



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

ARTHUR ARAÚJO BRUM

**SOLUÇÕES EXATAS DEPENDENTES DO TEMPO PARA DEDOS
VISCOSOS EM UMA CÉLULA DE HELE-SHAW**

Recife
2018

ARTHUR ARAÚJO BRUM

**SOLUÇÕES EXATAS DEPENDENTES DO TEMPO PARA DEDOS
VISCOSOS EM UMA CÉLULA DE HELE-SHAW**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Área de concentração: Dinâmica de Fluidos

Orientador: Prof. Dr. Giovani Lopes Vasconcelos

Recife
2018

Catálogo na fonte
Bibliotecária Elaine Freitas CRB4-1790

B893s Brum, Arthur Araújo
 Soluções exatas dependentes do tempo para dedos viscosos em uma
 célula de Hele-shaw / Arthur Araújo Brum . – 2018.
 84 f.

 Orientador: Giovani Lopes Vasconcelos.
 Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN.
 Física. Recife, 2018.
 Inclui referências e apêndices.

 1. Dinâmica de fluidos. 2. Escoamentos de Hele-Shaw . 3. Formação de
 Padrões. 4. Escoamentos Potenciais. I. Vasconcelos, Giovani Lopes
 (Orientador). II. Título.

 532.02 CDD (22. ed.) UFPE-FQ 2018-71

ARTHUR ARAÚJO BRUM

**SOLUÇÕES EXATAS DEPENDENTES DO TEMPO PARA DEDOS
VISCOSOS EM UMA CÉLULA DE HELE-SHAW**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada em: 14/09/2018.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Giovani Lopes Vasconcelos
Orientador
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Eduardo Olímpio Ribeiro Dias
Examinador Interno
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Fernando Jorge Sampaio Moraes
Examinador Externo
Universidade Federal Rural de Pernambuco

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família por todo o apoio emocional e financeiro que sempre me deu, sobretudo minha mãe, meu pai e meu padrasto. Agradeço à minha namorada pelo apoio e por todos os momentos que vivenciamos nesses três anos e meio.

Agradeço aos meus grandes amigos, Rodolfo, Ricardo, André, William, Rodrigo e Jampa pelos conselhos, pelas discussões sobre os mais variados temas e pelos momentos de descontração.

Agradeço aos professores, Maurício Coutinho, Leonardo Cabral, Antônio Murilo, Alessandro Villar e Wilson Barros pelo conhecimento transmitido através das disciplinas, que influenciaram diretamente na minha formação profissional e pessoal.

Agradeço sobretudo ao meu orientador, Giovani Vasconcelos, pedra fundamental da minha formação acadêmica. Agradeço por ter compartilhado comigo um pouco do seu grande conhecimento sobre as mais diversas áreas. Pela possibilidade de colaborar com outros pesquisadores. Por ter me apresentado a pessoas fantásticas, como o inesquecível Mark Mineev-Weinstein e Darren Crowdy. Por ter me apresentado os maravilhosos charutos cubanos.

RESUMO

Na presente dissertação apresentamos soluções dependentes do tempo para o movimento de múltiplos dedos viscosos em uma célula de Hele-Shaw com tensão superficial nula. As soluções são representadas em termos de um mapeamento conforme de um domínio apropriado em um plano complexo auxiliar para a região ocupada pelo fluido no plano z . Começamos com uma detalhada revisão das soluções estacionárias para o movimento de múltiplas bolhas e dedos viscosos na célula de Hele-Shaw retangular. Nesta revisão, introduzimos o formalismo das funções secundárias de Schottky-Klein utilizado na construção de mapeamentos conformes entre domínios multiplamente conexos. Verificamos que estas soluções quando tomadas no caso de uma única bolha e um único dedo reproduzem exatamente as soluções originalmente encontradas por Saffman e Taylor. Para a construção de soluções dependentes do tempo, que representam a principal contribuição desta dissertação, introduzimos inicialmente o conceito da função de Schwarz de uma curva. Usando o fato de que as singularidades da função de Schwarz são grandezas conservadas, derivamos um sistema de equações diferenciais ordinárias para a evolução temporal dos parâmetros do mapeamento. Integrando numericamente o sistema de EDO's para diferentes configurações iniciais, obtivemos a dependência temporal dos parâmetros do mapeamento conforme, o que nos possibilitou acompanhar o comportamento da interface ao longo do tempo. Observamos o acontecimento de *tip-splitting*, fenômeno no qual um dedo viscoso inicial se divide em dois ramos que assintoticamente convergem para dois dedos distintos. Explicamos através do nosso modelo o fenômeno da seleção da velocidade assintótica, mostrando que a solução estacionária com velocidade $U = 2$ é o único atrator da dinâmica. Este comportamento concorda com diversos experimentos e reafirma que a seleção da velocidade em escoamentos de Hele-Shaw é um fenômeno inerente à dinâmica com tensão superficial nula.

Palavras-Chave: Escoamentos de Hele-Shaw. Dinâmica de Interfaces. Formação de Padrões. Escoamentos Potenciais. Transformações Conformes. Célula de Hele-Shaw.

ABSTRACT

In this thesis we present time-dependent solutions for the motion of multiple viscous fingers in a Hele-Shaw cell with zero surface tension. The solutions are presented in terms of a conformal mapping from an appropriate domain in an auxiliary complex plane to the region occupied by the fluid in the z plane. We begin with a detailed review of the steady solutions for the motion of multiple bubbles and fingers in a rectangular Hele-Shaw cell. In this review the formalism of the secondary Schottky-Klein functions used in the construction of conformal mappings between multiply connected domains is introduced. It was verified that these solutions when taken for the case of a single bubble and a single finger reproduce the solutions originally found by Saffman and Taylor. For the construction of time-dependent solutions, which represent the main contribution of this thesis, we introduce the concept of Schwarz function of a curve. Using the fact that the singularities of the Schwarz function are conserved quantities, we derived a system of ordinary differential equations for time evolution of the parameters of the conformal mapping. Integrating numerically the system of ODE's for different initial conditions, we obtained the time dependence of the parameters of the mapping, which in turn enabled us to follow the behaviour of the interface in time. *Tip-splitting*, phenomenon in which an initial viscous finger divides itself in two branches that converge asymptotically to two distinct fingers, was observed and discussed. We explained using our solutions the phenomenon of asymptotic velocity selection, showing that the steady solution with velocity $U = 2$ is the only attractor for the dynamics. This behaviour is in agreement with several experiments and reaffirms that velocity selection in Hele-Shaw flows is a phenomenon inherent to the zero-surface-tension dynamics.

Keywords: Hele-Shaw Flows. Interface Dynamics. Pattern Formation. Potential Flows. Conformal Transformations. Hele-Shaw Cell.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	– (a) Dendritos (estruturas cristalinas com aparência semelhante à de árvore com ramificações que se repetem) de óxido de manganês em um substrato de calcário. Fonte: [4]; (b) Ilustração esquemática do processo de recuperação secundária de petróleo, onde água ou gás carbônico é injetado entre as rochas para forçar a saída de petróleo por um duto coletor. Fonte: [5].	12
Figura 2	– Dedo viscoso no regime estacionário propagando-se com velocidade constante. Fonte: [6].	13
Figura 3	– Comparação entre a teoria e experimento. A linha cheia é a interface do dedo viscoso obtida experimentalmente e os círculos são a forma da interface calculada através da teoria. Fonte: [6].	13
Figura 4	– (a) Penetração de ar em uma célula de Hele-Shaw preenchida com óleo esquematicamente demonstrado; (b) Perfil de velocidade parabólico no espaço entre as placas.	14
Figura 5	– (a) Linhas de corrente de um escoamento uniforme em torno de uma placa inclinada em 45 graus com relação ao eixo central do canal; (b) Linhas de corrente de um escoamento uniforme em torno de um aerofólio. Ambas as figuras foram retiradas de [7].	15
Figura 6	– (a) Injeção de ar ou água através de um orifício na placa superior da célula de Hele-Shaw. Figura retirada de [16]; (b) Injeção de ar ou água através de uma abertura lateral na célula de Hele-Shaw. Figura retirada de [6].	15
Figura 7	– Evolução das envaginações iniciais e eventual formação de dedos viscosos em três estágios de desenvolvimento. Fonte: [6].	16
Figura 8	– Mapeamento conforme de um domínio circular (disco unitário) no plano auxiliar ζ para o domínio do fluido no plano z	18
Figura 9	– (a) Arranjo de 3 bolhas movendo-se uniformemente com velocidade U ; (b) Arranjo de 2 dedos viscosos movendo-se uniformemente com velocidade U	23
Figura 10	– Domínio do fluido representado no plano do potencial complexo w	25
Figura 11	– Domínio do fluido representado no plano do potencial complexo τ	26
Figura 12	– Domínio circular D_ζ no plano auxiliar ζ	27
Figura 13	– Região fundamental F_0 obtida através da reflexão de D_ζ em C_0	29
Figura 14	– Região fundamental F_{01} de um grupo Θ_N qualquer.	31
Figura 15	– Região fundamental F_{01} do grupo Θ_M	32

Figura 16 – (a) Arranjo de três bolhas simétricas com relação ao eixo central do canal movendo-se uniformemente com velocidade $U = 2$; (b) Domínio circular D_ζ composto por três fronteiras circulares com centros e raios dados por: $\delta_1 = -0.6, \delta_2 = 0, \delta_3 = 0.5; q_1 = q_3 = 0.1, q_2 = 0.3$	38
Figura 17 – (a) Arranjo de três bolhas simétricas em relação ao eixo vertical $x = 0$ movendo-se uniformemente com velocidade $U = 2$; (b) Domínio circular D_ζ composto por três fronteiras circulares com centros e raios dados por: $\delta_1 = -0.6i, \delta_2 = 0, \delta_3 = 0.5i; q_1 = q_3 = 0.1, q_2 = 0.3$	38
Figura 18 – (a) Arranjo de cinco bolhas movendo-se uniformemente com velocidade $U = 2$. Nesse caso a bolha no centro do arranjo apresenta simetria em relação ao eixo central do canal e ao eixo vertical $x = 0$, enquanto duas das demais apresentam apenas o primeiro tipo de simetria e as duas restantes apresentam apenas o último tipo de simetria; (b) Domínio circular D_ζ composto por cinco fronteiras circulares com centros e raios dados por: $\delta_1 = -\delta_2 = 0.5, \delta_3 = -\delta_4 = 0.5i, \delta_5 = 0; q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = 0.15$	39
Figura 19 – (a) Arranjo de três bolhas sem simetria movendo-se uniformemente com velocidade $U = 2$; (b) Domínio circular D_ζ composto por três fronteiras circulares com centros e raios dados por: $\delta_1 = 0.4 + 0.2i, \delta_2 = -0.3 + 0.3i, \delta_3 = -0.4i; q_1 = q_2 = q_3 = 0.3$; (c) Arranjo de três bolhas sem simetria movendo-se uniformemente com velocidade $U = 4$; (d) Arranjo de três bolhas sem simetria movendo-se uniformemente com velocidade $U = 1.5$	39
Figura 20 – Regiao fundamental F_{01} do grupo Θ_1 para uma única bolha simétrica.	41
Figura 21 – (a) Figura da bolha simétrica retirada de [8]; (b) Figura gerada utilizando (2.63) e espelhada (linha tracejada) na linha central do canal para obter a bolha completa e as duas paredes do canal.	42
Figura 22 – Regiao fundamental \tilde{F}_0 do grupo $\tilde{\Theta}_{M+1}$ para o caso $M = 2$	43
Figura 23 – (a) Arranjo de $p = 3$ dedos e $M = 2$ bolhas com parâmetros $\zeta_1 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \zeta_2 = -\sqrt{2} + e^{(i\pi/10)}, \zeta_3 = \overline{\zeta_2}, \zeta_4 = \overline{\zeta_1}, \alpha_1 = \alpha_4 = 0.3, \alpha_2 = \alpha_3 = 0.3, \delta_1 = 0.3i, \delta_2 = -0.2 - 0.3i, q_1 = 0.2, q_2 = 0.1$; (b) Arranjo de $p = 3$ dedos e $M = 2$ bolhas com os mesmos parâmetros da figura anterior, com excessão de ζ_3 que muda do valor anterior para $\zeta_3 = -\sqrt{2} + e^{(i\pi/20)}$	45
Figura 24 – (a) Dedo viscoso simétrico porpagando-se com velocidade constante $U = 2$; (b) Dedo viscoso assimétrico porpagando-se com velocidade constante $U = 2$	46
Figura 25 – Localização inicial das singularidades de $z(\zeta)$ na solução (3.37).	54
Figura 26 – Largura e inclinação de um fjord com relação ao eixo central do canal	56

Figura 27 – (a) Evolução de um dedo viscoso na presença de duas singularidades da função de Schwarz na região física. As linhas tracejadas representam a evolução temporal da interface, enquanto a linha cheia representa a interface no último instante t . A linha tracejada em vermelho indica a inclinação do fjord em relação ao eixo central do canal; (b) Evolução temporal das singularidades $a_k(t)$	61
Figura 28 – (a) Valor do parâmetro $d(t)$ para o intervalo $t = 0$ até $t = 30$	62
Figura 29 – (a) Simulação numérica com parâmetros iniciais selecionados de forma a tentar reproduzir a figura do experimento; (b) Figura retirada de [6] mostrando o experimento da penetração de ar em uma célula de Hele-Shaw preenchida com glicerina.	63
Figura 30 – (a) Evolução de dois dedos viscosos que posteriormente transformam-se em três dedos; (b) Evolução temporal das singularidades $a_k(t)$	63
Figura 31 – Evolução temporal de um dedo viscoso com velocidade assintótica $U = 4$	64
Figura 32 – (a) Evolução temporal dos parâmetros $a_k(t)$; (b) Evolução do parâmetro $d(t)$ que assintoticamente converge para $d(t) = 4$ quando $t \rightarrow \infty$	65
Figura 33 – (a) Evolução de um dedo viscoso com velocidade assintótica $U = 4$; (b) Evolução temporal dos parâmetros $a_k(t)$	66
Figura 34 – (a) Evolução de dois dedos viscosos em que um deles se divide em dois ramos formando assintoticamente um arranjo de três dedos que se movem com velocidade constante $U = 1.7$; (b) Evolução temporal dos parâmetros $a_k(t)$	66
Figura 35 – (a) Evolução temporal de duas interfaces que inicialmente parecem ser idênticas mas que convergem assintoticamente para formas e velocidades distintas; (b) Evolução temporal das singularidades $a_k(t)$ para a solução com velocidade assintótica $U = 2$ (linha preta).	71
Figura 36 – (a) Região do escoamento no plano físico z ; (b) Região do escoamento no plano do potencial complexo $w(z)$; (c) Região do escoamento no plano auxiliar ζ	74
Figura 37 – Região fundamental F_{01} do grupo Θ_N	79

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	A célula de Hele-Shaw	14
1.2	Potenciais complexos	17
1.3	Mapeamentos conformes	18
1.4	A lei de Darcy	19
1.5	Organização da dissertação	21
2	ESCOAMENTOS DE HELE-SHAW	23
2.1	Formulação do problema	23
2.2	A construção dos potenciais complexos	23
2.2.1	O potencial $w(z)$	24
2.2.2	O potencial $\tau(z)$	25
2.2.3	Os potenciais $W(\zeta)$ e $T(\zeta)$	26
2.3	As funções de Schottky-Klein	27
2.3.1	As funções secundárias de Schottky-Klein	30
2.4	Soluções estacionárias para o movimento de múltiplas bolhas	33
2.4.1	O mapeamento conforme $z(\zeta)$	36
2.4.2	Exemplos	37
2.4.3	Caso especial: Solução estacionária para o movimento de uma única bolha simétrica	40
2.5	Solução estacionária para o movimento de múltiplos dedos e bolhas	42
2.5.1	Caso especial: Um único dedo viscoso	45
3	SOLUÇÕES DEPENDENTES DO TEMPO PARA DEDOS VISCO-SOS	47
3.1	A função de Schwarz	47
3.2	A função de Schwarz para curvas dependentes do tempo e sua conexão com o potencial complexo	48
3.3	Dinâmica de pólos na célula radial	51
3.4	Dedos viscosos: Soluções dependentes do tempo	53
3.4.1	Condições iniciais que levam a $U = 2$	57
3.4.2	Condições iniciais que levam a $U \neq 2$	58
3.5	Sistema de EDO's e integração numérica	59
3.6	Simulações numéricas	60
3.6.1	Configurações que levam a $U = 2$	61

3.6.2	Configurações que levam a $U \neq 2$	64
3.7	Comportamento assintótico das soluções	67
3.7.1	Soluções com velocidade assintótica $U = 2$	67
3.7.2	Soluções com velocidade assintótica $U \neq 2$	68
3.8	Seleção da velocidade assintótica	69
4	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	72
4.1	Conclusões	72
4.2	Perspectivas	73
	REFERÊNCIAS	76
	APÊNDICE A - OS SUBGRUPOS Θ_N	79
	APÊNDICE B - DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO (3.27)	81
	APÊNDICE C - DERIVADAS DE β_k E β_+	83

1 INTRODUÇÃO

Nesta dissertação vamos estudar a evolução de interfaces entre dois fluidos de viscosidades distintas em uma célula de Hele-Shaw. Nosso principal interesse é formular soluções exatas para a evolução temporal destas interfaces. O problema da evolução de interfaces livres se enquadra em uma classe geral de problemas dinâmicos que geram padrões complexos. O interesse nessa classe de problemas vem tanto do ponto de vista teórico, quanto de suas aplicações práticas.

Pelo lado da teoria, a dinâmica de interfaces em uma célula de Hele-Shaw tem conexão com escoamentos em meios porosos, crescimento dendrítico de estruturas cristalinas (vide figura 1a) e com outros sistemas físicos de grande importância [1]. No âmbito das aplicações práticas podemos citar seu uso para modelar a recuperação secundária de petróleo [2, 3], onde um fluido menos viscoso, digamos água ou gás carbônico, é injetado por um duto entre as rochas para empurrar o petróleo em direção a outro duto, onde ele é então recolhido. Este procedimento é esquematicamente ilustrado na figura 1b.

Esta área da dinâmica de fluidos começou a ser estudada depois da publicação em 1898 de um trabalho pioneiro pelo engenheiro britânico Henry Selby Hele-Shaw [7]. Neste trabalho o autor introduziu um aparato que posteriormente passou a ser utilizado para visualizar as linhas de corrente de um escoamento em volta de um obstáculo, chamado de célula de Hele-Shaw.

Mais de meio século depois, em 1958 e 1959, o matemático aplicado Phillip G. Saffman

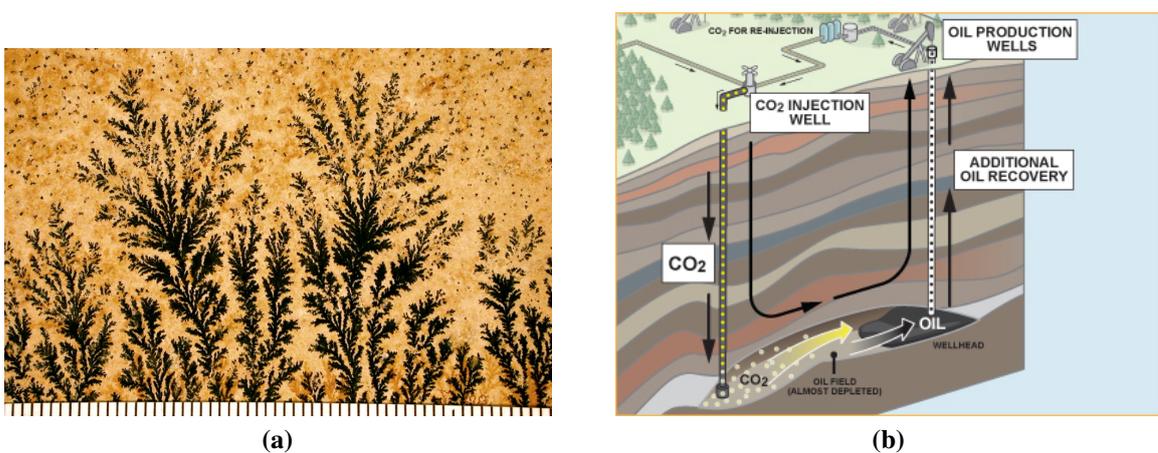


Figura 1 – (a) Dendritos (estruturas cristalinas com aparência semelhante à de árvore com ramificações que se repetem) de óxido de manganês em um substrato de calcário. Fonte: [4]; (b) Ilustração esquemática do processo de recuperação secundária de petróleo, onde água ou gás carbônico é injetado entre as rochas para forçar a saída de petróleo por um duto coletor. Fonte: [5].

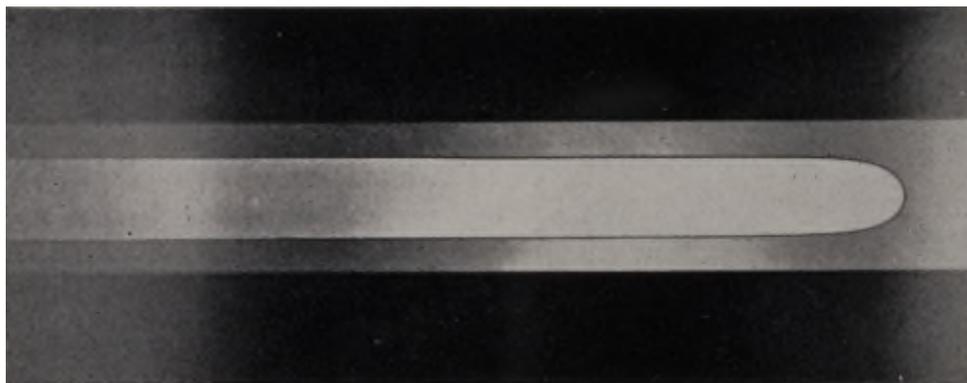


Figura 2 – Dedo viscoso no regime estacionário propagando-se com velocidade constante. Fonte: [6].

e o físico Geoffrey I. Taylor fizeram contribuições de grande importância nessa área ao estudar a penetração de um fluido menos viscoso em outro mais viscoso em uma célula de Hele-Shaw. Saffman e Taylor estudaram tanto experimentalmente quanto matematicamente a evolução da interface entre os dois fluidos [6, 8]. Eles observaram que após um transiente, a interface atingia um regime estacionário em que um "dedo viscoso" era formado e propagava-se com velocidade constante sem se deformar, como mostrado na figura 2. Lançando mão de técnicas de transformações conformes, os autores conseguiram calcular uma solução exata para o problema de um dedo viscoso propagando-se com velocidade constante, que descrevia muito bem o padrão observado nos experimentos como mostrado na figura 3. Logo em seguida resolveram também o problema de uma bolha de área finita propagando-se na célula de Hele-Shaw [8].

A partir da década de 1980 houve uma explosão de trabalhos nessa área, em conexão com o chamado "problema de seleção" [9, 10, 11, 12]. Diversos grupos buscavam explicar o mecanismo por trás da seleção de um único padrão assintótico em meio a um contínuo de soluções estacionárias para tensão superficial nula previstas teoricamente. As soluções propostas por esses grupos se baseavam na introdução de tensão superficial no problema, o que restringia as soluções estacionárias a um conjunto discreto de possíveis valores para a velocidade assintótica.

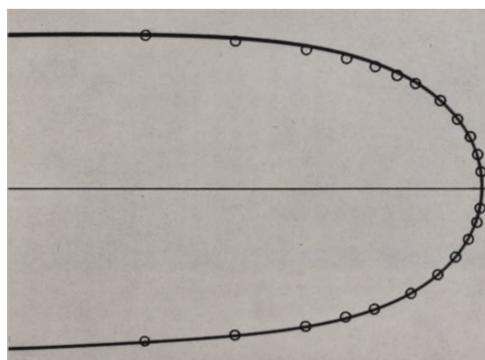


Figura 3 – Comparação entre a teoria e experimento. A linha cheia é a interface do dedo viscoso obtida experimentalmente e os círculos são a forma da interface calculada através da teoria. Fonte: [6].

Todos esses "ramos" de solução convergem para aquele em que o dedo se move com o dobro da velocidade do escoamento no infinito quando é feito o limite de tensão superficial indo a zero.

Mais recentemente, a partir dos anos 2000, houve um reflorescimento da área com a descoberta de profundas conexões matemáticas entre a dinâmica de interfaces numa célula de Hele-Shaw (também chamado de crescimento Laplaciano) com vários outros problemas da física e matemática, como sistemas integráveis, gravidade quântica em 2D, efeito Hall quântico, teoria de matrizes aleatórias, entre outros [13, 14, 15]. É nesse contexto, de grande e renovado interesse no problema, que se insere a presente dissertação, onde apresentamos uma formulação alternativa para o cálculo de soluções exatas para dedos viscosos na célula de Hele-Shaw. Com nossa abordagem, vários aspectos importantes do problema foram melhor elucidados.

1.1 A célula de Hele-Shaw

Como mencionado acima, a célula de Hele-Shaw é um aparato experimental introduzido no fim do século XIX com o intuito de estudar escoamentos bidimensionais. O aparato consiste em duas placas planas dispostas de forma paralela e com um pequeno espaço entre elas, como mostrado na figura 4a. O escoamento no interstício das placas tem, efetivamente, um perfil de velocidade parabólico, como em um escoamento de Poiseuille, vide figura 4b. Fazendo-se uma média do campo de velocidade sobre a direção z perpendicular às placas, é possível reduzir o problema a um escoamento efetivamente bidimensional.

Apesar de o fluido em seu interior ser muito viscoso, as linhas de corrente do escoamento bidimensional (ou seja, visto de cima das placas) comportam-se como as de um fluido invíscido, o que faz com que a célula de Hele-Shaw seja também uma boa ferramenta para visualizar escoamentos em torno de obstáculos como aerofólios, como ilustrado nas figuras 5a e 5b. De fato, essa foi a motivação original de Hele-Shaw ao criar esse aparato.

Uma importante aplicação dos escoamentos de Hele-Shaw é estudar a penetração de um fluido de baixa viscosidade em outro de viscosidade bem maior. Nesse caso, preenche-se

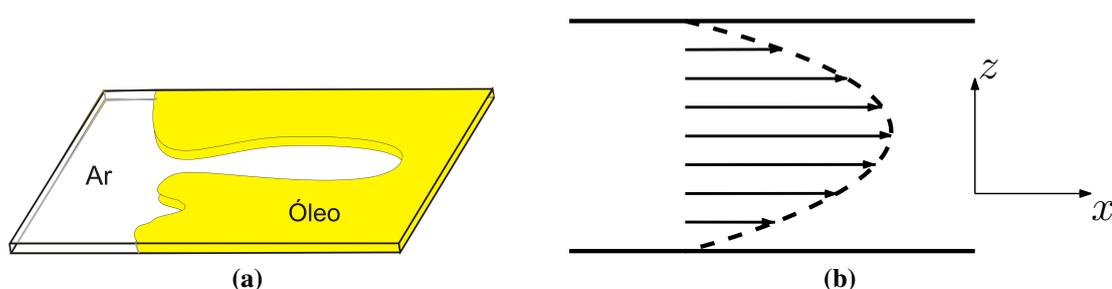


Figura 4 – (a) Penetração de ar em uma célula de Hele-Shaw preenchida com óleo esquematicamente demonstrado; (b) Perfil de velocidade parabólico no espaço entre as placas.

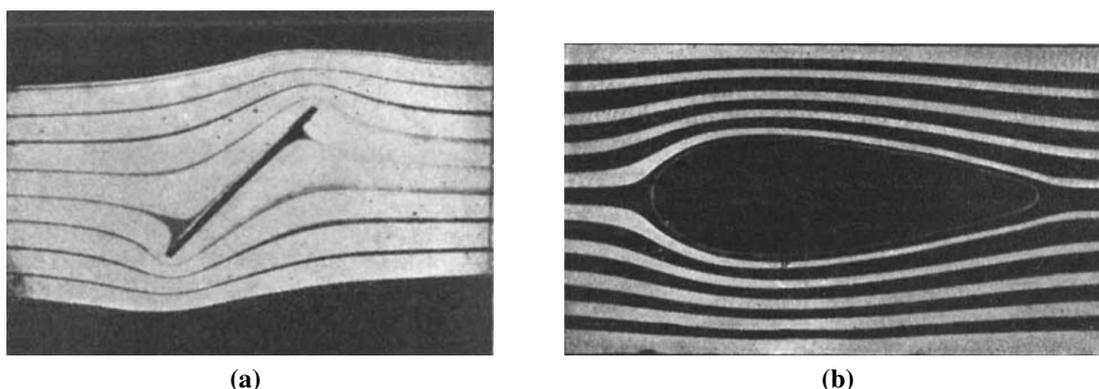


Figura 5 – (a) Linhas de corrente de um escoamento uniforme em torno de uma placa inclinada em 45 graus com relação ao eixo central do canal; (b) Linhas de corrente de um escoamento uniforme em torno de um aerofólio. Ambas as figuras foram retiradas de [7].

inicialmente a célula de Hele-Shaw com o fluido mais viscoso, digamos óleo, e depois injeta-se o fluido menos viscoso, digamos ar ou água, a partir de um orifício na placa superior ou de uma abertura na lateral da célula, como mostrado nas figuras 6a e 6b. A figura 6b ilustra esquematicamente o arranjo utilizado por Saffman e Taylor em seus experimentos [6].

Para uma taxa de injeção elevada, a interface entre os fluidos pode desenvolver algumas invaginações que eventualmente evoluem para formar padrões conhecidos como dedos viscosos ("viscous fingering", como conhecidos em inglês), como ilustrado na figura 7. Esse tipo de fenômeno é muito importante na extração de petróleo e gás natural, onde deve-se evitar ou atrasar a formação de dedos viscosos, visto que se o dedo (contendo o fluido injetado) atingir o poço de produção desenvolvendo um caminho na forma de um único dedo longo e muito óleo ainda é deixado nas rochas. O entendimento de tais instabilidades, bem como dos padrões formados em função da taxa de injeção e da geometria do campo de produção pode aumentar a eficiência da extração e evitar perdas.

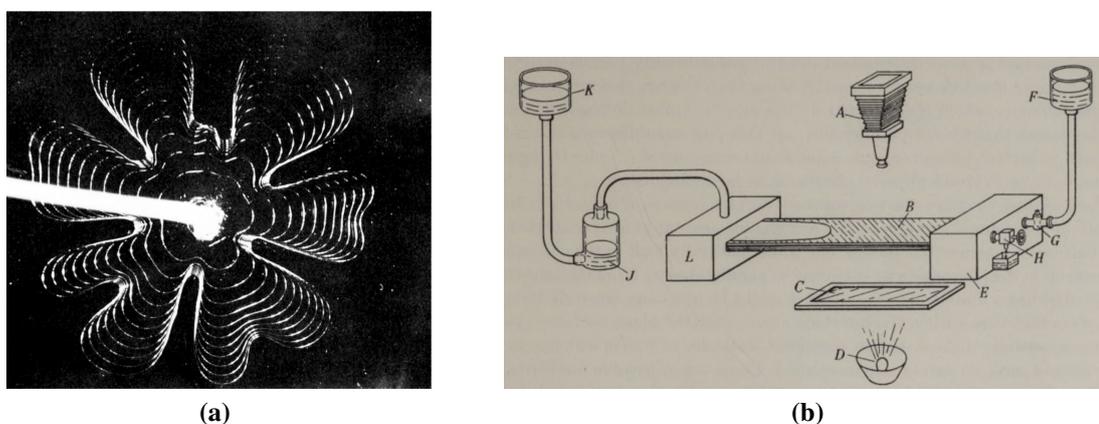


Figura 6 – (a) Injeção de ar ou água através de um orifício na placa superior da célula de Hele-Shaw. Figura retirada de [16]; (b) Injeção de ar ou água através de uma abertura lateral na célula de Hele-Shaw. Figura retirada de [6].

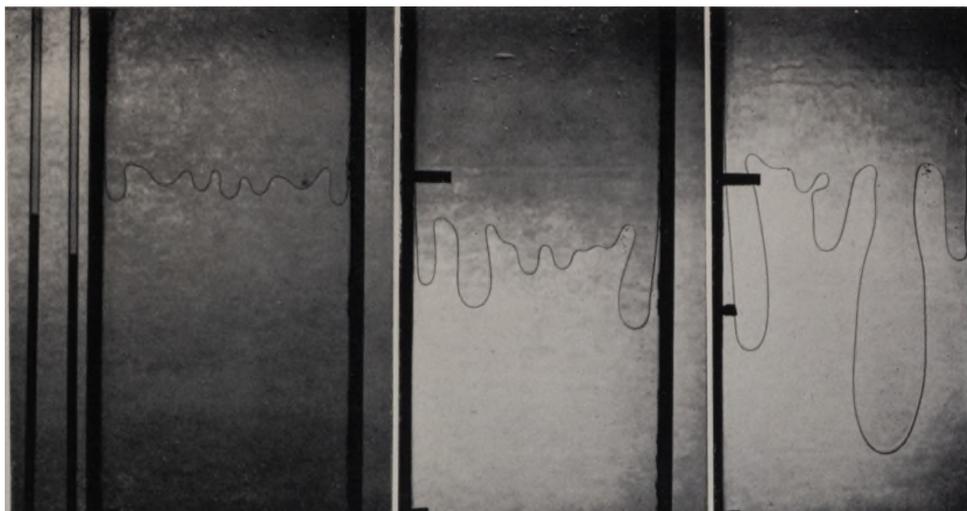


Figura 7 – Evolução das envaginações iniciais e eventual formação de dedos viscosos em três estágios de desenvolvimento. Fonte: [6].

Depois desta breve motivação, vamos agora introduzir o problema em torno do qual a presente dissertação será construída. Queremos encontrar soluções não estacionárias, ou seja, soluções dependentes do tempo, para o movimento de dedos viscosos em um canal infinito de Hele-Shaw. Soluções estacionárias para o movimento de um único dedo viscoso em que o dedo propaga-se com velocidade constante sem se deformar são conhecidas desde o brilhante trabalho de Saffman e Taylor [6]. No ano seguinte, os autores calcularam também soluções estacionárias para o movimento de uma bolha e soluções dependentes do tempo para um dedo simétrico em um canal de Hele-Shaw [8]. Recentemente, soluções estacionárias para o movimento de arranjos de múltiplas bolhas e dedos foram encontradas [17]. Foram encontradas também soluções dependentes do tempo para o movimento de múltiplos dedos em diferentes geometrias [18, 19, 20]. O cálculo de soluções exatas dependentes do tempo para bolhas tem a dificuldade adicional da múltipla conectividade do domínio, desta forma há apenas poucos anos que estas soluções foram encontradas para uma única bolha em um canal de Hele-Shaw [21] as quais recentemente foram generalizadas para o caso de múltiplas bolhas [22]. Nesta dissertação, vamos construir soluções dependentes do tempo para múltiplos dedos viscosos usando uma formulação mais geral que as citadas acima. O formalismo matemático usado no cálculo dessas soluções é inspirado exatamente nos recentes desenvolvimentos envolvendo a função de Schottky-Klein, embora o problema tratado será exclusivamente em domínio simplesmente conexo.

A construção de soluções exatas, tanto estacionárias quanto dependentes do tempo, para múltiplas bolhas e dedos na célula de Hele-Shaw faz uso de poderosas ferramentas recentemente desenvolvidas na área das funções analíticas, as funções primas de Schottky-Klein, que serão introduzidas e discutidas no capítulo seguinte. No restante deste capítulo, discutiremos apenas conceitos básicos necessários para a formulação dos problemas considerados nesta dissertação, a saber: potencial complexo e transformações conformes.

1.2 Potenciais complexos

Uma classe extremamente importante quando falamos de escoamentos planares é o caso dos escoamentos potenciais e incompressíveis, que como veremos adiante contam com uma poderosa ferramenta: a análise complexa. Escoamentos potenciais, ou escoamentos irrotacionais como também são conhecidos, são escoamentos que possuem vorticidade nula. Da definição de vorticidade, temos

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = 0, \quad (1.1)$$

onde $\vec{v}(x, y)$ é o campo de velocidade do escoamento. Podemos então definir um potencial tal que

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \phi, \quad (1.2)$$

onde a função $\phi(x, y)$ é o potencial de velocidade. Da condição de incompressibilidade, temos ainda

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (1.3)$$

e conseqüentemente,

$$\nabla^2 \phi = 0. \quad (1.4)$$

Esta última relação para o potencial nos mostra que $\phi(x, y)$ é uma função harmônica, logo deve ser a parte real (ou imaginária) de alguma função complexa. Definimos então o potencial complexo $w(z)$ como sendo a função analítica dada por

$$w(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y), \quad (1.5)$$

onde $\psi(x, y)$ é chamada de função de corrente. Da equação (1.2) temos que:

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad (1.6)$$

onde $\vec{v} = (v_x, v_y)$ são as componentes da velocidade nas direções x e y , respectivamente.

Temos então que

$$w'(z) = \frac{dw}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (1.7)$$

para $dz = dx$. Por outro lado, das relações de Cauchy-Riemann, temos

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (1.9)$$

Tomando a derivada com relação a x da equação (1.8) e com relação a y da equação (1.9) e somando as duas, recuperamos a equação (1.4). Usando (1.9) em (1.7) obtemos então que

$$w'(z) = \frac{dw}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} - i \frac{\partial \phi}{\partial y}. \quad (1.10)$$

Definindo a velocidade complexa como

$$V \equiv v_x - iv_y, \quad (1.11)$$

vemos então que $w'(z) = V = v_x - iv_y$. Ou seja, o campo de velocidade do escoamento pode ser facilmente obtido a partir do potencial complexo.

O conceito de potencial complexo juntamente com o método das transformações conformes ou mapeamentos conformes, introduzido na próxima seção, têm papel fundamental na formulação e solução dos problemas considerados nesta dissertação.

1.3 Mapeamentos conformes

Em problemas de contorno em duas dimensões, a liberdade concedida a nós pelo uso da ferramenta da análise complexa nos permite fazer mudanças de variáveis a fim de resolver o problema em um domínio mais simples, um plano complexo ζ auxiliar, como ilustrado esquematicamente na figura 8. No entanto, tal mudança apesar de tornar o domínio do problema mais simples, traz consigo uma dificuldade inerente, qual seja a necessidade de encontrarmos uma função analítica que mapeie univocamente o domínio canônico no plano complexo auxiliar ζ no domínio original no plano físico z . Para construirmos tais mapas podemos lançar mão de transformações conformes bem estabelecidas na literatura, cujos mapas para certos domínios são conhecidos [23]. Em outros casos, porém, para problemas definidos em regiões multiplamente conexas, as técnicas para construção de tais mapas só foram desenvolvidas recentemente.

Por volta de 1945, Polubarinova-Kochina [24] e Galin [25] reformularam independentemente o problema da evolução de uma interface na célula de Hele-Shaw como um problema de valor de contorno para um mapeamento conforme de algum domínio canônico para o "domínio do fluido". Esta técnica tornou-se amplamente utilizada não apenas para solucionar problemas de dinâmica de fluidos, mas também em teorias de campos em duas dimensões. Outras aplicações de mapeamentos conformes para solucionar problemas envolvendo a geometria de Hele-Shaw

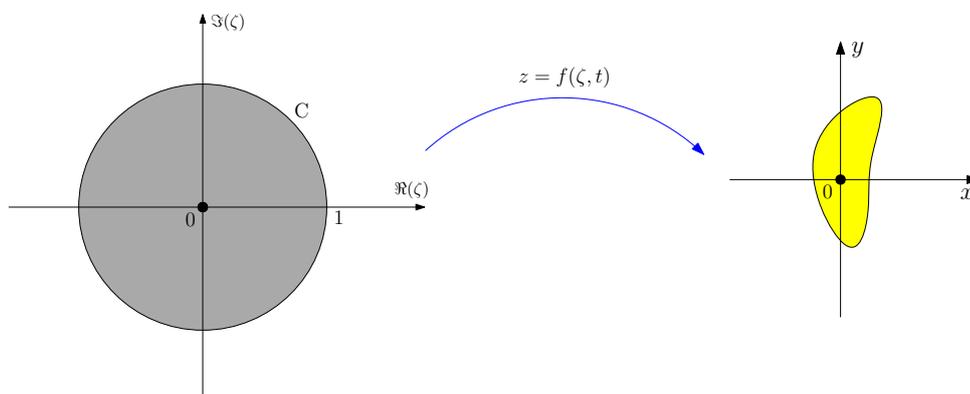


Figura 8 – Mapeamento conforme de um domínio circular (disco unitário) no plano auxiliar ζ para o domínio do fluido no plano z .

surgiram com o pioneiro trabalho de Saffman e Taylor [6], mencionado acima, em que eles estudaram a penetração de um fluido em outro mais viscoso na célula de Hele-Shaw. Uma revisão histórica detalhada dos estudos envolvendo problemas de interface livre em uma célula de Hele-Shaw desde o desenvolvimento do aparato experimental em 1898 até os dias atuais pode ser encontrada em [26].

1.4 A lei de Darcy

Como discutido anteriormente, a célula de Hele-Shaw é um aparato experimental com importantes aplicações em diversas áreas do conhecimento. O sistema de Hele-Shaw é composto por duas placas planas dispostas paralelamente e com uma pequena separação (gap) entre elas, de tal forma que o fluido em seu interior adquire um perfil parabólico, como já mostrado na figura 4b. Podemos encontrar uma relação entre o campo velocidade $\vec{v}(x, y)$ e o campo de pressão $p(x, y)$ do fluido, conhecida como a lei de Darcy, partindo da equação de Navier-Stokes em sua forma geral e fazendo algumas simplificações oriundas da geometria da célula de Hele-Shaw, como será mostrado a seguir.

A equação de Navier-Stokes para um fluido viscoso e incompressível é

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + \eta \nabla^2 \vec{v}, \quad (1.12)$$

onde ρ é a densidade do fluido, η é a viscosidade dinâmica do fluido, ou simplesmente viscosidade, e $D\vec{v}/Dt$ é a chamada derivada material ou convectiva

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}. \quad (1.13)$$

Inserindo (1.13) em (1.12), obtemos

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla}p + \eta \nabla^2 \vec{v}. \quad (1.14)$$

Note que no caso de interesse, a célula de Hele-Shaw é disposta horizontalmente, de forma que a força gravitacional não tem qualquer influência na dinâmica do problema. Nos escoamentos que estudaremos no decorrer desta dissertação, a velocidade do escoamento no interior da célula é muito pequena, o que resulta em um número de Reynolds próximo de zero, ou dito de outra forma, as forças viscosas são muito mais relevantes que as forças inerciais. Além disto, os escoamentos são estacionários ou quase-estacionários, portanto podemos desprezar prontamente o primeiro termo entre colchetes na equação (1.14), visto que tal termo deve ser muito pequeno (ou nulo).

Podemos fazer um outro cancelamento ao compararmos o segundo termo entre colchetes desta mesma equação com o último termo do lado direito da equação. Para isto convém reescrever (1.14) em termos de grandezas adimensionais e do número de Reynolds:

$$Re(\vec{v}' \cdot \vec{\nabla}') \vec{v}' = -\vec{\nabla}' p' + \nabla'^2 \vec{v}', \quad (1.15)$$

onde Re é o número de Reynolds, dado por

$$Re = \frac{\rho VL}{\eta} \quad (1.16)$$

e

$$\vec{v}' = \frac{\vec{v}}{V} \quad \vec{\nabla}' = \frac{\vec{\nabla}}{L} \quad p' = \frac{pL}{V\eta}$$

Nestas expressões V e L são escalas características de velocidade e de comprimento do sistema, respectivamente. Para números de Reynolds pequenos, temos que

$$Re(\vec{v}' \cdot \vec{\nabla}')\vec{v}' \ll \nabla'^2 \vec{v}'. \quad (1.17)$$

Voltando à equação (1.14), vemos que os dois termos entre colchetes do lado esquerdo podem ser desprezados e ficamos então com a chamada equação de Stokes:

$$-\vec{\nabla}p + \eta \nabla^2 \vec{v} = 0, \quad (1.18)$$

que governa os escoamentos com baixo número de Reynolds. A expressão anterior pode ser simplificada no caso dos escoamentos de Hele-Shaw, pois devido ao fato de as placas estarem separadas por uma distância muito pequena, as variações transversais de velocidade são muito maiores que as variações longitudinais. Temos portanto as seguintes relações:

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2} \gg \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2} \gg \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial y^2}. \quad (1.19)$$

Desprezando, pois, as derivadas com relação a x e y em comparação às derivadas em relação a z , temos que o laplaciano reduz-se a

$$\nabla^2 \vec{v} \approx \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2}. \quad (1.20)$$

Usando o resultado acima em (1.18), obtemos uma versão simplificada da equação de Stokes:

$$-\vec{\nabla}p + \eta \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2} = 0. \quad (1.21)$$

Considere agora uma célula de Hele-Shaw em que a placa inferior está na posição $z = 0$ e a placa superior na posição $z = b$, onde b é muito menor que as dimensões laterais das placas. Temos nesse caso a expressão para o perfil de velocidade parabólico [27]:

$$\vec{v}(x, y, z) = 6\vec{v}_m(x, y) \frac{z}{b} \left(1 - \frac{z}{b}\right), \quad (1.22)$$

onde $\vec{v}_m(x, y)$ é a média da velocidade do escoamento, ao longo da direção z . Note que a partir de (1.22) vemos que $\vec{v} = 0$ para $z = 0$ e $z = b$, como esperado pela condição de não deslizamento ("no slip") nas placas sólidas. Usando (1.22) em (1.21), temos

$$\vec{\nabla}p = -\frac{12\eta}{b^2} \vec{v}_m(x, y), \quad (1.23)$$

ou alternativamente

$$\vec{v}(x, y) = -\frac{b^2}{12\eta} \vec{\nabla} p \quad (1.24)$$

que é a chamada lei de Darcy — a equação que governa os escoamentos potenciais na célula de Hele-Shaw.

Vemos de (1.24) que na célula de Hele-Shaw a pressão $p(x, y)$ faz o papel (a menos de um fator constante multiplicativo) do potencial de velocidade. Mais especificamente o potencial de velocidade aqui é

$$\phi(x, y) = -\frac{b^2}{12\eta} p(x, y). \quad (1.25)$$

Além disso, pela condição de incompressibilidade, $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$, segue que

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad (1.26)$$

confirmando que, de fato, escoamentos na célula de Hele-Shaw podem ser modelados como escoamentos potenciais. Sendo escoamentos de Hele-Shaw escoamentos potenciais em duas dimensões, podemos introduzir o potencial complexo $w(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$, como discutido na seção 1.2, e usar as técnicas de transformações conformes mencionadas na seção 1.3 para resolver o problema. Esse é o plano geral que adotaremos nesta dissertação para calcular as soluções exatas para a evolução de dedos viscosos na célula de Hele-Shaw.

1.5 Organização da dissertação

Esta dissertação está organizada da seguinte forma. No capítulo 2 fazemos uma breve revisão das soluções estacionárias para múltiplas bolhas e dedos viscosos em um canal de Hele-Shaw. Começamos por introduzir o formalismo das funções primas de Schottky-Klein, utilizado na construção das soluções para o movimento de múltiplos dedos e bolhas. Utilizando esse formalismo contruímos soluções estacionárias para o movimento de múltiplas bolhas em um canal de Hele-Shaw e analisamos o caso particular de uma única bolha. Ainda no capítulo 2 mostramos e discutimos alguns exemplos de arranjos de múltiplas bolhas. Construímos também soluções estacionárias para o movimento de múltiplas bolhas e novamente analisamos o caso particular de um único dedo viscoso.

No capítulo 3, que constitui a contribuição central desta dissertação, formulamos soluções dependentes do tempo para o movimento de múltiplos dedos viscosos em uma célula de Hele-Shaw. Começamos por introduzir os conceitos da função de Schwarz e discutimos algumas de suas aplicações, como a dinâmica de pólos em uma célula de Hele-Shaw radial. Em seguida, construímos as soluções dependentes do tempo para múltiplos dedos e discutimos diferentes tipos de configurações iniciais que levam a casos assintóticos distintos. A partir de quantidades conservadas da dinâmica, derivamos um sistema de equações diferenciais ordinárias para a evolução dos parâmetros do problema e o integramos numericamente para diferentes

configurações iniciais, ilustrando o movimento não uniforme dos dedos em diversos casos. Ainda no capítulo 3 abordamos o problema da seleção de velocidade assintótica e mostramos como nosso modelo explica tal fenômeno sem a necessidade de invocar efeitos de tensão superficial.

No capítulo 4 apresentamos as principais conclusões do nosso trabalho e damos perspectivas para estudos a serem desenvolvidos futuramente. Entre essas perspectivas mencionamos a formulação de soluções dependentes do tempo para múltiplas bolhas em um canal de Hele-Shaw. Embora uma proposta de soluções tenha sido formalmente apresentada em [22], o cálculo numérico de configurações específicas com múltiplas bolhas permanece um desafio. À luz dos resultados desta dissertação, apresentamos um panorama geral de como soluções com múltiplas bolhas são construídas e discutimos algumas das dificuldades associadas ao cálculo numérico dessas soluções.

2 ESCOAMENTOS DE HELE-SHAW

2.1 Formulação do problema

Com a lei de Darcy em mãos e tendo conhecimento dos conceitos que nos auxiliarão no decorrer desta dissertação, vamos considerar o problema de um arranjo composto por um número finito M de bolhas ou dedos viscosos desprezando-se a ação da tensão superficial. Queremos modelar o movimento deste arranjo na direção longitudinal de um canal de Hele-Shaw preenchido com um fluido viscoso (óleo, glicerina). Na figura 9 ilustramos o caso de 3 bolhas e 2 dedos. Vamos começar revisitando as já conhecidas soluções estacionárias para o movimento de dedos e bolhas [6, 8, 17].

Desta forma, consideramos que o arranjo mencionado acima move-se com velocidade constante U . A velocidade no infinito à montante e à jusante do arranjo é V , tal que $U > V$. Por conveniência e sem qualquer perda de generalidade, vamos escolher a largura do canal como π e a velocidade no infinito $V = 1$.

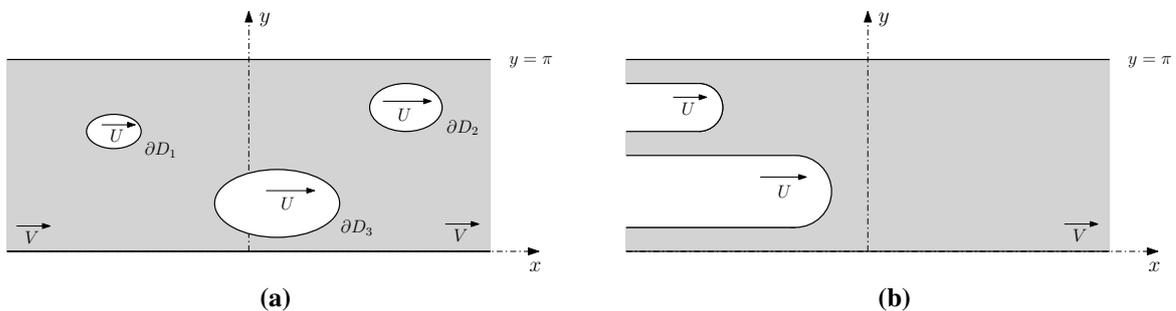


Figura 9 – (a) Arranjo de 3 bolhas movendo-se uniformemente com velocidade U ; (b) Arranjo de 2 dedos viscosos movendo-se uniformemente com velocidade U .

2.2 A construção dos potenciais complexos

Nesta seção vamos computar os potenciais complexos para o movimento de bolhas em um canal de Hele-Shaw. O caso de dedos viscosos pode ser visto como um caso especial das bolhas, ou seja, quando elas tornam-se infinitamente alongadas em uma direção, e será discutido posteriormente. Do capítulo anterior sabemos que os escoamentos chamados potenciais podem ser descritos, de maneira geral, através de um potencial complexo da forma

$$w(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y), \quad (2.1)$$

onde $\phi(x, y)$ é o potencial de velocidade e $\psi(x, y)$ é a função de corrente.

Para nosso problema de bolhas podemos descrever o movimento do arranjo através de dois referenciais: o referencial do laboratório e o referencial que acompanha o movimento das bolhas. Os potenciais que descrevem os escoamentos nestes dois referenciais relacionam-se de forma bastante simples, dada por

$$w(z) = \tau(z) + Uz, \quad (2.2)$$

onde $w(z)$ é o potencial complexo no referencial do laboratório e $\tau(z)$ no referencial das bolhas. Podemos encontrar uma relação para as velocidades complexas nos dois referenciais

$$v_{lab} = v_{mov} + U, \quad (2.3)$$

onde v_{lab} é a velocidade no referencial do laboratório e v_{mov} a velocidade no referencial que se move com as bolhas. Perceba que a relação acima é na verdade uma transformação de Galileu para as velocidades nos dois referenciais.

2.2.1 O potencial $w(z)$

Seja D_z a região do fluido exterior às bolhas no que chamaremos daqui por diante de “plano do fluido” e sejam ∂D_j com $j = 1, \dots, M$ a fronteira da j -ésima bolha.

Da velocidade do escoamento no infinito podemos encontrar o comportamento assintótico do potencial completo $w(z)$, dado por

$$w(z) \approx Vz + w_0 = z, \quad \text{para } |x| \rightarrow \infty, \quad (2.4)$$

onde usamos que $V = 1$ e w_0 é uma constante sem relevância para o nosso problema e podemos escolhê-la como nula sem perda de generalidade.

O potencial complexo $w(z)$ deve ser analítico em toda região D_z e deve satisfazer as condições de contorno abaixo:

$$\text{Im}[w(z)] = 0 \quad \text{em } y = 0, \quad (2.5)$$

$$\text{Im}[w(z)] = \pi \quad \text{em } y = \pi, \quad (2.6)$$

$$\text{Re}[w(z)] = c_j \quad \text{para } z \in \partial D_j, \quad (2.7)$$

onde $c_j, j = 1, \dots, M$, são constantes reais. As condições (2.5) e (2.6) seguem do comportamento assintótico do potencial complexo $w(z)$ dado por (2.4) juntamente com o fato de que as paredes do canal em $y = 0$ e $y = \pi$ são linhas de corrente do escoamento. Na ausência de tensão superficial, a pressão na interface entre os fluidos é constante (e igual à pressão constante no interior da bolha). Relacionando a pressão com o potencial de velocidade através da lei de Darcy, vemos que $\phi(x, y)$ é constante na interface ∂D_j e temos a condição de contorno (2.7).

A igualdade das pressões, quando desprezamos a tensão superficial, pode ser vista através da equação de Young-Laplace

$$p_1 - p_2 = \sigma \kappa, \quad (2.8)$$

onde σ é a tensão superficial e κ é a curvatura média da interface. Quando temos tensão superficial nula, $\sigma = 0$, obtemos que a pressão na interface e no interior da bolha são iguais.

A partir das condições de contorno desenvolvidas acima, vemos que no plano w o domínio do fluido é representado por uma faixa horizontal de largura π com M fendas verticais, correspondendo à pressão constante em cada uma das bolhas, como pode ser visto na figura 10.

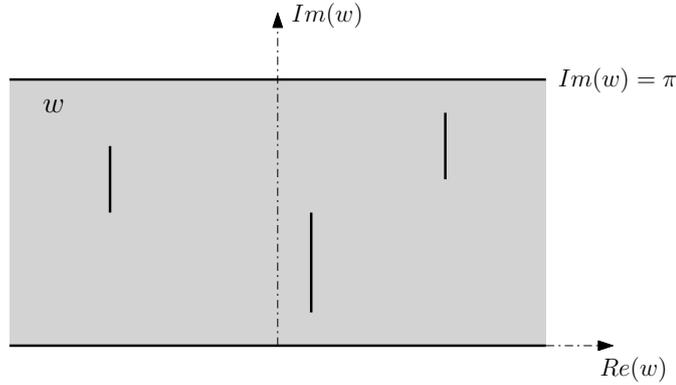


Figura 10 – Domínio do fluido representado no plano do potencial complexo w

2.2.2 O potencial $\tau(z)$

Vamos agora construir o potencial complexo no referencial que acompanha o movimento das bolhas. Neste caso, temos agora que além das paredes do canal, as interfaces das bolhas também são linhas de corrente. As condições de contorno são portanto da forma

$$\text{Im}[\tau(z)] = 0 \quad \text{em } y = 0, \quad (2.9)$$

$$\text{Im}[\tau(z)] = (1 - U)\pi \quad \text{em } y = \pi, \quad (2.10)$$

$$\text{Im}[\tau(z)] = d_j \quad \text{para } z \in D_j, \quad (2.11)$$

onde $d_j, j = 1, \dots, M$ são constantes reais relacionadas com a função de corrente em cada uma das bolhas. Para chegar em (2.9) e (2.10) usamos as condições (2.5) e (2.6) juntamente com o comportamento assintótico de $w(z)$ e a relação entre os potenciais no referencial do laboratório e no referencial das bolhas, dada por (2.2). Podemos encontrar também o comportamento assintótico do potencial complexo $\tau(z)$, dado por

$$\tau(z) \approx (1 - U)z + \tau_0, \quad \text{para } |x| \rightarrow \infty, \quad (2.12)$$

através da substituição de (2.4) em (2.2).

Vemos então que no plano τ o domínio do fluido é representado novamente por uma faixa horizontal, mas nesse caso com largura $(U - 1)\pi$ e com M faixas horizontais representando as funções de corrente de cada uma das bolhas no escoamento, como mostrado na figura 11.

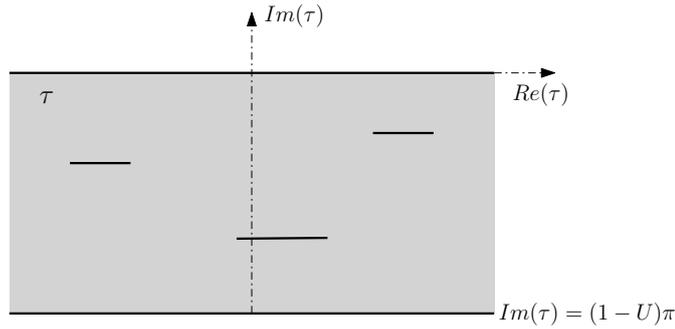


Figura 11 – Domínio do fluido representado no plano do potencial complexo τ

2.2.3 Os potenciais $W(\zeta)$ e $T(\zeta)$

Na formulação acima, os potenciais $w(z)$ e $\tau(z)$ são muito difíceis de serem computados. Procuramos então a solução do problema em termos de um mapeamento conforme $z(\zeta)$ de um domínio circular D_ζ em um plano complexo auxiliar ζ para o domínio do fluido D_z no plano físico z . O domínio D_ζ é formado pelo disco unitário aqui denominado C_0 , excluindo-se M discos menores, denominados C_j , cujos raios e centros são denominados de q_j e δ_j com $j = 0, 1, \dots, M$. Obviamente $q_0 = 1$ e $\delta_0 = 0$. O círculo unitário é escolhido ser mapeado nas paredes do canal, enquanto os círculos menores C_j são mapeados nas fronteiras das bolhas, $\partial\Omega_j$. O fato de C_0 ser mapeado nas paredes do canal nos diz que o mapa $z(\zeta)$ deve ter singularidades logarítmicas em dois pontos ζ_1 e ζ_2 que são mapeados em $|x| = \mp\infty$. Os graus de liberdade fornecidos pelo teorema de mapeamento de Riemann-Koebe [28] nos permite escolher $\zeta_1 = -1$ e $\zeta_2 = 1$. Portanto, o semicírculo superior C_0^+ é mapeado na parede superior do canal enquanto o semicírculo inferior C_0^- é mapeado na parede inferior do canal de Hele-Shaw, como mostrado na figura 12.

É conveniente definirmos também o chamado canal estendido, dado pela união do canal inicial com sua reflexão na parede inferior ($y = 0$). O canal estendido tem suas paredes localizadas em $y = \pm\pi$ e contém $2M$ bolhas, das quais M são geradas pelo espelhamento das M bolhas originais na parede inferior do canal. Matematicamente o canal estendido é dado por $D_z \cup \overline{D_z}$, onde a barra denota conjugação complexa.

Vamos agora introduzir os potenciais complexos no referencial do laboratório e no referencial das bolhas no plano auxiliar ζ através da composição

$$W(\zeta) \equiv w(z(\zeta)), \quad (2.13)$$

$$T(\zeta) \equiv \tau(z(\zeta)). \quad (2.14)$$

As funções $W(\zeta)$ e $T(\zeta)$ devem ter singularidades logarítmicas em $\zeta = \mp 1$, que agem como fonte e sorvedouro nos escoamentos gerados por estes potenciais. Tal fato será utilizado para construirmos explicitamente os potenciais $W(\zeta)$ e $T(\zeta)$ através do método das imagens. Após termos computado fórmulas explícitas para os potenciais, podemos encontrar uma fórmula

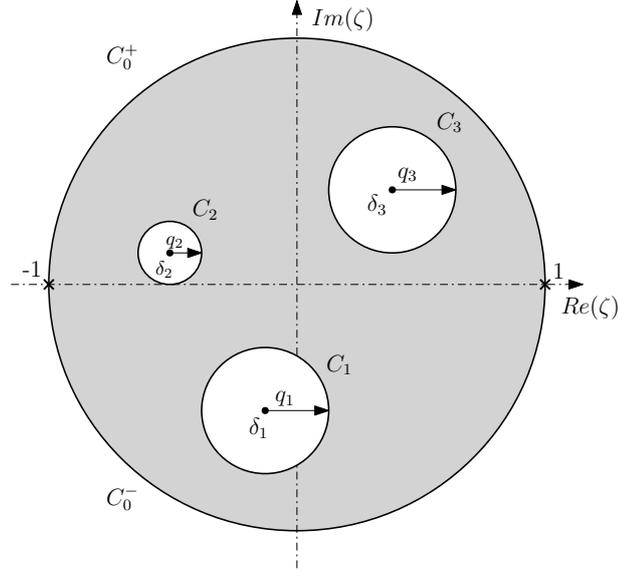


Figura 12 – Domínio circular D_ζ no plano auxiliar ζ .

explicita também para o mapeamento conforme $z(\zeta)$ através da relação entre os potenciais nos diferentes referenciais dada pela equação (2.2) e aqui repetida por conveniência

$$w(z) = \tau(z) + Uz.$$

Juntamente com a equivalência dos potenciais nos diferentes domínios, temos

$$z(\zeta) = \frac{1}{U}[W(\zeta) - T(\zeta)]. \quad (2.15)$$

2.3 As funções de Schottky-Klein

Vamos agora introduzir um ferramental matemático que será de fundamental importância no decorrer desta dissertação para computar fórmulas explícitas para os potenciais complexos no plano auxiliar ζ e conseqüentemente descrever o movimento de bolhas e dedos em um canal de Hele-Shaw. Este ferramental é a teoria das funções primas de Schottky-Klein.

Seja D_ζ um domínio circular $(M+1)$ -conexo no plano ζ formado pelo disco unitário e excluindo-se M círculos menores que não intersectam-se, exatamente da mesma forma como definimos o domínio D_ζ na seção anterior. Definimos a reflexão de um ponto ζ em um círculo C_k , denotada por $\varphi_k(\zeta)$,

$$\varphi_k(\zeta) = \delta_k + \frac{q_k^2}{\bar{\zeta} - \bar{\delta}_k}, \quad (2.16)$$

onde δ_k e q_k são o centro e o raio do círculo C_k no qual o ponto ζ é refletido. Note em particular que a reflexão no círculo unitário é simplesmente $\varphi_0(\zeta) = 1/\bar{\zeta}$. Além da reflexão em um círculo C_k podemos definir também o mapa de conjugação associado a este círculo, $\phi_k(\zeta)$, dado por

$$\phi_k(\zeta) = \bar{\delta}_k + \frac{q_k^2}{\zeta - \delta_k}, \quad (2.17)$$

e que obedece $\bar{\zeta} = \phi(\zeta)$ quando $\zeta \in C_k$.

Introduzimos também os mapas de Möbius

$$\theta_k(\zeta) = \delta_k + \frac{q_k^2 \zeta}{1 - \bar{\delta}_k \zeta}. \quad (2.18)$$

Note que os mapas de Möbius introduzidos acima são composições de reflexões em C_0 e posteriormente em C_k , ou seja, $\theta_k(\zeta) \equiv \varphi_k(\varphi_0(\zeta)) = \varphi_k(1/\bar{\zeta})$. De uma maneira mais informal, podemos escrever:

$$\theta_k(\zeta) \equiv \varphi_k(\varphi_0(\zeta)), \quad (2.19)$$

ou simplesmente $\theta_k = \varphi_k \varphi_0$.

Além dos mapas, precisaremos também de suas inversas, $\theta_{-k} = \theta_k^{-1}$, definidas por

$$\theta_{-k}(\theta_k(\zeta)) = \zeta. \quad (2.20)$$

Perceba que se refletirmos a imagem gerada pela reflexão de um dado ponto ζ em um círculo C_k no mesmo círculo, obtemos o ponto inicial ζ , portanto,

$$\varphi_k \varphi_k = \mathbb{1}. \quad (2.21)$$

Desta forma, podemos escrever o mapa inverso como

$$\theta_{-k}(\zeta) \equiv \varphi_0(\varphi_k(\zeta)) = \frac{1}{\theta_k(1/\bar{\zeta})}. \quad (2.22)$$

Sejam $C_{-j}, j = 1, \dots, M$ as reflexões dos círculos C_j em C_0 respectivamente, ou seja,

$$C_{-j} = \varphi_0(C_j), \quad (2.23)$$

Podemos ver prontamente que

$$\theta_j(C_{-j}) = \varphi_j \varphi_0(C_{-j}) = \varphi_j(C_j) = C_j, \quad (2.24)$$

logo concluímos que θ_j mapeia o círculo C_{-j} no círculo C_j ; vide figura 13. É possível mostrar ainda que θ_j mapeia o interior de C_{-j} no exterior de C_j e analogamente o mapa inverso mapeia o interior de C_j no exterior de C_{-j} .

O conjunto Θ_0 formado por todas as composições dos mapas $\theta_k, k = 1, \dots, M$, é conhecido como um grupo clássico de Schottky, enquanto os mapas θ_k são denominados de geradores fundamentais do grupo Θ_0 . A nova região formada pelo exterior dos $2M$ círculos $C_k, k = -M, \dots, M$ ($k \neq 0$) é chamada de uma região fundamental do grupo Θ_0 e é ilustrada na figura 13. A região fundamental F_0 é dada formalmente por

$$F_0 = D_\zeta \cup \varphi_0(D_\zeta). \quad (2.25)$$

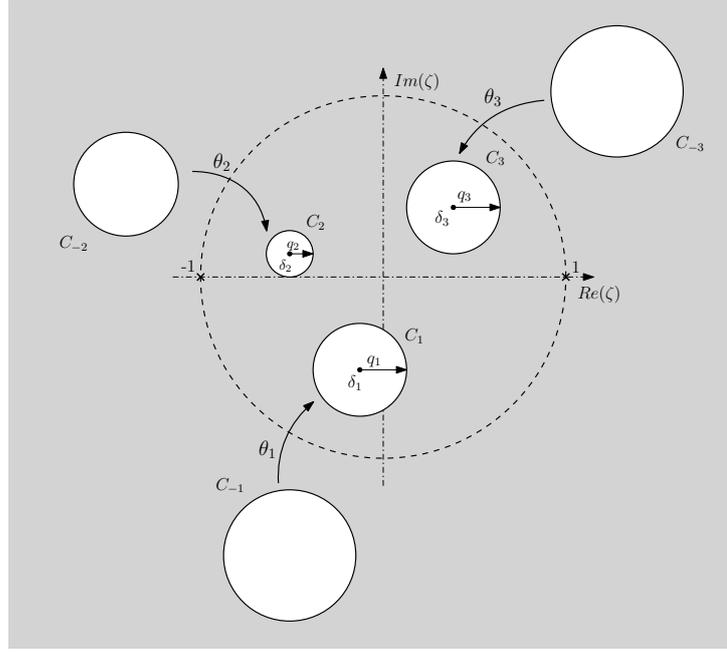


Figura 13 – Região fundamental F_0 obtida através da reflexão de D_ζ em C_0 .

Para um dado grupo de Schottky Θ_0 e região fundamental F_0 , pode-se definir uma função prima de Schottky-Klein associada para quaisquer dois pontos ζ e $\alpha \in F_0$. Por simplicidade, chamaremos daqui em diante apenas função de Schottky-Klein. Tal função admite representação em termos de um produto infinito [29], dada por

$$\omega(\zeta, \alpha) = (\zeta - \alpha) \prod_{\theta \in \Theta_0''} \frac{(\zeta - \theta(\alpha))(\alpha - \theta(\zeta))}{(\zeta - \theta(\zeta))(\alpha - \theta(\alpha))}, \quad (2.26)$$

onde o subgrupo $\Theta_0'' \subset \Theta_0$ é tal que para todo $\theta \in \Theta_0$ apenas θ ou seu inverso θ^{-1} está incluso em Θ_0'' , mas nunca ambos. Por exemplo, se $\theta = \theta_3\theta_{-1}$ está incluso em Θ_0 então $\theta_1\theta_{-3}$ não está.

A função que acabamos de definir possui apenas um zero simples em F_0 devido ao termo $(\zeta - \alpha)$ e podemos então reescrever $\omega(\zeta, \alpha)$ como

$$\omega(\zeta, \alpha) = (\zeta - \alpha) \hat{\omega}(\zeta, \alpha) \quad (2.27)$$

onde $\hat{\omega}(\zeta, \alpha)$ é a parte da função de Schottky-Klein que não possui zeros.

Vamos agora encontrar uma relação que será usada posteriormente fazendo a razão entre duas funções de Schottky-Klein,

$$\frac{\omega(\zeta, \alpha)}{\omega(\zeta, \gamma)} = \frac{(\zeta - \alpha)}{(\zeta - \gamma)} \prod_{\theta \in \Theta_0''} \frac{(\zeta - \theta(\alpha))(\alpha - \theta(\zeta))(\zeta - \theta(\zeta))(\gamma - \theta(\gamma))}{(\zeta - \theta(\zeta))(\alpha - \theta(\alpha))(\zeta - \theta(\gamma))(\gamma - \theta(\zeta))}. \quad (2.28)$$

Podemos reescrever os termos do tipo $a - \theta(\zeta)$ como

$$a - \theta(\zeta) = \frac{f(a)}{g(\zeta)} (\zeta - \theta^{-1}(a)), \quad (2.29)$$

onde f e g são funções lineares. Substituindo esta relação em (2.28) e fazendo alguns cancelamentos, temos

$$\frac{\omega(\zeta, \alpha)}{\omega(\zeta, \gamma)} = C(\alpha, \gamma) \frac{(\zeta - \alpha)}{(\zeta - \gamma)} \prod_{\theta \in \Theta_0''} \frac{(\zeta - \theta(\alpha))(\zeta - \theta^{-1}(\alpha))}{(\zeta - \theta(\gamma))(\zeta - \theta^{-1}(\gamma))}. \quad (2.30)$$

Alterando o produtório para percorrer todo o grupo Θ_0 ao invés de Θ_0'' chegamos na relação desejada

$$\frac{\omega(\zeta, \alpha)}{\omega(\zeta, \gamma)} = C(\alpha, \gamma) \prod_{\theta \in \Theta_0} \frac{\zeta - \theta(\alpha)}{\zeta - \theta(\gamma)}, \quad (2.31)$$

onde o termo $C(\alpha, \gamma)$ depende dos pontos α e γ mas não do ponto ζ . Note que o grupo Θ_0 contém a identidade, portanto, os termos $(\zeta - \alpha)$ e $(\zeta - \gamma)$ estão embutidos no somatório. A dedução completa desta relação pode ser encontrada em [30].

A fórmula (2.26) converge para os casos em que as fronteiras C_k , $k = 1, \dots, M$ estão centradas no eixo real ou quando estão bastante separadas [29, 30]. No entanto, mesmo nestes casos a convergência pode ser lenta, tornando sua computação inviável para simulações numéricas. Recentes avanços desenvolvidos pelo grupo do professor Darren Crowdy [31] tornaram a computação das funções de Schottky-Klein muito mais rápida e precisa. Posteriormente seu grupo desenvolveu um pacote para Matlab [32], que foi usado para gerar algumas das figuras apresentadas nesta dissertação.

2.3.1 As funções secundárias de Schottky-Klein

Além do grupo clássico de Schottky Θ_0 podemos definir também uma família de subgrupos do grupo Θ_0 , denominados de Θ_N , $N = 1, \dots, M$, juntamente com os respectivos geradores fundamentais e regiões fundamentais correspondentes. Naturalmente, novas funções de Schottky-Klein podem ser associadas aos subgrupos Θ_N , como veremos adiante.

Dado um l fixo tal que $1 \leq l \leq N$ uma nova região pode ser obtida através da adição da região fundamental F_0 com sua reflexão no círculo C_l , denotada por F_{0l} , tal que

$$F_{0l} = F_0 \cup \varphi_l(F_0). \quad (2.32)$$

A partir da reflexão da região fundamental do grupo clássico de Schottky, F_0 , novas fronteiras circulares são formadas no interior de C_l . Estas novas fronteiras são denominadas de \mathcal{C}_k e são dadas por

$$\mathcal{C}_k = \varphi_l(C_{-k}), \quad k \in K, \quad (2.33)$$

onde o conjunto K é formado pelos índices $k = -M, \dots, M$; $k \neq 0, -l$. A região fundamental F_{0l} para um subgrupo Θ_N qualquer é esquematicamente ilustrado na figura 14. O detalhe dessa figura mostra os círculos \mathcal{C}_k no interior de C_1 .

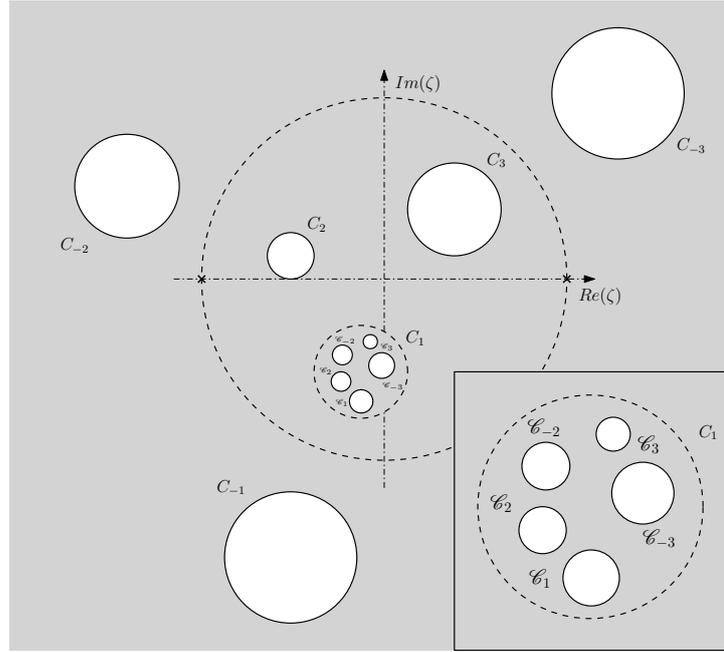


Figura 14 – Região fundamental F_{01} de um grupo Θ_N qualquer.

Os diferentes subgrupos Θ_N diferenciam-se entre si na forma em que os círculos C_k são pareados com os novos círculos \mathcal{C}_k para $k = -M, \dots, M$; $k \neq 0, -l$. Nesta dissertação utilizaremos apenas o caso especial Θ_M , conhecido como subgrupo de Burnside [33].

O subgrupo de Burnside

No subgrupo de Burnside, θ_M , os círculos C_{-k} são pareados com os círculos \mathcal{C}_k , suas reflexões no círculo C_l , através dos geradores fundamentais ψ_k , dados por

$$\psi_k = \theta_l \theta_k, \quad k \in K. \tag{2.34}$$

Note que os geradores fundamentais do grupo θ_M preservam de certa forma a simetria presente no grupo clássico de Schottky, θ_0 , onde os círculos C_k são pareados com suas reflexões no círculo unitário. A região fundamental F_{01} do subgrupo de Burnside é esquematicamente ilustrado na figura 15. As setas nessa figura indicam quais círculos são pareados e através de qual gerador este pareamento é feito. O detalhe da figura 15 mostra os círculos \mathcal{C}_k no interior de C_1 .

De (2.34) é possível mostrar que qualquer composição de um número par de mapas θ_k com $k = 1, \dots, M$ e suas inversas, é um elemento de θ_M . Tome por exemplo $M = 3$ e $l = 2$, então o elemento

$$\theta_3 \theta_{-1} = (\theta_3 \theta_{-2})(\theta_2 \theta_{-1}) = (\psi_{-3})^{-1} \psi_{-1} \tag{2.35}$$

é um elemento de θ_M . Por outro lado, se tivermos uma composição de um número ímpar de mapas θ_k e suas inversas, este elemento pode ser representado por $\psi \circ \theta_l$, para algum $\psi \in \theta_M$. Por exemplo, tomando os mesmo valores de M e l , temos que

$$\theta_3 = (\theta_3 \theta_{-2}) \theta_2 = (\psi_{-3})^{-1} \theta_2. \tag{2.36}$$

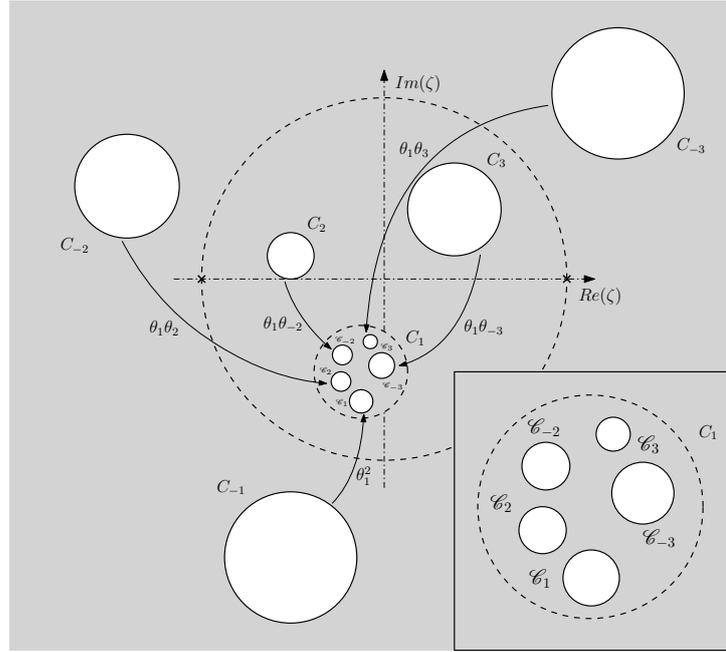


Figura 15 – Região fundamental F_{01} do grupo Θ_M

De forma geral, qualquer $\theta \in \Theta_0$ ou é um elemento $\psi \in \Theta_M$ ou é uma composição do tipo $\psi \circ \theta_l$.

Definidos os subgrupos Θ_M , juntamente com os geradores fundamentais dados por (2.34) e a região fundamental F_{0l} , podemos naturalmente associar a estes subgrupos funções de Schottky-Klein. Denominadas funções secundárias de Schottky-Klein, elas foram introduzidas pelo Prof. Giovani Vasconcelos [21] como peças fundamentais na construção de mapeamentos conformes para domínios nos quais suas representações nos domínios $w(z)$ ou $\tau(z)$ apresentam fendas horizontais e verticais simultaneamente. As funções secundárias de Schottky-Klein admitem representação em termos de um produto infinito análoga à (2.26), e para evitar confusão com as funções anteriormente definidas, estas novas funções são denotadas por $\Omega_M(\zeta, \alpha)$.

A representação em produto infinito de $\Omega_M(\zeta, \alpha)$ é

$$\Omega_M(\zeta, \alpha) = (\zeta - \alpha) \prod_{\psi \in \Theta_M''} \frac{(\zeta - \psi(\alpha))(\alpha - \psi(\zeta))}{(\zeta - \psi(\zeta))(\alpha - \psi(\alpha))}, \quad (2.37)$$

onde o produto é tomado sobre o grupo $\Theta_M'' \subset \Theta_M$, cuja definição é análoga à do grupo Θ_0'' , ou seja, para todo elemento $\psi \in \Theta_M$ apenas ψ ou seu inverso ψ^{-1} está incluso em Θ_M'' , mas nunca ambos.

Usando a propriedade da decomposição do grupo Θ_0 discutido anteriormente, juntamente com a identidade (2.31), podemos estabelecer a seguinte relação entre as funções primárias e secundárias de Schottky-Klein:

$$\frac{\omega(\zeta, \alpha)}{\omega(\zeta, \gamma)} = \tilde{C}(\alpha, \gamma) \frac{\Omega_M(\zeta, \alpha)\Omega_M(\zeta, \theta_l(\alpha))}{\Omega_M(\zeta, \gamma)\Omega_M(\zeta, \theta_l(\gamma))}, \quad (2.38)$$

onde $\tilde{C}(\alpha, \gamma)$ depende apenas de α e γ , mas não de ζ .

2.4 Soluções estacionárias para o movimento de múltiplas bolhas

Vamos agora aplicar o formalismo das funções de Schottky-Klein que acabamos de introduzir para construir fórmulas explícitas para os potenciais complexos $W(\zeta)$ e $T(\zeta)$ introduzidos anteriormente.

O primeiro passo na computação dos potenciais é calcular os infinitos conjuntos de imagens da fonte e do sorvedouro que fazem-se necessários para impor as devidas condições de contorno nas $2M$ fronteiras da região do escoamento, C_k com $k \neq 0$, no plano auxiliar ζ . Começaremos pelo potencial $T(\zeta)$ no referencial que se move com as bolhas, pelo fato de suas condições de contorno serem mais simples e tornarem a construção do mesmo mais intuitiva.

Construção do potencial $T(\zeta)$

Lembramos que pelas condições de contorno (2.11) para o potencial complexo $\tau(z)$, as fronteiras da região do fluido no plano auxiliar ζ , C_k com $k \neq 0$, devem ser linhas de corrente do escoamento gerado pelo potencial complexo $T(\zeta)$. Para satisfazer estas condições de contorno vamos aplicar o método das imagens para a fonte e o sorvedouro, com o intuito de gerar a partir da interação entre eles e suas imagens as condições de contorno desejadas em cada uma das fronteiras da região do fluido.

Começemos com a fonte localizada em $\zeta = -1$. Ao refletirmos a fonte em cada um dos $2M$ círculos C_k , obtemos um conjunto de $2M$ fontes imagens localizadas em $\varphi_k(-1) = \varphi_k \varphi_0(-1) = \theta_k(-1)$, onde usamos que $\varphi_0(\zeta) = \zeta$ para $\zeta \in C_0$. Esse resultado decorre do fato de que a reflexão de uma fonte em uma linha de corrente em forma de círculo gera como imagem uma fonte de mesma intensidade e cuja localização corresponde à reflexão da fonte no respectivo círculo.

Tome agora uma fonte imagem oriunda da primeira reflexão em um círculo C_k e reflita-a em um círculo $C_{k'}$ distinto. A imagem desta segunda reflexão é também uma fonte de mesma intensidade e localizada em $\varphi_{k'}(\theta_k(-1)) = \varphi_{k'} \varphi_0(1/\overline{\theta_k(-1)}) = \theta_{k'}(\theta_{-k}(-1))$, onde $k' \neq k$. Portanto, refletindo o primeiro conjunto de imagens $\{\theta_k(-1) \mid k \neq 0\}$ nos círculos C_k obtemos um conjunto de fontes imagens localizadas em $\{\theta_{k'} \circ \theta_k(-1) \mid k, k' \neq 0, k + k' \neq 0\}$. É possível verificar que após um número n de reflexões da fonte em $\zeta = -1$ nos círculos C_k , obtemos um conjunto de fontes imagens cujas localizações são dadas por $\{\theta = \theta_{k_n} \circ \dots \circ \theta_{k_1}(-1) \mid k_i \neq 0, k_i + k_{i+1} \neq 0; i = 1, \dots, n-1\}$, onde $\theta \in \Theta_0$; Continuando este procedimento para um número infinito de reflexões, obtemos um conjunto infinito de fontes imagens localizadas em $\{\theta(-1) \mid \theta \in \Theta_0\}$.

Procedimento completamente análogo pode ser realizado para o sorvedouro localizado em $\zeta = 1$ e da mesma forma que reflexões de fontes em linhas de corrente geram fontes como imagens, reflexões de sorvedouros em linhas de corrente geram sorvedouros como imagem. Portanto, as infinitas reflexões do sorvedouro em $\zeta = 1$ geram um conjunto infinito de sorvedouros

imagens localizados em $\{\theta(1) \mid \theta \in \Theta_0\}$.

Relembrando que o potencial complexo em um ponto z de uma fonte ou um sorvedouro localizado em z_0 é dado pela equação

$$w(z) = Q \log(z - z_0), \quad (2.39)$$

onde Q corresponde à taxa de injeção de fluido e temos $Q > 0$ para fontes e $Q < 0$ para sorvedouros. Podemos agora encontrar uma expressão explícita para o potencial complexo $T(\zeta)$ ao somarmos a contribuição de cada uma das fontes ou sorvedouros imagens

$$T(\zeta) = Q \sum_{\theta \in \Theta_0} [\log(\zeta - \theta(-1)) - \log(\zeta - \theta(1))], \quad (2.40)$$

ou seja,

$$T(\zeta) = Q \log \left(\prod_{\theta \in \Theta_0} \frac{\zeta - \theta(-1)}{\zeta - \theta(1)} \right) = Q \log \left(\frac{\omega(\zeta, -1)}{\omega(\zeta, 1)} \right) + c, \quad (2.41)$$

onde usamos a equação (2.31) na última igualdade e c é uma constante com relação a ζ que pode ser omitida sem maiores consequências.

Precisamos agora escolher Q de forma que as singularidades logarítmicas de $T(\zeta)$ tenham a intensidade apropriada, ou seja, que ao contornarmos as singularidades localizadas em $\zeta = \pm 1$ o potencial tenha um salto que seja equivalente à largura do domínio do fluido no plano τ , $i\pi(U - 1)$. Para entender melhor este salto no potencial é preciso notar que podemos separar $T(\zeta)$ em uma parte regular e outra singular usando a equação (2.26):

$$T(\zeta) = Q \log \left(\frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} \right) + Q \log \left(\frac{\hat{\omega}(\zeta, -1)}{\hat{\omega}(\zeta, 1)} \right). \quad (2.42)$$

Para contornar as singularidades localizadas em $\zeta = \pm 1$ fazemos um caminho que consiste em um arco de circunferência centrado na singularidade de raio infinitesimal ϵ percorrido no sentido positivo; Desta forma temos que $\zeta + 1 = \epsilon \exp^{i\phi}$ ao redor de -1 e $\zeta - 1 = \epsilon \exp^{i\phi}$ ao redor de 1 . Portanto, ao irmos de C_0^- para C_0^+ no sentido positivo passando por $\zeta = 1$ e de C_0^+ para C_0^- passando por $\zeta = -1$ temos uma variação de $\Delta\phi = \pi$. Isso leva a uma variação em $T(\zeta)$ de

$$\Delta T = Q \log e^{i\pi} \quad (2.43)$$

Como de uma parede do canal para outra temos uma variação $\Delta T = i\pi(U - 1)$, concluímos que $Q = (1 - U)$. Usando este resultado em (2.41), e omitindo a constante, obtemos então que

$$T(\zeta) = (1 - U) \log \left(\frac{\omega(\zeta, -1)}{\omega(\zeta, 1)} \right). \quad (2.44)$$

Usando a identidade (2.38) podemos reescrever o potencial $T(\zeta)$ em termos das funções secundárias de Schottky-Klein

$$T(\zeta) = (1 - U) \log \left(\frac{\Omega_M(\zeta, -1)\Omega_M(\zeta, \theta_l(-1))}{\Omega_M(\zeta, 1)\Omega_M(\zeta, \theta_l(1))} \right), \quad (2.45)$$

onde novamente uma constante aditiva irrelevante para o escoamento foi omitida.

Construção do potencial $W(\zeta)$

O caso do potencial complexo $W(\zeta)$ torna-se um pouco mais complicado ao lembrarmos que as fronteiras das bolhas no referencial do laboratório são equipotenciais, portanto, as fronteiras C_k , $k \neq 0$, também devem ser equipotenciais do potencial $W(\zeta)$. Este fato traz consigo a dificuldade de que a imagem de uma fonte (sorvedouro) em uma equipotencial é um sorvedouro (fonte). Para superarmos esta dificuldade lançaremos mão da função secundária de Schottky-Klein e desenvolveremos um procedimento análogo ao adotado para o potencial $T(\zeta)$.

Começemos novamente com a fonte localizada em $\zeta = -1$. Tomamos o seu primeiro conjunto de imagens resultantes de reflexões nas fronteiras circulares C_k , que geram $2M$ sorvedouros localizados em $\{\theta_k(-1) \mid k \in K\}$. Fazendo novas reflexões destes sorvedouros imagens nos círculos C_k temos um conjunto de fontes localizadas em $\{\theta_{k'} \circ \theta_k(-1) \mid k, k' \neq 0; k + k' \neq 0\}$. Continuando as reflexões destas fontes para um número infinito, onde em cada reflexão fontes produzem sorvedouros e vice-versa, obtemos: um conjunto infinito de fontes localizadas em $\{\theta(-1) \mid \theta \in \Theta_M\}$ e um conjunto infinito de sorvedouros localizados em $\{\theta \circ \theta_l(-1) \mid \theta \in \Theta_M\}$, onde l é um inteiro tal que $1 \leq l \leq M$ e Θ_M é o subgrupo de Burnside definido anteriormente, ou seja, o subgrupo contendo apenas um número par de composições dos geradores do grupo original Θ_0 . Isso reflete o fato de que após um número par de reflexões de uma fonte em equipotenciais temos de volta uma fonte; ao passo que após um número ímpar de reflexões da fonte obtemos um sorvedouro.

Adotando procedimento análogo para o sorvedouro em $\zeta = 1$, obtemos um sistema de imagens composto por: um grupo infinito de sorvedouros localizados em $\{\theta(1) \mid \theta \in \Theta_M\}$ e um conjunto infinito de fontes localizadas em $\{\theta \circ \theta_l(-1) \mid \theta \in \Theta_M\}$. Note que a propriedade da decomposição dos elementos do grupo clássico de Schottky em elementos do subgrupo de Burnside ou composições destes com o mapa θ_l nos permite dar conta das infinitas reflexões da fonte e do sorvedouro de forma bastante simplificada e eficaz.

Computando o potencial do sistema de imagens gerado pelas infinitas reflexões da fonte e do sorvedouro nas fronteiras C_k , temos que o potencial complexo $W(\zeta)$ é dado explicitamente por

$$W(\zeta) = \log \left(\prod_{\theta \in \Theta_M} \frac{(\zeta - \theta(-1))(\zeta - \theta(\theta_l(1)))}{(\zeta - \theta(1))(\zeta - \theta(\theta_l(-1)))} \right) \quad (2.46)$$

e usando a equação (2.37) podemos reescrever a expressão anterior em termos das funções secundárias de Schottky-Klein

$$W(\zeta) = \log \left(\frac{\Omega_M(\zeta, -1)\Omega_M(\zeta, \theta_l(1))}{\Omega_M(\zeta, 1)\Omega_M(\zeta, \theta_l(-1))} \right), \quad (2.47)$$

onde omitimos uma constante aditiva irrelevante para a dinâmica como feito em $T(\zeta)$. Note que em (2.46) e (2.47) o pré-fator $Q = 1$ foi escolhido para que as singularidades tenham a intensidade necessária, ou seja, para que ao contornarmos as singularidades em $\zeta = \pm 1$ o potencial $W(\zeta)$ tenha um salto de $i\pi$, equivalente à largura do domínio do fluido no plano w .

2.4.1 O mapeamento conforme $z(\zeta)$

Agora que obtivemos os potenciais complexos $W(\zeta)$ e $T(\zeta)$, o mapeamento conforme $z(\zeta)$ que leva as fronteiras circulares C_j , com $j = 1, \dots, M$, nas interfaces das bolhas ∂D_j segue imediatamente da equação (2.15). Substituindo (2.45) e (2.47) em (2.15) temos

$$z(\zeta) = \frac{1}{U} \log \left(\frac{\Omega_M(\zeta, -1)\Omega_M(\zeta, \theta_l(1))}{\Omega_M(\zeta, 1)\Omega_M(\zeta, \theta_l(-1))} \right) - \frac{(1-U)}{U} \log \left(\frac{\Omega_M(\zeta, -1)\Omega_M(\zeta, \theta_l(-1))}{\Omega_M(\zeta, 1)\Omega_M(\zeta, \theta_l(1))} \right). \quad (2.48)$$

Simplificando alguns termos, obtemos a forma final do mapeamento conforme $z(\zeta)$,

$$z(\zeta) = \log \left(\frac{\Omega_M(\zeta, -1)}{\Omega_M(\zeta, 1)} \right) + \left(1 - \frac{2}{U} \right) \log \left(\frac{\Omega_M(\zeta, \theta_l(-1))}{\Omega_M(\zeta, \theta_l(1))} \right). \quad (2.49)$$

Podemos portanto encontrar as coordenadas de cada interface das bolhas ∂D_j , $j = 1, \dots, M$ em forma paramétrica

$$x_j(s) + iy_j(s) = z(\zeta = \delta_j + q_j \exp(is)); \quad 0 \leq s < 2\pi. \quad (2.50)$$

As soluções com $U = 2$ são especiais, não só por tornarem-se muito mais simples que a sua forma geral, mas também por que através destas soluções é possível chegar na solução para arranjos com velocidade qualquer. Este fato foi notado no âmbito da solução de Taylor e Saffman para o movimento de uma única bolha [34] e posteriormente para um arranjo de múltiplas bolhas [35]. Note que os potenciais complexos $W(\zeta)$ e $T(\zeta)$ obedecem uma relação bastante simples com os mesmos potenciais no caso especial $U = 2$, denotados por $W^{(2)}(\zeta)$ e $T^{(2)}(\zeta)$,

$$W(\zeta) = W^{(2)}(\zeta), \quad (2.51)$$

$$T(\zeta) = (U - 1)T^{(2)}(\zeta). \quad (2.52)$$

onde $W^{(2)}(\zeta)$ e $T^{(2)}(\zeta)$ são dados respectivamente por (2.47) e (2.45) substituindo $U = 2$. Desta forma, dados os potenciais complexos de um escoamento com um arranjo de bolhas que se movem com $U = 2$, podemos encontrar as coordenadas das fronteiras das bolhas de um arranjo que move-se com $U \neq 2$ usando as equações (2.51), (2.52), (2.15) e (2.50), como será feito a seguir.

Começemos por notar que o segundo termo da equação (2.49) pode ser reescrito em termos dos potenciais complexos $T^{(2)}(\zeta)$ e $W^{(2)}(\zeta)$ como

$$\log \left(\frac{\Omega_M(\zeta, \theta_l(-1))}{\Omega_M(\zeta, \theta_l(1))} \right) = \frac{-T^{(2)}(\zeta) - W^{(2)}(\zeta)}{2} = \begin{cases} z^{(2)}(\zeta) - W^{(2)}(\zeta) \\ -z^{(2)}(\zeta) + T^{(2)}(\zeta) \end{cases}, \quad (2.53)$$

onde o termo $z^{(2)}(\zeta)$ corresponde ao mapeamento conforme (2.49) substituindo $U = 2$. Substituindo a expressão anterior em (2.49), ficamos com

$$x_j(s) = (1 + \rho)x_j^{(2)}(s) - \rho c_j, \quad (2.54)$$

$$y_j(s) = (1 - \rho)y_j^{(2)}(s) + \rho d_j, \quad (2.55)$$

onde $\rho = (1 - 2/U)$ e $(x_j(s), y_j(s))$ são as coordenadas em forma paramétrica da interface da j -ésima bolha de um arranjo com velocidade qualquer, enquanto $(x_j^{(2)}(s), y_j^{(2)}(s))$ são as coordenadas da interface da j -ésima bolha de um arranjo com velocidade $U = 2$ e as constantes c_j e d_j são obtidas das condições de contorno (2.7) e (2.11).

De (2.54) e (2.55) podemos notar que se $U > 2$, então $\rho > 0$ e temos uma dilatação da interface das bolhas na direção x e uma contração na direção y . Por outro lado, se tivermos $1 \leq U \leq 2$, teremos uma contração da interface das bolhas na direção x e dilatação na direção y .

2.4.2 Exemplos

Nesta seção apresentamos alguns exemplos de arranjos de bolhas que se movem com velocidade constante. As figuras desta seção foram geradas usando o pacote de funções para Matlab desenvolvido pelo grupo do professor Darren Crowdy [32]. No entanto, este pacote implementa apenas as funções primárias de Schottky-Klein, enquanto nós precisamos das secundárias para gerar tais imagens. Podemos computar as funções secundárias a partir das primárias para o grupo de Burnside através de uma mudança no domínio, como descrito abaixo.

As funções primárias de Schottky-Klein foram associadas aos geradores fundamentais definidos pelos mapas que levam os círculos C_{-k} , fora do círculo unitário C_0 , em suas reflexões C_k em C_0 . A construção do subgrupo de Burnside segue o mesmo princípio, ou seja, as funções secundárias de Schottky-Klein associadas a tal subgrupo têm como geradores fundamentais os mapas que levam os círculos no exterior de C_l nos círculos gerados pelas suas reflexões em C_l . Portanto, ao reescalarmos C_l para ser o círculo unitário, podemos computar as funções secundárias a partir das primárias, como será mostrado a seguir. Para reescalarmos o círculo C_l usamos uma mudança de variável $\zeta \mapsto \eta(\zeta)$, dada por

$$\eta(\zeta) = \frac{\zeta - \delta_l}{q_l}, \quad (2.56)$$

que mapeia C_l no círculo unitário no plano η . Denominamos por D_η o domínio circular obtido através do mapeamento da porção de F_{0l} contida no interior de C_l no plano ζ . Desta forma, podemos contruir um grupo de Schottky Θ_0 a partir de D_ζ , que por sua vez terá uma função primária associada $\omega(\eta_1, \eta_2)$. É possível agora computarmos a função secundária de Schottky-Klein para o domínio D_ζ a partir da função primária para o domínio D_η através da relação

$$\Omega_M(\zeta, \alpha) = q_l \omega(\eta(\zeta), \eta(\alpha)), \quad (2.57)$$

onde relembramos que q_l é o raio do círculo C_l , e $\Omega_M(\zeta, \alpha)$ é a função secundária associada ao grupo Θ_M . O fator q_l na expressão acima vem da substituição direta $\omega(\eta(\zeta), \eta(\alpha))$ e da comparação dos pré fatores das equações (2.26) e (2.37), que devem ser iguais.

Na figura 16a mostramos um arranjo com três bolhas que apresentam simetria em torno do eixo central do canal de Hele-Shaw. Esta simetria pode ser induzida ao escolhermos os centros

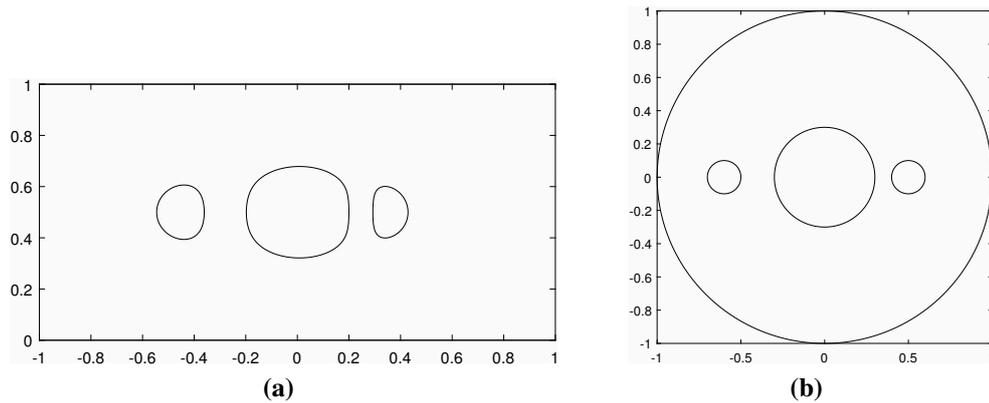


Figura 16 – (a) Arranjo de três bolhas simétricas com relação ao eixo central do canal movendo-se uniformemente com velocidade $U = 2$; (b) Domínio circular D_ζ composto por três fronteiras circulares com centros e raios dados por: $\delta_1 = -0.6$, $\delta_2 = 0$, $\delta_3 = 0.5$; $q_1 = q_3 = 0.1$, $q_2 = 0.3$.

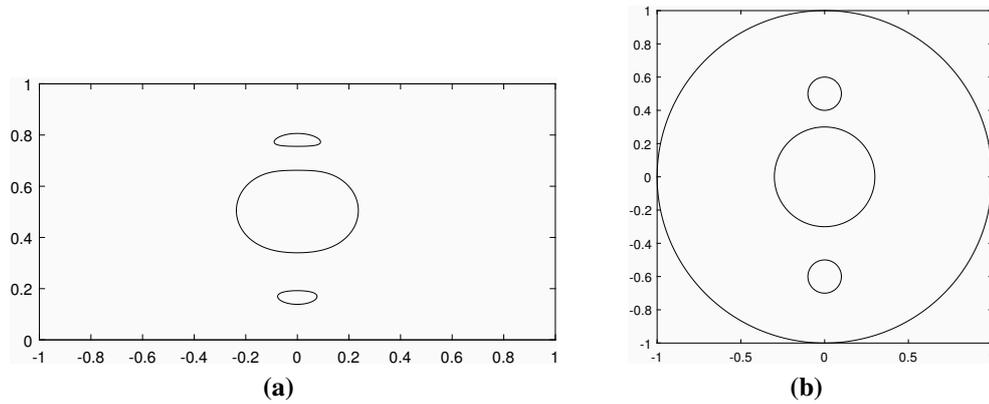


Figura 17 – (a) Arranjo de três bolhas simétricas em relação ao eixo vertical $x = 0$ movendo-se uniformemente com velocidade $U = 2$; (b) ADomínio circular D_ζ composto por três fronteiras circulares com centros e raios dados por: $\delta_1 = -0.6i$, $\delta_2 = 0$, $\delta_3 = 0.5i$; $q_1 = q_3 = 0.1$, $q_2 = 0.3$.

dos círculos C_k ao longo do eixo real do plano ζ . Na figura 16b mostramos o domínio D_ζ no plano auxiliar ζ , composto por três fronteiras circulares centradas ao longo do eixo real no interior do círculo unitário, C_0 . Caso análogo é mostrado na figura 17a apresentando a simetria em relação ao eixo vertical $x = 0$. Neste caso, a simetria é obtida ao escolhermos os centros dos círculos ao longo do eixo imaginário do plano ζ . A figura 17b mostra o domínio D_ζ no plano auxiliar ζ , composto por três fronteiras circulares centradas ao longo do eixo imaginário no interior do círculo unitário.

É possível também obter um caso em que uma das bolhas apresenta ambos os casos de simetria, enquanto as demais apresentam apenas um deles, como mostrado na figura 18a. Nessa figura podemos ver que a bolha localizada no centro do canal apresenta simetria com relação ao eixo central do canal e ao eixo vertical $x = 0$, enquanto as demais bolhas apresentam apenas um dos dois casos de simetria. A figura 18b mostra o domínio D_ζ no plano auxiliar ζ , composto por

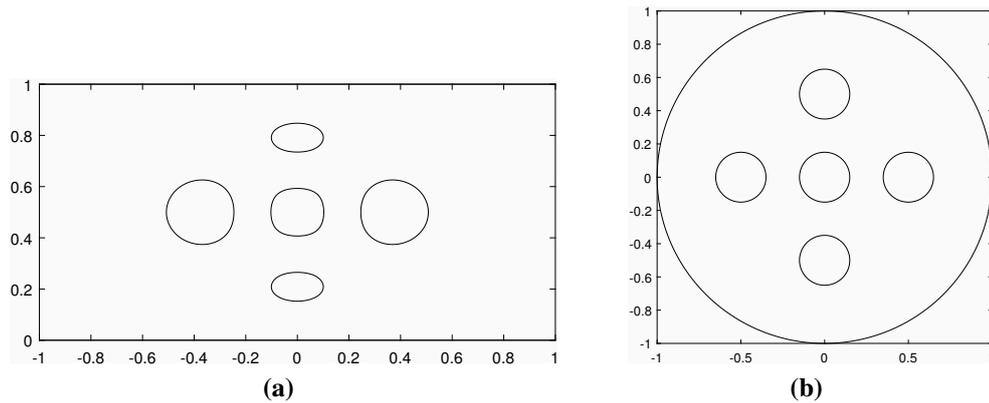


Figura 18 – (a) Arranjo de cinco bolhas movendo-se uniformemente com velocidade $U = 2$. Nesse caso a bolha no centro do arranjo apresenta simetria em relação ao eixo central do canal e ao eixo vertical $x = 0$, enquanto duas das demais apresentam apenas o primeiro tipo de simetria e as duas restantes apresentam apenas o último tipo de simetria; (b) Domínio circular D_ζ composto por cinco fronteiras circulares com centros e raios dados por: $\delta_1 = -\delta_2 = 0.5$, $\delta_3 = -\delta_4 = 0.5i$, $\delta_5 = 0$; $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = 0.15$.

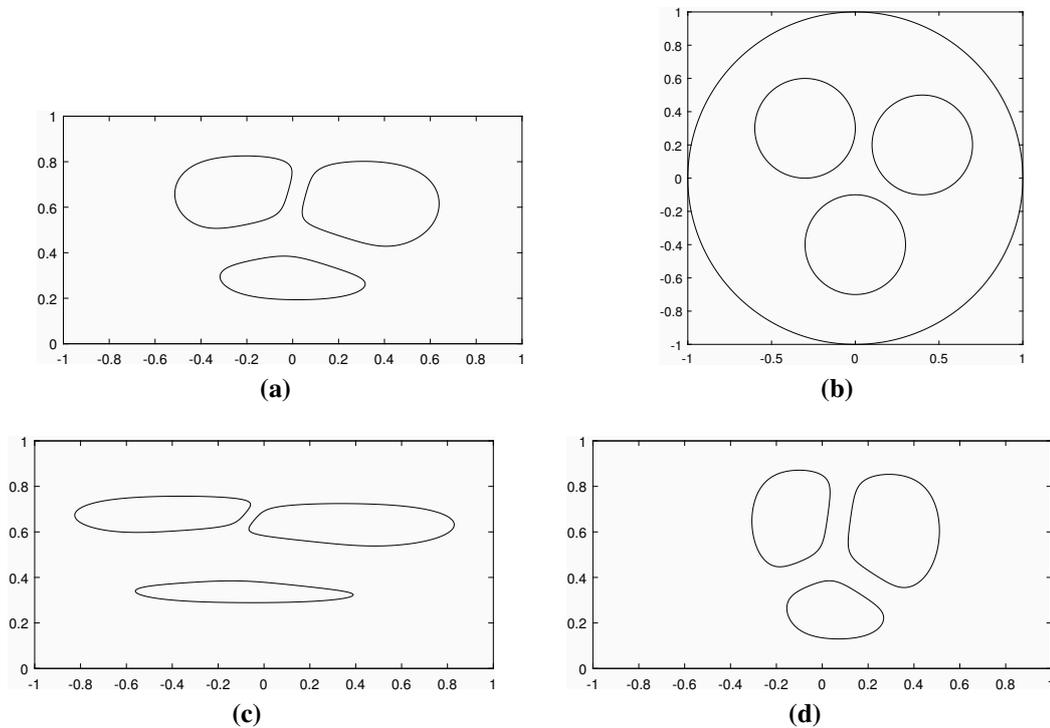


Figura 19 – (a) Arranjo de três bolhas sem simetria movendo-se uniformemente com velocidade $U = 2$; (b) Domínio circular D_ζ composto por três fronteiras circulares com centros e raios dados por: $\delta_1 = 0.4 + 0.2i$, $\delta_2 = -0.3 + 0.3i$, $\delta_3 = -0.4i$; $q_1 = q_2 = q_3 = 0.3$; (c) Arranjo de três bolhas sem simetria movendo-se uniformemente com velocidade $U = 4$; (d) Arranjo de três bolhas sem simetria movendo-se uniformemente com velocidade $U = 1.5$

cinco fronteiras circulares no interior de C_0 . Nessa figura podemos ver que um dos círculos C_k está centrado na origem, dois deles estão centrados ao longo do eixo real e os dois restantes estão centrados ao longo do eixo imaginário. Essa escolha da posição dos círculos C_k é a responsável pela simetria observada na figura 18a.

De forma geral, podemos obter um arranjo de bolhas sem qualquer simetria se movendo com velocidade uniforme U no canal de Hele-Shaw. A figura 19a mostra um arranjo de três bolhas sem qualquer simetria que se move com velocidade uniforme $U = 2$. O domínio D_ζ no plano auxiliar ζ é mostrado na figura 19b. Esse domínio é composto por três fronteiras circulares centradas no interior de C_0 .

As figuras 19c e 19d mostram esse mesmo arranjo de três bolhas se movendo com velocidade uniforme $U = 4$ e $U = 1.5$, respectivamente. Perceba que nessas duas últimas figuras podemos ver claramente uma distorção das bolhas em relação à figura 19a. A partir das equações (2.54) e (2.55) temos que para $U > 2$, $\rho > 0$ e há uma dilatação da interface na direção x e contração na direção y , enquanto para $1 \leq U < 2$, $\rho < 0$ e há uma dilatação da interface na direção y e contração na direção x .

2.4.3 Caso especial: Solução estacionária para o movimento de uma única bolha simétrica

Agora que dominamos o caso geral, ou seja, o movimento de um arranjo de bolhas sem qualquer simetria imposta, podemos voltar ao caso mais simples possível examinado por Taylor e Saffman em 1959 [8]. Neste cenário especial, a região fundamental, os geradores fundamentais e as funções secundárias de Schottky-Klein tomam uma forma consideravelmente mais simples. O domínio D_ζ é composto apenas pelo círculo unitário C_0 e pelo círculo C_1 , centrado na origem e de raio $\rho < 1$. A região fundamental do subgrupo Θ_1 é dado por $F_0 \cup \varphi_1(F_0)$ como feito anteriormente para o caso de múltiplas bolhas e está ilustrado esquematicamente na figura 20. Este grupo tem apenas um gerador fundamental, $\psi(\zeta) = \theta_1^2(\zeta) = \rho^4 \zeta$, portanto, a função secundária de Schottky-Klein associada a ele em termos do produto infinito é dada por

$$\Omega(\zeta, \alpha) = (\zeta - \alpha) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(\zeta - \rho^{4k} \alpha)(\alpha - \rho^{4k} \zeta)}{(\zeta - \rho^{4k} \zeta)(\alpha - \rho^{4k} \alpha)}. \quad (2.58)$$

Fatorando alguns termos na equação anterior, podemos reescrever $\Omega(\zeta, \alpha)$ como

$$\Omega(\zeta, \alpha) = -\frac{\alpha}{C^2} \Theta(\zeta/\alpha, \rho^2), \quad (2.59)$$

onde $C = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \rho^{4k})$ e a função $\Theta(\zeta, q)$ é definida por

$$\Theta(\zeta, q) = (1 - \zeta) \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^{2k} \zeta)(1 - q^{2k}/\zeta) = \frac{\vartheta_4(\sqrt{\zeta/q}, q)}{\prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^{2k})}, \quad (2.60)$$

e $\vartheta_4(\zeta, q)$ é a função theta de Jacobi [36].

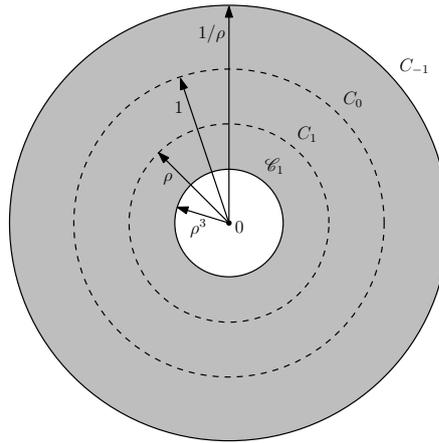


Figura 20 – Região fundamental F_{01} do grupo Θ_1 para uma única bolha simétrica.

Desta forma, podemos então reescrever a expressão para o mapeamento conforme $z(\zeta)$ usando (2.59) e ficamos com

$$z(\zeta) = \log \left(-\frac{\Theta(-\zeta, \rho^2)}{\Theta(\zeta, \rho^2)} \right) + \left(1 - \frac{2}{U} \right) \log \left(-\frac{\Theta(-\zeta/\rho^2, \rho^2)}{\Theta(\zeta/\rho^2, \rho^2)} \right). \quad (2.61)$$

onde uma constante aditiva foi omitida. A interface da bolha é dada de forma análoga ao caso das múltiplas bolhas,

$$x(s) + iy(s) = z(\rho \exp(is)) ; 0 \leq s < 2\pi, \quad (2.62)$$

onde $(x(s), y(s))$ são as coordenadas da bolha em forma paramétrica. Pode-se verificar que neste caso reproduzimos a solução estacionária encontrada por Taylor e Saffman em 1959 [8] para o movimento de uma bolha simétrica em uma célula de Hele-Shaw, cujo mapeamento conforme é dado por

$$z(\mu) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctanh} \left[i \cos(\mu) \tan \left(\frac{\pi U \lambda}{2} \right) \right] - \frac{4}{\pi} \left(\frac{U-1}{U} \right) \operatorname{arctanh} \left[i \exp(i\mu) \tan \left(\frac{\pi U \lambda}{4} \right) \right], \quad (2.63)$$

onde λ é a meia altura da bolha e deve obedecer $U\lambda < 1$; $\mu = \xi + i\eta$, e a interface da bolha é obtida tomando-se $\eta = 0$ e $-\pi/2 \leq \xi \leq \pi/2$, enquanto a imagem da parede do canal é obtida fazendo-se $\xi \pm \pi/2$ e $\eta > 0$. Abaixo exibimos uma figura da bolha simétrica gerada utilizando (2.63). Note que no paper de Taylor e Saffman, o mapeamento gera apenas a parede superior do canal e a metade superior da bolha, juntamente com a linha central do canal. Para obtermos a bolha inteira basta espelhar a figura obtida na linha central do canal.

A partir disto podemos ver que o formalismo das funções de Schottky-Klein nos serve como uma poderosa ferramenta na generalização do problema abordado por Taylor e Saffman em 1959, tornando possível a descrição do movimento de várias bolhas sem qualquer simetria imposta.

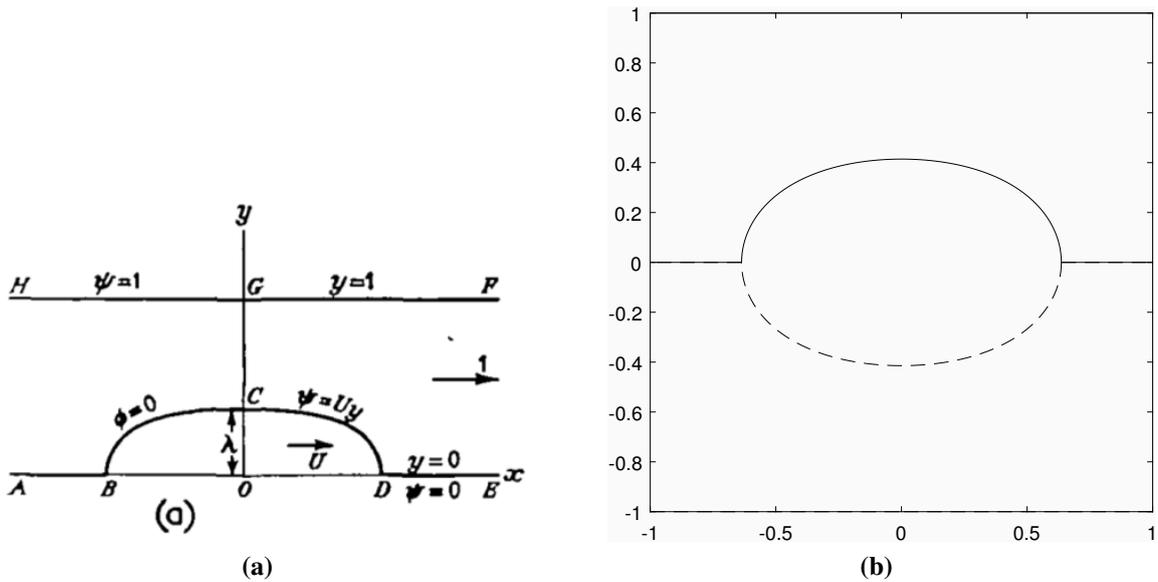


Figura 21 – (a) Figura da bolha simétrica retirada de [8]; (b) Figura gerada utilizando (2.63) e espelhada (linha tracejada) na linha central do canal para obter a bolha completa e as duas paredes do canal.

2.5 Solução estacionária para o movimento de múltiplos dedos e bolhas

Depois de termos discutido a solução estacionária para o movimento de múltiplas bolhas, vamos agora tratar do caso em que as bolhas (ou algumas delas) tornam-se infinitamente alongadas na direção $x \rightarrow -\infty$, formando o que chamamos de dedos viscosos.

Considere o caso em que temos M bolhas e p dedos. A solução para o problema de múltiplos dedos e bolhas pode ser encontrada partindo da solução estacionária para o movimento de um arranjo contendo $(M + p)$ bolhas. Nesse arranjo tomamos o limite em que p delas tornam-se infinitamente alongadas, enquanto as M demais se mantêm com área finita.

Isso pode ser obtido fazendo os pares de círculos C_j e C_{-j} na região fundamental F_0 associados às bolhas que se transformarão em dedos (ou seja, $j = M + 1, \dots, M + p$) coalescerem em um único círculo que intersecta C_0 ortogonalmente e engloba o ponto $\zeta = -1$. Uma nova região fundamental denominada de \tilde{F}_0 é formada e está ilustrada esquematicamente na figura 22 para o caso $M = 2$. O círculo ortogonal a C_0 será mapeado nos $2p$ dedos (p deles na região do fluido, D_z , e outros p em sua reflexão na parede inferior do canal, \overline{D}_z .) Os demais círculos C_j e C_{-j} , com $j = 1, \dots, M$, permanecem como estavam e são mapeados em bolhas como anteriormente.

Denominamos de λ_j a largura da j -ésima bolha e Δ_j a largura da região de fluido entre dois dedos ou entre a parede do canal e um dedo, com $j = 1, \dots, p + 1$, onde convencionamos que λ_1 é a largura do primeiro dedo contado da parede inferior para a superior e Δ_1 é a largura

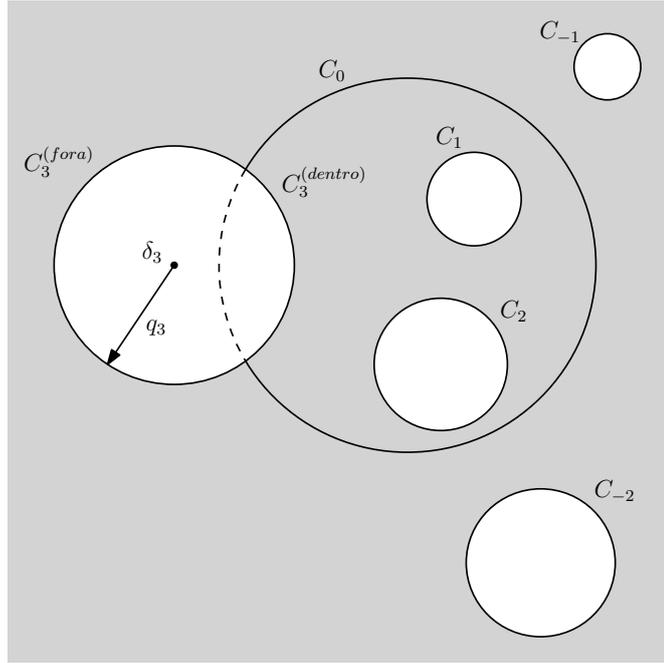


Figura 22 – Região fundamental \tilde{F}_0 do grupo $\tilde{\Theta}_{M+1}$ para o caso $M = 2$.

da região de fluido entre a parede inferior e o primeiro dedo. O círculo ortogonal a C_0 é chamado C_{M+1} , com centro e raio denominados de δ_{M+1} e q_{M+1} fixados pela condição de ortogonalidade, discutida a seguir.

Sejam dois círculos C_1 e C_2 de centros z_1 e z_2 e raios r_1 e r_2 . Se estes círculos são ortogonais então seus raios devem obedecer a relação

$$r_1^2 + r_2^2 = d^2, \quad (2.64)$$

onde d é a distância entre seus centros. No nosso caso, C_1 é o círculo C_0 e C_2 é C_{M+1} , portanto,

$$1 + q_{M+1}^2 = |\delta_{M+1}|^2. \quad (2.65)$$

Usando esta equação em (2.18), podemos construir o mapa de möbius associado à reflexão em C_{M+1} ,

$$\theta_{M+1}(\zeta) = \frac{\delta_{M+1} - \zeta}{1 - \bar{\delta}_{M+1} \zeta}. \quad (2.66)$$

Pode-se verificar ainda a seguinte relação válida para C_{M+1}

$$C_{M+1}^{(dentro)} = \theta_{M+1}(C_{M+1}^{(fora)}), \quad (2.67)$$

onde $C_{M+1}^{(dentro)}$ é o arco de C_{M+1} localizado no interior de C_0 e $C_{M+1}^{(fora)}$ no exterior. No lugar do subgrupo Θ_M teremos o grupo $\tilde{\Theta}_{M+1}$, que consiste em todas as combinações pares dos mapas θ_j , onde $j = 1, \dots, M+1$ e devemos fixar $l = M+1$, de forma que os geradores deste grupo são dados por $\psi_k = \theta_{M+1} \theta_k$, com $k = -M, \dots, M$, $k \neq 0$.

Como já dito anteriormente, o círculo C_{M+1} é mapeado nos $2p$ dedos viscosos e portanto, o mapeamento $z(\zeta)$ deve ter $2p$ singularidades logarítmicas que correspondem aos pontos onde

começam e terminam os dedos em $x = -\infty$. As singularidades do mapeamento são denotadas por ζ_j e ζ_j^* , com $\zeta_j \in C_{M+1}^{(dentro)}$ e $\zeta_j^* \in C_{M+1}^{(fora)}$. Segue diretamente de (2.67) que as singularidades do mapeamento conforme $z(\zeta)$ obedecem a relação

$$\zeta_j^* \equiv \theta_{M+1}(\zeta_j), \quad j = 1, \dots, p+1. \quad (2.68)$$

Os pontos ζ_1 e ζ_{p+1} são especiais, pois sempre encontram-se na interseção entre C_0 e C_{M+1} , o que nos leva a concluir que $\zeta_1^* = \zeta_1$ e $\zeta_{p+1}^* = \zeta_{p+1}$. Uma escolha natural para o raio de C_{M+1} é $q_{M+1} = 1$ e conseqüentemente $\delta_{M+1} = -\sqrt{2}$ para que o círculo ortogonal englobe o ponto $\zeta = -1$ como necessário.

Neste caso $\theta_{M+1}(\zeta)$ fica

$$\theta_{M+1}(\zeta) = \frac{-\sqrt{2} - \zeta}{1 + \sqrt{2}\zeta}. \quad (2.69)$$

Podemos agora encontrar a solução para o problema de múltiplos dedos e bolhas partindo de (2.49) e substituindo a singularidade logarítmica localizada em $\zeta = -1$ por $2p$ singularidades localizadas em ζ_j , $\zeta_j^* \in C_{M+1}$ com $j = 1, \dots, p+1$.

$$\begin{aligned} z(\zeta) = & -\log(\tilde{\Omega}_{M+1}(\zeta, 1)) + \left(2 - \frac{2}{U}\right) \log \left(\prod_{j=1}^{p+1} [\tilde{\Omega}_{M+1}(\zeta, \zeta_j) \tilde{\Omega}_{M+1}(\zeta, \zeta_j^*)]^{\alpha_j/2} \right) \\ & + \left(\frac{2}{U} - 1\right) \log(\tilde{\Omega}_{M+1}(\zeta, -1)), \end{aligned} \quad (2.70)$$

onde $\tilde{\Omega}_{M+1}(\zeta, \alpha)$ é a função secundária de Schottky-Klein associada ao grupo $\tilde{\Theta}_{M+1}$ e os expoentes $0 \leq |\alpha_j| \leq 1$ devem satisfazer

$$\sum_{j=1}^{p+1} |\alpha_j| = 1 \quad (2.71)$$

para garantir a univalência de $z(\zeta)$ em \tilde{F}_0 . Perceba ainda que a posição das singularidades ζ_j , $j = 2, \dots, p+1$ controla a largura (relativa à largura total do canal) de cada um dos dedos, enquanto os expoentes α_j , $j = 1, \dots, p+1$ controlam as larguras relativas das regiões de fluido entre os dedos ou entre um dedo e a parede adjacente, que são dadas por $\Delta_j = (1 - 1/U)|\alpha_j|$, para $j = 1, \dots, p+1$. Da condição (2.71) temos que $\sum_{j=1}^{p+1} \Delta_j = (1 - 1/U)$ e portanto, as larguras relativas dos dedos combinadas devem ser $\sum_{j=1}^p \lambda_j = 1 - (1 - 1/U) = 1/U$, que satisfaz a condição de conservação de massa do fluido, dada por $U \sum_{j=1}^p \lambda_j = 1$.

As formas das interfaces dos dedos e das bolhas são dados pela imagem de $z(\zeta)$ dos círculos C_j , $j = 1, \dots, M+1$. Portanto, as coordenadas do j -ésimo dedo viscoso é dado por

$$x_j(s) + iy_j(s) = z(-\sqrt{2} + \exp(is)), \quad j = 1, \dots, p, \quad (2.72)$$

e as coordenadas das bolhas são obtidas como em (2.50) mas usando como mapeamento conforme a equação (2.70).

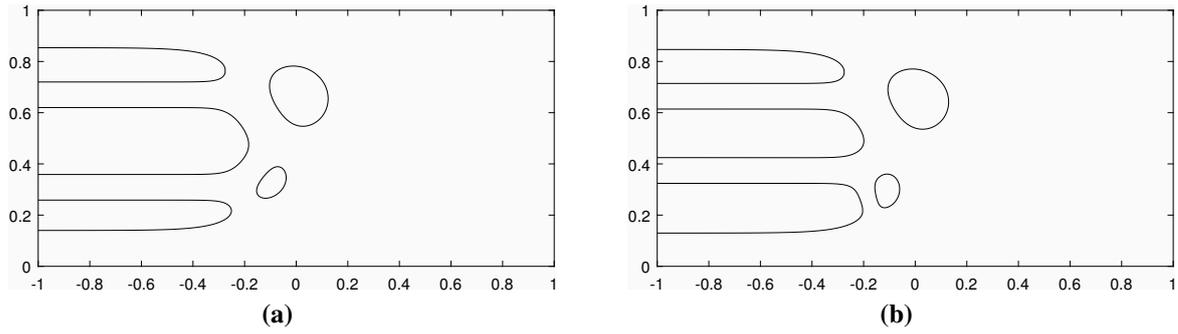


Figura 23 – (a) Arranjo de $p = 3$ dedos e $M = 2$ bolhas com parâmetros $\zeta_1 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$, $\zeta_2 = -\sqrt{2} + e^{(i\pi/10)}$, $\zeta_3 = \bar{\zeta}_2$, $\zeta_4 = \bar{\zeta}_1$, $\alpha_1 = \alpha_4 = 0.3$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0.3$, $\delta_1 = 0.3i$, $\delta_2 = -0.2 - 0.3i$, $q_1 = 0.2$, $q_2 = 0.1$; (b) Arranjo de $p = 3$ dedos e $M = 2$ bolhas com os mesmos parâmetros da figura anterior, com excessão de ζ_3 que muda do valor anterior para $\zeta_3 = -\sqrt{2} + e^{(i\pi/20)}$.

Alguns exemplos de configurações com múltiplos dedos e bolhas são mostrados na figura 23. Note que na figura 23a o arranjo dos dedos deveria ser simétrico com relação ao eixo central do canal pela simetria imposta pelos parâmetros escolhidos, no entanto, a presença das bolhas e sua relativa proximidade aos dedos quebra a simetria. Na figura 23b uma pequena mudança no parâmetro ζ_3 faz com que o dedo inferior torne-se mais largo, enquanto o do meio torna-se mais estreito e o superior permanece inalterado, ilustrando o controle que a posição da singularidade tem na largura relativa de cada dedo.

2.5.1 Caso especial: Um único dedo viscoso

Por fim, abordamos o caso especial em que temos apenas um dedo viscoso movendo-se na célula de Hele-Shaw, ou seja, $p = 1$. Este problema foi abordado em 1958 [6] por Saffman e Taylor, onde foi estudado o movimento de um dedo simétrico movendo-se em uma célula de Hele-Shaw. Um ano após esse trabalho pioneiro, os autores retornaram ao problema, mas desta vez abordando o movimento de um dedo assimétrico [8]. Nesta seção vamos mostrar que nosso formalismo, quando tomando-se o limite $M = 0$ e $p = 1$ (ou seja, um dedo sem bolhas) recupera as soluções encontradas por Saffman e Taylor em ambas as ocasiões.

Tomando o limite $M = 0$, as funções secundárias de Schottky-Klein, $\tilde{\Omega}_{M+1}$, tornam-se apenas monômios (pois agora não temos mais os geradores θ_j) e podemos reescrever a expressão (2.70) para o mapeamento conforme como

$$z(\zeta) = -\log(\zeta - 1) + \left(2 - \frac{2}{U}\right) \log \left(\prod_{j=1}^{p+1} [(\zeta - \zeta_j)(\zeta - \zeta_j^*)]^{\alpha_j/2} \right) + \left(\frac{2}{U} - 1\right) \log(\zeta + 1). \quad (2.73)$$

Ao fazermos agora $p = 1$, ficamos com

$$z(\zeta) = -\log(\zeta - 1) + \left(2 - \frac{2}{U}\right) \alpha \log(\zeta - \zeta_1) + \left(2 - \frac{2}{U}\right) (1 - \alpha) \log(\zeta - \zeta_1) + \left(\frac{2}{U} - 1\right) \log(\zeta + 1), \quad (2.74)$$

onde $0 \leq \alpha \leq 1$ e $\zeta_2 = \overline{\zeta_1} = (-1 + i)/\sqrt{2}$. Esta expressão recupera a solução obtida por Saffman e Taylor para o movimento de um dedo assimétrico em um canal de Hele-Shaw em uma representação diferente e além disso, generaliza a solução para um dedo simétrico fazendo-se $\alpha = 1/2$. Nas figuras 24a e 24b podemos ver um dedo simétrico e um dedo assimétrico, respectivamente, propagando-se com velocidade constante $U = 2$.

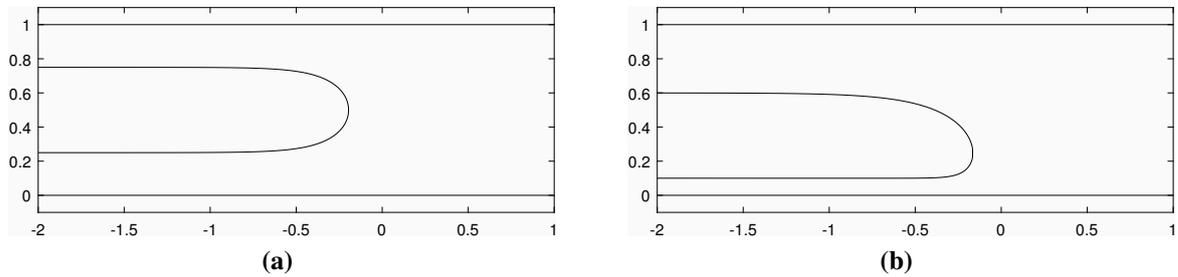


Figura 24 – (a) Dedo viscoso simétrico propagando-se com velocidade constante $U = 2$; (b) Dedo viscoso assimétrico propagando-se com velocidade constante $U = 2$.

3 SOLUÇÕES DEPENDENTES DO TEMPO PARA DEDOS VISCOSOS

Após termos discutido as soluções estacionárias para o movimento de arranjos de dedos viscosos em um canal de Hele-Shaw, podemos dar um passo à frente e encontrar soluções dependentes do tempo para a evolução destas fronteiras. Para isto, faremos algumas alterações nos mapeamentos conformes que já havíamos obtido e vamos introduzir uma nova ferramenta que nos auxiliará na elaboração das soluções dependentes do tempo, a função de Schwarz.

3.1 A função de Schwarz

O conceito da função de Schwarz [37] de uma curva C no plano é uma maneira de expressar a equação desta curva em termos de uma função analítica. A função de Schwarz, $S(z)$, da curva C é definida como

$$\bar{z} = S(z) \quad \text{para } z \in C. \quad (3.1)$$

Seja C a curva definida pela equação

$$F(x, y) = 0, \quad (3.2)$$

onde $F(x, y)$ é uma função analítica. Podemos encontrar a função de Schwarz da curva C através da mudança de variáveis $x = (z + \bar{z})/2$ e $y = (z - \bar{z})/2i$ na equação (3.2):

$$G(z, \bar{z}) \equiv F((z + \bar{z})/2, (z - \bar{z})/2i) = 0. \quad (3.3)$$

Da analiticidade de $F(x, y)$, segue que $G(z, \bar{z})$ é uma função analítica de z e \bar{z} . Se em um dado ponto z_0 da curva C

$$\left. \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} \right|_{z=z_0} \neq 0, \quad (3.4)$$

podemos então resolver a equação implícita unicamente para \bar{z} e obter

$$\bar{z} = S(z). \quad (3.5)$$

Tal como definida acima a função de Schwarz, $S(z)$, é garantida ser uma função regular e analítica de z em alguma vizinhança $|z - z_0| \leq \rho$, para algum $\rho > 0$. Em outras palavras, a função $S(z)$ é analítica em uma faixa em torno da curva C .

Tipicamente, contudo, a função de Schwarz tem singularidades quando nos afastamos, por um lado ou pelo outro, da curva. A exceção é a reta, como veremos a seguir.

Considere por exemplo o eixo real:

$$F(x, y) = y = 0. \quad (3.6)$$

Logo

$$\frac{z - \bar{z}}{2i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{z} = z, \quad (3.7)$$

ou seja,

$$S(z) = z. \quad (3.8)$$

De forma análoga, para o eixo imaginário temos $x = 0$, logo $\frac{z + \bar{z}}{2} = 0$, de onde obtemos

$$S(z) = -z. \quad (3.9)$$

Generalizando, podemos mostrar que para uma reta qualquer dada por $y = ax + b$, temos

$$S(z) = -\frac{2b + (a + i)z}{a - i}. \quad (3.10)$$

Ou seja, a função de Schwarz de uma reta é uma função linear, portanto, uma função inteira exceto no infinito, onde possui um pólo simples.

Considere agora uma circunferência de raio q centrada em $z = z_0$. A equação desta circunferência é

$$(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = q^2, \quad (3.11)$$

donde concluímos que a função de Schwarz desta curva é dada por

$$S(z) = \frac{q^2}{z - z_0} + \bar{z}_0 \quad (3.12)$$

e podemos ver que, diferentemente da reta, a função de Schwarz da circunferência possui um pólo em $z = z_0$. No caso das curvas que vamos estudar neste capítulo, e que representam a interface entre dois fluidos na célula de Hele-Shaw, a função de Schwarz correspondente tipicamente possui singularidades logarítmicas, como veremos mais adiante.

3.2 A função de Schwarz para curvas dependentes do tempo e sua conexão com o potencial complexo

Considere ao invés de uma curva C fixa no tempo uma curva $C(t)$ que evolui no tempo, seja trasladando, mudando sua forma ou ainda uma combinação de ambas as possibilidades. Tomando procedimento análogo ao utilizado na subseção anterior, podemos encontrar a função de Schwarz da curva $C(t)$, dada por

$$F(x, y, t) = 0, \quad (3.13)$$

onde $F(x, y, t)$ é uma função analítica para todo tempo t . Através da mudança de variáveis $x = (z + \bar{z})/2$ e $y = (z - \bar{z})/2i$ na equação (3.13), temos

$$G(z, \bar{z}, t) \equiv F((z + \bar{z})/2, (z - \bar{z})/2i, t) = 0, \quad (3.14)$$

onde $G(z, \bar{z}, t)$ é uma função analítica de z e \bar{z} . Se para um dado z_0 e um dado instante t tivermos

$$\left. \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} \right|_{z=z_0, t} \neq 0, \quad (3.15)$$

podemos resolver a equação implícita para \bar{z} e obter

$$\bar{z} = S(z, t). \quad (3.16)$$

A função de Schwarz como definida acima é uma função regular e analítica de z em alguma vizinhança $|z - z_0| \leq \rho$ para um dado instante t . Note que diferentemente do caso desenvolvido para uma curva que não varia no tempo, neste caso a curva pode eventualmente se aproximar e coincidir com alguma singularidade da função de Schwarz. Caso a curva $C(t)$ coincida com alguma singularidade da função de Schwarz em um dado instante t , a função $S(z, t)$ deixa de ser analítica e regular.

A relevância da função de Schwarz no cálculo da solução dependente do tempo para o movimento dos dedos viscosos na célula de Hele-Shaw torna-se clara quando a relacionamos com o potencial complexo. Seja s o comprimento de arco que parametriza a interface dos dedos, $\partial D_z(t)$, e n a direção normal à interface. Podemos então reescrever as equações de Cauchy-Riemann em termos das variáveis s e n pra o potencial de velocidade, ϕ , e a função de corrente, ψ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \frac{\partial \psi}{\partial n} \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\frac{\partial \psi}{\partial s}. \quad (3.18)$$

Para fazermos a conexão entre a função de Schwarz da interface dos dedos e o potencial complexo precisaremos de algumas relações envolvendo $S(z, t)$ e propriedades geométricas da interface [38]. Primeiro precisamos calcular a derivada tangencial de um ponto $z(s, n)$ sobre a curva

$$(ds)^2 = dzd\bar{z} = dz \frac{\partial S}{\partial z} dz = (dz)^2 S',$$

portanto,

$$\frac{dz}{ds} = (S')^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.19)$$

Queremos também calcular componente normal, V_n , da velocidade de um ponto em termos da função de Schwarz da curva. Pode-se mostrar que

$$V_n = \vec{V} \cdot \hat{n} = \operatorname{Re} \left(\frac{d\bar{z}}{dt} \cdot i \frac{dz}{ds} \right),$$

onde $\hat{n} = idz/ds$. Lembrando que a derivação com relação ao tempo e a conjugação comutam, ficamos com

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = \frac{d\bar{z}}{dt} = \frac{dS}{dt}.$$

Desta forma, podemos reescrever V_n como

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{i}{2} \frac{d\bar{z}}{dt} \frac{dz}{ds} - \frac{i}{2} \frac{dz}{dt} \frac{d\bar{z}}{ds} \\ &= \frac{i}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + S' \frac{dz}{dt} \right) \frac{dz}{ds} - \frac{i}{2} \frac{dz}{dt} S' \frac{dz}{ds} = \frac{i}{2} \frac{\partial S}{\partial t} \frac{dz}{ds}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$V_n = \frac{i}{2} \frac{\partial S}{\partial t} (S')^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.20)$$

Temos ainda, pela condição de contorno cinemática, que a velocidade normal da interface deve coincidir com aquela do fluido, ou seja,

$$V_n = \frac{\partial \phi}{\partial n}. \quad (3.21)$$

Podemos finalmente relacionar a função de Schwarz com o potencial complexo $w(z)$ através de

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{ds} / \frac{dz}{ds}. \quad (3.22)$$

Lembrando que o potencial complexo $w(z)$ é dado por $w(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$, temos

$$\frac{dw}{ds} = \frac{\partial \phi}{\partial s} + i \frac{\partial \psi}{\partial s} \quad (3.23)$$

$$= \frac{\partial \phi}{\partial s} - i \frac{\partial \phi}{\partial n}, \quad (3.24)$$

onde na última igualdade usamos (3.18). Como a interface ∂D_z é uma equipotencial, temos ainda que $\frac{\partial \phi}{\partial s} = 0$. Desta forma, a equação anterior juntamente com (3.21) nos dá

$$\frac{dw}{ds} = -i \frac{\partial \phi}{\partial n} = -iV_n. \quad (3.25)$$

Substituindo (3.19), (3.20) e (3.25) em (3.22) obtemos finalmente a relação desejada,

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (3.26)$$

O lado esquerdo da equação (3.26) nos dá a velocidade complexa do escoamento, vide equação (1.11). A velocidade complexa, dada por $V = v_x - iv_y$, deve ser analítica em toda a região do fluido, exceto em pontos onde se localizam fontes, sorvedouros ou vórtices.

Da equação anterior podemos perceber que as singularidades da função de Schwarz, caso existam, localizadas na região do fluido, D_z , e que não coincidam com pontos singulares (como vórtices, fontes ou sorvedouros) do escoamento devem ser fixas em magnitude e posição. Esta imposição sobre as singularidades da função de Schwarz vem do fato de que o lado esquerdo de (3.26) nos dá o campo de velocidade do escoamento, portanto, os pontos singulares de $S(z, t)$ são pontos fixos, de modo que a derivada temporal de $S(z, t)$ se anula nas singularidades desta função. Do contrário, pela equação (3.26), a velocidade do escoamento teria singularidades diferentes daquelas prescritas, o que não faz sentido fisicamente.

Assim sendo, as singularidades da função de Schwarz na região do fluido são completamente determinadas por $S(z, 0)$. Ou seja, as singularidades de $S(z, t)$ permanecem fixas e iguais às singularidades prescritas em $t = 0$.

3.3 Dinâmica de pólos na célula radial

Discutiremos a seguir o problema da injeção ou extração de fluido em uma célula de Hele-Shaw radial como ilustração da aplicação da função de Schwarz na obtenção de soluções dependentes do tempo para o movimento de dedos viscosos.

O problema consiste em determinarmos a evolução temporal da interface entre dois fluidos de viscosidades muito diferentes na ausência de tensão superficial em uma célula de Hele-Shaw radial, onde o fluido menos viscoso é injetado ou sugado pela ação de uma fonte ou sorvedouro pontual, respectivamente. A evolução desta interface livre foi estudada por Polubarinova-Kochina [24] e Galin [25] como um problema de valor de contorno para um mapeamento conforme $z = f(\zeta, t)$ que leva um dado domínio em um plano auxiliar ζ na região do fluido. Usualmente, este mapeamento conforme é construído de forma que o disco unitário, $|\zeta| \leq 1$, é mapeado na região do fluido e a origem é mapeada em uma fonte ou sorvedouro no infinito.

A função analítica $f(\zeta, t)$ deve obedecer à condição de contorno

$$\operatorname{Re} \left(\zeta \frac{\partial f}{\partial \zeta} \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} \right) = -\frac{Q}{2\pi} \quad \text{para } |\zeta| = 1, \quad (3.27)$$

conhecida como a equação de Polubarinova-Galin. Essa equação corresponde às condições de contorno do problema, ou seja: a condição cinemática, $V_n = \partial \phi / \partial n$, e a condição de pressão constante na interface, que através da lei de Darcy nos leva a $\phi = \text{cte}$. O termo do lado direito da expressão anterior corresponde à intensidade da fonte ($Q > 0$) ou do sorvedouro ($Q < 0$) no infinito. Uma dedução detalhada da equação de Polubarinova-Galin é feita no apêndice B.

Seja $z = f(\zeta, t)$ o mapeamento conforme discutido acima. Note que $f(\zeta, t)$ não deve possuir singularidades no interior do círculo $|\zeta| \leq 1$, portanto como uma possível solução, podemos escrever

$$f(\zeta, t) = \frac{r(t)}{\zeta} + \sum_{n=1}^N \alpha_n(t) \log(\zeta - b_n(t)). \quad (3.28)$$

onde $|b_n(t)| > 1$, de forma que os pólos de $f(\zeta, t)$ estão fora do círculo unitário e $\alpha_n(t)$ são coeficientes complexos e que obedecem $\sum_{n=1}^N \alpha_n(t) = 0$.

Introduzindo a notação

$$g(\zeta, t) \equiv S(z(\zeta, t), t), \quad (3.29)$$

segue da definição da função de Schwarz que

$$g(\zeta, t) = \overline{z(\bar{\zeta}, t)}, \quad \text{para } |\zeta| = 1. \quad (3.30)$$

Computando a função de Schwarz para a fronteira, obtemos

$$\begin{aligned} g(\zeta, t) = \overline{f(\zeta, t)} &= \frac{r(t)}{\zeta} + \sum_{n=1}^N \overline{\alpha_n(t)} \log(\zeta - \overline{b_n(t)}) \\ &= r(t)\zeta + \sum_{n=1}^N \overline{\alpha_n(t)} \log(\zeta - 1/\overline{b_n(t)}) + \overline{\alpha_n(t)} \log(\overline{b_n(t)}) \end{aligned} \quad (3.31)$$

onde usamos que na circunferência unitária, $\overline{\zeta} = 1/\zeta$. Portanto, podemos perceber que as singularidades da função de Schwarz da fronteira são os pontos $\zeta = \infty$ e $\zeta_n = 1/\overline{b_n(t)}$, que se localizam na região do fluido, já que $|\zeta_n| < 1$, pois $|b_n(t)| > 1$. Os pólos $b_n(t)$ do mapeamento conforme podem mover-se livremente, pois estão no exterior do disco unitário, ou seja, fora da região do fluido. No entanto, como discutido anteriormente, os pólos da função de Schwarz $S(z, t)$ devem ser fixos em magnitude e posição, ou seja,

$$z_k \equiv z(1/\overline{b_k(t)}, t) = r(t)\overline{b_k(t)} + \sum_{n=1}^N \alpha_n(t) \log(1/\overline{b_k(t)} - b_n(t)) \quad (3.32)$$

devem ser constantes determinadas por seu valor inicial, $z_{k0} = f(1/\overline{b_k(0)}, 0)$. Para que a magnitude destas singularidade seja constante devemos ter primeiramente que os coeficientes $\alpha_k(t)$ não dependa do tempo, ou seja, $\alpha_k(t) = \alpha_k$. Além disso devemos determinar a dinâmica dos pólos $b_n(t)$ tais que as grandezas z_k sejam "conservadas", ou seja, $\dot{z}_k = 0$.

Partindo destas quantidades conservadas podemos encontrar um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO), dado por

$$\frac{dz_k}{dt} = \sum_{n=1}^N \left(\frac{\partial z_k}{\partial b_n} \dot{b}_n + \frac{\partial z_k}{\partial \overline{b_n}} \dot{\overline{b_n}} \right) + \frac{\partial z_k}{\partial r} \dot{r} = 0, \quad (3.33)$$

onde $k = 1, \dots, N$. Inserindo (3.32) em (3.33) obtemos um sistema de EDO's da forma

$$\frac{dz_k}{dt} = \sum_{n=1}^N \left(\frac{-\alpha_n}{1/\overline{b_k(t)} - b_n(t)} \dot{b}_n \right) + \left(r(t) - \sum_{n=1}^N \frac{\alpha_n}{1/\overline{b_k(t)} - b_n(t)} \right) \frac{\dot{\overline{b_k}}}{\overline{b_k}^2(t)} + \overline{b_k(t)} \dot{r} = 0, \quad (3.34)$$

onde usamos que a partir de (3.32), a derivada $\partial z_k / \partial \overline{b_n} = 0$ para todo $n \neq k$.

Perceba que temos em nosso sistema N equações complexas, no entanto, temos N parâmetros complexos, $b_n(t)$, e um parâmetro real, $r(t)$, a serem determinados. Portanto, precisamos de mais uma equação diferencial. Esta por sua vez pode ser obtida ao substituirmos $f(\zeta, t)$ dado em (3.28) na equação (3.27) e coletarmos termos de mesma potência em ζ ou $\overline{\zeta}$. Fazendo a substituição indicada e coletando apenas o termo que não tem dependência em ζ ou $\overline{\zeta}$ ficamos com

$$\dot{r}(t) = \frac{Q}{2\pi r(t)}. \quad (3.35)$$

Pode-se mostrar que a equação anterior tem a ver com a forma como a área do fluido menos viscoso aumenta ou diminui com o tempo. Como podemos ver, $Q > 0$ representa o caso de

injeção, enquanto $Q < 0$ representa o caso de extração. Com o aumento da área, eventualmente a interface pode atingir alguma singularidade da função de Schwarz, momento no qual é formada uma cúspide ou a solução perde sua univalência. Diferentes casos assintóticos e a formação das cúspides são discutidos em detalhe em [16].

Agora que temos o sistema completo de EDO's para o problema, podemos integrá-lo numericamente partindo de uma dada configuração inicial das singularidades $b_n(0)$ escolhida arbitrariamente e do parâmetro $r(0)$, para determinar a evolução temporal destes parâmetros e conseqüentemente da interface do fluido. Esta é a essência da chamada "dinâmica de pólos" usada para o cálculo de soluções exatas para o problema de injeção em uma célula de Hele-Shaw radial [18, 39]. Esse tipo de abordagem será a base para as soluções construídas nesta dissertação, para o caso de interfaces se propagando em uma célula de Hele-Shaw retangular.

3.4 Dedos viscosos: Soluções dependentes do tempo

Nesta seção vamos construir soluções dependentes do tempo para o movimento de múltiplos dedos viscosos em uma célula de Hele-Shaw retangular. Soluções não estacionárias para um dedo foram obtidas pelo próprio Saffman em 1959 [40] e depois foram generalizadas por vários autores [41, 39, 16, 20]. Apesar de existirem soluções dependentes do tempo para múltiplos dedos na literatura, neste capítulo resolveremos o problema através de uma nova formulação, em termos de um domínio circular. Esta nova formulação explica com naturalidade o fenômeno de seleção de velocidade assintótica, a ser discutido na última seção deste capítulo, e permite a extensão destas soluções para o caso de múltiplas bolhas de forma simples.

Na formulação destas soluções utilizaremos o conceito da função de Schwarz de uma curva dependente do tempo e nos basearemos na dinâmica de pólos, ilustrada na subseção anterior para injeção/extração de um fluido menos viscoso em uma célula de Hele-Shaw radial preenchida com um fluido de viscosidade muito maior que a do fluido injetado/extraído.

Começamos com a solução estacionária para o movimento de múltiplos dedos (2.73) discutida no capítulo anterior tomando $U = 2$,

$$z(\zeta) = -\log(\zeta - 1) + \log \left(\prod_{j=1}^{p+1} [(\zeta - \zeta_j)(\zeta - \zeta_j^*)]^{\alpha_j/2} \right). \quad (3.36)$$

A forma dessa equação sugere que podemos construir um mapeamento conforme dependente do tempo $z(\zeta, t)$ que leva o domínio D_ζ ilustrado na figura 25 na região do fluido no plano z . Parte do círculo unitário C_0 é mapeado nas paredes do canal e o arco $C_1^{(dentro)}$, na interface entre os fluidos. O mapeamento conforme $z(\zeta, t)$ tem a forma:

$$z(\zeta, t) = -\log(\zeta - 1) + \sum_{k=1}^N \left\{ \frac{\alpha_k}{2} \log(\zeta - a_k(t)) + \frac{\bar{\alpha}_k}{2} \log(\zeta - 1/\bar{a}_k(t)) \right\} + i\chi + d(t), \quad (3.37)$$

onde

$$\chi = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \operatorname{Im} \{ \alpha_k \log a_k \} \quad (3.38)$$

é um termo adicionado para garantir que $\operatorname{Im}[z(\zeta, t)] = \text{constante}$ durante toda a evolução da interface, ou seja,

$$\overline{z(\zeta, t)} = z(\zeta, t) \quad \text{para } \zeta \in C_0 \quad (3.39)$$

para todo $t \geq 0$. Isto assegura que os arcos C_0^+ e C_0^- sempre sejam mapeados nas paredes do canal. O parâmetro $d(t)$ é um termo real que depende apenas do tempo e cujo significado será discutido posteriormente, mas podemos adiantar que ele é o responsável pelo deslocamento longitudinal dos dedos no canal de Hele-Shaw. Os parâmetros $a_k(t)$ na equação anterior são as singularidades do mapeamento conforme e suas posições iniciais são escolhidas na região mostrada na figura 25.

Devemos ainda ressaltar uma diferença importante entre esta expressão e o mapeamento conforme para o caso estacionário, dado por (3.36). Os coeficientes α_k agora podem ser complexos. A condição sobre os coeficientes α_k continua a mesma de antes, ou seja, $\sum_{k=1}^N \alpha_k = 1$ o que nos leva a concluir que

$$\sum_{k=1}^N \operatorname{Im} \{ \alpha_k \} = 0. \quad (3.40)$$

Vamos agora computar a função de Schwarz da interface, dada por

$$g(\zeta, t) = \overline{z(\zeta, t)}, \quad \text{com } \zeta \in C_1, \quad (3.41)$$

lembrando que C_1 corresponde no plano ζ à interface entre os dois fluidos e $z(\zeta, t)$ é dado por (3.37). Explicitamente, temos

$$g(\zeta, t) = -\log(\overline{\zeta} - 1) + \sum_{k=1}^N \left\{ \frac{\overline{\alpha_k}}{2} \log(\overline{\zeta} - \overline{a_k}(t)) + \frac{\alpha_k}{2} \log(\overline{\zeta} - 1/a_k(t)) \right\} - i\chi + d(t), \quad (3.42)$$

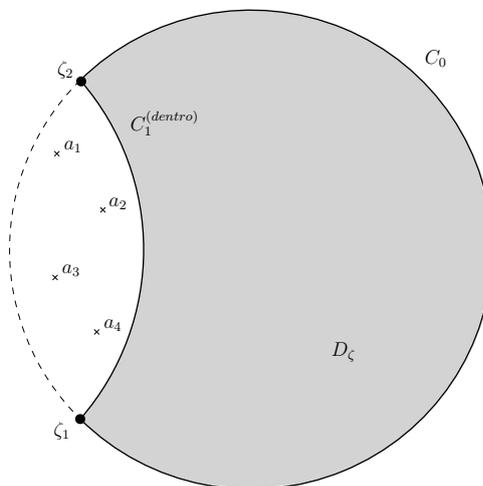


Figura 25 – Localização inicial das singularidades de $z(\zeta)$ na solução (3.37).

para $\zeta \in C_1$. Usando o mapa de conjugação introduzido no capítulo anterior, temos $\bar{\zeta} = \phi_1(\zeta)$ quando $\zeta \in C_1$, com $\phi_1(\zeta)$ dado por

$$\phi_1(\zeta) = -\sqrt{2} + \frac{1}{\zeta + \sqrt{2}}, \quad (3.43)$$

onde lembramos as escolhas feitas no capítulo 2, $\delta_1 = -\sqrt{2}$ e $q_1 = 1$. Substituindo explicitamente $\bar{\zeta}$ por $\phi_1(\zeta)$ na expressão para $g(\zeta, t)$ e tomando o denominador comum dos termos dentro dos logaritmos, ficamos com

$$g(\zeta, t) = -\log\left(\frac{\zeta\sqrt{2} + 1 + \zeta + \sqrt{2}}{-(\zeta + \sqrt{2})}\right) + \sum_{k=1}^N \left\{ \frac{\bar{\alpha}_k}{2} \log\left(\frac{\zeta\sqrt{2} + 1 + (\zeta + \sqrt{2})\bar{a}_k(t)}{-(\zeta + \sqrt{2})}\right) + \frac{\alpha_k}{2} \log\left(\frac{\zeta\sqrt{2} + 1 + (\zeta + \sqrt{2})/a_k(t)}{-(\zeta + \sqrt{2})}\right) \right\} - i\chi + d(t), \quad (3.44)$$

Como os termos $\log(-1/(\zeta + \sqrt{2}))$ na expressão anterior não dependem de k , eles podem ser retirados do somatório:

$$g(\zeta, t) = -\log\left(\frac{(\zeta + 1)(1 + \sqrt{2})}{-(\zeta + \sqrt{2})}\right) + \sum_{k=1}^N \left\{ \frac{\bar{\alpha}_k}{2} \log\left(\zeta(\bar{a}_k(t) + \sqrt{2}) + 1 + \sqrt{2}\bar{a}_k(t)\right) + \frac{\alpha_k}{2} \log\left(\zeta(1/a_k(t) + \sqrt{2}) + 1 + \sqrt{2}/a_k(t)\right) \right\} + \log\left(\frac{-1}{\zeta + \sqrt{2}}\right) \sum_{k=1}^N \left(\frac{\bar{\alpha}_k}{2} + \frac{\alpha_k}{2}\right) + d(t) - i\chi. \quad (3.45)$$

Nos valendo da condição sobre os coeficientes α_k , $\sum_{k=1}^N \alpha_k = 1$, vemos que o somatório no último termo da expressão anterior é igual à unidade. Assim, este termo elimina parte do primeiro termo em $g(\zeta, t)$ e ficamos com

$$g(\zeta, t) = -\log\left((\zeta + 1)(1 + \sqrt{2})\right) + \sum_{k=1}^N \left\{ \frac{\bar{\alpha}_k}{2} \log\left(\zeta(\bar{a}_k(t) + \sqrt{2}) + 1 + \sqrt{2}\bar{a}_k(t)\right) + \frac{\alpha_k}{2} \log\left(\zeta(1/a_k(t) + \sqrt{2}) + 1 + \sqrt{2}/a_k(t)\right) \right\} + d(t) - i\chi. \quad (3.46)$$

Podemos ainda reescrever $g(\zeta, t)$ em termos de θ_1 por conveniência

$$g(\zeta, t) = -\log(\zeta + 1) + \sum_{k=1}^N \left\{ \frac{\bar{\alpha}_k}{2} \log\left(\frac{\zeta - \theta_1(1/\bar{a}_k(t))}{\theta_1(1/\bar{a}_k(t)) + \sqrt{2}}\right) + \frac{\alpha_k}{2} \log\left(\frac{\zeta - \theta_1(a_k(t))}{\theta_1(a_k(t)) + \sqrt{2}}\right) \right\} + d(t) - i\chi. \quad (3.47)$$

onde uma constante aditiva foi desprezada e $\theta_1(\zeta)$ é dado pela equação (2.69) e repetido abaixo:

$$\theta_1(\zeta) = \frac{-\sqrt{2} - \zeta}{1 + \sqrt{2}\zeta}.$$

Da equação (3.47) podemos ver que as singularidades da função de Schwarz no plano ζ são $\zeta = -1$, $\zeta = \theta_1(a_k(t))$ e $\zeta = \theta_1(1/\bar{a}_k(t))$. Perceba que destas singularidades, apenas $\zeta = \theta_1(1/\bar{a}_k(t))$ estão em D_ζ , ou seja, na pré imagem da região do fluido. Isto pode ser visto ao reescrevermos $\theta_1(1/\bar{a}_k(t))$ como

$$\theta_1(1/\bar{a}_k(t)) = \theta_1(\varphi_0(a_k(t))) = \varphi_1(a_k(t)). \quad (3.48)$$

Ou seja, $\theta_1(1/\bar{a}_k(t))$ corresponde a uma reflexão das singularidades $a_k(t)$ em C_1 , o que as leva para D_ζ .

As imagens das singularidades de $g(\zeta, t)$ no plano z são dadas por

$$\beta_k \equiv z(\theta_1(1/\bar{a}_k(t)), t) = -\log(\theta_1(1/\bar{a}_k(t)) - 1) + \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{\alpha_j}{2} \log(\theta_1(1/\bar{a}_k(t)) - a_j(t)) + \frac{\bar{\alpha}_j}{2} \log(\theta_1(1/\bar{a}_k(t)) - 1/\bar{a}_j(t)) \right\} + i\chi + d(t), \quad (3.49)$$

e estão localizadas em D_z , ou seja, na região do fluido. Estas singularidades, β_k , da função de Schwarz são interpretadas geometricamente como vértices de fjords virtuais como os discutidos em [19]. Estes fjords, nomeados desta forma pela sua semelhança com as estruturas geográficas homônimas, formam regiões inacessíveis para a interface livre que geram reentrâncias na fronteira entre os dois fluidos à medida em que o escoamento evolui. Parte da interface fica presa nos vértices dos fjords e o resto continua avançando pelo canal, formando assintoticamente os dedos viscosos.

A largura de um fjord é determinada pela intensidade da singularidade $a_k(t)$ correspondente, ou seja, pelo valor absoluto do coeficiente α_k . A inclinação deste fjord é determinada pelo argumento deste coeficiente, como ilustrado esquematicamente na figura 26

Da equação (3.26) podemos concluir que as singularidades da função de Schwarz localizadas na região do fluido e que não coincidem com singularidades do campo de pressão (fontes, sorvedouros e vórtices) devem ser constantes em magnitude e posição, portanto,

$$\frac{d\beta_k}{dt} = 0 \quad \text{com } k = 1, \dots, N. \quad (3.50)$$

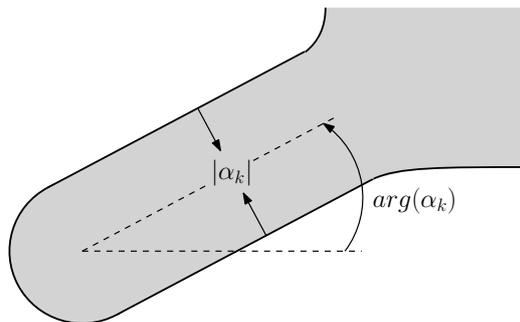


Figura 26 – Largura e inclinação de um fjord com relação ao eixo central do canal

Enquanto as singularidades de $S(z, t)$ no interior do fluido devem ser fixas, as singularidades $a_k(t)$ do mapeamento conforme podem se mover livremente pela região mostrada na figura 25. Como veremos posteriormente, a posição inicial dos parâmetros $a_k(t)$ e o valor dos coeficientes α_k determinam o comportamento assintótico das soluções. Note, em particular, que se uma das singularidades for escolhida inicialmente em $\zeta = -1$, a imagem desta singularidade, $z(\theta_1(1/-1), 0) = z(1, 0)$ diverge, já que $\zeta = 1$ é mapeado em $x = \infty$. Desta forma, vamos separar as possíveis condições iniciais em dois tipos: (i) Nenhuma das singularidades $a_k(t)$ começa em $\zeta = -1$; (ii) Uma das singularidades $a_k(t)$ começa em $\zeta = -1$.

Mostraremos posteriormente que condições iniciais do tipo (i) levam à velocidade assintótica $U = 2$, enquanto condições iniciais do tipo (ii) levam à velocidade assintótica $U \neq 2$

3.4.1 Condições iniciais que levam a $U = 2$

Neste conjunto de possíveis condições iniciais, nenhuma das singularidades $a_k(t)$ começa no ponto $\zeta = -1$, ou seja, todas as imagens β_k obedecem $\beta_k < \infty$ e são dadas por (3.49).

Para uso futuro, queremos analisar o comportamento da função de Schwarz no infinito, ou seja, $S(x \rightarrow \infty, t) = g(\zeta = 1, t)$, onde $g(\zeta, t)$ é dada por (3.47). Quando $x \rightarrow \infty$, o potencial complexo $w(z)$ se comporta como $w(z) \approx z$, logo, $dw/dz \approx 1$. Usando este fato em (3.26), temos

$$1 = \frac{1}{2} \frac{\partial g(\zeta = 1, t)}{\partial t}. \quad (3.51)$$

Integrando a equação anterior, ficamos com

$$2t = g(1, t) + C, \quad (3.52)$$

onde C é constante no tempo.

Partindo desta equação podemos definir uma quantidade conservada, β_+ , dada por

$$\beta_+ \equiv g(1, t) - 2t. \quad (3.53)$$

Usando (3.42) obtemos que

$$\beta_+ = -\log 2 + d(t) - i\chi + \sum_{k=1}^N \left\{ \frac{\bar{\alpha}_k}{2} \log \left[\frac{1 - \theta_1(1/\bar{a}_k(t))}{\theta_1(1/\bar{a}_k(t)) + \sqrt{2}} \right] + \frac{\alpha_k}{2} \log \left[\frac{1 - \theta_1(a_k(t))}{\theta_1(a_k(t)) + \sqrt{2}} \right] \right\} - 2t. \quad (3.54)$$

Esta constante de movimento será utilizada quando formos determinar a evolução temporal dos parâmetros $a_k(t)$ e $d(t)$.

3.4.2 Condições iniciais que levam a $U \neq 2$

Neste segundo conjunto de possíveis condições iniciais, uma das singularidades do mapa $z(\zeta, t)$ começa em $\zeta = -1$, enquanto as demais singularidades são tais que $a_k(0) \neq -1$ para $k > 1$.

Assim, supondo que partimos de uma configuração inicial com uma singularidade em $\zeta = -1$ e as demais singularidades $a_k(0) \neq -1$, podemos reescrever o mapeamento conforme $z(\zeta, t)$ na forma

$$z(\zeta, t) = -\log(\zeta - 1) + \alpha_0 \log(\zeta + 1) + i\chi + d(t) + \sum_{k=1}^N \left\{ \frac{\alpha_k}{2} \log(\zeta - a_k(t)) + \frac{\bar{\alpha}_k}{2} \log(\zeta - 1/\bar{a}_k(t)) \right\}, \quad (3.55)$$

onde $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ é a intensidade da singularidade em $\zeta = -1$. O termo χ pode ser reescrito como

$$\chi = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \text{Im} \{ \alpha_k \log a_k \} - \frac{\alpha_0}{2} \pi \quad (3.56)$$

para assegurar que $\text{Im}[z(\zeta, t)] = 0$ para $\zeta \in C_0$ durante a evolução temporal do problema. A condição sobre os coeficientes α_k sofre uma pequena modificação e pode ser escrita como

$$\sum_{k=0}^N \alpha_k = \alpha_0 + \sum_{k=1}^N \alpha_k = 1. \quad (3.57)$$

De forma análoga a como obtivemos (3.47), podemos computar $g(\zeta, t)$,

$$g(\zeta, t) = -\log(\zeta + 1) + \alpha_0 \log(\zeta - 1) + d(t) - i\chi + \sum_{k=1}^N \left\{ \frac{\bar{\alpha}_k}{2} \log \left(\frac{\zeta - \theta_1(1/\bar{a}_k(t))}{\theta_1(1/\bar{a}_k(t)) + \sqrt{2}} \right) + \frac{\alpha_k}{2} \log \left(\frac{\zeta - \theta_1(a_k(t))}{\theta_1(a_k(t)) + \sqrt{2}} \right) \right\}. \quad (3.58)$$

onde novamente uma constante aditiva foi desprezada. As singularidades da função de Schwarz são $\zeta = -1$, $\zeta = 1$, $\zeta = \theta_1(1/\bar{a}_k(t))$ e $\zeta = \theta_1(a_k(t))$. Dessas singularidades, apenas $\zeta = \theta_1(1/\bar{a}_k(t))$ estão localizadas na pré imagem da região do fluido, ou seja, no interior de C_0 e exterior do círculo C_1 . Podemos computar as posições das singularidades de $S(z, t)$ no plano z , que são dadas por

$$\beta_k \equiv z(\theta_1(1/\bar{a}_k(t)), t) = -\log(\theta_1(1/\bar{a}_k(t)) - 1) + \alpha_0 \log(\theta_1(1/\bar{a}_k(t)) + 1) + i\chi + d(t) + \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{\alpha_j}{2} \log(\theta_1(1/\bar{a}_k(t)) - a_j(t)) + \frac{\bar{\alpha}_j}{2} \log(\theta_1(1/\bar{a}_k(t)) - 1/\bar{a}_j(t)) \right\}. \quad (3.59)$$

Novamente queremos analisar o comportamento da função de Schwarz no infinito, ou seja, $S(x \rightarrow \infty, t) = g(\zeta \rightarrow 1, t)$, onde $g(\zeta, t)$ é dada por (3.58). Neste caso, diferentemente do

anterior, não podemos substituir $\zeta = 1$ diretamente em $g(\zeta, t)$ pois faria esta equação divergir. No entanto, comparando as equações (3.55) e (3.58) vemos que com algumas manipulações algébricas podemos reescrever a função de Schwarz, $S(z, t) = g(\zeta(z, t), t)$, no limite $\zeta \rightarrow 1$, isto é, $x \rightarrow \infty$, como

$$S(z, t) = -\alpha_0 z + (\alpha_0 + 1)d(t) + B(t) + \mathcal{O}(1/z), \quad |z| \rightarrow \infty, \quad (3.60)$$

onde $B(t)$ é um termo que permanece finito para qualquer tempo t e é dado por

$$B(t) = (\alpha_0 - 1)i\chi + \alpha_0 \sum_{k=1}^N \left\{ \frac{\alpha_k}{2} \log(1 - a_k(t)) + \frac{\bar{\alpha}_k}{2} \log(1 - 1/\bar{a}_k(t)) \right\} \\ + \sum_{k=1}^N \left\{ \frac{\bar{\alpha}_k}{2} \log\left(\frac{1 - \theta_1(1/\bar{a}_k(t))}{\theta_1(1/\bar{a}_k(t)) + \sqrt{2}}\right) + \frac{\alpha_k}{2} \log\left(\frac{1 - \theta_1(a_k(t))}{\theta_1(a_k(t)) + \sqrt{2}}\right) \right\}. \quad (3.61)$$

Podemos agora definir a constante de movimento β_+ como feito na subseção anterior. Note primeiro que de (3.53) temos

$$\dot{\beta}_+ = \frac{\partial g}{\partial t} - 2 = 0 \quad \text{para } \zeta \rightarrow 1, \quad (3.62)$$

ou alternativamente,

$$\dot{\beta}_+ = \frac{\partial S}{\partial t} - 2 = 0 \quad \text{para } x \rightarrow \infty. \quad (3.63)$$

A partir de (3.60) e (3.63), temos

$$\dot{\beta}_+ = (\alpha_0 + 1)\dot{d}(t) + \dot{B}(t) - 2 = 0, \quad (3.64)$$

que após uma integração resulta em

$$\beta_+ = (\alpha_0 + 1)d(t) - 2t + B(t). \quad (3.65)$$

onde a constante de integração foi feita nula. Assim, as constantes β_k em (3.59) e β_+ em (3.65) são suficientes para obtermos a evolução temporal dos parâmetros.

3.5 Sistema de EDO's e integração numérica

Nesta seção vamos derivar um sistema de equações diferenciais parciais para os parâmetros $a_k(t)$ e $d(t)$ do problema. Isto pode ser feito ao explorarmos as constantes de movimento discutidas anteriormente, β_k e β_+ . Tomando a derivada com relação ao tempo destas quantidades conservadas, temos

$$\frac{d\beta_k}{dt} = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial \beta_k}{\partial \xi_j} \dot{\xi}_j + \frac{\partial \beta_k}{\partial \eta_j} \dot{\eta}_j \right) + \dot{d} = 0 \quad (3.66)$$

$$\frac{d\beta_+}{dt} = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial \beta_+}{\partial \xi_j} \dot{\xi}_j + \frac{\partial \beta_+}{\partial \eta_j} \dot{\eta}_j \right) + \dot{d} - 2 = 0 \quad (3.67)$$

onde $\xi_j(t)$ e $\eta_j(t)$ são parte real e imaginária dos parâmetros $a_j(t)$, respectivamente. A depender das condições iniciais, ou seja, se o mapa $z(\zeta, t)$ tem ou não uma singularidade em $\zeta = -1$ usamos (3.49) e (3.54) ou (3.59) e (3.65), respectivamente. Além disso devemos prescrever as condições iniciais $a_k(0)$ e $d(0)$.

A partir das $N + 1$ equações acima (N equações para β_k e 1 para β_+) obtemos um sistema de equações diferenciais ordinárias da forma

$$M\dot{X} = A, \quad (3.68)$$

onde

$$M = \begin{bmatrix} \text{Re} \left\{ \frac{\partial \beta_1}{\partial \xi_1} \right\} & \dots & \text{Re} \left\{ \frac{\partial \beta_1}{\partial \xi_N} \right\} & \text{Re} \left\{ \frac{\partial \beta_1}{\partial \eta_1} \right\} & \dots & \text{Re} \left\{ \frac{\partial \beta_1}{\partial \eta_N} \right\} & \text{Re} \left\{ \frac{\partial \beta_1}{\partial d} \right\} \\ & & & \vdots & & & \\ \text{Re} \left\{ \frac{\partial \beta_N}{\partial \xi_1} \right\} & \dots & \text{Re} \left\{ \frac{\partial \beta_N}{\partial \xi_N} \right\} & \text{Re} \left\{ \frac{\partial \beta_N}{\partial \eta_1} \right\} & \dots & \text{Re} \left\{ \frac{\partial \beta_N}{\partial \eta_N} \right\} & \text{Re} \left\{ \frac{\partial \beta_N}{\partial d} \right\} \\ \text{Im} \left\{ \frac{\partial \beta_1}{\partial \xi_1} \right\} & \dots & \text{Im} \left\{ \frac{\partial \beta_1}{\partial \xi_N} \right\} & \text{Im} \left\{ \frac{\partial \beta_1}{\partial \eta_1} \right\} & \dots & \text{Im} \left\{ \frac{\partial \beta_1}{\partial \eta_N} \right\} & \text{Im} \left\{ \frac{\partial \beta_1}{\partial d} \right\} \\ & & & \vdots & & & \\ \text{Im} \left\{ \frac{\partial \beta_N}{\partial \xi_1} \right\} & \dots & \text{Im} \left\{ \frac{\partial \beta_N}{\partial \xi_N} \right\} & \text{Im} \left\{ \frac{\partial \beta_N}{\partial \eta_1} \right\} & \dots & \text{Im} \left\{ \frac{\partial \beta_N}{\partial \eta_N} \right\} & \text{Im} \left\{ \frac{\partial \beta_N}{\partial d} \right\} \\ \text{Re} \left\{ \frac{\partial \beta_+}{\partial \xi_1} \right\} & \dots & \text{Re} \left\{ \frac{\partial \beta_+}{\partial \xi_N} \right\} & \text{Re} \left\{ \frac{\partial \beta_+}{\partial \eta_1} \right\} & \dots & \text{Re} \left\{ \frac{\partial \beta_+}{\partial \eta_N} \right\} & \text{Re} \left\{ \frac{\partial \beta_+}{\partial d} \right\} \end{bmatrix}, \quad \dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_N \\ \dot{\eta}_1 \\ \vdots \\ \dot{\eta}_N \\ \dot{d} \end{bmatrix} \quad e \quad A = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}. \quad (3.69)$$

Este sistema de equações pode então ser invertido, o que nos dá

$$\dot{X} = -M^{-1}A, \quad (3.70)$$

e finalmente podemos integrá-lo no tempo, encontrando assim os parâmetros $a_k(t)$ e $d(t)$ para um instante t qualquer. A integração numérica é feita utilizando o software Matlab juntamente com o pacote de integração numérica ode45. Este pacote funciona resolvendo problemas do tipo formulado em (3.70) e integrando esta equação a partir de uma dada condição inicial X_0 usando um método de Runge-Kutta com intervalo de tempo variável. A variação no intervalo de tempo de cada passo de integração é escolhido pelo pacote a fim de obter uma boa precisão na integração.

3.6 Simulações numéricas

Aplicando o procedimento de integração numérica discutido na seção anterior para diferentes configurações iniciais dos parâmetros $a_k(t)$ e para diferentes intervalos de tempo, obtivemos alguns resultados interessantes que serão apresentados abaixo. O nosso interesse é estudar soluções que levem à formação de um ou mais dedos viscosos no limite assintótico de tempos longos, i.e., $t \rightarrow \infty$. Nesse caso devemos começar com uma configuração inicial das singularidades do mapa $z(\zeta, t)$ em que há uma singularidade em cada ramo do círculo C_0 logo

acima e abaixo de $\zeta = -1$. Essas singularidades são posicionadas inicialmente nos ramos de C_0 para gerar singularidades da função de Schwarz, $S(z, t)$, nas paredes do canal, o que faz parte da interface ficar "presa" nas paredes enquanto outra parte se propaga gerando um ou mais dedos no limite assintótico $t \rightarrow \infty$.

Além disso, as demais singularidades devem estar na região interior ao círculo unitário C_0 e ao círculo C_1 , que representa a interface. Como discutimos na Sec. 3.4, temos então dois casos a considerar, a depender se o mapa $z(\zeta, t)$ tem ou não uma singularidade em $\zeta = -1$.

3.6.1 Configurações que levam a $U = 2$

Nesse caso, usamos condições iniciais em que $z(\zeta, t)$ não possui singularidade em $\zeta = -1$; vide Sec. 3.4.1.

Na figura 27a mostramos a formação de um dedo viscoso com uma reentrância na sua parte superior. As posições iniciais das singularidades $a_k(t)$ são: $a_1(0) = \exp(0.9i\pi)$, $a_2(0) = \exp(-0.9i\pi)$, $a_3(0) = -0.95 + 0.03i$, $a_4(0) = -0.99 - 0.02i$ e os coeficientes α_k são $\alpha_1 = 0.3$, $\alpha_2 = 0.4$, $\alpha_3 = 0.2 + 0.15i$ e $\alpha_4 = 0.1 - 0.15i$. Analisando esta figura, podemos entender melhor a interação da interface com as singularidades da função de Schwarz. Inicialmente a fronteira assume a forma de uma frente essencialmente plana e move-se praticamente sem se deformar até encontrar as singularidades da função de Schwarz $S(z, t)$ presentes nas paredes do canal de Hele-Shaw. Ao encontrar as singularidades, parte da interface fica presa nas paredes do canal,

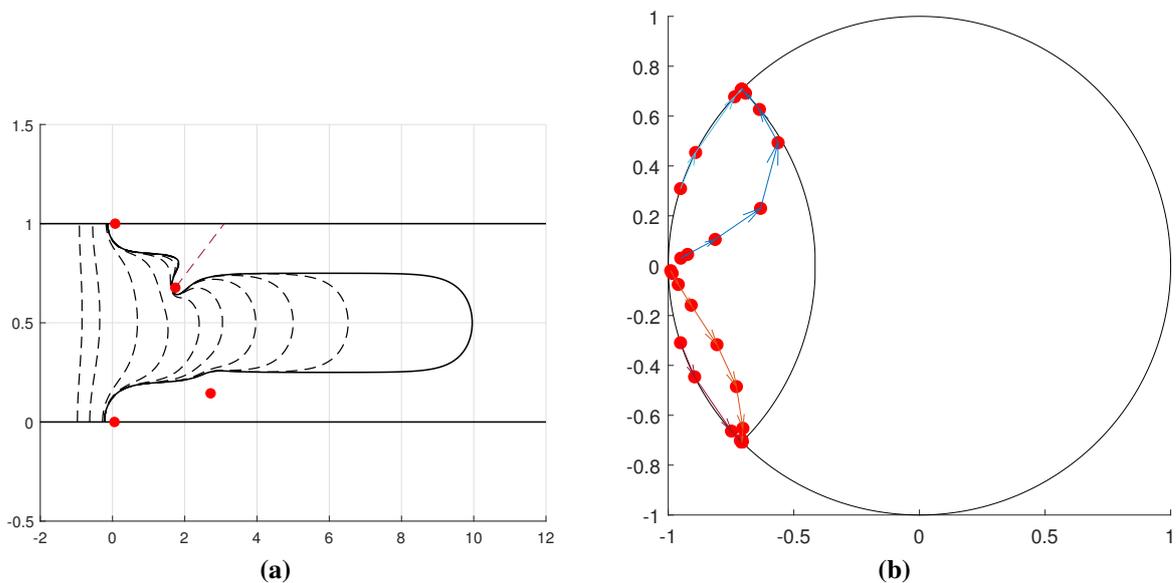


Figura 27 – (a) Evolução de um dedo viscoso na presença de duas singularidades da função de Schwarz na região física. As linhas tracejadas representam a evolução temporal da interface, enquanto a linha cheia representa a interface no último instante t . A linha tracejada em vermelho indica a inclinação do fjord em relação ao eixo central do canal; (b) Evolução temporal das singularidades $a_k(t)$.

enquanto o resto dela continua movendo-se. Ao encontrar uma outra singularidade de $S(z,t)$ localizada no interior do canal próxima do eixo central do mesmo, parte da interface fica presa no vértice do fjord, representado pela singularidade de $S(z,t)$, causando esta reentrância na parte superior do dedo como pode ser visto na figura 27a. A inclinação deste fjord com relação ao eixo central do canal é indicada na figura através da linha tracejada em vermelho. Após ultrapassar as singularidades, a interface modifica-se de forma a assumir seu perfil assintótico quando $t \rightarrow \infty$ e atinge a velocidade $U = 2$.

Na figura 27b mostramos a evolução dos parâmetros $a_k(t)$ no tempo. Duas das singularidades do mapa, $a_k(t)$, convergem para o ponto $\zeta_1 = (-1 + i)/\sqrt{2}$, na interseção dos círculos C_0 e C_1 , e as outras duas convergem para o ponto $\zeta_2 = \bar{\zeta}_1$. Durante a evolução, uma das singularidades chega muito próximo do arco $C_1^{(dentro)}$ mas não se fixa nele. Essa aproximação causa uma deformação na interface na forma de uma envaginação, como pode ser visto na figura 27a.

Podemos fazer uma análise similar em termos das singularidades da função de Schwarz $g(\zeta,t)$, ou seja, $\zeta = \theta_1(1/\bar{a}_k(t))$. Como dito anteriormente, $\theta_1(1/\bar{a}_k(t))$ equivale a refletir as singularidades $a_k(t)$ em $C_1^{(dentro)}$. Desta forma, as singularidades de $g(\zeta,t)$ aproximam-se do arco que é mapeado na interface dos dedos, causando deformações nesta interface e convergem assintoticamente para os mesmos pontos ζ_1 e ζ_2 . É importante notar a diferença entre cada uma destas singularidades: as singularidade do mapa e as da função de Schwarz $g(\zeta,t)$ podem mover-se livremente, no entanto, as imagens destas singularidades através do mapa $z(\zeta,t)$, ou seja, $\beta_k = z(\theta_1(1/\bar{a}_k(t)),t)$ devem ser fixas.

Na figura 28 podemos ver a evolução da derivada do parâmetro $d(t)$ durante esta simulação. Note que inicialmente, isto é, para t pequeno, temos $\dot{d} \approx 1$, indicando que a interface move-se com a velocidade do fluido, $V = 1$, como esperado para uma interface plana. Mostraremos em breve que o parâmetro $d(t)$ deve ir assintoticamente para $2t$ quando $t \rightarrow \infty$, logo $\dot{d} = 2$, pois não há singularidade em $\zeta = -1$. De fato, vemos na figura 28 que $d(t) \approx 2t$ para $t \rightarrow \infty$, como esperado.

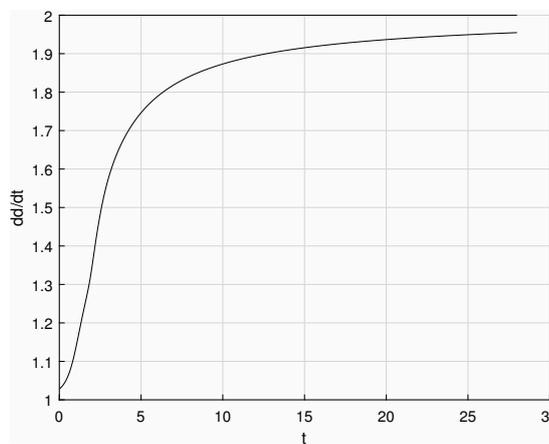


Figura 28 – (a) Valor do parâmetro $d(t)$ para o intervalo $t = 0$ até $t = 30$.

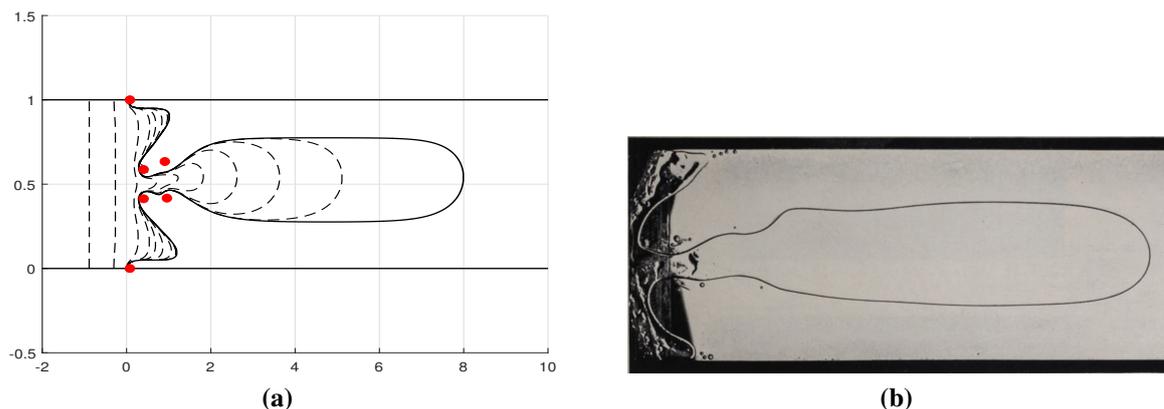


Figura 29 – (a) Simulação numérica com parâmetros iniciais selecionados de forma a tentar reproduzir a figura do experimento; (b) Figura retirada de [6] mostrando o experimento da penetração de ar em uma célula de Hele-Shaw preenchida com glicerina.

Na figura 29a apresentamos a simulação da evolução da interface com uma escolha cuidadosa dos parâmetros iniciais na tentativa de reproduzir o experimento da penetração de ar em uma célula de Hele-Shaw preenchida com glicerina realizado por Saffman e Taylor [6], ilustrado na figura 29b. Após ultrapassar as singularidades, o dedo viscoso novamente evolui para sua forma assintótica com $U = 2$ quando $t \rightarrow \infty$ e simétrico com relação às paredes do canal.

É possível ainda termos casos em que a interface forma inicialmente mais de um dedo, os quais podem se "dividir" posteriormente, gerando outros dedos, levando a uma solução estacionária em que vários dedos movem-se todos com a mesma velocidade. Isso corresponde às soluções estacionárias de múltiplos dedos discutido no fim do capítulo 2. Este fenômeno é conhecido como *tip-splitting*. Matematicamente, o fenômeno de *tip-splitting* acontece quando

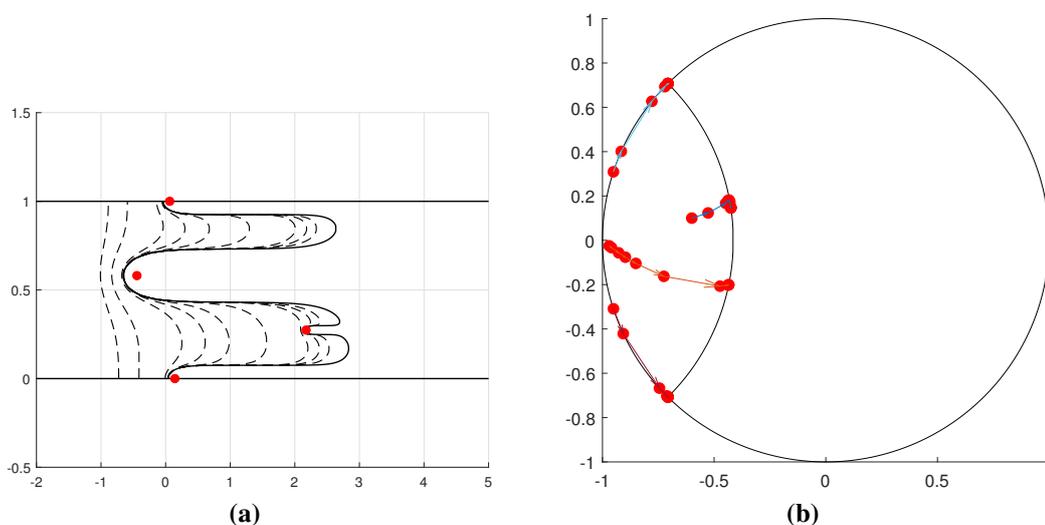


Figura 30 – (a) Evolução de dois dedos viscosos que posteriormente transformam-se em três dedos; (b) Evolução temporal das singularidades $a_k(t)$.

um dedo viscoso encontra uma singularidade da função de Schwarz e não consegue se desviar dela. Nesse caso, uma parte da interface fica "presa" por essa singularidade, levando à formação de um fjord horizontal. Posteriormente, esses dois ramos da interface avançam, dando origem no regime estacionário a dois dedos viscosos que se formaram a partir de um único dedo inicial. Na figura 30a podemos ver que inicialmente temos dois dedos viscosos, mas em determinado instante o dedo localizado na parte inferior do canal divide-se em dois.

Na figura 30b podemos ver a evolução das singularidades $a_k(t)$, inicialmente localizadas em: $a_1(0) = \exp(0.9i\pi)$, $a_2(0) = \exp(-0.9i\pi)$, $a_3(0) = -0.6 + 0.1i$, $a_4(0) = -0.97 - 0.025i$ e os coeficientes α_k são $\alpha_1 = 0.15$, $\alpha_2 = 0.15$, $\alpha_3 = 0.6$ e $\alpha_4 = 0.1$. Note que elas movem-se em direção ao arco $C_1^{(dentro)}$ da circunferência C_1 que está no interior do círculo unitário e acabam fixando-se neste arco, formando assim 3 dedos em contraste com os casos anteriores, onde as singularidades inicialmente aproximavam-se de $C_1^{(dentro)}$ mas depois convergiam para ζ_1 e ζ_2 , dando origem a apenas um dedo viscoso.

3.6.2 Configurações que levam a $U \neq 2$

Nesse caso, usamos condições iniciais em que $z(\zeta, t)$ possui uma singularidade em $\zeta = -1$; vide Sec. 3.4.2.

Na figura 31 mostramos a evolução temporal de um dedo viscoso com velocidade assintótica $U = 4$ e simétrico com relação às paredes do canal. As linhas tracejadas representam os diferentes estágios de evolução da interface, enquanto a linha cheia mostra o dedo em seu último instante de tempo t utilizado na simulação. Analogamente ao caso das múltiplas bolhas estacionárias, discutido no capítulo 2, podemos perceber que há um "achatamento" na direção vertical do dedo ao aumentarmos a velocidade. Este fato pode ser explicado ao lembrarmos da conservação de massa do fluido discutida anteriormente, ou seja, $\lambda U = 1$. Portanto, ao

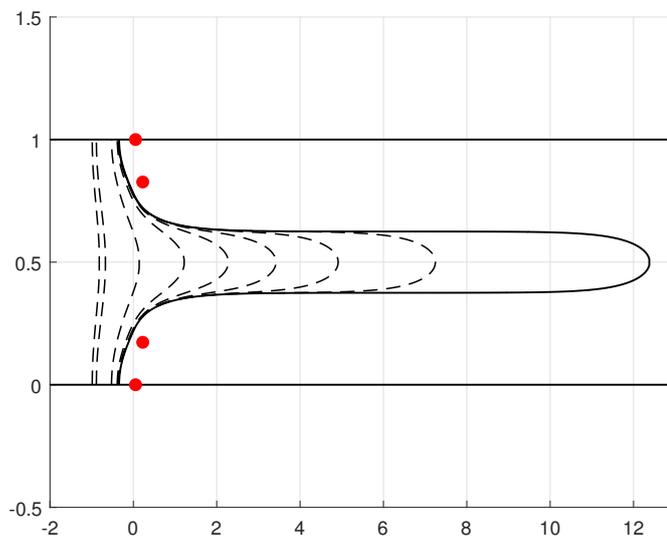


Figura 31 – Evolução temporal de um dedo viscoso com velocidade assintótica $U = 4$.

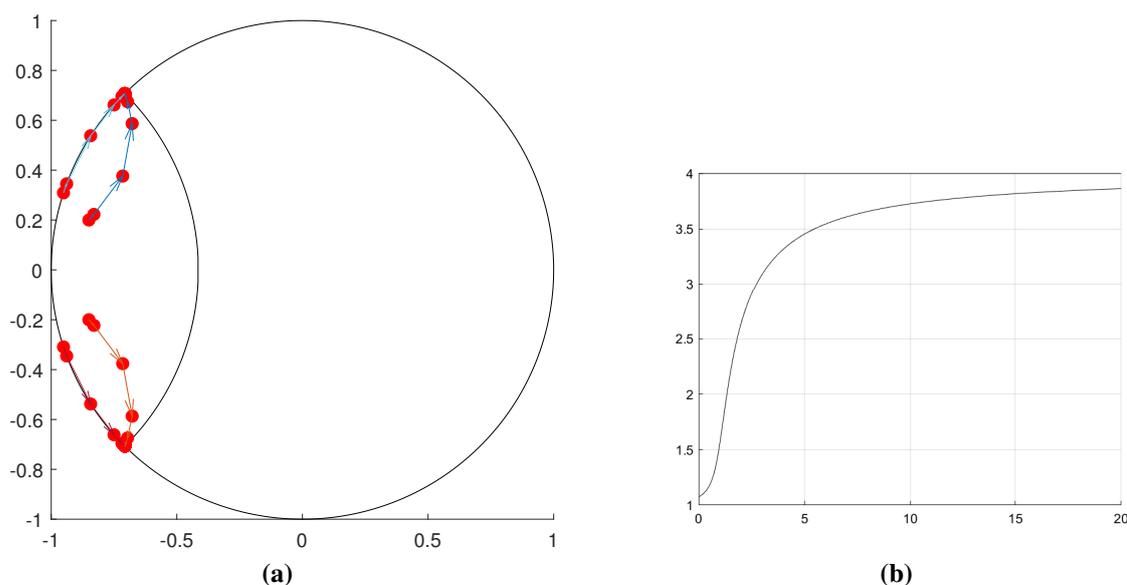


Figura 32 – (a) Evolução temporal dos parâmetros $a_k(t)$; (b) Evolução do parâmetro $d(t)$ que assintoticamente converge para $d(t) = 4$ quando $t \rightarrow \infty$.

aumentarmos o valor de U , a largura relativa do dedo, λ , deve diminuir para manter o produto sempre unitário.

A evolução dos parâmetros $a_k(t)$ para o exemplo da figura 31 é mostrada na figura 32a. As posições iniciais das singularidades são: $a_1(0) = \exp(0.9i\pi)$, $a_2(0) = \exp(-0.9i\pi)$, $a_3(0) = -0.85 + 0.2i$, $a_4(0) = -0.85 - 0.2i$ e os coeficientes α_k são $\alpha_0 = -0.5$, $\alpha_1 = 0.5$, $\alpha_2 = 0.5$, $\alpha_3 = 0.25$ e $\alpha_4 = 0.25$. Perceba que duas das singularidades convergem para o ponto ζ_1 e as duas outras para o ponto ζ_2 e desta forma, apenas um dedo viscoso é formado em resultado da evolução temporal dos parâmetros. Na figura 32b é exibido o comportamento da derivada temporal do parâmetro $d(t)$, que mostra a tendência prevista anteriormente de $d(t) \rightarrow Ut$, com $U = 4$, quando $t \rightarrow \infty$, como indica a figura 32b.

Na figura 33a reproduzimos as mesmas condições iniciais utilizadas para gerar a figura 29a com a adição de uma singularidade em $\zeta = -1$ de intensidade $\alpha_0 = -0.5$. As linhas tracejadas representam os diferentes estágios de evolução da interface, enquanto a linha cheia mostra o dedo no último instante de tempo t utilizado na simulação. Podemos notar novamente um claro achatamento na direção vertical do dedo viscoso, em consequência do fato de que $U = 4$ nesse caso. Note contudo que a fase inicial da evolução (linhas tracejadas) do dedo é bastante similar ao caso mostrado em 29a, onde $U = 2$. A figura 33b mostra a evolução temporal dos parâmetros $a_k(t)$ e como antes, as singularidades do mapa $a_k(t)$ aproximam-se do arco C_1 (dentro) gerando deformações na interface entre o fluido, mas não se fixam nele.

Na figura 34a mostramos a evolução de dois dedos viscosos onde um deles encontra uma singularidade e se divide em dois ramos que assintoticamente viram dois dedos viscosos, levando à formação de três dedos que se movem com velocidade $U = 1,7$ quando $t \rightarrow \infty$. As

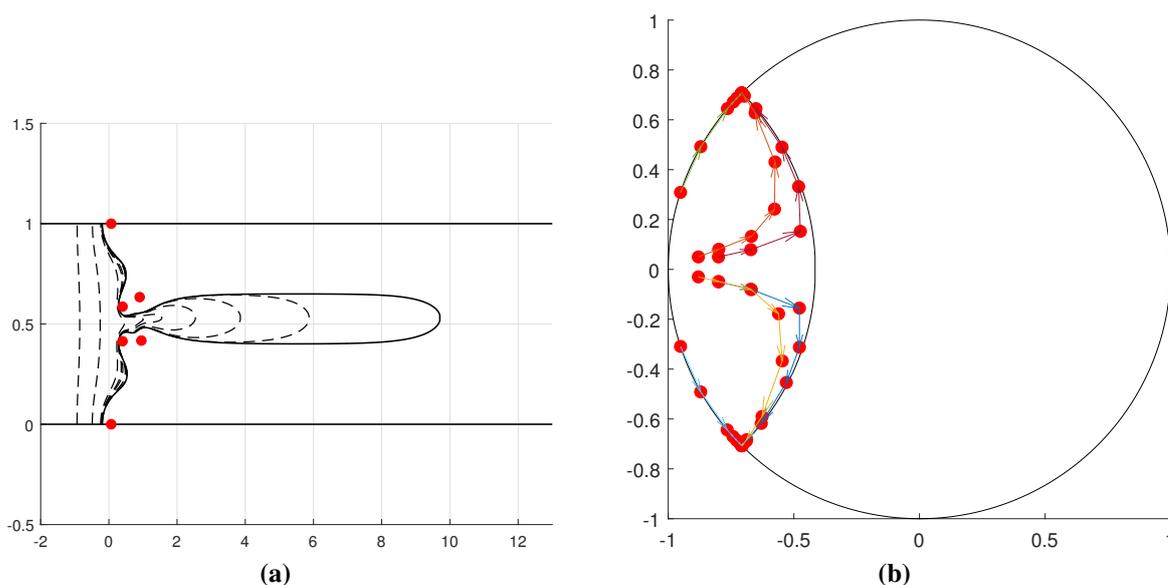


Figura 33 – (a) Evolução de um dedo viscoso com velocidade assintótica $U = 4$; (b) Evolução temporal dos parâmetros $a_k(t)$.

linhas tracejadas representam estágios iniciais da evolução da interface, enquanto a linha cheia mostra os dedos viscosos no instante de tempo final t utilizado na simulação numérica.

O comportamento das singularidades $a_k(t)$ é mostrado na figura 34b. As localizações iniciais das singularidades são $a_1(0) = \exp(0.9i\pi)$, $a_2(0) = \exp(-0.9i\pi)$, $a_3(0) = -0.8 + 0.1i$, $a_4(0) = -0.97 - 0.025i$ e os coeficientes α_k são $\alpha_0 = 0.2$, $\alpha_1 = 0.15$, $\alpha_2 = 0.15$, $\alpha_3 = 0.4$ e $\alpha_4 = 0.1$. Perceba que em comparação com o caso anterior, as singularidades convergem para pontos no arco de circunferência $C_1^{(dentro)}$, ao invés dos pontos ζ_1 e ζ_2 . Como duas das singularidades

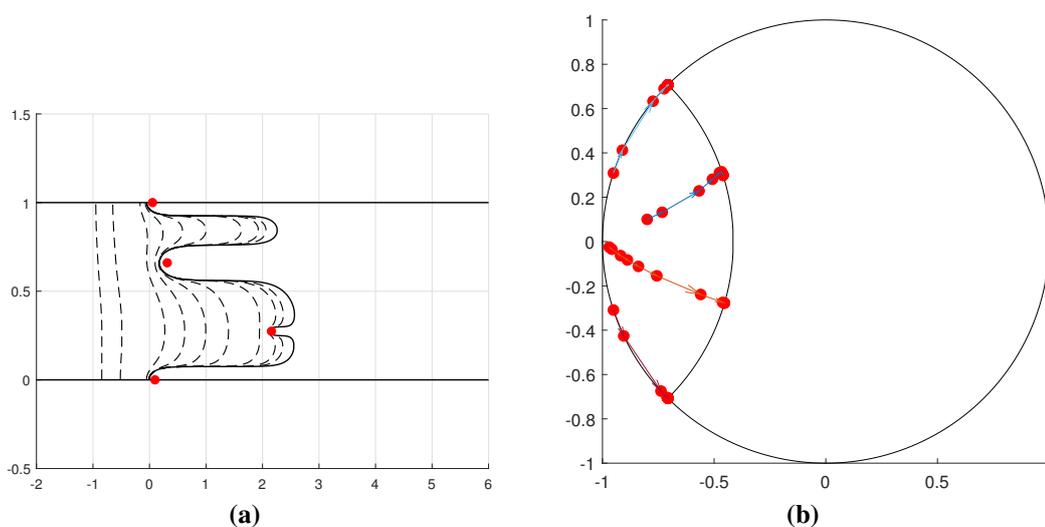


Figura 34 – (a) Evolução de dois dedos viscosos em que um deles se divide em dois ramos formando assintoticamente um arranjo de três dedos que se movem com velocidade constante $U = 1.7$; (b) Evolução temporal dos parâmetros $a_k(t)$.

convergem para $C_1^{(dentro)}$, temos assintoticamente três dedos viscosos, diferentemente dos casos mostrados anteriormente em que apenas um dedo é formado no regime estacionário.

3.7 Comportamento assintótico das soluções

Nesta seção vamos analisar o comportamento das soluções (3.37) e (3.55) quando $t \rightarrow \infty$ e explicar por que em algumas das simulações observamos que as singularidades convergiam para os pontos ζ_1 e ζ_2 e em outras convergiam também para pontos no arco de circunferência $C_1^{(dentro)}$.

3.7.1 Soluções com velocidade assintótica $U = 2$

Agora vamos mostrar como as soluções com condições iniciais tais que o mapa $z(\zeta, 0)$ não possui singularidade em $\zeta = -1$ convergem para soluções estacionárias com velocidade assintótica $U = 2$ discutidas no capítulo 2. Considere inicialmente a grandeza β_+ definida em (3.54), que reproduzimos abaixo por conveniência:

$$\beta_+ \equiv g(1, t) - 2t = -\log 2 + d(t) - i\chi + \sum_{k=1}^N \left\{ \frac{\bar{\alpha}_k}{2} \log \left(\frac{1 - \theta_1(1/\bar{a}_k(t))}{\theta_1(1/\bar{a}_k(t)) + \sqrt{2}} \right) + \frac{\alpha_k}{2} \log \left(\frac{1 - \theta_1(a_k(t))}{\theta_1(a_k(t)) + \sqrt{2}} \right) \right\} - 2t. \quad (3.71)$$

Considere agora o limite $t \rightarrow \infty$ da expressão acima. O termo β_+ é uma constante de movimento, portanto, como todos os termos de logaritmo e χ permanecem finitos para qualquer t , então os termos $d(t)$ e $-2t$ devem se cancelar para que β_+ permaneça constante. Isso nos leva a concluir que

$$d(t) = 2t, \quad \text{quando } t \rightarrow \infty. \quad (3.72)$$

Analisaremos agora o comportamento das quantidades β_k definidas em (3.49) e reproduzidas aqui:

$$\beta_k \equiv z(\theta_1(1/\bar{a}_k(t)), t) = -\log(\theta_1(1/\bar{a}_k(t)) - 1) + \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{\alpha_j}{2} \log(\theta_1(1/\bar{a}_k(t)) - a_j(t)) + \frac{\bar{\alpha}_j}{2} \log(\theta_1(1/\bar{a}_k(t)) - 1/\bar{a}_j(t)) \right\} + i\chi + d(t). \quad (3.73)$$

Tomando agora o limite $t \rightarrow \infty$ na expressão acima e usando (3.72), vemos que para manter β_k constante um dos termos (ou os dois) no somatório da expressão acima deve cancelar a divergência do termo $d(t)$ para $t \rightarrow \infty$. Para que isto aconteça, um dos termos no interior do logaritmo deve ir a zero. A única possibilidade de que isso aconteça é para o termo $j = k$, ou seja,

$$\theta_1(1/\bar{a}_k(t)) - a_k(t) = 0 \quad (3.74)$$

ou

$$\theta_1(1/\bar{a}_k(t)) - 1/\bar{a}_k(t) = 0. \quad (3.75)$$

Lembrando agora que para pontos no círculo C_1 temos $\theta_1(1/\bar{\zeta}) = \zeta$, vemos que há 3 possibilidades em que as igualdades (3.74) e (3.75) são verdadeiras: (i) $a_k(t) \rightarrow \zeta_1$ quando $t \rightarrow \infty$; (ii) $a_k(t) \rightarrow \zeta_2$ quando $t \rightarrow \infty$; (iii) $a_k(t)$ converge para algum ponto em $C_1^{(dentro)}$ quando $t \rightarrow \infty$. Note que (i) e (ii) satisfazem ambas as equações acima, pois $\bar{\zeta}_i = 1/\zeta_i$, $i = 1, 2$ no entanto, (iii) satisfaz apenas a primeira.

Note ainda que os coeficientes α_k determinam quais das 3 possibilidades acontecem. Suponha que escolhermos α_k complexo para um dado k . O termo $d(t)$ é real, portanto, os termos do somatório devem divergir pelo eixo real para cancelar $d(t)$. Isto só acontece se ambas as equações acima forem obedecidas, de forma que teremos

$$\frac{\alpha_k}{2} \log(\theta_1(1/\bar{a}_k(t)) - a_k(t)) + \frac{\bar{\alpha}_k}{2} \log(\theta_1(1/\bar{a}_k(t)) - 1/\bar{a}_k(t)) = \left(\frac{\alpha_k}{2} + \frac{\bar{\alpha}_k}{2} \right) \sigma, \quad (3.76)$$

onde $\sigma \rightarrow \infty$. Assim, se escolhermos α_k complexo para um dado k , a singularidade $a_k(t)$ converge assintoticamente para ζ_1 ou ζ_2 , recuperando a solução estacionária para um único dedo com velocidade assintótica $U = 2$. Se por outro lado escolhermos α_k real para um dado k , então qualquer uma das duas equações acima sendo obedecida é suficiente para cancelar o termo $d(t)$ quando $t \rightarrow \infty$. Portanto, se escolhermos α_k real para um dado k , a singularidade $a_k(t)$ converge assintoticamente para ζ_1 , ζ_2 ou para algum ponto no arco $C_1^{(dentro)}$, a depender das condições iniciais, recuperando a solução estacionária para um ou múltiplos dedos com velocidade assintótica $U = 2$, dada por

$$z(\zeta, t) = -\log(\zeta - 1) + \sum_{k=1}^N \left(\frac{\alpha_k}{2} \log(\zeta - \zeta_k) + \frac{\bar{\alpha}_k}{2} \log\left(\zeta - 1/\bar{\zeta}_k\right) \right), \quad (3.77)$$

onde o número de dedos é dado por $N - 1$ e ζ_k é um ponto no arco $C_1^{(dentro)}$.

3.7.2 Soluções com velocidade assintótica $U \neq 2$

Mostraremos nesta subseção como as soluções com condições iniciais tais que uma das singularidades do mapeamento conforme está em $\zeta = -1$ convergem para soluções estacionárias com velocidade assintótica $U \neq 2$ discutidas no capítulo 2.

O procedimento a ser seguido nesta subseção é o mesmo adotado para o caso de $U = 2$. Começamos por tomar o limite $t \rightarrow \infty$ na equação (3.65),

$$\beta_+ = (\alpha_0 + 1)d(t) - 2t + B(t). \quad (3.78)$$

O termo β_+ é uma constante do movimento, portanto, como $B(t)$ é um termo que permanece finito para qualquer t , os termos $(\alpha + 1)d(t)$ e $-2t$ devem se cancelar. Portanto, vemos que

$$d(t) = \frac{2t}{\alpha_0 + 1}, \quad \text{quando } t \rightarrow \infty. \quad (3.79)$$

Considere agora as quantidades β_k para esse caso dadas em (3.59):

$$\beta_k \equiv z(\theta_1(1/\bar{a}_k(t)), t) = -\log(\theta_1(1/\bar{a}_k(t)) - 1) + \alpha \log(\theta_1(1/\bar{a}_k(t)) + 1) + i\chi + d(t) \\ + \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{\alpha_j}{2} \log(\theta_1(1/\bar{a}_k(t)) - a_j(t)) + \frac{\bar{\alpha}_j}{2} \log(\theta_1(1/\bar{a}_k(t)) - 1/\bar{a}_j(t)) \right\}. \quad (3.80)$$

Tomando agora o limite $t \rightarrow \infty$ nessa expressão e usando (3.79), vemos que para manter β_k constante um dos termos (ou os dois) no somatório da expressão acima deve cancelar o termo $d(t)$. Para que isto aconteça, o termo no interior do logarítmo deve ir a zero, ou seja, as singularidades $a_k(t)$ devem obedecer as equações (3.74) e (3.75).

Analogamente ao caso anterior temos 3 possibilidades para o comportamento assintótico das singularidades $a_k(t)$: (i) $a_k(t) \rightarrow \zeta_1$ quando $t \rightarrow \infty$; (ii) $a_k(t) \rightarrow \zeta_2$ quando $t \rightarrow \infty$; (iii) $a_k(t)$ converge para algum ponto em $C_1^{(dentro)}$ quando $t \rightarrow \infty$. Note que (i) e (ii) satisfazem ambas as equações (3.74) e (3.75), no entanto (iii) satisfaz apenas (3.74).

Utilizando o mesmo raciocínio da subseção anterior, podemos concluir que se escolhermos α_k complexo para algum k , então a singularidade $a_k(t)$ converge assintoticamente para ζ_1 ou ζ_2 , e recuperamos a solução estacionária para um único dedo viscoso com $U \neq 2$. Por outro lado, se escolhermos α_k real para um dado k , a singularidade $a_k(t)$ converge assintoticamente para ζ_1 , ζ_2 ou para algum ponto no arco $C_1^{(dentro)}$, e recuperamos a solução estacionária para um ou múltiplos dedos com velocidade assintótica $U \neq 2$, dada por

$$z(\zeta, t) = -\log(\zeta - 1) + \sum_{k=1}^N \left(\frac{\alpha_k}{2} \log(\zeta - \zeta_k) + \frac{\bar{\alpha}_k}{2} \log(\zeta - 1/\bar{\zeta}_k) \right) + \alpha_0 \log(\zeta + 1), \quad (3.81)$$

onde o número de dedos é dado por $N - 1$ e ζ_k é um ponto no arco $C_1^{(dentro)}$. Comparando o termo singular em $\zeta = -1$ nessa expressão com o termo correspondente na solução estacionária dada em (2.73), concluímos que

$$\alpha_0 = \frac{2}{U} - 1, \quad (3.82)$$

então o termo $d(t)$ converge para Ut quando $t \rightarrow \infty$.

Vemos assim que partindo de uma condição inicial $z(\zeta, 0)$ com singularidade em $\zeta = -1$ de intensidade α_0 , a solução $z(\zeta, t)$ evolui para a solução estacionária com velocidade U , a qual é determinada pela intensidade da singularidade em $\zeta = -1$:

$$U = \frac{2}{\alpha_0 + 1}. \quad (3.83)$$

3.8 Seleção da velocidade assintótica

Desde o trabalho pioneiro de Saffman e Taylor em 1958 um dos grandes problemas envolvendo a evolução de interfaces em canais de Hele-Shaw é a seleção de um único padrão assintótico em meio a um contínuo de soluções estacionárias para tensão superficial nula.

Diversos experimentos mostram que para dedos viscosos longos, ou seja, dedos que já atingiram o regime estacionário, a velocidade de movimento do arranjo dos dedos é duas vezes aquela do escoamento no infinito. Em outras palavras, a velocidade assintótica dos dedos sempre converge para $U = 2V$. Durante mais de 20 anos, diversos grupos trabalharam no problema com o intuito de encontrar uma explicação para o fenômeno da seleção de velocidade. Em meados da década de 80 alguns trabalhos [9, 10, 11, 12] mostraram que a inclusão de tensão superficial no problema restringia as soluções estacionárias a um conjunto discreto de possíveis valores para U , sendo que todos esses "ramos" de solução convergem para $U = 2$ no limite em que a tensão superficial vai a zero.

Contudo, recentemente foi mostrado que para um único dedo viscoso [42], uma única bolha em um canal de Hele-Shaw [21] e uma bolha em uma célula de Hele-Shaw sem paredes [43], a seleção de velocidade assintótica acontece mesmo quando a tensão superficial é desconsiderada. A seleção se dá pelo fato que as soluções com $U \neq 2$ são instáveis, de forma que sob uma perturbação genérica as soluções que inicialmente resultariam em $U \neq 2$ colapsam em soluções com velocidade assintótica $U = 2$.

A instabilidade das soluções com $U \neq 2$ pode ser vista com ajuda das discussões da seção (3.7). Vimos que quando começamos com uma configuração inicial em que o mapa $z(\zeta, t)$ tem uma singularidade em $\zeta = -1$ a evolução temporal do mapa leva a soluções estacionárias com $U \neq 2$ no limite $t \rightarrow \infty$. Suponha agora que façamos alguma perturbação nessas condições iniciais tirar essa singularidade do ponto $\zeta = -1$. Definamos então essa singularidade perturbada por

$$a_0(0) = -1 + \epsilon, \quad (3.84)$$

onde ϵ é uma pequena perturbação, ou seja, $|\epsilon| \ll 1$. Além disso, mantemos as demais singularidades nas suas posições iniciais originais, ou seja, $a_k(0) \neq -1, \forall k$.

Como agora não temos mais nenhuma singularidade de $z(\zeta, 0)$ em $\zeta = -1$, concluímos a partir da equação (3.83) que a solução perturbada converge para uma solução estacionária com velocidade assintótica $U = 2$ quando $t \rightarrow \infty$. Note em particular que a partir da discussão feita na subseção 3.7.1, a singularidade perturbada $a_0(t)$ afasta-se de $\zeta = -1$ e converge para um ponto no círculo C_1 , como vimos anteriormente (seja ζ_1, ζ_2 ou algum ponto em $C_1^{(dentro)}$).

Na linguagem de sistemas dinâmicos, dizemos que o ponto $\zeta = -1$ é um *repeller* das singularidades, ou seja, uma vez que a singularidade sai do ponto $\zeta = -1$ ela é repelida para longe deste ponto. Nessa mesma abordagem de sistemas dinâmicos, podemos então dizer que a solução estacionária com $U = 2$ é o único atrator das soluções dependentes do tempo. Isto mostra que a seleção da velocidade em uma célula de Hele-Shaw é um fenômeno inerente à dinâmica com tensão superficial nula.

A seleção da velocidade assintótica é ilustrada na figura 35a, onde temos um caso em que há uma singularidade em $\zeta = -1$ (linha azul) e um outro caso em que uma das singularidades

está inicialmente em $\zeta = -0.9999 + 0.0015i$ e as demais são exatamente iguais ao caso anterior (linha preta). É possível ver por esta figura que a perturbação da singularidade em $\zeta = -1$ é praticamente imperceptível na forma inicial da interface. No entanto, com o passar do tempo as formas dos dedos diferem drasticamente e um deles (linha azul) converge para velocidade assintótica $U \neq 2$ enquanto o outro (linha preta) converge para velocidade assintótica $U = 2$.

Também é possível ver o comportamento repelente do ponto $\zeta = -1$ através da figura 35b, que mostra a evolução das singularidades $a_k(t)$. Note que além das duas singularidades que começam próximas de $\zeta = -1$ em todos os exemplos explorados nesta dissertação, há uma outra próxima deste ponto, que corresponde à singularidade perturbada, que por sua vez afasta-se rapidamente do ponto $\zeta = -1$ e converge assintoticamente para ζ_2 .

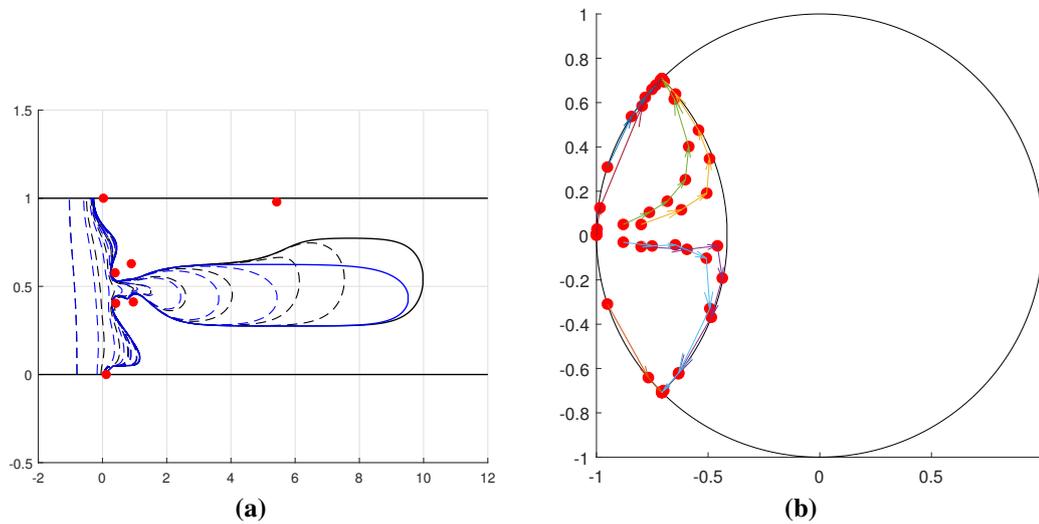


Figura 35 – (a) Evolução temporal de duas interfaces que inicialmente parecem ser idênticas mas que convergem assintoticamente para formas e velocidades distintas; (b) Evolução temporal das singularidades $a_k(t)$ para a solução com velocidade assintótica $U = 2$ (linha preta).

4 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Neste capítulo vamos apresentar as principais conclusões sobre o modelo proposto nesta dissertação. Vamos discutir também algumas perspectivas de extensão do modelo para a abordagem de problemas mais gerais.

4.1 Conclusões

No capítulo 2 introduzimos o formalismo das funções secundárias de Schottky-Klein. Estas funções recentemente desenvolvidas têm aplicação em problemas de teoria de potencial na representação de objetos como a função de Green e medidas harmônicas [44] e em problemas de fronteira livre. Estas funções foram utilizadas ainda naquele capítulo no desenvolvimento das soluções estacionárias para o movimento de múltiplas bolhas e múltiplos dedos em um canal de Hele-Shaw. Ainda no capítulo 2 tomamos ambas as soluções para o caso de uma bolha e um dedo viscoso e comparamos com as soluções encontradas por Saffman e Taylor em 1959 e 1958, respectivamente.

No capítulo 3 introduzimos os conceitos de função de Schwarz e da dinâmica de pólos, ilustrados através do crescimento de uma interface em uma célula de Hele-Shaw radial. A dinâmica de pólos consiste em calcular as singularidades da função de Schwarz na região do fluido, que são constantes do movimento, e a partir delas pode-se encontrar a evolução da interface. Na seção 3.4 propusemos soluções não estacionárias para o movimento de múltiplos dedos em um canal de Hele-Shaw. Ainda neste capítulo derivamos um sistema de equações diferenciais para os parâmetros do problema. Na seção 3.6 mostramos diversas simulações numéricas para diferentes condições iniciais, realizadas integrando numericamente o sistema de EDO's encontrado anteriormente. Por fim, analisamos o comportamento assintótico das soluções para dois tipos de configuração inicial. Mostramos também como nosso modelo explica o fenômeno da seleção de velocidade assintótica na ausência de tensão superficial verificado em diversos experimentos.

Nosso modelo para soluções dependentes do tempo para dedos viscosos surge como uma extensão das soluções estacionárias para o movimento de múltiplos dedos viscosos desenvolvidas em [17]. Utilizando expressões matematicamente simples — logaritmos de monômios e mapas de Möbius — conseguimos modelar a evolução da interface livre e mostrar que para tempos longos as soluções convergem para o caso assintótico, isto é, as soluções estacionárias, como esperado. Através das simulações foi possível observar também o fenômeno de *tip-splitting*, onde uma porção da interface fica "presa" por uma das singularidades da função de Schwarz presente na região do escoamento, causando a divisão da interface em dois ramos que viram dois

dedos viscosos no limite assintótico.

O fato experimental de um dedo viscoso mover-se com velocidade igual ao dobro da velocidade do escoamento no infinito, mesmo havendo um contínuo de soluções estacionárias para tensão superficial nula, é explicado naturalmente pelo modelo em questão sem a necessidade da inclusão de tensão superficial.

Nesse cenário a seleção acontece a partir da escolha das condições iniciais do problema. Ao escolhermos uma condição inicial tal que nenhuma das singularidades do mapeamento conforme $z(\zeta)$ está em $\zeta = -1$ a solução converge assintoticamente para a solução estacionária com $U = 2$. Por outro lado, se escolhermos uma condição inicial tal que uma das singularidades do mapeamento se localiza em $\zeta = -1$ a solução converge assintoticamente para a solução estacionária com $U \neq 2$. No entanto, esta solução é instável e qualquer perturbação que tire a singularidade do ponto $\zeta = -1$ a faz convergir para a solução estacionária com $U = 2$. Isto reafirma o que fora demonstrado recentemente para um dedo viscoso em um canal de Hele-Shaw [42], para uma bolha em um canal [21] e para uma bolha em uma célula de Hele-Shaw sem paredes laterais [43]: A seleção da velocidade assintótica em uma célula de Hele-Shaw é um fenômeno inerente à dinâmica com tensão superficial nula.

Embora as soluções dependentes do tempo para múltiplos dedos fossem conhecidas em outro formalismo, que usava círculos e um segmento de reta, formulamos o modelo em termos do formalismo das funções secundárias de Schottky-Klein e utilizando um domínio circular, o que permite a generalização para o caso de múltiplas bolhas de forma quase imediata. Esta generalização será discutida na próxima seção.

4.2 Perspectivas

O modelo discutido nesta dissertação possibilita a extensão das soluções aqui encontradas para aplicação ao movimento de múltiplas bolhas. Genericamente falando, essa extensão é feita "trazendo-se" o círculo C_1 (vide figura 22) para o interior de C_0 e adicionando-se outras M fronteiras circulares C_k , a depender da conectividade do problema em questão. Essa forma de generalizar as soluções obtidas anteriormente vem de que um dedo viscoso pode ser visto como uma bolha de área infinita e ao "trazermos" o círculo ortogonal C_1 para dentro do círculo unitário, a bolha passa a ter uma área finita, pois nenhum ponto da interface é mapeado no infinito. Como mencionado acima, podemos incluir mais bolhas no sistema considerando um conjunto adicional de M círculos interiores a C_0 , sendo cada um desses círculos mapeados em uma bolha.

Neste caso, as condições de contorno para o potencial complexo no referencial do laboratório, $w(z)$, são as mesmas discutidas no capítulo 2. A figura 36a mostra a região do escoamento no plano físico z para o caso de três bolhas. A figura 36b ilustra a região do escoamento no plano do potencial complexo $w(z)$, formado por uma faixa de largura π e três cortes verticais representando $\phi = cte$ para cada uma das bolhas. A figura 36c ilustra a região

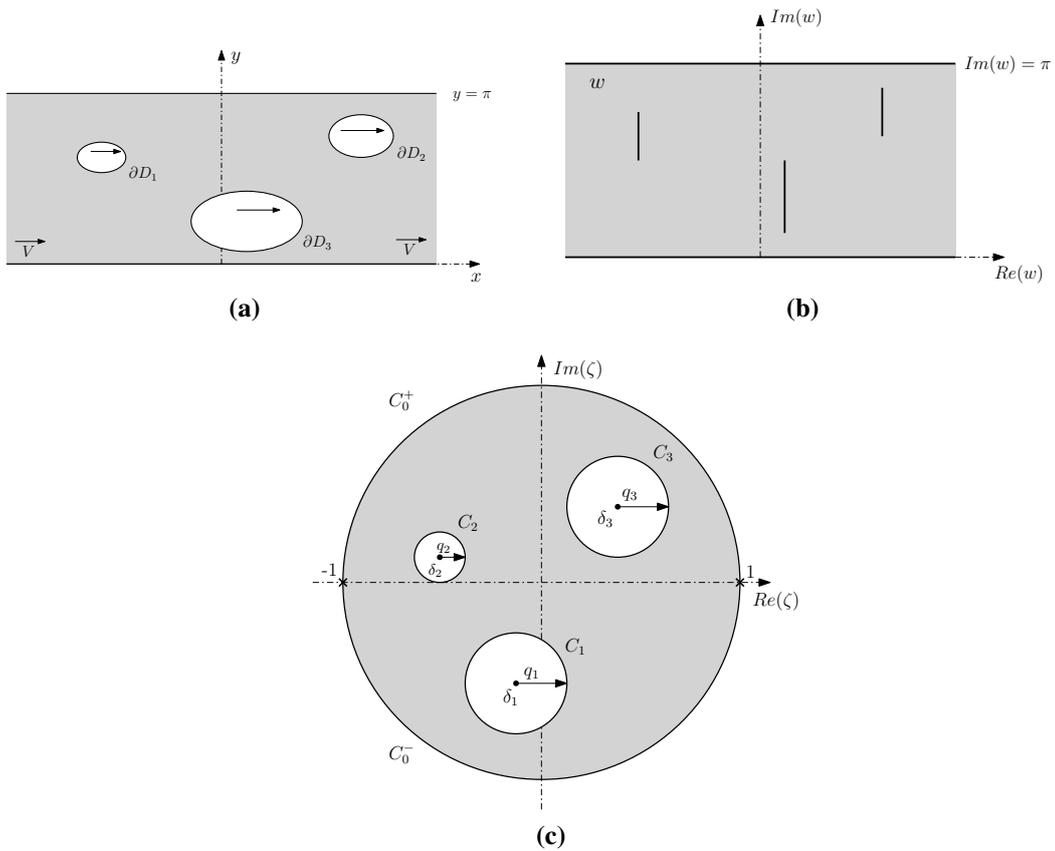


Figura 36 – (a) Região do escoamento no plano físico z ; (b) Região do escoamento no plano do potencial complexo $w(z)$; (c) Região do escoamento no plano auxiliar ζ .

do escoamento D_ζ no plano auxiliar ζ , formada pelo interior da circunferência unitária com 3 círculos excluídos, onde cada círculo é mapeado em uma das bolhas.

Como as condições de contorno para $w(z)$ são as mesmas do problema de múltiplas bolhas movendo-se com velocidade constante estudado no capítulo 2, então a forma analítica para $W(\zeta)$ é a mesma da equação (2.47). Tal como no caso de soluções dependentes do tempo para os dedos viscosos discutidos no capítulo 3, aqui também o problema se reduz a calcular o mapeamento $z(\zeta, t)$ apropriado que leva o domínio D_ζ na região ocupada pelo fluido, isto é, exterior às bolhas, no plano z . Em direta analogia com a fórmula (3.37) para o caso dos dedos viscosos, Mineev-Weinstein e Vasconcelos [22] mostraram que uma solução exata dependente do tempo para o caso das múltiplas bolhas é dado por

$$z(\zeta, t) = d(t) + i\chi + \log \left(\frac{\Omega_M(\zeta, \zeta_-)}{\Omega_M(\zeta, \zeta_+)} \right) + \sum_{k=1}^N \{ \alpha_k \log \Omega_M(\zeta, a_k(t)) + \bar{\alpha}_k \log \Omega_M(\zeta, 1/\bar{a}_k(t)) \} \quad (4.1)$$

onde $d(t)$ é um parâmetro real e χ é um termo adicionado para garantir que $\overline{z(\zeta, t)} = z(\zeta, t)$ para $\zeta \in C_0$, ou seja, para garantir que a circunferência unitária seja mapeada nas paredes do canal durante toda a evolução temporal.

A evolução dos parâmetros $a_k(t)$ e $d(t)$ é encontrada através de um procedimento análogo

ao aplicado ao problema dos múltiplos dedos. A posição das singularidades da função de Schwarz, $S(z, t)$, localizadas na região do escoamento devem ser fixas, ou seja,

$$\beta_k \equiv z(\theta_l(1/\bar{a}_k(t)), t) = cte, \quad (4.2)$$

onde β_k são as singularidades da função de Schwarz $S(z, t)$ e $\theta_l(\zeta)$ é a transformação ou mapa de Möbius definido no capítulo 2. Isso significa que β_k são quantidades conservadas da dinâmica. As outras duas constantes de movimento necessárias para obter a evolução temporal dos parâmetros $a_k(t)$ e $d(t)$ podem ser obtidas ao analisarmos o comportamento da função de Schwarz quando $z \rightarrow \pm\infty$, ou seja,

$$\dot{\beta}_{\pm} = \frac{\partial S(z \rightarrow \pm\infty, t)}{\partial t} - 2 = 0. \quad (4.3)$$

Isto nos leva a concluir que $\beta_{\pm} = cte$ e temos então o conjunto de constantes de movimento necessário para determinar a evolução temporal dos parâmetros.

Partindo destas quantidades conservadas podemos encontrar um sistema de equações diferenciais como feito na seção 3.5 que a princípio pode ser integrado numericamente para determinar os parâmetros do mapeamento conforme (4.1) em um dado instante de tempo t .

A dificuldade associada às soluções dependentes do tempo para o movimento de múltiplas bolhas reside no cálculo das funções secundárias de Schottky-Klein $\Omega_M(\zeta, \gamma)$ quando os argumentos ζ ou γ estão em certas regiões do plano ζ . Em algumas dessas regiões a rotina em Matlab desenvolvida pelo grupo do Imperial College (e que foi adaptada nesta dissertação para produzirmos as figuras do capítulo 2) não "funciona", ou seja, a rotina não converge. Desta forma, torna-se necessário desenvolver uma nova rotina numérica que seja capaz de computar $\Omega_M(\zeta, \gamma)$ nos pontos necessários para determinarmos a evolução temporal dos parâmetros $a_k(t)$ e $d(t)$ da solução (4.1).

Chegamos a iniciar a implementação dessa nova rotina, mas devido à complexidade das funções secundárias de Schottky-Klein ainda não foi possível concluí-la. Como extensão natural desta dissertação, pretendemos agora completar a rotina para o cálculo geral das funções $\Omega_M(\zeta, \gamma)$ e em seguida fazer o estudo numérico detalhado das soluções dependentes do tempo para múltiplas bolhas apresentadas na Ref. [22].

REFERÊNCIAS

- 1 PELCÉ, P. *Dynamics of Curved Fronts*. Boston: Academic Press, 1988.
- 2 CAMIRAND, M.; JAHODA, M.; HORNOF, V. Effect of gravity forces on oil recovery in a hele-shaw cell. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, v. 79, n. 1, p. 161–163, 2001.
- 3 DIAS, E. O. R. *Otimização e controle de interfaces instáveis e de forças adesiva em fluidos*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Pernambuco, Departamento de Física, Curso de Pós-Graduação em Física, Recife, 2014.
- 4 <<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Dendrites01.jpg>>.
- 5 <http://www.fossiltransition.org/pages/_enhanced_oil_recovery__eor__/_154.php>.
- 6 SAFFMAN, P. G.; TAYLOR, G. The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, v. 245, n. 1242, p. 312–329, 1958.
- 7 HELE-SHAW, H. S. The flow of water. *Nature*, v. 58, n. 1489, p. 34–36, 1898.
- 8 TAYLOR, G.; SAFFMAN, P. G. A note on the motion of bubbles in a Hele-Shaw cell and porous medium. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, v. 12, n. 3, p. 265–279, 1959.
- 9 COMBESCOT, R. et al. Shape selection of Saffman-Taylor fingers. *Physical Review Letters*, v. 56, n. 19, p. 2036–2039, 1986.
- 10 HONG, D. C.; LANGER, J. S. Analytic theory of the selection mechanism in the Saffman-Taylor problem. *Physical Review Letters*, v. 56, n. 19, p. 2032–2035, 1986.
- 11 SHRAIMAN, B. I. Velocity selection and the Saffman-Taylor problem. *Physical Review Letters*, v. 56, n. 19, p. 2028–2031, 1986.
- 12 TANVEER, S. New solutions for steady bubbles in a Hele–Shaw cell. *Physics of Fluids*, v. 30, n. 3, p. 651, 1987.
- 13 MINEEV-WEINSTEIN, M.; WIEGMANN, P. B.; ZABRODIN, A. Integrable structure of interface dynamics. *Physical Review Letters*, v. 84, n. 22, p. 5106–5109, 2000.
- 14 AGAM, O. et al. Viscous fingering and the shape of an electronic droplet in the quantum hall regime. *Physical Review Letters*, v. 88, n. 23, 2002.
- 15 MINEEV-WEINSTEIN, M.; PUTINAR, M.; TEODORESCU, R. Random matrices in 2d, Laplacian growth and operator theory. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 41, n. 26, p. 263001, 2008.
- 16 HOWISON, S. D. Fingering in Hele-Shaw cells. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 167, n. -1, p. 439, 1986.
- 17 VASCONCELOS, G. L. Multiple bubbles and fingers in a Hele-Shaw channel: complete set of steady solutions. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 780, p. 299–326, 2015.

- 18 BENSIMON, D. et al. Viscous flows in two dimensions. *Reviews of Modern Physics*, v. 58, n. 4, p. 977–999, 1986.
- 19 MINEEV-WEINSTEIN, M. B.; DAWSON, S. P. Class of nonsingular exact solutions for Laplacian pattern formation. *Physical Review E*, v. 50, n. 1, p. R24–R27, 1994.
- 20 DAWSON, S. P.; MINEEV-WEINSTEIN, M. Long-time behavior of the n-finger solution of the Laplacian growth equation. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 73, n. 4, p. 373–387, 1994.
- 21 VASCONCELOS, G. L.; MINEEV-WEINSTEIN, M. Selection of the Taylor-Saffman bubble does not require surface tension. *Physical Review E*, v. 89, n. 6, 2014.
- 22 MINEEV-WEINSTEIN, M.; VASCONCELOS, G. L. Velocity selection (without surface tension) in multi-connected Laplacian growth. *Physical Review Fluids (submetido)*, 2018. ArXiv:1501.01052.
- 23 KOEBE, P. Abhandlungen zur theorie der konformen abbildung: IV. abbildung mehrfach zusammenhängender schlichter bereiche auf schlitzbereiche. *Acta Mathematica*, v. 41, n. 0, p. 305–344, 1916.
- 24 POLUBARINOVA-KOCHINA, P. Y. On a problem of the motion of the contour of a petroleum shell. *Dokl. Akad. Nauk USSR*, v. 47, n. 4, p. 254–257, 1945.
- 25 GALIN, L. A. Unsteady filtration with a free surface. *Dokl. Akad. Nauk USSR*, v. 47, n. 4, p. 246–249, 1945.
- 26 VASIL'EV, A. From the Hele-Shaw experiment to integrable systems: a historical overview. *Complex analysis and operator theory*, v. 3, n. 2, p. 551–585, 2009.
- 27 VASCONCELOS, G. L. *Introdução à Dinâmica de Fluidos*. 2015. (Apostila).
- 28 GOLUZIN, G. M. *Geometric Theory of Functions of a Complex Variable*. Providence, R.I: AMS, 1969.
- 29 BAKER, H. F. *Abelian Functions : Abel's Theorem and the Allied Theory of Theta Functions*. Cambridge England New York: Cambridge University Press, 1995.
- 30 DELILLO, T. K.; KROPF, E. H. Slit maps and Schwarz-Christoffel maps for multiply connected domains. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, v. 36, p. 195–223, 2010.
- 31 CROWDY, D. G.; MARSHALL, J. S. Computing the Schottky-Klein prime function on the Schottky double of planar domains. *Computational Methods and Function Theory*, v. 7, n. 1, p. 293–308, 2007.
- 32 CROWDY, D. G. et al. The Schottky–Klein prime function: a theoretical and computational tool for applications. *IMA Journal of Applied Mathematics*, v. 81, n. 3, p. 589–628, 2016.
- 33 BURNSIDE, W. Further note on automorphic functions. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s1-23, n. 1, p. 281–295, 1891.
- 34 MILLAR, R. F. Bubble motion along a channel in a Hele-Shaw cell: A Schwarz function approach. *Complex Variables*, v. 18, p. 13–25, 1992.
- 35 VASCONCELOS, G. L. Exact solutions for steady bubbles in a Hele-Shaw cell with rectangular geometry. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 444, 2001.

- 36 WHITTAKER, E. T. *A Course of Modern Analysis : An Introduction to the General Theory of Infinite Processes and of Analytic Functions, With an Account of the Principal Transcendental Functions*. Cambridge New York: Cambridge University Press, 2000.
- 37 DAVIS, P. J. The Schwarz Function and its Applications. *Math. Assoc. of America, Carus Math. Monographs*, v. 17, 1974.
- 38 HOWISON, S. D. Complex variable methods in Hele–Shaw moving boundary problems. *European Journal of Applied Mathematics*, v. 3, n. 03, p. 209, 1992.
- 39 SHRAIMAN, B.; BENSIMON, D. Singularities in nonlocal interface dynamics. *Phys. Rev. A*, v. 30, p. 2840–2842, 1984.
- 40 SAFFMAN, P. G. Exact solutions for the growth of fingers from a flat interface between two fluids in a porous medium or Hele-Shaw cell. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, v. 12, n. 2, p. 146–150, 1959.
- 41 PATERSON, L. Radial fingering in a Hele-Shaw cell. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 113, n. -1, p. 513, 1981.
- 42 MINEEV-WEINSTEIN, M. Selection of the Saffman-Taylor finger width in the absence of surface tension: An exact result. *Physical Review Letters*, v. 80, n. 10, p. 2113–2116, 1998.
- 43 KHALID, A. H.; MCDONALD, N. R.; VANDEN-BROECK, J.-M. On the motion of unsteady translating bubbles in an unbounded Hele-Shaw cell. *Physics of Fluids*, v. 27, n. 1, p. 012102, 2015.
- 44 CROWDY, D.; MARSHALL, J. Green's functions for Laplace's equation in multiply connected domains. *IMA Journal of Applied Mathematics*, v. 72, n. 3, p. 278–301, 2007.

para todos os grupos Θ_N para $1 \leq N \leq M$, tendo em vista que os grupos diferem entre si através da forma que pareamos as fronteiras circulares do domínio.

Da forma definida acima, os geradores fundamentais do grupo Θ_N são sempre combinações de um número par de mapas θ_j , $j = 1, \dots, N$ e suas inversas, mas podem ser combinações de um número par ou ímpar dos mapas θ_j , $j = N + 1, \dots, M$ e suas inversas. Esta característica dos geradores fundamentais ψ_k implica que um elemento $\theta \in \Theta_0$ é ou um elemento $\psi \in \Theta_N$ ou uma composição do tipo $\psi \circ \theta_l$. Por exemplo, para o caso $M = 3$, $N = 2$, $l = 1$, o elemento $\theta = \theta_1 \theta_2 \theta_{-3}$ claramente não é um elemento de Θ_N , mas podemos decompô-lo como

$$\theta_1 \theta_2 \theta_{-3} = \theta_1 \theta_2 (\theta_{-1} \theta_1) \theta_{-3} (\theta_{-1} \theta_1) = (\theta_1 \theta_2 \theta_{-1}) (\theta_1 \theta_{-3} \theta_{-1}) \theta_1 = \psi_2 (\psi_3)^{-1} \theta_1. \quad (\text{A.2})$$

APÊNDICE B - DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO (3.27)

Seja $w(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ o potencial complexo do escoamento e $W(\zeta) = \frac{-Q}{2\pi} \log(\zeta)$ o potencial complexo do escoamento no plano auxiliar ζ . Da condição de pressão constante na interface do fluido, o que equivale a $\phi = \text{cte}$ na interface, e da condição cinemática $V_n = \partial\phi/\partial n$ temos

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla}\phi = 0. \quad (\text{B.1})$$

Escrevendo $\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial n}\hat{n} + \frac{\partial\phi}{\partial s}\hat{s}$ e usando que $\frac{\partial\phi}{\partial s} = 0$, ficamos com $\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial n}\hat{n}$. A velocidade pode ser escrita como $\vec{V} = V_n\hat{n} + V_s\hat{s}$, portanto,

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{V} \cdot (V_n\hat{n}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\phi}{\partial t} = -V_n^2.$$

Usando ainda a condição cinemática podemos reescrever

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = -|\vec{\nabla}\phi|^2. \quad (\text{B.2})$$

Escrevendo $\vec{\nabla}\phi$ em termos das coordenadas x e y , temos a equivalência

$$|\vec{\nabla}\phi|^2 = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 = |w'(z)|^2.$$

Lembrando que $w'(z) \frac{\partial f}{\partial \zeta} = W'(\zeta)$, ficamos com

$$|\vec{\nabla}\phi|^2 = \frac{|W'(\zeta)|^2}{|f'(\zeta)|^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\phi}{\partial t} = -\frac{|W'(\zeta)|^2}{|f'(\zeta)|^2}.$$

onde $f'(\zeta) = \frac{\partial f}{\partial \zeta}$. Temos ainda que

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial t} &= \text{Re} \left(\frac{dw(z)}{dt} \right) = \text{Re} \left(\frac{dW(\zeta)}{dt} \right) \\ &= \text{Re} \left(\frac{\partial W}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial t} \right) = \text{Re} \left(\frac{-Q}{2\pi\zeta} \zeta_t \right) = \frac{-Q}{2\pi} \text{Re} \left(\frac{\zeta_t}{\zeta} \right). \end{aligned}$$

Igualando as duas expressões para $\partial\phi/\partial t$, ficamos com

$$\frac{-Q}{2\pi} \text{Re} \left(\frac{\zeta_t}{\zeta} \right) = -\frac{Q^2}{(2\pi)^2 |f'(\zeta)|^2}. \quad (\text{B.3})$$

Por fim, temos ainda que em $|\zeta| = 1$,

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + f'(\zeta)\zeta_t = 0.$$

Podemos então reescrever (B.3) como

$$\operatorname{Re} \left(\frac{\partial f / \partial t}{\zeta f'(\zeta)} f'(\zeta) \overline{f'(\zeta)} \right) = \frac{-Q}{2\pi}.$$

Tomando o conjugado da equação anterior, chegamos na versão mais conhecida da equação de Polubarinova-Galin:

$$\operatorname{Re} \left(\zeta \frac{\partial f}{\partial \zeta} \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} \right) = \frac{-Q}{2\pi} \quad (\text{B.4})$$

APÊNDICE C - DERIVADAS DE β_k E β_+

Neste apêndice computamos explicitamente as derivadas das quantidades conservadas β_k e β_+ utilizadas para construir o sistema de equações diferenciais ordinárias.

Condições iniciais que levam a $U = 2$

Começamos com o caso das condições iniciais que levam a velocidade assintótica $U = 2$, no qual β_k e β_+ são dadas pelas equações (3.49) e (3.54), respectivamente. Computando as derivadas de β_k , temos

$$\frac{\partial \beta_k}{\partial a_j} = \frac{-\alpha_j/2}{\theta_1(1/\bar{a}_k(t)) - a_j(t)} - \frac{\alpha_j}{4a_j(t)} \quad (\text{C.1})$$

$$\frac{\partial \beta_k}{\partial \bar{a}_j} = \frac{\bar{\alpha}_j/2}{(\theta_1(1/\bar{a}_k(t)) - 1/\bar{a}_j(t))\bar{a}_j^2(t)} + \frac{\bar{\alpha}_j}{4\bar{a}_j(t)}, \quad j \neq k \quad (\text{C.2})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_k}{\partial \bar{a}_k} &= \frac{\theta_1'(1/\bar{a}_k(t))}{(\theta_1(1/\bar{a}_k(t)) - 1)\bar{a}_k^2(t)} + \frac{\bar{a}_k/2}{(\theta_1(1/\bar{a}_k(t)) - 1/\bar{a}_k(t))\bar{a}_k^2(t)} + \frac{\bar{\alpha}_k}{4\bar{a}_k(t)} \\ &- \sum_{j=1}^N \left(\frac{\alpha_j/2}{\theta_1(1/\bar{a}_k(t)) - a_j(t)} + \frac{\bar{\alpha}_j/2}{\theta_1(1/\bar{a}_k(t)) - 1/\bar{a}_j(t)} \right) \frac{\theta_1'(1/\bar{a}_k(t))}{\bar{a}_k^2(t)} \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

$$\frac{\partial \beta_k}{\partial d} = 1 \quad (\text{C.4})$$

Computando as derivadas de β_+ , temos

$$\frac{\partial \beta_+}{\partial a_j} = \frac{-\alpha_j}{2} \left(\frac{1}{1 - \theta_1(a_j(t))} + \frac{1}{\theta_1(a_j(t)) + \sqrt{2}} \right) \theta_1'(a_j(t)) + \frac{\alpha_j}{4a_j} \quad (\text{C.5})$$

$$\frac{\partial \beta_+}{\partial \bar{a}_j} = \frac{\bar{\alpha}_j}{2} \left(\frac{1}{1 - \theta_1(1/\bar{a}_j(t))} + \frac{1}{\theta_1(1/\bar{a}_j(t)) + \sqrt{2}} \right) \frac{\theta_1'(1/\bar{a}_j(t))}{\bar{a}_j^2(t)} - \frac{\bar{\alpha}_j}{4\bar{a}_j} \quad (\text{C.6})$$

$$\frac{\partial \beta_+}{\partial d} = 1 \quad (\text{C.7})$$

Condições iniciais que levam a $U \neq 2$

Vamos agora computar as derivadas das quantidades conservadas β_k e β_+ para o caso das condições iniciais que levam a velocidade assintótica $U \neq 2$, no qual β_k e β_+ são dadas pelas

equações (3.59) e (3.65), respectivamente. Computando as derivadas de β_k , temos

$$\frac{\partial \beta_k}{\partial a_j} = \frac{-\alpha_j/2}{\theta_1(1/\bar{a}_k(t)) - a_j(t)} - \frac{\alpha_j}{4a_j(t)} \quad (\text{C.8})$$

$$\frac{\partial \beta_k}{\partial \bar{a}_j} = \frac{\bar{\alpha}_j/2}{(\theta_1(1/\bar{a}_k(t)) - 1/\bar{a}_j(t))\bar{a}_j^2(t)} + \frac{\bar{\alpha}_j}{4\bar{a}_j(t)}, \quad j \neq k \quad (\text{C.9})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_k}{\partial \bar{a}_k} &= \frac{\theta_1'(1/\bar{a}_k(t))}{(\theta_1(1/\bar{a}_k(t)) - 1)\bar{a}_k^2(t)} + \frac{\bar{a}_k/2}{(\theta_1(1/\bar{a}_k(t)) - 1/\bar{a}_k(t))\bar{a}_k^2(t)} + \frac{\bar{\alpha}_k}{4\bar{a}_k(t)} \\ &- \sum_{j=1}^N \left(\frac{\alpha_j/2}{\theta_1(1/\bar{a}_k(t)) - a_j(t)} + \frac{\bar{\alpha}_j/2}{\theta_1(1/\bar{a}_k(t)) - 1/\bar{a}_j(t)} \right) \frac{\theta_1'(1/\bar{a}_k(t))}{\bar{a}_k^2(t)} - \frac{\alpha_0 \theta_1'(1/\bar{a}_k(t))}{(\theta_1(1/\bar{a}_k(t)) + 1)\bar{a}_k^2(t)} \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

$$\frac{\partial \beta_k}{\partial d} = 1 \quad (\text{C.11})$$

Computando as derivadas de β_+ , temos

$$\frac{\partial \beta_+}{\partial a_j} = \frac{-\alpha_j}{2} \left(\frac{1}{1 - \theta_1(a_j(t))} + \frac{1}{\theta_1(a_j(t)) + \sqrt{2}} \right) \theta_1'(a_j(t)) - \frac{(\alpha_0 - 1)\alpha_j}{4a_j} - \frac{\alpha_0 \alpha_j/2}{1 - a_j(t)} \quad (\text{C.12})$$

$$\frac{\partial \beta_+}{\partial \bar{a}_j} = \frac{\bar{\alpha}_j}{2} \left(\frac{1}{1 - \theta_1(1/\bar{a}_j(t))} + \frac{1}{\theta_1(1/\bar{a}_j(t)) + \sqrt{2}} \right) \frac{\theta_1'(1/\bar{a}_j(t))}{\bar{a}_j^2(t)} + \frac{(\alpha_0 - 1)\bar{\alpha}_j}{4\bar{a}_j} + \frac{\alpha_0 \bar{\alpha}_j/2\bar{a}_j^2(t)}{1 - 1/\bar{a}_j(t)} \quad (\text{C.13})$$

$$\frac{\partial \beta_+}{\partial d} = \alpha_0 + 1 \quad (\text{C.14})$$