UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA
CURSO DE MESTRADO

EWELLEN TENORIO DE LIMA

RACIOCÍNIOS COMBINATÓRIO E PROBABILÍSTICO NA EJA: INVESTIGANDO RELAÇÕES

RECIFE
2018

EWELLEN TENORIO DE LIMA

RACIOCÍNIOS COMBINATÓRIO E PROBABILÍSTICO NA EJA: INVESTIGANDO RELAÇÕES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Orientadora: Profª. Drª. Rute Elizabete de Souza Rosa Borba.

RECIFE

2018

Catalogação na fonte
Bibliotecária Andréia Alcântara, CRB-4/1460.

L732r Lima, Ewellen Tenorio de.
Raciocínios combinatório e probabilístico na EJA: investigando relações / Ewellen Tenorio de Lima. – Recife, 2018.
141 f. : il. ; 30 cm.

Orientadora: Rute Elizabete de Souza Rosa Borba.
Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2018.
Inclui Referências.

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Combinatória. 3. Probabilidade. 4. Educação de Jovens e Adultos. 4. UFPE - Pós-graduação. I. Borba, Rute Elizabete de Souza Rosa. II. Título.

372.7 CDD (22. ed.) UFPE (CE2018-17)

EWELLEN TENORIO DE LIMA

RACIOCÍNIOS COMBINATÓRIO E PROBABILÍSTICO NA EJA: INVESTIGANDO RELAÇÕES

BANCA EXAMINADORA:

(Orientadora e Presidente)

Profa. Dra. Rute Elizabete de Souza Rosa Borba

Universidade Federal de Pernambuco

(Examinadora Interna)

Profa. Dra. Ana Côelho Vieira Selva

Universidade Federal de Pernambuco

(Examinadora Externa)

Profa. Dra. Jaqueline Lixandrão Santos

Universidade Federal de Pernambuco

Recife, 23 de fevereiro de 2018.

"O sucesso nasce do querer, da determinação e persistência em se chegar a um objetivo. Mesmo não atingindo o alvo, quem busca e vence obstáculos, no mínimo, fará coisas admiráveis"

- José de Alencar

AGRADECIMENTOS

A Deus, que guiou cada passo do caminho até aqui, permitindo essa conquista e aquelas que virão.

À minha família: meus pais,Edriano eGeni, e minhas irmãs, Jennifer e Edrianne, por sonharem comigo, pelo apoio e amor.

A Elias, Suneide, Daniel e Edneide, meus pais e irmãos recifences, que me receberam de braços abertos na cidade grande, me tornando parte da família.Muito obrigada!

À minha orientadora, Rute Borba, um exemplo de profissional e de pessoa, uma amiga e a melhor companheira de trabalho que eu poderia ter. Mais que isso, uma mãe acadêmica: minha ‘mãerientadora’! É uma honra e um grande presente ser uma de suas filhas acadêmicas.

Ao meu amor, Ivan Júnior, por acalmar as tempestades, pelas revisões de texto e pelo abraço que sempre faz tudo ficar bem. Andar ao seu lado e crescer junto com você me faz a mulher mais feliz do mundo.

Às minhas melhores amigas, que de perto ou à distância me apoiaram, torceram por mim e me proporcionaram as melhores risadas para esquecer os problemas acadêmicos. Sabrina, Samilly, Sarah e Vaniele, que entraram em minha vida em momentos diferentes, se tornando as irmãs que escolhi – cada uma sendo dona de um pedaço enorme do meu coração. E, como não poderia deixar de ter seu lugar especial: Maria Eduarda, a princesa. A sobrinha mais linda, danada e dançarina do mundo.

A toda a equipe e professoresdo EDUMATEC, em especial, à Gilda, Cris, Liliane e Carlos pelo olhar atento e pela ajuda no aperfeiçoamento dos estudos discutidos em nossas aulas de Seminários.

À turma do Mestrado 2016 pela companhia nessa caminhada. Muito sucesso e felicidade a todos vocês!

Aos alunos da linha de Processos 2016 e 2017, pela atenção e contribuições ao meu estudo durante as aulas de Seminários.

Aos melhores companheiros de viagens e de desabafos: Amanda, Arlam, Marciel e Mayra, por sofrerem junto comigo(nos divertindo muito no caminho).

Ao grupo de estudos mais florido, purpurinado e amoroso: Geração. Eu não poderia pedir por irmãs acadêmicas mais inteligentes e divertidas. Obrigada pelas contribuições, pela torcida de sempre e pelos exemplos a serem seguidos: quando ‘crescer’ quero ser igual a vocês.

À minha banca, composta pelas professoras Ana Selva e Jaqueline Lixandrão, pelas sugestões e contribuições que levaram ao aperfeiçoamento do meu trabalho.

Às escolas campo de pesquisa, que me receberam de braços abertos.E a todos os estudantes participantes do presente estudo, pela disponibilidade que o tornou possível.

Por fim, à FACEPE, pelo financiamento que proporcionou a total dedicação a esse estudo.

RESUMO

O presente estudo buscou investigar as contribuições que a exploração de problemas combinatórios pode trazer para o raciocínio probabilístico e vice-versa, tendo como foco as relações que se estabelecem entre os conhecimentos da Combinatória e da Probabilidade. O olhar para tais relações foi a principal contribuição do estudo à medida que conceitos referentes a tais áreas da Matemática inserem-se no campo conceitual das estruturas multiplicativas e destaca-se que conceitos de um mesmo campo conceitual possuem estreitas conexões entre si. Dada a incipiência de estudos na área da Educação Matemática voltados para a EJA e as características próprias de seus estudantes, optou-se por realizar a coleta de dados com 24 adultos em diferentes momentos de escolarização: Módulos II, IV e EJA Médio 3. A coleta de dados consistiu na proposição de quatro problemas combinatórios e 16 probabilísticos referentes, respectivamente, às diferentes *situações* combinatórias e às exigências cognitivas da Probabilidade. Tais problemas foram resolvidos durante entrevistas clínicas individuais e foram organizados em dois tipos de teste, em função da ordem de apresentação desses problemas. O desempenho dos participantes foi diretamente influenciado pelo nível de escolaridade dos mesmos. Destaca-se, no entanto, que tal efeito parece ter sido geral, não sendo, necessariamente, uma consequência do ensino específico de Combinatória e de Probabilidade. O problema combinatório de *produto cartesiano* foi aquele no qual os participantes obtiveram melhor desempenho, enquanto no problema de *combinação* o menor desempenho foi observado. As principais dificuldades enfrentadas pelos participantes na resolução dos problemas combinatórios estiveram pautadas na compreensão dos *invariantes* das distintas *situações* abordadas, bem como no esgotamento das possibilidades. No que diz respeito aos problemas probabilísticos, o desempenho nos problemas de *espaço amostral* esteve estreitamente relacionado ao tipo de *situação* combinatória correspondente, enquanto o desempenho nos problemas que abordaram as demais exigências cognitivas consideradas não foi influenciado pelo tipo de *situação* combinatória abordada. Dentre esses outros tipos de problema, os de *correlação* obtiveram melhor desempenho, enquanto as maiores dificuldades foram apresentadas nos problemas de *comparação de probabilidades diferentes*, pois o caráter proporcional, muitas vezes, não foi levado em consideração pelos participantes. No geral, ao resolver os problemas probabilísticos os participantes do estudo apresentaram dificuldades em justificar adequadamente suas respostas, o que revelou uma compreensão superficial da Probabilidade. A partir das análises realizadas, foi possível perceber, ainda, a existência de contribuições que surgem da resolução de problemas que relacionam Combinatória e Probabilidade. A articulação entre problemas combinatórios e probabilísticos mostrou-se uma abordagem que pode levar os estudantes a reavaliarem as *representações simbólicas* e estratégias utilizadas, bem como os *invariantes* dos problemas propostos, articulação que se mostrou mais promissora no teste no qual os problemas combinatórios foram revisitados sob o olhar da Probabilidade. Defende-se, assim, que a articulação entre Combinatória e Probabilidade pode beneficiar o desenvolvimento de ambos os raciocínios em questão na EJA.

Palavras-chave: Combinatória. Probabilidade. Raciocínio combinatório. Raciocínio probabilístico. Educação de Jovens e Adultos.

ABSTRACT

The present study investigated the contributions that the exploration of combinatorial problems can bring to probabilistic reasoning and vice versa, focusing on the relations that are established between the knowledge of Combinatorics and Probability. Looking at these relations was the main contribution of the study, as concepts related to Combinatorics and Probability fall within the conceptual field of multiplicative structures and it is emphasized that concepts of the same conceptual field are closely connected with each other. Realizing the incipience of studies in the area of Mathematics Education focused on Young and Adult Education and the characteristics of its students, data was collected with 24 adults at different phases of schooling (Modules II, IV and EJA High School) and consisted in the proposition of four combinatorial problems and 16 probabilistic problems referring respectively to different combinatorial *situations* and to cognitive demands of Probability understanding. These problems were solved during individual clinical interviews and were organized into two types of tests depending on the order of presentation of the problems. The performance of the participants was directly influenced by their level of schooling. However, this effect seems to have been general, not being, necessarily, a consequence of specific teaching of Combinatorics and Probability. The combinatorial problem of *Cartesian product* was the one in which the participants obtained better performance, while in the *combination* problem the lowest performance was observed. The main difficulties faced by the participants in solving the combinatorial problems were based on the understanding of the *invariants* of the different *situations* and on the exhaustion of possibilities. In the probabilistic problems the performance in the problems of *sample space* was closely related to the corresponding combinatorial *situations*, while the performance in the problems of the other cognitive demands considered was not influenced by the type of combinatorial *situation* addressed. Of these other types of problem, the *correlation* ones obtained better performance, while most difficulties were presented in the problems of *comparison of different probabilities*, since the proportional character of these problems was often not taken into account by the participants. In general, while solving the probabilistic problems, the participants had difficulties in justifying their answers, which revealed a superficial understanding of Probability. It was also possible to perceive from the analysis the existence of contributions that arise from the resolution of problems that relate Combinatorics and Probability~~.~~ The articulation between combinatorial and probabilistic problems is an approach that may lead students to reassess the *symbolic representations* and strategies used as well as the *invariants* of the proposed problems (articulation that proved most promising in the test in which combinatorial problems were revisited in the light of Probability). Therefore it is argued that the articulation between Combinatorics and Probability can benefit the development of combinatorial and probabilistic reasonings in Young and Adult Education.

Key words: Combinatorics. Probability. Combinatorial reasoning. Probabilistic reasoning. Young and Adult Education.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE TRANSCRIÇÕES

SUMÁRIO

1INTRODUÇÃO

É de suma importância que o ensino de Matemática, muito além de visar a apropriação de diversos conceitos, proporcione o desenvolvimento do raciocínio lógico matemático e hipotético-dedutivo. É esse tipo de trabalho que irá permitir que os estudantes sejam capazes de utilizarem conhecimentos matemáticos para resolver problemas – tanto os do cotidiano quanto aqueles que se distanciam deste, isto é, problemas mais abstratos, por vezes pautados naquilo que não podemos prever, abordando, portanto, as diferentes possibilidades existentes.

O raciocínio combinatório e o probabilístico são modos de pensar constituintes do raciocínio lógico-matemático. Esses provêm ferramentas que permitem relacionar conjuntos de elementos, pensar sobre proporções e compreender eventos aleatórios. Dada a importância de tais raciocínios para a compreensão de problemas escolarizados e do cotidiano, diferentes autores defendem que o trabalho voltado para o desenvolvimento dos mesmos deve ser realizado ao longo da Educação Básica, a partir do estudo progressivo de conceitos da Combinatória e da Probabilidade (FISCHBEIN, 1975; BORBA, 2016; CAMPOS; CARVALHO, 2016).

À luz da Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1996), tem-se que conceitos relativos à Combinatória e à Probabilidade estão inseridos em um mesmo campo conceitual – o das estruturas multiplicativas–, visto que a resolução de problemas combinatórios e probabilísticos "exigem uma multiplicação, uma divisão ou uma combinação destas duas operações" (p. 167). Dessa forma, dado que, para Vergnaud, um campo conceitual é um conjunto heterogêneo de problemas, situações e conceitos interconectados entre si, é imprescindível que sejam exploradas as relações existentes entre os mesmos. No presente estudo, têm-se como foco, especificamente, as relações existentes entre a Combinatória e a Probabilidade.

Diferentes autores (PIAGET; INHELDER, 1951 *apud* NAVARRO-PELAYO; BATANERO; GODINO, 1996; SANTOS, 2015) apontam que o raciocínio combinatório é essencial para a compreensão da ideia de Probabilidade. Esse raciocínio permite ao sujeito compreender experimentos aleatórios, dos mais elementares aos mais elaborados. No sentido oposto, é válido destacar, ainda, que conceitos probabilísticos (dentre eles o conceito de espaço amostral) constituem uma importante ferramenta para a resolução de problemas combinatórios.

Faz-se necessário, dessa forma, promover um ensino que permita a articulação e comunicação de ideias entre tais áreas da Matemática, que envolvem o levantamento de possibilidades – por meio do uso de conhecimentos combinatórios – para a correta compreensão da Probabilidade e análise de situações não determinísticas. Neste sentido, o presente estudo surgiu do interesse em investigar essas relações a partir da resolução de problemas combinatórios e probabilísticos articulados por meio de revisitações propostas. Tais revisitações consistiram na proposição de novos olhares aos problemas presentes nos instrumentos de coleta, a partir da ampliação e exploração de diferentes aspectos dos mesmos.

Buscando investigar as contribuições que a resolução de problemas referentes à Combinatória pode trazer para o raciocínio probabilístico e vice-versa, foram elaborados quatro problemas combinatórios (*produto cartesiano*, *combinação*, *permutação* e *arranjo*) e 16 problemas probabilísticos (sendo quatro de cada tipo: *espaço amostral*, *correlação*, *aleatoriedade* e *comparação de probabilidades diferentes*). Tais problemas foram estruturados em quatro blocos e propostos aos participantes do presente estudo organizados em dois tipos de teste.

O Teste 1 continha quatro blocos de problemas combinatórios que eram revisitados por problemas probabilísticos, isto é, após resolver cada problema combinatório os participantes resolviam quatro problemas probabilísticos que exploravam e aprofundavam o problema inicial. Por outro lado, o Teste 2 apresentava os mesmos problemas, porém no sentido inverso: os blocos de problemas probabilísticos eram resolvidos primeiro e, em seguida, o problema combinatório correspondente era proposto.

A abordagem intrínseca à coleta de dados conduzida evidencia o interesse em investigar conhecimentos combinatórios e probabilísticos dos participantes do estudo e, além disso, verificar possíveis contribuições a ambos os raciocínios que surgem a partir da resolução de problemas propostos de maneira articulada.

Dado o número de estudos exploratórios referentes ao raciocínio combinatório e ao probabilístico realizados com crianças e adolescentes (NAVARRO-PELAYO;

BATANERO; GODINO, 1996; PESSOA, 2009; SILVA, 2016), e percebendo-se a incipiência de estudos realizados com adultos, o presente estudo foi realizado com estudantes da Educação de Jovens e Adultos – EJA. Destaca-se a ampla bagagem possuída por tais estudantes – advinda de experiências cotidianas e sociais como, por exemplo, das relações de trabalho e de compra e venda –, que pode servir de ponto de partida para o desenvolvimento de seus conhecimentos matemáticos na escola.

A pesquisa foi desenvolvida junto a 24 estudantes adultos da EJA, sendo estes pertencentes a três grupos distintos em função da escolaridade dos mesmos. Buscando ter uma amostra de participantes em diferentes momentos de escolarização, optou-se por trabalhar com estudantes do Módulo II, do Módulo IV e da EJA Médio 3 etapas equivalentes, respectivamente, à conclusão dos Anos Iniciais e Finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. Metade dos participantes de cada grupo resolveu, em entrevista clínica individual, o Teste 1 e a outra metade o Teste 2. Nas entrevistas clínicas pretendeu-se acompanhar, de maneira aprofundada, o raciocínio dos participantes do estudo frente às situações combinatórias e probabilísticas presentes em ambos os testes.

Dessa maneira, buscou-se investigar os conhecimentos acerca de conceitos da Combinatória e da Probabilidade mobilizados durante a resolução dos problemas propostos, visando, também, identificar e caracterizar as relações que se estabelecem entre tais conhecimentos. Além disso, teve-se como foco de análise a influência da escolarização e das *representações simbólicas*/estratégias utilizadas no desempenho desses estudantes, bem como as contribuições que o raciocínio combinatório pode proporcionar ao desenvolvimento do raciocínio probabilístico e vice-versa.

No Capítulo 1 são apresentados os aportes teóricos utilizados na presente pesquisa, que se insere no âmbito das estruturas multiplicativas, elemento teórico relacionado à Teoria dos Campos Conceituais de Gèrard Vergnaud (1986; 1996). São apresentadas, ainda, a classificação adotada no estudo no que se refere às situações que dão sentido/significado aos conceitos da Combinatória e as exigências cognitivas ao desenvolvimento do raciocínio probabilístico. São estas, respectivamente, a classificação proposta por Pessoa e Borba (2009), que unifica categorizações das *situações* combinatórias, a depender de seus *invariantes de ordem* e *de escolha*, em *produto cartesiano, combinação, arranjo* e *permutação* e a argumentação de Bryant e Nunes (2012), que indica que para que haja compreensão dos conceitos relacionados à Probabilidade é necessário o desenvolvimento de noções que se referem à *construção de espaço amostral, compreensão de aleatoriedade, quantificação e comparação de probabilidades* e *investigação de correlações*. Por fim, são levantadas possíveis conexões entre os raciocínios combinatório e probabilístico, a fim de embasar as discussões apresentadas posteriormente.

No Capítulo 2 é feito o levantamento de documentos oficiais, bem como de orientações presentes em propostas curriculares, que dizem respeito à caracterização do público de estudantes e da modalidade de ensino focos do presente estudo. Também são apresentados estudos anteriores voltados para o ensino e aprendizagem da Combinatória e da Probabilidade e alguns dos estudos desenvolvidos pelo Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório e Probabilístico – Geração UFPE –, destacando-se aqueles realizados com a EJA, visto que possuem mais forte relação com a presente pesquisa.

No Capítulo 3 são apresentados o objetivo geral e os objetivos específicos do estudo, bem como a abordagem metodológica adotada para alcançá-los e os instrumentos de coleta utilizados. Foram elaboradas quatro situações-problema que abordam as diferentes *situações* combinatórias, conforme classificação de Pessoa e Borba (2009), e 16 problemas probabilísticos baseados nas exigências cognitivas relacionadas à aprendizagem da Probabilidade apontadas por Bryant e Nunes (2012). Tais problemas foram propostos em dois tipos de teste a estudantes da EJA em situação de entrevista clínica, visando apreender mais amplamente os conhecimentos evidenciados pelos participantes durante a resolução dos problemas propostos e as concepções acerca da Combinatória e da Probabilidade demonstradas por esses estudantes – tanto dos conceitos isolados, quanto articulados entre si. Os dados coletados foram analisados quantitativa e qualitativamente, a fim de responder os questionamentos da pesquisa, que buscou analisar contribuições, na Educação de Jovens e Adultos, que a exploração de problemas referentes à Combinatória pode trazer para o raciocínio probabilístico e vice-versa.

O Capítulo 4 consiste na apresentação e discussão de resultados referentes aos dados coletados, em função das diferentes variáveis do estudo (escolarização, tipo de teste, tipo de problema, estratégias e *representações simbólicas* utilizadas). As análises quantitativas e qualitativas apresentadas foram realizadas à luz do aporte teórico utilizado e da literatura levantada.

A partir disso, são apresentadas as considerações finais referentes à pesquisa desenvolvida, contendo implicações educacionais com base nos resultados obtidos. São apontadas, ainda, possíveis temáticas para estudos posteriores.

2 APORTE TEÓRICO

Neste capítulo são apresentados os aportes teóricos do presente estudo, os quais possuem uma abordagem cognitiva. Na Seção 2.1, são discutidos aspectos da Teoria dos Campos Conceituais (TCC) (VERGNAUD, 1986; 1996), que embasam as discussões levantadas acerca do conhecimento matemático – da construção do mesmo. É dado destaque ao campo conceitual das estruturas multiplicativas, visto que o mesmo engloba os conceitos relacionados à Combinatória e à Probabilidade, áreas da Matemática que são o foco do estudo desenvolvido.

Dada a importância das diferentes *situações* que dão sentido aos conceitos, são discutidas, à luz do aporte teórico adotado, nas Seções 2.2 e 2.3, a classificação referente aos problemas combinatórios e as exigências cognitivas relacionadas ao raciocínio probabilístico, consideradas para a construção dos instrumentos de coleta e desenvolvimento geral do estudo. São essas, respectivamente, a classificação unificada proposta por Pessoa e Borba (2009) e as exigências cognitivas apontadas por Bryant e Nunes (2012). Além disso, tais seções enfocam os *invariantes* das *situações* combinatórias e probabilísticas, bem como as *representações simbólicas* utilizadas para resolver problemas que abordam tais *situações*.

Por fim, na Seção 2.4, são discutidas relações existentes entre os raciocínios combinatório e probabilístico. Tal seção constitui um importante embasamento para a presente pesquisa, visto que se buscou não apenas caracterizar conhecimentos relativos à Combinatória e à Probabilidade isoladamente, mas identificar, também, as contribuições que conhecimentos combinatórios podem trazer para o desenvolvimento do raciocínio probabilístico e vice-versa.

2.1 A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Lima e Batista (2015) realizaram um mapeamento das dissertações do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica – EDUMATEC da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) que utilizaram a Teoria dos Campos Conceituais como aporte teórico. Nesse texto, as autoras abordam as pesquisas desenvolvidas no período de 2010 a 2013 na linha de Processos de Ensino e Aprendizagem em Educação Matemática e Científica desse programa de pós-graduação. Foram analisadas 12 dissertações, que articularam os objetos de pesquisa à teoria de Vergnaud. A partir de tais análises, as autoras do mapeamento concluíram que a TCC "tem um espaço considerável nas pesquisas que versam sobre os mais variados temas, pois se configura numa teoria abrangente e proporciona à Educação Matemática uma amplitude cognitiva" (LIMA; BATISTA, 2015, p. 14).

Dessa forma, uma abordagem cognitiva como a proporcionada pelo uso da TCC adquire grande importância em estudos relativos à Educação Matemática, visto que analisar como estudantes de diferentes etapas e modalidades de ensino raciocinam frente a problemas das diversas áreas da Matemática constitui um campo fértil de pesquisa. Estudos com tal enfoque podem contribuir para o aperfeiçoamento dos processos de ensino de variados conceitos matemáticos e proporcionar reflexões referentes à construção de materiais didáticos, à formação de professores e à própria dinâmica em sala de aula.

Discípulo de Jean Piaget, Gèrard Vergnaud adota uma abordagem desenvolvimentista do conhecimento, voltando seu olhar não apenas para a construção do conhecimento no geral, mas, especialmente, para o processo de desenvolvimento de conceitos específicos por parte dos sujeitos. Para Vergnaud, o conhecimento é sempre conhecimento de alguma coisa. Dessa forma, a TCC atribui um papel essencial aos próprios conceitos matemáticos: "relativamente a uma psicologia cognitiva centrada nas estruturas lógicas como é a de Piaget, a Teoria dos Campos Conceituais aparece antes como uma psicologia dos conceitos" (VERGNAUD, 1996, p. 167). Vergnaud acrescenta, assim, às contribuições de Piaget, um olhar aprofundado voltado aos conceitos e também às articulações entre os mesmos. São tais articulações que levam à constituição dos diferentes campos conceituais, conceito discutido posteriormente na presente seção.

Vergnaud (1996) afirma que "é através das situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire sentido" (p. 156). Portanto, torna-se necessário trabalhar com uma classe diversa de problemas para que se conheçam as variadas propriedades dos conceitos, além da constante revisitação – e aprofundamento – a esses problemas. Essa revisitação está relacionada à ideia de um currículo em espiral, tendo em vista que o processo de construção, por parte dos sujeitos, dos conhecimentos acerca de determinado campo conceitual ocorre ao longo de um grande período de tempo, através da experiência, da maturidade e da aprendizagem.

Ao resolver determinado problema, o sujeito utiliza-se de estratégias baseadas em suas concepções acerca do tipo de *situação* abordada e essas estratégias dizem respeito aos esquemas possuídos pelo mesmo. Para Vergnaud (1996), “o funcionamento cognitivo de um sujeito ou de um grupo de sujeitos em dada situação assenta sobre um repertório dos esquemas disponíveis” (p. 161), sendo um esquema a organização do comportamento que se apresenta invariante para uma determinada classe de situações.

Tal conceito de esquema deriva da obra de Piaget e, para Vergnaud, é a partir do contato com novas *situações* (tipos de problemas) que o sujeito modifica suas estratégias (*teoremas-em-ação* ou *conceitos-em-ação*), aprimorando seus esquemas e desenvolvendo-se. Assim, “o desenvolvimento cognitivo consiste, sobretudo, e principalmente, no desenvolvimento de um vasto repertório de esquemas” (MOREIRA, 2002, p. 12). Moreira (2002) afirma, ainda, que Vergnaud dá ao conceito de esquema um alcance maior do que Piaget, visto que insiste que os esquemas “devem relacionar-se com as características das situações às quais se aplicam” (p. 13).

Os *teoremas-em-ação* e os *conceitos-em-ação* dizem respeito ao que Vergnaud chama de *invariantes operatórios*: os conhecimentos contidos nos esquemas. São esses invariantes que “dirigem o reconhecimento, por parte do indivíduo, dos elementos pertinentes à situação; [...] são eles que constituem a base, implícita ou explícita, que permite obter a informação pertinente e dela inferir a meta a alcançar e as regras de ação adequadas” (MOREIRA, 2002, p. 12).

Um *teorema-em-ação* se refere a proposições, concepções consideradas verdadeiras pelo sujeito: uma forma de pensar, implicitamente, sobre certo tipo de problema. Esses *teoremas-em-ação* possuem validade local, ou seja, são aplicados em determinados momentos; “são associados a alguns valores das variáveis” (VERGNAUD, 1986, p. 8), podendo ser a base para ampliação do conhecimento. Um *conceito-em-ação*, por sua vez, é uma categoria do pensamento considerada pertinente e se apresenta como mais complexo do que um *teorema-em-ação*, visto que possui caráter explicativo, demandando, assim, uma apropriação superior da situação para que seja possível explicitar a maneira pela qual se abordou dado problema.

As ideias de *teorema-em-ação* e de *conceito-em-ação* evidenciam a complexidade do processo de apreensão dos conceitos por parte dos sujeitos, chamado de conceitualização por Vergnaud. Tais *invariantes operatórios* evidenciam também a existência de estreita relação entre diferentes conceitos. Apontam, ainda, que cada conceito possui particularidades, demandando, assim, o aprimoramento do repertório de esquemas possuídos para que os *teoremas* e *conceitos-em-ação* utilizados ao se resolver um problema sejam válidos, isto é, respeitem os *invariantes* da situação abordada.

Sob o olhar da TCC, Vergnaud (1986) afirma que "um conceito pode, com efeito, ser definido como um tripé de três conjuntos" (p. 9). Os três conjuntos são: o das *situações* (que dão sentido ao conceito – S), o dos *invariantes* (propriedades e relações constantes nas diversas situações – I) e o das *representações simbólicas* (utilizadas para representar os conceitos – R). Um campo conceitual é definido pelo teórico como "um conjunto de situações, cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão" (p. 10).

A TCC não é específica da Matemática, "mas começou por ser elaborada a fim de explicar o processo de conceitualização progressiva das estruturas aditivas, das estruturas multiplicativas, das relações número-espaço, da álgebra" (VERGNAUD, 1996, p.155). Cabe ainda ressaltar que tais campos conceituais não são independentes: eles podem interagir entre si.

Em especial, Vergnaud (1996) afirma que o campo das estruturas multiplicativas diz respeito ao "conjunto das situações que exigem uma multiplicação, uma divisão ou uma combinação destas duas operações" (p. 167). Assim, esse campo conceitual engloba conceitos como o de número racional – em suas distintas representações: fração, decimal, razão –, proporcionalidade, funções e, em especial, conceitos relacionados à Combinatória e à Probabilidade. Tais conceitos possuem como característica comum a demanda de um pensamento um-a-muitos, pensamento que, de acordo com Nunes e Bryant (1997), exige o entendimento de novos sentidos de número e de propriedades relativas à multiplicação e à divisão, distintas daquelas referentes ao campo conceitual das estruturas aditivas, que envolvem ações de unir e separar, remetendo a um pensamento um-a-um.

Particularmente, a TCC foi utilizada como aporte teórico da presente pesquisa de dissertação em um contexto de exploração dos raciocínios combinatório e probabilístico de estudantes da EJA. O estudo em questão se insere em uma discussão dentro do campo das estruturas multiplicativas voltada para a Combinatória e para a Probabilidade, buscando investigar a compreensão dos *invariantes* relacionados às diferentes *situações* que dão sentido aos conceitos investigados e as *representações simbólicas* utilizadas pelos estudantes durante a resolução dos problemas propostos.

À luz da teoria adotada, a análise, investigação e classificação das *situações* que dão significado a determinado conceito assume grande importância, visto que "as concepções dos alunos são formadas pelas situações que eles tenham encontrado" (VERGNAUD, 1986, p. 2). Dessa maneira, defende-se que a restrição do trabalho com certo conceito à exploração de um único tipo de *situação*, não estimulará a compreensão do conceito em sua amplitude.

Assim, para que seja possível se ter uma ampla compreensão de determinado conceito é necessário que sejam atribuídos significados ao mesmo por meio do contato com diferentes *situações*. De tal afirmação deriva a importância de que no ensino sejam propostos problemas variados relacionados aos diversos conceitos trabalhados. É válido destacar, ainda, que problema, no sentido atribuído por Vergnaud (1986), diz respeito a "toda situação na qual se precisa descobrir as relações, desenvolver as atividades de exploração, de hipótese e de verificação, para produzir uma solução" (p. 1). Deparar-se com um problema, portanto, é não possuir, de imediato, as estratégias para resolução de determinada situação proposta.

Dado o posto, são apresentados nas seções a seguir os referenciais adotados no que diz respeito à Combinatória e à Probabilidade, bem como às *situações* que atribuem sentido aos conceitos relacionados a tais áreas da Matemática, seus *invariantes* e *representações simbólicas* utilizadas na resolução de problemas combinatórios e probabilísticos.

2.2 COMBINATÓRIA

2.2.1 Definição

Morgado, Pitombeira de Carvalho, Pinto de Carvalho e Fernandez (1991) afirmam que a Análise Combinatória, termo considerado como sinônimo de Combinatória no presente estudo, “é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas” (p. 1). Os autores destacam os dois tipos de problema mais frequentes no estudo da Análise Combinatória, sendo estes problemas relacionados a “1. demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas condições; 2. contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem certas condições dadas” (p. 2).

Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) apontam que conhecimentos combinatórios permitem que seja realizada a enumeração de todos os modos possíveis de organização e combinação de objetos, de forma que haja certeza de que nenhuma possibilidade foi omitida. Os objetos de estudo dessa área da Matemática são, portanto, os conjuntos discretos e as configurações que podem ser obtidas a partir de certas transformações que originam mudanças na estrutura da composição dos elementos desses conjuntos.

Dessa maneira, o uso da Combinatória faz com que não seja necessário listar ou enumerar todos os elementos que formam um conjunto para que se determine o número total de elementos que o compõe no que diz respeito à resolução de problemas combinatórios. Morgado *et al.* (1991) destacam, ainda, que “a solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema” (p. 2). Logo, é de suma importância pensar as *situações* propostas, os *invariantes* nelas presentes e as *representações simbólicas* utilizadas para que o aluno possa atribuir sentidos aos conceitos referentes à Combinatória.

2.2.2 Situações Combinatórias, seus Invariantes e Representações Simbólicas

Foi discutido anteriormente, com base na Teoria dos Campos Conceituais, que os alunos compreendem um conceito com base nas experiências que têm com o mesmo e que tais experiências estão relacionadas aos tipos de problemas com os quais já tiveram contato. Assim, Vergnaud (1986) destaca a necessidade de se pesquisar, analisar, investigar e classificar as diferentes *situações* que dão significados aos conceitos:

> isso permite em primeiro lugar fazer apelo ao ensino de uma grande variedade de relações e de problemas; em segundo lugar de aprofundar a epistemologia de um conceito, quer dizer, principalmente sua função (para que problemas ele responde) e sua ajuda (sobre quais outros conceitos ele se apoia) (p. 2).

Tendo isso em vista, diversos pesquisadores se empenharam em criar classificações das *situações* que atribuem sentido aos diferentes conceitos inseridos nos diversos campos conceituais. No que diz respeito às estruturas multiplicativas, campo conceitual foco deste estudo, existem na literatura classificações como as do próprio Vergnaud (1991), a de Nunes e Bryant (1997) e a dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997). Essas classificações apresentam semelhanças e diferenças, enfocando determinadas características dos conceitos inseridos no campo conceitual das estruturas multiplicativas, incluindo assim, conceitos relacionados à Combinatória.

No desenvolvimento do presente trabalho, foi adotada a classificação articulada das *situações* que atribuem sentido aos conceitos da Combinatória proposta por Pessoa e Borba (2009), classificação que integra quatro tipos de problemas combinatórios numa mesma categorização, sendo estes: *produto cartesiano, combinação, arranjo* e *permutação.* Tais problemas diferenciam-se entre si em função da natureza dos seus *invariantes de ordem* e *de escolha*.

No Quadro 1 é apresentada uma síntese das características desses quatro tipos de problemas combinatórios. Os problemas categorizados como *produto cartesiano* dizem respeito ao trabalho com mais de um conjunto nos quais se estabelece uma relação de um-para-muitos entre todos seus elementos. Nesse tipo de problema a ordem dos elementos não implica em possibilidades distintas, ou seja, a mudança de posição dos elementos não constitui uma nova possibilidade. Por sua vez, os problemas que exploram as situações de *combinação, arranjo* e *permutação* dizem respeito a situações nas quais a escolha acontece dentro de um mesmo conjunto, podendo ser utilizados alguns de seus elementos ou todos eles. Nos problemas de *combinação* e de *arranjo* a escolha consiste em alguns elementos do conjunto. Além disso, nas situações de *arranjo* a mudança de ordem dos elementos constitui novas possibilidades e nas de *combinação* essa mudança de posição não forma novas possibilidades. Por fim, nos problemas de *permutação* todos os elementos do conjunto são utilizados e as diferentes possibilidades a serem exploradas são construídas pela modificação de posição de seus elementos. Os exemplos apresentados no Quadro 1 são adaptações dos problemas propostos no estudo desenvolvido.

Quadro 1: Características e exemplos de situações combinatórias.

	CONJUNTOS	ESCOLHA	ORDEM	EXEMPLO
Produto Cartesiano	Dois ou mais conjuntos distintos	Um elemento de cada conjunto	Não determina possibilidades distintas	Quantos conjuntos de uniforme diferentes podem ser formados com 4 camisetas e 2 calças?
Combinação	Conjunto único	Alguns elementos	Não determina possibilidades distintas	De quantas formas distintas podem ser escolhidas 3 pessoas dentre 5 para ir a uma festa?
Arranjo	Conjunto único	Alguns elementos	Determina possibilidades distintas	De quantas formas podem ser escolhidos um atacante e um goleiro dentre 5 rapazes?
Permutação	Conjunto único	Todos os elementos	Determina possibilidades distintas	Quantas são as possíveis ordens de leitura de 3 livros distintos?

Fonte: A autora.

Destacam-se, ainda, *a priori,* erros comuns no que diz respeito à resolução de diferentes tipos de problemas combinatórios, conforme apontados por Navarro-Pelayo, Batanero e Godino (1996). São esses: erros de ordem, de uso de listagem não sistemática e de resposta intuitiva errônea.

Erros de ordem referem-se a resoluções nas quais os estudantes confundem *invariantes* de diferentes tipos de problemas combinatórios, considerando a ordem dos elementos de dada situação como constituinte de novas possibilidades quando isso não acontece ou o contrário (desconsiderar a ordem dos elementos como determinante de novas possibilidades, quando necessário). Os autores apresentam, a título de exemplificação, a solução apresentada por um estudante a um problema de *combinação,* que consistia na escolha de três pessoas dentre cinco: “E=Elisa, F=Fernando, G=Germán, J=Jorge, M=María: EFM, EMF, EGJ, EJF, EFG, EMG, EGF, EJM, EFJ, EMJ, EGM, EJG; 12 X 5 = 60; existem 60 formas distintas" (NAVARRO-PELAYO; BATANERO; GODINO, 1996, p. 33, tradução minha). Para a resolução do problema proposto o estudante fez uso de listagem e cometeu um erro de ordem ao considerar o trio Elisa, Fernando e María como diferente dos trios Elisa, María e Fernando e María, Fernando e Elisa, por exemplo. Para esse estudante, as possibilidades com Elisa sendo a primeira escolha são 12 e, sendo cinco pessoas, o total de possibilidades seria dado por 12 x 5, ou seja, 60 possibilidades.

Erros motivados pelo uso de listagem não sistemática se dão por indicação das possibilidades relacionadas a um problema combinatório por “ensaio e erro, sem um procedimento recursivo que leve à formação de todas as possibilidades” (NAVARRO-PELAYO; BATANERO; GODINO, 1996, p. 33, tradução minha). Dessa forma, sem uma organização de estratégia para o esgotamento das possibilidades, o estudante tende a encontrar dificuldades em listar todas e não apenas algumas das possibilidades referentes ao problema tratado.

Por sua vez, um erro por resposta intuitiva errônea diz respeito a uma solução incorreta que consta apenas de resposta final. Nesse tipo de erro não há justificativa ou registro das estratégias utilizadas pelos estudantes para se chegar à resposta apresentada.

Navarro-Pelayo, Batanero e Godino (1996) destacam, ainda, que, “antes da instrução, a principal dificuldade para resolver os problemas é a ausência de listagem sistemática” (p. 35, tradução minha). Os autores apontam, também, que os erros de ordem estão principalmente presentes nas resoluções de problemas de *combinação*, nos quais a ordem dos elementos é constantemente, e erroneamente, considerada como geradora de possibilidades diferentes.

No que diz respeito às *representações simbólicas* relacionadas à resolução de problemas que abordam as diferentes *situações* combinatórias, destaca-se a importância da escolarização para a apropriação de estratégias que não surgem espontaneamente (como a árvore de possibilidades, o princípio multiplicativo e as fórmulas) e para o refinamento e sistematização de *representações simbólicas* que possam facilitar o esgotamento das possibilidades – esgotamento que é, em geral, o objetivo dos problemas escolarizados. É importante que os estudantes tenham contato não apenas com as diferentes *situações* que atribuem sentido à Combinatória, mas que sejam dotados de um repertório de *representações simbólicas* e estratégias que os habilite a resolver, também, problemas combinatórios mais complexos e/ou com número elevado de possibilidades. A enumeração oral e listagem escrita sem sistematização, frequentemente utilizadas de maneira espontânea desde os primeiros anos da escolarização, são inviáveis para a resolução de problemas com muitas possibilidades e requerem cuidado nos problemas de *combinação* (no qual a ordem dos elementos não constitui possibilidades distintas, sendo necessário que possíveis repetições sejam eliminadas).

Na próxima seção, volta-se o olhar para a Probabilidade, outra área da Matemática foco do presente estudo. A mesma é definida e diferentes concepções de Probabilidade são apresentadas, bem como as exigências cognitivas para seu amplo entendimento, de acordo com Bryant e Nunes (2012).

2.3 PROBABILIDADE

2.3.1 Definição e Diferentes Concepções

Morgado *et al.* (1991) definem a Probabilidade como “o ramo da Matemática que cria, desenvolve e em geral pesquisa modelos que podem ser utilizados para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios” (p. 119). O conhecimento de tais modelos constitui uma ferramenta matemática que

> proporciona um modo de medir a incerteza, em consequência, os modelos probabilísticos são o fundamento da maior parte da Estatística. Isto implica que o conhecimento da teoria da probabilidade é necessário para uma compreensão adequada dos métodos estatísticos, que hoje são ferramentas indispensáveis nos campos científico, profissional e social (GODINO; BATANERO; CAÑIZARES, 1991, p. 11-12, tradução minha).

Godino, Batanero e Cañizares (1991) destacam que o estudo da Probabilidade promove aos estudantes o estabelecimento de relações entre a Matemática e seu cotidiano, visto que “adequadamente compreendida, a Probabilidade proporciona uma excelente oportunidade para mostrar aos estudantes [...] como aplicar a matemática para resolver problemas reais” (p. 12, tradução minha). O estudo dessa área da Matemática permite que o estudante tenha contato com a incerteza, dando um novo enfoque à instrução escolar, que tende a apresentar uma forte ideia determinista: de certo e errado, de verdadeiro ou falso, não existindo espaço para outras opções. Dessa forma, os autores indicam que ao buscar desenvolver reflexões úteis aos problemas encontrados ao longo da vida dos estudantes, se mostra como mais apropriado "lhes ensinar a serem donos de sua própria incerteza" (p. 12), dado o caráter aleatório de muitos dos acontecimentos ao nosso entorno. É a compreensão da Probabilidade que permitirá ao estudante explorar situações aleatórias, inclusive chegando a estimar probabilidades de ocorrência de diferentes eventos, classificando os mesmos em eventos certos, prováveis, improváveis ou impossíveis.

O próprio termo 'probabilidade' possui usos variados dentro e fora do contexto acadêmico/escolar. Segundo Morgado *et al.* (1991), "a definição de probabilidade como quociente do número de 'casos favoráveis' sobre o número de 'casos possíveis' foi a primeira definição formal de probabilidade" (p. 119). No entanto, é preciso que se atente às várias concepções relativas ao termo 'Probabilidade', que conduzem a distintos pontos de vista sobre a natureza dessa área da Matemática. A seguir são apresentadas diferentes concepções de Probabilidade, conforme Godino, Batanero e Cañizares (1991), sendo: a *concepção clássica* ou *laplaciana*, a *frequencial* ou *empírica*, a *subjetiva*, a *lógica* e a *formal*.

A *concepção clássica* de Probabilidade, citada anteriormente, dá suporte ao cálculo *a priori* da probabilidade de ocorrência de um evento, com base na razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis. Contudo, esse cálculo pode ser aplicado apenas nos casos em que há equiprobabilidade, isto é, quando todos os eventos que constituem o espaço amostral possuem a mesma chance de ocorrer. Essa concepção é a mais comumente presente em problemas escolares, entretanto pode vir de encontro a concepções advindas de experiências anteriores, dentro ou fora da escola, nas quais a equiprobabilidade não é válida.

A concepção *frequencial* ou *empírica* embasa a estimativa e o cálculo de probabilidades baseados na experimentação. É, portanto, uma concepção objetiva, separada de qualquer consideração advinda de experiências pessoais. Nesse caso, a probabilidade de ocorrência de um evento é calculada *a posteriori,* "a partir das frequências relativas observadas em cada um dos resultados em provas repetidas" (GODINO; BATANERO; CAÑIZARES, 1991, p. 23, tradução minha). Quando o número de experimentos é grande o suficiente, essa probabilidade se aproxima daquela calculada pela concepção clássica, isto é, "quanto maior o número de acontecimentos, maior a proximidade entre a probabilidade *a posteriori* e a probabilidade *a priori*, calculada sem manipulação experimental, baseada em dados teóricos e no conceito clássico" (SANTOS, 2015, p. 47). Não é viável, entretanto, repetir inúmeras vezes em sala de aula o lançamento de uma moeda, por exemplo. Nesse sentido, métodos menos tradicionais, com o auxílio do computador, permitem simular a realização de um número significativo de experimentos.

De acordo com a *concepção subjetiva,* a probabilidade é "uma expressão da crença ou percepção pessoal" (GODINO; BATANERO; CAÑIZARES, 1991, p. 25, tradução minha). Assim, tal concepção está fortemente baseada em experiências particulares daquele que estima a probabilidade de certo evento. Nesse sentido, a estimativa e o cálculo de probabilidades estão centrados no sujeito e, logo, diferentes pessoas podem prever probabilidades distintas para uma mesma situação. Tal concepção "não se baseia na repetitividade de nenhum processo, pois é possível avaliar a probabilidade de um evento que pode ocorrer uma única vez" (GODINO; BATANERO; CAÑIZARES, 1991, p. 25, tradução minha). Essa concepção se faz presente, muitas vezes, no julgamento de situações do cotidiano, como jogos e apostas (por exemplo, ao se apostar em um número da sorte).

Por sua vez, a Probabilidade, segundo a *concepção lógica* se baseia na indução, ou seja, define uma relação lógica entre um enunciado e uma hipótese dele derivada. Segundo tal concepção, "a probabilidade traduz um grau de crença racional, isto é, a *taxa de confiança* concedida a uma proposição *p* à luz da informação de outra proposição *q*. A Probabilidade é tratada como um tipo especial de relação entre os dois enunciados" (GODINO; BATANERO; CAÑIZARES, 1991, p. 23, tradução minha). Nesse sentido, a *taxa de confiança* é medida de duas maneiras extremas: a certeza e a impossibilidade. No primeiro caso, *p* é consequência de *q* e a proposição *q* dá a *p* uma probabilidade igual a 1. No caso em que as proposições *p* e *q* são contraditórias, a probabilidade dada por *q* à *p* é igual a 0.

Por fim, na *concepção formal*, que se opõe à *concepção clássica*, dado que a mesma não impõe a equiprobabilidade de eventos, a probabilidade é medida quando se elege um espaço amostral (E) e um subconjunto (A) do mesmo. A probabilidade é, então, calculada a partir do quociente entre a medida de A e a medida de E, estando o resultado dessa razão compreendido entre 0 e 1.

Essas diferentes concepções coexistem e, a depender da situação, uma pode ser mais adequada que a outra, pois "as situações relacionadas à incerteza podem ser interpretadas de diferentes maneiras, por diferentes conceitos probabilísticos, conduzindo ou não as pessoas às respostas adequadas" (SANTOS, 2010 *apud* SANTOS, 2015, p. 50). No desenvolvimento do presente estudo, contudo, adotou-se a concepção mais comumente utilizada no contexto escolar bem como nos problemas escolarizados: a *concepção clássica* ou l*aplaciana*. Tal escolha pautou-se no foco central do estudo (as relações entre Combinatória e Probabilidade), pois essa concepção de Probabilidade é a mais fortemente relacionada à Combinatória, visto que demanda o levantamento de todas as possibilidades que constituem o espaço amostral de dado problema probabilístico.

2.3.2 Exigências Cognitivas

Segundo Bryant e Nunes (2012) a Probabilidade é um conceito complexo que demanda o desenvolvimento de quatro exigências cognitivas para seu amplo entendimento, que são: 1) *compreender a noção de aleatoriedade*, 2) *formar e categorizar espaços amostrais*, 3) *comparar e quantificar probabilidades* e 4) *entender correlações* (relações entre eventos).

A primeira exigência cognitiva da Probabilidade indicada por Bryant e Nunes (2012) está relacionada à compreensão da natureza de eventos não determinísticos, isto é, eventos aleatórios. Segundo tais autores, a *aleatoriedade* está ligada à incerteza sobre resultados de eventos que ainda não ocorreram, eventos que "as pessoas sabem que podem acontecer, mas não tem certeza se e quando eles acontecerão" (p. 3, tradução minha). O entendimento da aleatoriedade é, portanto, premissa da capacidade de distinguir um evento ou uma sequência de eventos aleatória de uma não aleatória.

Bryant e Nunes (2012) destacam ainda que o erro mais comum cometido por adultos é a incompreensão da aleatoriedade em sequências que contêm uma longa repetição de um mesmo valor. Em contextos aleatórios, alguns adultos tendem ainda a julgar que sequências nas quais não conseguem identificar um padrão (como na sequência 1, 3, 8, 2, 5) são mais prováveis do que aquelas nas quais valores são alternados com certa regularidade (como em 1, 2, 3, 4, 5).

A aleatoriedade é, ainda, um conceito probabilístico muito presente no cotidiano e que desempenha um papel importante. Ao utilizar situações aleatórias no dia a dia, como, por exemplo, ao jogar um dado, lançar uma moeda e embaralhar cartas tem-se como propósito promover uma situação justa, fazendo com que todos tenham a mesma chance.

A segunda exigência cognitiva está intrinsecamente pautada no pensamento combinatório: a determinação do *espaço amostral* de dado problema probabilístico é importante não só para o cálculo de probabilidades, mas é também um elemento essencial para entender a natureza da aleatoriedade. Problemas probabilísticos "são sempre sobre um conjunto de eventos possíveis, mas incertos [...], nós precisamos saber precisamente quais são todos os eventos possíveis" (BRYANT; NUNES, 2012, p. 29, tradução minha), visto que o conhecimento acerca do espaço amostral é essencial para encontrar a solução correta para problemas desse tipo.

Por sua vez, a terceira exigência cognitiva apontada por Bryant e Nunes (2012) se refere à capacidade de *comparar e quantificar probabilidades*. Sendo a probabilidade uma quantidade intensiva, o cálculo da mesma exige a compreensão de seu caráter proporcional. É justamente na compreensão da proporcionalidade que residem algumas dificuldades, pois "o cálculo da probabilidade de ocorrência de um evento ou de uma classe de eventos deve se basear na quantidade total do espaço amostral e não apenas na quantidade de eventos que nós queremos prever" (BRYANT; NUNES, 2012, p. 46, tradução minha).

Por fim, a quarta exigência cognitiva se relaciona à identificação de eventos dependentes e independentes, visto que a associação entre dois eventos pode acontecer aleatoriamente ou representar uma relação genuína. Segundo Bryant e Nunes (2012), "o pensamento correlacional depende, ao menos em parte, de um entendimento da aleatoriedade" (p. 7, tradução minha). Nesse caso, visto que "o objetivo de analisar a correlação entre dois eventos é determinar se eles co-ocorrem mais frequentemente do que se espera que ocorram ao acaso" (p. 67, tradução minha), a habilidade mais importante é distinguir um evento aleatório de um não aleatório.

Foi com base em tais exigências cognitivas ligadas ao desenvolvimento do raciocínio probabilístico que se buscou investigar os conhecimentos dos participantes da presente pesquisa, relacionando-os, também, ao raciocínio combinatório a partir da resolução de problemas. Tais relações estabelecidas entre essas duas importantes áreas da Matemática são discutidas na seção a seguir.

2.4 RELACIONANDO COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE

A Combinatória e a Probabilidade possuem origens comuns. A teoria da Probabilidade – que atualmente é um ramo importante da Matemática pura, com um campo de aplicações que se estende praticamente sobre todos os ramos da ciência natural, técnica e social – teve começo muito modesto: suas raízes se encontram em uma teoria matemática elementar, a *teoria dos jogos de azar*, estabelecida há cerca de três séculos.

Nas obras de Bernoulli e de DeMoivre, a teoria dos jogos de azar foi desenvolvida à base da concepção clássica de Probabilidade, e vários métodos combinatórios e outros métodos matemáticos foram aplicados à mesma. As principais dificuldades encontradas no primeiro estágio da teoria da Probabilidade pertencem ao domínio da Combinatória, visto que, em muitos casos, o número de pontos do espaço amostral não é muito grande, permitindo assim a enumeração, listagem ou contagem direta dos pontos amostrais necessários para a determinação de probabilidades, mas surgem, entretanto, problemas nos quais essa contagem é praticamente impossível. Em tais casos, lança-se mão da Combinatória, que pode ser encarada como um processo sofisticado de contagem (SPIEGEL, 1978).

> A Combinatória, o estudo dos arranjos dos objetos, é uma parte importante da matemática discreta. Este assunto vem sendo estudado desde muitos anos antes do século XVII, quando questões combinatórias apareceram no estudo de jogos. A enumeração, contagem de objetos com certas propriedades, é uma parte importante da Combinatória. [...], por exemplo, a contagem é usada para determinar a complexidade de algoritmos. Ela também é exigida para determinar se há números de telefone ou endereços de protocolo da Internet suficientes para atender a demanda. Além disso,

> técnicas de contagem são extremamente usadas quando as probabilidades de eventos são computadas (ROSEN, 2009, p. 335).

Morgado *et al.* (1991) afirmam, ainda, que o primeiro passo para a resolução de um problema de Probabilidade consiste em “explicitar qual é o conjunto de possíveis resultados do experimento e calcular o número de elementos contidos nele” (p. 120). A determinação do espaço amostral, ou seja, do conjunto das diferentes possibilidades de eventos, é, portanto, uma construção de caráter combinatório que permite, ainda, que o número de eventos favoráveis e o número de eventos possíveis sejam identificados. Nesse sentido, Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996), destacam que “a Combinatória não é apenas um auxiliar no cálculo de probabilidades, mas existe uma estreita inter-relação entre a ideia de um experimento composto baseado em um espaço amostral discreto e as operações combinatórias” (p. 23, tradução minha).

Piaget e Inhelder (1951 *apud* NAVARRO-PELAYO; BATANERO; GODINO, 1996) apontam que se o sujeito não é capaz de raciocinar sob a luz da Combinatória, não conseguirá compreender a ideia de Probabilidade, exceto em casos nos quais experimentos aleatórios muito elementares sejam tratados. Além disso, ao analisar o uso do diagrama de árvore em Probabilidade e Combinatória, é possível também observar essa forte relação entre a determinação do espaço amostral de um experimento e as operações combinatórias.

Outras exigências cognitivas consideradas no presente estudo (*aleatoriedade* e *comparação e quantificação de probabilidades*) estão também relacionadas a problemas probabilísticos que demandam construções combinatórias, visto que todos são problemas que estão estreitamente ligados à compreensão dos respectivos espaços amostrais. No que diz respeito à *aleatoriedade,* é importante perceber que, para que se entenda eventos que não podem ser previstos, é necessário que se conheça e se analise todas as possibilidades a ele relacionadas. Por sua vez, para *comparar e quantificar probabilidades* corretamente, é preciso que os espaços amostrais em questão e o caráter proporcional de tal tipo de problema sejam considerados, levando-se em conta todos os eventos possíveis e não apenas os eventos favoráveis. Por fim, ao analisar a existência, ou não, de *correlações*, se lida com a investigação de dependência de eventos, sendo preciso distinguir as associações possíveis – e se as mesmas são aleatórias ou estão genuinamente relacionadas.

São as relações que se estabelecem entre o raciocínio combinatório e o probabilístico o foco da presente pesquisa, visto que buscou-se investigar quais contribuições podem surgir para o desempenho na resolução de problemas combinatórios a partir da resolução de problemas probabilísticos e vice-versa. O interesse pela investigação desses dois raciocínios (combinatório e probabilístico) de maneira articulada se deu em função da indicação de relações entre eles presentes na literatura e em documentos curriculares, além do entendimento da importância da exploração de diferentes *situações* que atribuem sentido aos diversos conceitos inseridos no campo conceitual das estruturas multiplicativas, inclusive a partir da exploração de relações entre os mesmos.

No próximo capítulo, a Educação de Jovens e Adultos (EJA) é caracterizada com base na literatura e são levantadas as particularidades do ensino de Matemática para estudantes dessa modalidade de ensino. Além disso, são apresentadas as orientações curriculares para o ensino de Combinatória e Probabilidade na EJA, bem como discussões de estudos anteriores com focos na Combinatória, na Probabilidade e nas relações que se estabelecem entre tais áreas da Matemática.

3 REVISÃO DA LITERATURA

O presente capítulo visa, por intermédio de revisão da literatura, caracterizar o público alvo do estudo e apresentar o que se tem posto, em documentos curriculares oficiais e em estudos anteriores, sobre conhecimentos combinatórios e probabilísticos de estudantes da Educação de Jovens e Adultos (EJA), bem como sobre as relações existentes entre os raciocínios combinatório e probabilístico.

A EJA é caracterizada, na Seção 3.1, com base na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (BRASIL, 1996) e em trabalhos como o de Oliveira (1999) e o de Fonseca (2007). Essa caracterização busca evidenciar as particularidades dos estudantes atendidos por tal modalidade de ensino. Tais particularidades fazem com que seja importante que os conhecimentos e dificuldades apresentadas por esses estudantes, também, no que se refere à Matemática (incluindo Combinatória e Probabilidade), sejam objeto de estudo em pesquisas que visem trazer contribuições para a melhoria do ensino e, consequentemente, da aprendizagem dos mesmos.

Na Seção 3.2 são apresentadas orientações e expectativas de aprendizagem presentes em documentos curriculares (nacionais e do estado de Pernambuco) voltados para os diferentes níveis de escolarização na modalidade de ensino foco do estudo – EJA – (Fase 1, Fase 2 e Ensino Médio – cobrindo, portanto, etapas equivalentes a todo o Ensino Fundamental e Ensino Médio). A partir desse levantamento, buscou-se identificar se e como discussões acerca do ensino da Combinatória e da Probabilidade aparecem nos documentos referentes a cada etapa de escolarização e identificar, ainda, se há indicações da existência de relações entre os raciocínios combinatório e probabilístico e/ou orientações que sugiram um trabalho articulado de conceitos que vise o desenvolvimento de ambos os raciocínios.

Na Seção 3.3 são apresentados estudos anteriores que investigaram a Combinatória e a Probabilidade com estudantes de diferentes níveis de escolarização. Além disso, são evidenciadas relações entre o raciocínio combinatório e o probabilístico com base em estudos que trazem indicações da existência e da importância dessas relações para o desenvolvimento de ambos os raciocínios.

Por fim, na Seção 3.4, são apresentadas algumas das pesquisas desenvolvidas por integrantes do Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório e Probabilístico da Universidade Federal de Pernambuco – Geração UFPE –, grupo de estudos ao qual a presente pesquisa está vinculada. Os estudos desenvolvidas no âmbito desse grupo têm em vista proporcionar um acúmulo de conhecimentos, isto é, busca-se responder com novas pesquisas questões que ficaram em aberto anteriormente. Assim, dado esse caráter de continuidade, são destacados aqueles trabalhos que possuem mais estreita relação com o presente estudo.

3.1 A EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS – EJA

A lei de nº 9394/96, Lei de Diretrizes e Bases para a Educação Nacional (BRASIL, 1996), instituiu a oferta gratuita de Educação Básica a jovens e adultos, ressaltando a importância de que a mesma seja adequada às necessidades e à disponibilidade do público ao qual se direciona. São as especificidades do público alvo da Educação de Jovens e Adultos (EJA) que fazem com que seja imprescindível que a educação oferecida a esses estudantes seja pensada de maneira diferente da Educação Básica regular.

Na busca por uma caracterização do público da EJA, lida-se com o fato de que “ainda que a designação ‘Educação de Jovens e Adultos’ nos remeta a uma caracterização da modalidade pela idade dos alunos a que atende, o grande traço definidor da EJA é a caracterização sociocultural de seu público” (FONSECA, 2007, p. 15). Tal caracterização sociocultural diz respeito, principalmente, à falta de acesso à escola em idade regular ou a um histórico de fracasso escolar – quando há contato anterior com a escolarização formal.

Atualmente, estudantes cada vez mais jovens estão presentes em salas de aula da EJA. Esses estudantes optam por tal modalidade de ensino por motivos diversos, entre eles: histórico de reprovação no ensino regular, desejo por concluir os estudos mais rapidamente, preferência pelo turno noturno em função da inserção no mercado de trabalho, entre outros. Dessa maneira, a EJA tem atendido, basicamente, a dois subgrupos distintos: adultos (que nunca frequentaram a escola ou que estiveram afastados dela por muito tempo) e jovens e adolescentes (que se afastaram da escola por pouco ou nenhum período de tempo).

Ainda que da existência de tais subgrupos, Oliveira (1999) indica que o público da EJA se apresenta como relativamente homogêneo ao se levar em consideração algumas condições de seus membros. A autora destaca, como características comuns aos estudantes dessa modalidade de ensino, as seguintes condições: 1) de 'não-crianças', 2) de excluídos da escola e 3) de membros de determinados grupos culturais.

Ao discutir a condição de 'não-crianças', Oliveira (1999) destaca que os processos de construção de conhecimento e de aprendizagem de adultos são "muito menos explorados na literatura psicológica do que aqueles referentes às crianças e adolescentes" (p. 60). Assim, a escola que acolhe esse adulto precisa atentar para o fato de que, no geral, essa instituição estrutura-se e organiza-se para atender o público da Educação Básica regular. O estudante da EJA se distingue daqueles que frequentam o ensino dito regular, à medida que:

> está inserido no mundo do trabalho e das relações interpessoais de um modo diferente daquele da criança e do adolescente. Traz consigo uma história mais longa (e provavelmente mais complexa) de experiências, conhecimentos acumulados e reflexões sobre o mundo externo, sobre si mesmo e sobre as outras pessoas (OLIVEIRA, 1999, p. 60).

Contudo, tal caracterização dos estudantes da EJA se torna estereotipada se aspectos culturais de cada sujeito não são considerados. Segundo Oliveira (1999), um traço cultural relevante que constitui a segunda condição apontada, "especialmente porque nos movemos, aqui, no contexto da escolarização, é sua condição de excluídos da escola regular" (p. 61). Vem à tona, então, a discussão acerca de uma adequação da escola para um grupo que não é o seu 'alvo original': o estudante jovem e adulto chega a um estabelecimento no qual "currículos, programas, métodos de ensino foram originalmente concebidos para crianças e adolescentes que percorreriam o caminho da escolaridade de forma regular" (OLIVEIRA, 1999, p. 61).

A terceira condição que caracteriza o estudante jovem ou adulto, segundo Oliveira (1999), diz respeito ao pertencimento desse estudante a um determinado grupo social. O fato de que tais jovens e adultos pertencem a camadas da população que possuem baixo poder aquisitivo, são pouco escolarizadas e estão inseridas no mundo do trabalho, precisa ser levado em consideração ao se ofertar uma educação para esse público específico. Os estudantes da EJA:

> não pertencem ao grupo social dominante ou caracteristicamente objeto das práticas educativas de que se ocupa a área da educação em geral, o problema que aqui se coloca é o da homogeneidade e da heterogeneidade cultural, do confronto entre diferentes culturas e da relação entre diferenças culturais e diferenças nas capacidades e no desempenho intelectual dos sujeitos (OLIVEIRA, 1999, p. 62-63).

Pode surgir, assim, um preconceito direcionado à EJA, que parte da crença de que os estudantes aos quais tal modalidade de ensino atende são menos capazes no que se refere à aprendizagem ou que possuem habilidades intelectuais inferiores. No entanto, é importante perceber que o jovem ou adulto carrega consigo uma ampla bagagem de experiências e conhecimentos sobre o mundo, sobre si mesmo e as outras pessoas. Assim, ao chegar à escola, em um contexto de inserção em situações de aprendizagem, as peculiaridades do estudante jovem ou adulto “fazem com que ele traga consigo diferentes habilidades e dificuldades” (OLIVEIRA, 1999, p. 60). Mesmo que, atualmente, sejam muito ricas as relações com o mundo das informações no cotidiano, independente da idade, é válido destacar que os adultos se inserem nesse contexto de maneira sensivelmente diferenciada, visto que a idade cronológica “tende a propiciar oportunidades de vivências e relações, pelas quais crianças e adolescentes, em geral, ainda não passaram” (FONSECA, 2007, p. 22).

Todavia, tradicionalmente, na educação “tratamos nossos alunos como se nada soubessem sobre tópicos ainda não ensinados” (CARRAHER; CARRAHER; SCHLIEMANN, 1995, p. 21) e, muitas vezes, essa grande quantidade de conhecimentos adquiridos em experiências cotidianas não é aproveitada no ambiente escolar. Tal fato pode levar à desmotivação por parte dos estudantes, dado que:

> os altos índices de evasão e repetência nos programas de educação de jovens e adultos indicam falta de sintonia entre essa escola e os alunos que dela se servem [...], o modo de se fazer as coisas na escola é específico da própria escola e aprendido em seu interior (OLIVEIRA, 1999, p. 62).

Com relação, especificamente, à aprendizagem da Matemática na EJA, é possível perceber “traços muito próprios da relação do aprendiz adulto com o conhecimento matemático e com a situação discursiva em que se forja (e é forjada por) seu aprendizado escolar” (FONSECA, 2007, p. 23). As vivências extraescolares dos jovens e adultos influenciam seu contato com a Matemática, sua relação tende a ser de utilitarismo: a Matemática é vista como uma ferramenta para o enfrentamento de situações da vida. Entretanto, os discentes dessa modalidade de ensino demandam, também, uma explicitação da utilidade do conhecimento matemático veiculado na sala de aula, “não só porque o justifica, mas porque lhe fornece, à sua relação adulta com o objeto do conhecimento, algumas chaves de interpretação e produção de sentido” (FONSECA, 2007, p. 24).

Januario, Freitas e Lima (2014), a partir da análise de diversos trabalhos que investigam o currículo da EJA, indicam que autores da área afirmam que os estudantes jovens e adultos apresentam “maiores necessidades de conhecer os motivos pelos quais devem aprender este ou aquele conteúdo” (p. 538). Um estudo de Haddad (2000 *apud* JANUARIO; FREITAS; LIMA, 2014, p. 538) indica, ainda, que esses estudantes percebem certo distanciamento entre os conhecimentos transmitidos pela escola e suas vivências cotidianas.

Tais constatações sugerem um distanciamento entre os cursos de EJA e uma vida repleta de Matemática fora da escola. O posto anteriormente reforça a existência de uma relação utilitarista com a Matemática e a importância da compreensão do ‘para que serve?’ na construção de sentidos para estudantes jovens e adultos. Apesar disso, é importante destacar que “para além da dimensão utilitária, os sujeitos da EJA percebem, requerem e apreciam também sua dimensão formativa” (FONSECA, 2007, p. 24). O caráter formativo nessa modalidade de ensino está relacionado não apenas à ideia de futuro, mas também de uma realização consigo mesmo no presente.

Nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática na EJA existe, assim, uma dualidade entre as práticas matemáticas cotidianas e as práticas escolares (abordagens que refletem diferentes formas de fazer do conhecimento matemático). As oportunidades de aprendizagem matemática serão estabelecidas “como um jogo de tensões entre a linha argumentativa das práticas cotidianas [...] e um conjunto de critérios estruturados num corpo de conhecimentos organizado sob a égide da lógica dedutiva” (FONSECA, 2007, p. 29).

Januario (2012) afirma que “o contato e o conflito da cultura formal com a cultura informal da Matemática resultam em novos modos de construir os saberes matemáticos” (p. 72). É necessário, então, que o ensino da Matemática nessa modalidade seja capaz de promover situações “de sistematização, de reelaboração e/ou alargamento de alguns conceitos” (FONSECA, 2007, p. 51). Pensar no ensino de Matemática, sob essa ótica “nos obrigaria a um descentramento do conteúdo matemático e um exercício de (re)significação desse conhecimento” (FONSECA, 2007, p. 71).

Dessa forma, é importante que essa perspectiva de ensino de Matemática que combina cultura formal e informal, valorizando conhecimentos prévios dos estudantes em busca da ampliação e aperfeiçoamento dos seus conhecimentos esteja presente nas propostas curriculares da EJA, bem como de outras modalidades de ensino. Com base nisso, na Seção 3.2, apresenta-se um levantamento de propostas curriculares de Matemática (nacionais e do estado de Pernambuco) voltadas, especificamente, para a Educação de Jovens e Adultos. Buscou-se identificar, em especial, as orientações e expectativas de aprendizagem referentes aos conceitos da Combinatória e da Probabilidade, bem como a existência de possíveis indicações de relações entre tais conceitos.

3.2 PROPOSTAS CURRICULARES PARA A EJA

De início, na presente seção, são apresentados dois documentos nacionais: as Propostas Curriculares para a Educação de Jovens e Adultos do 1º e do 2º segmento (BRASIL, 2001; 2002). Tais documentos são voltados para os níveis de escolarização equivalentes, respectivamente, aos Anos Iniciais e aos Anos Finais do Ensino Fundamental. Não existe um documento nacional específico da EJA na etapa escolar equivalente ao Ensino Médio, portanto, o ensino de Matemática nesse nível de escolarização será discutido posteriormente, com base na orientação curricular do estado de Pernambuco.

A proposta curricular referente aos Módulos I e II (BRASIL, 2001) destaca que, ao se tratar do ensino de Matemática, é importante perceber que os estudantes da EJA,

> independentemente do ensino sistemático, desenvolvem procedimentos próprios de resolução de problemas envolvendo quantificações e cálculos. [...] O desafio […] é como relacioná-los significativamente com a aprendizagem das representações numéricas e dos algoritmos ensinados na escola (p. 32-33).

Dada a relação que os jovens e adultos que chegam em salas da EJA para iniciar sua escolarização têm com a Matemática se faz necessário que, nos módulos equivalentes aos anos do Ensino Fundamental, o ensino de Matemática busque "integrar de forma equilibrada seu papel formativo (o desenvolvimento de capacidades intelectuais fundamentais para a estruturação do pensamento e do raciocínio lógico) e o seu papel funcional (as aplicações na vida prática [...])" (BRASIL, 2001, p. 99-100).

Nesse sentido, a resolução de problemas como meio de exploração dos conhecimentos matemáticos dos estudantes e a valorização do uso de estratégias diversas (muitas vezes oriundas de experiências fora da escola) são destacadas nesse documento como importantes aliadas no ensino da Matemática para jovens e adultos. No que se refere, especificamente, à Combinatória e à Probabilidade (áreas da Matemática que são o foco do presente estudo), é possível identificar expectativas de aprendizagem que apontam para a importância do trabalho com conceitos introdutórios, desde o início da escolarização na modalidade da EJA.

A proposta curricular para os módulos iniciais (BRASIL, 2001) apresenta as expectativas de aprendizagem divididas em blocos de conteúdos. O bloco de *Números e Operações Numéricas* engloba, dentre outros assuntos, o estudo "*do significado da* adição, subtração, *multiplicação e divisão"* (p. 108, grifos meus). O trabalho com esse bloco visa capacitar o estudante da EJA, também, a analisar, interpretar, formular e resolver problemas que envolvem esses diferentes significados da multiplicação e da divisão, problemas de estrutura multiplicativa que, por vezes, envolvem também conceitos de natureza combinatória.

No caso da multiplicação, o significado mais comumente utilizado consiste na adição de parcelas iguais. Ainda que possa ser o mais comum, existem outros significados que podem ser associados à multiplicação. Dentre eles, está o *produto cartesiano*, um tipo de problema combinatório cujos exemplos presentes na proposta curricular são apresentados abaixo:

> Numa sorveteria, há sorvetes de 6 sabores diferentes que podem ser servidos com cobertura e sem cobertura. De quantos modos diferentes pode-se pedir um sorvete, sem misturar sabores diferentes no mesmo sorvete?, ou também Com dois pares de tênis, um branco e outro preto, e três pares de meia, um vermelho, outro marrom e outro azul, de quantas maneiras diferentes posso me calçar? (BRASIL, 2001, p. 121).

Os problemas combinatórios acima podem, dentre variadas *representações simbólicas*/estratégias, também, serem resolvidos com o uso de multiplicação. Em especial, os problemas de *produto cartesiano* podem ser resolvidos com o uso direto de tal operação, usando-se os valores presentes em seus enunciados.

Contudo, a divisão também pode estar associada a problemas combinatórios. Nesse caso, a proposta curricular traz um exemplo de um *produto cartesiano* inverso, que pode ser resolvido utilizando-se tal operação: “em um baile é possível formar 6 casais diferentes para participar de uma dança. Se há 2 rapazes no baile, quantas são as moças?” (BRASIL, 2001, p. 123).

Dado o posto nesse documento curricular, nos módulos da EJA equivalentes aos Anos Iniciais do Ensino Fundamental (Módulos I e II), espera-se que o trabalho com a Combinatória seja introdutório, a partir do trabalho com um problema mais simples (*produto cartesiano*) que pode ser resolvido por meio de multiplicação direta ou divisão (no caso do problema inverso). Não há, portanto, nesse início de escolarização um foco na variedade de *situações* combinatórias, nem na exploração de diferentes estratégias de resolução dos mesmos.

No que se refere à Probabilidade, no mesmo documento (BRASIL, 2001) não há indicações explícitas ao seu ensino nessa etapa inicial da escolarização. O foco do trabalho com o bloco de *Tratamento da Informação* é no tratamento de dados, principalmente a partir de situações reais, e na leitura, interpretação e construção de representações estatísticas como tabelas e gráficos. No entanto, é apontado que os estudantes dos Módulos I e II:

> em níveis mais avançados, *poderão aprender a identificar*, pela análise das informações, *as características de fenômenos previsíveis e aleatórios*, fazer algumas previsões *e avaliar probabilidades* (BRASIL, 2001, p. 157, grifos meus).

É possível perceber que o trabalho com a Combinatória e com a Probabilidade é mais fortemente defendido para os Módulos III e IV (equivalentes aos Anos Finais do Ensino Fundamental). A proposta curricular para essa etapa escolar (BRASIL, 2002), destaca que:

> em linhas gerais, o trabalho com Matemática […] deve visar o desenvolvimento de conceitos e procedimentos relativos ao pensamento numérico, geométrico, algébrico, à competência métrica, ao raciocínio que envolva proporcionalidade, assim como *o raciocínio combinatório*, estatístico *e probabilístico* (p. 19-20, grifos meus).

Essa proposta curricular (BRASIL, 2002) sugere alguns conteúdos a serem trabalhados com os estudantes dos Módulos III e IV da EJA, buscando chamar a atenção para a necessidade do equilíbrio do caráter utilitário e do formal, necessário para a formação dos estudantes. Em relação aos conceitos inseridos no bloco de *Tratamento da Informação*, é apontado que é importante que os estudantes tenham contato, dentre outras situações, com a:

> *representação e contagem dos casos possíveis em situações combinatórias; resolução de situações-problema de contagem*, que envolvem o princípio multiplicativo, por meio de *estratégias variadas*, como a construção de diagramas, tabelas e esquemas *sem a aplicação de fórmulas*; [...] *construção do espaço amostral*, utilizando o princípio multiplicativo e aindicação da probabilidade de um evento por meio de uma razão; elaboração de experimentos e simulações para *estimar probabilidades e verificar probabilidades previstas* (BRASIL, 2002, p. 64, grifos meus).

Percebe-se, a partir disto, que a proposta curricular em questão sugere um aprofundamento significativo no trabalho com problemas combinatórios e probabilísticos. É chamada a atenção, ainda, para a importância da valorização de estratégias espontâneas dos estudantes ao resolver tais problemas como suporte para o início da formalização desses conceitos.

Essa orientação a um aprofundamento dos conhecimentos combinatórios e probabilísticos é ainda mais claramente apresentada nos Parâmetros Curriculares para a Educação Básica de Pernambuco – EJA (PERNAMBUCO, 2012), documento que apresenta orientações ao ensino durante toda a escolarização nessa modalidade de ensino.

Conforme o apontado nesse documento espera-se que o trabalho com os conceitos da Combinatória se inicie a partir do Módulo II, sem buscar a formalização de tais conceitos nesse momento da escolarização nem no módulo seguinte (Módulo III). Apenas a partir do Módulo IV se espera que se inicie o processo de formalização dos conceitos combinatórios, para que durante os três módulos da EJA Médio os conhecimentos combinatórios dos estudantes jovens e adultos sejam consolidados.

No que se refere à Probabilidade, espera-se que conceitos dessa área da Matemática comecem a serem abordados desde o Módulo I, sem que se tenha por objetivo a formalização dos mesmos. No Módulo II, espera-se que se dê início ao processo de formalização e, a partir do Módulo III (até a conclusão do EJA Médio) a

Probabilidade deve ser continuamente trabalhada para que se chegue à consolidação dos conhecimentos probabilísticos dos estudantes da EJA.

Os Parâmetros Curriculares para a Educação Básica de Pernambuco voltados para a EJA (PERNAMBUCO, 2012) indicam, ainda, que nos módulos equivalentes aos Anos Iniciais do Ensino Fundamental o ensino de Matemática deve evitar, ao máximo "o recurso às representações simbólicas e a ênfase em regras e procedimentos. É fundamental que o sujeito seja estimulado a inserir na sala de aula os conhecimentos matemáticos que já desenvolveu" (p. 53). Dessa maneira, a formalização dos conceitos é sugerida de maneira gradativa ao longo da Educação Básica.

A Combinatória e a Probabilidade aparecem nesse documento inseridas, respectivamente, nos blocos de *Números e Operações* e de *Tratamento da Informação.* Nesse primeiro bloco, se espera que se trabalhe "com a resolução e elaboração de problemas envolvendo as operações" (PERNAMBUCO, 2012, p. 67). Assim como na orientação nacional, nessa primeira fase de escolarização espera-se que a Combinatória seja trabalhada de forma integrada à multiplicação e à divisão, visto que a expectativa é que o estudante dos Módulos I e II da EJA tenha a chance de "resolver e elaborar problemas com as quatro operações *envolvendo seus diferentes significados,* em situações contextualizadas e utilizando o cálculo mental" (p. 71, grifos meus).

O bloco de *Tratamento da Informação,* por sua vez, engloba, também, o trabalho com "a ideia de chance, que levará ao conceito de probabilidade. Por exemplo, na exploração de um experimento aleatório, como o lançamento de uma moeda" (PERNAMBUCO, 2012, p. 57). Assim, identifica-se, dentre as expectativas de aprendizagem, uma introdução à Probabilidade, a partir da indicação de que se espera que o estudante seja levado a "discutir a ideia intuitiva de chance de ocorrência de um resultado a partir da análise das possibilidades" (p. 58).

Nos módulos equivalentes aos Anos Finais do Ensino Fundamental busca-se dar continuidade ao trabalho com Combinatória e Probabilidade. Nesse momento da escolarização, o bloco de *Números e Operações*, engloba também atividades que possam explorar "a representação e a contagem, em uma situação de combinatória, devem levar o estudante à construção do conceito de princípio multiplicativo como recurso fundamental, mas não único, na resolução de diversos problemas" (PERNAMBUCO, 2012, p. 89). O documento em questão destaca, ainda, que é importante que o estudante tenha a oportunidade de utilizar estratégias próprias durante tais atividades. Dentre as expectativas de aprendizagem apresentadas, está a capacidade de "*resolver e elaborar problemas de contagem* que envolvam o princípio multiplicativo, por meio de registros variados (diagrama de árvore, tabelas e esquemas), *sem o uso de fórmulas*" (p. 91-92, grifos meus).

Por sua vez, o trabalho com o bloco de *Tratamento da Informação* engloba o trabalho com Probabilidade "em situações elaboradas de tal forma que o estudante possa experimentar e realizar simulações" (PERNAMBUCO, 2012, p. 78). Dentre as expectativas específicas dessa área da Matemática estão a capacidade de:

> […] *Usar diferentes técnicas de contagem* (diagrama de árvores, permutação, combinação e arranjo, sem uso de fórmulas) *para determinar o número de resultados possíveis de um experimento*; [...] *Diferenciar eventos determinísticos daqueles* em que a incerteza está presente (*aleatórios*) (p. 78-79, grifos meus).

Dado o posto, é possível perceber ainda, que tal documento (PERNAMBUCO, 2012) aponta para a importância de relacionar técnicas da Combinatória ao ensino da Probabilidade, especialmente quando se busca descobrir o 'número de resultados possíveis' de certo evento aleatório, isto é, o número de elementos que compõem o espaço amostral de dada situação probabilística. Novamente, há destaque para o fato de que o professor não deve forçar o estudante a usar fórmulas, mas deve explorar o uso de diferentes *representações simbólicas* e as diferentes *situações* combinatórias.

Por fim, no que se refere aos módulos da EJA equivalentes aos anos do Ensino Médio, os Parâmetros Curriculares para a Educação Básica de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012) afirmam que

> essa etapa de escolarização […] deve visar tanto àqueles que vão encerrar sua escolaridade, como aos que ainda se dirigirão a fases posteriores de formação escolar. […] devem ser oferecidas condições para que o estudante possa complementar e consolidar as aprendizagens realizadas anteriormente e desenvolver suas capacidades e competências (p. 93).

No que diz respeito às orientações voltadas para essa etapa de escolarização, tem-se, inserido no bloco de *Tratamento da Informação,* que "a ideia de probabilidade deve ser ampliada e consolidada" (PERNAMBUCO, 2012, p. 97), capacitando o estudante a lidar com diferentes situações que tratem de fenômenos aleatórios e consigam, inclusive, quantificar probabilidades e entender o contexto de independência de eventos. Dentre as expectativas de aprendizagem explicitadas estão: "*determinar a probabilidade de ocorrência de um evento*, explorando representações diversas; [...] Determinar a probabilidade da união ou da intersecção de eventos" (p. 99, grifos meus).

É possível perceber, portanto, que no discurso presente em orientações curriculares (nacionais e estadual) voltadas, especificamente, para a EJA, há indicações da preocupação com as especificidades do grupo de estudantes dessa modalidade de ensino, visto que é constantemente chamada a atenção para a importância de se trabalhar a partir de conhecimentos prévios desses estudantes, explorando-se estratégias espontâneas na resolução de problemas matemáticos, inclusive combinatórios e probabilísticos. Identifica-se, ainda, a presença de orientações que visam uma progressão no trabalho com a Combinatória e a Probabilidade durante a Educação Básica. Tal abordagem corrobora com pesquisadores (FISCHBEIN, 1975; BORBA, 2016; CAMPOS; CARVALHO, 2016) que defendem a importância do trabalho com tais conceitos desde o início da escolarização, visando o desenvolvimento dos raciocínios combinatório e probabilístico.

No que se refere às relações existentes entre Combinatória e Probabilidade, destaca-se que nos documentos nacionais voltados para a EJA – Proposta Curricular para a Educação de Jovens e Adultos, 1° segmento (BRASIL, 2001) e o mesmo documento voltado para o 2° segmento (BRASIL, 2002) – não há, explicitamente, orientações a um trabalho articulado entre conceitos dessas áreas da Matemática, conforme já apontado em Lima e Borba (2017). Por sua vez, os Parâmetros Curriculares para a Educação Básica de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012) chegam a indicar a importância do uso de técnicas de contagem, oriundas do conhecimento combinatório, para a determinação do número de eventos que constituem o espaço amostral em problemas probabilísticos. Essa e outras possíveis relações entre o raciocínio combinatório e o probabilístico são o foco do presente estudo.

No entanto, para a estruturação e desenvolvimento da presente pesquisa, se faz importante, além de conhecer o que está posto sobre Combinatória e Probabilidade em propostas curriculares voltadas para a EJA, levar em consideração estudos anteriores com foco no raciocínio combinatório, no probabilístico ou nas relações entre ambos. Esses estudos e seus achados são apresentados nas Seções 3.3 e 3.4.

3.3 ESTUDOS ANTERIORES

3.3.1 A Importância do Ensino da Combinatória e da Probabilidade ao Longo da Escolarização

Estudos como o de Borba (2016) e o de Campos e Carvalho (2016) destacam, respectivamente, a importância do ensino da Combinatória e da Probabilidade desde os primeiros anos de escolarização, bem como a necessidade do contato com diferentes *situações* (e seus distintos *invariantes*) e variadas *representações simbólicas* durante esse processo. A adequação da abordagem utilizada para o trabalho com esses conceitos nos diferentes níveis de ensino é defendida, tendo-se em vista o desenvolvimento do raciocínio combinatório e do probabilístico.

Borba (2016) resgata estudos que evidenciam que crianças bem novas já possuem noções intuitivas e alguns conhecimentos iniciais referentes à Combinatória. Essas noções e conhecimentos resultam das experiências cotidianas vivenciadas dentro e fora do ambiente escolar. Assim, a autora defende que tais noções e conhecimentos podem ser trabalhados na escola desde a Educação Infantil, sendo vivenciados e aprofundados durante toda a escolarização, visto que a instrução formal é de suma importância para o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Embora noções intuitivas sejam desenvolvidas fora da escola, Fischbein (1975) defende que a capacidade ampla de resolver problemas combinatórios não é desenvolvida sem o ensino formal. Assim, o passar do tempo, o amadurecimento cognitivo e as experiências extraescolares não são, por si só, suficientes para o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Nessa direção, o estudo de Schliemann (1995), desenvolvido com três grupos de participantes (cambistas do jogo do bicho, estudantes universitários recém aprovados no vestibular e trabalhadores com condições financeiras e sociais semelhantes às dos cambistas), aponta para o papel de conhecimentos matemáticos adquiridos em experiências cotidianas (nesse caso, mais especificamente, experiências profissionais) e daqueles conhecimentos advindos da escolarização formal. A autora constatou que, mesmo não tendo passado por instrução formal referente à Combinatória, os cambistas do jogo do bicho apresentaram um melhor desempenho quando comparados aos outros trabalhadores participantes do estudo. Por sua vez, os estudantes universitários apresentaram o melhor desempenho, no entanto, não houve diferença estatisticamente significativa quando comparados aos cambistas. Assim, a autora concluiu que tanto a experiência escolar dos estudantes universitários quanto a experiência profissional dos cambistas exerceram influência nos desempenhos apresentados. Isto é, destacou-se que, no que se refere ao desenvolvimento do raciocínio combinatório, "quando a experiência diária é combinada com a experiência escolar é que os melhores resultados são obtidos" (CARRAHER; CARRAHER; SCHLIEMANN, 1995, p. 99). Dessa forma, é importante que haja instrução escolar específica e que esta valorize os conhecimentos prévios dos estudantes, sejam eles escolares ou extra-escolares.

Além do reconhecimento da importância das experiências cotidianas e escolares, outro elemento a ser considerado é a longa trajetória necessária para o desenvolvimento do raciocínio combinatório. Argumenta-se, portanto, que "o trabalho com situações combinatórias simples desde o início da escolarização pode fundamentar um melhor desenvolvimento do raciocínio necessário para o estudo da Combinatória no Ensino Médio" (BORBA, 2016, p. 14).

No que diz respeito à Probabilidade, Campos e Carvalho (2016) levantam discussões sobre seu ensino, pautado em orientações curriculares nacionais e internacionais, destacando a necessidade de que conceitos referentes ao raciocínio probabilístico sejam trabalhados na escola durante toda a Educação Básica.

> Há tempos atrás o conceito de probabilidade estava direcionado para uma abordagem apenas na etapa de escolaridade do Ensino Médio, e na maioria dos casos, se abordava apenas na 2ª série do Ensino Médio. E ainda, essa abordagem foi fortemente marcada por um ensino apenas procedimental

> com uso excessivo de fórmulas. Hoje, em vários currículos prescritos de estados e cidades brasileiras se indica um trabalho com a probabilidade desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental (p. 3-4).

Os autores discutem, ainda, cinco atividades do programa de ensino desenvolvido por Bryant e Nunes (2012), visando contribuir com uma construção do conhecimento probabilístico desde os primeiros anos de escolarização. Tais atividades proporcionam reflexões acerca das características de fenômenos aleatórios, levantando discussões sobre “as diferenças entre eventos possíveis, impossíveis, prováveis e improváveis, diversas representações para a contagem de espaços amostrais simples, comparação de probabilidades e, ainda, a quantificação de probabilidades” (CAMPOS; CARVALHO, 2016, p. 4).

Campos e Carvalho (2016) não apenas defendem o ensino da Probabilidade nas diversas etapas escolares, como apontam que “se deve propiciar às crianças um contato com o conceito de probabilidade por meio de diferentes estratégias e abordagens significativas” (p. 4). Ressaltam, ainda, a necessidade de superação de práticas de ensino pautadas no uso excessivo de fórmulas.

Estudos realizados acerca da Combinatória ou da Probabilidade com estudantes na EJA são escassos na literatura (alguns estudos realizados por integrantes do Geração UFPE são apresentados posteriormente). Estudos que apontam as relações existentes entre os raciocínios combinatório e probabilístico são também incipientes. Dado o posto, a seguir são apresentados estudos nesse sentido que tiveram como foco estudantes das diversas etapas e modalidades de ensino.

3.3.2 Relacionando Combinatória e Probabilidade

Navarro-Pelayo, Batanero e Godino (1996), apontam a existência de relações entre a Combinatória e a Probabilidade, enfatizando que no processo de determinação de todos os possíveis eventos de dado espaço amostral é necessário que exista uma construção de cunho combinatório. Os autores destacam, ainda, que na Espanha o ensino da Combinatória tem sido por vezes suprimido e isso tem sido motivado por dificuldades apresentadas pelos próprios professores, que consideram tais conceitos difíceis. Assim, nas escolas desse país, o ensino da Combinatória tende a aparecer timidamente inserido no programa de Probabilidade, presente no currículo do Ensino Médio, com menções aos conceitos de contagem e uso do diagrama de árvore.

Santos (2015) buscou, em sua tese, entre outros objetivos, identificar sinais da contribuição de um ensino da Combinatória vinculado ao desenvolvimento do pensamento probabilístico em contexto de problematização em sala de aula. O interesse por tal relação (entre Combinatória e Probabilidade) surgiu da constatação de que diversos de seus estudantes, cursando o 6º ano do Ensino Fundamental, “não estimavam a probabilidade da maneira esperada devido a equívocos de interpretação de espaço amostral” (p. 18).

A autora destaca que “conceitos relacionados à Combinatória e à Probabilidade envolvem significações do ‘possível’ e do ‘provável’, que em diferentes contextos se articulam e em outros não” (p. 163). Assim, se faz necessário um processo de ensino que permita a articulação e comunicação de ideias dessas áreas. A importância do pensamento combinatório para a correta compreensão da probabilidade de ocorrência de determinados eventos é explicitada à medida que a autora afirma:

> as pessoas acreditam que a probabilidade de um cartão com seis números alternados ser sorteado é maior do que a de um cartão com seis números consecutivos. Dificilmente a semelhança entre essas probabilidades será aceita pelas pessoas (SANTOS, 2015, p. 46).

Dado o contexto no qual o trabalho de Santos (2015) se insere, a autora destaca que ainda existe uma escassez de literatura referente à Combinatória, indicando que “há poucos trabalhos envolvendo o ensino da Combinatória, sendo que na maioria deles o foco é o Ensino Médio” (p. 19). No que se refere ao ensino da Probabilidade, “o número de pesquisas é um pouco maior; no entanto, poucas relacionadas ao processo de ensino e aprendizagem no Ensino Fundamental” (p. 19). No que diz respeito à EJA, foco do presente estudo, é possível perceber que esse quadro se agrava ainda mais.

Nóbrega e Spinillo (2016) chamam a atenção para o fato de que crianças na Educação Infantil e nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental já apresentam ideias intuitivas de conceitos probabilísticos e combinatórios. Assim, desde cedo, esses estudantes são capazes de apresentar compreensões de conceitos como o de chance e de resolver problemas combinatórios mais simples, como os de *produto* *cartesiano*. Essa capacidade de compreensão de conceitos da Combinatória e da Probabilidade desde os primeiros anos de escolarização alerta para a necessidade de instrução escolar específica ao longo dos diferentes níveis de ensino para o adequado desenvolvimento do raciocínio combinatório e do raciocínio probabilístico.

Essas autoras realizaram entrevistas clínicas com 180 crianças do Ensino Infantil e dos Anos Iniciais. Tais crianças resolveram problemas probabilísticos que exploravam, especificamente, a noção de chance e problemas combinatórios de *produto cartesiano*. A partir das justificativas dadas pelos participantes ao resolverem os problemas propostos, as autoras puderam comparar duas facetas da noção de possível: uma relativa ao raciocínio combinatório e outra ao probabilístico. Os resultados obtidos indicam que mesmo as crianças mais novas apresentavam noções de possibilidade e de chance. Além disso, as autoras apontam que a ideia de possibilidade quando relacionada a conceitos da Probabilidade parece ser mais facilmente compreendida do que as ideias de possibilidade e impossibilidade intrínsecas à Combinatória. Concluem, a partir disto, que a noção de possível não adquire um significado único, pois envolve diferentes aspectos do conhecimento matemático, sendo necessário, portanto, a exploração dessa noção no que diz respeito tanto à Combinatória quanto à Probabilidade.

Considerando a importância de uma aproximação do trabalho de tópicos da Combinatória e da Probabilidade, dada a estreita relação entre os mesmos, Lopes e Rezende (2010) apresentaram uma proposta de ensino, voltada para os Anos Finais do Ensino Fundamental e para o Ensino Médio, baseada na resolução de problemas mediada por um jogo de tabuleiro. *O Jogo do Quadrado,* proposto pelos autores, é composto por um tabuleiro quadrado com nove casas (3x3) e por duas peças distintas (uma para cada jogador). O jogo se inicia com cada peça em um extremo do tabuleiro, de forma que um jogador tenha sua peça na casa esquerda inferior e o outro na casa direita superior. Cada peça pode se mover uma casa na vertical ou uma casa na diagonal. O objetivo do jogo é a eliminação da peça do oponente (que ocorre apenas em movimentos diagonais) ou a chegada ao quadrado de partida do outro jogador.

Os autores formularam diversas atividades referentes a conceitos combinatórios e probabilísticos envolvendo *O Jogo do Quadrado*, que podem ser adaptadas pelo professor que deseje utilizar essa proposta em sala de aula. A partir da proposta de ensino apresentada, os autores buscaram incentivar o desenvolvimento de estratégias básicas de contagem por parte dos estudantes, tendo em vista que tais estratégias se apresentam como ferramenta indispensável ao raciocínio combinatório e ao probabilístico.

Os autores destacam a estreita relação entre a concepção clássica de Probabilidade – que se utiliza de uma razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, quando em contexto equiprovável – e o uso de conceitos e *representações simbólicas* relacionadas ao raciocínio combinatório, como listagens e diagramas de árvore. Chamam a atenção, ainda, para o fato de que o ensino da Combinatória, bem como o da Probabilidade, deve proporcionar aos estudantes novas formas de raciocinar, de compreender situações cotidianas e capacitá-los à tomada de decisões dentro e fora do ambiente escolar. Dessa maneira, o ensino de conceitos relacionados a tais raciocínios deve evitar o uso de fórmulas prontas, que não proporcionam reflexão sobre os *invariantes* dos problemas propostos. O jogo proposto busca, portanto, apresentar-se como um ponto de partida para o desenvolvimento de conhecimentos que subsidiam a construção desses raciocínios por meio da resolução de problemas, exigindo a reflexão por parte dos estudantes e a utilização de estratégias diversas e de conceitos relacionados à contagem.

> Após o trabalho com os problemas apresentados anteriormente ou outros que o professor julgar necessários, este certamente terá mais facilidade para sistematizar os conceitos de Espaço Amostral e Evento. Fornecemos assim algumas opções diferentes daquelas tradicionalmente apresentadas nos livros didáticos e referentes a lançamentos de moedas e/ou de dados para o trabalho inicial com Análise Combinatória e Cálculo de Probabilidades (LOPES; REZENDE, 2010, p. 676).

Os estudos até então apresentados evidenciam a importância da investigação do raciocínio combinatório e do probabilístico, bem como das relações que se estabelecem entre ambos. A presente pesquisa buscou contribuir para a investigação dessas relações, tendo estudantes da EJA em diferentes etapas de escolarização como público alvo.

Estando o presente estudo vinculado ao Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório e Probabilístico – Geração (UFPE) –, considerou-se oportuno apresentar os estudos desenvolvidos anteriormente no âmbito desse grupo que motivaram a realização da presente pesquisa. A sequência de estudos desenvolvidos nesse grupo de pesquisa denota como, gradativamente, buscou-se ampliar a compreensão referente ao desenvolvimento do raciocínio combinatório e do probabilístico.

3.4 GRUPO DE ESTUDOS EM RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO E PROBABILÍSTICO – GERAÇÃO (UFPE)

O Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório e Probabilístico – Geração (UFPE), fundado em 2009, tem realizado diversos estudos relacionados ao ensino e à aprendizagem da Combinatória e da Probabilidade. Têm sido desenvolvidos estudos de sondagem com diferentes públicos alvo (crianças, adolescentes, adultos e professores), além de variados enfoques. Além disso, são desenvolvidos estudos de intervenção nos diferentes níveis de ensino, inclusive na EJA.

Borba, Rocha e Azevedo (2015) realizaram um levantamento dos estudos desenvolvidos por integrantes do Geração desde a criação do grupo, indicando as principais linhas de investigação adotadas e algumas reflexões proporcionadas pelas pesquisas até então realizadas. As autoras indicam que são cinco as linhas de pesquisa do grupo, tendo focos na:

- *Análise e produção de recursos:* Realização de levantamentos de abordagens da Combinatória e da Probabilidade em propostas curriculares, livros didáticos e meios digitais, além da produção de materiais didáticos;
- *Avaliação de conhecimentos:* Enfoca processos avaliativos em instrumentos de larga escala e propõe processos avaliativos relacionados ao raciocínio combinatório;
- *Desenvolvimento cognitivo:* Abrange observações do desenvolvimento do raciocínio combinatório e probabilístico nos diversos níveis e modalidades de ensino;
- *Formação de professores:* Busca identificar concepções de professores no que diz respeito ao ensino de conceitos da Combinatória e Probabilidade.
- *Intervenções pedagógicas:* Diz respeito à condução de estudos de intervenção para o desenvolvimento dos raciocínios combinatório e

probabilístico em diferentes etapas de escolarização (no ensino regular e na EJA).

Tais linhas de pesquisa diferenciam-se entre si em função de seus objetivos, seus públicos alvos e da natureza de suas pesquisas, sendo exploratórias e/ou de intervenção.

Estudos voltados à análise de livros didáticos, como o de Barreto e Borba (2010), no qual foram analisadas cinco coleções de livros de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental (totalizando 20 livros), e o de Martins e Borba (2010), que analisaram 19 livros didáticos da EJA aprovados pelo Plano Nacional do Livro de Alfabetização, evidenciam que esse material didático apresenta variedade de *situações* combinatórias nos diversos níveis e modalidades de ensino, entretanto tais situações apresentam-se, ainda, em número muito reduzido quando comparado a outros conceitos. Martins e Borba (2010) destacam que, no que se refere aos livros didáticos voltados à EJA, foi observado que os contextos apresentados são condizentes com o público ao qual o material didático é direcionado, entretanto, muitas situações matemáticas presentes no cotidiano dos estudantes dessa modalidade de ensino não se fazem presentes. Tais estudos destacam, ainda, a importância de que nesses livros didáticos sejam exploradas também diferentes *representações simbólicas* que proporcionem o tratamento dos diferentes problemas combinatórios a serem trabalhados.

No que diz respeito à análise de livros didáticos no que se refere à Probabilidade, Santana e Borba (2010), que analisaram 11 livros didáticos voltados para o 5º ano do Ensino Fundamental, apontam que foram encontradas poucas atividades que abordassem conceitos probabilísticos nos livros em questão. As autoras destacam, ainda, que a maior parte das atividades encontradas são relacionadas às ideias de fração, porcentagem ou Combinatória ou ainda aos contextos de jogos.

Estudos como estes, alertam para o fato de que os livros didáticos apresentam pouca variedade de *situações* e *representações simbólicas* que proporcionam a ampla exploração dos conceitos combinatórios e probabilísticos. Além disso, esse material didático, geralmente, não apresenta suporte ao professor no que diz respeito a essa necessidade de diversificação de problemas, nem quanto às particularidades das diferentes *situações* combinatórias e probabilísticas (referente aos seus respectivos *invariantes*).

No que diz respeito à análise de *softwares* e *objetos de aprendizagem* (OA) para o ensino da Combinatória, o estudo de Leite, Pessoa, Ferraz e Borba (2009), verificou como cinco diferentes *softwares*/OA disponíveis permitem o trabalho com os diferentes significados que atribuem sentido aos conceitos combinatórios. Foi apontado que tais *softwares*/OA possuem certas limitações, seja no sentido de explorar uma só *situação* combinatória ou de limitar as *representações simbólicas* (ao induzir ao uso de fórmulas, por exemplo). Limitações desse tipo não potencializam a ampla compreensão dos conceitos abordados. A partir das análises realizadas, as autoras apontam a necessidade de que recursos voltados para o ensino e a aprendizagem da Combinatória proporcionem o contato com diferentes tipos de problemas combinatórios e exploração de *representações simbólicas* variadas.

Estudos de sondagem, como os de Pessoa (2009), Lima (2010) – que adiante será discutido em mais detalhes, por tratar especificamente da EJA – e Vega (2014), investigaram conhecimentos possuídos por estudantes de diferentes etapas da escolarização formal no que diz respeito a conceitos da Combinatória. Esses estudos apontam que além dos tipos de situações combinatórias (sendo os problemas de *produto cartesiano*, geralmente, aqueles nos quais os estudantes de diferentes níveis de ensino apresentam melhor desempenho), há outros fatores que podem influenciar o desempenho dos estudantes, como o número de etapas de escolha presente nos problemas, por exemplo.

Quanto às ideias relacionadas à Probabilidade, Silva (2016), que realizou entrevistas clínicas com estudantes do 1º, 3º e 5º anos do Ensino Fundamental, constatou que essas crianças, de maneira geral, possuem uma compreensão intuitiva dos conceitos probabilísticos investigados. Assim, torna-se importante "investigar conhecimentos intuitivos que podem ser base de desenvolvimento do pensamento probabilístico necessário ao enfrentamento do cotidiano, tanto de crianças quanto de adultos" (p. 13), visto que apesar de não haver explicitação de conhecimentos consolidados, tendo os participantes apresentado dificuldades em esgotar todas as possibilidades de eventos no trabalho com espaço amostral, é importante considerar que “as noções intuitivas emergem com naturalidade e podem servir de trampolim para construção de conhecimentos coerentes, desde que haja instrução formal para isso” (p. 125).

A partir dos resultados de estudos exploratórios como os mencionados anteriormente, foram realizadas pesquisas com cunho interventivo, como a de Azevedo (2013), realizada junto a 40 estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental, tendo por objetivo analisar a influência da construção de árvores de possibilidades na resolução de problemas combinatórios com e sem o uso de *software*. A construção de árvores de possibilidades, seja com o uso de lápis e papel ou com o auxílio de *softwares*, constitui uma importante estratégia para a resolução de problemas combinatórios, visto que o uso da mesma proporciona a sistematização do levantamento de possibilidades, podendo facilitar o esgotamento das possibilidades relacionadas a dado problema. O estudo em questão evidenciou que intervenções, tais como a proposta, mesmo que realizadas em um curto período de tempo, se mostram eficientes para o desenvolvimento de raciocínio combinatório, estimulando o uso de diferentes estratégias e *representações simbólicas* na resolução dos problemas propostos. Outro estudo de intervenção, desenvolvido por Barreto (2012) junto a estudantes da EJA, será detalhado mais adiante.

No que se refere aos estudos realizados junto a professores da Educação Básica, como os de Rocha (2011), Santana (2011) e Lima (2015), que se utilizaram de entrevistas semi-estruturadas com professores, respectivamente, da Educação Básica (dois de cada nível: Anos Iniciais, Finais e Ensino Médio), do Ensino Fundamental (quatro dos Anos Iniciais e quatro dos Anos Finais) e da Educação Básica (tendo 24 professores dos Anos Finais e do Ensino Médio participado de uma primeira etapa do estudo – que consistiu na resolução e justificativa de um teste de múltipla escolha – e três professores dos Anos Finais participado das entrevistas), apontam que os professores de diferentes níveis de ensino apresentam dificuldades relacionadas aos *invariantes* das diferentes *situações* combinatórias e probalísticas e, por vezes, não se sentem preparados para lecionar tais conceitos. A partir de tais estudos, é possível inferir que se faz necessário propor formações continuadas, visando levar os professores a refletirem sobre o ensino, tanto da Combinatória como da Probabilidade, sob diferentes enfoques. É a partir da ampla compreensão das diferentes *situações*, *invariantes* e *representações simbólicas* que atribuem sentido aos conceitos a serem ensinados que os professores serão capazes de planejar e orientar atividades de ensino que proporcionem o desenvolvimento dos raciocínios combinatório e probabilístico de seus estudantes.

Borba, Rocha e Azevedo (2015) enfatizam também que os estudos desenvolvidos no âmbito desse grupo de estudos dão continuidade um ao outro, complementando conhecimentos quanto ao desenvolvimento do raciocínio combinatório e do raciocínio probabilístico de estudantes dos diferentes níveis e modalidades de ensino. Busca-se, portanto, “um acúmulo de conhecimentos, pois o que ficou como questão em aberto em um estudo anterior, objetivou-se responder em estudos posteriores” (p. 1364).

Em função disso, é dado destaque, na presente pesquisa, a alguns estudos anteriormente conduzidos por integrantes do Geração que possuem mais estreita relação com a presente pesquisa, sendo estes os estudos de Lima (2010), Barreto (2012), Batista e Francisco (2015) e Lima e Silva (2017), todos desenvolvidos com estudantes da EJA.

Lima (2010) realizou seu estudo de dissertação com 150 estudantes da EJA (Módulo I, II, III e IV e também estudantes da PROEJA, do curso de Mecânica – cobrindo assim todos os anos do Ensino Fundamental mais Educação Profissional), no qual foi analisada a compreensão dos participantes da pesquisa sobre problemas inseridos no campo das estruturas multiplicativas, especialmente os que envolvem o raciocínio combinatório. A autora aponta que a idade dos estudantes não influenciou o desempenho apresentado quanto à resolução do teste proposto, composto por 16 problemas. Entretanto, variáveis como escolarização, tipo de problema e estratégias utilizadas na resolução dos problemas exerceram influência no desempenho dos participantes. Percebeu-se, ainda, que os participantes do estudo apresentaram resistência ao resolver os problemas propostos em função da não associação dos mesmos a problemas matemáticos. Observou-se também resistência quanto ao uso de estratégias não-formais para as resoluções dos problemas e aqueles participantes que as usaram fizeram grande uso da listagem. Os resultados do estudo de Lima (2010) indicam que os problemas de *produto cartesiano* são os de mais fácil resolução dentre os problemas combinatórios, seguido dos problemas de *permutação*, *combinação* e *arranjo*.

Barreto (2012) realizou um estudo de intervenção com 24 estudantes do Módulo III da EJA (equivalente aos 4º e 5º anos do Ensino Fundamental) para investigar a influência da utilização de diferentes tipos de *representações simbólicas* na resolução de problemas combinatórios por alunos dessa modalidade de ensino. No estudo foram realizados pré-teste, intervenção e pós-teste. No pré-teste os estudantes apresentaram muitas dificuldades ao resolver os problemas e a listagem foi a *representação simbólica*/estratégia mais utilizada. Durante a intervenção, foram resolvidas as questões do pré-teste e, nesse momento, os participantes da pesquisa foram divididos em três grupos, em função da *representação simbólica*/estratégia utilizada: um grupo utilizou a listagem, outro utilizou a listagem e a árvore de possibilidades e o último fez uso apenas da representação de árvore. A autora aponta que a listagem foi a estratégia mais utilizada no pós-teste nos três grupos, tornando-se eficaz quando sistematizada. Ressalta-se que a intervenção contribuiu para chamar a atenção para a necessidade dessa sistematização e que os três grupos evoluíram igualmente, pois o tipo de *representação simbólica/*estratégia, em si, não teve tanta influência no desempenho dos participantes do estudo, sendo a evolução devida à tal sistematização. Assim, uma importante conclusão do estudo de Barreto (2012) é que “a instrução formal é indispensável para o desenvolvimento do raciocínio combinatório na EJA” (p. 101).

Batista e Francisco (2015) realizaram um estudo com 32 estudantes dos Módulos II e III da EJA Médio (equivalentes aos dois últimos anos do Ensino Médio) no qual investigaram noções probabilísticas desses estudantes, especialmente no que se refere à comparação de probabilidades, ideia de chance e análise de eventos certos, impossíveis, muito ou pouco prováveis. Foi proposta a resolução de um teste composto por nove problemas, com e sem figuras. Na pesquisa em questão não foi constatada diferença significativa quanto ao desempenho das duas turmas, nem em função da idade dos participantes e, contrariando a hipótese inicial, o desempenho foi geralmente superior nos problemas nos quais não havia apoio visual, visto que nos problemas com ilustrações seria necessário pensar geometricamente acerca dos espaços amostrais considerados, o que não foi observado. A partir de uma análise qualitativa, os autores destacam que as justificativas apresentadas pelos estudantes em muitas questões respondidas corretamente (com ou sem figura) evidenciavam uma compreensão superficial, e muitas vezes equivocada, da

Probabilidade. É importante ressaltar, ainda, que o bom desempenho observado referente à comparação de probabilidades diferentes reiterou essa compreensão equivocada, visto que os autores detacam que os participantes não consideraram as proporções e sim o maior número absoluto (maior quantidade de bolas de determinada cor em uma caixa, por exemplo), não tendo havido justificativas corretas nos problemas desse tipo propostos no estudo.

No estudo exploratório desenvolvido por Lima e Silva (2017), junto a 66 estudantes da EJA cursando etapas equivalentes aos anos do Ensino Médio, investigou-se, dentre outros conhecimentos (referentes à Estatística, Combinatória e Porcentagem), o desempenho de tais participantes ao resolverem problemas probabilísticos de comparação de probabilidades (iguais e diferentes). Dentre os oito problemas propostos no estudo, o de *comparação de probabilidades diferentes* foi aquele no qual o menor desempenho foi observado – seguido do problema de *comparação de probabilidades iguais*. A dificuldade ao resolver esse tipo de problema se deveu à não consideração do caráter proporcional dos problemas propostos, nos quais considerar meramente o número absoluto de elementos de um e outro espaço amostral considerados não levaria às respostas corretas. No geral, o desempenho tendeu a crescer em função da escolarização, contudo constatou-se que as diferenças observadas não foram estatisticamente significativas. É válido destacar, ainda, a grande incidência de respostas em branco, principalmente nos problemas de comparação de probabilidades, o que evidencia que as dificuldades levaram, também, os estudantes a apresentarem resistência em resolver tais problemas, relativos ao raciocínio probabilístico.

Dado o posto, a presente pesquisa buscou trazer contribuições no sentido de verificar se os resultados dos estudos apresentados no presente capítulo foram, ou não, replicados, ao se investigar tanto o raciocínio combinatório quanto o probabilístico com estudantes da EJA. Além disso, almejou-se ampliar essa discussão, a partir da investigação das relações entre esses raciocínios, buscando-se identificar as contribuições que a compreensão de situações combinatórias pode trazer para o raciocínio probabilístico nessa modalidade de ensino e vice-versa. Nesse sentido, no capítulo que segue são apresentados os objetivos e o método do estudo proposto.

4 OBJETIVOS E MÉTODO

Na Seção 4.1 do presente capítulo são explicitados os objetivos – geral e específicos – do estudo em questão.

Na Seção 4.2 os campos de coleta de dados e os estudantes da Educação de Jovens e Adultos participantes do estudo conduzido são apresentados. Além disso, os três grupos de participantes considerados são categorizados em função do nível de escolarização de tais estudantes.

Na Seção 4.3 justifica-se a escolha pelo método de coleta de dados utilizado, caracterizando-o e apresentando reflexões sobre a aplicabilidade do mesmo frente aos objetivos da pesquisa.

Por sua vez, na Seção 4.4 apresentam-se os problemas combinatórios e probabilísticos que compõem os dois tipos de teste utilizados durante a realização das entrevistas clínicas. São discutidas as características e a natureza de cada tipo de problema proposto, bem como a organização, em função da ordem de apresentação dos problemas e respectivas revisitações, de cada tipo de teste (Testes 1 e 2).

Por fim, na Seção 4.5, é discutida a natureza das análises de dados realizadas, a fim de atender aos objetivos do presente estudo.

4.1 OBJETIVOS

4.1.1 Geral

Analisar contribuições, na Educação de Jovens e Adultos, que a exploração de problemas combinatórios pode trazer para o raciocínio probabilístico e vice-versa.

4.1.2 Específicos

- Verificar desempenhos de estudantes da EJA referentes à resolução de problemas que abordam diferentes *situações* combinatórias e probabilísticas;
- Examinar a influência da escolarização formal no desempenho apresentado pelos participantes do estudo;

- Examinar a influência da ordem de apresentação dos problemas combinatórios e probabilísticos propostos no desempenho apresentado pelos estudantes;
- Analisar as*representações simbólicas*/estratégias utilizadas, suas limitações e as dificuldades apresentadas pelos estudantes na resolução dos diferentes problemas propostos;
- Analisar as relações evidenciadas entre o raciocínio combinatório e o probabilístico.

4.2 PARTICIPANTES

Participaram do presente estudo 24 estudantes da EJA de escolas públicas localizadas no município de Correntes, no interior do agreste pernambucano. A variedade de campos de pesquisa – três escolas – se deu em função da organização da oferta de Educação Básica na zona urbana do município em questão. As escolas A e B são municipais e atendem, respectivamente, aos Anos Iniciais do Ensino Fundamental e aos Anos Finais do Ensino Fundamental durante o dia e, no período noturno, aos módulos da EJA equivalentes às mesmas fases de escolarização. Por sua vez, a escola C é estadual e oferta o Ensino Médio regular durante o dia e essa mesma etapa de escolarização na modalidade da EJA no turno da noite. Assim, nessas três escolas, foi possível coletar os dados do estudo junto ao número de participantes desejado (sendo oito de cada nível de ensino/escola).

Os participantes do estudo foram classificados em três grupos distintos, sendo estes compostos por estudantes que, no período da coleta, cursavam o Módulo II, o Módulo IV ou o EJA Médio 3 (períodos de escolarização equivalentes, respectivamente, à conclusão dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, dos Anos Finais e do Ensino Médio). A escolha de tais grupos se deveu ao interesse em investigar os conhecimentos combinatórios e os probabilísticos, bem como as relações entre os mesmos, em diferentes momentos da escolarização na modalidade de ensino em questão.

Após a autorização dos gestores/coordenadores de cada escola para a realização da coleta de dados, solicitou-se que os professores elaborassem listagens dos estudantes adultos que estariam dispostos a participar do estudo. A partir de tais listagens, foram selecionados aleatoriamente oito estudantes de cada grupo. Obteve-se, assim, uma grande variedade de idades: os 24 participantes tinham idades entre 25 e 59 anos, sendo a média de aproximadamente 36 anos.

4.3 COLETA DE DADOS

Optou-se por realizar a coleta de dados por meio da condução de entrevistas clínicas individuais. A escolha pela entrevista clínica se deu pelo interesse de acompanhar de perto o raciocínio combinatório e o raciocínio probabilístico dos estudantes participantes do estudo. Teve-se em vista que "o raciocínio [...] tende a refletir-se nas ações, nas escolhas que um sujeito faz, por exemplo, ao resolver um problema" (CARRAHER, 1998, p. 1) e que o estudo de Lima (2010), que investigou a compreensão de estudantes da EJA sobre problemas multiplicativos (com foco na Combinatória), sugere que, em estudos posteriores que busquem investigar temáticas semelhantes, se leve em consideração que "o que pensam *[estudantes da EJA]* quando resolvem tais tipos de problemas seria mais facilmente identificado através de outros métodos, como uma entrevista clínica piagetiana" (p. 127).

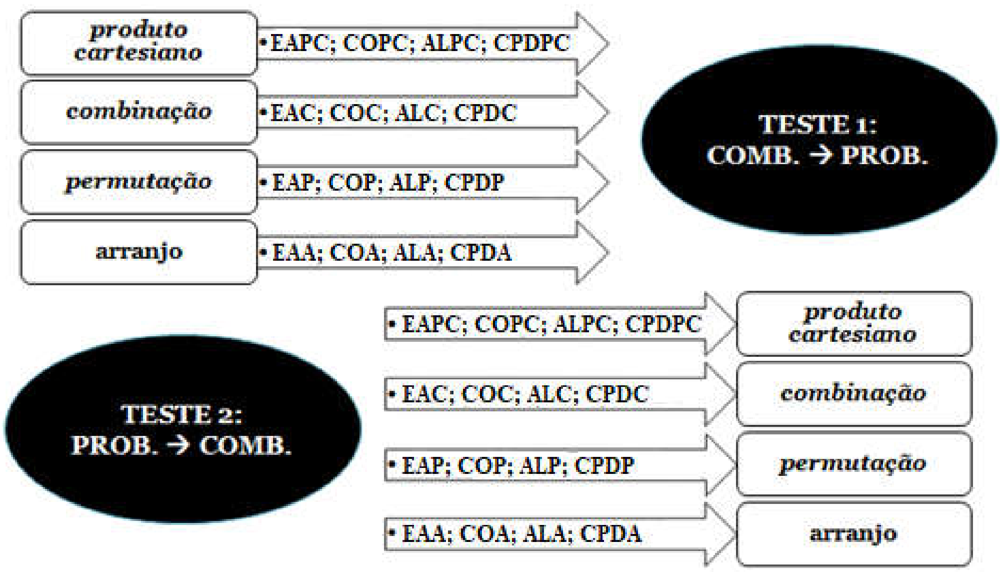
Dessa maneira, o método clínico-piagetiano foi escolhido pelo fato de se ter por finalidade, na presente pesquisa, "compreender como o sujeito pensa, como analisa situações, como resolve problemas, como responde às contra sugestões do examinador" (CARRAHER, 1998, p. 6). O mesmo apresenta-se, portanto, como um método que proporciona uma rica interação pesquisador-participante, permitindo a obtenção de uma compreensão mais ampla dos conhecimentos e processos utilizados pelos estudantes durante a resolução dos problemas propostos.

As entrevistas clínicas realizadas foram conduzidas individualmente, em espaços cedidos pelas escolas campo de pesquisa, nos quais foi possível coletar os dados em ambiente silencioso e propício à comunicação participante-pesquisadora, permitindo que se incentivasse os estudantes a explorarem os problemas propostos e explicitarem os procedimentos utilizados. Durante tais entrevistas, que tiveram duração média de aproximadamente 40 minutos, todos os problemas propostos foram lidos em voz alta pela pesquisadora (tantas vezes quanto foi necessário) e os participantes dispuseram de lápis/caneta, papel, teste impresso e calculadora. Os dados coletados consistiram emáudio-gravações das entrevistas, registros escritos dos participantes (respostas nos testes) e anotações da pesquisadora.

4.4 INSTRUMENTOS DE COLETA

Durante a coleta de dados conduzida, metade dos participantes de cada grupo resolveu um tipo de teste (Teste 1) e os demais resolveram um segundo tipo de teste (Teste 2). Ambos os instrumentos de coleta foram compostos por quatro problemas combinatórios de naturezas distintas (*produto cartesiano*, *combinação, permutação* e *arranjo*) e 16 problemas probabilísticos (quatro referentes a cada uma das exigências cognitivas da Probabilidade: *espaço amostral, correlação, aleatoriedade* e *comparação de probabilidades*). Os problemas propostos foram iguais nos dois tipos de teste e, dessa maneira, os testes diferenciaram-se entre si apenas em função da ordem de apresentação de tais problemas: no Teste 1 os problemas combinatórios foram revisitados sob o olhar da Probabilidade, enquanto no Teste 2 a ordem era inversa, isto é, os problemas probabilísticos foram apresentados primeiro e revisitados sob o olhar da Combinatória (Figura 1).

Figura 1: Estrutura dos instrumentos de coleta utilizados.



EA: *espaço amostral*; CO: *correlação*; AL: *aleatoriedade*;
CPD: *comparação de probabilidades diferentes.*

Fonte: A autora.

No Teste 1, após cada problema combinatório proposto, foi apresentado um bloco de problemas probabilísticos referente a tal situação combinatória. Esses problemas (de *espaço amostral*, *correlação*, *aleatoriedade* e *comparação de probabilidades diferentes*) tinham o intuito de aprofundar o olhar lançado à situação combinatória, investigando a compreensão de diferentes aspectos relativos a conceitos probabilísticos.

Por outro lado, ao resolver inicialmente os problemas probabilísticos (Teste 2), os participantes investigaram aspectos particulares das situações e, por fim, resolveram um problema combinatório por bloco, no qual era solicitado que se indicasse o número de possibilidades referentes à situação em questão.

Na Figura 2 são apresentados os problemas combinatórios propostos. Mais adiante os problemas probabilísticos presentes nos instrumentos de coleta utilizados são também apresentados.

Figura 2: Problemas combinatórios propostos.

(PC) Carlos começou a trabalhar em uma rede de supermercados e acabou de receber o seu fardamento: 4 camisetas em cores diferentes com o logo da empresa e 2 calças. Quantos conjuntos de uniforme diferentes Carlos pode formar com as peças recebidas?

(C) Sara tem 5 primos e quer escolher 3 deles para acompanhá-la no aniversário de uma amiga. De quantas maneiras diferentes ela pode fazer essa escolha?

(P) Maria gosta muito de literatura brasileira e seu autor favorito é José de Alencar. Ela ganhou 3 livros desse autor de presente de aniversário e ainda não decidiu em que ordem irá lê-los. Quantas ordens de leitura diferentes são possíveis?

(A) 4 rapazes desejam participar de uma ‘pelada’ com seus amigos e querem definir um atacante e um goleiro. De quantas formas diferentes os rapazes podem se organizar para ocupar as posições citadas?

PC→ produto cartesiano, duas etapas de escolha, 8 possibilidades;
C → combinação, três etapas de escolha, 10 possibilidades;
P → permutação, três etapas de escolha, 6 possibilidades;
A→ arranjo, duas etapas de escolha, 12 possibilidades.

Fonte: A autora.

Os problemas referentes às distintas *situações* combinatórias consideradas possuem número de etapas de escolha e ordem de grandeza semelhantes: seus resultados estão entre 6 e 12 possibilidades. A elaboração de problemas com tais características levou em consideração a diversidade de níveis de escolarização dos participantes do estudo, visto que problemas com baixo número de possibilidades são facilmente resolvidos por meio do uso de *representações simbólicas*/estratégias variadas, mesmo as mais simples e/ou informais como a enumeração oral e a listagem não sistemática. Tais problemas são distintos entre si em função de seus *invariantes de ordem* e *de escolha* – conforme aporte teórico adotado (PESSOA; BORBA, 2009), apresentado na Seção 2.2.2 –, isto é, variam em termos de *escolha* de elementos (todos ou alguns) e de *ordenação* desses (a ordem determinando, ou não, possibilidades distintas).

Por sua vez, no que se refere aos problemas probabilísticos propostos, nas Figuras 3, 4, 5 e 6 são apresentados blocos de problemas que exploram a *construção de espaço amostral,* a *investigação de correlações,* a *compreensão de aleatoriedade* e a *comparação de probabilidades*.

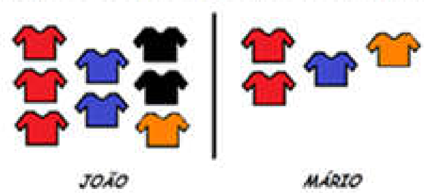
Figura 3: Problemas probabilísticos relativos à situação de produto cartesiano.

(EAPC)Liste todos os conjuntos de calça e camiseta que Carlos pode formar com as peças de roupa recebidas.

(COPC)Carlos decidiu usar a calça de cor marrom. Na escolha da camiseta para completar seu uniforme, todas as camisetas têm a mesma chance de serem escolhidas ou alguma camiseta tem mais chance? Por quê?

(ALPC)Carlos guarda as camisetas do seu uniforme lado a lado penduradas em cabides. No segundo dia de trabalho, Carlos acordou apressado e pegou uma das camisetas sem olhá-las. Todas as camisetas têm a mesma probabilidade de terem sido pegas ou alguma camiseta tem mais chance? Explique.

(CPDPC)João e Mário trabalham na mesma empresa que Carlos. Eles possuem tempos de serviço diferentes e, ao longo dos anos de trabalho, João recebeu 3 camisetas vermelhas, 2 azuis, 2 pretas e 1 laranja. Mário recebeu 2 camisetas vermelhas, 1 azul e 1 laranja. Se os dois escolherem ao acaso a camiseta que vão usar, é mais provável que João ou Mário use uma camiseta na cor vermelha? Justifique.



EAPC → espaço amostral de produto cartesiano; COPC → correlação de produto cartesiano;
ALPC → aleatoriedade de produto cartesiano;
CPDPC →comparação de probabilidades diferentes de produto cartesiano.

Fonte: A autora.

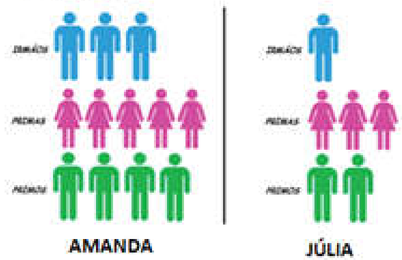
Figura 4: Problemas probabilísticos relativos à situação de combinação.

(EAC) Liste todas as formas como Sara pode escolher 3 dos seus 5 primos para acompanhá-la à festa.

(COC) Se Sara escolher Bruno e Diogo, algum dos outros primos tem mais chance de ser escolhido para acompanhá-la à festa ou todos têm a mesma chance? Justifique.

(ALC) Sara pediu que os primos escrevessem seus nomes em pedaços de papel para que ela sorteasse três deles. Todos os primos têm a mesma chance de ser o primeiro sorteado ou algum deles tem mais chance? Por quê?

(CPDC) Amanda e Júlia também foram convidadas para a festa. Amanda tem 3 irmãos, 5 primas e 4 primos. Júlia tem 1 irmão, 3 primas e 2 primos. Se elas escolherem um acompanhante ao acaso quem tem mais chance de levar uma prima? Explique.



EAC → espaço amostral de combinação; COC → correlação de combinação;
ALC →aleatoriedade de combinação;
CPDC →comparação de probabilidades diferentes de combinação.

Fonte: A autora.

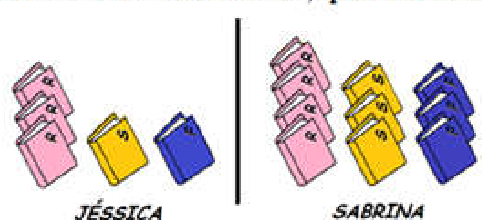
Figura 5: Problemas probabilísticos relativos à situação de permutação.

(EAP) Liste todas as ordens de leitura que Maria pode escolher com os 3 livros que ganhou de presente.

(COP) Se Maria decidir que vai ler o livro *Senhora* primeiro, os livros *Iracema* e *Lucíola* têm a mesma chance de serem lidos em seguida ou algum deles tem mais chance? Por quê?

(ALP) Maria decidiu jogar um dado para definir qual livro vai ler primeiro. Ela decidiu que se o lançamento tiver como resultado os números 1 ou 2 ela lerá o livro *Lucíola*, se o resultado do dado for 3 ou 4 lerá o livro *Senhora* e se o resultado for 5 ou 6 lerá o livro *Iracema*. Todos os livros têm a mesma chance de ser o primeiro a ser lido ou algum livro tem mais chance de ser sorteado? Justifique.

(CPDP) Jéssica e Sabrina são amigas de Maria e também gostam muito de ler. Jéssica tem 3 livros de romance, 1 de suspense e 1 de ficção científica. Sabrina tem 4 livros de romance, 3 de suspense e 3 de ficção científica. Se elas escolherem um livro ao acaso, quem tem mais chances de ler um livro de romance? Explique.



EAP→ espaço amostral de permutação; COP →correlação de permutação;
ALP →aleatoriedade de permutação;
CPDP →comparação de probabilidades diferentes de permutação.

Fonte: A autora.

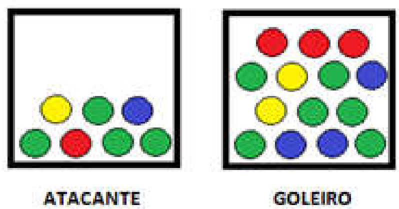
Figura 6: Problemas probabilísticos relativos à situação de arranjo.

(EAA) Liste todas as formas pelas quais se pode escolher 2 rapazes para ocupar as posições de goleiro e de atacante a partir dos 4 amigos.

(COA) Se Mateus for escolhido para ser atacante, algum dos outros rapazes terá mais chance de ser escolhido para goleiro ou todos têm a mesma chance? Explique.

(ALA) Se um dos rapazes for escolhido para a posição de goleiro por meio de sorteio, é mais provável que o amigo mais alto seja escolhido ou todos os rapazes têm a mesma chance de ser o sorteado? Justifique.

(CPDA) Serão realizados, separadamente, dois sorteios entre os amigos. O sorteio para atacante será realizado por meio da escolha de uma bola colorida de uma urna onde estão 1 bola vermelha, 1 azul, 1 amarela e 4 verdes. O sorteio para goleiro será realizado ao se tirar uma das bolas de outra urna contendo 3 bolas vermelhas, 3 azuis, 2 amarelas e 6 verdes. Anderson escolheu a cor verde. É mais fácil que ele seja sorteado para ocupar a posição de goleiro ou de atacante? Explique.



EAA→ espaço amostral de arranjo; COA → correlação de arranjo; ALA → aleatoriedade de arranjo; CPDA → comparação de probabilidades diferentes de arranjo.

Fonte: A autora.

Cada bloco de problemas probabilísticos está relacionado a um tipo de *situação* combinatória, utilizando-se do mesmo contexto e ampliando a compreensão acerca da situação em questão. Os problemas de *espaço amostral* solicitaram a listagem de todas as possibilidades referentes à respectiva situação combinatória. Essa estratégia pode ser utilizada espontaneamente ao se resolver qualquer problema combinatório, entretanto, a partir da proposição desse tipo de problema probabilístico buscou-se garantir que todos os participantes utilizariam, em algum momento, a listagem para indicação das possibilidades de cada problema.

Os problemas de *correlação* propostos buscaram investigar a capacidade dos participantes de perceberem a independência entre os eventos dados. Tal tipo de problema demanda que os participantes sejam capazes de se desprender de preferências e opiniões pessoais ao julgar as situações postas.

Por sua vez, os problemas de *aleatoriedade* propostos demandavam, além da compreensão do caráter aleatório das situações em questão, o julgamento da equiprobabilidade dos eventos dados.

Por fim, os problemas de *comparação de probabilidades diferentes*, utilizando-se de contextos semelhantes aos dos problemas combinatórios, demandavam a comparação de probabilidades de eventos distintos, sendo importante e necessário que os participantes levassem em consideração o caráter proporcional intrínseco ao cálculo de probabilidades.

4.5 ANÁLISE DOS DADOS

O presente estudo apresenta caráter quanti-qualitativo. Dessa maneira, os dados coletados durante a realização das entrevistas clínicas – por meio de transcrições de áudio e de registros escritos produzidos pelos participantes – foram analisados qualitativamente, visando identificar os *invariantes* compreendidos pelos estudantes, as *representações simbólicas*/estratégias utilizadas – suas limitações e efetividade –, bem como para levantar as relações estabelecidas entre o raciocínio combinatório e o probabilístico. Além disso, foram realizadas análises quantitativas de natureza estatística dos desempenhos dos participantes, por meio do uso do *software* Statistical Package for the Social Sciences (SPSS).

O *software* em questão permitiu que fossem realizadas análises descritivas e inferenciais. A partir disso, foi possível investigar a influência da escolarização (em função do módulo da EJA cursado) e da ordem de apresentação dos problemas propostos (Testes 1 e 2) no desempenho dos participantes, bem como analisar o desempenho em função dos tipos de problema combinatórios e probabilísticos, e investigar a influência do desempenho em cada bloco de Combinatória no desempenho obtido nas revisitações desses problemas no Teste 1 (questões de Probabilidade) e vice-versa (Teste 2).

Para a realização das análises quantitativas foram atribuídas pontuações ao desempenho apresentado pelos participantes. Dessa forma, no que diz respeito aos problemas combinatórios e aos problemas de *espaço amostral,* atribuiu-se zero (0) pontos quando menos da metade das possibilidades foi considerada, um (1) ponto quando metade ou mais das possibilidades foi considerada e dois (2) pontos quando houve esgotamento, isto é, um acerto total. Nesses problemas foram categorizadas, ainda, as *representações simbólicas* e estratégias utilizadas pelos participantes, a fim de facilitar as análises qualitativas (tais *representações simbólicas* e estratégias são apresentadas na Seçãob5.4, no capítulo de apresentação e discussão dos resultados).

Por sua vez, no que se refere aos demais problemas probabilísticos (*correlação*, *aleatoriedade* e *comparação de probabilidades diferentes*) foi atribuído zero (0) pontos quando houve erro, um (1) ponto quando houve acerto, mas a justificativa apresentada foi inadequada ou ausente e dois (2) pontos para acertos com justificativas adequadas.

A partir das análises realizadas, os resultados do presente estudo são apresentados e discutidos no capítulo que segue.

5 APRESENTAÇÃO, ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo, são apresentadas as análises e discussões referentes aos dados coletados, a partir da realização de entrevistas clínicas, junto a 24 estudantes adultos da Educação de Jovens e Adultos – EJA. Os participantes da presente pesquisa foram classificados em três grupos, em função de seus níveis de escolaridade, sendo: Grupo 1 (estudantes do Módulo II), Grupo 2 (estudantes do Módulo IV) e Grupo 3 (estudantes da EJA Médio 3)[1]. Tais participantes possuem idades entre 25 e 59 anos, sendo a média de 35,88 anos. Os participantes do Grupo 1 são aqueles que apresentam maior média de idade, sendo essa de 42,38 anos, enquanto os participantes dos Grupos 2 e 3 apresentam médias de idade semelhantes, iguais a 31,88 anos e 33,38 anos, respectivamente. O dado em questão reflete uma realidade atual da EJA, visto que há, nos módulos iniciais dessa modalidade de ensino, majoritariamente, adultos em início de escolarização ou que estão retornando à escola após um longo tempo de afastamento, enquanto nos períodos mais avançados de escolarização (principalmente na EJA Médio) é maior o número de estudantes mais jovens que, por motivos diversos (como reprovação no ensino regular e ingresso no mercado de trabalho), optam por concluir a Educação Básica estudando no turno da noite.

O presente capítulo está dividido em cinco seções. Na primeira delas, a Seção 5.1, é apresentada uma visão geral dos resultados da pesquisa, sendo analisados os desempenhos gerais obtidos e a influência da escolarização formal (Grupos 1, 2 e 3) e da ordem de apresentação dos problemas combinatórios e probabilísticos resolvidos (Testes 1 e 2) nos mesmos. Na Seção 5.2 aprofunda-se o olhar para o desempenho dos participantes da pesquisa quando da resolução de problemas combinatórios e de problemas de construção de *espaços amostrais* referentes às distintas situações combinatórias abordadas. A Seção 5.3 é dedicada à análise dos desempenhos apresentados a partir da resolução dos demais tipos de problemas probabilísticos, referentes à análise de existência de *correlações*, ao

[1] No município no qual os dados foram coletados, a EJA está organizada em quatro módulos equivalentes aos anos do Ensino Fundamental (Módulos I, II, III e IV) e em três etapas equivalentes aos anos do Ensino Médio (EJA Médio 1, 2 e 3). Os participantes do estudo em questão são, respectivamente, estudantes cursando o equivalente ao 4º e 5º ano do Ensino Fundamental, estando, portanto, concluindo os Anos Iniciais (Módulo II), ao 8º e 9º ano, concluindo os Anos Finais do Ensino Fundamental (Módulo IV) e ao 3º ano do Ensino Médio, concluindo a Educação Básica (EJA Médio 3).

entendimento da *aleatoriedade* em situações equiprováveis e à *comparação de probabilidades diferentes*. Na Seção 5.4 são exploradas as *representações simbólicas* e estratégias utilizadas pelos participantes durante a resolução dos problemas propostos. Por fim, na Seção 5.5, sob um olhar mais qualitativo, são discutidas as relações entre os raciocínios combinatório e probabilístico evidenciadas pelos participantes da pesquisa, a partir da exploração de diferentes *situações* combinatórias e exigências cognitivas da Probabilidade, bem como das revisitações aos problemas. São também apresentados e discutidos, nessa última seção, alguns casos que se destacam por embasar de maneira rica a reflexão sobre as contribuições que a exploração de problemas combinatórios e probabilísticos de maneira articulada pode trazer para o desenvolvimento dos raciocínios investigados no presente estudo.

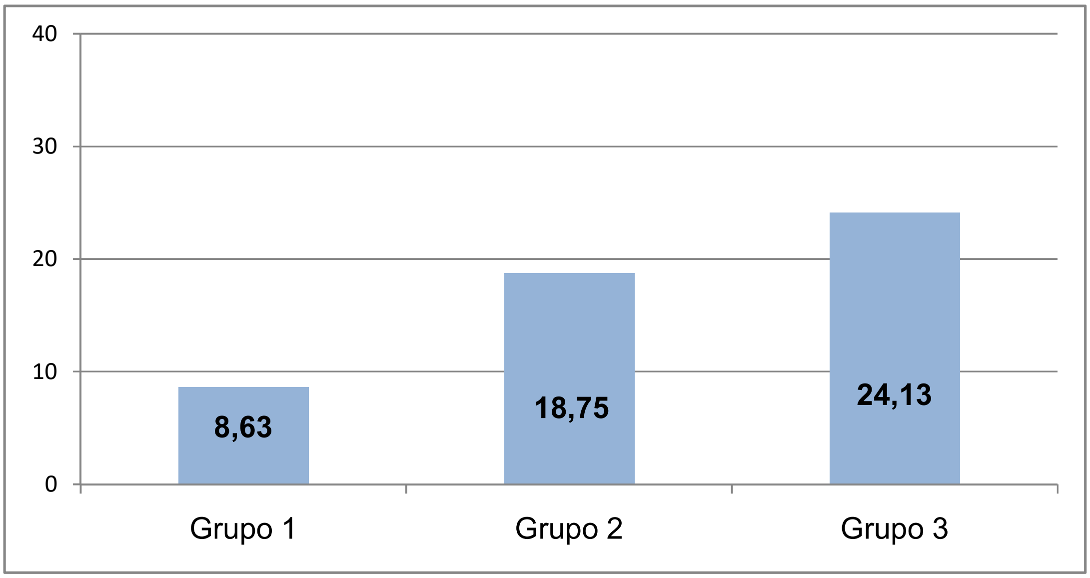
A organização do presente capítulo, dada a principal base teórica adotada no estudo – a Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1986; 1996) –, tem em vista trazer à tona discussões acerca do papel essencial das *situações* que atribuem sentido aos conceitos da Combinatória e da Probabilidade bem como dos *invariantes* de tais situações. Além disso, volta-se o olhar para as *representações simbólicas* e estratégias utilizadas pelos participantes da pesquisa frente aos problemas propostos. Tem-se, como foco central de análise, as relações que se estabelecem entre os raciocínios combinatório e probabilístico.

5.1 RESULTADOS GERAIS

Conforme pontuação atribuída aos desempenhos apresentados pelos participantes da pesquisa na resolução dos problemas propostos durante a coleta de dados, apresentada no capítulo anterior (Método, Seção 4.5), foi possível realizar as análises quantitativas gerais e os testes estatísticos inferenciais apresentados a seguir. Os desempenhos totais dos participantes da pesquisa variaram entre 2 e 33 pontos (de um máximo de 40 pontos), sendo o desempenho médio apresentado de 17,16 pontos. Tal dado indica uma defasagem do conhecimento desses estudantes no que se refere à Combinatória e à Probabilidade. Contribui para esse quadro o fato de que 54,2% dos participantes obtiveram um desempenho geral igual ou inferior a 20 pontos (desempenho equivalente à metade da pontuação possível na resolução dos problemas propostos).

No Gráfico 1 são apresentados os desempenhos médios obtidos por cada grupo de participantes da pesquisa. A partir da análise do mesmo, é possível comparar o desempenho em função da escolarização dos estudantes da EJA que compõem os grupos considerados.

Gráfico 1: Desempenho médio apresentado (por grupo de participantes), em um total possível de 40 pontos.



Grupo 1: Estudantes do Módulo II (4º e 5º anos do Ensino Fundamental);
Grupo 2: Estudantes do Módulo IV (8º e 9º anos do Ensino Fundamental);
Grupo 3: Estudantes da EJA Médio 3 (3º ano do Ensino Médio).

Fonte: Dados da pesquisa.

Conforme pode ser observado no gráfico acima, o desempenho geral apresentado parece ter influência direta do nível de escolarização dos participantes da pesquisa. Assim, o desempenho médio tendeu a crescer em função dos grupos de participantes, sendo o desempenho médio do Grupo 2 mais de 10 pontos superior ao desempenho do Grupo 1, enquanto o desempenho do Grupo 3 apresenta um avanço de mais de 5 pontos quando comparado ao Grupo 2. Essa influência da escolarização no desempenho dos participantes do estudo se mostrou significativa estatisticamente, a partir da realização de uma análise de variância (ANOVA), sendo: $F(2, 23) = 8{,}862$; $p = 0{,}002$. O uso do post hoc Tukey indica, ainda, que houve avanço significativo de desempenho ao se comparar o Grupo 1 com os Grupo 2 e 3, mas não entre os dois últimos, conforme segue: Grupo 1 x Grupo 2 → $p = 0{,}034$; Grupo 1 x Grupo 3 → $p = 0{,}001$ e Grupo 2 x Grupo 3 → $p = 0{,}340$.

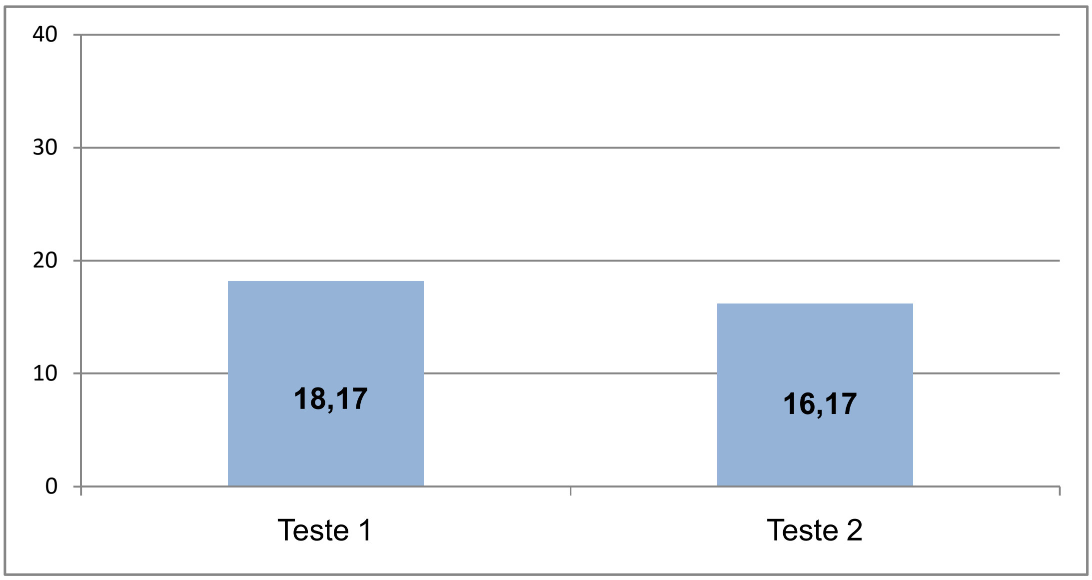
Esse resultado corrobora com os achados de Lima (2010), que investigou o desempenho de estudantes da EJA quando da resolução de problemas de estrutura multiplicativa, em especial aqueles voltados à Combinatória. A autora constatou um melhor desempenho por parte dos estudantes dos módulos equivalentes ao Ensino Médio quando comparados aos demais níveis de escolarização. Além disso, os participantes cursando módulos equivalentes aos Anos Finais do Ensino Fundamental obtiveram desempenho significativamente superior ao dos estudantes cursando módulos equivalentes aos Anos Iniciais. A autora destaca que, à medida que avançava o nível de escolarização, percebeu-se uma melhor compreensão dos *invariantes* dos problemas abordados e o uso de *representações simbólicas* e estratégias mais adequadas às suas resoluções. Os resultados obtidos por Lima (2010) indicam, dessa forma, que a escolaridade pode promover a obtenção de melhores desempenhos em problemas de estrutura multiplicativa (inclusive combinatórios, mesmo quando a Combinatória não é alvo de ensino específico).

De maneira semelhante, no presente estudo, a escolarização proporcionou alguns avanços nos raciocínios combinatório e probabilístico dos estudantes. Contudo, melhores desempenhos por parte dos estudantes da EJA Médio 3 eram esperados, tendo-se em vista as expectativas de aprendizagem presentes em propostas curriculares (PERNAMBUCO, 2012), nas quais é possível perceber a existência de maior destaque a conhecimentos relativos à Combinatória e à Probabilidade nos documentos voltados para essa etapa da escolarização.

Infere-se, assim, que a escolarização, por si só, tem efeito sobre o modo como os estudantes resolvem problemas, como pensam hipoteticamente e levantam possibilidades, mas não é suficiente para o pleno desenvolvimento dos raciocínios combinatório e probabilístico dos mesmos. Um avanço mais evidente de desempenho em função da escolarização indicaria a existência e efetividade de instrução escolar específica, necessária para o amplo desenvolvimento desses tipos de raciocínio (FISCHBEIN, 1975). Destaca-se, ainda, que “a escola – em sua proposta de ensino sistematizado – deve ajudar o aluno a pensar sobre a lógica implícita em cada tipo de problema” (LIMA, 2010, p. 115). Além disso, a instrução escolar específica é essencial para a ampliação do repertório de *representações simbólicas* e estratégias adequadas à resolução dos diferentes tipos de problema.

Outra variável considerada na presente pesquisa que pode influenciar no desempenho geral apresentado pelos participantes é relativa à ordem de apresentação dos problemas propostos, isto é, ao tipo de teste resolvido. No Gráfico 2 são apresentados os desempenhos médios obtidos pelos participantes que resolveram cada um dos dois tipos de teste utilizados na coleta de dados conduzida.

Gráfico 2: Desempenho médio apresentado (por tipo de teste), em um total possível de 40 pontos.



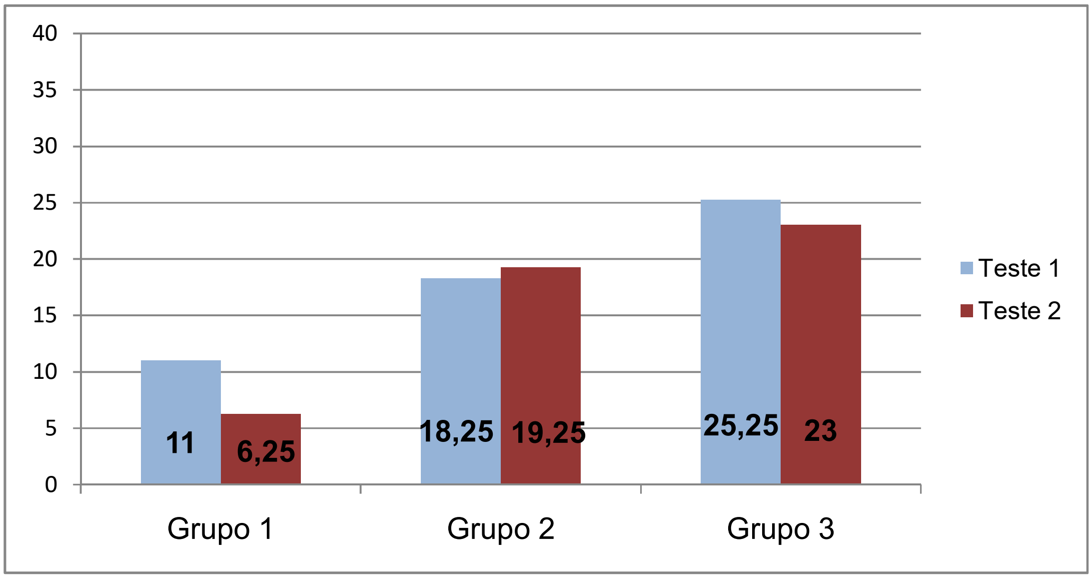
Teste 1: Problemas combinatórios revisitados sob o olhar da Probabilidade;
Teste 2: Problemas probabilísticos revisitados sob o olhar da Combinatória.

Fonte: Dados da pesquisa.

É possível observar que o desempenho médio obtido pelos participantes que resolveram os problemas na ordem apresentada no Teste 1 (Combinatória → Probabilidade) foi superior em dois pontos ao desempenho médio dos participantes que resolveram o Teste 2. Entretanto, a partir da realização de um t teste de amostras independentes, não foi constatada diferença significativa entre tais desempenhos, sendo: $t\ (22) = 0{,}497$; $p = 0{,}625$. Dessa maneira, a ordem de apresentação dos problemas e de suas respectivas revisitações não influenciou diretamente, de maneira quantitativa, o desempenho total dos participantes do estudo.

É importante, ainda, observar como o tipo de teste atuou no desempenho médio de cada um dos três grupos de participantes da pesquisa. Nesse sentido, tais dados são apresentados abaixo, no Gráfico 3.

Gráfico 3: Desempenho médio apresentado por cada grupo (por tipo de teste), em um total possível de 40 pontos.



Grupo 1: Estudantes do Módulo II; Grupo 2: Estudantes do Módulo IV;
Grupo 3: Estudantes da EJA Médio 3;
Teste 1: Problemas combinatórios revisitados sob o olhar da Probabilidade;
Teste 2: Problemas probabilísticos revisitados sob o olhar da Combinatória.

Fonte: Dados da pesquisa.

O desempenho médio apresentado pelos estudantes que resolveram inicialmente os problemas combinatórios e os revisitaram a partir de problemas probabilísticos (Teste 1) tendeu a ser superior ao desempenho médio dos participantes que resolveram os problemas propostos na ordem inversa (Teste 2), com exceção do observado no Grupo 2. Contudo, tais diferenças entre os desempenhos médios são pequenas e estatisticamente não significativas. São, conforme t teste de amostras independentes: Grupo 1 → $t(6) = 1{,}608$; $p = 0{,}159$; Grupo 2 → $t(6) = -0{,}139$; $p = 0{,}894$ e Grupo 3 → $t(6) = 0{,}392$; $p = 0{,}708$[2].

[2] A realização de outro tipo de teste estatístico – ANOVA a dois fatores – confirmou os resultados obtidos a partir da realização dos testes anteriormente apresentados, indicando haver diferença significativa de desempenho em função do grupo ($F(2, 23) = 7{,}985$; $p = 0{,}003$), mas não do tipo de teste ($F(1, 23) = 0{,}387$; $p = 0{,}542$). Além disso, constatou-se que a interação entre tais variáveis (grupo x teste) também não provocou influência significativa no desempenho dos participantes do estudo, sendo: $F(2, 23) = 0{,}268$; $p = 0{,}768$, ou seja, os grupos desempenhararam-se semelhantemente nos dois tipos de teste.

Éimportante ressaltar que embora o tipo de teste não tenha exercido influência de forma a provocar diferenças significativas no desempenho dos participantes, em ambos os casos (geral e por grupo), análises qualitativas, apresentadas nas próximas seções, apontam para o fato de as revisitações propostas no Teste 1 terem sido mais promissoras para a melhoria do desempenho dos participantes ao resolverem os problemas propostos. Isto é, os estudantes que resolveram inicialmente os problemas combinatórios e os revisitaram sob o olhar da Probabilidade obtiveram um avanço qualitativo de desempenho superior àqueles que resolveram o Teste 2 (problemas probabilísticos primeiro, revisitados sob o olhar da Combinatória). Isso se deu, principalmente, em função da relação entre a resolução dos problemas combinatórios e dos problemas de *espaço amostral* a eles relacionados. Essa discussão é detalhada na próxima seção do presente capítulo.

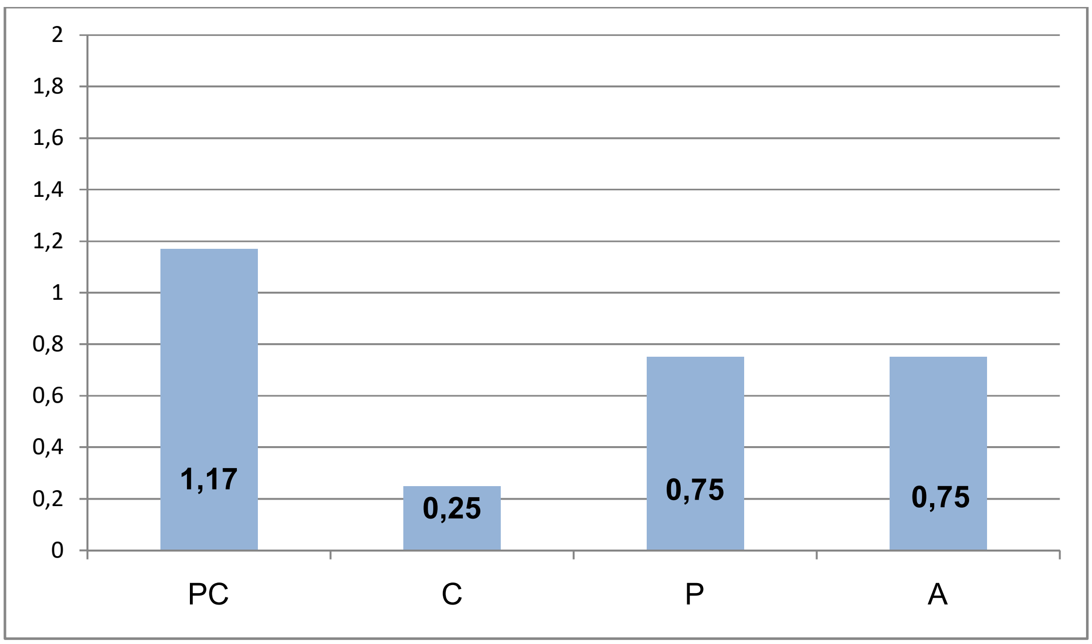
As análises referentes aos desempenhos dos participantes do estudo na resolução dos diferentes tipos de problemas combinatórios são apresentadas na seção a seguir. Além disso, a relação entre o desempenho nesses problemas e a determinação de *espaços amostrais* é discutida, levando-se, também, em consideração a ordem de apresentação de tais situações (Teste 1 e Teste 2).

5.2 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMBINATÓRIOS E A CONSTRUÇÃO DE ESPAÇOS AMOSTRAIS

No Gráfico 4 são apresentados os desempenhos médios referentes a cada tipo de *situação* combinatória presente nos instrumentos de coleta de dados utilizados. Nesse primeiro momento, foram considerados os desempenhos médios gerais obtidos por todos os participantes da pesquisa, não sendo considerada, de início, a variável referente à ordem de apresentação dos problemas propostos e suas revisitações (tipo de teste), análise que será aprofundada mais adiante, bem como aquela relativa ao nível de escolarização dos diferentes grupos de estudantes. Conforme pontuação atribuída aos problemas combinatórios (ver Método, Seção 4.5), o desempenho máximo em cada situação combinatória é equivalente a dois pontos.

O problema de *produto cartesiano* foi aquele no qual os participantes do estudo apresentam maior desempenho médio, quando comparado aos outros tipos de problemas combinatórios propostos. Por outro lado, o problema de *combinação* foi aquele no qual o menor desempenho médio foi observado, refletindo as dificuldades apresentadas pelos participantes no que se refere à compreensão dos *invariantes* desse tipo de *situação* combinatória. Ao tratarmos do esgotamento de possibilidades (acerto total), o quadro se mantém semelhante, sendo os percentuais de esgotamento de possibilidade iguais a 29,2% no problema de *produto cartesiano*, 20,8% no problema de *arranjo*, 12,5% no problema de *permutação* e apenas 8,3% no problema de *combinação*.

Gráfico 4: Desempenho médio por tipo de problema combinatório (pontuação máxima 2 pontos por tipo problema).



PC: *produto cartesiano*; C: *combinação*; P: *permutação*; A: *arranjo.*

Fonte: Dados da pesquisa.

Os resultados obtidos corroboram com achados apresentados em estudos anteriores (PESSOA, 2009; LIMA, 2010; AZEVEDO, 2013) que apontam os problemas de *produto cartesiano* como aqueles de mais simples resolução dentre as distintas *situações* combinatórias. Tal resultado pode se dever ao fato de que os problemas combinatórios desse tipo são os mais trabalhados desde o início da escolarização, dada, inclusive, sua relação direta com a operação de multiplicação.

De maneira semelhante, estudos anteriores (PESSOA, 2009; LIMA, 2010; AZEVEDO, 2013 – esse último no pré-teste, isto é, antes da intervenção realizada[3]) apontam para um baixo desempenho no que se refere aos problemas de *combinação*, dadas dificuldades de compreensão dos *invariantes de ordem* e *de escolha* desse tipo de *situação* combinatória, na qual a mudança de ordem na apresentação de elementos não constitui novas possibilidades, sendo necessária a eliminação de casos repetidos. Assim, por vezes, os participantes do estudo tiveram dificuldades em esgotar o número de possibilidades e em outros casos extrapolaram tal número (por considerar que a ordem dos elementos indicaria novas possibilidades).

A partir da realização de análises estatísticas inferenciais (t teste de amostras em pares) constatou-se que as diferenças de desempenhos apresentados foram significativas para os diferentes pares de problemas, exceto ao se comparar os problemas de *permutação* e *arranjo*, nos quais os desempenhos médios observados foram iguais. Sendo: PC x C → $t(23) = 6{,}868$; $p < 0{,}001$; PC x P → $t(23) = 2{,}318$; $p = 0{,}030$; PC x A → $t(23) = 2{,}460$; $p = 0{,}022$; C x P → $t(23) = -2{,}937$; $p = 0{,}007$; C x A → $t(23) = -3{,}140$; $p = 0{,}005$ e P x A → $t(23) = 0{,}000$; $p = 1$.

É válido destacar que mesmo que o desempenho médio apresentado nos problemas de *permutação* e de *arranjo* tenham sido iguais, o desempenho referente a tais diferentes tipos de *situações* combinatórias não foi igual qualitativamente. Como apontado anteriormente, o percentual de esgotamento, isto é, acertos totais, foi de apenas 12,5% no problema de *permutação,* enquanto 20,8% dos participantes esgotaram as possibilidades do problema de *arranjo*. Isso se deveu a maiores dificuldades com o *invariante de ordem* do problem de *permutação*, no qual todos os

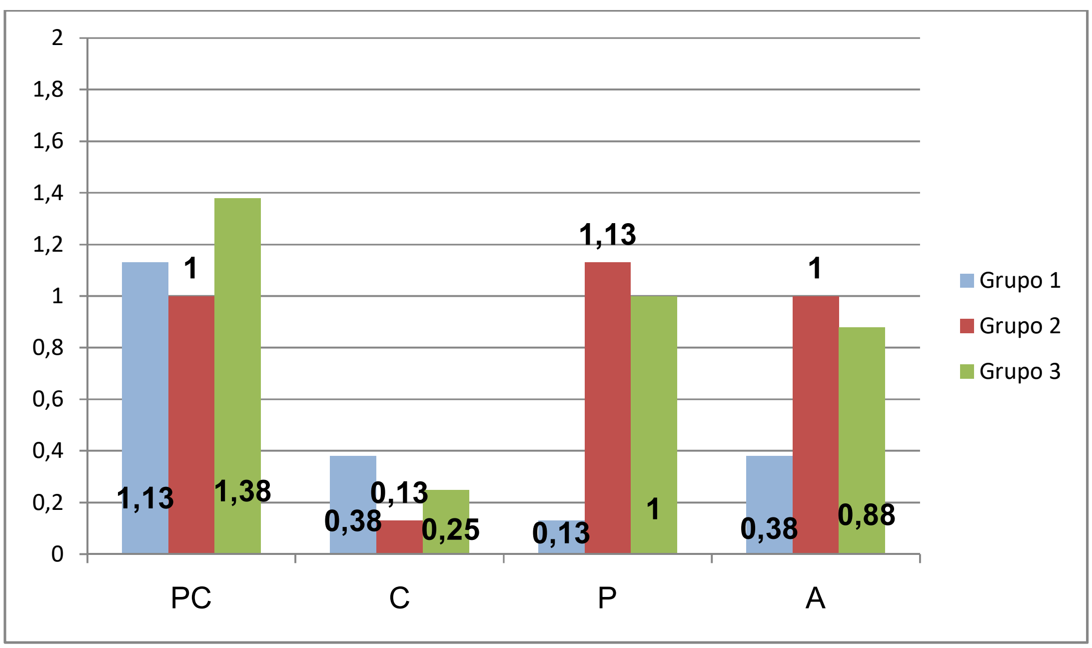
[3] No pós-teste do estudo de Azevedo (2013), cujos participantes foram estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental, o menor desempenho foi observado nos problemas de *permutação* – sendo o segundo menor desempenho referente aos problemas de *combinação*. A autora destaca que tal resultado pode estar relacionado ao maior número de etapas de escolha presentes nos problemas de *permutação* utilizados no estudo, quando comparado aos demais problemas combinatórios propostos. Nesse sentido, Vega (2014) aponta que, além do tipo de *situação* e o *número de possibilidades*, o *número de etapas de escolha* é uma variável que pode influenciar o desempenho referente à resolução de problemas combinatórios. Além disso, Azevedo (2013) destaca que, por ter trabalhado com árvores de possibilidades (no computador e no lápis e papel) durante o processo de intervenção, o maior número de etapas de escolha tornou as árvores correspondentes aos problemas de *permutação* mais extensas que as demais, isto é, com um número maior de ramos – o que pode ter dificultado a visualização por parte dos estudantes, levando ao baixo desempenho.

elementos devem ser utilizados e suas ordens modificadas para a determinação de todas as possibilidades existentes. Dificuldades com o *invariante de ordem* parecem, portanto, terem sido o grande fator dificultador na resolução de problemas combinatórios.

No Gráfico 5 são apresentados os dados referentes ao desempenho dos grupos considerados na pesquisa na resolução dos quatro tipos de problemas combinatórios propostos. Assim, é possível observar a influência da escolarização dos participantes nos respectivos desempenhos médios apresentados.

Foi possível perceber que, no que se refere aos desempenhos médios apresentados no problema de *combinação* e *produto cartesiano*, os problemas mais difícil e mais fácil, respectivamente, os desempenhos dos participantes dos três grupos foram semelhantes. Por outro lado, no que diz respeito aos demais problemas combinatórios propostos (*situações* de *arranjo* e de *permutação*) os Grupos 2 e 3 tenderam a apresentar um desempenho superior ao Grupo 1.

Gráfico 5: Desempenho médio por tipo de problema combinatório (por grupo), pontuação máxima 2 pontos por tipo problema.



PC: *produto cartesiano*; C: *combinação*; P: *permutação*; A: *arranjo;*
Grupo 1: Estudantes do Módulo II; Grupo 2: Estudantes do Módulo IV;
Grupo 3: Estudantes da EJA Médio 3.

Fonte: Dados da pesquisa.

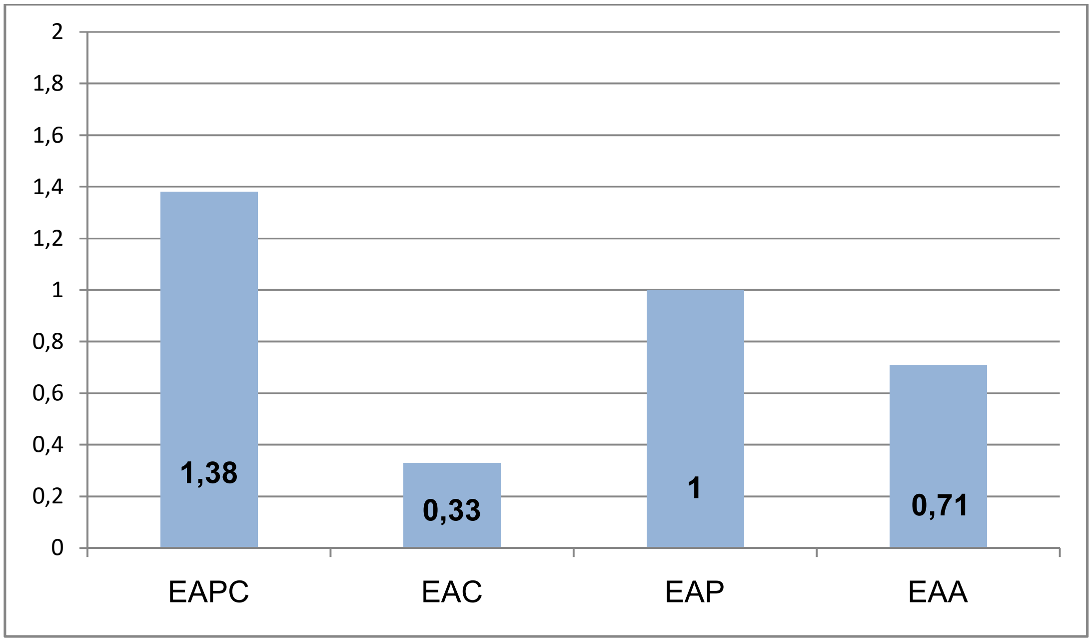
Em termos quantitativos, as diferenças de desempenho apresentadas no Gráfico 5, no entanto, não são expressivas. O que se confirma por meio da realização de análises estatísticas, que indicam haver diferença significativa apenas no que diz respeito aos desempenhos médios apresentados por cada grupo no problema de *permutação* (Grupo 1 x Grupo 2 → $p = 0{,}003$; Grupo 1 x Grupo 3 → $p = 0{,}008$ e Grupo 2 x Grupo 3 → $p = 0{,}882$). Pela ANOVA, temos, para o problema de *produto cartesiano* → $F(2, 21) = 0{,}700$; $p = 0{,}508$; para o problema de *combinação* → $F(2, 21) = 0{,}318$; $p = 0{,}731$; para o problema de *permutação* → $F(2, 21) = 8{,}674$; $p = 0{,}002$ e para o problema de *arranjo* → $F(2, 21) = 1{,}441$; $p = 0{,}259$.

Esses resultados indicam que mesmo que, de modo geral, os desempenhos referentes aos distintos tipos de problemas combinatórios propostos sejam significativamente diferentes entre si, essas diferenças são iguais dentro dos três grupos de participantes (exceto no que diz respeito ao problema de *permutação*). Tal exceção evidencia uma grande dificuldade dos estudantes que compõem o Grupo 1 com esse problema combinatório em específico (tendo o desempenho desse grupo ao resolver esse problema sido inclusive inferior ao desempenho referente ao problema de *combinação*): participantes desse grupo apresentaram dificuldades com os *invariantes* da situação combinatória de *permutação* tanto no que se refere à escolha (nesse problema é necessário que se use sempre todos os elementos) quanto no que diz respeito à ordem (a permutação, ou seja, a mudança de posição dos elementos, é o que permite que as distintas possibilidades sejam explicitadas).

Assim, reforça-se o papel central das *situações* no desenvolvimento conceitual (VERGNAUD, 1986; 1996), visto que os diferentes tipos de *situações* combinatórias não são igualmente compreendidos por todos os estudantes.

Dada a natureza dos problemas de construção de *espaços amostrais* propostos, é importante, ainda, analisar o desempenho dos participantes do estudo nesses problemas, a fim de investigar a relação desses com as situações combinatórias as quais os mesmos se referem. No Gráfico 6 é apresentando o desempenho médio geral dos participantes da pesquisa em cada um dos quatro problemas que solicitavam a explicitação de *espaços amostrais*.

Gráfico 6: Desempenho médio nos problemas de espaço amostral (pontuação máxima 2 pontos por tipo problema).



EAPC: *espaço amostral* de *produto cartesiano*; EAC: *espaço amostral* de *combinação*; EAP: *espaço amostral* de *permutação*; EAA: *espaço amostral* de *arranjo.*

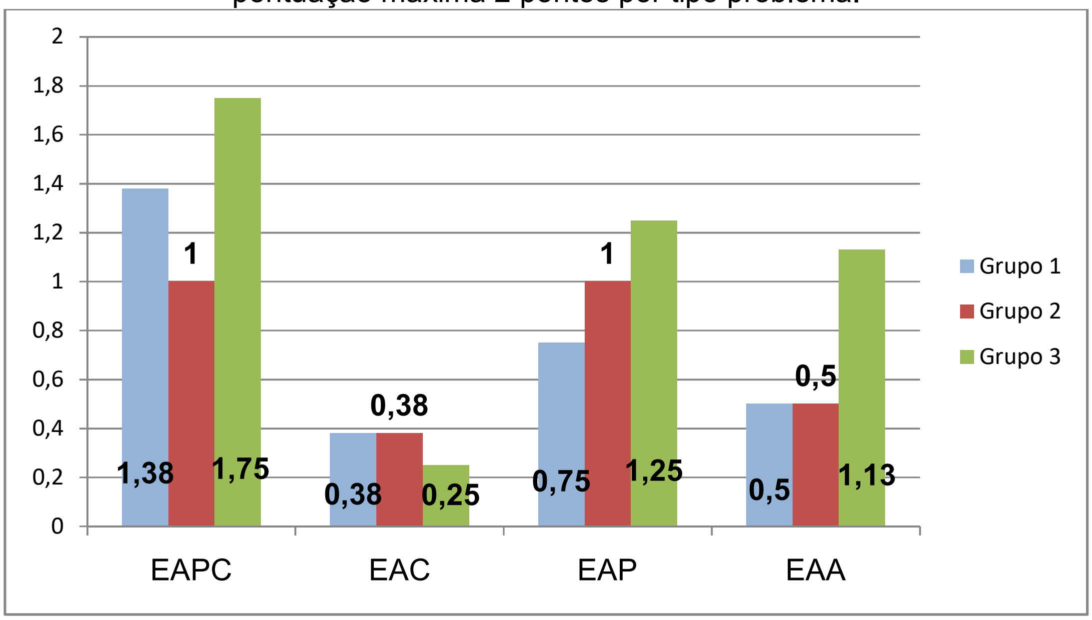
Fonte: Dados da pesquisa.

A diferença de desempenho explicitada no Gráfico 6 aponta para uma influência da natureza do tipo de *situação* combinatória por trás de cada um dos problemas de *espaço amostral* propostos. Como um reflexo do melhor desempenho apresentado no problema combinatório de *produto cartesiano*, o problema de *espaço amostral* referente a tal *situação* combinatória foi aquele no qual os participantes da pesquisa obtiveram mais êxito na resolução. De modo semelhante, o problema de *espaço amostral* de *combinação* foi aquele no qual o menor desempenho médio foi observado. Diferenças significativas relativas a tais desempenhos foram constatadas por t testes de amostras em pares (exceto entre os problemas de *espaço amostral* referentes às situações de *permutação* e de *arranjo*), sendo: EAPC x EAC → $t(23) = 8{,}177$; $p < 0{,}001$; EAPC x EAP → $t(23) = 3{,}191$; $p = 0{,}004$; EAPC x EAA → $t(23) = 4{,}290$; $p < 0{,}001$; EAC x EAP → $t(23) = -5{,}127$; $p < 0{,}001$; EAC x EAA → $t(23) = -2{,}387$; $p = 0{,}026$ e EAP x EAA → $t(23) = 2{,}070$; $p = 0{,}050$.

Dessa maneira, tais resultados levam à retomada da discussão relativa aos desempenhos dos participantes no que se refere à resolução dos diferentes tipos de problemas combinatórios, visto que os desempenhos ao resolver os problemas de *espaço amostral* estiveram estreitamente relacionados à compreensão dos *invariantes* das *situações* combinatórias correspondentes.

Com o objetivo de analisar, também, a influência da escolarização dos participantes da pesquisa na resolução desses problemas de construção de *espaços amostrais*, é apresentado o Gráfico 7.

Gráfico 7: Desempenho médio nos problemas de espaço amostral (por grupo), pontuação máxima 2 pontos por tipo problema.



EAPC: *espaço amostral* de *produto cartesiano*; EAC: *espaço amostral* decombinação; EAP: *espaço amostral* de *permutação*; EAA: *espaço amostral* de *arranjo;*
Grupo 1: Estudantes do Módulo II; Grupo 2: Estudantes do Módulo IV;
Grupo 3: Estudantes da EJA Médio 3.

Fonte: Dados da pesquisa.

É possível perceber que houve um pequeno crescimento no desempenho médio dos participantes da pesquisa em função do avanço da escolarização, com exceção do problema de *espaço amostral de combinação* – no qual há uma pequena diminuição no desempenho médio do Grupo 3 quando comparado com os Grupos 1 e 2 – e de *produto cartesiano* – no qual o Grupo 2 tem um desempenho inferior aos dos outros dois grupos, havendo no geral desempenhos semelhantes em todos os grupos. A partir da realização de teste estatístico (ANOVA) foi constatada diferença significativa nesses desempenhos apenas no que se refere ao problema de *espaço amostral* de *produto cartesiano,* sendo:

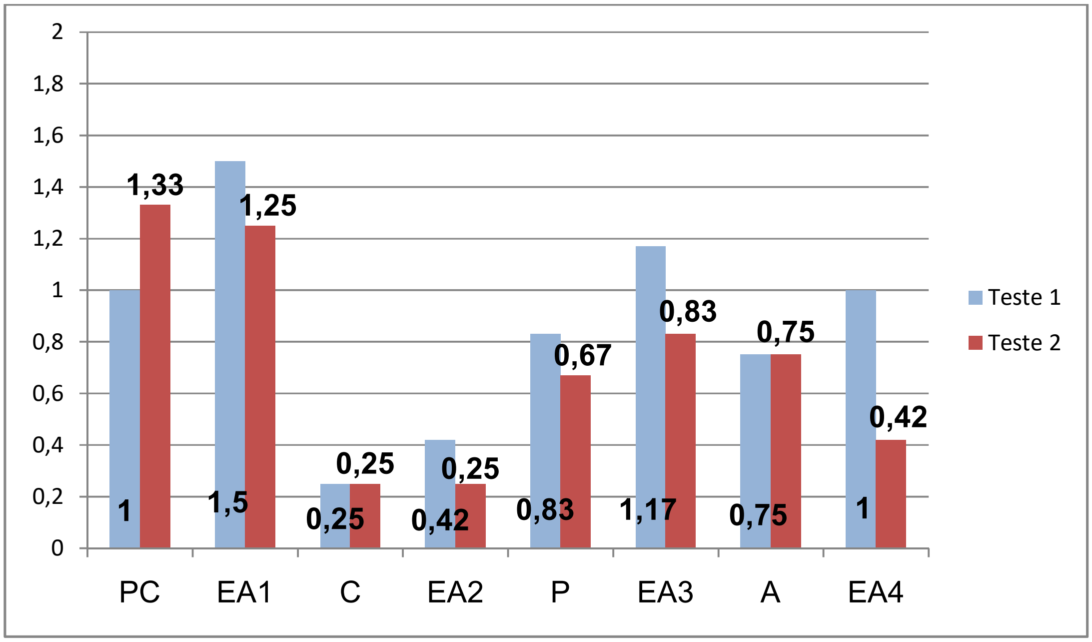
EAPC → F (2, 21) = 4,395; p = 0,025; EAC → F (2, 21) = 0,121; p = 0,887; EAP → F (2, 21) = 1,167; p = 0,331 e para o EAA → F (2, 21) = 2,011; p = 0,159. O post hoc Tukey indica, ainda, que tal diferença de desempenho no problema de *espaço amostral* de *produto cartesiano* foi significativa apenas ao se comparar os Grupos 2 e 3, conforme segue: Grupo 1 x Grupo 2 → p = 0,319; Grupo 1 x Grupo 3 → p = 0,319 e Grupo 2 x Grupo 3 → p = 0,019.

A partir da resolução desse tipo de problema (de *espaço amostral)* os participantes puderam utilizar a listagem escrita para registrar as possibilidades consideradas. Dessa forma, ao terem um contato inicial com as *situações* combinatórias (caso de Teste 2) ou a revisitá-las após resoluções por meio de *representações simbólicas* e estratégias não determinadas (Teste 1) puderam controlar, de maneira mais sistematizada, as possibilidades já indicadas. Assim, tais possibilidades puderam ser analisadas à luz dos *invariantes de ordem* e *de escolha* considerados e os desempenhos dos diferentes grupos tenderam a se aproximar quantitativamente. O Grupo 3 se destacou no que se refere ao problema de EAPC, visto que os estudantes que compõem tal grupo conseguiram esgotar, na maior parte das vezes, as possibilidades desse tipo de *situação* combinatória, na qual o melhor desempenho geral foi observado – sendo assim, o tipo de problema mais simples para os participantes do estudo.

A partir disso, reitera-se que a escolarização, mesmo exercendo influência nos desempenhos apresentados, não teve efeito marcante em todos os casos analisados. Tal variável provocou pequenas diferenças de desempenho, que foram mais comumente observadas ao se comparar o Grupo 1 (estudantes em início de escolarização) com os demais, o que pode se dever à própria familiarização com problemas matemáticos escolares e não necessariamente ao estudo específico de conceitos referentes à Combinatória – o que leva à pequena influência observada na resolução das diferentes *situações* propostas no presente estudo e respectivos problemas de construção de *espaços amostrais*.

É de suma importância, dada a natureza dos problemas combinatórios e dos de construção/explicitação de *espaços amostrais* propostos nos testes utilizados no presente estudo, observar, ainda, como a ordem de apresentação desses problemas, isto é, como o tipo de teste e a respectiva revisitação nele proposta,influenciouo desempenho dos participantes da pesquisa. Dado o posto, apresenta-se os dados referentes a tal análise (Gráfico 8).

Gráfico 8: Desempenho médio nos problemas combinatórios e de espaço amostral (por tipo de teste), pontuação máxima 2 pontos por tipo problema.



PC: *produto cartesiano;* EAPC: *espaço amostral* de *produto cartesiano*; C: *combinação;*
EAC: *espaço amostral* de *combinação*; P: *permutação*; EAP: *espaço amostral* de *permutação*;
A: *arranjo;* EAA: *espaço amostral* de *arranjo*;
Teste 1: Problemas combinatórios revisitados sob o olhar da Probabilidade;
Teste 2: Problemas probabilísticos revisitados sob o olhar da Combinatória.

Fonte: Dados da pesquisa.

A partir da observação do Gráfico 8 é possível perceber diferentes comportamentos referentes ao desempenho apresentado pelos participantes da pesquisa no que diz respeito à resolução de problemas combinatórios (*produto cartesiano*, *combinação*, *permutação* e *arranjo*) e de explicitação de *espaços amostrais* desses problemas, a depender da ordem de apresentação dessas situações, isto é, do tipo de teste resolvido. Nos casos nos quais os problemas combinatórios foram resolvidos primeiro (Teste 1) o desempenho médio tendeu a ser melhor nos problemas de *espaço amostral*, isto é, nas revisitações aos problemas combinatórios solucionados anteriormente. Tal tipo de revisitação proposta (outras revisitações serão discutidas nas próximas seções) proporcionou um momento de (re)avaliação das resoluções iniciais aos problemas combinatórios, permitindo que fossem realizadas correções e até mesmo que fosse feito o uso de novas *representações simbólicas*/estratégias na busca da explicitação de mais (ou de todas as) possibilidades.

Já no que diz respeito ao Teste 2, teste no qual os problemas de construção de *espaços amostrais* eram resolvidos antes dos problemas combinatórios (que surgiam como revisitações aos primeiros), percebe-se que houve um pequeno crescimento no desempenho médio apenas após resolução dos problemas de *produto cartesiano* e de *arranjo*, tendo tal desempenho se mantido inalterado no caso da revisitação do problema *espaço amostral* de *combinação* e chegado a diminuir ao se tratar do problema relacionado à *permutação*. Isto é, as revisitações propostas no Teste 2 (problema combinatório revisitando o problema de explicitação de *espaço amostral*) não tiveram o mesmo efeito daquelas presentes no Teste 1, não proporcionando um avanço semelhante ao observado no caso anterior.

A realização de testes estatísticos indica, no entanto, que, no geral, os avanços observados não são significativos quantitativamente. No que se refere ao Teste 1 (Combinatória → Probabilidade), por t testes de amostras em pares, tem-se diferença significativa de desempenho médio apenas no que se refere à *situação* combinatória de *produto cartesiano*, sendo: PC x EAPC → $t(11) = -3{,}317$; $p = 0{,}007$; C x EAC → $t(11) = -1{,}483$; $p = 0{,}166$; P x EAP → $t(11) = -1{,}483$; $p = 0{,}166$ e A x EAA → $t(11) = -1{,}915$; $p = 0{,}082$.

Já no Teste 2, não foi constatada diferença significativa em nenhum dos pares de problemas e suas respectivas revisitações, sendo: EAPC x PC → $t(11) = 1{,}000$; $p = 0{,}339$; EAC x C → $t(11) = 0{,}000$; $p = 1{,}000$; EAP x P → $t(11) = -0{,}692$; $p = 0{,}504$ e EAA x A → $t(11) = 1{,}301$; $p = 0{,}220$[4].

Contudo, dada a natureza das revisitações trabalhadas no estudo, é preciso que se considere a existência de avanços qualitativos, que não são evidenciados em análises como as anteriormente apresentadas. Em função das pontuações atribuídas aos desempenhos apresentados, que se baseiam em categorias de

---

[4] A realização de uma ANOVA a dois fatores indicou, ainda, que a interação entre as variáveis grupo e teste não influenciou significativamente o desempenho em nenhuma das *situações* combinatórias propostas, nem nos respectivos problemas de *espaço amostral*, sendo: PC → $F(2, 23) = 0{,}094$; $p = 0{,}911$; EAPC → $F(2, 23) = 0{,}474$; $p = 0{,}630$; C → $F(2, 23) = 2{,}423$; $p = 0{,}117$; EAC → $F(2, 23) = 0{,}375$; $p = 0{,}693$; P → $F(2, 23) = 1{,}050$; $p = 0{,}370$; EAP → $F(2, 23) = 1{,}625$; $p = 0{,}225$; A → $F(2, 23) = 3{,}079$; $p = 0{,}071$ e EAA → $F(2, 23) = 0{,}636$; $p = 0{,}541$.

desempenho, um estudante que tivesse indicado metade das possibilidades relativas a certo problema precisaria conseguir, a partir de sua revisitação, esgotá-las para avançar de categoria. Isso justifica o avanço quantitativo observado exclusivamente ao se tratar do problema de *produto cartesiano* no Teste 1, visto que além de essa ter sido a *situação* combinatória mais simples para os participantes do estudo, a revisitação por meio da listagem escrita levou muitos estudantes a esgotarem as possibilidades desse problema em especial (esgotamento que se mostrou mais difícil ao se tratar das demais *situações* combinatórias propostas).

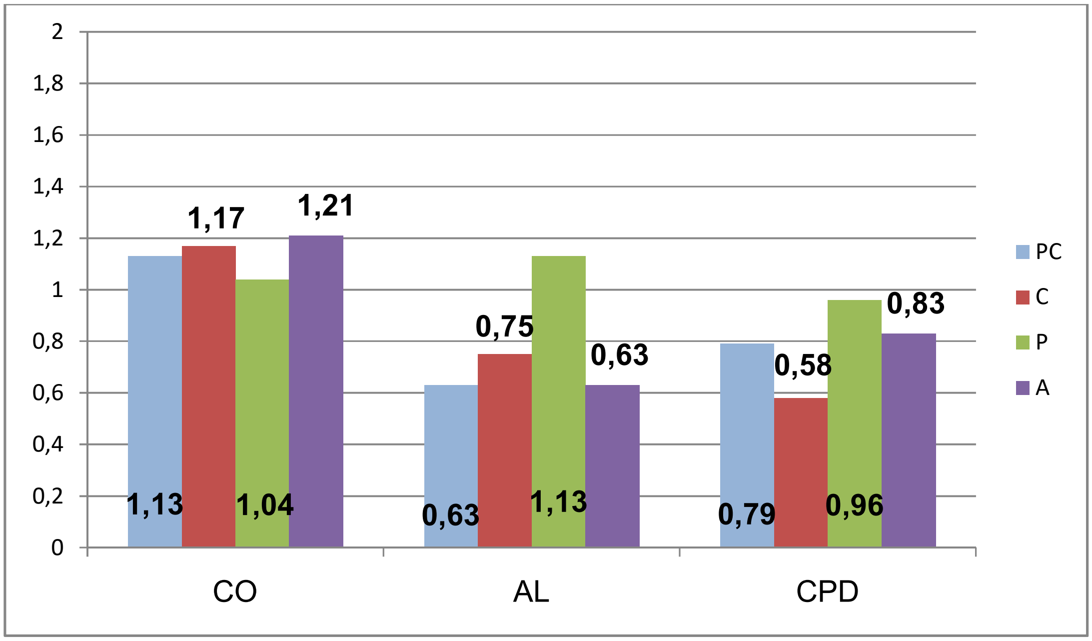
Logo, é importante destacar que os problemas propostos, que relacionam *situações* combinatórias à construção de *espaços amostrais* (e a outras exigências cognitivas da Probabilidade a serem discutidas adiante), em ambos os tipos de teste, proporcionaram melhorias de desempenho não só no sentido de explicitação de um número muito maior de possibilidades, aproximando-se de seu esgotamento, mas, também, permitiram que os participantes pudessem refletir acerca dos *invariantes* de *ordem* e de *escolha* das *situações* combinatórias em questão e, por vezes, modificar os *teoremas-em-ação* utilizados (a discussão sobre tais avanços qualitativos é aprofundada na Seção 5.5).

Na próxima seção, são analisados os desempenhos apresentados no que diz respeito à resolução dos demais tipos de problemas probabilísticos propostos, que exploram as exigências cognitivas relativas à análise de existência de *correlações*, ao entendimento da *aleatoriedade* em situações equiprováveis e à *comparação de probabilidades diferentes*.

5.3 RESOLVENDO OS DEMAIS PROBLEMAS PROBABILÍSTICOS

Os desempenhos médios referentes a cada um dos problemas de *correlação*, *aleatoriedade* e *comparação de probabilidades diferentes* propostos no estudo são apresentados no Gráfico 9. A análise desses dados visa evidenciar se houve influência da *situação* combinatória a qual cada um dos problemas está relacionado no desempenho apresentado pelos participantes ao resolvê-los. Posteriormente serão discutidos os desempenhos referentes aos problemas probabilísticos em função da natureza dos mesmos, isto é, das exigências cognitivas abordadas.

Gráfico 9: Desempenho médio nos problemas de correlação, aleatoriedade e comparação de probabilidades diferentes (por situação combinatória).



COPC: *correlação* de *produto cartesiano*; COC: *correlação* de *combinação*;
COP: *correlação* de *permutação*; COA: *correlação* de *arranjo;*
ALPC: *aleatoriedade* de *produto cartesiano*; ALC: *aleatoriedade* de *combinação*;
ALP: *aleatoriedade* de *permutação*; ALA: *aleatoriedade* de *arranjo;*
CPDPC: *comparação de probabilidades diferentes* de *produto cartesiano*;
CPDC: *comparação de probabilidades diferentes* de *combinação*;
CPDP: *comparação de probabilidades diferentes* de *permutação*;
CPDA: *comparação de probabilidades diferentes* de *arranjo.*

Fonte: Dados da pesquisa.

No que diz respeito aos problemas de *correlação,* é possível observar que o desempenho médio apresentado em cada um dos quatro problemas desse tipo (que estão relacionados aos problemas combinatórios de *produto cartesiano*, *combinação*, *permutação* e *arranjo*) foi bem semelhante, não parecendo haver, portanto, uma influência do tipo de *situação* combinatória nesse desempenho. De fato, a partir da realização de teste t aos pares, foi constatado que não houve diferença significativa relativa aos desempenhos nesses problemas, sendo: COPC x COC → $t(23) = -0{,}189$; $p = 0{,}852$; COPC x COP → $t(23) = 0{,}492$; $p = 0{,}627$; COPC x COA → $t(23) = -0{,}464$; $p = 0{,}647$; COC x COP → $t(23) = 0{,}901$; $p = 0{,}377$; COC x COA → $t(23) = -0{,}225$; $p = 0{,}824$ e COP x COA → $t(23) = -1{,}000$; $p = 0{,}328$.

Já no que se refere aos problemas de *aleatoriedade,* o problema ALP (*aleatoriedade* de *permutação*) se destaca por apresentar um desempenho médio superior aos outros três problemas de mesmo tipo. O teste t realizado confirma a significância estatística de tal diferença de desempenho, observada apenas quando o desempenho nesse problema é comparado aos demais, sendo: ALPC x ALC → $t(23) = -1{,}000$; $p = 0{,}328$; ALPC x ALP → $t(23) = -2{,}937$; $p = 0{,}007$; ALPC x ALA → $t(23) = 0{,}000$; $p = 1{,}000$; ALC x ALP → $t(23) = -2{,}840$; $p = 0{,}009$; ALC x ALA → $t(23) = 1{,}813$; $p = 0{,}083$ e ALP x ALA → $t(23) = 3{,}715$; $p = 0{,}001$.

É importante chamar a atenção para o fato de que os enunciados dos problemas de ALPC, ALC e ALA, possuem dados que os distinguem do enunciado referente ao problema de ALP (Figura 7).

Figura 7: Problemas de aleatoriedade.

(ALPC) Carlos guarda as camisetas do seu uniforme lado a lado penduradas em cabides. No segundo dia de trabalho, Carlos acordou apressado e pegou uma das camisetas sem olhá-las. Todas as camisetas têm a mesma probabilidade de terem sido pegas ou alguma camiseta tem mais chance? Explique.
(ALC) Sara pediu que os primos escrevessem seus nomes em pedaços de papel para que ela sorteasse três deles. Todos os primos têm a mesma chance de ser o primeiro sorteado ou algum deles tem mais chance? Por quê?
(ALP) Maria decidiu jogar um dado para definir qual livro vai ler primeiro. Ela decidiu que se o lançamento tiver como resultado os números 1 ou 2 ela lerá o livro *Lucíola*, se o resultado do dado for 3 ou 4 lerá o livro *Senhora* e se o resultado for 5 ou 6 lerá o livro *Iracema*. Todos os livros têm a mesma chance de ser o primeiro a ser lido ou algum livro tem mais chance de ser sorteado? Justifique.
(ALA) Se um dos rapazes for escolhido para a posição de goleiro por meio de sorteio, é mais provável que o amigo mais alto seja escolhido ou todos os rapazes têm a mesma chance de ser o sorteado? Justifique.

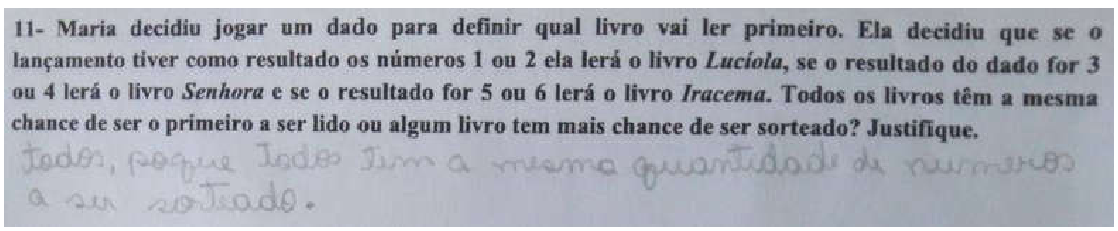
ALPC: *aleatoriedade* de *produto cartesiano*; ALC: *aleatoriedade* de *combinação*; ALP: *aleatoriedade* de *permutação*; ALA: *aleatoriedade* de *arranjo*.

Fonte: A autora.

Os enunciados dos problemas ALPC, ALC e ALA trazem informações referentes a contextos aleatórios (envolvendo sorteios e escolhas realizadas de maneira arbitrária – sem olhar, por exemplo) nos quais a cada elemento/pessoa está relacionado apenas um evento favorável: no problema ALPC existe apenas uma camiseta de cada cor; no problema ALC cada primo de Sarah escreveu seu nome em apenas um papel e no problema ALA não há explicitação da forma como será conduzido o sorteio. Já no problema ALP a escolha de cada um dos livros possíveis tem associado a si o sorteio de dois números em um dado (garantindo assim a equiprobabilidade presente nos outros problemas).

Essa diferença nos contextos/enunciados, no entanto, contribuiu para o surgimento de justificativas adequadas na resolução dos problemas de *aleatoriedade de permutação* (poucas vezes presentes nas resoluções dos problemas ALPC, ALC e ALA). A presença de tais justificativas corretas elevou, assim, o desempenho médio apresentado no problema ALP, visto que as pontuações atribuídas a tais problemas as levaram em consideração. Justificativas adequadas a esse tipo de problema deveriam não apenas evidenciar o caráter aleatório das situações trabalhadas, mas indicar a equiprobabilidade inerente às mesmas: equiprobabilidade que foi, por vezes, percebida e elucidada pelos participantes da pesquisa nas justificativas apresentadas para o problema de ALP, mas raras vezes veio à tona quando os outros problemas foram tratados. As Figuras 8 e 9 ilustram justificativas adequadas e inadequadas, respectivamente, referentes a diferentes problemas de *aleatoriedade.*

Figura 8: Problema de aleatoriedade de permutação, resolvido por P20 (Estudante da EJA Médio 3). Acerto com justificativa adequada.

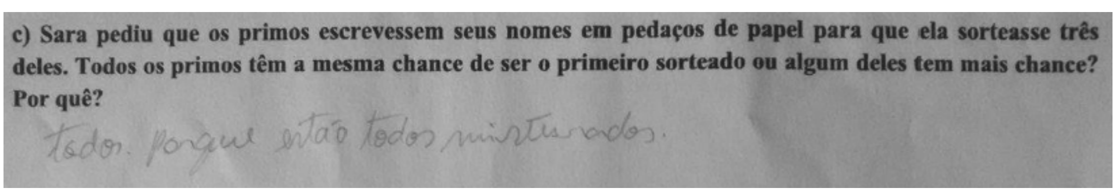


11- Maria decidiu jogar um dado para definir qual livro vai ler primeiro. Ela decidiu que se o lançamento tiver como resultado os números 1 ou 2 ela lerá o livro *Lucíola*, se o resultado do dado for 3 ou 4 lerá o livro *Senhora* e se o resultado for 5 ou 6 lerá o livro *Iracema*. Todos os livros têm a mesma chance de ser o primeiro a ser lido ou algum livro tem mais chance de ser sorteado? Justifique.

todos, porque todos tem a mesma quantidade de numeros a ser sorteado.

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 9: Problema de aleatoriedade de combinação, resolvido por P11 (Estudante do Módulo IV). Acerto com justificativa inadequada.



c) Sara pediu que os primos escrevessem seus nomes em pedaços de papel para que ela sorteasse três deles. Todos os primos têm a mesma chance de ser o primeiro sorteado ou algum deles tem mais chance? Por quê?

todos. porque estão todos misturados.

Fonte: Dados da pesquisa.

Em sua fala, o participante P11 (Figura 9) reiterou que todos os primos de Sarah teriam a mesma chance de serem sorteados, pois "'tá' tudo misturado, aí pode sair qualquer um *[no sorteio]*". Dessa maneira, indica compreender o caráter aleatório intrínseco ao problema, mas não evidencia a equiprobabilidade do mesmo, condição necessária para que todos os primos tenham a mesma chance de serem escolhidos por meio da realização do sorteio.

Por sua vez, o participante P20 (Figura 8), ao apresentar em sua justificativa que todos os livros têm a mesma quantidade de números no dado a seu favor (no dado, dois números representam cada um dos livros), evidenciou que levou em consideração, ao resolver o problema de ALP, não apenas o caráter aleatório da situação, mas a equiprobabilidade necessária para que todos os livros em questão tenham a mesma chance de serem sorteados a partir do lançamento do dado.

Dado o posto, destaca-se que a diferença de desempenho observada entre os problemas de *aleatoriedade* pode não se dever à natureza do problema combinatório ao qual o problema de ALP está relacionado, mas sim estar associada ao tipo de contexto presente no enunciado em questão, que distinguiu tal problema dos outros três desse tipo propostos aos estudantes da EJA que participaram da pesquisa.

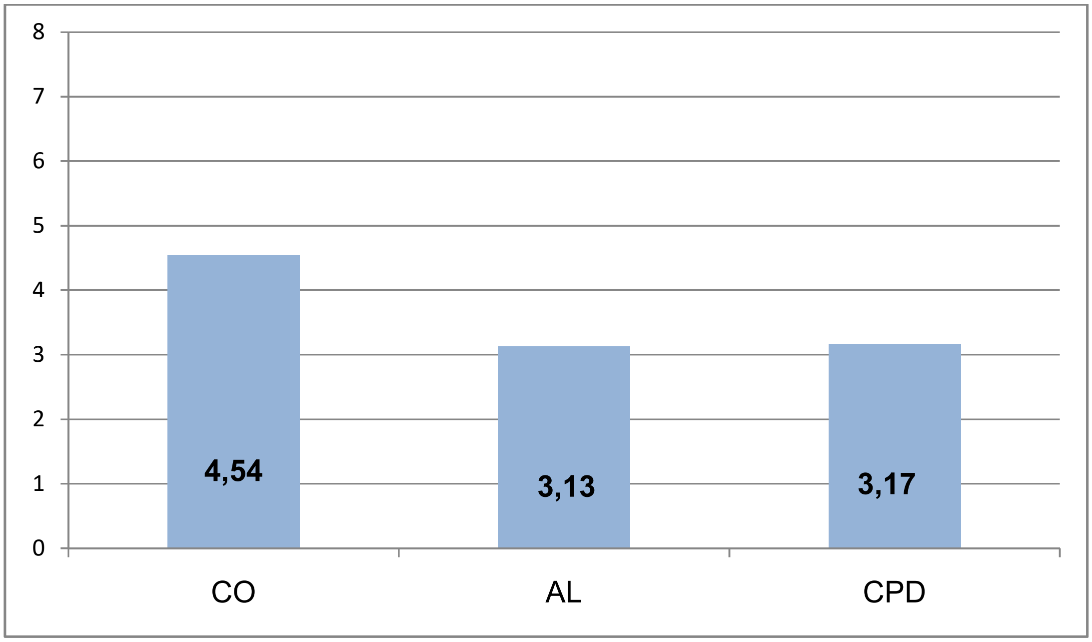
Por fim, a realização de testes t com amostras em pares referentes aos problemas de *comparação de probabilidades diferentes* confirmou que as pequenas diferenças de desempenho observadas no Gráfico 9 não são estatisticamente significativas. Tem-se: CPDPC x CPDC → $t(23) = 1{,}000$; $p = 0{,}328$; CPDPC x CPDP → $t(23) = -1{,}282$; $p = 0{,}213$; CPDPC x CPDA → $t(23) = -0{,}253$; $p = 0{,}802$; CPDC x CPDP → $t(23) = -1{,}895$; $p = 0{,}071$; CPDC x CPDA → $t(23) = -1{,}366$; $p = 0{,}185$ e CPDP x CPDA → $t(23) = 1{,}366$; $p = 0{,}185$.

Dada a homogeneidade dos desempenhos apresentados em problemas que abordaram a mesma exigência cognitiva da Probabilidade, isto é, a influência não significativa do tipo de problema (PC, C, P ou A) nos desempenhos dos participantes, para as análises que seguem serão considerados os somatórios dos desempenhos relativos aos problemas de *correlação*, *aleatoriedade* e *comparação de probabilidades diferentes.* Dessa maneira, o desempenho médio referente a cada categoria de problema pode chegar a um total de oito pontos. No Gráfico 10 são apresentados os desempenhos médios totais referentes a tais tipos de problemas.

A partir dos dados ilustrados no Gráfico 10, percebe-se que o desempenho médio obtido na resolução dos problemas de *correlação* foi superior em mais de um ponto aos desempenhos referentes aos problemas de *aleatoriedade* e de *comparação de probabilidades diferentes.* Por outro lado, os desempenhos médios desses últimos são muito semelhantes. A partir dos resultados dos testes t aos pares realizados, tais impressões se confirmaram, visto que foram constatadas diferenças significativas de desempenho apenas entre os problemas de *correlação* quando comparado com os outros dois tipos de problemas. Tem-se:

CO x AL → t(23) = 3,725; p = 0,001; CO x CPD → t(23) = 2,397; p = 0,025; AL x CPD → t(23) = -0,081; p = 0,936.

Gráfico 10: Desempenho médio nos problemas de correlação, aleatoriedade e comparação de probabilidades diferentes (geral).



CO: somatório dos problemas de *correlação*; AL: somatório dos problemas de *aleatoriedade*; CPD: somatório dos problemas de *comparação de probabilidades diferentes.*

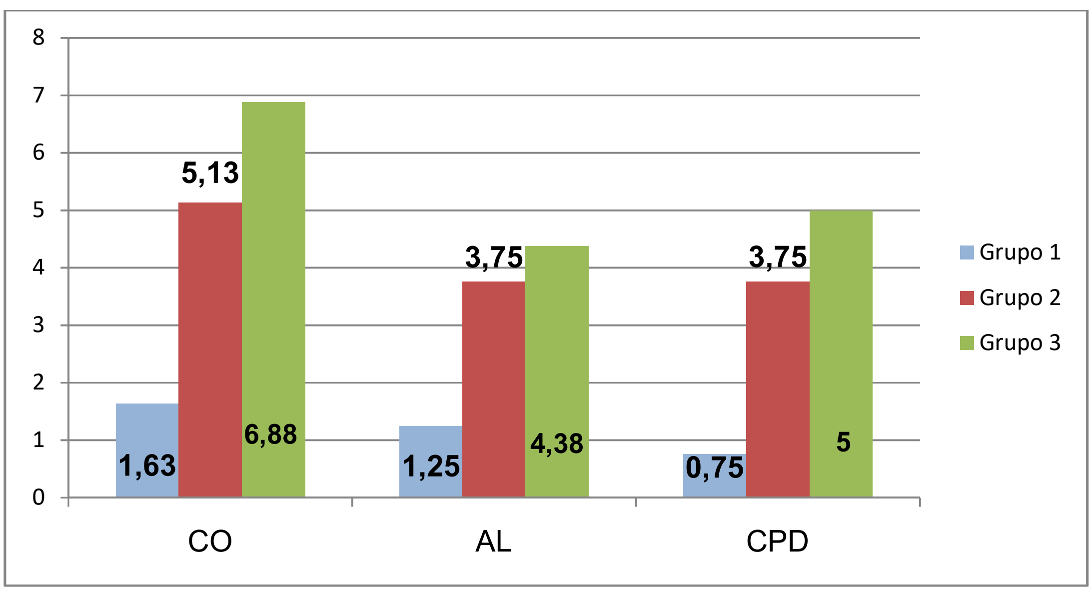
Fonte: Dados da pesquisa.

Dessa maneira, os problemas de *correlação* foram significativamente mais fáceis do que os problemas de *aleatoriedade* e de *comparação de probabilidades diferentes.* É importante destacar que, mesmo que os desempenhos médios referentes aos problemas de *aleatoriedade* (AL)e de *comparação de probabilidades diferentes* (CPD) sejam muito semelhantes (e estatisticamente não haja diferença significativa), foi possível perceber que os participantes do estudo apresentaram mais dificuldades com os problemas de CPD. Tal afirmação está pautada no percentual de erros em cada tipo de problema probabilístico proposto, sendo, aproximadamente: 33,3% nos problemas de *correlação*, 36,5% nos problemas de *aleatoriedade* e 56,3% nos problemas de *comparação de probabilidades diferentes.*

A diferença de desempenho entre tais situações probabilísticas reforça que os diferentes *invariantes* de *situações* propostas não são igualmente compreendidos pelos estudantes, conforme apontado por Vergnaud (1986; 1996). Tal resultado se deve, também, às dificuldades apresentadas pelos participantes do estudo em justificar corretamente as resoluções dadas aos problemas de *aleatoriedade* e de *comparação de probabilidades diferentes*, o que acabou levando ao baixo desempenho médio referente a esses tipos de problema, visto que a pontuação atribuída aos problemas probabilísticos (com exceção dos de *espaço amostral*) levou em consideração as justificativas às respostas dadas em cada problema. Discussões acerca das dificuldades apresentadas pelos participantes do estudo ao resolver tais tipos de problemas probabilísticos serão aprofundadas na próxima seção deste capítulo.

Dados os objetivos do presente estudo, é imprescindível observar, também, como as variáveis grupo e teste (referentes ao nível de escolarização dos participantes e à ordem de apresentação dos problemas combinatórios e probabilísticos propostos, respectivamente) atuaram no desempenho médio apresentado nos problemas de *correlação*, *aleatoriedade* e *comparação de probabilidades diferentes* (Gráfico 11).

Gráfico 11: Desempenho médio nos problemas de correlação, aleatoriedade e comparação de probabilidades diferentes (por grupo).



CO: somatório dos problemas de *correlação*; AL: somatório dos problemas de *aleatoriedade*;
CPD: somatório dos problemas de *comparação de probabilidades diferentes;*
Grupo 1: Estudantes do Módulo II; Grupo 2: Estudantes do Módulo IV;
Grupo 3: Estudantes da EJA Médio 3.

Fonte: Dados da pesquisa.

O Gráfico 11 evidencia uma grande diferença de desempenho entre os grupos de participantes considerados na presente pesquisa. Os estudantes do Módulo II da EJA (Grupo 1) apresentaram um desempenho médio muito inferior aos dos Grupos 2 e 3, nos três tipos de problema. As diferenças de desempenho entre os dois últimos grupos (2 e 3), no entanto, são menos expressivas em todos os casos.

Foram realizados testes estatísticos (ANOVA) para comparar os desempenhos apresentados acima. Para os problemas de *correlação,* constatou-se diferença significativa em função da escolarização, com $F(2,21) = 15,077$; $p < 0,001$. Tal significância deve-se ao desempenho médio do Grupo 1 quando comparado com os Grupos 2 e 3, mas não entre os dois últimos. Conforme o post hoc Tukey, tem-se: Grupo 1 x Grupo 2 → $p = 0,005$; Grupo 1 x Grupo 3 → $p < 0,001$ e Grupo 2 x Grupo 3 → $p = 0,195$.

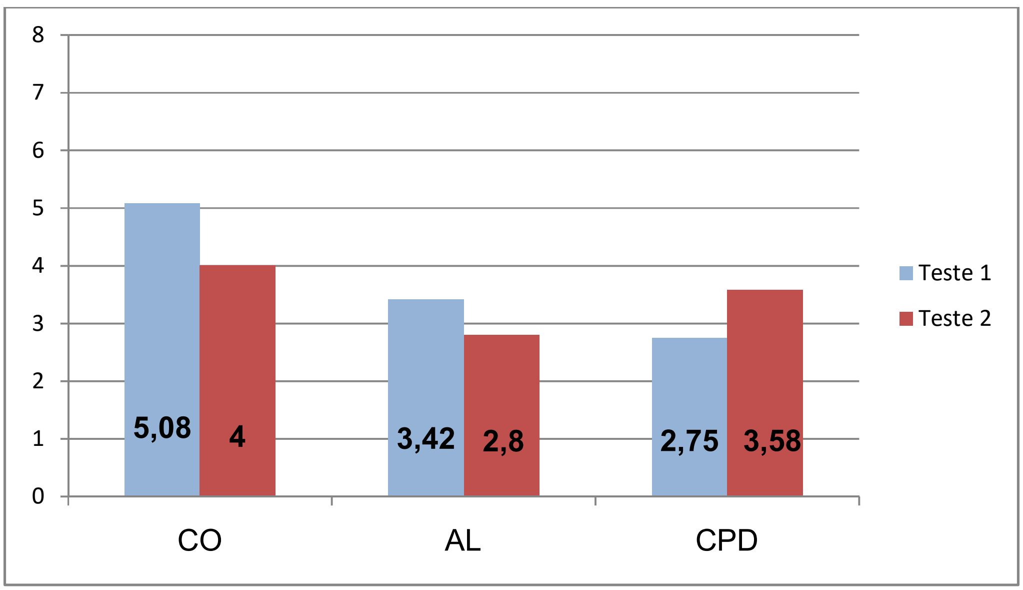
Também foram constatadas diferenças significativas de desempenho a depender do nível de escolaridade quanto aos problemas de *aleatoriedade*: $F(2,21) = 7,306$; $p = 0,004$. Essa diferença foi significativa ao se comparar o Grupo 1 aos demais, tem-se (pelo post hoc Tukey): Grupo 1 x Grupo 2 → $p = 0,023$; Grupo 1 x Grupo 3 → $p = 0,004$ e Grupo 2 x Grupo 3 → $p = 0,753$.

Por fim, ao tratar-se dos problemas de *comparação de probabilidades diferentes* houve influência significativa da escolarização no desempenho apresentado apenas ao se comparar o desempenho dos estudantes do Módulo II com o dos estudantes da EJA Médio 3: ($F(2,21) = 5,041$; $p = 0,016$): Grupo 1 x Grupo 2 → $p = 0,098$; Grupo 1 x Grupo 3 → $p = 0,015$ e Grupo 2 x Grupo 3 → $p = 0,641$. Nesse tipo de problema, em especial, o desempenho entre grupos próximos não foi significativamente diferente – havendo avanço significativo de desempenho apenas ao se comparar os extremos: estudantes em início de escolarização (Grupo 1) e estudantes concluindo a Educação Básica (Grupo 3).

Os resultados discutidos acima apontam para a importância da escolarização formal para o desenvolvimento do raciocínio probabilístico. Os melhores desempenhos obtidos pelos estudantes dos módulos equivalentes ao fim dos Anos Finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio demonstram um melhor entendimento de situações aleatórias, bem como maior embasamento para justificar adequadamente as respostas dadas aos problemas propostos. Contudo, eram esperadas diferenças significativas de desempenho entre os Grupos 2 e 3, visto que a instrução escolar específica (mais fortemente presente em orientações curriculares voltadas para o Ensino Médio – tanto na EJA quanto no ensino regular) poderia levar os estudantes da EJA Médio 3 a terem um desempenho ainda maior.

No Gráfico 12 os desempenhosdos participantes na resolução dos problemas de *correlação*, *aleatoriedade* e *comparação de probabilidades diferentes* são apresentados em função de outra variável do presente estudo: o tipo de teste.

Gráfico 12: Desempenho médio nos problemas de correlação, aleatoriedade e comparação de probabilidades diferentes (por tipo de teste).



CO: somatório dos problemas de *correlação*; AL: somatório dos problemas de *aleatoriedade*; CPD: somatório dos problemas de *comparação de probabilidades diferentes;*
Teste 1: Problemas combinatórios revisitados sob o olhar da Probabilidade;
Teste 2: Problemas probabilísticos revisitados sob o olhar da Combinatória.

Fonte: Dados da pesquisa.

O tipo de teste, isto é, a ordem de apresentação dos problemas combinatórios e probabilísticos, não exerceu influência estatisticamente significativa no desempenho apresentado pelos participantes do estudo ao resolverem os problemas de *correlação, aleatoriedade* e *comparação de probabilidades diferentes*, conforme testes t de amostras independentes: CO → $t(22) = 0{,}910$; $p = 0{,}372$; AL → $t(22) = 0{,}655$; $p = 0{,}519$ e CPD → $t(22) = -0{,}630$; $p = 0{,}535$[5].

Esse resultado reforça que a ordem de trabalho de problemas combinatórios e probabilísticos não teve influência significativa no desempenho dos participantes do presente estudo – o que pode indicar que, no ensino, conceitos referentes à Combinatória e à Probabilidade podem ser trabalhados simultaneamente, explorando-se os *invariantes* referentes às distintas *situações* combinatórias e as diferentes exigências cognitivas relativas ao entendimento da Probabilidade. No entanto, análises qualitativas apresentadas adiante permitem levantar maiores reflexões acerca da influência do tipo de teste nos raciocínios combinatório e probabilístico dos participantes do estudo.

Na Seção 5.4 são apresentadas análises referentes às diferentes *representações simbólicas* e estratégias utilizadas pelos participantes do estudo na resolução dos problemas propostos. Além disso, as principais dificuldades apresentadas por esses estudantes ao resolver os problemas propostos são exemplificadas e discutidas, a fim de elucidar possíveis defasagens nos conhecimentos combinatórios e probabilísticos evidenciadas em suas resoluções, bem como limitações das *representações simbólicas* e estratégias utilizadas.

5.4 UM OLHAR PARA AS REPRESENTAÇÕES SIMBÓLICAS E ESTRATÉGIAS

A presente seção de análises é dedicada à observação qualitativa do desempenho dos participantes do estudo frente à resolução dos problemas propostos. Objetivou-se, portanto, analisar como os diferentes grupos de participantes resolveram esses problemas, quais foram as *representações simbólicas* e estratégias mais utilizadas – que exercem um papel muito importante na compreensão e resolução dos problemas, podendo afetar positiva ou negativamente os desempenhos dos estudantes – e quais dificuldades foram evidenciadas a partir dessas resoluções. Além disso, buscou-se observar como a

---

[5] A ANOVA a dois fatores indicou, ainda, que a interação entre as variáveis grupo e teste não influenciou significativamente o desempenho nas situações probabilísticas de *correlação*, de *aleatoriedade* e de *comparação de probabilidades diferentes* propostas. Tem-se: CO → $F(2, 23) = 0{,}571$; $p = 0{,}575$; AL → $F(2, 23) = 0{,}163$; $p = 0{,}851$ e CPD → $F(2, 23) = 0{,}512$; $p = 0{,}608$.

escolarização formal e o tipo de teste proposto influenciaram o comportamento desses estudantes da EJA.

No que se refere aos problemas combinatórios propostos, é interessante analisar se e como a ordem de apresentação dos problemas, nos dois tipos de teste, influenciou a escolha das *representações simbólicas* e estratégias utilizadas pelos estudantes dos diferentes grupos investigados. Isso é, se o fato de tais problemas serem resolvidos antes ou depois da solicitação da construção de seus respectivos *espaços amostrais* influenciou essa escolha.

5.4.1 Resolvendo Problemas Combinatórios: Teste 1

Na Tabela 1 são indicados os percentuais referentes às diferentes *representações simbólicas/*estratégias utilizadas pelos participantes do estudo que resolveram o Teste 1 (Combinatória → Probabilidade), ou seja, que resolveram os problemas combinatórios de *produto cartesiano*, *combinação, permutação* e *arranjo* antes de terem contato com os respectivos problemas probabilísticos que solicitavam a explicitação dos *espaços amostrais* de tais problemas por meio da listagem.

As categorias apresentadas na Tabela 1 foram organizadas *a posteriori*, isto é, foram construídas a partir da análise das resoluções apresentadas pelos participantes do estudo. Foi considerado o uso de *enumeração oral* quando os participantes indicaram/listaram oralmente diferentes possibilidades referentes aos problemas combinatórios propostos. Dessa maneira, o registro escrito dos participantes que utilizaram tal *representação*/estratégia apresentou apenas a resposta final obtida (o número de possibilidades encontrado). Por sua vez, o uso de *listagem escrita* consistiu na indicação, por escrito, de todas as possibilidades consideradas durante a resolução dos problemas combinatórios propostos. Tal listagem foi, por vezes, composta pela escrita completa dos nomes de elementos/cores/pessoas presentes nos enunciados dos problemas – o que foi considerada uma *listagem escrita extensiva* – e, em outros casos, houve abreviações ou uso de iniciais em tal registro escrito – consistindo no uso de *listagem escrita reduzida*.

Por vezes, os participantes do presente estudo não chegaram a explicitar (oralmente ou por escrito) as possibilidades consideradas, seja por que utilizaram alguns cálculos numéricos para determinar o número de possibilidades em questão – *adição* e *multiplicação* (operação adequada em alguns casos e em outros não) – ou por terem feito *uso de valor do enunciado* para dar suas respostas, o que evidencia uma incompreensão dos *invariantes de escolha* que determinam como as possibilidades referentes a cada *situação* combinatória podem ser construídas.

Tabela 1: Representações simbólicas/estratégias utilizadas nos problemas combinatórios (Teste 1).

	PRODUTO CARTESIANO	**COMBINAÇÃO**	**PERMUTAÇÃO**	**ARRANJO**
Enumeração Oral	75%	75%	66,7%	83,3%
Listagem Escrita Extensiva	-x-	8,3%	8,3%	8,3%
Listagem Escrita Reduzida	-x-	-x-	8,3%	-x-
Uso de Valor do Enunciado	-x-	-x-	8,3%	-x-
Adição	8,3%	-x-	-x-	-x-
Multiplicação Inadequada	-x-	16,7%	8,3%	8,3%
Multiplicação Adequada	16,7%	-x-	-x-	-x-

Fonte: Dados da pesquisa.

Ao resolveremos problemas combinatórios propostos no Teste 1, os participantes do estudo tenderam a usar, majoritariamente a *enumeração oral* para indicar as possibilidades relativas às situações trabalhadas. Tal *representação simbólica*/estratégia foi utilizada em mais de 60% dos casos em todos os problemas, chegando ao percentual de 83,3% no problema de *arranjo*.

Os dados apresentados na Tabela 1 evidenciam uma resistência de parte dos estudantes da EJA, participantes da presente pesquisa, em construir registros escritos espontaneamente durante a resolução de problemas combinatórios. A maioria dos estudantes dos três grupos preferiu, assim, indicar oralmente as possibilidades referentes aos problemas propostos e, posteriormente, registrar apenas o número total de possibilidades encontradas. Os demais estudantes, que utilizaram *representações* por escrito ao resolver tais problemas, fizeram uso, principalmente, de *listagens*. Uma menor quantidade de participantes utilizou operações como a *adição* e a *multiplicação*. Reações como a de P1, que ao ouvir a leitura do primeiro problema (*produto cartesiano*) indagou "é pra fazer conta?", foram recorrentes.

A resistência ao registro escrito pode ser atribuída também à crença de que, por os problemas propostos se tratarem de problemas matemáticos, cálculos numéricos seriam necessários para resolvê-los. Destaca-se que os estudantes da EJA que participaram do estudo de Lima (2010) apresentaram resistência em resolver os problemas combinatórios propostos a partir do uso de estratégias informais como a enumeração oral e a listagem escrita. A resistência, nesse caso, se deu em função da dificuldade em considerar que tais problemas seriam problemas matemáticos e em associar as situações propostas a operações numéricas, o que revela o forte pensamento de que todo problema matemático deve ser resolvido a partir do uso de contas.

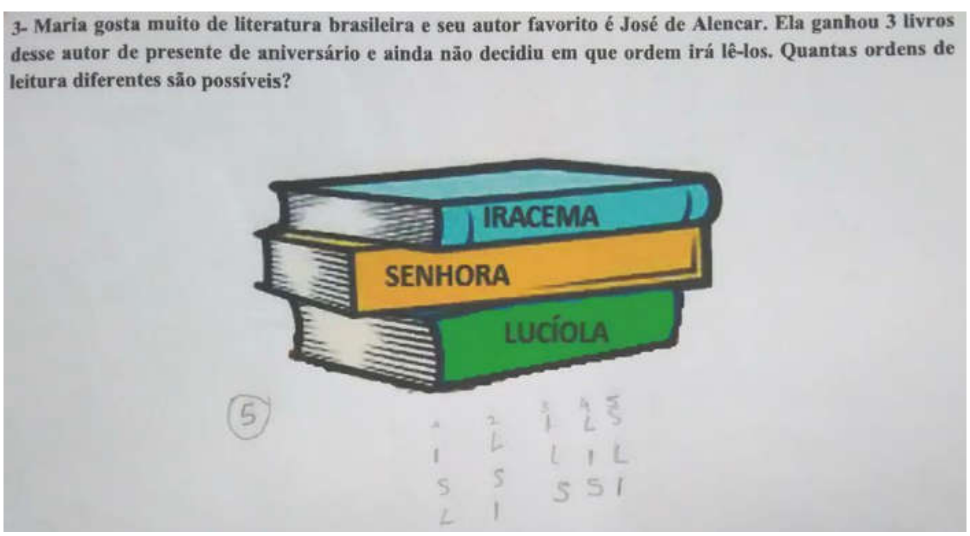
Dada essa crença, no presente estudo, os participantes que não estavam seguros ou não estavam aptos a realizar tais cálculos buscaram se certificar de que outras *representações simbólicas* e estratégias poderiam ser utilizadas durante a resolução do teste proposto, optando, na maioria das vezes, pelo uso da *representação* oral, enumerando as possibilidades consideradas.

Ainda que os problemas propostos tivessem um resultado com ordem de grandeza pequena (menor ou igual a 12), a falta de registro escrito dificultou o controle das possibilidades já consideradas, podendo levar à repetição e/ou não levantamento de todas as possibilidades. Destaca-se, dessa forma, que a revisitação sob o olhar da Probabilidade a tais problemas proposta no Teste 1, a partir da solicitação do uso da *listagem escrita* para explicitação dessas possibilidades (construção de *espaço amostral*) – *representação simbólica* que raramente surgiu de maneira espontânea –, consistiu em um importante momento para o refinamento das respostas dadas de início. É importante ressaltar que os estudantes do Grupo 1 apresentaram dificuldades em registrar por escrito as possibilidades consideradas ao explicitarem os *espaços amostrais* em questão. Dessa forma, a maioria dos participantes desse grupo não conseguiu utilizar a *listagem escrita*, tendo sido permitido que os mesmos utilizassem a *enumeração oral*.

Alguns estudantes, após o contato com os primeiros problemas de *espaço amostral*, passaram a utilizar essa *representação simbólica* escrita, por meio do uso de listagem, de maneira espontânea, para resolver os outros problemas combinatórios. Esses casos foram observados com estudantes dos Grupos 2 e 3, tendo um estudante desse último grupo chegado, inclusive, a usar uma *listagem reduzida*, como pode ser observado na Figura 10.

O participante P17 utilizou a *listagem escrita*, mesmo sem solicitação, para indicar as ordens de leitura possíveis referentes ao problema de *permutação*. P17 fez uso das iniciais do nome de cada livro para representá-los nos casos listados, indicando cinco ordens de leitura distintas (de seis possíveis).

Figura 10: Problema de permutação (Teste 1), resolvido por P17 (Estudante da EJA Médio 3). Listagem reduzida.



Fonte: Dados da pesquisa.

É importante notar, ainda, que o caráter multiplicativo inerente aos problemas combinatórios foi poucas vezes percebido pelos participantes do estudo. Assim, a *multiplicação escrita* foi uma *representação simbólica*/estratégia pouco utilizada na resolução das diferentes *situações* propostas. Além disso, um dos estudantes do Grupo 1 (P3) fez uso de *adição* e de *valores presentes no enunciado* ao resolver os problemas de *produto cartesiano* e de *permutação* (Figuras 11 e 12; Transcrições 1 e 2), evidenciando uma defasagem na compreensão desses problemas.

Figura 11: Problema de produto cartesiano (Teste 1), resolvido por P3 (Estudante do Módulo II). Adição.

Fonte: Dados da pesquisa.

Transcrição 1: Problema de *produto cartesiano* (Teste 1), resolvido por P3 (Estudante do Módulo II). Adição.

Pesq.: "O senhor escreveu que Carlos pode formar seis conjuntos de uniforme diferentes. Como o senhor resolveu?"

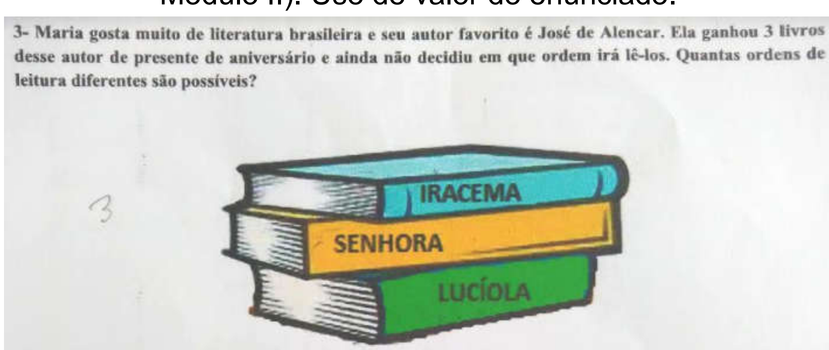
P3: "[...] ele recebeu quatro camisetas e duas calças, 'né'? [...] ele pode formar seis conjuntos."

Pesq.: "Por quê?"

P3: "Cada camiseta dessa é uma farda [...] e cada calça é uma farda, 'né'? Eu pensei assim: quatro e dois dá seis."

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 12: Problema de permutação (Teste 1), resolvido por P3 (Estudante do Módulo II). Uso de valor do enunciado.



Fonte: Dados da pesquisa.

Transcrição 2: Problema de *permutação* (Teste 1), resolvido por P3 (Estudante do Módulo II). Uso de valor do enunciado.

P3: "Eu acho que é de três formas, por que ela ganhou três livros, aí cada livro é uma forma, 'né'?"

Pesq.: "[...] Como o senhor leria? Em qual ordem?"

[...]

Pesq.: "O senhor me falou Iracema, Senhora e Lucíola, essa é uma forma?"

P3: "Três formas."

Fonte: Dados da pesquisa.

As transcrições anteriores evidenciam uma incompreensão de P3 referente aos *invariantes de escolha* dos problemas combinatórios de *produto cartesiano* e de *permutação*. O estudante confundiu, dessa forma, elementos com possibilidades. No problema de *produto cartesiano* somou os elementos dos dois conjuntos (camisetas e calças), chegando ao total de 6 elementos e considerando esse o número de conjuntos distintos que podem ser formados na situação em questão. Já ao resolver o problema de *permutação*, o mesmo estudante usou o valor presente no enunciado (número de livros), apontando este número de elementos como o número total de possibilidades (nesse caso, ordens de leitura).

Por outro lado, quando os participantes fizeram uso de multiplicações evidenciaram a percepção do caráter multiplicativo dos problemas combinatórios. Entretanto, essa estratégia, quando usada de maneira direta levou ao resultado correto apenas nos problemas de *produto cartesiano* (Figura 13). Em particular, nesse tipo de problema, ao se multiplicar os valores presentes no enunciado obtêm-se o número total de possibilidades, pois cada elemento do primeiro conjunto pode ser combinado com todos os elementos do segundo conjunto. No problema proposto no presente estudo tem-se: 4 (camisetas) x 2 (calças), resultando em 8 conjuntos.

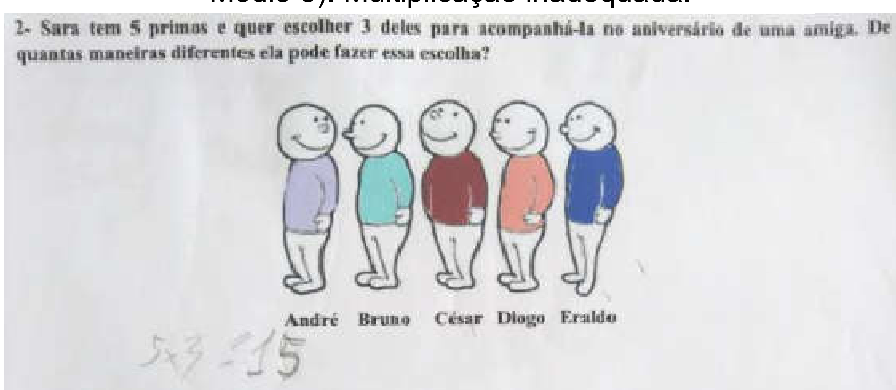
Ao utilizarem a *multiplicação* para resolver os problemas de *combinação*, *permutação* e *arranjo*, os participantes, generalizando a estratégia exitosa no problema de *produto cartesiano*, utilizaram valores presentes nos enunciados, chegando, portanto, a soluções incorretas (como pode ser observado na Figura 14).

O estudante da EJA Médio 3 (P19) fez uso espontâneo da *multiplicação* para resolver alguns dos problemas combinatórios propostos na pesquisa. Contudo, tal estratégia levou ao acerto no primeiro caso (Figura 13), mas o mesmo não aconteceu no problema de *combinação* (Figura 14).

Figura13: Problema de produto cartesiano (Teste 1), resolvido por P19 (Estudante da EJA Médio 3). Multiplicação adequada.

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 14: Problema de combinação (Teste 1), resolvido por P19 (Estudante da EJA Médio 3). Multiplicação inadequada.



Fonte: Dados da pesquisa.

O segundo problema (Figura 14) tem como resultado 10 trios distintos e, assim, ao considerar o resultado obtido pela multiplicação do número de primos (5) pelo número de escolhas (3), P19 considerou trios repetidos em sua contagem, esse erro poderia ser percebido por meio do uso de outras *representações simbólicas*/estratégias (como a *listagem escrita*, por exemplo).

5.4.2 Resolvendo Problemas Combinatórios: Teste 2

É importante reforçar que, no geral, o tipo de teste, isto é, a ordem de apresentação dos problemas combinatórios e probabilísticos, não influenciou, quantitativamente, o desempenho dos participantes do estudo. Contudo, tal ordem de apresentação teve influência na escolha das *representações simbólicas* utilizadas pelos participantes para resolução dos problemas combinatórios de *produto cartesiano, combinação, permutação* e *arranjo.*

Os dados apresentados na Tabela 2 põem em evidência a natureza das revisitações realizadas pelos estudantes da EJA que resolveram o Teste 2, teste no qual os blocos de problemas probabilísticos relativos a cada tipo de *situação* combinatória foram apresentados inicialmente e, posteriormente, os problemas de *produto cartesiano*, *combinação, permutação* e *arranjo*. Isto significa que o primeiro contato com as *situações* combinatórias abordadas se deu por meio da construção de seus respectivos *espaços amostrais*, ou seja, a primeira solução dada a esses problemas se deu com a solicitação do uso de uma *representação simbólica/*estratégia pré-determinada: a *listagem escrita*. Posteriormente, esses estudantes resolveram os problemas combinatórios, sem que houvesse restrição acerca da *representação simbólica* ou estratégia a ser utilizada.

Nas condições presentes no Teste 2, a *enumeração oral* (assim como o ocorrido no Teste 1) apareceu significativamente como uma *representação simbólica*/estratégia utilizada espontaneamente, tendo como desvantagem o fato de dificultar o esgotamento de possibilidades e análise dos *invariantes* considerados, pois não cria registro escrito que possa ser acompanhado ao longo da resolução do problema. Contudo, por se tratar, nesse caso, de uma revisitação ao problema de *espaço amostral* (no qual uma listagem já havia sido construída), essa *enumeração oral* tendeu a apontar as mesmas possibilidades listadas anteriormente, não levando, portanto, à descoberta de novas possibilidades.

Por outro lado, um dado particular do Teste 2 diz respeito à não revisitação aos problemas, mais frequente no que se refere às *situações* combinatórias nas quais os participantes tiveram mais dificuldades. Por já terem usado a listagem inicialmente ao resolver os problemas de *espaço amostral,* os participantes tenderam a apresentar resistência ao uso de outras representações (até mesmo a *enumeração oral*) para conferir a primeira resposta. Dessa maneira, vários participantes repetiram a resposta dada de início, perdendo a chance de reavaliar os *invariantes* das diferentes *situações* combinatórias para refinar as suas resoluções. Tal resultado alerta para um ponto negativo do Teste 2, a ser aprofundado na próxima seção desse capítulo, na qual as relações entre os raciocínios combinatório e probabilístico evidenciadas no estudo serão discutidas.

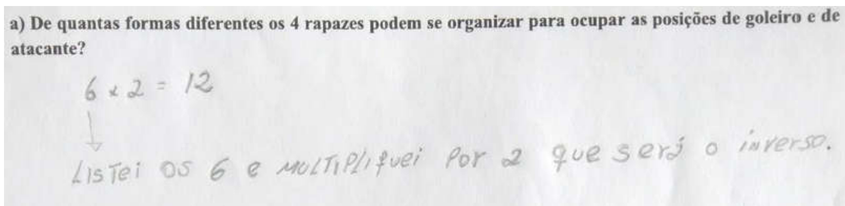
Tabela 2: Representações simbólicas/estratégias utilizadas nos problemas combinatórios (Teste 2).

	PRODUTO CARTESIANO	COMBINAÇÃO	PERMUTAÇÃO	ARRANJO
Não Revisitou	25%	58,3%	41,7%	58,3%
Revisitação com Enumeração Oral	41,7%	25%	33,3%	25%
Revisitação com Listagem Extensiva	-x-	-x-	8,3%	-x-
Revisitação com Generalização de Listagem	-x-	-x-	-x-	8,3%
Revisitação com Uso de Valor do Enunciado	-x-	-x-	8,3%	-x-
Revisitação com Adição	16,7%	-x-	-x-	-x-
Revisitação com Multiplicação Inadequada	-x-	16,7%	8,3%	8,3%
Revisitação com Multiplicação Adequada	16,7%	-x-	-x-	-x-

Fonte: Dados da pesquisa.

A *listagem escrita* se manteve uma *representação simbólica* que tendeu a não aparecer quando não houve solicitação explícita. Assim, no Teste 2, os estudantes que já haviam utilizado tal estratégia tenderam a não refazer o registro das possibilidades consideradas. Destaca-se, nesse sentido, a resolução de um estudante do Grupo 2 (Figura 15), que, ao revisitar o problema de *espaço amostral* de *arranjo*, não refez toda a listagem, mas a generalizou, chegando a esgotar as possibilidades à medida em que passou a considerar que cada dupla de rapazes indicada anteriormente poderia ser invertida para formar novos casos (nesse tipo de problema a mudança de ordem dos elementos determina possibilidades distintas).

Figura 15: Problema de arranjo (Teste 2), resolvido por P12 (Estudante do Módulo IV). Generalização de listagem.


a) De quantas formas diferentes os 4 rapazes podem se organizar para ocupar as posições de goleiro e de atacante?

$6 \times 2 = 12$

Listei os 6 e multipliquei por 2 que será o inverso.

Fonte: Dados da pesquisa.

A *multiplicação* também foi pouco utilizada pelos participantes que resolveram o Teste 2, novamente levando a respostas exitosas apenas ao se tratar do problema de *produto cartesiano*.

5.4.3 Construindo Espaços Amostrais

Ainda que os problemas de *espaço amostral* solicitassem o registro de possibilidades por meio da listagem escrita, determinando, portanto, a estratégia e a *representação simbólica* a serem utilizadas, é importante destacar que surgiu uma variedade de construções por parte dos estudantes participantes do estudo ao resolverem tais problemas. Os percentuais referentes aos tipos de listagem utilizados pelos participantes ao resolverem os problemas de *espaço amostral* podem ser conferidos na Tabela 3.

Ressalta-se que a maior parte dos participantes do Grupo 1 (Estudantes do Módulo II) não foi capaz de produzir listagens nos problemas de *espaço amostral,* em função de grande dificuldade com a escrita. Por esse motivo, foi permitido que os estudantes desse grupo, em específico, indicassem oralmente as possibilidades consideradas referentes a cada um dos problemas propostos – dessa maneira, os percentuais apresentados na primeira linha da Tabela 3 são compostos exclusivamente por estudantes desse grupo.

Tabela 3: Estratégias utilizadas nos problemas de espaço amostral.

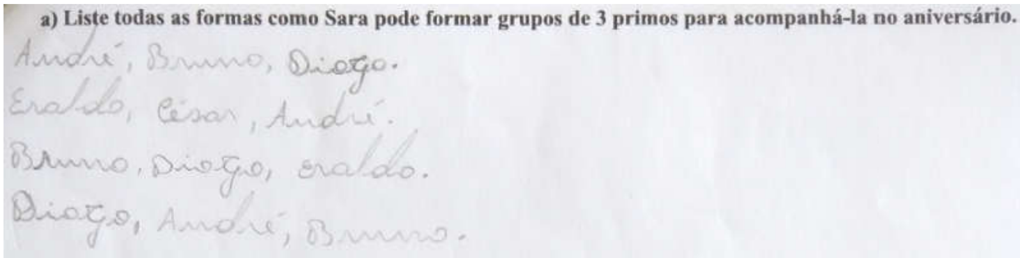
	EAPC	**EAC**	**EAP**	**EAA**
Enumeração Oral	20,8%	25%	25%	25%
Listagem Extensiva Não Sistemática	58,3%	66,7%	62,5%	41,7%
Listagem Extensiva Sistemática	16,7%	-x-	-x-	16,7%
Listagem Reduzida Não Sistemática	-x-	4,2%	8,3%	4,2%
Listagem Reduzida Sistemática	4,2%	4,2%	4,2%	8,3%
Generalização de Listagem	-x-	-x-	-x-	4,2%

EAPC: *espaço amostral* de *produto cartesiano*; EAC: *espaço amostral* de *combinação*;
EAP: *espaço amostral* de *permutação*; EAA: *espaço amostral* de *arranjo.*

Fonte: Dados da pesquisa.

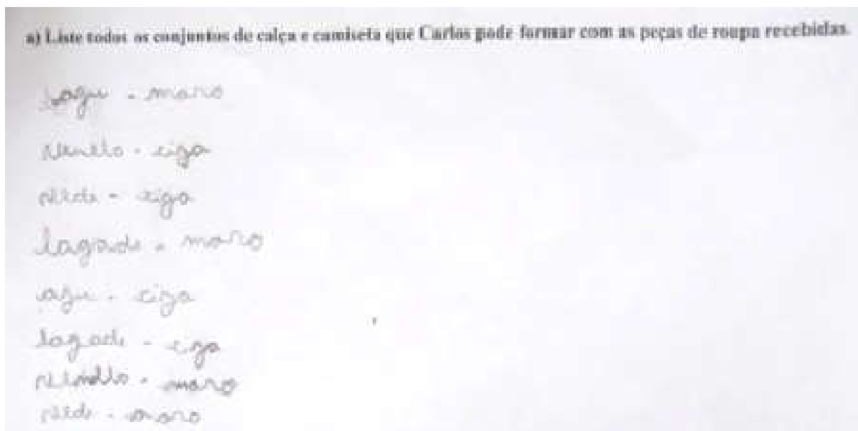
No que diz respeito aos casos em que registros escritos foram produzidos, destaca-se o uso de *listagens extensivas não sistemáticas*, isto é, o uso dos nomes dos elementos, por completo, para representar cada possibilidade encontrada, sem sistematização dos casos. O uso de tal estratégia levou ao êxito quando o número de possibilidades era menor (como no caso da Figura 17 – 8 possibilidades). Já na Figura 16, onde o número de possibilidades era um pouco maior (10) e o problema mais complexo (*combinação*), a não sistematização dificultou a indicação das diferentes possibilidades e o participante P15 não conseguiu chegar ao esgotamento das mesmas.

Figura 16: Problema de espaço amostral de combinação, resolvido por P15 (Estudante do Módulo IV). Listagem extensiva não sistemática.



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 17: Problema de espaço amostral de produto cartesiano, resolvido por P1 (Estudante do Módulo II). Listagem extensiva não sistemática.

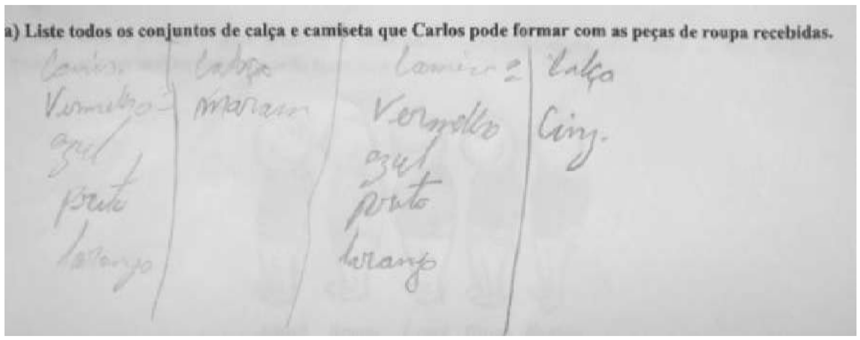


Fonte: Dados da pesquisa.

A falta de sistematização nas listagens produzidas foi uma das principais dificuldades no presente estudo, junto a incompreensões dos *invariantes* das *situações* combinatórias, para se chegar ao acerto total nos problemas propostos. Esse achado corrobora com o apontado anteriormnte por Navarro-Pelayo, Batanero e Godino (1996), que citam o erro de listagem não sistemática – bem como o de ordem, que consiste na incompreensão dos *invariantes* de *ordem* – como um dos mais frequentes na resolução de problemas combinatórios. Em função dessa dificuldade é importante que uma *representação simbólica* como a listagem seja aprimorada, visando-se o aperfeiçoamento das resoluções obtidas a partir de seu uso. A sistematização, o uso de representações reduzidas (a partir do uso de iniciais, por exemplo) e a generalização são maneiras promissoras de diminuir o tempo gasto com a listagem e organizar os casos já listados para facilitar o esgotamento das possibilidades.

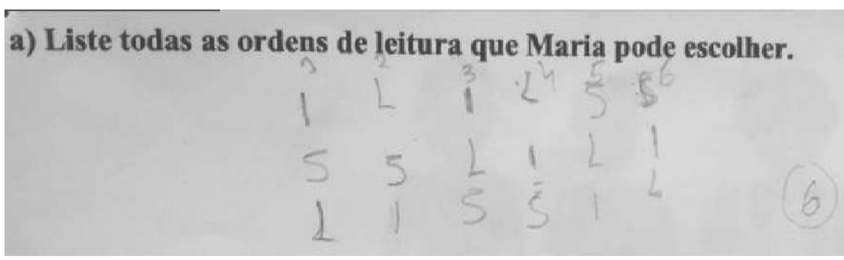
Listagens sistemáticas, *reduzidas* e *generalizações* foram, algumas vezes, utilizadas por estudantes dos Grupos 2 e 3. Alguns desses casos são exemplificados a seguir (Figuras 18, 19 e 20).

Figura 18: Problema de espaço amostral de produto cartesiano, resolvido por P19 (Estudante da EJA Médio 3). Listagem extensiva sistemática.



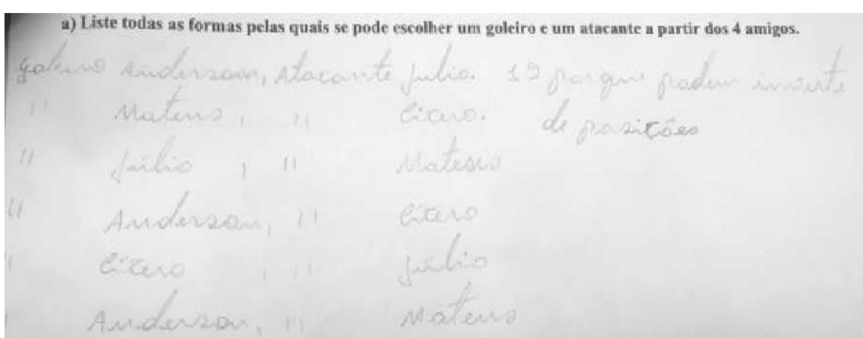
Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 19: Problema de espaço amostral de permutação, resolvido por P17 (Estudante da EJA Médio 3). Listagem reduzida.



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 20: Problema de espaço amostral de arranjo, resolvido por P15 (Estudante do Módulo IV). Generalização de listagem.



Fonte: Dados da pesquisa.

Estratégias como essas – *listagens sistemáticas*, *reduzidas* e *generalizações* – facilitaram o esgotamento de possibilidades dos problemas propostos, diminuindo o tempo necessário para essa listagem e facilitando a visualização dos casos já indicados. Levaram, dessa forma, os estudantes dos Grupos 2 e 3 a terem êxito na resolução dos problemas em questão, obtendo assim um desempenho superior ao do Grupo 1.

5.4.4 Resolvendo Problemas de Correlação, Aleatoriedade e de Comparação de Probabilidades Diferentes

No que diz respeito aos demais problemas probabilísticos, foram consideradas, para a análise das respostas dos participantes, as categorias de erro e acerto com e sem justificativa adequada. Os percentuais de cada uma dessas categorias referentes a tais grupos de problemas são apresentados na Tabela 4.

Tabela 4: Desempenho nos problemas probabilísticos (correlação, aleatoriedade e comparação de probabilidades).

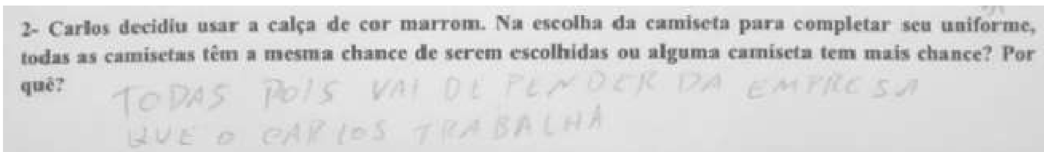
	CORRELAÇÃO	**ALEATORIEDADE**	**COMPARAÇÃO DE PROBABILIDADES**
Erro	33,33%	36,48%	56,25%
Acerto com Justificativa Inadequada / Ausente	19,78%	48,98%	8,35%
Acerto com Justificativa Adequada	46,88%	14,6%	35,4%

Fonte: Dados da pesquisa.

Os erros apresentados pelos participantes do estudo referentes aos problemas de *correlação*, *aleatoriedade* e *comparação de probabilidades diferentes* foram numerosos. Destaca-se que os participantes apresentaram maiores dificuldades nos problemas de *comparação de probabilidades diferentes* (mais de 50% de erros). Por outro lado, os percentuais de erros referentes aos problemas de *correlação* e de *aleatoriedade* foram semelhantes. No entanto, o grande percentual de justificativas inadequadas nos problemas desse segundo tipo evidencia a compreensão superficial dos problemas que abordaram a exigência cognitiva da Probabilidade referente à *aleatoriedade*.

Mesmo quando os participantes acertaram tais problemas houve ainda uma grande porcentagem de justificativas que evidenciaram uma incompreensão dos problemas. Logo, é importante que acertos embasados adequadamente em conhecimentos matemáticos sejam diferenciados daqueles embasados em intuições e/ou concepções errôneas. A título de exemplificação, são apresentadas a seguir resoluções com justificativas adequadas e inadequadas.

Figura 21: Problema de correlação de produto cartesiano, resolvido por P22 (Estudante da EJA Médio 3). Acerto com justificativa adequada.



2- Carlos decidiu usar a calça de cor marrom. Na escolha da camiseta para completar seu uniforme, todas as camisetas têm a mesma chance de serem escolhidas ou alguma camiseta tem mais chance? Por quê? TODAS POIS VAI DE PENDER DA EMPRESA QUE O CARLOS TRABALHA

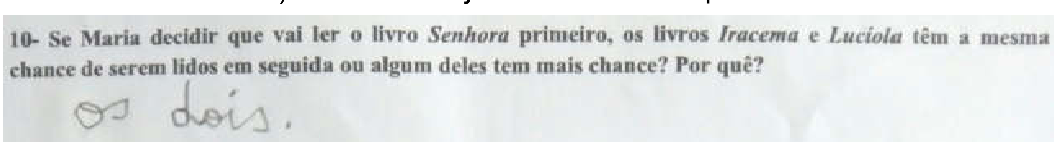
Fonte: Dados da pesquisa.

Transcrição 3: Problema de correlação de produto cartesiano, resolvido por P22 (Estudante da EJA Médio 3). Acerto com justificativa adequada.

> **Pesq.:** "Por que o senhor acha que todas as camisetas vão ter a mesma chance de serem escolhidas?"
>
> **P22:** "[...] o uniforme não tem cor definida, [...] <u>ele pode usar todas</u> *[as camisetas]* com a calça marrom."

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 22: Problema de correlação de permutação, resolvido por P6 (Estudante do Módulo II). Acerto com justificativa inadequada/ausente.



10- Se Maria decidir que vai ler o livro *Senhora* primeiro, os livros *Iracema* e *Lucíola* têm a mesma chance de serem lidos em seguida ou algum deles tem mais chance? Por quê?
os dois.

Fonte: Dados da pesquisa.

Transcrição 4: Problema de correlação de permutação, resolvido por P6 (Estudante da EJA Médio 3). Acerto com justificativa inadequada.

> **Pesq.:** "[...] os dois livros têm a mesma chance de serem lidos depois do livro *Senhora* ou algum tem mais chance?"
>
> **P22:** "[...] os dois... <u>vai depender de qual ela gostar</u> de ler."

Fonte: Dados da pesquisa.

Os casos ilustrados acima evidenciam que, para uma correta interpretação dos problemas de *correlação*, os participantes precisavam perceber que os eventos presentes nas situações propostas eram independentes. Isto é, a justificativa apresentada deveria explicitar a possibilidade de escolhas independentes do primeiro evento (escolha da camiseta independentemente da escolha da calça no problema de *produto cartesiano*; escolha do segundo livro a ser lido independente da escolha do primeiro, no problema de *permutação*).

Na Figura 21 e Transcrição 3 é possível observar que P22, ao resolver o problema de *correlação* de *produto cartesiano* aponta, em sua fala, mesmo que isso não tenha ficado claro no registro escrito, que qualquer camiseta pode ser escolhida por Carlos para formar um uniforme junto à calça marrom. Dessa forma, P22 explicita que a escolha da calça não limita a escolha da cor da camiseta a ser usada. Por outro lado, ao resolver o problema de *correlação* de *permutação* (Figura 22 e Transcrição 4), o participante P6, mesmo tendo afirmado que os dois outros livros poderiam ser lidos após o livro *Senhora*, justifica sua resposta baseado em preferências pessoais: "*vai depender de qual ela gostar*". P6 evidencia, dessa maneira, um domínio inferior do problema, apresentando uma resposta correta, mas com justificativa inadequada.

A natureza dos problemas de *aleatoriedade* propostos nos testes fez com que, por sua vez, as justificativas adequadas a tais problemas devessem indicar, além da percepção do caráter aleatório intrínseco aos mesmos, a equiprobabilidade presente nesses problemas. As Figuras 23 e 24 ilustram justificativas adequadas e inadequadas relativas a esse tipo de problema.

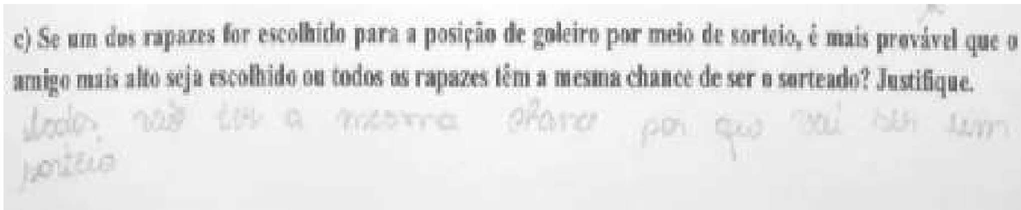
Figura 23: Problema de aleatoriedade de permutação, resolvido por P20 (Estudante da EJA Médio 3). Acerto com justificativa adequada.

11- Maria decidiu jogar um dado para definir qual livro vai ler primeiro. Ela decidiu que se o lançamento tiver como resultado os números 1 ou 2 ela lerá o livro *Lucíola*, se o resultado do dado for 3 ou 4 lerá o livro *Senhora* e se o resultado for 5 ou 6 lerá o livro *Iracema*. Todos os livros têm a mesma chance de ser o primeiro a ser lido ou algum livro tem mais chance de ser sorteado? Justifique.

todos, porque todos tem a mesma quantidade de numeros a ser sorteado.

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 24: Problema de aleatoriedade de arranjo, resolvido por P13 (Estudante do Módulo IV). Acerto com justificativa inadequada.


c) Se um dos rapazes for escolhido para a posição de goleiro por meio de sorteio, é mais provável que o amigo mais alto seja escolhido ou todos os rapazes têm a mesma chance de ser o sorteado? Justifique.

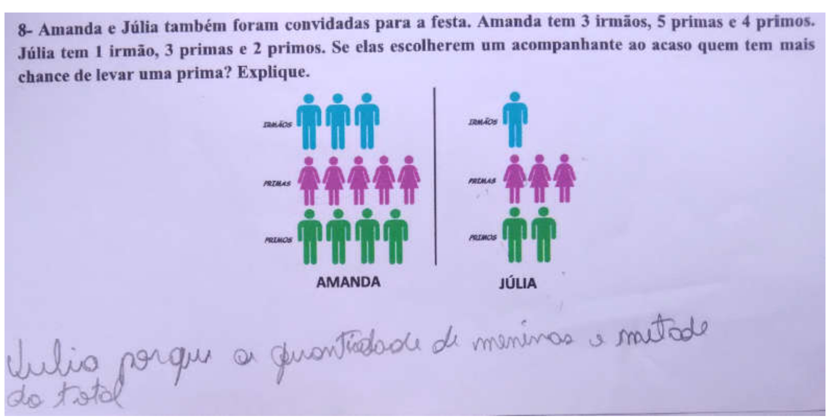
todos não tem a mesma chance por que vai ser um sorteio

Fonte: Dados da pesquisa.

Enquanto P20, em sua resolução do problema de *aleatoriedade de permutação* (Figura 23) chamou a atenção para o fato de que todos os livros teriam a mesma quantidade de números no dado a seu favor e, portanto, a mesma chance de serem sorteados, P13 (Figura 24), mostrou compreensão do caráter aleatório da situação (“*vai ser um sorteio”*), mas não indica percepção da equiprobabilidade da situação. Tal aleatoriedade não é condição suficiente para que todos os rapazes tenham a mesma chance de serem escolhidos para ocupar a posição de goleiro. Dado o posto, justificativas semelhantes foram consideradas inadequadas para esse tipo de problema.

Por fim, no que se refere aos problemas de *comparação de probabilidades diferentes*, para que as justificativas apresentadas fossem adequadas seria necessário que a consideração das proporções referentes aos eventos considerados nos problemas fosse explicitada. Exemplos de uma justificativa adequada e uma inadequada são apresentados, respectivamente, nas Figuras 25 e 26.

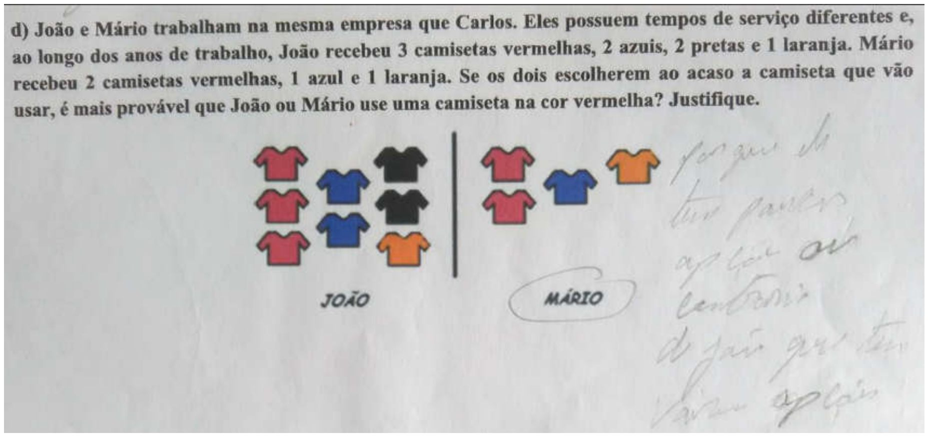
Figura 25: Problema de comparação de probabilidades diferentes de combinação, resolvido por P16 (Estudante do Módulo IV). Acerto com justificativa adequada.


8- Amanda e Júlia também foram convidadas para a festa. Amanda tem 3 irmãos, 5 primas e 4 primos. Júlia tem 1 irmão, 3 primas e 2 primos. Se elas escolherem um acompanhante ao acaso quem tem mais chance de levar uma prima? Explique.

Julia porque a quantidade de meninas é metade do total

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 26: Problema de comparação de probabilidades diferentes de produto cartesiano, resolvido por P19 (Estudante da EJA Médio 3). Acerto com justificativa inadequada.



Fonte: Dados da pesquisa.

O participante P16 (Figura 25) apresenta justificativa baseada na proporção de primas quando comparada aos demais parentes de cada garota. Dessa maneira, aponta que mais da metade dos parentes de Júlia são primas (o mesmo não ocorre com Amanda) e, portanto, ela tem mais chance de escolher uma delas para acompanhá-la à festa.

A justificativa apresentada por P19 (Figura 26), no entanto, não leva em consideração as proporções referentes ao número de camisetas de cada rapaz. P19 acerta o problema ao afirmar que Mário tem mais chance de usar uma camiseta vermelha, mas em sua justificativa fala que isso ocorre por que Mário "*tem poucas opções, ao contrário de João que tem várias*". Tal afirmação mostra que a resposta de P19 foi baseada em uma intuição, ao comparar o número total de camisetas de cada rapaz e não reflete, portanto, o caráter proporcional inerente à comparação de probabilidades de forma consistente, dificuldade também observada em estudos anteriores (BATISTA; FRANCISCO, 2015; SANTOS, 2015; LIMA; SILVA, 2017).

A seguir, as *representações simbólicas* utilizadas pelos participantes da pesquisa na resolução dos diferentes problemas anteriormente discutidos são sistematizadas em função dos grupos de participantes considerados. Busca-se, assim, evidenciar estratégias próprias que surgem em função da escolarização formal.

5.4.5 A Escolarização Formal e as Representações Simbólicas

Na presente seção de análises apresenta-se, por fim, o Quadro 2. O mesmo consiste em uma sistematização da análise das *representações simbólicas*/estratégias mais utilizadas por cada grupo de participantes considerado no presente estudo. O mesmo permite, portanto, observar a influência da escolarização formal no modo como os estudantes da EJA se portaram frente à resolução dos problemas combinatórios e probabilísticos propostos.

Quadro 2: Representações simbólicas/estratégias mais utilizadas (por Grupo).

	MÓDULO II	**MÓDULO IV**	**EJA MÉDIO 3**
Problemas Combinatórios	- Não revisitou (37,5%); - Enumeração Oral (34%); - Adição ou uso de valores do enunciado (16%);	- Enumeração Oral (78%); - Não revisitou (16%); - Listagens escritas (4%);	- Enumeração Oral (47%); - Listagens escritas (16%); - Multiplicação (22%);
Espaços Amostrais	- Enumeração Oral (72%); - Listagem Extensiva (28%);	- Listagem extensiva (algumas sistemáticas) (84%);	- Listagem não sistemática (reduzidas ou extensivas) (75%); - Sistematização e generalização (25%);
Demais Problemas Probabilísticos	- Erros baseados em preferências pessoais; - Justificativas inadequadas.	- Alguns casos de justificativas adequadas;	- Ainda há erros de comparação de probabilidades; - Maioria das justificativas adequadas.

Fonte: Dados da pesquisa.

O Quadro 2 evidencia um refinamento das estratégias utilizadas pelos participantes do estudo em função do nível de escolarização dos mesmos. O melhor desempenho obtido pelos participantes dos Grupos 2 e 3 justifica-se, portanto, pelo fato desses possuírem um maior repertório de conhecimentos referentes às estruturas multiplicativas, bem como fazerem uso, com mais frequência, de *representações simbólicas* e estratégias mais eficientes (ainda que possam ser insuficientes para a resolução de problemas mais complexos ou com um número maior de possibilidades).

Destaca-se, entretanto, que o desempenho apresentado pelos participantes foi ainda insatisfatório, principalmente no que se refere ao Grupo 3, equivalente ao último ano do Ensino Médio, concluintes da Educação Básica, que mesmo utilizando *representações simbólicas* e estratégias mais diversas e eficientes, não apresentou um desempenho significativamente superior ao Grupo 2.

Na última seção do presente capítulo, são discutidas as relações entre os raciocínios combinatório e probabilístico evidenciadas a partir da resolução dos problemas propostos nesse estudo.

5.5 RELACIONANDO COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE A PARTIR DA REVISITAÇÃO DE PROBLEMAS

O objetivo do presente estudo, ao propor que estudantes da EJA resolvessem testes compostos por problemas combinatórios e probabilísticos relacionados entre si, foi investigar como a resolução de situações que explorassem as quatro exigências cognitivas ao entendimento da Probabilidade (*espaço amostral, correlação, aleatoriedade* e *comparação de probabilidades*) poderia contribuir para o desempenho apresentado pelos participantes no que se refere à resolução de problemas de *produto cartesiano*, *combinação*, *permutação* e *arranjo*. Por outro lado, buscou-se investigar, também, como a resolução de problemas combinatórios poderia contribuir para a compreensão das exigências cognitivas relacionadas ao pensamento probabilístico. Isto é, buscou-se investigar as relações que se estabelecem entre os raciocínios combinatório e probabilístico a partir da resolução dos problemas propostos nos dois tipos de teste utilizados na pesquisa conduzida, que tiveram como foco a revisitação de problemas combinatórios sob o olhar da Probabilidade (Teste 1) e de problemas probabilísticos sob o olhar da Combinatória (Teste 2).

5.5.1 Espaços Amostrais

Ao se tratar do Teste 1, destaca-se que a revisitação a partir da solicitação da listagem escrita de todas as possibilidades referentes a cada problema combinatório proposto permitiu que os estudantes que não haviam utilizado essa *representação simbólica*/estratégia espontaneamente na resolução dos problemas de *produto cartesiano*, *combinação*, *permutação* e *arranjo* pudessem produzir o registro das possibilidades que foram levantadas inicialmente. Por sua vez, os poucos estudantes que já haviam utilizado a listagem ao resolver os problemas combinatórios tiveram, no momento das revisitações a tais problemas referentes à construção de *espaços amostrais*, a chance de rever tais registros. Essa revisitação permitiu que fossem levantadas reflexões sobre os *invariantes* das *situações* combinatórias em questão na busca pelo esgotamento dos casos possíveis em cada uma delas.

As Figuras 27 e 28 ilustram algumas das contribuições que a revisita aos problemas combinatórios a partir da construção de *espaços amostrais* proporcionou ao desempenho e ao raciocínio combinatório dos participantes do presente estudo.

Figura 27: Problema de arranjo (Teste 1), resolvido por P17 (Estudante da EJA Médio 3). Enumeração oral: Indicação de mais da metade das possibilidades.

Fonte: Dados da pesquisa.

Transcrição 5: Problema de arranjo (Teste 1), resolvido por P17 (Estudante da EJA Médio 3).

Pesq.: "[...] você já me falou Júlio e Cícero. Desses dois quem vai ser o goleiro e quem vai ser o atacante?"

P17: "O goleiro vai ser Júlio e o atacante vai ser César..."

[...] P17 indica oralmente outra dupla de rapazes.

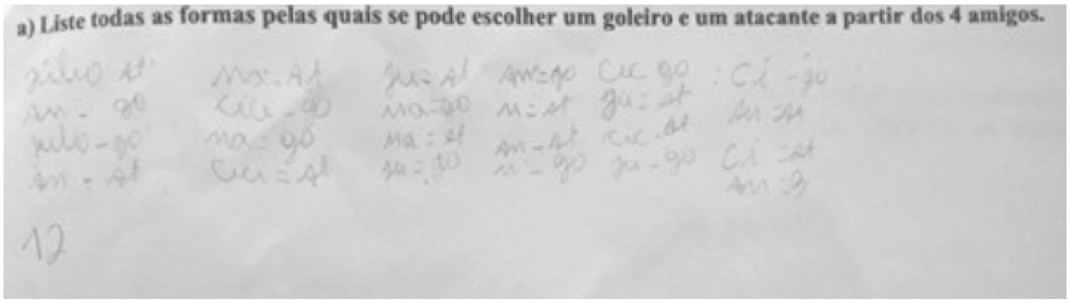
Pesq.: "Quantas formas são possíveis? Duas?"

P17: "São quatro. Pode ser o contrário também."

Considera assim mais pares e também seus inversos, chegando a enumerar 8 possibilidades.

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 28: Problema de espaço amostral de arranjo (Teste 1), resolvido por P17 (Estudante da EJA Médio 3). Listagem reduzida sistemática: Indicação de todas as possibilidades.

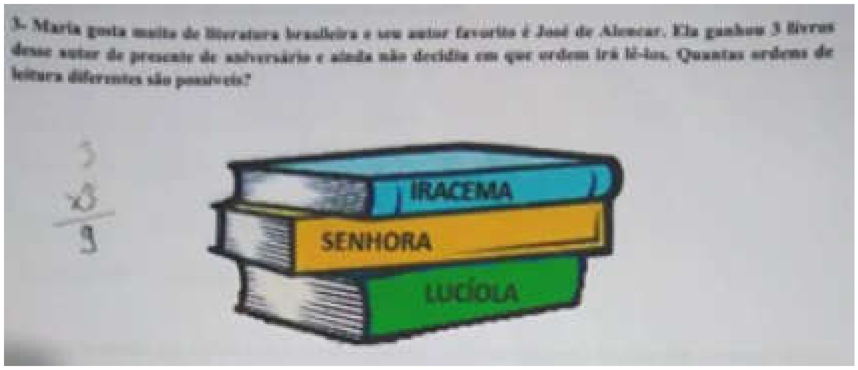


Fonte: Dados da pesquisa.

Como pode ser observado nas Figuras 27 e 28, o participante P17, que resolveu o Teste 1, já havia demonstrado compreensão dos *invariantes de ordem* e *de escolha* referentes ao problema de *arranjo* e pode, a partir da revisitação proporcionada pela resolução do problema de *espaço amostral* correspondente, registrar as possibilidades já indicadas anteriormente de forma oral e, por meio de sistematização, organizar novos pares (e seus inversos), chegando a esgotar o número de possibilidades (12). A construção de *espaço amostral* atuou, nesse caso, como um importante auxílio ao esgotamento de possibilidades, pois facilitou a visualização dos casos considerados e permitiu que o participante controlasse, também, a contagem dos pares invertidos. Dessa forma, o *teorema-em-ação* utilizado de início (e consequentemente, a compreensão dos *invariantes* em questão), na resolução do problema combinatório, foi potencializado pela revisitação sob o olhar da Probabilidade.

O esgotameto de possibilidades não foi a única contribuição percebida a partir da revisitação aos problemas combinatórios por meio da explicitação de *espaços amostrais*. Por vezes, tais revisitações proporcionaram a reflexão sobre *invariantes* dos problemas em questão, levando os estudantes a excluirem casos repetidos (Figuras 29 e 30) ou indicarem mais algumas possibilidades, sem chegar ao acerto total (Figuras 31 e 32).

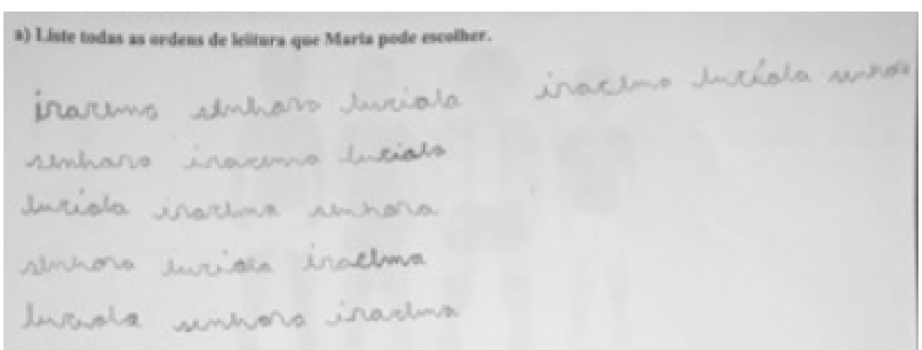
Figura 29: Problema de permutação (Teste 1), resolvido por P1 (Estudante do Módulo II). Multiplicação inadequada (consideração de casos repetidos).



Fonte: Dados da pesquisa.

Inicialmente, ao resolver o problema combinatório referente à *situação* de *permutação,* P1 fez uso de *multiplicação inadequada*, considerando o valor presente no enunciado (número de livros) e o multiplicando por ele mesmo – 3 vezes 3. Dessa forma, P1 indicou que seriam nove as ordens de leitura distintas possíveis, sem que tivesse especificado nenhuma delas. A partir da revisitação a tal *situação* combinatória promovida pela resolução do problema de *espaço amostral* correspondente, P1 utilizou a listagem e especificou (registrando por escrito) cada ordem de leitura considerada (Figura 30).

Figura 30: Problema de espaço amostral de permutação (Teste 1), resolvido por P1 (Estudante do Módulo II). Listagem extensiva não sistemática: Indicação de todas as possibilidades.



Fonte: Dados da pesquisa.

Transcrição 6: Problema de espaço amostral de permutação (Teste 1), resolvido por P1 (Estudante do Módulo II).

[...] Lista rapidamente as seis ordens de leitura possíveis, mostrando boa compreensão do invariante de ordem do problema.

Pesq.: "Quando você resolveu antes, fazendo a conta, a resposta foi nove, não foi? Você acha que são seis ou são nove ordens de leitura?"

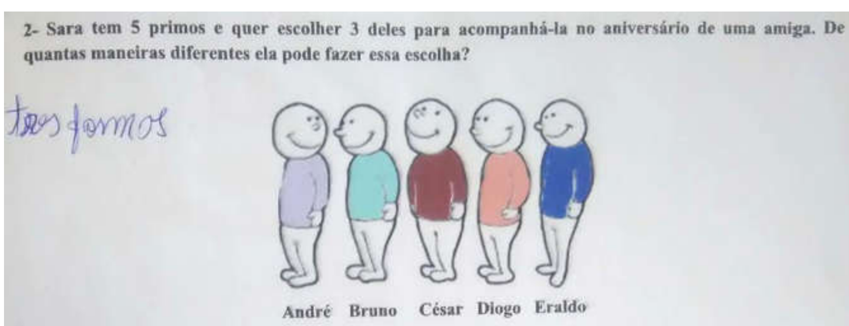
P17: "[...] Seis. Não consigo escrever mais não... Tem mais não."

Fonte: Dados da pesquisa.

A partir da revisitação acima ilustrada, P1 pode visualizar as possibilidades consideradas e chegar à conclusão de que o número total delas era seis. Concluiu, assim, que a resposta obtida inicialmente (9) considerava casos repetidos, que não consistiam em possibilidades válidas a serem contadas: ajustou, portanto, sua resposta, chegando ao resultado correto.

Ao resolver o problema de *combinação*, P21 (Figura 31) enumerou oralmente três possibilidades de escolha de trios a partir dos cinco primos de Sara. Ao indicar tais possibilidades, o participante baseou-se, também, na disposição dos rapazes na ilustração. Assim, considerou trios de primos que estavam próximos, como André, Bruno e César, por exemplo.

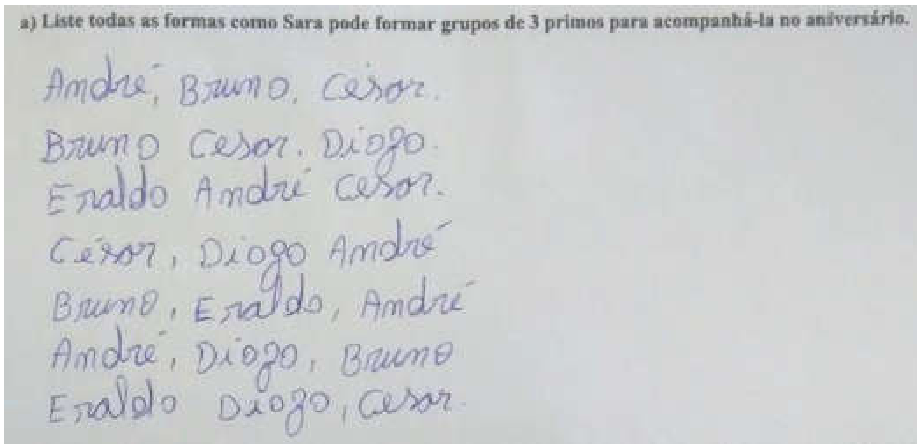
Figura 31: Problema de combinação (Teste 1), resolvido por P21 (Estudante da EJA Médio 3). Enumeração oral.



Fonte: Dados da pesquisa.

Ao revisitar a *situação* combinatória, a partir do problema de *espaço amostral* de *combinação,* o participante P21 conseguiu indicar várias outras possibilidades (Figura 32) – contudo, não chegou ao número total de possibilidades (10). Tal revisitação consistiu, ainda assim, em um avanço de desempenho, tanto quantitivo quanto qualitativo. Inicialmente o participante havia indicado oralmente menos da metade das possibilidades (pontuação 0), chegando, na revisitação, a listar mais da metade das possibilidades (pontuação 1) e conseguiu, também, desprender-se da disposição dos primos na ilustração, considerando novas possibilidades – demostrando compreensão dos *invariantes* da *situação* em questão.

Figura 32: Problema de espaço amostral de combinação (Teste 1), resolvido por P21 (Estudante da EJA Médio 3). Listagem extensiva não sistemática: Indicação de mais da metade das possibilidades.



a) Liste todas as formas como Sara pode formar grupos de 3 primos para acompanhá-la no aniversário.

André, Bruno, Cesar.
Bruno Cesar. Diogo.
Enaldo André Cesar.
Cesar, Diogo André
Bruno, Enaldo, André
André, Diogo, Bruno
Enaldo Diogo, Cesar.

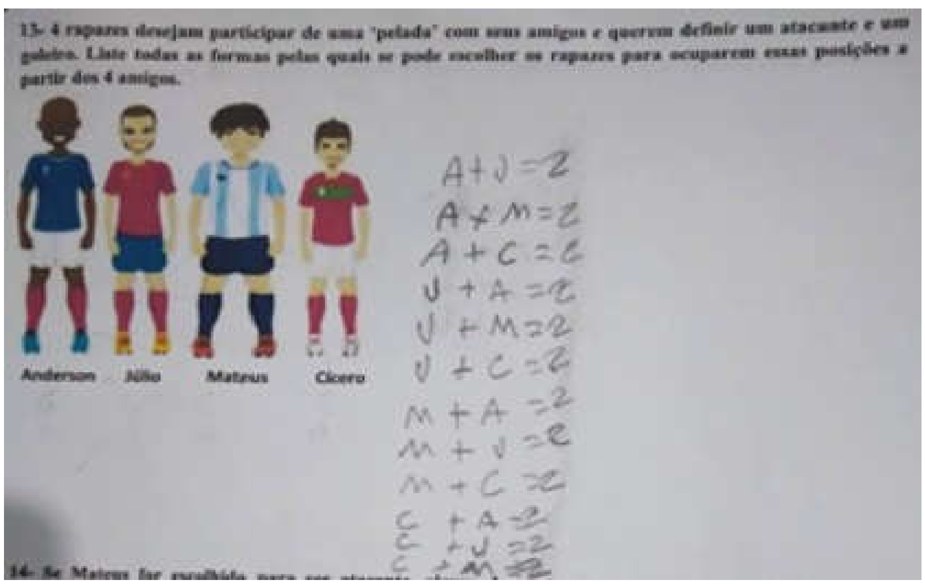
Fonte: Dados da pesquisa.

Esse tipo de relação entre os problemas combinatórios e os de *espaço amostral* – e contribuições observadas a partir das revisitações propostas – tomou o caminho inverso ao se tratar do Teste 2. Nesse tipo de teste os problemas que solicitavam, explicitamente, a listagem de possibilidades foram resolvidos antes dos problemas combinatórios (que não traziam em seus enunciados sugestões ao uso de *representações simbólicas/* estratégias específicas).

Um ponto negativo, que foi apontado em seções anteriores desse capítulo quanto às revisitações propostas no Teste 2, está relacionado ao fato de que muitos estudantes apresentaram resistência em revisitar os problemas de *espaço amostral.* Como esses estudantes já haviam registrado por escrito as possibilidades encontradas, muitas vezes, não possuíam um repertório de *representações simbólicas*/estratégias mais eficientes para a resolução dos problemas e, portanto, decidiam manter a resposta inicial.

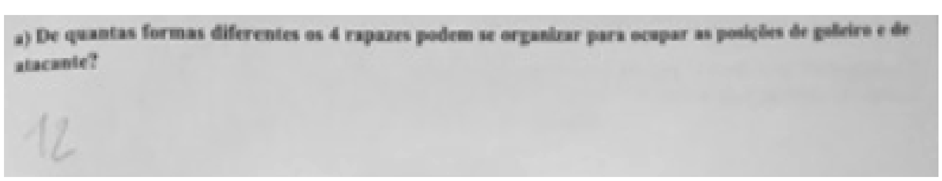
A revisitação às listagens produzidas é, contudo, um importante momento para o levantamento de reflexões sobre os *invariantes* dos problemas e pode proporcionar ajustes aos registros feitos e levar à descoberta de novas possibilidades ou desconsideração de casos repetidos. Dessa forma, destaca-se que, ao optar pela não revisitação, alguns estudantes deixaram de tirar proveito da oportunidade proporcionada pela relação estabelecida entre os problemas de *espaço amostral* e os combinatórios. Nas Figuras 33 e 34 é ilustrado o caso de um estudante do Grupo 2, que ao listar os casos referentes ao problema de *espaço amostral* de *arranjo* havia indicado o dobro das possibilidades existentes. A partir da revisitação, o mesmo conseguiu eliminar tais repetições, chegando à resposta correta. Dessa maneira, mesmo que as revisitações propostas no Teste 2 tenham provocado certa resistência por parte de alguns participantes em reelaborar suas respostas, proporcionou algumas revisitações proveitosas para a melhoria do desempenho/desenvolvimento dos raciocínios foco do estudo.

Figura 33: Problema de espaço amostral de arranjo (Teste 2), resolvido por P16 (Estudante do Módulo IV). Listagem reduzida sistemática: Consideração de casos repetidos.



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 34: Problema de arranjo (Teste 2), resolvido por P16 (Estudante do Módulo IV). Enumeração oral: Indicação de todas as possibilidades.



Fonte: Dados da pesquisa.

Transcrição 7: Problema de arranjo (Teste 2), resolvido por P16 (Estudante do Módulo IV).

[...] Revisa a listagem e percebe que considerou o dobro de possibilidades.
P16: "[...] Eu já tinha contado duas vezes, pra dizer que tinha trocado, mas aí eu escrevi de novo (risos)."
Pesq.: "Tem dupla repetida, então?"
P16: "'Tá' tudo repetido. Eu escrevi 24, mas 'é' só 12".

Fonte: Dados da pesquisa.

Ao resolver o problema de *espaço amostral* de *arranjo* (Figura 31) P16 percebeu, corretamente, que cada dupla de rapazes poderia ser contada duas vezes, pois escolher Anderson para ocupar a vaga de atacante e Júlio para ocupar a vaga de goleiro é diferente de escolher Júlio para ser atacante e Anderson para ser goleiro, por exemplo. O participante representou tal inversão utilizando o número dois após cada par considerado. Entretanto, posteriormente, P16 fez essa inversão na própria *listagem reduzida*, indicando assim o dobro de possibilidades. Ao revisitar a listagem produzida, a partir da resolução do problema combinatório de *arranjo*, percebeu o erro e, oralmente, chegou ao resultado correto.

Destaca-se, dessa forma, que as revisitações propostas entre os problemas combinatórios e os problemas de *espaço amostral,* em ambos os testes utilizados, propiciaram o surgimento de importantes contribuições que relacionam os raciocínios combinatório e probabilístico dos estudantes da EJA participantes do presente estudo[6].

Os problemas de *espaço amostral* possuem uma relação mais direta com o raciocínio combinatório. Contudo, estes não foram os únicos a se relacionarem positivamente com os problemas combinatórios. A seguir relações explicitadas a partir das revisitações referentes às demais exigências cognitivas da Probabilidade são discutidas.

[6] Resultados semelhantes foram observados em um estudo piloto da presente pesquisa de dissertação, no qual a revisitação de problemas combinatórios a partir da construção de seus respectivos espaços amostrais proporcionou avanços nos desempenhos de estudantes da EJA cursando módulos equivalentes aos Anos Iniciais e Finais do Ensino Fundamental (LIMA; BORBA, 2017).

5.5.2 Problemas de Correlação, Aleatoriedade e Comparação de Probabilidades Diferentes

Os estudantes do Grupo 1 (Estudantes do Módulo II) foram aqueles que apresentaram maiores dificuldades ao resolver os problemas de *correlação* propostos. O menor desempenho apresentado por esses participantes se deveu ao fato de que os mesmos se basearam, muitas vezes, em preferências pessoais para responder esse tipo de problema. Dessa maneira, ao serem perguntados, por exemplo, se todas as camisetas do problema de *produto cartesiano* teriam a mesma chance de serem escolhidas para completar o fardamento junto à calça marrom ou se alguma teria mais chance, alguns estudantes indicaram que alguma camiseta teria mais chance e justificaram isso com frases do tipo 'por que combina mais', 'por que ele gosta mais', entre outros.

Já no que diz respeito ao desempenho dos participantes dos outros grupos ao resolver os problemas de *correlação*, estes, por terem conseguido, na maior parte das vezes, desprenderem-se de preferências pessoais ao levantar as possibilidades referentes aos diferentes tipos de problemas combinatórios, foram capazes de deixar argumentos baseados em tais preferências de lado ao investigar a existência de correlações entre eventos. O fato de terem conseguido indicar várias possibilidades referentes às *situações* combinatórias parece, portanto, ter contribuído para o desempenho nos problemas de *correlação*.

É importante destacar, ainda, que a resolução desse tipo de problema pode consistir em uma rica estratégia de intervenção para o desenvolvimento do raciocínio combinatório, visto que ao trabalhar com esse tipo de problema surge, fortemente, a ideia de possibilidade. Estudantes que resolvem corretamente tais problemas percebem que 'qualquer um pode ser escolhido/combinado', não havendo restrições baseadas em preferências pessoais. Nem sempre essa característica é facilmente percebida ao se resolver os problemas combinatórios (principalmente ao se tratar dos mais complexos, como os que abordam a *situação* de *combinação*). Dessa forma, esse seria um importante momento para voltar aos problemas combinatórios e de *espaço amostral* para que os estudantes pudessem confirmar se consideraram todas as possibilidades.

No que se refere aos problemas de *aleatoriedade* propostos no presente estudo, destaca-se a importância do trabalho, também, com a ideia de equiprobabilidade. Resoluções corretas de tais problemas demandavam a consideração dos espaços amostrais em questão, pois ao afirmar que diferentes eventos teriam a mesma chance de ocorrer, seria necessário, além de se considerar o caráter aleatório das situações propostas, conferir se tais eventos eram equiprovavéis. O êxito ao resolver esse tipo de problema estava, portanto, também intimamente relacionado ao raciocínio combinatório e as dificuldades apresentadas pelos participantes do estudo estavam pautadas na não evidenciação, em suas justificativas, da percepção da equiprobabilidade intrínseca às situações abordadas. Tais relações poderiam ser mais exploradas a partir de processos interventivos que aprofundassem as discussões sobre esses problemas.

Por sua vez, a exigência cognitiva da Probabilidade referente à *comparação de probabilidades diferentes* foi aquela na qual os participantes do estudo apresentaram maiores dificuldades de compreensão (mesmo que o desempenho quantitativo tenha sido bem semelhante ao apresentado nos problemas de *aleatoriedade*). Isso se deu em função da não utilização do raciocínio combinatório que permitisse aos estudantes considerarem cada evento separadamente, levantando seus *espaços amostrais*, para só, então, determinar suas probabilidades e compará-las. Assim, foi ao não fazer distinção entre possibilidade e probabilidade que os participantes, levando em conta o número absoluto de elementos e não o caráter proporcional próprio da Probabilidade, apresentaram um grande número de respostas inadequadas nesse tipo de problema.

Cabe ressaltar, por fim, a grande importância da realização de entrevistas clínicas no presente estudo. A utilização desse método permitiu investigar de maneira mais aprofundada as concepções dos participantes acerca de conceitos da Combinatória e da Probabilidade, as *representações simbólicas* e *teoremas-em-ação* utilizados na resolução dos problemas propostos, bem como as principais dificuldades e incompreensões referentes aos *invariantes* dos problemas presentes no teste. Esse tipo de abordagem, na coleta de dados, permitiu uma aproximação pesquisadora-participantes, abrindo espaço para "motivar o sujeito à reflexão, o que não é possível numa situação totalmente padronizada" (CARRAHER, 1998, p. 6). Previniu, ainda, que os problemas fossem deixados em branco por insegurança ou resistência por parte dos participantes em resolver as *situações* abordadas, como observado no trabalho de Lima e Silva (2017), também realizado com estudantes da EJA. Isso evidencia a importância da comunicação no incentivo à resolução de problemas. Na sala de aula, a comunicação professor-estudante exerce papel essencial nos processos de ensino e de aprendizagem.

Nas Considerações Finais, apresentadas a seguir, serão retomados os principais resultados discutidos neste capítulo. Além disso, busca-se levantar as implicações educacionais que derivam do presente estudo.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente texto foram apresentados os aportes teóricos do estudo realizado, a bibliografia levantada, objetivos e métodos que embasaram o desenvolvimento do mesmo. À luz das referências citadas, bem como da investigação proposta, e buscando responder os questionamentos de pesquisa, foram apresentados e discutidos os resultados obtidos a partir de análises quanti e qualitativas dos dados coletados junto a 24 estudantes da Educação de Jovens e Adultos (EJA) a partir da realização de entrevistas clínicas individuais.

O desenvolvimento de um estudo exploratório junto a adultos em diferentes momentos de sua escolarização (na modalidade da EJA) se deu a partir da incipiência de estudos na área da Educação Matemática junto a esse público alvo e do interesse em investigar os raciocínios combinatório e probabilístico desses estudantes, dado o contexto no qual se inserem. Os estudantes da EJA não possuem características iguais às dos estudantes do Ensino Regular, dadas suas experiências cotidianas próprias da idade adulta e as relações que estabelecem com a instituição escolar (tenham ou não frequentado a escola anteriormente).

Mais do que investigar as compreensões dos participantes acerca de ambos os raciocínios foco do presente estudo – o combinatório e o probabilístico –, teve-se como objetivo central investigar as relações que se estabelecem entre os conhecimentos de Combinatória e Probabilidade. Tais conhecimentos, à luz do aporte teórico adotado – a Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1986; 1996) – estão inseridos dentro de um mesmo campo conceitual, o das estruturas multiplicativas, o que faz com que seja importante que os diversos conceitos, bem como as relações entre os mesmos sejam alvo de investigação.

Vergnaud (1986; 1996) chama atenção, ainda, para o papel central das *situações*, *invariantes* e *representações simbólicas* na conceitualização por parte dos sujeitos. Dessa maneira, esse tripé foi o principal embasamento para a elaboração dos instrumentos de coleta e para a análise de dados realizada.

Durante as entrevistas clínicas, os participantes do estudo resolveram problemas combinatórios e probabilísticos de diferentes tipos, a depender da *situação* abordada, sendo os combinatórios referentes às situações de *produto* *cartesiano*, *combinação, permutação* e *arranjo* e os probabilísticos relativos às quatro exigências cognitivas da Probabilidade apontadas por Bryant e Nunes (2012) – construção de *espaço amostral*, entendimento de *correlação*, compreensão da *aleatoriedade* e *comparação de probabilidades.* Os problemas combinatórios e probabilísticos foram apresentados aos estudantes da EJA que participaram do estudo em dois tipos de teste (cada tipo foi resolvido por metade dos participantes), organizados em função da ordem de apresentação dos problemas. No Teste 1 cada problema combinatório era resolvido e, em seguida, revisitado por meio de um bloco de problemas probabilísticos que ampliavam a exploração do problema inicial, a partir da exploração de cada exigência cognitiva da Probabilidade considerada no estudo. Por sua vez, o Teste 2 apresentava a proposta inversa de articulação entre os raciocínios foco do estudo: os problemas probabilísticos eram resolvidos inicialmente e revisitados a partir do problema combinatório correspondente.

Dada tal organização dos instrumentos de coleta, foram variáveis do estudo não apenas os tipos de problemas/*situações* referentes à Combinatória e à Probabilidade, com seus respectivos *invariantes*, mas, também, a ordem de apresentação dos mesmos na articulação entre os raciocínios combinatório e probabilístico a partir das revisitações propostas (controlada a partir do tipo de teste: 1 e 2) e as *representações simbólicas* e estratégias utilizadas pelos participantes. Além disso, o nível de escolarização constituiu uma importante variável do estudo, visto que os participantes compuseram três grupos, com oito estudantes cada (totalizando 24 participantes): Grupo 1 (Estudantes do Módulo II – equivalente aos 4º e 5º anos do Ensino Fundamental), Grupo 2 (Estudantes do Módulo IV – equivalente aos 8º e 9º anos do Ensino Fundamental) e Grupo 3 (Estudantes da EJA Médio 3).

Os participantes do presente estudo apresentaram melhor desempenho nos problemas combinatórios de *produto cartesiano*, assim como ocorreu nos estudos de Pessoa (2009), de Azevedo (2013) e de Lima (2010), sendo o primeiro realizado com crianças e adolescentes do início ao final da Educação Básica, o segundo com estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental e o último com estudantes da EJA. Esse tipo de problema combinatório é o mais comumente trabalhado em sala de aula, desde o início da escolarização. É também um dos mais presentes nos livros didáticos de Matemática dos Anos Iniciais, conforme apontado pelo estudo de Barreto e Borba (2010).

Por outro lado, os participantes do estudo obtiveram menor percentual de acertos nos problemas de *combinação,* resultado que corrobora com estudos anteriores como os de Pessoa (2009), de Lima (2010) e o de Azevedo (2013) – no pré-teste, antes da intervenção desenvolvida – que apontam que os estudantes apresentam grandes dificuldades ao resolver esse tipo de problema combinatório. Tais dificuldades se devem a incompreensões dos *invariantes* desse tipo de problema, no qual a ordem dos elementos não constitui novas possibilidades. O estudo de Rocha (2011) aponta, ainda, que professores dos Anos Finais e do Ensino Médio consideram os problemas de *combinação* os mais complexos dentre os combinatórios.

No que se refere às exigências cognitivas da Probabilidade, o desempenho nos problemas de construção de *espaço amostral* esteve diretamente relacionado ao tipo de *situação* combinatória abordada, corroborando com os resultados referentes aos problemas combinatórios: sendo o *espaço amostral de produto cartesiano* o problema no qual os participantes apresentaram melhor desempenho e o *espaço amostral de combinação* aquele no qual as maiores dificuldades foram observadas, dadas incompreensões acerca dos *invariantes* do tipo de *situação* combinatória abordada e no esgotamento das possibilidades do problema desse tipo proposto.

Quanto aos problemas que abordaram as demais exigências cognitivas, os participantes apresentaram facilidade na identificação da ausência de correlações e na compreensão do caráter aleatório dos eventos em questão. O grande número de justificativas inadequadas levou, contudo, a um baixo desempenho nos problemas que abordaram a compreensão da *aleatoriedade*, problemas que envolviam também, a avaliação de equiprobabilidades de eventos.

No que diz respeito à última exigência cognitiva considerada – *comparação de probabilidades diferentes* –, os participantes do presente estudo basearam-se, frequentemente, apenas no número de casos favoráveis ao resolver tais problemas, apresentando, assim, desempenho insatisfatório nos mesmos. Isso se deveu ao fato de que os estudantes não se utilizaram de conhecimentos combinatórios para levantar os espaços amostrais de eventos independentes, como também foi observado nos estudos de Batista e Francisco (2015) – realizado com estudantes da EJA em módulos equivalentes ao 2º e ao 3º ano do Ensino Médio –, de Santos

(2015) – cujo público alvo foi composto por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental e de Lima e Silva (2017) – realizado com estudantes da EJA cursando módulos equivalentes aos anos do Ensino Médio.

Além disso, no geral, os participantes do estudo tiveram muita dificuldade em justificar adequadamente as respostas dadas o que evidencia uma compreensão superficial da Probabilidade. Essa dificuldade esteve presente em todos os problemas probabilísticos, no entanto, foi ainda mais evidente no que se refere aos problemas de *aleatoriedade*. No que se trata desse tipo de problema probabilístico, ao justificarem a igualdade de probabilidade de eventos dados, os estudantes tenderam a não explicitar, em suas justificativas, a equiprobabilidade necessária para que tal igualdade exista.

A influência do tipo de problema no desempenho, tanto no que se refere aos problemas combinatórios, quanto aos probabilísticos, reforça o tipo de *situação* como um elemento importante na conceitualização por parte dos sujeitos. Assim, os resultados obtidos nesse sentido corroboram com o aporte teórico adotado (VERGNAUD, 1986; 1996), visto que apontam que os diferentes tipos de *situações* não são igualmente apreendidos pelos participantes, tendo em vista a compreensão dos *invariantes* de cada uma das *situações* combinatórias e probabilísticas abordadas nos instrumentos de coleta, além da importância do uso de *representações simbólicas* e estratégias adequadas durante a resolução dos problemas.

A variável tipo de teste, que reflete o foco principal do estudo – as relações entre os raciocínios combinatório e probabilístico – demonstrou também influenciar, mais evidentemente de maneira qualitativa, o desempenho dos participantes do estudo: as revisitações – articulações entre ambos os raciocínios postas nos instrumentos de coleta utilizados – se mostraram mais promissoras no Teste 1 (problemas combinatórios revisitados sob o olhar da Probabilidade). Atribui-se tal resultado ao fato de que ao resolver inicialmente os problemas combinatórios, os estudantes da EJA que participaram do estudo fizeram uso de *representações simbólicas* e estratégias variadas e, a partir das revisitações propostas em problemas probabilísticos (principalmente quando relacionadas à construção de *espaços amostrais*), puderam refinar suas respostas, utilizando uma estratégia pré-determinada: a listagem, de maneira escrita.

A limitação de estratégia e de *representação* desse tipo de *situação* (*espaço amostral*), no entanto, foi um ponto negativo quando a ordem de apresentação dos problemas foi inversa (Teste 2: problemas probabilísticos revisitados sob o olhar da Combinatória), visto que levou à não revisitação por parte de um grande número de participantes. Essa recusa à revisitação (que consistiu na repetição das respostas já dadas aos problemas em questão) anulou a oportunidade de reflexão acerca dos *invariantes* das diferentes *situações* combinatórias propostas, bem como do uso de variadas *representações simbólicas*/estratégias e, principalmente, do refinamento das mesmas.

Esse resultado chama a atenção para o fato de que a articulação entre Combinatória e Probabilidade deve ser pensada de maneira que as possíveis contribuições venham a ser potencializadas. Destaca-se contudo, que este estudo não tem a pretensão de indicar uma ordem de ensino ideal no que diz respeito à conceitos combinatórios e probabilísticos. O mesmo, e estudos posteriores que venham aprofundar a investigação de tais relações, podem servir de base para a organização de materiais didáticos e do ensino da Combinatória e da Probabilidade de maneira articulada, tendo em vista o desenvolvimento dos raciocínios combinatório e probabilístico.

Outra variável considerada no estudo está relacionada à escolarização dos participantes. De maneira geral, os Grupos 2 e 3 (Módulos IV e EJA Médio 3: estudantes cursando o equivalente à conclusão do Ensino Fundamental e Médio) obtiveram desempenhos superiores ao do Grupo 1 (Módulo II: estudantes em início de escolarização, cursando o equivalente à conclusão dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental). Dessa maneira, destaca-se que a escolaridade dos participantes influenciou o desempenho, tanto no que se refere aos problemas combinatórios, quanto aos problemas probabilísticos propostos. Tal variável influenciou, de maneira mais evidente, qualitativamente o desempenho, estando relacionada à compreensão dos *invariantes* das variadas situações propostas, bem como ao uso de *representações simbólicas* e estratégias mais refinadas (no caso da resolução dos problemas combinatórios propostos) e ao número de acertos e de apresentação de justificativas adequadas às resoluções dadas (no que diz respeito aos problemas probabilístico presentes nos instrumentos de coleta).

Era esperado, contudo, que o efeito da escolarização fosse mais marcante no sentido quantitativo ao se comparar também os Grupos 2 e 3, visto que acredita-se (a partir do que está posto em orientações curriculares) que os estudantes da EJA Médio 3 tenham contato com o ensino específico da Combinatória e da Probabilidade – contato que tende a ser menor (e por vezes, inexistente) nos módulos equivalentes ao Ensino Fundamental. O tímido avanço observado parece, portanto, ser consequência do processo de escolarização como um todo – provocando o refinamento da forma de pensar e se expressar frente a problemas escolarizados – e não do estudo específico dos conceitos abordados no presente estudo.

A partir do desenvolvimento desse estudo exploratório, foi possível observar relações que se estabelecem entre o raciocínio combinatório e o probabilístico. Em especial, no Teste 1, a exploração do *espaço amostral* proporcionou a descoberta de novas possibilidades nos problemas combinatórios, visto que a revisitação e o registro escrito das possibilidades referentes a esses problemas permitiram que os participantes avaliassem/modificassem as *representaçãos simbólicas* e estratégias utilizadas, tendo a chance de refletir, também, sobre os *invariantes de ordem* e *de escolha* de cada tipo de *situação* combinatória, reavaliando e refinando as respostas dadas aos problemas.

É válido destacar, ainda, que essa revisitação a partir da construção de *espaços amostrais* se mostrou muito proveitosa ao se trabalhar com problemas com número pequeno de possibilidades, o que proporcionou que a listagem escrita fosse uma *representação simbólica* viável para resolvê-los. Quando os problemas combinatórios são mais complexos e/ou possuem um número elevado de possibilidades essa explicitação do *espaço amostral* por meio da listagem escrita se tornará inviável. É importante, portanto, que ao avançarem os níveis de escolarização, haja a ampliação do repertório de *representações* e estratégias que aptem os estudantes a esgotarem as possibilidades nesses casos (esgotamento que é, geralmente, esperado ao se tratar dos problemas combinatórios e probabilísticos escolarizados). Por outro lado, apresentar uma maneira de pensar própria do raciocínio combinatório proporcionou o uso de uma abordagem mais voltada à Matemática escolar durante a resolução dos problemas probabilísticos, visto que esses envolvem o levantamento de possibilidades (sendo importante que todo o *espaço amostral* seja considerado para que as probabilidades sejam avaliadas e/ou comparadas).

Desse modo, dado o observado a partir da realização do presente estudo exploratório com estudantes da EJA, defende-se que a articulação entre os raciocínios combinatório e probabilístico pode beneficiar o desenvolvimento de ambos nessa modalidade de ensino. Foi possível perceber, assim, contribuições que surgem entre conhecimentos de Combinatória e Probabilidade através da resolução de problemas que permitem uma relação entre ambos os raciocínios.

Destaca-se, ainda, como uma implicação educacional que pode ser inferida a partir do presente estudo, a importância da instrução escolar específica para o desenvolvimento do raciocínio combinatório e do raciocínio probabilístico, inclusive de maneira articulada, a partir da proposição de situações que explorem ambos os raciocínios. A instrução formal é essencial para tal desenvolvimento, visto que a mesma poderá proporcionar o contato com as diversas *situações* combinatórias e probabilísticas e a exploração dos seus *invariantes* (e suas relações), a sistematização das estratégias, bem como a ampliação do repertório de *representações simbólicas.*

Espera-se, com o presente estudo, contribuir para o levantamento de reflexões sobre o ensino da Combinatória e da Probabilidade e as possibilidades de articulações entre tais áreas da Matemática na Educação Básica (seja, ou não, na EJA). Estudos posteriores podem aprofundar a investigação das relações entre os raciocínios em questão também no Ensino Regular, utilizando-se de diversas abordagens – sejam eles exploratórios ou interventivos, sendo esses últimos importantes para que se possa acompanhar o desenvolvimento desses raciocínios. Além disso, é importante que se pesquise se e como tais relações estão presentes em materiais que podem influenciar a abordagem que o professor dá à Combinatória e à Probabilidade em sala de aula, como, por exemplo, orientações curriculares e livros didáticos.

REFERÊNCIAS

AZEVEDO, Juliana. **Alunos de anos iniciais construindo árvores de possibilidades:** é melhor no papel ou no computador? (Dissertação: Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica). Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2013.

BARRETO, Fernanda. **O papel das representações simbólicas no desenvolvimento do raciocínio combinatório na educação de jovens e adultos.** (Dissertação: Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica). Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2012.

BARRETO, Fernanda; BORBA, Rute. Como o raciocínio combinatório tem sido apresentado em livros didáticos de anos iniciais. **Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática** – ENEM.Salvador, 2010.

BATANERO, Maria Carmen; GODINO, Juan; NAVARRO-PELAYO, Virginia. **Razonamiento Combinatorio.** Madrid: Síntesis. 1996.

BATISTA, Rita; FRANCISCO, Valdir. Noções probabilísticas de alunos da EJA. **Anais do Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática** – 4º SIPEMAT. p. 1225-1236, Ilhéus, 2015.

BORBA, Rute. Antes cedo do que tarde: o aprendizado da combinatória no início da escolarização. **Anais do Encontro de Combinatória, Estatística e Probabilidade dos Anos Iniciais** – Encepai. Recife, 2016.

BORBA, Rute; ROCHA, Cristiane; AZEVEDO, Juliana. Estudos em raciocínio combinatório: investigações e práticas de ensino na educação básica. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, SP, v. 29, n. 53, p. 1348-1368, dez. 2015.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – Lei n. 9394/96.** Brasília, DF: MEC, 1996.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. 1º e 2º ciclos. Brasília: MEC / Secretaria de Ensino Fundamental, 1997.

BRASIL. **Educação para jovens e adultos:** ensino fundamental: proposta curricular - 1º segmento. Brasília: MEC, 2001.

BRASIL. **Proposta Curricular para a Educação de Jovens e Adultos**: segundo segmento do ensino fundamental: 5ª a 8ª série. v. 3. MEC: Secretaria de Educação Fundamental, 2002.

BRYANT, Peter; NUNES, Terezinha. **Children's understanding of probability**: a literature review. Nuffield Foundation. 2012, 86p. Disponívelem: http://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/files/Nuffield_CuP_FULL_REPORTv_FINAL.pdf. Acessado em 26.05.2016.

CAMPOS, Tânia; CARVALHO, José Ivanildo. Probabilidade nos anos iniciais da educação básica: contribuições de um programa de ensino. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana** – Em Teia, Recife, PE, v. 7, n. 1, 2016.

CARRAHER, Terezinha. **O método clínico usando os exames de Piaget**. 5. ed. – São Paulo: Cortez, 1998.

CARRAHER, Terezinha; CARRAHER, David; SCHLIEMANN, Ana Lúcia. **Na vida dez, na escola zero.** 10 ed. – São Paulo: Cortez, 1995.

FISCHBEIN, Efraim. **The intuitive sources of probabilistic thinking in children.** Dordrecht, 1975.

FONSECA, Maria da Conceição. **Educação matemática de jovens e adultos**. 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

GODINO, Juan; BATANERO, Maria Carmen; CAÑIZARES, Maria José. **Azar y probabilidad**. Madrid: Síntesis, 1991.

JANUARIO, Gilberto. **Currículo de matemática da educação de jovens e adultos**: análise de prescrições na perspectiva cultural da Matemática. (Dissertação: Pós-graduação em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2012.

JANUARIO, Gilberto; FREITAS, Adriano; LIMA, Katia. Pesquisas e documentos curriculares no âmbito da educação matemática de jovens e adultos. **Boletim de Educação Matemática** – Bolema, Rio Claro (SP), v. 28, n. 49, p. 536-556, ago. 2014.

LEITE, Maici; PESSOA, Cristiane; FERRAZ, Martha; BORBA, Rute. Softwares educativos e objetos de aprendizagem: um olhar sobre a análise combinatória. **Anais do X Encontro Gaúcho de Educação Matemática** – X EGEM. Ijuí, 2009.

LIMA, Ana Paula. **Princípio fundamental da contagem:** conhecimentos de professores de matemática sobre seu uso na resolução de situações combinatórias. (Dissertação: Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica). Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2015.

LIMA, Ewellen; BORBA, Rute. A determinação de espaços amostrais na resolução de problemas combinatórios na EJA. **Anais do VII Congresso Internacional de Ensino da Matemática** – CIEM. Canoas, 2017.

LIMA, Ewellen; BORBA, Rute. Relações entre o raciocínio combinatório e o probabilístico: como estão propostas em currículos prescritos? **Perspectivas da Educação Matemática** – INMA/UFMS, v. 10, n. 24, p. 816-833, 2017.

LIMA, Ewellen; SILVA, Angela. Conhecimentos matemáticos de estudantes da Educação de Jovens e Adultos: estatística, probabilidade, combinatória e porcentagem. **Anais do VII Encontro Pernambucano de Educação Matemática** – EPEM. Garanhuns, 2017.

LIMA, Priscila; BATISTA, Rita. A Contribuição da Teoria dos Campos Conceituais às Pesquisas em Educação Matemática: Um Olhar sobre Estudos Realizados no EDUMATEC-UFPE. **Anais da XIV Conferência Interamericana de Educação Matemática** – CIAEM.México, 2015.

LIMA, Rita de Cássia. **O raciocínio combinatório de alunos da educação de jovens e adultos:** do início da escolarização até o ensino médio**.** (Dissertação: Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica). Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2010.

LOPES, José Marcos; REZENDE, Josiane. Um novo jogo para o estudo do raciocínio combinatório e do cálculo de probabilidade. **Bolema: Boletim de Educação Matemática,** Rio Claro, SP, v. 23, n. 36, p. 657-682, ago. 2010.

MARTINS, Glauce; BORBA, Rute. Livros didáticos de alfabetização de jovens e adultos: um estudo sobre as estruturas multiplicativas. **Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática** – ENEM.Salvador, 2010.

MOREIRA, Marco. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. **Investigações em Ensino de Ciências**, v. 7(1), p. 7-29, 2002.

MORGADO, Augusto; PITOMBEIRA DE CARVALHO, João Bosco; PINTO DE CARVALHO, Paulo; FERNANDEZ, Pedro. **Análise combinatória e probabilidade**. Rio de Janeiro: Graftex, 1991.

NAVARRO-PELAYO, Virginia; BATANERO, Maria Carmen; GODINO, Juan. Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria. **Educación Matemática,** v.8(1), p. 26-39, 1996.

NÓBREGA, Giselda; SPINILLO, Alina. A noção de possível na probabilidade e na combinatória em estudantes do ensino fundamental**. Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**– Em Teia, Recife, PE, v. 7, n. 1, 2016.

NUNES, Terezinha; BRYANT, Peter. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

OLIVEIRA, Marta Kohl. Jovens e adultos como sujeitos de conhecimento e aprendizagem. **Revista brasileira de educação: Anped**. n.12, p. 59-73, 1999.

PERNAMBUCO. **Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco:** Parâmetros Curriculares de Matemática - Educação de Jovens e Adultos. Secretaria de Educação: 2012.

PESSOA, Cristiane. **Quem dança com quem:** o desenvolvimento do raciocínio combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio. (Tese. Pós-graduação em Educação). Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2009.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série*. p.105-150*. **Zetetiké: Revista de Educação Matemática**, Campinas, SP, v. 17, n. 31, dez. 2009.

ROCHA, Cristiane. **Formação docente e o ensino de problemas combinatórios:** diversos olhares, diferentes conhecimentos. (Dissertação: Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica). Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2011.

ROSEN, Kenneth. **Matemática discreta e suas aplicações.** São Paulo: McGraw-Hill, 2009.

SANTANA, Michaelle. **O acaso, o provável, o determinístico:** concepções e conhecimentos probabilísticos de professores do ensino fundamental. (Dissertação: Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica). Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2011.

SANTANA, Michaelle; BORBA, Rute. Como a probabilidade tem sido abordada nos livros didáticos de matemática de anos iniciais de escolarização. **Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática** – ENEM.Salvador, 2010.

SANTOS, Jaqueline. **A produção de significações sobre combinatória e probabilidade numa sala de aula do 6º ano do Ensino Fundamental a partir de uma prática problematizadora**. (Tese. Pós-graduação em Educação). Universidade São Francisco. Itatiba, 2015.

SCHLIEMANN, Ana Lúcia. A compreensão da análise combinatória: desenvolvimento, aprendizagem escolar e experiência diária. In: CARRAHER, Terezinha; CARRAHER, David; SCHLIEMANN, Ana Lúcia. **Na vida dez, na escola zero.** 10 ed. – São Paulo: Cortez, 1995.

SILVA, Rita de Cássia. **É a moeda que diz, não é a gente que quer não:** conhecimentos probabilísticos de crianças em situações de jogos. (Dissertação: Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica). Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2016.

SPIEGEL, Murray. **Probabilidade e estatística**. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1978.

VEGA, Danielle. **Qual mais fácil resolver com 2, 3 ou 4 etapas de escolha:** produto cartesiano, arranjo, combinação, ou permutação? (Dissertação. Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica). Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2014.

VERGNAUD, Gérard. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas Um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise Psicológica**, v. 1, p.75-90, 1986.

VERGNAUD, Gérard. **El niño, las matematicas y la realidad – Problemas de la enseñanza de las matematicas em la escuela primaria.** Mexico: Trillas, 1991.

VERGNAUD, Gérard. A Teoria dos Campos Conceptuais. In. BRUM, Jean, (org.) **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Horizontes Pedagógicos, p. 155-191, 1996.