



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

Renato Teixeira Gomes

Mecânica Quântica Em Superfícies no Espaço de Minkowski

RECIFE

2018

Renato Teixeira Gomes

Mecânica Quântica Em Superfícies no Espaço de Minkowski

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em matemática.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Leandro

RECIFE

2018

Catálogo na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

G633m Gomes, Renato Teixeira
Mecânica quântica em superfícies no espaço de Minkowski / Renato
Teixeira Gomes. – 2018.
93 f.: il., fig., tab.

Orientador: Eduardo Shirlippe Góes Leandro.
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN,
Matemática, Recife, 2018.
Inclui referências e apêndices.

1. Matemática. 2. Mecânica quântica. I. Leandro, Eduardo Shirlippe Góes
(orientador). II. Título.

510

CDD (23. ed.)

UFPE- MEI 2018-054

RENATO TEIXEIRA GOMES

MECÂNICA QUÂNTICA EM SUPERFÍCIES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutorado em Matemática.

Aprovado em: 23/02/2018

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Eduardo Shirlippe Góes Leandro (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Felipe Wergete Cruz (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Henrique de Barros Correia Vitória (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Luiz Carlos Barbosa da Silva (Examinador Externo)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho (Examinador Externo)
Universidade Federal da Paraíba

Ao meu pai, Sr. Severino Paulo Gomes. A minha mãe, Sra. Roseane Teixeira da Silva

Agradecimentos

Em primeiro lugar gostaria de agradecer a Deus, à minha "mãinha", Roseane Teixeira da Silva ao meu pai, Severino Paulo Gomes e minha irmã, Christiane Teixeira Gomes por todo apoio, incentivo, cuidado e pelo amor que me deram, ao longo dessa jornada que se iniciou com minha mãe me ensinando a ler e a escrever em casa, e culmina neste trabalho.

Gostaria de agradecer ao professor Dr. Eduardo Shirlippe Goes Leandro (orientador) e ao professor Dr. Fernando Moraes (co-orientador) pela paciência, pelas ótimas orientações, e pelo completo envolvimento com este trabalho. Deixo aqui um saudoso muito obrigado, pelo conhecimento transmitido pelos senhores. Agradeço também ao meu antigo orientador, professor Dr. Ramon Mendoza por todo conhecimento transmitido e não posso deixar de agradecer ao Professor Dr. e amigo Marcelo Pedro Santos, pelas conversas esclarecedoras e pela ajuda na parte computacional deste trabalho.

Agradeço a minha namorada Laura Alves pelo carinho, companheirismo, e compreensão ao longo destes quase 7 anos de relacionamento e a todos os meus amigos da lendária "sala 212" Gilson Simões, Lorena Brizza, Edgar Amorim, Alan Farias, Thiago Tanaka, Thiago Dias, Eudes Mendes, Ana clara, Marcelo Pedro, Luiz Felipe Guerra, Gabriel Guimarães, Glaybson Miguel, Cláudia Nunes, Arlúcio Viana, Dayenne Halley, Marco Antônio pela convivência, pelos ensinamentos, conselhos, e pela amizade construída, que certamente irei levar por toda minha vida. Agradeço também a minhas amigas e amigos Ana Carolina Cavalcanti, Mário Gomes, Yara Almeida, Rafaella Gomes da Costa e Luiz Felipe Cruz, pelo apoio, pela amizade e pela ajuda nas mais variadas questões e problemas que surgiram durante meu doutorado, e que com esta ajuda, contribuíram indiretamente para a realização deste trabalho.

Agradeço ao apoio de todos os amigos da pós graduação em matemática da UFPE, e a todos os professores deste departamento que participaram da minha formação. Em particular gostaria de agradecer a Senhora Tânia Maranhão, antiga secretária da pós graduação, por todo cuidado e atenção com todos os alunos desta pós.

Gostaria de agradecer a todos os amigos do DM-UFRPE pelo apoio e ajuda com este trabalho e pelo ótimo ambiente de trabalho de nossa universidade e aos meus alunos da UFRPE pela torcida neste processo. Além disso, gostaria de agradecer a todos os amigos do Projeto Rumo à Universidade (PRU) pelo apoio, e pela convivência ao longo destes anos.

Por fim, gostaria de agradecer ao CNPQ e a CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Em abril de 1981, Rogério Cantarino Trajano Da Costa publicou o seu relevante paper, intitulado "Quantum Mechanics of a constrained Particle". Neste trabalho o autor discute o movimento de uma partícula quântica não relativista confinada a uma superfície de \mathbb{R}^3 , através da ação de um potencial externo, e também o confinamento à uma curva. Um relevante resultado obtido ao fim deste processo de confinamento, é o surgimento de um "potencial geométrico" (que depende da curvatura gaussiana e da curvatura média no caso da superfície e da curvatura da curva no caso do confinamento a uma curva) na equação de Schrödinger da partícula confinada. Neste trabalho seguimos os passos de Da Costa e obtemos um resultado semelhante considerando uma superfície no espaço de Minkowski \mathbb{R}_1^3 . Particularizaremos nossos estudos para o caso de superfícies de revolução tipo-espaço e tipo-tempo, com eixos tipo-espaço e tipo-tempo no espaço de Minkowski. Mostraremos que para superfícies de revolução destes tipos, o operador forma é diagonalizável com respeito a métrica de Minkowski, e que após um processo de separação de variáveis na equação de Schrödinger da partícula confinada, obtemos uma equação que depende apenas da variável da curva perfil da superfície. Por meio de um lema que nos permite escrever as curvaturas principais da superfície de forma mais simples e de algumas manipulações algébricas, obtemos uma equação do tipo Sturm-Liouville que depende apenas das curvaturas principais e da derivada de uma das curvaturas. Consideramos então o confinamento as variedades de curvatura constante 1 e -1 (hiperbolóide de 1 e 2 folhas) obtendo para o caso do hiperbolóide de uma folha um potencial geométrico da forma $\text{sech}^2(q_2)$, potencial este que aparece como casos particulares na segunda equação de Pöschl-Teller e no estudo de sólitons. Aplicamos então a teoria de Sturm-Liouville obtendo boas estimativas para intervalos onde podemos encontrar os autovalores dos problemas de Sturm-Liouville associados. Por meio do método de Rayleigh-Ritz obtemos estimativas melhores para os primeiros autovalores. Por fim, como uma consequência do lema a respeito das curvaturas principais, obteremos uma classe de superfícies de revolução com eixo tipo-espaço e tipo-tempo com a curvatura da curva perfil constante e seus potenciais geométricos. Faremos também uma discussão sobre a possibilidade da equação de Schrödinger para tais superfícies de revolução se tornar um oscilador harmônico.

Palavras-chave: Geometria de Minkowski. Superfícies de Revolução. Sturm-Liouville. Equação de Schrödinger. Mecânica Quântica.

Abstract

In April 1981 Rogério Cantarino Trajano da Costa published his relevant paper entitled "Quantum Mechanics of a Constrained Particle". In this work the author discusses the motion of a non-relativistic quantum particle confined to a surface of \mathbb{R}^3 , through the action of an external potential, and also the confinement to a curve. A relevant result obtained at the end of this confinement process, is the appearance of a "geometric potential" (which depends on the Gaussian curvature and the mean curvature in the case of the surface and the curvature of the curve in the case of confinement to a curve) in the Schrödinger equation of the confined particle. In this work we follow the steps of Da Costa and obtain a similar result considering a surface in the Minkowski space \mathbb{R}_1^3 . We will particularize our studies for the case of spacelike and timelike surfaces with spacelike and timelike axes in the Minkowski space. We will show that for revolution surfaces of these types, the form operator is diagonalizable with respect to Minkowski's metric, and that after a process of separation of variables in the Schrödinger equation of the confined particle, we obtain an equation that depends only on the variable of the profile curve of the surface. By means of a Lemma that allows us to write the main curvatures of the surface of simpler form and some algebraic manipulations, we obtain an equation of the Sturm-Liouville type that depends only on the principal curvatures and derivative of one of the curvatures. We consider the confinement of the manifolds of constant curvature 1 and -1 (hyperboloid of 1 and 2 sheets) obtaining for the case of the hyperboloid of a sheet a geometric potential of the form $\text{sech}^2(q_2)$, potential this which appears as particular cases in the second Pöschl-Teller equation and in the study of solitons. We will apply the Sturm-Liouville theory by obtaining good estimates for intervals where we can find the eigenvalues of the associated Sturm-Liouville problems. By means of the Rayleigh-Ritz method we obtain better estimates for the first eigenvalues. Finally, as a consequence of the lemma about the principal curvatures, we will obtain a class of revolution surfaces with spacelike and timelike axis with the curvature of the constant profile curve and its geometric potentials. We will also discuss the possibility of the Schrödinger equation for the particle confined to surfaces of revolution becoming a harmonic oscillator.

Keywords: Minkowski Geometry. Revolution Surfaces. Sturm-Liouville. Schrödinger Equation. Quantum Mechanics.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	10
2	SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO NO ESPAÇO DE MINKOWSKI	13
2.1	Superfícies de Revolução no Espaço de Minkowski	13
2.2	Preliminares geométricas	13
2.3	Imersões tipo-espaço e tipo-tempo em coordenadas	20
2.4	Superfícies de revolução no espaço de Minkowski	21
2.5	Superfícies de revolução com eixo tipo-espaço e tipo-tempo	23
2.5.1	<i>Superfícies de revolução com eixo tipo-espaço</i>	24
2.5.2	<i>Superfície de revolução com eixo tipo-tempo</i>	28
3	A EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER PARA UMA PARTÍCULA CONFINADA A UMA SUPERFÍCIE NO ESPAÇO DE MINKOWSKI	31
3.1	Desdobramentos da equação de Schrödinger: Superfícies de Revolução	40
3.1.1	<i>1º caso: S é uma superfície de revolução com eixo tipo-espaço</i>	43
3.1.2	<i>2º caso: S é uma superfície de revolução com eixo tipo-tempo</i>	47
4	ESTIMATIVAS PARA O ESPECTRO	50
4.1	Resultados da teoria de Sturm-Liouville	50
4.2	Aplicações	55
4.3	Soluções exatas para o problema do hiperbolóide de uma folha	61
4.4	O quociente de Rayleigh e o Método de Rayleigh-Ritz	65
4.4.1	<i>O quociente de Rayleigh</i>	65
4.4.2	<i>O método de Rayleigh-Ritz</i>	68
4.4.3	<i>Aplicação do Método de Rayleigh-Ritz</i>	70
5	OUTRAS APLICAÇÕES: CLASSES DE SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO E POTENCIAIS PARA CURVATURA DA CURVA PERFIL CONSTANTE	71
5.1	Superfícies de revolução com curvatura da curva perfil constante e em plano tipo-tempo	71
6	CONCLUSÃO	80
	REFERÊNCIAS	81

APÊNDICE A – CÁLCULOS DAS SEGUNDAS FORMAS FUNDAMENTAIS REFERENTES AS SUBSEÇÕES 2.5.1 E 2.5.2	84
APÊNDICE B – ALGORITMO PARA IMPLEMENTAR O MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ PARA O PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE (4.63) DA SUBSEÇÃO 4.4.3 TENDO COMO ENTRADA AS FUNÇÕES TESTES (4.64)	90
APÊNDICE C – ALGORITMO PARA IMPLEMENTAR O MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ PARA O PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE (4.65) DA SUBSEÇÃO 4.4.3 TENDO COMO ENTRADA AS FUNÇÕES TESTES (4.66)	92

1 INTRODUÇÃO

Enquanto o espaço de Minkowski em quatro dimensões é o espaço livre de gravidade da relatividade especial, sua versão tridimensional que passaremos a chamar de \mathbb{R}_1^3 , era desprovida de significado físico, exceto como um modelo de brinquedo com dimensão menor. O advento dos metamateriais hiperbólicos, no entanto, trouxe uma realização física do espaço \mathbb{R}_1^3 no que diz respeito à propagação da luz (SMOLYANINOV; HUNG, 2013) e ao movimento dos elétrons balísticos (FIGUEIREDO et al., 2016), por exemplo. De forma prática, os metamateriais hiperbólicos são meios altamente anisotrópicos que, no caso da propagação eletromagnética, combinam comportamento metálico e isolante em diferentes direções, levando a uma relação de *dispersão hiperbólica* (PODDUBNY et al., 2013). No caso de metamateriais eletrônicos, a anisotropia aparece na massa efetiva de elétrons balísticos, que se torna um tensor e pode ter componentes negativas (DRAGOMAN; DRAGOMAN, 2007). Existe uma analogia muito importante entre a propagação de ondas eletromagnéticas em dielétricos e elétrons balísticos em semicondutores (ENDERSON; GAYLORD; GLYTSIS, 1991), que vem da semelhança entre as equações de Helmholtz e da equação de Schrödinger independente do tempo que descreve a propagação de feixes de luz e de elétrons balísticos, respectivamente. Surpreendentemente, essa analogia sobrevive mesmo no caso de propagação ao longo de uma superfície, uma vez que tanto uma partícula quântica (DA COSTA, 1981) quanto uma onda eletromagnética (WILLATZEN, 2009) são submetidas ao mesmo potencial geométrico efetivo. Do ponto de vista físico, o propósito deste trabalho é estender ao espaço de Minkowski \mathbb{R}_1^3 o formalismo desenvolvido por da Costa na referência (DA COSTA, 1981) para superfícies no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 , levando em consideração possíveis aplicações em metamateriais hiperbólicos.

No início da década de 80, Rogério Cantarino Trajano da Costa publicou um importante trabalho intitulado "Quantum mechanics of a constrained particle" (DA COSTA, 1981) onde ele descreveu o movimento quântico não relativístico de uma partícula confinada a uma superfície por um potencial externo agindo apenas nas direções normais à superfície (potencial confinante). Considerando uma coordenada ao longo da direção normal e as coordenadas da superfície, ele mostrou que a função de onda é então separada em uma parte tangente e outra normal, onde a primeira obedece uma equação de onda bidimensional, que depende das coordenadas da superfície, e na qual surgem *potenciais geométricos* que dependem das curvaturas Gaussiana e média. Como a curvatura média não é invariante por isometrias, ele concluiu que superfícies isométricas podem ter dinâmicas quânticas diferentes. Na referência (GRAVESEN; WILLATZEN; VOON, 2005), Jens Gravesen e Morten Willatzem, embasados no trabalho de da Costa, estudaram o confinamento a superfícies de revolução calculando o espectro e autofunções para cilindros onde a curva perfil é uma reta, e C. C. Bastos, A. C. Pavão e E. S. G. Leandro (BASTOS; PAVÃO; LEANDRO, 2016), para cilindros generalizados. Em (SILVA, 2017) o autor trata o problema do

potencial geométrico prescrito para curvas e superfícies invariantes por um grupo a 1-parâmetro de isometrias de \mathbb{R}^3 . Na referência (SANTOS et al., 2016) é feito um estudo da influência do potencial geométrico no transporte eletrônico em nanotubos corrugados, onde é ilustrado como a geometria destes nanotubos pode ser utilizada para manipular propriedades eletrônicas de nanoestruturas. Da Costa também investigou o movimento de uma partícula confinada a uma curva, obtendo resultados semelhantes no tocante ao surgimento de potenciais geométricos, dependendo neste caso da curvatura da curva. Esse efeito da curvatura foi primeiramente sugerido por Jensen e Koppe (JENSEN; KOPPE, 1971) mas a generalização para uma curva e para uma superfície em \mathbb{R}^3 é devida a da Costa. Ainda relacionado ao estudo de confinamento em curvas, Shin Takagi e Tôru Tanzawa (TAKAGI; TANZAWA, 1992) consideraram os efeitos da *torção espacial* e da *torção da curva* ao estudar o movimento de uma partícula confinada a se mover em um anel fino retorcido. Efeitos físicos do confinamento foram estudados por Hisao Taira e Hiroyuki Shima (TAIRA; SHIMA, 2010). Nos últimos anos os efeitos da curvatura têm sido considerados do ponto de vista da física da matéria condensada, permitindo a fabricação de nanoestruturas com geometria curva.

Em seu trabalho subsequente (DA COSTA, 1982), da Costa procurou generalizar o formalismo desenvolvido em (DA COSTA, 1981) para um sistema de n partículas encontrando novamente a presença de potenciais geométricos dependendo da curvatura média e da curvatura total de uma subvariedade V_N em \mathbb{R}^{n+p} .

Neste trabalho seguiremos as ideias de da Costa para investigar o que acontece com uma partícula que é confinada a uma superfície imersa no espaço de Minkowski \mathbb{R}_1^3 que consiste do espaço \mathbb{R}^3 munido da métrica com coeficientes $L_{ij} = 0$ se $i \neq j$, $L_{11} = -1$ e $L_{22} = L_{33} = 1$. Perceberemos que para uma superfície tipo-espaço ou tipo-tempo qualquer imersa no espaço de Minkowski, a equação de Schrödinger adquire, após o confinamento, um potencial geométrico semelhante ao caso euclidiano,

$$V_S(q_1, q_2) = -\varepsilon \frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(\frac{\text{tr}(a_{ij})}{2} \right)^2 - \det(a_{ij}) \right] = -\frac{\hbar^2}{2m} [\varepsilon H^2 - K]$$

que leva em conta o caráter causal da superfície. Posteriormente, particularizaremos nossos estudos ao caso de superfícies de revolução, e por \mathbb{R}_1^3 possuir uma geometria mais rica em virtude de sua anisotropia, temos 7 tipos de superfícies de revolução a depender dos caracteres causais da curva e do plano onde se encontra a curva perfil (SILVA, 2016). Em nosso trabalho consideraremos cinco casos de superfícies: superfícies de revolução com eixos tipo-espaço e tipo-tempo porém com curva perfil tipo-espaço e tipo-tempo. Com a ajuda de um lema sobre as curvaturas principais para esses tipos de superfícies de revolução com a curva perfil parametrizada pelo comprimento de arco, obteremos equações do tipo Sturm-Liouville com potenciais geométricos escritos em termos das curvaturas principais, para os casos em que a superfície é umbílica e o caso em que a superfície não têm pontos umbílicos.

Observaremos como são essas equações para os hiperbolóides de uma e duas folhas

imersos no espaço de Minkowski, que são variedades de curvatura constante, e perceberemos que as equações obtidas são casos particulares da segunda equação de Pöschl-Teller (NIETO, 1978) e de Morse-Rosen (BARUT; INOMATA; WILSON, 1987), obtidas aqui pelo processo de confinamento. Consideraremos problemas de Sturm-Liouville associados a essas equações com condições de fronteiras auto-adjuntas, e através de estimativas clássicas da teoria de Sturm-Liouville, obteremos intervalos onde estão os autovalores dos problemas. Utilizaremos o método de Rayleigh-Ritz para melhorar as cotas superiores destas estimativas.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: No capítulo 2 apresentaremos alguns resultados preliminares sobre a geometria de superfícies imersas no espaço de Minkowsky \mathbb{R}_1^3 , primeira e segunda formas fundamentais, curvaturas gaussianas e média. Faremos uma breve discussão sobre a diagonalização do operador de Weingarten de uma superfície imersa em \mathbb{R}_1^3 , o que nem sempre ocorre e que nos impediria *a priori* de falar em curvaturas principais. Entretanto, para o caso de superfícies de revolução, o operador de Weingarten sempre é diagonalizável. Apresentaremos algumas definições e particularidades referentes a superfícies de revolução com eixo tipo-espaço e tipo-tempo. Na seção 2.3, calculamos as primeiras e segundas formas fundamentais destas. No capítulo 3, seção 3.1 seguimos o formalismo de da Costa para obter as equações de Schrödinger após o processo de confinamento e em seguida, na seção 3.2 escrevemos as equações para as superfícies de revolução supracitadas considerando as curvas perfis parametrizadas pelo comprimento de arco.

No capítulo 4 seção 4.1, faremos uma análise das equações obtidas ao fim do capítulo 3 à luz da teoria de Sturm-Liouville e apresentaremos com detalhes uma solução da equação em (4.33) com condições de fronteira diferentes da tratada no problema de Sturm-Liouville (4.33). Nesta seção apresentaremos também cotas para os autovalores dos problemas (4.33) e (4.42). Na seção 4.2 faremos uma exposição do quociente de Rayleigh e o método de Rayleigh-Ritz, aplicando o método para obter melhores cotas superiores para (4.33) e (4.42). No capítulo 5 seção 5.1, encontraremos a classe de superfícies de revolução e seus potenciais geométricos para os casos em que a curvatura da curva perfil é constante e diferente de zero e constante e igual a zero, todas elas parametrizadas pelo comprimento de arco. Faremos uma discussão da existência de equações do tipo osciladores harmônicos nesta classe, onde encontramos apenas cilindros hiperbólicos tipo-espaço e cilindros retos para o caso tipo-tempo.

No apêndice A apresentaremos parte dos cálculos relativos as segundas formas fundamentais das superfícies de revolução tratadas na seção 2.3 e no Apêndice B os algoritmos que implementam o método de Rayleigh-Ritz para calcular as cotas superiores para os problemas (4.33) e (4.42).

2 SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

Neste capítulo, apresentaremos algumas preliminares geométricas relativas ao espaço de Minkowski e superfícies de revolução neste espaço. Apresentaremos as primeira e segunda formas fundamentais para superfícies tipo-espaço e tipo-tempo imersas em \mathbb{R}_1^3 , discutiremos a diagonalização do operador de Weingarten, e faremos os cálculos explícitos da primeira e segunda formas fundamentais para imersões de superfícies de revoluções tipo-espaço e tipo-tempo neste ambiente.

2.1 Superfícies de Revolução no Espaço de Minkowski

O espaço de Minkowski quadridimensional, chamado simplesmente de espaço-tempo, é o ambiente geométrico da teoria da relatividade especial de Einstein, teoria esta que revolucionou a Física na primeira metade do século XX, alterando os conceitos clássicos de espaço e tempo até então utilizados. Entretanto, nesta tese trabalharemos com sua versão tridimensional e em particular, com alguns tipos especiais de superfícies de revolução imersas neste espaço, a saber, as superfícies de revolução tipo-espaço e tipo-tempo com curva perfil tipo-espaço e tipo-tempo. Antes, precisamos de algumas informações inerentes a esse novo ambiente e a estas superfícies.

2.2 Preliminares geométricas

Definição 2.1. Considere o conjunto \mathbb{R}^3 munido com a métrica $L := \langle \cdot, \cdot \rangle_1$, cuja matriz é dada por

$$[L_{ij}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ao par (\mathbb{R}^3, L_{ij}) que denotaremos por \mathbb{R}_1^3 , chamaremos *o espaço de Minkowski de dimensão 3*. É comum na literatura se referir a tal métrica como *o produto interno de Minkowski*.

Calculando o produto interno de Minkowski entre dois vetores $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$, obtemos

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle_1 = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3. \quad (2.1)$$

O produto vetorial neste espaço, definido através da relação

$$\langle x \times_1 y, z \rangle_1 = \det(x, y, z),$$

com $z = (z_1, z_2, z_3)$, é dado por

$$x \times_1 y = -(x_2 y_3 - x_3 y_2)e_1 - (x_1 y_3 - x_3 y_1)e_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)e_3. \quad (2.2)$$

onde e_1, e_2, e_3 é a base canônica de \mathbb{R}^3 .

Observe que nesta geometria, o produto interno de um vetor por ele mesmo pode ser positivo, negativo ou nulo, o que sugere a seguinte definição:

Definição 2.2. Os vetores $v \in \mathbb{R}_1^3$ podem ser classificados por meio do produto interno de Minkowski da seguinte forma:

1. *Tipo-espaço*, se $\langle v, v \rangle_1 > 0$, ou $v = 0$;
2. *Tipo-tempo*, se $\langle v, v \rangle_1 < 0$;
3. *Tipo-luz* se $\langle v, v \rangle_1 = 0$ e $v \neq 0$.

Nos referimos a tal classificação como o "*comportamento causal do vetor*".

Por exemplo, os vetores $(0, 1, 0)$ e $(1, 2, 3)$ são vetores tipo-espaço, ao passo que $(1, 0, 0)$ e $(2, 1, 1)$ são vetores tipo-tempo. Por fim, os vetores $(1, 0, 1)$ e $(2, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ são exemplos de vetores tipo-luz.

Da mesma forma que vetores, curvas e superfícies podem ter comportamentos causais bem definidos. Para o caso de curvas, o comportamento causal é definido pelo vetor tangente.

Definição 2.3. Uma curva diferenciável $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ no espaço de Minkowski é chamada

1. *Tipo-espaço*, se $\alpha'(t)$ é tipo-espaço $\forall t \in I$;
2. *Tipo-tempo*, se $\alpha'(t)$ é tipo-tempo $\forall t \in I$;
3. *Tipo-luz* se $\alpha'(t)$ é tipo-luz $\forall t \in I$.

Para o caso de superfícies em \mathbb{R}_1^3 , o caráter causal é dado pela *primeira forma fundamental*.

Definição 2.4. Seja S uma superfície suave, conexa, e imersa no espaço de Minkowski \mathbb{R}_1^3 através da imersão $i : S \rightarrow \mathbb{R}_1^3$. Considere em S a métrica induzida pela imersão i , isto é

$$g(u, v)_p := L(di_p u, di_p v)_{i(p)} = L(u, v)_p := \langle u, v \rangle_{1p}, \quad u, v \in T_p S.$$

onde $T_p S$ é o espaço tangente a S no ponto p . A aplicação $g(u, v)$ definida dessa forma, é chamada a *primeira forma fundamental* de S . Nesta situação, a imersão i se torna uma *imersão isométrica*.

Sendo $r(q_1, q_2)$ uma parametrização de S , temos

$$g_{ij} := g \left(\frac{\partial r}{\partial q_i}, \frac{\partial r}{\partial q_j} \right) = \left\langle \frac{\partial r}{\partial q_i}, \frac{\partial r}{\partial q_j} \right\rangle_{1p}.$$

Como a primeira forma fundamental é definida pela restrição a $T_p S$ da métrica do ambiente \mathbb{R}_1^3 , então tal restrição pode ser positiva definida em $T_p S$, indefinida ou ter posto 1.

Definição 2.5. Uma *imersão* $i : S \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ definida como acima é chamada

- *Tipo-espaço*, se $g(u, v)_p$ for positivo definido em $T_p S$, $\forall p \in S$;
- *Tipo-tempo*, se $g(u, v)_p$ for indefinido em $T_p S$, $\forall p \in S$;
- *Tipo-luz* $g(u, v)_p$ tem posto 1 em $T_p S$, $\forall p \in S$.

As imersões tipo-espaço e tipo-tempo são ditas *não degeneradas*.

Muitas vezes iremos nos referir ao caráter causal da imersão como sendo da superfície, isto é, diremos simplesmente que a superfície S é tipo-espaço, tipo-tempo ou tipo-luz. Embora o caráter causal de uma imersão em \mathbb{R}_1^3 seja dado pela primeira forma fundamental, uma outra forma de determiná-lo é através do caráter causal de um campo de vetores normais definidos na superfície. Mais precisamente, temos

Lema 2.6. *Seja S uma superfície regular imersa em \mathbb{R}_1^3 . Então S é tipo-espaço, tipo-tempo ou tipo-luz se, e somente se, existe um campo de vetores N ortogonal com respeito ao produto interno de Minkowski a $T_p S$ que é tipo-tempo, tipo-espaço ou tipo-luz respectivamente, $\forall p \in S$.*

A demonstração desse lema pode ser encontrada na referência (KÜHNEL, 2015).

Se uma superfície regular em \mathbb{R}_1^3 é tipo-espaço, então ela é globalmente orientável (ver (LÓPEZ, 2008)). Entretanto se ela é tipo-tempo, então ela é apenas localmente orientável. Devido ao caráter causal de seus vetores normais, a aplicação normal de Gauss que denotaremos por N , pode ter sua imagem em dois conjuntos especiais, a saber,

$$\begin{aligned} N : S &\longrightarrow S^2(1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \\ N : S &\longrightarrow S^2(-1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x^2 + y^2 + z^2 = -1\} \end{aligned}$$

a depender se S é tipo-espaço ou tipo-tempo.

O estudo da aplicação normal de Gauss nos traz informações geométricas importantes sobre a superfície. Em particular, sua derivada nos permite obter informações sobre o quanto (localmente) a superfície se afasta de seu plano tangente numa vizinhança de um ponto p . Isso nos dá a ideia geométrica do quão curva a superfície é na vizinhança deste ponto. Uma outra

aplicação relacionada com o estudo geométrico de uma superfície é dada pela segunda forma fundamental que definiremos abaixo e para tal, entraremos no contexto das imersões isométricas.

Uma vez que atribuímos a S uma métrica induzida pela inclusão (a primeira forma fundamental de S em \mathbb{R}_1^3) que é uma imersão (e pela forma como foi definida é isométrica), podemos falar na *segunda forma fundamental* desta imersão. O que faremos aqui é apenas escrever com um pouco mais de detalhes o que foi feito na referência (LÓPEZ, 2008).

Denotaremos por $\Xi(S)$ o conjunto de todos os vetores tangentes a S , e ∇^0 a conexão de Levi-Civita de \mathbb{R}_1^3 . Se $X, Y \in \Xi(S)$ podemos escrever

$$\nabla_X^0 Y = (\nabla_X^0 Y)^T + (\nabla_X^0 Y)^N,$$

onde T e N sobrescrito denotam as componentes tangente e normal de $\nabla_X^0 Y$. Representando por ∇ a conexão induzida pelo ambiente \mathbb{R}_1^3 em S , temos

$$\nabla_X Y = (\nabla_X^0 Y)^T.$$

Definição 2.7. A *segunda forma fundamental* de uma imersão i é dada pela aplicação tensorial simétrica

$$\begin{aligned} H: \Xi(S) \times \Xi(S) &\longrightarrow \Xi(S) \\ H(X, Y) &\longmapsto H(X, Y) = (\nabla_X^0 Y)^N. \end{aligned}$$

Observe que com as definições acima, podemos escrever a conexão do ambiente na forma

$$\nabla_X^0 Y = \nabla_X Y + H(X, Y).$$

Agora considere \mathcal{N} um campo de vetores normais à imersão i , e seja $A_{\mathcal{N}}(X)$ a componente tangente de $-\nabla_X^0 \mathcal{N}$, isto é

$$A_{\mathcal{N}}(X) = -(\nabla_X^0 \mathcal{N})^T.$$

Temos que

$$\begin{aligned} \langle A_{\mathcal{N}}(X), Y \rangle_1 &= \langle -(\nabla_X^0 \mathcal{N})^T, Y \rangle_1 = \langle \mathcal{N}, \nabla_X^0 Y \rangle - X \langle \mathcal{N}, Y \rangle_1 = \langle \mathcal{N}, \nabla_X^0 Y \rangle_1 \\ &= \langle \mathcal{N}, \nabla_X Y + H(X, Y) \rangle_1 = \langle \mathcal{N}, H(X, Y) \rangle_1 \end{aligned}$$

e como $H(X, Y)$ é simétrica,

$$\langle A_{\mathcal{N}}(X), Y \rangle_1 = \langle \mathcal{N}, H(X, Y) \rangle_1 = \langle \mathcal{N}, H(Y, X) \rangle_1 = \langle A_{\mathcal{N}}(Y), X \rangle_1 = \langle X, A_{\mathcal{N}}(Y) \rangle_1, \quad (2.3)$$

o que nos diz que $A_{\mathcal{N}}$ é auto-adjunto com respeito à métrica induzida pelo ambiente \mathbb{R}_1^3 em S . Se N é um campo de vetores normais unitários numa vizinhança de um ponto p em S , então

$$\langle N, N \rangle_1 = \varepsilon = \begin{cases} -1, & \text{se } S \text{ é tipo-espaço,} \\ 1, & \text{se } S \text{ é tipo-tempo.} \end{cases}$$

Sendo $\langle N, N \rangle_1$ constante, $\langle \nabla_X^0 N, N \rangle_1 = 0$ e conseqüentemente, $\nabla_X^0 N$ é tangente a S . Escrevemos então

$$A_N(X) = -\nabla_X^0 N$$

e chamamos de *fórmula de Weingarten*. Calculando em um ponto p , temos

$$\begin{aligned} (A_N X)_p &:= A_p : T_p S \longrightarrow T_p S \\ v &\longmapsto A_p(v) = -\nabla_v^0 N = -(dN_p)v. \end{aligned}$$

E desde que II é um múltiplo de N (a dimensão do espaço normal a S é 1), temos

$$II(X, Y) = \varepsilon \langle II(X, Y), N \rangle_1 N = \varepsilon \langle A_N(X), Y \rangle_1 N. \quad (2.4)$$

Logo,

$$\nabla_X^0 Y = \nabla_X Y + \varepsilon \langle A_N(X), Y \rangle_1 N.$$

Vimos em (2.3) que a aplicação de Weingarten é auto-adjunta com respeito à métrica induzida pelo ambiente \mathbb{R}^3 . Entretanto, como a primeira forma fundamental pode ser positivo-definida, indefinida ou ter posto 1, para o caso em que a superfície é tipo-espaço a aplicação de Weingarten é diagonalizável o que segue diretamente do teorema espectral (visto que o produto interno é positivo definido com respeito à métrica). Já no caso tipo-tempo isso pode não ocorrer. Tal diagonalização dependerá da existência de raízes reais para o polinômio característico do operador de Weingarten. Para o que segue, será conveniente obtermos a expressão da matriz de tal operador numa base ortonormal local $\{e_1, e_2\}$ de campos de vetores tangentes a S . Considere então e_1 tipo-espaço e $\langle e_2, e_2 \rangle = -\varepsilon$ ($\{e_1, e_2, N\}$ formam uma base ortonormal de \mathbb{R}_1^3). Se $v \in T_p S$, escrevendo $Av = ae_1 + be_2$ obtemos

$$\langle Av, e_1 \rangle_1 = \langle ae_1 + be_2, e_1 \rangle_1 = a \langle e_1, e_1 \rangle_1 = a,$$

$$\langle Av, e_2 \rangle_1 = \langle ae_1 + be_2, e_2 \rangle_1 = b \langle e_2, e_2 \rangle_1 = -\varepsilon b \implies -\varepsilon \langle Av, e_2 \rangle_1 = b.$$

Assim $Av = \langle Av, e_1 \rangle_1 e_1 - \varepsilon \langle Av, e_2 \rangle_1 e_2$, o que nos dá

$$Ae_1 = \langle Ae_1, e_1 \rangle_1 e_1 - \varepsilon \langle Ae_1, e_2 \rangle_1 e_2$$

$$Ae_2 = \langle Ae_2, e_1 \rangle_1 e_1 - \varepsilon \langle Ae_2, e_2 \rangle_1 e_2.$$

Logo, a matriz do operador de Weingarten na base $\{e_1, e_2\}$ tem a forma

$$A = \begin{bmatrix} \langle Ae_1, e_1 \rangle_1 & \langle Ae_2, e_1 \rangle_1 \\ -\varepsilon \langle Ae_1, e_2 \rangle_1 & -\varepsilon \langle Ae_2, e_2 \rangle_1 \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Em virtude do operador de Weingarten nem sempre ser diagonalizável, precisamos definir a curvatura média da imersão de forma diferente do caso euclidiano.

Definição 2.8. Seja S uma superfície e $i : S \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ uma imersão tipo-espaço ou tipo-tempo. O campo de vetores curvatura média \vec{H} é definido por

$$\vec{H} = \frac{1}{2} \text{tr}(II),$$

onde o traço é calculado com respeito à métrica, isto é, numa base ortonormal com $\langle e_i, e_i \rangle = \varepsilon_i$, onde ε_i é 1 se e_i for tipo espaço, -1 se e_i for tipo-tempo e $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ se $i \neq j$ então

$$\text{tr}(II) = \varepsilon_1 II(e_1, e_1) + \varepsilon_2 II(e_2, e_2).$$

A curvatura média é então definida por $\vec{H} = HN$, donde

$$H = \varepsilon \langle \vec{H}, N \rangle_1.$$

Considerando novamente e_1 sendo tipo-espaço, $\langle e_2, e_2 \rangle = -\varepsilon$, e usando (2.4), temos

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \frac{1}{2} \text{tr}(II) = \frac{1}{2} (II(e_1, e_1) - \varepsilon II(e_2, e_2)) \\ &= \frac{1}{2} (\varepsilon \langle Ae_1, e_1 \rangle_1 - \langle Ae_2, e_2 \rangle_1) N \\ &= \frac{\varepsilon}{2} (\langle Ae_1, e_1 \rangle_1 - \varepsilon \langle Ae_2, e_2 \rangle_1) N \\ &= \frac{\varepsilon}{2} (\text{tr}(A)) N. \end{aligned}$$

Assim, a curvatura média é dada por

$$H = \frac{\varepsilon}{2} (\text{tr}(A)).$$

Vamos agora definir a curvatura Gaussiana. As justificativas das definições que daremos aqui podem ser encontradas nas referências (KÜHNEL, 2015) e (O'NEILL, 1983).

Definição 2.9. A curvatura Gaussiana da imersão i , é dada por

$$K = \varepsilon \det(A) = \frac{\varepsilon}{2} (4H^2 - \text{tr}(A^2)).$$

No caso em que o operador de Weingarten é diagonalizável podemos falar em curvaturas principais.

Definição 2.10. Considere $i : S \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ uma imersão tipo-espaço ou tipo-tempo e $p \in S$. Se a aplicação de Weingarten A_p é diagonalizável com relação ao produto interno de Minkowski, então chamaremos os autovalores de A_p de *curvaturas principais em p* e os denotaremos por $k_1(p)$ e $k_2(p)$.

Observe que como consequência das definições acima obtemos que se A_p é diagonalizável, então a curvatura média e a curvatura gaussiana em p são dadas por

$$H(p) = \varepsilon \frac{k_1(p) + k_2(p)}{2}, \quad K(p) = \varepsilon k_1(p) k_2(p).$$

Neste ponto seria natural definir um *ponto umbílico* de forma similiar ao caso euclidiano, isto é, um ponto p de uma superfície imersa em \mathbb{R}^3 é dito umbílico quando os autovalores da aplicação de Weingarten em p são iguais. Porém como nem sempre o operador é diagonalizável, precisamos de outra definição.

Definição 2.11. Um ponto p de uma imersão $i : S \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ tipo-espaço ou tipo-tempo é dito *umbílico* se existe um número $k(p) \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle II(u, v), N(p) \rangle = \langle A_p u, v \rangle_1 = k(p) \langle u, v \rangle_1 \quad u, v \in T_p S$$

Observe porém que se o ponto é umbílico então A_p deve ser diagonalizável pois devemos ter

$$\langle A_p e_1, e_2 \rangle_1 = k(p) \langle e_1, e_2 \rangle_1 = 0,$$

e o mesmo vale para $\langle A_p e_2, e_1 \rangle_1$. Daí concluímos que a matriz (2.5) é diagonal. Desta forma, podemos dizer que p é umbílico se e somente se existem k_1 e k_2 e $k_1(p) = k_2(p) = k(p)$.

Um resultado relevante cuja demonstração pode ser encontrada na referência (LÓPEZ, 2008) é o seguinte:

Proposição 2.12. Assuma que $i : S \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ é uma imersão tipo-espaço ou tipo-tempo, $p \in S$ e que A_p é diagonalizável. Então,

$$H^2(p) - \varepsilon K(p) \geq 0$$

e a igualdade vale se e só se p é umbílico. Em particular, em uma superfície tipo-tempo, se $H^2(p) - \varepsilon K(p) < 0$, então p não é umbílico.

Como falamos anteriormente, a existência das curvaturas principais depende da existência de autovalores reais para o operador de Weingarten. Calculando o polinômio característico, isto é, $\det(A - kI) = 0$, onde A é dada em (2.5) obtemos

$$\begin{aligned} \det(A - kI) &= (\langle Ae_1, e_1 \rangle_1 - k)(-\varepsilon \langle Ae_2, e_2 \rangle_1 - k) + \varepsilon \langle Ae_2, e_1 \rangle_1 \langle Ae_1, e_2 \rangle_1 \\ &= -\varepsilon \langle Ae_1, e_1 \rangle_1 \langle Ae_2, e_2 \rangle_1 - k \langle Ae_1, e_1 \rangle_1 + k\varepsilon \langle Ae_2, e_2 \rangle_1 + k^2 + \varepsilon \langle Ae_2, e_1 \rangle_1 \langle Ae_1, e_2 \rangle_1 \\ &= k^2 - k(\text{tr}(A)) + \varepsilon(-\langle Ae_1, e_1 \rangle_1 \langle Ae_2, e_2 \rangle_1 + \langle Ae_1, e_2 \rangle_1 \langle Ae_2, e_1 \rangle_1) \\ &= k^2 - 2\varepsilon Hk + \varepsilon K, \end{aligned}$$

Calculando o discriminante deste polinômio, Δ temos

$$\Delta = (-2\varepsilon H)^2 - 4\varepsilon K = 4(H^2 - \varepsilon K)$$

Consequentemente,

1. Se $H^2 - \varepsilon K > 0$, A_p é diagonalizável;
2. Se $H^2 - \varepsilon K < 0$, A_p não é diagonalizável;

3. Se $H^2 - \varepsilon K = 0$ então temos uma raiz dupla do polinômio característico e surgem duas possibilidades: se $\varepsilon = -1$, a superfície é tipo-espaço, o operador forma é diagonalizável, $k = -H$ e o ponto é umbílico. Se $\varepsilon = 1$, A_p pode ser diagonalizável ou não, pois teremos $H^2 = K$ e tal diagonalização dependerá do sinal da curvatura Gaussiana.

Exemplos desses três casos são dados em (LÓPEZ, 2008).

2.3 Imersões tipo-espaço e tipo-tempo em coordenadas

Passamos agora ao cálculo da segunda forma fundamental de uma imersão tipo-espaço ou tipo-tempo em coordenadas.

Considere que $i : S \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ é uma imersão tipo-espaço (respectivamente tipo-tempo), isto é, S tem um único campo de vetores normais unitários (a menos de sinal) que é tipo-tempo (respectivamente tipo-espaço). Sendo $r(q_1, q_2)$ uma parametrização para S e tomando

$$N = \frac{1}{\sqrt{|\det g|}} \left(\frac{\partial r}{\partial q_1} \times_1 \frac{\partial r}{\partial q_2} \right), \quad (2.6)$$

N é um campo de vetores normais unitários a S e $\langle N, N \rangle_1 = \varepsilon$. Logo, a segunda forma fundamental da imersão i em p segundo o vetor normal N é dada por

$$\langle II(X, Y), N \rangle_1 = \langle -dN_p X, Y \rangle_1. \quad (2.7)$$

Por outro lado, de

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \langle N, N \rangle_1 = 0 \implies 2 \left\langle \frac{\partial N}{\partial q_i}, N \right\rangle_1 = 0$$

segue que, $\frac{\partial N}{\partial q_i}$ está no plano tangente e podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial q_1} &= a_{11} \frac{\partial r}{\partial q_1} + a_{12} \frac{\partial r}{\partial q_2}; \\ \frac{\partial N}{\partial q_2} &= a_{21} \frac{\partial r}{\partial q_1} + a_{22} \frac{\partial r}{\partial q_2}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Agora, calculando a segunda forma fundamental na base $\left\{ \frac{\partial r}{\partial q_1}, \frac{\partial r}{\partial q_2} \right\}$, observando o caráter vetorial de $II(X, Y)$ e escrevendo $II \left(\frac{\partial r}{\partial q_1}, \frac{\partial r}{\partial q_2} \right) = h_{ij} N$, temos

$$\langle h_{ij} N, N \rangle_1 = \left\langle II \left(\frac{\partial r}{\partial q_i}, \frac{\partial r}{\partial q_j} \right), N \right\rangle_1 = - \left\langle dN_p \frac{\partial r}{\partial q_i}, \frac{\partial r}{\partial q_j} \right\rangle_1 = - \left\langle \frac{\partial N}{\partial q_i}, \frac{\partial r}{\partial q_j} \right\rangle_1. \quad (2.9)$$

Como

$$0 = \frac{\partial}{\partial q_i} \left\langle N, \frac{\partial r}{\partial q_j} \right\rangle_1 = \left\langle \frac{\partial N}{\partial q_i}, \frac{\partial r}{\partial q_j} \right\rangle_1 + \left\langle N, \frac{\partial^2 r}{\partial q_i \partial q_j} \right\rangle_1,$$

segue que

$$-\left\langle \frac{\partial N}{\partial q_i}, \frac{\partial r}{\partial q_j} \right\rangle_1 = \left\langle N, \frac{\partial^2 r}{\partial q_i \partial q_j} \right\rangle_1.$$

Como $\langle N, N \rangle = \varepsilon$, substituindo em (2.9) obtemos

$$\varepsilon h_{ij} = \langle h_{ij} N, N \rangle_1 = -\left\langle \frac{\partial N}{\partial q_i}, \frac{\partial r}{\partial q_j} \right\rangle_1 = \left\langle N, \frac{\partial^2 r}{\partial q_i \partial q_j} \right\rangle_1.$$

Logo

$$h_{ij} = -\varepsilon \left\langle \frac{\partial N}{\partial q_i}, \frac{\partial r}{\partial q_j} \right\rangle_1 = \varepsilon \left\langle N, \frac{\partial^2 r}{\partial q_i \partial q_j} \right\rangle_1. \quad (2.10)$$

Substituindo (2.8) na primeira igualdade de (2.10), obtemos

$$h_{ij} = -\varepsilon \left\langle \sum_{k=1}^2 a_{ik} \frac{\partial r}{\partial q_k}, \frac{\partial r}{\partial q_j} \right\rangle_1 = -\varepsilon \sum_{k=1}^2 a_{ik} \left\langle \frac{\partial r}{\partial q_k}, \frac{\partial r}{\partial q_j} \right\rangle_1 = -\varepsilon \sum_{k=1}^2 a_{ik} g_{kj}.$$

Escrevendo em forma matricial,

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} = -\varepsilon \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}.$$

Tomando a inversa da métrica g_{ij} em ambos os lados da igualdade acima, obtemos

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = -\varepsilon \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

2.4 Superfícies de revolução no espaço de Minkowski

No que segue, particularizaremos nossos estudos a superfícies de revolução tipo-espaço e tipo-tempo, as quais são objetos de interesse deste trabalho. Antes faremos uma breve exposição sobre superfícies de revolução neste espaço.

Definição 2.13. *Uma superfície de revolução S é uma superfície obtida pela rotação de uma curva regular plana ao redor de um eixo l .*

Diferentemente do caso euclidiano onde é possível caracterizar, a menos de movimento rígido, uma superfície de revolução como uma superfície que admite uma parametrização da forma

$$r(t, \theta) = (u(t) \cos(\theta), u(t) \sin(\theta), v(t)),$$

onde $\alpha(t) = (u(t), 0, v(t))$, no espaço de Minkowski a superfície pode mudar radicalmente a depender do caráter causal da curva perfil ou do seu eixo de rotação, isto é, se a curva ou o eixo é tipo-espaço, tipo-tempo ou tipo-luz.

Uma rotação em torno do eixo x tipo-tempo de um ângulo q_1 é dada pela transformação linear cuja matriz tem a forma

$$\phi_T(q_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q_1) & \sin(q_1) \\ 0 & -\sin(q_1) & \cos(q_1) \end{bmatrix}.$$

Note que uma rotação cujo eixo é tipo-tempo se comporta como as rotações euclidianas. Entretanto, a rotação em torno do eixo z tipo-espaço de um ângulo q_1 , por exemplo, é dada pela transformação linear

$$\phi_S(q_1) = \begin{bmatrix} \cosh(q_1) & \sinh(q_1) & 0 \\ \sinh(q_1) & \cosh(q_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Perceba que diferentemente das rotações euclidianas, onde aparecem as funções circulares, nas entradas da matriz $\phi_S(q_1)$ temos funções hiperbólicas.

Aqui reside uma diferença fundamental entre os tipos de revolução em \mathbb{R}_1^3 . Enquanto no caso tipo-tempo cada ponto da curva geratriz $\alpha(t)$ descreve uma circunferência, na rotação tipo-espaço, cada ponto de $\alpha(t)$ descreverá uma hipérbole. O fundamental aqui é perceber geometricamente (a nível de métrica) a ideia de rotação. Vamos pensar no caso euclidiano considerando o eixo z como eixo de revolução. Se considerarmos os paralelos de uma superfície de revolução S como as curvas formadas pelas interseções dos planos $z = k$ (k constante) com S , observamos que todo ponto em um mesmo paralelo está a uma mesma distância da origem. Consequentemente a transformação linear ϕ_T preserva comprimentos donde preserva o produto interno, isto é,

$$\langle \phi_T(w), \phi_T(w) \rangle = \langle w, w \rangle. \quad (2.12)$$

Assim, percebemos que uma rotação é uma aplicação que fixa um eixo, e preserva o produto interno. Com um pouco de cálculo podemos verificar que as transformações lineares ϕ_T e ϕ_S no espaço de Lorentz, preservam o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$. Por não parecer natural para quem tem um primeiro contato com a rotação tipo-espaço, mostraremos como é obtida a matriz ϕ_S . Com efeito, queremos que a aplicação $\phi_S(q_1)$ fixe o eixo- z e preserve o produto interno de Minkowski. Escrevendo de forma genérica uma aplicação T , que fixe o eixo z , temos

$$[T] = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad e, \quad [T]^t = \begin{bmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para que o produto interno de Minkowski seja preservado, devemos ter

$$[T]^t [M] [T] = [M], \quad (2.13)$$

onde M é a matriz do produto interno

$$[M] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Desta forma

$$\begin{bmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e conseqüentemente,

$$\begin{bmatrix} c^2 - a^2 & cd - ab & 0 \\ cd - ab & d^2 - b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

cuja solução nos dá

$$a = \cosh(q_1), \quad b = \sinh(q_1), \quad c = \sinh(q_1) \quad e \quad d = \cosh(q_1),$$

para algum $q_1 \in \mathbb{R}$. Assim obtemos $\phi_S(q_1)$.

Outros tipos de superfícies de revolução, não menos interessantes, são as superfícies de revolução com eixo tipo-luz. Tais eixos moram no cone de luz $-x^2 + y^2 + z^2 = 0$ e uma rotação em torno do eixo tipo-luz de equação $x = y, z = 0$ por exemplo, é dada pela transformação linear

$$\phi_L(q_1) = \begin{bmatrix} 1 + \frac{q_1^2}{2} & -\frac{q_1^2}{2} & q_1 \\ \frac{q_1^2}{2} & 1 - \frac{q_1^2}{2} & q_1 \\ q_1 & -q_1 & 1 \end{bmatrix}.$$

O leitor pode verificar que de fato, a transformação $\phi_L(q_2)$ satisfaz (2.12) e fixa o eixo com equação $x = y$ com $z = 0$.

Embora o eixo de revolução tenha um papel importante na forma de uma superfície, o caráter causal desta não depende do eixo, e sim da curva geratriz. Se a curva geratriz é tipo-tempo, a superfície de revolução será tipo-tempo, não importando o caráter causal do eixo de rotação. O mesmo ocorre quando a curva geratriz é tipo-espaço ou tipo-luz.

2.5 Superfícies de revolução com eixo tipo-espaço e tipo-tempo

Consideraremos agora as imersões de superfícies de revolução com eixos tipo-espaço ou tipo-tempo em \mathbb{R}_1^3 com curva geratriz tipo-espaço ou tipo-tempo. Iniciaremos pelas superfícies de revolução com eixo tipo-espaço.

2.5.1 Superfícies de revolução com eixo tipo-espaço

Aplicando a matriz de rotação $\phi_S(q_1)$ a uma curva geratriz regular $\alpha(q_2) = (u(q_2), 0, v(q_2)) = (u, 0, v)$ no plano xz , que é tipo-tempo, obtemos a parametrização $r(q_1, q_2)$ dada por

$$r(q_1, q_2) := \begin{bmatrix} \cosh(q_1) & \sinh(q_1) & 0 \\ \sinh(q_1) & \cosh(q_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(q_2) \\ 0 \\ v(q_2) \end{bmatrix} = (u(q_2) \cosh(q_1), u(q_2) \sinh(q_1), v(q_2)).$$

Logo,

$$\frac{\partial r}{\partial q_1} = (u \sinh(q_1), u \cosh(q_1), 0), \quad \frac{\partial r}{\partial q_2} = (u' \cosh(q_1), u' \sinh(q_1), v'),$$

e

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial r}{\partial q_1}, \frac{\partial r}{\partial q_1} \right\rangle_1 &= -u^2 \sinh^2(q_1) + u^2 \cosh^2(q_1) = u^2 \\ \left\langle \frac{\partial r}{\partial q_1}, \frac{\partial r}{\partial q_2} \right\rangle_1 &= -uu' \cosh(q_1) \sinh(q_1) + uu' \cosh(q_1) \sinh(q_1) = 0 \\ \left\langle \frac{\partial r}{\partial q_2}, \frac{\partial r}{\partial q_2} \right\rangle_1 &= -(u')^2 \cosh^2(q_1) + (u')^2 \sinh^2(q_1) + (v')^2 = (v')^2 - (u')^2. \end{aligned}$$

Desta forma, a primeira forma fundamental (a métrica induzida pelo ambiente) de S , é dada por

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} u^2 & 0 \\ 0 & (v')^2 - (u')^2 \end{bmatrix}.$$

Se a curva α for parametrizada pelo comprimento de arco (diremos simplesmente que a curva é p.c.a.) podendo ser tipo-espaço ou tipo-tempo, temos que $\langle \alpha', \alpha' \rangle_1 = (v')^2 - (u')^2 = \eta$, onde $\eta = 1$ se a curva é tipo-espaço e $\eta = -1$ se for tipo-tempo. A matriz da métrica então toma a forma

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} u^2 & 0 \\ 0 & \eta \end{bmatrix}.$$

Calculando a inversa, obtemos:

$$[g^{ij}] = \frac{1}{u^2[(v')^2 - (u')^2]} \begin{bmatrix} (v')^2 - (u')^2 & 0 \\ 0 & u^2 \end{bmatrix},$$

onde $\det(g_{ij}) = u^2[(v')^2 - (u')^2]$. Ou

$$[g^{ij}] = \frac{1}{u^2 \eta} \begin{bmatrix} \eta & 0 \\ 0 & u^2 \end{bmatrix}$$

no caso em que α é p.c.a.

Calculando $\frac{\partial r}{\partial q_1} \times_1 \frac{\partial r}{\partial q_2}$, onde \times_1 denota o produto vetorial de \mathbb{R}_1^3 (ver páginas 12 e 13), obtemos (nos cálculos abaixo, ver apêndice A, páginas 84 e 85 para detalhes)

$$\frac{\partial r}{\partial q_1} \times_1 \frac{\partial r}{\partial q_2} = -(uv' \cosh(q_1), uv' \sinh(q_1), uu').$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{\partial r}{\partial q_1} \times_1 \frac{\partial r}{\partial q_2}, \frac{\partial r}{\partial q_1} \times_1 \frac{\partial r}{\partial q_2} \right\rangle_1 &= -(uv')^2 \cosh^2(q_1) + (uv')^2 \sinh^2(q_1) + (u'u)^2 \\
 &= -(uv')^2 + (uu')^2 \\
 &= u^2[(u')^2 - (v')^2] \\
 &= -\det(g_{ij}).
 \end{aligned}$$

Para calcular a segunda forma fundamental, observe que (por simplicidade, no que segue assumiremos $u > 0$)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 r}{\partial q_1^2} &= (u \cosh(q_1), u \sinh(q_1), 0), \\
 \frac{\partial^2 r}{\partial q_1 \partial q_2} &= \frac{\partial^2 r}{\partial q_2 \partial q_1} = (u' \sinh(q_1), u' \cosh(q_1), 0), \\
 \frac{\partial^2 r}{\partial q_2^2} &= (u'' \cosh(q_1), u'' \sinh(q_1), v'').
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Como por (2.6), $N = \frac{-1}{\sqrt{|u^2[(v')^2 - (u')^2]|}} (v'u \cosh(q_1), v'u \sinh(q_1), u'u)$, de (2.10) temos

$$h_{11} = \varepsilon \left\langle \frac{\partial^2 r}{\partial q_1^2}, N \right\rangle_1 = \frac{\varepsilon v'u}{\sqrt{|(v')^2 - (u')^2|}}. \tag{2.15}$$

$$h_{12} = h_{21} = \varepsilon \left\langle \frac{\partial^2 r}{\partial q_1 \partial q_2}, N \right\rangle_1 = 0. \tag{2.16}$$

$$h_{22} = \varepsilon \left\langle \frac{\partial^2 r}{\partial q_2^2}, N \right\rangle_1 = \varepsilon \frac{v'u'' - v''u'}{\sqrt{|(v')^2 - (u')^2|}}. \tag{2.17}$$

Substituindo (2.15), (2.16) e (2.17) em (2.11) e lembrando que $[g^{ij}] = \frac{\text{Adj}(g_{ij})}{\det(g_{ij})}$ obtemos

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} &= \frac{-\varepsilon}{\det(g_{ij})} \begin{bmatrix} h_{11} & 0 \\ 0 & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{22} & 0 \\ 0 & g_{11} \end{bmatrix} \\
 &= \frac{-\varepsilon}{\det(g_{ij})} \begin{bmatrix} h_{11}g_{22} & 0 \\ 0 & h_{22}g_{11} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \frac{-\varepsilon}{u^2[(v')^2 - (u')^2]} \left(\frac{\varepsilon v'u}{\sqrt{|(v')^2 - (u')^2|}} \right) [(v')^2 - (u')^2] = \frac{-v'}{u \sqrt{|(v')^2 - (u')^2|}}, \\
 a_{22} &= \frac{-\varepsilon}{u^2[(v')^2 - (u')^2]} \left(\varepsilon \frac{v'u'' - v''u'}{\sqrt{|(v')^2 - (u')^2|}} \right) u^2 = \frac{v''u' - v'u''}{((v')^2 - (u')^2) \sqrt{|(v')^2 - (u')^2|}}.
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Observe que se a curva é p.c.a, $(v')^2 - (u')^2 = \eta$. Logo,

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{-v'}{u} \\ a_{22} &= \eta(v''u' - v'u''). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Por outro lado, se a curva estiver no plano tipo-espaço yz (seu vetor normal é tipo-tempo), então sua parametrização é dada por $\alpha(q_2) = (0, u(q_2), v(q_2))$. Assim, S é parametrizada por

$$r(q_1, q_2) := \begin{bmatrix} \cosh(q_1) & \sinh(q_1) & 0 \\ \sinh(q_1) & \cosh(q_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u(q_2) \\ v(q_2) \end{bmatrix} = (u(q_2) \sinh(q_1), u(q_2) \cosh(q_1), v(q_2)). \quad (2.20)$$

Temos que

$$\frac{\partial r}{\partial q_1} = (u \cosh(q_1), u \sinh(q_1), 0), \quad \frac{\partial r}{\partial q_2} = (u' \sinh(q_1), u' \cosh(q_1), v'), \quad (2.21)$$

e

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial r}{\partial q_1}, \frac{\partial r}{\partial q_1} \right\rangle_1 &= -u^2 \cosh^2(q_1) + u^2 \sinh^2(q_1) = -u^2, \\ \left\langle \frac{\partial r}{\partial q_1}, \frac{\partial r}{\partial q_2} \right\rangle_1 &= -uu' \sinh(q_1) \cosh(q_1) + uu' \cosh(q_1) \sinh(q_1) = 0, \\ \left\langle \frac{\partial r}{\partial q_2}, \frac{\partial r}{\partial q_2} \right\rangle_1 &= -(u')^2 \sinh^2(q_1) + (u')^2 \cosh^2(q_1) + (v')^2 = (v')^2 + (u')^2. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Logo, a primeira forma fundamental de S é

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} -u^2 & 0 \\ 0 & (u')^2 + (v')^2 \end{bmatrix}.$$

Se a curva for p.c.a então ela só pode ser tipo espaço pois $(u')^2 + (v')^2 > 0$ e conseqüentemente, $(u')^2 + (v')^2 = 1$, logo

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} -u^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calculando a inversa, obtemos:

$$[g^{ij}] = \frac{1}{-u^2[(v')^2 + (u')^2]} \begin{bmatrix} (u')^2 + (v')^2 & 0 \\ 0 & -u^2 \end{bmatrix},$$

onde $\det(g_{ij}) = -u^2[(v')^2 + (u')^2]$. Ou

$$[g^{ij}] = -\frac{1}{u^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -u^2 \end{bmatrix},$$

no caso em que α é p.c.a. Calculando $\frac{\partial r}{\partial q_1} \times_1 \frac{\partial r}{\partial q_2}$, obtemos (ver Apêndice A, páginas 85,86 para detalhes):

$$\frac{\partial r}{\partial q_1} \times_1 \frac{\partial r}{\partial q_2} = (-uv' \sinh(q_1), -uv' \cosh(q_1), uu').$$

Daí,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial r}{\partial q_1} \times_1 \frac{\partial r}{\partial q_2}, \frac{\partial r}{\partial q_1} \times_1 \frac{\partial r}{\partial q_2} \right\rangle_1 &= -(v'u)^2 \sinh^2(q_1) + (v'u)^2 \cosh^2(q_1) + (uu')^2 \\ &= (uv')^2 + (uu')^2 \\ &= u^2[(u')^2 + (v')^2] \\ &= -\det(g_{ij}). \end{aligned}$$

Para calcular a segunda forma fundamental, observe que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 r}{\partial q_1^2} &= (u \sinh(q_1), u \cosh(q_1), 0), \\ \frac{\partial^2 r}{\partial q_1 \partial q_2} &= \frac{\partial^2 r}{\partial q_2 \partial q_1} = (u' \cosh(q_1), u' \sinh(q_1), 0), \\ \frac{\partial^2 r}{\partial q_2^2} &= (u'' \sinh(q_1), u'' \cosh(q_1), v''). \end{aligned}$$

Como $N = \frac{1}{\sqrt{|-u^2[(u')^2 + (v')^2]|}} (-v'u \sinh(q_1), -v'u \cosh(q_1), uu')$, de (2.10)

$$h_{11} = \varepsilon \left\langle \frac{\partial^2 r}{\partial q_1^2}, N \right\rangle_1 = \frac{-\varepsilon v'u}{\sqrt{(u')^2 + (v')^2}}, \quad (2.23)$$

$$h_{12} = h_{21} = \varepsilon \left\langle \frac{\partial^2 r}{\partial q_1 \partial q_2}, N \right\rangle_1 = 0, \quad (2.24)$$

$$h_{22} = \varepsilon \left\langle \frac{\partial^2 r}{\partial q_2^2}, N \right\rangle_1 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{(u')^2 + (v')^2}} (u'v'' - v'u''). \quad (2.25)$$

Consequentemente, por (2.11), temos que

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{-\varepsilon}{-u^2[(u')^2 + (v')^2]} \left(\frac{-\varepsilon v'u}{\sqrt{|(u')^2 + (v')^2|}} \right) [(u')^2 + (v')^2] = \frac{-v'}{u\sqrt{|(u')^2 + (v')^2|}}, \\ a_{22} &= \frac{-\varepsilon}{-u^2[(u')^2 + (v')^2]} \left(\varepsilon \frac{u'v'' - v'u''}{\sqrt{|(u')^2 + (v')^2|}} \right) (-u^2) = \frac{v'u'' - v''u'}{((u')^2 + (v')^2)\sqrt{|(u')^2 + (v')^2|}}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Se a curva for p.c.a, então

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{-v'}{u} \\ a_{22} &= v'u'' - v''u'. \end{aligned} \quad (2.27)$$

2.5.2 Superfície de revolução com eixo tipo-tempo

Passaremos agora ao caso em que o eixo de rotação é tipo-tempo. Aplicando a matriz de rotação $\phi_T(q_1)$ a uma curva geratriz regular $\alpha(q_2) = (u(q_2), 0, v(q_2))$ no plano tipo-tempo, obtemos a parametrização $r(q_1, q_2)$ dada por

$$r(q_1, q_2) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q_1) & \sin(q_1) \\ 0 & -\sin(q_1) & \cos(q_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ v \end{bmatrix} = (u, v \sin(q_1), v \cos(q_1)). \quad (2.28)$$

Assim temos:

$$\frac{\partial r}{\partial q_1} = (0, v \cos(q_1), -v \sin(q_1)), \quad \frac{\partial r}{\partial q_2} = (u', v' \sin(q_1), v' \cos(q_1)), \quad (2.29)$$

e

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial r}{\partial q_1}, \frac{\partial r}{\partial q_1} \right\rangle_1 &= 0 + v^2 \cos^2(q_1) + (-v)^2 \sin^2(q_1) = v^2, \\ \left\langle \frac{\partial r}{\partial q_1}, \frac{\partial r}{\partial q_2} \right\rangle_1 &= v' v \cos(q_1) \sin(q_1) - v' v \cos(q_1) \sin(q_1) = 0, \\ \left\langle \frac{\partial r}{\partial q_2}, \frac{\partial r}{\partial q_2} \right\rangle_1 &= -(u')^2 + (v')^2 \sin^2(q_1) + (v')^2 \cos^2(q_1) = (v')^2 - (u')^2. \end{aligned} \quad (2.30)$$

A primeira forma fundamental é dada por,

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} v^2 & 0 \\ 0 & (v')^2 - (u')^2 \end{bmatrix}.$$

Se α for p.c.a., tipo-espaço ou tipo-tempo temos que $\langle \alpha', \alpha' \rangle = \eta$. Logo a matriz da métrica toma a forma

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} v^2 & 0 \\ 0 & \eta \end{bmatrix},$$

cuja inversa é

$$[g^{ij}] = \frac{1}{v^2[(v')^2 - (u')^2]} \begin{bmatrix} (v')^2 - (u')^2 & 0 \\ 0 & v^2 \end{bmatrix},$$

onde $\det(g_{ij}) = v^2[(v')^2 - (u')^2]$. Ou ainda

$$[g^{ij}] = \frac{1}{v^2 \eta} \begin{bmatrix} \eta & 0 \\ 0 & v^2 \end{bmatrix},$$

no caso em que α é p.c.a.. Calculando $\frac{\partial r}{\partial q_1} \times_1 \frac{\partial r}{\partial q_2}$, obtemos (ver Apêndice A, páginas 86,87 e 88 para detalhes):

$$\frac{\partial r}{\partial q_1} \times_1 \frac{\partial r}{\partial q_2} = -(vv', vu' \sin(q_1), vu' \cos(q_1)).$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial r}{\partial q_1} \times_1 \frac{\partial r}{\partial q_2}, \frac{\partial r}{\partial q_1} \times_1 \frac{\partial r}{\partial q_2} \right\rangle_1 &= -(vv')^2 + (vu')^2 \sin^2(q_1) + (vu')^2 \cos^2(q_1) \\ &= -(vv')^2 + (vu')^2 \\ &= v^2[(u')^2 - (v')^2] \\ &= -\det(g_{ij}). \end{aligned}$$

Para calcular a segunda forma fundamental observe que assumindo $v \geq 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 r}{\partial q_1^2} &= (0, -v \sin(q_1), -v \cos(q_1)), \\ \frac{\partial^2 r}{\partial q_1 \partial q_2} &= \frac{\partial^2 r}{\partial q_2 \partial q_1} = (0, v' \cos(q_1), -v' \sin(q_1)), \\ \frac{\partial^2 r}{\partial q_2^2} &= (u'', v'' \sin(q_1), v'' \cos(q_1)). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Como por (2.6), $N = \frac{-1}{\sqrt{|v^2[(v')^2 - (u')^2]|}} (vv', vu' \sin(q_1), vu' \cos(q_1))$, de (2.10) segue que

$$h_{11} = \varepsilon \left\langle \frac{\partial^2 r}{\partial q_1^2}, N \right\rangle_1 = \frac{\varepsilon vv'}{\sqrt{|(v')^2 - (u')^2|}}, \quad (2.32)$$

$$h_{12} = h_{21} = \varepsilon \left\langle \frac{\partial^2 r}{\partial q_1 \partial q_2}, N \right\rangle_1 = 0, \quad (2.33)$$

$$h_{22} = \varepsilon \left\langle \frac{\partial^2 r}{\partial q_2^2}, N \right\rangle_1 = \frac{\varepsilon(v'u'' - u'v'')}{\sqrt{|(v')^2 - (u')^2|}}. \quad (2.34)$$

Substituindo (2.32), (2.33) e (2.34) em (2.11) temos novamente

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} &= \frac{-\varepsilon}{\det(g_{ij})} \begin{bmatrix} h_{11} & 0 \\ 0 & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{22} & 0 \\ 0 & g_{11} \end{bmatrix} \\ &= \frac{-\varepsilon}{\det(g_{ij})} \begin{bmatrix} h_{11}g_{22} & 0 \\ 0 & h_{22}g_{11} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{-\varepsilon}{v^2[(v')^2 - (u')^2]} \left(\frac{\varepsilon vv'}{\sqrt{|(v')^2 - (u')^2|}} \right) [(v')^2 - (u')^2] = \frac{-u'}{v \sqrt{|(v')^2 - (u')^2|}}, \\ a_{22} &= \frac{-\varepsilon}{v^2[(v')^2 - (u')^2]} \left(\varepsilon \frac{v'u'' - v''u'}{\sqrt{|(v')^2 - (u')^2|}} \right) v^2 = \frac{v''u' - v'u''}{((v')^2 - (u')^2) \sqrt{|(v')^2 - (u')^2|}}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Se a curva for p.c.a., temos

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{-u'}{v}, \\ a_{22} &= \eta(v''u' - v'u''). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Já sabemos que se uma dada superfície for tipo-espaço, então a primeira forma fundamental é positiva definida e, conseqüentemente, o operador de Weingarten é diagonalizável com respeito à métrica induzida. Porém, nem sempre isso é verdade para uma superfície tipo-tempo qualquer. Entretanto, no caso de superfícies de revolução tipo-tempo, o operador de Weingarten sempre é diagonalizável.

Proposição 2.14. *Seja S uma superfície de revolução com eixo tipo-espaço ou tipo-tempo e com curva perfil tipo-tempo imersa em \mathbb{R}_1^3 via imersão $i : S \rightarrow \mathbb{R}_1^3$. Então o operador de Weingarten da imersão é diagonalizável.*

Demonstração. Essencialmente o trabalho já foi feito. Basta observar que pelas expressões (2.18) e (2.35) as matrizes dos operadores de Weingarten já estão na forma diagonal. \square

A **Proposição 2.2** permite-nos falar em curvaturas principais para superfícies de revolução de nosso interesse assim como no caso euclidiano, o que será de grande importância para nosso trabalho. Observe que como as matrizes dos operadores de Weingarten das superfícies de revolução acima já estão na forma diagonal, então as entradas a_{11} e a_{22} são de fato as curvaturas principais de S .

3 A EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER PARA UMA PARTÍCULA CONFINADA A UMA SUPERFÍCIE NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

Neste capítulo obteremos as equações de Schrödinger para o confinamento de uma partícula a superfícies tipo-espaço e tipo-tempo, imersas em \mathbb{R}_1^3 . Observaremos que após realizarmos os confinamentos, as equações de Schrödinger das partículas irão adquirir potenciais geométricos distintos a depender do caráter causal da superfície. Mostraremos que para superfícies de revolução com eixos tipo-espaço e tipo-tempo no espaço de Minkowski, sempre é possível escrever tais equações em termos da métrica e das curvaturas principais no caso em que a superfície é umbílica, e em termos apenas das curvaturas principais, para os casos em que a superfície não tem pontos umbílicos, isto é, pontos na superfície onde a primeira e a segunda forma fundamental são proporcionais.

Seja $p = r(q_{1o}, q_{2o})$ um ponto em S e considere U uma vizinhança tubular de p em \mathbb{R}_1^3 . Munindo U do sistema de coordenadas $R(q_1, q_2, q_3)$ que considera uma coordenada ao longo da direção normal e as coordenadas da superfície, ver Figura 1, temos

$$R(q_1, q_2, q_3) = r(q_1, q_2) + q_3 N(q_1, q_2), \quad (3.1)$$

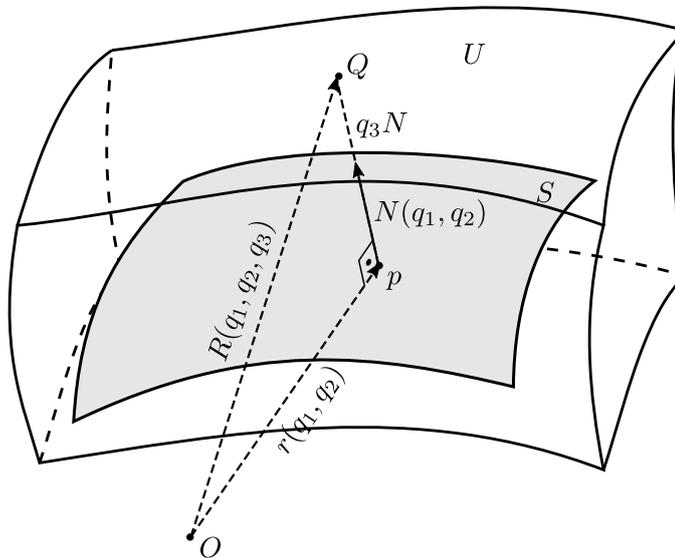


Figura 1 – Sistema de Coordenadas $R(q_1, q_2, q_3)$ em uma vizinhança tubular U de p .

Tomando em U a métrica induzida pela inclusão, obtemos

$$G_{ij} := \left\langle \frac{\partial R}{\partial q_i}, \frac{\partial R}{\partial q_j} \right\rangle_1.$$

Como

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial R}{\partial q_1} &= \frac{\partial r}{\partial q_1} + q_3 \frac{\partial N}{\partial q_1} \\
 &= \frac{\partial r}{\partial q_1} + q_3 \left(a_{11} \frac{\partial r}{\partial q_1} + a_{12} \frac{\partial r}{\partial q_2} \right) \\
 &= (\delta_{11} + q_3 a_{11}) \frac{\partial r}{\partial q_1} + (\delta_{12} + q_3 a_{12}) \frac{\partial r}{\partial q_2} \\
 &= \sum_{j=1}^2 (\delta_{1j} + q_3 a_{1j}) \frac{\partial r}{\partial q_j} \\
 \frac{\partial R}{\partial q_2} &= \sum_{j=1}^2 (\delta_{2j} + q_3 a_{2j}) \frac{\partial r}{\partial q_j} \\
 \frac{\partial R}{\partial q_3} &= N(q_1, q_2),
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker. Para $i, j = 1, 2$ obtemos

$$\begin{aligned}
 G_{ij} &= \left\langle \frac{\partial R}{\partial q_i}, \frac{\partial R}{\partial q_j} \right\rangle_1 = \left\langle \sum_{k=1}^2 (\delta_{ik} + q_3 a_{ik}) \frac{\partial r}{\partial q_k}, \sum_{l=1}^2 (\delta_{jl} + q_3 a_{jl}) \frac{\partial r}{\partial q_l} \right\rangle_1 \\
 &= \sum_{k,l=1}^2 (\delta_{ik} + q_3 a_{ik}) (\delta_{jl} + q_3 a_{jl}) g_{kl} \\
 &= \sum_{k,l=1}^2 \delta_{ik} \delta_{jl} g_{kl} + (\delta_{ik} a_{jl} + \delta_{jl} a_{ik}) q_3 g_{kl} + a_{ik} a_{jl} g_{kl} q_3^2 \\
 &= g_{ij} + [ag] + [ag]^T \Big|_{ij} q_3 + [aga^T]_{ij} q_3^2.
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Onde a e g denotam as matrizes da métrica induzida e do operador forma respectivamente.

Para $k = 1, 2$ temos

$$G_{k3} = G_{3k} = \left\langle \frac{\partial R}{\partial q_k}, \frac{\partial R}{\partial q_3} \right\rangle_1 = \left\langle \sum_{l=1}^2 (\delta_{kl} + q_3 a_{kl}) \frac{\partial r}{\partial q_l}, N \right\rangle_1 = 0, \tag{3.4}$$

e

$$G_{33} = \left\langle \frac{\partial R}{\partial q_3}, \frac{\partial R}{\partial q_3} \right\rangle_1 = \varepsilon. \tag{3.5}$$

Logo a matriz da métrica G tem a forma

$$G := [G_{ij}] = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & 0 \\ G_{21} & G_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}, \tag{3.6}$$

e sua inversa é dada por

$$G^{-1} := [G^{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon G_{22}}{\det(G)} & \frac{-\varepsilon G_{12}}{\det(G)} & 0 \\ \frac{-\varepsilon G_{21}}{\det(G)} & \frac{\varepsilon G_{11}}{\det(G)} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}. \tag{3.7}$$

Uma vez que conhecemos a expressão da métrica no sistema de coordenadas $R(q_1, q_2, q_3)$, estamos interessados em obter a equação de Schrödinger para uma partícula livre se movendo nesta vizinhança U de $p \in S$, munida destas coordenadas. Para isso, lembramos que se M é uma variedade semi-riemanniana de dimensão n e g a métrica de M^n , a expressão do operador laplaciano associado a métrica g aplicado a uma função f é dada por (O'NEILL, 1983)

$$\Delta_g f = \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{\sqrt{|\det(g)|}} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sqrt{|\det(g)|} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial q_j} \right), \quad (3.8)$$

onde $g = [g_{ij}]$ é a matriz da métrica de S . Substituindo os G_{ij} 's encontrados nas equações (3.3), (3.4) e (3.5) em (3.8) e considerando ψ a função de onda da partícula, temos

$$\begin{aligned} \Delta_G \psi &= \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{\sqrt{|\det(G)|}} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sqrt{|\det(G)|} G^{ij} \frac{\partial \psi}{\partial q_j} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^2 \frac{1}{\sqrt{|\det(G)|}} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sqrt{|\det(G)|} G^{ij} \frac{\partial \psi}{\partial q_j} \right) + \varepsilon \frac{1}{\sqrt{|\det(G)|}} \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\sqrt{|\det(G)|} \frac{\partial \psi}{\partial q_3} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^2 \frac{1}{\sqrt{|\det(G)|}} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sqrt{|\det(G)|} G^{ij} \frac{\partial \psi}{\partial q_j} \right) \\ &\quad + \varepsilon \frac{1}{\sqrt{|\det(G)|}} \left(\frac{1}{2\sqrt{|\det(G)|}} \frac{\partial}{\partial q_3} (|\det(G)|) \frac{\partial \psi}{\partial q_3} + \sqrt{|\det(G)|} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_3^2} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^2 \frac{1}{\sqrt{|\det(G)|}} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sqrt{|\det(G)|} G^{ij} \frac{\partial \psi}{\partial q_j} \right) + \varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial q_3} \left(\ln \sqrt{|\det(G)|} \right) \frac{\partial \psi}{\partial q_3} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_3^2} \right) \\ &= D(q_1, q_2, q_3) \psi + \varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial q_3} \left(\ln \sqrt{|\det(G)|} \right) \frac{\partial \psi}{\partial q_3} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_3^2} \right), \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde

$$D(q_1, q_2, q_3) \psi = \sum_{i,j=1}^2 \frac{1}{\sqrt{|\det(G)|}} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sqrt{|\det(G)|} G^{ij} \frac{\partial \psi}{\partial q_j} \right). \quad (3.10)$$

Considere agora a equação de Schrödinger

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \Delta_G \psi + V_{conf} \psi = i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \quad (3.11)$$

onde m é a massa da partícula, \hbar é a constante de Plank e $V_{conf} = \varepsilon V$ é o potencial confinante que atua apenas na direção normal à superfície. Tal potencial depende do caráter causal de S e da distância da partícula na vizinhança coordenada a S (SILVA; BASTOS; RIBEIRO, 2017), que pela forma como foi construído, é dada por $|q_3|$ e isso faz com que o potencial V_{conf} seja uniforme. Aqui consideramos que εV é o limite de uma sequência de potenciais $\{\varepsilon V_\lambda\}_\lambda$, que dependem do caráter causal de S e da distância à S , isto é, se q é um ponto na vizinhança coordenada,

$$\varepsilon V(q) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \varepsilon V_\lambda(q) = \begin{cases} 0, & \text{se } q \in S \\ +\infty, & \text{se } q \notin S \end{cases}$$

Substituindo a expressão obtida

$$\frac{-\hbar^2}{2m}D(q_1, q_2, q_3)\psi - \varepsilon \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial}{\partial q_3} \left(\ln \sqrt{|\det(G)|} \right) \frac{\partial \psi}{\partial q_3} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_3^2} \right) + V_{conf}(q_3)\psi = i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t}, \quad (3.12)$$

potencial confinante que atua apenas na direção normal à superfície de tal forma que ele é nulo se $p \in S$ e tende a $+\infty$ se p se afasta o pouco que seja de S .

Observe que a função de onda ψ está definida numa vizinhança tridimensional de $p \in S$. Consequentemente, esperamos que após o processo de confinamento a função de onda se divida em uma parte tangente a superfície, dependendo apenas das variáveis q_1 e q_2 , e uma parte normal que dependa apenas da variável q_3 . Assim, buscamos uma função de onda adequada χ tal que no evento da separação, possamos definir uma densidade de probabilidade de superfície

$$|\chi_T(q_1, q_2)|^2 \int |\chi_N(q_3)|^2 dq_3, \quad (3.13)$$

isto é,

$$\begin{aligned} \iint_S \left(|\chi_T(q_1, q_2)|^2 \int |\chi_N(q_3)|^2 dq_3 \right) \sqrt{|\det(g)|} dq_1 dq_2 &= \iiint |\chi_T(q_1, q_2) \chi_N(q_3)|^2 dS dq_3 \\ &= \iiint |\chi|^2 dS dq_3. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Para isso, observe que o elemento de volume dU nas coordenadas $R(q_1, q_2, q_3)$ é dado por

$$\begin{aligned} dU &= \left\langle \frac{\partial R}{\partial q_1} \times_1 \frac{\partial R}{\partial q_2}, \frac{\partial R}{\partial q_3} \right\rangle_1 dq_1 dq_2 dq_3 \\ &= \left\langle \sum_{j=1}^2 (\delta_{1j} + q_3 a_{1j}) \frac{\partial r}{\partial q_j} \times_1 \sum_{k=1}^2 (\delta_{2k} + q_3 a_{2k}) \frac{\partial r}{\partial q_k}, N(q_1, q_2) \right\rangle_1 dq_1 dq_2 dq_3 \\ &= ((1 + q_3 a_{11})(1 + q_3 a_{22}) - (q_3^2 a_{12} a_{21})) \left\langle \frac{\partial r}{\partial q_1} \times_1 \frac{\partial r}{\partial q_2}, N(q_1, q_2) \right\rangle_1 dq_1 dq_2 dq_3. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Como $N(q_1, q_2) = \frac{1}{\sqrt{|\det(g)|}} \left(\frac{\partial r}{\partial q_1} \times_1 \frac{\partial r}{\partial q_2} \right)$, então $\left(\frac{\partial r}{\partial q_1} \times_1 \frac{\partial r}{\partial q_2} \right) = N \sqrt{|\det(g)|}$. Substituindo em (3.15), temos

$$\begin{aligned} dU &= \varepsilon(1 + q_3(a_{11} + a_{22}) + q_3^2(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})) \sqrt{|\det(g)|} dq_1 dq_2 dq_3 \\ &= f dS dq_3, \end{aligned}$$

onde

$$f(q_1, q_2, q_3) = \varepsilon(1 + q_3(a_{11} + a_{22}) + q_3^2(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})), \quad (3.16)$$

e $dS = \sqrt{|\det(g)|} dq_1 dq_2$. Como estamos supondo a função de onda definida numa pequena vizinhança U de $p \in S$, podemos supor que os valores de q_3 estão num intervalo $(-\delta, \delta)$ com

δ pequeno. Assim, podemos assumir que $(1 + q_3(a_{11} + a_{22}) + q_3^2(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})) \geq 0$. Então o sinal de f depende apenas de ε , isto é, do caráter causal do vetor normal a S . Logo, para obtermos um elemento de volume (queremos que este seja sempre positivo), tomamos

$$dU = |f| \sqrt{|\det(g)|} dq_1 dq_2 dq_3. \quad (3.17)$$

Para encontrar a função de onda desejada, observe que

$$\int \int \int |\psi|^2 dU = \int \int \int |\psi|^2 |f| dS dq_3, \quad (3.18)$$

e queremos escolher a nova função de onda χ de tal forma que

$$\int \int \int |\psi|^2 dU = \int \int \int |\chi|^2 dS dq_3. \quad (3.19)$$

Assim tomamos $\chi = \psi \sqrt{|f|}$. Uma vez "redefinida" a função de onda, devemos escrever a equação de Schrödinger para essa nova função. Fazendo $|f| = F$, segue que $\psi = \frac{\chi}{\sqrt{F}}$. Além disso,

$$\frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{\chi}{\sqrt{F}} \right) = \frac{\frac{\partial \chi}{\partial q_3} \sqrt{F} - \frac{\chi}{2\sqrt{F}} \frac{\partial F}{\partial q_3}}{(\sqrt{F})^2} = \frac{1}{\sqrt{F}} \frac{\partial \chi}{\partial q_3} - \frac{\chi}{2F\sqrt{F}} \frac{\partial F}{\partial q_3} \quad (3.20)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial q_3^2} \left(\frac{\chi}{\sqrt{F}} \right) &= \left(\frac{-1}{F} \frac{1}{2\sqrt{F}} \frac{\partial F}{\partial q_3} \right) \frac{\partial \chi}{\partial q_3} + \frac{1}{\sqrt{F}} \frac{\partial^2 \chi}{\partial q_3^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{\chi}{\sqrt{F}} \right) \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial q_3} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\chi}{\sqrt{F}} \frac{1}{F^2} \left(\frac{\partial F}{\partial q_3} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\chi}{F\sqrt{F}} \frac{\partial^2 F}{\partial q_3^2}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Substituindo (3.20) e (3.21) na expressão $\frac{\partial^2 \psi}{\partial q_3^2} + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\ln \left(\sqrt{|\det(G)|} \right) \right) \frac{\partial \psi}{\partial q_3}$, como $\sqrt{|\det(G)|} = F \sqrt{|\det(g)|}$ e $\det g$ independe de q_3 , obtemos

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{-1}{F} \frac{1}{2\sqrt{F}} \frac{\partial F}{\partial q_3} \right) \frac{\partial \chi}{\partial q_3} + \frac{1}{\sqrt{F}} \frac{\partial^2 \chi}{\partial q_3^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{\chi}{\sqrt{F}} \right) \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial q_3} + \\
 & \quad + \frac{1}{2} \frac{\chi}{\sqrt{F}} \frac{1}{F^2} \left(\frac{\partial F}{\partial q_3} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\chi}{F\sqrt{F}} \frac{\partial^2 F}{\partial q_3^2} + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\ln \left(F \sqrt{|\det(g)|} \right) \right) \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{\chi}{\sqrt{F}} \right) \\
 & = \frac{1}{\sqrt{F}} \left[-\frac{1}{2F} \frac{\partial F}{\partial q_3} \frac{\partial \chi}{\partial q_3} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial q_3^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \chi}{\partial q_3} - \frac{\chi}{2F} \frac{\partial F}{\partial q_3} \right) \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial q_3} + \frac{1}{2} \frac{\chi}{F^2} \left(\frac{\partial F}{\partial q_3} \right)^2 - \frac{\chi}{2F} \frac{\partial^2 F}{\partial q_3^2} \right] \\
 & \quad + \frac{1}{\sqrt{F}} \left(\frac{\partial}{\partial q_3} (\ln F) + \frac{\partial}{\partial q_3} (\ln \sqrt{|\det(g)|}) \right) \left(\frac{\partial \chi}{\partial q_3} - \frac{\chi}{2F} \frac{\partial F}{\partial q_3} \right) \\
 & = \frac{1}{\sqrt{F}} \left[-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_3} (\ln F) \frac{\partial \chi}{\partial q_3} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial q_3^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial \chi}{\partial q_3} \frac{\partial}{\partial q_3} (\ln F) + \frac{1}{4F} \frac{\partial F}{\partial q_3} \frac{\partial}{\partial q_3} (\ln F) + \right] \\
 & \quad + \frac{1}{\sqrt{F}} \left[\frac{1}{2F^2} \left(\frac{\partial F}{\partial q_3} \right)^2 - \frac{\chi}{2F} \frac{\partial^2 F}{\partial q_3^2} \right] + \frac{1}{\sqrt{F}} \left(\frac{\partial \chi}{\partial q_3} \frac{\partial}{\partial q_3} (\ln F) - \frac{\chi}{2} \left(\frac{\partial}{\partial q_3} (\ln F) \right)^2 \right) \\
 & = \frac{1}{\sqrt{F}} \left[\frac{\partial^2 \chi}{\partial q_3^2} + \frac{\chi}{4} \left(\frac{\partial}{\partial q_3} (\ln F) \right)^2 + \frac{\chi}{2F^2} \left(\frac{\partial F}{\partial q_3} \right)^2 - \frac{\chi}{2F} \frac{\partial^2 F}{\partial q_3^2} - \frac{\chi}{2} \left(\frac{\partial}{\partial q_3} (\ln F) \right)^2 \right] \\
 & = \frac{1}{\sqrt{F}} \left[\frac{\partial^2 \chi}{\partial q_3^2} - \frac{1}{4F^2} \left(\frac{\partial F}{\partial q_3} \right)^2 + \frac{1}{2F^2} \left(\frac{\partial F}{\partial q_3} \right)^2 - \frac{\chi}{2F} \frac{\partial^2 F}{\partial q_3^2} \right] \\
 & = \frac{1}{\sqrt{F}} \left[\frac{\partial^2 \chi}{\partial q_3^2} + \frac{1}{4F^2} \left(\frac{\partial F}{\partial q_3} \right)^2 - \frac{\chi}{2F} \frac{\partial^2 F}{\partial q_3^2} \right] \\
 & = \frac{1}{\sqrt{F}} \left[\frac{\partial^2 \chi}{\partial q_3^2} + \frac{1}{4F^2} \left(\left(\frac{\partial F}{\partial q_3} \right)^2 - 2F \frac{\partial^2 F}{\partial q_3^2} \right) \chi \right]. \tag{3.22}
 \end{aligned}$$

Substituindo (3.22) em (3.12) obtemos

$$\begin{aligned}
 & \frac{-\hbar^2}{2m} D(q_1, q_2, q_3) \left(\frac{\chi}{\sqrt{F}} \right) - \varepsilon \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\sqrt{F}} \left[\frac{\partial^2 \chi}{\partial q_3^2} + \frac{1}{4F^2} \left(\left(\frac{\partial F}{\partial q_3} \right)^2 - 2F \frac{\partial^2 F}{\partial q_3^2} \right) \chi \right] \\
 & \quad + V_{conf} \frac{\chi}{\sqrt{F}} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\chi}{\sqrt{F}} \right). \tag{3.23}
 \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados de (3.23) por \sqrt{F} , temos

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{F} \left\{ \frac{-\hbar^2}{2m} D(q_1, q_2, q_3) \left(\frac{\chi}{\sqrt{F}} \right) - \varepsilon \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\sqrt{F}} \left[\frac{\partial^2 \chi}{\partial q_3^2} + \frac{1}{4F^2} \left(\left(\frac{\partial F}{\partial q_3} \right)^2 - 2F \frac{\partial^2 F}{\partial q_3^2} \right) \chi \right] \right\} \\
 & \quad + V_{conf} \chi = i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t}. \tag{3.24}
 \end{aligned}$$

Como $F = |f| = \varepsilon f$, segue que

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial q_3} &= \frac{\partial}{\partial q_3} \left((1 + (a_{11} + a_{22})q_3 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})q_3^2) \right) \\ &= \text{tr}(a_{ij}) + 2q_3 \det(a_{ij}), \\ \left(\frac{\partial F}{\partial q_3} \right)^2 &= (\text{tr}(a_{ij}) + 2 \det(a_{ij})q_3)^2 = (\text{tr}(a_{ij}))^2 + 4 \text{tr}(a_{ij}) \det(a_{ij})q_3 + 4q_3^2 (\det(a_{ij}))^2 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial q_3^2} &= 2 \det(a_{ij}).\end{aligned}$$

Logo, $\frac{1}{4F^2} \left(\left(\frac{\partial F}{\partial q_3} \right)^2 - 2F \frac{\partial^2 F}{\partial q_3^2} \right)$ é igual a

$$\frac{(\text{tr}(a_{ij}))^2 + 4 \text{tr}(a_{ij}) \det(a_{ij})q_3 + 4q_3^2 (\det(a_{ij}))^2 - 2(1 + \text{tr}(a_{ij})q_3 + \det(a_{ij})q_3^2) 2 \det(a_{ij})}{4 [(1 + \text{tr}(a_{ij})q_3 + \det(a_{ij})q_3^2)]^2}. \quad (3.25)$$

Neste momento passamos a levar em conta o efeito do potencial confinante V_{conf} . Aqui lembramos que tal potencial é uniforme, isto é, que suas equipotenciais dependem apenas da distância à S , depende do caráter causal da superfície e que a ação deste sobre a partícula equivale a fazer q_3 tender a zero. Usando estas informações em (3.25), obtemos

$$\frac{(\text{tr}(a_{ij}))^2 - 4 \det(a_{ij})}{4} = \left(\frac{\text{tr}(a_{ij})}{2} \right)^2 - \det(a_{ij}).$$

Como $\sqrt{|\det(G)|} = F \sqrt{|\det(g)|} = |f| \sqrt{|\det(g)|}$, da expressão de $D(q_1, q_2, q_3) \left(\frac{\chi}{\sqrt{F}} \right)$ em (3.10), temos

$$\begin{aligned}D(q_1, q_2, q_3) \left(\frac{\chi}{\sqrt{F}} \right) &= \sum_{i,j=1}^2 \frac{1}{\sqrt{|\det(G)|}} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sqrt{|\det(G)|} G^{ij} \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\chi}{\sqrt{F}} \right) \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^2 \frac{1}{|f| \sqrt{|\det(g)|}} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(|f| \sqrt{|\det(g)|} G^{ij} \frac{1}{\sqrt{|f|}} \left(\frac{\partial \chi}{\partial q_j} - \frac{\chi}{2} \frac{\partial}{\partial q_j} (\ln|f|) \right) \right).\end{aligned} \quad (3.26)$$

Observamos que de (3.7) os G^{ij} dependem dos G_{ij} e de $\det(G_{ij})$. Assim, segue de (3.3), (3.4), (3.5) e de (3.16) que, fazendo $q_3 \rightarrow 0$ em (3.26), obtemos

$$\sum_{i,j=1}^2 \frac{1}{\sqrt{|\det(g_{ij})|}} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sqrt{|\det(g_{ij})|} g^{ij} \frac{\partial \chi}{\partial q_j} \right).$$

Logo, fazendo $q_3 \rightarrow 0$ em (3.24) obtemos

$$\begin{aligned}-\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i,j=1}^2 \frac{1}{\sqrt{|\det(g_{ij})|}} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sqrt{|\det(g_{ij})|} g^{ij} \frac{\partial \chi}{\partial q_j} \right) - \frac{\hbar^2}{2m} [\varepsilon H^2 - K] \chi \\ - \varepsilon \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \chi}{\partial q_3^2} + V_\lambda(q_3) \chi = i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t}.\end{aligned} \quad (3.27)$$

Onde $H^2 = \left(\frac{\text{tr}(a_{ij})}{2} \right)^2$ e $K = \varepsilon \det a_{ij}$.

Para melhor observarmos as consequências do potencial confinante, faremos a separação de variáveis. Fazendo $\chi = \chi_E(q_1, q_2, q_3) \cdot \chi_\tau(t)$ e substituindo na equação (3.27), temos

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2m} \chi_\tau \sum_{i,j=1}^2 \frac{1}{\sqrt{|\det(g)|}} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sqrt{|\det(g)|} g^{ij} \frac{\partial \chi_E}{\partial q_j} \right) - \frac{\hbar^2}{2m} [\varepsilon H^2 - K] \chi_E \chi_\tau - \\ & - \varepsilon \frac{\hbar^2}{2m} \chi_\tau \frac{\partial^2 \chi_E}{\partial q_3^2} + V_{conf} \chi_E \chi_\tau = i\hbar \chi_E \frac{\partial \chi_\tau}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Dividindo ambos os lados de (3.28) por $\chi_E \chi_\tau$, temos

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\chi_E} \sum_{i,j=1}^2 \frac{1}{\sqrt{|\det(g)|}} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sqrt{|\det(g)|} g^{ij} \frac{\partial \chi_E}{\partial q_j} \right) - \frac{\hbar^2}{2m} [\varepsilon H^2 - K] \\ & - \varepsilon \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\chi_E} \frac{\partial^2 \chi_E}{\partial q_3^2} + V_{conf} = i\hbar \frac{1}{\chi_\tau} \frac{\partial \chi_\tau}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Desta forma, o lado esquerdo e o lado direito de (3.29) devem ser uma constante que chamaremos de E_3 , pois, o lado esquerdo independe de t e o direito independe de (q_1, q_2, q_3) . Logo,

$$i\hbar \frac{1}{\chi_\tau} \frac{\partial \chi_\tau}{\partial t} = E_3 \quad \implies \quad \frac{\partial \chi_\tau}{\partial t} = \frac{E_3}{i\hbar} \chi_\tau \quad (3.30)$$

e

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\chi_E} \sum_{i,j=1}^2 \frac{1}{\sqrt{|\det(g)|}} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sqrt{|\det(g)|} g^{ij} \frac{\partial \chi_E}{\partial q_j} \right) - \frac{\hbar^2}{2m} [\varepsilon H^2 - K] \\ & - \varepsilon \frac{1}{\chi_E} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \chi_E}{\partial q_3^2} + V_{conf} = E_3. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Assim,

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i,j=1}^2 \frac{1}{\sqrt{|\det(g)|}} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sqrt{|\det(g)|} g^{ij} \frac{\partial \chi_E}{\partial q_j} \right) - \frac{\hbar^2}{2m} [\varepsilon H^2 - K] \chi_E \\ & - \varepsilon \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \chi_E}{\partial q_3^2} + V_{conf} \chi_E = E_3 \chi_E. \end{aligned} \quad (3.32)$$

$\chi_E = \chi_T(q_1, q_2) \chi_N(q_3)$ e substituindo em (3.32), temos

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2m} \chi_N \sum_{i,j=1}^2 \frac{1}{\sqrt{|\det(g)|}} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sqrt{|\det(g)|} g^{ij} \frac{\partial \chi_T}{\partial q_j} \right) - \frac{\hbar^2}{2m} [\varepsilon H^2 - K] \chi_T \chi_N \\ & - \varepsilon \frac{\hbar^2}{2m} \chi_T \frac{\partial^2 \chi_N}{\partial q_3^2} + V_{conf} \chi_T \chi_N = E_3 \chi_T \chi_N. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Dividindo ambos os lados da equação acima por $\chi_T \chi_N$, temos

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\chi_T} \sum_{i,j=1}^2 \frac{1}{\sqrt{|\det(g)|}} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sqrt{|\det(g)|} g^{ij} \frac{\partial \chi_T}{\partial q_j} \right) - \frac{\hbar^2}{2m} [\varepsilon H^2 - K] \\ & - \varepsilon \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\chi_N} \frac{\partial^2 \chi_N}{\partial q_3^2} + V_{conf} = E_3. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Organizando os termos de forma a deixar termos que dependam apenas de q_3 num mesmo lado de (3.34), obtemos

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\chi_T} \sum_{i,j=1}^2 \frac{1}{\sqrt{|\det(g)|}} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sqrt{|\det(g)|} g^{ij} \frac{\partial \chi_T}{\partial q_j} \right) - \frac{\hbar^2}{2m} [\varepsilon H^2 - K] \\ & = \varepsilon \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\chi_N} \frac{\partial^2 \chi_N}{\partial q_3^2} - V_{conf} + E_3. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Desta forma, o lado esquerdo e o lado direito de (3.35) devem ser uma constante que chamaremos de E_2 . Assim,

$$\varepsilon \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\chi_N} \frac{\partial^2 \chi_N}{\partial q_3^2} - V_{conf} + E_3 = E_2, \quad (3.36)$$

donde,

$$\varepsilon \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \chi_N}{\partial q_3^2} - \varepsilon V \chi_N = (E_2 - E_3) \chi_N \quad (3.37)$$

e,

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{1}{\chi_T} \sum_{i,j=1}^2 \frac{1}{\sqrt{|\det(g)|}} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sqrt{|\det(g)|} g^{ij} \frac{\partial \chi_T}{\partial q_j} \right) - \frac{\hbar^2}{2m} [\varepsilon H^2 - K] = E_2, \quad (3.38)$$

donde

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \sum_{i,j=1}^2 \frac{1}{\sqrt{|\det(g)|}} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sqrt{|\det(g)|} g^{ij} \frac{\partial \chi_T}{\partial q_j} \right) - \frac{\hbar^2}{2m} [\varepsilon H^2 - K] \chi_T = E_2 \chi_T. \quad (3.39)$$

As equações (3.37) e (3.39) são as equações análogas as obtidas em (DA COSTA, 1981), em particular (3.39) é o resultado prometido no início desta seção. Ela nos mostra que após o confinamento da partícula a uma superfície tipo-espaço ou tipo-tempo imersa no espaço de Minkowski, a equação de Schrödinger adquire um potencial geométrico

$$V_S(q_1, q_2) = -\frac{\hbar^2}{2m} [\varepsilon H^2 - K]$$

que depende do caráter causal da superfície. Comparando com o caso euclidiano onde

$$V_S(q_1, q_2) = -\frac{\hbar^2}{2m} [H^2 - K]$$

observamos que em ambos os casos, o potencial induzido por geometria depende da informação intrínseca da superfície, contida na curvatura Gaussiana ($K = \varepsilon \det(a_{ij})$ para superfícies no espaço de Minkowski e $K = \det(a_{ij})$ para o caso euclidiano) e da informação extrínseca (εH^2 e H^2 para superfícies no espaço de Minkowski e no espaço euclidiano respectivamente) relacionada com a curvatura média. Essa "simples" alteração na expressão permite mudanças radicais na natureza do potencial induzido por geometria e conseqüentemente na dinâmica da partícula. O potencial V_S , é sempre atrativo no caso euclidiano, visto que $H^2 - K$ sempre é positivo, o que não ocorre para o potencial V_S no espaço de Minkowski onde o potencial é fortemente afetado pelo caráter causal da superfície, podendo ser atrativo ou repulsivo.

Outro fato relevante aqui, é a incorporação da informação do caráter causal da superfície na equação (3.37). Diferente do caso euclidiano, a forma como o potencial $V_{conf} = \varepsilon V$ age (forma de confinamento), muda a depender se a superfície é tipo-espaço, ou tipo-tempo.

Na próxima seção consideraremos S uma superfície de revolução tipo-espaço ou tipo-tempo no espaço de Minkowski \mathbb{R}_1^3 .

3.1 Desdobramentos da equação de Schrödinger: Superfícies de Revolução

Nesta seção iremos mais adiante com a separação de variáveis na equação (3.39) para o caso em que S é uma superfície de revolução tipo-espaço ou tipo-tempo, com eixo tipo-espaço ou tipo-tempo. Com ajuda do **Lema 3.1** abaixo, iremos obter equações do tipo Sturm-Liouville que possuem um potencial geométrico que depende das curvaturas principais da superfície no caso em que ela não possui pontos umbílicos e da métrica e da curvatura principal, no caso em que ela é umbílica.

Seja S uma superfície de revolução tipo-espaço ou tipo-tempo no espaço de Minkowski. Sabemos que podemos ter eixos de rotação com diferentes caracteres causais, entretanto, a métrica induzida obtida é sempre diagonal, não importando o caráter causal da curva perfil utilizada para obter a superfície. Assim a equação (3.39) pode ser reduzida a

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\sqrt{|\det(g)|}} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sqrt{|\det(g)|} g^{ii} \frac{\partial \chi_T}{\partial q_i} \right) - \frac{\hbar^2}{2m} [\varepsilon H^2 - K] \chi_T = E_2 \chi_T. \quad (3.40)$$

Indo mais adiante com a separação de variáveis, escrevendo $\chi_T(q_1, q_2) = \chi_1(q_1)\chi_2(q_2)$ e substituindo em (3.40) temos

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\sqrt{|\det(g)|}} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sqrt{|\det(g)|} g^{ii} \frac{\partial (\chi_1 \chi_2)}{\partial q_i} \right) - \frac{\hbar^2}{2m} [\varepsilon H^2 - K] \chi_1 \chi_2 = E_2 \chi_1 \chi_2. \quad (3.41)$$

Logo,

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\sqrt{|\det(g)|}} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\sqrt{|\det(g)|} g^{11} \frac{\partial (\chi_1 \chi_2)}{\partial q_1} \right) \\ & -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\sqrt{|\det(g)|}} \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\sqrt{|\det(g)|} g^{22} \frac{\partial (\chi_1 \chi_2)}{\partial q_2} \right) - \frac{\hbar^2}{2m} [\varepsilon H^2 - K] \chi_1 \chi_2 = E_2 \chi_1 \chi_2 \\ \implies & -\frac{\hbar^2}{2m} \chi_2 \frac{1}{\sqrt{|\det(g)|}} g^{11} \sqrt{|\det(g)|} \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial q_1^2} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\chi_1}{\sqrt{|\det(g)|}} \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\sqrt{|\det(g)|} g^{22} \frac{\partial \chi_2}{\partial q_2} \right) \\ & - \frac{\hbar^2}{2m} [\varepsilon H^2 - K] \chi_1 \chi_2 = E_2 \chi_1 \chi_2 \\ \implies & -\frac{\hbar^2}{2m} \chi_2 g^{11} \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial q_1^2} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\chi_1}{\sqrt{|\det(g)|}} \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\sqrt{|\det(g)|} g^{22} \frac{\partial \chi_2}{\partial q_2} \right) - \\ & - \frac{\hbar^2}{2m} [\varepsilon H^2 - K] \chi_1 \chi_2 = E_2 \chi_1 \chi_2. \end{aligned}$$

Dividindo ambos os lados da equação acima por $-\chi_1 \chi_2 (g^{11})$, temos

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\chi_1} \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial q_1^2} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\chi_2 g^{11}} \frac{1}{\sqrt{|\det(g)|}} \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\sqrt{|\det(g)|} g^{22} \frac{\partial \chi_2}{\partial q_2} \right) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{g^{11}} [\varepsilon H^2 - K] = \frac{-E_2}{g^{11}}. \quad (3.42)$$

Organizando a equação de forma a deixar termos que dependam apenas de q_2 num mesmo lado em (3.42), obtemos

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\chi_2 g^{11}} \frac{1}{\sqrt{|\det(g)|}} \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\sqrt{|\det(g)|} g^{22} \frac{\partial \chi_2}{\partial q_2} \right) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{g^{11}} [\varepsilon H^2 - K] + \frac{E_2}{g^{11}} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\chi_1} \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial q_1^2}. \quad (3.43)$$

Desta forma, o lado esquerdo e o lado direito de (3.43) devem ser uma constante que chamaremos de E_1 . Assim,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\chi_1} \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial q_1^2} = E_1 \implies \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial q_1^2} = -\frac{E_1 2m}{\hbar^2} \chi_1 \quad (3.44)$$

e

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\chi_2 g^{11}} \frac{1}{\sqrt{|\det(g)|}} \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\sqrt{|\det(g)|} g^{22} \frac{\partial \chi_2}{\partial q_2} \right) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{g^{11}} [\varepsilon H^2 - K] + \frac{E_2}{g^{11}} = E_1. \quad (3.45)$$

Multiplicando a equação (3.45) por $\frac{\chi_2 g^{11} 2m}{\hbar^2}$ obtemos

$$\frac{1}{\sqrt{|\det(g)|}} \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\sqrt{|\det(g)|} g^{22} \frac{\partial \chi_2}{\partial q_2} \right) + [\varepsilon H^2 - K] \chi_2 + \frac{E_2 \chi_2 2m}{\hbar^2} = \frac{E_1 \chi_2 g^{11} 2m}{\hbar^2}$$

e consequentemente,

$$\frac{1}{\sqrt{|\det(g)|}} \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\sqrt{|\det(g)|} g^{22} \frac{\partial \chi_2}{\partial q_2} \right) + \left[[\varepsilon H^2 - K] + \frac{E_2 2m}{\hbar^2} - \frac{E_1 g^{11} 2m}{\hbar^2} \right] \chi_2 = 0. \quad (3.46)$$

Neste momento estamos prontos para considerar algumas especificidades com respeito a superfícies de revolução no espaço de Minkowski. No que segue trataremos cinco tipos de superfícies de revolução cujos caracteres causais do eixo de revolução, do plano que contém a curva e da curva perfil, estão descritos na tabela abaixo.

Eixo	Plano	Curva perfil
tipo-espaço	tipo-tempo	tipo-espaço tipo-tempo
tipo-espaço	tipo-espaço	tipo-espaço
tipo-tempo	tipo-tempo	tipo-espaço tipo-tempo

Tabela 1 – Caracteres causais dos eixos, planos e curvas perfis considerados.

Para cumprir com nossos propósitos apresentados no início deste capítulo, encontraremos expressões "melhores" para as curvaturas principais k_1 e k_2 de uma superfície de revolução com eixo tipo-espaço e tipo-tempo. Tais expressões seguem do seguinte lema:

Lema 3.1. *Sejam k_1 e k_2 as curvaturas principais de uma superfície de revolução S obtida pela rotação de uma curva regular plana tipo-tempo ou tipo-espaço $\alpha(t) = (u(t), 0, v(t))$, no plano tipo-tempo xz , parametrizada pelo comprimento de arco, isto é $\langle \alpha', \alpha' \rangle = 1$, se $\alpha(t)$ for tipo-espaço e $\langle \alpha', \alpha' \rangle = -1$ se $\alpha(t)$ for tipo-tempo. Então as curvaturas principais são dadas por*

$$k_1(t) = \frac{-v'(t)}{u(t)}, \quad k_2(t) = \begin{cases} \frac{-v''(t)}{u'(t)}, & \text{se } u' \neq 0, \\ \frac{-u''(t)}{v'(t)}, & \text{se } v' \neq 0, \end{cases} \quad (3.47)$$

se o eixo for tipo-espaço e

$$k_1(t) = \frac{-u'(t)}{v(t)}, \quad k_2(t) = \begin{cases} \frac{-v''(t)}{u'(t)}, & \text{se } u' \neq 0, \\ \frac{-u''(t)}{v'(t)}, & \text{se } v' \neq 0. \end{cases} \quad (3.48)$$

se o eixo for tipo-tempo. Se α for p.c.a. e a curva for parametrizada por $\alpha(t) = (0, u(t), v(t))$, isto é α é uma curva tipo-espaço que mora no plano tipo-espaço yz , e é rotacionada em torno de um eixo tipo-espaço, então

$$k_1(t) = \frac{-v'(t)}{u(t)}, \quad k_2(t) = \begin{cases} \frac{-v''(t)}{u'(t)}, & \text{se } u' \neq 0, \\ \frac{u''(t)}{v'(t)}, & \text{se } v' \neq 0. \end{cases} \quad (3.49)$$

Demonstração. Consideremos primeiramente o caso em que o eixo é tipo-espaço. Sendo k_1 e k_2 as curvaturas principais da superfície S , temos que (ver página 24)

$$k_1 = -\frac{v'}{u}, \quad k_2 = \eta (v''u' - v'u'').$$

Se $\alpha(t)$ é curva regular, então $\alpha'(t) = (u'(t), 0, v'(t)) \neq 0 \forall t$. Como $\langle \alpha', \alpha' \rangle_1 = \eta$, segue que $-(u')^2 + (v')^2 = \eta$ e derivando, obtemos $u'u'' = v'v''$. Logo se $u' \neq 0$ temos

$$\eta u' k_2 = \eta^2 u' (v''u' - v'u'') = v''(u')^2 - v'u'u'' = v''(u')^2 - (v')^2 v'' = -\eta v''.$$

Assim,

$$\eta u' k_2 = -\eta v'' \implies k_2 = -\frac{v''}{u'}.$$

De forma análoga, se $v' \neq 0$ temos que

$$\eta v' k_2 = \eta^2 v' (v''u' - v'u'') = v'v''u' - (v')^2 u'' = u''(u')^2 - u''(v')^2 = -\eta u''.$$

Logo,

$$\eta v' k_2 = -\eta u'' \implies k_2 = -\frac{u''}{v'}.$$

Os outros dois casos do lema são demonstrados de forma análoga e observando que para o caso em que a curva mora no plano yz , teremos $u'u'' = -v'v''$. □

Corolário 3.2. *Nas condições do lema acima, se $k_1 = k_2$, então k_1 e k_2 são iguais a uma constante.*

Demonstração. Com efeito, considerando que o eixo é tipo-espaço e $\alpha(t) = (u(t), 0, v(t))$, como $-k_1 = \frac{v'}{u}$, temos

$$-k_1' = \frac{v''u - v'u'}{u^2} = \frac{v''}{u} - \frac{v'u'}{u^2}. \quad (3.50)$$

Nos pontos onde $u' \neq 0$, $v'' = -k_2 u'$. Então, de (3.50) segue que

$$-k_1' = -k_2 \frac{u'}{u} + k_1 \frac{u'}{u} = 0,$$

pois $k_1 = k_2$. Se $v' \neq 0$, $u'' = -k_2 v'$. Então de (3.50) e $v'v'' = u'u''$, temos

$$-k_1' = \frac{u'u''}{v'} + \frac{k_1 u'}{u} = \frac{u'u''}{v'u} = \frac{-k_2 u'}{u} + \frac{k_1 u'}{u} = 0.$$

Assim em qualquer um dos casos, temos $k_1' = 0$ donde $k_1 = k_2 = \text{constante}$. Se o eixo é tipo-tempo temos

$$-k_1' = \left(\frac{u'}{v}\right)' = \frac{u''v - u'v'}{v^2} = \frac{u''}{v} - \frac{u'v'}{v^2}. \quad (3.51)$$

Então, assim como no caso tipo espaço, de $v'v'' = u'u''$ segue que $u'' = \frac{v'v''}{u'}$ e supondo $u' \neq 0$ obtemos

$$-k_1' = \frac{v'v''}{u'v} - \frac{u'v'}{v^2} = -k_2 \frac{v'}{v} + k_1 \frac{v'}{v} = 0,$$

logo, $k_1 = k_2 = \text{constante}$. Se $v' \neq 0$ temos

$$-k_1' = \frac{u''}{v} - \frac{u'v'}{v^2} = -k_2 \frac{v'}{v} + k_1 \frac{v'}{v} = 0$$

assim $k_1 = k_2 = \text{constante}$, e sendo a curva parametrizada pelo comprimento de arco, concluímos que se $k_1(q_2) = k_2(q_2)$ teremos $k_1(q_2) = k_2(q_2) = k$, com k constante. O caso em que α mora em um plano tipo-espaço se demonstra de forma análoga. \square

3.1.1 1º caso: S é uma superfície de revolução com eixo tipo-espaço

Seja $\alpha(q_2) = (u(q_2), 0, v(q_2)) := (u, 0, v)$ a curva perfil de S parametrizada pelo comprimento de arco. Assim, $\det g_{ij} = \eta u^2$, $g^{11} = \frac{1}{u^2}$ e $g^{22} = \eta$, (ver seção 2.5) onde $\eta = 1$ se a curva perfil for tipo-espaço e $\eta = -1$ se for tipo-tempo. Substituindo em (3.46) e supondo $u \geq 0$, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{|\eta u^2|}} \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\sqrt{|\eta u^2|} \eta \frac{\partial \chi_2}{\partial q_2} \right) + \left[[\varepsilon H^2 - K] + \frac{E_2 2m}{\hbar^2} - \frac{E_1 2m}{u^2 \hbar^2} \right] \chi_2 = 0 \\ \implies & \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\eta u \frac{\partial \chi_2}{\partial q_2} \right) + \left[[\varepsilon H^2 - K] + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E_2 - \frac{E_1}{u^2} \right) \right] \chi_2 = 0 \\ \implies & \eta \frac{1}{u} \left(u' \frac{\partial \chi_2}{\partial q_2} + u \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial q_2^2} \right) + \left[[\varepsilon H^2 - K] + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E_2 - \frac{E_1}{u^2} \right) \right] \chi_2 = 0. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Multiplicando a equação (3.52) por η obtemos,

$$\frac{\partial^2 \chi_2}{\partial q_2^2} + \frac{u'}{u} \frac{\partial \chi_2}{\partial q_2} + \eta \left[[\varepsilon H^2 - K] + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E_2 - \frac{E_1}{u^2} \right) \right] \chi_2 = 0. \quad (3.53)$$

Realizando a substituição $\chi(q_2) = y(q_2)W(q_2)$, onde $W(q_2) = e^{-\int \frac{u'}{2u} dq_2} = (u(q_2))^{-\frac{1}{2}}$ (ver exercício 4, página 124 em (SOTOMAYOR, 1979)), obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 y}{dq_2^2} + \left[\eta \left([\varepsilon H^2 - K] + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E_2 - \frac{E_1}{u^2} \right) \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{u'}{u} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{u'}{u} \right)' \right] y = 0 \\ \Rightarrow & \frac{d^2 y}{dq_2^2} + \left[\eta [\varepsilon H^2 - K] + \eta \frac{2mE_2}{\hbar^2} - \eta \frac{2mE_1}{\hbar^2} \frac{1}{u^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{u'}{u} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{u''u - u'u'}{u^2} \right) \right] y = 0 \\ \Rightarrow & \frac{d^2 y}{dq_2^2} + \left[\eta [\varepsilon H^2 - K] + \eta \frac{2mE_2}{\hbar^2} - \eta \frac{2mE_1}{\hbar^2} \frac{1}{u^2} - \left(\frac{(u')^2 + 2u''u - 2(u')^2}{4u^2} \right) \right] y = 0 \\ \Rightarrow & \frac{d^2 y}{dq_2^2} + \left[\eta [\varepsilon H^2 - K] + \eta \frac{2mE_2}{\hbar^2} - \eta \frac{2mE_1}{\hbar^2} \frac{1}{u^2} + \frac{(u')^2}{4u^2} - \frac{2u''u}{4u^2} \right] y = 0. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Agora, suponha que S é uma superfície de revolução com eixo tipo-espaço e com $k_1 = k_2 = k$. Assim, como $(u')^2 = (v')^2 - \eta$, $\frac{2u''}{u} = 2k_1k_2$ e $\varepsilon H^2 - K = 0$, substituindo em (3.54) obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 y}{dq_2^2} + \left[\eta \frac{2mE_2}{\hbar^2} - \eta \frac{2mE_1}{\hbar^2} \frac{1}{u^2} + \frac{(v')^2 - \eta}{4u^2} - \frac{2u''u}{4u^2} \right] y = 0 \\ \Rightarrow & \frac{d^2 y}{dq_2^2} + \left[\eta \frac{2mE_2}{\hbar^2} - \eta \frac{2mE_1}{\hbar^2} \frac{1}{u^2} + \frac{1}{4} \left(k_1^2 - 2k_1k_2 - \frac{\eta}{u^2} \right) \right] y = 0 \\ \Rightarrow & \frac{d^2 y}{dq_2^2} + \left[\eta \frac{2mE_2}{\hbar^2} - \eta \left(\frac{2mE_1}{\hbar^2} + \frac{1}{4} \right) \frac{1}{u^2} + \frac{1}{4} (k^2 - 2k^2) \right] y = 0 \\ \Rightarrow & \frac{d^2 y}{dq_2^2} + \left[\eta \frac{2mE_2}{\hbar^2} - \eta \left(\frac{2mE_1}{\hbar^2} + \frac{1}{4} \right) \frac{1}{u^2} - \frac{k^2}{4} \right] y = 0. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Se a superfície não possui pontos umbílicos, da equação (3.50) com $u' \neq 0$ temos

$$-k'_1 = \frac{v''}{u} + \frac{k_1 u'}{u} = -\frac{k_2 u'}{u} + \frac{k_1 u'}{u} = \frac{u'}{u} (k_1 - k_2),$$

donde

$$\frac{u'}{u} = \frac{k'_1}{k_2 - k_1}. \quad (3.56)$$

Se $v' \neq 0$, temos

$$-k'_1 = \frac{v''}{u} + k_1 \frac{u'}{u} = \frac{u'u''}{u^2} + k_1 \frac{u'}{u} = -k_2 \frac{u'}{u} + k_1 \frac{u'}{u} = \frac{u'}{u} (k_1 - k_2),$$

donde

$$\frac{u'}{u} = \frac{k'_1}{k_2 - k_1}.$$

Além disso, de $-k_1 = \frac{v'}{u}$, temos

$$(-k_1)^2 = \frac{(v')^2}{u^2} = \frac{(u')^2 + \eta}{u^2} = \left(\frac{u'}{u}\right)^2 + \frac{\eta}{u^2}. \quad (3.57)$$

Logo,

$$-\frac{\eta}{u^2} = \left(\frac{u'}{u}\right)^2 - (k_1)^2 = \left(\frac{k'_1}{k_2 - k_1}\right)^2 - k_1^2. \quad (3.58)$$

Agora, substituindo (3.58) em (3.54) temos

$$\begin{aligned} & \frac{d^2y}{dq_2^2} + \left[\eta [\varepsilon H^2 - K] + \eta \frac{2mE_2}{\hbar^2} - \eta \frac{2mE_1}{\hbar^2} \frac{1}{u^2} + \frac{1}{4} \left(\left(\frac{u'}{u}\right)^2 - \frac{2u''u}{u^2} \right) \right] y = 0 \\ \Rightarrow & \frac{d^2y}{dq_2^2} + \left[\eta \frac{2mE_2}{\hbar^2} + \eta \varepsilon \left(\frac{k_1 + k_2}{2}\right)^2 - \eta \varepsilon k_1 k_2 + \frac{2mE_1}{\hbar^2} \left(\left(\frac{k'_1}{k_2 - k_1}\right)^2 - k_1^2 \right) \right] y + \\ & + \frac{1}{4} \left[\left(\frac{k'_1}{k_2 - k_1}\right)^2 - 2k_1 k_2 \right] y = 0 \\ \Rightarrow & \frac{d^2y}{dq_2^2} + \left[\eta \frac{2mE_2}{\hbar^2} + \eta \varepsilon \frac{k_1^2}{4} + \eta \varepsilon \frac{k_2^2}{4} + \eta \varepsilon \frac{2k_1 k_2}{4} - \eta \varepsilon k_1 k_2 - \frac{1}{2} k_1 k_2 + \frac{1}{4} \left(\frac{k'_1}{k_2 - k_1}\right)^2 \right] y \\ & + \frac{2mE_1}{\hbar^2} \left[\left(\frac{k'_1}{k_2 - k_1}\right)^2 - k_1^2 \right] y = 0 \end{aligned} \quad (3.59)$$

Agora, observe que se a curva perfil for tipo-espaço, então $\eta = 1$ e $\varepsilon = -1$, pois a superfície de revolução é tipo-espaço e conseqüentemente seu vetor normal é tipo-tempo. Logo,

$$\eta \varepsilon \frac{2k_1 k_2}{4} - \eta \varepsilon k_1 k_2 - \frac{1}{2} k_1 k_2 = -\frac{2k_1 k_2}{4} + k_1 k_2 - \frac{1}{2} k_1 k_2 = 0.$$

De forma análoga, se a curva perfil for tipo-tempo, $\eta = -1$ e $\varepsilon = 1$, assim

$$\eta \varepsilon \frac{2k_1 k_2}{4} - \eta \varepsilon k_1 k_2 - \frac{1}{2} k_1 k_2 = -\frac{2k_1 k_2}{4} + k_1 k_2 - \frac{1}{2} k_1 k_2 = 0.$$

Substituindo em (3.59), obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{d^2y}{dq_2^2} + \left[\eta \frac{2mE_2}{\hbar^2} + \eta \varepsilon \frac{k_1^2}{4} + \eta \varepsilon \frac{k_2^2}{4} + \left(\frac{1}{4} + \frac{2mE_1}{\hbar^2} \right) \left(\frac{k'_1}{k_2 - k_1}\right)^2 - \frac{2mE_1}{\hbar^2} k_1^2 \right] y = 0 \\ \Rightarrow & \frac{d^2y}{dq_2^2} + \left[\eta \frac{2mE_2}{\hbar^2} - k_1^2 \left(\frac{2mE_1}{\hbar^2} - \frac{\eta \varepsilon}{4} \right) + \eta \varepsilon \frac{k_2^2}{4} + \left(\frac{2mE_1}{\hbar^2} + \frac{1}{4} \right) \left(\frac{k'_1}{k_2 - k_1}\right)^2 \right] y = 0 \end{aligned} \quad (3.60)$$

Assim, se a curva perfil for tipo-espaço, obtemos

$$\frac{d^2y}{dq_2^2} + \left[\frac{2mE_2}{\hbar^2} + \left(\frac{2mE_1}{\hbar^2} + \frac{1}{4} \right) \left(\left(\frac{k'_1}{k_2 - k_1}\right)^2 - k_1^2 \right) - \frac{k_2^2}{4} \right] y = 0 \quad (3.61)$$

e se a curva perfil for tipo-tempo,

$$\frac{d^2y}{dq_2^2} + \left[-\frac{2mE_2}{\hbar^2} + \left(\frac{2mE_1}{\hbar^2} + \frac{1}{4} \right) \left(\left(\frac{k'_1}{k_2 - k_1} \right)^2 - k_1^2 \right) - \frac{k_2^2}{4} \right] y = 0. \quad (3.62)$$

Se a curva perfil for tipo-espaço p.c.a. dada por $\alpha(q_2) = (0, u(q_2), v(q_2)) := (0, u, v)$ então, $\det g_{ij} = -u^2$, $g^{11} = -\frac{1}{u^2}$, $g^{22} = 1$. Substituindo em (3.46) e assumindo $u \geq 0$, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{|-u^2|}} \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\sqrt{|-u^2|} \frac{\partial \chi_2}{\partial q_2} \right) + \left[[\varepsilon H^2 - K] + \frac{E_2 2m}{\hbar^2} + \frac{E_1 2m}{u^2 \hbar^2} \right] \chi_2 = 0 \\ \Rightarrow & \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial q_2} \left(u \frac{\partial \chi_2}{\partial q_2} \right) + \left[[\varepsilon H^2 - K] + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E_2 + \frac{E_1}{u^2} \right) \right] \chi_2 = 0 \\ \Rightarrow & \frac{1}{u} \left(u' \frac{\partial \chi_2}{\partial q_2} + u \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial q_2^2} \right) + \left[[\varepsilon H^2 - K] + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E_2 + \frac{E_1}{u^2} \right) \right] \chi_2 = 0 \\ \Rightarrow & \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial q_2^2} + \frac{u'}{u} \frac{\partial \chi_2}{\partial q_2} + \left[[\varepsilon H^2 - K] + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E_2 + \frac{E_1}{u^2} \right) \right] \chi_2 = 0. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Realizando a substituição $\chi_2(q_2) = y(q_2)W(q_2)$, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{d^2y}{dq_2^2} + \left[\left([\varepsilon H^2 - K] + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E_2 + \frac{E_1}{u^2} \right) \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{u'}{u} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{u'}{u} \right)' \right] y = 0 \\ \Rightarrow & \frac{d^2y}{dq_2^2} + \left[[\varepsilon H^2 - K] + \frac{2mE_2}{\hbar^2} + \frac{2mE_1}{\hbar^2} \frac{1}{u^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{u'}{u} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{u''u - u'u'}{u^2} \right) \right] y = 0 \\ \Rightarrow & \frac{d^2y}{dq_2^2} + \left[[\varepsilon H^2 - K] + \frac{2mE_2}{\hbar^2} + \frac{2mE_1}{\hbar^2} \frac{1}{u^2} - \left(\frac{(u')^2 + 2u''u - 2(u'u')^2}{4u^2} \right) \right] y = 0 \\ \Rightarrow & \frac{d^2y}{dq_2^2} + \left[[\varepsilon H^2 - K] + \frac{2mE_2}{\hbar^2} + \frac{2mE_1}{\hbar^2} \frac{1}{u^2} + \frac{(u')^2}{4u^2} - \frac{2u''u}{4u^2} \right] y = 0. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Sendo S tipo-espaço, $\langle N, N \rangle_1 = \varepsilon = -1$. Além disso,

$$k_1 k_2 = \frac{-v'}{u} (v'u'' - v''u') = \frac{1}{u} (-(v')^2 u'' + v'v''u') = \frac{1}{u} (-(v')^2 u'' - (u')^2 u'') = -\frac{u''}{u}$$

e $(u')^2 = 1 - (v')^2$. Se $u' \neq 0$, temos como antes

$$-k'_1 = \frac{v''}{u} + \frac{k_1 u'}{u} = -\frac{k_2 u'}{u} + \frac{k_1 u'}{u} = \frac{u'}{u} (k_1 - k_2),$$

donde

$$\frac{u'}{u} = \frac{k'_1}{k_2 - k_1}. \quad (3.65)$$

Se $v' \neq 0$, temos

$$-k'_1 = \frac{v''}{u} + k_1 \frac{u'}{u} = \frac{-u'u''}{v'} + k_1 \frac{u'}{u} = -k_2 \frac{u'}{u} + k_1 \frac{u'}{u} = \frac{u'}{u} (k_1 - k_2),$$

donde

$$\frac{u'}{u} = \frac{k'_1}{k_2 - k_1}.$$

Além disso, de $-k_1 = \frac{v'}{u}$, temos

$$(-k_1)^2 = \frac{(v')^2}{u^2} = \frac{1 - (u')^2}{u^2} = -\left(\frac{u'}{u}\right)^2 + \frac{1}{u^2}. \quad (3.66)$$

Logo,

$$\frac{1}{u^2} = \left(\frac{u'}{u}\right)^2 + (k_1)^2 = \left(\frac{k'_1}{k_2 - k_1}\right)^2 + k_1^2. \quad (3.67)$$

Agora, substituindo (3.66) e (3.67) em (3.64) temos

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 y}{dq_2^2} + \left[\epsilon H^2 - K \right] + \frac{2mE_2}{\hbar^2} + \frac{2mE_1}{\hbar^2} \frac{1}{u^2} + \frac{(u')^2}{4u^2} - \frac{2u''u}{4u^2} \Big] y = 0 \\ \Rightarrow & \frac{d^2 y}{dq_2^2} + \left[\frac{2mE_2}{\hbar^2} - \left(\frac{k_1 + k_2}{2}\right)^2 + k_1 k_2 + \frac{2mE_1}{\hbar^2} \left(\left(\frac{k'_1}{k_2 - k_1}\right)^2 + k_1^2 \right) \right] y + \\ & + \frac{1}{4} \left[\left(\frac{k'_1}{k_2 - k_1}\right)^2 + 2k_1 k_2 \right] y = 0 \\ \Rightarrow & \frac{d^2 y}{dq_2^2} + \left[\frac{2mE_2}{\hbar^2} + \left(\frac{2mE_1}{\hbar^2} + \frac{1}{4}\right) \left(\left(\frac{k'_1}{k_2 - k_1}\right)^2 + k_1^2 \right) + k_1 k_2 - \frac{k_1^2}{2} - \frac{k_2^2}{4} \right] y = 0. \quad (3.68) \end{aligned}$$

3.1.2 2º caso: S é uma superfície de revolução com eixo tipo-tempo

Agora considere S uma superfície de revolução com eixo-tipo tempo. Aqui consideramos a curva geratriz $\alpha(q_2) = (u(q_2), 0, v(q_2))$ no plano xz parametrizada pelo comprimento de arco e a rotacionamos em torno do eixo x que é tipo-tempo. Logo os g_{ij} 's da métrica são $g_{11} = v^2$, $g_{22} = \eta$ e $g_{12} = g_{21} = 0$, $\det g = \eta v^2$. Conseqüentemente, os g^{ij} 's são dados por $g^{11} = \frac{1}{v^2}$, $g^{22} = \eta$ (ver seção 2.5). Substituindo na equação (3.46) e considerando $v \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{|\eta v^2|}} \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\sqrt{|\eta v^2|} \eta \frac{\partial \chi_2}{\partial q_2} \right) + \left[(\epsilon H^2 - K) + \frac{2mE_2}{\hbar^2} - \frac{2mE_1}{\hbar^2} \frac{1}{v^2} \right] \chi_2 = 0 \\ \Rightarrow & \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\eta v \frac{\partial \chi_2}{\partial q_2} \right) + \left[(\epsilon H^2 - K) + \frac{2mE_2}{\hbar^2} - \frac{2mE_1}{\hbar^2} \frac{1}{v^2} \right] \chi_2 = 0 \\ \Rightarrow & \eta \frac{1}{v} \left(v' \frac{\partial \chi_2}{\partial q_2} + v \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial q_2^2} \right) + \left[(\epsilon H^2 - K) + \frac{2mE_2}{\hbar^2} - \frac{2mE_1}{\hbar^2} \frac{1}{v^2} \right] \chi_2 = 0 \\ \Rightarrow & \eta \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial q_2^2} + \eta \frac{v'}{v} \frac{\partial \chi_2}{\partial q_2} + \left[(\epsilon H^2 - K) + \frac{2mE_2}{\hbar^2} - \frac{2mE_1}{\hbar^2} \frac{1}{v^2} \right] \chi_2 = 0. \quad (3.69) \end{aligned}$$

Multiplicando a equação (3.69) por η , obtemos

$$\frac{\partial^2 \chi_2}{\partial q_2^2} + \frac{v'}{v} \frac{\partial \chi_2}{\partial q_2} + \eta \left[(\epsilon H^2 - K) + \frac{2mE_2}{\hbar^2} - \frac{2mE_1}{\hbar^2} \frac{1}{v^2} \right] \chi_2 = 0. \quad (3.70)$$

Fazendo a mudança de variáveis $\chi_2(q_2) = y(q_2)F(q_2)$, onde $F(q_2) = e^{-\int \frac{v'}{2v} dq_2} = v((q_2))^{-\frac{1}{2}}$, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{d^2y}{dq_2^2} + \left[\eta(\varepsilon H^2 - K) + \eta \frac{2mE_2}{\hbar^2} - \eta \frac{2mE_1}{\hbar^2} \frac{1}{v^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{v'}{v} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{v'}{v} \right)' \right] y = 0 \\ \Rightarrow & \frac{d^2y}{dq_2^2} + \left[\eta(\varepsilon H^2 - K) + \eta \frac{2mE_2}{\hbar^2} - \eta \frac{2mE_1}{\hbar^2} \frac{1}{v^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{v'}{v} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{v''v - (v')^2}{v^2} \right) \right] y = 0 \\ \Rightarrow & \frac{d^2y}{dq_2^2} + \left[\eta(\varepsilon H^2 - K) + \eta \frac{2mE_2}{\hbar^2} - \eta \frac{2mE_1}{\hbar^2} \frac{1}{v^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{(v')^2 + 2v''v - 2(v')^2}{v^2} \right) \right] y = 0 \\ \Rightarrow & \frac{d^2y}{dq_2^2} + \left[\eta(\varepsilon H^2 - K) + \eta \frac{2mE_2}{\hbar^2} - \eta \frac{2mE_1}{\hbar^2} \frac{1}{v^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{(v')^2}{v^2} - \frac{2v''v}{v^2} \right) \right] y = 0. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Como $(v')^2 = (u')^2 + \eta$, considerando que a curvatura de S é constante $k_1 = k_2 = k$, novamente $\varepsilon H^2 - K = 0$. Além disso

$$k_1 k_2 = -\frac{u'}{v} \eta (v''u' - v'u'') = -\eta \left(\frac{(u')^2 v'' - (v')^2 v''}{v} \right) = (-\eta)^2 \frac{v''}{v} = \frac{v''}{v}. \quad (3.72)$$

Logo, a equação (3.71) toma a forma

$$\begin{aligned} & \frac{d^2y}{dq_2^2} + \left[\eta \frac{2mE_2}{\hbar^2} - \eta \frac{2mE_1}{\hbar^2} \frac{1}{v^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{(u')^2 + \eta}{v^2} - \frac{2v''v}{v^2} \right) \right] y = 0 \\ \Rightarrow & \frac{d^2y}{dq_2^2} + \left[\eta \frac{2mE_2}{\hbar^2} - \eta \left(\frac{2mE_1}{\hbar^2} - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{v^2} + \frac{1}{4} (k_1^2 - 2k_1 k_2) \right] y = 0 \\ \Rightarrow & \frac{d^2y}{dq_2^2} + \left[\eta \frac{2mE_2}{\hbar^2} - \eta \left(\frac{2mE_1}{\hbar^2} - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{v^2} - \frac{k^2}{4} \right] y = 0. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Se a superfície não possui pontos umbílicos, observe que da equação (3.51), para $v' \neq 0$, temos

$$-k'_1 = \left(\frac{u'}{v} \right)' = \frac{u''v - u'v'}{v^2} = \frac{u''}{v} - \frac{u'v'}{v^2} = -k_2 \frac{v'}{v} + k_1 \frac{v'}{v} = \frac{v'}{v} (k_1 - k_2).$$

Logo,

$$\frac{v'}{v} = \frac{k'_1}{k_2 - k_1}. \quad (3.74)$$

Se $u' \neq 0$, temos

$$-k'_1 = \frac{u''}{v} - \frac{u'v'}{v^2} = \frac{v'v''}{u'v} + k_1 \frac{v'}{v} = -k_2 \frac{v'}{v} + k_1 \frac{v'}{v} = \frac{v'}{v} (k_1 - k_2).$$

Assim,

$$\frac{v'}{v} = \frac{k'_1}{k_2 - k_1}. \quad (3.75)$$

Além disso,

$$k_1 k_2 = \frac{-u'}{v} (v'u'' - v''u') = \left(\frac{(u')^2 v''}{v} - \frac{v'u'u''}{v} \right) = \frac{v''}{v} ((u')^2 - (v')^2) = \frac{v''}{v}, \quad (3.76)$$

e,

$$(-k_1)^2 = \left(\frac{u'}{v}\right)^2 = \frac{(v')^2 - \eta}{v^2} = \left(\frac{v'}{v}\right)^2 - \frac{\eta}{v^2},$$

assim,

$$\frac{\eta}{v^2} = \left(\frac{k'_1}{k_2 - k_1}\right)^2 - (k_1)^2. \quad (3.77)$$

Substituindo (3.75), (3.76) e (3.77) em (3.71) obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{d^2y}{dq_2^2} + \left[\eta \varepsilon \frac{(k_1 + k_2)^2}{4} - \eta \varepsilon k_1 k_2 + \eta \frac{2mE_2}{\hbar^2} - \frac{2mE_1}{\hbar^2} \left(\left(\frac{k'_1}{k_2 - k_1} \right)^2 - k_1^2 \right) \right] y \\ & + \frac{1}{4} \left[\left(\frac{k'_1}{k_2 - k_1} \right)^2 - 2k_1 k_2 \right] y = 0 \\ \Rightarrow & \frac{d^2y}{dq_2^2} + \left[\eta \frac{2mE_2}{\hbar^2} + \eta \varepsilon \frac{k_1^2}{4} + \eta \varepsilon \frac{k_2^2}{4} + \eta \varepsilon \frac{k_1 k_2}{2} - \eta \varepsilon k_1 k_2 - \frac{1}{2} k_1 k_2 + \frac{1}{4} \left(\frac{k'_1}{k_2 - k_1} \right)^2 \right] y \\ & - \frac{2mE_1}{\hbar^2} \left[\left(\frac{k'_1}{k_2 - k_1} \right)^2 - k_1^2 \right] y = 0 \\ \Rightarrow & \frac{d^2y}{dq_2^2} + \left[\eta \frac{2mE_2}{\hbar^2} - \frac{k_1^2}{4} - \frac{k_2^2}{4} - \left(\frac{2mE_1}{\hbar^2} - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{k'_1}{k_2 - k_1} \right)^2 + \frac{2mE_1}{\hbar^2} k_1^2 \right] y = 0 \\ \Rightarrow & \frac{d^2y}{dq_2^2} + \left[\eta \frac{2mE_2}{\hbar^2} + k_1^2 \left(\frac{2mE_1}{\hbar^2} + \frac{\eta \varepsilon}{4} \right) - \left(\frac{2mE_1}{\hbar^2} - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{k'_1}{k_2 - k_1} \right)^2 + \eta \varepsilon \frac{k_2^2}{4} \right] y = 0. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Desta forma, se a curva é tipo-espaço, obtemos

$$\frac{d^2y}{dq_2^2} + \left[\frac{2mE_2}{\hbar^2} - \left(\frac{2mE_1}{\hbar^2} - \frac{1}{4} \right) \left(\left(\frac{k'_1}{k_2 - k_1} \right)^2 - k_1^2 \right) - \frac{k_2^2}{4} \right] y = 0. \quad (3.79)$$

Se a curva é tipo-tempo,

$$\frac{d^2y}{dq_2^2} + \left[-\frac{2mE_2}{\hbar^2} - \left(\frac{2mE_1}{\hbar^2} - \frac{1}{4} \right) \left(\left(\frac{k'_1}{k_2 - k_1} \right)^2 - k_1^2 \right) - \frac{k_2^2}{4} \right] y = 0. \quad (3.80)$$

As equações (3.55), (3.61), (3.62), (3.73), (3.79) e (3.80) são as equações prometidas no início deste capítulo. Observamos que para o caso em que a curvatura é constante, as equações dependem do termo g^{11} da inversa da métrica e das curvaturas principais de S , e apenas das curvaturas principais no caso em que a superfície S não tem pontos umbílicos.

4 ESTIMATIVAS PARA O ESPECTRO

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados importantes da teoria de Sturm-Liouville e consideraremos problemas de Sturm-Liouville associados às equações (3.55) e (3.73). Empregaremos métodos da teoria clássica de Sturm-Liouville (SOTOMAYOR, 1979; SIMMONS, 2016) para encontrar cotas para os autovalores do problema. Além disso, faremos uso do método de Rayleigh-Ritz para melhorar as cotas para os primeiros autovalores dos problemas em questão.

4.1 Resultados da teoria de Sturm-Liouville

Os dois teoremas a seguir são devidos a Sturm, e aqui apresentaremos apenas seus enunciados. As demonstrações podem ser encontradas na referência (SOTOMAYOR, 1979) páginas 104 a 122.

Teorema 4.1. (Teorema da Separação de Sturm): *Sejam u e v soluções reais linearmente independentes de*

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0, \quad (4.1)$$

onde $a(x)$ e $b(x)$ são contínuas. Então os zeros de u e v são alternados.

Teorema 4.2. (Teorema da Comparação de Sturm): *Sejam u e v soluções reais não triviais de*

$$(p(x)u')' + q(x)u = 0 \quad (4.2)$$

$$(p(x)v')' + q_1(x)v = 0 \quad (4.3)$$

onde p , p' , q e q_1 são contínuas, $p(x) > 0$ e $q_1(x) \geq q(x)$ para todo x . Se $x_1 < x_2$ são zeros consecutivos de u , então v se anula pelo menos uma vez em (x_1, x_2) , a menos que neste intervalo tenhamos $q_1(x) \equiv q(x)$ e $v(x) \equiv cu(x)$, $c \in \mathbb{R}$.

Em outras palavras, o teorema de comparação de Sturm nos diz que quanto maior for $Q(x)$ na equação

$$(p(x)u')' + Q(x)u = 0, \quad (4.4)$$

mais a solução $u(x)$ irá oscilar, e nas condições do teorema, que v se anula primeiro que u . Os seguintes corolários também são encontrados na referência (SOTOMAYOR, 1979).

Corolário 4.3. *Considere a equação*

$$(p(x)u')' + q(x)u = 0 \quad (4.5)$$

definida no intervalo $[a, b]$ onde p , p' e q são contínuas e $p(x) > 0$. Se $q(x) \leq 0$ em $[a, b]$, então as soluções não-triviais de (4.5) tem no máximo um zero neste intervalo.

Demonstração. Vamos comparar a equação (4.5) com a equação

$$(p(x)v')' = 0, \quad (4.6)$$

isto é, $q_1(x) = 0$. Pelo **Teorema 4.2** segue que entre dois zeros de u deve existir um zero de v . Porém, uma solução não-trivial de (4.6) é dada por

$$v(x) = \int_a^x \frac{dt}{p(t)}. \quad (4.7)$$

Como v se anula apenas em $x = a$, então u só pode ter um zero no intervalo $[a, b]$, pois se tivesse outro, v deveria se anular entre eles. \square

No próximo corolário obteremos uma estimativa (razoável) para a distância entre dois zeros sucessivos de uma solução da equação (4.5). Além disso, obteremos uma estimativa para o número de zeros das soluções que satisfazem uma dada condição de contorno.

Corolário 4.4. *Sejam m, M constantes tais que*

$$0 < m \leq q(x) \leq M, \quad (4.8)$$

em $[a, b]$ e seja $u(x)$ uma solução não trivial de

$$u'' + q(x)u = 0. \quad (4.9)$$

Então

1. Se x_1 e x_2 são zeros consecutivos de u , então

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}} \leq x_2 - x_1 \leq \frac{\pi}{\sqrt{m}}. \quad (4.10)$$

2. Se $u(a) = u(b) = 0$ e u tem $n - 1$ zeros em (a, b) , então

$$\frac{\sqrt{m}(b-a)}{\pi} \leq n \leq \frac{\sqrt{M}(b-a)}{\pi}. \quad (4.11)$$

Demonstração. Para demonstrar a desigualdade (4.10) iremos comparar a equação (4.9) com as equações

$$z'' + mz = 0, \quad (4.12)$$

$$z'' + Mz = 0. \quad (4.13)$$

Observe que a função $z(x) = \sin(\sqrt{m}(x - x_1))$ é uma solução da equação $z'' + mz = 0$ que se anula em x_1 e seu próximo zero ocorre em $x_1 + \frac{\pi}{\sqrt{m}}$. Como $q(x) \geq m$, pelo **Teorema 4.2**, devemos ter $x_1 \leq x_2 \leq x_1 + \frac{\pi}{\sqrt{m}}$ e assim $x_2 - x_1 \leq \frac{\pi}{\sqrt{m}}$. Para mostrar a outra parte da desigualdade, observamos que $z(x) = \sin(\sqrt{M}(x - x_1))$ é solução da equação $z'' + Mz = 0$ que se anula em x_1

e seu próximo zero ocorre em $x_1 + \frac{\pi}{\sqrt{M}}$. Como $q(x) \leq M$, segue novamente pelo **Teorema 4.2** que $x_1 + \frac{\pi}{\sqrt{M}} \leq x_2$ e assim $x_2 - x_1 \geq \frac{\pi}{\sqrt{M}}$.

Para demonstrar o segundo item, observe que se $u(a) = u(b) = 0$ e u tem $n - 1$ zeros em (a, b) então tais zeros dividem o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos. Da desigualdade (4.10), para cada par de zeros consecutivos x_{i-1}, x_i temos

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}} \leq x_i - x_{i-1} \leq \frac{\pi}{\sqrt{m}},$$

com i de 1 a n , onde $x_0 = a$ e $x_n = b$. Somando estas desigualdades obtemos

$$n \frac{\pi}{\sqrt{M}} \leq b - a \leq n \frac{\pi}{\sqrt{m}},$$

e assim

$$\frac{\sqrt{m}(b-a)}{\pi} \leq n \leq \frac{\sqrt{M}(b-a)}{\pi}. \quad (4.14)$$

□

Passamos agora a definir o que é um problema de Sturm-Liouville.

Definição 4.5. Considere a equação com coeficientes reais

$$(p(x)u')' + (\lambda\rho(x) - q(x))u = 0, \quad (4.15)$$

onde λ é um parametro real e $p(x)$ é de classe C^1 e positiva em $[a, b]$, $\rho(x)$ é contínua e positiva em $[a, b]$ e q é uma função contínua em $[a, b]$. Chamaremos uma equação deste tipo de uma *equação de Sturm-Liouville*.

Agora considere a equação (4.15) definida no intervalo $[a, b]$ e sejam λ_1 e λ_2 , com $\lambda_1 \neq \lambda_2$, valores de λ tais que (4.15) admite soluções não-triviais u_1 e u_2 , isto é,

$$\begin{aligned} (p(x)u_1')' + (\lambda_1\rho(x) - q(x))u_1 &= 0 \\ (p(x)u_2')' + (\lambda_2\rho(x) - q(x))u_2 &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicando a primeira equação por u_2 , a segunda por u_1 e subtraindo obtemos

$$\begin{aligned} p'(x)u_2'u_1 + p(x)u_2''u_1 + \rho(x)u_1u_2\lambda_2 - p'(x)u_1'u_2 - p(x)u_1''u_2 - \rho(x)u_1u_2\lambda_1 &= 0 \\ \implies p'(x)(u_2'u_1 - u_1'u_2) + p(x)(u_2''u_1 - u_1''u_2) &= \rho(x)u_1u_2(\lambda_1 - \lambda_2) \\ \implies [p(x)(u_2'u_1 - u_1'u_2)]' &= \rho(x)u_1u_2(\lambda_1 - \lambda_2). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Integrando em $[a, b]$ temos

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b \rho(x)u_1(x)u_2(x)dx = [p(x)(u_2'u_1 - u_1'u_2)]_a^b. \quad (4.17)$$

Se considerarmos o espaço $C^0[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ contínua}\}$ e $C^2[a, b]$ o subespaço das funções de classe C^2 em $[a, b]$, a integral,

$$\int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx, \quad (4.18)$$

com $f(x)$ e $g(x) \in C^0[a, b]$, define um produto interno positivo-definido em $C^0[a, b]$, visto que ρ é positiva. Além disso, se a integral do lado esquerdo de (4.17) se anular, essa condição faz com que as soluções u_1 e u_2 sejam ortogonais em relação a este produto interno. Assim, para que esta ortogonalidade ocorra, impomos as soluções condições de contorno lineares em u que anule o termo da direita de (4.17). Tais condições são chamadas *condições de contorno auto-adjuntas*. Um exemplo de condição de contorno auto-adjunta é

$$\alpha u(a) + \alpha' u'(a) = 0 \quad e \quad \beta u(b) + \beta' u'(b) = 0 \quad (4.19)$$

onde α e α' são constantes que não se anulam ao mesmo tempo e o mesmo ocorre com β , β' . Se $\alpha = \beta$, então as condições periódicas

$$u(a) = u(b) \quad e \quad u'(a) = u'(b) \quad (4.20)$$

também são auto-adjuntas.

Definição 4.6. Considere o problema formado pela equação

$$(p(x)u')' + (\lambda\rho(x) - q(x))u = 0, \quad (4.21)$$

definida no intervalo $[a, b]$ munida de condições de contorno auto-adjuntas. A este tipo de problema chamaremos *um problema de Sturm-Liouville regular no intervalo $[a, b]$* .

Os valores de λ para os quais o problema admite solução não trivial são ditos *autovalores* do problema e as soluções não triviais correspondente a um autovalor λ são chamadas *autofunções* do problema associadas a λ . Essa terminologia é justificada pois podemos reescrever o problema de Sturm-Liouville através do problema de autovalor

$$Lu = \lambda u \quad , \quad \text{onde} \quad Lu = \frac{1}{\rho}(-u'' + q(x)u),$$

com condições de contorno auto-adjuntas. Observe que pela forma como foi definido, se λ_1 e λ_2 são autovalores distintos para o problema de Sturm-Liouville definido acima, então as autofunções u_1 e u_2 correspondentes a λ_1 e λ_2 , respectivamente, são ortogonais em relação ao produto interno (4.18) definido em $C^2[a, b]$ isto é,

$$\int_a^b u_1(x)u_2(x)\rho(x)dx = 0. \quad (4.22)$$

Considere agora o problema de Sturm-Liouville dado por

$$\begin{aligned} u'' + (\lambda\rho(x) - q(x))u &= 0 \\ u(a) = u(b) &= 0. \end{aligned} \quad (4.23)$$

As próximas duas proposições abaixo, cujas demonstrações podem ser encontradas na referência (SOTOMAYOR, 1979) página 122, serão de grande utilidade para nosso trabalho. A primeira delas trata da existência de uma sequência crescente, infinita e divergente de autovalores para o problema (4.23). A segunda, que é uma consequência do teorema espectral para operadores auto-adjuntos, trata da existência de uma base ortonormal de autofunções de um problema de Sturm-Liouville.

Proposição 4.7. *Os autovalores do problema (4.23) formam uma sequência infinita $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty$ satisfazendo*

1. *Se $\lambda < \lambda_0$, a solução u_λ não se anula no intervalo (a, b) ;*
2. *Para $n \geq 1$, se $\lambda_{n-1} < \lambda < \lambda_n$ a solução u_λ correspondente a λ tem exatamente n zeros em (a, b) e $u_\lambda(b) \neq 0$;*
3. *$\forall n \geq 0$, u_{λ_n} tem exatamente n zeros em (a, b) e $u_{\lambda_n}(b) = 0$.*

Além disso, a menos de uma constante multiplicativa, existe apenas uma autofunção u_{λ_n} associada a cada λ_n e u_{λ_n} têm exatamente n zeros em (a, b) .

Proposição 4.8. *Considere o problema de Sturm-Liouville formado pela equação*

$$(p(x)u')' + q(x)u + \lambda u = 0, \quad (4.24)$$

onde p, p' e q são contínuas com $p > 0$ em $[a, b]$, munida de uma das seguintes condições de contorno:

$$u(a) = u(b) = 0 \quad \text{ou} \quad u'(a) = u'(b) = 0, \quad (4.25)$$

e no caso em que $p(a) = p(b)$

$$u(a) = u(b) \quad \text{e} \quad u'(a) = u'(b). \quad (4.26)$$

Então podemos afirmar

1. *Em cada um dos três casos, os autovalores formam uma sequência $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ que tende para $+\infty$.*
2. *Em cada um dos três casos existe uma base ortonormal $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ de $C^0[a, b]$ formada por autofunções.*
3. *Se $f \in C^2[a, b]$ satisfaz uma das condições de contorno indicadas, então a expansão de f na base ortonormal correspondente dada no item anterior*

$$f = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle f, u_n \rangle u_n, \quad (4.27)$$

converge uniformemente em $[a, b]$.

4.2 Aplicações

Passamos agora a aplicar os resultados vistos acima às equações (3.55) e (3.73), impondo condições de fronteiras auto-adjuntas a estas, obtendo assim problemas de Sturm-Liouville. Iniciaremos por considerar o seguinte problema de Sturm-Liouville:

$$\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial q_1^2} + \frac{2mE_1}{\hbar^2} \chi_1 = 0, \quad \chi(0) = \chi(2\pi) = 0. \quad (4.28)$$

Fazendo $\frac{E_1 2m}{\hbar^2} = \lambda_1$ e escrevendo a equação característica, tomando $\chi_1 = e^{rq_1}$, temos $r^2 + \lambda_1 = 0$, e assim $r = \pm i\sqrt{\lambda_1}$. Logo, a solução geral da equação no problema (4.28) é dada por

$$\chi_1(q_1) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda_1} q_1) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda_1} q_1).$$

Levando em conta as condições de contorno, de $\chi_1(0) = \chi_1(2\pi) = 0$ temos

$$C_1 \cos(\sqrt{\lambda_1} 0) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda_1} 0) = 0 \implies C_1 = 0$$

$$C_1 \cos(\sqrt{\lambda_1} 2\pi) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda_1} 2\pi) = 0 \implies C_2 = 0 \text{ ou } \sin(\sqrt{\lambda_1} 2\pi) = 0 \implies \sqrt{\lambda_1} 2\pi = n\pi.$$

Desta forma, os valores de λ_1 tal que o problema de Sturm-Liouville tem solução não trivial são $\lambda_1 = \frac{n^2}{4}$, e as soluções têm a forma

$$\chi_1(q_1) = C_2 \sin(\sqrt{\lambda_1} q_1) = C_2 \sin\left(\frac{n}{2} q_1\right).$$

De $\lambda_1 = \frac{n^2}{4}$ temos que $\frac{2mE_1}{\hbar^2} = \frac{n^2}{4}$ e assim, $E_1 = \frac{n^2 \hbar^2}{8m}$. Substituindo nas equações (3.55) e (3.73) obtemos

$$\frac{d^2 y}{dq_2^2} + \left[\eta \frac{2mE_2}{\hbar^2} - \eta \left(\frac{n^2 + 1}{4} \right) \frac{1}{u^2} - \frac{k^2}{4} \right] y = 0, \quad (4.29)$$

e

$$\frac{d^2 y}{dq_2^2} + \left[\eta \frac{2mE_2}{\hbar^2} - \eta \left(\frac{n^2 - 1}{4} \right) \frac{1}{v^2} - \frac{k^2}{4} \right] y = 0. \quad (4.30)$$

Note que para cada valor de n em cada uma das equações (4.29) e (4.30) acima, assumindo condições de contorno auto-adjuntas, obtemos problemas de Sturm-Liouville diferentes. Assim, pelas **Proposições 4.1 e 4.2** para cada n obteremos uma sequência crescente, infinita e divergente de autovalores de cada um dos n problemas e para cada um destes, uma base ortonormal de $C^0[a, b]$ formada por autofunções. Os autovalores destes problemas estão associados aos estados quânticos de uma partícula confinada à tal superfície de revolução. Isso revela a importância de se conhecer os autovalores de cada um destes problemas de Sturm-Liouville associados ou boas estimativas para tais.

Como aplicação, consideraremos o confinamento de uma partícula quântica aos hiperbolóides de uma e duas folhas respectivamente. Tais hiperbolóides em \mathbb{R}_1^3 , são superfícies de

revolução com eixo tipo-tempo que possuem curvatura gaussiana constante e iguais a 1, no caso do hiperbolóide de uma folha e -1 para o hiperbolóide de duas folhas. Considere agora o hiperbolóide de uma folha obtido pela rotação da curva p.c.a. $\alpha(q_2) = (u(q_2), 0, v(q_2)) = (\sinh(q_2), 0, \cosh(q_2))$ em torno do eixo x que é tipo-tempo. Tal superfície é tipo-tempo, pois $\langle \alpha', \alpha' \rangle_1 = -1$, e tem por curvaturas principais $k(q_2) = k_2(q_2) = k_1(q_2) = -\frac{u'}{v} = -\frac{\cosh(q_2)}{\cosh(q_2)} = -1$. Como neste caso $\langle \alpha, \alpha \rangle_1 = \eta = -1$, substituindo em (4.30) temos

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^2 y}{dq_2^2} + \left[-\frac{2mE_2}{\hbar^2} - \frac{1}{4} + \left(\frac{n^2 - 1}{4} \right) \frac{1}{\cosh^2(q_2)} \right] y = 0 \\
 \implies & \frac{d^2 y}{dq_2^2} + \left[-\left(\frac{8mE_2 + \hbar^2}{4\hbar^2} \right) + \left(\frac{n^2 - 1}{4} \right) \operatorname{sech}^2(q_2) \right] y = 0.
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

Fazendo $\lambda = -\left(\frac{8mE_2 + \hbar^2}{4\hbar^2} \right)$ e $\mu_n = \frac{n^2 - 1}{4}$ a equação (4.31) toma a forma

$$\frac{d^2 y}{dq_2^2} + [\lambda + \mu_n \operatorname{sech}^2(q_2)] y = 0. \tag{4.32}$$

Agora, assuma $q_2 \in [a, b]$ e considere o problema de Sturm-Liouville regular,

$$\frac{d^2 y}{dq_2^2} + (\lambda + \mu_n \operatorname{sech}^2(q_2)) y = 0, \quad y(a) = y(b) = 0. \tag{4.33}$$

Fazendo $Q(q_2, n) = \lambda + \mu_n \operatorname{sech}^2(q_2)$, observe que para $n = 1$, $Q(q_2, 1) = \lambda$ e (4.33) se torna um oscilador harmônico, isto é,

$$\frac{d^2 y}{dq_2^2} + \lambda y = 0, \quad y(a) = y(b) = 0.$$

Se λ for negativo, a solução geral da equação (4.33) (sem a condição de fronteira) tem a forma

$$y(q_2) = d_1 e^{\sqrt{\lambda} q_2} + d_2 e^{-\sqrt{\lambda} q_2}, \tag{4.34}$$

e pelo **Corolário 4.1**, tais soluções não oscilam. Além disso, não existem valores de d_1 e d_2 que satisfaçam as condições de fronteira. Se λ for positivo, as soluções oscilam e têm a forma

$$y(q_2) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda} q_2) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda} q_2), \tag{4.35}$$

e a existência de soluções para (4.33) depende das condições de fronteira. Tomando as condições de fronteira auto-adjuntas $y(-\pi) = y(\pi) = 0$, concluímos que os valores de λ para os quais o problema (4.33) tem solução não trivial são $\lambda = k^2$, com k inteiro e $k \geq 0$. De $\lambda = -\left(\frac{8mE_2 + \hbar^2}{4\hbar^2} \right)$, obtemos

$$E_2 := (E_2)_k = -\left(\frac{4\hbar^2 k^2 + \hbar^2}{8m} \right),$$

e obtemos assim uma sequência E_{2k} , inteiramente negativa associada a esta superfície de revolução.

Para $n = 2$, $Q(q_2, 2) = \lambda + \frac{3 \operatorname{sech}^2(q_2)}{4}$. Se $Q(q_2, 2) \leq 0$ então as soluções de (4.33) terão no máximo um zero no intervalo (a, b) e como neste intervalo $\operatorname{sech}^2(q_2)$ é estritamente decrescente e positiva, segue que

$$\lambda + \frac{3 \operatorname{sech}^2(q_2)}{4} \leq 0 \implies \lambda \leq -\frac{3 \operatorname{sech}^2(q_2)}{4} \implies \lambda \leq -\frac{3 \operatorname{sech}^2(a)}{4}.$$

Assim, concluímos que sendo λ_1^2 o primeiro autovalor para este problema, $\lambda_1^2 \geq -\frac{3 \operatorname{sech}^2(a)}{4}$. Generalizando, observamos que se $Q(q_2, n) \leq 0$, então $\lambda_1^n \geq -\left(\frac{n^2 - 1}{4}\right) \operatorname{sech}^2(a)$. Desta forma, à medida que n cresce os intervalos para os quais as soluções não oscilam diminuem. Além disso, essa estimativa nos diz a partir de quais valores de γ a solução oscila, nos dando uma cota inferior (não muito boa) para o primeiro autovalor. Observamos também que pela reflexão que acabamos de fazer, o espectro de (4.28) exerce um forte controle sobre o espectro do problema (4.33). Dos resultados sobre a teoria de Sturm-Liouville vistos acima, segue que existe uma sequência crescente e infinita de autovalores λ_k^n para o problema de Sturm-Liouville (4.33) para cada n fixo, tal que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_k^n = +\infty.$$

E como $E_2 = -\left(\frac{4\hbar^2 \lambda_k^n + \hbar^2}{8m}\right)$, isso força a existência de uma sequência decrescente $(E_2)_k^n$, tal que para cada n fixo

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (E_2)_k^n = -\infty.$$

Agora usaremos o **Corolário 4.2** para obter uma estimativa razoável dos autovalores do problema (4.33) para o caso em que $n \geq 2$. Considere n fixo, e sejam m_n e M_n os valores mínimos e máximos de $Q(q_2, n)$ em $[a, b]$. Se x_1 e x_2 são zeros consecutivos da solução $y(q_2)$, pelo item 1 do **Corolário 4.2**, obtemos

$$\frac{\pi}{\sqrt{M_n}} \leq x_2 - x_1 \leq \frac{\pi}{\sqrt{m_n}}.$$

Além disso, segue do item 2 do mesmo corolário que se $y(q_2)$ é solução do problema (4.33) e tem r zeros em (a, b) , então o número r está no intervalo

$$\frac{\sqrt{m_n}(b-a)}{\pi} < r < \frac{\sqrt{M_n}(b-a)}{\pi}. \quad (4.36)$$

Como a função $Q(q_2, n)$ é contínua em \mathbb{R} , sejam $c, d \in [a, b]$ valores para os quais m_n e M_n são atingidos, isto é,

$$m_n = \lambda + \mu_n \operatorname{sech}^2(c) \quad \text{e} \quad M_n = \lambda + \mu_n \operatorname{sech}^2(d).$$

Elevando (4.36) ao quadrado e substituindo os valores para m_n e M_n acima, obtemos

$$\begin{aligned}
 & \frac{(\lambda + \mu_n \operatorname{sech}^2(c))(b-a)^2}{\pi^2} < r^2 < \frac{(\lambda + \mu_n \operatorname{sech}^2(d))(b-a)^2}{\pi^2} \\
 \implies & \lambda + \mu_n \operatorname{sech}^2(c) < \frac{r^2 \pi^2}{(b-a)^2} < \lambda + \mu_n \operatorname{sech}^2(d) \\
 \implies & \mu_n \operatorname{sech}^2(c) < \frac{r^2 \pi^2}{(b-a)^2} - \lambda < \mu_n \operatorname{sech}^2(d) \\
 \implies & \mu_n \operatorname{sech}^2(c) - \frac{r^2 \pi^2}{(b-a)^2} < -\lambda < \mu_n \operatorname{sech}^2(d) - \frac{r^2 \pi^2}{(b-a)^2} \\
 \implies & \frac{r^2 \pi^2}{(b-a)^2} - \mu_n \operatorname{sech}^2(d) < \lambda < \frac{r^2 \pi^2}{(b-a)^2} - \mu_n \operatorname{sech}^2(c). \tag{4.37}
 \end{aligned}$$

A estimativa aqui encontrada constitui uma parte importante dos resultados dessa tese. Através da desigualdade (4.37) obtemos para cada n , cotas para os autovalores do problema (4.33). Além disso, chamamos a atenção para o fato da ordem do autovalor ser precisamente o número de zeros que a autofunção correspondente possui no intervalo (a, b) . Assim, para $n = 2$, $r = 1$, $a = \ln(2)$, $b = \ln(8)$ (observe que desta forma M_n e m_n são atingidos em a e b respectivamente) temos para o primeiro autovalor λ_1^2 ,

$$\frac{\pi^2}{(\ln(8) - \ln(2))^2} - \frac{3}{4} \operatorname{sech}^2(\ln(2)) < \lambda_1^2 < \frac{\pi^2}{(\ln(8) - \ln(2))^2} - \frac{3}{4} \operatorname{sech}^2(\ln(8)).$$

Em valores aproximados, temos

$$4,655 < \lambda_1^2 < 5,090, \tag{4.38}$$

e variando os valores de r e n obtemos cotas para os outros autovalores dos problemas de Sturm-Liouville associados.

Aqui cabe uma observação. Visto que em \mathbb{R}_1^3 o hiperbolóide de uma folha possui curvaturas gaussianas e média constantes, percebemos que a estimativa obtida em (4.37) para os autovalores dos problemas de Sturm-Liouville associados é governada pelos valores extremos do termo $g^{11} = \operatorname{sech}^2(q_2)$ da inversa da métrica induzida pelo ambiente na imersão desta superfície de revolução em \mathbb{R}_1^3 , e neste caso é simplesmente o inverso do termo g_{11} . Em outras palavras, se a oscilação da função g_{11} for pequena, obtemos uma maior precisão na estimativa. Observe também que à medida que n aumenta, os autovalores do problema de Sturm-Liouville correspondentes, ficam mais próximos uns dos outros. Note que tal característica está relacionada com o comportamento causal da superfície. Concluímos então que em uma superfície umbílica tipo-tempo, quando n cresce, os primeiros autovalores dos problemas de Sturm-Liouville associados ficam mais próximos.

Considere agora o hiperbolóide de duas folhas obtido pela rotação da curva tipo-espaço $\alpha(q_2) = (u(q_2), 0, v(q_2)) = (\cosh(q_2), 0, \sinh(q_2))$ em torno do eixo x . Tal superfície é tipo-espaço e tem por curvaturas principais $k(q_2) = k_2(q_2) = k_1(q_2) = -\frac{u'}{v} = -\frac{\sinh(q_2)}{\sinh(q_2)} = -1$.

Como neste caso $\eta = 1$, substituindo em (4.30) temos

$$\begin{aligned} & \frac{d^2y}{dq_2^2} + \left[\frac{2mE_2}{\hbar^2} - \frac{1}{4} - \left(\frac{n^2 - 1}{4} \right) \frac{1}{\sinh^2(q_2)} \right] y = 0 \\ \implies & \frac{d^2y}{dq_2^2} + \left[\frac{8mE_2 - \hbar^2}{4\hbar^2} - \left(\frac{n^2 - 1}{4} \right) \operatorname{csch}^2(q_2) \right] y = 0. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Fazendo $\gamma = \frac{8mE_2 - \hbar^2}{4\hbar^2}$ e $\mu_n = \frac{n^2 - 1}{4}$, a equação (4.39) toma a forma

$$\frac{d^2y}{dq_2^2} + [\gamma - \mu_n \operatorname{csch}^2(q_2)] y = 0. \quad (4.40)$$

Como $\operatorname{csch}^2(q_2)$ não está definida em $q_2 = 0$, para que tenhamos condições de contorno auto-adjuntas o intervalo $[a, b]$ deve ser estritamente positivo ou estritamente negativo. Assumindo que o intervalo é positivo e que $y(a) = y(b) = 0$, novamente para $n = 1$ obtemos um oscilador harmônico cujas soluções são análogas a (4.34) para γ negativo e a (4.35) para γ positivo. Como antes a existência de soluções para (4.40) depende das condições de fronteira. Tomando as condições auto-adjuntas $y(-\pi) = y(\pi) = 0$, os valores de γ para os quais temos solução para o problema são $\gamma = k^2$, com k inteiro. Entretanto, como $\gamma = \frac{8mE_2 - \hbar^2}{4\hbar^2}$ segue que

$$E_2 := (E_2)_k = \frac{4\hbar^2 k^2 + \hbar^2}{8m} \quad (4.41)$$

e obtemos uma sequência E_{2k} estritamente positiva associada a esta superfície de revolução. Se $n > 1$, considere o problema de Sturm-Liouville regular com condições de contorno auto-adjuntas,

$$\frac{d^2y}{dq_2^2} + [\gamma - \mu_n \operatorname{csch}^2(q_2)] y = 0, \quad y(a) = y(b) = 0. \quad (4.42)$$

Fazendo $P(q_2, n) = \gamma - \mu_n \operatorname{csch}^2(q_2)$, temos que $P(q_2, 2) = \gamma - \frac{3 \operatorname{csch}^2(q_2)}{4}$. Se $P(q_2, 2) \leq 0$, então as soluções de (4.42) terão no máximo um zero no intervalo (a, b) e como neste intervalo a função $\operatorname{csch}^2(q_2)$ é estritamente decrescente e positiva, o valor máximo de $\operatorname{csch}^2(q_2)$ é atingido em $q_2 = a$. Logo

$$\gamma - \frac{3}{4} \operatorname{csch}^2(q_2) \leq 0 \implies \gamma \leq \frac{3}{4} \operatorname{csch}^2(q_2) \implies \gamma \leq \frac{3}{4} \operatorname{csch}^2(a).$$

Assim, denotando o primeiro autovalor por γ_1^2 , então $\gamma_1^2 \geq \frac{3}{4} \operatorname{csch}^2(a)$. Generalizando, observamos que se $P(q_2, n) \leq 0$ então $\gamma_1^n \geq \left(\frac{n^2 - 1}{4} \right) \operatorname{csch}^2(a)$. Desta forma, concluímos que todos os autovalores de (4.42) são estritamente positivos e ao contrário do caso do hiperbolóide de uma folha, à medida que n cresce, os intervalos para os quais as soluções não oscilam aumentam.

Novamente temos que para o problema (4.42), existe uma sequência crescente e infinita de autovalores γ_k^n para o problema de Sturm-Liouville (4.42), tal que para cada n fixo

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \gamma_k^n = +\infty.$$

E como $E_2 = (E_2)_k^n = \frac{4\hbar^2 \gamma_k^n + \hbar^2}{8m}$, segue que para cada n fixo

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (E_2)_k^n = +\infty.$$

Agora, sejam l_n e L_n os valores mínimos e máximos de $P(q_2, n)$ em $[a, b]$ respectivamente. Fixado n , segue novamente do **Corolário 4.2** que, se z_1 e z_2 são zeros consecutivos da solução $y(q_2)$, então

$$\frac{\pi}{\sqrt{L_n}} \leq z_2 - z_1 \leq \frac{\pi}{\sqrt{l_n}}.$$

Além disso, se $y(q_2)$ é solução do problema (4.42) e $y(q_2)$ tem r zeros em (a, b) , então

$$\frac{\sqrt{l_n}(b-a)}{\pi} < r < \frac{\sqrt{L_n}(b-a)}{\pi}. \quad (4.43)$$

Assim, como $\operatorname{sech}^2(q_2)$ é estritamente decrescente em $[a, b]$, e μ_n é constante, então para o problema (4.42) teremos

$$l_n = \gamma - \mu_n \operatorname{csch}^2(a) \quad \text{e} \quad L_n = \gamma - \mu_n \operatorname{csch}^2(b).$$

Elevando (4.43) ao quadrado e substituindo os valores de l_n e L_n acima, (4.43) temos

$$\begin{aligned} \frac{(\gamma - \mu_n \operatorname{csch}^2(a))(b-a)^2}{\pi^2} &< r^2 < \frac{(\gamma - \mu_n \operatorname{csch}^2(b))(b-a)^2}{\pi^2} \\ \implies \gamma - \mu_n \operatorname{csch}^2(a) &< \frac{r^2 \pi^2}{(b-a)^2} < \gamma - \mu_n \operatorname{csch}^2(b) \\ \implies -\mu_n \operatorname{csch}^2(a) &< \frac{r^2 \pi^2}{(b-a)^2} - \gamma < -\mu_n \operatorname{csch}^2(b) \\ \implies -\mu_n \operatorname{csch}^2(a) - \frac{r^2 \pi^2}{(b-a)^2} &< -\gamma < -\mu_n \operatorname{csch}^2(b) - \frac{r^2 \pi^2}{(b-a)^2} \\ \implies \frac{r^2 \pi^2}{(b-a)^2} + \mu_n \operatorname{csch}^2(b) &< \gamma < \frac{r^2 \pi^2}{(b-a)^2} + \mu_n \operatorname{csch}^2(a). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Da mesma forma, como foi observado para o caso do hiperbolóide de uma folha, obtemos para cada n cotas para os autovalores de (4.42). Assim, fazendo $n = 2$, $r = 1$, $a = \ln(2)$ e $b = \ln(8)$ na estimativa (4.44), obtemos pa o primeiro autovalor

$$\frac{\pi^2}{(\ln(8) - \ln(2))^2} + \frac{3}{4} \operatorname{csch}^2(\ln(8)) < \gamma_1 < \frac{\pi^2}{(\ln(8) - \ln(2))^2} + \frac{3}{4} \operatorname{csch}^2(\ln(2)).$$

Em valores aproximados, temos

$$5.183 < \gamma_1^2 < 6.468. \quad (4.45)$$

Aqui, observamos que a estimativa obtida em (4.44) para os autovalores dos problemas de Sturm-Liouville associados ao hiperbolóide de duas folhas, é controlada pelos valores extremos do inverso do termo g_{11} da métrica, isto é, pela função $\operatorname{csch}^2(q_2)$. Novamente, se a oscilação

da função g_{11} for pequena, obtemos uma maior precisão na estimativa. Entretanto, para o hiperbolóide de duas folhas, à medida que n aumenta, os autovalores do problema de Sturm-Liouville correspondente ficam mais afastados uns dos outros e que esta característica está relacionada com o comportamento causal da superfície. Concluimos então que em uma superfície umbílica tipo-espaço, quando n cresce, os primeiros autovalores dos problemas de Sturm-Liouville associados ficam mais distantes.

Na Seção 3.4, utilizaremos o método de Rayleigh-Ritz para encontrar cotas superiores melhores para as estimativas encontradas em (4.38) e (4.45), e na próxima seção, exibiremos a solução de uma equação muito semelhante à equação que ocorre no problema de Sturm-Liouville (4.33), entretanto com condições de fronteira diferentes.

Antes, chamamos a atenção para um fato relevante ocorrido aqui. Os potenciais $\lambda + \mu_n \operatorname{sech}^2(q_2)$ e $\gamma + \mu_n \operatorname{csch}^2(q_2)$ surgem nas equações (4.33) e (4.42) através de um processo de confinamento de uma partícula aos hiperbolóides de uma e duas folhas que, em \mathbb{R}_1^3 , são superfícies de revolução com curvaturas constantes. Tais potenciais geométricos podem ser vistos como casos particulares dos potenciais que ocorrem na segunda equação de Pöschl-Teller e na equação de Morse-Rosen, para moléculas poliatômicas. Na referência (NIETO, 1978) são encontradas normalizações para as soluções de tais equações e em (BARUT; INOMATA; WILSON, 1987) soluções das equações de Pöschl-Teller e da equação de Morse-Rosen são discutidas por meio do método de algebrização de equações de autovalores usando fatorações de Infeld-Hull-Miller. Autovalores e soluções exatas normalizadas são encontradas. O potencial $\lambda + \mu_n \operatorname{sech}^2(q_2)$ aparece também no estudo de sólitons (MUNTEANU; DONESCU, 2006) que são soluções de certas EDP's não-lineares que possuem a forma de ondas localizadas que conservam suas propriedades mesmo após interagir com outros sólitons e por essas e outras características se comportam como partículas. Estudos sobre a integrabilidade da equação de Schrödinger com este potencial foram feitos na referência (ACOSTA-HUMÁNEZ; ALVAREZ-RAMÍREZ; STUCHI, 2018).

4.3 Soluções exatas para o problema do hiperbolóide de uma folha

A equação

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{U_0}{\cosh^2(\alpha x)} \right) \psi = 0, \quad (4.46)$$

que é muito semelhante a (4.33) (essencialmente a mesma a menos de constantes) é resolvida com as condições de fronteira $\psi \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \pm\infty$ na referência (LANDAU; LIFSHITZ, 1958). Ela surge como um problema de determinar os níveis de energia para uma partícula se movendo em um campo de energia potencial $U(x) = -\frac{U_0}{\cosh^2(\alpha x)}$. Fazendo a substituição $\zeta = \tanh(\alpha x)$, temos

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\psi}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dx} = \frac{d\psi}{d\zeta} \alpha \operatorname{sech}^2(\alpha x) = \alpha \frac{d\psi}{d\zeta} (1 - \tanh^2(\alpha x)) = \alpha \frac{d\psi}{d\zeta} (1 - \zeta^2)$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\psi}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\alpha \frac{d\psi}{d\zeta} (1 - \zeta^2) \right) \\
&= \alpha \frac{d^2\psi}{d\zeta^2} \frac{d\zeta}{dx} (1 - \zeta^2) + \alpha \frac{d\psi}{d\zeta} \frac{d}{d\zeta} (1 - \zeta^2) \frac{d\zeta}{dx} \\
&= \alpha^2 \frac{d^2\psi}{d\zeta^2} (1 - \zeta^2) (1 - \zeta^2) + \alpha^2 \frac{d\psi}{d\zeta} \frac{d}{d\zeta} (1 - \zeta^2) (1 - \zeta^2) \\
&= \alpha^2 (1 - \zeta^2) \left(\frac{d^2\psi}{d\zeta^2} (1 - \zeta^2) + \frac{d\psi}{d\zeta} \frac{d}{d\zeta} (1 - \zeta^2) \right) \\
&= \alpha^2 (1 - \zeta^2) \frac{d}{d\zeta} \left((1 - \zeta^2) \frac{d\psi}{d\zeta} \right).
\end{aligned}$$

Substituindo em (4.46) obtemos

$$\alpha^2 (1 - \zeta^2) \frac{d}{d\zeta} \left((1 - \zeta^2) \frac{d\psi}{d\zeta} \right) + \frac{2m}{\hbar^2} (E + U_0(1 - \zeta^2)) \psi = 0, \quad (4.47)$$

pois, $\frac{1}{\cosh^2(\alpha x)} = \operatorname{sech}^2(\alpha x) = 1 - \tanh^2(\alpha x)$. Dividindo ambos os lados por $\alpha^2(1 - \zeta^2)$, encontramos

$$\frac{d}{d\zeta} \left((1 - \zeta^2) \frac{d\psi}{d\zeta} \right) + \left(\frac{2mE}{\hbar^2 \alpha^2 (1 - \zeta^2)} + \frac{2mU_0}{\alpha^2 \hbar^2} \right) \psi = 0. \quad (4.48)$$

Fazendo $\varepsilon = \sqrt{-\frac{2mE}{\hbar^2 \alpha^2}}$ e $\frac{2mU_0}{\alpha^2 \hbar^2} = s(s+1)$, temos $s^2 + s - \frac{2mU_0}{\alpha^2 \hbar^2} = 0$, donde

$$s = \frac{1}{2} \left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{8mU_0}{\alpha^2 \hbar^2}} \right).$$

Substituindo em (4.48) obtemos

$$\frac{d}{d\zeta} \left((1 - \zeta^2) \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right) + \left(s(s+1) - \frac{\varepsilon^2}{1 - \zeta^2} \right) \psi = 0. \quad (4.49)$$

Tal equação pode ser transformada em *uma equação diferencial hipergeométrica* (ver **Observação 4.1** abaixo) da seguinte forma: Fazendo a substituição $\psi = (1 - \zeta^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} w(\zeta)$, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{d\psi}{d\zeta} &= \frac{\varepsilon}{2} (1 - \zeta^2)^{\left(\frac{\varepsilon}{2}-1\right)} (-2\zeta) w(\zeta) + (1 - \zeta^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} w'(\zeta) \\
&= -\varepsilon \zeta (1 - \zeta^2)^{\left(\frac{\varepsilon}{2}-1\right)} w(\zeta) + (1 - \zeta^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} w'(\zeta).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
(1 - \zeta^2) \frac{d\psi}{d\zeta} &= -\varepsilon \zeta (1 - \zeta^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} w(\zeta) + (1 - \zeta^2)^{\left(\frac{\varepsilon}{2}+1\right)} w'(\zeta) \\
&= (1 - \zeta^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} \left(-\varepsilon \zeta w(\zeta) + (1 - \zeta^2) w'(\zeta) \right).
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\zeta} \left((1 - \zeta^2) \frac{d\psi}{d\zeta} \right) &= \left(\frac{\varepsilon}{2} (1 - \zeta^2)^{\left(\frac{\varepsilon}{2}-1\right)} (-2\zeta) \right) (-\varepsilon\zeta w(\zeta) + (1 - \zeta^2)w'(\zeta)) + \\
 &\quad + (1 - \zeta^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} (-\varepsilon w(\zeta) - \varepsilon\zeta w'(\zeta) - 2\zeta w'(\zeta) + (1 - \zeta^2)w''(\zeta)) \\
 &= \varepsilon^2 \zeta^2 (1 - \zeta^2)^{\left(\frac{\varepsilon}{2}-1\right)} w(\zeta) - \varepsilon\zeta (1 - \zeta^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} w'(\zeta) - \\
 &\quad - \varepsilon (1 - \zeta^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} w(\zeta) - \varepsilon\zeta (1 - \zeta^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} w'(\zeta) - 2\zeta (1 - \zeta^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} w'(\zeta) + \\
 &\quad + (1 - \zeta^2)^{\left(\frac{\varepsilon}{2}+1\right)} w''(\zeta) \\
 &= (1 - \zeta^2)^{\left(\frac{\varepsilon}{2}+1\right)} w''(\zeta) + \left(-\varepsilon\zeta (1 - \zeta^2)^{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} - \varepsilon\zeta (1 - \zeta^2)^{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} \right) w'(\zeta) \\
 &\quad - \left(2\zeta (1 - \zeta^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} \right) w'(\zeta) + \left(\varepsilon^2 \zeta^2 (1 - \zeta^2)^{\left(\frac{\varepsilon}{2}-1\right)} - \varepsilon (1 - \zeta^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} \right) w(\zeta) \\
 &= (1 - \zeta^2)^{\left(\frac{\varepsilon}{2}+1\right)} w''(\zeta) - (1 - \zeta^2)^{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} 2\zeta (\varepsilon + 1) w'(\zeta) + \\
 &\quad + \left(\varepsilon^2 \zeta^2 (1 - \zeta^2)^{-1} - \varepsilon \right) (1 - \zeta^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} w(\zeta) + \left(s(s+1) - \frac{\varepsilon^2}{1 - \zeta^2} \right) (1 - \zeta^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} w(\zeta) = 0 \\
 \implies & (1 - \zeta^2)^{\left(\frac{\varepsilon}{2}+1\right)} w''(\zeta) - (1 - \zeta^2)^{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} 2\zeta (\varepsilon + 1) w'(\zeta) + \\
 &\quad + (1 - \zeta^2)^{\frac{\varepsilon}{2}-1} w(\zeta) (\varepsilon^2 \zeta^2 - \varepsilon^2) - \varepsilon (1 - \zeta^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} w(\zeta) + s(s+1) (1 - \zeta^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} w(\zeta) = 0 \\
 \implies & (1 - \zeta^2)^{\left(\frac{\varepsilon}{2}+1\right)} w''(\zeta) - (1 - \zeta^2)^{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} 2\zeta (\varepsilon + 1) w'(\zeta) - \\
 &\quad - (1 - \zeta^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} \varepsilon^2 w(\zeta) - \varepsilon (1 - \zeta^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} w(\zeta) + s(s+1) (1 - \zeta^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} w(\zeta) = 0 \\
 \implies & (1 - \zeta^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} \left((1 - \zeta^2) w'' - 2\zeta (\varepsilon + 1) w'(\zeta) - w(\zeta) (\varepsilon^2 + \varepsilon - s(s+1)) \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Substituindo em (4.49)

$$\begin{aligned}
 & (1 - \zeta^2)^{\left(\frac{\varepsilon}{2}+1\right)} w''(\zeta) - (1 - \zeta^2)^{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} 2\zeta (\varepsilon + 1) w'(\zeta) + \\
 &\quad + \left(\varepsilon^2 \zeta^2 (1 - \zeta^2)^{-1} - \varepsilon \right) (1 - \zeta^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} w(\zeta) + \left(s(s+1) - \frac{\varepsilon^2}{1 - \zeta^2} \right) (1 - \zeta^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} w(\zeta) = 0 \\
 \implies & (1 - \zeta^2)^{\left(\frac{\varepsilon}{2}+1\right)} w''(\zeta) - (1 - \zeta^2)^{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} 2\zeta (\varepsilon + 1) w'(\zeta) + \\
 &\quad + (1 - \zeta^2)^{\frac{\varepsilon}{2}-1} w(\zeta) (\varepsilon^2 \zeta^2 - \varepsilon^2) - \varepsilon (1 - \zeta^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} w(\zeta) + s(s+1) (1 - \zeta^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} w(\zeta) = 0 \\
 \implies & (1 - \zeta^2)^{\left(\frac{\varepsilon}{2}+1\right)} w''(\zeta) - (1 - \zeta^2)^{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} 2\zeta (\varepsilon + 1) w'(\zeta) - \\
 &\quad - (1 - \zeta^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} \varepsilon^2 w(\zeta) - \varepsilon (1 - \zeta^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} w(\zeta) + s(s+1) (1 - \zeta^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} w(\zeta) = 0 \\
 \implies & (1 - \zeta^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} \left((1 - \zeta^2) w'' - 2\zeta (\varepsilon + 1) w'(\zeta) - w(\zeta) (\varepsilon^2 + \varepsilon - s(s+1)) \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Assim, ou $(1 - \zeta^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} = 0$, ou

$$\begin{aligned}
 & (1 - \zeta^2) w'' - 2\zeta (\varepsilon + 1) w'(\zeta) - w(\zeta) (\varepsilon^2 + \varepsilon - s(s+1)) = 0 \\
 \implies & (1 - \zeta^2) w'' - 2\zeta (\varepsilon + 1) w'(\zeta) - w(\zeta) (\varepsilon - s) (\varepsilon + s + 1) = 0. \tag{4.50}
 \end{aligned}$$

Finalmente, fazendo $u = \frac{1}{2}(1 - \zeta)$ temos que

$$\frac{dw}{d\zeta} = \frac{dw}{du} \frac{du}{d\zeta} = -\frac{1}{2} \frac{dw}{du}.$$

Consequentemente,

$$\frac{d^2w}{d\zeta^2} = \frac{d}{d\zeta} \left(-\frac{1}{2} \frac{dw}{du} \right) = \frac{1}{4} \frac{d^2w}{du^2}.$$

Substituindo em (4.50), como $1 - \zeta^2 = 4u(1 - u)$, obtemos

$$4u(1 - u) \frac{1}{4} \frac{d^2w}{du^2} - 2(\varepsilon + 1)(1 - 2u) \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{dw}{du} - (\varepsilon - s)(\varepsilon + s + 1)w = 0.$$

donde obtemos a equação diferencial hipergeométrica (WHITTAKER; WATSON, 1996),(LANDAU; LIFSHITZ, 1958)

$$u(1-u)\frac{d^2w}{du^2} + (1-2u)(\varepsilon+1)\frac{dw}{du} - (\varepsilon-s)(\varepsilon+s+1)w = 0. \quad (4.51)$$

Como ψ é uma função de onda, quando $x \rightarrow +\infty$ (isto é, $\zeta \rightarrow 1$) queremos que $\psi \rightarrow 0$. Logo a solução de (4.51) é a função hipergeométrica

$$w(u) = F(\varepsilon-s, \varepsilon+s+1, \varepsilon+1, u),$$

visto que a outra solução independente de (4.51),

$$w(u) = u^{-\varepsilon}F(s+1, -s, -\varepsilon+1, u),$$

é singular quando $u = 0$. Assim, obtemos

$$\psi(\zeta) = (1-\zeta^2)^{\frac{\varepsilon}{2}}F(\varepsilon-s, \varepsilon+s+1, \varepsilon+1, \frac{1}{2}(1-\zeta)).$$

Como queremos que a solução ψ seja finita, quando $x \rightarrow \infty$ (consequentemente $\zeta \rightarrow -1$), impondo esta condição em (4.51), devemos ter $\varepsilon-s = -n$ onde n é inteiro e $n \geq 0$. Logo a função F em (4.51) se torna um polinômio de grau n , que é finito para $\zeta = -1$. Desta forma os níveis de energia são determinados pela condição $s-\varepsilon = n$, o que nos dá

$$E = -\frac{\hbar^2 \alpha^2}{8m} \left[-(1+2n) + \sqrt{1 + \frac{8mU_0}{\alpha^2 \hbar^2}} \right]^2.$$

Observação 4.9. A função hipergeométrica é definida no disco $|z| < 1$ pela série

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} \frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{z^2}{2!} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} \frac{z^3}{3!} + \dots \quad (4.52)$$

e para $|z| > 1$ ela é dada pela continuação analítica desta série (ver (LANDAU; LIFSHITZ, 1958), Apêndice e página 664). Na expressão, $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$, α e β são arbitrários e $\gamma \neq 0, -1, -2, \dots$. A função hipergeométrica (4.52) é solução da equação diferencial hipergeométrica

$$z(1-z)u''(z) + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]u' - \alpha\beta u = 0. \quad (4.53)$$

Uma outra solução linearmente independente da equação (4.53) é dada por

$$f(z) = z^{1-\gamma}F(\beta - \gamma + 1, \alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z)$$

e possui um ponto singular em $z = 0$. Observe que na equação (4.51) temos

$$\alpha = \varepsilon - s, \quad \beta = \varepsilon + s + 1, \quad \text{e} \quad \gamma = \varepsilon + 1.$$

Se α ou β for um inteiro negativo ou nulo, isto é, α ou β for igual a $-n$ com $n = 0, 1, 2, \dots$, a função hipergeométrica se torna um polinômio, isto é,

$$F(-n, \beta, \gamma, z) = \frac{z^{1-\gamma}(1-z)^{\gamma+n-\beta}}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)} \frac{d^n}{dz^n} \left(z^{(\gamma+n-1)}(1-z)^{\beta-\gamma} \right).$$

4.4 O quociente de Rayleigh e o Método de Rayleigh-Ritz

O método de Rayleigh-Ritz é útil para encontrar cotas superiores para autovalores de um problema de Sturm-Liouville. Mostraremos (teorema abaixo) que o primeiro autovalor do problema é o valor mínimo que o quociente de Rayleigh assume no espaço das funções de classe C^1 em $[a, b]$ que se anulam em a e b denotado por $C_0^1[a, b]$. A ideia do método baseia-se em minimizar o quociente de Rayleigh em subespaços de dimensão finita de $C_0^1[a, b]$. Desta forma, o mínimo neste subespaço é uma cota superior para o mínimo no espaço todo. No que segue, desenvolveremos com um pouco mais de detalhes e voltados a nossos propósitos, os resultados encontrados na referência (LI, 2012).

4.4.1 O quociente de Rayleigh

Considere o seguinte problema de Sturm-Liouville formado pela equação

$$(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = -\lambda\rho(x)u(x), \quad x \in [a, b], \quad (4.54)$$

onde $p(x)$ e $\rho(x)$ são positivas, $\rho(x)$ e $q(x)$ são contínuas, $p(x) \in C^1[a, b]$ e $u(x)$ satisfaz as condições de contorno auto-adjuntas

$$u(a) = u(b) = 0. \quad (4.55)$$

Como vimos na **Proposição 4.1** existe uma sequência $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ crescente, infinita e divergente de autovalores do problema de Sturm-Liouville acima, onde para cada autovalor λ_n , existe uma autofunção u_n que é uma solução não trivial do problema de fronteira formado por (4.54) e (4.55), e qualquer duas autofunções com mesmo autovalor são múltiplos constantes uma da outra.

Observe que multiplicando a equação (4.54) por $-u$, obtemos

$$\begin{aligned} \lambda\rho(x)u^2(x) &= -u(p(x)u'(x))' - q(x)u^2(x) \\ \implies \lambda \int_a^b \rho(x)u^2(x)dx &= - \int_a^b u(x)(p(x)u'(x))' dx - \int_a^b q(x)u^2(x)dx \\ &= -u(x)p(x)u'(x)]_a^b + \int_a^b p(x)(u'(x))^2 dx - \int_a^b q(x)u^2(x)dx \\ &= \int_a^b (p(x)(u'(x))^2 - q(x)u^2(x))dx, \end{aligned}$$

pois como $u \in C_0^1[a, b]$ então $u(x)p(x)u'(x)]_a^b = 0$. Fazendo

$$\begin{aligned} D(u) &= \int_a^b (p(x)(u'(x))^2 - q(x)u^2(x))dx, \quad e \\ H(u) &= \int_a^b \rho(x)u^2(x)dx, \end{aligned}$$

para qualquer $u \in C_0^1[a, b]$, definimos o quociente de Rayleigh por

$$R(u) = \frac{D(u)}{H(u)},$$

para qualquer $u \neq 0$, com $u \in C_0^1[a, b]$. Observe que se λ é um autovalor, então $\lambda = R(u)$ para algum $u \in C_0^1[a, b]$.

O teorema a seguir nos dá uma caracterização do primeiro autovalor de um problema de Sturm-Liouville como o valor mínimo que o quociente de Rayleigh atinge em $C_0^1[a, b]$. Para sua demonstração precisamos definir a derivada de Gâteaux e do lema de Du Bois-Reymond cuja demonstração pode ser encontrada na referência (LI, 2012) e aqui apresentaremos apenas seu enunciado.

Definição 4.10. Diremos que um funcional J definido em um subconjunto aberto D de um espaço vetorial normado X tem derivada de Gâteaux em um vetor $x \in D$, se existe uma função $\delta J(x) : X \rightarrow \mathbb{R}$ que envia h em $\delta J(x; h)$ definida para todo $h \in X$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(x + th) - J(x)}{t} = \delta J(x; h).$$

Para a derivada de Gâteaux, valem as regras do produto e do quociente, isto é, se K e L são funcionais que possuem derivada de Gâteaux no ponto x_0 de um aberto $D \subset X$, então $J_1(x) = K(x)L(x)$ e $J_2(x) = \frac{K(x)}{L(x)}$ possuem derivada de Gâteaux em x_0 e

$$\delta J_1(x_0; h) = \delta K(x_0; h)L(x_0) + K(x_0)\delta L(x_0; h),$$

e

$$\delta J_2(x_0; h) = \frac{\delta K(x_0; h)L(x_0) - K(x_0)\delta L(x_0; h)}{L(x_0)^2},$$

para qualquer $h \in X$.

Lema 4.11. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, e suponha que para algum inteiro não negativo n , tenhamos

$$\int_a^b f(x)h(x)dx = 0,$$

para todo $h \in C_0^n[a, b]$ que se anula em $[a, b]$ junto com suas derivadas até a ordem n , isto é, $h^k(a) = h^k(b) = 0$, $k = 0, \dots, n$. Então $f \equiv 0$.

Teorema 4.12. O primeiro autovalor λ_1 é igual ao valor mínimo do quociente de Rayleigh R em $C_0^1[a, b]$, isto é,

$$\lambda_1 = \min_{u \in C_0^1[a, b]} R(u). \quad (4.56)$$

Demonstração. Observe que

$$\begin{aligned} D(u) &= \int_a^b (p(x)(u'(x))^2 - q(x)u^2(x))dx \\ &\geq \int_a^b (-q(x)u^2(x))dx \geq -\|q\| \int_a^b u^2(x)dx, \end{aligned}$$

pois $p(x)$ é positiva por hipótese e,

$$\|q\| = \sup_{x \in [a,b]} |q(x)|.$$

Além disso,

$$H(u) = \int_a^b \rho(x)u^2(x)dx \leq \|\rho\| \int_a^b u^2(x)dx.$$

Dessa forma temos que

$$-\frac{\|q\|}{\|\rho\|} \leq R(u).$$

Logo, pode ser mostrado que o quociente de Rayleigh R atinge um mínimo (CORMANI; RYHAM, 2002; OLIVEIRA, 2016). Seja $u_1 \in C_1^0[a, b]$ a função que minimiza o quociente de Rayleigh. Logo a derivada de Gâteaux de R em u_1 satisfaz

$$\delta R(u_1; \Delta u) = 0,$$

$\forall \Delta u \in C_0^1[a, b]$. Como,

$$\begin{aligned} \delta R(u; \Delta u) &= \frac{\delta D(u, \Delta u)H(u) - D(u)\delta H(u, \Delta u)}{H^2(u)} \\ \implies 0 &= \frac{\delta D(u_1, \Delta u) - R(u_1)\delta H(u_1, \Delta u)}{H(u_1)}, \end{aligned}$$

temos que,

$$\delta D(u_1; \Delta u) = R(u_1)\delta H(u_1; \Delta u), \quad \forall \Delta u \in C_0^1[a, b]. \quad (4.57)$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} \delta D(u, \Delta u) &= 2 \int_a^b (p(x)u'(x)\Delta u'(x) - q(x)u(x)\Delta u(x))dx \\ &= 2 \left([p(x)u'(x)\Delta u(x)]_a^b - \int_a^b \Delta u [p(x)u'(x)]' dx \right) - 2 \int_a^b q(x)u(x)\Delta u(x)dx \\ &= -2 \int_a^b \{ [p(x)u'(x)]' + q(x)u(x) \} \Delta u(x)dx \end{aligned}$$

e

$$\delta H(u, \Delta u(x)) = 2 \int_a^b \rho(x)u(x)\Delta u(x),$$

$\forall \Delta u \in C_0^1[a, b]$. Assim, de (4.57) obtemos

$$\begin{aligned} -2 \int_a^b \{ [p(x)u_1'(x)]' + q(x)u_1(x) \} \Delta u(x)dx &= \lambda^* 2 \int_a^b \rho(x)u_1(x)\Delta u(x) \\ \implies \int_a^b \{ [p(x)u_1'(x)]' + q(x)u_1(x) + \lambda^* \rho(x)u_1(x) \} \Delta u(x)dx &= 0 \end{aligned}$$

$\forall \Delta u \in C_0^1[a, b]$, onde $\lambda^* := R(u_1) = \frac{D(u_1)}{H(u_1)}$. Pelo **Lema 4.1** temos que ,

$$\begin{aligned} [p(x)u_1'(x)]' + q(x)u_1(x) + \lambda^* \rho(x)u_1(x) &= 0 \\ \implies [p(x)u_1'(x)]' + q(x)u_1(x) &= -\lambda^* \rho(x)u_1(x). \end{aligned}$$

Desta forma, λ^* é autovalor com autofunção u_1 . Se λ é qualquer autovalor com autofunção u , devemos ter

$$\lambda^* = R(u_1) \leq R(u) = \lambda,$$

e desta forma $\lambda^* \leq \lambda$. Provamos assim que o primeiro autovalor é o valor mínimo que o quociente de Rayleigh assume em $C_0^1[a, b]$. \square

4.4.2 O método de Rayleigh-Ritz

O método de Rayleigh-Ritz tem por finalidade encontrar cotas superiores para autovalores do problema de Sturm-Liouville dado por (4.54) com as condições de fronteiras (4.55). O método baseia-se em minimizar o quociente de Rayleigh sobre um subespaço de dimensão finita de $C_0^1[a, b]$ e desta forma o mínimo sobre tal subespaço é uma cota superior para o mínimo em $C_0^1[a, b]$, isto é, uma cota superior para o primeiro autovalor.

Consideremos então o problema de Sturm-Liouville

$$(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = -\lambda\rho(x)u(x), \text{ com } u(a) = u(b) = 0, \quad (4.58)$$

e $W = \text{span}\{u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)\}$ um subespaço vetorial de dimensão n de $C_0^1[a, b]$. Uma função f neste subespaço pode ser escrita na forma

$$f(x) = \sum_{i=1}^n c_i u_i(x),$$

onde os c_i 's são constantes. Consequentemente, encontrar um mínimo para o quociente de Rayleigh neste espaço equivale a encontrar $c = (c_1^*, \dots, c_n^*) \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\sum_{i=1}^n c_i^* u_i(x) = f_{\min} = \min_{u \in W} R(u).$$

Para isto, defina as funções $d : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$d(c) = D(f_c), \quad h(c) = H(f_c)$$

onde $f_c = \sum_{i=1}^n c_i u_i$. Logo, $R(f_c) = \frac{d(c)}{h(c)}$ para qualquer $f_c \in W$ e minimizar $R(f_c)$ sobre W equivale a minimizar $R(f_c)$ sobre \mathbb{R}^n . Seja então c^* , o ponto de mínimo para $R(f_c)$. Então,

$$\frac{\partial}{\partial c_i} \left[\frac{d(c^*)}{h(c^*)} \right] = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Pela regra do quociente e escrevendo $r^* = \frac{d(c^*)}{h(c^*)}$, temos

$$\frac{\partial}{\partial c_i} \left[\frac{d(c)}{h(c)} \right] = \frac{\frac{\partial d}{\partial c_i} h - d \frac{\partial h}{\partial c_i}}{h^2} = \frac{\frac{\partial d}{\partial c_i}}{h} - \frac{d}{h} \frac{\partial h}{\partial c_i}.$$

Então, em c^* devemos ter

$$\frac{\partial d}{\partial c_i}(c^*) - r^* \frac{\partial h}{\partial c_i}(c^*) = 0 \implies \frac{\partial d}{\partial c_i}(c^*) = r^* \frac{\partial h}{\partial c_i}(c^*). \quad (4.59)$$

Sejam,

$$a_{ij} = \int_a^b [p(x)u_i' u_j' - q(x)u_i u_j] dx \quad \text{e} \quad b_{ij} = \int_a^b \rho(x)u_i u_j dx.$$

Observe que a_{ij} e b_{ij} são matrizes simétricas e pela forma como foram definidas (para o caso $n = 2$),

$$\begin{aligned} d(c) &= a_{11}c_1^2 + a_{12}c_1c_2 + a_{21}c_2c_1 + a_{22}c_2^2 \\ &= a_{11}c_1^2 + 2a_{12}c_1c_2 + a_{22}c_2^2. \end{aligned}$$

Logo

$$\frac{\partial d}{\partial c_1} = 2a_{11}c_1 + 2a_{12}c_2.$$

E para n qualquer, teremos

$$\frac{\partial d}{\partial c_i} = \sum_{j=1}^n 2a_{ij}c_j. \quad (4.60)$$

De forma análoga,

$$\frac{\partial h}{\partial c_i} = \sum_{j=1}^n 2b_{ij}c_j. \quad (4.61)$$

Substituindo (4.60) e (4.61) em (4.59) obtemos

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}c_j^* = r^* \sum_{j=1}^n b_{ij}c_j^*,$$

escrevendo em forma matricial, fazendo $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ obtemos

$$(A - r^*B)c^* = 0_{\mathbb{R}^n}. \quad (4.62)$$

Assim, $c^* \neq 0$ se e somente se $A - r^*B$ é singular, isto é, $\det(A - r^*B) = 0$. Logo cada raiz do polinômio característico é um autovalor para a equação (4.62) e o menor deles é o valor mínimo para o quociente de Rayleigh sobre W .

Uma vez desenvolvida a tecnologia, o processo para cômputo de uma cota superior melhor que a dada pelos corolários do teorema de comparação de Sturm-Liouville para os autovalores do problema (4.58) depende apenas de uma escolha de uma família L.I de funções em $C_0^1[a, b]$ e de encontrar as raízes da equação (4.62). Na próxima seção, faremos a aplicação do método para melhorar as cotas superiores para os primeiros autovalores de cada um dos problemas de Sturm-Liouville em (4.33) e (4.42).

4.4.3 Aplicação do Método de Rayleigh-Ritz

Agora encontraremos cotas melhores para os autovalores dos problemas (4.33) e (4.42). Iniciando com a equação (4.33) dada por

$$\frac{d^2y}{dq_2^2} + (\lambda + \mu_n \operatorname{sech}^2(q_2))y = 0, \quad y(a) = y(b) = 0, \quad (4.63)$$

observe que $p(x) = 1$, $\rho(x) = 1$ e $q(x) = \mu_n \operatorname{sech}^2(q_2)$. Considere o espaço W gerado pela família L.I. de funções

$$u_k(x) = (e^x + e^{-x})(1 - e^{x-\ln(2)})(1 - e^{x-\ln(8)})x^k, \quad k = 1, \dots, m. \quad (4.64)$$

Escrevendo,

$$a_{ij} = \int_a^b [u_i' u_j' - \mu_n \operatorname{sech}^2(q_2) u_i u_j] dx \quad \text{e} \quad b_{ij} = \int_a^b u_i u_j dx,$$

$A=[a_{ij}]$ e $B=[b_{ij}]$, encontrando uma raiz aproximada com a ajuda do software *SagemathCloud* da equação $(A - r^*B) = 0$ no intervalo $(3.802, 5,087)$ dado por (4.38) obtemos para $n = 2$, $m = 4$, $a = \ln(2)$ e $b = \ln(8)$ (ver Apêndice B páginas 90 e 91)

$$r = 4.94792427810184920478403709267$$

Pelo que vimos na seção anterior, a menor raiz é uma cota para o autovalor do problema (4.33) e percebe que não verificamos que essa de fato é a menor raiz. Entretanto como procuramos a raiz no intervalo dado por (4.38) se houvesse uma raiz menor, certamente seria encontrada pelo programa, visto que este é baseado no método de bissecção. Desta forma, esta é de fato uma aproximação (muito boa) para a menor raiz da equação $\det(A - r^*B) = 0$. Para o problema (4.42),

$$\frac{d^2y}{dq_2^2} + (\gamma - \mu_n \operatorname{csch}^2(q_2))y = 0, \quad y(a) = y(b) = 0, \quad (4.65)$$

observe que $p(x) = 1$, $\rho(x) = 1$ e $q(x) = -\mu_n \operatorname{csch}^2(q_2)$. Considere o espaço W gerado pela família L.I. de funções

$$w_k(x) = (e^x - e^{-x})(2^k - e^{kx})(8 - e^x), \quad k = 1, \dots, m. \quad (4.66)$$

Escrevendo,

$$a_{ij} = \int_a^b [w_i' w_j' + \mu_n \operatorname{csch}^2(q_2) w_i w_j] dx \quad \text{e} \quad b_{ij} = \int_a^b w_i w_j dx,$$

e sendo $A=[a_{ij}]$ e $B=[b_{ij}]$, novamente encontrando uma raiz aproximada com a ajuda do software *SagemathCloud* da equação $(A - r^*B) = 0$ no intervalo $(5.183, 6.468)$ dado por (4.45), obtemos para $n = 2$, $m = 4$, $a = \ln(2)$ e $b = \ln(8)$ (ver Apêndice C páginas 92 e 93)

$$r = 5.44059368674975984970016069410.$$

5 OUTRAS APLICAÇÕES: CLASSES DE SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO E POTENCIAIS PARA CURVATURA DA CURVA PERFIL CONSTANTE

Neste capítulo exibiremos as classes de superfícies de revolução tipo-espaço e tipo-tempo com curva perfil tipo-espaço e tipo-tempo parametrizadas pelo comprimento de arco com curvatura da curva perfil constante e seus potenciais geométricos. Faremos também uma discussão sobre a possibilidade das equações (3.61), (3.62), (3.79) e (3.80) se tornarem osciladores harmônicos assumindo a curvatura da curva perfil constante.

5.1 Superfícies de revolução com curvatura da curva perfil constante e em plano tipo-tempo

Consideraremos primeiramente o caso em que a curvatura da curva perfil é constante e igual a c , e $c \neq 0$. Vimos no **Lema 3.1** que se a superfície é de revolução com curva perfil p.c.a. num plano tipo-tempo, por exemplo, $\alpha(q_2) = (u(q_2), 0, v(q_2))$ (se a coordenada z for nula em vez da y obteremos resultados semelhantes) e eixo tipo-espaço, então podemos escrever as curvaturas principais na forma

$$k_1 = -\frac{v'}{u} \quad \text{e} \quad k_2 = -\frac{v''}{u'} = -\frac{u''}{v'}. \quad (5.1)$$

Se o eixo for tipo-tempo, então

$$k_1 = -\frac{u'}{v} \quad \text{e} \quad k_2 = -\frac{v''}{u'} = -\frac{u''}{v'}, \quad (5.2)$$

à depender se u' ou v' for diferente de zero. A "linha" em u e v , significa derivar com respeito à variável q_2 que por simplicidade trocamos pela variável t ($q_2 = t$), e como a curva é p.c.a., uma das possibilidades deve ocorrer. Se impusermos a condição $k_2 = c$, $c \neq 0$ constante, então temos as relações

$$v'' = -cu' \quad \text{e} \quad u'' = -cv'. \quad (5.3)$$

Da segunda relação, integrando de t_0 a t , temos

$$u'(t) = -cv(t) + cv(t_0) + u'(t_0) = -cv(t) + c_0, \quad (5.4)$$

onde $c_0 = cv(t_0) + u'(t_0)$. Substituindo na primeira relação em (5.3), segue que

$$v'' = -c(-cv(t) + c_0) \implies v''(t) - c^2v(t) + cc_0 = 0. \quad (5.5)$$

Uma solução particular da equação (5.5) é $v(t) = \frac{c_0}{c}$. Como a equação homogênea associada é $v'' - c^2v = 0$ sua equação característica é $r^2 - c^2 = 0$, donde, $r = \pm c$. Logo, a solução geral da equação homogênea é dada por

$$v(t) = c_1e^{ct} + c_2e^{-ct}.$$

Assim, a solução geral da equação (5.5) é,

$$v(t) = c_1 e^{ct} + c_2 e^{-ct} + \frac{c_0}{c}.$$

Substituindo em (5.4), obtemos

$$u'(t) = -cv(t) + c_0 = -c\left(c_1 e^{ct} + c_2 e^{-ct} + \frac{c_0}{c}\right) + c_0 = -c(c_1 e^{ct} + c_2 e^{-ct}).$$

Impondo a condição de a curva perfil ser p.c.a., isto é, $(v'(t))^2 - (u'(t))^2 = \eta$ com $\eta \in \{1, -1\}$ a depender se a curva perfil é tipo-espaço ou tipo-tempo, e como $v' = cc_1 e^{ct} - cc_2 e^{-ct}$,

$$\begin{aligned} (v'(t))^2 - (u'(t))^2 &= c^2 [c_1^2 e^{2ct} - 2c_1 c_2 e^{ct-ct} + c_2^2 e^{-2ct} - c_1^2 e^{2ct} - 2c_1 c_2 e^{ct-ct} - c_2^2 e^{-2ct}] \\ &= -4c^2 c_1 c_2. \end{aligned}$$

Note que o parâmetro da parametrização da curva assim obtida é proporcional ao comprimento de arco. Para que a curva seja p.c.a., devemos ter

$$-4c^2 c_1 c_2 = \eta \implies c_2 = -\frac{\eta}{4c^2 c_1}.$$

Consequentemente,

$$u'(t) = -cc_1 e^{ct} + \frac{c\eta}{4c^2 c_1} e^{-ct},$$

donde,

$$u(t) = -c_1 (e^{ct} - e^{ct_0}) - \frac{\eta}{4c^2 c_1} (e^{-ct} - e^{-ct_0}) + u(t_0) \quad (5.6)$$

e

$$v(t) = c_1 e^{ct} - \frac{\eta}{4c^2 c_1} e^{-ct} + \frac{c_0}{c}.$$

Repetindo o cálculo acima iniciando por integrar a primeira relação em (5.3) obteremos

$$u(t) = d_1 e^{ct} + \frac{\eta}{4c^2 d_1} e^{-ct} + \frac{d_0}{c}.$$

$$v(t) = -d_1 (e^{ct} - e^{ct_0}) + \frac{\eta}{4c^2 d_1} (e^{-ct} - e^{-ct_0}) + v(t_0),$$

onde $d_0 = cu(t_0) + v'(t_0)$.

Perceba que, nos cálculos acima, não utilizamos a informação do caráter causal do eixo de revolução. Logo, não importa se o eixo é tipo-espaço ou tipo-tempo, a classe de curvas será a mesma. Entretanto, a forma das superfícies de revolução dependerá do eixo de rotação cuja informação está contida na curvatura k_1 . Abaixo plotaremos alguns exemplos de superfícies desta classe (todas tipo-espaço), para certos valores dos parâmetros em $u(t)$ e $v(t)$ e para isso, usaremos as expressões obtidas em (5.6).

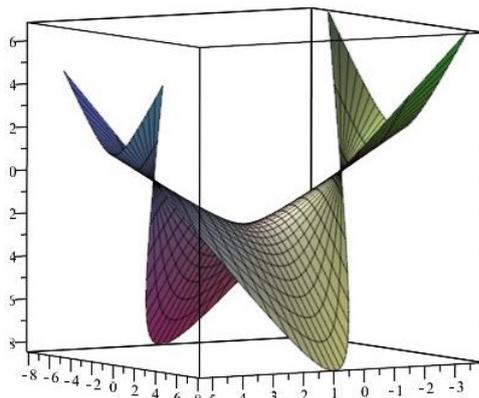


Figura 2 – ($\eta = 1, c = 1, c_1 = 1, t_0 = 0, u(0) = 2, v(0) = 0, u'(0) = 1$, com eixo z passando pelas singularidades).

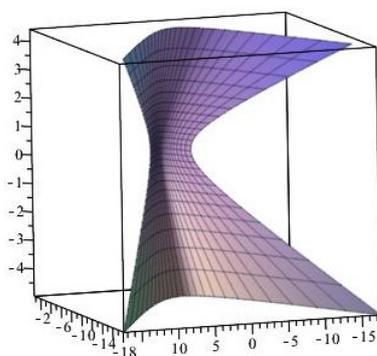


Figura 3 – ($\eta = 1, c = 1, c_1 = 1, t_0 = 0, u(0) = -1, v(0) = 0, u'(0) = 0$, eixo passando pelo centro da figura).

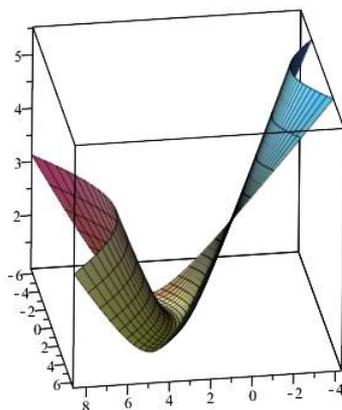


Figura 4 – ($\eta = -1, c = 1, c_1 = 1, t_0 = 1, u(0) = 0, v(0) = 0, u'(0) = 0$, eixo na vertical passando pela singularidade).

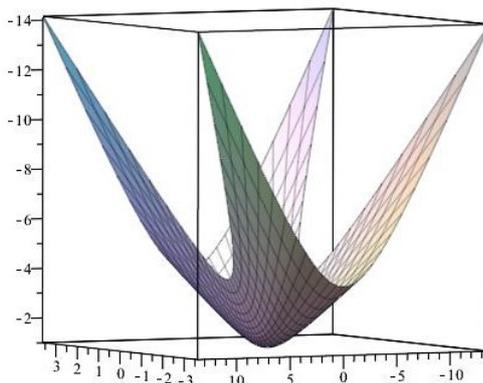


Figura 5 – ($\eta = 1, c = 1, c_1 = \frac{1}{2}, t_0 = 0, u(0) = -1, v(0) = 0, u'(0) = 0$), umbílica, eixo na vertical).

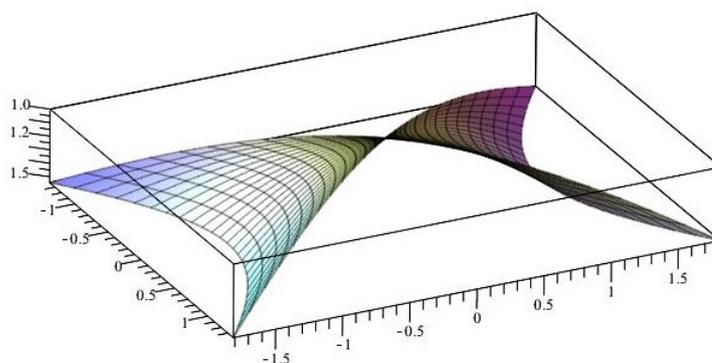


Figura 6 – ($\eta = -1, c = -1, c_1 = \frac{1}{2}, t_0 = 0, u(0) = 0, v(0) = 0, u'(0) = 0$), umbílica, eixo na vertical).

Se o eixo de revolução for tipo-espaço e $c > 0$, teremos

$$k_1 = -\frac{(4c^3 c_1^2 e^{2ct} + c\eta) e^{ct_0}}{4c^2 c_1^2 e^{(ct+2ct_0)} + 4c^2 c_1 u(t_0) e^{(ct+ct_0)} + \eta e^{ct} - (4c^2 c_1^2 e^{2ct} + \eta) e^{ct_0}}. \quad (5.7)$$

Por outro lado $c < 0$

$$k_1 = \frac{(4c^3 c_1^2 + c\eta e^{2ct}) e^{ct_0}}{4c^2 c_1 u(t_0) e^{(ct+ct_0)} - 4c^2 c_1^2 e^{ct} - \eta e^{(ct+2ct_0)} + (4c^2 c_1^2 + \eta e^{2ct}) e^{ct_0}}. \quad (5.8)$$

Observe que para o caso $c > 0$, se $4c^2 c_1^2 e^{(ct+2ct_0)} + 4c^2 c_1 u(t_0) e^{(ct+ct_0)} + \eta e^{ct} = 0$, então a superfície será umbílica. Esta condição pode ser vista como uma equação do segundo grau em c_1 , cujo discriminante é

$$\Delta = 16c^2 e^{2c(t+t_0)} (c^2 u(t_0)^2 - \eta).$$

Para que tenhamos raízes, $c^2 u(t_0)^2 - \eta \geq 0$. Note que para $\eta = -1$ elas existirão para quaisquer valores de $c > 0$ e $u(t_0)$. As soluções serão

$$c_1 = \frac{-cu(t_0) \pm \sqrt{c^2 u(t_0)^2 - \eta}}{2ce^{ct_0}}.$$

Para o caso em que $c < 0$, a superfície é umbílica se

$$-4c^2c_1^2e^{ct} + 4c^2c_1u(t_0)e^{(ct+ct_0)} - \eta e^{(ct+2ct_0)} = 0,$$

cujo discriminante também é

$$\Delta = 16c^2e^{2c(t+t_0)} (c^2u(t_0)^2 - \eta)$$

e as soluções são

$$c_1 = \frac{cu(t_0)e^{ct_0} \pm e^{ct_0} \sqrt{c^2u(t_0)^2 - \eta}}{2c}.$$

Se a superfície tiver eixo de revolução tipo-tempo então teremos

$$k_1 = \frac{4c^3c_1^2e^{2tc} - c\eta}{4c^2c_1^2e^{2tc} + 4cc_0c_1e^{tc} - \eta}.$$

Observe que se $c_0 = 0$, a superfície será umbílica. Considerando os casos em que as superfícies acima não são umbílicas, definindo os potenciais geométricos

$$\Pi_S = \left[\eta \frac{2mE_2}{h^2} + \left(\frac{2mE_1}{h^2} + \frac{1}{4} \right) \left(\left(\frac{k'_1}{k_2 - k_1} \right)^2 - k_1^2 \right) - \frac{k_2^2}{4} \right]$$

e

$$\Pi_T = \left[\eta \frac{2mE_2}{h^2} - \left(\frac{2mE_1}{h^2} - \frac{1}{4} \right) \left(\left(\frac{k'_1}{k_2 - k_1} \right)^2 - k_1^2 \right) - \frac{k_2^2}{4} \right].$$

Observe que Π_S é o coeficiente de y nas equações (3.61) e (3.62), assim como Π_T é nas equações (3.79) e (3.80). Então se o eixo de revolução for tipo-espaco e $c > 0$, O termo $\left(\left(\frac{k'_1}{k_2 - k_1} \right)^2 - k_1^2 \right)$ é dado por (para $c < 0$ ver Apêndice A página 89).

$$\frac{16c^4c_1^2\eta e^{2c(t-t_0)}}{16c^4c_1^4e^{2c(t-t_0)} (e^{2ct_0} + (u(t_0)))^2 + \eta^2e^{2ct} + 8u(t_0)A - 8Be^{3ct_0} + Ce^{2ct_0} - 2De^{ct_0}},$$

onde

$$A = 4c^4c_1^3e^{(2ct+3ct_0)} + c^2c_1\eta e^{(2ct+ct_0)} - \left(4c^4c_1^3e^{(3ct)} + c^2c_1\eta e^{(ct)} \right) e^{2ct_0},$$

$$B = 4c^4c_1^4 + c^2c_1^2\eta e^{ct},$$

$$C = 16c^4c_1^4e^{4ct} + 16c^2c_1^2\eta e^{2ct} + \eta^2,$$

$$D = 4c^2c_1^2\eta e^{3ct} + \eta^2e^{ct}.$$

Se o eixo de revolução for tipo-tempo e $c > 0$, então $\left(\left(\frac{k'_1}{k_2 - k_1} \right)^2 - k_1^2 \right)$ se torna

$$\frac{16c^4c_1^2\eta e^{2ct}}{16c^4c_1^4\eta e^{4ct} + 32c^3c_0c_1^3e^{3ct} - 8cc_0c_1\eta e^{ct} + 8c^2c_1^2e^{2ct} (2c_0^2 - \eta) + \eta^2}.$$

e se $c < 0$, então

$$\frac{16c^4c_1^2\eta e^{2ct}}{16c^4c_1^4 + 32c^3c_0c_1^3e^{ct} - 8cc_0c_1\eta e^{3ct} + 8c^2c_1^2e^{2ct}(2c_0^2 - \eta) + \eta^2e^{4ct}}.$$

Passamos agora ao caso em que a curvatura da curva perfil é constante e igual a zero. Impondo $k_2 = c = 0$ nas expressões para k_2 em (5.1) e (5.2), obtemos

$$v'' = 0 \implies v'(t) = v'(t_0), \quad e \quad u'' = 0 \implies u'(t) = u'(t_0).$$

Como queremos que a curva seja p.c.a devemos ter $(v'(t_0))^2 - (u'(t_0))^2 = \eta$. Logo,

$$v(t) - v(t_0) = (t - t_0)\sqrt{\eta + (u'(t_0))^2} \implies v(t) = (t - t_0)\sqrt{\eta + (u'(t_0))^2} + v(t_0),$$

e

$$u(t) = (t - t_0)\sqrt{(v'(t_0))^2 - \eta} + u(t_0).$$

Note que mais uma vez não utilizamos a informação do eixo de revolução contida na curvatura k_1 . Além disso, observe que a depender de η , temos $v'(t_0) \notin (-1, 1)$ caso $\eta = 1$ e $u'(t_0) \notin (-1, 1)$ caso $\eta = -1$. Se o eixo de revolução for tipo-espaço, temos

$$k_1(t) = -\frac{\sqrt{u'(t_0)^2 + \eta}}{u'(t_0)(t - t_0) + u(t_0)}.$$

Calculando o potencial geométrico Π_S para essa classe de curvas teremos

$$\Pi_S = \left[\eta \frac{2mE_2}{\hbar^2} + \left(\frac{2mE_1}{\hbar^2} + \frac{1}{4} \right) \left(\frac{-\eta}{(u'(t_0)(t - t_0) + u(t_0))^2} \right) \right].$$

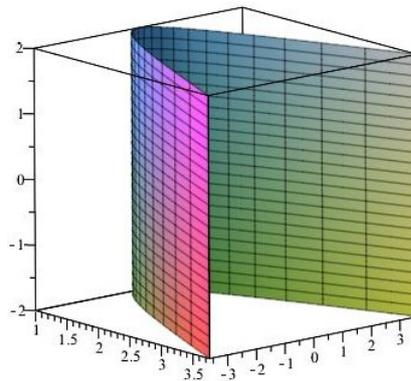


Figura 7 – Cilindro hiperbólico tipo-espaço

Logo se a curva perfil for tipo-espaço e $u'(t_0) = 0$, $k_1(t) = -\frac{1}{u(t_0)}$ é constante assim como Π_S e a equação (3.61) torna-se um oscilador harmônico para cada valor de E_1 . Conseqüentemente, as superfícies correspondentes a estes potenciais geométricos são cilindros hiperbólicos tipo-espaço (ver Figura(7)). Se a superfície é tipo-tempo então $\eta = -1$ e $u'(t_0)$ tem que ser diferente

de 0 para $k_1(t)$ ser real. Por outro lado, se a superfície for tipo-tempo $\eta = -1$ e $u'(t_0) = \pm 1$, então $k_1(t) = 0$ e a superfície é umbílica. Consequentemente não podemos ter $u'(t_0) = 0$ em Π_S pois tal potencial está definido apenas para superfícies sem pontos umbílicos (a equação apropriada para tais superfícies é (3.55)). Por fim, se $u'(t_0) \neq 0$ para o caso tipo-espaço e $|u'(t_0)| > 1$ para o caso tipo-tempo, então podemos usar as estimativas obtidas em na seção 3.2 e o método de Rayleigh-Ritz para estimar intervalos onde podemos encontrar os autovalores dos problemas de Sturm-Liouville associados (lembramos que tomando q_1 no intervalo $[0, 2\pi]$ obtemos $\frac{2mE_1}{\hbar^2} = \frac{n^2}{4}$). Assim, fazendo por simplicidade $t_0 = 0$, $\eta = -1$, $v(t_0) = 1$, $u'(t_0) = 2$ e $u(t_0) = 0$, obtemos

$$u = 2t, \quad v = \sqrt{3}t + 1, \quad k_1(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2t}, \quad \Pi_S = \Gamma + \left(\frac{n^2 + 1}{4}\right) \left(\frac{1}{4t^2}\right),$$

onde $\Gamma = -\frac{2mE_2}{\hbar^2}$. Logo a equação (3.62) toma a forma

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left[\Gamma + \left(\frac{n^2 + 1}{16t^2}\right)\right]y = 0.$$

Considerando o problema de Sturm-Liouville formado pela equação acima com condições de contorno $y(a) = y(b) = 0$, $t \in [a, b]$, $0 < a < b$, e $\Gamma + \frac{n^2 + 1}{16t^2} > 0$ em $[a, b]$, sendo m e M os valores máximos e mínimos de $\Gamma + \frac{n^2 + 1}{16t^2}$ em $[a, b]$, se uma solução não-trivial do problema acima tem r zeros em (a, b) então, pelo **Corolário 4.2**, temos

$$\frac{\sqrt{\Gamma + \frac{n^2 + 1}{16b^2}}(b - a)}{\pi} < r < \frac{\sqrt{\Gamma + \frac{n^2 + 1}{16a^2}}(b - a)}{\pi}$$

pois $f(t) = \frac{n^2 + 1}{16t^2}$ é estritamente decrescente neste intervalo. Logo,

$$\frac{\pi^2 r^2}{(b - a)^2} - \frac{n^2 + 1}{16a^2} < \Gamma < \frac{\pi^2 r^2}{(b - a)^2} - \frac{n^2 + 1}{16b^2}.$$

Desta forma, $r = 1$, $n = 1$, $a = 1$ e $b = 2$, obtemos

$$\pi^2 - \frac{1}{8} < \Gamma < \pi^2 - \frac{1}{32},$$

e, em valores aproximados

$$9.744 < \Gamma < 9.838.$$

A superfície com eixo tipo-espaço e curva perfil tipo-tempo correspondente ao potencial geométrico Π_S acima é um "cone hiperbólico tipo-tempo", ver figura (8).

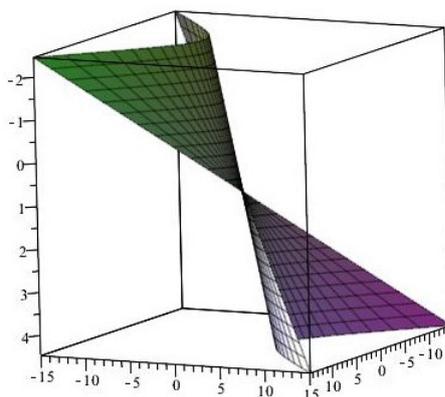


Figura 8 – Cone hiperbólico tipo-tempo

Se o eixo de rotação for tipo-tempo, teremos

$$k_1(t) = -\frac{\sqrt{(v'(t_0))^2 - \eta}}{v'(t_0)(t - t_0) + v(t_0)}.$$

e

$$\Pi_T = \left[\eta \frac{2mE_2}{\hbar^2} - \left(\frac{2mE_1}{\hbar^2} - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{\eta}{(v'(t_0)(t - t_0) + v(t_0))^2} \right) \right].$$

Logo se a curva perfil for tipo-tempo e $v'(t_0) = 0$, $k_1(t) = -\frac{1}{v(t_0)}$ é constante assim como Π_T e a equação (3.80) torna-se um oscilador harmônico para cada valor de E_1 . Consequentemente, as superfícies correspondentes a estes potenciais geométricos são cilindros Lorentzianos (ver Figura(9)).

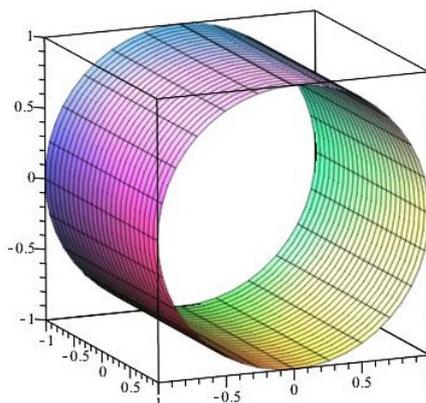


Figura 9 – Cilindro Lorentziano

Se a superfície é tipo-espaço, então $\eta = 1$ e de forma análoga a $u'(t_0)$ no caso em que o eixo é tipo espaço, devemos ter $v'(t_0) \neq 0$. Por outro lado, se a superfície for tipo-espaço e $v'(t_0) = \pm 1$, então $k_1(t) = 0$ e a superfície é umbílica. Logo não podemos ter $u'(t_0) = 0$ em Π_S (neste caso equação apropriada para tais superfícies é (3.73)). Por fim, se $v'(t_0) \neq 0$ para o caso tipo-tempo e $|v'(t_0)| > 1$ para o caso tipo-espaço, podemos como antes, encontrar estimativas

para os autovalores dos problemas de Sturm-Liouville associados. Aqui surge uma pergunta: Será que existem superfícies de revolução tipo-espaço ou tipo-tempo com a curvatura da curva perfil p.c.a constante, além dos cilindros acima obtidos que fazem das equações (3.61), (3.62), (3.79), (3.80) osciladores harmônicos? Para responder esta pergunta considere primeiramente o eixo de revolução tipo espaço. Como $k_1 = -\frac{v'}{u}$ então em termos da curvatura k_1 teremos

$$k_1 = -\frac{v'}{u} = \frac{cu + c_0}{u} \implies u = \frac{c_0}{c - k_1}.$$

Conseqüentemente,

$$v(t) = \int_{t_0}^t (-cu(\tau) + c_0)d\tau = -c \int_{t_0}^t \frac{c_0}{c - k_1(\tau)} d\tau + c_0(t - t_0).$$

Como

$$u' = \frac{c_0 k_1'}{(c - k_1)^2}, \quad \text{e} \quad v' = -\frac{c_0 k_1}{c - k_1},$$

impondo a condição da curva ser p.c.a. no plano xz , $(v')^2 - (u')^2 = \eta$, temos que

$$\left(-\frac{c_0 k_1}{c - k_1}\right)^2 - \left(\frac{c_0 k_1'}{(c - k_1)^2}\right)^2 = \eta \implies (c_0 k_1')^2 - (c_0 k_1)^2 (c - k_1)^2 = -\eta (c - k_1)^4.$$

Resolvendo para k_1' , obtemos

$$(k_1')^2 = \frac{(c_0 k_1)^2 (c - k_1)^2 - \eta (c - k_1)^4}{(c_0)^2} \implies k_1' = \frac{|c - k_1|}{|c_0|} \sqrt{(c_0 k_1)^2 - \eta (c - k_1)^2}.$$

Logo se a curva é p.c.a e o eixo de revolução é tipo-espaço então a curvatura k_1 deve satisfazer a EDO acima. Por outro lado como queremos obter um potencial geométrico constante então nas equações (3.61), (3.62), (3.79), (3.80) devemos ter

$$\left(\frac{k_1'}{k_2 - k_1}\right)^2 - (k_1)^2 = r \implies k_1' = |c - k_1| \sqrt{r + k_1^2}, \quad (5.9)$$

Onde

$$\begin{aligned} |c - k_1| \sqrt{r + k_1^2} &= \frac{|c - k_1|}{|c_0|} \sqrt{(c_0 k_1)^2 - \eta (c - k_1)^2} \\ \implies (c_0 k_1)^2 - \eta (c - k_1)^2 &= (c_0)^2 (r + k_1^2) \\ \implies (c - k_1)^2 &= -\eta (c_0)^2 r \\ \implies k_1 &= c \pm |c_0| \sqrt{-\eta r}, \end{aligned}$$

Logo, k_1 é constante. E como $k_1' = 0$, substituindo em (5.9) obtemos $-(k_1)^2 = r$ donde $k_1 = \pm\sqrt{-r}$. Desta forma a superfície é tipo-espaço ($\eta = 1$) e $c = 0$. Assim, obtemos

$$u(t) = \pm \frac{c_0}{\sqrt{-r}} \quad \text{e} \quad v(t) = c_0(t - t_0).$$

Como a curva é p.c.a., devemos ter $c_0 = 1$. Se o eixo de revolução for tipo-tempo, $k_1 = -\frac{u'}{v}$, $u(t)$ e $v(t)$ trocam de papéis no estudo feito acima, e obtemos novamente k_1 constante e $c = 0$.

6 Conclusão

Inspirado pela realização experimental do espaço tridimensional de Minkowski \mathbb{R}_1^3 em metamateriais hiperbólicos, estudamos a dinâmica quântica de uma partícula restrita a se mover em uma superfície imersa em tal ambiente, através de imersões tipo-espaço ou tipo-tempo. Devido a anisotropia do ambiente, para superfícies de revolução por exemplo, a depender se o eixo for tipo-tempo ou tipo-espaço, podemos ter uma rotação ordinária ou hiperbólica (o equivalente a um aumento no espaço-tempo) e estas podem dar origem a superfícies tipo-espaço ou tipo-tempo a depender do caráter causal da curva perfil de tal superfície. Seguimos então os passos de da Costa cite da1981quantum e obtemos um Hamiltoniano quântico que descreve a dinâmica de uma partícula ligada a uma superfície imersa em \mathbb{R}_1^3 . Assim como da Costa, encontramos um potencial induzido por geometria, que se manifesta na equação

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \sum_{i,j=1}^2 \frac{1}{\sqrt{|\det(g)|}} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sqrt{|\det(g)|} g^{ij} \frac{\partial \chi_T}{\partial q_j} \right) - \frac{\hbar^2}{2m} [\epsilon H^2 - K] \chi_T = E_2 \chi_T, \quad (6.1)$$

e é dado por,

$$V_S = -\frac{\hbar^2}{2m} [\epsilon H^2 - K]. \quad (6.2)$$

depende não apenas das curvaturas média e gaussiana da superfície, como no caso euclidiano, mas também do caráter causal da superfície, como era de se esperar. Especializamos o resultado para superfícies de revolução com eixos tipo-espaço e tipo-tempo, e com curvas perfis tipo-espaço ou tipo-tempo encontrando equações diferenciais de segunda ordem na variável da curva perfil, do tipo Sturm-Liouville, e em termos das curvaturas principais. Como aplicações consideramos o problema de uma partícula confinada ao hiperbolóide de uma folha e duas folhas, em "caixas" nestas superfícies, obtendo problemas de Sturm-Liouville regulares, e usamos a teoria clássica também de Sturm-Liouville e operadores compactos auto-adjuntos para obter estimativas para os autovalores de tais problemas. Posteriormente usamos o Método de Rayleigh-Ritz para melhorar a estimativa do primeiro autovalor de cada um dos problemas obtidos. Por fim, encontramos uma classe de superfícies de revolução com eixo tipo-espaço e tipo-tempo com curvatura da curva perfil constante, e exemplificamos como as estimativas obtidas mostram-se relevantes para esta classe. Por fim discutimos a existência de problemas do tipo "oscilador harmônico" nesta classe.

Como perspectivas, mencionamos a extensão do presente trabalho para situações mais complexas como uma superfície de revolução com um eixo tipo-luz, por exemplo, e superfícies com uma singularidade de curvatura como o universo \mathbb{R}_1^3 compactado de Milne, modelo estudado recentemente por (FIGUEIREDO et al., 2017). Além disso, como mencionado na Introdução, o efeito do potencial induzido por geometria deve aparecer em metamateriais hiperbólicos eletrônicos. Portanto, esperamos que nossos resultados possam ser verificados experimentalmente num futuro próximo.

REFERÊNCIAS

- ACOSTA-HUMÁNEZ, P.; ALVAREZ-RAMÍREZ, M.; STUCHI, T. Nonintegrability of the armbruster–guckenheimer–kim quartic hamiltonian through morales–ramis theory. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, SIAM, v. 17, n. 1, p. 78–96, 2018.
- BARUT, A.; INOMATA, A.; WILSON, R. Algebraic treatment of second poschl-teller, morse-rosen and eckart equations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 20, n. 13, p. 4083, 1987.
- BASTOS, C. C.; PAVÃO, A. C.; LEANDRO, E. S. G. On the quantum mechanics of a particle constrained to generalized cylinders with application to möbius strips. *Journal of Mathematical Chemistry*, Springer, v. 54, n. 9, p. 1822–1834, 2016.
- CORMANI, V.; RYHAM, R. *Variational Techniques for Sturm-Liouville Eigenvalue Problems*. Nebraska: Disponível em: <http://www.math.utah.edu/~rudd/minicourse/sturm-utah.pdf>, 2002.
- DA COSTA, R. Quantum mechanics of a constrained particle. *Physical Review A*, APS, v. 23, n. 4, p. 1982–1987, 1981.
- DA COSTA, R. Constraints in quantum mechanics. *Physical review A*, APS, v. 25, n. 6, p. 2893–2900, 1982.
- DRAGOMAN, D.; DRAGOMAN, M. Metamaterials for ballistic electrons. *Journal of applied physics*, AIP, v. 101, n. 10, p. 104316, 2007.
- FIGUEIREDO, D.; GOMES, F. A.; FUMERON, S.; BERCHE, B.; MORAES, F. Modeling kleinian cosmology with electronic metamaterials. *Physical Review D*, APS, v. 94, n. 4, p. 044039, 2016.
- FIGUEIREDO, D.; MORAES, F.; FUMERON, S.; BERCHE, B. Cosmology in the laboratory: an analogy between hyperbolic metamaterials and the milne universe. *Physical Review D*, APS, v. 96, n. 10, p. 105012, 2017.
- GRAVESEN, J.; WILLATZEN, M.; VOON, L. L. Y. Schrödinger problems for surfaces of revolution—the finite cylinder as a test example. *Journal of mathematical physics*, AIP, v. 46, n. 1, p. 012107, 2005.
- HENDERSON, G. N.; GAYLORD, T. K.; GLYTSIS, E. N. Ballistic electron transport in semiconductor heterostructures and its analogies in electromagnetic propagation in general dielectrics. *Proceedings of the IEEE*, IEEE, v. 79, n. 11, p. 1643–1659, 1991.
- JENSEN, H.; KOPPE, H. Quantum mechanics with constraints. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 63, n. 2, p. 586–591, 1971.
- KÜHNEL, W. *Differential geometry: Curves-surfaces-manifolds*. Stuttgart: American Mathematical Soc., 2015. v. 77.
- LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Quantum Mechanics: Non-relativistic Theory. V. 3 of Course of Theoretical Physics*. Moscow: Pergamon Press, 1958.

- LI, Y. *Lectures on Variational Methods*. Baltimore: Disponível em: <<http://www.math.jhu.edu/~yli/VariationalJun.2016.2012>>.
- LÓPEZ, R. Differential geometry of curves and surfaces in lorentz-minkowski space. *arXiv preprint arXiv:0810.3351*, 2008.
- MUNTEANU, L.; DONESCU, S. *Introduction to soliton theory: applications to mechanics*. Romania: Springer Science & Business Media, 2006. v. 143.
- NIETO, M. M. Exact wave-function normalization constants for the $b \tanh z - u \cosh^{-2} z$ and pöschl-teller potentials. *Physical Review A*, APS, v. 17, n. 4, p. 1273–1283, 1978.
- OLIVEIRA, R. S. de. *Cálculo Variacional com Aplicação ao Problema de Sturm-Liouville*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pernambuco, Departamento de Matemática, Recife, 2016.
- O'NEILL, B. *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*. California: Academic press, 1983. v. 103.
- PODDUBNY, A.; IORSH, I.; BELOV, P.; KIVSHAR, Y. Hyperbolic metamaterials. *Nature Photonics*, Nature Research, v. 7, n. 12, p. 948–957, 2013.
- SANTOS, F.; FUMERON, S.; BERCHE, B.; MORAES, F. Geometric effects in the electronic transport of deformed nanotubes. *Nanotechnology*, IOP Publishing, v. 27, n. 13, p. 135302, 2016.
- SILVA, L. C. B. da. Surfaces of revolution with prescribed mean curvature in lorentz-minkowski space and hypercomplex numbers. Manuscript unpublished, E-mail address: luizsilva@dmat.ufpe.br, 2016.
- SILVA, L. C. B. da. *Differential Geometry of Rotation Minimizing Frames, Spherical curves, and Quantum Mechanics of a Constrained Particle*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pernambuco, Tese de Doutorado Departamento de Matemática, Recife, 2017.
- SILVA, L. C. da; BASTOS, C. C.; RIBEIRO, F. G. Quantum mechanics of a constrained particle and the problem of prescribed geometry-induced potential. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 379, p. 13–33, 2017.
- SIMMONS, G. F. *Differential equations with applications and historical notes*. Colorado: CRC Press, 2016.
- SMOLYANINOV, I. I.; HUNG, Y.-J. Minkowski domain walls in hyperbolic metamaterials. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 377, n. 5, p. 353–356, 2013.
- SOTOMAYOR, J. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1979. v. 11.
- TAIRA, H.; SHIMA, H. Torsion-induced persistent current in a twisted quantum ring. *Journal of Physics: Condensed Matter*, IOP Publishing, v. 22, n. 7, p. 075301, 2010.
- TAKAGI, S.; TANZAWA, T. Quantum mechanics of a particle confined to a twisted ring. *Progress of theoretical physics*, Oxford University Press, v. 87, n. 3, p. 561–568, 1992.
- WHITTAKER, E. T.; WATSON, G. N. *A course of modern analysis*. London: Cambridge university press, 1996.

WILLATZEN, M. Electromagnetic-wave propagation along curved surfaces. *Physical Review A*, APS, v. 80, n. 4, p. 043805, 2009.

APÊNDICE A – CÁLCULOS DAS SEGUNDAS FORMAS FUNDAMENTAIS REFERENTES AS SUBSEÇÕES 2.5.1 e 2.5.2

Aqui calcularemos os coeficientes da segunda forma fundamental obtidos em (2.15), (2.16) (2.17) para uma superfície de revolução com eixo tipo-espaço e curva perfil no plano xz tipo tempo. Calculando $\frac{\partial r}{\partial q_1} \times_1 \frac{\partial r}{\partial q_2}$, onde \times_1 denota o produto vetorial de \mathbb{R}_1^3 , obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial q_1} \times_1 \frac{\partial r}{\partial q_2} &= (-uv' \cosh(q_1), -uv' \sinh(q_1), uu' \sinh^2(q_1) - uu' \cosh^2(q_1)) \\ &= -(uv' \cosh(q_1), uv' \sinh(q_1), uu'). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial r}{\partial q_1} \times_1 \frac{\partial r}{\partial q_2}, \frac{\partial r}{\partial q_1} \times_1 \frac{\partial r}{\partial q_2} \right\rangle_1 &= -(uv')^2 \cosh^2(q_1) + (uv')^2 \sinh^2(q_1) + (u'u)^2 \\ &= -(uv')^2 + (uu')^2 \\ &= u^2[(u')^2 - (v')^2] \\ &= -\det(g_{ij}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 r}{\partial q_1^2} &= (u \cosh(q_1), u \sinh(q_1), 0), \\ \frac{\partial^2 r}{\partial q_1 \partial q_2} &= \frac{\partial^2 r}{\partial q_2 \partial q_1} = (u' \sinh(q_1), u' \cosh(q_1), 0), \\ \frac{\partial^2 r}{\partial q_2^2} &= (u'' \cosh(q_1), u'' \sinh(q_1), v''). \end{aligned}$$

Como $N = \frac{-1}{\sqrt{|u^2[(v')^2 - (u')^2]|}} (v'u \cosh(q_1), v'u \sinh(q_1), u'u)$, de (2.10), temos que os coeficientes da segunda forma fundamental são

$$\begin{aligned} h_{11} &= \varepsilon \left\langle \frac{\partial^2 r}{\partial q_1^2}, N \right\rangle_1 \\ &= \frac{-\varepsilon}{\sqrt{|u^2[(v')^2 - (u')^2]|}} \langle (u \cosh(q_1), u \sinh(q_1), 0), (v'u \cosh(q_1), v'u \sinh(q_1), u'u) \rangle_1 \\ &= \frac{-\varepsilon}{u \sqrt{|(v')^2 - (u')^2|}} (-v'u^2 \cosh^2(q_1) + v'u^2 \sinh^2(q_1)) \\ &= \frac{\varepsilon v'u}{\sqrt{|(v')^2 - (u')^2|}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h_{12} = h_{21} &= \varepsilon \left\langle \frac{\partial^2 r}{\partial q_1 \partial q_2}, N \right\rangle_1 \\
 &= \frac{-\varepsilon}{\sqrt{|u^2[(v')^2 - (u')^2]|}} \langle (u' \sinh(q_1), u' \cosh(q_1), 0), (v'u \cosh(q_1), v'u \sinh(q_1), u'u) \rangle_1 \\
 &= \frac{-\varepsilon}{\sqrt{|u^2[(v')^2 - (u')^2]|}} (-u'uv' \sinh(q_1) \cosh(q_1) + u'uv' \sinh(q_1) \cosh(q_1)) \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

e finalmente,

$$\begin{aligned}
 h_{22} &= \varepsilon \left\langle \frac{\partial^2 r}{\partial q_2^2}, N \right\rangle_1 \\
 &= \frac{-\varepsilon}{\sqrt{|u^2[(v')^2 - (u')^2]|}} \langle (u'' \cosh(q_1), u'' \sinh(q_1), v''), (v'u \cosh(q_1), v'u \sinh(q_1), u'u) \rangle_1 \\
 &= \frac{-\varepsilon}{u\sqrt{|(v')^2 - (u')^2|}} (-v'uu'' \cosh^2(q_1) + v'uu'' \sinh^2(q_1) + v''u'u) \\
 &= \frac{-\varepsilon}{u\sqrt{|(v')^2 - (u')^2|}} (-v'uu'' + v''u'u) \\
 &= \varepsilon \frac{v'u'' - v''u'}{\sqrt{|(v')^2 - (u')^2|}}.
 \end{aligned}$$

Agora passamos a calcular os coeficientes da segunda forma fundamental obtidos em (2.23), (2.24) e (2.25) para uma superfície de revolução com eixo tipo-espaço e curva perfil no plano yz tipo-espaço. Calculando $\frac{\partial r}{\partial q_1} \times_1 \frac{\partial r}{\partial q_2}$, para este caso, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial r}{\partial q_1} \times_1 \frac{\partial r}{\partial q_2} &= (-uv' \cosh(q_1), -uv' \sinh(q_1), uu' \cosh^2(q_1) - uu' \sinh^2(q_1)) \\
 &= (-uv' \sinh(q_1), -uv' \cosh(q_1), uu').
 \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{\partial r}{\partial q_1} \times_1 \frac{\partial r}{\partial q_2}, \frac{\partial r}{\partial q_1} \times_1 \frac{\partial r}{\partial q_2} \right\rangle_1 &= -(v'u)^2 \sinh^2(q_1) + (v'u)^2 \cosh^2(q_1) + (u'u)^2 \\
 &= (uv')^2 + (uu')^2 \\
 &= u^2[(u')^2 + (v')^2] \\
 &= -\det(g_{ij}).
 \end{aligned}$$

Para calcular a segunda forma fundamental, observe que

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 r}{\partial q_1^2} &= (u \sinh(q_1), u \cosh(q_1), 0), \\
 \frac{\partial^2 r}{\partial q_1 \partial q_2} &= \frac{\partial^2 r}{\partial q_2 \partial q_1} = (u' \cosh(q_1), u' \sinh(q_1), 0), \\
 \frac{\partial^2 r}{\partial q_2^2} &= (u'' \sinh(q_1), u'' \cosh(q_1), v'').
 \end{aligned}$$

Como $N = \frac{1}{\sqrt{|-u^2[(u')^2 + (v')^2]|}} (-v'u \sinh(q_1), -v'u \cosh(q_1), u'u)$, de (2.10), segue que os coeficientes da segunda forma fundamental são

$$\begin{aligned} h_{11} &= \varepsilon \left\langle \frac{\partial^2 r}{\partial q_1^2}, N \right\rangle_1 \\ &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{|-u^2[(u')^2 + (v')^2]|}} \langle (u \sinh(q_1), u \cosh(q_1), 0), (-v'u \sinh(q_1), -v'u \cosh(q_1), u'u) \rangle_1 \\ &= \frac{\varepsilon}{u \sqrt{|(u')^2 + (v')^2|}} (v'u^2 \sinh^2(q_1) - v'u^2 \cosh^2(q_1)) \\ &= \frac{-\varepsilon v'u}{\sqrt{|(u')^2 + (v')^2|}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{12} = h_{21} &= \varepsilon \left\langle \frac{\partial^2 r}{\partial q_1 \partial q_2}, N \right\rangle_1 \\ &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{|-u^2[(u')^2 + (v')^2]|}} \langle (u' \cosh(q_1), u' \sinh(q_1), 0), (-v'u \sinh(q_1), -v'u \cosh(q_1), u'u) \rangle_1 \\ &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{|-u^2[(u')^2 + (v')^2]|}} (u'uv' \sinh(q_1) \cosh(q_1) - u'uv' \sinh(q_1) \cosh(q_1)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

e finalmente,

$$\begin{aligned} h_{22} &= \varepsilon \left\langle \frac{\partial^2 r}{\partial q_2^2}, N \right\rangle_1 \\ &= \frac{-\varepsilon}{\sqrt{|-u^2[(u')^2 + (v')^2]|}} \langle (u'' \sinh(q_1), u'' \cosh(q_1), v''), (v'u \sinh(q_1), v'u \cosh(q_1), -u'u) \rangle_1 \\ &= \frac{\varepsilon}{u \sqrt{|(u')^2 + (v')^2|}} (v'u u'' \sinh^2(q_1) - v'u u'' \cosh^2(q_1) + v'' u'u) \\ &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{|(u')^2 + (v')^2|}} (u'v'' - v'u''). \end{aligned}$$

Por fim, calcularemos os coeficientes da segunda forma fundamental obtidos em (2.32), (2.33) e (2.34) para uma superfície de revolução com eixo tipo-tempo e curva perfil no plano xz tipo-tempo.

Calculando $\frac{\partial r}{\partial q_1} \times_1 \frac{\partial r}{\partial q_2}$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial q_1} \times_1 \frac{\partial r}{\partial q_2} &= (-(v'v' \cos^2(q_1) + v'v' \sin^2(q_1)), -vu' \sin(q_1), -vu' \cos(q_1)) \\ &= -(v'v', vu' \sin(q_1), vu' \cos(q_1)) \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial r}{\partial q_1} \times_1 \frac{\partial r}{\partial q_2}, \frac{\partial r}{\partial q_1} \times_1 \frac{\partial r}{\partial q_2} \right\rangle_1 &= -(vv')^2 + (vu')^2 \sin^2(q_1) + (vu')^2 \cos^2(q_1) \\ &= -(vv')^2 + (vu')^2 \\ &= v^2[(u')^2 - (v')^2] \\ &= -\det(g_{ij}). \end{aligned}$$

Para calcular a segunda forma fundamental observe que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 r}{\partial q_1^2} &= (0, -v \sin(q_1), -v \cos(q_1)) \\ \frac{\partial^2 r}{\partial q_1 \partial q_2} &= \frac{\partial^2 r}{\partial q_2 \partial q_1} = (0, v' \cos(q_1), -v' \sin(q_1)). \\ \frac{\partial^2 r}{\partial q_2^2} &= (u'', v'' \sin(q_1), v'' \cos(q_1)). \end{aligned}$$

Como $N = \frac{-1}{\sqrt{|v^2[(v')^2 - (u')^2]|}} (vv', vu' \sin(q_1), vu' \cos(q_1))$, de (2.10) segue que os coeficientes da segunda forma fundamental são

$$\begin{aligned} h_{11} &= \varepsilon \left\langle \frac{\partial^2 r}{\partial q_1^2}, N \right\rangle_1 \\ &= \frac{-\varepsilon}{\sqrt{|v^2[(v')^2 - (u')^2]|}} \langle (0, -v \sin(q_1), -v \cos(q_1)), (vv', vu' \sin(q_1), vu' \cos(q_1)) \rangle_1 \\ &= \frac{-\varepsilon}{v \sqrt{|(v')^2 - (u')^2|}} (-u'v^2 \sin^2(q_1) - u'v^2 \cos^2(q_1)) \\ &= \frac{\varepsilon v u'}{\sqrt{|(v')^2 - (u')^2|}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{12} = h_{21} &= \varepsilon \left\langle \frac{\partial^2 r}{\partial q_1 \partial q_2}, N \right\rangle_1 \\ &= \frac{-\varepsilon}{\sqrt{|v^2[(v')^2 - (u')^2]|}} \langle (0, v' \cos(q_1), -v' \sin(q_1)), (vv', vu' \sin(q_1), vu' \cos(q_1)) \rangle_1 \\ &= \frac{-\varepsilon}{v \sqrt{|(v')^2 - (u')^2|}} (vv' u' \cos(q_1) \sin(q_1) - vv' u' \cos(q_1) \sin(q_1)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

e finalmente,

$$\begin{aligned}
 h_{22} &= \varepsilon \left\langle \frac{\partial^2 r}{\partial q_2^2}, N \right\rangle_1 \\
 &= \frac{-\varepsilon}{\sqrt{|v^2[(v')^2 - (u')^2]|}} \langle (u'', v'' \sin(q_1), v'' \cos(q_1)), (vv', vu' \sin(q_1), vu' \cos(q_1)) \rangle_1 \\
 &= \frac{-\varepsilon}{v\sqrt{|(v')^2 - (u')^2|}} (-vv'u'' + vu'v'' \sin^2(q_1)vu'v'' \cos^2(q_1)) \\
 &= \frac{\varepsilon(v'u'' - u'v'')}{\sqrt{|(v')^2 - (u')^2|}}.
 \end{aligned}$$

O termo $\left(\left(\frac{k_1'}{k_2 - k_1} \right)^2 - k_1^2 \right)$ para $c < 0$ é dado por

$$\frac{-16c^4 c_1^2 \eta e^{2c(t-t_0)}}{16c^4 c_1^2 e^{2ct} (c_1^2 + (u(t_0))^2 e^{2ct_0}) + \eta^2 e^{(2ct+4ct_0)} - 8u(t_0)A_1 - 2B_1 e^{3ct_0} + C_1 e^{2ct_0} - 8D_1 e^{ct_0}},$$

onde

$$\begin{cases} A_1 = 4c^4 c_1^3 e^{(2ct+ct_0)} + c^2 c_1 \eta e^{(2ct+3ct_0)} - \left(4c^4 c_1^3 e^{(ct)} + c^2 c_1 \eta e^{(3ct)} \right) e^{2ct_0}, \\ B_1 = 4c^2 c_1^2 \eta e^{ct} + \eta^2 e^{3ct}, \\ C_1 = 16c^4 c_1^4 + 16c^2 c_1^2 \eta e^{2ct} + \eta^2 e^{4ct}, \\ D_1 = 4c^4 c_1^4 e^{ct} + c^2 c_1^2 \eta e^{3ct}. \end{cases}$$

APÊNDICE B – ALGORITMO PARA IMPLEMENTAR O MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ PARA O PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE (4.63) DA SUBSEÇÃO 4.4.3 TENDO COMO ENTRADA AS FUNÇÕES TESTES (4.64)

```

%time
n = 4
G = 3/(4*(cosh(x))^2)
W=[(exp(x)+exp(-x))*(1-e^(x-ln(2)))*(1-e^(x-ln(8)))*x^(k) for k in \
    range(1,n+1)]
lista1 = []
for i in range(len(W)):
    for j in range(len(W)):
        lista1.append(integral(diff(W[i],x)*diff(W[j],x) - G*W[i]*W[
            j],x,ln(2),ln(8)))
lista2 = []
for i in range(len(W)):
    for j in range(len(W)):
        lista2.append(integral(W[i]*W[j],x,ln(2),ln(8)))
A = matrix(n,n, lista1)
B = matrix(n,n, lista2)
BS=B.apply_map(lambda x: x.full_simplify())
lista11=[]
for l in lista1:
    r=str(l)
    lista11.append(r)
    z = PolynomialRing(RationalField(),"z").gen()
lista111=[]
for l in lista11:
    r=sage_eval(l, locals={'ln(2)':z})
    lista111.append(r)
AS=matrix(n,n, lista111)
lista22=[]
for l in lista2:
    r=str(l)
    lista22.append(r)
    z = PolynomialRing(RationalField(),"z").gen()
lista222=[]
for l in lista22:
    r=sage_eval(l, locals={'ln(2)':z})

```

```
lista222.append(r)
BSS=matrix(n,n,lista222)
DS=det(AS-x*BSS)
p=DS.subs(z=RealField(1000000)(ln(2)))
CPU time: 26.07 s, Wall time: 42.12 s
```

```
def Bisection(f, lower, upper, errorBound):
    #r = (lower+upper)/2
    r = (lower+upper)/2
    while( f(r)!=0 and (upper-lower) >= errorBound
           ):
        if(f(lower) * f(r)<0):
            upper = r
        else: #(f(upper) * f(r)<0)
            lower = r
        r = (lower+upper)/2
    return r,N(r, digits=30)
```

```
Bisection(p,4,5,10(-20))
```

```
(1460369485667822370817/295147905179352825856, 4.94792427810184920478403709267)
```

APÊNDICE C – ALGORITMO PARA IMPLEMENTAR O MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ PARA O PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE (4.65) DA SUBSEÇÃO 4.4.3 TENDO COMO ENTRADA AS FUNÇÕES TESTES (4.66)

```

%time
n = 4
G = -3/(4*(sinh(x))^2)
W=[(exp(x)-exp(-x))*(2^(k)-e^(k*x))*(8-e^(x)) for k in range(1,n+1)]
lista1 = []
for i in range(len(W)):
    for j in range(len(W)):
        lista1.append(integral(diff(W[i],x)*diff(W[j],x) - G*W[i]*W[
j],x,ln(2),ln(8)))
lista2 = []
for i in range(len(W)):
    for j in range(len(W)):
        lista2.append(integral(W[i]*W[j],x,ln(2),ln(8)))
A = matrix(n,n, lista1)
B = matrix(n,n, lista2)
BS=B.apply_map(lambda x: x.full_simplify())
lista11=[]
for l in lista1:
    r=str(l)
    lista11.append(r)
    z = PolynomialRing(RationalField(),"z").gen()
lista111=[]
for l in lista11:
    r=sage_eval(l, locals={'ln(2)':z})
    lista111.append(r)
AS=matrix(n,n, lista111)
lista22=[]
for l in lista2:
    r=str(l)
    lista22.append(r)
    z = PolynomialRing(RationalField(),"z").gen()
lista222=[]
for l in lista22:
    r=sage_eval(l, locals={'ln(2)':z})
    lista222.append(r)

```

```
BSS=matrix(n,n,lista222)
DS=det(AS-x*BSS)
p=DS.subs(z=RealField(10000)(ln(2)))
CPU time: 9.74 s, Wall time: 19.72 s
```

```
def Bisection(f, lower, upper, errorBound):
    r = (lower+upper)/2
    while( f(r)!=0 and (upper-lower) >= errorBound
    ):
        if(f(lower) * f(r)<0):
            upper = r
        else: #(f(upper) * f(r)<0)
            lower = r
        r = (lower+upper)/2
    return r,N(r, digits=30)
```

```
Bisection(p,5,7,10(-20))
(1605779829576203730945/295147905179352825856, 5.44059368674975984970016069410)
```