

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CARTOGRÁFICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS  
GEODÉSICAS E TECNOLOGIAS DA GEOINFORMAÇÃO

---

**JOSÉ ANTÔNIO CAVALCANTE CERQUEIRA**

**DEFINIÇÃO DE UMA SUPERFÍCIE GEOIDAL  
LOCAL ATRAVÉS DE POSICIONAMENTO POR  
GPS**



---

Recife, 2006

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO**  
**CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS GEODÉSICAS E**  
**TECNOLOGIAS DA GEOINFORMAÇÃO**

**José Antônio Cavalcante Cerqueira**

**DEFINIÇÃO DE UMA SUPERFÍCIE GEOIDAL LOCAL ATRAVÉS DE**  
**POSICIONAMENTO POR GPS**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação, do Centro de Tecnologia e Geociências da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação, área de concentração Geodésia Aplicada, e defendida no dia 15/09/2006.

**Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Verônica Maria Costa Romão**

Recife  
2006

**C416d**

**Cerqueira, José Antônio Cavalcante.**

Definição de uma superfície geoidal local através de posicionamento por GPS. – Recife: O Autor, 2006.  
ix, 139 folhas. : il. ; fig., tabs.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Engenharia Cartográfica, Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação, 2006.

Inclui bibliografia.

1. Engenharia cartográfica. 2. Sistema de Posicionamento Global (GPS). 3. Superfície Geoidal Local. 4. Nivelamento geométrico. I. Título.

526 CDD (22.ed.)

UFPE  
**BCTG/2006-131**

# **DEFINIÇÃO DE UMA SUPERFÍCIE GEOIDAL LOCAL ATRAVÉS DE POSICIONAMENTO POR GPS**

POR

**JOSÉ ANTÔNIO CAVALCANTE CERQUEIRA**

Dissertação defendida e aprovada em 15.09.06.

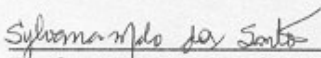
Banca Examinadora:



**Professora Doutora VERÔNICA MARIA COSTA ROMÃO (Orientadora)**  
Departamento de Engenharia Cartográfica - Universidade Federal de Pernambuco



**Professor Doutor JOSÉ LUIZ PORTUGAL**  
Departamento de Engenharia Cartográfica - Universidade Federal de Pernambuco



**Professora Doutora SYLVANA MELO DOS SANTOS**  
Núcleo de Tecnologia / Centro Acadêmico do Agreste - Universidade Federal de Pernambuco

## DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus pais, Octavio e Augusta, à tia Isa, ao Mestre Oscar (*in memorian*), à minha esposa e companheira, Roseane, e às minhas queridas filhas Adriana e Louise, os grandes responsáveis por minhas conquistas.

## **AGRADECIMENTOS**

Acima de tudo a Deus.

À UFAL – Universidade Federal de Alagoas e à UFPE – Universidade Federal de Pernambuco, entidades responsáveis pela minha formação superior.

À Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Verônica Maria Costa Romão, pela orientação, pelos conhecimentos que tão bem soube repassar e pela confiança depositada em minha pessoa.

Aos professores Portugal, Sylvana, Jayme e Ferreira, membros titulares e suplentes da banca examinadora, que contribuíram bastante para o aprimoramento do presente trabalho.

Aos professores Tarcísio e Andréia de Seixas, cujas sugestões foram sempre bem vindas.

Aos demais professores do Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação, responsáveis pelo meu aprendizado nessa área do conhecimento.

Em especial, ao professor e amigo Carlos Alberto Borba Schuler, pelo apoio, estima e consideração.

Aos companheiros de jornada, Almair Camargos, Jurandir Nicácio e Luciana Araújo, pelo apoio, amizade e companhia nas viagens. Foram tantas jornadas e momentos juntos, que serão inesquecíveis.

Aos caros amigos Alberto Silva, Hélio, Marcelo, Pablo, Aguinaldo, Gustavo e Abdoral e demais colegas do Mestrado, pelo apoio inestimável.

Ao Prof. Admilson da Penha Pacheco, pela presteza e condução do Programa de Pós-Graduação.

Ao Daniel Harten, da Secretaria do Programa de Pós-Graduação, pela boa vontade com que sempre me atendeu.

Aos meus alunos do curso de Engenharia de Agrimensura da UFAL, sobretudo aqueles que colaboraram nos levantamentos de campo.

Aos amigos Odacir, pelos desenhos, Joélcio, pela grande ajuda nos trabalhos de campo e Moab.

Aos serventes da SOMURB – Superintendência Municipal de Obras e Urbanização, que auxiliaram nos trabalhos de campo.

Aos Superintendentes Alberto Sexta Feira, Cândido Reinaldo, Mozart Amaral e Clécio Falcão, por terem me dado condições para concluir esse Mestrado.

Aos colegas de trabalho e amigos, Adeildo Ribeiro, Roberto Barbosa, Djaci Malaquias, Flávio Veras, Jairo Melo, Juranildo Salgueira e Nilma Moreira e Roberto Santana (*in memorian*) pelo estímulo.

À empresa Maplan – Aerolevantamentos S/A pela disponibilização de parte dos dados utilizados no presente trabalho.

Aos meus pais Octavio Rocha Cerqueira e Maria Augusta Cavalcante Cerqueira, por tudo que já me proporcionaram.

À tia Isa, que desde a minha infância sempre me presenteou com livros.

À minha amada esposa e companheira Roseane e às maiores realizações da minha vida, as amadas filhas Adriana e Louise, pela compreensão, apoio e sacrifício.

## SUMÁRIO

|                                                                      |      |
|----------------------------------------------------------------------|------|
| <b>RESUMO E PALAVRAS-CHAVE</b>                                       | iv   |
| <b>ABSTRACT AND KEYWORDS</b>                                         | v    |
| <b>LISTA DE FIGURAS</b>                                              | vi   |
| <b>LISTA DE TABELAS</b>                                              | viii |
| <b>LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS</b>                                | ix   |
| <b>1. INTRODUÇÃO</b>                                                 | 1    |
| 1.1. Relevância do Tema                                              | 1    |
| 1.2. Objetivos                                                       | 2    |
| 1.2.1. Objetivo Geral                                                | 2    |
| 1.2.2. Objetivos Específicos                                         | 2    |
| 1.3. Metodologia                                                     | 2    |
| 1.4. Descrição dos capítulos                                         | 3    |
| 1.5. Síntese da conclusão                                            | 4    |
| <b>2. SUPERFÍCIES DE REFERÊNCIA</b>                                  | 5    |
| 2.1. Introdução                                                      | 5    |
| 2.2. Modelo Geoidal do Brasil                                        | 13   |
| <b>3. INTERPOLAÇÃO DE SUPERFÍCIES</b>                                | 16   |
| 3.1. Introdução                                                      | 16   |
| 3.2. Ajustamento através de uma Superfície de Tendência              | 18   |
| 3.3. Ajustamento através da Ponderação pelo Inverso da Distância     | 19   |
| 3.4. Interpolação por Geoestatística – Método de Krigagem            | 19   |
| 3.5. Validação e Validação Cruzada                                   | 28   |
| 3.6. Análise Geoestatística através do programa computacional ArcGIS | 29   |
| <b>4. OBTENÇÃO DE ALTURAS POR GPS E NIVELAMENTO GEOMÉTRICO</b>       | 33   |
| 4.1. Introdução                                                      | 33   |
| 4.2. Sistema de Posicionamento Global – GPS                          | 34   |
| 4.2.1. Influências e erros presentes nas observáveis GPS             | 42   |
| 4.2.2. Posicionamento com GPS                                        | 46   |
| 4.2.3. Combinações lineares das observáveis GPS                      | 47   |
| 4.2.4. Perdas de ciclo e determinação das ambigüidades               | 51   |
| 4.2.5. Métodos de posicionamento por GPS                             | 52   |
| 4.2.6. Determinação altimétrica por GPS                              | 54   |

|          |                                                                                                                    |     |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.2.7.   | <b>Ajustamento das observações GPS</b>                                                                             | 57  |
| 4.2.8.   | <b>Programas para processamento e ajustamento dos dados GPS</b>                                                    | 59  |
| 4.3.     | <b>Nivelamento Geométrico</b>                                                                                      | 64  |
| 4.3.1.   | <b>Correção ortométrica</b>                                                                                        | 65  |
| 4.3.2.   | <b>Fontes de erro em nivelamento</b>                                                                               | 67  |
| 4.3.3.   | <b>Ajustamento de uma rede altimétrica</b>                                                                         | 67  |
| 5.       | <b>MODELAGEM DA SUPERFÍCIE GEOIDAL LOCAL</b>                                                                       | 70  |
| 5.1.     | <b>Área de Estudo</b>                                                                                              | 70  |
| 5.2.     | <b>Metodologia para a Determinação da Superfície Geoidal Local</b>                                                 | 72  |
| 5.2.1.   | <b>Determinação das coordenadas geodésicas dos marcos por GPS</b>                                                  | 72  |
| 5.2.2.   | <b>Obtenção das altitudes ortométricas dos marcos por nivelamento geométrico</b>                                   | 76  |
| 5.2.3.   | <b>Cálculo das ondulações geoidais da amostra</b>                                                                  | 81  |
| 5.2.4.   | <b>Interpolação para Determinação da Superfície Geoidal Local</b>                                                  | 82  |
| 5.2.4.1. | <b>Análise Preliminar da distribuição dos dados</b>                                                                | 82  |
| 5.2.4.2. | <b>Análise da estrutura de correlação espacial da amostra</b>                                                      | 85  |
| 5.2.4.3. | <b>Geração das superfícies</b>                                                                                     | 89  |
| 5.2.4.4. | <b>Qualidade da Superfície Geoidal Local</b>                                                                       | 92  |
| 5.2.4.5. | <b>Elaboração de um programa de computador para a determinação da ondulação geoidal na área de estudo</b>          | 92  |
| 6.       | <b>RESULTADOS</b>                                                                                                  | 94  |
| 6.1.     | <b>Rede Geodésica determinada através do posicionamento por satélites</b>                                          | 94  |
| 6.2.     | <b>Conjuntos de pontos das redes de nivelamento geométrico</b>                                                     | 94  |
| 6.3.     | <b>Superfície Geoidal Local</b>                                                                                    | 95  |
| 6.3.1.   | <b>Precisão da interpolação</b>                                                                                    | 97  |
| 6.3.2.   | <b>Precisão Absoluta da Superfície Geoidal Local</b>                                                               | 99  |
| 6.3.3.   | <b>Precisão Relativa da Superfície Geoidal Local</b>                                                               | 99  |
| 6.4.     | <b>Precisão da determinação da ondulação geoidal pelo Modelo Geoidal do Brasil através do Programa MapGeo-2004</b> | 100 |
| 6.5.     | <b>Precisão da altitude ortométrica utilizando a Superfície Geoidal Local e a altura elipsoidal GPS</b>            | 101 |
| 6.6.     | <b>Aplicabilidade da Superfície Geoidal Local em conformidade com</b>                                              |     |

|                                                                                                                            |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| a NBR-13.133 da ABNT                                                                                                       | 103 |
| 6.6.1. Determinação de altitude ortométrica                                                                                | 104 |
| 6.6.2. Determinação de desnível (diferença de altitude ortométrica entre dois pontos)                                      | 104 |
| 6.6.3. Programa para determinação da ondulação geoidal através do método de interpolação polinomial do 3º grau             | 104 |
| 7. CONCLUSÃO E RECOMENDAÇÕES                                                                                               | 106 |
| 7.1. Conclusão                                                                                                             | 106 |
| 7.2. Recomendações                                                                                                         | 107 |
| 7.3. Sugestões para futuras pesquisas                                                                                      | 108 |
| 8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS                                                                                              | 109 |
| ANEXO I – COORDENADAS DOS PONTOS DA REDE GEODÉSICA E SUAS PRECISÕES ABSOLUTAS                                              | 114 |
| ANEXO II - ROTINA MatLab PARA AJUSTAMENTO DO NIVELAMENTO DA REDE 2                                                         | 118 |
| ANEXO III - RESULTADO DO AJUSTAMENTO DO NIVELAMENTO DA LINHA BÁSICA E DAS REDES                                            | 120 |
| ANEXO IV –VALIDAÇÃO CRUZADA PARA A SELEÇÃO DA MELHOR SUPERFÍCIE DE MODELAGEM DO ERRO DE INTERPOLAÇÃO DA SUPERFÍCIE GEOIDAL | 123 |
| ANEXO V – CÁLCULO DAS ONDULAÇÕES GEOIDAIS E PRECISÕES                                                                      | 125 |
| ANEXO VI –DETALHAMENTO DO CÁLCULO DO ERRO MÉDIO QUADRÁTICO ATRAVÉS DE VALIDAÇÃO CRUZADA PARA A INTERPOLAÇÃO IPG3           | 129 |
| ANEXO VII–QUALIDADE DO POSICIONAMENTO ABSOLUTO USANDO-SE O MODELO GEOIDAL DO BRASIL, ATRAVÉS DO PROGRAMA MapGeo-2004       | 133 |
| ANEXO VIII-PROGRAMA EM MatLab PARA INTERPOLAÇÃO DA ONDULAÇÃO GEOIDAL NA ÁREA DE ESTUDO                                     | 138 |

## RESUMO

CERQUEIRA, José Antônio Cavalcante. **Definição de uma Superfície Geoidal Local através de Posicionamento por GPS**. Recife, 2006. 139 p. Dissertação (Mestrado em Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação) – Centro de Tecnologia e Geociências, Universidade Federal de Pernambuco.

Este trabalho tem como objetivo a Definição de uma Superfície Geoidal Local obtida a partir de observações de satélites do Sistema de Posicionamento Global (GPS) e de nivelamento geométrico, para aplicação na obtenção de altitudes ortométricas em serviços de engenharia.

Para a definição da Superfície Geoidal foi estabelecida uma rede geodésica através do GPS, tendo como objetivo a determinação das alturas elipsoidais. As altitudes ortométricas dos pontos da rede geodésica foram determinadas através de nivelamento geométrico. As ondulações geoidais dos pontos da rede foram calculadas utilizando-se as alturas geométricas e ortométricas determinadas. O conjunto de pontos com ondulação geoidal determinada foi utilizado como amostra para a definição da Superfície Geoidal Local. Foram determinadas superfícies geoidais pelos métodos determinísticos de Ponderação pelo Inverso da Distância e de Interpolação através de Polinômios, e a técnica de Validação Cruzada foi usada para selecionar a Superfície Geoidal com melhor precisão.

Definida a Superfície Geoidal Local, verificou-se que a mesma apresentou precisão melhor do que a apresentada pelo Modelo Geoidal do Brasil, desenvolvido pelo IBGE/EPUSP.

Analisou-se, também, a aplicabilidade da Superfície Geoidal Local na determinação de altitudes ortométricas, em conformidade com a NBR-13.133 da ABNT.

**Palavras-chave:** Superfície Geoidal Local; Ondulação Geoidal; Sistema de Posicionamento Global; Nivelamento Geométrico; e Interpolação de Superfícies.

## **ABSTRACT**

CERQUEIRA, José Antônio Cavalcante. **Local Geoidal Surface definition using GPS positioning**. Recife, 2006. 139 p. Dissertation (Master Degree in Geodetic Science and Geoinformation Technologies) – Center of Technology and Geosciences, Federal University of Pernambuco, Brazil.

The purpose of this work is to define a Local Geoidal Surface obtained from satellite observations of the Global Positioning System (GPS) and from differential leveling, for application in orthometric heights acquisition to be used in engineering works.

To define the Local Geoidal Surface, it was established a geodetic network, based in GPS, with the ellipsoidal heights determination objective. The orthometric heights of the geodetic network points were determined from differential leveling. The geoidal undulations of the network points were computed using the orthometric and ellipsoidal heights determined. The points with the computed geoidal undulation were used as a sample set for the Local Geoidal Surface definition. Their surfaces were determined using the Inverse Distance Weighting and Polinomials Interpolation deterministic methods and the cross-validation technique was used to select the Geoidal Surface with the best accuracy.

Once defined the surface, it was concluded that its accuracy was better than the Brazilian Geoidal Model accuracy, developed by IBGE/EPUSP.

It was also analyzed the Local Geoidal Surface applications in orthometric heights determination according to the NBR-13.133 from ABNT.

**Key-words:** Local Geoidal Surface; Geoidal Undulation; Global Positioning System; Differential leveling; and Surface Interpolation.

## LISTA DE FIGURAS

|                                                                                                                                                      |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 01 – Força de Gravidade                                                                                                                       | 6  |
| Figura 02 – Superfícies equipotenciais do campo de gravidade terrestre                                                                               | 7  |
| Figura 03 – Altitude ortométrica (H)                                                                                                                 | 8  |
| Figura 04 – Coordenadas Geodésicas Espaciais                                                                                                         | 9  |
| Figura 05 – Relação entre as superfícies física, geoidal e elipsoidal                                                                                | 10 |
| Figura 06 – Relação entre as altitudes e as superfícies de referência                                                                                | 12 |
| Figura 07 – Tela do Sistema MAPGEO2004                                                                                                               | 14 |
| Figura 08 – Mapa Geoidal do Brasil (SAD69)                                                                                                           | 15 |
| Figura 09 – Parâmetros do semivariograma                                                                                                             | 21 |
| Figura 10 – Representação gráfica da anisotropia geométrica em duas dimensões                                                                        | 23 |
| Figura 11 – Raio de busca circular para construção do variograma experimental                                                                        | 24 |
| Figura 12 – Parâmetros direcionais e de separação dos pares de pontos para o semivariograma experimental                                             | 30 |
| Figura 13 – Estrutura básica do sinal GPS                                                                                                            | 38 |
| Figura 14 – Diferenciação entre receptores e satélites                                                                                               | 48 |
| Figura 15 – Relação entre as diferenças das altitudes ortométricas, alturas elipsoidais e ondulações geoidais de dois pontos da superfície terrestre | 55 |
| Figura 16 – Nivelamento geométrico                                                                                                                   | 64 |
| Figura 17 – Nivelamento composto                                                                                                                     | 64 |
| Figura 18 – Não paralelismo das superfícies equipotenciais                                                                                           | 66 |
| Figura 19 – Lance de nivelamento geométrico                                                                                                          | 68 |
| Figura 20 – Rede altimétrica                                                                                                                         | 69 |
| Figura 21 – Localização do município de Maceió/AL                                                                                                    | 70 |
| Figura 22 – Município de Maceió com abairramento e a área de estudo                                                                                  | 71 |
| Figura 23 – Localização dos marcos geodésicos (triângulos em azul) na área de estudo                                                                 | 71 |
| Figura 24 – Fluxograma para a Determinação da Superfície Geoidal Local                                                                               | 72 |
| Figura 25 – Configuração geométrica das sub-redes                                                                                                    | 73 |
| Figura 26 – Configuração geométrica da rede geodésica após a integração das sub-redes                                                                | 75 |
| Figura 27 – Configuração geométrica das redes de nivelamento e da linha básica                                                                       | 78 |
| Figura 28 – Histograma da distribuição sem transformação                                                                                             | 83 |

|                                                                                                             |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 29 - Histograma da distribuição com transformação logarítmica                                        | 84 |
| Figura 30 - Histograma da distribuição com transformação box-cox                                            | 84 |
| Figura 31 – Área de pesquisa com anisotropia                                                                | 85 |
| Figura 32 – Semivariograma (isotropia)                                                                      | 86 |
| Figura 33 – Semivariograma (anisotropia, direção 0°)                                                        | 86 |
| Figura 34 – Semivariograma (anisotropia, direção 20°)                                                       | 86 |
| Figura 35 – Semivariograma (anisotropia, direção 40°)                                                       | 87 |
| Figura 36 – Semivariograma (anisotropia, direção 60°)                                                       | 87 |
| Figura 37 – Semivariograma (anisotropia, direção 80°)                                                       | 87 |
| Figura 38 – Semivariograma (anisotropia, direção 100°)                                                      | 88 |
| Figura 39 – Semivariograma (anisotropia, direção 120°)                                                      | 88 |
| Figura 40 – Semivariograma (anisotropia, direção 140°)                                                      | 88 |
| Figura 41 – Semivariograma (anisotropia, direção 160°)                                                      | 89 |
| Figura 42 – Superfície Geoidal Local obtida pelo ajustamento de um Polinômio<br>Global do 3º grau           | 96 |
| Figura 43 – Superfície com a distribuição espacial dos erros de interpolação da<br>Superfície Geoidal Local | 98 |

## LISTA DE TABELAS

|                                                                                                     |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Tabela 01 – Relação entre as superfícies de referência                                              | 12  |
| Tabela 02 – Características dos sinais GPS                                                          | 38  |
| Tabela 03 – Degradação SNR comparada à técnica de correlação do código                              | 42  |
| Tabela 04 - Principais contribuições de erro no GPS para observações de<br>Pseudodistâncias simples | 43  |
| Tabela 05 – Combinações lineares das fases das portadoras                                           | 51  |
| Tabela 06 – Tamanho das sessões para levantamentos estáticos                                        | 54  |
| Tabela 07 – Validação cruzada das interpolações para as Superfícies Geoidais<br>Locais              | 91  |
| Tabela 08 – Parâmetros de precisão da rede GPS                                                      | 94  |
| Tabela 09 - Parâmetros de precisão das altitudes ortométricas                                       | 94  |
| Tabela 10 – Parâmetros de precisão da interpolação                                                  | 97  |
| Tabela 11 – Frequência dos valores dos módulos dos Erros de interpolação da<br>Validação Cruzada    | 97  |
| Tabela 12 – Cálculo dos valores máximo e mínimo dos resíduos relativos de<br>Interpolação           | 100 |
| Tabela 13 – Frequência dos módulos dos Erros de Estimativa pelo Modelo<br>Geoidal do Brasil         | 101 |
| Tabela 14 – Especificações da NBR – 13.133 da ABNT, para nivelamento                                | 103 |

## LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

ABNT – ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS  
A/S – ANTI SPOOFING  
BLUE – BEST LINEAR UNBIASED ESTIMATOR  
C/A – COARSE ACQUISITION ou CLEAR ACCESS  
DoD – DEPARTMENT OF DEFENSE  
DOP – DILUTION OF PRECISION  
EMQ – ERRO MÉDIO QUADRÁTICO  
EPUSP – ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
FAA – FEDERAL AVIATION ADMINISTRATION  
GPS – GLOBAL POSITIONING SYSTEM  
IBGE – INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA  
IAG – INTERNATIONAL ASSOCIATION OF GEODESY  
IGS – INTERNATIONAL GPS SERVICE FOR GEODYNAMICS  
IPG – INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL GLOBAL  
IPL – INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL LOCAL  
MVC – MATRIZ VARIÂNCIA COVARIÂNCIA  
NAVSTAR GPS – NAVIGATION SYSTEM with TIME AND RANGING GLOBAL  
POSITIONING SYSTEM  
NBR – NORMAS BRASILEIRAS  
PCV – PHASE CENTER VARIATIONS  
PDOP – POSITION DILUTION OF PRECISION  
PID = PONDERAÇÃO PELO INVERSO DA DISTÂNCIA  
RINEX – RECEIVER INDEPENDENT EXCHANGE FORMAT  
S/A – SELECTIVE AVAILABILITY  
SAD 69 – SOUTH AMERICAN DATUM DE 1969  
SGL – SUPERFÍCIE GEOIDAL LOCAL  
SIRGAS – SISTEMA DE REFERÊNCIA GEOCÊNTRICO PARA AS AMÉRICAS  
SNR – SIGNAL-TO-NOISE RATIO  
SVN – SPACE VEHICLE NUMBER  
USNO – UNITED STATES NAVAL OBSERVATORY  
UTC – COORDINATED UNIVERSAL TIME

# 1. INTRODUÇÃO

## 1.1. Relevância do Tema

Muitas atividades de Engenharia, como projeto e construção de túneis, estradas, sistemas de drenagem e de saneamento, exigem a determinação de altitudes ortométricas precisas. O procedimento convencional para a determinação de altitudes ortométricas de precisão é o método geodésico de nivelamento geométrico, um trabalho oneroso que demanda bastante tempo para a sua realização.

Com o desenvolvimento das técnicas de posicionamento por satélite, através do GPS – *Global Positioning System* (Sistema de Posicionamento Global), tornou-se possível a determinação das coordenadas geodésicas curvilíneas (latitude –  $\varphi$  e longitude –  $\lambda$ ) e da coordenada geodésica vertical (altura elipsoidal –  $h$ ) de pontos da superfície da Terra, de forma relativamente rápida e econômica, em comparação com os métodos geodésicos clássicos de posicionamento.

As alturas determinadas por GPS são alturas geométricas ou elipsoidais, diferentes das altitudes obtidas por nivelamento. Porém, a altura elipsoidal pode ser utilizada conjuntamente com a altitude ortométrica, para a determinação da ondulação geoidal. Assim, pode-se definir uma superfície geoidal local através de interpolação, utilizando-se os valores das ondulações geoidais de um determinado número de pontos dessa superfície, obtidas a partir das alturas elipsoidais determinadas por GPS e das altitudes ortométricas determinadas por nivelamento geométrico nesses mesmos pontos.

Com a superfície geoidal local assim definida, a altitude ortométrica de qualquer ponto pode ser calculada, sem necessidade de nivelamento, a partir do valor da ondulação geoidal obtido na superfície interpolada e da altura elipsoidal do ponto, determinada através do Sistema de Posicionamento Global.

O nosso País dispõe de uma carta geoidal, o Modelo Geoidal do Brasil desenvolvido pelo IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística) e pela EPUSP (Escola Politécnica da Universidade de São Paulo), que possibilita a obtenção de ondulação geoidal com precisão absoluta de  $\pm 0,5\text{m}$ . Entretanto, a precisão das ondulações geoidais obtidas a partir desse modelo não atende às exigências da Norma NBR-13133, no que se refere ao nivelamento.

## **1.2. Objetivos**

### **1.2.1. Objetivo Geral**

O objetivo principal dessa pesquisa é a definição de uma Superfície Geoidal Local com dados de Nivelamento Geométrico e Posicionamento GPS, em uma área de estudo, com precisão melhor do que a obtida pelo Modelo Geoidal do Brasil, que seja adequada aos trabalhos de Engenharia, em conformidade com a Norma NBR-13.133 da ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas.

### **1.2.2. Objetivos Específicos**

Para a consecução do Objetivo Geral, foram obtidos os seguintes Objetivos Específicos: Determinação das coordenadas planimétricas dos pontos de uma rede geodésica com precisão conhecida; Determinação das coordenadas altimétricas dos pontos dessa rede, com precisão conhecida; e Determinação da precisão da Superfície Geoidal Local.

## **1.3. Metodologia**

A área de estudo compreende uma parte da área urbana do município de Maceió, no estado de Alagoas.

Para a definição da Superfície Geoidal Local, foi necessária a determinação das coordenadas dos pontos de uma rede geodésica, através do Sistema de Posicionamento Global, e a determinação das altitudes ortométricas dos pontos dessa rede, através de nivelamento geométrico.

Foi necessário determinar as precisões das coordenadas dos pontos através dos ajustamentos da rede geodésica e das altitudes ortométricas dos seus pontos, para se obter a precisão da Superfície Geoidal Local.

Através da extensão Geostatistical Analyst do programa computacional ArcGIS, foram definidas superfícies geoidais com os métodos de interpolação locais através de polinômios do primeiro, segundo e terceiro graus, e através de ponderação pelo inverso da distância e com o método de interpolação global através de polinômios do primeiro, segundo, terceiro e quarto graus. As superfícies geoidais locais obtidas foram avaliadas segundo a técnica de Validação Cruzada, para a seleção da superfície com melhor precisão.

#### **1.4. Descrição dos capítulos**

A estrutura deste trabalho consta de 7 capítulos. O Capítulo 1, que consiste nesta Introdução contém a justificativa, os objetivos, uma descrição sucinta da metodologia utilizada, a estrutura do trabalho e apresenta uma síntese da conclusão. O Capítulo 2 inicia o embasamento teórico, discorrendo sobre superfície geoidal local. O Capítulo 3 aborda o método de ajustamento de uma Superfície de Tendência, de interpolação através de Ponderação pelo Inverso da Distância e de krigagem, e descreve algumas características da Extensão Geostatistical Analyst do programa computacional ArcGIS. O Capítulo 4 encerra o embasamento teórico, abordando o Sistema de Posicionamento Global, com ênfase na determinação de alturas elipsoidais de precisão, e o nivelamento geométrico. O Capítulo 5 detalha a metodologia utilizada, o Capítulo 6 apresenta os resultados obtidos e a sua análise, e o Capítulo 7 apresenta as conclusões e recomendações.

## **1.5. Síntese da conclusão**

A superfície geoidal local que apresentou melhor precisão foi obtida com a utilização do método de interpolação global através de um polinômio do terceiro grau, alcançando-se uma precisão absoluta igual a 57mm, sete vezes melhor do que a precisão alcançada pelo Modelo Geoidal do Brasil, desenvolvido pelo IBGE e pela EPUSP, e uma precisão relativa igual a 39mm, duas vezes melhor do que a precisão alcançada com o modelo nacional.

A superfície obtida pode ser utilizada para a determinação de altitudes ortométricas para estudos preliminares e de viabilidade, de acordo com a norma NBR-13.133 da ABNT. A sua utilização na determinação de desníveis é possível, devendo ser feita uma análise específica para cada caso.

## 2. SUPERFÍCIES DE REFERÊNCIA

### 2.1. Introdução

Para se compreender o que são superfícies geoidais locais são necessários alguns conceitos relacionados ao campo gravitacional e à forma da Terra.

Segundo GEMAEL (1999), o geodesta trabalha rotineiramente com três superfícies: a superfície física, correspondente ao aspecto exterior e irregular da superfície terrestre, onde são realizadas as operações geodésicas; a superfície do modelo geométrico, também conhecida por superfície de referência, geralmente representada por um elipsóide de revolução, onde são realizados os cálculos geodésicos; e o geóide, a superfície equipotencial gravitacional que mais se aproxima do nível médio dos mares.

Por ser uma superfície equipotencial gravitacional, o geóide tem uma natureza física, relacionada à força de gravidade terrestre, resultante da força de atração gravitacional e da força centrífuga (Figura 01).

A força gravitacional é uma consequência da atração entre as massas de dois corpos. O módulo da força gravitacional  $\vec{F}$ , agindo sobre uma partícula de massa unitária, é dado pela Equação 2.1 (GEMAEL, 1999):

$$F = \frac{km}{l^2}, \quad (2.1)$$

onde:  $F$  = força de atração entre as partículas,

$k$  = constante gravitacional ( $6672 \times 10^{-14} m^3 s^{-2} kg^{-1}$ , no Sistema Internacional),

$m$  = massa da partícula atrativa,

$l$  = distância entre as partículas.

Segundo VANICEK e KRAKIWSKY (1982), o movimento de rotação da Terra faz surgir uma outra força ( $\vec{f}$ ), chamada de força centrífuga, perpendicular ao eixo de rotação (Figura 01).

A resultante das forças gravitacional e centrífuga é a força de gravidade ( $\vec{F}'$ ), maior nos pólos do que no Equador, como se pode ver na Figura 01.

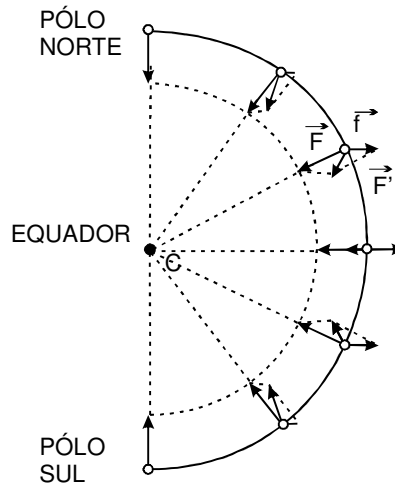


Figura 01: Força de Gravidade.

Fonte: Adaptado de VANICEK e KRAKIWSKY (1982).

A partir da força de gravidade obtém-se a aceleração da gravidade ( $\vec{g}$ ), cuja direção é a direção do desvio da vertical (tangente à linha de força, como mostra a Figura 02), e cujo módulo representa a intensidade da gravidade. A aceleração da gravidade é também obtida do potencial de gravidade ( $W$ ), através do seu gradiente

$$\vec{g} = \text{grad}W \quad (2.2)$$

O potencial de gravidade ( $W$ ) deve fornecer toda a informação sobre o campo de gravidade, esperando-se que um potencial suave corresponda a um campo de gravidade suave, e que um potencial irregular corresponda a um campo de gravidade também irregular. A forma mais simples para usar o potencial de gravidade caracterizando essas irregularidades é através da superfície equipotencial gravitacional, onde o potencial de gravidade é constante.

Existe uma infinidade de superfícies equipotenciais associadas a diferentes valores de potencial. São citadas, a seguir, algumas propriedades das superfícies equipotenciais:

- a) As superfícies equipotenciais nunca se interceptam e são superfícies fechadas;
- b) São superfícies contínuas;
- c) Não fazem degraus nem escarpas abruptas, ou seja, planos tangentes a dois pontos infinitesimalmente próximos são infinitesimalmente diferentes;
- d) O raio de curvatura local dessas superfícies varia suavemente de um ponto para outro, exceto em pontos onde a densidade de massa varia exageradamente;
- e) As superfícies equipotenciais são convexas em qualquer lugar.

As superfícies equipotenciais e a direção da gravidade, representada pela linha de prumo (direção da vertical), são perpendiculares, como se pode observar na Figura 02.

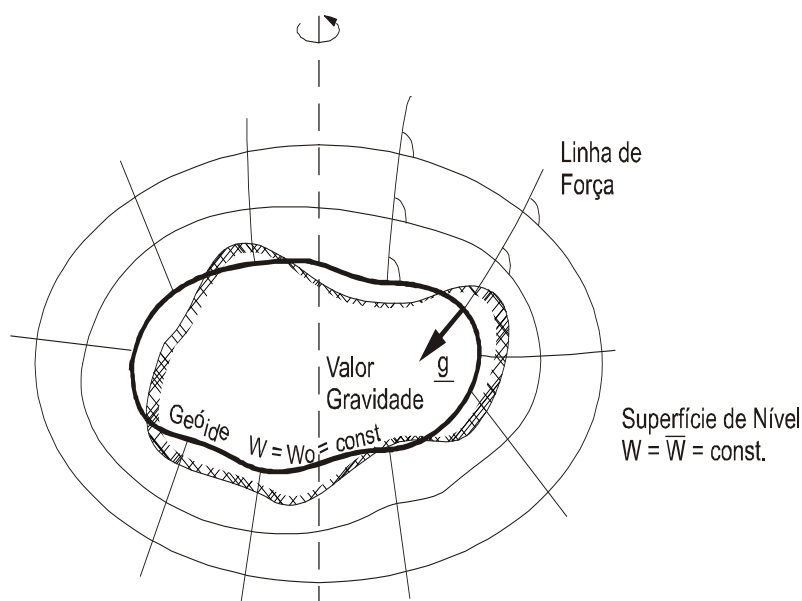


Figura 02: Superfícies equipotenciais do campo de gravidade terrestre.

Fonte: ROMÃO (2002).

Segundo GEMAEL (1999), no caso particular do campo de gravidade terrestre, as superfícies equipotenciais são conhecidas como geópes. O geópe

fundamental é o geóide, correspondente ao nível dos mares não perturbado, prolongado através dos continentes.

Conforme VANICEK e KRAKIWSKY (1982), comumente se toma o geóide como uma representação da figura da Terra. Por ser uma superfície equipotencial o geóide descreve o comportamento de um fluido homogêneo e, como a água do mar é mais ou menos homogênea, o geóide coincide aproximadamente com o nível do mar, representando a figura da Terra em aproximadamente 72% do globo terrestre. O geóide pode ser descrito de uma forma contínua através de uma fórmula matemática, mas por ser uma superfície extremamente complexa, somente uma série infinita de funções matemáticas poderia descrevê-lo exatamente. Na prática, são usadas séries finitas (truncadas) para a representação do geóide.

Em Geodésia, Cartografia e Oceanografia o geóide é usado como superfície de referência para as altitudes e profundidades, definindo-se a altitude ortométrica ( $H$ ) de um ponto da superfície como a distância linear entre o ponto e o geóide, medida ao longo da linha de prumo (TORGE, 2001).

Como definida, a altitude ortométrica tem natureza física e sua representação é ilustrada na Figura 03.

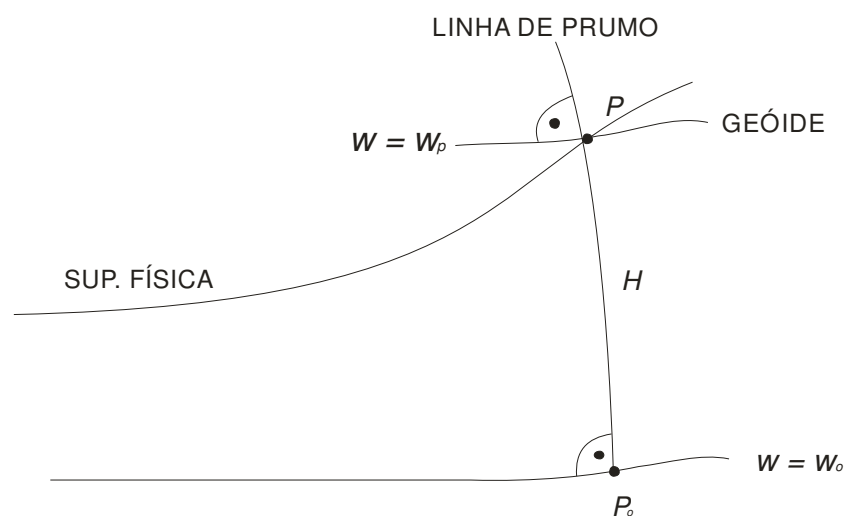


Figura 03: Altitude ortométrica ( $H$ ).

De acordo com VANICEK e KRAKIWSKY (1982), a superfície matemática ou geométrica que mais se aproxima do geóide é expressa pelo elipsóide de revolução (biaxial), o qual é utilizado na prática como superfície de referência para a representação geométrica da Terra.

O elipsóide de revolução é gerado pela rotação da elipse meridiana em torno do seu menor eixo, e sua forma e tamanho são descritos pelo semi-eixo maior ( $a$ ) e o semi-eixo menor ( $b$ ), ou, como é mais comum, pelo semi-eixo maior e o achatamento polar ( $f$ ). Um ponto  $P$ , na superfície da Terra, fica definido e posicionado em relação a um elipsóide de revolução através de suas coordenadas geodésicas (ou elipsoidais), chamadas coordenadas horizontais, latitude e longitude elipsoidais ( $\varphi$  e  $\lambda$ ), e através da coordenada vertical, a altura geométrica ( $h$ ) do ponto  $P$ , medida sobre a normal ao elipsóide que passa pelo ponto, conforme ilustrado na Figura 04.

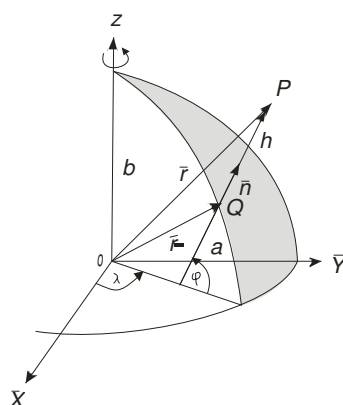


Figura 04: Coordenadas Geodésicas Espaciais.

Fonte: TORGE (2001).

Elipsóides de revolução com propósito de se aproximar ao máximo do geóide geralmente têm os seus eixos coincidentes com os eixos principais inerciais da Terra, sendo chamados de elipsóides geocêntricos. No entanto, existem elipsóides cujo propósito não é representar o tamanho e a forma da Terra, mas servir como referencial para o posicionamento geodésico (Ex.: *datum* horizontal). Esses elipsóides de referência são geralmente escolhidos visando sua aproximação com o

geóide em uma certa região, sem a necessidade de serem geocêntricos (VANICEK e KRAKIWSKY, 1982).

Adicionando-se a massa total  $M$  e a velocidade angular de rotação  $w$  da Terra, aos parâmetros geométricos  $a$  e  $f$  do elipsóide de revolução, chega-se ao conceito do campo gravitacional elipsoidal, composto da aceleração gravitacional e da aceleração centrífuga (campo de gravidade normal), e ao conceito de superfície de nível do campo de gravidade, representada pela superfície do próprio elipsóide. De acordo com o Teorema de Stokes-Poincaré, se um corpo de massa  $M$  gira com uma velocidade angular constante  $w$  em torno de um eixo fixo, e se  $S$  é uma superfície de nível do seu campo de gravidade, envolvendo toda a massa  $M$ , o potencial gravitacional no espaço exterior de  $S$  é determinado exclusivamente por  $M$ ,  $w$  e pelos parâmetros definidores de  $S$ . O elipsóide se configura, assim, como uma superfície de nível do seu próprio campo de gravidade (TORGE, 2001).

De acordo com SEEBER (2003), a ondulação geoidal, objeto desta pesquisa, corresponde à separação entre o geóide e um elipsóide de referência particular (Figura 05).

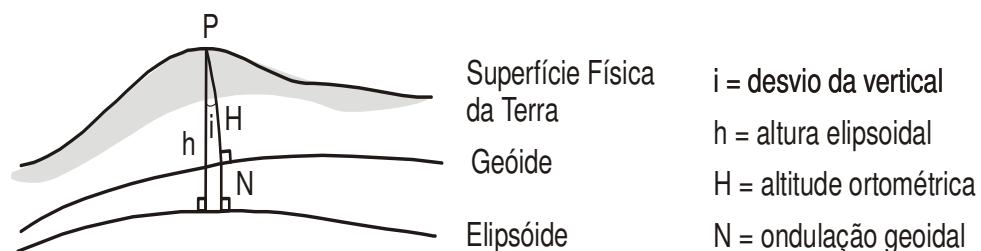


Figura 05: Relação entre as superfícies física, geoidal e elipsoidal.

Fonte: Adaptada de ROMÃO et al. (1999).

Negligenciando-se o desvio da vertical e a curvatura da linha de força, pode-se relacionar a altitude ortométrica ( $H$ ), a altura elipsoidal ( $h$ ) ou altura geométrica e a ondulação geoidal ( $N$ ), através da expressão:

$$H = h - N \quad (2.3)$$

Existem outras superfícies para a representação da forma da Terra, como o teluróide e o quase-geóide.

O teluróide é uma superfície cuja distância para o elipsóide de referência é igual à distância entre a superfície física e o geóide (VANICEK e KRAKIWSKY, 1982), como é visto na Figura 06.

MOLODENSKIJ et al. (1960, apud VANICEK e KRAKIWSKY, 1982) introduziram uma superfície aproximada do geóide, denominada quase-geóide, como uma solução para problemas práticos nos cálculos geoidais, utilizando a modelagem matemática do campo de gravidade normal. Na determinação de alturas em relação ao geóide, leva-se em consideração a influência da distribuição de massas no interior da Terra. Por outro lado, a separação entre o quase-geóide e o elipsóide, denominada de anomalia da altitude ( $\zeta$ ), pode ser calculada teoricamente com exatidão. Assim, no sistema de Molondenskij, define-se altitude normal ( $H^N$ ) como a distância medida ao longo da linha de prumo entre um ponto da superfície física e o quase-geóide. Nesse sistema, o teluróide é uma superfície cuja altura em relação ao elipsóide geocêntrico é igual à altura da superfície física em relação ao quase-geóide.

A Figura 06 e a Tabela 01 relacionam as superfícies de referência apresentadas neste trabalho.

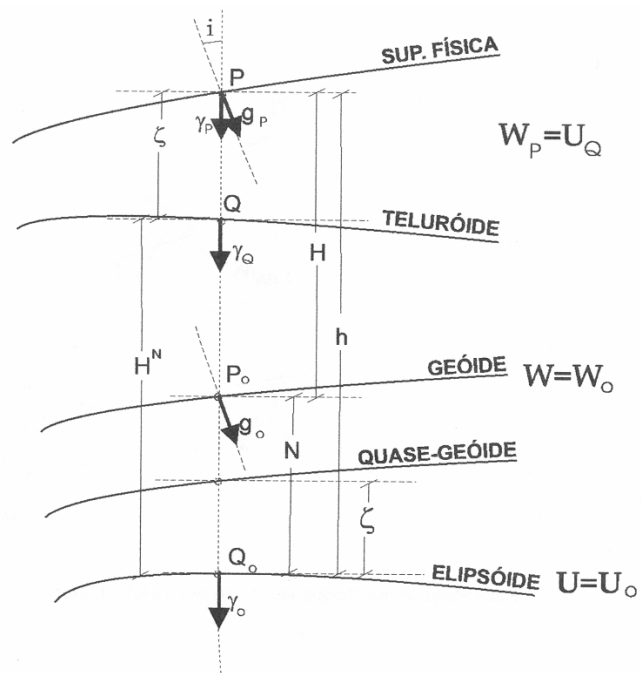


Figura 06: Relação entre as altitudes e as superfícies de referência.

Fonte: BLITZKOW et al., 2004.

Tabela 01: Relação entre as superfícies de referência.

| Superfície        | Determinação                                                                   | Relação entre as altitudes e as superfícies de referência |                            |                          |                            |                            |
|-------------------|--------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|----------------------------|--------------------------|----------------------------|----------------------------|
|                   |                                                                                | Superfície Física                                         | Quase-geóide               | Geóide                   | Elipsóide                  | Teluróide                  |
| Superfície Física | Medições realizadas sobre pontos da superfície terrestre                       | -                                                         | $H^N$ : altitude normal    | H : altitude ortométrica | h : altitude geométrica    | $\zeta$ : altitude anômala |
| Quase-geóide      | Matematicamente                                                                | $H^N$ : altitude normal                                   | -                          | -                        | $\zeta$ : altitude anômala | -                          |
| Geóide            | Formulação matemática da superfície equipotencial por séries finitas truncadas | H : altitude ortométrica                                  | -                          | -                        | N : ondulação geoidal      | -                          |
| Elipsóide         | Formulação matemática da superfície de rotação da elipse meridiana             | h : altitude geométrica                                   | $\zeta$ : altitude anômala | N : ondulação geoidal    | -                          | $H^N$ : altitude normal    |
| Teluróide         | Matematicamente                                                                | $\zeta$ : altitude anômala                                | -                          | -                        | $H^N$ : altitude normal    | -                          |

Segundo VANICEK e KRAKIWSKY (1982), a desvantagem do quase-geóide em relação ao geóide, é que ele não tem significado físico, pois é uma criação puramente matemática. Porém, não há desvantagem em se usar o quase-geóide como superfície de referência para as altitudes, e o mesmo é utilizado em diversos países.

Como a referência para as altitudes utilizada no Brasil é o geóide, essa superfície será a referência altimétrica utilizada no presente trabalho.

O conhecimento de informações altimétricas é necessário em diversas atividades de Engenharia, como, por exemplo, projetos e construção de estradas, de sistemas de saneamento básico e de irrigação. O procedimento convencional para a determinação de altitudes ortométricas de precisão é o método geodésico de nivelamento geométrico, que é um trabalho oneroso que demanda bastante tempo para a sua realização.

Com o desenvolvimento das técnicas de posicionamento por satélite, através do GPS – *Global Positioning System* (Sistema de Posicionamento Global), tornou-se possível a determinação das coordenadas geodésicas horizontais (latitude –  $\varphi$  e longitude –  $\lambda$ ) e da coordenada geodésica vertical (altura elipsoidal –  $h$ ) de pontos da superfície da Terra, de forma relativamente rápida e econômica, em comparação com os métodos geodésicos clássicos de posicionamento.

As superfícies geoidais locais são assim denominadas por se relacionarem com uma região específica (ARANA, 2000).

## **2.2. Modelo Geoidal do Brasil**

O IBGE é o órgão responsável pela definição, implantação e manutenção do SGB – Sistema Geodésico Brasileiro, que adota como referências geodésicas o SAD69 (*South American Datum – 1969*) e o SIRGAS (Sistema de Referência Geocêntrico para as Américas). A referência altimétrica do SGB se refere à superfície equipotencial equivalente ao nível médio do mar e é definida através de

observações maregráficas realizadas na baía de Imbituba, em Santa Catarina (IBGE, 205).

LOBIANCO et al. (2005), ao discorrerem sobre o novo modelo geoidal para o Brasil, desenvolvido pelo IBGE e pela EPUSP, pontuam que esse modelo tem uma resolução de 10' de arco e foi calculado com a utilização da integral modificada de Stokes, por meio da técnica de transformada rápida de Fourier. Os dados de entrada para o cálculo do modelo foram: anomalias médias de Helmert em quadrículas de 10' x 10' em áreas continentais, provenientes de informações gravimétricas do IBGE e de outras instituições no Brasil e em países vizinhos; anomalias ar-livre obtidas a partir da altimetria por radar a bordo de satélite em áreas oceânicas, modelo KMSS99; Modelo Digital do Terreno de 1'x 1' desenvolvido pela EPUSP; e o modelo de geopotencial EGM96. Também foi desenvolvido o Sistema de Interpolação de Ondulação Geoidal, MAPGEO, que possibilita a obtenção da ondulação geoidal em um ponto ou conjunto de pontos. O erro médio padrão das ondulações geoidais obtidas através do sistema MAPGEO2004, de  $\pm 0,5$  metro, foi determinado por IBGE/EPUSP através das comparações de altitudes obtidas por GPS com altitudes de Referências de Nível do IBGE, obtidas por nivelamento geométrico.

A Figura 07 mostra a tela do Sistema MAPGEO2004 e a Figura 08 apresenta o Mapa Geoidal do Brasil no Sistema SAD69.



Figura 07: Tela do Sistema MAPGEO2004.

Fonte IBGE e EPUSP (2004).

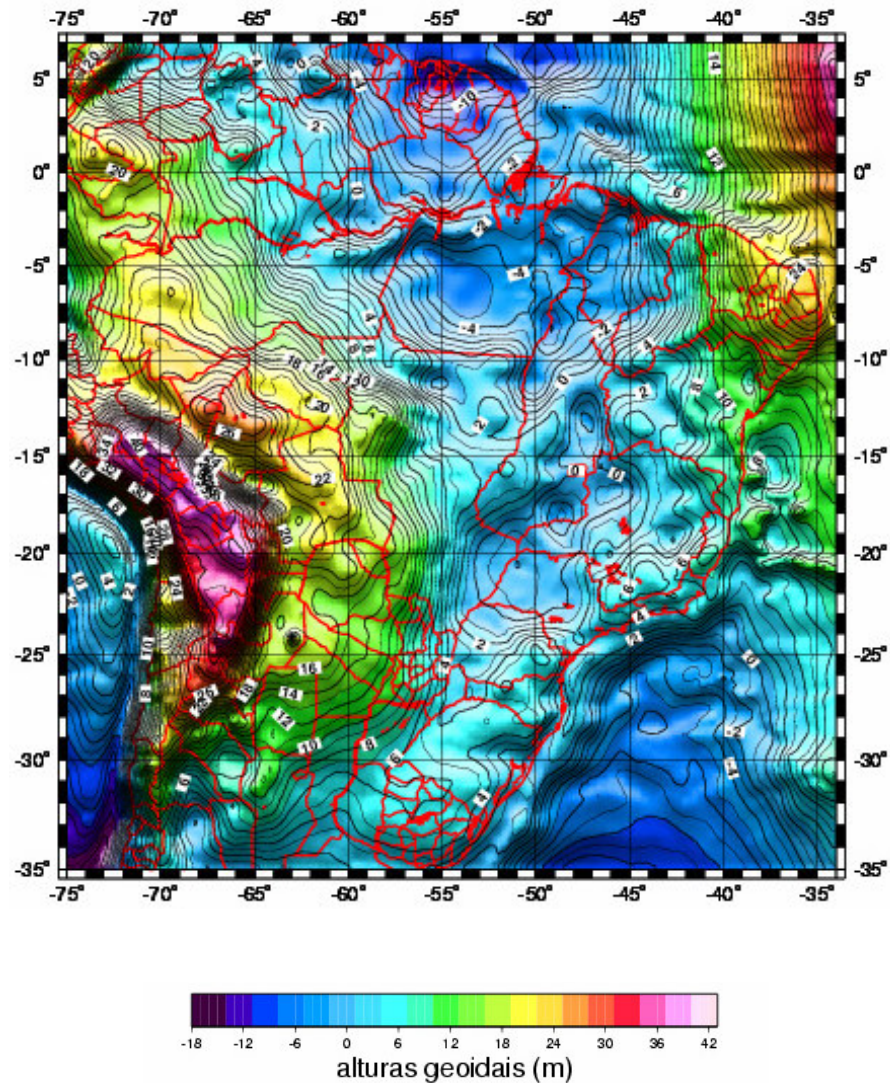


Figura 08 - Mapa Geoidal do Brasil (SAD69).

Fonte LOBIANCO et al. (2005).

A área coberta pelo Sistema MAPGEO2004 está compreendida entre as latitudes  $5^{\circ}34'59,88''\text{N}$  e  $34^{\circ}34'58,8''\text{S}$  e entre as longitudes  $34^{\circ}25'59,88''\text{W}$  e  $74^{\circ}34'58,80''\text{W}$ .

A carta geoidal apresentada na Figura 08 permite a representação dos valores de ondulação geoidal para o Brasil, através de uma escala de cores e por meio de isolinhas com intervalo de 1m. No município de Maceió, onde se encontra a área de estudo deste trabalho, a carta geoidal do Brasil indica que a ondulação geoidal varia em torno dos 17m.

### **3. INTERPOLAÇÃO DE SUPERFÍCIES**

#### **3.1. Introdução**

Para se definir uma Superfície Geoidal Local é necessária a realização de uma interpolação. A interpolação consiste em se estimar valores de um atributo (a ondulação geoidal, no presente trabalho) para uma área contendo um conjunto de pontos com o valor do atributo conhecido (amostra). Assim, as variáveis amostradas pontualmente podem ser representadas continuamente em um mapa. Para a aplicação apropriada dos métodos de interpolação, cujos resultados fornecerão subsídios para a compreensão do fenômeno em estudo, é fundamental o conhecimento profundo da variável estudada (ANDRIOTTI, 2003).

Segundo BURROUGH e McDONNELL (1998), utiliza-se a interpolação para se estender o conhecimento de dados observados em alguns pontos (amostra) para uma superfície contínua. Utilizando-se um método de interpolação, pode-se representar espacialmente a estimativa de um determinado atributo de diversas formas, como: isolinhas; grades regulares discretas; grades irregulares; e tesselação, a forma utilizada para representar a superfície geoidal local nesse trabalho, onde o valor do atributo mapeado é representado segundo uma escala de cores ou tons de cinza. Muitos dados usados para interpolação são provenientes de pequenas amostras com um padrão de variabilidade complexo. Quando os dados são esparsos, o conhecimento sobre os processos físicos ou fenômenos responsáveis por esse padrão pode auxiliar o processo de interpolação. Porém, em muitos casos, esses processos são desconhecidos, devendo-se fazer diversas suposições a respeito da natureza da variação espacial do atributo em estudo, relacionadas à suavidade da variabilidade da amostra, e considerações estatísticas sobre a distribuição de probabilidade e estacionariedade estatística da amostra. A distribuição da amostra é de extrema importância para a sua análise, sendo desejável que ela seja localizada uniformemente sobre toda a área. Assim, é desejável que a distribuição seja aleatória, de modo que as médias e variâncias não sejam tendenciosas. Porém, amostras com distribuição completamente aleatória têm as seguintes características: todos os pontos têm que ser localizados

separadamente, enquanto que em grades regulares só é necessário se conhecer a origem, a orientação e o espaçamento entre os pontos; a aleatoriedade total pode levar a uma distribuição irregular de pontos, a menos que muitos pontos possam ser medidos, o que eleva os custos para a obtenção da amostra. Um princípio racional inerente à interpolação é que os valores de um determinado atributo em pontos próximos são mais parecidos do que em pontos mais afastados.

SOARES (2000) classifica os modelos de interpolação como determinísticos, onde um dado fenômeno é caracterizado inteiramente por meio de variáveis e parâmetros do próprio modelo, e geoestatísticos, onde os dados amostrais são considerados como decorrentes de um processo aleatório. Os métodos determinísticos têm como fundamento critérios geométricos, sendo calculado o valor de uma determinada grandeza no espaço entre as amostras a partir da combinação linear dos valores observados. Porém, os modelos determinísticos não oferecem medidas de incertezas relacionadas com o fenômeno, com as observações e com o método de inferência. Por outro lado, os modelos geoestatísticos incorporam o conceito de incerteza e a sua quantificação como base metodológica à inferência espacial.

BURROUGH e McDONNELL (1998) classificam também os interpoladores como globais ou locais. Os interpoladores globais usam todos os dados disponíveis para fazer as estimativas em toda a área de interesse. Os interpoladores locais operam apenas em uma pequena área no entorno do ponto estimado, assegurando que as estimativas sejam feitas somente com os dados dos pontos da vizinhança.

Segundo ISAACS e SRIVASTAVA (1989), tanto os interpoladores globais como os locais devem levar em conta a possibilidade de existência de amostras agrupadas (*clusters*).

Existe uma diversidade de modelos de interpolação, porém aqui serão abordados apenas os seguintes métodos determinísticos: Ajustamento através de uma Superfície de Tendência (*Trend Surface*), também conhecido como ajustamento através de uma Polinomial pelo Método dos Mínimos Quadrados; e a interpolação através da Ponderação pelo Inverso da Distância. Também será

abordado o método de interpolação por geoestatística, conhecido como Krigagem. Esses métodos de interpolação são utilizados pela extensão Geostatistical Analyst, do programa computacional ArcGIS, utilizado no presente trabalho.

### 3.2. Ajustamento através de uma Superfície de Tendência

De acordo com BURROUGH e McDONNELL (1998), quando um atributo varia continuamente no espaço, é possível a sua modelagem através de uma superfície matemática suave, ajustando-se uma equação polinomial aos pontos da amostra pelo Método dos Mínimos Quadrados. Essa superfície de tendência é definida por uma equação polinomial expressa pela forma:

$$f\{(x, y)\} = \sum_{r+s \leq p} (b_{rs} \cdot x^r \cdot y^s) \quad (3.1)$$

onde:  $b_{rs}$  = coeficientes polinomiais

$p$  = ordem do polinômio

Para  $p = 0 \Rightarrow f\{(x, y)\} = b_0$  (plano horizontal);

$p = 1 \Rightarrow f\{(x, y)\} = b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot y$  (plano inclinado);

$p = 2 \Rightarrow f\{(x, y)\} = b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot y +$   
 $+ b_3 \cdot x^2 + b_4 \cdot xy + b_5 \cdot y^2$  (função quadrática)

Existem  $P = (p+1)(p+2)/2$  coeficientes que são normalmente determinados de modo que  $\sum_{i=1}^n \{z(x_i) - f(x_i)\}^2$  seja mínimo.

As superfícies de tendência raramente passam exatamente pelos pontos originais, a menos que estes sejam poucos e que a ordem do polinômio seja alta.

No presente trabalho foi utilizado esse método de interpolação através de polinômios do 1º, 2º, 3º e 4º graus.

### 3.3. Ajustamento através da Ponderação pelo Inverso da Distância

Segundo BURROUGH e McDONNELL (1998), o Ajustamento através da Ponderação pelo Inverso da Distância combina a idéia de proximidade com a variação gradual da superfície de tendência.

A sua forma geral é expressa por:

$$\hat{z}(x_j) = \frac{\sum_{i=1}^n z(x_i) \cdot d_{ij}^{-r}}{\sum_{i=1}^n d_{ij}^{-r}} \quad (3.2)$$

onde  $\hat{z}(x_j)$  = estimativa do atributo para o ponto  $x_j$  ;  
 $z(x_i)$  = valor conhecido do atributo no ponto  $x_i$  ;  
 $n$  = número de pontos da amostra;  
 $d_{ij}$  = distância entre os pontos  $x_i$  e  $x_j$  ;  
 $r$  = potência.

Para a determinação da superfície geoidal local, objetivo deste trabalho, esse foi um dos métodos de interpolação utilizado.

### 3.4. Interpolação por Geoestatística – Método de Krigagem

Segundo BURROUGH e McDONNELL (1998), os métodos de interpolação por Geoestatística, levando em consideração que a variabilidade espacial de um atributo contínuo é normalmente bastante irregular para ser modelada por uma simples função matemática suave, assumem que a variabilidade pode ser descrita mais adequadamente por uma superfície estocástica.

A teoria da variável regionalizada assume que a variabilidade espacial de qualquer variável  $Z(x)$ , onde  $x$  é uma posição de 1, 2 ou de 3 dimensões, pode ser expressa pela soma de três componentes: um componente estrutural,  $m(x)$ , com média ou tendência constante; um componente aleatório  $\varepsilon'(x)$ , mas correlacionado espacialmente, conhecido como variável regionalizada ; e um componente de ruído

aleatório ou resíduo,  $\varepsilon''$ , não correlacionado espacialmente, com comportamento Gaussiano (média zero e variância  $\sigma^2$ ).

$$Z(x) = m(x) + \varepsilon'(x) + \varepsilon'' \quad (3.3)$$

Assim, em primeiro lugar é preciso que se encontre uma função conveniente para  $m(x)$ , sendo requeridas algumas hipóteses. No caso mais simples, quando não ocorre nenhuma tendência,  $m(x)$  é constante e igual ao valor esperado da variável  $Z$  no local  $x$ , e o valor esperado para a diferença entre os valores de  $Z$  nos locais  $x$  e  $x+h$ , separados por um vetor  $h$ , é nulo. Essa restrição, juntamente com a suposição de que a diferença da variância das diferenças só depende da distância  $h$ , forma a base dos requisitos para a hipótese intrínseca da teoria das variáveis regionalizadas. Assim:

$$Z(x) = m(x) + \gamma(h) + \varepsilon'' \quad (3.4)$$

onde  $\gamma(h)$  é a semivariância, e

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \{z(x_i) - z(x_i + h)\}^2 \quad (3.5)$$

onde:  $\hat{\gamma}(h)$  é a semivariância estimada;

$z(x_i) - z(x_i + h)$  é a diferença entre os valores da variável  $z$  nas localizações  $x_i$  e  $x_i + h$ ; e

$n$  é o número de pares de pontos separados pela distância  $h$ .

O gráfico de  $\hat{\gamma}(h)$  *versus*  $h$ , chamado de variograma experimental, fornece informações úteis para a interpolação, otimização da amostragem e determinação dos padrões espaciais, sendo necessário o ajustamento de um modelo teórico para o variograma experimental.

CAMARGO (2000) se refere ao termo variograma quando se utiliza a variância ( $2\gamma(h)$ ) e ao termo semivariograma quando é utilizada a semivariância ( $\gamma(h)$ ). Segundo ANDRIOTTI (2003), a bibliografia especializada utiliza freqüentemente os

termos variograma e semivariograma indistintamente. Entretanto, o variograma é o dobro do semivariograma. Na krigagem o que se utiliza é o semivariograma.

A curva ajustada ao semivariograma experimental mostra características importantes (Figura 09).

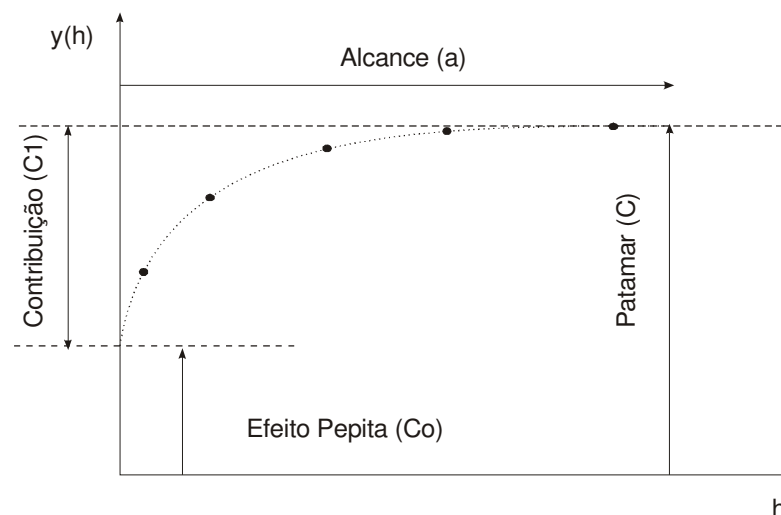


Figura 09: Parâmetros do semivariograma.

Fonte: CAMARGO (2000).

De acordo com CAMARGO (2000):

- Alcance – é a distância máxima onde ocorre a correlação espacial dos pontos da amostra;
- Patamar – é o valor do semivariograma referente ao alcance;
- Efeito Pepita – é o valor positivo do semivariograma à medida que  $h$  tende para zero;
- Contribuição – é a diferença entre o Patamar e o Efeito Pepita.

Segundo ISAACS e SRIVASTAVA (1989), o Efeito Pepita se deve a diversos fatores como erros de medição da amostra, referente ao equipamento utilizado, e variabilidade de pequena escala. O Efeito Pepita revela a descontinuidade do semivariograma devido a distâncias inferiores ao menor espaçamento entre as amostras, e a erros de medição.

BURROUGH e McDONNELL (1998) apresentam diversos modelos usados para os variogramas teóricos:

- Modelo Esférico

$$\gamma(h) = C_0 + C_1 \left\{ \frac{3h}{2a} - \frac{1}{2} (h/a)^3 \right\} \quad \text{para } 0 < h < a \quad (3.6)$$

$$\gamma(h) = C_0 + C_1 \quad \text{para } h \geq a \text{ e}$$

$$\gamma(0) = 0;$$

- Modelo Exponencial

$$\gamma(h) = C_0 + C_1 \{1 - (-h/a)^e\} \quad (3.7)$$

- Modelo Linear

$$\gamma(h) = C_0 + bh \quad (3.8)$$

onde  $b$  é a declividade da reta

- Modelo Gaussiano

$$\gamma(h) = C_0 + C_1 \{1 - (-h^2/a^2)^e\} \quad (3.9)$$

De acordo com CAMARGO (2000), quando os semivariogramas nas diversas direções apresentam grandes similaridades, diz-se que a distribuição espacial do fenômeno é isotrópica, bastando apenas um modelo para descrevê-la. Se, no entanto, os semivariogramas não são iguais em todas as direções, diz-se que a distribuição é anisotrópica. Quando se observa o mesmo Patamar com diferentes Alcances, ocorre a anisotropia geométrica, que pode ser representada através do gráfico de uma elipse (Figura 10), calculada a partir dos alcances obtidos em direções distintas.

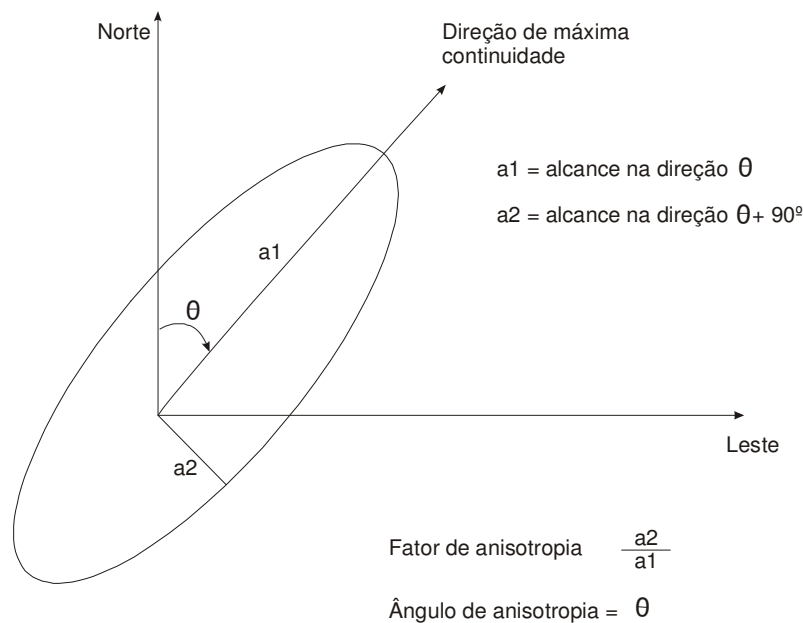


Figura 10: Representação gráfica da anisotropia geométrica em duas dimensões.

Fonte: CAMARGO (2000).

Pode-se realizar uma análise preliminar da distribuição dos dados através de inspeção visual, a fim de se verificar alguns problemas como a escassez ou excesso de valores em alguma região e a existência de valores anômalos. A análise de estatísticas como o número de observações, média, mediana, quartis, variância, coeficientes de variação, de assimetria e de curtose, os valores máximo e mínimo e o histograma, pode ser usada para uma melhor caracterização dos dados e verificação de normalidade da distribuição.

BURROUGH e McDONNELL (1998) citam o variograma como elemento fundamental para a determinação dos pesos ideais para a interpolação. O alcance (*range*) do variograma deve ser usado como um limite na determinação do raio de busca.

A construção de um variograma experimental a partir dos dados da amostra é útil para a determinação do variograma teórico, permitindo a escolha da função que melhor se ajuste (variograma esférico, exponencial, linear, Gaussiano, etc.) e a determinação dos seus parâmetros (efeito pepita e alcance).

BURROUGH e McDONNELL (1998) sugerem a construção de um variograma experimental usando-se um raio de busca circular (um anelar, de acordo com a Figura 11), definindo uma zona cujo ponto médio está a uma distância  $h$  do seu centro. A região de busca é centrada sobre um ponto da amostra, e todos os pontos dentro dela são usados para a estimativa  $(z_i - z_j)^2$  de todos os pares.

A quantidade de intervalos ( $h$ ) não deve exceder, segundo BURROUGH e McDONNELL (1998), a metade da dimensão da área de estudo.

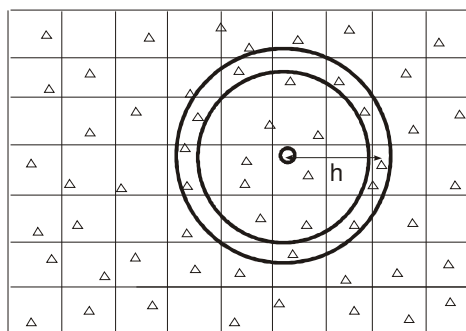


Figura 11: Raio de busca circular para construção do variograma experimental.

Fonte: Adaptado de BURROUGH e McDONNELL (1998).

Segundo ISAAKS e SRIVASTAVA (1989), se as amostras estiverem localizadas sobre uma grade pseudo-regular, o espaçamento da grade é um bom valor para a distância  $h$ . Em amostras irregulares, pode-se adotar  $h$  igual ao valor do espaçamento médio entre as amostras da vizinhança. Já para a tolerância da distância é comum adotar-se um valor igual à metade de  $h$ .

Após a definição de um variograma aceitável para todas as direções, pode-se utilizá-lo para estudar as anisotropias direcionais. ISAAKS e SRIVASTAVA (1989) sugerem uma solução prática para se analisar a anisotropia, que consiste do traçado de nove variogramas direcionais, defasados de  $20^\circ$  entre si, com tolerância angular de  $45^\circ$ . Determinados os Patamares dos variogramas, são obtidos os alcances correspondentes. As direções com o maior e o menor alcance, perpendiculares entre si, correspondem, respectivamente, às direções de máxima e de mínima continuidade, retratando uma possível anisotropia.

Depois de se encontrar as direções de máxima e mínima continuidade, resta a escolha da tolerância angular ou direcional. No cálculo dos variogramas direcionais, geralmente se escolhem tolerâncias direcionais tão pequenas quanto possível, para evitar ambigüidades na anisotropia, devido à combinação de pares de pontos de diferentes direções. Porém, tolerâncias direcionais muito pequenas podem implicar em poucos pares de pontos e o variograma direcional poderá ser bastante errático, não tendo muita utilidade. A recomendação é se tentar diversas tolerâncias, usando-se a menor delas que ainda apresente bons resultados.

Segundo BURROUGH e McDONNELL (1998), a interpolação por geoestatística é conhecida como krigagem, em homenagem ao engenheiro de minas sul africano D. G. Krige que, juntamente com o geo-matemático francês Georges Matheron, desenvolveu os métodos de interpolação ótima utilizados na indústria de mineração.

Existem várias formas de krigagem, sendo a krigagem ordinária aquela que admite a hipótese intrínseca das variáveis regionalizadas, descrita anteriormente. De acordo com ISAACS e SRIVASTAVA (1989), a krigagem ordinária é um método comumente associado ao acrônimo B.L.U.E. (*Best Linear Unbiased Estimator*) que significa melhor estimador linear não enviesado. É um estimador linear porque as estimativas são combinações lineares ponderadas dos dados disponíveis; é não enviesado porque procura obter uma média dos resíduos nula; e é melhor porque tem como objetivo a minimização da variância dos resíduos.

Segundo BURROUGH e McDONNELL (1998), na definição de krigagem ordinária tem-se:

$$\hat{z}(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot z(x_i) \quad (3.10)$$

com

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

onde:  $\hat{z}(x_0)$  é o valor estimado em um local  $x_0$ ;

$z(x_i)$  é o valor referente à i-ésima amostra; e

$\lambda_i$  é o peso da i-ésima amostra.

A variância mínima é dada por:

$$\sigma_e^2 = \sum \lambda_i \gamma(x_i, x_0) + \phi \quad (3.11)$$

onde  $\lambda_i$  é o vetor dos pesos;

$\gamma(x_i, x_0)$  é a semivariância entre a i-ésima amostra e o ponto a estimar; e

$\phi$  é o parâmetro de Lagrange para a solução do sistema de equações.

Para o cálculo dos pesos tem-se, sob a forma matricial:

$$A^{-1}.b = \begin{bmatrix} \lambda \\ \phi \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

onde:  $A^{-1}$  é a matriz das semivariâncias entre os pares de pontos de dados; e

$b$  é o vetor das semivariâncias entre cada ponto e o ponto a estimar.

A krigagem ordinária é um interpolador exato, visto que, ao ser usado sobre pontos da amostra, obtém um valor estimado igual ao valor observado.

O algoritmo de krigagem é voltado para a estimativa pontual. Quando se deseja o valor médio da estimativa para uma área local, calcula-se a média dos valores estimados por krigagem pontual para aquela média (SOARES, 2000). Esse é o princípio da krigagem da média em áreas locais que, de acordo com BURROUGH e McDONNELL (1998) e ISAACS e SRIVASTAVA (1989), denomina-se krigagem de bloco.

Além da krigagem ordinária existem diversas outras variações. A krigagem simples, segundo OLEA (1991, apud BURROUGH e McDONNELL, 1998), admite a hipótese de estacionariedade de segunda ordem, com uma média conhecida. Na prática isto se aplica em situações onde o formalismo teórico exige o conhecimento

da média da função aleatória ou quando se conhece bem a tendência do fenômeno (SOARES, 2000).

Quando existe informação suficiente para classificar a área em sub-áreas significativas e existem dados suficientes para calcular os variogramas para cada um dos diferentes domínios, a interpolação pode ser feita para cada área separadamente, ajustando-se a equação de krigagem para evitar a descontinuidade nos limites das classes. Esse é o conceito de krigagem estratificada, citado por BURROUGH e McDONNELL (1998).

Freqüentemente existe disponibilidade de diversos atributos para a área da amostra. Se um conjunto ( $U$ ) tem poucas amostras e um conjunto ( $V$ ) tem mais observações, e se ( $U$ ) e ( $V$ ) são correlacionados espacialmente, é possível utilizar a informação de ( $V$ ) para mapear ( $U$ ), através de uma extensão da krigagem normal, conhecida como co-krigagem (BURROUGH e McDONNELL, 1998).

Na krigagem Universal a função aleatória é dividida em uma combinação linear de funções determinísticas, conhecida em qualquer ponto da região, e um componente aleatório, a função aleatória residual (WACKERNAGEL, 1995).

Quando não se está interessado na melhor estimativa, mas na probabilidade de que o valor de um atributo exceda um limite, pode ser utilizada uma forma não linear da krigagem ordinária conhecida como krigagem da indicatriz, onde os dados originais são transformados de uma escala contínua para uma escala binária, constituída dos valores 0 e 1. Os variogramas são calculados para os dados binários na forma usual e a krigagem ordinária é realizada sobre os dados transformados. O resultado consiste dos dados contínuos variando de 0 até 1, indicando a probabilidade de o limite ter sido ultrapassado ou não (BURROUGH e McDONNELL, 1998).

De acordo com JAKOB e YOUNG (2006), a garantia de que a krigagem é o melhor estimador dentre os estimadores não tendenciosos depende do pressuposto de normalidade da distribuição dos dados. Além disso, a normalidade é necessária para que se obtenham mapas de quantis e de probabilidade na krigagens ordinária,

simples e universal. No caso de distribuições não normais é possível a utilização de funções de transformação e remoção de tendência para se tentar a obtenção de uma distribuição normal.

Neste trabalho foi realizada a análise exploratória da amostra (ondulação geoidal) para verificar a possibilidade de utilização do método de interpolação por krigagem.

### 3.5. Validação e Validação Cruzada

Para a escolha do modelo mais adequado a fim de representar uma superfície, entre diversos modelos de interpolação, deve-se dispor de ferramentas que permitam a avaliação da qualidade dos modelos e a comparação das suas performances.

Segundo ISAACS e SRIVASTAVA (1989), pode-se avaliar a performance dos diferentes métodos de interpolação, realizando-se as estimativas em um conjunto de pontos que não fazem parte da amostra, comparando-se os valores estimados com os valores conhecidos, através de estatísticas, como o Erro Absoluto Médio e o Erro Médio Quadrático, que refletem a tendência e o espalhamento dos resíduos.

Segundo BENDAT e PIERSOL (1986), o Erro Médio Quadrático é definido como a raiz quadrada da média dos quadrados das diferenças entre os valores estimados ( $\hat{\phi}$ ) e os valores observados ( $\phi$ ):

$$EMQ = \sqrt{E[(\hat{\phi} - \phi)^2]} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{\phi}_i - \phi_i)^2} \quad (3.13)$$

Em muitas situações não se dispõe de dados suficientes para compor o conjunto de dados da amostra e o conjunto de dados para a validação. Assim, a Validação Cruzada surge como uma alternativa para a avaliação dos modelos de interpolação.

De acordo com ISAACS e SRIVASTAVA (1989), a Validação Cruzada consiste em diversos passos: 1) retirar um ponto do conjunto de dados da amostra; 2) realizar a estimativa para o ponto retirado da amostra, considerando os demais pontos que permaneceram no conjunto de dados; 3) colocar o ponto de volta no conjunto de dados; 4) repetir todo o processo para os demais pontos da amostra.

No entanto, de acordo com ANDRIOTTI (2003), ao se obter bons resultados na avaliação de um modelo de variograma, utilizando-se a Validação Cruzada, não se pode inferir que o mesmo esteja correto, mas apenas que o modelo não é grosseiramente incorreto.

Neste trabalho utilizou-se a Validação Cruzada, possibilitando que todos os dados da amostra fossem utilizados nas interpolações.

### **3.6. Análise Geoestatística através do programa computacional ArcGIS**

As informações sobre o programa computacional ArcGIS da ESRI® estão baseadas no conteúdo dos tópicos de ajuda do programa e nos parâmetros solicitados ao usuário através da interface do programa.

No programa ArcGIS, a análise geoestatística é feita através da extensão Geostatistical Analyst, que permite a modelagem de superfícies usando métodos determinísticos e geoestatísticos. O ajustamento de superfícies compreende quatro passos: análise exploratória dos dados espaciais; análise estrutural; predição da superfície; e avaliação dos resultados.

A análise exploratória dos dados espaciais permite que os mesmos sejam examinados de diversas formas, antes que seja aplicada uma interpolação, possibilitando que se obtenha um conhecimento mais profundo de suas características. Para a análise exploratória dos dados espaciais, o programa disponibiliza ferramentas como histograma da distribuição para verificação da normalidade do conjunto de dados, e semivariograma, para análise da dependência espacial. No caso de distribuições não normais, podem ser feitas as seguintes

transformações nos dados com o intuito de normalizá-los: transformação Box-Cox ( $Y(s) = (Z(s)^\lambda - 1) / \lambda$ , com  $\lambda \neq 0$ ); transformação logarítmica ( $Y(s) = \ln(Z(s))$ , com  $Z(s) > 0$ ); e transformação arco-seno ( $Y(s) = \text{seno}^{-1}(Z(s))$ , com  $0 \leq Z(s) \leq 1$ ). Características importantes da distribuição podem ser resumidas através de estatísticas que descrevem a sua localização, dispersão e forma. Para determinação da medida de tendência central da distribuição, tem-se a média e a mediana, além do 1º e 3º quartis, que correspondem à proporção cumulativa de 0,25 e 0,75, respectivamente. Como medidas de dispersão podem ser calculados a variância e o desvio padrão dos dados. Para a medida da forma da distribuição podem ser calculados o coeficiente de assimetria e a curtose. A observação direta do histograma permite o exame da forma da distribuição.

Para a análise da correlação espacial (autocorrelação) o programa possibilita a construção do semivariograma experimental. O semivariograma constitui-se de uma nuvem de pontos, cujos valores são baseados na correlação espacial de binários, constituídos de pares de pontos separados por uma distância ( $h$ ) segundo uma determinada direção (ângulo de anisotropia), conforme a Figura 12.

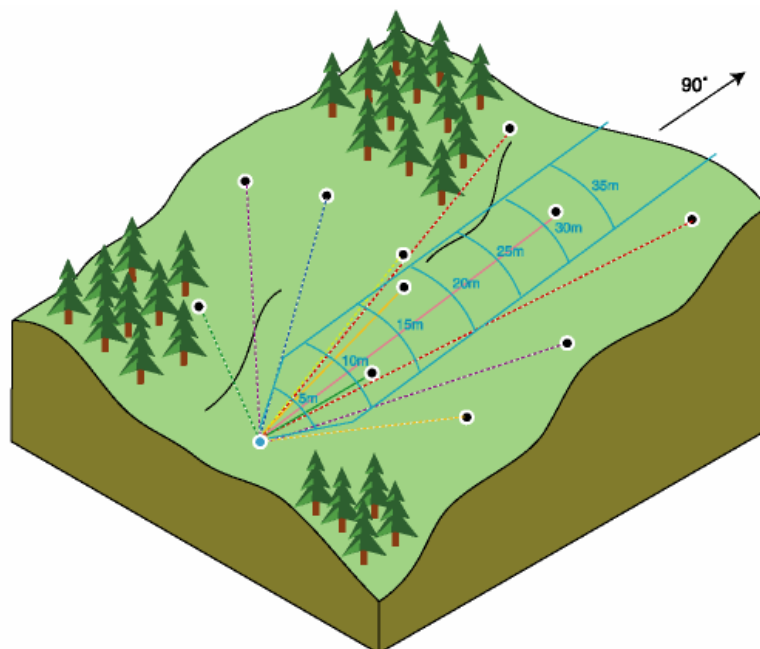


Figura 12: Parâmetros direcionais e de separação dos pares de pontos para o semivariograma experimental.

Fonte: ESRI (2004).

O módulo de análise geoestatística utiliza métodos determinísticos e geoestatísticos para interpolação. Entre os métodos determinísticos disponibilizados, encontram-se o interpolador Polinomial Global, o interpolador Polinomial Local e a Ponderação pelo Inverso da Distância.

Na Ponderação pelo Inverso da Distância, o valor ótimo para a potência é determinado pela minimização do erro de predição médio quadrático, calculado por Validação Cruzada. É comum limitar o número de pontos usados na estimativa, especificando-se uma vizinhança de pesquisa nas proximidades do local a ser estimado, excluindo-se da estimativa as amostras não pertencentes à vizinhança de pesquisa. Se não existirem influências direcionais, a vizinhança de pesquisa será circular, caso contrário, a vizinhança será delimitada por uma elipse, cujo eixo maior deverá estar alinhado com a direção de maior variabilidade espacial. Pode-se, também, restringir os pontos usados, especificando-se um número máximo e um número mínimo de pontos. Pode-se, ainda, dividir a vizinhança de pesquisa em setores, aplicando-se os números máximo e mínimo de pontos para cada setor.

Na criação de superfícies através de Interpolação Polinomial Global, o único parâmetro a ser especificado é o grau do polinômio. Já na Interpolação Polinomial Local, de forma similar à Interpolação através da Ponderação pelo Inverso da Distância, define-se uma vizinhança de pesquisa, podendo-se, também, otimizar o modelo, minimizando-se o erro de predição médio quadrático obtido por Validação Cruzada.

O programa disponibiliza a interpolação por krigagem nas suas diversas formas, destacando-se as seguintes: krigagem ordinária, krigagem simples, krigagem universal, krigagem indicatriz, e cokrigagem.

No caso específico da krigagem ordinária, são disponibilizadas as transformações logarítmica e Box-Cox. Também é disponibilizada a remoção de tendências constantes, de primeira, segunda e terceira ordem. São disponibilizados os seguintes modelos de semivariograma teórico: circular, esférico, tetraesférico, pentaesférico, exponencial, Gaussiano, Racional Quadrático, Efeito buraco, K-Bessel, J-Bessel e estável. Podem ser especificados parâmetros de anisotropia,

efeito pepita, alcance e patamar. Também pode ser definida uma vizinhança de pesquisa. Podem ser produzidos mapas de estimativa, probabilidade e erro padrão da estimativa.

Todos os métodos apresentados podem ser avaliados através de Validação Cruzada e de Validação. No caso de se utilizar a Validação se deve especificar um conjunto de pontos de teste.

No presente trabalho utilizou-se a extensão Geostatistical Analyst, do programa ArcGIS, para a realização da análise exploratória dos dados, a determinação dos variogramas experimentais, a geração da superfície geoidal local e a realização da Validação Cruzada.

## 4. OBTENÇÃO DE ALTURAS POR GPS E NIVELAMENTO GEOMÉTRICO

### 4.1. Introdução

Através do GPS determina-se a altura geométrica relacionada ao elipsóide de revolução. Já com o nivelamento geométrico (ver o item 4.3), o que se obtém é a altitude ortométrica, que se refere ao geóide, tendo, portanto, natureza física.

O posicionamento através de GPS resulta em coordenadas geodésicas cartesianas (X,Y,Z), que são transformadas em coordenadas geodésicas elipsoidais ( $\varphi, \lambda, h$ ) através das seguintes expressões (HOFMANN-WELLENHOF et al., 1992):

$$\varphi = \arctan \frac{Z + e'^2 \cdot b \cdot \sin^3 \theta}{p - e^2 \cdot a \cdot \cos^3 \theta} \quad (4.1)$$

$$\lambda = \arctan \frac{Y}{X} \quad (4.2)$$

$$h = \frac{p}{\cos \varphi} - N \quad (4.3)$$

$$\text{onde: } \theta = \arctan \frac{Z \cdot a}{p \cdot b};$$

$a$  é o semi-eixo maior do elipsóide;

$b$  é o semi-eixo menor do elipsóide;

$$p = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$\theta = \arctan \frac{Z \cdot a}{p \cdot b}$$

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad (4.4)$$

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} \quad (4.5)$$

$e$  corresponde à primeira excentricidade;

$e'$  corresponde à segunda excentricidade;

$$N = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cdot \cos^2 \varphi + b^2 \cdot \sin^2 \varphi}} \quad (4.6)$$

$N$  é o raio de curvatura primeira vertical.

Assim, a determinação da componente altimétrica (altura elipsoidal) por GPS exige o posicionamento no espaço tri-dimensional.

Já a altitude ortométrica, que utiliza o geóide como *datum* vertical, é determinada a partir do nivelamento geométrico ou trigonométrico. Desconsiderando-se as técnicas de menor precisão, como o nivelamento trigonométrico, determinam-se as altitudes ortométricas a partir da conversão de diferenças de alturas niveladas obtidas através de medições devidamente corrigidas (VANICEK e KRAKIWSKY, 1982).

O nivelamento geométrico utilizado em Geodésia é o mesmo utilizado na Topografia, exigindo cuidados e equipamentos mais refinados para que se alcance precisão elevada. ABNT (1994), GEMAEL (1954) e BOUCHARD e MOFFIT (1965) tratam sobre o assunto, destacando-se alguns cuidados, como: calibração do instrumento; aferição de miras; prevenção contra movimentos verticais de instrumentos e miras; e correção ortométrica.

## 4.2. Sistema de Posicionamento Global – GPS

O NAVSTAR GPS (*NAVigation System with Time And Ranging Global Positioning System*) é um sistema de posicionamento de abrangência global desenvolvido pelo DoD (*Department of Defense*), o Departamento de Defesa dos Estados Unidos da América, com objetivo de ser o mais importante sistema de navegação das forças armadas daquele país. Face à alta acurácia obtida com o GPS e aos avanços tecnológicos dos receptores, o sistema tem sido utilizado por uma grande variedade de usuários civis para diversos propósitos, como: navegação, posicionamento geodésico, agricultura e controle de frotas, etc. (MONICO, 2000).

Como afirma SEEBER (2003), o GPS é um sistema de rádio navegação baseado em satélites, fornecendo posicionamento tri-dimensional de precisão, além de informações para navegação e informações sobre o tempo, disponíveis para usuários devidamente equipados.

O sistema foi concebido de forma a permitir que se possa rastrear um mínimo de quatro satélites a partir de qualquer lugar da superfície terrestre ou próximo à mesma, a qualquer hora do dia e sob quaisquer condições atmosféricas (MONICO, 2000).

Segundo SEEBER (2003), a navegação por GPS baseia-se na medição das pseudodistâncias entre o usuário e quatro satélites. Sob o ponto de vista geométrico bastariam três satélites, no entanto, como o relógio do receptor não é sincronizado com os relógios dos satélites, há a necessidade de um quarto satélite. O termo pseudodistância se deve a essa falta de sincronismo dos relógios.

O sistema GPS é subdividido em três segmentos: o segmento espacial, que compõe o sistema de satélites ativos; o segmento de controle, responsável pelo controle do sistema e do tempo e para a predição das órbitas dos satélites; e o segmento do usuário, constituído dos diversos tipos de receptores.

Atualmente (13/08/2006) a constelação GPS é composta por 30 satélites dos blocos II/IIA/IIR/IIR-M, identificados através do SVN – *space vehicle number* (número do veículo espacial). Os satélites do bloco II (SVN 13 até 21) são os primeiros satélites operacionais, desenvolvidos pela *Rockwell International*. Eles podiam operar até 14 dias sem contato com o segmento de controle. A segunda série de satélites constitui o bloco IIA (SVN 22 até 40). Esses satélites, também desenvolvidos pela *Rockwell International*, podem ficar até 180 dias em operação sem entrar em contato com o Segmento de Controle. Entretanto, durante os 180 dias de autonomia, ocorre uma degradação da acurácia. Os satélites desses dois blocos têm quatro relógios atômicos (dois com oscilador de Césio e dois com oscilador de Rubídio) e têm capacidade de ativação da disponibilidade seletiva (S/A – *Selective Availability*) e do *Anti-Spoof* (A/S). Os satélites do bloco IIR (SVN 41 até 62) são os satélites de reposição operacional desenvolvidos pela *Lockheed Martin*.

Eles foram projetados para operar até 14 dias sem necessidade de contato com o Segmento de Controle e com autonomia de até 180 dias de operação no modo de navegação autônomo. A acurácia completa é mantida usando uma técnica que permite a comunicação com os satélites do bloco IIR e a determinação da distância entre os mesmos, possibilitando a estimativa e atualização dos parâmetros da mensagem de navegação dos satélites do bloco IIR que estiverem sem contato com o Segmento de Controle. Os satélites do bloco IIR têm três relógios atômicos com oscilador de Rubídio e têm as capacidades de S/A e A/S (USNO, 2006). Os satélites do bloco IIR-M têm a capacidade de transmitir um novo código civil, chamado L2C, que será adicionado à portadora L2 (FAA, 2006).

Os satélites do sistema GPS têm órbita aproximadamente circular, com altitude em torno de 20.200 km e um período de aproximadamente 12 horas siderais (PERREAULT, 1980, RUTSCHEIDT e ROTH, 1982, apud HOFMANN-WELLENHOF et al., 1992).

Como a maioria dos sinais de rádio, os sinais GPS saem dos satélites em forma de uma onda senoidal pura que não pode ser usada diretamente para o posicionamento em tempo-real. Para que se possa obter o posicionamento em tempo-real, os sinais devem ser modulados, alterando-se a forma da senoidal, de modo que possam ser feitas medidas de defasagem de tempo através da modulação das portadoras com os códigos PRN (*Pseudo Random Noise*) ou ruído pseudoaleatórios. Conhecendo-se o tempo em que o sinal foi transmitido pelo satélite, pode-se calcular o tempo de percurso e a distância entre o satélite e o receptor (TEUNISSEN e KLEUSBERG, 1998). A principal propriedade dos códigos PRN é a baixa autocorrelação para todos os deslocamentos (atrasos), com exceção para aquele onde há total coincidência (SEEBER, 2003).

O serviço disponibilizado exclusivamente para usuários autorizados, principalmente militares, é o Sistema de Posicionamento Preciso (PPS - *Precise Positioning Service*) (SEEBER, 2003). Nesse serviço, utiliza-se o código P que, segundo MONICO (2000), é um código preciso e protegido, com uma duração de 266,4 dias. O código P é arranjado através de uma técnica denominada CDMA (*Code Division Multiple Access*) – Acesso Múltiplo por Divisão do Código, de modo a

produzir uma série de 37 seqüências de códigos (PRN's), mutuamente exclusivos, com uma duração de 7 dias (semana GPS) cada um, de maneira que todos os satélites podem ser identificados univocamente. Por questões de segurança, o código P é criptografado através do procedimento denominado AS (*Anti-Spoofing*), não sendo disponibilizado para usuários civis.

O serviço disponibilizado para a comunidade civil é o Serviço de Posicionamento Padrão (SPS - *Standard Positioning Service*) (SEEBER, 2003). O código C/A, disponível no SPS, é de fácil aquisição (*coarse/acquisition* ou *clear access*), e é menos preciso que o código P. Também, aqui, é utilizada a técnica CDMA. Embora o código C/A não seja criptografado, os sinais podem sofrer degradação na acurácia, com a ativação da SA (*Selective Availability*) - Disponibilidade Seletiva. A SA foi introduzida pela primeira vez nos satélites do Bloco II, em março de 1990, com o propósito de redução da qualidade do posicionamento do GPS para usuários não autorizados, consistindo da manipulação das efemérides transmitidas e da desestabilização sistemática do oscilador do satélite (MONICO, 2000). Em 2 de maio de 2000, a SA foi desabilitada permanentemente (SEEBER, 2003).

A mensagem de navegação GPS é modulada pelas duas portadoras e contém os seguintes elementos: coeficientes para correção do relógio do satélite, número da semana GPS, informação sobre a saúde do satélite, idade dos dados, parâmetros orbitais, almanaque dos satélites, modelos da ionosfera, diferença entre os tempos GPS e UTC (Tempo Universal), informação sobre o AS (*Anti-Spoofing*), outras informações reservadas e mensagens especiais (MONICO, 2000).

A Figura 13 apresenta a estrutura básica do sinal GPS e a Tabela 02 resume as suas características.

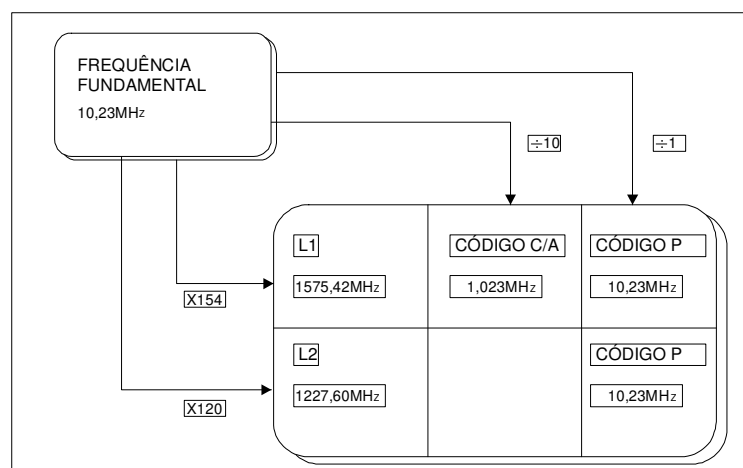


Figura 13: Estrutura básica do sinal GPS.

Fonte: MONICO, 2000.

Tabela 02: Características dos sinais GPS (bps = bit por segundo).

Fonte: SEEBER, 2003.

|                                                          |                          |
|----------------------------------------------------------|--------------------------|
| Relógio atômico (Césio e Rubídio) frequência fundamental | 10,23 MHz                |
| sinal da portadora L1                                    | 154 x 10,23 MHz          |
| frequência L1                                            | 1.575,42 MHz             |
| comprimento de onda L1                                   | 19,0 cm                  |
| sinal da portadora L2                                    | 120 x 10,23 MHz          |
| frequência L2                                            | 1.227,60 MHz             |
| comprimento de onda L2                                   | 24,4 cm                  |
| frequência do código P (taxa de transmissão)             | 10,23 MHz (Mbps)         |
| comprimento de onda do código P                          | 29,31 m                  |
| período do código P                                      | 266dias (7dias/satélite) |
| frequência do código C/A (taxa de transmissão)           | 1,023 MHz                |
| comprimento de onda do código C/A                        | 293,1 m                  |
| período do código C/A                                    | 1 milissegundo           |
| frequência do sinal de dados                             | 50 bps                   |
| tamanho do ciclo do sinal de dados                       | 30 segundos              |

Mais detalhes a respeito dos códigos podem ser encontrados em LEICK (1994) e SEEBER (2003).

O segmento de controle é responsável pelas seguintes tarefas: controle do sistema do satélite, determinação do tempo do Sistema de Posicionamento Global, pré-cálculo dos dados orbitais dos satélites (efemérides *broadcast*) e armazenamento das informações orbitais e de tempo na memória de cada satélite (SEEBER e ROMÃO, 1997).

Segundo o NAVSTAR-GPS JOINT PROGRAM OFFICE (2003), atualmente o segmento de controle é composto por uma estação de controle principal, em Colorado Springs, cinco estações de monitoramento, localizadas em Colorado Springs (na estação de controle principal) e mais quatro no Havaí, em Kwajalein, Diego Garcia e na Ilha de Ascensão, responsáveis pelo envio das pseudodistâncias brutas para processamento na estação de controle principal, e quatro antenas terrestres controladas remotamente, localizadas junto às estações de monitoramento do Havaí, de Kwajalein, Diego Garcia e da Ilha de Ascensão.

O IGS (*International GPS Service for Geodynamics* – Serviço Internacional GPS para Geodinâmica), atualmente denominado Serviço GPS Internacional, a cargo da IAG (*International Association of Geodesy* – Associação Internacional de Geodésia), disponibiliza aos usuários três tipos de efemérides dos satélites: precisas, rápidas e preditas. As efemérides precisas, com precisão centimétrica para as coordenadas dos satélites, são disponibilizadas uma semana após a coleta dos dados. As efemérides rápidas, com precisão de aproximadamente 0,5 metros, são disponibilizadas três dias após os rastreios. As efemérides preditas, com precisão em torno de 1 metro, são divulgadas poucas horas antes de sua validade (SEEBER, 2003).

No presente trabalho, foram utilizadas as efemérides preditas, em virtude dos pequenos comprimentos dos vetores observados.

Atualmente existem no mercado, basicamente, duas classes de receptores: os de navegação e os geodésicos. Estes podem ser de uma ou de duas frequências. Segundo SEEBER (2003), a tecnologia utilizada nos receptores modernos chega a proporcionar ruído interno da fase em torno de 1 mm, e redução da resolução do código para o nível de 10 cm.

Os receptores podem ser classificados de acordo com a técnica utilizada para o processamento do sinal. Em um receptor dependente do código, a observável fundamental é a pseudodistância da medida do código. Nessa técnica, é feita uma réplica do código com o mesmo algoritmo utilizado no satélite para a geração do código original, sendo feita uma comparação entre a posição da fase da sequência

de código recebida com a fase da réplica do código gerada no receptor, através de uma técnica de correlação. O intervalo de tempo do percurso do sinal do satélite até o centro de fase da antena do receptor é dado pelo deslocamento relativo para a obtenção da correlação entre as duas seqüências. Em uma segunda etapa, outro dispositivo faz a reconstrução (demodulação) da portadora, removendo o código e a mensagem de navegação para realizar a medição da fase da portadora demodulada (SEEBER, 2003).

De acordo com TEUNISSEN e KLEUSBERG (1998), a abordagem mais simples para o processamento do sinal independente do código é técnica de quadratura do sinal, que é submetido à quadratura eletrônica, resultando em um outro sinal, com amplitude constante igual à unidade, e com uma frequência igual ao dobro da frequência do sinal original, perdendo-se as informações sobre os códigos e a mensagem de navegação. A fase do sinal resultante é facilmente relacionada com a fase do sinal original, e para que seja possível a determinação de pseudodistâncias, as informações das mensagens de navegação devem ser obtidas por outras fontes. A aplicação dessa técnica acarreta em uma observação de pseudodistância com maior ruído do que no processamento dependente do código.

MacDORAN et al. (1985, apud HOFMANN-WELLENHOF et al., 1992) descreveram uma outra técnica independente do código, denominada técnica de Correlação Cruzada, que se fundamenta no princípio de que o código Y, desconhecido, é igual em ambas as portadoras, possibilitando a correlação dos sinais L1 e L2. Como as duas portadoras têm comprimentos de onda diferentes, propagam-se diferentemente na ionosfera. Assim, o código Y presente na portadora L2 é um pouco mais lento do que o código Y presente na portadora L1. O intervalo de tempo necessário para alinhar os dois sinais corresponde à diferença entre os tempos de percurso dos mesmos. As observáveis resultantes são a diferença das pseudodistâncias dos dois sinais,  $(R_{L2,Y} - R_{L1,Y})$  obtida pela diferença de tempo do código Y nas duas portadoras, e a diferença de fase  $(\Phi_{L2} - \Phi_{L1})$  obtida pelo batimento de fase das portadoras. Através da Correlação Cruzada podem ser derivadas a pseudodistância do código e a fase da portadora L2.

A técnica de quadratura auxiliada pelo código, classifica-se como semi-dependente do código. Segundo HATCH et al. (1992, apud SEEGER, 2003), essa técnica tira proveito do fato de que o código Y é gerado pela multiplicação do código P pelo código W, desconhecido. De acordo com HOFMANN-WELLENHOF et al. (1992), a técnica envolve a correlação do código Y, presente na portadora L2, com uma réplica do código P, gerada localmente. Como a frequência do código W é 20 vezes menor do que a frequência do código Y, alguns segmentos do código Y coincidem com segmentos do código P original. Assim, a réplica do código P é deslocada para combinar com as porções do código P presentes no código Y. Após a correlação, é aplicado um filtro de passa-baixa, estreitando a largura de banda, e em seguida, é feita a quadratura do sinal, para livrá-lo do código. Através dessa técnica, são obtidas a pseudodistância do código e a fase da portadora com a metade do comprimento de onda original. Uma outra técnica semi-dependente do código é a técnica *Z-Tracking*. Segundo MONICO (2000), essa técnica considera que o código Y pode ser subdividido no código P original, e no código W usado na criptografia. Partindo do princípio que o código Y é o mesmo em ambas as portadoras, e de que a frequência do código W é bem inferior à frequência do código P, é feita a correlação entre a réplica do código P, gerada, e o código Y das portadoras L1 e L2. Faz-se a estimativa do código W, e o mesmo é removido do sinal recebido, através de técnicas de filtragem, possibilitando a obtenção da pseudodistância dos códigos C/A, Y1 e Y2 e das medidas de fase das portadoras L1 e L2.

A Tabela 03 apresenta a degradação SNR (Razão Sinal/Ruído) das técnicas de processamento independentes e semi-dependentes do código, apresentadas em relação à técnica de correlação do código.

Tabela 03: Degradação SNR comparada à técnica de correlação do código.

Fonte: HOFMANN-WELLENHOF et al., 1992.

| <b>TÉCNICA</b>                    | <b>Degradação da SNR</b> |
|-----------------------------------|--------------------------|
| Quadratura                        | -30dB                    |
| Correlação Cruzada                | -27dB                    |
| Quadratura com Correlação Cruzada | -17dB                    |
| <i>Z-Tracking</i>                 | -14dB                    |

No presente trabalho, foram utilizados receptores de uma frequência, que, por não terem acesso à portadora L2, fazem uso do processamento do sinal dependente do código.

#### **4.2.1. Influências e erros presentes nas observáveis GPS**

Para se alcançar uma alta precisão no posicionamento GPS, as diversas influências externas de erros, responsáveis por falsos resultados, devem ser eliminadas através do método relativo (diferença entre os dados de duas estações), como também devem ser modelados adequadamente os erros restantes. A Tabela 04 apresenta as principais contribuições de erro no GPS.

Tabela 04: Principais contribuições de erro no GPS para observações de pseudodistâncias simples.

Fonte: SEEBER, 2003.

| Fonte de erro                | ordem do erro (RMS) |
|------------------------------|---------------------|
| Satélite                     |                     |
| - órbita                     | 1 - 2 m             |
| - relógio                    | 1 - 2 m             |
| Propagação do sinal          |                     |
| - ionosfera (2 frequências)  | cm - dm             |
| - ionosfera (modelo, melhor) | 1 - 2 m             |
| - ionosfera (modelo, média)  | 5 - 10 m            |
| - ionosfera (modelo, pior)   | 10 - 50 m           |
| - troposfera (modelo)        | dm                  |
| - multicaminhamento          | 1 - 2 m             |
| Receptor                     |                     |
| -ruído da observação         | 0,2 - 1 m           |
| - atrasos no hardware        | dm - m              |
| - centro de fase da antena   | mm - cm             |

De acordo com SEEBER (2003), a influência do erro orbital é proporcional ao comprimento da linha base. Como no presente trabalho os maiores vetores têm aproximadamente 5 km de comprimento, o erro no posicionamento devido ao erro orbital, utilizando-se efemérides preditas, é da ordem de dois décimos de milímetro.

Segundo HOFMANN-WELLENHOF et al. (1992), o método mais eficiente para a eliminação dos erros devido à refração ionosférica é através da combinação linear conhecida como *iono-free* (livre da ionosfera), que utiliza os sinais das duas portadoras. Como no presente trabalho foram utilizados receptores de uma frequência, não foi possível eliminar esses efeitos com essa técnica. No entanto, como os vetores processados são pequenos, o método relativo elimina quase que totalmente esses efeitos. Outra influência comentada por LEICK (2004) é a cintilação ionosférica, que ocorre principalmente nas regiões equatoriais e polares, com efeito mais pronunciado entre uma hora após o pôr-do-sol e a meia noite. Assim, evitou-se a realização de rastreios nesse horário na presente pesquisa.

De acordo com SEEBER (2003), o atraso troposférico é crítico para a determinação de linhas de base e para o processamento preciso, sobretudo no que se refere ao componente altimétrico. MONICO (2000) cita ainda a atenuação

atmosférica, que é mais crítica para elevações inferiores a 5°, e a cintilação troposférica, que consiste de variações na amplitude da onda eletromagnética, em virtude de irregularidades e turbulência no índice de refração atmosférica. Os efeitos da cintilação variam com o tempo e dependem da frequência, do ângulo de elevação e das condições atmosféricas. Porém, para elevações superiores a 10° o efeito predominante é a dispersão devida à turbulência. Assim, no presente trabalho, utilizou-se elevação mínima de 15° para os satélites.

O multicaminhamento ocorre quando um ou mais sinais refletidos chegam à antena do receptor juntamente com o sinal direto, ou em circunstâncias especiais, quando só chegam os sinais refletidos. Exemplos de superfícies refletoras são estradas, construções, cursos d'água e veículos (SEEBER, 2003). O ambiente nas proximidades da antena do receptor GPS pode afetar de forma significativa a propagação do sinal, e conseqüentemente os valores da pseudodistância e da fase da portadora (TEUNISSEN e KLEUSBERG, 1998). Segundo SEEBER (2003), o multicaminhamento produz um deslocamento da fase, introduzindo um erro na ordem de diversos centímetros. O efeito sobre observações baseadas no código P pode chegar a decímetros ou até mesmo a alguns metros. Sob condições ruins, o multicaminhamento pode causar muitas perdas de ciclos (*cycle slips*). Os efeitos do multicaminhamento podem ser minimizados através de observações por um longo período de tempo. Por isso os rastreios no presente trabalho tiveram uma duração média de 1 hora, respeitando o limite de 30 minutos + 3 minutos por km, conforme recomendado por HOFMANN-WELLENHOF et al. (1992). Outras medidas que devem ser tomadas são: seleção cuidadosa dos locais, evitando-se superfícies refletoras nas proximidades; uso de antenas com plano do terreno (*ground plane*) para evitar reflexões do terreno. Antenas cuidadosamente projetadas, como as antenas com anéis de obstrução (*choke ring*), são especialmente recomendadas. Um procedimento particular consiste em realizar diferenças de observações siderais, tendo em vista que os satélites repetem a sua geometria depois de 24 horas siderais, correspondentes a 23 h e 56 min do Tempo Universal.

Os relógios atômicos dos satélites, apesar da sua alta precisão, apresentam uma diferença de até 1 milissegundo em relação ao sistema de tempo GPS (WELLS et al. (1986, *apud* MONICO, 2000)). O segmento de controle monitora o

comportamento dos relógios dos satélites, estimando os valores dos coeficientes do polinômio, que são enviados para os satélites, sendo então inseridos na mensagem de navegação irradiada (efemérides *broadcast*).

O atraso entre as portadoras L1 e L2 no *hardware* do satélite, é determinado na calibração da fase de testes do satélite, e o valor, diferenciado para cada satélite, é transmitido na mensagem de navegação (MONICO, 2000).

Segundo SEEGER (2003), a geometria da distribuição dos satélites observados em relação à estação de observação (usuário) influencia a precisão do posicionamento, sendo obtida em função do DOP (*Dilution Of Precision*) – diluição da precisão.

Diferentes tipos de DOP são usados, destacando-se o PDOP:

$$\sigma_p = PDOP \cdot \sigma_r \quad \text{para o posicionamento tridimensional} \quad (4.7)$$

De acordo com MILIKEN e ZOLTER (1980, apud SEEGER, 2003), o PDOP pode ser interpretado como o inverso do volume da figura geométrica (poliedro) formada entre as posições dos satélites e do usuário, ou seja, quanto maior o volume do poliedro, menor o PDOP e melhor a precisão do posicionamento.

$$PDOP = \frac{1}{V} \quad (4.8)$$

Desde que a configuração dos satélites tornou-se completa, com 24 satélites em operação, obtém-se, na maioria do tempo, valores de PDOP inferiores a 3 e, até mesmo, inferiores a 2.

Segundo SEEGER (2003), os posicionamentos geodésicos e de navegação, são referenciados ao centro da fase elétrica da antena, que sofre variações na intensidade e direção do sinal incidente. Assim, para aplicações de precisão, a posição do centro de fase da antena tem que ser conhecida com exatidão, sobretudo para a determinação da componente altimétrica. Quando são usados diferentes tipos de antena no mesmo projeto, deve ser feita a correção do PCV –

*Phase Centre Variations* (variação do centro de fase da antena). No presente trabalho, tomou-se o cuidado de informar os parâmetros das antenas utilizadas, para o processamento dos dados.

Receptores com múltiplos canais, como os utilizados no presente trabalho, apresentam diferentes atrasos de propagação do sinal para diferentes canais, uma vez que o sinal de cada satélite percorre um caminho eletrônico diferente dentro do receptor. Os fabricantes utilizam a calibração como uma tentativa de compensação desses efeitos (SEEBER, 2003).

Em geral, os receptores possuem relógios com osciladores de quartzo, com boa estabilidade interna e de custo baixo. O erro do relógio do receptor é praticamente eliminado no processamento relativo (MONICO, 2000).

#### 4.2.2. Posicionamento com GPS

Na prática, as observáveis utilizadas para o posicionamento com GPS são as pseudodistâncias derivadas de medidas do código e as pseudodistâncias derivadas das observações das portadoras (SEEBER, 2003).

Segundo TEUNISSEN e KLEUSBERG (1998), a pseudodistância observada na medição da fase do código é dada por:

$$P_i^k(t) = \rho_i^k(t, t - \tau_i^k) + I_i^k + T_i^k + dm_i^k + c[dt_i(t) - dt^k(t - \tau_i^k)] + c[d_i(t) + d^k(t - \tau_i^k)] + \varepsilon_i^k \quad (4.9)$$

onde:  $t$  é o tempo de recepção do sinal no receptor;

$\tau_i^k$  é o tempo de percurso entre as antenas do satélite e do receptor;

$t - \tau_i^k$  é o tempo da transmissão do sinal no satélite;

$\rho_i^k(t, t - \tau_i^k)$  é a distância geométrica entre as antenas do satélite e do receptor;

$I_i^k$  é o efeito do atraso ionosférico;

$T_i^k$  é o efeito do atraso troposférico;

$dm_i^k$  é o efeito do multicaminhamento do sinal;

$c[dt_i(t) - dt^k(t - \tau_i^k)]$  é o efeito dos erros dos relógios do satélite e do receptor; e

$c[d_i(t) + d^k(t - \tau_i^k)]$  é o efeito do atraso no equipamento (satélite e receptor).

E a equação fundamental da fase da portadora é:

$$\begin{aligned} \Phi_i^k(t) = & \rho_i^k(t, t - \tau_i^k) - I_i^k + T_i^k + \delta m_i^k + c[dt_i(t) - dt^k(t - \tau_i^k)] + \\ & + c[\mathcal{D}_i(t) + \delta^k(t - \tau_i^k)] + \lambda[\phi_i(t_0) - \phi^k(t_0)] + \lambda N_i^k + \varepsilon_i^k \quad (4.10) \end{aligned}$$

onde:  $\delta m_i^k$  é o erro do multicaminhamento da fase da portadora;

$c[\mathcal{D}_i(t) + \delta^k(t - \tau_i^k)]$  é o efeito do atraso da fase da portadora nos equipamentos;

$\lambda[\phi_i(t_0) - \phi^k(t_0)]$  é a diferença de fase inicial; e

$\lambda N_i^k$  é a ambigüidade da fase da portadora.

#### 4.2.3. Combinações lineares das observáveis GPS

De acordo com SEEBER (2003), pode ser vantagem usar não só as observáveis, como combinações lineares entre as mesmas. Podem ser feitas as seguintes combinações entre observações:

- em diferentes estações,
- de diferentes satélites,
- em diferentes épocas,
- do mesmo tipo, e
- de tipos diferentes.

Para ilustrar os diversos tipos de combinação, a figura 14 conta com os seguintes elementos:

- 2 receptores  $i, j$ ;
- 2 satélites  $p, q$ ;
- Época  $t_1$  – posição 1 dos satélites  $p, q$ ;
- Época  $t_2$  – posição 2 dos satélites  $p, q$ ; e
- 8 pseudodistâncias:  $PR_{1i}^p, PR_{2i}^p, PR_{1i}^q, PR_{2i}^q, PR_{1j}^p, PR_{2j}^p, PR_{1j}^q, PR_{2j}^q$ .

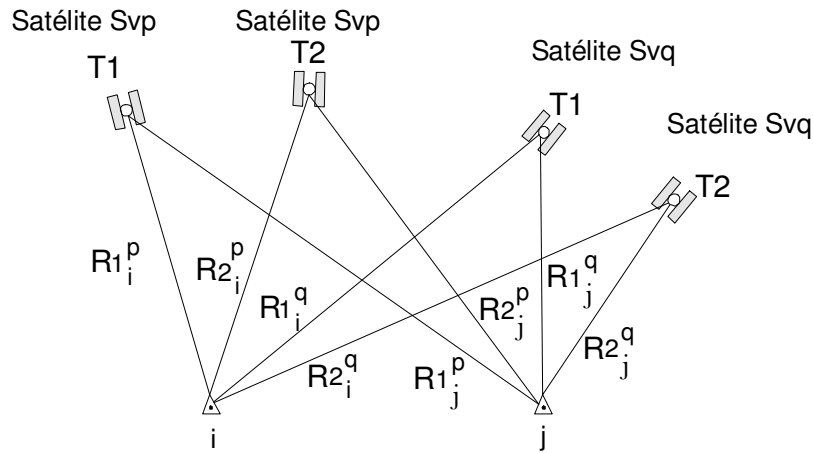


Figura 14: Diferenciação entre receptores e satélites.

Fonte: SEEGER, 2003.

Podem ser formadas diferenças simples entre dois receptores, entre dois satélites e entre duas épocas. WELLS (1986, apud SEEGER, 2003) introduziu os seguintes operadores:

$\Delta(\bullet) = (\bullet)_{receptorj} - (\bullet)_{receptori}$  para diferenças simples entre receptores;

$\nabla(\bullet) = (\bullet)^{satéliteq} - (\bullet)^{satélitep}$  para diferenças simples entre satélites; e

$\delta(\bullet) = (\bullet)_{época2} - (\bullet)_{época1}$  para diferenças simples entre épocas.

Utilizando as pseudodistâncias derivadas do código, a diferença simples entre dois receptores é expressa por:

$$\Delta PR_{CDij} = \Delta R_{ij} + c(dt_{u_j} - dt_{u_i}) + c(dt_{a_j} - dt_{a_i}) + c(dt_s - dt_s) + \varepsilon_{\Delta CD} \quad (4.11)$$

onde:  $dt_u$  é o erro do relógio do receptor;

$dt_a$  é o atraso devido à propagação do sinal;

$dt_s$  é o erro do relógio do satélite; e

$\varepsilon$  é o ruído da observação.

Substituindo-se o produto entre atraso devido à propagação e a velocidade da luz, pelos efeitos sobre a distância devidos à ionosfera e à troposfera, e utilizando-se uma forma simplificada, a equação (4.11) pode ser reescrita como:

$$\Delta PR = \Delta R + c\Delta t_u - \Delta d_{ion} + \Delta d_{trop} + \varepsilon_{\Delta CD} \quad (4.12)$$

Para a fase da portadora, a diferença simples é expressa por:

$$\Delta \Phi = \Delta R + c\Delta t_u - \Delta d_{ion} + \Delta d_{trop} + \lambda \Delta N + \varepsilon_{\Phi} \quad (4.13)$$

Na diferença simples entre dois receptores, o erro do relógio do satélite desaparece e o atraso relacionado à atmosfera só afeta o resultado pelo efeito diferencial remanescente, praticamente desaparecendo, quando as estações são próximas.

No caso de diferenças simples entre dois satélites, no lugar dos erros dos relógios dos satélites, são cancelados os erros dos relógios dos receptores.

Com diferenças simples entre duas épocas, no lugar dos erros dos relógios, o termo referente à ambigüidade é cancelado.

As duplas diferenças são feitas normalmente entre receptores e satélites e são formadas tomando-se duas diferenças simples, entre dois receptores, para dois satélites. A equação simplificada para as pseudodistâncias em função do código é:

$$\nabla \Delta PR = \nabla \Delta R + \nabla \Delta d_{ion} + \nabla \Delta d_{trop} + \varepsilon_{CD} \quad (4.14)$$

Em relação à fase da portadora, a dupla diferença é expressa por:

$$\nabla\Delta\Phi = \nabla\Delta R - \nabla\Delta d_{ion} + \nabla\Delta d_{trop} + \lambda\nabla\Delta N + \varepsilon_{\Phi} \quad (4.15)$$

Na dupla diferença, desaparecem os efeitos dos relógios dos receptores e dos satélites, e os efeitos decorrentes dos erros orbitais e dos atrasos na propagação dos sinais são reduzidos.

As triplas diferenças entre receptores, satélites e o tempo, são formadas tomando-se duplas diferenças de duas épocas. Em notação simplificada, a tripla diferença, em relação às observações da fase da portadora, é expressa por:

$$\delta\nabla\Delta\Phi = \delta\nabla\Delta R - \delta\nabla\Delta d_{ion} + \delta\nabla\Delta d_{trop} + \varepsilon_{res} \quad (4.16)$$

Além dos termos cancelados pelas duplas diferenças, também é cancelado o termo referente à ambigüidade inicial.

Apesar de não ser comum a utilização de triplas diferenças das observações do código, a sua equação é idêntica à equação da tripla diferença das observações da fase da portadora, exceto pelo sinal do termo referente à diferenciação da propagação pela ionosfera. Triplas diferenças são úteis para a remoção de perdas de ciclos (*cycle slips*).

Além das diferenciações anteriores, podem ser feitas combinações lineares entre observações do mesmo tipo: entre fases da portadora e entre códigos. As principais utilizações dessas combinações lineares dizem respeito à eliminação do efeito da propagação ionosférica e à resolução das ambigüidades da fase da portadora.

De acordo com WÜBBENA (1989, apud SEEGER, 2003), uma combinação linear das fases das portadoras L1 e L2 é formada utilizando-se coeficientes inteiros:

$$\Phi_{n,m}(t) = n\Phi_1(t) + m\Phi_2(t) \quad (4.17)$$

A tabela 05 apresenta os parâmetros de algumas combinações lineares.

Tabela 05: Combinações lineares das fases das portadoras.

Fonte: SEEGER, 2003.

| Sinal      | n  | m  | $\lambda$ (cm) | $\lambda_{1/2}$ (cm) | $V_l$  | $\sigma$ (mm) |
|------------|----|----|----------------|----------------------|--------|---------------|
| $L_1$      | 1  | 0  | 19,0           | 19,0                 | 0,779  | 3,0           |
| $L_2$      | 0  | 1  | 24,4           | 12,2                 | 1,283  | 3,9           |
| $L_\Delta$ | 1  | -1 | 86,2           | 43,1                 | -1,000 | 19,4          |
| $L_\Sigma$ | 1  | 1  | 10,7           | 5,4                  | 1,000  | 2,1           |
| $L_{-12}$  | -1 | 2  | 34,1           | 34,1                 | 2,168  | 12,1          |
| $L_{32}$   | 3  | -2 | 13,2           | 13,2                 | 0,234  | 7,6           |
| $L_{43}$   | 4  | -3 | 11,4           | 5,7                  | 0,070  | 9,1           |
| $L_{97}$   | 9  | -7 | 5,4            | 2,7                  | 0,004  | 9,7           |
| $L_{54}$   | 5  | -4 | 10,1           | 10,1                 | -0,055 | 10,3          |
| $L_{65}$   | 6  | -5 | 9,0            | 4,5                  | -0,154 | 11,2          |
| $L_0$      | -  | -  | ~5,4           | ~2,7                 | 0,000  | 10,0          |
| $L_l$      | -  | -  | ~10,7          | ~5,4                 | 2,000  | 20,0          |

Combinações lineares bastante conhecidas são:

$$L_\Delta = L_1 - L_2 \text{ (wide lane)} \quad (4.18)$$

$$L_\Sigma = L_1 + L_2 \text{ (narrow lane)} \quad (4.19)$$

$$L_0 = \frac{L_\Delta + L_\Sigma}{2} \text{ (sinal livre da ionosfera)} \quad (4.20)$$

$$L_l = L_\Sigma - L_\Delta \text{ (sinal ionosférico)} \quad (4.21)$$

#### 4.2.4. Perdas de ciclo e determinação das ambigüidades

A observação da fase da portadora é afetada pela ambigüidade  $N$ , correspondente ao desconhecido número inteiro de ciclos entre a antena do receptor e a antena do satélite (SEEGER, 2003).

No início do rastreamento, quando os sinais do satélite são identificados pelo receptor, o número inteiro de ciclos é medido e contado, mas a ambigüidade inicial  $N$  permanece desconhecida durante toda a observação. Se ocorrer uma perda de

ciclo, o contador introduz um novo valor aleatório para a ambigüidade, sem nenhuma relação com a ambigüidade anterior, reiniciando a contagem de ciclos (MENZORI, 2005).

De acordo com SEEBER (2003), ocorrem perdas de ciclo quando o receptor deixa de captar a fase por razões como: obstruções, ruídos no sinal (causados por multicaminhamento ou cintilação ionosférica), enfraquecimento do sinal (em virtude da baixa elevação do satélite ou causado por interferências no sinal), problemas no processamento do sinal, etc. As perdas de ciclo devem ser detectadas e corrigidas (fixadas). A maioria dos receptores modernos tem programas internos que detectam todas ou a maioria das perdas de ciclo. A fixação das perdas de ciclos depende do processo de edição dos dados, seja ele automático ou interativo.

Segundo SEEBER (2003), a solução das ambigüidades é de suma importância para os levantamentos de precisão com GPS. Em geral, quando a distância entre as estações é pequena e a qualidade dos dados é boa, a resolução das ambigüidades é resolvida de forma satisfatória através dos programas comerciais. Podem surgir problemas na resolução das ambigüidades em casos onde:

- a distância entre as estações é grande (maior que 10 km) e necessita-se de boa acurácia (inferior a 1 cm);
- a qualidade dos dados é pobre;
- só são visíveis poucos satélites;
- a ionosfera está perturbada; e
- o tempo de observação é curto.

#### **4.2.5. Métodos de posicionamento por GPS**

O termo posicionamento significa a determinação da posição de objetos em relação a um referencial específico. Quando o referencial é o centro de massa da Terra, tem-se o posicionamento absoluto, também conhecido como posicionamento

por ponto simples ou posicionamento instantâneo. Quando o referencial é um ponto materializado na superfície terrestre, o posicionamento é relativo.

No posicionamento absoluto, as coordenadas do ponto são obtidas através das pseudodistâncias calculadas a partir das observações do código C/A, de um mínimo de quatro satélites, com a utilização de uma única antena receptora. Esse método, geralmente utilizado em navegação, proporciona o posicionamento com precisão horizontal da ordem de 15m, com a S/A desativada.

Segundo HOFMANN-WELLENHOF et al. (1992), a degradação da acurácia do posicionamento absoluto pela S/A levou ao desenvolvimento da técnica de posicionamento diferencial GPS (DGPS), baseada na utilização de dois (ou mais) receptores, onde um permanece estacionário em uma estação de coordenadas conhecidas, que assume o papel de estação de referência, e o(s) outro(s), ou permanece(m) estacionado(s) sobre o(s) ponto(s) a ser(em) determinado(s), ou fica(m) em movimento. No mínimo, quatro satélites em comum devem ser rastreados simultaneamente, e a posição da estação conhecida é utilizada para determinar a diferença entre a distância calculada e a(s) pseudodistância(s) observada(s). Então, as correções são enviadas por telemetria para o(s) receptor(es) remoto(s), para o cálculo de sua(s) coordenada(s) corrigida(s). Usando-se o código C/A, podem ser obtidas acurácias de 3 a 5m.

O posicionamento relativo pode ser classificado em posicionamento estático, quando as antenas receptoras permanecem fixas sobre os pontos durante um grande intervalo de tempo, e em posicionamento cinemático, onde uma das antenas permanece fixa, e as demais são movidas, permanecendo pouco tempo sobre os pontos a serem medidos.

HOFMANN-WELLENHOF et al. (1992) citam o método estático como o mais utilizado, sendo tipicamente usado em levantamentos geodésicos para: implantação de redes locais, regionais ou nacionais; determinação de pontos de controle fotogramétrico; estabelecimento de limites; e determinação de deformações. Na presente pesquisa utilizou-se o método estático de posicionamento.

O tempo de observação no método estático (Tabela 06) varia de acordo com o tipo do receptor (uma frequência ou dupla frequência), com as características do programa usado no pós-processamento, com a precisão requerida e com o comprimento da linha de base.

Tabela 06: Tamanho das sessões para levantamentos estáticos.

Fonte: HOFMANN-WELLENHOF et al. (1992).

| Receptor | Estático convencional     | Rápido estático           |
|----------|---------------------------|---------------------------|
| L1       | 30 minutos + 3 minutos/km | 20 minutos + 2 minutos/km |
| L1 + L2  | 20 minutos + 2 minutos/km | 10 minutos + 1 minutos/km |

Segundo HOFMANN-WELLENHOF et al. (1992), a acurácia obtida através do método estático depende do comprimento da linha de base, chegando a valores entre 1 e 0,1 ppm (partes por milhão), ou até melhores.

SANTOS (2005) recomenda o tempo mínimo de 6 horas de rastreo para a determinação de coordenadas verticais de precisão. O tempo de 6 horas de observação possibilitou, em seu trabalho, a obtenção de discrepâncias na coordenada altimétrica inferior a 1 cm. Segundo esse trabalho, é evidente a influência do tempo de observação para a obtenção de coordenadas precisas. A utilização de obstruções simuladas proporcionou a obtenção de coordenadas verticais com discrepâncias de até 0,5cm com períodos de 12 horas de observação.

#### **4.2.6. Determinação altimétrica por GPS**

De acordo com SEEGER (2003), a determinação da altura geométrica, através do GPS, é bastante sensível à configuração geométrica dos satélites e a erros não modelados, referentes à refração atmosférica. A magnitude dos erros na componente vertical chega a ser o dobro em relação às componentes horizontais, conforme GÖRRES (1996, apud SEEGER, 2003) e FEATHERSTONE et al. (1998), o que foi comprovado pelos experimentos de SANTOS (2005). Em relação à altimetria por GPS, três aplicações podem ser destacadas: monitoramento de alterações altimétricas, transporte de altitudes ortométricas ou normais através do conhecimento do geóide, e determinação do geóide.

O conhecimento das alterações altimétricas serve para propósitos de engenharia e para a detecção de movimentos verticais da crosta terrestre. A determinação de altitudes ortométricas e de alturas normais, a partir da determinação de alturas elipsoidais por GPS, é um objetivo antigo da geodésia, como alternativa em substituição à técnica de nivelamento, que demanda bastante tempo e custo.

A Figura 15 ilustra a diferença de altitude ortométrica entre dois pontos da superfície terrestre.

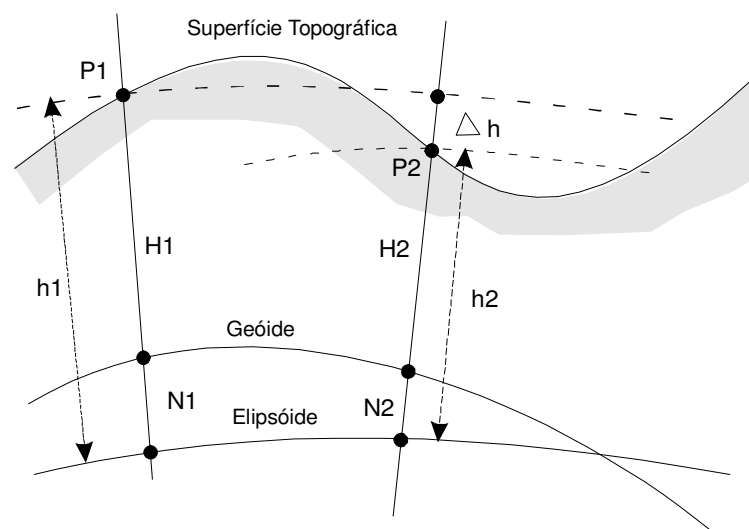


Figura 15: Relação entre as diferenças das altitudes ortométricas, alturas elipsoidais e ondulações geoidais de dois pontos da superfície terrestre.

Fonte: SEEBER, 2003.

Assim, a diferença entre as alturas geométricas dos dois pontos pode ser relacionada com a diferença entre as altitudes ortométricas e a diferença entre as ondulações geoidais (conforme a figura 05 e item 2.1):

$$\Delta h = \Delta H - \Delta N$$

$$\therefore \Delta H = \Delta h - \Delta N \quad (4.22)$$

Em que:  $\Delta h = h_2 - h_1$  ;

$$\Delta H = H_2 - H_1 ; \text{ e}$$

$$\Delta N = N_2 - N_1$$

Portanto, conhecendo-se a ondulação geoidal nos dois pontos, a partir de um modelo geoidal, e determinando-se a diferença das alturas elipsoidais, por GPS, pode-se obter a diferença entre as altitudes ortométricas (desnível), e, conseqüentemente, pode-se obter a altitude ortométrica de um dos pontos, desde que se conheça a altitude ortométrica do outro.

Em virtude da alta densidade de redes de referência GPS globais e regionais, existe a disponibilidade de informações sobre altura elipsoidal com acurácia ao nível centimétrico com distâncias de centenas e até de dezenas de quilômetros em algumas áreas. Assim, só é necessário se determinar as diferenças de alturas geométricas, em distâncias relativamente pequenas, podendo-se obter acurácias centimétricas com a aplicação de uma cuidadosa modelagem dos erros. Para distâncias de dezenas de quilômetros podem ser obtidas acurácias sub-centimétricas. As limitações mais marcantes para a altimetria de precisão por GPS decorrem da modelagem dos erros da componente vertical e da exigência de informações geoidais precisas. O erro da componente vertical é devido, principalmente, ao atraso da propagação troposférica e ao PCV. O PCV e a componente vertical dos atrasos são bastante correlacionados um com o outro. O PCV absoluto pode ser controlado através de calibração. Segundo ROTHACHER et al. (1998, apud SEEGER, 2003), o atraso troposférico pode ser separado da componente altimétrica, quando a influência de escala troposférica é estimada a partir de diversas horas de observação incluindo medições com baixos ângulos de elevação. Ainda assim, o atraso troposférico permanece como um fator crítico quando se deseja alta acurácia em altimetria por GPS (KANIUTH et al., 1998 apud SEEGER, 2003).

Modelos geoidais locais e regionais alcançam uma acurácia de alguns centímetros. Porém, de um modo geral, as informações geoidais disponíveis ainda não satisfazem às necessidades das aplicações devido à carência de dados. Para uma exploração melhor do potencial altimétrico do GPS é necessário melhorar o conhecimento do geóide. De acordo com ZHANG (2000, apud SEEGER, 2003), atualmente, é necessária a utilização de soluções locais e a aplicação de técnicas de aproximação, como algoritmos para interpolação matemática entre estações GPS

com altitudes ortométricas conhecidas. Em particular, para pequenas áreas com uma boa cobertura de pontos de controle, o método leva a resultados satisfatórios.

#### 4.2.7. Ajustamento das observações GPS

Os programas de GPS geralmente utilizam o método de ajustamento paramétrico no processamento dos dados (MONICO, 2000).

No método paramétrico, também conhecido como método das observações, o modelo matemático é da forma:

$$L_a = F(X_a) \quad (4.23)$$

onde:  $L_a$  é o vetor ( $n \times 1$ ) das  $n$  observações ajustadas;

$X_a$  é o vetor ( $u \times 1$ ) dos  $u$  parâmetros ajustados; e

$F$  é um funcional que relaciona  $L_a$  e  $X_a$ .

No ajustamento paramétrico linear o sistema de equações lineares é superabundante ( $n > u$ ).

O ajustamento paramétrico baseia-se no MMQ - Método dos Mínimos Quadrados (minimização do somatório dos quadrados dos resíduos -  $V$ ):

$$\Phi = V^T P V = \text{mínimo} \Rightarrow \frac{\delta \Phi}{\delta X} = 0 \quad (4.24)$$

O ajustamento paramétrico pelo MMQ é levado a efeito através das seguintes equações:

$$X = N^{-1}U \quad (\text{equação normal}) \quad (4.25)$$

$$N = A^T P A \quad (4.26)$$

$$U = A^T P L_b \quad (4.27)$$

$$V = AX - L_b \quad (4.28)$$

$$L_a = AX \quad (4.29)$$

onde:  $P$  é a matriz ( $n \times n$ ) dos pesos, cujos valores são inversamente proporcionais às precisões das observações;

$A$  é a matriz *design* ( $n \times u$ ) dos coeficientes dos parâmetros;

$L_b$  é a o vetor coluna ( $n \times 1$ ) das observações brutas;

$X$  é o vetor das correções ( $u \times 1$ ).

As precisões dos parâmetros ajustados e das observações ajustadas, são obtidas, respectivamente, a partir das MVC - Matrizes de Variância-Covariância  $\Sigma_x$  e  $\Sigma_L$ :

$$\Sigma_x = \hat{\sigma}_0^2 N^{-1} \quad (4.30)$$

$$\Sigma_L = \hat{\sigma}_0^2 AN^{-1}A^T \quad (4.31)$$

onde  $\hat{\sigma}_0^2$  é a variância *a posteriori* da unidade de peso:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{n - u} \quad (4.32)$$

No caso de equações não lineares, é feita a linearização através de série de Taylor, desprezando-se os termos de maior ordem:

$$\begin{aligned} F(X_a) = F(X_0) &+ \frac{\partial F}{\partial x_1} \Big|_{X=X_0} (x_{1,a} - x_{1,0}) + \frac{\partial F}{\partial x_2} \Big|_{X=X_0} (x_{2,a} - x_{2,0}) + \dots + \\ &+ \frac{\partial F}{\partial x_n} \Big|_{X=X_0} (x_{n,a} - x_{n,0}) \end{aligned} \quad (4.33)$$

onde:  $x_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) são os parâmetros (incógnitas);

$x_{i,a}$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) são os parâmetros ajustados;

$X_0 = (x_{1,0}, x_{2,0}, \dots, x_{n,0})$  é o conjunto dos valores iniciais dos parâmetros;

$F(X_0)$  é o valor inicial aproximado da função ( $L_0$ ).

A matriz  $A$  é formada pelas derivadas parciais da série de Taylor.

Assim, tem-se:

$$L = L_0 - L_b, e \quad (4.34)$$

$$U = A^T PL \quad (4.35)$$

As demais equações são idênticas ao caso linear.

Como na linearização se utiliza um valor inicial aproximado, o ajustamento, de acordo com WOLF e GILANI (1996), é realizado através de iterações, com os seguintes passos:

- (1) escreve-se a série de Taylor com aproximação de primeira ordem para cada equação;
- (2) determinam-se aproximações iniciais para as incógnitas das equações obtidas no passo (1);
- (3) utiliza-se um método matricial similar ao utilizado no ajustamento de funções lineares;
- (4) aplicam-se as correções aos valores iniciais; e
- (5) repetem-se os passos anteriores até que as correções se tornem insignificantes.

#### **4.2.8. Programas para processamento e ajustamento dos dados GPS**

As observações GPS são processadas através de programas específicos, que podem ser diferenciados, entre outros fatores, pela estratégia de processamento e avaliação das observações. Maiores detalhes podem ser encontrados em SEEGER (2003).

Os programas podem ser classificados em comerciais e científicos. Segundo SEEGER (2003), os programas comerciais, disponibilizados pelos fabricantes de receptores, são desenvolvidos para o processamento dos dados de um tipo

específico de receptor. Porém, programas avançados aceitam dados de outros receptores através do formato de dados RINEX. Geralmente os modelos matemáticos básicos utilizados não são documentados em detalhes. Os programas comerciais são adequados para os levantamentos rotineiros, e fornecem uma grande variedade de possibilidades de aplicação, podendo ser operados facilmente, exigindo apenas um nível médio de conhecimento em engenharia e da tecnologia GPS, por parte do usuário. Em alguns casos o programa inclui apenas o ajustamento das linhas de base, sendo necessária a utilização de um programa adicional para o processamento em rede. Em geral, os programas comerciais permitem aplicações estáticas e cinemáticas. Exemplos de programas comerciais são: SKI-Pro, da Leica Geosystems; TGO (*Trimble Geomatics Office*), da Trimble Navigation; Pinnacle, da Javad/Topcon Positioning Systems; e Ashtech Solutions, da Thales Navigation.

Os programas científicos têm múltiplos propósitos, consistem de um grande número de programas individuais e normalmente não são restritos a um único tipo de receptor, aceitando dados de uma grande variedade de receptores geodésicos. A maioria serve para: uso padrão profissional com processamento rápido de redes pequenas; uso profissional em redes de alta acurácia com grandes distâncias; uso em pesquisa científica e em educação; e análise de dados e investigação científica, incluindo pesquisas geodinâmicas. Além das opções padrão para processamento rápido, oferecem alternativas particulares para processamento científico. Sua operação é de forma interativa e alguns programas incluem opções para a determinação de órbitas ou a estimativa de modelos atmosféricos. O usuário deve ter experiência e profundo conhecimento sobre os sinais GPS e sobre o comportamento dos erros. O processamento de dados é particularmente difícil quando os mesmos contêm distúrbios ionosféricos e quando se necessita de alta acurácia para grandes distâncias com dados ruidosos. Em geral, os modelos matemáticos são bem documentados e discutidos em publicações. Em alguns casos o usuário tem acesso ao código fonte, podendo alterá-lo ou adicionar novas rotinas. Exemplos de programas científicos são: BERNESE, desenvolvido pela Universidade de Berna na Suíça; GEONAP, desenvolvido originalmente na Universidade de Hannover, na Alemanha; e GIPSY-OASIS II, desenvolvido pelo Jet Propulsion Laboratory, nos Estados Unidos da América.

No presente trabalho foi utilizado o programa comercial Ashtech Solutions, da Thales Navigation®. Devido à limitação de tempo para a elaboração dessa dissertação, não foi utilizado um programa científico, como o Geonap, pois o grande número de linhas base da rede (233 vetores) demandaria bastante tempo para o processamento. De acordo com THALES NAVIGATION (2002), o programa Ashtech Solutions inclui os seguintes componentes:

- Planejamento de missão;
- Configuração do receptor;
- Transferência de dados;
- Processamento de vetores;
- Ajustamento de rede;
- Análise de qualidade;
- Transformação de coordenadas;
- Geração de relatórios; e
- Exportação.

Segundo MENZORI (2005), a Thales Navigation, respondendo a uma consulta, informou que a versão 2.60 do programa Ashtech Solutions utiliza a Técnica de Similaridade para a determinação das ambigüidades, sem dar maiores detalhes sobre a mesma.

De acordo com THALES NAVIGATION (2002), os dados são processados em três fases: Análise de dados-pré-processamento, Processamento, e Análise de dados-pós-processamento.

Na análise de dados-pré-processamento, podem ser verificados e editados, dados da estação e dados fornecidos pelo usuário, como: nome da estação e altura da antena. Os dados devem ser analisados antes de se iniciar o processamento.

As coordenadas conhecidas das estações de controle podem ser introduzidas pelo usuário e utilizadas como estações primárias nos processamentos dos vetores, e como controle fixo para o ajustamento, podendo ser especificadas como de controle horizontal, vertical ou ambos. Os parâmetros da antena devem também ser

informados antes do processamento, bem como as informações sobre: tipo da antena (com os dados sobre o centro de fase), tipo de medição (vertical ou inclinada) e altura da antena. Existe, também, uma função de corte utilizada para suprimir dados coletados nos minutos iniciais e finais, dados de uma observação e dados do processamento.

Os dados podem ser processados na sua totalidade, conjuntamente, ou somente os dados ainda não processados.

O Ashtech Solutions disponibiliza indicadores para avaliação da qualidade dos vetores processados e das coordenadas calculadas dos pontos. A qualidade das coordenadas calculadas para os pontos é expressa pela precisão das coordenadas e pelo estado da posição do ponto (posição bruta, processada ou ajustada), e a qualidade do vetor processado é expressa pela sua precisão. O indicador de qualidade QA verifica a magnitude das margens de erro para determinação da qualidade do vetor, comparando essa qualidade com um valor limite, baseado na exatidão esperada para os vetores, cujo valor é pré-estabelecido pelo usuário.

O Ashtech Solutions possui ferramentas para analisar os dados brutos utilizados para produzir o vetor e para analisar os resíduos dos vetores processados, permitindo que o usuário identifique e isole os problemas responsáveis por soluções ruins. O usuário pode excluir os dados identificados como causadores da má solução e reprocessar um vetor em busca de uma solução de melhor qualidade. Os resíduos resultantes do ajustamento pelo método dos mínimos quadrados do vetor processado podem ser vistos e analisados através do diagrama de resíduos do processamento do vetor. Existe um diagrama para cada satélite, à exceção do satélite utilizado como referência, mostrando os resíduos obtidos pela dupla diferença de fase no processamento do vetor. O usuário também pode identificar problemas através da análise dos dados brutos, verificando a existência de segmentos de dados ou satélites específicos, responsáveis pela má qualidade do vetor, podendo, portanto, remover esses dados problemáticos em um novo processamento. Para tal, o usuário tem acesso aos diagramas das observações brutas que mostram os dados coletados de cada satélite ao longo do tempo. São disponibilizadas as seguintes informações: fase da portadora L1, razão sinal-ruído

da portadora L1, fase da portadora L2 (se disponível), razão sinal-ruído da portadora L2 (se disponível) e a elevação.

Segundo SANTOS (2005), o processamento em rede é mais adequado do que o processamento em linhas de base, para obtenção de coordenadas de precisão.

Para o ajustamento de redes, são fixadas as estações de controle horizontal e vertical. Antes de iniciar o ajustamento da rede, é feito um teste de conectividade para verificar todos os vetores. Em seguida, o Ashtech Solutions disponibiliza uma série de indicadores para análise da qualidade do ajustamento de rede. Inicialmente o programa desenvolve um teste qui-quadrado, informando se o ajustamento passou no teste ou não. Após passar pelo teste qui-quadrado, o programa desenvolve o teste *tau* sobre cada vetor. Segundo KAVOURAS (1982, apud AMORIM, 2004), o teste *tau* é aplicado quando não se conhece adequadamente a variância *a priori*. O teste *tau* pressupõe que a estimativa da variância dos resíduos é feita em função da variância *a posteriori*. Ainda, segundo THALES NAVIGATION (2002), o Ashtech Solutions informa os resíduos dos vetores segundo as direções X, Y e Z (ou Norte, Este e normal). Para a avaliação da acurácia relativa da rede é realizado o teste QA, e são calculados os erros relativos horizontal e vertical e as acurácias relativas horizontal e vertical. Através da análise do ajustamento, o usuário pode identificar problemas que devem ser corrigidos. Após o ajustamento minimamente restringido (onde só é fixada uma estação de controle vertical e horizontal) apresentar resultados satisfatórios, o usuário deve realizar o ajustamento completamente restringido (onde são fixadas todas as estações de controle) e utilizar os indicadores já descritos para análise do ajustamento e correção dos problemas identificados, de modo que se obtenha um resultado satisfatório após ambos os ajustamentos. O programa realiza ainda o teste de repetição de vetores e o teste de circuitos fechados, que também são úteis para a identificação de vetores com problemas.

Consultada pelo fornecedor do programa, a Thales Navigation não informou qual a estratégia utilizada pelo Ashtech Solutions para o ajustamento de redes.

### 4.3. Nivelamento Geométrico

O nivelamento geométrico, de melhor precisão do que o nivelamento trigonométrico resulta, segundo BLITZKOW et al. (2004), na altitude nivelada e consiste na realização de leituras a ré e a vante em miras graduadas, com a utilização de um nível de luneta, cujo eixo ótico deve estar tangente à superfície equipotencial que passa pelo mesmo, obtendo-se a separação entre duas superfícies equipotenciais supostamente paralelas, passando pelas bases das miras (Figura 16). A diferença de elevação entre os dois pontos corresponde à diferença das leituras obtidas.

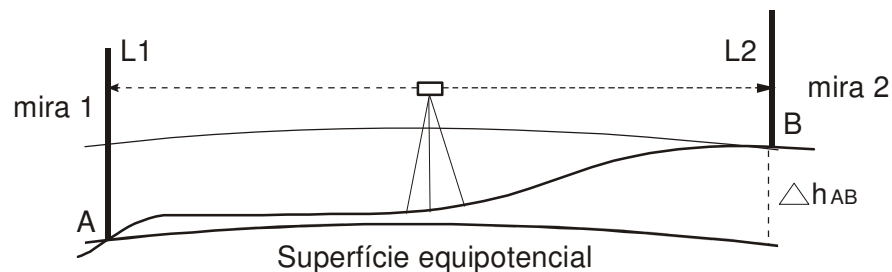


Figura 16 – Nivelamento geométrico.

Fonte : Adaptada de BLITZKOW et al. (2004).

Para se obter a altitude de um ponto, realiza-se geralmente o nivelamento em vários lances, conhecido como nivelamento composto (Figura 17), tendo como ponto de partida um ponto com altitude conhecida.

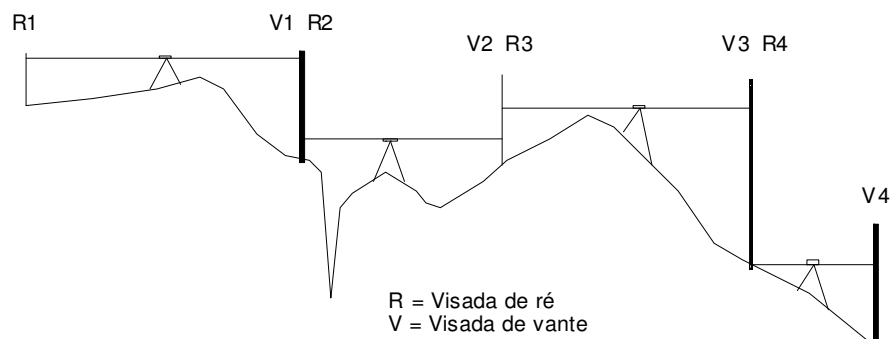


Figura 17: Nivelamento composto.

Fonte: Adaptado de BOUCHARD e MOFFIT (1965).

De acordo com GEMAEL (1954), no nivelamento composto, a cota do ponto desejado é igual à cota do ponto inicial (ponto de cota conhecida) mais o somatório das visadas de ré menos o somatório das visadas de vante.

O nivelamento geométrico é classificado como: de alta precisão, em levantamentos de âmbito nacional, para aplicações de cunho científico ou em levantamentos geodésicos fundamentais (ou de 1ª ordem); de precisão, em levantamentos de âmbito regional para áreas mais desenvolvidas (2ª ordem) ou menos desenvolvidas (3ª ordem); e de fins topográficos (levantamentos locais). O controle da qualidade dos trabalhos deve ser realizado através das diferenças entre o nivelamento e o contranivelamento seção a seção e acumulado na linha, respeitando-se os seguintes limites:  $2mm\sqrt{k}$  (k é a distância nivelada em quilômetros) para os levantamentos de alta precisão de cunho científico;  $3mm\sqrt{k}$  para os levantamentos de alta precisão fundamentais;  $6mm\sqrt{k}$  para levantamentos de precisão em áreas mais desenvolvidas;  $8mm\sqrt{k}$  para levantamentos de precisão em áreas menos desenvolvidas; e  $12mm\sqrt{k}$  para levantamentos locais. Recomenda-se o uso de níveis automáticos ou de bolhas providos de micrômetro ótico de placas plano-paralelas para os levantamentos de alta precisão e de precisão, aceitando-se alternativamente o procedimento dos três fios com o micrômetro de placas plano-paralelas fixo (IBGE, 1983).

#### **4.3.1. Correção ortométrica**

GEMAEL (1999) afirma que nos trabalhos de precisão deve-se adotar uma correção que compense o não paralelismo das superfícies de nível.

Baseado no princípio da conservação da energia potencial em uma superfície equipotencial, GEMAEL (1954) apresenta uma justificativa para o não paralelismo das superfícies equipotenciais: a aceleração da gravidade  $g$  varia com a latitude e é maior nos pólos do que no equador, portanto, a altitude ortométrica também varia, implicando no não paralelismo das superfícies equipotenciais.

De acordo com BLITZKOW et al. (2004), para grandes distâncias, as superfícies equipotenciais não são paralelas devido à distribuição heterogênea de massas na Terra, e o resultado do nivelamento geométrico depende do trajeto percorrido (Figura 18). Para a distância aproximada de 100m para um lance, ou de aproximadamente 3km, para uma seção de nivelamento, o paralelismo pode ser admitido.

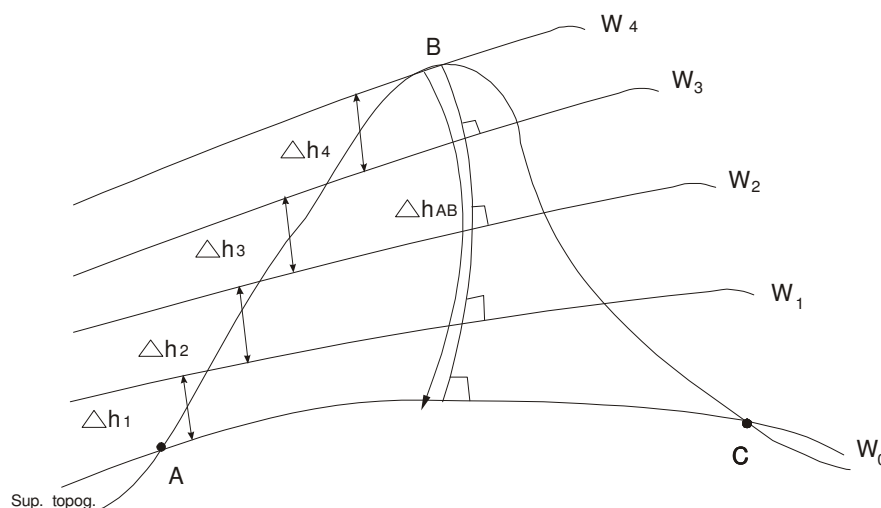


Figura 18: Não paralelismo das superfícies equipotenciais.

Fonte: BLITZKOW et al. (2004).

GEMAEL (1999) apresenta uma fórmula para o cálculo da correção ortométrica  $C$ , em função da altitude média  $H$ , da latitude média  $\phi$ , e da diferença de latitude  $\Delta\phi'$ , em minutos, a ser utilizada na determinação da altitude ortométrica por nivelamento geométrico:

$$C = 1542 \times 10^{-9} H \Delta\phi' \sin 2\phi \quad (4.36)$$

No presente trabalho foi calculada a correção ortométrica para a linha de nivelamento básica.

#### **4.3.2. Fontes de erro em nivelamento**

De acordo com BOUCHARD e MOFFIT (1965), as principais fontes de erro em nivelamento são os erros instrumentais, erros devido à manipulação, erros de acomodação dos equipamentos, erros de pontaria, enganos na leitura da mira e na gravação e cálculo, erros de fontes naturais e erros do operador.

Entre os erros de fontes naturais, destacam-se os efeitos da curvatura terrestre e da refração atmosférica, que podem ser eliminados no nivelamento geométrico pela simples colocação do nível em uma localização eqüidistante das duas miras (GEMAEL, 1954). As ondas de calor observadas nos dias quentes evidenciam a refração, podendo ser uma forte fonte de erros em nivelamento e até impossibilitar a leitura da mira. O problema é pior próximo ao terreno, sendo recomendada a escolha dos pontos de nivelamento com uma proximidade suficiente para a leitura, de modo que as mesmas não ocorram em níveis muito baixos, próximos ao terreno. Recomenda-se, também, evitar a realização de nivelamento no período de 2 a 3 horas do meio do dia. Para evitar a ação da dilatação desigual dos componentes do equipamento e para que uma extremidade da bolha de nível não seja submetida a um aquecimento maior do que a outra, o operador deve manter o instrumento à sombra, evitando a ação direta dos raios solares. Em nivelamento de precisão, devem ser utilizadas miras de invar, devido ao seu baixo coeficiente de dilatação (BOUCHARD e MOFFIT, 1965).

#### **4.3.3. Ajustamento de uma rede altimétrica**

Segundo MINGO e BASUALDO (1996), o ajustamento através do método das equações de observação é particularmente adequado para as redes altimétricas, tendo em vista que as equações desenvolvidas são sempre lineares. Porém é necessário que se verifique previamente se o levantamento está isento de erros grosseiros. Do mesmo modo, como o ajustamento não corrige os erros sistemáticos, os mesmos deverão ser corrigidos previamente.

A Figura 19 ilustra um lance de nivelamento geométrico, onde se pretende determinar a cota do ponto intermediário  $i$  e seu erro, conhecendo-se as cotas dos dois pontos  $A$  e  $B$ . Iniciando-se o cálculo a partir de  $A$ , obtém-se um perfil (linha contínua do desenho) com uma cota provisória  $Z_{P1}$  no ponto  $i$ , a uma distância nivelada  $d_i$ , para  $A$ , e uma cota  $Z_B + \varepsilon$  no ponto  $B$ , diferente de  $Z_B$  ( $Z_{B'} - Z_B = \varepsilon$ , erro de fechamento). Iniciando-se o cálculo a partir de  $B$ , obtém-se um perfil (linha tracejada do desenho) paralelo ao anterior, com uma defasagem igual a  $\varepsilon$ , e a cota  $Z_{P2} = Z_{P1} - \varepsilon$  para  $i$ .

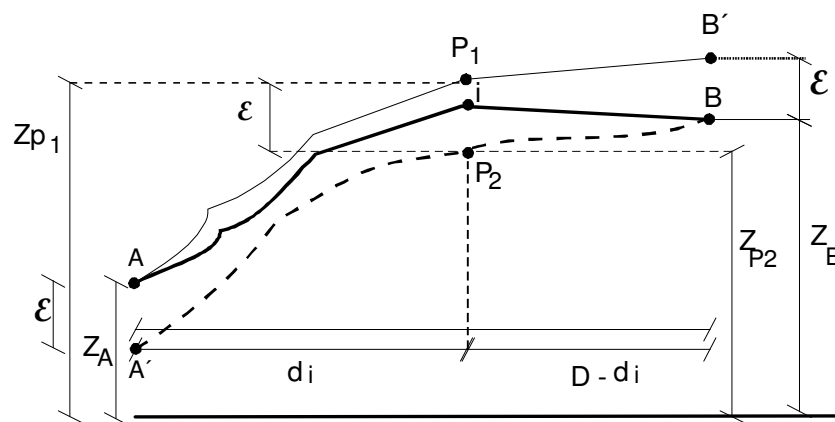


Figura 19: Lance de nivelamento geométrico.

Fonte: MINGO e BASUALDO (1996).

Como são obtidos dois valores distintos para a cota de  $i$ , calculados em função dos valores conhecidos  $A$  e  $B$ , respectivamente, o valor ajustado será a média ponderada dos mesmos. Em nivelamento geométrico, os pesos são inversamente proporcionais às distâncias niveladas:

$$Z_{Ci} = \frac{Z_{P1} \cdot p_1 + Z_{P2} \cdot p_2}{p_1 + p_2}$$

$$p_1 = \frac{1}{d_i} \quad \text{e} \quad p_2 = \frac{1}{D - d_i}$$

Assim, o valor ajustados será:

$$Z_{Ci} = Z_{P1} - \frac{\varepsilon \cdot d_i}{D} \quad (4.37)$$

Em uma rede altimétrica podem ser obtidas equações de duas formas: entre dois pontos de cotas desconhecidas; e entre um ponto de cota conhecida e outro de cota desconhecida. As equações para os dois casos, ilustrados na Figura, 20 são, respectivamente:

$$Z_i - Z_j = \Delta Z_{ji} + v, \text{ com peso } p_{ij} \quad (4.38)$$

$$Z_i - Z_T = \Delta Z_{Ti} + v \Rightarrow Z_i = Z_T + \Delta Z_{Ti} + v, \text{ com peso } p_{iT} \quad (4.39)$$

onde:  $Z_i, Z_j$  são as cotas desconhecidas;

$Z_T$  é a cota conhecida;

$\Delta Z_{ji}$  é o desnível obtido por nivelamento geométrico entre os dois pontos de cotas desconhecidas;

$\Delta Z_{Ti}$  é o desnível obtido por nivelamento geométrico entre o ponto de cota desconhecida e o ponto de cota conhecida; e

$v$  é o erro de medição.

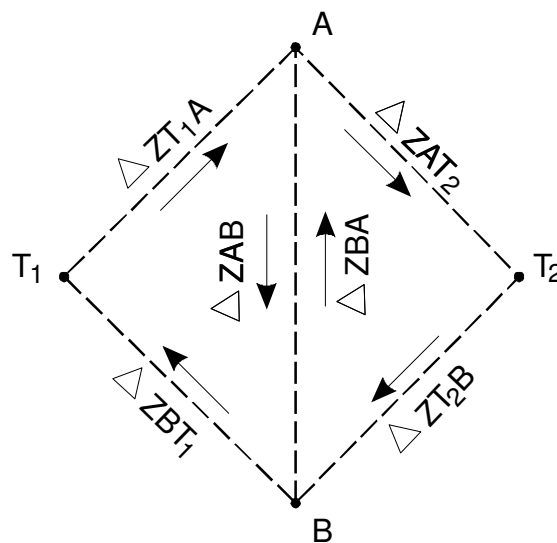


Figura 20: Rede altimétrica.

Fonte: MINGO e BASUALDO (1996).

## 5. MODELAGEM DA SUPERFÍCIE GEOIDAL LOCAL

### 5.1. Área de Estudo

O município de Maceió/AL (Figura 21) tem sua área urbana composta por 50 bairros (Figura 22), distribuídos em duas partes: uma área maior, localizada entre o Oceano Atlântico, a Lagoa de Mundaú, os municípios de Satuba e Rio Largo e o rio Pratagi; e uma faixa estreita, com aproximadamente 1km de largura, ao longo do litoral norte, desde o rio Pratagi até o município de Paripueira.

Em 1998, a Empresa Maplan Aerolevantamentos S. A., contratada pela Prefeitura Municipal de Maceió, implantou um conjunto de marcos geodésicos planialtimétricos na área urbana do município.

Para o presente trabalho, foram selecionados 117 marcos da área principal, com vistas à determinação de uma superfície geoidal local. A Figura 23 ilustra os marcos selecionados e a delimitação da área de estudo (área de 115,5 km<sup>2</sup>).



Figura 21: Localização do município de Maceió/AL.

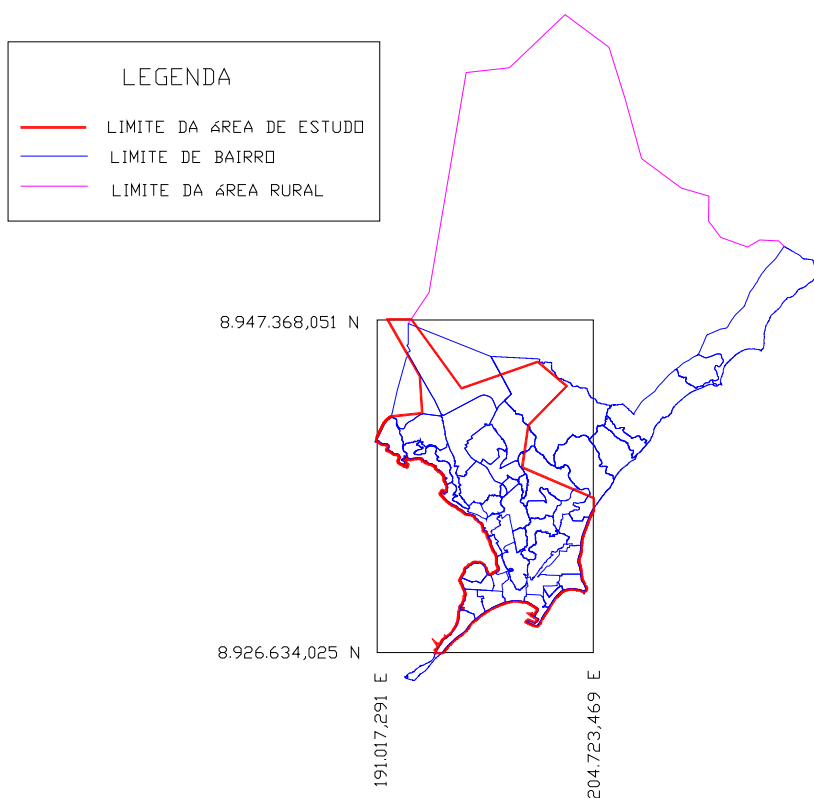


Figura 22 : Município de Maceió com abairramento e a área de estudo.

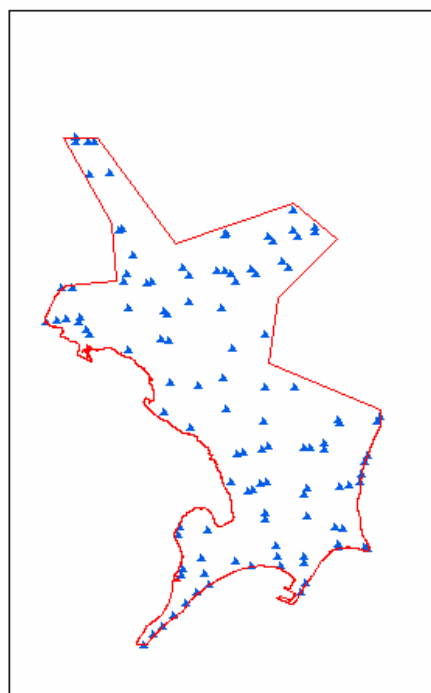


Figura 23: Localização dos marcos geodésicos (triângulos em azul) na área de estudo.

## 5.2. Metodologia para a Determinação da Superfície Geoidal Local

A determinação da Superfície Geoidal Local foi realizada seguindo-se diversas etapas, conforme o fluxograma da figura 24.

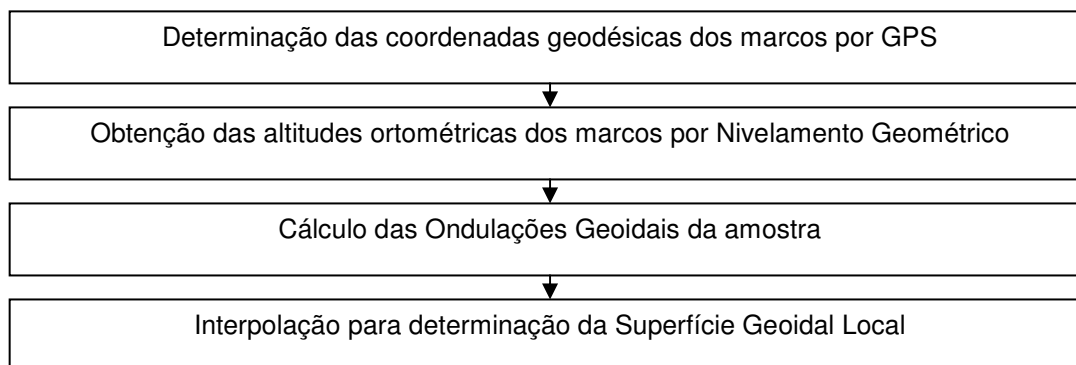


Figura 24: Fluxograma para a Determinação da Superfície Geoidal Local.

### 5.2.1. Determinação das coordenadas geodésicas dos marcos por GPS

A determinação das coordenadas geodésicas dos marcos foi realizada a partir de observações de satélites GPS, utilizando-se o método de posicionamento estático. A Empresa MAPLAN – Aerolevantamentos S.A. - realizou as observações utilizando três receptores GPS de uma frequência, modelo GPR-1, da TOPCON. As observações foram realizadas através do método de posicionamento estático, sendo realizadas 105 sessões de aproximadamente 1 hora e 30 minutos, com intervalo de recepção de 20 segundos.

Como a Empresa não disponibilizou os valores das alturas elipsoidais, nem a precisão do ajustamento, fornecendo apenas uma parte dos arquivos brutos de rastreo, correspondentes a 189 vetores, foi necessária, para a presente pesquisa, a execução de rastreios adicionais, realizados entre os anos de 2005 e 2006, possibilitando a obtenção de mais 53 vetores, em 53 sessões de rastreo. Assim, no total foram realizadas 158 sessões de rastreo para a obtenção de 242 vetores linearmente independentes.

Os marcos foram agrupados em cinco sub-redes independentes, com configuração geométrica semelhante à apresentada na Figura 25. Posteriormente as sub-redes foram integradas em uma só rede (Figura 26), apoiada nos vértices SAT-93057 e SAT-93070 da Rede Nacional GPS do IBGE, de modo que cada vértice ficou conectado a um mínimo de três outros vértices, ficando a rede final com um total de 242 vetores.

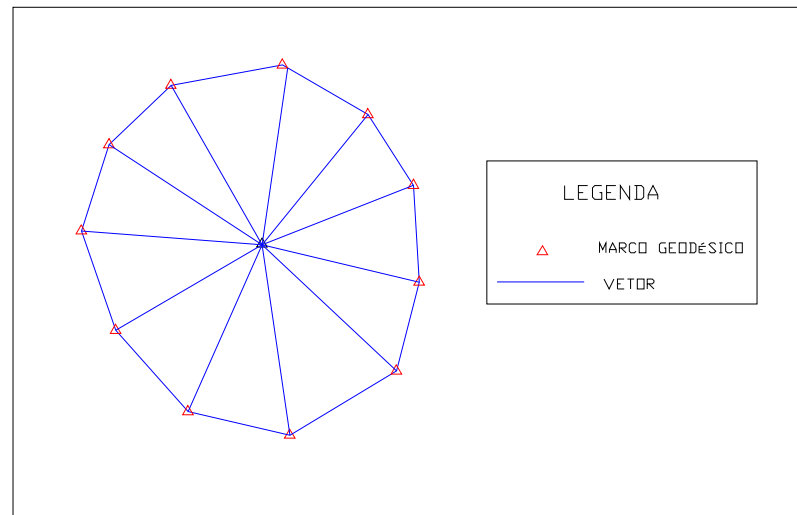


Figura 25: Configuração geométrica das sub-redes.

Para os rastreios complementares, realizados no desenvolvimento da pesquisa, foram utilizados dois receptores GPS de uma frequência, modelo ProMark II da Thales Navigation, com observações realizadas através do método de posicionamento estático, com 37 sessões de 1 hora para as sub-redes e 16 sessões de 1 hora e 30 minutos para a integração das sub-redes em uma única rede, com intervalo de recepção de 15 segundos.

O processamento dos vetores e o ajustamento das redes foram realizados através do programa Ashtech Solutions, da Thales Navigation, alcançando-se precisões horizontais melhores do que  $0,03\text{m} + 1 \text{ ppm}$  e precisões verticais melhores do que  $0,05\text{m} + 2 \text{ ppm}$  (nível de confiança  $1 \sigma$ ).

Como todos os pontos estão localizados na área urbana, sujeitos a fontes de multicaminhamentos, optou-se por utilizar o ângulo de corte de  $15^\circ$  para elevação dos satélites, no processamento dos vetores. Foram utilizadas as efemérides obtidas

durante os rastreios (efemérides *broadcast*) e o sistema geodésico de referência adotado foi o SAD-69.

O processo de ajustamento foi realizado de acordo com as seguintes etapas:

- 1) Ajustamento da rede, fixando-se como ponto de controle horizontal e vertical apenas o vértice SAT-93057; 2) Análise dos resultados dos testes *tau* e QA do ajustamento anterior, identificando a ocorrência de falhas nesses testes e realizando a correção dos problemas identificados através de novo processamento dos vetores editados (com exclusão de alguns satélites) ou obtidos em novos rastreios; 3) Repetição dos passos 1 e 2 até quando os testes não apresentaram resultados falhos; 4) Realização dos passos anteriores fixando-se como pontos de controle horizontal e vertical os vértices SAT-93057 e SAT-93070. Esse procedimento está de acordo com a recomendação do manual do Astech Solutions segundo o qual, quanto menor for o número de pontos fixos de controle, mais fácil é a identificação dos vetores responsáveis por falhas nos testes.

O Anexo I apresenta os valores das alturas elipsoidais obtidas e as precisões correspondentes após o ajustamento final.

As precisões das alturas elipsoidais dos pontos da rede geodésica, à exceção dos vértices de referência do IBGE (SAT-93057 e SAT-93070), variaram entre 0,014m e 0,082m.



### **5.2.2. Obtenção das altitudes ortométricas dos marcos por nivelamento geométrico**

As altitudes ortométricas foram obtidas através de nivelamento geométrico, realizado pela empresa MAPLAN Aerolevantamento S.A. A empresa realizou, entre fevereiro e março de 1998, o nivelamento de uma linha básica, com cerca de 65 km, iniciando e terminando, respectivamente, nas Referências de Nível 2527-V e 2603-P, da Rede de Nivelamento de 1ª Ordem do IBGE (ver figura 27). Foram utilizados quatro níveis óticos digitais, modelo NA-2002 da Wild, e as leituras das alturas foram realizadas na ordem do décimo do milímetro. A precisão especificada para esse equipamento, de acordo com o catálogo do fabricante, varia de 1,5mm a 0,9mm em 1 km de duplo nivelamento, conforme a mira utilizada.

A empresa também realizou, entre julho e agosto de 1998, nivelamento geométrico em 20 redes, compostas pelos marcos da Rede Geodésica. Cada uma dessas redes utilizou duas ou mais Referências de Nível. As Referências de Nível utilizadas para as redes de nivelamento foram a RN-9335D e a RN-2603-P, da Rede de Nivelamento de 1ª Ordem do IBGE, e os vértices (Pontos de Segurança – PS) da linha básica ajustada. Foram utilizados os mesmos níveis óticos digitais utilizados no nivelamento da linha básica, sendo realizadas leituras milimétricas para as alturas.

Nas operações de nivelamento, foram realizadas as leituras dos três fios estadimétricos para autocontrole das alturas e obtenção das distâncias, procurando-se equilibrar as distâncias de visadas a ré e a vante, para a minimização do erro de colimação.

A linha básica apresentou um erro de fechamento igual a 3,5mm, equivalente a  $0,4mm\sqrt{K}$ . O método de nivelamento, Classe IN, o mais rigoroso especificado pela NBR-13.133 da ABNT, especifica o limite de  $12mm\sqrt{K}$  como tolerância para o erro de fechamento. Assim, o erro de fechamento da linha básica foi muito inferior a esse limite. Para levantamentos de ordem superior

aos apresentados pela NBR-13.133, essa norma recomenda a utilização das especificações e normas gerais para levantamentos geodésicos do IBGE. Portanto, o erro de fechamento da linha básica é menor do que o limite de  $2mm\sqrt{K}$ , estabelecido pela norma do IBGE para redes de nivelamento de 2ª Ordem, conforme a Resolução P.R. nº. 22, de 21/07/1983, do IBGE. Os erros de fechamento das linhas de nivelamento que definiram as 20 redes foram inferiores a  $8mm\sqrt{K}$ , atendendo, assim, à tolerância de fechamento para o nivelamento geométrico, Classe IN, conforme a NBR-13.133 da ABNT.

Está ilustrada na Figura 27 a configuração geométrica das redes de nivelamento apoiadas na linha básica.

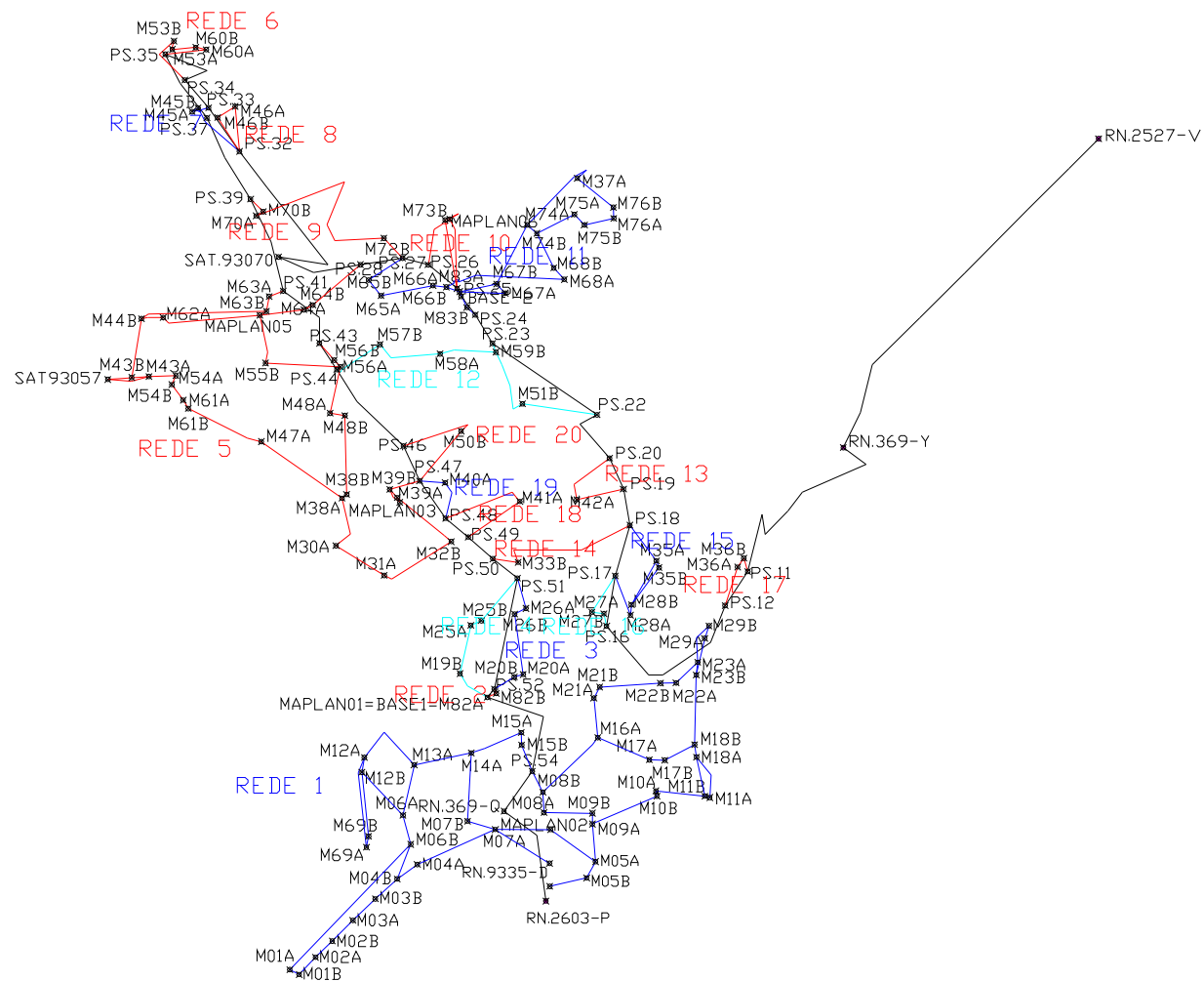


Figura 27: Configuração geométrica das redes de nivelamento e da linha básica.

Além das RN's já citadas, a linha básica é composta por diversos Pontos de Segurança (PS), pelo marco MP01, pelo vértice SAT93070, passando, também, pelas RN's 369Y e 369Q.

Os pares de estações 2603P/2527V e 2527V/369Y são estações altimétricas pertencentes a redes distintas do IBGE. No nivelamento do trecho 2527V/369Y (estações de redes distintas), observou-se uma divergência entre a diferença de nível medida e a diferença entre as altitudes conhecidas. Porém, conforme se pode verificar a seguir, a divergência foi mínima para o trecho 369Y / 369Q (estações da mesma rede).

#### Altitudes

|               |            |
|---------------|------------|
| Estação 2527V | = 4,1121m  |
| Estação 369Y  | = 7,4383m  |
| Estação 369Q  | = 15,7151m |

#### Diferença de altitude

|                              |           |
|------------------------------|-----------|
| Estação 2527V / Estação 369Y | = 3,3262m |
| Estação 369Y / Estação 369Q  | = 8,2768m |

#### Diferença de nível medida

|                              |           |
|------------------------------|-----------|
| Estação 2527V / Estação 369Y | = 3,1362m |
| Estação 369Y / Estação 369Q  | = 8,2717m |

#### Divergência entre a diferença de altitude e a diferença de nível medida

|                              |                             |
|------------------------------|-----------------------------|
| Estação 2527V / Estação 369Y | = 3,3262m - 3,1362m         |
|                              | = 0,1880m (redes distintas) |
| Estação 369Y / Estação 369Q  | = 8,2768m - 8,2717m         |
|                              | = 0,0051m (mesma rede)      |

A seguir é apresentado o cálculo da correção ortométrica para o nivelamento da linha básica.

|                      |                                                                                                  |
|----------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Latitude média       | $= 9^{\circ}36'23,5'' \text{ S}$                                                                 |
| Altitude média       | $= 3,55 \text{ m}$                                                                               |
| Variação de latitude | $= 9,01666667'$                                                                                  |
| Correção ortométrica | $= 1.542 \times 10^{-9} \times 3,55 \text{ m} \times 9,017 \times \text{sen}(19^{\circ}12'47'')$ |
|                      | $= 1,6 \times 10^{-5} \text{ m} \cong 0,000 \text{ mm}$                                          |

Portanto, a correção ortométrica é negligenciável para o caso em estudo.

A linha de nivelamento básica e as 20 redes foram ajustadas através de um procedimento desenvolvido no programa MatLab, utilizando o modelo de ajustamento paramétrico pelo Método dos Mínimos Quadrados. O procedimento para ajustamento consiste de um arquivo de texto, para cada rede de nivelamento, com variáveis contendo os dados de entrada e com a seqüência de comandos e operações na linguagem MatLab, para o cálculo do ajustamento. A execução do ajustamento é realizada quando se copia o conteúdo do arquivo de texto na área de trabalho do MatLab, obtendo-se como resultado o vetor X com os parâmetros ajustados; a matriz SigmaX, correspondente à MVC – Matriz Variância-Covariância dos parâmetros ajustados; e o vetor Prec (formado a partir dos elementos da diagonal da matriz SigmaX), com a precisão ( $\sigma_x$ ) dos parâmetros ajustados. O texto em MatLab referente ao ajustamento de uma das redes de nivelamento é apresentado no Anexo II.

O resultado do ajustamento dos nivelamentos geométricos da linha básica e das redes nela apoiadas encontra-se no Anexo III.

Em virtude do pequeno erro de fechamento da linha básica (3,5mm), as precisões das altitudes ortométricas de seus pontos, após o ajustamento, foram inferiores a 1mm. Como as altitudes ortométricas dos pontos das redes

apoiadas na linha básica foram determinadas ao nível milimétrico, negligenciou-se os valores sub-milimétricos das precisões dos pontos da linha básica. Por isso as precisões das altitudes ortométricas da linha básica, apresentadas no Anexo III, estão com o valor nulo.

As precisões das altitudes ortométricas dos pontos das redes apoiadas na linha básica variaram entre 0,000m e 0,006m. Em comparação com as precisões das alturas elipsoidais, obtidas por GPS (entre 0,014m e 0,082m), o ajustamento das redes de nivelamento proporcionou precisões muito melhores. As redes de nivelamento foram apoiadas em pontos da linha básica. Por apresentarem resultados submilimétricos, as precisões das altitudes ortométricas desses pontos foram consideradas iguais a zero. Por isso não houve influências (propagação) no ajustamento das redes, o que contribuiu para a boa precisão de suas altitudes ortométricas.

### 5.2.3. Cálculo das ondulações geoidais da amostra

As ondulações geoidais nas localizações dos marcos foram determinadas pela diferença entre as alturas elipsoidais, obtidas por GPS, e as altitudes ortométricas, obtidas por nivelamento geométrico, conforme consta no Anexo V. Como a altura elipsoidal e a altitude ortométrica são grandezas independentes entre si, a precisão da ondulação geoidal em cada ponto é:

$$\sigma_{N(observ.)} = \sqrt{\sigma_h^2 + \sigma_H^2} \quad (5.1)$$

Os valores das ondulações geoidais (ver ANEXO IV) variaram entre 17,275m e 18,218m (variação de 0,943m), com precisões entre 0,002m e 0,082m. Como os ajustamentos das redes de nivelamento proporcionaram altitudes ortométricas com precisões (entre 0,000m e 0,006m) muito melhores do que as precisões das alturas elipsoidais (entre 0,014m e 0,082m), essas últimas tiveram maior influência nas precisões das ondulações geoidais.

#### **5.2.4. Interpolação para Determinação da Superfície Geoidal Local**

O conjunto de 117 pontos com ondulação geoidal conhecida foi utilizado como amostra para a realização das interpolações para a determinação da Superfície Geoidal Local através da extensão Geostatistical Analyst do programa computacional ArcGIS. Na análise da amostra e nas interpolações foram utilizados os dados de ondulação geoidal em milímetros.

Inicialmente foi feita uma análise preliminar da distribuição dos dados, com a caracterização da localização da amostra, a elaboração dos histogramas da distribuição da amostra e da distribuição transformada através das funções logarítmica e box-cox, para verificação da condição de normalidade.

Foi, também, realizada a análise da estrutura de correlação espacial da amostra, através dos semi-variogramas experimentais sob as condições de isotropia e anisotropia.

Em seguida foram geradas diversas superfícies geoidais locais usando-se diferentes interpolações (ver item 5.2.4.3).

Finalmente, foi selecionada como Superfície Geoidal Local, aquela que apresentou os melhores resultados pela Validação Cruzada.

##### **5.2.4.1. Análise Preliminar da distribuição dos dados**

A análise visual da localização espacial da amostra (Figura 23) revela que os pontos têm distribuição aleatória. Tendo em vista que uma das finalidades da rede geodésica implantada é o apoio a levantamentos topográficos, os pontos estão agrupados em pares intervisíveis. Porém, muitos marcos foram destruídos, havendo a ocorrência de muitos pontos sem o respectivo par. Em virtude do exposto, a região central tem uma densidade menor de pontos.

a) Histograma da distribuição sem transformação

O número de classes do histograma foi determinado em função do número de pontos da amostra.

$$K = 1 + 3,3 \log_{10} n$$

$$3 \leq K \leq 20 \quad (\text{ANDRIOTTI, 2003}) \quad (5.2)$$

$$K = 1 + 3,3 \log_{10} 117 = 7,20 \cong 7 \text{ classes}$$

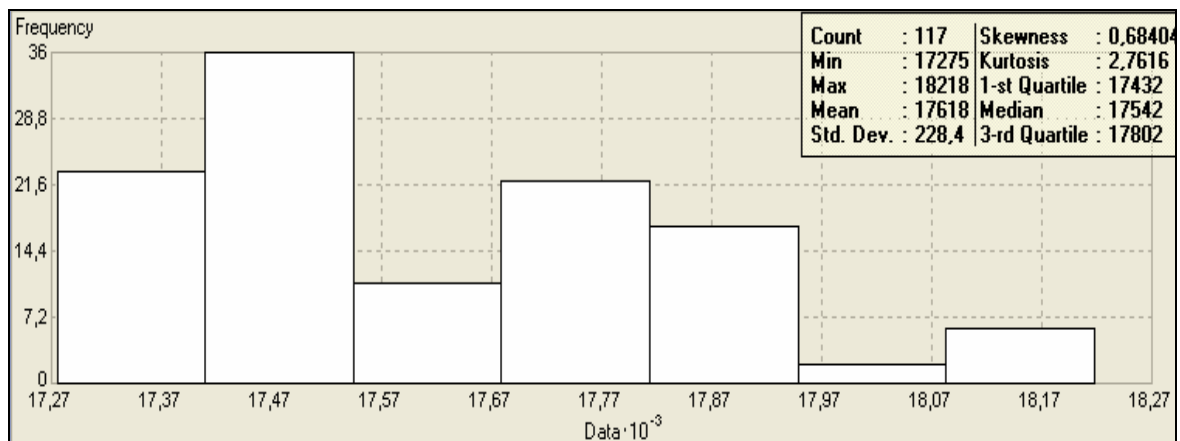


Figura 28: Histograma da distribuição sem transformação.

O histograma apresentado na Figura 28 com as estatísticas da distribuição revela que a distribuição é assimétrica à direita (assimetria positiva) e platicúrtica (curtose inferior a 3), denotando a não normalidade da mesma.

b) Histograma da distribuição com transformação logarítmica

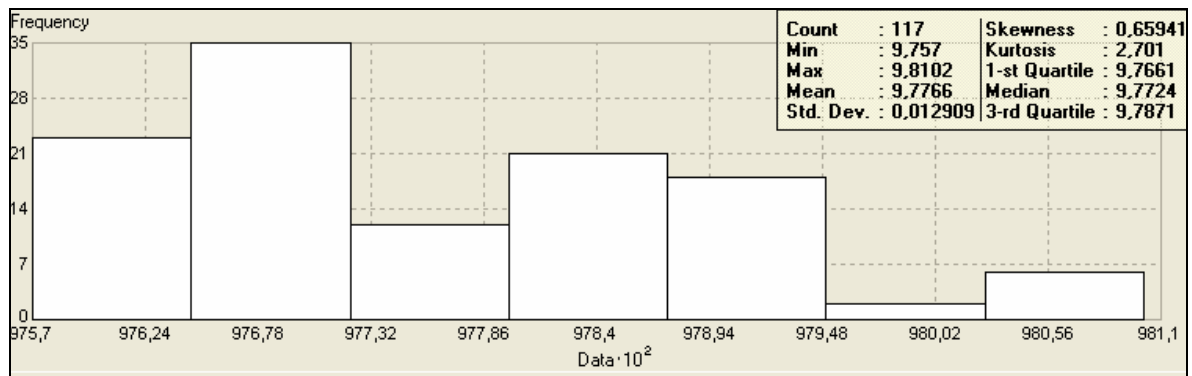


Figura 29: Histograma da distribuição com transformação logarítmica.

O histograma obtido pela transformação logarítmica (Figura 29) diverge da distribuição normal.

c) Histograma da distribuição com transformação box-cox

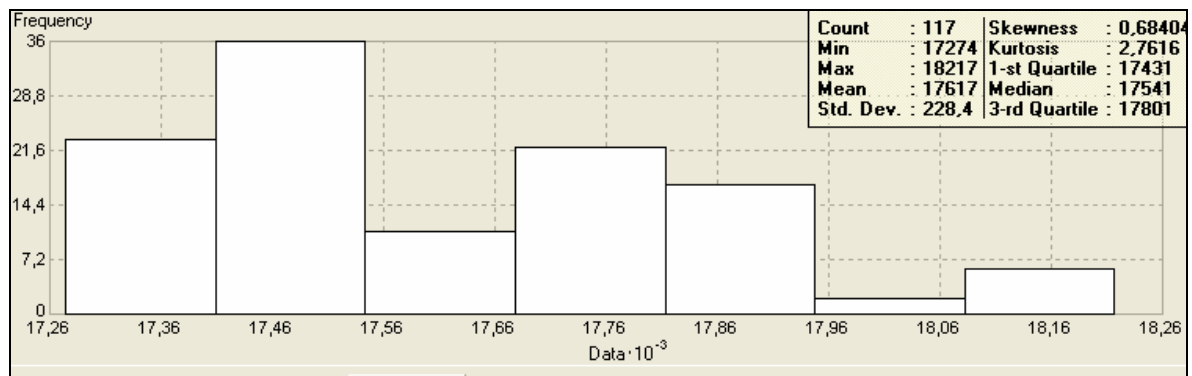


Figura 30: Histograma da distribuição com transformação box-cox.

O histograma obtido pela transformação box-cox (Figura 30) diverge da distribuição normal.

Como não foi possível a normalização da distribuição, não é recomendável a utilização de krigagem para a geração da superfície geoidal local.

#### 5.2.4.2. Análise da estrutura de correlação espacial da amostra

Foram consideradas as situações isotrópica e anisotrópica. Como o espaçamento médio entre as amostra é aproximadamente igual a 500m, o mesmo foi utilizado como valor do incremento  $h$ , adotando-se um número de 13 incrementos para a elaboração dos variogramas experimentais. Assim, a distância máxima ( $d = 13 \times h = 13 \times 500m = 6.500m$ ) para análise da correlação espacial entre os pares de pontos não ultrapassou a metade da menor dimensão da área de estudo (6.853m).

Foi analisada a anisotropia em 9 direções (de 20° em 20°), a partir de 0°, com tolerância de 45° e 1.500m de largura para a área de pesquisa, conforme mostra a Figura 31.

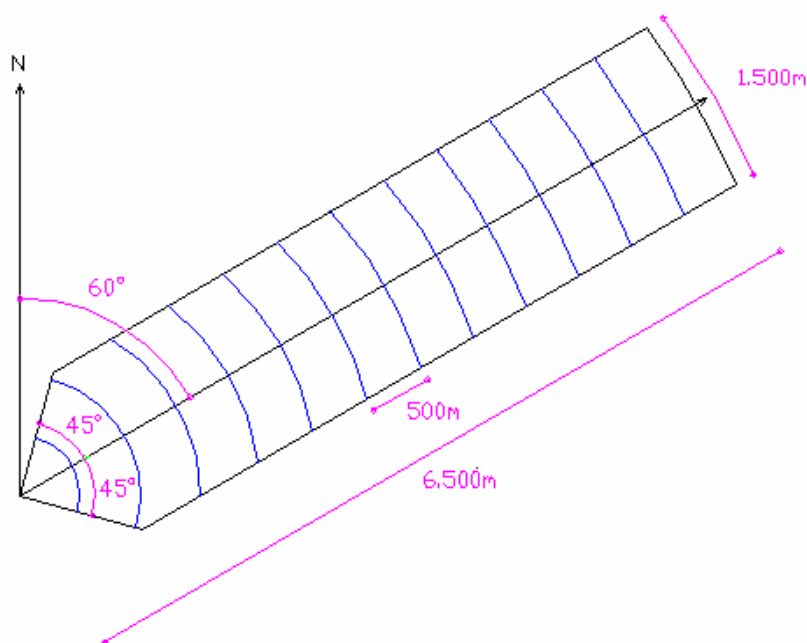


Figura 31: Área de pesquisa com anisotropia.

a) Isotropia

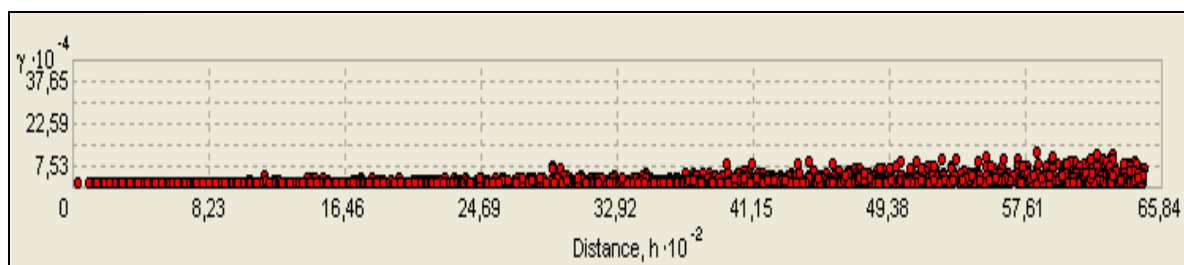


Figura 32: Semivariograma (isotropia)

b) Anisotropia na direção 0°

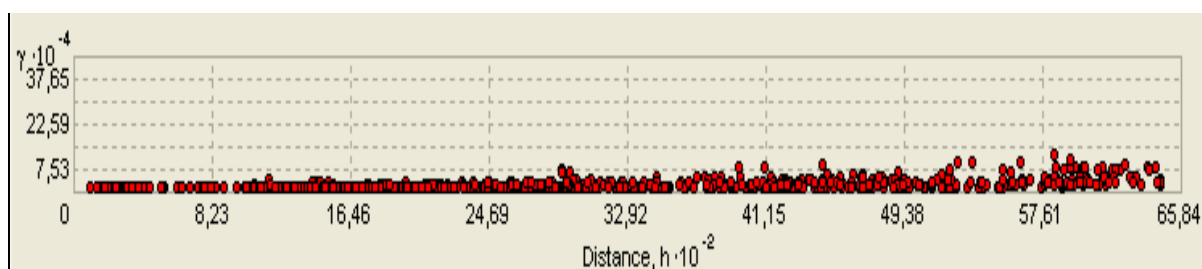


Figura 33: Semivariograma (anisotropia, direção 0°)

c) Anisotropia na direção 20°

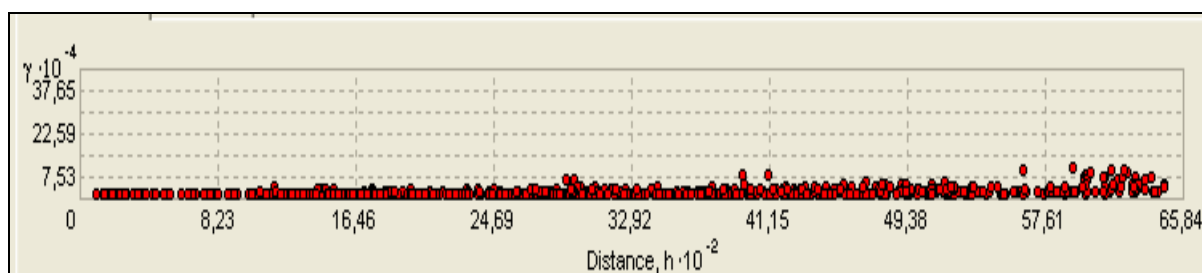


Figura 34: Semivariograma (anisotropia, direção 20°)

d) Anisotropia na direção 40°

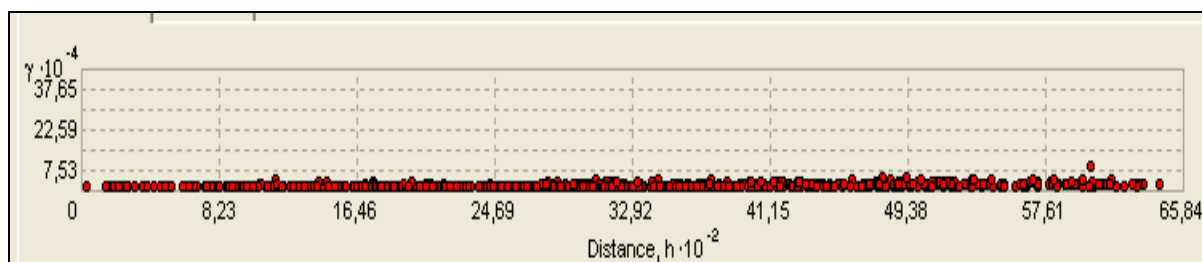


Figura 35: Semivariograma (anisotropia, direção 40°)

e) Anisotropia na direção 60°

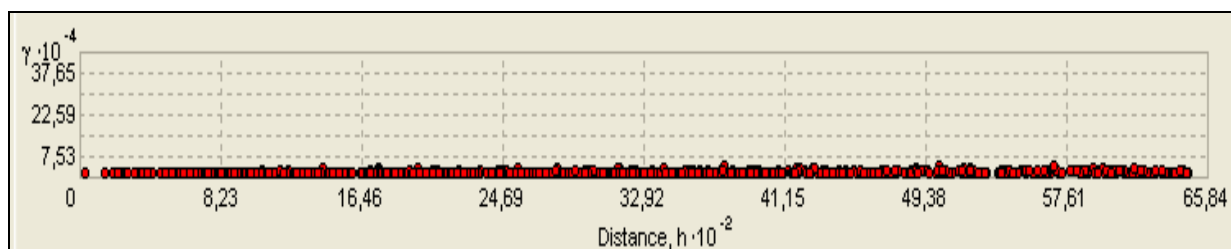


Figura 36: Semivariograma (anisotropia, direção 60°)

f) Anisotropia na direção 80°

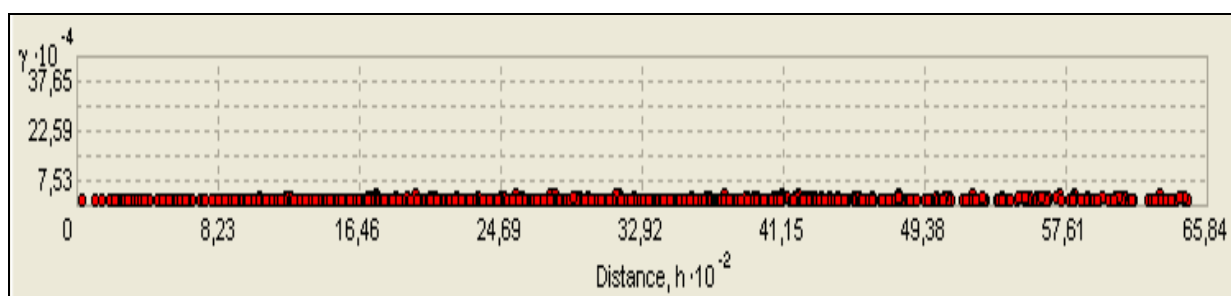


Figura 37: Semivariograma (anisotropia, direção 80°)

g) Anisotropia na direção 100°

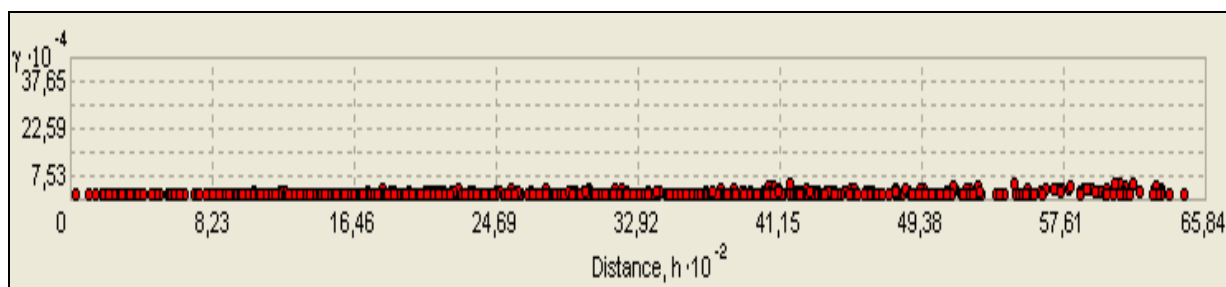


Figura 38: Semivariograma (anisotropia, direção 100°)

h) Anisotropia na direção 120°

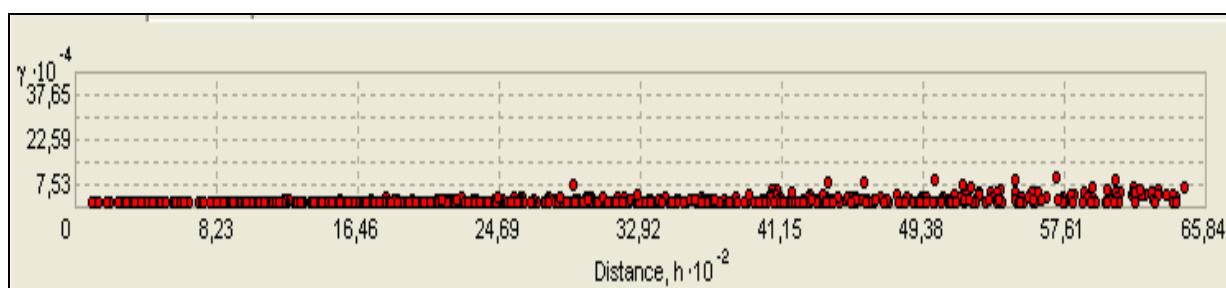


Figura 39: Semivariograma (anisotropia, direção 120°)

i) Anisotropia na direção 140°

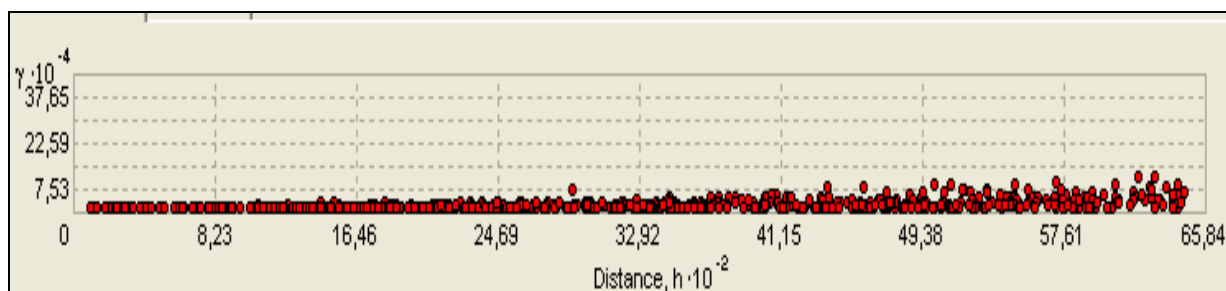


Figura 40: Semivariograma (anisotropia, direção 140°)

j) Anisotropia na direção 160°

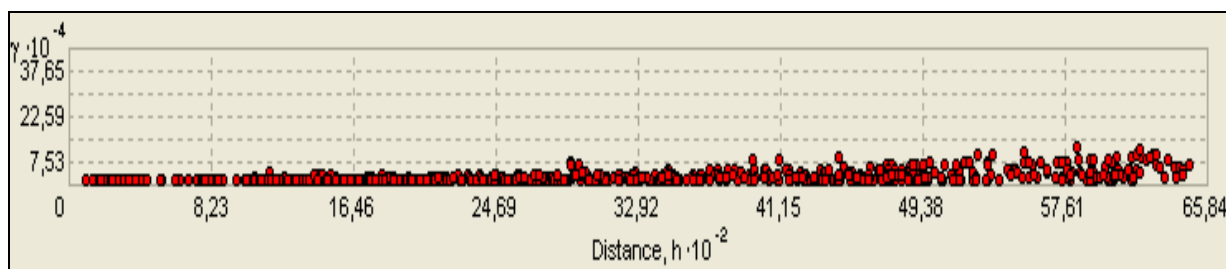


Figura 41: Semivariograma (anisotropia, direção 160°)

Os semi-variogramas obtidos (Figuras 32 a 41) não apresentam estrutura espacial. Como se pode observar, todos eles se ajustam a uma reta horizontal, passando por  $\gamma = 0$ , evidenciando-se a incapacidade de captar a variação de pequena escala.

#### 5.2.4.3. Geração das superfícies

Como a distribuição da amostra e as distribuições transformadas divergem da distribuição normal, não foi possível a utilização de interpolação por geoestatística (Krigagem) no presente trabalho. Assim, foram utilizados apenas métodos de interpolação determinísticos. Como os semi-variogramas não apresentaram estrutura espacial nos casos analisados, não foi considerada a possibilidade de anisotropia na utilização dos métodos de interpolação local, utilizando-se áreas de pesquisa circulares.

Foram determinadas superfícies geoidais pelos métodos determinísticos locais de Ponderação pelo Inverso da da Distância (com a melhor potência determinada automaticamente por validação cruzada) e de ajustamento por um Polinômio do 1º, 2º e 3º graus. Também foi utilizado o ajustamento polinomial na forma global.

A qualidade da interpolação pôde ser avaliada utilizando-se os resíduos decorrentes das diferenças entre os valores de ondulação geoidal calculados a

partir das observações ( $N_{observ.} = h - H$ ) e os valores interpolados (através da validação cruzada). Assim, pôde-se calcular o Erro Médio Quadrático para a superfície geoidal local, devido à interpolação:

$$EMQ_{int\,erp.} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (N_{i\,observ.} - N_{i\,int\,erp.})^2 / n} \quad (5.3)$$

As especificações das interpolações realizadas e os respectivos Erros Médios Quadráticos encontram-se na Tabela 07. A superfície obtida através do método determinístico global de interpolação através de um Polinômio do 3º grau (IPG3) apresentou o menor Erro Médio Quadrático (27,9 mm). O Anexo V apresenta o detalhamento do cálculo do Erro Médio Quadrático da superfície IPG3.

Tabela 07: Validação cruzada das interpolações para a Superfície Geoidal Local

| INTERPOLAÇÃO                     |             | SUPERFÍCIE GEOIDAL | ÁREA DE PESQUISA                   | RAIO DA ÁREA DE PESQUISA | NÚMERO DE PONTOS | NÚMERO MÍNIMO DE PONTOS | POTÊNCIA | ERRO MÉDIO QUADRÁTICO (mm) | CLASSIFICAÇÃO PELO ERRO MÉDIO QUADRÁTICO |
|----------------------------------|-------------|--------------------|------------------------------------|--------------------------|------------------|-------------------------|----------|----------------------------|------------------------------------------|
| MÉTODO                           | ABRANGÊNCIA |                    |                                    |                          |                  |                         |          |                            |                                          |
| INVERSO DA POTÊNCIA DA DISTÂNCIA | LOCAL       | PID1               | Circular                           | 6.213,70                 | 15               | 10                      | 2,2055   | 32,07                      | 16                                       |
|                                  |             | PID2               | circular - 4 setores (NE,SE,SW,NW) | 6.213,70                 | 5 por setor      | 3 por setor             | 1,5732   | 30,49                      | 13                                       |
|                                  |             | PID3               | circular - 4 setores (N,S,E,W)     | 6.213,70                 | 5 por setor      | 3 por setor             | 1,5694   | 30,47                      | 12                                       |
|                                  |             | PID4               | circular - 8 setores               | 6.213,70                 | 2 por setor      | 1 por setor             | 1,4078   | 29,88                      | 11                                       |
|                                  |             | PID5               | Circular                           | 24.855,00                | 117              | 117                     | 2,7314   | 31,55                      | 15                                       |
| POLINOMIAL                       |             | IPL1               | Circular                           | 5.553,30                 | 15               | 10                      | 1,0000   | 29,83                      | 9                                        |
|                                  |             | IPL2               | circular - 4 setores (NE,SE,SW,NW) | 5.553,30                 | 5 por setor      | 3 por setor             | 1,0000   | 29,37                      | 5                                        |
|                                  |             | IPL3               | circular - 4 setores (N,S,E,W)     | 5.553,30                 | 5 por setor      | 3 por setor             | 1,0000   | 29,31                      | 3                                        |
|                                  |             | IPL4               | circular - 8 setores               | 5.553,30                 | 2 por setor      | 1 por setor             | 1,0000   | 29,33                      | 4                                        |
|                                  |             | IPL5               | Circular                           | 13.143,00                | 15               | 10                      | 2,0000   | 29,40                      | 6                                        |
|                                  |             | IPL6               | circular - 4 setores (NE,SE,SW,NW) | 13.143,00                | 5 por setor      | 3 por setor             | 2,0000   | 29,87                      | 10                                       |
|                                  |             | IPL7               | circular - 4 setores (N,S,E,W)     | 13.143,00                | 5 por setor      | 3 por setor             | 2,0000   | 30,93                      | 14                                       |
|                                  |             | IPL8               | circular - 8 setores               | 13.143,00                | 5 por setor      | 3 por setor             | 2,0000   | 29,77                      | 8                                        |
|                                  |             | IPL9               | circular - 8 setores               | 13.143,00                | 2 por setor      | 1 por setor             | 2,0000   | 35,82                      | 18                                       |
|                                  |             | IPL10              | Circular                           | 24.855,00                | 15               | 10                      | 3,0000   | 33,49                      | 17                                       |
| GLOBAL                           | IPG1        | Global             | -                                  | -                        | -                | 1,0000                  | 60,97    | 19                         |                                          |
|                                  | IPG2        | Global             | -                                  | -                        | -                | 2,0000                  | 29,56    | 7                          |                                          |
|                                  | IPG3        | Global             | -                                  | -                        | -                | 3,0000                  | 27,69    | 1                          |                                          |
|                                  | IPG4        | Global             | -                                  | -                        | -                | 4,0000                  | 28,58    | 2                          |                                          |

Obs.: Melhor superfície (menor Erro Médio Quadrático) em azul / pior superfície (maior Erro Médio Quadrático) em vermelho.

PID = Ponderação pelo Inverso da Distância; IPL = Interpolação Polinomial Local; IPG = Interpolação Polinomial Global.

À exceção da superfície IPG1, as validações cruzadas das demais superfícies apresentaram valores muito próximos para o Erro Médio Quadrático (entre 27,9mm e 35,82mm), não havendo muita distinção entre os diferentes métodos de interpolação. O que chama a atenção é o valor alto para o Erro Médio Quadrático da superfície IPG1 (60,97mm).

#### 5.2.4.4. Qualidade da Superfície Geoidal Local

A qualidade da superfície geoidal local depende da precisão das ondulações geoidais calculadas em função das observações ( $\sigma_{N(observ.)}$ ) e da qualidade da interpolação ( $EMQ_{int\ erp.}$ ).

Para homogeneizar os procedimentos, calculou-se o Erro Médio Quadrático da ondulação geoidal:

$$EMQ(\sigma_{N(observ.)}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_{N(observ.)i}^2 / n} \quad (5.4)$$

Como  $EMQ_{int\ erp.}$  e  $EMQ(\sigma_{N(observ.)})$  são independentes, determinou-se a qualidade da superfície geoidal local:

$$\text{Qualidade da SGL} = \sqrt{EMQ_{int\ erp.}^2 + [EMQ(\sigma_{N(observ.)})]^2} \quad (5.5)$$

#### 5.2.5. Elaboração de um programa de computador para a determinação da ondulação geoidal na área de estudo.

Como o programa ArcGIS não disponibiliza os coeficientes do polinômio utilizado na geração da Superfície Geoidal Local, utilizou-se o programa Surfer para esse fim. Inicialmente, comparou-se os resultados da interpolação utilizando-se os dois programas (ArcGIS e Surfer) em trinta pontos escolhidos aleatoriamente na área de estudo, verificando-se a obtenção de resultados idênticos. Na interpolação

através do programa Surfer, obteve-se os coeficientes do polinômio do 3º grau. O programa para obtenção da ondulação geoidal (ONDULACAO.m) foi desenvolvido no ambiente de programação MatLab.

## 6. RESULTADOS

### 6.1. Rede Geodésica determinada através do posicionamento por satélites

A Tabela 08 resume a qualidade da rede GPS (ver ANEXO I), expressa pelo Erro Médio Quadrático e pela pior precisão ( $\sigma$  máximo) das componentes horizontal e vertical.

Tabela 08: Parâmetros de precisão da rede GPS.

|                                                  | horizontal (mm) | vertical (mm) |
|--------------------------------------------------|-----------------|---------------|
| <b>Erro Médio Quadrático</b>                     | 46              | 50            |
| <b>Pior precisão (maior <math>\sigma</math>)</b> | 70              | 82            |

O Erro Médio Quadrático planimétrico da rede GPS apresentou a mesma ordem de grandeza do Erro Médio Quadrático altimétrico. O mesmo pode se afirmar a respeito da pior precisão obtida. A magnitude do Erro Médio Quadrático planimétrico alcançado é muito pequena, com propagação negligenciável para a interpolação.

A obtenção de coordenadas verticais com melhor precisão seria possível através da utilização do tempo mínimo de 6 horas de rastreamento nos casos de pontos sem obstruções, e de 12 horas de rastreamento, nos pontos com obstruções, conforme SANTOS (2005).

### 6.2. Conjuntos de pontos das redes de nivelamento geométrico

A qualidade das altitudes ortométricas está resumida na Tabela 09.

Tabela 09: Parâmetros de precisão das altitudes ortométricas.

|                                                  |      |
|--------------------------------------------------|------|
| <b>Erro Médio Quadrático</b>                     | 4 mm |
| <b>Pior precisão (maior <math>\sigma</math>)</b> | 6 mm |

O Erro Médio Quadrático e a pior precisão das altitudes ortométricas apresentaram valores pequenos e muito próximos, denotando a boa qualidade do nivelamento geométrico, para os propósitos desta pesquisa. Como se pode observar, comparando-se os valores das Tabelas 06 e 07, a determinação das altitudes ortométricas por nivelamento geométrico apresentou resultados melhores do que a determinação das alturas elipsoidais por GPS. A boa precisão das altitudes ortométricas foi obtida principalmente devido ao pequeno erro de fechamento (3,5mm) da linha básica de nivelamento.

### **6.3. Superfície Geoidal Local**

A Superfície Geoidal Local com melhor resultado, obtida pelo método de Interpolação Global através do ajustamento de um Polinômio de 3º grau, é apresentada na figura 42. A Validação Cruzada (Tabela 07) indicou também que o ajustamento através de um Polinômio Global do 1º grau (ajustamento de um Plano) proporcionou a pior superfície, com um Erro Médio Quadrático igual a 60,97mm, muito maior do que os obtidos nas outras interpolações.

Como se pode observar, há uma variação da ondulação geoidal, com valores menores no estreito entre a Lagoa Mundaú e o mar. O valor da ondulação geoidal vai aumentado gradativamente em direção ao continente, onde ocorrem as maiores elevações. Observa-se, também, que as isolinhas são bastante suaves, denotando a influência do método de interpolação polinomial.

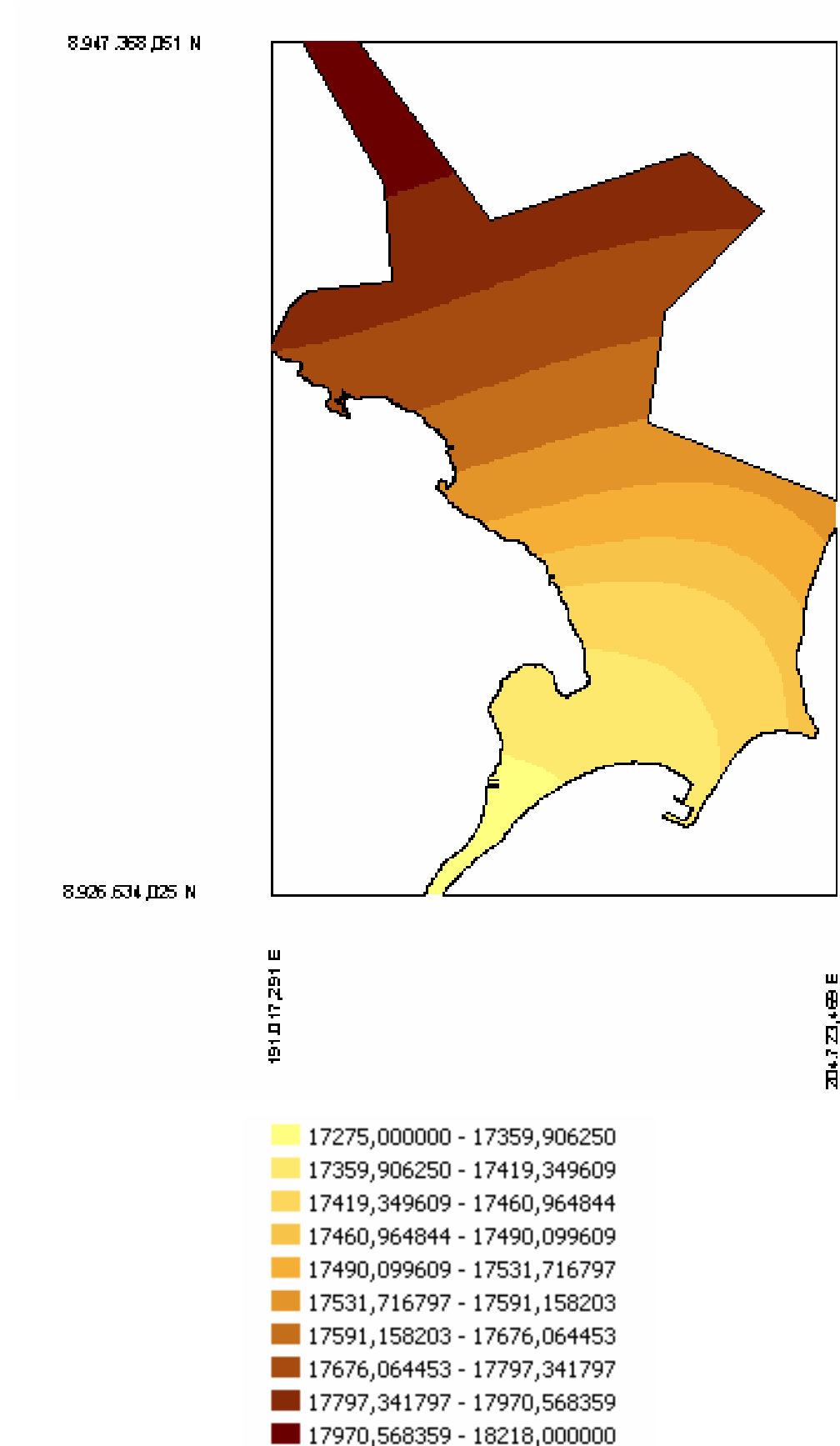


Figura 42: Superfície Geoidal Local obtida pelo ajustamento de um Polinômio Global do 3º grau.

### 6.3.1. Precisão da interpolação

A qualidade da interpolação ( $EMQ_{int\,erp.}$  - Erro Médio Quadrático da interpolação) através de um Polinômio Global do 3º grau foi determinada conforme o ANEXO VI e está resumida na Tabela 10.

Tabela 10: Parâmetros de precisão da interpolação

|                                                    |           |
|----------------------------------------------------|-----------|
| <b>Erro Médio Quadrático</b>                       | 27,69 mm  |
| <b>Maior Erro de Interpolação (valor absoluto)</b> | 170,08 mm |

Apesar da boa qualidade da interpolação, expressa pelo baixo valor do Erro Médio Quadrático, verifica-se, na Tabela 11, a ocorrência de um valor mais elevado para o maior valor absoluto do Erro de Interpolação ( $170 \leq |EI| < 180$ ), exigindo-se uma análise mais minuciosa dos resultados da Validação Cruzada para cada ponto da amostra. O valor identificado corresponde à amostra M30A, cujo Erro de Interpolação tem o módulo igual a 170,08mm (ver o Anexo VI). Todos os demais pontos apresentaram Erros de Interpolação com módulo inferior a 90mm.

Tabela 11: Freqüência dos valores dos módulos dos Erros de Interpolação da Validação Cruzada (valor do módulo do erro em mm).

|                                     |                       |                       |                       |                       |                       |                       |
|-------------------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| Erro de Interpolação absoluto -  EI | $0 \leq  EI  < 10$    | $10 \leq  EI  < 20$   | $20 \leq  EI  < 30$   | $30 \leq  EI  < 40$   | $40 \leq  EI  < 50$   | $50 \leq  EI  < 60$   |
| Freqüência                          | 52                    | 28                    | 20                    | 5                     | 8                     | 0                     |
|                                     |                       |                       |                       |                       |                       |                       |
| Erro de Interpolação absoluto -  EI | $0 \leq  EI  < 70$    | $70 \leq  EI  < 80$   | $80 \leq  EI  < 90$   | $90 \leq  EI  < 100$  | $100 \leq  EI  < 110$ | $110 \leq  EI  < 120$ |
| Freqüência                          | 0                     | 1                     | 2                     | 0                     | 0                     | 0                     |
|                                     |                       |                       |                       |                       |                       |                       |
| Erro de Interpolação absoluto -  EI | $120 \leq  EI  < 130$ | $130 \leq  EI  < 140$ | $140 \leq  EI  < 150$ | $150 \leq  EI  < 160$ | $160 \leq  EI  < 170$ | $170 \leq  EI  < 180$ |
| Freqüência                          | 0                     | 0                     | 0                     | 0                     | 0                     | 1                     |

Para analisar a distribuição espacial do erro de interpolação da ondulação geoidal ( $N_{observ.} - N_{interp.}$ ) foi gerada uma superfície para modelá-lo (Figura 43).

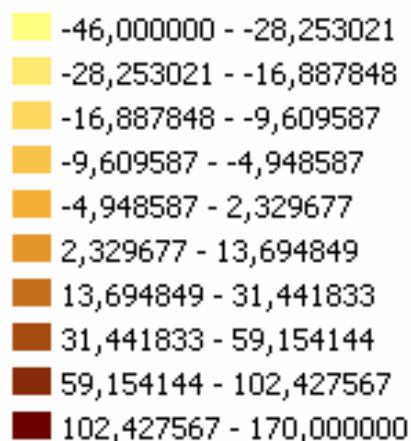
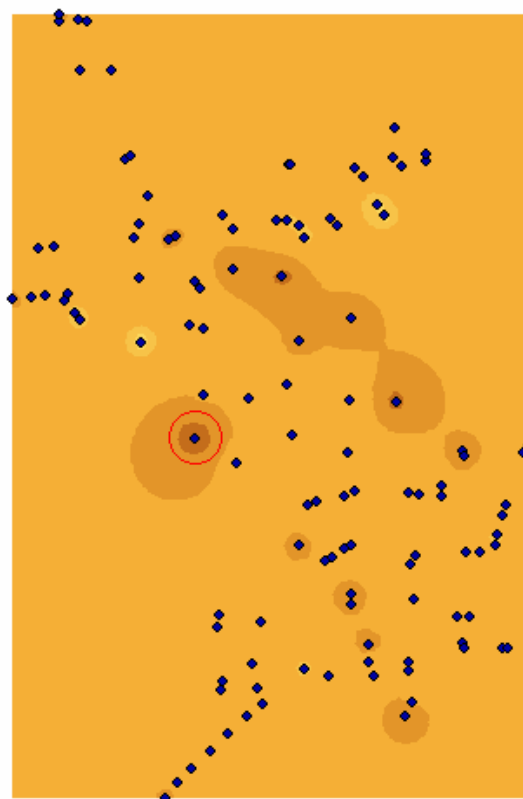


Figura 43: Superfície com a distribuição espacial dos erros de interpolação da Superfície Geoidal Local.

Observa-se, na figura 43, a ocorrência de erros de interpolação com valores negativos, referentes a valores super-estimados, e valores positivos, referentes a valores sub-estimados, predominando a ocorrência de valores com baixo erro de interpolação (entre -4,948587mm e 2,329677mm). Também ocorrem algumas áreas com valores um pouco altos (entre 13,694849mm e 31,441833mm). No entorno do ponto M30A (destacado através do círculo vermelho), ocorrem os erros de

interpolação mais altos. Analisando-se a localização do ponto M30A na amostra, verifica-se que quando o mesmo é retirado, para a realização da Validação Cruzada, ocorre uma extrapolação na estimativa da ondulação geoidal, o que explica a discrepância.

### 6.3.2. Precisão Absoluta da Superfície Geoidal Local

A Precisão absoluta da Superfície Geoidal Local foi obtida em função do Erro Médio Quadrático das ondulações geoidais observadas ( $EMQ_{N(observ.)}$  - ver Anexo V) e do Erro Médio Quadrático da interpolação ( $EMQ_{N(interp.)}$  - ver Anexo VI). Como o cálculo das ondulações geoidais da amostra e a interpolação são independentes, a qualidade do posicionamento absoluto (referenciada no presente trabalho como Precisão Absoluta da Superfície Geoidal Local –  $Prec.Abs.SGL$ ) foi calculada pela expressão:

$$Prec.Abs.SGL = \sqrt{EMQ_{N(observ.)}^2 + EMQ_{N(interp.)}^2} \quad (6.1)$$

Assim:

$$EMQ_{N(observ.)} = 50mm \quad (\text{ver ANEXO V})$$

$$EMQ_{N(interp.)} = 27,69mm \cong 28mm \quad (\text{ver Tabela 07})$$

$$Prec.Abs.SGL = \sqrt{50^2 + 28^2} mm = 57,31mm \cong 57mm$$

### 6.3.3. Precisão Relativa da Superfície Geoidal Local

A Precisão Relativa da Superfície Geoidal ( $Prec.Rel.SGL$ ) foi calculada de acordo com os seguintes passos: 1) determinação da diferença entre as ondulações geoidais observadas ( $\Delta N_{i,j(observ.)}$ ) para cada par de pontos ( $i, j$ ) da amostra; 2) determinação da diferença entre as ondulações geoidais interpoladas com Validação Cruzada ( $\Delta N_{i,j(interp.)}$ ) para cada par de pontos da amostra; 3) determinação da qualidade para a diferenciação entre as ondulações geoidais de dois pontos,

utilizando-se o posicionamento relativo (referenciada no presente trabalho como Precisão Relativa da Superfície Geoidal Local) :

$$Prec.Rel._{SGL} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (\Delta N_{i,j(observ.)} - \Delta N_{i,j(interp.)})^2 / [n(n-1)/2]} \quad (6.2)$$

onde  $n$  é o número de pontos da amostra).

$$Prec.Rel._{SGL} = 39,33mm \cong 39mm$$

Foram calculados os desníveis geoidais ( $\Delta N$ ) para as linhas formadas entre cada ponto e os demais de duas formas: usando-se as ondulações geoidais observadas e as ondulações interpoladas. Foram, então, calculados os resíduos relativos, correspondentes às diferenças entre os desníveis geoidais observados e os desníveis geoidais interpolados. A Tabela 12 apresenta os valores do resíduo relativo máximo (216mm) e mínimo (83mm) referentes ao ponto M30A, que mais uma vez foi o responsável por valores discrepantes em relação aos demais pontos.

Tabela 12: Cálculo dos valores máximo e mínimo dos resíduos relativos de interpolação.

| PONTO | N <sub>observ.</sub> | N <sub>interp.</sub> | LINHA     | $\Delta N_{observ.}$ | $\Delta N_{interp.}$ | $\Delta N_{observ.} - \Delta N_{interp.}$ |
|-------|----------------------|----------------------|-----------|----------------------|----------------------|-------------------------------------------|
| M30A  | 17.400               | 17.570               | M30A/M47A | 336                  | 120                  | 216                                       |
| M47A  | 17.736               | 17.690               | M30A/M58A | 231                  | 148                  | 83                                        |
| M58A  | 17.631               | 17.718               |           |                      |                      |                                           |

#### 6.4. Precisão da determinação da ondulação geoidal pelo Modelo Geoidal do Brasil através do programa MapGeo-2004

A qualidade do posicionamento absoluto usando-se o Modelo Geoidal do Brasil (com a utilização do programa MapGeo-2004 para a interpolação das ondulações geoidais) na área de estudo, foi determinada através do Erro Médio Quadrático. Conforme se pode observar no Anexo VII,  $EMQ_{Absol.MapGeoMaceió} = 418mm$ .

O Erro Médio Quadrático, expressando a qualidade desse modelo para o posicionamento relativo na área de estudo, foi determinado utilizando-se o mesmo procedimento adotado na determinação da Precisão Relativa da Superfície Geoidal Local (ver item 6.3.3), usando-se o programa MapGeo-2004 para a interpolação na área de estudo, obtendo-se o seguinte valor:  $EMQ_{Relat.MapGeoMaceió} = 90mm$ .

A Tabela 13 apresenta a frequência dos valores absolutos dos erros de interpolação na área de estudo, com a utilização do programa MapGeo-2004.

Tabela 13: Frequência dos módulos dos Erros de Estimativa pelo Modelo Geoidal do Brasil (valor do módulo do erro em mm)

|               |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|---------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| Erro absoluto | $230 \leq  E _{abs} < 250$ | $250 \leq  E _{abs} < 270$ | $270 \leq  E _{abs} < 290$ | $290 \leq  E _{abs} < 310$ | $310 \leq  E _{abs} < 330$ | $330 \leq  E _{abs} < 350$ |
| Frequência    | 1                          | 0                          | 0                          | 2                          | 1                          | 14                         |
| Erro absoluto | $350 \leq  E _{abs} < 370$ | $370 \leq  E _{abs} < 390$ | $390 \leq  E _{abs} < 410$ | $410 \leq  E _{abs} < 430$ | $430 \leq  E _{abs} < 450$ | $450 \leq  E _{abs} < 470$ |
| Frequência    | 13                         | 21                         | 11                         | 9                          | 6                          | 19                         |
| Erro absoluto | $470 \leq  E _{abs} < 490$ | $490 \leq  E _{abs} < 510$ | $510 \leq  E _{abs} < 530$ | $530 \leq  E _{abs} < 550$ | $550 \leq  E _{abs} < 570$ | $570 \leq  E _{abs} < 590$ |
| Frequência    | 11                         | 2                          | 1                          | 0                          | 3                          | 3                          |

## 6.5. Precisão da altitude ortométrica utilizando a Superfície Geoidal Local e a altura elipsoidal GPS

Para determinação da altitude ortométrica de um ponto da área de estudo, utilizando a Superfície Geoidal Local, é necessário que se determine, inicialmente, a sua altura elipsoidal, através de observações pelo Sistema de Posicionamento Global, extraíndo-se da Superfície Geoidal Local o valor da ondulação geoidal usando-se as coordenadas obtidas por GPS e, finalmente, calculando-se a altitude ortométrica em função da altura elipsoidal e da ondulação geoidal obtidas. Para uma melhor qualidade do resultado, convém que se utilize o Posicionamento Relativo através do método estático. Como foi determinada uma rede geodésica com qualidade conhecida, os vértices da mesma poderão ser utilizados como referência

para o posicionamento relativo. Esse método utiliza a Superfície Geoidal Local para a determinação pontual de ondulações geoidais. A Precisão Absoluta da altitude ortométrica assim determinada é:

$$\sigma_{H(GPS+SGL)} = \sqrt{PrecAbs.^2_{SGL} + \sigma_{h(GPS)}^2} \quad (6.3)$$

$$PrecAbs.^2_{SGL} = 57mm \quad (\text{ver item 6.3.2})$$

Supondo-se que se obtenha a altura elipsoidal do ponto com a mesma precisão da rede GPS (50mm – ver Tabela 09), tem-se em média:

$$\sigma_{H(GPS+SGL)} = \sqrt{57^2 + 50^2} mm \cong 76mm$$

Já a Precisão Relativa na determinação do desnível (diferença entre as altitudes ortométricas) de dois pontos é determinada por:

$$\sigma_{\Delta H(GPS+SGL)} = \sqrt{\sigma_{\Delta N(SGL)}^2 + \sigma_{h(GPS)}^2} \quad (6.4)$$

No presente trabalho, obteve-se o valor de  $\sigma_{\Delta h(GPS)} = 48mm$  para a pior precisão da componente vertical após o processamento dos vetores. Supondo-se que no posicionamento relativo se obtenha a componente vertical com essa precisão, e sabendo-se que a precisão relativa da Superfície Geoidal Local é  $\sigma_{\Delta N(SGL)} = 39mm$ , verifica-se que a precisão para a determinação do desnível (diferença entre as altitudes ortométricas) de dois pontos é:

$$\sigma_{\Delta H(GPS+SGL)} = \sqrt{39^2 + 48^2} mm = 61,8mm \cong 62mm .$$

Os resultados obtidos são comentados e analisados no item a seguir.

## 6.6. Aplicabilidade da Superfície Geoidal Local em conformidade com a NBR-13.133 da ABNT

A Tabela 14 transcreve as especificações da NBR-13.133 da ABNT para as classes de nivelamento IIN e IIIN.

Tabela 14: Especificações da NBR-13.133 da ABNT, para nivelamento.

Fonte: ABNT (1994).

| Classe | Tipo de nivelamento | Tolerância de fechamento   | Finalidade                                                                                                                                                                                            |
|--------|---------------------|----------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| II N   | geométrico          | $* 20 \text{ mm } K^{0,5}$ | determinação de altitudes ou cotas em Pontos de Segurança (PS) e vértices de poligonais, levantamentos topográficos destinados a projetos básicos, executivos, como executado, e obras de engenharia. |
| III N  | trigonométrico      | $0,15 \text{ m } K^{0,5}$  | determinação de altitudes ou cotas em poligonais de levantamento, levantamento de perfis para estudos preliminares e/ou de viabilidades.                                                              |

K é a extensão nivelada em km medida num único sentido.

\* A tolerância de fechamento para a classe IIN corresponde à diferença máxima aceitável entre o nivelamento e o contranivelamento de uma seção ou linha. O erro médio após o ajustamento é de  $10 \text{ mm } \times K^{0,5}$ .

Foram analisados dois casos: a determinação de altitude ortométrica (análise da precisão absoluta) e a determinação de desnível ou diferença entre as altitudes ortométricas de dois pontos (análise da precisão relativa).

### 6.6.1. Determinação de altitude ortométrica

No nivelamento da classe IIN (precisão de  $10 \text{ mm } \sqrt{K}$  após o ajustamento), para distâncias inferiores a 58km, é exigida uma precisão melhor do que a obtida (76mm) pela combinação da Superfície Geoidal Local com observações pelo Sistema de Posicionamento Global. Assim, não é possível a determinação de altitude ortométrica para as finalidades do nivelamento classe IIN, utilizando-se a Superfície Geoidal Local.

O limite para o erro de fechamento no nivelamento da classe IIIN ( $150mm\sqrt{K}$ ) para distâncias superiores a 257m é maior do que 76mm. Portanto, é possível a utilização da Superfície Geoidal Local para a determinação de altitude ortométrica para as finalidades do nivelamento classe IIIN.

#### **6.6.2. Determinação de desnível (diferença de altitude ortométrica entre dois pontos)**

A Superfície Geoidal Local determinada pode ser utilizada na determinação de desníveis para serviços de engenharia, devendo-se analisar cada caso, para verificar se a precisão atende aos requisitos do serviço. A título de exemplo, na construção de um canal com 1km de extensão, um erro de 62mm (correspondente à precisão da Superfície Geoidal), na medição do desnível total do canal, implicaria uma diferença de 0,0062% na declividade do mesmo. Portanto, para esse caso, a precisão da Superfície Geoidal Local atenderia plenamente aos propósitos.

#### **6.6.3. Programa para determinação da ondulação geoidal através do método de interpolação polinomial do 3º grau.**

O código fonte (texto) do arquivo “ONDULACAO.m” (programa em MatLab), para a determinação da ondulação geoidal através do método de interpolação polinomial do 3º grau, encontra-se no ANEXO VIII.

Para que o programa seja executado, deve-se copiá-lo para uma pasta do computador, que deve ser selecionada como diretório corrente (*current directory*) na barra de ferramentas do ambiente MatLab. Executado a partir da Janela de Comando (*Command Window*) do ambiente MatLab, digitando-se o nome do programa (ONDULACAO) e teclando <Enter>, o programa solicita ao usuário as coordenadas UTM-SAD69 em metros de um ponto da área de estudo, fornecendo o valor em metros da ondulação interpolada.

O arquivo ONDULACAO.m está gravado em um disco (CD) que acompanha esta Dissertação (no final do volume).

## 7. CONCLUSÃO E RECOMENDAÇÕES

### 7.1. Conclusão

A metodologia adotada nesta pesquisa permitiu a determinação de uma Superfície Geoidal Local com precisão absoluta igual a 57mm, sete vezes melhor do que a precisão alcançada pelo Modelo Geoidal do Brasil, desenvolvido pelo IBGE e pela EPUSP, e com precisão relativa igual a 39mm, duas vezes melhor do que o modelo nacional. Portanto, a Superfície Geoidal Local determinada substitui com vantagens o Mapa de Ondulação Geoidal disponível para o Brasil.

Entretanto, a Superfície Geoidal Local determinada não deve ser utilizada para a determinação de altitudes ortométricas, em substituição ao nivelamento geométrico Classe IIN da NBR-13.133 da ABNT. Em consonância com a norma, sua aplicação se restringe à determinação de altitudes ortométricas para utilização em estudos preliminares e de viabilidade. No entanto, na determinação de desníveis, há possibilidade de utilização da Superfície Geoidal, devendo ser feita uma análise específica para cada caso.

A aplicação da utilização da Superfície Geoidal Local deve ser evitada em locais onde ocorra extrapolação, o que conduziria a resultados com precisão pior do que a esperada.

Como se pôde observar nesta pesquisa, a precisão da Superfície Geoidal foi determinada em função da precisão das alturas elipsoidais ( $\sigma_{h(GPS)}$ ), obtidas pelo Sistema de Posicionamento Global – GPS; da precisão das altitudes ortométricas ( $\sigma_{H(nivel.)}$ ), obtidas por nivelamento geométrico; e do método de interpolação ( $EMQ_{int\ erp.}$ ). Assim, a boa qualidade dessas etapas intermediárias é fundamental para a determinação de uma Superfície Geoidal Local com boa precisão.

Uma possibilidade para melhorar a precisão altimétrica da rede GPS seria o processamento utilizando-se um ângulo de corte menor do que o utilizado,

possibilitando a observação de satélites com elevações mais baixas. No entanto, como os pontos da rede geodésica se encontram na área urbana do Município, observações em baixas elevações poderiam agravar os efeitos de multicaminhamento, tão comuns na área urbana, pela quantidade de obstruções. Além disso, é recomendável a utilização de observações GPS através de satélites com elevações acima de  $10^\circ$ , para minimizar os efeitos da cintilação troposférica. A utilização de receptores de dupla frequência também poderia contribuir para a melhoria do resultado, possibilitando a minimização dos efeitos da atmosfera.

A melhoria da precisão do nivelamento seria obtida se o nivelamento das redes tivesse sido realizado com a mesma qualidade (leituras até o décimo do milímetro) do nivelamento com que foi feito o nivelamento da linha básica.

A interpolação poderia ter produzido melhores resultados se a distribuição de frequência da amostra fosse semelhante à distribuição normal, permitindo a utilização de krigagem, tirando partido da correlação espacial da amostra.

## **7.2. Recomendações**

Para a determinação de uma Superfície Geoidal Local com uma precisão melhor do que a obtida nessa pesquisa, recomenda-se o seguinte:

- a) Selecionar criteriosamente os locais dos pontos da amostra, levando em conta os seguintes aspectos: distribuição uniforme ou pseudo-aleatória, evitando-se agrupamentos de pontos; inexistência ou minimização de obstruções que possam bloquear a recepção dos sinais dos satélites; inexistência de fontes de multicaminhamento;
- b) Planejar a configuração geométrica da rede geodésica;
- c) Utilizar receptores GPS de dupla frequência;
- d) Configurar o ângulo de corte de modo a se observar satélites com baixas elevações ( $10^\circ$ , por exemplo), desde que não se tenha fontes de multicaminhamento;
- e) Utilizar, no levantamento GPS, o tempo mínimo de 6 horas de rastreamento para pontos sem obstrução e de 12 horas para pontos com obstruções;

- f) Processar e ajustar a rede geodésica através de programas científicos;
- g) Realizar nivelamento geométrico de alta precisão em todos os pontos da rede;
- h) No caso de a distribuição não se assemelhar à distribuição normal, aplicar transformações à mesma, no sentido de tentar normalizá-la;
- i) Analisar a estrutura de correlação espacial da amostra e identificar o comportamento direcional da variabilidade espacial, na tentativa de obter os parâmetros do semi-variograma;
- j) No caso de ser possível a realização de interpolação por geoestatística, incluí-la no rol de interpolações a serem aplicadas para avaliação.

### **7.3. Sugestões para futuras pesquisas**

Finalizando, recomenda-se, também, que sejam pesquisadas as condições para a normalidade da distribuição das ondulações geoidais e que sejam estudados os condicionantes físicos para a identificação e a modelagem de tendências dessas superfícies.

## 8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABNT - ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 13133: Execução de levantamento topográfico – Procedimento**. Rio de Janeiro, 1994, 35 p.
- AMORIM, G. P. **Compatibilidade de Rede GPS de Referência Cadastral Municipal - Estudo de caso: Rede do Município de Vitória (ES)**. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2004, 150 p.
- ANDRIOTTI, J. L. S. **Fundamentos de Estatística e Geoestatística**. São Leopoldo, RS: Editora Unisinos, 2003, 165 p.
- ARANA, J. M. **O uso do GPS na elaboração de Carta Geoidal**, Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Universidade Federal do Paraná, 2000, 164 p.
- BENDAT, J. S.; PIERSOL, A. G. **Analysis and Measurement Procedures**. 2 ed. USA: Wiley Interscience, 1986, 566 p.
- BLITZKOW, D.; CAMPOS, I. O.; FREITAS, S. R. C. **Altitude: O que interessa e como Equacionar**. In: Anais do I Simpósio de Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação. Recife, 2004. 1 CD-ROM.
- BOUCHARD, H.; MOFFIT, F. H. **Surveying**. USA: International Textbook Company, 1965, 754 p.
- BURROUGH, P. A.; McDONNEL, R. A. **Principles of Geographical Information Systems: Spatial Information Systems and Geostatistics**. New York: Oxford University Press, 1998, 333 p.
- CAMARGO, E. C. G. **Análise Espacial de Superfícies por Geoestatística**. In: CÂMARA G. (Org.). **Análise Espacial de Dados Geográficos**. Apostila para o Curso de Análise Espacial de Dados Geográficos. São José dos Campos, SP, 2000, cap. 3, p. 1–28.
- ESRI. **ArcGIS**. Programa computacional. 2004.
- FAA – FEDERAL AVIATION ADMINISTRATION. **GPS Modernization**. Disponível em: <<http://gps.faa.gov/gpsbasics/GPSmodernization-text.htm>>. Acesso em: 13 ago. 2006.

FEATHERSTONE, W. E.; DENITH, M. C.; KIRBY, J. F. Strategies for the accurate determination of orthometric heights from GPS. **Survey Review**, New York, v. 34, n. 267, 1998.

GEMAEL, C. **Astronomia de Campo e Geodésia Elementar**. Apostila, Diretório Acadêmico de Engenharia do Paraná, Curitiba, v. 2, n. 57, 1954.

\_\_\_\_\_. **Introdução à Geodésia Física**. Curitiba: Ed. da UFPR, 1999, 304 p.

GÖRRES, B. **Bestimmung von Höhenänderungen in regionalen Netzen mit dem Global Positioning System**. Dissertação. Institut für Angewandte Geodäsie, Frankfurt, Alemanha, 1996.

HATCH, R.; KEEGAN, R.; STANSELL T.A. **Kinematic receiver technology from Magnavox Magnavox Eletronic Systems Company**. Torrance, Canadá, 1992.

HOFMANN-WELLENHOF, B.; LICHTENEGGER, H.; COLLINS, J. **GPS: Theory and Practice**. Wien: Springer Verlag, 4 ed. 1992, 389 p.

IBGE – INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. Resolução **PR n.º 22** de 21 de julho de 1983.

\_\_\_\_\_. Resolução **PR n.º 01** de 25 de fevereiro de 2005.

\_\_\_\_\_ e EPUSP – ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. **MapGeo2004**. Programa computacional. 2004.

ISAAKS, E. H.; SRIVASTAVA, R. M. **An Introduction to Applied Geostatistics**. New York: Ed. Oxford University Press, 1989, 561 p.

JAKOB, A. A. E.; YOUNG, A. F. **O uso de métodos de interpolação espacial de dados nas análises sócio demográficas**. In: XV ENCONTRO NACIONAL DE ESTUDOS POPULACIONAIS. Caxambu, MG, 2006, 22 p. Disponível em: <[www.abep.nepo.unicamp.br/encontro2006/docspdf/abep2006\\_388.pdf](http://www.abep.nepo.unicamp.br/encontro2006/docspdf/abep2006_388.pdf)>. Acesso em: 28 nov. 2006.

KANIUTH, K.; KLEUREN, D.; TREMEL, H. **Sensitivity of GPS Height Estimates to Tropospheric Delay Modelling**. AVN 105, p. 200-207, 1998.

KAVOURAS, M. **On detection of outliers and the determination of reliability in geodetic networks**. Technical Report n. 87. Department Surveying Engineering, University of New Brunswick. Fredericton, Canada. 1982.

- LEICK, A. **GPS Satellite Surveying**. Orono: John Wiley & Sons, Inc., 2 ed., 1994, 560 p.
- LOBIANCO, M. C. B.; BLITZKOW, D.; MATOS, A. C. O. C. **O novo modelo geoidal para o Brasil**. IV COLÓQUIO BRASILEIRO DE CIÊNCIAS GEODÉSICAS. Curitiba, PR, 2005, 6 p. Disponível em: <[ftp://geofp.ibge.gov.br/documentos/geodesia/artigos/2005\\_O\\_novo\\_Modelo\\_Geoidal\\_para\\_o\\_Brasil.pdf](ftp://geofp.ibge.gov.br/documentos/geodesia/artigos/2005_O_novo_Modelo_Geoidal_para_o_Brasil.pdf)>. Acesso em: 15 jul. 2006.
- MacDORAN, P. F.; MILLER, R. B.; BUENNAGEL, L. A.; WHITCOMB, J. H. **Codeless systems for positioning with NAVSTAR-GPS**. In: Proceedings of the First International Symposium on Precise Positioning with the Global Positioning System, Rockville, Maryland, USA, v. 1, p. 181–190, 1985.
- MENZORI, M. **Classificação da Exatidão de Coordenadas obtidas com a Fase da Portadora L1**. Tese de Doutorado em Engenharia Civil: Transportes. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2005, 141 p.
- MILIKEN, R. J.; ZOLLER, C. J. **Principle of operation of NAVSTAR and system characteristics**. In: The Institute of Navigation: Global Positioning System, v. 1, p. 3–14, 1980.
- MINGO, O. R.; BASUALDO, E. O. (Ed.). **Calculo de Compensacion de mediciones topográficas**. 1 ed. Argentina, 1996, 305 p.
- MOLODENSKIJ, M. S.; EREMEEV, V. F.; YURKINA, M. I. **Methods for Study of the External Gravitational Field and Figure of the Earth**. 1960.
- MONICO, J. F. G. **Posicionamento pelo NAVSTAR-GPS: Descrição, fundamentos e aplicações**. São Paulo: Editora UNESP, 2000, 287 p.
- NAVSTAR GPS JOINT PROGRAM OFFICE. **Control Segment Program Office**, 2003. Disponível em: <<http://gps.losangeles.af.mil>>. Acesso em: 12 ago. 2006.
- OLEA, R. A. **Geostatistical Glossary and Multilingual Dictionary**. International Association for Mathematical Geology Studies in Mathematical Geology, n. 3, New York: Oxford University Press, 1991, 177 p.
- PERREAULT P. D. **Description of the Global Position System (GPS) and the STI receivers**. CSTG Bulletin, v. 2, Technology and Mission Development. 1980.
- ROMÃO, V. M. C. **Apostila: Conceitos de Geodésia**. Recife, 2002.

- \_\_\_\_\_; PORTUGAL, J. L. A.; ANDRADE, E. D. V. **Estudo do Uso do GPS na Definição de uma Superfície Geoidal Local**. In: Anais do Congresso Brasileiro de Cartografia, 1999.
- ROTHACHER, M.; SPRINGER, T.; SCHAER, S.; BEUTLER, G. **Processing strategies for regional GPS networks**. In: BRUNNER (Ed.), p. 93–100, 1998.
- RUTSCHEIDT, E. H.; ROTH, B. D. **The NAVSTAR Global Positioning System**. CSTG Bulletin, v. 4. Relatório do IAG General Meeting, Tokyo, 1982.
- SANTOS, S. M. **Investigações metodológicas sobre o monitoramento da subsidência de solo devido à extração de água subterrânea – caso da Região Metropolitana de Recife**. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2005, 231 p.
- SEEBER, G. **Satellite Geodesy: Foundations, Methods and Applications**. Berlin: de Gruyter, 2 ed., 2003, 589 p.
- \_\_\_\_\_; ROMÃO, V. M. C. **Princípios básicos do GPS nas medições Geodésicas**. Geodésia On-line, n. 2, 1997. Disponível em: <<http://geodesia.ufsc.br/Geodesia-online/arquivo/1997/02/GO-2-1997Verse.PDF>>. Acesso em: 19 jun. 2006.
- SOARES, A. **Geoestatística para as ciências da terra e do ambiente**. Lisboa: IST Press, 2000, 206 p.
- TEUNISSEN, P. J. G.; KLEUSBERG, A. **GPS for Geodesy**. Delft , Stuttgart: Springer Verlag, 1998, 650 p.
- THALES NAVIGATION. **Manual de Operação do programa Ashtech Solutions 2.6**. 2002, 149 p.
- TORGE, W. **Geodesy**. Berlin: de Gruyter, 3 ed., 2001, 416 p.
- USNO - UNITED STATES NAVAL OBSERVATORY. **Constelação atual GPS**. Disponível em: <<ftp://tycho.usno.navy.mil/pub/gps/gpsb2.txt>>. Acesso em 13 ago. 2006.
- VANICEK, P.; KRAKIWSKY, E. J. **Geodesy: The Concepts**. Amsterdam, New York: North Holland Publishing Company, 1982, 691 p.
- WACKERNAGL, H. **Multivariate Geostatistics: An Introduction with Applications**. Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 1995, 256 p.

WELLS, D.; BECK, N.; DELIKARAOGLOU, D.; KLEUSBERG, A.; KRAKIWSKY, E. J.; LACHAPELLE, G.; LANGLEY, R. B.; NAKIBOGLU, M.; SCHWARZ, K. P.; TRANQUILLA, J. M.; VANICEK, P. **Guide to GPS Positioning**. Fredericton, New Brunswick, Canada: Canadian GPS Associates, 1986.

WOLF, P. R. e GHILANI, C. D. **Adjustment Computations: Statistics and Least Squares in Surveying and GIS**. USA: John Wiley & Sons Inc., 1996, 564 p.

WÜBBENA, G. **The GPS adjustment software package GEONAP, Concepts and models Proceed**. 5<sup>th</sup> Int. Geod. Symp. Satellite Positioning, Las Cruces, v. 1, p. 452–461, 1989.

ZHANG, S. **Interpolation of Geoidal/Quasigeoidal Surfaces for Height Determination with GPS**. Wiss. Arb. Univ. Hannover, n. 238, 2000.

**ANEXO I - COORDENADAS DOS PONTOS DA REDE GEODÉSICA E SUAS  
PRECISÕES ABSOLUTAS**

| PONTO | COORDENADAS UTM (m) |               | $\sigma_{\text{horizontal}}$ | $\sigma^2_{\text{horizontal}}$ | h (m)  | $\sigma_{\text{vertical}}$ | $\sigma^2_{\text{vertical}}$ |
|-------|---------------------|---------------|------------------------------|--------------------------------|--------|----------------------------|------------------------------|
|       | NORTE               | ESTE          |                              |                                |        |                            |                              |
| M01B  | 195.052,841         | 8.926.634,825 | 0,069                        | 0,005                          | 21,769 | 0,044                      | 0,002                        |
| M02A  | 195.414,469         | 8.927.031,999 | 0,067                        | 0,004                          | 22,476 | 0,044                      | 0,002                        |
| M02B  | 195.783,913         | 8.927.391,543 | 0,066                        | 0,004                          | 22,234 | 0,044                      | 0,002                        |
| M03A  | 196.255,373         | 8.927.849,133 | 0,065                        | 0,004                          | 22,169 | 0,045                      | 0,002                        |
| M03B  | 196.749,021         | 8.928.322,978 | 0,064                        | 0,004                          | 22,049 | 0,046                      | 0,002                        |
| M04A  | 197.684,225         | 8.929.091,924 | 0,062                        | 0,004                          | 22,074 | 0,048                      | 0,002                        |
| M04B  | 197.231,970         | 8.928.771,323 | 0,062                        | 0,004                          | 23,562 | 0,046                      | 0,002                        |
| M05A  | 201.634,510         | 8.929.162,851 | 0,067                        | 0,004                          | 20,466 | 0,063                      | 0,004                        |
| M05B  | 201.441,824         | 8.928.797,789 | 0,067                        | 0,005                          | 20,413 | 0,062                      | 0,004                        |
| M06A  | 197.371,493         | 8.930.178,492 | 0,057                        | 0,003                          | 20,547 | 0,044                      | 0,002                        |
| M06B  | 197.541,285         | 8.929.539,363 | 0,058                        | 0,003                          | 25,433 | 0,044                      | 0,002                        |
| M07A  | 199.411,570         | 8.929.865,668 | 0,060                        | 0,004                          | 20,337 | 0,053                      | 0,003                        |
| M07B  | 198.792,568         | 8.930.053,763 | 0,059                        | 0,003                          | 23,343 | 0,050                      | 0,003                        |
| M08A  | 200.495,251         | 8.930.244,584 | 0,061                        | 0,004                          | 21,232 | 0,057                      | 0,003                        |
| M08B  | 200.473,257         | 8.930.696,445 | 0,059                        | 0,004                          | 20,372 | 0,057                      | 0,003                        |
| M09A  | 201.563,392         | 8.929.993,262 | 0,064                        | 0,004                          | 21,446 | 0,063                      | 0,004                        |
| M09B  | 201.564,763         | 8.930.228,942 | 0,064                        | 0,004                          | 21,965 | 0,063                      | 0,004                        |
| M10A  | 202.979,144         | 8.930.722,706 | 0,066                        | 0,004                          | 20,479 | 0,071                      | 0,005                        |
| M10B  | 203.008,652         | 8.930.614,345 | 0,066                        | 0,004                          | 20,419 | 0,071                      | 0,005                        |
| M11A  | 204.175,616         | 8.930.574,785 | 0,070                        | 0,005                          | 21,644 | 0,078                      | 0,006                        |
| M11B  | 204.061,603         | 8.930.613,048 | 0,069                        | 0,005                          | 20,649 | 0,078                      | 0,006                        |
| M12A  | 196.516,737         | 8.931.452,483 | 0,050                        | 0,003                          | 20,987 | 0,039                      | 0,002                        |
| M12B  | 196.456,745         | 8.931.126,630 | 0,051                        | 0,003                          | 20,866 | 0,039                      | 0,002                        |
| M13A  | 197.619,399         | 8.931.292,614 | 0,053                        | 0,003                          | 20,38  | 0,043                      | 0,002                        |
| M15A  | 200.000,439         | 8.932.008,858 | 0,053                        | 0,003                          | 60,495 | 0,051                      | 0,003                        |
| M15B  | 200.004,869         | 8.931.747,216 | 0,054                        | 0,003                          | 59,449 | 0,051                      | 0,003                        |
| M16A  | 201.688,121         | 8.931.898,445 | 0,062                        | 0,004                          | 24,532 | 0,067                      | 0,004                        |
| M17A  | 202.845,284         | 8.931.417,759 | 0,064                        | 0,004                          | 22,039 | 0,071                      | 0,005                        |
| M17B  | 203.178,465         | 8.931.406,022 | 0,064                        | 0,004                          | 21,675 | 0,073                      | 0,005                        |
| M19B  | 198.626,563         | 8.933.312,072 | 0,047                        | 0,002                          | 25,414 | 0,045                      | 0,002                        |
| M20A  | 200.038,026         | 8.933.301,273 | 0,049                        | 0,002                          | 64,735 | 0,051                      | 0,003                        |
| M20B  | 199.828,717         | 8.933.235,978 | 0,050                        | 0,002                          | 61,986 | 0,050                      | 0,003                        |
| M21A  | 201.601,103         | 8.932.807,308 | 0,055                        | 0,003                          | 71,591 | 0,061                      | 0,004                        |
| M21B  | 201.730,355         | 8.933.043,448 | 0,054                        | 0,003                          | 73,795 | 0,061                      | 0,004                        |
| M22A  | 203.425,037         | 8.933.128,086 | 0,062                        | 0,004                          | 23,639 | 0,074                      | 0,005                        |
| M22B  | 203.074,152         | 8.933.118,661 | 0,061                        | 0,004                          | 24,455 | 0,072                      | 0,005                        |
| M23A  | 203.910,005         | 8.933.581,509 | 0,062                        | 0,004                          | 22,337 | 0,077                      | 0,006                        |
| M23B  | 203.881,245         | 8.933.308,549 | 0,063                        | 0,004                          | 22,946 | 0,077                      | 0,006                        |
| M25A  | 198.874,590         | 8.934.409,366 | 0,043                        | 0,002                          | 69,637 | 0,044                      | 0,002                        |

| PONTO | COORDENADAS UTM (m) |               | $\sigma_{\text{horizontal}}$ | $\sigma^2_{\text{horizontal}}$ | h (m)   | $\sigma_{\text{vertical}}$ | $\sigma^2_{\text{vertical}}$ |
|-------|---------------------|---------------|------------------------------|--------------------------------|---------|----------------------------|------------------------------|
|       | NORTE               | ESTE          |                              |                                |         |                            |                              |
| M25B  | 199.100,464         | 8.934.500,417 | 0,043                        | 0,002                          | 70,322  | 0,045                      | 0,002                        |
| M26A  | 200.107,096         | 8.934.763,367 | 0,046                        | 0,002                          | 68,463  | 0,052                      | 0,003                        |
| M26B  | 199.853,292         | 8.934.638,788 | 0,045                        | 0,002                          | 71,263  | 0,050                      | 0,003                        |
| M27A  | 201.559,968         | 8.934.702,888 | 0,050                        | 0,003                          | 80,412  | 0,060                      | 0,004                        |
| M27B  | 201.827,274         | 8.934.673,074 | 0,051                        | 0,003                          | 82,334  | 0,061                      | 0,004                        |
| M28A  | 202.422,413         | 8.934.639,804 | 0,053                        | 0,003                          | 80,622  | 0,065                      | 0,004                        |
| M28B  | 202.429,835         | 8.934.874,186 | 0,052                        | 0,003                          | 81,078  | 0,065                      | 0,004                        |
| M29A  | 204.066,147         | 8.934.113,633 | 0,061                        | 0,004                          | 23,691  | 0,077                      | 0,006                        |
| M29B  | 204.161,474         | 8.934.389,558 | 0,061                        | 0,004                          | 23,152  | 0,078                      | 0,006                        |
| M30A  | 195.866,015         | 8.936.167,932 | 0,036                        | 0,001                          | 107,005 | 0,037                      | 0,001                        |
| M31A  | 196.945,960         | 8.935.512,209 | 0,036                        | 0,001                          | 93,712  | 0,035                      | 0,001                        |
| M32B  | 198.434,293         | 8.936.255,029 | 0,037                        | 0,001                          | 67,14   | 0,041                      | 0,002                        |
| M33B  | 199.921,685         | 8.935.788,980 | 0,042                        | 0,002                          | 63,709  | 0,050                      | 0,003                        |
| M35A  | 203.003,562         | 8.935.839,531 | 0,052                        | 0,003                          | 86,721  | 0,068                      | 0,005                        |
| M35B  | 203.051,398         | 8.935.694,977 | 0,052                        | 0,003                          | 84,495  | 0,068                      | 0,005                        |
| M36A  | 204.579,342         | 8.935.776,563 | 0,060                        | 0,004                          | 24,398  | 0,081                      | 0,007                        |
| M36B  | 204.723,469         | 8.935.977,772 | 0,060                        | 0,004                          | 22,626  | 0,082                      | 0,007                        |
| M37A  | 201.172,658         | 8.944.374,092 | 0,041                        | 0,002                          | 100,74  | 0,058                      | 0,003                        |
| M38B  | 196.109,497         | 8.937.320,592 | 0,035                        | 0,001                          | 109,399 | 0,039                      | 0,002                        |
| M40A  | 198.295,208         | 8.937.568,440 | 0,036                        | 0,001                          | 94,035  | 0,044                      | 0,002                        |
| M41A  | 199.967,196         | 8.937.158,586 | 0,042                        | 0,002                          | 69,405  | 0,052                      | 0,003                        |
| M42A  | 201.203,602         | 8.937.137,445 | 0,047                        | 0,002                          | 87,789  | 0,060                      | 0,004                        |
| M43A  | 191.888,416         | 8.939.953,988 | 0,017                        | 0,000                          | 20,531  | 0,021                      | 0,000                        |
| M43B  | 191.513,601         | 8.939.904,424 | 0,019                        | 0,000                          | 20,278  | 0,023                      | 0,001                        |
| M44B  | 191.672,671         | 8.941.203,670 | 0,014                        | 0,000                          | 25,691  | 0,019                      | 0,000                        |
| M45B  | 192.804,587         | 8.945.893,974 | 0,026                        | 0,001                          | 130,467 | 0,027                      | 0,001                        |
| M46A  | 193.620,529         | 8.945.919,090 | 0,028                        | 0,001                          | 128,318 | 0,028                      | 0,001                        |
| M47A  | 194.413,072         | 8.938.697,524 | 0,021                        | 0,000                          | 23,537  | 0,022                      | 0,000                        |
| M48A  | 195.734,057         | 8.939.130,624 | 0,021                        | 0,000                          | 111,375 | 0,024                      | 0,001                        |
| M48B  | 196.068,346         | 8.939.080,845 | 0,022                        | 0,000                          | 107,27  | 0,025                      | 0,001                        |
| M50B  | 198.652,524         | 8.938.727,293 | 0,035                        | 0,001                          | 98,902  | 0,045                      | 0,002                        |
| M51B  | 200.021,567         | 8.939.324,935 | 0,040                        | 0,002                          | 100,769 | 0,053                      | 0,003                        |
| M53A  | 192.230,866         | 8.947.205,377 | 0,029                        | 0,001                          | 135,031 | 0,027                      | 0,001                        |
| M53B  | 192.272,413         | 8.947.368,841 | 0,030                        | 0,001                          | 134,656 | 0,028                      | 0,001                        |
| M54A  | 192.469,363         | 8.939.999,709 | 0,016                        | 0,000                          | 39,362  | 0,019                      | 0,000                        |
| M54B  | 192.400,547         | 8.939.803,671 | 0,017                        | 0,000                          | 44,511  | 0,019                      | 0,000                        |
| M55B  | 194.400,110         | 8.940.385,055 | 0,017                        | 0,000                          | 110,856 | 0,021                      | 0,000                        |
| M56A  | 195.977,567         | 8.940.134,273 | 0,020                        | 0,000                          | 105,42  | 0,025                      | 0,001                        |
| M56B  | 195.841,978         | 8.940.288,786 | 0,019                        | 0,000                          | 105,699 | 0,025                      | 0,001                        |

| PONTO     | COORDENADAS UTM (m) |               | $\sigma_{\text{horizontal}}$ | $\sigma^2_{\text{horizontal}}$ | h (m)   | $\sigma_{\text{vertical}}$ | $\sigma^2_{\text{vertical}}$ |
|-----------|---------------------|---------------|------------------------------|--------------------------------|---------|----------------------------|------------------------------|
|           | NORTE               | ESTE          |                              |                                |         |                            |                              |
| M57B      | 196.871,359         | 8.940.630,461 | 0,033                        | 0,001                          | 90,276  | 0,042                      | 0,002                        |
| M58A      | 198.192,131         | 8.940.428,862 | 0,035                        | 0,001                          | 98,984  | 0,046                      | 0,002                        |
| M60A      | 192.987,627         | 8.947.190,814 | 0,029                        | 0,001                          | 133,468 | 0,026                      | 0,001                        |
| M60B      | 192.768,293         | 8.947.227,195 | 0,029                        | 0,001                          | 133,771 | 0,026                      | 0,001                        |
| M61A      | 192.668,352         | 8.939.489,034 | 0,018                        | 0,000                          | 20,709  | 0,020                      | 0,000                        |
| M61B      | 192.791,251         | 8.939.312,276 | 0,018                        | 0,000                          | 20,636  | 0,020                      | 0,000                        |
| M62A      | 192.110,179         | 8.941.236,814 | 0,013                        | 0,000                          | 23,691  | 0,017                      | 0,000                        |
| M63A      | 194.370,014         | 8.941.825,074 | 0,017                        | 0,000                          | 105,526 | 0,023                      | 0,001                        |
| M64A      | 195.162,255         | 8.941.397,068 | 0,027                        | 0,001                          | 104,736 | 0,035                      | 0,001                        |
| M64B      | 195.368,553         | 8.941.503,049 | 0,027                        | 0,001                          | 102,824 | 0,035                      | 0,001                        |
| M65A      | 196.893,276         | 8.941.717,656 | 0,028                        | 0,001                          | 85,728  | 0,038                      | 0,001                        |
| M65B      | 196.615,240         | 8.942.062,631 | 0,028                        | 0,001                          | 87,76   | 0,038                      | 0,001                        |
| M66A      | 198.328,970         | 8.941.908,630 | 0,031                        | 0,001                          | 93,772  | 0,043                      | 0,002                        |
| M66B      | 198.037,598         | 8.941.949,189 | 0,030                        | 0,001                          | 87,809  | 0,042                      | 0,002                        |
| M67A      | 199.635,776         | 8.941.784,092 | 0,033                        | 0,001                          | 103,871 | 0,048                      | 0,002                        |
| M67B      | 199.447,684         | 8.941.974,743 | 0,033                        | 0,001                          | 106,84  | 0,048                      | 0,002                        |
| M68A      | 200.920,368         | 8.942.046,185 | 0,038                        | 0,001                          | 103,778 | 0,056                      | 0,003                        |
| M68B      | 200.708,189         | 8.942.336,212 | 0,038                        | 0,001                          | 104,275 | 0,055                      | 0,003                        |
| M69A      | 196.553,218         | 8.929.480,843 | 0,058                        | 0,003                          | 21,035  | 0,039                      | 0,002                        |
| M69B      | 196.605,099         | 8.929.709,745 | 0,056                        | 0,003                          | 20,814  | 0,039                      | 0,002                        |
| M70A      | 193.996,652         | 8.943.558,511 | 0,021                        | 0,000                          | 106,458 | 0,024                      | 0,001                        |
| M70B      | 194.130,132         | 8.943.646,718 | 0,021                        | 0,000                          | 106,705 | 0,023                      | 0,001                        |
| M73B      | 198.351,032         | 8.943.412,272 | 0,030                        | 0,001                          | 89,459  | 0,042                      | 0,002                        |
| M74A      | 200.112,095         | 8.943.309,012 | 0,036                        | 0,001                          | 103,119 | 0,051                      | 0,003                        |
| M74B      | 200.324,258         | 8.943.104,801 | 0,037                        | 0,001                          | 105,295 | 0,053                      | 0,003                        |
| M75A      | 201.125,872         | 8.943.584,059 | 0,040                        | 0,002                          | 98,988  | 0,057                      | 0,003                        |
| M75B      | 201.350,686         | 8.943.345,481 | 0,040                        | 0,002                          | 98,067  | 0,059                      | 0,003                        |
| M76A      | 202.011,190         | 8.943.493,388 | 0,043                        | 0,002                          | 100,918 | 0,062                      | 0,004                        |
| M76B      | 202.015,915         | 8.943.695,863 | 0,043                        | 0,002                          | 97,973  | 0,063                      | 0,004                        |
| M82B      | 199.502,670         | 8.932.981,349 | 0,049                        | 0,002                          | 66,082  | 0,048                      | 0,002                        |
| M83A      | 198.623,276         | 8.941.796,586 | 0,031                        | 0,001                          | 97,913  | 0,044                      | 0,002                        |
| M83B      | 198.777,486         | 8.941.464,034 | 0,032                        | 0,001                          | 102,722 | 0,045                      | 0,002                        |
| MP01      | 199.312,222         | 8.932.887,443 | 0,048                        | 0,002                          | 67,94   | 0,047                      | 0,002                        |
| MP02      | 200.641,065         | 8.929.872,916 | 0,062                        | 0,004                          | 21,501  | 0,058                      | 0,003                        |
| MP03      | 197.286,261         | 8.937.204,713 | 0,033                        | 0,001                          | 106,402 | 0,038                      | 0,001                        |
| MP05      | 194.228,936         | 8.941.464,216 | 0,011                        | 0,000                          | 106,919 | 0,014                      | 0,000                        |
| MP06      | 198.393,337         | 8.943.425,666 | 0,030                        | 0,001                          | 89,672  | 0,042                      | 0,002                        |
| SAT-93057 | 191.017,291         | 8.939.834,107 | 0,000                        | 0,000                          | 19,89   | 0,000                      | 0,000                        |
| SAT-93070 | 194.595,239         | 8.942.574,941 | 0,000                        | 0,000                          | 104,16  | 0,000                      | 0,000                        |
|           |                     |               | <b>TOTAL</b>                 | 0,248                          |         |                            |                              |
|           |                     |               | <b>EMQ</b>                   | 0,046                          |         |                            |                              |
|           |                     |               | <b>TOTAL</b>                 | 0,290                          |         |                            |                              |
|           |                     |               | <b>EMQ</b>                   | 0,050                          |         |                            |                              |

|                                                      |       |                                                    |       |
|------------------------------------------------------|-------|----------------------------------------------------|-------|
| <b>Maior <math>\sigma_{\text{horizontal}}</math></b> | 0,070 | <b>Maior <math>\sigma_{\text{vertical}}</math></b> | 0,082 |
|------------------------------------------------------|-------|----------------------------------------------------|-------|

**ANEXO II - ROTINA MatLab PARA AJUSTAMENTO DO NIVELAMENTO DA  
REDE 2**

% Ajustamento do nivelamento da Rede 2

n=2; % numero de equações  
u=1; % numero de parâmetros (incógnitas)

% altitudes fixas  
PS52=43.3319;  
BASE1=50.5259;

% Distancias medidas  
Dist=zeros(n,1);  
Dist(1)=701;  
Dist(2)=213.22;  
% Desníveis medidos  
Desn=zeros(n,1);  
Desn(1)=5.307;  
Desn(2)=1.888;

% Montagem da matriz L  
L=zeros(n,1);  
L(1)=PS52+Desn(1);  
L(2)=-BASE1+Desn(2);  
% Montagem da matriz Design  
A=zeros(n,u);  
for linha=1:n-1  
A(linha,linha)=1;  
A(linha+1,linha)=-1;  
end  
% Calculo da matriz dos Pesos  
P=zeros(n,n);  
for linha=1:n  
P(linha,linha)=1/Dist(linha);  
end

% calculo das equações normais  
N=A'\*P\*A;  
U=A'\*P\*L;

X=inv(N)\*U; % calculo dos parâmetros ajustados  
La=A\*X; % calculo das observações ajustadas  
V=La-L; % calculo dos resíduos  
VarPost= V'\*P\*V/(n-u); % calculo da variância a posteriori

SigmaX=VarPost\*inv(N); % calculo da MVC dos parâmetros ajustados

% calculo da precisão dos parâmetros ajustados  
Prec=zeros(u,1);  
for linha=1:u  
Prec(linha)= sqrt(SigmaX(linha,linha));  
end

**ANEXO III - RESULTADO DO AJUSTAMENTO DO NIVELAMENTO DA LINHA  
BÁSICA E DAS REDES**

Resultado do ajustamento do nivelamento geométrico da linha básica

| PONTO   | H (m)   | $\sigma_H$ (m) | PONTO    | H (m)   | $\sigma_H$ (m) |
|---------|---------|----------------|----------|---------|----------------|
| MP01    | 50,526  | 0,000          | PS-33    | 112,927 | 0,000          |
| BASE-02 | 81,658  | 0,000          | PS-34    | 116,029 | 0,000          |
| PS-11   | 4,408   | 0,000          | PS-35    | 116,372 | 0,000          |
| PS-12   | 12,336  | 0,000          | PS-37    | 110,606 | 0,000          |
| PS-16   | 61,941  | 0,000          | PS-39    | 90,074  | 0,000          |
| PS-17   | 64,664  | 0,000          | PS-41    | 89,81   | 0,000          |
| PS-18   | 65,537  | 0,000          | PS-43    | 86,449  | 0,000          |
| PS-19   | 69,035  | 0,000          | PS-44    | 85,944  | 0,000          |
| PS-20   | 69,194  | 0,000          | PS-46    | 89,28   | 0,000          |
| PS-22   | 81,03   | 0,000          | PS-47    | 83,956  | 0,000          |
| PS-23   | 89,235  | 0,000          | PS-48    | 63,112  | 0,000          |
| PS-24   | 90,108  | 0,000          | PS-49    | 46,663  | 0,000          |
| PS-25   | 71,233  | 0,000          | PS-50    | 50,13   | 0,000          |
| PS-26   | 71,394  | 0,000          | PS-51    | 51,66   | 0,000          |
| PS-27   | 69,942  | 0,000          | PS-52    | 43,332  | 0,000          |
| PS-28   | 82,996  | 0,000          | PS-54    | 41,723  | 0,000          |
| PS-32   | 110,584 | 0,000          | SAT93070 | 86,283  | 0,000          |

Resultado do ajustamento do nivelamento geométrico das redes apoiadas na linha básica

| PONTO | H (m) | $\sigma_H$ (m) | PONTO | H (m)  | $\sigma_H$ (m) | PONTO | H (m)   | $\sigma_H$ (m) |
|-------|-------|----------------|-------|--------|----------------|-------|---------|----------------|
| M01B  | 4,494 | 0,005          | M25B  | 52,856 | 0,000          | M56B  | 87,928  | 0,002          |
| M02A  | 5,185 | 0,005          | M26A  | 50,989 | 0,002          | M57B  | 72,603  | 0,003          |
| M02B  | 4,910 | 0,005          | M26B  | 53,782 | 0,002          | M58A  | 81,353  | 0,003          |
| M03A  | 4,863 | 0,004          | M27A  | 62,911 | 0,001          | M60A  | 115,262 | 0,002          |
| M03B  | 4,710 | 0,004          | M27B  | 64,863 | 0,001          | M60B  | 115,558 | 0,002          |
| M04A  | 4,703 | 0,004          | M28A  | 63,153 | 0,002          | M61A  | 2,935   | 0,006          |
| M04B  | 6,214 | 0,004          | M28B  | 63,596 | 0,002          | M61B  | 2,868   | 0,006          |
| M05A  | 3,050 | 0,002          | M29A  | 6,188  | 0,005          | M62A  | 5,841   | 0,004          |
| M05B  | 3,038 | 0,002          | M29B  | 5,635  | 0,005          | M63A  | 87,663  | 0,002          |
| M06A  | 3,155 | 0,004          | M30A  | 89,605 | 0,005          | M64A  | 86,929  | 0,002          |
| M06B  | 8,068 | 0,004          | M31A  | 76,155 | 0,006          | M64B  | 85,010  | 0,001          |
| M07A  | 2,959 | 0,003          | M32B  | 49,567 | 0,005          | M65A  | 67,912  | 0,002          |
| M07B  | 5,943 | 0,003          | M33B  | 46,185 | 0,005          | M65B  | 69,928  | 0,001          |
| M08A  | 3,809 | 0,003          | M35A  | 69,214 | 0,002          | M66A  | 75,970  | 0,002          |
| M08B  | 3,009 | 0,003          | M35B  | 66,993 | 0,002          | M66B  | 70,002  | 0,002          |
| M09A  | 4,033 | 0,003          | M36A  | 6,856  | 0,004          | M67A  | 86,095  | 0,003          |
| M09B  | 4,559 | 0,003          | M36B  | 5,070  | 0,003          | M67B  | 89,048  | 0,003          |
| M10A  | 3,010 | 0,004          | M37A  | 82,861 | 0,004          | M68A  | 85,986  | 0,004          |

| PONTO | H (m)  | $\sigma_H$ (m) | PONTO | H (m)   | $\sigma_H$ (m) | PONTO    | H (m)  | $\sigma_H$ (m) |
|-------|--------|----------------|-------|---------|----------------|----------|--------|----------------|
| M10B  | 2,975  | 0,004          | M38B  | 91,793  | 0,005          | M68B     | 86,465 | 0,004          |
| M11A  | 4,165  | 0,004          | M40A  | 76,447  | 0,002          | M69A     | 3,690  | 0,005          |
| M11B  | 3,195  | 0,004          | M41A  | 51,810  | 0,000          | M69B     | 3,487  | 0,005          |
| M12A  | 3,582  | 0,004          | M42A  | 70,317  | 0,001          | M70A     | 88,499 | 0,003          |
| M12B  | 3,502  | 0,004          | M43A  | 2,737   | 0,005          | M70B     | 88,744 | 0,003          |
| M13A  | 2,986  | 0,004          | M43B  | 2,475   | 0,005          | M73B     | 71,597 | 0,002          |
| M15A  | 43,119 | 0,002          | M44B  | 7,821   | 0,004          | M74A     | 85,263 | 0,004          |
| M15B  | 42,045 | 0,001          | M45B  | 112,333 | 0,000          | M74B     | 87,465 | 0,004          |
| M16A  | 7,065  | 0,004          | M46A  | 110,198 | 0,001          | M75A     | 81,153 | 0,004          |
| M17A  | 4,591  | 0,004          | M47A  | 5,801   | 0,006          | M75B     | 80,241 | 0,004          |
| M17B  | 4,249  | 0,004          | M48A  | 93,661  | 0,004          | M76A     | 83,096 | 0,005          |
| M19B  | 8,004  | 0,000          | M48B  | 89,551  | 0,004          | M76B     | 80,127 | 0,005          |
| M20A  | 47,301 | 0,002          | M50B  | 81,293  | 0,001          | M82B     | 48,638 | 0,000          |
| M20B  | 44,528 | 0,001          | M51B  | 83,168  | 0,001          | M83A     | 80,122 | 0,002          |
| M21A  | 54,147 | 0,005          | M53A  | 116,814 | 0,002          | M83B     | 84,942 | 0,002          |
| M21B  | 56,359 | 0,005          | M53B  | 116,438 | 0,002          | MP02     | 4,111  | 0,003          |
| M22A  | 6,127  | 0,005          | M54A  | 21,566  | 0,006          | MP03     | 88,805 | 0,004          |
| M22B  | 6,977  | 0,005          | M54B  | 26,721  | 0,006          | MP05     | 89,081 | 0,002          |
| M23A  | 4,830  | 0,005          | M55B  | 93,063  | 0,003          | MP06     | 71,811 | 0,002          |
| M23B  | 5,460  | 0,005          | M56A  | 87,660  | 0,001          | SAT93057 | 2,104  | 0,006          |
| M25A  | 52,165 | 0,000          |       |         |                |          |        |                |

**ANEXO IV - VALIDAÇÃO CRUZADA PARA A SELEÇÃO DA MELHOR  
SUPERFÍCIE DE MODELAGEM DO ERRO DE INTERPOLAÇÃO DA SUPERFÍCIE  
GEOIDAL**

| INTERPOLAÇÃO                     |             | SUPERFÍCIE GEOIDAL | ÁREA DE PESQUISA                   | RAIO DE PESQUISA | NÚMERO DE PONTOS | NÚMERO MÍNIMO DE PONTOS | POTÊNCIA | ERRO MÉDIO QUADRÁTICO (mm) | CLASSIFICAÇÃO PELO ERRO MÉDIO QUADRÁTICO |
|----------------------------------|-------------|--------------------|------------------------------------|------------------|------------------|-------------------------|----------|----------------------------|------------------------------------------|
| MÉTODO                           | ABRANGÊNCIA |                    |                                    |                  |                  |                         |          |                            |                                          |
| INVERSO DA POTÊNCIA DA DISTÂNCIA | LOCAL       | IPD1               | circular                           | 6.213,700        | 15               | 10                      | 1,0378   | 29,25                      | 6                                        |
|                                  |             | IPD2               | circular - 4 setores (NE,SE,SW,NW) | 6.213,700        | 5 por setor      | 3 por setor             | 1,0767   | 29,40                      | 7                                        |
|                                  |             | IPD3               | circular - 4 setores (N,S,E,W)     | 6.213,700        | 5 por setor      | 3 por setor             | 1,0000   | 29,14                      | 5                                        |
|                                  |             | IPD4               | circular - 8 setores               | 6.213,700        | 2 por setor      | 1 por setor             | 1,0000   | 29,43                      | 8                                        |
|                                  |             | IPD5               | circular                           | 24.854,752       | 117              | 117                     | 1,0000   | 28,03                      | 1                                        |
| POLINOMIAL                       |             | IPL1               | circular                           | 5.553,300        | 15               | 10                      | 1,0000   | 31,31                      | 14                                       |
|                                  |             | IPL2               | circular - 4 setores (NE,SE,SW,NW) | 5.553,300        | 5 por setor      | 3 por setor             | 1,0000   | 30,15                      | 11                                       |
|                                  |             | IPL3               | circular - 4 setores (N,S,E,W)     | 5.553,300        | 5 por setor      | 3 por setor             | 1,0000   | 29,88                      | 10                                       |
|                                  |             | IPL4               | circular - 8 setores               | 5.553,300        | 2 por setor      | 1 por setor             | 1,0000   | 30,59                      | 12                                       |
|                                  |             | IPL5               | circular                           | 13.143,000       | 15               | 10                      | 2,0000   | 31,70                      | 15                                       |
|                                  |             | IPL6               | circular - 4 setores (NE,SE,SW,NW) | 13.143,000       | 5 por setor      | 3 por setor             | 2,0000   | 32,19                      | 17                                       |
|                                  |             | IPL7               | circular - 4 setores (N,S,E,W)     | 13.143,000       | 5 por setor      | 3 por setor             | 2,0000   | 28,88                      | 4                                        |
|                                  |             | IPL8               | circular - 8 setores               | 13.143,000       | 5 por setor      | 3 por setor             | 2,0000   | 32,15                      | 16                                       |
|                                  |             | IPL9               | circular - 8 setores               | 13.143,000       | 2 por setor      | 1 por setor             | 2,0000   | 39,72                      | 19                                       |
|                                  |             | IPL10              | circular                           | 24.852,000       | 15               | 10                      | 3,0000   | 36,21                      | 18                                       |
|                                  | GLOBAL      | IPG1               | global                             | -                | -                | -                       | -        | 28,17                      | 2                                        |
|                                  |             | IPG2               | global                             | -                | -                | -                       | -        | 28,67                      | 3                                        |
|                                  |             | IPG3               | global                             | -                | -                | -                       | -        | 29,80                      | 9                                        |
|                                  |             | IPG4               | global                             | -                | -                | -                       | -        | 30,73                      | 13                                       |

## **ANEXO V - CÁLCULO DAS ONDULAÇÕES GEOIDAIS E PRECISÕES**

| PONTO | h (m)   | $\sigma_h$ (m) | H (m)  | $\sigma_H$ (m) | N = h - H (m) | $\sigma_N$ (m) | $\sigma_N^2$ |
|-------|---------|----------------|--------|----------------|---------------|----------------|--------------|
| M01B  | 21,769  | 0,044          | 4,494  | 0,005          | 17,275        | 0,044          | 0,002        |
| M02A  | 22,476  | 0,044          | 5,185  | 0,005          | 17,291        | 0,044          | 0,002        |
| M02B  | 22,234  | 0,044          | 4,91   | 0,005          | 17,324        | 0,044          | 0,002        |
| M03A  | 22,169  | 0,045          | 4,863  | 0,004          | 17,306        | 0,045          | 0,002        |
| M03B  | 22,049  | 0,046          | 4,71   | 0,004          | 17,339        | 0,046          | 0,002        |
| M04A  | 22,074  | 0,048          | 4,703  | 0,004          | 17,371        | 0,048          | 0,002        |
| M04B  | 23,562  | 0,046          | 6,214  | 0,004          | 17,348        | 0,046          | 0,002        |
| M05A  | 20,466  | 0,063          | 3,05   | 0,002          | 17,416        | 0,063          | 0,004        |
| M05B  | 20,413  | 0,062          | 3,038  | 0,002          | 17,375        | 0,062          | 0,004        |
| M06A  | 20,547  | 0,044          | 3,155  | 0,004          | 17,392        | 0,044          | 0,002        |
| M06B  | 25,433  | 0,044          | 8,068  | 0,004          | 17,365        | 0,044          | 0,002        |
| M07A  | 20,337  | 0,053          | 2,959  | 0,003          | 17,378        | 0,053          | 0,003        |
| M07B  | 23,343  | 0,050          | 5,943  | 0,003          | 17,400        | 0,050          | 0,003        |
| M08A  | 21,232  | 0,057          | 3,809  | 0,003          | 17,423        | 0,057          | 0,003        |
| M08B  | 20,372  | 0,057          | 3,009  | 0,003          | 17,363        | 0,057          | 0,003        |
| M09A  | 21,446  | 0,063          | 4,033  | 0,003          | 17,413        | 0,063          | 0,004        |
| M09B  | 21,965  | 0,063          | 4,559  | 0,003          | 17,406        | 0,063          | 0,004        |
| M10A  | 20,479  | 0,071          | 3,01   | 0,004          | 17,469        | 0,071          | 0,005        |
| M10B  | 20,419  | 0,071          | 2,975  | 0,004          | 17,444        | 0,071          | 0,005        |
| M11A  | 21,644  | 0,078          | 4,165  | 0,004          | 17,479        | 0,078          | 0,006        |
| M11B  | 20,649  | 0,078          | 3,195  | 0,004          | 17,454        | 0,078          | 0,006        |
| M12A  | 20,987  | 0,039          | 3,582  | 0,004          | 17,405        | 0,039          | 0,002        |
| M12B  | 20,866  | 0,039          | 3,502  | 0,004          | 17,364        | 0,039          | 0,002        |
| M13A  | 20,380  | 0,043          | 2,986  | 0,004          | 17,394        | 0,043          | 0,002        |
| M15A  | 60,495  | 0,051          | 43,119 | 0,002          | 17,376        | 0,051          | 0,003        |
| M15B  | 59,449  | 0,051          | 42,045 | 0,001          | 17,404        | 0,051          | 0,003        |
| M16A  | 24,532  | 0,067          | 7,065  | 0,004          | 17,467        | 0,067          | 0,004        |
| M17A  | 22,039  | 0,071          | 4,591  | 0,004          | 17,448        | 0,071          | 0,005        |
| M17B  | 21,675  | 0,073          | 4,249  | 0,004          | 17,426        | 0,073          | 0,005        |
| M19B  | 25,414  | 0,045          | 8,004  | 0,000          | 17,410        | 0,045          | 0,002        |
| M20A  | 64,735  | 0,051          | 47,301 | 0,002          | 17,434        | 0,051          | 0,003        |
| M20B  | 61,986  | 0,050          | 44,528 | 0,001          | 17,458        | 0,050          | 0,003        |
| M21A  | 71,591  | 0,061          | 54,147 | 0,005          | 17,444        | 0,061          | 0,004        |
| M21B  | 73,795  | 0,061          | 56,359 | 0,005          | 17,436        | 0,061          | 0,004        |
| M22A  | 23,639  | 0,074          | 6,127  | 0,005          | 17,512        | 0,074          | 0,005        |
| M22B  | 24,455  | 0,072          | 6,977  | 0,005          | 17,478        | 0,072          | 0,005        |
| M23A  | 22,337  | 0,077          | 4,83   | 0,005          | 17,507        | 0,077          | 0,006        |
| M23B  | 22,946  | 0,077          | 5,46   | 0,005          | 17,486        | 0,077          | 0,006        |
| M25A  | 69,637  | 0,044          | 52,165 | 0,000          | 17,472        | 0,044          | 0,002        |
| M25B  | 70,322  | 0,045          | 52,856 | 0,000          | 17,466        | 0,045          | 0,002        |
| M26A  | 68,463  | 0,052          | 50,989 | 0,002          | 17,474        | 0,052          | 0,003        |
| M26B  | 71,263  | 0,050          | 53,782 | 0,002          | 17,481        | 0,050          | 0,003        |
| M27A  | 80,412  | 0,060          | 62,911 | 0,001          | 17,501        | 0,060          | 0,004        |
| M27B  | 82,334  | 0,061          | 64,863 | 0,001          | 17,471        | 0,061          | 0,004        |
| M28A  | 80,622  | 0,065          | 63,153 | 0,002          | 17,469        | 0,065          | 0,004        |
| M28B  | 81,078  | 0,065          | 63,596 | 0,002          | 17,482        | 0,065          | 0,004        |
| M29A  | 23,691  | 0,077          | 6,188  | 0,005          | 17,503        | 0,077          | 0,006        |
| M29B  | 23,152  | 0,078          | 5,635  | 0,005          | 17,517        | 0,078          | 0,006        |
| M30A  | 107,005 | 0,037          | 89,605 | 0,005          | 17,400        | 0,037          | 0,001        |
| M31A  | 93,712  | 0,035          | 76,155 | 0,006          | 17,557        | 0,036          | 0,001        |

| PONTO | h (m)   | $\sigma_h$ (m) | H (m)   | $\sigma_H$ (m) | N = h - H (m) | $\sigma_N$ (m) | $\sigma^2_N$ |
|-------|---------|----------------|---------|----------------|---------------|----------------|--------------|
| M32B  | 67,140  | 0,041          | 49,567  | 0,005          | 17,573        | 0,041          | 0,002        |
| M33B  | 63,709  | 0,050          | 46,185  | 0,005          | 17,524        | 0,050          | 0,003        |
| M35A  | 86,721  | 0,068          | 69,214  | 0,002          | 17,507        | 0,068          | 0,005        |
| M35B  | 84,495  | 0,068          | 66,993  | 0,002          | 17,502        | 0,068          | 0,005        |
| M36A  | 24,398  | 0,081          | 6,856   | 0,004          | 17,542        | 0,081          | 0,007        |
| M36B  | 22,626  | 0,082          | 5,07    | 0,003          | 17,556        | 0,082          | 0,007        |
| M37A  | 100,740 | 0,058          | 82,861  | 0,004          | 17,879        | 0,058          | 0,003        |
| M38B  | 109,399 | 0,039          | 91,793  | 0,005          | 17,606        | 0,039          | 0,002        |
| M40A  | 94,035  | 0,044          | 76,447  | 0,002          | 17,588        | 0,044          | 0,002        |
| M41A  | 69,405  | 0,052          | 51,81   | 0,000          | 17,595        | 0,052          | 0,003        |
| M42A  | 87,789  | 0,060          | 70,317  | 0,001          | 17,472        | 0,060          | 0,004        |
| M43A  | 20,531  | 0,021          | 2,737   | 0,005          | 17,794        | 0,022          | 0,000        |
| M43B  | 20,278  | 0,023          | 2,475   | 0,005          | 17,803        | 0,024          | 0,001        |
| M44B  | 25,691  | 0,019          | 7,821   | 0,004          | 17,870        | 0,019          | 0,000        |
| M45B  | 130,467 | 0,027          | 112,333 | 0,000          | 18,134        | 0,027          | 0,001        |
| M46A  | 128,318 | 0,028          | 110,198 | 0,001          | 18,120        | 0,028          | 0,001        |
| M47A  | 23,537  | 0,022          | 5,801   | 0,006          | 17,736        | 0,023          | 0,001        |
| M48A  | 111,375 | 0,024          | 93,661  | 0,004          | 17,714        | 0,024          | 0,001        |
| M48B  | 107,270 | 0,025          | 89,551  | 0,004          | 17,719        | 0,025          | 0,001        |
| M50B  | 98,902  | 0,045          | 81,293  | 0,001          | 17,609        | 0,045          | 0,002        |
| M51B  | 100,769 | 0,053          | 83,168  | 0,001          | 17,601        | 0,053          | 0,003        |
| M53A  | 135,031 | 0,027          | 116,814 | 0,002          | 18,217        | 0,027          | 0,001        |
| M53B  | 134,656 | 0,028          | 116,438 | 0,002          | 18,218        | 0,028          | 0,001        |
| M54A  | 39,362  | 0,019          | 21,566  | 0,006          | 17,796        | 0,020          | 0,000        |
| M54B  | 44,511  | 0,019          | 26,721  | 0,006          | 17,790        | 0,020          | 0,000        |
| M55B  | 110,856 | 0,021          | 93,063  | 0,003          | 17,793        | 0,021          | 0,000        |
| M56A  | 105,420 | 0,025          | 87,66   | 0,001          | 17,760        | 0,025          | 0,001        |
| M56B  | 105,699 | 0,025          | 87,928  | 0,002          | 17,771        | 0,025          | 0,001        |
| M57B  | 90,276  | 0,042          | 72,603  | 0,003          | 17,673        | 0,042          | 0,002        |
| M58A  | 98,984  | 0,046          | 81,353  | 0,003          | 17,631        | 0,046          | 0,002        |
| M60A  | 133,468 | 0,026          | 115,262 | 0,002          | 18,206        | 0,026          | 0,001        |
| M60B  | 133,771 | 0,026          | 115,558 | 0,002          | 18,213        | 0,026          | 0,001        |
| M61A  | 20,709  | 0,020          | 2,935   | 0,006          | 17,774        | 0,021          | 0,000        |
| M61B  | 20,636  | 0,020          | 2,868   | 0,006          | 17,768        | 0,021          | 0,000        |
| M62A  | 23,691  | 0,017          | 5,841   | 0,004          | 17,850        | 0,017          | 0,000        |
| M63A  | 105,526 | 0,023          | 87,663  | 0,002          | 17,863        | 0,023          | 0,001        |
| M64A  | 104,736 | 0,035          | 86,929  | 0,002          | 17,807        | 0,035          | 0,001        |
| M64B  | 102,824 | 0,035          | 85,01   | 0,001          | 17,814        | 0,035          | 0,001        |
| M65A  | 85,728  | 0,038          | 67,912  | 0,002          | 17,816        | 0,038          | 0,001        |
| M65B  | 87,760  | 0,038          | 69,928  | 0,001          | 17,832        | 0,038          | 0,001        |
| M66A  | 93,772  | 0,043          | 75,97   | 0,002          | 17,802        | 0,043          | 0,002        |
| M66B  | 87,809  | 0,042          | 70,002  | 0,002          | 17,807        | 0,042          | 0,002        |
| M67A  | 103,871 | 0,048          | 86,095  | 0,003          | 17,776        | 0,048          | 0,002        |
| M67B  | 106,840 | 0,048          | 89,048  | 0,003          | 17,792        | 0,048          | 0,002        |
| M68A  | 103,778 | 0,056          | 85,986  | 0,004          | 17,792        | 0,056          | 0,003        |
| M68B  | 104,275 | 0,055          | 86,465  | 0,004          | 17,810        | 0,055          | 0,003        |
| M69A  | 21,035  | 0,039          | 3,69    | 0,005          | 17,345        | 0,039          | 0,002        |
| M69B  | 20,814  | 0,039          | 3,487   | 0,005          | 17,327        | 0,039          | 0,002        |
| M70A  | 106,458 | 0,024          | 88,499  | 0,003          | 17,959        | 0,024          | 0,001        |
| M70B  | 106,705 | 0,023          | 88,744  | 0,003          | 17,961        | 0,023          | 0,001        |

| PONTO        | h (m)   | $\sigma_h$ (m) | H (m)  | $\sigma_H$ (m) | N = h - H (m) | $\sigma_N$ (m) | $\sigma_N^2$ |
|--------------|---------|----------------|--------|----------------|---------------|----------------|--------------|
| M73B         | 89,459  | 0,042          | 71,597 | 0,002          | 17,862        | 0,042          | 0,002        |
| M74A         | 103,119 | 0,051          | 85,263 | 0,004          | 17,856        | 0,051          | 0,003        |
| M74B         | 105,295 | 0,053          | 87,465 | 0,004          | 17,830        | 0,053          | 0,003        |
| M75A         | 98,988  | 0,057          | 81,153 | 0,004          | 17,835        | 0,057          | 0,003        |
| M75B         | 98,067  | 0,059          | 80,241 | 0,004          | 17,826        | 0,059          | 0,003        |
| M76A         | 100,918 | 0,062          | 83,096 | 0,005          | 17,822        | 0,062          | 0,004        |
| M76B         | 97,973  | 0,063          | 80,127 | 0,005          | 17,846        | 0,063          | 0,004        |
| M82B         | 66,082  | 0,048          | 48,638 | 0,000          | 17,444        | 0,048          | 0,002        |
| M83A         | 97,913  | 0,044          | 80,122 | 0,002          | 17,791        | 0,044          | 0,002        |
| M83B         | 102,722 | 0,045          | 84,942 | 0,002          | 17,780        | 0,045          | 0,002        |
| MP01         | 67,940  | 0,047          | 50,526 | 0,000          | 17,414        | 0,047          | 0,002        |
| MP02         | 21,501  | 0,058          | 4,111  | 0,003          | 17,390        | 0,058          | 0,003        |
| MP03         | 106,402 | 0,038          | 88,805 | 0,004          | 17,597        | 0,038          | 0,001        |
| MP05         | 106,919 | 0,014          | 89,081 | 0,002          | 17,838        | 0,014          | 0,000        |
| MP06         | 89,672  | 0,042          | 71,811 | 0,002          | 17,861        | 0,042          | 0,002        |
| SAT93057     | 19,890  | 0,000          | 2,104  | 0,006          | 17,786        | 0,006          | 0,000        |
| SAT93070     | 104,160 | 0,000          | 86,283 | 0,000          | 17,877        | 0,000          | 0,000        |
| <b>TOTAL</b> |         |                |        |                |               |                | 0,291        |
| <b>EMQ</b>   |         |                |        |                |               |                | 0,050        |

**ANEXO VI - DETALHAMENTO DO CÁLCULO DO ERRO MÉDIO  
QUADRÁTICO ATRAVÉS DE VALIDAÇÃO CRUZADA PARA A  
INTERPOLAÇÃO IPG3**

| PONTO | COORDENADAS |               | ONDUL. GEOIDAL<br>(mm)       |                      | RESÍDUO                                     | QUADRADO<br>DO<br>RESÍDUO |
|-------|-------------|---------------|------------------------------|----------------------|---------------------------------------------|---------------------------|
|       | ESTE        | NORTE         | N <sub>observ.</sub> = h - H | N <sub>interp.</sub> | N <sub>observ.</sub> - N <sub>interp.</sub> |                           |
| M01B  | 195.052,841 | 8.926.634,825 | 17.275                       | 17.287               | 12,24                                       | 149,72                    |
| M02A  | 195.414,469 | 8.927.031,999 | 17.291                       | 17.296               | 4,96                                        | 24,61                     |
| M02B  | 195.783,913 | 8.927.391,543 | 17.324                       | 17.302               | -21,65                                      | 468,53                    |
| M03A  | 196.255,373 | 8.927.849,133 | 17.306                       | 17.320               | 14,38                                       | 206,82                    |
| M03B  | 196.749,021 | 8.928.322,978 | 17.339                       | 17.331               | -8,11                                       | 65,77                     |
| M04A  | 197.684,225 | 8.929.091,924 | 17.371                       | 17.350               | -20,67                                      | 427,33                    |
| M04B  | 197.231,970 | 8.928.771,323 | 17.348                       | 17.343               | -5,43                                       | 29,46                     |
| M05A  | 201.634,510 | 8.929.162,851 | 17.416                       | 17.412               | -4,32                                       | 18,69                     |
| M05B  | 201.441,824 | 8.928.797,789 | 17.375                       | 17.416               | 40,58                                       | 1.647,01                  |
| M06A  | 197.371,493 | 8.930.178,492 | 17.392                       | 17.365               | -27,18                                      | 738,51                    |
| M06B  | 197.541,285 | 8.929.539,363 | 17.365                       | 17.356               | -8,68                                       | 75,26                     |
| M07A  | 199.411,570 | 8.929.865,668 | 17.378                       | 17.379               | 0,52                                        | 0,27                      |
| M07B  | 198.792,568 | 8.930.053,763 | 17.400                       | 17.373               | -27,11                                      | 735,13                    |
| M08A  | 200.495,251 | 8.930.244,584 | 17.423                       | 17.394               | -29,41                                      | 865,06                    |
| M08B  | 200.473,257 | 8.930.696,445 | 17.363                       | 17.401               | 37,83                                       | 1.430,87                  |
| M09A  | 201.563,392 | 8.929.993,262 | 17.413                       | 17.412               | -1,47                                       | 2,17                      |
| M09B  | 201.564,763 | 8.930.228,942 | 17.406                       | 17.413               | 6,98                                        | 48,70                     |
| M10A  | 202.979,144 | 8.930.722,706 | 17.469                       | 17.443               | -26,06                                      | 679,32                    |
| M10B  | 203.008,652 | 8.930.614,345 | 17.444                       | 17.446               | 1,66                                        | 2,75                      |
| M11A  | 204.175,616 | 8.930.574,785 | 17.479                       | 17.480               | 1,47                                        | 2,18                      |
| M11B  | 204.061,603 | 8.930.613,048 | 17.454                       | 17.481               | 27,28                                       | 744,33                    |
| M12A  | 196.516,737 | 8.931.452,483 | 17.405                       | 17.390               | -14,97                                      | 224,24                    |
| M12B  | 196.456,745 | 8.931.126,630 | 17.364                       | 17.386               | 22,08                                       | 487,58                    |
| M13A  | 197.619,399 | 8.931.292,614 | 17.394                       | 17.389               | -4,78                                       | 22,81                     |
| M15A  | 200.000,439 | 8.932.008,858 | 17.376                       | 17.414               | 37,88                                       | 1.435,26                  |
| M15B  | 200.004,869 | 8.931.747,216 | 17.404                       | 17.408               | 4,41                                        | 19,46                     |
| M16A  | 201.688,121 | 8.931.898,445 | 17.467                       | 17.427               | -40,47                                      | 1.637,87                  |
| M17A  | 202.845,284 | 8.931.417,759 | 17.448                       | 17.444               | -3,56                                       | 12,65                     |
| M17B  | 203.178,465 | 8.931.406,022 | 17.426                       | 17.454               | 28,24                                       | 797,73                    |
| M19B  | 198.626,563 | 8.933.312,072 | 17.410                       | 17.439               | 28,96                                       | 838,84                    |
| M20A  | 200.038,026 | 8.933.301,273 | 17.434                       | 17.438               | 4,33                                        | 18,77                     |
| M20B  | 199.828,717 | 8.933.235,978 | 17.458                       | 17.435               | -22,66                                      | 513,70                    |
| M21A  | 201.601,103 | 8.932.807,308 | 17.444                       | 17.439               | -4,72                                       | 22,29                     |
| M21B  | 201.730,355 | 8.933.043,448 | 17.436                       | 17.445               | 9,09                                        | 82,66                     |
| M22A  | 203.425,037 | 8.933.128,086 | 17.512                       | 17.471               | -40,96                                      | 1.677,33                  |
| M22B  | 203.074,152 | 8.933.118,661 | 17.478                       | 17.465               | -12,54                                      | 157,22                    |
| M23A  | 203.910,005 | 8.933.581,509 | 17.507                       | 17.489               | -18,32                                      | 335,54                    |
| M23B  | 203.881,245 | 8.933.308,549 | 17.486                       | 17.486               | -0,25                                       | 0,06                      |
| M25A  | 198.874,590 | 8.934.409,366 | 17.472                       | 17.467               | -4,75                                       | 22,54                     |
| M25B  | 199.100,464 | 8.934.500,417 | 17.466                       | 17.469               | 3,44                                        | 11,86                     |
| M26A  | 200.107,096 | 8.934.763,367 | 17.474                       | 17.475               | 0,91                                        | 0,83                      |
| M26B  | 199.853,292 | 8.934.638,788 | 17.481                       | 17.471               | -9,79                                       | 95,88                     |
| M27A  | 201.559,968 | 8.934.702,888 | 17.501                       | 17.476               | -24,81                                      | 615,70                    |
| M27B  | 201.827,274 | 8.934.673,074 | 17.471                       | 17.479               | 7,89                                        | 62,21                     |
| M28A  | 202.422,413 | 8.934.639,804 | 17.469                       | 17.484               | 15,11                                       | 228,35                    |
| M28B  | 202.429,835 | 8.934.874,186 | 17.482                       | 17.489               | 7,13                                        | 50,86                     |
| M29A  | 204.066,147 | 8.934.113,633 | 17.503                       | 17.501               | -1,58                                       | 2,49                      |
| M29B  | 204.161,474 | 8.934.389,558 | 17.517                       | 17.507               | -9,59                                       | 91,99                     |

| PONTO | COORDENADAS |               | ONDUL. GEOIDAL<br>(mm)       |                      | RESÍDUO                                   | QUADRADO<br>DO<br>RESÍDUO |
|-------|-------------|---------------|------------------------------|----------------------|-------------------------------------------|---------------------------|
|       | ESTE        | NORTE         | $N_{\text{observ.}} = h - H$ | $N_{\text{interp.}}$ | $N_{\text{observ.}} - N_{\text{interp.}}$ |                           |
| M30A  | 195.866,015 | 8.936.167,932 | 17.400                       | 17.570               | 170,08                                    | 28.928,01                 |
| M31A  | 196.945,960 | 8.935.512,209 | 17.557                       | 17.516               | -41,40                                    | 1.714,00                  |
| M32B  | 198.434,293 | 8.936.255,029 | 17.573                       | 17.530               | -43,21                                    | 1.866,68                  |
| M33B  | 199.921,685 | 8.935.788,980 | 17.524                       | 17.505               | -18,90                                    | 357,16                    |
| M35A  | 203.003,562 | 8.935.839,531 | 17.507                       | 17.520               | 13,06                                     | 170,46                    |
| M35B  | 203.051,398 | 8.935.694,977 | 17.502                       | 17.517               | 15,05                                     | 226,41                    |
| M36A  | 204.579,342 | 8.935.776,563 | 17.542                       | 17.547               | 4,90                                      | 23,98                     |
| M36B  | 204.723,469 | 8.935.977,772 | 17.556                       | 17.553               | -2,74                                     | 7,49                      |
| M37A  | 201.172,658 | 8.944.374,092 | 17.879                       | 17.893               | 13,75                                     | 189,19                    |
| M38B  | 196.109,497 | 8.937.320,592 | 17.606                       | 17.602               | -4,08                                     | 16,61                     |
| M40A  | 198.295,208 | 8.937.568,440 | 17.588                       | 17.584               | -4,46                                     | 19,86                     |
| M41A  | 199.967,196 | 8.937.158,586 | 17.595                       | 17.551               | -44,35                                    | 1.967,00                  |
| M42A  | 201.203,602 | 8.937.137,445 | 17.472                       | 17.554               | 81,83                                     | 6.695,37                  |
| M43A  | 191.888,416 | 8.939.953,988 | 17.794                       | 17.797               | 2,56                                      | 6,55                      |
| M43B  | 191.513,601 | 8.939.904,424 | 17.803                       | 17.797               | -6,23                                     | 38,80                     |
| M44B  | 191.672,671 | 8.941.203,670 | 17.870                       | 17.869               | -0,53                                     | 0,28                      |
| M45B  | 192.804,587 | 8.945.893,974 | 18.134                       | 18.127               | -6,82                                     | 46,54                     |
| M46A  | 193.620,529 | 8.945.919,090 | 18.120                       | 18.113               | -6,79                                     | 46,11                     |
| M47A  | 194.413,072 | 8.938.697,524 | 17.736                       | 17.690               | -45,69                                    | 2.087,72                  |
| M48A  | 195.734,057 | 8.939.130,624 | 17.714                       | 17.691               | -22,59                                    | 510,14                    |
| M48B  | 196.068,346 | 8.939.080,845 | 17.719                       | 17.683               | -36,24                                    | 1.313,29                  |
| M50B  | 198.652,524 | 8.938.727,293 | 17.609                       | 17.629               | 20,37                                     | 414,97                    |
| M51B  | 200.021,567 | 8.939.324,935 | 17.601                       | 17.643               | 41,59                                     | 1.730,10                  |
| M53A  | 192.230,866 | 8.947.205,377 | 18.217                       | 18.218               | 1,17                                      | 1,36                      |
| M53B  | 192.272,413 | 8.947.368,841 | 18.218                       | 18.230               | 11,98                                     | 143,61                    |
| M54A  | 192.469,363 | 8.939.999,709 | 17.796                       | 17.791               | -5,22                                     | 27,20                     |
| M54B  | 192.400,547 | 8.939.803,671 | 17.790                       | 17.781               | -9,38                                     | 87,99                     |
| M55B  | 194.400,110 | 8.940.385,055 | 17.793                       | 17.780               | -13,32                                    | 177,33                    |
| M56A  | 195.977,567 | 8.940.134,273 | 17.760                       | 17.737               | -22,79                                    | 519,19                    |
| M56B  | 195.841,978 | 8.940.288,786 | 17.771                       | 17.748               | -23,44                                    | 549,37                    |
| M57B  | 196.871,359 | 8.940.630,461 | 17.673                       | 17.750               | 77,38                                     | 5.987,32                  |
| M58A  | 198.192,131 | 8.940.428,862 | 17.631                       | 17.718               | 87,05                                     | 7.577,85                  |
| M60A  | 192.987,627 | 8.947.190,814 | 18.206                       | 18.203               | -2,72                                     | 7,39                      |
| M60B  | 192.768,293 | 8.947.227,195 | 18.213                       | 18.209               | -3,70                                     | 13,70                     |
| M61A  | 192.668,352 | 8.939.489,034 | 17.774                       | 17.760               | -14,48                                    | 209,80                    |
| M61B  | 192.791,251 | 8.939.312,276 | 17.768                       | 17.748               | -20,11                                    | 404,42                    |
| M62A  | 192.110,179 | 8.941.236,814 | 17.850                       | 17.867               | 17,28                                     | 298,61                    |
| M63A  | 194.370,014 | 8.941.825,074 | 17.863                       | 17.859               | -3,90                                     | 15,24                     |
| M64A  | 195.162,255 | 8.941.397,068 | 17.807                       | 17.821               | 14,04                                     | 197,10                    |
| M64B  | 195.368,553 | 8.941.503,049 | 17.814                       | 17.822               | 8,40                                      | 70,55                     |
| M65A  | 196.893,276 | 8.941.717,656 | 17.816                       | 17.803               | -13,06                                    | 170,50                    |
| M65B  | 196.615,240 | 8.942.062,631 | 17.832                       | 17.827               | -4,67                                     | 21,78                     |
| M66A  | 198.328,970 | 8.941.908,630 | 17.802                       | 17.787               | -14,83                                    | 220,00                    |
| M66B  | 198.037,598 | 8.941.949,189 | 17.807                       | 17.794               | -12,65                                    | 159,94                    |
| M67A  | 199.635,776 | 8.941.784,092 | 17.776                       | 17.762               | -14,42                                    | 208,06                    |
| M67B  | 199.447,684 | 8.941.974,743 | 17.792                       | 17.774               | -18,28                                    | 334,10                    |
| M68A  | 200.920,368 | 8.942.046,185 | 17.792                       | 17.761               | -30,73                                    | 944,07                    |
| M68B  | 200.708,189 | 8.942.336,212 | 17.810                       | 17.778               | -31,88                                    | 1.016,09                  |

| PONTO   | COORDENADAS |               | ONDUL. GEOIDAL<br>(mm)       |                      | RESÍDUO                                   | QUADRADO<br>DO<br>RESÍDUO |
|---------|-------------|---------------|------------------------------|----------------------|-------------------------------------------|---------------------------|
|         | ESTE        | NORTE         | $N_{\text{observ.}} = h - H$ | $N_{\text{interp.}}$ | $N_{\text{observ.}} - N_{\text{interp.}}$ |                           |
| M69A    | 196.553,218 | 8.929.480,843 | 17.345                       | 17.349               | 3,50                                      | 12,27                     |
| M69B    | 196.605,099 | 8.929.709,745 | 17.327                       | 17.355               | 27,98                                     | 782,76                    |
| M70A    | 193.996,652 | 8.943.558,511 | 17.959                       | 17.966               | 7,00                                      | 48,97                     |
| M70B    | 194.130,132 | 8.943.646,718 | 17.961                       | 17.968               | 7,46                                      | 55,63                     |
| M73B    | 198.351,032 | 8.943.412,272 | 17.862                       | 17.871               | 8,63                                      | 74,52                     |
| M74A    | 200.112,095 | 8.943.309,012 | 17.856                       | 17.837               | -18,81                                    | 353,65                    |
| M74B    | 200.324,258 | 8.943.104,801 | 17.830                       | 17.825               | -5,33                                     | 28,44                     |
| M75A    | 201.125,872 | 8.943.584,059 | 17.835                       | 17.846               | 11,19                                     | 125,13                    |
| M75B    | 201.350,686 | 8.943.345,481 | 17.826                       | 17.831               | 4,78                                      | 22,84                     |
| M76A    | 202.011,190 | 8.943.493,388 | 17.822                       | 17.840               | 17,54                                     | 307,79                    |
| M76B    | 202.015,915 | 8.943.695,863 | 17.846                       | 17.848               | 1,95                                      | 3,81                      |
| M82B    | 199.502,670 | 8.932.981,349 | 17.444                       | 17.429               | -14,78                                    | 218,56                    |
| M83A    | 198.623,276 | 8.941.796,586 | 17.791                       | 17.777               | -14,46                                    | 208,95                    |
| M83B    | 198.777,486 | 8.941.464,034 | 17.780                       | 17.756               | -23,51                                    | 552,54                    |
| MP01    | 199.312,222 | 8.932.887,443 | 17.414                       | 17.428               | 13,86                                     | 192,01                    |
| MP02    | 200.641,065 | 8.929.872,916 | 17.390                       | 17.395               | 5,33                                      | 28,41                     |
| MP03    | 197.286,261 | 8.937.204,713 | 17.597                       | 17.581               | -16,47                                    | 271,42                    |
| MP05    | 194.228,936 | 8.941.464,216 | 17.838                       | 17.842               | 4,33                                      | 18,74                     |
| MP06    | 198.393,337 | 8.943.425,666 | 17.861                       | 17.871               | 9,78                                      | 95,57                     |
| SAT3057 | 191.017,291 | 8.939.834,107 | 17.786                       | 17.804               | 17,79                                     | 316,57                    |
| SAT3070 | 194.595,239 | 8.942.574,941 | 17.877                       | 17.898               | 21,20                                     | 449,55                    |
|         |             |               |                              |                      | <b>TOTAL</b>                              | 89.736,71                 |
|         |             |               |                              |                      | <b>EMQ</b>                                | 27,69                     |

|                                                                |
|----------------------------------------------------------------|
| <b>MAIOR ERRO<br/>DE<br/>INTERPOLAÇÃO<br/>(Valor absoluto)</b> |
| 170,08                                                         |

**ANEXO VII - QUALIDADE DO POSICIONAMENTO ABSOLUTO USANDO-SE  
O MODELO GEOIDAL DO BRASIL, ATRAVÉS DO PROGRAMA MapGeo-  
2004, PARA A DETERMINAÇÃO DAS ONDULAÇÕES GEOIDAIS NA ÁREA  
DE ESTUDO**

| PONTO | COORDENADAS |               | ONDULAÇÃO GEOIDAL (mm)       |                     | RESÍDUO (mm) | QUADRADO DO RESÍDUO |
|-------|-------------|---------------|------------------------------|---------------------|--------------|---------------------|
|       | ESTE        | NORTE         | $N_{\text{observ.}} = h - H$ | $N_{\text{MapGeo}}$ |              |                     |
| M01B  | 195.052,841 | 8.926.634,825 | 17.275                       | 16.910              | 365          | 133.225             |
| M02A  | 195.414,469 | 8.927.031,999 | 17.291                       | 16.920              | 371          | 137.641             |
| M02B  | 195.783,913 | 8.927.391,543 | 17.324                       | 16.920              | 404          | 163.216             |
| M03A  | 196.255,373 | 8.927.849,133 | 17.306                       | 16.940              | 366          | 133.956             |
| M03B  | 196.749,021 | 8.928.322,978 | 17.339                       | 16.950              | 389          | 151.321             |
| M04A  | 197.684,225 | 8.929.091,924 | 17.371                       | 16.970              | 401          | 160.801             |
| M04B  | 197.231,970 | 8.928.771,323 | 17.348                       | 16.960              | 388          | 150.544             |
| M05A  | 201.634,510 | 8.929.162,851 | 17.416                       | 17.000              | 416          | 173.056             |
| M05B  | 201.441,824 | 8.928.797,789 | 17.375                       | 16.980              | 395          | 156.025             |
| M06A  | 197.371,493 | 8.930.178,492 | 17.392                       | 17.000              | 392          | 153.664             |
| M06B  | 197.541,285 | 8.929.539,363 | 17.365                       | 16.980              | 385          | 148.225             |
| M07A  | 199.411,570 | 8.929.865,668 | 17.378                       | 17.010              | 368          | 135.424             |
| M07B  | 198.792,568 | 8.930.053,763 | 17.400                       | 17.020              | 380          | 144.400             |
| M08A  | 200.495,251 | 8.930.244,584 | 17.423                       | 17.020              | 403          | 162.409             |
| M08B  | 200.473,257 | 8.930.696,445 | 17.363                       | 17.030              | 333          | 110.889             |
| M09A  | 201.563,392 | 8.929.993,262 | 17.413                       | 17.020              | 393          | 154.449             |
| M09B  | 201.564,763 | 8.930.228,942 | 17.406                       | 17.030              | 376          | 141.376             |
| M10A  | 202.979,144 | 8.930.722,706 | 17.469                       | 17.050              | 419          | 175.561             |
| M10B  | 203.008,652 | 8.930.614,345 | 17.444                       | 17.040              | 404          | 163.216             |
| M11A  | 204.175,616 | 8.930.574,785 | 17.479                       | 17.050              | 429          | 184.041             |
| M11B  | 204.061,603 | 8.930.613,048 | 17.454                       | 17.050              | 404          | 163.216             |
| M12A  | 196.516,737 | 8.931.452,483 | 17.405                       | 17.030              | 375          | 140.625             |
| M12B  | 196.456,745 | 8.931.126,630 | 17.364                       | 17.030              | 334          | 111.556             |
| M13A  | 197.619,399 | 8.931.292,614 | 17.394                       | 17.020              | 374          | 139.876             |
| M15A  | 200.000,439 | 8.932.008,858 | 17.376                       | 17.070              | 306          | 93.636              |
| M15B  | 200.004,869 | 8.931.747,216 | 17.404                       | 17.060              | 344          | 118.336             |
| M16A  | 201.688,121 | 8.931.898,445 | 17.467                       | 17.070              | 397          | 157.609             |
| M17A  | 202.845,284 | 8.931.417,759 | 17.448                       | 17.060              | 388          | 150.544             |
| M17B  | 203.178,465 | 8.931.406,022 | 17.426                       | 17.060              | 366          | 133.956             |
| M19B  | 198.626,563 | 8.933.312,072 | 17.410                       | 17.090              | 320          | 102.400             |
| M20A  | 200.038,026 | 8.933.301,273 | 17.434                       | 17.090              | 344          | 118.336             |
| M20B  | 199.828,717 | 8.933.235,978 | 17.458                       | 17.090              | 368          | 135.424             |
| M21A  | 201.601,103 | 8.932.807,308 | 17.444                       | 17.090              | 354          | 125.316             |
| M21B  | 201.730,355 | 8.933.043,448 | 17.436                       | 17.090              | 346          | 119.716             |
| M22A  | 203.425,037 | 8.933.128,086 | 17.512                       | 17.110              | 402          | 161.604             |
| M22B  | 203.074,152 | 8.933.118,661 | 17.478                       | 17.100              | 378          | 142.884             |
| M23A  | 203.910,005 | 8.933.581,509 | 17.507                       | 17.120              | 387          | 149.769             |
| M23B  | 203.881,245 | 8.933.308,549 | 17.486                       | 17.110              | 376          | 141.376             |
| M25A  | 198.874,590 | 8.934.409,366 | 17.472                       | 17.120              | 352          | 123.904             |
| M25B  | 199.100,464 | 8.934.500,417 | 17.466                       | 17.120              | 346          | 119.716             |
| M26A  | 200.107,096 | 8.934.763,367 | 17.474                       | 17.130              | 344          | 118.336             |
| M26B  | 199.853,292 | 8.934.638,788 | 17.481                       | 17.120              | 361          | 130.321             |
| M27A  | 201.559,968 | 8.934.702,888 | 17.501                       | 17.130              | 371          | 137.641             |
| M27B  | 201.827,274 | 8.934.673,074 | 17.471                       | 17.130              | 341          | 116.281             |
| M28A  | 202.422,413 | 8.934.639,804 | 17.469                       | 17.130              | 339          | 114.921             |
| M28B  | 202.429,835 | 8.934.874,186 | 17.482                       | 17.140              | 342          | 116.964             |
| M29A  | 204.066,147 | 8.934.113,633 | 17.503                       | 17.130              | 373          | 139.129             |
| M29B  | 204.161,474 | 8.934.389,558 | 17.517                       | 17.140              | 377          | 142.129             |

| PONTO | COORDENADAS |               | ONDULAÇÃO GEOIDAL<br>(mm)    |                     | RESÍDUO<br>(mm) | QUADRADO<br>DO RESÍDUO |
|-------|-------------|---------------|------------------------------|---------------------|-----------------|------------------------|
|       | ESTE        | NORTE         | $N_{\text{observ.}} = h - H$ | $N_{\text{MapGeo}}$ |                 |                        |
| M30A  | 195.866,015 | 8.936.167,932 | 17.400                       | 17.160              | 240             | 57.600                 |
| M31A  | 196.945,960 | 8.935.512,209 | 17.557                       | 17.130              | 427             | 182.329                |
| M32B  | 198.434,293 | 8.936.255,029 | 17.573                       | 17.160              | 413             | 170.569                |
| M33B  | 199.921,685 | 8.935.788,980 | 17.524                       | 17.150              | 374             | 139.876                |
| M35A  | 203.003,562 | 8.935.839,531 | 17.507                       | 17.170              | 337             | 113.569                |
| M35B  | 203.051,398 | 8.935.694,977 | 17.502                       | 17.160              | 342             | 116.964                |
| M36A  | 204.579,342 | 8.935.776,563 | 17.542                       | 17.180              | 362             | 131.044                |
| M36B  | 204.723,469 | 8.935.977,772 | 17.556                       | 17.180              | 376             | 141.376                |
| M37A  | 201.172,658 | 8.944.374,092 | 17.879                       | 17.430              | 449             | 201.601                |
| M38B  | 196.109,497 | 8.937.320,592 | 17.606                       | 17.190              | 416             | 173.056                |
| M40A  | 198.295,208 | 8.937.568,440 | 17.588                       | 17.190              | 398             | 158.404                |
| M41A  | 199.967,196 | 8.937.158,586 | 17.595                       | 17.180              | 415             | 172.225                |
| M42A  | 201.203,602 | 8.937.137,445 | 17.472                       | 17.180              | 292             | 85.264                 |
| M43A  | 191.888,416 | 8.939.953,988 | 17.794                       | 17.340              | 454             | 206.116                |
| M43B  | 191.513,601 | 8.939.904,424 | 17.803                       | 17.340              | 463             | 214.369                |
| M44B  | 191.672,671 | 8.941.203,670 | 17.870                       | 17.390              | 480             | 230.400                |
| M45B  | 192.804,587 | 8.945.893,974 | 18.134                       | 17.570              | 564             | 318.096                |
| M46A  | 193.620,529 | 8.945.919,090 | 18.120                       | 17.560              | 560             | 313.600                |
| M47A  | 194.413,072 | 8.938.697,524 | 17.736                       | 17.260              | 476             | 226.576                |
| M48A  | 195.734,057 | 8.939.130,624 | 17.714                       | 17.260              | 454             | 206.116                |
| M48B  | 196.068,346 | 8.939.080,845 | 17.719                       | 17.250              | 469             | 219.961                |
| M50B  | 198.652,524 | 8.938.727,293 | 17.609                       | 17.220              | 389             | 151.321                |
| M51B  | 200.021,567 | 8.939.324,935 | 17.601                       | 17.240              | 361             | 130.321                |
| M53A  | 192.230,866 | 8.947.205,377 | 18.217                       | 17.640              | 577             | 332.929                |
| M53B  | 192.272,413 | 8.947.368,841 | 18.218                       | 17.650              | 568             | 322.624                |
| M54A  | 192.469,363 | 8.939.999,709 | 17.796                       | 17.330              | 466             | 217.156                |
| M54B  | 192.400,547 | 8.939.803,671 | 17.790                       | 17.320              | 470             | 220.900                |
| M55B  | 194.400,110 | 8.940.385,055 | 17.793                       | 17.320              | 473             | 223.729                |
| M56A  | 195.977,567 | 8.940.134,273 | 17.760                       | 17.290              | 470             | 220.900                |
| M56B  | 195.841,978 | 8.940.288,786 | 17.771                       | 17.300              | 471             | 221.841                |
| M57B  | 196.871,359 | 8.940.630,461 | 17.673                       | 17.300              | 373             | 139.129                |
| M58A  | 198.192,131 | 8.940.428,862 | 17.631                       | 17.280              | 351             | 123.201                |
| M60A  | 192.987,627 | 8.947.190,814 | 18.206                       | 17.630              | 576             | 331.776                |
| M60B  | 192.768,293 | 8.947.227,195 | 18.213                       | 17.630              | 583             | 339.889                |
| M61A  | 192.668,352 | 8.939.489,034 | 17.774                       | 17.310              | 464             | 215.296                |
| M61B  | 192.791,251 | 8.939.312,276 | 17.768                       | 17.300              | 468             | 219.024                |
| M62A  | 192.110,179 | 8.941.236,814 | 17.850                       | 17.380              | 470             | 220.900                |
| M63A  | 194.370,014 | 8.941.825,074 | 17.863                       | 17.370              | 493             | 243.049                |
| M64A  | 195.162,255 | 8.941.397,068 | 17.807                       | 17.350              | 457             | 208.849                |
| M64B  | 195.368,553 | 8.941.503,049 | 17.814                       | 17.350              | 464             | 215.296                |
| M65A  | 196.893,276 | 8.941.717,656 | 17.816                       | 17.340              | 476             | 226.576                |
| M65B  | 196.615,240 | 8.942.062,631 | 17.832                       | 17.360              | 472             | 222.784                |
| M66A  | 198.328,970 | 8.941.908,630 | 17.802                       | 17.340              | 462             | 213.444                |
| M66B  | 198.037,598 | 8.941.949,189 | 17.807                       | 17.340              | 467             | 218.089                |
| M67A  | 199.635,776 | 8.941.784,092 | 17.776                       | 17.330              | 446             | 198.916                |
| M67B  | 199.447,684 | 8.941.974,743 | 17.792                       | 17.340              | 452             | 204.304                |
| M68A  | 200.920,368 | 8.942.046,185 | 17.792                       | 17.340              | 452             | 204.304                |
| M68B  | 200.708,189 | 8.942.336,212 | 17.810                       | 17.350              | 460             | 211.600                |

| PONTO   | COORDENADAS |               | ONDULAÇÃO GEOIDAL<br>(mm)    |                     | RESÍDUO<br>(mm) | QUADRADO<br>DO RESÍDUO |
|---------|-------------|---------------|------------------------------|---------------------|-----------------|------------------------|
|         | ESTE        | NORTE         | $N_{\text{observ.}} = h - H$ | $N_{\text{MapGeo}}$ |                 |                        |
| M69A    | 196.553,218 | 8.929.480,843 | 17.345                       | 16.980              | 365             | 133.225                |
| M69B    | 196.605,099 | 8.929.709,745 | 17.327                       | 16.990              | 337             | 113.569                |
| M70A    | 193.996,652 | 8.943.558,511 | 17.959                       | 17.450              | 509             | 259.081                |
| M70B    | 194.130,132 | 8.943.646,718 | 17.961                       | 17.450              | 511             | 261.121                |
| M73B    | 198.351,032 | 8.943.412,272 | 17.862                       | 17.400              | 462             | 213.444                |
| M74A    | 200.112,095 | 8.943.309,012 | 17.856                       | 17.480              | 376             | 141.376                |
| M74B    | 200.324,258 | 8.943.104,801 | 17.830                       | 17.380              | 450             | 202.500                |
| M75A    | 201.125,872 | 8.943.584,059 | 17.835                       | 17.400              | 435             | 189.225                |
| M75B    | 201.350,686 | 8.943.345,481 | 17.826                       | 17.390              | 436             | 190.096                |
| M76A    | 202.011,190 | 8.943.493,388 | 17.822                       | 17.400              | 422             | 178.084                |
| M76B    | 202.015,915 | 8.943.695,863 | 17.846                       | 17.400              | 446             | 198.916                |
| M82B    | 199.502,670 | 8.932.981,349 | 17.444                       | 17.090              | 354             | 125.316                |
| M83A    | 198.623,276 | 8.941.796,586 | 17.791                       | 17.330              | 461             | 212.521                |
| M83B    | 198.777,486 | 8.941.464,034 | 17.780                       | 17.320              | 460             | 211.600                |
| MP01    | 199.312,222 | 8.932.887,443 | 17.414                       | 17.080              | 334             | 111.556                |
| MP02    | 200.641,065 | 8.929.872,916 | 17.390                       | 17.010              | 380             | 144.400                |
| MP03    | 197.286,261 | 8.937.204,713 | 17.597                       | 17.180              | 417             | 173.889                |
| MP05    | 194.228,936 | 8.941.464,216 | 17.838                       | 17.360              | 478             | 228.484                |
| MP06    | 198.393,337 | 8.943.425,666 | 17.861                       | 17.400              | 461             | 212.521                |
| SAT3057 | 191.017,291 | 8.939.834,107 | 17.786                       | 17.340              | 446             | 198.916                |
| SAT3070 | 194.595,239 | 8.942.574,941 | 17.877                       | 17.400              | 477             | 227.529                |
|         |             |               |                              |                     | <b>TOTAL</b>    | 20.403.587             |
|         |             |               |                              |                     | <b>EMQ</b>      | 418                    |

**ANEXO VIII - PROGRAMA EM MatLab PARA INTERPOLAÇÃO DA  
ONDULAÇÃO GEOIDAL NA ÁREA DE ESTUDO (ARQUIVO  
ONDULACAO.m ARMAZENADO EM CD)**

```

% Programa em MatLab para cálculo da ondulação geoidal em Maceió
% Desenvolvido por José Antônio Cavalcante Cerqueira
% Incluído na Dissertação de Mestrado em Ciências Geodésicas e Tecnologias
da geoinformação
% Novembro de 2006

% Universidade Federal de Pernambuco
% Centro de Tecnologia e Geociências
% Escola de Engenharia de Pernambuco
% Departamento de Engenharia Cartográfica
% Programa de Pós-Graduacao em Ciências Geodésicas e Tecnologias da
Geoinformação

% Entrada de dados (Coordenadas UTM SAD-69)
valido=0;
while ~valido
    prompt{1}='ESTE (digite um número entre 191017,291 e 204723,468)';
    prompt{2}='NORTE (digite um número entre 8926634,025 e
8947368,051)';
    title='COORDENADAS UTM SAD-69 (em metros)';
    resposta=inputdlg(prompt,title,1);
    VIRGULA='.';
    PONTO='.';
    coordenada{1}=eval(strrep(resposta{1},VIRGULA,PONTO));
    coordenada{2}=eval(strrep(resposta{2},VIRGULA,PONTO));
    if coordenada{1}>=191017.291 & coordenada{1}<=204723.468 &
coordenada{2}>=8926634.025 & coordenada{2}<=8947368.051
        valido=1;
    else
        valido=0;
    end
end
if valido

```

```

% coeficientes do polinomio do terceiro grau (para a ondulacao em mm)
A00=17456.749454843;
A01=-0.074329276398315;
A02=0.0000029333886653721;
A03=-0.000000000021279702602457;
A10=0.23963919066781;
A11=-0.000010839893971562;
A12=0.00000000011843988459635;
A20=-0.0000031350986886571;
A21=0.000000000016209092491908;
A30=0.00000000014888064888512;

% calculo da ondulacao geoidal
Y=coordenada{2}-8900000;
X=coordenada{1}-190000;
Z=A00+A01*Y+A02*Y^2+A03*Y^3+A10*X+A11*X*Y+A12*X*Y^2+A20*X^
2+A21*(X^2)*Y+A30*X^3;
METROS=fix(Z/1000);
MILIMETROS=round(Z)-1000*METROS;
N=strcat('N = ',int2str(METROS),',',int2str(MILIMETROS),' metros');
disp(N);
end

```