



Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física

Márcio de Moura Cunha

Variantes do protocolo de teletransporte e troca de emaranhamento na presença de ruído

Recife

2017

Márcio de Moura Cunha

**Variantes do protocolo de teletransporte e troca de
emaranhamento na presença de ruído**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Roberto de Luna Parisio Filho

Recife

2017

Catálogo na fonte
Bibliotecário Jefferson Luiz Alves Nazareno CRB 4- 1758

C972v Cunha, Márcio de Moura.
Variantes do protocolo de teletransporte e troca de emaranhamento na
presença de ruído. / Márcio de Moura Cunha. – 2017
96 f. fig.

Orientador: Fernando Roberto de Luna Parísio Filho.
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN.
Física. Recife, 2017.
Inclui referências e apêndices.

1. Mecânica quântica 2. Informação quântica 3. Emaranhamento 4.
Teletransporte I. Parísio Filho, Fernando Roberto de Luna. (Orientador) II.
Título

530.12

CDD (22. ed.)

UFPE-FQ 2017-57

MÁRCIO DE MOURA CUNHA

**VARIANTES DO PROTOCOLO DE TELETRANSPORTE E
TROCA DE EMARANHAMENTO NA PRESENÇA DE RUÍDO**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Física.

Aprovada em: 20/10/2017.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Fernando Roberto de Luna Parisio Filho
Orientador
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Antônio Murilo Santos Macêdo
Examinador Interno
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Carlos Alberto Batista da Silva Filho
Examinador Interno
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Frederico Borges de Brito
Examinador Externo
Universidade de São Paulo

Prof. Dr. Renato Moreira Ângelo
Examinador Externo
Universidade Federal do Paraná

Agradecimentos

Agradeço a Deus por toda a sua bondade. Agradeço aos meus pais Cunha e Dení e demais familiares que sempre me incentivaram. Em especial a minha irmã Leilane, meus primos Alikson, Gláuber e Jr, a minha tia Deli, e aos meus avós Miguel (in memorian) e Zinda. Agradeço a minha esposa, Wanessa Luz, pelo companheirismo, amor e dedicação. Agradeço ao professor Fernando Parisio pela orientação, e pelas contribuições para a minha formação. Agradeço aos professores Fernando Moraes, Sérgio Azevedo, Alexandre Carvalho e Carlos Ribeiro por me incentivarem, na minha mudança para o Recife. Agradeço também ao Antônio Pádua, por todas as dicas. Na elaboração da tese, muitas foram as discussões realizadas no grupo de pesquisa. Assim, registro aqui a minha gratidão pelo convívio com os companheiros de grupo Alejo, George e Ari. Agradeço também aos meus amigos Antonio Fontenelle e Jesus Pavón, pelas longas horas de estudo, e pela amizade também fora do Campus. Aos amigos da graduação, pela amizade de sempre: Elias, Júlio, Mana, Rubens, Thiago e Raphael. Agraço à Terezinha, Nanda, Laura, Carlos, Jodavid, Luana, Pedro e Ramón pelo convívio fora do DF. Agradeço à secretaria da PG, pela eficiência em resolver as nossas demandas, em especial à Alexsandra. Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro, sem o qual esse trabalho não poderia ter sido realizado.

Resumo

O protocolo de teletransporte quântico e as operações de troca de emaranhamento podem ser usados para transferir informação e emaranhamento entre dois laboratórios distantes. Nesta tese, estudamos algumas variantes desses protocolos envolvendo estados tripartites e estados de um qutrit. Na primeira parte, estudamos o teletransporte de um estado emaranhado tripartite. Nós sabemos que canais compostos por pares de estados do tipo Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) podem ser usados para teletransportar estados multipartites arbitrários. Uma questão interessante é investigar se os canais EPR também são úteis mesmo quando aparecem imperfeições. Em particular, o teletransporte de um estado Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ) exige três estados EPR como o canal e medições completas na base de Bell. Nós mostramos que, usando dois estados GHZ como canal, é possível teletransportar qualquer estado desconhecido de três qubits da forma $c_0|000\rangle + c_1|111\rangle$. O teletransporte é feito através de medições na base GHZ e, para obter resultados determinísticos, na maioria dos cenários investigados, quatro dos oito elementos da base precisam ser inequivocamente distinguidos. Mais importante ainda, mostramos que, quando erros sistemáticos e ruído são considerados, a fidelidade do protocolo de teletransporte é maior quando um canal GHZ é usado em comparação com o caso onde um canal composto por pares EPR é utilizado. Por outro lado, é possível buscar generalizações para o protocolo de teletransporte quando o estado a ser enviado envolve mais dimensões que duas. Desta forma, na segunda parte desta tese, estudamos o teletransporte de um estado de um qutrit, $|\Psi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle + c_2|2\rangle$ na presença de alguns tipos de erros. Para isso, escrevemos operadores de Kraus e usamos um formalismo semelhante ao usado no teletransporte do estado de um qubit na presença de ruído.

Palavras-chave: Emaranhamento. Teletransporte. Ruído. Qubits. Qutrits.

Abstract

The quantum teleportation protocol (QTP) and the operations of entanglement swapping (ES) can be used to transfer information and entanglement between two distant labs. In this thesis, we study some variants of QTP and ES involving tripartite states and qutrits states. First, we study a quantum teleportation of a tripartite entangled state. We know that channels composed by Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) pairs are capable of teleporting arbitrary multipartite states. The question arises whether EPR channels are also optimal against imperfections. In particular, the teleportation of Greenberger-Horne-Zeilinger states (GHZ) requires three EPR states as the channel and full measurements in the Bell basis. We show that, by using two GHZ states as the channel, it is possible to transport any unknown three-qubit state of the form $c_0|000\rangle + c_1|111\rangle$. The teleportation is made through measurements in the GHZ basis, and, to obtain deterministic results, in most of the investigated scenarios, four out of the eight elements of the basis need to be unambiguously distinguished. Most importantly, we show that when both, systematic errors and noise are considered, the fidelity of the teleportation protocol is higher when a GHZ channel is used in comparison to that of a channel composed by EPR pairs. On the other hand, it is possible to search generalizations to the QTP when the state to be sent involves more dimensions than two. Thus, in the second part of this thesis, we study the quantum teleportation of a qutrit state, $|\Psi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle + c_2|2\rangle$ in the presence of some kinds of errors. For this, we write Kraus operators and use a formalism similar to the one used in the qubit teleportation in the presence of noise.

key words: Entanglement. Teleportation. Noise. Qubits. Qutrits.

Lista de ilustrações

Figura 1	– Esquema da troca de emaranhamento. Alice e Bob compartilham um estado emaranhado $ \Psi^+\rangle_{ab}$. No seu laboratório, Alice prepara um estado emaranhado $ \Phi^+\rangle_{cd}$. Depois, Alice faz uma medida na base EPR sobre as partículas a e c . Como consequência, as partículas b e d se tornam emaranhadas, embora não tenham interagido.	32
Figura 2	– Representação do esquema para teletransporte de um qubit. Alice e Bob compartilham um estado emaranhado (qubits 2 e 3). No seu laboratório, Alice tem um qubit (qubit 1), cujo estado desconhecido deseja enviar para Bob. Alice realiza uma medição na base EPR sobre os qubits 1 e 2, e depois informa o resultado para Bob, a partir de um canal clássico. Bob então realiza uma operação unitária sobre o qubit 3, e obtém o estado desejado.	33
Figura 3	– Esquema para o teletransporte do estado de polarização de um fóton (qubit), realizado probabilisticamente. Nesse caso, o protocolo é realizado com sucesso apenas quando o resultado da medida de Alice coincide com o estado do canal.	36
Figura 4	– Esquema para teletransporte de um estado de um qubit utilizando um estado GHZ. Um estado GHZ é compartilhado entre três usuários (qubits 2, 3 e 4). O objetivo do protocolo é teletransportar o estado do qubit 1. Para isso, é feita uma medida na base EPR sobre os qubits 1 e 2. Com isso, os qubits 3 e 4 ficam em um estado emaranhado tipo EPR. Se uma medição individual for realizada sobre um desses qubits, então o outro passa a ter o estado desejado após comunicação clássica e uma operação unitária adequada.	50
Figura 5	– Esquema 3-EPR. Alice deseja enviar um estado tipo GHZ (qubits 1, 3 e 5) para Bob. Para isto, eles compartilham 3 estados EPR, que são usados como canal. Alice realiza três medidas na base EPR, sobre os qubits 1 e 2, 3 e 4, e 5 e 6. Depois, ela informa por um meio clássico o resultado, e Bob aplica uma operação unitária sobre os qubits 7, 8 e 9, que passam a ter o estado desejado.	52
Figura 6	– Fidelidade média para o esquema 3-EPR como função do emaranhamento do canal e do emaranhamento dos estados da base de medição.	55

Figura 7 – Esquema 2-GHZ: Alice deseja enviar um estado tipo GHZ, nos qubits 1,3 e 5. Ela compartilha dois estados GHZ com Bob, nos qubits 2,6,8 e 4,7,9, respectivamente. Alice então realiza duas medidas na base GHZ, sobre os qubits 1,4,5 e 2,3,6. Depois, ela informa o resultado para Bob, que realiza uma operação unitária sobre os qubits, e obtém o estado desejado nos qubits 7,8 e 9.	56
Figura 8 – Fidelidade média para o esquema 2-GHZ como função do emaranhamento do canal e da base de medição	59
Figura 9 – Diferença entre as fidelidades 2-GHZ e 3-EPR.	59
Figura 10 – Diferença entre as fidelidades 3-EPR e 2-GHZ-PS para bit flip e $p = 0,07$. .	71
Figura 11 – Esquema híbrido: Para realizar o teletransporte de um estado tipo GHZ, podem ser usados dois estados GHZ como canal, e medições na base EPR. .	73
Figura 12 – Um possível esquema para o teletransporte de estado GHZ composto por quatro qubits.	74

Sumário

1	INTRODUÇÃO	11
2	FUNDAMENTOS	16
2.1	POSTULADOS DA MECÂNICA QUÂNTICA	16
2.2	OPERADOR DENSIDADE	18
2.3	EMARANHAMENTO	20
2.3.1	<i>ESTADOS E ESPAÇO DE HILBERT</i>	20
2.3.2	<i>O QUE É EMARANHAMENTO</i>	21
2.3.3	<i>MISTURAS PRÓPRIAS E IMPRÓPRIAS</i>	24
2.3.4	<i>TIPOS DE EMARANHAMENTO</i>	25
2.3.4.1	EMARANHAMENTO TRIPARTITE	26
2.3.5	<i>ORIGEM DO EMARANHAMENTO</i>	27
2.3.6	<i>CARACTERIZAÇÃO DO EMARANHAMENTO</i>	28
2.3.6.1	DECOMPOSIÇÃO DE SCHMIDT	29
2.3.6.2	CRITÉRIO DE PERES-HORODECKI	29
2.3.7	<i>MEDIDAS DE EMARANHAMENTO</i>	30
2.3.7.1	ENTROPIA DE EMARANHAMENTO	30
2.3.8	<i>TROCA DE EMARANHAMENTO</i>	31
2.4	EMARANHAMENTO COMO UM RECURSO: TELETRANSPORTE DO ESTADO DE UM QUBIT	33
2.4.1	<i>IMPLEMENTAÇÕES</i>	35
3	FERRAMENTAS	38
3.1	RUÍDO QUÂNTICO	38
3.1.1	<i>EVOLUÇÃO TEMPORAL DE SISTEMAS ABERTOS E FORMALISMO DE KRAUS</i>	39
3.1.1.1	BIT FLIP	41
3.1.1.2	PHASE FLIP	42
3.1.1.3	BIT-PHASE FLIP	42
3.1.1.4	DEPOLARIZING	43

3.1.1.5	AMPLITUDE DAMPING	43
3.1.1.6	RUÍDO EM ESTADOS EMARANHADOS	44
3.1.2	<i>TELETRANSPORTE DO ESTADO DE UM QUBIT NA PRESENÇA DE RUÍDO</i>	44
4	TELETRANSPORTE DE EMARANHAMENTO GHZ	50
4.1	ESQUEMA 3-EPR	52
4.2	ESQUEMA 2-GHZ	56
4.2.1	<i>COMPARAÇÃO ENTRE OS ESQUEMAS</i>	59
5	TELETRANSPORTE DE EMARANHAMENTO GHZ NA PRESENÇA DE RUÍDO	61
5.1	CANAIS EPR	62
5.1.1	<i>BIT FLIP</i>	62
5.1.2	<i>PHASE FLIP</i>	64
5.1.3	<i>BIT-PHASE FLIP</i>	65
5.1.4	<i>DEPOLARIZING</i>	65
5.1.5	<i>AMPLITUDE DAMPING</i>	65
5.2	CANAIS GHZ	66
5.2.1	<i>BIT FLIP</i>	66
5.2.2	<i>PHASE FLIP</i>	67
5.2.3	<i>BIT-PHASE FLIP</i>	67
5.2.4	<i>DEPOLARIZING</i>	67
5.2.5	<i>AMPLITUDE DAMPING</i>	68
5.2.6	<i>ESQUEMA 2-GHZ COM PÓS-SELEÇÃO</i>	68
5.3	<i>COMPARAÇÃO ENTRE OS ESQUEMAS</i>	71
5.3.1	<i>ESTRATÉGIAS POSSÍVEIS</i>	72
5.3.2	<i>ESQUEMA HÍBRIDO</i>	73
5.3.3	<i>SOBRE A ESCALABILIDADE</i>	74
6	TELETRANSPORTE DO ESTADO DE UM QUTRIT COM CANAIS RUIDOSOS	75
6.1	TRIT FLIP	79
6.2	PHASE FLIP	81

6.3	TRIT-PHASE FLIP	82
6.4	DEPOLARIZING	83
7	CONCLUSÕES	85
	REFERÊNCIAS	88
	APÊNDICE A – BASE GENERALIZADA GHZ	94
	APÊNDICE B – REPRESENTAÇÃO DE ESTADOS EM TERMOS DE OPERADORES	95
B.1	Base de Weyl	96

1 INTRODUÇÃO

“A resposta à Grande Questão
sobre a Vida, o Universo e Tudo
Mais é 42.”

Guia do Mochileiro das Galáxias

Entre o fim do século 19 e início do século 20, a física passou por inúmeras mudanças. Por um lado, a teoria eletromagnética sintetizada pelas equações de Maxwell, estava bem fundamentada e consistente com resultados experimentais, mas não concordava com o princípio da relatividade de Galileu. Isto levou ao desenvolvimento da teoria da relatividade especial, por Albert Einstein. Por outro lado, o problema do espectro de radiação térmica apresentava resultados experimentais inconsistentes com o tratamento clássico para a radiação, o que ficou conhecido na época como catástrofe do ultravioleta. Para resolver este problema, Max Planck propôs um modelo de interação matéria-radiação em que as trocas de energia só aconteciam em certas quantidades, mais especificamente, para múltiplos inteiros de uma quantidade fundamental, ou *quanta*. Estava assim lançado um dos alicerces para o desenvolvimento de uma nova teoria: A mecânica quântica. Posteriormente, o estudo do efeito fotoelétrico feito por Einstein, e a proposta de um novo modelo atômico por Niels Bohr, reforçaram a ideia de quantização na física. Por volta da década de 1920, já se tinham todos os principais ingredientes da nova teoria, com contribuições de Schroedinger, Heisenberg, Born, dentre outros. Até mesmo uma formulação relativística foi apresentada por Paul Dirac ainda nessa década. Sem dúvidas, a teoria quântica é uma das teorias mais bem testadas e aplicadas da física, sendo um dos pilares de diversas áreas da física contemporânea, e com fortes implicações no desenvolvimento científico e tecnológico. Além disso, em torno da teoria quântica, existem debates sobre questões fundamentais acerca do nosso entendimento da natureza, como a objetividade, o realismo e o problema de medição (JR; JR; BROMBERG, 2011). Com respeito a estes aspectos, os fundamentos da teoria são ainda alvo de bastante discussão. Um exemplo disto é que existem diversas interpretações da teoria quântica, no que se refere ao significado dos elementos da teoria (NETO, 2010).

Além disto, no mundo quântico, diversos conceitos podem causar estranheza à primeira vista, pois não possuem nenhuma correspondência com a física clássica, macroscópica e cotidiana.

Neste contexto, podemos destacar diversos conceitos amplamente discutidos pela comunidade desde os primórdios da teoria, como por exemplo a ideia de complementaridade, a dualidade onda-partícula, o colapso da função de onda, etc (WHITAKER, 2006),(AULETTA; PARISI, 2001) . Outros aspectos bastante interessantes, são a não-localidade quântica e o emaranhamento. Einstein, apesar de ser um dos precursores da teoria, se incomodou com o caráter não-local da teoria quântica. Juntamente com Boris Podolsky e Nathan Rosen, em 1935 ele questionou a completeza da teoria, no que ficou conhecido como paradoxo EPR (EINSTEIN; PODOLSKY; ROSEN, 1935).

Outro aspecto que vale mencionar, ainda neste contexto, é que também havia um certo descontentamento com a interpretação probabilística. Na física clássica, é possível estudar sistemas compostos por um grande número de subsistemas usando a mecânica estatística, sendo que cada subsistema segue as leis da mecânica clássica. Do mesmo modo, na época se acreditava que poderia haver uma teoria que reproduzisse os resultados da teoria quântica, considerando variáveis adicionais, e que o caráter probabilístico exibido até então, era porque não estavam sendo consideradas essas variáveis desconhecidas. Assim, em 1952, David Bohm sugere uma teoria de variáveis ocultas (ou variáveis escondidas) (BOHM, 1952), com resultados equivalentes aos da Mecânica Quântica.

Em 1964 John Bell (BELL, 1964), debruçando-se sobre o paradoxo EPR, e considerando como premissas básicas o realismo e a localidade, demonstrou que as previsões da teoria quântica não poderiam, em todos os cenários experimentais possíveis, concordar com teorias locais de variáveis ocultas. Para isso, ele estabeleceu desigualdades com o intuito de estudar a não-localidade sob um aspecto mais quantitativo (WISEMAN et al., 2014), (BELL; GAO, 2016). O primeiro experimento referente à não-localidade foi feito ainda na década de 1970 (FREEDMAN; CLAUSER, 1972). Posteriormente, Alain Aspect e colaboradores também realizaram testes experimentais acerca deste assunto (ASPECT; GRANGIER; ROGER, 1981), (ASPECT; DALIBARD; ROGER, 1982). A partir daí, diversos experimentos têm apontado de fato o caráter não-local da teoria, que Einstein associava à uma "ação fantasmagórica a distância". Isto tem sido investigado atualmente, com testes cada vez mais poderosos (HANDSTEINER et al., 2017), (ROSENFELD et al., 2017). De certa maneira, podemos dizer que, o que está por trás da não-localidade são correlações puramente quânticas, associadas à noção de emaranhamento (HORODECKI et al., 2009). Isto foi primeiramente evidenciado por Schroedinger ao explorar o trabalho de Einstein, Podolsky e Rosen sobre um outro ponto de vista (SCHRÖDINGER, 1935).

Vamos definir o que é emaranhamento matematicamente no próximo capítulo, mas antes disto, podemos dizer que, quando dois (ou mais) sistemas físicos estão em um estado emaranhado, só conseguimos descrever um estado conjunto $|\Psi\rangle$ para os dois entes, e não de cada uma das partes separadamente. Com o passar do tempo, se começou a perceber que o emaranhamento era mais do que um aspecto interessante do mundo quântico. Isto é, o emaranhamento, além de ter importância para os fundamentos da teoria em si, é também um importante ingrediente para aplicações. Particularmente, o emaranhamento pode ser usado como um recurso para a execução de protocolos de comunicação e computação, o que abriu uma efervescente área de pesquisa (BENNETT; DIVINCENZO, 2000). De fato, atualmente se sabe que o emaranhamento é um elemento primordial para a execução de determinadas tarefas. Vamos listar algumas delas. Ainda na década de 1990, por exemplo, Bennet e Wiesner (BENNETT; WIESNER, 1992) estudaram uma aplicação do emaranhamento quântico, que permite condensar a informação clássica. Este protocolo ficou conhecido como codificação superdensa (*superdense coding*), e foi realizado experimentalmente por Mattle e colaboradores quatro anos mais tarde (MATTLE et al., 1996). Em 1993, Bennet e colaboradores propuseram uma nova aplicação do emaranhamento: o protocolo de teletransporte de um estado quântico (BENNETT et al., 1993), onde um estado emaranhado é usado como canal para a transmissão de informação. Em 1997, o teletransporte foi realizado experimentalmente por Bouwmeester e colaboradores (BOUWMEESTER et al., 1997). Desde então, o teletransporte de um estado quântico tem sido um tópico vastamente estudado, com inúmeros avanços teóricos e experimentais (PIRANDOLA et al., 2015). O protocolo de teletransporte de um estado quântico nos permite perceber o quão poderosa é a mecânica quântica quando aplicada a problemas que envolvem envio de informação, pois o uso de protocolos quânticos permite a possibilidade de executar tarefas que não são possíveis usando sistemas clássicos. Isso poderá revolucionar a nossa maneira de estabelecer sistemas de comunicação. Usualmente, o caso do teletransporte de um estado de dimensão 2, que é conhecido na literatura como um estado de um *qubit*,

$$|\Psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle, \quad \text{com} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1 \quad (1.1)$$

é o que recebe mais atenção. O termo qubit é empregado para denotar um "bit quântico" (*quantum bit*). Em sistemas clássicos, a unidade básica de informação é o *bit*, que pode assumir os valores 0 ou 1. No caso quântico, temos o qubit, que pode estar em um estado de superposição de $|0\rangle$ e $|1\rangle$. É interessante também pensar em variantes do protocolo de teletransporte para o caso em que o estado a ser enviado não é um qubit. O caso imediatamente natural é o teletransporte de

um estado de dimensão 3, frequentemente chamado de estado de um *qutrit* (TIAN; SHI; ZHAO, 2011),

$$|\phi\rangle = a_0|0\rangle + a_1|1\rangle + a_2|2\rangle, \quad (1.2)$$

com $|a_0|^2 + |a_1|^2 + |a_2|^2 = 1$.

É possível também generalizar o protocolo para estudar o teletransporte de um estado de um *qudit*, isto é, um estado de dimensão arbitrária d (PATI; AGRAWAL, 2007). Por outro lado, é possível pensar em variantes do protocolo de teletransporte em que o estado a ser enviado envolve mais que um qubit, ou seja, estados de dois ou mais qubits (LU; GUO, 2000), inclusive a transferência de emaranhamento entre locais distantes. Isso pode ser bastante relevante, no sentido que trabalhar com estados emaranhados de vários qubits permite estudar como as diversas classes distintas de estados emaranhados podem ser usadas, e também abre novas possibilidades para o estudo de protocolos de comunicação entre multiusuários. Além disso, o uso de estados emaranhados com muitos qubits pode propiciar novas maneiras de se fazer o processamento de informação quântica em larga escala. Um exemplo disso é a computação quântica de "via única" (RAUSSENDORF; BROWNE; BRIEGEL, 2003). Do ponto de vista prático, tem sido um enorme desafio a execução de protocolos entre laboratórios separados por longas distâncias. No entanto, diversos progressos tem sido feitos. Em 2004, foi realizado o teletransporte do estado de um fóton por uma distância de 600 m. (URSIN et al., 2004). Em 2012, um grupo conseguiu executar o teletransporte de um estado e a distribuição de emaranhamento entre dois locais separados por uma distância de cerca de 100 km. (YIN et al., 2012). Em 2015, Herbst e colaboradores conseguiram transferir emaranhamento a uma distância superior a 100 km, entre as ilhas canárias La Palma e Tenerife (HERBST et al., 2015). Mais recentemente, foram reportados dois experimentos marcantes para o uso de emaranhamento envolvendo grandes distâncias. O primeiro deles se refere à distribuição de pares de fótons emaranhados (YIN et al., 2017). Os pesquisadores conseguiram, a partir de uma fonte a bordo de um satélite, distribuir dois fótons, um para a cidade de Lijiang, e o outro para Nanshan, ambas na China. No fim do processo, os fótons estavam em locais separados por cerca de 1200 km. O outro trabalho reportou a realização do teletransporte de um estado quântico de um laboratório na Terra para um satélite, localizado a cerca de 1400 quilômetros de distância (REN et al., 2017). Essas realizações mostram que, de fato, o emaranhamento pode revolucionar as comunicações em grandes distâncias.

Um outro aspecto relevante consiste em investigar os efeitos do ambiente na eficiência destes protocolos. Nenhum sistema físico, seja ele clássico ou quântico está completamente

isolado, no sentido que sempre existe alguma influência do ambiente no qual está inserido. Assim, em uma situação mais realística, diversos tipos de erros podem ocorrer. Podemos considerar, por exemplo, imperfeições no emaranhamento dos canais e também nos estados das bases de medição. Há também a presença de ruído, que pode afetar o estado a ser teletransportado, bem como o canal quântico utilizado, ou ambos. Estas considerações foram feitas em um estudo recente (FORTES; RIGOLIN, 2015). Todos estes aspectos que citamos acerca dos possíveis protocolos de teletransporte mostram que este é um tópico vasto, e interessante tanto do ponto de vista dos fundamentos da teoria quântica, quanto das possíveis aplicações.

Assim, ao longo da tese, vamos explorar algumas variantes do protocolo de teletransporte de um estado quântico. Mais explicitamente, vamos estudar o teletransporte de um estado emaranhado de três *qubits*, e também o teletransporte de um estado de um *qutrit*. Em ambos os casos, vamos ver como o uso de emaranhamento não-máximo, e também a presença de alguns tipos comuns de ruído podem afetar a eficiência do protocolo. A tese está organizada do seguinte modo: No capítulo 2, revisamos alguns conceitos essenciais para o desenvolvimento da tese. Discutiremos o conceito de emaranhamento, e definiremos alguns tipos de emaranhamento para variáveis discretas. Também revisaremos o caso do teletransporte do estado de um qubit, e depois, mencionamos algumas implementações reportadas na literatura. No capítulo 3 discutiremos brevemente uma forma de incluir alguns tipos de erro no protocolo de teletransporte de um estado de um qubit. Em particular, vamos ver como podemos descrever um canal ruidoso. No capítulo 4, apresentamos dois esquemas para teletransportar um estado emaranhado de três qubits, conhecido como estado Greenberger-Horne-Zeilinger, ou estado GHZ. Para os dois esquemas, trabalharemos com emaranhamento arbitrário nos canais e na base de medição. No capítulo 5, incluímos ruído na descrição destes esquemas. No capítulo 6, seguiremos em outra vertente, abordando o teletransporte de um estado de um *qutrit* incluindo alguns tipos de ruído. No capítulo 7, são feitas as considerações finais e discutimos algumas perspectivas.

2 FUNDAMENTOS

Neste capítulo, iremos discutir alguns tópicos necessários para um melhor entendimento do nosso trabalho. Vamos começar revisando os postulados da mecânica quântica. Depois, seguiremos com uma rápida discussão sobre o operador densidade. Por fim, vamos fazer uma revisão sobre a definição de emaranhamento e também de como podemos usá-lo para executar protocolos de teletransporte de estados.

2.1 POSTULADOS DA MECÂNICA QUÂNTICA

A teoria quântica pode ser apresentada de diversas maneiras. Frequentemente, ela é introduzida a partir de uma formulação baseada em alguns postulados (ZETTILI, 2009). Estes postulados são ingredientes fundamentais da teoria, de modo que permitem uma abordagem em pleno acordo com os resultados experimentais e métodos teóricos. A seguir, vamos listar de maneira breve tais postulados, com o intuito de termos um ponto de partida sólido, e que poderemos nos referir posteriormente (nos limitaremos a sistemas de dimensão finita).

P1: Em um certo instante t_0 , o estado de um sistema físico é descrito completamente por um *ket* $|\Psi(t_0)\rangle$, que pertence a um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$.

P2 : Qualquer grandeza física mensurável A é descrita por um operador Hermitiano $\hat{A}$ que atua no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Diz-se que $\hat{A}$ é um observável.

P3 : O único resultado possível para uma medição de uma quantidade física A é um dos autovalores do observável $\hat{A}$.

P4 : Quando é realizada a medição de uma quantidade física A em um sistema descrito pelo *ket* normalizado $|\Psi\rangle$, a probabilidade $p(a_n)$ de obtermos o resultado a_n (autovalor de $\hat{A}$) é dada por

$$p(a_n) = \sum_{k=1}^{g_n} |\langle \Psi | u_n^k \rangle|^2, \quad (2.1)$$

onde g_n se refere ao grau de degenerescência de a_n e $|u_n^k\rangle$ é um conjunto de *kets* ortonormais que geram o subespaço degenerado. Podemos ainda escrever que

$$p(a_n) = \langle \Psi | \hat{P}_n^\dagger \hat{P}_n | \Psi \rangle = \langle \Psi | \hat{P}_n | \Psi \rangle, \quad (2.2)$$

onde $\hat{P}_n = \sum_{k=1}^{g_n} |u_n^k\rangle \langle u_n^k|$ é o projetor.

P5 : Se o resultado da medição discutida no postulado anterior for, de fato, a_n , então o estado do sistema após a medição se torna

$$|\Psi'\rangle = \frac{\hat{P}_n |\Psi\rangle}{\sqrt{p(a_n)}}. \quad (2.3)$$

P6 : O vetor de estado $|\Psi(t)\rangle$ evolui no tempo de acordo com a equação de Schroedinger:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\Psi(t)\rangle, \quad (2.4)$$

onde $\hat{H}(t)$ é o operador hamiltoniano, associado à energia do sistema.

P7 : O vetor de estado para um sistema que consiste de várias partículas idênticas deve ser completamente simétrico para bósons, e completamente anti-simétrico no caso de férmions.

Estes postulados nos dizem como pode ser feita a descrição de um sistema quântico, estabelecendo as regras básicas da teoria. Os postulados nos dizem quais são os estados possíveis, e como evoluem no tempo, o que podemos medir, e com quais probabilidades. Apesar de consistirem em um conjunto muito bem estabelecido de regras básicas, a interpretação dos postulados pode ser bastante variada no que se refere ao significado físico. Nosso objetivo é usar os postulados para termos uma noção de como podemos lidar com os estados quânticos, e o que podemos fazer com eles. Assim, não estamos preocupados com as diversas interpretações decorrentes deles. Dito isto, podemos ver que os postulados P1 e P7 dizem respeito aos estados quânticos em si. Os postulados P2, P3 e P4 se referem à medição. O postulado P5 se refere à medição e também à evolução temporal. Por fim, o postulado P6 está relacionado à evolução temporal de um estado.

2.2 OPERADOR DENSIDADE

Frequentemente, usamos um vetor de estado $|\Psi\rangle$ para especificar o estado de um sistema quântico. Quando isso é possível, temos o que é conhecido como um estado puro. Vamos considerar o estado

$$|\Psi\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle. \quad (2.5)$$

Pela regra de Born, sabemos que a e b estão relacionados com a probabilidade de obtermos o resultado $+1$ ou o resultado -1 , respectivamente, quando medimos $\hat{\sigma}_z$. Tais probabilidades são ditas probabilidades quânticas. Em princípio, não há como melhorar a nossa descrição para o resultado desta medida. No mundo clássico, diferentemente, podemos melhorar a descrição a partir de modelos mais refinados. No entanto, mesmo no contexto da mecânica quântica, podem surgir situações em que aparecem probabilidades clássicas. Por exemplo, na preparação sucessiva de estados de polarização de um fóton, vamos dizer que em 60% das vezes é preparado um estado de polarização horizontal $|H\rangle$ e 40% das vezes é preparado um estado de polarização vertical $|V\rangle$. Como representar corretamente o estado do ensemble? Poderíamos pensar em escrever algo do tipo $|\Psi'\rangle = 0.6|H\rangle + 0.4|V\rangle$. No entanto, isto leva a um equívoco. Se por exemplo, escolhermos fazer a medição em uma outra base, por exemplo

$$|H\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle), \quad |V\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle) \quad (2.6)$$

teríamos $|\Psi'\rangle = (1/\sqrt{2})(|+\rangle - 0.2|-\rangle)$, o que leva a uma descrição a probabilidades diferentes. Vamos ver como remediar isto. As probabilidades associadas com a preparação do estado são clássicas. Assim, dado um estado, o valor médio de um observável deve conter informação a respeito dessa probabilidade, com o intuito de usá-la como uma ponderação. Particularmente, para o caso aqui considerado, o valor médio de um observável $\hat{A}$ é corretamente escrito como

$$\langle\hat{A}\rangle = 0,6\langle H|\hat{A}|H\rangle + 0,4\langle V|\hat{A}|V\rangle. \quad (2.7)$$

De forma mais geral, podemos dizer que

$$\langle\hat{A}\rangle = \sum_{i=1}^n p_i \langle\Psi_i|\hat{A}|\Psi_i\rangle, \quad (2.8)$$

onde p_i representa o peso estatístico (clássico) de cada estado individual $|\Psi_i\rangle$. Aqui, n representa o número de estados usados na decomposição.

Seja $\{|k\rangle\}$ uma base do espaço de Hilbert. Então,

$$\sum_{k=1}^N |k\rangle \langle k| = \hat{I}. \quad (2.9)$$

Com isso, podemos reescrever a expressão para o valor médio como

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_{i=1}^n p_i \langle \Psi_i | \sum_{k=1}^N |k\rangle \langle k| \hat{A} | \Psi_i \rangle; \quad (2.10)$$

Podemos ainda escrever que

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_{k=1}^N \langle k | \left[\sum_{i=1}^n p_i |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i| \right] \hat{A} | k \rangle. \quad (2.11)$$

Podemos perceber que o termo entre colchetes diz respeito apenas ao sistema. De fato, este termo descreve completamente o sistema. Deste modo, se define

$$\hat{\rho} = \sum_{i=1}^n p_i |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i| \quad (2.12)$$

como o **operador densidade**.

Em termos do operador densidade, podemos dizer que

$$\langle \hat{A} \rangle = Tr(\hat{\rho} \hat{A}). \quad (2.13)$$

Assim, de modo mais geral, o estado de um sistema é descrito pelo operador densidade. Quando o estado é uma mistura estatística de vários outros, com a probabilidade p_i descrevendo o quanto o sistema "tem" de cada estado, se diz que o estado é misto. Quando há apenas uma probabilidade $p_1 = 1$, o estado é dito puro. Claramente, $\sum_i p_i = 1$. Ou seja,

$$Tr(\hat{\rho}) = 1. \quad (2.14)$$

Outro aspecto importante é que $\hat{\rho}$ é positivo definido:

$$\langle \Psi_i | \hat{\rho} | \Psi_i \rangle \geq 0, \quad (2.15)$$

para todo estado puro $|\Psi_i\rangle$. Para estados puros, temos que

$$\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}, \quad Tr(\hat{\rho}^2) = 1. \quad (2.16)$$

Para estados mistos, $Tr(\hat{\rho}^2) < 1$. Assim, o cálculo do traço de $\hat{\rho}^2$ mede a "pureza" do estado. Fisicamente, o formalismo do operador densidade se aplica em situações onde existam *ensembles*,

ou, como já dissemos, quando queremos levar em conta efeitos da preparação de um estado repetidas vezes. Por esta razão, consideramos este formalismo para a descrição dos protocolos estudados na tese: o operador densidade é bastante adequado para considerar imperfeições e acomodar alguns tipos de erro.

2.3 EMARANHAMENTO

2.3.1 ESTADOS E ESPAÇO DE HILBERT

O primeiro postulado da mecânica quântica (ZETTILI, 2009) diz que o estado de um sistema arbitrário pode ser descrito por um vetor de estado, ou *ket* $|\Psi\rangle$. Mais especificamente, o *ket* $|\Psi(t_0)\rangle$ pertence a um espaço vetorial abstrato sobre o corpo dos complexos, munido de produto interno, chamado de espaço de Hilbert, que denotaremos por $\mathcal{H}$. Assim, neste espaço algumas propriedades devem ser satisfeitas. Em primeiro lugar, podemos dizer que qualquer combinação linear de vetores neste espaço (mesmo que seja de infinitos vetores), é também um vetor que pertence ao espaço. Por exemplo, se $|\Psi\rangle$ e $|\phi\rangle$ pertencem a um espaço de Hilbert, então a combinação

$$a|\Psi\rangle + b|\phi\rangle \in \mathcal{H}, \quad (2.17)$$

onde os coeficientes a e b são complexos. Além disso, é possível definir um produto interno, de maneira análoga à definição do produto escalar entre dois vetores. O produto interno é escrito como

$$\langle\Psi|\phi\rangle = \langle\phi|\Psi\rangle^*, \quad (2.18)$$

onde o símbolo $*$ indica o complexo conjugado. Para qualquer *ket* $|\phi\rangle$, o produto $\langle\phi|\phi\rangle$ leva a um número real, qualquer que seja o vetor $|\phi\rangle$. O produto interno tem a seguinte propriedade:

$$\langle\phi|[a_1|\Psi_1\rangle + a_2|\Psi_2\rangle] = a_1\langle\phi|\Psi_1\rangle + a_2\langle\phi|\Psi_2\rangle. \quad (2.19)$$

Devemos ainda ter em mente que o resultado do produto interno é semi-positivo definido, ou seja, $\langle\phi|\phi\rangle \geq 0$. Geralmente, é conveniente escrever um vetor de estado em termos de uma base $|\phi_n\rangle$. Assim,

$$|\Psi\rangle = \sum_n c_n |\phi_n\rangle. \quad (2.20)$$

Nesta expressão, a soma vai de 1 até a dimensão d do espaço de Hilbert correspondente. Os coeficientes c_n são as componentes do *ket* $|\Psi\rangle$ com respeito à base $|\phi_n\rangle$. Esta noção de superposição, quando aplicada a um estado composto, como por exemplo o estado conjunto de duas partículas, nos permite chegar ao conceito de emaranhamento. Assim, vamos ampliar a nossa visão e estudar as implicações do primeiro postulado no contexto de um espaço de Hilbert composto.

2.3.2 O QUE É EMARANHAMENTO

O emaranhamento (HORODECKI et al., 2009) é um dos aspectos mais interessantes da Teoria Quântica. Ao longo da tese, vamos trabalhar bastante com este conceito, e, assim, vamos fazer uma breve discussão do que é o emaranhamento. De forma simples, podemos dizer que um estado quântico de um sistema pode ser classificado como um estado separável ou como um estado emaranhado. Vamos pensar em um estado composto de duas partículas. Por exemplo, podemos pensar no estado de dois fótons independentes. Vamos imaginar que em dois laboratórios distintos, A e B, podem ser gerados fótons. Vamos dizer que em A está Alice, e em B, Bob. Alice é capaz de preparar fótons com polarização $|H\rangle$ ou $|V\rangle$, por exemplo. Bob, em seu laboratório, também consegue preparar fótons com estes estados de polarização. De acordo com o primeiro postulado da mecânica quântica, o estado de um sistema físico em um instante t é dado por um vetor de estado Ψ , que pertence a um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Um fóton de Alice pode então estar no estado

$$|\Psi\rangle_A = a|H\rangle_A + b|V\rangle_A, \quad (2.21)$$

uma superposição dos estados $|V\rangle$ e $|H\rangle$. Aqui, estamos considerando que $|V\rangle$ e $|H\rangle$ são ortogonais. Sabemos que a probabilidade de Alice obter o estado $|H\rangle$ após uma medição é

$$p(H_A) = |\langle H|\Psi\rangle_A|^2 = |a|^2. \quad (2.22)$$

Para o estado $|V\rangle$,

$$p(V_A) = |\langle V|\Psi\rangle_A|^2 = |b|^2 = 1 - |a|^2. \quad (2.23)$$

De modo análogo, o fóton de Bob pode estar no estado

$$|\Psi\rangle_B = c|H\rangle_B + d|V\rangle_B, \quad (2.24)$$

com

$$p(H_B) = |\langle H | \Psi \rangle_B|^2 = |c|^2. \quad (2.25)$$

e

$$p(V_B) = |\langle V | \Psi \rangle_B|^2 = |d|^2 = 1 - |c|^2. \quad (2.26)$$

Até aqui, escrevemos o estado de um fóton de Alice e também de um fóton de Bob a partir da ideia básica do primeiro postulado. Se os dois laboratórios estão afastados um do outro, e da forma que estamos vendo aqui, os estados $|\Psi\rangle_A$ e $|\Psi\rangle_B$ são independentes. Isto é, podemos escrever qualquer um deles sem mencionar o outro. E se olharmos para o que acontece nos dois laboratórios de uma só vez, o que podemos dizer? Ora, podemos escrever um estado geral como o produto tensorial

$$|\Psi\rangle = |\Psi\rangle_A \otimes |\Psi\rangle_B. \quad (2.27)$$

Aqui, $|\Psi\rangle$ é o estado produto entre o estado do fóton de Alice e o estado do fóton de Bob.

O vetor de estado $|\Psi\rangle$ pertence a um novo espaço de Hilbert, dado por $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Explicitamente,

$$|\Psi\rangle = \left(a|H\rangle_A + b|V\rangle_A \right) \otimes \left(c|H\rangle_B + d|V\rangle_B \right), \quad (2.28)$$

ou ainda

$$|\Psi\rangle = ac|H\rangle_A|H\rangle_B + ad|H\rangle_A|V\rangle_B + bc|V\rangle_A|H\rangle_B + bd|V\rangle_A|V\rangle_B. \quad (2.29)$$

Podemos simplificar a notação e escrever

$$|\Psi\rangle = ac|HH\rangle_{AB} + ad|HV\rangle_{AB} + bc|VH\rangle_{AB} + bd|VV\rangle_{AB}. \quad (2.30)$$

Assim, dado o estado $|\Psi\rangle$ na forma (2.30), é possível escrevê-lo na forma (2.27). Em particular, todo estado composto (de duas partes)¹ que pode ser escrito como (2.27) é chamado de um **estado separável**. A partir da equação (2.30), é possível escrevermos as probabilidades conjuntas para os eventos que ocorrem nos dois laboratórios. Por exemplo, a probabilidade

¹ Quando um estado composto tem duas partes, frequentemente é chamado de estado bipartite

$P(HH)_{AB}$ de Alice obter o resultado $|H\rangle_A$ e Bob obter $|H\rangle_B$ é dada por

$$P(HH)_{AB} = |ac|^2 = |\langle H|_A \langle H|_B |\Psi\rangle|^2. \quad (2.31)$$

Como os eventos são independentes, temos que

$$P(HH)_{AB} = |ac|^2 = |a|^2 |c|^2 = P(H)_A P(H)_B. \quad (2.32)$$

De modo similar, podemos dizer que

$$P(HV)_{AB} = |ad|^2, \quad P(VH)_{AB} = |bc|^2, \quad P(VV)_{AB} = |bd|^2. \quad (2.33)$$

Até agora, fizemos a suposição de que o estado dos fótons de Alice e Bob são superposições de $|H\rangle$ e $|V\rangle$. No entanto, uma outra situação possível é considerar, por exemplo, que

$$|\Psi\rangle_A = |H\rangle_A, \quad |\Psi\rangle_B = |H\rangle_B, \quad (2.34)$$

De modo que

$$|\Phi\rangle_1 = |HH\rangle_{AB}. \quad (2.35)$$

O estado dado por (2.35) é um estado possível, que pertencente ao espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Do mesmo modo, o estado dado por

$$|\Phi\rangle_2 = |VV\rangle_{AB} \quad (2.36)$$

é também um estado possível. Assim, pelo primeiro postulado, um estado dado pela combinação linear de (2.35) e (2.36) é também um estado possível em $\mathcal{H}$:

$$|\Phi\rangle = \alpha |HH\rangle_{AB} + \beta |VV\rangle_{AB}. \quad (2.37)$$

Para este estado, é impossível escrever uma versão da equação (2.27). Ou seja, para este caso, temos

$$|\Phi\rangle \neq |\Psi\rangle_A \otimes |\Psi\rangle_B. \quad (2.38)$$

Isto é, este estado não é separável, de modo que não é possível escrevê-lo como o produto de dois estados. Assim, se diz que a equação (2.37) se refere a um estado **emaranhado**. Em tal situação, é impossível falar no vetor de estado do fóton de Alice e no vetor de estado do fóton de Bob separadamente: o que existe é um estado comum, que descreve os dois fótons.

É importante ressaltar que o conceito de emaranhamento não se restringe a sistemas bipartites. De fato, pode-se falar em emaranhamento para estados com mais de duas partes. Para um sistema com n partes (ou n -partite), temos que

$$|\Psi\rangle \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \dots \otimes \mathcal{H}_n \equiv \otimes_{i=1}^n \mathcal{H}_i. \quad (2.39)$$

Dizemos que o estado $|\Psi\rangle$ é separável quando é possível escrever

$$|\Psi\rangle = |\Psi\rangle_1 \otimes |\Psi\rangle_2 \otimes \dots \otimes |\Psi\rangle_n. \quad (2.40)$$

Se um estado n -partite qualquer não pode ser escrito como um produto na forma (2.40), então o estado é emaranhado. Até aqui, trabalhamos com estados puros, isto é, aqueles que podem ser representados por *kets*. Para estados mistos, no que diz respeito ao emaranhamento, se diz que um estado misto bipartite é emaranhado (PLACEK; BUTTERFIELD, 2012) quando não é possível escrevê-lo na forma

$$\hat{\rho} = \sum_j p_j \rho_A^{(j)} \otimes \rho_B^{(j)}, \quad (2.41)$$

onde $\hat{\rho}$ é um operador linear que atua no espaço $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, $\sum_j p_j = 1$ e $p_j > 0$. Esta definição pode ser estendida para sistemas com n partes (multipartite).

2.3.3 MISTURAS PRÓPRIAS E IMPRÓPRIAS

Quando definimos o operador densidade, associamos probabilidades clássicas a um sistema quântico. Da forma como definimos, se diz que as misturas são próprias. Ou seja, misturas próprias são aquelas decorrentes do fato de há uma mistura de estados. No entanto, como veremos a seguir, é possível falar em outro tipo de mistura, proveniente de outra situação. O operador densidade é muito útil para estudar subsistemas de um sistema composto. Por exemplo, seja

$$\hat{\rho}_{AB} = \hat{\rho} \otimes \hat{\sigma} \quad (2.42)$$

o estado de um sistema composto, com

$$\hat{\rho} = \sum_{a'} p_{a'} |a'\rangle \langle a'|, \quad \hat{\sigma} = \sum_{b'} p_{b'} |b'\rangle \langle b'|. \quad (2.43)$$

Se quisermos estudar apenas o subsistema, tomamos o traço parcial sobre o segundo sistema:

$$\hat{\rho}_A = Tr_B (\hat{\rho}_{AB}). \quad (2.44)$$

Mais explicitamente,

$$Tr_B (\hat{\rho}_{AB}) = Tr_B \left(\sum_{a'} p_{a'} |a\rangle \langle a'| \otimes \sum_{b'} p_{b'} |b\rangle \langle b'| \right) \equiv \sum_{a'} p_{a'} |a\rangle \langle a'| Tr \left(\sum_{b'} p_{b'} |b\rangle \langle b'| \right). \quad (2.45)$$

O resultado da operação leva a $\hat{\rho}_A$, que é chamado operador densidade reduzido. Agora, temos condições de examinar o operador densidade reduzido de um estado bipartite. Vamos considerar o estado $|\Psi\rangle = (1/\sqrt{2})(|00\rangle + |11\rangle)$. O operador densidade correspondente é dado por $\hat{\rho} = |\Psi\rangle \langle \Psi|$. Explicitamente,

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \left(|00\rangle \langle 00| + |00\rangle \langle 11| + |11\rangle \langle 00| + |11\rangle \langle 11| \right). \quad (2.46)$$

Vamos considerar a operação de traço parcial sobre o segundo qubit, de modo a olhar para o operador densidade reduzido do primeiro qubit.

$$\hat{\rho}_1 = \langle 0|_2 \hat{\rho} |0\rangle + \langle 1|_2 \hat{\rho} |1\rangle_2. \quad (2.47)$$

Isto leva a

$$\hat{\rho}_1 = \frac{1}{2} |0\rangle \langle 0| + \frac{1}{2} |1\rangle \langle 1|. \quad (2.48)$$

Este estado é uma mistura, mas que vem de uma situação física completamente diferente que a tratada quando definimos o operador densidade. Aqui, $\hat{\rho}_1$ é dita uma mistura imprópria. Este tipo de mistura é uma característica marcante do emaranhamento.

2.3.4 TIPOS DE EMARANHAMENTO

De acordo com a quantidade de partes que compõem um sistema, é possível ter emaranhamento de diferentes tipos (ou classes). Vamos listar os tipos de emaranhamento para o caso de variáveis discretas (como por exemplo, polarização, spin, etc.) Para sistemas bipartites, só

existe um tipo de emaranhamento genuíno com respeito a aplicação de operações unitárias locais, associado aos estados EPR (também conhecidos como estados de Bell) (HORODECKI et al., 2009),

$$|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|00\rangle \pm |11\rangle], \quad |\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|10\rangle \pm |01\rangle]. \quad (2.49)$$

Dado um estado EPR, pode ser obtido qualquer um dos outros três, a partir de operações locais. Por exemplo, dado o estado $|\Phi^+\rangle$, é possível obter o estado $|\Psi^+\rangle$ a partir da aplicação da operação unitária $\hat{\sigma}_x$ sobre o primeiro (ou sobre o segundo) qubit. Quando um sistema tem mais de duas partes, então podem existir classes distintas de emaranhamento. Experimentalmente, já foram obtidos estados emaranhados de 5 partes (ZHAO et al., 2004), 8 partes (HUANG et al., 2011), (YAO et al., 2012) e até mais (MONZ et al., 2011).

2.3.4.1 EMARANHAMENTO TRIPARTITE

No caso de um sistema composto por 3 partes, existem duas classes distintas de emaranhamento genuíno (DÜR; VIDAL; CIRAC, 2000): estados W e estados GHZ. Um estado de uma dessas classes não pode ser convertido em um estado da outra classe a partir de operações locais e comunicação clássica (o que é conhecido na literatura como SLOCC- *Stochastic Local operations and classical communication*). Um estado do tipo W tem a forma

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} [|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle]. \quad (2.50)$$

Pode-se construir uma base de estados W com operações unitárias de um qubit neste estado (MORENO; CUNHA; PARISIO, 2016). A outra classe de emaranhamento tripartite corresponde aos estados GHZ (Greenberger-Horne-Zeilinger) (GREENBERGER et al., 1990). Um estado GHZ tem a forma

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|000\rangle + |111\rangle]. \quad (2.51)$$

A partir deste estado, é possível gerar uma base GHZ a partir de operações unitárias de um qubit. Explicitamente, esses estados são

$$|GHZ_1^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|000\rangle \pm |111\rangle), \quad |GHZ_2^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|001\rangle \pm |110\rangle) \quad (2.52)$$

$$|GHZ_3^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|010\rangle \pm |101\rangle), \quad |GHZ_4^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|011\rangle \pm |100\rangle). \quad (2.53)$$

Para examinar mais de perto as diferenças entre as duas classes, vamos considerar a operação de traço parcial sobre o terceiro qubit de um estado $|W\rangle$ e também de um estado $|GHZ\rangle$.

Um cálculo simples permite dizer que

$$\hat{\rho}_{12} = Tr_3(|W\rangle\langle W|) = \frac{2}{3}|\Psi^+\rangle\langle\Psi^+| + \frac{1}{3}|00\rangle\langle 00|. \quad (2.54)$$

Já para o estado GHZ, temos que

$$\hat{\rho}_{12} = Tr_3(|GHZ\rangle\langle GHZ|) = \frac{1}{2}|00\rangle\langle 11| + \frac{1}{2}|11\rangle\langle 11|. \quad (2.55)$$

Assim, no caso de emaranhamento W, o operador densidade reduzido dos qubits 1 e 2 contém emaranhamento EPR. No entanto, no caso de emaranhamento GHZ, a mesma operação leva a um estado maximamente misturado, separável.

Particularmente, ao longo da tese iremos trabalhar com emaranhamento tripartite do tipo GHZ. Os estados GHZ foram propostos teoricamente para estudar a não-localidade além do que o teorema de Bell alcançava (GREENBERGER; HORNE; ZEILINGER, 1989). Pela primeira vez, foi possível falar em uma condição de não-localidade sem uma analogia com a estatística clássica (sem desigualdades). Uma observação experimental de emaranhamento GHZ foi feita por D. Bouwmeester e colaboradores (BOUWMEESTER et al., 1999). Posteriormente, foram feitos outros testes experimentais, como em (PAN et al., 2000) e (ZHAO et al., 2003) (para um estado do tipo GHZ de 4 partes). Atualmente, a preparação de estados deste tipo tem sido realizada experimentalmente (NEELEY et al., 2010). Esquemas para a análise de estados GHZ podem ser vistos em (PAN; ZEILINGER, 1998), (QIAN; FENG; GONG, 2005) e (WANG et al., 2013). Em (WEINSTEIN, 2009), é apresentado um esquema para detecção de emaranhamento W e GHZ. Para estados com um número maior que três partes, existem outros tipos de estados emaranhados, como por exemplo os estados de Dicke (KIESEL et al., 2007), (PREVEDEL et al., 2009), os estados tipo Brown (BROWN et al., 2005), e estados do tipo *cluster* (KIESEL et al., 2005).

2.3.5 ORIGEM DO EMARANHAMENTO

Até agora, discutimos os aspectos mais matemáticos do emaranhamento. Por outro lado, é importante termos uma noção de como o emaranhamento se manifesta, isto é, qual a sua origem física. Uma das maneiras de produzir emaranhamento é a partir da interação entre dois (ou mais sistemas).

Como um exemplo, vamos considerar que duas partículas de spin $1/2$ podem interagir segundo o hamiltoniano

$$\hat{H}^{ab} = \lambda (\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z), \quad (2.56)$$

onde λ é uma constante de acoplamento, relacionada à intensidade da interação (SCHUMACHER; WESTMORELAND, 2010). Iremos supor que inicialmente o estado conjunto das duas partículas seja

$$|\Psi(t_0)\rangle = |+\rangle_x |+\rangle_x = \frac{1}{2} (|++\rangle + |+-\rangle + |-+\rangle + |--\rangle). \quad (2.57)$$

Vamos considerar que o hamiltoniano $\hat{H}^{ab}$ atua por um tempo $t = \pi\hbar/4\lambda$. Então, o operador evolução temporal é

$$\hat{U}^{ab} = \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z\right). \quad (2.58)$$

Posteriormente, o estado será

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}^{ab} |\Psi(t_0)\rangle = \frac{1}{2} \left[e^{-i\pi/4} |++\rangle + e^{i\pi/4} |+-\rangle + e^{i\pi/4} |-+\rangle + e^{-i\pi/4} |--\rangle \right]; \quad (2.59)$$

Após algumas manipulações, é possível reescrever este estado como

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{(1-i)}{2} [|+\rangle |+\rangle_x + i |-\rangle |-\rangle_x]. \quad (2.60)$$

Deste modo, o estado final claramente é um estado emaranhado, como resultado da interação considerada.

2.3.6 CARACTERIZAÇÃO DO EMARANHAMENTO

O emaranhamento está relacionado com a não-separabilidade de um estado composto, como já vimos. Mas, dado um estado $|\Psi\rangle$ qualquer, como saber se este é um estado emaranhado? Nem sempre é possível afirmar que um estado é ou não emaranhado de forma direta. Assim, existem métodos para verificar se um estado é emaranhado. Em situações práticas, para estados puros, pode-se usar alguma desigualdade de Bell para verificar se um dado estado apresenta ou não emaranhamento. Para verificar se um estado puro bipartite é emaranhado, de modo mais formal, pode-se usar a *decomposição de Schmidt* (PATHAK, 2013), que discutiremos a seguir.

2.3.6.1 DECOMPOSIÇÃO DE SCHMIDT

Dado um estado puro bipartite $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, é sempre possível escrever este estado como

$$|\Psi\rangle = \sum_j \lambda_j |j\rangle |\tilde{j}\rangle, \quad (2.61)$$

onde $|j\rangle$ e $|\tilde{j}\rangle$ são estados ortonormais em $\mathcal{H}_A$ e $\mathcal{H}_B$ respectivamente. Os coeficientes λ_j são números reais não-negativos, e são chamados de coeficientes de Schmidt. Eles satisfazem a relação $\sum_j \lambda_j = 1$. O número de coeficientes não-nulos é chamado de número de Schmidt do estado $|\Psi\rangle$, e por si só é uma quantidade que pode ser usada como um indicador de emaranhamento. Um estado emaranhado de dois qubits, por exemplo, tem número de Schmidt igual a 2. Já um estado separável, também dois qubits, apresenta um número de Schmidt igual a 1. Para estados mistos, há o critério de Peres-Horodecki (PERES, 1996), (HORODECKI; HORODECKI; HORODECKI, 1996) para verificar se um estado é emaranhado.

2.3.6.2 CRITÉRIO DE PERES-HORODECKI

Vamos considerar um estado misto bipartite $\hat{\rho}$. É possível dizer que, se $\hat{\rho}$ é tal que

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}^\dagger, \quad \hat{\rho} \geq 0, \quad \text{Tr}(\hat{\rho}) = 1, \quad (2.62)$$

então a operação de transposição leva a $\hat{\rho}^T$, tal que

$$\hat{\rho}^T = (\hat{\rho}^\dagger)^T, \quad \hat{\rho}^T \geq 0, \quad \text{Tr}(\hat{\rho}^T) = 1. \quad (2.63)$$

Agora, vamos considerar o estado $\hat{\rho} = \sum_j p_j \hat{\rho}_j^A \otimes \hat{\rho}_j^B$. Podemos representar $\hat{\rho}$ como uma matriz, com elementos dados por

$$\rho_{k\mu\ell\nu} = \sum_j p_j (\hat{\rho}_j^A)_{k\ell} (\hat{\rho}_j^B)_{\mu\nu}. \quad (2.64)$$

Podemos definir uma outra matriz, tal que

$$\sigma_{k\mu,\ell\nu} \equiv \rho_{\ell m,k\nu}, \quad (2.65)$$

que corresponde à uma transposição parcial. Se $\hat{\rho}$ for separável, então

$$\hat{\sigma} = \sum_j p_j (\hat{\rho}_j^A)^T \otimes \hat{\rho}_j^B \quad (2.66)$$

deve permanecer como um operador positivo. Se verificarmos que $\hat{\sigma}$ não é um operador positivo, então ρ é não-separável (emaranhado). Esse critério é suficiente para detectar emaranhamento

em geral, mas é necessário e suficiente apenas para dois sistemas com dimensões 2×2 (dois qubits) ou 3×2 (um qutrit e um qubit).

2.3.7 MEDIDAS DE EMARANHAMENTO

Outro aspecto também importante, é saber o quanto um estado tem de emaranhamento, isto é, como podemos quantificar o emaranhamento de um estado? Para quantificar emaranhamento, não existe uma única medida. Além disso, a quantificação de emaranhamento de um estado qualquer é ainda uma questão em aberto. Vamos então olhar para o caso bipartite. Qualquer medida $E(\rho)$ de emaranhamento deve satisfazer algumas condições:

- i) $E(\rho)$ é uma mapa, tal que $\rho \rightarrow E(\rho) \geq 0$.
- ii) $E(\rho) = 0$ se o estado é separável.
- iii) $E(\rho)$ não pode crescer devido a operações locais e comunicação clássica (LOCC). Para estados puros bipartites, pode-se usar a *entropia de emaranhamento* (VEDRAL et al., 1997).

2.3.7.1 ENTROPIA DE EMARANHAMENTO

A entropia de emaranhamento é um quantificador de emaranhamento para sistemas bipartites puros, e é definida em termos da entropia de Von Neumann. Uma discussão detalhada sobre a entropia de Von Neumann pode ser vista em (MAZIERO, 2015). De forma resumida, podemos dizer que a entropia de Von Neumann nos informa o quanto um estado se distancia de ser puro. A entropia de Von Neumann é dada por

$$S(\hat{\rho}) = -\text{Tr}(\hat{\rho} \log_2 \hat{\rho}). \quad (2.67)$$

A entropia de Von Neumann é nula para um estado puro, e máxima quando o estado é maximamente misturado. Vamos agora considerar um estado puro $|\Psi\rangle$, com a seguinte decomposição de Schmidt:

$$|\Psi\rangle = \sum_{\ell} c_{\ell} |\ell\rangle |\tilde{\ell}\rangle \quad (2.68)$$

O operador densidade correspondente é

$$\hat{\rho}_{AB} = \sum_{\ell m} c_{\ell} c_m^* |\ell\rangle |\tilde{\ell}\rangle \langle m| \langle \tilde{m}|. \quad (2.69)$$

A entropia de Von Neumann para este estado é

$$S(\hat{\rho}_{AB}) = -\text{Tr}_{AB}(\hat{\rho}_{AB} \log_2 \hat{\rho}_{AB}) = 0. \quad (2.70)$$

Por outro lado, os operadores densidade reduzidos são dados por

$$\hat{\rho}_A = \sum_{\ell} |c_{\ell}|^2 |\ell\rangle \langle \ell|, \quad \hat{\rho}_B = \sum_{\tilde{\ell}} |c_{\tilde{\ell}}|^2 |\tilde{\ell}\rangle \langle \tilde{\ell}|. \quad (2.71)$$

Se agora, calcularmos a entropia de Von Neumann para estes estados, ela será não nula. Ou seja, a entropia de Von Neumann do estado reduzido indica a quantidade de emaranhamento do estado composto. Assim, define-se como entropia de emaranhamento do estado $E(\hat{\rho}_{AB})$ a quantidade dada por

$$E(\hat{\rho}_{AB}) \equiv S(\hat{\rho}_A) = S(\hat{\rho}_B). \quad (2.72)$$

Vamos calcular a entropia de emaranhamento de um estado separável. Seja o estado $|\Psi\rangle = |\chi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B$ no espaço $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Seja $\{|v_j\rangle\}$ uma base ortonormal em $\mathcal{H}_B$. Então, podemos escrever que

$$\hat{\rho}_A = Tr_B \hat{\rho}_{AB} = \sum_k \langle v_k | \hat{\rho}_{AB} | v_k \rangle, \quad (2.73)$$

onde $\hat{\rho}_{AB} = |\chi\rangle \langle \chi|_A \otimes |\phi\rangle \langle \phi|_B$. Assim,

$$\hat{\rho}_A = \sum_k |\langle v_k | \phi \rangle|^2 |\chi\rangle \langle \chi|_A, \quad (2.74)$$

que implica em $S(\hat{\rho}_A) = 0$. De forma análoga, é possível mostrar que $S(\hat{\rho}_B) = 0$. Vamos fazer o mesmo cálculo para um estado emaranhado $|\Psi\rangle = a|00\rangle + b|11\rangle$. O operador densidade correspondente é

$$\hat{\rho}_{AB} = |a|^2 |00\rangle \langle 00| + ab^* |00\rangle \langle 11| + a^* b |11\rangle \langle 00| + |b|^2 |11\rangle \langle 11|. \quad (2.75)$$

O operador densidade reduzido $\hat{\rho}_A$ é

$$\hat{\rho}_A = Tr_B(\hat{\rho}_{AB}) = |a|^2 |0\rangle \langle 0|_A + |b|^2 |1\rangle \langle 1|_A. \quad (2.76)$$

Nesse caso, temos que

$$S(\hat{\rho}_A) = -|a|^2 \log_2 |a|^2 - |b|^2 \log_2 |b|^2. \quad (2.77)$$

Para sistemas mistos de dois qubits, é utilizada uma quantidade conhecida como *concorrência* (WOOTTERS, 2001).

2.3.8 TROCA DE EMARANHAMENTO

O emaranhamento pode ser transferido para sistemas distantes que não interagiram entre si, a partir do procedimento conhecido como troca de emaranhamento, ou *entanglement*

swapping (ZUKOWSKI et al., 1993). Isto pode ser feito do seguinte modo: Vamos considerar que dois usuários em dois laboratórios distintos compartilham um estado emaranhado do tipo $|\Psi^+\rangle_{ab}$, onde a partícula a está no primeiro laboratório, e b está no segundo. No laboratório 1, é preparado um estado, com duas outras partículas, c e d , dado por $|\Phi^+\rangle_{cd}$.

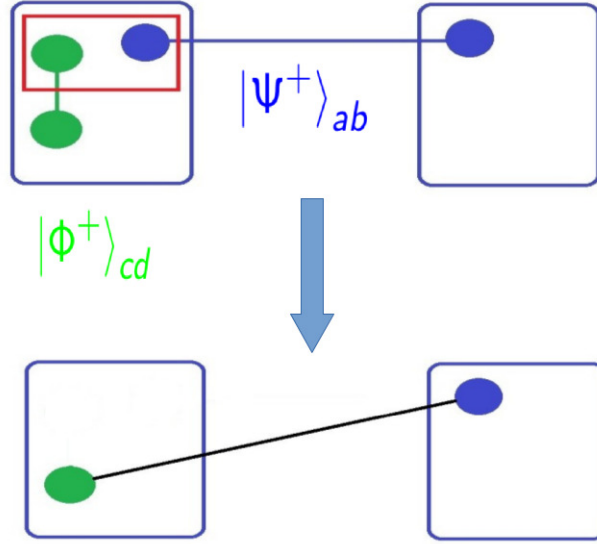


Figura 1 – Esquema da troca de emaranhamento. Alice e Bob compartilham um estado emaranhado $|\Psi^+\rangle_{ab}$. No seu laboratório, Alice prepara um estado emaranhado $|\Phi^+\rangle_{cd}$. Depois, Alice faz uma medida na base EPR sobre as partículas a e c . Como consequência, as partículas b e d se tornam emaranhadas, embora não tenham interagido.

O estado geral das 4 partículas, nos dois locais é

$$|\Psi^+\rangle_{ab} |\Phi^+\rangle_{cd} = \frac{1}{2} [|\Phi^+\rangle |\Phi^+\rangle + |\Psi^+\rangle |\Psi^+\rangle + |\Phi^-\rangle |\Phi^-\rangle + |\Psi^-\rangle |\Psi^-\rangle]_{acbd}. \quad (2.78)$$

Esta expressão indica que, se no laboratório 1 for feita uma medição na base EPR sobre as partículas a e c , então as partículas b e d se tornam emaranhadas, mesmo sem haver uma interação entre elas. Deste modo, o procedimento de troca de emaranhamento pode ser usado para emaranhar qubits separados por longas distâncias. Uma demonstração experimental da troca de emaranhamento pode ser vista em (PAN et al., 1998). Recentemente, foi realizada a troca de emaranhamento envolvendo estados GHZ (SU et al., 2016).

2.4 EMARANHAMENTO COMO UM RECURSO: TELETRANSPORTE DO ESTADO DE UM QUBIT

Vamos revisar de forma breve o teletransporte do estado de um qubit.

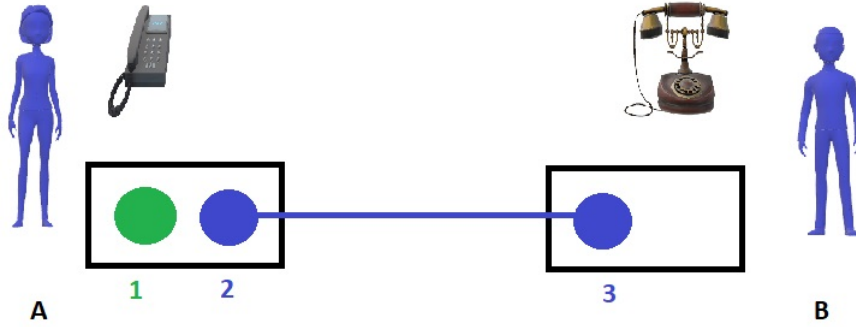


Figura 2 – Representação do esquema para teletransporte de um qubit. Alice e Bob compartilham um estado emaranhado (qubits 2 e 3). No seu laboratório, Alice tem um qubit (qubit 1), cujo estado desconhecido deseja enviar para Bob. Alice realiza uma medição na base EPR sobre os qubits 1 e 2, e depois informa o resultado para Bob, a partir de um canal clássico. Bob então realiza uma operação unitária sobre o qubit 3, e obtém o estado desejado.

Para a execução do protocolo de teletransporte, consideramos que dois usuários, Alice e Bob, estão em dois laboratórios distintos, A e B, respectivamente. Alice possui dois qubits: o qubit 1, cujo estado desconhecido ela deseja enviar para Bob, e o qubit 2, que faz parte de um estado EPR, compartilhado com Bob. Por sua vez, Bob dispõe do qubit 3 em seu laboratório. O objetivo do protocolo é que, ao fim, o estado do qubit 3 passe a ser o estado inicial do qubit 1. Com o intuito de fazer uma descrição que possa acomodar protocolos mais gerais (por exemplo, emaranhamento imperfeito) vamos usar operadores densidade. O estado do qubit 1 é dado por

$$|\phi\rangle_1 = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle = \sum_{j=0}^1 c_j|j\rangle. \quad (2.79)$$

O operador densidade correspondente é

$$\hat{\rho}_1 = |\phi\rangle\langle\phi| = \sum_{jk} c_j c_k^* |j\rangle\langle k|. \quad (2.80)$$

O estado emaranhado usado como canal é dado por

$$|\Phi^+\rangle_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|00\rangle + |11\rangle \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\ell=0}^1 |\ell\ell\rangle_{23}. \quad (2.81)$$

O operador densidade correspondente é

$$\hat{\rho}_{23} = \frac{1}{2} \sum_{\ell m} |\ell\ell\rangle \langle mm|. \quad (2.82)$$

O estado geral do sistema de três qubits é

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_{23}; \quad (2.83)$$

Mais explicitamente,

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \sum_{jk\ell m} c_j c_k^* |j, \ell\rangle_{12} |\ell\rangle_3 \langle k, m|_{12} \langle m|_3. \quad (2.84)$$

O próximo passo é considerar a medição feita por Alice sobre os qubits 1 e 2 na base EPR. Vamos denotar os estados da base como

$$|\Phi_\lambda^\mu\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k'=0}^1 (-1)^{\mu k'} |k', k' \oplus \lambda\rangle, \quad (2.85)$$

onde o símbolo $\oplus$ indica uma soma modular, tal que $k' \oplus \lambda \equiv k' + \lambda \pmod{2}$. A tabela a seguir mostra a correspondência entre a notação utilizada e os quatro estados EPR.

μ	λ	estado
0	0	$ \phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(00\rangle + 11\rangle)$
0	1	$ \psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(01\rangle + 10\rangle)$
1	0	$ \phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(00\rangle - 11\rangle)$
1	1	$ \psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(01\rangle - 10\rangle)$

Tabela 1 – Base EPR ideal.

Após a medição, o estado do qubit de Bob é

$$\hat{\rho}_3 = \frac{Tr_{12} [\hat{P} \hat{\rho} \hat{P}^\dagger]}{Tr(\hat{P} \hat{\rho})}, \quad (2.86)$$

onde $\hat{P} = |\Phi_\lambda^\mu\rangle \langle \Phi_\lambda^\mu|$ é o projetor associado à medição na base de Bell, e Tr_{12} indica a operação de traço parcial sobre os qubits 1 e 2. A probabilidade de cada resultado (μ, λ) é dada por

$$P = P(\mu, \lambda) = Tr(\hat{P} \hat{\rho}). \quad (2.87)$$

É importante notar que os resultados são equiprováveis, de modo que $P(\mu, \lambda) = 1/4 \forall \mu, \lambda$. De maneira mais explícita, podemos escrever que

$$\hat{\rho}_3 = \hat{\rho}_3(\mu, \lambda) = \sum_{jk=0}^1 (-1)^{\mu(j+k)} c_j c_k^* |j \oplus \lambda\rangle_3 \langle k \oplus \lambda|_3. \quad (2.88)$$

Este estado está condicionado ao resultado da medida feita por Alice (o estado está escrito em termos de μ, λ). Assim, para determinados *outputs*, este estado ainda não será o estado desejado. Isto é, se Alice obtém um estado diferente de $|\Phi^+\rangle$, que corresponde à $\mu = \lambda = 0$, Bob precisa aplicar uma operação unitária para obter o estado inicial do primeiro qubit de Alice. Esta operação é dada por

$$\hat{U} = \hat{U}_{\mu\lambda} = \hat{\sigma}_z^\mu \hat{\sigma}_x^\lambda = \sum_{q'} (-1)^{\mu q'} |q'\rangle \langle q' \oplus \lambda|. \quad (2.89)$$

Após a aplicação da transformação unitária, o estado se torna

$$\hat{\rho}_f = \hat{U} \hat{\rho}_3 \hat{U}^\dagger = \sum_{jk} c_j c_k^* |j\rangle \langle k|. \quad (2.90)$$

Assim, o qubit 3 passa a ter exatamente o estado que era inicialmente do qubit 1 após a aplicação da transformação unitária. No próximo capítulo, vamos olhar para situações onde, mesmo após a aplicação da transformação unitária, Bob não obtém o estado desejado de forma perfeita. Em tal situação, o estado chega deformado, e isso pode ocorrer devido ao uso de canais com emaranhamento imperfeito, ou à presença de ruído, por exemplo.

2.4.1 IMPLEMENTAÇÕES

A primeira implementação experimental do protocolo de teletransporte foi realizada em 1997 (BOUWMEESTER et al., 1997). A figura a seguir, mostra um esquema parecido com o apresentado no artigo original.

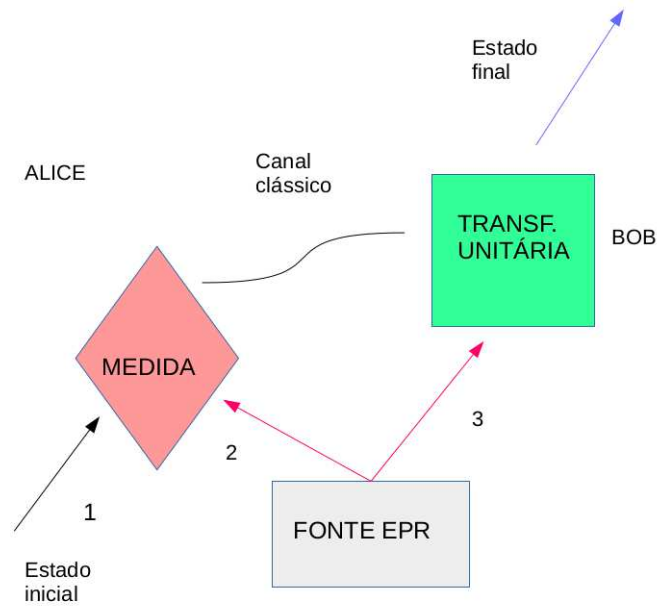


Figura 3 – Esquema para o teletransporte do estado de polarização de um fóton (qubit), realizado probabilisticamente. Nesse caso, o protocolo é realizado com sucesso apenas quando o resultado da medida de Alice coincide com o estado do canal.

Nesse experimento, os autores utilizam um estado singlete

$$|\Psi^-\rangle_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) \quad (2.91)$$

como canal quântico. Este estado é produzido a partir de uma fonte, que produz pares de fótons emaranhados. Mais precisamente, o grau de liberdade utilizado nesse esquema é a polarização do fóton. Este estado se refere aos fótons que chamamos de 2 e 3. Enquanto o fóton 2 é levado para Alice, o 3 vai para o lado de Bob. O fóton cujo estado se deseja teletransportar é o fóton 1. Alice então realiza uma medição na base EPR, e depois deve informar para Bob o resultado, como já discutimos anteriormente. No entanto, uma dificuldade marcante nesse primeiro experimento foi a execução da medida na base EPR. Com a tecnologia vigente na época, só se conseguia distinguir o estado $|\Psi^-\rangle$ dos demais estados EPR. Assim, para os outros três estados de Bell, não era possível afirmar o estado dos dois fótons. Dessa maneira, o protocolo foi realizado de forma probabilística. Ou seja, havia uma probabilidade de 1/4 de se obter sucesso. Nesse caso, quando a medida feita por Alice fornecia o estado $|\Psi^-\rangle$, o fóton de Bob já se encontrava no estado desejado, pois a transformação unitária para esse resultado é trivial (a identidade). Para qualquer resultado diferente, Alice e Bob não levavam o protocolo adiante.

Depois desse experimento, uma nova implementação foi realizada por outro grupo em 1998 (BOSCHI et al., 1998). Nessa nova proposta, foi utilizado o emaranhamento de caminho

(*path entanglement*, ou *k-vector entanglement*), tornando possível fazer a distinção entre os quatro estados de uma base análoga à base EPR, o que permite a realização de um protocolo determinístico. Isto é, para qualquer resultado obtido por Alice, é possível informar para Bob com precisão o resultado, corrigir o estado e obter sucesso na realização do protocolo.

Outras duas realizações de um protocolo determinístico foram reportadas em 2004, mas desta vez usando um sistema atômico (BARRETT et al., 2004), (RIEBE et al., 2004). Posteriormente, em 2006, foi implementado um protocolo determinístico envolvendo luz e átomos (SHERSON et al., 2006). Mais especificamente, nesse experimento, um estado quântico é codificado em um pulso de luz, e é teletransportado para um *ensemble* atômico. Voltando às implementações com sistemas ópticos (polarização), vale salientar que o problema de distinguir os estados de Bell foi também bastante atacado. Por exemplo, em 2011 foi proposto um esquema que tem uma taxa de 75% de sucesso em discriminar um estado da base de Bell usando apenas elementos de ótica linear (GRICE, 2011). Se interações não-lineares forem usadas, é possível distinguir todos os estados da base. Em 2001, foi reportada a realização do teletransporte de um estado com uma medição desse tipo (KIM; KULIK; SHIH, 2001). Com esses exemplos, queremos mostrar que, embora as dificuldades experimentais sejam inevitáveis, a tecnologia e o conhecimento experimental avançam em um ritmo acelerado. Desse modo, pensar em protocolos de um ponto de vista teórico, não deve ser negligenciado, pois a realização experimental pode se tornar factível com o tempo.

3 FERRAMENTAS

3.1 RUÍDO QUÂNTICO

Neste capítulo, vamos abordar de forma breve o formalismo que usaremos para lidar com o ruído quântico. Mais precisamente, iremos usar este formalismo no protocolo de teletransporte de um estado quântico, para incluir ruído no canal. Além disso, vamos introduzir a notação que será usada nos próximos capítulos.

No capítulo anterior, vimos que o primeiro postulado da mecânica quântica, quando considerado para sistemas compostos, nos permite definir estados emaranhados. Por outro lado, o postulado da evolução temporal nos diz que um estado $|\Psi(t)\rangle$ evolui no tempo segundo a equação de Schroedinger. No entanto, quando consideramos sistemas abertos, estudar a evolução de um sistema se torna uma tarefa mais complicada, pois a evolução não é necessariamente unitária. De modo genérico, podemos dizer que um estado $\hat{\rho}$ evolui da segundo a equação de Liouville-von Neumann (BREUER; PETRUCCIONE, 2002):

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}]. \quad (3.1)$$

Aqui, $\hat{\rho} \in \mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_E$ é o estado composto do sistema s de interesse e do ambiente E . Por simplificação, pode-se supor que inicialmente o estado composto é separável: $\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}_s \otimes \hat{\rho}_E$. A evolução temporal pode fazer com que o estado composto se torne emaranhado. Resolver esta equação, em geral, é algo não-trivial, pois pode haver diversos efeitos de ruído. Um exemplo bastante sofisticado de dinâmica de um sistema composto pelo sistema de interesse mais o ambiente, onde o ambiente pode ser modelado como um reservatório, é o modelo de Caldeira-Legget (CALDEIRA; LEGGETT, 1981). Nesta seção, vamos abordar uma possível descrição quântica do ruído. Na literatura, existem diversos métodos para o tratamento do ruído quântico (GARDINER; HAKEN, 1991), com uso de equações mestras, integração funcional, operadores de Lindblad, etc (WISEMAN; MILBURN, 2009), (EXNER, 2012), (WALLS; MILBURN, 2007). No entanto, para o nosso interesse ao longo desta tese, será suficiente o uso de um formalismo simples, que pode ser usado quando estamos interessados em alguns tipos comuns de erros que podem ocorrer na execução de algumas tarefas no contexto de comunicação e computação quântica. Particularmente, nosso objetivo é chegar ao formalismo dos operadores de Kraus

(KRAUS, 1971), que usaremos para introduzir ruído nos protocolos que estudaremos mais adiante.

3.1.1 *EVOLUÇÃO TEMPORAL DE SISTEMAS ABERTOS E FORMALISMO DE KRAUS*

Ao estudarmos um sistema físico qualquer, a depender do caso, podemos ou não considerar efeitos da vizinhança ou do ambiente onde o sistema está inserido. Na realidade, nenhum sistema está completamente isolado, no sentido que está imerso em algum ambiente e pode interagir com ele. Nesta seção, o nosso objetivo é discutir brevemente uma maneira de levar em conta a influência do ambiente em um sistema quântico. Vamos considerar um sistema de interesse, que denotaremos por S . Seja E o ambiente, que consiste em todos os graus de liberdade que não pertencem ao sistema. Podemos supor que inicialmente o ambiente esteja em um estado puro $|\chi\rangle$. Isto é possível porque um estado pode ser sempre purificado com a introdução de graus de liberdade extras (KLEINMANN et al., 2006). Com isso, fixamos a condição externa ao sistema. Em geral, se um sistema é descrito por um estado puro, a interação deste com outros graus de liberdade, tende a tornar o estado misto (BENNETT et al., 1996). Deste modo, iremos trabalhar desde o início com um operador densidade. Seja $\hat{\rho}_0$ o estado inicial do sistema. Após interagir com o ambiente, a evolução temporal de S é dada por

$$\hat{\rho}' = \text{Tr}_E[\hat{U}(\hat{\rho} \otimes |\chi\rangle\langle\chi|)\hat{U}^\dagger], \quad (3.2)$$

onde $\hat{U}$ é operador de evolução, que atua no sistema como um todo (sistema de interesse e ambiente). Esta operação pode ser vista como um mapa no espaço dos operadores que atuam no espaço de Hilbert do sistema.

$$\varepsilon : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}), \quad (3.3)$$

tal que

$$\hat{\rho} \rightarrow \hat{\rho}' \equiv \varepsilon(\hat{\rho}_0). \quad (3.4)$$

Aqui, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ denota o espaço de Hilbert-Schmidt.

Como a operação é feita sobre um operador, frequentemente ε é chamado de superoperador. Além disso, ε satisfaz às seguintes propriedades:

- i) $\varepsilon(c\hat{\rho}) = c\varepsilon(\hat{\rho})$, onde $c = cte$.
- ii) $\varepsilon(\hat{\rho} + \hat{\sigma}) = \varepsilon(\hat{\rho}) + \varepsilon(\hat{\sigma})$.
- iii) $Tr(\hat{\rho}) = Tr[\varepsilon(\hat{\rho})]$.

Assim, o mapa preserva o traço e é linear. Além disso, o mapa mantém a positividade: $\langle \Psi | \varepsilon | \Psi \rangle \geq 0$, para $|\Psi\rangle$ é um estado puro qualquer. Um aspecto relevante do formalismo de Kraus é a possibilidade de representar o mapa ε sem mencionar o ambiente explicitamente, a partir da decomposição de Kraus do mapa. Vamos considerar uma base $\{|v_j\rangle\}$ no espaço $\mathcal{H}_E$, e definir operadores em $\mathcal{H}_S$, tal que

$$\hat{A}_j |\phi\rangle = \langle v_j | \hat{U} |\phi, \chi\rangle \quad \forall |\phi\rangle \in \mathcal{H}_S. \quad (3.5)$$

Agora, vamos manipular a expressão para $\varepsilon(\hat{\rho})$.

$$\varepsilon(\hat{\rho}) = Tr_E \left[\hat{U} (\hat{\rho} \otimes |\chi\rangle \langle \chi|) \hat{U}^\dagger \right]; \quad (3.6)$$

Vamos escrever $\hat{\rho} = \sum_k p_k |k\rangle \langle k|$. Com isso,

$$\begin{aligned} \varepsilon(\hat{\rho}) &= \sum_j \langle v_j | \hat{U} \left(\sum_k p_k |k\rangle \langle k| \otimes |\chi\rangle \langle \chi| \right) \hat{U}^\dagger |v_j\rangle; \\ &= \sum_{j,k} p_k \langle v_j | \hat{U} |k, \chi\rangle \langle k, \chi| \hat{U}^\dagger |v_j\rangle; \\ &= \sum_{j,k} p_k \hat{A}_j |k\rangle \langle k| \hat{A}_j^\dagger = \sum_j \hat{A}_j \left(\sum_k p_k |k\rangle \langle k| \right) \hat{A}_j^\dagger. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Assim,

$$\varepsilon(\hat{\rho}) = \sum_j \hat{A}_j \hat{\rho} \hat{A}_j^\dagger. \quad (3.8)$$

Os operadores $\{\hat{A}_k\}$ são chamados de operadores de Kraus. Eles satisfazem a relação de completudeza

$$\sum_j \hat{A}_j^\dagger \hat{A}_j = \hat{I}. \quad (3.9)$$

A partir deste ponto, podemos usar operadores de Kraus para descrever alguns tipos de ruído usualmente presentes em protocolos de informação quântica. Desta maneira, podemos considerar o efeito do ruído de um modo pragmático, sem fazer menção aos detalhes do ambiente

no qual o sistema de interesse está inserido. A seguir, escrevemos os operadores de Kraus para alguns tipos de ruído, e vamos ver como o estado de um qubit, dado por

$$|\phi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \quad (3.10)$$

é alterado. Para usar o formalismo de Kraus, vamos escrever o estado de um qubit em termos de um operador densidade para um estado puro $\hat{\rho} = |\phi\rangle\langle\phi|$. Explicitamente,

$$\hat{\rho} = |a|^2 |0\rangle\langle 0| + ab^* |0\rangle\langle 1| + a^*b |1\rangle\langle 0| + |b|^2 |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} |a|^2 & ab^* \\ a^*b & |b|^2 \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Sob a ação do ruído, o estado será modificado segundo o mapa

$$\varepsilon(\hat{\rho}) = \sum_{j=1}^n \hat{A}_j \hat{\rho} \hat{A}_j^\dagger, \quad (3.12)$$

onde n é o número de operadores de Kraus necessários para modelar a ação do ruído considerado. Este tópico pode ser visto com mais detalhes em (NIELSEN; CHUANG, 2000).

3.1.1.1 BIT FLIP

Este ruído está associado ao seguinte erro em um qubit:

$$|0\rangle \rightarrow |1\rangle, \quad |1\rangle \rightarrow |0\rangle. \quad (3.13)$$

Assumiremos que a probabilidade de ocorrência de um erro deste tipo é dada por p . Então, a probabilidade de que o estado não seja alterado será dada por $(1 - p)$. Se o estado não é alterado, então podemos dizer que o operador identidade atuou sobre o estado. Por outro lado, se ocorre o erro, podemos dizer que, efetivamente, o operador $\hat{\sigma}_x$ atuou sobre o estado. Levando em conta as respectivas probabilidades, podemos escrever os operadores de Kraus como

$$\hat{A}_1 = \sqrt{1-p}\hat{I}, \quad \hat{A}_2 = \sqrt{p}\hat{\sigma}_x, \quad (3.14)$$

onde $\hat{A}_1$ está relacionado com a possibilidade de que o estado não se altere, e $\hat{A}_2$ está associado com o erro. Assim, dado um estado de um qubit, $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$, este evolui da seguinte maneira:

$$|\psi\rangle\langle\psi| \rightarrow (1-p)|\psi\rangle\langle\psi| + p\hat{\sigma}_x|\psi\rangle\langle\psi|\hat{\sigma}_x^\dagger. \quad (3.15)$$

Explicitamente,

$$\varepsilon(\hat{\rho}) = \begin{pmatrix} (1-p)|a|^2 + p|b|^2 & (1-p)ab^* + pa^*b \\ (1-p)a^*b + pab^* & (1-p)|b|^2 + p|a|^2 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

3.1.1.2 PHASE FLIP

Este tipo de ruído está associado à seguinte situação:

$$|0\rangle \rightarrow |0\rangle, \quad |1\rangle \rightarrow -|1\rangle, \quad (3.17)$$

que é uma mudança de fase.

Como este ruído está relacionado ao ganho de uma fase relativa, é um processo genuinamente quântico, sem análogo clássico.

Os operadores de Kraus correspondentes são

$$\hat{A}_1 = \sqrt{1-p}\hat{I}, \quad \hat{A}_2 = \sqrt{p}\hat{\sigma}_z. \quad (3.18)$$

Explicitamente,

$$\varepsilon(\hat{\rho}) = \begin{pmatrix} |a|^2 & (1-2p)ab^* \\ (1-2p)a^*b & |b|^2 \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

A partir desta expressão, podemos ver que apenas os termos de coerência são afetados. Mais especificamente, podemos dizer que o *phase flip* é um modelo paradigmático para a descoerência, pois a ação deste ruído pode acabar com a superposição quântica de um estado. Além disso, este ruído descreve a perda de informação em um estado, mas sem que haja perda de energia (caso haja uma diferença de energia entre os estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$). De fato, as probabilidades de que o sistema esteja no estado $|0\rangle$ ou $|1\rangle$ não são alteradas.

3.1.1.3 BIT-PHASE FLIP

O bit flip e o phase flip podem acontecer de forma combinada. Nesta situação, acontece o "flip" e também a mudança de fase:

$$|0\rangle \rightarrow i|1\rangle, \quad |1\rangle \rightarrow -i|0\rangle. \quad (3.20)$$

Os operadores de Kraus correspondentes são

$$\hat{A}_0 = \sqrt{1-p}\hat{I}, \quad \hat{A}_1 = \sqrt{p}\hat{\sigma}_y. \quad (3.21)$$

Após a ação do ruído, o estado se torna

$$\varepsilon(\hat{\rho}) = \begin{pmatrix} (1-p)|a|^2 + p|b|^2 & (1-p)ab^* - pa^*b \\ (1-p)a^*b - pab^* & (1-p)|b|^2 + p|a|^2 \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

3.1.1.4 DEPOLARIZING

Este tipo de ruído representa uma combinação de vários possíveis erros. Novamente, dizemos que há uma probabilidade $(1 - p)$ de que o estado permaneça inalterado. Podem ocorrer os seguintes erros:

i) Bit flip: $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$, $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$.

ii) Phase flip: $|0\rangle \rightarrow |0\rangle$, $|1\rangle \rightarrow -|1\rangle$.

iii) Ambos: $|0\rangle \rightarrow i|1\rangle$, $|1\rangle \rightarrow -i|0\rangle$.

Os operadores de Kraus correspondentes são:

$$\hat{A}_0 = \sqrt{1-p}\hat{I}, \quad \hat{A}_i = \sqrt{\frac{p}{3}}\hat{\sigma}_i, \quad (3.23)$$

onde $\hat{\sigma}_i = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)$ são os operadores de Pauli. Uma propriedade interessante deste ruído é que ele tende a deixar o estado completamente "despolarizado", de modo que

$$\langle \hat{\sigma}_x \rangle = \langle \hat{\sigma}_y \rangle = \langle \hat{\sigma}_z \rangle = 0 \quad (3.24)$$

se $p = 1$. Após a ação do ruído, o estado se torna

$$\varepsilon(\hat{\rho}) = (1-p)\hat{\rho} + \frac{p}{3} \left[\hat{\sigma}_x \hat{\rho} \hat{\sigma}_x^\dagger + \hat{\sigma}_y \hat{\rho} \hat{\sigma}_y^\dagger + \hat{\sigma}_z \hat{\rho} \hat{\sigma}_z^\dagger \right]. \quad (3.25)$$

3.1.1.5 AMPLITUDE DAMPING

Este tipo de ruído está associado à modelagem de dissipação de energia em sistemas quânticos quando os estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$ são autoestados de energia. Os operadores de Kraus são dados por

$$\hat{A}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{pmatrix}, \quad \hat{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

Aqui, p pode ser visto como a probabilidade de decaimento do estado excitado para o estado fundamental (para um sistema de dois níveis). Frequentemente, se considera $p = 1 - \exp(-t/T)$,

em que t é o tempo e T é o tempo característico de descoerência. Neste caso, o estado se torna

$$\varepsilon(\hat{\rho}) = \begin{pmatrix} |a|^2 + (1 - e^{(-t/T)})|b|^2 & \sqrt{e^{(-t/T)}}ab^* \\ \sqrt{e^{(-t/T)}}a^*b & e^{(-t/T)}|b|^2 \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

Deste modo, para t suficientemente grande, o ruído acaba com as coerências e também com a população do estado excitado, levando a um estado proporcional à $|0\rangle\langle 0|$.

3.1.1.6 RUÍDO EM ESTADOS EMARANHADOS

Introduzimos o formalismo de Kraus, definimos alguns tipos de ruído e vimos como estes tipos de ruído afetam o estado de um *qubit*. Para um estado composto emaranhado, qual é o efeito do ruído? De forma genérica, podemos dizer que o ruído tende a destruir o emaranhamento de um estado composto. No capítulo 4, vamos abordar esta questão cuidadosamente, com o intuito de ver como os tipos de ruído apresentados aqui afetam estados bipartites do tipo EPR e tripartites do tipo GHZ.

3.1.2 TELETRANSPORTE DO ESTADO DE UM QUBIT NA PRESENÇA DE RUÍDO

O teletransporte de um estado quântico foi proposto por Bennett e colaboradores (BENNETT et al., 1993) na década de 1990, e é uma das mais interessantes aplicações do emaranhamento. Desde então, este assunto tem sido vastamente estudado, incluindo efeitos de ruído no protocolo. Em (OH; LEE; LEE, 2002), por exemplo, é estudado o telertransporte quando o canal apresenta ruído, com o uso da equação de Lindblad. Em (KNOLL; SCHMIEGELOW; LAROTONDA, 2014), também é considerado o protocolo de teletransporte na presença de ruído. Em (MAN; XIA, 2012), é considerado o teletransporte na presença de um ambiente dissipativo. Uma outra possível abordagem é considerar o formalismo de Kraus, como foi considerado em (FORTES; RIGOLIN, 2015). Aqui, também iremos adotar o formalismo de Kraus para incluir alguns tipos de erro, com o intuito de nos prepararmos para os próximos capítulos. Além do ruído, mais uma diferença em relação ao capítulo anterior, é que agora iremos levar em conta que as medições podem projetar em estados não-maximamente emaranhados. O próprio canal também poderá não dispor de emaranhamento máximo. Ao considerar o protocolo com esses novos ingredientes, começamos generalizar o protocolo usual. Isto também irá servir para fixar a notação utilizada nos capítulos seguintes. Neste protocolo, dois usuários compartilham um estado

emaranhado bipartite, do tipo EPR. Alice possui dois qubits. O primeiro qubit de Alice é aquele cujo estado ela deseja enviar a Bob. Já o segundo qubit faz parte do estado compartilhado com Bob (canal). No fim do processo, o qubit de Bob não estará mais emaranhado com o segundo qubit de Alice, e terá o estado do primeiro qubit. O estado geral do sistema inicialmente é

$$\hat{\rho}_0 = \hat{\rho}_{in} \otimes \hat{\rho}_{canal}; \quad (3.28)$$

onde

$$\hat{\rho}_{in} = \sum_{j,k=0}^1 \Lambda_{jk} |j\rangle_1 \langle k|_1 \quad (3.29)$$

é o estado do primeiro qubit (estado a ser teletransportado). Já o estado do canal é dado por

$$\hat{\rho}_{canal} = \sum_{\ell m r s=0}^1 \gamma_{\ell m r s} |\ell, m\rangle_{23} \langle r, s|_{23}. \quad (3.30)$$

Escrever o estado do canal desta forma permite incluir efeitos de ruído a partir do formalismo de Kraus. Mais especificamente, vamos considerar que o estado do canal sem ruído é dado por $|\Phi^+\rangle \langle \Phi^+|$, com

$$|\Phi^+\rangle = \sum_l \beta_l |l, l\rangle = \cos \theta |00\rangle + \sin \theta |11\rangle. \quad (3.31)$$

O coeficiente $\gamma_{\ell m r s}$ irá comportar a ação dos operadores de Kraus. Para bit flip sobre o qubit 2, por exemplo,

$$\gamma_{\ell m r s}^{(23)} = \beta_l \beta_n \left\{ (1-p) \delta_{\ell m} \delta_{rs} + p \delta_{\ell, m \oplus 1} \delta_{r, s \oplus 1} \right\}. \quad (3.32)$$

Aqui, estamos usando o símbolo $\oplus$ para denotar uma soma modular, de modo que $a \oplus b \equiv a + b \pmod{2}$. Voltando para o caso genérico, podemos escrever que

$$\hat{\rho}_0 = \sum_{j k \ell m r s=0}^1 \Lambda_{jk}^{(1)} \gamma_{\ell m r s}^{(23)} |j\rangle_1 \langle k|_1 \otimes |\ell, m\rangle_{23} \langle r, s|_{23}. \quad (3.33)$$

A medição é feita sobre as partículas 1 e 2. Assim, vamos escrever $\hat{\rho}_0$ como

$$\hat{\rho}_0 = \sum_{j k \ell m r s=0}^1 \Lambda_{jk}^{(1)} \gamma_{\ell m r s}^{(23)} |j, \ell\rangle_{12} \langle k, r|_{12} \otimes |m\rangle_3 \langle s|_3. \quad (3.34)$$

Após a medição, o estado do qubit de Bob é

$$\hat{\rho}_3 = \frac{Tr_{12} [\hat{P} \hat{\rho}_0 \hat{P}^\dagger]}{Tr(\hat{P} \hat{\rho}_0)}, \quad (3.35)$$

onde $\hat{P} = |\Phi_\lambda^\mu\rangle\langle\Phi_\lambda^\mu|$ é o projetor associado à medição na base de Bell, e Tr_{12} indica a operação de traço parcial sobre os qubits 1 e 2. O *ket*

$$|\Phi_\lambda^\mu\rangle = \sum_{k'=0}^1 (-1)^{\mu k'} b_{\mu \oplus k'} |k', k' \oplus \lambda\rangle \quad (3.36)$$

se refere aos estados do tipo Bell, mas com emaranhamento qualquer. Assim, fazemos

$$b_0 = \cos \phi, \quad b_1 = \sin \phi. \quad (3.37)$$

Assim, para uma medição em uma base de estados com máximo emaranhamento,

$$|\Phi_\lambda^\mu\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_j (-1)^{\mu j} |j, j \oplus \lambda\rangle \quad (3.38)$$

Podemos escrever o estado (não-normalizado) da partícula de Bob agora como

$$\hat{\rho}_I = \sum_{jkm s=0}^1 \Lambda_{jk}^{(1)} \gamma_{j \oplus \lambda, m, k \oplus \lambda, s}^{(23)} (-1)^{\mu(j+k)} b_{\mu \oplus j} b_{\mu \oplus k} |m\rangle_3 \langle s|_3. \quad (3.39)$$

Este estado está condicionado ao resultado da medida feita por Alice (o estado está escrito em termos de μ, λ). Assim, para determinados *outputs*, este estado ainda não será o estado desejado. Isto é, se Alice obtém um estado diferente de $|\Phi^+\rangle$, que corresponde a $\mu = \lambda = 0$, Bob precisa aplicar uma operação unitária para obter o estado inicial do primeiro qubit de Alice. Com o objetivo de ver qual é a forma da transformação unitária que Bob deve aplicar, vamos escrever como fica o estado do qubit de Bob quando não há ruído, que denotaremos por $\hat{\rho}_I(p=0)$. Para o caso sem ruído,

$$\Lambda_{jk}^{(1)} = c_j c_k^*, \quad \gamma_{j \oplus \lambda, m, k \oplus \lambda, s}^{(23)} = \beta_{j \oplus \lambda} \beta_{k \oplus \lambda} \delta_{m, j \oplus \lambda} \delta_{s, k \oplus \lambda}, \quad (3.40)$$

de modo que

$$\hat{\rho}_I(p=0) = \sum_{j,k} c_j c_k^* \beta_{j \oplus \lambda} \beta_{k \oplus \lambda} b_{\mu \oplus j} b_{\mu \oplus k} (-1)^{\mu(j+k)} |j \oplus \lambda\rangle \langle k \oplus \lambda|. \quad (3.41)$$

Comparando este estado com o estado inicial sem ruído $\hat{\rho}_{in} = \sum_{m'n'} c_{m'} c_{n'}^* |m'\rangle \langle n'|$, podemos ver que a transformação unitária deve ser

$$\hat{U} = \hat{U}_{\mu\lambda} = \hat{\sigma}_z^\mu \hat{\sigma}_x^\lambda = \sum_{q'} |q'\rangle \langle q' \oplus \lambda|. \quad (3.42)$$

Agora, podemos voltar ao caso geral e aplicar a unitária.

$$\hat{U}\hat{\rho}_I\hat{U}^\dagger = \sum_{jkk'\ell'=0}^1 \Lambda_{jk}^{(1)} \gamma_{j\oplus\lambda, k'\oplus\lambda, k\oplus\lambda, \ell'\oplus\lambda}^{(23)} b_{\mu\oplus j} b_{\mu\oplus k} (-1)^{\mu(j+k)} (-1)^{\mu(k'+\ell')} |k'\rangle \langle \ell'|. \quad (3.43)$$

Agora, podemos ver o quanto este estado se parece com o estado inicial. Definimos como fidelidade F a comparação entre o estado de entrada e o de saída. Esta quantidade diz respeito à qualidade do estado de saída, e serve para mensurar a eficácia do protocolo. No caso perfeito, sem ruído e com emaranhamento máximo no canal e na base de medição, a fidelidade alcança o seu resultado máximo (igual a um). Ou seja, a fidelidade diz como o estado obtido no fim do protocolo é "fiel" ao estado inicial. Por outro lado, em situações mais gerais, a fidelidade tende a ser menor por conta de imperfeições na execução do protocolo. Para um resultado especificado por $K = (\mu, \lambda)$, a fidelidade será dada por

$$F_K = F_{\mu\lambda} = \text{Tr}(\hat{\rho}_{in}\hat{\rho}_3), \quad (3.44)$$

onde

$$\hat{\rho}_3 = \frac{\hat{U}_K \hat{\rho}_I \hat{U}_K^\dagger}{P_K}. \quad (3.45)$$

Esta é uma boa medida de fidelidade, desde que o estado a ser enviado seja um estado puro, que é o que estamos considerando. Aqui, $P_K = \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{P}_K)$ é a probabilidade de se obter um resultado $K = (\mu, \lambda)$.

Definimos a fidelidade média como

$$\bar{F} = \sum_K P_K F_K, \quad (3.46)$$

que podemos reescrever na forma

$$\bar{F} = \sum_K P_K \text{Tr}[\hat{\rho}_{in}\hat{\rho}_3] \quad (3.47)$$

Mas

$$\hat{\rho}_3 = \frac{\hat{U}\hat{\rho}_I\hat{U}^\dagger}{P_K} = \frac{\tilde{\rho}_3}{P_K}. \quad (3.48)$$

Assim,

$$\bar{F} = \sum_K \text{Tr}[\hat{\rho}_{in}\tilde{\rho}_3] \quad (3.49)$$

De forma mais explícita, podemos escrever esta expressão como

$$\bar{F} = \sum_{\mu\lambda=0}^1 \sum_{jkk'\ell'=0}^1 (-1)^{\mu(j+k)} (-1)^{\mu(k'+\ell')} c_{\ell'} c_{k'}^* \Lambda_{jk}^{(1)} \gamma_{j\oplus\lambda, k'\oplus\lambda, k\oplus\lambda, \ell'\oplus\lambda}^{(23)}. \quad (3.50)$$

Esta fidelidade média leva em conta os pesos de cada *output*, fazendo uma ponderação entre resultados mais ou menos prováveis. De fato, quando consideramos canais sem ruído e maximamente emaranhados, essa probabilidade (peso) é a mesma para todos os resultados $K = (\mu, \lambda)$, de modo que $P_K = 1/4$. No caso mais geral, pode acontecer que determinados resultados se tornem mais ou menos prováveis. De todo modo, essa fidelidade média nos diz apenas como considerar os vários possíveis resultados e o quão prováveis eles são. No entanto, esta quantidade fica em função dos coeficientes do estado inicial, aquele que queremos teletransportar. É desejável ter uma quantidade que possa medir a fidelidade entre o estado final e o inicial, mas que seja independente do estado de entrada. Assim, podemos definir uma grandeza $\langle \bar{F} \rangle$, que corresponde a $\bar{F}$ integrada no espaço de parâmetros que caracterizam o estado inicial.

Vamos considerar que o estado inicial tem a forma

$$|\Psi\rangle_{in} = |c_0| |0\rangle + |c_1| e^{i\phi} |1\rangle, \quad (3.51)$$

onde $|c_0|$ e $|c_1|$ são valores absolutos e ϕ é uma fase relativa. O estado é normalizado, de modo que $|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$. Além disso, podemos notar que

$$0 \leq |c_0|^2 \leq 1, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi. \quad (3.52)$$

Assim, vamos usar $d|c_0|^2 d\phi$ como medida de integração.

$$\langle \bar{F} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \bar{F}(|c_0|^2, \phi) d|c_0|^2 d\phi. \quad (3.53)$$

O fator $1/2\pi$ porque consideramos que todos os estados no espaço de parâmetros são equiprováveis, ou seja, uma medida uniforme sobre a esfera de Bloch. Para o caso sem ruído, por exemplo, e com emaranhamento qualquer, $\bar{F}$ não depende dos coeficientes do estado. Neste caso,

$$\langle \bar{F} \rangle = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \sin(2\theta) \sin(2\phi). \quad (3.54)$$

Nesta expressão, o primeiro termo se refere ao que chamamos de fidelidade clássica (POPESCU, 1994), associada ao maior valor possível de fidelidade quando Alice e Bob compartilham apenas um canal clássico. A segunda parte diz respeito à parte quântica, com dependência

do emaranhamento do canal e também dos estados da base de medição. A atuação do ruído pode afetar estes termos da mesma maneira, ou de forma diferente a depender do tipo de ruído. A seguir, vamos listar algumas expressões para a fidelidade quando há ruído no qubit 2.

Para o caso de bit flip, a fidelidade é dada por

$$\langle \overline{FB} \rangle = (1 - p) \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \sin(2\theta) \sin(2\phi) \right]. \quad (3.55)$$

Para o caso de phase flip,

$$\langle \overline{FP} \rangle = \frac{2}{3} + (1 - 2p) \frac{1}{3} \sin(2\theta) \sin(2\phi). \quad (3.56)$$

Podemos notar que, enquanto o ruído do tipo bit flip afeta a fidelidade como um todo, o phase flip afeta apenas a parte quântica. Isto é devido ao fato de que não existe um análogo clássico para a mudança na fase. Para o caso de *depolarizing*, que contém uma combinação destes ruídos, as partes clássica e quântica são afetadas, mas de maneiras diferentes por conta da presença do phase flip:

$$\langle \overline{FD} \rangle = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{p}{4} \right) + \frac{1}{3} (1 - p) \sin(2\theta) \sin(2\phi). \quad (3.57)$$

Para ruído do tipo *amplitude damping*,

$$\langle \overline{FA} \rangle = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{p}{4} \right) + \frac{1}{3} \left(\sqrt{1 - p} \right) \sin(2\theta) \sin(2\phi). \quad (3.58)$$

Novamente, os dois termos da fidelidade são afetados de maneira diferente. Estas expressões foram obtidas primeiramente por Fortes e Rigolin (FORTES; RIGOLIN, 2015). Aqui, nós fizemos os cálculos seguindo o formalismo que apresentamos nesta seção, e encontramos os mesmos resultados.

4 TELETRANSPORTE DE EMARANHAMENTO GHZ

O processamento de informação quântica com o uso de estados com graus de liberdade maiores que um *qubit* é uma questão de grande interesse teórico e prático, pois abre novas possibilidades de investigação dos fundamentos da teoria quântica, bem como a criação de novos protocolos, redes de comunicação quântica (KIMBLE, 2008), códigos corretores de erros (DEVITT; MUNRO; NEMOTO, 2013), etc. Neste sentido, pode-se aumentar o número de partes que compõem o sistema, formando estados multipartites, ou considerar partes (partícula) com mais dimensões no estado, formando um *qudit*. No que se refere aos estados multipartites, eles podem ser usados como um canal para a realização de teletransporte, por exemplo. Em particular, estados do tipo GHZ e W podem ser usados no teletransporte de um qubit (KARLSSON; BOURENNANE, 1998),(GHOSH et al., 2002). Um possível esquema para fazer isto é ilustrado na figura abaixo.

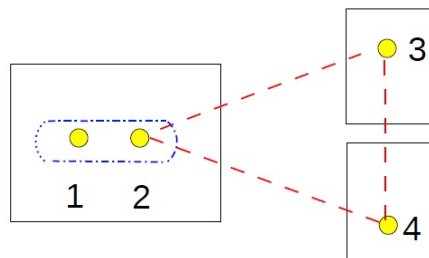


Figura 4 – Esquema para teletransporte de um estado de um qubit utilizando um estado GHZ. Um estado GHZ é compartilhado entre três usuários (qubits 2, 3 e 4). O objetivo do protocolo é teletransportar o estado do qubit 1. Para isso, é feita uma medida na base EPR sobre os qubits 1 e 2. Com isso, os qubits 3 e 4 ficam em um estado emaranhado tipo EPR. Se uma medição individual for realizada sobre um desses qubits, então o outro passa a ter o estado desejado após comunicação clássica e uma operação unitária adequada.

Neste esquema, três usuários compartilham um estado GHZ, enquanto um deles tem dois qubits, sendo um compartilhado com os demais usuários, e o outro, o qubit cujo estado se deseja teletransportar. Nesta situação, é feita uma medição na base EPR sobre as partículas 1 e 2, o que leva as partículas 3 e 4 a ficarem em um estado EPR. Se uma medição for feita sobre uma das partículas (3 ou 4), depois de comunicação clássica, será obtido o estado desejado (no qubit

onde não foi realizada a medida). Isto é, se a medição for feita sobre o qubit 3, por exemplo, então o qubit 4 ficará no estado desejado após a comunicação clássica e a operação unitária. Explicitamente, podemos escrever o estado geral do sistema como

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_{234}, \quad (4.1)$$

com

$$\hat{\rho}_1 = \sum_{jk} c_j c_k^* |j\rangle \langle k|, \quad \hat{\rho}_{234} = \frac{1}{2} |\ell\ell\ell\rangle \langle mmm| \quad (4.2)$$

Após a medição na base EPR

$$|\Phi_\lambda^\mu\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_r (-1)^{\mu r} |r, r \oplus \lambda\rangle \quad (4.3)$$

sobre os qubits 1 e 2, o estado conjunto dos qubits 3 e 4 é dado por

$$\hat{\rho}_{34} = \sum_{jk} c_j c_k^* |j \oplus \lambda, j \oplus \lambda\rangle \langle k \oplus \lambda, k \oplus \lambda| \quad (4.4)$$

Deste modo, se uma medida de um qubit é realizada por um dos destinatários (3 ou 4), o outro obterá o estado desejado após a aplicação de uma transformação unitária $\hat{U} = (\sigma_z)^\mu (\sigma_x)^\lambda$ (que tem a mesma forma da transformação unitária utilizada para o protocolo de teletransporte usual). Este procedimento foi realizado em (KARLSSON; BOURENNANE, 1998). Também é possível usar estados GHZ para teletransportar um estado de dois qubits. Isto foi abordado em (BHATIA, 2014) para um estado arbitrário. Já em (GORBACHEV; TRUBILKO, 2000), foi estudado o teletransporte de um estado EPR, utilizando um estado GHZ. Além de usar um estado multipartite como canal, outra questão também interessante consiste em teletransportar um estado deste tipo. Neste capítulo, vamos abordar o teletransporte de um estado do tipo GHZ.

De forma similar ao teletransporte de um estado de um qubit, Alice deseja enviar um estado tripartite do tipo GHZ para Bob. Se eles conseguirem realizar esta tarefa com sucesso, Alice não só terá enviado informação para Bob, mas também terá enviado emaranhamento. Isto pode ser de bastante utilidade para Bob, pois de posse de um estado emaranhado, ele terá um recurso para executar mais tarefas com outros usuários além de Alice, caso necessário. Um exemplo seria Bob se conectar a um ou mais usuários e montar uma rede para transporte de informação. Aqui, vamos nos concentrar apenas na situação em que Alice envia um estado tipo GHZ para Bob. Vamos considerar que ela pode fazer isto usando dois esquemas: No primeiro deles, usaremos três estados tipo EPR como canal, enquanto no segundo esquema, teremos dois estados tipo GHZ como canal. A partir de agora, vamos nos referir a estes como "Esquema

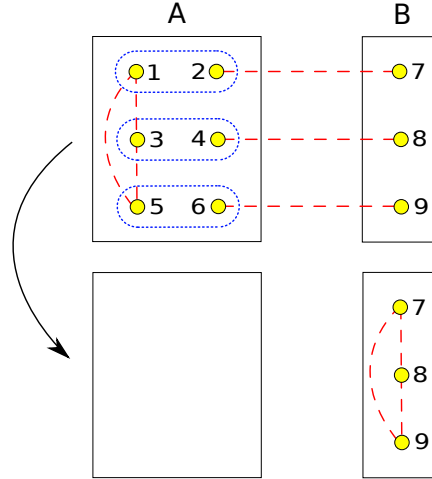


Figura 5 – Esquema 3-EPR. Alice deseja enviar um estado tipo GHZ (qubits 1, 3 e 5) para Bob. Para isto, eles compartilham 3 estados EPR, que são usados como canal. Alice realiza três medidas na base EPR, sobre os qubits 1 e 2, 3 e 4, e 5 e 6. Depois, ela informa por um meio clássico o resultado, e Bob aplica uma operação unitária sobre os qubits 7, 8 e 9, que passam a ter o estado desejado.

3-EPR" e "Esquema 2-GHZ", respectivamente. Em ambos os casos, iremos lidar com 9 qubits, sendo 3 pertencentes ao estado a ser enviado, e os outros 6 formando o canal. As medições serão feitas sobre 6 qubits, e no fim do processo, restarão 3 qubits.

4.1 ESQUEMA 3-EPR

A figura 4 ilustra o esquema 3-EPR. Neste esquema, os qubits 1, 3 e 5 estão em um estado emaranhado do tipo GHZ, $|\phi\rangle_{135} = c_0|000\rangle + c_1|111\rangle$. De forma mais compacta, podemos escrever este estado como

$$|\phi\rangle = \sum_{j=0,1} c_j |jjj\rangle. \quad (4.5)$$

Para teletransportar este estado, Alice e Bob compartilham três estados do tipo EPR: nos qubits 2 e 7, 4 e 8, 6 e 9, respectivamente. Vamos assumir que cada estado tem a forma $|\Phi^+\rangle = \cos\theta|00\rangle + \sin\theta|11\rangle$, isto é, são estados tipo EPR, mas não necessariamente maximamente emaranhados. De forma compacta, podemos dizer que o operador densidade correspondente a cada um destes estados EPR pode ser escrito de forma bem geral como

$$\hat{\rho}_{ab} = \sum_{kl=0,1} \beta_k \beta_l |kk\rangle \langle ll|, \quad (4.6)$$

onde

$$\beta_0 = \cos\theta, \quad \beta_1 = \sin\theta. \quad (4.7)$$

Assim, o coeficiente β_k se refere ao emaranhamento do canal. Ou seja, estamos considerando estados com emaranhamento arbitrário do tipo $|\Phi^+\rangle = \cos \theta |00\rangle + \sin \theta |11\rangle$ como canal. O estado geral do sistema é

$$\hat{\rho}_0 = \hat{\rho}_{135} \otimes \hat{\rho}_{27} \otimes \hat{\rho}_{48} \otimes \hat{\rho}_{49}; \quad (4.8)$$

Mais explicitamente, podemos escrever:

$$\hat{\rho}_0 = \sum_{ijklmnpq} c_i c_j^* \beta_k \beta_\ell \beta_m \beta_n \beta_p \beta_q |iii\rangle_{135} |kk\rangle_{27} |mm\rangle_{48} |pp\rangle_{69} \langle jjj|_{135} \langle \ell\ell|_{27} \langle nn|_{48} \langle qq|_{69}; \quad (4.9)$$

As medições são feitas em 1-2, 3-4 e 5-6, em uma base de estados EPR com emaranhamento também arbitrário,

$$|\Phi_\lambda^\mu\rangle = \sum_j (-1)^{\mu j} b_{\mu \oplus j} |j, j \oplus \lambda\rangle, \quad (4.10)$$

a mesma base adotada para o caso do teletransporte de um estado de um qubit, discutido no capítulo anterior. Após as medições, teremos um estado

$$\hat{\rho}_I = \hat{\rho}_I(\mu, \nu, \varepsilon, \lambda, \delta, \tau) = \frac{\hat{P} \hat{\rho}_0 \hat{P}^\dagger}{P} = \frac{\tilde{\rho}_I}{P}. \quad (4.11)$$

onde

$$\hat{P} = \hat{P}_{\lambda\delta\tau}^{\mu\nu\varepsilon} = (|\Phi_\lambda^\mu\rangle \langle \Phi_\lambda^\mu|)_{12} \otimes (|\Phi_\delta^\nu\rangle \langle \Phi_\delta^\nu|)_{34} \otimes (|\Phi_\tau^\varepsilon\rangle \langle \Phi_\tau^\varepsilon|)_{56} \quad (4.12)$$

é o projetor associado à medição conjunta nos três pares EPR.

$$P = P_{\lambda\delta\tau}^{\mu\nu\varepsilon} = \text{Tr}(\hat{P} \hat{\rho}_0) \quad (4.13)$$

é a probabilidade de cada saída. Após as medições, temos então que

$$\tilde{\rho}_I = \sum_{ij} c_i c_j^* (-1)^{(i+j)\alpha} \left[\prod_{\ell=1}^3 b_{\mu_\ell \oplus i}^* b_{\mu_\ell \oplus j} \beta_{i \oplus \lambda_\ell} \beta_{j \oplus \lambda_\ell} \right] |i \oplus \lambda, i \oplus \delta, i \oplus \tau\rangle \langle j \oplus \lambda, j \oplus \delta, j \oplus \tau|; \quad (4.14)$$

Nesta expressão, $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} = \{\lambda, \delta, \tau\}$, $\{\mu_1, \mu_2, \mu_3\} = \{\mu, \nu, \varepsilon\}$ e $\alpha = \mu \oplus \nu \oplus \varepsilon$. Nesta etapa, podemos ver que o estado dado pela equação (4.14) se parece com um estado GHZ. De fato, para $\lambda = \delta = \tau = \mu = \nu = \varepsilon = 0$, esta expressão já corresponde ao estado que Alice desejava enviar à Bob, mas com alguma deformação na qualidade. Esta imperfeição se deve ao emaranhamento arbitrário do canal e da base de medição. Para qualquer outra combinação destes parâmetros, no entanto, Bob não obtém o estado desejado. Então, Alice envia informação clássica para Bob, que aplica uma operação unitária para obter o estado desejado. A transformação unitária deve deixar

o estado com a mesma forma que o estado inicial quando o emaranhamento é máximo no canal e na base de medição. Deste modo, a transformação unitária deve ser

$$\hat{U}(\mu, \nu, \varepsilon, \lambda, \delta, \tau) = \hat{U} = \hat{\sigma}_z^\alpha \hat{\sigma}_x^\lambda \otimes \hat{\sigma}_x^\delta \otimes \hat{\sigma}_x^\tau, \quad (4.15)$$

que pode ser escrita também como

$$\hat{U}_K = \sum_{klm=0,1} a_\mu^k a_\nu^l a_\varepsilon^m |k, l, m\rangle \langle k \oplus \lambda, l \oplus \omega, m \oplus \tau|, \quad (4.16)$$

com os coeficientes a_μ^k definidos de modo que: $a_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m}^{j_1 j_2 \dots j_n} \equiv (-1)^{(j_1 + j_2 + \dots + j_n)(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_m)}$.

Após a aplicação da unitária, o estado é dado por $\hat{\rho}_f = \hat{U} \hat{\rho}_I \hat{U}^\dagger$, ou

$$\tilde{\rho}_f = \sum_{ij} c_i c_j^* \left[\prod_{\ell=1}^3 b_{\mu_\ell \oplus i}^* b_{\mu_\ell \oplus j} \beta_{i \oplus \lambda_\ell} \beta_{j \oplus \lambda_\ell} \right] |i, i, i\rangle \langle j, j, j|. \quad (4.17)$$

Podemos perceber que o estado dado pela expressão acima se assemelha bastante com o estado inicial, exceto pelo termo entre colchetes, que está relacionado ao emaranhamento do canal e da base de medição. É importante notar que existem 64 resultados possíveis neste cenário. A fidelidade para um resultado específico é

$$F_{\lambda \delta \tau}^{\mu \nu \varepsilon} = Tr(\hat{\rho}_{in} \tilde{\rho}_f). \quad (4.18)$$

A fidelidade média é dada por

$$\bar{F} = \sum_{\mu \nu \varepsilon \lambda \delta \tau} P_{\lambda \delta \tau}^{\mu \nu \varepsilon} F_{\lambda \delta \tau}^{\mu \nu \varepsilon}, \quad (4.19)$$

$$\bar{F} = \sum_{\mu \nu \varepsilon \lambda \delta \tau} P_{\lambda \delta \tau}^{\mu \nu \varepsilon} Tr[\hat{\rho}_{in} \hat{\rho}_f] \quad (4.20)$$

Mas

$$\hat{\rho}_f = \frac{\hat{U} \tilde{\rho}_I \hat{U}^\dagger}{P_{\lambda \delta \tau}^{\mu \nu \varepsilon}} = \frac{\tilde{\rho}_f}{P_{\lambda \delta \tau}^{\mu \nu \varepsilon}}. \quad (4.21)$$

Assim,

$$\bar{F} = \sum_{\mu \nu \varepsilon \lambda \delta \tau} Tr[\hat{\rho}_{in} \tilde{\rho}_f], \quad (4.22)$$

ou

$$\bar{F} = \sum_{k\ell\mu\nu\epsilon\lambda\delta\tau} |c_k|^2 |c_\ell|^2 \prod_{j=1}^3 b_{\mu_j \oplus k}^* b_{\mu_j \oplus \ell} \beta_{k \oplus \lambda_j} \beta_{\ell \oplus \lambda_j}. \quad (4.23)$$

De forma mais explícita

$$\bar{F} = |c_0|^4 + |c_1|^4 + 2|c_0|^2 |c_1|^2 (b_0 b_1 \beta_0 \beta_1)^3. \quad (4.24)$$

Considerando que o estado inicial tem a forma

$$|\Psi\rangle_{in} = |c_0\rangle |000\rangle + |c_1\rangle e^{i\varphi} |111\rangle, \quad (4.25)$$

podemos calcular a fidelidade média (sobre os possíveis estados de entrada):

$$\langle \bar{F} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \bar{F}(|c_0|^2, \varphi) d|c_0|^2 d\varphi, \quad (4.26)$$

Explicitamente, essa expressão leva a

$$\langle \bar{F}_{EPR} \rangle = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \sin^3(2\theta) \sin^3(2\phi). \quad (4.27)$$

Podemos notar que o termo $\sin^3(2\theta) \sin^3(2\phi)$, relacionado ao emaranhamento do canal e da base de medição, pode ser visto como o termo $\sin(2\theta) \sin(2\phi)$ (similar ao que aparece no teletransporte de um qubit) elevado ao cubo. O expoente 3 aparece indicando o número de estados EPR usados como canal, e também o número de medições realizadas.

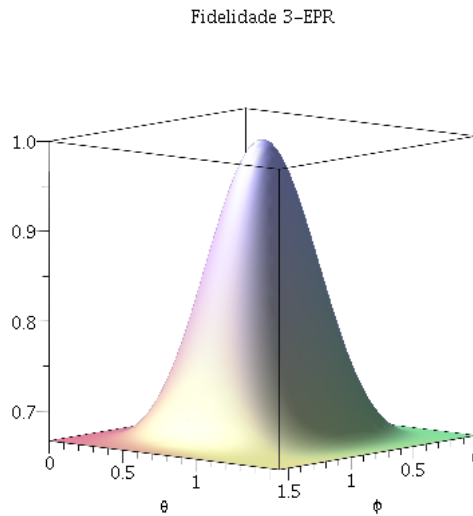


Figura 6 – Fidelidade média para o esquema 3-EPR como função do emaranhamento do canal e do emaranhamento dos estados da base de medição.

O primeiro termo corresponde à fidelidade clássica, enquanto o segundo depende do emaranhamento. Para emaranhamento máximo, $\langle \bar{F}_{EPR} \rangle = 1$.

4.2 ESQUEMA 2-GHZ

Nesta seção, vamos discutir o teletransporte de um estado tipo GHZ novamente, mas desta vez usando dois estados GHZ como canal. Neste esquema, como mostra a figura 3.2,

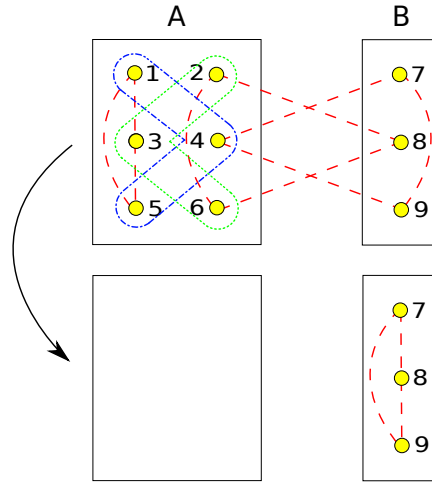


Figura 7 – Esquema 2-GHZ: Alice deseja enviar um estado tipo GHZ, nos qubits 1,3 e 5. Ela compartilha dois estados GHZ com Bob, nos qubits 2,6,8 e 4,7,9, respectivamente. Alice então realiza duas medidas na base GHZ, sobre os qubits 1,4,5 e 2,3,6. Depois, ela informa o resultado para Bob, que realiza uma operação unitária sobre os qubits, e obtém o estado desejado nos qubits 7,8 e 9.

Alice tem um estado GHZ nos qubits 1,3 e 5. Dois estados tipo GHZ, nos qubits 2-6-8, e 4-7-9, respectivamente, são compartilhados entre ela e Bob, e usados como canal. O estado a ser teleportado é

$$\hat{\rho}_{135} = \sum_{ij} c_i c_j^* |iii\rangle \langle jjj|. \quad (4.28)$$

Para o canal, vamos considerar que cada estado tem a forma $|\Phi^+\rangle_{ghz} = \beta_0 |000\rangle + \beta_1 |111\rangle$, onde $\beta_0 = \cos \theta$ e $\beta_1 = \sin \theta$. O estado geral do sistema é

$$\hat{\rho}_0 = \hat{\rho}_{135} \otimes \hat{\rho}_{268} \otimes \hat{\rho}_{479}; \quad (4.29)$$

Explicitamente,

$$\hat{\rho}_0 = \sum_{ijklmn} c_i c_j^* \beta_k \beta_\ell \beta_m \beta_n |iii\rangle_{135} |kkk\rangle_{268} |mmm\rangle_{479} \langle jjj|_{135} \langle \ell\ell\ell|_{268} \langle nnn|_{479}. \quad (4.30)$$

As medições são feitas sobre as partículas 1-4-5 e 2-3-6, na base GHZ, que pode ser representada por um estado

$$|\Phi_{\lambda\omega}^\mu\rangle = \sum_j (-1)^{\mu j} b_{\mu \oplus j} |j, j \oplus \lambda, j \oplus \omega\rangle, \quad (4.31)$$

onde $b_0 = \cos \phi$ e $b_1 = \sin \phi$. A tabela a seguir mostra os estados desta base (quando o emaranhamento é máximo).

μ	λ	ω	estado
0	0	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}(000\rangle + 111\rangle)$
0	0	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}(001\rangle + 110\rangle)$
0	1	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}(010\rangle + 101\rangle)$
0	1	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}(011\rangle + 100\rangle)$
1	0	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}(000\rangle - 111\rangle)$
1	0	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}(001\rangle - 110\rangle)$
1	1	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}(010\rangle - 101\rangle)$
1	1	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}(011\rangle - 100\rangle)$

Tabela 2 – Estados da base GHZ, para máximo emaranhamento.

Após as medições, o estado dos qubits do lado de Bob é

$$\hat{\rho}_I = \frac{\hat{P} \hat{\rho}_0 \hat{P}^\dagger}{P} = \frac{\tilde{\rho}_I}{P}, \quad (4.32)$$

onde

$$\hat{P} = \hat{P}_{\lambda\omega\tau\varepsilon}^{\mu\nu} = (|\Phi_{\lambda\omega}^\mu\rangle \langle \Phi_{\lambda\omega}^\mu|)_{145} \otimes (|\Phi_{\tau\varepsilon}^\nu\rangle \langle \Phi_{\tau\varepsilon}^\nu|)_{236} \quad (4.33)$$

é o projetor associado à medição conjunta sobre os qubits de Alice, e

$$P = P_{\lambda\omega\tau\varepsilon}^{\mu\nu} = \text{Tr}(\hat{P} \hat{\rho}_0) \quad (4.34)$$

é a probabilidade associada à cada resultado $(\mu, \lambda, \omega, \nu, \tau, \varepsilon)$.

O estado (não-normalizado) do qubit de Bob é dado por

$$\hat{\rho}_I = \sum_{\ell p=0,1} c_{\ell'} c_{p'}^* \beta_{\ell \oplus \varepsilon} \beta_{p \oplus \varepsilon} \beta_{\ell' \oplus \lambda} \beta_{p' \oplus \lambda} a_{\mu\nu}^{p' \ell' p \ell} (\delta_{\omega,0} \delta_{\varepsilon,0}) |\ell' \oplus \lambda, \ell, \ell' \oplus \lambda\rangle \langle p' \oplus \lambda, p, p' \oplus \lambda|. \quad (4.35)$$

É importante notar a presença do termo $\delta_{\omega,0} \delta_{\varepsilon,0}$ no estado dos qubits de Bob. Isto indica que nem todos os resultados são obtidos por Alice. Isto é, em suas medições, ela não obtém estados em que $\lambda = \omega$ e $\tau = 0$. Como no esquema 3-EPR, era de esperar que houvesse 64 resultados possíveis. No entanto, existem apenas 16 resultados possíveis. Assim, em cada medida, Alice precisa distinguir 4 estados dentre o total de 8 estados da base GHZ. Para obter o estado desejado, Bob precisa aplicar uma transformação unitária dada por

$$\hat{U}_K = \hat{\sigma}_z^\mu \hat{\sigma}_x^\lambda \otimes \hat{\sigma}_x^\tau \hat{\sigma}_z^\nu \otimes \hat{\sigma}_x^\tau, \quad (4.36)$$

que é equivalente a

$$\hat{U}_K = \sum_{klm=0,1} a_\mu^k a_\nu^{l \oplus \tau} |k, l, m\rangle \langle k \oplus \lambda, l \oplus \tau, m \oplus \lambda|.$$

A fidelidade pode ser calculada de forma análoga ao caso 3-EPR.

$$\bar{F} = \sum_{k\ell\mu\nu\tau\lambda=0}^1 |c_{k'}|^2 |c_{\ell'}|^2 \beta_k \beta_\ell \beta_{k' \oplus \lambda} \beta_{\ell' \oplus \lambda} b_{\mu \oplus k'} b_{\mu \oplus \ell'} b_{\nu \oplus k} b_{\nu \oplus \ell}, \quad (4.37)$$

onde $k' \equiv k \oplus \tau$. Mais explicitamente,

$$\bar{F} = |c_0|^4 + |c_1|^4 + 2|c_0|^2 |c_1|^2 (b_0 b_1 \beta_0 \beta_1)^2. \quad (4.38)$$

Após a integração, esta expressão nos leva a

$$\langle \bar{F}_{GHZ} \rangle = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \sin^2(2\theta) \sin^2(2\phi). \quad (4.39)$$

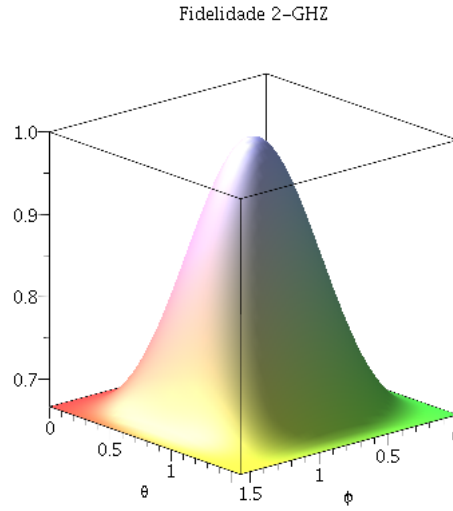


Figura 8 – Fidelidade média para o esquema 2-GHZ como função do emaranhamento do canal e da base de medição

4.2.1 COMPARAÇÃO ENTRE OS ESQUEMAS

Podemos definir a diferença entre as fidelidades como

$$\Delta F = \langle F_{GHZ} \rangle - \langle F_{EPR} \rangle. \quad (4.40)$$

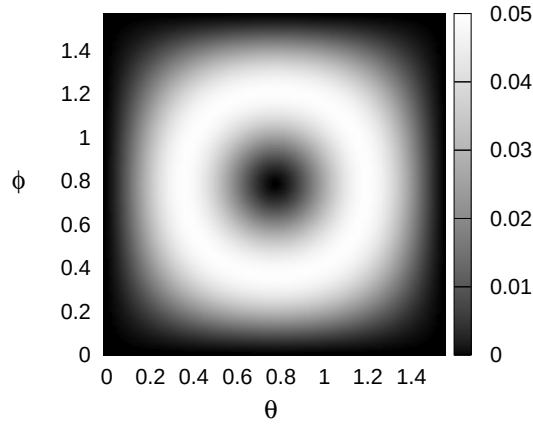


Figura 9 – Diferença entre as fidelidades 2-GHZ e 3-EPR.

Quando o emaranhamento é máximo nos estados do canal e também na base de medição, os dois esquemas levam a fidelidade máxima $\langle \bar{F} \rangle = 1$. No esquema 3-EPR são necessários 6 bits de informação clássica para a execução da transformação unitária realizada por Bob, enquanto no esquema 2-GHZ são necessários apenas 4 bits. Quando o emaranhamento no canal e na base de medição é arbitrário, a diferença ΔF é não-negativa, mostrando que o esquema 2-GHZ

apresenta uma melhoria na fidelidade em relação ao esquema 3-EPR. A figura 9 mostra esta diferença. Mais especificamente, ΔF alcança um máximo quando $\sin(2\theta)\sin(2\phi) = 2/3$. Nesta situação, $\Delta F = 4/81 \approx 4.9\%$. No próximo capítulo, vamos ver como a presença de ruído afeta esta quantidade. Particularmente, vamos mostrar que, na presença de ruído esta diferença tende a aumentar, o que mantém a vantagem do esquema 2-GHZ sobre o 3-EPR.

5 TELETRANSPORTE DE EMARANHAMENTO GHZ NA PRESENÇA DE RUÍDO

Neste capítulo, vamos tratar da situação em que, além do erro associado ao emaranhamento dos canais e das medidas, há também ruído no canal usado para o teletransporte do estado GHZ. Quando introduzimos o formalismo de Kraus, listamos alguns tipos de ruído e os operadores de Kraus correspondentes. Assim, foi possível escrever o estado de um qubit sob a ação de ruído, e também abordar o problema do teletransporte do estado de um qubit com canais ruidosos. Agora, vamos usar operadores de Kraus para escrever expressões para fidelidade dos esquemas 3-EPR e 2-GHZ. Particularmente, vamos ver como ficam os estados EPR e GHZ quando um dos qubits sofre a ação do ruído. Assim, é importante salientar que, no nosso modelo, consideramos que o ruído atua localmente: os operadores de Kraus se referem a algum tipo de ruído em algum qubit do estado, e não a um ruído coletivo em todos os qubits ao mesmo tempo. Antes de estudar os dois esquemas, vamos fazer algumas considerações sobre a validade do nosso modelo. Estaremos tratando de um regime de ruído fraco. Vamos assumir que as probabilidades de ocorrência de algum tipo de erro (ruído) em cada um dos seis qubits que compõem o canal são estatisticamente independentes. Vamos denotar essa probabilidade por p . Iremos limitar a nossa análise ao caso em que p é suficientemente pequena, de modo que podemos desconsiderar a probabilidade de que haja algum erro em mais de um qubit por canal. Mais precisamente, a probabilidade de que nenhum erro ocorra no canal composto por 6 qubits é $P_0 = (1 - p)^6$. Já a probabilidade de ocorrência de erro em um qubit do canal é $P_1 = 6p(1 - p)^5$. Estaremos interessados no regime onde essa probabilidade é muito maior que a probabilidade de que ocorra erro em dois qubits do canal, dada por $P_2 = 15p^2(1 - p)^4$. Nós assumimos que, se dois erros acontecem no mesmo qubit, então o efeito total é nulo (válido para bit flip e phase flip). Além disso, não levamos em conta efeitos de ordens superiores. Assim, uma estimativa aproximada para um limite superior de validade do nosso modelo é $p \ll p_{max} = 2/7$ (≈ 0.29).

5.1 CANAIS EPR

Para obter a expressão para a fidelidade do esquema 3-EPR na presença de ruído, podemos proceder de maneira análoga ao que fizemos no capítulo anterior, mas desta vez escrevendo os estados do canal de forma mais geral, para acomodar qualquer efeito das operações de ruído. O estado geral do sistema é

$$\hat{\rho}_0 = \hat{\rho}_{135} \otimes \hat{\rho}_{27} \otimes \hat{\rho}_{48} \otimes \hat{\rho}_{49}. \quad (5.1)$$

Deste vez, vamos escrever o operador densidade de cada estado EPR do canal como

$$\hat{\rho}_{ab} = \sum_{klmn=0,1} \gamma_{klmn}^{(ab)} |kl\rangle \langle mn|, \quad (5.2)$$

onde o coeficiente $\gamma_{klmn}^{(ab)}$ pode incluir emaranhamento imperfeito e ação do ruído. A fidelidade $\bar{F}$ é dada por

$$\bar{F} = \sum_{\substack{klmn\mu\nu \\ \varepsilon\lambda\omega\tau=0,1}} c_k c_l^* c_n c_m^* a_{\mu\nu\varepsilon}^{klmn} \prod_{j=1}^3 b_{\mu_j \oplus k}^* b_{\mu_j \oplus l} \gamma_{k \oplus \lambda_j, m \oplus \lambda_j, l \oplus \lambda_j, n \oplus \lambda_j}^{(a_j b_j)}, \quad (5.3)$$

onde o índice j se refere aos coeficientes da base de medição e dos estados do canal. Com o intuito de adotar uma notação mais compacta, fizemos $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} = \{\lambda, \omega, \tau\}$ e $\{\mu_1, \mu_2, \mu_3\} = \{\mu, \nu, \varepsilon\}$.

Agora, vamos ver como fica a fidelidade para alguns tipos de ruído. Como ponto de partida, vamos considerar que cada estado do canal é dado por $|\Phi^+\rangle$, e veremos como cada tipo de ruído afeta este estado.

5.1.1 BIT FLIP

Para ruído do tipo bit flip, os operadores de Kraus são $\hat{A}_0 = \sqrt{1-p}\hat{I}$ e $\hat{A}_1 = \sqrt{p}\hat{\sigma}_x$. Devemos ter em mente que o mapa $\varepsilon(\rho)$ pode ser escrito em termos dos operadores de Kraus como

$$\varepsilon(\rho) = \sum_j \hat{A}_j \rho \hat{A}_j^\dagger. \quad (5.4)$$

Para o caso bit flip no primeiro qubit de um estado, por exemplo teremos

$$\varepsilon(\rho) = (\hat{A}_0 \otimes \hat{I}) \rho (\hat{A}_0 \otimes \hat{I})^\dagger + (\hat{A}_1 \otimes \hat{I}) \rho (\hat{A}_1 \otimes \hat{I})^\dagger. \quad (5.5)$$

Explicitamente,

$$\varepsilon(\rho) = (1-p) \sum_{k\ell} \beta_k \beta_\ell (\hat{I} \otimes \hat{I}) |kk\rangle \langle \ell\ell| (\hat{I} \otimes \hat{I}) + p \sum_{k\ell} \beta_k \beta_\ell (\hat{\sigma}_x \otimes \hat{I}) |kk\rangle \langle \ell\ell| (\hat{\sigma}_x^\dagger \otimes \hat{I}). \quad (5.6)$$

Podemos escrever este estado de forma mais compacta:

$$\varepsilon(\rho) = \sum_{klmn} \beta_k \beta_m \left[(1-p) \delta_{k,l} \delta_{m,n} + p \delta_{k,l \oplus 1} \delta_{m,n \oplus 1} \right] |kl\rangle \langle mn|. \quad (5.7)$$

Vamos definir:

$$\gamma_{klmn}^{(27)} = \beta_k \beta_m \left\{ (1-p) \delta_{kl} \delta_{mn} + p \delta_{k,l \oplus 1} \delta_{m,n \oplus 1} \right\}. \quad (5.8)$$

Com isso, podemos escrever o estado do canal como

$$\varepsilon(\rho) = \sum_{klmn} \gamma_{klmn} |kl\rangle \langle mn|. \quad (5.9)$$

Assim, temos uma forma compacta de escrever o estado, incluindo emaranhamento imperfeito e a ação do ruído. Como um exemplo, vamos considerar que o qubit 2 está sujeito ao ruído bit flip. Novamente, o estado geral do sistema é

$$\hat{\rho}_0 = \hat{\rho}_{135} \otimes \hat{\rho}_{27} \otimes \hat{\rho}_{48} \otimes \hat{\rho}_{49}; \quad (5.10)$$

No entanto, o estado $\hat{\rho}_{27}$ agora possui ruído. Explicitamente,

$$\hat{\rho}_0 = \sum_{ijklmnqsw} c_i c_j^* \gamma_{nk\ell m}^{(27)} \beta_q \beta_s \beta_u \beta_w |iii\rangle_{135} |nk\rangle_{27} |qq\rangle_{48} |uu\rangle_{69} \langle jjj|_{135} \langle \ell m|_{27} \langle ss|_{48} \langle ww|_{69}; \quad (5.11)$$

É importante ressaltar que, em todos os casos onde há ruído, Bob continua usando a mesma transformação unitária que é utilizada o caso sem ruído. Assim, as operações unitárias ficam bem definidas, sem depender do ruído. No entanto, devido aos erros associados ao emaranhamento imperfeito e ao ruído, o estado não sairá como esperado. Voltando ao caso de bit flip, e considerando que o qubit 2 está sujeito ao ruído, podemos escrever a fidelidade como

$$\overline{F}_{(2)} = (1-p) \left[|c_0|^4 + |c_1|^4 + 2|c_0|^2 |c_1|^2 (b_0 b_1 \beta_0 \beta_1)^2 \right]. \quad (5.12)$$

Após a integração, chegamos a

$$\langle \overline{F}_{(2)} \rangle = (1-p) \frac{2}{3} + (1-p) \frac{1}{3} \left[\sin(2\theta) \sin(2\phi) \right]^3. \quad (5.13)$$

Se o emaranhamento for máximo no canal e na base de medição, então

$$\overline{F}_{(2)} = 1 - p. \quad (5.14)$$

Se considerarmos ruído em qualquer um dos outros 5 qubits, encontramos o mesmo resultado. Podemos definir a fidelidade total como

$$\langle F_{EPR} \rangle = \frac{\sum_i \langle \overline{F}_{(i)} \rangle}{6}, \quad (5.15)$$

onde i indica cada um dos qubits. O fator 6 no denominador nos dá o número total de qubits do canal.

$$\langle F_{EPR}^B \rangle = (1-p) \left\{ \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \sin^3(2\theta) \sin^3(2\phi) \right\}, \quad (5.16)$$

o que corresponde simplesmente ao resultado sem ruído, equação (3.23) do capítulo anterior, multiplicado por $(1-p)$. Veremos adiante que, nem sempre, a presença de ruído tem um efeito tão simples.

5.1.2 PHASE FLIP

Neste caso, quando há ruído no primeiro qubit de um estado, temos:

$$\varepsilon(\hat{\rho}) = (1-p) \sum_{k\ell} \beta_k \beta_\ell (\hat{I} \otimes \hat{I}) |kk\rangle \langle \ell\ell| (\hat{I} \otimes \hat{I}) + p \sum_{k\ell} \beta_k \beta_\ell (\hat{\sigma}_z \otimes \hat{I}) |kk\rangle \langle \ell\ell| (\hat{\sigma}_z^\dagger \otimes \hat{I}). \quad (5.17)$$

Assim, o estado de um canal ruidoso é

$$\hat{\rho}_{canal} = \sum_{klmn} \gamma_{klmn} |kl\rangle \langle mn|, \quad (5.18)$$

com

$$\gamma_{klmn}^{(27)} = \beta_l \beta_n \delta_{kl} \delta_{mn} \left\{ 1 - p + p(-1)^{k \oplus m} \right\}. \quad (5.19)$$

Para ruído no qubit 2, o estado geral (inicial) do sistema fica

$$\hat{\rho}_0 = \sum_{ijklmnrq} c_i c_j^* \gamma_{kl}^{(27)} \beta_m \beta_n \beta_r \beta_q |iii\rangle_{135} |kk\rangle_{27} |mm\rangle_{48} |rr\rangle_{69} \langle jjj|_{135} \langle \ell\ell|_{27} \langle nn|_{48} \langle qq|_{69}; \quad (5.20)$$

A fidelidade $\bar{F}_2$ é

$$\bar{F}_2 = \sum_{jk} |c_j|^2 |c_k|^2 \left[(1-p) + p(-1)^{j+k} \right] (\beta_j \beta_k + \beta_{j \oplus 1} \beta_{k \oplus 1})^3 (b_j b_k + b_{j \oplus 1} b_{k \oplus 1})^3. \quad (5.21)$$

Esta expressão leva a

$$\bar{F}_2 = |c_0|^4 |c_1|^4 + 2(|c_0|^2 - |c_1|^2) (1-2p) \sin^3(2\theta) \sin^3(2\phi). \quad (5.22)$$

Este resultado se mantém para os demais qubits, de modo que $\bar{F}_2 = \bar{F}_i$, para $i = 2, 4, 6, 7, 8, 9$.

Após a integração, chegamos a

$$\langle \bar{F}_2 \rangle = \langle F_{EPR}^P \rangle = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} (1-2p) \sin^3(2\theta) \sin^3(2\phi). \quad (5.23)$$

Podemos ver que a parte clássica e o termo de emaranhamento se comportam de maneira diferente em relação à presença de ruído do tipo *phase flip*: a parte clássica não é afetada. Isto se deve ao fato de que este ruído apenas adiciona uma fase, o que não tem nenhum efeito sobre o termo associado à fidelidade clássica. Quando o emaranhamento é máximo no canal e na medição, $\langle F_{EPR}^P \rangle = 1 - \frac{2}{3}p$.

5.1.3 BIT-PHASE FLIP

Neste caso, o coeficiente γ é

$$\gamma_{klmn}^{(27)} = \beta_k \beta_m \left\{ (1-p) \delta_{kl} \delta_{mn} + p(-1)^{k \oplus m} \delta_{k, l \oplus 1} \delta_{m, n \oplus 1} \right\}. \quad (5.24)$$

A fidelidade é

$$\langle F_{EPR}^{BP} \rangle = (1-p) \left\{ \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \sin^3(2\theta) \sin^3(2\phi) \right\}, \quad (5.25)$$

que é igual a fidelidade obtida para o caso de bit flip. Isto porque, neste caso, além do ganho de fase, há também o bit flip. A seguir, listamos sucintamente o resultado para outros tipo de ruído relevantes.

5.1.4 DEPOLARIZING

Para este tipo de ruído, temos

$$\gamma_{klmn}^{(27)} = \beta_l \beta_n \left\{ \left(1 - p + \frac{p}{3}(-1)^{k \oplus m} \right) \delta_{kl} \delta_{mn} + \frac{p}{3} \left(1 + (-1)^{k \oplus m} \right) \delta_{k, l \oplus 1} \delta_{m, n \oplus 1} \right\}. \quad (5.26)$$

A fidelidade é

$$\bar{F}_2 = \sum_{jk} |c_j|^2 |c_k|^2 \left[(1-p) + \frac{p}{3}(-1)^{j+k} \right] (\beta_j \beta_k + \beta_{j \oplus 1} \beta_{k \oplus 1})^3 (b_j b_k + b_{j \oplus 1} b_{k \oplus 1})^3. \quad (5.27)$$

Executando os cálculos para os outros qubits, encontramos que $\bar{F}_i = \bar{F}_2$, onde i indica qualquer qubit do canal. Assim, a fidelidade total é

$$\langle F_{EPR}^D \rangle = \frac{4}{9}p + \left(1 - \frac{4}{3}p \right) \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \sin^3(2\theta) \sin^3(2\phi) \right). \quad (5.28)$$

5.1.5 AMPLITUDE DAMPING

Quando o ruído do tipo amplitude damping afeta o qubit 2, temos que:

$$\gamma_{klmn}^{(27)} = \beta_l \beta_n \left\{ \alpha_l \alpha_n \delta_{k,l} \delta_{m,n} + p \delta_{l, k \oplus 1} \delta_{n, m \oplus 1} \delta_{l,1} \delta_{n,1} \right\}, \quad (5.29)$$

onde $\alpha_0 = 1$ and $\alpha_1 = \sqrt{1-p}$. A fidelidade total é:

$$\langle F_{EPR}^A \rangle = \frac{2}{3} (\cos^2 \theta + (1-p) \sin^2 \theta) + \frac{\sqrt{1-p}}{3} \sin^3(2\theta) \sin^3(2\phi). \quad (5.30)$$

Em resumo, a fidelidade é globalmente afetada quando ruído do tipo bit flip ou bit-phase flip estão presentes, enquanto somente a parte quântica é afetada por phase flip. O ruído do tipo depolarizing e o ruído do tipo amplitude damping apresentam resultados intermediários.

5.2 CANAIS GHZ

Para o esquema 2-GHZ, quando o canal é ruidoso, a expressão mais geral para a fidelidade é dada por

$$\bar{F} = \sum_{\substack{klmn\mu \\ \nu\tau\epsilon\lambda=0,1}} c_{k'} c_{l'}^* c_{n'} c_{m'}^* a_{\mu\nu}^{klmn} b_{\mu\oplus k'}^* b_{\mu\oplus l'} b_{\nu\oplus l} b_{\nu\oplus k}^* \gamma_{k,k\oplus\epsilon,m,l,l\oplus\epsilon,n}^{(268)} \gamma_{k'\oplus\lambda,m'\oplus\lambda,m'\oplus\lambda,l'\oplus\lambda,n'\oplus\lambda,n'\oplus\lambda}^{(479)}, \quad (5.31)$$

onde j' indica $j \oplus \tau$.

5.2.1 BIT FLIP

Vamos considerar o estado do tipo GHZ dos qubits 2, 6 e 8 (ver figura 3.4), com um possível "flip" no qubit 6. Neste caso, o coeficiente do canal é:

$$\gamma_{klmnr}^{(268)} = \beta_k \beta_n \delta_{km} \delta_{nq} \left\{ (1-p) \delta_{kl} \delta_{nr} + p \delta_{l,k\oplus 1} \delta_{r,n\oplus 1} \right\}. \quad (5.32)$$

Depois das medições, comunicação clássica e operações unitárias, nós obtemos um resultado interessante:

$$\langle F \rangle_{(6)} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \sin^2(2\theta) \sin^2(2\phi), \quad (5.33)$$

indicando que a fidelidade $\langle F \rangle_{(6)}$ não depende de p . Por outro lado, quando o mesmo ruído atua sobre os outros cinco qubits, nós obtemos o resultado usual,

$$\langle F \rangle_{(j)} = (1-p) \langle F \rangle_{(6)}, \quad (5.34)$$

onde $j = 2, 4, 7, 8, 9$. A fidelidade total é dada por $[\langle F \rangle_{(6)} + 5\langle F \rangle_{(2)}]/6$, que nos leva a

$$\langle F_{GHZ}^B \rangle = \left(1 - \frac{5}{6}p \right) \left\{ \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \sin^2(2\theta) \sin^2(2\phi) \right\}. \quad (5.35)$$

5.2.2 PHASE FLIP

No caso de phase flip, todos os seis qubits do canal se tornam equivalentes. Particularmente, se o qubit 2 está sujeito ao ruído phase flip, temos que:

$$\gamma_{klmnrq}^{(268)} = \beta_k \beta_n \delta_{kl} \delta_{lm} \delta_{nr} \delta_{rq} \left\{ 1 - p + p(-1)^{l \oplus r} \right\}. \quad (5.36)$$

O resultado final é que, no que diz respeito ao ruído, temos uma situação análoga ao esquema 3-EPR:

$$\langle F_{GHZ}^P \rangle = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(1 - 2p) \sin^2(2\theta) \sin^2(2\phi). \quad (5.37)$$

Assim, a diferença entre $\langle F_{GHZ}^P \rangle$ e $\langle F_{EPR}^P \rangle$, se dá exclusivamente por conta do emaranhamento imperfeito.

5.2.3 BIT-PHASE FLIP

Como o bit-phase flip é uma combinação de bit flip e phase flip, o qubit 6 apresenta um resultado diferente dos outros cinco qubits. O coeficiente do canal é:

$$\gamma_{klmnrq}^{(268)} = \beta_k \beta_m \delta_{km} \delta_{nq} \left\{ (1 - p) \delta_{kl} \delta_{nr} + p(-1)^{l \oplus r} \delta_{l, k \oplus 1} \delta_{r, n \oplus 1} \right\}. \quad (5.38)$$

A fidelidade é dada por

$$\langle F \rangle_{(6)} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(1 - 2p) \sin^2(2\theta) \sin^2(2\phi). \quad (5.39)$$

Para os outros cinco qubits, a fidelidade é:

$$\langle F \rangle_{(j)} = (1 - p) \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \sin^2(2\theta) \sin^2(2\phi) \right). \quad (5.40)$$

A fidelidade final é

$$\langle F_{GHZ}^{BP} \rangle = \left(\frac{2}{3} - \frac{10}{27}p \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{8}{27}p \right) \sin^2(2\theta) \sin^2(2\phi). \quad (5.41)$$

5.2.4 DEPOLARIZING

Como no caso anterior, devido aos operadores de Kraus que descrevem o ruído do tipo depolarizing, o qubit 6 apresenta um resultado diferente dos demais. O coeficiente γ é:

$$\gamma_{klmnrq}^{(268)} = \beta_k \beta_n \delta_{km} \delta_{nq} \left\{ \left[1 - p + \frac{p}{3}(-1)^{l \oplus r} \right] \delta_{kl} \delta_{nr} + \frac{p}{3} \left[1 + (-1)^{l \oplus r} \right] \delta_{l, k \oplus 1} \delta_{r, n \oplus 1} \right\}, \quad (5.42)$$

que leva a:

$$\langle F \rangle_{(6)} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{4}{3}p \right) \sin^2(2\theta) \sin^2(2\phi), \quad (5.43)$$

enquanto, para os outros cinco qubits:

$$\langle F \rangle_{(j)} = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{2}{3}p \right) + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{4}{3}p \right) \sin^2(2\theta) \sin^2(2\phi), \quad (5.44)$$

A expressão final para a fidelidade é:

$$\langle F_{GHZ}^D \rangle = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{5}{9}p \right) + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{4}{3}p \right) \sin^2(2\theta) \sin^2(2\phi). \quad (5.45)$$

5.2.5 AMPLITUDE DAMPING

Finalmente, quando o ruído amplitude damping afeta o qubit 6, o coeficiente γ é:

$$\gamma_{klmnrq}^{(268)} = \beta_k \beta_n \left(\alpha_k \alpha_n \delta_{kl} \delta_{lm} \delta_{nr} \delta_{rq} + p \delta_{km} \delta_{nq} \delta_{k,1} \delta_{n,1} \delta_{l \oplus 1, k} \delta_{r \oplus 1, n} \right). \quad (5.46)$$

A fidelidade correspondente é

$$\langle F \rangle_{(6)} = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{1-p}}{3} \sin^2(2\theta) \sin^2(2\phi). \quad (5.47)$$

Para os outros qubits, nós temos:

$$\langle F \rangle_{(j)} = \frac{2}{3} \left\{ \cos^2 \theta + (1-p) \sin^2 \theta \right\} + \frac{\sqrt{1-p}}{3} \sin^2(2\theta) \sin^2(2\phi). \quad (5.48)$$

A fidelidade total é

$$\langle F_{GHZ}^A \rangle = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{5}{6}p \sin^2 \theta \right) + \frac{\sqrt{1-p}}{3} \sin^2(2\theta) \sin^2(2\phi). \quad (5.49)$$

5.2.6 ESQUEMA 2-GHZ COM PÓS-SELEÇÃO

No esquema apresentado na seção anterior, para a execução da transformação unitária (eq. 4.36), fica claro que Alice precisa determinar os valores de μ , λ , ν e τ ($\omega = 0$, e ε é irrelevante). Assim, ela precisa distinguir 4 dos 8 elementos da base GHZ em cada medida, e assim 4 bits de informação clássica são necessários. Entretanto, podemos melhorar a eficiência do protocolo usando um procedimento diferente. Para isso, vamos começar escrevendo o estado de Bob após as medições para o caso sem ruído:

$$\hat{\rho}_I(p=0) = \sum_{\ell m=0,1} c_{\ell'} c_{m'}^* \beta_{\ell \oplus \varepsilon} \beta_{m \oplus \varepsilon} \beta_{\ell' \oplus \lambda} \beta_{m' \oplus \lambda} a_{\mu\nu}^{m' \ell' m \ell} (\delta_{\omega,0} \delta_{\varepsilon,0}) |\ell' \oplus \lambda, \ell, \ell' \oplus \lambda\rangle \langle m' \oplus \lambda, m, m' \oplus \lambda|. \quad (5.50)$$

Por outro lado, na presença de ruído, o estado é

$$\hat{\rho}_I = \sum_{\ell m r u x y=0,1} c_{\ell'} c_{m'}^* \gamma_{\ell, \ell \oplus \varepsilon, n, m, m \oplus \varepsilon, r}^{(268)} \gamma_{\ell' \oplus \lambda, t, u, m' \oplus \lambda, x, y}^{(479)} a_{\mu m'} a_{\mu \ell'} a_{\nu m} a_{\nu \ell} \delta_{\omega, 0} |t, n, u\rangle \langle x, r, y|, \quad (5.51)$$

onde j' indica $j \oplus \tau$. Assim, enquanto o estado sem ruído apresenta o termo $(\delta_{\omega, 0} \delta_{\varepsilon, 0})$, o estado mais geral, que inclui ruído, tem apenas o termo $\delta_{\omega, 0}$. Deste modo, parece haver uma diferença nos resultados obtidos nas medições quando o ruído atua. É importante notar que, a depender da forma do coeficiente γ , pode aparecer o termo $\delta_{\varepsilon, 0}$ novamente. Isto vai depender do tipo de ruído considerado. Mais especificamente, vamos examinar o que acontece com o caso de bit flip. Para bit flip no qubit 4,

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_I = & (\delta_{\omega, 0} \delta_{\varepsilon, 0}) \left((1-p) \sum_{\ell m} c_{\ell'} c_{m'}^* \beta_{\ell} \beta_m \beta_{\ell' \oplus \lambda} \beta_{m' \oplus \lambda} a_{\mu \nu}^{m' \ell' m \ell} |\ell' \oplus \lambda, \ell, \ell' \oplus \lambda\rangle \langle m' \oplus \lambda, m, m' \oplus \lambda| \right. \\ & \left. + p \sum_{\ell m} c_{\ell'} c_{m'}^* \beta_{\ell} \beta_m \beta_{\ell' \oplus \lambda} \beta_{m' \oplus \lambda} a_{\mu \nu}^{m' \ell' m \ell} |\ell' \oplus \lambda \oplus 1, \ell, \ell' \oplus \lambda \oplus 1\rangle \langle m' \oplus \lambda \oplus 1, m, m' \oplus \lambda \oplus 1| \right) \end{aligned}$$

Este estado contém $(\delta_{\omega, 0} \delta_{\varepsilon, 0})$ em ambos os termos. Para bit flip no qubit 2,

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_I = & (\delta_{\omega, 0}) \left(\delta_{\varepsilon, 0} (1-p) \sum_{\ell m} c_{\ell'} c_{m'}^* \beta_{\ell} \beta_m \beta_{\ell' \oplus \lambda} \beta_{m' \oplus \lambda} a_{\mu \nu}^{m' \ell' m \ell} |\ell' \oplus \lambda, \ell, \ell' \oplus \lambda\rangle \langle m' \oplus \lambda, m, m' \oplus \lambda| \right. \\ & \left. + (\delta_{\varepsilon, 1}) p \sum_{\ell m} c_{\ell'} c_{m'}^* \beta_{\ell \oplus 1} \beta_{m \oplus 1} a_{\mu \nu}^{m' \ell' m \ell} \beta_{\ell' \oplus \lambda} \beta_{m' \oplus \lambda} |\ell' \oplus \lambda, \ell \oplus 1, \ell' \oplus \lambda\rangle \langle m' \oplus \lambda, m \oplus 1, m' \oplus \lambda| \right). \end{aligned}$$

Para bit flip no qubit 6,

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_I = & (\delta_{\omega, 0}) \left(\delta_{\varepsilon, 0} (1-p) \sum_{\ell m} c_{\ell'} c_{m'}^* \beta_{\ell} \beta_m \beta_{\ell' \oplus \lambda} \beta_{m' \oplus \lambda} a_{\mu \nu}^{m' \ell' m \ell} |\ell' \oplus \lambda, \ell, \ell' \oplus \lambda\rangle \langle m' \oplus \lambda, m, m' \oplus \lambda| \right. \\ & \left. + \delta_{\varepsilon, 1} (p) \sum_{\ell m} c_{\ell'} c_{m'}^* \beta_{\ell \oplus 1} \beta_{m \oplus 1} \beta_{\ell' \oplus \lambda} \beta_{m' \oplus \lambda} a_{\mu \nu}^{m' \ell' m \ell} |\ell' \oplus \lambda, \ell, \ell' \oplus \lambda\rangle \langle m' \oplus \lambda, m, m' \oplus \lambda| \right). \end{aligned}$$

A partir destas expressões, podemos notar que a presença do ruído no qubit 2 ou no qubit 6 pode levar a um resultado "inesperado", com $\varepsilon = 1$. Uma situação semelhante ocorre com o ruído do tipo Depolarizing. Quando o qubit 6 sofre a ação do depolarizing, temos que

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_I = & (\delta_{\omega, 0}) \left(\delta_{\varepsilon, 0} \sum_{\ell m} (f_1) c_{\ell'} c_{m'}^* \beta_{\ell} \beta_m \beta_{\ell' \oplus \lambda} \beta_{m' \oplus \lambda} a_{\mu \nu}^{m' \ell' m \ell} |\ell' \oplus \lambda, \ell, \ell' \oplus \lambda\rangle \langle m' \oplus \lambda, m, m' \oplus \lambda| \right. \\ & \left. + \delta_{\varepsilon, 1} \sum_{\ell m} (f_2) c_{\ell'} c_{m'}^* \beta_{\ell \oplus 1} \beta_{m \oplus 1} \beta_{\ell' \oplus \lambda} \beta_{m' \oplus \lambda} a_{\mu \nu}^{m' \ell' m \ell} |\ell' \oplus \lambda, \ell, \ell' \oplus \lambda\rangle \langle m' \oplus \lambda, m, m' \oplus \lambda| \right), \end{aligned}$$

onde

$$f_1 = (1-p) + \frac{p}{3} (-1)^{\ell} (-1)^m, \quad f_2 = \frac{p}{3} \left(1 + (-1)^{\ell} (-1)^m \right). \quad (5.52)$$

A função f_1 corresponde à parte não-ruidosa do estado, e também ao ruído phase-flip. A função f_2 se refere ao bit-flip noise e ao bit-phase flip. Ao perceber um resultado que era inesperado, Alice pode também informar para Bob o valor de ε , de modo que ele passe a descartar resultados com $\varepsilon = 1$. A expressão geral para a fidelidade do teletransporte deve ser então modificada quando este procedimento de pós-seleção é adotado. Nesta situação, temos que

$$\bar{F} = \frac{1}{1 - \sum_{\Gamma} p_m} \sum_{(K \notin \Gamma)} \text{Tr} \{ |\phi\rangle \langle \phi| \hat{\rho}_K \}, \quad (5.53)$$

onde Γ é o conjunto de resultados a serem descartados e p_m é a probabilidade de ocorrência do m -ésimo resultado.

Nós calculamos $p_{\varepsilon=1}$ para todos os tipos de ruído considerados anteriormente, atuando sobre os qubits 2 e 6. Depois, calculamos a fidelidade total usando a pós-seleção. A seguir, listamos os resultados obtidos:

Para bit flip, $p_{\varepsilon=1}^{(2)} = p_{\varepsilon=1}^{(6)} = p$, e:

$$\langle F_{GHZ}^{B-PS} \rangle = \left(1 - \frac{2}{3}p\right) \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \sin^2(2\theta) \sin^2(2\phi)\right). \quad (5.54)$$

Quando o ruído é do tipo phase-flip, $p_{\varepsilon=1}^{(2)} = p_{\varepsilon=1}^{(6)} = 0$, a fidelidade é:

$$\langle F_{GHZ}^{BP-PS} \rangle = \left(1 - \frac{2}{3}p\right) \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \sin^2(2\theta) \sin^2(2\phi)\right). \quad (5.55)$$

Se o ruído depolarizing afeta os qubits 2 e 6, então $p_{\varepsilon=1}^{(2)} = p_{\varepsilon=1}^{(6)} = \frac{2p}{3}$, então:

$$\langle F_{GHZ}^{D-PS} \rangle = \frac{2}{3} - \frac{8}{27}p + \frac{1}{(9-6p)} \left\{ \left(3 - \frac{8}{3}p\right) u^2 - \frac{8}{3}p + \frac{16}{9}p^2 u^2 \right\}, \quad (5.56)$$

onde $u = \sin(2\theta) \sin(2\phi)$.

Finalmente, na presença de ruído amplitude damping, as probabilidades mostram uma dependência com a quantidade de emaranhamento do canal, com $p_{\varepsilon=1}^{(2)} = p_{\varepsilon=1}^{(6)} = p \sin^2 \theta$. Neste caso, a fidelidade total é dada por:

$$\langle F_{GHZ}^{A-PS} \rangle = \left(1 - \frac{2}{3}p \sin^2 \theta\right) \left\{ \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \frac{\sqrt{1-p} \sin^2(2\theta) \sin^2(2\phi)}{1 - p \sin^2 \theta} \right\}. \quad (5.57)$$

No caso de phase-flip atuando em qualquer qubit, a fidelidade não sofre modificações quando comparadas ao esquema sem pós-seleção, devido ao fato de que $p_{\varepsilon=1}^{(2)} = p_{\varepsilon=1}^{(6)} = 0$. Para

bit-phase flip, também não há melhoria na fidelidade quando a pós-seleção é feita. Em resumo, para bit flip, depolarizing e amplitude damping, há uma melhora significativa na fidelidade quando a pós-seleção é adotada, enquanto que para phase-flip e bit-phase flip, não há distinção em relação ao esquema sem pós-seleção.

5.3 COMPARAÇÃO ENTRE OS ESQUEMAS

O gráfico abaixo mostra a diferença

$$\Delta F^B = \langle F_{GHZ}^{B-PS} \rangle - \langle F_{EPR}^B \rangle, \quad (5.58)$$

para ruído do tipo bit flip, e $p = 0,07$. Assim, na presença de ruído, a diferença ΔF se torna maior do que no caso sem ruído. Esta quantidade alcança um máximo quando

$$\sin(2\theta^*) \sin(2\phi^*) = \frac{2(1 - \frac{2}{3}p)}{3(1 - p)}. \quad (5.59)$$

Para $p = 0,1$ nós temos $\Delta F^B \approx 0,07$.

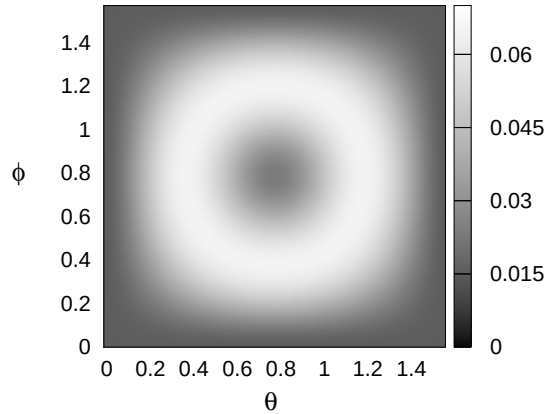


Figura 10 – Diferença entre as fidelidades 3-EPR e 2-GHZ-PS para bit flip e $p = 0,07$.

A seguir, listamos as fidelidades para cada tipo de ruído nos esquemas 3-EPR, 2-GHZ e 2-GHZ com pós seleção (2-GHZ-PS), para a situação em que o emaranhamento é perfeito nos estados do canal e também na base de medição. De modo geral, o esquema 2-GHZ tende a ser melhor que o 3-EPR quando o emaranhamento é arbitrário. Essa tendência se mantém no caso de emaranhamento perfeito, exceto para o caso de ruído phase flip. Por outro lado, ao usar o procedimento de pós-seleção, é possível obter melhores resultados para alguns tipos de ruído.

Tabela 3 – Fidelidade para os esquemas 3-EPR, 2-GHZ e 2-GHZ-PS, com emaranhamento máximo no canal e nas medições.

Ruído	3-EPR	2-GHZ	2-GHZ-PS
Bit flip	$1 - p$	$1 - \frac{5}{6}p$	$1 - \frac{2}{3}p$
Phase flip	$1 - \frac{2}{3}p$	$1 - \frac{2}{3}p$	$1 - \frac{2}{3}p$
Depolarizing	$1 - \frac{8}{9}p$	$1 - \frac{22}{27}p$	$1 - \frac{2}{3}p$
Bit-phase flip	$1 - p$	$1 - \frac{2}{3}p$	$1 - \frac{2}{3}p$
A. damping	$1 - \frac{p}{2}$	$1 - \frac{4}{9}p$	$1 - \frac{p}{3}$

5.3.1 ESTRATÉGIAS POSSÍVEIS

Para a execução do protocolo, Alice e Bob podem adotar diversas estratégias, com o intuito de melhorar a fidelidade do estado teletransportado. Vamos considerar o caso de ruído bit flip.

i) Estratégia 1: Alice não faz distinção entre $\varepsilon = 0$ e $\varepsilon = 1$. Bob usa a mesma unitária para o caso sem ruído, e são necessários 4 bits de informação clássica. Em cada medida GHZ, Alice precisa fazer a distinção de quatro estados da base.

ii) Estratégia 2: Alice começa a distinguir os valores de ε . Mais especificamente, para $\varepsilon = 0$, ela pode recomendar que Bob use a mesma unitária do caso sem ruído. Quando $\varepsilon = 1$, ela recomenda que Bob use uma outra unitária. No entanto, a unitária que servirá para o caso de ruído no qubit 2 não servirá caso o ruído atue no qubit 6, e vice-versa. Isto pode ser visto a partir dos estados escritos para os qubits de Bob, na seção 4.2.5. Assim, em metade das vezes eles irão errar na correção do estado, e esta estratégia não se mostraria muito adequada.

iii) Estratégia 1 com pós-seleção: Alice faz a distinção dos valores de ε , mas descarta os resultados correspondentes a $\varepsilon = 1$. Neste caso, são necessários 5 bits de informação clássica para a execução do protocolo.

Deste modo, o que fizemos ao longo deste capítulo foi considerar os casos i) e iii).

5.3.2 ESQUEMA HÍBRIDO

É possível ainda fazer um esquema híbrido: usar dois estados tipo GHZ como canal, mas fazer medidas na base EPR.

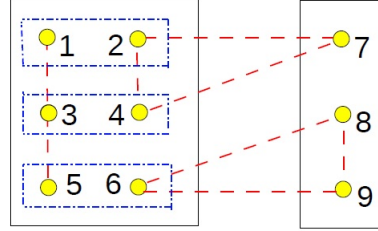


Figura 11 – Esquema híbrido: Para realizar o teletransporte de um estado tipo GHZ, podem ser usados dois estados GHZ como canal, e medições na base EPR.

A figura 11 mostra uma possível configuração para este esquema. Neste caso, o estado inicial do sistema é dado por

$$\hat{\rho}_0 = \hat{\rho}_{135} \otimes \hat{\rho}_{247} \otimes \hat{\rho}_{689}. \quad (5.60)$$

As medições são feitas sobre os qubits 1-2,3-4 e 5-6.

A fidelidade é dada por

$$\bar{F} = \sum_{\mu \nu \varepsilon \lambda \omega \tau j k x y} c_j c_k^* c_x c_y^* \gamma_{j \oplus \lambda, j \oplus \omega, y \oplus \lambda, k \oplus \lambda, k \oplus \omega, x \oplus \lambda}^{(247)} \gamma_{j', y', y', k', x', x'}^{(689)} a_{\mu \nu \varepsilon}^{j k x y} \prod_{\ell=1}^3 b_{\mu_\ell \oplus j} b_{\mu_\ell \oplus k}, \quad (5.61)$$

onde j' indica $j \oplus \tau$ e $\{\mu_1, \mu_2, \mu_3\} = \{\mu, \nu, \varepsilon\}$.

Este esquema apresenta resultados intermediários entre os esquemas 3-EPR e 2-GHZ. Se apresenta melhor que o esquema 3-EPR, e pior que o 2-GHZ. No entanto, pode ser útil no sentido de requerer apenas medições na base de Bell. Para exemplificar isto, escrevemos a expressão para a fidelidade para bit flip e phase flip. Para ruído bit flip, a fidelidade é dada por

$$\langle F_H^B \rangle = \left(1 - \frac{5}{6}p\right) \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \sin^2(2\theta) \sin^3(2\phi)\right). \quad (5.62)$$

Quando o emaranhamento é máximo, $\langle F_H^B \rangle = 1 - \frac{5}{6}p$. É possível fazer pós-seleção também neste esquema. Para bit flip, usando este procedimento, a fidelidade é

$$\langle F_H^{B-PS} \rangle = \left(1 - \frac{2}{3}p\right) \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \sin^2(2\theta) \sin^3(2\phi)\right). \quad (5.63)$$

Para emaranhamento máximo, $\langle F_H^{B-PS} \rangle = 1 - \frac{2}{3}p$.

Para ruído phase-flip,

$$\langle F_H^P \rangle = \langle F_H^{P-PS} \rangle = \frac{2}{3} + (1 - 2p) \frac{1}{3} \sin^2(2\theta) \sin^3(2\phi). \quad (5.64)$$

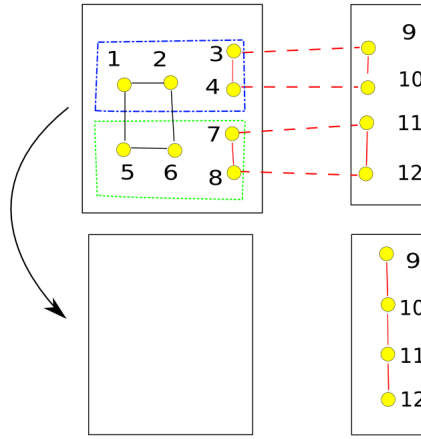


Figura 12 – Um possível esquema para o teletransporte de estado GHZ composto por quatro qubits.

5.3.3 SOBRE A ESCALABILIDADE

O protocolo é, em princípio, aplicável a estados do tipo GHZ com mais de três qubits. Para teletransportar um estado de GHZ n -qubits (GHZ $_n$), podemos empregar dois estados GHZ $_n$ como canal. É possível aplicar a base de medição descrita no apêndice B. Para um estado GHZ com quatro qubits, por exemplo, um esquema possível é ilustrado a seguir.

Neste caso, o estado inicial do sistema é dado por

$$\hat{\rho}_0 = \hat{\rho}_{1256} \otimes \hat{\rho}_{349(10)} \otimes \hat{\rho}_{78(11)(12)}. \quad (5.65)$$

A medição é feita na base $\{|\Phi_\lambda^\mu\rangle\}$:

$$|\Phi_\lambda^\mu\rangle = \sum_{j=0}^1 (-1)^{\mu j} b_{\mu \oplus \lambda} |j, j \oplus \lambda_1, j \oplus \lambda_2, j \oplus \lambda_3\rangle. \quad (5.66)$$

As medições são feitas sobre os qubits 1-2-3-4 e 5-6-7-8. Então, após as medições, o estado (não-normalizado) dos qubits de Bob é dado por

$$\hat{\rho}_K = \text{Tr}_A \{ (\hat{P}_K \otimes \hat{I}_B) \hat{\rho}_0 \}, \quad (5.67)$$

onde

$$\hat{P}_K = |\Psi_\lambda^\mu\rangle \langle \Psi_\lambda^\mu|_{1234} \otimes |\Psi_\tau^\nu\rangle \langle \Psi_\tau^\nu|_{5678}. \quad (5.68)$$

De forma análoga, é possível fazer um protocolo com 5 partículas e assim por diante. Deste modo, é possível usar esta ideia para estados com um número maior de qubits.

6 TELETRANSPORTE DO ESTADO DE UM QUTRIT COM CANAIS RUIDOSOS

Neste capítulo, vamos continuar estudando o teletransporte de um estado. No entanto, agora em vez de considerarmos um protocolo que envolve o teletransporte de um estado tripartite, vamos considerar o teletransporte de um estado de uma partícula com três níveis, ou estado de um *qutrit*,

$$|\phi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle + c_2|2\rangle, \quad (6.1)$$

com $|c_0|^2 + |c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$. Estudar o teletransporte de um estado deste tipo é interessante porque é um estado que pode "carregar" mais informação que um qubit, e é também o primeiro passo para o entendimento de protocolos mais gerais, envolvendo estados com dimensão arbitrária. O teletransporte de um estado de um qutrit foi estudado em (TIAN; SHI; ZHAO, 2011), e o de um qudit em (STENHOLM; BARDROFF, 1998). Aqui, a nossa intenção é usar o formalismo dos operadores de Kraus para incluir alguns tipos de erro no protocolo de teletransporte de um qutrit. Vamos escrever o operador densidade correspondente ao estado a ser teletransportado como

$$\hat{\rho}_1 = \sum_{jk=0}^2 c_j c_k^* |j\rangle_1 \langle k|_1. \quad (6.2)$$

Como canal, vamos considerar inicialmente um estado emaranhado de dois qutrits dado por

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[|00\rangle + |11\rangle + |22\rangle \right]. \quad (6.3)$$

Este estado pode ser visto como uma análogo ao estado EPR, mas agora para qutrits. Uma descrição para o emaranhamento envolvendo qutrits pode ser vista em (CAVES; MILBURN, 2000). É possível também fazer uma descrição matemática dos qutrits de modo a escrever vetores de Bloch, representação em termos de operadores, etc. Isto pode ser visto em (CHEŁCIŃSKA; WÓDKIEWICZ, 2007).

Com o intuito de incluir ruído no canal, vamos escrever o estado como

$$\hat{\rho}_{23} = \sum_{\ell m n r=0}^2 \gamma_{\ell m n r} |\ell m\rangle_{23} \langle n r|_{23}. \quad (6.4)$$

O estado inicial do sistema é dado por

$$\hat{\rho}_0 = \hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_{23}. \quad (6.5)$$

Explicitamente,

$$\hat{\rho}_0 = \sum_{jk\ell mn r} c_j c_k^* \gamma_{\ell mn r} |j, \ell, m\rangle_{123} \langle k, n, r|_{123}. \quad (6.6)$$

A medição é feita sobre as partículas 1 e 2, em uma base análoga à base EPR, mas agora para qutrits. Vamos adotar a seguinte notação para os estados desta base:

$$|\Phi_{\mu\lambda}^{(3)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{r=0}^2 \omega_3^{\mu r} |r, r \oplus \lambda\rangle. \quad (6.7)$$

Aqui, nós usamos $\oplus$ para denotar $r + \lambda \bmod 3$, e

$$\omega_3 \equiv \exp\left(\frac{2}{3}\pi i\right). \quad (6.8)$$

Explicitamente, os estados da base estão listados na tabela a seguir.

μ	λ	estado
0	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}(00\rangle + 11\rangle + 22\rangle)$
0	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}(01\rangle + 12\rangle + 20\rangle)$
0	2	$\frac{1}{\sqrt{3}}(02\rangle + 10\rangle + 21\rangle)$
1	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}(00\rangle + e^{2\pi i/3} 11\rangle + e^{-2\pi i/3} 22\rangle)$
1	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}(01\rangle + e^{2\pi i/3} 12\rangle + e^{-2\pi i/3} 20\rangle)$
1	2	$\frac{1}{\sqrt{3}}(02\rangle + e^{2\pi i/3} 10\rangle + e^{-2\pi i/3} 21\rangle)$
2	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}(00\rangle + e^{-2\pi i/3} 11\rangle + e^{2\pi i/3} 22\rangle)$
2	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}(01\rangle + e^{-2\pi i/3} 12\rangle + e^{2\pi i/3} 20\rangle)$
2	2	$\frac{1}{\sqrt{3}}(02\rangle + e^{-2\pi i/3} 10\rangle + e^{2\pi i/3} 21\rangle)$

Tabela 4 – Estados emaranhados de dois qutrits, que formam a base de medição.

Depois da medida, o estado da partícula de Bob é

$$\hat{\rho}_I = \frac{\text{Tr}_A [\hat{P}_{\mu\lambda} \hat{\rho}_0 \hat{P}_{\mu\lambda}^\dagger]}{P_{\mu\lambda}}, \quad (6.9)$$

onde

$$\hat{P}_{\mu\lambda} = |\Phi_{\mu\lambda}^{(3)}\rangle \langle \Phi_{\mu\lambda}^{(3)}| \quad (6.10)$$

é o projetor associado à medida.

$$P_{\mu\lambda} = \text{Tr}(\hat{P}_{\mu\lambda}\hat{\rho}_0) \quad (6.11)$$

é a probabilidade de ocorrência de um resultado (μ, λ) . Deste modo,

$$\tilde{\rho}_I = \frac{1}{3} \sum_{jkmprs=0}^2 c_j c_k^* \gamma_{j\oplus\lambda, m, k\oplus\lambda, p} (\omega_3^{\mu s})^* (\omega_3^{\mu r}) |m\rangle_3 \langle p|_3. \quad (6.12)$$

Para obtermos a transformação unitária que recupera o estado desejado no fim do protocolo, vamos olhar para o caso perfeito, sem ruído. Então, vamos considerar que

$$\gamma_{j\oplus\lambda, m, k\oplus\lambda, p} = \beta_{j\oplus\lambda} \beta_{k\oplus\lambda} \delta_{j\oplus\lambda, m} \delta_{k\oplus\lambda, p}. \quad (6.13)$$

Com isso, o estado se torna

$$\tilde{\rho}_I(p=0) = \frac{1}{3} \sum_{jkmprs} c_j c_k^* \beta_{j\oplus\lambda} \beta_{k\oplus\lambda} (\omega_3^{\mu s})^* (\omega_3^{\mu r}) |j\oplus\lambda\rangle_3 \langle k\oplus\lambda|_3. \quad (6.14)$$

Vamos também considerar canais maximamente emaranhados, de modo que

$$\beta_j = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \forall j. \quad (6.15)$$

Assim,

$$\tilde{\rho}_I(p=0) = \frac{1}{9} \sum_{jk} c_j c_k^* (\omega_3^{\mu j})^* (\omega_3^{\mu k}) |j\oplus\lambda\rangle_3 \langle k\oplus\lambda|_3. \quad (6.16)$$

Deste modo, a transformação unitária deve ser

$$\hat{U} = \sum_{r'} \omega_3^{\mu r'} |r'\rangle \langle r' \oplus \lambda|; \quad (6.17)$$

$$\hat{U}^\dagger = \sum_{s'} (\omega_3^{\mu s'})^* |s' \oplus \lambda\rangle \langle s'|. \quad (6.18)$$

Usando esta transformação, verificamos que

$$\hat{U} \tilde{\rho}_I(p=0) \hat{U}^\dagger = \frac{1}{9} \sum_{jk} c_j c_k^* |j\rangle \langle k|. \quad (6.19)$$

Assim, $\hat{U}$ é de fato a transformação necessária, pois recupera a forma do estado inicial quando não há ruído.

Agora, temos condições de aplicar esta transformação unitária ao caso geral.

$$\tilde{\rho}_f = \hat{U} \tilde{\rho}_I \hat{U}^\dagger = \frac{1}{3} \sum_{jkr's'} c_j c_k^* c_{s'} c_{r'}^* \gamma_{j \oplus \lambda, r' \oplus \lambda, k \oplus \lambda, s' \oplus \lambda} \omega_3^{\mu r'} (\omega_3^{\mu s})^* \omega_3^{\mu r} (\omega_3^{\mu s'})^* |r'\rangle \langle s'|. \quad (6.20)$$

Para um dado resultado, a fidelidade é

$$F_{\mu\lambda} = \text{Tr}(\hat{\rho}_{in} \tilde{\rho}_f). \quad (6.21)$$

A fidelidade média é

$$\bar{F} = \sum_{\mu\lambda} P_{\mu\lambda} F_{\mu\lambda} = \sum_{\mu\lambda} P_{\mu\lambda} \text{Tr}[\hat{\rho}_{in} \hat{\rho}_f]. \quad (6.22)$$

Como

$$\hat{\rho}_f = \frac{\hat{U} \tilde{\rho}_I \hat{U}^\dagger}{P_{\mu\lambda}} = \frac{\tilde{\rho}_f}{P_{\mu\lambda}}, \quad (6.23)$$

temos que

$$\bar{F} = \sum_{\mu\nu\epsilon\lambda\delta\tau} \text{Tr}[\hat{\rho}_{in} \tilde{\rho}_f] \quad (6.24)$$

Mais explicitamente,

$$\bar{F} = \frac{1}{3} \sum_{\mu\lambda jkr's'} c_j c_k^* c_{s'} c_{r'}^* \gamma_{j \oplus \lambda, r' \oplus \lambda, k \oplus \lambda, s' \oplus \lambda} (\omega_3^{\mu j})^* (\omega_3^{\mu r'}) (\omega_3^{\mu s'})^* (\omega_3^{\mu k}). \quad (6.25)$$

Esta expressão é geral, e pode acomodar diversos tipos de ruído no canal, usando o formalismo de Kraus. No entanto, esta expressão em geral depende do estado inicial. Vamos então obter uma expressão independente do estado de entrada. O estado de um *qutrit* (CAVES; MILBURN, 2000) pode ser escrito como

$$|\phi\rangle = e^{i\chi_0} \sin \theta \cos \varphi |0\rangle + e^{i\chi_1} \sin \theta \sin \varphi |1\rangle + \cos \theta |2\rangle. \quad (6.26)$$

Então, precisamos calcular a seguinte integral

$$\langle \bar{F} \rangle = \frac{2}{9\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \bar{F} \left[9 \sin^3 \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi d\theta d\varphi d\chi_0 d\chi_1 \right]. \quad (6.27)$$

Nesta expressão, o fator $2/9\pi^2$ é a constante normalização para $\langle \bar{F} \rangle$, e pode ser obtida a partir da relação

$$\langle \bar{F} \rangle = A \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} d\Omega, \quad (6.28)$$

com $d\Omega = 9 \sin^3 \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi d\theta d\varphi d\chi_0 d\chi_1$.

Para o caso perfeito, $\langle \bar{F} \rangle = \bar{F} = 1$, de modo que $A = 2/9\pi^2$. A seguir, vamos introduzir alguns tipos de ruído que podem atuar em um *qutrit*, em analogia aos tipos de ruído que estudamos para um *qubit*. Particularmente, os operadores que utilizaremos são operadores de Weyl (BERTLMANN; KRAMMER, 2008). Mais detalhes podem ser vistos no Apêndice C.

6.1 TRIT FLIP

Este ruído é o análogo ao bit flip para o caso de qutrits. Está associado com a possibilidade de "flip" entre os estados $|0\rangle$, $|1\rangle$ e $|2\rangle$. Vamos assumir que cada erro ocorre com uma probabilidade $p/2$, e existe uma probabilidade $1 - p$ de que não ocorra nenhum erro. Os operadores de Kraus são

$$E_0 = \sqrt{1-p} \hat{I}; \quad (6.29)$$

$$E_1 = \sqrt{\frac{p}{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \sqrt{\frac{p}{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.30)$$

É importante notar que são necessários três operadores de Kraus, porque agora existem três possibilidades de erro, diferentemente do caso do bit flip, onde só havia duas. Vamos ver a ação destes operadores. Para $\hat{E}_1$, temos:

$$\hat{E}_1 |0\rangle = \sqrt{\frac{p}{2}} |1\rangle, \quad \hat{E}_1 |1\rangle = \sqrt{\frac{p}{2}} |2\rangle, \quad \hat{E}_1 |2\rangle = \sqrt{\frac{p}{2}} |0\rangle. \quad (6.31)$$

Para o operador $\hat{E}_2$, temos que

$$\hat{E}_2 |0\rangle = \sqrt{\frac{p}{2}} |2\rangle, \quad \hat{E}_2 |1\rangle = \sqrt{\frac{p}{2}} |0\rangle, \quad \hat{E}_2 |2\rangle = \sqrt{\frac{p}{2}} |1\rangle. \quad (6.32)$$

De forma mais compacta, podemos escrever que

$$\hat{E}_1 |\ell\rangle = \sqrt{\frac{p}{2}} |\ell \oplus 1\rangle, \quad \hat{E}_2 |\ell\rangle = \sqrt{\frac{p}{2}} |\ell \oplus 2\rangle, \quad (6.33)$$

onde $\ell \oplus i \equiv \ell + i \pmod{3}$, $i = 1, 2$. Vamos considerar que o ruído atua no primeiro *qutrit* do canal. Se o estado do canal, sem ruído, é

$$\hat{\rho}_{23} = \frac{1}{3} \sum_{\ell n} |\ell \ell\rangle \langle nn|, \quad (6.34)$$

então

$$\varepsilon(\hat{\rho}_{23}) = \frac{1}{3} \left[(\hat{E}_0 \otimes \hat{I}) \hat{\rho}_{23} (\hat{E}_0^\dagger \otimes \hat{I}) + (\hat{E}_1 \otimes \mathbb{K}) \hat{\rho}_{23} (\hat{E}_1^\dagger \otimes \hat{I}) + (\hat{E}_2 \otimes \hat{I}) \hat{\rho}_{23} (\hat{E}_2^\dagger \otimes \hat{I}) \right], \quad (6.35)$$

ou

$$\varepsilon(\hat{\rho}_{23}) = \frac{1}{3} \sum_{\ell n} \left[(1-p) |\ell \ell\rangle \langle nn| + \frac{p}{2} (|\ell \oplus 1, \ell\rangle \langle n \oplus 1, n| + |\ell \oplus 2, \ell\rangle \langle n \oplus 2, n|) \right]. \quad (6.36)$$

O coeficiente γ é dado por

$$\gamma_{j \oplus \lambda, r' \oplus \lambda, k \oplus \lambda, s' \oplus \lambda} = \frac{1}{3} \left[(1-p) \delta_{j, r'} \delta_{k, s'} + \frac{p}{2} \delta_{j \oplus 1, r'} \delta_{k \oplus 1, s'} + \frac{p}{2} \delta_{j \oplus 2, r'} \delta_{k \oplus 2, s'} \right]. \quad (6.37)$$

A expressão para $\bar{F}$ se torna

$$\bar{F} = (1-p) \sum_j |c_j|^2 \sum_k |c_k|^2 + \frac{p}{2} \sum_{jk} (c_j c_{j \oplus 1}^* c_k^* c_{k \oplus 1} + c_j c_{j \oplus 2}^* c_k^* c_{k \oplus 2}). \quad (6.38)$$

$$\bar{F} = (1-p) + \frac{p}{2} \left[2(c_0 c_1^* + c_1 c_2^* + c_2 c_0^*)(c_0^* c_1 + c_1^* c_2 + c_2^* c_0) \right]; \quad (6.39)$$

O próximo passo para obter $\langle \bar{F} \rangle$ é fazer a integração da expressão acima. Mas, antes disso, podemos fazer algumas considerações que irão facilitar este cálculo. Vamos lembrar que

$$c_0 = e^{i\chi_0} \sin \theta \cos \varphi, \quad c_1 = e^{i\chi_1} \sin \theta \sin \varphi, \quad c_2 = \cos \theta. \quad (6.40)$$

Assim, é possível ver que nem todos os termos de $\bar{F}$ irão contribuir para $\langle \bar{F} \rangle$. Como um exemplo, vamos considerar o termo $c_0 c_1^{*2} c_2$. De forma explícita,

$$c_0 c_1^{*2} c_2 = e^{i\chi_0} \sin \theta \cos \varphi e^{-2i\chi_2} \sin^2 \theta \sin^2 \varphi \cos \theta. \quad (6.41)$$

Quando integramos este termo, temos que

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} c_0 c_1^{*2} c_2 d\Omega = 0. \quad (6.42)$$

Deste modo, vamos nos preocupar apenas com termos do tipo $|c_j|^2 |c_k|^2$ (com $j \neq k$). Escrevendo apenas os termos que irão contribuir para $\langle \bar{F} \rangle$, temos que

$$\bar{F} = (1-p) + p (|c_0|^2 |c_1|^2 + |c_1|^2 |c_2|^2 + |c_2|^2 |c_0|^2). \quad (6.43)$$

Integrando esta expressão, chegamos a

$$\langle \bar{F} \rangle = 1 - \frac{3}{4} p. \quad (6.44)$$

6.2 PHASE FLIP

Este tipo de ruído está associado ao ganho de uma fase relativa nos estados $|1\rangle$ e $|2\rangle$. Duas situações podem ocorrer, e são necessários três operadores de Kraus.

$$\hat{E}_0 = \sqrt{1-p}\hat{I}; \quad (6.45)$$

$$\hat{E}_1 = \sqrt{\frac{p}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_3^* & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3 \end{pmatrix}, \quad \hat{E}_2 = \sqrt{\frac{p}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_3 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^* \end{pmatrix}. \quad (6.46)$$

Vamos ver o efeito destes operadores nos estados $|0\rangle$, $|1\rangle$ e $|2\rangle$.

$$\hat{E}_1|0\rangle = \sqrt{\frac{p}{2}}|0\rangle, \quad \hat{E}_1|1\rangle = \sqrt{\frac{p}{2}}\omega_3^*|1\rangle, \quad \hat{E}_1|2\rangle = \sqrt{\frac{p}{2}}\omega_3|2\rangle. \quad (6.47)$$

De forma mais compacta,

$$\hat{E}_1|j\rangle = \sqrt{\frac{p}{2}}(\omega_3^*)^j|j\rangle. \quad (6.48)$$

A tabela abaixo mostra algumas relações úteis.

j	ω_3^j	$\omega_3^{-j} = (\omega_3^*)^j$
0	1	1
1	ω_3	ω_3^*
2	$\omega_3^2 = \omega_3^*$	$\omega_3^{2*} = \omega_3$

Tabela 5 – Relações úteis envolvendo ω_3 .

Para o operador $\hat{E}_2$, temos

$$\hat{E}_2|0\rangle = \sqrt{\frac{p}{2}}|0\rangle, \quad \hat{E}_2|1\rangle = \sqrt{\frac{p}{2}}\omega_3|1\rangle, \quad \hat{E}_2|2\rangle = \sqrt{\frac{p}{2}}\omega_3^*|2\rangle. \quad (6.49)$$

De forma resumida,

$$\hat{E}_2|j\rangle = \sqrt{\frac{p}{2}}(\omega_3)^j|j\rangle. \quad (6.50)$$

Vamos considerar que o primeiro *qutrit* do canal está sujeito ao phase flip. Neste caso, o estado do canal é

$$\varepsilon(\hat{\rho}_{23}) = \frac{1}{3} \left[(1-p) + \frac{p}{2} \left((\omega_3^*)^k (\omega_3)^\ell + (\omega_3)^k (\omega_3^*)^\ell \right) \right] |kk\rangle \langle \ell\ell|. \quad (6.51)$$

O coeficiente γ é dado por

$$\gamma_{j\oplus\lambda, r'\oplus\lambda, k\oplus\lambda, s'\oplus\lambda} = \frac{1}{3} \delta_{j,r'} \delta_{k,s'} \left[(1-p) + \frac{p}{2} \left((\omega_3^*)^k (\omega_3)^\ell + (\omega_3)^k (\omega_3^*)^\ell \right) \right]. \quad (6.52)$$

Com isso,

$$\bar{F} = (1 - p) + p \left[\sum_{j=0}^2 |c_j|^2 (\omega_3^*)^j \sum_{k=0}^2 |c_k|^2 (\omega_3^*)^k \right]. \quad (6.53)$$

Após algumas manipulações, temos que

$$\bar{F} = (1 - p) + p [|c_0|^4 + |c_1|^4 + |c_2|^4 - |c_0|^2 |c_1|^2 - |c_0|^2 |c_2|^2 - |c_1|^2 |c_2|^2]. \quad (6.54)$$

A fidelidade é dada por

$$\langle \bar{F} \rangle = 1 - \frac{3}{4}p. \quad (6.55)$$

6.3 TRIT-PHASE FLIP

Neste caso, pode ocorrer um ganho de fase relativa e também uma transição ao mesmo tempo. Os operadores de Kraus são dados por:

$$E_0 = \sqrt{1-p} \hat{I}, \quad \hat{E}_1 = \sqrt{\frac{p}{4}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_3^* & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{E}_2 = \sqrt{\frac{p}{4}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega_3^* \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_3 & 0 \end{pmatrix}; \quad (6.56)$$

$$\hat{E}_3 = \sqrt{\frac{p}{4}} \begin{pmatrix} 0 & \omega_3^* & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{E}_4 = \sqrt{\frac{p}{4}} \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^* \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.57)$$

De forma resumida, podemos dizer que eles atuam do seguinte modo:

$$\hat{E}_1 |j\rangle = \sqrt{\frac{p}{4}} (\omega_3^*)^j |j \oplus 1\rangle, \quad \hat{E}_2 |j\rangle = \sqrt{\frac{p}{4}} (\omega_3)^j |j \oplus 1\rangle; \quad (6.58)$$

$$\hat{E}_3 |j\rangle = \sqrt{\frac{p}{4}} (\omega_3^*)^j |j \oplus 2\rangle, \quad \hat{E}_4 |j\rangle = \sqrt{\frac{p}{4}} (\omega_3)^j |j \oplus 2\rangle. \quad (6.59)$$

O estado do canal após a ação do ruído passa a ser

$$\varepsilon(\hat{\rho}_{23}) = \frac{1}{3}(1-p) |j, j\rangle \langle k, k| + \frac{1}{3} \varepsilon_{12} (|j \oplus 1, j\rangle \langle k \oplus 1, k| + |j \oplus 2, j\rangle \langle k \oplus 2, k|), \quad (6.60)$$

com

$$\varepsilon_{12} = \frac{p}{4} [(\omega_3^*)^k (\omega_3)^\ell + (\omega_3)^k (\omega_3^*)^\ell]. \quad (6.61)$$

O coeficiente γ é

$$\gamma_{j \oplus \lambda, r' \oplus \lambda, k \oplus \lambda, s' \oplus \lambda} = \frac{1}{3} \left[(1-p) \delta_{j,r'} \delta_{k,s'} + \varepsilon_{12} \delta_{j \oplus 1, r'} \delta_{k \oplus 1, s'} + \varepsilon_{12} \delta_{j \oplus 2, r'} \delta_{k \oplus 2, s'} \right]. \quad (6.62)$$

A expressão para $\bar{F}$ se torna

$$(1-p) \sum_j |c_j|^2 \sum_k |c_k|^2 + \varepsilon_{12} \sum_{jk} (c_j c_{j \oplus 1}^* c_k^* c_{k \oplus 1} + c_j c_{j \oplus 2}^* c_k^* c_{k \oplus 2}). \quad (6.63)$$

De forma mais explícita,

$$\bar{F} = (1-p) + p \left[|c_0|^2 |c_1|^2 + |c_0|^2 |c_2|^2 + |c_1|^2 |c_2|^2 \right]. \quad (6.64)$$

Isto leva a

$$\langle \bar{F} \rangle = 1 - \frac{3}{4}p. \quad (6.65)$$

6.4 DEPOLARIZING

Neste caso, os operadores de Kraus são

$$\hat{E}_0 = \sqrt{1-p} \hat{I}, \quad \hat{E}_1 = \sqrt{\frac{p}{8}} \hat{Y}, \quad \hat{E}_2 = \sqrt{\frac{p}{8}} \hat{Z}, \quad \hat{E}_3 = \sqrt{\frac{p}{8}} \hat{Y}^2, \quad \hat{E}_4 = \sqrt{\frac{p}{8}} \hat{Y} \hat{Z}; \quad (6.66)$$

$$\hat{E}_5 = \sqrt{\frac{p}{8}} \hat{Y}^2 \hat{Z}, \quad \hat{E}_6 = \sqrt{\frac{p}{8}} \hat{Y} \hat{Z}^2, \quad \hat{E}_7 = \sqrt{\frac{p}{8}} \hat{Y}^2 \hat{Z}^2, \quad \hat{E}_8 = \sqrt{\frac{p}{8}} \hat{Z}^2, \quad (6.67)$$

onde

$$\hat{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_3 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^2 \end{pmatrix}. \quad (6.68)$$

A tabela a seguir lista o efeito destes operadores sobre um estado $|j\rangle$.

$\hat{E}_j j\rangle$	ação	$\hat{E}_j j\rangle$	ação	$\hat{E}_j j\rangle$	ação
$\hat{E}_0$	$\sqrt{1-p} j\rangle$	$\hat{E}_3$	$\sqrt{p/8} j \oplus 1\rangle$	$\hat{E}_6$	$\sqrt{p/8} \omega_3^j j \oplus 1\rangle$
$\hat{E}_1$	$\sqrt{p/8} j \oplus 2\rangle$	$\hat{E}_4$	$\sqrt{p/8} \omega_3^j j \oplus 2\rangle$	$\hat{E}_7$	$\sqrt{p/8} (\omega_3^*)^j j \oplus 2\rangle$
$\hat{E}_2$	$\sqrt{p/8} \omega_3^j j \oplus 2\rangle$	$\hat{E}_5$	$\sqrt{p/8} \omega_3^j j \oplus 1\rangle$	$\hat{E}_8$	$\sqrt{p/8} (\omega_3^*)^j j\rangle$

Tabela 6 – Ação dos operadores de Kraus para o caso de Depolarizing.

O estado do canal após a ação do ruído passa a ser

$$\varepsilon(\hat{\rho}_{23}) = \frac{1}{3}\varepsilon_0 |j, j\rangle \langle k, k| + \frac{1}{3}\varepsilon_{12} (|j \oplus 1, j\rangle \langle k \oplus 1, k| + |j \oplus 2, j\rangle \langle k \oplus 2, k|), \quad (6.69)$$

com

$$\varepsilon_{00} = (1 - p) + \frac{p}{8} (\omega_3^j \omega_3^{*k} + \omega_3^{*j} \omega_3^k), \quad \varepsilon_{12} = \frac{p}{8} \left[1 + (\omega_3^j \omega_3^{*k} + \omega_3^{*j} \omega_3^k) \right]. \quad (6.70)$$

O coeficiente γ é

$$\gamma_{j \oplus \lambda, r' \oplus \lambda, k \oplus \lambda, s' \oplus \lambda} = \frac{1}{3} [\varepsilon_{00} \delta_{j, r'} \delta_{k, s'} + \varepsilon_{12} \delta_{j \oplus 1, r'} \delta_{k \oplus 1, s'} + \varepsilon_{12} \delta_{j \oplus 2, r'} \delta_{k \oplus 2, s'}]. \quad (6.71)$$

A expressão para a fidelidade $\bar{F}$ se torna

$$\bar{F} = \frac{1}{9} \sum_{\mu\lambda} \sum_{jk} [\varepsilon_{00} |c_j|^2 |c_k|^2 + \varepsilon_{12} c_j c_{j \oplus 1}^* c_k^* c_{k \oplus 1} + \varepsilon_{12} c_j c_{j \oplus 2}^* c_k^* c_{k \oplus 2}]. \quad (6.72)$$

Nesta etapa, de forma similar ao que discutimos no caso de phase flip, podemos desconsiderar os termos que não contribuem para $\langle \bar{F} \rangle$. Assim, podemos escrever uma expressão simplificada para $\bar{F}$:

$$\bar{F} = (1 - p) + \frac{p}{4} (|c_0|^4 + |c_1|^4 + |c_2|^4) + \frac{p}{2} (|c_0|^2 |c_1|^2 + |c_1|^2 |c_2|^2 + |c_0|^2 |c_2|^2). \quad (6.73)$$

Após a integração, temos que

$$\langle \bar{F} \rangle = 1 - \frac{3}{4}p. \quad (6.74)$$

Assim, para os tipos de erros discutidos aqui, a fidelidade para o teletransporte de um qutrit, quando o emaranhamento é máximo no canal e na medição, é ligeiramente maior que a obtida sob condições análogas para qubits. Certamente, a implementação para os dois casos requer recursos distintos. Aqui, nossa ideia foi ver teoricamente como o aumento da dimensão do estado pode contribuir para a fidelidade. Além disso, com a avanço tecnológico na área, pode ser viável a execução do teletransporte de um estado de um qutrit em situações onde é necessário se enviar mais informação e obter melhores resultados mesmo quando alguns erros aparecem.

7 CONCLUSÕES

Para o processamento de informação quântica em larga escala, é desejável que a nossa capacidade de descrever e manipular sistemas e protocolos envolvendo muitas partes e/ou muitos graus de liberdade se aprimore. Neste sentido, pode-se tentar generalizar protocolos como o de teletransporte de um estado ou o de troca de emaranhamento e até mesmo a codificação superdensa, por exemplo, para acomodar mais partículas portadoras de informação e também protocolos com estados de dimensões maiores. Nesta tese, estudamos variantes do protocolo de teletransporte contemplando essas duas "vertentes". Primeiramente, estudamos o teletransporte de um estado de 3 qubits, do tipo GHZ, dado por $c_0 |000\rangle + c_1 |111\rangle$. Para isto, utilizamos dois esquemas, que chamamos de 3-EPR e 2-GHZ. Isto se refere ao tipo e à quantidade de estados usados como canal. Também utilizamos o procedimento de pós seleção no caso 2-GHZ, que nos referimos como 2-GHZ-PS. No primeiro esquema, são empregados três estados tipo EPR, $\beta_0 |00\rangle + \beta_1 |11\rangle$ com emaranhamento arbitrário, dado pelo coeficiente β_i . No segundo esquema, são utilizados dois estados do tipo GHZ, $\beta_0 |000\rangle + \beta_1 |111\rangle$, novamente com emaranhamento arbitrário. Em ambos os casos, para a medição, consideramos bases com estados não-maximamente emaranhados. Assim, no capítulo 4, calculamos a fidelidade total média (independente do estado de entrada) para cada um dos esquemas como função do emaranhamento da base de medição e também do canal. Com isso, foi possível perceber que o esquema 2-GHZ apresenta uma fidelidade maior que a do esquema 3-EPR. É importante notar que, durante o protocolo, além de se enviar informação há também a transferência de emaranhamento, de forma similar ao que ocorre no processo de troca de emaranhamento (*entanglement swapping*). Assim, ao fim do processo, Bob dispõe de informação e também de emaranhamento, que poderá usar para estabelecer comunicação com outros usuários, formando redes de comunicação quântica, por exemplo.

No capítulo 5, estudamos novamente os esquemas 3-EPR e 2-GHZ, mas desta vez considerando alguns tipos de erros bastante comuns, que podem ocorrer durante a execução de protocolos deste tipo. Para incluir estes erros, consideramos o formalismo dos operadores de Kraus para sistemas quânticos abertos, o que permite fazer uma descrição do ruído sem mencionar os detalhes do ambiente. Isto é bastante útil para o que estudamos, pois estivemos

interessados somente no efeito do ruído sobre o canal. Mais especificamente, consideramos bit flip, phase flip, bit-phase flip, depolarizing e amplitude damping. O formalismo de Kraus e os tipos de erros considerados, foram introduzidos no capítulo 3. Na presença de ruído, notamos que a diferença entre as fidelidades obtidas entre o esquema 2-GHZ e 3-EPR tende a aumentar. Isto ocorre porque, em alguns casos, um dos qubits do canal fica protegido do ruído.

É possível ainda recorrer ao procedimento de pós-seleção no esquema 2-GHZ. Recorrer à pós-seleção é um aspecto bastante interessante, pois permite "detectar" a presença de ruído, pois Alice pode encontrar resultados inesperados (que não são obtidos no caso sem ruído) e assim proceder de forma a otimizar o protocolo. Isto mostra que, apesar do emaranhamento bipartite ser mais fácil de se obter e medir do que o emaranhamento tripartite, em algumas situações onde existem alguns tipos de ruído, pode ser mais vantajoso o uso de emaranhamento GHZ para certas tarefas. Além disso, o esquema 2-GHZ requer menos troca de informação clássica, e também não é preciso fazer a distinção de todos os oito estados da base GHZ em todas as medições.

É possível também fazer um esquema "híbrido", com dois estados GHZ como canal, mas desta vez com medições na base EPR, por parte de Alice. Neste caso, são obtidos resultados intermediários entre os esquemas 3-EPR e 2-GHZ. Do ponto de vista prático, o esquema híbrido pode ser uma alternativa para lidar com dificuldades para se fazer uma medição em uma base tripartite do tipo GHZ. Em todos os casos, são utilizadas operações unitárias ao fim do processo, com o intuito de se obter o estado mais próximo possível do desejado. Cada operação unitária destas, é produto de operações de um único qubit, e assim não é necessário o uso de portas controladas, como por exemplo a porta C-NOT. Isto nos habilitaria a também estudar situações onde, em vez de termos apenas Alice e Bob, talvez mais um ou dois usuários poderiam estar como receptores, compartilhando emaranhamento GHZ. Deste modo, os estados GHZ exibem uma certa versatilidade para serem usados como canal em protocolos de comunicação, permitindo em alguns casos a obtenção de uma fidelidade maior, e também a possibilidade de comunicação em redes com multiusuários. É de nosso interesse também estudar futuramente este protocolo com estados W .

Depois de estudar o teletransporte de um estado GHZ, no capítulo 6 seguimos em outra direção: em vez de aumentar o número de qubits no protocolo de teletransporte, aumentamos o número de dimensões do estado a ser teleportado. Assim, estudamos o teletransporte de um estado de um qutrit, $c_0|0\rangle + c_1|1\rangle + c_2|2\rangle$. Para isto, pode-se usar um formalismo muito parecido com o utilizado para o teletransporte de um estado de um qubit. Então, considerando os tipos de

ruído que podem afetar o estado de um qubit, definimos seus análogos que podem atuar sobre o estado de um qutrit, com os respectivos operadores de Kraus. Com isso, foi possível escrever expressões para o estado usado como canal na presença destes ruídos, e calcular a fidelidade média. Na nossa abordagem, fizemos uma simplificação e consideramos canais maximamente emaranhados e também uma base de medição com emaranhamento máximo. Nossa perspectiva é generalizar estes resultados para emaranhamento arbitrário. No entanto, mesmo com esse resultado não sendo o mais geral possível para qutrits, é possível compará-lo com o caso do teletransporte do estado de um qubit nas condições ótimas (emaranhamento máximo no canal e na medição). Isto permite notar que o aumento no número da dimensão pode levar a uma fidelidade maior. Além disso, estudar o teletransporte do estado de um qutrit é importante porque é o primeiro passo para a construção de protocolos envolvendo dimensões maiores que 2. Nesse sentido, temos como perspectiva o estudo de protocolos envolvendo mais de um qutrit, o que seria uma situação mais geral do que a estudada aqui, contemplando de uma só vez o aumento no número de partes (estados multipartites), e o aumento na dimensão do estado de cada parte (considerando qutrits ou qudits).

Referências

ASPECT, A.; DALIBARD, J.; ROGER, G. Experimental test of bell's inequalities using time-varying analyzers. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 49, p. 1804–1807, Dec 1982. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.49.1804>>.

ASPECT, A.; GRANGIER, P.; ROGER, G. Experimental tests of realistic local theories via bell's theorem. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 47, p. 460–463, Aug 1981. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.47.460>>.

AULETTA, G.; PARISI, G. *Foundations and Interpretation of Quantum Mechanics: In the Light of a Critical-Historical Analysis of the Problems and of a Synthesis of the Results*. [S.l.]: World Scientific, 2001.

BARRETT, M. et al. Deterministic quantum teleportation of atomic qubits. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 429, n. 6993, p. 737–739, 2004.

BELL, J. S. On the einstein podolsky rosen paradox. *Physics*, v. 1, p. 195–200, 1964.

BELL, M.; GAO, S. *Quantum Nonlocality and Reality: 50 Years of Bell's Theorem*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2016.

BENNETT, C. H. et al. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and einstein-podolsky-rosen channels. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 70, p. 1895–1899, Mar 1993. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.70.1895>>.

BENNETT, C. H.; DIVINCENZO, D. P. Quantum information and computation. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 404, n. 6775, p. 247, 2000.

BENNETT, C. H. et al. Mixed-state entanglement and quantum error correction. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 54, p. 3824–3851, Nov 1996. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.54.3824>>.

BENNETT, C. H.; WIESNER, S. J. Communication via one- and two-particle operators on einstein-podolsky-rosen states. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 69, p. 2881–2884, Nov 1992. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.69.2881>>.

BERTLMANN, R. A.; KRAMMER, P. Bloch vectors for qudits. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 41, n. 23, p. 235303, 2008.

BHATIA, P. S. Experimental tripartite quantum state sharing and perfect teleportation of the two-qubit photonic state using genuinely entangled multipartite states. *JOSA B*, Optical Society of America, v. 31, n. 1, p. 154–163, 2014.

BOHM, D. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden" variables. i. *Physical Review*, APS, v. 85, n. 2, p. 166, 1952.

BOSCHI, D. et al. Experimental realization of teleporting an unknown pure quantum state via dual classical and einstein-podolsky-rosen channels. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 80, p. 1121–1125, Feb 1998. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.80.1121>>.

- BOUWMEESTER, D. et al. Observation of three-photon greenberger-horne-zeilinger entanglement. *Physical Review Letters*, APS, v. 82, n. 7, p. 1345, 1999.
- BOUWMEESTER, D. et al. Experimental quantum teleportation. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 390, n. 6660, p. 575–579, 1997.
- BREUER, H.-P.; PETRUCCIONE, F. *The theory of open quantum systems*. [S.l.]: Oxford University Press on Demand, 2002.
- BROWN, I. D. et al. Searching for highly entangled multi-qubit states. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 38, n. 5, p. 1119, 2005.
- CALDEIRA, A. O.; LEGGETT, A. J. Influence of dissipation on quantum tunneling in macroscopic systems. *Physical Review Letters*, APS, v. 46, n. 4, p. 211, 1981.
- CAVES, C. M.; MILBURN, G. J. Qutrit entanglement. *Optics Communications*, Elsevier, v. 179, n. 1, p. 439–446, 2000.
- CHECINIŃSKA, A.; WÓDKIEWICZ, K. Separability of entangled qutrits in noisy channels. *Physical Review A*, APS, v. 76, n. 5, p. 052306, 2007.
- DEVITT, S. J.; MUNRO, W. J.; NEMOTO, K. Quantum error correction for beginners. *Reports on Progress in Physics*, IOP Publishing, v. 76, n. 7, p. 076001, 2013.
- DÜR, W.; VIDAL, G.; CIRAC, J. I. Three qubits can be entangled in two inequivalent ways. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 62, p. 062314, Nov 2000. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.62.062314>>.
- EINSTEIN, A.; PODOLSKY, B.; ROSEN, N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 47, p. 777–780, May 1935. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.47.777>>.
- EXNER, P. *Open quantum systems and Feynman integrals*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 6.
- FORTES, R.; RIGOLIN, G. Fighting noise with noise in realistic quantum teleportation. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 92, p. 012338, Jul 2015. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.92.012338>>.
- FREEDMAN, S. J.; CLAUSER, J. F. Experimental test of local hidden-variable theories. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 28, p. 938–941, Apr 1972. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.28.938>>.
- GARDINER, C. W.; HAKEN, H. *Quantum noise*. [S.l.]: Springer Berlin, 1991. v. 26.
- GHOSH, S. et al. Entanglement teleportation through ghz-class states. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 4, n. 1, p. 48, 2002.
- GORBACHEV, V.; TRUBILKO, A. Quantum teleportation of an einstein-podolsy-rosen pair using an entangled three-particle state. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, Springer, v. 91, n. 5, p. 894–898, 2000.
- GREENBERGER, D. M. et al. Bell's theorem without inequalities. *American Journal of Physics*, AAPT, v. 58, n. 12, p. 1131–1143, 1990.

- GREENBERGER, D. M.; HORNE, M. A.; ZEILINGER, A. Going beyond bell's theorem. In: *Bell's theorem, quantum theory and conceptions of the universe*. [S.l.]: Springer, 1989. p. 69–72.
- GRICE, W. P. Arbitrarily complete bell-state measurement using only linear optical elements. *Physical Review A*, APS, v. 84, n. 4, p. 042331, 2011.
- HANDSTEINER, J. et al. Cosmic bell test: Measurement settings from milky way stars. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 118, p. 060401, Feb 2017. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.118.060401>>.
- HERBST, T. et al. Teleportation of entanglement over 143 km. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Acad Sciences, v. 112, n. 46, p. 14202–14205, 2015.
- HORODECKI, M.; HORODECKI, P.; HORODECKI, R. Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 223, n. 1, p. 1–8, 1996.
- HORODECKI, R. et al. Quantum entanglement. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 81, p. 865–942, Jun 2009. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.81.865>>.
- HUANG, Y.-F. et al. Experimental generation of an eight-photon greenberger–horne–zeilinger state. *Nature communications*, Nature Publishing Group, v. 2, p. 546, 2011.
- JR, O. F.; JR, O. P.; BROMBERG, J. L. *Teoria quântica: estudos históricos e implicações culturais*. [S.l.]: SciELO-EDUEPB, 2011.
- KARLSSON, A.; BOURENNANE, M. Quantum teleportation using three-particle entanglement. *Physical Review A*, APS, v. 58, n. 6, p. 4394, 1998.
- KIESEL, N. et al. Experimental observation of four-photon entangled dicke state with high fidelity. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 98, p. 063604, Feb 2007. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.98.063604>>.
- KIESEL, N. et al. Experimental analysis of a four-qubit photon cluster state. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 95, p. 210502, Nov 2005. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.95.210502>>.
- KIM, Y.-H.; KULIK, S. P.; SHIH, Y. Quantum teleportation of a polarization state with a complete bell state measurement. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 86, p. 1370–1373, Feb 2001. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.86.1370>>.
- KIMBLE, H. J. The quantum internet. *arXiv preprint arXiv:0806.4195*, 2008.
- KLEINMANN, M. et al. Physical purification of quantum states. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 73, p. 062309, Jun 2006. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.73.062309>>.
- KNOLL, L. T.; SCHMIEGELOW, C. T.; LAROTONDA, M. A. Noisy quantum teleportation: An experimental study on the influence of local environments. *Physical Review A*, APS, v. 90, n. 4, p. 042332, 2014.
- KRAUS, K. General state changes in quantum theory. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 64, n. 2, p. 311–335, 1971.

- LU, H.; GUO, G.-c. Teleportation of a two-particle entangled state via entanglement swapping. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 276, n. 5, p. 209–212, 2000.
- MAN, Z.-X.; XIA, Y.-J. Quantum teleportation in a dissipative environment. *Quantum Information Processing*, Springer, v. 11, n. 6, p. 1911–1920, 2012.
- MATTLE, K. et al. Dense coding in experimental quantum communication. *Physical Review Letters*, APS, v. 76, n. 25, p. 4656, 1996.
- MAZIERO, J. Entendendo a entropia de von neumann. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 37, n. 1, 2015.
- MONZ, T. et al. 14-qubit entanglement: Creation and coherence. *Physical Review Letters*, APS, v. 106, n. 13, p. 130506, 2011.
- MORENO, M. G. M.; CUNHA, M. M.; PARISIO, F. Remote preparation of w states from imperfect bipartite sources. *Quantum Information Processing*, v. 15, n. 9, p. 3869–3879, 2016. ISSN 1573-1332. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s11128-016-1358-0>>.
- NEELEY, M. et al. Generation of three-qubit entangled states using superconducting phase qubits. *Nature*, Nature Research, v. 467, n. 7315, p. 570–573, 2010.
- NETO, N. P. *Teorias e interpretações da mecânica quântica*. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2010.
- NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. *Quantum Computation and Quantum Information*. [S.l.]: Cambridge university press, 2000. v. 1. (10th Anniversary edition published 2010, v. 1).
- OH, S.; LEE, S.; LEE, H.-w. Fidelity of quantum teleportation through noisy channels. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 66, p. 022316, Aug 2002. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.66.022316>>.
- PAN, J.-W. et al. Experimental test of quantum nonlocality in three-photon greenberger–horne–zeilinger entanglement. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 403, n. 6769, p. 515–519, 2000.
- PAN, J.-W. et al. Experimental entanglement swapping: Entangling photons that never interacted. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 80, p. 3891–3894, May 1998. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.80.3891>>.
- PAN, J.-w.; ZEILINGER, A. Greenberger-horne-zeilinger-state analyzer. *Physical Review A*, APS, v. 57, n. 3, p. 2208, 1998.
- PATHAK, A. *Elements of quantum computation and quantum communication*. [S.l.]: Taylor & Francis, 2013.
- PATI, A. K.; AGRAWAL, P. Probabilistic teleportation of a qudit. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 371, n. 3, p. 185–189, 2007.
- PERES, A. Separability criterion for density matrices. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 77, p. 1413–1415, Aug 1996. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.77.1413>>.
- PIRANDOLA, S. et al. Advances in quantum teleportation. *Nature photonics*, Nature Research, v. 9, n. 10, p. 641–652, 2015.

PLACEK, T.; BUTTERFIELD, J. *Non-locality and Modality*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 64.

POPESCU, S. Bell's inequalities versus teleportation: What is nonlocality? *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 72, p. 797–799, Feb 1994. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.72.797>>.

PREVEDEL, R. et al. Experimental realization of dicke states of up to six qubits for multiparty quantum networking. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 103, p. 020503, Jul 2009. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.103.020503>>.

QIAN, J.; FENG, X.-L.; GONG, S.-Q. Universal greenberger-horne-zeilinger-state analyzer based on two-photon polarization parity detection. *Physical Review A*, APS, v. 72, n. 5, p. 052308, 2005.

RAUSSENDORF, R.; BROWNE, D. E.; BRIEGEL, H. J. Measurement-based quantum computation on cluster states. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 68, p. 022312, Aug 2003. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.68.022312>>.

REN, J.-G. et al. Ground-to-satellite quantum teleportation. *Nature*, Nature Research, v. 549, n. 7670, p. 70–73, 2017.

RIEBE, M. et al. Deterministic quantum teleportation with atoms. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 429, n. 6993, p. 734–737, 2004.

ROSENFELD, W. et al. Event-ready bell test using entangled atoms simultaneously closing detection and locality loopholes. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 119, p. 010402, Jul 2017. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.119.010402>>.

SCHRÖDINGER, E. Discussion of probability relations between separated systems. In: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. [S.l.], 1935. v. 31, n. 4, p. 555–563.

SCHUMACHER, B.; WESTMORELAND, M. *Quantum processes systems, and information*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010.

SHERSON, J. F. et al. Quantum teleportation between light and matter. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 443, n. 7111, p. 557–560, 2006.

STENHOLM, S.; BARDROFF, P. J. Teleportation of n-dimensional states. *Physical Review A*, APS, v. 58, n. 6, p. 4373, 1998.

SU, X. et al. Quantum entanglement swapping between two multipartite entangled states. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 117, p. 240503, Dec 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.117.240503>>.

TIAN, X.-L.; SHI, G.-F.; ZHAO, Y. Quantum channels of the qutrit state teleportation. *International Journal of Quantum Information*, World Scientific, v. 9, n. 03, p. 893–901, 2011.

URSIN, R. et al. Communications: Quantum teleportation across the danube. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 430, n. 7002, p. 849–849, 2004.

VEDRAL, V. et al. Quantifying entanglement. *Physical Review Letters*, APS, v. 78, n. 12, p. 2275, 1997.

- WALLS, D. F.; MILBURN, G. J. *Quantum optics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2007.
- WANG, X.-W. et al. Nondestructive greenberger-horne-zeilinger-state analyzer. *Quantum information processing*, Springer, v. 12, n. 2, p. 1065–1075, 2013.
- WEINSTEIN, Y. S. Tripartite entanglement witnesses and entanglement sudden death. *Physical Review A*, APS, v. 79, n. 1, p. 012318, 2009.
- WHITAKER, A. *Einstein, Bohr and the quantum dilemma: From quantum theory to quantum information*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2006.
- WISEMAN, H. M.; MILBURN, G. J. *Quantum measurement and control*. [S.l.]: Cambridge university press, 2009.
- WISEMAN, H. M. et al. Bell's theorem still reverberates. *Nature*, Macmillan Publishers Ltd., London, England, v. 510, n. PRESSCUT-H-2014-117, p. 467–469, 2014.
- WOOTTERS, W. K. Entanglement of formation and concurrence. *Quantum Information & Computation*, v. 1, n. 1, p. 27–44, 2001.
- YAO, X.-C. et al. Observation of eight-photon entanglement. *Nature Photonics*, Nature Research, v. 6, n. 4, p. 225–228, 2012.
- YIN, J. et al. Satellite-based entanglement distribution over 1200 kilometers. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 356, n. 6343, p. 1140–1144, 2017.
- YIN, J. et al. Quantum teleportation and entanglement distribution over 100-kilometre free-space channels. *Nature*, Nature Research, v. 488, n. 7410, p. 185–188, 2012.
- ZETTILI, N. *Quantum Mechanics: Concepts and Applications*. Wiley, 2009. ISBN 9780470026786. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=6jXlpJCSz98C>>.
- ZHAO, Z. et al. Experimental demonstration of five-photon entanglement and open-destination teleportation. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 430, n. 6995, p. 54–58, 2004.
- ZHAO, Z. et al. Experimental violation of local realism by four-photon greenberger-horne-zeilinger entanglement. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 91, p. 180401, Oct 2003. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.91.180401>>.
- ZUKOWSKI, M. et al. "event-ready-detectors"bell experiment via entanglement swapping. *Physical Review Letters*, [Woodbury, NY, etc.] American Physical Society., v. 71, n. 26, p. 4287–4290, 1993.

APÊNDICE A – Base generalizada GHZ

Para estados EPR e GHZ, usamos uma notação que permite escrever todos os estados da base de maneira compacta. Podemos expressar uma base GHZ generalizada, para um número arbitrário N de qubits. Explicitamente,

$$|\Phi_{\lambda}^{\mu}\rangle = \sum_{j=0,1} \frac{(-1)^{\mu j}}{\sqrt{2}} |j\rangle \bigotimes_{k=2}^N |j \oplus \lambda_k\rangle, \quad (\text{A.1})$$

O parâmetro λ_k caracteriza cada um dos *kets*. Assim, k se refere à quantidade de qubits, e μ pode ser igual a 0 ou 1. Seguindo esta notação, o estado de Bell

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle), \quad (\text{A.2})$$

por exemplo, corresponde a $|\Phi_0^0\rangle$. De modo similar, um estado GHZ típico,

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|000\rangle + |111\rangle) \quad (\text{A.3})$$

corresponde à $|\Phi_{00}^0\rangle$. Vale notar que esta base também pode ser utilizada quando o emaranhamento é arbitrário. Neste caso,

$$\langle \Phi_{\vec{\lambda}}^{\mu} | \Phi_{\vec{\tau}}^{\nu} \rangle = \delta_{\vec{\lambda}, \vec{\tau}} \delta_{\mu, \nu}, \quad (\text{A.4})$$

com $b_0 = \cos \phi$ e $b_1 = \sin \phi$ ($0 < \phi < \pi/2$). Assim, b_0 e b_1 se referem ao "balanceamento" do estado. Isto é, permitem escrever estados não-maximamente emaranhados. Os elementos desta base satisfazem à relação de ortonormalidade

$$\langle \Phi_{\vec{\lambda}}^{\mu} | \Phi_{\vec{\tau}}^{\nu} \rangle = \delta_{\vec{\lambda}, \vec{\tau}} \delta_{\mu, \nu}. \quad (\text{A.5})$$

APÊNDICE B – Representação de estados em termos de operadores

De modo geral, é possível usar matrizes para representar estados. Isto pode ser visto de forma detalhada em (BERTLMANN; KRAMMER, 2008). Aqui, vamos discutir de forma breve algumas representações possíveis para qubits e qutrits. Para representar operações sobre qubits, podemos usar os operadores de Pauli. Mais que isso, podemos usar as matrizes de Pauli para escrever um estado de um qubit como

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} (\hat{I} + \vec{n} \cdot \vec{\sigma}), \quad (\text{B.1})$$

onde $\vec{n}$ é um vetor unitário em $\mathbb{R}^3$ e $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ são as matrizes de Pauli. Nesta representação, cada estado $\hat{\rho}$ corresponde a um ponto sobre a casca ou no interior de uma esfera unitária em $\mathbb{R}^3$.

Para qutrits, pode-se também pensar em uma representação do tipo esfera de Bloch. Neste caso, são utilizadas as matrizes de Gell-Mann. Elas são dadas por

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (\text{B.2})$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (\text{B.3})$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \sqrt{\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.4})$$

Neste caso, o operador densidade pode ser representado por

$$\hat{\rho} = \frac{1}{3} \left(\hat{I} + \sqrt{3} \vec{n} \cdot \vec{\lambda} \right), \quad (\text{B.5})$$

onde $\vec{n} \in \mathbb{R}^8$.

B.1 Base de Weyl

Uma base de operadores bastante geral é a base de Weyl. Para um estado de dimensão d , os operadores são dados por

$$\hat{U}_{jk} = \sum_{l=0}^{d-1} \omega_d^{lj} |l\rangle \langle l \oplus k|, \quad (\text{B.6})$$

onde $\omega_d = e^{\frac{2\pi i}{d}}$. Com estes operadores, é possível escrever um estado como

$$\hat{\rho} = \frac{1}{d} \hat{I} + \sum_{n,m=0}^{d-1} b_{nm} U_{nm} = \frac{1}{d} \hat{I} + \vec{b} \cdot \vec{U}. \quad (\text{B.7})$$

As componentes do vetor $\vec{b}$ são dadas por $b_{nm} = \text{Tr}(U_{nm} \rho)$.

Para qutrits, os operadores de Weyl são

$$U_{01} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_{02} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_3 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^* \end{pmatrix}; \quad (\text{B.8})$$

$$U_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3 \\ \omega_3^* & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \omega_3 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_3^* & 0 \end{pmatrix}, \quad U_{20} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_3^* & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3 \end{pmatrix}; \quad (\text{B.9})$$

$$U_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^* \\ \omega_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \omega_3^* & 0 & 0 \\ 0 & \omega_3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.10})$$

Para qubits, as matrizes de Weyl são as matrizes de Pauli.