Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-graduação em Matemática

Félix Ferreira Bernardo

Teoria qualitativa de equações em diferenças de tipo Volterra

Recife

2018

Félix Ferreira Bernardo

Teoria qualitativa de equações em diferenças de tipo Volterra

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Dr. Claudio Cuevas Henríquez

Recife

2018

Catalogação na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

B523t Bernardo, Félix Ferreira
Teoria qualitativa de equações em diferenças de tipo Volterra / Félix Ferreira Bernardo. – 2018.
98 f.

Orientador: Claudio Cuevas.
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, Recife, 2018.
Inclui referências.

1. Análise matemática. 2. Equações diferenciais. I. Cuevas, Claudio (orientador). II. Título.

515 CDD (23. ed.) UFPE- MEI 2018-113

FÉLIX FERREIRA BERNARDO

TEORIA QUALITATIVA DE EQUAÇÕES EM DIFERENÇAS DE TIPO VOLTERRA

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutorado em Matemática.

Aprovado em: 15/08/2018

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Claudio Rodrigo Cuevas Henriquez (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Bruno Luís de Andrade Santos (Examinador Externo)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Clessius Silva (Examinador Externo)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Prof. Dr. Filipe Andrade da Costa (Examinador Externo)
Universidade de Pernambuco

Prof. Dr. Miguel Fidêncio Loayza Lozano (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

À Sofia de Sousa Valério

AGRADECIMENTOS

Ao professor Claudio Cuevas pela qualidade da orientação, paciência, disponibilidade e generosidade.

Ao professor Herme Soto da Universidade de La Frontera, Temuco, Chile, pela contribuição científica essencial.

Ao Departamento de Matemática y Estadistica da Universidade de La Frontera pelo convite para participar no III Workshop de Ecuaciones de Evolución y Aplicaciones, em especial aos professores Mario Choquehuanca pelos esclarecimentos e ao professor Herme Soto pela hospitalidade.

Aos colegas do Grupo de Equações de Evolução da UFPE pela ajuda no dia a dia da elaboração deste trabalho, um agradecimento especial a Clessius Silva, Filipe Andrade, Joelma Azevedo e Nicolás Zumelzu.

Aos professores do Departamento de Matemática da UFPE, Airton Castro, César Castilho, Claudio Cuevas, Jorge Montoya e Miguel Lozano, pela instrução.

Aos colegas da EAJ da UFRN pela generosidade da concessão da Licença para Capacitação, um agradecimento especial ao colega e amigo André Stuwart.

Aos funcionários do Departamento de Matemática da UFPE pela disponibilidade e gentileza.

À minha esposa pela convivência e ajuda constante.

A todos os meus antepassados por, apesar de todas as dificuldades, terem-se esforçado para perseverar em seu ser.

"Nada bem feito é insignificante."
(PETERSON, 2018)

RESUMO

Nesta tese investigamos a limitação ℓ^p, o comportamento assintótico, a estrutura topológica (fecho e compacidade) do conjunto solução, a ergodicidade e a periodicidade assintótica das soluções de equações funcionais em diferenças de Volterra com núcleo de convolução definidas num espaço de fase axiomático do tipo Hale-Kato-Murakami. Obtivemos diversos resultados de regularidade, alguns novos e outros complementares de trabalhos anteriores desenvolvidos pelo grupo de Equações de Evolução da UFPE. Introduzimos novas classes de periodicidade e ergodicidade, as classes m e a classe ∞, e estudamos as condições para obter resultados de regularidade maximal nestas novas classes. Os resultados teóricos são complementados com um conjunto de exemplos e aplicações. Como abstração do nosso método, usando um operador linear em vez do parâmetro original, modelamos, com uma equação integro-em diferenças, a propagação da bactéria Wolbachia em populações da *Drosophila simulans*. Para desenvolvimento de futuras aplicações estudamos modelos abstratos de dinâmica populacional. Apresentamos diversas vias para novas investigações na conclusão da tese.

Palavras-chave: Limitação. Estrutura topológica do conjunto solução. Periodicidade assintótica. Equações em diferenças do tipo Volterra.

ABSTRACT

In this thesis we investigated the ℓ^p boundedness, the asymptotic behavior, the topological structure (closure and compactness) of the solution set, the ergodicity and the asymptotic periodicity of the solutions of Volterra functional difference equations with convolution kernel, defined in an axiomatic phase space of Hale-Kato-Murakami type. We obtained several results of regularity, some new and others complementary of previous works developed by the UFPE Evolution Equations Group. We introduced new classes of periodicity and ergodicity, classes m and class ∞, and we studied the conditions to obtain results of maximal regularity in these new classes. The theoretical results have been complemented with a set of examples and applications. As an abstraction of our method, using a linear operator instead of the original parameter, we modeled, with an integrodifference equation, the propagation of the Wolbachia bacterium in *Drosophila simulans* populations. For the development of future applications we studied abstract models of population dynamics. Several pathways were presented for further investigations at the conclusion of the thesis.

Keywords: Boundedness. Topological structure of solutions set. Asymptotic periodicity. Volterra difference equations.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Dia virá em que, com o prosseguimento do estudo através dos séculos, as coisas atualmente encobertas aparecerão com evidência; e a posteridade ficará admirada de que verdades tão claras tenham escapado a nós.

Sêneca

Equações em diferenças são frequentemente usadas para modelar *aproximações* para equações diferenciais o que permite o subsequente uso de métodos numéricos computacionais. Em outras situações, as equações em diferenças aparecem naturalmente e descrevem relações de recorrência ou a evolução de sistemas naturais, por exemplo, se uma população tem gerações discretas, o tamanho da população na $n+1$-ésima geração $u(n+1)$ é função da n-ésima geração [1] $u(n)$. Por outro lado, o Cosmos [2], é ordenado pelas suas leis naturais mas elas são essencialmente não lineares e complexas, de onde, quando analisamos processos do mundo real usando equações diferenciais, é quase sempre impossível obter soluções explícitas de *forma fechada*, ou seja, expressões analíticas algébricas ou transcendentais que representem a solução do problema. Noutros casos existe solução em forma fechada mas esta é demasiado complexa para ser analisada. Pode-se então discretizar a equação, transformando-a numa equação em diferenças e estudar as soluções aproximadas que obtemos. Ainda assim nos problemas mais complicados (não lineares) é usualmente impossível obter a *fórmula* de $u(n)$. Numa entrevista recente (CORDARO; SALOMÃO, 2009), por ocasião da sua visita ao Brasil, Peter Lax referiu: "Quando Von Neumann foi pela primeira vez a Los Alamos a ênfase era em projetar bombas. Só que você não pode projetar armas atômicas por tentativa e erro, você tem que calcular com antecedência como o aparato irá funcionar. Isto significa resolver a equação que governa a compressão dos materiais. Von Neumann percebeu quase imediatamente que os métodos da matemática aplicada clássica e tradicional eram inadequados para a tarefa e a única maneira de cumpri-la era transformar as equações diferenciais parciais em equações em diferenças e resolvê-las num computador." Então uma nova abordagem é possível, a teoria das equações em diferenças está suficientemente desenvolvida para podermos responder a muitas questões relevantes do problema fazendo uma análise qualitativa das soluções discretas mesmo sem as conhecer explicitamente. O comportamento assintótico é um aspecto muito importante do estudo qualitativo das soluções de equações em diferenças. Em muitos problemas encontramos quantidades cujo estudo é valioso mas para as quais não

[1] Esta relação pode ser expressa pela equação em diferenças u(n+1) = f(u(n)). Para uma abordagem aprofundada do tema ver (ELAYDI, 1996).

[2] Ordem em grego.

temos fórmulas exatas conhecidas, ou então as fórmulas são demasiado complexas; nesses casos podemos deduzir aproximações para essas quantidades quando o argumento tende para o infinito. Nas aplicações, tais aproximações são frequentemente tão úteis quanto uma fórmula exata seria. A análise assintótica é um método essencial para descrever o comportamento limite e uma ferramenta-chave para explorar as equações de evolução que surgem na modelagem matemática de fenômenos do mundo real.

A teoria das equações em diferenças permite igualmente responder a perguntas tais como, qual a natureza topológica do conjunto solução? As soluções serão limitadas em algum sentido? Serão periódicas? Quase periódicas? Como se comporta a solução se a equação sofrer uma pequena perturbação? Propriedades da equação permitem inferir propriedades das soluções da equação com perturbações?

A nossa curiosidade e em parte, a nossa presença no mundo, só é possível porque conhecemos as relações de causa-efeito no ambiente de que fazemos parte. A abordagem qualitativa é uma ferramenta valiosa para entendermos e agirmos sobre o mundo. Esta tese insere-se nessa linha e é o nosso modesto contributo para a análise qualitativa de equações em diferenças de tipo Volterra.

Equações integrais de Volterra são um tipo especial de equações integrais. Estas equações foram introduzidas por Vito Volterra, matemático e físico italiano. Volterra é conhecido pelas suas contribuições para a Matemática, Biologia, equações integrais e para a fundação da Análise Funcional. Traian Lalescu estudou equações integrais de Volterra na sua tese *Sur l'équation de Volterra* apresentada em 1908 na Sorbonne (LALESCO, 1908) (disponível para download no link apresentado na bibliografia), elaborada sob a orientação de Emile Picard. Lalescu escreveu o primeiro livro sobre equações integrais (LALESCO, 1912) em 1912, prefaciado por Picard (disponível para leitura no link apresentado na bibliografia). Foi longa e profícua a amizade e colaboração destes dois matemáticos [3].

Existem dois tipos de equações integrais de Volterra. O primeiro tipo é uma equação linear da forma

$$f(t) = \int_a^t k(t,s)x(s)ds$$

e o segundo tipo

$$x(t) = f(t) + \int_a^t k(t,s)x(s)ds,$$

onde f é uma função dada, x é a variável a conhecer e k se diz o núcleo. Se k tiver a forma

[3] Na carta enviada a Rodolphe Racliş, depois da morte de Lalescu, Volterra escreveu: "A última carta que Lalescu me enviou, faz referência às minhas memórias. Conservo-a como um dos meus mais queridos e lisonjeiros souvenirs. Ela mostra a importância que ele dava ao conjunto das pesquisas às quais nós consagramos uma grande parte da nossa atividade e que constituía um laço para nós, porque nos juntava num estreito parentesco intelectual. Nada pode irmanar melhor dois espíritos que as forças desinteressadas e harmoniosas que triunfam contra as dificuldades científicas, e é por isso que as suas qualidades nobres e elevadas, a sua figura simpática e alegre, as suas palavras inspiradas pelo mais sincero entusiasmo pela ciência, me faltam.

$k(t-s)$ a equação de segundo tipo fica

$$x(t) = f(t) + \int_a^t k(t-s)x(s)ds$$

e diz-se equação integral de Volterra de convolução. As aplicações das equações integrais de Volterra estendem-se da dinâmica populacional aos materiais viscoelásticos, materiais com memória, matemática financeira, ciências atuariais, entre outros.

Trabalhando em modelos de crescimento populacional, Volterra estudou hereditariedade no seu livro, publicado inicialmente em 1930, *Theory of functionals and of integral and integro-differential equations* (VOLTERRA, 2005). A sua pesquisa levou-o a um tipo especial de equações em que integrais e derivadas aparecem simultaneamente na equação, dadas n condições iniciais, $x(0), x'(0), \dots, x^{(n)}(0)$,

$$x^{(n)}(t) = f(t) + \int_a^t k(t,s)x(s)ds, \text{ onde } x^{(n)} = \frac{d^n x}{dt^n}$$

que se denominam equações integro-diferenciais de Volterra.

Aparecendo naturalmente na modelação de problemas do mundo real ou da discretização de equações de Volterra em tempo contínuo, o estudo das equações em diferenças de Volterra tornou-se importante, em particular desenvolver o seu estudo qualitativo é essencial. Suprindo esta necessidade, nos últimos anos, têm sido desenvolvidos muitos trabalhos na área de equações em diferenças, alguns deles na UFPE e em colaboração com outras instituições. Para mencionar alguns artigos e livros recentes sobre equações em diferenças de Volterra, temos Elaydi e/ou colaboradores, (ELAYDI, 1996; ELAYDI; MURAKAMI; KAMIYAMA, 1999); Murakami e/ou colaboradores, (MURAKAMI, 1997; ELAYDI; MURAKAMI; KAMIYAMA, 1999; FURUMOCHI; MURAKAMI; NAGABUCHI, 2004a; FURUMOCHI; MURAKAMI; NAGABUCHI, 2004b; NAGABUCHI, 2006); Agarwal e/ou colaboradores, (AGARWAL, 1992; AGARWAL; O'Regan; WONG, 1999; AGARWAL; CUEVAS; DANTAS, 2013; AGARWAL; CUEVAS; LIZAMA, 2014; AGARWAL; CUEVAS; FRASSON, 2012); Braverman e Karabach, (BRAVERMAN; KARABASH, 2012); István Győri e colaboradores, (APPLEBY; GYŐRI; REYNOLDS, 2006; GYŐRI; HORVÁTH, 2008; GYŐRI; REYNOLDS, 2010; GYÖRI; AWWAD, 2012); Song e colaboradores , (SONG; BAKER, 2004; SONG; BAKER, 2006; SONG; TIAN, 2007; SONG, 2006; SONG, 2008; SONG, 2009); Kolmanosvki e/ou colaboradores, (KOLMANOVSKII; SHAIKHET, 2003; KOLMANOVSKII; CASTELLANOS-VELASCO; TORRES-MUNOZ, 2003; KOLMANOVSKII; MYSHKIS, 1998; KOLMANOVSKII; MYSHKIS; RICHARD, 2000) e na UFPE, Cuevas e/ou colaboradores, (CUEVAS; PINTO, 2003; CUEVAS; PINTO, 2000; CUEVAS; VIDAL, 2002; CUEVAS; VIDAL, 2006; AGARWAL; CUEVAS; DANTAS, 2013; AGARWAL; CUEVAS; LIZAMA, 2014; AGARWAL; CUEVAS; FRASSON, 2012; CARDOSO; CUEVAS, 2009; CUEVAS; HENRÍQUEZ; LIZAMA, 2012; DEL CAMPO; PINTO; VIDAL, 2011; CASTRO et al., 2014; DANTAS, 2013; CUEVAS et al., 2013).

As propriedades qualitativas das soluções das equações em diferenças de Volterra foram estudadas em muitos contextos, por exemplo na teoria de variedades invariantes (MATSUNAGA; MURAKAMI, 2005), teoria de convergência (CUEVAS; PINTO, 2003; CUEVAS; PINTO, 2000), regularidade maximal discreta (AGARWAL; CUEVAS; LIZAMA, 2014; CUEVAS; VIDAL, 2006), comportamento assintótico (CUEVAS et al., 2013; CUEVAS; VIDAL, 2002; MATSUNAGA; MURAKAMI, 2005; GYŐRI; HORVÁTH, 2008), dicotomia exponencial e robustez a perturbações (CARDOSO; CUEVAS, 2009; CUEVAS; DEL CAMPO, 2009), estabilidade (FURUMOCHI; MURAKAMI; NAGABUCHI, 2004a; FURUMOCHI; MURAKAMI; NAGABUCHI, 2004b; MEDINA, 2001), periodicidade (CUEVAS; HENRÍQUEZ; LIZAMA, 2012; DEL CAMPO; PINTO; VIDAL, 2011; HAMAYA, 2003; NAGABUCHI, 2006; DIBLÍK; SCHMEIDEL; RŮŽIČKOVÁ, 2009). Para mais aplicações ver (KOLMANOVSKII; CASTELLANOS-VELASCO; TORRES-MUNOZ, 2003).

Esta tese prossegue na sequência de investigação em equações em diferenças do tipo Volterra (EDV) [4] conduzida pelo professor Cláudio Cuevas[5] na UFPE, complementa alguns resultados obtidos nos trabalhos citados anteriormente, por exemplo limitação em ℓ^p e limitação em peso em (AGARWAL; CUEVAS; FRASSON, 2012), dicotomia exponencial e comportamento assintótico (CARDOSO; CUEVAS, 2009) e acrescenta novos resultados de periodicidade discreta.

O estudo de EDV's na UFPE[6] começou no ano 2000 com a visita do professor Claudio Vidal na Universidade de La Frontera e a consequente publicação do artigo (CUEVAS; VIDAL, 2002) onde os autores deduzem que sob certas condições há uma correspondência bijetiva entre soluções limitadas em peso de EDV's e as suas perturbações e foi prosseguindo, acrescentando novos resultados com uma sequência de publicações onde são exploradas e enunciadas propriedades, técnicas de demonstração, criando métodos e descobrindo aplicações que serão usados e citados ao longo desta tese.

No caso de perturbações não lineares, em geral o Teorema do ponto fixo de Schauder conjugado com condições de compacidade impostas ao termo não linear da equação e condições de limitação impostas à solução fundamental da EDV são suficientes para garantir a existência de soluções em algum espaço de estado geralmente dado pelo "ADN" do problema em si mesmo. Contudo é comum as perturbações não verificarem nenhuma propriedade de tipo Lipschitziano, nesse caso faz-se necessária uma análise mais fina e têm de ser usadas ferramentas mais complexas. Nessa situação, para obtermos os nossos resultados, utilizaremos a metodologia desenvolvida por Cuevas e colaboradores, ao longo

[4] EDV's de convolução e EDV's para as quais conhecemos a forma da solução fundamental (ver Seção 2.4 e equações 5.1.19-5.1.20).

[5] Para mais informação sobre Cláudio Cuevas siga o link Cuevas, Cláudio.

[6] Na UFRO - Universidade de La Frontera, Temuco, Chile - o estudo começou em 1998 com (CUEVAS, 2000) e uma série de trabalhos de Cuevas & Pinto .

dos anos, nomeadamente: critérios de compacidade relativa para os espaços em estudo e definição nesses espaços de operadores completamente contínuos. Faremos abundante uso das técnicas de demonstração desenvolvidas anteriormente pelos autores citados.

De seguida resumimos os principais resultados apresentados nesta tese. Começamos por resultados de limitação em ℓ^p em espaço de fase em que $x(n)$ toma valores num espaço de Banach e a sua história é considerada num espaço definido axiomaticamente, do tipo Hale-Kato-Murakami (ver Seção 2.3), para equações de Volterra do tipo

$$x(n+1) = \lambda \sum_{j=-\infty}^{n} a(n-j)x(j) + f(n, x_n), \; n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

onde λ é um parâmetro complexo que estabelece um controle ao crescimento do operador solução da equação linear (3.1.3), $a(n)$ é uma sequência complexa somável e f uma função apropriada.

Na escolha do espaço de fase apropriado para estudar esta equação iremos usar uma axiomática semelhante à usada no caso contínuo. No caso contínuo, os axiomas permitem estudar a existência/unicidade de soluções, dependência contínua e continuidade da função $t \to x_t$. No seu trabalho pioneiro, Hale e Kato (1978), procuram também garantir a que se posso fazer análise qualitativa, órbitas limitada sejam relativamente compactas e o espectro essencial do operador solução de um sistema linear autônomo esteja dentro da bola unitária. Adicionalmente, impomos condições ao espaço de fase que permitem fazer a teoria qualitativa que pretendemos, limitação, comportamento assintótico e estrutura topológica do conjunto solução. Em particular pretendemos que o espaço das sequências limitadas definidas em $\mathbb{Z}^-$ esteja continuamente incluído no espaço de fase. Na continuação do estudo de soluções que apresentam algum tipo de periodicidade imporemos uma condição de memória amortecida ao espaço de fase. A nossa escolha é *standard* para o estudo deste tipo de equações de Volterra.

Se f satisfaz alguma condição de Lipschitz, impondo condições apropriadas à sequência dos coeficientes de Lipschitz, $L(n)$, deduzimos dois resultados de existência e unicidade de solução ℓ^p para a equação (1). Por outro lado, conhecida a história[7] de $x(n)$ em $\mathbb{Z}_-$, também neste mesmo cenário deduzimos que o problema

$$\begin{aligned} u(n+1) &= \lambda \sum_{j=0}^{n} a(n-j)u(j) + f(n, u_n), \; n \in \mathbb{Z}^+, \\ u_0 &= \varphi \end{aligned}$$

possui uma única solução ℓ^p somável[8]. Um resultado novo, inspirado em Azevedo, Cuevas e Soto (2017, Teorema 1.8), completa este *set* a respeito de limitação em ℓ^p (ver Teorema 3.1.3).

[7] i. e., dado x_0 definido como $x_0(\theta) = x(\theta), \; \theta \in \mathbb{Z}^-$.

[8] Vemos também que modificando as condições e a natureza da perturbação se obtêm soluções limitadas ou que se anulam no infinto.

Na continuação procedemos sem impor condições de Lipschitz. Neste novo quadro o método caracteriza-se pelo uso de critérios de compacidade e pela aplicação do Teorema de ponto fixo de Schauder.

Na seção seguinte caracterizamos a estrutura topológica do conjunto das soluções da equação (1) em ℓ^p e em $\mathcal{C}_0$. Provamos que sob certas condições esse conjunto é não vazio e compacto. O problema da conectividade foi pensado e discutido mas ainda permanece em aberto evidenciando a complexidade do tema tratado.

Nas duas seções seguintes contribuímos com novos resultados qualitativos (ver teoremas 3.1.1, 3.1.4). Resultados de soluções cuja média tende para zero, uma hipótese mais robusta que generaliza a convergência para 0 e de aplicação prática mais efetiva[9] são obtidos e correspondem aos chamados resultados ergódicos. Também estamos interessados em resultados de periodicidade assintótica discreta, motivados pelo fato de que na natureza muitos fenômenos não acontecem com uma regularidade exatamente periódica mas sim de uma maneira aproximadamente periódica (ver (SILVA, 2015)), assim ao estudar-se periodicidade assintótica torna-se mais sensível o estudo de sistemas concretos. No primeiro tópico, ergodicidade, impondo uma condição de memória amortecida (ver a condição 4.1.1) para o espaço das histórias, obtemos resultados de regularidade ergódica, i. e., que relacionam o comportamento qualitativo ergódico das perturbações com propriedades ergódicas das soluções, entre eles provamos que se a perturbação f for Lipzschitziana e ergódica, de classe infinito (uma nova classe introduzida aqui), então existe uma única solução ergódica (de classe infinito) da equação (1). Para concluir as contribuições, na seção teórica final, lidamos com um importante aspecto qualitativo das soluções das EDVs que só recentemente começou a ser explorado: periodicidade assintótica. Em particular a noção de pseudo S-assintótica ω-periodicidade ($PSAP_\omega$), um assunto em rápida evolução[10] em vários ramos das equações de evolução tais como sistemas fracionários (CUEVAS; HENRÍQUEZ; SOTO, 2014), estruturas flexíveis (DE ANDRADE et al., 2016) e equações de onda fortemente amortecidas (AZEVEDO; CUEVAS; SOTO, 2017). Neste quadro o nosso método permite estabelecer que se a perturbação for pseudo S-assintoticamente ω-periódica e localmente Lipzschitziana então existe uma única solução da equação (1) pseudo S-assintoticamente ω-periódica. Estabelecemos resultado similar para perturbações pseudo-quase periódicas. Com condições semelhantes às usadas por Agarwal, Cuevas e Dantas (2013) concluímos esta seção obtendo resultados de periodicidade pseudo S-assintótica ω-periódica na ausência de condições de Lipschitz (ver Teoremas 4.2.6 e 4.2.7).

A matemática pura ocupa um lugar importante no universo das ciências e neste início de século XXI é grande a pressão para que a investigação se foque nas aplicações ao mundo real. Desde sempre o propósito, fazer investigação focado em aplicações, norteou o

[9] Um sistema que apresente picos de atividade limitada, não se anulando no infinito, se os intervalos de atividade forem crescentemente espaçados pode ser ergódico. Ver exemplo 4.1.1.

[10] Na seção correspondente será apresentada bibliografia e referidos resultados.

trabalho de Cuevas e colaboradores no grupo de Equações de Evolução e já é vasto o conjunto de resultados obtidos. Naturalmente esta tese insere-se também nesse caminho. Nos últimos trabalhos do grupo nesta área de estudo, (CUEVAS; CHOQUEHUANCA; SOTO, 2014) e (CUEVAS; DANTAS; SOTO, 2016), sobressaem duas aplicações iminentemente concretas[11]. Por um lado, o processo de infecção pela Wolbachia em populações de insetos estudado por Turelli e Hoffmann (1991) foi eficientemente modelado por uma equação de tipo integro em diferenças[12] e por outro lado, superando as dificuldades de adaptação do modelo contínuo de Wang, Kot e Neubert (2002) e Yu e Yuan (2012) ao caso discreto, os investigadores adaptaram modelos integro-diferenciais a dinâmicas populacionais.

Na seção de aplicações desta tese, depois de alguns exemplos abstratos, na esteira dos dois trabalhos referidos acima, adaptamos o nosso método a equações integro-em diferenças para obter resultados complementares. Provamos que, em função dos parâmetros dos modelos e do tipo de perturbações, podemos conhecer propriedades topológicas do conjunto solução, podemos estabelecer a existência/unicidade de soluções limitadas, ergódicas, pseudo-quase periódicas e pseudo S-assintoticamente ω-periódicas.

Esta tese está dividida em seis capítulos. Este primeiro capítulo de introdução; um segundo, intitulado *Preliminares*, onde temos por objetivo tornar o conteúdo relativamente autocontido, recordamos aí algumas definições e propriedades das ferramentas matemáticas de Análise Funcional usadas ao longo da tese, por exemplo os teoremas de ponto fixo e critérios de compacidade, revemos propriedades dos espaços de sequências, definimos espaços de fase, apresentamos elementos da teoria das EDVs e demonstramos algumas propriedades da solução fundamental, para completar este capítulo estudaremos alguns critérios de compacidade úteis para lidar com perturbações de tipo não Lipschitziano; nos capítulos seguintes, *Soluções limitadas* e *Soluções periódicas e ergódicas*, apresentamos os resultados centrais e desenvolvemos as ferramentas matemáticas que aplicaremos no capítulo seguinte, *Aplicações*, onde apresentaremos um conjunto de aplicações do nosso método ao mundo real. A tese conclui com um capítulo de *Conclusões* e follow-up. Os resultados estabelecidos nos capítulos três, quatro e cinco podem ser encontrados no artigo (BERNARDO; CUEVAS; SOTO, 2018).

Como parte do projeto de elaboração desta tese foram feitas três apresentações públicas em eventos científicos internacionais: 3º Workshop de Ecuaciones de Evolución y Aplicaciones, Universidad de la Frontera, Temuco, Chile, 7-9 de junho, 2017; XXI International Symposium on Mathematical Methods Applied to the Sciences (XXI SIMMAC), Universidad de Costa Rica, San Jose, Costa Rica, 27 de fevereiro - 2 de março, (BERNARDO; CUEVAS; SOTO, 2018, XXI SIMMAC, fevereiro 27 - março 2) e Seventh

[11] Além destas duas aplicações apresentamos ainda um exemplo de teoria de controle que tem sido utilizado na literatura para comunicação de canais digitais.

[12] O modelo de Turelli-Hoffmann é um caso particular da abstração do nosso modelo com equações de tipo Volterra.

Conference on Finite Difference Methods: Theory and Applications ($FDM'18$), University of Ruse, Lozenetz, Bulgaria, 12-16 de Junho, 2018 (BERNARDO; CUEVAS; SOTO, 2018, FDM: $T\&A'$2018, junho 11 - 16).

2 PRELIMINARES

Neste capítulo apresentamos algumas definições e propriedades das ferramentas matemáticas de Análise Funcional que usamos ao longo deste trabalho. O objetivo é que o conteúdo seja o mais autocontido possível.

$CardE$ é o número de elementos de qualquer conjunto finito E.

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_{-}$, $\mathbb{Z}^{+}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, representam, respectivamente, os conjuntos dos números naturais, números inteiros não positivos, números inteiros não negativos, números reais e números complexos.

$(\mathbb{X}; ||\cdot||_{\mathbb{X}})$ e $(\mathbb{Y}; ||\cdot||_{\mathbb{Y}})$ são espaços de Banach sobre $\mathbb{R}$ ou sobre $\mathbb{C}$. $B_\delta(\mathbb{X}) \subseteq \mathbb{X}$, é a bola fechada de centro em 0 e raio $\delta > 0$. $\Big(\mathcal{L}(\mathbb{X};\mathbb{Y}); ||\cdot||_{\mathcal{L}(\mathbb{X};\mathbb{Y})}\Big)$ representa o espaço vetorial dos operadores lineares contínuos definidos de $\mathbb{X}$ em $\mathbb{Y}$, com a norma natural $||\cdot||_{\mathcal{L}(\mathbb{X};\mathbb{Y})}$ e $\mathcal{L}(\mathbb{X}) = \mathcal{L}(\mathbb{X};\mathbb{X})$.

2.1 Teoremas do ponto fixo

Esta seção contém alguns resultados sobre ponto fixo que são ferramentas essenciais para a nossa exposição. Para uma compreensão mais profunda do tema sugerimos (AGARWAL; MEEHAN; O'REGAN, 2001), (GOEBEL; KIRK, 1990) e (GRANAS; DUGUNDJI, 2013).

Definição 2.1.1. Sejam $\Big(\mathbb{X}; d_{\mathbb{X}}\Big)$ e $\Big(\mathbb{Y}; d_{\mathbb{Y}}\Big)$ espaços métricos. Uma aplicação $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ diz-se Lipschitziana se existe uma constante $L > 0$ tal que para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{X}$ $d_{\mathbb{Y}}\Big(f(x_2),\, f(x_1)\Big) \leq L\, d_{\mathbb{X}}(x_2,\, x_1)$. Se $L < 1$ então f diz-se uma contração.

Definição 2.1.2. Uma função $f : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ tem um ponto fixo $x_0 \in \mathbb{X}$ se e somente se $f(x_0) = x_0$.

Teorema 2.1.1. [1] *(Princípio da contração de Banach). Seja $\mathbb{X}$ um espaço métrico completo e $f : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ uma contração, então f tem um único ponto fixo.*

Teorema 2.1.2. *(Princípio dos iterados). Seja $\mathbb{X}$ um espaço métrico completo e $f : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ uma função contínua. Se para algum $m \in \mathbb{N}$, f^m é uma contração, então f tem um único ponto fixo.*

Teorema 2.1.3. [2] *(Teorema de Schauder). Seja C um subconjunto fechado e convexo de um espaço normado E. Então toda aplicação compacta e contínua $f : C \to C$ tem pelo menos um ponto fixo em C.*

[1] Para mais informação sobre Banach siga o link Banach, Stefan.
[2] Para mais informação sobre Schauder siga o link Schauder, Juliusz Pawel.

Teorema 2.1.4. [3] *(Alternativa de Leray-Schauder). Sejam $C \subseteq \mathbb{X}$ um subconjunto fechado e convexo de um espaço de Banach $\mathbb{X}$ e $f : C \to C$ uma função completamente contínua. Então, ou f possui um ponto fixo em C ou o conjunto $\{x \in C : x = \gamma f(x),\, 0 < \gamma < 1\}$ é ilimitado.*

2.2 Espaços de sequências

Descrevamos agora alguns espaços com que iremos trabalhar. Uma abordagem mais detalhada pode ser encontrada no Capítulo 4 e na Seção 11.3 do livro (BREZIS, 2010). Começamos pelos espaços ℓ^p, $1 \leq p \leq +\infty$. Estes espaços são casos particulares dos espaços L^p para a medida de contagem. i. e., $\mu(E) = CardE$.

Sejam $(\mathbb{X}; ||\cdot||_{\mathbb{X}})$ um espaço de Banach e $1 \leq p < +\infty$ definimos

$$\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X}) = \left\{ u : \mathbb{Z} \to \mathbb{X} : \sum_{n=-\infty}^{+\infty} ||u(n)||_{\mathbb{X}}^p < +\infty \right\}$$

equipado com a norma

$$||u||_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})} = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} ||u(n)||_{\mathbb{X}}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ denota o espaço de todas as sequências limitadas de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{X}$ equipado com a norma $||\cdot||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})}$ definida por

$$||u||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})} = \sup_{n\in\mathbb{Z}} ||u(n)||_{\mathbb{X}}.$$

$C_0(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ é o espaço de todas as sequências $u : \mathbb{Z} \to \mathbb{X}$ que tendem para 0 quando $n \to \pm\infty$ equipado com a mesma norma de $\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})$.

Finalmente, dada uma função $h : \mathbb{Z} \to [1, +\infty[$ tal que $h(n) \to +\infty$ quando $n \to \pm\infty$, definimos

$$C_h^0(\mathbb{Z};\mathbb{X}) = \left\{ \xi : \mathbb{Z} \to \mathbb{X} : \lim_{|n|\to+\infty} \frac{||\xi(n)||_{\mathbb{X}}}{h(n)} = 0 \right\},$$

equipado com a norma

$$||\xi||_h = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \frac{||\xi(n)||_{\mathbb{X}}}{h(n)}.$$

Todos estes espaços são espaços de Banach e em particular $C_h^0(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ é isometricamente isomorfo a $C_0(\mathbb{Z};\mathbb{X})$.

2.2.1 Desigualdades de Hölder e Young

Proposição 2.2.1. *(Desigualdade de Hölder [4]) Sejam u, v sequências em $\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{C})$ e $\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{C})$, respectivamente, com $1 \leq p, q \leq +\infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então o produto $u.v$ é*

[3] Para mais informação sobre Leray siga o link Leray, Jean.
[4] Para mais informação sobre Hölder siga o link Hölder, Otto.

somável e temos

$$||u.v||_{\ell^1(\mathbb{Z};\mathbb{C})} \leq ||u||_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{C})}.||v||_{\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{C})}.$$

Observação 2.2.1. Duas generalizações da Desigualdade de Hölder são as seguintes:

- Sejam u e v sequências em $\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{C})$ e $\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{C})$, respectivamente, com $1 \leq p, q \leq +\infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Então $u.v$ pertence a $\ell^r(\mathbb{Z};\mathbb{C})$ e temos
$$||u.v||_{\ell^r(\mathbb{Z};\mathbb{C})} \leq ||u||_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{C})}.||v||_{\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{C})};$$

- Sejam u, v e w sequências em $\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{C})$, $\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{C})$ e $\ell^r(\mathbb{Z};\mathbb{C})$, respectivamente, com $1 \leq p, q, r \leq +\infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$. Então $u.v.w$ pertence a $\ell^1(\mathbb{Z};\mathbb{C})$ e temos
$$||u.v.w||_{\ell^1(\mathbb{Z};\mathbb{C})} \leq ||u||_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{C})}.||v||_{\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{C})}.||w||_{\ell^r(\mathbb{Z};\mathbb{C})}.$$

Definição 2.2.1. Dadas duas sequências, u e v, definidas de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{C}$, definimos a convolução $u * v$ como sendo a sequência

$$(u * v)\,(n) = \sum_{j=-\infty}^{n} u(n-j)\,v(j)$$

se esta soma estiver bem definida.

Proposição 2.2.2. *(Desigualdade de Young*[5] *para convoluções) Sejam u e v duas sequências em $\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{C})$ e $\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{C})$, respectivamente, com $1 \leq p, q, r \leq +\infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. Então a convolução $u * v$ pertence a $\ell^r(\mathbb{Z};\mathbb{C})$ e temos*

$$||u * v||_{\ell^r(\mathbb{Z};\mathbb{C})} \leq ||u||_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{C})}.||v||_{\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{C})}.$$

Demonstração. Incluímos a demonstração por conveniência do leitor. Sejam $p^{'}$ e $q^{'}$ os expoentes conjugados de p e q, respectivamente. Temos

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{q^{'}} + \frac{1}{r} = 1, \quad 1 - \frac{p}{r} = \frac{p}{q^{'}} \quad \text{e} \quad 1 - \frac{q}{r} = \frac{q}{p'}.$$

Então

$$\begin{aligned}
|\,(u * v)\,(n)| &\leq \sum_{j=-\infty}^{n} |u(n-j)|.|v(j)| \\
&= \sum_{j=-\infty}^{n} |u(n-j)|^{\frac{p}{r}}.|u(n-j)|^{1-\frac{p}{r}}.|v(j)|^{\frac{q}{r}}.|v(j)|^{1-\frac{q}{r}} \\
&\leq \sum_{j=-\infty}^{n} \Big(|u(n-j)|^p.|v(j)|^q\Big)^{\frac{1}{r}}.|u(n-j)|^{1-\frac{p}{r}}.|v(j)|^{1-\frac{q}{r}} \\
&\leq \sum_{j=-\infty}^{n} \Big(|u(n-j)|^p.|v(j)|^q\Big)^{\frac{1}{r}}.\Big(|u(n-j)|^p\Big)^{\frac{1}{q^{'}}}.\Big(|v(j)|^q\Big)^{\frac{1}{p'}} \\
&\leq \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \Big(|u(n-j)|^p.|v(j)|^q\Big)^{\frac{1}{r}}.\Big(|u(n-j)|^p\Big)^{\frac{1}{q^{'}}}.\Big(|v(j)|^q\Big)^{\frac{1}{p'}}.
\end{aligned}$$

[5] Para mais informação sobre Young siga o link Young, William Henry.

Aplicando a segunda generalização da Desigualdade de Hölder temos

$$
\begin{aligned}
|\left(u*v\right)(n)| &\leq \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\Big(|u(n-j)|^{p}.|v(j)|^{q}\Big)\right)^{\frac{1}{r}}.\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\Big(|u(n-j)|^{p}\Big)\right)^{\frac{1}{q'}}.\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\Big(|v(j)|^{q}\Big)\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\leq \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\Big(|u(n-j)|^{p}.|v(j)|^{q}\Big)\right)^{\frac{1}{r}}.||u||_{\ell^{p}(\mathbb{Z};\mathbb{C})}^{\frac{p}{q'}}.||v||_{\ell^{q}(\mathbb{Z};\mathbb{C})}^{\frac{q}{p'}}.
\end{aligned}
$$

De onde

$$
|\left(u*v\right)(n)|^{r} \leq ||u||_{\ell^{p}(\mathbb{Z};\mathbb{C})}^{r-p}.||v||_{\ell^{q}(\mathbb{Z};\mathbb{C})}^{r-q}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}|u(n-j)|^{p}.|v(j)|^{q}.
$$

Logo

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|\left(u*v\right)(n)|^{r} &\leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(||u||_{\ell^{p}(\mathbb{Z};\mathbb{C})}^{r-p}.||v||_{\ell^{q}(\mathbb{Z};\mathbb{C})}^{r-q}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}|u(n-j)|^{p}.|v(j)|^{q}\right) \\
&\leq ||u||_{\ell^{p}(\mathbb{Z};\mathbb{C})}^{r-p}.||v||_{\ell^{q}(\mathbb{Z};\mathbb{C})}^{r-q}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}|u(n-j)|^{p}.|v(j)|^{q} \\
&\leq ||u||_{\ell^{p}(\mathbb{Z};\mathbb{C})}^{r-p}.||v||_{\ell^{q}(\mathbb{Z};\mathbb{C})}^{r-q}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|u(n-j)|^{p}.|v(j)|^{q} \\
&= ||u||_{\ell^{p}(\mathbb{Z};\mathbb{C})}^{r-p}.||v||_{\ell^{q}(\mathbb{Z};\mathbb{C})}^{r-q}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}|v(j)|^{q}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|u(n-j)|^{p} \\
&= ||u||_{\ell^{p}(\mathbb{Z};\mathbb{C})}^{r-p}.||v||_{\ell^{q}(\mathbb{Z};\mathbb{C})}^{r-q}||v||_{\ell^{q}(\mathbb{Z};\mathbb{C})}^{q}||u||_{\ell^{p}(\mathbb{Z};\mathbb{C})}^{p} \\
&= ||u||_{\ell^{p}(\mathbb{Z};\mathbb{C})}^{r}.||v||_{\ell^{q}(\mathbb{Z};\mathbb{C})}^{r}.
\end{aligned}
$$

O que implica $||u*v||_{\ell^{r}(\mathbb{Z};\mathbb{C})} \leq ||u||_{\ell^{p}(\mathbb{Z};\mathbb{C})}.||v||_{\ell^{q}(\mathbb{Z};\mathbb{C})}$. □

2.3 Espaço de fase

Murakami (1997) foi o primeiro autor a considerar espaços de fase para estudar propriedades qualitativas das equações funcionais em diferenças. Em (MURAKAMI, 1997) obteve condições para a existência de soluções limitadas e uma decomposição do espaço de fase em soma direta de subespaços fechados. De seguida Elaydi, Murakami e Kamiyama (1999) estudaram a equivalência entre as soluções limitadas de um sistema de EDVs homogêneo e a sua perturbacão.

Nesta Seção usaremos a terminologia e a notação seguida por Murakami (1997). Como em (MATSUNAGA; MURAKAMI, 2005; MURAKAMI, 1997) definimos espaço de fase $\mathcal{B}$ axiomaticamente. Precisando, $\mathcal{B}$ denota um espaço vetorial de sequências definidas em $\mathbb{Z}_{-}$, com valores em $\mathbb{X}$, equipado com uma norma denotada por $||\cdot||_{\mathcal{B}}$ tal que $(\mathcal{B},||\cdot||_{\mathcal{B}})$ é um espaço de Banach e valem os seguintes axiomas:

Axioma 2.3.1 (PS1). Existem, uma constante positiva J e sequências não negativas $N(\cdot)$ e $M(\cdot)$ definidas em $\mathbb{Z}_+$ com a seguinte propriedade. Se $x : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{X}$ é uma sequência tal que $x_m \in \mathcal{B}$, $m \in \mathbb{Z}$, então para todo $n \geq m$, $n \in \mathbb{Z}$, as seguintes condições são satisfeitas:

(i) $x_n \in \mathcal{B}$;

(ii) $||x(n)||_{\mathbb{X}} \leq J||x_n||_{\mathcal{B}}$;

(iii) $||x_n||_{\mathcal{B}} \leq N(n-m) \max_{m \leq i \leq n} ||x(i)||_{\mathbb{X}} + M(n-m)||x_m||_{\mathcal{B}}$.

Axioma 2.3.2 (PS2). Se $(\varphi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $\mathcal{B}$, uniformemente limitada que converge pontualmente para φ, então $\varphi \in \mathcal{B}$ e $||\varphi^n - \varphi||_{\mathcal{B}} \to 0$ quando $n \to +\infty$.

Observação 2.3.1. De (**PS2**) temos que $\ell^\infty(\mathbb{Z}_-; \mathbb{X})$ está continuamente incluído em $\mathcal{B}$. A partir daqui, $\rho > 0$, denota uma constante tal que $||\varphi||_{\mathcal{B}} \leq \rho||\varphi||_\infty$ para todo $\varphi \in \ell^\infty(\mathbb{Z}_-; \mathbb{X})$.

Exemplo 2.3.1. Seja $\gamma > 0$. Definimos $\mathcal{B}^\gamma(\mathbb{X})$ como sendo o espaço de todas as sequências $\varphi : \mathbb{Z}_- \to \mathbb{X}$ tais que $\sup_{i\in\mathbb{Z}_-} |\varphi(i)|e^{\gamma i} < +\infty$ equipado com a norma $||\varphi||_{\mathcal{B}^\gamma(\mathbb{X})} = \sup_{i\in\mathbb{Z}_-} |\varphi(i)|e^{\gamma i}$. Este espaço satisfaz os axiomas (**PS1**) e (**PS2**) (ver (CASTRO et al., 2014)).

Exemplo 2.3.2. Seja $1 \leq p < +\infty$ e $g : \mathbb{Z}_- \to \mathbb{R}$ uma sequência positiva tal que

$$\sum_{i=-\infty}^{0} g(i) < +\infty \text{ e } g(0) > 0.$$

Definimos $S_g^p(\mathbb{X})$ como sendo o espaço de todas as sequências $\varphi : \mathbb{Z}_- \to \mathbb{X}$ tais que

$$\sum_{i=-\infty}^{0} |\varphi(i)|^p g(i) < +\infty,$$

equipado com a norma

$$||\varphi||_{S_g^p(\mathbb{X})} = \left(\sum_{i=-\infty}^{0} |\varphi(i)|^p g(i) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

A partir do exemplo 2.1 de Castro et al. (2014), $S_g^p(\mathbb{X})$ é um espaço de fase.

2.4 Solução fundamental

De seguida apresentamos uma das ferramentas fundamentais para obtermos os nossos resultados. Esta ferramenta permite, em certas condições, caracterizar uma solução da EDV em estudo.

Cuevas, Henríquez e Lizama (2012) provaram que, dadas certas condições de limitação, se pode conhecer explicitamente a solução da equação linear em diferenças de

Volterra:

$$u(n+1) = \lambda \sum_{j=-\infty}^{n} a(n-j)u(j) + f(n), \ n \in \mathbb{Z}, \tag{2.4.1}$$

onde λ é um número complexo, $a : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{C}$ é uma sequência somável e $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{X}$ é uma sequência. A abordagem dos autores citados é a seguinte.

Dado $\lambda \in \mathbb{C}$, seja $s(\lambda, k) \in \mathbb{C}$ a solução da equação em diferenças

$$s(\lambda, k+1) = \lambda \sum_{j=0}^{k} a(k-j)s(\lambda, j), \ k = 0, 1, 2, \dots, n, \dots, \ s(\lambda, 0) = 1. \tag{2.4.2}$$

Neste caso $s(\lambda, k)$ chama-se solução fundamental[6] da equação (2.4.1) gerada por $a(\cdot)$. Definamos o conjunto

$$\Omega_s := \{\lambda \in \mathbb{C} : ||s(\lambda, \cdot)||_1 := \sum_{k=0}^{+\infty} |s(\lambda, k)| < +\infty\}.$$

Sob certas condições o conjunto Ω_s contém uma bola centrada na origem. A saber, temos o seguinte resultado provado em (DANTAS, 2013, Proposição 3.1.1).

Teorema 2.4.1. *Assuma que $M > 0$, $c \in (0, 1)$ e seja $a(n)$ uma sequência complexa tal que $|a(n)| \leq Mc^n$, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Então o interior da bola $B_{\frac{1-c}{M}}(\mathbb{C})$ está contido em Ω_s.*

Demonstração. Incluímos a demonstração por conveniência do leitor. Consideremos a equação

$$\begin{cases} v(n+1) &= M|\lambda| \sum_{k=0}^{n} c^{n-k} v(k), \ n \geq 0 \\ v(0) &= 1 \end{cases}$$

Prova-se por indução que $v(n+1) = M|\lambda|(M|\lambda| + c)^n, \ n \geq 0$. De fato, como $v(1) = M|\lambda|$, para $n = 0$ o resultado é válido. Dado $n \in \mathbb{N}$, suponhamos que o resultado vale para $m \leq n$, então:

$$\begin{aligned} v(n+1) &= M|\lambda| \sum_{k=0}^{n} c^{n-k} v(k) \\ &= M|\lambda| \sum_{k=0}^{n} c^{n-k} M|\lambda|(M|\lambda| + c)^k \\ &= M|\lambda| \Big(c^n + c^{n-1}M|\lambda| + c^{n-2}M|\lambda|(M|\lambda| + c) \\ &\quad + \dots + cM|\lambda|(M|\lambda| + c)^{n-2} + M|\lambda|(M|\lambda| + c)^{n-1} \Big) \\ &= M|\lambda|(M|\lambda| + c)^n. \end{aligned}$$

[6] O Teorema 2.4.2 e a igualdade (3.1.9) clarificam o porquê de usarmos esta terminologia.

Temos que $|s(\lambda, 0)| = 1 = v(0)$. Dado $n \in \mathbb{N}$, supondo por hipótese de indução que $|s(\lambda, k)| \leq v(k)$, para todo $k \leq n$, então:

$$\begin{aligned} |s(\lambda, n+1)| &\leq |\lambda| \sum_{j=0}^{n} |a(n-j)| v(j) \\ &= M\lambda \sum_{j=0}^{n} c^{n-j} v(j) \\ &= v(n+1). \end{aligned}$$

Isto é $|s(\lambda, n+1)| \leq M|\lambda|(M|\lambda| + c)^n$, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Logo $s(\lambda, \cdot)$ é somável para todos os valores de λ tais que $|M\lambda + c| < 1$. Se λ pertence ao interior da bola $B_{\frac{1-c}{M}}(\mathbb{C})$ então $|\lambda| < \frac{1-c}{M}$, daí $|M\lambda| + c < 1$, logo $|M\lambda + c| < 1$. O que conclui a prova. $\square$

Exemplo 2.4.1. Seja $a(k) = p^k e^{-pk}$, aplicando a transformada-Z à equação 2.4.2 obtemos

$$\begin{aligned} & z\, Z[s(\lambda, k)] - s(\lambda, 0) z = \lambda Z[p^k e^{-pk}] Z[s(\lambda, k)] \\ \Leftrightarrow & z\, Z[s(\lambda, k)] - z = \lambda \frac{z}{z - pe^{-p}} Z[s(\lambda, k)] \\ \Leftrightarrow & Z[s(\lambda, k)] = \frac{z - pe^{-p}}{z - (\lambda + pe^{-p})} \\ \Leftrightarrow & Z[s(\lambda, k)] = \frac{z}{z - (\lambda + pe^{-p})} - \frac{pe^{-p}}{z - (\lambda + pe^{-p})} \\ \Leftrightarrow & Z[s(\lambda, k)] = Z[\left(\lambda + pe^{-p}\right)^k] - pe^{-p} Z[\left(\lambda + pe^{-p}\right)^{k-1}]. \end{aligned}$$

Aplicando a transformada inversa obtemos

$$s(\lambda, k) = \lambda \left(\lambda + pe^{-p}\right)^{k-1}, \; k \geq 1,$$

de onde

$$D(-pe^{-p}, 1) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \; |z + pe^{-p}| < 1 \right\} \subseteq \Omega_s.$$

O próximo teorema, publicado em (CUEVAS et al., 2013, Teorema 2.1), é uma aplicação direta da solução fundamental e mostra a utilidade desta ferramenta. Mostra em particular como, a partir da solução fundamental, podemos deduzir uma expressão para a solução da EDV (2.4.1) e estimar a sua norma de forma muito eficiente. Por razões didáticas e de exposição transcrevemos parcialmente a demonstração.

Teorema 2.4.2. *Seja $\lambda \in \Omega_s$. Então para cada $f \in \ell^p(\mathbb{Z}; \mathbb{X})$ a equação (2.4.1) tem uma única solução em $\ell^p(\mathbb{Z}; \mathbb{X})$ dada por*

$$u(n+1) = \sum_{j=-\infty}^{n} s(\lambda, n-j) f(j), \; n \in \mathbb{Z}. \tag{2.4.3}$$

A solução $u(n)$ satisfaz $u \in \ell^{p'}(\mathbb{Z}; \mathbb{X})$ para todo $1 \leq p \leq p' \leq +\infty$ e vale a seguinte estimativa:

$$||u||_{\ell^{p'}(\mathbb{Z};\mathbb{X})} \leq ||s(\lambda,\cdot)||_1^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}} ||s(\lambda,\cdot)||_\infty^{\frac{1}{p'}} ||f||_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})}.$$

Em particular para $p = +\infty$, *temos* $||u||_\infty \leq ||s(\lambda,\cdot)||_1 ||f||_\infty$.

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\lambda \sum_{j=-\infty}^{n} a(n-j)u(j) &= \lambda \sum_{j=-\infty}^{n} a(n-j) \left(\sum_{\tau=-\infty}^{j-1} s(\lambda, j-1-\tau) f(\tau) \right) \\
&= \lambda \sum_{j=-\infty}^{n-1} \sum_{\tau=-\infty}^{j} a(n-1-j) s(\lambda, j-\tau) f(\tau) \\
&= \lambda \sum_{\tau=-\infty}^{n-1} \sum_{j=\tau}^{n-1} a(n-1-j) s(\lambda, j-\tau) f(\tau) \\
&= \sum_{\tau=-\infty}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1-\tau} \lambda a(n-1-\tau-j) s(\lambda, j) f(\tau) \\
&= \sum_{\tau=-\infty}^{n-1} s(\lambda, n-\tau) f(\tau) \\
&= \sum_{\tau=-\infty}^{n} s(\lambda, n-\tau) f(\tau) - f(n) \\
&= u(n+1) - f(n),
\end{aligned}$$

de onde u é solução de (2.4.1). A unicidade deriva do seguinte argumento: todas as soluções limitadas de (2.4.1) são dadas por (2.4.3). De fato seja u uma solução limitada satisfazendo (2.4.1), obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=-\infty}^{n} s(\lambda, n-j) f(j) &= \sum_{j=-\infty}^{n} s(\lambda, n-j) \left(u(j+1) - \lambda \sum_{\ell=-\infty}^{n} a(j-\ell) u(\ell) \right) \\
&= \sum_{j=-\infty}^{n} s(\lambda, n-j) u(j+1) - \lambda \sum_{j=-\infty}^{n} \sum_{\ell=-\infty}^{n} a(j-\ell) s(\lambda, n-j) u(\ell) \\
&= \sum_{\ell=-\infty}^{n+1} s(\lambda, n+1-j) u(j) - \lambda \sum_{\ell=-\infty}^{n} \sum_{j=l}^{n} a(j-\ell) s(\lambda, n+1-j) u(\ell) \\
&= \sum_{j=-\infty}^{n+1} s(\lambda, n+1-j) u(j) - \sum_{\ell=-\infty}^{n} \left(\lambda \sum_{j=0}^{n-\ell} a(n-\ell-j) s(\lambda, j) u(\ell) \right) \\
&= \sum_{\ell=-\infty}^{n+1} s(\lambda, n+1-\ell) u(\ell) - \sum_{\ell=-\infty}^{n} s(\lambda, n+1-\ell) u(\ell) \\
&= u(n+1).
\end{aligned}$$

Logo, u satisfaz (2.4.3) e temos a unicidade. Finalmente, porque conhecemos uma expressão explícita para $u(n)$ [7], obtemos daí a estimativa para as normas em $\ell^{p'}(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ e $\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ de u, onde $1 \leq p \leq p' \leq \infty$. De fato sejam p e q expoentes conjugados, de (2.4.1) e aplicando

[7] $u(n+1) = \sum_{j=-\infty}^{n} s(\lambda, n-j) f(j)$.

a desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned} ||u(n)||_{\mathbb{X}}^{p'} &\leq ||s(\lambda,\cdot)||_1^{\frac{p'}{q}} \left(\sum_{j=-\infty}^{n-1} |s(\lambda, n-1-j)| \, ||f(j)||_{\mathbb{X}}^{p} \right)^{\frac{p'}{p}} \\ &\leq ||s(\lambda,\cdot)||_1^{\frac{p'}{q}} ||s(\lambda,\cdot)||_\infty ||f||_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})}^{p'-p} \left(\sum_{j=-\infty}^{n-1} |s(\lambda, n-1-j)| \, ||f(j)||_{\mathbb{X}}^{p} \right), \end{aligned}$$

de onde

$$||u||_{\ell^{p'}(\mathbb{Z};\mathbb{X})}^{p'} \leq ||s(\lambda,\cdot)||_1^{\frac{p'}{q}} ||s(\lambda,\cdot)||_\infty ||f||_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})}^{p'-p} ||s(\lambda,\cdot)||_1 \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} ||f(n)||_{\mathbb{X}}^{p} \right).$$

Portanto

$$||u||_{\ell^{p'}(\mathbb{Z};\mathbb{X})} = ||s(\lambda,\cdot)||_1^{\frac{1}{q}+\frac{1}{p'}} ||s(\lambda,\cdot)||_\infty^{\frac{1}{p'}} ||f||_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})}.$$

□

2.5 Compacidade

Em situações concretas de não linearidade aparecem operadores compactos associados. Precisamos assim de construir bons critérios de compacidade no espaço envolvido no problema de evolução estudado. Nesta tese nós trabalhamos com critérios nos espaços $\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})$, $C_0(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ e $C_h^0(\mathbb{Z};\mathbb{X})$.

Apresentamos a seguir dois teoremas úteis usados na demonstração dos resultados desta Seção.

Teorema 2.5.1. [8] *(Eberlein-Schmulyan) Um espaço de Banach $\mathbb{X}$ é reflexivo se e somente se é localmente sequencialmente fracamente compacto; isto é, $\mathbb{X}$ é reflexivo se e somente se toda a sequência em $\mathbb{X}$ fortemente limitada contém uma subsequência que converge fracamente para um elemento de $\mathbb{X}$.*

Teorema 2.5.2. [9] *Seja $\mathbb{X}$ um espaço de Banach e $\{x_n\}$ uma sequência em $\mathbb{X}$*

i) Se $\{x_n\}$ converge fortemente para x então $\{x_n\}$ converge fracamente para x mas a proposição conversa é falsa;

ii) Se $\{x_n\}$ converge fracamente para x então $\{x_n\}$ é limitada e em particular $||x|| \leq \liminf_{n\to+\infty} ||x_n||$.

[8] (YOSIDA, 1995, Cap. V, Ap 4). Para mais informação sobre William Frederick Eberlein siga o link Eberlein, William F. e sobre Vitold L'vovich Schmulyan siga o link Schmulyan, Vitold L..

[9] (YOSIDA, 1995, Teorema 1, Capítulo V). Para mais informação sobre Kösaku Yosida siga o link Yosida, Kösaku.

2.5.1 Critério de compacidade em ℓ^p

Para obter o Teorema 3.1.4 precisamos ter um conhecimento detalhado dos conjuntos relativamente compactos do espaço de Banach de todas as sequências ℓ^p-limitadas definidas de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{X}$. Temos o seguinte critério de compacidade em ℓ^p.

Teorema 2.5.3. *Um subconjunto $\mathcal{S}$ de $\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ ($1 \leq p < +\infty$) é relativamente compacto em $\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ se e somente se*

(**I**) *O conjunto $\mathcal{H}_n(\mathcal{S}) = \{\xi(n) : \ \xi \in \mathcal{S}\}$ é relativamente compacto em $\mathbb{X}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$;*

(**II**) $\lim\limits_{T\to+\infty} \sum\limits_{|n|>T} ||\xi(n)||_{\mathbb{X}}^p = 0$ *uniformemente em $\xi \in \mathcal{S}$.*

Observação 2.5.1. Usando uma terminologia similar à de Simon (1987), (**I**) é chamado o *critério espacial* (discreto) e (**II**) é chamado *critério temporal* (discreto).

Observação 2.5.2. O critério (**II**) pode ser expresso como:

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, T_0 \text{ tal que}: \ \forall\, \xi \in \mathcal{S}, \forall\, T \geq T_0 \text{ temos que } \sum_{|n|>T} ||\xi(n)||_{\mathbb{X}}^p \leq \varepsilon.$$

Observação 2.5.3. Podemos verificar que as condições (**I**) e (**II**) nos permitem concluir que $\mathcal{S}$ é limitado em $\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})$.

Observação 2.5.4 (**Optimalidade**)**.** A restrição $p < +\infty$ é necessária. De fato, fixado $x \in \mathbb{X} - \{0\}$, o conjunto $\mathcal{S} = \{\xi\}$ dado por $\xi(n) = (1 + (-1)^n)x$, $n \in \mathbb{Z}$, é compacto em $l^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ e não satisfaz (**II**).

Demonstração do Teorema 2.5.3. (i) Assumamos que $\mathcal{S}$ é um subconjunto relativamente compacto de $\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ ($1 \leq p < +\infty$). A aplicação $\xi \to \xi(j)$ é contínua de $\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ em $\mathbb{X}$, então o *critério espacial* (discreto) é satisfeito. Como $\mathcal{S}$ é relativamente compacto em $\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})$, então para todo $\varepsilon > 0$, existe um subconjunto finito $\{\xi_i : 1 \leq i \leq \ell\}$ de $\mathcal{S}$ tal que:

$$\forall\, \xi \in \mathcal{S},\ \exists\, \xi_i \text{ tal que } ||\xi - \xi_i||_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})} \leq \left(\frac{\varepsilon}{2^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.5.4}$$

Por outro lado, existe um número T suficientemente grande tal que

$$\max_{1\leq i\leq \ell} \sum_{|n|>T} ||\xi_i(n)||_{\mathbb{X}}^p \leq \frac{\varepsilon}{2^{p+1}}. \tag{2.5.5}$$

Levando em consideração (2.5.4) e (2.5.5) temos que é válida a condição (**II**), a partir da seguinte estimativa para T definido como (2.5.5):

$$\begin{aligned}\sum_{|n|>T} ||\xi(n)||_{\mathbb{X}}^p &\leq 2^p \sum_{|n|>T} ||\xi(n) - \xi_i(n)||_{\mathbb{X}}^p + 2^p \sum_{|n|>T} ||\xi_i(n)||_{\mathbb{X}}^p \\ &\leq 2^p ||\xi - \xi_i||_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})}^p + 2^p \max_{1\leq i\leq \ell} \sum_{|n|>T} ||\xi_i(n)||_{\mathbb{X}}^p.\end{aligned}$$

(ii) Conversamente assumamos que $\mathcal{S}$ satisfaz (**I**) e (**II**). Inicialmente observemos que estas condições implicam que $\mathcal{S}$ é limitado, isto é, $M := \sup_{\xi \in \mathcal{S}} ||\xi||_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})} < +\infty$. Seja $\{\xi_\ell\}_{\ell \in \mathbb{Z}^+}$ uma sequência em $\mathcal{S}$. Segue-se de (**I**), usando um argumento de diagonalização[10], a existência de uma subsequência $\left\{\xi_{\ell_j}\right\}_{j\in\mathbb{Z}^+}$ de $\{\xi_\ell\}_{\ell\in\mathbb{Z}^+}$ tal que $\xi(n) = \lim_{j\to+\infty} \xi_{\ell_j}(n)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Provemos que a sequência ξ é um elemento de $\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})$. Para cada $k \in \mathbb{Z}^+$,

$$\left(\sum_{n=-k}^{k} ||\xi_{\ell_j}(n)||_{\mathbb{X}}^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq ||\xi_{\ell_j}||_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})} \leq M.$$

Fazendo $j \to +\infty$ obtemos

$$\left(\sum_{n=-k}^{k} ||\xi(n)||_{\mathbb{X}}^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq M.$$

Como k é arbitrário, mostramos que $\xi \in \ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ e a sua norma não excede M. Resta provar que $||\xi_{\ell_j} - \xi||_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})} \to 0$ as $j \to +\infty$. Isso segue-se da seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} ||\xi_{\ell_j} - \xi||_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})}^p &\leq \sum_{|n|\leq T} ||\xi_{\ell_j}(n) - \xi(n)||_{\mathbb{X}}^p + \sum_{|n|>T} ||\xi_{\ell_j}(n) - \xi(n)||_{\mathbb{X}}^p \\ &\leq \sum_{|n|\leq T} ||\xi_{\ell_j}(n) - \xi(n)||_{\mathbb{X}}^p + 2^p \sum_{|n|>T} ||\xi_{\ell_j}(n)||_{\mathbb{X}}^p + 2^p \sum_{|n|>T} ||\xi(n)||_{\mathbb{X}}^p. \end{aligned}$$

Agora, usando a condição (**II**) e o fato que $\xi \in \ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ concluímos a prova do Teorema 2.5.3. □

2.5.2 Compacidade parcial

Nesta Seção a questão é caracterizar os conjuntos que são limitados em $\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ e são compactos em $\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ para todo $q < p < +\infty$. Esta propriedade é chamada *compacidade parcial*[11] uma vez que a compacidade não se obtém para todas as ordens p para as quais o conjunto é limitado.

Teorema 2.5.4. *Seja $\mathcal{S}$ um conjunto limitado em $\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ $(1 < q < +\infty)$. Então $\mathcal{S}$ é relativamente compacto em $\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ para todo $q < p < +\infty$ se e somente se* (**I**) *e a seguinte condição são satisfeitas:*

(**II***) $\lim_{T\to+\infty} \sup_{|n|>T} ||\xi(n)|| = 0$ *uniformemente em $\xi \in S$.*

Observação 2.5.5. Não é difícil ver que a condição (**II***) não implica a condição (**II**). Um exemplo concreto é o conjunto singular $\mathcal{S} = \{\xi\}$ dado por $\xi(n) = |n|^{-\frac{1}{p}}$.

[10] Começando por $n = 0$, existe uma subsequência $\left\{\phi_k\right\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$ de $\{\xi_\ell\}_{\ell\in\mathbb{Z}^+}$ tal que $\xi(0) = \lim_{k\to+\infty} \phi_k(0)$, tome-se $\xi_{\ell_0} = \phi_0$; de seguida para $n = 1$, existe uma subsequência $\left\{\psi_k\right\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$ de $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$ tal que $\xi(1) = \lim_{k\to+\infty} \psi_k(1)$, tome-se $\xi_{\ell_1} = \psi_1$; para $n = 2$, existe uma subsequência $\left\{\theta_k\right\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$ de $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$ tal que $\xi(2) = \lim_{k\to+\infty} \theta_k(2)$, tome-se $\xi_{\ell_2} = \theta_2$ e assim sucessivamente.

[11] A terminologia "compacidade parcial"é devida a (SIMON, 1987) onde o autor caracteriza os conjuntos que são limitados em $L^q(0,T;\mathbb{X})$ e compactos em $L^p(0,T;\mathbb{X})$ com $p < q$ ($\mathbb{X}$ é um espaço de Banach).

Observação 2.5.6. Com a hipótese do Teorema 2.5.4, o fecho $\bar{\mathcal{S}}$ de $\mathcal{S}$ em $\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ está contido e é limitado em $\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})$. De fato, seja $\xi \in \bar{\mathcal{S}}$ e denote-se por c uma cota superior de $\mathcal{S}$ em $\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{X})$, existe uma sequência $\{\xi_n\}_n$ tal que $||\xi_n||_{\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{X})} \leq c$ e $\xi_n \to \xi$ em $\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})$. Fazendo agora $u_n(\tau) = ||\xi_n(\tau)||_{\mathbb{X}}$, temos que $u_n \in \ell^q(\mathbb{Z})$ e $||u_n||_{\ell^q(\mathbb{Z})} \leq c$. Como $\ell^q(\mathbb{Z})$ é um espaço reflexivo, segue-se que existe, pelo Teorema de Eberlein-Schmulyan, uma subsequência $\left\{u_{n_j}\right\}_j$ de $\{u_n\}_n$ que converge fracamente para um elemento u de $\ell^q(\mathbb{Z})$. Usando o Teorema do livro de Yosida enunciado na Seção 2.5, $||u||_{\ell^q(\mathbb{Z})} \leq c$. Como $u_{n_j} \to u$ fracamente e $\xi_n \to \xi$ converge em norma em $\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ inferimos que $u(\tau) = ||\xi(\tau)||_{\mathbb{X}}$ para todo $\tau \in \mathbb{Z}$. Isto implica claramente que $\xi \in \ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ e $||\xi||_{\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{X})} \leq c$.

A próxima observação é inspirada numa observação de Simon enunciada antes de (SIMON, 1987, Observação 4.2).

Observação 2.5.7 (Optimalidade do Teorema 2.5.4). Verifiquemos que a compacidade parcial não implica a compacidade limite. De fato, observemos que há subconjuntos limitados de $\mathcal{S}$ em $\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ que são relativamente compactos em $\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ para todo $q < p$ mas não para $q = p$. Logo a desigualdade estrita $q < p$ é necessária no Teorema 2.5.4.

Demonstração. Seja b elemento de $\mathbb{X}$, $b \neq 0$ e seja $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$[12], $\varphi = 0$ fora de $]-T,T[$ e $\varphi \neq 0$. Para todo o inteiro n, $n \geq 1$, definimos a função $g_{n,q} : \mathbb{Z} \to \mathbb{X}$ como sendo $g_{n,q}(m) = n^{-\frac{1}{q}} b \Big(\int_m^{m+1} \left|\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\right| dt \Big)^{\frac{1}{q}}$. Fazendo agora $\mathcal{S} := \{g_{n,q} :\ n \geq 1\}$, mostraremos mais abaixo que $\mathcal{S}$ é um subconjunto limitado de $\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{X})$. De fato podemos deduzir da definição de $g_{n,q}$ que

$$||g_{n,q}||_{\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{X})} = n^{-\frac{1}{q}} ||b||_{\mathbb{X}} \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_m^{m+1} \left|\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\right| dt \right)^{\frac{1}{q}} = ||b||_{\mathbb{X}} ||\varphi||_{L^1(\mathbb{R})}^{\frac{1}{q}}, \quad (2.5.6)$$

portanto a nossa asserção está provada[13].

O próximo passo é mostrar que $\mathcal{S}$ não é relativamente compacto em $\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{X})$. Inicialmente podemos deduzir que

$$||g_{n,q}||_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})} = n^{-\frac{1}{q}} ||b||_{\mathbb{X}} \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\int_m^{m+1} \left|\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\right| dt \right)^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} ||b||_{\mathbb{X}} ||\varphi||_{L^{\frac{p}{q}}(\mathbb{R})}^{\frac{1}{q}}. \quad (2.5.7)$$

Estamos prontos para provar a nossa asserção. Argumentaremos da seguinte forma: se assumirmos que existe uma subsequência $\{g_{m,q}\}_m$ de $\{g_{n,q}\}_n$ tal que $g_{m,q} \to g$ quando

[12] Infinitamente derivável.

[13] A equação (2.5.6) terá um papel chave na demonstração do fato que $\mathcal{S}$ não é relativamente compacto em $\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{X})$.

$m \to +\infty$ em $\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{X})$; mas $||g||_{\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{X})} = ||b||_{\mathbb{X}} ||\varphi||_{L^1(\mathbb{R})}^{\frac{1}{q}}$ o que é claramente impossível porque $g = 0$ (a partir da convergência em $\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ e de (2.5.7)).

Um argumento envolvendo o Teorema 2.5.4 prova que o conjunto $\mathcal{S}$ é relativamente compacto em $\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})$. Podemos afirmar que o *critério espacial* (discreto) (**I**) é satisfeito porque existe $r > 0$ tal que $\mathcal{H}_m(\mathcal{S}) \subseteq \{\mu b \ : \ |\mu| \leq r\}$ que é compacto em $\mathbb{X}$ para todo $m \in \mathbb{Z}$.

Se $q < p$ para provar a condição (**II**) primeiro usemos o fato de que $g_{n,q} \to 0$ quando $n \to +\infty$ em $\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ (ver (2.5.7)). Daí para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_0$

$$\sup_{m\in\mathbb{Z}} ||g_{n,q}(m)||_{\mathbb{X}} < \epsilon. \tag{2.5.8}$$

Como $g_{n,q} \in \ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ existe um número T suficientemente grande tal que

$$\sup_{|m|>T} ||g_{n,q}(m)||_{\mathbb{X}} < \epsilon, \quad 1 \leq n \leq n_0. \tag{2.5.9}$$

Pelas desigualdades (2.5.8) e (2.5.9) temos que $\lim\limits_{T\to+\infty} \sup\limits_{|m|>T} ||g_{n,q}(m)||_{\mathbb{X}} = 0$ uniformemente em n. Observemos que para $p = q$ a condição (**II**) não é satisfeita uma vez que $g_{n,p} \nrightarrow 0$ quando $n \to +\infty$. Isto termina a demonstração da Observação 2.5.7. □

De acordo com um critério de compacidade de Cuevas e Pinto (2003), temos o seguinte resultado.

Lema 2.5.1. *Seja $\mathcal{F}$ um subconjunto de $C_0(\mathbb{Z};\mathbb{X})$. Então $\mathcal{F}$ é relativamente compacto em $C_0(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ se e somente se as seguintes condições são satisfeitas:*

(**C₀1**) *O conjunto $\mathcal{H}_n(\mathcal{F}) = \{u(n) : \ u \in \mathcal{F}\}$ é relativamente compacto em $\mathbb{X}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$;*

(**C₀2**) *O conjunto $\mathcal{F}$ é equiconvergente em $\pm\infty$, isto é, para todo $\epsilon > 0$ existe $T > 0$ tal que $||u(n)||_{\mathbb{X}} \leq \epsilon$ para todo $|n| \geq T$ e todo $u \in \mathcal{F}$.*

Demonstração do Teorema 2.5.4. Assumamos que $\mathcal{S}$ satisfaz as condições (**I**) e (**II***). A compacidade relativa será obtida em três passos.

Primeiro passo: Provaremos que $M_m(\mathcal{S}) \subseteq C_0(\mathbb{Z};\mathbb{X})$, onde M_m é o conjunto das funções em média, discretas.

Para $\xi \in \mathcal{S}$ fixemos um $m \in \mathbb{Z}^+$ e a função em média discreta [14] $M_m\xi : \mathbb{Z} \to \mathbb{X}$ seja definida por

$$(M_m\xi)(n) = \frac{1}{m+1} \sum_{j=n}^{n+m} \xi(j).$$

[14] $M_m\xi$ é a versão discreta da função média à direita (ver (SIMON, 1987)).

Segue-se de um cálculo simples que

$$|| \left(M_m\xi\right)(n)||_{\mathbb{X}} \leq \frac{1}{m+1}\sum_{j=n}^{n+m}||\xi(j)||_{\mathbb{X}} \leq \left(\sum_{j=n}^{n+m}||\xi(j)||_{\mathbb{X}}^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.5.10}$$

Atendendo a (2.5.10) notamos que $M_m\xi$ pode ser estimada como:

$$|| \left(M_m\xi\right)(n)||_{\mathbb{X}} \leq \min\left\{\left(\sum_{j=n}^{+\infty}||\xi(j)||_{\mathbb{X}}^p\right)^{\frac{1}{p}}, \left(\sum_{j=-\infty}^{n+m}||\xi(j)||_{\mathbb{X}}^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\}. \tag{2.5.11}$$

Voltando às limitações (2.5.11) podemos concluir que $\lim_{|n|\to+\infty}\left(M_m\xi\right)(n) = 0$, o que significa que $M_m\xi \in C_0(\mathbb{Z};\mathbb{X})$, desta forma temos $M_m\left(\mathcal{S}\right) \subseteq C_0(\mathbb{Z};\mathbb{X})$.

<u>Segundo passo</u>: O conjunto $M_m\left(\mathcal{S}\right)$ é relativamente compacto em $C_0(\mathbb{Z};\mathbb{X})$.

Observamos que pela condição (**I**), o conjunto $M_m\left(\mathcal{S}\right)$ satisfaz ($\mathbf{C_01}$) do Lema 2.5.1. Por ($\mathbf{II}^*$) vemos que $M_m\left(\mathcal{S}\right)$ é equiconvergente em $\pm\infty$. De fato isso segue-se da seguinte estimativa para um T grande o suficiente

$$||\xi(n)+\ldots+\xi(n+m)||_{\mathbb{X}} \leq (m+1)\sup_{|l|>T}||\xi(l)||_{\mathbb{X}} < \epsilon,$$

uniformemente em $\xi \in \mathcal{S}$. Estamos agora em condições para aplicar o critério de compacidade em $C_0(\mathbb{Z};\mathbb{X})$. Isso leva a que $M_m\left(\mathcal{S}\right)$ seja relativamente compacto em $C_0(\mathbb{Z};\mathbb{X})$.

<u>Terceiro passo</u>: $\mathcal{S}$ é relativamente compacto em $\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})$.

Por um argumento de interpolação vemos que $M_m\left(\mathcal{S}\right)$ é relativamente compacto em $\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})$. Daremos os detalhes desse argumento. Observamos que o espaço $\left(\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X}), ||\cdot||_p\right)$ é um espaço de classe $\theta = 1-\frac{q}{p}$ com respeito a $\left(\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{X}), ||\cdot||_q\right)$ e $(C_0(\mathbb{Z};\mathbb{X}), ||\cdot||_\infty)$, ou seja $||\xi||_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})} \leq ||\xi||^{1-\theta}_{\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{X})}||\xi||^{\theta}_{\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})}$, $\xi \in \ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{X})$. De fato

$$\frac{||\xi||^p_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})}}{||\xi||^{p(1-\theta)}_{\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{X})}||\xi||^{p\theta}_{\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})}} = \frac{||\xi||^p_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})}}{||\xi||^{q}_{\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{X})}||\xi||^{p-q}_{\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})}} = \left(\frac{||\xi||_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})}}{||\xi||_{\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{X})}}\right)^p\left(\frac{||\xi||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})}}{||\xi||_{\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{X})}}\right)^{q-p} \leq 1.$$

Como $\mathcal{S}$ é limitado em $\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{X})$, temos que $M_m(\mathcal{S})$ é limitado em $\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{X})$. De fato isso segue diretamente da desigualdade

$$||M_m\xi||_{\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{X})} \leq ||\xi||_{\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{X})}, \text{ for all } \xi \in \ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{X}). \tag{2.5.12}$$

Sejam q' e q expoentes conjugados. Iremos obter (2.5.12) a partir das seguintes estimativas:

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|| \left(M_m\xi\right)(n)||^q_{\mathbb{X}} &\leq \frac{1}{(m+1)^q}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{j=n}^{n+m}||\xi(j)||_{\mathbb{X}}\right)^q \\ &\leq \frac{(m+1)^{\frac{q}{q'}}}{(m+1)^q}\sum_{j=0}^{m}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}||\xi(j+n)||^q_{\mathbb{X}} \\ &= \frac{(m+1)^{\frac{q}{q'}+1}}{(m+1)^q}||\xi||^q_{\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{X})}.\end{aligned}$$

Agora tendo em conta que $M_m(\mathcal{S})$ é relativamente compacto em $C_0(\mathbb{Z};\mathbb{X})$. Obtemos a partir do Lema 10 de Simon (1987) que $M_m(\mathcal{S})$ é um conjunto relativamente compacto contido em $\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ para todo $m \in \mathbb{Z}^+$. Em particular isto leva a que $M_0(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$ seja relativamente compacto em $\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})$.

Conversamente assumamos que $\mathcal{S}$ é um conjunto relativamente compacto de $\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})$, de (i) da demonstração do Teorema 2.5.3, a condição (**I**) vale. Por outro lado, para $\epsilon > 0$ existe um subconjunto finito $\mathcal{S}_\epsilon = \{\xi_i :\ 1 \le i \le l\}$ de $\mathcal{S}$ tal que

$$\forall\,\xi \in \mathcal{S}, \exists\,\xi_i \in \mathcal{S}_\epsilon \text{ tal que } ||\xi - \xi_i||_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})} \le \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.5.13}$$

Existe um número T, suficientemente grande tal que

$$\max_{1\le i\le l} \sup_{|n|>T} ||\xi_i(n)||_{\mathbb{X}} \le \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.5.14}$$

Usando (2.5.13) e (2.5.14) temos que é válida a condição (**II**) tendo em conta a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}\sup_{|n|>T} ||\xi(n)||_{\mathbb{X}} &\le \sup_{|n|>T} ||\xi(n) - \xi_i(n)||_{\mathbb{X}} + \sup_{|n|>T} ||\xi_i(n)||_{\mathbb{X}} \\ &\le ||\xi - \xi_i||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})} + \max_{1\le i\le l} \sup_{|n|>T} ||\xi_i(n)||_{\mathbb{X}} \\ &\le ||\xi - \xi_i||_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})} + \max_{1\le i\le l} \sup_{|n|>T} ||\xi_i(n)||_{\mathbb{X}}.\end{aligned}$$

Isto termina a prova do Teorema 2.5.4. □

2.5.3 Critério de compacidade em C_h^0

Seja $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^+$ uma função tal que $h(n) \ge 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, e $h(n) \to +\infty$ quando $|n| \to +\infty$. Consideremos o espaço

$$C_h^0(\mathbb{Z};\mathbb{X}) = \left\{ \xi : \mathbb{Z} \to \mathbb{X} :\ \lim_{|n|\to+\infty} \frac{||\xi(n)||_{\mathbb{X}}}{h(n)} = 0 \right\},$$

equipado com a norma

$$||\xi||_h = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \frac{||\xi(n)||_{\mathbb{X}}}{h(n)}. \tag{2.5.15}$$

É evidente que $C_h^0(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ é um espaço de Banach isometricamente isomorfo ao espaço $C_0(\mathbb{Z};\mathbb{X})$.

Teorema 2.5.5. *(AGARWAL; CUEVAS; DANTAS, 2013) Um subconjunto $\mathcal{S}$ de $C_h^0(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ é relativamente compacto se e somente se valem as seguintes condições:*

(RC1) *O conjunto $\mathcal{H}_n^h(\mathcal{S}) = \left\{\frac{u(n)}{h(n)} :\ u \in \mathcal{S}\right\}$ é relativamente compacto em $\mathbb{X}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$;*

(RC2) *$\mathcal{S}$ é equiconvergente em peso em $\pm\infty$, isto é, para todo $\epsilon > 0$, existe $T > 0$ tal que $||u(n)||_{\mathbb{X}} < \epsilon h(n)$, para todo $|n| \ge T$ e todo $u \in \mathcal{S}$.*

3 SOLUÇÕES LIMITADAS

Seja $\mathbb{X}$ um espaço de Banach arbitrário. Consideremos aqui a equação semi-linear em diferenças de Volterra em $\mathbb{X}$ (ver por exemplo o artigo de Castro et al. (2014)):

$$x(n+1) = \lambda \sum_{j=-\infty}^{n} a(n-j)x(j) + g(n,x), \; n \in \mathbb{Z}, \tag{3.0.1}$$

onde λ é um número complexo, $a(n)$ é uma sequência em $\mathbb{C}$, somável e g uma função apropriada. Equações como (3.0.1) têm uma grande variedade de aplicações. Por exemplo o artigo de Castro et al. (2014) investiga a existência de soluções discretas quase automórficas, e os autores também estudam o comportamento assintótico das soluções. Em (CUEVAS et al., 2013) os autores tratam as propriedades de limitação em l^p para equações do tipo (3.0.1). Foram levados em consideração os efeitos de diferentes formas de crescimento do termo não homogêneo g e em consequência a unicidade da solução não pode ser garantida. Em (CUEVAS; CHOQUEHUANCA; SOTO, 2014) os autores lidam com o comportamento assintótico, a continuidade e a compacidade das soluções para equações do tipo (3.0.1).

No que se segue $\mathcal{B}$ é um espaço de fase; ρ é a constante dada na Observação 2.3.1; λ é um elemento do conjunto admissível Ω_s e $s(\lambda, k)$ é a solução fundamental da equação (2.4.1) gerada por $a(\cdot)$. Denotamos por $||s(\lambda,\cdot)||_1$ a norma ℓ^1 de $s(\lambda,\cdot)$.

3.1 Propriedades de limitação em ℓ^{p}

A propriedade de limitação ℓ^p é um tópico clássico e importante do estudo de EDO, em particular o estudo da existência de soluções limitadas ($p = \infty$) e soluções somáveis ($p = 1$). De notar que a existência de soluções em l^p com p finito nos informa sobre o comportamento assintótico da solução, garantindo o seu decaimento para 0. O seu análogo discreto, equações em diferenças, importa esse caráter. Para as equações em diferenças com retardo infinito, em (BEREZANSKY; BRAVERMAN, 2006) os autores provaram que a estabilidade exponencial é equivalente a ℓ^p-input, ℓ^q-estabilidade de estado (Propriedade de Perron) quando $(p,q) \neq (1,+\infty)$ e são satisfeitas certas condições de limitação dos coeficientes. Em (AGARWAL; CUEVAS; FRASSON, 2012) os autores estudaram a existência de soluções limitadas no sentido ℓ^p para equações funcionais em diferenças com retardo infinito.

Nesta seção apresentamos os resultados de existência e unicidade de soluções ℓ^p-limitadas que obtivemos para a equação (3.1.3), em função de várias perturbações. Começamos por um resultado que complementa (CUEVAS et al., 2013, Teorema 1.1) e que foi comunicado em (BERNARDO; CUEVAS; SOTO, 2018, XXI SIMMAC, fevereiro 27 - março 2).

Teorema 3.1.1. *Sejam p e q expoentes conjugados e $f : \mathbb{Z} \times \mathcal{B} \to \mathbb{X}$ uma função que satisfaz a condição de Lipschitz:*

$$||f(n,\varphi) - f(n,\psi)||_{\mathbb{X}} \le L(n)||\varphi(0) - \psi(0)||_{\mathbb{X}} \tag{3.1.2}$$

para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{B}$ e para cada $n \in \mathbb{Z}$, onde $L : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^+$ é ℓ^q-somável e $f(\cdot, 0) \in \ell^1(\mathbb{Z}; \mathbb{X})$. Se $||s(\lambda,\cdot)||_1||L||_{\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{R}^+)} < 1$ então a equação

$$x(n+1) = \lambda \sum_{j=-\infty}^{n} a(n-j)x(j) + f(n, x_n),\ n \in \mathbb{Z}, \tag{3.1.3}$$

tem uma única solução ℓ^p-somável.

Demonstração. Definimos o operator $\mathcal{F}$, no espaço $\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})$, pela expressão

$$\left(\mathcal{F}u\right)(n) = \sum_{j=-\infty}^{n-1} s(\lambda, n-1-j) f(j, u_j), \tag{3.1.4}$$

onde $u(\cdot)$ é uma sequência ℓ^p-somável. O primeiro passo da nossa análise será provar que $\mathcal{F}$ está bem definido. Temos

$$\begin{aligned}
||f(\cdot, u.)||_{\ell^1(\mathbb{Z};\mathbb{X})} &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} ||f(j,u_j)||_{\mathbb{X}} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} ||f(j,u_j) - f(j,0) + f(j,0)||_{\mathbb{X}} \\
&\le \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \Big(||f(j,u_j) - f(j,0)||_{\mathbb{X}} + ||f(j,0)||_{\mathbb{X}} \Big) \\
&\le \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \Big(L(j)||u_j(0) - 0||_{\mathbb{X}} + ||f(j,0)||_{\mathbb{X}} \Big) \\
&\le \sum_{j=-\infty}^{+\infty} L(j)||u(j)||_{\mathbb{X}} + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} ||f(j,0)||_{\mathbb{X}} \\
&\le ||L||_{\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{R}^+)}||u||_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})} + ||f(\cdot,0)||_{\ell^1(\mathbb{Z};\mathbb{X})}
\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

e também

$$\begin{aligned}
||\left(\mathcal{F}u\right)(n)||_{\mathbb{X}} &\le \sum_{j=-\infty}^{n-1} |s(\lambda, n-1-j)|\, ||f(j,u_j)||_{\mathbb{X}} \\
&\le ||s(\lambda,\cdot)||_{\infty} \sum_{j=-\infty}^{n-1} ||f(j,u_j)||_{\mathbb{X}} \\
&\le ||s(\lambda,\cdot)||_{\infty} ||f(\cdot,u.)||_{\ell^1(\mathbb{Z};\mathbb{X})} \\
&\le ||s(\lambda,\cdot)||_{\infty} \Big(||L||_{\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{R}^+)}||u||_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})} + ||f(\cdot,0)||_{\ell^1(\mathbb{Z};\mathbb{X})} \Big).
\end{aligned}$$

Logo

$$||\mathcal{F}u||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})} \le ||s(\lambda,\cdot)||_{\infty} \Big(||L||_{\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{R}^+)}||u||_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})} + ||f(\cdot,0)||_{\ell^1(\mathbb{Z};\mathbb{X})} \Big). \tag{3.1.6}$$

Usando (3.1.5) e (3.1.6) temos

$$\begin{aligned}
||\mathcal{F}u||^p_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} ||\left(\mathcal{F}u\right)(n)||^p \\
&\leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} ||\left(\mathcal{F}u\right)(n)||^{p-1}_{\mathbb{X}} ||\left(\mathcal{F}u\right)(n)||_{\mathbb{X}} \\
&\leq ||\mathcal{F}u||^{p-1}_{\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} ||\left(\mathcal{F}u\right)(n)||_{\mathbb{X}} \\
&\leq ||\mathcal{F}u||^{p-1}_{\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} ||\sum_{j=-\infty}^{n-1} s(\lambda, n-1-j)\, f(j,u_j)||_{\mathbb{X}} \\
&\leq ||\mathcal{F}u||^{p-1}_{\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{n-1} |s(\lambda, n-1-j)|\, ||f(j,u_j)||_{\mathbb{X}} \\
&\leq ||\mathcal{F}u||^{p-1}_{\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Big(|s(\lambda,\cdot)| * ||f(\cdot,u.)||_{\mathbb{X}}\Big)(n-1) \\
&\leq ||\mathcal{F}u||^{p-1}_{\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Big(|s(\lambda,\cdot)| * ||f(\cdot,u.)||_{\mathbb{X}}\Big)(n) \\
&\leq ||\mathcal{F}u||^{p-1}_{\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})} ||s(\lambda,\cdot)||_1 ||f(\cdot,u.)||_{\ell^1(\mathbb{Z};\mathbb{X})} \\
&\leq ||\mathcal{F}u||^{p-1}_{\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})} ||s(\lambda,\cdot)||_1 \left(||L||_{\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{R}^+)} ||u||_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})} + ||f(\cdot,0)||_{\ell^1(\mathbb{Z};\mathbb{X})}\right) \\
&\leq ||s(\lambda,\cdot)||^{p-1}_\infty \Big(||L||_{\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{R}^+)} ||u||_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})} + ||f(\cdot,0)||_{\ell^1(\mathbb{Z};\mathbb{X})}\Big)^{p-1} \\
&\quad \times ||s(\lambda,\cdot)||_1 \left(||L||_{\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{R}^+)} ||u||_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})} + ||f(\cdot,0)||_{\ell^1(\mathbb{Z};\mathbb{X})}\right) \\
&= ||s(\lambda,\cdot)||^{p-1}_\infty ||s(\lambda,\cdot)||_1 \Big(||L||_{\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{R}^+)} ||u||_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})} + ||f(\cdot,0)||_{\ell^1(\mathbb{Z};\mathbb{X})}\Big)^p \\
&\leq ||s(\lambda,\cdot)||^p_1 \Big(||L||_{\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{R}^+)} ||u||_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})} + ||f(\cdot,0)||_{\ell^1(\mathbb{Z};\mathbb{X})}\Big)^p.
\end{aligned}$$

e daí obtemos a estimativa

$$||\mathcal{F}u||_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})} \leq ||s(\lambda,\cdot)||_1 \left(||L||_{\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{R}^+)} ||u||_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})} + ||f(\cdot,0)||_{\ell^1(\mathbb{Z};\mathbb{X})}\right). \tag{3.1.7}$$

Pela desigualdade (3.1.7) deduzimos que $\mathcal{F}$ está bem definido.

O último passo será mostrar que $\mathcal{F}$ é uma contração. Sejam u e v elementos de $\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})$, temos

$$\begin{aligned}
||\left(\mathcal{F}u\right)(n) - \left(\mathcal{F}v\right)(n)||_{\mathbb{X}} &= ||\sum_{j=-\infty}^{n-1} s(\lambda, n-1-j)\Big(f(j,u_j) - f(j,v_j)\Big)||_{\mathbb{X}} \\
&\leq \sum_{j=-\infty}^{n-1} |s(\lambda,n-1-j)|\, ||f(j,u_j) - f(j,v_j)||_{\mathbb{X}} \\
&\leq ||s(\lambda,\cdot)||_\infty \sum_{j=-\infty}^{n-1} ||f(j,u_j) - f(j,v_j)||_{\mathbb{X}} \\
&\leq ||s(\lambda,\cdot)||_\infty \sum_{j=-\infty}^{n-1} L(j) ||u(j) - v(j)||_{\mathbb{X}} \\
&\leq ||s(\lambda,\cdot)||_\infty ||L||_{\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{R}^+)} ||u - v||_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})}.
\end{aligned}$$

Logo

$$||\mathcal{F}u - \mathcal{F}v||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})} \leq ||s(\lambda,\cdot)||_\infty ||L||_{\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{R}^+)} ||u-v||_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})}. \tag{3.1.8}$$

Usando (3.1.8) temos

$$\begin{aligned}
||\mathcal{F}u - \mathcal{F}v||^p_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} ||\left(\mathcal{F}u\right)(n) - \left(\mathcal{F}v\right)(n)||^p \\
&\leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} ||\left(\mathcal{F}u\right)(n) - \left(\mathcal{F}v\right)(n)||^{p-1}_{\mathbb{X}} ||\left(\mathcal{F}u\right)(n) - \left(\mathcal{F}v\right)(n)||_{\mathbb{X}} \\
&\leq ||\mathcal{F}u - \mathcal{F}v||^{p-1}_{\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} ||\left(\mathcal{F}u\right)(n) - \left(\mathcal{F}v\right)(n)||_{\mathbb{X}} \\
&\leq ||\mathcal{F}u - \mathcal{F}v||^{p-1}_{\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} ||\sum_{j=-\infty}^{n-1} s(\lambda, n-1-j)\Big(f(j,u_j) - f(j,v_j)\Big)||_{\mathbb{X}} \\
&\leq ||\mathcal{F}u - \mathcal{F}v||^{p-1}_{\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{n-1} |s(\lambda, n-1-j)|\, ||f(j,u_j) - f(j,v_j)||_{\mathbb{X}} \\
&\leq ||\mathcal{F}u - \mathcal{F}v||^{p-1}_{\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Big(|s(\lambda,\cdot)| * ||f(\cdot,u_\cdot) - f(\cdot,v_\cdot)||_{\mathbb{X}}\Big)(n-1) \\
&\leq ||\mathcal{F}u - \mathcal{F}v||^{p-1}_{\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Big(|s(\lambda,\cdot)| * ||f(\cdot,u_\cdot) - f(\cdot,v_\cdot)||_{\mathbb{X}}\Big)(n) \\
&\leq ||\mathcal{F}u - \mathcal{F}v||^{p-1}_{\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})} ||s(\lambda,\cdot)||_1 ||f(\cdot,u_\cdot) - f(\cdot,v_\cdot)||_{\ell^1(\mathbb{Z};\mathbb{X})} \\
&\leq ||\mathcal{F}u - \mathcal{F}v||^{p-1}_{\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})} ||s(\lambda,\cdot)||_1 ||L||_{\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{R}^+)} ||u-v||_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})} \\
&\leq ||s(\lambda,\cdot)||^{p-1}_\infty ||L||^{p-1}_{\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{R}^+)} ||u-v||^{p-1}_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})} ||s(\lambda,\cdot)||_1 ||L||_{\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{R}^+)} ||u-v||_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})} \\
&\leq ||s(\lambda,\cdot)||^{p-1}_\infty ||s(\lambda,\cdot)||_1 ||L||^p_{\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{R}^+)} ||u-v||^p_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})} \\
&\leq ||s(\lambda,\cdot)||^p_1 ||L||^p_{\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{R}^+)} ||u-v||^p_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})}.
\end{aligned}$$

Isto significa que

$$||\mathcal{F}u - \mathcal{F}v||_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})} \leq ||s(\lambda,\cdot)||_1 ||L||_{\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{R}^+)} ||u-v||_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})},$$

que mostra que $\mathcal{F}$ é uma contração.

Seja $u \in \ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ o ponto fixo de $\mathcal{F}$, examinemos em detalhe o fato de que $u(\cdot)$ satisfaz a identidade

$$u(n+1) = \sum_{j=-\infty}^{n} s(\lambda, n-j) f(j,u_j),\ n \in \mathbb{Z}. \tag{3.1.9}$$

Temos que

$$\begin{aligned}
\lambda \sum_{j=-\infty}^{n} a(n-j)u(j) &= \lambda \sum_{j=-\infty}^{n} a(n-j)\left(\sum_{\tau=-\infty}^{j-1} s(\lambda, j-1-\tau)f(\tau, u_\tau)\right) \\
&= \lambda \sum_{j=-\infty}^{n-1} \sum_{\tau=-\infty}^{j} a(n-1-j)s(\lambda, j-\tau)f(\tau, u_\tau) \\
&= \lambda \sum_{\tau=-\infty}^{n-1} \sum_{j=\tau}^{n-1} a(n-1-j)s(\lambda, j-\tau)f(\tau, u_\tau) \\
&= \sum_{\tau=-\infty}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1-\tau} \lambda a(n-1-\tau-j)s(\lambda, j)f(\tau, u_\tau) \\
&= \sum_{\tau=-\infty}^{n-1} s(\lambda, n-\tau)f(\tau, u_\tau) \\
&= \sum_{\tau=-\infty}^{n} s(\lambda, n-\tau)f(\tau, u_\tau) - f(n, u_n) \\
&= u(n+1) - f(n, u_n),
\end{aligned}$$

de onde $u(\cdot)$ é a solução da equação (3.1.3).

Adaptando a demonstração do Teorema 2.4.2 podemos verificar igualmente que todas as soluções ℓ^p-limitadas da equação (3.1.3) verificam a equação (3.1.9) e portanto são pontos fixos de $\mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ é uma contração o seu ponto fixo é único. Está completa a demonstração do Teorema 3.1.1. □

Observação 3.1.1. O teorema anterior dá-nos uma estimativa *a priori* para a norma ℓ^p da solução, $u(\cdot)$, de (3.1.3), a saber:

$$||u||_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})} \leq \frac{||s(\lambda,\cdot)||_1}{1-||s(\lambda,\cdot)||_1||L||_{\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{R}^+)}}||f(\cdot,0)||_{\ell^1(\mathbb{Z};\mathbb{X})}.$$

Demonstração. De fato, como $u = \mathcal{F}u$, o resultado deduz-se imediatamente da estimativa (3.1.7). □

A próxima observação foi apresentada e ilustrada com o Exemplo 5.0.2 no Seventh Conference on Finite Difference Methods: Theory and Applications ($FDM'18$), Lozenetz, Bulgaria, 12-16 de Junho, 2018 e é parte da publicação Bernardo, Cuevas e Soto (2018).

Observação 3.1.2. Sob condições similares ao Teorema 3.1.1 se substituirmos a condição (3.1.2) pela seguinte condição:

$$||f(n,\varphi)-f(n,\psi)||_{\mathbb{X}} \leq L(n)\left(||\varphi(0)-\psi(0)||_{\mathbb{X}}+\ldots+||\varphi(-\mu)-\psi(-\mu)||_{\mathbb{X}}\right). \tag{3.1.10}$$

É verdadeira a mesma conclusão do Teorema 3.1.1.

Teorema 3.1.2. *Sejam $1 < p,\ q < +\infty$ expoentes conjugados. Seja φ um elemento de $\mathcal{B}$ tal que $\varphi(0) = 0$. Seja $f : \mathbb{Z}^+ \times \mathcal{B} \to \mathbb{X}$ uma função que satisfaz (3.1.2). Se uma das seguintes condições for verdadeira:*

(E1) $L \in \ell^p(\mathbb{Z}^+;\mathbb{R}^+)$, $f(\cdot, 0) \in \ell^p(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X})$ *e* $||s(\lambda,\cdot)||_1||L||_{\ell^p(\mathbb{Z}^+;\mathbb{R}^+)} < 1$.

(E2) $L \in \ell^q(\mathbb{Z}^+;\mathbb{R}^+)$, $f(\cdot, 0) \in \ell^1(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X})$ *e* $||s(\lambda,\cdot)||_1||L||_{\ell^q(\mathbb{Z}^+;\mathbb{R}^+)} < 1$.

Então o problema

$$\begin{aligned} u(n+1) &= \lambda\sum_{j=0}^{n} a(n-j)u(j) + f(n,u_n),\ n \in \mathbb{Z}^+, && (3.1.11)\\ u_0 &= \varphi, && (3.1.12)\end{aligned}$$

tem uma única solução ℓ^p-limitada.

Demonstração. Fazendo $\ell^p_\varphi := \{u \in \ell^p(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X})\ :\ u_0 = \varphi\}$ é fácil ver que este espaço é uma cópia isométrica de $\ell^p(\mathbb{N}^+;\mathbb{X})$, logo pode ser naturalmente visto como um espaço métrico completo. Definimos o operador $\mathcal{F}$ no espaço ℓ^p_φ pela expressão

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}u)(n+1) &= \sum_{j=0}^{n} s(\lambda, n-j) f(j,u_j),\ n \geq 0, && (3.1.13)\\ (\mathcal{F}u)_0 &= \varphi, && (3.1.14)\end{aligned}$$

onde $u \in \ell^p_\varphi$. Sejam u e v elementos de ℓ^p_φ. Sob a condição (**E1**) temos

$$\begin{aligned} ||(\mathcal{F}u)(n)||_{\mathbb{X}} &\leq \sum_{j=0}^{n-1} |s(\lambda, n-1-j)|\, ||f(j,u_j)||_{\mathbb{X}}\\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} |s(\lambda, n-1-j)|\ (L(j)||u(j)||_{\mathbb{X}} + ||f(j,0)||_{\mathbb{X}})\\ &= (|s(\lambda,\cdot)| \tilde{*} (L(\cdot)||u(\cdot)||_{\mathbb{X}} + ||f(\cdot,0)||_{\mathbb{X}}))(n-1).\end{aligned}$$

Adaptando a demonstração da Proposição 2.2.2 para esta convolução[1], $\tilde{*}$, também vale a desigualdade de Young de onde, procedendo como na demonstração do Teorema 3.1.1 temos:

$$\begin{aligned} ||\mathcal{F}u||_{\ell^p(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X})} &\leq ||s(\lambda,\cdot)||_1 \Big\| L(\cdot)||u(\cdot)||_{\mathbb{X}} + ||f(\cdot,0)||_{\mathbb{X}} \Big\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X})}\\ &\leq ||s(\lambda,\cdot)||_1 \left(\Big\| L(\cdot)||u(\cdot)||_{\mathbb{X}} \Big\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X})} + ||f(\cdot,0)||_{\ell^p(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X})} \right)\\ &\leq ||s(\lambda,\cdot)||_1 \left(||L||_{\ell^\infty(\mathbb{Z}^+;\mathbb{R}^+)}||u||_{\ell^p(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X})} + ||f(\cdot,0)||_{\ell^p(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X})} \right)\\ &\leq ||s(\lambda,\cdot)||_1 \left(||L||_{\ell^p(\mathbb{Z}^+;\mathbb{R}^+)}||u||_{\ell^p(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X})} + ||f(\cdot,0)||_{\ell^p(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X})} \right)\end{aligned}$$

[1] Dadas duas sequências, u, v, definidas de $\mathbb{Z}^+$ em $\mathbb{C}$, definimos a convolução $u\tilde{*}v$ como sendo a sequência $(u\tilde{*}v)(n) = \sum_{j=0}^{n} u(n-j)\, v(j)$.

que mostra a boa definição de $\mathcal{F}$ e de

$$||\mathcal{F}u - \mathcal{F}v||_{\ell^p(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X})} \;\; \leq \;\; ||s(\lambda,\cdot)||_1 ||L||_{\ell^p(\mathbb{Z}^+;\mathbb{R}^+)} ||u-v||_{\ell^p(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X})}.$$

deduzimos que $\mathcal{F}$ é uma contração no espaço métrico $\ell^p_\varphi(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X})$.

Sob a condição (**E2**) obtemos

$$\begin{aligned}
&||\mathcal{F}u||_{\ell^p(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X})} \leq ||s(\lambda,\cdot)||_1 \left(||L||_{\ell^q(\mathbb{Z}^+;\mathbb{R}^+)} ||u||_{\ell^p(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X})} + ||f(\cdot,0)||_{\ell^1(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X})} \right),\\
&||\mathcal{F}u - \mathcal{F}u||_{\ell^p(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X})} \leq ||s(\lambda,\cdot)||_1 ||L||_{\ell^q(\mathbb{Z}^+;\mathbb{R}^+)} ||u-v||_{\ell^p(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X})}
\end{aligned}$$

e temos o resultado pretendido. □

A próxima observação é inspirada em Aparcana et al. (2018, Proposições 3.1 e 3.2).

Observação 3.1.3. Seja $\varphi \in \mathcal{B}$ tal que $\varphi(0) = 0$. Seja $f : \mathbb{Z}^+ \times \mathcal{B} \to \mathbb{X}$ uma função que satisfaz (3.1.2).

(a) (soluções-limitadas) Fazendo $W(g) = \sup_{n\in\mathbb{Z}^+} \sum_{j=0}^{n} |s(\lambda, n-j)|g(j)$. Suponhamos que $W(L) < 1$ e $W(||f(\cdot,0)||_{\mathbb{X}}) < +\infty$, então existe uma única solução limitada, $u(\cdot)$, de (3.1.11)-(3.1.12).

(b) (Soluções que se anulam no infinito) Supondo que $f(\cdot,0)$ se anula no infinito, $L(n) \equiv L$ e $||s(\lambda,\cdot)||_1 L < 1$, então existe uma única solução, $u(\cdot)$, de (3.1.11)-(3.1.12) tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} u(n) = 0$.

Demonstração. (Item (a)) Fazemos $\ell^\infty_\varphi(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X}) = \{u \in \ell^\infty(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X}) \;:\; u_0 = \varphi\}$. Definimos o operator $\mathcal{F}$ no espaço ℓ^∞_φ por (3.1.13) e (3.1.14). Temos que

$$||\mathcal{F}u||_{\ell^\infty(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X})} \leq W(L)||u||_{\ell^\infty(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X})} + W(||f(\cdot,0)||_{\mathbb{X}}),$$

de onde $\mathcal{F}$ está bem definido. Além disso, para u e v elementos de $\ell^\infty_\varphi(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X})$, inferimos que

$$||\mathcal{F}v - \mathcal{F}u||_{\ell^\infty(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X})} \leq W(L)||u-v||_{\ell^\infty(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X})}$$

e isso implica que $\mathcal{F}$ é uma contração. □

Demonstração. (Item (b)) Introduzimos a seguinte notação:

$$C_0^\varphi(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X}) = \left\{ u \in C_0(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X}) \;:\; u_0 = \varphi \right\}.$$

Definimos o operador $\mathcal{F}$ no espaço $C_0^\varphi(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X})$ por (3.1.13) e (3.1.14). Temos a estimativa

$$||f(n,u_n)||_{\mathbb{X}} \leq L||u(n)||_{\mathbb{X}} + ||f(n,0)||_{\mathbb{X}},$$

de onde $f(\cdot, u_\cdot) \in C_0(\mathbb{Z}^+; \mathbb{X})$ para todo $u \in C_0(\mathbb{Z}^+; \mathbb{X})$, então

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{n} s(\lambda, n-j) f(j, u_j) = 0,$$

e daí $\mathcal{F}$ está bem definido. Por outro lado, podemos ver que $\mathcal{F}$ é uma $||s(\lambda,\cdot)||_1 L$-contração. A prova da Observação 3.1.3 está concluída. □

Para formularmos o próximo resultado precisamos introduzir as seguintes notações:
$L_{a,\infty} := \sup_{n\geq a} L(n)$; $L_{a,1} := \sum_{j=0}^{a-1} L(j)$; $L_{a,p} := \left(\sum_{j=0}^{a-1} L(j)^p\right)^{\frac{1}{p}}$;
$R(a, s, L) := ||s(\lambda,\cdot)||_\infty^p a^{p-1} L_{a,p}^p$;
$\Theta(a) := ||s(\lambda,\cdot)||_1^2 L_{a,\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\dfrac{R(a,s,L)^j}{j!}\right)^{\frac{1}{p}}$.

O próximo teorema corresponde a um teorema do tipo Azevedo et al. para equações de onda fortemente amortecidas (ver (AZEVEDO; CUEVAS; SOTO, 2017, Teorema 1.8)).

Teorema 3.1.3. *Seja φ um elemento de $\mathcal{B}$ tal que $\varphi(0) = 0$. Seja $f : \mathbb{Z}^+ \times \mathcal{B} \to \mathbb{X}$ uma função que satisfaz (3.1.2) com $f(\cdot, 0) \in \ell^p(\mathbb{Z}^+; \mathbb{X})$. Supondo que existe um inteiro positivo a tal que $||s(\lambda,\cdot)||_1 L_{a,\infty} < 1$ e $\Theta(a) < 1$, então o problema (3.1.11)-(3.1.12) tem uma única solução ℓ^p-limitada.*

Demonstração. Seja $\mathcal{L}^{p,a}(\mathbb{X})$ o espaço constituído por todas as sequências $u \in \ell^\infty_\varphi(\mathbb{Z}^+; \mathbb{X})$ tais que $\sum_{m=a}^{+\infty} ||u(m)||_{\mathbb{X}}^p < +\infty$, equipado com a norma $|||u||| = ||u||_{[0,a]} + ||u||_{\ell^{p,a}}$, onde

$$||u||_{[0,a]} = \max_{0\leq l\leq a-1} ||u(l)||_{\mathbb{X}} \text{ e } ||u||_{\ell^{p,a}} = \left(\sum_{m=a}^{+\infty} ||u(m)||_{\mathbb{X}}^p\right)^{1/p}.$$

Definimos o operador $\mathcal{F}$ no espaço $\mathcal{L}^{p,a}(\mathbb{X})$ por (3.1.13) e (3.1.14). Observemos que

$$\max_{0\leq l\leq a} ||(\mathcal{F}u)(l)||_{\mathbb{X}} \leq ||s(\lambda,\cdot)||_1 \left(L_{a,p}||u||_{[0,a]} + ||f(\cdot,0)||_{\ell^p(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X})}\right). \tag{3.1.15}$$

$$\begin{aligned} ||(\mathcal{F}u)(n+1)||_{\mathbb{X}}^p &\leq 2^p ||s(\lambda,\cdot)||_1^{\frac{p}{q}} \sum_{j=0}^{n} |s(\lambda, n-j)| L(j)^p ||u(j)||_{\mathbb{X}}^p \\ &\quad + 2^p ||s(\lambda,\cdot)||_1^{\frac{p}{q}} \sum_{j=0}^{n} |s(\lambda, n-j)|\; ||f(j,0)||_{\mathbb{X}}^p. \end{aligned} \tag{3.1.16}$$

De (3.1.16) temos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a-1}^{+\infty} ||\left(\mathcal{F}u\right)(n+1)||_{\mathbb{X}}^{p} &\leq 2^{p}||s(\lambda,\cdot)||_{1}^{\frac{p}{q}} \sum_{n=a-1}^{+\infty}\sum_{j=0}^{n}|s(\lambda,n-j)|L(j)^{p}||u(j)||_{\mathbb{X}}^{p} \\
&+ 2^{p}||s(\lambda,\cdot)||_{1}^{\frac{p}{q}} \sum_{n=a-1}^{+\infty}\sum_{j=0}^{n}|s(\lambda,n-j)|\,||f(j,0)||_{\mathbb{X}}^{p} \\
&\leq 2^{p}||s(\lambda,\cdot)||_{1}^{\frac{p}{q}+1}\Big(L_{a,p}^{p}\Big(\max_{0\leq j\leq a-1}||u(j)||_{\mathbb{X}}\Big)^{p} \\
&+L_{a,\infty}^{p}\sum_{j=a}^{+\infty}||u(j)||_{\mathbb{X}}^{p}+||f(\cdot,0)||_{\ell^{p}(\mathbb{Z}^{+};\mathbb{X})}^{p}\Big).
\end{aligned}$$

Isto leva a

$$||\mathcal{F}u||_{\ell^{p},a} \leq 2||s(\lambda,\cdot)||_{1}\left(L_{a,p}||u||_{[0,a]}+L_{a,\infty}||u||_{\ell^{p},a}+||f(\cdot,0)||_{\ell^{p}(\mathbb{Z}^{+};\mathbb{X})}\right). \tag{3.1.17}$$

De (3.1.15) e (3.1.17) obtemos

$$|||\mathcal{F}u||| \leq 3||s(\lambda,\cdot)||_{1}\left(\left(L_{a,p}+L_{a,\infty}\right)|||u|||+||f(\cdot,0)||_{\ell^{p}(\mathbb{Z}^{+};\mathbb{X})}\right). \tag{3.1.18}$$

De onde $\mathcal{F}$ está bem definido. Agora mostremos que o operador $\mathcal{F}$ tem um único ponto fixo em $\mathcal{L}^{p,a}(\mathbb{X})$. Sejam u e v elementos de $\mathcal{L}^{p,a}(\mathbb{X})$, temos

$$\max_{0\leq l\leq a-1}||\left(\mathcal{F}u\right)(l)-\left(\mathcal{F}v\right)(l)||_{\mathbb{X}} \leq ||s(\lambda,\cdot)||_{\infty}\sum_{j=0}^{a-1}L(j)||u(j)-v(j)||_{\mathbb{X}}.$$

Então

$$||\mathcal{F}u-\mathcal{F}v||_{[0,a]} \leq ||s(\lambda,\cdot)||_{\infty}\,L_{a,1}||u-v||_{[0,a]}.$$

De seguida estimamos $\mathcal{F}^{2}u-\mathcal{F}^{2}v$. Temos

$$\begin{aligned}
||\left(\mathcal{F}^{2}u\right)(n+1)-\left(\mathcal{F}^{2}v\right)(n+1)||_{\mathbb{X}} &\leq ||s(\lambda,\cdot)||_{\infty}^{2}\sum_{j=0}^{n}L(j)\left(\sum_{\tau=0}^{j-1}L(\tau)||u(\tau)-v(\tau)||_{\mathbb{X}}\right) \\
&\leq \frac{||s(\lambda,\cdot)||_{\infty}^{2}}{2}\left(\sum_{j=0}^{n}L(j)\right)^{2}||u-v||_{[0,a]}.
\end{aligned}$$

De onde

$$||\mathcal{F}^{2}u-\mathcal{F}^{2}v||_{[0,a]} \leq \frac{1}{2}\Big(||s(\lambda,\cdot)||_{\infty}\,L_{a,1}\Big)^{2}||u-v||_{[0,a]}.$$

Analogamente podemos deduzir que

$$\begin{aligned}
||\left(\mathcal{F}^{3}u\right)(n+1)-\left(\mathcal{F}^{3}v\right)(n+1)||_{\mathbb{X}} &\leq \frac{||s(\lambda,\cdot)||_{\infty}^{3}}{2}\left(\sum_{j=0}^{n}L(j)\left(\sum_{\tau=0}^{j-1}L(\tau)\right)^{2}\right)||u-v||_{[0,a]} \\
&\leq \frac{||s(\lambda,\cdot)||_{\infty}^{3}}{6}\left(\sum_{j=0}^{n}L(j)\right)^{3}||u-v||_{[0,a]}.
\end{aligned}$$

Isto significa que

$$||\mathcal{F}^3 u - \mathcal{F}^3 v||_{[0,a]} \leq \frac{1}{6}\Big(||s(\lambda,\cdot)||_\infty L_{a,1}\Big)^3 ||u-v||_{[0,a]}.$$

Um argumento de indução mostra-nos que

$$||\mathcal{F}^n u - \mathcal{F}^n v||_{[0,a]} \leq \frac{1}{n!}\Big(||s(\lambda,\cdot)||_\infty L_{a,1}\Big)^n ||u-v||_{[0,a]}. \tag{3.1.19}$$

Seguidamente introduzimos as seguintes notações:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_m^1 &:= \|\mathcal{F}^m u - \mathcal{F}^m v\|_{\ell^{p,a}},\ m \geq 1,\\
\mathcal{G}_m^2 &:= \left(\sum_{l=a-1}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{a-1} |s(\lambda, l-j)| L(j) || \left(\mathcal{F}^{m-1}u\right)(j) - \left(\mathcal{F}^{m-1}v\right)(j)||_{\mathbb{X}}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}},\\
\mathcal{G} &:= \left(\sum_{l=a}^{+\infty}\left(\sum_{j=a}^{l} |s(\lambda, l-j)| L(j) ||u(j) - v(j)||_{\mathbb{X}}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

No sentido de obtermos uma estimativa para $\mathcal{G}_m^1$ estudemos as contribuições dos termos $\mathcal{G}_m^2$ e $\mathcal{G}$. Observamos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{G} &\leq L_{a,\infty}||s(\lambda,\cdot)||_1^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{j=a}^{+\infty}\sum_{l=j}^{+\infty}|s(\lambda, l-j)|\,||u(j)-v(j)||_{\mathbb{X}}^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq L_{a,\infty}||s(\lambda,\cdot)||_1^{\frac{1}{q}}||u-v||_{\ell^{p,a}}, \qquad (3.1.20)\\
\mathcal{G}_1^2 &\leq ||s(\lambda,\cdot)||_1^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{l=a-1}^{+\infty}\sum_{j=0}^{a-1}|s(\lambda, l-j)|L(j)^p||u(j)-v(j)||_{\mathbb{X}}^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq ||s(\lambda,\cdot)||_1\left(\sum_{j=0}^{a-1}L(j)^p||u(j)-v(j)||_{\mathbb{X}}^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq ||s(\lambda,\cdot)||_1 L_{a,p}||u-v||_{[0,a]},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_2^2 &\leq ||s(\lambda,\cdot)||_1\left(||s(\lambda,\cdot)||_\infty^p\sum_{j=0}^{a-1}L(j)^p\left(\sum_{\tau=0}^{j-1}L(\tau)||u(\tau)-v(\tau)||_{\mathbb{X}}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq ||s(\lambda,\cdot)||_1\left(||s(\lambda,\cdot)||_\infty^p\sum_{j=0}^{a-1}L(j)^p\left(\sum_{\tau=0}^{j-1}L(\tau)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}||u-v||_{[0,a]}\\
&\leq ||s(\lambda,\cdot)||_1\left(||s(\lambda,\cdot)||_\infty^p a^{p-1}\sum_{j=0}^{a-1}L(j)^p\left(\sum_{\tau=0}^{j-1}L(\tau)^p\right)\right)^{\frac{1}{p}}||u-v||_{[0,a]}\\
&\leq ||s(\lambda,\cdot)||_1\left(\frac{R(a,s,L)^2}{2}\right)^{\frac{1}{p}}||u-v||_{[0,a]}.
\end{aligned}$$

Agora devemos lidar com a contribuição de $\mathcal{G}_3^2$, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_3^2 &\leq ||s(\lambda,\cdot)||_1 \left(||s(\lambda,\cdot)||_\infty^{2p} \sum_{j=0}^{a-1} L(j)^p \left(\sum_{\tau=0}^{j-1} L(\tau) \left(\sum_{\mu=0}^{\tau-1} L(\mu)||u(\mu)-v(\mu)||_{\mathbb{X}} \right)\right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq ||s(\lambda,\cdot)||_1 \left(\frac{||s(\lambda,\cdot)||_\infty^{2p}}{2^p} \sum_{j=0}^{a-1} L(j)^p \left(\sum_{\tau=0}^{j-1} L(\tau) \right)^{2p} \right)^{\frac{1}{p}} ||u-v||_{[0,a]} \\ &\leq ||s(\lambda,\cdot)||_1 \left(\frac{R(a,s,L)^3}{6} \right)^{\frac{1}{p}} ||u-v||_{[0,a]}.\end{aligned}$$

Por um argumento de indução, finalmente obtemos

$$\mathcal{G}_n^2 \leq ||s(\lambda,\cdot)||_1 \left(\frac{R(a,s,L)^n}{n!} \right)^{\frac{1}{p}} ||u-v||_{[0,a]}. \tag{3.1.21}$$

Usando (3.1.20) e (3.1.21) deduzimos que

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_m^1 &\leq ||s(\lambda,\cdot)||_1 \left(\frac{R(a,s,L)^m}{m!} \right)^{\frac{1}{p}} ||u-v||_{[0,a]} \\ &+ ||s(\lambda,\cdot)||_1^2 L_{a,\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{R(a,s,L)^j}{j!} \right)^{\frac{1}{p}} ||u-v||_{[0,a]} \\ &+ (||s(\lambda,\cdot)||_1 L_{a,\infty})^m ||u-v||_{\ell^{p,a}}.\end{aligned} \tag{3.1.22}$$

Fazendo $\mathcal{W}_m := ||s(\lambda,\cdot)||_1 \left(\frac{R(a,s,L)^m}{m!} \right)^{\frac{1}{p}} + (||s(\lambda,\cdot)||_1 L_{a,\infty})^m + \frac{1}{m!}\Big(||s(\lambda,\cdot)||_\infty L_{a,1} \Big)^m$. A partir da cota (3.1.19) combinada com (3.1.22) temos que

$$|||\mathcal{F}^m u - \mathcal{F}^m v||| \leq (\mathcal{W}_m + \Theta(a))\, |||u-v|||. \tag{3.1.23}$$

Recordando que se m for suficientemente grande então $\mathcal{W}_m + \Theta(a) < 1$, temos que, a partir desse valor m, $\mathcal{F}^m$ é uma contração. Donde concluímos a demonstração. □

Observação 3.1.4. Definamos

$$L(n) = \left(2||s(\lambda,\cdot)||_1^2 \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{j!} \Big(\frac{1}{2}(n+1)^p \rho_s \Big)^j \right)^{\frac{1}{p}} \right)^{-1}$$

onde $n \in \mathbb{Z}^+$ e $\rho_s = ||s(\lambda,\cdot)||_\infty^p ||s(\lambda,\cdot)||_1^{-2}$. Observemos que L é não crescente e $\lim\limits_{n\to+\infty} L(n) = 0$. Neste caso para obtermos as condições do Teorema 3.1.3 é suficiente escolher um número positivo a tal que $L(a) < ||s(\lambda,\cdot)||_1^{-1}$.

Para obtermos o próximo resultado, exigimos que a seguinte condição seja válida.

Condição 3.1.1 (Hp). Seja $f : \mathbb{Z} \times \mathcal{B} \to \mathbb{X}$ uma função tal que vale a seguinte afirmação:

($\mathbf{Hp-1}$) Existe uma função $W_f : \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ não descrescente em relação à segunda variável com $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} W_f(j,r)^p < +\infty$, para todo o $r \geq 0$ tal que $||f(k,\varphi)||_{\mathbb{X}} \leq W_f(k, ||\varphi||_{\mathcal{B}})$, para todo $k \in \mathbb{Z}$ e $\varphi \in \mathcal{B}$.

($\mathbf{Hp-2}$) A função $\Phi \in \ell^\infty(\mathbb{Z};\mathcal{B}) \to f(\cdot, \Phi(\cdot)) \in \ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ é uniformemente contínua.

($\mathbf{Hp-3}$) Existe $R > 0$ tal que

$$\frac{1}{R}||s(\lambda,\cdot)||_1 \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} W_f(j,\rho R)^p \right)^{\frac{1}{p}} < 1 \ ,$$

onde ρ é a constante da Observação 2.3.1.

O próximo resultado fornece condições para a existência de soluções ℓ^p da equação (3.1.3). Tal resultado generaliza (CUEVAS et al., 2013, Teorema 1.3).

Teorema 3.1.4. *Assuma que a condição* ($\mathbf{Hp}$) *se verifica. Adicionalmente suponha que*

($\mathbf{Lp}$). *Para todo $k \in \mathbb{Z}$ e todo o conjunto limitado, $K \subseteq \mathcal{B}$, o conjunto $f(k,K)$ é relativamente compacto em $\mathbb{X}$.*
Então existe uma solução, ℓ^p limitada, da equação (3.1.3).

Demonstração. Definimos o operador $\mathcal{F} : \ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X}) \to \ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ pela expressão (3.1.4). Dividimos a prova em vários passos:

<u>Passo 1</u> O operador $\mathcal{F}$ está bem definido.

Sejam p e q expoentes conjugados e fixemos $u \in \ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})$, então

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} ||\left(\mathcal{F}u\right)(n)||_{\mathbb{X}}^p \leq ||s(\lambda,\cdot)||_1^{\frac{p}{q}+1} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \mathcal{W}_f(j,\rho||u||_\infty)^p.$$

Portanto

$$||\mathcal{F}u||_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})} \leq ||s(\lambda,\cdot)||_1 \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \mathcal{W}_f(j,\rho||u||_\infty)^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Logo $\mathcal{F}$ está bem definido.

<u>Passo 2</u> O operador $\mathcal{F}$ é contínuo de $\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ nele próprio.

De fato, de ($\mathbf{Hp-2}$) para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $\Phi, \Psi \in \ell^\infty(\mathbb{Z};\mathcal{B})$, $||\Phi - \Psi||_{\ell^\infty(\mathbb{Z},\mathcal{B})} < \delta$ implica

$$||f(\cdot,\Phi(\cdot)) - f(\cdot,\Psi(\cdot))||_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})} < \frac{\varepsilon}{||s(\lambda,\cdot)||_1}.$$

Para todo $u, v \in \ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ com $||u-v||_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})} < \dfrac{\delta}{\rho}$, temos

$$\begin{aligned} ||\mathcal{F}u - \mathcal{F}v||^p_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})} &\leq ||s(\lambda,\cdot)||_1^{\frac{p}{q}} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=j}^{+\infty} |s(\lambda, n-j)| ||f(j,u_j) - f(j,v_j)||^p_{\mathbb{X}} \\ &= ||s(\lambda,\cdot)||_1^{\frac{p}{q}+1} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} ||f(j,u_j) - f(j,v_j)||^p_{\mathbb{X}} \\ &\leq ||s(\lambda,\cdot)||_1^{\frac{p}{q}+1-p} \varepsilon^p. \end{aligned}$$

<u>Passo 3</u> O operador $\mathcal{F}$ é completamente contínuo.

Seja r um número real positivo. No que se segue denotaremos $U = \mathcal{F}\Big(B_r\Big(\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})\Big)\Big)$.

(a) Observemos que $\mathcal{H}_n(U)$ é relativamente compacto em $\mathbb{X}$ para todo o $n \in \mathbb{Z}$. Seja $\{(\mathcal{F}u^m)(n)\}_m$ uma sequência em $\mathcal{H}_n(U)$. Como $\mathcal{W}_f(n, \rho r) \to 0$ quando $|n| \to +\infty$, inferimos que o conjunto $\{f(\cdot, u^m_\cdot)\}_m \subseteq C_0(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ é equiconvergente em $\pm\infty$. De (**Lp**), o conjunto $\{f(n, u^m_n)\}_m$ é relativamente compacto em $\mathbb{X}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Usando o Lema 2.5.1 temos que $\{f(\cdot, u^m_\cdot)\}_m$ é relativamente compacto em $C_0(\mathbb{Z};\mathbb{X})$, de onde, existe uma subsequência $\Big\{f(\cdot, u^{m_j}_\cdot)\Big\}_j$ que converge uniformemente para algum $u \in C_0(\mathbb{Z};\mathbb{X})$. Da próxima desigualdade

$$\left\| (\mathcal{F}u^{m_j})(n) - \sum_{j=-\infty}^{n-1} s(\lambda, n-1-j) u(j) \right\|_{\mathbb{X}} \leq ||s(\lambda,\cdot)||_1 ||f(\cdot, u^{m_j}_\cdot) - u||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})}, \tag{3.1.24}$$

deduzimos que $\mathcal{H}_n(U)$ é relativamente compacto em $\mathbb{X}$.

(b) Temos que

$$\sum_{n=-\infty}^{T} || (\mathcal{F}u)(n)||^p_{\mathbb{X}} \leq ||s(\lambda,\cdot)||^{\frac{p}{q}+1} \sum_{j=-\infty}^{T} \mathcal{W}_f(j, \rho r)^p,$$

de onde $\lim\limits_{T\to-\infty} \sum\limits_{n=-\infty}^{T} || (\mathcal{F}u)(n)||^p_{\mathbb{X}} = 0$, uniformemente em $u \in B_r\Big(\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})\Big)$. Por outro lado, a estimativa

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{n} |s(\lambda, n-j)| \mathcal{W}_f(j, \rho r)^p \leq ||s(\lambda,\cdot)||_1 \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \mathcal{W}_f(j, \rho r)^p < +\infty$$

garante que $\lim\limits_{T\to+\infty} \sum\limits_{n=T}^{+\infty} || (\mathcal{F}u)(n)||^p_{\mathbb{X}} = 0$, uniformemente em $u \in B_r\Big(\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})\Big)$.

De (a) e (b) e usando o Teorema 2.5.3, obtemos que $\mathcal{F}$ é completamente contínua.

<u>Passo 4</u> Observemos que $\mathcal{F}\Big(B_R\Big(\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})\Big)\Big) \subseteq B_R\Big(\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})\Big)$ onde R é dado na condição (**Hp − 3**). De fato, seja $u \in B_R\Big(\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})\Big)$, temos

$$||\mathcal{F}u||_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})} \leq ||s(\lambda,\cdot)||_1 \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \mathcal{W}_f(j, \rho R)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq R.$$

Aplicando o teorema do ponto fixo de Schauder, deduzimos que $\mathcal{F}$ tem um ponto fixo u em $B_R\Big(\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})\Big)$, o que termina a demonstração do Teorema 3.1.4. □

Corolário 3.1.1. *Seja $f : \mathbb{Z} \times \mathcal{B} \to \mathbb{X}$ uma função que satisfaz* (**Lp**) *e tal que*

$$||f(n,\varphi) - f(n,\psi)||_{\mathbb{X}} \leq L(n)||\varphi - \psi||_{\mathcal{B}}^{\beta} \tag{3.1.25}$$

para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{B}$ e cada $n \in \mathbb{Z}$, com $\beta \in (0,1)$, $L \in \ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{R}^+)$ e $f(\cdot,0) \in \ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})$. Então, existe uma solução ℓ^p-limitada da equação (3.1.3).

Demonstração. A partir da condição (3.1.25) podemos escolher uma função $\mathcal{W}_f$ nas condições de $(\mathbf{Hp-1})$ como $\mathcal{W}_f(n,\xi) = L(n)\xi^{\beta} + ||f(n,0)||_{\mathbb{X}}$. Por outro lado, para $\Phi,\ \Psi \in \ell^{\infty}(\mathbb{Z};\mathcal{B})$ inferimos que $||f\,(\cdot,\Phi(\cdot)) - f\,(\cdot,\Psi(\cdot))\,||_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})} \leq ||L||_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{R}^+)}||\Phi - \Psi||_{\ell^{\infty}(\mathbb{Z};\mathcal{B})}$. Isto por sua vez implica que $(\mathbf{Hp-2})$ é satisfeita. Uma vez que

$$\lim_{R\to+\infty}\left(\Big(\rho^{\beta}||s(\lambda,\cdot)||_1||L||_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{R}^+)}\Big)\frac{1}{R^{1-\beta}} + \frac{||f(\cdot,0)||_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})}}{R}\right) = 0,$$

obtemos de imediato $(\mathbf{Hp-3})$. Está terminada a demonstração do Corolário 3.1.1. □

3.2 Estrutura topológica do conjunto solução

3.2.1 Compacidade na estrutura C_0

O próximo resultado é inspirado no artigo de Cuevas, Choquehuanca e Soto (2014, Observação 3.3).

Teorema 3.2.1. *Seja $f : \mathbb{Z} \times \mathcal{B} \to \mathbb{X}$ uma função que satisfaz a condição* (**Lp**) *e tal que $f(k,\cdot)$ é contínua para todo $k \in \mathbb{Z}$. Adicionalmente, suponhamos que a seguinte condição é satisfeita:*

> (**TS1**) *Existem funções ξ e υ em $\ell^1(\mathbb{Z};\mathbb{R}^+)$ tais que para todo $(k,\varphi) \in \mathbb{Z} \times \mathcal{B}$, $||f(k,\varphi)||_{\mathbb{X}} \leq \nu\xi(k)||\varphi||_{\mathcal{B}} + \upsilon(k)$, onde $\nu \in \left(0, \dfrac{1}{\rho||s(\lambda,\cdot)||_1||\xi||_{\infty}}\right)$.*

Então a equação (3.1.3) tem uma solução limitada em $C_0(\mathbb{Z};\mathbb{X})$. Mais ainda, o conjunto S de todas as soluções da equação (3.1.3), em $C_0(\mathbb{Z};\mathbb{X})$, é compacto.

Demonstração. Seja $\mathcal{F} : C_0(\mathbb{Z};\mathbb{X}) \to C_0(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ o operador dado por (3.1.4). Seja u um elemento de $C_0(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ e $\varepsilon > 0$ arbitrário. Escolhendo $n, \tau \in \mathbb{Z}^+$ constantes suficientemente grandes, temos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} ||\,(\mathcal{F}u)\,(n)||_{\mathbb{X}} &\leq \sum_{j=0}^{\tau-1}|s(\lambda,j)|\Big(\nu\xi(n-1-j)\rho||u||_{\infty} + \upsilon(n-1-j)\Big) \\ &\quad + \Big(\nu||\xi||_{\infty}\rho||u||_{\infty} + ||\upsilon||_{\infty}\Big)\sum_{j=\tau}^{+\infty}|s(\lambda,j)| \qquad (3.2.26) \\ &\leq \varepsilon, \end{aligned}$$

isto indica que

$$\lim_{n\to+\infty} ||\,(\mathcal{F}u)\,(n)||_{\mathbb{X}} = 0.$$

Escolhendo $n, \tau \in \mathbb{Z}_-$ constantes suficientemente grandes, em valor absoluto, temos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} ||\,(\mathcal{F}u)\,(n)||_{\mathbb{X}} &\leq \sum_{j=0}^{-\tau-1} |s(\lambda,j)|\Big(\nu\xi(n-1-j)\rho||u||_\infty + \upsilon(n-1-j)\Big) \\ &\quad + \Big(\nu||\xi||_\infty\rho||u||_\infty + ||\upsilon||_\infty\Big)\sum_{j=-\tau}^{+\infty}|s(\lambda,j)| \qquad (3.2.27)\\ &\leq \varepsilon, \end{aligned}$$

logo

$$\lim_{n\to-\infty} ||\,(\mathcal{F}u)\,(n)||_{\mathbb{X}} = 0.$$

De onde concluímos que $\mathcal{F}u \in C_0(\mathbb{Z};\mathbb{X})$.

Afirmamos que $\mathcal{F}$ é um operador completamente contínuo. Para obter este resultado consideremos uma sequência limitada arbitrária $\{u^m\}_m$ em $C_0(\mathbb{Z};\mathbb{X})$. Note que com a ajuda de (**Lp**) e do Lema 2.5.1 inferimos que $\{f(\cdot, u^m_\cdot)\}_m$ é relativamente compacto em $C_0(\mathbb{Z};\mathbb{X})$. Por uma estimativa semelhante a (3.1.24) deduzimos que $\{(\mathcal{F}u^m)\,(n) :\ m \in \mathbb{Z}^+\}$ é relativamente compacto em $\mathbb{X}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Ainda precisamos verificar que $\{\mathcal{F}u^m\}_m$ é equiconvergente em $\pm\infty$. Observando (3.2.26) e (3.2.27) podemos afirmar que existem constantes, c_1 e c_2, independentes de m, tais que:

$$||\,(\mathcal{F}u^m)\,(n)||_{\mathbb{X}} \leq c_1\sum_{j=0}^{\tau-1}|s(\lambda,j)|\Big(\xi(n-1-j)+\upsilon(n-1-j)\Big) + c_2\sum_{j=\tau}^{+\infty}|s(\lambda,j)|,$$

de onde $\{\mathcal{F}u^m\}_m$ é equiconvergente. Pelo Lema 2.5.1 existe uma subsequência $\{u^{m_j}\}_j$ de $\{u^m\}_m$ tal que $\{\mathcal{F}u^{m_j}\}_j$ converge. Daí $\mathcal{F}$ é um operador completamente contínuo. Estamos interessados em obter uma estimativa *a priori* para qualquer solução u das equações homotópicas, $u = \gamma\mathcal{F}u,\ \gamma \in (0,1)$, pertencente a $C_0(\mathbb{Z};\mathbb{X})$. Consideremos $u \in C_0(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ uma solução arbitrária das equações homotópicas. Temos

$$||u(n)||_{\mathbb{X}} \leq \nu||s(\lambda,\cdot)||_1||\xi||_\infty\rho||u||_\infty + ||s(\lambda,\cdot)||_1||\upsilon||_\infty.$$

Como $0 < \nu < \dfrac{1}{||s(\lambda,\cdot)||_1||\xi||_\infty\,\rho}$, obtemos que

$$||u||_\infty \leq \frac{||s(\lambda,\cdot)||_1||\nu||_\infty}{(1-\nu||s(\lambda,\cdot)||_1||\xi||_\infty\,\rho)},$$

o que significa que as soluções das equações homotópicas são, *a priori*, limitadas em $C_0(\mathbb{Z};\mathbb{X})$. Daí, aplicando a alternativa do teorema de Leray-Schauder, deduzimos que $\mathcal{F}$ tem um ponto fixo, u, em $C_0(\mathbb{Z};\mathbb{X})$. Além disso, a continuidade de $\mathcal{F}$ implica que o conjunto S é fechado. Por outro lado, como

$$\nu \in (0, \frac{1}{\rho\,||s(\lambda,\cdot)||_1||\xi||_\infty}),$$

S é limitado. Finalmente, recordando que $\mathcal{F}$ é um operador completamente contínuo, deduzimos que S é um conjunto compacto, o que conclui a demonstração do Teorema 3.2.1. $\square$

O próximo teorema complementa o Teorema 3.2.1.

Teorema 3.2.2. *Seja $f : \mathbb{Z} \times \mathcal{B} \to \mathbb{X}$ uma função tal que $f(k, \cdot)$ é contínua para todo $k \in \mathbb{Z}$ satisfazendo* (**Lp**)*. Adicionalmenmte, suponhamos que as seguintes condições se verificam:*

(**TS2**) *Para cada $R > 0$ existe uma função positiva $\gamma_R(\cdot)$ tal que $\gamma_R \in \ell^1(\mathbb{Z}; \mathbb{R}^+)$ e*

$$\sup\{||f(n, \varphi)||_{\mathbb{X}} : \; ||\varphi||_{\mathcal{B}} \le R\} \le \gamma_R(n), \; \forall n \in \mathbb{Z}.$$

(**TS3**) $\displaystyle\liminf_{R\to+\infty} \frac{\rho||s(\lambda, \cdot)||_\infty}{R} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \gamma_R(s) < 1.$

Então a equação (3.1.3) tem uma solução limitada em $C_0(\mathbb{Z}; \mathbb{X})$. Mais ainda, se a próxima condição é válida,

(**TS4**) $\displaystyle\limsup_{R\to+\infty} \frac{\rho||s(\lambda, \cdot)||_\infty}{R} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \gamma_R(s) < 1,$

então o conjunto S, de todas as soluções de (3.1.3) em $C_0(\mathbb{Z}; \mathbb{X})$, é compacto.

Demonstração. Seja $\mathcal{F} : C_0(\mathbb{Z}; \mathbb{X}) \to C_0(\mathbb{Z}; \mathbb{X})$ o operador dado por (3.1.4). A partir da próxima estimativa[2]:

$$|| \left(\mathcal{F}u\right)(n)||_{\mathbb{X}} \le \left(\sup_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_{\rho||u||_\infty}(k)\right) \sum_{j=\tau}^{+\infty} |s(\lambda, j)| + o(1),$$

temos que $\mathcal{F}$ está bem definido. Seja $\{u^m\}_m$ uma sequência em $C_0(\mathbb{Z}; \mathbb{X})$ tal que $u^m \to u$. Inferimos que

$$\begin{aligned} ||\mathcal{F}u^m - \mathcal{F}u||_\infty \;\; &\le \;\; (2l+1)||s(\lambda, \cdot)||_\infty \max_{j\in(-l,l)\cap\mathbb{Z}} ||f(j, u_j^m) - f(j, u_j)||_{\mathbb{X}} \\ &\quad +2||s(\lambda, \cdot)||_\infty \sum_{|j|\ge l} \gamma_R(j), \end{aligned}$$

onde $R := \rho \sup_{m\in\mathbb{Z}^+} (||u^m||_\infty + ||u||_\infty)$. De onde $\mathcal{F}$ é um operador contínuo.

Pela condição (**TS3**) existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $B_n\Big(C_0(\mathbb{Z}; \mathbb{X})\Big)$ é invariante por $\mathcal{F}$. De fato, se assumirmos que esta asserção é falsa, então para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, podemos escolher $u^n \in B_n\Big(C_0(\mathbb{Z}; \mathbb{X})\Big)$ e $m^n \in \mathbb{Z}$ tal que $|| \left(\mathcal{F}u^n\right)(m^n)||_{\mathbb{X}} > n$. Daí

$$1 < \frac{||s(\lambda, \cdot)||_\infty}{n} \sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_{\rho n}(j),$$

[2] Se o $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 0$ dizemos que $f(t) = o(g(t))$.

que contraria a hipótese (**TS3**). Usando (**TS2**), (**Lp**) e o Lema 2.5.1 estabelecemos que $\mathcal{F} : B_n\Big(C_0(\mathbb{Z};\mathbb{X})\Big) \to B_n\Big(C_0(\mathbb{Z};\mathbb{X})\Big)$ é completamente contínuo (a demonstração desta afirmação faz uso de uma construção similar à usada na prova do Teorema 3.1.4). Aplicando agora o teorema do ponto fixo de Schauder inferimos que $\mathcal{F}$ tem um ponto fixo em $B_n\Big(C_0(\mathbb{Z};\mathbb{X})\Big)$. Além disso, se a condição (**TS4**) é válida, então S é limitado. De fato, se assumirmos que S não é limitado, existe uma sequência $u^j \in S$ tal que $q_j := ||u^j||_\infty \geq j$. Como

$$q_j \leq ||s(\lambda,\cdot)||_\infty \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \gamma_{\rho q_j}(\tau),$$

então

$$1 \leq \limsup_{R\to+\infty}\ \rho||s(\lambda,\cdot)||_\infty R^{-1} \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \gamma_R(\tau),$$

que é uma contradição com (**TS4**). Finalmente, usando o fato de S ser um conjunto fechado e de $\mathcal{F}$ ser um operador completamente contínuo, deduzimos que S é compacto. □

3.2.2 Compacidade na estrutura ℓ^p

Teorema 3.2.3. *Sejam $1 < p < +\infty$ e q expoentes conjugados. Seja $f : \mathbb{Z}\times\mathcal{B} \to \mathbb{X}$ uma função que verifica* (**Hp − 2**) *e* (**Lp**) . *Assuma ainda que as seguintes condições são satisfeitas.*

(**TS5**) *Existem funções $\gamma \in \ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{R}^+)$ e $\eta \in \ell^1(\mathbb{Z};\mathbb{R}^+)$ tais que $||f(k,\varphi)||_\mathbb{X} \leq \gamma(k)||\varphi(0)||_\mathbb{X} + \eta(k),\ k\in\mathbb{Z},\ \varphi\in\mathcal{B}$.*

(**TS6**) $||s(\lambda,\cdot)||_1||\gamma||_{\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{R}^+)} < 1$.

Então existe uma solução ℓ^p-limitada de (3.1.3) e o conjunto S formado pelas soluções ℓ^p de (3.1.3) é compacto em $\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})$.

Demonstração. Definimos o operador $\mathcal{F} : \ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X}) \to \ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ por (3.1.4). Seja u um elemento de $\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})$. As próximas duas estimativas são responsáveis pelo fato que $\mathcal{F}$ está bem definido.

$$||\mathcal{F}u||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})} \leq ||s(\lambda,\cdot)||_\infty \left(||\gamma||_{\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{R}^+)}||u||_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})} + ||\eta||_{\ell^1(\mathbb{Z};\mathbb{R}^+)}\right), \tag{3.2.28}$$

$$||\mathcal{F}u||_{\ell^1(\mathbb{Z};\mathbb{X})} \leq ||s(\lambda,\cdot)||_1 \left(||\gamma||_{\ell^q((\mathbb{Z};\mathbb{R}^+)}||u||_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})} + ||\eta||_{\ell^1(\mathbb{Z};\mathbb{R}^+)}\right). \tag{3.2.29}$$

De fato, de (3.2.28) e (3.2.29) obtemos

$$||\mathcal{F}u||_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})} \leq ||s(\lambda,\cdot)||_1 \left(||\gamma||_{\ell^q((\mathbb{Z};\mathbb{R}^+)}||u||_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})} + ||\eta||_{\ell^1(\mathbb{Z};\mathbb{R}^+)}\right).$$

Procedendo como no **Passo 2** da demonstração do Teorema 3.1.4 observamos que a partir da condição (**Hp − 2**) obtemos que $\mathcal{F}$ é contínua de $\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ nele mesmo. De seguida, vemos que o operador $\mathcal{F}$ é completamente contínuo. Façamos uso da mesma notação do **Passo 3** da demonstração do Teorema 3.1.4. Observemos que $\mathcal{H}_n(U)$ é relativamente compacto em $\mathbb{X}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Seja $\{(\mathcal{F}u^m)(n)\}_m$ uma sequência em $\mathcal{H}_n(U)$. Como $||f(k, u_k^m)||_{\mathbb{X}} \leq \gamma(k)r + \eta(k)$ e $\gamma(k), \eta(k) \to 0$ quando $|k| \to +\infty$ inferimos que o conjunto $\{f(\cdot, u_\cdot^m)\}_m \subseteq C_0(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ é equiconvergente em $\pm\infty$. De (**Lp**), o conjunto $\{f(n, u_n^m)\}_m$ é relativamente compacto em $\mathbb{X}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. A partir do Lema 2.5.1 sabemos que existe uma subsequência $\left\{f(\cdot, u_\cdot^{m_j})\right\}_j$ de $\{f(\cdot, u_\cdot^m)\}_m$ que é uniformemente convergente. De (3.1.24) deduzimos que $\mathcal{H}_n(U)$ é relativamente compacto em $\mathbb{X}$. Por outro lado, levando em consideração a cota *a priori*, (3.2.28), temos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{T} ||(\mathcal{F}u)(n)||_{\mathbb{X}}^{p} &\leq ||\mathcal{F}u||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})}^{p-1} \sum_{n=-\infty}^{T} ||(\mathcal{F}u)(n)||_{\mathbb{X}} \\ &\leq ||s(\lambda,\cdot)||_1^p \Big(||\gamma||_{\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{R}^+)}\, r + ||\eta||_{\ell^1(\mathbb{Z};\mathbb{R}^+)}\Big)^{p-1} \\ &\quad \times \left(\left(\sum_{j=-\infty}^{T} \gamma(j)^q\right)^{\frac{1}{q}} r + \sum_{j=-\infty}^{T} \eta(j)\right).\end{aligned}$$

Isto significa que

$$\lim_{T\to-\infty} \sum_{n=-\infty}^{T} ||(\mathcal{F}u)(n)||_{\mathbb{X}}^{p} = 0,$$

uniformemente em $u \in B_r(\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X}))$. De forma análoga, podemos deduzir que

$$\lim_{T\to+\infty} \sum_{n=T}^{+\infty} ||(\mathcal{F}u)(n)||_{\mathbb{X}}^{p} = 0,$$

uniformemente em $u \in B_r(\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X}))$. Usando o Teorema 2.5.3, temos que $\mathcal{F}$ é um operador completamente contínuo.

Afirmamos que existe $R > 0$ tal que $\mathcal{F}(B_R(\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X}))) \subseteq B_R(\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X}))$. De fato, assumamos, pretendendo chegar a uma contradição que para todo $R > 0$ podemos escolher $u^R \in B_R(\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X}))$ tal que $||\mathcal{F}\left(u^R\right)||_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})} > R$. A partir desta suposição temos

$$1 < ||s(\lambda,\cdot)||_1 ||\gamma||_{\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{R}^+)} + \frac{||s(\lambda,\cdot)||_1 ||\eta||_{\ell^1(\mathbb{Z};\mathbb{R}^+)}}{R},$$

que contraria (**TS6**).

Pelo teorema do ponto fixo de Schauder, o conjunto S, formado pelas soluções ℓ^p-limitadas de (3.1.3), é não vazio. É claro que S é um conjunto fechado e a partir da cota superior

$$\sup_{u\in S} ||u||_{\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{X})} \leq \frac{||s,\lambda,\cdot)||_1 ||\eta||_{\ell^1(\mathbb{Z};\mathbb{R}^+)}}{1 - ||s(\lambda,\cdot)||_1 ||\gamma||_{\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{X})}},$$

deduzimos que S é limitado, o que nos permite inferir que S é um conjunto compacto. $\square$

Observação 3.2.1. É relevante saber quando é que o conjunto, S, das soluções da equação (3.1.3) goza de propriedades topológicas relevantes. Podemos nos perguntar: S é um conjunto conexo? Não sabemos a resposta. Outra interessante questão em aberto é a seguinte: sob que condições é S um conjunto R_δ? Observe que um conjunto R_δ é não vazio, compacto, conexo com a mesma homologia do conjunto singular.

4 SOLUÇÕES PERIÓDICAS E ERGÓDICAS

Neste capítulo desenvolveremos métodos e ferramentas para lidar com objetos de tipo ergódico e periódico. Ambos os conceitos são clássicos da matemática e encontram-se ligados nas periodicidades assintóticas em geral, tema de moda nesta última década que tem trazido grandes dividendos ao grupo de Equações funcionais do DMAT em termos de citações nas bases de dados internacionais[1].

4.1 Ergodicidade

Teoria ergódica é o estudo matemático do comportamento médio dos sistemas em longos períodos[2]. Por exemplo, em estatística mecânica (ver o artigo de Moore (2015) para mais detalhe), oferece ferramentas matemáticas para estudar o comportamento médio a longo prazo (estudo das moléculas num gas ou a interação das vibrações num cristal). Modelos ergódicos também são úteis na teoria da informação, e outras áreas de aplicação onde é interessante e por vezes necessário, considerar a média temporal a longo prazo

$$\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} f(T^k\, x)$$

para um grande número N de observações sucessivas; onde $T : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ é uma aplicação que preserva a medida[3], $\{T^n x,\ n \in \mathbb{Z}\}$ uma órbita de x e $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ uma medição de interesse efetuada sobre os estados do sistema.

Uma questão básica da teoria ergódica é a análise qualitativa destas médias, em particular a sua convergência: quando é que

$$\bar{f}(x) = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} f(T^k\, x)$$

existe e em que sentido?

Foi provada a convergência em alguns casos especiais (por exemplo a lei forte dos grandes números[4] de Borel (1909), no caso em que as fT^k são independentes e identicamente

---

[1] Web of Science, Scopus, ResearchGate, Google Scholar.

[2] Com os recentes avanços tecnológicos este conceito "longos períodos", associado ao número de observações N, encolheu enormemente uma vez que atualmente em muitos sistemas se pode fazer um grande número de observações num curto intervalo de tempo.

[3] Para detalhes sobre estes operadores m.p.t. - *measure preserving transformation* - ver o livro de Petersen (1989).

[4] Resultado clássico da estatística que estabelece que se X é uma variável aleatória real, e X_1, X_2, X_3, ... uma sequência infinita de cópias de X, independentes e identicamente distribuídas; supondo que $E[X]$ é finito, então $\overline{X}_n = \frac{X_1+X_2+\ldots X_n}{n}$ converge quase certamente para $E[X]$, isto é $P(\lim_{n\to+\infty} \overline{X}_n = E[X]) = 1$.

distribuídas), mas o caso geral de convergência no sentido em média quadrática (L^2) apenas foi provado por Neumann (1932) e a convergência quase certa por Birkhoff (1931), ambos em 1931. Os seus resultados são conhecidos por Teorema ergódico médio e Teorema ergódico pontual, respectivamente. Desde 1932 que apareceram generalizações e melhorias destes resultados. Para uma visão geral da teoria ergódica ver por exemplo (PETERSEN, 1989). No nosso trabalho vamos usar a seguinte definição.

Definição 4.1.1. Uma sequência limitada $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{X}$ diz-se ergódica (discreta) se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} ||f(k)||_{\mathbb{X}} = 0. \tag{4.1.1}$$

Usaremos a notação $Erg(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X})$ para representar o espaço de todas as sequências ergódicas definidas em $\mathbb{Z}^+$ com valores em $\mathbb{X}$. $Erg(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X})$ equipado com a norma da convergência uniforme é um espaço de Banach[5]. Denotaremos por $Erg(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ o conjunto formado por todas as sequências ergódicas definidas em $\mathbb{Z}$ com valores em $\mathbb{X}$, isto é, o espaço de todas as sequências limitadas tais que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} ||f(k)||_{\mathbb{X}} = 0.$$

Observação 4.1.1. Uma sequência pode verificar a equação (4.1.1) e não ser limitada, consequentemente não é ergódica no sentido da Definição 4.1.1. Por exemplo a sequência $u(n)$, definida por

$$u(n) = \begin{cases} p \quad se \quad n = p^3 \text{ para algum } p \in \mathbb{N}, \\ 0 \qquad\qquad\qquad \text{caso contrário,} \end{cases}$$

verifica a condição (4.1.1) e não é limitada. De fato, seja $n \in \mathbb{N}$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $p^3 \le n < (p+1)^3$, daí

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |u(k)| = \frac{1}{n+1}(1 + \ldots + p) = \frac{1}{n+1}\frac{p(p+1)}{2} \le \frac{p^2+p}{2(p^3+1)} \to 0$$

quando $n \to +\infty$.

O próximo lema é essencial para o estudo da existência de soluções ergódicas das EDVs lineares e não lineares de tipo convolução.

Lema 4.1.1. *Seja $b : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{C}$ uma sequência somável. Então para toda a sequência ergódica $u : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{X}$, a sequência $\Phi_u : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{X}$ dada por*

$$\Phi_u(k) = \sum_{l=0}^{k} b(k-l)u(l) \tag{4.1.2}$$

é também ergódica.

[5] Adaptando a demonstração do caso contínuo, (DIAGANA, 2013, Teorema 5.9), prova-se que $Erg(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X})$ é um subespaço fechado de espaço de $\ell^\infty(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X})$.

Demonstração. Temos a seguinte estimativa *a priori*:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left\|\sum_{l=0}^{k} b(k-l)u(l)\right\|_{\mathbb{X}} &\leq \frac{1}{n+1}\sum_{l=0}^{n}\left(\sum_{k=l}^{n}|b(k-l)|\right)||u(l)||_{\mathbb{X}}\\ &\leq \frac{||b||_{\ell^1(\mathbb{Z}^+;\mathbb{C})}}{n+1}\sum_{l=0}^{n}||u(l)||_{\mathbb{X}},\end{aligned}$$

o que mostra que Φ_u é uma sequência ergódica. □

Lema 4.1.2. *Seja $b:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{C}$ uma sequência somável. Então para toda a sequência ergódica $u:\mathbb{Z}\to\mathbb{X}$, a sequência $\Phi_u^{\#}:\mathbb{Z}\to\mathbb{X}$ dada por*

$$\Phi_u^{\#}(k)=\sum_{l=-\infty}^{k} b(k-l)u(l) \tag{4.1.3}$$

é também ergódica.

Demonstração. É evidente que $\Phi_u^{\#}\in\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})$. Por outro lado, temos

$$\frac{1}{2n+1}\left\|\sum_{k=-n}^{n}\sum_{l=-\infty}^{k} b(k-l)u(l)\right\|_{\mathbb{X}}\leq\sum_{l=0}^{+\infty}|b(l)|\Psi_n(l),$$

onde $\Psi_n(l):=\dfrac{1}{2n+1}\displaystyle\sum_{k=-n}^{n}||u(k-l)||_{\mathbb{X}}$.

Uma vez que $Erg(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ é invariante por translação inferimos que $b(l)\Psi_n(l)\to 0$ quando $n\to+\infty$. Temos a dominação $b(l)\Psi_n(l)\leq b(l)||u||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})}$ e, recordando que $l\to|b(l)|$ é somável, segue-se, pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue que

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty}|b(l)|\Psi_n(l)=0.$$

O que completa a demonstração □

Como consequência imediata do lema precedente temos a seguinte observação.

Observação 4.1.2. Seja λ um elemento de Ω_s. Para cada $f\in Erg(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ a equação

$$u(n+1)=\lambda\sum_{j=-\infty}^{n} a(n-j)u(j)+f(n),\ n\in\mathbb{Z}, \tag{4.1.4}$$

tem uma única solução $u(n)$ em $Erg(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ que é dada por $u(n+1)=\displaystyle\sum_{j=-\infty}^{n} s(\lambda,n-j)f(j)$.

Definição 4.1.2. Dizemos que uma função $f:\mathbb{Z}^+\times\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ é limitada em conjuntos limitados de $\mathbb{X}$ se para cada subconjunto limitado, $K\subseteq\mathbb{X}$, o conjunto $\{f(n,x):\ n\in\mathbb{Z}^+,\ x\in K\}$ é limitado.

Definição 4.1.3. Uma função $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ diz-se uniformemente contínua uniformemente em $n \in \mathbb{Z}$ em conjuntos limitados se para todo o número real $\epsilon > 0$ e todo o subconjunto K de $\mathbb{Y}$ existe $\delta_{\epsilon,K} > 0$ tal que $\|f(n,x) - f(n,y)\|_{\mathbb{X}} \leq \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todos os elementos $x, y \in K$ tais que $\|x - y\|_{\mathbb{Y}} \leq \delta_{\epsilon,K}$.

Definição 4.1.4. Dizemos que uma função $f : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ é uniformemente ergódica em conjuntos limitados de $\mathbb{X}$ se para todo o subconjunto limitado $K \subseteq \mathbb{X}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \sup_{x\in K} ||f(k,x)||_{\mathbb{Y}} = 0.$$

Observação 4.1.3. Temos uma definição similar para uma função f definida em $\mathbb{Z} \times \mathbb{X}$.

Observação 4.1.4. Seja $f : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ uma função limitada em conjuntos limitados e uniformemente ergódica em conjuntos limitados. Se $u : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{X}$ é uma sequência ergódica, então a sequência de Nemytskii $v(n) = f\,(n, u(n))$ é ergódica. De fato, como u é limitada basta tomar $K = B_{||u||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})}}(0)$ e temos

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} ||f(k,u(k))||_{\mathbb{Y}} \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \sup_{x\in K} ||f(k,x)||_{\mathbb{Y}}$$

que converge para 0 porque f é uniformemente ergódica em conjuntos limitados.

Teorema 4.1.1. *Seja $f : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ uma função limitada em conjuntos limitados de $\mathbb{X}$, e uniformemente ergódica em conjuntos limitados de $\mathbb{X}$ que verifica a condição de Lipschitz $||f(n,x) - f(n,y)||_{\mathbb{X}} \leq L||x - y||_{\mathbb{X}}, \forall\, n \in \mathbb{Z}^+, \forall\, x, y \in \mathbb{X}$. Se $||s(\lambda,\cdot)||_1 L < 1$, então existe uma única solução ergódica, $u(\cdot)$, de*

$$\begin{aligned} u(n+1) &= \lambda \sum_{j=0}^{n} a(n-j)u(j) + f\,(n, u(n))\,,\ n \in \mathbb{Z}^+, && (4.1.5)\\ u(0) &= \tilde{u} \in \mathbb{X}. && (4.1.6) \end{aligned}$$

Demonstração. Façamos $Erg^{\tilde{u}}(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X}) = \left\{u \in Erg(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X})\ :\ u(0) = \tilde{u}\right\}$. Definimos o operador $\mathcal{F}$ no espaço $Erg^{\tilde{u}}(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X})$ pela expressão

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}u)\,(n+1) &= \sum_{j=0}^{n} s(\lambda, n-j) f\,(j, u(j))\,,\ n \geq 0, && (4.1.7)\\ (\mathcal{F}u)\,(0) &= \tilde{u}. && (4.1.8) \end{aligned}$$

Mostremos inicialmente que $\mathcal{F}u$ está em $Erg^{\tilde{u}}(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X})$ para $u \in Erg^{\tilde{u}}(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X})$. Comecemos por observar que $f\,(\cdot, u(\cdot))$ é uma sequência limitada. Como

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}^+} \|(\mathcal{F}u)\,(n+1)\|_{\mathbb{X}} \leq ||s(\lambda,\cdot)||_1 ||f\,(\cdot, u(\cdot))\,||_{\ell^\infty(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X})}.$$

Usando a Observação 4.1.4 e o Lema 4.1.1 obtemos que $\mathcal{F}u \in\ Erg^{\tilde{u}}(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X})$. Além disso, $\mathcal{F}$ é uma $L||s(\lambda,\cdot)||_1$-contração no espaço $Erg^{\tilde{u}}(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X})$, daqui concluímos que $\mathcal{F}$ tem um único ponto fixo $u \in Erg^{\tilde{u}}(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X})$. O que completa a demonstração. □

Seja m um número inteiro positivo, vamos considerar os seguintes espaços de sequências inspirados em Hernández e Henríquez (2008):

$$Erg_m(\mathbb{Z};\mathbb{X}) = \left\{ f \in \ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X}) : \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} \max_{\tau\in[k-m,k]\cap\mathbb{Z}} ||f(\tau)||_{\mathbb{X}} = 0 \right\}.$$

$Erg_m(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ é chamado o espaço das sequências ergódicas de classe m. Este espaço equipado com a topologia da convergência uniforme é um espaço de Banach. De fato não é difícil ver que $Erg_m(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ é fechado em $Erg(\mathbb{Z};\mathbb{X})$.

Para lidarmos com retardos infinitos, precisamos introduzir um novo espaço de sequências a que chamaremos espaço das sequências ergódicas de classe infinito:

$$Erg_\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X}) := \bigcap_{m\in\mathbb{Z}^+-\{0\}} Erg_m(\mathbb{Z};\mathbb{X}).$$

Obviamente $Erg_\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ é um subespaço fechado de $Erg_m(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ logo é um espaço de Banach.

Antes de apresentarmos o próximo resultado, iremos indicar uma hipótese clássica sobre as funções N e M dadas no Axioma (**PS1**):

Condição 4.1.1 (**Fad**)**.** A função N é limitada e $\lim_{n\to+\infty} M(n) = 0$.

Observação 4.1.5. É importante observar que a Condição (**Fad**) é verificada se $\mathcal{B}$ é um espaço de memória uniformemente amortecida (para material de consulta referimos Hino, Murakami e Naitō (1991)).

Lema 4.1.3. *Supondo que a Condição* (**Fad**) *é satisfeita. Se $u : \mathbb{Z} \to \mathbb{X}$ é ergódica de classe infinito, então $u. : \mathbb{Z} \to \mathcal{B}$ dada por $n \to u_n$ é também ergódica de classe infinito.*

Demonstração. Sejam m um elemento de $\mathbb{Z}^+ - \{0\}$ e $\epsilon > 0$. Pela Condição (**Fad**) existe $n_0 > m$ tal que $M(l) < \epsilon$ para todo $l \geq n_0$. Consequentemente, para $n \in \mathbb{Z}^+ - \{0\}$ e $l > n_0$ obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} \max_{\tau\in[k-m,k]\cap\mathbb{Z}} ||u_\tau||_{\mathcal{B}} &\leq \frac{M(l)}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} \max_{\tau\in[k-m,k]\cap\mathbb{Z}} ||u_{\tau-l}||_{\mathcal{B}} \\
&\quad + \frac{N(l)}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} \max_{i\in[k-(m+l),k]\cap\mathbb{Z}} ||u(i)||_{\mathbb{X}} \\
&\leq \rho\,\epsilon\, ||u||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})} + \frac{N_\infty}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} \max_{i\in[k-(m+l),k]\cap\mathbb{Z}} ||u(i)||_{\mathbb{X}}.
\end{aligned}$$

Esta desigualdade prova a asserção uma vez que ϵ é arbitrário e $u \in Erg_{m+l}(\mathbb{Z};\mathbb{X})$. $\square$

O presente cenário exige a introdução dos seguintes espaços, $Erg_m(\mathbb{Z};\mathbb{Y};\mathbb{X})$ e $Erg_\infty(\mathbb{Z};\mathbb{Y};\mathbb{X})$.

$$\begin{aligned} Erg_m(\mathbb{Z};\mathbb{Y};\mathbb{X}) &= \Big\{ \; f:\mathbb{Z}\times\mathbb{Y}\to\mathbb{X} \mid f \text{ é limitada, } f(n,\cdot) \text{ é contínua para cada } n\in\mathbb{Z} \\ &\quad \text{e para todo o subconjunto limitado } K\subseteq\mathbb{Y}, \\ &\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n}\max_{\tau\in[k-m,k]\cap\mathbb{Z}}\sup_{x\in K}||f\left(\tau,x\right)||_{\mathbb{X}}=0\Big\} \\ Erg_\infty(\mathbb{Z};\mathbb{Y};\mathbb{X}) &:= \bigcap_{m\in\mathbb{Z}^+-\{0\}} Erg_m(\mathbb{Z};\mathbb{Y};\mathbb{X}). \end{aligned}$$

Lema 4.1.4. *Seja f um elemento de $Erg_m(\mathbb{Z};\mathbb{Y};\mathbb{X})$ tal que $f(n,y)$ é uniformemente contínua em todo o subconjunto limitado $K\subseteq\mathbb{Y}$ uniformemente em $n\in\mathbb{Z}$. Se $u:\mathbb{Z}\to\mathbb{Y}$ é*
é também ergódica de classe m.

Demonstração. Definamos

$$\Psi_\Phi(k) := \max_{\tau\in[k-m,k]\cap\mathbb{Z}}||\Phi(\tau)||_{\mathbb{X}} \;\text{ e }\; E_\xi(n,\epsilon) := \{k\in[-n,n]\cap\mathbb{Z}: \;|\xi(k)|>\epsilon\}\,.$$

Para demonstrar que a sequência de Nemytskii pertence a $Erg_m(\mathbb{Z};\mathbb{X})$, levando em consideração Ding, Fu e N'Guérékata (2011, Lema 2.9), é suficiente mostrar que para todo $\epsilon>0$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+1}CardE_{\Psi_v}(n,\epsilon)=0. \tag{4.1.9}$$

Como $u\in\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{Y})$, podemos escolher um subconjunto limitado $K\subseteq\mathbb{Y}$ tal que $u(\mathbb{Z})\subseteq K$. Por hipótese f é uniformemente contínua em K uniformemente para $n\in\mathbb{Z}$. Então, dado $\epsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que $x,y\in K$ e $||x-y||_{\mathbb{Y}}\le\delta$ implica que $||f(n,x)-f(n,y)||_{\mathbb{X}}\le\frac{\epsilon}{2}$ para todo o $n\in\mathbb{Z}$. É fácil ver que

$$E_{\Psi_v}(n,\epsilon)\subseteq E_{\Psi_u}(n,\delta)\cup E_{\Psi_{f(\cdot,0)}}(n,\frac{\epsilon}{2}).$$

Como $\Psi_u,\Phi_{f(\cdot,0)}\in Erg(\mathbb{Z};\mathbb{R})$, então Ding, Fu e N'Guérékata (2011, Lema 2.9) faz com que o (4.1.9) seja válido e conclui a demonstração. □

Observação 4.1.6. Vale ressaltar que, na prova do Lema 4.1.4, podemos substituir a condição $f\in Erg_m(\mathbb{Z};\mathbb{Y};\mathbb{X})$ pela condição mais fraca $f(\cdot,0)\in Erg_m(\mathbb{Z};\mathbb{X})$.

Corolário 4.1.1. *Seja f um elemento de $Erg_\infty(\mathbb{Z};\mathbb{Y};\mathbb{X})$ tal que $f(n,y)$ é uniformemente contínua em todo o subconjunto limitado $K\subseteq\mathbb{Y}$ uniformemente em $n\in\mathbb{Z}$ e $u\in Erg_\infty(\mathbb{Z};\mathbb{Y})$, então a sequência de Nemytskii $n\to f\left(n,u(n)\right)$ pertence a $Erg_\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})$.*

O próximo resultado é ao análogo discreto de Hernández e Henríquez (2008, Lema 3.5).

Lema 4.1.5. *Seja $b : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{C}$ uma sequência somável então para toda a sequência ergódica de classe infinito $u : \mathbb{Z} \to \mathbb{X}$, a sequência $\Phi_u^{\#}$ dada por (4.1.3) é também ergódica de classe infinito.*

Demonstração. Tome-se qualquer $m \in \mathbb{Z}^+ - \{0\}$, temos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n}\max_{\tau\in[k-m,k]\cap\mathbb{Z}}||\Phi_u^{\#}(\tau)||_{\mathbb{X}} &\leq \sum_{l=0}^{+\infty}|b(l)|\left(\frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n}\max_{\tau\in[k-m,k]\cap\mathbb{Z}}||u(\tau-l)||_{\mathbb{X}}\right) \\ &\leq \sum_{l=0}^{+\infty}|b(l)|\Xi_u(n,l), \end{aligned}$$

onde

$$\Xi_u(n,l) = \left(1+\frac{2l}{2n+1}\right)\left(\frac{1}{2(n+l)+1}\sum_{k=-(n+l)}^{n+l}\max_{\tau\in[k-m,k]\cap\mathbb{Z}}||u(\tau)||_{\mathbb{X}}\right).$$

Invocando o Teorema da convergência dominada de Lebesgue[6] deduzimos que $\Phi_u^{\#}$ é uma sequência ergódica de classe m e como m é arbitrário então $\Phi_u^{\#}$ é uma sequência ergódica de classe infinito. $\square$

Observação 4.1.7. Da demonstração do Lema 4.1.5 concluímos também que $Erg_m(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ é invariante por translação.

Discutiremos agora as condições a impor à perturbação f que garantem a existência de uma solução ergódica para a equação (3.1.3). Por outras palavras, a existência de uma solução cuja média temporal (discreta) tenda para zero.

Teorema 4.1.2. *Suponha que a Condição* (**Fad**) *(ver 4.1.1) é satisfeita e que a função $f : \mathbb{Z} \times \mathcal{B} \to \mathbb{X}$ satisfaz a seguinte condição de Lipschitz:*

$$||f(n,\varphi) - f(n,\psi)||_{\mathbb{X}} \leq L||\varphi(0) - \psi(0)||_{\mathbb{X}} \tag{4.1.10}$$

para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{B}$ e para cada $n \in \mathbb{Z}$, onde $L \geq 0$ e $f(\cdot, 0) \in Erg_\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})$. Se $||s(\lambda,\cdot)||_1 L < 1$, então a equação (3.1.3) tem uma única solução ergódica (de classe infinito).

Demonstração. Definimos o operador $\mathcal{F}$ no espaço $Erg_\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ pela expressão (3.1.4). Seja u um elemento de $Erg_\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})$, obtemos

$$||\mathcal{F}u||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})} \leq ||s(\lambda,\cdot)||_1\left(L||u||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})} + ||f(\cdot,0)||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})}\right).$$

Pelo Lema 4.1.3, a sequência $n \to u_n$ pertence a $Erg_\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})$. Pela Observação 4.1.6 inferimos que a sequência $n \to f(n,u_n)$ está em $Erg_\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})$. Levando em consideração o Lema 4.1.5 deduzimos que $\mathcal{F}$ está bem definido. Além disso, temos que $\mathcal{F}$ é uma $L||s(\lambda,\cdot)||_1$-contração, logo existe uma única solução, $u \in Erg_\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})$, da equação (3.1.3). $\square$

[6] Como na demonstração do Lema 4.1.2.

4.2 Periodicidade

Um aspecto muito importante do estudo qualitativo das soluções de equações em diferenças é a sua periodicidade e mais geralmente a sua periodicidade assintótica. Os resultados nesse campo não podem ser deduzidos diretamente da teoria do seu homólogo contínuo (ver e. g. (SONG, 2009), onde os autores analisam a existência de soluções positivas quase periódicas de uma equação de Volterra com retardo infinito), além disso a discretização da maioria das funções periódicas não conduz a sequências periódicas, por exemplo a sequência $\{sin(n)\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ não é periódica, é quase periódica.

4.2.1 Quase periodicidade e pseudo-quase periodicidade

A teoria de quase periodicidade foi introduzida na literatura por volta dos anos de 1924-1926 com o trabalho pioneiro do matemático dinamarquês Bohr (1925). Uma década mais tarde, foram feitos vários trabalhos importantes que deram contribuições significativas para a teoria, principalmente Bochner (1927), Neumann (1934), e Kampen (1936). A noção de quase periodicidade, que generaliza o conceito de periodicidade, tem um papel importante em vários campos incluindo análise harmônica, física, sistemas dinâmicos, entre outros.

Quase periodicidade de uma função discreta foi introduzida em (WALTHER, 1928; WALTHER, 1929). Para resenha, num artigo sobre modelos populacionais, Diagana, Elaydi e Yakubu (2007) estabelecem a teoria das sequências quase periódicas. Nos últimos anos tem havido muito desenvolvimento da análise da periodicidade para equações em diferenças. Para obter detalhes, incluindo aplicações e desenvolvimentos, ver as monografias de Agarwal (1992), Elaydi (1996) e Agarwal e Wong (2013); e os artigos de Halanay (1963), Sugiyama (1971), Corduneanu (1982), Agarwal e Popenda (1995), Pang e Agarwal (1996) e Agarwal, O'Regan e Wong (2005). Vários trabalhos recentes (ver (SONG; TIAN, 2007; SONG, 2006; SONG, 2007; SONG, 2008)) foram dedicados ao estudo da existência de soluções periódicas de sistemas discretos com retardo. O principal método empregado nestes artigos é assumir certas propriedades de estabilidade de soluções limitadas. Mencionaremos aqui três trabalhos. O artigo (DEL CAMPO; PINTO; VIDAL, 2011), onde os autores estabelecem a existência de soluções quase periódicas e assintoticamente quase periódicas para uma equação funcional em diferenças da forma

$$u(n+1) = \mathcal{L}(x_n) + g(n, x_n), \; n \in \mathbb{Z}^+, \tag{4.2.11}$$

$$u_0 = \varphi \in \mathcal{B} \tag{4.2.12}$$

em que $\mathcal{L} : \mathcal{B} \to \mathbb{C}^r$ é um operador linear limitado. O artigo de Agarwal, Cuevas e Frasson (2012), no qual os autores estabelecem a existência e unicidade de soluções S-assintoticamente ω-periódicas para o problema (4.2.11)-(4.2.12) e apresentam aplicações às EDVs do tipo

$$x(n+1) = \sum_{s=-\infty}^{n} k(n-s)x(s) + \nu a(n)x(n), \ n \in \mathbb{Z}^+, \tag{4.2.13}$$

onde k é uma matriz $r \times r$ que verifica certas condições de limitação, $a(n)$ é uma sequência S-assintoticamente ω-periódica e ν um número real tal que $|\nu|$ é suficientemente pequeno. O artigo de Song e Tian (2007) onde os autores estudam uma EDV com retardo infinito e estabelecem condições para a existência de soluções periódicas, quase periódicas e assintoticamente quase periódicas.

Definição 4.2.1. Uma sequência $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{X}$ diz-se quase periódica[7] (discreta) se para cada $\epsilon > 0$ existe um inteiro $N(\epsilon) \in \mathbb{Z}^+$ tal que entre cada $N(\epsilon)$ inteiros consecutivos há pelo menos um número inteiro p com a propriedade

$$||f(k+p) - f(k)||_{\mathbb{X}} \leq \epsilon, \ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

O inteiro p chama-se uma ϵ-translação de f. Denotamos por $AP(\mathbb{Z}; \mathbb{X})$ o conjunto de todas as sequências quase periódicas, quando equipado com a norma do supremo é um espaço de Banach.

Para a próxima observação consultar (DEL CAMPO; PINTO; VIDAL, 2011).

Observação 4.2.1. Se $x \in AP(\mathbb{Z}; \mathbb{X})$, então $x_{\cdot} \in AP(\mathbb{Z}; \mathcal{B})$.

Observação 4.2.2. Se $f \in AP(\mathbb{Z}; \mathbb{X})$, então o conjunto $Im(f) = \{f(n) : \ n \in \mathbb{Z}\}$ é relativamente compacto.

O próximo conceito, função quase periódica dependendo de parâmetros, será útil para acomodar perturbações do tipo $f(n, u)$.

Definição 4.2.2. Uma função $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ diz-se quase periódica (discreta) se para cada $\epsilon > 0$ e todo o subconjunto compacto, $K \subseteq \mathbb{Y}$, existe um inteiro positivo $N_0 = N_0(\epsilon, K)$ tal que entre quaisquer N_0 inteiros consecutivos existe pelo menos um inteiro p com a propriedade

$$||f(k+p, x) - f(k, x)||_{\mathbb{X}} \leq \epsilon,$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in K$.

Denotamos por $AP(\mathbb{Z} \times \mathbb{Y}; \mathbb{X})$ o conjunto de todas estas funções.

Observação 4.2.3. Usando uma demonstração similar à que é usada para as funções quase periódicas podemos ver que se $f \in AP(\mathbb{Z} \times \mathbb{Y}; \mathbb{X})$ e $x \in AP(\mathbb{Z}; \mathbb{Y})$ então $k \to f(k, x(k)) \in AP(\mathbb{Z}; \mathbb{X})$.

[7] Para uma exposição autocontida das funções do tipo quase periódico e suas aplicações, recomendamos ao leitor o livro de Diagana (2013).

—

Zhang (1994) introduziu o conceito de função pseudo-quase periódica em tempo contínuo[8] como uma generalização natural do conceito de quase periodicidade introduzido por Bohr. Recentemente Dads, Ezzinbi e Lhachimi (2011) e Kong e Fang (2018) utilizaram o conceito de pseudo-quase periodicidade em tempo discreto, os últimos autores apresentando aplicações em redes neurais.

A próxima definição é o análogo discreto de Diagana e Hernández (2007, Definição 2.7).

Definição 4.2.3. Uma sequência $f \in \ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ diz-se pseudo-quase periódica (discreta) de classe m se $f = g + \varphi$ onde $g \in AP(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ e $\varphi \in Erg_m(\mathbb{Z};\mathbb{X})$.

A classe destas sequências é denotada por $PAP^m(\mathbb{Z};\mathbb{X})$. Este espaço equipado com a topologia da convergência uniforme é um espaço de Banach.

De (HERNÁNDEZ; HENRÍQUEZ, 2008) uma sequência $f \in \ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ diz-se uma sequência pseudo-quase periódica de classe infinito se $f = g + \varphi$ onde $g \in AP(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ e $\varphi \in Erg_\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})$. A coleção de todas as sequências pseudo-quase periódicas de classe infinito definidas de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{X}$ é denotada por $PAP^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})$. Por Hernández e Henríquez (2008), $AP(\mathbb{Z};\mathbb{X}) \cap Erg_\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X}) = \{0\}$. Observemos ainda que $PAP^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ é um espaço de Banach (ver por exemplo (DING; FU; N'GUÉRÉKATA, 2011)).

Definição 4.2.4. Uma função $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ diz-se pseudo-quase periódica (discreta) de classe m se $f = g + \varphi$ onde $g \in AP(\mathbb{Z} \times \mathbb{Y};\mathbb{X})$ e $\varphi \in Erg_m(\mathbb{Z};\mathbb{Y};\mathbb{X})$. A coleção de todas as funções pseudo-quase periódicas de classe m definidas de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Y}$ em $\mathbb{X}$ é denotada por $PAP^m(\mathbb{Z};\mathbb{Y};\mathbb{X})$.

De Hernández e Henríquez (2008) uma função $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ diz-se uma função pseudo-quase periódica de classe infinito se $f = g + \varphi$ onde $g \in AP(\mathbb{Z} \times \mathbb{Y};\mathbb{X})$ e $\varphi \in Erg_\infty(\mathbb{Z};\mathbb{Y};\mathbb{X})$. A coleção de todas as funções pseudo-quase periódicas de classe infinito definidas de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Y}$ em $\mathbb{X}$ é denotada por $PAP^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{Y};\mathbb{X})$.

Lema 4.2.1. *Supondo que a Condição* (**Fad**) *é satisfeita. Se $u : \mathbb{Z} \to \mathbb{X}$ é uma sequência pseudo-quase periódica de classe infinito, então $u.$ é também uma sequência pseudo-quase periódica de classe infinito.*

Demonstração. A demonstração é essencialmente uma combinação da Observação 4.2.1 e do Lema 4.1.3. □

[8] Ver (JIALIN; NUNEZ, 1998).

Lema 4.2.2. *Seja f um elemento de $PAP^{\infty}(\mathbb{Z};\mathbb{Y};\mathbb{X})$ tal que $f(n,y)$ é uniformemente contínua em qualquer subconjunto limitado, $K \subseteq \mathbb{Y}$, uniformemente em $n \in \mathbb{Z}$ e $h \in PAP^{\infty}(\mathbb{Z};\mathbb{Y})$, então a sequência de Nemytskii $n \to f(n,h(n))$ pertence a $PAP^{\infty}(\mathbb{Z};\mathbb{X})$.*

Demonstração. A demonstração é baseada no argumento da demonstração de Agarwal et al. (2011, Teorema 2.1). Faremos um esboço da demonstração. Usemos a notação do Lema 4.1.4 e assumamos que $f = f_1 + \varphi$ e $h = h_1 + h_2$, onde $f_1 \in AP(\mathbb{Z}\times\mathbb{Y};\mathbb{X})$, $\varphi \in Erg_{\infty}(\mathbb{Z};\mathbb{Y};\mathbb{X})$, $h_1 \in AP(\mathbb{Z};\mathbb{Y})$ e $h_2 \in Erg_{\infty}(\mathbb{Z};\mathbb{Y})$. Consideremos a decomposição $f(n,h(n)) = f_1(n,h_1(n)) + (f(n,h(n)) - f(n,h_1(n))) + \varphi(n,h_1(n))$. Usando a Observação 4.2.3, $f_1(\cdot,h_1(\cdot)) \in AP(\mathbb{Z};\mathbb{X})$. Definamos $\tilde{F}(n) := f(n,h(n)) - f(n,h_1(n))$. Tomando qualquer $m \in \mathbb{Z}^+ - \{0\}$ mostremos que $\tilde{F} \in Erg_m(\mathbb{Z};\mathbb{X})$. Claramente $\tilde{F} \in \ell^{\infty}(\mathbb{Z};\mathbb{X})$. Para isso, tomando em consideração o Lema 2.9 de Ding, Fu e N'Guérékata (2011), é suficiente mostrar que para cada $\epsilon > 0$ tem-se

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+1}Card E_{\Psi_{\tilde{F}}}(n,\epsilon) = 0.$$

Dado $\epsilon > 0$, seja $\delta = \delta(\epsilon)$ a constante positiva envolvida na continuidade uniforme de f no conjunto $K = h(\mathbb{Z}) \cap h_1(\mathbb{Z})$, temos que $E_{\Psi_{\tilde{F}}}(n,\epsilon) \subseteq E_{\Psi_{h_2}}(n,\delta)$. Uma vez que $h_2 \in Erg_m(\mathbb{Z};\mathbb{Y})$, obtemos

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+1}Card E_{\Psi_{h_2}}(n,\delta) = 0.$$

Isto mostra que $\tilde{F} \in Erg_m(\mathbb{Z};\mathbb{X})$. Tendo presente a Observação 4.2.2 podemos verificar que $\varphi(\cdot,h_1(\cdot)) \in Erg_m(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ (para mais detalhe ver (AGARWAL et al., 2011)). Isto completa a demonstração. □

Lema 4.2.3. *Seja $b : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{C}$ uma sequência somável, então para toda a sequência pseudo-quase periódica de classe infinito, $u : \mathbb{Z} \to \mathbb{X}$, a sequência $\Phi_u^{\#}$ dada por (4.1.3) é também pseudo-quase periódica de classe infinito.*

Demonstração. Obtemos o Lema 4.2.3 como uma consequência imediata de Cuevas, Dantas e Soto (2016, Teorema 2.1) e do Lema 4.1.5. □

De seguida, estudamos a existência de soluções pseudo-quase periódicas para a equação (3.1.3). Até onde sabemos, este assunto é um tópico não tratado na literatura.

Teorema 4.2.1. *Suponha que a Condição* (**Fad**) *é satisfeita, a função $f : \mathbb{Z}\times\mathcal{B} \to \mathbb{X}$ é pseudo-quase periódica de classe infinito e verifica a condição de Lipschitz (4.1.10). Se $||s(\lambda,\cdot)||_1 L < 1$, então existe uma única solução pseudo-quase periódica (de classe infinito) da equação (3.1.3).*

Demonstração. Definimos a aplicação $\mathcal{F}$ no espaço $PAP^{\infty}(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ pela expressão (3.1.4). É fácil ver que $\mathcal{F}u$ pertence a $\ell^{\infty}(\mathbb{Z};\mathbb{X})$. Além disso, pelo Lema 4.2.1, Lema 4.2.2 e Lema

4.2.3 inferimos que $\mathcal{F}u \in PAP^{\infty}(\mathbb{Z};\mathbb{X})$. Por outro lado, $\mathcal{F}$ é uma $||s(\lambda,\cdot)||_1 L$-contração, o que permite concluir que existe uma única solução pseudo-quase periódica (de classe infinito) da equação (3.1.3). □

Teorema 4.2.2. *Suponha que a Condição* (**Fad**) *é satisfeita, a função* $f : \mathbb{Z} \times \mathcal{B} \to \mathbb{X}$ *é pseudo-quase periódica de classe infinito e verifica a condição de Lipschitz (3.1.2), onde* $L : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^+$ *é uma sequência somável. Então a equação (3.1.3) tem uma única solução pseudo-quase periódica de classe infinito.*

Demonstração. Definimos a aplicação $\mathcal{F}$ no espaço $PAP^{\infty}(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ pela expressão (3.1.4). Usando a demonstração do Teorema 4.2.1, concluímos que $\mathcal{F}$ está bem definido. Agora, dadas $u, v \in PAP^{\infty}(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ temos

$$||\mathcal{F}u - \mathcal{F}v||_{\ell^{\infty}(\mathbb{Z};\mathbb{X})} \leq ||s(\lambda,\cdot)||_{\infty}||L||_{\ell^1(\mathbb{Z};\mathbb{R}^+)}||u - v||_{\ell^{\infty}(\mathbb{Z};\mathbb{X})}.$$

Usando a demonstração de Cuevas, Henríquez e Lizama (2012, Teorema 4.3) obtemos

$$||\mathcal{F}^n u - \mathcal{F}^n v||_{\ell^{\infty}(\mathbb{Z};\mathbb{X})} \leq \frac{1}{n!}\Big(||s(\lambda,\cdot)||_{\infty}||L||_{\ell^1(\mathbb{Z};\mathbb{R}^+)}\Big)^n ||u - v||_{\ell^{\infty}(\mathbb{Z};\mathbb{X})}.$$

O que completa a demonstração do Teorema. □

4.2.2 Periodicidade assintótica

Uma família de funções discretas, adaptada recentemente por Xia (2014) do artigo de Pierri e Rolnik (2013) e ainda pouco estudadas, são as sequências pseudo S-assintoticamente ω-periódicas. Em particular a literatura sobre estas funções, na sua versão discreta, com valores num espaço de Banach, tanto quanto sabemos, até agora, limita-se ao trabalho acima referido.

O conceito de função pseudo S-assintoticamente ω-periódica foi introduzido em tempo contínuo por Pierri e Rolnik (2013) generalizando o conceito de função S-assintoticamente ω-periódica proposto por Henríquez, Pierri e Táboas (2008). A periodicidade assintótica é um aspecto importante da teoria qualitativa das EDV. Notemos que muitos sistemas do mundo real exibem perturbações internas ou externas que podemos assumir serem aproximadamente periódicas. Há poucos resultados na literatura que lidem com a periodicidade assintótica da equação (3.1.3) e devido ao rápido desenvolvimento desta nova noção de periodicidade (isto é, funções $PSAP_{\omega}$) estudaremos nesta seção a existência desta classe de soluções para a equação (3.1.3). Entre outras coisas, aplicações interessantes deste novo tipo de funções são discutidas em vários ramos das equações de evolução, tais como sistemas fracionários, estruturas flexíveis e equações de onda fortemente amortecidas (ver Azevedo et al. (AZEVEDO; CUEVAS; SOTO, 2017), Cuevas et al. (CUEVAS; HENRÍQUEZ; SOTO, 2014) e de Andrade et al. (DE ANDRADE et al., 2016)).

De referir que desenvolvemos um forte conjunto de ferramentas matemáticas para alcançarmos os nossos objetivos de existência de soluções $PSAP_\omega$ para a equação (3.1.3).

Definição 4.2.5. (XIA, 2014) Uma sequência limitada $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{X}$ diz-se pseudo S-assintoticamente ω-periódica (XIA, 2014) (discreta) se existe $\omega \in \mathbb{Z}^+ - \{0\}$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} ||f(k+\omega) - f(k)||_{\mathbb{X}} = 0.$$

Usamos a notação $PSAP_\omega(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X})$ para representar o subespaço de $\ell^\infty(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X})$ formado por todas as sequências pseudo S-assintoticamente ω-periódica definidas em $\mathbb{Z}^+$. $PSAP_\omega(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X})$ equipado com a norma da convergência uniforme é um espaço de Banach. Naturalmente denotamos por $PSAP_\omega(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ o conjunto formado por todas as sequências pseudo S-assintoticamente ω-periódica definidas em $\mathbb{Z}$, isto é, o espaço de todas as sequências limitadas tais que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n} ||f(k+\omega) - f(k)||_{\mathbb{X}} = 0.$$

Observe que $AP_\omega \subseteq SAP_\omega \subseteq PSAP_\omega$, onde SAP_ω (respectivamente, AP_ω) é o espaço formado por todas as sequências S-assintoticamente ω-periódicas (respectivamente, assintoticamente ω-periódicas) (ver (AGARWAL; CUEVAS; FRASSON, 2012)).

Lema 4.2.4. *Seja $b : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{C}$ uma sequência somável. Então para toda a sequência $u : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{X}$ pseudo S-assintoticamente ω-periódica, a sequência $\Phi_u(\cdot)$ definida em (4.1.2) é também pseudo S-assintoticamente ω-periódica.*

Demonstração. Observe que $k \to \sum_{l=k+1}^{k+\omega} |b(l)|$ é uma sequência ergódica. De fato, obtemos

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=k+1}^{k+\omega}|b(l)| = \frac{1}{n+1}\sum_{l=1}^{\omega}\sum_{k=0}^{n}|b(k+l)| \leq \frac{1}{n+1}\sum_{l=1}^{\omega}||b||_{\ell^1(\mathbb{Z}^+;\mathbb{C})} \leq \frac{\omega}{n+1}||b||_{\ell^1(\mathbb{Z}^+;\mathbb{C})}.$$

Temos a estimativa: $\|\Phi_u\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X})} \leq ||b||_{\ell^1(\mathbb{Z}^+;\mathbb{C})}||u||_{\ell^\infty(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X})}$. Além disso, para $n \geq 0$ temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\|\Phi_u(k+\omega)-\Phi_u(k)\|_{\mathbb{X}} &\leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{\omega-1}|b(k+\omega-l)|\;||u(l)||_{\mathbb{X}} \\
&\quad + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k}|b(k-l)|\;||u(l+\omega)-u(l)||_{\mathbb{X}} \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=k+1}^{k+\omega}|b(l)|\;||u(k+\omega-l)||_{\mathbb{X}} \\
&\quad + \frac{1}{n+1}\sum_{l=0}^{n}\sum_{k=l}^{n}|b(k-l)|\;||u(l+\omega)-u(l)||_{\mathbb{X}} \\
&:= I_1(n)+I_2(n).
\end{aligned}$$

De seguida estimamos os termos $I_i(n)$, $i = 1, 2$, da expressão supra, separadamente.

- Para o primeiro termo no lado direito da desigualdade temos

$$I_1(n) \leq \frac{||u||_{\ell^\infty(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X})}}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=k+1}^{k+\omega} |b(l)|,$$

  a partir daqui inferimos que $I_1(n) \to 0$ quando $n \to +\infty$.

- O termo $I_2(n)$ pode ser estimado como

$$\begin{aligned} I_2(n) &= \frac{1}{n+1} \sum_{l=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{n-l} |b(k)| \right) ||u(l+\omega) - u(l)||_{\mathbb{X}} \\ &\leq ||b||_{\ell^1(\mathbb{Z}^+;\mathbb{C})} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{l=0}^{n} ||u(l+\omega) - u(l)||_{\mathbb{X}} \right), \end{aligned}$$

  o que mostra que $\lim_{n\to+\infty} I_2(n) = 0$. Está completa a prova de que $\Phi_u \in PSAP_\omega(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X})$.

$\square$

Lema 4.2.5. *Seja $b : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{C}$ uma sequência somável. Então para toda a sequência pseudo S-assintoticamente ω-periódica, $u : \mathbb{Z} \to \mathbb{X}$, a sequência $\Phi_u^\#(\cdot)$ definida em (4.1.3) é também pseudo S-assintoticamente ω-periódica.*

Demonstração. A demonstração do Lema 4.2.5 é baseada no argumento da demonstração de Agarwal, de Andrade e Cuevas (2010, Lema 2.3). É evidente que $\Phi_u^\# \in \ell^\infty(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X})$. De fato, obtemos $\left\|\Phi_u^\#\right\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X})} \leq ||u||_{\ell^\infty(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X})}||b||_{\ell^1(\mathbb{Z}^+;\mathbb{C})}$. Para $n \in \mathbb{Z}^+$ vemos que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} \left\| \sum_{l=0}^{+\infty} b(l)\Big(u(k+\omega-l) - u(k-l)\Big) \right\|_{\mathbb{X}} \\ &\leq \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} \sum_{l=0}^{+\infty} |b(l)| \|u(k+\omega-l) - u(k-l)\|_{\mathbb{X}} = \sum_{l=0}^{+\infty} |b(l)| \Psi_n^\#(l), \end{aligned}$$

onde $\Psi_n^\#(l) = \dfrac{1}{2n+1} \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \|u(k+\omega-l) - u(k-l)\|_{\mathbb{X}}$.

Usando o fato de que $PSAP_\omega(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X})$ é invariante por translação (ver Xia (2014, Lema 10)) segue-se que a sequência $k \to u(k-l)$ pertence a $PSAP_\omega(\mathbb{Z}^+;\mathbb{X})$ para cada $l \in \mathbb{Z}$ e portanto $b(l)\Psi_n^\#(l) \to 0$ quando $n \to +\infty$. De seguida, como $\Psi_n^\#$ é limitada e a sequência $l \to b(l)$ é somável, usando o Teorema da convergência dominada de Lebesgue, segue-se que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} |b(l)| \Psi_n^\#(l) = 0.$$

A demonstração está completa. $\square$

Definição 4.2.6. Seja ω um elemento de $\mathbb{Z}^+ - \{0\}$. Dizemos que uma função $f : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ é uniformemente pseudo S-assintoticamente ω-periódica em conjuntos limitados[9] de $\mathbb{X}$ se para cada subconjunto limitado $K \subseteq \mathbb{X}$,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \sup_{x \in K} ||f(k+\omega, x) - f(k, x)||_{\mathbb{Y}} = 0.$$

Observação 4.2.4. Uma noção similar pode ser considerada para funções definidas em $\mathbb{Z} \times \mathbb{X}$.

Definição 4.2.7. Uma função $f : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ diz-se assintoticamente limitada em conjuntos limitados[9] de $\mathbb{X}$ se para todo o subconjunto limitado, $K \subseteq \mathbb{X}$, existe $m_K \in \mathbb{Z}^+$ tal que o conjunto $\{f(n, x) : \ n \geq m_K, x \in K\}$ é limitado.

Definição 4.2.8. Uma função $f : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ diz-se assintoticamente uniformemente contínua em conjuntos limitados de $\mathbb{X}$ se para todo o número real $\epsilon > 0$ e todo o subconjunto limitado, $K \subseteq \mathbb{X}$, existem constantes $m = m_{\epsilon,K} \in \mathbb{Z}^+$ e $\delta = \delta_{\epsilon,K}$ tais que $||f(n, x) - f(n, y)||_{\mathbb{Y}} \leq \epsilon$ para todo $n \geq m$ e todo $x, y \in K$ com $||x - y||_{\mathbb{X}} \leq \delta$.

Temos o seguinte resultado de composição para sequências pseudo S-assintoticamente ω-periódicas.

Lema 4.2.6. *Seja $f : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ uma função assintoticamente limitada em conjuntos limitados, assintoticamente uniformemente contínua em conjuntos limitados de $\mathbb{X}$, e uniformemente pseudo S-assintoticamente ω-periódica em conjuntos limitados. Se $u : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{X}$ é uma sequência pseudo S-assintoticamente ω-periódica, então a sequência de Nemytskii $v(n) = f(n, u(n))$ é pseudo S-assintoticamente ω-periódica.*

Demonstração. A demonstração do Lema 4.2.6 é baseada no argumento da demonstração de Cuevas, Henríquez e Soto (2014, Lema 2.3). Façamos $K = Im(u)$. Para $\epsilon > 0$ seja $\delta = \delta_{\epsilon,K}$ e $m_{\epsilon,K}$ a constante envolvida na Definição 4.2.8. Seja m_K a constante dada na Definição 4.2.7. Denotamos $C_\delta = \{k \in \mathbb{Z}^+ : \ ||u(k+\omega) - u(k)||_{\mathbb{X}} \geq \delta\}$ e escolhemos m

[9] Ver (CUEVAS; HENRÍQUEZ; SOTO, 2014).

suficientemente grande ($m \geq max\{m_{\epsilon,K}, m_K\}$). Então temos a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}||v(k+\omega)-v(k)||_{\mathbb{Y}} &\leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sup_{x\in\mathbb{X}}||f(k+\omega,x)-f(k,x)||_{\mathbb{Y}} \\
&\quad + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}||f(k,u(k+\omega))-f(k,u(k))||_{\mathbb{Y}} \\
&\leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sup_{x\in\mathbb{X}}||f(k+\omega,x)-f(k,x)||_{\mathbb{Y}} \\
&\quad + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{m-1}||f(k,u(k+\omega))-f(k,u(k))||_{\mathbb{Y}} \\
&\quad + \frac{1}{n+1}\sum_{\substack{k=m\\ k\in C_\delta}}^{n}||f(k,u(k+\omega))-f(k,u(k))||_{\mathbb{Y}} \\
&\quad + \frac{1}{n+1}\sum_{\substack{k=m\\ k\notin C_\delta}}^{n}||f(k,u(k+\omega))-f(k,u(k))||_{\mathbb{Y}} \\
&:= I_1(n)+I_2(n)+I_3(n)+I_4(n).
\end{aligned}$$

É evidente que $I_1(n), I_2(n) \to 0$ quando $n \to +\infty$ e $I_4(n) \leq \epsilon$. Observemos que

$$I_3(n) \leq 2\sup_{\substack{x\in K\\ k\geq m}}||f(k,x)||_{\mathbb{Y}}\frac{Card\,(C_\delta\cap[m,n])}{n+1}.$$

Usando (DING; FU; N'GUÉRÉKATA, 2011, Lema 2.9) inferimos que $I_3(n) \to 0$ quando $n \to +\infty$. Portanto v é pseudo S-assintoticamente ω-periódica. □

Corolário 4.2.1. *Seja $f : \mathbb{Z}^+\times\mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ uma função assintoticamente limitada em conjuntos limitados e uniformemente pseudo S-assintoticamente ω-periódica em conjuntos limitados que satisfaz a condição de Lipschitz*

$$||f(n,x)-f(n,y)||_{\mathbb{X}} \leq L_f(n)||x-y||_{\mathbb{Y}}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ e todo $x, y \in \mathbb{Y}$, onde $L_f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}^+$ é limitada em $\mathbb{Z}^+_m$, para algum[10] *$m \in \mathbb{Z}^+$. Se $u : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Y}$ é uma sequência pseudo S-assintoticamente ω-periódica, então a sequência de Nemytskii associada a u é pseudo S-assintoticamente ω-periódica.*

Demonstração. A limitação de L e a condição de Lipschitz garantem que f é assintoticamente uniformemente contínua em conjuntos limitados e aplica-se o Lema 4.2.6. □

Corolário 4.2.2. *Seja $f : \mathbb{Z}^+\times\mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ uma função assintoticamente limitada em conjuntos limitados e uniformemente pseudo S-assintoticamente ω-periódica em conjuntos limitados que satisfaz a condição:*

(**PW1**) *Para cada número positivo σ, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ e todo $x, y \in B_\sigma(\mathbb{X})$ temos $||f(n,x)-f(n,y)||_{\mathbb{Y}} \leq L_f(\sigma)||x-y||_{\mathbb{X}}$, onde $L_f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma função contínua.*

[10] $\mathbb{Z}^+_m = \{m, m+1, \dots\}$

Se $u : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{X}$ é uma sequência pseudo S-assintoticamente ω-periódica, então a sequência de Nemytskii associada a u é pseudo S-assintoticamente ω-periódica.

Como uma aplicação do Corolário 4.2.2 temos o próximo resultado.

Teorema 4.2.3. *Seja $f : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ uma função uniformemente pseudo S-assintoticamente ω-periódica em conjuntos limitados e assintoticamente limitada em conjuntos limitados que satisfaz (**PW1**). Se existe $r > 0$ tal que $||s(\lambda, \cdot)||_1 \left(L_f(r) + \frac{1}{r}||f(\cdot, 0)||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})} \right) < 1$ então existe uma solução pseudo S-assintoticamente ω-periódica, $u(\cdot)$ de (4.1.5) e (4.1.6).*

Sejam ω e m elementos de $\mathbb{Z}^+ - \{0\}$, definimos $\mathcal{V}_f(k) := f(k+\omega) - f(k)$. Vamos considerar o seguinte espaço

$$PSAP_\omega^m(\mathbb{Z}; \mathbb{X}) = \{ f \in \ell^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{X}) : \ \mathcal{V}_f \in Erg_m(\mathbb{Z}; \mathbb{X}) \}.$$

$PSAP_\omega^m$ diz-se os espaço das sequências pseudo S-assintoticamente ω-periódicas de classe m. $PSAP_\omega^m \subseteq PSAP_\omega$ e este espaço equipado com a topologia da convergência uniforme é um espaço de Banach.

Introduzimos o espaço $PSAP_\omega^\infty(\mathbb{Z}; \mathbb{X}) := \bigcap_{m \in \mathbb{Z}^+ - \{0\}} PSAP_\omega^m(\mathbb{Z}; \mathbb{X})$. $PSAP_\omega^\infty(\mathbb{Z}; \mathbb{X})$, chamado espaço das sequências pseudo S-assintoticamente ω-periódicas de classe infinito.

Lema 4.2.7. *Suponhamos que a Condição* (**Fad**) *é satisfeita. Se $u : \mathbb{Z} \to \mathbb{X}$ é pseudo S-assintoticamente ω-periódicas de classe infinito, então $n \to u_n$ é também é pseudo S-assintoticamente ω-periódicas de classe infinito.*

Demonstração. A demonstração deste Lema 4.2.7 segue a demonstração do Lema 4.1.3. $\square$

Para $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ definimos

$$\Pi_f^\omega(n, y) := f(n+\omega, y) - f(n, y), \ n \in \mathbb{Z}, \ y \in \mathbb{Y}.$$

Seja m um elemento de $\mathbb{Z}^+ - \{0\}$. Introduzimos os seguintes espaços de sequências:

$$\begin{aligned} PSAP_\omega^m(\mathbb{Z}; \mathbb{Y}; \mathbb{X}) &= \Big\{ f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Y} \to \mathbb{X} \mid f \text{ é limitada e } f(n, \cdot) \text{ é contínua para cada} \\ &\qquad n \in \mathbb{Z}, \ \Pi_f^\omega \in Erg_m(\mathbb{Z}; \mathbb{Y}; \mathbb{X}) \Big\}, \\ PSAP_\omega^\infty(\mathbb{Z}; \mathbb{Y}; \mathbb{X}) &:= \bigcap_{m \in \mathbb{Z}^+ - \{0\}} PSAP_\omega^m(\mathbb{Z}; \mathbb{Y}; \mathbb{X}). \end{aligned}$$

$PSAP_\omega^m(\mathbb{Z}; \mathbb{Y}; \mathbb{X})$ (respectivamente, $PSAP_\omega^\infty(\mathbb{Z}; \mathbb{Y}; \mathbb{X})$) diz-se o espaço das funções uniformemente pseudo S-assintoticamente ω-periódicas de classe m (respectivamente, infinito) em conjuntos limitados de $\mathbb{Y}$.

Lema 4.2.8. *Seja f uma função pertencente a $PSAP^m_\omega(\mathbb{Z};\mathbb{Y};\mathbb{X})$ que verifica a condição de Lipschitz: $||f(n,x)-f(n,y)||_\mathbb{X} \leq L_f||x-y||_\mathbb{Y}$, $\forall n\in\mathbb{Z}$, $\forall x,y\in\mathbb{Y}$. Se $u:\mathbb{Z}\to\mathbb{Y}$ é uma sequência pseudo S-assintoticamente ω-periódica de classe infinito, então a sequência de Nemytskii $v(n)=f\,(n,u(n))$ é também pseudo S-assintoticamente ω-periódica de classe infinito.*

Demonstração. Tome-se $m\in\mathbb{Z}^+-\{0\}$, qualquer e faça-se $K=Im(u)$, obtemos

$$\max_{\tau\in[k-m,k]\cap\mathbb{Z}}||\mathcal{V}_v(\tau)||_\mathbb{X} \leq L_f \max_{\tau\in[k-m,k]\cap\mathbb{Z}}||\mathcal{V}_u(\tau)||_\mathbb{X} + \max_{\tau\in[k-m,k]\cap\mathbb{Z}}\sup_{x\in K}||\Pi^\omega_f(\tau,x)||_\mathbb{X}. \tag{4.2.14}$$

Como $\mathcal{V}_u\in Erg_m(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ e $\Pi^\omega_f\in Erg_m(\mathbb{Z};\mathbb{Y};\mathbb{X})$, segue-se de (4.2.14) que $\mathcal{V}_v\in Erg_m(\mathbb{Z};\mathbb{X})$, de onde $v\in PSAP^m_\omega(\mathbb{Z};\mathbb{X})$. Como m é arbitrário a prova está completa. □

Lema 4.2.9. *Seja $f:\mathbb{Z}\times\mathbb{Y}\to\mathbb{X}$ uma função uniformemente contínua em conjuntos limitados de $\mathbb{Y}$ e uniformemente pseudo S-assintoticamente ω-periódica de classe infinito em conjuntos limitados. Então a conclusão do Lema 4.2.8 é verdadeira.*

Demonstração. Usamos a mesma notação da demonstração do Lema 4.1.4. Fazendo $\Lambda(\cdot):=\sup_{x\in K}||\Pi^\omega_f(\cdot,x)||_\mathbb{X}$, temos que $E_{\Psi_{\mathcal{V}_v}}(n,\epsilon)\subseteq E_{\Psi_{\mathcal{V}_u}}(n,\delta)\cup E_{\Psi_\Lambda}(n,\frac{\epsilon}{2})$, o que termina a demonstração. □

Lema 4.2.10. *Seja $b:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{C}$ uma sequência somável. Então para toda a sequência pseudo S-assintoticamente ω-periódica de classe infinito, $u:\mathbb{Z}\to\mathbb{X}$, a sequência $\Phi^\#_u$ dada por (4.1.3) é igualmente pseudo S-assintoticamente ω-periódica de classe infinito.*

Demonstração. Temos a identidade $\mathcal{V}_{\Phi^\#_u}=\Phi^\#{}_{\mathcal{V}_u}$. De onde, aplicando o Lema 4.1.5 completamos a prova. □

Estamos agora em condições de apresentar um resultado central desta seção.

Teorema 4.2.4. *Suponha que a Condição* (**Fad**) *é satisfeita. Seja $f:\mathbb{Z}\times\mathcal{B}\to\mathbb{X}$ uma função uniformemente pseudo S-assintoticamente ω-periódica de classe infinito em conjuntos limitados de $\mathcal{B}$ que verifica a condição de Lipschitz (4.1.10). Se $||s(\lambda,\cdot)||_1L<1$ então existe uma única solução pseudo S-assintoticamente ω-periódica (de classe infinito) da equação (3.1.3).*

Demonstração. Definimos a aplicação $\mathcal{F}$ no espaço $PSAP^\infty_\omega(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ pela expressão (3.1.4). Mostremos inicialmente que $\mathcal{F}u$ está em $PSAP^\infty_\omega(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ para $u\in PSAP^\infty_\omega(\mathbb{Z};\mathbb{X})$. Deduz-se da nossa hipótese que $f(\cdot,u.)\in\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})$. De onde, temos a seguinte estimativa:

$$||\mathcal{F}u||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})}\leq||s(\lambda,\cdot)||_1||f(\cdot,u.)||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})}.$$

Usando (4.1.10), Lema 4.2.7, Lema 4.2.9 e Lema 4.2.10 obtemos que $\mathcal{F}u \in PSAP^{\infty}_{\omega}(\mathbb{Z};\mathbb{X})$. Além disso, para $u, v \in PSAP^{\infty}_{\omega}(\mathbb{Z};\mathbb{X})$, temos a estimativa

$$||\mathcal{F}u - \mathcal{F}v||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})} \leq L||s(\lambda,\cdot)||_1||u-v||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})},$$

o que prova que $\mathcal{F}$ é uma contração no espaço $PSAP^{\infty}_{\omega}(\mathbb{Z};\mathbb{X})$, daqui concluímos que $\mathcal{F}$ tem um único ponto fixo, $u \in PSAP^{\infty}_{\omega}(\mathbb{Z};\mathbb{X})$. $\square$

No próximo resultado consideramos perturbações locais em (3.1.3).

Teorema 4.2.5. *Suponha que a Condição* (**Fad**) *é satisfeita. Seja* $f : \mathbb{Z} \times \mathcal{B} \to \mathbb{X}$ *uma função uniformemente pseudo S-assintoticamente* ω*-periódica de classe infinito em conjuntos limitados de* $\mathcal{B}$ *tal que satisfaz a condição* (***PW1***) *em* $\mathbb{Z}$ *(ver Corolário 4.2.2). Se existe* $r > 0$ *tal que* $||s(\lambda,\cdot)||_1 \left(\rho L_f(\rho r) + r^{-1}||f(\cdot,0)||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})}\right) < 1$*, então existe solução pseudo S-assintoticamente* ω*-periódica (de classe infinito) da equação (3.1.3).*

Demonstração. Observemos que como f é limitada em conjuntos limitados de $\mathcal{B}$, então $f(\cdot,0)$ é uma função limitada em $\mathbb{Z}$. Seja $\mathcal{F} : PSAP^{\infty}_{\omega}(\mathbb{Z};\mathbb{X}) \to PSAP^{\infty}_{\omega}(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ a aplicação definida em (3.1.4). Para $u \in PSAP^{\infty}_{\omega}(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ com $||u||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})} \leq r$, temos que

$$\begin{aligned} ||\left(\mathcal{F}u\right)(n)||_{\mathbb{X}} &\leq \sum_{j=-\infty}^{n-1} |s(\lambda, n-1-j)|L_f(\rho r)\rho r + \sum_{j=-\infty}^{n-1} |s(\lambda, n-1-j)|\ ||f(j,0)||_{\mathbb{X}} \\ &\leq ||s(\lambda,\cdot)||_1 \left(L_f(\rho r)\rho r + ||f(\cdot,0)||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})}\right), \end{aligned}$$

portanto

$$||\mathcal{F}u||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})} \leq r. \tag{4.2.15}$$

Em face do Lema 4.2.7, Lema 4.2.9 e Lema 4.2.10, segue-se que $\mathcal{F}$ envia $PSAP^{\infty}_{\omega}(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ nele próprio. Por outro lado, para $u, v \in PSAP^{\infty}_{\omega}(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ com $||u||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})} \leq r$ e $||v||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})} \leq r$, obtemos

$$||\left(\mathcal{F}u\right)(n) - \left(\mathcal{F}v\right)(n)||_{\mathbb{X}} \leq \sum_{j=-\infty}^{n-1} |s(\lambda, n-1-j)|L_f(\rho r)||u_j - v_j||_{\mathcal{B}}.$$

Isso significa que

$$||\mathcal{F}u - \mathcal{F}v||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})} \leq ||s(\lambda,\cdot)||_1 \rho L_f(\rho r)||u-v||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})}. \tag{4.2.16}$$

De (4.2.15) e (4.2.16) segue-se que $\mathcal{F}$ é uma contração em $B_r\left(PSAP^{\infty}_{\omega}(\mathbb{Z};\mathbb{X})\right)$. Está completa a demonstração do Teorema. $\square$

—

Para entender o efeito de perturbações num sentido mais lato necessitamos lidar com teoremas do ponto fixo mais gerais do que o princípio da contração. Usando a metodologia introduzida por Agarwal, Cuevas e Dantas (2013) podemos estudar a existência de soluções pseudo S-assintoticamente ω-periódicas (respectivamente pseudo-quase periódicas) para a equação (3.1.3) quando a perturbação f não satisfaz uma condição do tipo Lipschitziano. Para estabelecermos o nosso próximo resultado consideramos funções $f : \mathbb{Z} \times \mathcal{B} \to \mathbb{X}$ que satisfazem a seguinte condição de limitação:

(**AP1**) Existem uma função não decrescente $W_f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ e uma função $M : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^+$ tais que

$$||f(k, \varphi)||_{\mathbb{X}} \leq M(k) W_f(||\varphi(0)||_{\mathbb{X}}),$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$ e $\varphi \in \mathcal{B}$.

Podemos agora formular o nosso resultado.

Teorema 4.2.6. *Suponhamos que a Condição* (**Fad**) *é satisfeita. Seja λ um elemento de Ω_s e $f : \mathbb{Z} \times \mathcal{B} \to \mathbb{X}$ uma função uniformemente contínua em cada subconjunto limitado de $\mathcal{B}$, uniformemente em $k \in \mathbb{Z}$, e uniformemente pseudo S-assintoticamente ω-periódica de classe infinito em conjuntos limitados de $\mathcal{B}$ que satisfaz a condição (*__AP1__*). Suponhamos, adicionalmente, que as seguintes condições são satisfeitas.*

(**AP2**) *Para cada $\nu > 0$,*

$$\lim_{|n| \to +\infty} \frac{1}{h(n+1)} \sum_{j=-\infty}^{n} |s(\lambda, n-j)| M(j) W_f\left(\nu h(j)\right) = 0,$$

onde h é dado pelo Teorema 2.5.5.

(**AP3**) *Para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $u, v \in C_h^0(\mathbb{Z}; \mathbb{X})$, $||u - v||_h < \delta$ implica que*

$$\sum_{j=-\infty}^{n} |s(\lambda, n-j)| ||f(j, u_j) - f(j, v_j)||_{\mathbb{X}} \leq \epsilon,$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

(**AP4**) *Para todo $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \leq b$ e $\sigma > 0$, o conjunto*

$$\{f(k, \varphi) : \ a \leq k \leq b, \ \varphi \in \mathcal{B}, \ ||\varphi(0)||_{\mathcal{B}} \leq \sigma\}$$

é relativamente compacto em $\mathbb{X}$.

(**AP5**) $\liminf_{r \to +\infty} \dfrac{r}{\tilde{\beta}(r)} > 1$, *onde*

$$\tilde{\beta}(r) := \sup_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{h(n+1)} \sum_{j=-\infty}^{n} |s(\lambda, n-j)| M(j) W_f\Big(r h(j)\Big) \right).$$

Então a equação (3.1.3) tem uma solução pseudo S-assintoticamente ω-periódica de classe infinito.

Demonstração. Definamos o operador $\mathcal{F} : C_h^0(\mathbb{Z};\mathbb{X}) \to C_h^0(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ por (3.1.4). A partir da demonstração de Agarwal, Cuevas e Dantas (2013, Teorema 3.2) podemos ver que $\mathcal{F}$ é completamente contínuo e que o conjunto de soluções das equações homotópicas, $u = \gamma\mathcal{F}u,\ \gamma \in (0,1)$, é limitado. Segue-se do Lema 4.2.7 e do Lema 4.2.9 que a sequência $k \to f(k, u_k)$ pertence a $PSAP_\omega^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})$, sempre que $u \in PSAP_\omega^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})$. De onde usando o Lema 4.2.3, temos que $PSAP_\omega^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ é invariante por $\mathcal{F}$ e consequentemente podemos considerar

$$\mathcal{F} : \overline{PSAP_\omega^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})}^h \to \overline{PSAP_\omega^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})}^h.$$

Aplicando a alternativa do Teorema de Leray-Schauder deduzimos que a aplicação $\mathcal{F}$ tem um ponto fixo, u, em $\overline{PSAP_\omega^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})}^h$. Seja $\{u^n\}_n$ uma sequência em $PSAP_\omega^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ tal que $u^n \to u$, quando $n \to +\infty$ na norma $||\cdot||_h$. Podemos ver pela condição (**AP3**) que $\{\mathcal{F}u^n\}_n$ converge para u uniformemente em $\mathbb{Z}$. Isto implica que $u \in PSAP_\omega^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})$, o que completa a demonstração. □

É também interessante considerar o seguinte resultado.

Teorema 4.2.7. *Assuma que a Condição* (**Fad**) *e* (**AP4**) *são válidas. Seja λ um elemento de Ω_s e $f : \mathbb{Z} \times \mathcal{B} \to \mathbb{X}$ uma função uniformemente pseudo S-assintoticamente ω-periódica de classe infinito em conjuntos limitados de $\mathcal{B}$, com $f(\cdot, 0)$ limitada em $\mathbb{Z}$. Assuma ainda que valem as seguintes propriedades.*

(**AP6**) *Existe uma função contínua não decrescente $W : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ com $W(0) = 0$ tal que $||f(n, h(n)\varphi) - f(n, h(n)\psi)||_{\mathbb{X}} \le W(||\varphi(0) - \psi(0)||_{\mathbb{X}})$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e $\varphi, \psi \in \mathcal{B}$, onde h é dado pelo Teorema 2.5.5.*

(**AP7**) $\liminf_{\xi\to+\infty} ||s(\lambda,\cdot)||_1 \dfrac{W(\xi)}{\xi} < 1.$

Então a equação (3.1.3) tem uma solução pseudo S-assintoticamente ω-periódica de classe infinito.

Demonstração. Usemos a mesma notação da demonstração do Teorema 4.2.6. Seja v um elemento de $C_h^0(\mathbb{Z};\mathbb{X})$, como $\mathcal{F}v \in \ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ temos que $\mathcal{F}v \in C_h^0(\mathbb{Z};\mathbb{X})$, de onde o operador $\mathcal{F}$ está bem definido. Como W é contínua, a estimativa

$$\sum_{j=-\infty}^{n} |s(\lambda, n-j)| ||f(j,u_j) - f(j,v_j)||_{\mathbb{X}} \le ||s(\lambda,\cdot)||_1 W(||u-v||_h),$$

mostra que a condição (**AP3**) é válida. Usando novamente o fato de W ser contínua e

$$||\mathcal{F}u - \mathcal{F}v||_h \le ||s(\lambda,\cdot)||_1 W(||u-v||_h)$$

obtemos que $\mathcal{F}$ é uma aplicação contínua. Usando a demonstração de Agarwal, Cuevas e Dantas (2013, Teorema 3.2) e o Teorema 2.5.5 podemos ver que $\mathcal{F}$ é uma aplicação completamente contínua. Observemos que existe $r_0 > 0$ tal que $B_{r_0}(C_h^0(\mathbb{Z};\mathbb{X}))$ é invariante por $\mathcal{F}$. De fato, se assumirmos que esta asserção é falsa, então para todo $r > 0$ podemos escolher $u^r \in B_r\left(C_h^0(\mathbb{Z};\mathbb{X})\right)$ tal que $||\mathcal{F}u^r||_h > r$. De onde deduzimos que

$$1 \leq \liminf_{r\to+\infty} ||s(\lambda,\cdot)||_1 W(r)\,\frac{1}{r},$$

que é uma contradição a nossa hipótese (**AP7**), estabelecendo a asserção.

Por outro lado, observemos que f satisfaz todas as condições do Lema 4.2.9. Então aplicando o Lema 4.2.10 obtemos novamente que $PSAP_\omega^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})$ é invariante por $\mathcal{F}$. Consequentemente inferimos que $\overline{B_{r_0}\left(C_h^0(\mathbb{Z};\mathbb{X})\right)\cap PSAP_\omega^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})}^h$ é invariante por $\mathcal{F}$. Aplicando o Teorema do ponto fixo de Schauder, deduzimos que a aplicação $\mathcal{F}$ tem um ponto fixo u em $\overline{B_{r_0}\left(C_h^0(\mathbb{Z};\mathbb{X})\right)\cap PSAP_\omega^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})}^h$. Usando o mesmo raciocínio da demonstração do Teorema 4.2.6 pode-se mostrar que $u \in PSAP_\omega^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{X})$, o que completa a demonstração do Teorema 4.2.7. $\square$

5 APLICAÇÕES E MÉTODOS

A matemática foi sempre uma ferramenta essencial para praticamente todas as áreas de conhecimento. Algumas áreas utilizam-na como ferramenta diária, outras usam modelos matemáticos para melhor entender os sistemas em estudo.

Um critério fundamental no trabalho de investigação desenvolvido pelo grupo de Equações de Evolução da UFPE é o de que os métodos e ferramentas teóricas desenvolvidos tenham aplicações concretas no mundo real. A investigação deve ter um impacto social, servir para a resolução de problemas concretos. A "ética de investigador" deve ser também a de responder às demandas da sociedade que torna possível a investigação.

Um dos grandes desafios atuais é o desenvolvimento de modelos matemáticos que sejam eficientes para explicar processos físicos, químicos ou biológicos, altamente complexos que brotam nas áreas de medicina, engenharia e tecnologia. De fato, nos últimos anos foram desenvolvidas técnicas altamente sofisticadas para a obtenção de dados. A ciência moderna vive atualmente uma situação única entre a grande produção e coleta de dados experimentais e o pequeno desenvolvimento de modelos teóricos. A ciência de hoje é muito mais rica em dados do que em teoria. A matemática é a ferramenta chave para fazer a ponte entre dados e a explicação.

O objetivo da pesquisa interdisciplinar na área de Matemática é desenvolver modelos que realmente contribuam para o entendimento dos fatos experimentais. Mais especificamente, deseja-se o desenvolvimento de modelos que tenham capacidade de previsão, em contraposição a modelos descritivos. Isso exige uma colaboração e envolvimento de pesquisadores de diversas áreas. Além dos modelos teóricos, é de fundamental importância o desenvolvimento de algoritmos e procedimentos eficientes,que possam ser usados e confrontados com os dados.

Dentro da estrutura de tempo contínuo o grupo de Equações de Evolução da UFPE desenvolveu aplicações de modelos fracionários a problemas de condutividade térmica e contribuições para a teoria dos sistemas viscoelásticos em (APARCANA et al., 2018); periodicidade assintótica em sistemas fracionários (APARCANA et al., 2018; ANDRADE et al., 2015); estruturas flexíveis, difusão térmica, equações fracionárias e viscoelasticidade em (DE ANDRADE et al., 2016); problemas de transporte para equações de vigas de Euler-Bernoulli e teoria de difusão térmica em (DE ANDRADE et al., 2014); equações de Navier Stokes em (DE ANDRADE, 2018) e quimiotaxia em (AZEVEDO; CUEVAS; HENRÍQUEZ, 2018). Na estrutura de tempo discreto salientamos as aplicações ao oscilador harmônico em (CASTRO; CUEVAS; LIZAMA, 2009); teoria de controle e dinâmica populacional em (CUEVAS; CHOQUEHUANCA; SOTO, 2014). Nas próximas seções desta tese continuaremos a explorar e desenvolver estas aplicações.

—

Para ilustrar a estratégia geral, bem como para descrevermos alguns aspectos da nossa abordagem, consideremos algumas aplicações dos nossos resultados.

Exemplo 5.0.1. Assumamos que $\gamma > 0$. Consideremos o espaço de fase $\mathcal{B}^{\gamma}(\mathbb{X})$ definido no Exemplo 2.3.1, onde $\mathbb{X}$ é um espaço de Banach. Seja p um elemento de $\mathbb{C}$ tal que $|p| < 1$ e $\lambda \in D(p,1)$. Seja $\ell : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^+$ uma sequência tal que $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \ell(j)^q < +\infty$. Consideremos a seguinte EDV no espaço de Banach $\mathbb{X}$:

$$u(n+1) = \lambda \sum_{j=-\infty}^{n} p^{n-j} cos\Big((n-j)\pi\Big)u(j) + \frac{\nu\ell(n)u(n)}{||u(n)||_{\mathbb{X}} + 1},\ n \in \mathbb{Z}. \tag{5.0.1}$$

Comecemos por observar que, aplicando a transformada-Z à equação linear da solução fundamental, temos:

$$\begin{aligned}
&z\,Z[s(\lambda,k)] - s(\lambda,0)z = \lambda Z[p^k cos(n\pi)]Z[s(\lambda,k)] \\
\Leftrightarrow &z\,Z[s(\lambda,k)] - z = \lambda \frac{z(z - pcos(\pi))}{z^2 - 2zcos(\pi) + p^2} Z[s(\lambda,k)] \\
\Leftrightarrow &z\,Z[s(\lambda,k)] - z = \lambda \frac{z}{z+p} Z[s(\lambda,k)] \\
\Leftrightarrow &Z[s(\lambda,k)] = 1 + \lambda \frac{1}{z - (\lambda - p)}.
\end{aligned}$$

Aplicando a transformada inversa obtemos $s(\lambda,k) = \lambda(\lambda-p)^{k-1},\ k \geq 1$, logo $D(p,1) \subseteq \Omega_s$. Note-se que (3.1.2) se verifica para $L(n) = 2\nu|\ell(n)|$. Portanto se supusermos que $|\nu|$ é suficientemente pequeno para fazer $2\nu||s(\lambda,\cdot)||_1||\ell(\cdot)||_{\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{R}^+)} < 1$ segue-se do Teorema 3.1.1 que a equação (5.0.1) tem uma única solução ℓ^p somável.

Exemplo 5.0.2. Consideremos agora a EDV no espaço de Banach $\mathbb{X}$:

$$\begin{aligned}
u(n+1) \ &= \ \lambda \sum_{j=-\infty}^{n} p^{n-j} cos\Big((n-j)\pi\Big)u(j) \\
&\quad + |\nu|\ell(n)\left(\frac{u(n)}{||u(n)||_{\mathbb{X}} + 1} + \frac{u(n-1)}{||u(n-1)||_{\mathbb{X}} + 1}\right),\ n \in \mathbb{Z}.
\end{aligned} \tag{5.0.2}$$

Seguindo o raciocínio do exemplo anterior e com a ajuda da Observação 3.1.2, se supusermos que $|\nu|$ é suficientemente pequeno então existe uma única solução ℓ^p-somável de (5.0.2).

Exemplo 5.0.3. Assuma que $\gamma > 0,\ \ 0 < \beta, p < 1$ e seja λ um elemento de $\mathbb{C}$ tal que $|\lambda| < 1 - p$. Sejam a e b elementos de $\ell^p(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^n)$. Consideremos a seguinte equação funcional em diferenças de Volterra:

$$u(n+1) = \lambda \sum_{k=-\infty}^{n} \frac{p^{n-k}}{|n-k|+1} u(k) + \Big(|u(n)| + e^{-\gamma}|u(n-1)|\Big)^{\beta} a(n) + b(n),\ n \in \mathbb{Z}. \tag{5.0.3}$$

Com o propósito de estudar a equação (5.0.3), observemos que $|s(\lambda,k)| \leq |\lambda|(|\lambda|+p)^{k-1}$, $k \geq 1$, de onde $D(0,1-p) \subseteq \Omega_s$. Note-se que (3.1.25) é satisfeita tomando $L(n) = 2^{\beta}|a(n)|$ no espaço de fase $\mathcal{B}^{\gamma}(\mathbb{R}^n)$. Sob estas circunstâncias temos, pelo Corolário 3.1.1, a garantia da existência de uma solução ℓ^p limitada para a equação (5.0.3).

Exemplo 5.0.4. Seja c_0 o espaço de Banach das sequências reais $\{a_n\}_n$ tais que $a_n \to 0$. Definimos $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, por $h_n(s) = \frac{1}{\sqrt[4]{n}}|s|$, e seja $h : c_0 \to c_0$ definido por $h\Big(\{a_n\}_n\Big) = \{h_n(a_n)\}_n$. Assumamos que $\gamma > 0$, $0 < p < 1$ e tome-se $\lambda \in (-1+p, 1-p)$. Consideremos a seguinte equação em diferenças de Volterra definida em c_0

$$u(n+1) = \lambda \sum_{k=-\infty}^{n} \frac{p^{n-k}}{|n-k|+1} u(k) + \nu h\left(e^{-|n|}u(n)\right), \ n \in \mathbb{Z}. \tag{5.0.4}$$

Seja $f(k,\varphi)$ a perturbação associada à equação (5.0.4), temos que $f(k,\cdot)$ é contínua para todo $k \in \mathbb{Z}$. De fato, isso segue-se da estimativa $||f(k,\varphi) - f(k,\psi)||_{c_0} \leq |\nu| ||\varphi - \psi||_{\mathcal{B}^{\gamma}(c_0)}$, para todo $k \in \mathbb{Z}$ e cada $\varphi, \psi \in \mathcal{B}^{\gamma}(c_0)$. Note-se que (**TS1**) é satisfeita com $\xi(k) = e^{-|k|}$ e $\upsilon(k) = 0$. Seja K um subconjunto limitado de $\mathcal{B}^{\gamma}(c_0)$, temos que $f(k,K)$ é limitado e equiconvergente em $+\infty$. De fato, temos

$$\sup_{\varphi \in K} ||f(k,\varphi)||_{c_0} \leq |\nu| \sup_{\varphi \in K} ||\varphi||_{\mathcal{B}^{\gamma}(c_0)}$$

e

$$|f(k,\varphi)(n)| \leq \frac{|\nu|}{\sqrt[4]{n}} \sup_{\varphi \in K} ||\varphi||_{\mathcal{B}^{\gamma}(c_0)}.$$

Recorrendo ao critério de compacidade (CUEVAS; PINTO, 2003, Lema 2.3) o conjunto $f(k,K)$ é relativamente compacto em c_0. Se $|\nu| < \frac{1-(|\lambda|+p)}{1-p}$ segue-se do Teorema 3.2.1 que a equação (5.0.4) tem soluções limitadas em $C_0(\mathbb{Z}; c_0)$ e o conjunto formado por estas soluções é compacto.

Exemplo 5.0.5. Assuma que $\gamma > 0$. Consideremos o espaço de fase $\mathcal{B}^{\gamma}(\ell^p(\mathbb{Z}))$ definido no Exemplo 2.3.1. Seja p um elemento de $\mathbb{C}$ tal que $|p| < 1$ e tome-se $\lambda \in D(p,1)$. Seja $\ell(\cdot)$ uma sequência em $\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{R}^+)$ e $\phi_0 \in \ell^p(\mathbb{Z})$. Consideremos em $\ell^p(\mathbb{Z})$ a seguinte equação em diferenças de Volterra:

$$u(n+1) = \lambda \sum_{j=-\infty}^{n} p^{n-j} cos\Big((n-j)\pi\Big) u(j) + \left(\frac{\nu \ell(n)}{n^2+1} ||u(n)||_{\ell^p(\mathbb{Z})} + \frac{1}{n^2}\right)\phi_0, \ n \in \mathbb{Z}. \tag{5.0.5}$$

Seja $f(k,\varphi)$ a perturbação associada à equação (5.0.5). Para $\Phi, \Psi \in \ell^p\left(\mathbb{Z}; \mathcal{B}^{\gamma}(\ell^p(\mathbb{Z}))\right)$ e $\varphi \in \mathcal{B}^{\gamma}(\ell^p(\mathbb{Z}))$, temos as seguintes estimativas:

$$\begin{aligned} ||f(\cdot,\Phi(\cdot)) - f(\cdot,\Psi(\cdot))||_{\ell^p(\mathbb{Z};\ell^p(\mathbb{Z}))} \quad &\leq \quad |\nu| \ ||\ell||_{\ell^{\infty}(\mathbb{Z};\mathbb{R}^+)} ||\phi_0||_{\ell^p(\mathbb{Z})} \\ &\quad \times \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n^2+1)^p}\right)^{\frac{1}{p}} ||\Phi - \Psi||_{\ell^{\infty}(\mathbb{Z};\mathcal{B}^{\gamma}(\ell^p(\mathbb{Z})))}, \end{aligned} \tag{5.0.6}$$

$$||f(k,\varphi)||_{\ell^p(\mathbb{Z})} \;\leq\; |\nu|\;|\ell(k)|\;||\phi_0||_{\ell^p(\mathbb{Z})}||\varphi(0)||_{\ell^p(\mathbb{Z})} + \frac{1}{k^2}||\phi_0||_{\ell^p(\mathbb{Z})}, \tag{5.0.7}$$

$$|f(k,\psi)(n)| \;\leq\; \left(|\nu|\;||\ell||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{R}^+)} \sup_{\psi\in K}||\psi||_{\mathcal{B}^\gamma(\ell^p(\mathbb{Z}))}+1\right)||\phi_0||_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}, \tag{5.0.8}$$

onde $K \subseteq \mathcal{B}^\gamma(\ell^p(\mathbb{Z}))$ é um conjunto limitado, e

$$\sum_{|n|>T}|f(k,\psi)(n)|^p \leq \theta \sum_{|n|>T}|\phi_0(n)|^p \to 0 \tag{5.0.9}$$

quando $T \to +\infty$ uniformemente em $\psi \in K$, onde

$$\theta = \left(|\nu|\;||\ell||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{R}^+)} \sup_{\psi\in K}||\psi||_{\mathcal{B}^\gamma(\ell^p(\mathbb{Z}))}+1\right)^p.$$

Observamos que a estimativa (5.0.6) implica que a condição ($\mathbf{Hp}-\mathbf{2}$) é verificada. A estimativa (5.0.7) implica que (**TS5**) é válida com $\gamma(k) = |\nu|\;||\phi_0||_{\ell^p(\mathbb{Z})}|\ell(k)|$ e $\eta(k) = \frac{1}{k^2}||\phi_0||_{\ell^p(\mathbb{Z})}$. As estimativas (5.0.8) e (5.0.9) implicam que $f(k,K)$ é relativamente compacto em $\ell^p(\mathbb{Z})$.

Para completarmos a discussão escolhemos $|\nu| < \frac{1-(|\lambda|+p)}{(1-p)||\phi_0||_{\ell^p(\mathbb{Z})}||\ell||_{\ell^q(\mathbb{Z};\mathbb{R}^+)}}$, logo pelo Teorema 3.2.3 o conjunto das soluções ℓ^p de (5.0.5) é compacto em $\ell^p(\mathbb{Z};\ell^p(\mathbb{Z}))$.

Exemplo 5.0.6. Estamos interessados no estudo da equação em diferenças

$$u(n+1) = \lambda\sum_{j=-\infty}^{n} p^{n-j}u(j) + \nu a(n)g\Big(u(n-1)\Big),\; n\in\mathbb{Z}, \tag{5.0.10}$$

onde $p \in (-1,1)$, $\lambda \in D(-p,1)$, $\nu\in\mathbb{R}$, $a \in \ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{R})$ e $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é uma função L-Lipschitziana. Consideremos o espaço de fase $\mathcal{B}^\gamma(\mathbb{R})$ com $\gamma>0$ e seja $f(n,\varphi)$ a perturbação associada a (5.0.10). Temos as seguintes estimativas:

$$|f(n,\varphi)| \leq |\nu|\;||a||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{R})}||g||_{C_b(\mathbb{R};\mathbb{R})},\; n\in\mathbb{Z},\; \varphi\in\mathcal{B}^\gamma(\mathbb{R}), \tag{5.0.11}$$

$$|f(n,\varphi)-f(n,\varphi_0)| \leq Le^\gamma|\nu|\;||a||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{R})}||\varphi-\varphi_0||_{\mathcal{B}^\gamma(\mathbb{R})},\; n\in\mathbb{Z},\; \varphi,\varphi_0\in\mathcal{B}^\gamma(\mathbb{R}), \tag{5.0.12}$$

$$|f(n,\varphi)-f(n,\psi)| \leq |\nu|L||a||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{R})}|\varphi(-1)-\psi(-1)|,\; n\in\mathbb{Z},\; \varphi,\psi\in\mathcal{B}^\gamma(\mathbb{R}) \tag{5.0.13}$$

e

$$\sum_{k=-n}^{n}\max_{\tau\in[k-m,k]\cap\mathbb{Z}}\sup_{\varphi\in K}\left|\Pi_f^\omega(\tau,\varphi)\right| \leq |\nu|\;||g||_{C_b(\mathbb{R}:\mathbb{R})}\sum_{k=-n}^{n}\max_{\tau\in[k-m,k]\cap\mathbb{Z}}|\mathcal{V}_a(\tau)|, \tag{5.0.14}$$

onde $K\subseteq\mathcal{B}^\gamma(\mathbb{R})$ é limitado e $\mathcal{V}_a$ é dado na Seção 4.2.2.

Nesta etapa observemos que a estimativa (5.0.11) implica que f é limitada e a estimativa (5.0.12) implica de imediato que $f(n,\cdot)$ é continua para cada $n\in\mathbb{Z}$. Se assumirmos que $a(n)$ é uma sequência pseudo S-assintoticamente ω-periódica de classe infinito, de (5.0.14) temos que $f(n,\varphi)$ é uniformemente pseudo S-assintoticamente ω-periódica de classe infinito em conjuntos limitados de $\mathcal{B}^\gamma(\mathbb{R})$. Por outro lado vemos que o Teorema 4.2.4 é válido em $\mathcal{B}^\gamma(\mathbb{R})$ para perturbações do tipo

$$|f(n,\varphi) - f(n,\psi)| \leq L \sum_{k=0}^{\mu} |\varphi(-k) - \psi(-k)|.$$

Se supusermos que $|\nu|$ é suficientemente pequeno, concluímos que (5.0.10) tem uma única solução pseudo S-assintoticamente ω-periódica de classe infinito.

Exemplo 5.0.7. Assumamos que $\nu > 0, \ \ 0 < p < 1$, e tomemos $\lambda \in (-1+p, 1-p)$. Consideremos a seguinte equação em diferenças no espaço de Banach $\mathbb{X}$:

$$u(n+1) = \lambda \sum_{k=-\infty}^{n} \frac{p^{n-k}}{|n-k|+1} u(k) + \frac{\nu a(n) u(n)}{||u(n)||_{\mathbb{X}} + 1}, \ n \in \mathbb{Z}. \tag{5.0.15}$$

Consideramos aqui como espaço de trabalho o espaço de fase $\mathcal{B}^\gamma(\mathbb{X})$ e seja $f : \mathbb{Z} \times \mathcal{B}^\gamma(\mathbb{X}) \to \mathbb{X}$ a perturbação associada à equação (5.0.15). Se assumirmos que $a(n)$ é uma sequência pseudo-quase periódica de classe infinito temos que $f(k,\varphi)$ é um elemento de $PAP^\infty(\mathbb{Z};\mathcal{B}^\gamma(\mathbb{X});\mathbb{X})$. Portanto se supusermos que $|\nu|$ é suficientemente pequeno, segue-se do Teorema 4.2.1 que a equação (5.0.15) tem uma única solução pseudo-quase periódica de classe infinito.

Exemplo 5.0.8. Sejam α, β, c e d números reais tais que $|\alpha| < 1$ e $(|c| + 2|d|) < \frac{1-|\alpha|}{||u||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{R})}}$, onde $u(n)$ é um input de controle pertencente a $\ell^1(\mathbb{Z};\mathbb{R})$. Consideremos os seguintes sistemas de controle discreto estudados por Delchamps (1990), Nair e Evans (2000), Phat e Jiang (2005), Cuevas e Lizama (2010), Cuevas, Choquehuanca e Soto (2014):

$$\begin{aligned} x(n+1) &= \alpha x(n) + \beta u(n), \ n \in \mathbb{Z}, & (5.0.16)\\ x(n+1) &= \alpha x(n) + \beta u(n) + cx(n) sin\, u(n) + du(n) cos^2 x(n), \ n \in \mathbb{Z}. & (5.0.17) \end{aligned}$$

Baseados no método de quantização sobre o espaço de estado usado por Delchamps (1990) (ver também (NAIR; EVANS, 2000)) Phat e Jiang estabeleceram em (PHAT; JIANG, 2005) condições suficientes para a estabilização global do sistema semilinear (5.0.17). No nosso estudo consideramos o espaço de fase $\mathcal{B}^\gamma(\mathbb{R})$, $\gamma > 0$ para modelar o sistema de controle (5.0.17). Seja $f(k,\varphi)$ a perturbação associada à equação (5.0.17). Observemos que (**TS1**) é satisfeita com $\xi(k) = |u(k)|$, $\upsilon(k) = (|\beta| + |d|)|u(k)|$ e $\nu = |c| + 2|d|$. Seja K um subconjunto limitado de $\mathcal{B}^\gamma(\mathbb{R})$, temos que $f(k,\varphi)$ é limitado, isto significa que vale ($\mathbf{Lp-1}$). Como $\nu \in \left(0, \frac{1-|\alpha|}{||u||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{R})}}\right)$ segue-se do Teorema 3.2.1 que a equação (5.0.17) tem pelo menos uma solução limitada em $C_0(\mathbb{Z};\mathbb{R})$ e que o conjunto formado por estas soluções é compacto. Por outro lado, se assumirmos que o input de controle é um elemento de $Erg_\infty(\mathbb{Z};\mathbb{R})$ então, pelo Teorema 4.1.2, a equação (5.0.17) tem uma única solução ergódica de classe infinito.

Consideremos a seguinte perturbação do sistema de controle (5.0.16)

$$x(n+1) = \alpha x(n) + \beta u(n) + csin\, u(n)\frac{x(n)}{|x(n)|+1} + du(n)cos^2 x(n),\ \ n \in \mathbb{Z}. \quad (5.0.18)$$

Seja $f(n,\varphi)$ a perturbação associada à equação (5.0.18) no espaço de fase $\mathcal{B}^{\gamma}(\mathbb{R})$. Se assumirmos que o input de controle é limitado podemos afirmar que f é limitada. Por outro lado podemos ver que a condição (4.1.10) é satisfeita com $L = 2(|c|+|d|)||u||_{\ell^{\infty}(\mathbb{Z};\mathbb{R})}$. Usando a desigualdade $|\varphi(0)| \leq ||\varphi||_{\mathcal{B}^{\gamma}(\mathbb{R})}$ temos que $f(n,\cdot)$ é contínua para cada $n \in \mathbb{Z}$. Agora, se assumirmos que o input de controle $u(n)$ é pseudo S-assintoticamente ω-periódico de classe infinito inferimos que a perturbação f é uniformemente pseudo S-assintoticamente ω-periódica de classe infinito. De fato isso segue-se como consequência imediata da estimativa $|\Pi_f^{\omega}(\tau,\varphi)| \leq (|\beta|+|d|+|c|)|\mathcal{V}_u(\tau)|$ (ver a Seção 4.2.2 para a definição de $\mathcal{V}_u$). Finalmente se escolhermos α, c e d tais que $|\alpha| < 1$ e $|c|+|d| < \frac{1-|\alpha|}{2||u||_{\ell^{\infty}(\mathbb{Z};\mathbb{R})}}$ concluímos pelo Teorema 4.2.4 que (5.0.18) tem uma única solução pseudo S-assintoticamente ω-periódica de classe infinito. Vale a pena notar que, se o input de controle $u(n)$ pertence a $PAP^{\infty}(\mathbb{Z};\mathbb{R})$ então f é pseudo-quase periódica de classe infinito. De fato, escrevemos $u = u_1+u_2,\ u_1 \in AP(\mathbb{Z};\mathbb{R})$ e $u_2 \in Erg_{\infty}(\mathbb{Z};\mathbb{R})$, daí $f = g + \Psi$, onde

$$\begin{aligned} g(n,\varphi) &= \beta u_1(n) + csin\, u_1(n)\frac{\varphi(0)}{|\varphi(0)|+1} + du_1(n)cos^2\varphi(0), \\ \Psi(n,\varphi) &= \beta u_2(n) + c(sin\, u(n) - sin\, u_1(n))\frac{\varphi(0)}{|\varphi(0)|+1} + du_2(n)cos^2\varphi(0). \end{aligned}$$

Manipulações elementares mostram que $g \in AP(\mathbb{Z}\times\mathcal{B}^{\gamma}(\mathbb{R});\mathbb{R})$ e $\Psi \in Erg_{\infty}(\mathbb{Z};\mathcal{B}^{\gamma}(\mathbb{R});\mathbb{R})$. Se $|c|+|d| < \frac{1-|\alpha|}{2||u||_{\ell^{\infty}(\mathbb{Z};\mathbb{R})}}$, pelo Teorema 4.2.1 concluímos que (5.0.18) tem uma única solução pertencente a PAP^{∞}.

5.1 Modelos integro-em diferenças

Equações integro-em diferenças (IDE) são modelos em tempo discreto que possuem muitos dos atributos das equações reação-difusão em tempo contínuo. A estrutura de IDE pode acomodar dinâmicas de difusão sendo o comportamento da dinâmica determinado pela especificação do núcleo. Equações integro-em diferenças surgem naturalmente para examinar a dispersão de populações, incluindo a interação de populações compostas por organismos que se reproduzem localmente via gerações discretas e competem pelos recursos ecológicos disponíveis, antes de se dispersarem. Há muitas referências na literatura referente a modelos de IDE, mencionaremos duas delas (LATORE; GOULD; MORTIMER, 1998; WIKLE, 2002).

Sob o ponto de vista das aplicações para lidar com equações integro-em diferenças é necessário substituir o parâmetro λ em (3.0.1) por um operador limitado definido em $\mathbb{X}$. É construtivo considerar um par de exemplos de modelos IDE (ver Exemplos (5.1.1) e (5.1.2)).

Seja $\mathcal{L}(\mathbb{X})$ o espaço de Banach constituído por todos os operadores lineares limitados definidos de $\mathbb{X}$ em $\mathbb{X}$. Seja T um elemento de $\mathcal{L}(\mathbb{X})$ e seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{X}$ uma função limitada, então existe uma solução limitada[1] de

$$u(n+1) = \sum_{j=-\infty}^{n} a(n-j)Tu(j) + f\Big(n, u(n)\Big), \ n \in \mathbb{Z}, \tag{5.1.19}$$

e é dada por

$$u(n+1) = \sum_{j=-\infty}^{n} s(T, n-j) f\Big(j, u(j)\Big), \tag{5.1.20}$$

onde $s(T,k) \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$ é a solução somável da equação em diferenças

$$s(T, k+1) = \sum_{j=0}^{n} Ta(k-j)s(T,j), \ k = 0, 1, 2, \dots, \ s(T,0) = I. \tag{5.1.21}$$

5.1.1 O modelo de Turelli-Hoffman

Exemplo 5.1.1. Consideremos a seguinte equação integro-em diferenças

$$p_{t+1}(x) = \int_a^b k(|x-y|) \Big[s_h p_t(y)\Big(1 - p_t(y)\Big)\Big(p_t(y) - \hat{p}\Big) \ + \ g_t(y) \ - \ \mu(1 - s_f)p_t(y)\Big] \, dy, \tag{5.1.22}$$

$t \in \mathbb{Z}, \ x \in [a, b]$.

Antes de continuarmos com os resultados vamos dar algum contexto. Modelos relacionados com (5.1.22) foram estudados recentemente por (SCHOFIELD, 2002), onde (5.1.22), com $g \equiv 0$, modela a expansão espaço-temporal da infecção pela bactéria *Wolbachia* em populações californianas da mosca *Drosophila simulans*[2]. A infecção pela bactéria reduz ligeiramente a fertilidade das fêmeas mas se o percentual de machos estiver acima de um certo limiar, confere uma vantagem reprodutiva às fêmeas infectadas uma vez que as fêmeas não infectadas são reprodutivamente muito menos eficientes quando cruzadas com machos infectados, isto significa que, quanto maior for o percentual de machos infectados na população, menos descendentes serão gerados pelas fêmeas não infectadas. Como a transmissão é vertical (de mãe para filho(a) com uma taxa de sucesso, $1-\mu$, muita elevada) o percentual de indivíduos não infectados na geração $t+1$ depende diretamente das fêmeas não infectadas na geração t terem a "chance" de cruzar com machos não infectados. A partir de um certo limiar de infecção, aproximadamente 11% segundo Turelli e Hoffmann (1991), essa vantagem torna-se decisiva e o percentual de indivíduos infectados na população cresce rapidamente estabilizando em torno de 95%. Esta estabilidade assintótica é explicada por uma transmissão imperfeita da bactéria da mãe para a progenitura.

[1] Cuevas, Choquehuanca e Soto (2014, Observação 2.3).

[2] É importante referir que esta infecção é muito comum em outros insetos e em particular infecta o mosquito *Aedes aegypti* bloqueando a transmissão dos vírus Zika (ver (DUTRA et al., 2016)) tendo portanto um vasto potencial de aplicação ao mundo real.

Neste modelo $\hat{p} = \frac{s_f}{s_h}$, s_f é a redução de fecundidade causada pela infecção pela *Wolbachia*, s_h é a redução do sucesso nos cruzamentos incompatíveis (macho infectado vs fêmea não infectada), μ é a taxa de transmissão imperfeita da infecção; o processo espaço-temporal no momento t e na localização[3] x é denotado por $p_t(x)$ e $k(|x-y|)$ é o núcleo de dispersão (distribuição Gaussiana ou leptocúrtica[4]). Temos $\int_{-\infty}^{+\infty} k(|x-y|)dy \equiv 1$ e seguindo Turelli e Hoffmann (1991) fazemos $s_h = 0.45$ e $s_f = 0.05$, de onde $\hat{p} = 0.11$. Definimos

$$\begin{aligned}
(T\varphi)(x) &= -\mu(1-s_f)\int_a^b k(|x-y|)\varphi(y)dy,\\
\left(\tilde{f}\varphi\right)(x) &= \int_a^b k(|x-y|)\left[s_h\varphi(y)\Big(1-\varphi(y)\Big)\Big(\varphi(y)-\hat{p}\Big)\right]dy,\\
\tilde{g}(t)(x) &= \int_a^b k(|x-y|)g_t(y)dy.
\end{aligned}$$

Na nossa abstração, para modelar (5.1.22), consideremos $\mathbb{X} = C([a,b];\mathbb{R})$, o operador linear limitado $T : C([a,b];\mathbb{R}) \to C([a,b];\mathbb{R})$ (observemos ainda que, a partir da Tabela 1 de Schofield (2002) podemos tomar a taxa de transmissão imperfeita $\mu < 1$, daí $||T||_{\mathcal{L}(C([a,b];\mathbb{R}))} < 1$) e a função de perturbação associada a (5.1.22) como sendo a função $f(t,\varphi) = \tilde{f}\varphi + \tilde{g}(t)$. Introduzindo a notação $p(n)(x) = p_n(x)$, temos que (5.1.22) pode ser formulado como a seguinte equação em diferenças:

$$p(n+1) = Tp(n) + f(n,p(n)),\ n \in \mathbb{Z}. \tag{5.1.23}$$

Este modelo pode ser visto dentro da classe dos modelos do tipo (5.1.19). Assim se $p(n)$ é uma solução limitada da equação (5.1.23), então

$$p(n+1) = \sum_{j=-\infty}^{n} T^{n-j} f\Big(j, p(j)\Big).$$

Suponhamos que $g \in Erg\Big(\mathbb{Z}; C([a,b];\mathbb{R})\Big)$. Estamos interessados em discutir a existência de uma solução ergódica da equação (5.1.22). Definamos o operador $\mathcal{M}$ em $Erg\Big(\mathbb{Z}; C([a,b];\mathbb{R})\Big)$ da seguinte forma

$$(\mathcal{M}u)(n) = \sum_{j=-\infty}^{n} T^{n-j}\left(\tilde{f}(u(j)) + \tilde{g}(j)\right),\ n \in \mathbb{Z}, \tag{5.1.24}$$

onde $u \in Erg\Big(\mathbb{Z}; C([a,b];\mathbb{R})\Big)$.

Temos que a norma ℓ^∞ de $\mathcal{M}u$ é controlada por

$$\begin{aligned}
&\frac{0.45}{1-||T||_{\mathcal{L}(C([a,b];\mathbb{R}))}}||u||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};C([a,b];\mathbb{R}))}\\
&\times\left(1+||u||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};C([a,b];\mathbb{R}))}\right)\left(||u||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};C([a,b];\mathbb{R}))}+0.11\right)\\
&+\frac{1}{1-||T||_{\mathcal{L}(C([a,b];\mathbb{R}))}}||g||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};C([a,b];\mathbb{R}))}.
\end{aligned}$$

[3] Fixado um ponto x, a equação $\Delta p = s_h p_t(y)\big(1-p_t(y)\big)\big(p_t(y)-\hat{p}\big)$, fornece uma aproximação para a dinâmica temporal com transmissão maternal imperfeita.

[4] Para uma comparação das dinâmicas induzidas por estas duas distribuições ver (SCHOFIELD, 2002).

Afirmamos que a sequência $n \in \mathbb{Z} \to f\Big(n, u(n)\Big) \in C([a,b];\mathbb{R})$ é ergódica. De fato

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n} ||f\Big(k,u(k)\Big)||_{C([a,b];\mathbb{R})}\\
&\le 0.45\left(1+||u||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};C([a,b];\mathbb{R}))}\right)\left(||u||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};C([a,b];\mathbb{R}))}+0.11\right)\\
&\quad \times \frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n}||u(k)||_{C([a,b];\mathbb{R})} + \frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n}||g_k||_{C([a,b];\mathbb{R})}.
\end{aligned}
$$

Usando o Lema 4.1.2 obtemos que $\mathcal{M}u \in Erg\Big(\mathbb{Z}; C([a,b];\mathbb{R})\Big)$, o que significa que $\mathcal{M}$ está bem definido.

De seguida precisamos introduzir a seguinte notação auxiliar:

$$
\nu_r(g) := \frac{0.45}{1-||T||_{\mathcal{L}(C([a,b];\mathbb{R}))}}(3r^2+2.22r+0.11) + \frac{1}{1-||T||_{\mathcal{L}(C([a,b];\mathbb{R}))}} \times \frac{||g||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};C([a,b];\mathbb{R}))}}{r}.
$$

Assumamos adicionalmente que a norma ℓ^∞ de g é suficientemente pequena e que $\mu \ll 1$. Escolhamos um número positivo r tal que $\nu_r(g) < 1$. Para quaisquer $u, v \in Erg\Big(\mathbb{Z}; C([a,b];\mathbb{R})\Big)$ com $||u||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};C([a,b];\mathbb{R}))} \le r$ e $||v||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};C([a,b];\mathbb{R}))} \le r$. Obtemos que

$$
\begin{aligned}
&||\left(\mathcal{M}u\right)(n) - \left(\mathcal{M}v\right)(n)||_{C([a,b];\mathbb{R})}\\
&\le 0.45\sum_{j=-\infty}^{n}||T||^{n-j}_{\mathcal{L}(C([a,b];\mathbb{R}))}\Bigg(\left(1+||u(j)||_{C([a,b];\mathbb{R})}+||u(j)||_{C([a,b];\mathbb{R})}\right)\\
&\qquad \times\left(||u(j)||_{C([a,b];\mathbb{R})}+0.11\right) + ||v(j)||_{C([a,b];\mathbb{R})}\left(1+||v(j)||_{C([a,b];\mathbb{R})}\right)\Bigg)\\
&\qquad \times ||u(j)-v(j)||_{C([a,b];\mathbb{R})}\\
&\le \frac{0.45}{1-||T||_{\mathcal{L}(C([a,b];\mathbb{R}))}}(3r^2+2.22r+0.11)||u-v||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};C([a,b];\mathbb{R}))}.
\end{aligned}
$$

Isto garante que

$$
\begin{aligned}
||\mathcal{M}u-\mathcal{M}v||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};C([a,b];\mathbb{R}))} \;\le\; & \frac{0.45}{1-||T||_{\mathcal{L}(C([a,b];\mathbb{R}))}}(3r^2+2.22r+0.11)\\
& ||u-v||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};C([a,b];\mathbb{R}))}.
\end{aligned}
\tag{5.1.25}
$$

Além disso, para $u \in \ell^\infty(\mathbb{Z}; C([a,b];\mathbb{R}))$ com $||u||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};C([a,b];\mathbb{R}))} \le r$, obtemos

$$
\begin{aligned}
||\mathcal{M}u||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};C([a,b];\mathbb{R}))} \;\le\; & \frac{0.45}{1-||T||_{\mathcal{L}(C([a,b];\mathbb{R}))}}(3r^2+2.22r+0.11)||u||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};C([a,b];\mathbb{R}))}\\
& + \frac{1}{1-||T||_{\mathcal{L}(C([a,b];\mathbb{R}))}}||g||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};C([a,b];\mathbb{R}))}\\
\le\; & \nu_r(g)r \le r.
\end{aligned}
\tag{5.1.26}
$$

As desigualdades (5.1.25) e (5.1.26) permitem-nos concluir que $\mathcal{M}$ é uma contração em $B_r\Big(Erg\Big(\mathbb{Z}; C([a,b];\mathbb{R})\Big)\Big)$. Isso significa que (5.1.22) tem uma solução ergódica. Agora assumamos que $g \in Erg_\infty\Big(\mathbb{Z}; C([a,b];\mathbb{R})\Big)$ e seja u um elemento de $Erg_\infty\Big(\mathbb{Z}; C([a,b];\mathbb{R})\Big)$, temos que a sequência $n \to \tilde{f}\Big(u(n)\Big) + \tilde{g}(n)$ é ergódica de classe infinito. De fato, seja m um número natural, temos que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n} \max_{\tau\in[k-m,k]\cap\mathbb{Z}} ||\tilde{f}\Big(u(\tau)\Big) + \tilde{g}(\tau)||_{C([a,b];\mathbb{R})} \\
&\leq 0.45\left(1 + ||u||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};C([a,b];\mathbb{R}))}\right)\left(||u||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};C([a,b];\mathbb{R}))} + 0.11\right) \\
&\quad\times \frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n} \max_{\tau\in[k-m,k]\cap\mathbb{Z}} ||u(\tau)||_{C([a,b];\mathbb{R})} + \frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n} \max_{\tau\in[k-m,k]\cap\mathbb{Z}} ||g_\tau||_{C([a,b];\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 4.1.5 temos que $\mathcal{M}u \in Erg_\infty\Big(\mathbb{Z}; C([a,b];\mathbb{R})\Big)$. Observemos que, com o mesmo tipo de argumentação usado anteriormente, podemos deduzir que $\mathcal{M}$ é uma contração em $B_r\Big(Erg_\infty\Big(\mathbb{Z}; C([a,b];\mathbb{R})\Big)\Big)$. De onde podemos garantir que a equação (5.1.22) tem uma solução ergódica de classe infinito.

Suponhamos agora que $g \in PSAP_\omega\Big(\mathbb{Z}; C([a,b];\mathbb{R})\Big)$ e seja u um elemento de $PSAP_\omega\Big(\mathbb{Z}; C([a,b];\mathbb{R})\Big)$, temos que a sequência $n \to \tilde{f}\Big(u(n)\Big) + \tilde{g}(n)$ é pseudo S-assintoticamente ω-periódica. Esta asserção é consequência da seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n} ||\tilde{f}\Big(u(k+\omega)\Big) - \tilde{f}\Big(u(k)\Big)||_{C([a,b];\mathbb{R})} \\
&\leq 0.45\bigg(\Big(1 + 2||u||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};C([a,b];\mathbb{R}))}\Big)\Big(||u||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};C([a,b];\mathbb{R}))} + 0.11\Big) \\
&\quad + ||u||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};C([a,b];\mathbb{R}))}\Big(1 + ||u||_{\ell^\infty(\mathbb{Z};C([a,b];\mathbb{R}))}\Big)\bigg) \\
&\quad\times \frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n} ||u(k+\omega) - u(k)||_{C([a,b];\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 4.2.5 obtemos de imediato que $\mathcal{M}u \in PSAP_\omega\Big(\mathbb{Z}; C([a,b];\mathbb{R})\Big)$. Além disso $\mathcal{M}$ é uma contração em $B_r\Big(PSAP_\omega\Big(\mathbb{Z}; C([a,b];\mathbb{R})\Big)\Big)$. De onde a equação (5.1.22) tem uma solução pseudo S-assintoticamente ω-periódica. Se $g \in PSAP_\omega^\infty\Big(\mathbb{Z}; C([a,b];\mathbb{R})\Big)$ e r é um número positivo tal que $\upsilon_g(r) < 1$, podemos provar que $\mathcal{M}$ tem um único ponto fixo em $B_r\Big(PSAP_\omega^\infty\Big(\mathbb{Z}; C([a,b];\mathbb{R})\Big)\Big)$. Daí (5.1.22) tem uma solução pseudo S-assintoticamente ω-periódica de classe infinito.

Assumamos que $g \in \ell^p(\mathbb{Z}; C([a,b];\mathbb{R}))$ com $||g||_{\ell^p(\mathbb{Z};C([a,b];\mathbb{R}))}$ suficientemente pequeno e $\mu \ll 1$. Escolhamos um número positivo r tal que $\upsilon_r^{\#}(g) < 1$, onde

$$\nu_r^{\#}(g) := \frac{0.45}{1 - ||T||_{\mathcal{L}(C([a,b];\mathbb{R}))}}(3r^2 + 2.22r + 0.11) + \frac{1}{1 - ||T||_{\mathcal{L}(C([a,b];\mathbb{R}))}} \times \frac{||g||_{\ell^p(\mathbb{Z};C([a,b];\mathbb{R}))}}{r}.$$

Sejam $u, v \in B_r\Big(\ell^p\Big(\mathbb{Z}; C([a,b];\mathbb{R})\Big)\Big)$, temos as seguintes estimativas:

$$\begin{aligned}
||\mathcal{M}u||_{\ell^p(\mathbb{Z};C([a,b];\mathbb{R}))} &\leq \frac{0.45}{1 - ||T||_{\mathcal{L}(C([a,b];\mathbb{R}))}}(3r^2 + 2.22r + 0.11)||u||_{\ell^p(\mathbb{Z};C([a,b];\mathbb{R}))} \\
&\quad + \frac{1}{1 - ||T||_{\mathcal{L}(C([a,b];\mathbb{R}))}}||g||_{\ell^p(\mathbb{Z};C([a,b];\mathbb{R}))} \\
&\leq \nu_g^{\#}(r)r \leq r.
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}||\mathcal{M}u - \mathcal{M}v||_{\ell^p(\mathbb{Z};C([a,b];\mathbb{R}))} &\leq \frac{0.45}{1 - ||T||_{\mathcal{L}(C([a,b];\mathbb{R}))}}(3r^2 + 2.22r + 0.11) \\ &\quad \times ||u - v||_{\ell^p(\mathbb{Z};C([a,b];\mathbb{R}))}.\end{aligned}$$

Portanto o operador $\mathcal{M}$ é uma contração em $B_r\Big(\ell^p\Big(\mathbb{Z}; C([a,b];\mathbb{R})\Big)\Big)$. Daí podemos afirmar que a equação (5.1.22) tem uma única solução ℓ^p-limitada. Um fato relevante é que no caso particular de $g \equiv 0$ e $\upsilon_0(r) < 1$, a única solução limitada de (5.1.22) pertencente à bola de raio r é a solução nula.

5.1.2 Modelos de dispersão populacional

Exemplo 5.1.2. Consideremos o seguinte problema de dispersão populacional descrito pela equação integro-em diferenças

$$N_{n+1}(x) = \int_\Omega k(x-y)F\Big(n, y, N_n(y)\Big)dy, \; n \in \mathbb{Z}, \; x \in \Omega, \tag{5.1.27}$$

onde Ω é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$, $N_n(x)$ denota a densidade populacional no ponto x, pertencente a Ω, no final do período de dispersão do ano $n \in \mathbb{Z}$ e $k(x-y)$ é a função densidade que determina a probabilidade de sucesso da dispersão de um ponto y para um ponto x. Assumamos que o núcleo de dispersão satisfaz $\int_\Omega k(y)dy = \mathcal{C} < 1$. O crescimento da população é modelado pela função não negativa $F : \mathbb{Z} \times \Omega \times R^+ \to R^+$ que é dada por $F(n, y, r) = \gamma r + f(n, r) + g_n(y)$, $g_n(y) > 0$, para todo o $n \in \mathbb{Z}$ e todo o $y \in \Omega$; f é a função de Beverton-Holt $f(n, r) = \frac{\mu K(n) r}{K(n) + (\mu - 1)r}$ com $\mu \in \Big(1, \frac{1}{\mathcal{C}}\Big)$ e $\gamma \in \Big(0, \frac{1-\mu\mathcal{C}}{\mathcal{C}}\Big)$, o parâmetro de dependência temporal, $K(n) > 0$, é a capacidade de carga no momento n (ver (KIRK R; LEWIS, 1997; KON, 2004; HASKELL; SACKER, 2005; CUEVAS; DANTAS; SOTO, 2016)). Escrevemos (5.1.27) na forma abstrata no espaço $C(\Omega;\mathbb{R})$

$$u(n+1) = Tu(n) + G\Big(n, u(n)\Big), \; n \in \mathbb{Z},$$

onde

$$\begin{aligned}(T\xi)(x) &= \gamma \int_\Omega k(x-y)\xi(y)dy, \\ G(n,\xi)(x) &= \int_\Omega k(x-y)\left[\frac{\mu K(n)\xi(y)}{K(n) + (\mu-1)\xi(y)} + g_n(y)\right]dy.\end{aligned}$$

Temos que

$$||T||_{\mathcal{L}(C(\Omega;\mathbb{R}))} \leq \gamma\mathcal{C}$$

e

$$||G(n,\xi) - G(n,\eta)||_{C(\Omega:\mathbb{R})} \leq \mu\mathcal{C}||\xi - \eta||_{C(\Omega:\mathbb{R})}.$$

Assumamos que $g \in Erg\Big(\mathbb{Z}; C(\Omega;\mathbb{R})\Big)$. Definamos o operador Γ on $Erg\Big(\mathbb{Z}; C(\Omega;\mathbb{R})\Big)$ pela expressão

$$(\Gamma u)(n) = \sum_{j=-\infty}^{n} T^{n-j} G\Big(j, u(j)\Big),$$

onde $u \in Erg\Big(\mathbb{Z}; C(\Omega;\mathbb{R})\Big)$. Observemos que a sequência $n \to G\Big(n, u(n)\Big)$ é ergódica. De fato temos

$$\frac{1}{2n+1}\sum_{j=-n}^{n} ||G\Big(j,u(j)\Big)||_{C(\Omega;\mathbb{R})} \leq \frac{\mu\mathcal{C}}{2n+1}\sum_{j=-n}^{n}||u(j)||_{C(\Omega;\mathbb{R})} + \frac{\mathcal{C}}{2n+1}\sum_{j=-n}^{n}||g_j||_{C(\Omega;\mathbb{R})}.$$

A partir do Lema 4.1.2 obtemos que Γu é ergódica, de onde Γ está bem definido. Cálculos simples mostram que o operador Γ é uma $\frac{\mu\mathcal{C}}{1-\gamma\mathcal{C}}$-contração. Observemos que o espaço $Erg\Big(\mathbb{Z}; C(\Omega;\mathbb{R})\Big)$ pode ser substituído pelo espaço $Erg\Big(\mathbb{Z}; C(\Omega;\mathbb{R}^+)\Big)$. Daí obtemos de imediato que a equação (5.1.27) tem uma única solução ergódica $u : \mathbb{Z} \to C(\Omega;\mathbb{R}^+)$. Repetindo a maior parte do argumento anterior podemos deduzir que se $g \in Erg_\infty\Big(\mathbb{Z}; C(\Omega;\mathbb{R})\Big)$ então a equação (5.1.27) tem uma única solução ergódica, $u : \mathbb{Z} \to C(\Omega : \mathbb{R}^+)$, de classe infinito.

Seja $u : \mathbb{Z} \to C(\Omega;\mathbb{R})$ uma sequência limitada tal que $u(n)(y) > 0$, para todo o $n \in \mathbb{Z}$ e todo o $y \in \Omega$. A partir da seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2n+1}\sum_{j=-n}^{n}||G\Big(j+\omega,\, u(j+\omega)\Big) - G\Big(j,\, u(j)\Big)||_{C(\Omega;\mathbb{R})}\\
&\leq \frac{\mu\mathcal{C}}{2n+1}\sum_{j=-n}^{n}||u(j+\omega)-u(j)||_{C(\Omega;\mathbb{R})} + \frac{1}{2n+1}.\frac{\mu\mathcal{C}}{\mu-1}\sum_{j=-n}^{n}|K(j+\omega)-K(j)|\\
&\quad + \frac{\mathcal{C}}{2n+1}\sum_{j=-n}^{n}||g_{j+\omega}-g_j||_{C(\Omega;\mathbb{R})},
\end{aligned}$$

inferimos que se $g \in PSAP_\omega\Big(\mathbb{Z}; C(\Omega;\mathbb{R})\Big)$ e a capacidade de carga é uma função pseudo S-assintoticamente ω-periódica, então a sequência $G\Big(\cdot,\, u(\cdot)\Big) \in PSAP_\omega\Big(\mathbb{Z}; C(\Omega;\mathbb{R}^+)\Big)$ quando $u \in PSAP_\omega\Big(\mathbb{Z}; C(\Omega;\mathbb{R}^+)\Big)$. Pelo Lema 4.2.5 obtemos que $\Gamma u \in PSAP_\omega\Big(\mathbb{Z}; C(\Omega;\mathbb{R}^+)\Big)$. Esta importante observação permite-nos deduzir a existência de uma única solução pseudo S-assintoticamente ω-periódica para a equação (5.1.27).

Aplicando técnicas análogas podemos garantir a existência de uma solução pseudo S-assintoticamente ω-periódica (de classe infinito) da equação (5.1.27). Sendo mais precisos, é necessário supor que $g \in PSAP_\omega^\infty\Big(\mathbb{Z}; C(\Omega;\mathbb{R})\Big)$ e $K \in PSAP_\omega^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{R})$. Prosseguindo o raciocínio deduzimos a existência da solução com a periodicidade requerida.

De seguida assumamos que a capacidade de carga é quase periódica e $g \in PSAP^\infty\Big(\mathbb{Z}; C(\Omega;\mathbb{R}^+)\Big)$, escrevemos $g = g^1 + g^2$, $g^1 \in AP\Big(\mathbb{Z}; C(\Omega;\mathbb{R}^+)\Big)$ e $g^2 \in Erg_\infty\Big(\mathbb{Z}; C(\Omega;\mathbb{R}^+)\Big)$, então G é pseudo-quase periódica de classe infinito. De fato temos que

$$\begin{aligned}
G(n,\xi) &= G^1(n,\xi) + G^2(n), \text{ where}\\
G^1(n,\xi)(x) &= \int_\Omega k(x-y)\left[\frac{\mu K(n)\xi(y)}{K(n)+(\mu-1)\xi(y)} + g_n^1(y)\right]dy,\\
G^2(n)(x) &= \int_\Omega k(x-y)g_n^2(y)dy.
\end{aligned}$$

Observemos que $G^1 \in AP\Big(\mathbb{Z}\times C(\Omega;\mathbb{R}^+); C(\Omega;\mathbb{R}^+)\Big)$ e $G^2 \in Erg_\infty\Big(\mathbb{Z}; C(\Omega;\mathbb{R}^+)\Big)$. Pelo Lema 4.2.2 a sequência de Nemytskii $n \to G\Big(n,\, u(n)\Big)$ pertence a $PAP^\infty\Big(\mathbb{Z}; C(\Omega;\mathbb{R}^+)\Big)$, quando $u \in PAP^{\infty}\Big(\mathbb{Z}; C(\Omega; \mathbb{R}^{+})\Big)$. Do Lema 4.2.3 temos que $\Gamma u \in PAP^{\infty}\Big(\mathbb{Z}; C(\Omega; \mathbb{R}^{+})\Big)$. Consequentemente podemos inferir que a equação (5.1.27) tem uma única solução pseudo-quase periódica de classe infinito.

Discutamos o caso $g \in \ell^{p}\Big(\mathbb{Z}; C(\Omega; \mathbb{R})\Big)$ com mais algum detalhe. Seja u um elemento de $\ell^{p}\Big(\mathbb{Z}; C(\Omega; \mathbb{R})\Big)$, queremos provar que Γu pertence a $\ell^{p}\Big(\mathbb{Z}; C(\Omega; \mathbb{R})\Big)$. Sejam p e q expoentes conjugados, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{+\infty} ||(\Gamma u)(n)||^{p}_{C(\Omega;\mathbb{R})} &\leq \left(\frac{1}{1-\gamma\mathcal{C}}\right)^{\frac{p}{q}+1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} ||G\Big(j,\, u(j)\Big)||^{p}_{C(\Omega;\mathbb{R})} \\
&\leq (2\mu\mathcal{C})^{p}\left(\frac{1}{1-\gamma\mathcal{C}}\right)^{\frac{p}{q}+1}\left(||u||^{p}_{\ell^{p}\left(\mathbb{Z};C(\Omega;\mathbb{R})\right)} + ||g||^{p}_{\ell^{p}\left(\mathbb{Z};C(\Omega;\mathbb{R})\right)}\right).
\end{aligned}$$

Portanto temos o limite superior

$$||\Gamma u||_{\ell^{p}\left(\mathbb{Z};C(\Omega;\mathbb{R})\right)} \leq \frac{2\mu\mathcal{C}}{1-\gamma\mathcal{C}}\left(||u||_{\ell^{p}\left(\mathbb{Z};C(\Omega;\mathbb{R})\right)} + ||g||_{\ell^{p}\left(\mathbb{Z};C(\Omega;\mathbb{R})\right)}\right).$$

Isto indica que $\Gamma u \in \ell^{p}\Big(\mathbb{Z}; C(\Omega; \mathbb{R})\Big)$.

Sejam u e v duas sequências em $\ell^{p}\Big(\mathbb{Z}; C(\Omega; \mathbb{R})\Big)$, temos que

$$\begin{aligned}
||\Gamma u - \Gamma v||_{\ell^{p}\left(\mathbb{Z};C(\Omega;\mathbb{R})\right)} &\leq \frac{1}{1-\gamma\mathcal{C}}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} ||G\Big(j,\, u(j)\Big) - G\Big(j,\, v(j)\Big)||^{p}_{C(\Omega;\mathbb{R})}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{\mu\mathcal{C}}{1-\gamma\mathcal{C}}||u-v||_{\ell^{p}\left(\mathbb{Z};C(\Omega;\mathbb{R})\right)}.
\end{aligned}$$

Uma vez que $\frac{\mu\mathcal{C}}{1-\gamma\mathcal{C}} < 1$, o operador Γ é uma contração em $\ell^{p}\Big(\mathbb{Z}; C(\Omega; \mathbb{R})\Big)$. Assim podemos afirmar que a equação (5.1.27) tem uma única solução ℓ^{p}-limitada. Note-se que quando $g \equiv 0$ a equação (5.1.27) não tem soluções não triviais.

Vale a pena notar que se considerarmos na equação (5.1.27) a função de Shepherd (ver (COOK; SINCLAIR; STEFANSSON, 1997)), no lugar da função de Beverton-Holt, podemos obter todos os resultados acima. Sendo mais precisos, observe que a função de Shepherd é dada por $f(r) = \frac{\mu r}{1+\left(\frac{r}{b}\right)^{2}}$. Seguindo a mesma estratégia que seguimos anteriormente considere-se μ e γ com as mesmas restrições impostas acima. O problema abstrato associado à função de Shepherd é

$$u(n+1) = Tu(n) + \tilde{G}\Big(n, u(n)\Big),\, n \in \mathbb{Z},$$

onde

$$\tilde{G}(n,\xi)(x) = \int_{\Omega} k(x-y)\left[\frac{\mu\xi(y)}{1+\left(\frac{\xi(y)}{b}\right)^{2}} + g_{n}(y)\right]dy.$$

Observe que $\tilde{G}$ é $\mu\mathcal{C}$-Lipschitziana com respeito à segunda variável. Assim, pode-se tratar facilmente este caso por meio de uma compilação óbvia dos argumentos usados até agora. Está assim completa a discussão do Exemplo 5.1.2.

6 CONCLUSÃO

Não há nada tão belo e legítimo como fazer bem o papel de homem e fazê-lo devidamente, nem uma ciência tão árdua quanto a de bem e naturalmente, saber viver esta vida; e de nossas doenças, a mais selvagem, é desprezar nosso ser.

Ensaios III, XIII: Da Experiência - Montaigne

Os nossos resultados são novos e contribuem para o desenvolvimento da teoria qualitativa das equações em diferenças de tipo Volterra.

Enfatizamos que devido ao papel central das equações em diferenças nos modelos do mundo físico é muito importante o desenvolvimento da sua teoria qualitativa. Neste trabalho investigamos a limitação ℓ^p, a estrutura topológica do conjunto solução e a periodicidade assintótica de uma classe de equações em diferença do tipo Volterra. Os instrumentos chave para alcançarmos os nossos resultados foram a noção de solução fundamental e os argumentos do ponto fixo.

Esperamos que este trabalho seja valioso para matemáticos aplicados que estejam interessados em novas ideias para o estudo de equações em diferenças. Nesse sentido aplicamos o nosso método a alguns sistemas de controle, modelos de infecção pela *Wolbachia* e modelos de dispersão populacional.

São possíveis muitos estudos subsequentes a este. Um deles é aplicar a teoria desenvolvida a equações em diferenças não-autônomas no cenário de dimensão infinita, outro é impor condições de limitação menos restritivas à solução fundamental. Podemos também estudar aplicações para a compacidade parcial, adaptar o Teorema 3.1.1 a outros espaços ou ainda generalizar o conceito de ergodicidade a outra família de operadores. A crescente popularidade dos modelos fracionários sugere a extensão dos nossos resultados a análogos para equações fracionárias em diferenças. Um problema difícil de tratar é o das equações integro-em diferenças de Volterra com núcleo de não convolução em que talvez possamos encontrar funções de Liapunov, como sugerido por de Andrade et al. (2016), que nos permitam a caracterização das soluções.

Um caminho que se nos afigura promissor e que ainda não foi explorado pelo grupo de Equações de Evolução da UFPE é o da implementação numérica computacional, abrindo assim mais uma via de aplicação do nosso método e contribuindo para expandir e tornar acessível a sua utilização noutras áreas de conhecimento. No prosseguimento da investigação desenvolvida nesta tese iremos trabalhar simulações numéricas numa colaboração científica com um centro de investigação europeu, tratando o nosso modelo como um sistema dinâmico que modele a infecção pela Wolbachia. Procuraremos ajustar a dinâmica da infecção, em particular o efeito Allee [1], o limiar de sucesso da infecção e a estabilidade assintótica $1-\mu$ de taxa de indivíduos infectados [2]. A função de Shepherd deverá ser a perturbação considerada pela sua flexibilidade no ajustamento deste tipo de modelos populacionais. A função logística também será avaliada.

[1] O ecólogo Warder Clyde Allee observou que algumas espécies com populações muito pequenas não competiam entre si; notou que a agregação tinha efeitos positivos sobre a sobrevivência dos indivíduos, quando isolados do seu grupo em extinção, esses animais morriam mais rapidamente que os seus companheiros de espécie. Usando o modelo logístico, a população tem um crescimento lento no início, uma fase de aceleração e por fim uma fase de estacionaridade. Em pequenas populações Allee observou que o crescimento pode existir mas também pode ocorrer a extinção. Tudo dependendo de uma densidade populacional crítica (COURCHAMP; BEREC; GASCOIGNE, 2008). O efeito Allee aplicado à invasão pela Wolbachia faz com que a onda não seja "puxada"pela sua extremidade de baixa densidade, mas sim "empurrada"por indivíduos que se reproduzem em pontos interiores de densidades de infecção mais altas, suficientes para superar o limiar de crescimento da infecção na população (KOT; LEWIS; VAN DEN DRIESSCHE, 1996).

[2] A transmissão maternal imperfeita tem duas consequências, por um lado aumenta o limiar para que a infecção tenha sucesso - numa dada localização x do espaço - e por outro lado gera um ponto de equilíbrio estável perto de $1-\mu$ em que um pequeno percentual de indivíduos não infectados permanece na população (SCHOFIELD, 2002).

REFERÊNCIAS

AGARWAL, R. *Difference Equations and Inequalities: Theory, Methods, and Applications*. [S.l.]: M. Dekker, 1992. (Pure and Applied Mathematics). ISBN 9780824786762. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 60.

AGARWAL, R.; O'Regan, D.; WONG, P. *Positive Solutions of Differential, Difference and Integral Equations*. [S.l.: s.n.], 1999. Citado na página 12.

AGARWAL, R.; POPENDA, J. Periodic solutions of first order linear difference equations. *Mathematical and Computer Modelling*, Elsevier, v. 22, n. 1, p. 11–19, 1995. Citado na página 60.

AGARWAL, R. P.; CUEVAS, C.; DANTAS, F. Almost automorphy profile of solutions for difference equations of Volterra type. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, Springer, v. 42, n. 1-2, p. 1–18, 2013. Citado 5 vezes nas páginas 12, 15, 33, 72 e 73.

AGARWAL, R. P.; CUEVAS, C.; FRASSON, M. V. Semilinear functional difference equations with infinite delay. *Mathematical and Computer Modelling*, Elsevier, v. 55, n. 3, p. 1083–1105, 2012. Citado 5 vezes nas páginas 12, 13, 34, 60 e 65.

AGARWAL, R. P.; CUEVAS, C.; LIZAMA, C. Regularity of difference equations on Banach spaces. Springer International Publishing, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 13.

AGARWAL, R. P. et al. Asymptotic periodicity for some evolution equations in Banach spaces. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Elsevier, v. 74, n. 5, p. 1769–1798, 2011. Citado na página 63.

AGARWAL, R. P.; MEEHAN, M.; O'REGAN, D. *Fixed point theory and applications*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2001. v. 141. Citado na página 19.

AGARWAL, R. P.; WONG, P. J. *Advanced Topics in Difference Equations*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 404. Citado na página 60.

ANDRADE, F. et al. Asymptotic periodicity for hyperbolic evolution equations and applications. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, v. 269, p. 169–195, 2015. Citado na página 76.

APARCANA, A. et al. Fractional evolution equations and applications. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, Wiley Online Library, v. 41, n. 3, p. 1256–1280, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 76.

APPLEBY, J. A.; GYŐRI, I.; REYNOLDS, D. W. On exact convergence rates for solutions of linear systems of Volterra difference equations. *Journal of Difference Equations and Applications*, Taylor & Francis, v. 12, n. 12, p. 1257–1275, 2006. Citado na página 12.

AZEVEDO, J.; CUEVAS, C.; HENRÍQUEZ, E. Existence and asymptotic behaviour for the time-fractional Keller-Segel model for chemotaxis. Manuscrito submetido para publicação. 2018. Citado na página 76.

AZEVEDO, J.; CUEVAS, C.; SOTO, H. Qualitative theory for strongly damped wave equations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, Wiley Online Library, v. 40, n. 18, p. 6944–6975, 2017. Citado 4 vezes nas páginas 14, 15, 41 e 64.

BEREZANSKY, L.; BRAVERMAN, E. On stability of some linear and nonlinear delay differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 314, n. 2, p. 391 – 411, 2006. ISSN 0022-247X. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022247X05003069>. Citado na página 34.

BERNARDO, F.; CUEVAS, C.; SOTO, H. Qualitative theory for Volterra difference equations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2018. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/mma.5088>. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 38.

BERNARDO, F.; CUEVAS, C.; SOTO, H. *Qualitative theory for volterra difference equations*. 2018, FDM: $T\&A'$2018, junho 11 – 16. Disponível em: <http://parallel.bas.bg/dpa/FDM2018/>. Citado na página 18.

BERNARDO, F.; CUEVAS, C.; SOTO, H. *Bounded solutions of Volterra functional difference equations*. 2018, XXI SIMMAC, fevereiro 27 – março 2. 72-73 p. Disponível em: <http://www.cimpa.ucr.ac.cr/simmac/en/libro.html>. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 35.

BIRKHOFF, G. D. Proof of the ergodic theorem. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Academy of Sciences, v. 17, n. 12, p. 656–660, 1931. ISSN 0027-8424. Disponível em: <http://www.pnas.org/content/17/12/656>. Citado na página 54.

BOCHNER, S. Beiträge zur theorie der fastperiodischen funktionen. *Mathematische Annalen*, Springer, v. 96, n. 1, p. 119–147, 1927. Citado na página 60.

BOHR, H. Zur theorie der fastperiodischen funktionen. *Acta Mathematica*, Springer, v. 46, n. 1-2, p. 101–214, 1925. Citado na página 60.

BOREL, M. É. Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940)*, Springer, v. 27, n. 1, p. 247–271, 1909. Citado na página 53.

BRAVERMAN, E.; KARABASH, I. M. Bohl–Perron-type stability theorems for linear difference equations with infinite delay. *Journal of Difference Equations and Applications*, Taylor & Francis, v. 18, n. 5, p. 909–939, 2012. Citado na página 12.

BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2010. Citado na página 20.

CARDOSO, F.; CUEVAS, C. Exponential dichotomy and boundedness for retarded functional difference equations. *Journal of Difference Equations and Applications*, Taylor & Francis, v. 15, n. 3, p. 261–290, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 13.

CASTRO, A. et al. About the behavior of solutions for Volterra difference equations with infinite delay. *J. Comput. Appl. Math.*, Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, The Netherlands, The Netherlands, v. 255, n. C, p. 44–59, jan. 2014. ISSN 0377-0427. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2013.04.033>. Citado 3 vezes nas páginas 12, 23 e 34.

CASTRO, A.; CUEVAS, C.; LIZAMA, C. Maximal regularity of the discrete harmonic oscillator equation. *Advances in Difference Equations*, Springer, v. 2009, n. 1, p. 290625, 2009. Citado na página 76.

COOK, R.; SINCLAIR, A.; STEFANSSON, G. Potential collapse of north sea cod stocks. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 385, n. 6616, p. 521, 1997. Citado na página 88.

CORDARO, P.; SALOMÃO, P. Uma conversa com Peter Lax. *Matemática Universitária*, v. 47, p. 25–30, 2009. Citado na página 10.

CORDUNEANU, C. Almost periodic discrete processes. *Libertas Mathematica (vol. I-XXXI)*, v. 2, p. 159–170, 1982. Citado na página 60.

COURCHAMP, F.; BEREC, L.; GASCOIGNE, J. *Allee effects in ecology and conservation*. [S.l.]: Oxford University Press, 2008. Citado na página 90.

CUEVAS, C. Weighted convergent and bounded solutions of Volterra difference systems with infinite delay. *Journal of Difference Equations and Applications*, Taylor & Francis, v. 6, n. 4, p. 461–480, 2000. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/10236190008808241>. Citado na página 13.

CUEVAS, C.; CHOQUEHUANCA, M.; SOTO, H. Asymptotic analysis for Volterra difference equations. *Asymptotic Analysis*, IOS press, v. 88, n. 3, p. 125–164, 2014. Citado 6 vezes nas páginas 16, 34, 47, 76, 80 e 82.

CUEVAS, C. et al. ℓ^p-boundedness properties for Volterra difference equations. *Applied Mathematics and Computation*, v. 219, n. 12, p. 6986 – 6999, 2013. ISSN 0096-3003. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S009630031201329X>. Citado 5 vezes nas páginas 12, 13, 25, 34 e 45.

CUEVAS, C.; DANTAS, F.; SOTO, H. Almost periodicity for a nonautonomous discrete dispersive population model. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, Taylor & Francis, v. 37, n. 12, p. 1503–1516, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 16, 63 e 86.

CUEVAS, C.; DEL CAMPO, L. Asymptotic expansion for difference equations with infinite delay. *Asian-European Journal of Mathematics*, World Scientific, v. 2, n. 01, p. 19–40, 2009. Citado na página 13.

CUEVAS, C.; HENRÍQUEZ, H. R.; LIZAMA, C. On the existence of almost automorphic solutions of Volterra difference equations. *Journal of Difference Equations and Applications*, Taylor & Francis, v. 18, n. 11, p. 1931–1946, 2012. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1080/10236198.2011.603311>. Citado 4 vezes nas páginas 12, 13, 23 e 64.

CUEVAS, C.; HENRÍQUEZ, H. R.; SOTO, H. Asymptotically periodic solutions of fractional differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, v. 236, p. 524–545, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 15, 64 e 67.

CUEVAS, C.; LIZAMA, C. Semilinear evolution equations on discrete time and maximal regularity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, v. 361, n. 1, p. 234–245, 2010. Citado na página 80.

CUEVAS, C.; PINTO, M. Asymptotic behavior in Volterra difference systems with unbounded delay. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Elsevier, v. 113, n. 1-2, p. 217–225, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 13.

CUEVAS, C.; PINTO, M. Convergent solutions of linear functional difference equations in phase space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, v. 277, n. 1, p. 324–341, 2003. Citado 4 vezes nas páginas 12, 13, 31 e 78.

CUEVAS, C.; VIDAL, C. Discrete dichotomies and asymptotic behavior for abstract retarded functional difference equations in phase space. *Journal of Difference Equations and Applications*, Taylor & Francis, v. 8, n. 7, p. 603–640, 2002. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/10236190290032499>. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 13.

CUEVAS, C.; VIDAL, C. A note on discrete maximal regularity for functional difference equations with infinite delay. *Advances in Difference Equations*, Springer, v. 2006, n. 1, p. 097614, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 13.

DADS, E. A.; EZZINBI, K.; LHACHIMI, L. Discrete pseudo almost periodic solutions for some difference equations. *Advances in Pure Mathematics*, Scientific Research Publishing, v. 1, n. 04, p. 118, 2011. Citado na página 62.

DANTAS, F. *A qualitative study for certain evolution equations in discrete time*. Tese (Ph D Thesis) — . Federal University of Pernambuco. , Recife, Brazil. , 2013. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 24.

DE ANDRADE, B. On the well-posedness of a Volterra equation with applications in the Navier-Stokes problem. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, Wiley Online Library, v. 41, n. 2, p. 750–768, 2018. Citado na página 76.

DE ANDRADE, B. et al. Asymptotic periodicity for flexible structural systems and applications. *Acta Appl. Math.*, Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, v. 143, n. 1, p. 105–164, jun. 2016. ISSN 0167-8019. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/s10440-015-0032-3>. Citado 3 vezes nas páginas 15, 64 e 76.

DE ANDRADE, B. et al. Almost automorphic solutions for evolutions equations. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, Juliusz P. Schauder Centre for Nonlinear Studies, v. 44, n. 1, p. 105–119, 2014. Citado na página 76.

DEL CAMPO, L.; PINTO, M.; VIDAL, C. Almost and asymptotically almost periodic solutions of abstract retarded functional difference equations in phase space. *Journal of Difference Equations and Applications*, Taylor & Francis, v. 17, n. 6, p. 915–934, 2011. Citado 4 vezes nas páginas 12, 13, 60 e 61.

DELCHAMPS, D. F. Stabilizing a linear system with quantized state feedback. *IEEE transactions on automatic control*, IEEE, v. 35, n. 8, p. 916–924, 1990. Citado na página 80.

DIAGANA, T. *Almost Automorphic Type and Almost Periodic Type Functions in Abstract Spaces*. [S.l.]: Springer, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 54 e 61.

DIAGANA, T.; ELAYDI, S.; YAKUBU, A.-A. Population models in almost periodic environments. *Journal of Difference Equations and Applications*, Taylor & Francis, v. 13, n. 4, p. 239–260, 2007. Citado na página 60.

DIAGANA, T.; HERNÁNDEZ, E. M. Existence and uniqueness of pseudo almost periodic solutions to some abstract partial neutral functional–differential equations and applications. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, v. 327, n. 2, p. 776–791, 2007. Citado na página 62.

DIBLÍK, J.; SCHMEIDEL, E.; RŮŽIČKOVÁ, M. Existence of asymptotically periodic solutions of system of Volterra difference equations. *Journal of Difference Equations and Aapplications*, Taylor & Francis Group, v. 15, n. 11-12, p. 1165–1177, 2009. Citado na página 13.

DING, H.-S.; FU, J.-D.; N'GUÉRÉKATA, G. M. Positive almost periodic type solutions to a class of nonlinear difference equation. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, University of Szeged, Hungary, v. 2011, n. 25, p. 1–17, 2011. Citado 4 vezes nas páginas 58, 62, 63 e 68.

DUTRA, H. L. C. et al. Wolbachia blocks currently circulating zika virus isolates in brazilian aedes aegypti mosquitoes. *Cell host & microbe*, Elsevier, v. 19, n. 6, p. 771–774, 2016. Citado na página 82.

ELAYDI, S.; MURAKAMI, S.; KAMIYAMA, E. Asymptotic equivalence for difference equations with infinite delay. *Journal of Difference Equations and Applications*, Taylor & Francis, v. 5, n. 1, p. 1–23, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 22.

ELAYDI, S. N. *An Introduction to Difference Equations*. Secaucus, NJ, USA: Springer-Verlag New York, Inc., 1996. ISBN 0-387-94582-2. Citado 3 vezes nas páginas 10, 12 e 60.

FURUMOCHI, T.; MURAKAMI, S.; NAGABUCHI, Y. Stabilities in Volterra difference equations on a Banach space. *Differences and Differential Equations*, Amer. Math. Soc. Providence, RI, v. 42, p. 159–175, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 13.

FURUMOCHI, T.; MURAKAMI, S.; NAGABUCHI, Y. Volterra difference equations on a Banach space and abstract differential equations with piecewise continuous delays. *Japanese Journal of Mathematics. New Series*, The Mathematical Society of Japan, v. 30, n. 2, p. 387–412, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 13.

GOEBEL, K.; KIRK, W. A. *Topics in metric fixed point theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1990. v. 28. Citado na página 19.

GRANAS, A.; DUGUNDJI, J. *Fixed point theory*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. Citado na página 19.

GYÖRI, I.; AWWAD, E. On the boundedness of the solutions in nonlinear discrete Volterra difference equations. *Advances in Difference Equations*, Springer, v. 2012, n. 1, p. 2, 2012. Citado na página 12.

GYŐRI, I.; HORVÁTH, L. Asymptotic representation of the solutions of linear Volterra difference equations. *Advances in Difference Equations*, Springer, v. 2008, n. 1, p. 932831, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 13.

GYŐRI, I.; REYNOLDS, D. W. On asymptotically periodic solutions of linear discrete Volterra equations. *Fasciculi Mathematici*, Poznan University of Technology, v. 44, n. 1, p. 53–67, 2010. Citado na página 12.

HALANAY, A. Solutions périodiques et presque-périodiques des systèmes d'équations aux différences finies. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Springer, v. 12, n. 1, p. 134–149, 1963. Citado na página 60.

HALE, J. K.; KATO, J. Phase space for retarded equations with infinite delay. *Funkcial. Ekvac*, v. 21, n. 1, p. 11–41, 1978. Citado na página 14.

HAMAYA, Y. Existence of an almost periodic solution in a difference equation with infinite delay. *Journal of Difference Equations and Applications*, Taylor & Francis, v. 9, n. 2, p. 227–237, 2003. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/1023619021000035836>. Citado na página 13.

HASKELL, C.; SACKER, R. J. The stochastic Beverton-Holt equation and the M. Neubert conjecture. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, Springer, v. 17, n. 4, p. 825–844, 2005. Citado na página 86.

HENRÍQUEZ, H. R.; PIERRI, M.; TÁBOAS, P. On S-asymptotically ω-periodic functions on Banach spaces and applications. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, v. 343, n. 2, p. 1119–1130, 2008. Citado na página 64.

HERNÁNDEZ, E.; HENRÍQUEZ, H. Pseudo-almost periodic solutions for non-autonomous neutral differential equations with unbounded delay. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Elsevier, v. 9, n. 2, p. 430–437, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 57, 58 e 62.

HINO, Y.; MURAKAMI, S.; NAITŌ, T. *Functional differential equations with infinite delay*. Springer-Verlag, 1991. (Lecture notes in mathematics). ISBN 9783540540847. Disponível em: <https://books.google.cl/books?id=CMQZAQAAIAAJ>. Citado na página 57.

JIALIN, H.; NUNEZ, C. The almost periodic type difference equations. *Mathematical and Computer Modelling: An International Journal*, Elsevier Science Publishers BV, v. 28, n. 12, p. 21–31, 1998. Citado na página 62.

KAMPEN, E. V. Almost periodic functions and compact groups. *Annals of Mathematics*, JSTOR, p. 78–91, 1936. Citado na página 60.

KIRK R, W. V.; LEWIS, M. A. Integrodifference models for persistence in fragmented habitats. *Bulletin of Mathematical Biology*, Springer, v. 59, n. 1, p. 107, 1997. Citado na página 86.

KOLMANOVSKII, V.; CASTELLANOS-VELASCO, E.; TORRES-MUNOZ, J. A survey: stability and boundedness of Volterra difference equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Elsevier, v. 53, n. 7-8, p. 861–928, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 13.

KOLMANOVSKII, V.; MYSHKIS, A. Stability in the first approximation of some Volterra difference equations. *Journal of Difference Equations and Applications*, Taylor & Francis, v. 3, n. 5-6, p. 401–410, 1998. Citado na página 12.

KOLMANOVSKII, V.; MYSHKIS, A.; RICHARD, J.-P. Estimate of solutions for some Volterra difference equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Elsevier, v. 40, n. 1-8, p. 345–363, 2000. Citado na página 12.

KOLMANOVSKII, V.; SHAIKHET, L. Some conditions for boundedness of solutions of difference Volterra equations. *Applied Mathematics Letters*, Pergamon, v. 16, n. 6, p. 857–862, 2003. Citado na página 12.

KON, R. A note on attenuant cycles of population models with periodic carrying capacity. *Journal of Difference Equations and Applications*, Taylor & Francis, v. 10, n. 8, p. 791–793, 2004. Citado na página 86.

KONG, F.; FANG, X. Pseudo almost periodic solutions of discrete-time neutral-type neural networks with delays. *Applied Intelligence*, Feb 2018. ISSN 1573-7497. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s10489-018-1146-x>. Citado na página 62.

KOT, M.; LEWIS, M. A.; VAN DEN DRIESSCHE, P. Dispersal data and the spread of invading organisms. *Ecology*, Wiley Online Library, v. 77, n. 7, p. 2027–2042, 1996. Citado na página 90.

LALESCO, T. Sur l'équation de Volterra. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, v. 4, p. 127–202, 1908. Disponível em: <http://sites.mathdoc.fr/JMPA/PDF/JMPA_1908_6_4_A5_0.pdf>. Citado na página 11.

LALESCO, T. *Introduction à la Théorie des Équations Intégrales. Avec une Préface de É. Picard.* 1912. Paris: A. Hermann et Fils. vii, 152 S. 8° (1912). Disponível em: <https://archive.org/details/introductionla00laleuoft>. Citado na página 11.

LATORE, J.; GOULD, P.; MORTIMER, A. Spatial dynamics and critical patch size of annual plant populations. *Journal of Theoretical Biology*, Elsevier, v. 190, n. 3, p. 277–285, 1998. Citado na página 81.

MATSUNAGA, H.; MURAKAMI, S. Asymptotic behavior of solutions of functional difference equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 305, n. 2, p. 391 – 410, 2005. ISSN 0022-247X. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022247X0400842X>. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 22.

MEDINA, R. Asymptotic behavior of Volterra difference equations. *Computers & Mathematics with Applications*, Elsevier, v. 41, n. 5-6, p. 679–687, 2001. Citado na página 13.

MOORE, C. C. Ergodic theorem, ergodic theory, and statistical mechanics. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Acad Sciences, v. 112, n. 7, p. 1907–1911, 2015. Citado na página 53.

MURAKAMI, S. Representation of solutions of linear functional difference equations in phase space. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, v. 30, n. 2, p. 1153 – 1164, 1997. ISSN 0362-546X. Proceedings of the Second World Congress of Nonlinear Analysts. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0362546X97002964>. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 22.

NAGABUCHI, Y. Decomposition of phase space for linear Volterra difference equations in a Banach space. *Funkcialaj Ekvacioj*, Division of Functional Equations, The Mathematical Society of Japan, v. 49, n. 2, p. 269–290, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 13.

NAIR, G. N.; EVANS, R. J. Stabilization with data-rate-limited feedback: Tightest attainable bounds. *Systems & Control Letters*, Elsevier, v. 41, n. 1, p. 49–56, 2000. Citado na página 80.

NEUMANN, J. von. Proof of the quasi-ergodic hypothesis. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Acad Sciences, v. 18, n. 1, p. 70–82, 1932. Citado na página 54.

NEUMANN, J. von. Almost periodic functions in a group. *Trans. Amer. Math. Soc*, v. 36, n. 3, p. 445–492, 1934. Citado na página 60.

PANG, P.; AGARWAL, R. On periodicity of difference equations of a general type. *Journal of Difference Equations and Applications*, Taylor & Francis, v. 2, n. 3, p. 271–287, 1996. Citado na página 60.

PETERSEN, K. E. *Ergodic Theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1989. v. 2. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 54.

PETERSON. *12 Rules for Life: An Antidote to Chaos*. [S.l.]: Random House Canada, 2018. Citado na página 6.

PHAT, V. N.; JIANG, J. Stabilization of nonlinear discrete-time systems via a digital communication channel. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, Hindawi, v. 2005, n. 1, p. 43–56, 2005. Citado na página 80.

PIERRI, M.; ROLNIK, V. On pseudo S-asymptotically ω-periodic functions. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, Cambridge University Press, v. 87, n. 2, p. 238–254, 2013. Citado na página 64.

SCHOFIELD, P. Spatially explicit models of Turelli-Hoffmann Wolbachia invasive wave fronts. *Journal of Theoretical Biology*, Elsevier, v. 215, n. 1, p. 121–131, 2002. Citado 3 vezes nas páginas 82, 83 e 90.

SILVA, C. *Análise assintótica de equações de evolução e aplicações a modelos físicos*. Tese (Ph D Thesis) — Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brasil, 2015. Citado na página 15.

SIMON, J. Compact sets in $L^p(0,T;\mathcal{B})$. *Ann. Mat. Pura Appl.*, CXLVI, p. 65–96, 1987. Citado 5 vezes nas páginas 28, 29, 30, 31 e 33.

SONG, Y. Almost periodic solutions of discrete Volterra equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, v. 314, n. 1, p. 174–194, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 60.

SONG, Y. Periodic and almost periodic solutions of functional difference equations with finite delay. *Advances in Difference Equations*, Springer, v. 2007, n. 1, p. 068023, 2007. Citado na página 60.

SONG, Y. Asymptotically almost periodic solutions of nonlinear Volterra difference equations with unbounded delay. *Journal of Difference Equations and Applications*, Taylor & Francis, v. 14, n. 9, p. 971–986, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 60.

SONG, Y. Positive almost periodic solutions of nonlinear discrete systems with finite delay. *Computers & Mathematics with Applications*, Elsevier, v. 58, n. 1, p. 128–134, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 60.

SONG, Y.; BAKER, C. T. Linearized stability analysis of discrete Volterra equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, v. 294, n. 1, p. 310–333, 2004. Citado na página 12.

SONG, Y.; BAKER, C. T. Admissibility for discrete Volterra equations. *Journal of Difference Equations and Applications*, Taylor & Francis, v. 12, n. 5, p. 433–457, 2006. Citado na página 12.

SONG, Y.; TIAN, H. Periodic and almost periodic solutions of nonlinear discrete Volterra equations with unbounded delay. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Elsevier, v. 205, n. 2, p. 859–870, 2007. Citado 3 vezes nas páginas 12, 60 e 61.

SUGIYAMA, S. On periodic solutions of difference equations. *Bulletin of Science and Engineering Research Laboratory. Waseda University*, v. 52, p. 89–94, 1971. Citado na página 60.

TURELLI, M.; HOFFMANN, A. A. Rapid spread of an inherited incompatibility factor in California Drosophila. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 353, n. 6343, p. 440–442, 1991. Citado 3 vezes nas páginas 16, 82 e 83.

VOLTERRA, V. *Theory of Functionals and of Integral and Integro-differential Equations*. [S.l.]: Courier Corporation, 2005. Citado na página 12.

WALTHER, A. Fastperiodische folgen und potenzreihen mit fastperiodischen koeffizienten. In: SPRINGER. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*. [S.l.], 1928. v. 6, n. 1, p. 217–234. Citado na página 60.

WALTHER, A. Fastperiodische folgen und ihre fouriersche analysis. In: *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici: Bologna del 3 al 10 de settembre di 1928*. [S.l.: s.n.], 1929. p. 289–298. Citado na página 60.

WANG, M.-H.; KOT, M.; NEUBERT, M. G. Integrodifference equations, allee effects, and invasions. *Journal of Mathematical Biology*, v. 44, n. 2, p. 150–168, Feb 2002. ISSN 1432-1416. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s002850100116>. Citado na página 16.

WIKLE, C. K. A kernel-based spectral model for non-gaussian spatio-temporal processes. *Statistical Modelling*, Sage Publications Sage CA: Thousand Oaks, CA, v. 2, n. 4, p. 299–314, 2002. Citado na página 81.

XIA, Z. Discrete weighted pseudo asymptotic periodicity of second order difference equations. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, Hindawi, v. 2014, p. 8 pages, 2014. Article ID 949487. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1155/2014/949487>. Citado 3 vezes nas páginas 64, 65 e 66.

YOSIDA, K. Functional Analysis. reprint of the sixth (1980) edition. classics in mathematics. *Springer-Verlag, Berlin*, v. 11, p. 14, 1995. Citado na página 27.

YU, Z.-X.; YUAN, R. Properties of traveling waves for integrodifference equations with nonmonotone growth functions. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, v. 63, n. 2, p. 249–259, Apr 2012. ISSN 1420-9039. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00033-011-0170-z>. Citado na página 16.

ZHANG, C. Y. Integration of vector-valued pseudo-almost periodic functions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 121, n. 1, p. 167–174, 1994. Citado na página 62.