



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Adriano Regis Melo Rodrigues

Dinâmica de Vórtices Pontuais Sobre um Elipsóide Triaxial

Recife

2011

Adriano Regis Melo Rodrigues

Dinâmica de Vórtices Pontuais Sobre um Elipsóide Triaxial

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. César Augusto Rodrigues Castilho

Recife

2011

Catálogo na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

R696d Rodrigues, Adriano Regis Melo
Dinâmica de vórtices pontuais sobre um elipsóide triaxial / Adriano Regis
Melo Rodrigues. – 2011.
76 f.

Orientador: César Augusto Rodrigues Castilho.
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN,
Matemática, Recife, 2011.
Inclui referências e apêndices.

1. Matemática. 2. Vórtices pontuais. I. Castilho, César Augusto Rodrigues
(orientador). II. Título.

510

CDD (23. ed.)

UFPE- MEI 2017-211

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Doutorado em Matemática.

Aprovado:

César Augusto Rodrigues Castilho, UFPE
Orientador

Hildeberto Eulálio Cabral, UFPE

Pablo Gustavo Albuquerque Braz e Silva, UFPE

Stefanella Boatto, UFRJ

Jair Koiller, FGV

DINÂMICA DE VÓRTICES PONTUAIS SOBRE UM ELIPSÓIDE TRIAXIAL

Por

Adriano Regis Melo Rodrigues da Silva

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126.8415– Fax: (081) 2126.8410
RECIFE – BRASIL
Fevereiro – 2011

A Deus e minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus e a todos que contribuíram com minha formação e na elaboração desta tese.

Ao professor César Castilho, agradeço imensamente pelos valiosos ensinamentos e amizade. Espero retribuir a confiança, assim como sua decisão de ser meu orientador, papel que exerceu com louvor.

Agradeço a Jair Koiller e Stefanella Boatto, pela oportunidade de contar com suas indispensáveis contribuições com o desenvolvimento do nosso trabalho.

Ofereço meus sinceros agradecimentos, ao programa de Pós-Graduação em Matemática da UFPE, aos professores Hildeberto Cabral e Pablo Braz por participarem da banca e contribuírem profundamente com minha formação; à professora Maria Luíza Leite, com quem trabalhei no mestrado e tenho grande estima; aos professores Henrique Araújo, Manoel Lemos, Francisco Brito, Eduardo Leandro e Paulo Santiago.

Agradeço com satisfação, a todos os amigos conquistados durante esse período, especialmente, Hélio Machado, Rodrigo Gondin, Cláudio Cristino, Ísis Gabriella, Marcos, Ademakson, Darlan Ferreira, Evaneide, Walisson Rosa, Éder Mateus, Fábio Santos, Allyson, Débora, Humberto, Wilberclay, Ricardo, Anete, Adecarlos, Renata, Tiago e Karla. Sinto-me feliz pelos momentos compartilhados e agraciado com todo apoio que recebi.

Presto também meus agradecimentos a todos os professores, funcionários e amigos do departamento de Matemática da UFRPE, onde fiz graduação e hoje faço parte do corpo docente. Em particular, aos professores Jorge Hinojosa, Elizabete Cabral, Márcia Pragana, Hebe Cavalcante e Maria Eulália pelo constante incentivo e cumplicidade, desde a época de graduação até os dias de hoje. Também sou muito grato a Maité Kuleza, Ísis Gabriella, Rodrigo Gondin e Socorro Brasileiro pela amizade e apoio concedido nos últimos tempos.

Agradeço, de forma especial, aos meus pais José Nauci e Kátia Cristina pelo amor incondicional e todos os sacrifícios fizeram por mim e meus irmãos; à minha avó materna Euridice (vovó nininha); e meus irmãos Anderson, Adson e Alessandra.

À minha amada esposa Alexsandra Karine agradeço por sua dedicação e amor (desde 1996). Agradeço também à nossa adorada filha Amanda Elise (nascida em 04/08/2009), a quem dedico grande parte do meu esforço. Lembro-me perfeitamente

dela entrando no meu escritório sorrindo... e me fazendo assistir no computador (com ela no colo) a mais um episódio dos "Backyardigans".

Devo agradecer também aos meus sogros Carlos e Iara, e cunhados Alexandro (Lupe), Kléber e Fernando pelo carinho e pela assistência.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

Adriano Regis Melo Rodrigues

RESUMO

Objeto de interesse em diversas áreas do conhecimento, como matemática, física, geofísica, meteorologia, dentre outras, e com aplicações que vão desde a circulação atmosférica e oceânica até a superfluidez, a dinâmica de vórtices tem sido tratada há mais de um século, predominantemente, na esfera e, mais recentemente, sobre superfícies com curvatura constante ou de revolução. Neste trabalho, apresenta-se um dos primeiros estudos sobre a dinâmica de vórtices numa superfície com curvatura não constante e sem simetria de revolução. Concentramo-nos especialmente no problema de um par de vórtices opostos no elipsóide com os três eixos distintos (triaxial). Com este propósito, iniciamos com um rápido apanhado da geometria diferencial dos sistemas de coordenadas ortogonais tridimensionais. As coordenadas das quadricas confocais (Jacobi) para o elipsóide e as esfero-cônicas para a esfera são revisadas. O sistema hamiltoniano que governa a dinâmica do par de vórtices é estudado através das equações de Hally, escritas em coordenadas isotérmicas obtidas por Jacobi. Usando estas coordenadas (não globais) realizamos simulações numéricas e nossa metodologia é validada verificando a conjectura de Kimura de que o dipolo se move ao longo de uma geodésica. As equações de movimento foram obtidas em termos de funções elípticas e integradas numericamente com uma precisão considerável. Finalmente, construímos uma aplicação conforme global do elipsóide triaxial para a esfera, combinando as coordenadas confocais no elipsóide com as coordenadas esfero-cônicas na esfera. Escrevemos as equações de Hally globalmente através da projeção estereográfica. Secções de Poincaré para o problema do par de vórtices opostos no elipsóide triaxial são obtidas com várias relações de energia e dos eixos. Os resultados indicam que o sistema não é integrável.

Palavras-chave: Vórtices pontuais. Elipsóide triaxial. Aplicações conformes.

ABSTRACT

Vortex dynamics is a theme of interest in several areas of knowledge, such as mathematics, physics, geophysics, and meteorology (among others), and with applications ranging from atmospheric and ocean circulation to superfluidity. Vortices on the sphere have been treated for about a century, and more recently on surfaces with constant curvature or surfaces of revolution. In this work, we present one of the first studies on the dynamics of vortices on a surface with non-constant curvature and without symmetry of revolution. We focus especially on the problem of two point vortices (with total null vorticity) on the ellipsoid with three distinct axes (triaxial). For this purpose, we first present a quick survey of the differential geometry of three-dimensional orthogonal coordinate systems. Jacobi's confocal quadrics coordinates on the ellipsoid and sphero-conical coordinates on the sphere are reviewed. The Hamiltonian system that governs the dynamics of a pair of vortices is studied via Hally's equations. Using Jacobi's isothermic coordinates (non global) we performed numerical experiments to validate our methodology by verifying Kimura's conjecture that the vortex dipole moves along a geodesic. The equations of motion are displayed in terms of elliptic functions and numerically integrated with considerable precision. Finally, we construct a global conformal application of the triaxial ellipsoid on the unit sphere combining the confocal coordinates on the ellipsoid with the sphero-conical coordinates on the sphere. Using Hally's equations via the stereographic projection, sections of Poincaré are determined for the problem of two vortices on the triaxial ellipsoid with various energy and axis relations. The results indicate that the system is not integrable.

Keywords: Point vortex. Triaxial ellipsoid. Conformal map.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	COORDENADAS ORTOGONAIS	12
2.1	Coordenadas Triplamente Ortogonais em \mathbb{R}^3	12
2.2	Coordenadas Elípticas ou Confocais	15
2.2.1	Elipsóide e Hiperbolóides de uma e duas folhas	17
2.3	Coordenadas Parabólicas	19
2.3.1	Parabolóides elíptico e hiperbólico	21
2.4	Coordenadas Esfero-Cônicas	22
3	APLICAÇÕES CONFORMES	25
3.1	Integrais e funções elípticas	25
3.2	Coordenadas isotérmicas sobre as Quádricas	28
3.2.1	O Elipsóide.	30
3.2.2	O Hiperbolóide de uma folha	32
3.2.3	O Hiperbolóide de duas folha	33
3.2.4	O Parabolóide Elíptico	35
3.2.5	O Parabolóide Hiperbólico	36
3.3	Aplicação conforme do Elipsóide sobre a esfera	37
4	EQUAÇÕES DE MOVIMENTO	40
4.1	Dois vórtices sobre o elipsóide triaxial	40
5	EXPERIMENTOS NUMÉRICOS	43
5.1	Conjectura de Kimura	43
5.2	Seções de Poincaré	48
	REFERÊNCIAS	67
	APÊNDICE A – COORDENADAS ORTOGONAIS	70
	APÊNDICE B – MAPA CONFORMA DE CRAIG	75

1 INTRODUÇÃO

A dinâmica de vórtices tem atraído a atenção de pesquisadores em diversas áreas do conhecimento. Matemáticos, físicos, geofísicos, meteorólogos estão interessados em estudá-la, sobretudo, por suas inúmeras aplicações, como dinâmicas em oceanos e atmosfera. O sistema que rege o movimento de N vórtices pontuais no plano foi introduzido por Helmholtz em 1867 (1) e descrito como um sistema hamiltoniano por Kirchhoff em 1876 (2).

Além da dinâmica sobre o plano, grande parte dos estudos realizados até hoje são dedicados a dinâmica sobre a esfera: Bogomolov (??), Kimura e Okamoto (3), Pekarski e Marsden (4), Kidambi e Newton ((5),(6), (7)), Lim, Montaldi e Roberts (8), Boatto e Cabral (9), Laurent-Polz (10), Tronin (11), Jamalooden e Newton (12), O'Neil (13), Sakajo e Yagasaki ((14), (15)), Newton e Sakajo (16); entre outros. Em 1999, Kimura (17) obteve as equações de movimento em superfícies com curvatura constante (incluindo o plano hiperbólico). Ele mostrou que um dipolo de vórtices move-se ao longo de uma geodésica dessas superfícies e conjecturou que tal fato permanece válido para uma superfície qualquer.

Existem poucas referências tratando-se de superfícies com curvatura não constante. Em 1980, David Hally (18) descreveu as equações de movimento de N vórtices pontuais numa superfície, usando coordenadas isotérmicas. Numa superfície com métrica $ds^2 = h^2(z, \bar{z})|dz|^2$, as equações de Hally são:

$$\dot{z}_n = h^{-2}(z_n, \bar{z}_n) \left[\sum_{k \neq n}^N -i \frac{\Gamma_k}{z_n - z_k} + i \Gamma_n \frac{\partial}{\partial z_n} \ln(h(z_n, \bar{z}_n)) \right], \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (1.1)$$

Aqui, Γ_k representa a intensidade do k -ésimo vórtice.

O caso das superfícies de revolução tem sido investigado mais recentemente. Em 2002, Soulière e Tokieda (19) apresentaram um método para encontrar soluções periódicas (que não são equilíbrios relativos) em superfícies de revolução, em particular, elipsóides e cilindros. O problema de N -vórtices sobre o elipsóide de revolução foi estudado por Castilho e Machado (20) em 2008. Aplicando-se técnicas de perturbação sobre a esfera, constrói-se uma sequência de aplicações conformes do elipsóide no plano. Entre outros resultados, verifica-se numericamente que sistema truncado de primeira ordem para a dinâmica de três vórtices é caótico. Em 2010, Sun-Chul Kim (21) obteve explicitamente o fator conforme para o elipsóide de revolução "spheroid" $\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} + \frac{z^2}{R^2(1+a)} = 1$, com $a > -1$, por meio de uma projeção

estereográfica modificada. Uma formulação geométrica intrínseca para o caso geral de superfícies fechadas foi tratada por Boatto e Koiller. Em seu trabalho (22), são fornecidas correções em (18) para o caso de vorticidade total não-nula, válidas para superfícies fechadas de gênero arbitrário e domínios de Jordan. Também é apresentada uma demonstração da conjectura de Kimura para o dipolo de vórtices.

No decorrer de nossa pesquisa, encontramos o sistema de equações e estudamos a dinâmica de vórtices para um caso de superfície com curvatura não-constante sem simetria de revolução. Trabalhamos, especificamente, a questão de dois vórtices pontuais (com vorticidade total nula) sobre o elipsóide com os três eixos distintos. Até hoje, não encontramos estudos acerca deste sistema. Para tanto, obtivemos, sobre o elipsóide, uma métrica conforme à esférica. Através da projeção estereográfica, passamos para o plano complexo com métrica $ds^2 = h^2(z, \bar{z})|dz|^2$, onde o fator conforme $h^2(z, \bar{z})$ é calculado.

O hamiltoniano que governa a dinâmica de vórtices pontuais que estudamos é

$$H = \sum_{k < n} \Gamma_k \Gamma_n \ln \left(h(z_k, \bar{z}_k) h(z_n, \bar{z}_n) |z_k - z_n|^2 \right)$$

com a forma simplética

$$\omega = \sum_{n=1}^N \Gamma_n h^2(z_n, \bar{z}_n) dz_n \wedge d\bar{z}_n.$$

Tal formulação resulta nas equações (1.1) de Hally, que serão descritas em detalhes no capítulo 4.

As equações de movimento são obtidas em termos de funções elípticas e integradas numericamente com precisão considerável. Determinamos seções de Poincaré para o problema de dois vórtices sobre o elipsóide triaxial com energia e eixos variados. Os resultados são exibidos no capítulo 5, em que o sistema revela-se não-integrável. Uma verificação numérica da conjectura de Kimura é também apresentada nesse capítulo. A fim de alcançar nossos objetivos, apresentaremos no capítulo 1, conceitos preliminares referentes a sistemas de coordenadas ortogonais. No capítulo 3, usaremos esses sistemas para construir uma aplicação conforme do elipsóide triaxial sobre a esfera. Além disso, obteremos parâmetros isotérmicos que cobrem, a menos dos pontos umbílicos, as superfícies quádricas não-simétricas. Estes serão os parâmetros utilizados nos experimentos numéricos sobre a conjectura de Kimura no elipsóide.

2 COORDENADAS ORTOGONAIS

Neste capítulo apresentamos de forma preliminar, alguns sistemas coordenadas clássicos em \mathbb{R}^3 e um pouco da geometria das superfícies quádricas não-simétricas. Os sistemas de coordenadas desenvolvidos aqui terão um importante papel no decorrer deste trabalho.

2.1 Coordenadas Triplamente Ortogonais em \mathbb{R}^3

A seguir, faremos uma introdução ao conceito de sistema de superfícies triplamente ortogonais, muito usado no estudo das linha de curvaturas de uma superfície. Como ilustração, enunciaremos o teorema de Dupin. Cada uma das quádricas que estudaremos, são membros particulares de um desses sistemas de superfícies e possuem coordenadas induzidas por eles (veja (23), (24)).

Definição 1. Um sistema triplamente ortogonal de superfícies sobre um aberto U de \mathbb{R}^3 , consiste de três famílias de superfícies, tais que:

- (i) Cada ponto de $U \subset \mathbb{R}^3$ pertence a um e somente um membro de cada família;
- (ii) Cada superfície de uma família intersecta os membros das outras duas ortogonalmente.

Um sistema de coordenadas $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \mapsto X(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ em $U \subset \mathbb{R}^3$ é dito triplamente ortogonal (ou simplesmente coordenadas ortogonais) se

$$\langle X_{\lambda_1}, X_{\lambda_2} \rangle = \langle X_{\lambda_2}, X_{\lambda_3} \rangle = \langle X_{\lambda_1}, X_{\lambda_3} \rangle = 0.$$

As superfícies coordenadas (obtidas fixando uma das coordenadas)

$$(\lambda_1, \lambda_2) \mapsto X(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \quad (\lambda_1, \lambda_3) \mapsto X(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad \text{e} \quad (\lambda_2, \lambda_3) \mapsto X(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \quad (2.1)$$

definem um sistema ortogonal de superfícies em U .

Vejamos alguns exemplos clássicos de coordenadas em \mathbb{R}^3 e os sistemas de superfícies correspondentes:

- Coordenadas cartesianas (x, y, z) ; sistema em \mathbb{R}^3 formado por famílias de planos paralelos aos planos coordenados xy , yz e xz .

- Coordenadas esféricas (u, v, w) :

$$x = u \cos v \cos w, \quad y = u \cos v \sin w \quad \text{e} \quad z = u \sin v;$$

sistema formado por esferas concêntricas, cones e planos passando pelo eixo z .

- Coordenadas cilíndricas (u, v, w) :

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v \quad \text{e} \quad z = w;$$

sistema em \mathbb{R}^3 menos o eixo z , formado por planos contendo o eixo z , planos paralelos ao plano xy e cilindros circulares em torno do eixo z .

Observação 2.1.1. Seja S uma das superfícies coordenadas (2.1) fazendo λ_k constante, com $k \in \{1, 2, 3\}$ fixado.

Defina as funções $\tilde{E}, \tilde{G} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\tilde{E}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \|X_{\lambda_i}\|^2, \quad \tilde{G}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \|X_{\lambda_j}\|^2, \quad i < j, \quad i, j \neq k. \quad (2.2)$$

Restrito à S o campo normal unitário¹ é dado por

$$N = \frac{X_{\lambda_k}}{\|X_{\lambda_k}\|}.$$

A primeira forma fundamental de S é $Ed\lambda_i^2 + 2Fd\lambda_i d\lambda_j + Gd\lambda_j^2$, onde E e G são restrições das funções (2.2) a condição λ_k constante. Além disso, $F = 0$ pelo fato do sistema ser triplamente ortogonal.

A segunda forma fundamental dessa superfície é dada por $ed\lambda_i^2 + 2fd\lambda_i d\lambda_j + gd\lambda_j^2$, onde $e = \langle X_{\lambda_i}, N \rangle$, $f = \langle X_{\lambda_j}, N \rangle$ e $g = \langle X_{\lambda_k}, N \rangle$.

A proposição a seguir estabelece relações entre os coeficientes da primeira e segunda formas e terá um papel importante na geometria das superfícies quádricas.

Proposição 2.1.2. *Seja $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ coordenadas triplamente ortogonais em $U \subset \mathbb{R}^3$. Então os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais da superfície coordenadas determinada por λ_k constante (observação 2.1.1), satisfazem:*

$$e = -\frac{\tilde{E}_{\lambda_k}}{2\|X_{\lambda_k}\|}; \quad f = F = 0; \quad g = -\frac{\tilde{G}_{\lambda_k}}{2\|X_{\lambda_k}\|}.$$

¹ Por uma permutação de coordenadas podemos supor preservada a orientação de \mathbb{R}^3 .

Prova. Sejam $X = X(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ parametrização de U e S a superfície definida por λ_k constante, para algum k .

Diferenciando as equações $\langle X_{\lambda_2}, X_{\lambda_3} \rangle = 0$, $\langle X_{\lambda_1}, X_{\lambda_3} \rangle = 0$ e $\langle X_{\lambda_1}, X_{\lambda_2} \rangle = 0$, com respeito a λ_1 , λ_2 e λ_3 , respectivamente, obtém-se:

$$\langle X_{\lambda_1\lambda_2}, X_{\lambda_3} \rangle + \langle X_{\lambda_2}, X_{\lambda_1\lambda_3} \rangle = 0,$$

$$\langle X_{\lambda_1\lambda_2}, X_{\lambda_3} \rangle + \langle X_{\lambda_1}, X_{\lambda_2\lambda_3} \rangle = 0,$$

$$\langle X_{\lambda_1\lambda_3}, X_{\lambda_2} \rangle + \langle X_{\lambda_1}, X_{\lambda_2\lambda_3} \rangle = 0.$$

Comparando as parcelas dessas equações, concluímos que

$$\langle X_{\lambda_1\lambda_2}, X_{\lambda_3} \rangle = 0; \quad \langle X_{\lambda_1\lambda_3}, X_{\lambda_2} \rangle = 0; \quad \langle X_{\lambda_2\lambda_3}, X_{\lambda_1} \rangle = 0. \quad (2.3)$$

Ora, o campo normal unitário N dessa superfície é

$$N = \frac{X_{\lambda_k}}{\|X_{\lambda_k}\|}.$$

Portanto, segue-se de (2.3) que $f = 0$.

Agora suponha, sem perda de generalidade, que S seja definida por λ_3 constante. Então,

$$e = \langle X_{\lambda_1\lambda_1}, N \rangle = \frac{1}{\|X_{\lambda_3}\|} \langle X_{\lambda_1\lambda_1}, X_{\lambda_3} \rangle = -\frac{1}{\|X_{\lambda_3}\|} \langle X_{\lambda_1}, X_{\lambda_3\lambda_1} \rangle = -\frac{1}{\|X_{\lambda_3}\|} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \lambda_3} (\|X_{\lambda_1}\|^2),$$

$$e = -\frac{\tilde{E}_{\lambda_3}}{2\|X_{\lambda_3}\|}.$$

Analogamente, obtém-se g . □

Um resultado bastante conhecido é que as curvas coordenadas dessas superfície são linhas de curvatura se, e somente se, $F = f = 0$. Portanto, temos o seguinte teorema:

Teorema 2.1.3 (Dupin). *As curvas de intersecção das superfícies de um sistema triplamente ortogonal são suas linha de curvatura.*

2.2 Coordenadas Elípticas ou Confocais

O sistema de coordenadas descrito a seguir pode ser introduzido mais geralmente em \mathbb{R}^n . Contudo, apresentaremos aqui uma abordagem em \mathbb{R}^3 para tratar de forma concreta nosso objeto de estudo.

Considere a equação cartesiana:

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1. \quad (2.4)$$

com a, b e c distintos.

Fixados a, b e c , considere as superfícies definidas pela equação:

$$\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} + \frac{z^2}{c-\lambda} = 1, \quad (2.5)$$

para cada valor de λ .

Essas superfícies são chamadas quádras confocais da superfície dada em (2.4), e constituem famílias de elipsóides, hiperbolóides de uma folha e hiperbolóides de duas folhas. Fixados $a < b < c$, tais famílias são determinadas, respectivamente, pelos valores de λ nos intervalos $(-\infty, a)$, (a, b) e (b, c) .

Dado um ponto $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, as superfícies confocais passando por P são definidas pelos valores de λ , raízes da equação cúbica:

$$x^2(b-\lambda)(c-\lambda) + y^2(a-\lambda)(c-\lambda) + z^2(a-\lambda)(b-\lambda) - (a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda) = 0. \quad (2.6)$$

Se λ_1, λ_2 e λ_3 são as raízes² desta equação, temos:

$$\begin{aligned} & (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) \\ &= x^2(b-\lambda)(c-\lambda) + y^2(a-\lambda)(c-\lambda) + z^2(a-\lambda)(b-\lambda) - (a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda). \end{aligned}$$

Resolvendo um sistema de equações lineares para x^2, y^2 e z^2 (ver apêndice A) verifica-se

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{(a-\lambda_1)(a-\lambda_2)(a-\lambda_3)}{(a-b)(a-c)} \\ y^2 &= \frac{(b-\lambda_1)(b-\lambda_2)(b-\lambda_3)}{(b-a)(b-c)} \\ z^2 &= \frac{(c-\lambda_1)(c-\lambda_2)(c-\lambda_3)}{(c-a)(c-b)} \end{aligned} \quad (2.7)$$

² Analisando o comportamento da função $F(\lambda) = \frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} + \frac{z^2}{c-\lambda} - 1$, para $x, y, z \neq 0$, é fácil ver que a equação (2.6) possui três raízes reais. Se $a < b < c$, então $\lambda_1 < a < \lambda_2 < b < \lambda_3 < c$.

O sistema de coordenadas definido por $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ em cada octante de \mathbb{R}^3 é dito sistema de coordenadas elípticas ou confocais.

Proposição 2.2.1. *O sistema de coordenadas elípticas*

$$X(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (x(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), y(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), z(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)),$$

define um sistema de coordenadas triplamente ortogonais em cada octante de \mathbb{R}^3 e satisfaz:

$$(i) \quad \frac{\partial X}{\partial \lambda_i} = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\lambda_i - a}, \frac{y}{\lambda_i - b}, \frac{z}{\lambda_i - c} \right);$$

$$(ii) \quad \left\| \frac{\partial X}{\partial \lambda_i} \right\|^2 = \frac{1}{4} \frac{\lambda_i^2 - \lambda_i \sum_{k \neq i} \lambda_k + \prod_{k \neq i} \lambda_k}{(a - \lambda_i)(b - \lambda_i)(c - \lambda_i)}$$

com $i = 1, 2, 3$.

Prova. O fato deste sistema ser ortogonal, assim como o resultado (ii), são decorrentes da primeira propriedade a qual provaremos agora.

Diferenciando implicitamente a primeira equação em (2.7), tem-se

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_1}(x^2) = -\frac{(a - \lambda_2)(a - \lambda_3)}{(a - b)(a - c)} \Rightarrow 2x \cdot \frac{\partial x}{\partial \lambda_1} = \frac{x^2}{\lambda_1 - a} \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial \lambda_1} = \frac{1}{2} \frac{x}{\lambda_1 - a}.$$

Logo, pela simetria com relação a λ_1, λ_2 , e λ_3 ,

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda_i} = \frac{1}{2} \frac{x}{\lambda_i - a}.$$

Analogamente,

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda_i} = \frac{1}{2} \frac{y}{\lambda_i - b} \text{ e } \frac{\partial z}{\partial \lambda_i} = \frac{1}{2} \frac{z}{\lambda_i - c},$$

donde verifica-se a propriedade (i).

Desta propriedade e de (2.7) temos que

$$\begin{aligned} 4\langle X_{\lambda_1}, X_{\lambda_2} \rangle &= \frac{x^2}{(\lambda_1 - a)(\lambda_2 - a)} + \frac{y^2}{(\lambda_1 - b)(\lambda_2 - b)} + \frac{z^2}{(\lambda_1 - c)(\lambda_2 - c)} \\ &= \frac{a - \lambda_3}{(a - b)(a - c)} + \frac{b - \lambda_3}{(b - a)(b - c)} + \frac{c - \lambda_3}{(c - a)(c - b)} \\ &= \frac{(a - \lambda_3)(b - c) - (b - \lambda_3)(a - c) + (c - \lambda_3)(a - b)}{(a - b)(a - c)(b - c)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\langle X_{\lambda_1}, X_{\lambda_3} \rangle = \langle X_{\lambda_2}, X_{\lambda_3} \rangle = 0.$$

(ii) Ver apêndice A. □

2.2.1 Elipsóide e Hiperbolóides de uma e duas folhas

Por tudo que foi exposto, a superfície de equação $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$, $a < b < c$, é membro do sistema de superfícies definido em (2.5), associada à $\lambda = 0$.

As coordenadas confocais (λ_1, λ_2) que parametrizam essa superfície satisfaz:

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{a(a-\lambda_1)(a-\lambda_2)}{(a-b)(a-c)} \\ y^2 &= \frac{b(b-\lambda_1)(b-\lambda_2)}{(b-a)(b-c)} \\ z^2 &= \frac{c(c-\lambda_1)(c-\lambda_2)}{(c-a)(c-b)}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

e variam conforme a tabela a seguir:

Elipsóide	$0 < a < \lambda_1 < b < \lambda_2 < c$	(2.9)
Hiperbolóide de 1 folha	$\lambda_1 < a < 0 < b < \lambda_2 < c$	
Hiperbolóide de 2 folhas	$\lambda_1 < a < \lambda_2 < b < 0 < c$	

Se $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ são coordenadas elípticas em \mathbb{R}^3 , pela proposição (2.2.1), em cada superfície determinada por λ_3 constante (observação 2.1.1) tem-se:

$$\begin{aligned} \tilde{E} = \|X_{\lambda_1}\|^2 &= \frac{1}{4} \frac{\lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3}{(a-\lambda_1)(b-\lambda_1)(c-\lambda_1)}, \\ \tilde{G} = \|X_{\lambda_2}\|^2 &= \frac{1}{4} \frac{\lambda_2^2 - \lambda_1\lambda_2 - \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3}{(a-\lambda_2)(b-\lambda_2)(c-\lambda_2)}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Também,

$$\|X_{\lambda_3}\|^2 = \frac{1}{4} \frac{\lambda_3^2 - \lambda_1\lambda_3 - \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2}{(a-\lambda_3)(b-\lambda_3)(c-\lambda_3)}.$$

Em nosso caso específico, que podemos supor $\lambda_3 = 0$, verifica-se

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{\lambda_3} &= \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{4(a-\lambda_1)(b-\lambda_1)(c-\lambda_1)} = -\frac{1}{\lambda_1} E, \\ \tilde{G}_{\lambda_3} &= -\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{4(a-\lambda_2)(b-\lambda_2)(c-\lambda_2)} = -\frac{1}{\lambda_2} G, \\ \|X_{\lambda_3}\|^2 &= \frac{\lambda_1\lambda_2}{4abc}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

A métrica das quádricas descritas em (2.9) é dada pela expressão

$$ds^2 = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{4} \left[\frac{\lambda_1}{(\lambda_1 - a)(\lambda_1 - b)(\lambda_1 - c)} d\lambda_1^2 - \frac{\lambda_2}{(\lambda_2 - a)(\lambda_2 - b)(\lambda_2 - c)} d\lambda_2^2 \right]. \quad (2.12)$$

Na proposição a seguir, obtém-se uma expressão para a curvatura gaussiana K de tais superfícies (em coordenadas confocais) assim como seus respectivos pontos umbílicos³. O hiperbolóide de uma folha não possui pontos umbílicos, uma vez que sua curvatura é negativa. No elipsóide, esses pontos correspondem à $\lambda_1 = \lambda_2 = b$ e no hiperbolóide de duas folhas à $\lambda_1 = \lambda_2 = a$.

Proposição 2.2.2. *A curvatura gaussiana da superfície de equação $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$ com a, b e c distintos, em coordenadas confocais, é*

$$K = \frac{abc}{(\lambda_1 \lambda_2)^2}.$$

Além disso, os pontos umbílicos são, nos casos:

(i) *Elipsóide ($0 < a < b < c$)*

$$x = \pm \sqrt{\frac{a(a-b)}{(a-c)}}, \quad y = 0, \quad z = \pm \sqrt{\frac{c(c-b)}{(c-a)}},$$

que corresponde a $\lambda_1 = \lambda_2 = b$;

(ii) *Hiperbolóide de duas folhas ($a < b < 0 < c$)*

$$x = 0, \quad y = \pm \sqrt{\frac{b(b-a)}{(b-c)}}, \quad z = \pm \sqrt{\frac{c(c-a)}{(c-b)}},$$

para $\lambda_1 = \lambda_2 = a$.

Prova. No caso em que $F = f = 0$, as curvaturas principais são dadas por (ver por exemplo (25))

$$k_1 = \frac{e}{E}, \quad k_2 = \frac{g}{G}. \quad (2.13)$$

Da proposição (2.1.2) e das expressões (2.11) segue-se:

$$e = -\frac{\tilde{E}_{\lambda_3}}{2\|X_{\lambda_3}\|} = \frac{E}{2\lambda_1\|X_{\lambda_3}\|},$$

$$g = -\frac{\tilde{G}_{\lambda_3}}{2\|X_{\lambda_3}\|} = \frac{G}{2\lambda_2\|X_{\lambda_3}\|}.$$

³ Pontos umbílicos são pontos no qual as curvaturas principais coincidem.

donde

$$k_1 = \frac{1}{2\lambda_1\|X_{\lambda_3}\|}, \quad k_2 = \frac{1}{2\lambda_2\|X_{\lambda_3}\|}.$$

Portanto, $k_1 = k_2$ se, e somente se, $\lambda_1 = \lambda_2$.

Isso ocorre apenas nos casos citados no enunciado para $\lambda_1 = \lambda_2 = b$ e $\lambda_1 = \lambda_2 = a$, respectivamente. Os pontos umbílicos em coordenadas cartesianas são obtidas diretamente (2.8).

Finalmente,

$$K = k_1 k_2 = \frac{1}{4\lambda_1 \lambda_2 \|X_{\lambda_3}\|^2} = \frac{abc}{(\lambda_1 \lambda_2)^2}.$$

□

2.3 Coordenadas Parabólicas

A construção dessas coordenadas segue o mesmo roteiro do caso anterior. Considere a equação

$$2z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}. \quad (2.14)$$

Essa equação representa um parabolóide elíptico ou um parabolóide hiperbólico, conforme a e b tenham o mesmo sinal ou sinais contrários, respectivamente.

Fixados a e b , a equação

$$2z - \lambda = \frac{x^2}{a - \lambda} + \frac{y^2}{b - \lambda}, \quad (2.15)$$

define três famílias de superfícies quádricas. Cada ponto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ é intersecção de três dessas superfícies, determinadas pelos valores de λ raiz da equação cúbica:

$$(2z - \lambda)(a - \lambda)(b - \lambda) - x^2(a - \lambda) - y^2(b - \lambda) = 0. \quad (2.16)$$

Como no caso anterior, se λ_1 , λ_2 e λ_3 são raízes desta equação, tem-se (ver A)

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{(\lambda_1 - a)(\lambda_2 - a)(\lambda_3 - a)}{a - b} \\ y^2 &= \frac{(\lambda_1 - b)(\lambda_2 - b)(\lambda_3 - b)}{b - a} \\ z &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - a - b}{2} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Proposição 2.3.1. O sistema de coordenadas parabólicas é um sistema de coordenadas triplamente ortogonais e satisfaz:

$$(i) \quad \frac{\partial X}{\partial \lambda_i} = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\lambda_i - a}, \frac{y}{\lambda_i - b}, 1 \right);$$

$$(ii) \quad \left\| \frac{\partial X}{\partial \lambda_i} \right\|^2 = \frac{1}{4} \frac{\lambda_i^2 - \lambda_i \sum_{k \neq i} \lambda_k + \prod_{k \neq i} \lambda_k}{(\lambda_i - a)(\lambda_i - b)}.$$

Prova. Segue-se de forma análoga à proposição anterior.

De (2.17), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_1}(x^2) = \frac{(\lambda_2 - a)(\lambda_3 - a)}{a - b} \Rightarrow 2x \cdot \frac{\partial x}{\partial \lambda_1} = \frac{x^2}{\lambda_1 - a} \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial \lambda_1} = \frac{1}{2} \frac{x}{\lambda_1 - a}.$$

De forma mais geral,

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda_i} = \frac{1}{2} \frac{x}{\lambda_i - a}.$$

Analogamente,

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda_i} = \frac{1}{2} \frac{y}{\lambda_i - b'}$$

e diferenciando z diretamente temos

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda_i} = \frac{1}{2}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} 4\langle X_{\lambda_1}, X_{\lambda_2} \rangle &= \frac{x^2}{(\lambda_1 - a)(\lambda_2 - a)} + \frac{y^2}{(\lambda_1 - b)(\lambda_2 - b)} + 1 \\ &= \frac{\lambda_3 - a}{a - b} + \frac{\lambda_3 - b}{b - a} + 1 \\ &= \frac{\lambda_3 - a - \lambda_3 + b + a - b}{a - b} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\langle X_{\lambda_1}, X_{\lambda_3} \rangle = \langle X_{\lambda_2}, X_{\lambda_3} \rangle = 0.$$

(ii) ver apêndice A

□

2.3.1 Parabolóides elíptico e hiperbólico

As superfícies representadas pela equação $2z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}$, com $a < b$, (que pertencem ao sistema definido em (2.15), referente à $\lambda = 0$) são parametrizadas pelas coordenadas parabólicas (λ_1, λ_2) , com as quais verifica-se

$$\begin{aligned}x^2 &= \frac{a(a - \lambda_1)(a - \lambda_2)}{b - a} \\y^2 &= \frac{b(b - \lambda_1)(b - \lambda_2)}{a - b} \\z &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2 - a - b}{2}.\end{aligned}\tag{2.18}$$

Os parâmetros variam de acordo com a tabela

Parabolóide Elíptico	$0 < a < \lambda_1 < b < \lambda_2$	(2.19)
Parabolóide Hiperbólico	$\lambda_1 < a < 0 < b < \lambda_2$	

Assim como foi feito no caso anterior, tomando o caso $\lambda_3 = 0$, segue-se de proposição 2.3.1 que

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{\lambda_3} &= \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{4(a - \lambda_1)(b - \lambda_1)} = -\frac{1}{\lambda_1}E, \\ \tilde{G}_{\lambda_3} &= -\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{4(a - \lambda_2)(b - \lambda_2)} = -\frac{1}{\lambda_2}G, \\ \|X_{\lambda_3}\|^2 &= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{4abc}.\end{aligned}\tag{2.20}$$

Portanto, temos a seguinte expressão para a métrica dos parabolóides em (??)

$$ds^2 = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{4} \left[\frac{-\lambda_1}{(\lambda_1 - a)(\lambda_1 - b)} d\lambda_1^2 + \frac{\lambda_2}{(\lambda_2 - a)(\lambda_2 - b)} d\lambda_2^2 \right].\tag{2.21}$$

Do mesmo modo que hiperbolóide de uma folha, o parabolóide hiperbólico não possui pontos umbílicos. O parabolóide elíptico possui dois pontos umbílicos, correspondentes a $\lambda_1 = \lambda_2 = b$.

Proposição 2.3.2. A curvatura gaussiana da superfície de equação $2z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}$, com $a \neq b$, em coordenadas parabólicas, é

$$K = \frac{ab}{(\lambda_1 \lambda_2)^2}.$$

Além disso, os pontos umbílicos ocorrem apenas no parabolóide elíptico ($0 < a < \lambda_1 < b < \lambda_2$) e são dados por:

$$x = \pm \sqrt{b(b-a)}, \quad y = 0, \quad z = \frac{b-a}{2}.$$

Prova. Análogo a demonstração da proposição 2.2.2. □

2.4 Coordenadas Esfero-Cônicas

Coordenadas esfero-cônicas representam um caso degenerado das coordenadas elípticas, cujas superfícies coordenadas são esferas concêntricas e cones elípticos. A seguir, introduzimos tais coordenadas sobre a esfera $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. O mesmo pode ser feito mais geralmente em $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, ver (26).

Sejam $I_1 < I_2 < I_3$ três parâmetros. As coordenadas esféro-cônica (μ_1, μ_2) para um ponto $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in \mathbb{S}^2$ são dadas por

$$\begin{aligned} \gamma_1^2 &= \frac{(I_1 - \mu_1)(I_1 - \mu_2)}{(I_1 - I_2)(I_1 - I_3)}; \\ \gamma_2^2 &= \frac{(I_2 - \mu_1)(I_2 - \mu_2)}{(I_2 - I_1)(I_2 - I_3)}; \\ \gamma_3^2 &= \frac{(I_3 - \mu_1)(I_3 - \mu_2)}{(I_3 - I_1)(I_3 - I_2)}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Essas coordenadas podem ser obtidas das confocais (2.8) sobre o elipsóide

$$\frac{x^2}{I_1} + \frac{y^2}{I_2} + \frac{z^2}{I_3} = 1,$$

por meio do mapa $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, $\gamma_i = x_i / \sqrt{I_i}$, $i = 1, 2, 3$. Contudo, uma motivação para tais coordenadas vem do seguinte problema da álgebra linear (ver (27)): Diagonalizar a forma quadrática positiva $\langle Ax, x \rangle$, $x \in \mathbb{R}^3$, $A = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$, restrito ao subespaço definido por $\langle x, \gamma \rangle = 0$. Isto resume-se a buscar extremos de $\langle Ax, x \rangle$, sujeito as condições $\|x\|^2 = 1$ e $\langle x, \gamma \rangle = 0$.

Aplicaremos o método dos multiplicadores de Lagrange a função $f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle$, restrita ao círculo máximo de \mathbb{S}^2 definido por $\varphi^{-1}(0, 0)$, em que

$$\varphi(x) = \left(\sum x_j^2 - 1, \sum x_j \gamma_j \right).$$

Existem escalares μ e k tais que

$$\nabla f(x) = \frac{\mu}{2} \nabla \varphi_1(x) + k \nabla \varphi_2(x).$$

Equivalentemente,

$$I_j x_j = \mu x_j + k \gamma_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

Donde

$$x_j = k \frac{\gamma_j}{(I_j - \mu)}. \quad (2.23)$$

Considerando as condições $\sum x_j^2 = 1$ e $\sum x_j \gamma_j = 0$, obtemos

$$k^2 = 1 / \left[\sum \frac{\gamma_j^2}{(I_j - \mu)^2} \right];$$

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\gamma_j^2}{I_j - \mu} = 0. \quad (2.24)$$

A equação (2.24) possui duas raízes

$$I_1 < \mu_1(\gamma, I_1, I_2, I_3) < I_2$$

$$I_2 < \mu_2(\gamma, I_1, I_2, I_3) < I_3$$

que podem ser obtidas explicitamente de uma equação quadrática.

Para cada escolha de μ , a equação (2.24) representa cones elípticos no espaço euclidiano representado por $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Vê-se facilmente que as curvas de intersecção deste cones com a esfera $\langle \gamma, \gamma \rangle = 1$, formam um sistema ortogonal de coordenadas. Isto porque sabemos que os vetores (2.23), extremos da forma quadrática $\langle Ax, x \rangle$, são perpendiculares e além disso, são paralelos ao gradiente de (2.24).

Podemos obter $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ em termos de μ_1, μ_2 dado em (2.22) resolvendo o sistema linear

$$A(\gamma_1^2 \quad \gamma_2^2 \quad \gamma_3^2)^t = (1 \quad 0 \quad 0)^t$$

com

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ (I_1 - \mu_1)^{-1} & (I_2 - \mu_1)^{-1} & (I_3 - \mu_1)^{-1} \\ (I_1 - \mu_2)^{-1} & (I_2 - \mu_2)^{-1} & (I_3 - \mu_2)^{-1} \end{pmatrix},$$

ou da mesma forma como em (A).

De maneira análoga à proposição (2.2.1) obtém-se:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \mu_i} = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma_1}{\mu_i - I_1}, \frac{\gamma_2}{\mu_i - I_2}, \frac{\gamma_3}{\mu_i - I_3} \right)$$

e a métrica de \mathbb{S}^2 é dada por

$$ds^2 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{4} \left[\frac{1}{(\mu_1 - I_1)(\mu_1 - I_2)(\mu_1 - I_3)} d\mu_1^2 - \frac{1}{(\mu_2 - I_1)(\mu_2 - I_2)(\mu_2 - I_3)} d\mu_2^2 \right]. \quad (2.25)$$

3 APLICAÇÕES CONFORMES

O objetivo principal deste capítulo, concentra-se na obtenção de uma aplicação conforme da esfera sobre o elipsóide triaxial. Usaremos essa aplicação para introduzir um sistema de coordenadas isotérmicas sobre o elipsóide, com o qual estudaremos o problema de dois vórtices. Antes disso, obteremos sistemas de coordenadas isotérmicas sobre as quádricas não-simétricas, a menos dos pontos umbílicos. Para isso, serão necessárias mudanças de coordenadas definidas por integrais elípticas.

3.1 Integrais e funções elípticas

Uma integral da forma

$$\int R(t, \sqrt{P(t)})dt, \quad (3.1)$$

onde R é uma função racional e $P(t)$ é um polinômio de grau $\rho \leq 4$, pode ser obtida em termos de funções elementares¹, quando:

- (i) R não depende de $\sqrt{P(t)}$;
- (ii) $\rho = 1$, $P(t) = at + b$, através da substituição $t \mapsto \frac{(t^2-b)}{a}$;
- (iii) $\rho = 2$, $P(t) = c(t-a)(t-b)$, com a substituição $t \mapsto a - \frac{(b-a)(t-1/t)^2}{4}$;
- (iv) $P(t)$ tem grau três ou quatro mas possui raízes repetidas.

Quando $P(t)$ é de terceiro ou quarto grau, com raízes simples (não múltiplas), essa integral é chamada integral elíptica² e não pode ser obtida por meio de funções elementares. Veja (28) para mais detalhes.

Embora alguns trabalhos iniciais tenham sido realizados por Fragnano, Euler, Lagrange e Landen, um primeiro tratamento sistemático das integrais elípticas deve-se a Legendre, que mostrou ser possível expressá-las linearmente em termos de funções elementares e de três integrais elípticas fundamentais: $F(\phi, k)$, $E(\phi, k)$, $\Pi(\phi, k, n)$, conhecidas como integrais elípticas do primeiro, segundo e terceiro tipo, respectivamente.

¹ Funções elementares são algébricas, trigonométricas, inversas trigonométricas, logarítmicas e exponenciais.

² Esse nome é motivado pelo surgimento dessas integrais, durante o século XVIII, em problemas como retificação de um arco de elipse.

Na forma de Legendre essas integrais são dadas por

$$F(\phi, k) = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad (3.2)$$

$$E(\phi, k) = \int_0^\phi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta, \quad (3.3)$$

$$\Pi(\phi, k, n) = \int_0^\phi \frac{d\theta}{(1 + n \sin^2 \theta) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}. \quad (3.4)$$

Por uma simples substituição $t = \sin \theta$, podemos escrevê-las na forma de Jacobi:

$$F(x, k) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}}, \quad E(x, k) = \int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2 t^2}{1-t^2}} dt, \quad (3.5)$$

$$\Pi(x, k, n) = \int_0^x \frac{dt}{(1+nt^2) \sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}}, \quad x = \sin \phi.$$

Nesta última integral, é bastante comum encontrar na literatura a notação $-\alpha^2$ para a constante n . Preferimos manter a notação compatível com Carlson (29).

A constante $k \in (0, 1)$ é chamada módulo. Defini-se o módulo complementar por

$$k' = \sqrt{1 - k^2}.$$

As variáveis limites $0 \leq \phi \leq \pi/2$ ou $0 \leq x \leq 1$ são chamadas de argumento.

As integrais são ditas completas quando $\phi = \pi/2$ (ou $x = 1$):

$$K(k) = F(\pi/2, k) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}, \quad (3.6)$$

$$E(k) = E(\pi/2, k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt, \quad (3.7)$$

$$\Pi(k, n) = \Pi(\pi/2, k, n) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{(1 + n \sin^2 t) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}. \quad (3.8)$$

Devido às suas inúmeras aplicações, as integrais elípticas completas e incompletas, encontram-se tabeladas por diversos autores. Confira, por exemplo, Byrd (30) ou Gradshteyn (31).

O estudo de integrais elípticas, constituem uma vasta e rica teoria, tendo sido aprofundada principalmente por Abel e Jacobi (no início do século XIX) estudando

as funções inversas das integrais elípticas e estendendo-as aos números complexos como funções meromorfas duplamente periódicas, denominadas funções elípticas. Em seguida, Weierstrass e Hermite contribuíram bastante com essa teoria. Nosso interesse aqui concentra-se nas funções reais.

Note que no caso extremo $k = 0$, as integrais E e F em (3.5) tornam-se

$$u = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin x. \quad (3.9)$$

Motivados pela função seno, inversa da integral acima, busca-se estudar a função inversa da integral elíptica do primeiro tipo (3.2).

Fazendo $u = \int_0^\phi \frac{dt}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 t}}$, define-se a amplitude de u :

$$\operatorname{am}(u) = \phi.$$

Definem-se então as funções elípticas de Jacobi:

$$\begin{aligned} \operatorname{snu} &= \operatorname{sen}(\phi); \\ \operatorname{cnu} &= \operatorname{cos}(\phi); \\ \operatorname{dnu} &= \sqrt{1-k^2 \operatorname{sn}^2 u}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Várias propriedades decorrem imediatamente das definições acima.

Observe que tomando a integral completa em (3.9) temos

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad (3.11)$$

e como sabemos, as funções seno e cosseno são periódicas de período 2π .

De maneira análoga, as funções snu e cnu são periódicas de período $4K$, onde

$$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 t}}. \quad (3.12)$$

Cálculo das integrais elípticas.

Observe que a simetria com respeito a permutação das raízes do polinômio $P(t)$ (definido em (3.1), supondo-o na forma fatorada) fica oculta na notação de Legendre. Por essa razão define-se em (29)

$$R_F(x, y, z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(t+x)(t+y)(t+z)}} \quad (3.13)$$

$$R_J(x, y, z, p) = \frac{3}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{(t+p)\sqrt{(t+x)(t+y)(t+z)}}, \quad (3.14)$$

como as integrais fundamentais do primeiro e terceiro tipo, respectivamente.

Quando p é igual a uma das outras variáveis, R_J degenera-se para uma integral do segundo tipo

$$R_D(x, y, z) = R_J(x, y, z, z). \quad (3.15)$$

As integrais elípticas de Legendre (3.2), (3.3) e (3.4), são expressas por (ver (29)):

$$F(\phi, k) = (\text{sen } \phi) R_F(\cos^2 \phi, 1 - k^2 \text{sen}^2 \phi, 1),$$

$$E(\phi, k) = (\text{sen } \phi) R_F(\cos^2 \phi, 1 - k^2 \text{sen}^2 \phi, 1) - \frac{1}{3} k^2 (\text{sen } \phi)^3 R_D(\cos^2 \phi, 1 - k^2 \text{sen}^2 \phi, 1)$$

$$\Pi(\phi, k, n) = (\text{sen } \phi) R_F(\cos^2 \phi, 1 - k^2 \text{sen}^2 \phi, 1) - \frac{n}{3} k^2 (\text{sen } \phi)^3 R_J(\cos^2 \phi, 1 - k^2 \text{sen}^2 \phi, 1, 1 + n \text{sen}^2 \phi) \quad (3.16)$$

3.2 Coordenadas isotérmicas sobre as Quádricas

A existência de parâmetros isotérmicos sobre uma superfície foi provada primeiro por Gauss em 1822 (ver (32) ou (??)) e nos diz que toda variedade riemanniana de dimensão dois é, localmente, conformemente equivalente a um aberto do plano. No entanto, exibir explicitamente tais parâmetros, em geral, não é fácil. Nesta seção, construiremos um sistema de coordenadas isotérmicas que cobrem as quádricas (sem simetria de revolução), exceto pelos pontos umbílicos.

Como visto anteriormente (expressões (2.12) e (2.21)), a métrica em qualquer uma das superfícies quádrica que estudamos tem a forma:

$$ds^2 = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{4} (g_1^2(\lambda_1) d\lambda_1^2 + g_2^2(\lambda_2) d\lambda_2^2), \quad (3.17)$$

discriminadas nos seguintes casos:

(a) Elipsóides e Hiperbolóides

$$g_1^2(\lambda_1) = \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 - a)(\lambda_1 - b)(\lambda_1 - c)} \quad \text{e} \quad g_2^2(\lambda_2) = \frac{-\lambda_2}{(\lambda_2 - a)(\lambda_2 - b)(\lambda_2 - c)}. \quad (3.18)$$

(b) Parabolóides

$$g_1^2(\lambda_1) = \frac{-\lambda_1}{(\lambda_1 - a)(\lambda_1 - b)} \quad \text{e} \quad g_2^2(\lambda_2) = \frac{\lambda_2}{(\lambda_2 - a)(\lambda_2 - b)}. \quad (3.19)$$

Defina funções P e Q do tipo

$$\begin{aligned} P(\lambda_1) &= \int g_1(\lambda_1) d\lambda_1 \\ Q(\lambda_2) &= \int g_2(\lambda_2) d\lambda_2. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Então, as coordenadas isotérmicas desejadas, são obtidas pela mudança $(\lambda_1, \lambda_2) \mapsto (u, v)$,

$$u = P(\lambda_1), \quad v = Q(\lambda_2). \quad (3.21)$$

Tomando as inversas das funções em (3.20), expressamos λ_1 e λ_2 como funções de u e v , respectivamente. Nesse caso, a métrica (3.17) torna-se conforme a plana:

$$ds^2 = h^2(u, v)(du^2 + dv^2),$$

com

$$h^2(u, v) = \frac{\lambda_2(v) - \lambda_1(u)}{4}. \quad (3.22)$$

Note que $h^2 > 0$ exceto nos pontos umbílicos ($\lambda_1 = \lambda_2$).

A partir de agora, descreveremos as funções em (3.20) para cada superfície. Os critérios para escolha dessas funções foram baseados na maneira mais simples de escrevê-las em termos das integrais elípticas fundamentais. Para esse fim, utilizamos essencialmente como referência (31).

3.2.1 O Elipsóide.

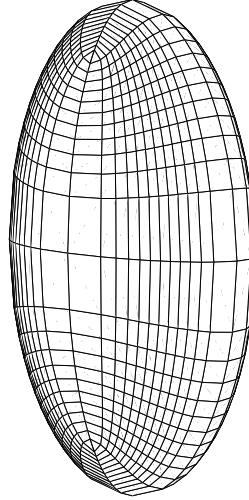


Figura 1 – Linhas de curvatura do elipsóide triaxial

Cada octante do elipsóide $E^2 : \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$, $0 < a < b < c$, é parametrizado pelas coordenadas confocais (λ_1, λ_2) no retângulo $[a, b] \times [b, c]$.

Para obtermos as coordenadas isotérmicas descritas de forma geral em (3.21), escolhamos funções P e Q a seguir, que dependem apenas da integral elíptica do terceiro tipo.

$$\begin{aligned} u &= P(\lambda_1) = \int_a^{\lambda_1} \sqrt{\frac{t}{(t-a)(t-b)(t-c)}} dt \\ &= \frac{2a}{\sqrt{b(c-a)}} \Pi(\phi, k, n), \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\phi = \arcsin \sqrt{\frac{b(\lambda_1 - a)}{\lambda_1(b-a)}}, \quad k = \sqrt{\frac{c(b-a)}{b(c-a)}}, \quad n = \frac{a-b}{b};$$

$$\begin{aligned} v &= Q(\lambda_2) = \int_{\lambda_2}^c \sqrt{\frac{-t}{(t-a)(t-b)(t-c)}} dt \\ &= \frac{2c}{\sqrt{b(c-a)}} \Pi(\phi, k, n), \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\phi = \arcsin \sqrt{\frac{b(c-\lambda_2)}{\lambda_2(c-b)}}, \quad k = \sqrt{\frac{a(c-b)}{b(c-a)}}, \quad n = \frac{c-b}{b}.$$

Invertendo essas funções temos $\lambda_1 = \lambda_1(u)$ e $\lambda_2 = \lambda_2(v)$. Portanto, introduz-se em cada octante de E^2 um sistema de coordenadas isotérmicas $(u, v) \in [0, K_1] \times [0, K_2]$, em que $K_1 = P(b)$ e $K_2 = Q(b)$ são as integrais elípticas (3.23) e (3.24) completas.

A simetria de reflexão do elipsóide nos permite estender periodicamente³ as funções λ_1 e λ_2 , ao elipsóide menos dois arcos (simétricos) que ligam pares de pontos umbílicos. Com estas restrições, a superfície torna-se topologicamente um cilindro. A figura a seguir é um exemplo dessa vizinhança coordenada, dividida pelos octantes do elipsóide, onde identifica-se os segmentos $v = 2K_2$ e $v = -2K_2$.

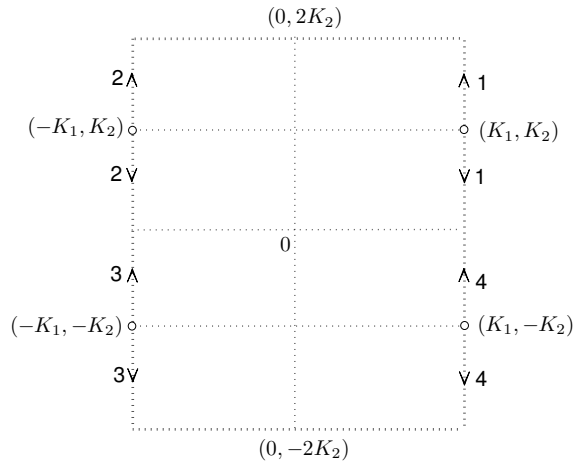


Figura 2

O elipsóide é recuperado topologicamente, pela identificação dos segmentos de mesma numeração no sentido indicado. De maneira análoga, podemos "cortar" os outros dois arcos ligando os umbílicos e cobrir os anteriores. Consegue-se com isso, cobrir todo o elipsóide menos os quatro pontos umbílicos correspondentes à $(u, v) = (\pm K_1, \pm K_2)$, onde o fator (3.22) conforme se degenera.

A tentativa de usar esse sistema de coordenadas em nossos experimentos numéricos para o problema de dois vórtices sobre o elipsóide, não foi satisfatória. O fato de precisarmos remover esses arcos do elipsóide o torna inviável para simular o problema para toda a superfície. No entanto, fazendo a distância entre os vórtices tender a zero, verificamos que a dinâmica do dipolo de vórtices tende para o movimento ao longo de uma geodésica. Veja no capítulo 5.

³ Implementamos rotinas em MatLab que realizam tal extensão.

3.2.2 O Hiperbolóide de uma folha

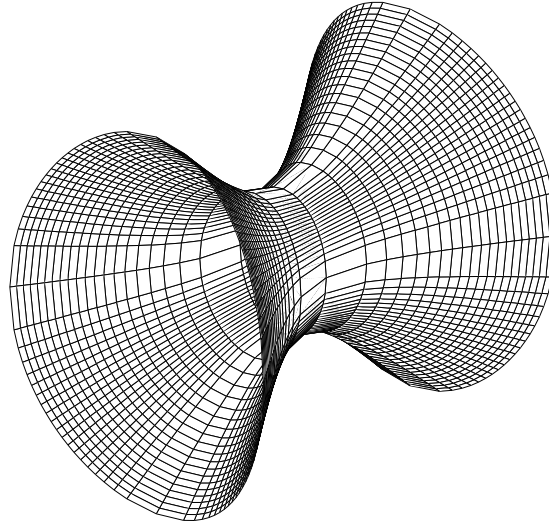


Figura 3 – Linhas de curvatura do hiperbolóide de uma folha

Analogamente, cada octante do hiperbolóide de uma folha $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$, $a < 0 < b < c$, é parametrizado pelas coordenadas confocais (ver tabela (2.9))

$$(\lambda_1, \lambda_2) \in (-\infty, a] \times [b, c].$$

Defina

$$\begin{aligned} u &= P(\lambda_1) = \int_{\lambda_1}^a \sqrt{\frac{t}{(t-a)(t-b)(t-c)}} dt \\ &= \frac{-2a}{\sqrt{c(b-a)}} \Pi(\phi, k, n), \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\phi = \arcsin \sqrt{\frac{c(a-\lambda_1)}{\lambda_1(a-c)}}, \quad k = \sqrt{\frac{b(c-a)}{c(b-a)}}, \quad n = \frac{a-c}{c};$$

$$\begin{aligned} v &= Q(\lambda_2) = \int_b^{\lambda_2} \sqrt{\frac{-t}{(t-a)(t-b)(t-c)}} dt \\ &= \frac{2b}{\sqrt{c(b-a)}} \Pi(\phi, k, n), \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\phi = \arcsin \sqrt{\frac{c(\lambda_2-b)}{\lambda_2(c-b)}}, \quad k = \sqrt{\frac{-a(c-b)}{c(b-a)}}, \quad n = \frac{b-c}{c}.$$

Tomando $\lambda_1 = \lambda_1(u)$ e $\lambda_2 = \lambda_2(v)$, obtemos as coordenadas isotérmicas

$$(u, v) \in [0, \infty) \times [0, r], \quad r = Q(c).$$

Neste caso, é possível estender λ_1 por simetria e λ_2 periodicamente. Dessa forma, temos um mapa conforme do hiperbolóide de uma folha sobre um cilindro (uma faixa do plano do tipo $\mathbb{R} \times [-2r, 2r]$).

3.2.3 O Hiperbolóide de duas folha

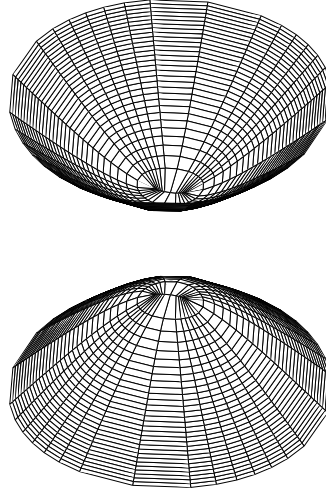


Figura 4 – Linhas de curvatura do hiperbolóide de duas folha (sem simetria de revolução)

Sabemos que para o hiperbolóide de duas folhas, $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$, $a < b < 0 < c$, as coordenadas confocais são tais que

$$(\lambda_1, \lambda_2) \in (-\infty, a] \times [a, b].$$

Sejam

$$\begin{aligned} u &= P(\lambda_1) = \int_{\lambda_1}^a \sqrt{\frac{t}{(t-a)(t-b)(t-c)}} dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{a(b-c)}} \left[(b-a)\Pi(\phi, k, n) - bF(\phi, k) \right], \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\phi = \arcsin \sqrt{\frac{(c-b)(a-\lambda_1)}{(c-a)(b-\lambda_1)}}, \quad k = \sqrt{\frac{b(c-a)}{a(c-b)}}, \quad n = \frac{a-c}{b-c};$$

$$\begin{aligned} v &= Q(\lambda_2) = \int_{\lambda_2}^b \sqrt{\frac{-t}{(t-a)(t-b)(t-c)}} dt \\ &= \frac{-2b}{\sqrt{a(b-c)}} \Pi(\phi, k, n), \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\phi = \arcsin \sqrt{\frac{a(b-\lambda_2)}{\lambda_2(b-a)}}, \quad k = \sqrt{\frac{c(b-a)}{a(b-c)}}, \quad n = \frac{b-a}{a}.$$

Portanto, temos em cada octante:

$$(u, v) \in [0, \infty) \times [0, K], \quad K = Q(a).$$

Como no caso do elipsóide, a existência de pontos umbílicos no hiperbolóide de duas folhas (dois em cada componente conexa) exige alguns "cortes" na superfície para estender essas coordenadas.

Nesse caso temos $\lambda_1 = \lambda_1(u)$ definida em toda reta como uma função par e $\lambda_2 = \lambda_2(v)$ periódica com período $2K$.

A figura a seguir mostra um exemplo de uma vizinhança coordenada fundamental.

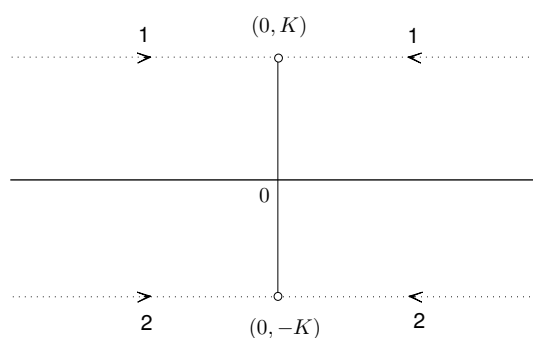


Figura 5

3.2.4 O Parabolóide Elíptico

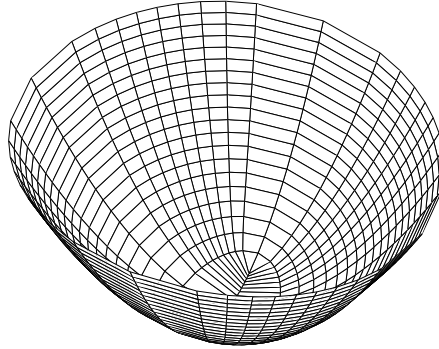


Figura 6 – Linhas de curvatura do parabolóide elíptico não simétrico

As coordenadas parabólicas sobre um parabolóide $2z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}$, $0 < a < b$; são dadas por (ver (2.19))

$$(\lambda_1, \lambda_2) \in [a, b] \times [b, \infty).$$

Considere

$$\begin{aligned} u &= P(\lambda_1) = \int_a^{\lambda_1} \sqrt{\frac{-t}{(t-a)(t-b)}} dt \\ &= 2\sqrt{b} E(\phi, k) - 2\sqrt{\frac{(b-\lambda_1)(\lambda_1-a)}{\lambda_1}}, \\ \phi &= \arcsin \sqrt{\frac{b(\lambda_1-a)}{\lambda_1(b-a)}}, \quad k = \sqrt{\frac{b-a}{b}}; \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} v &= Q(\lambda_2) = \int_b^{\lambda_2} \sqrt{\frac{t}{(t-a)(t-b)}} dt \\ &= 2\sqrt{b} [F(\phi, k) - E(\phi, k)] + 2\sqrt{\frac{\lambda_2(\lambda_2-b)}{\lambda_2-a}}, \\ \phi &= \arcsin \sqrt{\frac{\lambda_2-b}{\lambda_2-a}}, \quad k = \sqrt{\frac{a}{b}}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Então, cada octante admite as coordenadas isotérmicas

$$(u, v) \in [0, K] \times [0, \infty), \quad K = P(b).$$

As extensões das funções λ_1 e λ_2 são semelhantes as do caso do hiperbolóide de duas folhas. Tem-se uma vizinhança daquele tipo, em que λ_1 é uma função de u periódica (com período $2K$) e λ_2 uma função de v par.

3.2.5 O Parabolóide Hiperbólico

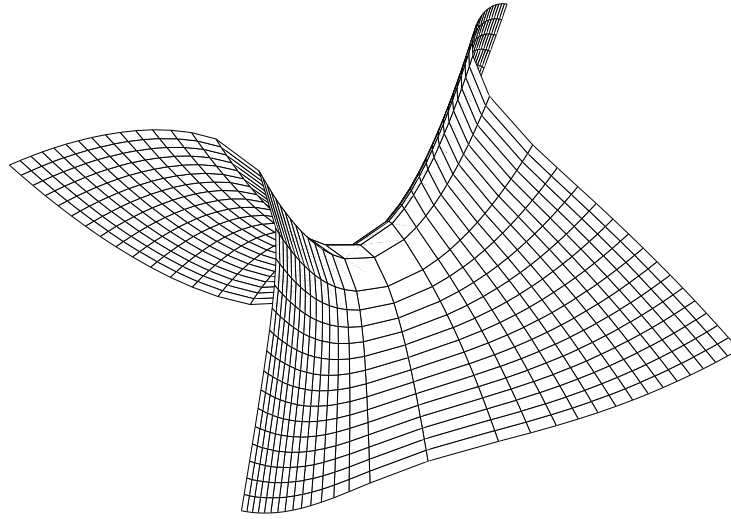


Figura 7 – Linhas de curvatura do parabolóide hiperbólico

Essa superfície pode ser coberta pelas coordenadas isotérmicas definidas em todo o plano. De fato, as coordenadas parabólicas sobre um parabolóide hiperbólico

$$2z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}, \quad a < 0 < b;$$

são tais que

$$(\lambda_1, \lambda_2) \in (-\infty, a] \times [b, \infty).$$

Sejam

$$\begin{aligned} u &= P(\lambda_1) = \int_{\lambda_1}^a \sqrt{\frac{-t}{(t-a)(t-b)}} dt \\ &= \frac{-2a}{\sqrt{b-a}} F(\phi, k) - 2\sqrt{b-a} E(\phi, k) + 2\sqrt{\frac{(b-\lambda_1)(a-\lambda_1)}{-\lambda_1}}, \\ \phi &= \arcsin \sqrt{\frac{\lambda_1 - a}{\lambda_1}}, \quad k = \sqrt{\frac{b}{b-a}}; \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} v &= Q(\lambda_2) = \int_b^{\lambda_2} \sqrt{\frac{t}{(t-a)(t-b)}} dt \\ &= \frac{2b}{\sqrt{b-a}} F(\phi, k) - 2\sqrt{b-a} E(\phi, k) + 2\sqrt{\frac{(\lambda_2 - a)(\lambda_2 - b)}{\lambda_2}} \\ \phi &= \arcsin \sqrt{\frac{\lambda_2 - b}{\lambda_2}}, \quad k = \sqrt{\frac{a}{a-b}}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Nesse caso, cada “quadrante” do parabolóide é coberto por um quadrante do plano $(u, v) \in (-\infty, 0] \times [0, \infty)$. Portanto, basta estender as funções λ_1 e λ_2 por simetria.

3.3 Aplicação conforme do Elipsóide sobre a esfera

Aplicações conformes entre esfera e elipsóide são conhecidas desde Schering (??) e Craig(33). Introduzindo algumas mudanças de variáveis, Craig expressa as coordenadas cartesianas da esfera $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$, em termos das funções elípticas de Jacobi (3.10). Em termos das coordenadas confocais (λ_1, λ_2) sobre o elipsóide, tem-se⁴

$$\xi = \frac{2e^Q \cos P}{e^{2Q} + 1}, \quad \eta = \frac{2e^Q \operatorname{sen} P}{e^{2Q} + 1}, \quad \zeta = \frac{e^{2Q} - 1}{e^{2Q} + 1}. \quad (3.33)$$

Aqui, $P = P(\lambda_1)$ e $Q = Q(\lambda_1)$ são funções do tipo (3.23) e (3.24). Para mais detalhes ver apêndice B.

Para nossos fins, procuramos uma aplicação conforme de toda a esfera sobre o elipsóide, em que a estrutura das curvas coordenadas sejam preservadas em torno dos pontos umbílicos. Neste sentido, sugerimos a seguinte construção, esboçada de forma mais geral:

Sejam $(\mu_1, \mu_2) \in [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ e $(\lambda_1, \lambda_2) \in [\tilde{a}_1, \tilde{b}_1] \times [\tilde{a}_2, \tilde{b}_2]$ coordenadas locais sobre as superfícies S e \tilde{S} , respectivamente.

Suponha que as respectivas métricas sejam da forma

$$ds^2(\mu_1, \mu_2) = f(\mu_1, \mu_2)(g_1^2(\mu_1)d\mu_1^2 + g_2^2(\mu_2)d\mu_2^2), \quad (3.34)$$

$$d\tilde{s}^2(\lambda_1, \lambda_2) = \tilde{f}(\lambda_1, \lambda_2)(\tilde{g}_1^2(\lambda_1)d\lambda_1^2 + \tilde{g}_2^2(\lambda_2)d\lambda_2^2). \quad (3.35)$$

Suponha ainda que

$$\int_{a_1}^{b_1} g_1(\mu_1)d\mu_1 = \int_{\tilde{a}_1}^{\tilde{b}_1} \tilde{g}_1(\lambda_1)d\lambda_1 = r_1, \quad \int_{a_2}^{b_2} g_2(\mu_2)d\mu_2 = \int_{\tilde{a}_2}^{\tilde{b}_2} \tilde{g}_2(\lambda_2)d\lambda_2 = r_2. \quad (3.36)$$

Considere a aplicação

$$F: S \rightarrow \tilde{S} \\ (\mu_1, \mu_2) \mapsto (\lambda_1(\mu_1), \lambda_2(\mu_2)),$$

definidas pelas relações

$$\xi_1 = \int_{a_1}^{\mu_1} g_1(t)dt = \int_{\tilde{a}_1}^{\lambda_1} \tilde{g}_1(t)dt, \quad \xi_2 = \int_{a_2}^{\mu_2} g_2(t)dt = \int_{\tilde{a}_2}^{\lambda_2} \tilde{g}_2(t)dt. \quad (3.37)$$

⁴ Pequenas correções foram realizadas nas expressões de Craig (33). Um breve comentário encontra-se no apêndice B.

Então F é conforme:

$$\begin{aligned} d\tilde{s}^2(\mu_1, \mu_2) &= h^2(\mu_1, \mu_2) ds^2(\mu_1, \mu_2) \\ h^2 &= \frac{\tilde{f}(\lambda_1(\mu_1), \lambda_2(\mu_2))}{f(\mu_1, \mu_2)}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

De fato temos aplicações conformes de S e \tilde{S} , sobre o mesmo retângulo $(\xi_1, \xi_2) \in [0, r_1] \times [0, r_2]$ (condição (3.36)),

$$ds^2 = f(\mu_1(\xi_1), \mu_2(\xi_2))(d\xi_1^2 + d\xi_2^2), \quad d\tilde{s}^2 = \tilde{f}(\lambda_1(\xi_1), \lambda_2(\xi_2))(d\xi_1^2 + d\xi_2^2).$$

No caso em que S é a esfera e \tilde{S} é o elipsóide, a construção anterior aplica-se usando as coordenadas esfero-cônicas e confocais, respectivamente. Fixados $a < b < c$, devemos escolher os parâmetros $I_1 < I_2 < I_3$, de maneira que a condição (3.36) seja válida. Tanto em coordenadas confocais como nas esfero-cônicas, as curvas coordenadas em cada octante, encontram os arcos de “grande círculos” perpendicularmente, exceto nos pontos correspondentes aos pontos umbílicos do elipsóide⁵.

Das expressões das métricas (2.25) e (3.17) obtemos o fator conforme:

$$h^2 = \frac{\lambda_2(\mu_2) - \lambda_1(\mu_1)}{\mu_2 - \mu_1}. \quad (3.39)$$

Cálculo do fator conforme.

Precisamos de duas inversões para determinar esse fator conforme. Lembre-se que a métrica de \mathbb{S}^2 nas coordenadas esfero-cônicas (2.25), é dada por

$$ds^2 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{4} (F_1(\mu_1) d\mu_1^2 + F_2(\mu_2) d\mu_2^2).$$

onde

$$F_1(\mu_1) = \frac{1}{(\mu_1 - I_1)(\mu_1 - I_2)(\mu_1 - I_3)}, \quad F_2(\mu_2) = \frac{-1}{(\mu_2 - I_1)(\mu_2 - I_2)(\mu_2 - I_3)}.$$

Defina as funções:

$$\begin{aligned} S(\mu_1) &= \int_{I_1}^{\mu_1} \sqrt{\frac{1}{(t - I_1)(t - I_2)(t - I_3)}} dt = \frac{2}{\sqrt{I_3 - I_1}} F(\phi, k_1) \\ \phi &= \arcsin \sqrt{\frac{\mu_1 - I_1}{I_2 - I_1}}, \quad k_1 = \sqrt{\frac{I_2 - I_1}{I_3 - I_1}}; \end{aligned} \quad (3.40)$$

⁵ As curvas coordenadas nesse caso são curvas integrais do campo de direções principais onde os pontos umbílicos são singularidades.

$$T(\mu_2) = \int_{\mu_2}^{I_3} \sqrt{\frac{-1}{(t-I_1)(t-I_2)(t-I_3)}} dt = \frac{2}{\sqrt{I_3-I_1}} F(\phi, k_2), \quad (3.41)$$

$$\phi = \arcsin \sqrt{\frac{I_3-\mu_2}{I_3-I_2}}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{I_3-I_2}{I_3-I_1}}.$$

Considere as funções P e Q definidas em (3.23) e (3.24), respectivamente.

As relações (3.36) e (3.37) tornam-se

$$P(b) = S(I_2), \quad Q(b) = T(I_2), \quad (3.42)$$

$$P(\lambda_1) = S(\mu_1), \quad Q(\lambda_2) = T(\mu_2). \quad (3.43)$$

Dados a , b e c , encontraremos os parâmetros I_1 , I_2 e I_3 , sujeitos a condição (3.42). Isso assegura que um octante da esfera seja mapeado conformemente sobre um octante do elipsóide.

Seja $K(k) = F(\frac{\pi}{2}, k)$ a integral completa do primeiro tipo. De (3.40) e (3.41) segue-se que

$$K(k_1) = \frac{\sqrt{I_3-I_1}}{2} P(b)$$

$$K(k_2) = \frac{\sqrt{I_3-I_1}}{2} Q(b).$$

Dividindo essas equações e observando que os módulos k_1 e k_2 são complementares, temos

$$\begin{cases} \frac{K(k_1)}{K(k_2)} = \frac{P(b)}{Q(b)} \\ k_1^2 + k_2^2 = 1. \end{cases}$$

Resolvemos numericamente esse sistema. Com isso, os parâmetros I_1 , I_2, I_3 são obtidos de

$$\begin{cases} I_3 - I_1 = \left(\frac{2K(k_1)}{P(b)} \right)^2 \\ I_2 - I_1 = (I_3 - I_1) k_1^2. \end{cases}$$

4 Equações de movimento

A dinâmica de vórtices pontuais tem sido estudada basicamente em superfícies de curvatura constante ou de revolução. Uma formulação geométrica intrínseca para o caso geral é tratada por Boatto e Koiller (??). Em 1980, David Hally (18) descreveu as equações de movimento de N vórtices pontuais numa superfície, usando coordenadas isotérmicas. Numa superfície com métrica $ds^2 = h^2(z, \bar{z})|dz|^2$, as equações de Hally são:

$$\dot{\bar{z}}_n = h^{-2}(z_n, \bar{z}_n) \left[\sum_{k \neq n}^N -i \frac{\Gamma_k}{z_n - z_k} + i \Gamma_n \frac{\partial}{\partial z_n} \ln(h(z_n, \bar{z}_n)) \right], \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (4.1)$$

Aqui, Γ_k representa a intensidade do k -ésimo vórtice.

A dificuldade dessa abordagem consiste na obtenção (explícita) do fator conforme $h(z, \bar{z})$, conhecida para poucas superfícies além da esfera. Neste contexto, em 2007, Castilho e Machado (20), realizaram um estudo sobre a dinâmica de vórtices pontuais no elipsóide de revolução, obtido por uma perturbação da esfera. Recentemente, Sun-Chul Kim (21), obteve o fator conforme para o elipsóide de revolução "spheroid" $\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} + \frac{z^2}{R^2(1+a)} = 1$, com $a > -1$, por meio de uma projeção estereográfica modificada.

Em (20), sob a condição da vorticidade total ser nula, mostra-se que na esfera as equações de Hally são equivalentes às equações de Bogomolov (??) e assumem a formulação hamiltoniana

$$w(X_H, \cdot) = d(iH),$$

com a forma simplética

$$w = \sum_{n=1}^N \Gamma_n h^2(z_n, \bar{z}_n) dz_n \wedge d\bar{z}_n \quad (4.2)$$

e função hamiltoniana

$$H = \sum_{k < n} \Gamma_k \Gamma_n \ln(h(z_k, \bar{z}_k) h(z_n, \bar{z}_n) |z_k - z_n|^2). \quad (4.3)$$

4.1 Dois vórtices sobre o elipsóide triaxial

Trataremos o caso particular $N = 2$ e $\Gamma_1 = -\Gamma_2 = \Gamma$. Sendo assim, sobre o elipsóide triaxial E^2 com métrica $ds^2 = h^2(z, \bar{z})|dz|^2$, a forma simplética e a função hamiltoniana tornam-se, respectivamente:

$$w = \Gamma \left(h^2(z_1, \bar{z}_1) dz_1 \wedge d\bar{z}_1 - h^2(z_2, \bar{z}_2) dz_2 \wedge d\bar{z}_2 \right),$$

$$H = -\Gamma^2 \ln(h(z_1, \bar{z}_1) h(z_2, \bar{z}_2) |z_1 - z_2|^2).$$

As equações de movimento são

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= i\Gamma h^{-2}(z_1, \bar{z}_1) \left[\frac{1}{z_1 - z_2} + \frac{\partial}{\partial z_1} \ln(h(z_1, \bar{z}_1)) \right] \\ \dot{z}_2 &= i\Gamma h^{-2}(z_2, \bar{z}_2) \left[\frac{1}{z_1 - z_2} - \frac{\partial}{\partial z_2} \ln(h(z_2, \bar{z}_2)) \right].\end{aligned}\quad (4.4)$$

As coordenadas isotérmicas (z, \bar{z}) sobre o elipsóide E^2 , assim como o fator conforme $h(z, \bar{z})$, são obtidos pela composição do mapa conforme do elipsóide sobre a esfera com a projeção estereográfica.

Considere as coordenadas (z, \bar{z}) em $\mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$ obtidas pela projeção estereográfica a partir do pólo sul $S(0, 0, -1)$, sobre o plano do equador:

$$\mathbb{S}^2 \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad (\xi, \eta, \zeta) \mapsto z = \frac{\xi + i\eta}{1 + \zeta}.\quad (4.5)$$

A métrica em \mathbb{S}^2 é conforme a euclidiana:

$$ds^2 = \frac{4}{(1 + z\bar{z})^2} |dz|^2.\quad (4.6)$$

A inversa da projeção estereográfica é dada por

$$\xi = \frac{z + \bar{z}}{1 + z\bar{z}}, \quad \eta = \frac{-i(z - \bar{z})}{1 + z\bar{z}}, \quad \zeta = \frac{1 - z\bar{z}}{1 + z\bar{z}}.\quad (4.7)$$

As coordenadas esfero-cônicas (μ_1, μ_2) em \mathbb{S}^2 , são obtidas de (2.24) e (4.7) como função das estereográficas, através da relação

$$\frac{\xi^2}{I_1 - \mu} + \frac{\eta^2}{I_2 - \mu} + \frac{\zeta^2}{I_3 - \mu} = 0.$$

Em outros termos, μ_1 e μ_2 são as raízes da equação

$$\mu^2 - \alpha\mu + \beta = 0,\quad (4.8)$$

onde

$$\begin{aligned}\alpha(z, \bar{z}) &= (I_2 + I_3)\xi^2(z, \bar{z}) + (I_1 + I_3)\eta^2(z, \bar{z}) + (I_1 + I_2)\zeta^2(z, \bar{z}), \\ \beta(z, \bar{z}) &= I_2 I_3 \xi^2(z, \bar{z}) - I_1 I_3 \eta^2(z, \bar{z}) + I_1 I_2 \zeta^2(z, \bar{z}).\end{aligned}$$

Assim, escrevemos a métrica (3.38) do elipsóide nas coordenadas estereográficas:

$$d\bar{s}^2 = h^2 |dz|^2, \quad h^2(z, \bar{z}) = \frac{4(\lambda_2 - \lambda_1)}{(\mu_2 - \mu_1)(1 + z\bar{z})^2}.\quad (4.9)$$

A fim de simplificar a notação¹, definimos

$$L(z, \bar{z}) = \lambda_2(z, \bar{z}) - \lambda_1(z, \bar{z}), \quad M(z, \bar{z}) = \mu_2(z, \bar{z}) - \mu_1(z, \bar{z}), \quad r(z, \bar{z}) = 1 + z\bar{z}.$$

Logo,

$$h^2(z, \bar{z}) = \frac{4L}{Mr^2}. \quad (4.10)$$

Daí,

$$\frac{\partial}{\partial z} \ln(h(z, \bar{z})) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \ln\left(\frac{4L}{Mr^2}\right) = \frac{MrL_z - LrM_z - 2ML\bar{z}}{2LMr}. \quad (4.11)$$

Com isso, ficam determinadas as equações (4.4). Os termos L_z e M_z , são determinados pelas expressões:

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial z} = \sqrt{\frac{(\lambda_i - a)(\lambda_i - b)(\lambda_i - c)}{\lambda_i(\mu_i - I_1)(\mu_i - I_2)(\mu_i - I_3)}} \cdot \frac{\partial \mu_i}{\partial z},$$

$$\frac{\partial \mu_i}{\partial z} = \frac{\alpha_z \mu_i - \beta_z}{2\mu_i - \alpha}, \quad i = 1, 2;$$

obtidas diferenciando implicitamente as relações em (3.37).

Resumidamente, para a integração numérica das equações (4.4), entramos com as condições iniciais (z_1, \bar{z}_1) , (z_2, \bar{z}_2) dos dois vórtices no plano, em seguida, realizamos as seguintes etapas:

- Calculamos as coordenadas esfero-cônicas $(\mu_1(z_1, \bar{z}_1), \mu_2(z_1, \bar{z}_1))$ e $(\mu_1(z_2, \bar{z}_2), \mu_2(z_2, \bar{z}_2))$ através da equação (4.8);
- Obtemos as coordenadas confocais $(\lambda_1(z_1, \bar{z}_1), \lambda_2(z_1, \bar{z}_1))$ e $(\lambda_1(z_2, \bar{z}_2), \lambda_2(z_2, \bar{z}_2))$ por meio das relações (3.37). Para tanto, invertemos numericamente as funções P e Q definidas em (3.23) e (3.24), respectivamente;
- Determinamos o fator conforme (4.9) em cada posição $h^2(z_1, \bar{z}_1)$, $h^2(z_2, \bar{z}_2)$ e suas respectivas derivadas parciais $\frac{\partial}{\partial z_1} \ln(h(z_1, \bar{z}_1))$ e $\frac{\partial}{\partial z_2} \ln(h(z_2, \bar{z}_2))$, de acordo com (4.11);
- Finalmente, usamos um integrador Runge-Kutta 4(5) com um ajuste de adaptação do passo de integração.

Em todo o processo foram escritos por volta de vinte programas em MatLab. Escrevemos rotinas para calcular cada uma das integrais elípticas (3.23), (3.24), (3.40) e (3.41), usando as expressões (3.16). Os algoritmos podem ser encontrados em (29).

¹ Cometemos um abuso de notação: $\lambda_i(z, \bar{z}) = \lambda_i(\mu_i(z, \bar{z}))$, $i = 1, 2$.

5 Experimentos numéricos

Neste capítulo, realizamos alguns experimentos numéricos acerca da dinâmica de dois vórtices pontuais sobre o elipsóide triaxial. Consideramos vários parâmetros¹ a , b e c para o elipsóide; dentre eles, um próximo do elipsóide de revolução onde o sistema para o par de vórtices é completamente integrável. O erro relativo da energia é mantido numa ordem inferior a 10^{-10} .

5.1 Conjectura de Kimura

Em 1999, Kimura (17) obteve as equações de movimento em superfícies com curvatura constante e comparou a dinâmica na esfera e no plano hiperbólico com o plano euclidiano. Além disso, mostrou que um dipolo de vórtices move-se ao longo de uma geodésica dessas superfícies e conjecturou que esse fato continua válido para uma superfície qualquer. Uma prova para essa conjectura pode ser encontrada em (??). Apresentaremos aqui os resultados de alguns experimentos numéricos da conjectura de Kimura no elipsóide triaxial, usando as coordenadas isotérmicas desenvolvidas na seção 3.2 (os mesmos experimentos podem ser feitos com as demais quádricas).

Recordamos que as equações das geodésicas em coordenadas locais (u, v) são:

$$\begin{cases} \ddot{u} + \Gamma_{11}^1 \dot{u}^2 + 2\Gamma_{12}^1 \dot{u}\dot{v} + \Gamma_{22}^1 \dot{v}^2 = 0 \\ \ddot{v} + \Gamma_{11}^2 \dot{u}^2 + 2\Gamma_{12}^2 \dot{u}\dot{v} + \Gamma_{22}^2 \dot{v}^2 = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

Os símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k , satisfazem

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{1}{2} E_u \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_u - \frac{1}{2} E_v \end{cases} \quad \begin{cases} \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \frac{1}{2} E_v \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \frac{1}{2} G_u \end{cases} \quad \begin{cases} \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = F_v - \frac{1}{2} G_u \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \frac{1}{2} G_v \end{cases}$$

onde E , F e G são os coeficientes da primeira forma fundamental. Em nosso caso, ver (3.22)

$$E = G = h^2 = \frac{\lambda_2(v) - \lambda_1(u)}{4}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = -\Gamma_{22}^1 &= -\frac{2\lambda_1'(u)}{\lambda_2(v) - \lambda_1(u)} = c_1 \\ \Gamma_{11}^2 = -\Gamma_{12}^1 = -\Gamma_{22}^2 &= -\frac{2\lambda_2'(v)}{\lambda_2(v) - \lambda_1(u)} = c_2 \end{aligned} \quad (5.2)$$

¹ Lembramos que $a < b < c$ denotam os quadrados dos semi-eixos do elipsóide.

e obtemos o seguinte sistema de primeira ordem para as geodésicas:

$$\begin{cases} \dot{u} = p \\ \dot{v} = q \\ \dot{p} = c_1(q^2 - p^2) + 2c_2pq \\ \dot{q} = c_2(q^2 - p^2) - 2c_1pq \end{cases} \quad (5.3)$$

As equações de Hally nessas coordenadas são

$$\dot{z}_n = \sum_{k \neq n}^N -i \frac{4\Gamma_k}{(\lambda_2(v_n) - \lambda_1(u_n))(z_n - z_k)} + \Gamma_n \frac{\lambda_2'(v_n) - i\lambda_1'(u_n)}{(\lambda_2(v_n) - \lambda_1(u_n))^2}. \quad (5.4)$$

Esclarecemos que $\lambda_1'(u)$ e $\lambda_2'(v)$ denotam $\frac{d\lambda_1}{du}$ e $\frac{d\lambda_2}{dv}$, respectivamente.

Com efeito, fazendo $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right)$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \ln(h(z, \bar{z})) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \ln(h^2(z, \bar{z})) = \frac{1}{2h^2} \frac{\partial}{\partial z} (h^2(z, \bar{z})) \\ &= \frac{2}{\lambda_2(v) - \lambda_1(u)} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{-\lambda_1'(u) - i\lambda_2'(v)}{4} \right) \\ &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{\lambda_1'(u) + i\lambda_2'(v)}{\lambda_2(v) - \lambda_1(u)}. \end{aligned}$$

Os experimentos foram realizados de acordo com o seguinte roteiro:

Escolhemos um ponto p do elipsóide e um vetor v_0 . Determinamos as condições iniciais dos vórtices caminhando sobre a geodésica que passa por p com velocidade v_0 e $-v_0$ (para um pequeno intervalo de tempo). Em seguida, resolvemos o problema dos dois vórtices com as condições iniciais obtidas antes e encontramos a geodésica que passa por p numa direção perpendicular à v_0 . As figuras a seguir ilustram os resultados desse experimento.

As geodésicas estão desenhadas com a cor vermelha.

Elipsóide 1: $a = 1, b = 1.01, c = 1.02$

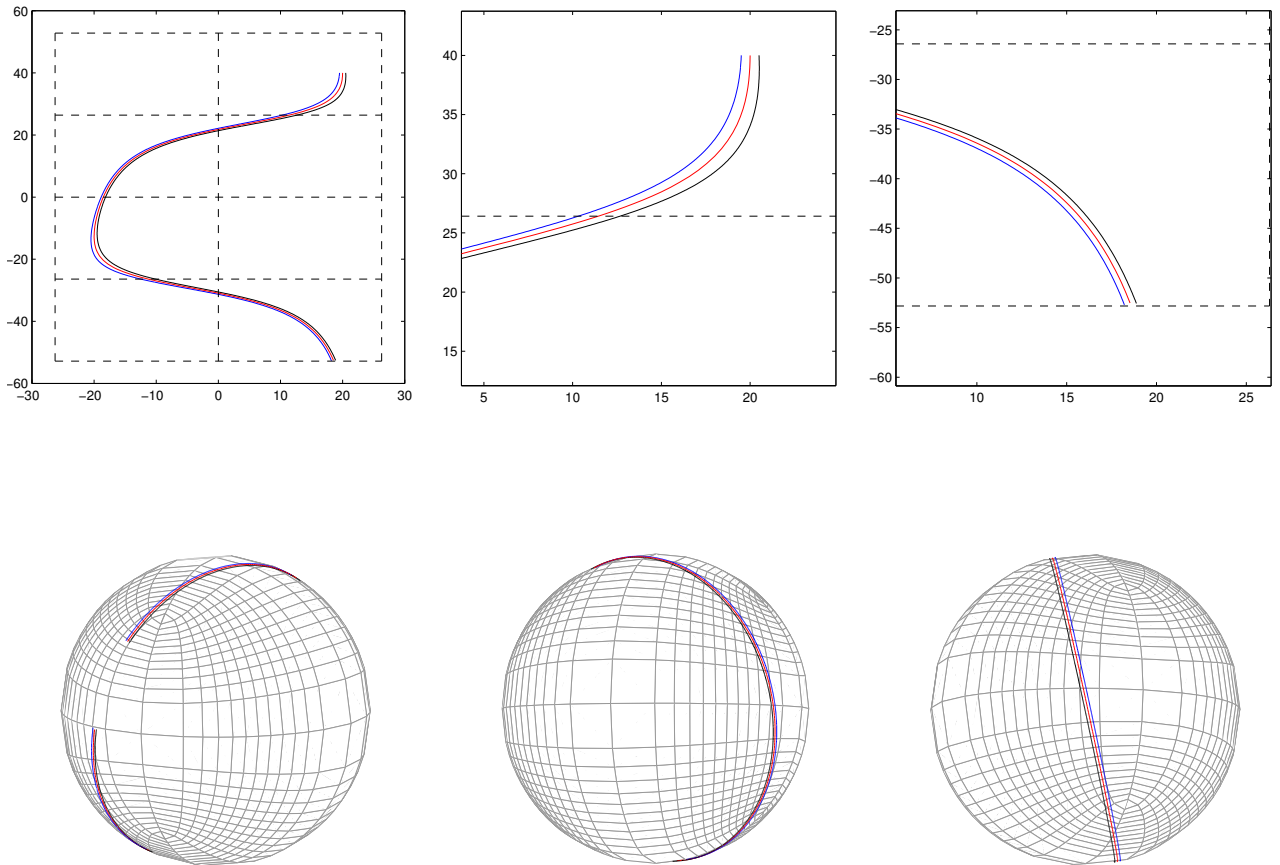


Figura 8 – Caso próximo de uma esfera

Elipsóide 2: $a = 1$, $b = 4$ e $c = 9$.

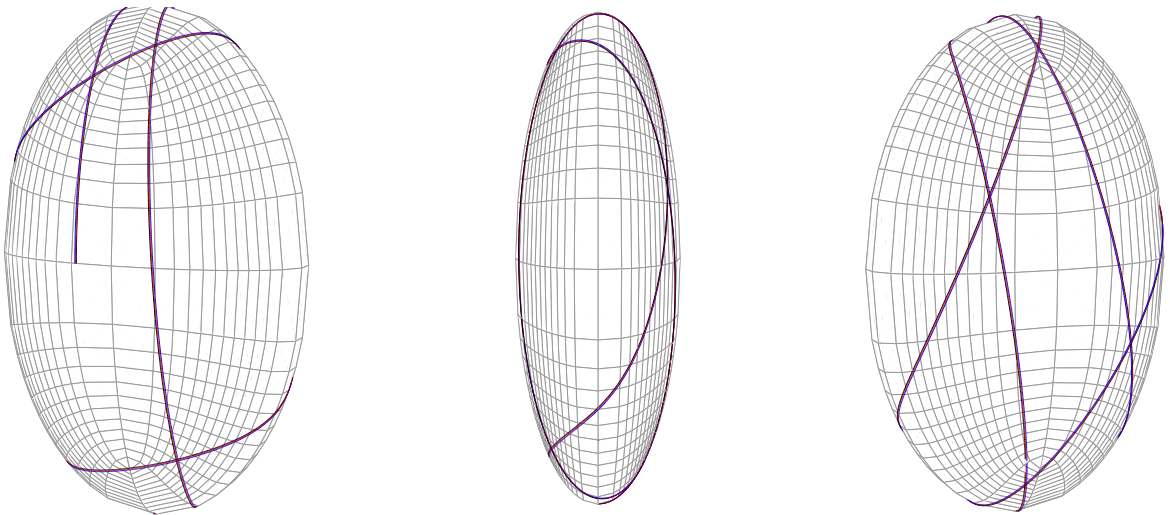
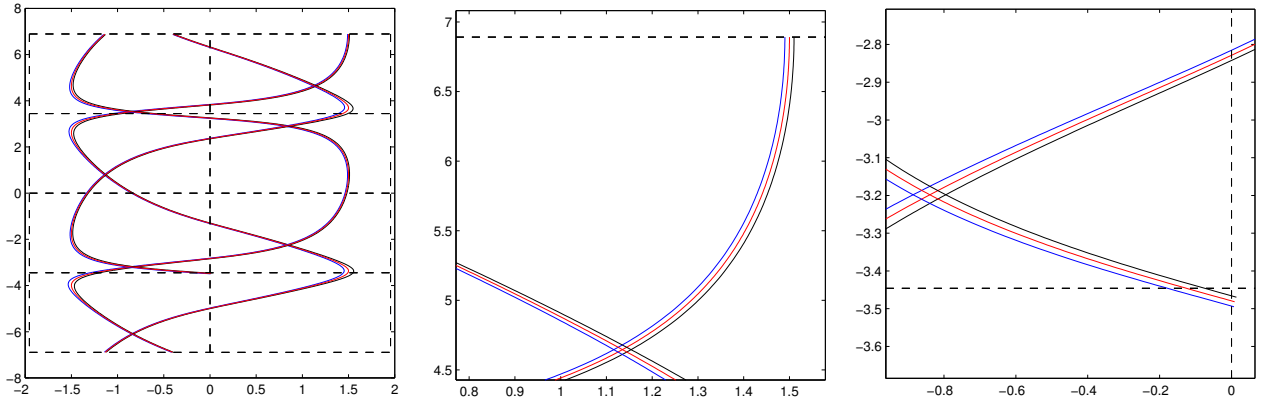


Figura 9

Elipsóide 3: $a = 1$, $b = 6$ e $c = 9$.

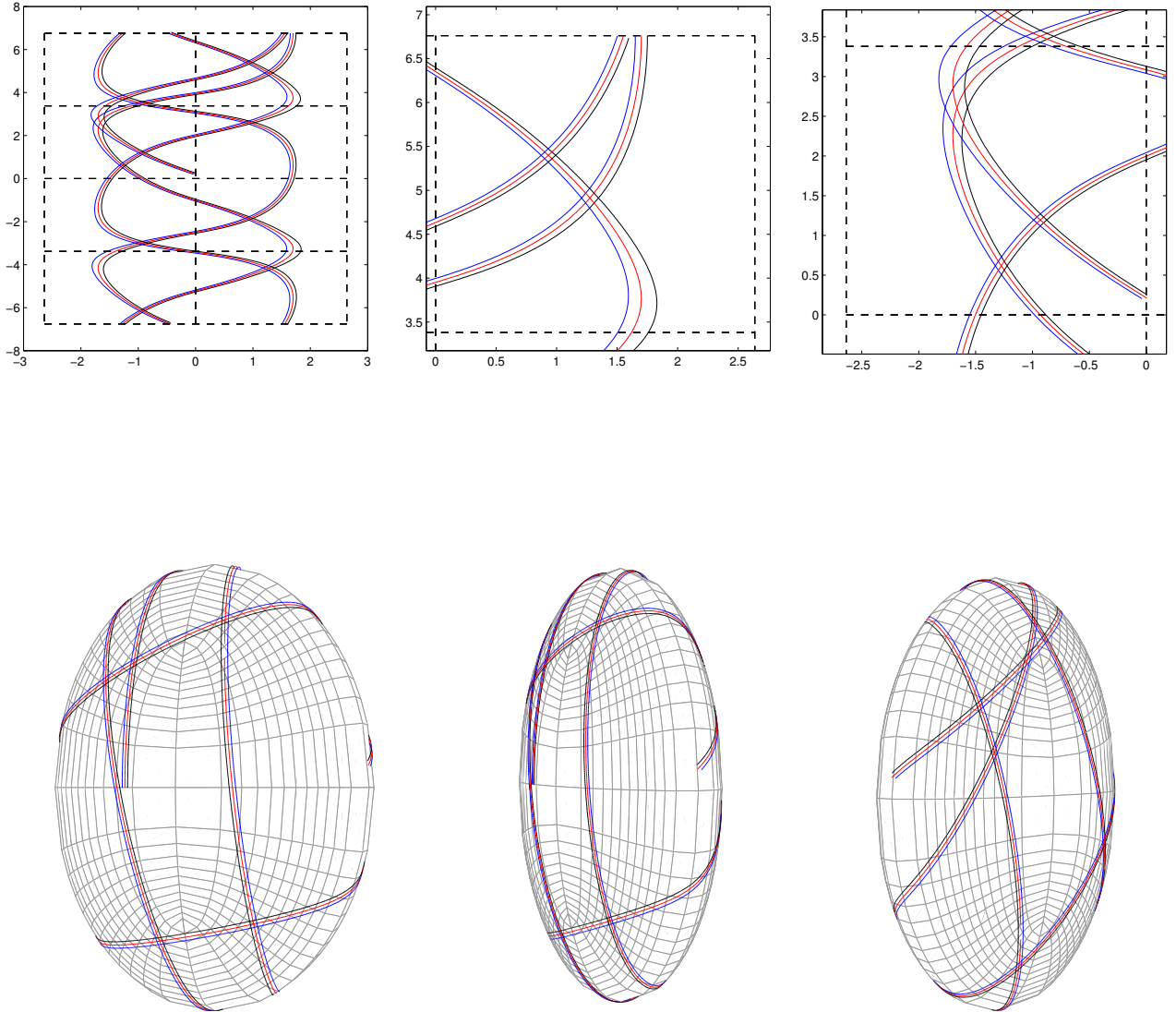


Figura 10

5.2 Seções de Poincaré

Nesta seção apresentamos algumas seções de Poincaré para o problema de dois vórtices (caso em que a soma das vorticidade é nula) sobre o elipsóide triaxial. Fixamos o hamiltoniano $H = H(u_1, v_1, u_2, v_2)$ e as seções são determinadas por $v_1 = 0$, utilizando o método de Henon (34). Representamos nos gráficos a posição (u_2, v_2) de um dos vórtices; u_2 está representado no eixo horizontal e v_2 no eixo vertical. Consideramos as vorticidades $\Gamma_1 = -\Gamma_2 = 5$. Exibimos algumas trajetórias particulares em regiões indicadas nos gráficos. O sistema revela-se caótico.

Seção 1: Elipsóide $a = 1, b = 1.1, c = 9$, Energia $H = -40$.

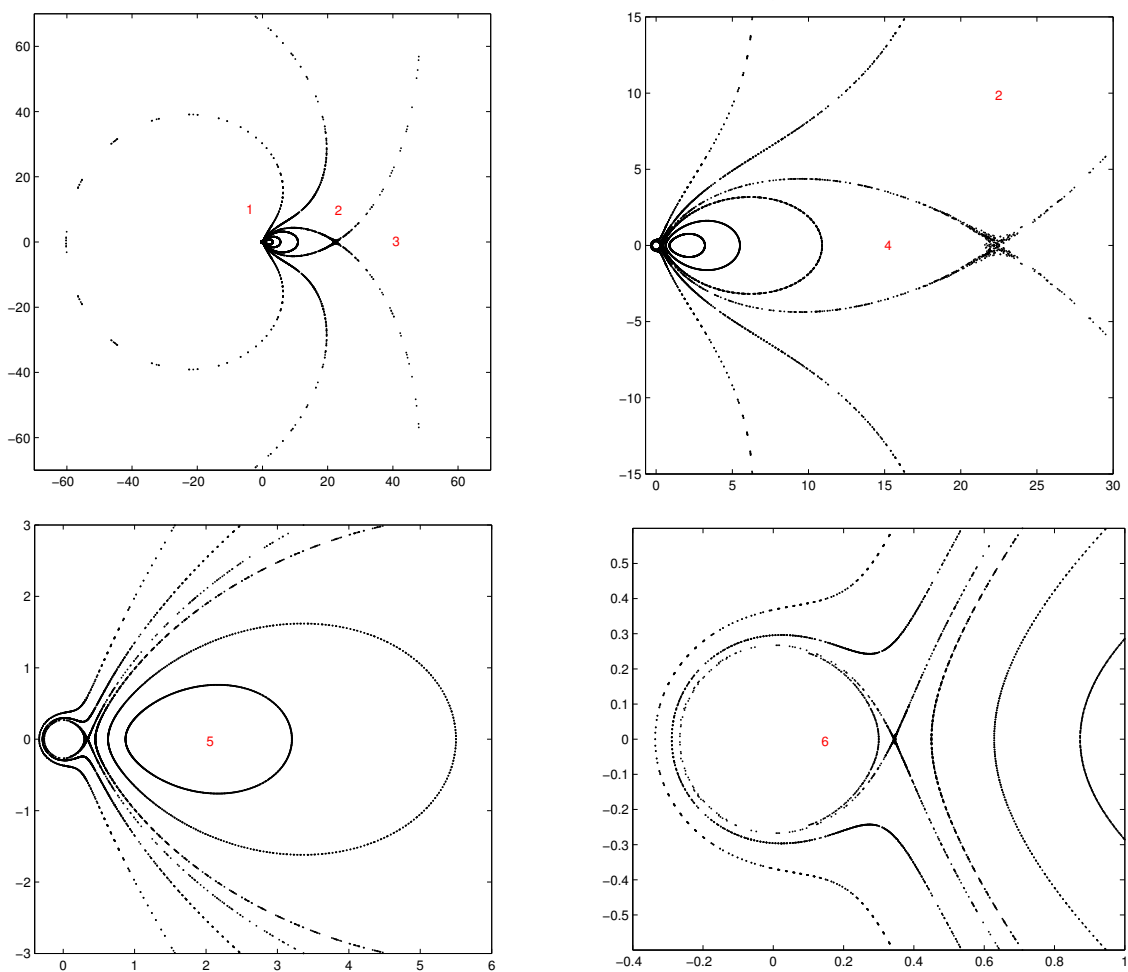


Figura 11

Trajétórias com condição inicial na região 1 da figura 11
 $z_1(0) = (-1.4573, 0)$, $z_2(0) = (-5, 10)$

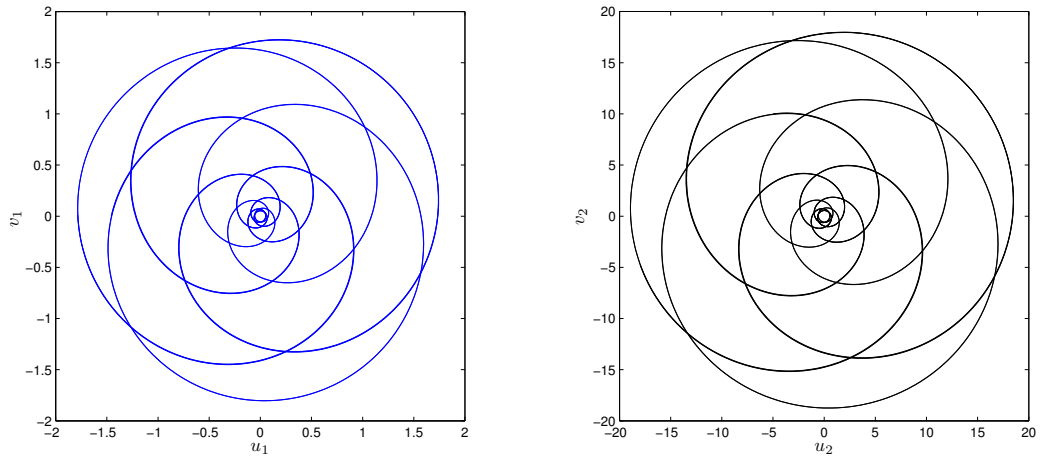


Figura 12 – Trajetórias com condição inicial na região 1

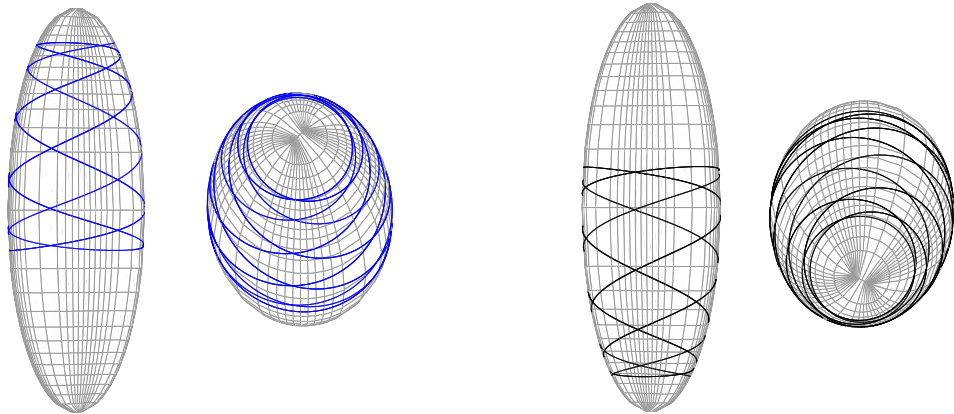


Figura 13

Trajatórias com condição inicial na região 2 da figura 11
 $z_1(0) = (-2.9594, 0)$; $z_2(0) = (23, 10)$

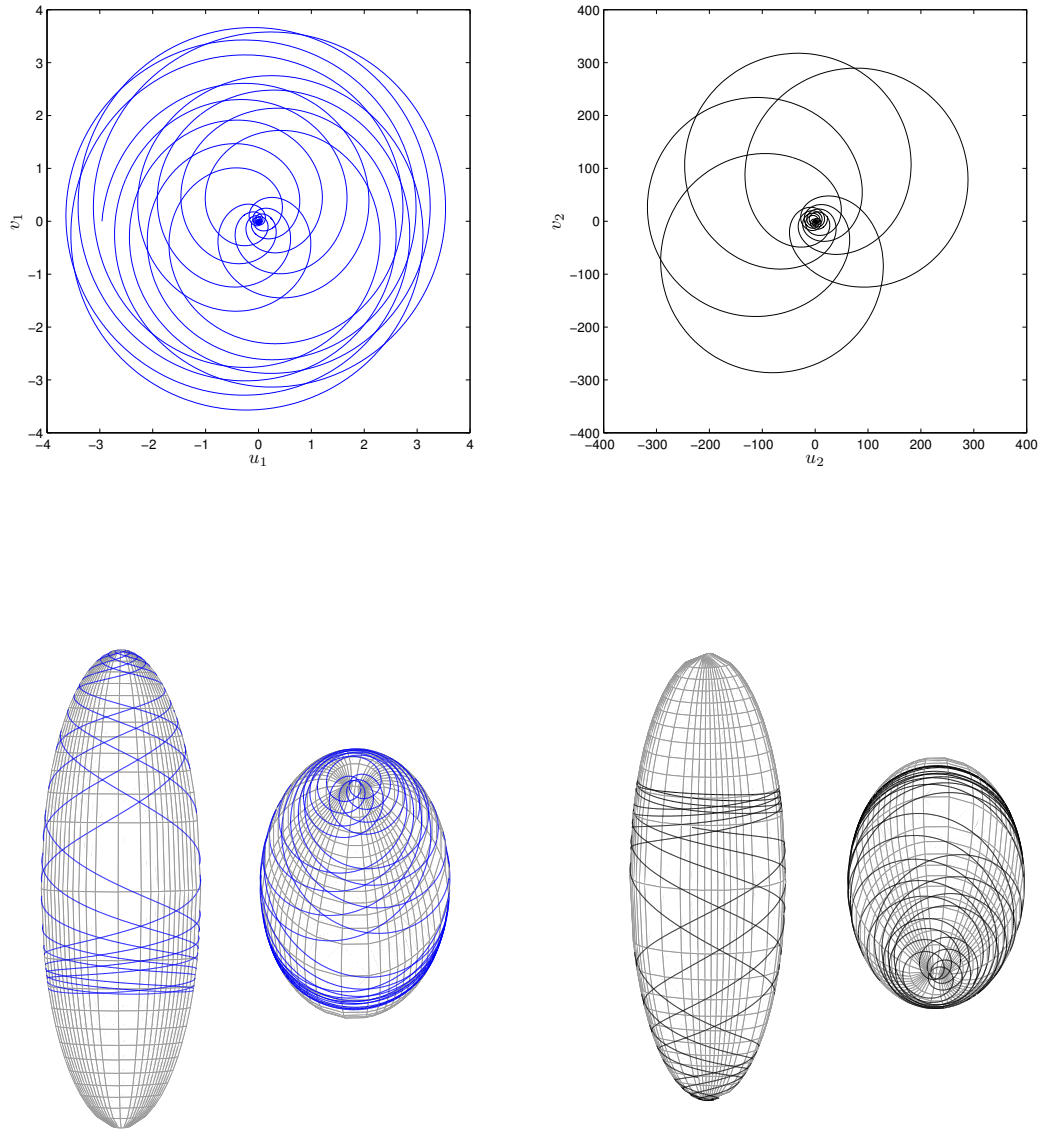


Figura 14

Trajetórias com condição inicial na região 3 da figura 11
 $z_1(0) = (-3.3683, 0)$; $z_2(0) = (40, 0.1)$

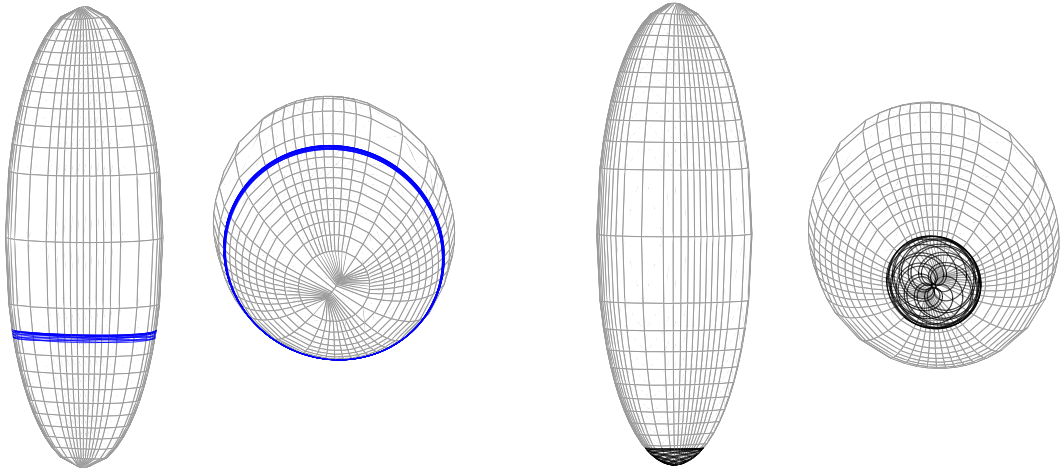
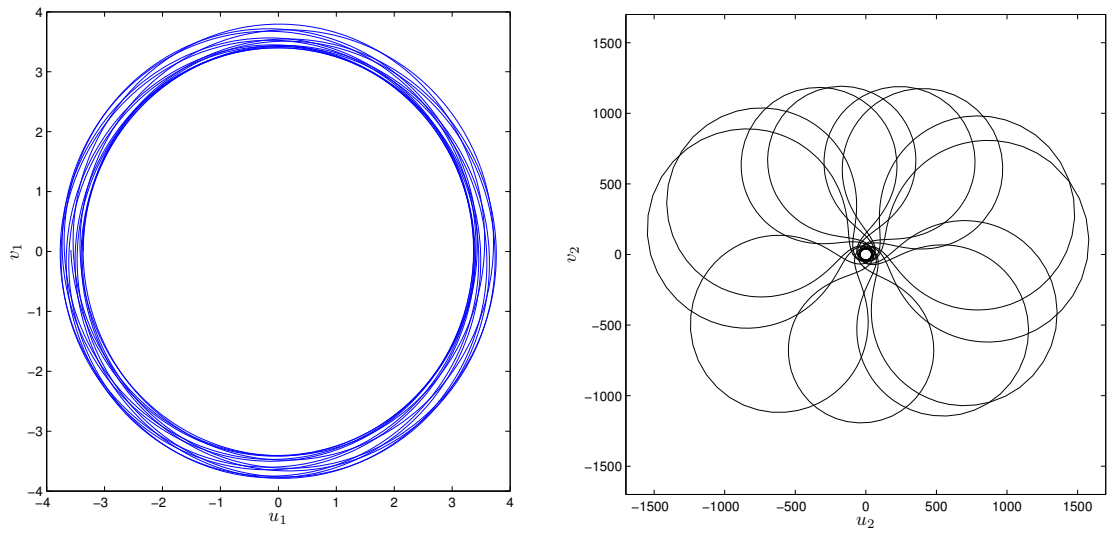


Figura 15

Trajétórias com condição inicial na região 4 da figura.eps 11
 $z_1(0) = (-2.5918, 0)$; $z_2(0) = (16, 0.01)$

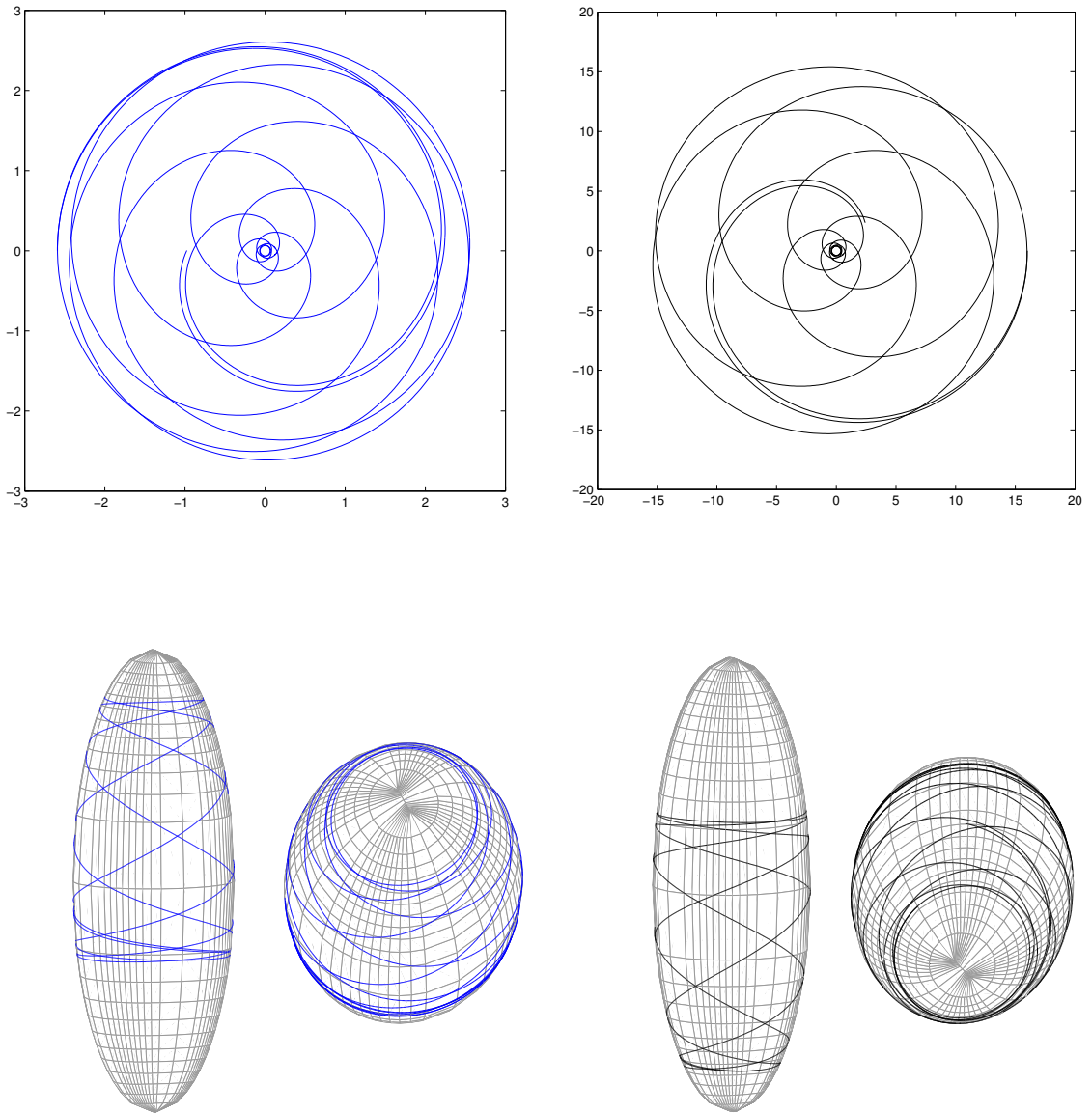


Figura 16

Trajetórias com condição inicial na região 5 da figura 11
 $z_1(0) = (-0.9588, 0)$; $z_2(0) = (2.5, 0.01)$

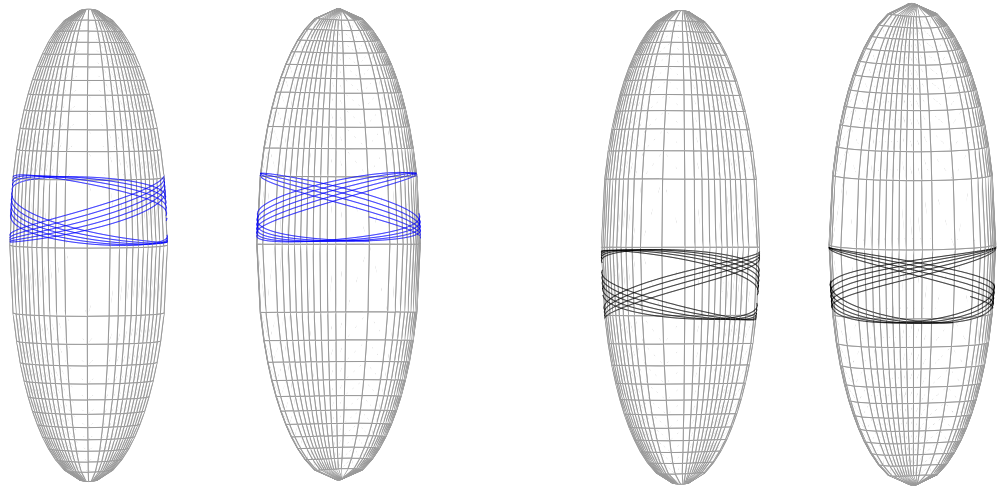
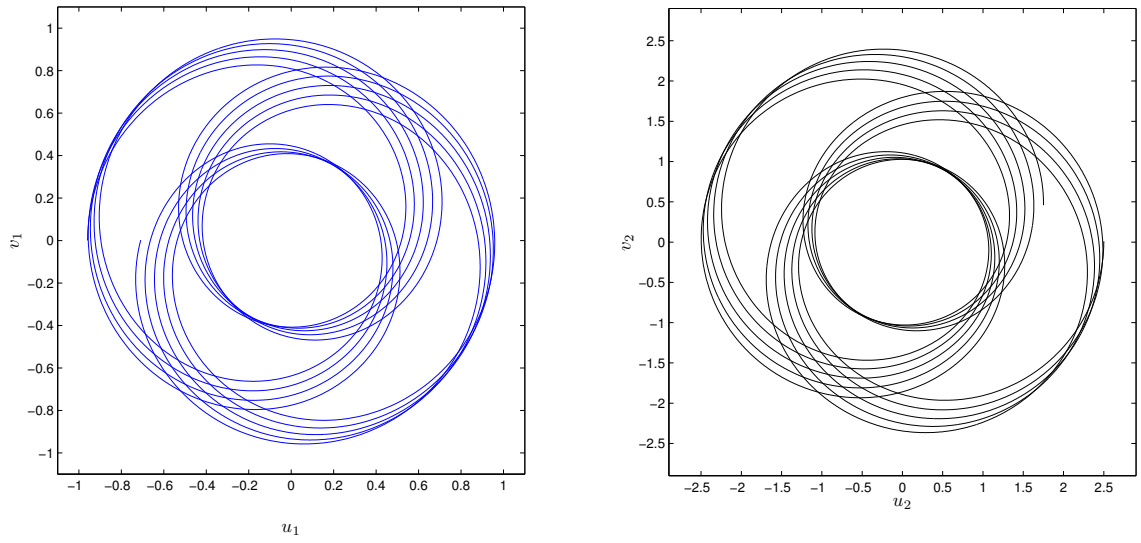


Figura 17

Trajatórias com condição inicial na região 6 da figura 11
 $z_1(0) = (-0.0263, 0)$; $z_2(0) = (0.3, 0.0001)$

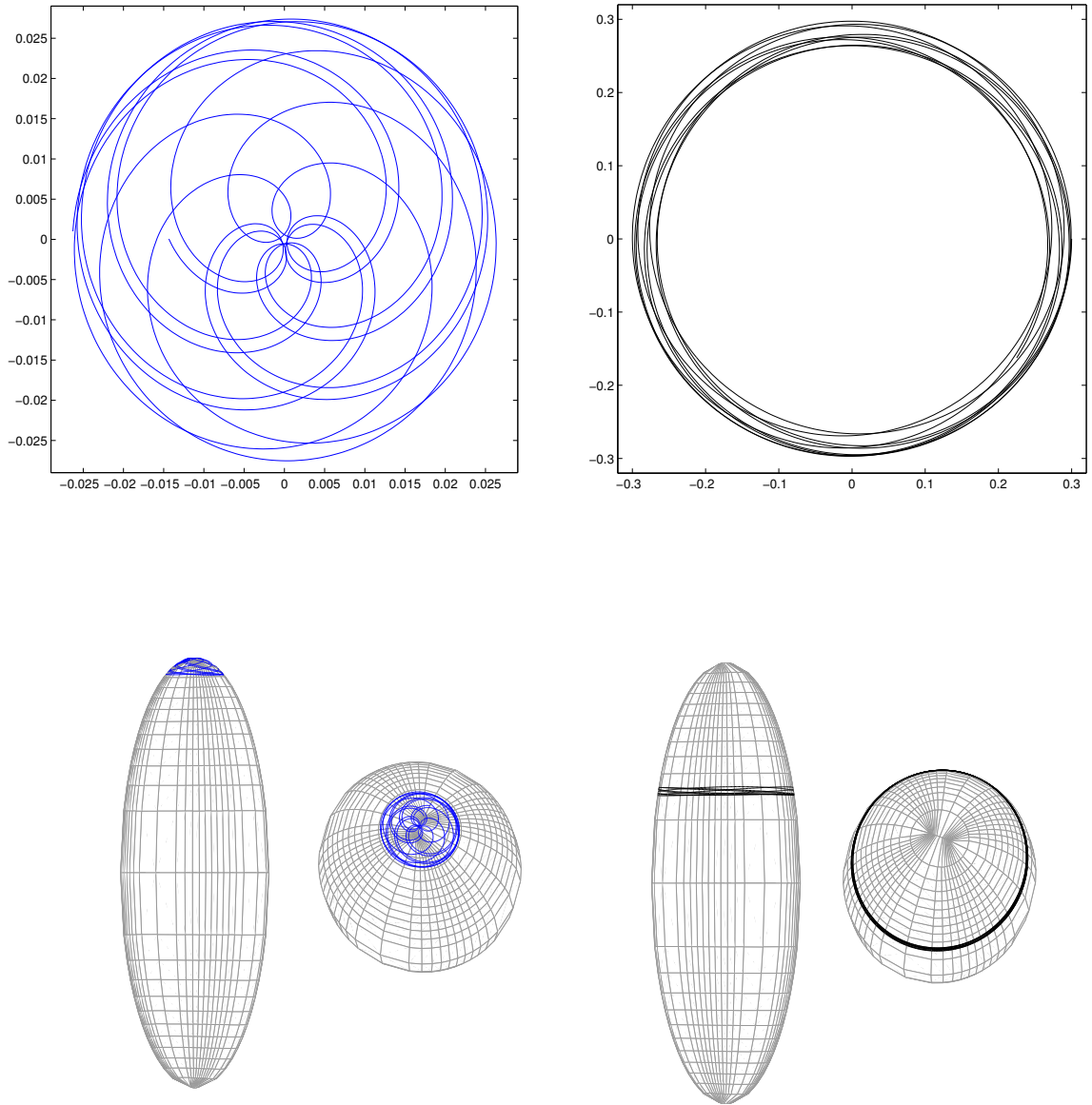


Figura 18

Seção 2: Elipsóide $a = 1, b = 2, c = 9$, Energia $H = -36$.

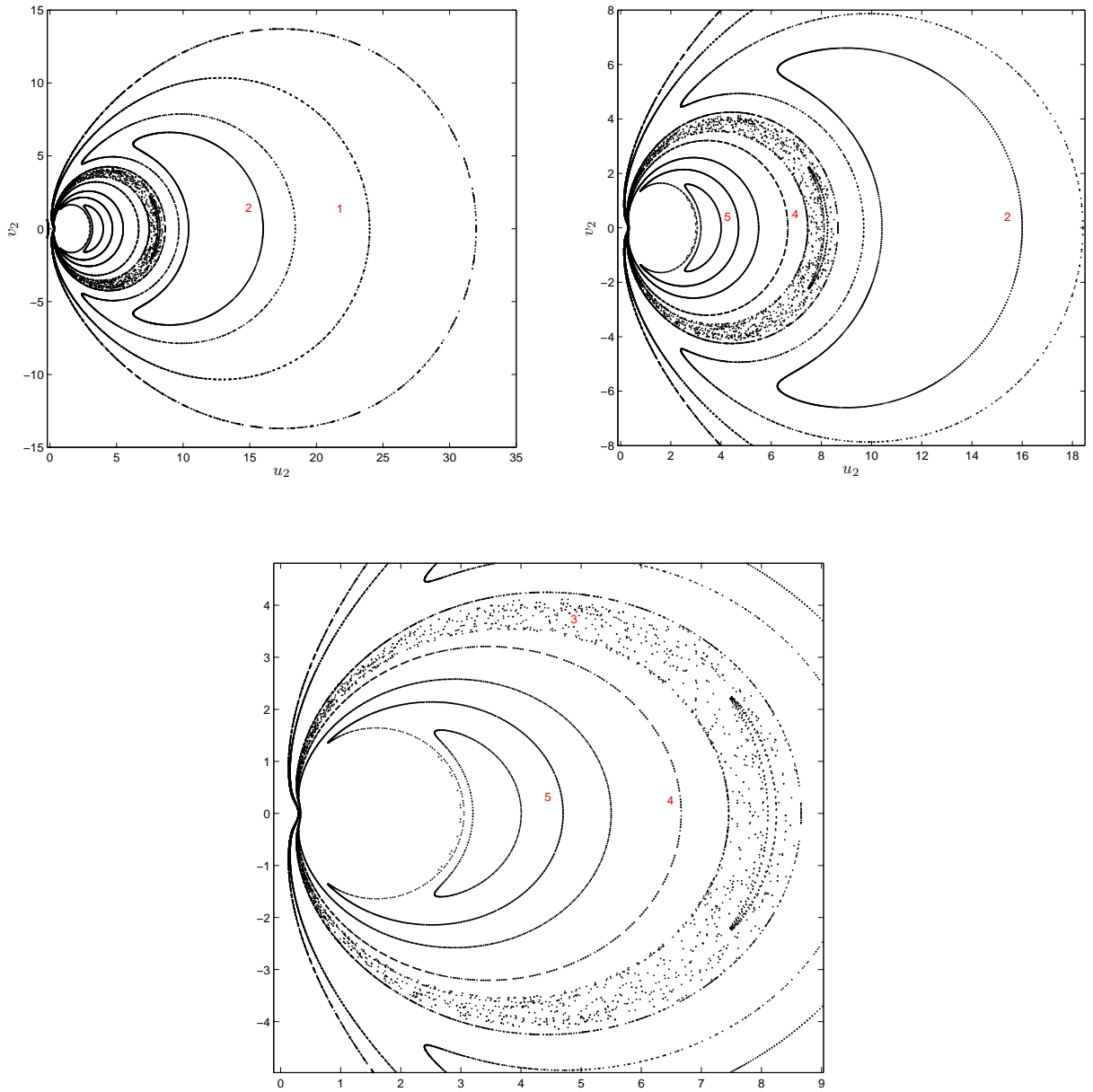


Figura 19

Trajetórias com condição inicial na região 1 da figura 19
 $z_1(0) = (-3.2832, 0)$; $z_2(0) = (21, 0)$.

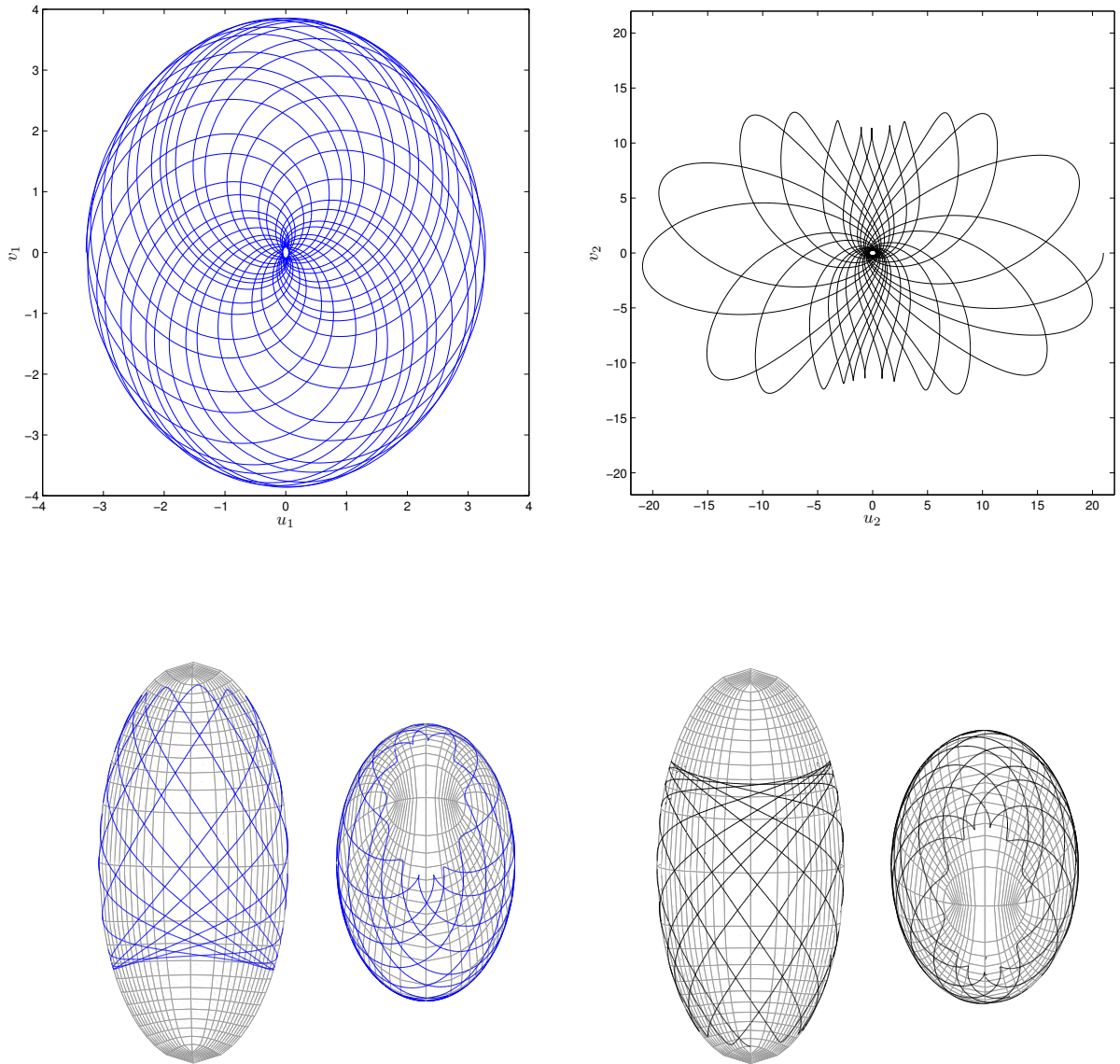


Figura 20

Trajatórias com condição inicial na região 2 da figura 19
 $z_1(0) = (-3.1916, 0)$; $z_2(0) = (15, 0)$.

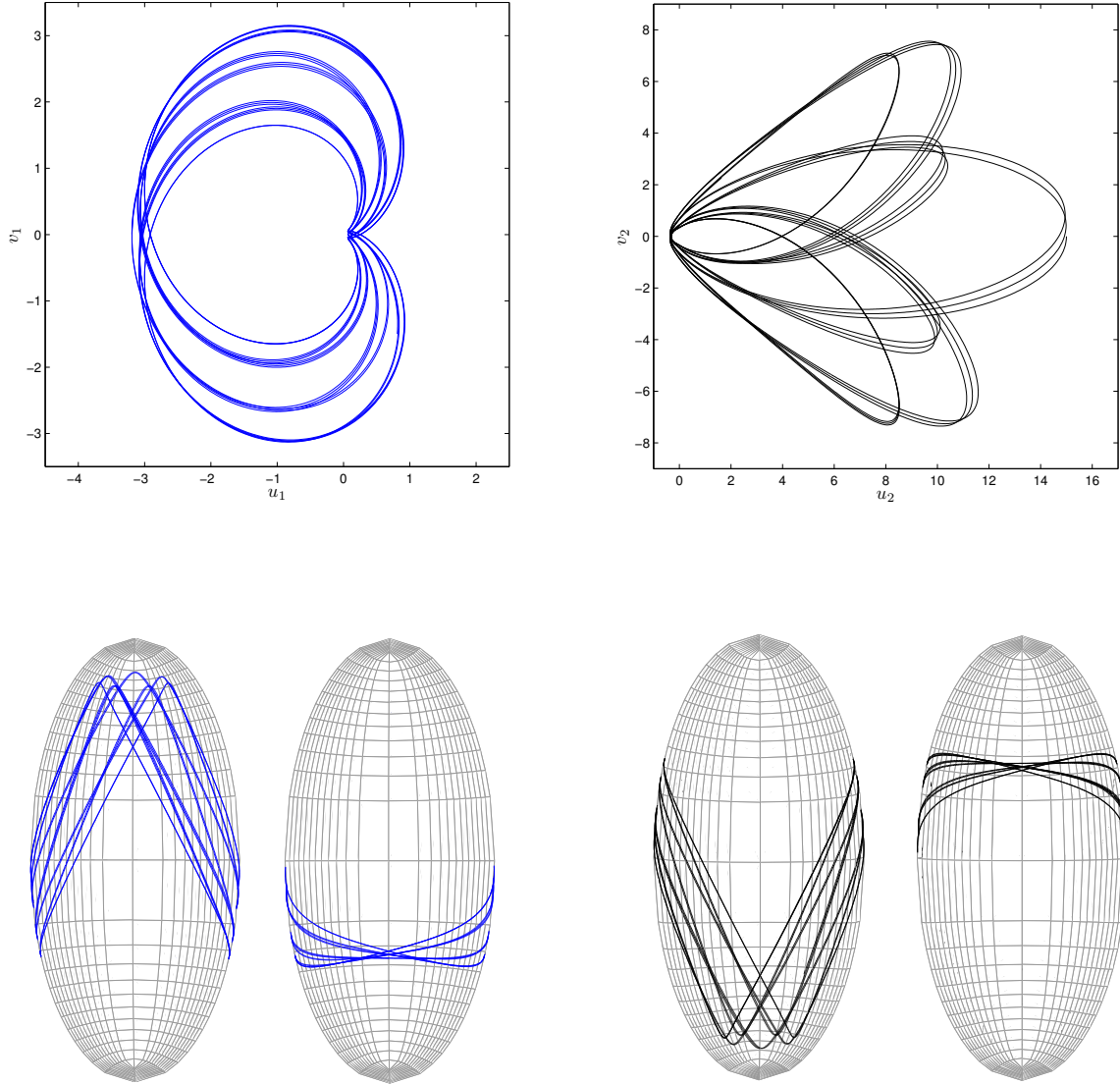


Figura 21

Duas trajetórias caóticas com condições iniciais próximas (região 3 na figura 19).

Condições iniciais 1: $z_1(0) = (-2.6499, 0)$; $z_2(0) = (5, 4)$ (Azul e Preto).

Condições iniciais 2: $z_1(0) = (-2.6500, 0)$; $z_2(0) = (5.001, 4)$ (Vermelho).

As figuras na parte superior mostram as trajetórias muito próximas a curto prazo.

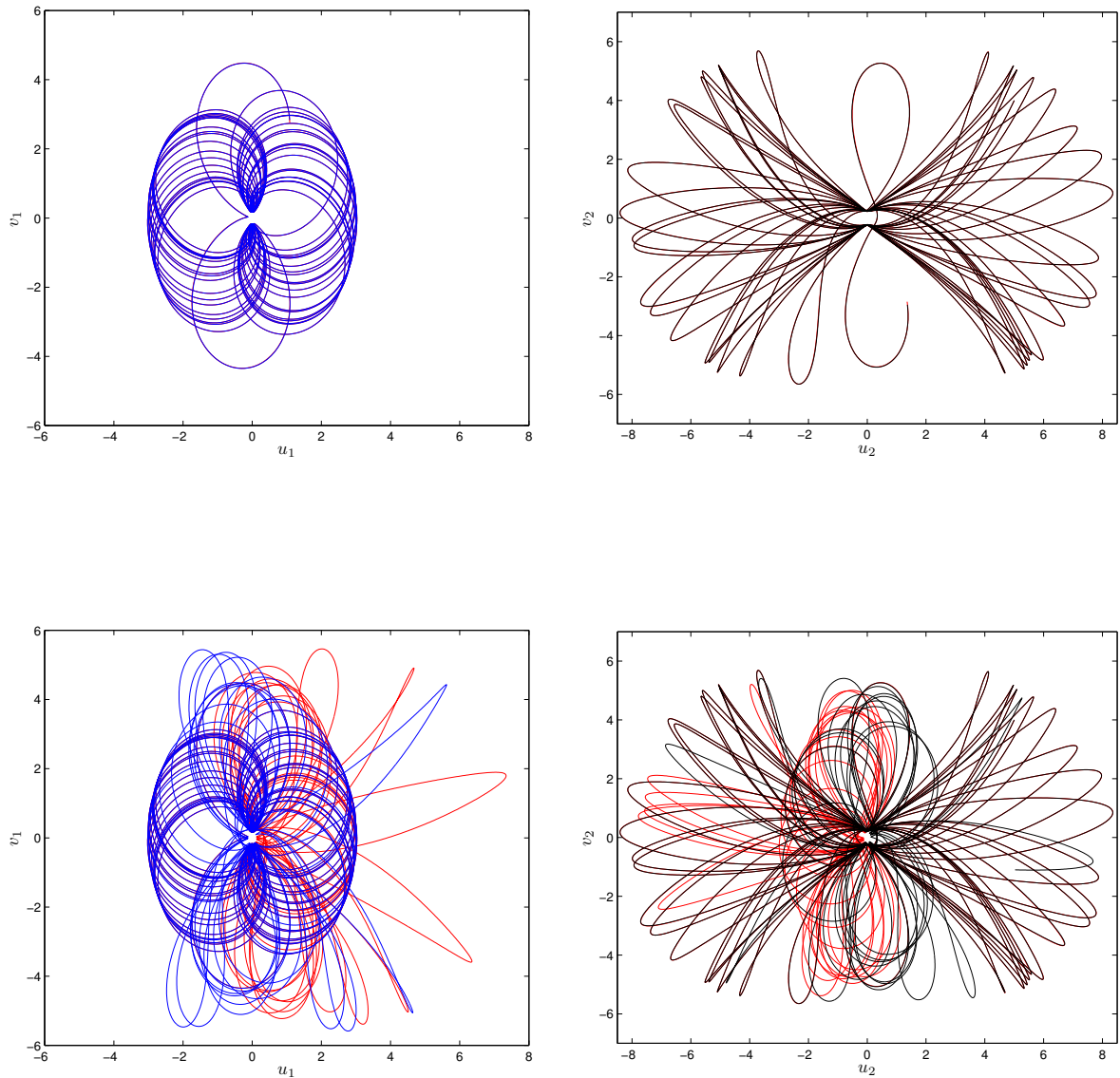


Figura 22

Trajetórias com condição inicial na região 4 da figura 19
 $z_1(0) = (-2.9894, 0)$; $z_2(0) = (6.5, 0)$.

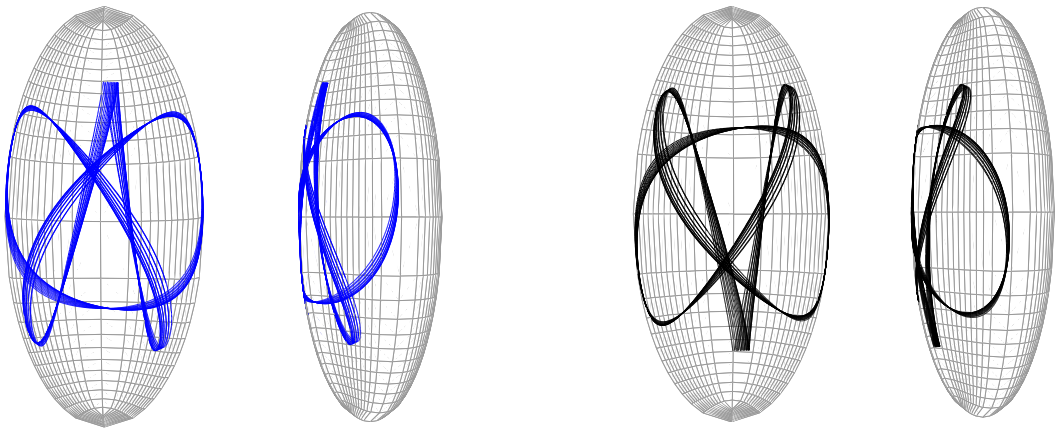
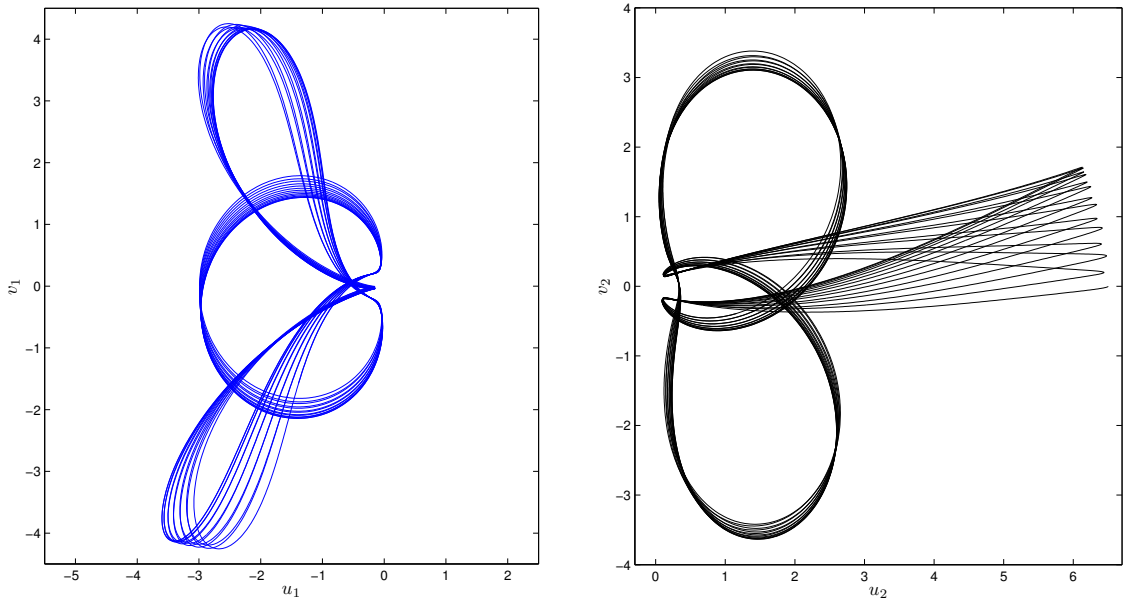


Figura 23

Trajetórias com condição inicial na região 5 da figura 19
 $z_1(0) = (-3.0966, 0)$; $z_2(0) = (4.4, 0)$.

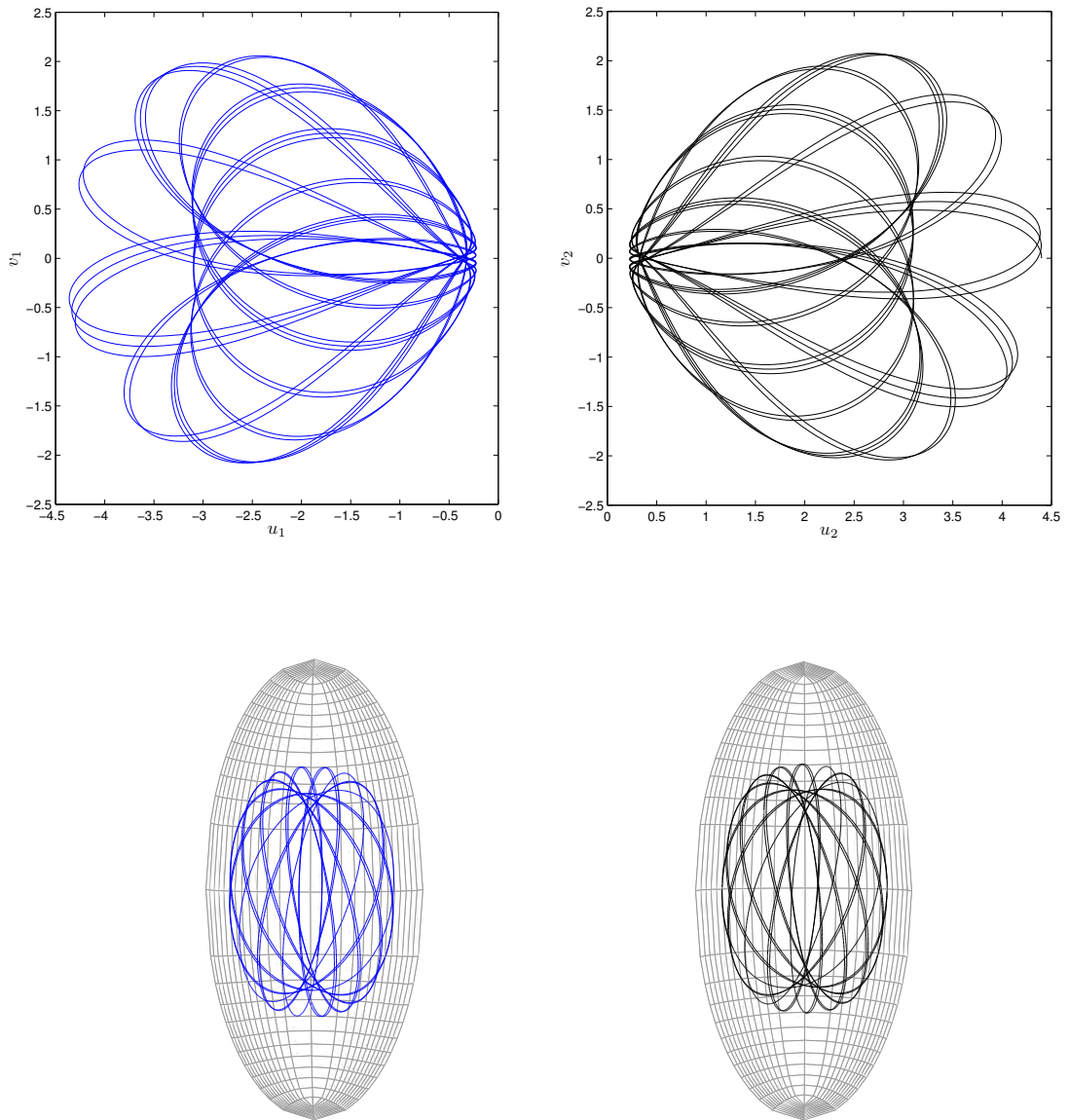


Figura 24

Seção 3: Elipsóide $a = 1, b = 4, c = 9$, Energia $H = -60$.

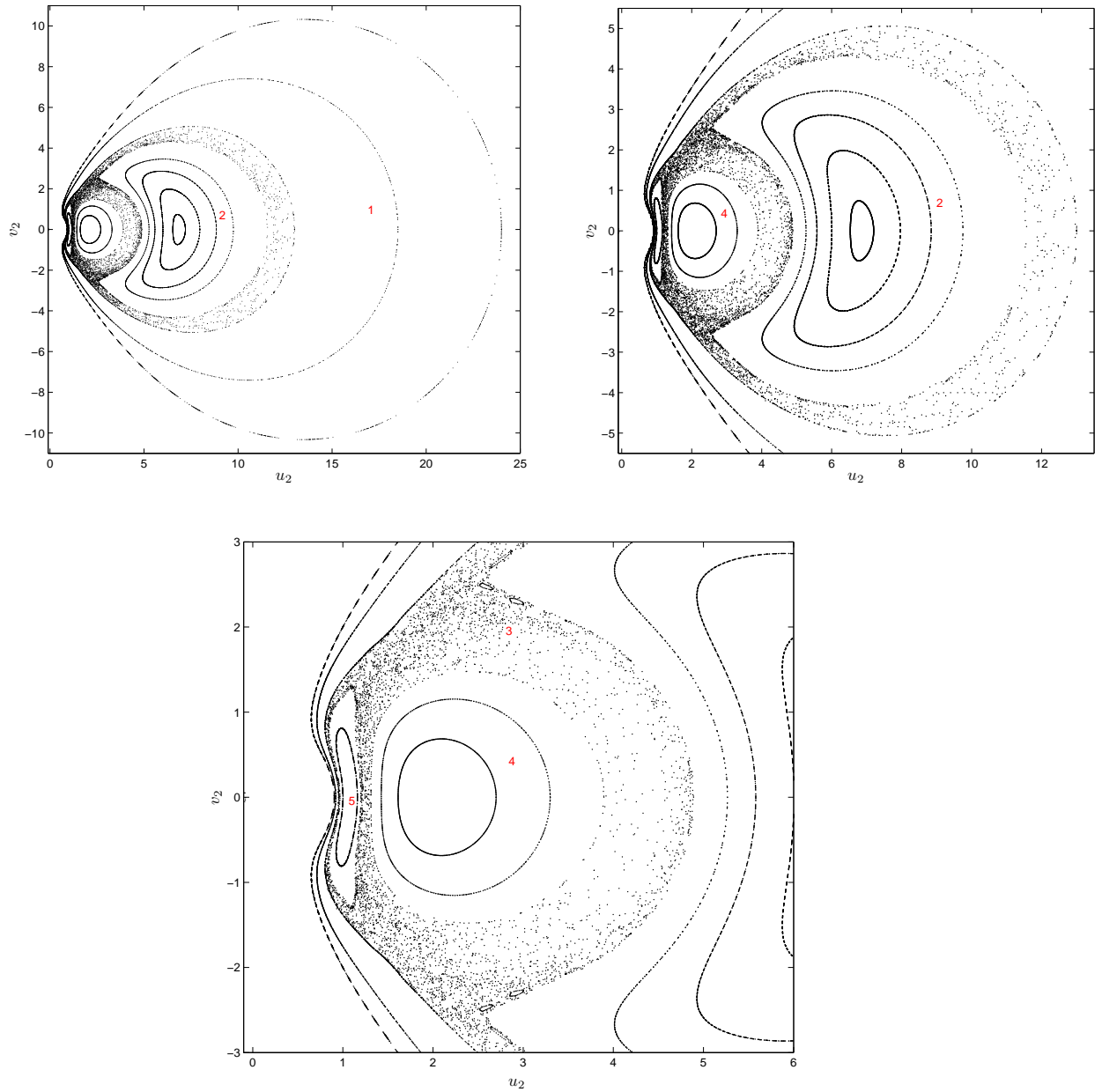


Figura 25

Trajatórias com condição inicial na região 1 da figura 25
 $z_1(0) = (-1.0797, 0)$; $z_2(0) = (17, 1)$.

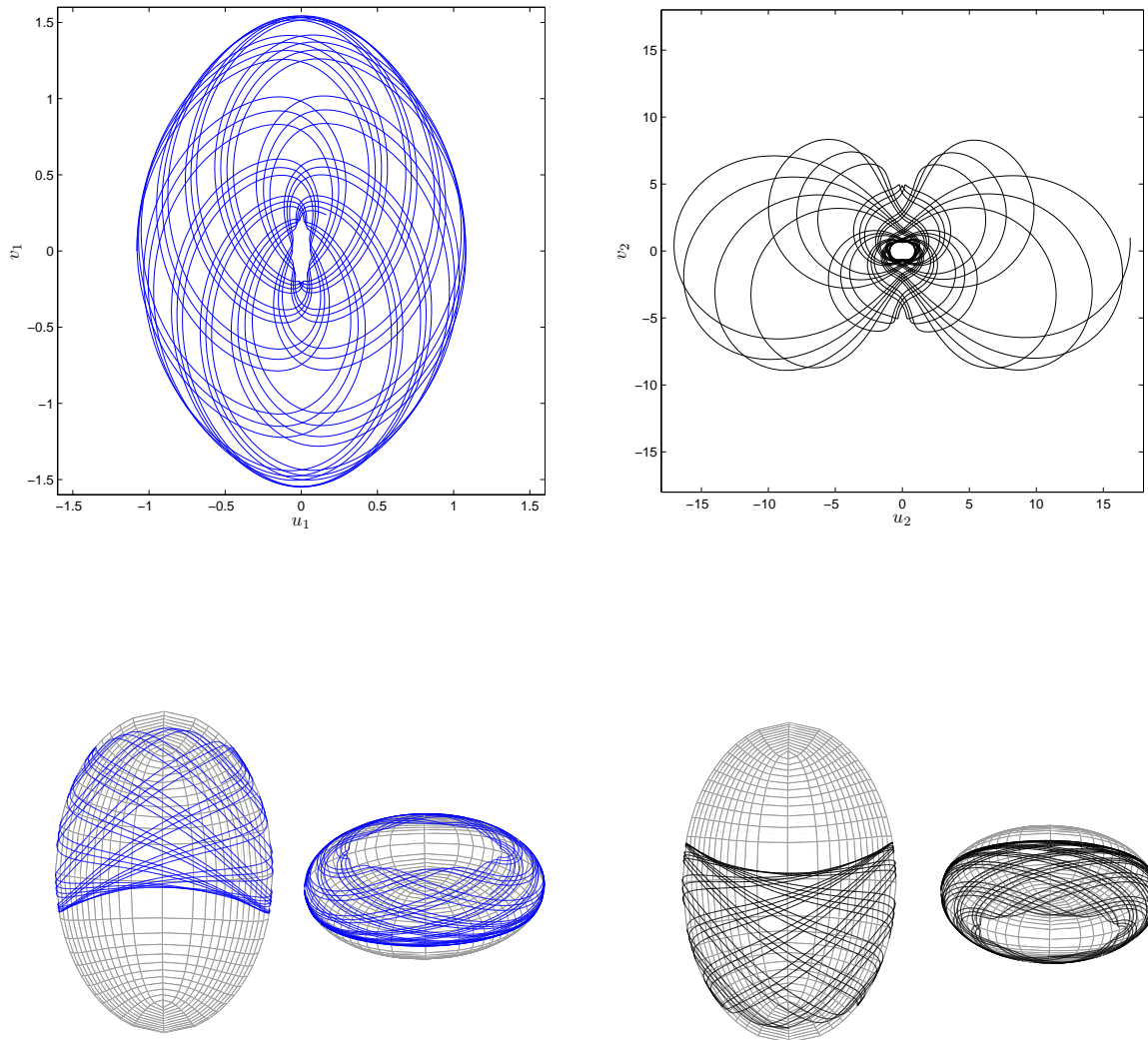


Figura 26

Trajetórias com condição inicial na região 2 da figura 25 $z_1(0) = (-0.9892, 0)$; $z_2(0) = (9, 1)$.

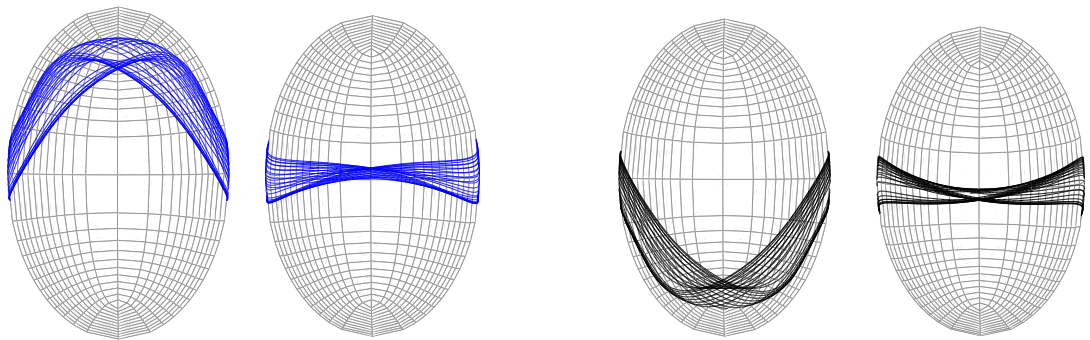
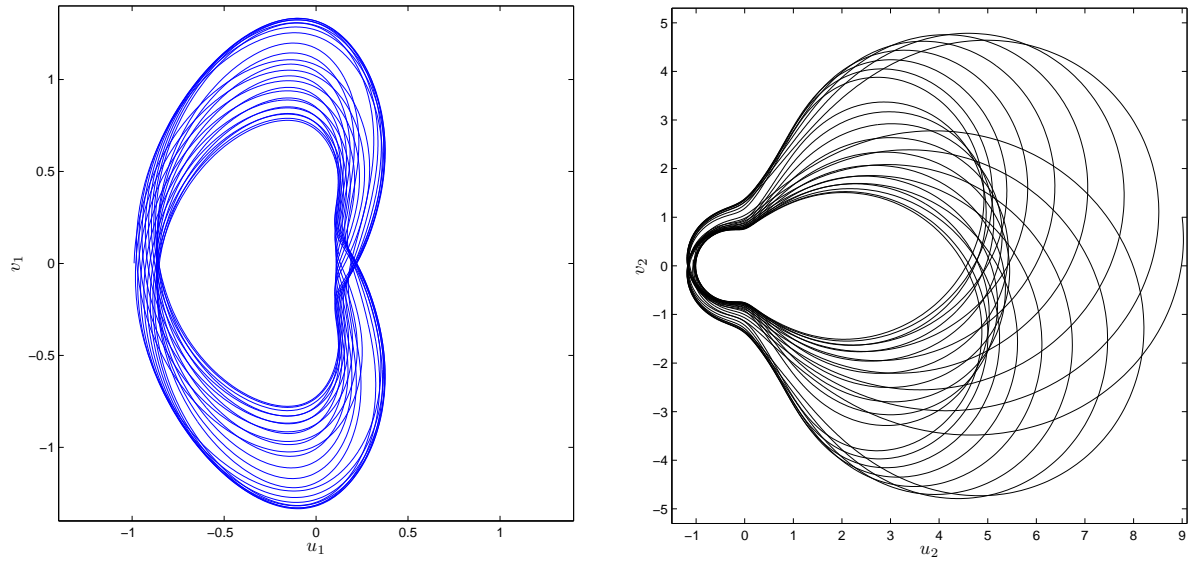


Figura 27

Duas trajetórias caóticas com condições iniciais próximas (região 3 da figura 25).

Condições iniciais 1: $z_1(0) = (-0.6791, 0)$; $z_2(0) = (2.42, 2.19)$ (Azul e Preto).

Condições iniciais 2: $z_1(0) = (-0.6795, 0)$; $z_2(0) = (2.42, 2.20)$ (Vermelho).

As figuras na parte superior mostram as trajetórias muito próximas a curto prazo.

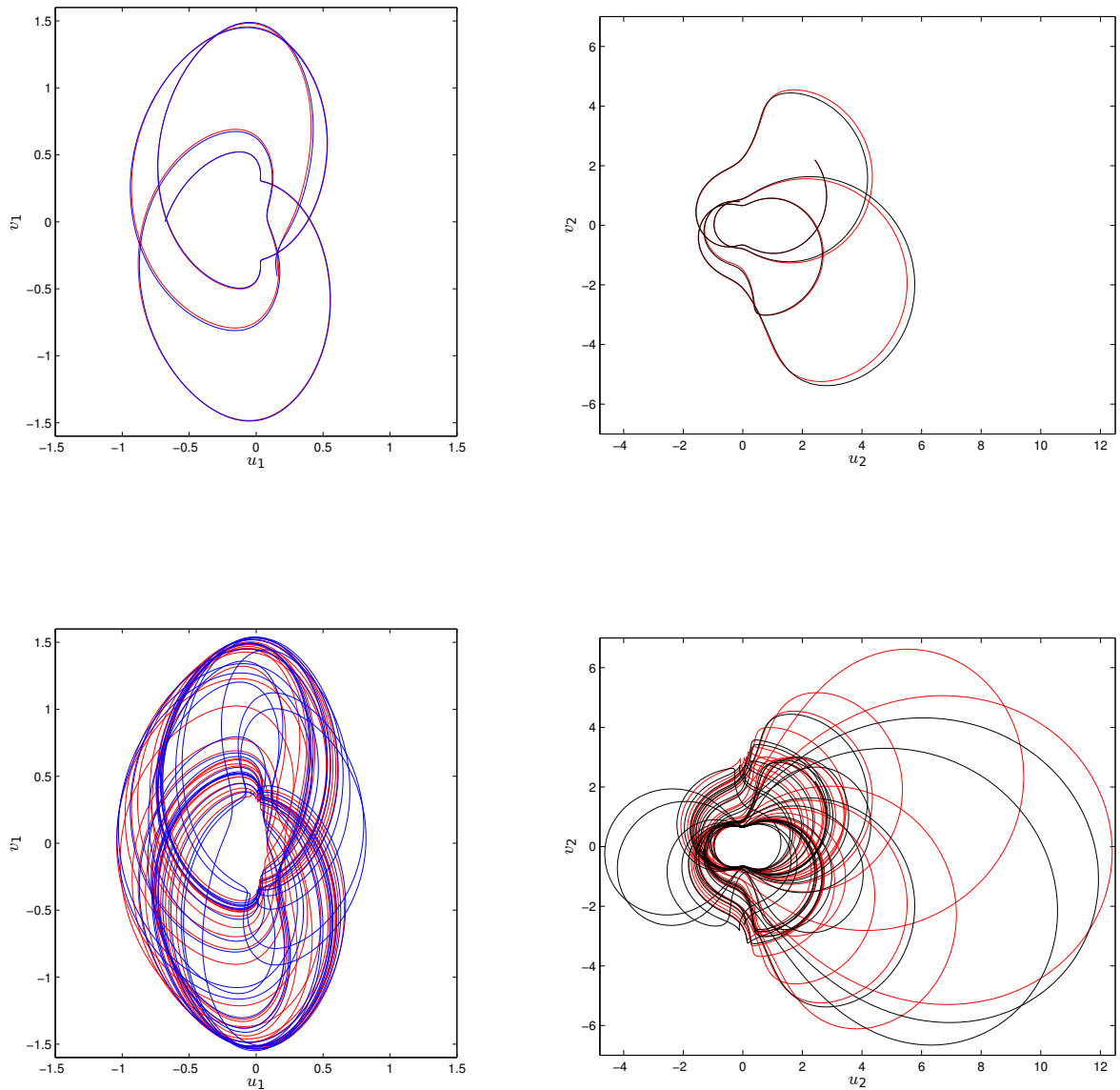


Figura 28

Trajétórias com condição inicial na região 4 da figura 25
 $z_1(0) = (-0.6682, 0)$; $z_2(0) = (3, 0.5)$.

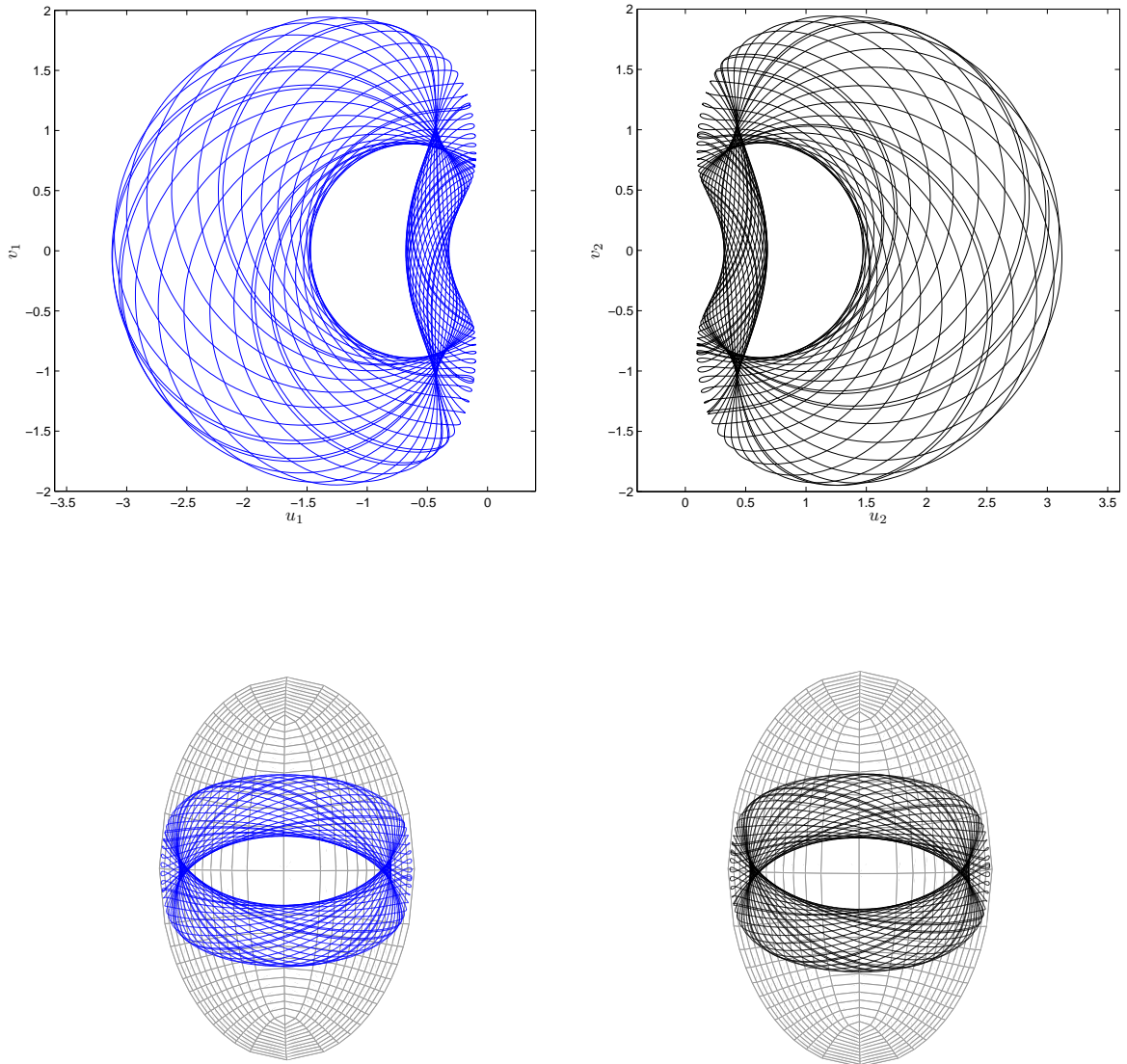


Figura 29

Trajatórias com condição inicial na região 5 da figura 25
 $z_1(0) = (-0.1892, 0)$; $z_2(0) = (1.16, 0.1)$.

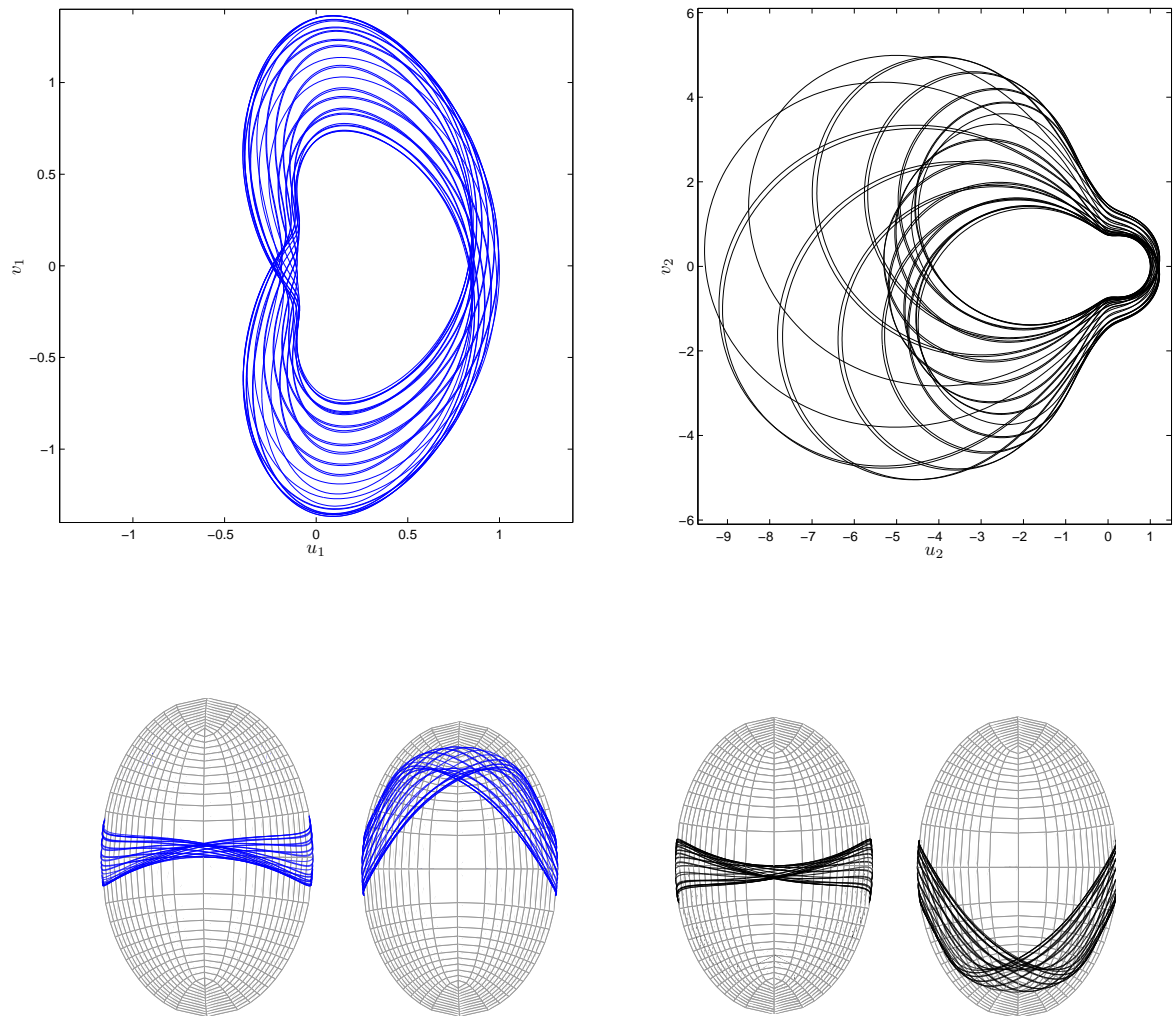


Figura 30

REFERÊNCIAS

- 1 HELMHOLTZ, H. v. Lxiii. on integrals of the hydrodynamical equations, which express vortex-motion. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Taylor & Francis, v. 33, n. 226, p. 485–512, 1867.
- 2 KIRCHHOFF, G. *Vorlesungen über mathematische physik: mechanik*. [S.l.]: BG Teubner, 1876. v. 1.
- 3 KIMURA, Y.; OKAMOTO, H. Vortex motion on a sphere. *Journal of the Physical Society of Japan*, The Physical Society of Japan, v. 56, n. 12, p. 4203–4206, 1987.
- 4 PEKARSKY, S.; MARSDEN, J. E. Point vortices on a sphere: stability of relative equilibria. *Journal of Mathematical Physics*, AIP, v. 39, n. 11, p. 5894–5907, 1998.
- 5 KIDAMBI, R.; NEWTON, P. K. Motion of three point vortices on a sphere. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier, v. 116, n. 1-2, p. 143–175, 1998.
- 6 KIDAMBI, R.; NEWTON, P. Collapse of three vortices on a sphere. *Nuovo cimento della Società italiana di fisica. C*, Compositori, v. 22, n. 6, p. 779–791, 1999.
- 7 KIDAMBI, R.; NEWTON, P. Point vortex motion on a sphere with solid boundaries. *Physics of Fluids*, AIP, v. 12, n. 3, p. 581–588, 2000.
- 8 LIM, C.; MONTALDI, J.; ROBERTS, M. Relative equilibria of point vortices on the sphere. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier, v. 148, n. 1, p. 97–135, 2001.
- 9 CABRAL, H. E.; BOATTO, S. Nonlinear stability of a latitudinal ring of point-vortices on a nonrotating sphere. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, SIAM, v. 64, n. 1, p. 216–230, 2003.
- 10 LAURENT-POLZ, F. Point vortices on a rotating sphere. *arXiv preprint math/0301360*, 2003.
- 11 TRONIN, K. Absolute choreographies of point vortices on a sphere. *Regul Chaotic Dyn*, v. 11, n. 1, p. 123–130, 2006.
- 12 JAMALOODEEN, M. I.; NEWTON, P. K. The n-vortex problem on a rotating sphere. ii. heterogeneous platonic solid equilibria. In: THE ROYAL SOCIETY. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. [S.l.], 2006. v. 462, n. 2075, p. 3277–3299.
- 13 O'NEIL, K. A. Relative equilibria of point vortices that lie on a great circle of a sphere. *Nonlinearity*, IOP Publishing, v. 21, n. 9, p. 2043, 2008.
- 14 SAKAJO, T.; YAGASAKI, K. Chaotic motion of the n-vortex problem on a sphere: I. saddle-centers in two-degree-of-freedom hamiltonians. *Journal of nonlinear science*, Springer, v. 18, n. 5, p. 485–525, 2008.

- 15 SAKAJO, T.; YAGASAKI, K. Chaotic motion of the n-vortex problem on a sphere: li. saddle centers in three-degree-of-freedom hamiltonians. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier, v. 237, n. 14, p. 2078–2083, 2008.
- 16 NEWTON, P. K.; SAKAJO, T. Point vortex equilibria on the sphere via brownian ratchets. In: THE ROYAL SOCIETY. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. [S.l.], 2009. v. 465, n. 2102, p. 437–455.
- 17 KIMURA, Y. Vortex motion on surfaces with constant curvature. In: THE ROYAL SOCIETY. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. [S.l.], 1999. v. 455, n. 1981, p. 245–259.
- 18 HALLY, D. Stability of streets of vortices on surfaces of revolution with a reflection symmetry. *Journal of Mathematical Physics*, AIP, v. 21, n. 1, p. 211–217, 1980.
- 19 SOULIÈRE, A.; TOKIEDA, T. Periodic motions of vortices on surfaces with symmetry. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge Univ Press, v. 460, p. 83–92, 2002.
- 20 CASTILHO, C.; MACHADO, H. The n-vortex problem on a symmetric ellipsoid: a perturbation approach. *Journal of Mathematical Physics*, AIP, v. 49, n. 2, p. 022703, 2008.
- 21 KIM, S.-C. Latitudinal point vortex rings on the spheroid. In: THE ROYAL SOCIETY. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. [S.l.], 2010. p. rspa20090597.
- 22 BOATTO, S.; KOILLER, J. Vortices on closed surfaces. *arXiv preprint arXiv:0802.4313*, 2008.
- 23 ABBENA, E.; SALAMON, S.; GRAY, A. *Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica*. [S.l.]: CRC press, 2006.
- 24 STRUIK, D. J. *Lectures on classical differential geometry*. [S.l.]: Courier Corporation, 2012.
- 25 CARMO, M. D. *Differential geometry of curves and surfaces*. prentic hall. Inc. Eaglewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- 26 BABELON, O.; BERNARD, D.; TALON, M. *Introduction to classical integrable systems*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2003.
- 27 KOILLER, J.; EHLERS, K. Rubber rolling over a sphere. *Regular and Chaotic Dynamics*, Springer, v. 12, n. 2, p. 127–152, 2007.
- 28 MCKEAN, H.; MOLL, V. *Elliptic curves: function theory, geometry, arithmetic*. [S.l.]: Cambridge university press, 1999.
- 29 CARLSON, B. Computing elliptic integrals by duplication. *Numerische Mathematik*, Springer, v. 33, n. 1, p. 1–16, 1979.
- 30 BYRD, P.; FRIEDMAN, M. *Handbook of elliptic integrals for physicists and engineers*. Springer-Verlag, Berlin, v. 132, p. 104, 1954.
- 31 JEFFREY, A.; ZWILLINGER, D. *Table of integrals, series, and products*. [S.l.]: Academic Press, 2007.

- 32 CHERN, S.-S. An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface. *Proceedings of the American Mathematical Society*, JSTOR, v. 6, n. 5, p. 771–782, 1955.
- 33 CRAIG, T. Orthomorphic projection of an ellipsoid upon a sphere. *American Journal of Mathematics*, JSTOR, v. 3, n. 2, p. 114–127, 1880.
- 34 HENON, M. On the numerical computation of poincaré maps. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier, v. 5, n. 2-3, p. 412–414, 1982.

APÊNDICE A – COORDENADAS ORTOGONAIS

Coordenadas Elípticas

O lado esquerdo da equação (2.6) pode ser escrita como

$$\lambda^3 + (x^2 + y^2 + z^2 - a - b - c)\lambda^2 + [ab + ac + bc - (b+c)x^2 - (a+c)y^2 - (a+b)z^2]\lambda + bcx^2 + acy^2 + abz^2 - abc$$

Usando as relações entre coeficientes e raízes,

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) = \lambda^3 - (\sum \lambda_j)\lambda^2 + (\sum \lambda_k \lambda_j)\lambda - \prod \lambda_j, \quad (\text{A.1})$$

obtém-se o seguinte sistema de equações lineares em relação a x^2 , y^2 e z^2 :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a + b + c - \sum \lambda_j \\ (b+c)x^2 + (a+c)y^2 + (a+b)z^2 = ab + ac + bc - \sum \lambda_k \lambda_j \\ bcx^2 + acy^2 + abz^2 = abc - \prod \lambda_j \end{cases}$$

A seguir, escalonamos a matriz ampliada do sistema.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a+b+c-\sum \lambda_j \\ b+c & a+c & a+b & ab+ac+bc-\sum \lambda_k \lambda_j \\ bc & ac & ab & abc-\prod \lambda_j \end{bmatrix} \begin{array}{l} \sim \\ L_2 \mapsto (b+c)L_1 - L_2 \\ L_3 \mapsto bcL_1 - L_3 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a+b+c-\sum \lambda_j \\ 0 & b-a & c-a & (b+c)(b+c-\sum \lambda_j) - bc + \sum \lambda_k \lambda_j \\ 0 & c(b-a) & b(c-a) & bc(b+c-\sum \lambda_j) + \prod \lambda_j \end{bmatrix} \begin{array}{l} \sim \\ L_3 \mapsto cL_2 - L_3 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a+b+c-\sum \lambda_j \\ 0 & b-a & c-a & (b+c)(b+c-\sum \lambda_j) - bc + \sum \lambda_k \lambda_j \\ 0 & 0 & (c-a)(c-b) & c^3 - (\sum \lambda_j)c^2 + (\sum \lambda_k \lambda_j)c - \prod \lambda_j \end{bmatrix}$$

Como

$$c^3 - (\sum \lambda_j)c^2 + (\sum \lambda_k \lambda_j)c - \prod \lambda_j = (c - \lambda_1)(c - \lambda_2)(c - \lambda_3),$$

obtemos

$$z^2 = \frac{(c - \lambda_1)(c - \lambda_2)(c - \lambda_3)}{(c - a)(c - b)}.$$

As outras duas expressões seguem por simetria:

$$x^2 = \frac{(a - \lambda_1)(a - \lambda_2)(a - \lambda_3)}{(a - b)(a - c)}$$

$$y^2 = \frac{(b - \lambda_1)(b - \lambda_2)(b - \lambda_3)}{(b - a)(b - c)}$$

$$z^2 = \frac{(c - \lambda_1)(c - \lambda_2)(c - \lambda_3)}{(c - a)(c - b)}$$

Proposição (2.2.1)

(ii) É suficiente fazer o caso $i = 1$. Do item (i) da mesma proposição e de (2.7) segue-se:

$$\begin{aligned} 4 \left\| \frac{\partial X}{\partial \lambda_1} \right\|^2 &= \frac{x^2}{(\lambda_1 - a)^2} + \frac{y^2}{(\lambda_1 - b)^2} + \frac{z^2}{(\lambda_1 - c)^2} \\ &= \frac{(\lambda_2 - a)(\lambda_3 - a)}{(b - a)(c - a)(a - \lambda_1)} + \frac{(\lambda_2 - b)(\lambda_3 - b)}{(a - b)(c - b)(b - \lambda_1)} + \frac{(\lambda_2 - c)(\lambda_3 - c)}{(a - c)(b - c)(c - \lambda_1)} \\ &= \frac{(b - c)(\lambda_1 - b)(c - \lambda_1)(\lambda_2 - a)(\lambda_3 - a) - (a - c)(a - \lambda_1)(c - \lambda_1)(\lambda_2 - b)(\lambda_3 - b) + (a - b)(a - \lambda_1)(b - \lambda_1)(\lambda_2 - c)(\lambda_3 - c)}{(a - b)(a - c)(b - c)(a - \lambda_1)(b - \lambda_1)(c - \lambda_1)} \end{aligned}$$

O numerador desta expressão é um polinômio em λ_1 , λ_2 e λ_3 . Calculamos a seguir, os coeficientes deste polinômio.

$$\lambda_1^2 \lambda_2 \lambda_3 : -(b-c) + (a-c) - (a-b) = 0$$

$$\lambda_1^2 \lambda_2 : a(b-c) - b(a-c) + c(a-b) = 0$$

$$\lambda_1^2 \lambda_3 : a(b-c) - b(a-c) + c(a-b) = 0$$

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 : & -a^2(b-c) + b^2(a-c) - c^2(a-b) = -c^2(a-b) + (a^2 - b^2)c - a^2b + ab^2 \\ & = -(a-b)[c^2 - (a+b)c + ab] \\ & = -(a-b)(a-c)(b-c) \end{aligned}$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 : b^2 - c^2 - (a^2 - c^2) + a^2 - b^2 = 0$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 \lambda_2 : & -a(b^2 - c^2) + b(a^2 - c^2) - c(a^2 - b^2) = c^2(a-b) - c(a^2 - b^2) + ab(a-b) \\ & = (a-b)(a-c)(b-c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 \lambda_3 : & -a(b^2 - c^2) + b(a^2 - c^2) - c(a^2 - b^2) = c^2(a-b) - c(a^2 - b^2) + ab(a-b) \\ & = (a-b)(a-c)(b-c) \end{aligned}$$

$$\lambda_1 : a^2(b^2 - c^2) - b^2(a^2 - c^2) + c^2(a^2 - b^2) = 0$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 \lambda_3 : & -bc(b-c) + ac(a-c) - ab(a-b) = -c^2(a-b) + c(a^2 - b^2) - ab(a-b) \\ & = -(a-b)(a-c)(b-c) \end{aligned}$$

$$\lambda_2 : abc(b-c) - abc(a-c) + abc(a-b) = 0$$

$$\lambda_3 : abc(b-c) - abc(a-c) + abc(a-b) = 0$$

$$cte : -a^2bc(b-c) + ab^2c(a-c) - abc^2(a-b) = 0.$$

Portanto,

$$4 \left\| \frac{\partial X}{\partial \lambda_1} \right\|^2 = \frac{-(a-b)(a-c)(b-c)(\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3)}{(a-b)(a-c)(b-c)(\lambda_1 - a)(\lambda_1 - b)(\lambda_1 - c)'}.$$

donde

$$\left\| \frac{\partial X}{\partial \lambda_1} \right\|^2 = \frac{1}{4} \frac{\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3}{(a - \lambda_1)(b - \lambda_1)(c - \lambda_1)}.$$

Coordenadas Parabólicas

A equação (2.16) é equivalente a

$$\lambda^3 - (2z + a + b)\lambda^2 + [2(a + b)z + ab - x^2 - y^2]\lambda - [2abz - bx^2 - ay^2] = 0.$$

Usando as relações entre raízes e coeficientes (A.1), temos

$$\begin{cases} 2z + a + b = \sum \lambda_j \\ 2(a + b)z + ab - x^2 - y^2 = \sum \lambda_k \lambda_j \\ 2abz - bx^2 - ay^2 = \prod \lambda_j \end{cases}$$

Portanto,

$$z = \frac{\sum \lambda_j - a - b}{2}$$

e

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = (a + b)(\sum \lambda_j - a - b) + ab - \sum \lambda_k \lambda_j \\ bx^2 + ay^2 = ab(\sum \lambda_j - a - b) - \prod \lambda_j \end{cases}$$

Implica que

$$\begin{aligned} (a - b)y^2 &= -b^2(\sum \lambda_j - a - b) - ab^2 + (\sum \lambda_k \lambda_j)b - \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \\ &= b^3 - (\sum \lambda_j)b^2 + (\sum \lambda_k \lambda_j)b - \prod \lambda_j \\ &= (b - \lambda_1)(b - \lambda_2)(b - \lambda_3). \end{aligned}$$

Logo, as coordenadas parabólicas satisfazem

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{(\lambda_1 - a)(\lambda_2 - a)(\lambda_3 - a)}{a - b} \\ y^2 &= \frac{(\lambda_1 - b)(\lambda_2 - b)(\lambda_3 - b)}{b - a} \\ z &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - a - b}{2}. \end{aligned}$$

Proposição 2.3.1

Para $i = 1$,

$$\begin{aligned} 4 \left\| \frac{\partial X}{\partial \lambda_1} \right\|^2 &= \frac{x^2}{(\lambda_1 - a)^2} + \frac{y^2}{(\lambda_1 - b)^2} + 1 \\ &= \frac{(\lambda_2 - a)(\lambda_3 - a)}{(a - b)(\lambda_1 - a)} - \frac{(\lambda_2 - b)(\lambda_3 - b)}{(a - b)(\lambda_1 - b)} + 1 \\ &= \frac{(\lambda_1 - b)(\lambda_2 - a)(\lambda_3 - a) - (\lambda_1 - a)(\lambda_2 - b)(\lambda_3 - b) + (a - b)(\lambda_1 - a)(\lambda_1 - b)}{(a - b)(\lambda_1 - a)(\lambda_1 - b)}. \end{aligned}$$

Como antes, separamos os coeficientes do numerador:

$$\lambda_1 : a^2 - b^2 - (a^2 - b^2) = 0$$

$$\lambda_2 : ab - ab = 0$$

$$\lambda_3 : ab - ab = 0$$

$$\lambda_1^2 : a - b$$

$$\lambda_1\lambda_2 : -a + b = -(a - b)$$

$$\lambda_1\lambda_3 : -a + b = -(a - b)$$

$$\lambda_2\lambda_3 : -b + a = a - b$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 : 1 - 1 = 0$$

$$cte : -a^2b + ab^2 + (a - b)ab = 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial X}{\partial \lambda_1} \right\|^2 &= \frac{1}{4} \frac{(a-b)(\lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)}{(a-b)(\lambda_1 - a)(\lambda_1 - b)} \\ &= \frac{1}{4} \frac{(\lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)}{(\lambda_1 - a)(\lambda_1 - b)}. \end{aligned}$$

APÊNDICE B – MAPA CONFORMA DE CRAIG

Neste apêndice, inserimos uma breve justificativa para as expressões em (3.33). Para maiores detalhes veja (33).

Considere as coordenadas esféricas sobre a esfera $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$,

$$\begin{aligned}\xi &= \text{sen } \phi \cos \theta \\ \eta &= \text{sen } \phi \text{sen } \theta \\ \zeta &= \cos \phi,\end{aligned}\tag{B.1}$$

na qual a métrica é

$$d\tilde{s}^2 = \text{sen}^2 \phi d\theta^2 + d\phi^2.\tag{B.2}$$

Impondo conformalidade nas métricas (ver (33)), as coordenadas esféricas relacionam-se com as confocais sobre o elipsóide, por

$$\begin{cases} P = \theta \\ Q = \ln(\text{cotg}(\frac{\phi}{2})) \end{cases}\tag{B.3}$$

onde $P = P(\lambda_1)$ e $Q = Q(\lambda_2)$ são funções do tipo (3.23) e (3.24).

Daí obtém-se as expressões:

$$\xi = \frac{2e^Q \cos P}{e^{2Q} + 1}, \quad \eta = \frac{2e^Q \text{sen } P}{e^{2Q} + 1}, \quad \zeta = \frac{e^{2Q} - 1}{e^{2Q} + 1}.\tag{B.4}$$

De fato, por (B.3)

$$\text{sen } \phi = \frac{2 \text{sen}(\phi/2) \cos(\phi/2)}{\cos^2(\phi/2) + \text{sen}^2(\phi/2)} = \frac{2 \text{cotg}(\phi/2)}{\text{cotg}^2(\phi/2) + 1} = \frac{2e^Q}{e^{2Q} + 1}.\tag{B.5}$$

Analogamente,

$$\cos \phi = \frac{\cos^2(\phi/2) - \text{sen}^2(\phi/2)}{\cos^2(\phi/2) + \text{sen}^2(\phi/2)} = \frac{\text{cotg}^2(\phi/2) - 1}{\text{cotg}^2(\phi/2) + 1} = \frac{e^{2Q} - 1}{e^{2Q} + 1},\tag{B.6}$$

donde segue-se (B.4).

Além disso, sabemos que a métrica no elipsóide é (3.17)

$$ds^2 = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{4} (dP^2 + dQ^2).$$

Como

$$\begin{aligned} dQ &= \frac{1}{\cotg(\phi/2)} [-\operatorname{cosec}^2(\phi/2)] \cdot \frac{1}{2} d\phi \\ &= -\frac{\operatorname{sen}(\phi/2)}{2 \cos(\phi/2)} \cdot \frac{d\phi}{\operatorname{sen}^2(\phi/2)} \\ &= -\frac{d\phi}{\operatorname{sen} \phi}, \end{aligned}$$

verifica-se que

$$d\tilde{s}^2 = \operatorname{sen}^2 \phi (dP^2 + dQ^2) = \frac{4 \operatorname{sen}^2 \phi}{\lambda_2 - \lambda_1} ds^2.$$