



Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós Graduação em Matemática

Joelma Azevedo de Moura Nascimento

Teoria qualitativa para certas equações diferenciais parciais

Recife

2018

Joelma Azevedo de Moura Nascimento

Teoria qualitativa para certas equações diferenciais parciais

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Dr. Claudio Cuevas Henríquez
Coorientador: Dr. Vicente Vergara

Recife

2018

Catálogo na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

N244t Nascimento, Joelma Azevedo de Moura
Teoria qualitativa para certas equações diferenciais parciais / Joelma Azevedo de Moura Nascimento. – 2018.
123 f.

Orientador: Claudio Cuevas Henríquez.
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, Recife, 2018.
Inclui referências.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Comportamento assintótico. I. Henríquez, Claudio Cuevas (orientador). II. Título.

515.353 CDD (23. ed.) UFPE- MEI 2018-034

JOELMA AZEVEDO DE MOURA NASCIMENTO

TEORIA QUALITATIVA PARA CERTAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutorado em Matemática.

Aprovado em: 21/02/2018

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Claudio Rodrigo Cuevas Henrique (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Clessius Silva (Examinador Externo)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Prof. Dr. Herme Patrício Soto Segura (Examinador Externo)
Universidad de La Frontera

Prof. Dr. Filipe Andrade da Costa (Examinador Externo)
Universidade de Pernambuco

Prof. Dr. Fábio Lima Santos (Examinador Externo)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

A Deus e a minha família.

AGRADECIMENTOS

“Porque dEle e por Ele, e para Ele, são todas as coisas; glória, pois, a Ele eternamente. Amém!” (Romanos 11-36).

É tendo pleno conhecimento desta passagem bíblica que venho aqui agradecer, primeiramente, ao meu Deus por tudo que Ele é e tem feito na minha vida. Estou certa de que tudo que tenho, tudo que sou e o que vier a ser, vem dEle. Obrigada, Jesus, por teu cuidado e tua presença em meu viver.

Em seguida, não poderia deixar de demonstrar minha gratidão àquele que tem sido meu companheiro de todas as horas: Leandro, meu amado e admirável esposo. Obrigada, meu querido, por todo amor, compreensão e apoio. Você é um presente de Deus para mim.

Outra pessoa a quem sou extremamente grata é a minha “filhota” Gabriele. É ela que me faz sorrir em todos os momentos e enche meu coração de alegrias. Mamãe te ama demais!

Muito obrigada aos meus queridos e amados pais por vocês existirem e por tudo que fizeram e ainda fazem por mim. Amo muito vocês.

Agradeço também aos meus sogros (que na verdade são como pais para mim) por nos apoiarem em todos os sentidos.

Reservo agora um agradecimento mais do que especial ao meu orientador Claudio Cuevas (a quem já considero como um grande amigo) por tudo que ele tem feito por mim ao longo deste doutorado. Obrigada, professor, por sua generosidade, conselhos e paciência. Serei sempre muito grata ao senhor por todas estas coisas.

Outra pessoa que também aprendi a admirar neste último ano e a quem sou muito grata pelos conselhos dados é a querida amiga Gilca. Ela é a esposa do professor Claudio (a mulher por trás de um grande homem). Que Deus continue abençoando a união de vocês dois!

Meu muito obrigada vai agora para o professor Vicente Vergara, meu coorientador. Só tenho a agradecer por sua generosidade e paciência.

Um outro grande professor, que posso sem sombra de dúvidas chamar de amigo, é Esdras Jafet. O professor Esdras foi meu orientador na graduação e sempre me apoiou e incentivou a seguir em frente estudando matemática. Nunca esquecerei da sua ajuda e das muitas vezes em que ele me dizia: “Siga em frente, não desista e se precisar da minha ajuda, é só me procurar”. E sempre que eu recorria a ele, ele estava lá, pronto a me ajudar. Ao senhor professor Esdras, meu muito, muito obrigada.

Obrigada também ao Grupo de Equações de Evolução e Aplicações do Departamento de Matemáticas e Estatística da Universidade de La Frontera, Temuco, Chile, pelo convite para participar do III Workshop de Ecuaciones de Evolución y Aplicaciones, em especial aos professores Mario Choquehuanca, Alex Sepúlveda e Herme Soto por toda a hospitalidade. Também agradeço ao professor Herme Soto por sua grande contribuição neste trabalho.

Nicolás Zumelzu, Filipe Andrade e Clessius Silva, como não lembrar de vocês. Obrigada a todos pelo suporte dado no desenvolvimento desta tese.

Meu muito obrigada vai também para o coordenador do DMAT-UFPE, o professor Miguel Loyaza, por se mostrar sempre prestativo.

E finalmente, meu agradecimento ao CNPq por todo apoio financeiro.

*“Pois o Senhor é quem dá sabedoria; de Sua boca procedem o conhecimento e o discernimento”.
(Provérbios 2:6)*

RESUMO

Neste trabalho, fazendo uso de ferramentas de Análise Funcional e de Topologia, nós investigamos propriedades de periodicidade assintótica para as soluções brandas de equações de ondas semilineares fortemente amortecidas. Ainda com relação as soluções brandas deste tipo de equação, nós estudamos propriedades de limitação em L^p e a estrutura topológica do conjunto formado por estas soluções. Também obtemos resultados de existência de soluções clássicas e de soluções fortes e, por fim, complementamos os resultados teóricos com um conjunto de várias aplicações ilustrativas. Além deste estudo, consideramos também o modelo fracionário de Keller-Segel para a quimiotaxia de ordem $\alpha \in (0, 1)$. Tomando o dado inicial suficientemente pequeno na classe dos espaços de Besov-Morrey, nós provamos um resultados de existência e unicidade de solução global branda para este mesmo problema. Conseguimos também garantir a existência de soluções auto-similares e, para finalizar, mostramos um resultado sobre o comportamento assintótico das soluções do sistema fracionário de Keller-Segel.

Palavras-chave: Equações de ondas amortecidas. Limitação. Comportamento assintótico. Modelo de Keller-Segel. Espaços de Besov-Morrey. Soluções auto-similares.

ABSTRACT

In this work, using tools of Functional Analysis and Topology, we investigate properties of asymptotic periodicity for the mild solutions of strongly damped semilinear wave equations. Still in relation the mild solutions of this type of equation, we study properties of boundedness in the L^p -spaces and the topological structure of set consisting by these solutions. We also obtain results of existence of classical solutions and existence of strong solutions, and finally, we complement the theoretical results with a set of very illustrating applications. Besides this study, we consider the time-fractional Keller-Segel model for chemotaxis of order $\alpha \in (0, 1)$. Taking into account the enough small initial data in a class of Besov-Morrey spaces, we prove a result of existence and uniqueness of global mild solution for this problem. We also ensure the existence of self-similar solutions, and lastly, we show an asymptotic behaviour result for the solutions of time-fractional Keller-Segel system.

Keywords: Damped wave equations. Boundedness. Asymptotic behaviour. Keller-Segel model. Besov-Morrey space. Self-similar solutions.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	PRELIMINARES	17
2.1	Funções periódicas e suas generalizações	17
2.1.1	Funções S -assintoticamente ω -periódicas	19
2.1.2	Funções pseudo S -assintoticamente ω -periódicas	19
2.2	Medida de não compacidade	21
2.3	Equação resolvente	23
2.3.1	O caso L^p	24
2.3.2	O caso contínuo	25
2.3.3	Núcleo resolvente em L^1	25
2.4	Operadores setoriais	27
2.5	Potências fracionárias	29
2.6	Espaços de Morrey e Besov-Morrey	31
2.7	A função de Mainardi	33
2.8	Os operadores de Mittag-Leffler	33
2.9	Métodos topológicos	34
3	EQUAÇÕES DE ONDAS FORTEMENTE AMORTECIDAS	39
3.1	Introdução	39
3.2	Redução a primeira ordem	39
3.3	Existência de soluções pseudo S -assintoticamente ω -periódicas	41
3.4	Propriedades de limitação em L^p	53
3.5	Estrutura topológica do conjunto de soluções	66
3.6	Resultados diversos em existência	80
3.7	Aplicações	92
4	O MODELO FRACIONÁRIO DE KELLER-SEGEL PARA QUIMIO- TAXIA	100
4.1	Introdução	100
4.2	Estimativas para os operadores de Mittag-Leffler	102
4.3	Existência de solução global	105
4.4	Comportamento assintótico das soluções	111
	REFERÊNCIAS	117

1 INTRODUÇÃO

Sabemos que problemas do mundo real são modelados matematicamente através de equações diferenciais e que o estudo do comportamento assintótico das soluções destas equações (quando existem) é, sem sombra de dúvidas, um dos assuntos mais ativos na teoria qualitativa de equações diferenciais. Em periodicidade assintótica, por exemplo, observamos que a quase totalidade dos sistemas concretos são submetidos à perturbações externas (ou internas) que não são exatamente periódicas, no entanto, em muitas situações podemos supor que estas perturbações são aproximadamente periódicas, em um sentido amplo.

Neste contexto, o matemático dinamarquês Harald Bohr introduziu, no início do século 20, o conceito de funções quase periódicas, criando assim uma nova teoria. Esta teoria rapidamente atraiu a atenção de vários matemáticos de sua época devido, não só à estrutura de tais funções, mas também a sua vasta aplicação em áreas como física, biologia e economia. Nomes famosos como os de A. S. Besicovitch, S. Bochner, J. von Neumann, V. V. Stepanov, H. Weyl, N. Wiener e M. Fréchet aparecem na literatura relacionada ao estudo de quase periodicidade. Atualmente, têm surgido vários conceitos que representam a ideia de função aproximadamente periódica. Dentre eles citamos: as funções assintoticamente quase periódicas e as assintoticamente periódicas.

Nos últimos anos, o estudo de periodicidade e suas extensões para equações de evolução tem atraído a atenção de muitos matemáticos. Recentemente surgiu a noção de função S -assintoticamente ω -periódica (ver (HENRÍQUEZ; PIERRI; TÁBOAS, 2008)) que é uma generalização da função assintoticamente ω -periódica. Este novo conceito tem interessantes aplicações em vários ramos das equações diferenciais e isso tem despertado o interesse de vários pesquisadores no assunto (ver (CAICEDO et al., 2012; CUEVAS; SOUZA, 2010; CUEVAS; SOUZA, 2009; CUEVAS; LIZAMA, 2010; HENRÍQUEZ; PIERRI; TÁBOAS, 2008; DOS SANTOS; HENRÍQUEZ, 2015)).

Em 2013 apareceu uma nova noção de funções assintoticamente periódica, também chamadas pseudo S -assintoticamente ω -periódicas. Tal conceito foi introduzido em (PIERRI; ROLNIK, 2013). Neste artigo os autores apresentam uma discussão sobre as diferenças entre as funções pseudo S -assintoticamente ω -periódicas e a classe padrão das funções assintoticamente periódicas. Na literatura são estudadas algumas interessantes características e aplicações deste novo tipo de função em vários ramos das equações de evolução, como por exemplo equações fracionárias e estruturas flexíveis possuindo material interno amortecido e força externa (ver (CUEVAS; HENRÍQUEZ; SOTO, 2014; DE ANDRADE et al., 2016)).

Nesta tese, discutimos, entre outras coisas, a existência de soluções brandas pseudo S -assintoticamente ω -periódicas para equações de ondas fortemente amortecidas, definidas sobre espaços vetoriais abstratos de dimensão infinita. Até a presente data, a literatura com respeito a periodicidade assintótica deste tipo de equação é ainda incipiente e a rápida evolução da noção de pseudo S -assintoticamente ω -periodicidade nos motiva a realizar este estudo. Além do estudo de periodicidade assintótica, realizamos uma profunda análise da estrutura topológica do conjunto de soluções para equações de ondas fortemente amortecidas. Investigamos também a existência de solução global (branda) para o modelo fracionário de Keller-Segel para quimiotaxia. Tal sistema é considerado um dos mais importantes para se entender o processo de agregação quimiotática ¹.

Este trabalho encontra-se dividido em três capítulos. O Capítulo 2, intitulado “Preliminares”, tem por objetivo tornar o texto o mais autosuficiente possível. Nele algumas definições e propriedades dos elementos envolvidos neste trabalho serão lembrados. De modo mais específico, faremos uma breve revisão das generalizações de funções periódicas e de alguns teoremas clássicos da Análise Funcional. Recordamos ainda algumas propriedades dos espaços de Morrey e de Besov-Morrey, da função de Mainardi e dos operadores de Mittag-Leffler. Por fim, já na última seção deste capítulo, enunciaremos diversos resultados topológicos, extremamente úteis a nossos objetivos.

No Capítulo 3, cujo título é “Equações de ondas fortemente amortecidas”, fazemos um estudo qualitativo para um dado sistema de equações de ondas fortemente amortecidas. Tais equações têm despertado grande interesse na atualidade sendo investigadas em diversos contextos por vários matemáticos, sob diferentes hipóteses. A literatura nos oferece tópicos como existência (BAHUGUNA, 1995; GAZZOLA; SQUASSINA, 2006; GEORGIEV; TODOROVA, 1994), comportamento assintótico (WEBB, 1980; GHIDAGLIA; MARZOCCHI, 1991; MASSATT, 1983), atratores (BORINI; PATA, 1999; BRUSCHI et al., 2006; CARVALHO; CHOLEWA, 2002a; LI; ZHOU; YIN, 2004; PATA; SQUASSINA, 2005; YANG; SUN, 2009), boa colocação (CARVALHO; CHOLEWA, 2002b), estimativas de decaimento (IKEHATA, 2001), blow-up (AVALOS; LASIECKA, 2003; GAZZOLA; SQUASSINA, 2006; MESSAOUDI, 2001), controlabilidade (AVALOS; LASIECKA, 2003), bootstrapping e regularidade (CARVALHO; CHOLEWA; DLOTKO, 2008), periodicidade assintótica (CUEVAS; LIZAMA; SOTO, 2013). Estas equações também são consideradas em áreas da física tais como; condução de calor, mecânica dos sólidos e assim por diante. Mais detalhes podem ser encontrados nas referências bibliográficas, as quais incluem muitos dos artigos originais.

De maneira mais específica, estudamos na Seção 3.3 a existência de soluções brandas

¹ Na agregação quimiotática, as células se acumulam em regiões pequenas do espaço dando origem a configurações altamente densas.

pseudo S -assintoticamente ω -periódicas para o seguinte problema de Cauchy:

$$\begin{cases} u_{tt} + 2\eta A^{\frac{1}{2}}u_t + Au = f(t, u, u_t), & t > 0, \\ u(0) = u_0 \in X^{\frac{1}{2}}, & u_t(0) = v_0 \in X, \end{cases} \quad (1.1)$$

onde X é um espaço de Banach reflexivo, $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ é um operador fechado densamente definido, $X^{\frac{1}{2}}$ é o espaço de potência fracionária associado a A como em (HENRY, 2006), $\eta > 0$ e f é uma função contínua adequada. Além disso, nas Seções 3.4 e 3.6 garantimos (sob certas condições) a existência de soluções brandas em L^p e de soluções clássicas (e fortes), respectivamente. Estudamos ainda a estrutura topológica do conjunto solução do problema (1.1) na Seção 3.5 e ao final do capítulo, trazemos algumas aplicações ilustrativas. Os resultados estabelecidos aqui para o problema (1.1) foram publicados em (AZEVEDO; CUEVAS; SOTO, 2017).

Vale a pena frisar que equações da forma (1.1) têm características interessantes e não triviais e aparecem na literatura sob o nome de equações de ondas fortemente amortecidas. Um exemplo de modelo matemático representado na forma (1.1) é a equação de onda com estrutura amortecida (CARVALHO; CHOLEWA, 2002a; CHEN; TRIGGIANI, 1989; CHEN; TRIGGIANI, 1990; CHEN; TRIGGIANI, 1988). Enfatizamos ainda que o Capítulo 3 desta tese é um aprofundamento do trabalho desenvolvido em (CUEVAS; LIZAMA; SOTO, 2013), onde os autores investigam existência e unicidade de solução branda assintoticamente quase periódica para equações de ondas fortemente amortecidas do tipo (1.1).

O Capítulo 4, nomeado “Modelo fracionário de Keller-Segel para quimiotaxia”, garante a existência de soluções globais para este modelo e analisa o comportamento assintótico de tais soluções. Nosso interesse em estudar equações diferenciais fracionárias se justifica devido a seu forte potencial em diversos problemas aplicados. Dentre estes problemas citamos: impedâncias elétricas botânicas, corrosão eletroquímica, comportamento reológico celular, agregação quimiotática em sistemas celulares, modelo de infecção de HIV. Equações diferenciais fracionárias estão naturalmente relacionadas a sistemas com memória, a qual existe em diversos sistemas biológicos. Além disso, foi deduzido que membranas de células têm condutância elétrica de ordem fracionária. Mais detalhes podem ser vistos nas seguintes referências (BERBERAN-SANTOS, 2005; ARAFA; EL-SAYED; RIDA, 2009; ESCUDERO, 2006; GURUSAMY, 2017; SAMKO; KILBAS; MARICHEV, 1993; SCHNEIDER, 1990; SCHNEIDER; WYSS, 1989; WYSS, 1986; ZEID; YOUSEFI, 2016).

Quimiotaxia é, em síntese, o movimento direcionado de um organismo, em resposta a um estímulo químico. Ela pode ser negativa (quando ocorre no sentido oposto a uma substância) ou positiva (quando ocorre no mesmo sentido de uma certa substância). Os estímulos químicos, que influenciam diretamente no movimento destes organismos, podem ocorrer por meio de forças externas ou podem ser secretados pelos próprios organismos

(DEJAK et al., 2014). Em animais, este tipo de movimento acontece, por exemplo, para localização de alimentos ou para encontrar parceiros sexuais. Em células do corpo, podemos citar os espermatozoides, que são atraídos pelas substâncias químicas liberadas através do revestimento externo do óvulo, e as células do sistema linfático, que migram através dos capilares sanguíneos para regiões com ferimentos ou atacadas por seres patológicos, atuando assim na cicatrização do ferimento e no combate a estes seres estranhos.

O primeiro modelo matemático para quimiotaxia foi introduzido em 1970 por Ewelyn Fox Keller e Lee Segel em (KELLER; SEGEL, 1970) para descrever a agregação da ameba do lodo devido a uma substância química atrativa. Este modelo é considerado um dos mais importantes para se entender agregação quimiotática e tem sido utilizado amplamente nos últimos anos (BLANCHET; CARRILLO; LAURENÇOT, 2009; BLANCHET; CARRILLO; MASMOUDI, 2008; ARAFA; EL-SAYED; RIDA, 2009; HERRERO; VELÁZQUEZ, 1996; HORSTMANN, 2003; HORSTMANN, 2004; HORSTMANN, 2002; HORSTMANN; WINKLER, 2005). Em (ESCUDERO, 2006), o autor introduziu e analisou um modelo fracionário de Keller-Segel. Este modelo forneceu uma descrição mais precisa de uma auto-interação quimiotática de uma população de células, cujos movimentos não eram feitos aleatoriamente.

Diante disto, consideramos neste capítulo o seguinte modelo fracionário de Keller-Segel para quimiotaxia, o qual consiste em um sistema acoplado de equações diferenciais parciais em $\mathbb{R}^n$, com $n \geq 2$,

$$\begin{cases} {}^c D_t^\alpha u &= \nabla \cdot (\nabla u - u \nabla v), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ {}^c D_t^\alpha v &= \Delta v - \gamma v + \kappa u, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0, \quad v(x, 0) = v_0, & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1.2)$$

onde ${}^c D_t^\alpha$ é a derivada fracionária de Caputo de ordem $\alpha \in (0, 1)$ (ver (CARVALHO-NETO; PLANAS, 2015, Definição 1)), $u(x, t)$ representa a densidade celular e $v(x, t)$ descreve a concentração do atraente químico. Os termos na primeira equação abrangem a difusão das células e o movimento quimiotático, enquanto que os da segunda expressão descrevem a difusão e produção de atratores ao longo do tempo (ver (ESCUDERO, 2006)). Além disso, os parâmetros $\gamma \geq 0$ e $\kappa \geq 0$ denotam as taxas de decaimento e de produção do atraente químico, respectivamente. Seguindo (FERREIRA; PRECIOSO, 2011), assumimos sem perda de generalidade que $\kappa = 1$.

Na literatura atual sobre o modelo padrão de Keller-Segel, isto é, quando $\alpha = 1$ em (1.2), Nagai et al., em (NAGAI; SYUKUINN; UMESAKO, 2003), estudaram o comportamento das soluções brandas limitadas com dado $u_0, v_0, \partial_j v_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ($1 \leq j \leq n$), onde $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ é o espaço de Banach composto por todas as funções limitadas e uniformemente contínuas em $\mathbb{R}^n$; $\|u_0\|_1, \|\nabla v_0\|_1$ e $\|\nabla v_0\|_\infty$ são suficientemente pequenos, mas $\|u_0\|_\infty$ não é necessariamente pequeno. Em particular, para $n = 2$, Calvez e Corrias em (CALVEZ; CORRIAS, 2008) construíram soluções globais positivas utilizando métodos

de energia e desigualdades funcionais. Eles assumiram o dado inicial positivo $(u_0, v_0) \in L^1(\mathbb{R}^2) \times H^1(\mathbb{R}^2)$ com massa pequena. Para o caso $n \geq 3$, Corrias e Perthame, em (CORRIAS; PERTHAME, 2006), provaram a existência de soluções fracas positivas para o modelo de Keller-Segel com condição inicial $u_0 \in L^q$ e $\nabla v_0 \in L^n$, com $n/2 < q \leq n$. Em domínios limitados $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ com fronteira suave, Winkler provou em (WINKLER, 2010) que se $n \geq 3$, dados quaisquer $q > n/2$ e $p > n$ pode-se encontrar um limite para u_0 em $L^q(\Omega)$ e para ∇v_0 em $L^p(\Omega)$ de modo a garantir que (u, v) é solução global e limitada (em tempo). Por outro lado, para $n \geq 3$, uma bola Ω e uma massa $m > 0$, arbitrariamente pequena, existe u_0 , com $\int_{\Omega} u_0 = m$, tal que (u, v) explode em tempo finito ou infinito. Soluções fracas em $L^\infty((0, \infty); L^\infty(\mathbb{R}^n))$ foram obtidas por Sugiyama e Kunii em (SUGIYAMA; KUNII, 2006) para um modelo de Keller-Segel degenerado, com um fator potência com termo aleatório e dado inicial não negativo $(u_0, v_0) \in L^1 \cap L^\infty \times L^1 \cap H^1 \cap W^{1,\infty}$. Usando o método de Kato, recentemente Kozono e Sugiyama em (KOZONO; SUGIYAMA, 2009) obtiveram resultados em espaços de Sobolev. Especificamente, para $n \geq 3$ e $\max\{1, n/4\} < r < n/2$, foi provada a existência de uma única solução branda $(u, v) \in [C([0, \infty); H^{\frac{n}{r}-2}_r) \cap C((0, \infty), H^{2r})] \times [C([0, \infty); H^{\frac{n}{r}}_r) \cap C^1((0, \infty), L^r)]$, com condição inicial (u_0, v_0) pertencente a classe $H^{\frac{n}{r}-2,r}_r \times H^{\frac{n}{r},r}_r$. Em (KOZONO; SUGIYAMA, 2008), o resultado de (KOZONO; SUGIYAMA, 2009) foi melhorado considerando agora o dado em $L^{(n/2,\infty)} \times BMO$ e $n \geq 3$, onde BMO é a notação padrão para o espaço das funções com oscilação média limitada e $L^{(n/2,\infty)}$ é um espaço de Marcinkiewicz. Em (ZHAI, 2010) o autor estudou o modelo de Keller-Segel com difusão fracionária e um termo não local. Ele estabeleceu a existência global, unicidade e estabilidade da solução com condição inicial (u_0, v_0) no espaço de Besov crítico $\dot{B}_{p,\infty}^{-(2-\frac{n}{p})} \times \dot{B}_{p,\infty}^{\frac{n}{p}}$. Considerando $n \neq 3$, os resultados de (BILER, 1998) produzem soluções globais brandas com dado em uma certa classe de espaços de Morrey. Em (FERREIRA; PRECIOSO, 2011) os autores obtiveram existência global e comportamento assintótico das soluções, com condição inicial pequena no espaço $\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b} \times \dot{B}_{\infty,\infty}^0$, com $n \geq 2$, $0 \leq \lambda < n$, e $b = 2 - \frac{n-\lambda}{r}$, onde $\mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s$ é um espaço homogêneo de Besov-Morrey (BM), de todas as distribuições temperadas módulo polinômios (observe que $\dot{B}_{\infty,\infty}^0 = \mathcal{N}_{\infty,\lambda,\infty}^0$). O espaço (BM) foi introduzido por Kozono e Yamazaki em (KOZONO; YAMAZAKI, 1994) para analisar equações de Navier-Stokes. Temos as seguintes inclusões:

$$\begin{aligned} H^{\frac{n}{r}-2,r}_r &\subseteq L^{(n/2,\infty)} \subseteq \mathcal{M}_{p,n-2p} \subseteq \mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}; \\ H^{\frac{n}{r},r}_r &\subseteq BMO \subseteq \mathcal{N}_{\infty,\lambda,\infty}^0; \\ \dot{B}_{p,\infty}^{-(2-\frac{n}{p})} &\subseteq \mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}; \\ \dot{B}_{p,\infty}^{\frac{n}{p}} &\subseteq \mathcal{N}_{\infty,\lambda,\infty}^0. \end{aligned}$$

Nosso objetivo no Capítulo 4 é então estender ao contexto fracionário (isto é, ao problema (1.2)) os resultados apresentados em (FERREIRA; PRECIOSO, 2011). De maneira mais precisa, tomando o dado inicial pequeno, pertencente ao espaço de Besov-

Morrey $\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b} \times \dot{B}_{\infty,\infty}^0$, com $n \geq 2$, $0 \leq \lambda < n$, e $b = 2 - \frac{n-\lambda}{r}$, estudamos na Seção 4.3 a existência e unicidade de uma solução global branda (em tempo), bem como a existência de soluções auto-similares para o modelo fracionário de Keller-Segel (1.2). E na Seção 4.4, analisamos o comportamento assintótico das soluções deste mesmo problema. Observamos que apesar do problema (1.2) não ter uma propriedade escala, podemos considerar uma escala intrínseca que é herdada do caso $\gamma = 0$ de modo similar como no caso $\alpha = 1$ (ver (FERREIRA; PRECIOSO, 2011)). Os resultados estabelecidos neste capítulo podem ser encontrados em (AZEVEDO; CUEVAS; HENRÍQUEZ,).

2 PRELIMINARES

Ao longo deste capítulo, apresentamos alguns dos pré-requisitos indispensáveis à compreensão deste trabalho. Nosso objetivo aqui é tornar a leitura do texto o mais clara possível, no entanto, por uma questão de brevidade, não serão feitas as demonstrações dos resultados enunciados. Informações mais específicas são complementadas nos capítulos que seguem.

Durante todo o texto, $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ representam espaços de Banach. A notação $\mathcal{L}(X, Y)$ denota o espaço de Banach formado pelos operadores lineares limitados de X em Y , munido com a norma $\|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)} := \sup_{x \in X, \|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y$. Quando $X = Y$, abreviamos a notação para $\mathcal{L}(X)$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X)}$. Dado $T \in \mathcal{L}(X)$, T^n representa a n -ésima iteração de T para cada inteiro não negativo n . Para $r > 0$, $\mathcal{B}_r(X)$ denota a bola fechada em X , $\{x \in X : \|x\|_X \leq r\}$.

Seja A um operador linear com domínio $D(A)$ e imagem $\mathcal{R}(A)$ em X . Nós representamos por $\rho(A)$ o conjunto resolvente de A e por $\sigma(A)$ o espectro deste mesmo operador. Para cada $\lambda \in \rho(A)$, denotamos por $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ o operador resolvente de A .

2.1 Funções periódicas e suas generalizações

Relembramos a seguir algumas definições e propriedades básicas da teoria de periodicidade.

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo (possivelmente ilimitado), $C_b(I; X)$ denota o espaço de Banach formado pelas funções contínuas e limitadas de I em X , munido com a norma da convergência uniforme, $\|\cdot\|_\infty$.

Definição 2.1.1 (Funções periódicas). Uma função contínua $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ é chamada periódica se existe uma constante $\omega > 0$ tal que

$$f(t + \omega) = f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Neste caso dizemos que f é uma função ω periódica e denotamos por $P_\omega(X)$ o conjunto de todas as funções contínuas $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ que são ω -periódicas. Não é difícil verificar que $P_\omega(X)$ é um subespaço de $C_b(\mathbb{R}; X)$ e que $P_\omega(X)$, munido com a norma da convergência uniforme, é um espaço de Banach.

Apresentamos agora a definição de função quase periódica. Tal conceito é devido à H. Bohr.

Definição 2.1.2 (Funções quase periódicas (BOHR, 1956)). Uma função contínua $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ é dita quase periódica se, para todo $\varepsilon > 0$, existir $l(\varepsilon) > 0$ tal que todo intervalo

de comprimento $l(\varepsilon)$ contém um número τ com a seguinte propriedade:

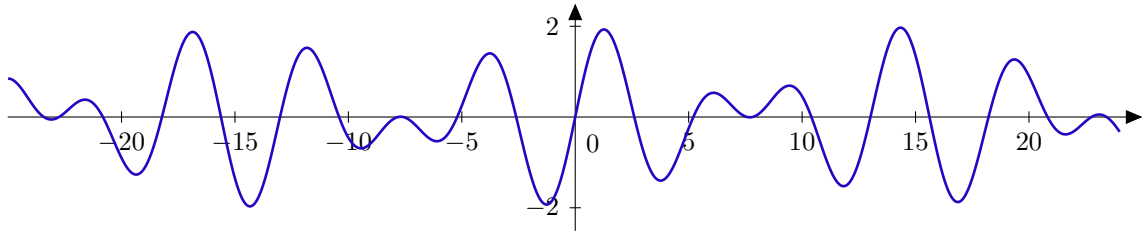
$$\|f(t + \tau) - f(t)\|_X \leq \varepsilon, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

O número τ é chamado de ε período de f e a notação $AP(X)$ é utilizada para representar o conjunto de todas as funções quase periódicas $f : \mathbb{R} \rightarrow X$. Observamos que $AP(X)$, equipado com a norma $\|\cdot\|_\infty$, é um espaço de Banach (ver (CORDUNEANU, 2009)). Vale ressaltar ainda que toda função periódica é quase periódica, porém a recíproca não é verdadeira. De fato, consideremos a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) = \sin(t) + \sin(\sqrt{2}t).$$

A função f dada desta forma exemplifica uma função quase periódica que não é periódica. (Ver Figura 1).

Figura 1: Gráfico da função $f(t) = \sin t + \sin(\sqrt{2}t)$.



Fonte: Produzido pelo autor.

Denotamos agora por $C_0([0, \infty); X)$ o conjunto de todas as funções contínuas $f : [0, \infty) \rightarrow X$ tais que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0.$$

É um fato bem conhecido que $C_0([0, \infty); X)$, munido com a norma do supremo, é um espaço de Banach. Introduzimos a seguir o conceito de quase periodicidade assintótica. Este conceito, que generaliza o conjunto das funções quase periódicas, é devido a M. Fréchet (ver (FRÉCHET, 1941a; FRÉCHET, 1941b)).

Definição 2.1.3 (Funções assintoticamente quase periódicas). Uma função contínua é chamada assintoticamente quase periódica se admite uma decomposição

$$f = g + h,$$

onde $g \in AP(X)$ e $h \in C_0([0, \infty); X)$. Representamos por $AAP(X)$ o conjunto das funções assintoticamente quase periódicas e chamamos a atenção ao fato de que $(AAP(X); \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach (ver (ZAIDMAN, 1985, Teorema 5.1.1)). Além disso, segue de (ZAIDMAN, 1985, Proposição 5.1.1) que

$$AAP(X) = AP(X) \oplus C_0([0, \infty); X).$$

E segue ainda de (ZAIMAN, 1985, Proposição 5.1.2) que as funções assintoticamente quase periódicas são limitadas e uniformemente contínuas.

De modo análogo, podemos definir uma função assintoticamente periódica: dado $\omega > 0$, definimos o espaço das *funções assintoticamente ω -periódicas* por

$$AP_\omega(X) = P_\omega(X) \oplus C_0([0, \infty); X).$$

Vale frisar que tal conceito surge pela primeira vez na literatura em (DEBRUIJN, 1949). O espaço $AP_\omega(X)$ é um subespaço próprio de $AAP(X)$ e, munido com a norma da convergência uniforme, é ainda um espaço de Banach.

2.1.1 Funções S -assintoticamente ω -periódicas

O conceito de função S -assintoticamente ω -periódica com valores em um espaço de Banach é ainda bastante recente. Nos últimos anos, alguns autores têm estudado propriedades e aplicações deste tipo de função (ver (CUEVAS; DE ANDRADE, 2010; CAICEDO et al., 2012; CUEVAS; SOUZA, 2009; CUEVAS; SOUZA, 2010; HENRÍQUEZ; PIERRI; TÁBOAS, 2008)).

Definição 2.1.4. (HENRÍQUEZ; PIERRI; TÁBOAS, 2008). Uma função $f \in C_b([0, \infty); X)$ é dita S -assintoticamente ω -periódica se existe $\omega > 0$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (f(t + \omega) - f(t)) = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Neste caso, dizemos que ω é um período assintótico de f . Usamos a notação $SAP_\omega(X)$ para representar o subespaço de $C_b([0, \infty); X)$ composto pelas funções S -assintoticamente ω -periódicas. Além disso, observamos que $SAP_\omega(X)$, equipado com a norma da convergência uniforme, é um espaço de Banach. Vale ressaltar ainda que toda função assintoticamente ω -periódica é também uma função S -assintoticamente ω -periódica, porém a recíproca não se verifica. Uma justificativa para esta afirmação está no fato de que a imagem de uma função assintoticamente ω -periódica é um conjunto relativamente compacto, enquanto que a imagem de uma função S -assintoticamente ω -periódica é um conjunto limitado.

2.1.2 Funções pseudo S -assintoticamente ω -periódicas

Chamamos a atenção agora para as funções pseudo S -assintoticamente ω -periódicas, pois no Capítulo 3 estudamos existência de soluções pseudo S -assintoticamente ω -periódicas para o problema (4.1.1).

Definição 2.1.5. (PIERRI; ROLNIK, 2013). Uma função $f \in C_b([0, \infty); X)$ é dita pseudo S -assintoticamente periódica se existe $\omega > 0$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{h} \int_0^h \|f(s + \omega) - f(s)\|_X ds = 0.$$

Neste caso, dizemos que f é pseudo S -assintoticamente ω -periódica.

Usamos a notação $PSAP_\omega(X)$ para denotar o subespaço de $C_b([0, \infty); X)$ formado por todas as funções pseudo S -assintoticamente ω -periódicas, e notamos que $PSAP_\omega(X)$, munido com a norma da convergência uniforme, é um espaço de Banach. Além disso, observamos que

$$AP_\omega(X) \hookrightarrow SAP_\omega(X) \hookrightarrow PSAP_\omega(X),$$

com $PSAP_\omega(X) \neq SAP_\omega(X)$.

Chamamos a atenção agora para as seguintes definições:

Definição 2.1.6. (CUEVAS; HENRÍQUEZ; SOTO, 2014, Definição 2.6) Dizemos que uma função $f : [0, \infty) \times Y \rightarrow X$ é *limitada em conjuntos limitados* de Y se para cada subconjunto limitado $K \subseteq Y$, o conjunto $\{f(t, x) : t \geq 0, x \in K\}$ é limitado.

Definição 2.1.7. (CUEVAS; HENRÍQUEZ; SOTO, 2014). Dizemos que uma função contínua $f : [0, \infty) \times Y \rightarrow X$ é *uniformemente pseudo S -assintoticamente ω -periódica em conjuntos limitados* de Y se para cada subconjunto limitado $K \subseteq Y$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \sup_{x \in K} \|f(s + \omega, x) - f(s, x)\|_X ds = 0.$$

Definição 2.1.8. (CUEVAS; HENRÍQUEZ; SOTO, 2014). Uma função contínua $f : [0, \infty) \times Y \rightarrow X$ é dita *assintoticamente limitada em conjuntos limitados* de Y se para cada subconjunto limitado $K \subseteq Y$, existe $T_K > 0$ tal que o conjunto

$$\{f(t, x) : t \geq T_K, x \in K\}$$

é limitado.

Definição 2.1.9. (HENRÍQUEZ; PIERRI; TÁBOAS, 2008). Uma função $f : [0, \infty) \times Y \rightarrow X$ é dita *assintoticamente uniformemente contínua em conjuntos limitados* de Y se para cada $\epsilon > 0$ e todo conjunto limitado $K \subset Y$, existem constantes $T = T_{\epsilon, K} \geq 0$ e $\delta = \delta_{\epsilon, K} > 0$, tais que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\|_X \leq \epsilon,$$

para todo $t \geq T$ e $x, y \in K$, com $\|x - y\|_Y \leq \delta$.

A seguir, apresentamos alguns resultados presentes na teoria das funções pseudo S -assintoticamente ω -periódicas.

Lema 2.1.1. (DE ANDRADE et al., 2016, Lema 2.1). Seja $f : [0, \infty) \times Y \rightarrow X$ uma função assintoticamente limitada em conjuntos limitados de Y , assintoticamente uniformemente contínua em conjuntos limitados de Y e uniformemente pseudo S -assintoticamente ω -periódica em conjuntos limitados de Y . Se $u : [0, \infty) \rightarrow Y$ é uma função pseudo S -assintoticamente ω -periódica, então o mapa de Nemytskii $v(t) = f(t, u(t))$ é pseudo S -assintoticamente ω -periódica.

Corolário 2.1.1. (DE ANDRADE et al., 2016, Corolário 2.1). Seja $f : [0, \infty) \times Y \rightarrow X$ uma função assintoticamente limitada em conjuntos limitados de Y , uniformemente pseudo S -assintoticamente ω -periódica em conjuntos limitados de Y e localmente Lipschitz contínua com respeito a segunda variável, ou seja,

- Para cada $\sigma \in \mathbb{R}^+$, para todo $t \in \mathbb{R}^+$ para todos $x, y \in B_\sigma(Y)$ temos

$$\|f(t, x) - f(t, y)\|_X \leq L_f(\sigma)\|x - y\|_Y,$$

onde $L_f(\sigma) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função contínua.

Se $u : [0, \infty) \rightarrow Y$ é uma função pseudo S -assintoticamente ω -periódica, então o mapa de Nemytskii $v(t) = f(t, u(t))$ é pseudo S -assintoticamente ω -periódica.

Lema 2.1.2. (DE ANDRADE et al., 2016, Lema 2.2). Seja $f : [0, \infty) \times Y \rightarrow X$ uma função uniformemente pseudo S -assintoticamente ω -periódica em conjuntos limitados de Y e que satisfaz a seguinte condição:

- Para cada $u, v \in C_b([0, \infty); Y)$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \|u(s) - v(s)\|_Y ds = 0 \quad \text{implica} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\|_X ds = 0.$$

Se $u : [0, \infty) \rightarrow Y$ é uma função pseudo S -assintoticamente ω -periódica, então o mapa de Nemytskii $t \mapsto f(t, u(t))$ é pseudo S -assintoticamente ω -periódica.

2.2 Medida de não compacidade

A definição de medida de não compacidade de um subconjunto limitado em espaços normados foi introduzida por K. Kuratowski na década de 30.

Definição 2.2.1. (Medida de não compacidade) Sejam X espaço de Banach, A um subconjunto limitado de X e $\varepsilon > 0$. Uma cobertura $\{V_i\}$ de A é uma ε -cobertura se $\text{diam}(V_i) := \sup\{\|x - y\|_X : x, y \in V_i\} \leq \varepsilon$ para todo i . A medida de não compacidade de Kuratowski de A é definida por

$$\xi(A) = \inf\{\varepsilon > 0; \text{ existe uma } \varepsilon\text{-cobertura finita de } A\}.$$

A uma cobertura $\{A_i\}$ de A , composta por bolas de raio menor ou igual a ε , chamamos de ε -cobertura restrita de A . Com isto, definimos a medida de não compacidade de Hausdorff de A por

$$\tilde{\xi}(A) = \inf\{\varepsilon > 0; \text{ existe uma } \varepsilon\text{-cobertura restrita finita de } A\}.$$

A seguir apresentaremos algumas propriedades das medidas de não compacidade.

Proposição 2.2.1. *Sejam A e B subconjuntos limitados de um espaço de Banach X . Então*

- (i) $\xi(A) = 0$, se e somente se, $\bar{A}$ é compacto, onde $\bar{A}$ denota o fecho de A .
- (ii) $\xi(\bar{A}) = \xi(A) = \xi(\text{co}\{A\})$, onde $\text{co}\{A\}$ denota a envoltória convexa de A .
- (iii) $\xi(\lambda A) = |\lambda|\xi(A)$.
- (iv) $\xi(A) \leq \xi(B)$ se $A \subseteq B$.
- (v) $\xi(A + B) \leq \xi(A) + \xi(B)$.
- (vi) $\tilde{\xi}(A) \leq \xi(A) \leq 2\tilde{\xi}(A)$.

A demonstração desta proposição, bem como mais detalhes sobre medida de não compacidade, podem ser encontrados em (ARJUNAN; NADAF, 2014; CHUONG; KE, 2012; DEIMLING, 2010).

Como consequência imediata dos itens (i) e (ii) da proposição anterior temos

Corolário 2.2.1. *Se A é um subconjunto relativamente compacto de X , então $\overline{\text{co}\{A\}}$ é compacto.*

Seja $J = [0, a]$, com $a > 0$. A seguir chamamos atenção para algumas propriedades da medida de Hausdorff de não compacidade em X , as quais são necessárias para estabelecermos alguns de nossos resultados.

Definição 2.2.2. (HENRÍQUEZ; POBLETE; POZO, 2014, Definição 2.7) Um conjunto $W \subseteq L^1(J; X)$ é dito uniformemente integrável sobre J se existe uma função positiva $k \in L^1(J; \mathbb{R}^+)$ tal que

$$\|w(t)\| \leq k(t), \quad \forall w \in W.$$

Seja $W \subseteq L^1(J; X)$ um conjunto uniformemente integrável. No que segue, denotamos por $F : L^1(J; X) \rightarrow X$ o mapa dado por

$$F(u) = \int_0^a u(s)ds.$$

Corolário 2.2.2. (HENRÍQUEZ; POBLETE; POZO, 2014, Corolário 2.10). *Sejam X um espaço de Banach e $W \subseteq L^1(J; X)$ um conjunto uniformemente integrável. Então existe um conjunto enumerável $W_0 \subseteq W$ tal que*

$$\tilde{\xi}(F(W)) = \tilde{\xi}(F(W_0)) \leq 2 \int_0^a \tilde{\xi}(W_0(s))ds.$$

2.3 Equação resolvente

Veremos agora alguns resultados e definições presentes no estudo da equação resolvente.

Dada uma função $a(t, s)$, a equação resolvente formal associada a $a(t, s)$ é

$$r(t, s) = -a(t, s) + \int_s^t r(t, u)a(u, s)ds. \quad (2.3.1)$$

Se a assume valores escalares, então r também assume valores escalares e se a for uma matriz $n \times n$, r também será desta forma.

Suponhamos por um momento que $r(t, s)$ existe como uma solução de (2.3.1) e que a integral nesta equação faz sentido. Dado um sistema linear da forma

$$Z(t) = f(t) + \int_0^t a(t, s)Z(s)ds, \quad (2.3.2)$$

multiplicando ambos os lados da equação (2.3.2) por $r(t, s)$ e integrando obtemos

$$\int_0^t r(t, u)Z(u)du - \int_0^t r(t, u)f(u)du = \int_0^t \left(r(t, s) + a(t, s) \right) Z(s)ds.$$

Para mais detalhes ver (MILLER, 1971). Portanto,

$$- \int_0^t r(t, u)f(u)du = \int_0^t a(t, s)Z(s)ds$$

e segue daí que

$$Z(t) = f(t) - \int_0^t r(t, u)f(u)du. \quad (2.3.3)$$

Com isto concluímos que se o núcleo $r(t, s)$ é conhecido, então a solução do sistema linear (2.3.2) pode se reescrita em termos de f .

O núcleo resolvente também pode ser usado para escrever certos sistemas não lineares de equações integrais de Volterra na forma correspondente a “fórmula de variação de constantes” para equações diferenciais ordinárias. Consideremos o sistema não linear

$$z(t) = f(t) + \int_0^t a(t, s) \left(z(s) + G(s, z(s)) \right) ds, \quad (2.3.4)$$

onde $G(t, z)$ representa “termos pequenos” ou termos de “ordem superior” em z . Se a solução z da equação (2.3.4) existe, então (2.3.4) pode ser escrita na forma

$$z(t) = F(t) + \int_0^t a(t, s)z(s)ds, \quad (2.3.5)$$

onde $F(t) = \int_0^t a(t, s)G(s, z(s))ds$. Aplicando a fórmula (2.3.3) nesta equação obtemos

$$\begin{aligned} z(t) &= \left(f(t) - \int_0^t r(t, s)f(s)ds \right) \\ &\quad + \int_0^t \left(a(t, u) - \int_u^t r(t, s)a(s, u)ds \right) G(u, z(u))du. \end{aligned}$$

Ver detalhes em (MILLER, 1971). Das equações (2.3.1) e (2.3.3) segue-se

$$z(t) = Z(t) - \int_0^t r(t, s)G(s, z(s))ds. \quad (2.3.6)$$

Como todas as etapas vistas aqui são reversíveis, podemos sair de (2.3.6) para (2.3.4). Portanto, a equação (2.3.4) pode ser expressa em termos da solução $Z(t)$ da equação linear correspondente e dos termos $G(t, z)$. A equação (2.3.6) é chamada a variação de constantes da equação (2.3.4).

Resta-nos então impor condições suficientes sobre $a(t, s)$ a fim de garantirmos a existência do núcleo resolvente $r(t, s)$. Além disso, precisamos que $r(t, s)$ seja suficientemente suave para que as equações (2.3.3) e (2.3.6) tenham sentido. Deste modo obtemos

$$\int_s^t r(t, u)a(u, s)du = \int_s^t a(t, u)r(u, s)ds, \quad (2.3.7)$$

e assim a equação (2.3.1) pode ser escrita na forma equivalente

$$r(t, s) = -a(t, s) + \int_s^t a(t, u)r(u, s)du. \quad (2.3.8)$$

2.3.1 O caso L^p

Suponha que $1 < p < \infty$ e que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se a força f na equação (2.3.2) está em $L^p((0, T); X^n)$, então é natural questionarmos de qual tipo deve ser o núcleo $a(t, s)$.

Definição 2.3.1. Dizemos que uma função (a valores em uma matriz n por n) $a(t, s)$ é do tipo (L^p, T) se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:

- a) $a(t, s)$ é mensurável em (t, s) para $0 \leq s, t \leq T$, com $a(s, t) = 0$ para quase todo $s > t$;
- b) Para quase todo $t \in [0, T]$, $a(t, s)$ está em $L^q(0, T)$ como uma função de s ;
- c) Para quase todo $s \in [0, T]$, $a(t, s)$ está em $L^p(0, T)$ como uma função de t ;
- d) Os números

$$\int_0^T \left(\int_0^T |a(t, s)|^q ds \right)^{\frac{p}{q}} dt \quad \text{e} \quad \int_0^T \left(\int_0^T |a(t, s)|^p dt \right)^{\frac{q}{p}} ds$$

são ambos finitos.

Qualquer função $a(t, s)$, contínua em (t, s) para $0 \leq s \leq t \leq T$, é do tipo (L^p, T) , para todo $p > 1$ e $T > 0$. Além disso, qualquer função em $L^2((0, T) \times (0, T))$ é do tipo (L^2, T) .

Teorema 2.3.1. (MILLER, 1971, Teorema IV.2.3). Se $1 < p < \infty$ e $a(t, s)$ é um núcleo do tipo (L^p, T) , então existe um núcleo $r(t, s)$ do tipo (L^p, T) , o qual é solução para a equação resolvente (2.3.8), para quase todo $0 \leq s \leq t \leq T$.

Teorema 2.3.2. (MILLER, 1971, Teorema IV.2.5). O núcleo $r(t, s)$ dado no Teorema 2.3.1 resolve ambas as equações resolventes (2.3.1) e (2.3.8).

Consideremos agora o caso onde a função f na equação (2.3.3) é de classe $\mathcal{LL}_p = \mathcal{LL}_p(\mathbb{R}^+; X^n)$.

Definição 2.3.2. Dizemos que uma função (a valores em uma matriz n por n) $a(t, s)$ é do tipo $\mathcal{LL}_p$ se, e somente se, é do tipo (L^p, T) para cada $T > 0$.

Os teoremas anteriores desta seção implicam imediatamente no seguinte resultado:

Teorema 2.3.3. (MILLER, 1971, Teorema IV.2.7). Se $a(t, s)$ é um núcleo do tipo $\mathcal{LL}_p$, então existe um núcleo $r(t, s)$ do tipo $\mathcal{LL}_p$, o qual satisfaz ambas as equações resolventes (2.3.1) e (2.3.8), para quase todo (t, s) na região $0 \leq s \leq t < \infty$.

2.3.2 O caso contínuo

Se na equação (2.3.8) trocarmos t por $t + s$, então a equação fica na forma

$$r(t + s, s) = -a(t + s, s) + \int_0^t a(t + s, u + s)r(u + s, s)du. \quad (2.3.9)$$

Esta forma da equação resolvente tem uma vantagem pois a variável s ocorre apenas como um parâmetro. Se este parâmetro é suprimido, então (2.3.9) pode ser escrita como

$$R(t) = -A(t) + \int_0^t a_s(t, u)R(u)du, \quad (2.3.10)$$

onde $R(t) = r(t + s, s)$, $A(t) = a(t + s, s)$ e a_s é a função transladada, $a_s(t, u) = a(t + s, u + s)$, com $0 \leq s \leq t < \infty$.

Teorema 2.3.4. (MILLER, 1971, Teorema IV.3.1). Se $a(t, s)$ é contínuo em (t, s) para $0 \leq s \leq t \leq T$, então existe uma função contínua $r(s, t)$ em $0 \leq s \leq t \leq T$, que soluciona as equações resolventes (2.3.1) e (2.3.8).

2.3.3 Núcleo resolvente em L^1

No caso em que a matriz $a(t, s)$ é do tipo convolução, isto é,

$$a(t, s) = A(t - s),$$

a equação (2.3.9) se reduz a

$$r(t + s, s) = -A(t) + \int_0^t A(t - u)r(u + s, s)du.$$

Isto significa que $r(t + s, s) = r(t, 0) = R(t)$ não depende do parâmetro s . Neste caso, a equação (2.3.8) é usualmente escrita na forma

$$R(t) = -A(t) + \int_0^t A(t - s)R(s)ds. \quad (2.3.11)$$

Portanto, se $a(t, s) = A(t - s)$ é do tipo convolução, $r(t, s) = R(t - s)$ também é do tipo convolução.

Teorema 2.3.5. (MILLER, 1971, Teorema IV.4.1). *Se $A \in L^1([0, T]; X^n)$ para algum $T > 0$, então a equação resolvente (2.3.11) tem uma única solução $R \in L^1([0, T]; X^n)$. Além disso, a função $r(t, s) = R(t - s)$ resolve ambas as equações resolventes (2.3.1) e (2.3.8) quase sempre em $0 \leq s \leq t \leq T$.*

Tendo estabelecido a existência do núcleo para uma larga classe de núcleos $a(t, s)$, veremos agora algumas propriedades da função $r(t, s)$. Consideremos inicialmente o caso $a(t, s) \equiv A$, uma matriz constante. Neste caso a equação (2.3.11) se reduz a

$$r(t) = -A + \int_0^t Ar(s)ds. \quad (2.3.12)$$

Teorema 2.3.6. (MILLER, 1971, Teorema IV.5.1). *Se $a(t, s) \equiv A$ é constante e se os autovalores de A tem parte real negativa, então o resolvente $R(t)$ de A é de classe $L^1(\mathbb{R}^+)$.*

Veremos agora o caso em que $a(t, s) = A(t - s)$ e A é de classe $L^1(\mathbb{R}^+)$.

Teorema 2.3.7. (MILLER, 1971, Teorema IV.5.2). *Suponha que $a(t, s) = A(t - s)$, onde A é uma matriz $n \times n$ em $L^1(\mathbb{R}^+)$. Então o núcleo resolvente $R(t)$ também está em $L^1(\mathbb{R}^+)$ se, e somente se, o determinante*

$$\det \left(I - \int_0^\infty e^{-\omega t} A(t) dt \right) \neq 0,$$

para todo número complexo ω satisfazendo $\operatorname{Re} \omega \geq 0$.

Assumamos agora as seguintes condições:

(A1) $a(t, s) = -A(t - s)$, com $A \in C(0, \infty) \cap L^1(0, 1)$.

(A2) $A(t)$ é positivo e não crescente para $t > 0$.

(A3) Para cada $T > 0$ a função $\frac{A(t)}{A(t+T)}$ é não crescente em t , para $0 < t < \infty$.

Sob estas condições, veremos que $R(t)$ é não negativo e está em $L^1(\mathbb{R}^+)$.

Inicialmente, apresentamos um resultado, o qual garante que a solução da equação integral escalar é não negativa.

Teorema 2.3.8. (MILLER, 1971, Teorema IV.6.1). *Consideremos a equação integral escalar real*

$$x(t) = f(t) - \int_0^t h(t-s)g(s, x(s))ds. \quad (2.3.13)$$

Suponha que $f(t)$ é uma função contínua e positiva para $t \in \mathbb{R}^+$ e que h é uma função contínua, positiva e localmente L^1 para $0 < t < \infty$. Admita ainda que g é mensurável em (t, x) e contínua em x para $t > 0$ e $x \in \mathbb{R}^1$, com $xg(t, x) \geq 0$, para todo (t, x) . Se

$$\frac{f(T)}{f(t)} \leq \frac{h(T-s)}{h(t-s)},$$

sempre que $0 \leq s < T < t$, então a equação (2.3.13) tem uma solução que satisfaz $0 \leq x(t) \leq f(t)$, para todo $t \geq 0$.

De posse deste último resultado, podemos analisar o resolvente $R(t)$ quando A satisfaz as condições (A1), (A2) e (A3).

Teorema 2.3.9. (MILLER, 1971, Teorema IV.6.2). Suponhamos que $a(t, s)$ satisfaz as hipóteses (A1), (A2) e (A3) acima. Seja R solução da equação resolvente

$$R(t) = A(t) - \int_0^t A(t-s)R(s)ds. \quad (2.3.14)$$

Então $R(t)$ existe como um elemento de $\mathcal{LL}_1(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^1)$ e é único nesta classe.

2.4 Operadores setoriais

Antes de definirmos um operador setorial, relembramos o conceito de semigrupo fortemente contínuo e seus geradores.

Definição 2.4.1. Dizemos que uma família de operadores lineares $(T(t))_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo, se

- (i) $T(0) = I$ (operador identidade); e,
- (ii) $T(t+s) = T(t)T(s), \forall t, s \geq 0$.

Se, além disso

- (iii) $\|T(t)x - x\| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0^+$, $\forall x \in X$, dizemos que o semigrupo é *fortemente contínuo* (ou que é um C_0 -semigrupo).

Definição 2.4.2. Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares. Chamamos de gerador infinitesimal ao operador $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ definido por

$$Ax := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t},$$

onde

$$D(A) := \left\{ x \in X : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}.$$

Enunciaremos agora o Teorema de Hille-Yosida, o qual caracteriza um gerador de um C_0 -semigrupo.

Teorema 2.4.1. (ENGEL; NAGEL, 1999, Teorema II.3.8) *Seja $(A, D(A))$ um operador linear sobre um espaço de Banach X e sejam $\omega \in \mathbb{R}$, $M \geq 1$ constantes. Então, as seguintes propriedades são equivalentes:*

(i) $(A, D(A))$ é o gerador de um C_0 -semigrupo de operadores lineares $(T(t))_{t \geq 0}$ que satisfaz

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

(ii) A é fechado, densamente definido, $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$ e

$$\|(\lambda - A)^n\|_{\mathcal{B}(X)} \leq M(\lambda - \omega)^{-n}, \quad \forall \lambda > \omega \text{ e } \forall n \in \mathbb{N}.$$

(iii) A é fechado, densamente definido, e para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re} \lambda > \omega$, $\lambda \in \rho(A)$ e

$$\|(\lambda - A)^n\|_{\mathcal{B}(X)} \leq M(\operatorname{Re} \lambda - \omega)^{-n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Para mais detalhes sobre a teoria de semigrupo, ver (ENGEL; NAGEL, 1999).

Vejamos agora a definição de curva no plano complexo.

Definição 2.4.3. Dizemos que Ha é um *caminho de Hankel*, se existem $r > 0$ e $\theta \in (\pi/2, \pi)$ tais que, $Ha = Ha_1 + Ha_2 - Ha_3$, em que os caminhos Ha_i são dados por

$$Ha_1 := \{te^{i\theta}; t \in [r, \infty)\};$$

$$Ha_2 := \{re^{it}; t \in [-\theta, \theta)\};$$

$$Ha_3 := \{te^{-i\theta}; t \in [r, \infty)\}.$$

Também escrevemos $Ha = Ha(r, \theta)$ para mostrar a dependência do ângulo e do raio.

Consideremos $a \in \mathbb{R}$ e $\phi \in (0, \pi)$. Definimos então os seguintes subconjuntos do plano complexo,

$$S_{a,\phi} := \{\lambda \in \mathbb{C} : \phi \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi, \lambda \neq a\}; \quad (2.4.15)$$

$$\Sigma_{a,\phi} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - a)| \leq \phi, \lambda \neq a\}. \quad (2.4.16)$$

Observemos que $-S_{a,\phi} = \Sigma_{-a, \pi - \phi}$.

Consideremos agora a possibilidade de estender o domínio do parâmetro de um semigrupo para certos setores no plano complexo que incluem o eixo real não negativo. E para que possamos preservar a estrutura de semigrupo, o domínio onde o parâmetro complexo variar deve ser um semigrupo aditivo de números complexos.

Definição 2.4.4. Seja $\Sigma_{0,\phi}^\circ$ o interior do conjunto $\Sigma_{0,\phi}$. Dizemos que uma família de operadores lineares limitados $\{T(t); t \in \Sigma_{0,\phi}^\circ \cup \{0\}\}$ é um *semigrupo analítico*, se:

- (i) A função $\Sigma_{0,\phi}^\circ \ni t \mapsto T(t) \in \mathcal{B}(X)$ é analítica;
- (ii) $T(0) = I$, $T(t+s) = T(t)T(s)$ para quaisquer $t, s \in \Sigma_{0,\phi}^\circ \cup \{0\}$; e
- (iii) $\lim_{t \rightarrow 0} T(t)x = x$, para todo $x \in X$ (observe que $t \rightarrow 0$ por pontos de $\Sigma_{0,\phi}^\circ$).

Usaremos a notação de Henry para definir operadores setoriais.

Definição 2.4.5. Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador fechado e densamente definido. Dizemos que A é um *operador setorial* se existem $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$, $M \geq 1$ e $a \in \mathbb{R}$ tais que o setor $S_{a,\phi} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \phi \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi, \lambda \neq a\} \subset \rho(A)$ e

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{B}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda - a|}, \quad \text{para todo } \lambda \in S_{a,\phi}.$$

Teorema 2.4.2. (HENRY, 2006, Teorema 1.3.4) *Suponha que $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ seja um operador setorial. Então, A gera um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t); t \geq 0\} \subset \mathcal{B}(X)$ com*

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a+Ha} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} d\lambda, \quad t > 0,$$

em que $a + Ha = a + Ha(r, \phi)$ é o deslocamento do caminho de Hankel, com r pequeno. Além disso, $t \mapsto T(t)$ se estende a uma função analítica de $\Sigma_{0,\phi-\frac{\pi}{2}}^\circ$ em $\mathcal{B}(X)$ (ou a complexificação de X , se X é um espaço de Banach real) e para algum $K > 0$,

$$\|T(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \leq Ke^{at}, \quad e \quad \|AT(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \leq Kt^{-1}e^{at}, \quad \text{para todo } t > 0.$$

Por fim,

$$\frac{d}{dt}T(t) = AT(t)$$

é um operador limitado para qualquer $t > 0$ e $(0, \infty) \ni t \mapsto T(t) \in \mathcal{B}(X)$ é contínua.

2.5 Potências fracionárias

As potências fracionárias de operadores setoriais desempenham papel fundamental na teoria de existência de soluções para equações diferenciais parciais não lineares do tipo parabólico e na análise do comportamento assintótico de soluções para estes problemas. Mais detalhes dessa teoria assim como as demonstrações dos teoremas enunciados nesta seção podem ser encontradas em (AMANN, 1995; HENRY, 2006).

Definição 2.5.1. Suponha que $-A$ é um operador setorial com $\operatorname{Re}\sigma(A) > 0$, então para $\alpha > 0$ definimos

$$A^{-\alpha} := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} T(t) dt,$$

em que $(T(t))_{t \geq 0}$ é o C_0 -semigrupo gerado por $-A$ e Γ denota a função Gama.¹

Teorema 2.5.1. Se $-A$ é um operador setorial sobre X com $\operatorname{Re}\sigma(A) > 0$, então para qualquer $\alpha > 0$, $A^{-\alpha}$ é um operador linear limitado e injetivo sobre X . Além disso, para quaisquer $\alpha, \beta > 0$,

$$A^{-\alpha} A^{-\beta} = A^{-(\alpha+\beta)}.$$

Definição 2.5.2. Suponha que $-A$ é um operador setorial com $\operatorname{Re}\sigma(A) > 0$, então para $\alpha > 0$ definimos

$$A^\alpha := (A^{-\alpha})^{-1}, \quad \text{com } D(A^\alpha) := \operatorname{Im}(A^{-\alpha}).$$

Além disso, definimos $A^0 := I$ (operador identidade sobre X).

Teorema 2.5.2. Seja $-A$ um operador setorial sobre X com $\operatorname{Re}\sigma(A) > 0$, então as seguintes afirmações são verdadeiras:

- (i) Se $\alpha > 0$, então A^α é fechado e densamente definido.
- (ii) Se $\alpha \geq \beta$, então $D(A^\alpha) \subset D(A^\beta)$.
- (iii) $A^\alpha A^\beta = A^\beta A^\alpha = A^{\alpha+\beta}$ sobre $D(A^\gamma)$, em que $\gamma = \max\{\alpha, \beta, \alpha + \beta\}$.
- (iv) $A^\alpha T(t) = T(t) A^\alpha$ sobre $D(A^\alpha)$, para $t > 0$, em que $(T(t))_{t \geq 0}$ é o semigrupo gerado por $-A$.

Definição 2.5.3. Seja $-A$ um operador setorial sobre X com $\operatorname{Re}\sigma(A) > 0$. Para cada $\alpha \geq 0$, definimos o espaço

$$X^\alpha := D(A^\alpha), \quad \text{munido com a norma } \|x\|_\alpha := \|A^\alpha x\|_X.$$

Teorema 2.5.3. Seja $-A$ um operador setorial sobre X com $\operatorname{Re}\sigma(A) > 0$. Então as seguintes afirmações são verdadeiras:

- (i) Para cada $\alpha \geq 0$, X^α munido com a norma $\|\cdot\|_\alpha$ é um espaço de Banach.
- (ii) $X^0 = X$ e $X^1 = D(A)$.

¹ Seja $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} z > 0$, então a função Gama é definida por

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt.$$

- (iii) Se $\alpha \geq \beta \geq 0$, então X^α é um subespaço denso de X^β e a inclusão $i : X^\alpha \rightarrow X^\beta$ é contínua.
- (iv) Se A tem operador resolvente compacto, a inclusão $X^\alpha \subset X^\beta$ é compacta sempre que $\alpha \geq \beta \geq 0$.

2.6 Espaços de Morrey e Besov-Morrey

O objetivo desta seção é rever algumas propriedades básicas dos espaços de Morrey e Besov-Morrey, que serão utilizadas no Capítulo 4.

Definição 2.6.1 (Espaço de Morrey). Para $1 \leq p < \infty$ e $0 \leq \lambda < n$, o espaço de Morrey $\mathcal{M}_{p,\lambda} = \mathcal{M}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ é definido como o subespaço de $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ munido com a norma

$$\|f\|_{p,\lambda} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, R > 0} \left(R^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{p;x,R} \right), \quad (2.6.17)$$

onde $\|f\|_{p;x,R}$ denota a norma L^p de f na bola fechada $B_R(x)$ em $\mathbb{R}^n$, de centro x e raio R .

Observamos que o espaço $(\mathcal{M}_{p,\lambda}, \|\cdot\|_{p,\lambda})$ é um espaço de Banach. Além disso,

- Para $p = 1$, $\mathcal{M}_{1,\lambda}$ é o espaço de medidas com sinal e $\|\cdot\|_{1;x,R}$ é constante para a variação total de f em $B_R(x)$. Além disso, $\mathcal{M}_{1,0} = \mathcal{M}$ é o espaço de medidas finitas.
- Para $p > 1$, $\mathcal{M}_{p,0} = L^p$ e $\mathcal{M}_{\infty,\lambda} = L^\infty$.

Consideremos agora o operador dilatação definido por $f_\sigma(x) = f(\sigma x)$. A norma $\|f\|_{p,\lambda}$ apresenta a seguinte relação de escala:

$$\|f_\sigma\|_{p,\lambda} = \sigma^{-\frac{n-\lambda}{p}} \|f\|_{p,\lambda}. \quad (2.6.18)$$

Relembramos agora a desigualdade de Hölder em espaços de Morrey.

Lema 2.6.1. (FERREIRA; PRECIOSO, 2011, Lema 2.1). Sejam $1 \leq p_i \leq \infty$ e $0 \leq \lambda_i < \infty$, com $i = 1, 2, 3$. Se $\frac{1}{p_3} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ e $\frac{\lambda_3}{p_3} = \frac{\lambda_1}{p_1} + \frac{\lambda_2}{p_2}$, então

$$\|fg\|_{p_3,\lambda_3} \leq \|f\|_{p_1,\lambda_1} \|g\|_{p_2,\lambda_2}.$$

Para mais detalhes em espaços de Morrey, ver por exemplo (CAMPANATO, 1964) e (PEETRE, 1969).

Seja $\varphi \in C_0^\infty$ com $\text{supp}(\varphi) \subseteq D_0 = \{\xi \in \mathbb{R}^n : 2^{-1} < |\xi| < 2\}$ tal que $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(2^{-k}\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}_k(\xi) = 1$, para todo $\xi \neq 0$, onde φ_k é definido através da transformada de Fourier por

$$\hat{\varphi}_k(\xi) = \varphi(2^{-k}\xi),$$

para todo inteiro k . Para $f \in S'$ definimos a quantidade

$$\|f\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s} := \begin{cases} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} (2^{ks} \|\varphi_k * f\|_{p,\lambda})^q \right)^{\frac{1}{q}}, & 1 \leq p \leq \infty, 1 \leq q < \infty, s \in \mathbb{R}, \\ \sup_{k \in \mathbb{Z}} (2^{ks} \|\varphi_k * f\|_{p,\lambda}), & 1 \leq p \leq \infty, q = \infty, s \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Definição 2.6.2. Denotemos por $\mathcal{P}$ o conjunto dos polinômios com n variáveis. O espaço homogêneo de Besov-Morrey, $\mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s$, é o conjunto das classes de equivalência $f \in S'/\mathcal{P}$ tais que $\|f\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s} < \infty$.

Vale ressaltar que o par $(\mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s, \|\cdot\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s})$ é um espaço de Banach. Além disso,

- $\mathcal{N}_{p,0,q}^s = \dot{B}_{p,q}^s$ é o espaço de Besov e $\mathcal{N}_{\infty,\lambda,\infty}^s = \dot{B}_{\infty,\infty}^s$.
- A inclusão $\mathcal{N}_{p,\lambda,q_1}^s \subseteq \mathcal{N}_{p,\lambda,q_2}^s$ é contínua para $1 \leq q_1 \leq q_2 \leq \infty$ e temos a imersão do tipo Sobolev

$$\mathcal{N}_{p_2,\lambda,q_2}^{s_2} \subseteq \mathcal{N}_{p_1,\lambda,q_1}^{s_1}, \quad \text{para } p_1 > p_2 \text{ e } s_1 - \frac{n-\lambda}{p_1} = s_2 - \frac{n-\lambda}{p_2}. \quad (2.6.19)$$

- Temos também a inclusão $\dot{B}_{\infty,2}^0 \subseteq BMO \subseteq \dot{B}_{\infty,\infty}^0$, onde BMO representa o conjunto das funções de oscilação média limitada.

Na sequência, relembremos que o semigrupo do calor $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ é a família de operadores de convolução com núcleo $g_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$, ou seja, $G(t)f = g_t * f$. Dados $1 \leq p < \infty$ e $s > 0$ temos então a seguinte equivalência (ver (MAZZUCATO, 2003)):

$$\|f\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,\infty}^{-s}} \cong \sup_{t>0} t^{\frac{s}{2}} \|G(t)f\|_{p,\lambda}. \quad (2.6.20)$$

Em (FERREIRA; PRECIOSO, 2011), encontramos algumas estimativas para a família $\{G(t)\}_{t \geq 0}$.

Lema 2.6.2. (FERREIRA; PRECIOSO, 2011, Lema 2.2). *Sejam k um multiíndice, $s_1 \leq s_2$ com $s_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq q \leq \infty$, $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$ e $0 \leq \lambda < n$. Então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|\nabla_x^k G(t)f\|_{p_2,\lambda} \leq Ct^{-\frac{|k|}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{n-\lambda}{p_1} - \frac{n-\lambda}{p_2}\right)} \|f\|_{p_1,\lambda}, \quad (2.6.21)$$

$$\|G(t)f\|_{\dot{B}_{p_2,q}^{s_2}} \leq Ct^{-\frac{s_2-s_1}{2} - \frac{n}{2}\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right)} \|f\|_{\dot{B}_{p_1,q}^{s_1}}, \quad (2.6.22)$$

$$\|\nabla_x^k G(t)f\|_{\mathcal{N}_{p_2,\lambda,q}^{s_2}} \leq Ct^{-\frac{|k|+(s_2-s_1)}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{n-\lambda}{p_1} - \frac{n-\lambda}{p_2}\right)} \|f\|_{\mathcal{N}_{p_1,\lambda,q}^{s_1}}, \quad (2.6.23)$$

$$\|\nabla_x G(t)f\|_{L^\infty} \leq Ct^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0}, \quad (2.6.24)$$

para todo $f \in S'$.

Para uma discussão mais aprofundada em espaços de Besov-Morrey, indicamos as referências (MAZZUCATO, 2003; KOZONO; YAMAZAKI, 1994).

2.7 A função de Mainardi

Apresentamos a seguir algumas propriedades da função de Mainardi, M_α . Esta função é um caso particular da função do tipo Wright, introduzida por Mainardi em (MAINARDI, 1994), com o objetivo de caracterizar as soluções fundamentais de alguns problemas físicos com condições de fronteira. Mais precisamente, a função $M_\alpha : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é dada por

$$M_\alpha(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n! \Gamma(1 - \alpha(n+1))}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (2.7.25)$$

O resultado que apresentamos em seguida desempenha um papel fundamental para a obtenção das estimativas dos operadores de Mittag-Leffler nos espaços definidos na Seção 2.6 (ver Seção 4.2).

Proposição 2.7.1. (CARVALHO-NETO; PLANAS, 2015). Para $-1 < r < \infty$, as seguintes propriedades se verificam:

1. $M_\alpha(t) \geq 0$ para todo $t \geq 0$,
2. $\int_0^\infty t^r M_\alpha(t) dt = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(1+\alpha r)}.$

2.8 Os operadores de Mittag-Leffler

Introduzimos agora os operadores de Mittag-Leffler.

Definição 2.8.1. Sejam X um espaço de Banach e $-\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$ o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $\{T(t) : t \geq 0\}$. Para cada $\alpha \in (0, 1)$, definimos as famílias de Mittag-Leffler $\{E_\alpha(-t^\alpha \mathcal{A}) : t \geq 0\}$ e $\{E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha \mathcal{A}) : t \geq 0\}$ por

$$E_\alpha(-t^\alpha \mathcal{A}) = \int_0^\infty M_\alpha(s) T(st^\alpha) ds, \quad (2.8.26)$$

e

$$E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha \mathcal{A}) = \int_0^\infty \alpha s M_\alpha(s) T(st^\alpha) ds. \quad (2.8.27)$$

Observação 2.8.1. Da definição de operadores de Mittag-Leffler, observamos que é essencial assumirmos $\alpha < 1$, pois do contrário, a função de Mainardi entraria em colapso. Além disso, vale frisar que tais operadores não apresentam a propriedade abeliana, a qual, como sabemos, desempenha um papel crucial no desenvolvimento da teoria de semigrupo.

Na sequência, apresentamos o seguinte resultado:

Teorema 2.8.1. (CARVALHO-NETO; PLANAS, 2015). Os operadores $E_\alpha(-t^\alpha \mathcal{A})$ e $E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha \mathcal{A})$ estão bem definidos de X em X . Mais ainda, para $x \in X$ seguem as afirmações:

- i) $E_\alpha(-t^\alpha \mathcal{A})x|_{t=0} = x$ e $E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha \mathcal{A})x|_{t=0} = x$.
- ii) As funções vetoriais $t \mapsto E_\alpha(-t^\alpha \mathcal{A})x$ e $t \mapsto E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha \mathcal{A})x$ são analíticas de $[0, \infty)$ em X .

2.9 Métodos topológicos

Para maior conveniência do leitor, enunciamos nesta seção alguns resultados utilizados neste trabalho.

Teorema 2.9.1. (GRANAS; DUGUNDJI, 2003, Princípio de contração de Banach). *Sejam (M, d) um espaço métrico completo não-vazio e $F : M \rightarrow M$ uma contração. Então F possui um único ponto fixo.*

Corolário 2.9.1. (Princípio dos Iterados). *Seja (M, d) um espaço métrico completo não-vazio e seja $F : M \rightarrow M$ um mapa tal que, para algum n natural, F^n é uma contração. Então F possui um único ponto fixo.*

O próximo resultado é uma generalização do conhecido teorema de ponto fixo de Darbo.

Lema 2.9.1. (DE ANDRADE et al., 2016, Lema 3.3) *Sejam B um subconjunto fechado e convexo de um espaço de Banach X e $F : B \rightarrow B$ um operador contínuo tal que $F(B)$ é limitado. Para qualquer subconjunto limitado $C \subseteq B$, defina $F^1(C) = F(C)$ e $F^n(C) = F(\overline{\text{co}(F^{n-1}(C))})$, $n = 2, 3, \dots$. Se existe uma constante $0 \leq k < 1$ e um inteiro positivo n_0 tal que para qualquer subconjunto limitado $C \subseteq B$,*

$$\xi(F^{n_0}(C)) \leq k\xi(C),$$

então F possui um ponto fixo em B .

Teorema 2.9.2. (GRANAS; DUGUNDJI, 2003, Teorema do ponto fixo de Schauder). *Seja C um subconjunto convexo (não necessariamente fechado) de um espaço linear normado E . Então um mapa compacto $F : C \rightarrow C$ possui ao menos um ponto fixo.*

Teorema 2.9.3. (GRANAS; DUGUNDJI, 2003, Teorema do ponto fixo de Schauder-Tychonoff). *Sejam C um subconjunto convexo não vazio de um espaço topológico localmente convexo E , e $F : C \rightarrow C$ um mapa compacto. Então F possui um ponto fixo.*

Lema 2.9.2. (FERREIRA; PRECIOSO, 2011, Lema 4.1) *Seja $T : X \rightarrow Y$ um mapa linear contínuo com norma τ . Suponha que $B : X \times Y \rightarrow X$ é um mapa bilinear contínuo, isto é, existe $C > 0$ tal que*

$$\|B(x_1, y_1)\|_X \leq C\|x_1\|_X\|y_1\|_Y, \quad \forall (x_1, y_1) \in X \times Y.$$

Seja $0 < \varepsilon < \frac{1}{2C(1+2\tau)}$ e $B_{2\varepsilon} = \{x \in X : \|x\|_X \leq 2\varepsilon\}$. Se $\|\tilde{x}\|_X \leq \varepsilon$ e $\|\tilde{y}\|_Y \leq \varepsilon$, então existe uma única solução $x \in B_{2\varepsilon}$ para a equação

$$x = \tilde{x} + B(x, H(x)),$$

onde $H(x) = \tilde{y} + T(x)$.

Os próximos resultados estabelecem critérios para caracterizar subconjuntos compactos de L^p . O primeiro deles, conhecido como Teorema de Riesz-Weyl-Kolmogorov, afirma que:

Teorema 2.9.4. (HENRÍQUEZ, 2012, Teorema III.3.8). *Sejam $1 \leq p < \infty$ e Ω um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ mensurável no sentido de Lebesgue. Um subconjunto $H \subseteq L^p(\Omega, X)$ é relativamente compacto se, e somente se, é limitado e satisfaz as seguintes condições:*

(a) *Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$\int_{\Omega} \|f(t+h) - f(t)\|^p dm(t) \leq \varepsilon^p,$$

para todo $f \in H$ e $h \in \mathbb{R}^n$, com $\|h\| \leq \delta$.

(b) *Para todo $\varepsilon > 0$, existe um subconjunto mensurável e limitado A de Ω tal que*

$$\int_{\Omega \setminus A} \|f(t)\|^p dm(t) \leq \varepsilon^p, \text{ para todo } f \in H.$$

(c) *Para todo subconjunto mensurável e limitado A de Ω , o conjunto*

$$\left\{ \int_A f \, dm : f \in H \right\}$$

é relativamente compacto em X .

Denotemos $(\tau_h f)(t) = f(t+h)$, para $h > 0$. Notemos que se f está definida em $[0, T]$, então a função transladada $\tau_h f$ está definida em $[-h, T-h]$. Apresentamos agora um outro resultado sobre compacidade em L^p do tipo Fréchet-Kolmogorov.

Teorema 2.9.5. (SIMON, 1987, Teorema 1). *Seja $F \subset L^p([0, T]; X)$. F é relativamente compacto em $L^p([0, T]; X)$, para $1 \leq p < \infty$, ou em $C([0, T]; X)$, para $p = \infty$, se, e somente se:*

(i) $\left\{ \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt : f \in F \right\}$ é relativamente compacto em X , $\forall 0 < t_1 < t_2 < T$.

(ii) $\|\tau_h f - f\|_{L^p([0, T-h]; X)} \rightarrow 0$, quando $h \rightarrow 0$, uniformemente para $f \in F$.

A seguir enunciamos outros resultados topológicos de grande importância para nossos objetivos.

Lema 2.9.3. (DE ANDRADE et al., 2016, Lema 3.1). Seja $B \subset C([0, 1]; X)$ um conjunto limitado e equicontínuo, então $\overline{\text{co}}(B)$ é também limitado e equicontínuo.

Lema 2.9.4. (DE ANDRADE et al., 2016, Lema 3.2). Seja $B \subset C([0, 1]; X)$ um conjunto limitado e equicontínuo. Então,

- a aplicação $t \mapsto \xi(B(t))$ é contínua em $[0, 1]$;
- $\xi(B) = \sup\{\xi(B(s)) : s \in [0, 1]\}$;
- $\xi\left(\int_0^1 B(s)ds\right) \leq \int_0^1 \xi(B(s))ds$.

Denotemos por $C_m^n = \binom{n}{m}$ e por $S_n = \sum_{j=0}^n C_j^n \varepsilon^{n-j} \frac{h^j}{j!}$.

Lema 2.9.5. (DE ANDRADE et al., 2016, Lema 3.4). Sejam $0 < \varepsilon < 1$ e $h > 0$. Então $S_n = o\left(\frac{1}{n^s}\right)$, quando $n \rightarrow \infty$, para um número real arbitrário $s > 1$.

Teorema 2.9.6. (ANDRADE et al., 2015, Teorema 4.2). Sejam $F : C([0, 1]; X) \rightarrow C([0, 1]; X)$ um mapa contínuo e $\mathcal{S}$ o conjunto formado pelos pontos fixos de F . Suponha que existe um conjunto compacto $K \subseteq C([0, 1]; X)$ e que para cada $\varepsilon > 0$, existe um conjunto $K_\varepsilon \subseteq K$ com as seguintes propriedades:

- (i) Os conjuntos K_ε são conexos;
- (ii) $d(x, K_\varepsilon) < \varepsilon$, para todo $x \in \mathcal{S}$;
- (iii) $\|y - Fy\|_\infty < \delta(\varepsilon)$, para todo $y \in K_\varepsilon$, com $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Então $\mathcal{S}$ é conexo.

Lema 2.9.6. (CUEVAS et al., 2017, Lema 3.5). Seja $g : [0, a] \times X \rightarrow Y$ uma função que satisfaz as seguintes condições de Carathéodory:

(Ci) $g(t, \cdot) : X \rightarrow Y$ é contínua para quase todo $t \in [0, \infty)$.

(Cii) Para cada $x \in X$, a função $g(\cdot, x) : [0, \infty) \rightarrow Y$ é fortemente mensurável. Suponha ainda que para cada $\rho \geq 0$ existe uma função $N_\rho \in L^p([0, a])$ tal que

$$\|g(t, x)\| \leq N_\rho(t), \quad t \in [0, a],$$

para todo $x \in X$, com $\|x\|_X \leq \rho$. Assuma que para cada $\rho, \varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\int_{t_1}^{t_2} \|g(t+h, x) - g(t, x)\|^p dt \leq (t_2 - t_1)\varepsilon^p,$$

para todo $t_1, t_2 \in [0, a]$, $t_1 \leq t_2$, $x \in X$, $\|x\|_X \leq \rho$ e $|h| \leq \delta$. Então

$$\int_0^a \|g(t+h, x(t)) - g(t, x(t))\|^p dt \leq a\varepsilon^p,$$

para toda função $x(\cdot) \in C([0, a]; X)$ tal que $\|x\|_{C([0, a]; X)} \leq \rho$.

Lema 2.9.7. (APARCANA et al., , Lema 4.1) Sejam $1 \leq p < \infty$ e $F : [0, a] \rightarrow \mathcal{L}(X)$ um operador fortemente contínuo. Suponha que

- A função $f : [0, \infty) \times X \rightarrow X$ satisfaz as seguintes condições **(Ci)** e **(Cii)** acima.
- Para cada $0 \leq s \leq a < \infty$ e $r > 0$ o conjunto $\{f(s, x) : \|x\|_X \leq r\}$ é relativamente compacto.

Dado $R > 0$, assumamos que $g_u \in L^1([0, a]; X)$, para todo $u \in L^p([0, a]; X)$, com $g_u(t) = f(t, u(t))$, e que a seguinte condição se verifica: Para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que

$$\int_J \|f(s, u(s))\| ds \leq \varepsilon,$$

para todo $J \subseteq [0, a]$, $m(J) < \delta_\varepsilon$ e todo $u \in L^p([0, a]; X)$, com $\|u\|_{L^p([0, a]; X)} \leq R$. Então $\{\int_0^a F(a-s)f(s, u(s))ds : \|u\|_{L^p([0, a]; X)} \leq R\}$ é um conjunto relativamente compacto em X .

As definições e resultados que apresentamos a seguir são ferramentas indispensáveis para mostrarmos que, sob certas condições, o conjunto solução do problema (4.1.1) é um conjunto R_δ .

Definição 2.9.1 (Espaço contrátil). (GÓRNIIEWICZ, 2000). Um espaço E é dito contrátil, se existe uma homotopia $h : X \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que para todo $x \in X$,

$$h(x, 0) = x \text{ e } h(x, 1) = x_0,$$

para algum $x_0 \in X$ fixo.

Definição 2.9.2 (Espaço retrátil). (GÓRNIIEWICZ, 2000). Um espaço X é absolutamente retrátil, se para todo espaço Y , todo subconjunto fechado $B \subset Y$ e toda aplicação contínua $f : B \rightarrow X$, existe uma extensão contínua $\tilde{f} : Y \rightarrow X$ de f sobre Y , isto é, $\tilde{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in B$.

Definição 2.9.3 (Conjunto R_δ). (GÓRNIIEWICZ, 2000). Um espaço X é um conjunto R_δ , se existe uma sequência de espaços contráteis compactos e não vazios, X_n , tal que $X_{n+1} \subset X_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e

$$X = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n.$$

Observação 2.9.1. Observamos que qualquer conjunto R_δ é um espaço compacto, conexo e não vazio que é acíclico com respeito à homologia de Čech, isto é, têm a mesma homologia que o espaço de um ponto (ver (GÓRNIIEWICZ, 2000)).

Definição 2.9.4. Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua e seja $y \in Y$. A função f é própria em y , se existe $\epsilon > 0$ tal que para qualquer conjunto compacto $K \subset B(y, \epsilon)$, o conjunto $f^{-1}(K)$ é compacto, sendo $B(y, \epsilon)$ a bola aberta em Y centrada em y e raio ϵ .

Neste momento podemos escrever a formulação do teorema de Browder-Gupta devido a L.Górniewicz.

Teorema 2.9.7. (*GÓRNIEWICZ, 2000, Teorema 2.1*) *Sejam E um espaço de Banach e $f : X \rightarrow E$ uma função contínua tal que as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) *f é própria em $0 \in E$.*

(ii) *Para cada $\epsilon > 0$, existe uma função contínua $f_\epsilon : X \rightarrow E$, onde*

1. $\|f(x) - f_\epsilon(x)\| \leq \epsilon, \forall x \in X;$

2. *a aplicação $\tilde{f}_\epsilon : f_\epsilon^{-1}(B(0, \epsilon)) \rightarrow (B(0, \epsilon))$, definida por $\tilde{f}_\epsilon(x) = f_\epsilon(x)$, é um homeomorfismo.*

Então o conjunto $f^{-1}(\{0\})$ é um conjunto R_δ .

O próximo resultado foi obtido por Szufła em 1979 e nos fornece algumas condições suficientes para que uma função contínua satisfaça o item (ii) do último teorema. Considere K um subconjunto convexo e limitado de um espaço normado e sejam E um espaço vetorial topológico de Hausdorff e $C := C(K; E)$. Assumindo que $t_0 \in K$, $x_0 \in E$ e que Ω é a família de todas as vizinhanças abertas de 0 em E , denotamos por Φ o conjunto de todas as funções contínuas $F : C \rightarrow C$ tais que

(1°) Para qualquer $\mathcal{U} \in \Omega$, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$F(x)(t) - F(x)(s) \in \mathcal{U},$$

para cada $x \in C$, $t, s \in K$ com $|t - s| \leq \epsilon$;

(2°) $F(x)(t_0) = x_0$ para cada $x \in C$;

(3°) Para cada $\epsilon > 0$,

$$x|_{K_\epsilon} = y|_{K_\epsilon} \implies F(x)|_{K_\epsilon} = F(y)|_{K_\epsilon}, \forall x, y \in C,$$

sendo $K_\epsilon = B[t_0, \epsilon] \cap K$ e $B[t_0, \epsilon]$ a bola fechada de centro t_0 e raio ϵ .

Denotando por I a aplicação identidade em C , enunciamos o próximo resultado:

Lema 2.9.8. (*SZUFLA, 1979, Lema 1*) *Para qualquer $F \in \Phi$, existe uma sequência $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $I - F_n$ é um homeomorfismo de C em C e $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$ uniformemente em $x \in C$.*

3 EQUAÇÕES DE ONDAS FORTEMENTE AMORTECIDAS

3.1 Introdução

Neste capítulo faremos um estudo qualitativo do seguinte problema de Cauchy:

$$\begin{cases} u_{tt} + 2\eta A^{\frac{1}{2}}u_t + Au = f(t, u, u_t), & t > 0, \\ u(0) = u_0 \in X^{\frac{1}{2}}, & u_t(0) = v_0 \in X, \end{cases} \quad (3.1.1)$$

onde X é um espaço de Banach reflexivo, $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ é um operador fechado densamente definido, $X^{\frac{1}{2}}$ é o espaço de potência fracionária associado a A como em (HENRY, 2006), $\eta > 0$ e f é uma função contínua adequada. De modo mais específico, estamos interessados em estudar periodicidade assintótica, existência de soluções (brandas) L^p -limitadas e soluções clássicas (e fortes) para o problema (3.1.1). Além disso, analisamos a estrutura topológica do conjunto de soluções deste mesmo problema e ao final do capítulo, complementamos nosso estudo com um conjunto de aplicações para os resultados aqui estabelecidos.

É válido ressaltar que a pesquisa desenvolvida ao longo deste capítulo é uma continuação natural do trabalho feito em (CUEVAS; LIZAMA; SOTO, 2013), o qual investiga a existência e unicidade de soluções assintoticamente quase-periódicas para equações de ondas fortemente amortecidas do tipo (3.1.1).

3.2 Redução a primeira ordem

Iniciamos nosso estudo notando que o problema (3.1.1) pode ser reduzido a um problema de Cauchy de primeira ordem (em tempo) em $X^{\frac{1}{2}} \times X$:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_t + \mathcal{A}_{(1/2)} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = F \left(t, \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right), \quad t > 0, \quad (3.2.2)$$

$$\begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}, \quad (3.2.3)$$

onde $\mathcal{A}_{(1/2)} = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ A & 2\eta A^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} : D(\mathcal{A}_{(1/2)}) \subseteq X^{\frac{1}{2}} \times X \rightarrow X^{\frac{1}{2}} \times X$ é definido por

$$\mathcal{A}_{(1/2)} \begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\psi \\ A\phi + 2\eta A^{\frac{1}{2}}\psi \end{bmatrix}, \text{ para } \begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix} \in D(\mathcal{A}_{(1/2)}),$$

e

$$F\left(t, \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t, u, v) \end{bmatrix}.$$

É importante observarmos que:

Observação 3.2.1. • Se (η, A) é um par admissível¹, por (CARVALHO; CHOLEWA; DLOTKO, 2008, Proposição 2.1), $\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}$ é um operador fechado com $0 \in \rho(\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})})$. De fato, $\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}$ tem a inversa dada na forma matricial

$$\mathcal{A}_{(1/2)}^{-1} = \begin{bmatrix} 2\eta A^{-\frac{1}{2}} & A^{-1} \\ -I & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X).$$

Mais ainda, se A tem operador resolvente compacto, então $\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}$ também tem operador resolvente compacto.

- Por (CARVALHO; CHOLEWA; DLOTKO, 2008, Teorema 2.3), o operador $\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}$ é setorial em $X^{\frac{1}{2}} \times X$. O semigrupo $\{e^{-\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}t} : t \geq 0\}$ gerado por $\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}$ em $X^{\frac{1}{2}} \times X$ é analítico com decaimento exponencial. Isto é, existem constantes $K \geq 1$ e $C > 0$ tais que

$$\|e^{-\mathcal{A}_{(1/2)}t}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} \leq Ke^{-Ct}, \quad t \geq 0. \quad (3.2.4)$$

O resultado a seguir sobre regularidade da convolução envolvendo funções pseudo S -assintoticamente ω -periódicas, é crucial para obtenção de nossos resultados.

Lema 3.2.1. Se $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow X^{\frac{1}{2}} \times X$ é uma função pseudo S -assintoticamente ω -periódica e

$$\Phi(t) = \int_0^t e^{-\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}(t-s)} h(s) ds, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

então $\Phi(\cdot)$ pseudo S -assintoticamente ω -periódica.

Demonstração. Inicialmente temos a seguinte estimativa a priori:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_0^t \|\Phi(\tau + \omega) - \Phi(\tau)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} d\tau &\leq \frac{K}{tC} \sup_{s \geq 0} \|h(s)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \\ &\quad + \frac{K}{tC} \int_0^t \|h(\xi + \omega) - h(\xi)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} d\xi, \end{aligned}$$

com K e C constantes dadas em (3.2.4), a qual nos mostra que $\Phi(\cdot)$ é pseudo S -assintoticamente ω -periódica. $\square$

Relembremos a seguir o conceito de solução branda de (3.2.2)-(3.2.3) (ou equivalentemente, de (3.1.1)).

¹ Dizemos que (η, A) é um par admissível se existem $\psi \in (0, \frac{\pi}{2})$ e $M > 0$ tais que $\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{1+|\lambda|}$, para todo λ no setor $\Sigma_\psi = \{\lambda \in \mathbb{C} : \psi \leq |\arg \lambda| \leq \pi\} \cup \{0\}$ e $\frac{\pi}{2} > \frac{\psi}{2} + \arg(\eta + \sqrt{\eta^2 - 1})$.

Definição 3.2.1 (Solução Branda). Seja $\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \in X^{\frac{1}{2}} \times X$. Dizemos que $\begin{bmatrix} u(\cdot) \\ v(\cdot) \end{bmatrix} : \mathbb{R}^+ \rightarrow X^{\frac{1}{2}} \times X$ é uma solução branda para (3.2.2)-(3.2.3) (ou para (3.1.1)) se ela satisfaz a fórmula integral:

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = e^{-\mathcal{A}(\frac{1}{2})t} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} + \int_0^t e^{-\mathcal{A}(\frac{1}{2})(t-s)} F\left(s, \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix}\right) ds, \quad (3.2.5)$$

para todos $t, s \in \mathbb{R}^+$, com $t \geq s$.

Tal definição será essencial para nós ao longo das próximas seções.

3.3 Existência de soluções pseudo S -assintoticamente ω -periódicas

Nesta seção estamos interessados em estudar periodicidade assintótica das soluções brandas do problema (3.1.1). De maneira específica, o que faremos é provar cinco novos resultados (Teoremas 3.3.1, 3.3.2, 3.3.3, 3.3.4 e 3.3.5) sobre existência de soluções brandas pseudo S -assintoticamente ω -periódica para o problema em questão. Iniciamos com o seguinte teorema:

Teorema 3.3.1. *Assuma que (η, A) é um par admissível. Seja $f : \mathbb{R}^+ \times X^{\frac{1}{2}} \times X \rightarrow X$ uma função contínua assintoticamente limitada em conjuntos limitados de $X^{\frac{1}{2}} \times X$ e uniformemente pseudo S -assintoticamente ω -periódica em conjuntos limitados de $X^{\frac{1}{2}} \times X$ que satisfaz a condição de Lipschitz*

$$\|f(t, u_1, v_1) - f(t, u_2, v_2)\|_X \leq L[\|u_1 - u_2\|_{X^{\frac{1}{2}}} + \|v_1 - v_2\|_X], \quad (3.3.6)$$

para todo $\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} \in X^{\frac{1}{2}} \times X$, $i = 1, 2$, e cada $t \geq 0$. Se $\frac{K}{C}L < 1$, onde K e C são constantes dadas em (3.2.4), então o problema (3.1.1) tem uma única solução branda pseudo S -assintoticamente ω -periódica.

Demonstração. Definamos o mapa $\mathfrak{F} : PSAP_\omega(X^{\frac{1}{2}} \times X) \rightarrow PSAP_\omega(X^{\frac{1}{2}} \times X)$ pela expressão

$$\mathfrak{F}\left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right)(t) = e^{-\mathcal{A}(\frac{1}{2})t} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} + \int_0^t e^{-\mathcal{A}(\frac{1}{2})(t-s)} F\left(s, \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix}\right) ds, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (3.3.7)$$

onde $\begin{bmatrix} u(\cdot) \\ v(\cdot) \end{bmatrix}$ é uma função pseudo S -assintoticamente ω -periódica. Como $t \rightarrow \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$ é uma função contínua e $Im\left(\begin{bmatrix} u(\cdot) \\ v(\cdot) \end{bmatrix}\right)$ é um conjunto limitado em $X^{\frac{1}{2}} \times X$, levando em

conta que f é uma função contínua assintoticamente limitada em conjuntos limitados de $X^{\frac{1}{2}} \times X$, podemos inferir que $t \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ f(t, u(t), v(t)) \end{bmatrix}$ é uma função limitada. Com isto, obtemos

$$\begin{aligned} & \left\| \mathfrak{F} \left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right) (t) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \\ & \leq K e^{-Ct} \left\| \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} + K \int_0^t e^{-C(t-s)} \left\| F \left(t, \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \right) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \end{aligned}$$

e segue daí que

$$\sup_{t \geq 0} \left\| \mathfrak{F} \left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right) (t) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \leq K \left\| \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} + \frac{K}{C} \sup_{t \geq 0} \left\| F \left(t, \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \right) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}.$$

Uma parte crucial da demonstração a se observar é que usando o Lema 2.1.1, temos que o mapa de Nemytskii

$$t \rightarrow F \left(t, \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \right)$$

é pseudo S -assintoticamente ω -periódica. Logo, segue direto do Lema 3.2.1 que o mapa

$$\vartheta(t) = \int_0^t e^{-\mathcal{A}(\frac{1}{2})(t-s)} F \left(s, \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right) ds \quad (3.3.8)$$

é uma função pseudo S -assintoticamente ω -periódica. Além disso, a função

$$t \rightarrow e^{-\mathcal{A}(\frac{1}{2})t} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$$

também é pseudo S -assintoticamente ω -periódica, pois

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t} \int_0^t \left\| e^{-\mathcal{A}(\frac{1}{2})(s+\omega)} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} - e^{-\mathcal{A}(\frac{1}{2})s} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} dt \\ & \leq \frac{K}{t} (e^{-C\omega} + 1) \left\| \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \int_0^t e^{-Cs} ds \\ & \leq \frac{K}{Ct} (e^{-C\omega} + 1) \left\| \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}, \end{aligned}$$

e com isto concluímos que o mapa $\mathfrak{F}$ está bem definido. Consideremos agora $\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} \in$

$PSAP_\omega(X^{\frac{1}{2}} \times X)$, $i = 1, 2$. Podemos deduzir que

$$\begin{aligned}
& \left\| \mathfrak{F} \left(\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} \right) - \mathfrak{F} \left(\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right) \right\|_\infty \\
&= \sup_{t \geq 0} \left\| \mathfrak{F} \left(\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} \right)(t) - \mathfrak{F} \left(\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right)(t) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \\
&\leq K \sup_{t \geq 0} \int_0^t e^{-C(t-s)} \left\| f(s, u_1(s), v_1(s)) - f(s, u_2(s), v_2(s)) \right\|_X ds \\
&\leq KL \sup_{t \geq 0} \int_0^t e^{-C(t-s)} \left[\|u_1(s) - u_2(s)\|_{X^{\frac{1}{2}}} + \|v_1(s) - v_2(s)\|_X \right] ds \\
&\leq \frac{KL}{C} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_\infty,
\end{aligned}$$

ou seja, $\mathfrak{F}$ é uma $\frac{KL}{C}$ -contração. Admitindo que $\frac{KL}{C} < 1$, então, segue do Teorema 2.9.1 que $\mathfrak{F}$ tem um único ponto fixo em $PSAP_\omega(X^{\frac{1}{2}} \times X)$ e isto completa nossa demonstração. $\square$

O teorema a seguir é um refinamento do resultado anterior.

Teorema 3.3.2. *Assuma que (η, A) é um par admissível e que A tem operador resolvente compacto. Seja $f : \mathbb{R}^+ \times X^{\frac{1}{2}} \times X \rightarrow X$ uma função contínua assintoticamente limitada em conjuntos limitados de $X^{\frac{1}{2}} \times X$ e uniformemente pseudo S -assintoticamente ω -periódica em conjuntos limitados de $X^{\frac{1}{2}} \times X$ que satisfaz (3.3.6). Além disso, suponha que as seguintes condições são satisfeitas:*

(PS1) *Existe uma função contínua não-decrescente $W : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que*

$$\|f(t, u, v)\|_X \leq W(\|u\|_{X^{\frac{1}{2}}} + \|v\|_X),$$

para todo $t \geq 0$ e $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in X^{\frac{1}{2}} \times X$.

(PS2) *Existe $r > 0$ tal que*

$$K[\|u_0\|_{X^{\frac{1}{2}}} + \|v_0\|_X] + \frac{K}{C}W(r) \leq r,$$

onde K e C são dados em (3.2.4). Então o problema (3.1.1) tem uma única solução branda pseudo S -assintoticamente ω -periódica.

Demonstração: No que segue, consideramos como ponto de partida o espaço de Frechet $C([0, \infty); X^{\frac{1}{2}} \times X)$ munido com a topologia da convergência uniforme em conjuntos compactos, τ_C , e definimos um mapa contínuo Υ em $C([0, \infty); X^{\frac{1}{2}} \times X)$ pela expressão (3.3.7). Dividimos a demonstração deste resultado em várias etapas.

- O mapa Υ é contínuo. De fato, seja $\left\{ \begin{bmatrix} u^n \\ v^n \end{bmatrix} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $C([0, \infty); X^{\frac{1}{2}} \times X)$

que converge para $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ na τ_C -topologia. Para cada $a > 0$ temos

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in [0, a]} \left\| \Upsilon \left(\begin{bmatrix} u^n \\ v^n \end{bmatrix} \right)(t) - \Upsilon \left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right)(t) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \\ & \leq K \sup_{t \in [0, a]} \int_0^t e^{-C(t-s)} \left\| f(s, u^n(s), v^n(s)) - f(s, u(s), v(s)) \right\|_X ds \\ & \leq KL \sup_{t \in [0, a]} \int_0^t e^{-C(t-s)} \left[\|u^n(s) - u(s)\|_{X^{\frac{1}{2}}} + \|v^n(s) - v(s)\|_X \right] ds \\ & \leq \frac{KL}{C} \sup_{t \in [0, a]} \left\| \begin{bmatrix} u^n(t) \\ v^n(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}. \end{aligned}$$

Desta última estimativa temos então a continuidade de Υ .

- Consideremos o conjunto $B(r) = \left\{ \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in C([0, \infty); X^{\frac{1}{2}} \times X) : \left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{\infty} \leq r \right\}$.

Está claro que $B(r)$ é um subconjunto fechado e convexo de $C([0, \infty); X^{\frac{1}{2}} \times X)$. Seja

$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in B(r)$. Então

$$\begin{aligned} & \left\| \Upsilon \left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right)(t) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \\ & \leq K e^{-Ct} \left\| \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} + K \int_0^t e^{-C(t-s)} W \left(\|u(s)\|_{X^{\frac{1}{2}}} + \|v(s)\|_X \right) ds \\ & \leq K e^{-Ct} \left\| \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} + \frac{K}{C} W(r) \int_0^t e^{-C(t-s)} ds. \end{aligned}$$

Logo

$$\left\| \Upsilon \left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right) \right\|_{\infty} \leq K \left\| \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} + \frac{K}{C} W(r) \leq r,$$

e daí concluímos que $B(r)$ é invariante sob Υ .

- Seja $\mathcal{K}_0 = \{e^{-\mathcal{A}(\frac{1}{2})(t-s)}[0, f(s, x, y)] : 0 \leq s \leq t, \|x\|_{X^{\frac{1}{2}}} + \|y\|_X \leq r\}$. Para cada $t > 0$, segue de (MARTIN, 1976, Lema II.1.3), que

$$\Upsilon(B(r))(t) \subseteq e^{-\mathcal{A}(\frac{1}{2})t}[u_0, v_0] + \overline{tco(\mathcal{K}_0)}.$$

Como $\mathcal{K}_0$ é relativamente compacto em $X^{\frac{1}{2}} \times X$, temos ainda do Corolário 2.2.1 que $\overline{co(\mathcal{K}_0)}$ é compacto e assim vemos que $\Upsilon(B(r))(t)$ é relativamente compacto. Usando agora

o fato de que $e^{-\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}t}$ é um mapa contínuo em $(0, \infty)$ e a decomposição

$$\begin{aligned} & \Upsilon \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} (t+s) - \Upsilon \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} (t) \\ &= e^{-\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}(t+s)} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} - e^{-\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}t} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \\ &+ \int_t^{t+s} e^{-\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}(t+s-\xi)} F\left(\xi, \begin{bmatrix} u(\xi) \\ v(\xi) \end{bmatrix}\right) d\xi \\ &+ \int_0^t \left(e^{-\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}(t+s-\xi)} - e^{-\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}(t-\xi)} \right) F\left(\xi, \begin{bmatrix} u(\xi) \\ v(\xi) \end{bmatrix}\right) d\xi, \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

podemos inferir que $\Upsilon(B(r))$ é equicontínuo em $[0, a]$ para todo $a \geq 0$. Como consequência do teorema de Ascoli, temos que $\Upsilon(B(r))$ é um conjunto relativamente compacto em $C([0, \infty); X^{\frac{1}{2}} \times X)$.

• Seguindo a demonstração do Teorema 3.3.1 obtemos que $PSAP_\omega(X^{\frac{1}{2}} \times X)$ é invariante sob Υ . Definamos agora o conjunto $C = B(r) \cap \overline{PSAP_\omega(X^{\frac{1}{2}} \times X)}^{\tau_C}$. É apropriado observarmos que C é fechado, convexo e também invariante sob Υ . Então do teorema de Schauder-Tychonoff (ver Teorema 2.9.3), podemos afirmar que Υ tem um ponto fixo $[\tilde{u}, \tilde{v}] \in C$.

• Tomemos $u(t) = \tilde{u}(t + \omega)$ e $v(t) = \tilde{v}(t + \omega)$, $t \geq 0$. Afirmamos que $\Upsilon\left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right) - \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ é uma função ergódica, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left\| \Upsilon \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} (s) - \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds = 0. \quad (3.3.10)$$

De fato, notemos inicialmente que

$$\begin{aligned} & \Upsilon\left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right)(s) - \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \\ &= e^{-\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}s} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} + \int_0^s e^{-\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}(s-\tau)} F\left(\tau, \begin{bmatrix} u(\tau) \\ v(\tau) \end{bmatrix}\right) d\tau - \Upsilon\left(\begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix}\right)(s+\omega) \\ &= e^{-\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}s} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} - e^{-\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}(s+\omega)} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} + \int_0^s e^{-\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}(s-\tau)} F\left(\tau, \begin{bmatrix} u(\tau) \\ v(\tau) \end{bmatrix}\right) d\tau \\ &\quad - \int_0^\omega e^{-\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}(s+\omega-\tau)} F\left(\tau, \begin{bmatrix} \tilde{u}(\tau) \\ \tilde{v}(\tau) \end{bmatrix}\right) d\tau - \int_\omega^{s+\omega} e^{-\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}(s+\omega-\tau)} F\left(\tau, \begin{bmatrix} \tilde{u}(\tau) \\ \tilde{v}(\tau) \end{bmatrix}\right) d\tau \\ &= e^{-\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}s} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} - e^{-\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}(s+\omega)} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} - \int_0^\omega e^{-\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}(s+\omega-\tau)} F\left(\tau, \begin{bmatrix} \tilde{u}(\tau) \\ \tilde{v}(\tau) \end{bmatrix}\right) d\tau \\ &\quad + \int_0^s e^{-\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}(s-\tau)} \left[F\left(\tau, \begin{bmatrix} \tilde{u}(\tau+\omega) \\ \tilde{v}(\tau+\omega) \end{bmatrix}\right) - F\left(\tau+\omega, \begin{bmatrix} \tilde{u}(\tau+\omega) \\ \tilde{v}(\tau+\omega) \end{bmatrix}\right) \right] d\tau. \end{aligned}$$

Disto obtemos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{t} \int_0^t \left\| \Upsilon \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} (s) - \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \\
& \leq \frac{2K}{t} \left(\int_0^t e^{-Cs} ds \right) \left\| \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \\
& \quad + \frac{K}{t} \int_0^t \int_0^\omega e^{-C(s+\omega-\tau)} W \left(\left\| \begin{bmatrix} \tilde{u}(\tau) \\ \tilde{v}(\tau) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \right) d\tau ds \\
& \quad + \frac{K}{t} \int_0^t \int_0^s e^{-C(s-\tau)} \|f(\tau + \omega, \tilde{u}(\tau + \omega), \tilde{v}(\tau + \omega)) - f(\tau, \tilde{u}(\tau + \omega), \tilde{v}(\tau + \omega))\|_X d\tau ds \\
& \leq \frac{2K}{Ct} \left\| \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} + \frac{K}{Ct} W(r) \\
& \quad + \frac{K}{Ct} \int_0^t \sup_{\| [x, y] \|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \leq r} \|f(\tau + \omega, x, y) - f(\tau, x, y)\|_X d\tau.
\end{aligned}$$

Como f é uma função uniformemente pseudo S -assintoticamente ω -periódica em conjuntos limitados de $X^{\frac{1}{2}} \times X$, chegamos a conclusão que (3.3.10) segue.

• Seja $\phi(t)$ dada por

$$\phi(t) = \left\| \Upsilon \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} (t) - \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X},$$

onde $\begin{bmatrix} u(\cdot) \\ v(\cdot) \end{bmatrix}$ é como na etapa anterior. Consideremos a equação

$$\nu(t) = \phi(t) + KL \int_0^t e^{-C(t-s)} \nu(s) ds, \quad (3.3.11)$$

onde L é dado em (3.2.4). Afirmamos que existe uma única função ergódica positiva $\nu(t)$ satisfazendo esta última equação. De fato, segue do Teorema 2.3.9, que o resolvente $r(t)$ de $KL e^{-Ct}$ existe como elemento de $L^1(\mathbb{R}^+)$, sendo único nesta classe. Então a equação (3.3.11) faz sentido e obtemos

$$\nu(t) = \phi(t) - \int_0^t r(t-\tau) \phi(\tau) d\tau$$

(para mais detalhes, ver seção 2.3). Disto concluímos que $\nu(t)$, satisfazendo (3.3.11), é única. Além disso, a função

$$t \rightarrow \int_0^t r(t-\tau) \phi(\tau) d\tau$$

é ergódica, pois,

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left| \int_0^s r(s-\tau) \phi(\tau) d\tau \right| ds & \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \int_\tau^t |r(s-\tau)| |\phi(\tau)| ds d\tau \\
& \leq \|r\|_{L^1} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t |\phi(\tau)| d\tau = 0.
\end{aligned}$$

E daí concluímos que ν é uma função ergódica.

- Consideremos o conjunto

$$E = \left\{ \begin{bmatrix} w(\cdot) \\ z(\cdot) \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} w(\cdot) \\ z(\cdot) \end{bmatrix} \text{ é uma função ergódica e } \|w(t)\|_{X^{\frac{1}{2}}} + \|z(t)\|_X \leq \nu(t), t \geq 0 \right\}$$

e definamos o conjunto

$$C_b := \begin{bmatrix} u(\cdot) \\ v(\cdot) \end{bmatrix} + E.$$

Não é difícil checar que C_b é um subconjunto τ_C -fechado convexo de $C_b([0, \infty); X^{\frac{1}{2}} \times X)$.

Mostraremos agora que C_b é invariante sob Υ . Seja $\begin{bmatrix} w(\cdot) \\ z(\cdot) \end{bmatrix}$ uma função ergódica. Notemos que

$$\Upsilon \left(\begin{bmatrix} u(\cdot) \\ v(\cdot) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w(\cdot) \\ z(\cdot) \end{bmatrix} \right) - \Upsilon \begin{bmatrix} u(\cdot) \\ v(\cdot) \end{bmatrix}$$

é uma função ergódica, uma vez que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t} \int_0^t \left\| \Upsilon \left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} \right) (s) - \Upsilon \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} (s) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \\ & \leq \frac{K}{t} \int_0^t \int_0^s e^{-C(s-\tau)} \|f(\tau, (u+w)(\tau), (v+z)(\tau)) - f(\tau, u(\tau), v(\tau))\|_X d\tau ds \\ & \leq \frac{KL}{t} \int_0^t \int_0^s e^{-C(s-\tau)} (\|(u+w)(\tau) - u(\tau)\|_{X^{\frac{1}{2}}} + \|(v+z)(\tau) - v(\tau)\|_X) d\tau ds \\ & \leq \frac{KL}{t} \int_0^t \int_\tau^t e^{-C(s-\tau)} (\|w(\tau)\|_{X^{\frac{1}{2}}} + \|z(\tau)\|_X) ds d\tau \\ & \leq \frac{KL}{Ct} \int_0^t (\|w(\tau)\|_{X^{\frac{1}{2}}} + \|z(\tau)\|_X) d\tau. \end{aligned}$$

Se assumirmos $\|w(t)\|_{X^{\frac{1}{2}}} + \|z(t)\|_X \leq \nu(t)$, $t \geq 0$, então

$$\begin{aligned} & \left\| \Upsilon \left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} \right) (t) - \Upsilon \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} (t) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \\ & \leq KL \int_0^t e^{-C(t-\tau)} (\|w(\tau)\|_{X^{\frac{1}{2}}} + \|z(\tau)\|_X) d\tau \\ & \leq KL \int_0^t e^{-C(t-\tau)} \nu(\tau) d\tau = \nu(t) - \phi(t). \end{aligned}$$

Tomando agora

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} (t) = \Upsilon \left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} \right) (t) - \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} (t)$$

temos

$$\begin{aligned} \left\| \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} & \leq \left\| \Upsilon \left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} \right) (t) - \Upsilon \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} (t) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \\ & \quad + \left\| \Upsilon \left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} \right) (t) - \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} (t) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \\ & \leq \nu(t) - \phi(t) + \phi(t) = \nu(t), \end{aligned}$$

o que implica que $\Upsilon \left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} \right) \in C_b$. Com isto provamos que C_b é Υ -invariante e, portanto, Υ tem um ponto fixo $\begin{bmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{v}_0 \end{bmatrix} \in C_b$. Afirmamos agora que o mapa Υ tem um único ponto fixo em $C_b([0, \infty); X^{\frac{1}{2}} \times X)$. De fato, se $\begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{v}_0 \end{bmatrix}$ são pontos fixos de Υ , então

$$\left\| \begin{bmatrix} \tilde{u}(t) \\ \tilde{v}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{u}_0(t) \\ \tilde{v}_0(t) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \leq KL \int_0^t e^{-C(t-s)} \left\| \begin{bmatrix} \tilde{u}(s) \\ \tilde{v}(s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{u}_0(s) \\ \tilde{v}_0(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds,$$

ou ainda,

$$e^{Ct} \left\| \begin{bmatrix} \tilde{u}(t) \\ \tilde{v}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{u}_0(t) \\ \tilde{v}_0(t) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \leq KL \int_0^t e^{Cs} \left\| \begin{bmatrix} \tilde{u}(s) \\ \tilde{v}(s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{u}_0(s) \\ \tilde{v}_0(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds.$$

Aplicando agora o Lema de Gronwall, chegamos a conclusão que

$$\left\| \begin{bmatrix} \tilde{u}(t) \\ \tilde{v}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{u}_0(t) \\ \tilde{v}_0(t) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} = 0, \quad \forall t \geq 0,$$

e, portanto, Υ tem um único ponto fixo em $C_b([0, \infty); X^{\frac{1}{2}} \times X)$. Para finalizar a demonstração deste teorema, precisamos mostrar que $\begin{bmatrix} \tilde{u}(\cdot) \\ \tilde{v}(\cdot) \end{bmatrix} \in PSAP_\omega(X^{\frac{1}{2}} \times X)$. Notemos que como

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}(\cdot) \\ \tilde{v}(\cdot) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{u}_0(\cdot) \\ \tilde{v}_0(\cdot) \end{bmatrix} \in C_b, \text{ então}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix}(t) = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}(t) + \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix}(t), \quad \forall t \geq 0,$$

e segue direto daí que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left\| \begin{bmatrix} \tilde{u}(s+\omega) - \tilde{u}(s) \\ \tilde{v}(s+\omega) - \tilde{v}(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left\| \begin{bmatrix} w(s) \\ z(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds = 0.$$

Logo, $\begin{bmatrix} \tilde{u}(\cdot) \\ \tilde{v}(\cdot) \end{bmatrix}$ é pseudo S -assintoticamente ω -periódica, e assim completamos a demonstração. $\square$

Observação 3.3.1. É válido observarmos que enquanto no Teorema 3.3.1 pedimos que a constante de Lipschitz seja suficientemente pequena, no Teorema 3.3.2, tal exigência não se faz necessária.

Teorema 3.3.3. *Assuma que (η, A) é um par admissível. Seja $f : \mathbb{R}^+ \times X^{\frac{1}{2}} \times X \rightarrow X$ uma função contínua assintoticamente limitada em conjuntos limitados de $X^{\frac{1}{2}} \times X$ e*

uniformemente pseudo S -assintoticamente ω -periódica em conjuntos limitados de $X^{\frac{1}{2}} \times X$ que satisfaz a condição de Lipschitz:

$$\|f(t, u_1, v_1) - f(t, u_2, v_2)\|_X \leq L(t) [\|u_1 - u_2\|_{X^{\frac{1}{2}}} + \|v_1 - v_2\|_X], \quad (3.3.12)$$

para todo $\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} \in X^{\frac{1}{2}} \times X$, $i = 1, 2$; e cada $t \geq 0$, onde $L : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função integrável limitada em $[N, \infty)$, para alguma constante $N > 0$. Então o problema (3.1.1) tem uma única solução branda pseudo S -assintoticamente ω -periódica.

Demonstração: Para provar este resultado, usaremos exatamente a mesma notação utilizada na demonstração do Teorema 3.3.1. Seja $\begin{bmatrix} u(\cdot) \\ v(\cdot) \end{bmatrix} \in PSAP_\omega(X^{\frac{1}{2}} \times X)$. Levando em conta que o conjunto $\{L(t) : t \geq N\}$ é limitado, segue então de Lema 2.1.2, que a função

$$t \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ f(t, u(t), v(t)) \end{bmatrix}$$

é pseudo S -assintoticamente ω -periódica. Logo, do Lema 3.2.1, nós inferimos que o operador $\mathfrak{F}$ está bem definido. Seja agora $\begin{bmatrix} u_i(\cdot) \\ v_i(\cdot) \end{bmatrix} \in PSAP_\omega(X^{\frac{1}{2}} \times X)$, com $i = 1, 2$.

- Notemos que

$$\left\| \mathfrak{F} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \mathfrak{F} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_\infty \leq K \|L\|_1 \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_\infty.$$

- Além disso,

$$\begin{aligned} & \left\| \mathfrak{F}^2 \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} (t) - \mathfrak{F}^2 \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} (t) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \\ & \leq K^2 \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_\infty \int_0^t L(s) \left(\int_0^s L(\tau) d\tau \right) ds \\ & \leq \frac{K^2}{2} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_\infty \left(\int_0^t L(s) ds \right)^2, \end{aligned}$$

o que implica em $\left\| \mathfrak{F}^2 \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} (t) - \mathfrak{F}^2 \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} (t) \right\|_\infty \leq \frac{(K\|L\|_1)^2}{2} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_\infty$.

Indutivamente podemos mostrar então que

$$\left\| \mathfrak{F}^n \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \mathfrak{F}^n \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_\infty \leq \frac{(K\|L\|_1)^n}{n!} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_\infty. \quad (3.3.13)$$

Para n suficientemente grande vemos que $\frac{(K\|L\|_1)^n}{n!} < 1$. Sendo assim, temos do Corolário 2.9.1 que $\mathfrak{F}$ admite um único ponto fixo em $PSAP_\omega(X^{\frac{1}{2}} \times X)$ e isto completa a demonstração do Teorema 3.3.3. $\square$

A partir de agora discutiremos algumas condições sobre f a fim de garantirmos existência local de soluções.

Teorema 3.3.4. *Assuma que (η, A) é um par admissível. Seja $f : \mathbb{R}^+ \times X^{\frac{1}{2}} \times X \rightarrow X$ uma função contínua assintoticamente limitada em conjuntos limitados de $X^{\frac{1}{2}} \times X$ e uniformemente pseudo S -assintoticamente ω -periódica em conjuntos limitados de $X^{\frac{1}{2}} \times X$ que satisfaz a condição de Lipschitz local:*

(L_{loc}) *Para cada $\sigma \in \mathbb{R}^+$, para todo $t \in \mathbb{R}^+$ e $[u_i, v_i] \in X^{\frac{1}{2}} \times X$, tal que $\|u_i\|_{X^{\frac{1}{2}}} + \|v_i\|_X \leq \sigma$, $i = 1, 2$; temos*

$$\|f(t, u_1, v_1) - f(t, u_2, v_2)\|_X \leq L(\sigma) [\|u_1 - u_2\|_{X^{\frac{1}{2}}} + \|v_1 - v_2\|_X], \quad (3.3.14)$$

onde $L : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função contínua. Suponha que existe uma constante $r > 0$ tal que

$$\frac{K}{C} \left(L(r + C_\#) + \frac{1}{r} (L(C_\#)C_\# + \sup_{t \geq 0} \|f(t, 0, 0)\|_X) \right) < 1, \quad (3.3.15)$$

onde $C_\# = K [\|u_0\|_{X^{\frac{1}{2}}} + \|v_0\|_X]$ e K e C são constantes dadas em (3.2.4). Então o problema de Cauchy (3.1.1) tem uma solução branda pseudo S -assintoticamente ω -periódica.

Demonstração. Denotemos por $PSAP_\omega^0(X^{\frac{1}{2}} \times X)$ o subespaço vetorial fechado formado por todas as funções $\begin{bmatrix} u(\cdot) \\ v(\cdot) \end{bmatrix} \in PSAP_\omega(X^{\frac{1}{2}} \times X)$ com $u(0) = 0$ e $v(0) = 0$. Definimos o mapa $\mathfrak{F}^0$ no espaço $PSAP_\omega^0(X^{\frac{1}{2}} \times X)$ por

$$\mathfrak{F}^0 \left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right) (t) = \int_0^t e^{-A_{(\frac{1}{2})}(t-s)} F \left(s, \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} + e^{-A_{(\frac{1}{2})}s} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right) ds. \quad (3.3.16)$$

Para $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in PSAP_\omega^0(X^{\frac{1}{2}} \times X)$, temos que o mapa

$$t \rightarrow \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + e^{-A_{(\frac{1}{2})}t} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$$

é pseudo S -assintoticamente ω -periódica. Do Corolário 2.1.1 e do Lema 3.2.1 obtemos que $\mathfrak{F}^0$ está bem definido e leva $PSAP_\omega^0(X^{\frac{1}{2}} \times X)$ nele próprio. Consideremos agora

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in PSAP_{\omega}^0(X^{\frac{1}{2}} \times X) \text{ com } \sup_{t \geq 0} \left\| \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \leq r. \text{ Então,} \\
& \left\| \mathfrak{F}^0 \left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right) (t) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \\
& \leq K \int_0^t e^{-C(t-s)} \left\| F \left(s, \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} + e^{-A(\frac{1}{2})s} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right) - F \left(s, e^{-A(\frac{1}{2})s} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \\
& \quad + K \int_0^t e^{-C(t-s)} \left\| F \left(s, e^{-A(\frac{1}{2})s} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \\
& \leq KL(r + C_{\#}) \int_0^t e^{-C(t-s)} \left\| \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \\
& \quad + KL(C_{\#}) \int_0^t K e^{-Ct} \left\| \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds + K \int_0^t e^{-C(t-s)} \|f(s, 0, 0)\|_X ds \\
& \leq \frac{KL}{C}(r + C_{\#})r + \frac{KL}{C}(C_{\#})C_{\#} + \frac{K}{C} \sup_{t \geq 0} \|f(t, 0, 0)\|_X \\
& = \frac{K}{C} \left(L(r + C_{\#}) + \frac{1}{r} \left(L(C_{\#})C_{\#} + \sup_{t \geq 0} \|f(t, 0, 0)\|_X \right) \right) r \leq r.
\end{aligned}$$

Além disso, para $\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} \in B_r(PSAP_{\omega}^0(X^{\frac{1}{2}} \times X))$, $i = 1, 2$; temos

$$\left\| \mathfrak{F}^0 \left(\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} \right) - \mathfrak{F}^0 \left(\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right) \right\|_{\infty} \leq \frac{KL}{C}(r + C_{\#}) \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{\infty}.$$

Segue desta última estimativa que $\mathfrak{F}^0$ é uma $\frac{KL}{C}(r + C_{\#})$ -contração em $B_r(PSAP_{\omega}^0(X^{\frac{1}{2}} \times X))$ e, portanto, existe um ponto fixo $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ para o operador $\mathfrak{F}^0$. Notemos que

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}(t) \\ \tilde{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + e^{-A(\frac{1}{2})t} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$$

é uma solução branda pseudo S -assintoticamente ω -periódica de (3.1.1). $\square$

Finalizando esta seção, apresentamos o seguinte resultado.

Teorema 3.3.5. *Seja $f : \mathbb{R}^+ \times X^{\frac{1}{2}} \times X \rightarrow X$ uma função contínua assintoticamente limitada em conjuntos limitados de $X^{\frac{1}{2}} \times X$ e uniformemente pseudo S -assintoticamente ω -periódica em conjuntos limitados de $X^{\frac{1}{2}} \times X$ que satisfaz a condição de Lipschitz (3.3.12). Além disso, assuma que as seguintes condições são satisfeitas:*

$$(PS3) \quad K \sup_{t \geq 0} \int_0^t e^{-C(t-s)} L(s) ds < 1,$$

(**PS4**) $\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \int_0^l \int_0^t e^{-C(t-s)} L(s) ds dt = 0$, onde K e C são constantes dadas em (3.2.4).

Então o problema (3.1.1) tem uma solução branda pseudo S -assintoticamente ω -periódica.

Demonstração: Definimos o mapa $\mathfrak{F}$ no espaço $PSAP_\omega(X^{\frac{1}{2}} \times X)$ pela expressão (3.3.7). Provaremos primeiro que $\mathfrak{F}$ está bem definido. Consideremos $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in PSAP_\omega(X^{\frac{1}{2}} \times X)$ e tomemos $\epsilon > 0$. Então existe $T > 0$, suficientemente grande, tal que

$$\frac{1}{t} \int_0^t \sup_{[x,y] \in Im[u(\cdot), v(\cdot)]} \|f(s + \omega, x, y) - f(s, x, y)\|_X ds \leq \frac{C\epsilon}{2K}, \text{ for all } t \geq T. \quad (3.3.17)$$

Para $l > T$ temos a seguinte decomposição:

$$\frac{1}{l} \int_0^l (\vartheta(t + \omega) - \vartheta(t)) dt = \sum_{i=1}^5 I_i(l),$$

onde $\vartheta(\cdot)$ é dado por (3.3.8) e

$$\begin{aligned} I_1(l) &= \frac{1}{l} \int_0^T \int_0^t e^{-A(\frac{1}{2})(t-s)} \left(F\left(s + \omega, \begin{bmatrix} u(s + \omega) \\ v(s + \omega) \end{bmatrix}\right) - F\left(s, \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix}\right) \right) ds dt, \\ I_2(l) &= \frac{1}{l} \int_T^l \int_0^T e^{-A(\frac{1}{2})(t-s)} \left(F\left(s + \omega, \begin{bmatrix} u(s + \omega) \\ v(s + \omega) \end{bmatrix}\right) - F\left(s, \begin{bmatrix} u(s + \omega) \\ v(s + \omega) \end{bmatrix}\right) \right) ds dt, \\ I_3(l) &= \frac{1}{l} \int_T^l \int_T^t e^{-A(\frac{1}{2})(t-s)} \left(F\left(s + \omega, \begin{bmatrix} u(s + \omega) \\ v(s + \omega) \end{bmatrix}\right) - F\left(s, \begin{bmatrix} u(s + \omega) \\ v(s + \omega) \end{bmatrix}\right) \right) ds dt, \\ I_4(l) &= \frac{1}{l} \int_T^l \int_0^t e^{-A(\frac{1}{2})(t-s)} \left(F\left(s, \begin{bmatrix} u(s + \omega) \\ v(s + \omega) \end{bmatrix}\right) - F\left(s, \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix}\right) \right) ds dt, \\ I_5(l) &= \frac{1}{l} \int_0^l \int_t^{t+\omega} e^{-A(\frac{1}{2})s} F\left(t + \omega - s, \begin{bmatrix} u(t + \omega - s) \\ v(t + \omega - s) \end{bmatrix}\right) ds dt. \end{aligned}$$

Para entender o comportamento da função $\vartheta(t)$ precisamos estimar todos os termos $I'_i s$.

- Começando com o termo I_1 , vemos que

$$\|I_1(l)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \leq \frac{2KT}{Cl} \sup\{\|f(t, x, y)\|_X : t \geq 0, [x, y] \in Im([u(\cdot), v(\cdot)])\}.$$

- Levando em conta (3.3.17) obtemos

$$\begin{aligned} \|I_2(l)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} &\leq \frac{K}{l} \int_T^l \int_0^T e^{-C(t-s)} \sup_{[x,y] \in Im[u(\cdot), v(\cdot)]} \|f(s + \omega, x, y) - f(s, x, y)\|_X ds dt \\ &\leq \frac{K}{l} \int_T^l t e^{-C(t-T)} dt \frac{C\epsilon}{2K} \leq \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

- Para o termo $I_3(l)$,

$$\begin{aligned}
& \|I_3(l)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \\
& \leq \frac{K}{l} \int_T^l \int_T^t e^{-C(t-s)} \sup_{[x,y] \in Im[u(\cdot), v(\cdot)]} \|f(s+\omega, x, y) - f(s, x, y)\|_X ds dt \\
& \leq \frac{K}{Cl} \int_T^l \sup_{[x,y] \in Im[u(\cdot), v(\cdot)]} \|f(s+\omega, x, y) - f(s, x, y)\|_X ds \\
& \leq \frac{\epsilon}{2l} \int_0^l ds = \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

- Com relação a $I_4(l)$,

$$\begin{aligned}
& \|I_4(l)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \\
& \leq \frac{K}{l} \int_T^l \int_0^t e^{-C(t-s)} L(s) \left\| \begin{bmatrix} u(s+\omega) - u(s) \\ v(s+\omega) - v(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds dt \\
& \leq \frac{K}{Cl} \int_T^l \sup_{[x,y] \in Im[u(\cdot), v(\cdot)]} \|f(s+\omega, x, y) - f(s, x, y)\|_X ds \\
& \leq 2K \left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{\infty} \left(\frac{1}{l} \int_0^l \int_0^t e^{-C(t-s)} L(s) ds dt \right).
\end{aligned}$$

- E finalmente para o termo $I_5(l)$,

$$\begin{aligned}
& \|I_5(l)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \\
& \leq \frac{K}{l} \int_0^l \int_t^{t+\omega} e^{-Cs} \sup\{\|f(t, x, y)\|_X : t \geq 0, [x, y] \in Im([u(\cdot), v(\cdot)])\} ds dt \\
& \leq \frac{K\omega}{Cl} \sup\{\|f(t, x, y)\|_X : t \geq 0, [x, y] \in Im([u(\cdot), v(\cdot)])\}.
\end{aligned}$$

Combinando as estimativas anteriores vemos que ϑ é pseudo S -assintoticamente ω -periódica

e, portanto, $\mathfrak{F}$ está bem definido. Para $\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} \in B_r(PSAP_{\omega}(X^{\frac{1}{2}} \times X))$, $i = 1, 2$; temos

$$\left\| \mathfrak{F} \left(\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} \right) - \mathfrak{F} \left(\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right) \right\|_{\infty} \leq \left(K \sup_{t \geq 0} \int_0^t e^{-C(t-s)} L(s) ds \right) \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{\infty},$$

e desta última desigualdade deduzimos que $\mathfrak{F}$ é uma $K \sup_{t \geq 0} \int_0^t e^{-C(t-s)} L(s) ds$ -contração. Logo, por **(PS3)**, vemos que $\mathfrak{F}$ tem um único ponto fixo em $PSAP_{\omega}(X^{\frac{1}{2}} \times X)$ e isto completa a demonstração. $\square$

3.4 Propriedades de limitação em L^p

Estudaremos nesta seção a existência de soluções brandas L^p -limitadas para o problema (3.1.1). Começamos com o seguinte resultado:

Teorema 3.4.1. *Assuma que (η, A) é um par admissível. Seja $f : \mathbb{R}^+ \times X^{\frac{1}{2}} \times X \rightarrow X$ uma função contínua que satisfaz a condição de Lipschitz (3.3.6) e que $f(\cdot, 0, 0) \in L^p(0, \infty; X)$. Se $\frac{K}{C}L < 1$, onde K e C são constantes dadas em (3.2.4), então o problema (3.1.1) tem uma única solução L^p -banda.*

Demonstração: Definimos o mapa $\mathfrak{F}$ no espaço $L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)$ pela expressão (3.3.7). Nós observamos que

$$\begin{aligned} \left\| e^{-A(\frac{1}{2}) \bullet} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right\|_{L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)} &\leq \left(K^p \int_0^\infty \left(e^{-Ct} \left\| \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{K}{\sqrt[p]{C^p}} \left\| \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}. \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

Sejam $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)$ e ϑ a função dada em (3.3.8). Usando a desigualdade de Hölder obtemos

$$\begin{aligned} \|\vartheta(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p &\leq K^p \left(\int_0^t e^{-C(t-s)(\frac{1}{q} + \frac{1}{p})} \|f(s, u(s), v(s))\|_X ds \right)^p \\ &\leq K^p \left(\int_0^t e^{-C(t-s)} ds \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_0^t e^{-C(t-s)} \|f(s, u(s), v(s))\|_X^p ds \right) \\ &\leq \frac{K^p}{\sqrt[p]{C^p}} \left(\int_0^t e^{-C(t-s)} \|f(s, u(s), v(s))\|_X^p ds \right). \end{aligned}$$

Integrando a expressão acima em $(0, \infty)$ temos

$$\begin{aligned} &\left(\int_0^\infty \|\vartheta(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{K}{C^{\frac{1}{q}}} \left(\int_0^\infty \int_s^\infty e^{-C(t-s)} \|f(s, u(s), v(s))\|_X^p dt ds \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{K}{C} \left(\int_0^\infty \|f(s, u(s), v(s))\|_X^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{K}{C} \left(\left(\int_0^\infty \|f(s, u(s), v(s)) - f(s, 0, 0)\|_X^p ds \right)^{\frac{1}{p}} + \int_0^\infty \|f(s, 0, 0)\|_X^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{K}{C} \left(L \left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)} + \|f(\cdot, 0, 0)\|_{L^p(0, \infty; X)} \right). \end{aligned}$$

Logo, $\mathfrak{F}$ está bem definido. Seja agora $\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} \in L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)$, $i = 1, 2$. Então

$$\begin{aligned} & \left\| \mathfrak{F} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} (t) - \mathfrak{F} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} (t) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p \\ & \leq (KL)^p \left(\int_0^t e^{-C(t-s)} \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \right)^p \\ & \leq (KL)^p \left(\int_0^t e^{-C(t-s)} ds \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_0^t e^{-C(t-s)} \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds \right) \\ & \leq \frac{(KL)^p}{\sqrt[q]{C^p}} \left(\int_0^t e^{-C(t-s)} \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds \right). \end{aligned}$$

Desta última desigualdade temos

$$\begin{aligned} & \left\| \mathfrak{F} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \mathfrak{F} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \\ & \leq \frac{KL}{C^{\frac{1}{q}}} \left(\int_0^\infty \int_s^\infty e^{-C(t-s)} \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p dt ds \right) \\ & \leq \frac{KL}{C} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)}. \end{aligned}$$

Com isto concluímos que $\mathfrak{F}$ é uma KL/C -contração em $L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)$ e, portanto, existe uma única solução branda $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ de (3.1.1) tal que $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)$. $\square$

Teorema 3.4.2. *Assuma que (η, A) é um par admissível. Seja $f : \mathbb{R}^+ \times X^{\frac{1}{2}} \times X \rightarrow X$ uma função contínua que satisfaz a condição de Lipschitz (3.3.12) com $L(\cdot) \in L^q(0, \infty)$ e que $f(\cdot, 0, 0) \in L^1(0, \infty; X)$. Se $\frac{K}{\sqrt[q]{C^p}} \|L\|_q < 1$ (onde p e q são expoentes conjugados), então o problema (3.1.1) admite uma única solução L^p -branda.*

Demonstração: Manteremos aqui a notação introduzida na demonstração do Teorema 3.4.1. A primeira etapa em nossa análise será provar que $\mathfrak{F}$ está bem definido. Inicialmente notamos que $\vartheta(t)$ satisfaz a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} \|\vartheta(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} & \leq K \int_0^t e^{-C(t-s)} \left(\|f(s, u(s), v(s)) - f(s, 0, 0)\|_X + \|f(s, 0, 0)\|_X \right) ds \\ & \leq K \int_0^t L(s) \left\| \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds + K \int_0^t \|f(s, 0, 0)\|_X ds. \end{aligned}$$

Logo,

$$\sup_{t \geq 0} \|\vartheta(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \leq K \left(\|L\|_q \left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)} + \|f(\cdot, 0, 0)\|_{L^1(0, \infty; X)} \right). \quad (3.4.19)$$

De (3.4.19) obtemos

$$\begin{aligned}
& \left(\int_0^\infty \|\vartheta(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \leq K^{\frac{1}{p}} \left(\sup_{t \geq 0} \|\vartheta(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty \int_s^\infty e^{-C(t-s)} \|f(s, u(s), v(s))\|_X dt ds \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \leq \left(\frac{K}{C} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sup_{t \geq 0} \|\vartheta(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty \|f(s, u(s), v(s))\|_X ds \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \leq \left(\frac{K}{C} \right)^{\frac{1}{p}} \left(K \left(\|L\|_q \left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)} + \|f(\cdot, 0, 0)\|_{L^1(0, \infty; X)} \right) \right)^{1-\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left(\int_0^\infty \left[\|f(s, u(s), v(s)) - f(s, 0, 0)\|_X + \|f(s, 0, 0)\|_X \right] ds \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \leq \frac{K}{\sqrt[p]{C}} \left(\left(\|L\|_q \left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)} + \|f(\cdot, 0, 0)\|_{L^1(0, \infty; X)} \right) \right)^{1-\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left(\int_0^\infty L(s) \left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds + \|f(\cdot, 0, 0)\|_{L^1(0, \infty; X)} \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \leq \frac{K}{\sqrt[p]{C}} \left(\|L\|_q \left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)} + \|f(\cdot, 0, 0)\|_{L^1(0, \infty; X)} \right).
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathfrak{F}$ está bem definido. A etapa final é mostrar que $\mathfrak{F}$ é uma contração. Tomemos

$$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} \in L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X), \quad i = 1, 2. \text{ Então}$$

$$\begin{aligned}
& \left\| \mathfrak{F} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \mathfrak{F} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \\
& \leq K \left(\int_0^\infty \left(\int_0^t e^{-C(t-s)} L(s) \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \leq K \left(\int_0^\infty \|L\|_q^p \int_0^t e^{-Cp(t-s)} \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \leq K \|L\|_q \left(\int_0^\infty \int_s^\infty e^{-Cp(t-s)} \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p dt ds \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \leq \frac{K}{\sqrt[p]{Cp}} \|L\|_q \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)},
\end{aligned}$$

o que mostra que $\mathfrak{F}$ é uma contração e isto completa a prova do Teorema 3.4.2. $\square$

Observação 3.4.1. Sob as condições do Teorema 3.4.2, com $L(\cdot) \in L^p(0, \infty)$ e $f(\cdot, 0, 0) \in L^p(0, \infty; X)$, se $K \left(\frac{1}{C} \right)^{1-\frac{1}{p}} \|L\|_p < 1$, então o problema (3.1.1) tem uma única solução L^p -branda.

Demonstração: Notemos inicialmente a seguinte estimativa a priori

$$\begin{aligned}
& \|\vartheta(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p \\
& \leq 2^p K^p \left(\int_0^t e^{-C|t-s|} \|f(s, u(s), v(s)) - f(s, 0, 0)\|_X ds \right)^p \\
& \quad + 2^p K^p \left(\int_0^t e^{-C|t-s|} \|f(s, 0, 0)\|_X ds \right)^p \\
& \leq 2^p K^p \left(\int_0^t e^{-C|t-s|} L(s) \left\| \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \right)^p \\
& \quad + 2^p K^p \left(\int_0^t e^{-C|t-s|} \|f(s, 0, 0)\|_X ds \right)^p \\
& \leq 2^p K^p \left(\int_0^t e^{-C|t-s|} L(s)^q ds \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_0^t e^{-C|t-s|} \left\| \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds \right) \\
& \quad + 2^p K^p \left(\frac{1}{C} \right)^{\frac{p}{q}} \int_0^t e^{-C|t-s|} \|f(s, 0, 0)\|_X^p ds \\
& \leq 2^p K^p \left(\int_0^t e^{-C|t-s|} L(s)^p ds \right) \left(\int_0^t e^{-C|t-s|} ds \right)^{\frac{p-q}{q}} \\
& \quad \times \left(\int_0^t e^{-C(t-s)} \left\| \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds \right) + 2^p K^p \left(\frac{1}{C} \right)^{\frac{p}{q}} \int_0^t e^{-C|t-s|} \|f(s, 0, 0)\|_X^p ds \\
& \leq 2^p K^p \left(\frac{1}{C} \right)^{\frac{p}{q}-1} \left(\int_0^t e^{-C|t-s|} L(s)^p ds \right) \left(\int_0^t e^{-C|t-s|} \left\| \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds \right) \\
& \quad + 2^p K^p \left(\frac{1}{C} \right)^{\frac{p}{q}} \int_0^t e^{-C|t-s|} \|f(s, 0, 0)\|_X^p ds \\
& \leq 2^p K^p \left(\frac{1}{C} \right)^{\frac{p}{q}-1} \|L\|_{L^p(0, \infty)}^p \left(\int_0^t e^{-C|t-s|} \left\| \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds \right) \\
& \quad + 2^p K^p \left(\frac{1}{C} \right)^{\frac{p}{q}} \int_0^t e^{-C|t-s|} \|f(s, 0, 0)\|_X^p ds.
\end{aligned}$$

Integrando e aplicando o teorema de Fubini ficamos com

$$\begin{aligned}
& \|\vartheta\|_{L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \\
& \leq 2K \left(\frac{1}{C} \right)^{1-\frac{1}{p}} \|L\|_{L^p(0, \infty)} \left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)} + \frac{2K}{C} \|f(\cdot, 0, 0)\|_{L^p(0, \infty; X)}.
\end{aligned}$$

Além disso, para $\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} \in L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X), i = 1, 2$, temos

$$\begin{aligned}
& \left\| \mathfrak{F} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} (t) - \mathfrak{F} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} (t) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p \\
& \leq K^p \left(\int_0^t e^{-C|t-s|} L(s)^q ds \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_0^t e^{-C(t-s)} \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq K^p \left(\int_0^t (e^{-C|t-s|} ds) \right)^{\frac{p-q}{q}} \left(\int_0^t (e^{-C|t-s|} L(s)^p ds) \right) \\
&\quad \times \left(\int_0^t e^{-C(t-s)} \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds \right) \\
&\leq K^p \left(\frac{1}{C} \right)^{\frac{p}{q}-1} \|L\|_{L^p(0,\infty)}^p \left(\int_0^t e^{-C|t-s|} \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds \right).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&\left\| \mathfrak{F} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \mathfrak{F} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{L^p(0,\infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \\
&\leq K \left(\frac{1}{C} \right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \|L\|_{L^p(0,\infty)} \left(\int_0^\infty \int_0^t e^{-C|t-s|} \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq K \left(\frac{1}{C} \right)^{1-\frac{1}{p}} \|L\|_{L^p(0,\infty)} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{L^p(0,\infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)}.
\end{aligned}$$

Segue desta última desigualdade que $\mathfrak{F}$ é uma contração e com isto finalizamos a demonstração da Observação 3.4.1. $\square$

A situação torna-se mais complicada quando $L(t)$ apresenta diferentes condições de crescimento. Para enunciar o próximo resultado, precisamos introduzir as seguintes notações:

$$\begin{aligned}
L_a &:= \sup_{t \geq a} L(t), \\
\mathcal{B}(a, L) &:= K^p a^{p-1} \|L\|_{L^p[0,a]}^p, \\
\Theta &:= \left(\frac{K}{C} \right)^2 L_a \sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{(\mathcal{B}(a, L))^j}{j!} \right)^{1/p},
\end{aligned}$$

onde K e C são as constantes dadas em (3.2.4).

Teorema 3.4.3. *Assuma que (η, A) é um par admissível. Seja $f : \mathbb{R}^+ \times X^{\frac{1}{2}} \times X \rightarrow X$ uma função contínua com $f(\cdot, 0, 0) \in L^p(0, \infty; X)$ e que satisfaz a condição de Lipschitz (3.3.12), onde $L : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função integrável em cada subconjunto compacto de $\mathbb{R}^+$. Suponha que existe $a > 0$ tal que $\frac{K}{C} L_a < 1$ e $\Theta < 1$, então o problema (3.1.1) possui uma única solução L^p -branda.*

Demonstração: Definamos o espaço de Banach

$$L_a^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X) = \left\{ \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X) : u(\cdot) \text{ e } v(\cdot) \text{ são contínuas em } [0, a] \right\}$$

equipado com a norma

$$\left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_a = \left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)} + \left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{L^p(a,\infty;X^{\frac{1}{2}} \times X)},$$

onde

$$\left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)} = \sup_{0 \leq t \leq a} \left\| \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}$$

e

$$\left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{L^p(a,\infty;X^{\frac{1}{2}} \times X)} = \left(\int_a^\infty \left\| \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definimos o operador $\mathfrak{F}$ no espaço $L_a^p(0,\infty;X^{\frac{1}{2}} \times X)$ pela expressão (3.3.7). Levando em conta a estimativa (3.4.18) e o fato de que o semigrupo $\{e^{-\mathcal{A}(\frac{1}{2})t} : t \geq 0\}$ é fortemente contínuo, temos que $e^{-\mathcal{A}(\frac{1}{2})\bullet} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \in L_a^p(0,\infty;X^{\frac{1}{2}} \times X)$. Consideremos $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in L_a^p(0,\infty;X^{\frac{1}{2}} \times X)$ e seja ϑ dada pela expressão (3.3.8). Então

$$\begin{aligned} \|\vartheta(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p &\leq \left(K \int_0^t e^{-C(t-s)} \|f(s, u(s), v(s))\|_X ds \right)^p \\ &\leq K^p \left(\int_0^t e^{-C(t-s)} ds \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_0^t e^{-C(t-s)} \|f(s, u(s), v(s))\|_X^p ds \right) \\ &\leq K^p \left(\frac{1}{C} \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_0^t e^{-C(t-s)} \|f(s, u(s), v(s))\|_X^p ds \right) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} &\|\vartheta\|_{L^p(0,\infty;X^{\frac{1}{2}} \times X)} \\ &\leq K \left(\frac{1}{C} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^\infty \int_0^t e^{-C(t-s)} \|f(s, u(s), v(s))\|_X^p ds dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{K}{C} \left(\left(\int_0^\infty \|f(s, u(s), v(s)) - f(s, 0, 0)\|_X^p ds \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^\infty \|f(s, 0, 0)\|_X^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \right) \\ &\leq \frac{K}{C} \left(\left(\int_0^\infty L(s)^p \left\| \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds \right)^{\frac{1}{p}} + \|f(\cdot, 0, 0)\|_{L^p(0,\infty;X)} \right) \\ &\leq \frac{K}{C} \left(\left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)}^p \int_0^a L(s)^p ds \right)^{\frac{1}{p}} + \left(L_a^p \int_a^\infty \left\| \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + \frac{K}{C} \|f(\cdot, 0, 0)\|_{L^p(0,\infty;X)} \\ &\leq \frac{K}{C} \left(\|L\|_{L^p[0,a]} \left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)} + L_a \left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{L^p(a,\infty;X^{\frac{1}{2}} \times X)} + \|f(\cdot, 0, 0)\|_{L^p(0,\infty;X)} \right), \end{aligned}$$

o que nos mostra que $\mathfrak{F}$ está bem definido. Provaremos agora que o operador $\mathfrak{F}$ tem um único ponto fixo em $L_a^p(0,\infty;X^{\frac{1}{2}} \times X)$. Consideremos $\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$ no espaço

$L_a^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)$. Notemos que

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq t \leq a} \left\| \mathfrak{F} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} (t) - \mathfrak{F} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} (t) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \\ & \leq K \int_0^a L(s) \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \\ & \leq K \left(\int_0^a L(s) ds \right) \sup_{0 \leq t \leq a} \left\| \begin{bmatrix} u_1(t) - u_2(t) \\ v_1(t) - v_2(t) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}. \end{aligned}$$

Logo

$$\left\| \mathfrak{F} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \mathfrak{F} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)} \leq K \|L\|_{L^1[0,a]} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)}.$$

A seguir, estimamos $\mathfrak{F}^2 \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \mathfrak{F}^2 \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$ e obtemos

$$\begin{aligned} & \left\| \mathfrak{F}^2 \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} (t) - \mathfrak{F}^2 \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} (t) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \\ & \leq K \int_0^t e^{-C(t-s)} L(s) \left\| \mathfrak{F} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} (s) - \mathfrak{F} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} (s) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \\ & \leq K^2 \int_0^t L(s) \left(\int_0^s L(\tau) \left\| \begin{bmatrix} u_1(\tau) - u_2(\tau) \\ v_1(\tau) - v_2(\tau) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} d\tau \right) ds \\ & \leq K^2 \sup_{0 \leq t \leq a} \left\| \begin{bmatrix} u_1(t) - u_2(t) \\ v_1(t) - v_2(t) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \int_0^t L(s) \left(\int_0^s L(\tau) d\tau \right) ds \\ & \leq \frac{K^2}{2} \left(\int_0^t L(s) ds \right)^2 \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)}. \end{aligned}$$

E assim ficamos com,

$$\left\| \mathfrak{F}^2 \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \mathfrak{F}^2 \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)} \leq \frac{1}{2} (K \|L\|_{L^1[0,a]})^2 \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)}.$$

De modo análogo deduzimos que

$$\begin{aligned} & \left\| \mathfrak{F}^3 \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} (t) - \mathfrak{F}^3 \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} (t) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \\ & \leq K \int_0^t e^{-C(t-s)} \left\| f\left(s, \mathfrak{F}^2 \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} (s)\right) - f\left(s, \mathfrak{F}^2 \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} (s)\right) \right\|_X ds \\ & \leq K \int_0^t L(s) \left\| \mathfrak{F}^2 \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} (s) - \mathfrak{F}^2 \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} (s) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq K \int_0^t L(s) \left(\frac{K^2}{2} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)} \left(\int_0^s L(\tau) d\tau \right)^2 \right) ds \\
&\leq \frac{K^3}{2} \left(\int_0^t L(s) \left(\int_0^s L(\tau) d\tau \right)^2 ds \right) \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)} \\
&\leq \frac{K^3}{6} \left(\int_0^t L(s) ds \right)^3 \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)},
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\left\| \mathfrak{F}^3 \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \mathfrak{F}^3 \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)} \leq \frac{1}{3!} (K \|L\|_{L^1[0,a]})^3 \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)}.$$

Com um argumento indutivo podemos mostrar que

$$\left\| \mathfrak{F}^n \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \mathfrak{F}^n \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)} \leq \frac{1}{n!} (K \|L\|_{L^1[0,a]})^n \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)}. \quad (3.4.20)$$

A seguir, apresentamos um novo conjunto de notações:

$$\mathcal{L}_n := \left(\int_a^\infty \left\| \mathfrak{F}^n \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} (t) - \mathfrak{F}^n \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} (t) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad n \geq 1,$$

$$\mathcal{J}_n := \left(\int_a^\infty \left(\int_0^a \|e^{-\mathcal{A}(\frac{1}{2})(t-s)}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} L(s) \left\| \mathfrak{F}^{n-1} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} (s) - \mathfrak{F}^{n-1} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} (s) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\mathcal{J} := \left(\int_a^\infty \left(\int_a^t \|e^{-\mathcal{A}(\frac{1}{2})(t-s)}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} L(s) \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

A fim de obtermos uma estimativa para $\mathcal{L}_n$ estudamos as contribuições dos termos $\mathcal{J}'_n$ s e $\mathcal{J}$.

Para começar procedemos a análise dos termos $\mathcal{J}_i$, $i = 1, 2, 3$; e obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_1 &\leq K \left(\int_a^\infty \left(\int_0^a e^{-C(t-s)} L(s) \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq K \left(\frac{1}{C} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^\infty \int_0^a e^{-C(t-s)} L(s)^p \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq K \left(\frac{1}{C} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{C} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^a L(s)^p \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{K}{C} \|L\|_{L^p[0,a]} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_2 &\leq K \left(\int_a^\infty \left(\int_0^a e^{-C(t-s)} L(s) \left\| \mathfrak{F} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} (s) - \mathfrak{F} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} (s) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq K \left(\int_a^\infty \left(\int_0^a e^{-C(t-s)} L(s) \left(\int_0^s K e^{-C(s-\tau)} L(\tau) \left\| \begin{bmatrix} u_1(\tau) - u_2(\tau) \\ v_1(\tau) - v_2(\tau) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} d\tau \right) ds \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{K}{\sqrt[p]{C}} \left(K^p \int_a^\infty \int_0^a e^{-C(t-s)} L(s)^p \left(\int_0^s e^{-C(s-\tau)} L(\tau) \left\| \begin{bmatrix} u_1(\tau) - u_2(\tau) \\ v_1(\tau) - v_2(\tau) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} d\tau \right)^p ds dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{K}{C} \left(K^p \int_0^a L(s)^p \left(\int_0^s L(\tau) d\tau \right)^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)} \\
&\leq \frac{K}{C} \left(K^p \int_0^a L(s)^p \left(\int_0^s L(\tau)^p d\tau \right) \left(\int_0^s d\tau \right)^{p-1} ds \right)^{\frac{1}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)} \\
&\leq \frac{K}{C} \left(K^p a^{p-1} \int_0^a L(s)^p \left(\int_0^s L(\tau)^p d\tau \right) ds \right)^{\frac{1}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)} \\
&\leq \frac{K}{C} \left(\frac{K^p a^{p-1}}{2} \left(\int_0^a L(s)^p ds \right)^2 \right)^{\frac{1}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)} \\
&\leq \frac{K}{C} \left(\left(\frac{K^p a^{p-1} \|L\|_{L^p[0,a]}^p}{2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)} \\
&= \frac{K}{C} \left(\frac{\mathcal{B}(a, L)^2}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)}.
\end{aligned}$$

Notemos que o termo J_3 é dominado por

$$\begin{aligned}
J_3 &\leq K \left(\int_a^\infty \left(\int_0^a e^{-C(t-s)} L(s) \left\| \mathfrak{F}^2 \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} (s) - \mathfrak{F}^2 \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} (s) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq K \left(K^{2p} \left(\int_a^\infty \left(\int_0^a e^{-C(t-s)} L(s) \left(\int_0^s e^{-C(s-\tau)} L(\tau) \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \times \left. \left. \left(\int_0^\tau e^{-C(\tau-\zeta)} L(\zeta) \left\| \begin{bmatrix} u_1(\zeta) - u_2(\zeta) \\ v_1(\zeta) - v_2(\zeta) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} d\zeta \right) d\tau \right) ds \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{K}{\sqrt[p]{C}} \left(K^{2p} \left(\int_a^\infty \int_0^a e^{-C(t-s)} L(s)^p \left(\int_0^s e^{-C(s-\tau)} L(\tau) \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \times \left. \left. \left(\int_0^\tau e^{-C(\tau-\zeta)} L(\zeta) \left\| \begin{bmatrix} u_1(\zeta) - u_2(\zeta) \\ v_1(\zeta) - v_2(\zeta) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} d\zeta \right) d\tau \right) ds \right)^p ds dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{K}{C} \left(K^{2p} \left(\int_0^a L(s)^p \left(\int_0^s L(\tau) \left(\int_0^\tau L(\zeta) \left\| \begin{bmatrix} u_1(\zeta) - u_2(\zeta) \\ v_1(\zeta) - v_2(\zeta) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} d\zeta \right) d\tau \right)^p ds \right)^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{K}{C} \left(K^{2p} \left(\int_0^a L(s)^p \left(\int_0^s L(\tau) \left(\int_0^\tau L(\zeta) d\zeta \right) d\tau \right)^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)} \right) \\
&\leq \frac{K}{C} \left(\left(\frac{K^2}{2} \right)^p \int_0^a L(s)^p \left(\int_0^s L(\tau) d\tau \right)^{2p} ds \right)^{\frac{1}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{K}{C} \left(\left(\frac{K^2}{2} \right)^p \int_0^a L(s)^p \left(\int_0^s L(\tau)^p d\tau \right)^2 \left(\int_0^s d\tau \right)^{2(p-1)} ds \right)^{\frac{1}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)} \\
&\leq \frac{K}{C} \left(\left(\frac{K^2}{2} \right)^p a^{2(p-1)} \int_0^a L(s)^p \left(\int_0^s L(\tau)^p d\tau \right)^2 ds \right)^{\frac{1}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)} \\
&\leq \frac{K}{C} \left(\frac{K^{2p}}{2} a^{2(p-1)} \frac{1}{3} \left(\int_0^a L(s)^p ds \right)^3 \right)^{\frac{1}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)} \\
&\leq \frac{K}{C} \left(\frac{K^{3p} a^{3(p-1)} \|L\|_{L^p[0,a]}^{3p}}{6} \right)^{\frac{1}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)} \\
&\leq \frac{K}{C} \left(\frac{\mathcal{B}(a, L)^3}{6} \right)^{\frac{1}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)}.
\end{aligned}$$

De um processo de indução finalmente obtemos

$$\mathcal{J}_n \leq \frac{K}{C} \left(\frac{\mathcal{B}(a, L)^n}{n!} \right)^{\frac{1}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)}. \quad (3.4.21)$$

Dando continuidade a nossa análise, estimamos agora o termo $\mathcal{J}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{J} &\leq K \left(\int_a^\infty \left(\int_a^t e^{-C(t-s)} L(s)^p \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq K \left(\frac{1}{C} \right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_a^\infty \int_a^t e^{-C(t-s)} L(s)^p \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{K}{C} \left(\int_a^\infty L(s)^p \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{K}{C} \sup_{t \geq a} L(t) \left(\int_a^\infty \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{K}{C} L_a \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{L^p(a, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)}. \quad (3.4.22)
\end{aligned}$$

Levando em conta as estimativas (3.4.21) e (3.4.22) observamos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2 &\leq \left(\int_a^\infty \left(\int_0^t \|e^{-\mathcal{A}(\frac{1}{2})(t-s)}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} L(s) \left\| \mathfrak{F} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} (s) - \mathfrak{F} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} (s) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_a^\infty \left(\int_0^a \|e^{-\mathcal{A}(\frac{1}{2})(t-s)}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} L(s) \left\| \mathfrak{F} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} (s) - \mathfrak{F} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} (s) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + \left(\int_a^\infty \left(\int_a^t \|e^{-\mathcal{A}(\frac{1}{2})(t-s)}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} L(s) \left\| \mathfrak{F} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} (s) - \mathfrak{F} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} (s) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{K}{C} \left(\frac{B(a, L)^2}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)} \\
&\quad + \left(\int_a^\infty \left(\int_a^t K e^{-C(t-s)} L(s) \left(\int_0^s K e^{-C(s-\tau)} L(\tau) \left\| \begin{bmatrix} u_1(\tau) - u_2(\tau) \\ v_1(\tau) - v_2(\tau) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} d\tau \right) ds \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{K}{C} \left(\frac{B(a, L)^2}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0, a)} \\
&+ \left(\left(\frac{KL_a}{C} \right)^p \int_a^\infty \left(\int_0^s K e^{-C(s-\tau)} L(\tau) \left\| \begin{bmatrix} u_1(\tau) - u_2(\tau) \\ v_1(\tau) - v_2(\tau) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} d\tau \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{K}{C} \left(\frac{B(a, L)^2}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0, a)} + \frac{KL_a}{C} \left(\frac{K}{C} \right) B(a, L)^{\frac{1}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0, a)} \\
&+ \left(\int_a^\infty \left(\int_a^s K e^{-C(s-\tau)} L(\tau) \left\| \begin{bmatrix} u_1(\tau) - u_2(\tau) \\ v_1(\tau) - v_2(\tau) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} d\tau \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{K}{C} \left(\frac{B(a, L)^2}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0, a)} + \frac{K}{C} \left(\frac{KL_a}{C} \right) B(a, L)^{\frac{1}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0, a)} \\
&+ \left(\frac{KL_a}{C} \right)^2 \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{L^p(a, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)}.
\end{aligned}$$

E com relação a $\mathcal{L}_3$ obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_3 &\leq \left(\int_a^\infty \left(\int_0^t \|e^{-\mathcal{A}(\frac{1}{2})(t-s)}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} L(s) \left\| \mathfrak{F}^2 \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} (s) - \mathfrak{F}^2 \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} (s) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_a^\infty \left(\int_0^a \|e^{-\mathcal{A}(\frac{1}{2})(t-s)}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} L(s) \left\| \mathfrak{F}^2 \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} (s) - \mathfrak{F}^2 \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} (s) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&+ \left(\int_a^\infty \left(\int_a^t \|e^{-\mathcal{A}(\frac{1}{2})(t-s)}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} L(s) \left\| \mathfrak{F}^2 \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} (s) - \mathfrak{F}^2 \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} (s) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{K}{C} \left(\frac{B(a, L)^3}{6} \right)^{\frac{1}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0, a)} \\
&+ \left(\int_a^\infty \left(\int_a^t K e^{-C(t-s)} L(s) \left(\int_0^s K e^{-C(s-\tau)} L(\tau) \right. \right. \right. \\
&\quad \times \left. \left\| \mathfrak{F} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} (\tau) - \mathfrak{F} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} (\tau) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} d\tau \right) ds \Big)^p dt \Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{K}{C} \left(\frac{B(a, L)^3}{6} \right)^{\frac{1}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0, a)} \\
&+ \left(\left(\frac{KL_a}{C} \right)^p \int_a^\infty \left(\int_0^s K e^{-C(s-\tau)} L(\tau) \left\| \mathfrak{F} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} (\tau) - \mathfrak{F} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} (\tau) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} d\tau \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{K}{C} \left(\frac{B(a, L)^3}{6} \right)^{\frac{1}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0, a)} \\
&+ \frac{KL_a}{C} \left(\int_a^\infty \left(\int_0^a K e^{-C(s-\tau)} L(\tau) \left\| \mathfrak{F} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} (\tau) - \mathfrak{F} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} (\tau) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} d\tau \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&+ \frac{KL_a}{C} \left(\int_a^\infty \left(\int_a^s K e^{-C(s-\tau)} L(\tau) \left\| \mathfrak{F} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} (\tau) - \mathfrak{F} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} (\tau) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} d\tau \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{K}{C} \left(\frac{B(a, L)^3}{3!} \right)^{\frac{1}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)} \\
&+ \left(\frac{K}{C} \right)^2 L_a \left(\frac{B(a, L)^2}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)} \\
&+ \frac{K}{C} \left(\frac{KL_a}{C} \right)^2 B(a, L)^{\frac{1}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)} \\
&+ \left(\frac{KL_a}{C} \right)^3 \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{L^p(a, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)}.
\end{aligned}$$

Indutivamente obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_n &\leq \frac{K}{C} \left(\frac{\mathcal{B}(a, L)^n}{n!} \right)^{\frac{1}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)} \\
&+ \left(\frac{K}{C} \right)^2 L_a \sum_{j=2}^{n-1} \left(\frac{\mathcal{B}(a, L)^j}{j!} \right)^{\frac{1}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)} \\
&+ \frac{K}{C} \left(\frac{KL_a}{C} \right)^{n-1} \mathcal{B}(a, L)^{\frac{1}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)} \\
&+ \left(\frac{KL_a}{C} \right)^n \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{L^p(a, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)},
\end{aligned}$$

e disto podemos concluir que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_n &\leq \frac{K}{C} \left(\frac{\mathcal{B}(a, L)^n}{n!} \right)^{\frac{1}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)} \\
&+ \left(\frac{K}{C} \right)^2 L_a \sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{\mathcal{B}(a, L)^j}{j!} \right)^{\frac{1}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)} \\
&+ \frac{K}{C} \left(\frac{KL_a}{C} \right)^{n-1} \mathcal{B}(a, L)^{\frac{1}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{(0,a)} \\
&+ \left(\frac{KL_a}{C} \right)^n \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{L^p(a, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \\
&\leq \left(\frac{K}{C} \left(\frac{\mathcal{B}(a, L)^n}{n!} \right)^{1/p} + \Theta \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{KL_a}{C} \right)^{n-1} \left(\frac{K}{C} \mathcal{B}(a, L)^{\frac{1}{p}} + 1 \right) \right) \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_a. \tag{3.4.23}
\end{aligned}$$

Seja $\mathcal{W}_n := \frac{K}{C} \left(\frac{\mathcal{B}(a, L)^n}{n!} \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{KL_a}{C} \right)^{n-1} \left(\frac{K}{C} \mathcal{B}(a, L)^{\frac{1}{p}} + 1 \right) + \frac{1}{n!} (K \|L\|_{L^1[0,a]})^n$. Da estimativa (3.4.20) combinada com (3.4.23) obtemos

$$\left\| \mathfrak{F}^n \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \mathfrak{F}^n \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_a \leq (\mathcal{W}_n + \Theta) \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_a.$$

Como $\mathcal{W}_n + \Theta < 1$ para n suficientemente grande, então $\mathfrak{F}^n$ é uma contração quando $t \rightarrow \infty$ e assim, aplicando o Corolário 2.9.1, encerramos a demonstração do Teorema 3.4.3. $\square$

Observação 3.4.2. Defina

$$L(s) = \left(\frac{2K^2}{C^2} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{j!} \left(\frac{1}{2} s^p K^{p-2} C^2 \right)^j \right)^{1/p} \right)^{-1}, \quad s \geq 0,$$

com K e C dados em (3.2.4). Notemos que L é não crescente e $\lim_{t \rightarrow \infty} L(t) = 0$. Neste caso, para obtermos as condições do Teorema 3.4.3 é suficiente escolhermos $a > 1$ tal que $L(a) < \frac{C}{K}$.

Observação 3.4.3. Assuma que (η, A) é um par admissível. Seja $f : [0, a] \times X^{\frac{1}{2}} \times X \rightarrow X$ uma função contínua que satisfaz a condição de Lipschitz (3.3.12) com $L(\cdot) \in L^1[0, a]$ e $f(\cdot, 0, 0) \in L^1([0, a]; X)$. Da demonstração do Teorema 3.4.3 nós temos que o problema (3.1.1) admite uma, e apenas uma, solução branda em $C([0, a]; X^{\frac{1}{2}} \times X)$.

3.5 Estrutura topológica do conjunto de soluções

É importante saber quando o conjunto de soluções brandas de (3.1.1) desfruta de propriedades topológicas relevantes. Este tipo de informação não foi analisada em (CUEVAS; LIZAMA; SOTO, 2013). Seguindo esta direção, obtemos os resultados a seguir:

Teorema 3.5.1. *Assuma que (η, A) é um par admissível e que A tem operador resolvente compacto. Seja $f : \mathbb{R}^+ \times X^{\frac{1}{2}} \times X \rightarrow X$ uma função contínua. Suponha ainda que as seguintes condições seguem:*

(C1) *Para cada $R > 0$ existe uma função positiva $\gamma_R \in C_0(0, \infty)$ tal que*

$$\sup\{\|f(t, u, v)\|_X : \|u\|_{X^{\frac{1}{2}}} + \|v\|_X \leq R\} \leq \gamma_R(t), \quad t \geq 0.$$

(C2) $\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{K}{R} \sup_{t \geq 0} \int_0^t e^{-C(t-s)} \gamma_R(s) ds < 1$.

Então o problema (3.1.1) tem uma solução branda em $C_0([0, \infty); X^{\frac{1}{2}} \times X)$. Além disso, se

(C3) $\limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{K}{R} \sup_{t \geq 0} \int_0^t e^{-C(t-s)} \gamma_R(s) ds < 1$,

então o conjunto $\mathcal{S}$ formado pelas soluções brandas de (3.1.1) é compacto em $C_0([0, \infty); X^{\frac{1}{2}} \times X)$.

Demonstração. Para demonstrar este teorema usaremos a caracterização de Ascoli-Arzelá para subconjuntos compactos em $C_0([0, \infty); X^{\frac{1}{2}} \times X)$ e o Teorema 2.9.2. Nós definimos o mapa $\mathfrak{F}$ no espaço $C_0([0, \infty); X^{\frac{1}{2}} \times X)$ pela expressão (3.3.7). Seja $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in C_0([0, \infty); X^{\frac{1}{2}} \times X)$

X). Existe $R > 0$ tal que $\sup_{t \geq 0} [\|u(t)\|_{X^{\frac{1}{2}}} + \|v(t)\|_X] \leq R$. Para verificar que $\mathfrak{F}$ está bem definido é suficiente mostrar que $\vartheta(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, onde $\vartheta(\cdot)$ é dada em (3.3.8). De fato, fixando $a > 0$ nossa afirmação segue da seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} \|\vartheta\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} &\leq K \int_0^a e^{-C(t-s)} \gamma_R(s) ds + K \int_a^t e^{-C(t-s)} \gamma_R(s) ds \\ &\leq K e^{-Ct} \int_0^a e^{Cs} \gamma_R(s) ds + \frac{K}{C} \sup_{\sigma \geq a} \gamma_R(\sigma). \end{aligned}$$

Seja agora $\left\{ \begin{bmatrix} u^n \\ v^n \end{bmatrix} \right\}$ uma sequência em $C_0([0, \infty); X^{\frac{1}{2}} \times X)$ que converge para $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in C_0([0, \infty); X^{\frac{1}{2}} \times X)$. Então existe $R > 0$ tal que $\sup_{t \geq 0, n \in \mathbb{N}} [\|u^n(t)\|_{X^{\frac{1}{2}}} + \|v^n(t)\|_X] \leq R$ e $\sup_{t \geq 0} [\|u(t)\|_{X^{\frac{1}{2}}} + \|v(t)\|_X] \leq R$. Fixando $a > 0$ temos

$$\begin{aligned} &\left\| \int_a^t e^{-A(\frac{1}{2})(t-s)} \left(F\left(s, \begin{bmatrix} u^n(s) \\ v^n(s) \end{bmatrix}\right) - F\left(s, \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix}\right) \right) ds \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \\ &\leq 2K \int_a^t e^{-C(t-s)} \gamma_R(s) ds \\ &\leq \frac{2K}{C} \sup_{\sigma \geq a} \gamma_R(\sigma) \rightarrow 0, \quad a \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{3.5.24}$$

Além disso, existe um conjunto compacto $K \subseteq X^{\frac{1}{2}} \times X$ tal que $\begin{bmatrix} u^n(t) \\ v^n(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \in K$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $0 \leq t \leq a$. A função $f : [0, a] \times K \rightarrow X$ é uniformemente contínua, portanto

$$\left\| F\left(s, \begin{bmatrix} u^n(s) \\ v^n(s) \end{bmatrix}\right) - F\left(s, \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix}\right) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

uniformemente para $0 \leq s \leq a$. Isto implica que

$$\left\| \int_0^t e^{-A(\frac{1}{2})(t-s)} \left(F\left(s, \begin{bmatrix} u^n(s) \\ v^n(s) \end{bmatrix}\right) - F\left(s, \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix}\right) \right) ds \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \tag{3.5.25}$$

uniformemente $0 \leq t \leq a$. Das estimativas (3.5.24) e (3.5.25) inferimos que $\mathfrak{F} : C_0([0, \infty); X^{\frac{1}{2}} \times X) \rightarrow C_0([0, \infty); X^{\frac{1}{2}} \times X)$ é contínuo. Afirmamos agora que existe $\rho > 0$ tal que $B_\rho(C_0([0, \infty); X^{\frac{1}{2}} \times X))$ é invariante sob $\mathfrak{F}$. De fato, suponha que esta afirmação não seja verdadeira, então para cada $R > 0$ existe uma função $\begin{bmatrix} u^R \\ v^R \end{bmatrix}$ tal que

$$\sup_{t \geq 0} [\|u^R(t)\|_{X^{\frac{1}{2}}} + \|v^R(t)\|_X] \leq R \text{ e } \sup_{t \geq 0} \left\| \mathfrak{F} \begin{bmatrix} u^R \\ v^R \end{bmatrix} (t) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} > R.$$

Disto temos

$$R < K \left\| \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} + K \sup_{t \geq 0} \int_0^t e^{-C(t-s)} \gamma_R(s) ds,$$

o que contradiz **(C2)**. Para mostrar que $\mathfrak{F}$ é um mapa completamente contínuo, usaremos a caracterização de subconjuntos compactos em $C_0([0, \infty); X^{\frac{1}{2}} \times X)$ de Ascoli-Arzelá. Consideremos $R > 0$. Usando o Corolário 2.2.2 e levando em conta que $e^{-A(\frac{1}{2})t}$ é compacto para $t > 0$, podemos ver que $\mathfrak{F}(B_R(C_0([0, \infty); X^{\frac{1}{2}} \times X)))$ é relativamente compacto em $C_0([0, \infty); X^{\frac{1}{2}} \times X)$ para todo $a > 0$. Mais ainda, nós obtemos que

$$\left\| \mathfrak{F} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} (t) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \leq K e^{-Ct} \left\| \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}}} + K e^{-Ct} \int_0^a e^{Cs} \gamma_R(s) ds + \frac{K}{C} \sup_{\sigma \geq a} \gamma_R(\sigma).$$

Desta última desigualdade segue imediatamente que $\mathfrak{F} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} (t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ uniformemente para $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in B_R(C_0([0, \infty); X^{\frac{1}{2}} \times X))$ e, portanto, deduzimos que $\mathfrak{F}$ é completamente contínuo. Aplicando o teorema do ponto fixo de Schauder, inferimos que $\mathfrak{F}$ tem um ponto fixo em $B_\rho(C_0([0, \infty); X^{\frac{1}{2}} \times X))$. Notemos agora que a continuidade de $\mathfrak{F}$ implica que o conjunto $\mathcal{S}$, formado pelas soluções brandas de (3.1.1), é fechado. Por outro lado, se a condição **(C3)** segue, então $\mathcal{S}$ é limitado. Com efeito, se assumirmos que $\mathcal{S}$ não é limitado, então existe uma sequência de funções $\begin{bmatrix} u^k \\ v^k \end{bmatrix} \in \mathcal{S}$ tal que $R_k = \sup_{t \geq 0} [\|u_k(t)\|_{X^{\frac{1}{2}}} + \|v_k(t)\|_X] \geq k$. Logo, $R_k \leq K \left\| \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} + K \sup_{t \geq 0} \int_0^t e^{-C(t-s)} \gamma_{R_k}(s) ds$, o que contraria **(C3)**. Finalmente, usando o fato de que $\mathfrak{F}$ é completamente contínuo, concluímos que $\mathcal{S}$ é compacto e completamos nossa demonstração. $\square$

Mostraremos a seguir que sob condições adequadas o conjunto formado pelas soluções brandas de (3.1.1) é compacto em $L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)$. Inicialmente precisamos introduzir a seguinte condição geral:

Hipótese (C). A função $f : \mathbb{R}^+ \times X^{\frac{1}{2}} \times X \rightarrow X$ satisfaz as seguintes condições de Carathéodory:

(C4) $f(t, \cdot, \cdot) : X^{\frac{1}{2}} \times X \rightarrow X$ é contínua para quase todo $t \in \mathbb{R}^+$.

(C5) Para cada $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in X^{\frac{1}{2}} \times X$, a função $f(\cdot, u, v) : \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ é fortemente mensurável.

Teorema 3.5.2. *Assuma que (η, A) é um par admissível e que A tem operador resolvente compacto. Suponha ainda que a condição (C) e as seguintes hipóteses se verificam:*

(C6) *Existem funções $\gamma \in L^q(0, \infty)$ e $\eta \in L^1(0, \infty)$ tais que*

$$\|f(t, u, v)\|_X \leq \gamma(t) [\|u\|_{X^{\frac{1}{2}}} + \|v\|_X] + \eta(t), \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in X^{\frac{1}{2}} \times X.$$

(C7) *Para cada $s \in \mathbb{R}^+$ e $R > 0$, o conjunto $\left\{ f(s, u, v) : \left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \leq R \right\}$ é limitado.*

(C8) $\frac{K}{\sqrt[p]{C}} \|\gamma\|_q < 1$, onde p e q são expoentes conjugados.

Então o problema (3.1.1) admite uma solução branda em $L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)$ e o conjunto $\mathcal{S}$ formado pelas soluções brandas de (3.1.1) é compacto em $L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)$.

Demonstração. A demonstração do Teorema 3.5.2 está baseada no argumento da prova de (APARCANA et al., , Teorema 4.2). Definimos o operador $\mathfrak{F}$ no espaço $L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)$ por (3.3.7). Sejam $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)$ e $\vartheta(u, v)$, a função dada pela expressão (3.3.8). Observamos que

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 0} \|\vartheta(u, v)(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} &\leq K \sup_{t \geq 0} \int_0^t e^{-C(t-s)} \left(\gamma(s) \left\| \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} + \eta(s) \right) ds \\ &\leq K \left(\|\gamma\|_{L^q(0, \infty)} \left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)} + \|\eta\|_{L^1(0, \infty)} \right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} &\|\vartheta(u, v)\|_{L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \\ &\leq \left(\sup_{t \geq 0} \|\vartheta(u, v)(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty \|\vartheta(u, v)(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{K}{\sqrt[p]{C}} \left(\|\gamma\|_{L^q(0, \infty)} \left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)} + \|\eta\|_{L^1(0, \infty)} \right). \end{aligned} \quad (3.5.26)$$

Usando (3.4.18) e (3.5.26) temos que $\mathfrak{F}$ está bem definido. Mostraremos agora que o mapa $\mathfrak{F}$ é contínuo. Sejam $\left\{ \begin{bmatrix} u^n \\ v^n \end{bmatrix} \right\}, \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)$ tais que $\left\{ \begin{bmatrix} u^n \\ v^n \end{bmatrix} \right\}$ converge para $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$. Então,

$$\begin{aligned} &\left(\int_0^\infty \left\| \mathfrak{F} \begin{bmatrix} u^n \\ v^n \end{bmatrix} (t) - \mathfrak{F} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} (t) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sup_{t \geq 0} \left\| \mathfrak{F} \begin{bmatrix} u^n \\ v^n \end{bmatrix} (t) - \mathfrak{F} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} (t) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\quad \times \left(\int_0^\infty \left\| \mathfrak{F} \begin{bmatrix} u^n \\ v^n \end{bmatrix} (t) - \mathfrak{F} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} (t) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq K \left(\int_0^\infty \left\| F \left(s, \begin{bmatrix} u^n(s) \\ v^n(s) \end{bmatrix} \right) - F \left(s, \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\quad \times \left(\int_0^\infty \int_0^t e^{-C(t-s)} \left\| F \left(s, \begin{bmatrix} u^n(s) \\ v^n(s) \end{bmatrix} \right) - F \left(s, \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{K}{\sqrt[p]{C}} \left\| F \left(\cdot, \begin{bmatrix} u^n(\cdot) \\ v^n(\cdot) \end{bmatrix} \right) - F \left(\cdot, \begin{bmatrix} u(\cdot) \\ v(\cdot) \end{bmatrix} \right) \right\|_{L^1(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)}. \end{aligned}$$

Levando em conta as condições de Carathéodory e a convergência dominada de Lebesgue vemos que o termo acima converge para zero quando $n \rightarrow \infty$, o que implica que $\mathfrak{F}$ é contínuo. Afirmamos agora que existe $\rho > 0$ tal que $\mathfrak{F}(B_\rho(L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X))) \subseteq B_\rho(L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X))$. De fato, se assumirmos que a afirmação é falsa, então para todo $\rho > 0$ podemos escolher $\begin{bmatrix} u^\rho \\ v^\rho \end{bmatrix} \in B_\rho(L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X))$ tal que $\left\| \mathfrak{F} \begin{bmatrix} u^\rho \\ v^\rho \end{bmatrix} \right\|_{L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)} > \rho$. Sendo assim, temos

$$1 < \frac{K}{\rho} \left(\frac{1}{\sqrt[p]{Cp}} (\|u_0\|_{X^{\frac{1}{2}}} + \|v_0\|_X) + \frac{1}{\sqrt[p]{C}} \|\eta\|_{L^1(0, \infty)} \right) + \frac{K}{\sqrt[p]{C}} \|\gamma\|_{L^q(0, \infty)},$$

o que contradiz **(C8)**. Para provar que $\mathfrak{F}$ é um mapa completamente contínuo nós utilizamos o Teorema 2.9.5.

(i) Queremos mostrar que $\int_a^\infty \|\vartheta(u, v)(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p dt \rightarrow 0$, quando $a \rightarrow \infty$, uniformemente para $\left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \leq R$, mas antes, precisamos introduzir as seguintes notações:

$$\tau = K(\|\gamma\|_{L^q(0, \infty)} \left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)} + \|\eta\|_{L^1(0, \infty)});$$

$$N_a(s) = K \int_a^\infty e^{-C(t-s)} dt, \quad 0 \leq s \leq a,$$

$$\tilde{N}_a(s) = \begin{cases} N_a(s), & 0 \leq s \leq a, \\ 0, & s > a. \end{cases}$$

De posse de tais notações obtemos,

$$\begin{aligned} & \int_a^\infty \|\vartheta(u, v)(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p dt \\ & \leq K K^{p-1} \left(\sup_{t \geq 0} \|\vartheta(u, v)(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \right)^{p-1} \\ & \quad \times \int_a^\infty \int_0^t e^{-C(t-s)} \|f(s, u(s), v(s))\|_X ds dt \\ & \leq K \tau^{p-1} \int_a^\infty \int_0^a e^{-C(t-s)} \|f(s, u(s), v(s))\|_X ds dt \\ & \quad + K \tau^{p-1} \int_a^\infty \int_a^t e^{-C(t-s)} \|f(s, u(s), v(s))\|_X ds dt \\ & \leq \tau^{p-1} \int_0^a N_a(s) \left(\gamma(s) \left\| \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} + \eta(s) \right) ds \\ & \quad + \frac{K}{C} \tau^{p-1} \int_a^\infty \left(\gamma(s) \left\| \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} + \eta(s) \right) ds \\ & \leq \tau^{p-1} \left(\left(\int_0^\infty \tilde{N}_a(s)^q \gamma(s)^q ds \right)^{\frac{1}{q}} R + \int_0^\infty \tilde{N}_a(s) \eta(s) ds \right) \\ & \quad + \frac{K}{C} \tau^{p-1} \left(\left(\int_a^\infty \gamma(s)^q ds \right)^{\frac{1}{q}} R + \int_a^\infty \eta(s) ds \right). \end{aligned} \tag{3.5.27}$$

Nós observamos que o primeiro e o segundo termos no lado direito da expressão (3.5.27) convergem para zero quando $a \rightarrow \infty$. É suficiente notarmos que $\tilde{N}_a(s) \rightarrow 0$ quando $a \rightarrow \infty$, logo, o teorema da convergência dominada de Lebesgue implica que o primeiro termo converge para zero quando $a \rightarrow \infty$ e isto encerra a prova de (i).

(ii) Demonstraremos nesta etapa que $\int_0^\infty \|\vartheta(u, v)(t+h) - \vartheta(u, v)(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p dt \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$, uniformemente para $\left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \leq R$. De (i) obtemos

$$\int_a^\infty \|\vartheta(u, v)(t+h) - \vartheta(u, v)(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p dt \rightarrow 0, \quad a \rightarrow \infty,$$

uniformemente para $\left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \leq R$. Então para provar (ii) basta mostrarmos que $\|\vartheta(u, v)(t+h) - \vartheta(u, v)(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \rightarrow 0$, quando $h \rightarrow 0$ uniformemente, para $\left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \leq R$. Mas isto é consequência das seguintes estimativas:

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t \left(e^{-\mathcal{A}(\frac{1}{2})(\xi+h)} - e^{-\mathcal{A}(\frac{1}{2})\xi} \right) F\left(t-\xi, \begin{bmatrix} u(t-\xi) \\ v(t-\xi) \end{bmatrix} \right) d\xi \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \\ & \leq \left(\int_0^t \|e^{-\mathcal{A}(\frac{1}{2})(\xi+h)} - e^{-\mathcal{A}(\frac{1}{2})\xi}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)}^q \gamma(t-\xi)^q d\xi \right)^{\frac{1}{q}} R \\ & \quad + \int_0^t \|e^{-\mathcal{A}(\frac{1}{2})(\xi+h)} - e^{-\mathcal{A}(\frac{1}{2})\xi}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} \eta(t-\xi) d\xi \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0, \end{aligned}$$

uniformemente, para $\left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \leq R$ e

$$\begin{aligned} & \left\| \int_t^{t+h} e^{-\mathcal{A}(\frac{1}{2})(t+h-\xi)} F\left(\xi, \begin{bmatrix} u(\xi) \\ v(\xi) \end{bmatrix} \right) d\xi \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \\ & \leq K \left(\left(\int_t^{t+h} \gamma(\xi)^q d\xi \right)^{\frac{1}{q}} R + \int_t^{t+h} \eta(\xi) d\xi \right) \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0, \end{aligned}$$

uniformemente, para $\left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \leq R$.

(iii) Nesta última etapa provaremos que para cada $R > 0$ o conjunto

$$\left\{ \int_0^a \vartheta(u, v)(t) dt : \left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \leq R \right\}$$

é relativamente compacto em $X^{\frac{1}{2}} \times X$. Definimos $\mathcal{G}(t) \in \mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)$ por

$$\mathcal{G}(t) = \int_0^t e^{-\mathcal{A}(\frac{1}{2})\tau} d\tau, \quad t \in [0, a].$$

Notemos que $\int_0^a \vartheta(u, v)(t)dt = \int_0^a \mathcal{G}(a-s)F(s, [u(s), v(s)])ds$. Além disso podemos deduzir que o conjunto

$$\left\{ F\left(\cdot, \begin{bmatrix} u(\cdot) \\ v(\cdot) \end{bmatrix}\right) : \left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \leq R \right\}$$

é equi-integrável. Portanto, a afirmação segue do Lema 2.9.7.

Combinando (i), (ii) e (iii) e usando o Teorema 2.9.5, inferimos que $\mathfrak{F}$ é completamente contínuo. Segue do teorema do ponto fixo de Schauder que o conjunto $\mathcal{S}$ formado pelas soluções brandas de (3.1.1) é não vazio. Da continuidade de $\mathfrak{F}$ temos que $\mathcal{S}$ é um conjunto fechado e da seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} & \sup \left\{ \left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{L^p(0, \infty; X^{\frac{1}{2}} \times X)} : \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in \mathcal{S} \right\} \\ & \leq \frac{K}{\sqrt[p]{C} - K\|\gamma\|_{L^q(0, \infty)}} \left(\frac{1}{\sqrt[p]{p}} \left\| \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} + \|\eta\|_{L^1(0, \infty)} \right), \end{aligned}$$

vemos que $\mathcal{S}$ também é um conjunto limitado. Finalmente como $\mathcal{S} = \mathfrak{F}\mathcal{S}$, chegamos a conclusão que $\mathcal{S}$ é um conjunto compacto. $\square$

Apresentamos agora o seguinte resultado de compacidade em $C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)$:

Teorema 3.5.3. *Assuma que (η, A) é um par admissível e que A tem operador resolvente compacto. Suponha ainda que as condições (C) e (C1) se verificam (ambas condições definidas em $[0, \tau]$ e $\gamma_R \in L^1[0, \tau]$). Além disso, suponha que as seguintes condições são satisfeitas:*

(C9) *Para cada $0 \leq s \leq \tau$ e $R > 0$, o conjunto $\{f(s, u, v) : [\|u\|_{X^{\frac{1}{2}}} + \|v\|_X] \leq R\}$ é limitado.*

(C10) $\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{K}{R} \int_0^\tau \gamma_R(s)ds < 1$.

Então o problema (3.1.1) admite uma solução branda em $C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)$. Se além disso, a seguinte condição é satisfeita,

(C11) $\limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{K}{R} \int_0^\tau \gamma_R(s)ds < 1$,

então o conjunto $\mathcal{S}$, formado pelas soluções brandas de (3.1.1), é compacto em $C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)$.

Observação 3.5.1. A demonstração do Teorema 3.5.3 usa uma construção similar a usada na prova do Teorema 3.5.1. Os detalhes são deixados a cargo ao leitor.

Teorema 3.5.4. *Assuma que (η, A) é um par admissível, A tem operador resolvente compacto, $f : [0, \tau] \times X^{\frac{1}{2}} \times X \rightarrow X$ é uma função contínua e as condições (C1) e (C9) são satisfeitas com $\gamma_R \in L^1[0, \tau]$. Além disso, suponha que as seguintes condições se verificam:*

(C12) O conjunto $\mathcal{S}$ formado pelas soluções brandas de (3.1.1) é compacto em $C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)$.

(C13) $3 \liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{K}{R} \int_0^\tau \gamma_R(s) ds < 1$.

Então $\mathcal{S}$ é conexo em $C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)$.

Para a demonstração do Teorema 3.5.4, faremos uso do seguinte Lema:

Lema 3.5.1. *Suponha que (η, A) é um par admissível e que A tem operador resolvente compacto. Além disso, admita que as condições (C), (C1) e (C9) seguem em $[0, \tau]$, com $\gamma_R \in L^1[0, \tau]$. Então para cada $\rho > 0$, o conjunto*

$$\mathcal{P} = \left\{ \int_0^t e^{-A(\frac{1}{2})(t-s)} F\left(s, \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix}\right) ds : 0 \leq t \leq \tau, [u, v] \in L^\infty([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X), \|[u, v]\|_\infty \leq \rho \right\}$$

é relativamente compacto.

Demonstração do Lema 3.5.1: A prova deste resultado requer modificações diretas na demonstração de (ANDRADE et al., 2015, Lema 4.1). $\square$

Demonstração do Teorema 3.5.4: Para provar o resultado estabelecido no Teorema 3.5.4, seguiremos a demonstração de (HENRÍQUEZ, 2003, Teorema 2.5). Admitindo as condições (C11) e (C12) podemos escolher uma constante $\rho > 0$ suficientemente grande tal que

$$\left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \leq \rho \text{ para todo } \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in \mathcal{S} \text{ e}$$

$$K \left\| \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} + 3K \int_0^\tau \gamma_\rho(s) ds \leq \rho. \quad (3.5.28)$$

Seja $\mathcal{P}$ o conjunto construído no Lema 3.5.1 para uma constante ρ como em (3.5.28). Sem perda de generalidade podemos assumir que $\mathcal{P}$ é compacto e absolutamente convexo. Tomemos $U = 2\mathcal{P}$, $U_1 = 3\mathcal{P}$ e denotemos $N_1 = 2K \int_0^\tau \gamma_\rho(s) ds$.

(i) Para uma divisão d do intervalo $[0, \tau]$, formada pelos pontos $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = \tau$, consideramos a função $\begin{bmatrix} z(\cdot) \\ w(\cdot) \end{bmatrix}$ dada por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} z(t) \\ w(t) \end{bmatrix} &= e^{-A(\frac{1}{2})t} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^{i-1} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-A(\frac{1}{2})(t-s)} F\left(s, \begin{bmatrix} z(t_{k-1}) \\ w(t_{k-1}) \end{bmatrix}\right) ds \right. \\ &\quad \left. + (t_k - t_{k-1}) \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \end{bmatrix} \right) + \int_{t_{i-1}}^t e^{-A(\frac{1}{2})(t-s)} F\left(s, \begin{bmatrix} z(t_{i-1}) \\ w(t_{i-1}) \end{bmatrix}\right) ds \\ &\quad + (t - t_{i-1}) \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}, \quad t_{i-1} < t \leq t_i, \end{aligned} \quad (3.5.29)$$

onde nossa escolha para $\begin{bmatrix} u_k \\ v_k \end{bmatrix}$ é feita de tal forma que $\sum_{k=1}^i (t_k - t_{k-1}) \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \end{bmatrix} \in U$ e $\left\| \sum_{k=1}^i (t_k - t_{k-1}) \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \leq N_1$, para todo $i = 1, \dots, n$. Agora para uma função fixa $\begin{bmatrix} z(\cdot) \\ w(\cdot) \end{bmatrix}$ dada com em (3.5.29), nós denotamos por $\begin{bmatrix} \Psi_1(\cdot) \\ \Psi_2(\cdot) \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} \phi_1(\cdot) \\ \phi_2(\cdot) \end{bmatrix}$ as funções definidas por $\Psi_1(0) = u_0$, $\Psi_2(0) = v_0$, $\phi_1(0) = u_1$, $\phi_2(0) = v_1$, $\Psi_1(t) = z(t_{k-1})$, $\Psi_2(t) = w(t_{k-1})$, $\phi_1(t) = u_k$, $\phi_2(t) = v_k$, for $t_{k-1} < t \leq t_k$, $k = 1, \dots, n$. Deste modo, $\begin{bmatrix} z(\cdot) \\ w(\cdot) \end{bmatrix}$ pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} z(t) \\ w(t) \end{bmatrix} = e^{-A(\frac{1}{2})t} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} + \int_0^t e^{-A(\frac{1}{2})(t-s)} F\left(s, \begin{bmatrix} \Psi_1(s) \\ \Psi_2(s) \end{bmatrix}\right) ds + \int_0^t \begin{bmatrix} \phi_1(s) \\ \phi_2(s) \end{bmatrix} ds.$$

Notemos que $\left\| \begin{bmatrix} z(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \leq \rho$ para todo $t \in [0, \tau]$, independente da divisão d e da escolha dos pontos $\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}$. De fato, assumindo que esta afirmação é válida em $[0, t_{i-1}]$, podemos mostrar que ela também se verifica para $t_{i-1} < t \leq t_i$. Mas isto decorre do fato de que

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{i-1} (t_k - t_{k-1}) \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \end{bmatrix} + (t - t_{i-1}) \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} \\ &= \left(1 - \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}\right) \sum_{k=1}^{i-1} (t_k - t_{k-1}) \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \end{bmatrix} + \left(\frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}\right) \sum_{k=1}^i (t_k - t_{k-1}) \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e, portanto

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{bmatrix} z(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \\ & \leq K e^{-Ct} \left\| \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} + K \int_0^t \gamma_\rho(s) ds \\ & \quad + \left\| \sum_{k=1}^{i-1} (t_k - t_{k-1}) \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \end{bmatrix} + (t - t_{i-1}) \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \\ & \leq K \left\| \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} + K \int_0^t \gamma_\rho(s) ds + 2K \int_0^\tau \gamma_\rho(s) ds \leq \rho. \end{aligned}$$

Introduzimos o conjunto $\mathcal{K}_0 \subseteq C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)$ formado pelas funções contínuas ξ tais que $\xi(t) \in U_1$ para cada $t \in [0, \tau]$ e tais que para cada $\epsilon > 0$ existe $\nu = \nu(t) > 0$ tal que $|s - t| < \nu$ implica $\sup_{\xi \in \mathcal{K}_0} \|\xi(t) - \xi(s)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} < \epsilon$. Notemos que $\mathcal{K}_0$ e $\mathcal{K} = e^{-A(\frac{1}{2})\bullet} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} + \mathcal{K}_0$ são

compactos. Seja ϵ um número positivo fixo. Sem perda de generalidade podemos assumir $\epsilon \leq 6N_1$ e tomarmos $\epsilon_1 = \epsilon/6K\tau$. Faremos agora uma cuidadosa escolha do conjunto K_ϵ (ver Teorema 2.9.6) para demonstrar que as soluções de (3.1.1) podem ser aproximadas por elementos deste conjunto. Usando a compacidade de $\mathcal{S}$ e $\mathcal{K}$, bem como a continuidade de f , inferimos a existência de $0 < \delta_1 < 2\epsilon$ tal que

$$\left\| F\left(s, \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}\right) - F\left(s, \begin{bmatrix} w'_1 \\ w'_2 \end{bmatrix}\right) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \leq \epsilon_1, \quad (3.5.30)$$

para todo $s \in [0, \tau]$ e cada $\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w'_1 \\ w'_2 \end{bmatrix} \in (\mathcal{K} \cup \mathcal{S})([0, \tau])$ tais que

$$\left\| \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w'_1 \\ w'_2 \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \leq \delta_1.$$

Similarmente, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\left\| \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \leq \frac{\delta_1}{4}, \quad (3.5.31)$$

para todo $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in \mathcal{K} \cup \mathcal{S}$ e $t, s \in [0, \tau]$ tal que $|t - s| < \delta_2$. Na sequência escolhemos $\delta = \frac{\tau}{n} \leq \min\{\delta_2, \frac{\delta_1\tau}{2\epsilon}\}$ e consideramos a divisão d definida pelos pontos $t_i = i\delta, i = 0, \dots, n$. Seja $\mathcal{K}_\epsilon$ o conjunto formado pelas funções definidas por (3.5.29), com $\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}\right) \in Z_\epsilon$, onde Z_ϵ é o conjunto formado por todos $\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}\right) \in \left(\frac{2n}{\tau}U\right)^n$ tais que $\sum_{k=1}^i \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \end{bmatrix} \in \frac{n}{\tau}U$ e $\frac{\tau}{n} \left\| \sum_{k=1}^i \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \leq Kt_i\epsilon_1$, para todo $i = 1, \dots, n$. Afirmamos que $\mathcal{K}_\epsilon$ é conexo e $\mathcal{K}_\epsilon \subseteq \mathcal{K}$ para cada $\epsilon > 0$. De fato, como Z_ϵ é convexo e as funções $\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} \in Z_\epsilon$ dependem continuamente da escolha de $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}\right) \in Z_\epsilon$, então temos $\mathcal{K}_\epsilon$ é conexo. Além disso, tomando $\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} \in Z_\epsilon, t \in [0, \tau]$ e denotando

$$\begin{bmatrix} \tilde{z}(t) \\ \tilde{w}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z(t) \\ w(t) \end{bmatrix} - e^{-A_{(\frac{1}{2})}t} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix},$$

onde $\begin{bmatrix} z(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$ é dada em (3.5.29), vemos que

$$\begin{bmatrix} \tilde{z}(t) \\ \tilde{w}(t) \end{bmatrix} \in \mathcal{P} + U = U_1.$$

Se tomarmos $t \in [0, \tau]$ e $h \geq 0$ tais que $t + h \in [0, \tau]$, obtemos

$$\begin{aligned} \left\| \begin{bmatrix} \tilde{z}(t) \\ \tilde{w}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{z}(t+h) \\ \tilde{w}(t+h) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} &\leq \left\| (I - e^{-\mathcal{A}(\frac{1}{2})h}) \int_0^t e^{-\mathcal{A}(\frac{1}{2})(t-s)} F\left(s, \begin{bmatrix} \Psi_1(s) \\ \Psi_2(s) \end{bmatrix}\right) ds \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \\ &\quad + K \int_t^{t+h} \gamma_\rho(s) ds + N_1 h. \end{aligned}$$

Levando em conta o Lema 3.5.1, concluímos que o lado esquerdo da desigualdade acima vai para zero quando $h \rightarrow 0$ e, portanto, $\begin{bmatrix} \tilde{z}(t) \\ \tilde{w}(t) \end{bmatrix} \in \mathcal{K}_0$.

(ii) Mostraremos agora que as soluções de (3.1.1) podem ser aproximadas por funções

em $\mathcal{K}_\epsilon$. Seja $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in \mathcal{S}$ fixa. Procedemos indutivamente para construir uma função

$\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} \in \mathcal{K}_\epsilon$ tal que $\left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} \right\|_{C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \leq \epsilon$. Assumimos que foram selecionados

os elementos $\begin{bmatrix} u_k \\ v_k \end{bmatrix}, k = 1, \dots, i-1$; e a função $\begin{bmatrix} z(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$ dada por (3.5.29), para $t \in [0, t_{i-1}]$ satisfazendo $z(t_k) = u(t_k), w(t_k) = v(t_k)$, bem como a estimativa

$$\left\| \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} z(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \leq \frac{\delta_1}{2}, \quad 0 \leq t \leq t_{i-1}.$$

Começamos por selecionar

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} &= \frac{1}{\delta} \int_0^{t_i} e^{-\mathcal{A}(\frac{1}{2})(t_i-s)} \left(F\left(s, \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix}\right) - F\left(s, \begin{bmatrix} \Psi_1(s) \\ \Psi_2(s) \end{bmatrix}\right) \right) ds \\ &\quad - \frac{1}{\delta} \int_0^{t_{i-1}} e^{-\mathcal{A}(\frac{1}{2})(t_{i-1}-s)} \left(F\left(s, \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix}\right) - F\left(s, \begin{bmatrix} \Psi_1(s) \\ \Psi_2(s) \end{bmatrix}\right) \right) ds. \end{aligned}$$

Notemos que $\delta \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}$ pertence a $2U$ e

$$\delta \sum_{k=1}^i \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \end{bmatrix} = \int_0^{t_i} e^{-\mathcal{A}(\frac{1}{2})(t_i-s)} \left(F\left(s, \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix}\right) - F\left(s, \begin{bmatrix} \Psi_1(s) \\ \Psi_2(s) \end{bmatrix}\right) \right) ds \in U.$$

Combinando (3.5.30) e (3.5.31) obtemos

$$\delta \left\| \sum_{k=1}^i \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \leq K \epsilon_1 t_i \leq N_1.$$

Definimos agora a função $\begin{bmatrix} z(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$ em $[t_{i-1}, t_i]$ através da fórmula (3.5.29) e inferimos que

$$\begin{bmatrix} u(t_i) \\ v(t_i) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} z(t_i) \\ w(t_i) \end{bmatrix} = \delta \sum_{k=1}^i \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \end{bmatrix} - \int_0^{t_i} \begin{bmatrix} \phi_1(s) \\ \phi_2(s) \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

De (3.5.31) segue-se então que

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} z(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \\ & \leq \left\| \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u(t_{i-1}) \\ v(t_{i-1}) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} + \left\| \begin{bmatrix} z(t_{i-1}) \\ w(t_{i-1}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} z(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \leq \frac{\delta_1}{2} \leq \epsilon, \end{aligned}$$

o que estabelece a afirmação desejada.

(iii) Por fim, provaremos que os elementos $\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}$ de $\mathcal{K}_\epsilon$ são soluções aproximadas de (3.1.1). Mais especificamente, mostraremos que

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(t) &= \left\| \int_0^t e^{-\mathcal{A}(\frac{1}{2})(t-s)} \left(F\left(s, \begin{bmatrix} \Psi_1(s) \\ \Psi_2(s) \end{bmatrix}\right) - F\left(s, \begin{bmatrix} z(s) \\ w(s) \end{bmatrix}\right) \right) ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \begin{bmatrix} \phi_1(s) \\ \phi_2(s) \end{bmatrix} ds \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \leq \epsilon, \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, \tau]$ e $\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} \in \mathcal{K}_\epsilon$. Para $t_{i-1} < t \leq t_i$, definimos

$$\mathcal{J}_1(t) := \sum_{k=1}^{i-1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-\mathcal{A}(\frac{1}{2})(t-s)} \left(F\left(s, \begin{bmatrix} z(t_{k-1}) \\ w(t_{k-1}) \end{bmatrix}\right) - F\left(s, \begin{bmatrix} z(s) \\ w(s) \end{bmatrix}\right) \right) ds,$$

$$\mathcal{J}_2(t) := \int_{t_{i-1}}^t e^{-\mathcal{A}(\frac{1}{2})(t-s)} \left(F\left(s, \begin{bmatrix} z(t_{i-1}) \\ w(t_{i-1}) \end{bmatrix}\right) - F\left(s, \begin{bmatrix} z(s) \\ w(s) \end{bmatrix}\right) \right) ds,$$

$$\mathcal{J}_3(t) := \int_0^t \begin{bmatrix} \phi_1(s) \\ \phi_2(s) \end{bmatrix} ds$$

e obtemos as seguintes estimativas

$$\|\mathcal{J}_1(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \leq K\epsilon_1 \sum_{k=1}^{i-1} (t_k - t_{k-1}) \leq K\epsilon_1 \tau,$$

$$\|\mathcal{J}_2(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \leq K\epsilon_1 (t - t_{i-1}) \leq K\epsilon_1 \tau,$$

$$\|\mathcal{J}_3(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} = \frac{\tau}{n} \left\| \sum_{k=1}^i \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \leq K\epsilon_1 \tau.$$

Logo, $\mathcal{J}(t) \leq \sum_{i=1}^3 \|\mathcal{J}_i\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \leq 3\epsilon_1 K\tau \leq \epsilon$. Unindo as etapas (i), (ii) e (iii) e aplicando o Teorema 2.9.6 concluímos que $\mathcal{S}$ é conexo em $C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)$. $\square$

Observação 3.5.2. Resultado similar ao estabelecido no Teorema 3.5.4 foi obtido em [(HENRÍQUEZ, 2003), Teorema 2.5] e [(ANDRADE et al., 2015), Teorema 4.3] para equações diferenciais funcionais abstratas com retardo e para os sistemas de estruturas flexíveis, respectivamente.

O teorema a seguir complementa resultados anteriores. Ele estabelece que, sob condições apropriadas, o conjunto formado pelas soluções brandas de (3.1.1) é um conjunto R_δ . Da Observação 2.9.1 temos que qualquer conjunto R_δ é um conjunto compacto, conexo e não vazio, que tem a mesma homologia que o espaço de um ponto.

Teorema 3.5.5. *Assuma que (η, A) é um par admissível, A tem operador resolvente compacto e a condição (C) segue em $[0, \tau]$. Além disso suponha que as seguintes condições são satisfeitas:*

(C14) *Existe uma função contínua $m : [0, \tau] \rightarrow [0, \infty)$ e uma função contínua não decrescente $\Omega : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ tal que $\|f(t, u, v)\|_X \leq m(t)\Omega(\|u\|_{X^{\frac{1}{2}}} + \|v\|_X)$, para quase todo $t \in [0, \tau]$ e todo $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in X^{\frac{1}{2}} \times X$.*

(C15) *O conjunto $\left\{f(t, u, v) : t \in [0, \tau], \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in X^{\frac{1}{2}} \times X\right\}$ é limitado.*

Então o conjunto $\mathcal{S}$ formado pelas soluções brandas de (3.1.1) é um conjunto R_δ .

Demonstração: Consideraremos nesta demonstração as ideias contidas na prova de (SIRACUSA, 2012, Teorema 1.8). Usaremos a reformulação do teorema de Browder-Gupta devida a Górniewicz (ver Teorema 2.9.7). Inicialmente definimos $\mathfrak{F} : C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X) \rightarrow C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)$ por (3.3.7). Gostaríamos de observar que para provar a condição (ii) do Teorema 2.9.7 é suficiente mostrar que $\mathfrak{F}$ satisfaz todas as condições do Lema de Szufła (ver Lema 2.9.8). De fato, seja U uma vizinhança aberta de $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in X^{\frac{1}{2}} \times X$. Então existe

$r > 0$ tal que $B_{X^{\frac{1}{2}} \times X}(0, r) \subseteq U$. Tomando $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)$, obtemos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} & \left\| \mathfrak{F} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} (t) - \mathfrak{F} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} (s) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \leq \left\| e^{-\mathcal{A}(\frac{1}{2})t} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} - e^{-\mathcal{A}(\frac{1}{2})s} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \\ & + \int_0^\tau \left\| \left(e^{-\mathcal{A}(\frac{1}{2})(t-\mu)} - e^{-\mathcal{A}(\frac{1}{2})(s-\mu)} \right) F\left(\mu, \begin{bmatrix} u(\mu) \\ v(\mu) \end{bmatrix}\right) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} d\mu + K\rho_f(s-t), \end{aligned} \quad (3.5.32)$$

onde $\rho_f := \sup\{\|f(\mu, x, y)\|_X : \mu \in [0, \tau], x \in X^{\frac{1}{2}}, y \in X\}$. Notemos que $t \rightarrow e^{-\mathcal{A}(\frac{1}{2})t} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$

é um mapa uniformemente contínuo de $[0, \tau]$ em $X^{\frac{1}{2}} \times X$, o que nos permite inferir que

$$\left\| \left(e^{-\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}(t-\mu)} - e^{-\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}(s-\mu)} \right) \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \leq \frac{r}{3},$$

para $|t - s|$ suficientemente pequeno. Levando em conta agora que $\{e^{-\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}t}\}_{t \geq 0}$ é um semigrupo compacto e a condição **(C15)** obtemos sem dificuldades que

$$\int_0^\tau \left\| \left(e^{-\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}(t-\mu)} - e^{-\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}(s-\mu)} \right) F\left(s, \begin{bmatrix} u(\mu) \\ v(\mu) \end{bmatrix}\right) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} d\mu \leq \frac{r}{3},$$

para $|t - s|$ suficientemente pequeno. Portanto $\mathfrak{F} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} (t) - \mathfrak{F} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} (s) \in B_{X^{\frac{1}{2}} \times X}(0, r)$,

para todo $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)$ e todos $t, s \in [0, \tau]$, tais que $|t - s|$ é suficientemente pequeno. Com isto provamos que a condição 1º do Lema de Szufia é satisfeita. As condições 2º e 3º do mesmo Lema são triviais. Segue então do Lema 2.9.8 que existe uma sequência $\{\mathfrak{F}_n\}$ tal que $I - \mathfrak{F}_n$ é um homeomorfismo de $C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)$ nele próprio e $\{\mathfrak{F}_n\}$ se aproxima uniformemente de $\mathfrak{F}$. A seguir definimos os operadores

$T : C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X) \rightarrow C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)$ e $T_n : C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X) \rightarrow C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)$ por

$$T \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} - \mathfrak{F} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad T_n \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} - \mathfrak{F}_n \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

Tendo em mente a conclusão anterior, vemos que a condição (ii) do Teorema 2.9.7 é verificada. Para finalizar a demonstração do Teorema 3.5.5 resta-nos checar que T é um mapa próprio no ponto $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in X^{\frac{1}{2}} \times X$. Sejam Z um conjunto compacto em $C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)$ e $U = T^{-1}(Z)$. Como

$$U \subseteq Z + \mathfrak{F}(U),$$

para garantirmos a compacidade de U , é suficiente mostrarmos que $\mathfrak{F}(U)$ é relativamente compacto. Notemos então que a inclusão $(\mathfrak{F}U)(t) \subseteq e^{-\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}t} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} + t\overline{\text{co}(\mathcal{V}_\odot)}$, onde $\mathcal{V}_\odot =$

$\left\{ e^{-\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}(t-s)} F\left(s, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) : s \in [0, \tau], x \in X^{\frac{1}{2}}, y \in X \right\}$, é responsável pelo fato de que $(\mathfrak{F}U)(t)$ é relativamente compacto e que a decomposição (3.3.9) implica na equicontinuidade de $\mathfrak{F}U$. Logo, do Teorema 2.9.7, concluimos que $\mathcal{S} = T^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ é um conjunto R_δ e com isto completamos a demonstração do Teorema 3.5.5. $\square$

3.6 Resultados diversos em existência

Consideremos o problema (3.2.2) satisfazendo a condição não local

$$\begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) \end{bmatrix} = g \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad (3.6.33)$$

onde $g : C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X) \rightarrow X^{\frac{1}{2}} \times X$ é uma aplicação contínua e compacta. Para cada $R > 0$, denotamos por

$$g_R := \sup \left\{ \left\| g \left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} : \left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \leq R \right\}.$$

Dizemos que uma função $\begin{bmatrix} u(\cdot) \\ v(\cdot) \end{bmatrix} : [0, \tau] \rightarrow X^{\frac{1}{2}} \times X$ é uma solução branda para (3.2.2)-(3.6.33) se ela satisfaz a equação integral:

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = e^{-A(\frac{1}{2})t} g \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \int_0^t e^{-A(\frac{1}{2})(t-s)} F \left(s, \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right) ds, \quad t \in [0, \tau]. \quad (3.6.34)$$

Consideremos agora ξ como a medida de não-compacidade de Kuratowski em $X^{\frac{1}{2}} \times X$, e o espaço $C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)$. Temos o seguinte resultado:

Teorema 3.6.1. *Suponhamos que as condições (C) e (C14) se verificam em $[0, \tau]$ com $m \in L^1([0, \tau]; \mathbb{R}^+)$ e que as seguintes afirmações são verdadeiras:*

(C16) *Existe uma função $H \in L^1([0, \tau]; \mathbb{R}^+)$ tal que para qualquer subconjunto de funções $S \subseteq C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)$, temos $\xi \left(\left\{ [0, f(t, u(t), v(t))] : \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in S \right\} \right) \leq H(t) \xi(S(t))$, para quase todo $t \in [0, \tau]$, onde $S(t) := \left\{ \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in S \right\}$.*

(C17) *Existe uma constante $R > 0$ tal que $Kg_R + K\Omega(R) \int_0^\tau m(s) ds \leq R$, onde K é a constante dada em (3.2.4).*

Então o problema (3.2.2)-(3.6.33) tem ao menos uma solução branda.

Demonstração. Consideremos o operador $\mathfrak{F}^\# : C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X) \rightarrow C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)$ definido por

$$\mathfrak{F}^\# \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} (t) = e^{-A(\frac{1}{2})t} g \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \int_0^t e^{-A(\frac{1}{2})(t-s)} F \left(s, \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right) ds, \quad t \in [0, \tau].$$

Escolhemos uma sequência $\left\{ \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} \right\}_n$ em $C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)$ tal que $\begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$, quando $n \rightarrow \infty$. Como estamos assumindo que g é um mapa contínuo e que f satisfaz as

condições de Carathéodory, podemos ver que a continuidade de $\mathfrak{F}^\sharp$ segue da estimativa

$$\begin{aligned} \left\| \mathfrak{F}^\sharp \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} (t) - \mathfrak{F}^\sharp \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} (t) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} &\leq K \left\| g \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} - g \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \\ &\quad + K \int_0^\tau \|f(s, u_n(s), v_n(s)) - f(s, u(s), v(s))\|_X ds. \end{aligned}$$

Além disso, para $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in B_R(C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X))$, temos

$$\begin{aligned} &\left\| \mathfrak{F}^\sharp \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq \tau} \left(K e^{-Ct} \left\| g \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} + K \int_0^t e^{-C(t-s)} \|f(s, u(s), v(s))\|_X ds \right) \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq \tau} \left(K e^{-Ct} g_R + K \int_0^t e^{-C(t-s)} \Omega(\|u(s)\|_{X^{\frac{1}{2}}} + \|v(s)\|_X) ds \right) \\ &\leq K g_R + K \Omega(R) \int_0^\tau m(s) ds \leq R. \end{aligned}$$

O que nos mostra que $B_R(C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X))$ é invariante sob $\mathfrak{F}^\sharp$ e que $\mathfrak{F}^\sharp(B_R(C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X))$ é um conjunto limitado. Além disso, podemos ver que $\mathfrak{F}^\sharp(B_R(C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X))$ é equicontínuo em $[0, \tau]$. A prova desta afirmação utiliza um procedimento similar ao da demonstração do Teorema 3.3.2 (ver (3.3.9)). Definimos agora o conjunto $\mathcal{B} = \overline{\text{co}}(\mathfrak{F}^\sharp(B_R(C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)))$. Então, segue direto do Lema 2.9.3 que $\mathcal{B}$ é equicontínuo. Notemos também que $\mathfrak{F}^\sharp : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ é um operador contínuo e limitado. Seguindo a prova de (DE ANDRADE et al., 2016, Teorema 3.8), obtemos

$$\begin{aligned} \xi(\mathfrak{F}^\sharp(\mathcal{B})(t)) &\leq K \int_0^t \xi([0, f(s, \mathcal{B})]) ds \\ &\leq K \xi(\mathcal{B}) \int_0^t H(s) ds. \end{aligned}$$

Como $H \in L^1([0, \tau]; \mathbb{R}^+)$, para $\delta < K^{-1}$, existe $\phi \in C([0, \tau]; \mathbb{R}^+)$ tal que

$$\int_0^\tau |H(s) - \phi(s)| ds < \delta.$$

Tomando

$$a = K\delta \text{ e } b = \tau K \|\phi\|_{C([0, \tau]; \mathbb{R}^+)},$$

e levando em conta que $\mathfrak{F}^\sharp(\mathcal{B})$ é um conjunto limitado e equicontínuo, temos do Lema 2.9.4 que

$$\begin{aligned} \xi(\mathfrak{F}^\sharp(\mathcal{B})(t)) &\leq K \xi(\mathcal{B}) \left(\int_0^t |H(s) - \phi(s)| ds + \int_0^t \phi(s) ds \right) \\ &\leq K \xi(\mathcal{B}) \left(\delta + t \|\phi\|_{C([0, \tau]; \mathbb{R}^+)} \right) \\ &\leq (a + b) \xi(\mathcal{B}). \end{aligned}$$

Tomando $\mathfrak{F}^{\sharp(n)} = \mathfrak{F}^{\sharp}(\overline{co}(\mathfrak{F}^{\sharp(n-1)}(\mathcal{B})))$, $n = 2, 3, \dots$; podemos verificar que

$$\begin{aligned}
\xi(\mathfrak{F}^{\sharp(2)}(\mathcal{B}))(t) &= \xi(\mathfrak{F}^{\sharp}(\overline{co}(\mathfrak{F}^{\sharp}(\mathcal{B})))) \\
&\leq K \int_0^t H(s) \xi(\mathfrak{F}^{\sharp}(\mathcal{B}))(s) ds \\
&\leq K \xi(\mathcal{B}) \int_0^t H(s) \left(a + Ks \|\phi\|_{C([0,\tau];\mathbb{R}^+)} \right) ds \\
&\leq K \xi(\mathcal{B}) \int_0^t |H(s) - \phi(s)| \left(a + Ks \|\phi\|_{C([0,\tau];\mathbb{R}^+)} \right) ds \\
&\quad + K \xi(\mathcal{B}) \int_0^t \phi(s) \left(a + Ks \|\phi\|_{C([0,\tau];\mathbb{R}^+)} \right) ds \\
&\leq \xi(\mathcal{B}) K \delta \left(a + Kt \|\phi\|_{C([0,\tau];\mathbb{R}^+)} \right) \\
&\quad + K \xi(\mathcal{B}) \int_0^t \|\phi\|_{C([0,\tau];\mathbb{R}^+)} \left(a + Ks \|\phi\|_{C([0,\tau];\mathbb{R}^+)} \right) ds \\
&\leq \xi(\mathcal{B}) \left(K \delta (a + Kt \|\phi\|_{C([0,\tau];\mathbb{R}^+)}) + K \|\phi\|_{C([0,\tau];\mathbb{R}^+)} (at + K \frac{t^2}{2} \|\phi\|_{C([0,\tau];\mathbb{R}^+)}) \right) \\
&= \xi(\mathcal{B}) \left(a(a + Kt \|\phi\|_{C([0,\tau];\mathbb{R}^+)}) + K \|\phi\|_{C([0,\tau];\mathbb{R}^+)} (at + K \frac{t^2}{2} \|\phi\|_{C([0,\tau];\mathbb{R}^+)}) \right).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\xi(\mathfrak{F}^{\sharp(2)}(\mathcal{B})) &\leq \left(a^2 + aK\tau \|\phi\|_{C([0,\tau];\mathbb{R}^+)} + aK\tau \|\phi\|_{C([0,\tau];\mathbb{R}^+)} + K^2 \frac{\tau^2}{2} \|\phi\|_{C([0,\tau];\mathbb{R}^+)}^2 \right) \xi(\mathcal{B}) \\
&= (a^2 + 2ab + \frac{b^2}{2}) \xi(\mathcal{B}).
\end{aligned}$$

Através de um processo indutivo, mostramos que

$$\xi(\mathfrak{F}^{\sharp(n)}(\mathcal{B})) \leq \left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j} \frac{b^j}{j!} \right) \xi(\mathcal{B}).$$

Como $0 < a < 1$ e $b > 0$, segue do Lema 2.9.5 que existem $n_0 \in \mathbb{N}$ e $r \in (0, 1)$ tais que $\xi(\mathfrak{F}^{\sharp(n_0)}(\mathcal{B})) \leq r \xi(\mathcal{B})$. Por uma generalização do teorema do ponto fixo de Darbo (ver Lema 2.9.1), concluímos que $\mathfrak{F}^{\sharp}$ tem um ponto fixo em $\mathcal{B}$. $\square$

Seguindo (PAZY, 2012), temos a próxima definição.

Definição 3.6.1 (Solução clássica). Uma função contínua $[x(\cdot), y(\cdot)] : [0, \tau] \rightarrow X^{\frac{1}{2}} \times X$ é dita uma solução clássica de (3.2.2)-(3.2.3) em $[0, \tau]$ se $[x(\cdot), y(\cdot)]$ é contínua em $[0, \tau]$, continuamente diferenciável em $(0, \tau]$, $[x(t)], [y(t)] \in D(\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})})$, para $0 < t \leq \tau$, e as equações (3.2.2)-(3.2.3) são satisfeitas.

De posse desta definição obtemos o seguinte teorema:

Teorema 3.6.2. *Assuma que $u_0 \in X^1$ e $v_0 \in X^{\frac{1}{2}}$. Suponha ainda que $f : [0, \tau] \times X^{\frac{1}{2}} \times X \rightarrow X$ é uma função contínua tal que $Im(f) \subseteq X^{\frac{1}{2}}$, a função $A^{\frac{1}{2}}f(\cdot, u, v)$ é mensurável para*

todo $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in X^{\frac{1}{2}} \times X$ e $A^{\frac{1}{2}}f(\cdot, 0, 0)$ é integrável em $[0, \tau]$. Se existir uma constante $L \geq 0$ tal que a seguinte condição de Lipschitz é satisfeita:

(C18) $\|A^{\frac{1}{2}}f(t, u_1, v_1) - A^{\frac{1}{2}}f(t, u_2, v_2)\|_X \leq L[\|u_1 - u_2\|_{X^{\frac{1}{2}}} + \|v_1 - v_2\|_X]$, para todo $[u_i, v_i] \in X^{\frac{1}{2}} \times X$, $i = 1, 2$ e cada $t \in [0, \tau]$,

então o problema (3.2.2)-(3.2.3) admite uma única solução clássica.

Observação 3.6.1. Vale a pena mencionar que no Teorema 3.6.2 podemos trocar a condição $Im(f) \subseteq X^{\frac{1}{2}}$ por uma mais fraca. De modo mais específico, assumimos que $u_0 \in X^1$, $v_0 \in X^{\frac{1}{2}}$ e que $f : [0, \tau] \times X^{\frac{1}{2}} \times X \rightarrow X$ é uma função contínua. Além disso supomos que existe $0 < \alpha < 1$ tal que $Im(f) \subseteq X^{\frac{1-\alpha}{2}}$, a função $A^{\frac{1-\alpha}{2}}f(\cdot, u, v)$ é mensurável para todo $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in X^{\frac{1}{2}} \times X$ e $A^{\frac{1-\alpha}{2}}f(\cdot, 0, 0)$ é integrável em $[0, \tau]$. Se admitirmos que existe uma constante $L > 0$ tal que a seguinte condição de Lipschitz é satisfeita:

(C19) $\|A^{\frac{1-\alpha}{2}}f(t, u_1, v_1) - A^{\frac{1-\alpha}{2}}f(t, u_2, v_2)\|_X \leq L[\|u_1 - u_2\|_{X^{\frac{1}{2}}} + \|v_1 - v_2\|_X]$, para todo $[u_i, v_i] \in X^{\frac{1}{2}} \times X$, $i = 1, 2$ e cada $t \in [0, \tau]$,

então (3.2.2)-(3.2.3) admite uma única solução clássica.

Demonstração do Teorema 3.6.2. Seja C_* o conjunto consistindo de todas as funções contínuas $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} : [0, \tau] \rightarrow X^{\frac{1}{2}} \times X$ tais que $u(0) = v_0$, $v(0) = -Au_0 - 2\eta A^{\frac{1}{2}}v_0 + f(0, u_0, v_0)$. Notemos que C_* é um subconjunto fechado e convexo de $C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)$. Definimos o mapa $\Upsilon_{(\frac{1}{2})}$ em C_* pela expressão

$$\Upsilon_{(\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} (t) = -\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})} e^{-\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}t} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} - \mathcal{A}_{(\frac{1}{2})} \int_0^t e^{-\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}(t-s)} \gamma_{u,v}(s) ds + \gamma_{u,v}(t), \quad (3.6.35)$$

onde

$$\gamma_{u,v}(t) := F \left(t, \begin{bmatrix} \int_0^t u(\tau) d\tau + u_0 \\ \int_0^t v(\tau) d\tau + v_0 \end{bmatrix} \right). \quad (3.6.36)$$

Fica claro então que $\Upsilon_{(\frac{1}{2})}$ está bem definido de C_* em C_* . Além disso, para

$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} \in C_*, i = 1, 2$; temos

$$\begin{aligned}
& \left\| \Upsilon_{(\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} (t) - \Upsilon_{(\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} (t) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \\
& \leq \left\| \int_0^t e^{-\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}(t-s)} (-\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})})(\gamma_{u_1, v_1}(s) - \gamma_{u_2, v_2}(s)) ds \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \\
& \quad + \|\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} \left\| \mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}(\gamma_{u_1, v_1}(t) - \gamma_{u_2, v_2}(t)) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \\
& \leq K \int_0^t e^{-C(t-s)} \left(\left\| f(s, \int_0^s u_1(\tau) d\tau + u_0, \int_0^s v_1(\tau) d\tau + v_0) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - f(s, \int_0^s u_2(\tau) d\tau + u_0, \int_0^s v_2(\tau) d\tau + v_0) \right\|_{X^{\frac{1}{2}}} \right. \\
& \quad \left. + 2\eta \left\| A^{\frac{1}{2}} f(s, \int_0^s u_1(\tau) d\tau + u_0, \int_0^s v_1(\tau) d\tau + v_0) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - A^{\frac{1}{2}} f(s, \int_0^s u_2(\tau) d\tau + u_0, \int_0^s v_2(\tau) d\tau + v_0) \right\|_X \right) ds \\
& \quad + \|\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} \left(\left\| f(t, \int_0^t u_1(s) ds + u_0, \int_0^t v_1(s) ds + v_0) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - f(t, \int_0^t u_2(s) ds + u_0, \int_0^t v_2(s) ds + v_0) \right\|_{X^{\frac{1}{2}}} \right. \\
& \quad \left. + 2\eta \left\| A^{\frac{1}{2}} f(t, \int_0^t u_1(s) ds + u_0, \int_0^t v_1(s) ds + v_0) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - A^{\frac{1}{2}} f(t, \int_0^t u_2(s) ds + u_0, \int_0^t v_2(s) ds + v_0) \right\|_X \right) \\
& \leq KL(1 + 2\eta) \int_0^t \left\| \begin{bmatrix} \left(\int_0^s u_1(\tau) d\tau + u_0 \right) - \left(\int_0^s u_2(\tau) d\tau + u_0 \right) \\ \left(\int_0^s v_1(\tau) d\tau + u_0 \right) - \left(\int_0^s v_2(\tau) d\tau + u_0 \right) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \\
& \quad + \|\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} (1 + 2\eta) \left\| \begin{bmatrix} \left(\int_0^t u_1(s) ds + u_0 \right) - \left(\int_0^t u_2(s) ds + u_0 \right) \\ \left(\int_0^t v_1(s) ds + u_0 \right) - \left(\int_0^t v_2(s) ds + u_0 \right) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \\
& \leq KL(1 + 2\eta) \int_0^t \int_0^s \left\| \begin{bmatrix} u_1(\tau) - u_2(\tau) \\ v_1(\tau) - v_2(\tau) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} d\tau ds \\
& \quad + \|\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} L(1 + 2\eta) \int_0^t \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \\
& \leq t\Xi \max_{0 \leq s \leq t} \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X},
\end{aligned}$$

onde $\Xi = L(1 + 2\eta)(K\tau + \|\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)})$. Com um argumento de indução obtemos

$$\left\| \Upsilon_{(\frac{1}{2})}^n \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} (t) - \Upsilon_{(\frac{1}{2})}^n \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} (t) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \leq \frac{t^n \Xi^n}{n!} \max_{0 \leq s \leq t} \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X},$$

e segue daí que $\Upsilon_{(\frac{1}{2})}^n$ é uma $\frac{(\tau\Xi)^n}{n!}$ -contração para n suficientemente grande. Logo, pelo

método de iteração, $\Upsilon_{(\frac{1}{2})}$ admite um único ponto fixo $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in C_*$.

A seguir, definimos $[x(\cdot), y(\cdot)] : [0, \tau] \rightarrow X^{\frac{1}{2}} \times X$ por $x(t) = \int_0^t u(s)ds + u_0$, $y(t) = \int_0^t v(s)ds + v_0$, e

$$\begin{bmatrix} z(t) \\ w(t) \end{bmatrix} = e^{-\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}t} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} + \int_0^t e^{-\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}(t-s)} F\left(s, \begin{bmatrix} x(s) \\ y(s) \end{bmatrix}\right) ds. \quad (3.6.37)$$

Notemos que $\begin{bmatrix} z(\cdot) \\ w(\cdot) \end{bmatrix}$ é uma solução branda para o problema de Cauchy abstrato:

$$\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}_t = -\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} + F\left(t, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right); \quad z(0) = u_0, \quad w(0) = v_0. \quad (3.6.38)$$

Fazendo uso de (CUEVAS et al., 2017, Lema 2.3 e Lema 2.4) concluímos que $\begin{bmatrix} z(\cdot) \\ w(\cdot) \end{bmatrix}$ é uma solução clássica para (3.6.38) e assim obtemos

$$\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_t.$$

Portanto, $\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, e com isto finalizamos a prova do Teorema 3.6.2. $\square$

Demonstração da Observação 3.6.1. Por uma questão de brevidade, faremos apenas um esboço da demonstração da Observação 3.6.1, deixando os detalhes a cargo do leitor. Definamos o mapa ${}^\alpha\Upsilon_{(\frac{1}{2})}$ on C_* por

$${}^\alpha\Upsilon_{(\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} (t) = -\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})} e^{-\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}t} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} + \int_0^t (-\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})})^\alpha e^{-\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}(t-s)} (-\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})})^{1-\alpha} \gamma_{u,v}(s) ds + \gamma_{u,v}(t).$$

Notemos que existe uma constante positiva C_α tal que

$$\|(-\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})})^\alpha e^{-\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}t}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} \leq \frac{C_\alpha}{t^\alpha},$$

para $0 < t \leq \tau$. Podemos ver que o mapa ${}^\alpha\Upsilon_{(\frac{1}{2})} : C_* \rightarrow C_*$ está bem definido e além disso, para $[u_i, v_i] \in C_*$, $i = 1, 2$; temos

$$\begin{aligned} & \left\| {}^\alpha\Upsilon_{(\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} (t) - {}^\alpha\Upsilon_{(\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} (t) \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \\ & \leq C_\alpha L(1 + 2\eta) \int_0^t \frac{1}{(t-s)^\alpha} \int_0^s \left\| \begin{bmatrix} u_1(\tau) - u_2(\tau) \\ v_1(\tau) - v_2(\tau) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} d\tau ds \\ & \quad + \|(-\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})})^{\alpha-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} L(1 + 2\eta) \int_0^t \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \\ & \leq t\nu_\alpha \max_{0 \leq s \leq t} \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ v_1(s) - v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}, \end{aligned}$$

onde $\nu_\alpha = (1 + 2\eta)(C_\alpha L^{\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(3-\alpha)}} \tau^{1-\alpha} + \|(-\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})})^{\alpha-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)})$. Podemos inferir que ${}^\alpha \Upsilon_{(\frac{1}{2})}^n$ é uma $\frac{(\tau \nu_\alpha)^n}{n!}$ -contração para n suficientemente grande e com isto vemos que o operador ${}^\alpha \Upsilon_{(\frac{1}{2})}^n$ possui um ponto fixo. $\square$

O resultado a seguir corresponde a um tipo de teorema para equações diferenciais neutrais devido a Henríquez et al. (ver Teorema 2.12 em Ref. (CUEVAS et al., 2017)). Antes de enunciá-lo, é conveniente introduzirmos um novo conjunto de notações:

$$\xi_{u,v}(t) := A^{\frac{1}{2}} f(t, \int_0^t u(\tau) d\tau + u_0, \int_0^t v(\tau) d\tau + v_0); \quad (3.6.39)$$

$$\tilde{\gamma}_{u,v}(t) := \mathcal{A}_{(\frac{1}{2})} \int_0^t e^{-\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}(t-s)} \gamma_{u,v}(s) ds, \quad t \in [0, \tau]; \quad (3.6.40)$$

$$H_\rho := \{\gamma_{u,v} : [u, v] \in C_*, \| [u, v] \|_{C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \leq \rho\}; \quad (3.6.41)$$

$$\tilde{H}_\rho := \left\{ \tilde{\gamma}_{u,v} : \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in C_*, \left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \leq \rho \right\}. \quad (3.6.42)$$

Teorema 3.6.3. *Assuma que $u_0 \in X^1$, $v_0 \in X^{\frac{1}{2}}$, A tem operador resolvente compacto, a função $f : [0, \tau] \times X^{\frac{1}{2}} \times X \rightarrow X$ é contínua, $\text{Im}(f) \subseteq X^{\frac{1}{2}}$ e que $A^{\frac{1}{2}} f$ satisfaz as condições de Carathéodory (C) em $[0, \tau]$. Além disso suponha que as seguintes condições são satisfeitas:*

(a₁) *Existe uma função contínua não decrescente $W : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $\|A^{\frac{1}{2}} f(t, x, y)\|_X \leq W(\|x\|_{X^{\frac{1}{2}}} + \|y\|_X)$, para todo $t \in [0, \tau]$ e todo $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in X^{\frac{1}{2}} \times X$.*

(a₂) *Para cada $\rho > 0$ existe uma função contínua $V_\rho : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, $V_\rho(0) = 0$ tal que $\|\xi_{u,v}(t_2) - \xi_{u,v}(t_1)\|_X \leq V_\rho(t_2 - t_1)$, para todo $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in C_*$ com $\|[u, v]\|_{C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \leq \rho$.*

(a₃) *Existe uma constante $\tilde{\rho} > 0$ tal que $\left\| \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \leq \tilde{\rho}$ e*

$$K \left\| \mathcal{A}_{(\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} + (1 + 2\eta)(K\tau + \|\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)}) W((\tau + 1)\tilde{\rho}) \leq \tilde{\rho}.$$

Então (3.2.2)-(3.2.3) tem uma solução clássica.

Demonstração. Seja $\Upsilon_{(\frac{1}{2})} : C_* \rightarrow C_*$ o mapa definido por (3.6.35). Utilizando o teorema da convergência dominada de Lebesgue e o fato de que $A^{\frac{1}{2}} f$ satisfaz as condições de

Carathéodory e a condição (a_1) , deduzimos que $\Upsilon_{(\frac{1}{2})}$ é contínuo. Consideremos $\rho > 0$. De (a_2) temos

$$\begin{aligned} \|\gamma_{u,v}(t+s) - \gamma_{u,v}(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} &\leq \|\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} (1+2\eta) \|\xi_{u,v}(t+s) - \xi_{u,v}(t)\|_X \\ &\leq \|\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} (1+2\eta) V_\rho(s) \rightarrow 0 \text{ quando } s \rightarrow 0, \end{aligned}$$

o que nos mostra que H_ρ é equicontínuo. Além disso, podemos afirmar que H_ρ é um conjunto limitado de $X^{\frac{1}{2}} \times X$. De fato, dado $\gamma_{u,v} \in H_\rho$, então

$$\begin{aligned} &\sup_{0 \leq t \leq \tau} \|\gamma_{u,v}(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq \tau} \left(\|\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} (1+2\eta) \|A^{\frac{1}{2}} f(t, \int_0^t u(s) ds + u_0, \int_0^t v(s) ds + v_0)\|_X \right) \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq \tau} \left(\|\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} (1+2\eta) W \left(\int_0^t \left\| \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds + \left\| \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \right) \right) \\ &\leq \|\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} (1+2\eta) W(\rho\tau + \tilde{\rho}). \end{aligned}$$

Como $\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})} H_\rho(t)$ é um subconjunto limitado de $X^{\frac{1}{2}} \times X$ e $\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}^{-1}$ é um operador compacto, então,

$$H_\rho(t) = \mathcal{A}^{-1}_{(\frac{1}{2})} \left(\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})} H_\rho(t) \right)$$

é relativamente compacto em $X^{\frac{1}{2}} \times X$ e do teorema de Ascoli-Arzelá inferimos que H_ρ é relativamente compacto em $C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)$. Usando agora o fato de que $e^{-\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})} t}$ é compacto para $t > 0$, temos que o conjunto $\tilde{H}_\rho$ também é relativamente compacto em $C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)$. Portanto, podemos deduzir que $\Upsilon_{(\frac{1}{2})}$ é um mapa completamente contínuo.

Mais ainda, se $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in B_{\tilde{\rho}}(C_*)$, de (a_3) vemos que

$$\begin{aligned} &\left\| \Upsilon \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} (t) \right\|_{C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \\ &\leq K \left\| \mathcal{A}_{(\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} + (1+2\eta) \left(\|\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} \right) W(\tilde{\rho}\tau + \tilde{\rho}) \leq \tilde{\rho}, \end{aligned}$$

e daí segue que $\Upsilon_{(\frac{1}{2})}(B_{\tilde{\rho}}(C_*)) \subseteq B_{\tilde{\rho}}(C_*)$. Finalmente, aplicando o teorema do ponto fixo de Schauder-Tichonoff, encerramos a demonstração do teorema. $\square$

Procedendo em nosso estudo, consideremos a seguinte definição:

Definição 3.6.2 (Solução forte). Uma função contínua $[x(\cdot), y(\cdot)] : [0, \tau] \rightarrow X^{\frac{1}{2}} \times X$ é dita uma solução forte de (3.2.2)-(3.2.3) se $[x(\cdot), y(\cdot)] \in W^{1,p}([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)$ (o espaço de Sobolev padrão, ver (ADAMS, 1975)), (3.2.2) é satisfeita para quase todo $t \in [0, \tau]$ e $x(0) = u_0$, $y(0) = v_0$.

Denotemos agora por C_*^p o espaço métrico formado por todas as funções p -integráveis $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ de $[0, \tau]$ em $X^{\frac{1}{2}} \times X$ tais que $u(0) = v_0$, $v(0) = -Au_0 - 2\eta A^{\frac{1}{2}}v_0 + f(0, u_0, v_0)$, munido com a métrica

$$d_p\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) = \left(\int_0^\tau \left\| \begin{bmatrix} u_1(s) \\ v_1(s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2(s) \\ v_2(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p ds\right)^{\frac{1}{p}},$$

e

$$\begin{aligned} \delta_f(u_1, v_1, u_2, v_2)(s) &= A^{\frac{1}{2}}f(s, \int_0^s u_1(\tau)d\tau + u_0, \int_0^s v_1(\tau)d\tau + v_0) \\ &\quad - A^{\frac{1}{2}}f(s, \int_0^s u_2(\tau)d\tau + u_0, \int_0^s v_2(\tau)d\tau + v_0). \end{aligned}$$

De posse destas notações podemos estabelecer o resultado abaixo.

Teorema 3.6.4. *Assuma que $u_0 \in X^1$ e $v_0 \in X^{\frac{1}{2}}$, a função $f : [0, \tau] \times X^{\frac{1}{2}} \times X \rightarrow X$ é tal que $Im(f) \subseteq X^{\frac{1}{2}}$, $A^{\frac{1}{2}}f$ satisfaz a condição de Carathéodory (C) em $[0, \tau]$ e $A^{\frac{1}{2}}f(\cdot, 0, 0)$ é p -integrável em $[0, \tau]$. Suponhamos que a seguinte condição se verifica:*

(C20) *Existe uma função positiva $m \in L^p[0, \tau]$ tal que para todo $t \in [0, \tau]$ e todo $[u_i, v_i] \in C_*^p$, $i = 1, 2$, temos*

$$\int_0^t \|\delta_f(u_1, v_1, u_2, v_2)(s)\|_{X^{\frac{1}{2}}}^p ds \leq m(t)^p \int_0^t (\|u_1(s) - u_2(s)\|_{X^{\frac{1}{2}}} + \|v_1(s) - v_2(s)\|_X)^p ds.$$

If $(1 + 2\eta)(K\|m\|_{L^p[0, \tau]} + m(\tau)\|\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)}) < 1$, então o problema (3.2.2)-(3.2.3) tem uma única solução forte em $[0, \tau]$.

Demonstração. Consideremos o operador $\Upsilon_{(\frac{1}{2})}$ em C_*^p definido por (3.6.35). Podemos verificar que

$$\begin{aligned} &\left(\int_0^\tau \left\| \mathcal{A}_{(\frac{1}{2})} \int_0^t e^{-\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}(t-s)} \gamma_{u,v}(s) ds \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq K \left(\int_0^\tau \left(\int_0^t e^{-C(t-s)} \|\xi_{u,v}(s)\|_X ds\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq K(1 + 2\eta) \left(\int_0^\tau \left(\int_0^t e^{-C(t-s)} \left(\|\xi_{u,v}(s) - A^{\frac{1}{2}}f(s, 0, 0)\|_X + \|A^{\frac{1}{2}}f(s, 0, 0)\|_X\right) ds\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq K(1 + 2\eta) \left(\int_0^\tau \left(\int_0^t e^{-C(t-s)} \|\delta_1 f(u, v, 0, 0)(s)\|_X ds\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + K(1 + 2\eta) \left(\int_0^\tau \left(\int_0^t e^{-C(t-s)} \|A^{\frac{1}{2}}f(s, 0, 0)\|_X ds\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq K(1 + 2\eta) \left(\frac{1}{C}\right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_0^\tau \int_0^t e^{-C(t-s)} \|\delta_f(u, v, 0, 0)(s)\|_{X^{\frac{1}{2}}}^p ds dt\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + K(1 + 2\eta) \left(\frac{1}{C}\right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_0^\tau \int_0^t e^{-C(t-s)} \|A^{\frac{1}{2}}f(s, 0, 0)\|_X^p ds dt\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq K(1 + 2\eta) \left(\frac{1}{C}\right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_0^\tau \int_s^\tau m(t)^p \left\| \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p dt ds\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + K(1 + 2\eta) \left(\frac{1}{C}\right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_0^\tau \int_s^\tau \|A^{\frac{1}{2}}f(s, 0, 0)\|_X^p dt ds\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

$$\leq K(1 + 2\eta) \left(\frac{1}{C} \right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\|m\|_{L^p[0,\tau]} \| [u, v] \|_{L^p([0,\tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)} + \tau^{1/p} \| A^{\frac{1}{2}} f(\cdot, 0, 0) \|_{L^p([0,\tau]; X)} \right).$$

Além do mais

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^\tau \| \gamma_{u,v}(t) \|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq \| \mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}^{-1} \|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} (1 + 2\eta) \left(\left(\int_0^\tau \| \delta_f(u, v, 0, 0)(t) \|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^\tau \| A^{\frac{1}{2}} f(t, 0, 0) \|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \right) \\ & \leq \| \mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}^{-1} \|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} (1 + 2\eta) \left(m(\tau) \| [u, v] \|_{L^p([0,\tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)} + \| A^{\frac{1}{2}} f(\cdot, 0, 0) \|_{L^p([0,\tau]; X)} \right). \end{aligned}$$

Notemos que as duas últimas estimativas são responsáveis pelo fato de $\Upsilon_{(\frac{1}{2})}$ estar bem definido. Tomando agora $\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} \in C_*^p$, $i = 1, 2$; obtemos

$$\begin{aligned} & \left\| \Upsilon_{(\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \Upsilon_{(\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{L^p([0,\tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \\ & \leq \left(\int_0^\tau \left\| \int_0^t e^{-\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}(t-s)} \mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}(\gamma_{u_1,v_1}(s) - \gamma_{u_2,v_2}(s)) ds \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \quad + \left(\int_0^\tau \| \gamma_{u_1,v_1}(t) - \gamma_{u_2,v_2}(t) \|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq K(1 + 2\eta) \left(\int_0^\tau \int_0^t \| \delta_f(u_1, v_1, u_2, v_2)(s) \|_X^p ds dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \quad + (1 + 2\eta) \| \mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}^{-1} \|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} \left(\int_0^\tau \| \delta_f(u_1, v_1, u_2, v_2)(t) \|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq (1 + 2\eta) (K \| m \|_{L^p[0,\tau]} + m(\tau) \| \mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}^{-1} \|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)}) \\ & \quad \times \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{L^p([0,\tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)}. \end{aligned}$$

Sejam $\begin{bmatrix} x(\cdot) \\ y(\cdot) \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} z(\cdot) \\ w(\cdot) \end{bmatrix}$ as funções dadas em (3.6.37). Como $\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} z(\cdot) \\ w(\cdot) \end{bmatrix}$ é uma função p -integrável, usando (CUEVAS et al., 2017, Lema 2.3), chegamos a conclusão que $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ é uma solução forte do problema (3.2.2)-(3.2.3). $\square$

O resultado que apresentaremos agora também corresponde a um tipo de teorema para equações diferenciais neutrais devido a Henríquez et al. (ver Teorema 3.6 em Ref. (CUEVAS et al., 2017)).

Teorema 3.6.5. *Assuma que $u_0 \in X^1$, $v_0 \in X^{\frac{1}{2}}$, A tem operador resolvente compacto, a função $f : [0, \tau] \times X^{\frac{1}{2}} \times X \rightarrow X$ é tal que $\text{Im}(f) \subseteq X^{\frac{1}{2}}$ e que a aplicação $A^{\frac{1}{2}} f$ satisfaz as condições de Carathéodory (C) em $[0, \tau]$. Além disso, são verificadas as seguintes condições:*

(C21) *Existe uma constante $N \geq 0$ e uma função positiva $W \in L^p[0, \tau]$ tal que $\| A^{\frac{1}{2}} f(t, u, v) \|_X \leq W(t) + N [\| u \|_{X^{\frac{1}{2}}} + \| v \|_X]$, para todo $[u, v] \in X^{\frac{1}{2}} \times X$ e cada $t \in [0, \tau]$.*

(C22) Para cada $\rho, \varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\int_{t_1}^{t_2} \|A^{\frac{1}{2}} f(t+h, u, v) - A^{\frac{1}{2}} f(t, u, v)\|_X^p dt \leq (t_2 - t_1) \varepsilon^p, \quad (3.6.43)$$

para todo $t_1, t_2 \in [0, \tau]$, $t_1 \leq t_2$, $[u, v] \in X^{\frac{1}{2}} \times X$ com $\left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \leq \rho$, e $|h| \leq \delta$. (Em (3.6.43) consideramos $f(s, u, v) = 0$ quando $s \notin [0, \tau]$).

(C23) Para cada número positivo ρ existe uma função contínua $V_\rho : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ com $V_\rho(0) = 0$ tal que

$$V_\rho(|h|)^p \geq \int_0^\tau \left\| A^{\frac{1}{2}} f(s, \int_0^{s+h} u(\tau) d\tau + u_0, \int_0^{s+h} v(\tau) d\tau + v_0) - A^{\frac{1}{2}} f(s, \int_0^s u(\tau) d\tau + u_0, \int_0^s v(\tau) d\tau + v_0) \right\|_X^p ds,$$

para todo $[u, v] \in C_*^p$ com $\|[u, v]\|_{L^p([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \leq \rho$. (Consideramos $u(s) = v(s) = 0$ quando $s \notin [0, \tau]$).

(C24) Existe uma constante $\tilde{\rho} > 0$ tal que $\left\| \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \leq \tilde{\rho}$ e

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &\geq \frac{K}{(Cp)^{\frac{1}{p}}} \left((1+2\eta) \|A^{\frac{1}{2}} v_0\|_X + \|Au_0\|_X \right) + (1+2\eta) \left(\frac{4K(p-1)}{Cp} \tau^{\frac{1}{p}} + \|\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} \right) \\ &\quad \times \left(\|W\|_{L^p[0, \tau]} + N(\tau + \tau^{\frac{1}{p}}) \tilde{\rho} \right). \end{aligned}$$

Então o problema (3.2.2)-(3.2.3) admite uma solução forte em $[0, \tau]$.

Demonstração. Para a demonstração do Teorema 3.6.5 necessitamos introduzir as seguintes notações:

$$H_\rho := \{ \gamma_{u,v} : [u, v] \in C_*^p, \|[u, v]\|_{L^p([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \leq \rho \},$$

$$H_\rho^\sharp := \{ \tilde{\gamma}_{u,v} : [u, v] \in C_*^p, \|[u, v]\|_{L^p([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \leq \rho \},$$

onde $\rho > 0$, $\gamma_{u,v}$ e $\tilde{\gamma}_{u,v}$ são as funções dadas em (3.6.36)-(3.6.40), respectivamente.

Consideremos o mapa $\Upsilon_{(\frac{1}{2})} : C_*^p \rightarrow C_*^p$ definido por (3.6.35). Fica claro, então que $\Upsilon_{(\frac{1}{2})}$ está bem definido. Dado $\rho > 0$, afirmamos que H_ρ é um conjunto relativamente compacto em $L^p([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)$. Para provar esta afirmação, faremos uso do teorema de Riesz-Weyl-Kolmogorov (ver Teorema 2.9.4). Consideremos $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in C_*^p$ com

$$\left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{L^p([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \leq \rho. \text{ Usando (C21) obtemos}$$

$$\begin{aligned}
& \|\gamma_{u,v}(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \\
& \leq (1 + 2\eta) \|\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} \|A^{\frac{1}{2}} f(t, \int_0^t u(s)ds + u_0, \int_0^t v(s)ds + v_0)\|_X \\
& \leq (1 + 2\eta) \|\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} \left(W(t) + N \left(\int_0^t \left\| \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} ds \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left\| \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \right) \right) \\
& \leq (1 + 2\eta) \|\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} \left(W(t) + N \left(\tau^{\frac{1}{q}} \rho + \left\| \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \right) \right). \quad (3.6.44)
\end{aligned}$$

De (3.6.44) deduzimos que

$$\sup_{L^p} H_\rho \leq (1 + 2\eta) \|\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} \left(\|W\|_{L^p[0,\tau]} + N \left(\tau \rho + \tau^{\frac{1}{p}} \left\| \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X} \right) \right), \quad (3.6.45)$$

isto é, H_ρ é um conjunto limitado em $L^p([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)$. Seja $\epsilon > 0$ dado em **(C22)**. Levando em conta a condição **(C23)**, o Lema 2.9.6 e tomando $|h|$ suficientemente pequeno, obtemos

$$\begin{aligned}
& \left(\int_0^\tau \|\gamma_{u,v}(t+h) - \gamma_{u,v}(t)\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X}^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \leq (1 + 2\eta) \|\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} \left(\int_0^\tau \|\xi_{u,v}(t+h) - \xi_{u,v}(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \leq (1 + 2\eta) \|\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} \\
& \quad \times \left(\left(\int_0^\tau \left\| \xi_{u,v}(t+h) - A^{\frac{1}{2}} f(t, \int_0^{t+h} u(\tau)d\tau + u_0, \int_0^{t+h} v(\tau)d\tau + v_0) \right\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_0^\tau \left\| A^{\frac{1}{2}} f(t, \int_0^{t+h} u(\tau)d\tau + u_0, \int_0^{t+h} v(\tau)d\tau + v_0) - \xi_{u,v}(t) \right\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \right) \\
& \leq (1 + 2\eta) \|\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} (\tau^{\frac{1}{p}} \epsilon + V_\rho(|h|)). \quad (3.6.46)
\end{aligned}$$

Seja $\lambda \in R(\lambda, \mathcal{A}_{(\frac{1}{2})})$. Como $R(\lambda, \mathcal{A}_{(\frac{1}{2})})$ é um operador compacto e

$$\int_0^t \gamma_{u,v}(s)ds = \lambda R(\lambda, \mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}) \int_0^t \gamma_{u,v}(s)ds - R(\lambda, \mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}) \int_0^t \mathcal{A}_{(\frac{1}{2})} \gamma_{u,v}(s)ds,$$

temos que $\{\int_0^t \gamma_{u,v}(s)ds : \gamma_{u,v} \in H_\rho\}$ é relativamente compacto em $X^{\frac{1}{2}} \times X$ para todo $t \in [0, \tau]$. Desta propriedade, juntamente com (3.6.44), (3.6.45) e (3.6.46), podemos verificar que H_ρ satisfaz todas as condições do Teorema 2.9.4, o qual implica que H_ρ é um conjunto relativamente compacto em $L^p([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)$. A seguir, levando em conta a condição **(C23)** e o fato de que $e^{-\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}t}$ é um operador compacto para $t > 0$, vemos que $H_\rho^\sharp$ é um conjunto relativamente compacto em $C([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)$. Consequentemente, $H_\rho^\sharp$ é também relativamente compacto em $L^p([0, \tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)$. Com isto mostramos que $\Upsilon_{(\frac{1}{2})}$ é um mapa

completamente contínuo. Agora notemos que se $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in C_*^p$ com $\left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{L^p([0,\tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \leq \tilde{\rho}$ e q é expoente conjugado de p , temos as seguintes estimativas:

$$\|\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})} e^{-\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})} [u_0, v_0]}\|_{L^p([0,\tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \leq \frac{K}{\sqrt[p]{Cp}} ((1 + 2\eta) \|A^{\frac{1}{2}} v_0\|_X + \|Au_0\|_X),$$

$$\|\gamma_{u,v}\|_{L^p([0,\tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \leq (1 + 2\eta) \|\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X)} (\|W\|_{L^p[0,\tau]} + N(\tau + \tau^{\frac{1}{p}}) \tilde{\rho}).$$

E por fim,

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})} \int_0^\bullet e^{-\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}(\bullet-s)} \gamma_{u,v}(s) ds\|_{L^p([0,\tau]; X^{\frac{1}{2}} \times X)} \\ & \leq K(1 + 2\eta) \left(\int_0^\tau \left(\int_0^t e^{-C(t-s)} \|\xi_{u,v}(s)\|_X ds \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq \frac{K(1 + 2\eta)}{Cq} \left(\tau \|W\|_{L^p[0,\tau]}^p + (2N\tilde{\rho})^p \int_0^\tau \left(\frac{t^p}{p} + t \right) dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq \frac{2K(1 + 2\eta)}{Cq} \left(\tau^{\frac{1}{p}} \|W\|_{L^p[0,\tau]} + 2N \left(\frac{1}{(p(p+1))^{1/p}} \tau^{1+\frac{1}{p}} + \frac{1}{\sqrt[p]{2}} \tau^{\frac{2}{p}} \right) \tilde{\rho} \right). \end{aligned}$$

Das estimativas precedentes e da condição **(C24)** inferimos que $B_{\tilde{\rho}}(C_*^p)$ é invariante sob $\Upsilon_{(\frac{1}{2})}$. Aplicando o teorema do ponto fixo de Schauder-Tichonoff, chegamos a conclusão da existência de um ponto fixo $\begin{bmatrix} u(\cdot) \\ v(\cdot) \end{bmatrix} \in B_{\tilde{\rho}}(C_*^p)$ para o operador $\Upsilon_{(\frac{1}{2})}$, e isto completa a prova do Teorema 3.6.5. $\square$

3.7 Aplicações

Nesta seção consideramos algumas aplicações dos resultados estabelecidos nas seções anteriores deste capítulo. Seja Ω um domínio suave limitado em $\mathbb{R}^N$.

Exemplo 3.7.1. Suponhamos que $h_1, h_2 \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $a, b \in C_b(\mathbb{R}^+; \mathbb{R})$, $\nu, \mu \in \mathbb{R}$, e $\delta > 0$. Consideramos a seguinte equação diferencial parcial:

$$u_{tt} + \nu b(t)u_t + \Delta^2 u - \delta \Delta u_t = \mu a(t)(h_1(\nabla \cdot u) + h_2(\Delta u)), \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0, \quad (3.7.47)$$

$$u = \Delta u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \quad (3.7.48)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad u_t(0, x) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (3.7.49)$$

onde h_i , $i = 1, 2$ satisfaz a condição de crescimento a seguir:

$$|h_i(s_1) - h_i(s_2)| \leq C_{h_i} |s_1 - s_2|, \quad s_1, s_2 \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \quad (3.7.50)$$

com C_{h_i} , $i = 1, 2$, constantes positivas. Descrevemos aqui o comportamento pseudo S -assintoticamente ω -periódico das soluções do problema (3.7.47)-(3.7.49) no espaço L^p . Para modelar este problema na forma abstrata (3.1.1) tomamos $\eta = \frac{\delta}{2}$, $p > \frac{N}{2}$ e o operador A definido em $L^p(\Omega)$ por $Au = \Delta_D^2 u$ (Δ_D é o Laplaciano de Dirichlet em Ω) no domínio

$$D(\Delta_D^2) = \{\phi \in H_p^4(\Omega) : \phi = \Delta\phi = 0 \text{ on } \partial\Omega\}, \quad (3.7.51)$$

onde $H_p^4(\Omega) = W^{4,p}(\Omega)$. De posse desta especificação para o problema (3.7.47)-(3.7.49), nos deparamos com a formulação abstrata (3.1.1). Como $A^{\frac{1}{2}} = -\Delta_D$, podemos escolher o ângulo ψ para o setor

$$\Sigma_{\frac{\psi}{2}} = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \frac{\psi}{2} \leq |\arg \lambda| \leq \pi \text{ com } \psi \in (0, \frac{\pi}{2}) \right\} \quad (3.7.52)$$

tão pequeno quanto necessário e além disso, (η, A) é um par admissível para qualquer $\eta > 0$ (ver (CARVALHO; CHOLEWA; DLOTKO, 2008)). De (CARVALHO; CHOLEWA; DLOTKO, 2008, Seção 3) obtemos que $[L^p(\Omega)]^{\frac{1}{2}} = \left\{ \phi \in H_p^2(\Omega) : \phi = \Delta\phi = 0 \text{ em } \partial\Omega \right\}$. Definimos agora $f : \mathbb{R}^+ \times [L^p(\Omega)]^{\frac{1}{2}} \times L^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ por

$$f(t, \varphi_1, \varphi_2) = \mu a(t) \left(h_1^e(\nabla \cdot \varphi_1) + h_2^e(\Delta \varphi_1) \right) - \nu b(t) \varphi_2, \quad t \in \mathbb{R}^+, \varphi_1 \in [L^p(\Omega)]^{\frac{1}{2}}, \varphi_2 \in L^p(\Omega), \quad (3.7.53)$$

onde θ^e é o operador Nemytskii associado a θ . Para $\varphi, \varphi_0 \in [L^p(\Omega)]^{\frac{1}{2}}$ e $\psi, \psi_0 \in L^p(\Omega)$, temos as seguintes estimativas:

$$\begin{aligned} \|f(t, \varphi, \psi)\|_{L^p(\Omega)} &\leq |\mu| |a(t)| \left(\|h_1^e(\nabla \cdot \varphi)\|_{L^p(\Omega)} + \|h_2^e(\Delta \varphi)\|_{L^p(\Omega)} \right) + |\nu| |b(t)| \|\psi\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq |\mu| |a(t)| \left((C_{h_1} + C_{h_2}) \|\varphi\|_{H_p^2(\Omega)} + (|h_1(0)| + |h_2(0)|) |\Omega|^{\frac{1}{p}} \right) \\ &\quad + |\nu| |b(t)| \|\psi\|_{L^p(\Omega)}, \end{aligned} \quad (3.7.54)$$

$$\begin{aligned} &\|f(t, \varphi, \psi) - f(t_0, \varphi_0, \psi_0)\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq |\mu| |a(t) - a(t_0)| \left((C_{h_1} + C_{h_2}) \|\varphi\|_{H_p^2(\Omega)} + (|h_1(0)| + |h_2(0)|) |\Omega|^{\frac{1}{p}} \right) \\ &\quad + |\mu| |a(t_0)| (C_{h_1} + C_{h_2}) \|\varphi - \varphi_0\|_{H_p^2(\Omega)} + |\nu| |b(t)| \|\psi - \psi_0\|_{L^p(\Omega)}, \end{aligned} \quad (3.7.55)$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{t} \int_0^t \sup_{(\varphi, \psi) \in K} \|f(s + \omega, \varphi, \psi) - f(s, \varphi, \psi)\|_{L^p(\Omega)} ds \\ &\leq \frac{|\mu| T_1}{t} \int_0^t |a(s + \omega) - a(s)| ds + \frac{|\nu| T_2}{t} \int_0^t |b(s + \omega) - b(s)| ds, \end{aligned} \quad (3.7.56)$$

com $K \subseteq [L^p(\Omega)]^{\frac{1}{2}} \times L^p(\Omega)$ um conjunto limitado; T_1 e T_2 constantes positivas, e

$$\begin{aligned} \|f(t, \varphi, \psi) - f(t, \varphi_0, \psi_0)\|_{L^p(\Omega)} &\leq |\mu| \|a\|_{C_b(\mathbb{R}^+; \mathbb{R})} (C_{h_1} + C_{h_2}) \|\varphi - \varphi_0\|_{H_p^2(\Omega)} \\ &\quad + |\nu| \|b\|_{C_b(\mathbb{R}^+; \mathbb{R})} \|\psi - \psi_0\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned} \quad (3.7.57)$$

Notemos que (3.7.54) implica que f está bem definida. Como as funções $a(\cdot)$ e $b(\cdot)$ são limitadas, temos que f é limitada em conjuntos limitados de $[L^p(\Omega)]^{\frac{1}{2}} \times L^p(\Omega)$ (ver Definição 2.1.6). A

estimativa (3.7.55), por sua vez, implica que f é uma função contínua. Suponhamos que $a(\cdot)$ e $b(\cdot)$ são pseudo S -assintoticamente ω -periódicas, então f é uniformemente pseudo S -assintoticamente ω -periódica em conjuntos limitados de $[L^p(\Omega)]^{\frac{1}{2}} \times L^p(\Omega)$. Por fim, admitindo que $|\nu|$ e $|\mu|$ são escolhidos suficientemente pequenos e levando em conta (3.7.57), segue do Teorema 3.3.1 que o problema (3.7.47)-(3.7.49) tem uma única solução branda pseudo S -assintoticamente ω -periódica. Por outro lado, se assumimos que $a(\cdot) \in L^p(\mathbb{R}^+) \cap C_b(\mathbb{R}^+)$ e que $|\mu|$ e $|\nu|$ são constantes suficientemente pequenas, então do Teorema 3.4.1, concluímos que (3.7.47)-(3.7.49) possui uma única solução L^p -branda.

Exemplo 3.7.2. Consideremos o seguinte problema:

$$u_{tt}(t, \xi) + 2\eta(-\Delta)^{\frac{1}{2}}u_t(t, \xi) - \Delta u(t, \xi) = a(t)(\sin(u(t, \xi)) + \sin(u_t(t, \xi))), \quad \xi \in \Omega, \quad t \geq 0, \quad (3.7.58)$$

$$u(t, \xi) = 0, \quad \xi \in \partial\Omega, \quad t \geq 0, \quad (3.7.59)$$

$$u(0, \xi) = u_0(\xi), \quad u_t(0, \xi) = v_0(\xi), \quad \xi \in \Omega, \quad (3.7.60)$$

onde $a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função pseudo S -assintoticamente ω -periódica. Para modelar o problema acima na forma abstrata (3.1.1) tomamos $A = -\Delta_D$ em $X = L^p(\Omega)$ ($p > N$) com domínio $D(A) = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, e $v_0 \in L^p(\Omega)$. De (CARVALHO; CHOLEWA, 2007) obtemos $[L^p(\Omega)]^{\frac{1}{2}} = W_0^{1,p}(\Omega)$; $\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}$ é invertível; $\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})}$ tem operador resolvente compacto e $(-\mathcal{A}_{(\frac{1}{2})})$ gera em $W_0^{1,p}(\Omega) \times L^p(\Omega)$ um C^0 semigrupo analítico, o qual é compacto e decai assintoticamente. Podemos verificar sem dificuldades que as hipóteses do Teorema 3.3.2 são satisfeitas. De fato, seja $f(t, \varphi, \psi)$ a perturbação associada a (3.7.58)-(3.7.60), e seja K um subconjunto limitado de $W_0^{1,p}(\Omega) \times L^p(\Omega)$. Para $\varphi, \varphi_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\psi, \psi_0 \in L^p(\Omega)$, temos as estimativas:

$$\|f(t, \varphi, \psi)\|_{L^p(\Omega)} \leq \|a\|_{C_b(\mathbb{R}^+; \mathbb{R})} (\|\varphi\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|\psi\|_{L^p(\Omega)}), \quad (3.7.61)$$

$$\begin{aligned} & \|f(t, \varphi, \psi) - f(s, \varphi_0, \psi_0)\|_{L^p(\Omega)} \\ & \leq 2|\Omega|^{\frac{1}{p}} |a(t) - a(s)| + \|a\|_{C_b(\mathbb{R}^+; \mathbb{R})} (\|\varphi - \varphi_0\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|\psi - \psi_0\|_{L^p(\Omega)}), \end{aligned} \quad (3.7.62)$$

$$\begin{aligned} & \|f(t, \varphi, \psi) - f(t, \varphi_0, \psi_0)\|_{L^p(\Omega)} \\ & \leq \|a\|_{C_b(\mathbb{R}^+; \mathbb{R})} (\|\varphi - \varphi_0\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|\psi - \psi_0\|_{L^p(\Omega)}), \end{aligned} \quad (3.7.63)$$

$$\int_0^t \sup_{(\varphi, \psi) \in K} \|f(s + \omega, \varphi, \psi) - f(s, \varphi, \psi)\|_{L^p(\Omega)} ds \leq 2|\Omega|^{\frac{1}{p}} \int_0^t |a(s + \omega) - a(s)| ds. \quad (3.7.64)$$

Notemos que (3.7.61) implica que f está bem definida e que f é limitada em conjuntos limitados de $W_0^{1,p}(\Omega) \times L^p(\Omega)$. Além disso, as estimativas (3.7.62) e (3.7.64) nos mostram que f é uniformemente pseudo S -assintoticamente ω -periódica em conjuntos limitados de $W_0^{1,p}(\Omega) \times L^p(\Omega)$. Observamos agora que **(PS1)** é verificada para $W(\xi) = 2|\Omega|^{\frac{1}{p}} \|a\|_{C_b(\mathbb{R}^+; \mathbb{R})}$ e a condição **(PS2)**

segue para r suficientemente grande. Logo, do Teorema 3.6.2, concluímos que o problema (3.7.58)-(3.7.60) admite uma única solução branda pseudo S -assintoticamente ω -periódica. No entanto, se $a(\cdot) \in C[0, \tau]$, do Teorema 3.5.5 o conjunto das soluções brandas de (3.7.58)-(3.7.60) em $[0, \tau]$ é um conjunto R_δ . Notemos que **(C14)** segue com $m(t) = |a(t)|$ e $\Omega(x) = x$. Além do mais, um limite superior para o conjunto em **(C15)** é $2|\Omega|^{\frac{1}{p}}\|a\|_\infty$. Isto finaliza nossa discussão do Exemplo 3.7.2.

Exemplo 3.7.3. Suponhamos que $h, g \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $a, b \in C_b(\mathbb{R}^+; \mathbb{R})$, $\nu, \mu \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, e $\rho_1, \rho_2 \in (1, \infty)$. Consideramos a seguinte equação diferencial parcial:

$$u_{tt} + \nu b(t)u_t + \Delta^2 u - \delta \Delta u_t = \mu a(t) \left(\sum_{i,j} h(u) D_{i,j} u + g(u) \Delta u \right), \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0, \quad (3.7.65)$$

com condições iniciais (3.7.48)-(3.7.49), $D_{i,j} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$, $i, j \in \{1, \dots, N\}$, h e g satisfazendo as condições:

$$|h(s_1) - h(s_2)| \leq C_h |s_1 - s_2| (1 + |s_1|^{\rho_1-1} + |s_2|^{\rho_1-1}), \quad s_1, s_2 \in \mathbb{R}, \quad (3.7.66)$$

$$|g(s_1) - g(s_2)| \leq C_g |s_1 - s_2| (1 + |s_1|^{\rho_2-1} + |s_2|^{\rho_2-1}), \quad s_1, s_2 \in \mathbb{R}, \quad (3.7.67)$$

onde C_h e C_g são constantes positivas (para exemplificar tomamos $h(u) = g(u) = u|u|^{\rho-1}$). Para reescrever este problema na forma abstrata colocamos $\eta = \frac{\delta}{2}$, escolhemos $p > \frac{N}{2}$ e o operador A em (3.1.1) é definido em $L^p(\Omega)$ por $Au = \Delta_D^2 u$ no domínio (3.7.51), $u_0 \in D(-\Delta_D)$ e $v_0 \in L^p(\Omega)$. Definimos $f : \mathbb{R}^+ \times [L^p(\Omega)]^{\frac{1}{2}} \times L^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ por

$$f(t, \varphi_1, \varphi_2) = \mu a(t) \left(\sum_{i,j} h^e(\varphi_1) D_{i,j} \varphi_1 + g^e(\varphi_1) \Delta \varphi_1 \right) - \nu b(t) \varphi_2, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (3.7.68)$$

com $\varphi_1 \in [L^p(\Omega)]^{\frac{1}{2}}$ e $\varphi_2 \in L^p(\Omega)$. Para $\varphi \in [L^p(\Omega)]^{\frac{1}{2}}$ e $\psi \in L^p(\Omega)$, usando imersões de Sobolev e (GILBARG; TRUDINGER, 2001, Corolário 9.10), chegamos a seguinte estimativa a priori

$$\begin{aligned} \|f(t, \varphi, \psi)\|_{L^p(\Omega)} &\leq |\mu| |a(t)| \left(\|h^e(\varphi)\|_{L^\infty(\Omega)} \|D^2 \varphi\|_{L^p(\Omega)} + \|g^e(\varphi)\|_{L^\infty(\Omega)} \|\Delta \varphi\|_{L^p(\Omega)} \right) \\ &\quad + |\nu| |b(t)| \|\psi\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \tilde{C} |\mu| |a(t)| \left(\|h^e(\varphi)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|g^e(\varphi)\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \|\Delta \varphi\|_{L^p(\Omega)} \\ &\quad + |\nu| |b(t)| \|\psi\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

Portanto f está bem definida. Afirmamos que f satisfaz a condição **(L_{loc})** com $L_f(\sigma) = \tilde{C}(|\mu| + |\nu|)(\|a\|_{C_b(\mathbb{R}^+; \mathbb{R})} + \|b\|_{C_b(\mathbb{R}^+; \mathbb{R})})(1 + \sigma + \sigma^{\rho_1} + \sigma^{\rho_2})$. De fato, esta afirmação segue como consequência da seguinte estimativa (aqui $\tilde{C}$ representará qualquer constante positiva

independente de $\varphi, \varphi_0, \psi, \psi_0$ com $\varphi, \varphi_0 \in [L^p(\Omega)]^{\frac{1}{2}}$ e $\psi, \psi_0 \in L^p(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
& \|f(t, \varphi, \psi) - f(t, \varphi_0, \psi_0)\|_{L^p(\Omega)} \\
& \leq |\mu| |a(t)| \left(\| (h^e(\varphi) - h^e(\varphi_0)) \sum_{i,j} D_{i,j} \varphi \|_{L^p(\Omega)} + \| h^e(\varphi_0) \sum_{i,j} D_{i,j} (\varphi - \varphi_0) \|_{L^p(\Omega)} \right. \\
& \quad \left. + \| (g^e(\varphi) - g^e(\varphi_0)) \Delta \varphi \|_{L^p(\Omega)} + \| g^e(\varphi_0) \Delta (\varphi - \varphi_0) \|_{L^p(\Omega)} \right) + |\nu| |b(t)| \| \psi - \psi_0 \|_{L^p(\Omega)} \\
& \leq |\mu| \|a\|_{C_b(\mathbb{R}^+; \mathbb{R})} \left((1 + \|\varphi\|_{H_p^2(\Omega)}^{\rho_1-1} + \|\varphi_0\|_{H_p^2(\Omega)}^{\rho_1-1}) \|\varphi\|_{H_p^2(\Omega)} + (1 + \|\varphi\|_{H_p^2(\Omega)}^{\rho_2-1} + \|\varphi_0\|_{H_p^2(\Omega)}^{\rho_2-1}) \|\varphi\|_{H_p^2(\Omega)} \right. \\
& \quad \left. + 2(1 + \|\varphi_0\|_{H_p^2(\Omega)}) + \|\varphi_0\|_{H_p^2(\Omega)}^{\rho_1} + \|\varphi_0\|_{H_p^2(\Omega)}^{\rho_2} \right) \|\varphi - \varphi_0\|_{H_p^2(\Omega)} + |\nu| \|b\|_{C_b(\mathbb{R}^+; \mathbb{R})} \| \psi - \psi_0 \|_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Observamos agora que a desigualdade abaixo é responsável pelo fato de que f é limitada em conjuntos limitados de $[L^p(\Omega)]^{\frac{1}{2}} \times L^p(\Omega)$.

$$\begin{aligned}
\|f(t, \varphi, \psi)\|_{L^p(\Omega)} & \leq \tilde{C} |\mu| \|a\|_{C_b(\mathbb{R}^+; \mathbb{R})} (1 + \|\varphi\|_{H_p^2(\Omega)} + \|\varphi\|_{H_p^2(\Omega)}^{\rho_1} + \|\varphi\|_{H_p^2(\Omega)}^{\rho_2}) \|\varphi\|_{H_p^2(\Omega)} \\
& \quad + |\nu| \|b\|_{C_b(\mathbb{R}^+; \mathbb{R})} \| \psi \|_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, nós temos

$$\begin{aligned}
& \|f(t, \varphi, \psi) - f(t_0, \varphi_0, \psi_0)\|_{L^p(\Omega)} \\
& \leq \tilde{C} |\mu| |a(t) - a(t_0)| (\|\varphi\|_{H_p^2(\Omega)} + \|\varphi\|_{H_p^2(\Omega)}^2 + \|\varphi\|_{H_p^2(\Omega)}^{\rho_1+1} + \|\varphi\|_{H_p^2(\Omega)}^{\rho_2+1}) \\
& \quad + \tilde{C} |\mu| |a(t_0)| \left((1 + \|\varphi\|_{H_p^2(\Omega)}^{\rho_1-1} + \|\varphi_0\|_{H_p^2(\Omega)}^{\rho_1-1}) \|\varphi\|_{H_p^2(\Omega)} + 2(1 + \|\varphi_0\|_{H_p^2(\Omega)}) + \|\varphi_0\|_{H_p^2(\Omega)}^{\rho_1} \right. \\
& \quad \left. + \|\varphi_0\|_{H_p^2(\Omega)}^{\rho_2} + (1 + \|\varphi\|_{H_p^2(\Omega)}^{\rho_2-1} + \|\varphi_0\|_{H_p^2(\Omega)}^{\rho_2-1}) \|\varphi\|_{H_p^2(\Omega)} \right) \|\varphi - \varphi_0\|_{H_p^2(\Omega)} + |\nu| |b(t) - b(t_0)| \| \psi \|_{L^p(\Omega)} \\
& \quad + |\nu| |b(t_0)| \| \psi - \psi_0 \|_{L^p(\Omega)}, \tag{3.7.69}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& \sup \{ \|f(s + \omega, \varphi, \psi) - f(s, \varphi, \psi)\|_{L^p(\Omega)} : \|\varphi\|_{[L^p(\Omega)]^{\frac{1}{2}}} + \| \psi \|_{L^p(\Omega)} \leq \theta \} \\
& \leq |\mu| (\theta + \theta^2 + \theta^{\rho_1+1} + \theta^{\rho_2+1}) |a(s + \omega) - a(s)| + |\nu| \theta |b(s + \omega) - b(s)|. \tag{3.7.70}
\end{aligned}$$

Assumindo que $a(\cdot)$ e $b(\cdot)$ são funções pseudo S -assintoticamente ω -periódica, então de (3.7.69) e (3.7.70) deduzimos que f é uniformemente pseudo S -assintoticamente ω -periódica em conjuntos limitados de $[L^p(\Omega)]^{\frac{1}{2}} \times L^p(\Omega)$. Tomamos $|\mu| + |\nu|$ tão pequeno quanto necessário para satisfazer (3.3.15) e aplicando o Teorema 3.3.4 chegamos a conclusão que existe uma solução branda pseudo S -assintoticamente ω -periódica para a equação (3.7.65) com condições iniciais (3.7.48)-(3.7.49).

Exemplo 3.7.4. Suponha que $a, b \in L^1(\mathbb{R}^+) \cap C_b(\mathbb{R}^+; \mathbb{R})$, $g \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R})$, $\nu \in \mathbb{R}$, e $\delta, L > 0$. Consideramos o problema:

$$u_{tt} + \nu b(t) u_t + \Delta^2 u - \delta \Delta u_t = a(t) g(u, \nabla \cdot u), \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0, \tag{3.7.71}$$

com condições iniciais (3.7.48)-(3.7.49). Modelamos esse problema de modo similar ao Exemplo 3.7.1. Isto é, tomamos $\eta = \frac{\delta}{2}$, consideramos o operador A definido como em

(3.7.51)-(3.7.52), $u_0 \in D(-\Delta_D)$, $v_0 \in L^p(\Omega)$, e assumimos que $|g(u, w) - g(\tilde{u}, \tilde{w})| \leq L[|u - \tilde{u}| + |w - \tilde{w}|]$, $u, \tilde{u}, w, \tilde{w} \in \mathbb{R}^N$. Seja $f(t, \varphi, \psi)$ a perturbação associada a equação (3.7.73). Para $\varphi, \varphi_0 \in [L^p(\Omega)]^{\frac{1}{2}}$ e $\psi, \psi_0 \in L^p(\Omega)$, temos as seguintes estimativas

$$\|f(t, \varphi, \psi)\|_{L^p(\Omega)} \leq \|a\|_{C_b(\mathbb{R}^+; \mathbb{R})}(L\|\varphi\|_{H_p^2(\Omega)} + |g(0, 0)|\|\Omega\|^{\frac{1}{p}}) + |\nu|\|b\|_{C_b(\mathbb{R}^+; \mathbb{R})}\|\psi\|_{L^p(\Omega)},$$

$$\begin{aligned} \|f(t, \varphi, \psi) - f(t_0, \varphi_0, \psi_0)\|_{L^p(\Omega)} &\leq |a(t) - a(t_0)|(L\|\varphi\|_{H_p^2(\Omega)} + |g(0, 0)|\|\Omega\|^{\frac{1}{p}}) \\ &\quad + L|a(t_0)|\|\varphi - \varphi_0\|_{H_p^2(\Omega)} + |\nu|\|b(t) - b(t_0)\|\|\psi\|_{L^p(\Omega)} \\ &\quad + |\nu|\|b(t_0)\|\|\psi - \psi_0\|_{L^p(\Omega)}, \\ &\leq (L|a(t)| + |\nu|\|b(t)\|)(\|\varphi - \varphi_0\|_{H_p^2(\Omega)} + \|\psi - \psi_0\|_{L^p(\Omega)}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int_0^t \sup\{\|f(s + \omega, \varphi, \psi) - f(s, \varphi, \psi)\|_{L^p(\Omega)} : \|\varphi\|_{[L^p(\Omega)]^{\frac{1}{2}}} + \|\psi\|_{L^p(\Omega)} \leq r\} ds \\ &\leq 2(Lr + |g(0, 0)|\|\Omega\|^{\frac{1}{p}})\|a\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} + 2|\nu|r\|b\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}, \\ &\sup_{t \geq 0} \int_0^t e^{-C(t-s)}(L|a(s)| + |\nu|\|b(s)\|)ds \leq L\|a\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} + |\nu|\|b\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}, \\ &\frac{1}{l} \int_0^l \int_0^t e^{-C(t-s)}(L|a(s)| + |\nu|\|b(s)\|)dsdt \leq \frac{1}{Cl}(L\|a\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} + |\nu|\|b\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}). \end{aligned}$$

Assumindo que L e ν são suficientemente pequenos, pelo Teorema 3.3.5 inferimos que (3.7.73), com condições iniciais (3.7.48)-(3.7.49), possui uma solução branda pseudo S -assintoticamente ω -periódica. Em contrapartida, se assumimos que p e q são expoentes conjugados, $a \in L^1(\mathbb{R}^+) \cap L^q(\mathbb{R}^+) \cap C(\mathbb{R}^+)$, $b \in L^q(\mathbb{R}^+) \cap C(\mathbb{R}^+)$ e L e $|\nu|$ são suficientemente pequenos, então as hipóteses do Teorema 3.4.2 seguem, e podemos afirmar que existe uma única solução branda em L^p para a equação, (3.7.73) com condições iniciais (3.7.48)-(3.7.49).

Exemplo 3.7.5. Seja $h(\cdot)$ uma função contínua satisfazendo a condição $|h(\cdot)| \leq C_\odot|t|^\alpha$, $t \in \mathbb{R}$, para alguma constante $C_\odot > 0$ e $\alpha \in (0, 1)$. Assumimos $L(\cdot) \in C_0[0, \infty)$ e $\Phi_0 \in L^p(\Omega)$. Consideremos a equação diferencial parcial

$$u_{tt}(t, x) + 2\eta(-\Delta)^{\frac{1}{2}}u_t(t, x) - \Delta u(t, x) = h\left(\int_\Omega L(t)u(t, \xi)d\xi\right)\Phi_0(x), \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0, \quad (3.7.72)$$

com condições iniciais (3.7.59)-(3.7.60). A fim de reescrever o problema acima na forma abstrata (3.1.1), consideramos $A = -\Delta_D$ em $L^p(\Omega)$ com domínio $D(A) = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ (ver Exemplo 3.7.2). Tomamos $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $v_0 \in L^p(\Omega)$. Seja $f(t, \varphi, \psi)$ a perturbação associada a equação (3.7.72). Sem dificuldades podemos inferir que as hipóteses do Teorema 3.5.1 são satisfeitas. Se p e q são expoentes conjugados obtemos a desigualdade

$$\|f(t, \varphi, \psi)\|_{L^p(\Omega)} \leq C_\odot|L(t)|^\alpha|\Omega|^{\frac{\alpha}{q}}\|\Phi_0\|_{L^p(\Omega)}\|\varphi\|_{W^{1,p}(\Omega)}^\alpha, \quad (3.7.73)$$

para todo $t \geq 0$, $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\psi \in L^p(\Omega)$, a qual nos mostra que a condição **(C1)** se verifica com $\gamma_R(t) = C_\odot |L(t)|^\alpha |\Omega|^{\frac{\alpha}{q}} \|\Phi_0\|_{L^p(\Omega)} R^\alpha$. Além disso, para esta mesma $\gamma_R(t)$, **(C3)** é satisfeita quando $\alpha < 1$. Do Teorema 3.5.1 vemos que o conjunto das soluções brandas de (3.7.72), com condições iniciais (3.7.59)-(3.7.60), é compacto em $C_0([0, \infty); W_0^{1,p}(\Omega) \times L^p(\Omega))$.

Ainda tomando vantagem deste último exemplo, se assumirmos que $L \in C[0, \tau]$, então a condição **(C1)** segue com $\gamma_R \in L^1[0, \tau]$. Como $L(\cdot)$ e $h(\cdot)$ são funções contínuas, temos que $f : [0, \tau] \times W_0^{1,p}(\Omega) \times L^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ é contínua e de (3.7.73) obtemos **(C9)**. Notemos que **(C13)** segue do fato de que $\alpha < 1$. Portanto, as hipóteses dos Teoremas 3.5.3 e 3.5.4 são satisfeitas e podemos deduzir que o conjunto das soluções brandas de (3.7.72), com condições iniciais (3.7.59)-(3.7.60), é conexo em $C([0, \tau]; W_0^{1,p}(\Omega) \times L^p(\Omega))$.

Para o próximo exemplo tomamos uma modificação da equação (3.7.72).

Exemplo 3.7.6. Consideremos o problema

$$\begin{aligned} & u_{tt}(t, x) + 2\eta(-\Delta)^{\frac{1}{2}} u_t(t, x) - \Delta u(t, x) \\ &= \rho\gamma(t) \int_{\Omega} P(x, \xi)(\nabla \cdot u(t, \xi) + u_t(t, \xi)) d\xi + g(t, x), \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (3.7.74)$$

$$u(t, x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0, \quad (3.7.75)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad u_t(0, x) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (3.7.76)$$

onde $\rho > 0$, $\gamma(\cdot)$ é uma função mensurável tal que $\gamma \in L^q(0, \infty)$, $P : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, $g : \mathbb{R}^+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que $g(\cdot, x)$ é mensurável para cada $x \in \Omega$, $g(t, x) = 0$, $x \in \partial\Omega$, $t \geq 0$ e $\int_0^\infty \left(\int_{\Omega} |g(t, x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dt < \infty$. Seja $f(t, \varphi, \psi)$ a perturbação associada a equação (3.7.74). Para $\varphi, \varphi_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\psi, \psi_0 \in L^p(\Omega)$, obtemos

$$\begin{aligned} \|f(t, \varphi, \psi)\|_{L^p(\Omega)} &\leq |\rho||\Omega| \sup_{(x, \xi) \in \Omega \times \Omega} |P(x, \xi)| |\gamma(t)| (\|\varphi\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \\ &\quad + \|\psi\|_{L^p(\Omega)}) + \|g(t, \cdot)\|_{L^p(\Omega)} \end{aligned} \quad (3.7.77)$$

$$\begin{aligned} \|f(t, \varphi, \psi) - f(t, \varphi_0, \psi_0)\|_{L^p(\Omega)} &\leq |\rho||\Omega| \sup_{(x, \xi) \in \Omega \times \Omega} |P(x, \xi)| |\gamma(t)| (\|\varphi - \varphi_0\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \\ &\quad + \|\psi - \psi_0\|_{L^p(\Omega)}). \end{aligned} \quad (3.7.78)$$

A estimativa (3.7.77) mostra que **(C6)** e **(C7)** são satisfeitas. Tendo em mente (3.7.78) e o fato de que $\gamma(\cdot)$ e $g(\cdot, x)$ são mensuráveis, podemos afirmar que a condição **(C)** segue. Escolhendo $|\rho|$ suficientemente pequeno garantimos a condição **(C8)**. Usando o Teorema 3.5.2 nós inferimos que o conjunto das soluções brandas (3.7.74)-(3.7.76) é compacto em $L^p(0, \infty); W_0^{1,p}(\Omega) \times L^p(\Omega)$.

Exemplo 3.7.7. Consideremos a seguinte equação:

$$\begin{aligned} & u_{tt}(t, \xi) + 2\eta(-\Delta)^{\frac{1}{2}}u_t(t, \xi) - \Delta u(t, \xi) \\ &= \int_{\Omega} P(\xi, x) f_0(\nabla \cdot u(t, x), u_t(t, x)) dx + f_1(t, \xi), \quad \xi \in \Omega, \quad 0 \leq t \leq \tau, \end{aligned} \quad (3.7.79)$$

$$u(t, \xi) = 0, \quad \xi \in \partial\Omega, \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad (3.7.80)$$

$$u(0, \xi) = u_0(\xi), \quad u_t(0, \xi) = v_0(\xi), \quad \xi \in \Omega, \quad (3.7.81)$$

onde $\eta > 0$, $P : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $f_0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, e $f_1 : [0, \tau] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ são funções que satisfazem hipóteses convenientes que serão especificadas mais a frente. Descrevemos aqui soluções fortes de (3.7.79)-(3.7.81). Para modelar este problema na forma abstrata tomamos $A = -\Delta_D$ em $L^p(\Omega)$, $p > N$, com domínio $D(A) = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ (ver Example 3.7.2). Assumimos que $u_0 \in D(A)$, $v_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $P : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 tal que $P(x, \xi) = 0$ para todo $x \in \partial\Omega$ e $\xi \in \Omega$. Também assumimos que $f_0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz a condição de Lipschitz: $|f_0(x_1, y_1) - f_0(x_2, y_2)| \leq L(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|)$, $x_i, y_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$; para alguma constante $L \geq 0$, e que $f_1 : [0, \tau] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função mensurável tal que $\int_0^\tau \int_{\Omega} |f_1(t, \xi)|^p d\xi dt < \infty$, $\int_0^\tau \int_{\Omega} |\partial_{\xi_i} f_1(t, \xi)|^p d\xi dt < \infty$, $i = 1, \dots, N$; e $f_1(t, \xi) = 0$ para todo $\xi \in \Omega$ e $t \in [0, \tau]$. A seguir definimos uma função $f : [0, \tau] \times W_0^{1,p}(\Omega) \times L^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ por $f(t, \varphi_1, \varphi_2)(\xi) = \int_{\Omega} P(\xi, x) f_0(\nabla \cdot \varphi_1(x), \varphi_2(x)) dx + f_1(t, \xi)$, $t \in [0, \tau]$, $\varphi_1 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\varphi_2 \in L^p(\Omega)$. É fácil ver que $Im(f) \subseteq W_0^{1,p}(\Omega)$. Além disso, $\|f(t, \varphi_1, \varphi_2)\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq L \sup_{(x, \xi) \in \Omega \times \Omega} [|P(\xi, x)| + \sum_{i=1}^N |\partial_{\xi_i} P(\xi, x)|] |\Omega| (\|\varphi_1\|_{W^{1,p}(\Omega)} + \|\varphi_2\|_{L^p(\Omega)}) + \tilde{K} + \|f_1(t, \cdot)\|_{W^{1,p}(\Omega)}$, para alguma constante $\tilde{K} \geq 0$ dependendo de P , Ω e f_0 . Com isto, vemos que a estimativa **(C21)** é verificada. Por outro lado, como $f(t+h, \varphi_1, \varphi_2) - f(t, \varphi_1, \varphi_2) = f_1(t+h, \cdot) - f_1(t, \cdot)$, segue-se que a condição **(C22)** está claramente satisfeita. Fixando agora $\rho \geq 0$ e tomando $[u, v] \in C_*^p$ com $\| [u, v] \|_{L^p([0, \tau]; W_0^{1,p}(\Omega) \times L^p(\Omega))} \leq \rho$, obtemos

$$\begin{aligned} & \|f(t, \int_0^{t+h} u(\tau) d\tau + u_0, \int_0^{t+h} v(\tau) d\tau + v_0) - f(t, \int_0^t u(\tau) d\tau + u_0, \int_0^t v(\tau) d\tau + v_0)\|_{W^{1,p}(\Omega)} \\ & \leq L \sup_{(x, \xi) \in \Omega \times \Omega} [|P(\xi, x)| + \sum_{i=1}^N |\partial_{\xi_i} P(\xi, x)|] |\Omega| h^{1-\frac{1}{p}} \rho, \end{aligned}$$

o que nos mostra por sua vez que a condição **(C23)** segue. Finalmente se escolhermos L (respect., $\tilde{\rho}$) suficientemente pequeno (respect., grande), obtemos **(C24)**. Sendo as hipóteses do Teorema 3.6.5 satisfeitas, concluimos a existência de uma solução forte para o problema (3.7.79)-(3.7.81).

4 O MODELO FRACIONÁRIO DE KELLER-SEGEL PARA QUIMIO-TAXIA

4.1 Introdução

O modelo de Keller-Segel para quimiotaxia tem sido amplamente utilizado nos últimos anos (ver (BLANCHET; CARRILLO; LAURENÇOT, 2009; BLANCHET; CARRILLO; MASMOUDI, 2008; ARAFA; EL-SAYED; RIDA, 2009; HERRERO; VELÁZQUEZ, 1996; HORSTMANN, 2003; HORSTMANN, 2004; HORSTMANN, 2002; HORSTMANN; WINKLER, 2005)). O notório interesse neste modelo reside no fato de que tal sistema é considerado um dos mais importantes para entender agregação quimiotática. Diante disto, somos levados a também voltar nosso olhar para o modelo de Keller-Segel. Mais precisamente, consideramos o modelo fracionário de Keller-Segel para a quimiotaxia, o qual consiste em um sistema acoplado de equações diferenciais parciais em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$,

$$\begin{cases} {}^c D_t^\alpha u &= \nabla \cdot (\nabla u - u \nabla v), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ {}^c D_t^\alpha v &= \Delta v - \gamma v + \kappa u, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0, \quad v(x, 0) = v_0, & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (4.1.1)$$

onde ${}^c D_t^\alpha$ é a derivada fracionária de Caputo de ordem $\alpha \in (0, 1)$ (ver (CARVALHO-NETO; PLANAS, 2015, Definição 1)), $u(x, t)$ representa a densidade celular e $v(x, t)$ descreve a concentração do atraente químico. Os termos na primeira equação abrangem a difusão das células e o movimento quimiotático, enquanto que os da segunda expressão descrevem a difusão e produção de atratores ao longo do tempo (ver (ESCUDERO, 2006)). Além disso, os parâmetros $\gamma \geq 0$ e $\kappa \geq 0$ denotam as taxas de decaimento e de produção do atraente químico, respectivamente. Seguindo (FERREIRA; PRECIOSO, 2011), assumimos sem perda de generalidade que $\kappa = 1$.

Neste capítulo estudamos a existência de soluções globais (em tempo) e o comportamento a longo prazo das soluções do problema de valor inicial (4.1.1), com dado inicial pequeno, pertencente ao espaço de Besov-Morrey $\mathcal{N}_{r, \lambda, \infty}^{-b} \times \dot{B}_{\infty, \infty}^0$, com $n \geq 2$, $0 \leq \lambda < n$, e $b = 2 - \frac{n-\lambda}{r}$. Apesar do problema (4.1.1) não ter uma propriedade escala, podemos considerar uma escala intrínseca que é herdada do caso $\gamma = 0$ de modo similar como no caso $\alpha = 1$ (ver (FERREIRA; PRECIOSO, 2011)). Tomando $\gamma = 0$ e assumindo que $[u, v]$ é uma solução para (4.1.1), a qual é suficientemente regular, não é difícil checar que

$u_\sigma := \sigma^2 u(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t)$ e $v_\sigma := v(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t)$ também satisfaz (4.1.1). O mapa

$$[u, v] \rightarrow [u_\sigma, v_\sigma] \quad (4.1.2)$$

é dito a escala de (4.1.1) e as soluções invariantes por (4.1.2) são chamadas soluções auto-similares, isto é,

$$u(x, t) = \sigma^2 u(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t) \quad \text{e} \quad v(x, t) = v(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t). \quad (4.1.3)$$

Fazendo $t \rightarrow 0^+$ em (4.1.3), obtemos

$$u_0(x) = \sigma^2 u_0(\sigma x) \quad \text{e} \quad v_0(x) = v_0(\sigma x). \quad (4.1.4)$$

Com isto vemos que no estudo de soluções auto-similares, os candidatos naturais a dado inicial são as funções homogêneas

$$u_0(\sigma x) = \sigma^{-2} u_0(x) \quad \text{e} \quad v_0(\sigma x) = v_0(x), \quad (4.1.5)$$

ou seja, o dado u_0 e v_0 são funções homogêneas de graus -2 e 0 , respectivamente. Isto nos motiva então a escolher $\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b} \times \dot{B}_{\infty,\infty}^0$ como espaço para o dado inicial, o qual é invariante pela escala. Seja agora $a = 2 - \frac{n-\lambda}{q}$, com $q \neq r$. Voltamos nosso olhar para as soluções $[u(x, t), v(x, t)]$ pertencentes a classe de Kato (invariante pela escala):

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_1 = \left\{ u \in BC((0, \infty); \mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}) : t^{\frac{ab}{2}} u \in BC((0, \infty); \mathcal{M}_{r,\lambda}) \right. \\ \left. \text{e } t^{\frac{aa}{2}} u \in BC((0, \infty); \mathcal{M}_{q,\lambda}) \right\} \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

$$\mathcal{X}_2 = \left\{ v \in BC((0, \infty); \dot{B}_{\infty,\infty}^0) : t^{\alpha/2} \nabla_x v \in BC((0, \infty); L^\infty) \right\}. \quad (4.1.7)$$

É importante observarmos que $\mathcal{X}_1$ e $\mathcal{X}_2$, munidos com as normas

$$\|u\|_{\mathcal{X}_1} = \sup_{0 < t} \|u(t)\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}} + \sup_{0 < t} t^{\frac{ab}{2}} \|u(t)\|_{r,\lambda} + \sup_{0 < t} t^{\frac{aa}{2}} \|u(t)\|_{q,\lambda}, \quad (4.1.8)$$

$$\|v\|_{\mathcal{X}_2} = \sup_{0 < t} \|v(t)\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0} + \sup_{0 < t} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty}, \quad (4.1.9)$$

são espaços de Banach. Além disso, a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2}$ é invariante pela escala. Outro fato importante a se notar é que quando $\alpha = 1$, este é o espaço considerado em (FERREIRA; PRECIOSO, 2011).

Para obtenção de nossos resultados, construímos soluções brandas para o modelo fracional de Keller-Segel (4.1.1) usando o princípio de Duhamel e utilizamos um argumento de ponto fixo na classe de Kato $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$. Nesta abordagem, precisamos manipular algumas técnicas vindas da caracterização das soluções brandas, que envolve a função de Mainardi e os operadores de Mittag-Leffler.

4.2 Estimativas para os operadores de Mittag-Leffler

No lema a seguir, estudamos estimativas a priori para os operadores de Mittag-Leffler nos diferentes espaços envolvidos.

Lema 4.2.1. *Sob as hipóteses do Teorema 4.3.1, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|\nabla E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha \Delta)f\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}} \leq Ct^{-\frac{\alpha}{2}} \|f\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}}, \quad (4.2.10)$$

$$\|\nabla E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha \Delta)f\|_{r,\lambda} \leq Ct^{-\frac{\alpha}{2}} \|f\|_{r,\lambda}, \quad (4.2.11)$$

$$\|\nabla E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha \Delta)f\|_{q,\lambda} \leq Ct^{-\frac{\alpha}{2}} \|f\|_{q,\lambda}, \quad (4.2.12)$$

$$\|\nabla E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha \Delta)f\|_{q,\lambda} \leq Ct^{-\frac{\alpha}{2}(1+\frac{n-\lambda}{r}-\frac{n-\lambda}{q})} \|f\|_{r,\lambda}, \quad (4.2.13)$$

$$\|E_\alpha(t^\alpha \Delta)f\|_{q,\lambda} \leq Ct^{-\alpha\frac{a}{2}} \|f\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}}, \quad (4.2.14)$$

$$\|E_\alpha(t^\alpha \Delta)f\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}} \leq C \|f\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}}, \quad (4.2.15)$$

$$\|E_\alpha(t^\alpha \Delta)f\|_{r,\lambda} \leq Ct^{-\alpha\frac{b}{2}} \|f\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}}, \quad (4.2.16)$$

$$\|E_\alpha(t^\alpha(\Delta - \gamma))f\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0} \leq C \|f\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0}, \quad (4.2.17)$$

$$\|E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha(\Delta - \gamma))f\|_{L^\infty} \leq Ct^{-\frac{\alpha}{2}(\frac{n-\lambda}{q})} \|f\|_{q,\lambda}, \quad (4.2.18)$$

$$\|\nabla E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha(\Delta - \gamma))f\|_{L^\infty} \leq Ct^{-\frac{\alpha}{2}(1+\frac{n-\lambda}{r})} \|f\|_{r,\lambda}, \quad (4.2.19)$$

$$\|\nabla E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha(\Delta - \gamma))f\|_{L^\infty} \leq Ct^{-\frac{\alpha}{2}(1+\frac{n-\lambda}{q})} \|f\|_{q,\lambda}, \quad (4.2.20)$$

$$\|\nabla E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha(\Delta - \gamma))f\|_{L^\infty} \leq Ct^{-\frac{\alpha}{2}} \|f\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0}, \quad (4.2.21)$$

para todo $f \in S'$.

Demonstração. Do Lema 2.6.2 obtemos as seguintes estimativas preliminares para o semigrupo do calor $G(t)$:

$$\|\nabla G(t)f\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}} \leq Ct^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}}, \quad (4.2.22)$$

$$\|\nabla G(t)f\|_{r,\lambda} \leq Ct^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{r,\lambda}, \quad (4.2.23)$$

$$\|\nabla G(t)f\|_{q,\lambda} \leq Ct^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{q,\lambda}, \quad (4.2.24)$$

$$\|\nabla G(t)f\|_{q,\lambda} \leq Ct^{-\frac{1}{2}(1+\frac{n-\lambda}{r}-\frac{n-\lambda}{q})} \|f\|_{r,\lambda}, \quad (4.2.25)$$

$$\|G(t)f\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}} \leq C \|f\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}}, \quad (4.2.26)$$

$$\|G(t)f\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0} \leq C \|f\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0}, \quad (4.2.27)$$

$$\|G(t)f\|_{L^\infty} \leq Ct^{-\frac{1}{2}(\frac{n-\lambda}{q})} \|f\|_{q,\lambda}, \quad (4.2.28)$$

$$\|\nabla G(t)f\|_{L^\infty} \leq C \min\{t^{-\frac{1}{2}(1+\frac{n-\lambda}{r})} \|f\|_{r,\lambda}, t^{-\frac{1}{2}(1+\frac{n-\lambda}{q})} \|f\|_{q,\lambda}\}, \quad (4.2.29)$$

$$\|\nabla G(t)f\|_{L^\infty} \leq Ct^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0}. \quad (4.2.30)$$

- De (2.8.27), (4.2.22) e levando em conta a Proposição 2.7.1, temos

$$\begin{aligned}
\|\nabla E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha \Delta)f\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}} &\leq \int_0^\infty \alpha s M_\alpha(s) \|\nabla G(st^\alpha)f\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}} ds \\
&\leq Ct^{-\frac{\alpha}{2}} \left(\int_0^\infty M_\alpha(s) s^{\frac{1}{2}} ds \right) \|f\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}} \\
&\leq Ct^{-\frac{\alpha}{2}} \|f\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}}.
\end{aligned}$$

- Usando agora a desigualdade (4.2.23), segue-se que

$$\begin{aligned}
\|\nabla E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha \Delta)f\|_{r,\lambda} &\leq \int_0^\infty \alpha s M_\alpha(s) \|\nabla G(st^\alpha)f\|_{r,\lambda} ds \\
&\leq Ct^{-\frac{\alpha}{2}} \left(\int_0^\infty M_\alpha(s) s^{\frac{1}{2}} ds \right) \|f\|_{r,\lambda} \\
&\leq Ct^{-\frac{\alpha}{2}} \|f\|_{r,\lambda},
\end{aligned}$$

e com isto obtemos (4.2.11).

- A prova da estimativa (4.2.12) é análoga à prova que acabamos de dar para (4.2.11).
- Considerando neste momento a estimativa (4.2.25), vemos que

$$\begin{aligned}
\|\nabla E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha \Delta)f\|_{q,\lambda} &\leq \int_0^\infty \alpha s M_\alpha(s) \|\nabla G(st^\alpha)f\|_{q,\lambda} ds \\
&\leq Ct^{-\frac{\alpha}{2}(1+\frac{n-\lambda}{r}-\frac{n-\lambda}{q})} \left(\int_0^\infty M_\alpha(s) s^{\frac{1}{2}(1-(\frac{n-\lambda}{r}-\frac{n-\lambda}{q}))} ds \right) \|f\|_{r,\lambda}.
\end{aligned} \tag{4.2.31}$$

Como $\frac{1}{2}(1 - (\frac{n-\lambda}{r} - \frac{n-\lambda}{q})) > -1$, segue da Proposição 2.7.1 que

$$\begin{aligned}
\|\nabla E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha \Delta)f\|_{q,\lambda} &\leq C \frac{\Gamma(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}(\frac{n-\lambda}{r} - \frac{n-\lambda}{q}))}{\Gamma(1 + \frac{\alpha}{2}(1 - (\frac{n-\lambda}{r} - \frac{n-\lambda}{q})))} t^{-\frac{\alpha}{2}(1+\frac{n-\lambda}{r}-\frac{n-\lambda}{q})} \|f\|_{r,\lambda} \\
&\leq Ct^{-\frac{\alpha}{2}(1+\frac{n-\lambda}{r}-\frac{n-\lambda}{q})} \|f\|_{r,\lambda},
\end{aligned}$$

conforme desejávamos.

- Para concluir a estimativa (4.2.14), fazemos uso da inclusão $\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b} \subset \mathcal{N}_{q,\lambda,\infty}^{-a}$ e obtemos

$$\begin{aligned}
t^{\frac{\alpha a}{2}} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)f\|_{q,\lambda} &\leq t^{\frac{\alpha a}{2}} \int_0^\infty M_\alpha(s) \|G(st^\alpha)f\|_{q,\lambda} ds \\
&\leq \left(\int_0^\infty M_\alpha(s) s^{-\frac{a}{2}} ds \right) \|f\|_{\mathcal{N}_{q,\lambda,\infty}^{-a}} \\
&\leq C \|f\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}}.
\end{aligned}$$

- A desigualdade (4.2.26) e a Proposição 2.7.1 implicam em

$$\begin{aligned}
\|E_\alpha(t^\alpha \Delta)f\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}} &\leq \int_0^\infty M_\alpha(s) \|G(st^\alpha)f\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}} ds \\
&\leq C \left(\int_0^\infty M_\alpha(s) ds \right) \|f\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}} \\
&\leq C \|f\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}}.
\end{aligned}$$

- Fazendo uso agora da relação (2.6.20) obtemos

$$\begin{aligned}
t^{\frac{\alpha b}{2}} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta) f\|_{r,\lambda} &\leq t^{\frac{\alpha b}{2}} \int_0^\infty M_\alpha(s) \|G(st^\alpha) f\|_{r,\lambda} ds \\
&\leq \left(\int_0^\infty M_\alpha(s) s^{-\frac{b}{2}} ds \right) \|f\|_{N_{r,\lambda,\infty}^{-b}} \\
&\leq \frac{\Gamma(1 - \frac{b}{2})}{\Gamma(1 - \frac{\alpha b}{2})} \|f\|_{N_{r,\lambda,\infty}^{-b}}
\end{aligned}$$

e a estimativa (4.2.16) segue.

- Aplicando (4.2.27) e a Proposição 2.7.1 ficamos com

$$\begin{aligned}
\|E_\alpha(t^\alpha(\Delta - \gamma))f\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0} &\leq \int_0^\infty M_\alpha(s) \|G(st^\alpha) f\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0} ds \\
&\leq C \|f\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0}
\end{aligned}$$

e assim demonstramos a desigualdade (4.2.17).

- Combinando a estimativa (4.2.28) com a Proposição 2.7.1, vemos que

$$\begin{aligned}
\|E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha(\Delta - \gamma))f\|_{L^\infty} &\leq \int_0^\infty \alpha s M_\alpha(s) e^{-st^\alpha} \|G(st^\alpha) f\|_{L^\infty} ds \\
&\leq C t^{-\frac{\alpha}{2}(\frac{n-\lambda}{q})} \left(\int_0^\infty M_\alpha(s) s^{1-\frac{1}{2}(\frac{n-\lambda}{q})} ds \right) \|f\|_{q,\lambda} \\
&\leq C \frac{\Gamma(2 - \frac{1}{2}(\frac{n-\lambda}{q}))}{\Gamma(1 + \alpha - \frac{\alpha}{2}(\frac{n-\lambda}{q}))} t^{-\frac{\alpha}{2}(\frac{n-\lambda}{q})} \|f\|_{q,\lambda} \\
&\leq C t^{-\frac{\alpha}{2}(\frac{n-\lambda}{q})} \|f\|_{q,\lambda}.
\end{aligned}$$

- Utilizando a desigualdade (4.2.29) temos

$$\begin{aligned}
\|\nabla E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha(\Delta - \gamma))f\|_{L^\infty} &\leq \int_0^\infty \alpha s M_\alpha(s) \|\nabla G(st^\alpha) f\|_{L^\infty} ds \\
&\leq C t^{-\frac{\alpha}{2}(1+\frac{n-\lambda}{r})} \left(\int_0^\infty M_\alpha(s) s^{\frac{1}{2}(1+\frac{n-\lambda}{r})} ds \right) \|f\|_{r,\lambda}.
\end{aligned}$$

Chamamos atenção aqui ao fato de que como $r > \frac{n-\lambda}{2}$, segue-se que $b = 2 - \frac{n-\lambda}{r} > 0$, $\frac{1}{2}(1 - \frac{n-\lambda}{r}) + 1 = \frac{1}{2}(b+1) > 0$ e $1 + \frac{\alpha}{2}(b-1) > 0$. Logo,

$$\begin{aligned}
\|\nabla E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha(\Delta - \gamma))f\|_{L^\infty} &\leq C \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(b+1))}{\Gamma(1 + \frac{\alpha}{2}(b-1))} t^{-\frac{\alpha}{2}(1+\frac{n-\lambda}{r})} \|f\|_{r,\lambda} \\
&\leq C t^{-\frac{\alpha}{2}(1+\frac{n-\lambda}{r})} \|f\|_{r,\lambda}.
\end{aligned}$$

- Procedendo de modo similar a etapa anterior e levando em conta que $a = 2 - \frac{n-\lambda}{q} > 1$, concluímos que

$$\begin{aligned}
\|\nabla E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha(\Delta - \gamma))f\|_{L^\infty} &\leq C \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(a+1))}{\Gamma(1 + \frac{\alpha}{2}(a-1))} t^{-\frac{\alpha}{2}(1+\frac{n-\lambda}{q})} \|f\|_{q,\lambda} \\
&\leq C t^{-\frac{\alpha}{2}(1+\frac{n-\lambda}{q})} \|f\|_{q,\lambda}.
\end{aligned}$$

- Por fim, para provar a estimativa (4.2.21), aplicamos (4.2.30) e obtemos

$$\begin{aligned} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla E_{\alpha}(t^{\alpha}(\Delta - \gamma))f\|_{L^{\infty}} &\leq t^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^{\infty} M_{\alpha}(s) \|\nabla G(st^{\alpha})f\|_{L^{\infty}} ds \\ &\leq C \left(\int_0^{\infty} M_{\alpha}(s) s^{-\frac{1}{2}} ds \right) \|f\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0} \\ &\leq C \|f\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0}. \end{aligned}$$

Isto completa a demonstração do Lema 4.2.1. $\square$

4.3 Existência de solução global

Através desta seção, garantimos a existência de solução global (branda) para o modelo fracionário de Keller-Segel (4.1.1). As soluções brandas que apresentamos para este problema foram construídas através do princípio de Duhamel. Mais especificamente, temos a seguinte definição:

Definição 4.3.1. Um par $[u, v]$, satisfazendo a formulação integral

$$u(t) = E_{\alpha}(t^{\alpha}\Delta)u_0 - \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \nabla E_{\alpha,\alpha}((t-s)^{\alpha}\Delta)(u \nabla v)(s) ds, \quad (4.3.32)$$

$$v(t) = E_{\alpha}(t^{\alpha}(\Delta - \gamma))v_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-s)^{\alpha}(\Delta - \gamma))u(s) ds, \quad (4.3.33)$$

é dito uma solução branda para o problema de valor inicial (4.1.1).

A seguir apresentamos nosso primeiro resultado em boa-colocação:

Teorema 4.3.1. *Assuma que $n \geq 2$, $0 \leq \lambda \leq n-2$, $\frac{n-\lambda}{2} < r < n-\lambda < q < \infty$ e suponha que $u_0 \in \mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}$ e $v_0 \in \dot{B}_{\infty,\infty}^0$. Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, existem $\delta_1 = \delta_1(\epsilon)$ e $\delta_2 = \delta_2(\epsilon)$ tais que o problema (4.1.1) tem uma solução global branda $[u, v]$ pertencente a classe de Kato $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$, desde que $\|u_0\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}} \leq \delta_1$ e $\|v_0\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0} \leq \delta_2$. Além disso, a solução é única satisfazendo $\|u\|_{\mathcal{X}_1} \leq 2\epsilon$ e $\|v\|_{\mathcal{X}_2} \leq (1 + 2(K_4 + K_5))\epsilon$, onde K_4 e K_5 são dados no Lema 4.3.2.*

Demonstração do Teorema 4.3.1. Para demonstrarmos este teorema, faremos uso do Lema 2.9.2. Começamos então definindo os operadores $\mathcal{B} : \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \rightarrow \mathcal{X}_1$ e $\mathcal{T} : \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}_2$ por

$$\mathcal{B}(u, v)(t) = - \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \nabla E_{\alpha,\alpha}((t-s)^{\alpha}\Delta)(u \nabla v)(s) ds, \quad (4.3.34)$$

$$\mathcal{T}(u)(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-s)^{\alpha}(\Delta - \gamma))u(s) ds. \quad (4.3.35)$$

Notemos que $\mathcal{B}(u, v)(t)$ e $\mathcal{T}(u)(t)$ denotam os operadores bilinear e linear que aparecem nas equações (4.3.32) e (4.3.33), respectivamente. A partir de agora, dividimos a demonstração do Teorema 4.3.1 em etapas.

1) Nesta primeira etapa obtemos algumas estimativas para o mapa bilinear $\mathcal{B}(\cdot, \cdot)$, a fim de garantirmos a continuidade deste operador. Mais precisamente, afirmamos que:

Lema 4.3.1. *Sob as hipóteses do Teorema 4.3.1, existem constantes positivas K_1 , K_2 e K_3 tais que, para todo $[u, v] \in \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$,*

$$\sup_{t>0} \|\mathcal{B}(u, v)(t)\|_{N_{r,\lambda,\infty}^{-b}} \leq K_1 \sup_{t>0} \|u(t)\|_{N_{r,\lambda,\infty}^{-b}} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty}, \quad (4.3.36)$$

$$\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|\mathcal{B}(u, v)(t)\|_{r,\lambda} \leq K_2 \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|u(t)\|_{r,\lambda} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty}, \quad (4.3.37)$$

$$\begin{aligned} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha a}{2}} \|\mathcal{B}(u, v)(t)\|_{q,\lambda} &\leq K_3 \left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|u(t)\|_{r,\lambda} + \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha a}{2}} \|u(t)\|_{q,\lambda} \right) \\ &\quad \times \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty}, \end{aligned} \quad (4.3.38)$$

para todo par $[u, v] \in \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$.

Demonstração do Lema 4.3.1. Para provarmos a estimativa (4.3.36), usaremos (4.2.10) e o Lema 2.6.1, os quais implicam em

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}(u, v)(t)\|_{N_{r,\lambda,\infty}^{-b}} &\leq \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|\nabla E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta)(u \nabla v)(s)\|_{N_{r,\lambda,\infty}^{-b}} ds \\ &\leq C \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} \|(u \nabla v)(s)\|_{N_{r,\lambda,\infty}^{-b}} ds \\ &\leq C \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} \|u(s)\|_{N_{r,\lambda,\infty}^{-b}} \|\nabla v(s)\|_{L^\infty} ds \\ &\leq C \left(\int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{-\frac{\alpha}{2}} ds \right) \sup_{t>0} \|u(t)\|_{N_{r,\lambda,\infty}^{-b}} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \\ &\leq C \left(\int_0^1 (1-z)^{\frac{\alpha}{2}} z^{-\frac{\alpha}{2}} dz \right) \sup_{t>0} \|u(t)\|_{N_{r,\lambda,\infty}^{-b}} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \\ &\leq C \left(\int_0^1 z^{-\frac{\alpha}{2}} dz \right) \sup_{t>0} \|u(t)\|_{N_{r,\lambda,\infty}^{-b}} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \\ &= K_1 \sup_{t>0} \|u(t)\|_{N_{r,\lambda,\infty}^{-b}} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

Usando agora a estimativa (4.2.11) obtemos

$$\begin{aligned} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|\mathcal{B}(u, v)(t)\|_{r,\lambda} &\leq t^{\frac{\alpha b}{2}} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|\nabla E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta)(u \nabla v)(s)\|_{r,\lambda} ds \\ &\leq C t^{\frac{\alpha b}{2}} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (t-s)^{-\frac{\alpha}{2}} \|(u \nabla v)(s)\|_{r,\lambda} ds \\ &\leq C t^{\frac{\alpha b}{2}} \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} \|u(s)\|_{r,\lambda} \|\nabla v(s)\|_{L^\infty} ds \\ &\leq C \left(t^{\frac{\alpha b}{2}} \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha b}{2}} ds \right) \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|u(t)\|_{r,\lambda} \\ &\quad \times \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty}. \end{aligned} \quad (4.3.39)$$

Fazendo uma mudança de variáveis em (4.3.39) segue-se,

$$\begin{aligned} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|\mathcal{B}(u, v)(t)\|_{r,\lambda} &\leq \left(C \int_0^1 (1-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{-\frac{\alpha}{2}(1+b)} ds \right) \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|u(t)\|_{r,\lambda} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \\ &\leq \left(C \int_0^1 s^{-\frac{\alpha}{2}(1+b)} ds \right) \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|u(t)\|_{r,\lambda} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

Notemos que $\frac{n-\lambda}{2} < r < n - \lambda$ implica em $b = 2 - \frac{n-\lambda}{r} < 1$ e, portanto, $1 - \frac{\alpha}{2}(1+b) > 0$. Com isto concluímos que

$$\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|\mathcal{B}(u, v)(t)\|_{r, \lambda} \leq K_2 \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|u(t)\|_{r, \lambda} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty},$$

como desejávamos. Finalmente, usando (4.2.12), (4.2.13) e o Lema 2.6.1 temos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} t^{\frac{\alpha a}{2}} \|\mathcal{B}(u, v)(t)\|_{q, \lambda} &\leq t^{\frac{\alpha a}{2}} \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{\alpha-1} \|\nabla E_{\alpha, \alpha}((t-s)^\alpha \Delta)(u \nabla v)(s)\|_{q, \lambda} ds \\ &\quad + t^{\frac{\alpha a}{2}} \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{\alpha-1} \|\nabla E_{\alpha, \alpha}((t-s)^\alpha \Delta)(u \nabla v)(s)\|_{q, \lambda} ds \\ &\leq Ct^{\frac{\alpha a}{2}} \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{\alpha-1} (t-s)^{-\frac{\alpha}{2}(1+\frac{n-\lambda}{r}-\frac{n-\lambda}{q})} \|(u \nabla v)(s)\|_{r, \lambda} ds \\ &\quad + Ct^{\frac{\alpha a}{2}} \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{\alpha-1} (t-s)^{-\frac{\alpha}{2}} \|(u \nabla v)(s)\|_{q, \lambda} ds \\ &\leq Ct^{\frac{\alpha a}{2}} \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-(\frac{n-\lambda}{r}-\frac{n-\lambda}{q}))} \|u(s)\|_{r, \lambda} \|\nabla v(s)\|_{L^\infty} ds \\ &\quad + Ct^{\frac{\alpha a}{2}} \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} \|u(s)\|_{q, \lambda} \|\nabla v(s)\|_{L^\infty} ds. \\ &\leq C \left(\int_0^{\frac{1}{2}} (1-s)^{\frac{\alpha}{2}(b-a+1)-1} s^{-\frac{\alpha}{2}(1+b)} ds \right) \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|u(t)\|_{r, \lambda} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \\ &\quad + C \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{-\frac{\alpha}{2}(1+a)} ds \right) \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha a}{2}} \|u(t)\|_{q, \lambda} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty}. \\ &\leq C \left(\int_0^{\frac{1}{2}} s^{-\frac{\alpha}{2}(1+b)} ds \right) \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|u(t)\|_{r, \lambda} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \\ &\quad + C \left(\int_0^{\frac{1}{2}} s^{\frac{\alpha}{2}-1} ds \right) \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha a}{2}} \|u(t)\|_{q, \lambda} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty}. \\ &\leq K_3 \left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|u(t)\|_{r, \lambda} + \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha a}{2}} \|u(t)\|_{q, \lambda} \right) \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty}, \end{aligned}$$

e isto encerra a demonstração do Lema 4.3.1. $\square$

De posse das estimativas estabelecidas no lema anterior, vemos que para $[u, v] \in \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}(u, v)\|_{\mathcal{X}_1} &= \sup_{t>0} \|\mathcal{B}(u, v)(t)\|_{N_{r, \lambda, \infty}^{-b}} + \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|\mathcal{B}(u, v)(t)\|_{r, \lambda} + \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha a}{2}} \|\mathcal{B}(u, v)(t)\|_{q, \lambda}, \\ &\leq (K_1 + K_2 + K_3) \|u\|_{\mathcal{X}_1} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v\|_{L^\infty} \\ &\leq (K_1 + K_2 + K_3) \|u\|_{\mathcal{X}_1} \|v\|_{\mathcal{X}_2}, \end{aligned}$$

e assim temos a continuidade de $\mathcal{B}$.

2) Mostraremos agora que o mapa $\mathcal{T}$, definido pela expressão (4.3.35), é contínuo. Para isto, faremos uso do seguinte resultado:

Lema 4.3.2. *Sob as hipóteses do Teorema 4.3.1, existem constantes positivas K_4 e K_5 tais que,*

$$\sup_{t>0} \|\mathcal{T}(u)(t)\|_{\dot{B}_{\infty, \infty}^0} \leq K_4 \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha a}{2}} \|u(t)\|_{q, \lambda}, \quad (4.3.40)$$

$$\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla \mathcal{T}(u)(t)\|_{L^\infty} \leq K_5 \left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|u(t)\|_{r, \lambda} + \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha a}{2}} \|u(t)\|_{q, \lambda} \right), \quad (4.3.41)$$

para toda função $u \in \mathcal{X}_1$.

Demonstração do Lema 4.3.2. A fim de concluirmos a desigualdade (4.3.40), utilizamos a inclusão contínua $L^\infty \subseteq \dot{B}_{\infty,\infty}^0$ e a estimativa (4.2.18), as quais implicam em

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}(u)(t)\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0} &\leq \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha(\Delta-\gamma))u(s)\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0} ds \\ &\leq \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha(\Delta-\gamma))u(s)\|_{L^\infty} ds \\ &\leq C \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (t-s)^{-\frac{\alpha}{2}(\frac{n-\lambda}{q})} \|u(s)\|_{q,\lambda} ds \\ &\leq C \left(\int_0^1 (1-s)^{\alpha-\frac{\alpha}{2}(\frac{n-\lambda}{q})-1} s^{-\frac{\alpha a}{2}} ds \right) \sup_{t>0} t^{-\frac{\alpha a}{2}} \|u(t)\|_{q,\lambda}. \end{aligned}$$

Levando em conta que $1 - \frac{\alpha a}{2} > 0$ e $n - \lambda < q$, temos desta última desigualdade que

$$\begin{aligned} \sup_{t>0} \|\mathcal{T}(u)(t)\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0} &\leq C \left(\int_0^1 s^{-\frac{\alpha a}{2}} ds \right) \sup_{t>0} t^{-\frac{\alpha a}{2}} \|u(t)\|_{q,\lambda} \\ &= K_4 \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha a}{2}} \|u(t)\|_{q,\lambda}. \end{aligned}$$

Por fim, das estimativas (4.2.19) e (4.2.20) segue-se

$$\begin{aligned} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla \mathcal{T}(u)(t)\|_{L^\infty} &\leq t^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^{t/2} (t-s)^{\alpha-1} \|\nabla E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha(\Delta-\gamma))u(s)\|_{L^\infty} ds \\ &\quad + t^{\frac{\alpha}{2}} \int_{t/2}^t (t-s)^{\alpha-1} \|\nabla E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha(\Delta-\gamma))u(s)\|_{L^\infty} ds \\ &\leq C t^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^{t/2} (t-s)^{\frac{\alpha}{2}(b-1)-1} \|u(s)\|_{r,\lambda} ds \\ &\quad + C t^{\frac{\alpha}{2}} \int_{t/2}^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}(a-1)-1} \|u(s)\|_{q,\lambda} ds \\ &\leq C t^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^{t/2} (t-s)^{\frac{\alpha}{2}(b-1)-1} s^{-\frac{\alpha b}{2}} ds \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|u(t)\|_{r,\lambda} \\ &\quad + C t^{\frac{\alpha}{2}} \int_{t/2}^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}(a-1)-1} s^{-\frac{\alpha a}{2}} ds \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha a}{2}} \|u(t)\|_{q,\lambda} \\ &\leq C \left(\int_0^{1/2} (1-s)^{\frac{\alpha}{2}(b-1)-1} s^{-\frac{\alpha b}{2}} ds \right) \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|u(t)\|_{r,\lambda} \\ &\quad + C \left(\int_{1/2}^1 (1-s)^{\frac{\alpha}{2}(a-1)-1} s^{-\frac{\alpha a}{2}} ds \right) \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha a}{2}} \|u(t)\|_{q,\lambda} \\ &\leq K_5 \left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|u(t)\|_{r,\lambda} + \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha a}{2}} \|u(t)\|_{q,\lambda} \right). \end{aligned}$$

Com isto completamos a demonstração do Lema 4.3.2. □

Para $u \in \mathcal{X}_1$, segue então do Lema 4.3.2 que,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}(u)\|_{\mathcal{X}_2} &= \sup_{t>0} \|\mathcal{T}(t)\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0} + \sup_{t>0} t^{\alpha/2} \|\nabla \mathcal{T}(t)\|_{L^\infty} \\ &\leq K_4 \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha a}{2}} \|u(t)\|_{q,\lambda} + K_5 \left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|u(t)\|_{r,\lambda} + \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha a}{2}} \|u(t)\|_{q,\lambda} \right) \\ &\leq (K_4 + K_5) \left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|u(t)\|_{r,\lambda} + \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha a}{2}} \|u(t)\|_{q,\lambda} \right) \\ &\leq (K_4 + K_5) \|u\|_{\mathcal{X}_1}, \end{aligned}$$

e temos a continuidade do operador $\mathcal{T}$.

3) Nesta etapa, definimos as funções $\tilde{u}$ e $\tilde{v}$ pelas expressões

$$\tilde{u}(t) = E_\alpha(t^\alpha \Delta)u_0 \text{ e } \tilde{v}(t) = E_\alpha(t^\alpha(\Delta - \gamma))v_0,$$

e escolhemos ϵ tal que

$$0 < \epsilon < \frac{1}{2(K_1 + K_2 + K_3)(1 + 2(K_4 + K_5))}, \quad (4.3.42)$$

onde K_i , $i = 1, \dots, 5$; são as constantes dadas nos Lemas 4.3.1 e 4.3.2. Das estimativas (4.2.14), (4.2.15) e (4.2.16), obtemos

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}\|_{\mathcal{X}_1} &\leq \sup_{t>0} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)u_0\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}} + \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)u_0\|_{r,\lambda} + \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha a}{2}} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)u_0\|_{q,\lambda} \\ &\leq C \|u_0\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}} + C \|u_0\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}} + C \|u_0\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}} \\ &\leq 3C \|u_0\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}}, \end{aligned}$$

e das desigualdades (4.2.17) e (4.2.21) temos

$$\begin{aligned} \|\tilde{v}\|_{\mathcal{X}_2} &\leq \sup_{t>0} \|E_\alpha(t^\alpha(\Delta - \gamma))v_0\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla E_\alpha(t^\alpha(\Delta - \gamma))v_0\|_{L^\infty} \\ &\leq C \|v_0\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0} + C \|v_0\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0} \\ &\leq 2C \|v_0\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0}. \end{aligned}$$

Escolhendo então $\|u_0\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}} \leq \delta_1 = \frac{\epsilon}{3C}$ e $\|v_0\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0} \leq \delta_2 = \frac{\epsilon}{2C}$, ficamos com

$$\|\tilde{u}\|_{\mathcal{X}_1} \leq \epsilon \text{ e } \|\tilde{v}\|_{\mathcal{X}_2} \leq \epsilon,$$

Aplicando agora o Lema 2.9.2, concluímos que existe uma única solução $u \in \mathcal{X}_1$, com $\|u\|_{\mathcal{X}_1} \leq 2\epsilon$, para a equação

$$u(t) = \tilde{u}(t) + \mathcal{B}(u, v)(t),$$

onde $v = \tilde{v} + \mathcal{T}(u) \in \mathcal{X}_2$, e $\mathcal{B}(u, v)$ e $\mathcal{T}(u)$ são dados por (4.3.34) e (4.3.35), respectivamente. Além disso,

$$\|v\|_{\mathcal{X}_2} \leq \|\tilde{v}\|_{\mathcal{X}_2} + \|\mathcal{T}u\|_{\mathcal{X}_2} \leq \epsilon + (K_4 + K_5) \|u\|_{\mathcal{X}_1} \leq (1 + 2(K_4 + K_5))\epsilon,$$

e isto completa a demonstração do Teorema 4.3.1. $\square$

No caso $\gamma = 0$, a existência de soluções auto-similares para o problema (4.1.1) segue do Teorema 4.3.1.

Corolário 4.3.1. *Sob as hipóteses do Teorema 4.3.1, assuma que $u_0 \in \mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}$ e $v_0 \in \dot{B}_{\infty,\infty}^0$ são funções homogêneas de grau -2 e 0 , respectivamente. Então a solução $[u, v]$, obtida no Teorema 4.3.1, é auto-similar, ou seja, satisfaz (4.1.3).*

Demonstração. Sejam u_0 e v_0 funções homogêneas de grau -2 e 0 , respectivamente. Segue de (FERREIRA; PRECIOSO, 2011, Observação 4.2) que a solução $[u, v]$, dada pelo Teorema 4.3.1, é o limite da seguinte sequência de Picard:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= E_\alpha(t^\alpha \Delta) u_0, \\ u_{n+1}(t) &= E_\alpha(t^\alpha \Delta) u_0 - \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \nabla E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta) (u_n \nabla v_n)(s) ds, \\ v_n(t) &= E_\alpha(t^\alpha \Delta) v_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta) u_n(s) ds, \end{aligned}$$

com $n \in \mathbb{N}$. Além disso, não é difícil checar que as identidades

$$\sigma^2(G(\sigma^2 t) u_0)(\sigma x) = (G(t) u_0)(x), \quad (4.3.43)$$

e

$$(G(\sigma^2 t) v_0)(\sigma x) = (G(t) v_0)(x). \quad (4.3.44)$$

se verdadeiras. Usando agora as igualdades (4.3.43) e (2.8.26) obtemos

$$\begin{aligned} \sigma^2 u_1(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t) &= \sigma^2 \int_0^\infty M_\alpha(s) (G(\sigma^2 s t^\alpha) u_0)(\sigma x) ds \\ &= \int_0^\infty M_\alpha(s) (G(s t^\alpha) u_0)(x) ds \\ &= u_1(x, t), \end{aligned}$$

e daí concluímos que u_1 é auto-similar. Por outro lado, da identidade (4.3.44) vemos que

$$\begin{aligned} (E_\alpha(\sigma^2 t^\alpha \Delta) v_0)(\sigma x) &= \int_0^\infty M_\alpha(s) (G(\sigma^2 s t^\alpha) v_0)(\sigma x) ds \\ &= \int_0^\infty M_\alpha(s) (G(s t^\alpha) v_0)(x) ds \\ &= (E_\alpha(t^\alpha \Delta) v_0)(x), \end{aligned} \quad (4.3.45)$$

e levando em conta que u_1 é auto-similar, segue a identidade

$$\begin{aligned} &\sigma^2 (E_{\alpha,\alpha}(\sigma^2 (t-s)^\alpha \Delta) u_1(\sigma^{\frac{2}{\alpha}} s))(\sigma x) \\ &= \sigma^2 \int_0^\infty \alpha s M_\alpha(s) \left(G(\sigma^2 s (t-s)^\alpha) u_1(\sigma^{\frac{2}{\alpha}} s) \right) (\sigma x) ds \\ &= \sigma^2 \int_0^\infty \alpha s M_\alpha(s) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(4\pi \sigma^2 s (t-s)^\alpha \right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|y-\sigma x|^2}{4\sigma^2 s (t-s)^\alpha}} u_1(y, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} s) dy \right) ds \\ &= \int_0^\infty \alpha s M_\alpha(s) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(4\pi s (t-s)^\alpha \right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|z-x|^2}{4s (t-s)^\alpha}} \sigma^2 u_1(\sigma z, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} s) dz \right) ds \\ &= \int_0^\infty \alpha s M_\alpha(s) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(4\pi s (t-s)^\alpha \right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|z-x|^2}{4s (t-s)^\alpha}} u_1(z, s) dz \right) ds \\ &= \int_0^\infty \alpha s M_\alpha(s) \left(G(s (t-s)^\alpha) u_1(s) \right) (x) ds \\ &= (E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta) u_1(s))(x). \end{aligned} \quad (4.3.46)$$

De posse das identidades (4.3.45) e (4.3.46) podemos afirmar que v_1 também é auto-similar. De fato,

$$\begin{aligned} v_1(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t) &= (E_\alpha(\sigma^2 t^\alpha \Delta) v_0)(\sigma x) + \sigma^2 \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (E_{\alpha,\alpha}(\sigma^2 (t-s)^\alpha \Delta) u_1(\sigma^{\frac{2}{\alpha}} s))(\sigma x) ds \\ &= (E_\alpha(t^\alpha \Delta) v_0)(x) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta) u_1(s))(x) ds \\ &= v_1(x, t). \end{aligned}$$

Através de um processo indutivo podemos verificar que $[u_n, v_n]$ satisfaz a propriedade de escala

$$u_n(x, t) = \sigma^2 u_n(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t) \quad \text{e} \quad v_n(x, t) = v_n(\sigma x, \sigma^{\frac{2}{\alpha}} t),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como a solução $[u, v]$ é o limite da sequência $\{[u_n, v_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$, em $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$, e a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2}$ é invariante pela escala, segue-se que $[u, v]$ satisfaz (4.1.3), sendo portanto, uma solução auto-similar. $\square$

4.4 Comportamento assintótico das soluções

Nesta seção apresentamos um resultado sobre estabilidade assintótica para a solução do problema (4.1.1).

Teorema 4.4.1. *Sob as hipóteses do Teorema 4.3.1, assumamos que $[u, v]$ e $[\tilde{u}, \tilde{v}]$ são duas soluções dadas pelo Teorema 4.3.1, com respeito aos dados iniciais $[u_0, v_0]$ e $[\tilde{u}_0, \tilde{v}_0]$, respectivamente. Sejam $E_\alpha(t^\alpha \Delta)$ e $E_\alpha(t^\alpha (\Delta - \gamma))$ os operadores de Mittag-Leffler associados aos operadores Δ e $\Delta - \gamma$, respectivamente. Temos então que*

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(t^{\frac{\alpha b}{2}} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{r,\lambda} + t^{\frac{\alpha a}{2}} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{q,\lambda} \right. \\ \left. + t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla E_\alpha(t^\alpha (\Delta - \gamma))(v_0 - \bar{v}_0)\|_{L^\infty} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.4.47)$$

se, e somente se,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|(u(\cdot, t) - \bar{u}(\cdot, t))\|_{r,\lambda} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\frac{\alpha a}{2}} \|u(\cdot, t) - \bar{u}(\cdot, t)\|_{q,\lambda} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla(v - \bar{v})(\cdot, t)\|_{L^\infty} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.4.48)$$

Demonstração. Suponhamos inicialmente que a condição (4.4.47) se verifica. Sejam $[u, v]$ e $[\bar{u}, \bar{v}]$ duas soluções brandas dadas pelo Teorema 4.3.1. Então

$$t^{\frac{\alpha b}{2}} \|u(t) - \bar{u}(t)\|_{r,\lambda} \leq t^{\frac{\alpha b}{2}} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{r,\lambda} + I(t), \quad (4.4.49)$$

onde

$$I(t) = t^{\frac{\alpha b}{2}} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|\nabla E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta)(u \nabla v - \bar{u} \nabla \bar{v})(s)\|_{r,\lambda} ds. \quad (4.4.50)$$

Inferimos o seguinte limite superior para $I(t)$:

$$\begin{aligned}
I(t) &\leq Ct^{\frac{\alpha b}{2}} \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} \|(u \nabla v)(s) - (\bar{u} \nabla \bar{v})(s)\|_{r,\lambda} ds \\
&\leq Ct^{\frac{\alpha b}{2}} \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} \left(\|(u - \bar{u})(s)\|_{r,\lambda} \|\nabla v(s)\|_{L^\infty} + \|\nabla(v - \bar{v})(s)\|_{L^\infty} \|\bar{u}(s)\|_{r,\lambda} \right) ds \\
&\leq Ct^{\frac{\alpha b}{2}} \left(\int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{-\frac{\alpha}{2}(1+b)} s^{\frac{\alpha b}{2}} \|(u - \bar{u})(s)\|_{r,\lambda} ds \right) \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \\
&\quad + Ct^{\frac{\alpha b}{2}} \left(\int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{-\frac{\alpha}{2}(1+b)} s^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla(v - \bar{v})(s)\|_{L^\infty} ds \right) \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|\bar{u}(t)\|_{r,\lambda}. \quad (4.4.51)
\end{aligned}$$

Tomando $\sigma_1 = 1 + 2(K_4 + K_5)$, $\sigma_2 = K_1 + K_2 + K_3$ e $\tilde{\sigma}_1 = \sigma_1 + 2K_5$ (notemos que $\tilde{\sigma}_1 \leq 2\sigma_2$), podemos escolher $\epsilon > 0$ na demonstração do Teorema 4.3.1 de modo que $2\sigma_2\sigma_1\epsilon < \frac{1}{2}$. Como

$$\|u\|_{\mathcal{X}_1}, \|\bar{u}\|_{\mathcal{X}_1} \leq 2\epsilon \quad \text{e} \quad \|v\|_{\mathcal{X}_2}, \|\bar{v}\|_{\mathcal{X}_2} \leq \epsilon\sigma_1, \quad (4.4.52)$$

temos

$$\begin{aligned}
I(t) &\leq C\epsilon\sigma_1 \int_0^1 (1-z)^{\frac{\alpha}{2}-1} z^{-\frac{\alpha}{2}(1+b)} (tz)^{\frac{\alpha b}{2}} \|(u - \bar{u})(tz)\|_{r,\lambda} dz \\
&\quad + 2C\epsilon \int_0^1 (1-z)^{\frac{\alpha}{2}-1} z^{-\frac{\alpha}{2}(1+b)} (tz)^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla(v - \bar{v})(tz)\|_{L^\infty} dz. \quad (4.4.53)
\end{aligned}$$

Na sequência estimamos a norma do termo $\nabla(v - \bar{v})$ em L^∞ . Procedemos do seguinte modo

$$t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla(v - \bar{v})(t)\|_{L^\infty} \leq t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla E_\alpha(t^\alpha(\Delta - \gamma))(v_0 - \bar{v}_0)\|_{L^\infty} + J(t), \quad (4.4.54)$$

onde

$$J(t) = t^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|\nabla E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha(\Delta - \gamma))(u(s) - \bar{u}(s))\|_{L^\infty} ds.$$

Para o termo $J(t)$ obtemos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}
J(t) &= t^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{\alpha-1} \|\nabla E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha(\Delta - \gamma))(u(s) - \bar{u}(s))\|_{L^\infty} ds \\
&\quad + t^{\frac{\alpha}{2}} \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{\alpha-1} \|\nabla E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha(\Delta - \gamma))(u(s) - \bar{u}(s))\|_{L^\infty} ds \\
&\leq Ct^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-\frac{n-\lambda}{r})-1} \|u(s) - \bar{u}(s)\|_{r,\lambda} ds \\
&\quad + Ct^{\frac{\alpha}{2}} \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}(1-\frac{n-\lambda}{q})-1} \|u(s) - \bar{u}(s)\|_{q,\lambda} ds \\
&\leq C \int_0^{\frac{1}{2}} (1-s)^{\frac{\alpha}{2}(b-1)-1} s^{-\frac{\alpha b}{2}} (ts)^{\frac{\alpha b}{2}} \|u(ts) - \bar{u}(ts)\|_{r,\lambda} ds \\
&\quad + C \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-s)^{\frac{\alpha}{2}(a-1)-1} s^{-\frac{\alpha a}{2}} (ts)^{\frac{\alpha a}{2}} \|u(ts) - \bar{u}(ts)\|_{q,\lambda} ds. \quad (4.4.55)
\end{aligned}$$

Precisamos agora estimar a norma $\|\cdot\|_{q,\lambda}$ de $t^{\frac{\alpha a}{2}}(u - \bar{u})$. Usando (4.2.12) e (4.2.13) temos

$$t^{\frac{\alpha a}{2}} \|u - \bar{u}\|_{q,\lambda} \leq t^{\frac{\alpha a}{2}} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{q,\lambda} + \Gamma_1(t) + \Gamma_2(t), \quad (4.4.56)$$

onde $\Gamma_1(t)$ e $\Gamma_2(t)$ são dados por

$$\begin{aligned}\Gamma_1(t) &= Ct^{\frac{\alpha a}{2}} \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{\frac{\alpha}{2}(b-a+1)-1} \|(u-\bar{u})(s)\|_{r,\lambda} \|\nabla v(s)\|_{L^\infty} ds \\ &\quad + Ct^{\frac{\alpha a}{2}} \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{\frac{\alpha}{2}(b-a+1)-1} \|\nabla(v-\bar{v})(s)\|_{L^\infty} \|\bar{u}(s)\|_{r,\lambda} ds, \quad (4.4.57)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_2(t) &= Ct^{\frac{\alpha a}{2}} \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} \|(u-\bar{u})(s)\|_{q,\lambda} \|\nabla v(s)\|_{L^\infty} ds \\ &\quad + Ct^{\frac{\alpha a}{2}} \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} \|\nabla(v-\bar{v})(s)\|_{L^\infty} \|\bar{u}(s)\|_{q,\lambda} ds. \quad (4.4.58)\end{aligned}$$

Temos as seguintes estimativas a priori para os termos $\Gamma_1(t)$ e $\Gamma_2(t)$:

$$\begin{aligned}\Gamma_1(t) &\leq \left(C \int_0^{\frac{1}{2}} (1-z)^{\frac{\alpha}{2}(b-a+1)-1} z^{-\frac{\alpha}{2}(1+b)} (tz)^{\frac{\alpha b}{2}} \|u(tz) - \bar{u}(tz)\|_{r,\lambda} dz \right) \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \\ &\quad + \left(C \int_0^{\frac{1}{2}} (1-z)^{\frac{\alpha}{2}(b-a+1)-1} z^{-\frac{\alpha}{2}(1+b)} (tz)^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla(v-\bar{v})(tz)\|_{L^\infty} dz \right) \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|\bar{u}(t)\|_{r,\lambda}. \quad (4.4.59)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_2(t) &\leq \left(C \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-z)^{\frac{\alpha}{2}-1} z^{-\frac{\alpha}{2}(1+a)} (tz)^{\frac{\alpha a}{2}} \|u(tz) - \bar{u}(tz)\|_{q,\lambda} dz \right) \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \\ &\quad + \left(C \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-z)^{\frac{\alpha}{2}-1} z^{-\frac{\alpha}{2}(1+a)} (tz)^{\frac{\alpha a}{2}} \|\bar{u}(tz)\|_{q,\lambda} dz \right) \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla(v-\bar{v})(t)\|_{L^\infty}. \quad (4.4.60)\end{aligned}$$

Consideremos agora a seguinte notação:

$$A_1 = \limsup_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|u(t) - \bar{u}(t)\|_{r,\lambda},$$

$$A_2 = \limsup_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla(v-\bar{v})(t)\|_{L^\infty},$$

$$A_3 = \limsup_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{\alpha a}{2}} \|u(t) - \bar{u}(t)\|_{q,\lambda}.$$

Notemos que (4.4.52) implica em $A_1, A_2, A_3 < \infty$. Levando em consideração o limite em (4.4.47) e as estimativas (4.4.53), (4.4.55) e (4.4.59)-(4.4.60), obtemos

$$\begin{aligned}A_1 &\leq (\epsilon \sigma_1 A_1 + 2\epsilon A_2) C \int_0^1 (1-z)^{\frac{\alpha}{2}-1} z^{-\frac{\alpha}{2}(1+b)} dz \\ &\leq (\epsilon \sigma_1 A_1 + 2\epsilon A_2) K_2, \quad (4.4.61)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_2 &\leq C \left(\int_0^{\frac{1}{2}} (1-z)^{\frac{\alpha}{2}(b-1)-1} z^{-\frac{\alpha b}{2}} dz + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-z)^{\frac{\alpha}{2}(a-1)-1} z^{-\frac{\alpha a}{2}} dz \right) (A_1 + A_3) \\ &\leq K_5 (A_1 + A_3) \quad (4.4.62)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
A_3 &\leq (\epsilon\sigma_1 A_1 + 2\epsilon A_2)C \int_0^{\frac{1}{2}} (1-z)^{\frac{\alpha}{2}(b-a+1)-1} z^{-\frac{\alpha}{2}(1+b)} dz \\
&\quad + (\epsilon\sigma_1 A_3 + 2\epsilon A_2)C \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-z)^{\frac{\alpha}{2}-1} z^{-\frac{\alpha}{2}(1+a)} dz \\
&\leq (\epsilon\sigma_1(A_1 + A_3) + 4\epsilon A_2)K_3.
\end{aligned} \tag{4.4.63}$$

Somando as desigualdades (4.4.61) e (4.4.63), e levando em conta a estimativa (4.4.62) vemos que

$$\begin{aligned}
A_1 + A_3 &\leq (\epsilon\sigma_1 A_1 + 2\epsilon A_2)K_2 + (\epsilon\sigma_1(A_1 + A_3) + 4\epsilon A_2)K_3 \\
&\leq (K_2 + K_3)\sigma_1\epsilon(A_1 + A_3) + 2\epsilon(K_2 + 2K_3)A_2 \\
&\leq 2(K_2 + K_3)\sigma_1\epsilon(A_1 + A_3) + 4(K_2 + K_3)\epsilon K_5(A_1 + A_3) \\
&\leq 2(K_2 + K_3)\epsilon\tilde{\sigma}_1(A_1 + A_3) \\
&\leq 4\sigma_2\sigma_1\epsilon(A_1 + A_3).
\end{aligned}$$

Como $4\sigma_2\sigma_1\epsilon < 1$, temos $A_1 = A_3 = 0$ e ainda $0 \leq A_2 \leq K_5(A_1 + A_3) = 0$. Com isto provamos os limites em (4.4.48).

Reste-nos mostrar a afirmação recíproca, ou seja, que os limites em (4.4.48) implicam em (4.4.47). Assumindo que $A_1 = A_2 = A_3 = 0$ e procedemos de modo análogo à demonstração das desigualdades (4.4.49), (4.4.54) e (4.4.56), obtemos

$$t^{\frac{\alpha b}{2}} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{r,\lambda} \leq t^{\frac{\alpha b}{2}} \|u(t) - \bar{u}(t)\|_{r,\lambda} + I(t), \tag{4.4.64}$$

$$\begin{aligned}
t^{\frac{\alpha a}{2}} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{q,\lambda} &\leq t^{\frac{\alpha a}{2}} \|u(t) - \bar{u}(t)\|_{q,\lambda} \\
&\quad + t^{\frac{\alpha a}{2}} \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{\alpha-1} \|\nabla E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta)((u\nabla v)(s) - (\bar{u}\nabla \bar{v})(s))\|_{q,\lambda} ds \\
&\quad + t^{\frac{\alpha a}{2}} \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{\alpha-1} \|\nabla E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \Delta)((u\nabla v)(s) - (\bar{u}\nabla \bar{v})(s))\|_{q,\lambda} ds \\
&\leq t^{\frac{\alpha a}{2}} \|u - \bar{u}\|_{q,\lambda} + \Gamma_1(t) + \Gamma_2(t)
\end{aligned} \tag{4.4.65}$$

e

$$t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla E_\alpha(t^\alpha(\Delta - \gamma))(v_0 - \bar{v}_0)\|_{L^\infty} \leq t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla(v - \bar{v})(t)\|_{L^\infty} + J(t), \tag{4.4.66}$$

com $I(t)$, $\Gamma_1(t)$, $\Gamma_2(t)$ e $J(t)$ dados em (4.4.50), (4.4.57), (4.4.58) e (4.4.55), respectivamente. Tomando o limite superior nas estimativas anteriores temos que

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} t^{\frac{\alpha b}{2}} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{r,\lambda} \leq A_1 + (\epsilon\sigma_1 A_1 + 2\epsilon A_2)K_2 = 0,$$

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} t^{\frac{\alpha a}{2}} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta)(u_0 - \bar{u}_0)\|_{q,\lambda} \leq A_3 + (\epsilon\sigma_1(A_1 + A_3) + 4\epsilon A_2)K_3 = 0,$$

e finalmente,

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla E_\alpha(t^\alpha(\Delta - \gamma))(v_0 - \bar{v}_0)\|_{L^\infty} \leq A_2 + K_5(A_1 + A_3) = 0.$$

Com isto encerramos a demonstração do Teorema 4.4.1. $\square$

Como uma consequência do caso $\gamma = 0$, o Teorema 4.4.1 fornece um atrator em torno de cada solução auto-similar. Precisamente, nós temos:

Corolário 4.4.1. *Sob as hipóteses do Teorema 4.3.1 assuma que $u_0 \in \mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b}$ e $v_0 \in \dot{B}_{\infty,\infty}^0$ são funções homogêneas de grau -2 e 0 , respectivamente. Seja $[\phi, \psi] \in C_0^\infty \times C_0^\infty$ e sejam $[u, v]$ e $[\theta, \varphi]$ soluções brandas, dadas pelo Teorema 4.3.1, com dados $[u_0, v_0]$ e $[u_0 + \phi, v_0 + \psi]$, respectivamente. Então, para o caso $\gamma = 0$, a solução perturbada $[\theta, \varphi]$ é atraída pela solução auto-similar $[u, v]$, no sentido de (4.4.48).*

Demonstração. Para demonstrar o Corolário 4.4.1 é suficiente provarmos as seguintes propriedades:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\frac{ab}{2}} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta) \phi\|_{r,\lambda} = 0, \quad (4.4.67)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\frac{aa}{2}} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta) \phi\|_{q,\lambda} = 0, \quad (4.4.68)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla E_\alpha(t^\alpha \Delta) \psi\|_{L^\infty} = 0. \quad (4.4.69)$$

Inicialmente, tomando $\frac{n-\lambda}{4-b} < p_{10} < \frac{n-\lambda}{2}$, temos do Lema 2.6.2 que

$$\|G(t)\phi\|_{r,\lambda} \leq Ct^{-\frac{1}{2}(\frac{n-\lambda}{p_{10}}-2+b)} \|\phi\|_{p_{10},\lambda}. \quad (4.4.70)$$

Desta última desigualdade inferimos que

$$\begin{aligned} t^{\frac{ab}{2}} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta) \phi\|_{r,\lambda} &\leq Ct^{-\alpha(\frac{1}{2}(\frac{n-\lambda}{p_{10}})-1)} \left(\int_0^\infty M_\alpha(s) s^{-\frac{1}{2}(\frac{n-\lambda}{p_{10}}-2+b)} ds \right) \|\phi\|_{p_{10},\lambda} \\ &\leq Ct^{-\alpha(\frac{1}{2}(\frac{n-\lambda}{p_{10}})-1)} \frac{\Gamma(1 - \frac{1}{2}(\frac{n-\lambda}{p_{10}} - 2 + b))}{\Gamma(1 - \frac{\alpha}{2}(\frac{n-\lambda}{p_{10}} - 2 + b))} \|\phi\|_{p_{10},\lambda}, \end{aligned}$$

e o limite em (4.4.67) segue. Para provar a propriedade (4.4.68) tomamos $\frac{n-\lambda}{4-a} < p_{11} < \frac{n-\lambda}{2}$ e utilizando o Lema 2.6.2 temos a estimativa

$$\|G(t)\phi\|_{q,\lambda} \leq Ct^{-\frac{1}{2}(\frac{n-\lambda}{p_{11}}-2+a)} \|\phi\|_{p_{11},\lambda}, \quad (4.4.71)$$

a qual implica em

$$\begin{aligned} t^{\frac{aa}{2}} \|E_\alpha(t^\alpha \Delta) \phi\|_{q,\lambda} &\leq Ct^{\frac{aa}{2}} t^{-\frac{\alpha}{2}(\frac{n-\lambda}{p_{11}}-2+a)} \left(\int_0^\infty M_\alpha(s) s^{-\frac{1}{2}(\frac{n-\lambda}{p_{11}}-2+a)} ds \right) \|\phi\|_{p_{11},\lambda} \\ &= Ct^{-\frac{\alpha}{2}(\frac{n-\lambda}{p_{11}}-2)} \frac{\Gamma(1 - \frac{1}{2}(\frac{n-\lambda}{p_{11}} - 2 + a))}{\Gamma(1 - \frac{\alpha}{2}(\frac{n-\lambda}{p_{11}} - 2 + a))} \|\phi\|_{p_{11},\lambda}. \end{aligned}$$

Com isto concluimos o limite em (4.4.68). Por fim, para verificarmos a propriedade (4.4.69), tomamos $p_{12} > n - \lambda$, e mais uma vez, aplicando o Lema 2.6.2, ficamos com

$$\|\nabla G(t)\phi\|_{L^\infty} \leq Ct^{-\frac{1}{2}(1+\frac{n-\lambda}{p_{12}})}\|\phi\|_{p_{12},\lambda}. \quad (4.4.72)$$

Utilizando então a estimativa (4.4.72) segue-se

$$\begin{aligned} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\nabla E_\alpha(t^\alpha \Delta)\phi\|_{L^\infty} &\leq Ct^{-\frac{n-\lambda}{p_{12}}} \left(\int_0^\infty M_\alpha(s) s^{-\frac{1}{2}(1+\frac{n-\lambda}{p_{12}})} ds \right) \|\phi\|_{p_{12},\lambda} \\ &\leq Ct^{-\frac{n-\lambda}{p_{12}}} \frac{\Gamma\left(1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{n-\lambda}{p_{12}}\right)\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{\alpha}{2}\left(1 + \frac{n-\lambda}{p_{12}}\right)\right)} \|\phi\|_{p_{12},\lambda}, \end{aligned}$$

e assim encerramos a demonstração do Corolário 4.4.1. □

REFERÊNCIAS

- ADAMS, R. A. *Sobolev spaces*. 1975. [S.l.]: Academic Press, New York, 1975. Citado na página 87.
- AMANN, H. *Linear and Quasilinear Parabolic Problems: Volume I: Abstract Linear Theory*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1995. v. 1. Citado na página 29.
- ANDRADE, F. et al. Lp-boundedness and topological structure of solutions for flexible structural systems. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, Wiley Online Library, v. 38, n. 18, p. 5139–5159, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 36, 73 e 78.
- APARCANA, A. et al. Fractional evolution equations and applications. *Mathematical Methods in Applied Sciences*. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 69.
- ARAFA, A.; EL-SAYED, A.; RIDA, S. On the solutions of time-fractional bacterial chemotaxis in a diffusion gradient chamber. *International Journal of Nonlinear Science*, v. 7, n. 4, p. 485–492, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 13, 14 e 100.
- ARJUNAN, M. M.; NADAF, N. Existence and controllability results for damped second order impulsive functional differential systems with state-dependent delay. *Opuscula Mathematica*, AGH University of Science and Technology Press, v. 34, n. 3, p. 503–522, 2014. Citado na página 22.
- AVALOS, G.; LASIECKA, I. Optimal blow-up rates for the minimal energy null control of the strongly damped abstract wave equation. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze*, Scuola normale superiore, v. 2, n. 3, p. 601–616, 2003. Citado na página 12.
- AZEVEDO, J.; CUEVAS, C.; HENRÍQUEZ, E. Existence and asymptotic behaviour for the time-fractional Keller-Segel model for chemotaxis. *submitted*. Citado na página 16.
- AZEVEDO, J.; CUEVAS, C.; SOTO, H. Qualitative theory for strongly damped wave equations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, Wiley Online Library. <https://doi.org/10.1002/mma.4504>, p. 1–32, 2017. Citado na página 13.
- BAHUGUNA, D. Strongly damped semilinear equations. *International Journal of Stochastic Analysis*, Hindawi Publishing Corporation, v. 8, n. 4, p. 397–404, 1995. Citado na página 12.
- BERBERAN-SANTOS, M. N. Properties of the Mittag-Leffler relaxation function. *Journal of Mathematical Chemistry*, Springer, v. 38, n. 4, p. 629–635, 2005. Citado na página 13.
- BILER, P. Local and global solvability of some parabolic systems modelling chemotaxis. *Advances in Mathematical Sciences and Applications*, GAKKOTOSHO CO., LTD., v. 8, p. 715–743, 1998. Citado na página 15.

- BLANCHET, A.; CARRILLO, J. A.; LAURENÇOT, P. Critical mass for a Patlak-Keller-Segel model with degenerate diffusion in higher dimensions. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, Springer, v. 35, n. 2, p. 133–168, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 100.
- BLANCHET, A.; CARRILLO, J. A.; MASMOUDI, N. Infinite time aggregation for the critical Patlak-Keller-Segel model in $\mathbb{R}^2$. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Wiley Online Library, v. 61, n. 10, p. 1449–1481, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 100.
- BOHR, H. *Almost Periodic Functions*. [S.l.]: Chelsea, 1956. Citado na página 17.
- BORINI, S.; PATA, V. Uniform attractors for a strongly damped wave equation with linear memory. *Asymptotic Analysis*, IOS press, v. 20, n. 3-4, p. 263–277, 1999. Citado na página 12.
- BRUSCHI, S. M. et al. Uniform exponential dichotomy and continuity of attractors for singularly perturbed damped wave equations. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, Springer, v. 18, n. 3, p. 767–814, 2006. Citado na página 12.
- CAICEDO, A. et al. Asymptotic behavior of solutions of some semilinear functional differential and integro-differential equations with infinite delay in Banach spaces. *Journal of the Franklin Institute*, Elsevier, v. 349, n. 1, p. 1–24, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 19.
- CALVEZ, V.; CORRIAS, L. The parabolic-parabolic Keller-Segel model in $\mathbb{R}^2$. *Communications in Mathematical Sciences*, International Press of Boston, v. 6, n. 2, p. 417–447, 2008. Citado na página 14.
- CAMPANATO, S. Proprieta di una famiglia di spazi funzionali. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze*, Scuola normale superiore, v. 18, n. 1, p. 137–160, 1964. Citado na página 31.
- CARVALHO, A.; CHOLEWA, J.; DLOTKO, T. Strongly damped wave problems: bootstrapping and regularity of solutions. *Journal of Differential Equations*, Elsevier, v. 244, n. 9, p. 2310–2333, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 12, 40 e 93.
- CARVALHO, A. N.; CHOLEWA, J. W. Attractors for strongly damped wave equations with critical nonlinearities. *Pacific Journal of Mathematics*, Mathematical Sciences Publishers, v. 207, n. 2, p. 287–310, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 13.
- CARVALHO, A. N.; CHOLEWA, J. W. Local well posedness for strongly damped wave equations with critical nonlinearities. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, Cambridge University Press, v. 66, n. 3, p. 443–463, 2002. Citado na página 12.
- CARVALHO, A. N.; CHOLEWA, J. W. Strongly damped wave equations in $W_0^{1,p} \times L^p(\Omega)$. *Discrete and Continuous Dynamical Systems Supplement*, p. 230–239, 2007. Citado na página 94.
- CARVALHO-NETO, P. M. de; PLANAS, G. Mild solutions to the time fractional Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^N$. *Journal of Differential Equations*, Elsevier, v. 259, n. 7, p. 2948–2980, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 14, 33 e 100.

- CHEN, S.; TRIGGIANI, R. Proof of two conjectures by G. Chen and D.L. Russell on structural damping for elastic systems: The case $\alpha = \frac{1}{2}$. *Lectures Notes in Math*, Springer-Verlag, v. 1354, p. 234–256, 1988. Citado na página 13.
- CHEN, S.; TRIGGIANI, R. Characterization of domains of fractional powers of certain operators arising in elastic systems, and applications. *Journal of Differential Equations*, Elsevier, v. 88, n. 2, p. 279–293, 1990. Citado na página 13.
- CHEN, S. P.; TRIGGIANI, R. Proof of extensions of two conjectures on structural damping for elastic systems: : The case $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$. *Pacific Journal of Mathematics*, Mathematical Sciences Publishers, v. 136, n. 1, p. 15–55, 1989. Citado na página 13.
- CHUONG, N. M.; KE, T. D. Generalized Cauchy problems involving nonlocal and impulsive conditions. *Journal of Evolution Equations*, Springer, v. 12, n. 2, p. 367–392, 2012. Citado na página 22.
- CORDUNEANU, C. *Almost periodic oscillations and waves*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2009. Citado na página 18.
- CORRIAS, L.; PERTHAME, B. Critical space for the parabolic-parabolic Keller-Segel model in $\mathbb{R}^d$. *Comptes Rendus Mathematique*, Elsevier, v. 342, n. 10, p. 745–750, 2006. Citado na página 15.
- CUEVAS, C.; DE ANDRADE, B. S-asymptotically ω -periodic and asymptotically ω -periodic solutions to semi-linear Cauchy problems with non-dense domain. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Elsevier, v. 72, n. 6, p. 3190–3208, 2010. Citado na página 19.
- CUEVAS, C. et al. Existence of solutions for a class of abstract neutral differential equations. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, AMER INST MATHEMATICAL SCIENCES-AIMS PO BOX 2604, SPRINGFIELD, MO 65801-2604 USA, v. 37, n. 5, p. 2455–2482, 2017. Citado 4 vezes nas páginas 36, 85, 86 e 89.
- CUEVAS, C.; HENRÍQUEZ, H. R.; SOTO, H. Asymptotically periodic solutions of fractional differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, v. 236, p. 524–545, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 20.
- CUEVAS, C.; LIZAMA, C. S-asymptotically ω -periodic solutions for semilinear Volterra equations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, Wiley Online Library, v. 33, n. 13, p. 1628–1636, 2010. Citado na página 11.
- CUEVAS, C.; LIZAMA, C.; SOTO, H. Asymptotic periodicity for strongly damped wave equations. v. 2013, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 12, 13, 39 e 66.
- CUEVAS, C.; SOUZA, J. C. de. S-asymptotically ω -periodic solutions of semilinear fractional integro-differential equations. *Applied Mathematics Letters*, Elsevier, v. 22, n. 6, p. 865–870, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 19.
- CUEVAS, C.; SOUZA, J. C. de. Existence of S-asymptotically ω -periodic solutions for fractional order functional integro-differential equations with infinite delay. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Elsevier, v. 72, n. 3, p. 1683–1689, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 19.

- DE ANDRADE, B. et al. Asymptotic Periodicity for flexible structural systems and applications. *Acta Applicandae Mathematicae*, Springer, v. 143, n. 1, p. 105–164, 2016. Citado 6 vezes nas páginas 11, 20, 21, 34, 36 e 81.
- DEBRUIJN, N. The asymptotically periodic behavior of the solutions of some linear functional equations. *American Journal of Mathematics*, JSTOR, v. 71, n. 2, p. 313–330, 1949. Citado na página 19.
- DEIMLING, K. *Nonlinear functional analysis*. [S.l.]: Courier Corporation, 2010. Citado na página 22.
- DEJAK, S. et al. On blowup dynamics in the Keller-Segel model of chemotaxis. *St. Petersburg Mathematical Journal*, v. 25, n. 4, p. 547–574, 2014. Citado na página 14.
- DOS SANTOS, J. P. C.; HENRÍQUEZ, H. R. Existence of S -asymptotically ω -periodic solutions to abstract integro-differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, v. 256, p. 109–118, 2015. Citado na página 11.
- ENGEL, K.-J.; NAGEL, R. *One-parameter semigroups for linear evolution equations*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1999. v. 194. Citado na página 28.
- ESCUADERO, C. The fractional Keller-Segel model. *Nonlinearity*, IOP Publishing, v. 19, n. 12, p. 2909, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 13, 14 e 100.
- FERREIRA, L. C.; PRECIOSO, J. C. Existence and asymptotic behaviour for the parabolic–parabolic Keller-Segel system with singular data. *Nonlinearity*, IOP Publishing, v. 24, n. 5, p. 1433, 2011. Citado 9 vezes nas páginas 14, 15, 16, 31, 32, 34, 100, 101 e 110.
- FRÉCHET, M. Les fonctions asymptotiquement presque-périodiques. *Revue Sci. (Rev. Rose Illus.)*, v. 79, p. 341–354, 1941. Citado na página 18.
- FRÉCHET, M. Les fonctions asymptotiquement presque-périodiques. *C. R. Acad. Sci. Paris*, v. 213, p. 520–522, 1941. Citado na página 18.
- GAZZOLA, F.; SQUASSINA, M. Global solutions and finite time blow up for damped semilinear wave equations. In: ELSEVIER. *Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis*. [S.l.], 2006. v. 23, n. 2, p. 185–207. Citado na página 12.
- GEORGIEV, V.; TODOROVA, G. Existence of a solution of the wave equation with nonlinear damping and source terms. *Journal of differential equations*, Elsevier, v. 109, n. 2, p. 295–308, 1994. Citado na página 12.
- GHIDAGLIA, J.; MARZOCCHI, A. Longtime behaviour of strongly damped wave equations, global attractors and their dimension. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, SIAM, v. 22, n. 4, p. 879–895, 1991. Citado na página 12.
- GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S. *Elliptic partial differential equations of second order*. [S.l.]: Springer, 2001. Citado na página 95.
- GÓRNIIEWICZ, L. Topological structure of solution sets: current results. *Arch. Math. (Brno)*, v. 36, p. 343–382, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 38.
- GRANAS, A.; DUGUNDJI, J. *Fixed point theory*. [S.l.]: Springer-Verlag, 2003. Citado na página 34.

- GURUSAMY, A. Finite element method for time fractional Keller-Segel chemotaxis system. In: *Theory and Applications of Non-integer Order Systems*. [S.l.]: Springer, 2017. p. 441–448. Citado na página 13.
- HENRÍQUEZ, H. *Introducción a la Medida Vectorial*. [S.l.]: Editorial Académica, 2012. Citado na página 35.
- HENRÍQUEZ, H. R. The Kneser property for abstract retarded functional differential equations with infinite delay. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, Hindawi Publishing Corporation, v. 2003, n. 26, p. 1645–1661, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 73 e 78.
- HENRÍQUEZ, H. R.; PIERRI, M.; TÁBOAS, P. On S -asymptotically ω -periodic functions on Banach spaces and applications. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, v. 343, n. 2, p. 1119–1130, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 11, 19 e 20.
- HENRÍQUEZ, H. R.; POBLETE, V.; POZO, J. C. Mild solutions of non-autonomous second order problems with nonlocal initial conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, v. 412, n. 2, p. 1064–1083, 2014. Citado na página 22.
- HENRY, D. *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*. [S.l.]: Springer, 2006. v. 840. Citado 3 vezes nas páginas 13, 29 e 39.
- HERRERO, M. A.; VELÁZQUEZ, J. J. Chemotactic collapse for the Keller-Segel model. *Journal of Mathematical Biology*, Springer, v. 35, n. 2, p. 177–194, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 100.
- HORSTMANN, D. On the existence of radially symmetric blow-up solutions for the Keller-Segel model. *Journal of Mathematical Biology*, Springer, v. 44, n. 5, p. 463–478, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 100.
- HORSTMANN, D. From 1970 until present: the Keller-Segel model in chemotaxis and its consequences I. *Jahresbericht der DMV*, v. 105, n. 3, p. 163–165, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 100.
- HORSTMANN, D. From 1970 until present: the Keller-Segel model in chemotaxis and its consequences II. *Jahresbericht der DMV*, v. 106, n. 2, p. 51–69, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 100.
- HORSTMANN, D.; WINKLER, M. Boundedness vs. blow-up in a chemotaxis system. *Journal of Differential Equations*, Elsevier, v. 215, n. 1, p. 52–107, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 100.
- IKEHATA, R. Decay estimates of solutions for the wave equations with strong damping terms in unbounded domains. *Mathematical methods in the Applied Sciences*, Wiley Online Library, v. 24, n. 9, p. 659–670, 2001. Citado na página 12.
- KELLER, E. F.; SEGEL, L. A. Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability. *Journal of Theoretical Biology*, Elsevier, v. 26, n. 3, p. 399–415, 1970. Citado na página 14.
- KOZONO, H.; SUGIYAMA, Y. The Keller-Segel system of parabolic-parabolic type with initial data in weak $L^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$ and its application to self-similar solutions. *Indiana University Mathematics Journal*, JSTOR, p. 1467–1500, 2008. Citado na página 15.

- KOZONO, H.; SUGIYAMA, Y. Global strong solution to the semi-linear Keller-Segel system of parabolic-parabolic type with small data in scale invariant spaces. *Journal of Differential Equations*, Elsevier, v. 247, n. 1, p. 1–32, 2009. Citado na página 15.
- KOZONO, H.; YAMAZAKI, M. Semilinear heat equations and the Navier-Stokes equation with distributions in new function spaces as initial data. *Communications in Partial Differential Equations*, Taylor & Francis, v. 19, n. 5-6, p. 959–1014, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 32.
- LI, H.; ZHOU, S.; YIN, F. Global periodic attractor for strongly damped wave equations with time-periodic driving force. *Journal of Mathematical Physics*, AIP, v. 45, n. 9, p. 3462–3467, 2004. Citado na página 12.
- MAINARDI, F. On the initial value problem for the fractional diffusion-wave equation. *Waves and Stability in Continuous Media*, World Scientific, Singapore, World Scientific, v. 1994, p. 246–251, 1994. Citado na página 33.
- MARTIN, R. H. Nonlinear operators and differential equations in Banach spaces. J. Wiley & Sons, 1976. Citado na página 44.
- MASSATT, P. Limiting behavior for strongly damped nonlinear wave equations. *Journal of Differential Equations*, Elsevier, v. 48, n. 3, p. 334–349, 1983. Citado na página 12.
- MAZZUCATO, A. Besov-Morrey spaces: function space theory and applications to non-linear PDE. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 355, n. 4, p. 1297–1364, 2003. Citado na página 32.
- MESSAOUDI, S. A. Blow up in a nonlinearly damped wave equation. *Mathematische Nachrichten*, Berlin, Akademie-Verlag., v. 231, n. 1, p. 1–7, 2001. Citado na página 12.
- MILLER, R. K. Nonlinear Volterra integral equations. WA Benjamin, 1971. Citado 5 vezes nas páginas 23, 24, 25, 26 e 27.
- NAGAI, T.; SYUKUINN, R.; UMESAKO, M. Decay properties and asymptotic profiles of bounded solutions to a parabolic system of chemotaxis in $\mathbb{R}^n$. *Funkcialaj Ekvacioj*, Division of Functional Equations, The Mathematical Society of Japan, v. 46, n. 3, p. 383–407, 2003. Citado na página 14.
- PATA, V.; SQUASSINA, M. On the strongly damped wave equation. *Communications in Mathematical Physics*, Springer, v. 253, n. 3, p. 511–533, 2005. Citado na página 12.
- PAZY, A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 44. Citado na página 82.
- PEETRE, J. On the theory of l_p , λ spaces. *Journal of Functional Analysis*, Elsevier, v. 4, n. 1, p. 71–87, 1969. Citado na página 31.
- PIERRI, M.; ROLNIK, V. On pseudo S -asymptotically ω -periodic functions. *Bull. Aust. Math. Soc.*, v. 87, p. 238–254, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 19.
- SAMKO, S.; KILBAS, A.; MARICHEV, O. Fractional integrals and derivatives: Theory and applications, Gordon and Breach, 1987. *Trans. from Russian*, 1993. Citado na página 13.

- SCHNEIDER, W.; WYSS, W. Fractional diffusion and wave equations. *Journal of Mathematical Physics*, AIP, v. 30, n. 1, p. 134–144, 1989. Citado na página 13.
- SCHNEIDER, W. R. Fractional diffusion. *Lecture Notes in Phys*, Springer, v. 355, p. 276–286, 1990. Citado na página 13.
- SIMON, J. Compact sets in the space $L^p(0, T; \mathcal{B})$. *Annali di Matematica pura ed applicata*, Springer, v. 146, n. 1, p. 65–96, 1987. Citado na página 35.
- SIRACUSA, G. Sobre equações integro-diferenciais com retardo dependendo do estado e equações semilineares hiperbólicas. Universidade Federal de Pernambuco, 2012. Citado na página 78.
- SUGIYAMA, Y.; KUNII, H. Global existence and decay properties for a degenerate Keller-Segel model with a power factor in drift term. *Journal of Differential Equations*, Elsevier, v. 227, n. 1, p. 333–364, 2006. Citado na página 15.
- SZUFLA, S. Sets of fixed points of nonlinear mappings in function spaces. *Funkcial. Ekvac*, v. 22, n. 1, p. 121–126, 1979. Citado na página 38.
- WEBB, G. Existence and asymptotic behavior for a strongly damped nonlinear wave equation. *Canad. J. Math*, v. 32, n. 3, p. 631–643, 1980. Citado na página 12.
- WINKLER, M. Aggregation vs. global diffusive behavior in the higher-dimensional Keller-Segel model. *Journal of Differential Equations*, Elsevier, v. 248, n. 12, p. 2889–2905, 2010. Citado na página 15.
- WYSS, W. The fractional diffusion equation. *Journal of Mathematical Physics*, AIP, v. 27, n. 11, p. 2782–2785, 1986. Citado na página 13.
- YANG, M.; SUN, C. Dynamics of strongly damped wave equations in locally uniform spaces: Attractors and asymptotic regularity. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 361, n. 2, p. 1069–1101, 2009. Citado na página 12.
- ZAIDMAN, S. *Almost-periodic functions in abstract spaces*. [S.l.]: Pitman Advanced Pub. Program, 1985. v. 126. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 19.
- ZEID, S. S.; YOUSEFI, M. A neutral network approach for solving fractional-order model of hiv infection of cd4+t-cells. *International Journal of Sciences*, v. 5, n. 06, p. 65–69, 2016. Citado na página 13.
- ZHAI, Z. Global well-posedness for nonlocal fractional Keller-Segel systems in critical Besov spaces. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Elsevier, v. 72, n. 6, p. 3173–3189, 2010. Citado na página 15.