



**UNIVERSIDADE
FEDERAL
DE PERNAMBUCO**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA
LINHA DE PESQUISA: DIDÁTICA DA MATEMÁTICA
CURSO DE DOUTORADO**

ANDRÉ PEREIRA DA COSTA

**A CONSTRUÇÃO DE UM MODELO DE NÍVEIS DE DESENVOLVIMENTO DO
PENSAMENTO GEOMÉTRICO: o caso dos quadriláteros notáveis**

**Recife
2019**

ANDRÉ PEREIRA DA COSTA

**A CONSTRUÇÃO DE UM MODELO DE NÍVEIS DE DESENVOLVIMENTO DO
PENSAMENTO GEOMÉTRICO: o caso dos quadriláteros notáveis**

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de doutor em Educação Matemática e Tecnológica.

Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos

Recife
2019

Catálogo na fonte
Bibliotecária Amanda Nascimento, CRB-4/1806

C837c Costa, André Pereira da.

A construção de um modelo de níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico: o caso dos quadriláteros notáveis / André Pereira da Costa. – Recife, 2019.

401f. : il.

Orientador: Marcelo Câmara dos Santos

Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE.
Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2019.

Inclui Referências e Apêndice.

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Geometria. 3. Quadriláteros notáveis. 4. UFPE - Pós-graduação. I. Santos, Marcelo Câmara dos (Orientador). II. Título.

372.7 CDD (22. ed.)

UFPE (CE2019-012)

ANDRÉ PEREIRA DA COSTA

**A CONSTRUÇÃO DE UM MODELO DE NÍVEIS DE DESENVOLVIMENTO DO
PENSAMENTO GEOMÉTRICO: o caso dos quadriláteros notáveis**

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de doutor em Educação Matemática e Tecnológica.

Aprovada em: 26/02/2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos (1º Examinador / Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco – UFPE

Prof. Dr. Jadilson Ramos de Almeida (2º Examinador / Interno)
Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE

Profa. Dra. Marilene Rosa dos Santos (3ª Examinadora / Interna)
Universidade de Pernambuco – UPE

Prof. Dr. José Carlos Pinto Leivas (4º Examinador / Externo)
Universidade Franciscana de Santa Maria – UFN-RS

Profa. Dra. Lilian Nasser (5ª Examinadora / Externa)
Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ

Prof. Dr. Mércles Thadeu Moretti (6º Examinador / Externo)
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

*Dedico esta tese aos camponeses,
agricultores que cultivam o solo
do sertão paraibano, cujos filhos
estão se tornando doutores.*

AGRADECIMENTOS

AO DEUS,

Pelo dom da vida, pela energia em todos os momentos. Sem ele nada seria possível.

À MINHA FAMÍLIA,

Pelo amor incondicional expresso em diversos formatos. Em particular, aos meus pais Francisca Pereira e José Pereira pelo apoio, compreensão e paciência em todos os momentos. Às minhas irmãs (Andréia, Aniércia e Andrécia) pelos estímulos. Às minhas avós, Teresa Pereira (in memoriam) e Maria de Sousa pelo carinho e consideração. Aos meus tios e tias, em especial, Tia Clenilda e Padrinho Odair pelas orações. Aos meus sobrinhos (Adriel e Erick), primos e primas pelas alegrias constantes. Amo vocês!

AOS DOCENTES DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA,

Pelos conhecimentos construídos, discussões produzidas nas disciplinas e pela convivência. Meu agradecimento especial aos professores Marilene Rosa, Jadilson Almeida, Paulo Figueiredo, Paula Baltar, Rosinalda Teles, Iranete Lima, Fátima Cruz, Cristiane Pessoa, Carlos Monteiro, Verônica Gitirana e Sérgio Abranches.

AO MEU ORIENTADOR MARCELO CÂMARA DOS SANTOS,

Pela sabedoria e dedicação em seus ensinamentos. Por vivenciar comigo todos os momentos da tese. Pela confiança e pela parceria construídas desde o mestrado.

À PROFESSORA TATIANA CRISTINA DOS SANTOS DE ARAÚJO,

Pelos seus ensinamentos durante o estágio à docência. Pelo carinho e amizade. Pelas contribuições à minha formação docente no ensino superior.

À TURMA 2016 DO DOUTORADO – EDUMATEC,

Por compartilhar comigo seus conhecimentos, suas histórias, seus sonhos e suas amizades. Meu agradecimento especial aos colegas Sônia Melo, Aluska Macedo, Robson Eugênio, Michela Caroline, Michaelle Santana, Lucicleide Bezerra, Josivânia Freitas, Rozario Gomes, Cristiane Lúcia, Clóvis Lisbôa, Wilker Victor, José Roberto, Jobson Alves, Ricardo Santos e Anderson Silva.

AOS GRUPOS DE PESQUISA FENÔMENOS DIDÁTICOS E PRÓ-GRANDEZAS,

Pelas contribuições teóricas e metodológicas à minha pesquisa e pela amizade. Minha gratidão especial, a Lúcia Araújo, Fernanda Andréa, Aldinete Lima, Marilene Rosa, Jadilson Almeida, Luciana Santos, Anna Paula Brito, Vladimir Andrade, Quercia Eloi, Alexandre Barros, Lúcia Durão, Dora Morais, Marcel Vilaça, Larisse Vieira, Valéria Aguiar, Luciana Ferreira, Jailson Araújo e Yara Leal.

AOS EXAMINADORES EXTERNOS E INTERNOS,

Pela dedicação e qualidade ao analisarem esta tese. Pelas importantes contribuições realizadas, desde a qualificação, para a melhoria e sistematização dessa pesquisa. Meu agradecimento eterno aos professores José Carlos Leivas, Lilian Nasser, Mércles Moretti, Jadilson Almeida e Marilene Rosa.

AOS PROFESSORES JEAN-CLAUDE RÉGNIER E MARIA ALICE GRAVINA,

Pelas contribuições, sugestões e comentários fornecidos durante o estudo teórico.

ÀS AMIGAS BUNIT@S,

Pela amizade sincera e por estarem sempre do lado, me dando força em todos os momentos. Pelas diferenças enquanto pessoas e pelas belezas enquanto seres humanos, tornando-se fios condutores para que eu buscasse uma vida melhor a cada dia. Meu carinho e profundo agradecimento a Alice (*a bunita*), Rita (*a viajante Paola Bracho*), Flávia (*a menina que comprava pedras*), Priscila (*La usurpadora*) e Aline (*a capoeirista*).

À GALERA DA QUINTA DO MORGADO E DOS ENCONTROS NO RECIFE,

Pela amizade e pelos momentos de descontração, tão necessários em períodos difíceis na vida acadêmica. Minha gratidão especial a Nana, Eber, Carol, Marcel, Larisse, Marilene, Mary, Susana, Karina, Gabriel, Ana, Amanda e Larrisa.

AOS PROFISSIONAIS DA SECRETARIA DO EDUMATEC,

Pela atenção e dedicação nos serviços da secretaria. O meu agradecimento a Clara, Mário e Fábio.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização desta pesquisa.

A todos vocês, o meu MUITO OBRIGADO!

Paraíba meu amor
Eu estava de saída
Mas eu vou ficar
Não quero chorar
O choro da despedida
O acaso da minha vida
Um dado não abolirá
Pois seguirás bem dentro de mim
Como um São João sem fim
Queimando o sertão
E a fogueirinha é lanterna de laser
Ilumina o festejo do meu coração
(CÉSAR; Chico, 1997)

RESUMO

Esta pesquisa de doutorado teve por objetivo propor um modelo que viabilize a identificação de níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico sinalizado por estudantes do ensino básico ao resolverem atividades que abordem os quadriláteros notáveis. Nosso estudo foi organizado em dois momentos. No primeiro momento, relativo ao estudo teórico, construímos o modelo *a priori* por meio da análise das respostas a um teste composto por cinco questões sobre quadriláteros notáveis, de 464 pessoas de diferentes níveis escolares (sendo 174 alunos do ensino fundamental de duas escolas da cidade de Recife; 232 estudantes do ensino médio de cinco escolas, sendo três situadas em Recife, uma em Cabo de Santo Agostinho e uma em Limoeiro, ambas em Pernambuco; 34 discentes de licenciatura em Matemática de uma instituição de ensino superior do Agreste de Pernambuco e 24 professores de Matemática do Alto Sertão da Paraíba). No segundo momento, referente ao estudo experimental, realizamos a validação do nosso modelo. Desse modo, reaplicamos o teste empregado na primeira fase a 197 estudantes dos anos finais do ensino fundamental de uma escola pública de Recife (sendo 67 do 6º ano, 76 do 7º ano, 89 do 8º ano e 65 do 9º ano). Além disso, realizamos uma entrevista de explicitação com seis alunos, sendo dois de cada nível do modelo. Assim, obtivemos um modelo de níveis de pensamento geométrico, que vai desde o *nível* n , passando pelo *nível* $n + 1$, e chegando ao *nível* $n + 2$. Também, para cada nível, foram propostos dois subníveis: $(n)_a$ e $(n)_b$ – para o *nível* n , $(n + 1)_a$ e $(n + 1)_b$ – relacionados ao *nível* $n + 1$, por fim, $(n + 2)_a$ e $(n + 2)_b$ – referentes ao *nível* $n + 2$. Portanto, a partir desse modelo foi possível concluir que, no estudo experimental, o ambiente escolar não interfere de forma significativa no desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes. Isso foi percebido ao longo da escolarização, por exemplo, com relação ao nível n , no qual a frequência relativa iniciou com 98,5% no 6º ano e chegou a 55,4% no 9º ano.

Palavras-Chave: Modelo de níveis. Pensamento geométrico. Quadriláteros notáveis.

ABSTRACT

The objective of this doctoral research was to propose a model that allows the identification of levels of development of the geometric thinking signaled by students of the basic education when solving activities that approach the remarkable quadrilaterals. Our study was organized in two moments. In the first moment, regarding the theoretical study, we constructed the a priori model through the analysis of the answers to a test composed of five questions about remarkable quadrilaterals, of 464 people of different school levels (being 174 primary school students from two schools in the city of Recife; 232 high school students from five schools, three in Recife, one in Cabo de Santo Agostinho and one in Limoeiro, both in Pernambuco; 34 undergraduate students in Mathematics from a higher education institution in the Agreste of Pernambuco and 24 teachers from Mathematics from Alto Sertão da Paraíba). In the second moment, regarding the experimental study, we performed the validation of our model. Thus, we reapplied the test used in the first phase to 197 students of the final years of elementary school in a public school in Recife (67 of 6th grade, 76 of 7th grade, 89 of 8th grade and 65 of 9th grade). In addition, we conducted an explicitation interview with six students, two of each level of the model. At the end of the study, we obtained a model of levels of geometric thinking that goes from level n through level $n + 1$ to level $n + 2$. Also, for each level, two sub levels were proposed: $(n)_a$ and $(n)_b$ – for level n , $(n + 1)_a$ and $(n + 1)_b$ – related to level $n + 1$, finally, $(n + 2)_a$ and $(n + 2)_b$ – referring to level $n + 2$. Therefore, from this model it was possible to conclude that, in the experimental study, the school environment interferes in the development of students' geometric thinking, but not in a significant way. This was observed during schooling, for example, with respect to level n , in which the relative frequency started with 98,5% in the 6th year, falling to 86,8% in the 7th year, varying to 67,4% in the 8th year and reaching 55,4% in the 9th year.

Keywords: Levels model. Geometric thinking. Notable quadrilaterals.

RÉSUMÉ

Cette recherche doctorale visait à proposer un modèle permettant d'identifier les niveaux de développement de la pensée géométrique signalés par les étudiants en éducation de base lors de la résolution d'activités qui traitent de quadrilatères remarquables. Notre étude a été organisée en deux moments. Dans un premier temps, en ce qui concerne l'étude théorique, nous avons construit le modèle a priori à travers l'analyse des réponses à un test composé de cinq questions sur des quadrilatères remarquables, composé de 464 personnes de différents niveaux d'école (soit 174 élèves de l'école primaire de deux écoles de la ville de Recife; 232 lycéens de cinq écoles, trois à Recife, un à Cabo de Santo Agostinho et un à Limoeiro, tous deux à Pernambuco; 34 étudiants d'un cours de formation de professeur de mathématiques dans un établissement d'enseignement supérieur à Agreste, dans le Pernambouc et 24 enseignants de mathématiques de l'Alto Sertão da Paraíba. Dans un deuxième temps, en ce qui concerne l'étude expérimentale, nous avons effectué la validation de notre modèle. Ainsi, nous avons réappliqué le test utilisé lors de la première phase à 197 élèves des dernières années du primaire dans une école publique de Recife (67 en 6^e année, 76 de 7^e année, 89 de 8^e année et 65 de 9^e année). De plus, nous avons mené un entretien explicite avec six étudiants, deux de chaque niveau du modèle. À la fin de l'étude, nous obtenons un modèle de niveaux de pensée géométrique allant du niveau n au niveau $n + 1$ au niveau $n + 2$. De plus, pour chaque niveau, deux sous-niveaux ont été proposés: $(n)_a$ et $(n)_b$ – pour le niveau n , $(n + 1)_a$ et $(n + 1)_b$ – par rapport au niveau $n + 1$, enfin, $(n + 2)_a$ et $(n + 2)_b$ – par rapport au niveau $n + 2$. Par conséquent, ce modèle a permis de conclure que, dans l'étude expérimentale, l'environnement scolaire interfère dans le développement de la pensée géométrique des élèves, mais de manière non significative. Cela a été observé pendant la scolarité, par exemple, au niveau n , dans lequel la fréquence relative a commencé avec 98,5% la 6^e année, chutant à 86,8% la 7^e année et variant à 67,4% la 8^e année et atteignant 55,4% la 9^e année.

Mots-clés: Modèle de niveaux. Pensée géométrique. Quadrilatères remarquables.

RESUMEN

Esta investigación de doctorado tuvo por objetivo proponer un modelo que viabilice la identificación de niveles de desarrollo del pensamiento geométrico señalado por estudiantes de la enseñanza básica al resolver actividades que aborden los cuadriláteros notables. Nuestro estudio se organizó en dos momentos. En el primer momento, relativo al estudio teórico, construimos el modelo a priori por medio del análisis de las respuestas a un test compuesto por cinco cuestiones sobre cuadriláteros notables, de 464 personas de diferentes niveles escolares (siendo 174 alumnos de la enseñanza fundamental de dos escuelas de la ciudad de Recife; 232 estudiantes de la enseñanza media de cinco escuelas, siendo tres situadas en Recife, una en Cabo de Santo Agostinho y una en Limoeiro, ambas en Pernambuco; 34 estudiantes de licenciatura en Matemáticas de una institución de enseñanza superior del Agreste de Pernambuco y 24 profesores de Matemática del Alto Sertão da Paraíba). En el segundo momento, referente al estudio experimental, realizamos la validación de nuestro modelo. De este modo, reapplicamos el test empleado en la primera fase a 197 estudiantes de los años finales de la enseñanza fundamental de una escuela pública de Recife (siendo 67 del 6º año, 76 del 7º año, 89 del 8º año y 65 del 9º año). Además, realizamos una entrevista de explicitación con seis alumnos, siendo dos de cada nivel del modelo. Al final del estudio, hemos obtenido un modelo de niveles de pensamiento geométrico, que va desde el nivel n , pasando por el nivel $n + 1$, y llegando al nivel $n + 2$. También, para cada nivel, se propusieron dos subniveles: $(n)_a$ y $(n)_b$ – para el nivel n , $(n + 1)_a$ y $(n + 1)_b$ – relacionados con el nivel $n + 1$, por último, $(n + 2)_a$ y $(n + 2)_b$ – referentes al nivel $n + 2$. Por lo tanto, a partir de ese modelo fue posible concluir que, en el estudio experimental, el ambiente escolar interfiere en el desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes, pero no de forma significativa. Esto se percibió a lo largo de la escolarización, por ejemplo, con relación al nivel n , en el cual la frecuencia relativa inició con el 98,5% en el 6º año, cayendo al 86,8% en el 7º año, pasando al 67,4% en el 8º año y llegando al 55,4% en el 9º año.

Palabras clave: Modelo de niveles. Pensamiento geométrico. Cuadriláteros notables.

LISTA DE FIGURAS

Figura 01	Teorema de Pitágoras abordado em livros didáticos de Matemática	23
Figura 02	Teorema de Pitágoras	24
Figura 03	Representações de alguns quadriláteros	46
Figura 04	Quadrilátero de Saccheri	48
Figura 05	Hipóteses para os ângulos do quadrilátero de Saccheri	49
Figura 06	Quadrilátero de Lambert	49
Figura 07	Hipóteses para os ângulos do quadrilátero de Lambert	50
Figura 08	Conjunto dos quadriláteros sob a ótica de Euclides	53
Figura 09	Conjunto dos quadriláteros sob a ótica de Hadamard	54
Figura 10	Sete tipos de figuras que podem representar trapézios	57
Figura 11	Conexões entre os quadriláteros consideradas nessa tese	59
Figura 12	Os quatro modos de ver uma figura geométrica	80
Figura 13	Esquema sobre a formação do pensamento geométrico conforme Pais (1996)	89
Figura 14	Tipologia de pensamento geométrico elaborada com base em Pais (1996)	91
Figura 15	Esquematização da natureza do pensamento geométrico	115
Figura 16	Esquema das abstrações geométricas que caracterizam o pensamento geométrico	119
Figura 17	Extratos dos mapas utilizados na pesquisa de Costa, Allevato e Moura (2017)	121
Figura 18	Extrato da resposta de um grupo de alunos à atividade enunciada por Costa, Allevato e Moura (2017)	121
Figura 19	Resposta de um aluno à questão proposta	124
Figura 20	Resposta do segundo aluno à questão proposta	126
Figura 21	Resposta do terceiro aluno à questão proposta	129
Figura 22	Resposta do quarto aluno à questão proposta	131
Figura 23	Extrato da resposta de um aluno à atividade enunciada por Leivas, Portella e Souza (2017)	134
Figura 24	Extrato da resposta de um aluno à atividade enunciada por Leivas, Portella e Souza (2017)	134
Figura 25	Desenvolvimento do pensamento geométrico	137
Figura 26	Esquema sobre a relação entre Piaget e Van-Hiele	150
Figura 27	Graus de aquisição dos níveis de Van-Hiele segundo Gutierrez, Jaime e Fortuny (1991)	158
Figura 28	Articulação entre os modelos de Van-Hiele e de Gutierrez, Jaime e Fortuny	164
Figura 29	Estrutura do modelo didático proposto por Garrido (2005)	169
Figura 30	Articulação entre os modelos de Van-Hiele e de Garrido	172
Figura 31	Integração das Etapas e do Modelo Didático segundo Garrido (2005)	176
Figura 32	Esquema referente à articulação entre os modelos de Parzys e	181

	de Van-Hiele	
Figura 33	Articulação entre os modelos de Van-Hiele e de Marchand	190
Figura 34	Esquema do desenvolvimento dos conhecimentos espaciais para o ensino primário segundo Marchand (2009)	191
Figura 35	Articulação entre dos diferentes modelos de níveis de pensamento geométrico	194
Figura 36	Extrato do primeiro momento da primeira questão do teste	208
Figura 37	Extrato do segundo momento da primeira questão do teste	208
Figura 38	Quadriláteros notáveis apresentados na segunda questão	209
Figura 39	Quadro empregado na classificação dos quadriláteros notáveis	210
Figura 40	Extrato da primeira etapa da terceira questão do teste	210
Figura 41	Extrato da segunda etapa da terceira questão do teste	211
Figura 42	Vértices <i>A</i> e <i>B</i> marcados na malha quadriculada	212
Figura 43	Versão da quarta questão do teste aplicada na etapa experimental	212
Figura 44	Extrato da quinta questão do teste	213
Figura 45	Esquema teórico-metodológico da tese	221
Figura 46	Extrato da questão 01 (primeiro momento) – Participante 01	228
Figura 47	Extrato da questão 01 (segundo momento) – Participante 01	229
Figura 48	Extrato da questão 02 – Participante 01	230
Figura 49	Extrato da questão 03 – Participante 01	231
Figura 50	Extrato da questão 04 – Participante 01	231
Figura 51	Extrato da questão 05 – Participante 01	232
Figura 52	Extrato da questão 01 (primeiro momento) – Participantes 02 e 03	233
Figura 53	Extrato da questão 01 (segundo momento) – Participantes 02 e 03	234
Figura 54	Extrato da questão 02 – Participantes 02 e 03	235
Figura 55	Extrato da questão 03 – Participantes 02 e 03	236
Figura 56	Extrato da questão 04 – Participantes 02 e 03	237
Figura 57	Extrato da questão 05 – Participantes 02 e 03	237
Figura 58	Extrato da questão 01 (primeiro momento) – Participantes 04 e 05	240
Figura 59	Extrato da questão 01 (segundo momento) – Participantes 04 e 05	241
Figura 60	Extrato da questão 02 – Participantes 04 e 05	242
Figura 61	Extrato da questão 03 – Participantes 04 e 05	244
Figura 62	Extrato da questão 04 – Participantes 04 e 05	244
Figura 63	Extrato da questão 05 – Participantes 04 e 05	245
Figura 64	Extrato da questão 01 (primeiro momento) – Participantes 06 e 07	247
Figura 65	Extrato da questão 01 (segundo momento) – Participantes 06 e 07	248
Figura 66	Extrato da questão 02 – Participantes 06 e 07	250
Figura 67	Extrato da questão 03 – Participantes 06 e 07	251
Figura 68	Extrato da questão 04 – Participantes 06 e 07	252
Figura 69	Extrato da questão 05 – Participantes 06 e 07	252

Figura 70	Extrato da questão 01 (primeiro momento) – Participantes 08 e 09	254
Figura 71	Extrato da questão 01 (segundo momento) – Participantes 08 e 09	256
Figura 72	Extrato da questão 02 – Participantes 08 e 09	257
Figura 73	Extrato da questão 03 – Participantes 08 e 09	258
Figura 74	Extrato da questão 04 – Participantes 08 e 09	259
Figura 75	Extrato da questão 05 – Participantes 08 e 09	260
Figura 76	Extrato da questão 01 (primeiro momento) – Participante 10	261
Figura 77	Extrato da questão 01 (segundo momento) – Participante 10	262
Figura 78	Extrato da questão 02 – Participante 10	263
Figura 79	Extrato da questão 03 – Participante 10	264
Figura 80	Extrato da questão 04 – Participante 10	265
Figura 81	Extrato da questão 05 – Participante 10	266
Figura 82	Respostas dos alunos Alfredo e Santiago à primeira etapa da Q01	277
Figura 83	Respostas dos alunos Alfredo e Santiago à segunda etapa da Q01	278
Figura 84	Respostas dos alunos Alfredo e Santiago à Q02	280
Figura 85	Respostas dos alunos Alfredo e Santiago à primeira etapa da Q03	282
Figura 86	Respostas dos alunos Alfredo e Santiago à segunda etapa da Q03	283
Figura 87	Respostas dos alunos Alfredo e Santiago à Q04	284
Figura 88	Respostas dos alunos Alfredo e Santiago à Q05	286
Figura 89	Respostas dos alunos Clenilda e Francisco José à primeira etapa da Q01	288
Figura 90	Respostas dos alunos Clenilda e Francisco José à segunda etapa da Q01	289
Figura 91	Respostas dos alunos Clenilda e Francisco José à Q02	291
Figura 92	Respostas dos alunos Clenilda e Francisco José à primeira etapa da Q03	293
Figura 93	Respostas dos alunos Clenilda e Francisco José à segunda etapa da Q03	294
Figura 94	Respostas dos alunos Clenilda e Francisco José à Q04	295
Figura 95	Respostas dos alunos Clenilda e Francisco José à Q05	297
Figura 96	Resposta da aluna Amélia Maria à primeira etapa da Q01	299
Figura 97	Resposta da aluna Amélia Maria à segunda etapa da Q01	300
Figura 98	Resposta da aluna Amélia Maria à Q02	302
Figura 99	Resposta da aluna Amélia Maria à primeira etapa da Q03	303
Figura 100	Resposta da aluna Amélia Maria à segunda etapa da Q03	304
Figura 101	Resposta da aluna Amélia Maria à Q04	305
Figura 102	Resposta da aluna Amélia Maria à Q05	306
Figura 103	Respostas das alunas Ana Rosa e Valentina à primeira etapa da Q01	308
Figura 104	Respostas das alunas Ana Rosa e Valentina à segunda etapa da Q01	309
Figura 105	Respostas das alunas Ana Rosa e Valentina à Q02	311

Figura 106	Respostas das alunas Ana Rosa e Valentina à primeira etapa da Q03	313
Figura 107	Respostas das alunas Ana Rosa e Valentina à segunda etapa da Q03	314
Figura 108	Respostas das alunas Ana Rosa e Valentina à Q04	315
Figura 111	Respostas das alunas Ana Rosa e Valentina à Q05	317
Figura 110	Respostas dos alunos Lorenzo e Mariano à primeira etapa da Q01	319
Figura 111	Respostas dos alunos Lorenzo e Mariano à segunda etapa da Q01	320
Figura 112	Respostas dos alunos Lorenzo e Mariano à Q02	322
Figura 113	Respostas dos alunos Lorenzo e Mariano à primeira etapa da Q03	325
Figura 114	Respostas dos alunos Lorenzo e Mariano à segunda etapa da Q03	325
Figura 115	Respostas dos alunos Lorenzo e Mariano à Q04	327
Figura 116	Respostas dos alunos Lorenzo e Mariano à Q05	328
Figura 117	Respostas dos alunos Teresa e Donizete à primeira etapa da Q01	330
Figura 118	Respostas dos alunos Teresa e Donizete à segunda etapa da Q01	331
Figura 119	Respostas dos alunos Teresa e Donizete à Q02	333
Figura 120	Respostas dos alunos Teresa e Donizete à primeira etapa da Q03	335
Figura 121	Respostas dos alunos Teresa e Donizete à segunda etapa da Q03	336
Figura 122	Respostas dos alunos Teresa e Donizete à Q04	338
Figura 123	Respostas dos alunos Teresa e Donizete à Q05	339
Figura 124	Níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico relacionados aos quadriláteros	346
Figura 125	Articulação entre o modelo para os quadriláteros notáveis e os demais modelos	348

LISTA DE QUADROS

Quadro 01	Características dos quadriláteros de Saccheri e Lambert	51
Quadro 02	Quadriláteros notáveis segundo Euclides	52
Quadro 03	Caracterização dos quadriláteros notáveis considerada na tese	58
Quadro 04	Modificações figurais pela apreensão operatória	78
Quadro 05	Olhares em Geometria conforme Duval (2005)	80
Quadro 06	Resumo das abstrações geométricas e características	135
Quadro 07	Classes de <i>inzicht</i> conforme Van-Hiele (1957)	144
Quadro 08	Níveis de pensamento geométrico de Van-Hiele	149
Quadro 09	Diferenças entre os três primeiros níveis vanhielianos	153
Quadro 10	Propriedades da teoria vanhieliana	155
Quadro 11	Peso relacionado aos diferentes tipos de resposta	162
Quadro 12	Adaptação dos níveis de Van-Hiele para o estudo de geometria tridimensional	163
Quadro 13	Níveis de pensamento geométrico segundo Garrido (2005)	170
Quadro 14	Habilidades geométricas que integram o pensamento geométrico	171
Quadro 15	Escala valorativa por níveis de pensamento geométrico	173
Quadro 16	Etapas estruturas à implementação na prática do professor conforme Garrido (2005)	174
Quadro 17	Tipos de Geometria segundo Parzysz (2006)	178
Quadro 18	Níveis de Van-Hiele conforme Marchand (2009)	184
Quadro 19	Questões relacionadas aos conhecimentos espacial e geométrico	187
Quadro 20	Níveis de conhecimento espacial segundo Marchand (2009)	189
Quadro 21	Roteiro da entrevista realizada com os seis participantes do estudo experimental	215
Quadro 22	Categorias e critérios de análise dos dados	216
Quadro 23	Elementos da Teoria de Duval (1995) considerados na análise dos dados	217
Quadro 24	Diferentes nomenclaturas para o primeiro nível de Van-Hiele	222
Quadro 25	Modelo <i>a priori</i>	225
Quadro 26	Período da coleta de dados relativa à etapa experimental	274
Quadro 27	Relação dos estudantes participantes da entrevista	274

LISTA DE TABELAS

Tabela 01	Nível de pensamento geométrico dos partícipes	267
Tabela 02	Nível de pensamento geométrico dos partícipes por nível de escolaridade	269
Tabela 03	Nível de pensamento geométrico dos alunos do ensino fundamental	270
Tabela 04	Nível de pensamento geométrico dos alunos partícipes	341
Tabela 05	Nível de pensamento geométrico dos alunos partícipes por nível de escolaridade	344

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	21
2 O ENSINO DE GEOMETRIA E OS QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS	34
2.1 A Geometria na educação básica: um breve panorama sobre o seu ensino	34
2.2 Os quadriláteros	45
2.2.1 Os quadriláteros não euclidianos	47
2.2.2 Os quadriláteros notáveis.....	52
2.3 Situações que dão sentido aos quadriláteros notáveis.....	59
2.4 Algumas considerações	62
3 PENSAMENTO GEOMÉTRICO: EM BUSCA DE UMA DEFINIÇÃO.....	63
3.1 Pensamento geométrico na compreensão de Efraim Fischbein (1993)	65
3.2 Pensamento geométrico na compreensão de Raymond Duval (1995).....	72
3.3 Pensamento geométrico na compreensão de Luiz Carlos Pais (1996)	83
3.4 Pensamento geométrico na compreensão de Maria Alice Gravina (2001)...	92
3.5 Pensamento geométrico na compreensão de José Carlos Pinto Leivas (2009).....	103
3.6 Nossa compreensão sobre pensamento geométrico	110
4 NÍVEIS DE DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO: INDICAÇÕES DE OUTROS MODELOS.....	138
4.1 O modelo de Pierre Marie Van-Hiele (1957).....	142
4.2 Graus de aquisição dos níveis de pensamento geométrico segundo Gutierrez, Jaime e Fortuny (1991).....	156
4.3 Níveis de pensamento geométrico segundo Garrido (2005)	165
4.4 Níveis de pensamento geométrico segundo Parzysz (2006).....	176
4.5 Níveis de conhecimento espacial segundo Marchand (2009)	182

4.6 O que podemos concluir diante desses modelos?	193
5 A TRAJETÓRIA METODOLÓGICA	197
5.1 A etapa teórica.....	200
5.2 A etapa experimental	205
5.3 Os instrumentos de coleta de dados.....	206
5.3.1 O teste diagnóstico.....	207
5.3.2 A entrevista de explicitação.....	213
5.4 Categorias e critérios de análise dos dados.....	216
5.5 Algumas considerações	220
6 A VERSÃO A <i>PRIORI</i> DO MODELO: INICIANDO A CONSTRUÇÃO.....	222
6.1 A produção da versão <i>a priori</i> do modelo.....	227
6.1.1 Nível n	227
6.1.2 Nível $n + 1$	239
6.1.3 Nível $n + 2$	253
6.2 Níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico dos participantes.....	267
6.3 Algumas considerações sobre o modelo <i>a priori</i>	271
7 A VERSÃO FINAL DO MODELO: INICIANDO A VALIDAÇÃO	273
7.1 A validação do modelo	275
7.1.1 Nível n	275
7.1.2 Nível $n + 1$	299
7.1.3 Nível $n + 2$	318
7.2 Níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos participantes	341
7.3 Algumas considerações	345
8 CONSIDERAÇÕES FINAIS	350
REFERÊNCIAS.....	356

APÊNDICE A – TRANSCRIÇÃO DA ENTREVISTA COM ALFREDO	375
APÊNDICE B – TRANSCRIÇÃO DA ENTREVISTA COM FRANCISCO JOSÉ	379
APÊNDICE C – TRANSCRIÇÃO DA ENTREVISTA COM AMÉLIA MARIA	383
APÊNDICE D – TRANSCRIÇÃO DA ENTREVISTA COM ANA ROSA.....	387
APÊNDICE E – TRANSCRIÇÃO DA ENTREVISTA COM MARIANO	392
APÊNDICE F – TRANSCRIÇÃO DA ENTREVISTA COM TERESA.....	397

1 INTRODUÇÃO

Estudantes do ensino básico sempre consideraram a Matemática como uma disciplina complexa, e de complicado entendimento. Em certas circunstâncias, para alguns alunos, a Matemática era o combustível para seu destino no ambiente escolar, ou seja, se o estudante não alcançasse êxito nos processos avaliativos do saber matemático na escola básica, ele acabaria por abandonar os seus estudos escolares (ALMEIDA, 2016).

Ao analisarmos os resultados apresentados nas avaliações em larga escala, em nível internacional (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes – Pisa, 2015), em nível nacional (Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica – Saeb, 2015) e em nível estadual (Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco – Saepe, 2015), verificamos que eles sinalizam baixos desempenhos dos alunos participantes nos itens que abordam conceitos da Matemática.

Essas avaliações também revelam que no campo da Geometria, ao longo dos últimos anos, os índices no rendimento são ainda mais desanimadores, devido às dificuldades conceituais de aprendizagem apresentadas pelos estudantes. Considerando, por exemplo, os resultados do Saepe, percebemos que apenas 18,3% dos alunos do 9º ano do ensino fundamental consegue resolver problemas utilizando relações métricas no triângulo retângulo, e que 22,1% conseguem identificar propriedades dos triângulos a partir da comparação de medidas dos ângulos e dos lados (PERNAMBUCO, 2015).

Tais índices são inferiores quando comparados com os percentuais de outras habilidades matemáticas de outros campos da Matemática. Ainda, o esperado para um aluno do 9º ano do ensino fundamental era que ele conseguisse resolver problemas por meio dessas habilidades (fazer uso das relações métricas no triângulo retângulo, identificar propriedades, etc), conforme as orientações curriculares, sobretudo, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1997), os Parâmetros Curriculares para a Educação Básica de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012), e a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017).

Além disso, estudos em Educação Matemática, especialmente os realizados no campo da Geometria, evidenciam que estudantes do ensino fundamental

(COSTA; CÂMARA DOS SANTOS; 2015b; 2016a; 2017a; 2017b), do ensino médio (COSTA; CÂMARA DOS SANTOS; 2015a; 2016b), discentes de licenciatura em Matemática (COSTA; ROSA DOS SANTOS, 2016; 2017a; 2017b) e professores de Matemática que atuam em sala de aula (COSTA; CÂMARA DOS SANTOS, 2016c) apresentam semelhantes dificuldades conceituais de aprendizagem relacionadas ao conceito de quadriláteros notáveis¹, principalmente, em situações de classificação, de produção e de inclusão de classe².

Pesquisadores como Sena e Dorneles (2013) e Manoel (2014) relacionam o fracasso em Geometria com a *omissão geométrica* no ensino básico, fenômeno esse, inicialmente, sinalizado por Lorenzato (1995). Isto é, o ensino de Geometria ainda é pouco trabalhado ou é abordado de forma equivocada, nas aulas de Matemática, sobretudo, no ensino fundamental. Isso ocorre devido ao fato de a maior parte dos professores continuar apresentando sentimentos de desconforto ao abordar esse campo da Matemática em sua prática pedagógica no processo de ensino (MORETTI, 2017).

Provavelmente em decorrência disso, o ensino de Geometria tem recebido importância nas pesquisas educacionais voltadas para o ensino básico (PAIS, 2006; SILVA; OLIVEIRA; SANTANA; CARDOSO, 2013; FRADE, 2012; AMÂNCIO, 2013; LIMA, 2014; CICARINI, 2015; SILVA; SIQUEIRA, 2016; entre outros). Todavia, no Brasil, durante muitos anos o ensino de Geometria foi, e em muitos contextos ainda é, substancialmente focado na aplicação de fórmulas ou algoritmos disponibilizados

¹ Nesta tese, estamos chamando por quadriláteros notáveis os trapézios e os paralelogramos, sendo que este último inclui também o retângulo, o losango e o quadrado. Além disso, com base nas orientações curriculares, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1997) e os Parâmetros Curriculares para a Educação Básica de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012), propõem que o conceito quadriláteros notáveis seja sistematizado no 6º ano do ensino fundamental.

² Gerárd Vergnaud, psicólogo francês, considera que a compreensão de um conceito é fortemente influenciada por um conjunto de três elementos: as *situações* que dão sentido ao conceito, os *invariantes operatórios* que constituem propriedades conceituais e as *representações simbólicas* que são mobilizadas (VERGNAUD, 1986). No caso dos quadriláteros notáveis, entre as situações que produzem significado ao conceito, podemos mencionar, por exemplo, as de classificação (na qual, o aluno reconhece o quadrilátero por meio de sua representação geométrica no plano, por exemplo, ao ver uma figura de quatro lados desenhada no caderno, então, ele a classifica como quadrilátero), de produção (o estudante constroi a representação do quadrilátero, por exemplo, quando ele produz no GeoGebra um retângulo a partir de sua diagonal) e de inclusão de classe (na qual, o discente analisa as figuras com base na articulação de suas propriedades, dessa forma, dadas as representações de dois quadrados em posições diferentes em um plano, o estudante os reconhece como paralelogramos que são retângulos e losangos ao mesmo tempo).

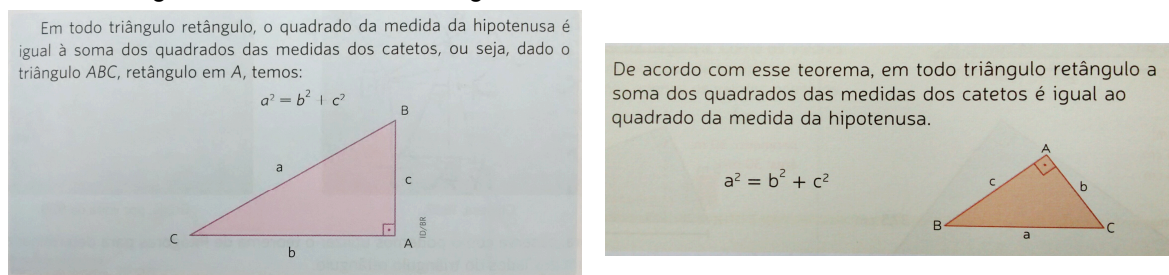
pelo livro didático e/ou pelo professor em sala de aula, sem a necessidade de explicitar as técnicas utilizadas.

Dessa forma, os estudantes do ensino básico não são incentivados a pensar geometricamente. Esse modo de se abordar a Geometria limita o pensamento geométrico³ ao “algebrizar” geométrico⁴, marcado pela ilustração de aspectos e operações da Álgebra, e por uma linguagem repleta de simbolismo algébrico. Esse fenômeno pode contribuir com o fracasso geométrico dos estudantes.

Como exemplo disso, podemos mencionar o caso do Teorema de Pitágoras, como sinalizado por Nasser (2017). Geralmente, esse teorema é introduzido nos livros didáticos de Matemática da educação básica, especificamente, no 9º ano do ensino fundamental, da seguinte forma: “a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa”, logo a análise geométrica é excluída, como apresentado na Figura 01.

Desse modo, para obter êxito nos exercícios e nos testes avaliativos, os estudantes acabam por decorar a relação ($a^2 + b^2 = c^2$ ou $a^2 = b^2 + c^2$), sem atribuir o real sentido a cada letra que compõem essa expressão.

Figura 01 – Teorema de Pitágoras abordado em livros didáticos de Matemática



(a) Livro A – 9º ano do ensino fundamental

(b) Livro B – 9º ano do ensino fundamental

Fonte: Souza e Parato, 2015, p.176 (Livro A); Chavante, 2015, p.85 (Livro B).

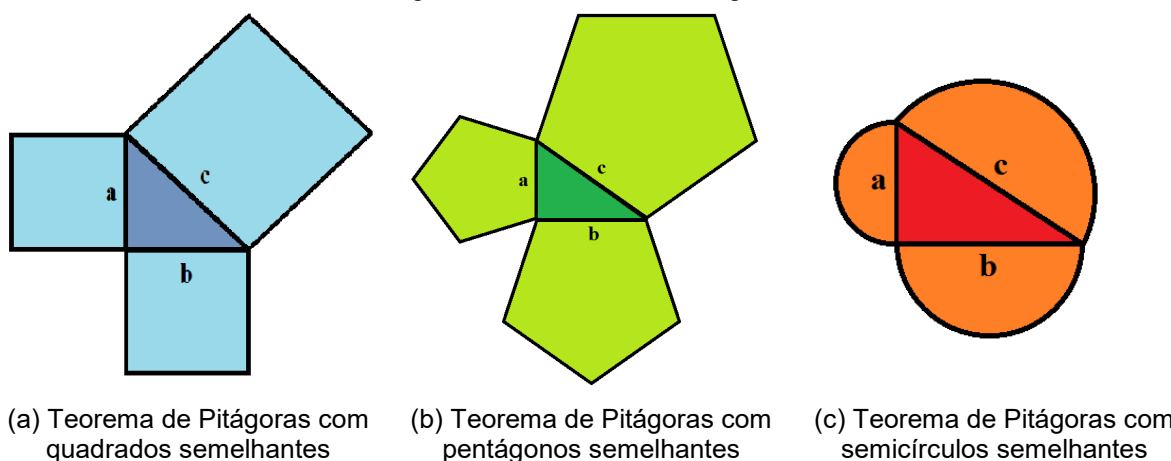
Como pontuado por Nasser (2017), o mais adequado seria que o Teorema de Pitágoras fosse construído nas aulas de Matemática com a seguinte proposição: “a soma das áreas dos quadrados produzidos sobre os catetos de um triângulo

³ Estamos considerando, nesta tese, pensamento geométrico como um ato humano específico que se manifesta a partir das seguintes abstrações geométricas: espacial, perceptiva, analítica, descritiva, dedutiva e hipotética (teórica).

⁴ O algebrizar geométrico surgiu no Brasil no final da década de 60, em decorrência do Movimento da Matemática Moderna. Tal fenômeno provocou a ênfase do estudo dos conceitos geométricos a partir apenas da ótica da Álgebra.

retângulo é igual à área do quadrado produzido sobre a hipotenusa”, conforme ilustrado na Figura 02a. De acordo com a pesquisadora, em situações como essa, a generalidade matemática deveria ser abordada, isto é, explorar com os estudantes do ensino básico que a sentença do teorema é válida para as áreas de outras figuras geométricas elaboradas sobre os lados de um triângulo retângulo, como por exemplo, outros tipos de polígonos, semicírculos, etc, mas, isso só será possível se elas forem semelhantes entre si, como apresentados nas Figuras 02b e 02c.

Figura 02 – Teorema de Pitágoras



Fonte: elaborado pelo autor

Todavia, essa abordagem do Teorema de Pitágoras tem sido pouco trabalhada em sala de aula no ensino básico (NASSER, 2017). Dessa forma, o foco fica em torno da linguagem algébrica enquanto a Geometria deixa de ser abordada (ou deixada em segundo plano), comprometendo o pensamento geométrico dos estudantes.

No Brasil, o pensamento geométrico é introduzido como centro do ensino de Geometria pelos estudos em Educação Matemática a partir dos últimos anos da década de 80 e dos primeiros anos de 1990 (KALEFF; HENRIQUES; FIGUEIREDO; REI, 1989; PAVANELLO, 1990; KALEFF; REI, 1990; NASSER, 1992; CÂMARA DOS SANTOS, 1992), tendo em vista que pensar geometricamente permite produzir significados aos objetos geométricos e às suas representações (ALMEIDA⁵, 2016).

⁵ Almeida (2016), em sua tese de doutorado vinculada à Universidade Federal Rural de Pernambuco, construiu um modelo de níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico revelados por estudantes ao resolverem problemas de partilha. A referência a esse estudo, ao longo do nosso texto,

Tal fato não ocorrerá, por exemplo, se a ênfase no ensino for na memorização de fórmulas e no uso de uma linguagem profundamente mergulhada em símbolos da Álgebra.

Ainda na década de 90, com a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática – PCN (BRASIL, 1997), a Geometria ganhou um importante destaque e, dessa maneira, o pensamento geométrico tornou-se, em geral, o ponto central do ensino e da aprendizagem desse campo matemático. Isso ocorreu sobretudo no ensino fundamental:

o **pensamento geométrico** desenvolve-se inicialmente pela visualização: as crianças conhecem o espaço como algo que existe ao redor delas. As figuras geométricas são reconhecidas por suas formas, por sua aparência física, em sua totalidade, e não por suas partes ou propriedades (BRASIL, 1997, p.82, **negrito nosso**).

Podemos perceber que os parâmetros curriculares orientam que o desenvolvimento do pensamento geométrico inicia quando a criança se localiza no espaço, e no reconhecimento das figuras geométricas como representações de objetos físicos. Com base nos PCN de Matemática, nas diretrizes das avaliações em larga escala e no Programa Nacional do Livro Didático – PNLD, geralmente, os livros didáticos do ensino básico realizaram modificações, no sentido de promover o desenvolvimento do pensar geométrico a partir dessa perspectiva.

Desse modo, o desenvolvimento do pensamento geométrico tornou-se uma das metas fundamentais para o ensino da Geometria no ensino básico do Brasil, com base nesses documentos curriculares. Tal fato pode ser percebido também em outras orientações curriculares, tanto em âmbito nacional (Base Nacional Comum Curricular – BNCC, BRASIL, 2017) como em esfera estadual (Parâmetros Curriculares para a Educação Básica do Estado de Pernambuco – PCPE de Matemática, PERNAMBUCO, 2012).

Em relação à Geometria a ser explorada ao longo da educação básica, a BNCC (BRASIL, 2017, p.227) recomenda que:

a Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de

se justifica pelo fato de acreditamos que há interseção entre as características do pensamento geométrico e as do pensamento algébrico.

diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, o estudo da posição e deslocamentos no espaço e o das formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o **pensamento geométrico** dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. É importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da Geometria: as transformações geométricas, sobretudo as simetrias. As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência (negrito nosso).

Aqui fica subentendido que o pensamento geométrico é o pensamento que apresenta as características de investigar propriedades, fazer conjecturas, produzir argumentos geométricos, etc., para a resolução de problemas do mundo físico e de outras áreas do conhecimento.

Sobre a abordagem da Geometria nos anos finais do ensino fundamental, os PCPE de Matemática (PERNAMBUCO, 2012, p.93) propõem que:

a distinção entre as diferentes figuras geométricas planas e espaciais deve ser aprofundada nessa etapa, com o estudo de suas propriedades. É importante ressaltar que o estudante começa a mudar seu ponto de vista sobre os objetos geométricos. Se, nos anos iniciais do Ensino Fundamental, a ênfase aparece no aspecto global das figuras, nos anos finais, as atividades propostas pelo professor devem levar o estudante à percepção de que as figuras geométricas são caracterizadas por suas propriedades. Dessa forma, na etapa posterior, o Ensino Médio, o estudante deverá ter condições para aprofundar essas propriedades e desenvolver o **pensamento dedutivo** (Negrito nosso).

Nessa recomendação fica implícito que o pensamento geométrico é portador de duas naturezas, a primeira, “não dedutiva”, marcada pelo ensino de conceitos geométricos mais elementares, vinculados à Geometria Plana e à Geometria Espacial. Já a segunda é “dedutiva”, caracterizada pela análise da Geometria Dedutiva.

Somando-se a isso, vários estudos foram desenvolvidos com o fim de compreender e de promover o desenvolvimento do pensamento geométrico em estudantes do ensino básico. Essas investigações sinalizam a relevância em diversificar os tipos de atividades que são explorados com os alunos, cujo objetivo é possibilitar o progresso desse pensar matemático. Além disso, apontam que a resolução de problemas e o domínio no processo dedutivo são de grande importância para desenvolver esse modo específico de pensamento (NASSER, 1992; PASTOR, 1993; KNIGHT, 2006, dentre outros).

Nasser (1992), em sua tese de doutoramento defendida na Universidade de Londres (Inglaterra), investigou as dificuldades apresentadas em Geometria por alunos do 8º ano do ensino fundamental de quatro escolas públicas do Rio de Janeiro (Brasil). Para isso, a autora buscou estimular o desenvolvimento do pensamento geométrico desses alunos ao utilizar um experimento didático relacionado ao conceito de congruência de figuras planas.

Inicialmente, a pesquisadora aplicou um teste diagnóstico com 400 estudantes, no qual o objetivo era identificar as dificuldades desses estudantes com o conceito de congruência de figuras planas e verificar as características do pensamento geométrico reveladas pelos participantes. De acordo com o teste, 35% dos estudantes analisavam as figuras geométricas por meio das suas propriedades, 50% reconheciam os objetos geométricos a partir da aparência física, e 15% apresentaram um pensamento geométrico bastante elementar, pois erraram todas as questões do teste.

Numa etapa seguinte da pesquisa, 117 alunos foram organizados em dois grupos, um experimental - com 75 participantes -, que trabalhou o conceito de congruência de figuras planas por meio de um material didático organizado com essa finalidade, e um de controle - com 42 estudantes -, que teve contato apenas com o que era abordado no livro-texto, adotado pelas escolas na época. Depois, o tema foi trabalhado em sala de aula com os dois grupos, com a aplicação de outras atividades.

A análise dos resultados dessa pesquisa demonstrou que a vivência com as atividades a partir da resolução de problemas geométricos promoveu avanço no pensamento geométrico dos estudantes, sobretudo dos integrantes do grupo experimental.

Resultados parecidos foram percebidos na pesquisa de Brito (2012), que em seu estudo de mestrado realizado pela Universidade do Oeste Paulista, Brasil, investigou como cinco professores da educação infantil, de uma escola privada de Presidente Prudente-SP, desenvolviam os conteúdos de Geometria nesse nível do ensino básico e o que os norteavam na prática pedagógica.

Aplicando uma entrevista semiestruturada, dois testes diagnósticos, e um curso de formação continuada, explorando os quadriláteros e os blocos lógicos, a

autora observou que os professores participantes reconhecem a importância de se trabalhar a Geometria na educação infantil, no entanto, sentem-se inseguros para ensiná-la. Ainda foi constatado que, apesar dos progressos alcançados, os professores participantes apresentavam um pensamento geométrico bastante elementar.

Leal (2010), em sua tese de doutorado vinculada à Universidade de Valência da Espanha, buscou produzir informações para uma melhor compreensão do processo de aprendizagem de demonstração no contexto do estudo das razões trigonométricas em um ambiente de Geometria Dinâmica.

Semelhante ao que fez Nasser (1992) em sua tese, o pesquisador também elaborou uma unidade de ensino de Geometria, desenvolvida com 17 estudantes da 10ª série do ensino básico (equivalente ao 1º ano do ensino médio brasileiro) em uma escola do município de Floridablanca, Santander, Colômbia.

Fazendo uso de diversos instrumentos de coleta de dados (teste de sondagem, gravações de áudio e vídeo, fichas de atividades, mapas conceituais), Leal (2010) observou as formas e as estruturas de argumentação e demonstração produzidas pelos estudantes no desenvolvimento das atividades da unidade de ensino, por meio do Cabri-Géomètre.

Os dados produzidos na pesquisa evidenciaram que a unidade de ensino promoveu um avanço significativo do pensamento geométrico dos participantes, pois eles demonstraram compreensão das razões trigonométricas e das propriedades desses conceitos.

Resultados semelhantes foram identificados no estudo de Brandão (2010), que em sua pesquisa de doutoramento realizada na Universidade Federal do Ceará, Brasil, investigou como a aprendizagem de conceitos geométricos (triângulos, quadriláteros e simetria), por alunos cegos congênitos incluídos em salas de aulas regulares de escolas públicas de Fortaleza-CE, pode ser estimulada por atividades de Orientação e Mobilidade (OM).

No total, participaram do estudo cinco estudantes cegos, sendo três do ensino fundamental (01 do 7º ano, 01 do 8º ano e 01 do 9º ano) e dois do 2º ano do ensino médio. O estudo se sustentou na discussão sobre o processo de formação de conceitos de Vygotsky.

Esse pesquisador aplicou com os participantes o método GEUmetria, segundo o qual os estudantes fazem uso da exploração tátil para aprendizagem de conceitos de Geometria. Por meio de pré e pós-teste, foi possível observar avanços do pensamento geométrico dos estudantes investigados, apresentando compreensão dos conceitos trabalhados no GEUmetria, assim, eles conseguiram analisar as figuras geométricas com base em suas propriedades.

Assim como fizeram Nasser (1992), Leal (2010) e Brandão (2010), Pastor (1993) elaborou uma sequência didática sobre o conceito de isometrias do plano, que foi aplicada com alunos do 6º, 7º e 8º ano do ensino básico, e com estudantes de um curso de magistério. Tal experimento fez parte de sua tese de doutorado, vinculada à Universidade de Valência – Espanha.

O trabalho de Pastor (1993) teve por objetivo geral analisar as características do pensamento geométrico dos participantes do estudo, proporcionando várias sugestões metodológicas, para ajudar a compreender melhor essa forma de pensar e promovê-lo de modo mais eficaz para melhorar o ensino de Matemática.

Além disso, os seus objetivos específicos foram: descrever o processo de aquisição dos níveis de pensamento geométrico e apresentar um método de evolução dos graus de aquisição desses níveis. Para isso, fez uso de diversos instrumentos de coleta de dados, tais como testes de sondagem, atividades, e entrevistas clínicas.

A autora verificou que a sequência proposta ofereceu maior informação sobre a forma de pensamento dos estudantes e maior precisão em sua evolução. Com a unidade de ensino sobre isometrias do plano, cada estudante pode distribuir os graus de aquisição, que mostram cada um dos níveis de pensamento geométrico.

Por fim, os dados do estudo indicaram que os alunos melhoraram a qualidade de pensamento geométrico ao longo do ensino fundamental e do curso de magistério, mas esta melhoria é muito menos do que seria desejável, uma vez que no final do ensino básico, poucos alunos conseguiram ordenar as propriedades das figuras geométricas.

Resultados similares foram evidenciados na pesquisa de doutoramento desenvolvida por Michoux (2008) na Universidade de Paris Diderot - Paris VII. Essa

estudiosa elaborou um questionário, fazendo uso da Engenharia Didática⁶, sobre os conceitos de circunferência e triângulo, que foi aplicado com dois grupos de 250 estudantes franceses de CM2 e de 6ème (que equivalem aos 5º e 6º anos do ensino fundamental brasileiro, respectivamente).

O questionário foi produzido a partir das noções do desenvolvimento de conceitos em crianças concebidas por Vygotsky (1978); dos níveis de pensamento geométrico propostos por Van-Hiele (1957); paradigmas geométricos definidos por Houdement e Kuzniak (1998) e revisados por Parzysz (2003); das várias provas na Geometria propostas por Balacheff (1982).

A pesquisadora constatou que um mesmo aluno pode demonstrar diferentes níveis de pensamento geométrico de acordo com a situação e com as tarefas propostas. Ainda segundo essa autora, considerando que o aluno avança em seus níveis por meio de uma sequência hierárquica, então, o segundo nível vanhieliano pode muito bem ser, em si, uma zona de desenvolvimento proximal para a aprendizagem de demonstração em Geometria, como proposto por Vygotsky.

Em geral, as pesquisas mencionadas focaram na aplicação de intervenções pedagógicas (com produção de atividades, sequências didáticas, etc.) em sala de aula, com o objetivo de melhorar o desempenho de estudantes e professores em Geometria e, conseqüentemente, promover o desenvolvimento do pensamento geométrico desses participantes.

Todavia, outros estudos centraram-se na abordagem dos conteúdos geométricos, isto é, objetivaram analisar se a(s) Geometria(s) vivenciada(s) nas aulas de Matemática propicia(m) o avanço do pensar geométrico. Entre essas investigações, podemos mencionar as de Knight (2006), Atebe (2008) e Lacerda (2011).

⁶ A Engenharia Didática (ED) é um procedimento empírico que tem por finalidade idealizar, desenvolver, verificar e analisar as situações didáticas. Além disso, apresenta dois papéis, que se integrados de forma correta podem ser complementares: a) a ED pode ser concebida como uma construção centrada no ensino; b) a ED pode ser utilizada como um caminho metodológico para estudos com abordagem qualitativa (ARTIGUE, 1996). Para tanto, a Engenharia Didática se define por apresentar aulas planejadas, configuradas, sistematizadas, por meio de uma sequência, no tempo, de modo contínuo; por um docente/engenheiro para desenvolver uma proposta de aprendizado para determinada parcela de estudantes. Na defluência das interações entre docente e discente, a proposta progride sob as respostas dos estudantes e em relação às definições e determinações do docente (ALMOULOU; SILVA, 2012).

Knight (2006), em sua dissertação de mestrado, a partir de vários testes diagnósticos elaborados por Usiskin (1982), analisou o pensamento geométrico de estudantes de licenciatura em Matemática da Universidade de Maine, Estados Unidos, após eles terem cursado a disciplina de Geometria Elementar Descritiva.

Os resultados dessa pesquisa mostraram que, após realizarem essa disciplina, os licenciandos conseguiam analisar os objetos geométricos a partir das propriedades, contudo, não realizaram estudos dedutivos e nem a análise de geometrias não euclidianas. Portanto, o autor concluiu que a disciplina de Geometria em nível universitário não favorece o desenvolvimento do pensamento geométrico dos futuros professores de Matemática na mencionada instituição.

Achados parecidos também foram notados na tese de Atebe (2008), que em seu estudo de doutoramento realizado pela Universidade de Rhodes na África do Sul, buscou explorar e explicar o pensamento geométrico de um grupo de estudantes das 10^a, 11^a e 12^a séries do ensino básico da Nigéria e da África do Sul (semelhantes aos 1º, 2º e 3º anos do ensino médio brasileiro).

Com diversos testes relacionados aos conceitos de triângulos, quadriláteros e circunferências, o pesquisador evidenciou que a maioria dos alunos ainda não estava preparada para o estudo dedutivo formal da Geometria, sendo que os alunos sul-africanos apresentaram um melhor desempenho do que os nigerianos.

Além disso, ao analisar as aulas de Geometria de três professores nigerianos e três sul-africanos, o investigador concluiu que a instrução de Geometria e os métodos de ensino da África do Sul oferecem maiores oportunidades para os alunos aprenderem Geometria do que no caso da Nigéria, sobretudo em decorrência do maior número de aulas destinado aos alunos sul-africanos.

Na sua pesquisa de mestrado vinculada à Universidade Federal da Paraíba, Brasil, Lacerda (2011) analisou duas coleções de livros didáticos de Matemática dos anos finais do ensino fundamental, aprovadas pelo Programa Nacional do Livro Didático – PNLD/2008 e adotadas pela 9ª Gerência Regional de Ensino da Paraíba (situada em Cajazeiras-PB), tendo como objetivo verificar se esses livros promovem o desenvolvimento do pensamento geométrico.

Por meio de análise documental e da análise de conteúdo, o pesquisador observou que nos livros analisados, a maioria dos problemas explora o

reconhecimento das figuras geométricas por meio do seu aspecto global, e ainda pela análise de suas propriedades. O autor percebeu que poucas questões exploram a inclusão de classe, e nenhum problema aborda o estudo dedutivo. Para tanto, as coleções não favorecem de forma significativa o desenvolvimento do pensamento geométrico.

Nesse contexto, pensamos que nosso estudo diverge desses mencionados por propor um modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico com base nas produções de estudantes dos anos finais do ensino fundamental em problemas sobre o conceito de quadriláteros notáveis.

Com esse modelo, será possível analisar as características do pensamento geométrico que são mobilizadas pelos estudantes no estudo dos quadriláteros notáveis. Assim, o professor de Matemática poderá compreender melhor o funcionamento cognitivo dos seus alunos, para, em seguida, propor intervenções pedagógicas que promovam o desenvolvimento desses atributos, bem como, a passagem entre os níveis dessa forma de pensar em Geometria.

Desse modo, elaboramos a seguinte questão de pesquisa: em que medida existem níveis e subníveis de desenvolvimento do pensamento geométrico de alunos dos anos finais do ensino fundamental, ao resolverem problemas sobre os quadriláteros notáveis, em situações de produção e de classificação?

Para tanto, na busca de resposta ao nosso questionamento, nessa investigação, temos como objetivo: *propor um modelo que possibilite a identificação de níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico sinalizado por estudantes do ensino básico ao resolverem atividades que abordem os quadriláteros notáveis*. Além disso, elaboramos os seguintes objetivos específicos:

- caracterizar o modelo de níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico para estudantes dos anos finais do ensino fundamental relacionado aos quadriláteros notáveis;
- verificar a existência de níveis e subníveis em produções de estudantes dos anos finais do ensino fundamental em relação aos quadriláteros notáveis;
- validar o modelo de níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico a partir das produções de alunos dos anos finais do ensino fundamental relacionados aos quadriláteros notáveis.

Então, organizamos esta tese em seis capítulos. No primeiro capítulo, intitulado **Ensino de Geometria e os quadriláteros notáveis**, discutimos a situação do ensino de Geometria no Brasil e algumas questões de ordem epistemológica ligadas a esse processo. Em seguida, dissertamos sobre o conceito dos quadriláteros notáveis, mostrando como esse conceito foi construído ao longo da história, verificando a relação entre o seu desenvolvimento conceitual com dificuldades conceituais de aprendizagem apresentadas por estudantes do ensino básico. Ainda, apresentamos as situações que dão sentido ao quadriláteros, para isso, nos baseamos na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1986).

O segundo capítulo versa sobre **Pensamento geométrico: em busca de uma definição**, e teve por finalidade, a partir das perspectivas de Fischbein (1993), Duval (1995), Pais (1996), Gravina (2001) e Leivas (2009), apresentar algumas caracterizações de pensamento geométrico.

No terceiro capítulo, discutimos acerca de **Níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico: indicações de outros modelos**, tendo por base alguns estudos que sinalizam a possibilidade de um modelo que permitem identificar os níveis de desenvolvimento do pensar geométrico de estudantes.

No quarto capítulo, apresentamos **A Trajetória Metodológica**, que possui o tipo de pesquisa, contexto e participantes do estudo, a descrição das questões que compõem o teste diagnóstico analisado, as categorias e critérios de análise adotados para o teste como para a entrevista de explicitação.

O quinto capítulo apresenta **A versão a priori do modelo**, que foi construído por meio dos resultados dos estudos de Costa e Câmara dos Santos (2015a; 2016a; 2016b; 2016c; 2017a; 2017b), de Costa e Rosa dos Santos (2016; 2017a; 2017b). No sexto capítulo é apresentada **A versão final do modelo**, que é validado a partir da produção de estudantes dos anos finais do ensino fundamental de uma escola pública de Recife (Pernambuco).

Por fim, essa tese será finalizada com a apresentação das nossas **considerações finais**, seguidas das **referências e apêndices**.

2 O ENSINO DE GEOMETRIA E OS QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS

Neste capítulo, apresentamos um breve panorama sobre a atual situação do ensino de Geometria no Brasil. Desse modo, consideramos tanto os aspectos de natureza institucional, como algumas questões de ordem epistemológica ligadas a esse processo.

Em seguida, dissertamos sobre o conceito dos quadriláteros notáveis, mostrando como esse conceito foi construído ao longo da história, verificando se essa evolução conceitual tem alguma relação com as principais dificuldades conceituais de aprendizagem apresentadas por estudantes do ensino básico.

Ainda, apresentamos as situações que dão sentido aos quadriláteros e, para isso, nos baseamos na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1986). Desse modo, foi possível identificar três tipos de situações: classificação, construção e inclusão.

2.1 A Geometria na educação básica: um breve panorama sobre o seu ensino

Nas últimas décadas no Brasil, podemos verificar o grande avanço com as pesquisas em Educação Matemática. Com o ensino da Geometria isso não tem sido diferente. Tal desenvolvimento tem ocasionado conquistas importantes no contexto escolar, isto é, no chão da escola, onde, por um lado, os resultados desses estudos contribuem com a formação de professores e, conseqüentemente, com a aprendizagem dos alunos.

Por outro lado, mesmo com todo esse crescimento educacional, muitos dos achados dessas investigações não conseguem chegar até o estudante do ensino básico. Isso ocorre, pois os professores de Matemática, em sua maioria, enfrentam dificuldades em realizar a transposição entre os cenários vivenciados, com os quais foram construídas as pesquisas, e a realidade prática de sala de aula, onde realizam seu exercício profissional.

Conforme sinalizado por Câmara dos Santos (2001), os efeitos dessa situação produzem um *distanciamento progressivo* entre os resultados, bastante favoráveis dos estudos educacionais, e a prática difícil e específica da sala de aula em Matemática da escola básica.

Tal distanciamento consiste na dificuldade de articulação entre os resultados obtidos nas pesquisas educacionais e a realidade em sala de aula, ocasionando um empilhamento de reflexões advindas de pesquisas sem que com isso seja direcionado ao ambiente escolar (LIMA BORBA; COSTA, 2018, p. 61).

Desse modo, esse distanciamento progressivo pode ser observado com muito relevo na escola básica brasileira, localizando-se vigorosamente na esfera da Matemática de maneira mais específica. No caso do ensino de Geometria, em especial, tal distanciamento é mais evidente.

Com efeito, a ausência de conexão entre a investigação em educação geométrica e a dinâmica complexa da sala de aula em Matemática, tem atraído o surgimento de algumas consequências que podem, inclusive, prejudicar a compreensão de conceitos em Geometria:

pode-se observar que, se por um lado o desenvolvimento dos trabalhos sobre *o ensino e a aprendizagem* em geometria contribuiu bastante para a atenuação de uma certa tendência formalista, predominante a partir do movimento da Matemática Moderna, por outro lado a incompreensão, ou dificuldades de reprodução em sala de aula desses resultados, fez crescer a tendência a uma manipulação inconsistente na aprendizagem de geometria, provocando, muitas vezes, efeitos nocivos à aprendizagem (CÂMARA DOS SANTOS, 2009, p.178, *itálico nosso*).

Nessa direção, essa polarização estabelecida entre o formalismo e a manipulação inconsistente, sinalizada pelo autor, tem feito com que a Geometria seja, em geral, pouco trabalhada nas aulas de Matemática do ensino básico, ou então, explorada de modo equivocado.

Tal fato tem causado um amplo debate nacional entre vários educadores matemáticos (SILVA; SILVA, 2014; KALEFF, 2017; CORREIA; UTSUMI; NASSER, 2017; COSTA; ROSA DOS SANTOS, 2018a; 2018b; 2018c; 2018d; MORETTI; HILLESSHEIM, 2018, entre outros) sobre a forma como conceitos geométricos são abordados tanto na educação básica, como nos cursos de formação de professores de Matemática.

Entre os aspectos que favorecem este quadro, Costa (2016) destaca as dificuldades relacionadas à abordagem da Geometria nos cursos de licenciatura em Matemática e em Pedagogia, que formam professores de Matemática para atuarem na educação infantil, no ensino fundamental e no ensino médio.

Segundo esse pesquisador, os futuros professores do ensino básico que frequentam tais cursos, geralmente, têm pouco (ou nenhum) contato com a Geometria, ou então, vivenciam experiências formativas que exploram conceitos geométricos de forma bastante desarticulada com suas futuras práticas pedagógicas.

Diante dessa circunstância, fica devidamente compreendido o motivo desses docentes, quando exercerem sua profissão, em considerarem o ensino de Geometria inconcebível. Isto é, na maior parte dos casos, alegam que não é possível ensinar, com precisão e clareza, o que é desconhecido ou superficial para eles.

Podemos verificar, com certa facilidade, que nas escolas do ensino básico, o ensino de Geometria ainda está “contagiado” pela *omissão geométrica*. Tal fenômeno foi inicialmente discutido no Brasil por Lorenzato (1995) há mais de 20 anos, todavia, continua bastante ativo nas aulas de Matemática, atualmente.

Como ilustração disso, apresentamos alguns resultados de duas pesquisas (COSTA; CÂMARA DOS SANTOS, 2016c; COSTA; ROSA DOS SANTOS, 2016), nas quais fizemos parte da autoria, realizadas com 34 estudantes de licenciatura em Matemática e 24 professores de Matemática dos anos finais do ensino fundamental e do ensino médio. Esses participantes foram submetidos a cinco questões sobre geometria euclidiana plana em ambos os estudos.

Se considerarmos a primeira questão do teste, podemos perceber que foram obtidas 40% de respostas erradas entre os estudantes de licenciatura. Ao analisarmos as respostas dos professores de Matemática, esse índice subiu para 46% do total de participantes. Esses resultados mostram, por exemplo, que esses partícipes têm dificuldades em reconhecer um quadrado como um tipo especial de retângulo.

Em uma pesquisa semelhante realizada com 10 professores de Matemática do ensino básico, Silva e Silva (2014) aplicaram um teste formado por dez itens, entre os quais, oito questões eram sobre geometria euclidiana e duas sobre geometria não euclidiana.

Os resultados encontrados no estudo mostraram que os professores não possuem confiança em ensinar algum conteúdo matemático de natureza geométrica.

Eles sinalizam que a ausência da Geometria em suas práticas pedagógicas é devida à má formação que tiveram nos cursos de licenciatura em Matemática. Ainda, para esses participantes, o currículo universitário não apresenta uma adequada articulação entre os conceitos geométricos e a escola básica.

Essas evidências apontam que, apesar do notável progresso com as discussões sobre os aspectos relacionados aos processos de ensino e de aprendizagem da Geometria, na atualidade, é possível encontrarmos presentes em nossas escolas, sobretudo, nas aulas de Matemática, vários pontos sinalizados por Lorenzato (1995).

Com relação aos livros didáticos de Matemática, houve muitos avanços. Nessas obras, hoje, podemos verificar que conceitos geométricos são apresentados não mais nos últimos capítulos. Até mesmo, são explorados de forma articulada com outros objetos da Geometria e com outros campos da Matemática (tais como Grandezas e Medidas, Álgebra, Números e Operações, etc.).

Contudo, em geral, os professores optam por não abordar esses conceitos em sala de aula, ou então, acabam ensinando-os de forma superficial e desarticulada com a realidade dos seus alunos:

então, a Geometria não encontra espaço no ensino da Matemática, ficando como um *apêndice curricular*, passando a ideia de que se trata de um conteúdo difícil ou sem importância para a aprendizagem dos alunos. Assim, parece que os estudantes têm contato somente com o que os livros abordam, deixando de construir de forma adequada um novo saber (COSTA, 2016, p.31).

Além disso, estudos educacionais (PACHÊCO; PACHÊCO; SILVA, 2017; MONTEIRO; ROSA DOS SANTOS, 2018; SANTOS; ROSA DOS SANTOS SANTOS, 2018; COSTA; ROSA DOS SANTOS, 2018a; 2018b; 2018c; 2018d, entre outros) têm sinalizado alguns problemas acerca da abordagem geométrica nos atuais livros didáticos adotados no Brasil, sobretudo, com relação às tarefas apresentadas em exercícios.

Em uma pesquisa que teve por objetivo analisar a abordagem dos quadriláteros notáveis presente em um livro didático de Matemática do sexto ano do ensino fundamental, Costa e Rosa dos Santos (2018b) perceberam uma forte tendência de explorar esse conceito a partir do cálculo da medida de grandezas geométricas.

Os autores analisaram 32 tarefas presentes no capítulo destinado aos quadriláteros, que foram categorizadas em seis tipos de tarefas:

- T_M – Determinar a medida de uma grandeza geométrica associada a um quadrilátero notável
 - T_R – Reconhecer quadriláteros notáveis
 - T_P – Reconhecer propriedades dos quadriláteros notáveis
 - T_D – Associar elementos da definição ao quadrilátero notável correspondente
 - T_C – Construir quadriláteros
 - T_I – Estabelecer inclusão de classes entre os quadriláteros notáveis correspondentes
- (COSTA; ROSA DOS SANTOS, 2018b, p.46)

Nessa pesquisa, entre os tipos de tarefas, o mais manifestado foi T_M – *Determinar a medida de uma grandeza geométrica associada a um quadrilátero notável*, com uma frequência relativa de 31,25% do total. Enquanto que os menos presentes no livro didático foram T_C – *Construir quadriláteros* (com 6,25%) e T_I – *Estabelecer inclusão de classes entre os quadriláteros notáveis correspondentes* (com 3,12%).

Resultados semelhantes foram obtidos em outro estudo realizado por Costa e Rosa dos Santos (2018a), no qual, analisaram a abordagem dos quadriláteros notáveis em um livro do oitavo ano do ensino fundamental. Entre as 109 tarefas identificadas no capítulo do livro que explora esse conceito, T_M está presente em 38,53% do total, enquanto que T_C possui uma frequência relativa de 4,59% e T_I com 1,83%.

Em seguida, ao analisar a abordagem do conceito de ângulo presente em um livro didático de Matemática do oitavo ano do ensino fundamental, Costa e Rosa dos Santos (2018c) verificaram que das 209 tarefas identificadas no capítulo destinado a esse saber, o tipo mais evidente foi *determinar a medida da abertura do ângulo de uma figura ou região*, presente em 143 itens, o que representa cerca de 68,4% do geral.

Por fim, ao analisar a organização matemática do ensino de triângulos existente em um livro didático do oitavo ano do ensino fundamental, Costa e Rosa dos Santos (2018d) constaram que dos 150 itens analisados no capítulo do livro referente a esse tópico, *determinar a medida de uma grandeza geométrica*

associada a um triângulo foi o tipo de tarefa mais manifestado, com uma frequência de 22,67%, o que corresponde a 34 itens do total.

Em todos esses estudos, percebemos que as tarefas relacionadas à construção, à inclusão de classe e à identificação são pouco exploradas. Por outro lado, há uma grande ênfase no cálculo da medida de grandezas geométricas associadas às figuras geométricas, sobretudo, a partir do uso de equações lineares.

Logo, parece que os campos da Álgebra e das Grandezas e Medidas são sempre privilegiados, em detrimento com o campo geométrico, que tem ocupado um segundo plano nos livros didáticos analisados. Em nosso entendimento, a tendência por essa abordagem ainda é um resquício da influência do Movimento da Matemática Moderna.

O Movimento da Matemática Moderna, que emergiu na segunda metade da década de 60, teve grande influência no recente cenário em que se insere o ensino de Geometria no Brasil. Tal movimento baseou-se no formalismo e no rigor do conhecimento matemático, tendo por fundamentação a Teoria dos Conjuntos e da Álgebra.

A “proposta curricular”, de promover a algebrização da Geometria, não teve êxito no país, entrando em decadência no final dos anos 1970. Todavia, promoveu a ruptura com o modelo curricular anterior, caracterizado por demonstrações a partir de uma análise lógica e dedutiva:

até há poucas décadas, o ensino da Geometria no Brasil era apenas racional, centrado em definições e demonstrações; esse modo formal dedutivo de conceber o ensino da Geometria elementar dificultava a aprendizagem dela para muitos. Com a invasão da Matemática Moderna, a Geometria quase desapareceu das salas de aula (LORENZATO, 2012, p.xiii).

Nessa direção, passados cerca de cinquenta anos do Movimento da Matemática Moderna no Brasil, o lugar da Geometria nas escolas do ensino básico, especificamente, nas aulas de Matemática, ainda continua indefinido.

É importante destacar que a lei 5.692/71, isto é, a Lei de Diretrizes e Bases do Ensino de 1º e 2º graus de 1971 também colaborou com a omissão geométrica. Por meio dessa lei, as escolas de todo o território nacional tornaram-se autônomas

para organizar e selecionar os conteúdos, a serem abordados nas disciplinas que compunham os seus currículos (COSTA, 2016).

Assim, muitos professores que não se sentiam confortáveis com o ensino de Geometria, optavam por excluí-lo de suas práticas pedagógicas. Também, entre os que buscavam abordá-lo:

muitos reservaram o final do ano letivo para sua abordagem em sala de aula – talvez numa tentativa, ainda que inconsciente, de utilizar a falta de tempo como desculpa pela não realização do trabalho programado com o tópico em questão (PAVANELLO, 1993, p.7).

Como destacam Rêgo, Rêgo e Vieira (2012), apesar do abandono geométrico em nossas escolas provocado pelo Movimento da Matemática Moderna, a Geometria atualmente é reconhecida como de grande relevância para a formação dos estudantes, tanto do ponto de vista didático, como também das questões históricas e científicas.

Todavia, apesar desse reconhecimento recente sobre o ensino de Geometria, parece não existir uma concordância entre os educadores matemáticos acerca dos conteúdos e conceitos geométricos a serem abordados na escola básica e nos cursos de formação de professores. Essa ausência de consenso abrange também sobre a forma como deve ocorrer essa abordagem e o seu tempo de duração em sala de aula (COSTA, 2016).

Carolino, Cury e Campos (2000) enfatizam que a Geometria tornou-se importante para pesquisadores e professores, pois a partir do estudo adequado dos seus conceitos, o aluno avança em seu pensamento geométrico. Para as autoras, esse pensamento possibilita que a criança desenvolva compreensão, descrição e representação da realidade na qual está inserida. Essas habilidades são mobilizadas em um espaço rico para se explorar situações-problemas.

É a partir da exploração de elementos ligados à realidade do aluno que as primeiras noções relativas aos elementos geométricos podem ser trabalhadas, incorporando-se sua experiência pessoal com os elementos do espaço e sua familiarização com as formas bi e tridimensionais, e interligando-as aos conhecimentos numéricos, métricos e algébricos que serão construídos (RÊGO; RÊGO; VIEIRA, 2012, p.13).

Para os autores, a criança ao realizar a exploração sobre as formas e os objetos do espaço no qual está introduzida, ela mobiliza um sistema conceitual para desenvolver tal processo. Ao utilizar esse sistema, o estudante estará pensando geometricamente.

Além dos aspectos de natureza institucional, mencionados em momento anterior, que colaboram para a omissão geométrica nas aulas de Matemática, é possível verificarmos que há elementos de outro âmago que tornam mais intenso esse cenário.

Conforme apontado por Câmara dos Santos (1992), existem outros fatores, mas de ordem epistemológica. Sobretudo, no que se refere ao lugar que a Geometria ocupa dentro da própria Matemática, bem como seu vínculo relacional com o mundo real identificado pelo estudante em sua existência cotidiana.

Nessa direção, considerando essa perspectiva epistemológica em torno do ensino da Geometria, concordamos que:

o ensino da geometria possui dificuldades específicas que a distinguem do ensino dos outros campos da Matemática, e que se devem, principalmente, ao lugar que ocupa na fronteira entre o sensível e o inteligível. Desse modo, a Geometria funcionaria, ora como um instrumento de compreensão da complexa realidade natural, ora como uma construção ideal cuja estética nos deixa mais perto das concepções platônicas⁷ (CÂMARA DOS SANTOS, 1992, p.57, tradução nossa).

Para Bkouche (1988), a diferenciação entre o mundo sensível e o mundo inteligível é produzida por meio da Geometria, de maneira particular. Logo, essa distinção é própria do conhecimento geométrico, não sendo verificado em outras áreas da Matemática.

Tendo por base uma visão platônica, sustentada por um ponto de vista idealizado do conhecimento matemático, o pesquisador compreende o ser humano como um engenheiro que produz, mas que, sobretudo, demole o muro que separa essas duas realidades (o sensível e o inteligível). Tal fato ocorre para atender a

⁷ l'enseignement de la géométrie présente des difficultés particulières que le différencient de l'enseignement des autres branches des mathématiques et qui sont dues, principalement, à la place qu'elle occupe à la frontière entre le sensible et l'intelligible. La géométrie fonctionnerait, ainsi, tantôt comme instrument de la compréhension de la réalité naturel complexe, tantôt comme construction idéale dont esthétique nous approche des conceptions platoniques (CÂMARA DOS SANTOS, 1992, p.37).

demanda característica do homem relacionada à compreensão da realidade em que se insere.

Nesse sentido, a complexidade referente às relações entre os objetos do mundo real, as informações oriundas dos atos de observar e de perceber e os objetos ideais, do mundo platônico, surgem de modo especial no campo geométrico (CÂMARA DOS SANTOS, 2001).

Conforme indica esse autor, com um papel prevaemente na evolução da história do conhecimento científico, a relação dialética entre a realidade sensível e realidade inteligível parece ser influenciado por uma polarização. Tal antagonismo deriva tanto por meio de um destaque da geometria do artesanato, como pela ênfase em um formalismo matemático, em uma perspectiva bourbarquiana.

A questão da fronteira entre o sensível e o inteligível se deve ao fato de os objetos geométricos serem criações mentais, abstratas, sendo que no mundo material aparecem inúmeras representações desses objetos. Por exemplo, um tijolo se assemelha a um paralelepípedo, mas não o é. O paralelepípedo é um objeto geométrico abstrato, ou seja, do mundo platônico.

Todavia, em geral, a pouca preocupação da escola em diferenciar o objeto de sua representação gera, muitas vezes, a geometria do artesanato, em que se acredita que manipulando elementos do mundo real, o aluno irá construir o conceito matemático.

Para Câmara dos Santos (2009, p.180-181), a relação dialética surge rigorosamente conectada às questões da Geometria de natureza didática:

de forma resumida, poderíamos colocar em evidência dois grandes posicionamentos do ensino da geometria, nos quais os objetos geométricos adquirem *status* essencialmente opostos. Assim, até a primeira metade do século XX, a concepção corrente da geometria é aquela de um instrumento de descrição do mundo real ou sensível. Os objetos geométricos são idealizados a partir de um substrato real. Os casos de congruência de triângulos, como proposto por Euclides nos seus *Elementos* são um exemplo bem característico, em que dois triângulos são congruentes se eles podem ser sobrepostos.

De acordo com o autor, com o Movimento da Matemática Moderna decorrente da década de 70, a Geometria passa a assumir uma nova função no sistema

educacional brasileiro, sendo considerada como um modelo teórico em Matemática, possível de ser aplicado de modo eventual em cenários reais.

Desse modo, os objetos em Geometria são entendidos como seres ideais, sujeitos a realizarem a descrição do mundo real. Os cenários didáticos encontram apoio no grafismo, o processo conceitual vai ser direcionado em torno da identificação das formas geométricas (CÂMARA DOS SANTOS, 1992).

Então, as figuras geométricas alteram seu status:

se durante as aprendizagens iniciais no período anterior ao Movimento da Matemática Moderna, as figuras geométricas tinham, principalmente, o status de significado, elas vão, a partir daí, assumir a posição de significantes, isto é, representações de objetos ideais. O pensamento geométrico dos estudantes será orientado para esses objetos ideais. Essas evoluções, portanto, induzem uma mudança nas propriedades das figuras, na qual seu aspecto descritivo dará origem a um novo status, o da proposição e da manipulação de teoremas⁸ (CÂMARA DOS SANTOS, 2001, p.3-4, tradução nossa).

Para tanto, os efeitos produzidos pelo Movimento da Matemática Moderna mostram, de modo bem claro, a forma como a Matemática é entendida e representada, sobretudo, acerca da representação sobre os objetos geométricos, que tanto alunos como professores produzem atualmente.

Como ilustração disso, isto é, com relação às representações sobre a Geometria influenciadas pela Matemática Moderna, Maia (2009) fez um estudo comparativo, por meio do qual identificou significados diversos entre professores de Matemática do Brasil e da França acerca da aplicabilidade da Matemática, em particular, do campo geométrico.

Segundo indicado pela autora, para os professores franceses, a Geometria é considerada como um conteúdo favorável à inserção do processo de dedução, em uma ótica que busca desenvolver a aprendizagem da demonstração em Matemática. Além disso, essa ação demanda um alto grau de abstração, impreterivelmente.

Enquanto que os professores brasileiros compreendem que a Geometria é um tópico de ensino que se localiza entre a Matemática de natureza concreta e a

⁸ Si lors des premiers apprentissages dans la période pré mathématiques modernes les figures géométriques avaient surtout le statut de signifié, elles vont, à partir de là, prendre la position de signifiantes, c'est-à-dire, de représentations des objets idéaux. La pensée géométrique des élèves va être orientée vers ces objets idéaux. Ces évolutions induisent, par conséquent, un changement du point de vue des propriétés des figures, où leur aspect descriptif va donner lieu à un nouveau statut, celui de la proposition des théorèmes (CÂMARA DOS SANTOS, 2001, p.3-4).

Matemática de âmago abstrato. Logo, o ensino desse campo deve promover situações, nas quais os estudantes sejam capazes de atravessar a ponte entre esses dois mundos matemáticos (MAIA, 2009).

Em nosso entendimento, essas representações sobre o campo geométrico são influenciadas por um elemento de ordem epistemológica, isto é, esses significados atribuídos à Geometria são marcados pela dialética entre mundo sensível e mundo inteligível.

Conforme Maia (2009), o ensino de Geometria ocupa dois status no Brasil. No primeiro, se situa no cerne dos estudos educacionais, enquanto que no segundo, é considerado um conteúdo a ser abordado no ensino básico.

No que se refere à Geometria presente em sala de aula, quando ensinada, essa pesquisadora aponta a existência de duas tendências: “uma geometria teórica, independente de uma modelização do espaço ou uma passagem não problematizada entre a geometria da observação e a geometria da demonstração” (p.38).

Para Maia (2009), essas considerações têm feito com que o ensino de Geometria seja apreciado com base em uma perspectiva platônica. Nessa compreensão, há um destaque na distinção entre os sentidos em Geometria atribuídos aos termos desenho e figura.

Desse modo, concordamos com a autora ao considerar que, sob um olhar platônico, a figura é um objeto ideal em Geometria, enquanto que o desenho é uma representação inacabada presente no concreto.

A figura é, assim, o objeto abstrato que serve de substrato para o raciocínio, para o pensamento. Enquanto tal pode ser identificada ao objeto da teoria. O desenho, por sua vez, é a materialização sobre uma folha de papel, uma tela do computador, etc. O desenho é um modelo da figura. A figura permite a determinação de propriedades, estabelecendo instrumentos de generalização, o desenho se refere ao objeto concreto que *figura* na folha de papel. Importante ressaltar que a passagem do desenho à figura pode ajudar a situar a geometria na fronteira do sensível e do inteligível, do concreto e do abstrato. Entretanto, é preciso estar atendo ao fato de que o desenho pode também ser um obstáculo à figura, pela atração perceptiva que ele oferece (MAIA, 2009, p.38-39).

Esse debate sinalizado pela autora, também defendido por Câmara dos Santos (1992; 2001; 2009), contribui para uma melhor análise da complexidade que

pode ser instaurada na classe em Matemática: geometria do sensível *versus* geometria do inteligível.

Essa lógica promove a discussão acerca da função das representações gráficas como intermediários susceptíveis de simplificar ou complicar o entendimento e o acesso dos objetos físicos para os objetos ideais, que são deveras de natureza geométrica. Assim, o aluno penetra na realidade efetivamente matemática (MAIA, 2009).

No tópico a seguir, discutiremos sobre o conceito matemático que é objeto de estudo em nossa tese, de modo específico. Apresentamos um breve debate sobre os quadriláteros notáveis.

2.2 Os quadriláteros

Conforme já indicam os documentos curriculares, a definição para o conceito quadriláteros é inicialmente apontada nos anos iniciais do ensino fundamental. No sexto ano ocorre a sistematização desse tópico e a partir do oitavo ano são propostas algumas demonstrações das suas propriedades. Nesse sentido, é aguardado que, no ensino médio, os alunos tenham domínio desse saber matemático.

Todavia, resultados de pesquisas educacionais (bem como nossa experiência enquanto professor de Matemática do ensino básico) têm mostrado que estudantes do ensino médio, e de anos anteriores, apresentam dificuldades conceituais de aprendizagem relacionadas aos quadriláteros. Tal fato também é verificado com relação aos estudantes de licenciatura em Matemática e com professores (formados) em exercício docente.

Entre essas dificuldades, podemos mencionar as referentes às situações de construção, classificação e estabelecimento de relações entre as propriedades dos quadriláteros notáveis. Por exemplo, um quadrado não é reconhecido como todo paralelogramo que é retângulo e losango ao mesmo tempo.

Talvez, a história da Matemática nos ajude a compreender o surgimento desses problemas conceituais referentes aos quadriláteros. Desse modo, o estudo

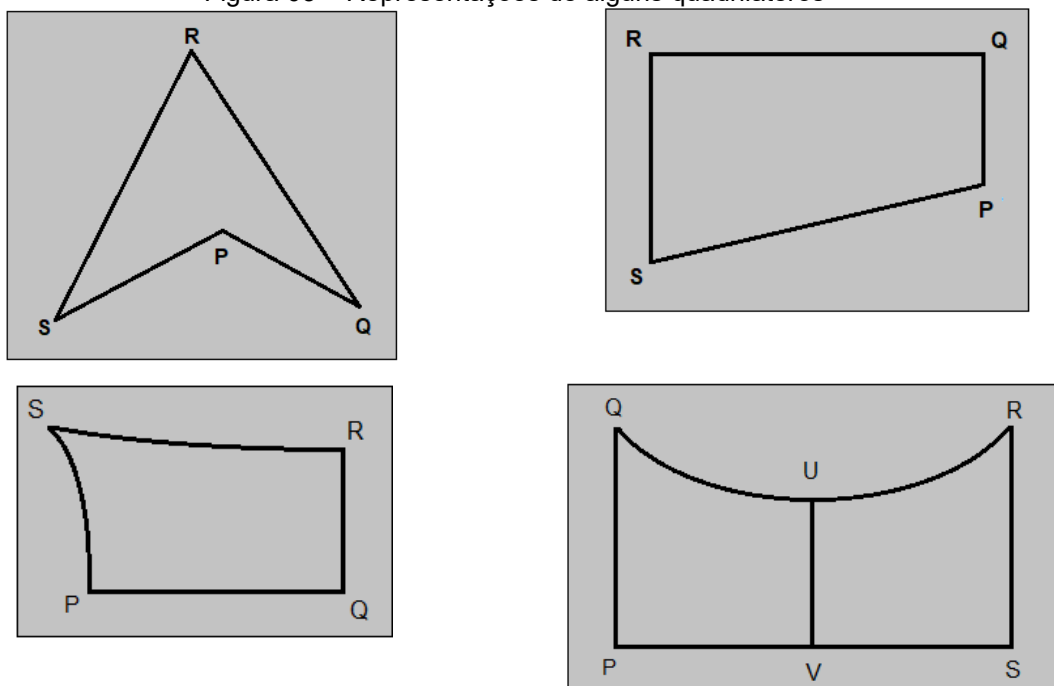
da evolução da definição desse conceito, ao longo da história, pode se tornar fundamental na busca de respostas às essas dificuldades.

Diante desse cenário, compete aqui oferecermos um momento para mostrarmos algumas definições sobre os quadriláteros notáveis, apresentadas ao longo da história por alguns estudiosos em Matemática. Assim, será possível verificarmos as principais alterações submetidas à definição do mencionado conceito geométrico.

Mas antes de se discutir especificamente sobre os quadriláteros notáveis, apresentamos uma breve exposição referente aos quadriláteros, que também inclui os não notáveis e os não euclidianos. Afinal, o que são quadriláteros?

Consideremos quatro pontos aleatórios em um plano ou uma superfície (hiperbólica ou elíptica), tais como P , Q , R , S , de modo que três quaisquer deles não façam parte de uma mesma reta. Então, a coleção de pontos pertencentes aos segmentos de reta PQ , QR , RS e SP , ou então a porção do plano ou da superfície composta por todos esses segmentos de reta, nominamos de quadrilátero $PQRS$. A Figura 03 apresenta alguns exemplos de representações de quadriláteros.

Figura 03 – Representações de alguns quadriláteros



Fonte: elaborado pelo autor

Na Geometria, podemos verificar a existência de duas naturezas de quadriláteros, a dos quadriláteros euclidianos e a dos quadriláteros não euclidianos. Os euclidianos são formados pelos notáveis e pelos não notáveis, enquanto que os não euclidianos são compostos pelos quadriláteros hiperbólicos e pelos quadriláteros elípticos.

Desse modo, na Figura 03, os quadriláteros situados na parte superior são do grupo dos euclidianos, já os localizados na parte inferior são da família dos não euclidianos. A principal diferença entre esses dois tipos de quadriláteros, é que os primeiros existem em um plano euclidiano, e os demais se encontram em superfícies, hiperbólica ou elíptica, isto é, em espaços geométricos não euclidianos.

No grupo dos quadriláteros euclidianos, os notáveis são constituídos pelos trapézios e pelos paralelogramos. Por sua vez, os não notáveis são representados pelos quadriláteros não convexos⁹ e pelos trapezoides¹⁰.

Assim, na Figura 03, o quadrilátero do lado esquerdo superior é um quadrilátero euclidiano não notável, pois ele é não convexo. O localizado no lado direito superior é um trapézio, logo, é um quadrilátero euclidiano notável. Na parte inferior, o do lado esquerdo é um quadrilátero hiperbólico e do lado direito é um elíptico, portanto, esses dois últimos são quadriláteros não euclidianos.

Os quadriláteros euclidianos possuem algumas propriedades e características, entre elas, mencionamos: a soma das medidas da abertura dos ângulos internos é igual a 360° ; apresentam apenas duas diagonais, quatro vértices, quatro ângulos internos e quatro lados. Com relação aos não euclidianos, a soma dos ângulos internos pode ser maior ou menor do que 360° , possuem quatro ângulos internos, quatro lados, etc.

A seguir, apresentamos uma discussão mais pontual sobre os quadriláteros não euclidianos e sobre os quadriláteros euclidianos notáveis.

2.2.1 Os quadriláteros não euclidianos

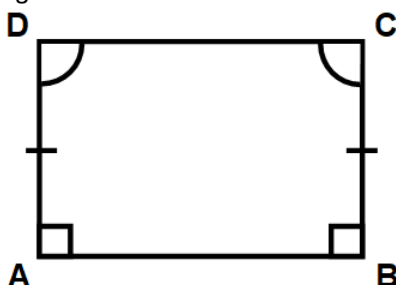
⁹ Em um quadrilátero não convexo há um ângulo, no qual a medida de sua abertura é maior que 180° . As suas diagonais não se encontram em nenhum ponto, sendo que uma delas possui pontos, incluídos no segmento de reta que as formam, fora da região interna.

¹⁰ O trapezoide consiste em um quadrilátero sem lados opostos paralelos. Suas diagonais se encontram em único ponto na região interna.

Os estudos sobre os quadriláteros não euclidianos iniciaram por Giovanni Girolamo Saccheri (1667-1733) e Johann Heinrich Lambert (1728-1777), a partir das tentativas de provas do quinto postulado¹¹ de Euclides. Esses matemáticos são considerados os pioneiros das geometrias não euclidianas.

Conforme apontado por Ribeiro (2012), Saccheri produziu um quadrilátero com dois lados opostos congruentes e perpendiculares com relação à base, como ilustrado na Figura 04.

Figura 04 – Quadrilátero de Saccheri



Fonte: elaborado pelo autor

Saccheri demonstrou que se os demais ângulos do quadrilátero também fossem retos, logo, seria válido o exposto do quinto postulado de Euclides. Desse modo, só seria necessário construir uma prova de que tais ângulos eram realmente retos.

Com rapidez, é factível considerar que os outros dois ângulos do quadrilátero proposto por Saccheri possuem a mesma medida de abertura, logo, são congruentes. Nesse caso, falta somente verificar qual é a medida de um desses ângulos.

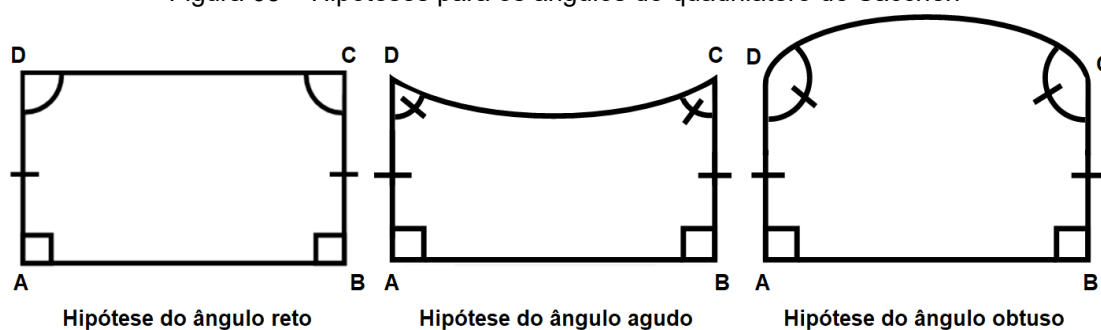
Ao construir as diagonais do quadrilátero e ao aplicar as propriedades de congruência, o matemático constatou que os dois ângulos são congruentes e, nessa direção, propôs três hipóteses relacionadas às características desses ângulos. Ou eles são retos, ou agudos ou obtusos, conforme ilustrado na Figura 05.

Em seguida, Saccheri subtraiu as hipóteses de que os ângulos são obtusos ou agudos, produzindo várias provas que se tornaram, mais tarde, importantes

¹¹ De acordo com esse postulado, por um ponto exterior a uma reta dada (ambos no mesmo plano), existe uma única reta paralela à reta dada.

teoremas vinculados às geometrias não euclidianas. Por fim, esse matemático chegou a três importantes conclusões.

Figura 05 – Hipóteses para os ângulos do quadrilátero de Saccheri

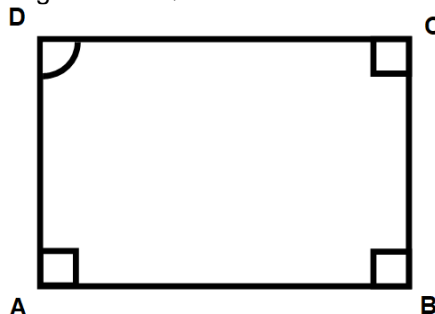


Fonte: elaborado pelo autor

A primeira informa que se uma hipótese é válida para o seu quadrilátero, desse modo, ela é válida para os demais quadriláteros. A segunda indica que a soma das medidas das aberturas dos dois ângulos pode ser maior, menor ou igual a 180° . A terceira sinaliza que dadas duas retas coplanares, ou apresentam uma reta comum perpendicular, ou são assintóticas, ou se encontram em um ponto (VALÉRIA COSTA, 2016).

Do mesmo modo que Saccheri, Lambert fez um estudo para provar o quinto postulado de Euclides a partir de uma argumentação indireta. Para isso, ele propôs um quadrilátero formado por três ângulos retos, que foi denominado de quadrilátero de Lambert, como ilustrado pela Figura 06.

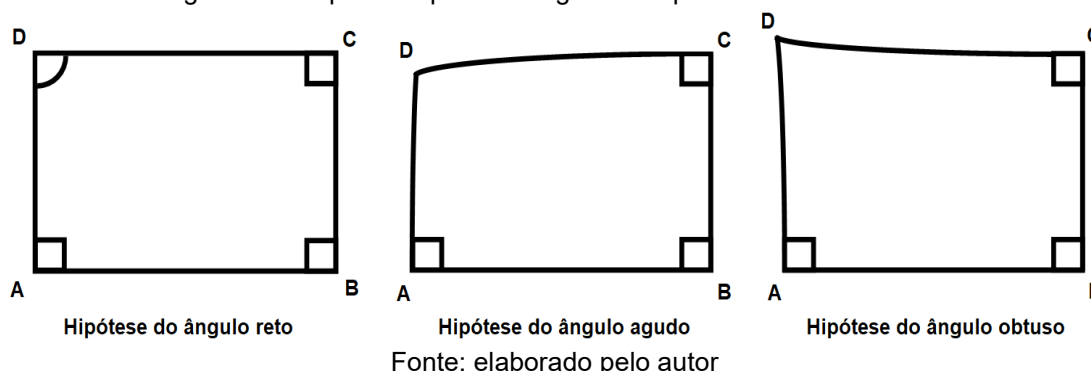
Figura 06 – Quadrilátero de Lambert



Fonte: elaborado pelo autor

Nessa direção, Lambert lançou três hipóteses para o quarto ângulo: ele pode ser reto (primeira hipótese), ou agudo (segunda hipótese) ou obtuso (terceira hipótese), como apresentado pela Figura 07.

Figura 07 – Hipóteses para os ângulos do quadrilátero de Lambert



A primeira hipótese de Lambert abrange o campo geométrico de natureza euclidiana. Esse matemático abandonou a sugestão do ângulo ser obtuso, semelhante ao que fez Saccheri. Para isso, ele apresentou que dada uma reta, duas outras retas perpendiculares à primeira, então, essas duas possuem um ponto de intersecção (GOMES, 2017).

Contudo, essa demonstração não provoca nenhum absurdo. Se existisse verdade na hipótese do ângulo obtuso, nesse sentido, as propriedades das figuras seriam curvadas sobre uma superfície esférica. Logo, as linhas retas se tornariam circunferências máximas (EDUARDO, 2013).

Porém, tendo em vista que as circunferências máximas¹² se cruzam em mais de um ponto, eles não apresentam as mesmas características das linhas retas. Tal fato possibilita, desse modo, que a hipótese do ângulo obtuso seja desprezada.

Além disso, em sua tentativa em mostrar a hipótese do ângulo agudo, Lambert não encontrou um absurdo. Então, ele considerou que se as sugestões do ângulo (agudo e obtuso) são verdadeiras, portanto, o excesso ou a falta sobre 180° , relacionados à soma dos ângulos internos de um triângulo, serão proporcionais à área desse mesmo triângulo (RIBEIRO, 2012).

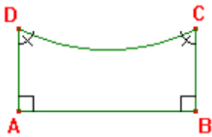
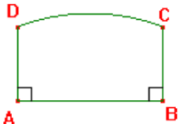
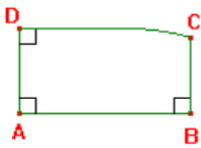
Considerando o quadrilátero com o ângulo agudo, relacionado à terceira hipótese, Lambert afirmou que a área do quadrilátero será maior à medida que o ângulo se torne mais agudo. Esse entendimento possibilitou o matemático concluir que a soma das medidas da abertura dos ângulos internos de um triângulo qualquer pode ter um valor menor que 180° (GOMES, 2017).

¹² As circunferências máximas são as circunferências de maior raio contidas na superfície esférica.

Como sinalizado por Eduardo (2013), Lambert evidenciou que a hipótese do ângulo agudo era verdadeira para superfícies esféricas de raio imaginário. Também percebeu que a hipótese do ângulo obtuso é válida para triângulos esféricos.

Em seu estudo, Cruz e Santos (2009) indicam as principais características dos quadriláteros de Saccheri e Lambert, com base no tipo de superfície, na qual eles estão situados. O Quadro 01 apresenta tais características.

Quadro 01 – Características dos quadriláteros de Saccheri e Lambert

	SUPERFÍCIE HIPERBÓLICA	SUPERFÍCIE ELÍPTICA
QUADRILÁTERO DE SACCHERI	Possui dois ângulos retos e dois lados congruentes. Na figura abaixo, AB é o lado base e DC é chamado lado topo do quadrilátero. Os lados AD e BC são congruentes. Os $\angle A$ e $\angle B$ são retos e os ângulos $\angle D$ e $\angle C$ não são retos, são congruentes e agudos. 	Possui os ângulos do topo, $\angle D$ e $\angle C$, congruentes e obtusos. Os ângulos, $\angle A$ e $\angle B$, do lado base, são retos. 
QUADRILÁTERO DE LAMBERT	Possui o quarto ângulo agudo. Assim, o lado BC vertical adjacente ao ângulo agudo é maior que seu lado oposto AD. 	Possui o quarto ângulo, no caso da figura à direita, o $\angle C$, obtuso. Os lados do quadrilátero, adjacentes a este ângulo, são maiores que seus correspondentes opostos. Na figura em questão, são eles: BC menor que AD e DC maior que AB. 

Fonte: Cruz e Santos (2009, p.17-18).

Os estudos de Saccheri e de Lambert foram de grande importância para a ruptura com o modelo geométrico euclidiano, possibilitando, assim, o surgimento das geometrias não euclidianas. A vivência com diferentes geometrias favorece o desenvolvimento do pensamento geométrico avançado, conforme sinalizado por Leivas (2009).

No tópico a seguir, dedicamos um espaço para discussão sobre os quadriláteros euclidianos notáveis.

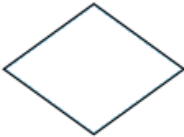
2.2.2 Os quadriláteros notáveis

Como discutido anteriormente, os quadriláteros notáveis são formados pelos paralelogramos (que também incluem o losango, o retângulo e o quadrado) e pelos trapézios. Em decorrência do desenvolvimento da própria Matemática, a definição desses quadriláteros foi passando por mudanças ao longo da história humana.

Conforme sinalizado por Bongiovanni (2004), são três as principais definições encontradas na literatura para os quadriláteros notáveis. Tais definições são diversas, que em conformidade com o tipo de classificação aplicada, admitem diferentes relações entre si.

No livro I de *Os elementos*, em especial, a definição 19, o grego Euclides de Alexandria considera que toda figura composta por quatro linhas constitui uma figura quadrilátera. Na definição 22, posteriormente, ele expõe atributos aos quadriláteros notáveis, segundo o Quadro 02.

Quadro 02 – Quadriláteros notáveis segundo Euclides

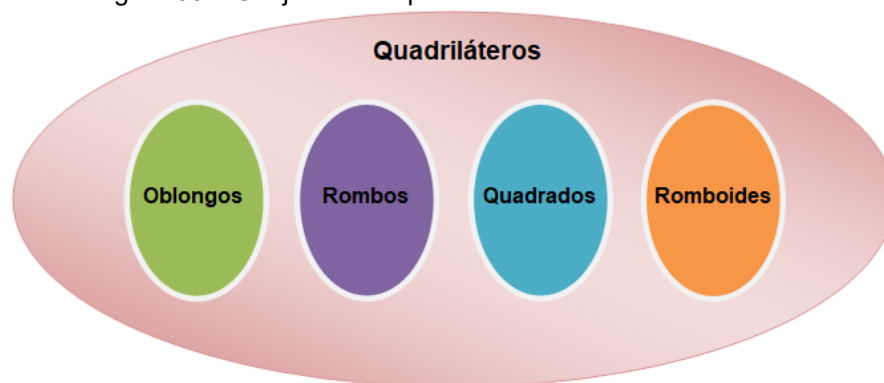
QUADRILÁTERO NOTÁVEL	DESCRIÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS	REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA
Quadrado	É uma figura quadrilátera de quatro lados iguais com ângulos retos	
Oblongo	É uma figura quadrilátera com ângulos retos, mas que não tem quatro lados iguais	
Rombo	É uma figura quadrilátera com quatro lados iguais, mas não com ângulos retos.	
Romboide	É uma figura quadrilátera que tem lados e ângulos opostos iguais entre si, mas não tem quatro lados iguais nem ângulos retos.	

Fonte: Bongiovanni (2004, p.30)

Com base nessa caracterização, percebemos que o oblongo proposto por Euclides é um caso específico do quadrilátero notável atualmente chamado retângulo. Nessa mesma linha de entendimento, o rombo é o atual losango e o rombóide é o que consideramos recentemente como paralelogramo oblíquo.

Concordamos com Ferreira (2016), ao considerar que, nessa definição de Euclides para os quadriláteros notáveis, o conjunto estabelecido por cada classe é disjunto, como ilustrado a seguir pela Figura 08.

Figura 08 – Conjunto dos quadriláteros sob a ótica de Euclides



Fonte: elaborado pelo autor e baseado em Bongiovanni (2004).

Segundo Bongiovanni (2004), depois de Euclides, outros matemáticos propuseram definições diversas aos quadriláteros notáveis. O primeiro deles foi o francês Adrien-Marie Legendre, que em 1793, ao publicar o livro *Elementos de Geometria*, sugeriu uma geometria com menos intuição e com mais rigor.

Legendre caracterizou os quadriláteros notáveis da seguinte forma:

- quadrado – possui seus lados iguais e ângulos internos retos;
- retângulo – possui ângulos retos sem ter os lados iguais;
- losango – possui os lados iguais sem que os ângulos internos sejam retos;
- paralelogramo – possui os lados opostos paralelos.

Nessa definição apresentada por Legendre, podemos verificar mudanças importantes em relação à definição apontada por Euclides. Por exemplo, o rombo e o oblongo passam a ser chamados de losango e retângulo, simultaneamente. Ainda, o nome do romboide é substituído pelo paralelogramo, contudo, ocorre um avanço do conceito, pois passa a apresentar lados opostos paralelos.

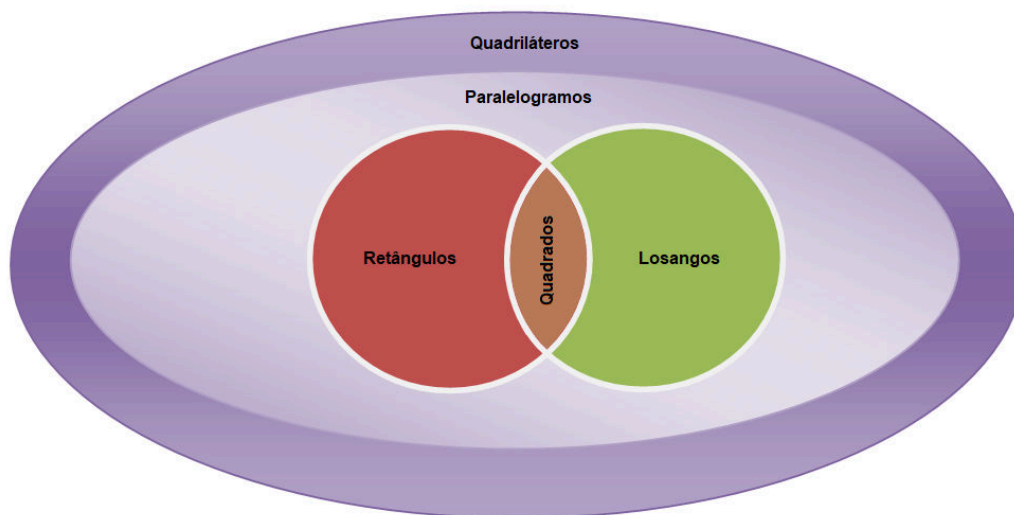
Como pontuado por Bongiovanni (2004), essa mudança na definição possibilita que os losangos, os retângulos e os quadrados sejam ainda considerados como paralelogramos. Todavia, o quadrado não é classificado como losango e nem como retângulo.

Pouco mais de um século depois, em 1898, o francês Jacques Salomon Hadamard apresenta uma caracterização mais ampla para os quadriláteros notáveis:

- quadrado – é um quadrilátero que tem todos ângulos internos iguais e todos os lados iguais;
- retângulo – é um quadrilátero que tem todos os ângulos iguais, logo, são ditos retos;
- losango – é um quadrilátero que apresenta todos lados iguais entre si;
- paralelogramo – é um quadrilátero que possui os quatro lados paralelos dois a dois.

Com base na definição de Hadamard, podemos observar que ocorreu a supressão das limitações colocadas aos losangos e aos retângulos. Dessa maneira, qualquer quadrado pode ser classificado como retângulo e losango. Além disso, o quadrado, o retângulo e o losango podem ser considerados paralelogramos, como ilustrado a seguir pela Figura 09.

Figura 09 – Conjunto dos quadriláteros sob a ótica de Hadamard



Fonte: elaborado pelo autor e baseado em Bongiovanni (2004).

Essa versão é a mais aceita atualmente, sendo abordada nos livros didáticos de Matemática do Brasil. Além disso, Bongiovanni (2004, p.31) destaca que:

é importante observar que o processo que permitiu evoluir para as definições modernas de Hadamard levou muitos anos. Durante séculos, a obra de Euclides serviu de modelo para o ensino da geometria e cada novo

autor de manual de geometria respeitava a divisão dos conteúdos da obra de Euclides, bem como as definições e proposições.

Além dessas três versões de definição para os quadriláteros notáveis, anunciadas por Bongiovanni (2004), encontramos outras duas definições, datadas do século XX. Todavia, elas foram construídas, de certo modo, baseadas em Hadamard.

O norte-americano Edwin M. Hemmerling publicou o livro *Geometria Elementar* em 1971, no qual caracteriza os quadriláteros notáveis do seguinte modo:

- quadrilátero: todo polígono que possui quatro lados;
- paralelogramo – é um quadrilátero que tem os pares de lados opostos paralelos;
- losango – é um paralelogramo equilátero;
- retângulo – é um paralelogramo que possui um ângulo reto;
- quadrado – é um retângulo equilátero.

Nessa definição sugerida por Hemmerling, o quadrado, o retângulo e o losango são considerados paralelogramos. O quadrado é classificado como retângulo, todavia, esse matemático não deixou claro se o quadrado também é um caso particular de losango.

O brasileiro João Lucas Marques Barbosa publicou em 1985 o livro intitulado *Geometria Euclidiana Plana*, no qual caracteriza os quadriláteros notáveis. Para esse matemático:

- paralelogramo – quadrilátero cujos lados opostos são paralelos;
- retângulo – quadrilátero cujos ângulos internos são retos;
- losango – paralelogramo que possui todos os seus lados congruentes;
- quadrado – é um retângulo que também é um losango.

Essa definição proposta por Barbosa (2006) é bem similar a de Hadamard, que classifica retângulos, losangos e quadrados como paralelogramos. Os quadrados são considerados retângulos e losangos, ao mesmo tempo.

Com relação ao ensino dos quadriláteros notáveis, os resultados de pesquisas em Educação Matemática, assim como nossa experiência docente na educação básica, têm mostrado que a maioria dos estudantes possui compreensão

sobre esse conceito geométrico bastante congruente com as definições de Euclides e Legendre.

Em geral, verificamos que os quadrados não são considerados losangos e retângulos, simultaneamente. Ou então, nenhum deles é classificado como paralelogramos. Desse modo, como sinalizado por Bongiovanni (2004), cada tipo de quadrilátero é reconhecido como um grupo diferente de objeto em Matemática.

Esse autor ainda recomenda que:

compete a nós, professores de Matemática, a tarefa de acolher o saber trazido pelos alunos [...] e de fazê-los progredir lentamente para uma concepção mais ampla, como a de Hadamard, generalizando proposições relacionadas com quadriláteros (BONGIOVANNI, 2004, p.31-32).

Com relação à definição de trapézio, também não há consenso entre autores de livros didáticos e professores de Matemática. Em concordância com Bongiovanni (2010) e Ferreira (2016), duas definições são evidenciadas:

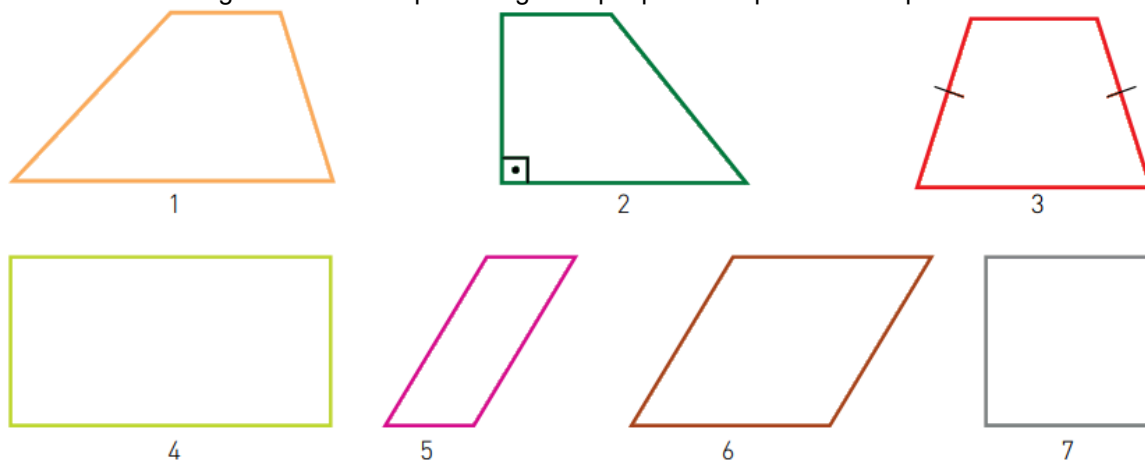
- trapézio – é um quadrilátero com um par de lados paralelos (equivalentemente, pode ser considerado um quadrilátero que tem dois lados paralelos);
- trapézio – é um quadrilátero que apresenta unicamente um par de lados opostos paralelos.

A primeira definição possibilita que os pares de lados opostos sejam paralelos, dessa forma, viabiliza que um paralelogramo seja considerado um trapézio. Essa compreensão gera incertezas em estudantes e professores de Matemática, em decorrência do realce dado às representações figurais diante às propriedades do objeto matemático (FERREIRA, 2016).

De acordo com Bongiovanni (2010), essa definição permite que sete tipos de figuras possam representar trapézios, conforme ilustrado a seguir na Figura 10.

Considerando a segunda definição, as figuras 4, 5, 6 e 7 são excluídas, pois não satisfazem tal proposição. Logo, nessa perspectiva, os trapézios podem ser representados por três tipos de figuras, que no caso ilustrado na figura a seguir, são as figuras 1, 2 e 3.

Figura 10 – Sete tipos de figuras que podem representar trapézios



Fonte: Bongiovanni (2010, p.9)

Acerca do tipo de abordagem a ser realizada para o conceito de trapézio, Ferreira (2016, p. 106) destaca que:

ao depender da definição de trapézio adotada, é necessário haver coerência com as demais definições adotadas e propriedades enunciadas. Um caso que pode gerar incoerência é a definição de trapézio isósceles e de suas propriedades enunciadas. Ao definir este tipo de trapézio como sendo aquele que apresenta dois lados congruentes, não podemos assumir que os ângulos de suas bases e suas diagonais sejam congruentes, uma vez que o paralelogramo seria um trapézio isósceles que não satisfaz tais propriedades.

Buscando evitar essa incoerência, Bongiovanni (2010) sugeriu a seguinte definição para o trapézio isósceles: *é um trapézio que possui apenas um par de lados opostos congruentes* (ou então que possui exatamente um eixo de simetria).

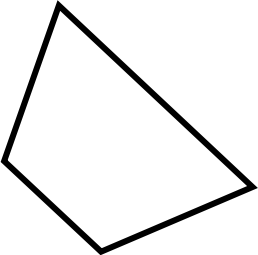
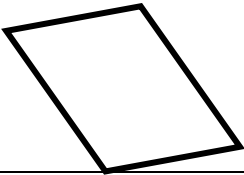
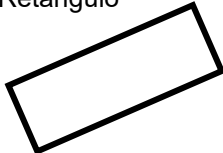
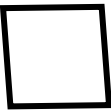
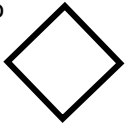
Em nosso entendimento, essa perspectiva é um pouco ampla, pois não deixa claro que os lados opostos congruentes mencionados em tal definição não são paralelos. Talvez, uma definição mais adequada seria: *Trapézio isósceles é um trapézio que possui um único par de lados, não paralelos, opostos e congruentes*.

Além disso, é importante mencionar qual é a definição que consideraremos nessa tese para os quadriláteros notáveis. O Quadro 03 apresenta nossa compreensão sobre esse conceito geométrico.

Pelo Quadro 03, é possível verificarmos que a definição utilizada nessa tese é baseada na compreensão de Hadamard, na qual há duas classes nos quadriláteros notáveis: os trapézios e os paralelogramos (que também inclui os quadrados, os

losangos e os retângulos). Ainda, o quadrado é um retângulo e losango, de modo simultâneo. Essa caracterização encontra-se ilustrada na Figura 11.

Quadro 03 – Caracterização dos quadriláteros notáveis considerada na tese

QUADRILÁTEROS	DEFINIÇÃO	PROPRIEDADES
Trapézio 	É um quadrilátero notável que possui exatamente um único par de lados opostos paralelos. Esses lados são chamados comumente de bases do trapézio.	Os ângulos internos adjacentes a um mesmo lado transversal são suplementares. São classificados em três tipos: - trapézio escaleno: os lados opostos, não paralelos, não são congruentes; - trapézio isósceles: os lados opostos, não paralelos, são congruentes; - trapézio retângulo: possui dois ângulos internos congruentes retos. Os trapézios isósceles apresentam diagonais congruentes.
Paralelogramo 	É um quadrilátero notável que apresenta os dois pares de lados opostos paralelos entre si.	Os lados opostos são congruentes. Os ângulos internos opostos são congruentes. Dois ângulos internos adjacentes quaisquer são suplementares. As diagonais se cortam ao meio, em seus respectivos pontos médios.
Retângulo 	É um paralelogramo que tem ângulos internos retos.	As diagonais dos retângulos são congruentes.
Losango 	É um paralelogramo que possui todos os lados congruentes.	As diagonais são perpendiculares entre si, e estão localizadas nas bissetrizes dos ângulos internos.
Quadrado 	É um paralelogramo que é retângulo e losango ao mesmo tempo.	As diagonais são congruentes entre si, perpendiculares e ainda são as bissetrizes dos ângulos internos.

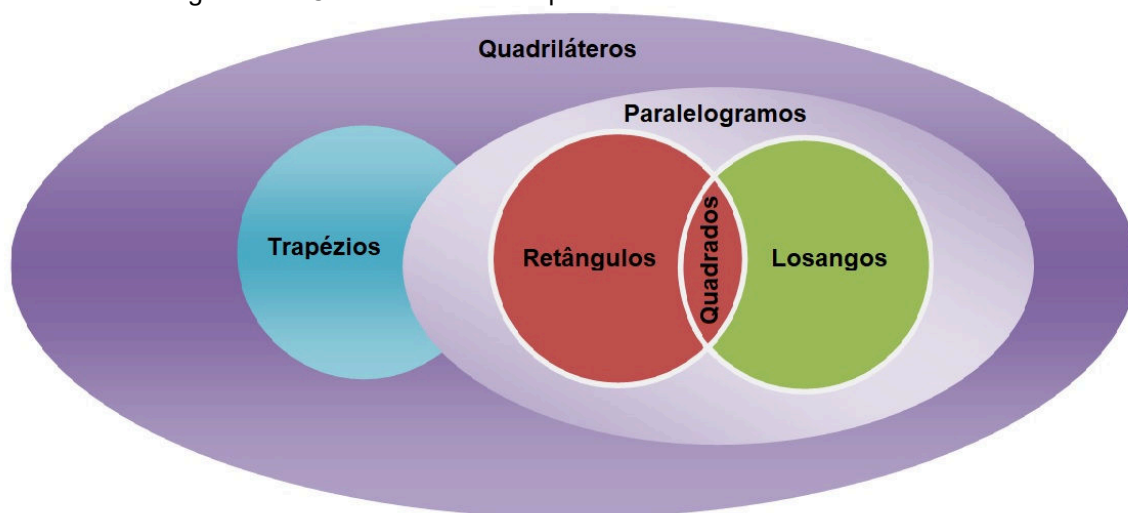
Fonte: elaborado pelo autor

Concordamos com Ferreira (2016) ao indicar que as características apresentadas por Bongiovanni (2004; 2010) aos quadriláteros notáveis indicam a forma pela qual esse conceito possibilita explorar os encadeamentos de uma visão desacertada acerca de uma definição.

Além de que, matematicamente, o ensino dos quadriláteros propicia a abordagem de uma quantidade relevante de propriedades em Geometria, aplicadas,

em especial, à solução de problemas matemáticos. Por meio do uso de instrumentos geométricos, o estudo desse conceito geométrico facilita a construção de hipóteses, mobilização de teoremas, provas e demonstrações.

Figura 11 – Conexões entre os quadriláteros consideradas nessa tese



Fonte: elaborado pelo autor

Os quadriláteros notáveis constituem um conceito em Geometria que permite o estudante realizar transformações cognitivas importantes ao desenvolvimento do pensamento geométrico, tais como a identificação, a conversão e o tratamento, conforme pressupostos teóricos defendidos por Duval (1995).

Para tanto, os quadriláteros notáveis constituem o objeto em Matemática adequado para a construção do modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico, proposto nessa tese.

No tópico a seguir, discutiremos sobre as situações didáticas verificadas em livros didáticos de Matemática, que dão sentido ao conceito de quadriláteros notáveis.

2.3 Situações que dão sentido aos quadriláteros notáveis

Para a proposição da tipologia de situações que dão sentido aos quadriláteros notáveis, utilizamos como aporte teórico a Teoria dos Campos Conceituais, desenvolvida por Vergnaud (1986) e seus seguidores. Segundo esse autor, o

conhecimento matemático é formado a partir de campos conceituais, compreendidos como conjuntos de situações.

Nessa direção, o conceito de quadriláteros notáveis, de modo pragmático, pode ser compreendido por um conjunto composto de três elementos que não podem se dissociar:

S: conjunto das situações que dão sentido ao conceito (a referência);

I: conjunto dos invariantes operatórios, isto é, as propriedades do conceito, que não sofrem variações ao longo das situações (significado);

R: conjunto das representações simbólicas do conceito (significante).

Acerca da indissociabilidade desses três elementos, Borba (2009, p.61) destaca que:

embora estas definições sejam intrinsecamente mescladas, para efeito de análise de conceitos e de organização do ensino dos mesmos, pode-se separar cada uma das dimensões e observar o seu efeito isolado, quando as outras duas se mantêm constantes. Este isolamento das dimensões permite o professor identificar quais aspectos das três dimensões se desenvolvem mais facilmente por parte dos alunos.

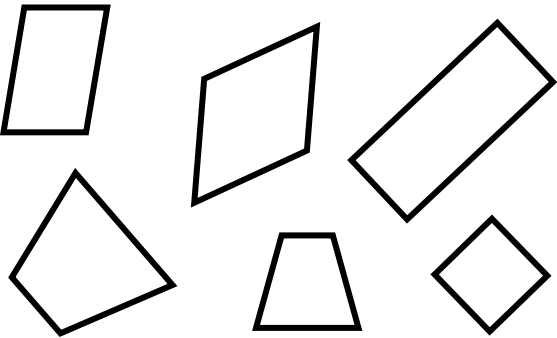
Desse modo, no levantamento das situações que dão sentido ao conceito de quadriláteros notáveis, não discutiremos sobre os invariantes operatórios e as representações simbólicas, pois não é objetivo de nossa pesquisa. A descrição apenas das situações se justifica, pois, o modelo que propomos nessa tese refere-se à abordagem dos quadriláteros em dois cenários: produção e classificação.

É importante destacar que o conceito de quadriláteros notáveis pode ser entendido como um elemento do campo conceitual da Geometria. Além disso, outros componentes fazem parte desse campo, tais como os conceitos de ângulo, segmento de reta, pontos, triângulos, congruência, circunferência, etc. Ainda, podemos observar articulação com outros campos conceituais (Grandezas e Medidas, Álgebra, Números, etc.).

Aqui, as situações que dão sentido ao conceito de quadriláteros notáveis são propostas a partir das tarefas presentes em livros didáticos de Matemática, sobretudo, no capítulo destinado ao mencionado conceito.

Dito de outra forma, são situações didáticas geralmente encontradas em livros didáticos. Logo, essas situações foram classificadas em três principais tipos: classificação, construção e inclusão.

Na situação de classificação ou identificação, o estudante reconhece/identifica o quadrilátero notável a partir da sua representação geométrica no plano. Por exemplo:

Observe os quadriláteros e responda: a) Algum deles é quadrado? Qual? b) Algum deles é trapézio? Qual? c) Algum deles é losango? Qual? d) Algum deles é paralelogramo? Qual?	
Atividade voltada para alunos do 6º do ensino fundamental	
Fonte: elaborado pelo autor	

Na situação de construção, é solicitada ao aluno a construção do quadrilátero notável por meio da sua representação geométrica. Por exemplo:

Construa um paralelogramo, sabendo-se que o seu perímetro mede 21 cm.	Crie o segmento de reta TC. Em seguida, construa o quadrado TOCA, de forma que TC seja sua diagonal.
Atividades voltadas para alunos do 8º do ensino fundamental	
Fonte: elaborado pelo autor	

Na situação de inclusão, para resolver o problema proposto, o discente deve estabelecer relações entre as propriedades dos quadriláteros notáveis. Por exemplo:

Indique uma característica do quadrado que o retângulo também possui. Indique ainda uma característica do quadrado que o retângulo, geralmente, não tem. O que se pode concluir diante disso?
Atividades voltadas para alunos do 6º do ensino fundamental
Fonte: adaptado de Imenes e Lellis (2014).

Segundo Vergnaud (1986), é importante em sala de aula, o professor explorar essas situações de forma diversificada, isto é, não enfatizar apenas uma única situação, em detrimento das demais. Tal fato contribuirá com o processo de conceitualização pelos estudantes.

Além disso, o uso das situações que dão sentido ao conceito de quadriláteros notáveis na organização de tarefas possibilita uma melhor compreensão das produções dos alunos, pois, em decorrência da tipologia proposta, é viável enfatizar e distinguir cada tipo de tarefa explorada. Essa opção contribui para um maior esclarecimento dos saberes e das estratégias que os discentes utilizam na resolução de problemas.

2.4 Algumas considerações

Neste capítulo, verificamos que, apesar de todos os avanços nas pesquisas educacionais, o fenômeno da omissão geométrica ainda continua afetando as aulas de Matemática, tanto no ensino básico como nos cursos de formação de professores.

Essa omissão é influenciada pelo Movimento da Matemática Moderna, que propôs algebrizar o ensino da Geometria, a partir do formalismo e do rigor matemático. Além disso, fatores epistemológicos contribuem para esse quadro, especificamente, a relação dialética entre geometria do mundo sensível e a do mundo inteligível.

Ao longo da história humana, percebemos que os quadriláteros notáveis constituem um conceito em constante transformação e desenvolvimento. Algumas dificuldades conceituais de aprendizagem apresentadas por estudantes de diferentes níveis escolares possuem proximidades com as definições propostas por Euclides e Legendre, tais como não considerar o quadrado como retângulo e losango ao mesmo tempo.

Por fim, destacamos a importância do professor ao utilizar o livro didático de Matemática em sala de aula, abordar os quadriláteros notáveis a partir de diferentes situações didáticas que dão sentido a esse conceito. Assim, o estudante terá mais condições de obter sucesso no processo de conceitualização em Matemática.

3 PENSAMENTO GEOMÉTRICO: EM BUSCA DE UMA DEFINIÇÃO

Ao realizarmos um mapeamento sobre as pesquisas desenvolvidas no campo da educação geométrica, evidenciamos que diferentes autores (LABORDE, 1985; BISHOP, 1989; DELGRANDE, 1990; GUTIERREZ, 1991; PASTOR, 1993; MICHOUX, 2008; BLANCO, 2014; etc.) falam sobre pensamento geométrico. Embora exista uma concordância sobre a relevância de promover o desenvolvimento desse pensamento nos discentes do ensino básico, esses estudos não apresentam uma definição clara para esse termo, perdurando uma falta de consenso acerca do significado dessa instância do pensamento matemático.

Talvez, a falta de concordância sobre a caracterização do pensamento geométrico esteja fortemente ligada à própria natureza evolutiva da Geometria, ao grande número de objetos geométricos referentes ao seu campo conceitual, à mobilização de diferentes experimentos matemáticos e, ainda, pelas diferentes maneiras prováveis de considerar o pensamento em geral (ALMEIDA, 2016).

Perante essas circunstâncias, faz-se necessário, portanto, construir uma caracterização do pensamento geométrico que dialogue com o objetivo de nosso estudo, empregando como parâmetro pesquisas de alguns educadores matemáticos que mergulharam (e ainda mergulham) a investigar o assunto.

Fischbein (1993) tratou com muito cuidado sobre o processo de formação do pensamento geométrico, ao introduzir a noção de conceito figural. Na Geometria os conceitos dependem da fusão do aspecto figural e aspecto conceitual, isto é, o principal argumento do autor é que a Geometria pode ser compreendida a partir de entidades mentais (as chamadas figuras geométricas), que possuem ao mesmo tempo características conceituais e figurativas. Então, o pensamento geométrico é caracterizado pela interação entre esses dois aspectos.

Outro nome importante é Duval (1995), ao fornecer uma importante análise do pensamento geométrico ao apresentar a ideia de registros de representação semiótica, que são característicos da Geometria. Segundo o pesquisador, o aspecto crucial à compreensão geométrica é a diferenciação do objeto geométrico de sua representação. Os objetos geométricos são idealizações, construções mentais, enquanto que as figuras geométricas são representações desses objetos. Todavia, são essas representações que possibilitam o acesso aos objetos da Geometria.

É bastante evidente a proximidade entre as ideias de Fischbein (1993) e de Duval (1995), principalmente ao destacarem a importância das figuras geométricas na aprendizagem dos conceitos em Geometria, seja como entidades mentais na visão do primeiro autor, seja como representações semióticas, na ótica do segundo pesquisador.

Assim como Fischbein (1993), Luiz Carlos Pais (1996) também investigou sobre como ocorre a formação do pensamento geométrico. O autor brasileiro analisou as implicações do uso de desenhos, objetos materiais e de imagens mentais como recursos didáticos auxiliares e representativos do processo de produção dos conceitos geométricos, além do reconhecimento da presença de uma provável conexão desses componentes com as dimensões intuitiva, experimental e teórica do conhecimento geométrico.

Gravina (2001), uma educadora matemática que se dedica a pesquisar o tema, buscou realizar uma diferenciação entre o pensamento geométrico de natureza empírica e o de origem hipotético-dedutiva. Para a autora, por pensamento geométrico compreende-se “os raciocínios de natureza dedutiva e visual quando manipulam desenhos inseridos num quadro conceitual bem definido” (p.2). É o pensamento “que permite a construção de conhecimento, a geometria concebida como modelo teórico do mundo sensível imediato” (p.2).

Ainda acerca do seu entendimento sobre pensamento geométrico, Gravina (2001) considera que é aquele que está voltado para o entendimento das formas que estão no mundo em que vivemos.

Leivas (2009) investiga sobre a presença do pensamento geométrico de natureza avançada. Esse pensamento evolui por meio de experiências com objetos geométricos mais refinados, como por exemplo, os vinculados às Geometrias Não Euclidianas, à Geometria Fractal, à Topologia e à Geometria Diferencial, etc. Conforme esse autor, o “pensamento geométrico avançado é um processo capaz de construir estruturas geométricas mentais a partir de imaginação, intuição e visualização, para a aquisição de conhecimentos matemáticos científicos” (p. 136).

Aqui percebemos que há grande semelhança entre as características do pensamento geométrico avançado, sinalizado por Leivas (2009), com o de natureza

hipotético-dedutiva proposto por Gravina (2001), logo, podemos considerá-los como equivalentes.

Na construção da caracterização de pensamento geométrico que é adotada nessa tese, nos fundamentamos, sobretudo, nos estudos de Raymond Duval, Maria Alice Gravina e José Carlos Pinto Leivas, por apresentarem certa congruência com nosso estudo, sobretudo, com os quadriláteros notáveis.

Além disso, e não menos importante, apresentaremos uma discussão sobre os estudos de Efraim Fischbein e Luiz Carlos Pais por reconhecermos a importância desses pesquisadores para as reflexões sobre a formação do pensamento geométrico. É importante destacar que esses autores não serão considerados em profundidade na nossa definição de pensamento geométrico, pois eles vão além desse contexto, como, por exemplo, a discussão realizada por Fischbein sobre auto evidência em Geometria.

Por isso, esse capítulo foi organizado com cinco itens, cada um com uma compreensão de pensamento geométrico. O primeiro item apresenta a compreensão de Efraim Fischbein; o segundo traz a compreensão de Raymond Duval, seguida, em terceiro, pela de Luiz Carlos Pais; o quarto consiste na compreensão de Maria Alice Gravina; e o último debate a compreensão de José Carlos Pinto Leivas. Finalmente, finalizaremos esse capítulo com a caracterização de pensamento geométrico que adotamos em nosso estudo, produzida e apoiada nas compreensões desses pesquisadores.

3.1 Pensamento geométrico na compreensão de Efraim Fischbein (1993)

Um pesquisador que tratou com muito cuidado sobre o processo de formação do pensamento geométrico é Efraim Fischbein (1993), ao introduzir a noção de conceito figural. Na Geometria os conceitos dependem da fusão do aspecto figural e aspecto conceitual, isto é, o principal argumento do autor é que a Geometria pode ser compreendida a partir de entidades mentais (as chamadas figuras geométricas), que possuem ao mesmo tempo características conceituais e figurativas.

Para o investigador, uma esfera geométrica é uma entidade abstrata, formalmente determinável, como todo conceito autêntico. Além disso, possui

propriedades figurativas, antes de tudo, uma certa forma. A idealidade e a perfeição absoluta de uma esfera geométrica não podem ser verificadas no mundo real.

Nesta associação entre conceito e figura, como é revelada em entidades geométricas, é o elemento imagem que estimula novas orientações do pensamento geométrico, mas existem as restrições lógicas e conceituais que controlam o rigor formal do processo. Então, Fischbein (1993) chama as figuras geométricas de conceitos figurais devido à sua natureza dupla.

Nas diversas teorias da Psicologia, conceitos e imagens mentais são diferenciados, em geral. Ao definir um conceito, o autor cita Pieron (1957, p.72): “representação simbólica (quase sempre verbal) usada no processo de pensamento abstrato e que possui um significado geral correspondente a um conjunto de representações concretas em relação ao que eles têm em comum”. Segundo Fischbein (1993), o que caracteriza então um conceito é o fato dele expressar uma ideia, uma representação geral, o ideal de uma classe de objetos, com base em suas características comuns.

Com relação à imagem mental, o autor a indica como uma representação sensorial de um objeto ou fenômeno. O conceito de metal é a ideia geral de uma classe de substâncias que tem em comum uma série de propriedades: condutividade elétrica, entre outras. A imagem de um objeto metálico é a representação sensorial do objeto respectivo (incluindo cor, magnitude, etc.).

Como apontado por Fischbein (1993), conceitos e imagens são classificados em duas categorias de entidades mentais basicamente distintas, em toda a teoria cognitiva real. Para ele, até mesmo a Teoria Proposicional, que considera que todos os tipos de informação são codificados finalmente na mesma lógica proposicional, remete-se a imagens e conceitos como duas entidades mentais distintas.

Ao provar que dois lados (AB e AC) de um triângulo isósceles (ABC) são congruentes, o pesquisador sinaliza que nesse tipo de prova se faz uso de certa quantidade de conhecimentos expressa de modo conceitual: os dois segmentos de reta que formam os lados AB e AC foram considerados como congruentes. Nessa situação, foram utilizados os conceitos de ponto, lado, ângulo e triângulo. Entre esses usos conceituais foi mencionado o processo de reversão. Todavia, simultaneamente, foi usada a informação figurativa e as operações representativas,

como a ideia de separar o triângulo de si mesmo, invertendo-o e superpondo-o sobre o original.

Fischbein (1993) indica que estamos lidando, nesse caso, com uma mistura de duas entidades independentes e definidas, que são ideias abstratas (conceitos), por um lado, e representações sensoriais que refletem algumas operações concretas, por outro. Ainda, sobre a prova da congruência de dois lados de um triângulo isósceles, o investigador explica:

consideremos o núcleo da prova, que é a operação de separar o triângulo ABC de si mesmo e de o reverter. Os conceitos não podem ser destacados, invertidos e combinados. Tratamos aqui de descrições de operações aparentemente práticas. Mas, na realidade, é possível separar um objeto de si mesmo? Certamente não. Tal operação não tem um significado concreto. Nós lidamos com um mundo ideal, com significados ideais. Os objetos a que nos referimos – pontos, lados, ângulos e as operações com eles – têm apenas uma existência ideal. Eles são de natureza conceitual. Ao mesmo tempo, eles têm uma natureza figurativa intrínseca: somente ao se referir a imagens, podemos considerar operações como desprendimento, reversão ou superposição¹³ (FISCHBEIN, 1993, p.140, tradução nossa).

Segundo o autor, o triângulo e seus elementos não podem ser considerados como conceitos puros ou apenas imagens comuns. As operações utilizadas na prova não podem ser realizadas com conceitos puros ou com objetos reais. Contudo, essas entidades e operações participam de uma prova formal, lógica, matematicamente válida e, simultaneamente, a conclusão (a igualdade dos dois ângulos internos associados aos vértices B e C) pode ser verificada praticamente.

Fischbein (1993) afirma que as entidades – pontos, lados (segmentos de reta), ângulos, o próprio triângulo e as operações com eles – apresentam qualidades conceituais. No raciocínio matemático, eles não são referidos como objetos materiais ou como desenhos. Os objetos materiais (sólidos ou desenhos) são apenas modelos materializados das entidades mentais com as quais o matemático trata. Ainda, apenas em um sentido conceitual, pode-se considerar a perfeição

¹³ Let us consider the core of the proof, that is the operation of detaching the triangle ABC from itself and of reversing it. Concepts cannot be detached, reversed and matched. We deal here with descriptions of apparently practical operations. But in reality, is it possible to detach an object from itself? Certainly not. Such an operation has no concrete meaning. We deal with an ideal world, with ideal meanings. The objects to which we refer - points, sides, angles and the operations with them - have only an ideal existence. They are of a conceptual nature. At the same time, they have an intrinsic figural nature: only while referring to images one may consider operations like detaching, reversing or superposing.

absoluta de entidades geométricas: linhas retas, circunferências, quadrados, cubos, etc.

Além disso, de acordo com o pesquisador, essas entidades geométricas não possuem correspondentes de material autêntico. Pontos (objetos sem dimensões), linhas (objetos unidimensionais), planos (objetos bidimensionais) não existem, não podem existir na realidade. Os objetos reais de nossa experiência prática são necessariamente tridimensionais. Mas mesmo o cubo ou a esfera, a que o matemático se refere, não existem na realidade física, embora sejam representações tridimensionais. Estes também são meras construções mentais que não devem possuir qualquer realidade substancial.

Concordamos com o autor, ao considerar que os objetos geométricos não existem no mundo físico, mas sim, o que podemos encontrar são as representações desses objetos a partir de objetos físicos. Por exemplo, um dado pode parecer um cubo, mas não é. O dado é um objeto real, do mundo físico, mas que matematicamente pode ser analisado com uma representação tridimensional do cubo (que é um objeto geométrico tridimensional abstrato, logo, uma construção mental).

A distinção entre o objeto geométrico (construção mental) e sua representação (objeto físico) desempenha papel importante ao desenvolvimento do pensar em Geometria. Uma pessoa que ainda não consegue perceber essa diferença, geralmente, não alcançou o pensamento geométrico de natureza avançada. Nessa direção, o campo geométrico é considerado como uma ferramenta para compreensão do mundo físico. Logo, a Geometria não é vista como um modelo teórico para o estudo dos objetos matemáticos do mundo platônico.

Para mais, Fischbein (1993) aponta que essas construções são representações gerais, como qualquer conceito, e jamais cópias mentais de objetos particulares e concretos. Por exemplo, quando desenhamos um determinado triângulo ABC em uma folha de papel para verificar algumas de suas propriedades (como a de suas alturas para serem concorrentes), não nos referimos ao desenho específico respectivo, mas a uma determinada forma que pode ser a de uma infinita classe de objetos.

Segundo o autor, mesmo a forma particular desenhada com os lados e ângulos dados pode ser a de uma infinidade de objetos. Na verdade, se lida com uma hierarquia de formas, de uma aparentemente particular (mas, de fato, corresponde a uma infinidade de objetos possíveis) à categoria universal de triângulos. Idealidade, abstração, perfeição absoluta, universalidade são propriedades que fazem sentido no domínio dos conceitos.

De acordo com o investigador, as propriedades das figuras geométricas são impostas ou derivadas de definições no domínio de um determinado sistema axiomático. Deste ponto de vista, também, uma figura geométrica tem uma natureza conceitual. Por exemplo, um quadrado não é uma imagem desenhada em uma folha de papel, mas sim uma forma controlada por sua definição (embora possa ser inspirada por um objeto real). Um quadrado é um retângulo com lados iguais.

A partir dessas propriedades, pode-se continuar a descobrir outras propriedades do quadrado (congruência de ângulos que são todos retos, diagonais congruentes, entre outros). Assim, será possível perceber que o quadrado é todo paralelogramo que é retângulo e losango ao mesmo tempo.

Fischbein (1993) pontua que uma figura geométrica pode então ser descrita como tendo propriedades intrinsecamente conceituais. Contudo, uma figura geométrica não é um mero conceito, mas sim uma imagem visual. Ela possui uma propriedade que os conceitos usuais não possuem, ou seja, inclui a representação mental da propriedade espacial.

Ainda, o autor afirma que os conceitos não se transformam, não se movem e as imagens, como tal, não possuem a perfeição, a generalização, a abstração, a pureza que se supõe ao realizar os cálculos (por exemplo, calcular a distância percorrida por um veículo, conhecendo o raio das rodas, o número de rotações por unidade de tempo e o tempo gasto).

Como mencionado pelo pesquisador, o triângulo, a circunferência, o quadrado, o ponto, a linha, o plano e, em geral, todas as figuras geométricas, representam construções mentais que possuem propriedades simultaneamente conceituais e figurativas. Certamente, quando imaginamos uma circunferência, imaginamos uma circunferência desenhada (incluindo, por exemplo, a cor da tinta) e não a circunferência ideal e perfeita.

Segundo o autor, a circunferência matemática, que é o objeto de nosso raciocínio matemático, não tem cor, nenhuma substância material, nenhuma massa, etc. e é supostamente ideal e perfeito. Esse objeto tem todas as propriedades de um conceito, ele pode participar, como está, em um raciocínio matemático e isso, apesar de ainda incluir a representação da propriedade espacial.

Para Fischbein (1993), os objetos de investigação e manipulação em raciocínio geométrico são então entidades mentais, chamadas por conceitos figurais, que refletem propriedades espaciais (forma, posição, magnitude) e, ao mesmo tempo, possuem qualidades conceituais (como a idealidade, a abstração, a generalidade e a perfeição).

O autor não pretende afirmar que a representação que temos em mente, ao imaginar uma figura geométrica, é desprovida de qualquer qualidade sensorial (como a cor), exceto as propriedades espaciais. Mas ele afirma que, enquanto operamos com uma figura geométrica, agimos como se nenhuma outra qualidade contasse. Deve ficar claro que a fusão entre conceito e figura em raciocínio geométrico expressa apenas uma situação ideal e extrema. Geralmente não alcançada absolutamente devido a restrições psicológicas.

O investigador indica que o pensamento geométrico inclui uma interação permanente entre imagens e conceitos, tanto em situações cotidianas como científicas. O desenvolvimento dessa forma de pensar em Matemática é determinado essencialmente por construções conceituais (simbolizadas ou mediadas por meios imaginários) ou vice-versa.

Logo, o pensamento geométrico é a capacidade que permite uma pessoa compreender a Geometria composta por entidades mentais, que têm características conceituais e figurativas. É o pensamento que possibilita perceber uma figura geométrica como uma imagem visual por meio da sua representação mental. Essa representação é construída a partir das propriedades conceituais e figurativas.

Nesse processo, o sujeito encara de fato como um jogo em que as redes conceituais ativas interagem com fontes imaginativas. Além disso, Fischbein (1993) admite que, no decurso dessa interação, os significados mudam de uma categoria para a outra, imagens que obtêm significado e conceitos mais generalizados, em grande parte enriquecendo suas conotações e seu poder combinacional.

Fischbein (1993) considera três categorias de entidades mentais quando se refere às figuras geométricas: a definição, a imagem (baseada na experiência perceptivo-sensorial, como a imagem de um desenho) e o conceito figurativo. O conceito figurativo é uma realidade mental, é a construção tratada pelo raciocínio matemático no domínio da Geometria. É desprovido de propriedades concretas-sensoriais (como cor, peso, densidade, etc.), mas exhibe propriedades figurativas.

De acordo com o autor, essa construção figurativa é controlada e manipulada, em princípio sem resíduos, por regras e procedimentos lógicos no âmbito de um determinado sistema axiomático. A dificuldade em aceitar a existência deste tipo de entidades mentais é determinada pelo fato de que estamos diretamente conscientes apenas da representação mental (incluindo várias propriedades sensoriais como a cor) e do conceito correspondente.

O investigador sinaliza que é necessário um esforço intelectual para entender que as operações matemáticas e lógicas manipulam apenas uma versão purificada da imagem, o conteúdo espacial-figurativo da imagem.

Como indicado pelo pesquisador, na manipulação de palavras em uma atividade verbal, os sons (ouvidos ou expressos) são representantes externos, materiais de significado. O significado está além da materialidade da palavra expressa: o significado é uma ideia fixada por um complexo de relacionamentos. O conceito figurativo também possui sentido.

Segundo o investigador, a particularidade deste tipo de significado é que ele inclui a figura como uma propriedade intrínseca. O significado autêntico da palavra circunferência em Geometria, como é manipulado pelo nosso processo de raciocínio, não é redutível a uma definição puramente formal. É uma imagem inteiramente controlada por uma definição.

Para o autor, o termo “figura” é ambíguo e pode denotar uma grande variedade de significados. No seu texto, “figura” refere-se apenas às imagens espaciais. Normalmente, uma figura possui uma certa estrutura, uma forma.

Segundo Fischbein (1993), as figuras geométricas correspondem a esta descrição, mas algumas especificações devem ser adicionadas: (a) uma figura geométrica é uma imagem mental, cujas propriedades são completamente controladas por uma definição; (b) um desenho não é a própria figura geométrica,

mas uma concretização gráfica ou materialização; (c) a imagem mental de uma figura geométrica é, usualmente, a representação do modelo materializado dela.

Ele considera que a figura geométrica em si é apenas a ideia correspondente que é a entidade figural abstrata, idealizada e purificada, determinada estritamente pela sua definição.

Ao analisar a diferença entre as ciências empíricas e a Geometria, Fischbein (1993) argumenta que:

a diferença entre as ciências empíricas e a geometria, a este respeito, é que, na geometria, as imagens podem ser controladas exaustivamente por conceitos enquanto nas ciências empíricas não são. Nas ciências empíricas, o conceito tende a se aproximar da realidade existente correspondente, enquanto na matemática é o conceito, por meio da sua definição, que determina as propriedades das figuras correspondentes. Isso leva a uma consequência fundamental. Todo o processo investigativo do matemático pode ser realizado mentalmente, de acordo com um determinado sistema axiomático, enquanto o cientista empírico deve, mais cedo ou mais tarde, retornar a fontes empíricas¹⁴ (FISCHBEIN, 1993, p.149, tradução nossa).

Então, com fundamento na discussão de Fischbein (1993), o pensamento geométrico é caracterizado pela interação entre dois aspectos: o figurativo e o conceitual. Nessa direção, em nosso entendimento, podemos considerar que o pensamento geométrico pode ser definido com a capacidade mental que permite considerar a Geometria como um conjunto de entidades mentais (as chamadas figuras geométricas) que possuem simultaneamente características conceituais e figurativas. Essas características interagem entre si.

3.2 Pensamento geométrico na compreensão de Raymond Duval (1995)

Raymond Duval (1995) fornece uma importante análise do pensamento geométrico a partir de uma abordagem cognitiva e de um ponto de vista perceptual. Dessa forma, baseando-se na sua Teoria dos Registros de Representação

¹⁴ In empirical sciences the concept tends to approximate the corresponding existing reality, while in mathematics it is the concept, through its definition, which dictates the properties of the corresponding figures. This leads to a fundamental consequence. The entire investigative process of the mathematician may be performed mentally, in accordance with a certain axiomatic system, while the empirical scientist must, sooner or later return to empirical sources.

Semiótica – TRRS, ele apresenta um recurso analítico no formato de um quadro refinado para analisar a semiótica da Geometria.

A TRRS investiga o funcionamento cognitivo implicado, sobretudo, na atividade vinculada à Matemática e no contexto complexo referente à aprendizagem do saber matemático. Duval (1995) percebeu que muitos estudantes apresentam dificuldades conceituais de aprendizagem relacionadas à Matemática, assim, ele passou a investigar sistematicamente tais dificuldades em uma perspectiva cognitiva. Então, para o autor, a descrição do funcionamento cognitivo possibilita a compreensão com significado dos objetos matemáticos pelo aluno.

Segundo o pesquisador o aspecto crucial à compreensão matemática é a diferenciação do objeto matemático de sua representação. Geralmente, na sala de aula da escola básica, o estudante considera que a representação do objeto matemático é o próprio objeto em si mesmo, como consequência disso, ele não constrói uma compreensão com significado.

Por exemplo, o desenho de um triângulo na folha do caderno é uma representação, de natureza geométrica, mas não o próprio objeto geométrico triângulo em si. Esse objeto é uma idealização, uma construção mental. Todavia, são as representações que possibilitam o acesso aos objetos da Matemática.

Nessa situação, segundo Fischbein (1993), estamos diante de uma combinação de duas entidades definidas e autônomas: o conceito (idéias abstratas) e as representações sensoriais (que indicam algumas operações concretas). Para Duval (1995), o conceito corresponde ao objeto geométrico, que é uma construção mental de natureza platônica, enquanto que as representações sensoriais consistem em um modelo de representação desse objeto matemático.

Para Duval (1995), as representações dos objetos matemáticos podem ser classificadas em três categorias: mentais, internas (ou computacionais) e semióticas. As representações mentais são formadas por uma coleção de imagens e pontos de vista que uma pessoa apresenta, relacionados a um objeto ou a um cenário.

As representações internas são marcadas pela realização de uma atividade de modo automático, buscando promover um resultado moldado ao cenário. Por fim, as representações semióticas consistem em construções formadas pela aplicação

de signos derivados a um sistema de representação, que apresentam uma complexidade de sentido e lógica funcional.

Duval (1995) destaca que as representações semióticas são fundamentais à atividade cognitiva do pensamento do ser humano, sendo ainda responsáveis por comunicar, isto é, deixar as representações perceptíveis e disponíveis às pessoas. Desse modo, essas representações exercem uma função indispensável na formação do pensamento em Matemática.

Conforme o autor, essa importância se justifica pelo fato de que os objetos matemáticos devem ser tratados a partir de um sistema de representação, além disso, tais objetos não são visíveis, são produções da nossa cognição, logo, necessitam desses sistemas para sua designação.

Discussão semelhante pode ser encontrada em Fischbein (1993), ao considerar que os objetos matemáticos são construções mentais, logo, não existem na realidade física. Desse modo, os objetos físicos são representações tridimensionais utilizadas pelo matemático no estudo dos objetos de natureza matemática, presentes apenas no mundo platônico.

Duval (1995) considera que a construção dos conhecimentos em Matemática está fortemente atrelada à variedade de registros de representação. Para o autor, o registro define-se como um “campo de variação de representação semiótica em função de fatores cognitivos que lhe são próprios” (DUVAL, 2012, p.1, *tradução de Mércles Thadeu Moretti*).

No caso específico das representações semióticas, no campo matemático, existe uma ampla diversidade dessas representações, as quais Duval (1995) organizou em quatro grupos de registros: a língua natural (associações verbais e conceituais), as escritas algébricas e formais (sistemas de escritas numéricas, algébricas, simbólicas e cálculo), as representações gráficas (gráficos cartesianos) e figuras geométricas (planas ou em perspectivas).

Na TRRS, o autor destaca duas operações cognitivas importantes a compreensão do funcionamento cognitivo, especificamente, no estudo dos objetos em Matemática: o tratamento e a conversão. Para Duval (1995), o tratamento consiste em uma modificação que ocorre dentro de um mesmo registro, enquanto que a conversão é a mudança da representação de um objeto matemático para

outra representação desse próprio objeto. Então, a partir dessas alterações, que possuem diferenças, podemos realizar uma análise refinada do ensino e da aprendizagem da Geometria.

Como ilustração dessas modificações, consideremos, por exemplo, uma atividade relacionada à orientação espacial, na qual, em uma turma do quinto ano do ensino fundamental brasileiro, os estudantes recebem do professor o mapa do bairro da escola. Ao marcarem o percurso que realizam de casa até a escola, certamente, cada estudante apresentará um resultado diferente do seu colega, ou seja, diferentes tratamentos produzirão a mesma representação gráfica, no caso, o mapa fornecido pelo docente.

Em um segundo momento, os estudantes registram na folha do caderno o modo como realizam o percurso a partir da leitura do mapa. Nessa fase, os discentes fazem a conversão, isto é, a mudança da representação gráfica (o mapa) para a língua natural (a descrição no caderno). Nessa situação, o objeto geométrico evidenciado é o de “orientação espacial” e para que a aprendizagem seja relevante, é necessário que o docente oriente para que os alunos realizem variados tratamentos e conversões.

Duval (1995) ressalta que o tratamento se refere ao modo e não ao conteúdo do objeto em Matemática. Para o autor, a conversão abrange diferentes representações semióticas de um mesmo objeto matemático, então, demanda o reconhecimento da distinção entre o modo e conteúdo de uma representação semiótica.

Além disso, como sinalizado pelo pesquisador, a conversão é uma operação mental complexa, que envolve muito mais do que uma associação predefinida entre nomenclaturas e figuras. Para que uma pessoa realize essa operação, ela deve articular as variáveis cognitivas específicas de cada registro de representação semiótica.

Sobre essa complexidade, Pirola (2012, p.37) indica que:

a operação de conversão tem como característica conservar a referência ao mesmo objeto matemático. Para que o sujeito não confunda o objeto a ser estudado com o conteúdo de sua representação, é necessário dispor de, ao menos, dois registros de representação, de modo que esses dois sejam percebidos como representando o mesmo objeto. Também é preciso que o sujeito seja capaz de converter, de transitar entre os registros.

Segundo Duval (1995), a passagem pelos vários registros de representação deve ser complementada com a coordenação desses registros durante a solução de uma atividade ou de um problema em sala de aula. Coordenar provoca reconhecer o objeto em Matemática nos diversos registros que os representam, além de compreender que tais registros se completam e manifestam atributos e propriedades matemáticas do objeto.

Para o pesquisador francês, inicialmente, para compreender Matemática é necessário que o estudante coordene no mínimo dois registros de representação semiótica, relacionados a um certo objeto.

Nessa direção, nos diversos cenários de sala de aula da escola básica, os professores de Matemática devem organizar as situações didáticas de forma que os estudantes vivenciem e coordenem vários registros de um objeto matemático nas atividades. Nesse sentido, a formação conceitual desse objeto ocorrerá quando os estudantes estabelecerem a coordenação dos registros, assim, eles compreendem as especificidades de cada campo de representação semiótica do objeto em Matemática evidenciado na aula.

Tanto Fischbein (1993) como Duval (1995) sinalizam que as figuras geométricas são importantes à aprendizagem em Geometria dos estudantes do ensino básico. No caso do primeiro autor, a figura geométrica é uma imagem mental (representação do modelo materializado dessa figura), cujas propriedades são integralmente controladas por uma definição. Enquanto que para o segundo pesquisador, as figuras geométricas compõem um registro de representação semiótica relacionado a um objeto matemático.

Em relação à Geometria, Duval (1995) introduz três processos cognitivos imprescindíveis à aprendizagem geométrica dos estudantes da escola básica: visualização, construção e raciocínio.

A visualização é formada pelo estudo de natureza heurística de um cenário sofisticado, enquanto que a construção é a produção de configurações que constituem um modelo no qual os objetos em Matemática são conectados aos procedimentos representados e aos produtos obtidos.

Por fim, o raciocínio é o processo discursivo utilizado em provas e justificativas. Como indica o investigador, cognitivamente um estudante torna-se proficiente em Geometria a partir da articulação sinérgica desses três processos.

Um importante itinerário para a compreensão de como o aluno aprende Geometria, sobretudo quando ele tem contato com as figuras geométricas, é por meio das **apreensões geométricas**, propostas por Duval (1995), que, em nossa compreensão, consistem em um modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico: apreensão perceptiva, apreensão discursiva, apreensão operatória, apreensão sequencial.

A apreensão perceptiva possibilita a identificação ou o reconhecimento, rapidamente, de uma forma (ou objeto) representada no plano ou no espaço. Epistemologicamente, tem o papel de identificar os objetos de duas ou de três dimensões. Tal tarefa é executada a partir de tratamentos de natureza cognitiva, realizados de modo automático, logo, sem consciência. Esse tipo de apreensão refere-se à primeira impressão visual e com a leitura dos formatos da figura em um cenário da Geometria.

A apreensão sequencial é marcada pela construção de uma figura geométrica, ou ainda, pela descrição dessa construção. Ela corresponde à ordem de como ocorre a produção da figura, então, não depende somente das propriedades geométricas vinculadas à figura, mas de demandas de natureza técnica dos instrumentos empregados (software, compasso, régua, etc.).

A apreensão discursiva refere-se a uma hipótese, uma legenda ou a uma denominação. Ela está relacionada ao fato de que as propriedades geométricas representadas em um desenho não podem ser definidas por meio da percepção, logo, devem ser explicadas a partir das variáveis da figura geométrica. Segundo Duval (1995), essa justificativa é de ordem dedutiva.

A apreensão operatória é mobilizada quando o estudante opera sobre as figuras geométricas por meio de manipulação, composição, transformação, reconfiguração, comparação dos objetos voltados à Geometria para solucionar certa situação geométrica. Para Duval (1995) essa apreensão é mais sofisticada cognitivamente do que as demais apreensões, sendo alcançada por um estudante proficiente em Geometria.

De acordo com Duval (1995), a apreensão operatória consiste em alterações geométricas prováveis em uma figura, que podem ser realizadas de muitos formatos, como ilustrado no Quadro 04:

Quadro 04 – Modificações figurais pela apreensão operatória

Tipo de modificação configural	Operações que constituem a produtividade heurística	Fatores que afetam a visibilidade
Modificações mereológicas	Reconfiguração intermediária Imersão	Característica convexa ou não convexa das partes elementares
Modificações óticas	Superpossibilidade Anamorfose	Recobrimento parcial Orientação
Modificações posicionais	Rotação Translação	Estabilidade das referências do campo perceptivo para o suporte das figuras

Fonte: Duval (1988, p.63, tradução nossa).

Como podemos perceber, pelo quadro, toda figura geométrica pode sofrer modificações de três modos distintos segundo Duval (1988). As modificações mereológicas são caracterizadas pela decomposição (fração ou reagrupamento) da figura em subfiguras, mantendo uma relação de parte e de todo. Enquanto que nas modificações óticas, ocorre uma deformação ou aumento ou redução da figura, ou seja, ela é transformada em outra figura (imagem). Por fim, as modificações posicionais são marcadas pelos movimentos de translação e de rotação, isto é, a figura é deslocada a partir de um ponto de referência.

Em cada uma dessas modificações, diferentes operações são possíveis de ocorrerem. Nas modificações mereológicas verifica-se a reconfiguração intermediária, na qual uma ou várias subfiguras diferentes, obtidas a partir de uma figura, são organizadas, formando uma segunda figura (convexa ou não convexa). Então, essa operação resume-se apenas a um tratamento figural. Já a imersão ocorre quando a figura é mergulhada e dobrada no plano.

No caso das modificações óticas, a operação de superpossibilidade é o tratamento capaz de aumentar ou diminuir a figura sem gerar deformações. Ao passo que a anamorfose produz distorções visuais na figura. Nas modificações posicionais, a rotação é o movimento realizado em torno de um referencial que está na própria figura, e a translação é a mudança de posição a partir de um ponto de referência fora da figura.

É importante destacar que as apreensões não são isoladas, logo, é possível que na solução de um problema, um estudante utilize mais de uma das apreensões. Então, essa conexão entre as apreensões será necessária para a compreensão da situação. Além disso, não há hierarquia entre as apreensões, mas sim uma subordinação, sendo que a apreensão perceptiva coordena esse processo, como sinaliza Moretti (2013, p.291):

o que se desprende do trabalho desenvolvido por Duval é que não há uma hierarquia entre estas apreensões, mas uma subordinação de uma a outra dependendo do tipo de problema. Em geral, nas atividades propostas para o ensino fundamental, é a apreensão perceptiva que subordina as demais.

Dessa forma, a apreensão perceptiva subordina as demais apreensões. Então, por exemplo, é essa apreensão que possibilita o aluno, ao desenhar uma reta, identificar a altura e designá-la por meio da letra *h*. Se o estudante realiza a identificação, então, ele está operando. Nesse caso, a apreensão perceptiva comanda a apreensão operatória.

Duval (1995) considera também que a figura geométrica é o produto da articulação entre as apreensões perceptiva e discursiva, pois é necessário analisar a figura geométrica por meio das hipóteses, desprezando, assim, as formas e as propriedades percebidas.

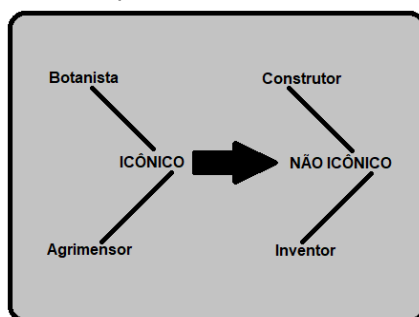
A visualização consiste na ligação entre as apreensões operatória e perceptiva. Ela pode orientar a apreensão operatória, pois não demanda conhecimento em Matemática. Para o autor, a demonstração (heurística) é o produto da articulação entre as apreensões discursiva e operatória, enquanto que a construção geométrica resulta da associação entre as apreensões perceptiva, sequencial e discursiva.

Com base nessas conexões, “podemos perceber a importância da apreensão perceptiva na aprendizagem da Geometria: as apreensões operatória, discursiva e sequencial subordinam-se, em maior ou menor grau, dependendo do tipo de problema, à apreensão perceptiva” (MORETTI; BRANDT, 2015, p.605).

Essa relevância da apreensão perceptiva fez Duval (2005) realizar a caracterização dos diferentes modos de olhar em Geometria, que consiste na classificação das formas de ver, de acordo com a função das figuras nas atividades

geométricas propostas aos alunos: o olhar do botanista, o olhar do agrimensor, o olhar do construtor e o olhar do inventor. Moretti (2013) elaborou um esquema que representa essa classificação:

Figura 12 – Os quatro modos de ver uma figura geométrica



Fonte: elaborado pelo autor e baseado em Moretti (2013, p. 293).

Com base no esquema, podemos notar que o olhar em Geometria inicia com o olhar icônico, a partir do botanista, considerado o mais elementar, finalizando com o olhar não icônico, com o inventor, reconhecido como o olhar mais avançado. Dessa forma, ao aprender a realizar os olhares desse itinerário, o aluno apreenderá a olhar em Geometria (MORETTI, 2013). O quadro a seguir apresenta uma explicação referente a cada olhar:

Quadro 05 – Olhares em Geometria conforme Duval (2005)

Olhares	Descrição
Botanista	Este é o olhar mais óbvio e imediato. É uma questão de aprender a reconhecer e a nomear as formas elementares que são usadas na Geometria Plana: tipos de triângulos e quadriláteros, configurações obtidas pelas diferentes posições de duas linhas retas umas sobre a outra, possivelmente as formas circulares e formas oval, etc. É obviamente uma questão de observar as diferenças entre duas formas que têm algumas semelhanças (um quadrado e um retângulo) e observar semelhanças entre diferentes formas (entre um quadrado e um paralelogramo). Aqui, propriedades distintas são características visuais de contornos. Na realidade, esse tipo de atividade não é uma atividade geométrica. Elas são confundidas como geométricas apenas na medida em que diz respeito às formas ditas “euclidianas” ¹⁵ .

¹⁵ C'est l'entrée la plus évidente et la plus immédiate. Il s'agit d'apprendre à reconnaître et à nommer les formes élémentaires qui sont utilisées en géométrie plane: types de triangles et de quadrilatères, configurations obtenues par les différentes positions de deux droites l'une par rapport à l'autre, éventuellement les formes circulaires et les formes ovales etc. Et il s'agit évidemment d'observer les différences entre deux formes présentant certaines similitudes (un carré et un rectangle) et de remarquer des similitudes entre des formes différentes (entre un carré et un parallélogramme). Ici, les propriétés distinguées sont des caractéristiques visuelles de contour. En réalité ce type d'activité n'a rien d'une activité géométrique. Elle ne paraît géométrique que dans la mesure où elle porte sur des formes dites “euclidiennes” (DUVAL, 2005, p.10).

Agrimensor	Trata-se de aprender a medir comprimentos em um campo, chão ou distâncias entre dois pontos de referência e para registrá-los em um desenho que tenha um status de plano. Estamos, portanto, no início em duas escalas de grandezas que devemos combinar. Mas esse mapeamento não é natural ou óbvio, porque não existe um procedimento comum para medir as distâncias reais no campo e medir os comprimentos de um desenho. As tarefas específicas deste olhar consistem em propor atividades que exigem passar de uma escala de grandeza para outra. A medida do raio da Terra por Erastóstenes é outro exemplo famoso. Além disso, neste tipo de atividade, as propriedades geométricas são mobilizadas para fins de mensuração ¹⁶ .
Construtor	A particularidade das figuras geométricas, pelo menos daquelas que correspondem a formas e configurações euclidianas elementares de formas elementares, deve ser construída por meio de instrumentos. As figuras geométricas não são desenhadas a mão, são construídas com a ajuda de um instrumento que guia o movimento da mão, ou que a substitui. Um instrumento torna possível a produção de uma forma visual com uma propriedade geométrica. Sem o uso de instrumentos, seria impossível verificar uma propriedade em uma figura ¹⁷ .
Inventor	Neste olhar, na resolução de um problema, traços na figura fornecida são adicionados, são realizadas operações sobre a figura, e na busca de percursos de solução, modificações são realizadas. O inventor é capaz de resolver o seguinte problema: <i>Como construir, a partir de um determinado quadrado, outro quadrado duas vezes maior (cuja área é o dobro)</i> ¹⁸ ?

Fonte: Duval (2005, p.10-11, tradução nossa).

Conforme indica Moretti (2013), esses olhares percorrem de um sentido a outro a medida que as apreensões geométricas são mobilizadas. No botanista, por exemplo, é mobilizada a apreensão perceptiva, enquanto que no caso do inventor, todas as apreensões são mobilizadas.

Segundo Duval (2011), outro aspecto importante ao desenvolvimento pensamento geométrico é a mudança dimensional, que consiste em um

¹⁶ Il s'agit d'apprendre à mesurer des longueurs sur un terrain, au sol, ou des distances entre deux repères, et à les reporter sur un dessin qui prend un statut de plan. On se situe donc d'emblée à deux échelles de grandeur qu'il s'agit de mettre en correspondance. Or cette mise en correspondance n'a rien de naturel ou d'évident, car il n'y a pas de procédure commune pour mesurer les distances réelles sur le terrain et pour mesurer les longueurs de tracés d'un dessin. Les tâches spécifiques de cette entrée vont donc consister à proposer des activités exigeant de passer d'une échelle de grandeur à une autre. La mesure du rayon de la terre par Eratosthène en est un autre exemple célèbre. En outre dans ce type d'activité les propriétés géométriques sont mobilisées à des fins de mesure (DUVAL, 2005, p.10).

¹⁷ La particularité des figures géométriques, du moins de celles qui correspondent à des formes euclidiennes élémentaires et à des configurations de formes élémentaires, est d'être constructibles à l'aide d'instruments. Les figures géométriques ne se dessinent pas à main levée, elles se construisent à l'aide d'un instrument qui guide le mouvement de la main, ou qui s'y substitue. Un instrument permet de produire une forme visuelle ayant une propriété géométrique. Sans l'utilisation d'instruments, il serait impossible de vérifier une propriété sur une figure (DUVAL, 2005, p.10-11).

¹⁸ Comment construire, à partir d'un carré donné, un autre carré deux fois plus grand (dont l'aire soit le double) ? (DUVAL, 2005, p.11).

procedimento intelectual mobilizado, sobretudo, na resolução de problemas em Geometria.

Conforme sinalizado pelo autor, uma representação em Geometria só tem sentido se ela for transformada em outra representação. Isso é essencial para as figuras geométricas, que apresentam dois tipos de operações figurais¹⁹ que são específicos dessas figuras. Sobre essas operações, Duval (2011, p.88, *tradução de Marlene Alves Dias*) afirma que:

existem aquelas que se apoiam diretamente na percepção e que transformam unidades figurais 2D/2D (ou objetos 3D/3D) em outras de mesma dimensão. São aquelas executadas desde o começo da Geometria. Elas apresentam a particularidade de poder ser realizadas por manipulações sobre objetos materiais. E existem aquelas que dependem das operações de desconstrução dimensional. Nenhuma manipulação material pode simulá-las. Elas apareceram mais tarde na história da Geometria.

Desse modo, como sinalizado pelo pesquisador, a operação fundamental relacionada às figuras geométricas não é a sua produção, mas sim a desconstrução dimensional das figuras produzidas seja por programas computacionais ou de forma manual e instrumental. A mudança dimensional é marcante nas definições, nas propriedades, nas justificativas, ou seja, em todo pensamento referente à Geometria, sobretudo, no estudo das figuras geométricas.

Diante do exposto e com base nas discussões de Duval (1995; 2005), em nosso entendimento, pensamento geométrico é a capacidade mental de construir conhecimentos geométricos a partir das apreensões geométricas. Dito de outra forma, é a capacidade de reconhecer um objeto geométrico no plano ou no espaço, de construir uma figura geométrica ou descrever essa construção, de analisar essa figura em termos de suas propriedades, e de operar sobre as figuras geométricas por meio de manipulação, decomposição, transformação, etc.

¹⁹ A primeira operação é a divisão merológica de uma forma em unidades figurais de mesma dimensão (2D em 2D) e sua recomposição em outra figura cuja circunscrição geral é a mesma ou não. É um dos maiores processos heurísticos das figuras em Geometria. A segunda operação consiste na desconstrução dimensional das formas (nD em $(n - 1)D$), que possibilita realizar análise a modificação de uma dada forma em outra forma de mesma dimensão, embora ela surja diferente inteiramente. As unidades figurais de um dimensão sucessivamente inferior são consideradas na explicação dessa transformação, por meio da exposição das propriedades (DUVAL, 2011).

Essa definição sinaliza implicitamente a existência de níveis de pensamento geométrico. Todavia, essa discussão não é realizada por Duval, que centra seus estudos na subordinação existente entre as apreensões geométricas.

É importante destacar que um estudante desenvolverá o pensamento geométrico quando ele mobilizar no mínimo uma dessas características, ou seja, quando ele atuar em uma das apreensões geométricas. Além disso, como mencionado por Duval, não há hierarquia, logo, um mesmo discente pode trabalhar em duas ou mais apreensões simultaneamente.

3.3 Pensamento geométrico na compreensão de Luiz Carlos Pais (1996)

Tal como Fischbein (1993), Luiz Carlos Pais (1996) também investigou sobre como ocorre a formação do pensamento geométrico. Sustentando-se na Teoria Epistemológica da Geometria, desenvolvida por Gonseth (1945), o autor brasileiro analisou as implicações do uso de desenhos, objetos materiais e de imagens mentais como recursos didáticos auxiliares e representativos do processo de produção dos conceitos geométricos, além do reconhecimento da presença de uma provável conexão desses componentes com as dimensões intuitiva, experimental e teórica do conhecimento geométrico.

Dessa forma, a correlação entre os quatro elementos (objeto, conceito, desenho e imagem mental) necessários à elaboração de conceitos geométricos e os aspectos intuitivo, experimental e teórico vinculados ao conhecimento em Geometria constituem o pensamento geométrico.

O termo objeto é considerado por Pais (1996) como sendo uma parte material, visivelmente reconhecível na realidade sentida pelo estudante e que pode ser relacionada ao modo que certos conceitos em Geometria são ensinados na escola básica. A título de ilustração, o objeto coligado ao conceito de pirâmide pode ser uma pirâmide produzida em cartolina, plástico, madeira, argila, varetas ou qualquer outro tipo de material. Então, no âmbito da Geometria, o termo objeto é empregado tanto como modelo físico como material didático.

Para o autor, o objeto é compreendido como uma maneira primária de representação de conceitos, tendo em vista que o processo de produção de cunho

teórico é demorado, sucessivo e complicado: “primária no sentido de que ele é a forma mais acessível e imediata à sensibilidade humana” (PAIS, 1996, p.68). Dessa forma, o objeto é um modelo físico que favorece a elaboração de ideias, todavia, não ocupa o lugar delas: “O termo objeto é aqui utilizado apenas em sua acepção concreta e está associado principalmente aos modelos ou materiais didáticos” (PAIS, 1996, p.66).

Nessa perspectiva, podemos considerar materiais concretos e materiais manipulativos como objetos. Contudo, conforme sinaliza o pesquisador, a atividade de manipular os objetos não pode reduzir-se a apenas à ludicidade.

Devido a sua natureza particular e concreta, esses objetos permitem uma relativa facilidade de manipulação no transcorrer de atividades visando a aprendizagem. Entretanto, faz-se necessário salientar que esta manipulação não pode limitar-se a uma simples atividade lúdica. Não se trata, aqui, da manipulação de objetos defendida na educação pré-escolar cuja finalidade não está voltada diretamente para uma aprendizagem formal. O significado que lhe é conferido é análogo à *experiência raciocinada* descrita por Bkouche (1989), o qual associa necessariamente à manipulação física do objeto uma atividade intelectual que estabeleça uma relação dialética efetiva entre teoria e prática. O problema que surge com o uso desses materiais é que sua natureza contrasta frontalmente com a generalidade e a abstração dos conceitos visados, surgindo também daí a necessidade de se transpor sua própria materialidade (PAIS, 1996, p.67).

Nesse cenário, na manipulação de objetos, é fundamental que o estudante realize interpretação geométrica do(s) conceito(s) que está(ão) sendo representado(s), para que possa desenvolver a abstração e a generalização dele(s). Então, para o autor, não se trata de abandonar a utilização de objetos, mas sim compreender que a aprendizagem apenas provocará uma ação relevante ao aluno, quando ele tiver condições de realizar uma análise geométrica da representação implicada.

É notório, por isso, que a materialidade deve ser tratada na direção de possibilitar a origem do processo de abstração, de outro modo, reincidirá na falha desagradável de reconhecer a presença de uma Geometria de natureza concreta.

Para Fischbein (1993), os objetos em Geometria são então entidades mentais, chamadas por conceitos figurais, que apresentam propriedades espaciais (forma, posição, magnitude) e, de modo simultâneo, têm qualidades conceituais (idealidade, abstração, generalidade e perfeição).

Com relação ao termo desenho, Pais (1996) destaca que, do mesmo modo que o objeto, o desenho também é de âmbito basicamente concreto e peculiar e, sendo assim, contrário aos atributos globais e abstratos do conceito. Essa associação entre o individual e o global, entre o concreto e o abstrato, que abrange a atividade de representar conceitos, aponta, por si própria, para a maior complexidade colocada à atividade didática que é, igual no contexto dos objetos, a carência de realizar a transposição do próprio desenho.

Segundo o autor, a representação, por um desenho, dos conceitos vinculados à Geometria é um dos recursos didáticos mais vigorosamente estabelecidos nos processos de ensino e de aprendizagem desse campo da Matemática. Tal fato demanda um estudo refinado de origem didática e epistemológica sobre seu funcionamento na aprendizagem geométrica.

Quer seja na representação de figuras planas ou espaciais, o desenho tem sido, na realidade, uma passagem quase que totalmente obrigatória no processo de conceitualização geométrica. Sua presença destaca-se tanto nas aulas de geometria, como nos livros didáticos, ou mesmo, simplesmente, para ilustrar os enunciados de exercícios, definições ou teoremas. Essa sua presença significativa leva à necessidade de uma reflexão epistemológica e didática sobre o seu verdadeiro estatuto na aprendizagem geométrica (PAIS, 1996, p. 68).

Ao destacar a importância do desenho na conceitualização geométrica, cujo outro uso é na representação de figuras geométricas ou espaciais, aqui notamos certa proximidade das ideias de Pais (1996) com as de Fischbein (1993). Esse segundo pesquisador sinaliza que um desenho não é a própria figura geométrica, mas uma concretização gráfica ou materialização.

Assim, Pais (1996) sublinha que a utilização do desenho na Geometria Espacial, que muitas vezes necessita o auxílio da técnica da perspectiva, é mais complexo do que no caso da Geometria Plana, na qual o desenho geralmente é reconhecido pelo estudante como se fosse o próprio conceito em si.

Essa aplicação da perspectiva, que deixa o objeto representado em terceira dimensão, é uma das grandes dificuldades apresentadas pelos estudantes ao estudarem conceitos geométricos espaciais. Acerca das particularidades dessas dificuldades Pais (1996) cita Bonafe (1988):

neste sentido, Bonafe (1988) analisa em detalhes as dificuldades do ensino da geometria espacial, quando o aluno ainda não tem imagens mentais suficientemente operacionais para decodificar um desenho em perspectiva. Este autor destaca o fato de que tanto a produção de um desenho em perspectiva pelo aluno, como a sua leitura, podem constituir-se em obstáculos consideráveis para a aprendizagem. Estas observações sugerem uma reflexão mais importante em torno da possibilidade do desenho transformar-se num obstáculo epistemológico [...] (PAIS, 1996, p.69).

O autor sinaliza que a leitura e a interpretação das informações geométricas apresentadas num desenho necessita o controle de algumas informações técnicas que, em geral, não são abordadas de forma clara e sistemática no ensino básico. Nos livros didáticos, os desenhos são explorados em diversos grafismos que, não obstante, têm um sentido fixado, têm seu uso sustentado numa certa tradição, em vez de serem baseados numa aprendizagem formal.

Para Pais (1996), essas dificuldades, acrescidas daquelas referentes à perspectiva, que situam o desenho como um modo de representar mais complicado do que o representar por um objeto.

Como bem pontua o pesquisador, a constituição das imagens mentais é um assunto bastante interessante a Psicologia Cognitiva, sendo o centro de vários estudos dessa área de conhecimento, especificamente por possibilitar um modo bem holístico de apresentar o conhecimento humano. Dessa forma, ao estudar as imagens mentais que podem ser correlacionadas aos conceitos geométricos, Pais (1996) reportou-se à Epistemologia da Geometria desenvolvida por Denis (1979; 1989) de gênese teórica cognitiva.

Assim, de acordo com o investigador brasileiro, essas imagens, que são de âmago basicamente diferente daqueles do objeto e do desenho, podem ser evidenciadas por dois atributos fundamentais: a abstração e a subjetividade. Em decorrência de serem abstratas, essas características podem ser associadas aos conceitos, apesar de que seu caráter subjetivo as separe da lógica científica. Todavia, o autor ressalta que a elaboração da objetividade percorre pela etapa subjetiva da visão particular do estudante.

Ao reconhecer a complexidade ao definir uma imagem mental, Pais (1996) considera-a como a capacidade do indivíduo em enunciar, por meio da descrição, as especificidades de um desenho ou de um objeto, quando esses componentes não estão presentes. Dessa maneira, as noções de origem geométrica são ideias de

natureza abstrata e, em vista disso, desconhecidas da sensibilidade externa do ser humano, a constituição de imagens mentais é um corolário praticamente restrito da exploração com objetos e desenhos.

Sobre o papel das imagens mentais no ensino e na aprendizagem da Geometria, o investigador explica que:

a aprendizagem geométrica engloba necessariamente uma razoável habilidade racional de trabalho, com boas imagens mentais associadas não só aos conceitos como também aos teoremas e situações geométricas fundamentais. Exemplos de frases como: “Imagine uma reta perpendicular a um plano”; “seja a diagonal principal de um cubo”, fazem um apelo direto ao uso de uma imagem desse tipo. No transcorrer da aprendizagem, aos poucos, o conjunto de tais imagens é enriquecido tanto no aspecto quantitativo como qualitativo. Para os interesses educacionais, essas imagens são tanto melhor quanto mais operacionais elas forem, o que permitirá o desenvolvimento de um raciocínio mais dinâmico para a resolução de problemas ou para novas aprendizagens. Para os interesses do ensino da geometria, são os objetos e os desenhos que podem principalmente estimular a formação de boas imagens e, neste contexto, elas constituem uma terceira forma de representação das noções geométricas. A natureza desta representação é bem mais complexa em relação ao uso de um objeto ou de um desenho, mas, por outro lado, permite uma utilização muita mais rápida e eficiente (PAIS, 1996, p.70).

Ao discutir sobre a generalidade e a abstração dos conceitos da Geometria, o autor afirma que esses processos são produzidos lentamente, numa lógica dialética que abrange inevitavelmente a influência da realidade física e uma reflexão intelectual sobre essa realidade. Em um primeiro momento, sua produção define-se numa conexão de durável confronto entre o universo das ideias e a realidade física.

Para Pais (1996), se por um lado a procura dessas características tem sido o destaque maior do ensino da Geometria, por outro as dificuldades na efetivação desta finalidade são ainda permanentes, eventualmente pela rejeição ou pela persistência em ponderar os obstáculos relacionados à vivência do estudante.

Em conformidade com o investigador, um modo de o discente entender essa abstração é experienciar um processo evolutivo, no qual ele possa recordar dificuldades passadas no próprio progresso histórico do conceito. Nesse cenário de conceitualização, geralmente, o estudante mobiliza as representações por objetos e desenhos e, depois, por imagens mentais.

Pais (1996) enfatiza que a atividade de representar um conceito apenas faz sentido completo se esse conceito já estiver num determinado nível de formalização.

Então, numa fase primária da aprendizagem, o estudante tende a identificar conexões entre o conceito e sua representação, quando diante das dificuldades geradas pelo processo de abstração. Dessa maneira, um rudimentar risco no quadro branco ou na folha de caderno passa a ser um segmento de reta, como na situação clássica da Geometria Plana, na qual os conceitos são reconhecidos pelo seu desenho.

É relevante destacar que o próprio termo figura apresenta duas interpretações: a primeira, é compreendida como um conceito da Geometria e, a segunda, é entendida como apenas uma representação gráfica. A passagem desta dupla associação dialética, abrangendo o individual e o global, o concreto e o abstrato, é provavelmente o maior obstáculo epistemológico²⁰ (no sentido bachelardiano) enfrentado pelo estudante na evolução primária da aprendizagem.

Ao apresentar essa relação dialética, percebemos uma convergência desse autor brasileiro com Fischbein (1993) e com Duval (1995). Fischbein (1993) indica que uma figura geométrica pode ser caracterizada como tendo propriedades profundamente conceituais. Todavia, uma figura geométrica não é um mero conceito, mas sim uma imagem visual, incluindo a representação mental da propriedade espacial.

Além disso, ao analisar as figuras geométricas como representações gráficas, Pais (1996) se aproxima de Duval (1995), que considera essas figuras como representações semióticas de objetos geométricos.

Cientificamente, o conceito não pode ser vulnerável às mudanças que possibilitem a produção de diferentes interpretações. Nessa direção, Pais (1996) comenta:

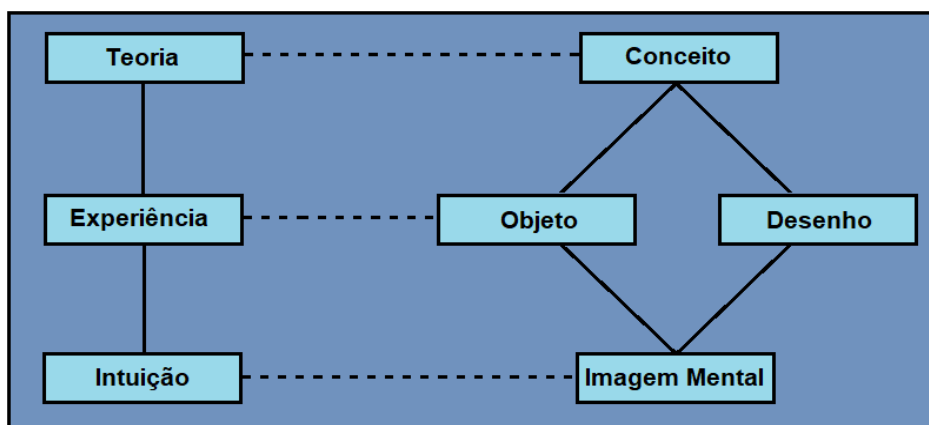
enquanto conhecimento é construído pelo homem, existe uma série de particularidades que acabam determinando níveis de conceitualização diferentes. Cada indivíduo possui uma série de imagens mentais associadas a um determinado conceito. Embora esses dois elementos sejam de natureza puramente abstrata, o primeiro deles refere-se ao domínio da psicologia cognitiva, enquanto que o segundo refere-se ao aspecto racional

²⁰ Os obstáculos epistemológicos são inerentes ao processo de conhecimento, constituem-se em acomodações ao que já se conhece, podendo ser entendidos como antirupturas. O conhecimento comum seria um obstáculo ao conhecimento científico, pois este é um pensamento abstrato (GOMES; OLIVEIRA, 2007, p.97).

e objetivo da ciência. O trabalho didático situa-se entre esses polos interligados.

O autor apresenta um esquema que articula os três aspectos fundamentais do conhecimento geométrico – a intuição, a experiência e a teoria – aos quatro componentes básicos à aprendizagem geométrica – o objeto, o desenho, a imagem mental e o conceito –, estes últimos já foram explicados antes neste texto. A correlação entre eles constitui o pensamento geométrico, como ilustrado a seguir na Figura 13.

Figura 13 – Esquema sobre a formação do pensamento geométrico conforme Pais (1996)



Fonte: adaptado de Pais (1996)

Como sinalizado pelo pesquisador, pelo esquema, a intuição é um modo de conhecimento direto que está a todo momento acessível na essência das pessoas e cuja justificativa e esclarecimento não solicita um processo dedutivo de natureza racional orientada por uma série lógica de argumentações deduzidas umas das outras.

Nessa situação, o conhecimento geométrico apoiado apenas no aspecto intuitivo é caracterizado, antes de mais nada, por um funcionalismo praticamente direto quando relacionado com a evolução necessária de uma sequência dedutiva do raciocínio lógico. Aqui, em nosso entendimento, o pensar em Geometria é de natureza intuitiva, isto é, a pessoa mobiliza o *pensamento geométrico intuitivo*, pois analisa os objetos geométricos de forma intuitiva.

Segundo Pais (1996), os axiomas da Geometria Euclidiana podem ser admitidos com fundamento nesse modo de conhecimento intuitivo:

os axiomas da geometria euclidiana podem ser aceitos com base nesta forma de conhecimento intuitivo. Conforme observa Bkouche (1983), Legendre – um notável matemático da Revolução Francesa –, inicia sua obra clássica “*Eléments de Géométrie*” afirmando que **axioma** se define como “uma propriedade evidente por ela mesma” enquanto **teorema** pode ser considerado como a propriedade que se torna evidente por meio de um raciocínio matemático chamado demonstração. Por outro lado, uma vez admitidas algumas noções intuitivas, o raciocínio matemático, traduzido pelas demonstrações, não pode basear-se na argumentação intuitiva (PAIS, 1996, p.72).

Como ilustrado pelo investigador, consideremos um típico exemplo em aulas de Matemática sobre Geometria Plana, especificamente na análise de *uma reta que passa por um ponto que é interior à região limitada por uma circunferência*. Essa reta interceptará ou não essa circunferência? Certamente, a maior parte dos estudantes, que possuem uma breve introdução em Geometria, não apresenta dificuldade em argumentar que a reta efetivamente tanto interceptará a circunferência, quanto fará isso em dois pontos distintos.

O conhecimento, admitido ou expresso diretamente, é de natureza intuitiva, mobilizando o pensamento geométrico intuitivo. Todavia, esse mesmo problema pode ser explicado por uma produção experimental, por meio da prática de um desenho. Nesse contexto, o desenho é aplicado para localizar ou evidenciar uma proposição, logo é um tipo de conhecimento experimental. Então, em nossa compreensão, os estudantes mobilizam o *pensamento geométrico experimental*, pois resolveram o problema geométrico por meio de uma construção experimental.

Além disso, na resolução da situação, o aluno poderia ter realizado uma demonstração, sem o uso da intuição e do desenho, caracterizando, assim, o aspecto teórico do conhecimento geométrico. Por isso, o discente atuaria no *pensamento geométrico teórico*, marcado pelo uso do processo demonstrativo na análise do problema.

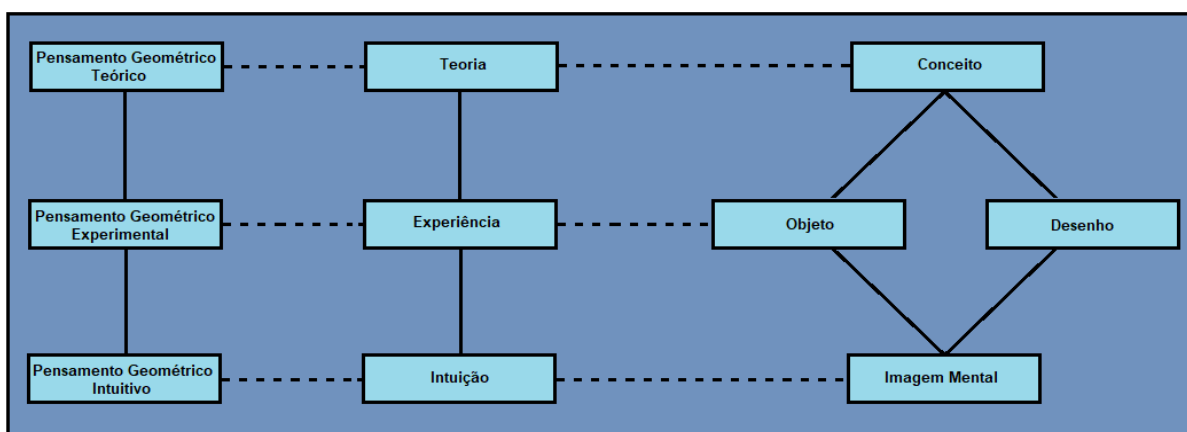
Realizando uma análise mais pontual, podemos perceber que a classificação desenvolvida por Pais (1996), relacionada ao conhecimento geométrico, implicitamente aponta a existência de níveis de pensamento geométrico. Todavia, o autor não realiza uma discussão sobre isso no seu texto.

Dessa forma, podemos considerar que o pensamento geométrico teórico, caracterizado pelo desenvolvimento de demonstrações, seja em Geometria Euclidiana como nas Não Euclidianas, corresponde ao nível mais complexo.

Enquanto que o pensamento geométrico intuitivo e o experimental, de natureza subjetiva e empírica, constituem níveis mais elementares.

No entanto, na tipologia de pensamento geométrico que organizamos a partir da ampliação das discussões de Pais (1996), como ilustrado na Figura 14, a hierarquia não é tão estanque, pois o aluno ao realizar uma demonstração, de natureza teórica, pode fazer uso da intuição e da experimentação, mobilizando assim três formas de pensar em Geometria.

Figura 14 – Tipologia de pensamento geométrico elaborada com base em Pais (1996)



Fonte: ampliado pelo autor a partir de Pais (1996)

Conforme Pais (1996, p.73):

do ponto de vista didático não se deve conceber a existência de um desses elementos totalmente desvinculados dos outros, pois, da mesma forma que há uma base intuitiva no método axiomático, o apelo à experiência acaba determinando uma forte influência na gênese das noções teóricas da geometria. Na tentativa de melhor compreender este sincretismo e suas consequências pedagógicas, é necessário destacar que, no processo de elaboração conceitual, acaba predominando uma influência significativa das representações do conhecimento que seja por um objeto, por um desenho ou por uma imagem mental. Neste contexto, é necessário destacar ainda que as demonstrações, mesmo em se tratando de um raciocínio lógico e intelectual, têm sua formalização precedida de ensaios intuitivos e/ou experimentais que acabam não aparecendo em sua redação final.

O processo intuitivo está associado às imagens mentais, por apresentarem natureza subjetiva. Todavia, esses dois elementos, que constituem o pensamento geométrico intuitivo, são desconsiderados na validação do conhecimento. Os recursos, objeto e desenho, favorecem um conhecimento geométrico de âmbito

empírico que, formando o pensar em Geometria, de natureza experimental, não definem características das noções geométricas.

Agora, na produção do conhecimento teórico da Geometria, formado principalmente pelos conceitos que estabelecem o pensamento geométrico teórico, se faz necessário analisar as implicações da intuição e da experimentação. Portanto, os elementos objeto, desenho, imagem mental e conceito se complementam e articulam-se com os aspectos intuitivo, experimental e teórico, formando o pensamento geométrico.

Em vista disso, com base nas discussões de Pais (1996), em nossa compreensão, podemos considerar que o pensamento geométrico pode ser definido como a capacidade mental de construir conhecimentos geométricos a partir de intuição, experimentação e teoria, correlacionados com objeto, desenho, imagem mental e conceito.

3.4 Pensamento geométrico na compreensão de Maria Alice Gravina (2001)

Maria Alice Gravina (2001) em sua tese de doutorado, cujo título é “*Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo*” aponta que a natureza evolutiva do pensamento geométrico se inicia com o pensamento empírico, e finaliza nos pensamentos hipotético-dedutivos.

Nessa direção, no primeiro tipo de pensamento geométrico, o significado atribuído à Geometria apresenta um caráter empírico, ou seja, o estudante, ao analisar os objetos geométricos, mobiliza características extraídas dos objetos que constituem o mundo ao seu redor (Geometria Empírica).

Enquanto que no segundo tipo de pensamento geométrico, a Geometria ganha um status dedutivo, então, o discente reconhece os objetos geométricos por meio de processos dedutivos, isto é, mobilizando propriedades desses objetos que passam agora a compor o mundo abstrato (Geometria Dedutiva).

Segundo a autora, o pensamento geométrico empírico forma-se por meio das sensações e experimentações disponibilizadas pelo meio sensível adjacente. É por meio da frequência das formas nesse meio que são produzidos os primeiros processos abstratos da Geometria, marcadas profundamente por sensações do

campo visual, em que paralelogramos, retângulos, quadrados, losangos e trapézios são denominações utilizadas apenas para reconhecer formas.

As situações vivenciadas na escola, referentes à determinação de medidas e manuseios empíricos, carregam o primeiro reconhecimento dos atributos geométricos. Dessa forma, no estudo dos quadriláteros, os estudantes determinam as medidas dos ângulos internos e, ao realizarem a soma dos valores obtidos, podem estabelecer a generalização *“A soma dos ângulos internos de um quadrilátero vale 360 graus”*.

Este tipo de situação de aprendizagem não busca promover o desenvolvimento do pensamento geométrico de âmbito hipotético-dedutivo, mas, sim, pretende promover uma ruptura com o pensamento geométrico de natureza empírica, preparando o estudante, até que ele chegue ao pensamento geométrico hipotético-dedutivo.

Nessa direção, estabelecendo uma ligação com a tipologia de pensamento geométrico, que organizamos com base na discussão de Pais (1996), podemos considerar que o intuitivo e o experimental correspondem ao pensamento geométrico empírico, pois, neles, a Geometria é analisada por meio de experiências empíricas e intuitas. Enquanto que o teórico equivale ao pensamento geométrico hipotético-dedutivo, porque os objetos geométricos são estudados com base em demonstrações e processos dedutivos.

Para Kopke (2006), no pensamento geométrico empírico, as noções geométricas podem ser exploradas de forma progressiva, por meio das vivências intuitivas dos estudantes. Nesse cenário, nas diversas situações de aprendizagem em sala de aula, é fundamental que os alunos tenham contato com problemas relacionados ao espaço, e busquem desenvolver soluções com base em suas concepções alternativas.

A título de ilustração, podemos referir a descrição à posição do estudante na sala de aula, produzir desenhos da sala ou do percurso da escola até a residência do discente. Lembrando que isso é válido quando tivermos a intenção de desenvolver o pensamento geométrico de alunos da educação infantil, pois nesse nível de ensino o foco são as noções geométricas, e não os conteúdos da Geometria em si.

Gravina (2001) argumenta que o desenvolvimento do pensamento geométrico em nível hipotético-dedutivo demanda raciocínios sobre objetos abstratos (raciocínios lógico-dedutivos), que nem sempre se estabelecem de forma espontânea. Tais raciocínios definem conexões de cunho necessário e ou suficiente entre fatos geométricos.

Ao alcançar esse nível de pensamento geométrico mais elaborado, por meio do estudo da Geometria hipotético-dedutiva, os objetos geométricos são justificados por meio de demonstrações, logo, considerações intuitivas não são mais válidas. Refere-se, portanto, à produção de conhecimento geométrico considerando a Geometria como um campo da Matemática, simultâneo ao desenvolvimento do pensamento geométrico.

Em Gravina (2008), a investigadora anuncia que o pensamento geométrico hipotético-dedutivo é marcado por dois níveis de desenvolvimento de aprendizagem em Geometria:

podemos considerar pelo menos dois níveis de desenvolvimento dos alunos no processo de aprendizagem de geometria. O primeiro enfoca a compreensão da geometria como um modelo teórico baseado em axiomas, definições, teoremas e provas. O segundo enfoca o desenvolvimento de habilidades que dão suporte à própria produção de provas dos estudantes, assumindo que já é muito claro para eles o significado de provar um teorema – um raciocínio dedutivo baseado em axiomas, definições e teoremas já provados. Alguns quadros teóricos foram desenvolvidos como uma contribuição para a compreensão das habilidades cognitivas necessárias neste processo de aprendizagem em ambos os níveis²¹. (p.565, tradução nossa).

Nesse contexto, a pesquisadora entende o pensamento geométrico como os raciocínios de origem dedutiva e visual, que são manifestados em situações nas quais ocorre a manipulação de desenhos introduzidos em um campo conceitual bem estabelecido.

²¹ We can consider at least two levels of students' development in the process of learning geometry. The first one focuses on the understanding of geometry as a theoretical model based on axioms, definitions, theorems and proofs. The second one focuses on the development of abilities that will give support to the students own production of proofs, assuming that is already very clear to them the meaning of proving a theorem – a deductive reasoning based on axioms, definitions and theorems that were already proved. Some theoretical frames have been developed as a contribution to the understanding of the cognitive abilities required in this learning process in both levels (GRAVINA, 2008, p.565).

É o pensamento que possibilita a produção de conhecimento, que concebe a Geometria como modelo teórico do meio sensível adjacente. Tal modelo é produzido de modo magnífico (pois refletem com considerável exatidão aos fenômenos do meio), por meio da dedução de teoremas e demonstrações, mediante inferência lógica, tendo por base um reduzido número de pressupostos (axiomas) que o processo intuitivo não dá conta.

A elaboração de conjecturas e de contraexemplos, a alteração e o aperfeiçoamento de conjecturas são necessários à produção desse modelo teórico, considerando a todo o momento que o foco é a aprendizagem, por meio do processo argumentativo hipotético-dedutivo, a autenticidade do que até o momento era apenas provável. Dessa maneira, provoca-se um sistema espiralado de construção de teoremas, marcado pela elaboração de novos teoremas tendo por base teoremas demonstrados anteriormente.

Gravina (2001) também cita em sua tese as habilidades intelectuais fundamentais à produção do conhecimento geométrico e, conseqüentemente, necessárias ao desenvolvimento do pensamento geométrico: *abstrair, generalizar, estabelecer relações, errar, elaborar e refinar conjecturas, testar hipóteses, produzir demonstrações*.

Tais habilidades, que a autora também denomina de experimentos de pensamento, são ações que definem características do processo de construção em Matemática. Nesse sentido, para a educadora matemática, o pensar geometricamente é constituído por todos esses elementos, sendo que eles não se desenvolvem de forma hierárquica, isto é, um aluno pode apresentar mais de uma dessas características em seu pensamento geométrico.

Todavia, nesta tese, supomos que a primeira habilidade intelectual do pensamento geométrico sinalizada por uma pessoa é a capacidade de abstrair, prolongando-se com as outras, pois ela já é mobilizada nos primeiros anos de vida de uma criança pequena, antes mesmo do início da escolarização.

Kopke (2006) menciona ainda outros experimentos matemáticos que caracterizam o pensamento geométrico, mobilizados em situações de observação do espaço: *reconhecer formas, representá-las, identificar suas propriedades e abstraí-las*. Isso pode ser verificado na seguinte passagem:

a observação do espaço é incentivada para que os alunos possam reconhecer formas, representá-las, identificar suas propriedades e abstraí-las. Essas habilidades são tidas como a base para a construção das relações espaciais que caracterizam o pensamento geométrico. Exemplos de atividades são dados como aplicações do conhecimento geométrico: construção civil, modelagem, costura, artes plásticas e esporte (KOPKE, 2006, p.132).

Essa investigadora defende que, para promover o desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes, é importante o professor de Matemática trabalhar os conceitos geométricos em conexão com as diferentes disciplinas escolares (como, por exemplo, desenho geométrico, artes plásticas, geografia, etc.), possibilitando sua perspectiva interdisciplinar. Logo, para a autora, a interdisciplinaridade também desenvolve o pensar geometricamente.

Gravina (2001) alega que na passagem do pensamento geométrico empírico para o pensamento hipotético-dedutivo, se faz fundamental uma importante reorganização do modo de pensar, sendo que a situação didática elaborada pelo professor pode ser um relevante intermediador do progresso das características cognitivas que estão vinculadas nesse contexto.

Nesse sentido, para Gravina (2001) um *software* de Geometria Dinâmica, por exemplo o GeoGebra, ao ser trabalhado em sala de aula, desenvolve algumas das primeiras características do pensamento geométrico, como *estabelecer relações* e *conjecturar*, pois esse ambiente computacional possibilita que o estudante produza e manipule objetos concreto-abstratos. Para a autora, o *software* educativo pode desencadear essas ações mentais de forma mais ativa do que o ambiente estático, feito por papel e lápis pelo aluno.

É importante destacar que, na escola, o docente, ao propor um cenário de aprendizagem promovendo o avanço do pensar em Geometria, é fundamental a tarefa de *desenvolver o pensamento geométrico*, considerada como uma atividade intencional. Nessa direção,

a aprendizagem da geometria leva, necessariamente, à ascensão em patamar de conhecimento. Mas esta é aprendizagem que depende de provocação intencional porque na crucial mudança de natureza de pensamento – de empírico para dedutivo – apresentam-se dificuldades não superáveis de forma espontânea (GRAVINA, 2001, p.57).

Contudo, como considera Almeida (2016), a atividade intencional apresenta naturezas diferentes para o estudante e para o professor. No caso do professor, a sua atividade intencional em conduzir o estudante a desenvolver o pensar geométrico deve ser evidente. Ou seja, o docente deve ter o objetivo de indicar cenários que promovam o progresso dessa instância de pensamento matemático em seus discentes. Como ilustração disso, trabalhar problemas sobre os quadriláteros notáveis.

No caso do estudante, essa intenção é provavelmente indireta, pois ao trabalhar com problemas sobre os quadriláteros notáveis, ele (o discente) tem o intuito em solucionar o problema, logo, o foco não é o desenvolvimento do seu pensamento geométrico. Todavia, é justamente essa intenção em produzir uma solução ao problema que poderá conduzir o estudante à evolução do seu pensar geometricamente (ALMEIDA, 2016).

Ao classificar a Matemática como uma atividade humana, Gravina (2001) enuncia que:

a matemática é criação humana voltada ao estudo de regularidades, quer sejam advindas de percepções sobre o mundo real, quer sejam emergências num quadro puramente abstrato. Este é um dos olhares sobre a Matemática. Em grande parte, é o olhar da geometria euclidiana. Outros podem ser os olhares, igualmente subjetivos (p.9-10).

Nessa direção, podemos considerar a Geometria também como uma atividade humana; para tanto, o conhecimento não está no objeto e nem no sujeito, mas nas ações do sujeito sobre o objeto, “ações estas que se internalizam e se organizam, desencadeando um processo evolutivo de estruturas lógicas – de menos acabadas para mais completas – com consequente ascensão de patamar de conhecimento” (GRAVINA, 2001, p.19).

Desse modo, o fato de um estudante analisar um losango, seja representado por meio de uma pipa, seja ilustrado por meio de uma construção no GeoGebra, não significa que ele esteja considerando esse quadrilátero notável como um objeto geométrico. Isso quer dizer que, mesmo o aluno estando explorando esse conceito, não indica ele estar produzindo Geometria ou explorando o meio geométrico.

Logo, um estudante trabalhará no meio geométrico somente quando ele produz a compreensão e o significado ao losango. De outra maneira, um aluno está

analisando um losango como um objeto geométrico ou respondendo um problema que explora suas características e propriedades no momento em que ele está pensando geometricamente.

Isso ocorre, por exemplo, ao considerar o losango como um quadrilátero notável que apresenta todos os lados com comprimentos de medidas iguais, logo são congruentes entre si. Ou então, perceber que o losango também é incluído no grupo dos paralelogramos, porque seus lados opostos são iguais, os seus ângulos internos opostos possuem a mesma medida de abertura e suas diagonais cortam-se ao meio.

Assim, considera-se que o losango é todo paralelogramo que apresenta todos os lados congruentes. Ou ainda, perceber que o losango apresenta duas propriedades que não são evidenciadas em alguns paralelogramos quaisquer: as diagonais são perpendiculares entre si e estão localizadas nas bissetrizes dos ângulos internos (COSTA, 2016).

Nesse contexto, e com base no que discute Almeida (2016), podemos enfatizar que o pensamento geométrico é uma atividade especificamente humana que deriva “das generalizações estabelecidas, como resultado de conjecturas sobre dados e relações matemáticas e por meio de uma linguagem cada vez mais simbólica, usada na argumentação” (ALMEIDA, 2016, p.66).

Aqui a generalização é um processo muito importante, que pode acontecer em cenários geométricos, em contextos matemáticos como a modelação, derivando-se como expansão do raciocínio que supera as situações específicas.

Além disso, para que o estudante mobilize o pensamento geométrico, a aprendizagem geométrica deve ocorrer com entendimento e clareza, logo, no ensino e na aprendizagem da Geometria, devemos estimular situações nas quais os alunos sejam capazes de desenvolver compreensão e vocabulário geométrico. Portanto, para obtermos o desenvolvimento do pensar geometricamente, a aprendizagem geométrica deve ter como foco a produção de significação.

Tanto Gravina (2001) como Kopke (2006) destacam a importância da modelagem no desenvolvimento do pensar geometricamente. Para a primeira pesquisadora, no processo de modelagem de objetos geométricos e de suas conexões, existe um sistema de representação que envolve diferentes tipos de

linguagens: natural, simbólica, gestual, visual, gráfica, espacial, etc. Essa compreensão a aproxima do que Duval (1995) considera como as representações, isto é, fonte de acesso aos objetos da Matemática.

No sistema de representação da geometria tem-se linguagem natural/simbólica e desenhos, em solidariedade, dando suporte aos raciocínios de natureza dedutiva. Um exemplo: a demonstração do teorema de Pitágoras - “num triângulo retângulo a área do quadrado sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas dos quadrados sobre os catetos” - inicia com desenho bastante simples solidário ao enunciado, a saber, um triângulo retângulo e quadrados sobre os lados do triângulo. É o acréscimo de novos objetos geométricos que torna o desenho solidário à demonstração - são novos triângulos que “deslizam” em retas paralelas. Uma das primeiras dificuldades da situação de aprendizagem é interpretar o desenho que acompanha uma definição ou um teorema e sua demonstração. Trata-se de entender que o desenho é uma instância particular de representação de determinada classe de objetos geométricos e que é na fusão adequada de significantes (no desenho) e significados (nos enunciados) que se constituem mentalmente os objetos geométricos e os teoremas cristalizados no sistema de representação (GRAVINA, 2001, p.59).

Para Almeida (2016), o grau de vivência dos estudantes estabelece a linguagem aplicada. Para esse pesquisador, o grau de vivência está desvinculado da maturação biológica do estudante, isto é, não mantém relação com a idade. Em outras palavras, os discentes mais experientes são aqueles que tiveram maior convivência com cenários de aprendizagem relacionados à Geometria, que explorem, como ilustração, o desenvolvimento de generalizações de padrões geométricos (ALMEIDA, 2016). Logo, os estudantes experientes não são, necessariamente, aqueles com maior idade.

Dando continuidade, Gravina (2001) analisa a evolução do pensamento geométrico a partir dos estágios do desenvolvimento da inteligência de Piaget. Para a autora, o pensamento geométrico hipotético-dedutivo só surge no estágio operatório formal, que corresponde ao estágio piagetiano mais sofisticado, marcado pela constituição do pensamento matemático abstrato:

o último estágio de desenvolvimento – o estágio operatório-formal – é a constituição do pensamento abstrato, independente de ações e transformações reais; é o raciocínio sobre o possível e o necessário, a capacidade de pensar com hipóteses daí tirando novas relações – os raciocínios hipotéticos-dedutivo; é o raciocínio proposicional – operações sobre operações; são as generalizações, significando a possibilidade de

teorizar e colocando o sujeito para além do seu então conhecido universo de experiências imediatas (GRAVINA, 2001, p.21).

Assim como Fischbein (1993), para a autora brasileira, a Geometria Euclidiana é um campo da Matemática cujo foco são objetos idealizados. O termo “idealizados” se refere ao fato de os objetos geométricos não existirem no meio físico, mas somente no meio abstrato, isto é, no mundo das ideias, sendo derivados, então, da abstração e da generalização. Dessa forma, triângulos, retângulos, circunferências e esferas são objetos idealizados a partir de objetos físicos no meio ambiente.

As primeiras produções idealizadas de forma espontânea de toda criança baseiam-se em características globais que determinados objetos dispõem, e são exclusivamente sensações do âmbito visual e perceptivo, referentes a certas denominações.

Dessa maneira, no ensino e na aprendizagem da Geometria ocorre a sofisticação das idealizações, pois, os registros de natureza perceptiva modificam-se em objetos de âmbito geométrico por meio do processo de conceitualização de seus atributos específicos.

A organização dos objetos idealizados é realizada pelo processo de modelagem matemática, permitindo o estabelecimento de conexões geométricas e, conseqüentemente, gerando um novo grau de conhecimento, por meio do estudo de teoremas e de demonstrações que justificam e esclarecem conexões entre as formas idealizadas.

A passagem do conhecimento geométrico empírico para o de natureza hipotético-dedutivo demanda uma adaptação. Dessa forma, procuram-se processos argumentativos que justifiquem determinadas propriedades como originárias de outras, não admitindo mais as simples observações e averiguações, que até o momento eram válidas. Portanto, refere-se ao “domínio de um certo modelo da realidade, e isto depende de abstrações e deduções inseridas em um corpo teórico” (GRAVINA, 2001. p. 52).

A pesquisadora argumenta que no âmbito da Geometria Euclidiana os axiomas estabelecem o modelo, sobretudo o axioma do paralelismo, com o controle de sua funcionalidade disponibilizado pelos princípios de inferência lógica. A

evolução do pensamento geométrico influencia fortemente a compreensão desse modelo. A explicitação dessa evolução pode ser encontrada na Teoria de Van-Hiele, sobre os níveis de desenvolvimento de pensamento geométrico²², que possui um forte diálogo com os estágios de desenvolvimento da inteligência de Piaget.

Concordamos com Gravina (2001), ao considerar o primeiro nível de Van-Hiele como um tipo de pensamento geométrico de natureza empírica, pois em tal nível os alunos reconhecem formas geométricas por meio da abstração de características visuais (ou perceptivas) dos objetos do mundo físico (Geometria Empírica). Logo, as propriedades dos objetos geométricos não são consideradas.

Os outros níveis iniciais, isto é, o segundo nível (no qual, ocorre a identificação das formas geométricas a partir de suas propriedades) e o terceiro nível (marcado pela articulação das propriedades dos objetos geométricos) de Van-Hiele também apresentam essências empíricas, pois são caracterizados pela ausência de argumentos dedutivos que justifiquem as propriedades das figuras e que fundamentem as relações inferenciais entre essas singularidades geométricas.

O pensamento geométrico de âmbito dedutivo forma-se somente a partir do quarto nível de Van-Hiele, que é caracterizado pela integração de axiomas e teoremas no modelo teórico da Geometria Euclidiana. Além disso, nesse nível vanhieliano, é desenvolvida a compreensão do sentido de uma demonstração, logo um estudante já é capaz de construir demonstrações.

A consolidação do pensamento geométrico hipotético-dedutivo ocorre no quinto e último nível proposto por Van-Hiele, no qual o aluno transita pelas Geometrias Não-Euclidianas; então, observações e vivências do mundo empírico não são mais válidas.

Gravina (2001) também afirma que a compreensão da evolução do pensamento geométrico é explicada pela Teoria de Piaget. Tal fenômeno pode ser verificado nas seguintes passagens:

é à luz da teoria de Piaget que se pode entender esta evolução do pensamento geométrico. A identificação de diferentes formas geométricas começa com as *abstrações empíricas*; é assim que a palavra “triângulo” passa a designar a classe das formas triangulares pela comparação com formas que não guardam esta característica. As *abstrações pseudoempíricas* respondem pela apreensão, nos objetos geométricos, de

²² Esses níveis são discutidos em maior profundidade no quarto tópico dessa tese.

propriedades neles não explícitas, mediante experimentos de pensamento; é quando são identificadas as diferentes propriedades de um quadrado – ângulos retos, lados iguais, diagonais perpendiculares – mas ainda sem o estabelecimento de relações inferenciais entre essas propriedades. Quanto aos teoremas e demonstrações, entram em cena, sobretudo, as *abstrações reflexionantes*, quando relações inferenciais tornam-se objeto de investigação e a explicação exige raciocínios de natureza lógico-dedutiva. É na coordenação das operações mentais que se constituem as relações existentes entre esses objetos e as razões que as explicam. Isto implica a construção de conhecimento na forma de teoria, viabilizando novos patamares de conhecimento.

Para Piaget, a axiomatização resulta da *abstração reflexiva*. Esta, ao retroagir sobre o modelo teórico, leva à tomada de consciência da essência da axiomatização. Em novo patamar de reflexão, a liberdade de escolha de axiomas assegura fundamentos para teorias cada vez menos intuitivas (GRAVINA, 2001, p.55).

Nessa perspectiva, a adequada articulação entre esses diferentes tipos de abstrações pode promover o desenvolvimento do pensamento geométrico. Ainda segundo a autora, um dos principais aspectos a serem considerados na composição do pensamento geométrico é a compreensão da divergência entre validações de natureza empírica, argumentações de origem hipotético-dedutiva e a compreensão da necessidade dessas argumentações. Soma-se a isso o estabelecimento da habilidade para produzir demonstrações.

Portanto, com relação ao seu entendimento, Gravina (2001) indica que o pensamento geométrico é a elaboração sobre formas que são, inicialmente, abstraídas do mundo em que vivemos. Ainda, a autora classifica esse pensamento em duas categorias:

- de **natureza empírica**: é o pensamento que identifica regularidades mas sem a preocupação de explicá-las (por exemplo, após alguns experimentos, o aluno conclui que no triângulo retângulo o quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma das medidas dos quadrados dos catetos).

- de **natureza hipotética-dedutiva**: é pensamento no quadro conceitual que se organiza por meio de noções primitivas, relações primitivas, axiomas, definições e teoremas. Aqui as demonstrações se fazem presentes (por exemplo, a partir de equivalência de áreas é explicado porque é verdadeiro o teorema de Pitágoras). Este pensamento só é atingido por meio da educação formal, diferentemente do pensamento empírico, que pode ser fundado, por exemplo, em experiências práticas com medidas.

Quanto aos experimentos de pensamento (*abstrair, generalizar, estabelecer relações, errar, elaborar e refinar conjecturas, testar hipóteses e produzir demonstrações*), Gravina (2001) listou aqueles que se fazem presente nos raciocínios de natureza geométrica, mas essas habilidades fazem parte, com certeza, do pensamento matemático na sua forma mais geral.

3.5 Pensamento geométrico na compreensão de José Carlos Pinto Leivas (2009)

José Carlos Pinto Leivas (2009) em sua tese de doutoramento intitulada *“Imaginação, Intuição e Visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura em Matemática”*, considera a Geometria como atividade vinculada ao ser humano.

Logo, tendo por base Fischbein (1987), sinaliza que essa atividade evolui, dentro outros, um elemento intuitivo, no qual o raciocínio matemático pode ser produzido a partir de visualização, imaginação e inclusive por atributos biológicos, conforme pesquisas da Psicologia, da Sociologia e da Matemática.

Nessa direção, o conhecimento não está no objeto e nem no sujeito, mas sim nas ações do sujeito sobre o objeto. Então, ao resolver um problema geométrico, o estudante pensará geometricamente quando sua ação estabelecer sentido e significado ao saber em jogo nesse problema, logo ele está atuando e interagindo no mundo da Geometria.

Assim, nessa perspectiva, podemos dizer que o pensamento geométrico é uma ação tão somente humana que se manifesta na exploração de situações que aguçam a curiosidade dos estudantes, permitindo-os realizar conjecturas que devem ser validadas ou refutadas por meio de contraexemplos, usando recursos apropriados, a partir de justificativas e argumentações (NASSER, 2017). Conforme tal autora, esse processo promove o raciocínio, levando ao domínio do pensamento dedutivo.

Segundo Leivas (2009, p.60), “a educação geométrica vai muito além do que simplesmente formalização. É necessário adequar a forma de compreensão dos

conceitos geométricos que têm permeado seu ensino focado exclusivamente nos Elementos de Euclides”.

Nesse contexto, para que o estudante desenvolva o pensamento geométrico, a aprendizagem geométrica deve ocorrer com sentido e compreensão, isto é, o professor de Matemática deverá enfatizar no ensino e na aprendizagem da Geometria, situações que proporcionem aos alunos uma compreensão do campo geométrico e sua linguagem (ALMEIDA, 2016).

Leivas (2009) discute sobre a existência do pensamento geométrico avançado que, segundo o autor, pode ser caracterizado como um processo capaz de produzir estruturas mentais de natureza geométrica por meio da imaginação, intuição e visualização, para a construção de conhecimentos matemáticos científicos. Desse modo, ele defende que os termos imaginação, intuição e visualização formam uma tríade fundamental ao desenvolvimento do pensamento geométrico.

Leivas (2009) considera, assim como David Tall (1991), que o pensamento avançado [no caso do pesquisador brasileiro, que introduz o geométrico] não depende do grau de escolaridade em que o indivíduo se encontra, e nem da sua idade biológica.

Assim, para o autor, um pensamento geométrico avançado pode ser alcançado por um estudante em construção inicial quando ele distingue, por exemplo, um quadrado de um retângulo ao associar ao primeiro o formato de uma janela e ao segundo de uma porta. Ainda em níveis de escolaridade básica, os alunos teriam como entender intuitivamente um fractal ou o caminho mais curto entre dois pontos de uma cidade organizada por meio da Geometria do Táxi.

Dessa forma, o pensamento geométrico avançado não é alcançado exclusivamente por estudantes em nível de graduação ou de pós-graduação, tendo em vista que eles, “teoricamente”, têm maiores contatos com as geometrias não euclidianas. Se na escola básica o estudante vivencia o estudo dessas geometrias, mesmo que de forma mais simples do que os estudos universitários, então esse aluno poderá desenvolver pensamento geométrico avançado em relação ao seu

nível de ensino, como pode ser verificado nas pesquisas de Souza (2015) e de Portella (2016)²³.

Leivas (2009) percebe, como Fischbein (1987), que a intuição é algo primordial na medida em que transforma um conhecimento intuitivo em conhecimento mais elaborado. Na construção inicial do conhecimento geométrico essas habilidades mentais: intuição, imaginação e criatividade, no entender do pesquisador, desenvolvem pensamento geométrico avançado.

Para Leivas (2009), intuição é o processo de produção de estruturas mentais para a elaboração de um certo conceito da Matemática, por meio de vivências concretas com um determinado objeto. Aqui, o conceito deve ser constituído a partir de reflexão e consciência, criando significado de veracidade por meio da autoevidência.

O autor considera que a intuição influencia no processo de matematização de modo muito eficaz e, sobre o assunto, ele indica que a Geometria Diferencial é um forte campo para conexões entre a Geometria e Análise; tal fato, contribuindo amplamente para desenvolver o conhecimento matemático. Leivas (2009) menciona o caso de Poincaré, que depois de negar a existência de um campo geométrico não euclidiano não intuitivo, desenvolveu seu modelo desse “novo campo”, isto é, o *modelo de Poincaré para Geometria Hiperbólica*.

Outro exemplo de um percurso geométrico mencionado por Leivas (2009) que é muito intuitivo e eficiente é o relacionado ao uso de curvas de níveis, que contribui no entendimento do estudo de derivadas direcionais. A análise geométrica é mais interessante do que o tradicional caminho feito no Cálculo, a partir do uso de algoritmos.

Ao analisar a Geometria Euclidiana, Leivas (2009) indica que o processo intuitivo aparece nesse ramo geométrico nos subsequentes momentos:

²³ A primeira autora (SOUZA, 2015) pesquisou, com uma turma do 3º ano do ensino médio, a produção de conhecimentos sobre Geometria Elíptica com uso de software de Geometria Dinâmica. O segundo autor (PORTELLA, 2016) investigou a construção de conhecimentos básicos sobre Geometria Hiperbólica por três alunos do 7º ano do ensino fundamental, por meio do GeoGebra na produção do modelo de Poincaré. Os dois estudos buscaram analisar alternativas didáticas referentes à introdução de conteúdos dessas duas geometrias, com a utilização do mencionado software, no ensino básico do Brasil. Os resultados de ambas as pesquisas apresentaram ser viável trabalhar, conteúdos de Geometrias Não Euclidianas, com estudantes da educação básica.

1. das construções espaciais, para dar significado à igualdade de grandezas (áreas) enraizando a álgebra geométrica [intuição topológica]; 2. da medida das grandezas e de suas relações. (múltiplo de uma grandeza) [intuição métrica]; 3. do número inteiro, para o desenvolvimento da aritmética, em que os pressupostos são retirados da teoria geral das grandezas. [intuição algébrica] (p.202).

Para o autor, essa forma de estruturar a intuição na Geometria Euclidiana, além de promover uma conexão vai orientar o estudo da lógica euclidiana, visto que a igualdade de grandezas, sobretudo em relação à grandeza geométrica área, vai conduzir a primeira obra da chamada Álgebra Geométrica.

Na sua tese, Leivas (2009) utiliza o termo imaginação para indicar um modo de concepção mental de um conceito de Matemática, que pode ter uma representação a partir de um símbolo ou esquema visual, algébrico, verbal ou um arranjo deles, com o fim de informar esse conceito ao próprio indivíduo ou para outros.

Essa compreensão aproxima o autor das discussões de Duval (1995), que destaca a importância das representações semióticas para a atividade cognitiva do pensamento humano, pois elas também são responsáveis pela comunicação, ou seja, deixar as representações mentais disponíveis e perceptíveis ao aluno.

Segundo Leivas (2009), a imaginação está muito relacionada à abstração, do mesmo modo como a intuição, e essas habilidades podem ser acrescentadas pela visualização, compreendendo, nesse caso, que a visualização é um processo capaz de ajudar na produção do fazer em Matemática, além de informar conceitos nos vários campos matemáticos; logo, não deve ser considerada como uma maneira de representar uma figura ou um objeto.

Ao discutir a relação entre imaginação e memorização, Leivas (2009) se baseia em Jones e Bills (1998) e em Del Grande (1994):

com relação a imaginação e memorização, Jones e Bills (1998) dizem que estas são imagens mentais formadas de experiências planejadas e investigadas na mente e memorizadas a partir de experiências. Para Del Grande (apud Lindquist e Schulte, 1994, p. 158), a memória visual é uma das aptidões que parecem ter a maior importância para o desenvolvimento acadêmico além de coordenação visual-motora, percepção de figuras em campos, constância de percepção, percepção de posição no espaço, percepção de relações espaciais e discriminação visual (p. 158).

Ao analisar o processo de comunicação geométrico, Leivas (2009) afirma que os símbolos visuais e os verbais podem exercer uma função que deve ser apreciada, tendo em vista que várias pessoas apresentam uma forma de imaginar mentalmente que contribui para a elaboração de conceitos abstratos de modo mais acentuado do que em outras pessoas.

Concordando com Skemp (1993), o autor brasileiro argumenta que a construção de conceitos é um processo complexo, então para tornar uma determinada ideia de um conceito em parte consciente de uma pessoa se faz necessário uma ampla articulação da ideia com um símbolo.

Nessa direção, os símbolos verbais, apesar de apresentarem simples comunicação, são plurais, dependem da coletividade, ao passo que os símbolos visuais, mesmo possuindo difícil comunicação, são singulares, isto é, são individuais. Tal fato, geralmente, pode representar um obstáculo à aprendizagem.

Dessa forma, tendo por sustentação em Skemp (1993), Leivas (2009) faz referência a duas classes de imaginação importantes do pensamento geométrico. A primeira pode ser representada por símbolos visuais, que se esclarecem a partir de diagramas de todas as classes; sobretudo as figuras geométricas, sendo relacionado com o *pensamento visual*.

A comunicação desse pensamento ocorre por meio de atividades como desenho, pintura ou filmagem; tais ações, a torna um processo complicado, pois no ensino há uma ênfase na língua materna (representações verbais).

A segunda pode ser ilustrada por símbolos algébricos, que apresentam maior proximidade com o conceito do que o associado símbolo visual, está associada com o *pensamento verbal*. Provavelmente, em decorrência disso, somando-se à complexidade da comunicação visual, há no ensino da Matemática uma ênfase das representações sociais ou em língua materna, como sinaliza o pesquisador brasileiro (LEIVAS, 2009).

Leivas (2009) destaca a necessidade de se considerar a imaginação desde os anos iniciais do ensino fundamental, fato que desenvolve o pensamento geométrico, evitando-se, assim, alguns problemas no ensino superior:

acredito que, se a imaginação fosse explorada no desenvolvimento de um pensamento geométrico durante toda a escolaridade, a Análise não teria a

conotação que muitas vezes lhe é atribuída nos diversos cursos de Licenciatura, como a disciplina mais difícil. Em razão de as disciplinas de Cálculo utilizarem desenvolvimento apenas algorítmico e elementos não visuais, quando o aluno chega à Análise, as dificuldades são imensas, haja vista, por exemplo, a representação geométrica em Álgebra Linear, quando os vetores são definidos em espaços de dimensão n , com $n \geq 3$. Até $n = 3$ ainda as representações são visuais, como feitos antes na representação do cubo tridimensional num plano bidimensional ou a representação no tridimensional de um cubo em quatro dimensões, o qual necessita de imaginação para poder abstrair (p.168).

Com relação à visualização, o autor considera como um processo de elaborar imagens mentais, com o fim de produzir e informar certo conceito da Matemática, com perspectivas a favorecer na solução de problemas voltados aos campos da Geometria e da Análise.

Segundo Leivas (2009), a visualização apresenta alguns benefícios que podem ser tanto mentais como físicos, à medida que a imaginação pode ter algum aspecto pictórico e possuir ligações com percepção, com memorização e com o âmagio dinâmico de imagens, além do diálogo com a elaboração de conceitos.

Com referência à imaginação e à percepção, há muitos modos nos quais a percepção pode favorecer a evolução da imaginação, sendo que isso pode ocorrer por meio da percepção de natureza tátil, por meio da qual a pessoa em convívio com certo objeto, produz uma imagem mental a partir de explorações apenas táteis, mas sem visualizar tal objeto.

Como apontado pelo autor, o uso de jogos com blocos lógicos, com crianças pequenas em situações pré-escolares, é um importante recurso para exemplificar esse fenômeno.

Ao perceber que o progresso da inteligência em Matemática, em específico, na elaboração de conceitos, muito tem a ser beneficiado caso sejam usados os procedimentos visuais típicos da Geometria, desde que esses procedimentos sejam valorizados em comparação ao algorítmico ou aos procedimentos geométricos, Leivas (2009, p.216) destaca que:

o auxílio visual geométrico, em meu entendimento, pode ser o elemento que pode percorrer a Geometria como componente curricular de forma interdisciplinar no sentido defendido por Gusdorg (citado por Pombo, 1993) de que “inter” não significa uma pluralidade ou uma justaposição, muito pelo contrário, faz uma chamada a um espaço comum, um elemento de coesão entre diferentes saberes. A interdisciplinaridade supõe a predisposição de especialistas se abrirem para o novo, de irem além do seu domínio de

conhecimento específico, permitindo uma abertura de pensamento e de curiosidade.

Assim, fica evidente a importância dada pelo pesquisador à interdisciplinaridade, isto é, de considerar a Geometria como um saber interdisciplinar e, no caso particular da licenciatura em Matemática, considerar esse campo matemático como vértice de conexão entre as várias disciplinas que contemplam os currículos dos cursos de formação de professores. Tal visão compactua com a de Rodrigues (1999), ao destacar que esse enfoque interdisciplinar promove o desenvolvimento do pensamento geométrico.

A ausência de uma prática interdisciplinar geométrica aliada à desconsideração da visualização no ensino e na aprendizagem da Geometria acaba gerando algumas incertezas, conforme ilustra Leivas (2009) no caso dos conceitos de circunferência e de círculo:

ainda existe muita confusão entre os conceitos de circunferência e de círculo, fato que não deveria mais ocorrer a partir da expressão algébrica de cada um desses lugares geométricos, objetos da Geometria Analítica, pois enquanto que o primeiro é dado por uma equação, o segundo é dado por uma inequação; enquanto o primeiro é visualizado como uma curva, o segundo é visualizado como uma região. Talvez em virtude dessa ambigüidade de notação que ainda perdura, modernamente se utiliza o conceito de bola para o círculo, ou seja, como a região do plano cuja fronteira é a circunferência. Essa ambigüidade parece produzir um obstáculo epistemológico quanto ao conceito de esfera, a qual, para muitos estudantes é um objeto maciço e não uma superfície. A topologia trata de forma mais precisa muitos destes conceitos (p.226).

Leivas (2009) alerta que visualização em Matemática não pode ser considerada como um simples modo de representar os objetos, a não ser como um processo de expressão de uma linguagem elaborada de forma mental, que pode ser o agente introdutório da abstração. Tal processo é extremamente relevante à produção do conhecimento em Matemática, sendo que suas ideias, conceitos e procedimentos possuem grande repertório de recursos de natureza visual.

Ainda, segundo o autor, imaginação, criatividade e abstração são habilidades que integradas à intuição e à visualização formam uma tríade essencial ao pensamento geométrico ao longo de toda a escolarização, incluindo os cursos de formação de professores. No caso desse último, como uma alternativa para um

avanço na qualidade da educação básica, sobretudo na melhoria da prática pedagógica do professor que trabalha na escola básica.

Portanto, com relação à sua compreensão, Leivas (2009) preconiza que o pensamento geométrico é um processo capaz de elaborar estruturas geométricas mentais a partir de imaginação, intuição e visualização, para a produção de conhecimentos matemáticos científicos.

A **intuição** é o processo de produção de estruturas mentais para a elaboração de um certo conceito da Matemática, por meio de vivências concretas com um determinado objeto. Aqui, o conceito deve ser constituído a partir de reflexão e consciência, criando significado de veracidade por meio da autoevidência.

A **imaginação** é um modo de concepção mental de um conceito de Matemática, que pode ter uma representação a partir de um símbolo ou esquema visual, algébrico, verbal ou um arranjo deles, com o intuito de informar esse conceito ao próprio indivíduo ou para outros.

Por fim, a **visualização** é um processo de elaborar imagens mentais, com o fim de produzir e informar certo conceito da Matemática, com perspectivas a favorecer na solução de problemas de Geometria e de Análise.

3.6 Nossa compreensão sobre pensamento geométrico

Verificamos, por meio da análise realizada sobre os estudos de Fischbein (1993), Duval (1995; 2005; 2011), Pais (1996), Gravina (2001; 2008) e Leivas (2009), que caracterizar e definir pensamento geométrico são tarefas bastante complexas.

Todos os autores, por exemplo, consideram o pensamento geométrico como uma capacidade mental de construir conhecimentos geométricos. Contudo, essa unanimidade não ocorre na compreensão desses pesquisadores sobre o modo como esse processo de construção ocorre.

Para Fischbein (1993), essa construção verifica-se por meio da interação entre os aspectos figurativo e conceitual relacionados à Geometria. Duval (1995) indica que esse processo baseia-se nas apreensões geométricas, mediante uma relação de subordinação. Pais (1996) sinaliza que a produção de conhecimentos

geométricos ocorre a partir de intuição, experimentação e teoria, correlacionados com objeto, desenho, imagem mental e conceito.

Por sua vez, Gravina (2001) considera que essa construção ocorre com base na análise das formas que são, inicialmente, abstraídas do mundo em que vivemos, bem como por meio da dedução de teoremas e demonstrações, mediante inferência lógica. Enquanto que Leivas (2009) aponta que esse processo deriva de imaginação, intuição e visualização.

Essa complexidade acontece, possivelmente, devido à própria natureza evolutiva da Geometria, à grande quantidade de objetos geométricos (ponto, segmento de reta, quadriláteros, circunferência, etc.) vinculados ao seu campo conceitual, à mobilização de diferentes experimentos matemáticos (explorar, elaborar e refinar conjecturas, testar hipóteses, construir demonstrações) e, ainda, pelas diferentes maneiras prováveis de considerar o pensamento em geral (ALMEIDA, 2016).

No entanto, carecemos determinar uma caracterização desse modo específico de pensar em Matemática, tendo em vista que planejamos produzir um modelo que possibilite a identificação de níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico sinalizado por estudantes do ensino básico ao resolverem atividades que abordem os quadriláteros notáveis.

Desse modo, o fechamento desse capítulo será formado pela nossa caracterização de pensamento geométrico, considerando elementos das pesquisas de Fischbein (1993), Duval (1995; 2005) Pais (1996), Gravina (2001) e Leivas (2009).

Antes de realizarmos essa caracterização, inicialmente discutiremos sobre a natureza do pensamento geométrico. Como visto anteriormente, Gravina (2001) apresenta duas naturezas dessa forma de pensar matematicamente: pensamento geométrico empírico e pensamento geométrico hipotético-dedutivo. Leivas (2009) ao introduzir o pensamento geométrico avançado, nos produz alguns questionamentos importantes, tais como, existe um pensamento geométrico elementar? Como caracterizá-lo?

Embora o pesquisador não discuta sobre esse pensar em Geometria de natureza elementar, e muito menos não faça a distinção da forma avançada

apresentada na sua pesquisa, acreditamos na existência dessas duas categorias do pensar geométrico. Para isso, nos baseamos também em Tall (1991; 1995), que discute sobre pensamento matemático de natureza avançada e elementar.

Tall (1995) aborda que o desenvolvimento do pensamento matemático inicia no ensino primário, com crianças pequenas, finalizando com a Matemática de nível universitário e da pesquisa matemática. Nessa direção, o autor sugere que

[...] o crescimento matemático começa a partir de percepções e ações em objetos no meio ambiente. As “percepções” de objetos bem-sucedidas conduzem por meio de representações visuoespaciais com aumento do apoio verbal à prova verbal de geometria visualmente inspirada. As “ações” bem-sucedidas em objetos usam representações simbólicas de forma flexível como “proceptos” – processos para fazer pensar sobre conceitos – em aritmética e álgebra. A estrutura cognitiva resultante no pensamento matemático elementar torna-se um pensamento matemático avançado quando as imagens conceituais na estrutura cognitiva são reformuladas como definições conceituais e usadas para construir conceitos formais que fazem parte de um corpo sistemático de conhecimento matemático compartilhado²⁴ (TALL, 1995, p.161, tradução nossa).

O fato de o autor considerar que o desenvolvimento do pensar em Matemática inicia-se na escola primária, em nosso entendimento esse pensamento pode iniciar-se antes do começo da escolarização, isto é, antes de a criança frequentar os ambientes escolares formais.

No caso da Geometria, a observação do espaço, o contato e a compreensão dos objetos que fazem parte do seu meio, a introdução à construção das relações espaciais são características do pensamento geométrico que são desenvolvidas por crianças bem pequenas, em locais informais.

A Geometria vivenciada por elas é voltada para a prática cotidiana, de natureza empírica e elementar, logo não há preocupação em considerar o campo geométrico como um modelo teórico. Dessa forma, os objetos do mundo físico não são analisados como representações de objetos geométricos no ambiente real.

²⁴ The mathematical growth starts from perceptions of, and actions on, objects in the environment. Successful “perceptions of” objects lead through a Van Hiele development in visuo-spatial representations with increasing verbal support to visually inspired verbal proof in geometry. Successful “actions on” objects use symbolic representations flexibly as “procepts” — processes to do and concepts to think about — in arithmetic and algebra. The resulting cognitive structure in elementary mathematical thinking becomes advanced mathematical thinking when the concept images in the cognitive structure are reformulated as concept definitions and used to construct formal concepts that are part of a systematic body of shared mathematical knowledge (TALL, 1995, p.161).

Assim, o pensamento geométrico desenvolvido nesses contextos é de natureza elementar.

Então, tendo por base Tall (1991; 1995), introduzimos que o pensamento geométrico elementar é marcado pelo contato/vivência com a Geometria da prática cotidiana (desenvolvido inicialmente antes de a criança frequentar formalmente a escola), e pelo estudo de conceitos geométricos mais simples e elementares vinculados à Geometria Euclidiana Plana, quando a criança inicia o processo de escolarização formal.

Nesse nível de pensamento, ela (a criança) observa o espaço, analisa os objetos do seu meio a partir do toque, inicia a construção de suas relações espaciais, analisa as formas e as figuras geométricas a partir da aparência global dos objetos que as representam, seja em um plano ou em um espaço.

Logo, o contato com esse tipo de Geometria possibilita o desenvolvimento do pensamento geométrico elementar. Gravina (2001) denomina esse modo de pensar em Geometria como pensamento geométrico empírico.

Do mesmo modo que Leivas (2009), consideramos que no pensamento geométrico, de natureza avançada, o foco é o estudo de objetos geométricos mais complexos, pertencentes, por exemplo, à Geometria Fractal, à Geometria Hiperbólica, à Geometria Esférica, à Topologia, etc., bem como pela integração de axiomas e teoremas no modelo teórico que constitui a Geometria Euclidiana.

Conforme o pesquisador, a vivência sistemática com essas diferentes Geometrias impulsiona o avanço do pensamento geométrico avançado que, para Gravina (2001), é de natureza hipotética-dedutiva.

Ao chegar nesse nível de pensamento, o aluno necessita realizar a distinção entre modelos refinados como os das Geometrias Não-Euclidianas. Por exemplo, no estudo de Geometrias sob a Axiomática de Hilbert, o estudante trabalha Geometria e Imaginação e, a partir disso, os conceitos sofisticam-se como Curvas em Geometria Diferencial, Grupos de Lie. Dessa forma, será possível fazer analogia entre o Cálculo Diferencial, o Cálculo Avançado ou a Análise.

Portanto, o que determina a natureza do pensamento geométrico do estudante, é o tipo de Geometria que a pessoa (criança ou adulto) estiver estudando

ou vivenciando (mesmo em ambientes não escolares), independentemente do seu nível de escolaridade, de sua idade e de sua maturação biológica.

Assim, por exemplo, um aluno do ensino fundamental que vivenciar sistematicamente o estudo intuitivo da Geometria Fractal poderá desenvolver pensamento geométrico avançado. Enquanto um discente do ensino superior, que não teve contato com conceitos geométricos no ensino básico, e não vivencia esse saber na universidade, certamente desenvolverá pensamento geométrico elementar, assim como uma criança pequena. Aqui, a diferença é que a criança e o universitário atuam em distintos níveis de pensamento geométrico elementar.

Agora, estabelecendo uma conexão entre nosso estudo e as pesquisas de Gravina (2001) e Leivas (2009), podemos tomar que o pensamento geométrico elementar, introduzido em nossa tese, corresponde ao pensamento geométrico empírico apontado por Gravina (2001), e o pensamento geométrico avançado proposto por Leivas (2009), em alguns casos, pode coincidir com o pensamento geométrico hipotético-dedutivo sinalizado por Gravina (2001).

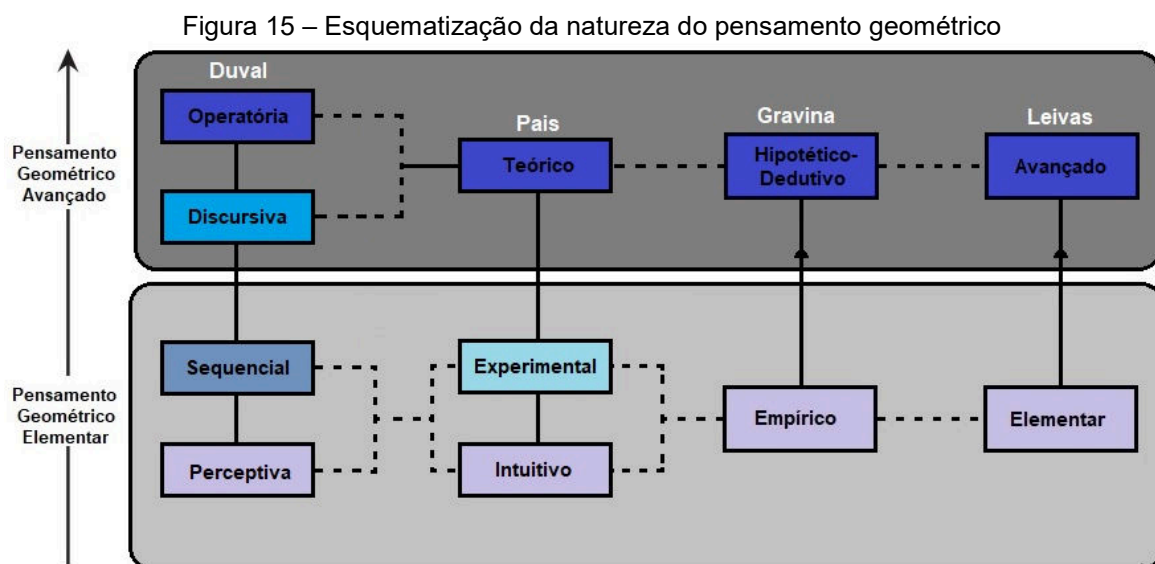
Em relação às apreensões geométricas indicadas por Duval (1995), notamos que as apreensões perceptiva e sequencial são vinculadas ao pensamento geométrico elementar, ao passo que as apreensões discursiva e operatória combinam com o pensamento geométrico avançado.

Além disso, considerando a tipologia que propomos nessa tese com base no estudo de Pais (1996), verificamos que o pensamento geométrico intuitivo e o pensamento geométrico experimental correspondem ao pensamento geométrico de natureza empírica e elementar. Enquanto que o pensamento geométrico teórico equivale ao hipotético-dedutivo e ao avançado, conforme ilustrado pelo esquema da Figura 15.

Pelo esquema dessa figura e pelas discussões apresentadas sobre pensamento geométrico, podemos perceber que os autores dão indícios da existência de níveis dessa forma de pensar em Geometria. Todavia, isso não é mencionado de forma clara ou, então, não é o foco dos estudos.

É o caso, por exemplo, de Duval (1995), que não fala em níveis, mas sim em apreensões geométricas, de forma que há uma subordinação entre elas. Desse modo, um estudante do ensino básico ao resolver um problema geométrico pode

mobilizar mais de uma apreensão, simultaneamente. A ausência do termo “níveis” em sua teoria, talvez, se justifica pelo fato dessa palavra (“níveis”) remeter à hierarquia, que não é vista com bons olhos pelo pesquisador.



Fonte: elaborado pelo autor

Já Pais (1996), ao propor três tipos de conhecimentos geométricos, Gravina (2001), ao sinalizar duas naturezas de pensar em Geometria e Leivas (2009), ao introduzir o pensamento geométrico avançado, deixam isso mais evidente.

Como Fischbein (1993), em nenhum momento do seu texto, faz referência à existência de níveis de pensamento geométrico, portanto, ele não foi incluído no esquema apresentado na Figura 15.

Para mais, como apontado por Fischbein (1993), Duval (1995), Pais (1996), Gravina (2001) e Leivas (2009), a Geometria é um campo matemático constituído por objetos idealizados. Então, os objetos geométricos não existem na realidade (no mundo físico), mas somente no mundo das ideias, oriundos, assim, da abstração.

Os objetos de nossa realidade prática são tridimensionais e, embora, por exemplo, o cubo e a esfera sejam dessa dimensão, eles são apenas construções mentais, vinculadas ao mundo abstrato, logo, não existem no mundo concreto.

No mundo real encontramos representações desses objetos geométricos. Por exemplo, um dado é um objeto real tridimensional presente em nossa realidade, que

pode representar um cubo, isto é, é uma representação de um objeto ideal do mundo platônico (abstrato).

A abstração não é um processo que se desenvolve apenas no estudo de processos dedutivos e de diferentes sistemas axiomáticos, logo, pode ocorrer já no pensamento geométrico elementar. Nessa direção, Nasser (2013, p. 892) sinaliza que:

a habilidade de **abstração** deve ser desenvolvida desde os primeiros anos de escolaridade. Os conceitos de número, reta e quadrado são exemplos de objetos matemáticos que dependem de uma abstração. Três processos contribuem para a abstração: representação, generalização e síntese. No caso dos números, por exemplo, é imprescindível que os alunos entendam a diferença de representação de um número natural e de um número racional: enquanto o número natural tem uma representação numérica única, um número racional representa uma classe de equivalência, com infinitos elementos, que são representações distintas para o mesmo número. Se esse conceito não for bem construído, os alunos não dominam o conceito de frações equivalentes, e essa dificuldade cria obstáculos para a aprendizagem de diversos conceitos, como porcentagem e escalas de ampliação ou redução (negrito nosso).

Nessa mesma linha de reflexão, Almouloud (2017, p.29) afirma que a abstração em Geometria se inicia quando a criança interage com os objetos do mundo físico:

[...] a geometria começa com uma teoria baseada em objetos, pois inclui muitos atos de **abstração** empírica com foco em objetos, mas que não despreza, de forma alguma, a existência de processos. Os conceitos, em geometria, são decorrentes de atividades que envolvem a interação física com o mundo real e dependem, também, da sofisticação da linguagem. O objeto é o foco da atenção e, só mais tarde, a linguagem utilizada para a descrição permite que a mente construa objetos platônicos, como linhas "sem largura", por exemplo (negrito nosso).

Segundo Dreyfus (2002), a abstração se refere profundamente à síntese e à generalização, mas necessita de certa energia mental pelos alunos, tendo em vista que se fundamenta na produção de estruturas cognitivas por meio de características e conexões estabelecidas entre os objetos de natureza geométrica, desconsiderando a visão sobre esse objeto.

Corroborando com esse pesquisador, autores como Klaiber, Souza, Silva e Savioli (2018) afirmam que esse processo demanda um pensamento matemático mais desenvolvido, porque, por exemplo, diante de um problema em Geometria,

quando um estudante abstrai, isso significa que ele alcançou certo nível de pensamento geométrico, mais refinado do que o nível anterior.

Não há uma distinção nítida entre muitos dos processos de pensamento matemático elementar e avançado, embora a matemática avançada esteja mais focada nas abstrações de definição e dedução. Muitos dos processos a serem considerados já estão presentes em crianças que pensam em conceitos elementares de matemática, digamos número ou valor de lugar. Eles não são usados exclusivamente em matemática avançada, nem, na verdade, são usados exclusivamente em matemática. É possível pensar em tópicos matemáticos avançados de uma maneira elementar (por exemplo, muitos exercícios padrão em anéis ou grupos podem ser respondidos apenas conectando os números certos), e há um pensamento bastante avançado sobre tópicos elementares (veja alguns dos problemas nas olimpíadas de matemática). Uma característica distintiva entre o pensamento avançado e elementar é a complexidade e como ela é tratada²⁵ (DREYFUS, 2002, p.26, tradução nossa).

Conforme sinalizado pelo autor mencionado acima, a abstração pode ocorrer em diversos momentos educacionais, desde a escola básica até a universidade. O que diferenciara é o foco que é dado em cada nível de escolaridade.

Diante dessas circunstâncias, ou seja, nos fundamentando na ideia de abstração desenvolvida por Dreyfus (2002), Nasser (2013) e Almouloud (2017), em nossa compreensão, o pensamento geométrico é caracterizado por abstrações de natureza geométrica: abstração geométrica espacial, abstração geométrica perceptiva, abstração geométrica analítica, abstração geométrica descritiva, abstração geométrica dedutiva e abstração geométrica hipotética ou teórica. Ainda, nessa tese, sustentamos que no centro dessa caracterização está a abstração geométrica espacial, seguida das demais.

É importante destacar que esse processo não é tão estanque, pois a hierarquia entre essas abstrações geométricas só inicia de forma mais definida a

²⁵ There is no sharp distinction between many of the processes of elementary and advanced mathematical thinking, even though advanced mathematics is more focussed on the abstractions of definition and deduction. Many of the processes to be considered are present already in children thinking about elementary mathematics concepts, say number or place value. They are not exclusively used in advanced mathematics, nor, indeed, are they exclusively used in mathematics. It is possible to think about advanced mathematical topics in an elementary way (e.g., many standard exercises on rings or groups can be answered by just plugging in the right numbers), and there is rather advanced thinking about elementary topics (look at some of the problems in mathematics olympiads). One distinctive feature between advanced and elementary thinking is complexity and how it is dealt with (DREYFUS, 2002, p.26).

partir da abstração geométrica perceptiva, isto é, da passagem dessa para a analítica, finalizando com a hipotética.

Desse modo, simultaneamente, um aluno que esteja matriculado nos anos iniciais do ensino fundamental, pode atuar na perceptiva (ao analisar os quadriláteros a partir do aspecto global) e na espacial (ao estudar conceitos relacionados à orientação espacial).

Ao chegar aos anos finais do ensino fundamental, ao estudar os quadriláteros notáveis, esse mesmo estudante pode avançar para a abstração geométrica analítica ou então na descritiva. Todavia, também atua na espacial, simultaneamente. Isso ocorre, pois, os conceitos vivenciados nessa última abstração não focam os quadriláteros, mas sim orientação, direção e sentido no espaço.

O mesmo pode ocorrer com um aluno que ao estudar as Geometrias Não-Euclidianas, é capaz de realizar demonstrações a partir de diferentes sistemas axiomáticos. Logo, ele atua na abstração geométrica hipotética ou teórica, mas também trabalha na espacial, ao mesmo tempo.

Então, podemos considerar que o pensamento geométrico é a capacidade mental de construir conhecimentos geométricos, de aplicar de modo coerente os instrumentos geométricos²⁶ na resolução de problemas.

É a capacidade de compreender a natureza dos fenômenos e inferir sobre eles, de identificar e perceber a importância da Geometria como uma ferramenta para entendimento do mundo físico e como um modelo matemático para compreensão do mundo teórico. Tudo isso é possível por meio de **abstrações geométricas**²⁷. São essas abstrações que possibilitam o sujeito desenvolver essa forma de pensar em Matemática.

É importante destacar que a tipologia de abstrações geométricas é uma proposta de nossa tese, para isso, nos baseamos em Duval (1995), Pais (1996), Gravina (2001) e Leivas (2009). Por exemplo, para nomear a abstração geométrica perceptiva, utilizamos a palavra “perceptiva” da apreensão perceptiva de Duval (1995).

²⁶ Estamos chamando de instrumentos geométricos, tanto os processos mentais utilizados para resolver problemas ou compreender um assunto em Geometria (THÉRÈSE, 2000), como também as ferramentas tecnológicas utilizadas nessas situações como régua, compasso, software de Geometria Dinâmica, etc (RÉGNIER, 2017).

²⁷ Nessa tese, consideramos que abstração geométrica é uma operação mental, por meio da qual somos conscientes de similaridades entre nossas experiências geométricas.

Para a abstração geométrica dedutiva, extraímos “dedutiva” do texto de Gravina (2001), em referência à Geometria Dedutiva. Na abstração geométrica hipotética ou teórica, usamos novamente “hipotética” de Gravina (2001), que discute sobre Geometria Hipotética, e a “teórica” utilizamos de Pais (1996), ao introduzir conhecimento geométrico teórico.

Além disso, as abstrações geométricas do tipo dedutiva e hipotética estão incluídas no pensamento geométrico avançado. Como visto anteriormente, essa natureza do pensar em Geometria foi inicialmente introduzida por Leivas (2009). As demais abstrações estão vinculadas ao pensamento geométrico elementar.

Visando uma melhor compreensão da estrutura de pensamento geométrico que defendemos nessa tese, elaboramos um esquema que apresenta como essas abstrações se articulam entre si, como ilustrado a seguir:

Figura 16 – Esquema das abstrações geométricas que caracterizam o pensamento geométrico



Fonte: elaborado pelo autor

A **abstração geométrica espacial** é marcada pelo estudo (ou vivência) dos conceitos de orientação espacial, que também envolvem localização, orientação, deslocamento, etc. A orientação espacial pode ser entendida como o “pegar” a realidade na qual a criança habita e realiza seus movimentos. Esse termo tem um elemento intuitivo que se estabelece desde o nascimento da criança (BREDAS;

SERRAZINA; MENEZES; SOUSA; OLIVEIRA, 2011). Nessa direção, Mendes e Delgado (2008, p. 10) destacam que:

desde muito cedo, as crianças começam a desenvolver alguns conceitos geométricos e o raciocínio espacial. Ainda bebês, não só revelam curiosidade em “olhar” o espaço que as rodeia, como, também, interagem com ele, tentando, por exemplo, alcançar, atirar e empurrar objetos. Durante estas experiências, vão processando ideias sobre as formas e o espaço. Estas ideias, ainda muito rudimentares, constituem já a base para o conhecimento geométrico e o raciocínio espacial que deverá ser desenvolvido ao longo dos anos seguintes.

Ao se movimentarem em sua realidade natural e ao interagir com os objetos, com pessoas ou lugares, as crianças pequenas constroem várias noções espaciais, logo suas primeiras experiências são de natureza espacial. Além disso, as primeiras noções de orientação espacial podem ainda começar a partir do próprio corpo da criança, pela lateralização. A orientação espacial se desenvolve nas crianças por meio da vivência e da atividade experimental em tarefas espaciais concretas, logo, ao serem introduzidas na escola, o professor deve considerar que elas apresentam várias noções intuitivas sobre o espaço (PIRES; CURI; CAMPOS, 2000).

A orientação espacial ocorre, por exemplo, quando uma criança é consciente de suas relações com outros objetos em termos de posição, direção e distância. Ela também abrange a tarefa de organizar o espaço, de maneira que os objetos estejam colocados de modo adequado seja para trabalho como para diversão, ou até mesmo para combater a poluição visual (SANTOS COSTA; ALLEVATO; MOURA, 2017).

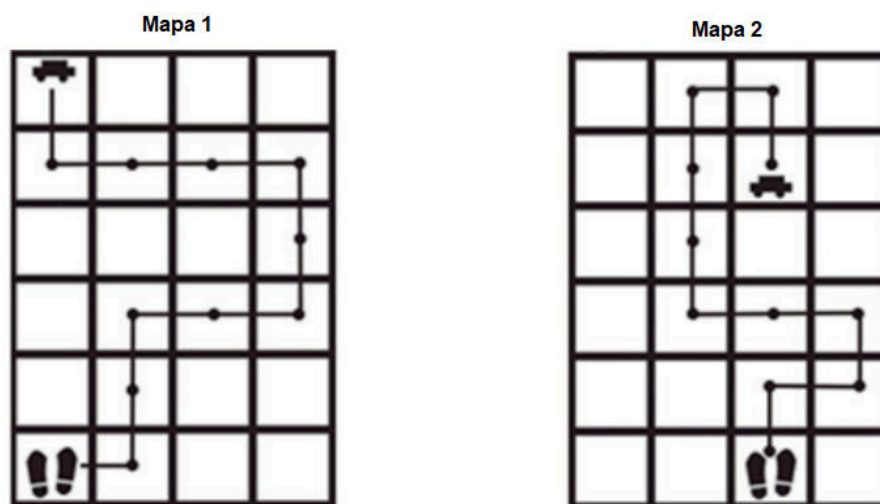
Para compreender um pouco melhor sobre como é mobilizada a abstração geométrica espacial, analisaremos a resposta de um grupo de alunos do quinto ano do ensino fundamental (com idade média de 10 anos) em um problema que explorou o conceito de orientação espacial.

Tal atividade foi extraída da pesquisa de Santos Costa, Allevato e Moura (2017), sendo inicialmente produzida por Barbosa (2011). É importante destacar que não somos autores desse estudo, dessa forma, faremos uma análise dos dados apresentados pelos supracitados pesquisadores.

Conforme os autores da investigação, o objetivo da atividade era analisar como esses estudantes interpretavam e esboçavam caminhos por meio de mapas, com abordagem dos conceitos de dimensão e direção. Então, as crianças deveriam

(re)construir o percurso do carrinho por meio dos mapas e das orientações fornecidas, conforme ilustrado na Figura 17.

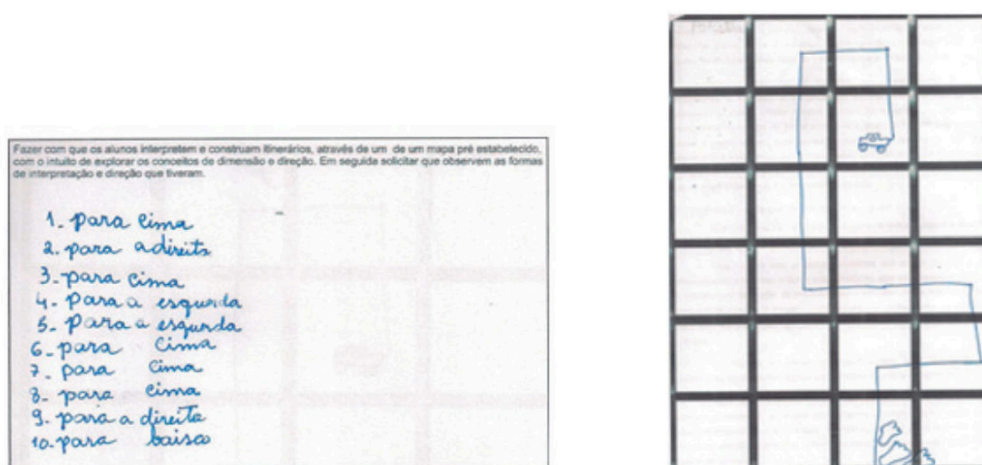
Figura 17 – Extratos dos mapas utilizados na pesquisa de Santos Costa, Allevato e Moura (2017)



Fonte: Santos Costa, Allevato e Moura (2017, p.23)

Como apresentando na Figura 18 e sinalizado pelos autores do estudo, os alunos interpretaram e esboçaram corretamente o itinerário de carrinho a partir dos mapas e das orientações fornecidas. Logo, mobilizaram o conceito de orientação espacial, especificamente as noções de direção e dimensão.

Figura 18 – Extrato da resposta de um grupo de alunos à atividade enunciada por Santos Costa, Allevato e Moura (2017)



Fonte: Santos Costa, Allevato e Moura (2017, p.25)

Nessa situação, em nosso entendimento, as crianças mobilizaram a abstração geométrica espacial na solução da atividade proposta. Além disso, a Geometria é vista em seu caráter prático, voltado para o cotidiano desses estudantes.

Analisando o primeiro momento da atividade, isto é, na construção do percurso feito pelo carrinho, percebemos que esse grupo de alunos não realizou tratamento conforme Duval (2005), então não houve transformações no interior do registro “mapa”, ou seja, os alunos reproduziram o caminho disponibilizado. Também nesse momento não houve conversão para a representação gráfica.

Na segunda etapa da atividade, ao escreverem na folha o percurso do carrinho, tendo por base Duval (1995), os discentes realizaram conversão (de volta), logo transformaram a representação gráfica (mapa) em outra representação (língua natural). Aqui eles não fizeram tratamento.

Conforme Duval (1995), ao longo da atividade os alunos mobilizaram a apreensão perceptiva, pois identificaram um objeto (carrinho) num plano, por isso apresentaram olhares botanistas. Como reproduziram o desenho de um carrinho, que representa um objeto, esses estudantes também atuaram na apreensão sequencial.

Além disso, com relação à linguagem utilizada, em nosso entendimento, esses alunos atuam no nível de linguagem cotidiana, empregando termos como “cima”, “baixo”, “direita” e “esquerda” que, mesmo sendo expressões aplicadas à sua realidade cotidiana, também fazem referência à direção, que é uma noção vinculada ao conceito de orientação espacial. Essa linguagem é característica da abstração geométrica espacial.

A **abstração geométrica perceptiva** é caracterizada por sensações perceptivas e visuais. Dessa forma, “as primeiras idealizações espontâneas de qualquer criança se apóiam em qualidades comuns que certos objetos apresentam, e são simplesmente impressões visuais, associadas a determinados nomes” (GRAVINA, 2001, p.51).

Nessa abstração geométrica, uma figura geométrica é analisada como um todo, destituída de elementos e de propriedades. As falas são carregadas de experiências unicamente perceptivas e visuais; então as crianças (ou os adultos)

realizam classificações e nomeações de formas geométricas, ao abstrair aspectos perceptivos dos objetos geométricos representados, logo não fazem referência às suas propriedades.

Uma pessoa que esteja atuando nessa abstração, ao ser questionada por que uma figura é um retângulo, dirá que “é um retângulo porque é como uma janela ou uma porta”. Isso ocorre, pois, as representações dos objetos geométricos são compreendidas como objetos físicos, pertencentes à sua realidade e não à Matemática. Logo, a Geometria vivenciada é de caráter prático, da vida cotidiana, não sendo compreendida como um modelo teórico matemático.

Nessa abstração, é possível encontrar pessoas que percebem formas geométricas somente a partir de um subconjunto das características visuais, pois ainda não conseguem formar imagens visuais.

Desse modo, não realizam a identificação de várias formas geométricas comuns, distinguindo apenas as figuras que apresentam curvas das figuras que possuem retas; todavia, isso não ocorre entre figuras do mesmo grupo. Por exemplo, conseguem diferenciar uma circunferência de um quadrado, contudo não distinguem um quadrado de um retângulo.

Para compreender o que significa essa característica e como se manifesta na solução de uma atividade sobre os quadriláteros notáveis, analisaremos a resposta de um estudante (com 11 anos de idade) à questão a seguir. É importante salientar que os dados analisados fazem parte de uma pesquisa²⁸ que realizamos com alunos dos anos finais do ensino fundamental.

Você desenhou um retângulo. Seu colega desenhou uma figura de quatro lados que não é um retângulo. Nos espaços abaixo, desenhe como poderia ser a sua figura e a figura de seu colega

Nessa questão, verificamos que o aluno conseguiu identificar formas geométricas e reproduzi-las a partir da nomenclatura. Então, houve uma associação entre a palavra “retângulo” e o desenho correspondente, isto é, com base em Duval

²⁸ Essa pesquisa trata-se de um estudo piloto que realizamos com 30 alunos de uma escola pública de Recife. Os dados desse estudo não foram analisados e nem publicados, desse modo, estamos realizando uma análise deles nessa tese para ilustrar a tipologia de abstrações geométricas.

(1995), efetuamos uma conversão (de ida) entre a língua natural (retângulo) e a figura geométrica (representada pelo desenho).

Figura 19 – Resposta de um aluno à questão proposta

SUA FIGURA:	FIGURA DE SEU COLEGA:
	

Fonte: acervo da pesquisa

No entanto, como notado na produção, ele não fez uso adequado do conceito, dos elementos e das propriedades do retângulo, pois ao desenhar um quadrado (como não sendo retângulo) na figura do seu colega, demonstra ter considerado apenas a aparência global da figura, conforme podemos verificar também na entrevista realizada pelo pesquisador.

Dessa forma, ele não fez conversão referente ao segundo desenho, conforme a teoria de Duval (1995). Como produziu desenhos referentes às representações de figuras geométricas, o aluno mobilizou a apreensão sequencial. A seguir, apresentamos um recorte da entrevista que realizamos com esse aluno.

Pesquisador: Que figura é essa que você desenhou? (apontando para o campo “Sua Figura”).

Aluno: É um retângulo.

Pesquisador: Por que ela é um retângulo?

Aluno: Porque tem dois lados mais compridos e dois lados menos compridos.

Pesquisador: Como se chama a figura do seu colega? (apontando para o campo “Figura de seu colega”)

Aluno: Quadrado.

Pesquisador: Por que ela é um quadrado?

Aluno: Porque tem os lados pequenos.

Pesquisador: Como assim? Lados pequenos?

Aluno: Ela tem todos os lados pequenos e acho que são do mesmo tamanho.

Pesquisador: A sua figura é um quadrado?

Aluno: Não.

Pesquisador: Por que?

Aluno: Porque o retângulo não tem lados pequenos, ele tem dois grandes e dois pequenos. E para ser quadrado tem que ter todos os lados pequenos.

Pesquisador: A figura do seu colega é um retângulo?

Aluno: Não, pois o quadrado não tem dois lados compridos como o retângulo.

Pesquisador: *Eu não entendi. Podes me explicar novamente?*

Aluno: *Deixa eu pensar um pouco... O quadrado é como se fosse um dado e o retângulo parece uma porta. E porta e dado são coisas diferentes, então, o quadrado e o retângulo não são iguais. Eles não se parecem.*

Pelo diálogo, foi possível notarmos que o entrevistado, ao justificar o motivo de sua figura ser um retângulo, fez uso de definição visual, ou seja, disse exatamente o que vê na figura (dois lados maiores e dois lados menores). O mesmo fenômeno pode ser verificado na explicação do quadrado.

Então, o estudante fez uso apenas do aspecto perceptivo, olhando as figuras desenhadas de forma global, desprezando seus conceitos, seus elementos constituintes e suas propriedades; logo, considerando Duval (1995), atuou na apreensão perceptiva com olhar botanista.

Além disso, ao dizer que o “quadrado é como se fosse um dado” e o “retângulo parece uma porta” fica claro que os objetos quadrado e retângulo não são analisados geometricamente, mas como se fossem objetos do mundo real, do cotidiano do aluno. Dessa forma, a Geometria é vista como prática cotidiana e não como um modelo teórico da Matemática.

Aqui também verificamos que não houve conversão (de volta) de acordo com Duval (1995), pois, mesmo fazendo uso da língua natural, ele não fez articulação das variáveis dos objetos geométricos evidenciados na atividade. Não observamos, ainda, a realização de tratamento.

Percebemos ainda que o aluno faz uso de certo vocabulário geométrico, todavia ainda é bastante influenciado pela linguagem cotidiana com caráter perceptivo. Portanto, diante de todas as evidências, esse aluno mobilizou a abstração geométrica perceptiva na resolução da atividade.

A ruptura com esse tipo de abstração é assinalada pela sofisticação das idealizações pelos alunos, isto é, os registros perceptivos transformam-se em objetos geométricos a partir da conceituação das propriedades que os caracterizam (GRAVINA, 2001).

A **abstração geométrica analítica** é caracterizada pela análise das figuras geométricas conforme seus elementos constituintes e suas propriedades, todavia, não é possível estabelecer relações de inferências entre essas propriedades; além

disso, é possível verificar definições dessas figuras, mas de forma bastante ampla e sem sentido para o sujeito.

Ao manipular figuras geométricas por meio de dobraduras e recortes, um retângulo é considerado como uma forma que apresenta quatro ângulos retos, diagonais congruentes, dois lados curtos e dois lados longos, entre outros, apontando assim, uma ampla relação de propriedades.

Veja que essas definições não são econômicas, mas elas não foram compreendidas com significado, caso contrário, um quadrado seria reconhecido como um retângulo. Por exemplo, a seguinte relação ainda não é evidenciada nesse tipo de abstração geométrica: *“se quatro ângulos são retos, então, obrigatoriamente os lados opostos são congruentes”*.

Ainda nesse tipo de abstração, também é possível verificar pessoas que consideram apenas a definição das figuras geométricas em seu processo de reconhecimento. Contudo, ainda não conseguem identificar essas figuras como detentoras de características específicas.

Para um melhor entendimento da abstração geométrica analítica e como se revela na solução da mesma atividade analisada anteriormente, sobretudo, a produção de outro estudante (com 14 anos de idade), participante de uma pesquisa que realizamos com alunos dos anos finais do ensino fundamental.

Você desenhou um retângulo. Seu colega desenhou uma figura de quatro lados que não é um retângulo. Nos espaços abaixo, desenhe como poderia ser a sua figura e a figura de seu colega

Figura 20 – Resposta do segundo aluno à questão proposta

SUA FIGURA:	FIGURA DE SEU COLEGA:
	

Fonte: acervo da pesquisa

Observamos que, assim como na produção do estudante analisado

anteriormente, a aluna reconheceu formas geométricas e conseguiu reproduzi-las por meio da nomenclatura. Também relacionou à palavra “retângulo” o desenho correlato, ou seja, com base em Duval (1995), fez conversão (de ida) entre a língua natural e a figura geométrica.

Contudo, não houve compreensão adequada da definição, pois se o fosse, ela não teria considerado o quadrado na figura do seu colega, pois também é retângulo. Aqui, ela não realizou conversão (de ida) na segunda produção. Isso também é notado na entrevista realizada pelo pesquisador (autor dessa tese) com a estudante. Por ter construído um desenho que representa uma figura geométrica, essa aluna mobilizou a apreensão sequencial.

Pesquisador: Qual o nome dessa figura que você desenhou aí? (apontando para “Sua Figura”).

Aluna: Retângulo.

Pesquisador: Por que ela é um retângulo?

Aluna: Porque ela tem lados opostos paralelos e iguais, os ângulos todos são retos, as diagonais têm o mesmo tamanho, e também tem dois lados longos e dois lados curtos.

Pesquisador: Que figura é essa que você fez para seu colega? (apontando para o campo “Figura de seu colega”)

Aluna: É um quadrado.

Pesquisador: Por que ela é um quadrado?

Aluna: Porque os ângulos são de 90° , os lados são opostos, paralelos e iguais e as diagonais são congruentes.

Pesquisador: Como assim? Essas características que você mencionou não são do retângulo?

Aluna: São dos dois, mas o quadrado tem lados curtos e o retângulo não.

Pesquisador: Então, a sua figura é um quadrado?

Aluna: Não.

Pesquisador: Por que?

Aluna: Porque o retângulo tem dois lados longos e dois lados curtos e o quadrado tem todos os lados curtos.

Pesquisador: A figura do seu colega é um retângulo?

Aluna: Não, é só quadrado, pois tem todos os lados curtos.

Pesquisador: Agora estou confuso. Quando a figura é retângulo e quando ela é quadrado? Uma figura não pode ser os dois ao mesmo tempo?

Aluna: Não, não pode... O retângulo e o quadrado apresentam algumas coisas iguais: os ângulos são de 90° , as diagonais são iguais, se eu pegar uma régua fica mais fácil de perceber... os lados também são opostos e iguais... mas o quadrado não pode ser retângulo e o retângulo não pode ser quadrado... mas se eu aumentar o tamanho de dois lados do quadrado, ele vira um retângulo... e se eu reduzir os lados maiores do retângulo, deixando com o mesmo tamanho dos outros lados, então ele é quadrado. Tem que acontecer isso para retângulo ser quadrado e quadrado ser retângulo. Entendeu?

Pela conversa construída entre o pesquisador e a aluna, percebemos que a participante ao explicar a razão de seu desenho representar um retângulo, apresentou uma ampla lista de propriedades, não economizando, assim, para

mostrar uma definição relacionada à figura geométrica. Isso também foi notado na justificativa do quadrado.

Mesmo usando uma ampla lista de propriedades, todavia, a definição de retângulo não foi construída com significado, caso contrário, a estudante identificaria o quadrado como retângulo. Então, de acordo com Duval (1995), a aluna não fez uso consistente da apreensão discursiva, sendo bastante influenciada pela apreensão perceptiva com olhar botanista, marcado, assim, a subordinação da segunda apreensão com a primeira.

Além disso, a aluna não realizou conversão (de volta), pois mesmo fazendo uso de várias propriedades das figuras geométricas, ela não fez articulação das variáveis dos objetos geométricos evidenciados na atividade, ou seja, não houve coordenação. Não observamos, ainda, a realização de tratamento.

Também, ao mencionar que *“o retângulo tem dois lados longos e dois lados curtos e o quadrado tem todos os lados curtos”*, a aluna também apresenta uma definição visual, isto é, dizendo como são as figuras geométricas exatamente como as vê. Então, na abstração geométrica analítica podemos observar os dois tipos de definição: definição visual e definição com base nas propriedades, mas sem o estabelecimento de relações entre as propriedades.

Notamos, ainda, que a aluna apresenta um vocabulário geométrico mais denso em relação à abstração analisada anteriormente, isto é, com mais expressões típicas da Geometria. Contudo, esse vocabulário ainda é influenciado pela linguagem cotidiana perceptiva. Nessa direção, essa estudante mobilizou a abstração geométrica analítica ao resolver a questão.

A **abstração geométrica descritiva** é marcada pelo estabelecimento de relações de implicação entre propriedades dos objetos geométricos, mas sem o uso de argumentação dedutiva na justificativa desse estabelecimento. Nessa abstração geométrica, a pessoa apresenta definições aos objetos geométricos com significado, por isso, consegue reconhecer o quadrado como retângulo e losango ao mesmo tempo. Dessa forma, as inclusões de classe são desenvolvidas.

Uma pessoa, ao ser perguntada pelo motivo de uma figura ser um retângulo, responderá que *“é um paralelogramo que tem ângulos internos retos”*. Também dirá

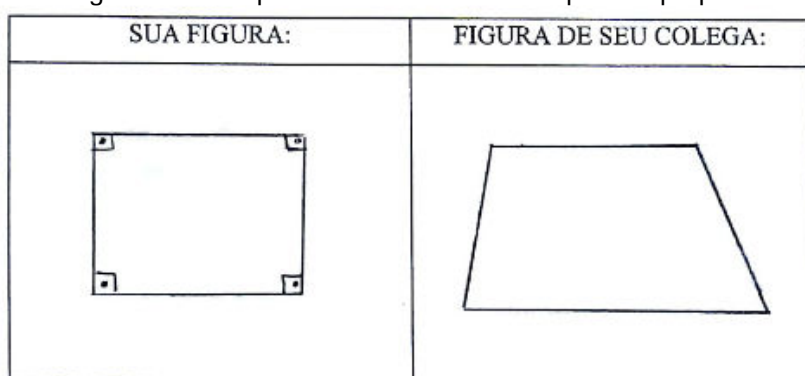
que um quadrado é um retângulo, pois esses dois quadriláteros apresentam propriedades iguais.

Para uma melhor compreensão dessa característica do pensamento geométrico e bem como ele se manifesta na resolução de uma questão sobre os quadriláteros, retomemos ao item analisado anteriormente, mas com a produção de um terceiro estudante (com 13 anos de idade), participe de um estudo que realizamos com alunos dos anos finais do ensino fundamental.

Você desenhou um retângulo. Seu colega desenhou uma figura de quatro lados que não é um retângulo. Nos espaços abaixo, desenhe como poderia ser a sua figura e a figura de seu colega

Nessa atividade, analisamos que o estudante reconheceu formas geométricas com base na nomenclatura. Também, segundo a teoria de Duval (1995), ocorreu conversão (de ida) correta entre a palavra “retângulo” e o desenho correspondente, e entre a palavra “não retângulo” com o desenho do trapézio. Aqui evidenciamos a presença da apreensão sequencial, já que o participante fez construções de figuras geométricas.

Figura 21 – Resposta do terceiro aluno à questão proposta



Fonte: acervo da pesquisa

Além disso, pelas marcações deixadas na folha, o aluno utilizou as medidas dos ângulos internos nas justificativas, mobilizando assim o olhar agrimensor, como pode ainda ser verificado na entrevista do pesquisador (autor dessa tese) com o participante do estudo.

Pesquisador: *Que figura é essa que você desenhou? (apontando para o campo “Sua Figura”).*

Aluno: É um retângulo.

Pesquisador: Por que ela é um retângulo?

Aluno: Porque é todo paralelogramo que tem ângulos internos retos.

Pesquisador: Como se chama a figura do seu colega? (apontando para o campo “Figura de seu colega”)

Aluno: Trapézio.

Pesquisador: Por que ela é um trapézio?

Aluno: Porque é um quadrilátero que possui somente um único par de lados opostos paralelos.

Pesquisador: O retângulo que você desenhou é um quadrilátero?

Aluno: Sim, pois ele é convexo e possui dois lados opostos paralelos.

Pesquisador: O retângulo pode ser trapézio? E o trapézio pode ser retângulo?

Aluno: Não.

Pesquisador: Por que?

Aluno: Porque o retângulo é paralelogramo, tem dois pares de lados paralelos opostos. Os trapézios não são paralelogramos, pois têm somente um único par de lados paralelos.

Pesquisador: A figura do seu colega é um quadrado?

Aluno: Não, pois o quadrado é um paralelogramo que é retângulo e losango ao mesmo tempo.

Pesquisador: Eu não entendi. Podes me explicar novamente?

Aluno: Veja só... o quadrado tem dois lados opostos paralelos, os ângulos são retos e as diagonais são iguais e se cruzam no meio. Essas mesmas características ocorrem com os losangos e com os retângulos... a diferença é que alguns losangos (os oblíquos) podem ter as diagonais não congruentes, e para ser losango só é necessário que a figura tenha todos os lados iguais... isso ocorre com o quadrado, então ele é losango... No caso do retângulo, alguns retângulos podem apresentar dois pares de lados maiores, e para ser retângulo a figura tem que ter os ângulos iguais... isso ocorre com o quadrado, logo ele é retângulo. Então, o quadrado é losango e retângulo ao mesmo tempo, além de ser paralelogramo. O trapézio é de outro grupo dos quadriláteros, não é paralelogramo...

A partir da conversa entre o pesquisador e o estudante, evidenciamos que o aluno, ao explicar o motivo das figuras serem retângulo e trapézio, respectivamente, fazer uso de definições e de várias propriedades. As definições foram compreendidas com significado, pois o discente concluiu que o quadrado é um paralelogramo que é losango e retângulo ao mesmo tempo e, ainda, que o trapézio não pertence à família dos paralelogramos.

Assim, conforme Duval (1995), o aluno realizou a conversão (de volta) da figura geométrica para a língua natural, logo, fez coordenação. Então, estabeleceu adequadamente relações entre as propriedades das figuras, desenvolvendo, assim, inclusão de classe, então, mobilizaram a apreensão discursiva com olhar construtor, pois tomou consciência de que as propriedades das figuras geométricas não são de natureza perceptiva. Nesse contexto, esse aluno atuou na abstração geométrica descritiva na resolução da atividade.

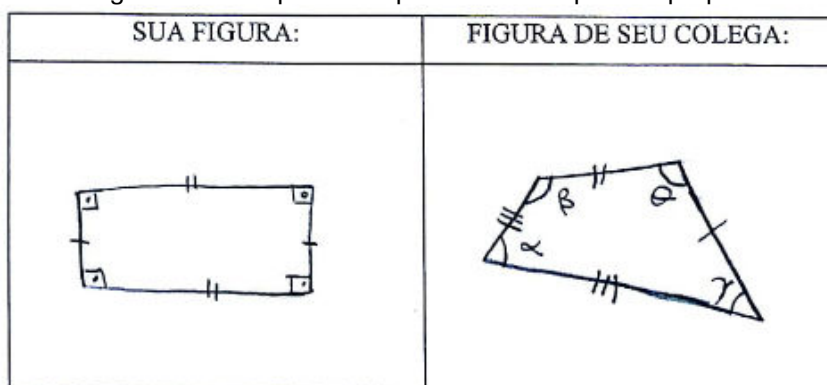
Percebemos ainda uma riqueza no vocabulário geométrico do estudante, marcado por uma linguagem formal de cunho descritivo.

A **abstração geométrica dedutiva** se caracteriza pelo estudo (ou vivência) de provas, demonstrações, argumentações e conjecturas de natureza tanto intuitiva como dedutiva. Assim, uma demonstração é compreendida e construída com significado. Além disso, a Geometria passa a ser vista como um modelo teórico matemático, formado por axiomas e teoremas.

Para um entendimento mais adequado dessa abstração geométrica, retomemos novamente a questão sobre quadriláteros notáveis já discutida aqui, mas com a produção de um quarto aluno (com 14 anos de idade), participante de uma pesquisa que realizamos com alunos dos anos finais do ensino fundamental.

Você desenhou um retângulo. Seu colega desenhou uma figura de quatro lados que não é um retângulo. Nos espaços abaixo, desenhe como poderia ser a sua figura e a figura de seu colega

Figura 22 – Resposta do quarto aluno à questão proposta



Fonte: acervo da pesquisa

Nesse item, notamos que a aluna não apresentou dificuldades para identificar formas geométricas a partir da nomenclatura. Segundo a teoria de Duval (1995), mobilizando a apreensão sequencial, ela converteu (conversão de ida) corretamente a palavra “retângulo” e o desenho correlato e ainda com a palavra “não retângulo” e o desenho que representa o trapézio.

Ainda, pelos registros deixados na folha de resposta, a estudante considerou as medidas dos comprimentos dos lados e as medidas das aberturas dos ângulos internos como forma de diferenciar as duas figuras geométricas, características do olhar agrimensor. Tal fato pode ser evidenciado na entrevista do pesquisador (autor dessa tese) com essa discente.

Pesquisador: Que figura é essa que você fez? (apontando para o campo “Sua Figura”).

Aluna: Ela é um retângulo.

Pesquisador: Que figura é essa que você fez para o seu colega? (apontando para o campo “Figura de seu colega”)

Aluna: Trapezoide.

Pesquisador: Por que a primeira figura é um retângulo e a segunda um trapezoide?

Aluna: No caso da primeira, é um retângulo porque é um paralelogramo com ângulos internos congruentes, ou seja, medem 90° . No caso do trapezoide, ele não apresenta lados opostos paralelos congruentes, portanto, não é paralelogramo.

Pesquisador: Por que o retângulo é um paralelogramo?

Aluna: Eu posso explicar com uma prova?

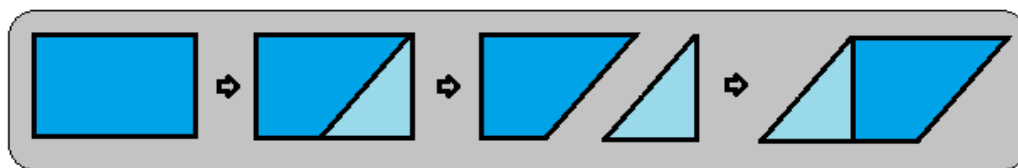
Pesquisador: Sim, pode.

Aluna: Veja, vou pegar essa folha branca aqui. Você concorda que essa folha tem a forma de um retângulo, certo? (a estudante mostra a folha com a forma de um retângulo).

Pesquisador: Sim.

Aluna: Então, vamos supor que essa folha seja um retângulo. Agora, vou dobrar ela, ou seja, vou dividir o retângulo, formando duas outras figuras, um triângulo retângulo e um trapézio retângulo (a aluna dobrou a folha, em seguida rasga-a na dobra, formando duas “novas” figuras referentes à decomposição do retângulo).

Aluna: Se eu encaixar o trapézio e o triângulo na parte da dobra, eles formam um retângulo. Mas se agora eu encaixar eles nos lados que os ângulos são retos, nós teremos um paralelogramo oblíquo. Veja que fica provado que o retângulo é um paralelogramo. (a estudante encaixou as duas folhas formando o retângulo, em seguida, gira-as e encaixa novamente, formando o paralelogramo, conforme ilustrado abaixo).



Com base no diálogo desenvolvido, notamos que a aluna tentou provar intuitivamente que um retângulo é um paralelogramo, a partir da decomposição de figuras geométricas e de argumentos e explicações. Na verdade, essa estudante realizou outra demonstração, isto é, ela mostrou que as áreas dos dois quadriláteros (retângulo e paralelogramo) são equivalentes.

Mesmo não conseguindo provar que um retângulo é um paralelogramo por meio de uma demonstração, a aluna fez uma importante comprovação, de que a área da figura não foi alterada com a modificação. Na escola básica, muitos alunos têm dificuldades em compreender essa relação.

De acordo com Duval (1995), aqui evidenciamos a mobilização das apreensões operatória, com ênfase na modificação figural mereológica (marcada pela transformação de uma figura geométrica em outras figuras), e discursiva (caracterizada pela explicação das propriedades geométricas) com olhar de um inventor.

Além disso, ficou evidente que os conceitos referentes aos quadriláteros foram construídos adequadamente pela estudante, com significado de compreensão. Então, fez a conversão (de volta) entre a figura geométrica e a língua natural, dessa forma, ocorreu coordenação. Nesse cenário, ela atuou na abstração geométrica dedutiva na solução do item.

O vocabulário geométrico da discente é caracterizado por uma linguagem formal argumentativa dedutiva. Por fim, ao decompor a figura, a estudante realizou o tratamento, ou seja, fez transformações dentro do próprio registro de representação semiótica.

A **abstração geométrica hipotética (ou teórica)** é marcada pelo estudo (ou vivência) com diferentes geometrias, sobretudo, as chamadas geometrias não euclidianas, logo, a pessoa nessa abstração caminha por teorias axiomáticas, além de utilizar uma linguagem formal axiomática.

Para uma melhor compreensão desse tipo de abstração geométrica, vamos considerar a produção de um grupo formado por três alunos do ensino fundamental (12-14 anos de idade) a um problema sobre Geometria Hiperbólica.

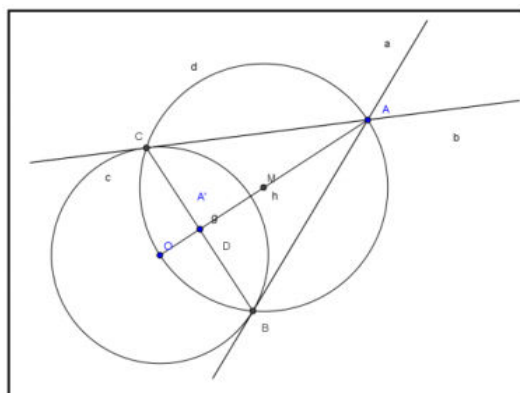
Esse problema foi extraído da pesquisa desenvolvida por Leivas, Portella e Souza (2017). É importante destacar que não fizemos parte da autoria desse estudo, logo, realizamos uma análise dos dados apresentados pelos pesquisadores supracitados.

De acordo com os autores, o objetivo proposto era produzir o ponto de inversão a uma circunferência, por um ponto fora dela. Dessa forma, com o uso do GeoGebra, um dos alunos fez o estudo da inversão de pontos relacionados à circunferência. Isso foi fundamental para a compreensão das h-retas (retas no Plano de Poincaré, que é formado a partir da região aberta definida pela circunferência). O problema era o seguinte:

Construa o ponto de inversão a uma circunferência, por um ponto fora dela.

Pela Figura 23, o ponto A, fora à circunferência apresenta o ponto de inversão D. Conforme analisam os autores, essa produção é interessante à elaboração das h-retas no modelo, que são formadas pelos arcos de curvas que penetram de forma ortogonal na circunferência limítrofe do disco.

Figura 23 – Extrato da resposta de um aluno à atividade enunciada por Leivas, Portella e Souza (2017)

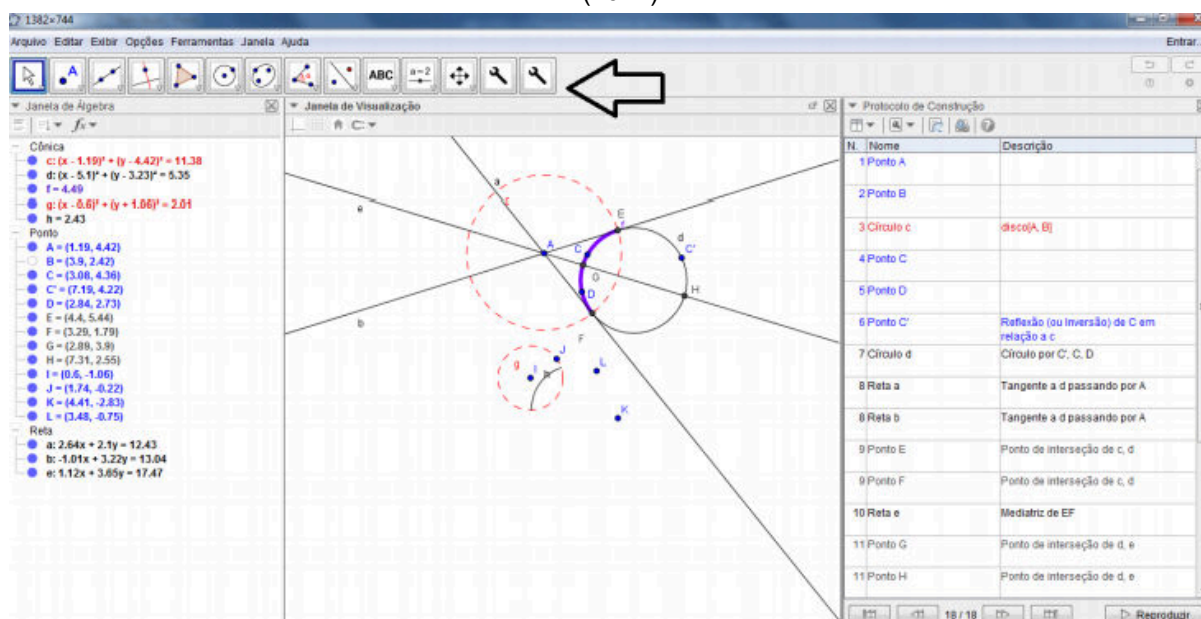


Fonte: Leivas, Portella e Souza (2017, p.216)

Por ter realizado essa produção, o discente mobilizou a apreensão sequencial. Também, com base em Duval (1995), ocorreu conversão (de ida) entre a língua natural (ponto de inversão de uma circunferência) e a figura geométrica (representada pelo desenho no GeoGebra).

Além disso, a compreensão da lógica do software possibilitou que eles construíssem novas ferramentas que foram incorporadas ao GeoGebra, sobretudo, relacionado à produção do Disco de Poincaré, como ilustrado na Figura 24. Com essa atividade, os estudantes perceberam que existem outras geometrias.

Figura 24 – Extrato da resposta de um aluno à atividade enunciada por Leivas, Portella e Souza (2017)



Fonte: Leivas, Portella e Souza (2017, p.216)

Pela Figura 24 e pela descrição dos autores, podemos observar que os estudantes fizeram o tratamento da figura geométrica, isto é, realizaram transformações dentro do próprio registro. Eles realizaram várias conversões, da língua natural (enunciado do problema) para a figura geométrica (desenho na Janela Visualização do GeoGebra), e desta para as escritas algébricas (equações das circunferências na Janela de Álgebra do software).

Desse modo, com base em Duval (1995), houve coordenação. É notório que os estudantes têm um olhar do construtor (por utilizar o GeoGebra como instrumento para suas construções) e do inventor (por ter realizado modificações no próprio programa, com a inclusão da ferramenta “Disco de Poincaré”).

Além disso, como realizaram alterações nas construções, mobilizaram a apreensão operatória (com destaque às modificações figurais ótica e de posição), e, por terem feito uso de propriedades da Geometria Hiperbólica na resolução do problema, utilizaram a apreensão discursiva.

Essa atividade é uma comprovação de que o estudo de uma das Geometrias Não-Euclidianas pode ser introduzido no ensino básico, não se resumindo apenas ao ensino superior. Ao resolver o problema proposto, os alunos atuaram na abstração geométrica hipotética (teórica).

A seguir, no Quadro 06, apresentamos as características evidenciadas nas abstrações geométricas discutidas neste capítulo. É importante destacar que essas características foram observadas nas questões analisadas, nesse sentido, se consideramos outras atividades, é possível que outros atributos se manifestem.

Quadro 06 – Resumo das abstrações geométricas e características

ABSTRAÇÕES GEOMÉTRICAS	CARACTERÍSTICAS GERAIS OBSERVADAS
Abstração Geométrica Espacial	– Operações cognitivas: conversão (de volta) sem coordenação – Apreensões geométricas: perceptiva e sequencial – Olhar em Geometria: botanista – Linguagem utilizada: cotidiana com caráter espacial – Natureza da Geometria: prática (cotidiana) – Natureza do pensamento geométrico: elementar
Abstração Geométrica Perceptiva	– Operações cognitivas: conversão (de ida) sem coordenação – Apreensões geométricas: perceptiva e sequencial – Olhar em Geometria: botanista – Linguagem utilizada: cotidiana com caráter perceptivo – Natureza da Geometria: prática (cotidiana) – Natureza do pensamento geométrico: elementar
	– Operações cognitivas: conversão (de ida) sem coordenação

Abstração Geométrica Analítica	– Apreensões geométricas: perceptiva, sequencial e discursiva (sem consistência) – Olhar em Geometria: botanista – Linguagem utilizada: cotidiana com caráter analítico – Natureza da Geometria: prática (cotidiana) – Natureza do pensamento geométrico: elementar
Abstração Geométrica Descritiva	– Operações cognitivas: conversão (de ida e de volta) com coordenação – Apreensões geométricas: sequencial e discursiva – Olhar em Geometria: agrimensor e construtor – Linguagem utilizada: formal com caráter descritivo – Natureza da Geometria: formal pré-dedutiva – Natureza do pensamento geométrico: elementar
Abstração Geométrica Dedutiva	– Operações cognitivas: conversão (de ida e de volta) com coordenação e tratamento – Apreensões geométricas: sequencial, discursiva e operatória (modificação mereológica) – Olhar em Geometria: agrimensor e inventor – Linguagem utilizada: formal argumentativa – Natureza da Geometria: modelo teórico da Geometria (formal dedutiva) – Natureza do pensamento geométrico: avançado
Abstração Geométrica Hipotética	– Operações cognitivas: conversão (de ida e de volta) com coordenação e tratamento – Apreensões geométricas: sequencial, discursiva e operatória (modificações ótica e de posição) – Olhar em Geometria: construtor e inventor – Linguagem utilizada: formal argumentativa – Natureza da Geometria: Geometrias Não-Euclidianas – Natureza do pensamento geométrico: avançado

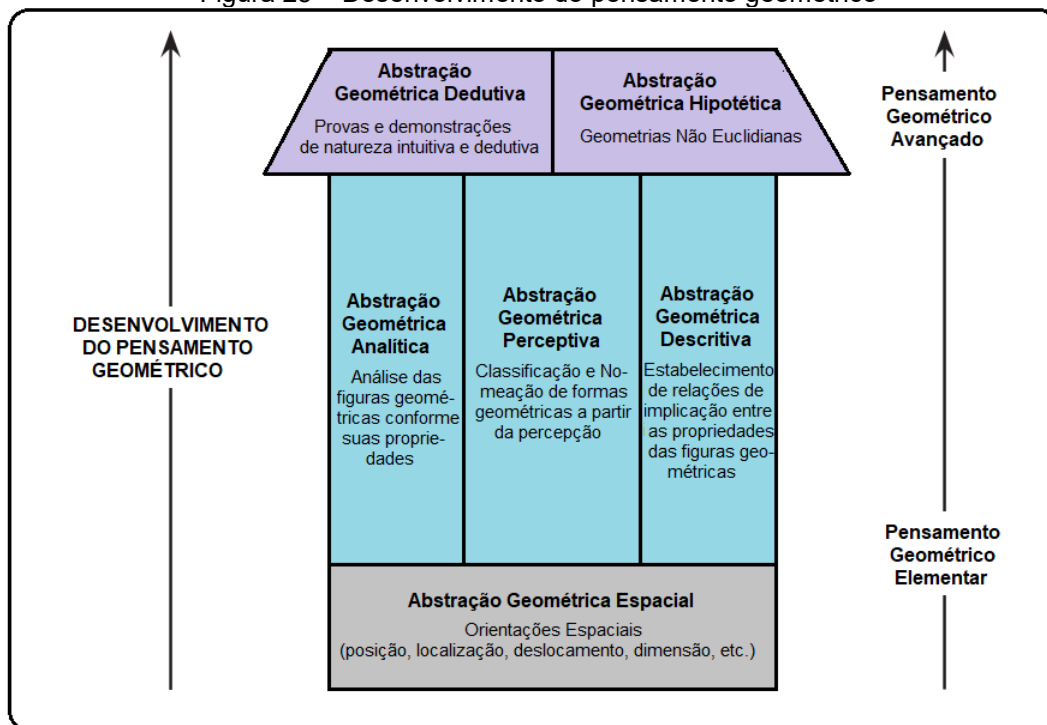
Fonte: elaborado pelo autor

Além disso, por meio das propriedades destacadas no quadro, podemos perceber que as abstrações geométricas indicam a existência de níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico. Isso é possível verificar, pois, as características se tornam mais sofisticadas à medida que avançamos as abstrações.

O esquema a seguir apresenta um resumo da evolução do pensamento geométrico conforme nosso entendimento, isto é, com base nas abstrações geométricas e considerando as duas naturezas do pensar em Geometria. Esse esquema foi elaborado com base na estrutura do desenvolvimento cognitivo do pensamento matemático proposto por Tall (1995).

Podemos realizar uma metáfora entre o desenvolvimento do pensamento geométrico com o processo de construção de casa. Na base da casa, estão os alicerces, que correspondem à abstração geométrica espacial, por ser a base da estrutura do pensamento geométrico (a casa).

Figura 25 – Desenvolvimento do pensamento geométrico



Fonte: elaborado pelo autor e baseado em Tall (1995)

As paredes são formadas pelas abstrações geométricas perceptiva, analítica e descritiva, e têm por finalidade vedar e sustentar a estrutura do pensar em Geometria.

Por fim, o teto é composto pelas abstrações geométricas dedutiva e hipotética, que representam a cobertura da estrutura do pensamento geométrico, estabelecendo uma ligação com os alicerces (abstração geométrica espacial) por meio das paredes (abstrações perceptiva, analítica e descritiva).

Para tanto, pensar geometricamente demanda a mobilização de no mínimo uma das seis abstrações geométricas aqui analisadas: a espacial, a perceptiva, a analítica, a descritiva, a dedutiva e a hipotética. Essas características emergem a partir da progressão do atributo matriz (abstração geométrica espacial).

Além disso, defendemos que as outras características se desenvolvem de forma hierárquica, mas é possível o desenvolvimento de até duas abstrações geométricas de forma simultânea, sendo que obrigatoriamente uma delas é a espacial. Ainda, o progresso de uma pode impulsionar o desenvolvimento das demais.

4 NÍVEIS DE DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO: INDICAÇÕES DE OUTROS MODELOS

Consideramos que um aluno do ensino básico pode transitar por etapas, dimensões, graus, ou níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico. O objetivo do estudo realizado para esta tese é propor um modelo que possibilite a identificação de níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico sinalizado por estudantes dos anos finais do ensino fundamental ao resolverem atividades que abordem os quadriláteros notáveis.

Conjecturamos que um discente pode atuar, em certo período, em um determinado nível de desenvolvimento do pensamento geométrico, ou em outro nível, que é manifestado pelas escolhas utilizadas na solução de problemas de natureza geométrica (ALMEIDA, 2016).

Alguns estudos em Educação Matemática (COSTA; CÂMARA DOS SANTOS, 2015a; 2015b; 2016a; 2016b; 2016c; 2017a; 2017b; COSTA; ROSA DOS SANTOS, 2016; 2017a; 2017b) têm mostrado que na resolução de atividades sobre quadriláteros notáveis, pessoas de diferentes etapas escolares mobilizam estratégias de diferentes naturezas, sinalizando que, para cada estratégia ou percurso utilizado na solução, distintos atributos do pensar em Geometria são provocados.

O nosso pressuposto ergueu-se por meio da apreciação de estudos que apresentam níveis de pensamento dos estudantes no que se refere às atividades vinculadas ao campo da Geometria. Entre esses estudos, podemos mencionar os realizados por Van-Hiele (1957), Gutierrez, Jaime e Fortuny (1991), Garrido (2005), Parzysz (2006) e Marchand (2009).

Tais autores indicam, por meio de suas pesquisas, a presença de diferentes níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico, no entanto, não focaram suas investigações para presença de níveis para os quadriláteros notáveis.

Na construção do modelo, Van-Hiele (1997) se sustentou sobretudo na teoria da Epistemologia Genética de Piaget. Os demais autores (GUTIERREZ; JAIME; FORTUNY, 1991; GARRIDO, 2005; PARZYSZ, 2006; MARCHAND, 2009) se basearam principalmente no modelo vanhieliano. Desse modo, nesse capítulo,

dedicaremos mais atenção ao primeiro modelo, devido à sua importância teórica para os demais estudos.

Em termos de aprendizagem, Van-Hiele (1957) bem organiza a evolução do pensamento geométrico. Esse pesquisador enfatiza que pensar geometricamente é um modo específico de refletir em Matemática.

Para o autor, um conceito geométrico é compreendido pelos estudantes, passando a ser utilizado para a solução de um problema, quando estiverem convencidos do seu significado. Então, pensar geometricamente é também uma forma de elaborar significado à Geometria. O autor ainda ressalta a importância da linguagem para a construção de estruturas do pensamento.

Em sua tese de doutorado desenvolvida com estudantes do ensino básico em Utrecht na Holanda, Van-Hiele (1957) verificou a existência de diferentes níveis de pensamento geométrico acerca dos conceitos geométricos, a partir da análise das dificuldades conceituais de aprendizagem dos seus próprios alunos em Geometria.

Nessa direção, o seu modelo é formado por cinco níveis hierárquicos de pensamento. Um discente não consegue passar para um nível mais elaborado se não tiver alcançado níveis anteriores mais elementares.

Conforme o autor, o primeiro nível é marcado pelo reconhecimento das figuras geométricas a partir do aspecto global; o segundo é caracterizado pela identificação desarticulada das propriedades dessas figuras; o terceiro é composto pela realização de inclusão de classe; o quarto compreende os processos dedutivos da Geometria Euclidiana com demonstrações e provas; por fim, no quinto ocorre a comparação entre várias axiomáticas, como, por exemplo, entre as Geometrias Não Euclidianas.

Em um estudo realizado em Valência na Espanha com alunos do ensino fundamental e com futuros professores dos anos iniciais, Gutierrez, Jaime e Fortuny (1991) observaram que os níveis vanhielianos são contínuos e não discretos como indicado por Van-Hiele (1957), ou seja, a continuidade dos níveis indica que não é possível determinar um momento exato em que ocorre a aquisição de um nível, mas que há um período de transição na passagem de um nível para o imediatamente superior.

Nesse sentido, esses pesquisadores espanhóis elaboraram um modelo alternativo para avaliar a aquisição de níveis de Van-Hiele, sendo que o grau de aquisição de cada nível pode ser considerado em cinco tipos.

O primeiro é a “*aquisição nula*” (no qual, não se utiliza as características desse nível), o segundo é a “*baixa aquisição*” (começa a conscientização das características, métodos e exigências próprios do nível, mas o uso que é feito deles é muito pobre).

O terceiro é a “*aquisição intermediária*” (o emprego dos métodos desse nível é mais frequente e preciso, no entanto, ainda não é dominante), o quarto é a “*aquisição alta*” (também se faz o uso inadequado dos procedimentos próprios desse nível de pensamento), por fim, o quinto é a “*aquisição completa*” (há o domínio total das ferramentas e dos métodos de trabalho deste nível de pensamento).

Assim, segundo esses autores, é possível relacionar mais de um nível a um estudante, atrelado com dados aprofundados do seu avanço em cada um desses níveis. Por exemplo, determinado estudante pode apresentar aquisição completa do primeiro nível, baixa aquisição do segundo nível e aquisição nula do terceiro nível. Todavia, para Van-Hiele (1957), esse mesmo aluno estaria apenas no primeiro nível.

Já em um estudo que analisou o pensamento geométrico de estudantes do ensino médio em Recife (Pernambuco), Brasil, a partir de um problema sobre quadriláteros notáveis, Costa e Câmara dos Santos (2015a) verificaram que alguns estudantes utilizam estratégias geométricas mais elementares do que as previstas ao primeiro nível de Van-Hiele.

Eles também perceberam alunos empregando estratégias características de dois níveis vanhielianos simultaneamente, sinalizando a existência de níveis e subníveis de desenvolvimento no estudo desse objeto geométrico, entre esses discentes.

Entre os resultados, esses autores notaram que, como ilustração, alguns estudantes só conseguem diferenciar um quadrilátero notável de uma circunferência, ou seja, só distinguem entre figuras que são curvilíneas e as que são retilíneas. Dessa forma, não distinguem um retângulo de outra figura de quatro lados que não seja retângulo.

Em nosso entendimento, tal fato ocorre, provavelmente, pois esses estudantes não apresentam a habilidade de formar imagens mentais visuais sobre as figuras geométricas.

Em uma investigação que teve por objetivo apresentar um modelo didático para a aprendizagem dos conceitos e, procedimentos geométricos que favorecem o desenvolvimento do pensamento geométrico, nos alunos do segundo ciclo da escola primária na Cidade de Havana em Cuba, Garrido (2005) sinaliza que o aluno cubano passa por diferentes níveis de desenvolvimento do pensar em Geometria.

Para isso, a autora baseou-se nas relações dialéticas e didáticas entre a determinação de níveis de pensamento geométrico, sua correspondência com habilidades geométricas (visual, lógica, desenho, modelo e verbal); os conceitos e procedimentos generalizadores e as alternativas didáticas.

O modelo de níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico sinalizado por Garrido (2005) é marcado por três níveis: *Nível 1 (Materialização)* – o aluno identifica informações contidas em uma figura ou sólido geométrico; *Nível 2 (Reconhecimento)* – o estudante reconhece propriedades de uma figura ou sólido geométrico; *Nível 3 (Elaboração)* – o discente inter-relaciona propriedades comuns a diferentes tipos de figuras ou sólidos geométricos.

A pesquisa de Parzysz (2006) teve por objetivo propor um modelo de níveis de pensamento geométrico a partir do conhecimento em Geometria mobilizado por futuros professores de Matemática em ambientes de papel e de computador, em Paris na França.

Para o autor, a Geometria ensinada, desde a educação básica até a universidade, é construída como uma modelagem do espaço físico, evoluindo de uma geometria de observação para uma geometria de demonstração. Essa evolução pode ser analisada a partir de distintos níveis de pensamento geométrico.

Tendo por base os estudos de Houdement e Kuzniak (1998), Henry (1999), e Van-Hiele (2002), Parzysz (2006) elaborou um quadro teórico formado por quatro níveis de pensamento geométrico, organizados a partir de dois grupos de Geometria: as não axiomáticas e as axiomáticas.

Nessa direção, as Geometrias Não Axiomáticas envolvem dois níveis de pensamento geométrico, Concreto (G0) e Espaço-Gráfico (G1), enquanto que as

Geometrias Axiomáticas abrangem os níveis Proto-Axiomático (G2) e o Axiomático (G3).

Em uma pesquisa realizada em Quebec no Canadá, Marchand (2009) elaborou um modelo de níveis de conhecimento espacial para estudantes da escola primária. Esse modelo apresenta uma visão global do desenvolvimento do pensamento geométrico, representando o fio comum entre o conhecimento espacial e o conhecimento geométrico.

Além disso, a autora destaca a distinção entre esses dois tipos de conhecimento, fundamental no ensino da Geometria, que não tem ocupado um lugar de destaque nas salas de aula canadenses.

O modelo de níveis de conhecimento espacial, proposto por Marchand (2009), é composto por três níveis: *Nível 0* – o aluno manipula concretamente figuras e/ou sólidos geométricos; *Nível 1* – o estudante internaliza várias figuras, sólidos ou ações; *Nível 2* – o discente manipula mentalmente essas figuras, sólidos e ações.

Apresentamos, nos próximos tópicos, uma descrição de cada um desses modelos, com a finalidade de compreendermos o motivo da construção do nosso modelo.

4.1 O modelo de Pierre Marie Van-Hiele (1957)

Pierre Marie Van-Hiele (1957) em sua tese de doutoramento intitulada “*De Problematiek van het inzicht. Gedemonstreerd aan het inzicht van schoolkinderen in meetkunde-leerstof*”²⁹ enfatiza que pensar geometricamente é um modo específico de refletir em Matemática. Para isso, ele exhibe uma análise do *inzicht*³⁰ na área da Didática da Geometria.

Com base nos dados do seu estudo, o pesquisador percebe, todavia, que não há grandes divergências entre o *inzicht* geométrico e o *inzicht* matemático, logo

²⁹ Um problema do *inzicht*: uma conexão com o *inzicht* dos estudantes na aprendizagem da Geometria.

³⁰ Para evitar incompreensões com a tradução para o português, decidimos por utilizar o termo original – *inzicht* –, escrito em holandês na tese de Van-Hiele. Para o espanhol a palavra foi traduzida como “comprensión”, que em português significa “compreensão”. Para o inglês o termo utilizado é “insight”, traduzido como “discernimento” em português. Em francês, o termo escolhido foi “perspicacité”, que se traduz como “introspecção” ao português.

existem vários aspectos compartilhados entre eles. Ele investigou o *inzicht* em cenário didático, no qual, ressalta a função desempenhada pelo docente.

Para o autor, um aluno tem *inzicht* em certa área da Geometria no momento em que ele consegue inferir sobre um cenário desconhecido, por meio de informações e conexões geométricas disponibilizadas. Nessa direção, segundo Van-Hiele (1957), o *inzicht* é identificado na ocasião em que a criança realiza ações adequadas e propositais diante a um novo cenário.

Para os processos de ensino e de aprendizagem da Matemática, a maneira pela qual o *inzicht* se revela é bastante relevante. Se no ambiente de sala de aula há estudantes conformados em estudar acontecimentos e procedimentos sem entendê-los, então testemunhamos uma situação complexa, porque geralmente o ser humano busca intervir de modo propício em novos cenários, caso contrário, alguma coisa está errada.

Dessa forma, é importante analisar o ocorrido e procurar formas para solucionar essa situação. Assim, consideramos que a tese de Van-Hiele (1957) é um esforço de procurar saídas para os problemas enfrentados por estudantes e professores nas aulas de Geometria da escola básica.

Acerca dessa complexidade, concordamos com Passos (2015, p. 49) ao afirmar que:

identificar os problemas encontrados pelos estudantes não é uma tarefa simples, pois em situações de ensino e de aprendizagem nem sempre uma resposta certa indica aprendizagem. A principal dificuldade para reconhecer a intenção do aluno é o professor conseguir olhar para a ação dele sem a influência de seu próprio olhar. A dificuldade de emitir um juízo de valor, com relação à resposta do aluno, acaba limitando os elementos apresentados a ele de modo que se reduz a quantidade de respostas corretas. Por isso, os problemas apresentados pelos professores se reduzem frequentemente à aplicação de regras conhecidas, em casos reconhecíveis, por meio de problemas que não têm o aspecto de novidade e podem ser resolvidos em um baixo nível de compreensão.

O *inzicht* é uma das finalidades do processo de ensino da Matemática, especificamente da Geometria, conforme considera Van-Hiele (1957). Dessa maneira, para que ele (o *inzicht*) ocorra na sala de aula é necessário que o docente elabore situações didáticas adequadas para esse fim.

Como o *inzicht* decorre a partir das referências fornecidas pelo professor, produto da estruturação do saber em jogo, deve ser estabelecido um vínculo de

confiança e de respeito mútuo entre docente e discente. Assim, com base nas produções dos estudantes, sujeitos autônomos, o professor é o orientador e mediador das suas aprendizagens.

Ao destacar a importância de que a aprendizagem deve ser um processo autônomo, Van-Hiele (1957) considera que nesse processo o *inzicht* propaga-se a partir da ação de intenções racionais, que alteram o arranjo estrutural e material da ação, originando, assim, a aprendizagem.

Ao destacar a importância da Psicologia, sobretudo da Psicologia da Aprendizagem e da Psicologia Cognitiva, na análise de vários fenômenos didáticos oriundos da Matemática, Van-Hiele (1957) reflete sobre a formação de professores, afirmando sobre a necessidade da articulação entre Psicologia e Matemática, de modo a contribuir com o desenvolvimento da Didática da Matemática, sobretudo, ao ensino da Geometria.

Mas o autor não descarta também a necessidade de considerar pressupostos teóricos de outros campos do conhecimento humano, como a Sociologia e a Antropologia, tendo em vista a diversidade de situações a serem investigadas na escola básica.

O pesquisador identificou duas classes de *inzicht* relacionados à aprendizagem matemática. A primeira classe é apoiada na lógica estruturante de natureza perceptiva, na qual ocorre o entendimento da estrutura do pensamento (estudante da classe estruturante). Enquanto que a segunda classe é baseada nos componentes algoritmizados, marcada pela compreensão da evolução dos algoritmos (estudante da classe algorítmica). O quadro abaixo apresenta um resumo das principais diferenças entre essas classes.

Quadro 07 – Classes de *inzicht* conforme Van-Hiele (1957)

CLASSE	CARACTERÍSTICAS
<i>Inzicht</i> Estruturante	Os estudantes dessa classe: – não compreendem adequadamente os algoritmos; – não são bons em problemas que envolvem o uso de cálculos; – são exigentes quanto à solução de um problema; – se envolvem com as regras, sem necessidade; – utilizam a estrutura de um problema para resolvê-lo; – não compreendem o algoritmo referente à resolução da situação, então, a título de ilustração, não conseguem desenvolver o algoritmo que demonstra o paralelismo, mas reconhecem dois segmentos de reta paralelos.

<i>Inzicht</i> Algorítmico	Os alunos dessa classe: – conhecendo-se as regras fundamentais do algoritmo, compreendem de forma rápida um certo tema; – fazem uso de definições próprias; – lidam com algoritmos próprios; – trabalham de modo adequado com as conversões matemáticas obrigatórias; – compreendem o algoritmo referente à solução de um problema, dessa forma, consegue desenvolver sem dificuldades, por exemplo, o algoritmo da demonstração do paralelismo.

Fonte: elaborado pelo autor

Van-Hiele (1957) deixa claro que para se alcançar um *inzicht* em situação de aprendizagem é necessário que o aluno desenvolva a compreensão de conceito matemático. Nessa direção, com relação à formação do *inzicht*, o autor indica a decorrência desse processo em quatro grandes momentos ou etapas.

Em um primeiro momento, a criança atua de modo completamente desorientado na área perceptiva, em seguida, passa a ilustrar espontaneamente a situação delimitada. Em uma segunda etapa, o aluno foca sua concentração na solução do problema.

Na terceira fase, a partir das impressões do primeiro momento, uma nova estrutura da área perceptiva é formada e, nesse momento, o *inzicht* é concebido. No quarto momento, considerando o entendimento elaborado nos cenários produzidos com mudança das informações iniciais, a criança realiza a validação das estratégias criadas por meio de vários testes.

Reconhecendo a importância do *inzicht* para a aprendizagem, o autor destaca a necessidade de se analisar a sistematização do ensino da Matemática, isto é, esse processo deve ser elaborado de forma a propiciar o desenvolvimento do *inzicht* pelos estudantes nas diversas situações de sala de aula. Nessa direção, Van-Hiele (1957) organizou três categorias de discentes com base em justificativas de natureza psicológica.

A primeira categoria é caracterizada por alunos que apresentam cenários adequados e possuem capacidades para a obtenção de um efetivo entendimento em Matemática. A segunda é marcada por estudantes que não se interessam por algoritmos, mas que possuem um nível de percepção adequadamente organizado de forma a obter um entendimento matemático aceitável.

Por fim, a terceira categoria é constituída por crianças que conseguem utilizar certas normas de operações numéricas em problemas assinalados. Tais alunos não

apresentam percepção e pensamento organizados, então se faz necessário que o docente organize diversos procedimentos de pensar.

Para um bom desempenho do *inzicht* a partir da didática, conforme pontua Van-Hiele (1957), é fundamental que os estudantes participem de forma ativa nas aulas, especificamente em todos os cenários de aprendizagem organizados pelo professor.

Além disso, esse profissional necessita aplicar uma diversidade de instrumentos avaliativos que o possibilite a apreciação de todo o processo evolutivo do *inzicht* dos estudantes para, inclusive, promover intervenções pedagógicas que ultrapassem toda a complexidade sentida pelos alunos no estudo dos conceitos matemáticos.

No que se refere à atividade cotidiana na classe de Matemática, o investigador indica que o docente deve disponibilizar momentos relevantes à estrutura do pensamento dos estudantes, isto é, elaborar problemas que promovam o avanço do pensar matemático.

Para esse fim, inicialmente, o docente deve analisar as concepções que os discentes apresentam sobre determinado conceito matemático, bem como acerca da natureza dessas concepções. Em seguida, a situação didática deve ocorrer de forma a respeitar as experiências externas vivenciadas pelos alunos, além de considerar o contexto matemático.

A partir de uma equidade entre esses dois ambientes, e por meio de atividades que desequilibram (no sentido piagetiano) os estudantes percebem que o seu mundo (das suas vivências) é a origem do mundo matemático, criando novas estruturas em seu pensamento e alcançando um patamar mais elaborado do pensar em Matemática.

Foi dessa forma que Van-Hiele (1957) percebeu a existência de diferentes níveis de compreensão dos conceitos em Geometria, introduzindo o conceito de “níveis de pensamento” na Educação Matemática.

De acordo com o autor, há duas questões a serem consideradas que tornam os níveis de pensamento um conceito de grande relevância para a prática docente, especificamente, a elaboração dos cenários de aprendizagem.

A primeira está relacionada à natureza do *inzicht*, que consiste em uma estrutura mental nova, e a segunda refere-se à organização mental, isto é, um estudante atuando no nível inicial de pensamento não compreende o ensino de determinado conceito voltado para níveis mais avançados.

A efetivação dos níveis é uma prova de que o ensino é adequado e a aprendizagem permanente. Isso não ocorrerá se o docente não compreender a complexidade enfrentada pelos alunos, por exemplo, evitando as falhas, desconsiderando os atos indispensáveis para o alcance de um nível mais elaborado.

Sobre a complexidade relacionada à aquisição de um nível de pensamento, Passos (2015) explica que:

a aquisição de um nível de pensamento é um processo mais trabalhoso do que a aquisição de *inzicht*. Para adquirir *inzicht* é necessário obter determinada coesão, uma estruturação diante dos métodos de pensamento conhecidos. Para alcançar um nível, o aluno deve passar para novas formas de pensamento que são alcançadas, após um processo individual de reflexão a respeito do conhecimento em pauta. O professor não pode oferecer muita ajuda nessa transição. Cabe ao professor começar a utilizar a linguagem do próximo nível, de modo que o aluno se sinta desafiado a entendê-lo. Isso pode levá-lo a superar obstáculos. Para evitar desânimos, o professor pode eventualmente retomar problemas de um nível mais baixo. Ao retomar o problema, porém, deverá utilizar explicações do nível superior (p.54, *itálico nosso*).

Van-Hiele (1957) também destaca que um certo conceito geométrico é compreendido pelos estudantes, passando a ser utilizado para a solução de um problema, quando estiverem convencidos do seu significado. Então, pensar geometricamente é também uma forma de elaborar significado à Geometria.

O autor ainda ressalta a importância da linguagem na construção de conhecimento em Matemática, cujo papel não se reduz ao ato de comunicar, mas de possibilitar que os alunos desenvolvam o pensamento autônomo. Para o pesquisador, a linguagem favorece a criação de estruturas do pensamento.

Em 1986, o investigador holandês publica o livro “*Structure and insight: a theory of Mathematics Education*”³¹, no qual, baseando-se nos estudos do psicólogo suíço Jean Piaget sobre a Epistemologia Genética, isto é, sobre o desenvolvimento

³¹ Estrutura e *inzicht*: uma teoria da Educação Matemática.

da inteligência, trata de uma teoria para a aprendizagem da Geometria³², analisando a função da intuição no ensino da Geometria (VAN-HIELE, 1986). Acerca desse processo, o autor indica que:

a intuição tem uma reputação desfavorável; isso está incluído no conceito. Se todos puderem ver o que vejo, minha ação não é por causa de uma intuição; se alguém pode aprender, veja a estrutura na qual baseio meu julgamento, não agi intuitivamente. Mas se eu vejo a solução para um problema diretamente, mas sem poder dizer como a estrutura que eu vi foi, então há a tendência de falar de uma intuição. E se a estrutura é tão fraca que não consigo identificar seus elementos, então certamente deve ser uma intuição. A conotação desfavorável está relacionada ao ciúme. “Este homem estava certo, mas ele não deu uma explicação para o julgamento dele. Nós, pelo contrário, tivemos uma explicação para o nosso julgamento. No entanto apesar de parecermos incorretos, ainda somos mais inteligentes do que ele”. E com esta afirmação, o “intuiter” é classificado com os jogadores, mas as estatísticas podem provar que seu julgamento não pode ser baseado no acaso.

Se falamos de uma introdução intuitiva à geometria, aludimos a um começo em que a observação obtém o lugar a que tem direito. Não há uma visão desfavorável. A intuição está associada à observação³³ (VAN-HIELE, 1986, p.76, tradução nossa).

Considerando a aprendizagem em Geometria como um processo dedutivo, Van-Hiele (1986) bem organizou a evolução do pensamento geométrico conforme níveis hierárquicos.

Desse modo, conforme o autor, ao mesmo tempo em que os alunos aprendem Geometria, eles progridem em seu pensamento geométrico por meio de uma sequência lógica de níveis de aprendizagem de conceitos geométricos, na qual

³² No Brasil, o modelo de Van-Hiele passou a ser divulgada no final dos anos de 1980, em especial pelos trabalhos da Professora Doutora Lilian Nasser, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, uma das referências nacionais em pesquisas educacionais sobre Geometria.

³³ Intuition has an unfavorable reputation; this is included in the concept. If everyone can see what I see, my action is not on account of an intuition; if someone else can learn see the structure on which I have base my judgment, I did not act intuitively. But if I see the solution to a problem directly, but without being able to tell how the structure I have seen was arrange, then there is the tendency to speak of an intuition. And if the structure is so feeble that I am not able to identify its elements, then surely it must be an intuition. The unfavorable connotation is related to jealousy. “This man was right, but the failed to give an explanation for his judgment. We, on the contrary, had an explanation for our judgment. Though, after the fact, we appear to be incorrect, still we are more intelligent than he”. And with this statement the “intuiter” is classified with the gamblers, although statistics may prove that his judgment cannot be based on chance.

If we speak of an intuitive introduction to geometry, we allude to a start in which observation gets the place it has a right to. There is no question of an unfavorable connotation. The word intuitive is the simply use in connection with observation.

cada nível apresenta características próprias, definidas por uma relação entre a linguagem e os objetos matemáticos.

Logo, o pesquisador propõe que o estudante passa do primeiro nível até o quinto nível por meio de situações didáticas adequadas, organizadas pelo professor. O Quadro 08, elaborado a partir do trabalho de Salvador, Palau, Garriegues, Pascual e Pérez (1989), apresenta uma descrição dos níveis de pensamento geométrico de Van-Hiele.

Quadro 08 – Níveis de pensamento geométrico de Van-Hiele

NÍVEIS	DESCRIÇÃO
1º nível – visualização	Neste nível, uma figura geométrica é vista como um todo desprovido de componentes ou propriedades. As descrições refletem experiências puramente visuais, a ponto de que um aluno desse nível, ao ser perguntando por que uma figura é um retângulo, responderá dizendo que porque parece uma porta ou uma janela (por exemplo). Um aluno desse nível pode aprender o vocabulário geométrico, pode identificar determinadas formas geométricas entre um conjunto delas e, dado uma figura, pode reproduzi-la ³⁴ .
2º nível – análise	O aluno analisa de forma informal as propriedades das figuras percebidas por meio de processos de observação e experimentação. Começa a estabelecer as propriedades essenciais dos conceitos, mas, ainda assim, o aluno não consegue ver relações entre propriedades e entre figuras. Tampouco é capaz de elaborar ou entender definições. Neste nível, um aluno diria, por exemplo, que "um retângulo é uma figura geométrica com quatro lados, quatro ângulos, lados opostos paralelos, ângulos iguais...", ou seja, apontaria uma lista inteira de propriedades ³⁵ .
3º nível – dedução informal	O aluno ordena logicamente as propriedades dos conceitos, começa a construir definições abstratas e pode distinguir entre necessidade e suficiência de um conjunto de propriedades na determinação de um conceito. Neste nível ele pode seguir e dar argumentos informais, mas não entende o significado da dedução ou o papel dos axiomas. Pode acompanhar demonstrações formais, mas o aluno não consegue entender como construir uma demonstração partindo de diferentes premissas ³⁶ .
4º nível –	O aluno atua formalmente no contexto de um sistema matemático com termos

³⁴ En este nivel, una figura geométrica es vista como un todo desprovisto de componentes o atributos. Las descripciones reflejan experiencias puramente visuales, hasta el punto de que un alumno de este nivel, a la pregunta de por qué una figura es un rectángulo, responderá diciendo que porque se parece a una puerta o a una ventana (p.ej.). Un alumno en este nivel puede aprender vocabulario geométrico, puede identificar formas geométricas determinadas de entre un conjunto de ellas y, dada una figura, puede reproducirla (SALVADOR; et al., 1989, p.14).

³⁵ El alumno analiza de un modo informal las propiedades de las figuras percibidas mediante procesos de observación y experimentación. Empiezan a establecerse las propiedades esenciales de los conceptos aunque todavía el alumno es incapaz de ver relaciones entre propiedades y entre figuras. Tampoco es capaz de elaborar o enender definiciones. En este nivel un alumno diría, por ejemplo, que "un rectángulo es una figura geométrica con cuatro lados, cuatro ángulos, lados opuestos paralelos, ángulos iguales..." es decir, aportaría toda una retahila de propiedades. (SALVADOR; et al., 1989, p.15).

³⁶ El alumno ordena lógicamente las propiedades de los conceptos, empieza a construir definiciones abstractas y puede distinguir entre necesidad y suficiencia de un conjunto de propiedades en la determinación de un concepto. En este nivel puede seguir y dar argumentos informales, pero no comprende el significado de la deducción o el papel de los axiomas. Puede seguir demostraciones formales pero no puede entender cómo construir una demostración partiendo de premisas diferentes (SALVADOR; et al., 1989, p.15).

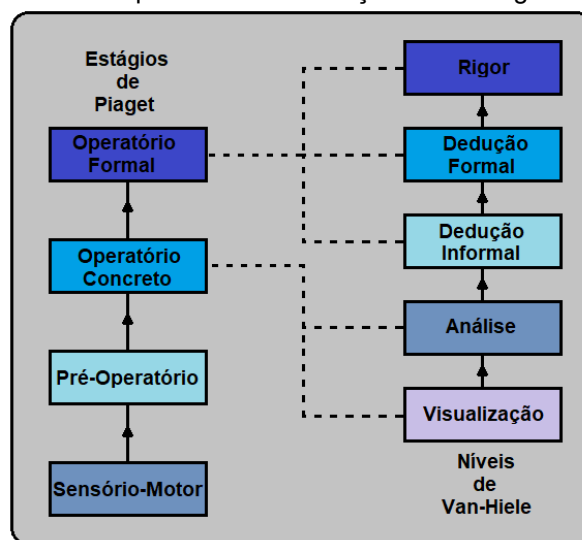
dedução formal	indefinidos, axiomas, um sistema lógico subjacente, definições e teoremas. Neste nível, um aluno é capaz de construir, não memorizar, demonstrações. É possível estudar a possibilidade de uma demonstração ser desenvolvida seguindo mais de uma sequência de proposições. Entende-se a interação entre condições necessárias e suficientes ³⁷ .
5º nível – rigor	O aluno pode comparar diferentes sistemas axiomáticos e pode estudar diferentes Geometrias na ausência de modelos concretos. Este nível é praticamente inalcançável por um aluno do ensino médio. Portanto, a maioria dos trabalhos de pesquisa se concentra nos três primeiros níveis ³⁸ .

Fonte: SALVADOR, *et al.* (1989, p.14-16, tradução nossa).

Como apontado por Denis (1994) e Gravina (2001), tendo como parâmetro o funcionamento cognitivo, pode-se estabelecer uma relação dos estágios de desenvolvimento cognitivo de Piaget com os níveis de pensamento geométrico propostos por Van-Hiele.

Assim, o estágio operatório-concreto confere com os dois primeiros níveis vanhielianos (visualização e análise), enquanto que o estágio operatório-formal combina com os demais níveis de Van-Hiele (dedução informal, dedução formal e rigor). Tal fato encontra-se ilustrado na Figura 26.

Figura 26 – Esquema sobre a relação entre Piaget e Van-Hiele



Fonte: elaborado pelo autor

³⁷ El alumno razona formalmente dentro del contexto de un sistema matemático con términos indefinidos, axiomas, un sistema lógico subyacente, definiciones y teoremas. En este nivel un alumno es capaz de construir, no ya memorizar, demostraciones. Se puede estudiar la posibilidad de que una demostración se desarrolle siguiendo más de una secuencia de proposiciones. Se entiende la interacción entre condición necesaria y suficiente (SALVADOR; et al., 1989, p.15).

³⁸ El alumno puede comparar sistemas basados en axiomáticas diferentes y puede estudiar distintas geometrías en ausencia de modelos concretos. Este nivel es prácticamente inalcanzable por un estudiante de secundaria. Por ello la mayoría de los trabajos de investigación se centran en los tres primeros. (SALVADOR; et al., 1989, p.15-16).

Conforme aponta Nasser (1995), os níveis são caracterizados por diferenças nos objetos de pensamento. Dessa forma, no primeiro nível, figuras isoladas são os objetos de pensamento; no segundo nível, as classes de figuras são os objetos de pensamento e o estudante identifica as propriedades dessas classes.

No terceiro nível, os objetos de pensamento são as propriedades das classes de figuras, assim, os estudantes conseguem realizar a ordenação lógica dessas propriedades. No quarto nível, os objetos de pensamento são as relações de ordem e os estudantes as operam; e, no quinto nível, os fundamentos dessas relações de ordem são os objetos de pensamento.

Podemos perceber, pelo esquema, por exemplo, que uma criança que trabalha no estágio pré-operatório piagetiano não tem “competência” nem para atuar no primeiro nível vanhieliano. Hoje em dia, está provado que isso não é verdade. É importante destacar que essa era a ideia de Van-Hiele naquela época (final da década de 60), e não a nossa nesta tese. Corroborando com o posicionamento acerca dessa problemática, poderia ter nos aportado a Bomtempo (2008, p.7):

a evolução da noção de espaço é paralela à aquisição da noção de objeto: no final do desenvolvimento sensório-motor, no entanto, a criança apreende um espaço único e objetivo no qual todos os objetos, inclusive ela própria, estão incluídos e inter-relacionados [...]. Logo, o desenvolvimento das noções de espaço e objeto é objetivado e externalizado progressivamente. Esta fase está relacionada à visualização da Teoria de Van Hiele para o pensamento geométrico, pois a imagem aparece sem a conceituação dos objetos. Para a criança, a noção geral dos objetos é construída a partir da visualização, levando em consideração a fase de desenvolvimento da inteligência.

De Villiers (2010) aponta que a transição do primeiro nível para o segundo nível abrange a passagem de uma figura de natureza estática no manejo de conceitos, para uma figura de natureza simbólica.

Conforme sinaliza o autor, de modo mais contundente, o alcance do segundo nível compreende a aquisição da linguagem de origem técnica, pois a partir dela as propriedades conceituais são anunciadas por um processo descritivo. Além disso, essa transição inclui a identificação de determinadas conexões inéditas entre conceitos e a refinação e manutenção dos conceitos presentes.

Segundo o mesmo autor, para que um estudante avance do primeiro nível para o segundo nível no estudo de um certo conceito, como, por exemplo, os

quadriláteros notáveis, é fundamental que os conceitos envolvidos sejam refinados, além de que as relações entre eles sejam reorganizadas de forma significativa.

Em vista disso, nessa transição outros aspectos devem ser observados e não somente a verbalização de conhecimento de natureza intuitiva, pois essa verbalização ocorre simultaneamente ao processo de reestruturação do conhecimento.

Conforme o autor, essa reestruturação não pode acontecer depois que os estudantes alcancem o terceiro nível de pensamento geométrico, caracterizado pela exploração das relações lógicas entre as propriedades dos objetos geométricos. Dessa maneira, o estabelecimento significativo da teia de relações no terceiro nível só pode ocorrer quando o estabelecimento da teia de relações no segundo nível tiver ocorrido de forma adequada, anteriormente.

Então, se a segunda teia de relações está atuando de modo apropriado, de maneira que sua estrutura é clara e uma pessoa consegue dialogar com seus pares, nessa direção, os componentes formadores do terceiro nível estão compostos.

Como pontua De Villiers (2010):

o terceiro nível também representa uma teia de relações completamente diferente do segundo nível. Essa teia de relações no segundo nível envolve a *combinação de propriedades* com tipos de figuras e relações entre figuras com base nessas propriedades, a teia de relações no terceiro nível abrange as *relações lógicas* entre as propriedades das figuras. A teia de relações no terceiro nível não se refere mais às figuras concretas e específicas, nem formam um quadro de referência em que se questiona se uma determinada figura possui certas propriedades. As perguntas típicas que são feitas no terceiro nível são se uma determinada propriedade segue de outra, ou pode ser deduzida de um determinado subconjunto de propriedades (por outras palavras, se ela poderia ser tomada como uma definição ou é um teorema) ou se duas definições são equivalentes³⁹ (p.3, tradução nossa).

Para o pesquisador sul-africano há uma grande diferença entre as teias de relações do primeiro e do segundo níveis de Van-Hiele. O terceiro nível é

³⁹ Level 3 also represents a completely different network of relations than Level 2. Where the network of relations at the Level 2 involves the association of properties with types of figures and relationships between figures according to these properties, the network of relations at the Level 3 involve the logical relationships between the properties of figures. The network of relations at the Level 3 no longer refer to concrete, specific figures, nor do they form a frame of reference in which it is asked whether a given figure has certain properties. The typical questions that are asked at Level 3 are whether a certain property follows from another, or can be deduced from a particular subset of properties (in other words whether it could be taken as a definition or is a theorem) or whether two definitions are equivalent (DE VILLIERS, 2010, p.3).

caracterizado pelo raciocínio sobre um sistema lógico. O segundo nível é marcado pela teia de relações, que se fundamentam em um processo descritivo verbal de acontecimentos percebidos. Logo, esses dois níveis apresentam teia de relações específicas, sendo que não é possível que um estudante raciocine nas duas teias ao mesmo tempo.

Discordamos dessa consideração do autor, pois os resultados de pesquisas brasileiras (COSTA; CÂMARA DOS SANTOS, 2015a; 2015b; 2016a; 2016b; 2016c; 2017a; 2017b; COSTA; ROSA DOS SANTOS, 2016; 2017a; 2017b) têm evidenciado que um mesmo aluno pode atuar nesses dois níveis vanhielianos, raciocinando nas duas teias de forma simultânea.

Com base na relação dos objetos e conforme a estrutura de pensamento de cada nível, De Villiers (2010) organizou as diferenças entre os três primeiros níveis propostos por Van-Hiele em um quadro, conforme ilustrado a seguir.

Quadro 09 – Diferenças entre os três primeiros níveis vanhielianos

Níveis	Objetos de pensamento	Estrutura de pensamento	Exemplos
1º Nível	Figuras Individuais	Reconhecimento visual Nomeação Classificação visual	Todos os paralelogramos ficam juntos porque eles “parecem iguais” Retângulos, quadrados e losangos não são paralelogramos porque eles “não se parecem com eles”
2º Nível	Classes de Figuras	Reconhecendo as propriedades como características das classes	Um paralelogramo tem: 4 lados, 4 ângulos, 4 diagonais, bissetrizes, etc. Um retângulo não é um paralelogramo, pois um retângulo tem ângulos de 90°, mas um paralelogramo não.
3º Nível	Definições de Classes de Figuras	Observação e formulação de relações lógicas entre propriedades	lados opostos iguais implicam lados opostos paralelos lados opostos paralelos implicam lados opostos iguais ângulos opostos iguais implicam lados opostos iguais diagonais bissetrizes implicam simetria de meia volta

Fonte: adaptado de De Villiers, 2010.

Como já mencionado, o progresso por meio dos níveis depende mais da instrução recebida anteriormente do que da idade ou maturidade biológica do aluno. Dessa forma, o professor desempenha uma função relevante nesse processo, ou seja, é o professor que organiza as atividades a serem trabalhadas em sala de aula, as quais deverão promover o desenvolvimento do pensamento geométrico do aluno.

Diante disso, Van-Hiele (1986) argumenta que para o aluno avançar de um nível “menos elaborado” para um nível “mais elaborado” é imprescindível que ele passe por cinco fases de aprendizagem.

Conforme sinalizado por Crowley (1994), na primeira fase, denominada “*informação*”, professor e alunos discutem e realizam tarefas relacionadas aos objetos de estudo do referente nível. Desenvolvem observações, direcionam questionamentos e iniciam um vocabulário próprio do nível.

Na segunda fase, “*orientação dirigida*”, os alunos exploram os objetos de estudo por meio do material previamente organizado pelo docente, assim, as tarefas deverão mostrar, de forma gradual, as estruturas características do respectivo nível. A seguir, na fase de “*explicação*”, a partir de suas vivências anteriores, os estudantes expressam e modificam suas concepções acerca das estruturas que foram analisadas.

Já na quarta fase, a de “*orientação livre*”, os estudantes ficam diante de tarefas mais difíceis, assim, eles se centram em produzir suas próprias soluções às tarefas propostas. Na quinta fase, “*integração*”, os alunos revisam e refletem acerca do que foi aprendido, formando uma compreensão global da nova rede de objetos e relações do nível alcançado.

O avanço de níveis não acontece em um pequeno período de tempo, podendo levar semanas ou até mesmo alguns meses (ou anos). É fundamental refinar as estratégias, os objetos de interesse, o vocabulário, que são próprios do referido nível.

Todavia, é evidente que há uma subjetividade nesse processo: o desenvolvimento dos níveis também é influenciado pelas vivências dos alunos, por fatores sociais, pela interação entre os estudantes com o professor e ainda com os demais colegas, da quantidade de aulas semanais de Geometria e, sobretudo, se há

uma articulação entre o ensino e o modelo vanhieliano (NASSER; SANT'ANNA, 2010).

Van-Hiele (1986) definiu ainda algumas propriedades que caracterizam o modelo e que são importantes para o professor de Matemática, pois elas constituem um guia para a tomada de decisões em sala de aula, favorecendo, assim, a aprendizagem dos alunos. O Quadro 10, construído de acordo com o texto de Nasser e Tinoco (2011), expõe uma síntese dessas propriedades.

Quadro 10 – Propriedades da teoria vanhieliana

PROPRIEDADES	DESCRIÇÃO
Hierarquia	Os níveis obedecem a uma hierarquia, isto é, para atingir certo nível é necessário passar antes por todos os níveis inferiores. Por exemplo, o aluno só consegue perceber a inclusão de classes de quadriláteros (terceiro nível) se distinguir as propriedades de cada uma dessas classes (segundo nível).
Linguística	Cada nível tem sua linguagem, conjunto de símbolos e sistema de relações próprios. Por exemplo, não adianta falar em propriedade com alunos que ainda estão no primeiro nível, pois eles não conhecem ainda esse significado da palavra.
Conhecimentos intrínsecos	Em cada nível, o aluno tem conhecimentos que estão intrínsecos e ele não consegue explicitar. Por exemplo, o aluno no primeiro nível é capaz de reconhecer um quadrado, sem conseguir explicar porque aquela figura é um quadrado. Só quando atingir o segundo nível é que será capaz de explicar, por meio da exploração dos componentes do quadrado e de suas propriedades.
Nivelamento	Não há entendimento entre duas pessoas que pensam em níveis diferentes, ou se a instrução é dada num nível mais avançado que o atingido pelo aluno. Por exemplo, não adianta o professor pedir a um aluno que está relacionando no segundo nível para fazer deduções, pois neste nível ele não domina ainda o processo dedutivo.
Avanço	O progresso entre os níveis depende da instrução recebida, isto é, o aluno só progride para o nível seguinte depois de passar por atividades específicas, que o preparem para esse avanço.

Fonte: Nasser e Tinoco (2011, p.79).

Para tanto, na medida do possível, em uma situação didática, é necessário que o estudante, o docente e o conhecimento matemático (explorado, por exemplo, no livro didático) estejam no mesmo nível. Apesar de os estudantes avançarem nos níveis, segundo uma sequência hierárquica, há casos em que parte deles não avança no mesmo compasso. Nesse sentido, podemos encontrar em nossa sala de aula, estudantes em diferentes níveis de pensamento geométrico.

Considerando as discussões de Van-Hiele (1957; 1986), em nosso entendimento, podemos considerar que o pensamento geométrico é a capacidade de reconhecer uma figura geométrica por meio da aparência física, de analisar essa figura em termos de suas propriedades, ordenar logicamente as propriedades de

figuras e perceber as relações entre essas propriedades e entre diferentes figuras, apreciar o papel da dedução e provar teoremas dedutivamente, e estabelecer teoremas em diferentes sistemas axiomáticos.

Isso não significa que o aluno só desenvolverá o pensamento geométrico quando chegar ao último nível (marcado pela análise de diferentes geometrias), mas já no primeiro nível, pois ele já tem algum tipo de pensamento geométrico (caracterizado pela identificação das figuras geométricas a partir do aspecto global).

Por fim, o nosso modelo se diferencia do proposto por Van-Hiele (1957), pois o foco dele não são os quadriláteros notáveis. Além disso, ele não explica, por exemplo, em qual nível de desenvolvimento de pensamento geométrico atua um aluno que não consegue distinguir um quadrado de um retângulo, tendo em vista que produzem imagens visuais.

4.2 Graus de aquisição dos níveis de pensamento geométrico segundo Gutierrez, Jaime e Fortuny (1991)

Em um artigo que teve por objetivo apresentar uma maneira alternativa de analisar os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico propostos por Van-Hiele, a partir da apreciação das respostas de estudantes e futuros professores dos anos iniciais, Gutierrez, Jaime e Fortuny (1991) verificaram que os participantes do estudo atuam em diferentes níveis ao mesmo tempo, em certos casos.

Esse fenômeno ocorre, pois, conforme os autores, os alunos aplicam procedimentos associados a mais de um nível de Van-Hiele, logo, eles apresentam diferentes graus de aquisição dos níveis dessa forma de pensar em Geometria.

Além disso, os investigadores sinalizam que a habilidade matemática de argumentar em atividades relacionadas à geometria tridimensional favorece a passagem entre os níveis por esses estudantes. Com o modelo alternativo, o foco dos autores é a identificação de estudantes que estão em transição entre os níveis de Van-Hiele.

No momento, nos atentamos em refletir sobre os atributos de cada grau de aquisição dos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico sinalizado no estudo do grupo espanhol. Nesta tese, defendemos que estudantes do ensino

básico (mas também de outros níveis escolares) podem apresentar características de mais de um nível, não por atuarem na transição, mas sim por trabalharem em subníveis dessa forma de pensar em Geometria.

No estudo, Gutierrez, Jaime e Fortuny (1991) consideraram a caracterização proposta por Van-Hiele (1957) ao pensamento geométrico, a qual indica que esse modo de pensar em Geometria é decorrente dos atributos que seguem: *reconhecer uma figura geométrica por meio da aparência física, analisar essa figura em termos de suas propriedades, ordenar logicamente as propriedades de figuras e perceber as relações entre essas propriedades e entre diferentes figuras, apreciar o papel da dedução e provar teoremas dedutivamente, e estabelecer teoremas em diferentes sistemas axiomáticos.*

O estudo desses autores foi desenvolvido em Valência na Espanha com 09 estudantes da oitava série da escola primária (que corresponde ao nono do ensino fundamental brasileiro) e de 41 futuros professores primários (que equivalem aos estudantes de Pedagogia no Brasil), os quais responderam cinco atividades sobre geometria tridimensional.

Na proposta, os pesquisadores basearam-se em dois argumentos. No primeiro, consideraram que, para ter uma visão mais completa do pensamento geométrico atual dos alunos, faz-se necessário tomar em conta a sua capacidade de usar cada um dos níveis de Van-Hiele, em vez de atribuir um único nível.

No segundo argumento, os autores afirmaram que na continuidade nos níveis de Van-Hiele, deve-se considerar que não é possível determinar um momento exato em que isso ocorre, mas que há um período de transição na passagem de um nível para o imediatamente superior.

Dessa forma, Gutierrez, Jaime e Fortuny (1991) quantificaram a aquisição de um nível de pensamento geométrico por meio da representação de um segmento graduado de 0% a 100%. Todavia, os autores indicam que é possível identificar distintos modos de pensamento durante a aquisição de um nível.

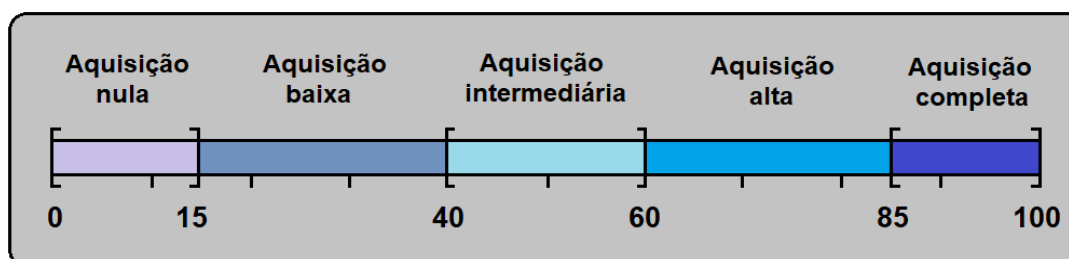
Consequentemente, para os investigadores, também é conveniente dividir esse processo contínuos em cinco períodos, caracterizados pelas formas qualitativamente diferentes, pelas quais os estudantes argumentam. Estes períodos

representam diferenças fundamentais no grau de aquisição de um determinado nível.

Segundo os pesquisadores, a divisão proposta de cada nível de Van-Hiele em períodos não implica que o progresso por meio dos níveis não seja contínuo. A atribuição de um valor numérico ao grau de aquisição de um nível pode ser útil para as pesquisas em Educação Matemática.

No entanto, como pontuam os autores, no planejamento pedagógico do professor, é necessário ter acesso às informações qualitativas do pensamento geométrico dos estudantes, para atribuição de atividades adequadas à aprendizagem. A Figura 27 ilustra as interpretações quantitativas e qualitativas do processo de aquisição de um nível. Gutierrez, Jaime e Fortuny (1991) destacam que os valores específicos atribuídos aos limites são subjetivos, até certo ponto.

Figura 27 – Graus de aquisição dos níveis de Van-Hiele segundo Gutierrez, Jaime e Fortuny (1991)



Fonte: adaptado de Gutierrez, Jaime e Fortuny (1991)

Como apontam os autores, na *aquisição nula* do nível de pensamento, os estudantes não têm consciência da existência ou da necessidade de métodos específicos de pensamento para um novo nível. Na *aquisição baixa*, os alunos começam a estar conscientes dos métodos de pensar em um determinado nível e de sua importância, então, eles tentam usá-los.

No entanto, conforme os pesquisadores, por causa de sua falta de experiência, os discentes simplesmente fazem algumas tentativas de trabalhar nesse nível, com pouco ou nenhum sucesso na solução das atividades, e retornam ao nível mais baixo de pensamento.

Para Gutierrez, Jaime e Fortuny (1991), à medida que a experiência dos estudantes cresce, eles entram em um período de grau de *aquisição intermediária*

do novo nível. Eles já usam os métodos do nível mais frequentemente, de forma contínua e com precisão.

Todavia, como indicam os autores, a falta de domínio desses métodos faz com que os alunos falem nos métodos do nível inferior quando eles enfrentam dificuldades especiais em suas atividades, mesmo que depois tentem voltar ao nível mais alto. Portanto, o pensamento durante este tempo é caracterizado por saltos frequentes entre os dois níveis.

Segundo os pesquisadores, no grau de *aquisição rica* do nível, os alunos estão com mais experiência, logo, o pensamento é progressivamente fortalecido. Os estudantes argumentam de maneira usual correspondente a este nível, mas eles cometem alguns erros ou voltam para o nível mais baixo. Por fim, ao atingirem *aquisição completa* do novo nível, os alunos têm o domínio total dessa maneira de pensar e usá-lo sem dificuldades.

Na atribuição dos estudantes a um certo grau de aquisição de um nível de pensamento geométrico, Gutierrez, Jaime e Fortuny (1991) apresentam um procedimento de avaliação:

para atribuir alunos a um grau específico de aquisição dentro de cada nível de Van-Hiele, propomos um procedimento de avaliação consistindo em uma série de itens abertos e critérios para avaliar as respostas dos alunos a cada item. Para cada um, os alunos recebem uma pontuação numérica relacionada à escala usada para determinar os graus de aquisição. Com a média das pontuações atribuídas aos itens que medem cada nível específico, um aluno é atribuído a um grau de aquisição dentro de cada nível⁴⁰ (p.239, tradução nossa).

Os autores indicam o pressuposto de que é mais importante observar o tipo de pensamento dos alunos do que a capacidade de resolver certos problemas corretamente em um determinado momento.

Além disso, segundo eles, uma resposta parcialmente correta (ou mesmo totalmente incorreta) também pode fornecer importantes informações. Uma resposta incorreta pode, por si só, oferecer uma quantidade de informação insignificante, mas

⁴⁰ In order to assign students to a specific degree of acquisition within each van Hiele level, we propose an assessment procedure consisting of a series of openended items and criteria for evaluating students' responses to each item. For each item students are assigned a numerical score that is related to the scale used to determine the degrees of acquisition. By averaging the scores assigned to items that measure each particular level, a student is assigned to a degree of acquisition within each level (GUTIERREZ; JAIME; FORTUNY, 1991, p.139).

o caso é diferente quando uma resposta é considerada em conjunto com outras respostas.

Gutierrez, Jaime e Fortuny (1991) afirmam que, ao marcar cada resposta, devem ser levados em consideração os níveis de Van-Hiele e a precisão matemática refletidos pelas respostas. Contudo, não é dado o mesmo valor a uma resposta completamente incorreta quanto a uma parcialmente incorreta ou a uma correta.

Nessa direção, os pesquisadores avaliaram cada resposta levando em consideração o(s) nível(is) de pensamento refletido(s), bem como a sua precisão e completude magistral. Nessa avaliação, Gutierrez, Jaime e Fortuny (1991) especificam que cada resposta é classificada de acordo com o nível de pensamento de Van-Hiele que reflete, seguindo os descritores dos níveis. As respostas que evidenciam dois níveis consecutivos são atribuídas ao nível superior, pois indicam um certo grau de aquisição desse nível.

Os autores sinalizam, ainda, que cada resposta é atribuída a um número de tipos de respostas, dependendo da sua precisão matemática e de como foi produzida a solução para a atividade.

Segundo os investigadores, para determinar o tipo de uma resposta, é necessário considerá-la do ponto de vista do nível de Van-Hiele que reflete, uma vez que uma resposta pode ser adequada de acordo com os critérios de um determinado nível de pensamento, mas não válido de acordo com os critérios de um nível superior.

Gutierrez, Jaime e Fortuny (1991) consideram que qualquer resposta a um item aberto pode ser atribuída a um dos seguintes tipos:

Tipo 0. Sem resposta ou respostas que não podem ser codificadas. **Tipo 1.** Respostas que indicam que o aluno não atingiu um determinado nível, mas que não fornece informações sobre qualquer nível inferior. **Tipo 2.** Respostas erradas e elaboradas insuficientemente que dão alguma indicação de um pouco de pensamento; respostas que contêm explicações incorretas e reduzidas, processos de pensamento ou resultados. **Tipo 3.** Respostas corretas, mas elaboradas insuficientemente, que dão alguma indicação de um determinado tipo de pensamento; respostas que contêm muito poucas explicações, processos de pensamento incipientes ou resultados muito incompletos. **Tipo 4.** Respostas corretas ou incorretas que claramente refletem características de dois níveis de Van-Hiele consecutivos e que contam processos de pensamento e justificativas suficientes. **Tipo 5.** Respostas incorretas que refletem um pouco de pensamento; respostas que os atuais processos de pensamento são completos, mas incorretos ou respostas que apresentam processos de

pensamento corretos que não consideram a solução do problema declarado. **Tipo 6.** Respostas corretas que refletem bastante um determinado nível de pensamento, mas que estão incompletas ou insuficientemente justificadas. **Tipo 7.** Respostas corretas, diretas e suficientemente justificadas que refletem um determinado nível de pensamento⁴¹ (p.240, tradução nossa).

Segundo os autores, as respostas dos tipos 0 e 1 indicam nenhum nível. No entanto, há uma diferença entre eles, porque as respostas de Tipo 1 indicam que um nível específico não foi alcançado. O valor numérico atribuído a ambos os tipos é o mesmo e, conseqüentemente, deste ponto de vista, ambos os tipos podem ser unidos em um único, mas são qualitativamente diferentes.

Gutierrez, Jaime e Fortuny (1991) consideram que as respostas dos tipos 2 e 3 apontam para o início da aquisição de um nível. Em ambos os casos, as respostas são muito incompletas e, em geral, muito baixas. Por causa dessa incompletude, eles não permitem a avaliação para identificar o nível de pensamento do aluno. O avaliador só poderá identificar vestígios vagos desse nível de pensamento.

Como assinalado pelos investigadores, o tipo 4 indica respostas para as quais o estudante usa dois níveis de pensamento, mas nenhum dos níveis é claramente predominante. Esse tipo de resposta caracteriza os discentes que estão em uma fase intermediária de transição entre dois níveis, pois estão conscientes da conveniência de usar os métodos do nível superior, mas não podem dispensar os métodos do nível mais baixo. Com relação à sua precisão matemática e completude, esse tipo de resposta tem características semelhantes às dos tipos 5, 6 e 7.

Em concordância com os autores, os tipos 5 e 6 correspondem às respostas que refletem principalmente o uso pelo aluno de um nível de pensamento

⁴¹ **Type 0.** No reply or answers that cannot be codified. **Type 1.** Answers that indicate that the learner has not attained a given level but that give no information about any lower level. **Type 2.** Wrong and insufficiently worked out answers that give some indication of a given level of reasoning; answers that contain incorrect and reduced explanations, reasoning processes, or results. **Type 3.** Correct but insufficiently worked out answers that give some indication of a given level of reasoning; answers that contain very few explanations, inchoate reasoning processes, or very incomplete results. **Type 4.** Correct or incorrect answers that clearly reflect characteristic features of two consecutive van Hiele levels and that contain clear reasoning processes and sufficient justifications. **Type 5.** Incorrect answers that clearly reflect a level of reasoning; answers that present reasoning processes that are complete but incorrect or answers that present correct reasoning processes that do not lead to the solution of the stated problem. **Type 6.** Correct answers that clearly reflect a given level of reasoning but that are incomplete or insufficiently justified. **Type 7.** Correct, complete, and sufficiently justified answers that clearly reflect a given level of reasoning (GUTIERREZ; JAIME; FORTUNY, 1991, p. 240).

predominantemente específico, embora algumas vezes um nível mais baixo possa aparecer.

Segundo Gutierrez, Jaime e Fortuny (1991), essas respostas indicam uma fase avançada na transição entre dois níveis, com diferentes graus de aquisição do nível superior, pois a aquisição de um nível de pensamento depende dos seus procedimentos de pensamento e do desenvolvimento adequado dos conceitos matemáticos.

Portanto, como apontado pelos autores, uma aquisição incompleta de um nível pode ser verificada quando o estudante utiliza procedimentos de pensamento deste nível de forma incompleta e, às vezes, precisa recorrer às estratégias do nível inferior, ou, então, quando o aluno não consegue completar a resposta ou perceber que é incorreta.

Gutierrez, Jaime e Fortuny (1991) declaram que o Tipo 7 indica que o aluno adquiriu completamente um determinado nível, uma vez que ele consegue resolver toda a atividade usando apenas procedimentos de pensamento que são característicos desse nível. Os oito tipos de respostas refletem os vários graus de aquisição dos níveis vanhielianos de pensamento. Os tipos 0 e 1 indicam que não há aquisição, os Tipos 2 e 3 indicam baixa aquisição, o Tipo 4 indica aquisição intermediária, os Tipos 5 e 6 indicam alta aquisição e o Tipo 7 indica a aquisição completa do nível.

Para cada tipo de resposta, referente ao teste de geometria tridimensional, os autores atribuíram um peso em porcentagem como ilustrado a seguir:

Quadro 11 – Peso relacionado aos diferentes tipos de resposta

Tipo	0	1	2	3	4	5	6	7
Peso (%)	0	0	20	25	50	75	80	100

Fonte: Gutierrez, Jaime e Fortuny (1991, p.241)

Ainda, com relação aos pesos, os pesquisadores explicam que:

assim, podemos atribuir ao vetor (I, t) a cada resposta de um teste, onde I é o nível de Van-Hiele refletido na resposta e t é o tipo de resposta (I está vazio quando t é zero). Os tipos de respostas são quantificados em termos da escala de aquisição do nível de pensamento refletido [...]. O grau de aquisição de um nível de Van-Hiele por um aluno é determinado pela concentração da média aritmética dos pesos dos vetores (I, t) para os itens

que poderiam ter sido respondidos nesse nível⁴² (GUTIERREZ; JAIME; FORTUNY, 1991, p.241, tradução nossa).

Além disso, os autores espanhóis reorganizaram os níveis de Van-Hiele, oferecendo, assim, uma adaptação desse modelo para o estudo de geometria tridimensional. Essa reorganização é composta por quatro categorias de níveis conforme descrito no Quadro 12 e ilustrado na Figura 28.

Quadro 12 – Adaptação dos níveis de Van-Hiele para o estudo de geometria tridimensional

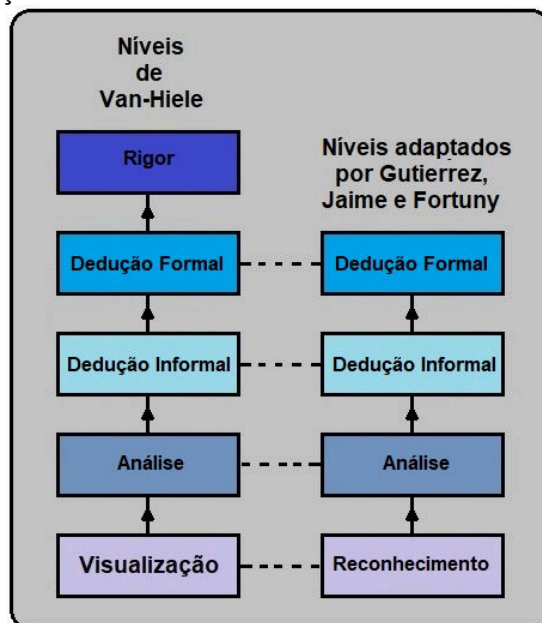
NÍVEIS	DESCRIÇÃO
<i>Primeiro Nível (Nível 1 ou Reconhecimento)</i>	Os sólidos geométricos são julgados por sua aparência. Os alunos consideravam objetos tridimensionais como um todo. Eles reconhecem e denominam sólidos (prismas, cones, pirâmides, etc.), e eles distinguem o sólido dado de outros em uma base visual. Os estudantes não consideram explicitamente os componentes ou propriedades para identificar ou nomear um sólido.
<i>Segundo Nível (Nível 2 ou Análise)</i>	Os discentes identificam os componentes dos sólidos geométricos (faces, bordas, etc.) e os sólidos são analisados como portadores de suas propriedades (paralelismo, regularidade, etc.). Os estudantes descrevem de modo informal formas tridimensionais por meio de suas propriedades. Eles não conseguem relacionar logicamente as propriedades entre si, nem podem classificar logicamente sólidos ou famílias de sólidos. Os alunos são capazes de descobrir propriedades dos sólidos por meio da experimentação.
<i>Terceiro Nível (Nível 3 ou Dedução Informal)</i>	Os estudantes são capazes de classificar famílias de sólidos geométricos (classes de prismas ou sólidos arredondados, poliedros regulares, dualidade, etc.). As definições (condições necessárias e suficientes) são significativas para os alunos, que são capazes de lidar com definições equivalentes para o mesmo conceito. Os discentes podem apresentar argumentos informais para suas deduções, e eles podem seguir algumas provas formais fornecidas pelo professor ou pelo livro didático, mas só podem realizar inferências simples por si mesmas.
<i>Quarto Nível (Nível 4 ou Dedução Formal)</i>	Os alunos compreendem o papel dos diferentes elementos de um sistema axiomático (axiomas, definições, termos indefinidos e teoremas). Eles também podem realizar provas formais.

Fonte: Gutierrez, Jaime e Fortuny (1991)

Como não foram identificados alunos atuando no último nível vanhieliano, ao resolverem atividades sobre sólidos geométricos, então, esse nível foi removido da reorganização proposta pelos autores.

⁴² Thus, we can assign a vector (l, t) to each answer of a test, where l is the van Hiele level reflected in the answer and t is the type of answer (l is empty when t is zero). The types of answers are quantified in terms of the scale of acquisition of the reflected level of reasoning [...]. The degree of acquisition of a van Hiele level by a student is determined by calculating the arithmetic average of the weights of the vectors (l, t) for all the items that could have been answered at that level (GUTIERREZ; JAIME; FORTUNY, 1991, p.241).

Figura 28 – Articulação entre os modelos de Van-Hiele e de Gutierrez, Jaime e Fortuny



Fonte: elaborado pelo autor

Além disso, essa adaptação dos pesquisadores espanhóis é diferente do modelo proposto por nossa tese, pois os objetos geométricos de estudo são diferentes. Na pesquisa de Gutierrez, Jaime e Fortuny (1991), o centro da investigação é a geometria tridimensional, ou seja, os sólidos geométricos, enquanto em nossa tese, o foco é nos quadriláteros notáveis euclidianos planos.

Por fim, os autores concluem que a maneira de avaliar os níveis de pensamento geométrico permite a possibilidade de que o aluno possa desenvolver dois níveis consecutivos de pensamento ao mesmo tempo, embora o que geralmente acontece é que a aquisição do nível inferior é mais completa do que a aquisição do nível superior.

De fato, eles observaram que os estudantes, em geral, mobilizaram um único nível de pensamento, mas alguns usaram vários níveis ao mesmo tempo, provavelmente dependendo da dificuldade do problema.

Para os pesquisadores, isso não implica uma rejeição da estrutura hierárquica dos níveis, mas sim sugere que o modelo de Van-Hiele deve ser melhor adaptado à complexidade dos processos de pensamento humano, pois as pessoas não se comportam de forma simples e linear, e que a atribuição de um único nível pode demorar.

4.3 Níveis de pensamento geométrico segundo Garrido (2005)

Em um artigo que teve por objetivo apresentar um modelo didático para a aprendizagem de conceitos e procedimentos geométricos que favorecem o desenvolvimento do pensamento geométrico nos alunos do segundo ciclo da escola primária na Cidade de Havana (Cuba), Garrido (2005) verificou que o modelo de Van-Hiele não foi suficiente para explicar os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes cubanos.

Inicialmente, a autora afirma que o pensamento matemático possui diferentes significados. Para aqueles que estudam a Matemática como ciência, isto é, os pesquisadores matemáticos, essa forma de pensar é considerada como um estudo que exige formas abstratas de pensamento.

Enquanto que, conforme a investigadora, para aqueles que estudam por meio de processos educacionais, essa instância do pensamento é uma ferramenta para resolver problemas ou situações da vida. Tudo isso em um ambiente social no qual a sociedade disponibiliza a conotação da ciência:

em outras palavras, o pensamento matemático é aquele que é alimentado por meio de conhecimento, habilidades e capacidades matemáticas que servem para enfrentar e resolver problemas de vida e, portanto, deve ser o mais flexível possível, criativo, divergente, produtivo e verdadeiro, como a própria realidade objetiva. Então, determinar em que nível o pensamento matemático expresso nos termos anteriores deve ser desenvolvido é um problema que deve ser resolvido pela própria sociedade e pelos seus sistemas educacionais⁴³ (GARRIDO, 2005, p.9, tradução nossa).

Nessa direção, segundo a pesquisadora, o ensino de Matemática nas escolas básicas deve ter como objetivo central promover o desenvolvimento do pensamento matemático, ou seja, oferecer situações para construção do conhecimento de natureza matemática pelos estudantes, para que eles sejam capazes de resolver situações práticas, além de produzir novos conhecimentos.

No caso da Geometria, Garrido (2005) indica que, para atender as necessidades de Cuba, o pensamento geométrico deve constituir um centro de

⁴³ En otras palabras, el pensamiento matemático es aquel que se potencia a través de los conocimientos, habilidades y capacidades matemáticas que sirve para enfrentar y resolver problemas de la vida y que, por tanto, debe ser lo más flexible, creativo, divergente, productivo y verdadero, como la propia realidad objetiva. Determinar entonces hasta qué nivel debe desarrollarse el pensamiento matemático expresado en los términos anteriores es un problema que debe ser resuelto por la propia sociedad y por sus sistemas educativos (GARRIDO, 2005, p.9).

atenção na escola primária. Para a autora, o estudo de conteúdos geométricos ensina as crianças a pensar e a raciocinar sobre a realidade tridimensional, com a qual elas estão em contato desde uma idade precoce e que precisam conhecer e modificar.

Em conformidade com a pesquisadora, por meio desses conteúdos, são desenvolvidas habilidades e capacidades específicas bastante úteis para transformar o mundo social. Por exemplo, sem a capacidade de imaginação espacial e habilidades de construções geométricas, profissões como torneiro, carpinteiro, construtor, pintor, engenheiro, arquiteto, etc, seriam impossíveis.

Conforme a investigadora cubana, o pensamento geométrico é considerado como

[...] uma forma de pensamento matemático, mas não exclusivo dele e é baseado no conhecimento de um modelo do espaço físico tridimensional. Esse pensamento, como reflexão generalizada e mediada do espaço físico tridimensional, possui uma forte base senso perceptual que começa a partir das primeiras relações da criança com o meio ambiente e que é sistematizada e generalizada ao longo do estudo dos conteúdos geométricos na escola⁴⁴ (GARRIDO, 2005, p.10, tradução nossa).

A autora sinaliza que três capacidades bem definidas são desenvolvidas com o pensamento geométrico: visão espacial, representação espacial e imaginação espacial. Todas estão fortemente articuladas entre si. Todavia, a imaginação espacial ocupa o centro desse modo de pensar em Geometria, porque possibilita realizar análise do plano e estabelecer relações no espaço.

Dito de outra forma, para Garrido (2005), essa capacidade geométrica possibilita o estudo do plano e do espaço por meio de seus conceitos, leis e, além da derivação de raciocínios, logo, perpassa o campo geométrico para tornar-se como um pensamento dialético por excelência.

Contudo, a investigadora considera que o conhecimento geométrico não pressupõe apenas reconhecer visualmente certas formas geométricas e conhecer os seus nomes corretos; mas implica, conscientemente, explorar o espaço, comparar

⁴⁴ [...] una forma de pensamiento matemático, pero no exclusivo de ella y se basa en el conocimiento de un modelo del espacio físico tridimensional. Este pensamiento, como reflejo generalizado y mediato del espacio físico tridimensional tiene una fuerte base sensoperceptual que se inicia desde las primeras relaciones del niño con el medio y que se sistematiza y se generaliza a lo largo del estudio de los contenidos geométricos en la escuela (GARRIDO, 2005, p. 10).

os elementos observados, estabelecer relações entre eles e expressar verbalmente as ações realizadas e as propriedades observadas, a fim de interiorizar o conhecimento; bem como descobrir propriedades de figuras e transformações, construir modelos, tirar conclusões para chegar a formular leis gerais e resolver problemas.

Tendo por base esses pressupostos, Garrido (2005) indica que o processo de aprendizagem do conhecimento geométrico na escola primária em Cuba abrange dois momentos importantes: um estágio senso perceptual, que ocorre desde o nascimento da criança até os diferentes estágios de reconhecimento do espaço físico tridimensional.

Desse modo, a pesquisadora reflete que o pensamento geométrico é uma forma de pensar em situações que exigem conhecimentos, habilidades e capacidades geométricas e que isso promove o desenvolvimento do pensamento geral e único de cada estudante.

Então, Garrido (2005) propõe um modelo didático para estimular o pensamento geométrico em escolas primárias. Para a autora, esse modelo pode ser considerado como uma abstração do ensino e da aprendizagem, no qual são necessárias relações e nexos presentes para um determinado objeto deste processo.

Segundo a pesquisadora, o modelo de pensamento geométrico de Van-Hiele (1957) está focado nas dificuldades apresentadas por estudantes em aulas de Geometria da escola secundária holandesa.

Ao reconhecer a importância dos estudos de Van-Hiele, Garrido (2005) aponta que o modelo vanhieliano tenta explicar como os estudantes pensam por meio de cinco níveis de pensamento, além de fornecer orientações a serem consideradas na organização do ensino, para promover o progresso dessa forma de pensar dos discentes, a partir de cinco fases de aprendizagem.

Contudo, a autora cubana também faz uma análise crítica do modelo do pesquisador holandês, considerando quatro elementos (limitadores) para as concepções psicopedagógicas, a que Van-Hiele é atribuído e, o nível em que é aplicado. Dessa forma, a investigadora pontua as seguintes limitações do modelo vanhieliano:

a) a definição dos níveis de pensamento geométrico, por meio da qual a compreensão geométrica passa, é muito ampla; a localização dos estudantes em cada nível é complexa, pois a compreensão em Geometria não acontece obrigatoriamente em um ano escolar (GARRIDO, 2005).

b) o processo abstrato do modelo fundamenta-se em estudantes da escola secundária holandesa, que apresentam diferentes características psicológicas e sociais das crianças cubanas no nível primário (GARRIDO, 2005).

c) a base epistemológica em que o modelo foi construído é o construtivismo, logo, considera que é o aluno que constrói todo o seu conhecimento. No entanto, embora se considere que o uso racional desta corrente não é prejudicial para o ensino da Matemática, sua absolutização não é positiva (GARRIDO, 2005).

d) em sua aplicação internacional, o modelo é fragmentado para o uso quase absoluto dos níveis de pensamento, que é a parte mais importante e não suas fases. O critério é que, o conhecimento de outras teorias de aprendizagem (com ênfase nos trabalhos da escola histórico-cultural), em muitos países ibero-americanos enfraqueceu a parte prescritiva voltada às orientações de organização do ensino (GARRIDO, 2005).

Mesmo com o reconhecimento da importância do modelo de Van-Hiele na constituição do ponto inicial de discussões geradas na sua pesquisa, Garrido (2005) reforça sobre a necessidade da construção de um modelo didático que responda as demandas psicopedagógicas, além da realidade da escola em Cuba.

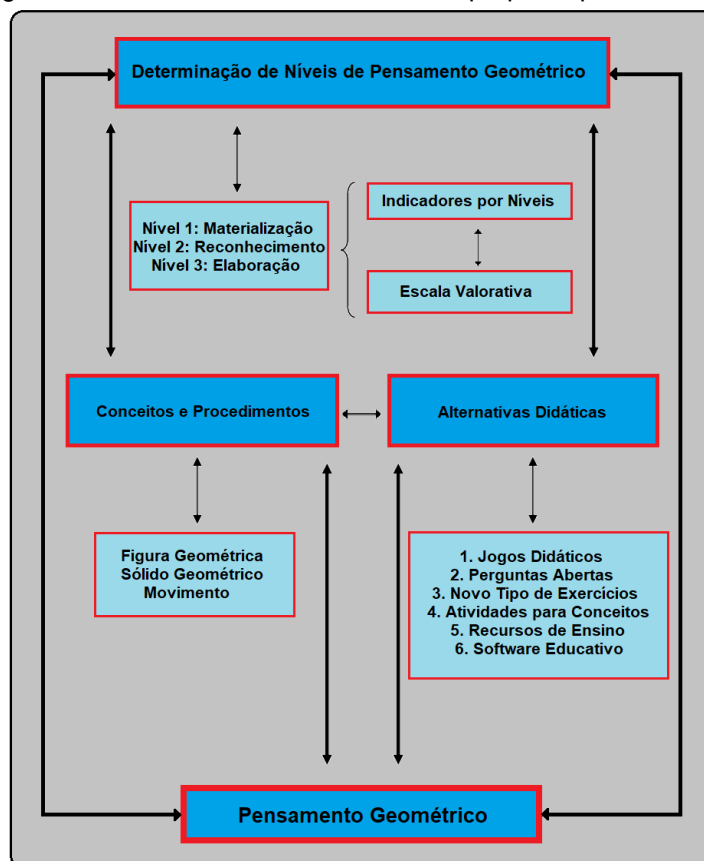
A autora considera que, como um princípio fundamental, o modelo didático deve propiciar o pensamento geométrico com base em uma aprendizagem desenvolvida de conceitos e procedimentos geométricos na escola primária, que englobe as cidades e a zona rural, salas de aula regulares e multisseriadas.

Para a pesquisadora, o modelo também deve ser um recurso para o professor, a partir de um diagnóstico real, assim, esse profissional poderá determinar o potencial e as dificuldades de seus alunos para aprender novos conceitos e procedimentos geométricos. Logo, para esse diagnóstico, os níveis devem ser mensuráveis e visíveis por professores e alunos, além de responder aos objetivos do ensino de Matemática em relação aos conteúdos geométricos.

Diante dessas circunstâncias, Garrido (2005) elaborou um modelo didático para a aprendizagem de conceitos e procedimentos geométricos com abordagem sistêmica, que considera o enfoque histórico-cultural e as tradições pedagógicas cubanas como base epistemológica.

Como sinalizado pela pesquisadora, o modelo didático proposto tem uma estrutura sistêmica, considerando o pensamento geométrico como núcleo, a determinação dos níveis de pensamento geométrico, os conceitos e procedimentos generalizadores e as alternativas didáticas, como elementos de sua integração, conforme ilustrado na Figura 29.

Figura 29 – Estrutura do modelo didático proposto por Garrido (2005)



Fonte: adaptado de Garrido (2005).

Em síntese, segundo a autora, o modelo didático compreende:

a) a precisão dos níveis de pensamento geométrico, dos alunos considerados, enfatiza o comportamento por níveis para prestar a atenção às diferenças individuais do aluno que está em um primeiro nível até o possível aluno talentoso (GARRIDO, 2005).

b) a organização da abordagem do conteúdo a ser ministrado em sala de aula tem como conceitos gerais os de figura geométrica, sólido geométrico e movimento, para potencializar a assimilação desses conceitos e dos procedimentos que são gerados em cada turma (GARRIDO, 2005).

c) a seleção da relação de alternativas didáticas tem como premissa os objetivos a serem alcançados e o diagnóstico dos níveis e pressupõe a implementação da criatividade de cada professor, tanto para combiná-las quanto para enriquecê-las (GARRIDO, 2005).

De acordo com a autora, para a determinação dos níveis de pensamento geométrico que integra o modelo didático foram especificados, como resultado da pesquisa, três níveis: Materialização (Nível 1), Reconhecimento (Nível 2) e Elaboração (Nível 3). O Quadro 13 apresenta a caracterização desses níveis.

Quadro 13 – Níveis de pensamento geométrico segundo Garrido (2005)

Níveis	Descrição
Nível 1 Materialização	O aluno requer percepção sensorial direta de objetos materiais ou materializados que lhe permitam memorizar características essenciais, significados e relações ⁴⁵ .
Nível 2 Reconhecimento	O aluno observa e, por meio da ajuda de questões ativas à sua memória, estabelece significados e relacionamentos entre significados ⁴⁶ .
Nível 3 Elaboração	O estudante pensa sobre situações de complexidade relativa e, em alguns casos, resolve problemas ⁴⁷ .

Fonte: Garrido (2005, p. 16, tradução nossa).

Na determinação desses níveis nos estudantes, a autora realizou uma análise sobre as habilidades específicas de cada ano escolar da escola primária que são referenciadas nos objetivos escolares e nas habilidades geométricas gerais que integram o pensamento geométrico. Tal fato encontra-se ilustrado no Quadro 14.

Com base nessas habilidades geométricas, fica mais clara a proximidade entre o modelo de Van-Hiele (1957) e o de Garrido (2005). Isto é, a pesquisadora fez um percurso semelhante ao que fizeram Guitierrez, Jaime e Fortuny (1991), ao

⁴⁵ El estudiante requiere de la percepción sensorial directa de objetos materiales o materializados que le posibilite memorizar rasgos esenciales, significados y relaciones (GARRIDO, 2005, p. 16).

⁴⁶ El estudiante observa y mediante el auxilio de preguntas activa su memoria, establece significados y relaciones entre significados (GARRIDO, 2005, p. 16).

⁴⁷ El estudiante razona ante situaciones de relativa complejidad y en algunos casos resuelve problemas (GARRIDO, 2005, p. 16).

proporem uma reorganização do modelo vanhieliano para o estudo de geometria tridimensional com alunos espanhóis.

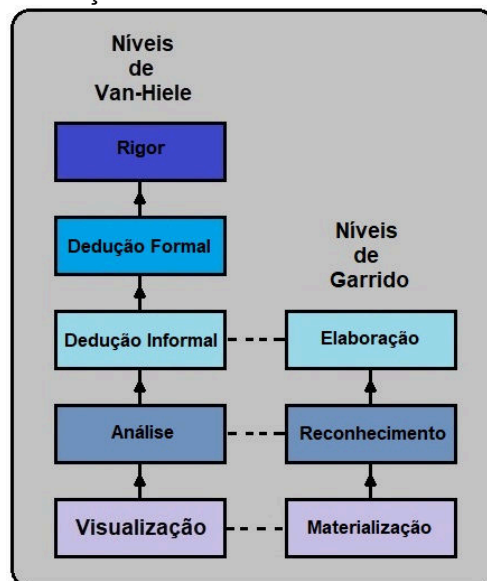
Quadro 14 – Habilidades geométricas que integram o pensamento geométrico

Dimensões	Indicadores		
	Nível 1 Materialização	Nível 2 Reconhecimento	Nível 3 Elaboração
Visual	Identificar figuras em um desenho. Reconhecer informações contidas em uma figura ou sólido.	Identificar figuras contidas em outras. Reconhecer propriedades de uma figura, movimentos ou sólidos.	Inter-relacionar diferentes tipos de figuras, sólidos e movimentos. Reconhecer propriedades comuns a diferentes tipos de figuras, sólidos e movimentos.
Verbal	Associar o nome correto a uma determinada figura, sólido ou movimento. Interpretar frases que descrevem figuras, sólidos, movimentos.	Explicar corretamente as propriedades de figuras, sólidos e movimentos.	Definir adequadamente conceitos geométricos de objetos e relações.
Para desenhar	Construir os desenhos adequadamente indicando todas as partes.	Explicar a informação obtida em um desenho. Desenhar usando as propriedades de figuras, sólidos e movimentos.	Construir desenhos relacionados a outros estudados.
Lógica	Identificar diferenças e semelhanças entre figuras, sólidos e movimentos. Identificar figuras e sólidos em diferentes posições.	Classificar as figuras e os sólidos em diferentes tipos. Distinguir figuras e sólidos por suas propriedades.	Determinar as características necessárias e suficientes para um conceito. Classificar por suas características aquelas que pertencem a diferentes definições. Resolver problemas geométricos simples.
Para modelar	Identificar figuras e sólidos geométricos em modelos matemáticos e da realidade.	Reconhecer propriedades geométricas em objetos físicos. Representar situações em um modelo.	Resolver problemas geométricos simples relacionados à vida.

Fonte: Garrido (2005, p. 16-17, tradução nossa).

Nessa direção, a autora cubana fez uma adaptação do modelo de Van-Hiele, considerando a realidade dos estudantes da escola primária de Cuba, bem como a natureza dos conceitos de figuras geométricas, sólidos geométricos e movimento. Tal reorganização é formada por três níveis de desenvolvimento do pensamento em Geometria, conforme ilustrada na Figura 30.

Figura 30 – Articulação entre os modelos de Van-Hiele e de Garrido



Fonte: elaborado pelo autor

Nesse modelo, não foram verificados alunos cubanos apresentando características do pensamento geométrico relacionadas aos dois últimos níveis vanhielianos. Como sinaliza a própria autora, esses atributos se manifestam em alunos que cursam o ensino médio e o ensino superior na Holanda. Não sendo possível verificá-las com estudos do primário em Cuba.

Os níveis propostos por Garrido (2005) são bem semelhantes aos de Gutierrez, Jaime e Fortuny (1991). Basicamente, a diferença é que o grupo espanhol focou nas características do pensamento geométrico mobilizadas em atividades que exploram os sólidos tridimensionais, identificando um total de quatro níveis. A autora cubana incorporou no modelo as figuras geométricas aos sólidos geométricos, verificando a existência de três níveis.

Também, essa adaptação proposta por Garrido (2005) diverge do modelo sugerido por nossa tese, pois nosso foco é um tipo específico de figura geométrica poligonal, isto é, os quadriláteros notáveis. Além disso, as realidades psicológicas e sociais dos estudantes brasileiros não são as mesmas dos alunos cubanos.

Garrido (2005) também organizou uma escala valorativa para os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico, propostos em seu modelo didático, conforme exemplificado pelo Quadro 15. Para a autora, os conceitos relacionados aos objetos geométricos geram uma série de relações e operações geométricas, que para o ensino se transformam em procedimentos.

Quadro 15 – Escala valorativa por níveis de pensamento geométrico

Escala	Características
Nível 1 Materialização: com o suporte de um modelo visual	Manipula com material ou objetos materializados. Identifica propriedades ao ter contato com objetos materiais ou materializados. Estabelece relações geométricas simples a partir do trabalho com objetos materiais ou materializados.
Nível 2 Reconhecimento: com base em questões de suporte, sem a necessidade de um modelo visual	Identifica propriedades essenciais, comuns e incomuns. Explica as propriedades de figuras, sólidos e movimentos. Compara as características de diferentes conceitos geométricos. Relaciona diferentes conceitos geométricos. Classifica tendo em conta as propriedades.
Nível 3 Elaboração: com base em trabalho independente, às vezes com alguns impulsos do professor ou de outros alunos	Identifica as propriedades necessárias e suficientes. Compara e classifica diferentes conceitos geométricos. Explica verbalmente os conceitos (definição). Argumenta tendo em conta as propriedades. Resolve problemas geométricos simples.

Fonte: Garrido (2005, p. 18, tradução nossa).

Assim, para a pesquisadora, três conceitos geométricos generalizadores são apresentados nos programas de Matemática na escola primária cubana: figuras geométricas, sólidos geométricos e movimentos ou transformação, em torno dos quais o restante está estruturado, o que implica processos de generalização associados a eles.

Segundo a autora, na determinação desses três conceitos generalizadores, foi levado em consideração que eles são os conceitos a partir dos quais é organizada uma estruturação do conteúdo escolar, que pode ser definida ou não no currículo proposto, mas que constitui o centro da concepção curricular.

A pesquisadora sinaliza a importância do professor, ao demonstrar a completude dos conceitos generalizadores, em cada conteúdo geométrico abordado, uma vez que não há uma definição em uma turma específica. Mas isso é feito em várias seções em diferentes anos escolares, de modo que sua compreensão consciente permita às crianças uma visão mais científica da Geometria e, portanto, o desenvolvimento da aprendizagem de conteúdo geométrico.

As alternativas didáticas formam o terceiro elemento do modelo didático. Conforme Garrido (2005), tais alternativas não constituem um sistema fechado. De fato, ao declará-las a partir do uso de uma ou mais, de acordo com objetivos específicos, elas se complementam e enriquecem de acordo com a intenção do professor.

Além disso, como aponta a investigadora, elas estão em condições de admitir novas propostas, seja na ordem de novas alternativas ou que cada professor, de acordo com seu potencial e as características de seus alunos e nível escolar, pode contribuir para sua melhoria e enriquecimento do repertório.

A autora considera que os jogos didáticos, as perguntas abertas, os novos tipos de exercícios, as atividades para conceitos, os recursos de ensino e o software educacional são selecionados para equipar os professores para assumir as demandas da classe contemporânea.

Nessa direção, Garrido (2005) aponta quatro etapas estruturadas à implementação na prática do professor: orientação, diagnóstico, concepção curricular e concreção metodológica, conforme ilustrado no quadro a seguir.

Quadro 16 – Etapas estruturas à implementação na prática do professor conforme Garrido (2005)

Etapas	Descrição
Etapas 1: Orientação	É considerada uma etapa preparatória para o professor, ele deve conhecer e preparar em relação aos elementos teóricos sobre os conteúdos geométricos abordados na escola primária. Com uma perspectiva holística, o professor deve conhecer os conteúdos geométricos, suas regularidades e nexos. Esta etapa é importante porque o professor deve estar ciente do potencial oferecido pelo conteúdo geométrico para favorecer o pensamento geométrico em particular e a lógica abstrata em geral ⁴⁸ .
Etapas 2: Diagnóstico	Baseia-se em um conjunto de ações que o professor deve desempenhar na determinação dos níveis de pensamento geométrico em seus alunos. Essas ações e este processo em geral devem ser caracterizados por uma abordagem positiva, na qual não só dificuldades, mas também potencialidades são de interesse. Os instrumentos aplicados pelo professor devem ser suficientemente desenvolvidos para permitir que eles explorem como a criança pensou; então a combinação de instrumentos escritos e orais constituem a maneira recomendada para obter informações. Esta etapa está intimamente relacionada com o primeiro elemento do modelo didático: a determinação dos níveis de pensamento geométrico ⁴⁹ .

⁴⁸ Se considera una etapa preparatoria para el maestro, en ella debe conocer y prepararse en relación con los elementos teóricos sobre los contenidos geométricos que se abordan en la escuela primaria. Con una perspectiva holística debe conocer los contenidos geométricos, sus regularidades y nexos. Esta etapa es importante porque el maestro debe tener conciencia de las potencialidades que ofrece el contenido geométrico para favorecer el pensamiento geométrico en particular, y el lógico abstracto en general (GARRIDO, 2005, p. 20).

⁴⁹ Se sustenta en un conjunto de acciones que el maestro debe realizar sobre la determinación de los niveles de pensamiento geométrico en sus escolares. Estas acciones y este proceso en general, debe estar caracterizado por un enfoque positivo, en el que interesan no solo las insuficiencias, sino también las potencialidades. Los instrumentos aplicados por el maestro deben ser lo suficientemente desarrolladores que permita explorar cómo pensó el niño; por lo que la combinación de instrumentos escritos y orales constituye la vía recomendada para obtener información. Esta etapa está

Etapa 3: Concepção Curricular	O professor, com base no diagnóstico e na determinação dos níveis de pensamento geométrico dos estudantes, especificará os objetivos a serem alcançados em relação aos conceitos e procedimentos generalizadores, distribuirá as unidades temáticas e a concepção da passagem de um nível, por meio da seleção de tarefas docentes diferenciadas. Esta etapa está relacionada ao segundo elemento do modelo didático: os conceitos e os procedimentos generalizadores⁵⁰.
Etapa 4: Concreção Metodológica	Com base no diagnóstico e na concepção curricular, ele planejará suas aulas e, para isso, selecionará os métodos e as alternativas didáticas que ele considera necessárias para conceber cientificamente as aulas de conteúdo geométrico; que potenciará o pensamento geométrico. A seleção de alternativas didáticas deve ser realizada levando em consideração as características dos alunos, as possibilidades de conteúdo e a criatividade do professor. Nesta seleção, tanto as propostas no modelo quanto as realizadas por ele estão envolvidas, e permite controlar o ensino e a aprendizagem. Esta etapa corresponde ao terceiro elemento do modelo didático que é a determinação de alternativas didáticas⁵¹.

Fonte: Garrido (2005, p. 20-21, tradução nossa).

Desse modo, a pesquisadora elaborou um diagrama que apresenta as relações dialéticas existentes entre o modelo didático e as etapas recomendadas para aplicação prática pelos professores, como ilustrado pela Figura 31.

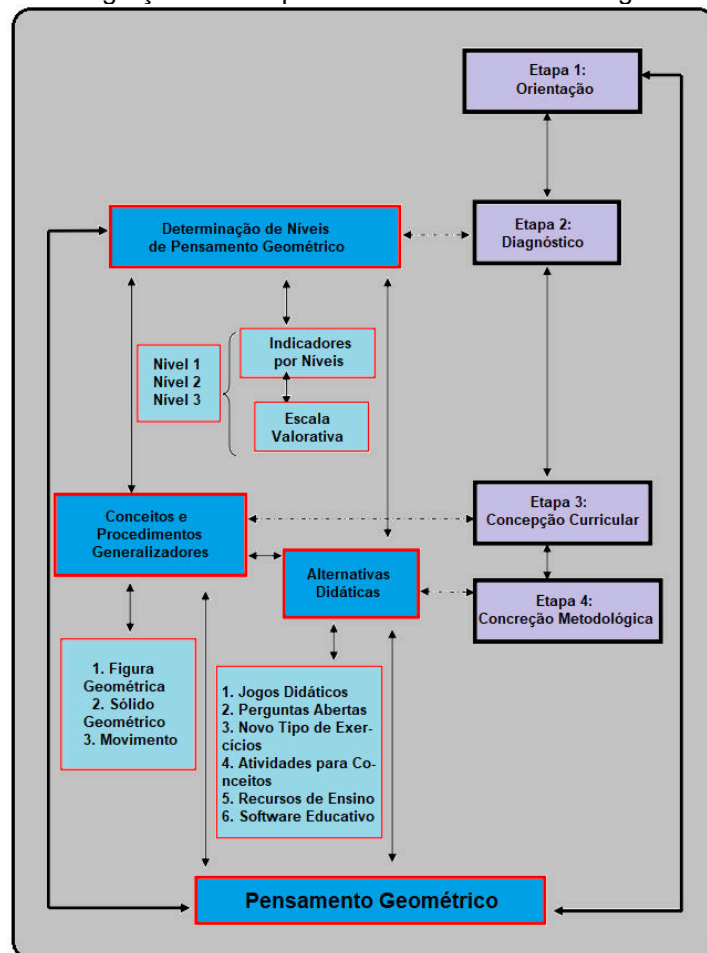
Garrido (2005) conclui afirmando que o modelo didático proposto, constituído por três níveis de pensamento geométrico (Manipulação, Reconhecimento e Elaboração) permite aos professores realizar o diagnóstico e o monitoramento das diferenças individuais entre estudantes e basear metodologicamente na concepção do ensino e da aprendizagem de conteúdos geométricos.

estrechamente relacionada con el primer elemento del modelo didáctico: la determinación de los niveles de pensamiento geométrico (GARRIDO, 2005, p. 20-21).

⁵⁰ El maestro, sobre la base del diagnóstico y la determinación de los niveles de pensamiento geométrico en los escolares, precisará los objetivos a lograr respecto a los conceptos y procedimientos generalizadores, dosificará las unidades temáticas y la concepción del paso de un nivel, a través de la selección de las tareas docentes diferenciadas. Esta etapa está relacionada con el segundo elemento del modelo didáctico: los concepto y procedimientos generalizadores (GARRIDO, 2005, p. 21).

⁵¹ Sobre la base del diagnóstico y la concepción curricular, planificará sus clases y para ello seleccionarán los métodos y alternativas didácticas que considere necesarias para concebir científicamente las clases de contenido geométrico; lo que potenciará el pensamiento geométrico. La selección de las alternativas didácticas debe realizarse teniendo en cuenta las características de los escolares, las posibilidades del contenido y la creatividad del maestro. En esta selección intervienen tanto las propuestas en el modelo como las elaboradas por él y posibilita el control al proceso de enseñanza aprendizaje. Esta etapa se corresponde con el tercer elemento del modelo didáctico que es la determinación de las alternativas didácticas (GARRIDO, 2005, p. 21).

Figura 31 – Integração das Etapas e do Modelo Didático segundo Garrido (2005)



Fonte: adaptado de Garrido (2005)

Segundo a pesquisadora, esse modelo deve basear-se nas interações dialéticas e didáticas existentes entre a determinação dos níveis de pensamento geométrico, sua correspondência com habilidades geométricas (visual, lógico, desenhar, modelar, verbal); os conceitos e procedimentos generalizadores (figura geométrica, sólido geométrico e movimento) e as alternativas didáticas (jogos didáticos, recursos de ensino, perguntas abertas, software educacional, novo tipo de exercícios e atividades para conceitos).

4.4 Níveis de pensamento geométrico segundo Parzysz (2006)

A pesquisa de Parzysz (2006) teve por objetivo propor um modelo de níveis de pensamento geométrico a partir do conhecimento em Geometria mobilizado por

futuros professores de Matemática em ambientes de papel e de computador, em Paris na França.

Para o autor, a Geometria ensinada, desde a educação básica até a universidade, é construída como uma modelagem do espaço físico, evoluindo de uma Geometria de observação para uma Geometria de demonstração. Essa evolução pode ser analisada a partir de distintos níveis de pensamento geométrico.

Segundo o pesquisador, um dos objetivos do ensino de Geometria proposto no currículo obrigatório francês é levar os estudantes à passagem entre essas duas Geometrias (da observação para a da demonstração). Nessa direção, a noção de figura é um elemento central e inevitável nas práticas desse processo.

Parzysz (2006) sinaliza que a resolução de um problema geométrico elementar, que depende muito do elemento figura, consiste em uma sucessão de ida e volta, muitas vezes implícita, entre os dois tipos de Geometria. Logo, para o autor, há o risco de colocar os estudantes em uma posição desconfortável, ou mesmo levá-los a conflitos cognitivos, se essa passagem não for realizada de forma adequada.

Conforme o investigador, a relação com a Geometria dos alunos do primeiro ano do IUFM⁵², que se preparam para o ensino em escolas, nem sempre os tornam capazes de lidar com esse tipo de conflito com seus futuros alunos da escola básica francesa.

Parzysz (2006) indica que se alguém atua no nível do ensino obrigatório, a Geometria, apesar de que seja considerada um discurso sobre entidades teóricas, deriva de considerações feitas em objetos materiais (modelos, figuras) e às vezes faz uso de tais objetos sob a forma de metáforas. Daí surge um grande problema, para o autor, que é a causa de muitos mal-entendidos: na Geometria, professores e alunos nem sempre jogam o mesmo jogo.

Com relação à discussão sobre a Geometria de observação e a Geometria de demonstração, o pesquisador francês se baseia em autores como Houdement e Kuzniak (1998), Henry (1999) e Van-Hiele (2002).

Segundo Parzysz (2006), Van-Hiele distingue dois níveis de apreensão das formas geométricas. No nível elementar, as formas são reconhecidas pela visão

⁵² Institut Universitaire de Formation des Maîtres: Instituto Universitário de Formação de Professores (tradução nossa).

global, enquanto que no nível avançado, ocorre a identificação de uma forma por meio de suas propriedades.

Ao fazer referência ao trabalho de Houdement e Kuzniak, Parzysz (2006) foca nas três categorias de Geometria propostas por esses autores: a) geometria natural – na qual, o campo geométrico se funde com a realidade; b) geometria axiomática natural – que consiste em um esquema do mundo real; c) geometria axiomática formalista – na qual, ocorre a ruptura com a realidade.

Já no que se refere à pesquisa de Henry, Parzysz (2006) destaca os três tipos de relação com o espaço nos processos de ensino e de aprendizagem da Geometria: a) a situação concreta; b) uma primeira modelagem, que consiste em observar uma situação real e descrevê-la nos termos atuais. Tal descrição é uma forma de abstrair e simplificar a realidade analisada em sua complexidade; c) uma matemática, construída por meio do modelo proposto no item b.

Tendo por base essas três perspectivas, Parzysz (2006) elaborou um quadro teórico formado por quatro níveis de pensamento geométrico, organizados a partir de dois grupos de Geometria: as não axiomáticas e as axiomáticas. Para o investigador cada modelo geométrico corresponde a um nível de pensamento geométrico próprio. O quadro a seguir ilustra isso:

Quadro 17 – Tipos de Geometria segundo Parzysz (2006)

Tipos de Geometria	Geometrias Não Axiomáticas		Geometrias Axiomáticas	
Níveis	Concreto (G0)	Espaço-Gráfico (G1)	Proto-Axiomático (G2)	Axiomático (G3)
Objetos	Físicos		Teóricos	
Validação	Perceptiva-Dedutivas		Hipotética-Dedutivas	

Fonte: Parzysz (2006, p.130, tradução nossa).

Conforme Parzysz (2006), os elementos em que se baseia esta classificação são, por um lado, a natureza dos objetos em jogo (natureza física versus natureza teórica), e por outro lado, os modos de validação (perceptivo versus hipotético-dedutivo).

Nesse modelo, as geometrias não axiomáticas envolvem dois níveis de pensamento geométrico, Concreto (G0) e Espaço-Gráfico (G1), enquanto que as

geometrias axiomáticas abrangem os níveis Proto-Axiomático (G2) e o Axiomático (G3).

Segundo o pesquisador, tendo por base a realidade, o nível G0 ainda não é vinculado ao campo geométrico porque seus objetos são realizações materiais, com todas as suas características (matéria, cor, etc.). Então, é considerado uma Geometria Não Axiomática, assim como o nível Espaço-Gráfico (G1), baseado em situações concretas.

Parzysz (2006) afirma que o nível G2 é caracterizado por uma Geometria Axiomática que tem como referência o mundo real, sendo que no nível G3, a axiomatização pode ser explicada completamente.

Como sinalizado pelo pesquisador, contrariamente ao G3, a composição do G2 não pode ser definida com precisão porque, por um lado, apresenta um componente institucional (programas) que evolui ao longo do tempo e, por outro lado, também está sujeito às variações locais. Como ilustração disso, o investigador apresenta a seguinte situação:

por exemplo, durante uma determinada atividade, um professor pode decidir se concentrar em uma noção que normalmente não é considerada institucionalmente no nível considerado. Este é o caso em particular da noção de convexidade, que não é levada em consideração nos programas de Geometria do ensino secundário, o que impede demonstrar, por exemplo, que duas bissetrizes de um triângulo são secantes⁵³ (PARZYSZ, 2006, p.130, tradução nossa).

Para Parzysz (2006), didaticamente, a distinção entre esses níveis emerge nas rupturas de contrato didático⁵⁴ que ocorrem na passagem de um e outro. Desse modo, a passagem de G0 a G1 é caracterizada pela materialidade dos objetos em jogo (madeira, papelão, folha, etc.); a passagem de G1 a G2 é marcada pela

⁵³ Par exemple, au cours d'une activité donnée, un professeur peut décider de s'intéresser à une notion qui n'est habituellement pas prise en compte par institutionnellement au niveau considéré. C'est le cas en particulier de la notion de convexité, qui n'est pas prise en compte dans les programmes de géométrie de l'enseignement secondaire, ce qui empêche de démontrer par exemple que deux bissectrices d'un triangle sont sécantes (PARZYSZ, 2006, p.130).

⁵⁴ Estudo das regras e das condições que condicionam o funcionamento da educação escolar, quer seja no contexto de uma sala de aula, no espaço intermediário da instituição escolar quer seja na dimensão mais ampla do sistema educativo. No nível de sala de aula, o contrato didático diz respeito às obrigações mais imediatas e recíprocas que se estabelecem entre o professor, os alunos (PAIS, 2011, p.77) e o saber em jogo. Para um maior aprofundamento sobre o tema, recomendamos a leitura do texto de Brousseau (1988).

justificação de natureza perceptual; a passagem de G2 para G3 é verificada pelo uso dedutivo de propriedades consideradas óbvias/evidentes.

O pesquisador ainda sinaliza que, no nível de ensino obrigatório, G1 e G2 é que desempenham um papel crucial para os estudantes na construção de sua relação com o conhecimento geométrico, dessa forma, esses dois níveis merecem uma maior atenção.

De acordo com o autor, resolver um problema em Geometria envolve uma sequência de idas e voltas entre os níveis G1 e G2, alternadamente, em momentos diferentes.

Por exemplo, conforme indicado pelo pesquisador, na primeira ida de G1 para G2, ocorre a modelagem de um problema concreto; na primeira volta de G2 para G1, o estudante produz um desenho com propósito heurístico; na segunda ida de G1 para G2, é desenvolvida a demonstração de uma conjectura resultante da observação; por fim, na segunda volta de G2 para G1, ocorre a verificação de uma conclusão teórica sobre um desenho.

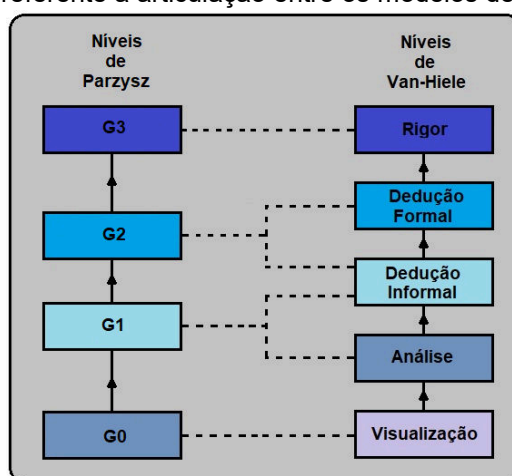
Parzysz (2006) destaca que nessa situação é introduzida a dialética sabido / percebido, inicialmente desenvolvida para a representação do espaço em Geometria. Nessa relação dialética, o termo sabido corresponde à interpretação da representação gráfica do objeto em Geometria, a partir de suas propriedades, ao passo que o termo percebido refere-se somente aos componentes e às suas conexões perceptíveis na representação gráfica relacionada ao que é observado (SILVA, 2015).

Segundo Parzysz (2006), em geral, quando se trata de representar um objeto tridimensional, e se deseja que ele seja facilmente identificado, então, é desenhado a partir de um ponto de vista usual, ou seja, na maioria das vezes, o desenho é construído a partir de apenas um ângulo no plano (bidimensional).

Mas, para o autor, isso não permite reter todas as propriedades espaciais do objeto, porque algumas partes estão escondidas e outras distorcidas por perspectiva. Por conseguinte, é necessário refletir (o que na maioria das vezes não ocorre) sobre a coexistência do visto (percebido) e do conhecido (sabido), a fim de chegar a uma representação sintética do objeto.

Na figura a seguir, apresentamos um esquema que representa a articulação entre os modelos teóricos desenvolvidos por Parzysz e Van-Hiele. Pelo esquema, podemos perceber que os níveis *Visualização* e *Análise*, propostos por Van-Hiele, englobam as Geometrias Não Axiomáticas, correspondendo aos níveis G0 e G1 de Parzysz, respectivamente, nos quais, os estudantes analisam objetos geométricos do mundo físico.

Figura 32 – Esquema referente à articulação entre os modelos de Parzysz e de Van-Hiele



Fonte: elaborado pelo autor.

O terceiro nível vanhieliano (*Dedução Informal*) é um nível mediano, isto é, localizado na fronteira entre as Geometrias Não Axiomáticas e as Geometrias Axiomáticas, então, está localizado entre os níveis G1 e G2 de Parzysz. Dessa forma, os alunos atuam na passagem entre objetos de naturezas física e teórica.

Os níveis vanhielianos *Dedução Formal* e *Rigor* estão coligados aos níveis G2 e G3 elaborados por Parzysz, aqui os estudantes trabalham com objetos geométricos teóricos.

Nessa articulação, podemos refletir que há uma convergência entre Van-Hiele e Parzysz, no que se refere à função das representações figurais, cuja relevância espelha ao estudo dedutivo acerca da legitimidade de conjecturas (SILVA, 2015). Nesse contexto, o modelo de Parzysz (2006) sinaliza a importância da figura à produção de conhecimentos em Geometria e, consequentemente, ao desenvolvimento do pensamento geométrico.

Esse modelo sinalizado pelo pesquisador francês difere do proposto em nossa tese, pois o nosso foco é apenas um objeto geométrico, ou seja, os

quadriláteros notáveis. Além disso, há algumas respostas apresentadas por certos alunos, ao respondem atividades sobre o mencionado conceito em Geometria, não são explicadas adequadamente por Parzysz (2006).

Como ilustração disso, podemos mencionar o caso de um aluno que só sabe diferenciar figuras que apresentam curvas das que possuem retas. De acordo com o modelo parzyszano, esse estudante não atua em nenhum dos níveis propostos. Então, trataria-se de um caso de ausência de pensamento geométrico, sob a ótica de pesquisadores (LIMA, 2015; LIMA; LINS, 2016) que aplicam esse modelo em suas pesquisas.

Não concordamos com essa interpretação, pois, em nossa compreensão, refere-se a um pensamento geométrico de natureza elementar, conforme pontuado no capítulo anterior dessa tese.

4.5 Níveis de conhecimento espacial segundo Marchand (2009)

Em um artigo que teve por objetivo apresentar um modelo de níveis de conhecimento espacial para promover o desenvolvimento do pensamento geométrico no ensino primário na cidade de Quebec (Canadá), Marchand (2009) percebeu que o modelo de Van-Hiele não foi suficiente para compreender como os estudantes canadenses constroem sentido espacial.

A princípio, a autora considera que o sentido espacial se desenvolve por meio de diversas experiências vivenciadas pelas crianças tanto na escola como em suas rotinas do dia a dia (esporte, jogos, viagens, música, etc.). Dessa forma, Marchand (2009) investigou o desenvolvimento desse sentido a partir dos processos de ensino e de aprendizagem da Geometria, considerando que o campo geométrico é uma área visada no programa curricular da escola primária em Quebec.

A pesquisadora sinaliza que a Geometria sempre foi uma importante parte dos programas educacionais da Matemática no ensino primário, historicamente. Todavia, esse componente matemático é abordado com dificuldade. Uma visão equivocada, referente ao ensino e à aprendizagem da Geometria, é considerar que para ensinar e para aprender conceitos geométricos só é necessário observar,

compreender e conhecer. Porém, como indicado pela autora, tais processos são complexos.

Marchand (2009) considera que a Geometria é o domínio matemático cujo objetivo é estudar o espaço e as formas. Assim, o domínio geométrico coloca em ação dois tipos de espaços: o espaço físico (espaço circundante e formado por objetos concretos) e o espaço abstrato (espaço em pensamento e composto por objetos idealizados).

Então, para a autora, o objetivo do ensino da Geometria em nível elementar é introduzir os alunos no espaço físico e, em seguida, levá-los para um espaço mais abstrato com base nas propriedades dos objetos. Esta passagem requer o tratamento de dois tipos de conhecimento: o conhecimento espacial e o conhecimento geométrico.

A autora ao apresentar essa compreensão, deixa implícito que o conhecimento espacial é um tipo de conhecimento específico, diferente e divorciado do geométrico. Todavia, não concordamos com esse entendimento, pois o espacial é geométrico, logo, não é um conhecimento particular, mas sim um tipo de conhecimento em Geometria.

Com base no que foi discutido no capítulo anterior desta tese, podemos concluir que o conhecimento geométrico espacial (ou simplesmente conhecimento espacial) é produzido por meio do pensamento em Geometria mobilizado na abstração geométrica espacial.

A investigadora aponta que algumas das dificuldades relacionadas à aprendizagem da Geometria implicam o desenvolvimento do sentido espacial. Dessa forma, em seu artigo, ela explica o desenvolvimento do sentido espacial no contexto geométrico e destaca os progressos do ensino que podem fortalecer a prática pedagógica dos professores.

Para isso, Marchand (2009) discute sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico de forma global e explicita o significado do conceito “sentido espacial”, que nem sempre é usado da mesma maneira.

Com relação ao desenvolvimento do pensar em Geometria, a autora canadense se baseia no modelo de Van-Hiele (1959), pois ele (o modelo) ilustra os

principais passos que os alunos devem levar para progredir neste domínio matemático.

Para a autora, tal fato se encaixa bem com os conteúdos previstos pelo programa atual de um nível de escolaridade para outro, que tem sido tema de pesquisas educacionais recentes no Canadá sobre o ensino e a aprendizagem da Geometria.

Marchand (2009) assinala que o modelo vanhieliano foca cinco níveis de compreensão de conceitos em Geometria, especificamente, aos processos mentais envolvidos em atividades geométricas. Conforme a autora, cada nível destaca objetos de pensamento específicos que se tornam produtos para esse nível e, posteriormente, tornam-se objetos de pensamento para o próximo nível. Assim, este modelo é construído hierarquicamente.

No seu texto, a investigadora apresenta uma descrição dos três primeiros níveis, pois são voltados mais especificamente ao ensino e à aprendizagem da Geometria no ensino primário. Tal descrição pode ser encontrada no quadro 18.

Quadro 18 – Níveis de Van-Hiele conforme Marchand (2009)

Níveis	Descrição
Nível 0	Neste nível básico, o objeto do pensamento é realmente a figura ou o sólido em si, incluindo todos os seus aspectos visuais. A aparência tem precedência sobre as outras propriedades e a reflexão é feita na figura ou no sólido acessível, e não no próprio conceito. Por exemplo, um quadrado é um quadrado porque parece um quadrado (mas se ele é colocado a 45°, parece um losango: não é mais um quadrado). Esta referência predominantemente visual não se encontra apenas no primeiro ciclo da escola primária. Para que os alunos progridam para o próximo nível, deve-se mostrar para eles que o aspecto visual associado a uma figura específica ou sólido não é suficiente para caracterizá-lo geometricamente e que eles terão de agrupar as figuras ou os sólidos em diferentes classes (várias formas são semelhantes) ⁵⁵ .
Nível 1	O objeto do pensamento evoluiu do caso particular da figura e do sólido para as classes de figuras e sólidos geométricos. Neste nível, os estudantes são capazes de lidar com classes de figuras e sólidos, em vez de figuras únicas. Assim, os alunos serão convidados a identificar as diferentes propriedades relacionadas a uma classe de figuras que podem

⁵⁵ À ce niveau de base, l'objet de la pensée est en réalité la figure ou le solide lui-même, comprenant tous ses aspects visuels. L'apparence prime sur les autres propriétés et la réflexion s'effectue sur la figure ou le solide qui est accessible, et non sur le concept en soi. Par exemple, un carré est un carré car il a l'air d'un carré (mais s'il est placé à 45°, il ressemble à un losange: ce n'est donc plus un carré). Pour que les élèves puissent progresser vers le prochain niveau, il faut leur faire remarquer que l'aspect visuel en lien avec une figure ou un solide spécifique ne suffit pas à le caractériser géométriquement et qu'ils devront grouper les figures ou les solides en différentes classes (plusieurs formes se ressemblent) (MARCHAND, 2009, p.65).

	ser estudadas sem considerar as dimensões e as orientações das figuras. Por exemplo, os alunos poderão dizer que todo retângulo tem dois pares de lados paralelos ⁵⁶ .
Nível 2	Para este último nível visado pelo nosso programa primário em Geometria, os alunos terão que caminhar a partir de propriedades geométricas anteriormente encontradas para as relações existentes entre essas propriedades e as várias classes. Nesse nível, os alunos são levados a estabelecer conexões entre as diferentes propriedades das figuras. Existe, portanto, uma progressão para o estudo da coerência entre as diferentes propriedades geométricas. Por exemplo, os alunos poderão dizer que um quadrado é um retângulo porque possui todas as propriedades de um retângulo ou que podemos definir um quadrado como um losango com um ângulo reto (aqui, estas são as condições mínimas do losango). Deve-se notar que o desenvolvimento deste nível continua no ensino secundário e, portanto, não deve ser alcançado no final da escola primária ⁵⁷ .

Fonte: Marchand (2009, p.65-66, tradução nossa).

Conforme Marchand (2009), o modelo de Van-Hiele é hierárquico, logo, não admite que um estudante atue, por exemplo, no Nível 2 para os conceitos de figuras geométricas e de sólidos geométricos, simultaneamente.

Desse modo, para a pesquisadora, um aluno pode realmente estar em um certo nível de compreensão para elementos familiares, mas pode atuar em outro nível para elementos menos familiares. Questionar o ensino é uma boa maneira de permitir que os alunos progridam de um nível de entendimento para outro.

A autora afirma que o modelo vanhieliano não deve estar ligado apenas ao desenvolvimento da criança, pois muitos alunos adultos podem permanecer no Nível 0 se o ensino abordado não explicita esse modelo. Marchand (2009) apresenta uma lista com alguns princípios orientadores para promover o desenvolvimento da Geometria entre os alunos canadenses, mencionados a seguir:

⁵⁶ L'objet de la pensée évolue du cas particulier de la figure et du solide aux classes de figures et de solides géométriques. A ce niveau, les élèves sont en mesure de traiter de classes de figures et de solides et non de figures isolées. Ainsi, les élèves seront amenés à identifier les différentes propriétés liées à une classe de figures qui peuvent être étudiées sans se préoccuper des dimensions et de l'orientation des figures. Par exemple, les élèves seront en mesure d'affirmer que tout rectangle possède deux paires de côtés parallèles (MARCHAND, 2009, p.65).

⁵⁷ Pour ce dernier niveau ciblé par notre programme du primaire en géométrie, les élèves devront cheminer des propriétés géométriques trouvées précédemment aux relations existantes entre ces propriétés et les diverses classes. A ce niveau, les élèves sont amenés à faire des liens entre les différentes propriétés des figures. Il y a ainsi une progression vers l'étude de la cohérence entre les différentes propriétés géométriques. Par exemple, les élèves pourront affirmer qu'un carré est un rectangle puisqu'il a toutes les propriétés d'un rectangle ou encore que nous pouvons définir un carré comme étant un losange ayant un angle droit (ici, ce sont les conditions minimales à partir du losange). Il est à noter que le développement de ce niveau se poursuit au secondaire et que, par conséquent, il ne faut pas s'attendre à ce qu'il soit atteint à la fin du primaire. (MARCHAND, 2009, p.65-66).

a) avaliar a aprendizagem não apenas considerando as propriedades, mas também as relações entre elas (não somente a partir da terminologia), por exemplo, trabalhando a noção de inclusão (um quadrado é um retângulo) ou as condições mínimas de identificação (um triângulo equilátero é um triângulo que possui os três lados com medidas de comprimento iguais) (MARCHAND, 2009).

b) valorizar o desenvolvimento de conceitos geométricos, apresentando casos extremos de figuras e sólidos ou contraexemplos, para provocar o confronto entre os estudantes (MARCHAND, 2009).

c) variar as tarefas geométricas solicitadas pelos alunos: observação-identificação, construção, descrição-classificação, representação, pesquisa ou argumentação-justificação. Vários livros didáticos estão limitados às duas primeiras tarefas, que são tarefas muito simples (MARCHAND, 2009).

d) variar a orientação em que sólidos e figuras são apresentados aos alunos (não se limitando ao aspecto visual, que se refere ao Nível 0) (MARCHAND, 2009).

e) variar a complexidade dos sólidos e as figuras propostas aos alunos: nem sempre são apresentados triângulos ou prismas equiláteros com base convexa (é necessário ultrapassar os objetos canônicos) (MARCHAND, 2009).

f) variar os suportes e os instrumentos atribuídos aos alunos: papel quadriculado, papel pontual, papel de rastreamento, papel branco, geoplano, bússola, quadrado, régua, pasta de modelagem (MARCHAND, 2009).

Segundo a autora, essas diferentes considerações podem “matizar”⁵⁸ as atividades propostas aos alunos. Para isso, se faz necessária a aplicação na sala de aula de sequências de ensino relacionadas às figuras geométricas e aos sólidos geométricos. Contudo, essas sequências devem ser construídas para realçar as mudanças de um nível para outro.

Portanto, Marchand (2009) sinaliza que elas não devem ser vistas como uma progressão contínua de uma sequência de atividades para um ano letivo específico. É uma visão global do progresso. Na prática, devem ser criados vários resultados de cada uma dessas atividades.

Retomando a discussão sobre sentido espacial, a autora menciona que esse sentido não se limita ao contexto geométrico ou mesmo ao contexto escolar. Para

⁵⁸ O termo original em francês é “teinter” (MARCHAND, 2009).

ela, o sentido espacial abrange tudo o que está relacionado à estruturação de um espaço e é traduzido pelo conhecimento espacial em Geometria.

Nessa direção, Marchand (2009) assinala que o conhecimento espacial é o conhecimento que possibilita que uma pessoa controle adequadamente suas relações com o espaço sensível.

Conforme a investigadora, isso ocorre, por exemplo, no reconhecimento, na escrita, na produção ou na transformação de objetos; no movimento, no encontro, na comunicação da posição dos objetos; no reconhecimento, na descrição, na construção ou na transformação de um espaço de vivência ou de deslocamento.

Para a autora, o conhecimento geométrico refere-se mais ao conteúdo escolar que se torna axiomatizado ou teorizado para criar um sistema coerente. Então, ela apresenta uma relação de questões envolvendo conhecimento espacial e conhecimento geométrico, como uma forma de diferenciá-los:

Quadro 19 – Questões relacionadas aos conhecimentos espacial e geométrico

Conhecimentos	Tarefas
Conhecimento espacial	- Você pode descrever uma maneira de me levar da porta ao quadro? - Você pode reproduzir o tangram que lhe apresento? - Somente com a manipulação de uma figura introduzida em uma caixa, você pode me apontar no cartão que ilustra figuras diferentes? - Escolha o desenvolvimento do cubo que corresponde ao cubo representado - Você pode me dizer o resultado da rotação de um triângulo direito em torno de sua hipotenusa? ⁵⁹
Conhecimento geométrico	- Você pode me dar a definição de um quadrado? - Um quadrado é um retângulo? - Qual o nome desse sólido? - Por que os ângulos de um triângulo equilátero medem 60°? - Desenhe uma linha perpendicular ao segmento AB. ⁶⁰

Fonte: Marchand (2009, p.67, tradução nossa).

Marchand (2009) argumenta que, apesar das diferenças entre esses dois tipos de conhecimento, eles são inseparáveis em Geometria, uma vez que a maioria das atividades que são propostas em sala de aula aos alunos, as colocam em jogo simultaneamente.

⁵⁹ - Peux-tu écrire un trajet me permettant de me rendre de la porte au tableau? - Peux-tu reproduire le Tangram que je te présente? - Uniquement avec la manipulation d'une figure introduite dans une boîte, peux-tu me la pointer sur le carton illustrant différentes figures? - Choisis le développement du cube qui correspond au cube représenté. - Peux-tu me décrire le résultat de la rotation d'un triangle rectangle autour de son hypoténuse? (MARCHAND, 2009, p.67).

⁶⁰ - Peux-tu me donner la définition d'un carré? - Est-ce qu'un carré est un rectangle? - Quel est le nom de ce solide? - Pourquoi les angles d'un triangle équilatéral mesurent-ils 60°? - Trace une droite perpendiculaire au segment AB. (MARCHAND, 2009, p.67).

Para a autora, essa dualidade constante agrega complexidade ao ensino e à aprendizagem desse saber matemático. Então, o professor deve sempre estar atento a esse “bloqueio” e fazer as escolhas necessárias para tratar cada um dos conhecimentos no ambiente escolar.

Por exemplo, de acordo com a pesquisadora, quando o estudo de sólidos geométricos é feito com os alunos, especificamente, nas situações de identificação, eles mobilizam ambos os tipos de conhecimento. Ela sinaliza que, para reconstruir o sólido a partir do desenvolvimento (fisicamente ou mentalmente), os estudantes devem alcançar uma mudança de espaço (de duas para três dimensões), a qual requer conhecimento espacial e, para identificá-lo, eles devem fazer uso de definições e, portanto, de conhecimento geométrico (por exemplo, o que é um prisma triangular).

Marchand (2009) indica que, se alguns discentes não chegam à identificação correta, o professor deve verificar a produção de cada conhecimento e não fingir automaticamente que eles não conhecem suas definições.

Com relação ao modelo de Van-Hiele, a investigadora aponta que esse modelo enfatiza a sequência da aquisição de propriedades e classes de figuras ou sólidos e, portanto, é mais orientada para os conhecimentos geométricos que espaciais. Dessa forma, a pesquisadora canadense criou um modelo inspirado no conhecimento espacial, que também é fundamental ao desenvolvimento do pensamento geométrico.

Para a autora, o desenvolvimento do conhecimento espacial ocorre pelo processo de internalização das ações da pessoa, ou seja, pela capacidade de pensar ações sem realizá-las.

Além disso, na sua pesquisa, Marchand (2009) destacou duas fases críticas na criação e realização de atividades de conhecimento espacial: provocar, no momento da atividade, momentos em que a visão não é mais suficiente, como meio de resolução, para obrigar a integração das ações dos alunos; questioná-los nesta fase de sua resolução.

Então, a investigadora elaborou um modelo sobre níveis de conhecimento espacial, inspirado no modelo de Van-Hiele, propondo, assim, três níveis

hierárquicos de compreensão para a escola primária do Canadá. O Quadro 20 apresenta uma descrição acerca desses níveis.

Quadro 20 – Níveis de conhecimento espacial segundo Marchand (2009)

Níveis	Descrição
Nível 0	Tal como acontece com o modelo de Van-Hiele, os alunos começam em um nível visual. Para o conhecimento espacial, isso implica que figuras ou sólidos são sempre acessíveis a eles em todos os momentos e que as ações também são concretamente realizadas. Por exemplo, os alunos podem reproduzir uma construção de cubo exposta em uma mesa. Outra atividade seria, por exemplo, pedir aos alunos que encontrem um objeto na classe a partir de um caminho que eles tenham que percorrer (tipo de caça ao tesouro) ⁶¹ .
Nível 1	Uma vez que os alunos manipularam concretamente figuras e/ou sólidos por meio de várias experiências, é importante propor atividades que permitam a internalização dessas formas e ações. A própria manipulação não é suficiente para sua internalização: deve ser tratada na classe. No entanto, sabemos que esse tipo de atividade não é parte das práticas de ensino atuais. Uma maneira de induzir uma internalização desse conhecimento é pedir antecipação: Você pode antecipar dois sólidos que podem ser construídos a partir desses números? Como eles se parecem? Outro exemplo que valoriza uma interiorização para este nível de compreensão é uma atividade realizada com um tangram por aluno e um tangram apresentado em um retroprojektor. Por 3 segundos, o professor apresenta uma figura construída usando as peças do tangram (por exemplo, um morcego) e os alunos devem reconstruí-lo. Eles podem ver a figura uma ou duas vezes, novamente por 3 segundos. Este limite de tempo é central para a internalização (primeira fase crucial) e o professor tem de questionar os alunos sobre seus processos (como você conseguiu lembrar?) O que você viu na sua cabeça? Você já viu a forma geral ou cada uma das partes – você começou de cima ou de baixo?). Esta etapa do questionamento é a segunda fase crucial mencionada acima ⁶² .
Nível 2	Uma vez que os alunos internalizaram várias figuras, sólidos ou ações, devemos oferecer-lhes atividades, nas quais, eles terão que manipular mentalmente essas figuras, sólidos e ações. Por exemplo, os alunos podem, desde o estágio de desenvolvimento, antecipar o sólido resultante (a manipulação mental consiste em dobrar/inclinar o desenvolvimento

⁶¹ Tout comme pour le modèle de Van Hiele, les élèves débutent à un niveau visuel. Pour les connaissances spatiales, ceci implique que les figures ou les solides leur sont en tout temps accessibles et que les actions sont également réalisées concrètement. Par exemple, les élèves pourraient reproduire une construction de cubes exposée sur une table. Une autre activité serait, par exemple, de demander aux élèves de trouver un objet dans la classe à partir d'un trajet qu'ils doivent parcourir (de type chasse au trésor) (MARCHAND, 2009, p.69).

⁶² Une fois que les élèves ont manipulé concrètement des figures et/ou des solides à travers diverses expériences, il est important de proposer des activités permettant une intériorisation de ces formes et de ces actions. La manipulation en elle-même n'est pas suffisante à son intériorisation: il faut obligatoirement la traiter en classe. Par contre, nous savons que ce type d'activités ne fait pas partie des pratiques enseignantes actuelles. Une façon de provoquer une intériorisation de ces connaissances est de demander une anticipation: peux-tu anticiper deux solides pouvant être construits à partir de ces figures? A quoi ressembleraient-ils? Un autre exemple valorisant une intériorisation pour ce niveau de compréhension est une activité réalisée avec un Tangram par élève et un Tangram pour rétroprojecteur. L'enseignant présente pendant 3 secondes une figure construite à l'aide des pièces du Tangram (ex.: une chauve-souris) et les élèves doivent la reconstruire. Ils peuvent revoir la figure à une ou deux reprises, toujours pendant 3 secondes (Yackel et Weatley, 1990). Cette limite de temps est centrale pour l'intériorisation (première phase cruciale) et l'enseignant doit questionner les élèves sur leurs procédés (comment as-tu réussi à t'en rappeler? Qu'est-ce que tu voyais dans ta tête? As-tu vu la forme globale ou chacune des parties? As-tu commencé par en haut ou par en bas?). Cette étape de questionnement est la deuxième phase cruciale mentionnée plus haut (MARCHAND, 2009, p.69).

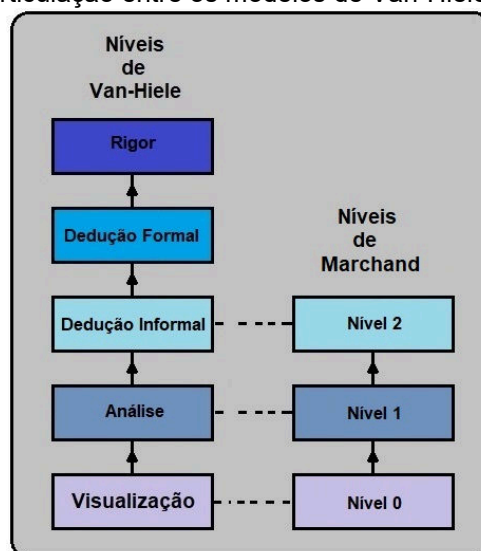
	para formar o sólido) ou descrever o resultado da rotação de um triângulo direito em torno de um cateter. As atividades voltadas para as relações entre as imagens de figuras, sólidos ou sua transformação podem ser abordadas no nível primário, mas serão dominadas no primeiro ciclo do ensino secundário. Por exemplo, os alunos podem imaginar um cubo em sua cabeça, cortar dois de seus cantos e descrever a forma do sólido restante; ou de suas imagens mentais do prisma triangular e da pirâmide triangular, explicam as semelhanças e diferenças entre esses dois sólidos ⁶³ .

Fonte: Marchand (2009, p.69, tradução nossa).

Tal como fizeram Gutierrez, Jaime e Fortuny (1991) e Garrido (2005) em seus estudos, a pesquisadora canadense fez uma adaptação do modelo de Van-Hiele (1957). Assim, ela considerou as características curriculares da escola primária do Canadá, o contexto social dos alunos e o conhecimento geométrico do tipo espacial.

Em seu modelo, Marchand (2009) não percebeu estudantes mobilizando características do pensamento geométrico referentes aos dois últimos níveis do modelo vanhieliano, do mesmo como foi verificado em Garrido (2005). Essa articulação entre Van-Hiele e a autora canadense está ilustrada na Figura 33.

Figura 33 – Articulação entre os modelos de Van-Hiele e de Marchand



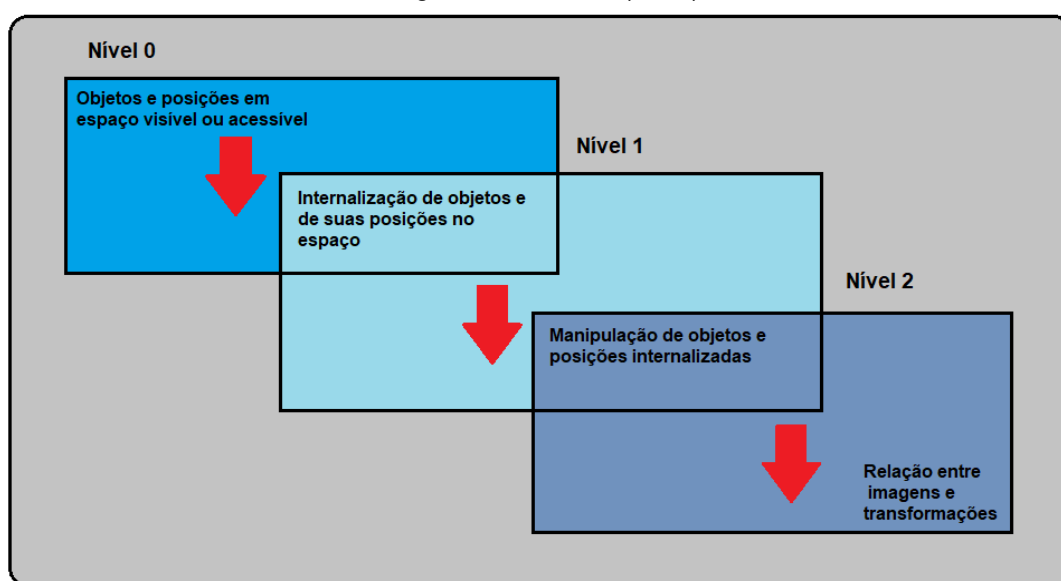
Fonte: elaborado pelo autor

⁶³ Une fois que les élèves ont intériorisé plusieurs figures, solides ou actions, il faut leur proposer des activités où ils devront manipuler mentalement ces figures, solides et actions. Par exemple, les élèves peuvent, à partir du développement, anticiper le solide résultant (la manipulation mentale consiste à rabattre le développement pour former le solide) ou encore décrire le résultat de la rotation d'un triangle rectangle autour d'une cathète. Les activités visant les relations entre les images des figures, des solides ou de leur transformation peuvent être abordées au primaire, mais elles seront maîtrisées au premier cycle du secondaire. Par exemple, les élèves peuvent s'imaginer un cube dans leur tête, couper deux de ses coins et décrire l'allure du solide restant; ou encore, à partir uniquement de leurs images mentales du prisme à base triangulaire et de la pyramide à base triangulaire, expliquer les ressemblances et les différences entre ces deux solides (MARCHAND, 2009, p.69).

Além disso, esse modelo apresenta divergências com o proposto por nossa tese. Como já mencionado anteriormente, o nosso modelo foca apenas nos quadriláteros notáveis. Tal fato não é verificado com o estudo de Marchard (2009). Também, o Canadá e o Brasil apresentam currículos e realidades sociais bem diferentes.

A autora ainda elaborou um esquema referente ao desenvolvimento do conhecimento espacial para o ensino primário canadense, conforme os três níveis do seu modelo. Tal esquema encontra-se ilustrado a seguir na Figura 34.

Figura 34 – Esquema do desenvolvimento dos conhecimentos espaciais para o ensino primário segundo Marchand (2009)



Fonte: adaptado de Marchand (2009).

Marchand (2009) aponta que muitos professores no Canadá têm dificuldades em propor tarefas que promovam o avanço entre os níveis de conhecimento espacial, pois não veem como poderiam oferecer isso a seus alunos.

De fato, como mencionado pela autora, se esse trabalho não for realizado de forma clara no ensino da Geometria, muitos estudantes não desenvolverão o conhecimento, a menos que outras oportunidades extracurriculares o permitam desenvolver (como por exemplo, jogos, esportes, etc.).

Além disso, a pesquisadora afirma que na escola as práticas de ensino não chegam tão longe nessa direção, no entanto, as pesquisas mostram muito claramente que esse conhecimento é acessível a todos e deve ser avaliado na sala de aula. Considerando o desenvolvimento do conhecimento espacial, Marchand (2009) apontou vários princípios orientadores a serem valorizados para esse processo:

a) valorizar atividades que colocam maior ênfase no conhecimento espacial e não no conhecimento geométrico (MARCHAND, 2009).

b) valorizar atividades que permitam explicitamente a integração desse conhecimento. Para conseguir isso, uma maneira de fazê-lo é solicitar outros sentidos do que a visão. Por exemplo, tocar, manipular sólidos em uma caixa ou ouvir, pedindo que um aluno aponte o sólido apenas a partir de uma descrição oral; sem esquecer-se de orientar o questionamento em classe para esta fase de integração da atividade (MARCHAND, 2009).

c) variar as tarefas solicitadas: identificação-observação, construção, descrição-classificação, representação, pesquisa ou argumentação-justificação. Especialmente aqui, é uma questão de variar a ordem em que são propostas aos alunos. Por exemplo, nem sempre começar com uma construção ou uma observação, porque o risco é grande em se limitar às ações concretas nesse contexto. Valorize as tarefas de pesquisa ou descrição como uma âncora para atividades de sala de aula (MARCHAND, 2009).

d) variar os ambientes de intervenção. Não deve ser limitado ao espaço da folha ou sólidos pequenos. Considere atividades na sala de aula, na qual o aluno está incluído no espaço ou um ambiente ainda maior, como a escola ou a vizinhança (MARCHAND, 2009).

e) variar a orientação com a qual os sólidos e as figuras são apresentados aos alunos para levar em consideração a relação que os sólidos ou as figuras têm com o espaço (MARCHAND, 2009).

f) variar a complexidade de sólidos e figuras propostas aos alunos para fornecer-lhes uma ampla gama de imagens possíveis (MARCHAND, 2009).

g) valorizar a ação em sólidos e figuras e criando novos objetos nos Níveis 1 e 2 de compreensão para ir além das imagens estáticas e canônicas (MARCHAND, 2009).

A autora conclui que o ensino da Geometria pode trazer uma aprendizagem muito interessante e estimulante para os alunos, mas, para isso, é necessário saber os tipos de atividades para oferecer.

O seu modelo foi concebido a partir desta perspectiva ao apresentar uma visão global do desenvolvimento do pensamento geométrico, representando o fio comum, e depois destacar a distinção entre conhecimento espacial e conhecimento geométrico que é fundamental neste ensino, que atualmente não é considerado nas salas de aula do Canadá.

Além disso, cabe ao professor modificar a prática da sala de aula para promover um ensino e uma aprendizagem mais eficazes do pensamento geométrico e, em particular, o desenvolvimento do conhecimento espacial.

4.6 O que podemos concluir diante desses modelos?

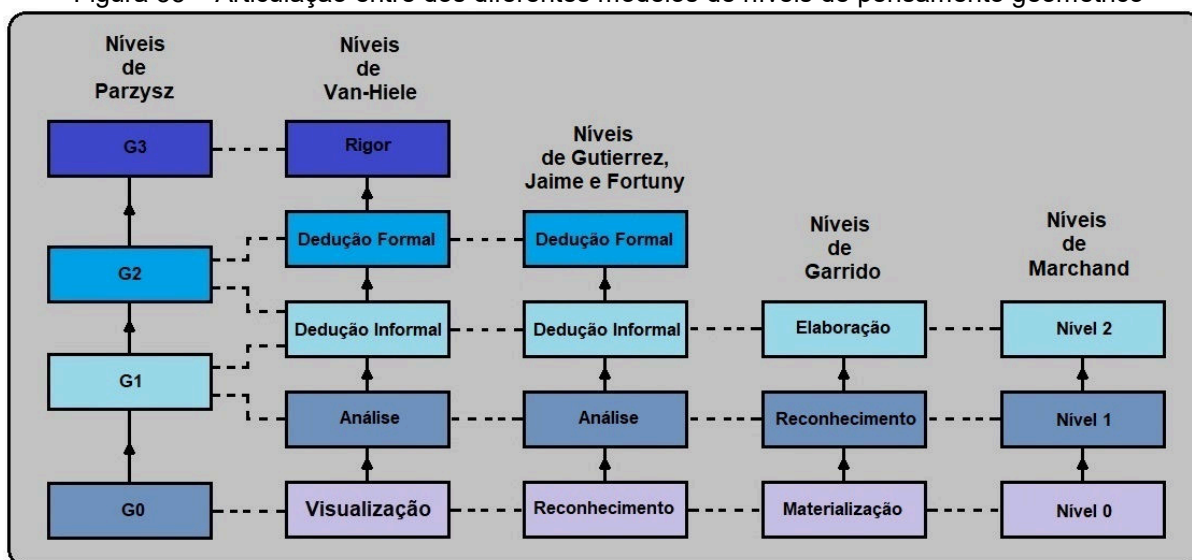
Todos os estudos debatidos nesse capítulo sinalizam a existência de diferentes níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico. Além disso, esses níveis são mobilizados pelos estudantes (da educação básica e da licenciatura em Matemática) ao estudarem Geometria, sobretudo, na resolução de problemas geométricos. Todavia, nenhum dos modelos analisados foca nos quadriláteros notáveis e nem à realidade educacional brasileira.

Parece haver, entre as pesquisas, uma convergência com relação à existência de hierarquia entre os níveis, logo, não é possível que um mesmo aluno atue em diferentes níveis, sendo determinados pelo conceito geométrico que estiver em jogo.

Todavia, isso parece não ocorrer quando os alunos estão diante de conceitos geométricos diferentes. Dessa forma, caso o estudante tenha familiaridade com certo conceito, poderá atuar em um nível mais avançado. Ainda, poderá trabalhar em um nível mais elementar caso o conceito não seja familiar.

Notamos que os modelos de Gutierrez, Jaime e Fortuny (1991), Garrido (2005), Parzysz (2006) e Marchard (2009) apresentam uma intersecção com o modelo de Van-Hiele (1957) sendo, na maioria, adaptações desse último ao contexto socioeducacional de seus países de origem. Essa articulação entre os diferentes modelos encontra-se ilustrada na Figura 35.

Figura 35 – Articulação entre dos diferentes modelos de níveis de pensamento geométrico



Fonte: elaborado pelo autor

Comparando o modelo de Parzysz (2006) com o modelo de Gutierrez, Jaime e Fortuny (1991), podemos verificar que os níveis G0 e G1, que abrangem as geometrias não axiomáticas, combinam com os níveis *Reconhecimento* e *Análise*, nos quais os sólidos geométricos são julgados por sua aparência global e analisados como portadores de propriedades, respectivamente.

Observamos uma proximidade desses níveis com os níveis sinalizados por Van-Hiele (1957): *Visualização* (caracterizado pela identificação das figuras geométricas por meio do aspecto global) e *Análise* (no qual ocorre o reconhecimento das figuras a partir das propriedades).

O mesmo é notado com os níveis *Materialização* (o aluno reconhece informações contidas em uma figura ou sólido) e *Reconhecimento* (o estudante identifica propriedades de uma figura ou sólido) de Garrido (2005); com os níveis 0 (o objeto do pensamento é realmente a figura ou o sólido em si, incluindo todos os seus aspectos visuais) e 1 (o objeto do pensamento evoluiu do caso particular da

figura e do sólido para as classes de figuras e sólidos geométricos) de Marchand (2009).

Os que ocupam a terceira posição em Van-Hiele (1957), Gutierrez, Jaime e Fortuny (1991), Garrido (2005) e Marchand (2009) são níveis intermediários, pois estão situados no limite entre as geometrias não axiomáticas e as geometrias axiomáticas, logo, estão estabelecidos entre os níveis G1 e G2 de Parzysz (2006).

Os níveis G2 e G3 elaborados por Parzysz (2006) apresentam aproximações com os níveis *Dedução Formal* e *Rigor*, propostos por Van-Hiele (1957) e *Dedução Formal*, sinalizado por Gutierrez, Jaime e Fortuny (1991), respectivamente, pois são caracterizados pelo estudo de sistemas axiomáticos.

Talvez, essa articulação entre esses diferentes modelos se deva ao fato de a maioria deles possuir uma base epistemológica em comum: o construtivismo. Tal corrente considera o estudante como principal agente na construção de conhecimentos matemáticos, isto é, produzindo e transformando as suas representações sobre os objetos em Matemática.

É importante destacar que o modelo de Garrido (2005) tem por sustentação a Psicologia Sócio-Histórica, considerando, assim, a Teoria de Vygotsky. Segundo esse quadro teórico, o desenvolvimento humano ocorre a partir das relações sociais construídas pelo indivíduo ao longo de sua existência.

Além disso, o processo de construção desses modelos baseia-se em alunos nativos do ensino básico de seus países de origem, que possuem diversos atributos sociais, culturais, psicológicos e afetivos.

Desse modo, como discutido nos estudos analisados, verificamos ainda que o contexto social, a importância da Geometria no currículo nacional e nos programas escolares podem influenciar o desenvolvimento do pensamento geométrico dos discentes da escola básica.

Outro consenso evidenciado nas investigações é que o pensamento geométrico é influenciado pelo tipo de Geometria vivenciada, logo, se o estudante tem contato com diferentes geometrias, ele terá mais condições de avançar entre os níveis, alcançando uma forma de pensar geométrico mais avançado.

Nessa direção, consideramos que o modelo sugerido em nossa tese se diferencia dos demais modelos mencionados, pois foca em apenas um conceito

geométrico, isto é, os quadriláteros notáveis. Além disso, como debatido ao longo do capítulo, há algumas respostas apresentadas por alunos do ensino básico que não são explicadas adequadamente por Van-Hiele (1957), Gutierrez, Jaime e Fortuny (1991), Garrido (2005), Parzysz (2006) e Marchand (2009).

Todavia, é importante destacar que nosso modelo se relaciona com os apresentados nesse capítulo, no sentido de se preocupar também em compreender como pensam geometricamente os estudantes brasileiros, que vivenciam realidades e currículos bem diferentes da Espanha, de Cuba, da França e do Canadá.

Desse modo, nos interessamos também em propor um modelo que responda às nossas demandas educacionais, sobretudo, no que se refere ao ensino e à aprendizagem da Geometria na educação básica, quando os quadriláteros notáveis estiverem em jogo na sala de aula.

Assim como sinalizado por Almeida (2016), acreditamos também que o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico é determinado pela estratégia utilizada pelo estudante ao resolver um problema geométrico sobre os quadriláteros notáveis, e não pela linguagem utilizada e nem pela etapa escolar que ele estiver atuando.

Diante dessas circunstâncias, decidimos produzir um modelo para os quadriláteros notáveis na educação básica brasileira.

5 A TRAJETÓRIA METODOLÓGICA

Como já indicamos na Introdução, esta tese teve por objetivo geral propor um modelo que possibilite a identificação de níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico sinalizado por estudantes do ensino básico ao resolverem atividades que abordem os quadriláteros notáveis. Para isso, construímos um modelo teórico *a priori* para, em seguida, validá-lo.

Diante disso, visando uma proximidade mais estreitada e um entendimento mais adequado sobre o fenômeno do pensamento geométrico, elegemos por uma abordagem de investigação qualitativa e quantitativa. Além disso, como se trata da construção de um modelo específico para os quadriláteros notáveis, então, esta pesquisa consiste ainda em um estudo de caso.

O estudo de caso deriva do estudo etnográfico, tendo, ainda, origem em estudos da sociologia e em trabalhos realizados na área da medicina. Esses estudos em saúde foram desenvolvidos pela academia de Chicago, nos Estados Unidos da América, no final do século XIX (GIL, 2009).

Tal categoria de investigação consiste em uma pesquisa aprofundada, que possui um caráter empírico, da complexidade e da particularidade de um determinado caso ou fenômeno contemporâneo (ou não contemporâneo, desde que se tenha acesso a ele) em um contexto específico (YIN, 2010). No caso de nosso estudo, o fenômeno é o pensamento geométrico relativo aos quadriláteros notáveis.

Sendo que, além de não promover o divórcio entre o fenômeno e o contexto, o estudo de caso preserva a unicidade do objeto ora estudado. Desta forma, o objetivo do investigador é esclarecer, por meio de diversos instrumentos de coleta de dados, o fenômeno analisado (TRIVIÑOS, 2011).

Assim, entre suas vantagens, destacam-se sua capacidade de analisar com profundez as situações nas quais o fenômeno está inserido, possibilitando um olhar mais crítico acerca do contexto dos fenômenos. Outros proveitos são: incentivar a realização de novos trabalhos, inclusive em áreas que outros procedimentos metodológicos não conseguem ter acesso; e possibilitar uma visão diferenciada sobre a pesquisa (GIL, 2009).

No entanto, sobre o rigor científico aos resultados do estudo de caso, quando o pesquisador investiga, por exemplo, sua própria turma, tal rigor pode ser comprometido, pois esta turma é carregada de sentidos e sentimentos do professor/pesquisador, o que influencia fortemente na análise dos dados coletados (YIN, 2010).

Ainda segundo Yin (2010), o estudo de caso (também chamado de análise de caso ou relato de caso) pode ser organizado em seis grandes etapas. São elas:

- a) plano – que consiste no levantamento bibliográfico, leitura e fichamento, de maneira a organizar o pressuposto teórico adotado;
- b) projeto de pesquisa – no qual é delineado o problema a ser investigado;
- c) preparação – que corresponde ao período de treinamento, triagem e aplicação do estudo piloto;
- d) coleta – na qual ocorre a aplicação dos instrumentos de coleta de dados;
- e) análise – que compreende a análise dos dados coletados, podendo ser realizada com o auxílio computacional;
- f) compartilhamento – no qual ocorre a divulgação/socialização dos resultados obtidos por meio de relatórios, artigos publicados em revistas, etc.

No entanto, um dos empecilhos do estudo de caso se refere, em primeiro lugar, ao tempo, tendo em vista que essa modalidade de pesquisa exige certo período de tempo para sua execução, necessitando, em geral, a participação de vários pesquisadores no estudo.

Em segundo lugar, como a amostra, geralmente, é reduzida, tal fato pode inviabilizar a análise estatística dos dados coletados. Por fim, em terceiro, o investigador corre o risco de desenvolver os estudos de modo intuitivo, sem controle, e até mesmo com interesse tendencioso, algo inaceitável em pesquisa científica.

Por outro lado, o estudo de caso possibilita validar (ou não) determinada teoria ou hipótese, em várias áreas do conhecimento, fazendo uso de diversos instrumentos de coleta de dados, algo que não é visto em outra categoria de pesquisa. No caso de nossa pesquisa, buscamos validar o modelo de níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico relativo aos quadriláteros notáveis.

Logo, fica evidenciado que não é tão simples trabalhar com estudo de caso, devido à sua complexidade, sendo ímpar dentro de um contexto. Desta forma, para

que uma pesquisa seja desenvolvida como estudo de caso, devemos considerar: o contexto; o objetivo da pesquisa; o objeto do estudo; se o mesmo necessita de vários instrumentos de pesquisa, isto é, depender dos instrumentos a serem utilizados.

É preciso delimitar bem o estudo, o caso, justificá-lo, isto é, explicitar porque ele é caso, o motivo dele ocorrer de determinada forma, pois ele pode ser um fenômeno que ocorre em diversas situações.

Em relação à nossa pesquisa, ela é um estudo de caso, pois se trata da proposição de um modelo de níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico referente a um conceito geométrico específico: os quadriláteros notáveis. Além disso, esse modelo é voltado para alunos brasileiros dos anos finais do ensino fundamental, construído a partir das produções dos estudantes de uma escola pública da cidade de Recife (Pernambuco).

No que se refere ao campo qualitativo da pesquisa, segundo Chizzoti (1998), o estudo procura compreender um fenômeno localizado no ambiente em que acontece, buscando situar o sentido desse fenômeno e analisar os significados construídos pelos membros da sociedade em relação a ele. Já no âmbito quantitativo, para esse autor, os dados quantitativos permitem realizar discriminações mais sistematizadas, favorecendo a análise.

Nessa perspectiva, Gamboa (2013, p.103) argumenta que:

em relação às categorias quantidade-qualidade, as pesquisas com enfoque dialético, no que se refere às técnicas, geralmente utilizam as historiográficas, tratando as dimensões quantitativas e qualitativas dentro do princípio do movimento. Essas categorias modificam-se, complementam-se e transformam-se uma na outra e vice-versa, quando aplicadas a um mesmo fenômeno. De fato, as duas dimensões não se opõem, mas se inter-relacionam como duas fases do real num movimento cumulativo e transformador, de tal maneira que não podemos concebê-las uma sem a outra, nem uma separada da outra.

Além disso, acreditamos que não há contraposição entre os dados da investigação de natureza qualitativa e quantitativa, uma vez que “não há oposição verdadeira entre a natureza dos dados e a ambição de evidenciar a verdade e de adquirir um conhecimento sistemático do real por meio da pesquisa empírica” (PIRES, 2014, p.49).

Dessa forma, caracterizamos essa investigação como um estudo de caso com abordagem qualitativa e quantitativa, tendo em vista que ela abrange tanto dados qualitativos como os quantitativos. Nesse sentido, tendo por base tais pressupostos metodológicos e o nosso aporte teórico apresentado nos tópicos 2 e 3, elaboramos os seguintes objetivos específicos:

- caracterizar o modelo de níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico para estudantes dos anos finais do ensino fundamental relacionado aos quadriláteros notáveis;
- verificar a existência de níveis e subníveis em produções de estudantes dos anos finais do ensino fundamental em relação aos quadriláteros notáveis;
- validar o modelo de níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico relacionados aos quadriláteros notáveis, a partir das produções de alunos dos anos finais do ensino fundamental.

Para tanto, concebemos o nosso percurso metodológico organizado em duas fases: a primeira teórica, relativa à construção do modelo *a priori*; e a segunda experimental, referente à validação do modelo.

5.1 A etapa teórica

Nessa etapa, produzimos a versão *a priori* do modelo de níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico. Para isso, inicialmente, realizamos uma discussão teórica sobre pensamento geométrico, na qual, elaboramos uma definição para essa forma de pensar em Geometria.

Também, realizamos uma análise da evolução conceitual dos quadriláteros notáveis ao longo da história humana. Para isso, consideramos as perspectivas de Bongiovanni (2004; 2010), Barbosa (2006) e Ferreira (2016), acerca desse desenvolvimento. Tal fato foi importante para compreendermos um pouco sobre as dificuldades conceituais de aprendizagem apresentadas por alunos do ensino básico em relação ao ensino dos quadriláteros.

Ainda, propomos uma tipologia de situações didáticas presentes em livros didáticos, que dão sentido ao conceito de quadriláteros notáveis: construção, classificação e inclusão. Dessa maneira, consideramos o quadro teórico indicado por Vergnaud (1986), acerca da Teoria dos Campos Conceituais.

Na definição sobre pensamento geométrico, consideramos o quadro teórico proposto pelos seguintes autores: Fischbein (1993), Duval (1995), Pais (1996), Gravina (2001) e Leivas (2009). Então, foi possível realizar a caracterização desse modo de pensar em Geometria a partir das abstrações geométricas.

Para essa caracterização, criamos uma tipologia de abstrações geométricas: espacial, perceptiva, analítica, descritiva, dedutiva e hipotética. Além disso, a abstração indica o nível de pensamento geométrico do estudante.

Ainda, apresentamos outros modelos de níveis de pensamento geométrico apontados na literatura, produzidos por Van-Hiele (1957), Gutierrez, Jaime e Fortuny (1991), Garrido (2005), Parzysz (2006) e Marchand (2009). Dessa forma, buscamos estabelecer relações entre eles e o proposto por nossa tese.

Em seguida, tendo por base esse aporte teórico produzido, elaboramos o modelo *a priori*. Para isso, analisamos os protocolos das pesquisas desenvolvidas por Costa (2016), Costa e Câmara dos Santos (2015a; 2015b; 2016a; 2016b; 2016c; 2017a; 2017b), e Costa e Rosa dos Santos (2016; 2017a; 2017b). Assim, apreciamos as estratégias mobilizadas pelos participantes desses estudos ao resolverem cinco questões de um teste sobre os quadriláteros notáveis.

Mas antes de apresentarmos o teste, faremos uma descrição breve do que foi realizado nesses estudos, a fim de verificarmos o que foi importado deles e o que foi criado em nossa tese.

Em sua pesquisa de mestrado, Costa (2016)⁶⁴ analisou os efeitos de uma sequência didática na construção do conceito de quadriláteros notáveis, com uso do software GeoGebra. O estudo foi desenvolvido com uma turma do 6º ano do ensino fundamental em uma escola pública de Recife – PE, no ano de 2015, tendo o modelo de Van-Hiele (1957) como fundamentação teórica. Para isso, o pesquisador utilizou um teste produzido por Câmara dos Santos (2001)⁶⁵.

⁶⁴ Resultados dessa pesquisa podem ser encontrados em Costa e Câmara dos Santos (2016a; 2017a; 2017b). Logo, eles não serão descritos aqui, para não ficar repetitivo.

⁶⁵ Câmara dos Santos (2001) verificou as implicações didáticas do *software* Cabri-Géomètre no avanço dos níveis iniciais de pensamento geométrico de Van-Hiele. Desse modo, aplicou uma sequência didática com alunos de duas turmas do sexto do ensino fundamental, de uma escola pública federal em Recife – PE, além de um pré e pós-teste para identificar os possíveis efeitos na aprendizagem geométrica dos alunos. Nesse estudo, em relação ao desenvolvimento dos níveis de pensamento geométrico, segundo o modelo de Van-Hiele, o pesquisador observou um avanço significativo nesse desenvolvimento.

Em um primeiro momento, o autor aplicou o pré-teste com 30 alunos do 6º ano, no qual verificou que todos eles estavam no primeiro nível de Van-Hiele, logo, reconheceram os quadriláteros notáveis apenas pelas suas aparências. Em seguida, foram aplicados a sequência didática e, por fim, o pós-teste com esses mesmos alunos.

No que se refere ao desenvolvimento dos níveis de pensamento geométrico, considerando o modelo de Van-Hiele (1957), Costa (2016) verificou um progresso importante nesse processo, pois parte considerável dos estudantes participantes avançou entre os níveis iniciais (do primeiro nível para o segundo nível), por meio da sequência didática (verificado entre 17% do total de alunos).

O investigador observou, também, que alguns alunos não alcançaram a passagem do primeiro para o segundo nível, mas esses alunos progrediram significativamente dentro do próprio nível, deixando-os bem próximos do nível seguinte (43% dos estudantes).

Diante dessa constatação sinalizada pelo autor, conjecturamos a possibilidade da existência de subníveis no primeiro nível vanhieliano, pois houve avanço dentro do próprio nível. Sendo assim, os alunos teriam avançado de um subnível “menos elaborado” para outro subnível “mais elaborado”.

Achados semelhantes foram percebidos também em Costa e Câmara dos Santos (2015a; 2016b). Esses pesquisadores analisaram os níveis de pensamento geométrico de 300 alunos do ensino médio, de cinco escolas públicas dos municípios de Recife, Limoeiro e Cabo de Santo Agostinho - PE, com base no modelo de Van-Hiele (1957).

Para tal, utilizaram como instrumento de coleta de dados o teste de Câmara dos Santos (2001), formado por cinco questões sobre os quadriláteros notáveis. Desse modo, os autores evidenciaram que a maioria dos alunos investigados estava no primeiro nível vanhieliano de pensamento geométrico.

Também foi observado um pequeno número de alunos no segundo nível de Van-Hiele, no qual ocorre o reconhecimento das figuras geométricas a partir de suas propriedades, e no terceiro nível, caracterizado pela ordenação das propriedades dessas figuras.

Além disso, foram encontrados vários alunos considerando triângulos e circunferências como quadrados, desse modo, “pode-se pensar que esses alunos não conseguem reconhecer figuras geométricas simples nem mesmo por sua aparência geral, como se não estivessem trabalhando nem mesmo no primeiro nível do modelo de Van-Hiele (COSTA; CÂMARA DOS SANTOS, 2016b, p.18).

Resultados similares foram percebidos no estudo de Costa e Câmara dos Santos (2015b). Esses pesquisadores verificaram os níveis de pensamento geométrico de 22 estudantes de uma turma do 6º ano do ensino fundamental, em uma escola municipal de Recife – PE, por meio do teste de Câmara dos Santos (2001).

Nesse estudo, quase todos os estudantes da turma investigada estavam no primeiro nível vanhieliano. Além disso, uma média de 10% dos estudantes participantes não reconheceu os quadriláteros notáveis por meio de seu aspecto global. Logo, não atingiram o primeiro nível proposto por Van-Hiele.

Nessa mesma linha, Costa e Câmara dos Santos (2016c) investigaram os níveis de pensamento geométrico de um grupo de 24 professores de Matemática da educação básica do sertão da Paraíba, a partir de um teste sobre os quadriláteros notáveis. Assim como nos estudos anteriores, os autores optaram pelo modelo de Van-Hiele como fundamentação teórica.

Os dados produzidos indicaram que a maioria dos professores atuava no primeiro nível de Van-Hiele. Os pesquisadores encontraram um número pequeno de docentes trabalhando no segundo nível e, em pequena quantidade, professores demonstrando encontrar-se no terceiro nível de pensamento geométrico de Van-Hiele.

Achados semelhantes foram percebidos por Costa e Rosa dos Santos (2016; 2017a; 2017b), que analisaram os níveis de pensamento geométrico de 34 estudantes de uma turma de licenciatura em Matemática de uma instituição de ensino superior no Estado de Pernambuco. Para isso, aplicaram o teste de Câmara dos Santos (2001) e utilizaram o modelo de Van-Hiele (1957) como suporte teórico.

Os resultados produzidos nesse estudo mostraram que 40% dos licenciandos se localizavam no primeiro nível vanhieliano, 18% atuavam no segundo nível, 12%

trabalhavam na transição entre os dois níveis, 20% situavam-se no terceiro nível. Além disso, 10% não alcançaram o primeiro nível de Van-Hiele.

Em nosso entendimento, os participantes desses estudos, que não alcançaram o primeiro nível de pensamento geométrico proposto do Van-Hiele, não formavam imagens visuais, pois reconheciam as figuras geométricas apenas a partir de um subconjunto das características visuais.

Com relação aos partícipes que apresentavam características de mais um nível vanhieliano de pensamento geométrico, em nossa compreensão, não se trata de transição. Logo, essas pessoas atuavam em subníveis desse modo de pensar em Geometria.

É importante destacar que esses aspectos não foram discutidos por essas pesquisas, então, não foi realizado um estudo experimental sobre a existência de subníveis e nem sobre a reorganização dos níveis propostos por Van-Hiele. Tal fato nos ajuda a justificar a necessidade da realização da nossa pesquisa, em termos de tese.

Nessa direção, para a elaboração do modelo *a priori*, analisamos tanto os achados encontrados nessas pesquisas, como também a produção escrita, isto é, os registros de representação semiótica produzidos pelos participantes dos estudos. No total, apreciamos os protocolos de 464 pessoas de diferentes níveis escolares, sendo:

- 174 alunos do ensino fundamental de duas escolas da cidade de Recife (sendo 62 do 6º ano, 57 do 7º ano, 29 do 8º ano e 26 do 9º ano);
- 232 estudantes do ensino médio (100 do 1º ano, 77 do 2º ano e 52 do 3º ano) de cinco escolas, sendo três situadas em Recife, uma em Cabo de Santo Agostinho e uma em Limoeiro (ambas em Pernambuco);
- 34 discentes de licenciatura em Matemática de uma instituição de ensino superior do Agreste de Pernambuco;
- 24 professores de Matemática (em exercício) do Alto Sertão da Paraíba.

Essas produções fazem parte dos estudos mencionados e descritos anteriormente, e foram doados pelos autores com a finalidade de serem objetos de pesquisa nesse primeiro momento da pesquisa (etapa teórica).

É importante destacar que, segundo os autores, alguns protocolos foram perdidos, como por exemplo, os do ensino médio, que das 300 produções, 232 foram disponibilizadas (68 foram perdidas). Além disso, os pesquisadores doaram produções que não foram analisadas por eles, tais como as dos alunos do 7º, 8º e 9º anos do ensino fundamental.

A seguir, apresentamos uma breve descrição do segundo momento do estudo, isto é, a etapa experimental, na qual ocorreu a validação do modelo proposto em nossa tese.

5.2 A etapa experimental

Nessa etapa, realizamos a validação do modelo de níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico relativo aos quadriláteros notáveis. Para tal, realizamos a aplicação do teste diagnóstico com alunos do ensino fundamental de uma escola pública de Recife (Pernambuco)⁶⁶.

Desse modo, a finalidade dessa etapa foi verificar se o modelo é viável (ou não) em uma situação real de sala de aula do ensino básico brasileiro. A nossa hipótese é a existência de diferentes níveis e subníveis de pensamento geométrico em relação aos quadriláteros notáveis. Assim, buscamos evidenciar se ela se confirma ou não.

Os participantes dessa etapa da pesquisa foram 297 estudantes do ensino básico, em especial, alunos dos anos finais do ensino fundamental (do 6º ano ao 9º ano), sendo:

- 67 alunos do 6º ano do ensino fundamental;
- 76 estudantes do 7º ano do ensino fundamental;
- 89 discentes do ensino fundamental;
- 65 alunos do 9º do ensino fundamental.

⁶⁶ Essa escola oferece a educação básica do 6º ano do ensino fundamental ao 3º ano do ensino médio nos turnos manhã e tarde. Também oferece ensino fundamental e ensino médio na modalidade de Educação de Jovens e Adultos (EJA) nos turnos tarde e noite. Os participantes do estudo experimental dessa tese foram os alunos dos anos finais do ensino fundamental matriculados no turno manhã. Por questões éticas, não fazemos referência ao nome real da escola e nem ao nome dos estudantes participantes. Para isso, utilizamos nomes fictícios.

Para cada ano escolar foram analisadas as produções de todos os alunos participantes a fim de identificar níveis de pensamento geométrico, relativo aos quadriláteros notáveis.

Além disso, selecionamos seis estudantes para participarem da entrevista de explicitação⁶⁷. Como veremos no próximo capítulo, foram identificados três níveis de pensamento geométrico e, para cada nível, dois subníveis foram verificados. Dessa forma, para cada subnível foi escolhido um aluno correspondente, logo, para cada nível foram dois partícipes.

A escolha por esses estudantes permitiu uma comparação das estratégias a serem desenvolvidas e mobilizadas entre os participantes do estudo teórico e os partícipes do estudo experimental. Essas estratégias são articuladas às abstrações geométricas utilizadas, estabelecendo uma relação entre elas (as estratégias e as abstrações).

Os quadriláteros notáveis constituem o saber matemático explorado no teste, tendo em vista que é um conteúdo curricular abordado desde os anos iniciais do ensino fundamental, sendo trabalhado em diversas situações didáticas de forma direta ou indireta, ao longo dos anos escolares desse nível de ensino.

Desse modo, possivelmente, esses alunos investigados nessa etapa podem ter vivenciado certo contato com esse objeto geométrico em algum momento de sua vida escolar.

A seguir, apresentamos os nossos instrumentos de coleta de dados, utilizados nas duas etapas de nosso estudo.

5.3 Os instrumentos de coleta de dados

Com a finalidade de buscar respostas para as nossas inquietações, nessa tese, optamos por uma abordagem metodológica que abrangeu dois instrumentos de coleta de dados, tais como: teste diagnóstico e entrevista de explicitação.

O teste versa sobre os quadriláteros notáveis, enquanto que a entrevista buscou explicitar as estratégias e os critérios utilizados pelos participantes na solução às questões do teste.

⁶⁷ Os alunos selecionados para a entrevista receberam previamente um termo de consentimento livre e esclarecido para que seus responsáveis assinassem.

Além disso, a entrevista foi audiogravada e transcrita para que todas as falas dos participantes fossem registradas. Assim, em momentos posteriores, tivemos acesso às informações coletadas.

A seguir, apresentamos uma breve descrição do teste que foi utilizado tanto na construção do modelo *a priori* (etapa teórica) como na sua validação (etapa experimental). Dando continuidade, discutimos sobre a entrevista de explicitação, que foi utilizada apenas na segunda etapa da tese.

5.3.1 O teste diagnóstico

Neste tópico, apresentamos uma breve análise descritiva sobre o instrumento de coleta de dados da primeira fase do estudo, isto é, do teste diagnóstico que foi considerado na construção da versão *a priori* do modelo proposto em nossa tese. Esse teste ainda foi considerado na segunda etapa da pesquisa, que corresponde à validação do modelo.

É importante destacar que esse teste foi elaborado por Câmara dos Santos (1992; 2001; 2009) e aplicado em seus estudos realizados em Pernambuco. Também, o teste é formado por cinco itens, que estão organizados em dois tipos de situação que dão sentido ao conceito de quadriláteros notáveis: construção e classificação⁶⁸.

A primeira questão do teste, que se refere a uma situação de construção, é formada por dois momentos. Desse modo, no primeiro momento, o aluno é solicitado a criar um retângulo por meio de um desenho no espaço denominado “SUA FIGURA”.

Em seguida, na área “FIGURA DO SEU COLEGA”, ele deverá construir outra figura de quatro lados, mas que não seja um retângulo. A ilustração dessa primeira etapa encontra-se apresentada na Figura 36.

⁶⁸ Uma maior discussão sobre as situações que dão sentido aos quadriláteros notáveis pode ser encontrada no tópico 2 dessa tese, especificamente, no subtópico 2.3.

Figura 36 – Extrato do primeiro momento da primeira questão do teste Q01) Você desenhou um retângulo. Seu colega desenhou uma figura de quatro lados que não é um retângulo. Nos espaços abaixo, desenhe como poderia ser a sua figura e a figura de seu colega:

SUA FIGURA:	FIGURA DE SEU COLEGA:

Fonte: Câmara dos Santos (2009).

No segundo momento da questão, o participante deverá justificar suas produções, isto é, no espaço “Sua figura é um retângulo”, ele terá que explicitar o motivo da primeira figura ser um retângulo. Enquanto que na região “A de seu colega não é um retângulo”, dizer por que a segunda figura não se configura um retângulo. A Figura 37 ilustra essa etapa.

Figura 37 – Extrato do segundo momento da primeira questão do teste
Justifique por quê:

Sua figura é um retângulo:	A de seu colega não é um retângulo:
_____	_____
_____	_____
_____	_____
_____	_____
_____	_____
_____	_____
_____	_____

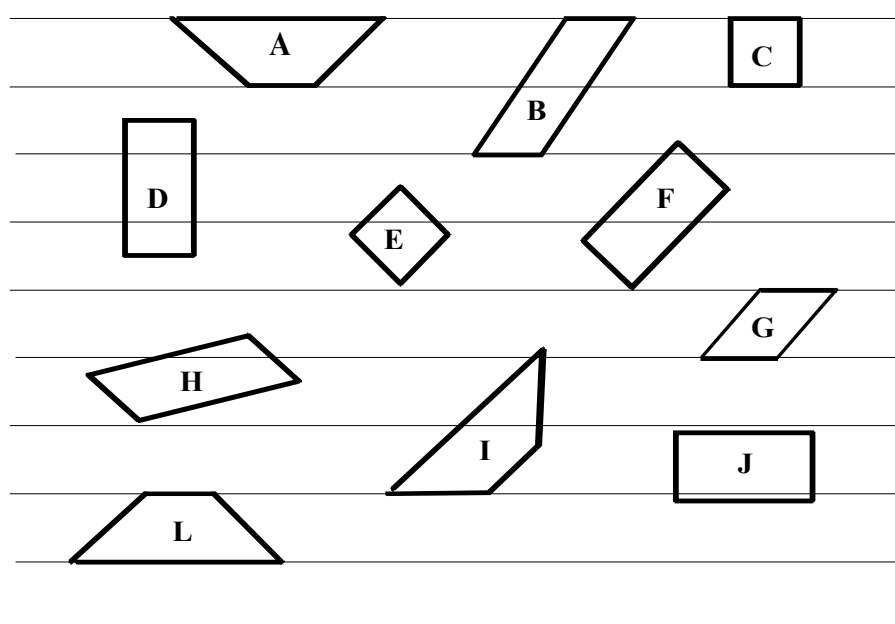
Fonte: Câmara dos Santos (2009).

Acerca da construção de uma figura quadrilátera que não se configure como sendo um retângulo, Câmara dos Santos (2001, p.10) argumenta sobre o erro intencional, isto é, acerca da transgressão proposital que o aluno realiza sobre sua produção:

a demanda de construir uma figura que não fosse um retângulo baseia-se na ideia de “transgressão intencional”, que parte do postulado que, no momento de “cometer intencionalmente” um erro, o aluno será levado à explicitação de suas concepções.

A segunda questão do teste, que consiste em uma situação de classificação, é composta por uma única etapa. Desse modo, no item é apresentada ao aluno uma relação formada por onze quadriláteros notáveis diferentes e em posições distintas, como ilustrado na Figura 38.

Figura 38 – Quadriláteros notáveis apresentados na segunda questão



Fonte: Câmara dos Santos (2009)

O objetivo dessa questão é classificar esses quadriláteros em grupos de família (retângulos, trapézios, quadriláteros, quadrados, paralelogramos e losangos), conforme apresentado na Figura 39.

Nessa classificação, o participante deve inserir na segunda coluna intitulada “FIGURAS” a letra correlata à figura geométrica disponível na folha de papel com

linhas (Figura 38).

Figura 39 – Quadro empregado na classificação dos quadriláteros notáveis

Tente separar por famílias, as figuras da folha de caderno:

	FIGURAS
Retângulos:	
Trapézios:	
Quadriláteros:	
Quadrados:	
Paralelogramos:	
Losangos:	

Fonte: Câmara dos Santos (2009)

A terceira questão, que se refere a uma situação de construção, solicita que os alunos produzam dois quadrados diferentes entre si, como exemplificado na Figura 40. O objetivo desse item é analisar o que os estudantes consideram como parâmetro diferenciador dos dois quadrados.

Figura 40 – Extrato da primeira etapa da terceira questão do teste

Q03) Construir no espaço abaixo, dois quadrados diferentes:



Fonte: Câmara dos Santos (2009)

Concordamos com Costa (2016, p.122), ao analisar que:

[...] se a questão solicitasse que o aluno produzisse dois retângulos diferentes e, na construção, ele fizesse um retângulo “padrão” e um quadrado, seria uma evidência de que o aluno era capaz de reconhecer um quadrado como um retângulo. Esse fenômeno representaria um avanço em seu pensamento geométrico, pois o aluno seria capaz de perceber que as propriedades das figuras se deduzem umas nas outras.

Para a segunda etapa da tese, isto é, o estudo experimental, relacionado à validação do modelo de níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico, fizemos um acréscimo nessa questão, visando uma melhor compreensão sobre os parâmetros utilizados pelos estudantes na produção.

Assim, após a construção dos dois quadrados, os participantes devem explicar o motivo pelo qual as duas figuras desenhadas serem diferentes, como apresentado na Figura 41. Portanto, nesse momento, é possível verificar se os alunos fazem a conversão de volta, ou seja, a transformação da figura geométrica para a língua natural, como aponta Duval (1995).

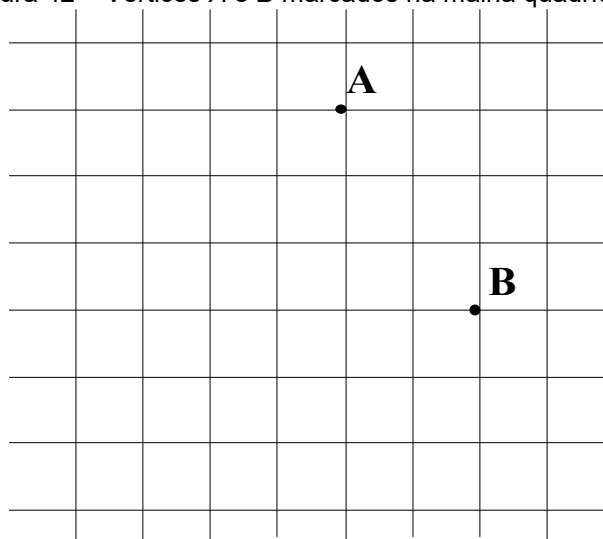
Figura 41 – Extrato da segunda etapa da terceira questão do teste

Por que os dois quadrados que você construiu são diferentes?

Fonte: elaborado pelo autor

A quarta questão, que se trata de uma situação de construção, solicita que o participante produza um losango $ABCD$, a partir de dois pontos (A e B) disponibilizados em dois nós de uma malha quadriculada, conforme ilustrado na Figura 42. Logo, o objetivo do item também é verificar os critérios utilizados pelo estudante na construção do quadrilátero.

Figura 42 – Vértices A e B marcados na malha quadriculada



Fonte: Câmara dos Santos (2009).

Semelhante ao que foi feito na terceira questão, também, realizamos um acréscimo na quarta questão do teste, mas isso na etapa experimental. Desse modo, depois de construir a figura solicitada no enunciado da questão, os participantes devem justificar por que o quadrilátero desenhado é um losango, como ilustrado na Figura 43.

Então, com esse adicional na questão, pretendíamos verificar se eles faziam a conversão de volta, ou seja, a passagem da representação “figura geométrica” para a “língua natural”, conforme Duval (1995).

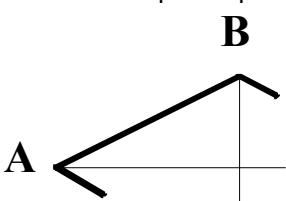
Figura 43 – Versão da quarta questão do teste aplicada na etapa experimental

Q04) Utilizando os vértices A e B já marcados, desenhe o losango ABCD :	Por que a figura que você desenhou é um losango?

Fonte: elaborado pelo autor

A quinta e última questão, que se refere a uma situação de construção, apresenta um losango que teve uma parte “apagada” (como ilustrado na Figura 44a).

Figura 44 – Extrato da quinta questão do teste



(a) Losango apagado

☐ Sim Explique como: 	☐ Não Porquê:

b) Espaço destinado às justificativas
 Fonte: Câmara dos Santos (2009).

Para tanto, os discentes devem mencionar se é possível reconstruí-lo ou não, apresentando uma justificativa para sua resposta (como apresentado na Figura 44b). Nesse sentido, o objetivo desse item é verificar os critérios utilizados pelo participante na resolução.

A seguir, apresentamos a entrevista de exploração, relativa à etapa experimental.

5.3.2 A entrevista de explicitação

Com a intenção de compreender melhor o funcionamento do pensamento geométrico dos estudantes participantes e buscar informações sobre as estratégias

mobilizadas na resolução das questões do teste, empregamos mais um instrumento de coleta de dados, a entrevista de explicitação.

Em concordância com Vermersch (1994), buscando compreender melhor suas produções em relação ao teste (solicitando, por exemplo, que expliquem como produziram suas respostas), optamos pela entrevista de explicitação. Desse modo, pretendemos ir além da resposta deixada no papel, pois queremos realizar a identificação de atributos do pensamento geométrico, que são características particularmente mentais (ALMEIDA, 2016).

Segundo Vermersch (1994), esse instrumento de coleta de dados permite uma verbalização reflexiva precisa da ação, visto que, para o autor, a ação é a execução de uma atividade ou tarefa. Nessa direção, a entrevista de explicitação busca descrever o percurso dessa ação, desde que ela tenha sido inserida de fato em um cenário prático real.

Na técnica da explicitação, o objetivo é ajudar o aluno, criança ou adulto, a formular em sua própria linguagem o conteúdo, a estrutura de suas ações e seu pensamento particular. Para atingir efetivamente esse objetivo, será importante evitar formulações de perguntas na forma de alternativas. Para o entrevistado, eles correm muito risco de constrangê-lo e impedi-lo de tomar consciência de seu próprio funcionamento. Para o entrevistador, é provável, quando ele propõe alternativas, encontrar-se tentando inventar a realidade do outro e assim fazê-lo com referência à sua própria experiência e ao projeto, seu próprio funcionamento⁶⁹ (COQUELIN, 2012, p.2, tradução nossa).

Nessa direção, utilizamos um gravador de áudio e um roteiro de perguntas que auxiliaram de norte à entrevista, todavia, outras questões foram sendo lançadas no decorrer da conversação. Isso foi importante visto que as produções dos estudantes participantes relacionadas ao teste eram diferentes, logo, as perguntas eram feitas com base nessas respostas.

Por exemplo, considerando a primeira questão do teste, no item “Por que a figura do seu colega não é um retângulo?”, quando um aluno respondeu “*por que é*

⁶⁹ Dans la technique d'explicitation, l'objectif est d'aider l'élève, enfant ou adulte, à formuler dans son propre langage le contenu, la structure de ses actions et sa pensée privée. Pour viser efficacement cet objectif, il sera important d'éviter les formulations de questions sous formes d'alternatives. Pour l'interviewé, elles comportent trop de risques de le gêner et de l'empêcher de prendre conscience de son propre fonctionnement. Pour l'intervieweur, il a de fortes chances, quand il propose des alternatives, de se retrouver en train d'essayer d'inventer la réalité de l'autre et donc de le faire en référence à sa propre expérience et d'y projeter son propre fonctionnement (COQUELIN, 2012, p.2).

um quadrado” e outro discente disse “*por que é um trapézio*”, então para o primeiro foi perguntando “O que é um quadrado?”, enquanto que para o segundo, a pergunta foi “O que é um trapézio?”.

Posteriormente, realizamos a transcrição das falas dos entrevistados, a fim de tirarmos o máximo proveito possível acerca do que eles expunham.

Os dados gerados com a entrevista foram analisados de acordo com a caracterização do pensamento geométrico utilizada nessa tese (tópico 3). As categorias e critérios de análise estão descritos no item 5.4 deste capítulo.

Na entrevista, organizamos 34 perguntas, porém durante a sua aplicação, algumas foram substituídas por outras, ou então, não foram lançadas, no caso em que elas já tenham sido respondidas em outra questão. No Quadro 21, apresentamos as perguntas contidas no roteiro para a entrevista.

Quadro 21 – Roteiro da entrevista realizada com os seis participantes do estudo experimental

TESTE DIAGNÓSTICO	PERGUNTAS PARA ENTREVISTA
1ª questão	Que figura é essa que você desenhou? Por que ela recebe esse nome? Como se chama a figura do seu colega? Por que ela recebe esse nome? A figura que você desenhou é um quadrilátero? Por quê?
2ª questão	Como você classificou as figuras apresentadas? Há retângulos? Quais? Por que elas são retângulos? Há quadrados? Quais? Por que elas são quadrados? Há paralelogramos? Quais? Por que elas são paralelogramos? Há losangos? Quais? Por que elas são losangos? Há trapézios? Quais? Por que elas são trapézios? Há quadriláteros? Quais? Por que elas são quadriláteros? O quadrado pode ser retângulo? Por quê? O retângulo pode ser quadrado? Por quê? O quadrado pode ser losango? Por quê? O losango pode ser quadrado? Por quê? O quadrado pode ser retângulo e losango ao mesmo tempo? Por quê?
3ª questão	Qual o nome dessas figuras que você fez? Por que elas recebem esses nomes? Qual delas são quadrados? Por quê? O que é um quadrado? Por que os dois quadrados são diferentes? Como você as fez?
4ª questão	Que figura é essa que você fez? Por que ela recebe esse nome? Essa figura pode ser um losango? Por quê? O que é um losango? Como você fez o desenho?
5ª questão	Como você reconstruiu a figura? Por que é possível refazê-la? Qual o nome dela? Por que ela recebe esse nome?

	Por que você não reconstruiu a figura? Por que não é possível refazê-la?

Fonte: elaborado pelo autor

Igualmente, para cada subnível de pensamento geométrico foi selecionado um estudante para a entrevista. No total, foram identificados seis subníveis, relativos a três níveis do pensar em Geometria (cada nível apresenta dois subníveis). Logo, foram entrevistados seis alunos que responderam o teste sobre os quadriláteros notáveis.

Para tanto, consideramos que por meio da fala dos estudantes poderemos apreciar as respostas sob a ótica do conceito de quadriláteros notáveis e do quadro teórico relativo ao pensamento geométrico considerado nessa tese.

A seguir, apresentamos as categorias e critérios de análise dos dados produzidos por meio do teste e da entrevista.

5.4 Categorias e critérios de análise dos dados

Para a análise das respostas dos participantes dos estudos utilizados na etapa teórica e das produções dos partícipes da etapa experimental, ambas referentes ao teste sobre os quadriláteros notáveis e à entrevista de explicitação, tomamos como foco a estratégia mobilizada na resolução de cada questão.

Essas estratégias são articuladas com a abstração geométrica, na qual o partícipe atua. Desse modo, a estratégia aplicada aponta o tipo de abstração adotada e a abstração sinaliza o nível de pensamento geométrico.

Nessa direção, as abstrações geométricas propostas nessa tese e descritas em nosso quadro teórico, se tornaram categorias de análise que, no que lhe diz respeito, consistiram os critérios que nos nortearam para a análise das respostas ao teste e à entrevista, conforme ilustrado no Quadro 22.

Quadro 22 – Categorias e critérios de análise dos dados

CATEGORIAS (ABSTRAÇÕES)	ESTRATÉGIAS UTILIZADAS	CRITÉRIOS DE ANÁLISE
Espacial	Estabelecer relações com os objetos em termos de orientação espacial	Como o participante reconhece os quadriláteros?
Perceptiva	Reconhecer os quadriláteros notáveis a partir do aspecto global	Qual o critério utilizado nessa identificação?
	Perceber formas geométricas somente a	Qual estratégia é mobilizada?

	partir de subconjunto das características visuais	Em qual abstração ele atua? Como é realizada a construção das justificativas? O que é considerado nas justificativas?
Analítica	Analisar os quadriláteros notáveis a partir de sua definição Analisar os quadriláteros como detentores de propriedades	Como os partícipes classificam os quadriláteros? Quais os critérios considerados na classificação?
Descritiva	Estabelecer relações de implicação entre propriedades dos quadriláteros notáveis	Como os quadriláteros são construídos?
Dedutiva	Realizar provas, demonstrações, argumentações e conjecturas sobre os quadriláteros notáveis de ordem intuitiva ou dedutiva	O que foi considerado nessa construção?
Hipotética	Analisar os quadriláteros notáveis em diferentes geometrias	

Fonte: elaborado pelo autor

Para melhor compreensão dos dados, nesse tópico, para cada categoria de análise, focamos nos registros de representação semiótica mobilizados pelos participantes na resolução do teste e na entrevista. A partir desses registros, consideramos três elementos da Teoria de Duval (1995): operações cognitivas, apreensões geométricas e olhar em Geometria, como apresentado no Quadro 23.

Quadro 23 – Elementos da Teoria de Duval (1995) considerados na análise dos dados

OPERAÇÕES COGNITIVAS	APREENSÕES GEOMÉTRICAS	OLHARES EM GEOMETRIA
- tratamento - conversão de ida - conversão de volta	- apreensão perceptiva - apreensão sequencial - apreensão operatória - apreensão discursiva	- botanista - agrimensor - construtor - inventor

Fonte: elaborado pelo autor

Em relação às operações cognitivas, tivemos dois aspectos para a análise: tratamento e conversão (de ida e de volta), todos referentes ao registro de representação semiótica relativo ao conceito de quadriláteros notáveis.

Conforme discutido no tópico 3 dessa tese, o tratamento é a transformação que ocorre dentro de um mesmo registro de representação semiótica. Por exemplo, construir um quadrado com lados medindo dois centímetros de comprimento e, em seguida, o discente aumenta o comprimento dos lados para cinco centímetros.

Dessa maneira, ao alterar a medida do comprimento dos lados do quadrado, o aluno realizou tratamento da representação “figura geométrica” referente a esse objeto geométrico.

A conversão consiste na mudança da representação de um objeto geométrico para outra representação desse mesmo objeto. Essa operação cognitiva ocorre de duas formas: conversão de ida e conversão de volta.

Na conversão de ida, como ilustração, o estudante transforma a representação “língua natural” (por exemplo, o enunciado de uma questão que pede para construir um quadrado) para a “figura geométrica” (a solução relacionada ao enunciado, isto é, o desenho do quadrado na folha do caderno).

Na conversão de volta, o aluno faz a mudança de volta, ou seja, altera a representação “figura geométrica” (o desenho do quadrado na folha do caderno) para “língua natural” (ao escrever no caderno, que o quadrado desenhado é um quadrilátero com ângulos internos retos e com todos os lados congruentes).

No que diz respeito às apreensões geométricas, como visto no tópico 3, Duval (1995) propõe a existência de quatro tipos: perceptiva, sequencial, discursiva e operatória.

Na apreensão perceptiva, o estudante reconhece ou identifica um objeto geométrico em um plano ou espaço, mas sem considerar as propriedades desse objeto. Por exemplo, ao construir uma figura com quatro lados, dos quais há um par de lados maiores congruentes e outro par de lados menores iguais e chamá-la de retângulo, então, o aluno está realizando o reconhecimento dessa forma em Geometria, desprezando assim os seus atributos.

Na apreensão sequencial, o discente produz um quadrilátero notável ou, então, descreve esse processo de construção. Como exemplo disso, podemos citar o caso de um aluno que constrói um losango na folha de caderno, e explica que, nessa produção, usou uma régua e fez a medição dos lados para verificar se eles têm o mesmo comprimento.

Na apreensão discursiva, o estudante considera as propriedades dos quadriláteros notáveis a partir de uma hipótese ou proposição. Desse modo, ao criar um quadrado, o aluno verifica que as diagonais são congruentes, perpendiculares e são as bissetrizes dos ângulos internos.

Na apreensão operatória, o discente opera os quadriláteros notáveis por meio de manipulação, composição, transformação, reconfiguração e comparação. Assim,

por meio da composição do retângulo em um paralelogramo oblíquo, o aluno prova a equivalência das áreas desses quadriláteros.

No tocante aos olhares em Geometria, referente às diferentes formas de ver as formas e figuras geométricas, conforme discutido no tópico 3, Duval (2005) aponta quatro tipos: botanista, agrimensor, construtor e inventor.

No olhar botanista, o aluno reconhece o contorno das formas, assim, ele é capaz de realizar a diferenciação entre um quadrilátero e um triângulo, ou destes com uma figura circular. Então, o estudante sinaliza semelhanças e diferenças entre as características visuais das figuras geométricas.

No olhar agrimensor, o discente realiza medidas de um terreno e consegue transpor esses dados para o plano do papel. Por exemplo, ao construir um retângulo (não quadrado) que representa a planta de um terreno, e estabelece as medidas dos lados, em referência ao perímetro para se saber a quantidade de arame farpado para a construção de uma cerca, o estudante mobiliza esse olhar.

No olhar construtor, o aluno utiliza instrumentos (régua, compasso, etc.) para a construção dos quadriláteros notáveis. Aqui, ele compreende que as propriedades geométricas não são atributos visuais. No exemplo mencionado acima, relativo à construção de um retângulo que representa um terreno, certamente, o discente fez uso de régua, ou então, fez essa produção no GeoGebra. Assim, ele mobilizou também o olhar construtor.

No olhar inventor, na solução de um problema geométrico relativo aos quadriláteros notáveis, o estudante opera sobre a figura geométrica, logo, realiza modificações, adiciona informações, etc. Como exemplo disso, mencionados a atividade referente à prova de equivalência de áreas, na qual, o aluno realiza a composição do retângulo, deixando-o na forma de um paralelogramo oblíquo.

Compreendemos que essas categorias e critérios definidos nessa tese colaboraram significativamente para a construção da versão *a priori* do modelo de níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico em relação aos quadriláteros notáveis, bem como para sua validação.

É importante destacar que o uso do quadro teórico proposto por Duval (1995; 2005) se justifica, pois, consideramos que ele é uma excelente ferramenta de análise do funcionamento semiocognitivo do pensamento geométrico.

5.5 Algumas considerações

Depois de realizamos o levantamento dos dados produzidos a partir da análise dos protocolos referentes ao estudo teórico, das produções dos estudantes relativas ao teste e à entrevista, vinculados à etapa experimental, obtivemos um modelo de níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico em relação ao conceito de quadritáteros notáveis.

Julgamos que as categorias e critérios de análise utilizadas na pesquisa foram válidos para a análise dos dados coletados em todas as etapas. Eles foram organizados e articulados com base no referencial teórico descrito e adotado na tese.

Os percursos metodológicos do estudo foram iniciados com a etapa teórica, na qual construímos a versão *a priori* do modelo. Em um momento posterior ocorreu a fase experimental, marcada pela aplicação do teste sobre quadriláteros notáveis, seguindo da entrevista.

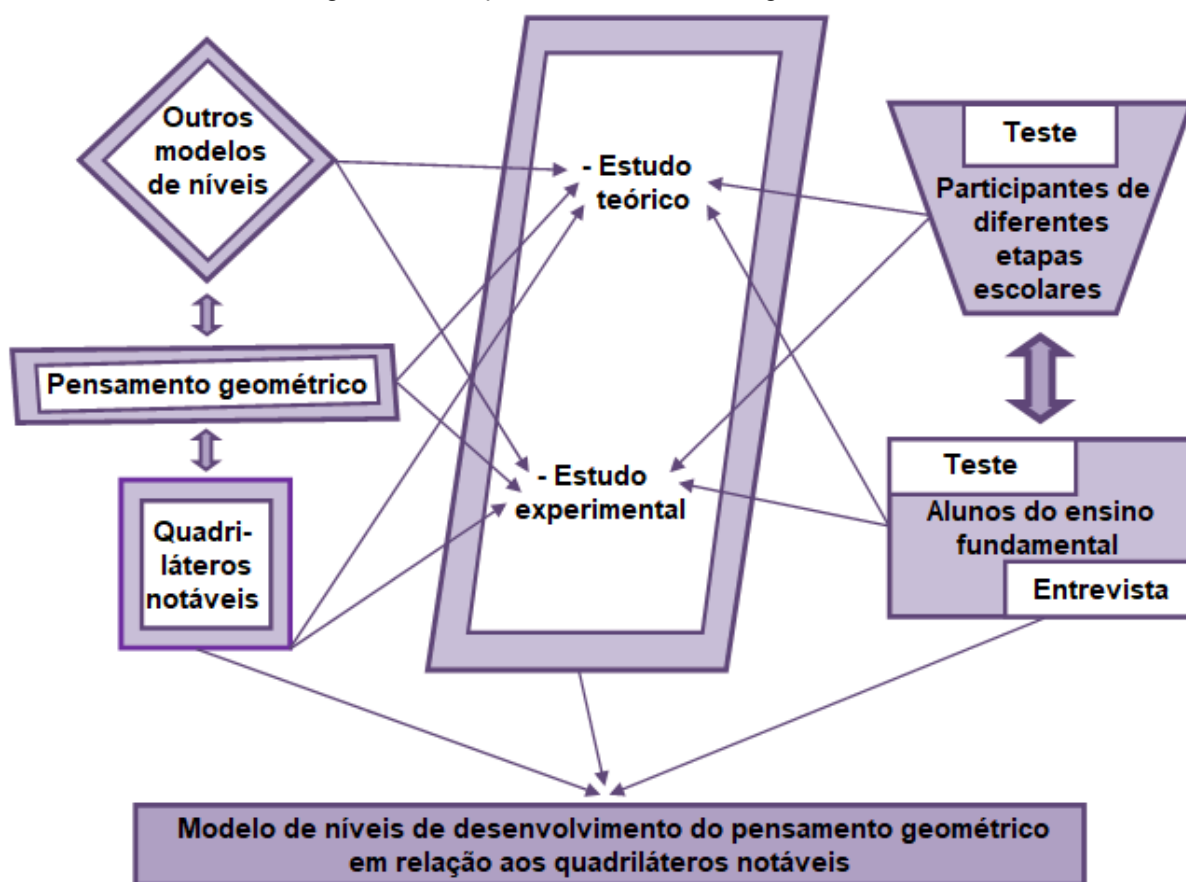
Em nosso entendimento, a caracterização do pensamento geométrico está introduzida no quadro conceitual de natureza teórica, por meio do qual nos sustentamos na noção de abstração geométrica. No que lhe diz respeito, o conceito de quadriláteros notáveis foi apreciado e investigado de acordo com esse referencial teórico.

Desse modo, o modelo *a priori* (obtido no estudo teórico) e a sua validação (realizada no estudo experimental) estabeleceram a linha divisória, isto é, a ponte entre o mundo teórico e o mundo metodológico.

Nessa perspectiva, formulamos um esquema que ilustra os fundamentos teóricos e metodológicos do estudo desenvolvido nessa tese, conforme exibido na Figura 45.

A análise dos protocolos, a aplicação do teste diagnóstico e as entrevistas fizeram parte dos componentes da ponte do nosso esboço representacional, mas foram sempre orientadas pela sustentação teórica. Com a reunião de todos esses elementos, obtivemos o modelo de níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico relativo aos quadriláteros notáveis.

Figura 45 – Esquema teórico-metodológico da tese



Fonte: elaborado pelo autor e baseado em Rosa dos Santos (2015)

A seguir, apresentamos o tópico 6, referente à versão *a priori* do modelo proposto nessa tese.

6 A VERSÃO A PRIORI DO MODELO: INICIANDO A CONSTRUÇÃO

Nesse capítulo buscamos realizar a construção de uma versão *a priori* do modelo de níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico que será apresentado em nossa tese. Tal versão emergiu com base nos resultados dos estudos desenvolvidos por Costa (2016), Costa e Câmara dos Santos (2015a; 2015b; 2016a; 2016b; 2016c; 2017a; 2017b), e Costa e Rosa dos Santos (2016; 2017a; 2017b), tendo em vista que as estratégias mobilizadas pelos participantes dessas investigações e deixadas nas suas produções escritas, no mínimo de início, sinalizam diferentes níveis do pensar em Geometria.

Nesse sentido, para a elaboração desse capítulo, analisamos os registros de representação semiótica produzidos pelos 464 participantes dos estudos, sendo 174 alunos dos anos finais do ensino fundamental, 232 do ensino médio, 34 estudantes de licenciatura em Matemática e 24 professores de Matemática da educação básica, conforme apresentado no tópico 5 dessa tese.

Por meio de nossos estudos, conseguimos apontar a existência de três níveis distintos de desenvolvimento do pensamento geométrico para o conceito de quadriláteros notáveis, que se relacionam com os níveis indicados por Van-Hiele (1957).

Contudo, decidimos não utilizar a nomenclatura proposta por esse autor, pois verificamos que não há um consenso sobre ela. Como exemplo disso, podemos citar o primeiro nível vanhieliano que tem sido chamado pelas diversas pesquisas educacionais por: “*nível de visualização*”, “*nível de reconhecimento*”, “*nível básico*”, “*nível visual*”, “*nível de identificação*”, “*nível de percepção*”, “*nível de representação*”, “*nível de aparência*”, etc. O Quadro 24 apresenta a relação de alguns autores brasileiros e estrangeiros que fazem uso dessas diferentes nomenclaturas.

Quadro 24 – Diferentes nomenclaturas para o primeiro nível de Van-Hiele

NOMENCLATURAS	AUTORES
Nível de visualização	BURGER; SHAUGHNESSY, 1986; SALVADOR; PALAU; GARRIEGUES; PASCUAL, PÉREZ, 1989; KALEFF; HENRIQUES; REI; FIGUEIREDO, 1994; NASSER, 1994; LUJAN, 1997; DETHEUX-JEHIN; CHENU, 2000; ALMOULOU; MANRIQUE; 2001; ONTARIO, 2003; INOUE, 2004; GUIMARÃES, 2006; KNIGHT, 2006; ONTARIO, 2006; SILVA; CÂNDIDO, 2007; CAMPOS; CÂNDIDO, 2007; ATEBE; SCHAFER, 2008; MICHOUX, 2008; MUYEGHY, 2008; PATSIOMITOU, 2008; YIDIZ; AYDIN; KOGCE,

	2009; RODRIGUES, 2009; ALVES; SAMPAIO, 2010; BENITES, 2010; BRANDÃO, 2010; DOMINGOS, 2010; VIEIRA, 2010; BARBOSA, 2011; BEDIM, 2011; LACERDA, 2011; VIDIGAL, 2011; ABDULLAH; ZAKARIA, 2012; BRITO, 2012; DONGWI, 2012; FRADE, 2012; OLIVEIRA, 2012; SANTOS, 2012; ABDULLAH; ZAKARIA, 2013; HAVIGER; VOJKUVKOVÁ, 2013; CONCEIÇÃO; OLIVEIRA, 2014; GIMENES, 2014; MICHOUX, 2014; MEIRA, 2015; COSTA; CÂMARA DOS SANTOS (2015a).
Nível de reconhecimento	USISKIN, 1982; NASSER, 1990; GUTIÉRREZ; JAIME; FORTUNY, 1991; GUTIÉRREZ, 1992; NASSER, 1992; PASTOR, 1993; KALEFF; HENRIQUES; REI; FIGUEIREDO, 1994; NASSER, 1995; HAMAZAKI; SAMESHIMA, 2004; INOUE, 2004; KNIGHT, 2006; CAMPOS; CÂNDIDO, 2007; ROSA DOS SANTOS, 2007; SILVA; CÂNDIDO, 2007; ATEBE, 2008; MATEYA, 2008; MUYEGHY, 2008; PATSIOMITOU, 2008; SANT'ANA, 2009; ALVES; SAMPAIO, 2010; ARRUDA FILHO; ROSA DOS SANTOS, 2010; ATEBE; SCHAFER, 2010; DOMINGOS, 2010; LEAL, 2010; NASSER; SANT'ANNA, 2010; VIEIRA, 2010; DE VILLIERS, 2010; NASSER; TINOCO, 2011; PÉRTILE, 2011; ABU; ALI; HOCK, 2012; ARAÚJO, 2012; DONGWI, 2012; LOLA, 2012; MORAES, 2012; OLIVEIRA, 2012; CONCEIÇÃO; OLIVEIRA, 2014; SILVA, 2014.
Nível básico	NASSER, 1990; 1992; 1994; 1995; VAN-HIELE, 1986; ALMOULOU; MANRIQUE, 2001; PUSEY, 2003; GUIMARÃES, 2006; SANT'ANA, 2009; NASSER; SANT'ANNA, 2010; SILVA, 2011; FRADE, 2012; CONCEIÇÃO; OLIVEIRA, 2014.
Nível visual	VAN-HIELE, 1987; LAWRIE, 1992; VAN-HIELE, 1999; OLKUN; SINOPLU; DERYAKULU; 2002; WU; MA, 2006; ATEBE, 2008; PÉRTILE, 2011; SILVA, 2011; COWLEY, 2014.
Nível de identificação	MICHOUX, 2008; MICHOUX, 2014; DUROISIN; DEMEUSE, 2014
Nível de percepção	LAWRIE, 1992.
Nível de representação	BRANDÃO, 2010.
Nível de aparência	COSTA; CÂMARA DOS SANTOS (2015b).

Fonte: elaborado pelo autor.

Tais termos são utilizados amplamente como sinônimos, no entanto, se voltarmos nosso olhar para a etimologia dessas palavras, poderemos perceber que apresentam significações distintas. Além disso, o próprio Van-Hiele não deixou isso muito claro em sua tese (VAN-HIELE, 1957) e em seus demais estudos (IBIDEM, 1959; 1985; 1986; 1987; 1999; 2002).

Diante dessa circunstância, optamos por uma nomenclatura que busca evitar essa falta de consenso. Então, a versão *a priori* do nosso modelo é composto pelo nível *n* (primeiro nível), passando pelo nível *n + 1* (segundo nível) e chegando ao nível *n + 2* (terceiro nível). É importante destacar que usamos a letra *n* em referência à palavra *nível*.

Além disso, ao contrário do que propõem Van-Hiele (1957) e outros autores (GUTIERREZ; JAIME; FORTUNY, 1991; GARRIDO, 2005; PARZYSZ, 2006; MARCHAND, 2009), o nosso modelo é elaborado com base em um único conceito geométrico, quadriláteros notáveis, quando explorado em situações de produção e de classificação.

Nesse sentido, ao considerarmos que um estudante atua no nível n , isso não quer dizer que ele não mobiliza nenhuma característica do pensamento geométrico, mas sim revela que ele não conseguiu formar imagens visuais sobre os quadriláteros notáveis, ou que ele reconhece essa figura geométrica a partir do seu aspecto global, que são atributos da abstração geométrica perceptiva.

Da mesma maneira, um aluno que se localiza no nível $n + 2$, não quer dizer que ele é capaz de atuar em todas as situações que dão sentido aos quadriláteros notáveis, mobilizando a abstração geométrica hipotética. Nessa abstração, o estudante atuará em um nível mais avançado, pois será capaz de analisar os quadriláteros por meio das geometrias não euclidianas.

Destacamos ainda que, da mesma maneira como sustenta Almeida (2016), não é o tipo de atividade proposta em sala de aula que determina o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico do estudante, assim como não são as situações que dão sentido aos quadriláteros notáveis.

Em nosso entendimento, o que define o nível é a relação entre a estratégia adotada pelo aluno na resolução da atividade e o tipo de abstração geométrica mobilizada por ele. Então, a estratégia usada indica em qual abstração o discente está trabalhando, e a abstração aponta o nível.

Também, nossas análises sobre os registros escritos dos estudantes, que reforçam os achados de Costa (2016), Costa e Câmara dos Santos (2015a; 2015b; 2016a; 2016b; 2016c; 2017a; 2017b) e, Costa e Rosa dos Santos (2016; 2017a; 2017b), sinalizam que a estratégia mobilizada, em princípio, pelo discente continua invariável, ou seja, não é alterada, ainda que a atividade ou situação que explora os quadriláteros notáveis seja modificada.

Por exemplo, se o estudante utiliza a estratégia fazer referência à aparência física da figura geométrica (que é uma das características da abstração geométrica

perceptiva), em geral, ele a aplica para resolver todas as questões de um teste, mesmo que os itens abordem diferentes situações (classificação, produção, etc.).

Em razão disso, e por defendermos, tal como Almeida (2016), que a estratégia utilizada na resolução da atividade pelo estudante é indicadora do nível de desenvolvimento do pensamento geométrico em que ele atua, definimos por admiti-la como base de cada nível produzido na proposição do modelo de nossa tese.

Contudo, é importante destacar que os dados analisados em nossas pesquisas, tais como os estudos supracitados acima, sinalizam que a abstração geométrica mobilizada também influencia fortemente nesse processo.

Nessa direção, ao considerarmos a relação entre esses dois pilares, foi possível identificarmos que, para cada tipo de abstração geométrica, existe um nível de desenvolvimento do pensamento geométrico específico. Além disso, foi possível verificarmos a existência de subníveis que emergem entre os níveis n , $n + 1$ e $n + 2$. O quadro a seguir ilustra essa consideração.

Quadro 25 – Modelo *a priori*

ABSTRAÇÕES GEOMÉTRICAS	NÍVEIS	SUBNÍVEIS
Perceptiva	n	$(n)_a$
		$(n)_b$
Analítica	$n + 1$	$(n + 1)_a$
		$(n + 1)_b$
Descritiva	$n + 2$	$(n + 2)_a$
		$(n + 2)_b$

Fonte: elaborado pelo autor.

Como podemos perceber pelo quadro, para cada nível, iniciando em n e finalizando em $n + 2$, propomos dois subníveis. Não foram identificados níveis para as demais abstrações geométricas (espacial, dedutiva e hipotética), todavia, não descartamos suas existências.

Essa ausência se justifica, pois as abstrações relacionadas a esses níveis não foram mobilizadas na resolução das atividades sobre quadriláteros pelos participantes desse estudo. Desse modo, não os discutiremos nessa tese.

Logo, o nível n , que é composto pelos estudantes que utilizam a estratégia considerar o quadrilátero notável por meio do aspecto global, é constituído pelos subníveis $(n)_a$ e $(n)_b$.

No primeiro subnível, $(n)_a$, os discentes percebem os quadriláteros somente a partir de um subconjunto das características visuais, pois ainda não conseguem formar imagens visuais. Dessa maneira, diferenciam apenas um quadrilátero de um triângulo (considerando a quantidade de lados) ou um quadrilátero de uma circunferência (considerando o formato das figuras).

Também, esses estudantes não conseguem analisar figuras geométricas que pertencem a uma mesma família, tendo por base as propriedades, tais como os retângulos e os quadrados. Logo, esses quadriláteros não são entendidos, ou são compreendidos como uma única figura (a que apresenta quatro lados) e não por apresentarem ângulos internos retos.

No segundo subnível, $(n)_b$, o aluno identifica um quadrilátero como um todo, excluindo seus elementos e suas propriedades. Quando questionado se o quadrado é retângulo, o estudante dirá que não, pois *“o retângulo tem dois lados maiores e dois menores, enquanto o quadrado tem todos os lados menores”*.

Aqui, esse discente já constroa imagens visuais desses quadriláteros, todavia, elas são influenciadas pelas características perceptivas do mundo físico. Então, o quadrado mesmo tendo quatro lados não é retângulo, pois esse segundo tem aparência de uma porta, enquanto que o primeiro lembra um dado.

Já o nível $n + 1$, que é caracterizado pelos discentes que percebem os quadriláteros notáveis, conforme seus elementos constituintes e suas propriedades, é composto pelos subníveis $(n + 1)_a$ – indicando que os estudantes reconhecem um quadrilátero a partir de sua definição; e $(n + 1)_b$ – mostrando que o aluno analisa os quadriláteros como detentores de propriedades, mas sem realizar inclusão de classe.

Por fim, o nível $n + 2$, que é formado pelos alunos que estabelecem relações de implicação entre as propriedades dos quadriláteros notáveis, é composto pelos subníveis $(n + 2)_a$ e $(n + 2)_b$, respectivamente.

O subnível $(n + 2)_a$ sinaliza que os alunos realizam inclusão de classe parcial, isto é, identificam um quadrado como um retângulo ou um quadrado como um

losango, todavia, ainda não reconhecem um quadrado como um tipo especial de retângulo e de losango simultaneamente.

Enquanto que o subnível $(n + 2)_b$ indica que o discente analisa os quadriláteros a partir das relações estabelecidas entre suas propriedades, desse modo, um quadrado é considerado como todo paralelogramo que é retângulo e losango ao mesmo tempo.

No tópico que segue, apresentamos mais detalhes sobre os níveis e subníveis propostos em nossa tese.

6.1 A produção da versão *a priori* do modelo

Em seguida, apresentamos as características de cada nível e subnível que forma a versão *a priori* do modelo sinalizado em nossa pesquisa. É importante destacarmos que a validação dessa versão ocorrerá no próximo capítulo, porque, em nosso entendimento, as entrevistas aplicadas por meio das produções escritas nos permitem produzir, com maior propriedade, os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico.

6.1.1 Nível n

O estudante que atua nesse nível de desenvolvimento do pensamento geométrico analisa um quadrilátero notável como um todo, desprovido de elementos e de propriedades. Os discursos são marcados por experiências essencialmente perceptivas e visuais e, dessa maneira, o aluno classifica e nomeia esses quadriláteros ao abstrair elementos perceptivos dos objetos físicos que fazem parte da sua realidade.

Aqui, verificamos que os atributos e as propriedades não são utilizados, pois as estratégias resumem-se ao uso de aspectos globais e características de objetos do mundo físico.

Em vista disso, um discente que trabalha nesse nível mobiliza a abstração geométrica perceptiva, uma vez que ele analisa os quadriláteros notáveis a partir de sensações perceptivas e visuais. Por exemplo, ao visualizar um losango não conseguirá reconhecê-lo como um paralelogramo com comprimentos dos lados

congruentes (que é um objeto geométrico), mas sim como uma pipa (que é um objeto físico presente em sua realidade), ou então como um objeto cuja forma não é arredondada.

Podemos evidenciar essa estratégia ainda nas respostas a seguir às questões do teste desenvolvidas por um aluno participante das pesquisas de Costa e Câmara dos Santos (2015a; 2015b; 2016a; 2016b; 2016c; 2017a; 2017b). Na época da realização desses estudos, o estudante cursava o 1º ano do ensino médio e tinha 15 anos. A Figura 46 ilustra a primeira questão do teste.

Figura 46 – Extrato da questão 01 (primeiro momento) – Participante 01
 Q01) *Você desenhou um retângulo. Seu colega desenhou uma figura de quatro lados que não é um retângulo. Nos espaços abaixo, desenhe como poderia ser a sua figura e a figura de seu colega:*

SUA FIGURA:	FIGURA DE SEU COLEGA:
	

Fonte: Costa e Câmara dos Santos (2015a)

Nesse item, por meio da Figura 46, percebemos que o participante foi capaz de reconhecer quadriláteros notáveis e reproduzi-los por meio da nomenclatura. Dessa maneira, considerando o registro deixado em “SUA FIGURA”, notamos que ocorreu uma articulação entre a palavra “retângulo” e a produção correspondente, ou seja, segundo Duval (1995), o aluno realizou conversão de ida entre a língua natural (palavra retângulo) e a figura geométrica (representada pelo desenho do retângulo).

Contudo, como podemos observar em “FIGURA DE SEU COLEGA”, o conceito geométrico foi utilizado de forma equivocada, pois ao produzir um quadrado e considerá-lo como não retângulo, o estudante comprova ter mobilizado apenas o aspecto global do quadrilátero.

Aqui, conforme Duval (1995), ele não realizou conversão entre as representações semióticas porque sua resposta é inadequada, tendo em vista que todo quadrado é retângulo, logo, as características dessas formas geométricas foram ignoradas. Tal fato também é confirmado quando analisamos as justificativas apresentadas por esse aluno no segundo momento da questão.

Conforme ilustrado na Figura 47, o participante afirma que sua figura é um retângulo porque apresenta lados horizontais maiores que os verticais. Nesse sentido, ele considerou apenas aspectos perceptivos e visuais da figura, descrevendo exatamente o que ele observa na figura, analisando-a de maneira global, não considerando os elementos constituintes e as propriedades.

Figura 47 – Extrato da questão 01 (segundo momento) – Participante 01
Justifique por quê:

Sua figura é um retângulo:	A de seu colega não é um retângulo:
Sim, porque é um quadrado com os lados horizontais maiores que os verticais	porque os lados são iguais

Fonte: Costa e Câmara dos Santos (2015a)

Ainda, com base em Duval (1995), percebemos que não ocorreu conversão de volta, pois não é feita articulação entre essas variáveis por meio da língua natural. Também, não observamos o desenvolvimento de tratamento. O mesmo pode ser constatado na explicação relacionada à figura do seu colega.

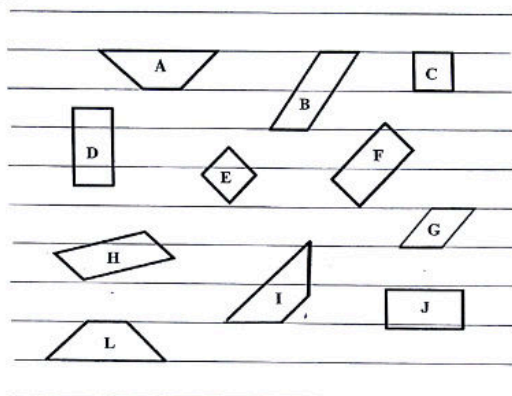
Ao analisarmos a resposta desse mesmo aluno fornecida na segunda questão do teste, relacionada à classificação de quadriláteros, novamente, percebemos que as características das figuras, em geral, não foram consideradas ou mobilizadas na resolução do item, conforme podemos verificar isso no protocolo (Figura 48).

Pelo extrato apresentado na Figura 48, observamos que apenas um dos retângulos foi reconhecido pelo participante, no caso, o retângulo em posição prototípica (figura J). O mesmo pode ser notado com o quadrado padrão (figura C). Apenas dois paralelogramos (figuras F e H) foram identificados e, equivocadamente, dois trapézios (figuras A e I) e um paralelogramo (figura G) foram considerados

como losangos. Somente um quadrado (figura E) e um paralelogramo (figura B) foram classificados como quadriláteros.

Figura 48 – Extrato da questão 02 – Participante 01

Q02) Em uma folha de caderno estão desenhadas várias figuras de quatro lados:



Tente separar por famílias, as figuras da folha de caderno:

	FIGURAS
Retângulos:	
Trapézios:	A, I
Quadriláteros:	E, B
Quadrados:	C, J
Paralelogramos:	F, H
Losangos:	A, I, G

Fonte: Costa e Câmara dos Santos (2016b)

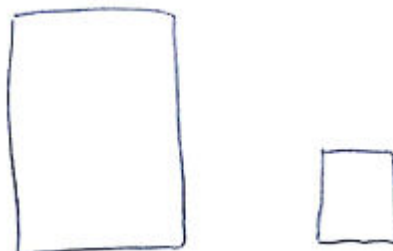
Verificamos que os quadrados não foram considerados retângulos e nem losangos ao mesmo tempo. Os losangos, os quadrados e os retângulos não foram classificados como paralelogramos. Além disso, somente duas figuras foram reconhecidas como quadriláteros.

Essas produções evidenciam que o aluno não faz inclusão de classe, utilizando apenas a aparência física das figuras na resolução, mobilizando, assim, aspectos perceptivos e visuais dos quadriláteros como estratégia de classificação. Ainda, como aponta Duval (1995), não realizaram conversão e nem tratamento entre os registros de representação semiótica.

Na terceira questão, quando solicitado a construir dois quadrados diferentes, o participante fez dois retângulos (não quadrados) com áreas diferentes, porém na mesma posição (posição prototípica), conforme ilustrado na Figura 49.

Novamente, ele fez uso apenas de aspectos perceptivos e visuais, ou seja, considerou somente o aspecto global das figuras na produção, pois na produção a congruência dos comprimentos dos lados desse tipo de quadrilátero notável não foi respeitada. Logo, com base em Duval (1995), não realizou conversão entre a língua natural e a figura geométrica.

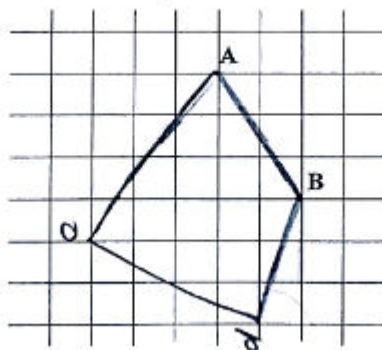
Figura 49 – Extrato da questão 03 – Participante 01
Q03) Construir no espaço abaixo, dois quadrados diferentes:



Fonte: Costa e Câmara dos Santos (2016b)

Nas duas últimas questões do teste, relacionadas à construção de losangos, o participante também demonstrou mobilizar, mais uma vez, aspectos perceptivos e visuais, desconsiderando, desse modo, os elementos constituintes e as propriedades desse quadrilátero notável, como podemos observar nos extratos apresentados na Figura 50.

Figura 50 – Extrato da questão 04 – Participante 01
Q04) Utilizando os vértices A e B já marcados, desenhe o losango ABCD:



Fonte: Costa e Câmara dos Santos (2016b)

Pela Figura 50, percebemos que o quadrilátero produzido no quarto item se aproxima mais de um trapezoide do que de um losango, já que este possui dois pares de lados paralelos e todos os comprimentos dos lados congruentes, enquanto que o primeiro (o trapezoide) não possui esses atributos.

Além disso, mesmo com o auxílio da malha quadriculada, o aluno fez uso da aparência física do losango, desconsiderando, por exemplo, o perpendicularismo entre suas diagonais a partir do ponto médio. Então, conforme Duval (1995), ele não realizou conversão entre os registros de representação semiótica.

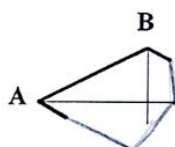
Esse fenômeno também é verificado na resposta à quinta questão (Figura 51), ou seja, o participante fez uso de aspectos perceptivos e visuais. Ainda é notório que esse aluno não compreende muito bem o que é um losango devido às diferenças apresentadas pelas duas figuras produzidas e consideradas como losangos nas questões 04 e 05. Nessa direção, ele não realizou nesses itens a conversão entre os registros de representação semiótica.

Figuras 51 – Extrato da questão 05 – Participante 01

Q05) O losango **ABCD** teve um
pedaço apagado. Você pode
reconstruí-lo?

☒ Sim

Explique como:



Segundo Segundo
as linhas de
indicação

Fonte: Costa e Câmara dos Santos (2016b)

Analisando de modo geral as cinco questões do teste, tendo por base a teoria de Duval (1995), por ter produzido desenhos relacionados às representações de quadriláteros notáveis, o participante atuou na apreensão sequencial. Além disso, como fez uso somente de aspectos perceptivos e visuais, considerando esses quadriláteros de maneira global, então o aluno também mobilizou a apreensão perceptiva com olhar geométrico do botanista.

Enquanto que, conforme o modelo de Van-Hiele (1957), considerando as produções referentes às primeiras questões do teste, o discente estaria apenas no primeiro nível de pensamento geométrico vanhieliano, pois fez uso da aparência física dos quadriláteros nas resoluções. Por outro lado, ele nem teria domínio desse nível, já que parece não identificar um losango nas últimas questões.

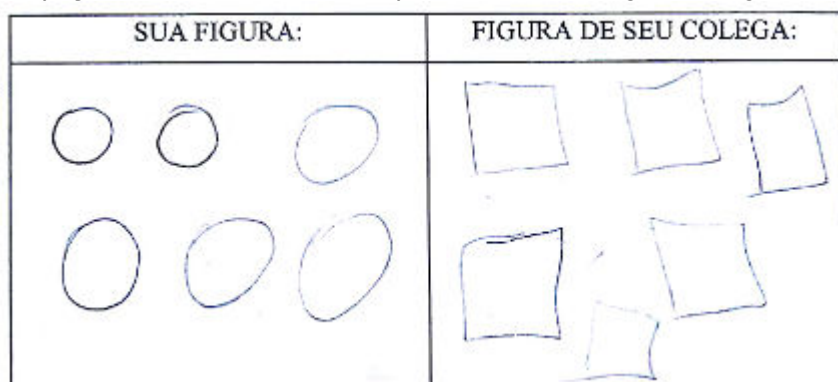
Outra possibilidade é o estudante que se situa nesse nível de desenvolvimento do pensamento geométrico perceber os quadriláteros notáveis apenas a partir de um subconjunto das características visuais, tendo em vista que não consegue formar imagens mentais.

Nesse sentido, ele não identifica quadriláteros que são da mesma família, diferenciando somente um quadrilátero (formado por linhas retas) de uma

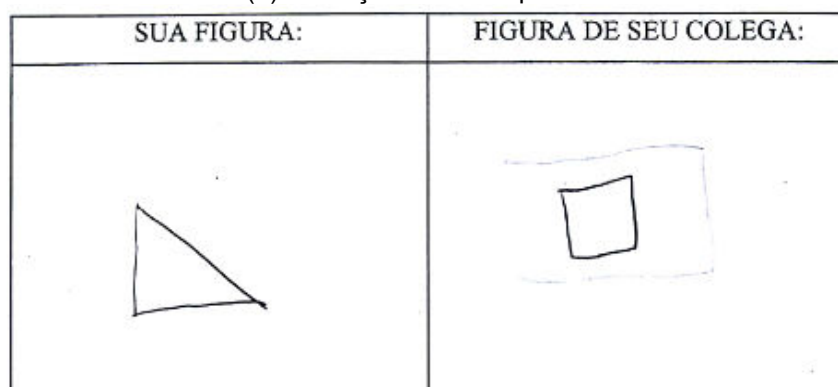
circunferência (composta de linhas circulares), como por exemplo, distinguir essa segunda figura geométrica de um retângulo.

Esse estudante também é capaz de distinguir duas figuras que apresentam quantidades de lados diferentes, como um triângulo (com três lados) e um quadrado (com quatro lados). Todavia, não consegue analisar um quadrado e um retângulo, como podemos verificar nas respostas a seguir às questões do teste feitas por outros dois participantes (com 15 e 16 anos, respectivamente, e cursando o 1º ano do ensino médio) da pesquisa de Costa e Câmara dos Santos (2016b).

Figura 52 – Extrato da questão 01 (primeiro momento) – Participantes 02 e 03
Q01) *Você desenhou um retângulo. Seu colega desenhou uma figura de quatro lados que não é um retângulo. Nos espaços abaixo, desenhe como poderia ser a sua figura e a figura do seu colega.*



(a) Produção do Participante 02



(b) Produção do Participante 03

Fonte: Costa e Câmara dos Santos (2016b)

Na questão ilustrada na Figura 52, observamos que os estudantes não conseguiram reconhecer quadriláteros notáveis e nem de reproduzi-los corretamente por meio da nomenclatura. Isso ocorre, pois essas formas geométricas são percebidas a partir de um subconjunto das características visuais. Desse modo, esses participantes não conseguem formar imagens visuais dos quadriláteros.

Pelas produções apresentadas no item, evidenciamos que os discentes não identificaram o retângulo e nem a figura de quatro lados diferente desse tipo de quadrilátero. Assim, conforme Duval (1995), não realizaram conversão de ida entre os registros de representação semiótica, pois em “SUA FIGURA”, o primeiro construiu várias circunferências e o segundo fez um triângulo, considerando-os como retângulos, e em “FIGURA DO SEU COLEGA”, os dois fizeram quadrados como não retângulos.

Nesse sentido, eles só conseguem diferenciar as figuras formadas por curvas daquelas compostas por retas ou a partir do número de lados que elas apresentam. Tal fato também é confirmado, ao analisarmos as justificativas referentes ao segundo momento da questão, conforme ilustrado a seguir pela Figura 53.

Figura 53 – Extrato da questão 01 (segundo momento) – Participantes 02 e 03
Justifique porquê:

Sua figura é um retângulo:	A de seu colega não é um retângulo:
Por que eu gosto do retângulo é mais fácil. Por que o retângulo é uma bola.	Por que meu colega não gosta de desenho um retângulo ele não sabe fazer.

(a) Produção do Participante 02

Sua figura é um retângulo:	A de seu colega não é um retângulo:
porque não fica igual a o meu colega remito o meu o retângulo é o dele é quadrado.	porque é: porque mais fica igual ao meu.

(b) Produção do Participante 03

Fonte: Costa e Câmara dos Santos (2016b)

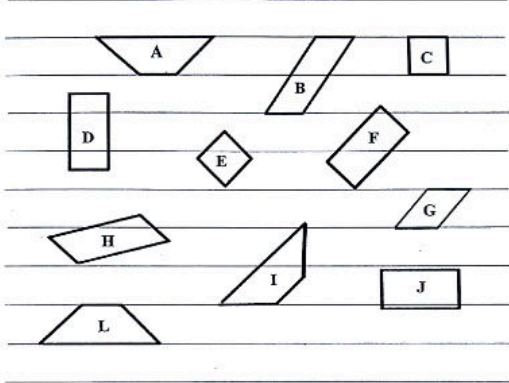
Como apresentado na Figura 53, o primeiro participante diz que sua figura é um retângulo pois é uma bola, enquanto que o segundo chama o triângulo por retângulo, demonstrando assim, que não sabem o que é um retângulo, confundido-o com uma circunferência e com um triângulo.

Logo, como indica Duval (1995), não realizaram conversão de volta entre a figura geométrica e a língua natural. Ou seja, nessa resolução, esses estudantes não fizeram referência ao aspecto global da figura, pois atuam em outro subnível do nível n , isto é, em um subnível mais elementar.

Com relação às respostas desses discentes relacionadas à segunda questão do teste, acerca da classificação de quadriláteros, verificamos que os atributos dessas formas geométricas não foram considerados, como ilustrado a seguir pela Figura 54.

Figura 54 – Extrato da questão 02 – Participantes 02 e 03

Q02) Em uma folha de caderno estão desenhadas várias figuras de quatro lados:



Tente separar por famílias, as figuras da folha de caderno:

	FIGURAS
Retângulos:	C
Trapézios:	A, L
Quadriláteros:	A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L
Quadrados:	F
Paralelogramos:	B, G, H
Losangos:	E

(a) Produção do Participante 02

Tente separar por famílias, as figuras da folha de caderno:

	FIGURAS
Retângulos:	I, J
Trapézios:	A, L
Quadriláteros:	A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L
Quadrados:	E
Paralelogramos:	B, G, H
Losangos:	E

(b) Produção do Participante 03

Fonte: Costa e Câmara dos Santos (2016b)

Pelos protocolos apresentados na Figura 54, notamos que o quadrado padrão (figura C) foi considerado retângulo pelo primeiro aluno, isso não significa que ele fez inclusão de classe e nem que converteu a figura geométrica em língua natural na perspectiva de Duval (1995), pois em seguida, reconheceu um retângulo (figura F) como quadrado.

Tal fato representa uma contradição, pois se um estudante é capaz de reconhecer os quadrados como retângulos especiais, então a figura F deveria ser classificada como retângulo, assim como as figuras D, E e J. Essas evidências consistem em uma comprovação de que esse aluno não consegue formar imagens

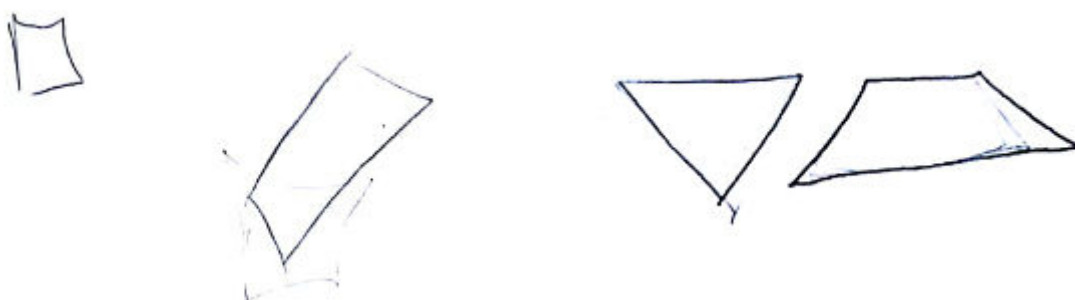
visuais, logo, com base em Duval (1995), não realizou conversão entre os registros de representação semiótica.

O mesmo pode ser notado na classificação do trapézio representado pela figura L, que foi considerado como trapézio e paralelogramo ao mesmo tempo pelo primeiro participante, representando outro equívoco conceitual. Além disso, um dos paralelogramos oblíquos⁷⁰ (figura B) foi reconhecido como losango, talvez, pela proximidade entre as aparências globais desses quadriláteros notáveis.

Situação semelhante, observamos com a produção do segundo estudante, que classificou o trapézio (figura I) como retângulo, considerou apenas o retângulo (figura J) como quadrilátero, reconheceu somente um dos paralelogramos (figura F), e identificou o paralelogramo oblíquo (figura B) como losango.

No terceiro quesito do teste, referente à produção de dois quadrados diferentes, o primeiro aluno construiu um quadrado e um trapézio, ao mesmo tempo em que o segundo discente fez um triângulo e um trapézio como apresentado na Figura 55.

Figura 55 – Extrato da questão 03 – Participantes 02 e 03
Q03) Construir no espaço abaixo, dois quadrados diferentes:



(a) Produção do Participante 02

(b) Produção do Participante 03

Fonte: Costa e Câmara dos Santos (2016b)

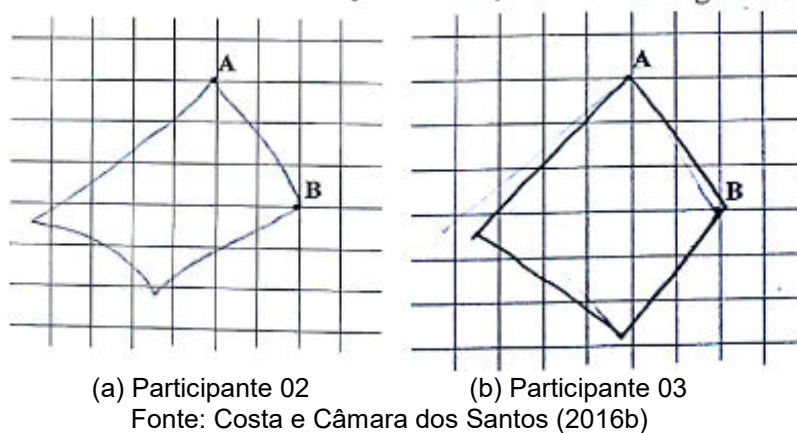
Ao realizar esse tipo de construção, os participantes demonstram não conseguirem identificar formas geométricas comuns, pois ainda não criam imagens visuais. Logo, como apontado por Duval (1995), não realizaram conversão entre a língua natural e a figura geométrica.

Nos dois últimos quesitos do teste, relativos à produção de losangos, os estudantes expressaram mais uma vez não terem mobilizando as características e

⁷⁰ Paralelogramos com ângulos internos não retos.

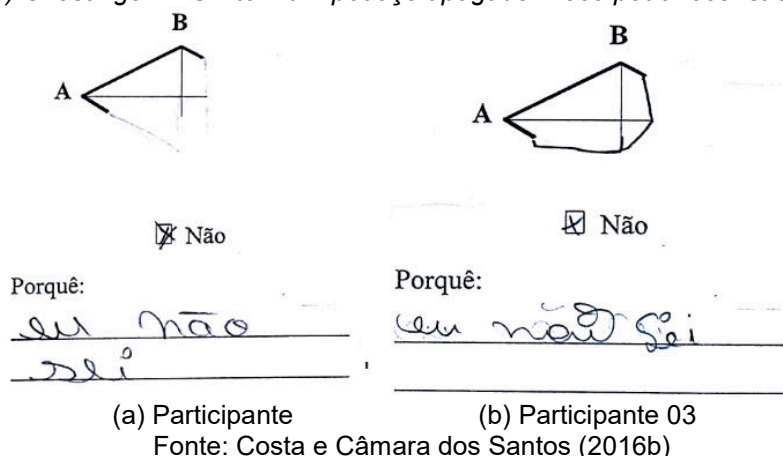
as propriedades do losango nas duas construções, como ilustrado a seguir pelas Figuras 56 e 57.

Figura 56 – Extrato da questão 04 – Participantes 02 e 03
Q04) Utilizando os vértices A e B já marcados, desenhe o losango ABCD:



Com base nos registros deixados nas Figuras 56 e 57, podemos observar que os participantes compreendem formas geométricas apenas por meio de um subconjunto das características visuais, então, não conseguem produzir imagens visuais.

Figura 57 – Extrato da questão 05 – Participantes 02 e 03
Q05) O losango **ABCD** tem um pedaço apagado. Você pode reconstruí-lo?



Nessa direção, esses partícipes não realizam a identificação do losango, mesmo a questão fornecendo malha quadriculada, como foi o caso do quarto item do teste. Portanto, para Duval (1995), não realizaram conversão entre a língua natural e a figura geométrica.

Com base na teoria de Duval (1995), verificando de modo global as cinco questões do teste, por terem produzido circunferências, triângulos e quadrados, esses participantes mobilizaram a apreensão sequencial.

Considerando o modelo de Van-Hiele, não é possível afirmar ao certo em qual nível de pensamento geométrico atuam, pois as características apresentadas pelos estudantes não se “enquadram” nos atributos do modelo vanhieliano. Pelos registros deixados, esses alunos não atingiram nem o primeiro nível do mencionado modelo.

Se analisarmos as produções dos últimos alunos (Participantes 02 e 03) com base nos demais modelos, tais como o de Gutierrez, Jaime e Fortuny (1991), Garrido (2005), Parzysz (2006) e Marchand (2009), podemos constatar que, pelas características identificadas, os estudantes não alcançaram nem o primeiro nível de pensamento geométrico proposto por tais modelos.

Essa é uma comprovação de que esses modelos não dão conta de explicar o comportamento cognitivo de alunos em certas situações que exploram os quadriláteros notáveis.

Nesse primeiro nível de desenvolvimento do pensamento geométrico relacionado aos quadriláteros notáveis, nível n , foi possível a identificação de dois subníveis: $(n)_a$ e $(n)_b$.

Os estudantes que se encontram no subnível $(n)_a$ percebem os quadriláteros notáveis somente a partir de um subconjunto das características visuais, tendo em vista que não conseguem formar imagens visuais.

Então, não reconhecem quadriláteros que são da mesma família, diferenciando somente um quadrilátero (formado por linhas retas) de uma circunferência (composta de linhas circulares), ou um quadrilátero (formado por quatro lados) de um triângulo (com três lados).

Desse modo, um paralelogramo e um trapézio são considerados como uma única figura, não por serem quadriláteros notáveis, mas por terem o mesmo número de lados. Um desses quadriláteros pode ser utilizado para ser diferenciado de um triângulo (que tem três lados).

Já os que se encontram no subnível $(n)_b$ conseguem identificar os quadriláteros notáveis a partir do aspecto global, baseando-se em sensações perceptivas e visuais. Apesar de conseguirem formar imagens visuais dessas formas

geométricas, tais estudantes não mobilizam os elementos constituintes e nem as propriedades nas produções.

Desse modo, ao analisar um quadrado e um retângulo, o estudante dirá que o “primeiro possui todos os lados pequenos (lembrando um dado), enquanto que o segundo diz ter dois lados maiores e dois menores (parecendo uma porta)”. Nessa situação, apenas o aspecto global foi considerado na justificativa.

6.1.2 Nível $n + 1$

Nesse nível de pensamento geométrico as estratégias mobilizadas pelo aluno concentram-se em analisar um quadrilátero notável por meio dos seus elementos constituintes ou de suas propriedades, porém, ainda não é realizado o estabelecimento de relações de inferências entre essas propriedades. Dessa forma, no reconhecimento de um quadrilátero, o discente poderá fazer uso de definições dessa figura, mas de modo bem amplo e, às vezes, sem significado para ele.

Em consequência disso, um estudante que atua nesse nível mobiliza a abstração geométrica analítica, tendo em vista que ele faz referência à definição e às propriedades na identificação de um quadrilátero notável, mas não consegue realizar inclusão de classe.

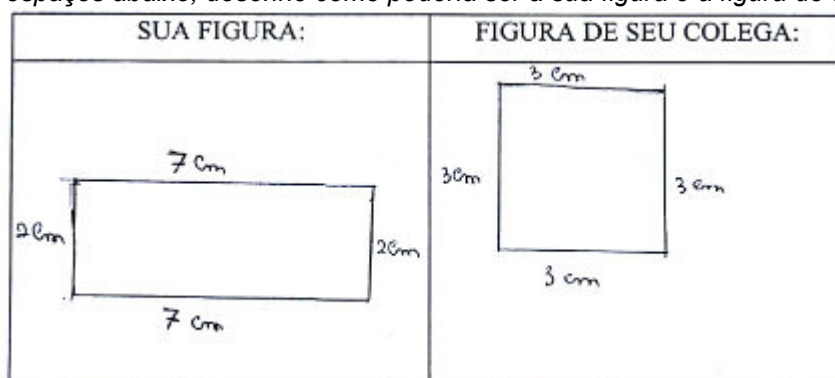
Por exemplo, na manipulação de quadriláteros a partir de dobraduras e recortes, um quadrado é apontado como uma forma que possui quatro ângulos internos retos e com todos os lados com comprimentos congruentes, fazendo assim, uso dos elementos constituintes, isto é, da definição.

Outra opção é o aluno citar as propriedades do quadrado na identificação: diagonais congruentes, simetria de rotação, dois eixos de simetria pelos lados opostos, entre outras. Podemos verificar essas estratégias nas respostas às questões do teste desenvolvidas por dois alunos do 6º ano do ensino fundamental (com idade entre 10 e 11 anos), participantes das pesquisas de Costa (2016), Costa e Câmara dos Santos (2016c; 2017a; 2017b). A Figura 58 ilustra essa situação.

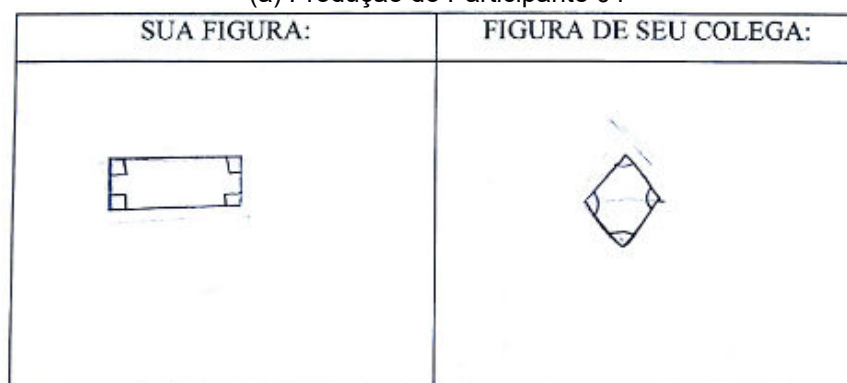
Nessa primeira questão do teste, verificamos que os dois participantes foram capazes de identificar quadriláteros notáveis e construí-los a partir da nomenclatura. Nessa direção, analisando os registros deixados em “SUA FIGURA” com base em

Duval (1995), observamos que os dois alunos realizaram conversão (de ida), pois transformaram a língua natural (representada pela palavra “retângulo”) em figura geométrica, isto é, na construção equivalente (a figura representada pelo desenho do retângulo).

Figura 58 – Extrato da questão 01 (primeiro momento) – Participantes 04 e 05
Q01) Você desenhou um retângulo. Seu colega desenhou uma figura de quatro lados que não é um retângulo. Nos espaços abaixo, desenhe como poderia ser a sua figura e a figura do seu colega.



(a) Produção do Participante 04



(b) Produção do Participante 05

Fonte: Costa (2016), Costa e Câmara dos Santos (2016c; 2017a; 2017b).

Agora, analisando os registros disponibilizados em “FIGURA DE SEU COLEGA”, evidenciamos que o conceito geométrico não foi utilizado adequadamente pelo primeiro aluno, pois ele construiu um quadrado e o considerou como um não retângulo, logo, não fez conversão conforme Duval (1995).

Mas nesse caso, ele fez referência a alguns elementos constituintes do quadrado, como o fato desse quadrilátero apresentar todos os lados com comprimentos congruentes. Isso pode ser evidenciado nas próprias marcações deixadas na produção (lados do quadrado com medidas de comprimento iguais a 3 cm).

O segundo estudante produziu um losango oblíquo (losango não quadrado), no qual, os ângulos internos não são retos, realizando assim conversão entre a língua natural e a figura geométrica, como sinalizado por Duval (1995). Tal fato também pode ser evidenciado nas marcações deixadas na produção.

Em seguida, ao apreciarmos os registros escritos dos dois participantes, constatamos que ambos utilizaram elementos da definição como parâmetro de justificativa, conforme ilustrado a seguir.

Figura 59 – Extrato da questão 01 (segundo momento) – Participantes 04 e 05
Justifique por quê:

Sua figura é um retângulo:	A de seu colega não é um retângulo:
Porque todos os lados paralelos entre si são iguais e todos os ângulos são retos.	Porque todos os lados têm a mesma medida e me retângulo nem todos os lados são iguais, mas, todos os lados paralelos entre si são iguais.

(a) Produção do Participante 04

Justifique por quê:

Sua figura é um retângulo:	A de seu colega não é um retângulo:
Sim, pois todos os ângulos tem 90° .	Não, pois não tem ângulos de 90° e os ângulos tem valores diferentes.

(b) Produção do Participante 05

Fonte: Costa (2016), Costa e Câmara dos Santos (2016c; 2017a; 2017b).

Como podemos observar pelas figuras acima (Figura 59a e 59b), o primeiro participante afirmou que sua figura é um retângulo, pois apresenta lados paralelos congruentes entre si e ângulos internos retos, ao mesmo tempo em que o segundo informou que a figura dele tem todos os ângulos internos medindo 90° .

Dessa maneira, fica evidente que eles fizeram uso dos elementos constituintes, ou seja, utilizaram a definição do retângulo nas explicações, logo, conforme Duval (1995), realizaram conversão de volta entre a figura geométrica e a língua natural.

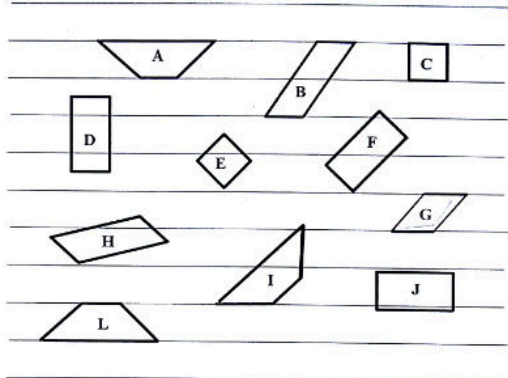
Tal fato também é notado nas justificativas apresentadas em “A de seu colega não é um retângulo”. O primeiro estudante explica que o quadrado não é um retângulo, pois todos os lados têm a mesma medida de comprimento, enquanto que o segundo afirmou que o losango (obliquo) não possui ângulos retos.

Aqui, eles também mobilizaram os elementos constituintes desses quadriláteros notáveis para diferenciá-los do retângulo.

Ao analisarmos a resposta desses participantes no segundo item do teste, referente à classificação de quadriláteros, mais uma vez, evidenciamos que os elementos constituintes desses objetos geométricos, geralmente, foram considerados na solução da questão, como podemos observar nos protocolos que seguem ilustrados na Figura 60.

Figura 60 – Extrato da questão 02 – Participantes 04 e 05

Q02) Em uma folha de caderno estão desenhadas várias figuras de quatro lados:



Tente separar por famílias, as figuras da folha de caderno:

	FIGURAS
Retângulos:	J, F e D.
Trapézios:	A, L e I.
Quadriláteros:	Todas as figuras são quadriláteros.
Quadrados:	C e E.
Paralelogramos:	G e H.
Losangos:	Não há nenhum losango.

(a) Participante 04

Tente separar por famílias, as figuras da folha de caderno:

	FIGURAS
Retângulos:	F, J, D.
Trapézios:	H, B, G.
Quadriláteros:	A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K.
Quadrados:	C.
Paralelogramos:	L, I, A.
Losangos:	E.

(b) Participante 05

Fonte: Costa (2016), Costa e Câmara dos Santos (2016c; 2017a; 2017b).

Pelos extratos, verificamos que os retângulos padrões (figuras D, F e J), isto é, os não quadrados, foram reconhecidos pelos dois estudantes. O mesmo pode ser constatado com os trapézios, representados pelas figuras A, I e L.

Os dois participantes também consideraram todas as figuras na família dos quadriláteros, isso não significa que eles realizaram inclusão de classe, mas que são capazes de identificá-las como porções de um plano formadas por quatro pontos

quaisquer, de forma que três deles não estejam em uma mesma reta (LIMA; CARVALHO, 2010).

Logo, fizeram uso dos elementos constituintes dos quadriláteros na classificação, realizando conversão entre a figura geométrica e a língua natural, segundo Duval (1995).

O primeiro estudante reconheceu os quadrados (figuras C e E), enquanto que o segundo só identificou o quadrado padrão (figura C), certamente, pois ainda é influenciado por um ensino de Geometria com foco no reconhecimento de figuras em posição prototípica.

Apenas dois paralelogramos oblíquos (figuras G e H) foram identificados pelo primeiro participante, ao passo que os trapézios (figuras A, I e J) foram considerados paralelogramos pelo segundo participante. Esse fenômeno “pode ter ocorrido pelo fato de os paralelogramos e os trapézios apresentarem *visualmente* lados *tortos*, então, suas aparências se assemelham” (COSTA; CÂMARA DOS SANTOS, 2016b, p.11, *itálico nosso*).

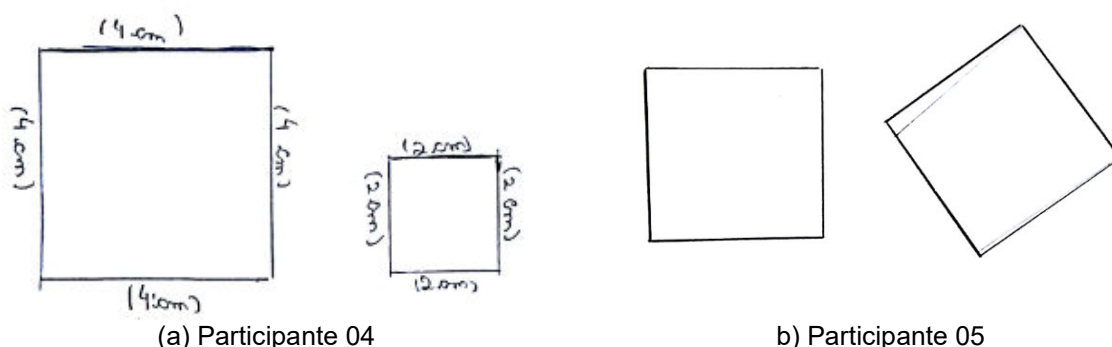
Além disso, somente o segundo discente considerou o quadrado não padrão (figura E) como tipo especial de losango. Essas evidências mostram que tais alunos possuem dificuldades de identificar o quadrado (em posição prototípica ou não) como um tipo especial de losango, provavelmente por conta de um ensino de Geometria que enfatiza o reconhecimento de “figuras padronizadas”.

No terceiro item do teste, quando pedido que produzissem dois quadrados diferentes, o primeiro participante fez dois quadrados padrões (em posição prototípica), mas com diferença nas medidas dos comprimentos dos seus lados.

Tal fato pode ser constatado a partir das marcações deixadas na folha de papel, demonstrando, assim, com base na teoria de Duval (1995), que ele fez conversão entre os registros de representação semiótica, conforme ilustrado pela Figura 61.

No caso do segundo aluno, verificamos que ele diferenciou os dois quadrados pela sua posição na folha de papel, demonstrando, desse modo, uma importante autonomia no tocante às figuras prototípicas (CÂMARA DOS SANTOS, 1992; 2001; 2009; COSTA, 2016), realizando, para Duval (1995), conversão entre a língua natural e a figura geométrica.

Figura 61 – Extrato da questão 03 – Participantes 04 e 05
 Q03) Construir no espaço abaixo, dois quadrados diferentes:

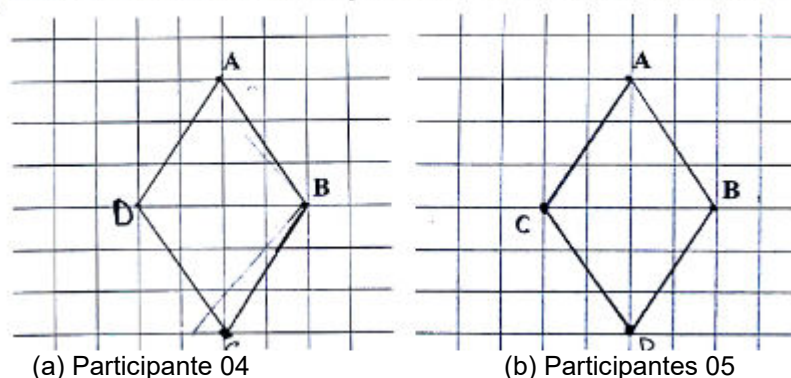


(a) Participante 04
 (b) Participante 05
 Fonte: Costa (2016), Costa e Câmara dos Santos (2016c; 2017a; 2017b).

O fato de ele ter produzido um quadrado inclinado (na mesma posição dos losangos padrões), isso não significa que ele já reconhece o quadrado como um tipo especial de losango, pois como foi visto na segunda questão do teste, o quadrado “prototípico” não foi reconhecido como losango. Nesse sentido, esse estudante ainda não consegue estabelecer relações de implicação entre as propriedades dos quadriláteros notáveis.

Nas duas últimas questões, voltadas à produção de losangos, os dois estudantes demonstraram mobilizar, novamente, os elementos constituintes desses quadriláteros notáveis, isto é, a sua definição: “o losango é um quadrilátero notável que apresenta todos os lados de medidas de comprimento iguais, logo, são congruentes entre si” (COSTA, 2016, p.57). Esse fenômeno encontra-se ilustrado nas figuras que seguem (Figuras 62 e 63).

Figura 62 – Extrato da questão 04 – Participantes 04 e 05
 Q04) Utilizando os vértices A e B já marcados, desenhe o losango ABCD:

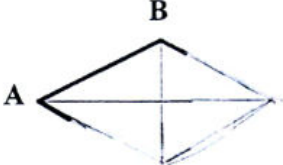


(a) Participante 04
 (b) Participantes 05
 Fonte: Costa (2016), Costa e Câmara dos Santos (2016c; 2017a; 2017b).

Nas justificativas apresentadas na quinta questão, notamos que o primeiro estudante menciona a necessidade de instrumentos matemáticos (tais como régua) para medir a parte que falta, ou seja, é necessário medir o comprimento de um dos lados do losango para a reconstrução.

Figura 63 – Extrato da questão 05 – Participantes 04 e 05
Q05) O losango **ABCD** tem um pedaço apagado. Você pode reconstruí-lo?

B



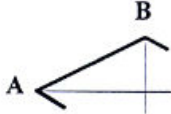
☒ Sim

Explique como:

Sim, pois se utilizarmos
instrumentos matemáticos
como a régua podemos medir
a parte que não foi apagada
e traçar as outras linhas
que faltam com bastante
precisão.

a) Participante 04

B



☒ Sim

Explique como:

O losango tem lados
iguais, então é só cal
cular o valor de um
lado e reconstruir
o losango com esse
valor
podendo criar as arestas

LD



(b) Participante 05

Fonte: Costa (2016), Costa e Câmara dos Santos (2016c; 2017a; 2017b).

Então, pela definição, todo losango tem os lados com comprimentos congruentes, o aluno reconstruirá a figura. O segundo participante deixou isso mais claro no seu registro escrito: o losango tem todos os lados iguais, então, é só calcular a medida de um dos lados.

Esses discentes fizeram uso da definição na reconstrução desse tipo de quadrilátero notável, realizando, assim, conforme Duval (1995), a conversão de ida (ao reconstruir a figura) e de volta (ao explicar como é possível tal reconstrução) entre os registros de representação semiótica.

Fazendo uma análise geral dos cinco itens do teste, considerando a teoria de Duval (1995), como os dois participantes construíram desenhos que representam quadriláteros notáveis, então, consideramos que, atuaram na apreensão sequencial.

Ambos os estudantes não fizeram uso adequado da apreensão discursiva, pois mesmo fazendo uso dos elementos constituintes (da definição) desses quadriláteros na solução das questões, eles não reconheceram um quadrado como um tipo especial de retângulo.

Tal fato acontece, pois esses alunos são influenciados por um ensino de Geometria com foco no reconhecimento de figuras em posição prototípica, e pela apreensão perceptiva com olhar botanista, marcando, dessa maneira, uma subordinação dessa com a primeira.

Agora, tendo por base o modelo de Van-Hiele (1957), não é possível afirmar em qual nível de pensamento geométrico se encontram esses discentes, pois as características apresentadas por eles não se “enquadram” nas discutidas por esse pesquisador.

Considerando os graus de aquisição dos níveis vanhielianos propostos por Gutierrez, Jaime e Fortuny (1991), esses alunos apresentam *aquisição completa* para o primeiro nível, pois têm domínio total dele; e *aquisição intermediária* para o segundo nível, pois fazem uso de elementos constituintes dos quadriláteros.

Corroborando com os autores espanhóis, conforme a discussão de Câmara dos Santos (1992), esses participantes estariam na transição entre o primeiro e o segundo nível vanhieliano, todavia, Van-Hiele não se dedicou a analisar esse cenário.

Discordamos desses pesquisadores, pois, em nossa compreensão, não se trata nem de grau de aquisição e nem de uma transição entre níveis, mas de um subnível mais elementar do nível $n + 1$, que estamos propondo nessa tese.

Outro caminho é o aluno, que trabalha nesse nível de desenvolvimento do pensamento geométrico, perceber os quadriláteros notáveis a partir de suas propriedades, mas sem realizar articulação entre elas, como podemos observar nas respostas a seguir às questões do teste, apresentadas por dois integrantes dos estudos de Costa (2016) e de Costa e Câmara dos Santos (2016a).

É importante destacar que o primeiro pártcipe do estudo é um estudante do 6º ano do ensino fundamental (com 10 anos), enquanto que o segundo é um professor de Matemática (com 30 anos de idade) e que possuía dois anos de experiência docente.

Nessa direção, ao ser questionado sobre o motivo de um quadrilátero notável ser um retângulo, um estudante poderá mencionar uma lista de propriedades: quatro ângulos retos, diagonais congruentes, simetria de rotação, dois eixos de simetria pelos lados opostos, etc.

Conforme ilustrado na Figura 64, relacionado à primeira questão, evidenciamos que os dois participantes reconheceram os quadriláteros notáveis e foram capazes de produzi-los por meio da nomenclatura.

Figura 64 – Extrato da questão 01 (primeiro momento) – Participantes 06 e 07
Q01) *Você desenhou um retângulo. Seu colega desenhou uma figura de quatro lados que não é um retângulo. Nos espaços abaixo, desenhe como poderia ser a sua figura e a figura do seu colega.*

SUA FIGURA:	FIGURA DE SEU COLEGA:
	

(a) Produção do Participante 06

SUA FIGURA:	FIGURA DE SEU COLEGA:
	

(b) Produção do Participante 07

Fonte: Costa (2016), Costa e Câmara dos Santos (2016a)

Nesse sentido, apreciando os registros deixados em “SUA FIGURA”, verificamos que ambos párticipes fizeram conversão de ida entre a língua natural

(representada pela palavra “retângulo”) e a figura geométrica (indicada pelo desenho do retângulo), como apontado por Duval (1995).

Em seguida, analisando a produção apresentada em “FIGURA DO SEU COLEGA”, notamos que o conceito geométrico foi utilizado de modo adequado pelos dois integrantes do estudo, pois o primeiro fez um trapezoide (que não possui lados opostos paralelos e nem ângulos internos congruentes, logo, não é um retângulo) e o segundo construiu um losango oblíquo (cujos ângulos internos não são retos, que também não é retângulo). Dessa forma, para Duval (1995), eles realizaram conversão entre os registros de representação semiótica.

Tal fenômeno também pode ser constatado nos registros escritos desses participantes, nos quais fazem referência a algumas das propriedades desses quadriláteros notáveis, conforme ilustrado pelos protocolos apresentados na Figura 65.

Figura 65 – Extrato da questão 01 (segundo momento) – Participantes 06 e 07

Justifique por quê:

Sua figura é um retângulo:	A de seu colega não é um retângulo:
Porque é um paralelogramo, com ângulos de 90° graus, um polígono.	Porque não é um paralelogramo, seus ângulos não têm mesma medida.

(a) Produção do Participante 06

Justifique por quê:

Sua figura é um retângulo:	A de seu colega não é um retângulo:
POSSUI QUATRO LADOS COM ÂNGULOS INTERNOS RETOS E LADOS PARALELOS CONGRUENTES ENTRE SI E DIFERENTE DOS LADOS PERPENDICULARES.	POR QUE NÃO POSSUI OS QUATRO ÂNGULOS INTERNOS RETOS E TODOS OS SEUS ~~ÂNGULOS~~ LADOS SÃO CONGRUENTES

(b) Produção do Participante 07

Fonte: Costa (2016), Costa e Câmara dos Santos (2016a)

Como podemos perceber pelos registros apresentados, o primeiro estudante afirmou que sua figura é um retângulo pois é um paralelogramo com ângulos internos retos. Dessa forma, ele é capaz de perceber que o retângulo apresenta propriedades em comum com o paralelogramo: os seus lados opostos paralelos são congruentes; os ângulos internos opostos possuem a mesma medida de abertura; e as diagonais cortam-se ao meio.

Por sua vez, o segundo participante mencionou duas características do retângulo: quatro ângulos internos retos e lados opostos paralelos congruentes entre si.

Desse modo, segundo Duval (1995), eles fizeram a conversão (de volta) entre os registros de representação semiótica (figura geométrica para língua natural). Além disso, o primeiro percebeu que, como o retângulo é formado somente por segmentos de reta e é uma figura fechada, logo também um é polígono.

Isso também pode ser constatado nas explicações apresentadas em “A de seu colega não é um retângulo”. No caso, o primeiro aluno afirmou que o trapézioide não é retângulo, pois não é um paralelogramo, já que não possui lados opostos paralelos entre si, e que os seus ângulos internos não são congruentes.

Ou seja, esse discente mobilizou algumas propriedades dessas figuras geométricas para diferenciá-las. Situação semelhante é sentida com o segundo partícipe, que informou que o losango oblíquo não é um retângulo, pois não possui ângulos retos.

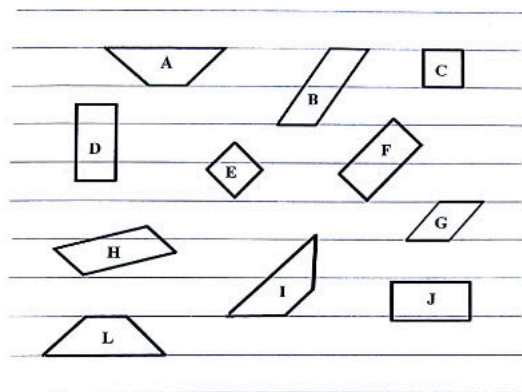
Então, novamente, tendo por base a teoria de Duval (1995), os dois participantes realizaram a conversão de volta entre a figura geométrica e língua natural.

Ao apreciarmos a resposta desses partícipes na segunda questão do teste, relacionada à classificação de quadriláteros, outra vez, percebemos que as propriedades desses objetos geométricos, em geral, foram ponderadas na resolução do item, como ilustrado na Figura 66.

Pela Figura 66, evidenciamos que os retângulos em posição prototípica (figuras D, F e J) foram identificados pelos dois participantes. Cenário análogo pode ser notado com os trapézios (figuras A, I e L) que também foram reconhecidos.

Figura 66 – Extrato da questão 02 – Participantes 06 e 07

Q02) Em uma folha de caderno estão desenhadas várias figuras de quatro lados:



Tente separar por famílias, as figuras da folha de caderno:

	FIGURAS
Retângulos:	D, J, F, L
Trapézios:	A, I, L
Quadriláteros:	Todos
Quadrados:	E, C
Paralelogramos:	B, C, D, E, F, G, H, J
Losangos:	G, B, H

(a) Participante 06

Tente separar por famílias, as figuras da folha de caderno:

	FIGURAS
Retângulos:	J, F, D
Trapézios:	A, I, L
Quadriláteros:	A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, L
Quadrados:	C, E
Paralelogramos:	H, B, G
Losangos:	

(b) Participante 07

Fonte: Costa (2016), Costa e Câmara dos Santos (2016a)

Os partícipes também classificaram todas as figuras no grupo dos quadriláteros, todavia, isso não quer dizer que estabeleceram relações de implicação entre as propriedades (inclusão de classe), mas sim de que reconhecerem-nas como figuras formadas por quatro pontos quaisquer de um plano, com a condição de que três deles não estejam em uma mesma reta (LIMA e CARVALHO, 2010).

Portanto, conforme Duval (1995), os dois integrantes do estudo realizaram conversão entre os registros de representação semiótica.

Os quadrados (figuras C e E) foram reconhecidos por ambos os participantes. Aqui chamamos atenção para o quadrado não prototípico que foi identificado. Tal fato representa uma importante autonomia em relação às figuras em posição padrão. Mais uma vez, os partícipes realizaram conversão entre a figura geométrica e a língua natural, segundo Duval (1995).

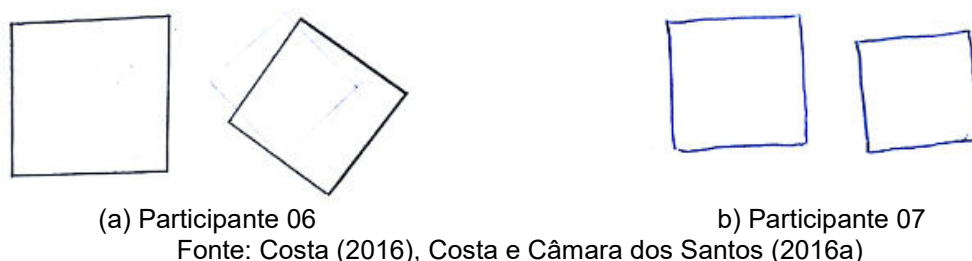
O primeiro discente considerou os quadrados e os retângulos na família dos paralelogramos, pois é capaz de perceber que esses quadriláteros apresentam propriedades em comum (o quadrado é o paralelogramo com todos os lados com comprimentos congruentes e ângulos internos congruentes, enquanto que o retângulo é o paralelogramo com ângulos internos retos). Desse modo, conforme

Duval (1995), realizou conversão entre os registros de representação semiótica. Por sua vez, o segundo participante só considerou os paralelogramos oblíquos.

Além disso, o primeiro aluno classificou os paralelogramos oblíquos como losangos. Concordamos com Costa e Câmara dos Santos (2016b) ao afirmarem que essa “confusão” conceitual ocorre, pois os paralelogramos oblíquos ao apresentarem lados “tortos”, se assemelham ao losango, aparentemente. Já o segundo partícipe não reconheceu nenhuma figura como losango, nem o quadrado, pois não consegue realizar inclusão de classe ainda.

Na terceira questão do teste (Figura 67), quando solicitado que construíssem dois quadrados diferentes, o primeiro participante diferenciou as duas figuras pela sua posição na folha de papel, sinalizando, dessa forma, uma importante autonomia em relação às figuras prototípicas (CÂMARA DOS SANTOS, 1992; 2001; 2009; COSTA, 2016). Ainda, para Duval (1995), ele fez a conversão entre a língua natural e a figura geométrica.

Figura 67 – Extrato da questão 03 – Participantes 06 e 07
Q03) Construir no espaço abaixo, dois quadrados diferentes:



(a) Participante 06

b) Participante 07

Fonte: Costa (2016), Costa e Câmara dos Santos (2016a)

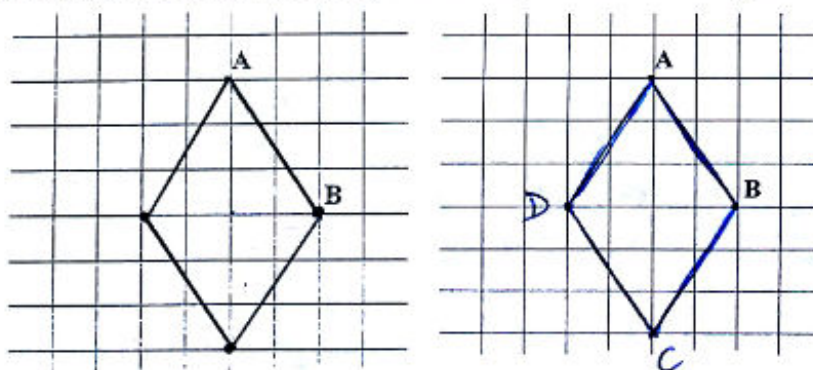
Aqui, chamamos atenção para o fato de que esse participante tenha construído um quadrado em posição não prototípica, isso não demonstra que ele estabelece relações de implicação entre as propriedades dos quadriláteros notáveis, pois como visto no item anterior, os quadrados não foram reconhecidos como losangos especiais.

No caso do segundo participante, percebemos que ele fez dois quadrados em posição prototípica, mas diferentes no que se referem os seus perímetros. Isso pode ser observado nas figuras construídas. Nesse sentido, ele conseguiu realizar a conversão entre a língua natural e a figura geométrica, conforme Duval (1995).

Nos dois últimos itens, relacionados à produção de losangos, os dois partícipes indicaram utilizar, mais uma vez, as características desses quadriláteros,

entre elas, as diagonais, que são perpendiculares entre si. Essa situação encontra-se ilustrada nas Figuras 68 e 69, que seguem.

Figura 68 – Extrato da questão 04 – Participantes 06 e 07
Q04) Utilizando os vértices **A** e **B** já marcados, desenhe o losango **ABCD**:



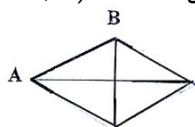
(a) Participante 06

(b) Participante 07

Fonte: Costa (2016), Costa e Câmara dos Santos (2016a)

Nas justificativas apresentadas no quinto item do teste, verificamos que o primeiro aluno citou a necessidade da régua para medir tanto o comprimento dos lados do losango, como também o comprimento das duas diagonais.

Figura 69 – Extrato da questão 05 – Participantes 06 e 07
Q05) O losango **ABCD** tem um pedaço apagado. Você pode reconstruí-lo?

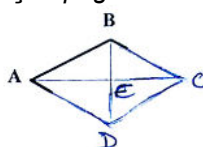


☒ Sim

Explique como:

Se não conseguir
saber a medida com
a régua é só traçar
nos outros lados,

a) Participante 06



☒ Sim

Explique como:

DEVIDO A POSIÇÃO
DAS DIAGONAIS, PODE
DETERMINAR OS OUTROS
VERTICES, TENDO EM
VISTA QUE ÂNGULOS
DE VERTICES OPPOSTOS
SÃO CONGRUENTES
E QUE LADOS OPPOSTOS
ENTRE SI TAMBÉM
SÃO CONGRUENTES

(b) Participante 07

Fonte: Costa (2016), Costa e Câmara dos Santos (2016a)

Ainda na quinta questão, o segundo participante fez referência bem explícita às propriedades desse tipo de quadrilátero notável, sobretudo, em relação às diagonais que são perpendiculares, além da relação de congruência entre os ângulos internos opostos e entre os lados paralelos opostos.

Com base na teoria de Duval (1995), analisando de modo global os cinco itens do teste, esses participantes mobilizaram a apreensão sequencial, pois produziram quadriláteros notáveis. Também, fizeram uso mais adequado da apreensão discursiva, ao mencionarem as propriedades desses quadriláteros, por exemplo, nas justificativas de suas produções.

Contudo, ainda percebemos uma influência da apreensão perceptiva com olhar botanista, pois, por exemplo, o primeiro participante considerou os paralelogramos oblíquos na família dos losangos, por apresentarem lados “tortos” (aparentemente). Isso também é uma evidência da força exercida por um ensino de Geometria que enfatiza o reconhecimento de figuras “padronizadas”.

Com relação ao modelo de Van-Hiele, esses participantes atuaram no segundo nível de pensamento geométrico, marcado pelo reconhecimento das figuras geométricas como detentoras de propriedades, mas sem o estabelecimento de relações de implicação entre elas.

Nesse segundo nível de desenvolvimento do pensamento geométrico proposto em nossa tese, nível $n + 1$, foi possível a identificação de dois subníveis: $(n + 1)_a$ e $(n + 1)_b$.

Os alunos que atuam no subnível $(n + 1)_a$ percebem os quadriláteros notáveis a partir dos seus elementos constituintes, isto é, pela definição desses objetos geométricos. Nessa situação, ainda não fazem referência às propriedades dessas figuras geométricas.

Os que trabalham no subnível $(n + 1)_b$ conseguem identificar os quadriláteros notáveis como detentores de propriedades, todavia, não conseguem realizar inclusão de classe, ou seja, ainda não estabelecem relações de implicações entre essas propriedades.

6.1.3 Nível $n + 2$

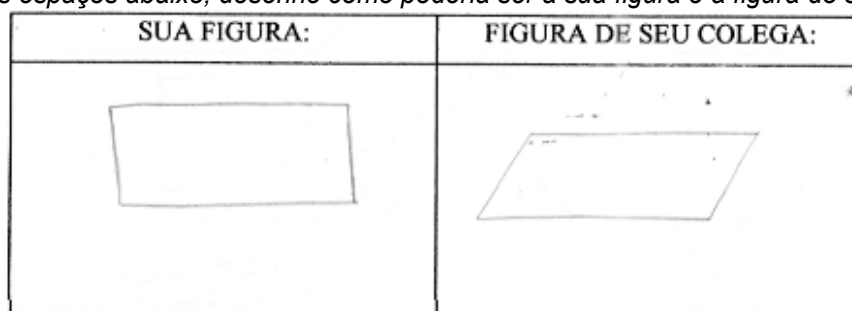
Nesse nível de pensamento geométrico as estratégias mobilizadas pelos estudantes centram-se em estabelecer relações de implicação entre propriedades dos quadriláteros notáveis, mas sem a utilização de argumentos dedutivos em suas justificativas e explicações. Nessa direção, na identificação de um quadrilátero, o

aluno poderá articular as propriedades dessa figura geométrica, geralmente, com sentido.

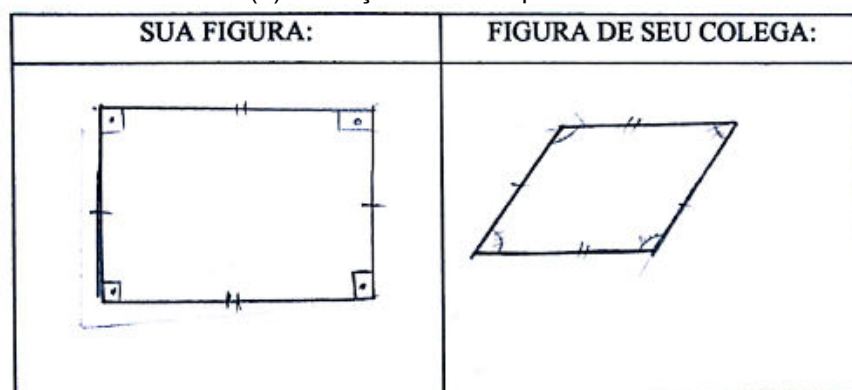
Diante disso, um discente que trabalha nesse nível mobiliza a abstração geométrica descritiva, uma vez que ele faz menção às definições dos quadriláteros notáveis com significado, por essa razão, é capaz de desenvolver inclusão de classe, em alguns casos. Por exemplo, ao analisar um quadrado, o aluno poderá identificar essa figura como todo paralelogramo que é retângulo e losango simultaneamente.

Outra possibilidade é o estudante reconhecer o quadrado apenas como um tipo especial de losango, ou então, somente como um tipo específico de retângulo. Podemos perceber essas estratégias nas respostas a seguir às questões do teste desenvolvidas por dois participantes (estudantes de licenciatura em Matemática, com idades de 18 e 19 anos, respectivamente) das pesquisas de Costa e Rosa dos Santos (2016; 2017a; 2017b).

Figura 70 – Extrato da questão 01 (primeiro momento) – Participantes 08 e 09
Q01) *Você desenhou um retângulo. Seu colega desenhou uma figura de quatro lados que não é um retângulo. Nos espaços abaixo, desenhe como poderia ser a sua figura e a figura do seu colega.*



(a) Produção do Participante 08



(b) Produção do Participante 09

Fonte: Costa e Rosa dos Santos (2016; 2017a; 2017b).

Nessa primeira questão do teste (Figura 70), notamos que os partícipes conseguiram reconhecer quadriláteros notáveis e reproduzi-los por meio da nomenclatura.

Nesse cenário, apreciando os registros deixados no item “SUA FIGURA”, a partir de Duval (1995), constatamos que os dois estudantes fizeram conversão de ida, uma vez que transformaram a língua natural, representada pela palavra “retângulo”, em figura geométrica, relacionada ao desenho produzido.

Nesse momento, destacamos a produção do segundo participante, que pelas marcações deixadas, evidenciamos que algumas propriedades do retângulo foram consideradas na construção, tais como a congruência entre os ângulos internos e lados opostos paralelos congruentes.

Posteriormente, analisando os registros apresentados no item “FIGURA DO SEU COLEGA”, verificamos que o conceito geométrico foi aplicado corretamente por ambos integrantes, pois construíram paralelogramos oblíquos (com ângulos não retos), logo, não são retângulos. Nessa direção, segundo Duval (1995), eles realizaram a conversão (de ida) entre os registros de representação semiótica (língua natural e figura geométrica).

Mais uma vez, chamamos a atenção para a produção do segundo aluno, que pelas marcações deixadas na folha de papel, observamos que ele mobilizou algumas propriedades do paralelogramo: lados opostos paralelos entre si e com comprimentos congruentes e ângulos internos opostos com mesma medida de abertura.

Situação semelhante pode ser verificada ao analisarmos os registros escritos desses partícipes, relacionados ao segundo momento da questão, nos quais há referência às propriedades dos quadriláteros notáveis construídos, conforme ilustrado pela Figura 71.

Como podemos evidenciar pelos registros da Figura 71, o primeiro partícipe disse que sua figura é um retângulo porque é composto por quatro lados que formam ângulos retos e lados opostos paralelos congruentes. Justificativa similar pode ser verificada com a escrita do segundo participante: “possui todos os ângulos retos e os lados paralelos iguais”.

Desse modo, fica claro que eles fizeram utilização de algumas propriedades

do retângulo na resolução. Para tanto, com base na teoria de Duval (1995), fizeram conversão (de volta) entre a figura geométrica e a língua natural.

Figura 71 – Extrato da questão 01 (segundo momento) – Participantes 08 e 09
Justifique por quê:

Sua figura é um retângulo:	A de seu colega não é um retângulo:
Porque um retângulo é composto por quatro lados que formam ângulos de 90° e com medidas de lados opostos iguais, porém os adjacentes diferentes.	Porque apesar dos lados paralelos possuírem a mesma medida, os lados adjacentes não formam 90° .



Por que um retângulo é composto por quatro lados que formam ângulos de 90° e com medidas de lados opostos iguais, porém os adjacentes diferentes.



Por que apesar dos lados paralelos possuírem a mesma medida, os lados adjacentes não formam 90° .

(a) Produção do Participante 08

Justifique por quê:

Sua figura é um retângulo:	A de seu colega não é um retângulo:
Porque possui todos os ângulos retos, e os lados paralelos iguais.	Porque os ângulos não são retos.

(b) Produção do Participante 09

Fonte: Costa e Rosa dos Santos (2016; 2017a; 2017b).

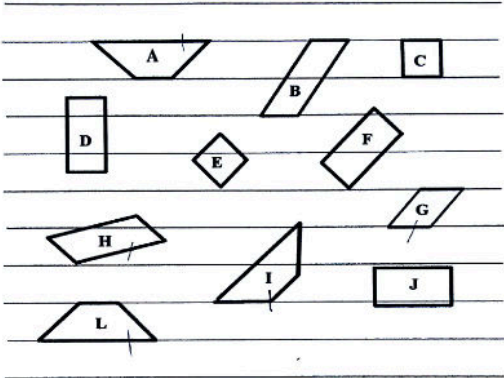
Isso também pode ser notado nos registros escritos dispostos em “A figura de seu colega não é um retângulo”. O primeiro estudante explicou que o paralelogramo oblíquo não é retângulo, pois apesar dos lados opostos paralelos possuírem a mesma medida de comprimento, os ângulos internos não são retos. Cenário similar é percebido com a justificativa do segundo discente: “porque os ângulos não são retos”.

Aqui, eles mobilizaram as propriedades do mencionado quadrilátero notável e, de novo, realizaram conversão de volta entre os registros de representação semiótica.

Ao apreciarmos a resposta desses discentes na segunda questão do teste, relacionada à classificação de quadriláteros, observamos que algumas propriedades dessas figuras geométricas também foram consideradas na solução do item, como exibido a seguir na Figura 72.

Figura 72 – Extrato da questão 02 – Participantes 08 e 09

Q02) Em uma folha de caderno estão desenhadas várias figuras de quatro lados:



Tente separar por famílias, as figuras da folha de caderno:

	FIGURAS
Retângulos:	D, F, J, C, E
Trapézios:	A, I, L
Quadriláteros:	TODOS
Quadrados:	C, E
Paralelogramos:	G, H, B
Losangos:	

(a) Participante 08

Tente separar por famílias, as figuras da folha de caderno:

	FIGURAS
Retângulos:	D, F, J
Trapézios:	A, I, L
Quadriláteros:	A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, L
Quadrados:	E e C
Paralelogramos:	B, H e G
Losangos:	E e C

(b) Participante 09

Fonte: Costa e Rosa dos Santos (2016; 2017a; 2017b).

Pelas figuras acima, constatamos que os retângulos padrões (figuras D, F e J) foram reconhecidos pelos dois estudantes. Ainda, o primeiro aluno classificou os quadrados (figuras C e E) como retângulos, demonstrando que estabelece relações entre as propriedades desses dois quadriláteros notáveis, além de realizar conversão entre a figura geométrica e a língua natural.

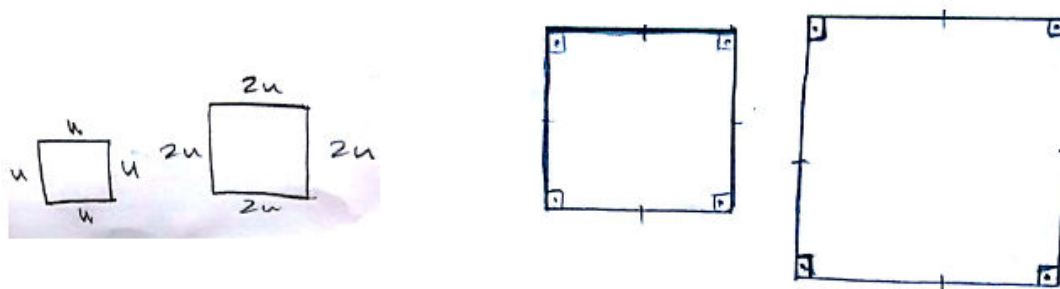
Os trapézios (figuras A, I e L) foram identificados por ambos partícipes, logo, segundo Duval (1995), realizaram conversão entre os registros de representação semiótica. Situação análoga pode ser notada com os paralelogramos oblíquos (figuras B, G e H) e com os quadrados (figuras C e E) que também foram reconhecidos pelos dois discentes.

Além disso, todas as figuras foram consideradas quadriláteros pelos dois alunos. O segundo participante classificou os quadrados (figuras C e E) como losangos, logo, é capaz de relacionar as propriedades desses dois tipos de quadriláteros, realizando, então, conversão entre a figura geométrica e a língua natural, segundo Duval (1995).

Aqui, chamamos atenção para o fato de que o primeiro participante não classificou os quadrados como losangos e o segundo participante que não considerou os quadrados como retângulos. Esse fenômeno ocorre, pois eles ocupam um subnível mais elementar do nível $n+2$, no qual os estudantes realizam inclusão de classe de modo parcial, ou seja, estabelecem relações de implicação entre as propriedades de alguns tipos de quadriláteros notáveis.

Na terceira questão do teste (ilustrado na Figura 73), que solicitou a produção de dois quadrados diferentes, ambos estudantes construíram quadrados em posição prototípica, mas com diferença nos comprimentos dos lados e nas áreas, conforme ilustrado a seguir pelos protocolos.

Figura 73 – Extrato da questão 03 – Participantes 08 e 09
Q03) Construir no espaço abaixo, dois quadrados diferentes:



(a) Participante 08

(b) Participante 09

Fonte: Costa e Rosa dos Santos (2016; 2017a; 2017b).

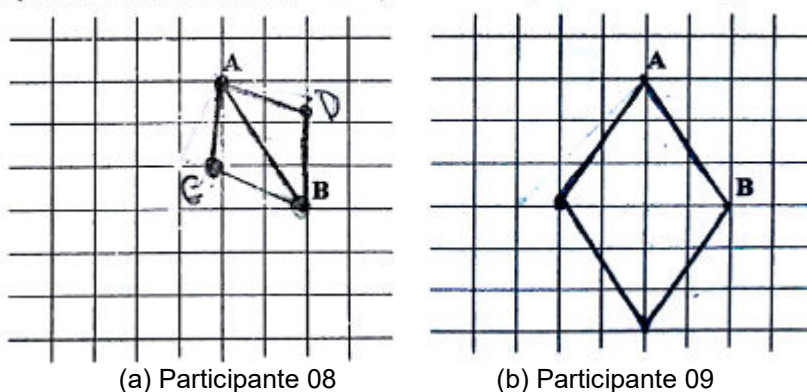
Pelas marcações deixadas na folha de papel, o primeiro participante deixou evidente que distinguiu as duas figuras a partir de uma grandeza geométrica associada à figura, no caso, o comprimento dos lados (quadrado 01 com comprimento n e quadrado 02 com comprimento $2n$).

Ao mesmo tempo em que o segundo diferenciou por meio da grandeza área, mas deixando explícito que utilizou algumas propriedades do quadrado na resolução do item: congruência entre os ângulos internos e entre os comprimentos dos lados opostos paralelos. Com base nessas produções, tendo por sustentação a teoria de

Duval (1995), verificamos que os dois partícipes realizaram conversão entre a língua natural e a figura geométrica.

Nos dois últimos itens, referentes à construção de losangos, os dois participantes sinalizaram utilizar, mais uma vez, as propriedades desses quadriláteros, especialmente, o perpendicularismo existente entre suas diagonais, realizando conversão entre a língua natural e a figura geométrica, como apresentado na Figura 74.

Figura 74 – Extrato da questão 04 – Participantes 08 e 09
Q04) Utilizando os vértices **A** e **B** já marcados, desenhe o losango **ABCD**:



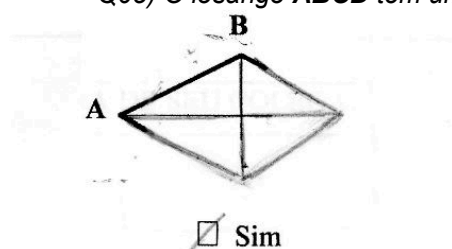
(a) Participante 08 (b) Participante 09
Fonte: Costa e Rosa dos Santos (2016; 2017a; 2017b).

Na quarta questão, destacamos a produção do primeiro aluno, que mobilizou uma estratégia adequada e mais sofisticada, na qual foi utilizado o segmento de reta **AB** como uma das diagonais do losango na construção (em vez de considerá-lo como um dos lados).

Pesquisadores como Câmara dos Santos (1992; 2001; 2009) e Costa (2016) verificaram que estudantes do ensino básico, nem sempre, conseguem utilizar esse percurso, isto é, criar um quadrilátero notável a partir de uma das diagonais. Todavia, é importante destacar que o supracitado partícipe não percebeu que fez o losango **ACBD**, diferente do solicitado no enunciado da questão (losango **ABCD**).

Nos registros escritos deixados na quinta questão (Figura 75), observamos que as propriedades dos losangos foram consideradas na produção pelos dois estudantes. Contudo, o segundo deixou isso mais explícito em sua escrita, sobretudo, com relação às diagonais, que são perpendiculares entre si. Dessa forma, conforme Duval (1995), eles realizaram conversão de volta entre a figura geométrica e a língua natural.

Figura 75 – Extrato da questão 05 – Participantes 08 e 09
Q05) O losango **ABCD** tem um pedaço apagado. Você pode reconstruí-lo?



Explique como:

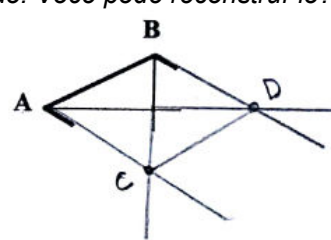
Prolongando os segmentos das diagonais



Prolongando os segmentos das diagonais.

a) Participante 08

Fonte: Costa e Rosa dos Santos (2016; 2017a; 2017b).



☒ Sim

Explique como:

Estendendo as semiretas que partem de A e B (semiretas A e B paralelas entre si), estendendo as semiretas que partem de A e B (perpendiculares entre si), marcando os pontos de interseção e ligando esses pontos.

(b) Participante 09

Realizando um balanço geral das cinco questões do teste, tendo por base a teoria de Duval (1995), evidenciamos que os dois estudantes atuaram na apreensão sequencial, pois construíram figuras geométricas. Mesmo que parcialmente, eles estabeleceram relações de implicação entre as propriedades de alguns tipos de quadriláteros notáveis. Para isso, mobilizaram a apreensão discursiva com olhar construtor.

Sob o alicerce da teoria de Van-Hiele (1997), os dois partícipes não apresentam características suficientes para serem inseridos no terceiro nível vanhieliano, pois eles ainda não consideram o quadrado como losango e retângulo ao mesmo tempo.

Agora, tendo por base os graus de aquisição dos níveis vanhielianos propostos por Gutierrez, Jaime e Fortuny (1991), esses licenciandos apresentam *aquisição completa* para o segundo nível, pois apresentam aquisição total desse nível; e *aquisição intermediária* para o terceiro nível, pois, em alguns casos, realizam articulação entre as propriedades dos quadriláteros.

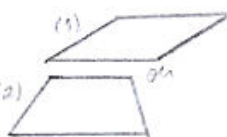
Como já mencionado nessa tese, discordamos do grupo espanhol, pois, em nosso entendimento, trata-se da existência de um subnível mais elementar do nível $n + 2$.

Outra possibilidade é o estudante que atua nesse nível de desenvolvimento do pensamento geométrico proposto em nossa tese, poder compreender os quadriláteros notáveis estabelecendo relações entre suas propriedades, de forma a realizar inclusão de classe entre todos esses tipos de quadriláteros.

Dessa forma, um quadrado é analisado como retângulo e losango simultaneamente, como podemos notar nas respostas às questões do teste, ilustradas pela Figura 76, apresentadas por um integrante (aluno de licenciatura em Matemática, com 20 anos) do estudo de Costa e Rosa dos Santos (2016; 2017a; 2017b).

Nesse primeiro item do teste, observamos que o estudante conseguiu identificar quadriláteros notáveis e construí-los a partir da nomenclatura. Nessa lógica, analisando os registros deixados em “SUA FIGURA”, evidenciamos que esse participante realizou conversão de ida entre a língua natural e a figura geométrica, conforme Duval (1995).

Figura 76 – Extrato da questão 01 (primeiro momento) – Participante 10
Q01) *Você desenhou um retângulo. Seu colega desenhou uma figura de quatro lados que não é um retângulo. Nos espaços abaixo, desenhe como poderia ser a sua figura e a figura do seu colega.*

SUA FIGURA:	FIGURA DE SEU COLEGA:
	

Fonte: Costa e Rosa dos Santos (2016; 2017a; 2017b).

Além do retângulo padrão, ele produziu um quadrado e ao considerá-lo como um retângulo especial, demonstra que estabeleceu relações de implicação entre as propriedades desses dois quadriláteros (o quadrado e o retângulo).

Em seguida, apreciando os registros disponibilizados em “FIGURA DO SEU COLEGA”, constatamos que o conceito geométrico foi usado de maneira adequada pelo partícipe, porque ele construiu um paralelogramo oblíquo (cujos ângulos não são retos) e um trapézio escaleno (cujos lados opostos não-paralelos não são congruentes).

Com essas produções, esse aluno sinaliza ter considerado as propriedades dessas figuras na construção, e ao estabelecer relações entre elas, percebeu que esse tipo de trapézio e esse modelo de paralelogramo não são retângulos, realizando, assim, segundo Duval (1995), conversão de ida entre a língua natural e a figura geométrica.

Quadro equivalente pode ser percebido nos registros escritos desse discente, relativo ao segundo momento da questão, em que se verifica o estabelecimento de relações entre as propriedades dos quadriláteros notáveis, como apresentado pela Figura 77.

Figura 77 – Extrato da questão 01 (segundo momento) – Participante 10
Justifique por quê:

Sua figura é um retângulo:	A de seu colega não é um retângulo:
São retângulos porque todos seus ângulos possuem 90° e os lados opostos são paralelos.	(1) não é retângulo, pois apesar de possuir lados opostos paralelos os seus ângulos são diferentes de 90° . (2) não é retângulo, pois apenas dois lados opostos são paralelos e todos seus ângulos são diferentes de 90° .



São retângulos porque todos os seus ângulos possuem 90° e os lados opostos são paralelos.



**(1) não é retângulo, pois apesar de possuir lados opostos paralelos, os seus ângulos são diferentes de 90° .
(2) não é retângulo, pois apenas dois lados opostos são paralelos e todos os seus ângulos são diferentes de 90° .**

Como podemos evidenciar pela Figura 77, o participante justificou que o quadrado e retângulo padrão são retângulos, pois apresentam ângulos internos congruentes e lados opostos paralelos entre si.

Aqui, verificamos que ele articulou de forma correta as propriedades do retângulo e do quadrado, a ponto de concluir que todo quadrado é retângulo também. Dessa forma, para Duval (1995), realizou a conversão de volta entre a figura geométrica e a língua natural.

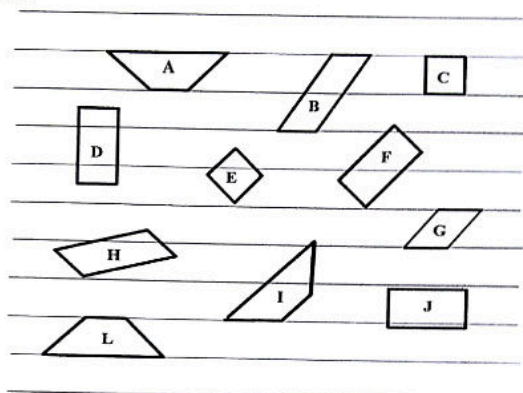
Depois, ele disse que o paralelogramo oblíquo não é retângulo, pois mesmo apresentando lados opostos paralelos (característica de todos os paralelogramos), não possuem ângulos internos retos. Do mesmo modo, o trapézio não é um retângulo, pois não possui lados opostos paralelos e ângulos internos congruentes.

Essas evidências mostram, mais uma vez, que ao articular as características desses quadriláteros, o participante concluiu que eles não são retângulos, desenvolvendo, nessa direção, conversão de volta entre os registros de representação semiótica, como sinaliza Duval (1995).

Ao explorarmos a resposta desse participante no segundo item do teste, concernente à classificação de quadriláteros, atentamos que ele desenvolveu inclusão de classe entre essas figuras geométricas, isto é, articulou adequadamente as suas propriedades, como podemos observar na Figura 78.

Figura 78 – Extrato da questão 02 – Participante 10

Q02) Em uma folha de caderno estão desenhadas várias figuras de quatro lados:



Tente separar por famílias, as figuras da folha de caderno:

	FIGURAS
Retângulos:	C, D, E, F, J
Trapézios:	A, I, L
Quadriláteros:	A, B, C, D, E, F, G, H, J, L
Quadrados:	C, E
Paralelogramos:	B, C, D, E, F, G, H, J
Losangos:	C, E

Fonte: Costa e Rosa dos Santos (2016; 2017a; 2017b).

Pelos protocolos ilustrados na Figura 78, notamos que tantos os retângulos padrões (figuras D, F e J) e os quadrados (figuras C e E) foram considerados como

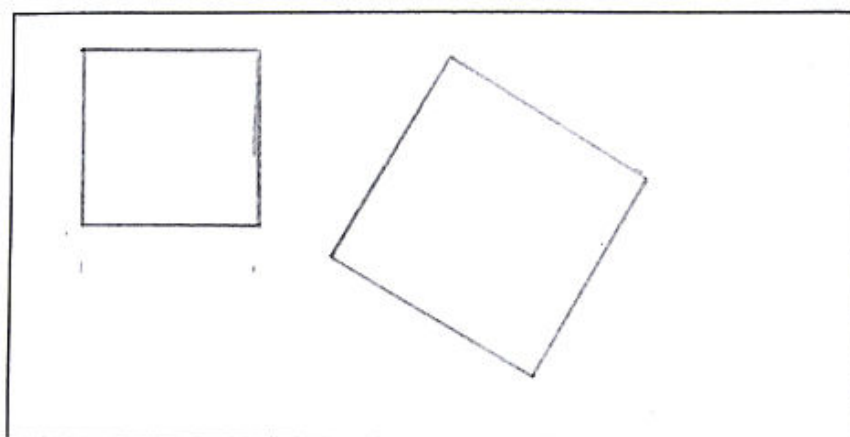
retângulos pelo participante. Mais uma vez, ele indicou ter relacionado as propriedades desses quadriláteros, de modo a perceber que todo quadrado é retângulo. Dessa maneira, ele fez conversão entre a figura geométrica e a língua natural.

Além disso, todas as figuras foram reconhecidas como quadriláteros. Os trapézios (figuras A, I e L) foram identificados adequadamente, assim como os quadrados (figuras C e E). Ainda, os quadrados (figuras C e E) foram classificados como losangos, e todos os paralelogramos foram apontados, desde os paralelogramos oblíquos, isto é, com ângulos não retos (figuras B, G e H), os quadrados (figuras C e E) e os retângulos (figuras D, F e J).

Aqui, outra vez, o estudante mostra que articulou as propriedades desses quadriláteros notáveis, chegando às seguintes conclusões: o losango é todo paralelogramo com comprimentos dos lados congruentes; o retângulo é todo paralelogramo com ângulos internos retos e o quadrado é todo paralelogramo que é losango e retângulo ao mesmo tempo.

Na terceira questão do teste (Figura 79), que pediu a construção de dois quadrados diferentes, o participante diferenciou as duas figuras pela sua posição na folha de papel, indicando, assim, uma importante autonomia em relação às figuras prototípicas (CÂMARA DOS SANTOS, 1992; 2001; 2009; COSTA, 2016). Também, segundo Duval (1995), o discente realizou a conversão entre os registros de representação semiótica.

Figura 79 – Extrato da questão 03 – Participante 10
Q03) Construir no espaço abaixo, dois quadrados diferentes:

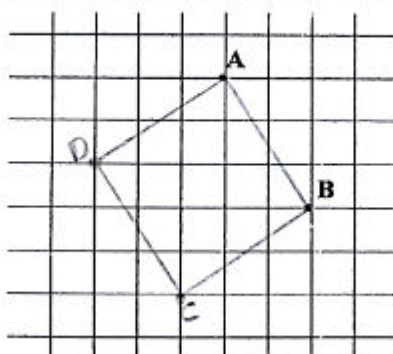


Fonte: Costa e Rosa dos Santos (2016; 2017a; 2017b).

O fato de o aluno ter produzido um quadrado em posição não prototípica, significa também que ele é capaz de relacionar as propriedades dos quadriláteros notáveis, pois, como evidenciado na segunda questão do teste, os quadrados foram considerados paralelogramos que são losangos e retângulos simultaneamente.

Na quarta questão do teste, relacionada à produção de losango, o aluno sinalizou, novamente, que é capaz de estabelecer relações de implicação entre as propriedades dos quadriláteros notáveis, pois construiu um losango com ângulos retos, que também é um quadrado. Logo, realizou conversão entre a língua natural e a figura geométrica, para Duval (1995), como ilustrado pela Figura 80.

Figura 80 – Extrato da questão 04 – Participante 10
Q04) Utilizando os vértices **A** e **B** já marcados, desenhe o losango **ABCD**:



Fonte: Costa e Rosa dos Santos (2016; 2017a; 2017b).

Na quinta questão do teste (Figura 81), também relativa à produção de losango, mais uma vez, tanto no registro geométrico como no registro escrito, observamos que as propriedades desse quadrilátero notável foram consideradas pelo partícipe, entre elas: as diagonais são perpendiculares entre si, lados opostos paralelos com comprimentos congruentes e ângulos internos opostos iguais.

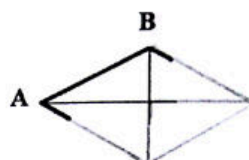
Nesse item, tendo por base Duval (1995), notamos que esse estudante realizou conversão de ida e de volta entre os registros de representação semiótica, ao construir o losango a partir do enunciado da questão e, em seguida, pela justificativa apresentada, na qual demonstra a articulação entre as propriedades desse quadrilátero.

Apreciando as cinco questões do teste, globalmente, tendo por sustentação a teoria de Duval (1995), verificamos que o aluno mobilizou a apreensão sequencial

(tendo em vista ter produzido quadriláteros notáveis) e a apreensão discursiva (ao estabelecer relações de implicação entre as propriedades desses quadriláteros).

Figura 81 – Extrato da questão 05 – Participante 10

Q05) O losango **ABCD** teve um pedaço apagado. Você pode reconstruí-lo?



☒ Sim

Explique como:

*Prologando as diagonais
que se cruzam exatamente
na metade dos segmentos
ou medindo os ângulos
e utilizando a medida
do lado que não foi
apagado, já que os
ângulos opostos são
iguais e já que a
medida de todos os
lados é igual.*



Prologando as diagonais
que se cruzam exatamente
na metade dos segmentos,
ou medindo os ângulos e
utilizando a medida do lado
que não foi apagado, já que
os ângulos opostos são
iguais e já que a medida de
todos os lados é igual.

Fonte: Costa e Rosa dos Santos (2016; 2017a; 2017b).

Considerando o modelo de Van-Hiele (1957), ele estaria situado no terceiro nível de pensamento geométrico, marcado pela realização de inclusão de classe, isto é, articulação entre as propriedades das figuras geométricas.

Nesse terceiro nível de desenvolvimento do pensamento geométrico proposto nessa tese, nível $n + 2$, foi possível a identificação de dois subníveis: $(n + 2)_a$ e $(n + 2)_b$.

Os estudantes que trabalham no subnível $(n + 2)_a$ articulam as propriedades de alguns quadriláteros notáveis, realizando uma inclusão de classe parcial. Dessa forma, um quadrado é considerado apenas como um tipo especial de losango, ou então, é classificado como somente um tipo específico de retângulo.

Os discentes que atuam no subnível $(n + 2)_b$ estabelecem relações de implicação entre as propriedades de todos os quadriláteros notáveis, desenvolvendo, então, uma inclusão de classe completa. Para tanto, um quadrado é

reconhecido por eles como todo paralelogramo que é losango e retângulo ao mesmo tempo.

6. 2 Níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico dos participantes

Nesse tópico, realizamos a identificação do nível e subnível de desenvolvimento do pensamento geométrico dos 464 participantes de diferentes níveis escolares, que foram utilizados nessa tese para construir o modelo *a priori*.

É importante ressaltar mais uma vez que empregamos os protocolos ofertados por Costa (2016), Costa e Câmara dos Santos (2015a; 2015b; 2016a; 2016b; 2016c; 2017a; 2017b), e por Costa e Rosa dos Santos (2016; 2017a; 2017b). Na Tabela 1, obtemos um resumo dessa identificação.

Pela Tabela 01, podemos verificar que 238 dos 464 participantes do estudo, isto é, 51,3% do total (que corresponde a mais da metade deles) atuavam no primeiro nível, isto é, no nível n , ao responder questões sobre produção e classificação de quadriláteros notáveis.

Tabela 01 – Nível de pensamento geométrico dos participantes

NÍVEIS	FREQUÊNCIA ABSOLUTA	FREQUÊNCIA RELATIVA	SUBNÍVEIS	FREQUÊNCIA ABSOLUTA	FREQUÊNCIA RELATIVA
n	238	51,3%	$(n)_a$	39	8,4%
			$(n)_b$	199	42,9%
$n + 1$	177	38,1%	$(n + 1)_a$	149	32,1%
			$(n + 1)_b$	28	6%
$n + 2$	49	10,6%	$(n + 2)_a$	34	7,4%
			$(n + 2)_b$	15	3,2%
Total	464	100%	Total	464	100%

Fonte: elaborado pelo autor

Isso significa que eles, no período da pesquisa, reconheceram esses quadriláteros por meio do seu aspecto global, desprezando os elementos constituintes e as propriedades, ou perceberam essas figuras geométricas a partir de um subconjunto das características visuais, tendo em vista que ainda não conseguiam construir imagens visuais.

Esse é um dado bastante preocupante, pois conforme os atuais documentos de orientação curricular, entre eles, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1997), os Parâmetros Curriculares para a Educação Básica de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012), e a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017), o ensino dos quadriláteros notáveis deve ser introduzido já nos anos iniciais do ensino fundamental, sendo sua sistematização efetivada no 6º ano desse nível escolar.

Constatamos, ainda, que um pouco mais de 38% dos participantes atuavam no nível $n + 1$, ou seja, conseguiam produzir e classificar os quadriláteros notáveis mobilizando os elementos constituintes e/ou as propriedades desses objetos geométricos.

Todavia, ainda não conseguiam relacionar essas propriedades, de modo, a perceberem, por exemplo, que um quadrado é losango e retângulo ao mesmo tempo. Acreditamos que, em geral, tal fato ocorreu devido um ensino de Geometria com foco no reconhecimento de figuras prototípicas.

Aproximadamente 11% dos partícipes localizavam-se no nível $n + 2$, logo, eram capazes de estabelecer relações de implicação entre as propriedades dos quadriláteros notáveis, realizando, desse modo, inclusão de classe (parcial ou completa) em situações de produção e de classificação.

Julgamos esse índice bastante baixo, o que indica que nas aulas de Geometria o estudo desse conceito é realizado de forma fragmentada (quando trabalhado) a partir da articulação entre as suas características.

Em seguida, ao apreciarmos a frequência de participantes por subníveis, notamos que a maioria dos que atuavam no nível n (42,9% dos 51,3%) se encontrava no subnível $(n)_b$. Tal fato sinaliza que esses partícipes, ao resolverem questões de produção e de classificação sobre os quadriláteros notáveis, não consideravam os atributos geométricos dessas figuras, fazendo uso apenas da aparência física.

Com relação aos subníveis dos níveis $n + 1$ e $n + 2$, percebemos que a maior parte dos participantes trabalhava nos subníveis mais elementares $[(n + 1)_a$ e $(n + 2)_a]$, respectivamente. Isso significa que esses partícipes reconhecem os

quadriláteros notáveis a partir dos elementos constituintes e pelo estabelecimento de relação entre as propriedades de alguns desses quadriláteros.

Ainda, com base na Frequência Absoluta (F_A) e na Frequência Relativa (F_R), apresentamos a identificação do nível e subnível de desenvolvimento do pensamento geométrico dos participantes a partir do nível de escolaridade, conforme a Tabela 02.

Tabela 02 – Nível de pensamento geométrico dos participantes por nível de escolaridade

	ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL		ALUNOS DO ENSINO MÉDIO		ESTUDANTES DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA		PROFESSORES DE MATEMÁTICA EM EXERCÍCIO	
NÍVEIS	F_A	F_R	F_A	F_R	F_A	F_R	F_A	F_R
n	67	38,3%	163	70,6%	08	23,5%	00	0,0%
$n + 1$	80	45,7%	62	26,8%	17	50%	18	75%
$n + 2$	28	16%	06	2,6%	09	26,5%	06	25%
Total	175	100%	231	100%	34	100%	24	100%
SUBNÍVEIS	F_A	F_R	F_A	F_R	F_A	F_R	F_A	F_R
$(n)_a$	06	3,4%	33	14,3%	00	0,0%	00	0,0%
$(n)_b$	61	34,9%	130	56,3%	08	23,5%	00	0,0%
$(n + 1)_a$	69	39,4%	56	24,2%	13	38,2%	11	45,8%
$(n + 1)_b$	11	6,3%	06	2,6%	04	11,8%	07	29,2%
$(n + 2)_a$	23	13,1%	03	1,3%	04	11,8%	04	16,7%
$(n + 2)_b$	05	2,9%	03	1,3%	05	14,7%	02	8,3%
Total	175	100%	231	100%	34	100%	24	100%

Fonte: elaborado pelo autor

Pela Tabela 02, observamos que a maior parte dos alunos dos anos finais do ensino fundamental se localiza no nível $n + 1$ (segundo nível), enquanto que a maioria dos estudantes do ensino médio atua no nível n (primeiro nível).

Essa “divergência” não foi verificada com os demais participantes, isto é, a superioridade dos estudantes de licenciatura em Matemática e dos professores de Matemática (em exercício) trabalha no segundo nível (nível $n + 1$).

Com relação aos subníveis, a maioria dos alunos do ensino fundamental que trabalhava no nível $n + 1$, se situava no subnível $(n + 1)_a$. No caso dos discentes do ensino médio, a maior parte atuava no subnível $(n)_b$ referente ao nível n .

No que se refere aos licenciandos e aos professores de Matemática, a maioria dos componentes desses dois grupos se encontrava no subnível $(n + 1)_a$ do nível $n + 1$ (semelhante ao que ocorreu com os estudantes do ensino fundamental).

Diante desses resultados não é possível afirmar, por exemplo, que os alunos do ensino fundamental têm mais aulas de Geometria do que os do ensino médio, já

que eles apresentaram um desempenho melhor em termos de frequência relativa. Vários fatores podem contribuir para esse cenário.

Essa hipótese necessitaria de outro estudo, em uma perspectiva antropológica, como a análise das organizações matemáticas e didáticas do ensino de Geometria vivenciado nessas escolas. Todavia, como esse não é o foco de nossa tese, isto é, fazer um estudo nessa direção, não dedicaremos atenção ao assunto. Talvez, no futuro próximo, façamos algo nesse sentido.

Visando uma análise mais refinada, organizamos outra tabela (Tabela 03), na qual é possível verificarmos a Frequência Absoluta (F_A) e a Frequência Relativa (F_R) dos estudantes, ao longo dos anos finais do ensino fundamental, em relação aos níveis e subníveis de desenvolvimento do pensamento geométrico.

Tabela 03 – Nível de pensamento geométrico dos alunos do ensino fundamental

	6º ano		7º ano		8º ano		9º ano	
NÍVEIS	F_A	F_R	F_A	F_R	F_A	F_R	F_A	F_R
n	50	80,7%	29	50,9%	09	31,1%	04	15,4%
$n + 1$	09	14,5%	18	31,6%	05	17,2%	06	23,1%
$n + 2$	03	4,8%	10	17,5%	15	51,7%	16	61,5%
Total	62	100%	57	100%	29	100%	26	100%
SUBNÍVEIS	F_A	F_R	F_A	F_R	F_A	F_R	F_A	F_R
$(n)_a$	20	32,3%	14	24,6%	06	20,7%	02	7,7%
$(n)_b$	30	48,4%	15	26,3%	03	10,3%	02	7,7%
$(n + 1)_a$	06	9,7%	12	21,0%	03	10,3%	01	3,8%
$(n + 1)_b$	03	4,8%	06	10,5%	02	6,9%	05	19,2%
$(n + 2)_a$	03	4,8%	07	12,3%	07	24,2%	06	23,1%
$(n + 2)_b$	00	0,0%	03	5,3%	08	27,6%	10	38,5%
Total	62	100%	57	100%	29	100%	26	100%

Fonte: elaborado pelo autor

Pela Tabela 03, notamos que a quantidade de alunos atuando no nível n apresenta uma redução significativa, iniciando com 80,7% dos estudantes do 6º ano, caindo para 50,9% no 7º ano, chegando aos 31,1% no 8º ano e atingindo 15,4% no 9º ano.

Com relação aos demais níveis, percebemos importantes avanços. Por exemplo, comparando o 6º ano com o 9º ano, houve uma variação de 8,6 pontos na F_R do nível $n + 1$, passando de 14,5% (6º ano) para 23,1% (9º ano). Esse crescimento também é sentido na F_R do nível $n + 2$: 4,8% (6º ano) e 61,5% (9º ano). Aqui, o aumento foi de 56,7 pontos percentuais.

No caso dos subníveis, verificamos uma evolução significativa nos subníveis $(n + 1)_b$ e $(n + 2)_b$. No primeiro, a elevação foi de 14,4 pontos, enquanto que no segundo, o crescimento foi de 38,8 pontos percentuais.

Esses dados parecem mostrar que o estudo de quadriláteros notáveis vivenciado por esses estudantes dos anos finais do ensino fundamental contribuiu para suas aprendizagens. Logo, o ensino de Geometria explorado nas escolas, onde eles estudavam na época da pesquisa, interfere de modo significativo no desenvolvimento do pensamento geométrico desses alunos.

6.3 Algumas considerações sobre o modelo *a priori*

Com base nos resultados dos estudos de Costa (2016), Costa e Câmara dos Santos (2015a; 2015b); 2016a; 2016b; 2016c; 2017a; 2017b), Costa e Rosa dos Santos (2016; 2017a; 2017b) e do estudo dos registros de representação semiótica dos 464 participantes deste primeiro momento da tese, obtemos a construção de um modelo *a priori* que permite identificar os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico sinalizado por estudantes do ensino básico ao resolverem atividades que abordem os quadriláteros notáveis.

Para tanto, na composição do modelo foram considerados os atributos do pensamento geométrico empregados pelos estudantes ao resolverem questões que explorem essas situações que dão sentido aos quadriláteros notáveis.

Dessa maneira, os alunos que atuam no nível n reconhecem os quadriláteros notáveis por um subconjunto de características visuais, visto que não formam imagens mentais, ou então, a partir da aparência física. Assim, as definições e as propriedades não são utilizadas, pois não são compreendidas com significado.

No nível $n + 1$ encontram-se os estudantes que analisam os quadriláteros notáveis com base em seus elementos constituintes ou por meio de suas propriedades. Todavia, ainda não ocorre o estabelecimento de relações de implicação entre tais propriedades.

Finalmente, no nível $n + 2$ estão os discentes que compreendem os quadriláteros notáveis realizando inclusão de classe parcial, nesse caso, o quadrado é visto apenas como losango ou como quadrado. Outra estratégia mobilizada nesse

nível é articular as propriedades com significado, por meio da inclusão de classe total, logo, o quadrado é analisando como losango e retângulo conjuntamente.

Também, ressaltamos a necessidade da validação desse modelo *a priori*, posto que analisamos somente as construções escritas dos partícipes. Em nossa compreensão, isso é insuficiente para uma proposição consistente de um modelo relativo aos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico. Nesse sentido, no próximo capítulo buscaremos realizar a validação desse modelo.

7 A VERSÃO FINAL DO MODELO: INICIANDO A VALIDAÇÃO

A partir dos registros de representação semiótica deixados nas folhas de papel do teste diagnóstico, referente à etapa teórica, nos foi possível, de início, verificar evidências das características de pensamento geométrico em relação aos quadriláteros notáveis.

Todavia, em nosso entendimento, apenas a produção escrita não é suficiente para sinalizar os atributos do pensamento geométrico que são impulsionados na resolução de atividades, sobre os quadriláteros notáveis, a partir da estratégia aplicada por um aluno do ensino básico.

Por esse motivo, buscamos realizar a validação da versão *a priori* do modelo de níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico referente ao conceito de quadriláteros notáveis.

Nessa direção, optamos, em uma primeira fase, reaplicar o teste diagnóstico produzido por Câmara dos Santos (2001) e reaplicado por Costa (2016), Costa e Câmara dos Santos (2015a; 2015b; 2016a; 2016b; 2016c; 2017a; 2017b), e Costa e Rosa dos Santos (2016; 2017a; 2017b). Contudo, conforme discutido no tópico 5, realizamos acréscimos nas questões 4 e 5, com o objetivo de verificar se os participantes realizam a conversão de volta, segundo Duval (1995).

Nessa etapa, o teste foi aplicado com 297 estudantes dos anos finais do ensino fundamental de uma escola pública de Recife (Pernambuco), sendo 67 estudantes do 6º ano, 76 do 7º ano, 89 do 8º ano e 65 do 9º ano. A escolha por essa etapa educacional se justifica por objetivarmos averiguar se os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico transpassam por todos os anos finais do ensino fundamental, tal como fez Almeida (2016).

Também, em nossa compreensão, o último nível se manifesta com maior frequência pelos discentes que cursam a partir do 8º ano do ensino fundamental, pois com base nas orientações curriculares (BRASIL, 1997; 2017; PERNAMBUCO) é nesse ano escolar que se inicia o estudo de algumas demonstrações das propriedades dos quadriláteros notáveis. Além disso, a sistematização desse saber ocorre no 6º ano.

Por isso, a aplicação do teste foi realizada entre os meses de outubro e novembro de 2017, período esse que corresponde ao quarto bimestre, ou seja, a última unidade escolar do ano letivo. A entrevista foi realizada na semana seguinte à aplicação do teste, conforme ilustrado no Quadro 26.

Quadro 26 – Período da coleta de dados relativa à etapa experimental

TURMAS/ANO DE ESCOLARILIDADE	PERÍODO DE APLICAÇÃO	
	Teste	Entrevista
6ºA e 6ºB	16/10 a 20/10/2017	23/10 a 27/10/2017
7ºA e 7ºB	23/10 a 27/10/2017	30/10 a 01/11/2017
8ºA e 8ºB	30/10 a 01/11/2017	06/11 a 10/11/2017
9ºA e 9ºB	06/11 a 10/11/2017	13/11 a 17/11/2017

Fonte: elaborado pelo autor

A aplicação do teste ocorreu nas aulas de Matemática com a presença do professor e do pesquisador. Em geral, cada estudante levou cerca de 45 minutos para resolver as questões do teste, o que correspondeu a aproximadamente uma aula da escola (50 minutos).

Na aplicação do teste, os alunos foram orientados a utilizarem lápis (grafite) ou caneta, borracha e régua (se tiverem). Além disso, após esse momento, ocorreu a seleção dos participantes para a entrevista de explicitação.

Assim, tendo por base os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico dos partícipes, apontados na versão *a priori* do modelo, escolhemos aleatoriamente dois alunos por nível para entrevista: um aluno do 6º ano, um do 7º ano, dois do 8º ano e dois do 9º ano. Desse modo, no Quadro 27, apresentamos a relação desses estudantes, o ano escolar, a idade e o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico no qual atuavam na época da coleta dos dados.

Quadro 27 – Relação dos estudantes participantes da entrevista

NOME FICTÍCIO	ANO ESCOLAR	IDADE	NÍVEL
Alfredo	7º ano	15 anos	n
Francisco José	6º ano	12 anos	
Amélia Maria	9º ano	15 anos	$n + 1$
Ana Rosa	8º ano	13 anos	
Mariano	9º ano	17 anos	$n + 2$
Teresa	8º ano	14 anos	

Fonte: elaborado pelo autor

Conforme mencionado no tópico 5, as entrevistas foram gravadas em áudio. Além disso, elas foram aplicadas na biblioteca da unidade educacional, de forma individual.

Antes de iniciar essa atividade, os alunos foram solicitados a entregar o termo de consentimento livre e esclarecimento, em seguida, o pesquisador explicou o procedimento metodológico utilizado na conversação. Todas as falas passaram pelo processo de transcrição e estão disponíveis sem cortes nos apêndices dessa tese.

É importante destacar que a escolha dos estudantes participantes da entrevista de explicitação ocorreu de forma aleatória. Além disso, a identificação dos níveis e dos subníveis foi realizada anterior à entrevista.

7.1 A validação do modelo

Depois da análise dos registros de representação semiótica dos 297 estudantes partícipes desse momento do estudo, notamos, da mesma maneira que os achados das investigações de Costa (2016), Costa e Câmara dos Santos (2015a; 2015b; 2016a; 2016b; 2016c; 2017a; 2017b) e Costa e Rosa dos Santos (2016; 2017a; 2017b), que há uma tendência entre os discentes por assumir uma única estratégia ao resolver as questões do teste.

Além do mais, em nossa compreensão, do mesmo modo como foi sinalizada no tópico 6, referente à versão *a priori* do modelo, a relação entre a estratégia mobilizada pelo aluno e a abstração geométrica, na qual ele atua, estabelecem o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico.

Desse modo, a estratégia utilizada aponta o tipo de abstração que o estudante está atuando e a abstração assinala o nível. Então, na validação do modelo, assumiremos essa perspectiva.

7.1.1 Nível n

Os alunos que se localizam nesse nível analisam um quadrilátero notável de modo geral, destituído de elementos e de propriedades. As falas são carregadas por ações de natureza visual e perceptiva. Assim, os estudantes realizam classificação e

denominação dos quadriláteros ao extraírem informações da aparência dos objetos do mundo físico presentes em sua vida prática.

Em razão disso, os estudantes que atuam no nível n , em geral, não apresentam respostas adequadas às situações de construção e de classificação, em relação aos quadriláteros notáveis. Isso ocorre, pois a estratégia mobilizada faz com que os alunos errem ou não respondam a questão.

Nesse nível, as características e as propriedades dos quadriláteros não são utilizadas, pois são incompreendidas, logo, as estratégias sintetizam-se ao emprego de elementos gerais e atributos de objetos que formam a realidade física.

Portanto, os alunos que se encontram nesse nível atuam na abstração geométrica perceptiva, visto que eles fazem uso de sensações visuais e perceptivas na análise dos quadriláteros notáveis.

Uma das estratégias mobilizadas pelos discentes que atuam nesse nível é analisar os quadriláteros notáveis somente por meio de um subconjunto dos atributos visuais, pois não conseguem produzir imagens mentais.

Dessa maneira, eles não realizam a identificação de quadriláteros que pertencem ao mesmo grupo, distinguindo apenas formas circulares de figuras quadriláteras ou triangulares, ou então, diferencia triângulos de quadriláteros, considerando, por exemplo, a quantidade de lados.

Podemos verificar essas características nas respostas à primeira questão do teste realizadas pelos alunos Alfredo (com 15 anos e cursando o 7º ano) e Santiago (com 14 anos e fazendo o 6º ano).

Pelas produções ilustradas na Figura 82, evidenciamos que os alunos não conseguiram realizar a identificação dos quadriláteros notáveis e nem de construí-los de modo adequado a partir da nomenclatura.

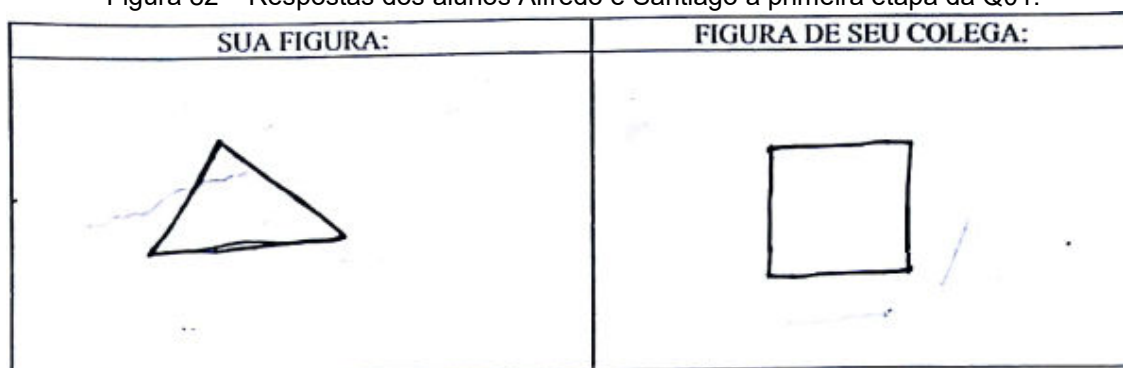
Tal fato ocorre uma vez que essas formas geométricas são analisadas por meio de um subconjunto de atributos perceptivos, logo, os discentes não conseguem produzir imagens visuais desses quadriláteros.

Ainda, percebemos que os alunos não reconheceram o retângulo e nem a figura de quatro lados que não é um retângulo. Desse modo, não realizaram a conversão de ida entre as representações “língua natural” e “figura geométrica”,

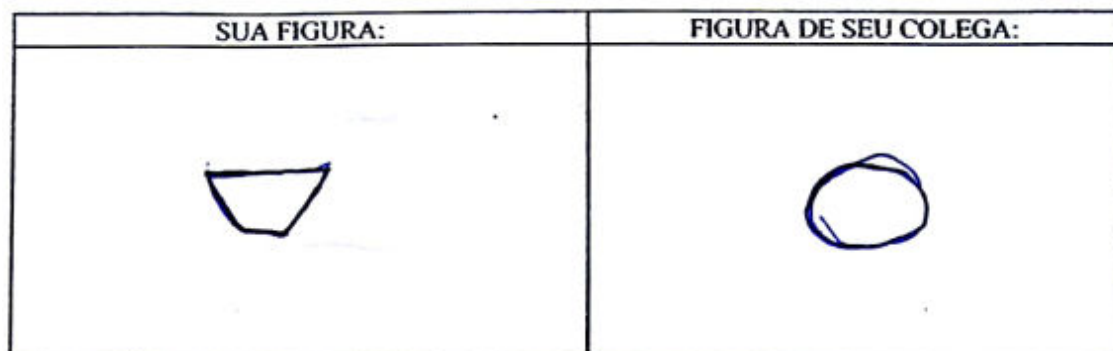
como indica Duval (1995), visto que, em “SUA FIGURA”, Alfredo construiu um triângulo e Santiago fez um trapézio.

Q01 – Você desenhou um retângulo. Seu colega desenhou uma figura de quatro lados que não é um retângulo. Nos espaços abaixo, desenhe como poderia ser a sua figura e a figura do seu colega.

Figura 82 – Respostas dos alunos Alfredo e Santiago à primeira etapa da Q01.



(a) Produção de Alfredo (7º ano, 15 anos)



(b) Produção de Santiago (6º ano, 14 anos)

Fonte: dados da pesquisa

Além disso, na área “FIGURA DO SEU COLEGA”, o primeiro aluno produziu um quadrado e o segundo criou uma circunferência. Logo, eles consideraram essas figuras como não retângulos, demonstrando, dessa forma, que não realizaram a conversão de ida entre os registros de representação semiótica, conforme Duval (1995).

Nessa direção, essas produções indicam que Alfredo e Santiago só conseguem distinguir as figuras quadriláteras das triangulares ou das circulares. Esse fenômeno também pode ser verificado nas justificativas realizadas na segunda etapa da questão, como apresentado pela Figura 83.

Figura 83 – Respostas dos alunos Alfredo e Santiago à segunda etapa da Q01.

Por que sua figura é um retângulo?	Por que a figura de seu colega não é um retângulo?
Porque ela tem três lados diferentes	Porque ela tem quatro lados iguais

(a) Produção de Alfredo (7º ano, 15 anos)

Por que sua figura é um retângulo?	Por que a figura de seu colega não é um retângulo?
Porque esta figura tem quatro lados	Porque não tem quatro lados ele só tem um lado

(b) Produção de Santiago (6º ano, 14 anos)

Fonte: dados da pesquisa

Pela Figura 83, o primeiro partícipe afirmou que sua figura é um retângulo dado que possui três lados diferentes, ao mesmo tempo em que o segundo considerou o trapézio como retângulo, justificando que a figura tem quatro lados.

Com relação à figura do seu colega, Alfredo disse que o quadrado não é um retângulo visto que tem quatro lados iguais. Por sua vez, Santiago explicou que a circunferência não é retângulo uma vez que não tem quatro lados, possuindo apenas um lado.

Aqui, os dois estudantes não realizaram conversão de volta entre os registros de representação semiótica “figura geométrica” e “língua natural”, segundo indica Duval (1995). Isso também pode ser observado na fala de Alfredo, ao ser entrevistado pelo pesquisador dessa tese:

Pesquisador: Qual é o nome da figura que você desenhou aqui? (apontando para o campo “SUA FIGURA”)
Alfredo: É um retângulo.
Pesquisador: Por que ela é um retângulo?
Alfredo: Porque ela tem três lados. E os lados são todos diferentes.
Pesquisador: Eu não entendi. Podes me explicar novamente?
Alfredo: Eu desenhei um retângulo. Esse desenho é retângulo porque tem três partes. Cada parte dessas (apontando para a figura) é de um jeito, é diferente, não pode ser igual.
Pesquisador: Deixa-me ver se entendi. Então, para ser retângulo, a figura tem que ter três lados, todos diferentes?
Alfredo: Isso mesmo. Um lado grande, outro pequeno e outro médio.
Pesquisador: Como se chama a figura que você fez para o seu colega? (apontando para o campo FIGURA DE SEU COLEGA).
Alfredo: É um triângulo.
Pesquisador: Mas por que ela é um triângulo?
Alfredo: Porque ela tem quatro partes do mesmo jeito.

Pesquisador: Como assim?

Alfredo: Ela é um triângulo porque tem quatro lados.

Pesquisador: Então, toda figura com quatro lados é triângulo?

Alfredo: Sim

Pesquisador: Essa figura aqui é um triângulo? (apontando para a representação de um trapézio)

Alfredo: Sim, ela tem quatro lados.

Pesquisador: Mas você falou antes que para ser triângulo tem que ter quatro lados iguais. Essa figura aí tem os lados iguais (apontando para o trapézio)?

Alfredo: Também é um triângulo. Ele está com os lados tortos. Se eu apagar com uma borracha, eu conserto ele. Aí fica um triângulo mais bonito.

Pesquisador: Como você chegou a essas respostas?

Alfredo: Não sei. Não entendi a pergunta.

Pesquisador: Quando você foi responder a questão, o que veio a sua mente? Você lembrou-se de algo?

Alfredo: Ah sim. Para fazer os dois desenhos, lembrei de uma casa.

Pesquisador: Como assim?

Alfredo: O retângulo é o telhado da casa e o triângulo é a parede.

Pesquisador: O “triângulo” do seu colega pode ser chamado de retângulo?

Alfredo: Não pode. O triângulo é a parede e o retângulo é o telhado. Parede e telhado são coisas diferentes. Não é a mesma coisa.

Pesquisador: A figura do seu colega não é um quadrado?

Alfredo: É sim.

Pesquisador: Mas o que é um quadrado?

Alfredo: É outro nome para triângulo. Você pode usar os dois nomes. Se o desenho tem quatro lados, você pode chamar de triângulo ou quadrado.

Pesquisador: Então, por que você chamou a figura de triângulo?

Alfredo: Porque eu acho mais fácil de lembrar. O nome é mais bonito.

Pela fala do entrevistado é possível verificarmos que ele não compreendeu de modo coerente o que são retângulos, quadrados e triângulos. Ou seja, não conseguiu relacionar a nomenclatura com a forma geométrica, mesmo que tenha feito uso do aspecto global.

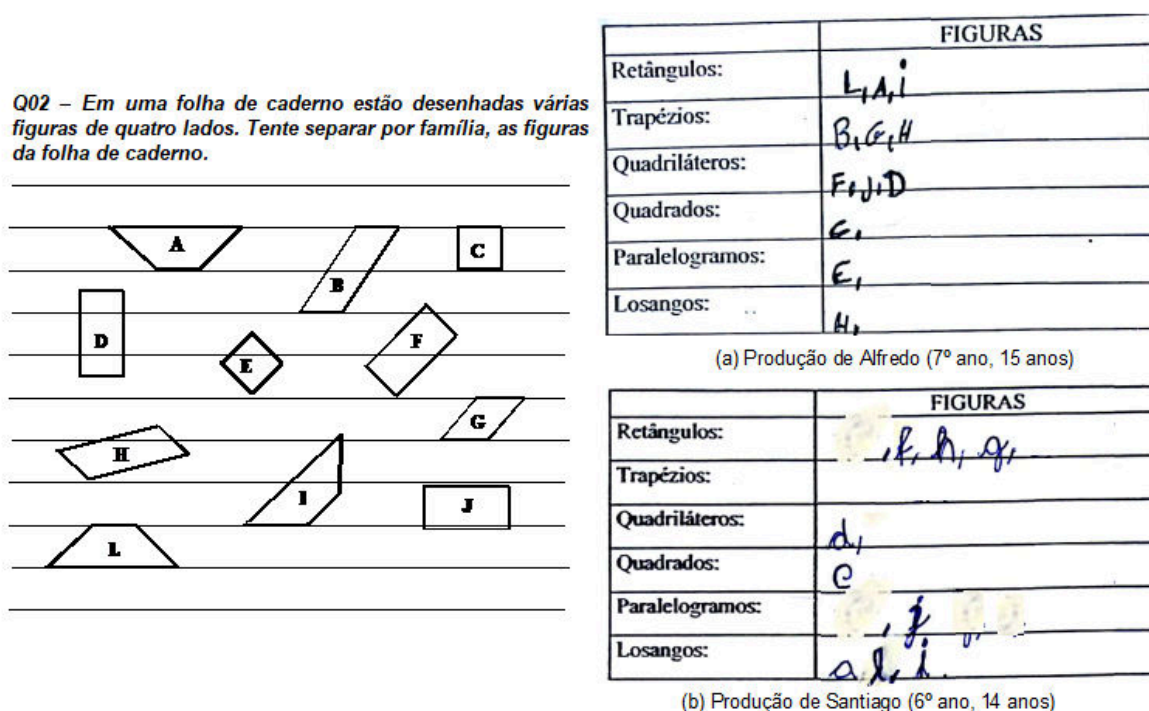
Assim, fica evidente que não construiu o conceito de quadriláteros notáveis com significado, pois os elementos constituintes e as propriedades não foram considerados em suas respostas ao entrevistador.

Desse modo, fica bastante evidente que há uma grande influência dos objetos físicos presentes em sua realidade na análise sobre os objetos geométricos. Logo, Alfredo ainda não conseguiu produzir imagens mentais de natureza geométrica desses quadriláteros.

Como não apresentou compreensão adequada do conceito geométrico mencionado, esse aluno não realizou a conversão entre os registros de representação semiótica, como indicado por Duval (1995).

Resultados semelhantes são verificados nas respostas de Alfredo e Santiago, referentes à segunda questão do teste, conforme ilustrado a seguir pela Figura 84.

Figura 84 – Respostas dos alunos Alfredo e Santiago à Q02.



Fonte: dados da pesquisa

Pelos protocolos apresentados na Figura 84, verificamos que Alfredo considerou os trapézios (figuras A, I e L) no grupo dos retângulos. Os paralelogramos oblíquos (figuras B, G e H) foram classificados como trapézios. Além disso, um dos paralelogramos oblíquos (figura H) foi identificado como losango.

Esses resultados mostram que esse aluno não conseguiu relacionar a nomenclatura com a forma geométrica correspondente, logo, não realizou a conversão de ida entre os registros de representação semiótica, conforme sinaliza Duval (1995).

O fato de Alfredo ter reconhecido os retângulos não quadrados (figuras D, F e J) como quadriláteros, um dos quadrados (figura E) como paralelogramo, além de ter identificado o quadrado padrão (Figura C), não significa que realizou conversão entre a língua natural e a figura geométrica e nem que estabeleceu inclusão de classe. Isso pode ser mais bem compreendido na entrevista, conforme o extrato a seguir.

Pesquisador: Como você classificou as figuras apresentadas?

Alfredo: contei a quantidade de lados, então, percebi que todas é a mesma coisa.

Pesquisador: Como assim? Não entendi.

Alfredo: Todos os desenhos têm quatro lados, portanto, todas é a mesma figura.

Pesquisador: Então, que figura é essa?

Alfredo: É o triângulo.

Pesquisador: O que é um triângulo?

Alfredo: É o desenho com quatro lados. Também é chamada de quadrado. Quadrado e triângulo é a mesma coisa, tem quatro lados.

Pesquisador: Mas aqui você colocou apenas a Figura C como quadrado. As demais não são “quadrados”?

Alfredo: Todas são quadrados, pois tem quatro lados. Eu queria colocar todas na linha do quadrado, mas como tinha outras linhas, então fiz a distribuição das figuras em todas as linhas.

Pesquisador: Se você fosse corrigir sua resposta nessa questão, como faria?

Alfredo: Colocaria todos na linha do quadrado.

Pesquisador: Por quê?

Alfredo: Porque todos têm quatro lados, são triângulos. Triângulos e quadrados é a mesma coisa.

Pesquisador: Essa figura aqui é um triângulo? (apontando para o desenho de uma circunferência) Ou é um quadrado?

Alfredo: É uma bola. Não é triângulo e nem quadrado.

Pesquisador: Por quê?

Alfredo: Porque a bola só tem um lado, os outros têm quatro lados.

Pesquisador: A bola é um retângulo?

Alfredo: Não. O retângulo tem três lados e a bola só tem um. Que dizer, ela pode ter dois, mas só dá para ver um, o outro lado está ao contrário, não dá para ver.

Pelo diálogo, podemos observar que Alfredo não compreende o conceito de quadriláteros notáveis de modo adequado. Ele apenas consegue diferenciar figuras quadriláteras (formadas por quatro lados), dos triângulos (que possuem três lados) ou então distingue estes das figuras circulares.

Tal fato ocorre, visto que esse participante não consegue formar imagens mentais dos quadriláteros notáveis, isto é, percebe essas formas geométricas a partir de subconjunto das características visuais. Desse modo, pela fala, Alfredo não realizou conversão entre os registros de representação semiótica, segundo Duval (1995).

Essas características também são verificadas na produção de Santiago, que classificou os paralelogramos oblíquos (figuras B, G e H) como retângulos e os trapézios (figuras A, I e L) como losangos. Logo, esse aluno também demonstrou não apresentar domínio sobre o conceito de quadriláteros notáveis, não realizando, assim, conversão na perspectiva de Duval (1995).

O fato de ele ter considerado um dos retângulos (figura D) como quadrilátero, um dos retângulos (figura J) como paralelogramo e ter identificado um dos quadrados (figura C) não quer dizer que converteu os registros de representação semiótica.

Isso se justifica, pois de acordo com a sua produção da primeira questão do teste, o trapézio foi apontado como retângulo e a circunferência reconhecida como um quadrilátero não retângulo. Tal fato representa um erro conceitual, visto que seguindo a lógica de Santiago, o trapézio poderia ser considerado um paralelogramo (já que para esse aluno, o trapézio é retângulo, e o retângulo é paralelogramo).

Na terceira questão do teste, também verificamos que tanto Alfredo como Santiago não compreendem o conceito de quadriláteros notáveis, em especial, não entendem o que é um quadrado, como apresentado na Figura 85.

Q03 – Construir no espaço abaixo, dois quadrados diferentes.

Figura 85 – Respostas dos alunos Alfredo e Santiago à primeira etapa da Q03.
Q03) Construir no espaço abaixo, dois quadrados diferentes:



(a) Produção de Alfredo (7º ano, 15 anos)

(b) Produção de Santiago (6º ano, 14 anos)

Fonte: dados da pesquisa

Nessa questão, relativa à produção de dois quadrados, Alfredo fez um trapézio e um retângulo, no mesmo momento em que Santiago criou dois trapézios. Essas evidências mostram que eles não conseguiram realizar a conversão de ida entre a língua natural e a figura geométrica, com base na teoria de Duval (1995).

Nesse sentido, com base nessas produções, verificamos que os dois participantes não realizam a identificação de formas geométricas comuns, uma vez que não formam imagens visuais de modo coerente.

Quando questionados sobre o porquê dos dois quadrados construídos serem diferentes, referente ao segundo momento da questão, o primeiro estudante disse “*porque os quatro lados são diferentes, um dos outros*” e o segundo afirmou “*porque estes dois têm formas diferentes*”, como ilustrado pela Figura 86.

Nessa etapa da questão, percebemos que Alfredo e Santiago utilizaram dos aspectos perceptivos e visuais como parâmetro para justificar a diferença entre as

figuras construídas. Desse modo, eles não consideraram nem a definição e nem as propriedades dos quadrados, então, não realizaram a conversão de volta entre os registros de representação semiótica, proposta por Duval (1995).

Figura 86 – Respostas dos alunos Alfredo e Santiago à segunda etapa da Q03.

Por que os dois quadrados que você construiu são diferentes?
<i>Porque os quatro lados são diferentes um dos outros</i>

(a) Produção de Alfredo (7º ano, 15 anos)

Por que os dois quadrados que você construiu são diferentes?
<i>Porque estes dois tem formas diferentes</i>

(b) Produção de Santiago (6º ano, 14 anos)

Fonte: dados da pesquisa

Isso também pode ser evidenciado na fala de Alfredo, ao ser entrevistado pelo pesquisador (autor dessa tese), conforme extrato a seguir.

Pesquisador: Qual o nome dessas figuras que você desenhou?
Alfredo: Quadrados.
Pesquisador: O que são quadrados?
Alfredo: São triângulos com quatro lados.
Pesquisador: Eu não entendi. Podes me explicar novamente?
Alfredo: Veja... Esses desenhos que eu fiz são triângulos. Triângulo tem quatro lados. Quadrado tem quatro lados, então, quadrado e triângulo é a mesma coisa.
Pesquisador: Então, essas duas figuras que você fez são triângulos ou quadrados?
Alfredo: Os dois. São quadrados e triângulos.
Pesquisador: Por quê?
Alfredo: Por que tem quatro lados.
Pesquisador: Elas são a mesma coisa? Apresentam alguma diferença?
Alfredo: É a mesma coisa. São quadrados, mas os lados são diferentes.
Pesquisador: Diferentes?
Alfredo: Sim, o primeiro tem um lado subindo, meio torto. Mas eu posso deixar ele apurado. É só apagar e fazer outro.
Pesquisador: Como você fez esses desenhos?
Alfredo: Eu fiz a partir da minha cabeça. Eu lembrei e fiz.
Pesquisador: Alguma dessas figuras é retângulo?
Alfredo: Não. Nenhuma delas tem três lados. Retângulo tem três lados.
Pesquisador: Alguma delas é trapézio?
Alfredo: Não. Eu não sei o que é isso. Não lembro. Acho que nunca nem vi isso.

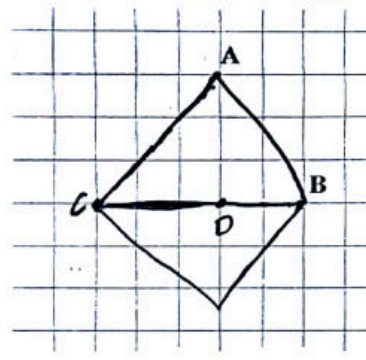
Pela fala de Alfredo, percebemos que ele confunde o conceito de triângulos com o de quadriláteros notáveis, sobretudo, com relação aos retângulos e aos quadrados. Uma figura de quatro lados é considerada como triângulo, enquanto que uma figura formada por três lados é tida como retângulo.

Desse modo, segundo Duval (1995), esse aluno não realizou conversão (de ida e de volta) entre os registros de representação semiótica.

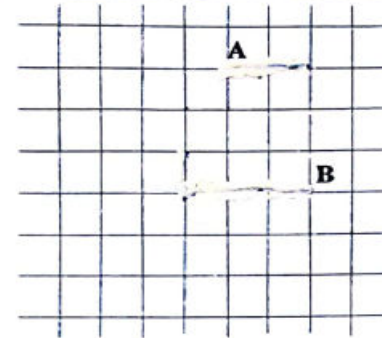
Na quarta questão do teste, referente à produção de losango, novamente, evidenciamos que Alfredo e Santiago não compreendem o conceito de quadriláteros notáveis, conforme ilustrado na Figura 87.

Q04 – Utilizando os vértices **A** e **B** já marcados, desenhe o losango **ABCD**.

Figura 87 – Respostas dos alunos Alfredo e Santiago à Q04.

Q04) Utilizando os vértices A e B já marcados, desenhe o losango ABCD :	Por que a figura que você desenhou é um losango?
	<i>Porque os lados são diferentes os outros</i>

(a) Produção de Alfredo (7º ano, 15 anos)

Q04) Utilizando os vértices A e B já marcados, desenhe o losango ABCD :	Por que a figura que você desenhou é um losango?
	<i>Porque os lados são diferentes os outros</i>

(b) Produção de Santiago (6º ano, 14 anos)

Fonte: dados da pesquisa

Pela Figura 87, notamos que os dois estudantes não fizeram uso nem dos elementos constituintes e nem das propriedades do losango na produção, logo, não entendem o significado desse quadrilátero notável. Por essas evidências, segundo Duval (1995), esses partícipes não realizaram a conversão de ida entre a língua natural e a figura geométrica.

Nessa questão, Alfredo fez um trapézio e Santiago iniciou a construção e, em seguida, apagou por meio de corretivo líquido. Pelas marcações deixadas, a figura

do segundo estudante também seria um trapézio. Então, esses dois discentes não formam imagens visuais do losango, compreendendo essa forma geométrica a partir de um subconjunto de atributos perceptivos.

Pela Figura 87, evidenciamos que Alfredo fez uso de aspectos perceptivos e visuais em sua justificativa. Assim, para Duval (1995) não fez a conversão de volta entre os registros de representação semiótica (da figura geométrica para a língua natural).

Tal fato pode ser constatado na entrevista realizada com esse estudante, como apresentado pelo extrato a seguir.

Pesquisador: *Que figura é esse que você desenhou?*

Alfredo: *Acho que é um losango.*

Pesquisador: *O que é um losango?*

Alfredo: *Eu não sei. Na verdade, não sei o que é um losango.*

Pesquisador: *Então como você fez o desenho? Por que essa figura é um losango?*

Alfredo: *Eu pensei em dois retângulos, quando eu os juntei, formou isso aí (apontando para o desenho). Eu só não queria deixar a questão em branco.*

Pesquisador: *Mas veja que no que você escreveu ao lado, disse que a figura desenhada é um losango, uma vez que possui todos os lados diferentes entre si. Como você explica isso?*

Alfredo: *Então, eu não sei o que é um losango, depois que eu fiz os dois retângulos, percebi que as cinco partes são diferentes.*

Pesquisador: *Como assim? Cinco partes?*

Alfredo: *Aqui, olha (apontando para os lados e diagonal do trapézio desenhado). Um, dois, três, quatro, cinco. São cinco partes que o desenho tem. Todos são diferentes uns dos outros.*

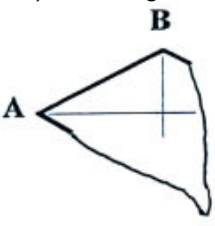
Pelo diálogo travado, mais uma vez, verificamos que Alfredo confunde os conceitos de triângulos com o de quadriláteros notáveis. Os retângulos são considerados triângulos, como se fossem sinônimos e nas justificativas, esse aluno fez citação aos lados e a uma das diagonais do trapézio.

Nessa direção, Alfredo não realizou a articulação entre a nomenclatura atribuída ao losango e a sua forma geométrica, comprovando que não realizou a conversão entre os registros de representação semiótica, como apontado por Duval (1995).

No caso de Santiago, pelos registros deixados na folha de papel do teste, é possível perceber que, inicialmente, ele também tinha feito uso desse mesmo parâmetro, pois escreveu “*porque ele tem quatro lados*”, em referência ao trapézio que tinha iniciado a construção na primeira etapa da questão. Todavia, por meio de um corretivo líquido, apagou essa explicação e disse que não conseguiu fazer o losango.

Achados similares podem ser percebidos na quinta questão do teste, referente à construção de losango, como ilustrado na Figura 88. Outra vez, Alfredo e Santiago não apresentaram compreensão do conceito de quadriláteros.

Figura 88 – Respostas dos alunos Alfredo e Santiago à Q05.
Q05) O losango **ABCD** tem um pedaço apagado. Você pode reconstruí-lo?

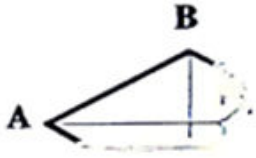


☒ Sim

Explique como:

*desenha os lados
apagados*

(a) Produção de Alfredo (7º ano, 15 anos)



☒ Não

Porquê:

*eu não consigo
reconstruí-lo*

(b) Produção de Santiago (6º ano, 14 anos)

Fonte: dados da pesquisa

Pelos registros ilustrados na Figura 88, verificamos que tanto Alfredo como Santiago não conseguiram reconstruir o losango. Para isso, seria necessário fazer uso da definição e das propriedades desse quadrilátero notável.

Dessa forma, semelhante ao que foi observado na questão anterior do teste, os dois alunos não compreenderam o significado atribuído aos losangos, pois ainda não construíram o conceito de modo adequado. Isso também pode ser evidenciado na entrevista realizada com Alfredo, com base no extrato que segue.

Pesquisador: Que figura é essa que você desenhcou?

Alfredo: Eu não sei.

Pesquisador: Ela é um losango?

Alfredo: Eu não sei dizer. Não sei o que é isso.

Pesquisador: Como você reconstruiu a figura?

Alfredo: Eu só completei, liguei as linhas que faltavam. Ai o desenho ficou parecendo uma pá.

Pesquisador: Uma pá?

Alfredo: Sim, uma pá de apanhar lixo.

Pesquisador: Então, o losango é uma pá de lixo?

Alfredo: Eu não sei. Não sei o que é losango. Fiz esse desenho para não deixar a questão sem resposta.

Conforme sinalizado na conversa, Alfredo não sabe o que é um losango, e em suas respostas, fez referência a elementos do mundo físico, isto é, analisou um

objeto geométrico (o losango) como se fosse um objeto físico (a pá). Aqui, comprovamos que esse aluno não produz imagens mentais sobre esse quadrilátero notável, o percebendo com subconjunto de características visuais.

Nesse sentido, tendo por base a teoria de Duval, não realizou conversão entre as representações língua natural e figura geométrica. Também, não verificamos a realização de tratamento.

Ainda de acordo com esse quadro teórico, analisando globalmente as produções dos dois estudantes (Alfredo e Santiago) relacionadas às cinco questões do teste, como eles construíram formas geométricas, mesmo que de forma inadequada, mobilizaram a apreensão sequencial.

Em alguns momentos, os dois alunos fizeram uso de aspectos perceptivos e visuais na análise das formas geométricas produzidas, dessa maneira, mobilizaram a apreensão perceptiva com olhar geométrico do botanista.

Além disso, considerando os modelos de Van-Hiele (1957), Gutierrez, Jaime e Fortuny (1991), Garrido (2005), Parzysz (2006) e Marchand (2009), Alfredo e Santiago apresentam características do pensamento geométrico que não são explicadas por esses pesquisadores. Desse modo, esses participantes não se “enquadram” em nenhum nível proposto nos mencionados modelos.

Portanto, fica provado que esses modelos não conseguem explicitar o funcionamento semiocognitivo de alunos do ensino básico em situações de construção e de classificação, relacionadas aos quadriláteros notáveis.

Outra estratégia identificada nesse nível de desenvolvimento do pensamento geométrico é reconhecer os quadriláteros notáveis a partir da aparência física, desconsiderando, assim, os elementos constituintes e as propriedades são desconsideradas.

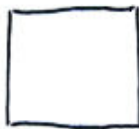
Essa estratégia encontra-se ilustrada nas respostas relativas à primeira questão do teste, produzidas pelos discentes Clenilda (com 14 anos e matriculada no 9º ano) e Francisco José (com 12 anos e cursando o 6º ano).

Nessa questão (Figura 89), observamos que os dois alunos conseguiram reconhecer quadriláteros notáveis a partir da nomenclatura e produzi-los na folha de papel. Isso pode ser evidenciado nos seus registros deixados no espaço “SUA FIGURA”, no qual, Clenilda e Francisco José estabeleceram articulação adequada

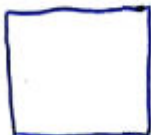
entre o termo “retângulo”, relativo ao registro língua natural e ao desenho produzido, referente ao registro figura geométrica. Aqui, esses estudantes realizaram a conversão de ida, conforme Duval (1995).

Q01 – Você desenhou um retângulo. Seu colega desenhou uma figura de quatro lados que não é um retângulo. Nos espaços abaixo, desenhe como poderia ser a sua figura e a figura do seu colega.

Figura 89 – Respostas dos alunos Clenilda e Francisco José à primeira etapa da Q01.

SUA FIGURA:	FIGURA DE SEU COLEGA:
	

(a) Produção de Clenilda (9º ano, 14 anos)

SUA FIGURA:	FIGURA DE SEU COLEGA:
	

(b) Produção de Francisco José (6º ano, 12 anos)

Fonte: dados da pesquisa

Nessa questão, observamos que os dois alunos conseguiram reconhecer quadriláteros notáveis a partir da nomenclatura e produzi-los na folha de papel. Isso pode ser evidenciado nos seus registros deixados no espaço “SUA FIGURA”, no qual, Clenilda e Francisco José estabeleceram articulação adequada entre o termo “retângulo”, relativo ao registro língua natural e ao desenho produzido, referente ao registro figura geométrica. Aqui, esses estudantes realizaram a conversão de ida, conforme Duval (1995).

No entanto, como evidenciado na área “FIGURA DE SEU COLEGA”, o conceito geométrico não foi entendido de modo adequado pelos dois participantes,

visto que eles construíram quadrados, considerando, desse modo, essas figuras como não retângulos. Assim, isso demonstra que eles consideraram somente a aparência física desse quadrilátero na produção.

Nesse sentido, tendo por base a teoria de Duval (1995), Clenilda e Francisco José não realizaram conversão de ida entre os registros de representação semiótica (língua natural e figura geométrica), dado que o quadrado é um caso particular de retângulo. Desse jeito, os atributos desses quadriláteros notáveis ainda não são entendidos pelos alunos.

Tal situação se repete quando voltamos nosso olhar para as justificativas produzidas por eles, em referência à segunda fase da questão, como apresentado na Figura 90.

Figura 90 – Respostas dos alunos Clenilda e Francisco José à segunda etapa da Q01.

Por que sua figura é um retângulo?	Por que a figura de seu colega não é um retângulo?
Porque tem quatro lados dois maiores e dois menores.	Porque é um quadrado

(a) Produção de Clenilda (9º ano, 14 anos)

Por que sua figura é um retângulo?	Por que a figura de seu colega não é um retângulo?
porque tem linhas longas e quatro lados.	porque tem linhas curtas e tem quatro lados.

(b) Produção de Francisco José (6º ano, 12 anos)

Fonte: dados da pesquisa

Pela Figura 90, Clenilda disse que a primeira figura é um retângulo porque tem quatro lados, sendo dois maiores e dois menores, enquanto que Francisco José justificou que a figura dele tem linhas longas e quatro lados. Com relação à figura do seu colega, o primeiro aluno falou que o desenho representa um quadrado, e o segundo mencionou que o quadrado não é retângulo visto que ele tem linhas curtas e quatro lados.

Nessas produções concernentes às duas justificativas dos dois discentes, evidenciamos que eles fizeram uso somente da aparência global do quadrilátero, mencionando aspectos perceptivos e visuais, dizendo precisamente o que observaram.

Aqui, os dois partícipes não dominam a definição e as propriedades dos retângulos e dos quadrados. Dessa maneira, considerando a teoria de Duval (1995), Clenilda e Francisco José não realizaram conversão de volta, pois não conseguiram articular a figura geométrica e a língua natural. O mesmo cenário pode ser evidenciado na fala de Francisco José, ao ser entrevistado pelo pesquisador, autor dessa tese.

Pesquisador: *Que figura é essa que você desenhou aí? (apontando para o campo "SUA FIGURA")*
Francisco José: *É um retângulo.*
Pesquisador: *O que é um retângulo?*
Francisco José: *É uma figura de quatro lados.*
Pesquisador: *A figura do seu colega é um retângulo?*
Francisco José: *Não*
Pesquisador: *Por que não? Ela tem quatro lados, então não seria também um retângulo?*
Francisco José: *Não. Não é um retângulo, porque ela é um quadrado. Quadrado não é retângulo.*
Pesquisador: *Como assim? Não entendi.*
Francisco José: *O retângulo e o quadrado têm quatro lados, mas eles não são a mesma coisa. O retângulo tem dois lados maiores e dois lados menores. O quadrado tem os lados menores.*
Pesquisador: *Então, eles não são a mesma coisa?*
Francisco José: *Não são. Os dois são diferentes. Os lados são diferentes. O retângulo tem dois lados grandes e dois pequenos. No quadrado, todos os lados são pequenos.*
Pesquisador: *Por que sua figura é um retângulo?*
Francisco José: *Por que ela tem quatro lados de tamanhos diferentes. Dois lados maiores e dois lados menores.*
Pesquisador: *Por que a figura do seu colega não é um retângulo?*
Francisco José: *Porque é um quadrado. O quadrado tem quatro lados pequenos. Todos os lados são pequenos.*
Pesquisador: *Teve mais algum outro aspecto que você considerou para analisar as duas figuras?*
Francisco José: *É só olhar como eles são. Eu olhei para os lados. Eles têm lados diferentes.*
Pesquisador: *Como você fez os desenhos?*
Francisco José: *Eu fiz da minha cabeça. Lembrei da porta de minha casa e das janelas.*
Pesquisador: *Como assim?*
Francisco José: *O retângulo tem a mesma forma de uma porta, e o quadrado parece uma janela. A janela do banheiro lá de casa tem a forma de um quadrado.*

Pela fala de Francisco José, notamos que ele analisou o retângulo e o quadrado a partir de aspectos perceptivos e visuais, ou seja, a aparência global dessas figuras. Desse modo, não considerou os elementos constituintes e as propriedades desses quadriláteros notáveis. Além disso, evidenciamos que as características dos objetos do mundo físico (tais como a porta e a janela) estabelecem forte influência em seu entendimento sobre os objetos geométricos.

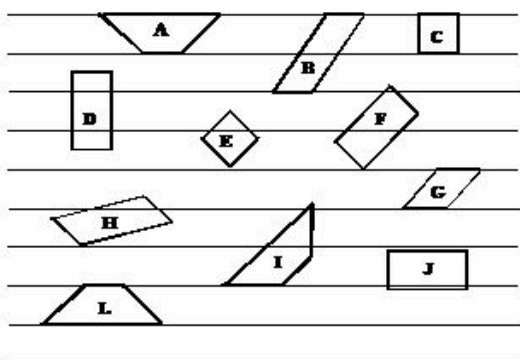
Ainda, não demonstrou compreensão do conceito de quadriláteros notáveis com significado, pois não articulou a forma geométrica com a nomenclatura de modo adequado, tendo em vista que Francisco José considerou o quadrado como uma

figura de quatro lados que não é retângulo. Dessa maneira, segundo Duval (1995), não ocorreu conversão entre os registros de representação semiótica.

Resultados análogos são evidenciados nas respostas de Clenilda e Francisco José, alusivos à segunda questão do teste, como mostrado pela Figura 91.

Figura 91 – Respostas dos alunos Clenilda e Francisco José à Q02.

Q02 – Em uma folha de caderno estão desenhadas várias figuras de quatro lados. Tente separar por família, as figuras da folha de caderno.



	FIGURAS
Retângulos:	D - J
Trapézios:	A - I - L
Quadriláteros:	C
Quadrados:	E
Paralelogramos:	B - F - G
Losangos:	G

(a) Produção de Clenilda (9º ano, 14 anos)

	FIGURAS
Retângulos:	D - J
Trapézios:	A - I - L
Quadriláteros:	C
Quadrados:	E
Paralelogramos:	B - F - G
Losangos:	G

(b) Produção de Francisco José (6º ano, 12 anos)

Fonte: dados da pesquisa

Pelos registros deixados pelos estudantes, notamos que Clenilda reconheceu todos os trapézios (figuras A, I e L), identificou a maioria dos retângulos não quadrados (figuras D e J), distinguiu um dos quadrados (figura E) e um dos paralelogramos (figura B). Além disso, o quadrado padrão (figura C) foi classificado como quadrilátero.

Todavia, um dos paralelogramos (figura G) foi considerado de forma equivocada como losango, provavelmente por apresentar aparentemente “lados tortos”. Além disso, os quadrados não foram classificados como losangos e retângulos, simultaneamente. Do mesmo modo, os quadrados, os retângulos e os losangos não foram reconhecidos como paralelogramos.

Esse tipo de resposta revela que Clenilda ainda não consegue articular as propriedades dos quadriláteros notáveis, logo, considerou somente o aspecto global das figuras na sua resolução, utilizando aspectos essencialmente visuais e perceptivos como forma de classificar esses quadriláteros. Para Duval (1995), essa estudante não converteu e nem tratou os registros de representação semiótica (figura geométrica e língua natural).

Situação semelhante pode ser verificada com a produção de Francisco José, que mesmo não realizando a classificação das figuras apresentadas no teste (pois fez o desenho de algumas delas na parte que era para colocar a letra correspondente à figura), deixou claro na entrevista, que considerou apenas a aparência física, como apresentado no extrato a seguir.

Pesquisador: Como você respondeu essa questão?

Francisco José: Para cada nome do quadro eu fui fazendo o desenho.

Pesquisador: Como assim?

Francisco José: Esse aqui (apontando para a figura C) é um quadrado, aí, eu desenhei ele no quadro, na parte que tem o nome quadrado.

Pesquisador: Por que essa figura é um quadrado?

Francisco José: Porque ele tem quatro lados.

Pesquisador: Mas todas essas onze figuras têm quatro lados. Elas são quadrados?

Francisco José: Não. Só a C é quadrado.

Pesquisador: Por quê?

Francisco José: O quadrado tem quatro lados pequenos. Todos os lados dele são do mesmo jeito. As outras figuras são diferentes. Tem lados maiores e menores.

Pesquisador: A figura E é um quadrado?

Francisco José: Não.

Pesquisador: Mas os lados dela são todos pequenos. Poderia ser um quadrado. O que você acha?

Francisco José: Ele não é um quadrado, os lados deles estão tortos. O quadrado não tem lados tortos.

Pesquisador: Então qual é o nome dessa figura aí? (apontando para a figura E)

Francisco José: Acho que é um losango.

Pesquisador: Por que ela é um losango? O que é um losango?

Francisco José: Por que ela parece um... Uma pipa... É o desenho de uma pipa. O losango é uma pipa com quatro lados pequenos. Mas também pode ser grande. Meu irmão tem uma pipa bem grande.

Pesquisador: Entre essas onze figuras, há retângulos?

Francisco José: Sim, tem o D e o J.

Pesquisador: Por que eles são retângulos?

Francisco José: Eles têm quatro lados, sendo dois grandes e dois pequenos.

Pesquisador: As figuras F e C são retângulos?

Francisco José: Não são. Os lados do F são tortos. Se você empurrar ele de lado, ele vira um retângulo. O F é um quadrilátero, ou seja, uma figura de quatro lados, mas que fica torta. Só o F é quadrilátero. O C é um quadrado. Quadrado não é retângulo.

Pesquisador: Entre as figuras, há trapézios?

Francisco José: Eu não sei. Não sei o que é isso.

Pesquisador: Mas veja que você desenhou algo no quadro para trapézios. Que figura é essa que você desenhou?

Francisco José: Foi um chute. Eu fiz o desenho da figura L, só para não deixar em branco.

Pesquisador: Entre as figuras há paralelogramos?

Francisco José: Sim, o G é um paralelogramo.

Pesquisador: O que é um paralelogramo?

Francisco José: É como se fosse um losango mais torto. Ele é mais torto do que o losango. O losango tem lados tortos. Mas o paralelogramo é mais torto.

Pesquisador: Eu posso dizer que as onze figuras são quadriláteros?

Francisco José: Não. Só o F é um quadrilátero.

Pesquisador: Por quê?

Francisco José: Ele parece um retângulo, mas não é, pois ele está em diagonal, meio torto. Entendeu?

Pelo diálogo, notamos que Francisco José reconheceu o quadrado e o retângulo com base no tamanho dos lados (“grandes”, “pequenos”, “maiores e “menores”), fazendo uso de palavras presentes em seu vocabulário cotidiano, ou seja, não faz referência a uma linguagem geométrica.

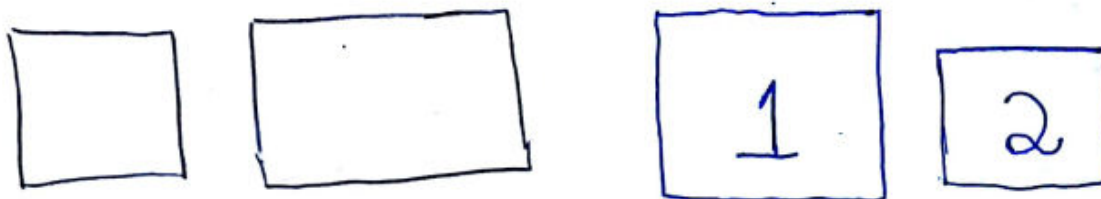
Além disso, na identificação do losango e na classificação de um dos retângulos como paralelogramo, esse participante fez menção à posição dos lados, por meio do termo “tortos”.

De acordo com Duval (1995), esse estudante não realizou conversão entre os registros de representação semiótica (figura geométrica e língua natural), pois citou aspectos perceptivos e visuais dos quadriláteros notáveis, ou seja, fez uso da aparência global do quadrado e do retângulo em sua identificação. Ainda, o conceito de quadriláteros não foi construído com significado, uma vez que ele não sabe o que é um trapézio, um losango e um paralelogramo.

Essas características também são verificadas nas respostas à terceira questão do teste, isto é, na construção dos quadriláteros, empregaram a aparência física das figuras na diferenciação, como ilustrado pela Figura 92.

Q03 – Construir no espaço abaixo, dois quadrados diferentes.

Figura 92 – Respostas dos alunos Clenilda e Francisco José à primeira etapa da Q03.
Q03) Construir no espaço abaixo, dois quadrados diferentes:



(a) Produção de Clenilda
(9º ano, 14 anos)

(b) Produção de Francisco José
(6º ano, 12 anos)

Fonte: dados da pesquisa

Nessa questão, Clenilda e Francisco José construíram dois retângulos (não quadrados) com áreas diferentes em posição padrão, e os consideraram como quadrados.

Desse modo, mobilizaram a aparência física das figuras como parâmetro para diferenciá-las, tendo em vista que a definição do quadrado não foi considerada na produção, já que os lados dos quadriláteros desenhados não são iguais, ou seja, não são congruentes.

Isso também é verificado no segundo momento da questão, no qual eles apresentaram o motivo dos dois quadrados serem diferentes, como exibido na Figura 93.

Figura 93 – Respostas dos alunos Clenilda e Francisco José à segunda etapa da Q03.

Por que os dois quadrados que você construiu são diferentes?
 Porque um é menor que o outro.
 Por isso são diferentes

(a) Produção de Clenilda (9º ano, 14 anos)

Por que os dois quadrados que você construiu são diferentes?
 Porque o primeiro é maior e o segundo é menor.

(b) Produção de Francisco José (6º ano, 12 anos)

Fonte: dados da pesquisa

Pelos protocolos, notamos que o primeiro participante disse que os dois “quadrados” são diferentes porque um é menor do que o outro, enquanto que o segundo estudante argumentou algo parecido com a fala do outro discente (que a primeira figura é maior e a outra é menor). Aqui, eles fizeram uso da aparência global, já que não deixaram claro qual a grandeza geométrica associada ao quadrilátero foi considerada para diferenciar as duas formas geométricas.

Nessa direção, como construíram retângulos (com lados não congruentes entre si) em vez de quadrados, conforme Duval (1995), os dois participantes não realizaram a conversão entre os registros de representação semiótica “língua natural” e “figura geométrica”. Isso também pode ser verificado na fala de Francisco José, ao ser entrevistado pelo pesquisador, autor da tese, como apresentado pelo extrato que segue.

Pesquisador: Que figuras são essas que você desenhou?

Francisco José: Elas são quadrados.

Pesquisador: O que são quadrados?

Francisco José: São figuras com quatro lados pequenos. Todos são pequenos.

Pesquisador: Essas figuras são retângulos?

Francisco José: Não. Se eu tivesse feito elas mais largas em cima e em baixo, seriam retângulos.

Pesquisador: Então, se as duas são quadrados, há diferenças entre elas?

Francisco José: São diferentes. O primeiro é maior do que o segundo.

Pesquisador: Mas o que é maior no primeiro? Por que ele é maior do que o segundo?

Francisco José: O primeiro é mais alto e mais gordo. O segundo é mais baixo e mais magro. Então eles são diferentes.

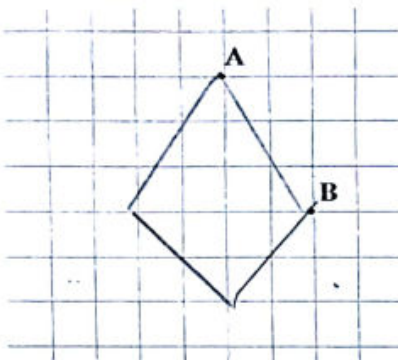
Novamente, pela fala de Francisco José fica explícito que ele faz uso da aparência global das figuras para diferenciá-las. Então, não fez uso dos elementos constituintes e das propriedades dos quadriláteros notáveis na construção e na explicação.

Outro aspecto que chamou atenção foi o uso dos termos “alto”, “baixo”, “gordo” e “magro” que são atributos de seres humanos, mas que foram empregados para caracterizar as formas geométricas. Logo, há uma influência da realidade física desse estudante sobre a análise dos objetos em Geometria.

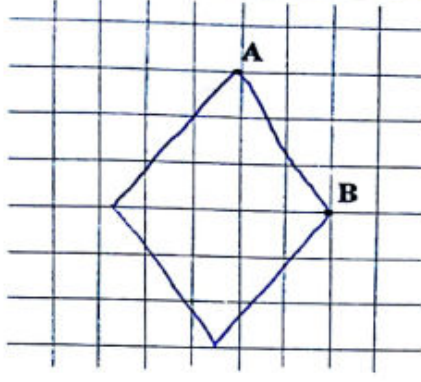
Na quarta questão do teste, também observamos que os aspectos perceptivos e visuais foram considerados nas respostas de Clenilda e Francisco José, como ilustrado na Figura 94.

Q04 – Utilizando os vértices A e B já marcados, desenhe o losango ABCD.

Figura 94 – Respostas dos alunos Clenilda e Francisco José à Q04.

Q04) Utilizando os vértices A e B já marcados, desenhe o losango ABCD:	Por que a figura que você desenhou é um losango?
	Por que está pedindo pra desenhar um losango

(a) Produção de Clenilda (9º ano, 14 anos)

Q04) Utilizando os vértices A e B já marcados, desenhe o losango ABCD:	Por que a figura que você desenhou é um losango?
	porque tem pontos diferentes e tem quatro lados.

(b) Produção de Francisco José (6º ano, 12 anos)
Fonte: dados da pesquisa

Pelos protocolos apresentados na Figura 94, percebemos que os dois participantes não levaram em consideração a definição e as propriedades do losango na construção e na justificativa e, dessa maneira, não construíram o sentido atribuído aos quadriláteros notáveis. Assim, tendo por base Duval (1995), os alunos Clenilda e Francisco José não fizeram a conversão (de ida e de volta) entre a língua natural e a figura geométrica.

No caso da primeira aluna, a figura construída é um trapézio e foi considerado como losango. Com relação ao segundo estudante, percebemos que a figura produzida não possui todos os lados congruentes e nem as diagonais são perpendiculares, logo, não é um losango. Assim, tendo por base Duval (1995), Clenilda e Francisco José não fizeram a conversão (de ida e de volta) entre a língua natural e a figura geométrica.

Esses atributos encontram-se também ilustrados no discurso de Francisco José, ao ser entrevistado, conforme extrato a seguir.

Pesquisador: Que figura é essa que você fez?
Francisco José: É um losango.
Pesquisador: O que é um losango?
Francisco José: É uma figura de quatro lados.
Pesquisador: O quadrado tem quatro lados, então, ele é um losango?
Francisco José: Não é. O quadrado tem quatro lados retos. O losango tem quatro lados tortos. O losango é como se fosse uma pipa. O quadrado é uma janela.
Pesquisador: Veja o que você escreveu aqui (apontando para o registro escrito do aluno). Você disse que o losango tem quatro lados e tem pontos diferentes. Você pode me explicar essa segunda parte?

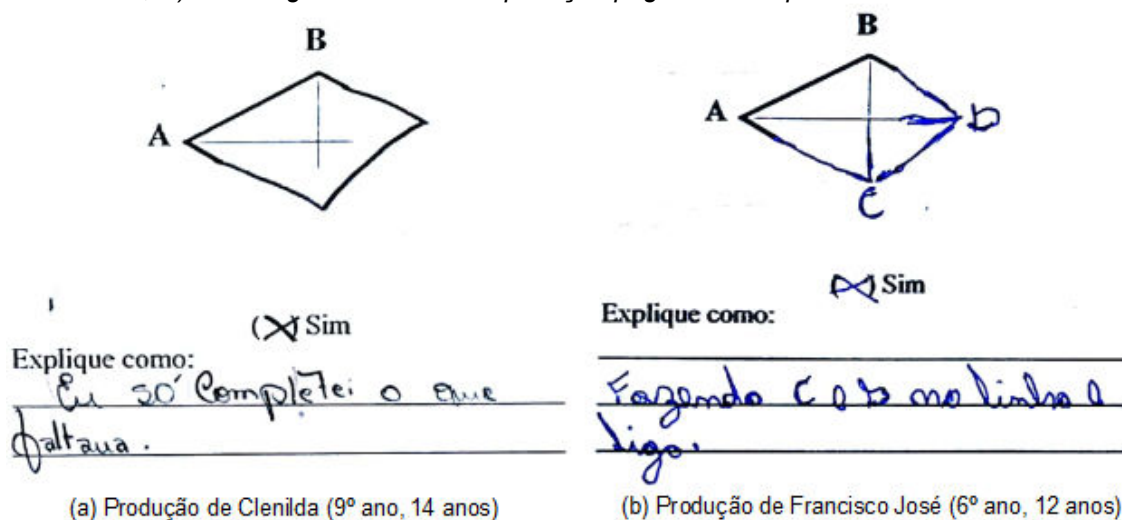
Francisco José: Sim, o losango tem pontos diferentes, ou seja, cada ponto que une os lados está em um lugar. Estão em lados diferentes. Na linha que tem o ponto A só tem ele, não tem outro ponto. No quadrado e no retângulo isso não acontece, os pontos estão no mesmo lado.

Pela fala, podemos verificar que Francisco José fez uso apenas da aparência física para justificar que a figura é um losango. Além disso, considerou que esse quadrilátero (objeto geométrico) é uma pipa, que é um objeto do mundo físico.

Ao dizer que os vértices não podem estar situados em uma mesma reta, é uma prova que ele só reconhece o losango em posição prototípica, assim, o quadrado padrão não é percebido como um caso particular de losango. Outra vez, não realizou conversão entre a figura geométrica e a língua natural, para Duval (1995).

Resultados parecidos podem ser notados na quinta questão do teste, também sobre a produção de losango, como apresentado na Figura 95. Novamente, Clenilda e Francisco José não apresentam compreensão adequada sobre os losangos.

Figura 95 – Respostas dos alunos Clenilda e Francisco José à Q05.
Q05) O losango **ABCD** tem um pedaço apagado. Você pode reconstruí-lo?



Fonte: dados da pesquisa

Pela Figura 95, observamos que os dois participantes construíram os losangos a partir de aspectos perceptivos e visuais, pois os lados das figuras não são congruentes. Por exemplo, o desenho produzido por Clenilda se aproxima mais da representação de um trapézio.

Para tanto, análogo à questão anterior, os dois discentes não entenderam o conceito de losango com significado, pois não consideram a definição e as

propriedades desse quadrilátero na construção. Logo, como aponta Duval (1995) não realizaram conversão entre os registros de representação semiótica. Isso ainda pode ser constatado na entrevista realizada com o segundo estudante.

Pesquisador: *Como você reconstruiu a figura?*

Francisco José: *Primeiro eu coloquei os pontos C e D. Em seguida, liguei as linhas, então, formou o losango.*

Pesquisador: *A figura reconstruída é um losango?*

Francisco José: *É sim.*

Pesquisador: *Por quê?*

Francisco José: *Porque ela tem quatro lados tortos.*

Pela fala, percebemos que o entrevistado fez uso do aspecto global do losango em sua justificativa. Isso pode ser comprovado no trecho “lados tortos”. Em nenhum momento, foi feita referência aos elementos constituintes e às propriedades dos quadriláteros notáveis na fala. Mais uma vez, considerando a teoria de Duval (1995), o estudante não realizou conversão entre a figura geométrica e a língua natural.

Realizando uma análise global das cinco questões do teste, de acordo com Duval (1995), por terem construído desenhos relativos às representações de quadriláteros notáveis, os dois discentes trabalharam na apreensão sequencial. Também, não verificamos a realização de tratamento referente aos registros de representação semiótica.

Ainda, como consideraram apenas a aparência física dos quadriláteros notáveis, isto é, os aspectos visuais e perceptivos nas respostas às questões do teste, nesse sentido, Clenilda e Francisco José atuaram na apreensão perceptiva com olhar geométrico do botanista.

Portanto, concluímos que o nível n do modelo proposto nesta tese é formado por dois grupos de alunos. O primeiro é composto pelos estudantes que analisam os quadriláteros notáveis apenas a partir de um subconjunto de características visuais, visto que não formam imagens mentais. O segundo é constituído pelos discentes que reconhecem esses quadriláteros por meio do aspecto global, não considerando a definição e as propriedades desses objetos geométricos.

Logo, esse nível de desenvolvimento do pensamento geométrico, relativo aos quadriláteros notáveis, possui dois subníveis: $(n)_a$ e $(n)_b$. O subnível $(n)_a$ corresponde

ao primeiro grupo de alunos, mencionados acima, por sua vez, o subnível $(n)_b$ abrange o segundo grupo de estudantes.

6.1.2 Nível $n + 1$

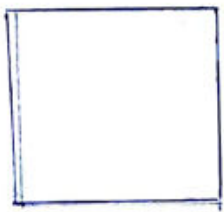
Os alunos que se encontram nesse nível analisam os quadriláteros notáveis fazendo referência aos elementos constituintes ou às propriedades, todavia, não realizam a inclusão de classe. Na identificação de um quadrilátero, amplamente e sem significado, em certos casos, os estudantes aplicam as definições dessas formas geométricas.

Nessa direção, os discentes que trabalham no nível $n + 1$, atuam na abstração geométrica analítica, uma vez que empregam os elementos da definição ou as propriedades no reconhecimento de um quadrilátero notável. Contudo, não estabelecem relações de implicação entre tais propriedades.

Uma primeira estratégia mobilizada pelos alunos que atuam nesse nível é analisar os quadriláteros notáveis apenas por meio da sua definição, ou seja, pelos componentes constituintes desses objetos geométricos. Nesse cenário, não utilizam as propriedades dessas figuras geométricas em sua identificação.

Esse pressuposto é confirmado nas respostas à primeira questão do teste feita pela aluna Amélia Maria (com 15 anos e cursando o 9º ano), como apresentado na Figura 96.

Figura 96 – Resposta da aluna Amélia Maria à primeira etapa da Q01.
Q01) *Você desenhou um retângulo. Seu colega desenhou uma figura de quatro lados que não é um retângulo. Nos espaços abaixo, desenhe como poderia ser a sua figura e a figura do seu colega.*

SUA FIGURA:	FIGURA DE SEU COLEGA:
	

Produção de Amélia Maria (9º ano, 15 anos)

Fonte: dados da pesquisa

Nesse primeiro momento da questão, observamos que a aluna conseguiu reconhecer quadriláteros notáveis e produzi-los por meio da nomenclatura. Assim, analisando a produção realizada em “SUA FIGURA”, considerando a teoria de Duval (1995), Amélia Maria realizou conversão de ida, visto que transformou a representação “língua natural” em “figura geométrica”.

Entretanto, averiguando o registro deixado em “FIGURA DE SEU COLEGA”, percebemos que o conceito de quadriláteros notáveis não foi aplicado de modo adequado, tendo em vista que a estudante fez um quadrado, considerando-o como um não retângulo. Nesse caso, para Duval, não ocorreu conversão de ida entre os registros de representação semiótica.

Por outro lado, ao justificar o porquê da figura do seu colega não ser um retângulo, Amélia Maria mencionou um elemento constituinte do quadrado, que faz parte de sua definição: possuir os lados congruentes. Tal fato pode ser verificado na segunda etapa da questão, conforme exibido na Figura 97.

Figura 97 – Resposta da aluna Amélia Maria à segunda etapa da Q01.

Por que sua figura é um retângulo?	Por que a figura de seu colega não é um retângulo?
Porque possui dois pares de lados com a mesma medida, e também possui duas diagonais, e também 4 ângulos internos retos	Porque todos os seus lados possuem a mesma medida.

Produção de Amélia Maria (9º ano, 15 anos)

Fonte: dados da pesquisa

Pelos protocolos apresentados na Figura 97, a discente justificou que sua figura era um retângulo fazendo uso de elementos que compõem esse quadrilátero: possuir dois pares de lados paralelos opostos congruentes, duas diagonais, quatro ângulos internos retos.

Dessa forma, podemos constatar que Amélia Maria fez uso apenas de elementos da definição do retângulo, não fazendo referência à articulação das propriedades. Como há coerência entre a figura geométrica e o registro escrito, para Duval, a participante realizou conversão de volta entre essas representações. Isso

também é revelado na fala dessa aluna, ao ser entrevistada conforme extrato a seguir.

Pesquisador: *Que figura é essa que você desenhou em “SUA FIGURA”?*
Amélia Maria: *É um retângulo.*
Pesquisador: *Por que ela é um retângulo?*
Amélia Maria: *Porque ela tem dois lados paralelos com a mesma medida de comprimento. Os seus ângulos internos são iguais, logo, são retos.*
Pesquisador: *Como se chama a figura do seu colega?*
Amélia Maria: *Quadrado.*
Pesquisador: *Por que ela é um quadrado?*
Amélia Maria: *Porque os seus lados têm a mesma medida de comprimento.*
Pesquisador: *O que você me diz sobre os ângulos internos do quadrado? Como eles são?*
Amélia Maria: *Eles são iguais. Os quatro medem 90°, são ângulos retos.*
Pesquisador: *O quadrado possui dois lados paralelos com a mesma medida?*
Amélia Maria: *Sim, tem.*
Pesquisador: *Nesse caso, se o quadrado tem dois lados paralelos com a mesma medida e os ângulos internos retos, é correto afirmar que ele é um retângulo?*
Amélia Maria: *Não. Em minha opinião, é errado falar isso. Eles têm essas duas características, mas veja que o quadrado tem todos os lados iguais, e o retângulo não. Os lados do retângulo não são iguais. Tem dois deles maiores com a mesma medida, e outros dois menores também iguais. Isso não ocorre com o quadrado. Então, o quadrado não é retângulo.*

Pelo diálogo construído, evidenciamos que a participante explicou que o retângulo possui ângulos internos retos, logo, faz uso da definição desse quadrilátero notável. Conforme Duval (1995), Amélia Maria realizou a conversão de volta entre a figura geométrica e a língua natural.

Apesar de fazer referência aos elementos constituintes do quadrado em sua fala de forma correta (lados congruentes e ângulos internos retos), não é possível afirmar que houve conversão, pois ela produziu uma resposta inadequada à questão, visto que considerou o quadrado como não retângulo.

Isso ocorre, pois a aluna não consegue estabelecer relações entre as características e as propriedades do quadrado e do retângulo. Caso contrário, teria estabelecido a inclusão de classe.

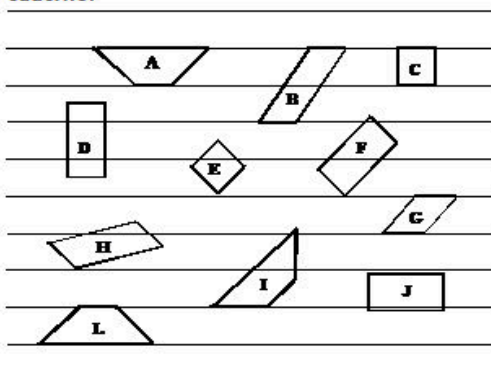
De modo análogo, na segunda questão do teste relativa à classificação de quadriláteros notáveis, verificamos que, em geral, os elementos constituintes dessas figuras geométricas foram mobilizados, como ilustrado na Figura 98.

Assim, notamos que todas as figuras foram identificadas como quadriláteros. Isso não significa que Amélia Maria realizou inclusão de classe, mas que considerou a definição dos quadriláteros notáveis na classificação. Do mesmo modo, os quadrados (figuras C e E) foram reconhecidos, assim como os retângulos não

quadrados (figuras D, F e J), os trapézios (figuras A, I e L) e os paralelogramos oblíquos (figuras B, G e H).

Figura 98 – Resposta da aluna Amélia Maria à Q02.

Q02 – Em uma folha de caderno estão desenhadas várias figuras de quatro lados. Tente separar por família, as figuras da folha de caderno.



	FIGURAS
Retângulos:	D, F, J, B, H
Trapézios:	A, I, L
Quadriláteros:	A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, L
Quadrados:	C, E
Paralelogramos:	A, B, G, F, E
Losangos:	G

Produção de Amélia Maria (9º ano, 15 anos)

Fonte: dados da pesquisa

Todavia, dois paralelogramos oblíquos (figuras B e H) foram considerados retângulos. Em nosso entendimento, isso ocorreu em decorrência da posição na folha de papel dessas figuras, que se “assemelham” na aparência global.

Ainda, um dos retângulos (figura F) foi tido como paralelogramo, assim como um dos quadrados (figura E). Isso não quer dizer que Amélia Maria articulou as propriedades desses quadriláteros, mas que ela considerou a posição dessas figuras na classificação, que aparentemente apresentam lados “tortos”.

Na entrevista realizada com essa aluna, podemos evidenciar que, em geral, ela considerou os elementos constituintes dos quadriláteros notáveis na resolução, como podemos notar no extrato a seguir.

Pesquisador: Como você classificou as figuras apresentadas?

Amélia Maria: Eu olhei se os ângulos internos eram retos, se os lados eram iguais e se tinham pares de lados paralelos com a mesma medida de comprimento.

Pesquisador: Por que você considerou as figuras D, F, J, B e H como retângulos?

Amélia Maria: Porque eles têm dois pares de lados paralelos com a mesma medida de comprimento e os ângulos internos retos.

Pesquisador: Com relação às figuras A, I e L, você as classificou como trapézio. Por quê?

Amélia Maria: O trapézio ele não tem dois pares de lados com a mesma medida. Os três daqui só têm um par de lados paralelos. Então, eles são trapézios.

Pesquisador: Percebi que você colocou todas as figuras como quadriláteros. Por quê?

Amélia Maria: Porque todas as figuras têm quatro lados, quatro ângulos internos e duas diagonais.

Pesquisador: Toda figura que apresenta essas características pode ser considerada um quadrilátero?

Amélia Maria: Sim, pode.

Pesquisador: Há quadrados entre as figuras?

Amélia Maria: Sim, tem.

Pesquisador: Quais?

Amélia Maria: O C e o E.

Pesquisador: Podes me explicar por quê?

Amélia Maria: Os dois têm quatro lados com a mesma medida e os ângulos internos são retos.

Pesquisador: Esses dois quadrados são retângulos?

Amélia Maria: Não são. Os lados deles são diferentes. No quadrado, todos os lados são iguais. Isso não acontece com o retângulo.

Pesquisador: Entre as figuras, quais são paralelogramos?

Amélia Maria: Eita, eu fiz errado na prova (olhando para sua resposta). O E e F não são paralelogramos. Fiz besteira, né?

Pesquisador: Não se preocupe com isso. Então, quais figuras são paralelogramos?

Amélia Maria: Acho que o B, H e...

Pesquisador: Por quê?

Amélia Maria: Eles têm dois pares de lados com a mesma medida e os ângulos internos não medem 90° .

Pesquisador: Há losangos entre as figuras?

Amélia Maria: Tem sim, o G é.

Pesquisador: Por quê?

Amélia Maria: Todos os lados dele são iguais e os ângulos internos não são retos.

Pesquisador: As figuras C e E são losangos?

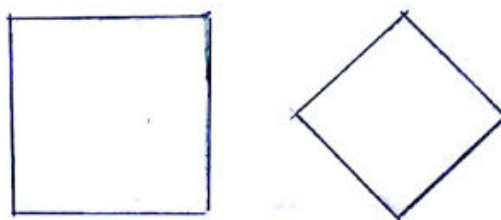
Amélia Maria: Não são. Eles têm ângulos internos retos e para ser losango, os ângulos tem que ser diferentes.

Pela fala de Amélia Maria, percebemos que, quase sempre, ela fez o reconhecimento dos quadriláteros notáveis a partir dos elementos constituintes, isto é, por meio da definição. Logo, as propriedades não foram consideradas e nem articuladas. Desse modo, o quadrado não foi considerado como losango e retângulo.

Mesmo não realizado inclusão de classe, como sinalizado por Duval (1995), a aluna fez a conversão entre os registros de representação semiótica, passando de figura geométrica para língua natural.

Do mesmo modo, esses atributos podem ser percebidos na resposta à terceira questão do teste, relacionada à construção de quadrados, como mostrado na Figura 99.

Figura 99 – Resposta da aluna Amélia Maria à primeira etapa da Q03.
Q03) Construir no espaço abaixo, dois quadrados diferentes:



Produção de Amélia Maria (9º ano, 15 anos)
Fonte: dados da pesquisa

Pelo protocolo apresentado na Figura 99, Amélia Maria produziu um quadrado padrão (com lados paralelos à margem horizontal da folha de papel) e um quadrado em posição não prototípica (“inclinado”). Esse foi um primeiro aspecto utilizado para diferenciar as duas figuras construídas.

Além disso, podemos atentar que os dois quadrados apresentam diferenças com relação às grandezas geométricas associadas, tais como o comprimento dos lados (ou o perímetro) e a área.

Nesse sentido, tendo por sustentação a teoria de Duval (1995), a estudante realizou a conversão entre os registros de representação semiótica, pois considerando as marcações deixadas na folha de papel, ela compreendeu o enunciado da questão, apresentando uma resposta adequada (dois quadrados foram criados).

Analisando o segundo momento da questão, reparamos que a aluna não expressou o motivo dos quadrados produzidos serem diferentes, mas sim apresentou um dos elementos da definição desses quadriláteros notáveis, explicitando porque as figuras são quadrados. A Figura 100 ilustra essa situação.

Figura 100 – Resposta da aluna Amélia Maria à segunda etapa da Q03.

Por que os dois quadrados que você construiu são diferentes?
Porque eles possuem seus ângulos internos iguais.

Produção de Amélia Maria (9º ano, 15 anos)

Fonte: dados da pesquisa

Outro aspecto a ser considerado é a autonomia apresentada pela participante no que se refere às figuras prototípicas, visto que foi produzido um quadrado, cujos lados não estão paralelos às bordas da folha de caderno. Tal fato pode ser verificado na fala da estudante, ao ser entrevistada, como mostrado no extrato abaixo.

Pesquisador: Qual é o nome dessas figuras que você fez?

Amélia Maria: Quadrado.

Pesquisador: Por que elas recebem esse nome?

Amélia Maria: Porque elas têm quatro lados com a mesma medida. Os ângulos internos medem 90°.

Pesquisador: Agora, me diz por que os dois quadrados, que você fez, são diferentes?

Amélia Maria: Eu fiquei em dúvida nessa questão.

Pesquisador: Por quê?

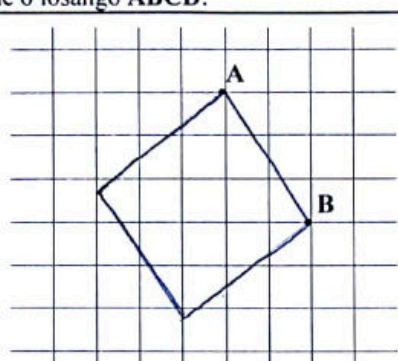
Amélia Maria: Eu não sabia o que responder. Os dois são quadrados. No começo, não percebi diferença, então disse que eles têm ângulos retos. Mas depois percebi que os lados deles são diferentes, o primeiro tem os lados maiores do que o segundo. Ainda, o segundo está... Como posso dizer? ... Ele está torto, ou seja, em outra posição. O primeiro está.... Está em pé.

Novamente, pelo discurso de Amélia Maria, fica comprovado que ela considerou os elementos constituintes da definição de quadrado na resolução da questão. Ela é capaz de reconhecer esse quadrilátero em diferentes posições na folha do caderno, representando um importante avanço em relação ao seu pensamento geométrico.

Na quarta questão do teste, igualmente, percebemos que os elementos constituintes (lados com mesma medida, duas diagonais, etc.) do losango foram mobilizados pela estudante, conforme ilustrado na Figura 101. Aqui, para Duval (1995), ocorreu a conversão (de ida e de volta) entre os registros de representação semiótica (língua natural e figura geométrica).

Q04 – Utilizando os vértices A e B já marcados, desenhe o losango ABCD.

Figura 101 – Resposta da aluna Amélia Maria à Q04.

Q04) Utilizando os vértices A e B já marcados, desenhe o losango ABCD: 	Por que a figura que você desenhou é um losango? Porque seus lados possuem a mesma medida, tem duas diagonais e dois pares de ângulos internos congruentes.

Produção de Amélia Maria (9º ano, 15 anos)

Fonte: dados da pesquisa

Pela Figura 101, percebemos que Amélia Maria construiu um losango com ângulos retos, dessa forma, ela fez um quadrado. Tal fato não significa que a aluna estabeleceu relações entre as propriedades desses dois quadriláteros, pois como

verificado na entrevista, ela não reconheceu o quadrado como um caso especial de losango.

Pesquisador: Que figura é essa que você fez?

Amélia Maria: É um losango.

Pesquisador: Por que é um losango?

Amélia Maria: Porque tem quatro lados iguais, com a mesma medida de comprimento e os ângulos internos não são retos, mas há pares iguais.

Pesquisador: Como assim? Pares iguais?

Amélia Maria: É o seguinte. O ângulo de cima (apontando para o ângulo $\hat{A}$) é igual ao do lado (apontando para o ângulo $\hat{B}$). Então eles formam um par de ângulos iguais. Mas eles não são retos. Os outros ângulos formam outro par de ângulos. Então, o losango tem dois pares de ângulos internos congruentes.

Pesquisador: E quanto eles medem?

Amélia Maria: Isso eu não sei.

Pesquisador: Como é que se faz para medi-los?

Amélia Maria: Sei não.

Pesquisador: A figura que você desenhou, é um quadrado?

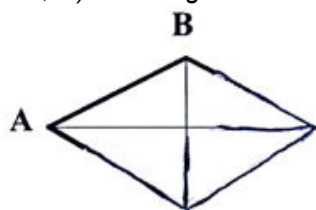
Amélia Maria: Não é. O quadrado tem os ângulos retos e o losango não tem.

Pela fala apresentada acima, observamos que a aluna considerou a definição de losango na construção: *é o quadrilátero que apresenta todos os lados congruentes entre si*. Todavia, não reconheceu que, em caso particular, o losango pode ter ângulos internos retos.

Acerca da congruência entre os ângulos internos, Amélia Maria confundiu ângulos adjacentes com ângulos opostos. Desse modo, para ela, ângulos adjacentes são iguais, em vez de perceber a seguinte relação dos paralelogramos: *os ângulos opostos são congruentes*.

Achados parecidos são reparados na quinta questão do teste, relativa à construção de losango, como ilustrado na Figura 102. Outra vez, Amélia Maria utilizou a definição desse quadrilátero notável na resolução.

Figura 102 – Resposta da aluna Amélia Maria à Q05.
Q05) O losango **ABCD** tem um pedaço apagado. Você pode reconstruí-lo?



☒ Sim

Explique como:

usando uma régua eu tracei
as 2 diagonais depois eu
liguei os seus lados.

Produção de Amélia Maria (9º ano, 15 anos)

Fonte: dados da pesquisa

Na reconstrução do losango, por meio de uma régua, a partícipe completou as diagonais, em seguida, traçou os lados, respeitando a congruência entre eles. Desse modo, Amélia Maria realizou conversão entre os registros de representação semiótica, como sinalizado por Duval (1995).

Apesar de ter feito referências às diagonais, a discente não percebeu que elas são perpendiculares no ponto médio, como podemos evidenciar na entrevista, conforme extrato que segue.

Pesquisador: Como você reconstruiu a figura? Amélia Maria: Com a régua. Pesquisador: Como você fez, então? Amélia Maria: Primeiro eu fiz as diagonais, depois fiz os lados. Pesquisador: Você mediu as diagonais? Amélia Maria: Não. Só medi os lados para que o desenho ficasse certo. Pesquisador: Que figura você refez? Amélia Maria: É um losango. Pesquisador: Por que ela é um losango? Amélia Maria: Oxente. Porque ela tem quatro lados com a mesma medida.

Pelo diálogo, notamos que a estudante não apresentou dificuldades para refazer o losango. Para isso, considerou que os lados desse quadrilátero são congruentes entre si, demonstrando que aplicou a definição dessa figura na resolução da questão.

Fazendo uma análise geral das cinco questões do teste, com base na teoria de Duval (1995), concluímos que Amélia Maria produziu desenhos referentes aos quadriláteros notáveis e, portanto, mobilizou a apreensão geométrica sequencial.

Além disso, apesar de ter feito menção aos elementos que compõem os quadriláteros notáveis nas respostas ao teste, essa participante não fez uso acertado da apreensão geométrica discursiva, uma vez que não reconheceu o quadrado como losango e retângulo ao mesmo tempo.

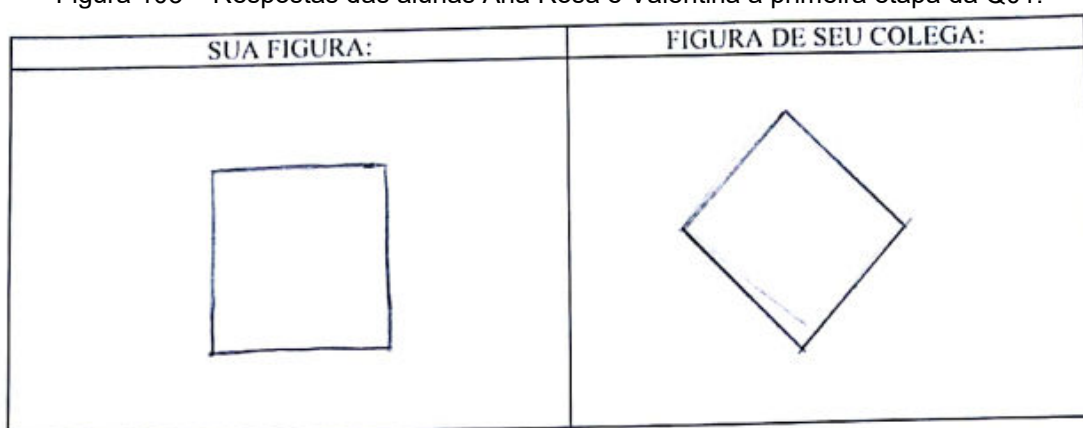
Em geral, ao que tudo indica, isso ocorre em razão de Amélia Maria sofrer influências de um ensino de Geometria caracterizado pela ausência de situações de construção, de inclusão e pela apreensão perceptiva com olhar botanista.

Outra estratégia assinalada nesse nível de desenvolvimento do pensamento geométrico é analisar os quadriláteros notáveis por meio de suas propriedades, contudo, sem articulá-las.

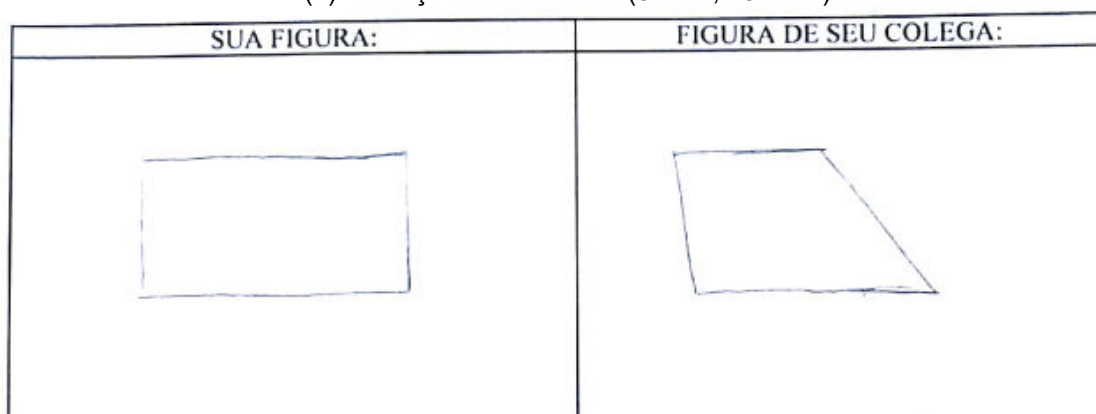
Esses aspectos podem ser evidenciados nas respostas relacionadas à primeira questão do teste, feitas pelas alunas Ana Rosa (com 13 anos e cursando o 8º ano) e Valentina (14 anos e matriculada no 7º ano), como apresentado na Figura 103.

Q01 – Você desenhou um retângulo. Seu colega desenhou uma figura de quatro lados que não é um retângulo. Nos espaços abaixo, desenhe como poderia ser a sua figura e a figura do seu colega.

Figura 103 – Respostas das alunas Ana Rosa e Valentina à primeira etapa da Q01.



(a) Produção de Ana Rosa (8º ano, 13 anos)



(b) Produção de Valentina (7º ano, 14 anos)

Fonte: dados da pesquisa

Nessa primeira etapa da questão, verificamos que as duas alunas conseguiram realizar a identificação de quadriláteros notáveis por intermédio da nomenclatura, e de produzi-los sem dificuldades. Dessa maneira, apreciando as construções feitas em “SUA FIGURA”, de acordo com a teoria de Duval (1995), elas fizeram a conversão de ida entre os registros de representação semiótica, passando da língua natural para a figura geométrica.

Logo depois, analisando os registros deixados em “FIGURA DO SEU COLEGA”, percebemos que o conceito foi empregado acertadamente pelas participantes, visto que Ana Rosa produziu um paralelogramo oblíquo (que não possui ângulos internos retos, logo, não é um retângulo) e Valentina produziu um trapézio (cujos ângulos internos não medem 90° , então, não é um retângulo). Mais uma vez, realizaram conversão de ida entre os registros de representação semiótica, como aponta Duval (1995).

Também, isso pode ser evidenciado na segunda fase da questão, na qual, as discentes justificaram suas produções, realizando, assim, a conversão de volta entre a figura geométrica e a língua natural, de acordo com Duval (1995), como exibido na Figura 104.

Figura 104 – Respostas das alunas Ana Rosa e Valentina à segunda etapa da Q01.

Por que sua figura é um retângulo?	Por que a figura de seu colega não é um retângulo?
porque ele tem os ângulos internos medindo 90° ou seja ele tem os ângulos retos	Por ele não tem os ângulos retos

(a) Produção de Ana Rosa (8º ano, 13 anos)

Por que sua figura é um retângulo?	Por que a figura de seu colega não é um retângulo?
Porque ele tem todos os ângulos retos e um quadrilátero	Porque ele não tem todos os ângulos retos

(b) Produção de Valentina (7º ano, 14 anos)

Fonte: dados da pesquisa

Pela Figura 104, verificamos que Ana Rosa explicou que sua figura é um retângulo porque ele possui os ângulos internos retos. O mesmo pode ser observado na justificativa apresentada por Valentina. Com relação à figura do seu colega, as duas estudantes consideraram a abertura dos ângulos internos, dizendo que eles não são retos.

Até aqui, não notamos que as partícipes explicitaram o uso das propriedades dos quadriláteros notáveis em suas respostas, deixando claro que mobilizam os elementos constituintes. Todavia, ao focarmos a análise do discurso de Ana Rosa na entrevista, notamos que as propriedades foram sinalizadas, conforme extrato abaixo.

Pesquisador: *Que figura é essa que você desenhou aí? (apontando para o espaço “SUA FIGURA”)*

Ana Rosa: *É um retângulo.*

Pesquisador: *Por que ela é um retângulo?*

Ana Rosa: *Porque ele é um paralelogramo.*

Pesquisador: *Como assim?*

Ana Rosa: *O retângulo além de ter todos os ângulos internos retos, pois medem 90° , ele tem dois pares de lados opostos paralelos. Assim, ele também é um paralelogramo.*

Pesquisador: *Essa figura não seria um quadrado?*

Ana Rosa: *Não, não pode ser. O quadrado não é retângulo. O quadrado tem todos os lados iguais. O retângulo não apresenta isso. A figura que eu desenhei é um retângulo. Eu só o coloquei em pé.*

Pesquisador: *Então, o quadrado não é retângulo?*

Ana Rosa: *Isso mesmo. Não é.*

Pesquisador: *O quadrado é um losango?*

Ana Rosa: *Também não é.*

Pesquisador: *Por quê?*

Ana Rosa: *O quadrado tem todos os ângulos medindo 90° . O losango não. Os ângulos dele (do losango) têm outras medidas.*

Pesquisador: *Como se chama a figura do seu colega?*

Ana Rosa: *É um paralelogramo. Ele tem dois pares de lados paralelos opostos, com a mesma medida, então, eles são congruentes. Também, os ângulos deles não são retos.*

Pesquisador: *A figura do seu colega não é um losango?*

Ana Rosa: *Parece um losango, mas não. O losango tem todos os lados iguais e a figura do meu colega não tem todos os lados iguais.*

Pesquisador: *O losango é um paralelogramo?*

Ana Rosa: *É sim, já que ele possui dois pares de lados opostos iguais.*

Pesquisador: *Então, por que a figura do seu colega não é um losango? Já que o losango é um paralelogramo?*

Ana Rosa: *É o seguinte. O losango tem dois pares de lados congruentes e todos os lados são iguais. A figura do meu colega não tem todos os lados com a mesma medida, mas tem dois pares de lados iguais. Assim, ele é só paralelogramo. Além disso, as diagonais do losango são perpendiculares. Se eu desenhar as diagonais aqui (apontando para a “figura do seu colega”), as diagonais não vão ficar perpendiculares.*

Pesquisador: *Por que as diagonais do losango são perpendiculares?*

Ana Rosa: *Porque quando elas se encontram, elas formam ângulos retos, todos medem 90° . Isso não acontece com essa figura que desenhei aqui.*

Na entrevista, notamos que Ana Rosa apresentou uma lista de propriedades dos paralelogramos em sua fala: “os seus lados opostos são paralelos”, “seus lados opostos são congruentes”, além de uma importante característica dos losangos: “suas diagonais são perpendiculares entre si”. Logo, essa estudante fez a conversão entre os registros de representação semiótica, como indica Duval (1995).

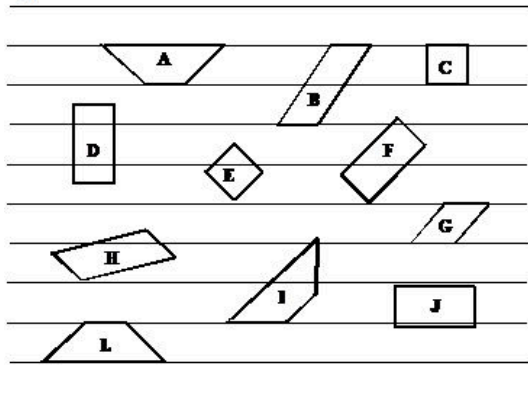
O fato de a aluna ter considerado o retângulo e o losango como paralelogramos não significa que realizou inclusão de classe, pois, como verificado na sua fala, o quadrado não foi considerado retângulo e losango ao mesmo tempo. Assim, Ana Rosa conseguiu analisar esses quadriláteros notáveis a partir das propriedades, contudo, sem realizar uma conexão entre elas.

Resultados semelhantes podem ser notados nas respostas das duas estudantes à segunda questão do teste, relacionada à classificação de quadriláteros.

Aqui, verificamos que, em geral, tanto Ana Rosa como Valentina fizeram uso das propriedades dessas figuras geométricas na resolução do item, conforme ilustrado pela Figura 105.

Figura 105 – Respostas das alunas Ana Rosa e Valentina à Q02.

Q02 – Em uma folha de caderno estão desenhadas várias figuras de quatro lados. Tente separar por família, as figuras da folha de caderno.



	FIGURAS
Retângulos:	D, J
Trapézios:	L, I, A
Quadriláteros:	A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, L
Quadrados:	C
Paralelogramos:	B, C, D, E, F, G, H, J
Losangos:	E

(a) Produção de Ana Rosa (8º ano, 13 anos)

	FIGURAS
Retângulos:	D, J
Trapézios:	L, A, I
Quadriláteros:	J, B, C, E, F, H, A, D, G, I, L
Quadrados:	C
Paralelogramos:	H, B, F, G
Losangos:	E

(b) Produção de Valentina (7º ano, 14 anos)

Fonte: dados da pesquisa

Pelos protocolos apresentados na Figura 105, observamos que as duas partícipes reconheceram a maioria dos retângulos padrões (figuras D e J). Semelhantemente, os trapézios (figuras A, I e L) foram identificados, sem maiores dificuldades.

Todas as onze figuras disponibilizadas foram classificadas como quadriláteros. No entanto, isso não revela que Ana Rosa e Valentina relacionaram conexões entre as propriedades, mas que identificaram essas formas geométricas como porções em um plano, constituídas por quatro pontos quaisquer. Nessa direção, as duas estudantes realizaram conversão entre os registros de representação semiótica (figura geométrica e língua natural).

Apenas o quadrado em posição padrão (figura C) foi identificado pelas duas alunas. Todavia, elas não reconheceram o outro quadrado (figura E), em posição não prototípica, demonstrando, de certo modo, que há influência de um ensino de Geometria com foco na análise de figuras prototípicas.

Pela Figura 105, evidenciamos que Ana Rosa classificou os retângulos e os quadrados como paralelogramos, desse modo, ela foi capaz de entender que esses quadriláteros possuem as mesmas características, tais como possuir ângulos internos retos, dois pares de lados opostos paralelos congruentes. Para tanto, como sinalizado por Duval (1995), essa estudante converteu os registros de representação semiótica.

No que lhe diz respeito à Valentina, ela só identificou os paralelogramos oblíquos e um dos retângulos em posição não padrão (figura F). Provavelmente, apenas esse retângulo foi considerado no mencionado grupo, devido sua posição “inclinada”, que aparentemente lembra um paralelogramo com ângulos não retos.

Além disso, o quadrado não padrão (Figura E) foi considerado como losango, possivelmente, devido a esse mesmo motivo. Em ambos os casos, há influência de um ensino de quadriláteros que enfatiza a identificação de figuras prototípicas, em detrimento às situações de construção e de inclusão. Tal fenômeno pode ser constatado na fala de Ana Rosa, ao ser entrevistada pelo pesquisador (autor dessa tese), como ilustrado a seguir.

Pesquisador: Como você fez a classificação dessas onze figuras?

Ana Rosa: Ah? Entendi não.

Pesquisador: O que você considerou em cada figura, para classificá-las conforme os nomes apresentados no quadro?

Ana Rosa: Primeiro, eu olhei para a forma dela. Aí, percebi que todas têm quatro lados. Aí, pensei... Todas são quadriláteros. Depois, fui separando em retângulos, trapézios, paralelogramos...

Pesquisador: Por que essas figuras são quadriláteras? O que é quadrilátero?

Ana Rosa: Sim, todas são. Todas elas têm quatro lados, quatro vértices, quatro ângulos internos, quatro ângulos externos e duas diagonais. Quadrilátero é isso. É uma figura geométrica que tem todas essas coisas aí.

Pesquisador: Então, você olhou se as figuras possuem essas características?

Ana Rosa: Isso mesmo.

Pesquisador: Então, me fala, quais figuras são retângulos?

Ana Rosa: Os retângulos são o D e o J.

Pesquisador: Por que elas são retângulos?

Ana Rosa: Elas têm quatro ângulos internos que medem 90° . Têm dois pares de lados com a mesma medida. Aí, eles são retângulos.

Pesquisador: A figura F é um retângulo?

Ana Rosa: Não é. Ela é um paralelogramo, os ângulos não são retos.

Pesquisador: O retângulo é um paralelogramo?

Ana Rosa: Sim, já que ele tem dois lados opostos com a mesma medida.

Pesquisador: E o quadrado? Ele é um paralelogramo?

Ana Rosa: Sim, pelo mesmo motivo do retângulo.

Pesquisador: E o losango?

Ana Rosa: Também.

Pesquisador: Deixa-me ver se entendi. O retângulo, o quadrado e o losango são paralelogramos, pois têm dois lados paralelos com a mesma medida?

Ana Rosa: Isso mesmo.

Pesquisador: Então, é correto dizer que o quadrado é retângulo e losango ao mesmo tempo?

Ana Rosa: Não, é errado. O quadrado tem todos os lados iguais e os ângulos retos. O retângulo tem os ângulos retos, mas os lados não são iguais. O losango tem todos os lados iguais, mas os ângulos não são retos. Mas todos têm dois pares de lados iguais, então, eles são paralelogramos.

Pesquisador: Por que você classificou as figuras A, I e L como trapézios?

Ana Rosa: Os trapézios não têm dois pares de lados iguais. Dá para ver que têm dois lados diferentes.

Pesquisador: Então, os trapézios são paralelogramos?

Ana Rosa: Não, eles são diferentes. Os paralelogramos têm dois pares de lados iguais. Os trapézios não têm isso.

Pesquisador: Por que você considerou a figura C como quadrado?

Ana Rosa: Porque ela tem todos os lados com a mesma medida e os ângulos retos.

Pesquisador: A figura E apresenta essas características? É um quadrado?

Ana Rosa: Não. O E só tem os lados iguais, os ângulos não são retos, então é losango.

Pesquisador: A figura C é um losango?

Ana Rosa: Não, ela é um quadrado.

Pesquisador: Por que as figuras B, C, D, E, F, G, H e J foram classificadas como paralelogramos?

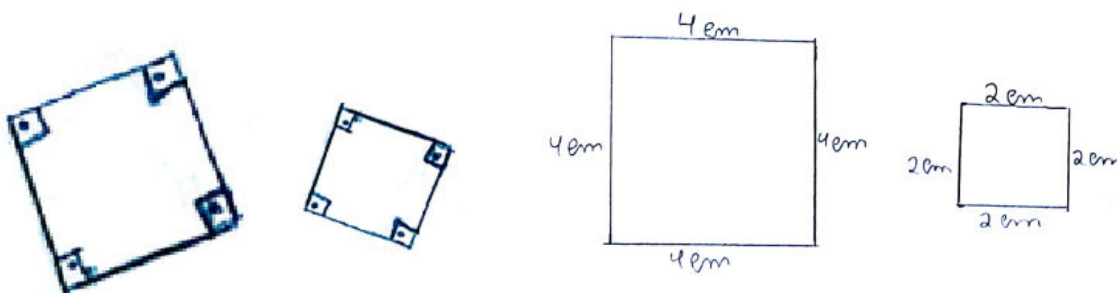
Ana Rosa: Todas elas têm dois pares de lados com a mesma medida.

Pelo diálogo construído, comprovamos que Ana Rosa identificou os quadriláteros notáveis por meio de suas características, sem, contudo, estabelecer relações de inferências entre elas. Desse modo, o quadrado não foi reconhecido como todo paralelogramo que é retângulo e losango, simultaneamente.

Mesmo diante desse cenário, em nosso entendimento, na maioria das vezes, essa participante realizou conversão entre os registros de representação semiótica, como indicado por Duval (1995).

Na terceira questão do teste, que abordou a construção de dois quadrados diferentes, verificamos que Ana Rosa discriminou as duas formas geométricas por meio da posição ocupada na folha de papel, também pela medida dos comprimentos relativos aos lados, como mostrado na Figura 106. Logo, conforme Duval (1995), essa aluna fez a conversão entre os registros de representação semiótica.

Figura 106 – Respostas das alunas Ana Rosa e Valentina à primeira etapa da Q03.
Q03) Construir no espaço abaixo, dois quadrados diferentes:



(a) Produção de Ana Rosa (8º ano, 13 anos)

(b) Produção de Valentina (7º ano, 14 anos)

Fonte: dados da pesquisa

Essa resposta pode representar uma autonomia dessa aluna em relação às figuras prototípicas, especificamente, sobre os quadriláteros. Todavia, essa autonomia não significa que essa discente é capaz de realizar inclusão de classe, uma vez que na questão anterior, ela não reconheceu os quadrados como losangos e nem como retângulos.

Pelas marcações deixadas, verificamos que a segunda partícipe explicitou que os dois quadrados são diferentes porque as medidas dos comprimentos dos lados não são as mesmas. Dessa forma, fez a conversão de volta entre a figura geométrica e a língua natural.

No segundo momento da questão (Figura 107), ao justificar o motivo dos dois quadrados serem diferentes, Ana Rosa não deixou claro o que foi considerado. Contudo, na entrevista, isso ficou mais evidente, como mostra o extrato que segue.

Figura 107 – Respostas das alunas Ana Rosa e Valentina à segunda etapa da Q03.

Por que os dois quadrados que você construiu são diferentes?

porque o segundo é um quadrado oblíquo

(a) Produção de Ana Rosa (8º ano, 13 anos)

Por que os dois quadrados que você construiu são diferentes?

porque eles têm medidas diferentes

(b) Produção de Valentina (7º ano, 14 anos)

Fonte: dados da pesquisa

Pelo extrato da entrevista, percebemos que Ana Rosa fez referência às propriedades do quadrado, para justificar a produção relativa ao item. Além disso, diferenciou as duas figuras geométricas por meio de uma das grandezas geométricas associadas, sobretudo, com base no comprimento dos lados. Novamente, para Duval (1995), realizou a conversão entre os registros de representação semiótica.

Pesquisador: Que figuras são essas que você desenhou?

Ana Rosa: Quadrado

Pesquisador: Por que elas são quadrados?

Ana Rosa: Porque elas têm todos os ângulos retos e os lados iguais.

Pesquisador: Há outra característica que elas apresentam, para serem ditas quadrados?

Ana Rosa: Deixa-me ver um pouco (olhando para os quadrados). Bem... As diagonais delas têm a mesma medida... Também são perpendiculares.

Pesquisador: O que são diagonais?

Ana Rosa: São as retas que juntam dois vértices, que não são vizinhos (apontando nos desenhos, indicando os vértices)

Pesquisador: Por que as diagonais do quadrado são perpendiculares?

Ana Rosa: Elas se cruzam num local em que elas ficam iguais, aí, os ângulos são de 90° .

Pesquisador: Por que aqui você disse que o segundo quadrado é oblíquo? (apontando para o espaço do segundo momento da questão)

Ana Rosa: Foi para dizer que ele é menor do que o primeiro.

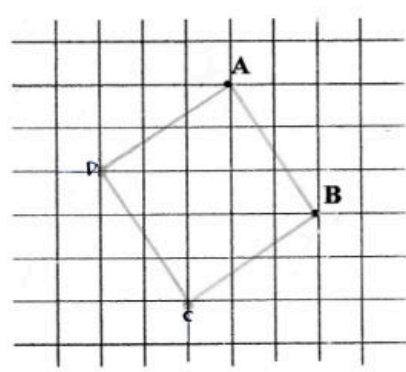
Pesquisador: Mas menor em que?

Ana Rosa: Os lados são menores, no caso, os comprimentos.

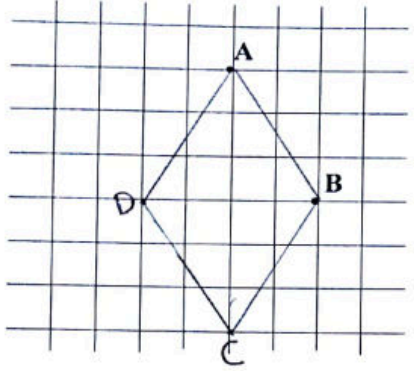
Na quarta questão do teste, evidenciamos que as propriedades do losango foram consideradas por Ana Rosa e Valentina em suas produções, como apresentado na Figura 108.

Q04 – Utilizando os vértices A e B já marcados, desenhe o losango ABCD.

Figura 108 – Respostas das alunas Ana Rosa e Valentina à Q04.

Q04) Utilizando os vértices A e B já marcados, desenhe o losango ABCD:	Por que a figura que você desenhou é um losango?
	porque quando os seus lados são iguais e as diagonais são perpendiculares entre si

(a) Produção de Ana Rosa (8º ano, 13 anos)

Q04) Utilizando os vértices A e B já marcados, desenhe o losango ABCD:	Por que a figura que você desenhou é um losango?
	porque é um quadrilátero possui todos os lados congruentes, seus ângulos internos e externos não tem a mesma medida e as bissetrizes não são congruentes

(b) Produção de Valentina (7º ano, 14 anos)

Fonte: dados da pesquisa

Nesse sentido, tendo por base a teoria de Duval (1995), essas participantes realizaram a conversão (de ida e de volta) entre os registros de representação semiótica (figura geométrica e língua natural).

Pela Figura 108, observamos que Ana Rosa fez um losango com ângulos retos, isto é, um quadrado, mobilizando, assim, as propriedades desse quadrilátero na construção. Na sua justificativa, a estudante mencionou que sua figura é um losango porque os seus lados são iguais e as diagonais perpendiculares entre si. Tal fenômeno também pode ser verificado no extrato da entrevista realizada com essa participante.

Pesquisador: <i>Que figura é essa que você fez?</i> Ana Rosa: <i>É um losango.</i> Pesquisador: <i>Por quê?</i> Ana Rosa: <i>Porque ele tem os lados com a mesma medida e as diagonais são perpendiculares.</i> Pesquisador: <i>Como assim? As diagonais são perpendiculares?</i> Ana Rosa: <i>Sim, elas se encontram num ponto em que elas se dividem ao meio, formando ângulos retos. Ah, e as diagonais dividem os ângulos dos vértices do losango em duas partes iguais.</i> Pesquisador: <i>As diagonais são iguais? Tem a mesma medida?</i> Ana Rosa: <i>Não, elas têm medidas diferentes. Se eu tivesse feito um quadrado, as diagonais teriam a mesma medida.</i> Pesquisador: <i>Mas essa figura que tu fez não é um quadrado?</i> Ana Rosa: <i>Não é. É um losango. Os ângulos não são retos.</i> Pesquisador: <i>O quadrado é um losango?</i> Ana Rosa: <i>Claro que não. Devido os ângulos deles serem diferentes</i>

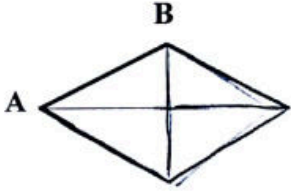
Pela fala, notamos que a entrevistada considerou uma importante propriedade do losango em sua resposta: as diagonais são perpendiculares entre si e se cruzam no ponto médio. Além disso, elas são situadas nas bissetrizes dos ângulos internos. Logo, realizaram a conversão entre os registros de representação semiótica, segundo Duval (1995).

Do mesmo modo, nessa questão, Valentina apresentou uma lista de propriedades ao justificar que sua figura é um losango: *porque é um quadrilátero, possui todos os lados congruentes, seus ângulos internos e externos não têm a mesma medida* (logo não são retos) e *suas bissetrizes não são congruentes* (ou seja, as diagonais não possuem a mesma medida de comprimento).

Achados similares são percebidos na quinta questão do teste, relacionada à produção de losango, como mostrado na Figura 109. De novo, tanto Ana Rosa como Valentina utilizaram as características do losango na construção e na justificativa,

demonstrado, como indica Duval (1995), que fizeram a conversão (de ida e de volta) entre a língua natural e a figura geométrica.

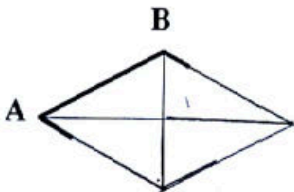
Figura 109 – Respostas das alunas Ana Rosa e Valentina à Q05.
Q05) O losango **ABCD** tem um pedaço apagado. Você pode reconstruí-lo?



(X) Sim

Explique como:
porque é fácil reconhecer
uma figura com todos
os lados iguais

(a) Produção de Ana Rosa (8º ano, 13 anos)



(X) Sim

Explique como:
Seguindo seus medidos

(b) Produção de Valentina (7º ano, 14 anos)

Fonte: dados da pesquisa

Pelos registros deixados, as duas alunas utilizaram as medidas dos lados do losango e o perpendicularismo entre as diagonais. Tal fato pode ser verificado de forma mais clara na entrevista realizada com Ana Rosa, como mostrado no extrato abaixo.

Pesquisador: Que figura é essa que você refez?

Ana Rosa: É um losango.

Pesquisador: Por quê?

Ana Rosa: Porque ele tem os lados iguais.

Pesquisador: Essa figura é um quadrado?

Ana Rosa: Não. Os ângulos deles não são iguais para ser quadrado.

Pesquisador: Como você refez a figura?

Ana Rosa: Eu medi um dos lados com uma régua. Depois fiz as diagonais. Como elas são perpendiculares ficou fácil. Depois fiz os lados, mas vendo se e medida ficava certa.

Pesquisador: Medidas certas? Como assim?

Ana Rosa: É que os lados são iguais, aí eu tinha que ver isso, se eles ficavam com o mesmo valor.

Com base na teoria de Duval (1995) e analisando globalmente as cinco questões do teste, verificamos que Ana Rosa e Valentina construíram quadriláteros notáveis, logo, mobilizaram a apreensão geométrica sequencial. Ao utilizarem as propriedades dessas figuras em suas respostas, atuaram de forma coerente na apreensão discursiva.

No entanto, verificamos que a apreensão perceptiva com olhar botanista influenciou essas estudantes, pois como visto na segunda questão do teste, um retângulo não padrão foi classificado apenas como um paralelogramo, não sendo considerado no grupo dos retângulos. O mesmo pode ser verificado com o quadrado não prototípico que foi identificado como sendo apenas losango.

Em vista disso, concluímos que o nível $n + 1$ do modelo indicado em nossa tese é composto por dois universos de discentes. O primeiro é formado pelos alunos que utilizam os elementos constituintes, isto é, a definição dos quadriláteros notáveis em sua identificação. O segundo é estabelecido pelos estudantes que analisam esses objetos geométricos a partir das propriedades, mas sem articulá-las.

Para tanto, esse segundo nível de desenvolvimento do pensamento geométrico, relacionado ao conceito de quadriláteros notáveis, apresenta dois subníveis: $(n + 1)a$ – formado pelo primeiro grupo de alunos e $(n + 1)b$ – composto pelo segundo grupo de estudantes.

7.1.3 Nível $n + 2$

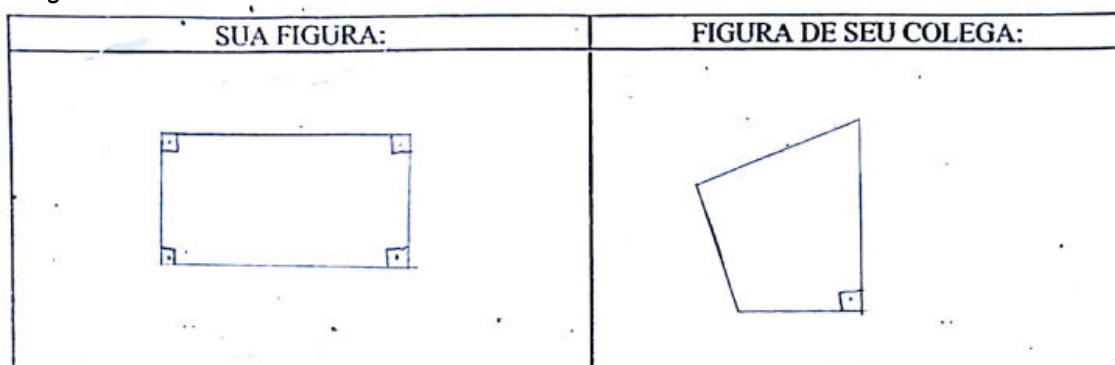
Os alunos que atuam nesse nível realizam a análise dos quadriláteros notáveis a partir do estabelecimento de relações de implicação entre as propriedades. Contudo, esse processo é marcado pela ausência de argumentações de natureza dedutiva em suas falas e justificativas. Desse modo, ao identificar um quadrilátero, os discentes podem realizar inclusão de classe, em geral, com significado.

Por esse motivo, um estudante que se encontra no nível $n + 2$ provoca a abstração geométrica descritiva, visto que faz referência ao conceito de quadriláteros notáveis com sentido. Por consequência, em algumas situações, consegue realizar articulação entre as propriedades dessas formas geométricas.

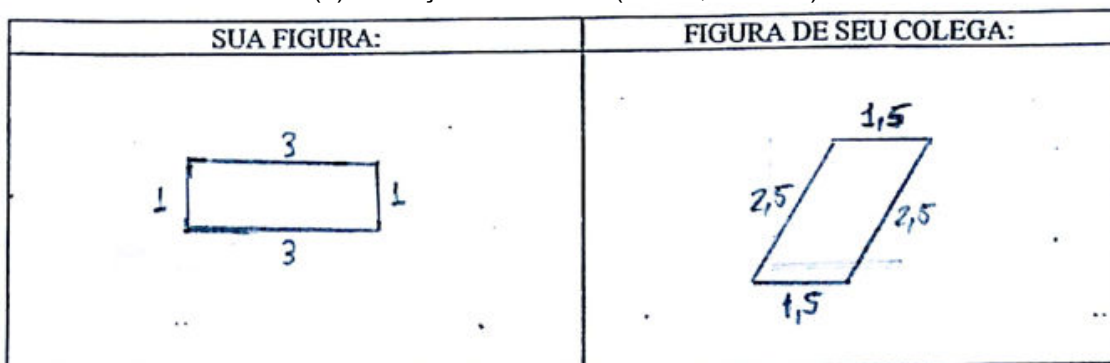
Uma das estratégias empregadas é considerar o quadrado como um caso particular de retângulo, ou então, reconhecê-lo como um tipo próprio de losango. Desse modo, ao mobilizar essa técnica, o aluno realiza uma inclusão de classe parcial, já que o quadrado não é reconhecido como losango e retângulo ao mesmo tempo.

Essa estratégia é assentida nas respostas à primeira questão do teste realizado pelos alunos Lorenzo (com 16 anos e cursando o 8º ano) e Mariano (com 17 anos e matriculado no 9º ano), como ilustrado na Figura 110.

Figura 110 – Respostas dos alunos Lorenzo e Mariano à primeira etapa da Q01.
Q01) Você desenhou um retângulo. Seu colega desenhou uma figura de quatro lados que não é um retângulo. Nos espaços abaixo, desenhe como poderia ser a sua figura e a figura do seu colega.



(a) Produção de Lorenzo (8º ano, 16 anos)



(b) Produção de Mariano (9º ano, 17 anos)

Fonte: dados da pesquisa

Nesse primeiro item do teste, verificamos que os dois estudantes foram capazes de realizar a identificação dos quadriláteros notáveis a partir da nomenclatura e, sem seguida, conseguiram reproduzi-los. Isso pode ser observado no tópico “SUA FIGURA”, no qual, construíram a figura solicitada corretamente, logo, conforme Duval (1995), Lorenzo e Mariano realizaram a conversão (de ida) entre os registros de representação semiótica.

Pelas marcações deixadas na folha de papel do teste, evidenciamos que, na construção, o primeiro aluno considerou que o retângulo possui os ângulos internos iguais, apresentando dois pares de lados opostos congruentes.

Tal fenômeno ficou mais explícito na produção do segundo participante, que deixou registrado o valor das medidas dos comprimentos dos lados do retângulo, demonstrando que compreendeu essa segunda característica do retângulo, que é uma propriedade pertencente à família dos paralelogramos.

Logo após, apreciando os registros feitos na área “FIGURA DO SEU COLEGA”, percebemos que o conceito de quadriláteros foi usado adequadamente pelos dois partícipes, uma vez que Lorenzo fez um trapezoide (quadrilátero sem lados opostos paralelos) e Mariano criou um paralelogramo oblíquo (com ângulos não retos).

Desse modo, eles construíram duas figuras de quatro lados que não são retângulos, assim, para Duval (1995), fizeram a conversão de ida entre a língua natural e a figura geométrica.

Novamente, destacamos que os dois alunos mobilizaram as características dos quadriláteros, em especial, dos notáveis (paralelogramo: lados opostos paralelos entre si e com mesma medida e ângulos internos opostos congruentes) e dos não notáveis (trapezoide: sem lados opostos paralelos) na resolução da questão.

Cenário análogo pode ser notado ao centrarmos nossa análise para os registros escritos desses estudantes, no tocante à segunda etapa da questão. Dessa maneira, Lorenzo e Mariano utilizaram as propriedades dos quadriláteros nas justificativas, como mostrado na Figura 111.

Figura 111 – Respostas dos alunos Lorenzo e Mariano à segunda etapa da Q01.

Por que sua figura é um retângulo?	Por que a figura de seu colega não é um retângulo?
todos os ângulos internos são ângulos retos e tomando dois lados que não são adjacentes, esses lados são paralelos.	Porque nem todos os ângulos internos são retos.

(a) Produção de Lorenzo (8º ano, 16 anos)

Por que sua figura é um retângulo?	Por que a figura de seu colega não é um retângulo?
pois possuem pares de ângulos iguais com angulação de 90° entre os vértices consecutivos.	porque não possuem angulação de 90° entre os vértices, mesmo que possuam lados pares iguais.

(b) Produção de Mariano (9º ano, 17 anos)

Fonte: dados da pesquisa

Como podemos observar na Figura 111, Lorenzo explicou que sua construção é um retângulo, pois todos os ângulos internos são retos e os lados opostos paralelos. Resposta parecida foi apresentada por Mariano, ao dizer que o seu retângulo possui pares de ângulos internos congruentes.

Com respeito à figura do seu colega, Lorenzo disse que nem todos os ângulos internos do trapezoide são retos, enquanto que para Mariano o paralelogramo oblíquo não tem ângulos medindo 90° e os lados opostos paralelos são congruentes.

Em ambos os casos, os participantes fizeram uso correto do conceito e das propriedades dos quadriláteros. Nesse sentido, considerando a base teórica de Duval (1995), Lorenzo e Mariano realizaram a conversão de volta entre a figura geométrica e a língua natural. Esses atributos podem ser reparados no discurso de Mariano, ao ser entrevistado pelo pesquisador (autor da tese), conforme extrato.

Pesquisador: *Que figura é essa que você desenhou no espaço “SUA FIGURA”?*

Mariano: *É um retângulo.*

Pesquisador: *Por que ela é um retângulo?*

Mariano: *Como eu escrevi, a figura é um retângulo pois tem pares de ângulos iguais com angulação de 90° entre os vértices consecutivos.*

Pesquisador: *Como assim? Podes me explicar novamente?*

Mariano: *Sim, posso. Veja, se você olhar aqui para o retângulo, vai poder ver que todos os ângulos internos são iguais, ou seja, são congruentes. Todos medem 90° . Além disso, o retângulo é um paralelogramo, pois tem dois pares de lados paralelos iguais.*

Pesquisador: *O que significa os valores 1 e 3 que você deixou na figura?*

Mariano: *Esses valores são as medidas dos lados, ou seja, as medidas dos comprimentos. Os lados horizontais medem 3 centímetros e os verticais medem 1 centímetro.*

Pesquisador: *Como você construiu a figura? E como fez a medição dos lados?*

Mariano: *Utilizei uma régua.*

Pesquisador: *Se você não tivesse a régua, seria possível responder a questão?*

Mariano: *Seria sim possível. Só que talvez o desenho não ficasse bem feito, talvez, os lados não saíssem retos. A régua ajuda bastante para ficar certo tanto o desenho com as medidas dos lados.*

Pesquisador: *Além dessas características que você mencionou, há outras que o retângulo apresenta?*

Mariano: *As diagonais têm a mesma medida de comprimento. Logo são iguais.*

Pesquisador: *Qual é a figura do seu colega?*

Mariano: *É um paralelogramo.*

Pesquisador: *Por quê?*

Mariano: *Primeiro por que tem dois pares de lados paralelos iguais. Segundo que os ângulos internos não são retos.*

Pesquisador: *Você disse que o retângulo é um paralelogramo. Então, a figura do seu colega é um retângulo?*

Mariano: *Não é, pois o retângulo tem ângulos iguais com angulação de 90° . O do meu colega é outro paralelogramo, o com ângulos que não medem 90° . Mas as duas figuras que eu fiz aí são paralelogramos, pois têm lados paralelos iguais. Eu puder ver isso quando eu medi com a régua. Na figura do meu colega, os lados verticais medem 2,5 centímetros. Veja que é a mesma medida, já que eles são paralelos. O mesmo com os lados horizontais, que têm o mesmo valor de comprimento, pois são paralelos. A mesma coisa ocorre com a minha figura, com o retângulo. Os*

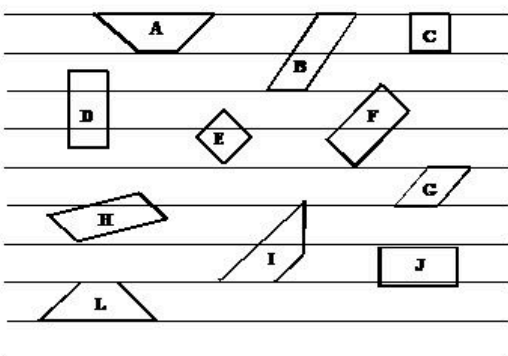
lados paralelos são iguais. A diferença dos dois desenhos é com os ângulos, internos e externos.

Pela fala de Mariano, percebemos que o conceito de quadriláteros notáveis foi utilizado corretamente, pois utilizou duas importantes propriedades dessas figuras geométricas em suas respostas ao entrevistador, tais como: “*diagonais congruentes*” “*lados opostos paralelos iguais*”. Nessa direção, conforme Duval (1995), esse estudante fez a conversão entre os registros de representação semiótica.

Achados semelhantes podem ser encontrados na segunda questão do teste, sobre classificação de quadriláteros. Desse modo, os dois estudantes mobilizaram as propriedades dessas formas geométricas e, em alguns casos, realizaram inclusão de classe (de modo parcial). Tal fato pode ser observado na Figura 112, como exibido a seguir.

Figura 112 – Respostas dos alunos Lorenzo e Mariano à Q02.

Q02 – Em uma folha de caderno estão desenhadas várias figuras de quatro lados. Tente separar por família, as figuras da folha de caderno.



	FIGURAS
Retângulos:	C, D, F, J, E
Trapézios:	A, I, L
Quadriláteros:	A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, L
Quadrados:	C
Paralelogramos:	B, C, D, E, F, G, H, J
Losangos:	E

(a) Produção de Lorenzo (8º ano, 16 anos)

	FIGURAS
Retângulos:	D / F / J
Trapézios:	A / I / L
Quadriláteros:	A / B / C / D / E / F / G / H / I / L
Quadrados:	C / E /
Paralelogramos:	B / H / G
Losangos:	E / C

(b) Produção de Mariano (9º ano, 17 anos)

Fonte: dados da pesquisa

Ambos participantes reconheceram os trapézios (figuras A, I e L) e os paralelogramos oblíquos (figuras B, G e H). Também, todas as figuras foram classificadas como quadriláteros pelos dois discentes. Conforme Duval (1995), eles fizeram a conversão entre as representações “figura geométrica” e “língua natural”.

Pela Figura 112, percebemos que os dois alunos identificaram os retângulos padrões (figuras D, F e J). Além disso, Lorenzo considerou os quadrados (figuras C e E) nesse grupo, isto é, no dos retângulos, mostrando que articulou as propriedades desses quadriláteros (os quadrados e os retângulos), realizando, assim, a conversão entre os registros de representação semiótica, segundo Duval (1995).

Em sua classificação, Lorenzo considerou os quadrados (figuras C e E) e os retângulos não quadrados (figuras D, F e J) no grupo dos paralelogramos, e agrupou os quadrados (figuras C e E) como retângulos. Por sua vez, Mariano especificou os quadrados (figuras C e E) como losangos.

Essas evidências mostram que os mencionados partícipes conseguiram estabelecer relações entre as propriedades desses quadriláteros notáveis. Logo, segundo Duval (1995), realizaram a conversão entre os registros de representação semiótica.

Contudo, o primeiro aluno não reconheceu os quadrados como losangos, enquanto que o segundo não identificou os quadrados como retângulos. Isso ocorreu, pois, como visto no modelo *a priori*, esses estudantes realizaram inclusão de classe parcial, articulando as propriedades de alguns tipos de quadriláteros notáveis.

Isso pode ser também verificado na entrevista realizada com Mariano, conforme extrato apresentado em seguida.

Pesquisador: Como você fez a classificação das figuras apresentadas?

Mariano: Eu fui considerando o que entendo por cada figura.

Pesquisador: Como assim?

Mariano: É o seguinte. Vou pegar o retângulo. O retângulo é um quadrilátero paralelogramo com ângulos retos. Ele é um paralelogramo, já que tem dois pares de lados paralelos congruentes. Aí, se a figura tem essas características, fui colocando a letra dela na linha do retângulo. E com a ajuda da régua, também olhei para as diagonais. As diagonais do retângulo têm a mesma medida. Certo?

Pesquisador: Ok. Então, me diz quais figuras são retângulos?

Mariano: As figuras D, F e J.

Pesquisador: Por quê?

Mariano: Porque elas têm essas características aí que falei.

Pesquisador: Considerando essas características que você mencionou sobre o retângulo, as figuras C e E apresentam essas características? Elas são retângulos?

Mariano: As figuras C e E são quadrados, não são retângulos. Realmente, elas têm essas características. O quadrado é um quadrilátero e é um paralelogramo. As diagonais dele são congruentes. Mas as diagonais do quadrado são perpendiculares. Isso não ocorre com o retângulo. As diagonais do retângulo são concorrentes, então, elas se cruzam de forma que ficam com a mesma medida. Mas elas não são perpendiculares. Aí, dá para concluir que o quadrado não é

retângulo. Outra coisa que podemos ver é que o quadrado tem todos os lados iguais. O retângulo não tem isso.

Pesquisador: Você disse que os quadrados e os retângulos são paralelogramos. Mas você não colocou isso quadro, na coluna dos paralelogramos. Podes me explicar isso?

Mariano: É o seguinte, eu coloquei aí apenas os paralelogramos cujos ângulos não são iguais, não são retos. Eu fiquei nessa dúvida, se era para colocar só eles ou todos, incluindo os quadrados e os retângulos. Aí para não ficar repetido, coloquei só esses aí (apontando para o registro escrito). Mas os quadrados e os retângulos são paralelogramos também. Eles são paralelogramos com ângulos iguais.

Pesquisador: Qual a diferença entre esses paralelogramos?

Mariano: Todos eles têm dois pares de lados paralelos iguais. Por isso todos são paralelogramos. Veja que os trapézios não têm isso, eles só têm um par de lados paralelos. Assim, os trapézios não são paralelogramos. Os quadrados e os retângulos têm dois pares de lados paralelos iguais, aí, eles são paralelogramos. Mas eles são paralelogramos com ângulos retos. Os outros paralelogramos, o B, o G e o H têm dois pares de lados paralelos iguais, mas os ângulos não são retos. Essa é a primeira diferença... outra diferença é as diagonais. As diagonais do quadrado e do retângulo são iguais. As desses outros paralelogramos não são iguais (apontando para as figuras B, G e H).

Pesquisador: Como você verificou isso? As diagonais são ou não são iguais?

Mariano: Eu fui vendo com a régua.

Pesquisador: Você colocou as figuras A, I e L como trapézios. Por quê?

Mariano: Porque elas têm só um par de lados paralelos. Veja que os outros lados que formam o outro par não são paralelos. Por isso elas não podem ser paralelogramos.

Pesquisador: Por que todas as figuras foram colocadas aqui como quadriláteros? (apontando para o quadro)

Mariano: Porque todas têm as características dos quadriláteros.

Pesquisador: Quais são essas características?

Mariano: quatro vértices, quatro lados, quatro ângulos internos, quatro ângulos externos, duas diagonais e pelo menos um par de lados paralelos.

Pesquisador: Como assim? Pelo menos um par de lados paralelos?

Mariano: Sim, os quadriláteros têm de duas formas. Os quadriláteros com só um par de lados paralelos. Os trapézios têm isso. O outro tipo são os quadriláteros com dois pares de lados paralelos. Aí entram os paralelogramos.

Pesquisador: Vendo suas respostas, percebi que você colocou as figuras C e E como quadrados e losangos. Por que isso?

Mariano: Por que todo quadrado é losango.

Pesquisador: Como assim?

Mariano: Para ser losango, o paralelogramo tem que ter todos os lados iguais. Para ser quadrado tem que ter os lados iguais e os ângulos retos, então, conclui que todo quadrado é losango.

Pesquisador: Todo losango é quadrado?

Mariano: Não. Tem losango que os ângulos não são iguais.

Pesquisador: Posso afirmar que todo quadrado é retângulo e losango ao mesmo tempo?

Mariano: É errado dizer isso. Os retângulos não têm os lados iguais, nem o quadrado e nem o losango são retângulos. Mas o quadrado é losango, tem os lados com a mesma medida.

Como verificado na fala de Mariano, notamos que, em geral, apresentou uma compreensão sobre os quadriláteros notáveis, listando várias propriedades em suas explicações, além de articulá-las. Todavia, para ele, o quadrado só é um caso particular de losango, não sendo um retângulo. Desse modo, em nosso entendimento, esse estudante realizou uma inclusão de classe parcial.

Na terceira questão do teste, acerca da construção de dois quadrados diferentes, os dois participantes focaram nas medidas dos comprimentos dos lados como parâmetro para diferenciá-los, como ilustrado na Figura 113.

Figura 113 – Respostas dos alunos Lorenzo e Mariano à primeira etapa da Q03.
Q03) Construir no espaço abaixo, dois quadrados diferentes:



(a) Produção de Lorenzo (8º ano, 16 anos)

(b) Produção de Mariano (9º ano, 17 anos)

Fonte: dados da pesquisa

Pelos registros expostos na folha do teste, o primeiro aluno construiu os dois quadrados considerando que todos os ângulos internos são retos e que os lados são congruentes.

Desse modo, Lorenzo diferenciou as duas formas geométricas por meio do comprimento dos lados (primeiro quadrado com 2 cm de comprimento e o segundo com 4 cm). Ou seja, fez referência a uma grandeza geométrica associada aos quadriláteros notáveis.

No que lhe concerne, o segundo discente apresentou uma resposta similar (primeiro quadrado com 3 cm de comprimento dos lados e o segundo com 2 cm). Além disso, como apresentado na Figura 113, fez um dos quadrados em posição não prototípica e afirmou “*todo quadrado é retângulo*”. Tal fato representa uma importante autonomia em relação às figuras prototípicas.

Ao analisarmos os registros escritos desses estudantes, relativos ao segundo momento da questão, novamente, evidenciamos que os comprimentos dos lados foram considerados como parâmetro para diferenciar os dois quadrados. A Figura 114 ilustra essa situação.

Figura 114 – Respostas dos alunos Lorenzo e Mariano à segunda etapa da Q03.

Por que os dois quadrados que você construiu são diferentes?

são diferentes pois possuem medida dos lados diferentes.

(a) Produção de Lorenzo (8º ano, 16 anos)

Por que os dois quadrados que você construiu são diferentes?

mesmo que ambos possuem ângulos iguais, os dois têm lados diferentes.

(b) Produção de Mariano (9º ano, 17 anos)

Fonte: dados da pesquisa

Como as respostas foram adequadas à questão e os participantes mostraram compreensão do conceito de quadriláteros notáveis, tendo por base a teoria de Duval (1995), Lorenzo e Mariano realizaram a conversão (de ida e de volta) entre a língua natural e a figura geométrica.

Essas características podem ser percebidas na fala de Mariano, em relação à entrevista, conforme estrato abaixo.

Pesquisador: Que figuras são essas que você desenhou aí?

Mariano: Quadrados.

Pesquisador: Por que elas são quadrados?

Mariano: Os lados têm a mesma medida e os ângulos são retos... Ah, e as diagonais são congruentes e perpendiculares. Por conta disso, as figuras são quadrados.

Pesquisador: Por que os dois quadrados que você fez são diferentes?

Mariano: Essas características que falei não mudam. O que eles têm diferente é olhando os lados, têm medidas diferentes. O primeiro tem 3 cm e o segundo tem 2 cm. Eles também estão posicionados de modo diferente. O segundo está inclinado, o primeiro não.

Pesquisador: É possível notar mais alguma diferença entre eles?

Mariano: Não... Espera aí. Deixa eu ver... Se eu medir as diagonais, elas têm valores diferentes. As diagonais desse aqui (apontando para o primeiro quadrado), com certeza, têm medidas maiores do que o segundo.

Pesquisador: Por quê?

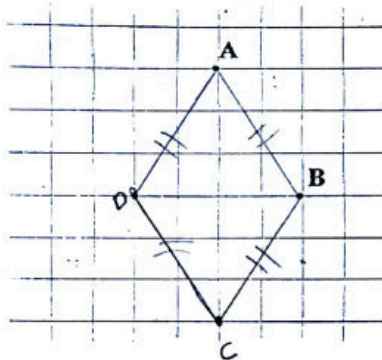
Mariano: Como os lados dele são maiores, dá para perceber que as diagonais são maiores também.

Pelo diálogo construído, notamos que Mariano considerou tanto a medida do comprimento dos lados com o das diagonais como meio para diferenciar os quadrados produzidos. Aqui, para Duval (1995), houve conversão entre os registros de representação semiótica, visto que o aluno apresentou compreensão do conceito abordado, fazendo uso de suas propriedades.

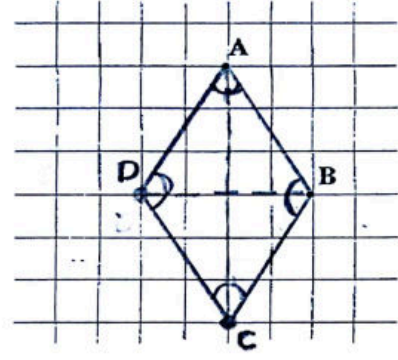
Na quarta questão do teste, de modo igual, observamos que as propriedades dos quadriláteros notáveis foram consideradas na resolução, especificamente, as do losango, como apresentado na Figura 115. Nos dois registros de representação semiótica ilustrados, verificamos que os alunos apresentaram domínio da definição e das propriedades do losango.

Q04 – Utilizando os vértices **A** e **B** já marcados, desenhe o losango **ABCD**.

Figura 115 – Respostas dos alunos Lorenzo e Mariano à Q04.

Q04) Utilizando os vértices A e B já marcados, desenhe o losango ABCD :	Por que a figura que você desenhou é um losango?
	possuem quatro lados e eles são congruentes.

(a) Produção de Lorenzo (8º ano, 16 anos)

Q04) Utilizando os vértices A e B já marcados, desenhe o losango ABCD :	Por que a figura que você desenhou é um losango?
	possuem ângulos diagonais entre os pares e para iguais. Além de possuírem todos os lados iguais.

(b) Produção de Mariano (9º ano, 17 anos)

Fonte: dados da pesquisa

Lorenzo, por exemplo, considerou que os lados são congruentes. Já Mariano mencionou que os ângulos internos opostos têm a mesma medida de abertura e que os lados são iguais. Além disso, com base nas marcações deixadas, esse segundo estudante considerou que as diagonais são perpendiculares.

Assim, para Duval (1995), os dois discentes fizeram a conversão (de ida e de volta) entre a língua natural e a figura geométrica.

Ainda, na entrevista, Mariano fez referência às propriedades do losango em suas explicações de maneira coerente, logo, realizou a conversão entre os registros de representação semiótica (DUVAL, 1995). Esse fato pode ser percebido no extrato a seguir.

Pesquisador: Como se chama a figura que você desenhou aí? (apontando para a resposta do aluno ao teste)

Mariano: É um losango?

Pesquisador: Por quê?

Mariano: Porque ela tem todos os lados iguais, os ângulos opostos são iguais e as diagonais são perpendiculares. Outra coisa, como eu fiz no desenho, as diagonais se cruzam num ponto em que elas ficam divididas em duas partes iguais. Dá para ver também que as diagonais dividem os ângulos em partes iguais.

Pesquisador: Quais ângulos você se refere?

Mariano: Os ângulos dos vértices que têm as diagonais.

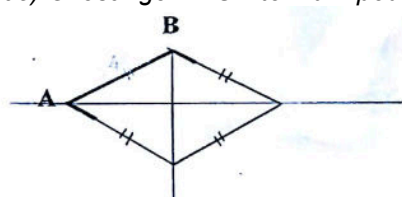
Pesquisador: Essa figura é um quadrado?

Mariano: Não. O quadrado é um losango com ângulos iguais. Esse losango que fiz não tem isso, os ângulos dele não são retos.

Como verificado na fala, o discente entrevistado apresentou uma relação de propriedades do losango: “*ângulos internos opostos congruentes*”, “*diagonais perpendiculares no ponto médio*”, “*diagonais localizadas nas bissetrizes dos ângulos internos*”. Ainda, constatamos que foi capaz de estabelecer relações entre as características desse quadrilátero com as do quadrado.

Novamente, conforme sinalizado por Duval (1995), esse estudante estabeleceu a conversão entre os registros de representação semiótica, passando da língua natural para a figura geométrica e, depois, dessa segunda para a primeira. Resultados semelhantes foram notados na quinta questão do teste, na qual, os estudantes deveriam reconstruir um losango apagado, como mostra a Figura 116.

Figura 116 – Respostas dos alunos Lorenzo e Mariano à Q05.
Q05) O losango **ABCD** tem um pedaço apagado. Você pode reconstruí-lo?

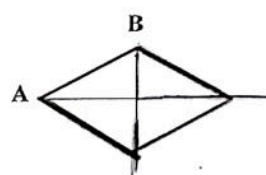


(X) Sim

Explique como:

Com a utilização da régua, medimos e comprimentamos o segmento AB, e com a mesma medida, partindo do ponto B traçamos o segmento BC, e partindo do ponto A traçamos o ponto AD e depois traçamos o segmento que liga C a D. Logo assim reconstruímos o losango ABCD.

(a) Produção de Lorenzo (8º ano, 16 anos)



(X) Sim

Explique como:

Pois o único fator de mudança de um losango é a angulação. Visto que um losango tem lados iguais e a figura só possui um pedaço, o resto poderá ser construído, somado ao fato das diagonais perpendiculares entre si e as diagonais serem iguais.

(b) Produção de Mariano (9º ano, 17 anos)

Fonte: dados da pesquisa

Pelas marcações deixadas, evidenciamos que os dois alunos consideraram o perpendicularismo das diagonais e a congruência dos lados do losango. Dessa forma, para Duval (1995), realizaram a conversão de ida entre a língua natural e a figura geométrica.

Ao analisamos os registros escritos, Lorenzo disse que na reconstrução do losango, utilizou uma régua para medir um dos lados não apagados. Em seguida, traçou as diagonais e refez os lados considerando o valor do comprimento obtido na medição, obtendo assim, o losango.

Mariano, na sua escrita, falou que a figura foi refeita considerando que os lados do losango são congruentes e que as diagonais se encontram no ponto médio. Todavia, na entrevista, ele deixou isso mais claro, conforme extrado a seguir.

Pesquisador: Como você reconstruiu a figura?

Mariano: Primeiro, eu medi um dos lados. Aí encontrei o valor da medida do comprimento. Os outros lados devem ter essa medida. Depois, fiz as diagonais. Como elas são perpendiculares e se encontram num ponto que as divide em duas partes iguais, aí, eu medi uma dessas partes. Depois fiz os lados de modo que eles se encontrem nas diagonais, de maneira que os lados e as diagonais tivessem os valores que encontrei com a régua.

Pela fala, notamos que Mariano refez o losango tendo por base sua definição e suas propriedades. Para tanto, conforme Duval (1995), ele realizou a conversão entre os registros de representação semiótica.

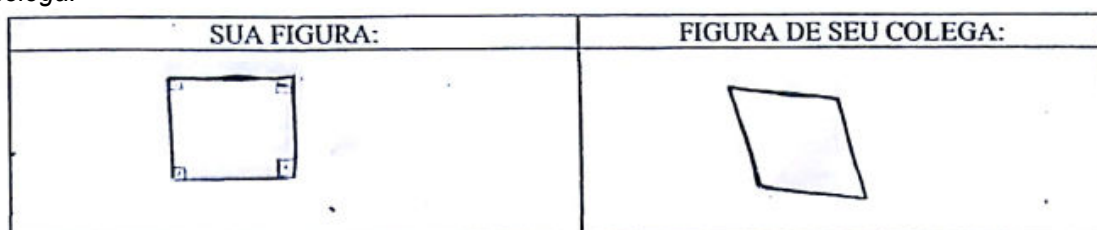
Realizando uma análise holística das cinco questões do teste, considerando a teoria de Duval (1995), constatamos que os dois alunos analisados trabalharam na apreensão geométrica sequencial, uma vez que construíram formas geométricas relativas aos quadriláteros notáveis.

Também, mobilizaram a apreensão discursiva com olhar construtor, apesar de que, não totalmente, articularam as propriedades de alguns tipos de quadriláteros notáveis, sobretudo, com relação aos quadrados e aos losangos ou aos quadrados e aos retângulos.

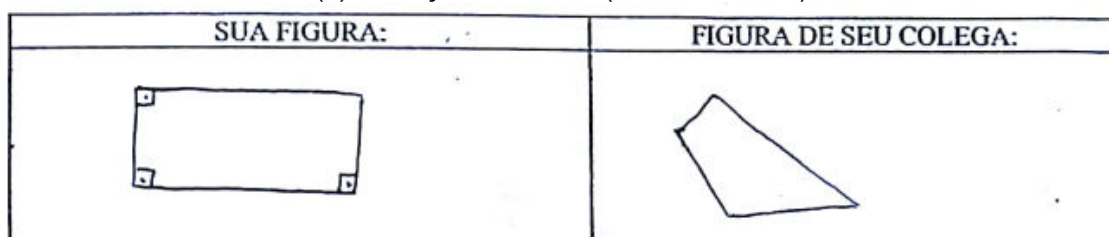
Outra estratégia incitada nesse nível de desenvolvimento do pensamento geométrico é tomar o quadrado como todo paralelogramo que é retângulo e losango, conjuntamente. Nesse contexto, no emprego dessa técnica, o discente estabeleceu uma inclusão de classe total entre os quadriláteros notáveis.

Assim, essa estratégia é sinalizada nas respostas à primeira questão do teste, aplicado com os estudantes Teresa (com 14 anos e frequentando o 8º ano) e Donizete (com 15 anos e cursando o 9º ano), como exibido na Figura 117.

Figura 117 – Respostas dos alunos Teresa e Donizete à primeira etapa da Q01.
Q01) *Você desenhou um retângulo. Seu colega desenhou uma figura de quatro lados que não é um retângulo. Nos espaços abaixo, desenhe como poderia ser a sua figura e a figura do seu colega.*



(a) Produção de Teresa (8º ano, 14 anos)



(b) Produção de Donizete (9º ano, 15 anos)

Fonte: dados da pesquisa

Nessa primeira fase da questão do teste, percebemos que os dois partícipes conseguiram identificar os quadriláteros notáveis e reproduzi-los de modo adequado por meio da nomenclatura.

Esse aspecto pode ser verificado no item “SUA FIGURA”, em que os estudantes construíram o retângulo de modo correto. Então, Teresa e Donizete fizeram a conversão de ida entre os registros de representação semiótica, segundo Duval (1995).

Pelas marcações apresentadas na folha do teste, percebemos nessa produção que, tanto Teresa como Donizete tomaram que o retângulo tem dois pares de lados opostos paralelos congruentes e os ângulos internos retos.

Em seguida, analisando as construções realizadas em “FIGURA DO SEU COLEGA”, notamos que os dois alunos utilizaram corretamente o conceito de quadriláteros. Assim, Teresa criou um paralelogramo oblíquo (quadrilátero notável com ângulos internos não retos) e Donizete produziu um trapezóide (quadrilátero não notável sem lados opostos paralelos).

Em vista disso, considerando os pressupostos teóricos de Duval (1995), os dois participantes realizaram a conversão de ida entre o registro verbal (língua natural) e o figural (geométrico), pois fizeram duas figuras de quatro lados que não são classificadas como retângulos.

Situação semelhante pode ser verificada na segunda etapa da questão, na qual, os partícipes justificaram suas construções a partir das propriedades das figuras geométricas produzidas, conforme ilustrado na Figura 118.

Figura 118 – Respostas dos alunos Teresa e Donizete à segunda etapa da Q01.

Por que sua figura é um retângulo?	Por que a figura de seu colega não é um retângulo?
Os lados são dois a dois paralelos e os quatro ângulos internos são retos.	Os lados são dois a dois paralelos, porém os ângulos internos não são retos.
Obs.: Essa figura pode ou não ser um quadrado, já que o quadrado é um caso particular do retângulo.	

(a) Produção de Teresa (8º ano, 14 anos)

Por que sua figura é um retângulo?	Por que a figura de seu colega não é um retângulo?
Porque é um polígono de quatro lados que possui ângulos internos retos.	É um polígono de quatro lados que não possui ângulos internos retos.

(b) Produção de Donizete (9º ano, 15 anos)

Fonte: dados da pesquisa

Pelos registros escritos apresentados na Figura 118, Teresa disse que sua figura é um retângulo porque possui os lados paralelos dois a dois e os quatro ângulos internos congruentes. Ainda, mencionou que o quadrado é um caso particular de retângulo.

Resposta análoga foi exposta por Donizete, ao expressar que o retângulo é um polígono de quatro lados, que apresenta ângulos internos com a mesma medida, logo, são retos.

Em relação à figura do seu colega, Teresa justificou que o paralelogramo construído tem pares de lados paralelos, contudo, os ângulos internos não são congruentes. Donizete explicou que o trapezoide é um polígono com quatro lados que não apresenta ângulos internos retos.

Aqui, como demonstraram compreensão do conceito de quadriláteros e de seus atributos, tendo por base a teoria de Duval (1995), esses alunos fizeram a conversão de volta entre a figura geométrica e a língua natural. Tal fato pode ser evidenciado na entrevista realizada com Teresa, como o extrato a seguir ilustra.

Pesquisador: Qual é o nome dessa figura aí? (apontando para SUA FIGURA)
Teresa: É um retângulo.
Pesquisador: Por que ela é um retângulo?
Teresa: Porque ela tem os lados, dois a dois, paralelos. Além disso, eles são iguais. Os seus ângulos internos são retos.
Pesquisador: Veja que na justificativa, você disse que a figura pode ser ou não um quadrado. Pode me explicar isso?
Teresa: Posso. É o seguinte. Eu ia desenhar um quadrado. Mas quando fiz o desenho, vi que a figura não era um quadrado, mas sim um retângulo.
Pesquisador: Então, o quadrado não é um retângulo?
Teresa: Não. Todo quadrado é retângulo ao mesmo tempo. O quadrado também é um losango.
Pesquisador: Como assim? O quadrado é retângulo e losango ao mesmo tempo?
Teresa: É o seguinte. O quadrado tem os lados iguais e os ângulos internos retos. O retângulo tem todos os ângulos internos retos. Mas os seus lados podem ou não ter a mesma medida. Aí, o quadrado é retângulo.
Pesquisador: E com relação ao losango?
Teresa: Ah, sim. O losango tem todos os lados iguais, só que os seus ângulos internos podem ser iguais ou não. Aí, o quadrado é losango também.
Pesquisador: O quadrado, o retângulo e o losango são paralelogramos?
Teresa: São sim. Eles têm lados paralelos dois a dois com a mesma medida.
Pesquisador: Qual é o nome da figura do seu colega?
Teresa: Paralelogramo.
Pesquisador: Por quê?
Teresa: Por que ele tem os lados dois a dois paralelos iguais. Seus ângulos internos não são retos.
Pesquisador: Você disse que o quadrado, o losango e o retângulo são paralelogramos. Então, a figura do seu colega é um quadrado? É um losango? É um retângulo?
Teresa: Nenhum desses. O paralelogramo que desenhei para meu colega não tem os lados iguais, como ocorre com o quadrado e com o losango. E os ângulos internos não são retos, como ocorre com o retângulo e o quadrado.
Pesquisador: Então, por que eles são paralelogramos? Já que você apresentou várias diferenças entre eles.
Teresa: Eles têm suas diferenças sim, mas todos têm os lados dois a dois paralelos com a mesma medida, então eles são paralelogramos.

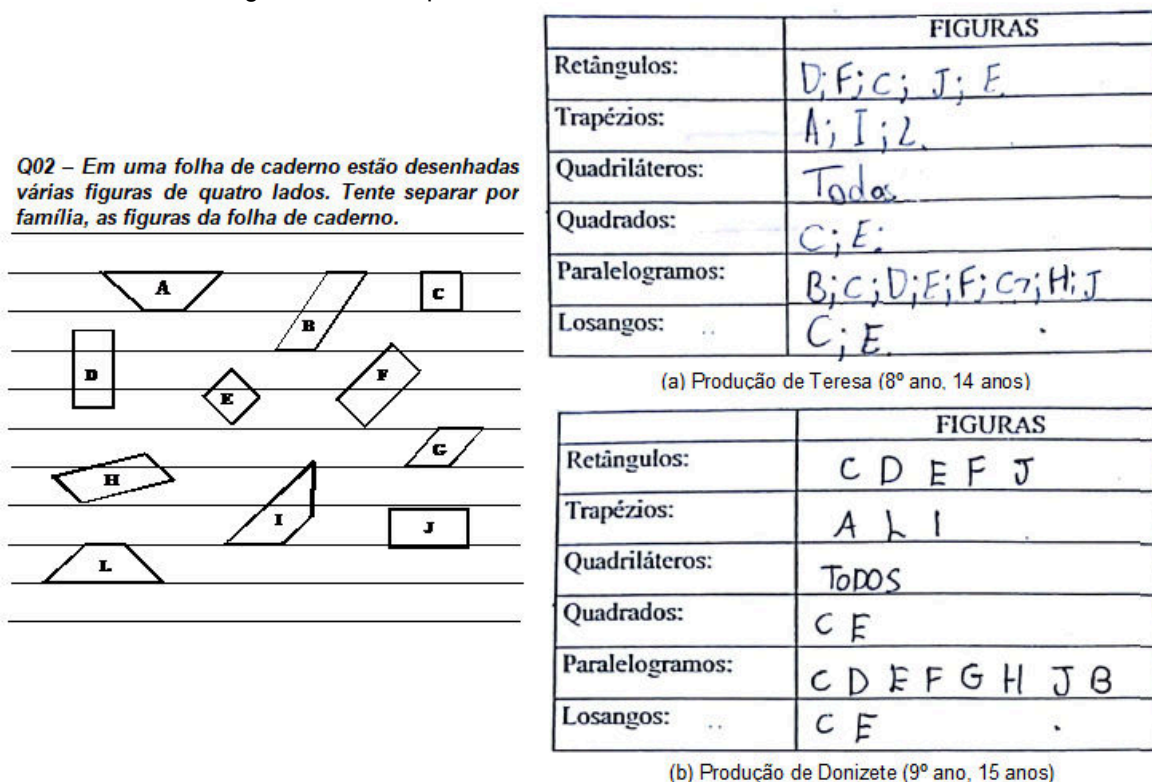
Pela conversa travada, comprovamos que Teresa domina o conceito de quadriláteros notáveis, articulando entre si as suas propriedades. Assim, o quadrado foi considerado como losango e retângulo ao mesmo tempo. Nesse sentido, para Duval (1995), essa discente fez a conversão entre os registros de representação semiótica (língua natural e figural).

Ao analisarmos as produções de Teresa e Donizete relativas à segunda questão do teste, reparamos que eles articularam as propriedades dos quadriláteros

notáveis de forma adequada, realizando, desse modo, inclusão de classe total, como exibido na Figura 119.

Q02 – Em uma folha de caderno estão desenhadas várias figuras de quatro lados. Tente separar por família, as figuras da folha de caderno.

Figura 121 – Respostas dos alunos Teresa e Donizete à Q02.



Fonte: dados da pesquisa

Pelos protocolos apresentados na Figura 119, atentamos que os dois estudantes classificaram os quadrados (figuras C e E) e os retângulos ditos padrões (figuras D, F e J) no grupo dos retângulos. Essas evidências mostram que esses participantes estabeleceram relações entre as propriedades desses quadriláteros notáveis, a ponto de concluírem que o quadrado é um caso particular de retângulo.

Então, nesse primeiro momento, como utilizaram as propriedades e articularam-nas adequadamente, de acordo com Duval (1995), ocorreu conversão entre os registros de representação semiótica.

Teresa e Donizete identificaram todas as figuras como quadriláteros. Corretamente, reconheceram os trapézios (figuras A, I e L) e consideraram os quadrados (figuras C e E) como losangos. Ainda, categorizaram os paralelogramos

oblíquos (figuras B, G e H), os retângulos padrões (figuras D, F e J) e os quadrados (figuras C e E) na família dos paralelogramos.

Mais uma vez, essas evidências revelam que as propriedades desses quadriláteros notáveis foram conectadas pelos dois participantes, de forma a produzirem a seguinte conclusão *“como o losango é um paralelogramo com lados iguais e o retângulo é um paralelogramo com ângulos internos congruentes, então o quadrado é um paralelogramo que é retângulo e losango, simultaneamente”*.

Tais indícios são comprovados na fala de Teresa, ao ser entrevistada pelo pesquisador (autor da tese), conforme extrato abaixo.

Pesquisador: *Pode me explicar como você classificou as onze figuras?*

Teresa: *Claro. Com base no que eu sei sobre quadriláteros, eu fui fazendo a classificação.*

Pesquisador: *O que é um quadrilátero?*

Teresa: *É toda figura de quatro lados, formada em um plano, de forma que três de seus vértices não formem uma única reta.*

Pesquisador: *Como assim? Não entendi.*

Teresa: *Posso explicar com um desenho?*

Pesquisador: *Pode sim.*

Teresa: *É assim. Aqui eu tenho uma figura de quatro lados, certo? (desenhando uma figura de quatro lados, conforme apresentada no final dessa transcrição). Aqui eu tenho os vértices, que no total, são quatro. Veja que se eu pegar eles dois a dois, por exemplo, os vértices A e B, eles formam o segmento de reta AB, que é um dos lados da figura. Entre eles não tem outro vértice, ou seja, no segmento AB não tem outro vértice. Mas se agora nessa figura, se eu pegar os vértices três a três, por exemplo, A, B e C. Se você olhar para a figura, vai ver que eles não formam um segmento, mas sim dois. Então, fica provado que a figura é um quadrilátero.*

Pesquisador: *Entre as onze figuras apresentadas, há quadriláteros?*

Teresa: *Há sim. Todas elas são quadriláteros, pois elas atendem isso que eu falei. Além dos quatro vértices e dos quatro lados, elas têm quatro ângulos internos, quatro ângulos externos, duas diagonais concorrentes, ou seja, se cruzam.*

Pesquisador: *Vendo sua resposta à questão, percebi que você colocou as figuras C, D, E, F e F como retângulos. Pode me explicar isso?*

Teresa: *Posso. Todas elas são retângulos. Entre elas tem os quadrados, que são retângulos também. Para ser retângulo só é necessário ter ângulos internos retos. Como os quadrados atendem isso, então, eles são retângulos.*

Pesquisador: *Qual a diferença entre esses retângulos?*

Teresa: *Os quadrados são retângulos com ângulos internos retos e os seus lados são iguais. Os outros retângulos não têm lados iguais, mas os ângulos são. Então, todos são retângulos.*

Pesquisador: *Os losangos são retângulos?*

Teresa: *Não. A menos que o losango tenha ângulos retos. Aí, ele é quadrado, retângulo e losango.*

Pesquisador: *Não entendi. Pode me explicar novamente?*

Teresa: *É assim. O losango é um paralelogramo com lados iguais. Como os quadrados também têm isso, têm lados iguais, então todo quadrado é losango. E como os quadrados têm ângulos internos retos, eles também são retângulos. Aí, eu posso dizer que os quadrados são losangos e retângulos, juntos.*

Pesquisador: *E os losangos são retângulos?*

Teresa: *Não são. Para ser losango a figura só precisa ter os lados com a mesma medida. Os ângulos podem ou não ser retos, então, se o losango não tem ângulos iguais, ele não é retângulo. Ele só é retângulo se ele tiver os ângulos iguais, aí, ele é quadrado, retângulo e losango, juntos.*

Pesquisador: *Então me diz quais figuras são quadrados e quais são losangos?*

Teresa: *As figuras C e E são quadrados. Mas como elas têm lados iguais são losangos. E como*

elas têm ângulos com a mesma medida são retângulos.

Pesquisador: Quais figuras são paralelogramos?

Teresa: As figuras B, C, D, E, F, G, H, J.

Pesquisador: Por quê?

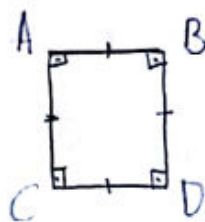
Teresa: Como elas possuem dois pares de lados paralelos, e esses lados são opostos e têm a mesma medida, logo, elas são paralelogramos. Os quadrados, os losangos e os retângulos apresentam isso, então, são paralelogramos. E tem outros paralelogramos, que são oblíquos, pois os ângulos deles não são retos.

Pesquisador: Os trapézios são paralelogramos?

Teresa: Não são. Os trapézios são quadriláteros que só tem um par de lados paralelos. Os paralelogramos têm dois pares. Aí, os trapézios e os paralelogramos são dois quadriláteros. Mas trapézio não é paralelogramo.

Pesquisador: Quais figuras são trapézios?

Teresa: As figuras A, I e L. Elas têm só um par de lados paralelos, então, não são paralelogramos.



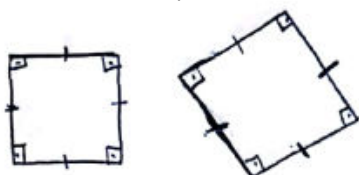
Como verificado na entrevista, Teresa mostrou domínio sobre o conceito de quadriláteros notáveis, pois foi compreendido com significado. Desse modo, as propriedades foram relacionadas adequadamente em suas justificativas às questões do entrevistador.

Assim, ao estabelecer inclusão de classe total, o quadrado foi considerado como todo paralelogramo que é retângulo e losango, juntamente. Portanto, para Duval (1995), essa discente realizou a conversão entre a figura geométrica e a língua natural.

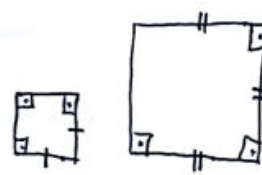
Tal fenômeno também pode ser percebido na terceira questão do teste, na qual, os discentes explicaram que os dois quadrados são diferentes, devido suas posições na folha de papel e em relação aos comprimentos dos seus lados. A Figura 120 ilustra esse caso.

Figura 120 – Respostas dos alunos Teresa e Donizete à primeira etapa da Q03.

Q03) Construir no espaço abaixo, dois quadrados diferentes:



(a) Produção de Teresa (8º ano, 14 anos)



(b) Produção de Donizete (9º ano, 15 anos)

Fonte: dados da pesquisa

Conforme observado pelas marcações, os dois participantes consideram a congruência entre os lados e entre os ângulos internos na construção dos quadrados. Dessa maneira, realizaram a conversão (de ida) entre os registros de representação semiótica, segundo Duval (1995).

Ao centrarmos nossa análise para a segunda etapa da questão, mais uma vez, verificamos que essas características (posição no plano e medidas de comprimento dos lados) foram consideradas na diferenciação das figuras pelos dois estudantes, como ilustrado na Figura 121.

Figura 121 – Respostas dos alunos Teresa e Donizete à segunda etapa da Q03.

Por que os dois quadrados que você construiu são diferentes?

Acredito que dois quadrados só podem ser diferentes com relação à sua posição e ao comprimento de seus lados. Se houver mais alguma diferença entre quadrados, desentrego. O que não pode se alterar, de maneira alguma, são as propriedades inerentes do quadrado, pois senão deixaria de ser um quadrado.

(a) Produção de Teresa (8º ano, 14 anos)

Por que os dois quadrados que você construiu são diferentes?

Porque estão em posições diferentes em relação ao plano e possuem tamanhos diferentes.

(b) Produção de Donizete (9º ano, 15 anos)

Fonte: dados da pesquisa

Pelos registros escritos, Teresa disse que os dois quadrados só podem ser diferentes no que se refere às posições no plano e às medidas dos comprimentos dos lados. Ela ainda argumentou que as propriedades desse quadrilátero são preservadas.

Logo, para Teresa, as mudanças são relativas às grandezas geométricas associadas à forma geométrica. Resposta análoga foi apresentada por Donizete.

Nessa direção, Teresa e Donizete estabeleceram a conversão (de volta) entre a figura geométrica e a língua natural. Tal fato ocorreu, visto que eles apresentaram compreensão do conceito de quadriláteros com significado. Isso pode ser constatado, ainda, na entrevista realizada com Teresa, como ilustrado no extrato abaixo.

Pesquisador: Qual é o nome das figuras que você fez?

Teresa: Quadrados.

Pesquisador: Por que elas são quadrados?

Teresa: Elas apresentam todas as características necessárias de um quadrado

Pesquisador: E quais são essas características?

Teresa: Ângulos internos congruentes e lados com a mesma medida de comprimento.

Pesquisador: Por que os quadrados são diferentes?

Teresa: Essa questão eu pensei um pouco. No começo, não notei diferença. Os quadrados têm lados iguais, ângulos retos. Até aqui não vi diferença, pois eles apresentam essas características. Depois, pensei, eles são diferentes na posição ocupada por cada um no plano e também pelos comprimentos dos lados, que não têm a mesma medida. As áreas deles também são diferentes. Os perímetros...

Pesquisador: Na parte escrita, você disse que as propriedades inerentes dos quadrados não podem ser alteradas. Quais propriedades são essas?

Teresa: Primeiro tem a questão dos lados e dos ângulos internos que não podem mudar. Se não a figura deixa de ser quadrado. Se você mudar o comprimento de um dos lados, ou mudar a medida de um dos ângulos internos, a figura não é mais quadrado, pois essas propriedades foram alteradas. Outra propriedade que não pode ser mudada é a questão das diagonais.

Pesquisador: Como assim? Qual é a questão das diagonais?

Teresa: A questão é que as diagonais dos quadrados são congruentes, então, elas têm o mesmo comprimento. Elas são perpendiculares e são as bissetrizes dos ângulos internos. Se você aumentar ou diminuir o comprimento de uma das diagonais, elas deixam de ser congruentes, aí a figura não é mais quadrado. Se você mudar a posição delas, elas deixam de dividir os ângulos internos em duas partes iguais, aí, elas não são bissetrizes. Isso não pode ser modificado. Se não, não é mais quadrado.

Pela fala produzida, comprovamos que Teresa possui domínio sobre os quadriláteros notáveis, apresentando uma lista de propriedades que são específicas dos quadrados. Desse modo, segundo Duval (1995), a aluna fez a conversão entre os registros de representação semiótica.

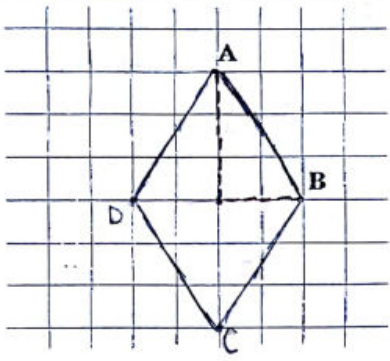
Achados parecidos são percebidos na quarta questão do teste, relacionada à construção de losango. Aqui, novamente, observamos que as propriedades desse quadrilátero notável foram utilizadas pelos dois participantes, como ilustrado na Figura 122.

Pelos registros disponibilizados na Figura 122, notamos que os dois partícipes mostraram compreensão coerente da definição e das propriedades do losango em suas produções. Ambos os alunos mencionaram que esse paralelogramo possui todos os lados congruentes, ainda, Teresa disse que na construção fez uso da simetria relativa às diagonais.

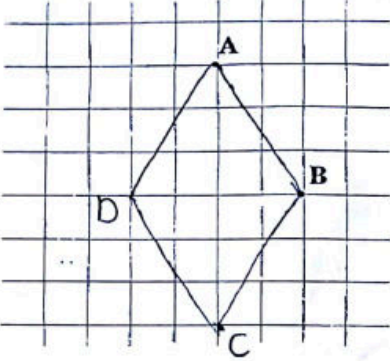
Nesse contexto, com base na teoria de Duval (1995), Teresa e Donizete estabeleceram a conversão (de ida e volta) entre as representações “língua natural” e “figura geométrica”.

Q04 – Utilizando os vértices **A** e **B** já marcados, desenhe o losango **ABCD**.

Figura 122 – Respostas dos alunos Teresa e Donizete à Q04.

Q04) Utilizando os vértices A e B já marcados, desenhe o losango ABCD:	Por que a figura que você desenhou é um losango?
	A noção que eu tenho de losango é que todos os seus lados devem ser iguais. Mas eu construí essa figura de forma simétrica: em que o centro divide a diagonal BD e a diagonal AC e dois segmentos iguais.

(a) Produção de Teresa (8º ano, 14 anos)

Q04) Utilizando os vértices A e B já marcados, desenhe o losango ABCD:	Por que a figura que você desenhou é um losango?
	Porque é um polígono de quatro lados que possui lados não consecutivos paralelos (paralelogramo) que tem todos os lados de mesma medida.

(b) Produção de Donizete (9º ano, 15 anos)

Fonte: dados da pesquisa

Isso pode ainda ser evidenciado na entrevista feita com a primeira partícipe, ou seja, ela fez a conversão entre os registros verbal e figural.

Pesquisador: Que figura é essa que você fez?

Teresa: É um losango, já que é um paralelogramo com todos os lados congruentes entre si. Além disso, suas diagonais são perpendiculares e estão nas bissetrizes dos ângulos internos.

Pesquisador: Na parte escrita, você disse o seguinte: “eu construí essa figura de forma simétrica”. Pode me explicar isso?

Teresa: Se eu fizer uma reta que passando por uma das diagonais, passando no centro do losango, coincidindo com o ponto médio das diagonais, eu vou dividir o losango em dois triângulos, certo? Esses triângulos são congruentes, se eu deslocar um e sobrepuser sobre o outro, eles coincidem. Eles são idênticos. Então a forma simétrica que falei isso, é eu dividir o losango em duas partes, de forma que elas sejam exatamente congruentes e idênticas. Se eu fizer isso com a outra diagonal, também foi dividir o losango em dois triângulos simétricos. Isso ocorre também quando estamos em frente ao espelho, nossa imagem no espelho é uma cópia simétrica de nós. Aí, o espelho é a reta simétrica.

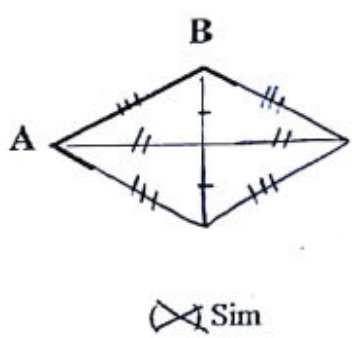
Como podemos evidenciar na fala apresentada acima, Teresa possui compreensão da definição e das propriedades do losango. Também, na construção desse quadrilátero, fez referência ao conceito de simetria de reflexão. Novamente, ela realizou a conversão entre os registros de representação semiótica, segundo Duval (1995).

Outro aspecto interessante evidenciado é que a aluna ao descrever a composição do losango em triângulos, ao explicar sua análise simétrica, fez tratamento do registro de representação semiótica, isto é, fez transformações dentro da própria “língua natural”, como sinalizado por Duval (1995).

Na quarta questão do teste, podemos perceber resultados análogos, isto é, os dois discentes apresentaram domínio acerca do conceito de quadriláteros notáveis, como ilustrado na Figura 123.

Q05 – O losango ABCD teve um pedaço apagado. Você pode reconstruí-lo?

Figura 123 – Respostas dos alunos Teresa e Donizete à Q05.

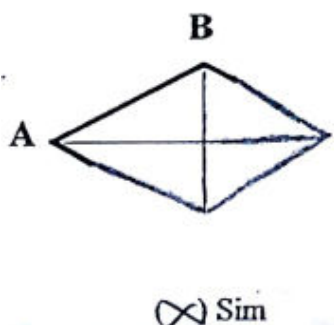


∞ Sim

Explique como:

Considerando o ponto de intersecção entre os segmentos que partem de A e B como sendo o centro. A medida de A até esse centro deve ser congruente ao lado oposto. Do mesmo modo ocorre com a medida de B até o centro.

(a) Produção de Teresa (8º ano, 14 anos)



∞ Sim

Explique como:

Já temos a medida do lado AB e temos os ângulos internos. Usando apenas régua conseguimos construir

(b) Produção de Donizete (9º ano, 15 anos)

Fonte: dados da pesquisa

Pela Figura 123, verificamos que a congruência dos lados do losango foi considerada pelos dois estudantes. Pelas marcações deixadas, Teresa deixou mais explícito que as diagonais desse quadrilátero, perpendiculares entre si, se cruzam no ponto médio, dividindo-as em duas partes congruentes.

Isso também pode ser verificado no registro escrito desses alunos. Logo, segundo Duval (1995), eles realizaram a conversão (de ida e de volta) entre os registros de representação semiótica, visto que mostraram compreensão adequada sobre os losangos.

Na entrevista, Teresa deu mais detalhes sobre como respondeu a questão do teste, conforme o extrato apresentado a seguir.

Pesquisador: *Pode me dizer como você reconstruiu?*

Teresa: *Primeiro, eu considerei o ponto de intersecção das diagonais, ou seja, o ponto médio. Nesse ponto, as diagonais ficam divididas em duas partes iguais. Então, com a régua, eu medi o comprimento dessas partes. Com o valor da medida dessas partes, eu fiz as outras partes das diagonais. Mas eu considerei que elas (as diagonais) são perpendiculares. Depois, eu medi o comprimento de um dos lados do losango. Como todos os lados têm a mesma medida, aí eu fiz os lados, mas respeitando isso. Os extremos dos lados vão coincidir com as extremidades das diagonais. Então, formei o losango. Veja que o losango ficou formado por quatro triângulos retângulos simétricos.*

Pesquisador: *Como assim, triângulos simétricos?*

Teresa: *Sim, os triângulos são congruentes, têm a mesma área, mesmo perímetro e os lados correspondentes são iguais.*

Pelo diálogo, comprovamos, novamente, que Teresa refez o losango com base na sua definição, nas suas propriedades, também, por meio do conceito de simetria. Desse modo, considerando a teoria de Duval (1995), a aluna fez a conversão entre os registros de representação semiótica.

Analisando as cinco questões do teste globalmente, tendo por base a teoria de Duval (1995), notamos que os dois discentes aplicaram a apreensão geométrica sequencial, uma vez que construíram formas geométricas referentes aos quadriláteros notáveis. Também, mobilizaram a apreensão discursiva com olhar construtor, visto que articularam as propriedades desses quadriláteros de modo adequando, estabelecendo inclusão de classe total.

Na composição do losango em triângulos, relativa à entrevista sobre a quarta questão do teste, Teresa mobilizou a apreensão operatória com olhar do inventor, demonstrando, por exemplo, a equivalência de áreas.

Portanto, concluímos que esse nível de desenvolvimento do pensamento geométrico, referente aos quadriláteros notáveis, isto é, o nível $n + 2$ do modelo construído nessa tese é formado por dois subníveis: $(n + 2)_a$ e $(n + 2)_b$.

O primeiro compreende os alunos que realizam inclusão de classe de modo parcial, assim, o quadrado é considerado apenas como retângulo ou então como somente losango.

O segundo é composto pelos estudantes que reconhecem o quadrado como todo paralelogramo que é retângulo e losango ao mesmo tempo, realizando, então, articulação completa entre suas propriedades.

7.2 Níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos participantes

Nesse tópico, apresentamos uma análise quantitativa do nível e subnível de desenvolvimento do pensamento geométrico dos partícipes da pesquisa, em especial, os do estudo experimental. Apesar de que esse não constitui o objetivo geral da nossa tese, em nosso entendimento, essa análise é importante tanto para complementar nossa pesquisa, como também para auxiliar educadores matemáticos que mostram interesse pela área.

A seguir, na Tabela 04 apresentamos a disposição do quantitativo de alunos partícipes por níveis e subníveis de desenvolvimento do pensamento geométrico, considerando as frequências absoluta e relativa.

Tabela 04 – Nível de pensamento geométrico dos alunos partícipes

NÍVEIS	FREQUÊNCIA ABSOLUTA	FREQUÊNCIA RELATIVA	SUBNÍVEIS	FREQUÊNCIA ABSOLUTA	FREQUÊNCIA RELATIVA
n	228	76,8%	$(n)_a$	97	32,7%
			$(n)_b$	131	44,1%
$n + 1$	40	13,5%	$(n + 1)_a$	18	6,1%
			$(n + 1)_b$	22	7,4%
$n + 2$	29	9,7%	$(n + 2)_a$	14	4,7%
			$(n + 2)_b$	15	5%
Total	297	100%	Total	297	100%

Fonte: elaborado pelo autor

Ao apreciarmos a Tabela 04, notamos que o nível n apresentou a maior concentração de alunos, pois 76,8% do total de discentes atuava nesse nível, o que corresponde a 228 dos 297 participantes da investigação. Ou seja, no período do estudo, esses alunos utilizaram a estratégia identificar os quadriláteros notáveis a partir de um subconjunto das características visuais ou por meio do aspecto global.

Contudo, ao realizarmos a comparação desse resultado com o do estudo empírico (Tabela 01, página 268), evidenciamos que houve um alto crescimento na porcentagem de discentes nesse nível, passando de 51,3% para 76,8%. Isto é, teve um aumento de 25,5 pontos percentuais. É importante destacar que na etapa empírica, esse nível também apresentou a maior concentração de alunos.

Tal fato pode ter ocorrido, visto que na etapa experimental, participaram apenas alunos dos anos finais do ensino fundamental, diferentemente do primeiro momento da pesquisa, que contou com a participação de alunos do ensino médio, estudantes de licenciatura em Matemática e professores formados em exercício docente.

Agora, ao compararmos apenas os alunos dos anos finais do ensino fundamental, em ambos os estudos (Tabela 02 - página 270 - e Tabela 04), verificamos que o crescimento é um pouco maior: 38,5 pontos percentuais.

Em relação aos subníveis do nível n , verificamos que a maior parte dos estudantes que trabalhavam nesse nível, se encontrava no segundo subnível, o $(n)_b$, 44,1% dos 76,8%. Aqui, a estratégia mobilizada foi reconhecer os quadriláteros por meio do aspecto global, desconsiderando a definição e as propriedades.

Em comparação com o estudo empírico (Tabela 02), percebemos que o subnível $(n)_b$ apresentou um crescimento percentual relativo, passando de 34,9% para 44,1%. Todavia, esse subnível permaneceu como aquele que apresenta a maior concentração de estudantes no nível.

Já o primeiro subnível do nível n , o $(n)_a$, marcado pela análise dos quadriláteros notáveis com base em um subconjunto de atributos visuais, mostrou um considerável aumento percentual de 29,3 pontos, passando 3,4% para 32,7% do total.

Esses resultados parecem evidenciar que existe uma dificuldade em relação ao ensino de quadriláteros nos anos finais do ensino fundamental, sobretudo, em

promover o desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos do estudo experimental. Pois, a maior parte dos estudantes desse nível de escolarização não consegue analisar os quadriláteros notáveis a partir dos seus elementos constituintes e de suas propriedades.

Com relação ao nível $n + 1$, observamos uma redução significativa, passando de 45,7%, relativo ao estudo empírico, passando para 13,5%, referente à etapa experimental. No que se refere aos subníveis desse nível, houve uma inversão do domínio sobre a maior concentração de alunos.

Assim, o subnível $(n + 1)_a$, caracterizado pelo reconhecimento dos quadriláteros notáveis a partir dos seus elementos constituintes, caiu de 39,4% (fase empírica) para 6,1% (fase experimental). Por sua vez, o subnível $(n + 1)_b$, marcado pelo estudo dos quadriláteros com base nas propriedades (sem articulação entre elas), mostrou um crescimento percentual de 1,1 pontos, deslocando de 6,3% (primeira etapa) para 7,4% (segunda etapa).

Ao analisarmos a frequência relativa dos discentes que se encontram no nível $n + 2$, percebemos um relativo decréscimo, comparando a etapa empírica com a experimental, passando de 16% para 9,7%. No tocante aos subníveis desse, também, notamos uma mudança na “liderança” relativa à concentração de estudantes.

Dessa forma, o subnível $(n + 2)_a$ apresentou uma queda, decolando de 13,1%, referente ao estudo empírico, para 4,7%, relacionado à pesquisa experimental. Aqui, a estratégia utilizada foi analisar os quadriláteros notáveis por meio da articulação parcial das suas propriedades.

No que lhe diz respeito, o subnível $(n + 2)_b$ mostrou um aumento percentual, passando de 2,9% (primeiro momento) para 5% (segundo momento). A estratégia mobilizada nesse subnível foi estabelecer relações de inferência entre as propriedades dos quadriláteros notáveis, realizando inclusão de classe total.

Dando continuidade ao nosso trabalho de análise, elaboramos a Tabela 05, na qual há a lista dos anos escolares e o nível e subnível de desenvolvimento do pensamento geométrico dos discentes. Esse quadro foi construído com base na Frequência Absoluta (F_A) e na Frequência Relativa (F_R).

Pela Tabela 05, verificamos que a frequência relativa de estudantes que não conseguem reconhecer os quadriláteros notáveis como detentores de elementos constituintes e de propriedades reduziu ao passo que o ano escolar cresceu.

Tabela 05 – Nível de pensamento geométrico dos alunos partícipes por nível de escolaridade

	6º ANO		7º ANO		8º ANO		9º ANO	
NÍVEIS	F _A	F _R	F _A	F _R	F _A	F _R	F _A	F _R
n	66	98,5%	66	86,8%	60	67,4%	36	55,4%
$n + 1$	01	1,5%	10	13,2%	20	22,5%	09	13,8%
$n + 2$	00	0,0%	00	0,0%	09	10,1%	20	30,8%
Total	67	100%	76	100%	89	100%	65	100%
SUBNÍVEIS	F _A	F _R	F _A	F _R	F _A	F _R	F _A	F _R
$(n)_a$	26	38,8%	31	40,8%	19	21,3%	21	32,3%
$(n)_b$	40	59,7%	35	46,0%	41	46,1%	15	23,1%
$(n + 1)_a$	01	1,5%	06	7,9%	08	9,0%	03	4,6%
$(n + 1)_b$	00	0,0%	04	5,3%	12	13,5%	06	9,2%
$(n + 2)_a$	00	0,0%	00	0,0%	04	4,4%	10	15,4%
$(n + 2)_b$	00	0,0%	00	0,0%	05	5,6%	10	15,4%
Total	67	100%	76	100%	89	100%	65	100%

Fonte: elaborado pelo autor

Como ilustração, podemos verificar esse fato, ao confrontar os resultados do 6º ano do ensino fundamental com os do 8º ano, referentes ao nível n , no qual, houve uma queda de 31,1 pontos, passando de 98,5% (6º ano) para 67,4% (8º ano). Essa redução é maior se compararmos o 6º ano com o 9º ano, em que a redução foi de 43,1 pontos, deslocando de 98,5% (6º ano) para 55,4% (9º ano).

Essa tendência do período de escolaridade na prática de utilizar atributos do pensamento geométrico pode ser constatada ainda ao contrapormos a frequência relativa de discentes do 6º ano e 7º ano no nível $n + 1$, no qual teve um crescimento de 11,7 pontos, passando de 1,5% (6º ano) para 13,2% (7º ano).

Também, notamos um aumento quando comparamos esses anos escolares com o 8º ano: acréscimos de 6,4 pontos (de 1,5% do 6º ano para 22,5% do 8º ano) e 3,0 pontos (de 13,2% do 7º ano para 22,5% do 8º ano) respectivamente.

Ao comparamos o 8º ano com o 9º ano ainda em relação ao nível $n + 1$, percebemos uma diminuição, passando de 22,5% (8º ano) para 13,8% (9º ano), o que representa uma variação de 8,7 pontos percentuais. Todavia, no nível seguinte, $n + 2$, notamos um crescimento de 20,7 pontos, deslocando de 10,1% (8º ano) para 30,8% (9º ano).

No que se refere à distribuição dos subníveis por ano escolar apresentada na Tabela 05, verificamos que só há equilíbrio no 7º ano, com relação aos subníveis

$(n)_a$ e $(n)_b$ e no 9º ano, relativo aos subníveis $(n + 2)_a$ e $(n + 2)_b$. Logo, não há um domínio percentual nem do primeiro e nem do segundo ao longo da escolarização.

Contudo, esses dados percentuais referentes aos três níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico não são muito distantes entre si. Isso parece indicar que o ambiente de sala de aula tem contribuído para o avanço entre os níveis, mas não de forma significativa, pois a maioria dos alunos do 9º ano atuava no nível n .

Outro aspecto que nos chamou atenção foi o fato de que quase todos os alunos do 6º ano se encontram no nível n . Desse modo, no período da pesquisa, não conseguiram analisar os quadriláteros com base na definição e nas propriedades. Com base nas orientações curriculares brasileiras (PERNAMBUCO, 2012; BRASIL, 1997; 2017), esse conceito deve ser sistematizado no primeiro ano dos anos finais do ensino fundamental.

Diante disso, alguns questionamentos surgem: Será que os quadriláteros são abordados em sala de aula? Como se caracteriza o ensino desse tópico? Quantas aulas são destinadas à Geometria? O professor possui domínio e segurança acerca desse saber?

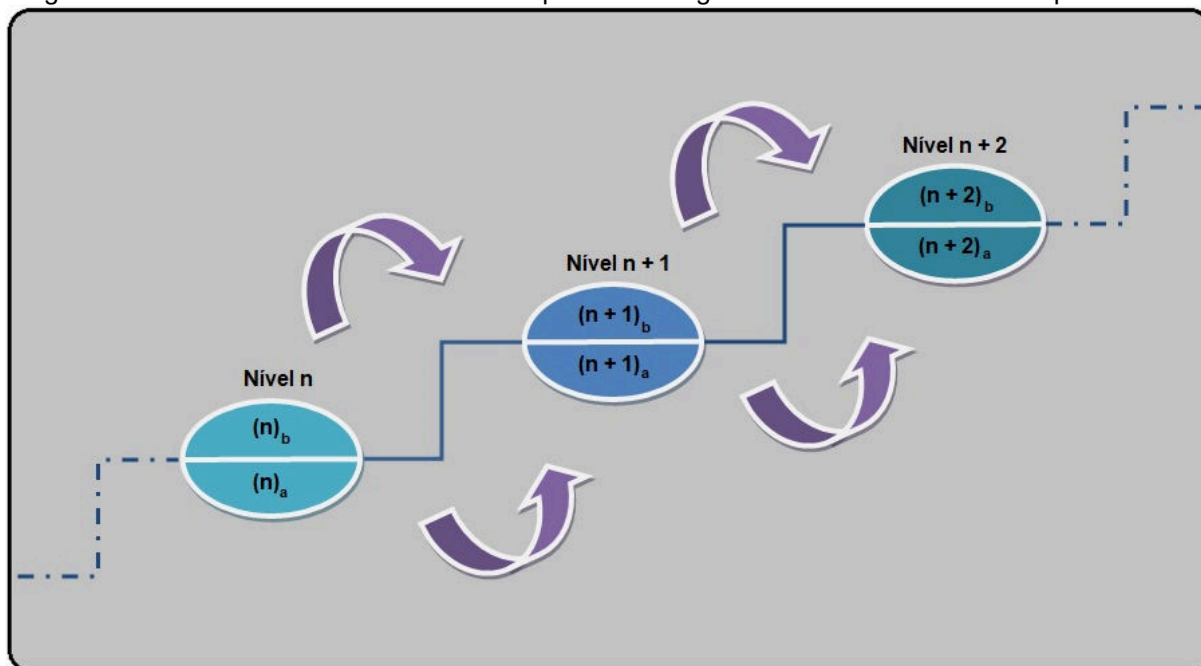
Como visto ao longo desse capítulo, não foi nosso objetivo responder tais perguntas, todavia, elas nos ajudam a evidenciar que há um problema com o ensino dos quadriláteros nos anos finais do ensino fundamental. Assim, novas pesquisas poderão surgir a partir daqui, que busquem respostas às perguntas mencionadas.

7.3 Algumas considerações

Este capítulo objetivou realizar a validação do modelo *a priori*. Ao seu término obtivemos, depois de analisarmos as respostas ao teste e às entrevistas dos estudantes, com foco nos registros de representação semiótica de Duval (1995), a versão final de um modelo que permite identificar o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico de um discente, referente ao conceito de quadriláteros notáveis, quando abordado em situações de construção e de classificação.

Para tanto, o modelo produzido é formado por três níveis, conforme o esquema apresentado na Figura 124.

Figura 124 – Níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico relacionados aos quadriláteros



Fonte: elaborado pelo autor

O primeiro nível é o n , sendo formado pelos alunos que usam a estratégia considerar o quadrilátero notável por meio do aspecto global. Esse nível apresenta dois subníveis:

- $(n)_a$ – caracterizado pelos estudantes que percebem os quadriláteros somente a partir de um subconjunto das características visuais, pois ainda não conseguem formar imagens visuais;
- $(n)_b$ – marcado pelos discentes que identificam um quadrilátero como um todo, excluindo seus elementos e suas propriedades.

O segundo nível é o $n + 1$ sendo composto pelos estudantes que compreendem os quadriláteros notáveis a partir dos seus elementos constituintes e de suas propriedades. Tal nível também possui dois subníveis:

- $(n + 1)_a$ – que abrange os alunos que identificam um quadrilátero por meio de sua definição;
- $(n + 1)_b$ – no qual os discentes analisam os quadriláteros como detentores de propriedades, mas sem estabelecer relações entre elas.

No terceiro nível, $n + 2$, em que se enquadram os alunos que estabelecem relações de implicação entre as propriedades dos quadriláteros notáveis. Do mesmo modo como nos anteriores, esse nível apresenta dois subníveis:

- $(n + 2)_a$ – marcado pelos estudantes que realizam inclusão de classe de modo parcial, ou seja, reconhecem um quadrado como um retângulo ou um quadrado como um losango, porém, ainda não identificam um quadrado como um tipo especial de retângulo e de losango, simultaneamente;
- $(n + 2)_b$ – sinalizado pelos discentes que percebem os quadriláteros a partir das relações estabelecidas entre suas propriedades. Nessa direção, um quadrado é considerado como todo paralelogramo que é retângulo e losango ao mesmo tempo.

Na elaboração desses três níveis, como componente básico, utilizamos os atributos do pensamento geométrico provocados na estratégia mobilizada pelos partícipes na resolução de atividades sobre produção e classificação de quadriláteros notáveis, em virtude de que, em nosso entendimento, a estratégia empregada pelo estudante permanece invariável à medida que a questão ou situação é modificada.

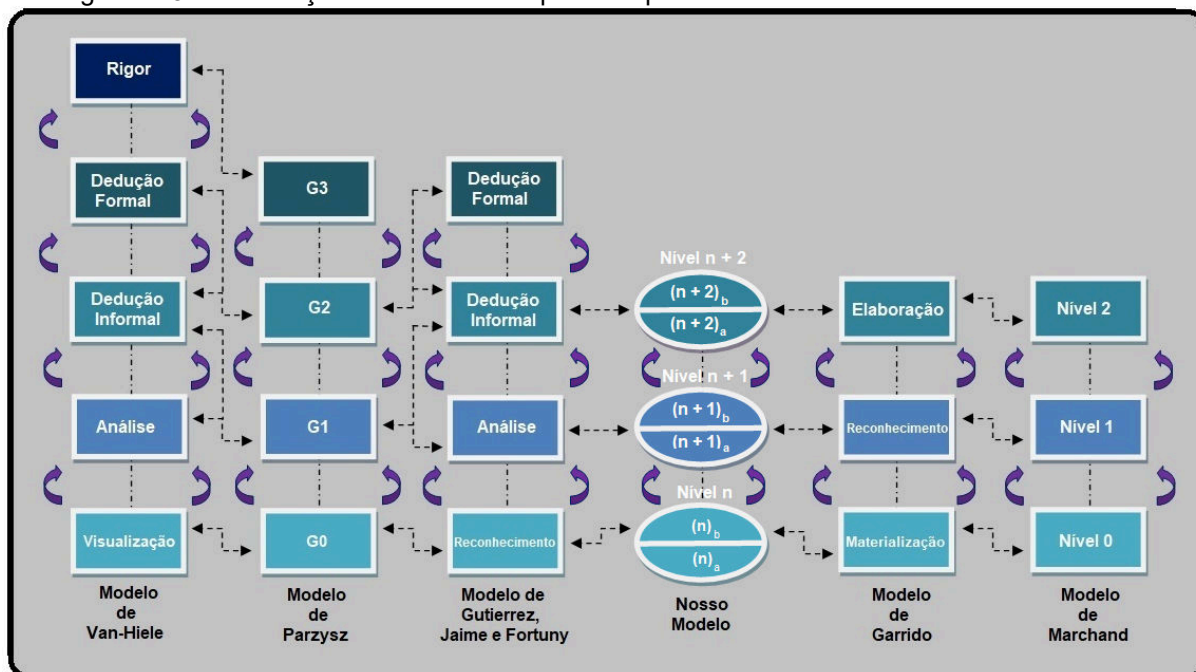
Todos esses níveis estão vinculados ao pensamento geométrico elementar, uma vez que não foram identificados, na escola investigada, alunos que analisassem os quadriláteros notáveis por meio de processos dedutivos e das geometrias não euclidianas. Se essas características fossem mobilizadas, os estudantes mobilizariam um pensar em Geometria de natureza avançada.

Além disso, comparando o modelo proposto em nossa tese com os modelos de Van-Hiele (1957), Gutierrez, Jaime e Fortuny (1991), Garrido (2005), Parzysz (2006) e Marchand (2006), verificamos que há proximidades, sobretudo, no que se refere às características do pensamento geométrico que são mobilizadas pelos estudantes. Essa articulação encontra-se ilustrada na Figura 125.

O nosso primeiro nível, isto é, o nível n , pode corresponder aos seguintes níveis: *Visualização* de Van-Hiele, *G0* de Parzysz, *Reconhecimento* de Gutierrez, Jaime e Fortuny, *Materialização* de Garrido e *Nível 0* de Marchand. Em todos esses níveis, em geral, a estratégia utilizada pelo aluno consiste em identificar figuras

geométricas e/ou sólidos geométricos a partir do aspecto global (natureza geométrica não axiomática).

Figura 125 – Articulação entre o modelo para os quadriláteros notáveis e os demais modelos



Fonte: elaborado pelo autor

Já o nível $n + 1$ pode combinar com os níveis: *Análise* de Van-Hiele, *G1* de Parzys, *Análise* de Gutierrez, Jaime e Fortuny, *Reconhecimento* de Garrido e *Nível 1* de Marchand. Geralmente, nesses níveis, a estratégia aplicada pelo estudante é reconhecer figuras geométricas e/ou sólidos geométricos por meio dos atributos geométricos, de modo desarticulado. A geometria estudada é não axiomática.

Por fim, o nível $n + 2$ pode conferir com os níveis: *Dedução Informal* de Van-Hiele, *G2* de Parzys, *Dedução Informal* de Gutierrez, Jaime e Fortuny, *Elaboração* de Garrido e *Nível 2* de Marchand. De modo geral, nesses níveis, a estratégia utilizada pelo discente é identificar figuras geométricas e/ou sólidos geométricos por meio da ordenação de suas propriedades. Tais níveis se situam na fronteira entre as geometrias não axiomáticas e as geometrias axiomáticas.

Um importante aspecto que diferencia o nosso modelo dos demais é que enquanto os modelos de Van-Hiele (1957), Gutierrez, Jaime e Fortuny (1991), Parzys (2006) e Marchand (2009) têm o construtivismo como base epistemológica para análise cognitiva e o de Garrido (2005) tem um enfoque sócio-histórico, em

nossa tese, estamos analisando o funcionamento cognitivo dos estudantes por meio da semiose, enquanto representação, proposta por Duval (1995).

Desse modo, os modelos propostos por Van-Hiele (1957), Gutierrez, Jaime e Fortuny (1991), Garrido (2005), Parzysz (2006) e Marchand (2009) podem ser considerados como modelos cognitivos, enquanto que o proposto em nossa tese é tido como semiocognitivo, visto que, no nosso, a análise do pensamento geométrico ocorre a partir das representações semióticas mobilizadas pelos estudantes.

Além disso, o nosso modelo apresenta subníveis entre os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico. Isso não foi verificado nos outros modelos supracitados.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa, assumimos como ponto de partida o estudo do pensamento geométrico, compreendido como uma ação humana que se desenvolve dentro e fora da escola, sendo que no ambiente escolar esse processo é sistematizado. Assim, analisamos a forma de pensar em Geometria relativa ao conceito de quadriláteros notáveis.

A escolha pelos quadriláteros notáveis ocorreu, especificamente, pela relevância desse objeto matemático para o currículo do ensino básico, estando presente desde os anos iniciais do ensino fundamental, sendo sua sistematização realizada no 6º ano. Logo, é um saber também utilizado no ensino de outros conceitos em Matemática, tais como número irracional, área, comprimento, perímetro, abertura de ângulo, equações lineares, etc.

A opção por esse conceito também esbarra nos resultados de algumas pesquisas em Educação Matemática (COSTA; CÂMARA DOS SANTOS; 2015a; 2015b; 2016a; 2016b; 2017a; 2017b; PACHÊCO; PACHÊCO; SILVA, 2017; MONTEIRO; ROSA DOS SANTOS, 2018; SANTOS; ROSA DOS SANTOS SANTOS, 2018; COSTA; ROSA DOS SANTOS, 2018a; 2018b; 2018c; 2018d.), acerca das dificuldades conceituais de aprendizagem apresentadas por alunos da educação básica e de sua abordagem em livros didáticos, em especial, quando os quadriláteros notáveis são explorados em situações de construção e de classificação.

Nessa direção, construímos a seguinte questão de pesquisa: em que medida existem níveis e subníveis de desenvolvimento do pensamento geométrico de alunos dos anos finais do ensino fundamental, ao resolverem problemas sobre os quadriláteros notáveis, em situações de produção e de classificação?

Na busca de respostas a pergunta lançada, essa pesquisa de doutorado teve por objetivo propor um modelo que permite identificar níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico apresentado por alunos dos anos finais do ensino fundamental, ao resolverem atividades sobre quadriláteros notáveis. Para tanto, elaboramos os seguintes objetivos específicos:

- caracterizar o modelo de níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico para estudantes dos anos finais do ensino fundamental relacionado aos quadriláteros notáveis;
- verificar a existência de níveis e subníveis em produções de estudantes dos anos finais do ensino fundamental em relação aos quadriláteros notáveis;
- validar o modelo de níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico a partir das produções de alunos dos anos finais do ensino fundamental relacionados aos quadriláteros notáveis.

Para atingir esses objetivos, esse estudo foi dividido em duas etapas. Na primeira, etapa teórica, realizamos a construção do modelo *a priori* a partir da análise da produção de 464 participantes dos estudos de Costa (2016), Costa e Câmara dos Santos (2015a; 2015b; 2016a; 2016b; 2016c; 2017a; 2017b), e Costa e Rosa dos Santos (2016; 2017a; 2017b).

Na segunda etapa, relativa ao estudo experimental, realizamos a validação do modelo por meio da análise das produções de 297 alunos dos anos finais do ensino fundamental, referentes à uma situação real de sala de aula.

Assim, com base nos estudos de Fischbein (1993), Duval (1995), Pais (1996), Gravina (2001) e Leivas (2009), realizamos a caracterização do pensamento geométrico que, em nosso entendimento, consiste em uma atividade específica do ser humano, sendo composto por seis abstrações geométricas hierárquicas, logo, um aluno, ao pensar geometricamente, não aplica todas essas abstrações, ao mesmo tempo.

Nessa direção, sustentamos a tese que pensar geometricamente demanda a utilização de uma das seguintes abstrações em Geometria: espacial, perceptiva, analítica, descritiva, dedutiva e hipotética ou teórica. Assim, são essas abstrações que permitem ao aluno desenvolver essa forma de pensamento.

Para tanto, o pensamento geométrico é a capacidade de produzir conhecimentos em Geometria e de utilizar de modo adequado os instrumentos geométricos na solução de um problema.

É a capacidade de perceber a natureza dos fenômenos e de realizar inferências sobre eles, de reconhecer e compreender a relevância da Geometria

como uma ferramenta para compreender a realidade física e como um modelo em Matemática para entender o mundo teórico.

Nesse sentido, há dois tipos de pensamento geométrico: elementar e avançado. O primeiro, dito elementar, é caracterizado pela vivência e pelo contato com a Geometria da vida prática, composta pelos objetos do mundo físico, e ainda, pelos estudos geométricos euclidianos.

Já o pensamento geométrico avançado é marcado pela análise de objetos em Geometria de natureza complexa, tais como o estudo de processos dedutivos e a comparação de axiomáticas, entre elas, as geometrias não euclidianas. Então, é o tipo de Geometria vivenciada que possibilita o desenvolvimento do pensamento geométrico.

Ao término de nosso estudo, do mesmo modo que fizeram Van-Hiele (1957), Gutierrez, Jaime e Fortuny (1991), Garrido (2005), Parzysz (2006), e Marchand (2009), constatamos que é viável realizar a proposição de um modelo de níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico.

Especificamente, em nosso estudo, concluímos que a proposta de um modelo permite realizar a identificação de níveis e subníveis de desenvolvimento do pensamento geométrico relativo ao conceito de quadriláteros notáveis, quando abordado em situações de construção e de classificação.

Como comprovado nessa tese, os modelos de Van-Hiele (1957), Gutierrez, Jaime e Fortuny (1991), Garrido (2005), Parzysz (2006), e Marchand (2009) não conseguem explicar algumas estratégias mobilizadas pelos estudantes investigados como aqueles feitos em nosso estudo.

Outro aspecto que diferenciamos tais modelos do nosso, é que o proposto nessa tese foca no funcionamento semiocognitivo, isto é, analisa o pensamento geométrico a partir da representação semiótica. Os demais centram na análise cognitiva ou sóciohistórica.

O modelo proposto por nós é formado por três níveis. O primeiro, nível n , é caracterizado pelas estratégias da abstração geométrica perceptiva, deslocando pelo nível $n + 1$, em que o pensamento geométrico do discente que atua nesse nível é marcado pela abstração geométrica analítica, alcançando, no final, o nível $n + 2$, no qual o pensar em Geometria abrange a abstração geométrica descritiva.

O estudante que se situa no nível n não consegue, diante das situações de construção e classificação dos quadriláteros notáveis, reconhecer essas formas geométricas a partir da definição e das propriedades. Desse modo, identifica esses quadriláteros com base em subconjunto de atributos visuais ou então por meio do aspecto global, baseando-se em objetos do mundo físico.

O aluno que se localiza no nível $n + 1$, ao resolver uma atividade sobre construção ou classificação de quadriláteros notáveis, mobiliza a estratégia de analisar esses objetos geométricos como detentores de elementos constituintes e de propriedades. Todavia, não consegue realizar a articulação entre esses atributos no reconhecimento desses quadriláteros.

Por fim, o discente que se encontra no nível $n + 2$, ao analisar um problema sobre construção ou classificação de quadriláteros notáveis, estabelece relações de implicação entre as propriedades dessas figuras geométricas. Nessa direção, pode realizar inclusão de classe de modo parcial ou, então, de maneira total.

Na disposição dos 297 alunos que participaram do estudo experimental, relativo à segunda etapa da pesquisa, nos níveis propostos no modelo dessa tese, verificamos, de maneira explícita, que o ambiente escolar interfere no desenvolvimento do pensamento geométrico, todavia, não de forma significativa.

Isso foi percebido ao longo da escolarização, por exemplo, com relação ao nível n , no qual a frequência relativa varia muito pouco, começando com 98,5% no 6º ano, passando para 86,8% no 7º ano, atingindo 67,4% no 8º ano, chegando a 55,4% no 9º ano. No geral, houve uma queda de apenas 43,1 pontos percentuais.

Apesar dessa expressiva redução, julgamos que ela não foi significativa, pois a maioria dos alunos do 9º ano ainda atuava no nível n . Cenário diferente é verificado quando comparamos esse resultado com o do estudo teórico, no qual, entre os estudantes que estavam concluindo os anos finais do ensino fundamental, 75% estavam no nível $n + 1$ e 25% no $n + 2$.

Com relação ao segundo nível, $n + 1$, a oscilação é relativa, começando com 1,5% no 6º ano, passando para 13,2% no 7º ano, chegando a 22,5% no 8º ano, e caindo para 13,8% no 9º ano. Realizando uma comparação entre o 6º ano e 9º ano, notamos que o crescimento foi de 12,3 pontos em porcentagem.

Sobre a frequência relativa de estudantes no nível $n + 2$, o crescimento evidenciado ao longo dos anos finais do ensino fundamental não é pequeno, começando com 0,0% no 6º ano, permanecendo estável no 7º ano, crescendo para 10,1% no 8º ano, alcançando 30,8% no 9º ano. Então, no geral, a variação é de 30,8 pontos, ao compararmos o 6º ano com o 9º ano.

Esses dados são bastante preocupantes, pois conforme orientações nos documentos curriculares no país (BRASIL, 1997; 2017; PERNAMBUCO, 2012), o conceito de quadriláteros notáveis deve ser sistematizado no 6º ano do ensino fundamental e, a partir do 8º ano, o foco deve ser a demonstração de algumas de suas propriedades.

Diante desses resultados, algumas questões surgem: O ensino de quadriláteros notáveis nos anos finais do ensino fundamental contribui com o desenvolvimento do pensamento geométrico? Esse conceito é abordado em sala de aula? Como é sua abordagem? Quais as situações que dão sentido a esse saber são exploradas?

Para responder todas essas questões seria necessário um estudo de outra natureza. Talvez, a análise das organizações didáticas e matemáticas acerca do ensino dos quadriláteros e da prática do professor de Matemática, tendo por base a Teoria Antropológica do Didático, possa fornecer importantes informações acerca do tema. Deixaremos isso para estudos futuros, após o doutorado.

Como já mencionado, não é finalidade dessa tese responder essas questões. Contudo, os resultados obtidos mostram que a escolarização praticamente não contribui com o desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes. Na pior das hipóteses, contribuiu nas situações de construção e de classificação que exploram os quadriláteros notáveis, que foi o cerne de nosso estudo.

Nessa direção, em nosso entendimento, o nosso modelo poderá ser adequado e produtivo tanto para os professores de Matemática, em efetivo exercício na sala de aula da escola básica, fornecendo um banco de dados sobre o pensamento geométrico dos seus alunos, como também para o desenvolvimento de novas pesquisas em Educação Matemática.

Ainda, em nossa compreensão, os achados da tese serão importantes para os cursos de formação de professores de Matemática, que formam docentes para

atuarem desde o ensino infantil, até o ensino fundamental e ensino médio. Aqui, incluímos também os cursos de formação continuada.

De modo geral, acreditamos que os objetivos traçados na pesquisa foram alcançados. Contudo, outro aspecto que merece um debate em pesquisas futuras é a existência de níveis e subníveis de desenvolvimento do pensamento geométrico relativos às outras abstrações geométricas: espacial, dedutiva e hipotética (ou teórica). Existem níveis nessas abstrações? Como se caracterizam? Quais situações são vivenciadas? Essas questões nos serão úteis em estudos que estão por vir.

Além disso, um dos limites do modelo proposto é que ele está centrado na identificação de níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico referente aos quadriláteros notáveis, quando abordados em situações de construção e de classificação.

No entanto, a Geometria é formada por vários objetos geométricos. Em virtude disso, outras questões para estudos futuros surgem: É viável adequar o modelo apresentado para outros conceitos geométricos? É possível adaptá-los para outras situações que dão sentido aos quadriláteros?

Afinal, em nosso entendimento, esses e outros questionamentos poderão ser respondidos, se o ensino de Geometria for trabalhado de forma adequada, em especial, nas escolas (públicas e privadas), que foque o desenvolvimento do pensamento geométrico ao longo da escolarização, a partir de uma diversidade de naturezas de atividades e de situações que dão sentido aos objetos geométricos.

Para tanto, em nossa compreensão, no momento em que esses aspectos forem considerados, o estudante terá uma aprendizagem significativa em Geometria, deixando de aplicar a geometria do artesanato. Assim, ele desenvolverá um pensamento geométrico com sentido e entendimento.

Por fim, esperamos que esta tese possa colaborar de algum modo com a realização de outros estudos educacionais e, em particular, com a prática pedagógica de nossos companheiros de trabalho, professores de Matemática da educação básica, seja na organização das situações didáticas, ou seja na vivência de estudos investigativos em sala de aula.

REFERÊNCIAS

ABDULLAH; A. H.; ZAKARIA, E. The effects of Van Hiele's phases of learning geometry on students' degree of acquisition of Van Hiele levels. *In: INTERNATIONAL FORUM ON ENGINEERING EDUCATION*, 6., 2012, Sharjah. **Annals** [...]. Sharjah: Procedia, 2012. p.252-266.

_____. Enhancing Students' Level of Geometric Thinking Through Van Hiele's Phase-based Learning. **Indian Journal of Science and Technology**, Bangalore, v. 6, n. 5, p.1-15, 2013.

ABU, M. S.; ALI, M. B. HOCK, T. T. Assisting Primary School Children to Progress through Their Van Hiele's Levels of Geometry Thinking Using Google SketchUp. *In: INTERNATIONAL EDUCATIONAL TECHNOLOGY CONFERENCE*, 12, 2012, Taoyuan. **Annals** [...]. Taoyuan: Procedia, 2012. p.75-84.

ALMEIDA, J. R. **Níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico: um modelo para os problemas de partilha de quantidade**. 2016. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2016.

ALMOULOUD, S. A.; MANRIQUE, A. L. A geometria no Ensino Fundamental: concepções de professores e de aluno. *In: ENCONTRO DA ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO*, 24., 2001, Caxambu. **Anais** [...]. Caxambu: Anped, 2001. p.1-8.

ALMOULOUD, S. A.; SILVA, M. J. F. Engenharia didática: evolução e diversidade. **Revista Eletrônica de Educação Matemática - Revemat**, Florianópolis, v. 7, n.2, p. 22-52, 2012.

ALMOULOUD, S. A. Fundamentos norteadores das teorias da Educação Matemática: perspectivas e diversidade. **Amazônia – Revista de Educação em Ciências e Matemáticas**, Belém, v. 13, n.27, p. 5-35, 2017.

ALVES; G. S.; SAMPAIO, F. F. O modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele e possíveis contribuições da geometria dinâmica. **Revista de Sistemas de Informação da FSMA**, Visconde de Araújo, v.2, n. 5, p. 69-76, 2010.

AMÂNCIO, R. A. **O desenvolvimento do pensamento trabalhando polígonos especialmente quadriláteros**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2013.

ARAÚJO, W. R. **O ensino do conceito de área no sexto ano noturno do ensino fundamental: uma proposta didática fundamentada na teoria de Van Hiele**. 2012. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Alagoas: Maceió, 2012.

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. *In*: BRUN, J. **Didática das Matemáticas**. Tradução Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 193-217.

ARRUDA FILHO, P. H. C.; ROSA DOS SANTOS, M. Uma análise dos conhecimentos geométricos dos alunos e professores dos anos finais do ensino fundamental: um estudo sob a ótica da teoria de Van Hiele. *In*: ENCONTRO PARAIBANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2012, João Pessoa. **Anais [...]**, João Pessoa: SBEM Regional Paraíba, 2012. p.1.10.

ATEBE, H. U. **Students' Van Hiele levels of geometric thought and conception in plane geometry**: a collective case study of Nigeria and South Africa. 2008. Thesis (Doctorate of Philosophy) – Rhodes University: Grahamstown, 2008.

ATEBE; H. U.; SCHAFER, M. As soon as the four sides are all equal, then the angles must be 90° each: Children's misconceptions in geometry. **African Journal of Research in SMT Education**, Port Elizabeth, v. 12, n. 2, p. 47–66, 2008.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. 10. ed. Fortaleza: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

BARBOSA, C. P. **O pensamento geométrico em movimento**: um estudo com professores que lecionam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental de uma escola pública de Ouro Preto (MG). 2011. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011.

BALACHEFF, N. Preuve et démonstration en Mathématiques au collège. **Recherche en Didactique des Mathématiques**, Paris, v. 3, n. 3, p.261-304, 1982.

BEDIM, A. A. P. **O ensino de conceitos geométricos no 2º ano do ensino fundamental usando o WebQuest “viajando nas obras de arte”**. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual Paulista, Presidente Prudente, 2011.

BENITES, J. R. **Estudo de caso utilizando o modelo de pensamento geométrico dos Van Hiele**. 2010. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, Dourados, 2010.

BISHOP, A. J. Review of research on visualization in mathematics education. **Focus on Learning Problems in Mathematics**, Chicago, v. 11, n. 1-2, p. 7-16, 1989.

BKOUICHE R. Enseigner la géométrie, pourquoi? **Repères-IREM**, Lille, v.1, n.1, p.92-102, 1988.

BLANCO, T. F. Atendiendo habilidades de visualización en la enseñanza de la geometría. *In*: FESTIVAL INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA, 9., 2014, Puntarenas, **Anales [...]**.Puntarenas, 2014. p.1-13.

BOMTEMPO, K. Piaget e a Construção dos Conceitos Geométricos. **Revista Temporis(ação)**, Cidade de Goiás, v. 1, n.1, p. 276-291, 2008.

BONAFE, F. Quelques hypothèses et résultats sur l'enseignement de la géométrie de l'espace à partir de la représentation en perspective cavalière. **Bulletin de l'APMEP**, Paris, v.1, n. 363, pp. 151-164, 1988.

BONGIOVANNI, V. As diferentes definições dos quadriláteros notáveis. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, v.1, n. 55, p. 29-32, 2004.

_____. Sobre definições de trapézios isósceles. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, v.1, n. 72, p. 9-10, 2010.

BORBA, R. O que pode influenciar a compreensão de conceitos: o caso dos números inteiros relativos. In: BORBA, R.; GUIMARÃES, G. (org.). **A Pesquisa em Educação Matemática: repercussões na sala de aula**. São Paulo: Cortez, 2009. p.58-102.

BRANDÃO, J. C. **Matemática e deficiência visual**. 2010. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2010.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

_____. **SAEB – 2015. Matemática**. Brasília: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2015. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/artigo/-/asset_publisher/B4AQV9zFY7Bv/> Acesso em: 27 fev 2017.

_____. **Base Nacional Curricular Comum**. 3ª versão revista. Ministério da Educação, Brasília, 2017.

BREDA, A.; SERRAZINA, L.; MENEZES, L.; SOUSA, H.; OLIVEIRA, P. **Geometria e medida no ensino básico**. Lisboa: Direção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular do Ministério da Educação de Portugal, 2011.

BRITO, A. C. V. I. L. **Geometria na educação infantil: formação e saberes necessários à prática pedagógica**. 2012. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Oeste Paulista, Presidente Prudente, 2012.

BROUSSEAU, G. Le contrat Didactique: Le Milieu. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Paris, v.9, n.3, p.309-336, 1988

BURGER; W. F.; SHAUGHNESSY, J. M. Characterizing the van Hiele Levels of Development in Geometry. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 17, n. 1, p. 31-48, 1986.

CÂMARA DOS SANTOS, M. **Analyse didactique d'un materiel pour les premiers**

apprentissages en géométrie. 1992. Mémoire (Master en Didactique Des Disciplines Scientifiques) – Université Claude Bernarde Lyon 1, Lyon, 1992.

_____. Effets de l'utilisation du logiciel Cabri-Géomètre dans le développement de la pensée géométrique. *In*: CONGRES INTERNATIONAL CABRI GÉOMÈTRE, 2., 2001, Montreal. **Annales** [...]. Montreal: CICAG, 2001, p.1-12.

_____. O Cabri-Géomètre e o desenvolvimento do pensamento geométrico: o caso dos quadriláteros. *In*: BORBA, R.; GUIMARÃES, G. (org.). **A Pesquisa em Educação Matemática: repercussões na sala de aula.** São Paulo: Cortez, 2009. p.177-211.

CAMPOS, E. P.; CANDIDO, C. C. O modelo do pensamento geométrico e conclusões de suas aplicações. *In*: SIMPÓSIO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA E PÓS-GRADUAÇÃO, 1., 2007, São Paulo. **Anais** [...]. São Paulo: SICPG, 2007. p.1-8.

CICARINI, A.M.O.T. **Geometria Plana e Grafismo indígena o estudo de suas relações no contexto histórico do grupo Tukano de alunos da Licenciatura Intercultural dos povos indígenas do Alto do Rio Negro.** 2015. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2015.

CHAVANTE, E. **Convergências Matemática** (8º ano). 1. ed. Água Branca: SM, 2015.

CHIZZOTI, A. **Pesquisas em Ciências Humanas e Sociais.** 2. ed. São Paulo: Cortez, 1998.

CONCEIÇÃO, D. A. ; OLIVEIRA, K. P. **Uma análise do nível do conhecimento geométrico dos professores de matemática das escolas estaduais do município de São Vicente Ferrer.** 2014. Monografia (Licenciatura em Matemática) – Universidade de Pernambuco, Nazaré da Mata, 2014.

CORREIA, J. C. C.; UTSUMI, M. C.; NASSER, L. Argumentação e Demonstração em Matemática: a visão de alunos e professores. **Revista Triângulo**, Uberaba, v. 10, n.2, p. 74-93, 2017.

COQUELIN, R. L'entretien d'explicitation de Pierre Vermersch. **Accompagnement Personnalisé**, Paris, v.1, n.1, p.1-9, 2012.

COSTA, A. P. **A construção do conceito de quadriláteros notáveis no 6º ano do ensino fundamental:** um estudo sob a luz da teoria vanhieliana. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2016.

COSTA, A. P.; CÂMARA DOS SANTOS, M. Aspectos do pensamento geométrico demonstrados por estudantes do Ensino Médio em um problema envolvendo o conceito de quadriláteros. *In*: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO

MATEMÁTICA, 14., 2015, Tuxtla Gutiérrez. **Anais [...]**. Tuxtla Gutiérrez: CIAEM, 2015a. p.1-9.

_____. Investigando os níveis de pensamento geométrico de alunos do 6º ano do ensino médio: um estudo envolvendo os quadriláteros. *In*: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4., 2015, Ilhéus. **Anais [...]** Ilhéus: UESC, 2015b. p.998-1009.

_____. Estudo dos quadriláteros notáveis por meio do GeoGebra: um olhar para as estratégias dos estudantes do 6º ano do ensino fundamental. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, São Paulo, v.5, n.2, p.3-17, 2016a.

_____. Níveis de pensamento geométrico de alunos do ensino médio no estado de Pernambuco: um estudo sob o olhar vanhieliano. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, Recife, v.7, n.3, p.1-19, 2016b.

_____. O pensamento geométrico de professores de Matemática do ensino básico: um estudo sobre os quadriláteros notáveis. **Educação Online**, Rio de Janeiro, v.1, n.22, p.1-19, 2016c.

_____. O uso do GeoGebra no ensino de quadriláteros notáveis: um estudo com alunos do 6º ano do ensino fundamental. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, São Paulo, v. 6, n.2, p. 10-24, 2017a.

_____. O desenvolvimento do pensamento geométrico no estudo dos quadriláteros notáveis sob a ótica vanhieliana. **Educação Matemática em Foco**, Campina Grande, v.6, n.2, p. 1-31, 2017b.

COSTA, A. P.; ROSA DOS SANTOS, M. Um estudo sobre o pensamento geométrico de estudantes de licenciatura em matemática no estado de Pernambuco. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo. **Anais [...]**. São Paulo: SBEM – Regional SP, 2016. p. 1-12.

_____. Os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico de estudantes de uma Licenciatura em Matemática no Estado de Pernambuco: um estudo sob a ótica da teoria de Van-Hiele. **Educação Online**, Rio de Janeiro, v.1, n. 25, p.1-23, 2017a.

_____. O pensamento geométrico de professores de Matemática em formação inicial. **Educação Matemática em Revista – RS**, Porto Alegre, v.1, n. 17, p.1-20, 2017b.

_____. Os quadriláteros notáveis no 8º ano do Ensino Fundamental: um estudo sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático. **Revista de Educação Matemática – SP**, São Paulo, v. 15, n.19, p. 353-372, 2018a.

_____. O conceito de quadriláteros notáveis sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático: um olhar para os tipos de tarefas em um livro didático de Matemática. **Educação Matemática em Revista**, Brasília, v. 23, n. 59, p. 39-52, 2018b.

_____. A abordagem do conceito de ângulo em um livro didático de Matemática do 8º ano do ensino fundamental. *In*: ENCONTRO PARAIBANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2018, Cajazeiras. **Anais [...]** Cajazeiras: SBEM Regional Paraíba, 2018c. p. 1-12.

_____. Uma análise praxeológica do ensino de triângulos no 8º ano do ensino fundamental. **Educação Matemática em Revista – RS**, Porto Alegre, v. 2, n.19, p. 189-197, 2018d.

COWLEY, J. **Developing and using an assessment instrument for spatial skills in grade 10 geometry learners**. 2014. Dissertation (Master of Education) – Rhodes University: Grahamstown, 2014.

CROWLEY, M. L. O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico. *In*: LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. **Aprendendo e ensinando Geometria**. Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994. p.1-19.

CRUZ, D. G.; SANTOS, C. H. Algumas diferenças entre a Geometria Euclidiana e as Geometrias Não-Euclidianas - Hiperbólica e Elíptica - A serem abordadas nas séries do ensino médio. *In*: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2009, Guarapuava. **Anais [...]**. Guarapuava: SBEM Regional Paraná, 2009. p.1-10.

DE VILLIERS, M. Some Reflections on the Van Hiele theory. *In*: CONGRESS OF TEACHERS OF MATHEMATICS OF THE CROATIAN MATHEMATICAL SOCIETY, 4., 2010, Zagreb. **Annals [...]**. Zagreb: Croatian Mathematical Society, 2010. p.1-36.

DEL GRANDE, J. Spatial Sense. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 1, n. 1, p. 14-20, 1990.

_____. Percepção espacial e geometria primária. *In*: LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. (orgs.). **Aprendendo e ensinando Geometria**. Tradução. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994. p. 156-167.

DENIS, M. **Les Images Mentales**. Paris: Presse Universitaire Française, 1979.

_____. **Image et Cognition**. Paris: Presse Universitaire Française, 1989.

DENIS, L. Relaciones entre la etapa de desarrollo cognoscitivo del adolescente y sus niveles Van Hiele de pensamiento geométrico. **Revista de Didáctica de las matemáticas**, Santa Cruz de Tenerife, v.1, n.2, p.5-13, 1994.

DETHEUX-JEHIN, M.; CHENU, F. Comment evaluer le raisonnement geometrique? **Cahiers du Service de Pédagogie expérimentale**, Liège, vol. 3, n. 4, p. 67-85, 2000.

DOMINGOS, J. **Um estudo sobre polígonos a partir dos princípios de Van Hiele**. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2010.

DONGWI, B. L. **Mathematics teachers' experiences of designing and implementing a Circle Geometry Teaching Programme using the van Hiele Phases of Instruction as a conceptual framework: A Namibian case study**. 2012. Dissertation (Master of Education) – Rhodes University: Grahamstown, 2012.

DREYFUS, T. Advanced mathematical thinking processes. *In*: TALL, D. (org.), **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. p. 25-41.

DUROISIN, N.; DEMEUSE, M. Évaluer les programmes d'etudes de mathematiques (parties « geometrie ») en regard aux theories developpementales – analyse des programmes d'etudes de mathematiques de l'enseignement primaire et du debut du secondaire en belgique francophone. *In*: COLLOQUE DE L'ADMEE-EUROPE, 26., 2014, Marrakech. **Annales** [...]. Marrakech: ADMEE, 2014. p.1-9.

DUVAL, R. **Aproche cognitive des problemes de geometrie en termes de congruence**. *In*: DIDACTIQUE ET SCIENCES COGNITIVES, 1., 1988, Strasbourg. **Annales** [...]. Strasbourg: IREM, 1988. p. 57 - 74.

_____. **Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels**. Berne: Peter Lang, 1995.

_____. Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *In*: DIDACTIQUE ET SCIENCES COGNITIVES, 36., 2005, Strasbourg. **Annales** [...]. Strasbourg: IREM, 2005. p. 5 - 53.

_____. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revista Eletrônica de Educação Matemática – Revemat**, Florianópolis, v. 07, n. 2, p.266-297, 2012.

_____. **Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas**. Tradução Marlene Alves Dias. 1. ed. São Paulo: PROEM, 2011.

EDUARDO, E. C. **Geometrias Não-Euclidianas e a Geometria da Relatividade**. 2013. Monografia (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de São Paulo, São Paulo, 2013.

FERREIRA, M. B. C. **Uma organização didática em quadrilátero que aproxime o aluno de licenciatura das demonstrações geométricas**. 2016. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

FISCHBEIN, E. **Intuition in science and mathematics: an educational approach**. Dordrecht: Reidel, 1987.

_____. The Theory of Figural Concepts. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 24, n.2, p. 139-162, 1993.

FRADE, R. **Composição e/ou Decomposição de Figuras Planas no Ensino Médio: Van Hiele uma opção**. 2012. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2012.

GAMBOA, S. S. **Pesquisa educacional: quantidade-qualidade**. 8. ed. São Paulo: Cortez, 2013.

GARRIDO, Y. P. La estimulación del pensamiento en los escolares. **Educación Cubana**, Ciudad de La Habana, v.1, n.25, p.1-32, 2005.

GIL, A. C. **Estudo de caso**. São Paulo: Atlas, 2009.

GIMENES, S. S. **Contribuições de atividades de investigação e exploração com o computador na produção de conhecimento acerca do assunto de semelhança**. 2014. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, 2014.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. 2001. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

_____. Drawing in movement and insights for the proof process. **International Journal of Continuing Engineering Education and Life Long Learning**, Enschede, v. 18, n.5, p. 564-574, 2008.

GOMES, H. J. P.; OLIVEIRA, O. B. Obstáculos epistemológicos no ensino de ciências: um estudo sobre suas influências nas concepções de átomo. **Ciências & Cognição**, Rio de Janeiro, v. 12, n. 4, p. 96-109, 2007.

GOMES, L. F. **Afinal, como surgiram as geometrias não euclidianas?** 2017. Produto Educacional (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2017.

GONSETH, F. **La Géométrie et le problème de l'espace**. Neuchatel: Éditeur Griffon, 1945.

GUIMARÃES, R.R. **Um estudo do pensamento geométrico de professores das séries iniciais do ensino fundamental segundo o modelo de Van Hiele**. 2006. Monografia (Especialização em Matemática para professores) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2006.

GUTIÉRREZ, A. **Procesos y habilidades en visualización espacial**. In: CONGRESO INTERNACIONAL SOBRE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 3., 1991, Valencia. **Anais** [...]. València: Universitat de València, 1991. p.44-59.

_____. Exploring the links between Van Hiele Levels and 3-Dimensional geometry. **Structural Topology**, Montreal, v.1, n.8, p. 31-48, 1992.

GUTIÉRREZ, A.; JAIME, A.; FORTUNY, J. F. An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 22, n. 3, p. 237-251, 1991.

HAMAZAKI, A. C.; SAMESHIMA, D. C. T. O Ensino da Geometria sob a Ótica dos Van Hiele. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. **Anais** [...]. Recife: SBEM Regional Pernambuco, 2004. p.1-9.

HAVIGER, J.; VOJKUVKOVÁ, I. The van Hiele geometry thinking levels: gender and school type differences. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON EDUCATION AND EDUCATIONAL PSYCHOLOGY, 4., 2013, Antalya. **Annals** [...]. Antalya: Procedia, 2013. p. 977-981.

HENRY, M. L'introduction des probabilités au lycée: un processus de modélisation comparable à celui de la géométrie. **Repères-IREM**, Paris, v. 1, n. 36, p. 15-34, 1990.

HOUEMENT, C.; KUZNIK, A. Géométrie et paradigmes géométriques. **Revue**, Grenoble, v.1, n. 51, p. 5-21, 1998.

_____. Quand deux droites sont « à peu près » parallèles ou le versant géométriques du « presque » égal. **Revue**, Grenoble, v.1, n. 61, p.61-74, 2003.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. **Matemática: 6º ano**. Guia do professor. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2014.

INOUE, R. K. M. **O processo de formação do conceito de quadriláteros, envolvendo alunos de uma 6ª série do Ensino Fundamental**. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Vale do Itajaí, Itajaí, 2004.

JANUÁRIO, A. J. **Desenho geométrico**. 4. ed. Florianópolis: Editora da UFSC, 2013.

JONES, K.; BILLS, C. Visualisation, imagery and the development of geometrical reasoning. **Proceeding of the British Society for Research into Learning Mathematics**, Birmingham, v.18, n.1, p.123-128, 1998.

KALEFF, A. M. M. R.. Considerações sobre a Diversidade Dos Saberes Docentes e a Formação em Geometria do Professor de Matemática nos Cursos de Matemática da Universidade Federal Fluminense – Niteroi. **Educação Matemática em Foco**, Campina Grande, v.6, n.1, p.7-38, 2017.

KALEFF, A. M. M. R.; HENRIQUES, A.S.; FIGUEIREDO, L. G.; REI, D.M. Desenvolvimento do pensamento geométrico: o modelo de van Hiele. *In*: CONGRESSO NACIONAL DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA, 2., 1989, Rio de Janeiro. **Anais [...]**. Rio de Janeiro: UFF, 1989. p.9-14.

KALEFF, A. M. M. R.; REI, D. M. Introdução ao estudo dos sólidos geométricos dando-se ênfase à habilidade geométrica da visualização. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3., 1990, Natal. **Anais [...]**. Natal: UFRN, 1990. p. 1-6.

KLAIBER, M. A.; SOUZA, M. L.; SILVA, D. P.; SAVIOLI, A. M. P. D. Transformações geométricas: um olhar para o processo de abstração. *In*: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., Foz do Iguaçu. **Anais [...]**. Foz do Iguaçu: SBEM, 2018. p.1-12.

KNIGHT, K. C. **An investigation into the change in the Van Hiele levels of understanding geometry of pre-service elementary and secondary mathematics teachers**. 2006. Dissertation (Master of Science in Teaching) - University of Maine, Maine, 2006.

KOPKE, R. C. M. **Geometria, desenho, escola e transdisciplinaridade: abordagens possíveis para a educação**. 2006. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2006.

LABORDE, C. Quelques problemes d'enseignement de la geometrie dans la scolarite obligatoire. **For the Learning of Mathematiu Association**, Montreal, v.5, n.3, p.27-34, 1985.

LACERDA, G. H. **O ensino de geometria plana pela resolução de problemas do tipo quebra-cabeças com palitos de fósforo**. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2011.

LAWRIE, C. Some problems identified with Mayberry test items in assessing students' Van Hiele levels. **University of New England**, Armidale, v.1, n.1, p. 1-11, 1992.

LEAL, J. E. F. **Estudio del proceso de Demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica**. 2010. Tesis (Doctorado em Didàcta de la Matemàtica) – Universitat de València, Valencia, 2010.

LEIVAS, J.C.P. **Imaginação, Intuição e Visualização**: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de Licenciatura de Matemática. 2009. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009.

LEIVAS, J. C. P.; PORTELLA, H. P.; SOUZA, H. M. Geometrias Não-Euclidianas: uma investigação na escola básica no Brasil com utilização do Geogebra. **Revista Thema**, Pelotas, v.14, n.3, p. 210-221, 2017.

LIMA, E. M. B. **Um estudo sobre as disciplinas de geometria em cursos de licenciatura em matemática**. 2014. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2014.

LIMA, M. L. S. **Sobre Pensamento Geométrico, Provas e Demonstrações Matemáticas de alunos do 2o ano do Ensino Médio nos ambientes lápis e papel e GeoGebra**. 2015. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2015.

LIMA, M. L. S.; LINS, A. F. Ausência de pensamento geométrico e argumento dedutivo na Educação Matemática: resultados de uma pesquisa. *In*: ENCONTRO PARAIBANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2016, Campina Grande. **Anais [...]**. Campina Grande: Realize Editora, 2016. p. 1-13.

LIMA BORBA, V. M.; COSTA, A. P. Sucesso e Fracasso no ensino de Matemática: o que dizem futuros professores de uma IES? **Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática – ReBECM**, Cascavel, v.2, n.1, p. 55-76, 2018.

LOLA, J. L. **As novas tecnologias e suas contribuições para o ensino de geometria plana na educação agrícola**. 2012. Dissertação (Mestrado em Ciências) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2012.

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? **A Educação Matemática em Revista**, Brasília, v.1. n.4, p.3-13, 1995.

_____. Apresentação. *In*: RÊGO, R. G.; RÊGO, R. M.; VIEIRA, K. M. **Laboratório de ensino de Geometria**. Campinas: Autores Associados, 2012. p.xiii-xiv.

LUJAN, M. L. S. **A geometria na 1ª série do 1º grau: um trabalho na perspectiva de Van Hiele**. 1997. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1997.

MAIA, L. S. L. Vale a pena ensinar Matemática. *In*: BORBA, R.; GUIMARÃES, G. (org.). **A Pesquisa em Educação Matemática**: repercussões na sala de aula. São Paulo: Cortez, 2009. p. 13-57.

MANOEL, W. A. **A importância do ensino da geometria nos anos iniciais do ensino fundamental: razões apresentadas em pesquisas brasileiras.** 2014. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de Campinas, Campinas, 2014.

MARCHAND, P. Le développement du sens spatial au primaire. **Bulletin AMQ**, Cidade de Quebec, v. 49, n. 3, p. 63–79, 2009.

MATEYA, M. **Using the Van Hiele theory to analyse geometrical conceptualisation in grade 12 students: a Namibian perspective.** 2008. Dissertation (Master of Education) – Rhodes University, Grahamstown, 2008.

MENDES, M. F.; DELGADO, C. C. **Geometria: textos de apoio para educadores de infância.** Lisboa: Direção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular do Ministério da Educação de Portugal, 2008.

MEIRA, G. G. **Comunicação e resolução de problemas utilizando o modelo Van Hiele para a exploração geométrica em sala de aula.** 2015. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2015.

MICHOUX, A. B. **Evolution des conceptions et de l'argumentation en géométrie chez les élèves: paradigmes et niveaux de van Hiele à l'articulation CM2 – 6ème.** 2008. Thèse (Doctorat en Didactiques des Mathématiques) – Université Paris-Diderot - Paris VII, Paris, 2008.

_____. Les niveaux de pensée en géométrie de van Hiele: de la théorie à l'épreuve de la classe. **Bulletin AMQ**, Cidade de Quebec, v. 54, n.1, p. 24-51, 2014.

MONTEIRO, T. T. M.; ROSA DOS SANTOS, M. O livro didático do 6º ano do ensino fundamental: uma análise sobre a praxeologia matemática dos quadriláteros. *In*: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 5., 2018, Recife. **Anais [...]**. Campina Grande: Realize Eventos, 2018. p. 1-12.

MORAES, R. G. **Geometria dinâmica como alternativa metodológica para o ensino de geometria: experiência em curso de licenciatura em matemática.** 2012. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Severino Sombra, Vassouras, 2012.

MORETTI, M. T. Semiosfera do olhar: um espaço possível para a aprendizagem da geometria. **Acta Scientiae**, Canoas, v.15 n.2, p.289-303, 2013.

_____. **Linguagem natural e formal na Semiosfera da aprendizagem matemática: um exemplo em geometria.** Palestra. *In*: ENCONTRO PERNAMBUCANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2017, Garanhuns. **Anais [...]**. Garanhuns: SBEM Pernambuco, 2017.

MORETTI, M. T.; BRANDT, C. F. Construção de um desenho metodológico de análise semiótica e cognitiva de problemas de geometria que envolvem figuras. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.17, n.3, p.597-616, 2015.

MORETTI, M. T.; HILLESHEIM, S. F. Linguagem natural e formal na semiosfera da aprendizagem matemática: o caso da geometria para a formação do pedagogo. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, Recife, v. 9, n.1, p. 1-19, 2018.

MUYEGHY, A. **The use of the van Hiele theory in investigating teaching strategies used by Grade 10 geometry teachers in Namibia**. 2008. Dissertation (Master of Education) – Rhodes University, Grahamstown, 2008.

NASSER, L. O desenvolvimento do raciocínio em geometria. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, v.1, n.27, p. 93-99, 1990.

_____. **Using the van Hiele theory to improve secondary school geometry in Brazil**. 1992. Thesis (PhD in Mathematics Education) – University of London, London, 1992.

_____. Usando a Teoria de van Hiele para melhorar o ensino secundário de Geometria no Brasil. **Eventos (INEP)**, Brasília, v. 4, n.2, p. 135-149, 1994.

_____. A Teoria de Van Hiele para o Ensino de Geometria: pesquisa e aplicação. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., 1995, Rio de Janeiro. **Anais [...]**. Rio de Janeiro: SBEM, 1995. p. 29-40.

_____. O papel da abstração no pensamento matemático avançado. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, Coacalco, v.26, n.1, p. 889-896, 2013.

_____. Estimulando o domínio do processo dedutivo no curso de licenciatura em Matemática. **Vidya**, Santa Maria, v. 37, n. 2, p. 499-513, 2017.

NASSER, L.; SANT'ANNA, N. F. P. **Geometria segundo a teoria de Van Hiele**. 2. ed. Rio de Janeiro: IM/UFJR, 2010.

NASSER, L.; TINOCO, L. **Curso Básico de Geometria** – enfoque didático. Módulo I – Formação de Conceitos Geométricos. UFRJ/Instituto de Matemática: Projeto Fundação, 2011.

OECD. PISA. 2015. **PISA: Results in Focus**. Organisation for Economic Co-operation and Development: OECD, 2015. Disponível em: <<https://www.oecd.org/pisa/pisa-2015-results-in-focus.pdf>> Acesso em: 27 fev 2017.

OLIVEIRA, M. C. **Ressignificando conceitos de geometria plana a partir do estudo de sólidos geométricos**. 2012. Dissertação (Mestrado em Ensino de

Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2012.

OLKUN, S.; SINOPLU, B.; DERYAKULU, D. Geometric Explorations with Dynamic Geometry Applications based on van Hiele Levels. **International Journal for Mathematics Teaching and Learning**, Massey, v.1, n.1, p. 1-12, 2002.

ONTARIO. **Guide d'enseignement efficace des mathématiques de la maternelle à la 3e année**. Ministère de l'Éducation. Géométrie et sens de l'espace. Toronto, le Ministère, 2003.

_____. **Guide d'enseignement efficace des mathématiques de la 4e à la 6e année**. Ministère de l'Éducation. Géométrie et sens de l'espace: Formes géométriques. Fascicule 1. Toronto, le Ministère, 2006.

PACHÊCO, F. F. F.; PACHECO, G. F. ; SILVA, A. D. P. R. Uma análise em livros didáticos de matemática dos anos finais do ensino fundamental acerca da proposta do ensino de polígonos sob a ótica da teoria de Van Hiele. **Revista Eletrônica de Educação Matemática – REVEMAT**, Florianópolis, v.12, n.2, p. 101-115, 2017.

PAIS, L. C. Intuição, experiência e teoria geométrica. **Revista Zetetiké**, Campinas, v.4, n.6, p. 65-74, 1996.

_____. Estratégias de ensino de geometria em livros didáticos de matemática em nível de 5ª a 8ª série do ensino fundamental. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 29., 2006, Caxambu. **Anais [...]** Caxambu: Anped, 2006. p.1-10.

_____. **Didática da Matemática: uma análise da influência francesa**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

PARZYSZ, B. Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1. In: colloque COPIRELEM des professeurs et formateurs de Mathématiques chargés de la formation des maîtres, 28., 2003, Tours. **Actes [...]**. Tours: IREM, 2003, p. 107-125, 2003.

_____. La géométrie dans l'enseignement secondaire et en formation de professeurs des écoles : de quoi s'agit-il? **Quaderni di Ricerca in Didattica**, Palermo, v. 17, n.1, p.128–151, 2006.

PASTOR, A. J. **Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: la enseñanza de las isometrías del plano**. La evaluación del nivel de razonamiento. 1993. Tesis (Doctorado em Didàctica de la Matemàtica) – Universitat de València, València, 1993.

PASSOS, A. Q. **Van Hiele, Educação Matemática Realística e GEPEMA: algumas aproximações**. 2015. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

PATSIOMITOU, S. The Development of Students Geometrical Thinking through Transformational Processes and Interaction Techniques in a Dynamic Geometry Environment. **Issues in Informing Science and Information Technology**, AIOF, v.5, n.1, p.353-393, 2008.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria: uma visão histórica. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3., 1990, Natal. **Anais [...]**. Natal: SBEM, 1990. p.1-10.

_____. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. **Revista Zetetiké**, Campinas, v.1, n.1, p.7-17, 1993.

PERNAMBUCO. **Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco**: Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio. UFJF, Juiz de Fora, 2012.

_____. **SAEPE** – 2015. Matemática. Secretaria da Educação. Revista da Gestão Escolar. UFJF, Juiz de Fora, 2015. Disponível em: <<http://www.saepe.caedufjf.net/wp-content/uploads/2016/05/PE-SAEPE-2015-RG-RE-WEB2.pdf>> Acesso em: 27 fev 2017

PÉRTILE, K. **O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico: uma análise de obras do programa nacional do livro didático para o ensino médio**. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011.

PIRES, C. M. C.; CURI, E.; CAMPOS, T. M. M. **Espaço e forma**: a construção geométrica pelas crianças das quatro séries iniciais do Ensino Fundamental. São Paulo: PROEM, 2000.

PIRES, A. P. Sobre algumas questões epistemológicas de uma metodologia geral para as ciências sociais. *In*: DESLAURIERS, J. P.; POUPART, J.. GROULX, L. H.; PIRES, A. P. **A pesquisa qualitativa**: enfoques epistemológicos e metodológicos (Trad. Ana Cristina Nasser). 4. ed. Petrópolis: Editora Vozes, 2014. p. 43-94.

PIROLA, D. L. **Aprendizagem em geometria nas séries iniciais**: uma possibilidade pela integração entre as apreensões em geometria e as capacidades de percepção visual. 2012. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2012.

PIERON, H. **Vocabulaire de la Psychologie**. Paris: PUF, 1957.

PORTELLA, H. P. **Tecnologias computacionais como ferramentas para inserir conhecimentos de Geometria Hiperbólica no ensino fundamental**. 2016. Dissertação (Mestrado em Ensino de Física e de Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2016.

PUSEY, E. L. **The van Hiele Model of Reasoning in Geometry: A Literature Review**. 2003. Dissertation (Master of Mathematics Education) – North Carolina State University: Raleigh, 2003.

RÉGNIER, J.C. **Análise Estatística Implicativa**. Curso Ofertado à Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE, Recife, 2017.

RÊGO, R. G.; RÊGO, R. M.; VIEIRA, K. M. **Laboratório de ensino de geometria**. Campinas: Autores Associados, 2012.

RIBEIRO, R. D. G. L. **O ensino das geometrias não euclidianas: um olhar sob a perspectiva da divulgação científica**. 2012. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade São Paulo, São Paulo, 2012.

RODRIGUES, M. H. W. L. **Da realidade à virtualidade, o pensamento visual com interface**: contribuição das linguagens técnicas de representação da forma à educação. 1999. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rio Janeiro, Rio de Janeiro, 1999.

RODRIGUES, A. C. **O modelo de Van Hiele de desenvolvimento de pensamento geométrico**. 2009. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Católica de Brasília, Brasília, 2009.

ROSA DOS SANTOS, M. Teoria de Van Hiele: uma alternativa para o ensino da geometria no 2º ciclo. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2007, Belo Horizonte. **Anais [...]**. Belo Horizonte: SBEM, 2007. p. 1-10.

_____. **A transposição didática do conceito de área de figuras planas no 6º ano do ensino fundamental**: um olhar sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático. 2015. Tese (Doutorado em Ensino das Ciências e Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2015.

SALVADOR, R. M. C.; PALAU, P. H.; GARRIGUES, J. M.; PASCUAL, A. P.; PÉREZ, E. R. **Didáctica de la geometría**: modelo Van Hiele. València: Universitat de València, 1989.

SANT'ANA, E. C. **Geometria segundo modelo de Van Hiele**: uma análise do nível de pensamento geométrico dos alunos ao final do ensino fundamental. 2009. Monografia (Licenciatura em Matemática) – Centro Universitário La Salle, Canoas, 2009.

SANTOS, I. P.; ROSA DOS SANTOS, M. A organização matemática do livro didático do 6º ano do ensino fundamental em relação ao estudo de triângulos. *In*: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 5., 2018, Recife. **Anais [...]**. Recife: Realize Eventos, 2018. p. 1-12.

SANTOS COSTA, M.; ALLEVATO, N. S. G.; MOURA, A. R. L. Ensino-aprendizagem de orientação espacial e deslocamento nos anos iniciais do ensino fundamental:

modos diferentes de ver pela pesquisa. **Vidya**, Santa Maria, v. 37, n. 1, p. 19-34, 2017.

SANTOS, M. M. **Mapeando a evolução do pensamento geométrico por meio do software Kseg**. 2012. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Severino Sombra: Vassouras, 2012.

SENA, R. M.; DORNELES, B. V. Ensino de Geometria: Rumos da Pesquisa (1991-2011). **Revista Eletrônica de Educação Matemática – REVEMAT**, Florianópolis, v.8, n.1, p. 138-155, 2013.

SILVA, J. J. **O software régua e compasso como recurso metodológico para o ensino de geometria dinâmica**. 2011. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2011.

SILVA, L. A. **Instrumentos para desenho geométrico: uma proposta didática com fundamentação teórica e simulação no GeoGebra**. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2014.

SILVA, J. P.; CANDIDO, C. C. O PNLD e sua relação com o modelo de Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico. *In*: SIMPÓSIO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA E PÓS-GRADUAÇÃO, 3., 2007, São Paulo. **Anais [...]**. São Paulo: SICPG, 2007. p.1-6.

SILVA, E. C. R. T.; SIQUEIRA, J. E. M. Geometria espacial no ensino médio: análise de um livro didático de matemática. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo. **Anais [...]**. São Paulo: SBEM, 2016. p.1-12.

SILVA, S. H.; OLIVEIRA, B. P.; SANTANA, L. E. L.; CARDOSO, M. B. Conteúdos de geometria no livro didático de matemática: uma análise sob a ótica das representações semióticas. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2013, Curitiba. **Anais [...]**. Curitiba: SBEM, 2013. p.1-15.

SILVA, A. B.; SILVA, L. B. O currículo de geometria e a formação do professor de matemática. *In*: ENCONTRO DE PESQUISA EDUCACIONAL EM PERNAMBUCO, 5., 2014, Garanhuns. **Anais [...]**. Garanhuns: UFRPE, 2014. p.1-10.

SILVA, C. V. **A prática docente e sua influência na construção de conceitos geométricos: um estudo sobre o ensino e a aprendizagem da simetria ortogonal**. 2015. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2015.

SKEMP, R. **Psicología del aprendizaje de las matemáticas**. 2. ed. Madrid. Ediciones Morata, 1993.

SOUZA, H. M. **A Geometria do táxi: investigação sobre o ensino de uma geometria não euclidiana para o terceiro ano do ensino médio**. 2015. Dissertação (Mestrado

em Ensino de Física e de Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2015.

SOUZA, J. PATARO, P. **Vontade de Saber Matemática** (8º ano). 3. ed. São Paulo: FTD, 2015.

TALL, D. The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. *In*: Tall D. O. (ed.) **Advanced Mathematical Thinking**, Kluwer: Holland, 1991. p.3–21.

_____. **Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking**. *In*: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF LEARNING MATHEMATICS, 1., 1995, Recife. **Anais [...]**. Recife: UFPE, 1995, p.161-175.

THÉRÈSE, G. Quelques instruments de pensée en géométrie. **MATH-ÉCOLE**, Neufchâtel, v.1, n.193, 2000. p.1-10.

TRIVIÑOS, A. N. S. **Introdução à pesquisa em ciências sociais**. 1. ed. São Paulo: Atlas, 2011.

USISKIN, Z. **Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry**. Chicago: University of Chicago, 1982.

VALÉRIA COSTA. **Abordagens no ensino das geometrias**. 2016. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2016.

VAN-HIELE, P. M. **De Problematiek van het inzicht**. Gedemonstreerd aan het inzicht van schoolkinderen in meetkunde-leerstof. 1957. Scriptie (Doctoraat in Wiskunde en Natuurwetenschappen) - Rijksuniversiteit Utrecht, Utrecht, 1957.

_____. La pensée de l'enfant et la géométrie. **Bulletin APMEP**, Paris, v.1, n.1., p.199-205, 1959.

_____. The child's thought and geometry. **Classic in Mathematics Education Research**, Londres, v.1, n.1, p. 1-6, 1985.

_____. **Structure and insight: a theory of mathematics education**. New York: Academic Press, 1986.

_____. Similarities and Differences between the Theory of Learning and Teaching of Skemp and the Van Hiele Levels of Thinking. **The Netherlands**, Amsterdã, v.1, n.1, p.1-21, 1987.

_____. Developing geometry thinking through activities that. **Teaching Children Mathematics**, Reston, v.6, n.1, p. 310-316, 1999.

_____. Similarities and differences between the theory of learning and teaching of Skemp and the Van Hiele levels of thinking. *In*: SKEMP, R.; TALL, D.;

THOMAS, M. **Intelligence, learning and understanding in mathematics**. Australia: Flaxton, 2002.

VIDIGAL, S. M. P. **Formação da personalidade ética**: as contribuições de Kohlberg e van Hiele. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.

VERGNAUD, G. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didático das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise Psicológica**, Lisboa, v.1, n.5, p.75-90, 1986.

VIEIRA, C. R. **Reiventando a geometria no ensino médio**: uma abordagem envolvendo materiais concretos, softwares de geometria dinâmica e a teoria de Van Hiele. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2010.

VERMERSCH, P. **L'entretien d'explicitation en formation initiale et en formation continue**. Paris: ESF, 1994.

VYGOTSKY, L. **Mind in Society**: the development of higher psychological processes. Cambridge, MA, Harvard University Press, 1978.

WU, D. B.; MA, H. L. The distributions of Van Hiele levels of geometric thinking among 1 st through 6th graders. *In*: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 30., 2006, Prague. **Annals** [...]. Prague: PME, 2006. p.409-416.

YIDIZ, C.; AYDIN, M.; KOGCE, D. Comparing the old and new 6th - 8th grade mathematics curricula in terms of Van Hiele understanding levels for geometry. *In*: WORLD CONFERENCE ON EDUCATIONAL SCIENCES, 1., 2009, Kyrenia. **Annals** [...]. Kyrenia: Procedia, 2009. p.731-736.

YIN, R. K. **Estudo de caso**: Planejamento e métodos. Tradução Ana Thorell. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2010.

APÊNDICE A – TRANSCRIÇÃO DA ENTREVISTA COM ALFREDO

Pesquisador: Qual é o nome da figura que você desenhou aqui? (apontando para o campo “SUA FIGURA”)

Alfredo: É um retângulo.

Pesquisador: Por que ela é um retângulo?

Alfredo: Porque ela tem três lados. E os lados são todos diferentes.

Pesquisador: Eu não entendi. Podes me explicar novamente?

Alfredo: Eu desenhei um retângulo. Esse desenho é retângulo porque tem três partes. Cada parte dessas (apontando para a figura) é de um jeito, é diferente, não pode ser igual.

Pesquisador: Deixa-me ver se entendi. Então, para ser retângulo, a figura tem que ter três lados, todos diferentes?

Alfredo: Isso mesmo. Um lado grande, outro pequeno e outro médio.

Pesquisador: Como se chama a figura que você fez para o seu colega? (apontando para o campo FIGURA DE SEU COLEGA).

Alfredo: É um triângulo.

Pesquisador: Mas por que ela é um triângulo?

Alfredo: Porque ela tem quatro partes do mesmo jeito.

Pesquisador: Como assim?

Alfredo: Ela é um triângulo porque tem quatro lados.

Pesquisador: Então, toda figura com quatro lados é triângulo?

Alfredo: Sim

Pesquisador: Essa figura aqui é um triângulo? (apontando para a representação de um trapézio)

Alfredo: Sim, ela tem quatro lados.

Pesquisador: Mas você falou antes que para ser triângulo tem que tem quatro lados iguais. Essa figura ai tem os lados iguais (apontando para o trapézio)?

Alfredo: Também é um triângulo. Ele está com os lados tortos. Se eu apagar com uma borracha, eu conserto ele. Ai fica um triângulo mais bonito.

Pesquisador: Como você chegou a essas respostas?

Alfredo: Não sei. Não entendi a pergunta.

Pesquisador: Quando você foi responder a questão, o que veio a sua mente? Você lembrou-se de algo?

Alfredo: Ah sim. Para fazer os dois desenhos, lembrei de uma casa.

Pesquisador: Como assim?

Alfredo: O retângulo é o telhado da casa e o triângulo é a parede.

Pesquisador: O “triângulo” do seu colega pode ser chamado de retângulo?

Alfredo: Não pode. O triângulo é a parede e o retângulo é o telhado. Parede e telhado são coisas diferentes. Não é a mesma coisa.

Pesquisador: A figura do seu colega não é um quadrado?

Alfredo: É sim.

Pesquisador: Mas o que é um quadrado?

Alfredo: É outro nome para triângulo. Você pode usar os dois nomes. Se o desenho tem quatro lados, você pode chamar de triângulo ou quadrado.

Pesquisador: Então, por que você chamou a figura de triângulo?

Alfredo: Porque eu acho mais fácil de lembrar. O nome é mais bonito.

Pesquisador: Como você classificou as figuras apresentadas?

Alfredo: contei a quantidade de lados, então, percebi que todas é a mesma coisa.

Pesquisador: Como assim? Não entendi.

Alfredo: Todos os desenhos têm quatro lados, portanto, todas é a mesma figura.

Pesquisador: Então, que figura é essa?

Alfredo: É o triângulo.

Pesquisador: O que é um triângulo?

Alfredo: É o desenho com quatro lados. Também é chamada de quadrado. Quadrado e triângulo é a mesma coisa, tem quatro lados.

Pesquisador: Mas aqui você colocou apenas a Figura C como quadrado. As demais não são “quadrados”?

Alfredo: Todas são quadrados, pois tem quatro lados. Eu queria colocar todas na linha do quadrado, mas como tinha outras linhas, então fiz a distribuição das figuras em todas as linhas.

Pesquisador: Se você fosse corrigir sua resposta nessa questão, como faria?

Alfredo: Colocaria todos na linha do quadrado.

Pesquisador: Por quê?

Alfredo: Porque todos têm quatro lados, são triângulos. Triângulos e quadrados é a mesma coisa.

Pesquisador: Essa figura aqui é um triângulo? (apontando para o desenho de uma circunferência) Ou é um quadrado?

Alfredo: É uma bola. Não é triângulo e nem quadrado.

Pesquisador: Por quê?

Alfredo: Porque a bola só tem um lado, os outros têm quatro lados.

Pesquisador: A bola é um retângulo?

Alfredo: Não. O retângulo tem três lados e a bola só tem um. Que dizer, ela pode ter dois, mas só dá para ver um, o outro lado está ao contrário, não dá para ver.

Pesquisador: Qual o nome dessas figuras que você desenhou?

Alfredo: Quadrados.

Pesquisador: O que são quadrados?

Alfredo: São triângulos com quatro lados.

Pesquisador: Eu não entendi. Podes me explicar novamente?

Alfredo: Veja... Esses desenhos que eu fiz são triângulos. Triângulo tem quatro lados. Quadrado tem quatro lados, então, quadrado e triângulo é a mesma coisa.

Pesquisador: Então, essas duas figuras que você fez são triângulos ou quadrados?

Alfredo: Os dois. São quadrados e triângulos.

Pesquisador: Por quê?

Alfredo: Por que tem quatro lados.

Pesquisador: Elas são a mesma coisa? Apresentam alguma diferença?

Alfredo: É a mesma coisa. São quadrados, mas os lados são diferentes.

Pesquisador: Diferentes?

Alfredo: Sim, o primeiro tem um lado subindo, meio torto. Mas eu posso deixar ele apumado. É só apagar e fazer outro.

Pesquisador: Como você fez esses desenhos?

Alfredo: Eu fiz a partir da minha cabeça. Eu lembrei e fiz.

Pesquisador: Alguma dessas figuras é retângulo?

Alfredo: Não. Nenhuma delas tem três lados. Retângulo tem três lados.

Pesquisador: Alguma delas é trapézio?

Alfredo: Não. Eu não sei o que é isso. Não lembro. Acho que nunca nem vi isso.

Pesquisador: Que figura é esse que você desenhou?

Alfredo: Acho que é um losango.

Pesquisador: O que é um losango?

Alfredo: Eu não sei. Na verdade, não sei o que é um losango.

Pesquisador: Então como você fez o desenho? Por que essa figura é um losango?

Alfredo: Eu pensei em dois retângulos, quando eu os juntei, formou isso aí (apontando para o desenho). Eu só não queria deixar a questão em branco.

Pesquisador: Mas veja que no que você escreveu ao lado, disse que a figura desenhada é um losango, uma vez que possui todos os lados diferentes entre si. Como você explica isso?

Alfredo: Então, eu não sei o que é um losango, depois que eu fiz os dois retângulos, percebi que as cinco partes são diferentes.

Pesquisador: Como assim? Cinco partes?

Alfredo: Aqui, olha (apontando para os lados e diagonal do trapézio desenhado). Um, dois, três, quatro, cinco. São cinco partes que o desenho tem. Todos são diferentes uns dos outros.

Pesquisador: Que figura é essa que você desenhou?

Alfredo: Eu não sei.

Pesquisador: Ela é um losango?

Alfredo: Eu não sei dizer. Não sei o que é isso.

Pesquisador: Como você reconstruiu a figura?

Alfredo: Eu só completei, liguei as linhas que faltavam. Ai o desenho ficou parecendo uma pá.

Pesquisador: Uma pá?

Alfredo: Sim, uma pá de apanhar lixo.

Pesquisador: Então, o losango é uma pá de lixo?

Alfredo: Eu não sei. Não sei o que é losango. Fiz esse desenho para não deixar a questão sem resposta.

APÊNDICE B – TRANSCRIÇÃO DA ENTREVISTA COM FRANCISCO JOSÉ

Pesquisador: Que figura é essa que você desenhou aí? (apontando para o campo “SUA FIGURA”)

Francisco José: É um retângulo.

Pesquisador: O que é um retângulo?

Francisco José: É uma figura de quatro lados.

Pesquisador: A figura do seu colega é um retângulo?

Francisco José: Não

Pesquisador: Por que não? Ela tem quatro lados, então não seria também um retângulo?

Francisco José: Não. Não é um retângulo, porque ela é um quadrado. Quadrado não é retângulo.

Pesquisador: Como assim? Não entendi.

Francisco José: O retângulo e o quadrado têm quatro lados, mas eles não são a mesma coisa. O retângulo tem dois lados maiores e dois lados menores. O quadrado tem os lados menores.

Pesquisador: Então, eles não são a mesma coisa?

Francisco José: Não são. Os dois são diferentes. Os lados são diferentes. O retângulo tem dois lados grandes e dois pequenos. No quadrado, todos os lados são pequenos.

Pesquisador: Por que sua figura é um retângulo?

Francisco José: Por que ela tem quatro lados de tamanhos diferentes. Dois lados maiores e dois lados menores.

Pesquisador: Por que a figura do seu colega não é um retângulo?

Francisco José: Porque é um quadrado. O quadrado tem quatro lados pequenos. Todos os lados são pequenos.

Pesquisador: Teve mais algum outro aspecto que você considerou para analisar as duas figuras?

Francisco José: É só olhar como eles são. Eu olhei para os lados. Eles têm lados diferentes.

Pesquisador: Como você fez os desenhos?

Francisco José: Eu fiz da minha cabeça. Lembrei da porta de minha casa e das janelas.

Pesquisador: Como assim?

Francisco José: O retângulo tem a mesma forma de uma porta, e o quadrado parece uma janela. A janela do banheiro lá de casa tem a forma de um quadrado.

Pesquisador: Como você respondeu essa questão?

Francisco José: Para cada nome do quadro eu fui fazendo o desenho.

Pesquisador: Como assim?

Francisco José: Esse aqui (apontando para a figura C) é um quadrado, aí, eu desenhei ele no quadro, na parte que tem o nome quadrado.

Pesquisador: Por que essa figura é um quadrado?

Francisco José: Porque ele tem quatro lados.

Pesquisador: Mas todas essas onze figuras têm quatro lados. Elas são quadrados?

Francisco José: Não. Só a C é quadrado.

Pesquisador: Por quê?

Francisco José: O quadrado tem quatro lados pequenos. Todos os lados dele são do mesmo jeito. As outras figuras são diferentes. Tem lados maiores e menores.

Pesquisador: A figura E é um quadrado?

Francisco José: Não.

Pesquisador: Mas os lados dela são todos pequenos. Poderia ser um quadrado. O que você acha?

Francisco José: Ele não é um quadrado, os lados deles estão tortos. O quadrado não tem lados tortos.

Pesquisador: Então qual é o nome dessa figura aí? (apontando para a figura E)

Francisco José: Acho que é um losango.

Pesquisador: Por que ela é um losango? O que é um losango?

Francisco José: Por que ela parece um... Uma pipa... É o desenho de uma pipa. O losango é uma pipa com quatro lados pequenos. Mas também pode ser grande. Meu irmão tem uma pipa bem grande.

Pesquisador: Entre essas onze figuras, há retângulos?

Francisco José: Sim, tem o D e o J.

Pesquisador: Por que eles são retângulos?

Francisco José: Eles têm quatro lados, sendo dois grandes e dois pequenos.

Pesquisador: As figuras F e C são retângulos?

Francisco José: Não são. Os lados do F são tortos. Se você empurrar ele de lado, ele vira um retângulo. O F é um quadrilátero, ou seja, uma figura de quatro lados, mas que fica torta. Só o C é quadrilátero. O C é um quadrado. Quadrado não é retângulo.

Pesquisador: Entre as figuras, há trapézios?

Francisco José: Eu não sei. Não sei o que é isso.

Pesquisador: Mas veja que você desenhou algo no quadro para trapézios. Que figura é essa que você desenhou?

Francisco José: Foi um chute. Eu fiz o desenho da figura L, só para não deixar em branco.

Pesquisador: Entre as figuras há paralelogramos?

Francisco José: Sim, o G é um paralelogramo.

Pesquisador: O que é um paralelogramo?

Francisco José: É como se fosse um losango mais torto. Ele é mais torto do que o losango. O losango tem lados tortos. Mas o paralelogramo é mais torto.

Pesquisador: Eu posso dizer que as onze figuras são quadriláteros?

Francisco José: Não. Só o F é um quadrilátero.

Pesquisador: Por quê?

Francisco José: Ele parece um retângulo, mas não é, pois ele está em diagonal, meio torto. Entendeu?

Pesquisador: Que figuras são essas que você desenhou?

Francisco José: Elas são quadrados.

Pesquisador: O que são quadrados?

Francisco José: São figuras com quatro lados pequenos. Todos são pequenos.

Pesquisador: Essas figuras são retângulos?

Francisco José: Não. Se eu tivesse feito elas mais largas em cima e em baixo, seriam retângulos.

Pesquisador: Então, se as duas são quadrados, há diferenças entre elas?

Francisco José: São diferentes. O primeiro é maior do que o segundo.

Pesquisador: Mas o que é maior no primeiro? Por que ele é maior do que o segundo?

Francisco José: O primeiro é mais alto e mais gordo. O segundo é mais baixo e mais magro. Então eles são diferentes.

Pesquisador: Que figura é essa que você fez?

Francisco José: É um losango.

Pesquisador: O que é um losango?

Francisco José: É uma figura de quatro lados.

Pesquisador: O quadrado tem quatro lados, então, ele é um losango?

Francisco José: Não é. O quadrado tem quatro lados retos. O losango tem quatro lados tortos. O losango é como se fosse uma pipa. O quadrado é uma janela.

Pesquisador: Veja o que você escreveu aqui (apontando para o registro escrito do aluno). Você disse que o losango tem quatro lados e tem pontos diferentes. Você pode me explicar essa segunda parte?

Francisco José: Sim, o losango tem pontos diferentes, ou seja, cada ponto que une os lados está em um lugar. Estão em lados diferentes. Na linha que tem o ponto A só tem ele, não tem outro ponto. No quadrado e no retângulo isso não acontece, os pontos estão no mesmo lado.

Pesquisador: Como você reconstruiu a figura?

Francisco José: Primeiro eu coloquei os pontos C e D. Em seguida, liguei as linhas, então, formou o losango.

Pesquisador: A figura reconstruída é um losango?

Francisco José: É sim.

Pesquisador: Por quê?

Francisco José: Porque ela tem quatro lados tortos.

APÊNDICE C – TRANSCRIÇÃO DA ENTREVISTA COM AMÉLIA MARIA

Pesquisador: Que figura é essa que você desenhou em “SUA FIGURA”?

Amélia Maria: É um retângulo.

Pesquisador: Por que ela é um retângulo?

Amélia Maria: Porque ela tem dois lados paralelos com a mesma medida de comprimento. Os seus ângulos internos são iguais, logo, são retos.

Pesquisador: Como se chama a figura do seu colega?

Amélia Maria: Quadrado.

Pesquisador: Por que ela é um quadrado?

Amélia Maria: Porque os seus lados têm a mesma medida de comprimento.

Pesquisador: O que você me diz sobre os ângulos internos do quadrado? Como eles são?

Amélia Maria: Eles são iguais. Os quatro medem 90° , são ângulos retos.

Pesquisador: O quadrado possui dois lados paralelos com a mesma medida?

Amélia Maria: Sim, tem.

Pesquisador: Nesse caso, se o quadrado tem dois lados paralelos com a mesma medida e os ângulos internos retos, é correto afirmar que ele é um retângulo?

Amélia Maria: Não. Em minha opinião, é errado falar isso. Eles têm essas duas características, mas veja que o quadrado tem todos os lados iguais, e o retângulo não. Os lados do retângulo não são iguais. Tem dois deles maiores com a mesma medida, e outros dois menores também iguais. Isso não ocorre com o quadrado. Então, o quadrado não é retângulo.

Pesquisador: Como você classificou as figuras apresentadas?

Amélia Maria: Eu olhei se os ângulos internos eram retos, se os lados eram iguais e se tinham pares de lados paralelos com a mesma medida de comprimento.

Pesquisador: Por que você considerou as figuras D, F, J, B e H como retângulos?

Amélia Maria: Porque eles têm dois pares de lados paralelos com a mesma medida de comprimento e os ângulos internos retos.

Pesquisador: Com relação às figuras A, I e L, você as classificou como trapézio. Por quê?

Amélia Maria: O trapézio ele não tem dois pares de lados com a mesma medida. Os três daqui só têm um par de lados paralelos. Então, eles são trapézios.

Pesquisador: Percebi que você colocou todas as figuras como quadriláteros. Por quê?

Amélia Maria: Porque todas as figuras têm quatro lados, quatro ângulos internos e duas diagonais.

Pesquisador: Toda figura que apresenta essas características pode ser considerada um quadrilátero?

Amélia Maria: Sim, pode.

Pesquisador: Há quadrados entre as figuras?

Amélia Maria: Sim, tem.

Pesquisador: Quais?

Amélia Maria: O C e o E.

Pesquisador: Podes me explicar por quê?

Amélia Maria: Os dois têm quatro lados com a mesma medida e os ângulos internos são retos.

Pesquisador: Esses dois quadrados são retângulos?

Amélia Maria: Não são. Os lados deles são diferentes. No quadrado, todos os lados são iguais. Isso não acontece com o retângulo.

Pesquisador: Entre as figuras, quais são paralelogramos?

Amélia Maria: Eita, eu fiz errado na prova (olhando para sua resposta). O E e F não são paralelogramos. Fiz besteira, né?

Pesquisador: Não se preocupe com isso. Então, quais figuras são paralelogramos?

Amélia Maria: Acho que o B, H e...

Pesquisador: Por quê?

Amélia Maria: Eles têm dois pares de lados com a mesma medida e os ângulos internos não medem 90° .

Pesquisador: Há losangos entre as figuras?

Amélia Maria: Tem sim, o G é.

Pesquisador: Por quê?

Amélia Maria: Todos os lados dele são iguais e os ângulos internos não são retos.

Pesquisador: As figuras C e E são losangos?

Amélia Maria: Não são. Eles têm ângulos internos retos e para ser losango, os ângulos tem que ser diferentes.

Pesquisador: Qual é o nome dessas figuras que você fez?

Amélia Maria: Quadrado.

Pesquisador: Por que elas recebem esse nome?

Amélia Maria: Porque elas têm quatro lados com a mesma medida. Os ângulos internos medem 90° .

Pesquisador: Agora, me diz por que os dois quadrados, que você fez, são diferentes?

Amélia Maria: Eu fiquei em dúvida nessa questão.

Pesquisador: Por quê?

Amélia Maria: Eu não sabia o que responder. Os dois são quadrados. No começo, não percebi diferença, então disse que eles têm ângulos retos. Mas depois percebi que os lados deles são diferentes, o primeiro tem os lados maiores do que o segundo. Ainda, o segundo está... Como posso dizer? ... Ele está torto, ou seja, em outra posição. O primeiro está.... Está em pé.

Pesquisador: Que figura é essa que você fez?

Amélia Maria: É um losango.

Pesquisador: Por que é um losango?

Amélia Maria: Porque tem quatro lados iguais, com a mesma medida de comprimento e os ângulos internos não são retos, mas há pares iguais.

Pesquisador: Como assim? Pares iguais?

Amélia Maria: É o seguinte. O ângulo de cima (apontando para o ângulo $\hat{A}$) é igual ao do lado (apontando para o ângulo B). Então eles formam um par de ângulos iguais. Mas eles não são retos. Os outros ângulos formam outro par de ângulos. Então, o losango tem dois pares de ângulos internos congruentes.

Pesquisador: E quanto eles medem?

Amélia Maria: Isso eu não sei.

Pesquisador: Como é que se faz para medi-los?

Amélia Maria: Sei não.

Pesquisador: A figura que você desenhou, é um quadrado?

Amélia Maria: Não é. O quadrado tem os ângulos retos e o losango não tem.

Pesquisador: Como você reconstruiu a figura?

Amélia Maria: Com a régua.

Pesquisador: Como você fez, então?

Amélia Maria: Primeiro eu fiz as diagonais, depois fiz os lados.

Pesquisador: Você mediu as diagonais?

Amélia Maria: Não. Só medi os lados para que o desenho ficasse certo.

Pesquisador: Que figura você refez?

Amélia Maria: É um losango.

Pesquisador: Por que ela é um losango?

Amélia Maria: Oxente. Porque ela tem quatro lados com a mesma medida.

APÊNDICE D – TRANSCRIÇÃO DA ENTREVISTA COM ANA ROSA

Pesquisador: Que figura é essa que você desenhou aí? (apontando para o espaço “SUA FIGURA”)

Ana Rosa: É um retângulo.

Pesquisador: Por que ela é um retângulo?

Ana Rosa: Porque ele é um paralelogramo.

Pesquisador: Como assim?

Ana Rosa: O retângulo além de ter todos os ângulos internos retos, pois medem 90° , ele tem dois pares de lados opostos paralelos. Assim, ele também é um paralelogramo.

Pesquisador: Essa figura não seria um quadrado?

Ana Rosa: Não, não pode ser. O quadrado não é retângulo. O quadrado tem todos os lados iguais. O retângulo não apresenta isso. A figura que eu desenhei é um retângulo. Eu só o coloquei em pé.

Pesquisador: Então, o quadrado não é retângulo?

Ana Rosa: Isso mesmo. Não é.

Pesquisador: O quadrado é um losango?

Ana Rosa: Também não é.

Pesquisador: Por quê?

Ana Rosa: O quadrado tem todos os ângulos medem 90° . O losango não. Os ângulos dele (do losango) têm outras medidas.

Pesquisador: Como se chama a figura do seu colega?

Ana Rosa: É um paralelogramo. Ele tem dois pares de lados paralelos opostos, com a mesma medida, então, eles são congruentes. Também, os ângulos deles não são retos.

Pesquisador: A figura do seu colega não é um losango?

Ana Rosa: Parece um losango, mas não. O losango tem todos os lados iguais e a figura do meu colega não tem todos os lados iguais.

Pesquisador: O losango é um paralelogramo?

Ana Rosa: É sim, já que ele possui dois pares de lados opostos iguais.

Pesquisador: Então, por que a figura do seu colega não é um losango? Já que o losango é um paralelogramo?

Ana Rosa: É o seguinte. O losango tem dois pares de lados congruentes e todos os lados são iguais. A figura do meu colega não tem todos os lados com a mesma medida, mas tem dois pares de lados iguais. Assim, ele é só paralelogramo. Além disso, as diagonais do losango são perpendiculares. Se eu desenhar as diagonais aqui (apontando para a “figura do seu colega”), as diagonais não vão ficar perpendiculares.

Pesquisador: Por que as diagonais do losango são perpendiculares?

Ana Rosa: Porque quando elas se encontram, elas formam ângulos retos, todos medem 90° . Isso não acontece com essa figura que desenhei aqui.

Pesquisador: Como você fez a classificação dessas onze figuras?

Ana Rosa: Ah? Entendi não.

Pesquisador: O que você considerou em cada figura, para classificá-las conforme os nomes apresentados no quadro?

Ana Rosa: Primeiro, eu olhei para a forma dela. Aí, percebi que todas têm quatro lados. Aí, pensei... Todas são quadriláteros. Depois, fui separando em retângulos, trapézios, paralelogramos...

Pesquisador: Por que essas figuras são quadriláteras? O que é quadrilátero?

Ana Rosa: Sim, todas são. Todas elas têm quatro lados, quatro vértices, quatro ângulos internos, quatro ângulos externos e duas diagonais. Quadrilátero é isso. É uma figura geométrica que tem todas essas coisas aí.

Pesquisador: Então, você olhou se as figuras possuem essas características?

Ana Rosa: Isso mesmo.

Pesquisador: Então, me fala, quais figuras são retângulos?

Ana Rosa: Os retângulos são o D e o J.

Pesquisador: Por que elas são retângulos?

Ana Rosa: Elas têm quatro ângulos internos que medem 90° . Têm dois pares de lados com a mesma medida. Aí, eles são retângulos.

Pesquisador: A figura F é um retângulo?

Ana Rosa: Não é. Ela é um paralelogramo, os ângulos não são retos.

Pesquisador: O retângulo é um paralelogramo?

Ana Rosa: Sim, já que ele tem dois lados opostos com a mesma medida.

Pesquisador: E o quadrado? Ele é um paralelogramo?

Ana Rosa: Sim, pelo mesmo motivo do retângulo.

Pesquisador: E o losango?

Ana Rosa: Também.

Pesquisador: Deixa-me ver se entendi. O retângulo, o quadrado e o losango são paralelogramos, pois tem dois lados paralelos com a mesma medida?

Ana Rosa: Isso mesmo.

Pesquisador: Então, é correto dizer que o quadrado é retângulo e losango ao mesmo tempo?

Ana Rosa: Não, é errado. O quadrado tem todos os lados iguais e os ângulos retos. O retângulo tem os ângulos retos, mas os lados não são iguais. O losango tem todos os lados iguais, mas os ângulos não são retos. Mas todos têm dois pares de lados iguais, então, eles são paralelogramos.

Pesquisador: Por que você classificou as figuras A, I e L como trapézios?

Ana Rosa: Os trapézios não têm dois pares de lados iguais. Dá para ver que tem dois lados diferentes.

Pesquisador: Então, os trapézios são paralelogramos?

Ana Rosa: Não, eles são diferentes. Os paralelogramos têm dois pares de lados iguais. Os trapézios não têm isso.

Pesquisador: Por que você considerou a figura C como quadrado?

Ana Rosa: Porque ela tem todos os lados com a mesma medida e os ângulos retos.

Pesquisador: A figura E apresenta essas características? É um quadrado?

Ana Rosa: Não. O E só tem os lados iguais, os ângulos não são retos, então é losango.

Pesquisador: A figura C é um losango?

Ana Rosa: Não, ela é um quadrado.

Pesquisador: Por que as figuras B, C, D, E, F, G, H e J foram classificadas como paralelogramos?

Ana Rosa: Todas elas têm dois pares de lados com a mesma medida.

Pesquisador: Que figuras são essas que você desenhou?

Ana Rosa: Quadrado

Pesquisador: Por que elas são quadrados?

Ana Rosa: Porque elas têm todos os ângulos retos e os lados iguais.

Pesquisador: Há outra característica que elas apresentam, para serem ditas quadrados?

Ana Rosa: Deixa-me ver um pouco (olhando para os quadrados). Bem... As diagonais delas têm a mesma medida... Também são perpendiculares.

Pesquisador: O que são diagonais?

Ana Rosa: São as retas que juntam dois vértices, que não são vizinhos (apontando nos desenhos, indicando os vértices)

Pesquisador: Por que as diagonais do quadrado são perpendiculares?

Ana Rosa: Elas se cruzam num local em que elas ficam iguais, aí, os ângulos são de 90° .

Pesquisador: Por que aqui você disse que o segundo quadrado é oblíquo? (apontado para o espaço do segundo momento da questão)

Ana Rosa: Foi para dizer que ele é menor do que o primeiro.

Pesquisador: Mas menor em que?

Ana Rosa: Os lados são menores, no caso, os comprimentos.

Pesquisador: Que figura é essa que você fez?

Ana Rosa: É um losango.

Pesquisador: Por quê?

Ana Rosa: Porque ele tem os lados com a mesma medida e as diagonais são perpendiculares.

Pesquisador: Como assim? As diagonais são perpendiculares?

Ana Rosa: Sim, elas se encontram num ponto em que elas se dividem ao meio, formando ângulos retos. Ah, e as diagonais dividem os ângulos dos vértices do losango em duas partes iguais.

Pesquisador: As diagonais são iguais? Tem a mesma medida?

Ana Rosa: Não, elas têm medidas diferentes. Se eu tivesse feito um quadrado, as diagonais teriam a mesma medida.

Pesquisador: Mas essa figura que tu fez não é um quadrado?

Ana Rosa: Não é. É um losango. Os ângulos não são retos.

Pesquisador: O quadrado é um losango?

Ana Rosa: Claro que não. Devido os ângulos deles serem diferentes.

Pesquisador: Que figura é essa que você refez?

Ana Rosa: É um losango.

Pesquisador: Por quê?

Ana Rosa: Porque ele tem os lados iguais.

Pesquisador: Essa figura é um quadrado?

Ana Rosa: Não. Os ângulos deles não são iguais para ser quadrado.

Pesquisador: Como você refez a figura?

Ana Rosa: Eu medi um dos lados com uma régua. Depois diz as diagonais. Como elas são perpendiculares ficou fácil. Depois fiz os lados, mas vendo se e medida ficava certa.

Pesquisador: Medidas certas? Como assim?

Ana Rosa: É que os lados são iguais, aí eu tinha que ver isso, se eles ficavam com o mesmo valor.

APÊNDICE E – TRANSCRIÇÃO DA ENTREVISTA COM MARIANO

Pesquisador: Que figura é essa que você desenhou no espaço “SUA FIGURA”?

Mariano: É um retângulo.

Pesquisador: Por que ela é um retângulo?

Mariano: Como eu escrevi, a figura é um retângulo tem pares de ângulos iguais com angulação de 90° entre os vértices consecutivos.

Pesquisador: Como assim? Podes me explicar novamente?

Mariano: Sim, posso. Veja, se você olhar aqui para o retângulo, vai poder ver que todos os ângulos internos são iguais, ou seja, são congruentes. Todos medem 90° . Além disso, o retângulo é um paralelogramo, pois tem dois pares de lados paralelos iguais.

Pesquisador: O que significa os valores 1 e 3 que você deixou na figura?

Mariano: Esses valores são as medidas dos lados, ou seja, as medidas dos comprimentos. Os lados horizontais medem 3 centímetros e os verticais medem 1 centímetro.

Pesquisador: Como você construiu a figura? E como fez a medição dos lados?

Mariano: Utilizei uma régua.

Pesquisador: Se você não tivesse a régua, seria possível responder a questão?

Mariano: Seria sim possível. Só que talvez o desenho não ficasse bem feito, talvez, os lados não saíssem retos. A régua ajuda bastante para ficar certo tanto o desenho com as medidas dos lados.

Pesquisador: Além dessas características que você mencionou, há outras que o retângulo apresenta?

Mariano: As diagonais têm a mesma medida de comprimento. Logo são iguais.

Pesquisador: Qual é a figura do seu colega?

Mariano: É um paralelogramo.

Pesquisador: Por quê?

Mariano: Primeiro por que tem dois pares de lados paralelos iguais. Segundo que os ângulos internos não são retos.

Pesquisador: Você disse que o retângulo é um paralelogramo. Então, a figura do seu colega é um retângulo?

Mariano: Não é, pois o retângulo tem ângulos iguais com angulação de 90° . O do meu colega é outro paralelogramo, o com ângulos que não medem 90° . Mas as duas figuras que eu fiz aí são paralelogramos, pois tem lados paralelos iguais. Eu puder ver isso quando eu medi com a régua. Na figura do meu colega, os lados verticais medem 2,5 centímetros. Veja que é a mesma medida, já que eles são paralelos. O mesmo com os lados horizontais, que tem o mesmo valor de comprimento, pois são paralelos. A mesma coisa ocorre com a minha figura, com o retângulo. Os lados paralelos são iguais. A diferença dos dois desenhos é com os ângulos, internos e externos.

Pesquisador: Como você fez a classificação das figuras apresentadas?

Mariano: Eu fui considerando o que entendo por cada figura.

Pesquisador: Como assim?

Mariano: É o seguinte. Vou pegar o retângulo. O retângulo é um quadrilátero paralelogramo com ângulos retos. Ele é um paralelogramo, já que tem dois pares de lados paralelos congruentes. Aí, se a figura tem essas características, fui colocando a letra dela na linha do retângulo. E com a ajuda da régua, também olhei para as diagonais. As diagonais do retângulo têm a mesma medida. Certo?

Pesquisador: Ok. Então, me diz quais figuras são retângulos?

Mariano: As figuras D, F e J.

Pesquisador: Por quê?

Mariano: Porque elas têm essas características aí que falei.

Pesquisador: Considerando essas características que você mencionou sobre o retângulo, as figuras C e E apresentam essas características? Elas são retângulos?

Mariano: As figuras C e E são quadrados, não são retângulos. Realmente, elas têm essas características. O quadrado é um quadrilátero e é um paralelogramo. As diagonais dele são congruentes. Mas as diagonais do quadrado são perpendiculares. Isso não ocorre com o retângulo. As diagonais do retângulo são concorrentes, então, elas se cruzam de forma que ficam com a mesma medida. Mas elas não são perpendiculares. Aí, dá para concluir que o quadrado não é retângulo. Outra coisa que podemos ver é que o quadrado tem todos os lados iguais. O retângulo não tem isso.

Pesquisador: Você disse que os quadrados e os retângulos são paralelogramos. Mas você não os colocou isso quadro, na coluna dos paralelogramos. Podes me explicar isso?

Mariano: É o seguinte, eu coloquei aí apenas os paralelogramos cujos ângulos não são iguais, não são retos. Eu fiquei nessa dúvida, se era para colocar só eles ou todos, incluindo os quadrados e os retângulos. Aí para não ficar repetido, coloquei só esses aí (apontando para o registro escrito). Mas os quadrados e os retângulos são paralelogramos também. Eles são paralelogramos com ângulos iguais.

Pesquisador: Qual a diferença entre esses paralelogramos?

Mariano: Todos eles têm dois pares de lados paralelos iguais. Por isso todos são paralelogramos. Veja que os trapézios não têm isso, eles só têm um par de lados paralelos. Assim, os trapézios não são paralelogramos. Os quadrados e os retângulos têm dois pares de lados paralelos iguais, aí, eles são paralelogramos. Mas eles são paralelogramos com ângulos retos. Os outros paralelogramos, o B, o G e o H tem dois pares de lados paralelos iguais, mas os ângulos não são retos. Essa é a primeira diferença... outra diferença é as diagonais. As diagonais do quadrado e do retângulo são iguais. As desses outros paralelogramos não são iguais (apontando para as figuras B, G e H).

Pesquisador: Como você verificou isso? Que as diagonais são ou não são iguais?

Mariano: Eu fui vendo com a régua.

Pesquisador: Você colocou as figuras A, I e L como trapézios. Por quê?

Mariano: Porque elas têm só um par de lados paralelos. Veja que os outros lados que formam o outro par não são paralelos. Por isso elas não podem ser paralelogramos.

Pesquisador: Por que todas as figuras foram colocadas aqui como quadriláteros? (apontando para o quadro)

Mariano: Porque todas têm as características dos quadriláteros.

Pesquisador: Quais são essas características?

Mariano: quatro vértices, quatro lados, quatro ângulos internos, quatro ângulos externos, duas diagonais e pelo menos um par de lados paralelos.

Pesquisador: Como assim? Pelo menos um par de lados paralelos?

Mariano: Sim, os quadriláteros têm de duas formas. Os quadriláteros com só um par de lados paralelos. Os trapézios têm isso. O outro tipo são os quadriláteros com dois pares de lados paralelos. Aí entram os paralelogramos.

Pesquisador: Vendo suas respostas, percebi que você colocou as figuras C e E como quadrados e losangos. Por que isso?

Mariano: Por que todo quadrado é losango.

Pesquisador: Como assim?

Mariano: Para ser losango, o paralelogramo tem que ter todos os lados iguais. Para ser quadrado tem que ter os lados iguais e os ângulos retos, então, conclui que todo quadrado é losango.

Pesquisador: Todo losango é quadrado?

Mariano: Não. Tem losango que os ângulos não são iguais.

Pesquisador: Posso afirmar que todo quadrado é retângulo e losango ao mesmo tempo?

Mariano: É errado dizer isso. Os retângulos não têm os lados iguais, nem o quadrado e nem o losango são retângulos. Mas o quadrado é losango, tem os lados com a mesma medida.

Pesquisador: Que figuras são essas que você desenhou aí?

Mariano: Quadrados.

Pesquisador: Por que elas são quadrados?

Mariano: Os lados têm a mesma medida e os ângulos são retos... Ah, e as diagonais são congruentes e perpendiculares. Por conta disso, as figuras são quadrados.

Pesquisador: Por que os dois quadrados que você fez são diferentes?

Mariano: Essas características que falei não mudam. O que eles têm diferente é olhando os lados, têm medidas diferentes. O primeiro tem 3 cm de comprimento e o segundo tem 2 cm. Eles também estão posicionados de modo diferente. O segundo está inclinado, o primeiro não.

Pesquisador: É possível notar mais alguma diferença entre eles?

Mariano: Não... Espera aí. Deixa eu ver... Se eu medir as diagonais, elas têm valores diferentes. As diagonais desse aqui (apontando para o primeiro quadrado), com certeza, têm medidas maiores do que o segundo.

Pesquisador: Por quê?

Mariano: Como os lados dele são maiores, dá para perceber que as diagonais são maiores também.

Pesquisador: Como se chama a figura que você desenhou aí? (apontando para a resposta do aluno ao teste)

Mariano: É um losango?

Pesquisador: Por quê?

Mariano: Porque ela tem todos os lados iguais, os ângulos opostos são iguais e as diagonais são perpendiculares. Outra coisa, como eu fiz no desenho, as diagonais se cruzam num ponto em que elas ficam divididas em duas partes iguais. Dá para ver também que as diagonais dividem os ângulos em partes iguais.

Pesquisador: Quais ângulos você se refere?

Mariano: Os ângulos dos vértices que têm as diagonais.

Pesquisador: Essa figura é um quadrado?

Mariano: Não. O quadrado é um losango com ângulos iguais. Esse losango que fiz não tem isso, os ângulos dele não são retos.

Pesquisador: Como você reconstruiu a figura?

Mariano: Primeiro, eu medi um dos lados. Aí encontrei o valor da medida do comprimento. Os outros lados devem ter essa medida. Depois, fiz as diagonais. Como elas são perpendiculares e se encontram num ponto que as divide em duas partes iguais, aí, eu medi uma dessas partes. Depois fiz os lados de modo que eles se encontrem nas diagonais, de maneira que os lados e as diagonais tivessem os valores que encontrei com a régua.

APÊNDICE F – TRANSCRIÇÃO DA ENTREVISTA COM TERESA

Pesquisador: Qual é o nome dessa figura aí? (apontando para SUA FIGURA)

Teresa: É um retângulo.

Pesquisador: Por que ela é um retângulo?

Teresa: Porque ela tem os lados, dois a dois, paralelos. Além disso, eles são iguais. Os seus ângulos internos são retos.

Pesquisador: Veja que na justificativa, você disse que a figura pode ser ou não um quadrado. Pode me explicar isso?

Teresa: Posso. É o seguinte. Eu ia desenhar um quadrado. Mas quando fiz o desenho, vi que a figura não era um quadrado, mas sim um retângulo.

Pesquisador: Então, o quadrado não é um retângulo?

Teresa: Não. Todo quadrado é retângulo ao mesmo tempo. O quadrado também é um losango.

Pesquisador: Como assim? O quadrado é retângulo e losango ao mesmo tempo?

Teresa: É o seguinte. O quadrado tem os lados iguais e os ângulos internos retos. O retângulo tem todos os ângulos internos retos. Mas os seus lados podem ou não ter a mesma medida. Aí, o quadrado é retângulo.

Pesquisador: E com relação ao losango?

Teresa: Ah, sim. O losango tem todos os lados iguais, só que os seus ângulos internos podem ser iguais ou não. Ai, o quadrado é losango também.

Pesquisador: O quadrado, o retângulo e o losango são paralelogramos?

Teresa: São sim. Eles têm lados paralelos dois a dois com a mesma medida.

Pesquisador: Qual é o nome da figura do seu colega?

Teresa: Paralelogramo.

Pesquisador: Por quê?

Teresa: Por que ele tem os lados dois a dois paralelos iguais. Seus ângulos internos não são retos.

Pesquisador: Você disse que o quadrado, o losango e o retângulo são paralelogramos. Então, a figura do seu colega é um quadrado? É um losango? É um retângulo?

Teresa: Nenhum desses. O paralelogramo que desenhei para meu colega não tem os lados iguais, como ocorre com o quadrado e com o losango. E os ângulos internos não são retos, como ocorre com o retângulo e o quadrado.

Pesquisador: Então, por que eles são paralelogramos? Já que você apresentou várias diferenças entre eles.

Teresa: Eles têm suas diferenças sim, mas todos têm os lados dois a dois paralelos com a mesma medida, então eles são paralelogramos.

Pesquisador: Pode me explicar como você classificou as onze figuras?

Teresa: Claro. Com base no que eu sei sobre quadriláteros, eu fui fazendo a classificação.

Pesquisador: O que é um quadrilátero?

Teresa: É toda figura de quatro lados, formada em um plano, de forma que três de seus vértices não formem uma única reta.

Pesquisador: Como assim? Não entendi.

Teresa: Posso explicar com um desenho?

Pesquisador: Pode sim.

Teresa: É assim. Aqui eu tenho uma figura de quatro lados, certo? (desenhando uma figura de quatro lados, conforme apresentada no final dessa transcrição). Aqui eu tenho os vértices, que no total, são quatro. Veja que se eu pegar eles dois a dois, por exemplo, os vértices A e B, eles formam o segmento de reta AB, que é um dos lados da figura. Entre eles não tem outro vértice, ou seja, no segmento AB não tem outro vértice. Mas se agora nessa figura, se eu pegar os vértices três a três, por exemplo, A, B e C. Se você olhar para a figura, vai ver que eles não formam um segmento, mas sim dois. Então, fica provado que a figura é um quadrilátero.

Pesquisador: Entre as onze figuras apresentadas, há quadriláteros?

Teresa: Há sim. Todas elas são quadriláteros, pois elas atendem isso que eu falei. Além dos quatro vértices e dos quatro lados, elas têm quatro ângulos internos, quatro ângulos externos, duas diagonais concorrentes, ou seja, se cruzam.

Pesquisador: Vendo sua resposta à questão, percebi que você colocou as figuras C, D, E, F e F como retângulos. Pode me explicar isso?

Teresa: Posso. Todas elas são retângulos. Entre elas tem os quadrados, que são retângulos também. Para ser retângulo só é necessário ter ângulos internos retos. Como os quadrados atendem isso, então, eles são retângulos.

Pesquisador: Qual a diferença entre esses retângulos?

Teresa: Os quadrados são retângulos com ângulos internos retos e os seus lados são iguais. Os outros retângulos não têm lados iguais, mas os ângulos são. Então, todos são retângulos.

Pesquisador: Os losangos são retângulos?

Teresa: Não. A menos que o losango tenha ângulos retos. Aí, ele é quadrado, retângulo e losango.

Pesquisador: Não entendi. Pode me explicar novamente?

Teresa: É assim. O losango é um paralelogramo com lados iguais. Como os quadrados também têm isso, têm lados iguais, então todo quadrado é losango. E como os quadrados têm ângulos internos retos, eles também são retângulos. Aí, eu posso dizer que os quadrados são losangos e retângulos, juntos.

Pesquisador: E os losangos são retângulos?

Teresa: Não são. Para ser losango a figura só precisa ter os lados com a mesma medida. Os ângulos podem ou não ser retos, então, se o losango não tem ângulos iguais, ele não é retângulo. Ele só é retângulo se ele tiver os ângulos iguais, aí, ele é quadrado, retângulo e losango, juntos.

Pesquisador: Então me diz quais figuras são quadrados e quais são losangos?

Teresa: As figuras C e E são quadrados. Mas como elas têm lados iguais são losangos. E como elas têm ângulos com a mesma medida são retângulos.

Pesquisador: Quais figuras são paralelogramos?

Teresa: As figuras B, C, D, E, F, G, H, J.

Pesquisador: Por quê?

Teresa: Como elas possuem dois pares de lados paralelos, e esses lados são opostos e tem a mesma medida, logo, elas são paralelogramos. Os quadrados, os losangos e os retângulos apresentam isso, então, são paralelogramos. E tem outros paralelogramos, que são oblíquos, pois os ângulos deles não são retos.

Pesquisador: Os trapézios são paralelogramos?

Teresa: Não são. Os trapézios são quadriláteros que só tem um par de lados paralelos. Os paralelogramos têm dois pares. Aí, os trapézios e os paralelogramos são dois quadriláteros. Mas trapézio não é paralelogramo.

Pesquisador: Quais figuras são trapézios?

Teresa: As figuras A, I e L. Elas têm só um par de lados paralelos, então, não são paralelogramos.

Pesquisador: Qual é o nome das figuras que você fez?

Teresa: Quadrados.

Pesquisador: Por que elas são quadrados?

Teresa: Elas apresentam todas as características necessárias de um quadrado

Pesquisador: E quais são essas características?

Teresa: Ângulos internos congruentes e lados com a mesma medida de comprimento.

Pesquisador: Por que os quadrados são diferentes?

Teresa: Essa questão eu pensei um pouco. No começo, não notei diferença. Os quadrados têm lados iguais, ângulos retos. Até aqui não vi diferença, pois eles apresentam essas características. Depois, pensei, eles são diferentes na posição ocupada por cada um no plano e também pelos comprimentos dos lados, que não tem a mesma medida. As áreas deles também são diferentes. Os perímetros...

Pesquisador: Na parte escrita, você disse que as propriedades inerentes dos quadrados não podem ser alteradas. Quais propriedades são essas?

Teresa: Primeiro tem a questão dos lados e dos ângulos internos que não podem mudar. Se não a figura deixa de ser quadrado. Se você mudar o comprimento de um dos lados, ou mudar a medida de um dos ângulos internos, a figura não é mais quadrado, pois essas propriedades foram alteradas. Outra propriedade que não pode ser mudada é a questão das diagonais.

Pesquisador: Como assim? Qual é a questão das diagonais?

Teresa: A questão é que as diagonais dos quadrados são congruentes, então, elas têm o mesmo comprimento. Elas são perpendiculares e são as bissetrizes dos ângulos internos. Se você aumentar ou diminuir o comprimento de uma das diagonais, elas deixam de ser congruentes, aí a figura não é mais quadrado. Se você mudar a posição delas, elas deixam de dividir os ângulos internos em duas

parte iguais, aí, elas não são bissetrizes. Isso não pode ser modificado. Se não, não é mais quadrado.

Pesquisador: Que figura é essa que você fez?

Teresa: É um losango, já que é um paralelogramo com todos os lados congruentes entre si. Além disso, suas diagonais são perpendiculares e estão nas bissetrizes dos ângulos internos.

Pesquisador: Na parte escrita, você disse o seguinte: “eu construí essa figura de forma simétrica”. Pode me explicar isso?

Teresa: Se eu fizer uma reta que passando por uma das diagonais, passando no centro do losango, coincidindo com o ponto médio das diagonais, eu vou dividir o losango em dois triângulos, certo? Esses triângulos são congruentes, se eu deslocar um e sobrepuser sobre o outro, eles coincidem. Eles são idênticos. Então a forma simétrica que falei isso, é eu dividir o losango em duas partes, de forma que elas sejam exatamente congruentes e idênticas. Se eu fizer isso com a outra diagonal, também foi dividir o losango em dois triângulos simétricos. Isso ocorre também quando estamos em frente ao espelho, nossa imagem no espelho é uma cópia simétrica de nós. Aí, o espelho é a reta simétrica.

Pesquisador: Pode me dizer como você reconstruiu?

Teresa: Primeiro, eu considerei o ponto de intersecção das diagonais, ou seja, o ponto médio. Nesse ponto, as diagonais ficam divididas em duas partes iguais. Então, com a régua, eu medi o comprimento dessas partes. Com o valor da medida dessas partes, eu fiz as outras partes das diagonais. Mas eu considerei que elas (as diagonais) são perpendiculares. Depois, eu medi o comprimento de um dos lados do losango. Como todos os lados têm a mesma medida, aí eu fiz os lados, mas respeitando isso. Os extremos dos lados vão coincidir com as extremidades das diagonais. Então, formei o losango. Veja que o losango ficou formado por quatro triângulos retângulos simétricos.

Pesquisador: Como assim, triângulos simétricos?

Teresa: Sim, os triângulos são congruentes, tem a mesma área, mesmo perímetro e os lados correspondentes são iguais.