de raciocínios matemáticos.

Os capítulos que seguem no texto estão organizados em:

1) Fundamentação Teórica, na qual se discute a construção de conhecimentos, numa perspectiva piagetiana; a Teoria dos Campos Conceituais, de Gérard Vergnaud; em particular, as estruturas multiplicativas; a Combinatória que faz parte desse campo conceitual; o uso de material de manipulação e a produção de desenhos no aprendizado matemático; e, em particular, a aprendizagem da Matemática na Educação Infantil (EI);

2) Revisão de Literatura, na qual são apresentados estudos anteriores desenvolvidos na área, referentes ao desenvolvimento do raciocínio combinatório, ao uso de material de manipulação e à produção de desenhos na aprendizagem na EI;

3) Método, com a explanação de como se se deu o processo da coleta de dados;

4) Apresentação e análise de dados, observando-se avanços das crianças e suas respostas por tipos de problemas combinatórios; e, por fim,

5) Considerações Finais, com um apanhado do estudo, suas implicações educacionais e indicação possíveis de estudos futuros.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA
Capítulo 2

Para discutir os pressupostos teóricos do presente estudo, o capítulo que se segue está organizado nas seguintes seções: *A construção de conhecimento*, que baseia-se no foco da teoria piagetiana em conhecer a construção do pensamento, aqui voltada para o conhecimento lógico matemático, de modo a se discutir a interação sujeito-objeto; *A Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud*, que se ampara na teoria piagetiana, mas traz novas perspectivas do desenvolvimento cognitivo, o qual depende de situações e conceitualizações específicas para que ocorra aprendizagem; *O campo conceitual das estruturas multiplicativas*, com suas principais características e apontamento dos problemas multiplicativos, a partir da classificação dada por Vergnaud; *A Combinatória*, que apresenta a classificação dos problemas e suas principais características à luz da teoria de Vergnaud; *O uso do material de manipulação e do desenho* como importantes auxiliadores no processo de aquisição de conceitos; *A matemática na Educação Infantil*, discutida através dos principais documentos oficiais que trazem seus aportes e as competências esperadas nesta fase da escolarização.

2.1 A CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO

No processo de compreensão da construção do pensamento, Piaget (1972) apresentou, em sua teoria sobre a *gênese e evolução do conhecimento*, importantes aspectos a respeito do conhecimento lógico-matemático. Para Piaget, o conhecimento lógico-matemático é uma construção que resulta da ação mental sobre o mundo. Esta construção se dá a partir das relações elaboradas nas ações sobre objetos. Dessa forma, as crianças pensam sobre o mundo a partir de *experiências físicas* (nas quais descobrem propriedades dos próprios objetos), *experiências sociais* (nas quais aprendem nomes, termos, expressões associadas aos objetos) e *experiências lógico-*

matemáticas (não sendo as informações obtidas nos próprios objetos, mas a partir da reflexão das relações estabelecidas na ação sobre os objetos).

A teoria piagetiana é centrada em três pilares básicos: i) a cognição humana como uma entidade biológica, a qual possui uma estrutura, ou seja, uma organização interna; ii) essa organização como propiciadora de um funcionamento específico do organismo; e iii) a interação entre o organismo e o ambiente que proporciona adaptação e desenvolvimento das estruturas cognitivas (SOUZA FILHO, 2008). A *adaptação* mencionada por Piaget possui dois mecanismos complementares: a *assimilação* e a *acomodação* e o conhecimento é a equilibração/reequilibração entre esses mecanismos. A assimilação é a incorporação dos dados da realidade aos esquemas que o sujeito já possui e a acomodação é a modificação dos esquemas para assimilar elementos novos. Os esquemas são estruturas ou conceitos a partir dos quais as informações recebidas são interpretadas. Esquemas ajudam a organizar experiências passadas e a entender experiências futuras e são modificados por maturação e por experiências físicas, sociais e lógico-matemáticas.

Fundamentado no contínuo encadeamento de assimilação/ desequilíbrio/acomodação/reequilibração, descrito por Piaget (1976), os sujeitos, a todo instante, estão se apropriando de alguma ideia ou conceito, assimilando algo ou se acomodando e, para cada momento, são escolhidas ações relevantes, ~~o~~ em busca de equilíbrio. Poder prever e ter estas previsões executadas corretamente mostram conhecimento sobre o ambiente/objeto. Já, quando estas previsões e ações não trazem um resultado esperado, ocorre o desequilíbrio. O sistema cognitivo age para ordenar o desequilíbrio e é assim que acontece a assimilação ou acomodação, e, desse modo, é gerada uma ocorrência de equilíbrio, a reequilibração.

Piaget (1972) defende que o conhecimento é resultado das diversas correlações constituídas pelas crianças com variados objetos e circunstâncias, para que, a partir destes processos de aquisição do conhecimento, haja a sua ordenação de mundo dentro de sua compreensão, pensamento esse que é desenvolvido por toda vivência do indivíduo nas mais diversas situações, sejam elas mais complexas ou não.

A ordenação do mundo ocorre, portanto, quando os esquemas mentais se modificam a partir de novas experiências e interações com o ambiente.

Neste processo de construção de conceitos, a interação sujeito-objeto se apresenta através do empirismo inerente aos indivíduos, que em suas operações, partem do seu olhar, uso, reflexão sobre o objeto e ações sobre o objeto, os quais permitem modificar antigos esquemas.

Esta ideia dá forma e sustenta o que é a teoria do desenvolvimento cognitivo, esclarecendo a partir dela como acontece a aprendizagem, segundo a análise construtivista de Piaget sobre a relação mútua que se estabelece entre sujeitos e objetos. É ressaltado nesta perspectiva teórica que é a partir das ações dos sujeitos sobre os objetos, em especial as ações mentais, que conhecimentos são construídos – em particular os conhecimentos lógico-matemáticos.

Piaget (1977) afirma o quanto é importante que a criança possa construir conhecimentos a partir de suas ações e possa refletir sobre situações para que haja entendimentos e aprendizados. A construção de conhecimentos pode ser resultante da interação sujeito-objeto, pois essa interação dá a chance de descobertas pelo levantamento de hipóteses, por experimentações e por descobertas de novas possibilidades.

No presente estudo, pressupostos da teoria piagetiana serão levados em consideração, uma vez que nas análises qualitativas de dados se buscará discutir a interação de crianças da Educação Infantil com representações de situações combinatórias – sejam essas representações por meio de fichas a serem manipuladas pelas crianças, sejam desenhos produzidos pelas mesmas.

2.2 A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Diante da importância em fomentar o fazer pensar e entendendo a relevância do desenvolvimento mental do sujeito desde o início de sua alfabetização, a presente pesquisa possui também como fundamento teórico a *Teoria dos Campos Conceituais* de Gérard Vergnaud.

A teoria desenvolvida por Vergnaud (1990) está embasada nos conceitos de adaptação, desequilibração e reequilibração de Piaget. Vergnaud reconheceu a importância desses conceitos-base da teoria piagetiana, mas ressaltou como o desenvolvimento cognitivo depende de situações e de conceitualizações específicas, não apenas de algum tipo de complexidade lógica geral.

Na *Teoria dos Campos Conceituais*, Vergnaud (2011) fala de dois pontos importantes no processo de aquisição do conhecimento e no desenvolvimento conceitual. O primeiro ponto trata do “longo prazo”, do qual a teoria evidenciada trata, que traz em sua concepção que a apreensão intelectual e o desenvolvimento de um conteúdo não acontece num curto período de tempo, dias ou semanas, mas ao longo de toda uma trajetória escolar e experiência adquirida, que se dá a partir das aptidões inicialmente aprendidas entre os cinco e seis anos. O segundo ponto trata do “curto prazo”, o qual tem seus cenários oferecidos em momentos que favoreçam as experiências adquiridas, em sua totalidade, ou não, que exercem uma importante função de apoio junto ao professor como um facilitador neste transcurso da aprendizagem. Assim, oferecer vivências que sejam capazes de permitir que as crianças utilizem em variados momentos as aptidões que já possuem de forma total ou parcial, experiências estas oferecidas a curto prazo, também têm forte impacto no desenvolvimento conceitual. Dessa forma, é necessário que os professores, como mediadores da aprendizagem, ofereçam às crianças, nos diversos momentos de escolarização, atividades que possam propiciar aquisição de conhecimentos – a curto e a longo prazo.

Seguindo essa linha de pensamento, o raciocínio combinatório se desenvolve de maneira gradual e necessita de um longo período de tempo para se estabelecer. Para que, gradativamente, esse tipo de raciocínio se desenvolva, recomenda-se a apresentação deste conteúdo matemático desde a Educação Infantil. E, assim, em cada etapa de ensino, novos aspectos da Combinatória podem ser tratados.

Vergnaud (1990), ao definir o pressuposto central de sua teoria, diz que um campo conceitual é o produto do agrupamento de diferentes conceitos, situações de uso dos conceitos, ideias e operações de pensamento imbricados durante o processo de aquisição de conceitos. Isso faz entender que o desenvolvimento de um conceito não ocorre separadamente de outros, mas, sim, das ligações existentes entre eles. Dentre os campos conceituais por Vergnaud estudados, tem-se o *campo das estruturas aditivas* e o *campo das estruturas multiplicativas* – sendo, no presente estudo, tratados conceitos do campo multiplicativo.

Para esse teórico, a base do desenvolvimento conceitual é formada por um tripé que abrange um composto de *situações-problemas (S)* que fazem o conceito ter um *significado; os invariantes (I)* que são as especificidades operacionais do conceito, seus objetos e relações viabilizadoras da universalização e transmissão do conhecimento; e as *representações simbólicas (R)* que são os variados modos de representar o conceito (VERGNAUD, 1983; 2011). O tripé (S, I, R) das situações combinatórias será discutido adiante.

A partir dos pressupostos da Teoria dos Campos Conceituais, defende-se que a apresentação de situações-problemas diversificadas é terreno fértil para a aquisição e o desenvolvimento de conceitos, por favorecer a relação entre eles. Dessa forma, confrontar diferentes situações-problemas e discutir suas especificidades, utilizando-se de variadas representações simbólicas possibilita amplo desenvolvimento conceitual.

Na sua teoria, Vergnaud (1998) menciona dois invariantes operatórios básicos. Por meio desses invariantes, os indivíduos reconhecem, implícita ou explicitamente, os elementos pertinentes das situações-problemas e inferem qual a meta a ser alcançada e quais ações devem ser postas em prática. Os invariantes específicos das situações combinatórias serão discutidos em detalhamento a seguir.

O primeiro dos invariantes, os *teoremas-em-ação,* são definidos pelas associações dos repertórios operacionais que o sujeito contempla para resolução dos problemas e que aparecem de modo intuitivo. Um *teorema-em-ação* é uma proposição considerada como verdadeira sobre o real. No caso de um problema combinatório, pode-se considerar *teoremas-em-ação* referentes à escolha de elementos para formar possibilidades, como também referentes à ordenação dos elementos.

O segundo dos invariantes, os *conceitos-em-ação*, têm natureza elucidativa no sentido de trazer definições que podem ser verdadeiras, ou não, através das proposições de situações e estratégias dadas pelo sujeito para resolver os problemas, mas que se aproximam de maneira mais concreta de algum tipo de conceitualização. Estes podem ser denominados também de conjunto de saberes. Em outras palavras, *conceito-em-ação* é uma categoria de pensamento considerada como pertinente à resolução de problemas. Em uma situação-problema de combinatória que envolva, por exemplo, senhas constituídas de algarismos diferentes, a conceitualização, mesmo que implícita, de *senha* e de *algarismos diferentes* é necessária.

Esses dois invariantes operatórios são o que constituem os *esquemas,* o que Vergnaud (1998) diz permitir distinguir diferentes competências para lidar com situações, aliando conceitualização com ação, em busca da explicitação de conceitos. Isto permite que a criança estruture sua conduta de atuação mediante a resolução de um problema matemático, por exemplo, pois ela utilizará, ou não, a depender da situação, seu conjunto de esquemas já existentes e, concomitantemente, pode perceber novos elementos e, assim, indicar novas possibilidades. Pode-se, desse modo, dizer que estes dois invariantes operatórios mantêm uma estreita conexão na estruturação de um conceito, pois eles fornecem o suporte para o processo de conceitualização.

Vergnaud (1998) dá uma perspectiva de que mediante os esquemas se pode aprofundar *competências-em-ação*, sendo *competência* uma ação adequada para tratar uma situação-problema. A partir da atuação, de maneira conjunta, de *teoremas-em-ação* e de *conceitos-em-ação*, a criança pode obter os componentes necessários para executá-los e sua atuação pode concretizar-se. Em algumas situações, as crianças dispõem de competências necessárias ao tratamento imediato da situação e, em outras situações, não estão ainda disponíveis todas as competências necessárias. Nesse último caso, é preciso mobilizar vários esquemas para resolver a situação-problema.

Assim, pode-se acompanhar o processo de resolução de problemas das crianças focados em perceber as estratégias utilizadas e os esquemas postos frente aos problemas e observar se há um padrão cognitivo mediante diferentes cenários. Isso pode permitir acesso ao processo evolutivo das crianças na aquisição dos conceitos, já que o modo como são apresenta2das as respostas pode dar algum sinal de como elas estão raciocinando.

2.3 O CAMPO CONCEITUAL DAS ESTRUTURAS MULTIPLICATIVAS

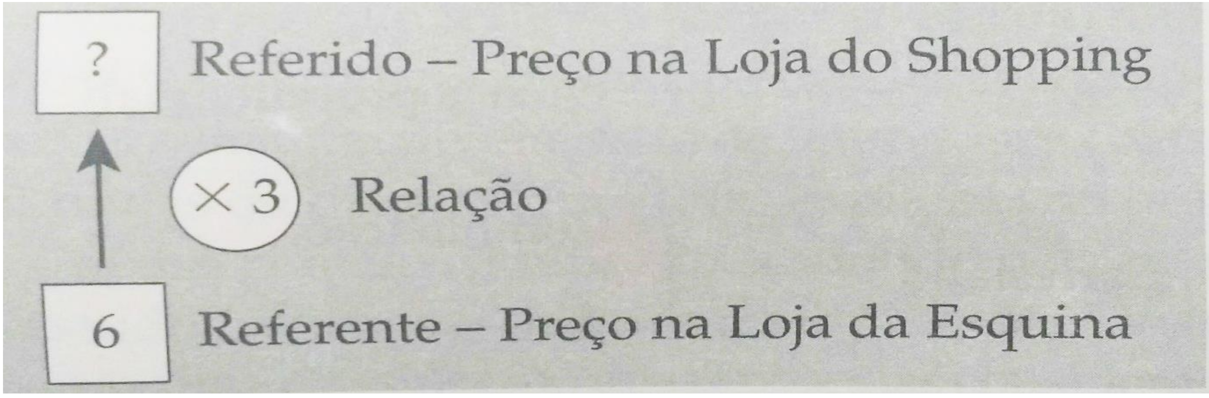
O presente estudo concentra-se no que Vergnaud (1988) denomina de *campo conceitual das estruturas multiplicativas*. Neste campo estão inclusas situações que podem ser solucionadas através da multiplicação e/ou divisão – ou a combinação de ambas – que serão apresentados a seguir, segundo definições dadas por Gitirana, Campos, Magina e Spinillo (2014), apontados como problemas multiplicativos a partir da classificação Vergnaud (1988, 1991):

a) Comparação Multiplicativa: Comparação entre grandezas de mesma natureza de forma multiplicativa por um escalar (uma razão ou relação) – sendo uma grandeza o referente (R) e outra o referido (r). Esse tipo de problema pode ser subclassificado em: Referente desconhecido; Referido desconhecido; e Relação desconhecida.

Exemplo: Uma loja no shopping vende tudo 3 vezes mais caro que a lojinha da esquina. Uma sandália custa R$ 6,00 na lojinha da esquina. Quanto a mesma sandália custa na loja do shopping?

A Figura 1 mostra um diagrama proposto, a partir dos pressupostos de Gérard Verganud, o qual tem a finalidade de auxiliar o entendimento do cálculo relacional envolvido nesse exemplo.

Figura 1 - Exemplo de comparação multiplicativa



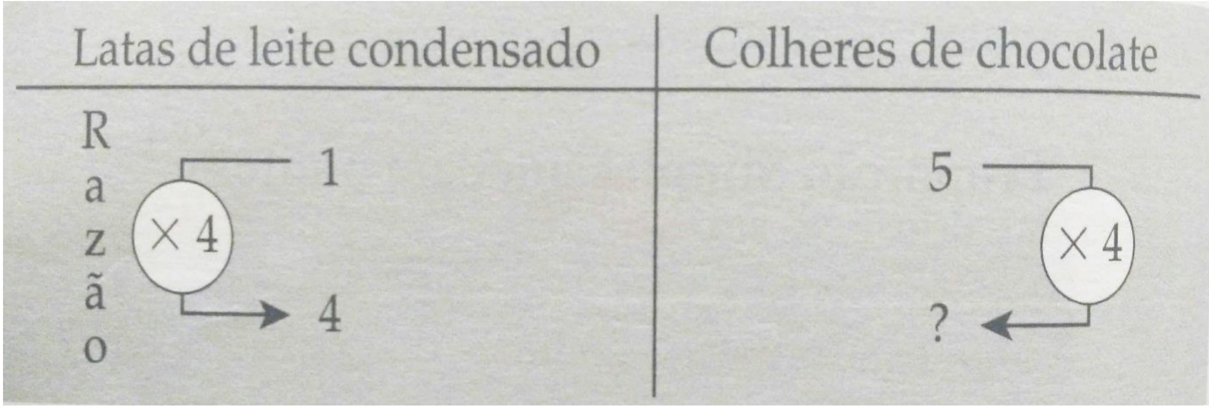
Fonte: Gitirana et al (2014)

b) Proporção simples: Situações em que se tem uma relação de proporcionalidade entre quatro grandezas – duas a duas da mesma espécie – que estão relacionadas por uma taxa entre as grandezas de diferentes espécies. Esse tipo de problema pode ser subclassificado em: Partição ou distribuição; cota; e quarta proporcional.

Exemplo: A receita de brigadeiro de D. Maria leva 1 lata de leite condensado para cinco colheres de chocolate. Ela vai fazer brigadeiros com 2 latas de leite condensado. Quantas colheres de chocolate ela usará para fazer a sua receita de brigadeiro corretamente?

Aqui temos a relação um para muitos – 1 lata de leite de condensado relacionada a 5 colheres de chocolate; assim como 2 latas de leite condensado está relacionada à quantidade de colheres de chocolate que se deseja descobrir. A Figura 2 representa, segundo o diagrama de Vergnaud, esse tipo de situação.

Figura 2 - Exemplo de proporção simples



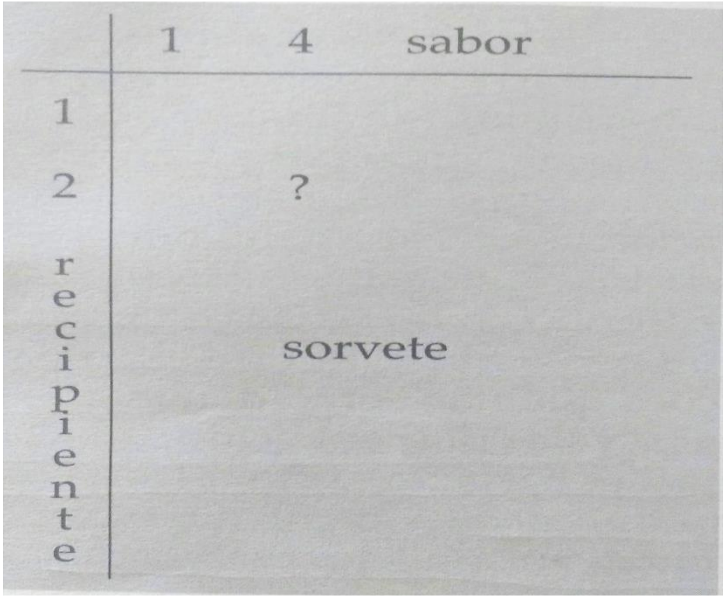
Fonte: Gitirana et al (2014)

c) Produto cartesiano (ou produto de medidas): Quando uma nova grandeza é obtida como produto de duas (ou mais) outras, como é o caso da área, volume e combinações – sem que uma das grandezas dependam da outra. Esse tipo de problemas pode ser subclassificado em: combinação e área.

Exemplo: Em uma sorveteria, o sorvete de uma bola pode ser servido em casquinho ou copinho. Tem 4 sabores diferentes: menta, baunilha, chocolate, morango. Maria quer um sorvete de uma bola, quantas maneiras diferentes ela tem para escolher?

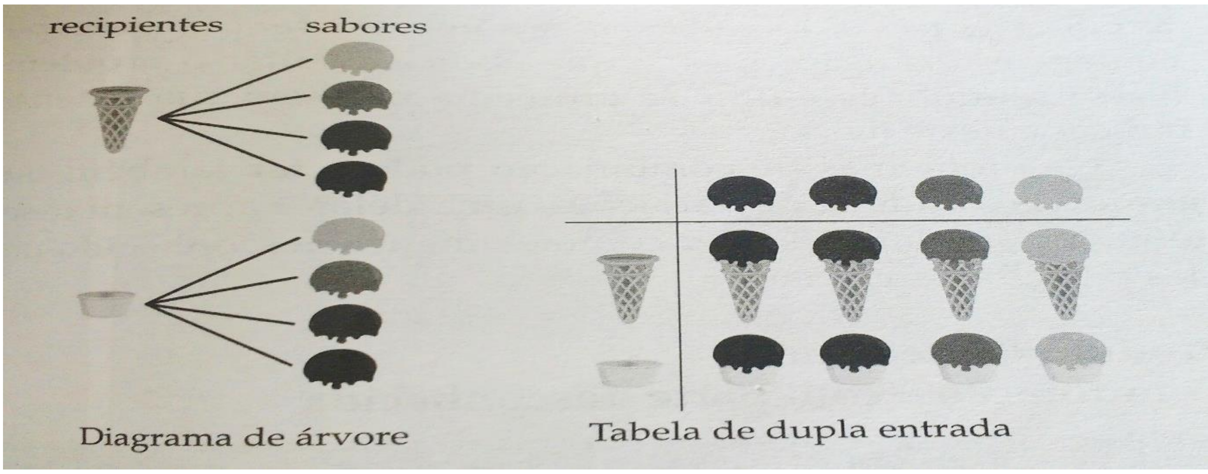
Nesse exemplo, há duas grandezas (sabores de sorvete e tipos de recipientes). Com a combinação das duas grandezas, obtêm-se outra grandeza, relativa à quantidade de sorvete de uma bola. Este é um problema de produto cartesiano (produto de medidas), também conhecido como “de contagem” ou “de combinação” entre grandezas discretas, formando possíveis combinações que podem ser contadas. A Figura 3 ilustra a resolução desse problema a partir de um diagrama. Outros dois esquemas que podem auxiliar as crianças na resolução desse tipo de problema e na percepção de que estes problemas estão ligados à multiplicação são a “tabela de dupla entrada” e o “diagrama de árvore”, ilustrados na Figura 4.

Figura 3 - Exemplo de um produto de medidas



Fonte: Gitirana et al (2014)

Figura 4 -Exemplo de diagrama de árvore e de tabela de dupla entrada em um problema de produto cartesiano



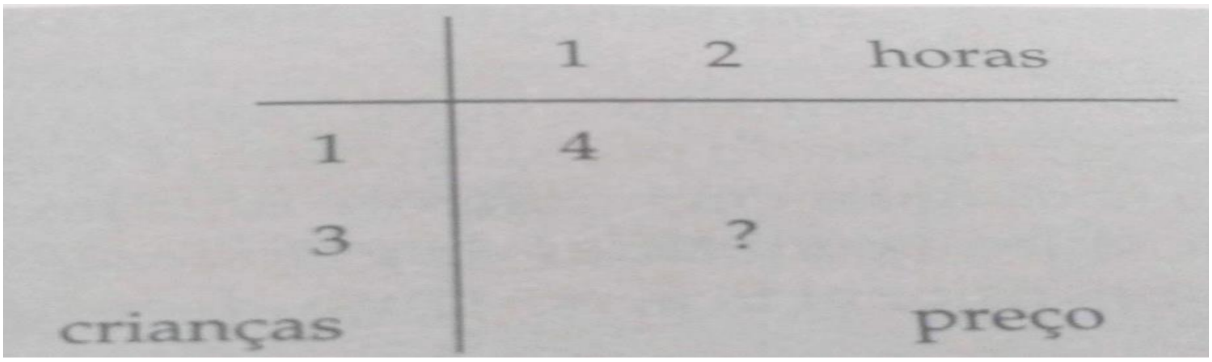
Fonte: Gitirana et al (2014)

d) Função bilinear: Envolvem ao menos seis grandezas (três pares de mesma natureza), em que uma delas é proporcional a duas outras, separadamente. Há uma proporção simples para cada uma das grandezas envolvidas em relação à outra.

Exemplo: Um parque de diversão cobra R$ 4 para cada criança brincar em qualquer brinquedo durante 1 hora. Dona Lulu levou seus 3 filhos para brincar no parque durante 2 horas. Quanto ela pagou?

Pode-se duplicar o número de crianças sem alterar o tempo de permanência no parque, por exemplo. Da mesma forma, é possível duplicar o tempo que as três crianças ficarão no parque sem alterar o número de crianças. Ambas as mudanças alteram apenas o valor a pagar. Usando um diagrama semelhante ao de produto de medida, tem-se esse tipo de problema representado na Figura 5.

Figura 5 -Exemplo de função bilinear



Fonte: Gitirana et al (2014)

e) Proporção Múltipla: Pode-se tratar como a decomposição de duas proporções simples. Nesse caso, ao alterar o valor de qualquer uma das grandezas envolvidas alteram-se todas as outras.

Exemplo: A receita de massa de pastel de “seu“ Manoel é assim: para cada copo de leite, ele usa 3 ovos, e, para cada ovo, 2 xícaras de farinha. Para fazer a massa usando 2 copos de leite, quantas xícaras de farinha ele vai precisar?

Alterando a quantidade de leite, terá de se alterar também a quantidade de ovos e a de farinha, visto que duas a duas, há uma proporção simples entre as quantidades apresentadas. A Figura 6 apresenta um diagrama representando esse problema.

Figura 6 - Exemplo de proporção múltipla

Copos de leite	Ovos	Copos de farinha
	1	2
1	3	
2		?

Fonte: Gitirana et al (2014)

Os problemas combinatórios *(arranjo, permutação, combinação e produto de medidas)* – objeto de estudo da presente pesquisa – são problemas multiplicativos e são discutidos na seção a seguir. O *produto de medidas* é o único problema combinatório tratado diretamente por Vergnaud (1983, 1991) na discussão dos problemas multiplicativos. Esse e outros tipos de problemas combinatórios são foco de discussão a seguir.

2.4 A COMBINATÓRIA

Problemas combinatórios foram classificados por Vergnaud (1983, 1991) como *Produto de Medidas*; por Nunes e Bryant (1997) como *Produtos Cartesianos;* e como *combinatória* nos Parâmetros Curriculares Nacionais (1997). Na Análise Combinatória, conteúdo do Ensino Médio, outros problemas combinatórios são tratados: *arranjos*, *combinações* e *permutações*. Ressalta-se, entretanto, que distintos tipos de problemas combinatórios não são todos tratados nos diferentes níveis de ensino.

Pessoa e Borba (2008, 2009) propuseram articular as classificações já existentes dos problemas combinatórios, tratados isoladamente nos diferentes níveis de escolarização. Em geral, os *produtos de medida* são apresentados no início da escolarização básica e os outros problemas combinatórios (*arranjos*, *combinações* e *permutações*) são trabalhados no final da escolarização básica. Desta maneira, as autoras acima referidas apresentam as situações combinatórias em uma categorização única, representativa do raciocínio combinatório, considerando-as parte importante dos conteúdos a serem trabalhados desde a Educação Infantil.

O Quadro 1 traz a classificação dos problemas combinatórios adotada no presente estudo e as características/ invariantes de cada tipo de problema. Os invariantes são os apontados por Pessoa e Borba (2008, 2009) e os exemplos apresentados são os tratados no teste inicial da presente pesquisa.

Analisando os problemas apresentados, à luz da teoria de Vergnaud, observa-se que há diferentes *situações (S)* que dão s*ignificado* à Combinatória*;* que essas situações são caracterizadas por distintos *Invariantes (I)*, relacionados à *escolha e* à *ordenação* de elementos; e que, para analisar e entender essas situações, os alunos fazem uso de variadas *Representações Simbólicas (R)*, tais como desenhos, listagens e outros tipos de representações.

Observa-se, assim, que quanto ao invariante de *escolha*, pode-se realizar a escolha de elementos de um único conjunto (no caso dos *arranjos*, das *combinações* e das *permutações*) ou de mais de um conjunto (no caso dos *produtos de medidas*). Em *produtos de medidas* são escolhidos, por vez, um elemento de cada um dos conjuntos dados. Nos *arranjos* e nas *combinações* são escolhidos alguns elementos dos conjuntos dados e nas *permutações* todos os elementos do conjunto dado são utilizados. Quanto ao invariante de *ordenação*, em *arranjos* e em *permutações* a ordem dos elementos indica possibilidades distintas, enquanto que em *combinações* e em *produtos de medidas* a ordem dos elementos não indica possibilidades distintas.

São esses os invariantes que os estudantes precisam reconhecer em situações combinatórias. A partir desse reconhecimento, podem distinguir os diferentes problemas combinatórios, inferindo qual a meta a ser alcançada em cada problema e decidindo ações para suas resoluções.

Quadro 1: Situações combinatórias e seus invariantes

	Situações-Problema	Invariantes
Arranjo	Numa corrida temos os carrinhos amarelo, vermelho e azul. Nesta corrida só podem ganhar dois carros por vez, o campeão e o vice-campeão. De quais maneiras diferentes os carrinhos podem ocupar o lugar de campeão e de vice-campeão na corrida?	- Tendo **n** elementos de um conjunto, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos ... **p** elementos, com **$0 < p < n$** - A ordem dos elementos gera novas possibilidades.
Permutação	Seu Antônio tem em seu sítio uma galinha, um pato e uma vaquinha. Quando anoitece ele precisa colocar cada um deles em seu lugar dentro do celeiro, que possui três lugares um ao lado do outro. De quais maneiras eles podem ser organizados para passar a noite?	- Todos os **n** elementos do conjunto serão usados; - A ordem dos elementos gera novas possibilidades.
Combinação	Para fazer uma salada de frutas, Alice possui banana, maçã, uva e morango. Só podem ser colocadas dois tipos de frutas na salada. Quantas saladas de frutas diferentes ela poderá fazer?	- Tendo **n** elementos de um conjunto, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos ... **p** elementos, com **$0 < p < n$** - A ordem dos elementos não gera novas possibilidades.
Produto de medidas	Na festinha da escola haverá um bailinho. Os meninos, Pedro e Davi querem dançar com as suas três coleguinhas Cecília, Luíza e Júlia. Quais pares podemos formar para que os meninos dancem com todas as meninas?	- Dados dois (ou mais) conjuntos distintos (com **n** e com **p** elementos), os mesmos serão combinados para formar um novo agrupamento. - A natureza dos conjuntos é distinta do novo subgrupo formado e a ordem dos elementos não indica possibilidades distintas.

Fonte: A Autora e Pessoa e Borba (2008, 2009)

2.5 O USO DE MATERIAL DE MANIPULAÇÃO E DE DESENHOS NO APRENDIZADO MATEMÁTICO

Dentro do conjunto de *Representações (R)*, estão os mais variados tipos de simbolismos que podem auxiliar no processo de aquisição de conceitos, e, na presente pesquisa, a utilização do material de manipulação – na representação simbólica de situações combinatórias – se fundamenta em estudos realizados por alguns autores (PAIS, 2001; LORENZATO, 2006; BATISTA e SPINILLO, 2008) sobre a potencial contido neste tipo de recurso. Assume-se, aqui, como material de manipulação, tudo que possa ser visualizado, tocado, sentido ou movimentado pelo indivíduo e cujo uso tenha como objetivo que se reflita sobre algum conceito em particular.

Pais (2001, p. 2) ressalta a importância da relação que se estabelece entre fazer e o aprender, ou seja, a “estreita ligação entre atividade empírica e a apropriação dos conceitos”. Desse modo, por processos de *acomodação*, como defendido por Piaget (1983), as crianças podem, por meio da manipulação de objetos, mudar seus esquemas, assimilando novos elementos, de modo a conseguirem resolver problemas que lhes são propostos e avançarem em seus desenvolvimentos conceituais.

O uso de materiais de manipulação com a intenção de facilitar o ensino da Matemática ganhou força no Movimento Escola Nova[2], sugerindo que os alunos pudessem *aprender fazendo*. Esse movimento propôs uma nova visão das necessidades das crianças e questionava a sua passividade. O ponto central

---

[2] Movimento surgido na Europa e Estados Unidos da América. Chegou em 1882 ao Brasil por intermédio de Rui Barbosa e exerceu grande influência nas mudanças no ensino na década de 1920. O país passava, na época, por transformações econômicas, políticas e sociais e um grupo de intelectuais brasileiros defendia a educação como elemento chave para o desenvolvimento nacional – garantindo a todos igualdade e direito à educação, como único meio efetivo de acabar com as desigualdades sociais da nação.

defendido era a autonomia dos alunos, a partir de um papel ativo em seus aprendizados.

Ressalta-se que o simples manuseio empírico de materiais de manipulação não garante a aprendizagem de conceitos. A sua importância também se dá no processo de socialização dos contextos em que o material será inserido, nas interações em sala de aula as quais podem propiciar novos aprendizados, no potencial exercido por esses materiais e no papel do professor frente ao uso destes materiais, enquanto mediador e facilitador da construção de conhecimento.

Lorenzato (2006) apresenta uma classificação a respeito do que ele chama de Material Didático (MD) concreto manipulável, dividida em:

1. **Material manipulável estático:** não é possível realizar mudanças na composição de sua matéria, o que pode limitar a experimentação sobre o objeto, já que haverá o manuseio, mas muito virá da capacidade de abstração a respeito das propriedades ali existentes. Esta limitação, apenas de observar, pode fornecer um conhecimento vago a respeito do instrumento Sólidos geométricos produzidos em madeira e jogos de tabuleiro são exemplos de materiais manipuláveis estáticos, mas, apesar de estáticos, permitem participação ativa de crianças.

2. **Material manipulável dinâmico:** é possível realizar mudanças na composição de sua matéria através das ações realizadas pelo sujeito sobre o material. Este material apresenta vantagem em comparação com o primeiro por permitir uma melhor visualização das características nele contidas, que propiciam novas concepções e aprendizado significativo.

> É o caso da estrela [...] construída com 18 palitos ou cotonetes iguais e unidos por borrachas (pedaços de garrote simples nos pontos ímpares e transpassados nos pontos pares); ela pode ser dobrada de várias maneiras e, assim, pode facilitar o estudo de simetria, rotação, reflexão, triângulo,

> hexágono, tetraedro, isometria ótica, entre outros assuntos. (LORENZATO, 2006, p. 19)

O uso de material manipulável como um todo, seja ele estático ou dinâmico, exerce uma grande importância quando se trata de experimentação, pois oportuniza ao aluno, na construção do conhecimento, observar, analisar, realizar testes que permitam entender as características dos conceitos a serem estudados, realizar comparações entre os objetos e descrevê-los, gerando novos questionamentos que venham permitir desenvolver a criticidade e o raciocínio lógico, criar hipóteses e deduzir novos cenários. Pode-se, assim, estabelecer correspondência com diversificados conhecimentos e o cotidiano do estudante.

Outra *representação simbólica* que pode auxiliar na aquisição de conceitos é o desenho, uma das primeiras formas que a criança tem de se expressar em papel. Por meio do desenho, é possível estimular a atividade mental dos alunos e através dele o professor e o pesquisador podem compreender como o conhecimento matemático das crianças está se constituindo.

Smole (2013) trata da importância de refletir sobre a representação espontânea na aprendizagem da Matemática. Smole e Muniz (2013) denominam de representação espontânea aquela na qual as crianças são estimuladas a registrarem o processo ou a estratégia que desenvolveram para chegar na solução de problemas.

> Representações gráficas espontâneas são determinantes se queremos entender como o resolvedor pensou, que hipóteses ele tem sobre as noções e os conceitos matemáticos envolvidos em um problema, que recursos de expressão utiliza e, também, para percebemos como as intervenções que serão feitas nas aulas se traduzem ou não na modificação das representações realizadas pelo resolvedor em direção a uma apropriação de formas cada vez mais complexas da escrita matemática ... (SMOLE, 2013, p. 51).

Nas suas investigações, Smole identificou duas classes elementares de representação gráfica espontânea feitas por crianças na resolução de problemas: (i) o desenho e os (ii) procedimentos pessoais de cálculo. Essas duas classes de representação diferenciam-se dos algoritmos[3], procedimentos matemáticos formais, uma vez que nas representações espontâneas não há regras pré-estabelecidas a serem seguidas, ou seja, as estratégias vão sendo geradas no processo de resolução.

Segundo Smole (2013), o desenho pode ser dividido em quatro categorias: (i) *Idiossincrático* - tipo de grafismo no qual a criança experimenta marcas do lápis sobre o papel, sem aparente intenção representativa, sendo que o desenho ainda não é figurativo; (ii) *Pictográfico* - para a criança o desenho assume o propósito comunicativo e tem a intenção de desenhar aquilo que vê e deseja que outras pessoas entendam o que foi desenhado, ou seja, há intenção figurativa das representações; (iii) *Icônico* - a criança usa em sua resolução marcas que não são mais representações fiéis dos objetos ou da situação, em que a compreensão e a expressão da solução é mais esquemática; (iv) *Simbólico* - a criança inclui elementos da linguagem matemática diante de três possibilidades: a) conhece bem os números e realiza cálculos mentais, colocando apenas a resposta; b) mistura desenhos e sinais matemáticos relacionando as duas linguagens, numa tentativa de comprovar a resolução dada e c) usa apenas representação simbólica da Matemática.

Smole (2013) define como procedimento pessoal de cálculo o método utilizado pelos alunos na representação de resolução dos problemas composto por sinais de aritmética, ou formado pelo conjunto de sinais e palavras com significado matemático, mas que não se refere aos métodos padronizados que comumente são utilizados na escola. São representações espontâneas, pois não são formalmente ensinadas pelo professor. Surgem espontaneamente em situações de resolução de problemas.

A autora aponta, ainda, que a representação mais comumente utilizada pelas crianças mais novas é o desenho, justificando que desenhar é uma ação intrínseca das crianças representarem o que acontece nas suas mentes e precede a

[3] Algoritmos são sequências finitas de ações executáveis que visam a obtenção de solução para um determinado tipo de problema.

formalização da linguagem da escola. Smole (1996) também afirma que o desenho pode assumir duas características para criança enquanto resolve problemas matemáticos, seja a de exprimir os resultados que obteve, em que realiza o cálculo mentalmente e utiliza o desenho como registro de seu resultado, ou a de ordenar fatos que dão as referências básicas a respeito do problema.

Batista e Spinillo (2008) tratam da importância existente às relações que se instituem entre o material de manipulação concreto e o quanto suas representações exercem influência na resolução de problemas, quando estabelecidas, ou não, relação com os referentes contidos nos problemas. Para isso primeiro elas definem o que é suporte de representação.

Suportes de representação são definidos por símbolos, dispositivos e objetos utilizados no decorrer da resolução das situações-problema. A exemplo podem ser usados os dedos, palitinhos, fichas, dentre outros, ou variados recursos gráficos, como desenhos, diagramas, gráficos e outros. Batista e Spinillo (2008) afirmam que os suportes de representação que são oferecidos na resolução do problema pertencem a ele, pois ‘não apenas auxiliam na expressão das formas de raciocinar, mas que também as influenciam’. Quando inseridos em uma situação problema, exercem grande importância, pois podem inspirar diferentes formas de soluções e dar significado ao conceito.

As autoras a partir de seus estudos trazem duas definições para material concreto: o definido e indefinido. Entende-se por material concreto definido objetos que possuem vínculo estabelecido com os referentes que foram quantificados nas formulações dos problemas; já os indefinidos não possuem uma ligação definida com os referentes propostos nos problemas. Mesmo sendo materiais de manipulação e concretos eles se diferem nas suas origens. Como definidos pode-se ter objetos (carros em miniatura e bonecos, por exemplo) citados nos enunciados dos problemas e como indefinido pode-se ter fichas coloridas representativas dos objetos.

Pelos pressupostos apresentados, acredita-se que materiais de manipulação e desenhos sejam recursos que podem ser usados no ensino de Matemática na Educação Infantil. Esses recursos podem auxiliar no registro de dados de problemas, bem como no registro de processos ou estratégias utilizadas na resolução de problemas.

2.6 A MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO INFANTIL

A garantia da educação e escolarização inicial, é ancorada por documentos oficiais: PCN (1997); RECNEI (1998); Manual de orientação pedagógica para creches (2012); DCNEI (2103); e BNCC (2018). Estes documentos abordam e discutem o ensino e a aprendizagem da Matemática na Educação Infantil e nos primeiros anos do Ensino Fundamental, os quais são apresentados e discutidos a seguir.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais, PCN (BRASIL, 1997) não fazem menção direta a esta faixa etária, mas abordam a importância de desenvolver, desde o início da escolarização, um trabalho para aquisição de conceitos matemáticos focado na resolução de problemas. Esse documento ressalta que o conhecimento matemático das crianças não se trata apenas de reprodução de procedimentos, mas deve ser entendido como um “sistema de conceitos, que lhes permite resolver um conjunto de problemas”. Nos PCN são elencados princípios básicos para a promoção de conhecimento matemático:

a) O início da atividade matemática deve acontecer não pela exposição de conteúdo, mas, sim, por meio de problemas e, pelo processo de ensino-aprendizagem, a apresentação de conceitos, ideias e estratégias que permitam os alunos criarem métodos para solucioná-los;
b) Problemas não são meras maneiras dos alunos transporem mecanicamente fórmulas e técnicas operacionais. É necessária uma interpretação dos enunciados para, assim, haver uma estruturação do que lhes foi apresentado;

c) Se aproximar da aquisição de um conceito na resolução de determinados tipos de problemas permite ao aluno compor seu repertório, para que em um outro momento possam articular variados conceitos na solução de outros tipos de problemas, permitindo sua transmissão, correção ou descontinuidade;
d) Os alunos não irão estruturar um conceito para resolução de um problema, mas, sim, tecer e conectar campos conceituais que passam a ter sentido num campo de problemas;
e) A resolução de problemas deve acontecer por permitir assimilação de conceitos, exercício de práticas e desenvolvimento de atitudes matemáticas.

As teorias de Piaget e Vergnaud dão uma dimensão da importância deste processo, no qual a resolução de problemas deve ser o centro da atividade matemática. Por processos de incorporação de dados aos esquemas já possuídos e por modificação de esquemas a partir de novos elementos, campos conceituais vão constituindo sentidos.

Ressalta-se que resolver problemas não é unicamente dar respostas por meio de aplicação de procedimentos ditos adequados. O processo de resolução de problemas deve permitir ao aluno a oportunidade de elaborar estratégias, levantar hipóteses, realizar experimentos, comparar com outras estratégias apresentadas e validar o que é feito.

Um dos primeiros documentos brasileiros a direcionar as competências esperadas e a serem desenvolvidas na Educação Infantil (EI) é o Referencial Curricular Nacional da Educação Infantil – RECNEI (BRASIL, 1998). Esse documento oficial, em esfera nacional, trata de conhecimentos da Matemática, e de outras áreas, sugerindo a aprendizagem por meio de conteúdos. Afirma-se que no início da escolarização se faz necessária a construção de conceitos, incluindo-se os conceitos matemáticos. Compreende-se, também, que as crianças ao iniciarem sua vida escolar trazem consigo conhecimentos matemáticos vivenciados no seu cotidiano, a partir dos quais novos conceitos poderão ser desenvolvidos.

O que é defendido no RECNEI vai ao encontro de pressupostos piagetianos. Piaget (1978) em suas investigações evidenciou que o conhecimento lógico-matemático se desenvolve, fora e dentro da escola, a partir das atuações do sujeito sobre objetos, o que possibilita a estruturação de conceitos de natureza abstrata.

Dentro da sala de aula, o professor deve atuar como mediador desse desenvolvimento. Desse modo, o trabalho com noções matemáticas na Educação Infantil deve atender às necessidades dos alunos em construir diversos conceitos e modos de pensar, entendendo que é necessário preparar as crianças, desde cedo, para as demandas sociais que exigem conhecimentos e habilidades diferentes.

Mais voltado a crianças bem novas (0 a 3 anos), o Manual de Orientação Pedagógica para Creches (BRASIL, 2012) apresenta sugestões de inserção da criança no mundo do conhecimento matemático através de brincadeiras que tragam contextos significativos e, assim, mediado por sua professora, descobrir significados e ter a chance de pensar, seja individualmente ou no coletivo Defende-se, assim, que experiências matemáticas podem ocorrer nas brincadeiras e vivências pedagógicas podem acontecer de forma adequada e lúdica.

Outro documento que traz importantes informações a respeito de quais funções pedagógicas a Educação Infantil possui, são as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Infantil, DCNEI, (BRASIL, 2013) que têm como um de seus pilares que

> Cumprir função sociopolítica e pedagógica das creches e pré-escolas implica assumir a responsabilidade de torná-las espaços privilegiados de convivência, de construção de identidades coletivas e de ampliação de saberes e conhecimentos de diferentes naturezas, por meio de práticas que atuam como recursos de promoção da equidade de oportunidades educacionais ... (BRASIL, 2013, p. 85)

As DCNEI chamam a atenção para o conflito sobre os diferentes entendimentos do papel a ser exercido pela creche (0 a 3 anos de idade) e pré-escola (4 a 5 anos), as duas etapas que compõem a Educação Infantil. Algumas correntes acreditam não haver necessidade de um currículo para EI, que dizem gerar uma associação aos termos de sistematização escolar ou escolarização da faixa etária, optando por tratar o currículo por ‘projeto pedagógico’ ou ‘proposta pedagógica’. Por outro lado, abordar conteúdos específicos trazendo a noção e ou significância social, em que não há preocupação de sistematização, mas, sim, a de um aprendizado gradual e estruturado como base para o aprofundamento nos anos escolares seguintes. Propor o contato com estas vivencias pedagógicas podem ampliar a percepção das crianças, pois esse contato antecede o trabalho sistemático.

As crianças interagem de maneira natural com o mundo que as cerca através de brincadeiras. Isso ajuda nas descobertas, na elaboração de suas interpretações e nas reflexões do que está ao seu redor. O ensino de conteúdos através de jogos, brincadeiras e outras atividades lúdicas permite o desenvolvimento de importantes habilidades, como a memória, a atenção e o explorar de diferentes ideias. A importância aqui é dada à formação do pensamento e ao incentivo à compreensão e explicação de compreensões.

É importante entender que a EI agora é parte integrante do sistema educacional e essas novas denominações apontam como diferenciá-la e como realizar articulações com outros níveis de ensino. O projeto pedagógico ou proposta pedagógica tem a função de orientar as instituições no que se almeja para o desenvolvimento das crianças, tanto para os cuidados, como para as aprendizagens que serão ofertadas no início da escolarização.

De maneira prática, a instituição de EI é quem deve organizar suas ‘propostas pedagógicas’ em favor da apresentação de conceitos e conhecimentos prévios relativos às vivências sociais. Nesse sentido, as DCNEI afirmam entender a criança como um sujeito direto do processo de educação e, assim, espera-se oportunizar a ela o conhecimento científico, de maneira adequada à sua faixa etária.

> O conhecimento científico hoje disponível autoriza a visão de que desde o nascimento a criança busca atribuir significado à sua experiência e, nesse processo, volta-se para conhecer o mundo material e social, ampliando gradativamente o campo de sua curiosidade e inquietações, mediada pelas orientações, materiais, espaços e tempos que organizam as situações de aprendizagem e pelas explicações e significados a que ela tem acesso. (BRASIL, 2013, p. 86)

Aqui não se está propondo uma sistematização de ensino, mas, sim, apontando a importância do contato com novos conceitos desde a Educação Infantil. Entende-se que as crianças são capazes de construírem novos conhecimentos, através de vivências pedagógicas direcionadas, sem perder as principais características que são base do tempo de vida que está compreendido na EI. Assim, defende-se que as crianças necessitam de cuidados básicos e essenciais, nos campos emocional e social, e, também, precisam construir sentidos de mundo, suas identidades individuais e coletivas.

O documento mais recente que apresenta direcionamentos é a Base Nacional Comum Curricular, BNCC, (BRASIL, 2018), a qual indica o que é esperado de conhecimentos mínimos a serem adquiridos na Educação Infantil e no Ensino Fundamental. Na BNCC, para crianças que estão compreendidas nas faixas etárias de quatro anos a cinco anos e 11 meses são almejadas, no mínimo, as seguintes competências:

- Estabelecer relações de comparação entre objetos, observando suas propriedades;
- Observar e descrever mudanças em diferentes materiais, resultantes de ações sobre eles, em experimentos envolvendo fenômenos naturais e artificiais;
- Identificar e selecionar fontes de informações, para responder a questões sobre a natureza, seus fenômenos e conservação do meio ambiente;

- Registrar observações, manipulações e medidas, usando múltiplas linguagens (desenho, registro por números ou escrita espontânea), em diferentes suportes (calendários, quadro de chamada, cadernos);
- Classificar objetos e figuras de acordo com suas semelhanças e diferenças;
- Relatar fatos importantes sobre seu nascimento e desenvolvimento, a história dos seus familiares e da sua comunidade;
- Relacionar números às suas respectivas quantidades e identificar o antes, o depois e o entre em uma sequência;
- Expressar medidas (peso, altura etc.), construindo gráficos básicos.

Observa-se que a BNCC recomenda a ação sobre objetos e o registro de manipulações, bem como o uso de desenhos como linguagem a ser adotada pelas crianças. Embora não trate especificamente de situações combinatórias, as competências elencadas por esse documento podem se adequar também ao estudo inicial da Combinatória.

Nesse capítulo apontou-se como principais referências teóricas:

- as relações elaboradas pelas crianças a partir de suas ações sobre objetos (como indica Piaget, 1972);
- a defesa de um trabalho precoce com distintas situações combinatórias (uma vez que Vergnaud, 1990, aponta o longo percurso de desenvolvimento de conceitos, ressaltando que situações de um mesmo campo conceitual devem ser tratadas de modo articulado);
- a necessidade de considerar os invariantes operacionais colocados em ação pelas crianças ao tratarem e representarem distintas situações combinatórias (sendo os invariantes de *escolha* e de *ordenação* os principais a serem considerados na Combinatória, como apontado por Pessoa e Borba, 2009, as quais também defendem o trabalho com quatro situações combinatórias desde o início da escolarização: *arranjos*, *combinações*, *permutações* e *produtos de medidas*);

- a defesa do uso de material de manipulação (como indicado por Pais, 2001 e Lorenzato, 2006) e de desenhos (como recomendado por Smole, 2013), como representações simbólicas de conceitos matemáticos; e
- as recomendações de documentos oficiais (RECNEI; Manual de Orientação Pedagógica para creches; DCNEI; BNCC) que apontam como conteúdos matemáticos podem ser tratados na Educação Infantil, a partir de resolução de problemas, manipulações de objetos, experimentações, registros espontâneos, brincadeiras e outras vivências pedagógicas lúdicas e adequadas a esse nível de ensino.

No capítulo seguinte será apresentada a revisão da literatura, com estudos que trazem informações importantes dentro do foco do estudo ou que possuem relação com a temática: raciocínio combinatório na Educação Infantil com material de manipulação e desenhos.

REVISÃO DA LITERATURA
Capítulo 3

Este capítulo apresenta alguns estudos importantes e seus respectivos resultados sobre os problemas combinatórios, a aprendizagem de Matemática na Educação Infantil e nos anos iniciais de escolarização, bem como pesquisas referentes ao uso do material de manipulação e desenhos como facilitadores do processo de aprendizagem.

3.1 O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO

Inhelder e Piaget (1955) investigaram a possível origem dos obstáculos na resolução dos problemas de *permutação*. Partiu-se do pressuposto que as respostas de um problema combinatório são dadas pelas crianças de acordo com o processo de desenvolvimento dos estágios[4] estudados por Piaget. Os autores argumentaram que problemas desta natureza têm um melhor desempenho nas soluções quando as crianças atingem a fase das *operações formais*, na qual poderão seguir uma organização procedimental durante o processo de descobertas efetivas para o esgotamento de possibilidades das respostas.

---

[4]Estágio Sensório-motor: caracterizado pelo exercício dos aparelhos reflexos inatos mediante a percepção e os movimentos (como a sucção e a movimentação dos olhos, por exemplo), ocorrido de 0 a 2 anos de idade, aproximadamente; Estágio pré-operatório: aparecimento da função simbólica ou semiótica, uso da linguagem, limitado pelo egocentrismo intelectual e social, nas idades de aproximadamente 2 a 6/7 anos; Estágio operatório-concreto: neste período o egocentrismo intelectual e social (incapacidade de se colocar no ponto de vista de outros) que caracteriza a fase anterior dá lugar à emergência da capacidade da criança de estabelecer relações e coordenar pontos de vista diferentes e de integrá-los de modo lógico e coerente, começa-se a realizar operações mentais e não mais, como na fase sensório-motor, apenas através de ações físicas, ocorrendo esse estágio por volta dos 7 anos até cerca de 11/12 anos; e o Estágio operatório formal: passa-se a raciocinar sobre hipóteses, na medida em que se é capaz de formar esquemas conceituais abstratos e através deles executar operações mentais dentro de princípios da lógica formal, estágio iniciado a partir de 11/12 anos.

Para entender melhor como se dá este percurso, Inhelder e Piaget (1955) descreveram uma sequência de fases, de acordo com a progressão das crianças frente aos problemas de *permutação*:

i. **Estágio IA:** não realizam o esgotamento de possibilidades e não compreendem que os elementos do conjunto podem ser dispostos de vários modos.
ii. **Estágio IB:** com uso do recurso tentativa e erro, obtêm prováveis combinações, sem a certeza do esgotamento de possibilidades.
iii. **Estágio IIA:** através do recurso tentativa e erro, realizam o esgotamento de possibilidades e têm conhecimento de que finalizaram as combinações, mas apenas conseguem soluções de pequenas permutações.
iv. **Estágio IIB:** generalizam um número maior de componentes a partir do que foi evidenciado nas permutações com menos elementos.
v. **Estágio III:** realizam o esgotamento de possibilidades sem requerer mediação (ajuda).

Essa proposta de estágios de desenvolvimento na solução de problemas de *permutação*, indica um progressivo avanço no tratamento a problemas dessa natureza. Inicialmente as crianças têm dificuldade em compreender que é possível combinar os distintos elementos de modos variados. Em fase posterior, são capazes de enumerar distintas possibilidades, mas não conseguem levantar todas as possibilidades de uma dada situação. Posteriormente, têm certeza que esgotaram todas as possibilidades e, por fim, são capazes de generalizar quantas são as possibilidades – mesmo sem ter que enumerá-las uma a uma.

É importante destacar que não houve uma investigação mais acurada, por parte de Inhelder e Piaget (1955), sobre as compreensões de outros tipos de problemas combinatórios (*arranjo, combinação e produto de medidas*), mas estudos posteriores, como os de Moro e Soares (2006) e de Pessoa (2009), buscaram observar se os avanços em outros tipos de problemas combinatórios se assemelham.

Moro e Soares (2006) realizaram estudo com 50 alunos, da 3ª e 4ª séries (atuais 4º e 5º anos do Ensino Fundamental) de uma escola pública, com de idade média de 8 anos e 10 meses (3ª série) e 9 anos e 2 meses (4ª série). As crianças foram solicitadas a resolverem quatro problemas multiplicativos de *produto cartesiano* (*produto de medidas*), utilizando lápis e papel para registrarem suas respostas como desejassem (desenhos, escritas numérica e alfabética, gráficos, etc). As autoras tinham como objetivo investigar o processo de estruturação do raciocínio combinatório a partir das respostas dadas aos problemas de *produto cartesiano* propostos, descritos a seguir.

1. Em uma loja de carros há 5 Monzas, 3 Fuscas e 6 Pampas. Ao comprar o carro, você pode escolher 2 tipos de rodas: esportiva e comum. De quantas maneiras diferentes os tipos de carros e rodas podem ser combinados?
2. Em uma sorveteria por quilo existem 28 sabores de sorvetes, 12 coberturas e 5 tipos de casquinhas. De quantas maneiras diferentes você pode se servir, sabendo que todos os sorvetes são acompanhados de casquinha e cobertura?
3. Vou dar uma festa e servirei sanduíches. Para fazer os sanduíches, comprei 3 tipos de frios (presunto, mortadela e salame), 2 tipos de queijo (mussarela e queijo prato) e 4 tipos de pães. Quantos tipos diferentes de sanduíches com um tipo de pão, um tipo de frios e um tipo de queijo posso servir?
4. Valéria fez 32 colares, 92 pulseiras e 115 anéis para vender. De quantas maneiras ela pode arrumar, em uma caixinha, apenas 1 colar, 1 pulseira e 1 anel para mostrar aos clientes?

Moro e Soares (2006) justificam a escolha destes problemas por seu processo de resolução serem unicamente através de multiplicação. Assim seriam mais fáceis de solucionar, quando comparados aos de divisão – no caso de problemas combinatórios inversos.

A análise dos dados foi de cunho qualitativo e descritivo quanto às interpretações das produções das crianças na resolução das situações-problema e o que estas soluções mostravam sobre a significação combinatória dos participantes do estudo. Os três parâmetros centrais utilizados para esta análise foram conduzidos seguindo fundamentos já descritos por outro autores: 1) pertinência à pergunta do problema (Vergnaud, 1983; 1985; Nunes e Bryant, 1997); 2) presença de um ou mais casos de combinação de valores das variáveis (Inhelder e Piaget, 1972; English, 1992; Mekhmandarov, 2000); 3) presença de cálculo relacional aditivo e/ou multiplicativo (Piaget, Berthoud-Papandropuolos e Kilcher, 1986; Lemoyne, Vincent, Brun, Conne e Portugais, 1994; Vergnaud, 1983; 1985).

Moro e Soares (2006) analisaram os dados coletados, seguindo três passos:

a) descrição primária das principais características de cada resolução;
b) uma segunda descrição, a partir de uma triagem em que se percebeu traços e significados, que fossem comuns aos parâmetros citados no parágrafo anterior, para adquirir os níveis e/ou subníveis viáveis para construção do raciocínio combinatório;
c) uma terceira descrição por meio de reavaliação dos níveis/subníveis adquiridos em b), e, assim, validar as descrições já alcançadas e provável organização ali existente.

A partir dos resultados encontrados, foram descritos os níveis e subníveis de raciocínio combinatório presentes nas resoluções dadas pelas crianças aos problemas, como indicado a seguir.

- *Nível 0: Resposta alheia ao contexto* – a resolução não possui escrita numérica e não traz relação com o que foi solicitado no enunciado do problema.

- *Nível I: Resolução contextualizada*, mas *sem indicativo de combinação*.

Subnível IA: Escolha de variáveis – as respostas apresentam elementos relativos a uma ou mais variáveis contidas no enunciado, mas não há combinação entre elas.

Subnível IB: Adição de valores – apresentam cálculos aditivos de alguns ou todos os valores presentes no enunciado do problema.

Subnível IC: Composições numéricas em diferentes formas de cálculos, as quais apresentam algoritmo numérico descontextualizado. Estas composições numéricas podem ser uma ou mais, com ou sem desenhos para ilustrar, com os valores das variáveis combinados entre si. Nesse subnível são realizados cálculos variados (adição, multiplicação), em uma aparente busca de “muitas maneiras” de combinar os elementos citados nos enunciados dos problemas.

- Nível II: Primeiras aproximações à solução combinatória

Subnível IIA: Caso favorito – apresenta uma possibilidade única de combinação entre as variáveis, assim como valor único para cada uma delas, sendo a escolha feita por motivo estético ou acomodação de uso.

Subnível IIB: Casos favoritos conforme valor distractor ou de variável estranha – ilustram alguns cenários de combinações entre as variáveis, as quais podem incluir distractores e variáveis que não se encontram no problema.

Subnível IIC: Casos preferidos, ignorados os distractores – limita as combinações entre as variáveis apresentadas como solução, em que os valores aparecem ligados e os distractores não atrapalham no resultado. Também aqui é encontrado a correspondência de elementos como estratégia organizadora.

- Nível III: Obtenção de algumas combinações

Subnível IIIA: Buscas iniciais de combinações, “distorcidas” pelos “distractores” – apresentam variadas combinações entre os valores das variáveis, mas são subordinadas aos valores distractores. Ocorrem através de adição ou combinação de cálculos aditivos e multiplicativos, na aparente busca de “muitas maneiras” de combinação dos elementos dos problemas.

Subnível IIIB: Aproximações aditivas, multiplicativas e por divisão – está-se à procura de um certo número de combinações, adquiridas através da mescla ou complementação de cálculos diversos utilizando alguns e/ou todos valores das variáveis contidas, repetidos ou não, bem como entre resultados desses cálculos acrescidos por valores unitários do enunciado do problema.

Subnível IIIC: Muitas combinações aditivo-multiplicativas com três variáveis – composto por um número restrito de combinações entre os valores envolvidos, conseguindo variadas “junções” aditivo-multiplicativas na procura da solução final, em termos de “muitos casos”. Há alguns casos de representação por diagramas e recursos pictóricos, diante da dificuldade de representar os valores das três variáveis.

- *Nível IV: Presença de solução combinatória* – apresentam todos os casos possíveis de combinação entre os valores das variáveis, seja pelo diagrama cartesiano, seja por cálculo multiplicativo.

Nos resultados obtidos por Moro e Soares (2006) foram encontrados um maior de crianças no *Nível I – Resposta contextualizada sem indício de combinação*. Dentro do *Nível I há* um maior percentual de respostas no *Subnível IB – Cálculo aditivo.*

Para as autoras, parece haver uma relação entre os níveis de raciocínio combinatório apresentados nas respostas que foram analisadas e o ano escolar das crianças participantes.

Foi possível contemplar o avanço do raciocínio combinatório, a partir do que é apresentado por Inhelder e Piaget (1972), no modo de proceder ao combinar as variáveis, desde a falta de combinações nas respostas, à tentativa e erro, passando por relações mais adequadas entre as variáveis, exercendo um controle gradativo entre elas, chegando a uma maior sistematização. Poucas respostas foram encontradas no *Nível IV*. É ressaltado pelas autoras que apenas foram analisadas as resoluções escritas pelas crianças e não a explicação de produção de suas respostas (interpretação das crianças para suas respostas). Assim, nada puderam afirmar com absoluta certeza sobre a compreensão das crianças quanto às situações combinatórias.

Este estudo permitiu às autoras identificar e descrever níveis e subníveis na resolução de problemas de *produto cartesiano* (*produto de medidas*). Mesmo tendo observado poucas resoluções mais refinadas das crianças de 4º e 5º anos do Ensino Fundamental, essa pesquisa indica que não apenas na fase formal há soluções combinatórias, mas na fase de operações concretas soluções dessa natureza também podem ser observadas, ou, ao menos iniciadas.

A pesquisa desenvolvida, nesta dissertação de mestrado, se apoia na ideia de que nas respostas dadas pelas crianças da Educação Infantil também poderão ser encontrados indícios de raciocínio combinatório, mas com a ressalva de que será possível se aproximar mais da compreensão delas através das explicações dadas em suas entrevistas.

Placha e Moro (2009) realizaram estudo que relata a natureza das respostas em problemas de *produto de medidas*, segundo os níveis do raciocínio combinatório ali existentes, para identificar como ocorrem a aprendizagem e a origem das intervenções (orientadora, reorientadora, questionadora e investigadora) de ensino. A pesquisa foi realizada com cinco crianças de nove anos de idade, estudantes da 3ª serie (4º ano do Ensino Fundamental) de uma escola pública municipal. Foi solicitado que as crianças registrassem suas respostas e solicitadas a explicarem e interpretarem como procederam na sua produção, seguindo o modelo clínico piagetiano.

Foram realizadas duas sessões individuais, para que as crianças resolvessem oito problemas, os quais foram expostos por escrito em folhas de papel ofício. Os problemas foram estruturados da seguinte forma:

- com duas variáveis e valores baixos escritos por extenso, sem e com valores distractores;
- com duas variáveis com valores altos escritos numericamente;
- com três variáveis e valores baixos descritos por extenso.

Seguem os problemas utilizados.

- Problema 1. Uma panificadora prepara bolos deliciosos. Os bolos podem ser de 3 tamanhos (pequeno, médio e grande) e os sabores podem ser de 6 tipos diferentes (morango, chocolate, brigadeiro, coco, doce de leite e banana). Quantos tipos diferentes de bolo você pode escolher para comprar, combinando um tamanho com um só sabor?

- Problema 2. Em uma loja de carros tem 5 Gols, 5 Palios e 4 Corsas. Ao comprar o carro você pode escolher 2 tipos de rodas: esportiva ou comum. De quantas maneiras diferentes os tipos de carros e rodas podem ser combinados?

- Problema 3. Eduarda tem uma máquina de bordar. Ela borda personagens infantis em camisetas. Eduarda tem 15 cores diferentes de camisetas e 12 personagens diferentes. Quantos tipos diferentes de camiseta ela pode bordar?

- Problema 4. Em uma sorveteria por quilo existem 7 sabores de sorvete, 3 tipos de coberturas e 2 tipos de casquinha. De quantas maneiras diferentes você pode se servir, sabendo que todos os sorvetes são acompanhados de cobertura e casquinha?

- Problema 5. Uma papelaria vende mochilas de 2 tamanhos (pequena e grande) e em 5 cores diferentes (verde, azul, vermelha, amarela e preta). Amanda quer comprar uma mochila nesta papelaria. Quantos tipos diferentes de mochila ela pode escolher para comprar, combinando uma cor e um tamanho?

- Problema 6. Em uma pizzaria tem 30 sabores e 3 tamanhos diferentes de pizza. A pizza pequena pode ser cortada em 6 fatias, a pizza média pode ser cortada em 8 fatias e a pizza grande pode ser cortada em 12 fatias. De quantas maneiras diferentes os sabores e os tamanhos da pizza podem ser combinados?

- Problema 7. Pedro tem 18 camisetas e 11 bermudas. De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir?

- Problema 8. Vou dar uma festa de aniversário e servirei sanduíches. Para fazer os sanduíches comprei 2 tipos de queijo, 3 tipos de patê e 4 tipos de pães. Quantos tipos diferentes de sanduíches podem ser servidos, sabendo que todos vêm acompanhados de um tipo de pão, um tipo de queijo e um tipo de patê?

Nesse estudo foi realizada uma análise de dados qualitativa, a fim de perceber os níveis e subníveis citados por Moro e Soares (2006) e seus três eixos de referências.

Diferente do que foi encontrado em Moro e Soares (2006), identificou-se soluções em níveis diferentes: IIIA - Os casos favoritos combinando duas variáveis com uma e IIIE – As combinações possíveis entre duas das três variáveis. Foi possível verificar as relações existentes entre os níveis e subníveis de soluções, as alterações que ocorreram e os modos de sessão de ensino da pesquisadora. Consequentemente, para as respostas dos Problemas 1 e 5 sobressaíram progressos de níveis anteriores para o *Nível IV*. Também foi observado esse padrão de progresso de níveis mais baixos para o *Nível IV* na resolução dos Problemas 2 e 6, principalmente na segunda sessão. Nos Problemas 3 e 7 as crianças mantiveram-se no *Nível IV* já na primeira sessão.

As autoras puderam perceber avanços nos níveis e relacionam ao modo de sessão de ensino adotado. É importante chamar a atenção de que as autoras conseguiram identificar um novo subnível de hierarquia, aos descritos por Moro e Soares (2006), e que foi possível realizar uma análise a respeito das explicitações e interpretações dadas pelas crianças para as resoluções dos problemas. Este é um ponto importante e que pode ser relacionado com a atual pesquisa, pois entrevistas clínicas podem facilitar o entendimento do nível de compreensão das crianças. Esse estudo anterior traz recomendações de se trabalhar o problema combinatório *produto de medidas* já nos anos iniciais do Ensino Fundamental e o presente estudo amplia a possibilidade de trabalho com esse e outros tipos de problemas combinatórios – desde a Educação Infantil.

Pessoa (2009) realizou um estudo com 568 alunos de escolas públicas e privadas da Educação Básica, compreendidos entre o 2º ano do Ensino Fundamental até o 3º ano do Ensino Médio, no qual eram solicitados que solucionassem oito questões – duas de cada um dos tipos de problemas combinatórios. Esse estudo objetivou analisar a progressão – do início ao final da Educação Básica – na resolução de problemas da Combinatória, envolvendo situações combinatórias variadas.

Nas análises realizadas percebeu-se que mesmo alguns alunos fornecendo soluções inacabadas e não realizando o esgotamento de possibilidades, demonstravam entender a estrutura e o que era solicitado no problema. Nos resultados de desempenho, considerando os quatro tipos de problemas combinatórios e os diferentes anos de escolaridade, foi percebido, de modo geral, que os estudantes se saíram melhor nas situações de *produto de medidas* e *arranjo*, apresentando um baixo desempenho em *permutação e combinação.*

A autora sinaliza que o melhor desempenho nos problemas de *produto de medidas* se dá pela introdução do ensino das estruturas multiplicativas e o trabalho mais direto com o conteúdo, que é iniciado entre o 3º e 4º ano do Ensino Fundamental. Nesse nível de ensino, esse tipo de problema é trabalhado explicitamente e a familiaridade com os *produtos de medida* influenciou o desempenho das crianças.

Nos problemas de *arranjo* um número expressivo de alunos conseguiu um bom desempenho, evidenciando entender os invariantes do problema com escolhas apropriadas de estratégias de resolução, levando em consideração que são pouco trabalhados durante o Ensino Fundamental os significados deste e dos problemas de *permutação e combinação*. Nos problemas de *permutação* a dificuldade foi em perceber que os mesmos elementos compõem cada uma das possibilidades – as quais se diferenciam pela ordem dos elementos. Nas situações problema de *combinação*, houve dificuldades em perceber que ao mudar a ordem dos elementos não são geradas novas possibilidades, e, assim, a maioria dos alunos não conseguiu perceber esta característica e terminaram por repetir possibilidades.

A partir dos resultados obtidos, Pessoa (2009) argumentou que o raciocínio combinatório pode ser resultado de conhecimentos prévios, atribuídos a vivências diárias, mas, também, os desempenhos melhoram com o efeito da escolarização, mesmo com o pouco contato em sala de aula com o conteúdo combinatório. A autora sugeriu, assim, que o trabalho contínuo em sala de aula com situações combinatórias pode colaborar de forma efetiva na formação dos conceitos desse conteúdo.

Pessoa e Borba (2009) analisaram mais detalhadamente o desempenho de 99 alunos do estudo de Pessoa (2009). Os estudantes selecionados foram os que frequentavam turmas da 1ª à 4ª série do Ensino Fundamental (atuais 2º a 5º anos). Como mencionado anteriormente, cada criança resolveu oito problemas combinatórios, dois de cada tipo, podendo respondê-los, com registros em papel, da forma que considerasse melhor.

Pessoa e Borba (2009) perceberam que as crianças de início de escolarização conseguiam distinguir invariantes (de *escolha* e de *ordenação*) dos diferentes problemas combinatórios e dar início a respostas satisfatórias aos problemas. O grande obstáculo estava em efetivar o esgotamento de possibilidades das questões. As autoras chamam a atenção de que mesmo as crianças que ainda não haviam sido apresentadas formalmente aos problemas combinatórios, desenvolveram respostas válidas às situações propostas. Concluiu-se que, apesar de algumas dificuldades, crianças – até as mais novas – conseguem resolver problemas de Combinatória, evidenciando a presença de raciocínio combinatório, mesmo que em fase inicial. Assim como nos estudos de Inhelder e Piaget (1972) e Moro e Soares (2006), as autoras mostram que as crianças nos anos iniciais já começam a dar soluções adequadas. Em muitos casos começam de forma correta a resposta, mas por não conseguirem sistematizar a resposta, têm dificuldade em chegar ao final da solução. Podem ser aqui colocadas em paralelo com o *Estágio IB* observado por Inhelder e Piaget (1972) e o *Nível II* indicado por Moro e Soares (2006).

Spinillo e Silva (2010) realizaram estudo com 60 crianças com uma média de 8 anos de idade, cursando o 3º ano do Ensino Fundamental em escolas privadas da região metropolitana do Recife. Esses alunos ainda não haviam passado pelo ensino convencional da multiplicação na escola e, portanto, ainda não haviam sido instruídas sobre situações combinatórias. O propósito da pesquisa foi de investigar se a explicitação dos invariantes nos enunciados dos problemas provoca o mesmo efeito facilitador na resolução de problemas de *produto de medidas* diretos e inversos[5].

O estudo foi dividido em dois momentos, no primeiro momento todos respondiam quatro problemas de *produto de medidas direto* que tinham seus invariantes explícitos no enunciado, segundo a visão das autoras. No segundo momento eram separados equitativamente em dois grupos, em que G1 resolvia quatro situações de *produto de medidas direto* e G2 quatro situações de *produto de medidas inverso.* Nos dois grupos os invariantes dos problemas encontravam-se implícitos no enunciado. Seguem dois exemplos dos problemas utilizados no G1 e G2 respectivamente.

Ex. 1 (problema direto): Lucas tem quatro camisas (verde, preta, branca e vermelha) e cinco bonés (azul, laranja, branco, listrado e xadrez). Ele quer combinar as camisas com os bonés para formar conjuntos. Quantos conjuntos diferentes Lucas pode formar? (SILVA, 2014, p. 101)

Ex. 2 (problema inverso): Paulo combinou seus bonés com suas camisas e formou 18 conjuntos diferentes. Se Paulo tinha três bonés (xadrez, azul e vermelho) e utilizou todos os bonés para formar os conjuntos, quantas camisas ele tinha? (SILVA, 2014, p.106)

Analisando os resultados, os dois grupos tiveram um bom desempenho no primeiro momento da atividade com um total de 65% de acertos. Este seria um indício de que as crianças participantes dos dois grupos mostraram a mesma condição na compreensão deste tipo de problema. No segundo momento, os grupos apresentaram

[5] De acordo com Vergnaud (1991), problemas de *produto de medidas direto* são aqueles que podem ser solucionados através da multiplicação e *produto de medidas inverso* a solução pode ser encontrada através da divisão.

uma diferença significativa no nível de acertos: Grupo 1 com um percentual de 68% de acertos e o Grupo 2 apresentando um desempenho de 28%.

As autoras justificaram que esta diferença se deu porque as crianças do G1 conseguiram compreender melhor os invariantes, mesmo implícitos, dos problemas de *produto de medidas direto*, pois, se apropriaram das ideias que norteiam o raciocínio combinatório utilizados no primeiro momento e os puseram em prática na resolução de problemas com invariantes implícitos no segundo momento. Isso não ocorreu no G2, dando um indicativo de que a dificuldade apresentada pelos problemas de *produto medidas inverso* é maior que a dos problemas diretos já apontados em estudos anteriores. Além dessa interpretação dada pelas autoras, pode-se concluir que a explicitação de invariantes em problemas diretos de produtos de medida não é suficiente para a resolução bem-sucedida em problemas inversos desse tipo de situação combinatória.

Com os estudos que foram aqui apresentados, pode-se concluir que estes auxiliam a entender como se dá a natureza do raciocínio combinatório e por quais estágios ele perpassa. Assim, será possível perceber em quais estágios as crianças se encontram e quais dificuldades enfrentam.

3.2 O USO DE MATERIAL DE MANIPULAÇÃO E DE DESENHOS E A APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS DE ESCOLARIZAÇÃO INFANTIL

Entende-se a importância de propor outras alternativas de interação e promoção de um aprendizado que possibilite a contextualização de conceitos matemáticos em situações concretas. Nesse sentido, o uso de materiais de manipulação é um recurso que, se bem utilizado, pode melhorar a compreensão das crianças de conceitos matemáticos. De forma semelhante, desenhos também são bons recursos para crianças representarem e solucionarem problemas matemáticos. Nessa direção, são apresentados, a seguir, estudos que tratam do uso desses recursos no aprendizado de conceitos matemáticos diversos, incluindo os da Combinatória.

As competências que envolvem o desenvolvimento das crianças na Educação Infantil, passam, também, pelo campo da Matemática. O conhecimento matemático é necessário no cotidiano social e permeia outras áreas de construção do conhecimento.

Dentre os estudos com desenhos como recurso de aprendizagem, tem-se o de Sandes (2009) no qual se investigou o desenho como forma de representação de pensamento matemático de crianças em processo de alfabetização. Participaram da pesquisa 16 crianças de uma escola de zona rural do Distrito Federal. Os alunos estavam matriculados no 1º ano do Ensino Fundamental e possuíam entre cinco e seis anos de idade.

O objetivo central do estudo era o de compreender e explicar os registros das crianças por meio de desenhos como ferramenta de estruturação do pensamento matemático na resolução de problemas aditivos. Foram feitas observações e realizadas entrevistas com a professora e os alunos, além da análise de documentos, como o planejamento de aulas da professora e as atividades respondidas pelas crianças ao longo da pesquisa.

Sandes (2009) analisou como as crianças representaram as soluções dos problemas propostos através de desenhos, identificando variados modos de respostas e o que as crianças conseguiam expressar de suas ideias. A Figura 3 mostra a resolução de uma das crianças a um dos problemas propostos pela autora.

Figura 7 - Desenho realizado por uma criança de seis anos em resposta ao problema proposto (Quantos pintinhos ficaram com a galinha?)

Fonte: Sandes (2009)

É possível observar no desenho feito pela criança os elementos do problema, números e sinais matemáticos. Aqui foram representadas as quantidades referentes a cada item do problema e a representação ilustrativa dos elementos (quatro pintinhos + três pintinhos; uma galinha; a imagem de uma criança), itens que não fazem parte do enunciado surgem na imagem (borboleta, sol, nuvens), esse exemplo mostra como através do desenho foi criado todo um contexto para resolução do problema, e se chegou ao resultado final, como no registro da resposta, sete.

A autora indicou que as situações-problema quando propostas às crianças desde o início da alfabetização são um importante recurso no incentivo à reflexão e construção do conhecimento matemático. Também foram apontados como resultados que as crianças, com a ajuda do desenho, tiveram a possibilidade de uma diversidade de pensamentos para se chegar a uma solução, sem necessitar fazer uso de operações matemáticas formais.

Borga e Justo (2013) ao realizar estudo com 39 crianças do segundo ano fundamental, com idades entre sete e oito anos de idade. Buscaram identificar a capacidade das crianças em resolver e manifestar, verbalmente e por meio de representações gráficas espontâneas, problemas do campo das estruturas aditivas, a partir dos pressupostos da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud.

Foi elaborado um instrumento com 12 problemas do campo aditivo com significado de transformação. Na análise qualitativa que foi realizada foi possível perceber que dos esquemas mais utilizados foram a contagem, complementaridade e modelagem.

As representações gráficas espontâneas mostraram favorecer o processo de resolução dos problemas, apesar de algumas vezes terem sido usados apenas para ilustrar, ao serem indagadas as crianças explicavam que já haviam solucionado o problema utilizando os dedos ou calculo mental.

As autoras consideram que as representações gráficas espontâneas permitem exprimir o pensamento e desenvolver a estrutura cognitiva das crianças e da possibilidade de serem apresentados problemas matemáticos mesmo antes da alfabetização formal, pois eles conseguiram produzir estratégias próprias e as explicitaram coerentemente.

A presente pesquisa buscará analisar como esses recursos – uso de material manipulável e de desenhos – podem auxiliar no desenvolvimento do raciocínio matemático, em particular na resolução de problemas combinatórios.

Com estes estudos é possível observar que apesar de estarem no início da escolarização, as crianças conseguem desenvolver de modo satisfatório a resolução de problemas, estabelecer relações, dar significado através das representações, visto que eles têm a chance de refletir sobre o que está sendo discutido. O desenho atua como linguagem no contexto matemático.

Com essa perspectiva, Nascimento e Amaral (2014) realizaram estudo que abordou o aprendizado da Matemática na Educação Infantil. Participaram 12 crianças na faixa etária de 5 anos de idade, matriculadas em uma turma de II Etapa de uma Escola de Educação Infantil da cidade de Penápolis/SP.

Foram feitas observações sequenciadas de cinco aulas de 60 minutos de Matemática. A partir dessas observações foi aplicado pré-teste com o objetivo de conhecer o nível de conhecimento que os alunos possuíam em adição. O pré-teste era composto por cinco problemas a serem resolvidos com a ajuda de tampinhas de garrafa pet. As tampinhas serviam de auxilio no momento de realizar a contagem dos elementos.

Após o pré-teste, foi elaborada uma partida de futebol que tinha por objetivo maior contabilizar o saldo de gols feitos durante as cobranças de pênaltis. As crianças foram divididas em dois grupos, o Time A e o Time B. Para observar se houve progresso na aprendizagem foi adotada a aplicação de um pós-teste que continha a mesma estrutura de problemas do pré-teste.

As autoras observaram uma melhora no desempenho dos alunos após o trabalho realizado com o jogo. Também consideraram que a utilização do lúdico no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, além de ser um método que proporciona dinamismo à aula, pode ser considerado como propulsora de uma aprendizagem significativa e participativa. O fato das crianças participarem ativamente do processo de ensino e aprendizagem promoveu a proximidade com conceitos matemáticos vivenciados cotidianamente, validando o que afirmam Smole, Diniz e Cândido (2000) de que as crianças devem manter convívio constante com as ideias matemáticas que se interliguem com atividades e promovam as capacidades de raciocínio.

Batista e Spinillo (2008) tinham o intuito de investigar a hipótese de que, o material concreto definido, por possuir vínculo explicito com os referentes das quantidades contidas nas situações problemas (neste caso carrinhos e caixas, jarros e flores), no momento de resolução traria um maior suporte quando comparado ao material concreto indefinido (fichas plásticas), tipo de material que não possui ligação clara com os referentes.

Para se chegar a uma conclusão a respeito deste questionamento, foram tidos como objetivos geral e especifico, respectivamente, a investigação da influência exercida pelos diferentes suportes concretos na maneira como as crianças solucionam problemas incluídos no grupo das estruturas multiplicativas (multiplicação e divisão) e examinar como os diversos materiais concretos exercem influências distintas na solução de problemas.

O estudo foi realizado com 40 crianças do 3º ano do Ensino Fundamental (antiga 2ª série) de escolas particulares da cidade do Recife, com faixa etária média de oito anos e dois meses. Os participantes foram separados igualitariamente em dois grupos: G1 – material concreto indefinido – os quais utilizaram fichas plásticas; e G2 - material concreto definido – os quais utilizaram objetos que possuíam vínculo direto com os referentes das quantidades apresentadas na situação problema (carrinhos e caixa, flores e jarros).

As crianças foram entrevistadas em sessões únicas e individuais, nas quais eram pedidas a resolverem dois problemas de *isomorfismo de medidas (Proporção Simples)*, um de divisão e outro de multiplicação. Após a resolução dos problemas, era realizada uma entrevista clínica e solicitava-se que as crianças explicitassem como tinham resolvido cada problema. Todas as entrevistas foram gravadas, transcritas e protocoladas individualmente. Nos dois grupos, metade das crianças primeiro resolveram o problema de multiplicação e depois o de divisão, enquanto a outra metade resolveu primeiro o de divisão e na sequência o de multiplicação. Seguem os problemas apresentados.

- Multiplicação - “Maria tem 3 jarros e quer colocar 5 flores em cada jarro. Quantas flores ela precisa comprar?”;
- Divisão - “João ganhou 18 carrinhos e quer guardar os carrinhos em 6 caixas. Quantos carrinhos ele vai colocar em cada caixa?”

As situações problemas foram exibidas em uma cartela, a leitura era feita em conjunto entre o examinador e a criança e a cartela era deixada à sua disposição a todo momento.

Os procedimentos adotados pelas crianças na resolução dos problemas, foram categorizados como indicado no Quadro 2.

Quadro 2: Categorização a partir de procedimentos adotados pelas crianças

Procedimento	Caractesística
Operação de adição e subtração	A criança adiciona ou subtrai os números no enunciado do problema.
Contagem ou distribuição unitária	Quando o problema envolve a multiplicação, a criança conta de um em um para descobrir o todo.
Ensaio e erro	De início a criança estima uma quantidade de elementos em cada parte ou estima quantas partes poderá haver. Através de tentativas, vai fazendo ajustes em que aumenta ou diminui essa quantidade, até que o total de elementos corresponda ao dividendo. Esse procedimento foi adotado apenas no Problema 2 (divisão).
Adição repetida	A criança adiciona repetidamente uma mesma quantidade tantas vezes quantas forem necessárias até chegar no multiplicando – este procedimento foi adotado unicamente no Problema 1 (multiplicação).
Contagem em múltiplos	A criança conta com base em agrupamentos, gerando múltiplos. Este procedimento foi adotado apenas no Problema 1 (multiplicação).
Misto	A criança combina procedimentos distintos durante a resolução de um mesmo problema (por exemplo: contagem em múltiplos associada à adição repetida).
Operação de multiplicação e divisão	A criança usa as operações de divisão e de multiplicação.

Fonte: Batista e Spinillo (2008)

Ao analisar os resultados obtidos, foram apresentados melhores desempenhos na situação Problema 1 – multiplicação, com 90% de acertos, quando comparado Problema 2 – divisão, com 72,5% de acertos. Avaliando o desempenho entre os grupos, as crianças do Grupo 2 (material concreto definido) se saíram melhor, com um percentual de 92,5% de acertos, já o Grupo 1 (material concreto indefinido) apresentou 70% de acertos. Diferenças ainda maiores foram encontradas ao analisarem os desempenhos de cada problema entre os grupos. Em ambos os problemas (multiplicação e divisão) as crianças do Grupo 2 (definido) apresentaram melhores resultados. A partir dos resultados obtidos, as autoras observaram que frente às duas situações-problema, o material concreto definido oportunizou maiores acertos.

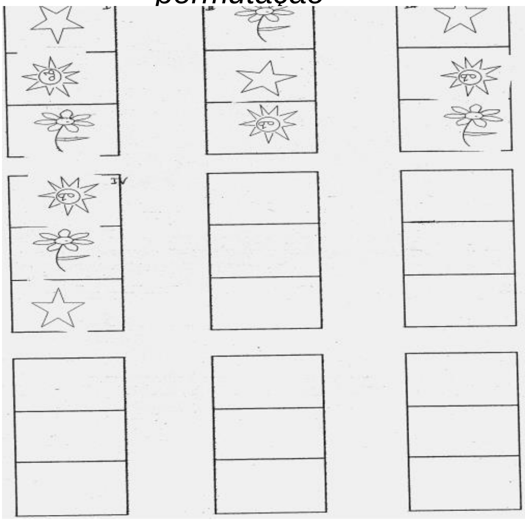
Santos, Matias e Pessoa (2011) analisaram como 21 crianças da Educação Infantil resolviam quatro problemas da Combinatória (*arranjo, combinação, permutação e produto de medidas)*. Buscaram identificar estratégias utilizadas e verificar as relações e propriedades das situações combinatórias aparentemente percebidas pelas crianças. Investigaram, também, quais tipos de problemas são mais fáceis e quais os mais difíceis, sob a perspectiva das crianças.

Foram utilizadas, como material de apoio na resolução dos problemas, espaços demarcados e fichas com imagens dos objetos mencionados nos enunciados que deveriam ser colocadas nestes espaços. Os espaços disponibilizados ultrapassavam as quantidades de possibilidades dos problemas e cabia à criança definir quantos dos espaços considerava necessários para responder à questão.

Na Figura 1 tem-se exemplo de resposta do problema de *permutação* dada por uma das crianças com o material disponibilizado. O problema tinha o seguinte enunciado: “Vamos montar quadros? Em cada um deles deverá ter uma flor, um sol e uma estrela. Quantos quadros diferentes podemos formar?”.

Segundo as autoras, a criança compreendeu que os três elementos (flor, sol e estrela) deveriam aparecer uma vez em cada uma das possibilidades. Portanto, afirmaram que a criança parece ter compreendido o invariante de *escolha*. Pode-se, entretanto, questionar essa conclusão, uma vez que os espaços indicados eram subdivididos em três partes, sugerindo que três fichas fossem colocadas em cada espaço.

Figura 8 -Resolução da Criança 1 ao problema de permutação



Fonte: Santos, Matias e Pessoa (2011)

Santos, Matias e Pessoa (2011) afirmam, ainda, que a criança não compreendeu plenamente o invariante de *ordem*, pois repetiu ordens iguais, como se fossem possibilidades distintas. A criança também não foi capaz de *esgotar as possibilidades* dessa situação combinatória. Faltou uma sistematização em sua solução que permitisse encontrar todas as possibilidades desejadas.

As autoras observaram que as crianças participantes tiveram menos dificuldade em perceber os invariantes de *produto de medidas*, seguido por *arranjo*, *combinação* e *permutação*, conforme se pode observar na Tabela 1.

Tabela 1 - Percentual de acertos por invariante combinatório e por situação combinatória

	Problemas de Combinatória	**Invariante 1 (escolha)**	**Invariante 2 (ordem)**
1°	Produto de medidas	76,1%	76,1%
2°	Arranjo	71,4%	76,1%
3°	Combinação	66,6%	28,6%
4°	Permutação	47,6%	38,1%

Fonte: Santos, Matias e Pessoa (2011)

Observou-se que houve maiores percentuais de acerto no que se refere ao Invariante 1, ou seja, o invariante de *escolha*. No problema de *produto de medidas* foi mais fácil as crianças perceberem que a escolha se dava a partir de elementos de conjuntos distintos. A percepção da escolha de alguns elementos dentre um conjunto único no *arranjo* e na *combinação* foram um pouco mais difíceis e maior dificuldade se observou na *permutação* na qual todos os elementos do conjunto devem ser escolhidos para o levantamento de cada uma das possibilidades.

As autoras não indicam resultados referentes ao esgotamento de possibilidades referentes ao esgotamento de possibilidades, por tipo de situação-problema.

Menores percentuais de acerto foram observados no que se refere ao Invariante 2, o de *ordem*, em alguns dos problemas. Não houve muita dificuldade na compreensão desse invariante no problema de *produto de medidas*, nem no de *arranjo,* mas no de *combinação* muitas dificuldades surgiram em compreender que a ordem dos elementos não constitui possibilidades distintas e também nos de *permutação*, no qual as possibilidades são enumeradas a partir das distintas ordens dos mesmos elementos. Esse resultado confirma o anteriormente observado por Pessoa (2009) a qual aponta maiores dificuldades com problemas de *combinação* e de *permutação*.

Santos, Matias e Pessoa (2011) justificam que a propensão deste melhor desempenho nos problemas de *produto de medidas* pode ser resultado de uma melhor compreensão frente aos invariantes dessa situação combinatória, na qual são escolhidos um elemento de cada um dos dois ou mais conjuntos enunciados e no qual a ordem não gera possibilidades diferentes. A dificuldade nos problemas de *permutação* e *combinação* está em perceber que a ordem de escolha dos elementos do novo grupo pode gerar, ou não, novas possibilidades. Aliado a essa dificuldade, acresce-se nos problemas de *permutação* a dificuldade em entender que todos os elementos constam em cada uma das possibilidades.

Foi ressaltado pelas autoras a importância do uso de material manipulativo durante o processo de resolução dos problemas, por colaborarem na compreensão das crianças frente aos invariantes das situações combinatórias, mediante apoio que esse tipo de material pode fornecer na compreensão desses problemas que, em geral, não são trabalhados na Educação Infantil. Os resultados obtidos corroboram com o argumento que mesmo crianças que se encontram na Educação Infantil já possuem indícios iniciais de pensamento combinatório. Elas são, portanto, capazes de realizar combinações diferentes e podem perceber as distinções dos respectivos problemas, embora nem sempre consigam levantar todas as possibilidades requisitadas.

Inspirado no estudo realizado por Santos *et al* (2011), Pessoa e Borba (2012) examinaram a compreensão, por parte de crianças da Educação Infantil, de invariantes de situações combinatórias. As autoras realizaram entrevistas clínicas com seis crianças de 5 anos de idade resolvendo, com o auxílio de fichas, quatro problemas combinatórios, um de cada tipo. Uma diferença do estudo de Pessoa e

Borba (2012) foi a de que as fichas eram livremente manuseadas e não restritas a espaços marcados na folha de papel.

Pessoa e Borba (2012) observaram que dos invariantes das situações combinatórias, a *escolha de elementos* foi a mais facilmente compreendida pelas crianças. Elas entendiam se tinham que escolher elementos de conjuntos distintos (no caso dos *produtos cartesianos*) ou se a escolha se dava de elementos de um conjunto único (no caso de *arranjos*, *combinações* e *permutações)*.

As crianças sentiram maior dificuldade na compreensão do invariante de *ordenação de elementos*, pois nem sempre entendiam quando, ou não, a ordem dos elementos indicava possibilidades distintas. Mais difícil ainda foi a compreensão do *esgotamento das possibilidades*. As crianças elencavam algumas das possibilidades de combinação, mas não buscavam sistematicamente encontrar todas as possibilidades da situação dada.

Através do manuseio do material de manipulação – fichas com imagens dos elementos citados nos problemas que deveriam ser manuseadas para obter diferentes combinações – pode-se observar o importante papel desempenhado por este tipo de recurso no processo da tomada de consciência das diferentes maneiras e possibilidades de combinações, estimulando, assim, o desenvolvimento do raciocínio combinatório. A seguir, na Figura 2, tem-se exemplo de resolução de uma das crianças, com cinco anos de idade, fazendo uso do material. Nesse problema solicitava-se a escolha de três dentre quatro animais de uma loja.

Observa-se que a criança escolheu corretamente três dentre quatro animais – evidenciando a compreensão do invariante de *escolha*. Entretanto, não se atentou bem para o invariante de *ordem*, uma vez que repetiu os mesmos animais em ordens diferentes como se fossem possibilidades distintas – o que não é o caso em problemas de *combinação*. Isso também impossibilitou a criança de entender a necessidade de *esgotamento de possibilidades*, ou seja, não conseguiu identificar todas as distintas possibilidades. Provavelmente, processos de instrução nos quais seja chamada a atenção das crianças – por meio de questionamentos apropriados –desses três invariantes possa estimular as crianças a buscarem soluções mais precisas em problemas combinatórios.

Figura 9 - Solução de um problema de *combinação* por uma criança de cinco anos.

Fonte: Pessoa e Borba (2012)

O estudo não tinha por objetivo ensinar a Combinatória, mas foi possível observar que o uso de material de manipulação foi um facilitador do processo reflexivo referente à combinação de elementos. Com intenção explícita de ensino, o presente estudo busca contribuir no sentido de propor uso de material de manipulação que possibilite avanços no raciocínio combinatório de crianças da Educação Infantil.

É importante chamar a atenção que durante levantamento de pesquisas desenvolvidas com crianças na EI e Combinatória, foram encontrados poucos estudos no Brasil, fora da UFPE, que trabalham a temática. Por isso, vem-se no decorrer do texto apontar a importância do trabalho com crianças novas, que seja adequado e oportunize o aprendizado, e, assim, elas podem ser estimuladas a diversos tipos de raciocínios e estes podem servir de base para o aprendizado matemático dos anos seguintes.

Os estudos que foram apresentados neste capítulo são de grande valor e relevância, ao tentar entender e explicar fases do raciocínio em problemas combinatórios, seja com crianças da Educação Infantil, em que é possível visualizar o que se tem potencial a ser trabalhado enquanto conteúdo e deixado como conjunto de conhecimentos para os anos seguintes do ensino básico, seja com os que se encontram inseridos no Ensino Fundamental. Entender esses níveis de raciocínio combinatório pode ser recurso para os professores em sala de aula ajudarem seus alunos a se desenvolverem, abrindo caminho para as diferentes maneiras de pensar e para conteúdos matemáticos – como a Probabilidade e a Estatística.

Propor diferentes caminhos para a aquisição destes conhecimentos traz um novo leque de alternativas em que as crianças podem superar suas dificuldades, com ajuda de diferentes ferramentas – como o desenho e os materiais manipuláveis. Há, desse modo, um caminho promissor, pois elas podem expressar visualmente suas ideias ou manipular os objetos e, assim, conduzir um melhor caminho para entender novos conceitos que são propostos. Os estudos apresentados aqui também mostram o ganho cognitivo através da manipulação de objetos ou através do desenho, a partir dos usos é possível entender como estas crianças estão pensando e estes se tornam um forte aliado do professor no processo de ensino-aprendizagem. É, portanto, fundamental estimular o desenvolvimento das crianças neste sentido, pois a Matemática não é só conhecimento escolar, trata-se, também, de vivência social.

No capítulo que segue é apresentado o método da pesquisa proposta e desenvolvida.

MÉTODO
Capítulo 4

4.1 PARTICIPANTES

Participaram deste estudo 20 crianças, com 5 anos, pois esta é a idade característica das crianças que fazem parte do Grupo V, último ano da EI, matriculadas e frequentando regularmente uma unidade de ensino de Educação Infantil (Centro Municipal de Educação Infantil-CMEI). A escola encontra-se em um bairro da periferia do município de Jaboatão dos Guararapes, funcionando em dois turnos, com equipe pedagógica formada por duas diretoras, duas coordenadoras, 12 professoras e duas auxiliares de sala. Sua estrutura possui seis salas de aula, pátio para recreação e merenda.

As crianças foram distribuídas equitativamente em dois grupos. Para caracterizar uma escolha aleatória dos grupos, foi realizado sorteio com os nomes dos estudantes. No primeiro grupo (G1), as crianças individualmente resolveram problemas utilizando material de manipulação e no segundo grupo (G2) as crianças foram individualmente estimuladas a fazerem desenhos com lápis e papel em suas resoluções. Após um teste inicial, os dois grupos passaram por intervenções distintas nos dois grupos e depois realizaram um teste final.

O presente estudo tem como objetivo geral:

- Analisar a influência de material de manipulação e de produção de desenhos no raciocínio combinatório de crianças da Educação Infantil (EI).

Como objetivos específicos têm-se:

- Sondar aspectos do raciocínio combinatório que já se encontram em processo inicial de construção por parte de crianças da EI;

- Verificar se e como o uso de material de manipulação e a produção de desenhos podem auxiliar na ampliação dos raciocínios combinatórios de crianças da Educação Infantil;
- Analisar os desempenhos das crianças por tipo de problema combinatório.

4.2 MATERIAL

Os materiais foram utilizados durante o teste inicial, sessão de ensino e teste final. À disposição do G1 ficou o material de manipulação que era composto por: tabuleiro confeccionado com base em tecido tipo carpete, figuras ilustrativas com a representação dos objetos citados nos problemas – em quantidade maior que o necessário, para que fosse possível listar todas as possibilidades e ainda sobrar – e no verso destas imagens velcro para facilitar a mudança de posições das figuras no tabuleiro, sempre que necessário. À disposição do G2 estavam lápis de vários tipos (caneta hidrocor, cera e madeira) e papel, para que pudessem fazer o registro da resolução dos problemas.

Imagens dos materiais utilizados nos dois grupos – G1 e G2 – encontram-se no Apêndice A. Ressalta-se que o material concreto utilizado com o grupo G1, pode ser categorizado como *intermediário entre indefinido e definido*, pois não são reproduções dos objetos citados nos enunciados, mas também não são fichas sem relação direta com esses objetos. Trata-se de fichas com ilustrações dos objetos referidos nos enunciados.

4.3 PROCEDIMENTOS

Para alcançar os objetivos da pesquisa foram adotados os procedimentos metodológicos, divididos nas etapas que seguem.

4.3.1 Teste Inicial: Instrumento De Sondagem

Todos os participantes, em uma sessão individual, resolveram quatro situações-problema envolvendo as distintas situações combinatórias, sendo uma de cada tipo (*arranjo*, *combinação*, *permutação* e *produto* de medidas). Os problemas foram lidos quantas vezes necessárias e solicitadas pelas crianças, para que pudessem entender o que lhes foi pedido. Não houve um limite de tempo durante as sessões.

Seguiu-se um roteiro de perguntas, no intuito de assegurar que todos tivessem recebido a mesma instrução. A pergunta feita inicialmente foi: - Você terminou? Ao responderem positivamente este primeiro questionamento, se avançou para as demais: Qual a sua resposta? Quantos são? Como você chegou a essa resposta? Caso tivesse respondido negativamente, se fez necessário aguardar que a criança finalizasse sua resolução e seguiram-se os questionamentos: Qual é a resposta? Quantos são? Como você chegou a essa resposta?

São apresentados no Quadro 3, os quatro problemas que foram utilizados nas fases de teste inicial e de sessão de ensino. Os problemas foram apresentados na mesma ordem para todas as crianças.

Pessoa e Borba (2009) apresentam em sua pesquisa que, dentre os diferentes problemas combinatórios, em suas relações e características, as situações problema de *produto de medidas* foram as mais fáceis de serem resolvidas e as de *permutação* foram as mais difíceis. Baseado nesses resultados, escolheu-se a ordem de apresentação das situações problemas para esta pesquisa: *arranjo, combinação, permutação e produto de medidas.* Os problemas foram pensados a partir de estudos anteriores, tais como o de Pessoa e Borba (2009); de Santos et al (2011); de Pessoa e Borba (2012); e de Silva (2014).

Quadro 3: Problemas combinatórios resolvidos no teste inicial e na sessão de ensino.

ARRANJO	COMBINAÇÃO	PERMUTAÇÃO	PRODUTO DE MEDIDAS
Numa corrida temos três carrinhos (amarelo, vermelho e azul). Nesta corrida só podem ganhar dois carros por vez, o campeão e o vice-campeão. De quais maneiras diferentes os carrinhos podem ocupar o lugar de campeão e de vice-campeão na corrida?	Cinco crianças (Vivi, Caio, Duda, Bete e Samuel) vão brincar no pula-pula. Duas crianças podem brincar de cada vez. De quais maneiras diferentes as crianças podem brincar no pula-pula?	Laura está organizando espaços de dormir para os três bichinhos do sítio de sua tia (um pato, uma galinha e uma ovelha). Esses espaços ficarão um ao lado do outro. De quais maneiras diferentes os bichinhos podem ser organizados?	Carol precisa se arrumar para ir à festa, mas não sabe que roupa usar. Ela tem quatro blusas (lilás, vermelha, amarela e branca) e duas calças (rosa e verde). De quais maneiras diferentes ela pode se vestir para ir à festa?

Fonte: A autora

4.3.1.2 Análise da sondagem (teste inicial)

Foram realizadas análises qualitativas quanto ao modo que cada criança raciocinou (tipos de estratégias adotadas) ao resolver cada problema proposto, quanto aos invariantes pela criança percebidos, o que levou em consideração e quais representações simbólicas preferiu usar ao resolver os problemas.

Baseados em estudos anteriores, a respeito da Combinatória, os problemas foram pensados e criados para serem realizados com crianças da Educação Infantil. Os resultados possuem valores compreendidos entre seis e 12. Optou-se por estes resultados porque as *permutações* só podem ser 2 (permutação de dois elementos) ou 6 (permutação de três elementos) ou 24 (permutação de quatro elementos). Assim, para não se ter uma solução facilitada (resultado 2) ou gerar grande dificuldade com um extenso número de possibilidades (resultado 24), foram priorizados estes resultados (entre 6 e 12).

4.3.2 Sessão de Ensino

Este momento foi constituído por entrevistas individuais, baseadas no modelo de exame clínico piagetiano[6]. Foi escolhido este tipo de entrevista por permitir investigar e buscar entender as bases do raciocínio mobilizadas na atividade e, consequentemente, o que levou a criança a dar uma determinada resposta, suas perspectivas e seu modo de operar e atribuir significado. Este modo de entrevistar também possibilita que a criança seja confrontada em suas respostas. Dessa forma, é solicitado que as crianças justifiquem, do modo que conseguirem, as suas respostas – o que permite ao examinador avaliar as justificativas dadas e, ainda, possibilita que as crianças reflitam sobre as suas respostas, demonstrando seus níveis de compreensão dos problemas. A criança pode não ter consciência de seu raciocínio, mas suas explicações para as repostas são elementos fundamentais para entender e descobrir a organização do seu pensamento.

Também foi verificado como se pôde superar dificuldades, caso as crianças não tivessem conseguido inicialmente resolver as variadas situações combinatórias. Esta sessão de ensino foi, portanto, uma proposta de ensino que foi vivenciada pelos dois grupos, revisitando os problemas aplicados na sondagem (teste inicial), de modo a se observar como, as crianças podem desenvolver seus raciocínios combinatórios.

Durante a sessão de ensino foram levantados questionamentos que serviram como base de discussão e, de acordo com as respostas dadas pelas crianças, caso fossem necessárias, outras perguntas poderiam ser realizadas, de como a escolha pode ser feita, se as ordens dos elementos estavam diferentes e se havia mais alguma possibilidade diferente que pudesse ser colocada. Essas três relações (*escolha*,

---

[6] Piaget por meio de sua pesquisa sobre a Teoria da Epistemologia Genética e a partir de seu método científico experimental, criou um método de diálogo com as crianças, com o objetivo de analisar dados coletados a partir destas conversas. A finalidade desse método é o de acompanhar o pensamento dos participantes por meio das suas falas e ações, utilizando intervenções sistematizadas, realizando novas perguntas sobre as justificativas dadas e o quanto a criança se sente segura quando confrontada a observações diferentes às respostas dadas.

ordenação e *esgotamento de possibilidades*) foram igualmente tratadas nos dois grupos de ensino, com a intenção de estimular o desenvolvimento do raciocínio combinatório e as novas possibilidades de respostas das crianças. O diferencial se encontrava no tipo de recurso utilizado: um grupo, G1, era estimulado a utilizar o material de manipulação (fichas representativas das pessoas/ objetos citados nos enunciados dos problemas) e o outro grupo, G2, era estimulado a desenhar a situação proposta.

A organização das informações é um forte aliado para um desempenho positivo no processo de resolução de problemas e aquisição de conceitos. Para isso, e como método de ensino, as crianças foram estimuladas para tal ação. Para o G1 (material manipulável) as crianças eram solicitadas que escolhessem um elemento e fizessem as combinações possíveis, por exemplo, e assim proceder com as demais situações-problema, respeitando as características de *escolha, ordem e esgotamento de possibilidades*. Desta forma, elas podiam visualizar mais claramente as combinações realizadas e tentar novas possibilidades.

Com o G2 (desenho) também foi incentivada uma sistematização de dados durante o procedimento de respostas que se adequasse ao tipo de material utilizado, a escolha de cores para representar os elementos contidos no enunciado, por exemplo, para que as crianças pudessem organizar as informações dos problemas, e, assim como no G1, escolherem um elemento e combiná-lo com os demais de quantas formas pudessem e ter uma melhor visualização, sempre respeitando as especificidades de situação-problema.

4.3.3 Teste final

Aplicou-se um teste após a vivência da proposta de ensino. Os problemas do teste final seguiram a mesma estrutura dos problemas da sondagem (teste inicial) e as mesmas instruções realizadas no teste inicial foram adotadas para esta etapa para que não houvesse interferências diferenciadas da pesquisadora, assegurando as mesmas instruções a todos os participantes do grupo.

É importante salientar que foi respeitado o espaço de tempo de um dia entre cada etapa (teste inicial, teste final e sessão de ensino), com a intenção de minimizar possível cansaço ou saturação das crianças no processo. As três etapas de testes foram realizadas fora da sala de aula para que houvesse o menor impacto possível na rotina das demais crianças, mas que também fossem entendidas e associadas por elas como mais um elemento das atividades realizadas no cotidiano escolar.

No Quadro 4 constam as situações problemas designadas para o teste final.

Quadro 4: Problemas combinatórios resolvidos no teste final.

ARRANJO	COMBINAÇÃO	PERMUTAÇÃO	PRODUTO DE MEDIDAS
Três animais (a lebre, a tartaruga e a raposa) apostaram uma corrida para ver quem consegue dar a volta na floresta primeiro. Serão premiados dois animais: o que chegar em primeiro e o que chegar em segundo lugar. De quais maneiras diferentes os animais podem ocupar o primeiro e o segundo lugar na corrida?	Para fazer uma salada de frutas, Alice possui quatro frutas (banana, maçã, uva e laranja). Só podem ser colocadas duas frutas na salada. De quais maneiras diferentes ela poderá fazer a salada?	A titia quer guardar os seus três pares de sapatos (preto, vermelho e marrom) na prateleira um ao lado do outro. De quais maneiras diferentes eles podem ser organizados?	Na festinha da escola haverá um bailinho. Os dois meninos (Pedro e Davi) querem dançar com as suas quatro coleguinhas: (Cecília, Mariana, Fernanda e Júlia). De quais maneiras diferentes os pares podem ser formados, para que os meninos dancem com todas as meninas

Fonte: A Autora

O próximo capítulo apresenta análises qualitativas dos dados coletados, a partir das vivências de ensino realizadas com as crianças, comparando os desempenhos no pré e no teste final, bem como as estratégias utilizadas em todas as etapas.

APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DE RESULTADOS
Capítulo 5

O presente capitulo tem como objetivo apresentar e analisar quanti e qualitativamente os dados coletados entre os meses de agosto e outubro de 2018, com 20 crianças de uma unidade de CEMEI (Centro Municipal de Educação Infantil) da cidade de Jaboatão dos Guararapes. Os resultados discutidos referem-se à resolução, por parte das crianças, de problemas combinatórios.

Como mencionado no Capítulo 3 (Método), foram realizadas entrevistas baseadas no modelo clínico de Piaget que geraram um material áudio gravado. No decorrer das análises serão apresentados trechos transcritos destas entrevistas, e um conjunto de imagens das soluções produzidas pelos alunos, com material de manipulação e com desenhos, após finalizarem os problemas propostos.

O material foi analisado de forma quanti e qualitativa, a fim de verificar quais invariantes combinatórios eram percebidos pelas crianças, quais estratégias eram facilitadoras aos alunos e quais fatores poderiam ser limitadores no processo de resolução dos problemas. Essas análises foram efetuadas a partir dos dados obtidos nas três etapas do estudo: teste inicial, sessão de ensino e teste final.

Seguindo o que foi supracitado, a análise de dados que será apresentada a seguir é norteada pelas percepções das crianças em relação aos invariantes das situações, respeitando a ordem em que os problemas foram apresentados (*arranjos*, *combinações*, *permutações* e *produtos cartesianos*) e de acordo com os tipos de respostas dadas pelos alunos. Essas respostas foram categorizadas a partir do que foi apresentado pelas crianças.

5.1 AVANÇOS DO G1 (MATERIAL DE MANIPULAÇÃO) E DO G2 (DESENHOS)

Apresenta-se, no Quadro 5, o sistema de pontuação das respostas dadas. Os pontos variaram de zero (quando nenhuma possibilidade foi listada e, assim, apresentou-se erro total na resolução do problema); passando por acertos parciais (pontuados 1, 2 e 3 dependendo do número de possibilidades corretas listadas); chegando-se a soluções corretas, mas com possibilidades repetidas (4 pontos) e a soluções corretas sem repetição de possibilidades (5 pontos).

Quadro 5: Tipos de respostas e pontuação

Respostas	Pontos
Nenhuma possibilidade listada	0
Menos da metade das possibilidades	1
Metade ou mais possibilidades listadas com repetições	2
Metade ou mais possibilidades listadas sem repetições	3
Esgotamento de possibilidades com repetições	4
Esgotamento de possibilidades sem repetições	5

Fonte: A Autora

A pontuação apresentada no Quadro 5 faz um paralelo com as classificações de estudos anteriores, como de Inhelder e Piaget (1955) em que se apresenta cinco estágios na progressão de resolução nos problemas de *permutação*, desde a não compreensão de que os elementos dados podem ser organizados de diferentes maneiras e, assim, esgotar possibilidades, até conseguirem realizar esgotamento total de possibilidades, sem que precisem de ajuda para isso; o estudo de Moro e Sores (2006) que tratam de problemas de *produto de medidas* que apresentam níveis e subníveis do raciocínio combinatórios, a partir do que foi apresentado por Inhelder e Piaget; e Pessoa e Borba (2009) que também fazem um paralelo de classificações dos estágios e níveis encontradas em Inhelder e Piaget e estudos de Moro e Sores.

A Tabela 2 mostra a média de pontuações do G1 e G2 nas fases de pré e teste final, em que a pontuação máxima a ser atingida, tanto no pré quanto no teste final é 20 pontos (sendo no máximo cinco pontos para cada uma das cinco questões).

Tabela 2 - Média de pontuação atingida por G1 (material de manipulação) e G2 (desenhos) nas fases de teste inicial e final

	Teste inicial	Teste final
G1 – material de manipulação	9,7	12,7
G2 – desenhos	7,4	8,8

Fonte: A Autora

A partir da pontuação estabelecida, também foi possível montar tabelas com a pontuação final (soma de pontos nos quatro problemas) atingido por cada aluno na fase de pré e de pós teste. O G1 (que utilizou material de manipulação) está representado pelos alunos do A1 ao A10 e o G2 (que resolveu os problemas com desenhos) está representado pelos alunos do B1 ao B10, cujas pontuações são apresentadas nas Tabelas 3 e 4.

Observa-se que a maioria das crianças do grupo que usou material de manipulação, G1, avançou no teste final. Apenas uma obteve pontuação mais baixa no teste final, comparado ao teste inicial e duas delas mantiveram a mesma pontuação. Algumas crianças tiveram muito bons avanços, com duas delas obtendo 18 pontos – próximo à pontuação total de 20 pontos.

No G2, desenho, também foram observados avanços, embora menores que os observados no G1. Duas das crianças obtiveram pontuação mais baixa no teste final, comparado ao teste inicial e uma manteve a mesma pontuação. Uma criança teve muito bons avanços, chegando a obter 14 pontos.

Tabela 3 - Pontuação total nas fases de teste inicial e final - G1 (material de manipulação)

	Teste inicial	Teste final
A1	7	11
A2	10	18
A3	12	12
A4	8	10
A5	11	10
A6	11	18
A7	9	13
A8	8	12
A9	11	11
A10	10	12

Fonte: A Autora

Tabela 4 - Pontuação total nas fases de teste inicial e final – G2 (desenhos)

	Teste inicial	Teste final
B1	7	10
B2	7	14
B3	7	9
B4	11	8
B5	9	10
B6	8	10
B7	8	8
B8	6	8
B9	4	3
B10	7	8

Fonte: A Autora

Uma das principais dificuldades encontradas no teste inicial, e observável nos dois grupos, é a de não enumerar as combinações existentes. Nas respostas apresentadas, as crianças faziam contagem de todos os elementos existentes na resposta que foi dada e não das formações de possibilidades que foram realizadas, como se pode observar na Figura 10. No caso do *arranjo* no qual se tinha três carros (amarelo, azul e vermelho) e se pedia todas as possibilidades de 1º e 2º lugar em uma corrida, a Criança A5 registrou 11 possibilidades (várias delas repetidas) e respondeu que seriam ao todo 22 maneiras diferentes de se ter 1º e 2º lugar.

Figura 10 - Resposta dada pela Criança A5 para o *problema de arranjo* no teste inicial.

Fonte: A Autora

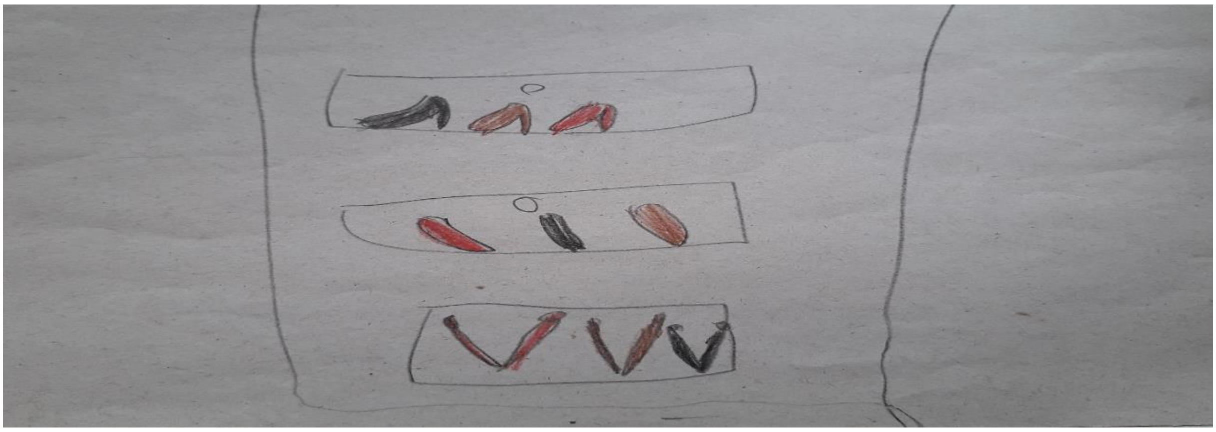
Outra dificuldade observada no teste inicial foi o não esgotamento de todas as possibilidades, dificuldade que já foi apontada em estudos anteriores como os de Santos, Matias e Pessoa (2011) e Pessoa e Borba (2012).

No teste final várias crianças superaram a dificuldade de contagem das combinações e não mais contavam elementos, mas, sim, as possibilidades compostas pela combinação dos elementos dados. Apenas três crianças no G1 e três crianças no G2 não conseguiram realizar a contagem de possibilidades em nenhum dos quatro problemas do teste final. Nas Figuras 11 e 12, pode-se observar, respectivamente, a produção da Criança A10, que realizou contagem de seis possibilidades (para a formação de pares com dois meninos e quatro meninas), e da Criança B4, que realizou contagem de três possibilidades (primeira possibilidade sapatos pretos, marrons e vermelhos; segunda possibilidade sapatos vermelhos, pretos e marrons; terceira possibilidade sapatos vermelhos marrons e pretos), para o problema de permutação em que era solicitada a organização de três pares de sapatos, que estes pares fossem dispostos lado-a-lado de maneiras diferentes.

Figura 11 - Resposta dada pela Criança A10 para o problema de *combinação* no teste final.

Fonte: A Autora

Figura 12 - Resposta dada pela Criança B4 para o *problema de permutação* no teste final



Fonte: A Autora

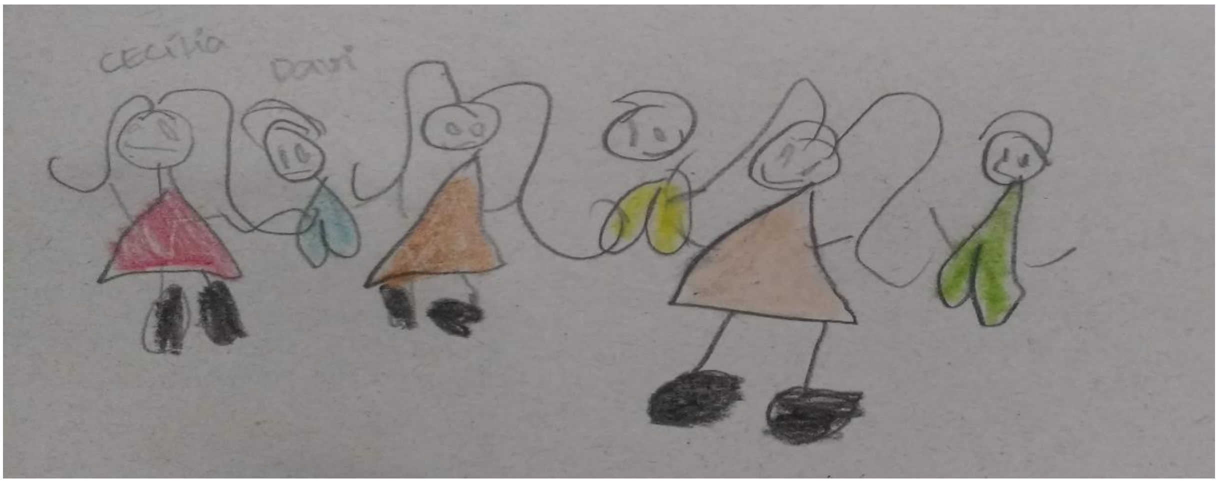
Já o esgotamento das possibilidades permaneceu como dificuldade de todas as crianças – como se pode observar na Figuras 13 da Criança A6 que obteve pontuação 18 no G1 e Figura 14 da Criança B2 que obteve pontuação 14 no G2, respectivamente. Na Figura 13 ilustra-se a resposta dada para o problema de permutação no teste final “A titia quer guardar os seus três pares de sapatos (preto, vermelho e marrom) na prateleira um ao lado do outro. De quais maneiras diferentes eles podem ser organizados? “. A Criança A6 conseguiu listar quatro possibilidades corretamente (primeira possibilidade: sapatos marrons, vermelhos e pretos; segunda possibilidade: sapatos vermelhos, marrons e pretos; terceira possibilidade: sapatos marrons, pretos e vermelhos; quarta possibilidade: sapatos pretos marrons e vermelhos), das seis existentes. Enumerou mais da metade de possibilidades, mas não chegou ao esgotamento.

Figura 13 - Resposta dada pela Criança A6
para o *problema de permutação* no teste final

Fonte: A Autora

Na Figura 14, apresenta-se a resposta da Criança B12 ao problema de *produto de medidas* apresentado no teste final, em que era solicitada a formação de diferentes pares, para que os dois meninos (Pedro e Davi) dançassem com todas as quatro meninas (Cecília, Mariana, Fernanda e Júlia). Deveriam ser listados um total de oito pares de dança e a Criança B12 desenhou um total de três pares (Cecília e Davi; Mariana e Davi; Júlia e Pedro), não conseguindo esgotar as possibilidades.

Figura 14 - Resposta dada pela Criança B2 para o problema de *produto de medidas* no teste final



Fonte: A Autora

Na Tabela 5 pode-se observar as pontuações obtidas por cada criança do G1 (material de manipulação) nos quatro problemas combinatórios nas fases de pré e teste final.

Foi possível perceber avanços entre o pré e pós teste no G1 (material de manipulação), em todos os tipos de problemas combinatórios: *arranjo*, *combinação*, *permutação* e *produto de medida*. As maiores médias de pontos no teste final ocorreram no problema de *combinação* e no de *produto de medidas*. As crianças tiveram um maior avanço na percepção de repetições, ou seja, conseguiram fazer metade ou mais possibilidades sem repetir. No *produto de medidas*, três das 10 crianças conseguiu enumerar todas as possibilidades, atingindo pontuação 5

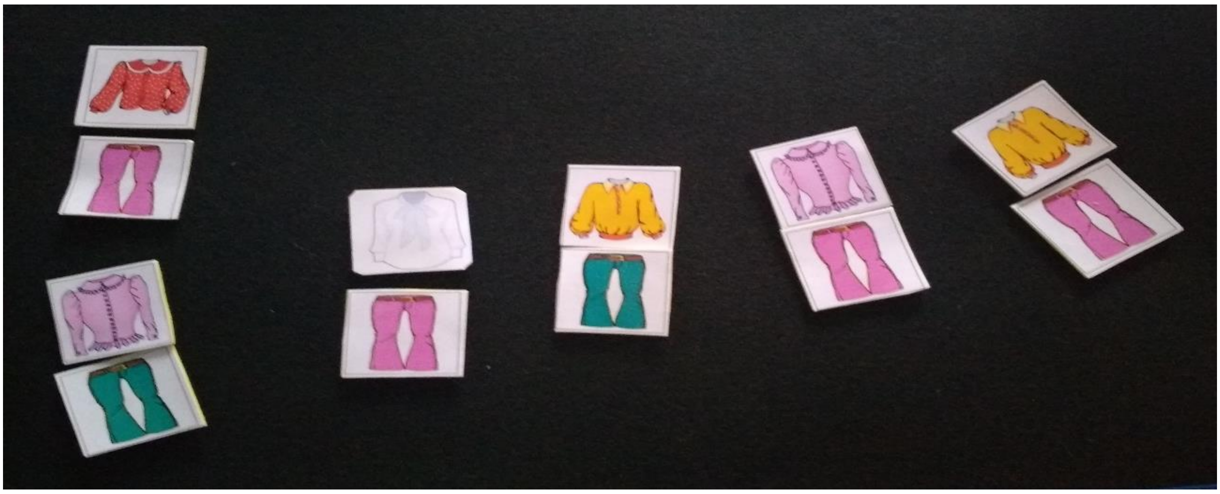
Tabela 5 - Pontuação do G1 (material de manipulação) por problema no pré e teste final

	Arranjo		Combinação		Permutação		Produto de Medidas	
	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós
A1	2	3	1	3	2	2	2	3
A2	2	3	2	5	2	5	4	5
A3	4	4	3	2	2	3	3	3
A4	3	3	1	3	1	1	3	3
A5	2	3	2	3	2	1	5	3
A6	2	5	2	5	2	3	5	5
A7	2	2	1	4	3	2	3	5
A8	2	3	2	4	2	2	2	3
A9	4	2	3	3	1	3	3	3
A10	2	3	2	3	3	3	3	3
Médias	2,5	3,1	1,9	3,5	2,0	2,5	3,3	3,6

Fonte: A Autora

Na Figura 15 pode-se observar como a Criança A7 no teste inicial não conseguiu esgotar as possibilidades do *produto de medidas.* No problema foi solicitado quais as combinações possíveis entre quatro blusas (lilás, vermelha, amarela e branca) e duas calças (rosa e verde), e a criança registrou seis das oito possibilidades corretas. E na Figura 16 observa-se como no teste final a mesma criança enumerou todas as possibilidades. No teste final foi solicitado a formação de pares de dança entre dois meninos (Pedro e Davi) e quatro meninas (Cecília, Mariana, Fernanda e Júlia) e a criança registrou todas as oito possibilidades corretas.

Figura 15 - Resposta dada pela Criança A7 para o problema de *produto de medidas* no teste inicial



Fonte: A Autora

Figura 16 - Resposta dada pela Criança A7 para o problema de *produto de medidas* no teste final

Fonte: A Autora

Em alguns casos, as crianças mantiveram suas pontuações, mas percebeu-se que ao longo das três etapas (teste inicial, sessão de ensino e teste final) elas alcançaram um ganho qualitativo ao conseguirem observar os invariantes de *escolha* e de *ordem* dos distintos tipos de problemas. Nas Figuras 17 e 18 pode-se observar um caso de ganho qualitativo. A Criança A10, mesmo mantendo a pontuação obtida no pré e no teste final, para o problema de *produto de medida,* apresentou no teste final um número maior de possibilidades, chegando próximo ao esgotamento.

Figura 17 - Resposta dada pela Criança A10 para o problema de *produto de medidas* no teste inicial

Fonte: A Autora

Figura 18 - Resposta dada pela Criança A10 para o problema de *produto de medidas* no teste final

Fonte: A Autora

As crianças deste grupo demonstraram conseguir, mais facilmente, realizar a contagem das possibilidades no teste final, ao visualizarem de maneira mais clara as combinações por elas formadas. Este pode ter sido um fator facilitador no desempenho, já que elas não precisariam se preocupar em criar a representação dos elementos contidos nas questões, pois eles estavam prontos e visíveis, podendo ser manipulados quando as crianças quisessem. Isso reforça o que é abordado pelos autores Pais (2001); Lorenzato (2006); Batista e Spinillo (2008) a respeito do potencial que o material de manipulação possui, já que pode ser visualizado e movimentado pelas crianças, e, assim, pode favorecer a reflexão de suas ações sobre os problemas e, desse modo, podem avançar em seus desenvolvimentos no raciocínio combinatório.

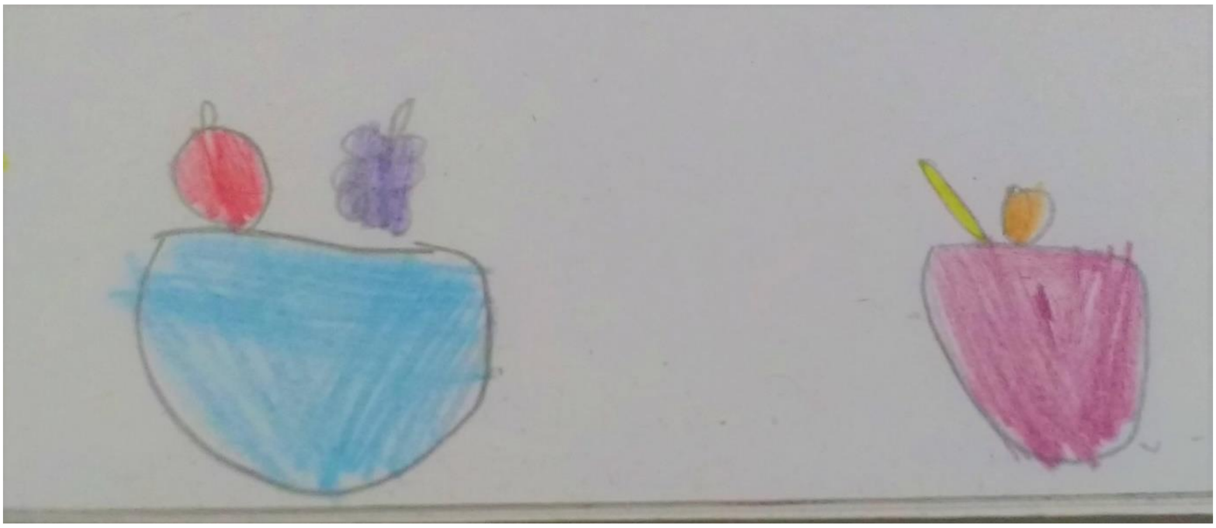
Os resultados obtidos no presente estudo corroboram com estudos anteriores, como os Batista e Spinillo (2008); Pessoa e Borba (2009) e Santos *et al* (2011) que discutiram a importância do material de manipulação na resolução de problemas. O conjunto de estudos, incluindo o atual, defendem, assim, que esses materiais podem ajudar na compreensão dos problemas combinatórios, na percepção das diferentes combinações e na distinção das diferenças contidas nos problemas.

No G2 (desenho) as crianças apresentam algumas melhoras de desempenho e, em alguns poucos casos, uma queda nas pontuações. A explicação deste mais fraco desempenho pode ser no fato que as crianças desse grupo demonstram cansaço em continuar a realizar os desenhos, mesmo quando estimuladas a tentarem. Um fator que foi observado, e que deve ser levado em consideração, é o de que a maioria das crianças que utilizaram este tipo de material estavam preocupadas em ilustrar, com ricos detalhes, os elementos e o contexto do enunciado, o que acabava por distraí-las do objetivo final e gerando este efeito de cansaço.

As Figuras 19, 20, 21 e 22 são exemplos de ilustrações para o problema de *combinação* abordado no teste final: “Para fazer uma salada de frutas, Alice possui quatro frutas (banana, maçã, uva e laranja). Só podem ser colocadas duas frutas na salada. De quais maneiras diferentes ela poderá fazer a salada? ”

A Criança B4 produziu ilustrações como resposta para o problema, como se pode observar na Figura 19. Ela desenhou dois copos de salada: o primeiro com maçã e uva e o segundo com banana e laranja. A riqueza de detalhes de seus desenhos certamente causou certo cansaço e a impediu de continuar enumerando, por ilustrações, as outras quatro possibilidades de combinação.

Figura 19 - Resposta dada pela Criança B4 para o problema *de combinação* no teste final (parte 1)



Fonte: A Autora

Figura 20 - Resposta dada pela Criança B4 para o problema de *combinação* no teste final (parte 2)

Fonte: A Autora

Na Figura 20 tem-se uma produção, que foge do contexto proposto pelo enunciado, mas muito rica em detalhes. A criança desenhou uma pessoa em um barco levando duas saladas: a primeira (banana com laranja) e a segunda (uva com maçã).

Na Figura 21 tem-se o detalhamento de uma cena cotidiana na cozinha, com utensílios característicos e representativos, e elementos do enunciado (uma criança para representar a personagem Alice e as frutas). A criança apresentou duas possibilidades de salada: (uva com laranja) e (banana com maçã). Esse detalhamento a impediu de encontrar um bom número de possibilidades, pois se concentrou em produzir variadas ilustrações para o mesmo problema e não comparar o que já havia produzido em termos de combinações de frutas.

Figura 21 - Resposta da pela Criança B4 paro o problema de *combinação* no teste final (parte 3)

Fonte: A Autora

A seguir, na Tabela 6 apresenta-se a pontuação por problema para o G2 (que utilizou desenhos na resolução das questões).

Tabela 6 - Pontuação do G2 (desenhos) por problema no teste inicial e final

	Arranjo		Combinação		Permutação		Produto de Medidas	
	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós
B1	2	3	1	3	3	1	1	3
B2	2	3	3	5	1	5	1	1
B3	3	2	1	3	1	3	2	1
B4	5	2	1	2	2	3	3	1
B5	4	3	2	3	1	2	2	2
B6	3	2	1	3	1	3	3	2
B7	5	1	1	3	1	3	1	1
B8	3	1	1	3	1	3	1	1
B9	1	1	1	1	1	0	1	1
B10	3	3	1	3	1	1	2	1
Média	3,1	2,2	1,3	2,9	1,3	1,8	2,4	1,4

Fonte: A Autora

Mesmo sem terem um maior avanço em suas pontuações, por não aumentarem o número de possibilidades apresentadas, foi possível observar que as crianças durante o teste inicial não tinham uma boa compreensão de alguns invariantes, mas avançaram nas suas compreensões durante as intervenções. Também, por vezes, quando a questão era refeita na sessão de ensino, passaram a perceber casos repetidos, o que também evidencia a compreensão de invariantes, ou seja, casos de situações combinatórias nas quais a ordem dos elementos não indica possibilidades distintas.

A importância do desenho é abordada no estudo de Borga e Justo (2013) que afirmam a importância da representação gráfica feita pelas crianças, estimulando a resolução de problemas e mobilização de esquemas para resolver os diferentes tipos de problemas. Cândido (2001) aponta que o fato de uma criança não dominar a linguagem escrita ou matemática não é empecilho para o aprendizado matemático, já que elas podem utilizar o desenho como uma alternativa para expressarem o que pensam.

Uma dificuldade encontrada pelas crianças dos dois grupos foi a de explicitar como elas pensaram para resolver as questões. Entretanto, não é o que se espera de crianças dessa faixa etária. A proposta é de que elas se envolvam na resolução de problemas combinatórios, mesmo que não cheguem a esgotar todas as possibilidades ou que sejam capazes de explicitar claramente as suas resoluções, apontado Borba, Pessoa e Rocha 2013; Borba 2016.

Os resultados obtidos no presente estudo reforçam a ideia de que a Educação Infantil pode ser terreno fértil para desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático e pode favorecer a construção de conceitos, em particular os combinatórios. Neste nível de escolarização, o professor pode atuar como mediador e favorecer novas perspectivas, permitindo a ação das crianças sobre os objetos matemáticos e possibilitando que as crianças desenvolvam seus modos de pensamento. Os achados do estudo também vão ao encontro a documentos oficiais, como o RECNEI (BRASIL, 1998) e as DCNEI, os quais defendem que este desenvolvimento global deve ser estimulado desde o início da escolarização. A pesquisa confirma resultados de estudos anteriores tais como Souza et al (2010); Santos et al (2011); Borba (2016), os quais afirmam que o raciocínio combinatório já pode ser observado nas crianças desde muito novas.

Nos dois grupos, as crianças apresentaram níveis diferentes, em estágio inicial, de raciocínio combinatório, e quando estimuladas (nos processos de sessão de ensino) mostraram progressos – quantitativos e/ou qualitativos. Algumas poucas crianças não apresentaram compreender o que era solicitado, mas a maioria deu sinal de compreensões, após as intervenções. Mesmo não esgotando o número total de possibilidades, muitas conseguiram aumentar o número de combinações em suas respostas e várias das crianças buscavam sistematização em suas respostas. Estes são sinais de desenvolvimento de raciocínio combinatório.

Adiante são analisadas respostas dadas por crianças dos dois grupos (G1 e G2), com trechos de falas e com imagens do que foi produzido, com a finalidade de entender o que foi compreendido por elas, quais as dificuldades encontradas no momento de resolução e os invariantes percebidos em cada um dos tipos de problemas combinatórios.

5.2. RESPOSTAS DAS CRIANÇAS POR TIPO DE PROBLEMA COMBINATÓRIO

5.2.1 Problemas de a*rranjo*

5.2.1.1 Teste inicial

O problema de *arranjo* apresentado no teste inicial foi: “Numa corrida temos três carrinhos (amarelo, vermelho e azul). Nesta corrida só podem ganhar dois carros por vez, o campeão e o vice-campeão. De quais maneiras diferentes os carrinhos podem ocupar o lugar de campeão e de vice-campeão na corrida?”. Nesse problema era esperado que as crianças compreendessem que era preciso escolher dois elementos para cada possibilidade e que as ordens de escolhas dos elementos geravam possibilidades diferentes. Ao todo era solicitado que enumerassem seis possibilidades: (amarelo, vermelho), (amarelo, azul), (vermelho, amarelo), (vermelho, azul), (azul, amarelo) e (azul, vermelho).

As Tabelas 7 e 8 indicam que a maioria das crianças obteve no teste inicial a Pontuação 2 e 3, ou seja, apresentaram metade ou mais de metade das possibilidades, embora algumas dessas possibilidades com repetições. Algumas das crianças obtiveram Pontuação 4 e ainda outras obtiveram Pontuação 5, esgotamento com e sem repetição de possibilidades, respectivamente. Dessa forma, selecionaram adequadamente apenas dois elementos por vez e indicaram compreender que a relação entre 1º e 2º lugares eram diferentes, mas muitas não conseguiram, no teste inicial, esgotar as possibilidades essa dificuldade de esgotamento de possibilidades também foi observada por Santos et al (2011); Pessoa e Borba (2012).

Segue, na Figura 22, a resolução da atividade realizada pela Criança A2 (que usou material de manipulação) na fase de teste inicial. A resolução da criança evidencia sua compreensão de que em problemas deste tipo (*arranjos*) de um grupo maior (carrinhos amarelo, vermelho e azul) serão selecionados subgrupos e que nestes subgrupos não poderão ser utilizados todos os elementos (no caso, apenas dois dos três carrinhos) e o entendimento de que a ordem destes elementos gera possibilidades distintas.

Figura 22 - Resposta dada pela Criança A2 para o problema de *arranjo* no teste inicial

Fonte: A Autora

Apesar dessas compreensões evidenciadas, a Criança A2 erra ao apresentar muitas possibilidades repetidas. Ela, inicialmente, não percebeu que as combinações repetidas não são possibilidades diferentes. Ao ser questionada sobre sua resposta final, a criança não excluiu os casos repetidos.

A Criança A2 indicou como sua resposta final, dessa questão no teste inicial, 14 combinações. Ela não esgotou as seis possibilidades, mas conseguiu realizar mais da metade de combinações. Seguindo o roteiro de perguntas estabelecidas para esta fase, foram realizados os questionamentos que seguem para Criança A2.

Pesquisadora: Você terminou?
Criança A2: Sim
Pesquisadora: Qual a sua resposta?
Criança A2: Essa aqui. (Aponta para o tabuleiro)
Pesquisadora: Quantos são?
Criança A2: Um, dois, três, ..., 14.
Pesquisadora: Como você pensou para dar esta resposta?
Criança A2: Eu pensei muito, aí ... eu descobri.

Apesar da resposta estar incompleta (com quatro das seis possibilidades), é possível perceber indícios de raciocínio combinatório, pois existe, por parte da criança, a tentativa de criar várias possibilidades (1º e 2º lugar em corridas) e nessa tentativa escolheu corretamente dois dentre três elementos dados. Esse resultado vai ao encontro do apontado por Pessoa e Borba (2012), as quais verificaram que o invariante de *escolha* de situações combinatórias é compreendido por algumas crianças da Educação Infantil.

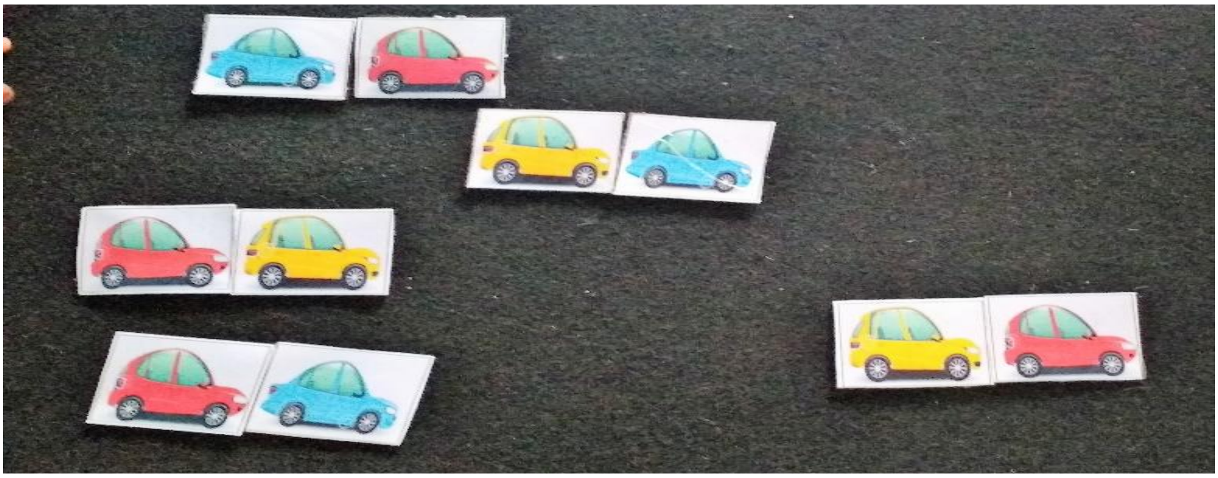
Entretanto, o invariante de *ordem* não foi plenamente percebido por essa criança e várias outras. Ela apenas percebeu esse invariante ao indicar o *carrinho azul em primeiro lugar e o vermelho em segundo* e depois *carrinho vermelho em primeiro lugar e em segundo o carrinho azul*. Apesar de repetir possibilidades, ela faz a contagem de todas as combinações que foram realizadas, entendendo que cada corrida é uma combinação, indicando, assim, compreender que cada 1º lugar (campeão) e 2º lugar (vice-campeão) constitui uma possibilidade.

5.2.1.2 Sessão de ensino

Na figura 23 pode-se observar a resposta dada pela Criança A2, durante a sessão de ensino, para o problema de *arranjo*.

Diferentemente do teste inicial, a criança não criou um número excessivo de combinações. Ela também avançou, apresentando uma possibilidade a mais que no teste inicial e fez a contagem de cada corrida como uma possibilidade, dando como resposta final cinco corridas.

Figura 23 - Resposta dada pela Criança A2 para o problema de *arranjo* na sessão de ensino



Fonte: A Autora

No momento da sessão de ensino, não houve o esgotamento de possibilidades, mas houve uma tentativa de padronização. A criança colocou corridas que se iniciaram com o carro vermelho, corridas que se iniciaram com o carro amarelo e uma corrida iniciada como carro azul. Para o acerto total, faltou apenas uma corrida do carro azul em 1º lugar e o amarelo em 2º lugar. Observou-se, assim, avanços no sentido de não repetir possibilidades, e na tentativa de sistematização, de modo a enumerar todas as possibilidades.

A partir dos questionamentos que foram levantados durante a sessão de ensino, a criança apresentou entendimento de que a ordem gerava uma nova possibilidade. Quando questionada se havia repetições, ao perceber que repetiu, a criança apontou para as duas corridas iguais e retirou uma delas do tabuleiro. Esse entendimento pode ser confirmado pelo trecho transcrito a seguir.

Pesquisadora: Como você pode escolher as corridas?

Criança A2: Carro azul com vermelho, carro vermelho com amarelo, carro vermelho com azul, carro amarelo com azul, carro amarelo com vermelho e carro azul com vermelho, carro amarelo com azul. (A criança informa as combinações que fez no tabuleiro).

Pesquisadora: Você repetiu alguma corrida?

Criança A2: Hum, não sei ... acho que esse daqui. (Aponta para corrida carro azul 1º lugar/ carro vermelho 2º lugar).

Pesquisadora: Por que você acha que essas duas corridas estão iguais?

Criança A2: Porque quem ganha é o carro azul e o vermelho perde.

Pesquisadora: Lembra que só podem ser feitas corridas diferentes?

Criança A2: Uhum. (Afirmando com a cabeça, retira a corrida repetida).

Pesquisadora: Tem mais alguma corrida igual?

Criança A2: Tem essa. (Aponta e retira a corrida 1º lugar carro amarelo/ 2º lugar azul).

Pesquisadora: Tem mais alguma corrida diferente que você pode fazer?

Criança A2: Não.

Pesquisadora: Você pode tentar fazer mais se quiser, não tem problema.

Criança A2: Não tia, acabou!

Pesquisadora: Então me diz quantas corridas você fez.

Criança A2: 1, 2, 3, 4, 5.

O questionamento "*Como você pode escolher as corridas?*" foi uma pergunta que tinha como objetivo levar a criança a refletir sobre o invariante de *escolha* dos elementos. Já a pergunta "*Você repetiu alguma corrida"* levou à reflexão sobre o invariante de *ordem* – uma vez que repetir elementos, mas em ordens diferentes é necessário em um problema de *arranjo*, mas não se pode repetir possibilidades que estejam na mesma ordem exata, como 1º lugar: carro azul e 2º lugar: carro vermelho aparecendo mais de uma vez. Ao questionar “*Por que você acha que essas duas corridas estão iguais*?” a pesquisadora solicitou que a criança mais uma vez refletisse sobre o invariante de *ordem*. A pergunta “*Tem mais alguma corrida diferente que você pode fazer?*” tinha como objetivo levar a criança a pensar sobre o *esgotamento das possibilidades*. No final solicitava-se que a criança indicasse a sua resposta para se certificar se estava contando possibilidades ou elementos.

Todos os questionamentos efetuados na sessão de ensino levaram as crianças a pensarem sobre as características centrais dos problemas combinatórios e, nesse caso específico, sobre os invariantes de problemas de *arranjo*. Ressalta-se que as crianças não eram ensinadas diretamente sobre os invariantes, mas eram questionadas, a partir dos contextos, como se deveria fazer a escolha de elementos das possibilidades; se a ordem dos elementos indicava, ou não possibilidades distintas; se todas as possibilidades haviam sido levantadas; se havia possibilidades repetidas e qual o total de possibilidades.

5.2.1.3 Teste final

Para teste final foi utilizado o seguinte problema: “Três animais (a lebre, a tartaruga e a raposa) apostaram uma corrida para ver quem consegue dar a volta na floresta primeiro. Serão premiados dois animais: o que chegar em primeiro e o que chegary em segundo lugar. De quais maneiras diferentes os animais podem ocupar o primeiro e o segundo lugar na corrida?”. Eram, portanto. seis as possibilidades a serem enumeradas: (lebre, tartaruga), (lebre, raposa), (tartaruga, lebre), (tartaruga, raposa), (raposa, lebre) e (raposa, tartaruga).

No momento de teste final, Figura 24, a Criança A2 não esgotou as possibilidades, mas é perceptível a tentativa de sistematização em sua resposta. Ela enumerou: (tartaruga e raposa), (tartaruga e lebre), (lebre e raposa), (lebre e tartaruga) e (raposa e lebre). Faltou apenas a possibilidade (raposa e tartaruga).

Figura 24 - Resposta dada pela Criança A2 para o problema de *arranjo n*o teste final

Fonte: A Autora

A criança também realizou a contagem corretamente ao considerar cada corrida como uma combinação, dando como resposta final cinco corridas. É também importante ressaltar o efeito que o momento de sessão de ensino teve sobre o resultado de teste final. A criança, apesar de não esgotar as possibilidades, aumentou o número de possibilidades enumeradas, no teste inicial lista quatro possibilidades corretas com um alto número de repetições, e evidenciou compreensão de que a ordem dos elementos, nesse caso de um arranjo, gera possibilidades diferentes. Além disso, a criança não realizou repetições de combinações. Faltou apenas enumerar mais uma possibilidade para esgotar todas as combinações do problema.

5.2.1.4 Mais exemplos de avanços nos problemas de arranjo

Nas Figuras 25 e 26 pode-se observar o avanço alcançado pela Criança A6, que partiu da Pontuação 2, metade ou mais das possiblidades com repetições, no teste inicial, para, no teste final, a Pontuação 5, ou seja, o esgotamento de possibilidades sem repetições. Isso demonstra que é possível uma criança da Educação Infantil esgotar todas as possibilidades em um problema combinatório – desde que utilizados contextos adequados e baixos números totais de possibilidades.

No teste inicial (Figura 25), A6 tentou criar várias possibilidades (1º e 2º lugar em corridas), sem perceber que repetições de corridas não geram possibilidades diferentes.

Figura 25 - Resposta dada pela Criança A6 para o problema de *arranjo* no teste inicial

Fonte: A Autora

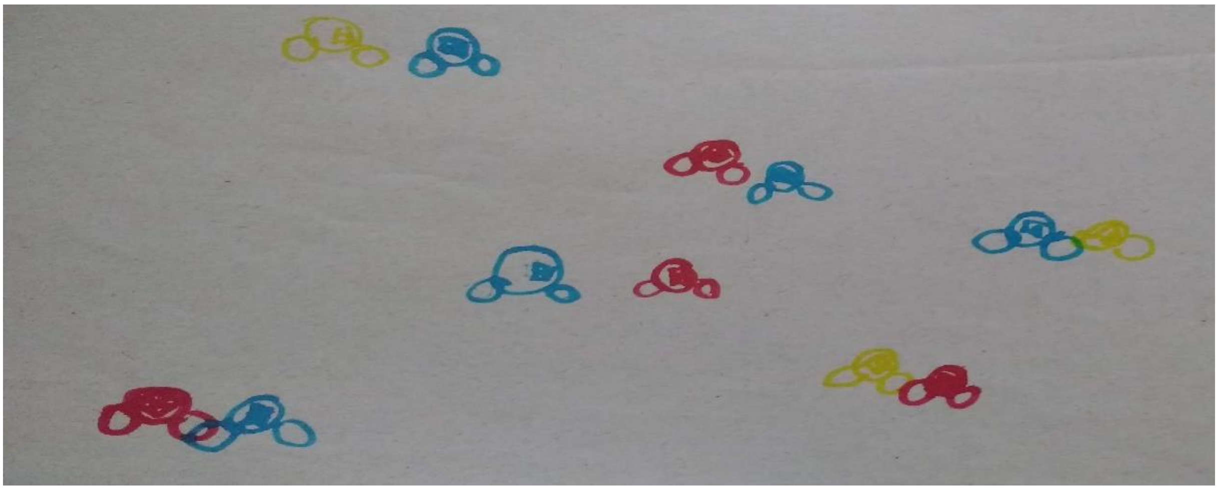
No teste final (Figura 26) a criança esgotou as possibilidades, sem apresentar repetições, e enumerou corretamente seis possibilidades distintas: 1) raposa e tartaruga; 2) tartaruga e coelho; 3) coelho e raposa; 4) tartaruga e raposa; 5) coelho e tartaruga; e 6) raposa e coelho. Conseguiu, assim, perceber os três invariantes do problema de *arranjo*: o de *escolha*, dois entre três elementos para formar corridas de primeiro e segundo lugar; o de *ordem*, em que a posição dos elementos geram possibilidades distintas; e o esgotamento (levantamento de todas as possibilidades), sem repetições de possibilidades.

Nas Figuras 27 e 28 são apresentadas as produções da Criança B2 do G2 para o problema de *arranjo* no pré e no teste final, respectivamente. A criança atingiu Pontuação 2, metade ou mais possibilidades com repetição, na fase de teste inicial (Figura 27). Ela apresentou como resposta final 12 possibilidades, pois realizou contagem de todos os elementos (cada carro) ao invés de contar cada possibilidade (dois carros juntos, indicando o 1º e 2º lugar na corrida). No teste inicial ela também errou ao repetir possibilidades (vermelho e azul). A criança avançou para Pontuação 3, metade ou mais possibilidades sem repetições, na fase de teste final Figura 28), chegando próximo ao esgotamento, apresentando como resposta cinco (das seis) possibilidades.

Figura 26 - Resposta dada pela Criança A6 para o problema de *arranjo* no teste final

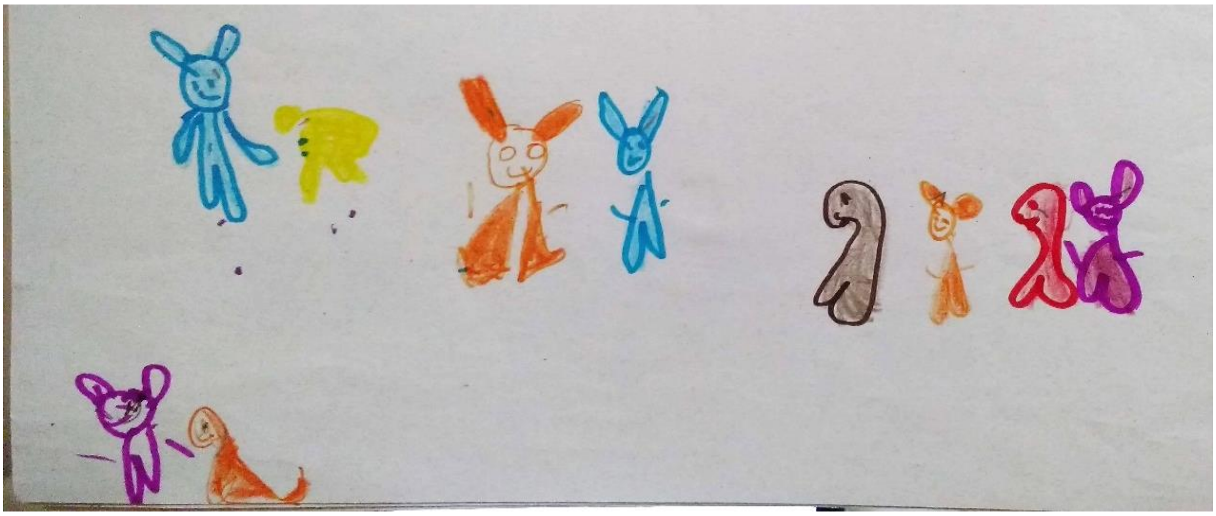
Fonte: A Autora

Figura 27 - Resposta dada pela Criança B2 para o problema de *arranjo* no teste inicial



Fonte: A Autora

Figura 28 - Resposta dada pela Criança B2 para o problema de arranjo no teste final



Fonte: A Autora

Observa-se, assim, que tanto o material de manipulação quanto os desenhos possibilitaram avanços – por vezes quantitativos, mas principalmente qualitativos – no raciocínio combinatório das crianças, em particular na compreensão de problemas de *arranjo* – um tipo de problema que muitas crianças possuem dificuldades inicias de compreensão na relação de que as ordens dos elementos geram novas possibilidades (Pessoa e Borba 2009; 2012). Houve mais avanços no grupo do material de manipulação, pois o material pronto e flexível (podendo facilmente levantar possibilidades ou modificá-las) facilitou mais a resolução dos problemas do que a produção de desenhos – os quais exigiam mais tempo e, por vezes, parece que distraíam a atenção das crianças, desconcentrando na reflexão dos invariantes dos problemas.

5.2.2 Problemas de *combinação*

5.2.2.1 Teste inicial

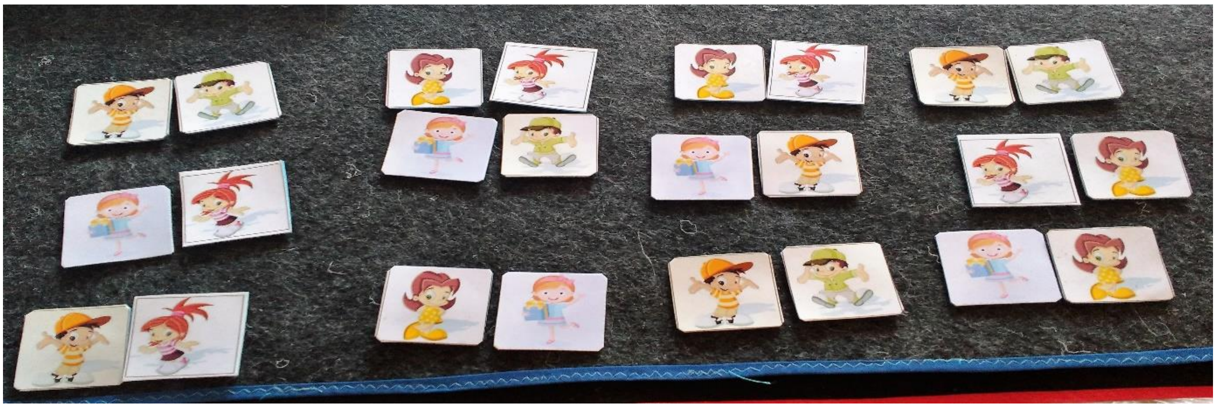
Para este problema era esperado que as crianças selecionassem elementos de um grupo maior para formarem os subgrupos e distinguissem que as ordens dos elementos escolhidos não geravam novas possibilidades. Para isto foi apresentada a seguinte situação problema: “Cinco crianças (Vivi, Caio, Duda, Bete e Samuel) vão brincar no pula-pula. Duas crianças podem brincar de cada vez. De quais maneiras diferentes as crianças podem brincar no pula-pula?”. Nesse problema eram 10 as possibilidades a serem enumeradas pelas crianças: (Vivi, Caio), (Vivi, Duda), (Vivi, Bete), (Vivi, Samuel), (Caio, Duda), (Caio Bete), (Caio, Samuel), (Duda, Bete), (Duda, Samuel) e (Bete, Samuel).

Algumas crianças mostraram dificuldade em montar as possibilidades, por não conseguirem entender que a ordem não era geradora de novas combinações. Essas crianças não perceberam, de início, que *Vivi brincar com Caio* não era diferente de *Caio brincar com Vivi.* Essa dificuldade também foi observada em estudos anteriores, mesmo com crianças maiores, Gitirana et al (2014) apresentam resultados desta dificuldade com crianças maiores e Vega (2014) sobre a dificuldade em relação ao número de etapas de escolha e o número de possibilidades final.

Manipular os elementos do grupo dado também parecia ser uma dificuldade, no momento de relembrar os personagens no enunciado. Este foi um problema no qual as crianças pediram muitas vezes que fosse refeita a leitura. No problema anterior as cores dos carros em si eram suficientes para as crianças distinguirem as diferentes possibilidades, mas nesse problema elas tinham que atentar para os detalhes que diferenciavam cada criança. No G2 (desenhos) a dificuldade se tornou ainda maior, pois as crianças tinham de produzir cinco personagens diferentes.

No teste inicial as crianças mantiveram suas respostas nas Pontuações 1 (menos da metade de possibilidades) e 2 (metade ou mais possibilidades com repetições). No G1 (uso de material manipulativo) a maior parte das crianças pontuou 2 no teste inicial e no G2 (produção de desenhos) grande número das crianças apenas alcançou um ponto. Na Figura 29 tem-se o exemplo da Criança A5 que pontuou 2 (metade ou mais possibilidades com repetição) no teste inicial.

Figura 29 - Resposta dada pela Criança A5 para o problema de *combinação no* teste inicial



Fonte: A Autora

Aqui mostra que a criança conseguiu realizar a escolha de todos os elementos, mas não percebeu que o invariante de ordem não exercia influência na resposta final. Na resposta final a Criança A5 contabilizou cada dupla como uma possibilidade distinta e não percebeu as repetições que havia feito. O extrato a seguir indica como a criança percebeu cada par de figuras como sendo uma possibilidade.

Pesquisadora: Você terminou?

Criança A5: Sim.

Pesquisadora: Qual a sua resposta?

Criança A5: Como assim tia? Não entendi! Eu já terminei.

Pesquisadora: Quantas duplas de crianças você conseguiu fazer?

Criança A5: Hã? (A criança mostrou dúvida).

Pesquisadora: Quantos pares de amigos você conseguiu fazer para brincar no pula-pula?

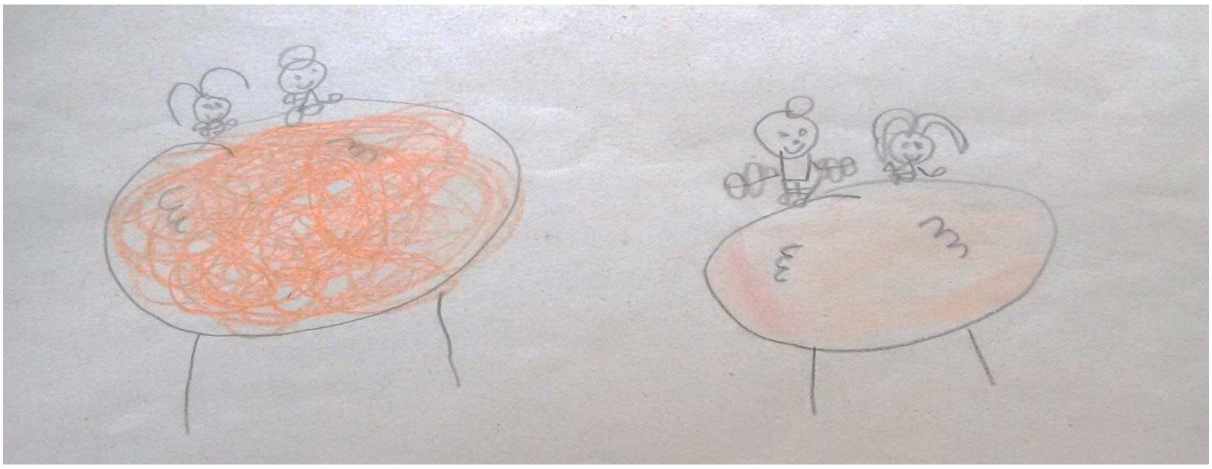
Criança A5: Eu tenho que contar né .... um, dois, três, ..., 12

Pesquisadora: Como você pensou para dar esta resposta?

Criança A2: Fiquei pensando.

A Figura 30 traz a produção da Criança B7 do G2 (desenho) para o problema de combinação na fase de teste inicial, com Pontuação 1 (menos da metade de possibilidades). A criança apresentou poucas possibilidades, apenas duas combinações diferentes, e entende que só foram feitas duas duplas. Assim como em outros problemas, o fato das crianças do G2 desejarem contextualizar bem os problemas em seus desenhos, pode ter limitado as suas enumerações de possibilidades. Aqui também as crianças teriam que produzir desenhos que diferenciassem bem cada uma das cinco crianças colocadas no enunciado do problema – o que é mais um possível motivo que justifique o mais fraco desempenho do G2 em relação ao G1.

Figura 30 - Resposta dada pela Criança B7 para o problema de *combinação* no teste inicial



Fonte: A Autora

5.2.2.2 Sessão de ensino

Para o momento de sessão de ensino, foram levantados questionamentos que levassem à percepção dos invariantes do problema. Nesse sentido, a Criança A5 foi questionada sobre a repetição de pares: Vivi e Caio ou Caio e Vivi é o mesmo par? Perguntava-se: De quantas maneiras diferentes se poderia formar duplas?

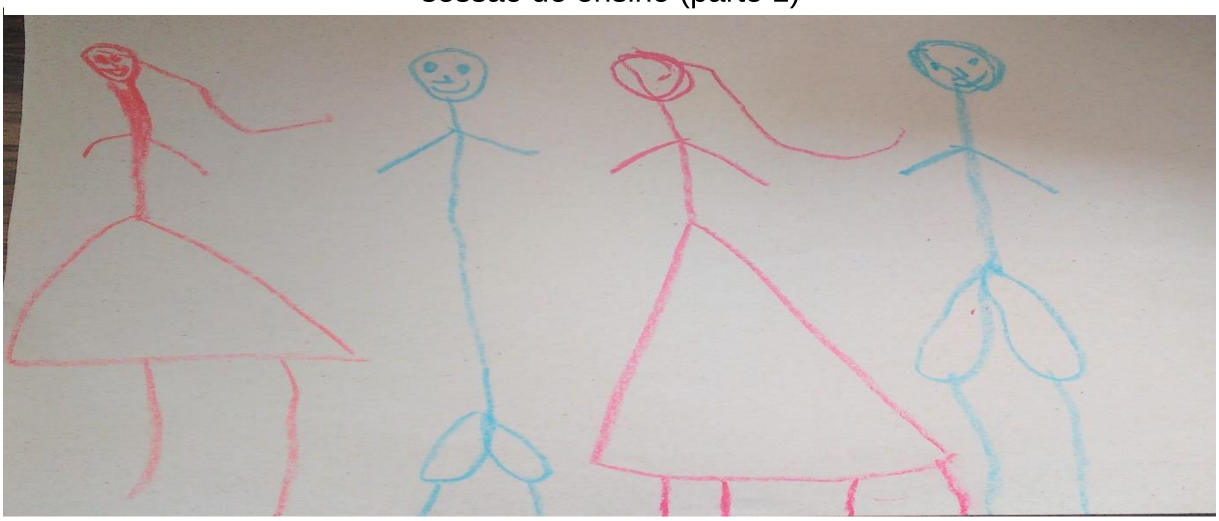
Como se pode observar na Figura 31, a criança retirou os pares que considerou repetidos e fez a contagem de cada uma das duplas como uma possibilidade distinta. Contou sete duplas diferentes. Apesar de ser estimulada a tentar mais possibilidades, considerou que havia finalizado sua resposta.

Figura 31 - Resposta dada pela Criança A5 para o problema de *combinação* na sessão de ensino

Fonte: A Autora

As ilustrações feitas pela Criança B5, representadas pelas Figuras 32 e 33, demonstram a tentativa de padronização, com escolha de cores paras os personagens do enunciado, mas não a mantem até o final. Foi atingida a pontuação 3 (metade ou mais possibilidades sem repetições) no momento de sessão de ensino. Na primeira ilustração feita por B5, Figura 32, há a representação de duas duplas, Vivi (laranja) com Samuel (azul) e Bete (rosa) com Samuel (azul).

Figura 32 - Resposta dada pela Criança B5 para o problema de *combinação* na sessão de ensino (parte 1)



Fonte: A Autora/

Figura 33 - Resposta dada pela Criança B5 para o problema de *combinação* na sessão de ensino (parte 2)

Fonte: A Autora

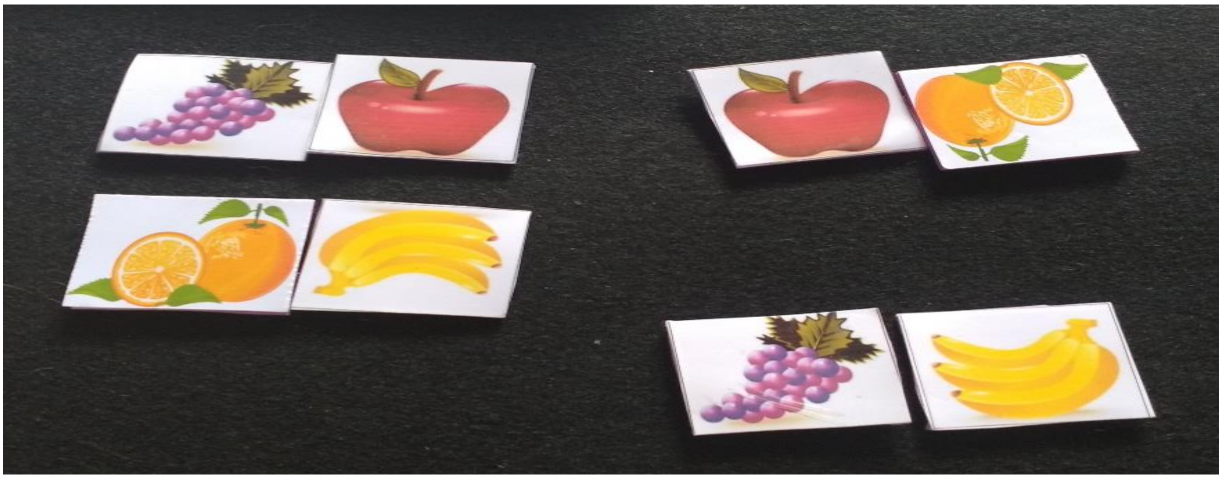
Na Figura 33, foram representadas mais cinco duplas para a brincadeira do pula-pula: Duda (laranja) com Vivi (vermelho); Bete (rosa) com Duda (laranja); Caio (azul) com Vivi (vermelho); Samuel (laranja) com Caio (azul); e Caio (azul) com Bete (rosa). Conseguindo listar um total de sete duplas corretas, restando apenas as duplas: Vivi e Bete; Duda e Caio; e Duda e Samuel.

5.2.2.3 Teste final

Para este momento foi utilizado o seguinte problema: “Para fazer uma salada de frutas, Alice possui quatro frutas (banana, maçã, uva e laranja). Só podem ser colocadas duas frutas na salada. De quais maneiras diferentes ela poderá fazer a salada?”. Esperava-se que as crianças enumerassem todas as seis possibilidades, levando em conta os invariantes desse problema de *combinação*: (banana, maçã), (banana, uva), (banana, laranja), (maçã, uva), (maçã, laranja) e (uva, laranja).

A Criança A5 conseguiu apresentar mais da metade de possibilidades (quatro de seis), obtendo no teste final, nesse tipo de problema, Pontuação 3. Das seis possibilidades faltou apenas a criança enumerar banana com maçã e uva com laranja.

Figura 34 - Resposta dada pela Criança A5 para o problema de *combinação* no teste final



Fonte: A Autora

A criança mostrou entender que não podia realizar repetição de saladas e que, por exemplo, uva com maçã era o mesmo que maçã com uva. Quando indagada se havia finalizado, a criança respondeu que sim. Confundiu-se na hora de contar as possibilidades, dando como resposta oito, mas logo fez uma autocorreção e finalizou dizendo que foram quatro saladas diferentes.

5.2.2.4 Mais exemplos de avanços nos problemas de combinação

No G2 temos também os exemplos de duas crianças que melhoram seus desempenhos, saindo de pontuações mais baixas para mais altas. Um exemplo é o da Criança B2 que pontuou 3 no teste inicial e conseguiu pontuar 5 no teste final, esgotando as possibilidades. Outro exemplo é o da Criança B7 que na fase de teste inicial obteve Pontuação 1, apresentando menos da metade de possibilidades, e no teste final conseguiu atingir 3 pontos, metade ou mais de possibilidades sem repetição.

As Figuras 35 e 36 mostram as respostas dadas pelas crianças B2 e B7, respectivamente, no teste final para o problema de *combinação*.

Figura 35 - Resposta dada pela Criança B2 para o problema de *combinação* no teste final

Fonte: A Autora

A Figura 35 mostra que a Criança B2 desenhou as seis possibilidades solicitadas: laranja com banana, maçã com uva, uva com laranja, maçã com banana, maçã com laranja e banana com uva. Evidenciou-se, assim, que essa criança e outras podem usar desenhos em suas soluções de problemas combinatórios – desde que os contextos sejam familiares e as quantidades de possibilidades sejam pequenas.

Figura 36 - Resposta dada pela Criança B7 para o problema de *combinação* no teste final

Fonte: A Autora

Na Figura 36, a Criança B7 consegue listar três possibilidades: uva com maçã, banana com maçã e uva com laranja. Ambos, o material de manipulação e os desenhos, possibilitaram avanços na compreensão de problemas de *combinação*. Os dois recursos permitiram reflexões das crianças sobre como em *combinações* a ordem dos elementos não determina possibilidades distintas

5.2.3 Problemas de *permutação*

5.2.3.1 Teste inicial

O problema utilizado no primeiro momento foi: “Laura está organizando espaços de dormir para os três bichinhos do sítio de sua tia (um pato, uma galinha e uma ovelha). Esses espaços ficarão um ao lado do outro. De quais maneiras diferentes os bichinhos podem ser organizados?”. Neste tipo de problema é preciso que todos os elementos do grupo sejam utilizados e a ordem que forem colocados cria novas possibilidades. Ao todos as crianças precisavam enumerar seis possibilidades: (pato, galinha, ovelha), (pato, ovelha, galinha), (galinha, pato, ovelha). (galinha, ovelha, pato), (ovelha, pato, galinha) e (ovelha, galinha, pato).

Como exemplo de progresso das crianças a partir do processo interventivo, serão apresentadas e analisadas as respostas dadas pela Criança B2. Na Figura 37 tem-se a resposta dada pela criança para o problema de *permutação* do teste inicial.

Figura 37 - Resposta dada pela Criança de B2 para o problema de *permutação* no teste inicial

Fonte: A Autora

A Criança B2 teve a iniciativa de representar cada animal com uma cor: amarelo para a representação da galinha, laranja para a ovelha e rosa para o pato. Ela faz apenas duas combinações, que estão iguais. Ela não compreendeu naquele momento que a ordem mantida não gerou uma nova combinação. A transcrição do diálogo que segue mostra que a criança considerou as duas combinações como duas possibilidades, embora tivesse descrito apenas uma.

Pesquisadora: Você terminou?
Criança B2: Sim.
Pesquisadora: Qual a sua resposta?
Criança B2: É o que tia?
Pesquisadora: Qual a sua resposta final?

Criança B2: Vai dormir a galinha, a ovelha e depois o pato.

Pesquisadora: Quantos são?

Criança B2: Duas vezes.

Pesquisadora: Como você pensou para dar esta resposta?

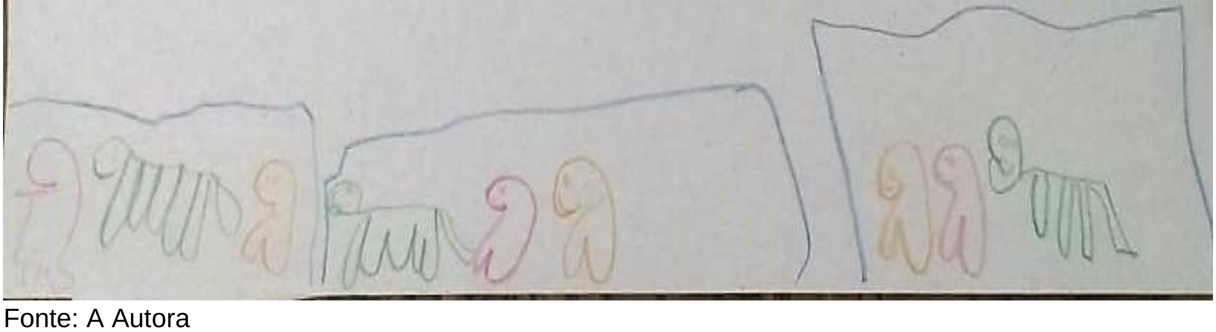
Criança A2: Eu pensei que aqui vai ser um dia, aí aqui vai ser outro dia.

Apesar da indicação de uma mesma possibilidade duas vezes, é importante ressaltar que a criança compreendeu o invariante de escolha – pois nas duas possibilidades enumeradas utilizou todos os elementos do grupo dado – como se espera seja feito em casos de *permutações*. Outra compreensão é a que ela criou dois subgrupos e não seis possibilidades. Entretanto, a criança não entendeu inicialmente que precisava mudar a posição dos animais para que os grupos possam ser considerados como possibilidades diferentes. A tentativa inicial da Criança B2 também ficou longe da resposta esperada: seis possibilidades de permutar três animais entre si.

5.2.3.2 Sessão de ensino

Para a sessão de ensino, foram utilizados os mesmos padrões de perguntas propostos no Método, com o objeto de que a criança conseguisse observar alguns dos invariantes característicos do problema de *permutação*. A Figura 38 ilustra a resposta dada pela Criança B2.

Figura 38 - Resposta da pela Criança B2 para o problema de permutação na sessão ensino



Fonte: A Autora

Ao ser solicitada que respondesse novamente ao problema, espontaneamente, como feito no teste inicial, a Criança B2 sistematizou a escolha de cores para os animais. Utilizou, diferentemente do teste inicial, rosa para a representação da galinha, verde para a ovelha e laranja para o pato. Na sessão de ensino foi ressaltado que era preciso realizar combinações diferentes e a criança percebeu que era preciso mudar os animais de lugar para que as possibilidades ficassem diferentes. O diálogo que segue indica reflexões da criança que possibilitaram avanços no sentido de entendimento dos invariantes de problemas de *permutação*.

Pesquisadora: Como você pode escolher as posições dos animais para que elas durmam em caminhas diferentes?

Criança B2: Eu posso fazer as caminhas. (Desenha as caminhas).

Pesquisadora: E como você vai arrumá-los nas caminhas?

Criança A2: Pera aí tia .... Nessa cama o pato, a ovelha e a galinha.

Pesquisadora: E agora? Vamos mudá-los de posição e ver como fica?

Criança B2: Eu vou colocar a ovelha, com o pato e a galinha. Tia eu não quero mais. (A criança demonstra cansaço).

Pesquisadora: Tá certo, mas você acha que consegue fazer mais?

Criança B2: Só mais um.

Pesquisadora: Então mostra como vai ficar.

Criança A2: A galinha, o pato e a ovelha.

Pesquisadora: Tem mais algum destes desenhos que você fez os animais dormiram iguais?

Criança B2: Não, porque tá todos três diferentes.

Pesquisadora: Então quantas vezes você conseguiu arrumar?

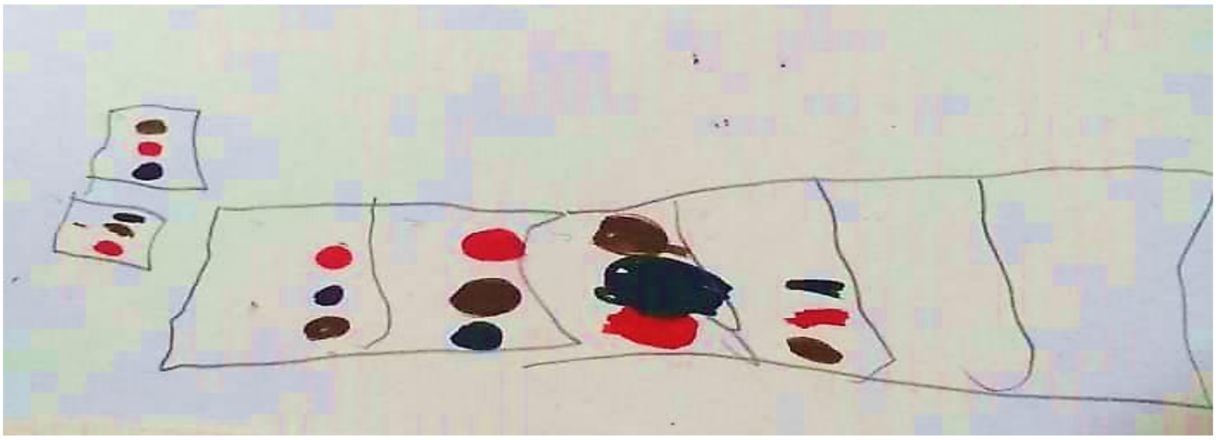
Criança A2: Três vezes.

Estão bem claros os avanços dessa criança durante o processo de sessão de ensino. Ela passou da enumeração de apenas uma possibilidade (com casos repetidos) para a enumeração de três possibilidades. Embora a criança B2 não tenha esgotado as possibilidades, ela conseguiu enumerar um número maior de combinações, mais próximo ao número total de possibilidades e sem repetir possibilidades. Observa-se, claramente, que o cansaço da produção de desenhos impediu a criança de continuar na busca de novas possibilidades. Como apresentado pelo estudo de Pessoa e Borba (2012), esse é um avanço esperado na Educação Infantil, não necessariamente que se chegue ao esgotamento de possibilidades, mas que se perceba mais claramente cada um dos invariantes das situações combinatórias.

5.2.3.3. Teste final

O problema destinado para o teste final foi: “A titia quer guardar os seus três pares de sapatos (preto, vermelho e marrom) na prateleira um ao lado do outro. De quais maneiras diferentes eles podem ser organizados?”. Essa permutação também levava a seis possibilidades: (preto, vermelho, marrom), (preto, marrom, vermelho), (vermelho, preto, marrom), (vermelho, marrom, preto), (marrom, preto, vermelho) e (marrom, vermelho, preto).

Figura 39 - Resposta dada pela Criança B2 para o problema de *permutação* no teste final



Fonte: A Autora

Como se pode observar na Figura 39, a Criança B2 fez a representação de um lugar que ela considerou ser uma ‘sapateira’ que possuía gavetas. Ela desenhou oito espaços e preencheu seis deles. Ao final, ela contou que existiam seis gavetas preenchidas com os sapatos e todos eles guardados diferentemente. As possibilidades foram dispostas da seguinte maneira: sapato vermelho, marrom e preto (primeira possibilidade); sapato preto, vermelho e marrom (segunda possibilidade); sapato marrom, preto e vermelho (terceira possibilidade); sapato preto, marrom e vermelho (quarta possibilidade); sapato vermelho preto e marrom (quinta possibilidade); sapato marrom, vermelho e preto (sexta possibilidade).

É possível notar que há uma sofisticação no modo como esta criança raciocinou para montar suas respostas e é visível a melhora entre as respostas do teste inicial e teste final. Em ambos os testes ela optou por um esquema de cores (no primeiro não havia essa indicação de cores no enunciado, mas ela optou por essa estratégia) e no segundo teste a criança aproveitou as cores indicadas para esquematizar os sapatos citados. Ela conseguiu entender que a ordem de elementos em um problema como esse (de *permutação*) indica possibilidades distintas, chegando, assim, ao esgotamento destas possibilidades

5.2.3.4. Mais exemplos de avanços nos problemas de permutação

A Figura 40 mostram o avanço da Criança A9 no teste final, chegando a 3 pontos com mais da metade das possibilidades sem repetições. Das seis possibilidades, ela indicou quatro: (marrom, preto, vermelho), (preto, vermelho, marrom), (vermelho, marrom, preto) e (preto, marrom, vermelho). Faltaram apenas duas possibilidades: (vermelho, preto, marrom), e (marrom, vermelho, preto).

Figura 40 - Resposta dada pela Criança A9 para o problema de permutação no teste final

Fonte: A Autora

Durante o teste inicial A9 atingiu a pontuação 1 (menos da metade de possibilidades), propondo apenas duas possibilidades. No teste final apresentou uma evolução no sentido de compreender os invariantes de *escolha* e *ordem* dos elementos. O *esgotamento de possibilidades* foi uma dificuldade que permaneceu. É importante salientar a relevância do material de manipulação nesse caso, pois manusear as imagens permitiu verificar diferentes possibilidades combinatórias e esta é uma das formas possíveis de se desenvolver o raciocínio combinatório.

5.2.4 Problemas de *produto de medidas*

5.2.4.1 Teste inicial

Os problemas de *produto de medidas* parecem ser os, inicialmente, mais facilmente entendidos pelas crianças, como também indicado em estudos anteriores (Pessoa e Borba 2009; Lima, 2010; Azevedo, 2013).

Duas crianças conseguiram desde o teste inicial esgotarem todas as possibilidades desse tipo de situação problema, o que não ocorreu com nenhum outro problema. Nesse tipo de problema é esperado que a partir da combinação dos elementos de dois ou mais grupos diferentes seja criado um novo grupo (de natureza diferente dos grupos originais) e que a ordem que os elementos forem apresentados não indique possibilidades distintas. Pode ser que por serem grupos distintos fique mais claro às crianças como devem ser feitas as escolhas e que também percebam mais claramente a não influência da ordenação nesse tipo de problema.

No teste inicial foi apresentado o seguinte problema: “Carol precisa se arrumar para ir à festa, mas não sabe que roupa usar. Ela tem quatro blusas (lilás, vermelha, amarela e branca) e duas calças (rosa e verde). De quais maneiras diferentes ela pode se vestir para ir à festa?”. Nesse problema, era esperado que as crianças levantassem os oito conjuntos resultantes da combinação das quatro blusas com as duas calças: (lilás, rosa), (lilás, verde), (vermelha, rosa), (vermelha, verde), (amarela, rosa), (amarela, verde), (branca, rosa) e (branca, verde).

Na Figura 41 pode-se observar a resposta dada por uma criança do grupo que produziu desenhos. Aqui é possível perceber um caso de predileção, pois a criança fala de suas preferências por certas cores na hora montar as respostas. A criança B5 afirmou que estava desenhando roupas iguais (blusa lilás e calça rosa; blusa vermelha e calça verde), mas explicou que eram pares de roupas para ela e para a pesquisadora. No momento da contagem de conjuntos de roupas ela incluiu todos os elementos que foram desenhados, num total de 14 peças de roupas. Sua pontuação no teste inicial foi 2 (metade ou mais possibilidades listadas com repetição). Foram desenhadas corretamente cinco possibilidades, os subgrupos de roupas: 1) blusa lilás e calça rosa; 2) blusa branca e calça verde; 3) blusa amarela e calça verde; 4) blusa vermelha e calça branca; 5) blusa vermelha e calça verde.

Figura 41 - Resposta dada pela Criança B5 para o problema de *produto de medidas* no teste inicial

Fonte: A Autora

Os invariantes inicialmente percebidos foram os de *escolha*, combinar elementos de dois conjuntos diferentes e criar um subgrupo; o de *ordem*, já que apresentar estes elementos em posições diferentes não indica novas possibilidades. Embora cinco combinações tenham sido apresentadas pela criança, não foi incialmente alcançado o esgotamento de possibilidades. Essa dificuldade de esgotamento com esse tipo de problema – embora o mais usual dentre os problemas combinatórios no início da escolarização – também foi observado em outros estudos (Vega e Borba, 2014; Azevedo 2013, Pessoa e Borba 2009).

5.2.4.2 Sessão de ensino

Seguiu-se o protocolo de incentivo e questionamento para que as crianças pensassem sobre o que estavam produzindo. A Criança B5 apresentou um bom entendimento do que lhe foi solicitado e que pensasse nos conjuntos de roupas para ela. Durante os questionamentos de sessão de ensino ela faz desenhos de acordo com cada cor de blusa, seguindo respectivamente com a calça rosa e a calça verde: 1) blusa amarela com as calças rosa e verde; 2) blusa lilás com calças rosa e verde; 3) blusa branca com calças rosa e verde; 4) blusa vermelha com calças verde e rosa.

Na Figura 42 pode-se observar a resposta dada pela criança durante a sessão de ensino, na qual indica as oito possibilidades: (amarela, rosa), (amarela, verde), (lilás, verde), (vermelha, rosa), (vermelha, verde), (lilás, rosa), (branca, rosa) e (branca, verde).

Figura 42 - Resposta dada pela Criança B5 para o problema de *produto de medidas* na sessão de ensino

Fonte: A Autora

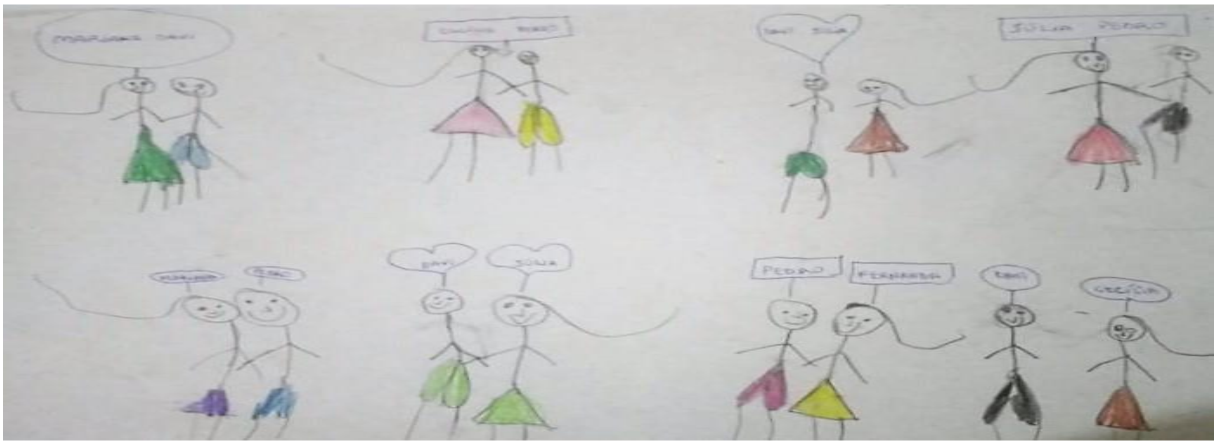
Assim, foram dados como resposta oito conjuntos de roupas corretos e sem repetições. A criança percebeu facilmente que cada par formado era um conjunto de roupa diferente, esgotando as possibilidades.

5.2.4.3 Teste final

Nessa fase, foi solicitada a resolução do seguinte problema: "Na festinha da escola haverá um bailinho. Os dois meninos (Pedro e Davi) querem dançar com as suas quatro coleguinhas: (Cecília, Mariana, Fernanda e Júlia). De quais maneiras diferentes os pares podem ser formados, para que os meninos dancem com todas as meninas?". Esperava-se que as crianças identificassem os oito pares diferentes que podem ser formados com dois meninos e quatro meninas: (Pedro, Cecília), (Pedro, Mariana), (Pedro, Fernanda), (Pedro, Júlia), (Davi, Cecília), (Davi, Mariana), (Davi, Fernanda) e (Davi, Júlia).

É interessante ver que a criança não ficou presa a pares fixos (um menino não poderia dançar com meninas diferentes) e solicitou à pesquisadora que a cada par de dança desenhado fosse escrito o nome dos personagens, para que assim fossem identificados, como se pode observar na Figura 43.

Figura 43 - Resposta dada pela Criança B5 para o problema de *produto de medidas* no teste final



Fonte: A Autora

A criança ilustrou os seguintes pares de dança: 1) Mariana e Davi; 2) Cecilia e Pedro; 3) Davi e Júlia; 4) Júlia e Pedro; 5) Mariana e Pedro; 6) Davi e Júlia; 7) Pedro e Fernanda; e 8) Davi e Cecília. A criança não esgotou todas as possibilidades e repetiu o par Davi e Júlia, repetição essa que é percebida pela criança, ao solicitar que a pesquisadora realizasse a leitura dos nomes dos personagens nas plaquinhas. Percebendo a repetição, não a leva em consideração na hora de apresentar sua resposta final.

Foram listadas sete possiblidades corretas faltando apenas uma, Davi e Fernanda. Por fim, pediu mais uma vez que fossem lidos os nomes escritos, decidindo que não havia mais combinações a serem feitas.

Atingindo 2 pontos a Criança B5 conseguiu perceber dois invariantes: *escolha* dos elementos de dois conjuntos distintos para constituir um outro agrupamento e a *ordem* de apresentação das duplas que não exerce influência. Porém ainda não alcançou o esgotamento, embora se chega muito próximo dele (sete das oito possibilidades), propondo mais possibilidades corretas em comparação ao teste inicial.

As crianças do G2 (desenhos) tiveram uma queda de desempenho no teste final, no problema de *produto de medidas,* apesar de outros estudos já apontarem que ele é mais facilmente compreendido pelas crianças. Isto pode ser atribuído ao fato de ter sido o último problema a ser apresentado e pode ter sido influenciado pelo efeito cansaço, já que precisariam produzir mais ilustrações e muitas das crianças alegavam não desejarem dar continuidade na atividade.

5.2.4.4 Mais exemplos de avanços nos problemas de produto de medidas

As Figuras 44 e 45 são produções das crianças A7 e A10 do G1 (material de manipulação) que mostram suas melhoras no teste final.

A Criança A7 no teste inicial atingiu 3 pontos (metade ou mais possibilidades sem esgotar), com seis possibilidades corretas, avançando no teste final para 5 pontos (esgotamento de possibilidades sem repetições). Na Figura 44 as duplas foram descritas como primeira dupla Pedro e Mariana; na coluna da esquerda as duplas: Davi e Mariana, Fernanda e Pedro, Cecília e Davi, Cecília e Pedro; e do lado direito as duplas Júlia e Pedro; Fernanda e Davi; e Davi e Júlia.

Figura 44 - Resposta dada pela Criança A7 para o problema de produto de medidas no teste final

Fonte: A Autora

A criança demonstrou compreender os três invariantes: de *escolha*, lidando com os elementos de dois grupos e formando um novo grupo; a *ordem* dos elementos que, aqui, não apresenta influência na resposta final; e o *esgotamento de possibilidades*, formando oito pares de dança, sem repetições. Apesar de ter apresentado as oito possibilidades requeridas, A7 é um dos poucos casos que não consegue avançar no sentido de contagem dos casos e como resposta final contabiliza todos os elementos, afirmando como resposta: 16 possibilidades.

No caso da Criança A10, ela fez 3 pontos (metade ou mais possibilidades sem repetições) no teste inicial e avançou propondo um número maior de casos possíveis no teste final, seis de um total de oito. Na Figura 45 observa-se a resposta dada por essa criança no teste final.

Figura 45 - Resposta pela Criança A10 para o problema de produto de medidas no teste final

Fonte: A Autora

A criança aparenta demonstrar compreender os dois invariantes: de *escolha*, lidando com os elementos de dois grupos e formando um novo grupo e a *ordem* dos elementos. Não chega ao *esgotamento de possibilidades* formando seis dos oito pares de dança, sem repetições: 1) Davi e Fernanda; 2) Pedro e Mariana; 3) Pedro e Fernanda; 4) Davi e Cecília; 5) Júlia e Pedro; e 6) Júlia e Davi. A Criança A10 avança no entendimento de contagem dos casos, reconhecendo que cada dupla é um caso possível e como resposta final contabiliza seis possibilidades.

O próximo capitulo traz considerações a respeito do que foi observado no estudo e as conclusões que podem ser tiradas, respaldadas pelos aportes teóricos anteriormente citados. Também se apresentarão algumas implicações educacionais e, ainda, questionamentos em aberto que poderão ser investigados em pesquisas posteriores.

CONSIDERAÇÕES FINAIS
Capítulo 6

O presente estudo teve como foco principal o levantamento e a análise de conhecimentos de situações combinatórias em desenvolvimento por parte de crianças da Educação Infantil (EI) e a promoção de reflexões a respeito de como se pode, desde cedo, auxiliar as crianças no desenvolvimento de seus raciocínios matemáticos – em particular o combinatório – propiciando assim, melhores condições de aprendizagem da Matemática. Desse modo, objetivou-se investigar aspectos do raciocínio combinatório em construção por crianças da EI e possíveis modos – com uso de material de manipulação e por meio da produção de desenhos – de iniciar o ensino da Combinatória neste nível de escolarização, verificando se, e como, o uso de material de manipulação e a produção de desenhos podem auxiliar na ampliação dos raciocínios combinatórios. O raciocínio combinatório é uma forma de pensar que necessita de um longo período para se desenvolver e a presente pesquisa busca corroborar com outras (SANTOS, et al., 2011; PESSOA; BORBA 2012) que defendem o início mais precoce do trabalho com situações combinatórias na escola.

Acredita-se que o desenvolvimento desse raciocínio possibilitará melhores condições de aprendizagem da Matemática, de um modo geral, pois é uma forma de pensar que estimula a contextualização de situações, o raciocínio hipotético e a sistematização na resolução de situações.

Dessa forma, foram abordadas e analisadas distintas situações combinatórias (*arranjos*, *combinações*, *permutações* e *produtos de medida*) – situações com características bem distintas dos demais problemas do campo multiplicativo. Foram, também, observados os invariantes apreendidos pelas crianças e analisou-se o papel de duas formas distintas de representar

A partir do contexto em que a pesquisa esteve inserida – crianças da Educação Infantil que ainda não dominavam a leitura, a escrita e as operações aritméticas – foi possível observar a introdução de conceitos matemáticos específicos – no caso os referentes à Combinatória – para este nível de ensino. Para tal, foram utilizados recursos que não exigissem leitura e/ou escrita de palavras, nem uso de operações matemáticas formais, e que pudessem ser efetivados de maneira leve e lúdica. Optou-se pelo uso de material de manipulação e pela produção de desenhos – amparado em referenciais teóricos (PAIS, 2001 e LORENZATO 2006) e estudos anteriores (SANDES, 2009 e SMOLE, 2013) os quais defendem esses recursos como modos de ensino e de aprendizagem da Matemática no início da escolarização.

A maioria das crianças já demonstrava entender antes do processo de sessão de ensino alguns invariantes combinatórios e as principais dificuldades delas eram:

1. A maioria compreendia o invariante de escolha, pois selecionavam a quantidade correta de elementos na construção das combinações solicitadas;
2. Algumas das crianças confundiam inicialmente o número de elementos enumerados com a quantidade de possibilidades levantadas;
3. O invariante de ordenação era pouco compreendido e, assim, as crianças erravam no levantamento de possibilidades, principalmente em problemas de *arranjo*, *combinação* e *permutação*;
4. Muitas crianças repetiam possibilidades iguais;
5. A falta de sistematização dificultava o levantamento das possibilidades;
6. O esgotamento de possibilidades era a maior dificuldade observada (como também evidenciado em estudos anteriores);
7. As crianças não conseguiam explicitar como haviam pensado no levantamento das possibilidades enumeradas.

Com o apoio do material de manipulação e dos desenhos, as crianças deram indícios de avanços em seus raciocínios combinatórios, assim como observado em estudos anteriores com crianças em início de escolarização (PESSOA E BORBA, 2012). Houveram alguns avanços quantitativos – com aumento no número de possibilidades enumeradas. As crianças passaram a perceber que as questões não solicitavam apenas uma possibilidade, mas, sim, o levantamento de todas as combinações possíveis. A partir de tentativas houve aumento no número de combinações levantadas e, em mais casos do que no teste inicial, as crianças foram capazes de esgotar o total das possibilidades. Passaram também a evitar repetições de possibilidades.

Embora algumas crianças tenham evidenciado pouco avanço quantitativo em suas pontuações, mesmo mantendo as pontuações originais no teste final, há evidências de saltos qualitativos nos seus desempenhos. Muitas crianças – a partir dos questionamentos da pesquisadora nos momentos de sessão de ensino – passaram a dar evidências de compreensão do invariante de ordem, diferenciando quando, ou não, a ordem dos elementos indicava possibilidades distintas.

Algumas das crianças participantes do estudo, mesmo utilizando maior sistematização em suas resoluções, ainda tiveram dificuldade em esgotar todas as possibilidades. Ressalta-se com esse achado o longo tempo necessário para se desenvolver o raciocínio combinatório assim como é longo o período para que seja possível a criança realizar associações, passo esse em que precisa classificar, ordenar e estabelecer correspondências. E esta é a base que precede o percurso até se chegar ao pensamento formal, o qual possui, em sua essência, o raciocínio hipotético-dedutivo, pois “a dedução consiste, então, em ligar essas suposições, e delas deduzir suas consequências necessárias” (Inhelder e Piaget, 1972, p. 189).

Os resultados obtidos no presente estudo indicam a possibilidade de abordagem das situações combinatórias em toda trajetória escolar, em particular na Educação Infantil – por meio de problemas simples, com baixos números totais de possibilidades e com recursos adequados. Embora os livros didáticos dos anos iniciais do Ensino Fundamental, em grande parte, abordem explicitamente apenas problemas de *produto de medidas*, a pesquisa aqui relatada aponta a possibilidade, desde a EI, de se trabalhar também os demais problemas combinatórios (*combinação*, *permutação* e *arranjo*). Um trabalho com variadas situações combinatórias pode permitir a percepção de semelhanças e diferenças entre os distintos tipos de problemas. Trabalhar apenas com um tipo de problema restringe a compreensão da Combinatória e limita o uso de estratégias na resolução de problemas combinatórios.

Dessa forma, os achados da presente pesquisa dão suporte à defesa do ensino mais cedo da Combinatória, conforme indicado nos documentos oficiais que regem a educação no Brasil, os quais apresentam e caracterizam as competências que se espera que as crianças atinjam neste nível inicial de escolaridade. Esses documentos defendem um desenvolvimento global das crianças e entende-se, aqui, que nesse desenvolvimento está incluso o pensar sobre possibilidades, sobre a combinação de elementos de conjuntos.

No desenvolvimento do estudo, tomou-se como aporte teórico base a Teoria dos Campos Conceituais, desenvolvida por Gérard Vergnaud, a qual ressalta que a formação de conceitos se dá através do tripé que abrange um composto de *situações-problemas (S)* que fazem o conceito ter um *significado; os invariantes (I)*, que são as especificidades operacionais do conceito, seus objetos e relações viabilizadoras da universalização e transmissão do conhecimento; e as *representações (R)* que são os símbolos utilizados para representar o conceito. Esse aporte mostrou-se adequado no desenho metodológico da presente pesquisa, bem como na análise dos dados obtidos na pesquisa.

Foram explicitados, no presente texto, alguns estudos anteriores que envolveram as situações combinatórias em variados níveis de escolaridade, os quais reforçam a importância do desenvolvimento do raciocínio combinatório para a vida escolar e cotidiana. O atual estudo buscou avançar no sentido de discutir caminhos que podem auxiliar as crianças a terem um melhor avanço na compreensão dos invariantes das situações combinatórias e de como lidar com problemas deste tipo.

Em pesquisa recente, Silva (2014) indicou que após realizar levantamento na literatura referente à resolução de problemas multiplicativos, nos quais estão inclusos os problemas combinatórios, observou-se um número reduzido de pesquisas voltadas ao raciocínio combinatório na Educação Infantil. Com esta temática há um número maior de estudos desenvolvidos nos demais anos que compõem a Educação Básica. Isso reforça a necessidade de aprofundamento dos estudos nesta faixa etária e das suas diversas possibilidades de ensino.

É promissor pensar, a partir do que aqui foi construído durante o estudo com as crianças, que, mesmo ainda estando na Educação Infantil, houveram avanços no raciocínio combinatório. Ressalta-se que foram trabalhadas situações simples com número não elevado de possibilidades e que se mostraram possíveis de serem resolvidas por crianças desse nível de escolarização, uma vez que algumas delas conseguiram em situações variadas enumerarem todas as possibilidades em questão.

Não ter domínio de escrita e leitura, e das operações matemáticas formalizadas não foram empecilhos a avanços no raciocínio combinatório. As crianças demonstram ser capazes de solucionar variados problemas com os meios que lhe foram oferecidos – neste caso o material de manipulação concreto e o desenho.

Os materiais de manipulação permitiram a ação das crianças sobre os conceitos trabalhados – ação dos sujeitos sobre os objetos. As fichas com ilustrações dos elementos dos enunciados permitiram ampliar a compreensão dos contextos dos problemas, bem como auxiliaram no levantamento das possibilidades, tornando viável a mudança na enumeração das possibilidades, quando necessário.

O desenho também foi uma oportunidade de favorecer às crianças a procura por suas próprias estratégias para resolver problemas. Essas representações gráficas – aqui o foco da abordagem foi o desenho – auxiliaram o pensamento a respeito das situações matemáticas que foram propostas e na compreensão dos diferentes invariantes nelas contidas. Os desenhos tanto serviram para que expressassem suas resoluções, quanto para organizar e representar as informações dos problemas.

Entretanto, o uso do desenho trouxe limitações durante o processo de resolução, pois mostrou-se ser um processo cansativo e, no decorrer das atividades, as crianças se desestimulavam a tentar mais possibilidades. Permitir a resolução de problemas a partir de desenhos foi de suma importância, pois reforça a ideia da possibilidade do trabalho com conceitos matemáticos, mesmo que não haja domínio de leitura ou conhecimentos formalizados (Smole, 2000), mas as limitações desse tipo de produção precisam ser levadas em consideração.

Observando o desempenho das crianças e comparando-o entre os dois grupos é possível perceber que o material de manipulação apresentou uma maior vantagem, em relação à produção de desenhos. Com as fichas, as crianças podiam visualizar mais facilmente as representações dos elementos contidos nos enunciados dos problemas, puderam visualizar e movimentar as figuras, o que oportunizou observar e experimentar variadas possibilidades. Este tipo de recurso influenciou positivamente o desempenho, pois as crianças não dispersaram seu raciocínio na tentativa de ilustrar e contextualizar os desenhos produzidos, o que acontecia claramente com as crianças do grupo de desenho, e podiam voltar sua concentração para o que era pedido na situação-problema. Essa constatação vai ao encontro do que foi apresentado por Pais (2001) que ressalta a relação entre o fazer e o aprender e como este processo de manipulação é uma forma de ajudar as crianças a conseguirem avançar no desenvolvimento de conceitos.

Com tudo que foi apresentado e discutido a partir dos resultados obtidos, o presente estudo reforça que é possível trabalhar *Combinatória* na Educação Infantil e que tanto desenhos quanto material de manipulação podem ser bons recursos, com a vantagem de o material de manipulação já ter os elementos prontos para levantamento das possibilidades.

Concomitante com o que é proposto pela Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, quer-se chamar a atenção para o esforço de favorecer o desenvolvimento cognitivo das crianças, sabendo que ele é consequência das situações e conceitos específicos que estão interligados e necessitam um do outro para se desenvolverem.

Viabilizar este ganho de novos conceitos leva tempo e precisa ser cuidadosamente tratado desde cedo, como é o caso da Combinatória, para que as crianças possam ter um conjunto de conhecimento iniciais que possam ser agregados a outros novos conhecimentos no decorrer dos anos de sua trajetória escolar, tratado por Vergnaud como “longo prazo”

Estas competências podem ser iniciadas e estimuladas a partir dos cinco e seis anos de idade. Os estudos vêm comprovando a capacidade das crianças para tal, trabalhando adequadamente e respeitando sua faixa etária. Esta fase educacional permite abranger diferentes cenários, oferecer novas dinâmicas e ampliar as experiências diárias que em “curto prazo”, segundo Vergnaud, são ponto de apoio para os professores e repercutem positivamente em todo desenvolvimento conceitual destas crianças.

É um trabalho diário, em que o professor precisa estar atento às demandas de seus alunos e oferecer-lhes um desenvolvimento global e significativo. A Educação Infantil tem, em sua essência, os primeiros cuidados e a socialização fora do contexto familiar. A escola e o professor são os dois elementos que irão conduzir e mediar essas crianças para uma nova perspectiva de mundo em que irão unir o que possuem de conhecimento de mundo com o conhecimento escolar.

Diante da pesquisa realizada, possíveis estudos posteriores que podem ser desenvolvidos são:

1. Estudo com um maior tempo de sessão de ensino para as crianças refletirem mais sobre os invariantes de situações combinatórias. Esse estudo possibilitaria a verificação de maiores avanços por parte das crianças.

2. Investigação mais aprofundada das representações simbólicas geradas com materiais de manipulação e com desenhos no aprendizado da Combinatória.

3. Verificação junto a professores atuantes na EI, no que se refere ao que concebem como possível de ser trabalhado junto a seus alunos, como podem ser formados para esse trabalho e observá-los ensinando seus alunos,

analisando o papel da mediação para o desenvolvimento do raciocínio combinatório das crianças.

Como já amplamente verificado, o raciocínio combinatório necessita de um longo período para se desenvolver. O presente estudo traz evidências da possibilidade de um trabalho longitudinal com a Combinatória, o que gradualmente favorecerá a estruturação do pensamento matemático dos estudantes. A pesquisa traz evidências de que professores de Educação Infantil podem iniciar o trabalho com situações combinatórias a partir de uso de material de manipulação e de produção de desenhos, possibilitando a discussão de propriedades dos distintos tipos de problemas combinatórios baseados no tripé de Vergnaud, propiciando diferentes situações (*S)*, observando seus invariantes (*I)* e trazendo diferentes tipos de representações (*R)* e, a partir destas premissas, favorecer o desenvolvimento conceitual das crianças.

REFERÊNCIAS

AZEVEDO, J. **Alunos dos anos iniciais construindo árvores de possibilidades: é melhor no papel ou no computador?** Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2013.

BATISTA, A. M. S. B.; SPINILLO, A. G. Nem todo material concreto é igual: a importância dos referentes na resolução de problemas. Estudos de Psicologia (UFRN), v. 13, p. 13-21, 2008.

BORBA, R. **Antes cedo do que tarde:** o aprendizado da combinatória no início da escolarização. Anais eletrônicos do Encontro de Combinatória, Estatística e Probabilidade dos Anos Iniciais. ENCEPAI. Recipe-PE. 2016.

BORBA, R.; ROCHA, C.; AZEVEDO, J. **Estudos em Raciocínio Combinatório:** investigações e práticas de ensino na Educação Básica. **Bolema**. Boletim de Educação Matemática (UNESP. Rio Claro. Impresso), V. 29, pp. 1348-1368, 2015.

BORGA, M. F.; JUSTO, J.C.R. **Representações gráficas espontâneas na resolução de problemas aditivos no 2º ano do ensino fundamental** - VI Congresso Internacional de Ensino de Matemática, 2013.

BRASIL, MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Matemática. 1º e 2º ciclos. Secretaria de Ensino Fundamental, 1997.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação**. Lei n 9.394, 20 de Dezembro de 1996.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil**, v.3. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Diretrizes curriculares nacionais para a educação infantil** / Secretaria de Educação Básica. – Brasília : MEC, SEB, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão. Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica. **Conselho Nacional da Educação. Câmara Nacional de Educação Básica.Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica /** Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013.

CARRAHER, T. **O método clínico**: **usando os exames de Piaget**. São Paulo: Cortez, 1989. 161p.

FERNANDES, E. **Rethinking success and Failure in Mathematics learning**: The Role of Participation. In MATOS, J.F.; VELOSO, P.; YASUKAWA, K. (Orgs.) *Proceedings of the Fifth International Mathematics Education and Society Conference.* Lisboa: Universidade de Lisboa, 2008.

INHELDER, B.; PIAGET. J. **De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent.** Paris: PressesUniversitaires de France, 1955.

Jean Piaget / Alberto Munari; tradução e organização: Daniele Saheb. – Recife:Fundação Joaquim Nabuco, Editora Massangana, 2010.

LIMA, R.C. **O raciocínio combinatório de alunos da Educação de Jovens e Adultos: do início da escolarização até o ensino médio**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2010.

LORENZATO, S. **Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis**. In LORENZATO, S. (Orgs.). *O laboratório de ensino de matemática na formação de professores.* São Paulo: Autores Associados, 2006. p. 3-38.

MAGINA, S.; CAMPOS, T.; GITIRANA, V.; NUNES, T. **Repensando adição, subtração**: contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. – 2º.ed . – São Paulo: PROEM, 2001.

Moro, M. L. F., & Soares, M. T. C. (2006). Níveis de raciocínio combinatório e produto cartesiano na escola fundamental. Educação Matemática Pesquisa, 8, 99-124

NASCIMENTO, D. S.; AMARAL, V. **A matemática na educação infantil com crianças de 5 anos.** Trabalho de Conclusão de Curso. Centro Universitário Católico Salesiano *Auxilium* – UNISALESIANO, Lins-SP,2014.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática.** Porto Alegre: Artmed, 1997.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática.** Porto Alegre: Artmed, 1997.

PAIS, L.C. **Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da geometria**. 2001. Disponível em: <http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_23/analise_significados.pdf> Acesso em: 06 de fevereiro de 2018.

PAIS, L.C. **Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da geometria**. 2001. Disponível em: <http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_23/analise_significados.pdf> Acesso em: 06 de fevereiro de 2018.

PESSOA, C. **Quem dança com quem**: o desenvolvimento do raciocínio combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio. 2009. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2009.

PESSOA, C.; BORBA, R. **Do young children notice what combinatorial situations require?** Proceedings… 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME36), Taiwan, 2012.

PESSOA, C.; BORBA, R.**. O Desenvolvimento do Raciocínio Combinatório na Escolarização Básica**. Em Teia: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, v.1, n.1, 2010. Disponível em: <http://emteia.gente.eti.br/index.php/emteia/article/view/4>

Piaget, J. **A teoria do Piaget**. In: Mussen, P. H. O desenvolvimento psicológico da criança. 6.ed. -. Rio de Janeiro: J. Zahar, p.71-112, 1972.

PIAGET, Jean. **O nascimento da inteligência na criança.** 3 ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1978.

SANDES, J. **O desenho como representação do pensamento matemático da criança no início do processo de alfabetização**. 2009. 115 f., il. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade de Brasília, Brasília, 2009.

SANTOS, M.; MATIAS, P.; PESSOA, C. **O raciocínio combinatório na Educação Infantil**. Trabalho de Conclusão de Curso. Recife, UFPE, 2011.

SILVA, J. **O raciocínio combinatório à luz dos princípios invariantes:** uma análise de problemas de produto cartesiano. Tese de Doutorado. Programa de Pós-graduação em Psicologia Cognitiva. UFPE, 2014.

SILVA, J.; SPINILLO, A. **Como auxiliar crianças na resolução de problemas de raciocínio combinatório**: a explicitação dos princípios invariantes. Anais... da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. Recife – PE, 26 a 31 de junho de 20011.

SMOLE, K. S. **A matemática na Educação Infantil**: a teoria das inteligências múltiplas na prática escolar. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1996.

SMOLE, K.S.; DINIZ, M.I.; CÂNDIDO, P. **Resolução de problemas:** matemática de 0 a 6. Porto Alegre: Artmed, 2000.

SMOLE, K.S.; MUNIZ, C.A. A matemática na sala de aula: reflexões e propostas para os anos iniciais do ensino fundamental. Porto Alegre: Penso, 2013.

SOUZA FILHO, M. L. de S. **Relações entre aprendizagem e desenvolvimento em Piaget e em Vygotsky: dicotomia ou compatibilidade?** Rev. Diálogo Educ., Curitiba, v. 8, n. 23, p. 265-275, jan./abr. 2008.

STERNBERG, R.J. **Psicologia Cognitiva.** 4. ed. Porto Alegre: Artmed, 2008.

VEGA, Danielle. **Qual mais fácil de resolver com 2, 3 ou 4 etapas de escolha**: produto cartesiano, arranjo, combinação ou permutação? Dissertação de Mestrado. Programa de Pós Graduação em Educação Matemática e Tecnológica. UFPE, 2014.

VERGNAUD, G. **A comprehensive theory of representation for mathematics education**. JMB, V17, N2, pp.167-181, 1998.

VERGNAUD, G. **Multiplicative structure**. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Orgs.). Acquisition of mathematics concepts and processes. London: Academic Press, 1983. p. 128-175.

VERGNAUD, G. **O longo e o curto prazo na aprendizagem da matemática.** Educar em Revista. Curitiba, PR: Ed. UFPR, n. Especial 1/2011, p. 15-27, 2011.

VERGNAUD, G. **Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo:** as estruturas aditivas. Análise Psicológica, v. 1, 1986, pp. 75-90.

APÊNDICE A_ MATERIAL DE MANIPULAÇÃO E MATERIAL PARA DESENHO