



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Antonio José Ferreira Gomes Junior

Número de Triângulos e de Elementos Cobertos por Triângulos  
em Matrôides Binárias que são Cominimalmente 3-conexas

RECIFE

2013

**Antonio José Ferreira Gomes Junior**

Número de Triângulos e de Elementos Cobertos por Triângulos em Matróides  
Binárias que são Cominimalmente 3-conexas

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em  
Matemática da Universidade Federal de Pernambuco  
como requisito parcial para obtenção do título de Dou-  
tor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Manoel Lemos

RECIFE

2013

Catálogo na fonte  
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

G633n Gomes Junior, Antonio José Ferreira  
Número de triângulos e de elementos cobertos por triângulos em matróides binárias que são cominimalmente 3-conexas / Antonio José Ferreira Gomes Junior. – 2013.  
64 f.

Orientador: Manoel Lemos.  
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, Recife, 2013.  
Inclui referências.

1. Matemática. 2. Matemática discreta. 3. Matróides. I. Lemos, Manoel (orientador). II. Título.

510

CDD (23. ed.)

UFPE- MEI 2017-223

**ANTONIO JOSÉ FERREIRA GOMES JUNIOR**

Número de Triângulos e de Elementos Cobertos por Triângulos em Matróides Binárias que são Cominimalmente 3-conexas

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutorado em Matemática.

Aprovado em: 13/08/2013

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Manoel José Machado Soares Lemos (Orientador)  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof. Dr. Sóstenes Luiz Soares Lins (Examinador Interno)  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof. Dr. Silvio de Barros Melo (Examinador Interno)  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof. Dr. Gauss Moutinho Cordeiro (Examinador Externo)  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof.Dr. Cláudio Tadeu Cristino (Examinador Externo)  
Universidade Federal da Paraíba

*A Cecília, que é o motivo principal de eu continuar crescendo na matemática e na vida.*

# AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais por contribuírem para que eu tivesse uma educação sólida.

Agradeço a todos os professores que contribuíram para minha formação.

Agradeço aos amigos que sempre me apoiaram e torceram por mim.

Finalmente, agradeço ao meu orientador Manoel Lemos por todo apoio dado e pela confiança depositada em mim para executar este trabalho.

*Queira!*  
*Basta ser sincero*  
*e desejar profundo.*  
*Você será capaz*  
*de sacudir o mundo.*  
*Vai!*  
*Tente outra vez!*

- RAUL SEIXAS / MARCELO MOTTA / PAULO COELHO (*Tente Outra Vez*)

# RESUMO

Manoel Lemos em seu artigo “Elements belonging to triads in 3-connected matroids” (2004) estabeleceu uma cota inferior para o número de elementos cobertos por triângulos em uma matróide cominimalmente 3-conexa com uma quantidade suficientemente grande de elementos, em função de sua quantidade de elementos. No seu artigo “On the number of triangles in 3-connected matroids” (2007) mostrou uma cota semelhante para o número de triângulos desse tipo de matróide. Ele ainda, em ambos os casos, encontrou uma família infinita de matróides que atingiam tais cotas. Assim, motivados por esses artigos, adicionamos ao problema a hipótese da matróide ser binária e construímos algumas matróides com uma pequena quantidade de elementos, satisfazendo essas condições, que foram utilizadas em decomposições necessárias para as demonstrações de resultados similares aos dos artigos de Lemos. Além disso, também encontramos, em ambos os casos, uma família infinita de matróides compostas pelas criadas para a decomposição que atingem o limite dessas cotas, mostrando que os resultados obtidos são os melhores possíveis.

**Palavras-chave:** Matróides binárias. Matróides 3-conexas. Triângulos.

# ABSTRACT

Manoel Lemos in his article “Elements belonging do triads in 3-connected matroids” (2004) established a lower bound for the number of elements covered by triangles in a cominimally 3-connected matroid with a sufficiently large number of elements, depending on their amount of elements. In his article “On the number of triangles in 3-connected matrirds” (2007) he showed a similar quota for the number of triangles of this type of matroid. He still, in both cases, found an endless family of matroids who reached such heights. Thus, motivated by these articles, we add to the problem the hypothesis of the matroid being binary and we construct some matroids with a small amount of elements, satisfying these conditions, that were used in necessary decompositions for the demonstrations of results similar to the articles of Lemos. In addition, we also find in both cases an infinite family of matroids composed by the maids for decomposition that reach the limit of these dimensions, showing that the obtained results are the best possible.

**Keywords:** Binary Matroids. 3-connected Matroids. Triangle.

# SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	10
2	MATRÓIDES: DEFINIÇÕES E CONCEITOS BÁSICOS . . .	13
2.1	Matróides . . . . .	13
2.2	Fechados . . . . .	14
2.3	Dualidade . . . . .	16
2.4	Menores . . . . .	18
2.5	Representação Geométrica . . . . .	19
2.6	Conexão em Paralelo Generalizada . . . . .	20
3	CONNECTIVIDADE E LEMAS SOBRE 3-SEPARAÇÕES . .	22
4	MATRÓIDES BINÁRIAS E A OPERAÇÃO 3-SOMA . . . .	27
4.1	Matróides Binárias . . . . .	27
4.2	Operação 3-soma e Algumas Decomposições . . . . .	33
5	RESULTADOS PRELIMINARES . . . . .	40
6	OS TEOREMAS CENTRAIS E OS EXEMPLOS MINIMAIS	54
	REFERÊNCIAS . . . . .	64

# 1 INTRODUÇÃO

Nesta tese, apresentaremos alguns resultados acerca de número de triângulos e número de elementos cobertos por triângulos em matróides binárias que são cominimalmente 3-conexas. Um elemento é dito coberto por triângulo (circuito com 3 elementos) ou simplesmente coberto, se este elemento pertence a algum triângulo de  $M$ . No Capítulo 2, definiremos matróides, independentes, circuitos, dualidade, entre outros conceitos, através da função posto, bem como apresentaremos demonstrações dos resultados básicos. No Capítulo 3, trabalhamos alguns resultados conhecidos sobre conectividade em matróides. Um leitor com familiaridade com a teoria das matróides pode omitir a leitura destes dois capítulos iniciais. A motivação para este trabalho se deu inicialmente por Dirac (1), Halim (2) e Mader (3), que mostraram que um grafo  $G$  minimalmente  $k$ -conexo tem, pelo menos,

$$\frac{(k-1)|V(G)| + 2k}{2k-1} \quad (1.1)$$

vértices de grau  $k$  para  $k = 2$ ,  $k = 3$  e  $k \geq 4$  respectivamente. As cotas obtidas por Dirac e Halim são de fato atingidas. O resultado de Mader, para um  $k$  genérico, está muito perto de ser o melhor possível. A ideia central da prova destes teoremas é a seguinte: Um circuito de um grafo minimalmente  $k$ -conexo tem pelo menos um vértice de grau  $k$ . Este resultado é muito importante e vem sendo estendido de várias formas. Ried e Wu (4) provaram o análogo desta cota para arestas. Eles obtiveram uma cota inferior para o número de arestas que encontram um vértice de grau  $k$ , em função do número total de arestas em um grafo minimalmente  $k$ -conexo, tal cota é atingida quando  $k = 2$  ou  $k = 3$ .

A partir de agora, iremos falar apenas de matróides. Então, para uma matróide  $M$ , fixemos algumas notações usadas no decorrer da tese:

- $E(M)$  é o conjunto dos elementos de  $M$ .
- $e(M) = |E(M)|$ .
- $T(M)$  é o conjunto dos elementos de  $M$  que são cobertos por triângulo de  $M$ .
- $t(M) = |T(M)|$ .
- $t'(M)$  é o número de triângulos de  $M$ .

Murty (5) e Oxley (6) obtiveram, respectivamente, cotas similares para matróides minimalmente 2- e 3-conexas. Novamente, o passo principal da demonstração destas cotas é que um circuito em uma matróide minimalmente  $k$ -conexa,  $k = 2$  ou  $k = 3$ , deve intersectar um cocircuito com  $k$  elementos. Resultados similares a estes não são conhecidos

para matróides  $k$ -conexas com  $k \geq 4$ . Ried e Wu (4) deram uma cota inferior precisa para o número de elementos cobertos por algum cocircuito de tamanho 2, numa matróide minimalmente 2-conexa. Por outro lado, para matróides minimalmente 3-conexas, Ried e Wu enunciaram a seguinte conjectura proposta por Leo (7):

**Conjectura:** Seja  $M$  uma matróide minimalmente 3-conexa com pelo menos 8 elementos. Então, o número de elementos cobertos por triângulos em  $M^*$  é pelo menos

$$\frac{5|E(M)| + 30}{9}.$$

A demonstração dessa conjectura foi originalmente realizada por Lemos em (8), que ainda forneceu um exemplo de uma família infinita de matróides minimalmente 3-conexas que atingem a cota da conjectura.

Para uma matróide 3-conexa  $M$ , definiremos o conjunto removível de elementos de  $M$  da seguinte forma:  $R_0(M) = \{e \in E(M) : M \setminus e \text{ é 3-conexa}\}$ .

Note que uma matróide  $M$  é minimalmente 3-conexa se, e somente se,  $R_0(M) = \emptyset$ . Sendo assim, vamos enunciar o seguinte resultado que foi provado por Lemos (8):

**Teorema 1.1.** *Seja  $M$  uma matróide 3-conexa com pelo menos 5 elementos. Então, o número de elementos cobertos por algum cocircuito de tamanho 3 é pelo menos*

$$\frac{|E(M)| + 10}{3} - |R_0(M)|.$$

Observe que a conjectura proposta por Leo não é uma consequência deste teorema. Lemos (8) ainda descreveu uma família infinita de matróides que atingem a cota deste teorema.

Seja  $M$  uma matróide 3-conexa. Denotemos por  $S(M)$  o conjunto dos elementos  $e \in E(M)$  tais que  $M/e$  é 3-conexa. Quando  $S(M) = \emptyset$  dizemos que  $M$  é cominimalmente 3-conexa. Nesta tese, tratamos o problema dual ao da conjectura de Leo, acrescentando a hipótese de  $M$  ser binária. Obtivemos o seguinte resultado, demonstrado no Capítulo 6 desta tese:

**Teorema 1.2.** *Seja  $M$  uma matróide binária e cominimalmente 3-conexa com pelo menos 15 elementos. Então, o número de elementos cobertos por triângulos é pelo menos*

$$\frac{2|E(M)| + 12}{3}.$$

No Capítulo 6, ainda descrevemos uma família infinita de matróides que atingem a cota deste teorema.

Lemos (9) mostrou o seguinte resultado acerca do número de triângulos em matróides 3-conexas:

**Teorema 1.3.** *Seja  $M$  uma matróide 3-conexa com pelo menos 4 elementos. Então, o número de triângulos (circuitos de tamanho 3) é pelo menos*

$$\max \left\{ \frac{r^*(M) + 6 - 2|S(M)|}{4}, \frac{|E(M)| + 6 - 3|S(M)|}{5} \right\}.$$

Lemos (9) ainda descreveu uma família infinita de matróides que atingem a cota deste teorema.

Mais uma vez acrescentamos a hipótese da matróide ser binária e demonstramos o seguinte resultado:

**Teorema 1.4.** *Seja  $M$  uma matróide binária e cominimalmente 3-conexa com pelo menos 13 elementos. Então, o número de triângulos de  $M$  é pelo menos*

$$\frac{2|E(M)| + 14}{9}.$$

Tanto a demonstração deste teorema, como uma família infinita de matróides que atingem a cota deste teorema, podem ser vistas no Capítulo 5 desta tese.

# 2 MATRÓIDES: DEFINIÇÕES E CONCEITOS BÁSICOS

## 2.1 Matróides

Por um motivo de comodidade, vamos definir matróide através da sua função posto  $r$ . Para um conjunto finito  $E$ , dizemos que  $M = (E, r)$  é uma *matróide* sobre  $E$ , se a função  $r : 2^E \rightarrow Z$  satisfaz:

- (R1)  $0 \leq r(X) \leq |X|$ , para todo  $X \subseteq E$ ;
- (R2)  $r(X) \leq r(Y)$ , para todo  $X \subseteq Y \subseteq E$ , isto é,  $r$  é crescente;
- (R3)  $r(X) + r(Y) \geq r(X \cup Y) + r(Y \cap X)$ , para todo  $X, Y \subseteq E$ . Esta última propriedade é chamada *submodularidade*.

Dizemos que  $E$  é o *conjunto dos elementos* da matróide  $M$  e o denotamos por  $E(M)$ , a cardinalidade de  $E(M)$  é denotada por  $e(M)$ . Dizemos que  $X \subseteq E(M)$  é um *independente* de  $M$  quando  $r(X) = |X|$ . Se  $X$  é independente de  $M$  tal que  $r(X)$  é máximo,  $X$  é chamado de *base* de  $M$ . Se  $X \subseteq E(M)$  é tal que  $r(X) < |X|$ , dizemos que  $X$  é um *dependente* de  $M$ . E se  $X$  é tal que  $r(X) = |X| - 1$  e para todo  $e \in X$ ,  $r(X - e) = r(X)$ , dizemos que  $X$  é um *circuito* de  $M$ . Um circuito de tamanho um é chamado de *laço* e um circuito de tamanho 3 é chamado de *triângulo*. Os triângulos são objetos de extrema importância no trabalho. Sendo assim, vamos definir o conjunto  $T(M)$  como sendo o conjunto dos elementos de  $M$  que pertencem a algum triângulo de  $M$ . Denotamos ainda a cardinalidade de  $T(M)$  por  $t(M)$  e o número de triângulos de  $M$  por  $t'(M)$ . Quando um elemento de  $M$  pertence a algum triângulo dizemos que este elemento é *coberto por triângulo*, ou simplesmente dizemos que é um *elemento coberto*.

Veremos agora duas propriedades comumente usadas sobre independentes e circuitos:

- (I) Se  $I$  é independente de  $M$ , então para todo  $J \subseteq I$  temos que  $J$  é independente de  $M$ .

Usando (R3) para  $I - J$  e  $J$ , temos  $r(\emptyset) + r(I) \leq r(I - J) + r(J)$ . Logo por (R2), segue

$$r(I) = |I| \leq r(I - J) + r(J) \leq |I - J| + |J| = |I|.$$

Então  $r(J) = |J|$  e  $r(I - J) = |I - J|$ . Portanto,  $J$  e  $I - J$  são independentes de  $M$ .

Desta mesma prova, nota-se que ao se retirar ou adicionar um elemento a um conjunto, tem-se que, respectivamente, o posto deste conjunto diminui ou aumenta de no

máximo 1.

(C) Não existe um circuito propriamente contido em outro.

Se  $C$  é um circuito, temos que  $r(C - e) = r(C) = |C| - 1 = |C - e|$ , para todo  $e \in C$ . Logo, todo subconjunto próprio de um circuito é um independente.

Existem mais outras propriedades básicas que não serão utilizadas neste trabalho, portanto, iremos omiti-las.

## 2.2 Fechados

Seja  $M$  uma matróide. Para  $X \subseteq E(M)$ , seja  $\mathcal{F}_X = \{Y \subseteq E(M) : X \subseteq Y \text{ e } r(X) = r(Y)\}$ . A união dos elementos de  $\mathcal{F}_X$  é chamada *fecho* de  $X$  em  $M$  e denotada por  $cl_M(X)$ , isto é,

$$cl_M(X) = \bigcup_{Y \in \mathcal{F}_X} Y.$$

Agora vamos listar algumas propriedades básicas do fecho de  $X$ .

**Lema 2.1.** *Seja  $M$  uma matróide. Se  $X \subseteq E(M)$ , então:*

- (i)  $X \subseteq cl_M(X)$ .
- (ii)  $r(X) = r(cl_M(X))$ .
- (iii)  $cl_M(Y) \subseteq cl_M(X)$ , quando  $Y \subseteq X$ .
- (iv)  $cl_M(cl_M(X)) = cl_M(X)$ .

*Demonstração.* Note que (i) vale, pois  $X \in \mathcal{F}_X$ . Para mostrar (ii), basta que  $\mathcal{F}_X$  seja fechado com respeito à união, e assim,  $cl_M(X) \in \mathcal{F}_X$ .

Suponha  $Z, W \in \mathcal{F}_X$ . Por submodularidade, temos:

$$2r(X) = r(Z) + r(W) \geq r(Z \cup W) + r(Z \cap W). \quad (2.1)$$

Como  $X \subseteq Z \cap W$  e por (R2), temos que

$$r(X) \leq r(Z \cap W) \leq r(Z \cup W). \quad (2.2)$$

Desta forma, as desigualdades (2.1) e (2.2) têm que ser igualdades. Daí,  $Z \cup W \in \mathcal{F}_X$ . Então  $cl_M(X) \in \mathcal{F}_X$  e (ii) está provado. Para mostrar (iii), basta que para todo  $Z \in \mathcal{F}_Y$  tenhamos  $Z \cup X \in \mathcal{F}_X$ . Novamente, por submodularidade, temos que:

$$r(X) + r(Y) = r(X) + r(Z) \geq r(X \cup Z) + r(Z \cap X). \quad (2.3)$$

Como  $Y \subseteq X \cap Z$  e por (R2), segue que

$$r(X \cup Z) \geq r(X) \text{ e } r(Z \cap X) \geq r(Y). \quad (2.4)$$

Assim, as desigualdades (2.3) e (2.4) têm que ser igualdades. Logo,  $X \cup Z \in \mathcal{F}_X$  e (iii) segue. Note que para (iv) ser verdade, basta que  $\mathcal{F}_{cl_M(X)} \subseteq \mathcal{F}_X$ . Tome  $Z \in \mathcal{F}_{cl_M(X)}$ . Por definição,  $cl_M(X) \subseteq Z$  e  $r(cl_M(X)) = r(Z)$ . Por (i) e (ii), segue que  $X \subseteq Z$  e  $r(X) = r(Z)$ . Logo,  $Z \in \mathcal{F}_X$ . Assim, (iv) vale.  $\square$

Agora, veremos uma proposição que caracteriza os elementos da matróide pertencentes ao fecho de um dado conjunto.

**Proposição 2.2.** *Seja  $e$  um elemento de uma matróide  $M$ . Se  $X \subseteq E(M) - e$ , então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i)  $e \in cl_M(X)$ .
- (ii)  $r(X \cup e) = r(X)$ .
- (iii)  $e \in C \subseteq X \cup e$ , para algum circuito  $C$  de  $M$ .

*Demonstração.* Veremos inicialmente que (i) implica (ii). Como  $e \in cl_M(X)$ , existe  $Z \in \mathcal{F}_X$  tal que  $e \in Z$ . Por (R2), temos  $r(X) \leq r(X \cup e) \leq r(Z)$ . Por definição,  $r(Z) = r(X)$ . Logo as desigualdades acima são na realidade igualdades. Daí,  $r(X) = r(X \cup e)$  e (ii) segue.

Mostraremos agora que (ii) implica (iii). Seja  $I$  um independente maximal contido em  $X$ . Pela definição do posto,  $r(X) = |I|$ . Como  $r(X \cup e) = r(X) < |I \cup e|$ , temos que  $I$  é um independente maximal contido em  $X \cup e$ . Logo,  $I \cup e$  é dependente de  $M$ , assim existe um circuito  $C$  de  $M$  tal que  $C \subseteq I \cup e \subseteq X \cup e$ . Observe que  $e \in C$ , pois  $I$  é independente. Logo (iii) segue.

Finalmente, provaremos que (iii) implica (i). Por (R3), temos

$$r(X) + r(C) \geq r(X \cup C) + r(X \cap C).$$

Note que  $X \cup C = X \cup e$  e  $X \cap C = C - e$ . Logo,

$$r(X) + r(C) \geq r(X \cup e) + r(C - e).$$

Como  $C$  é circuito de  $M$ , segue que  $r(C) = r(C - e) = |C| - 1$ . Logo

$$r(X) \geq r(X \cup e).$$

E, por (R2), temos  $r(X \cup e) = r(X)$ . Então  $X \cup e \in \mathcal{F}_X$  e (i) segue.  $\square$

**Lema 2.3.** *A interseção de conjuntos fechados de uma matróide  $M$  é um conjunto fechado de  $M$ .*

*Demonstração.* Basta mostrar que se  $X$  e  $Y$  são fechados de  $M$ , então  $X \cap Y$  é fechado de  $M$ . Suponha, por contradição, que  $X \cap Y$  não é fechado em  $M$ .

Logo, existe  $e \in cl_M(X \cap Y) - (X \cap Y)$ . E, pela proposição 2.2 (iii), temos que  $e \in C \subseteq$

$(X \cap Y) \cup e$ , para algum circuito  $C$  de  $M$ .

Note que  $e \notin X$  ou  $e \notin Y$ , digamos  $e \notin X$ . Como  $C \subseteq X \cup e$ , obtemos, pela proposição 2.2 (i), que  $e \in cl_M(X) = X$ ; uma contradição e o lema segue.  $\square$

Vamos terminar este capítulo dando mais uma definição, que será usada várias vezes durante o restante do trabalho. Seja  $X \subseteq E(M)$ , dizemos que  $X$  é um *hiperplano* de  $M$ , se  $X$  é fechado e  $r(X) = r(M) - 1$ .

## 2.3 Dualidade

Neste capítulo, vamos definir um conceito importantíssimo, que é o de matróide dual de uma matróide  $M$ . Antes disso, veremos um teorema que dá consistência a esta definição.

**Teorema 2.4.** *Seja  $r$  a função posto de uma matróide  $M$ . Então  $r^* : 2^{E(M)} \rightarrow Z$  definida por  $r^*(X) = |X| + r_M(E(M) - X) - r(M)$ , para  $X \subseteq E(M)$ , é a função posto de uma matróide sobre  $E(M)$ .*

*Demonstração.* Note que (R1) segue, pois  $r_M(E(M) - X) \leq r(M)$  e  $r(X) \leq |X|$  daí

$$0 \leq r(X) + r(E(M) - X) - r(M) \leq r^*(X) = |X| + r(M) - r(M) \leq |X|.$$

Logo  $0 \leq r^*(X) \leq |X|$ . Agora, mostraremos (R2). Seja  $X \subseteq Y \subseteq E(M)$ . E seja  $\alpha$  o inteiro não-negativo tal que  $|Y| = |X| + \alpha$ . Assim,  $|E(M) - X| = |E(M) - Y| + \alpha$  e então,

$$r(E(M) - X) \leq r(E(M) - Y) + \alpha.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} r^*(Y) &= |Y| + r_M(E(M) - Y) - r(M) \\ &\geq (|X| + \alpha) + (r(E(M) - X) - \alpha) - r(M) \\ &= |X| + r_M(E(M) - X) - r(M) = r^*(X), \end{aligned}$$

e (R2) segue. Finalmente, mostraremos (R3).

Para isto, basta observar que  $|X| + |Y| = |X \cup Y| + |X \cap Y|$  e

$$r_M(E(M) - X) + r_M(E(M) - Y) \geq r_M(E(M) - (X \cup Y)) + r_M(E(M) - (X \cap Y)),$$

esta última desigualdade é obtida usando (R3) em  $M$  para  $E(M) - X$ ,  $E(M) - Y \subseteq E(M)$  e também o fato de

$$(E(M) - X) \cup (E(M) - Y) = E(M) - (X \cap Y) \text{ e } (E(M) - X) \cap (E(M) - Y) = E(M) - (X \cup Y).$$

Com isto, temos

$$\begin{aligned}
 r^*(X) + r^*(Y) &= (|X| + |Y|) + (r_M(E(M) - X) + r(E(M) - Y)) - 2r(M) \\
 &\geq (|X \cup Y| + |X \cap Y|) + (r_M(E(M) - (X \cup Y)) + r_M(E(M) - (X \cap Y))) - 2r(M) \\
 &= r^*(X \cup Y) + r^*(X \cap Y)
 \end{aligned}$$

e assim (R3) segue, e o teorema está provado.  $\square$

Esta tal matróide sobre  $E(M)$  cuja função posto é  $r^*$  é chamada de *matróide dual* de  $M$  e é denotada por  $M^*$ . Uma base, circuito, independente, laço, etc de  $M^*$  são chamados respectivamente de cobase, cocircuito, coindependente, colaço, etc de  $M$ . Agora, vamos descrever a família de circuitos de  $M^*$ .

**Lema 2.5.** *Seja  $M$  uma matróide. Então,  $C^*$  é um cocircuito de  $M$  se, e somente se,  $E(M) - C^*$  é um hiperplano de  $M$ .*

*Demonstração.* Suponha  $C^*$  cocircuito de  $M$ , então  $r^*(C^*) = |C^*| - 1$  e  $r^*(C^* - e) = r^*(C^*)$  para todo  $e \in C^*$ . Assim,  $r^*(C^*) = |C^*| - 1 = |C^*| + r_M(E(M) - C^*) - r(M)$ , logo

$$r_M(E(M) - C^*) = r(M) - 1.$$

Agora para concluir que  $E(M) - C^*$  é um hiperplano, basta mostrar que  $E(M) - C^*$  é fechado em  $M$ . Para isto, suponha que existe  $e \notin E(M) - C^*$  tal que

$$r_M((E(M) - C^*) \cup e) = r_M(E(M) - C^*).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 r^*(C^*) &= |C^*| + r_M(E(M) - C^*) - r(M) \\
 &= 1 + (|C^*| - 1) + r_M((E(M) - C^*) \cup e) - r(M) \\
 &= 1 + r^*(C^* - e),
 \end{aligned}$$

donde temos uma contradição. Reciprocamente, suponha que  $E(M) - C^*$  é hiperplano de  $M$ . Então

$$r(E(M) - C^*) = r(M) - 1 \text{ e } r_M((E(M) - C^*) \cup e) = r(E(M) - C^*) + 1,$$

para todo  $e \notin E(M) - C^*$ . Assim,

$$r^*(C^*) = |C^*| + r(E(M) - C^*) - r(M) = |C^*| + (r(M) - 1) - r(M) = |C^*| - 1$$

e

$$\begin{aligned}
 r^*(C^* - e) &= |C^* - e| + r_M((E(M) - C^*) \cup e) - r(M) \\
 &= (|C^*| - 1) + (r(E(M) - C^*) + 1) - r(M) \\
 &= (|C^*| - 1) + ((r(M) - 1) + 1) - r(M) = |C^*| - 1 = |C^* - e|
 \end{aligned}$$

Logo  $C^*$  é cocircuito de  $M$ , e o lema está provado.  $\square$

Agora veremos uma importante propriedade em forma de proposição conhecida como ortogonalidade:

**Proposição 2.6.** *Se  $C$  e  $C^*$  são respectivamente um circuito e um cocircuito de uma matróide  $M$ , então  $|C \cap C^*| \neq 1$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $|C \cap C^*| = 1$ , digamos  $C \cap C^* = \{e\}$ , então, pelo lema (2.5), existe um hiperplano  $H$  tal que  $H = E(M) - C^*$ .

Em particular,  $cl(H) = H$ . Note que  $C - \{e\} \subseteq H$  e daí  $e \in C \subseteq H \cup e$ . Portanto, pela proposição (2.2),  $e \in cl(H) = H$ ; um absurdo, pois  $e \in C^*$  e  $H \cap C^* = \emptyset$ .  $\square$

## 2.4 Menores

Nesta seção, vamos apresentar mais um conceito importante sobre matróides, chamado de menores. Seja  $M$  uma matróide e  $r$  sua função posto. Observe que  $r' : 2^{E(M)-e} \rightarrow Z$  definida por  $r'(X) = r(X)$  para todo  $X \in E(M) - e$  é uma função posto de uma matróide sobre  $E(M) - e$ . Diremos que esta tal matróide é obtida de  $M$  removendo-se o elemento  $e$ , e a denotaremos por  $M \setminus e$ . É também fácil de ver que os independentes de  $M \setminus e$  são os independentes de  $M$  que evitam  $e$ . A contração de  $e$  em  $M$ , que é denotada por  $M/e$ , é definida da seguinte forma:  $M/e = [M^* \setminus e]^*$

**Lema 2.7.** *Se  $e$  é um elemento de uma matróide  $M$ , então  $r_{M/e}(X) = r_M(X \cup e) - r_M(e)$ , para todo  $X \in E(M) - e$ .*

*Demonstração.* Temos que

$$\begin{aligned}
 r_{M/e}(X) &= r_{(M^* \setminus e)^*}(X) \\
 &= r_{M^* \setminus e}^*(X) \\
 &= |X| + r_{M^* \setminus e}(E(M^* \setminus e) - X) - r(M^* \setminus e) \\
 &= |X| + r_{M^*}(E(M^*) - (X \cup e)) - r_{M^*}(E(M^*) - e) \\
 &= |X| + [|E(M^*) - (X \cup e)| + r_M(X \cup e) - r(M)] - [|E(M^*) - e| + r_M(e) - r(M)] \\
 &= r_M(X \cup e) - r_M(e).
 \end{aligned}$$

$\square$

Com este lema é fácil ver que se  $r_M(\{e\}) \neq 0$ , então os independentes de  $M/e$  são os subconjuntos  $I \subseteq E(M) - e$  tais que  $I \cup e$  é independente de  $M$ .

Da definição de deleção, é fácil de ver que  $[M \setminus e] \setminus f = [M \setminus f] \setminus e$  para todo  $e, f \in E(M)$ . Desta identidade e da definição de contração, temos que  $[M/e]/f = [M/f]/e$ .

Esta última identidade pode ser verificada através da função posto. De fato, para  $X \subseteq E(M) - \{e, f\}$  temos:

$$\begin{aligned} r_{[M/f]/e}(X) &= r_{M/f}(X \cup e) - r_{M/f}(\{e\}) \\ &= [r_M(X \cup \{e, f\}) - r_M(\{f\})] - [r_M(\{e, f\}) - r_M(\{f\})] \\ &= r_M(X \cup \{e, f\}) - r_M(\{e, f\}). \end{aligned}$$

Analogamente temos  $r_{[M/e]/f} = r_M(X \cup \{e, f\}) - r_M(\{e, f\})$ .

Utilizando a fórmula do posto da deleção e da contração, é fácil de ver que  $[M/e] \setminus f = [M \setminus f]/e$ . Logo, quando  $A$  e  $B$  são subconjuntos disjuntos de  $E(M)$ , a ordem em que os elementos de  $A$  são deletados e os de  $B$  são contraídos é irrelevante. E a matróide obtida ao final dessas operações é dita um *menor* de  $M$ , sendo denotada por  $M \setminus A/B$ .

**Lema 2.8.** *Seja  $M$  uma matróide. Se  $A$  e  $B$  são subconjuntos disjuntos de  $E(M)$ , então para  $X \subseteq E(M) - (A \cup B)$ , temos que*

$$r_{M \setminus A/B}(X) = r_M(X \cup B) - r_M(B).$$

*Demonstração.* Basta mostrar que  $r_{M/B}(X) = r_M(X \cup B) - r_M(B)$  para todo  $X \subseteq E(M) - B$ , já que o posto de um subconjunto de  $E(M) - (A \cup B)$  é o mesmo em  $M \setminus A/B$  e em  $M/B$ .

Vamos mostrar este fato por indução em  $|B|$ . Se  $|B| = 0$ , então o resultado segue. Assuma  $|B| \geq 1$ . Escolha  $e \in B$ . Por indução, o resultado vale para  $B - e$ , ou seja, se  $Y \subseteq E(M) - (B - e)$ , temos

$$r_{M/(B-e)}(Y) = r_M(Y \cup (B - e)) - r_M(B - e).$$

Como  $M/B = [M/(B - e)]/e$ , temos que

$$r_{M/B}(X) = r_{[M/(B-e)]/e}(X) = r_{M/(B-e)}(X \cup e) - r_{M/(B-e)}(\{e\}), \text{ para } X \subseteq E(M) - B.$$

Substituindo a penúltima igualdade na última, para  $Y = X \cup e$  e  $Y = \{e\}$  temos

$$\begin{aligned} r_{M/B}(X) &= [r_M((X \cup e) \cup (B - e)) - r_M(B - e)] - [r_M(\{e\} \cup (B - e)) - r_M(B - e)] \\ &= r_M(X \cup B) - r_M(B), \end{aligned}$$

e o resultado segue.  $\square$

Deste lema é fácil ver que os independentes de  $M \setminus A/B$  são os  $I \subseteq E(M) - (A \cup B)$  tais que  $X \cup B$  é independente de  $M$ .

## 2.5 Representação Geométrica

Esta seção tem a finalidade de representar algumas matróides de forma mais simples, a saber sua representação geométrica. Por motivo de objetividade, não vamos dar uma

definição formal desta representação. Basicamente, os principais entes usados no trabalho são pontos, linhas e planos, onde:

- Cada *ponto* representa um elemento da matróide que não é um laço (já que nossas matróides são 3-conexas, logo não têm laços).
- Cada *linha*  $L$  é um subconjunto fechado da matróide  $M$ , tal que  $r_M(L) = 2$ . Se  $x \in L$ , temos  $r_M(x) = 1$  e se  $X \subseteq L$  com  $|X| \geq 2$ , temos que  $r(X) = 2$ .
- Cada *plano*  $P$  é um subconjunto fechado de  $M$  tal que  $r_M(P) = 3$ . Se  $X \subseteq P$  com  $|X| = 1$  ou  $|X| = 2$ , temos que  $r_M(X) = 1$  ou  $r_M(X) = 2$  respectivamente, e se  $X \subseteq P$  com  $|X| \geq 3$  e  $X$  não está contido numa linha, temos que  $r_M(X) = 3$ .

Daremos exemplos de planos com linhas no decorrer da tese. Para que a representação geométrica fique consistente, as seguintes condições devem ser satisfeitas:

- Quaisquer duas linhas distintas se intersectam no máximo em um ponto;
- Quaisquer dois planos que se intersectam em mais de dois pontos, se intersectam numa linha;
- Quaisquer duas linhas que se intersectam num ponto, estão contidas no mesmo plano;
- Toda linha que não está contida num plano intersecta o mesmo no máximo em um ponto.

## 2.6 Conexão em Paralelo Generalizada

Um outro pré-requisito para o entendimento do trabalho é o de conexão paralela generalizada. Mais uma vez, por motivo de objetividade, não daremos uma definição formal para este conceito.

Sejam  $M_1$  e  $M_2$  duas matróides cujos conjuntos base são  $E_1$  e  $E_2$  e cujas funções posto são  $r_1$  e  $r_2$  respectivamente. E seja  $N$  uma restrição comum a  $M_1$  e  $M_2$ . Seja  $E = E_1 \cup E_2$ . Vamos assumir que  $M_1|L = M_2|L = N$ , onde  $L = E_1 \cap E_2$ . A função posto na restrição comum a  $M_1$  e  $M_2$  será denotada por  $r$ . Se  $M$  é uma matróide sobre  $E$  tal que  $M|E_1 = M_1$  e  $M|E_2 = M_2$ , então  $M$  é chamada de *amalgama* de  $M_1$  e  $M_2$ . Na tese, as restrições comuns entre as matróides serão triângulos. Dizemos que  $M$  é a *conexão em paralelo generalizada* de  $M_1$  e  $M_2$  se o conjunto  $\mathcal{F}_M$  dos fechados de  $M$  é  $\mathcal{F}_M = \{F_1 \cup F_2 : F_1 \cap L = F_2 \cap L\}$ , onde  $F_1$  é fechado de  $M_1$  e  $F_2$  é fechado de  $M_2$ . Uma condição necessária para se fazer esta operação é que a linha  $L$  de interseção de  $M_1$  e  $M_2$  seja modular, isto é,

$$r_M(L) + r_M(F) = r_M(L \cup F) + r_M(L \cap F) \text{ para todo } F \in \mathcal{F}_M.$$

No nosso caso, as matróides serão binárias, logo as linhas terão no máximo 3 pontos, isto é, serão triângulos e portanto modulares.

No trabalho, não iremos nos preocupar com isto. No decorrer da tese, veremos alguns exemplos de conexão em paralelo generalizada. Mais uma observação a ser feita é que, ao "colarmos" um plano em uma matróide, o posto da mesma aumenta de 1, ao "colarmos" uma matróide de posto 4, o posto da mesma aumenta de 2, ao "colarmos" uma matróide de posto 5, o posto da mesma aumenta de 3, e assim por diante. Observamos ainda, que a conexão em paralelo generalizada de duas matróides 3-conexas resulta numa matróide 3-conexa.

### 3 CONECTIVIDADE E LEMAS SOBRE 3-SEPARAÇÕES

**Definição 3.0.1.** Vamos definir a *função conectividade* de  $M$  como  $\xi_M(X, Y) = r_M(X) + r_M(Y) - r(M)$ , onde  $\{X, Y\}$  é partição de  $E(M)$ . Dizemos que uma partição  $\{X, Y\}$  do conjunto base de uma matróide  $M$  é uma  $k$ -separação, para um inteiro positivo  $k$ , se

$$\xi_M(X, Y) < k \leq \min\{|X|, |Y|\}.$$

Além disso, quando

$$\xi_M(X, Y) = k - 1$$

dizemos que esta  $k$ -separação é exata.

Uma matróide  $M$  é dita  $k$ -conexa se  $M$  não admite uma  $k'$ -separação, para todo inteiro  $k'$  tal que  $0 < k' < k$ .

Antes de demonstrar o lema principal deste capítulo, vamos mostrar alguns lemas introdutórios que serão usados tanto no lema principal como no decorrer da tese.

**Lema 3.1.** *Seja  $M$  uma matróide e  $r$  sua função posto. Então  $\xi_M(X, Y) = r(X) + r^*(X) - |X|$  para todo  $X \subseteq E(M)$ . Mais ainda, se  $M$  é 3-conexa,  $M^*$  também é.*

*Demonstração.* Por definição,

$$\xi_M(X, Y) = r(X) + r(Y) - r(M) \text{ e } r^*(X) = |X| + r(Y) - r(M).$$

Agora, substituindo a segunda igualdade na primeira, temos

$$\xi_M(X, Y) = r(X) + r^*(X) - |X|.$$

Logo,  $\xi_M(X, Y) = \xi_{M^*}(X, Y)$ . Assim, se  $M$  é 3-conexa,  $M^*$  também é. □

**Lema 3.2.** *Seja  $M$  uma matróide 3-conexa com pelo menos 4 elementos. Então,  $M$  é simples e cosimples.*

*Demonstração.* •  $M$  não tem laços, pois se  $e \in E(M)$  é um laço,  $r(e) = 0$ . E, como  $r(E(M) - e) \leq r(M)$ , temos que  $r(e) + r(E(M) - e) - r(M) = 0$ . Assim,  $\{e\}$  é um conjunto 1-separador de  $M$ ; absurdo.

- $M$  não tem elementos em paralelo, pois se tivesse, teríamos um circuito  $C$  com  $|C| = 2$ . Como  $r(E(M) - C) \leq r(M)$  e  $r(C) = |C| - 1 = 1$ , temos que

$$r(C) + r(E(M) - C) - r(M) \leq 1.$$

Assim,  $C$  seria 2-separador de  $M$ ; um absurdo.

- Como  $M$  é 3-conexa, temos que  $M^*$  também é. Assim, pelos itens anteriores,  $M$  é cosimples.

□

**Lema 3.3.** *Seja  $M$  uma matróide 3-conexa e  $e \in E(M)$ . Seja  $\{Z, W\}$  uma 2-separação de  $M/e$ . Então  $\xi_{M/e}(Z, W) = \xi_M(Z \cup e, W) - 1$ . Além disso, ambos  $Z$  e  $W$  geram  $e$  em  $M$ , e  $\{Z \cup e, W\}$  é 3-separação exata de  $M$ .*

*Demonstração.* Por definição,

$$\xi_{M/e}(Z, W) = r_{M/e}(Z) + r_{M/e}(W) - r(M/e) \leq 1.$$

Então

$$[r_M(Z \cup e) + r_M(e)] + [r_M(W \cup e) - r_M(e)] - [r(M) - r_M(e)] \leq 1.$$

Logo

$$r_M(Z \cup e) + r_M(W \cup e) - r(M) \leq 2.$$

Note que  $W$  gera  $e$  em  $M$  senão teríamos

$$r_M(Z \cup e) + r_M(W) - r(M) \leq 1.$$

Assim,  $\{W, Z \cup e\}$  seria um 2-separação de  $M$ ; um absurdo. Logo,  $\{Z \cup e, W\}$  é 3-separação exata de  $M$ .

Portanto,

$$\xi_M(Z \cup e, W) = r_M(Z \cup e) + r_M(W) - r(M) \leq 2.$$

Assim,

$$\xi_{M/e}(Z, W) = \xi_M(Z \cup e, W) - 1.$$

□

**Lema 3.4.** *Se  $X$  é um conjunto 3-separador de uma matróide  $M$  3-conexa tal que  $|X| = 3$ , então  $X$  é uma tríade ou um triângulo de  $M$ .*

*Demonstração.* Como

$$\xi_M(X, E(M) - X) = r_M(X) + r_{M^*}(X) - |X| = 2,$$

temos

$$r_M(X) + r_{M^*}(X) = 5.$$

Se  $X$  não fosse tríade nem triângulo de  $M$ , teríamos  $r_M(X) = 3$  e  $r_{M^*}(X) = 3$ ; um absurdo com a equação acima.  $\square$

**Lema 3.5.** *Sejam  $M$  uma matróide 3-conexa e  $X \subseteq E(M)$ . Se  $M|X \cong U_{2,4}$ , então  $M \setminus e$  é 3-conexa, para todo  $e \in X$ .*

*Demonstração.* Note que  $X$  é uma linha com 4 elementos. Assim,  $r_M(X) = r_{M \setminus e}(X - e)$  e  $r(M) = r(M \setminus e)$ . Logo,  $\xi_M(X, E(M) - X) = \xi_{M \setminus e}(X - e, E(M \setminus e) - (X - e))$  e o resultado segue.  $\square$

**Lema 3.6.** *Seja  $M$  uma matróide 3-conexa e  $e \in E(M)$ . Seja  $\{X, Y\}$  uma 2-separação de  $M/e$  com  $|X| = 2$ . Então  $X \cup e$  é triângulo de  $M$ .*

*Demonstração.* Como  $X$  é conjunto 2-separador de  $M/e$  com  $|X| = 2$ , segue, pelo lema 3.3, que  $X \cup e$  é conjunto 3-separador de  $M$ . Logo,  $X \cup e$  é uma tríade ou um triângulo de  $M$ . Se  $X \cup e$  fosse uma tríade de  $M$ , teríamos

$$r_{M^*}(X \cup e) + r_{M^*}(Y) - r(M^*) = 2.$$

Logo,

$$r_{M^* \setminus e}(X) + r_{M^* \setminus e}(Y) - r(M^* \setminus e) = 2.$$

e assim,  $\{X, Y\}$  não seria 2-separação de  $M/e = (M^* \setminus e)^*$ . Daí,  $X \cup e$  é triângulo de  $M$ .  $\square$

**Lema 3.7.** *Seja  $\{X, Y\}$  uma 3-separação de uma matróide 3-conexa  $M$ . Se  $e \in X$  e  $M/e$  não é 3-conexa, então:*

- (i) *Existe uma 2-separação  $\{Z, W\}$  de  $M/e$ , tal que  $Z \subseteq X$ ; ou*
- (ii) *Para toda 2-separação  $\{Z, W\}$  de  $M/e$ ,  $\min\{|Z|, |W|\} = 2$  e ambos  $Z$  e  $W$  intersectam ambos  $X$  e  $Y$ ; ou*
- (iii) *Para toda 2-separação  $\{Z, W\}$  de  $M/e$ ,  $|Z \cap X| = |W \cap X| = 1$  e  $X$  é uma tríade de  $M$ .*

*Demonstração.* Assuma que (i) não vale, e seja  $\{Z, W\}$  uma 2-separação de  $M/e$ . Então, pelo lema (3.3), temos

$$r_M(Z \cup e) + r_M(W) - r(M) \leq 2. \quad (3.1)$$

Como,  $\{X, Y\}$  é 3-separação de  $M$ , temos que

$$r_M(X) + r_M(Y) - r(M) \leq 2. \quad (3.2)$$

Juntando (3.1) e (3.2), temos que

$$[r(X) + r(Y) - r(M)] + [r(Z \cup e) + r(W) - r(M)] = 4.$$

Por submodularidade, temos:

(a)

$$\begin{aligned} r(X) + r(Z \cup e) - r(M) &\geq r(X \cup (Z \cup e)) + r(X \cap (Z \cup e)) - r(M) \\ &= r(X \cup Z) + r((X \cap Z) \cup e) - r(M), \end{aligned}$$

pois  $e \in X$ ;

(b)  $r(Y) + r(W) - r(M) \geq r(Y \cup W) + r(Y \cap W) - r(M)$ .

Donde, organizando os termos e somando (a) com (b), temos:

$$[r(X \cup Z) + r(Y \cap W) - r(M)] + [r((X \cap Z) \cup e) + r(Y \cup W) - r(M)] \leq 4. \quad (3.3)$$

Em seguida, provaremos que

$$|Y \cap W| \leq 1 \text{ ou } |X \cap Z| \leq 1 \quad (3.4)$$

Suponha que (3.4) não vale, i.e.,  $|Y \cap W| \geq 2$  e  $|X \cap Z| \geq 2$ .

Agora, note que  $\{X \cup Z, Y \cap W\}$  é uma partição de  $M$  e se

$$r(X \cup Z) + r(Y \cap W) - r(M) \leq 1,$$

teríamos uma 2-separação para  $M$  que é 3-conexa, um absurdo.

Logo,

$$r(X \cup Z) + r(Y \cap W) - r(M) \geq 2$$

e de forma análoga temos que

$$r((X \cap Z) \cup e) + r(Y \cup W) - r(M) \geq 2.$$

Por (3.3), temos a igualdade. Em particular,

$$r((X \cap Z) \cup e) + r(Y \cup W) - r(M) = 2.$$

Como  $W$  e, portanto,  $Y \cup W$  geram  $e$  em  $M$ , segue que  $\{X \cap Z, Y \cup W\}$  é 2-separação de  $M/e$ , visto que:

- $\min\{|X \cap Z|, |Y \cup W|\} \geq 2$ , pois  $|X \cap Z| \geq 2$  e  $|Y \cup W| \geq 2$ .
- E, pelo lema 3.3, temos  $r_{M/e}(X \cap Z) + r_{M/e}(Y \cup W) - r(M/e) = 1$

Sendo assim, (i) vale, pois  $X \cap Z \subseteq X$ , contradição. Logo, (3.4) segue. Similarmente, trocando  $W$  por  $Z$ , temos

$$|Y \cap Z| \leq 1 \text{ ou } |X \cap W| \leq 1. \quad (3.5)$$

Combinando (3.4) com (3.5), temos uma das quatro possibilidades:

$$|X \cap Z| \leq 1 \text{ e } |X \cap W| \leq 1, \quad (3.6)$$

$$|Y \cap Z| \leq 1 \text{ e } |Y \cap W| \leq 1, \quad (3.7)$$

$$|Y \cap Z| \leq 1 \text{ e } |X \cap Z| \leq 1, \quad (3.8)$$

$$|Y \cap W| \leq 1 \text{ e } |X \cap W| \leq 1. \quad (3.9)$$

Assuma que (3.6) ocorre.

Como  $|X| \geq 3$ , temos que  $|X \cap Z| = |X \cap W| = 1$ , pois se  $X \cap W = \emptyset$ , teríamos  $|X \cap Z| \geq 2$ , contradição com (3.6) e o análogo é válido para  $X \cap Z$ . Agora, como  $|X \cap Z| = |X \cap W| = 1$ ,  $Z \cap W = \emptyset$ ,  $e \in X, e \notin Z, e \notin W, Z \cup W = E(M) - e$ , temos  $|X| = 3$ . Então, pelo lema 3.4,  $X$  é uma tríade ou um triângulo de  $M$ .

Se  $X$  é um triângulo de  $M$ , então  $X - e$  é um conjunto 2-separador de  $M/e$ , pois  $X - e$  é um par de elementos em paralelo de  $M/e$  e  $|E(M)| \geq 6$

Como  $X - e \subset X$  e  $X - e$  é um conjunto 2-separador de  $M/e$ , então (i) vale, absurdo.

Logo,  $X$  é um tríade. Nesse caso, (iii) segue. Vamos supor que (3.6) não ocorre para toda 2-separação  $\{Z, W\}$  de  $M/e$ .

Note que (3.7) não ocorre, pois  $|Y| \geq 3$  e  $e \notin Y$ . Então, (3.8) ou (3.9) ocorre. Daí,  $|Y \cap Z| = 1$  e  $|X \cap Z| = 1$  ou  $|Y \cap W| = 1$  e  $|X \cap W| = 1$ . Se  $|Y \cap Z| = 1$  e  $|X \cap Z| = 1$ , temos  $|Z| = 2$  e  $Z$  intersepta ambos  $X$  e  $Y$ , e como  $|X| \geq 3$  e  $|Y| \geq 3$  segue que  $X \cap W \neq \emptyset$ ,  $Y \cap W \neq \emptyset$  e  $|W| \geq 2$ . Como  $|Z| = 2$  e  $|W| \geq 2$ , segue que  $\min\{|Z|, |W|\} = 2$ , e o análogo vale se  $|Y \cap W| = 1$  e  $|X \cap W| = 1$ . Assim, (ii) segue.  $\square$

# 4 MATRÓIDES BINÁRIAS E A OPERAÇÃO 3-SOMA

## 4.1 Matróides Binárias

Nesta seção iremos definir matróide binária, para isto precisamos fazer uso da proposição a seguir.

**Proposição 4.1.** *Seja  $E$  o conjunto de rótulos das colunas de uma matriz  $A$   $m \times n$  sobre um corpo  $K$ , e seja  $r : 2^E \rightarrow \mathbb{Z}$  definida por  $r(X)$  igual à dimensão do subespaço de  $K^m$  gerado pelos vetores coluna correspondentes aos rótulos pertencentes ao conjunto  $X$ , para todo  $X \subseteq E$ . Então  $M = (E, r)$  é uma matróide que será denotada por  $M[A]$ .*

*Demonstração.* Como a dimensão do espaço gerado por um conjunto  $X$  de vetores é igual à cardinalidade do maior conjunto de vetores linearmente independentes contidos em  $X$ , temos que  $R1$  e  $R2$  são automaticamente satisfeitas. Note que  $(R3)$  segue diretamente da fórmula

$$\dim(\langle U \rangle) + \dim(\langle W \rangle) \geq \dim(\langle U \cup W \rangle) + \dim(\langle U \cap W \rangle),$$

onde  $\langle U \rangle$ ,  $\langle W \rangle$ ,  $\langle U \cup W \rangle$  e  $\langle U \cap W \rangle$  são os subespaços de um espaço vetorial  $V$ , gerado pelos conjuntos  $U$ ,  $W$ ,  $U \cup W$  e  $U \cap W$ , respectivamente.  $\square$

**Definição 4.1.1.** Uma matróide  $M$  é dita binária quando existe uma matriz  $A$  sobre  $\mathbb{Z}_2$  tal que  $M \simeq M[A]$ .

A seguir vamos enunciar um teorema que fornece algumas caracterizações para matróides binárias que foram usadas durante o decorrer do trabalho.

**Teorema 4.2.** *As seguintes afirmações são equivalentes para uma matróide  $M$ :*

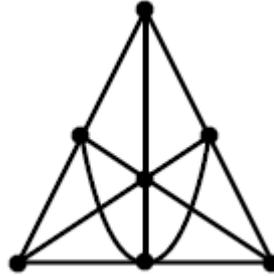
1.  $M$  é binária.
2.  $M$  não tem menor isomorfo a  $U_{2,4}$ .
3.  $|C \cap C^*|$  é par para todo circuito  $C$  e todo cocircuito  $C^*$  de  $M$ .
4. A diferença simétrica entre dois circuitos de  $M$  é união disjunta de circuitos de  $M$ .

Vejamos a seguir alguns exemplos de matróides binárias e 3-conexas usadas na tese, bem como suas respectivas representações geométricas. Começamos apresentando as matróides  $F_7$ ,  $M(K_4)$  e  $S_8$ , que são conhecidas da literatura de matróides.

**Exemplo 4.3.**  $F_7$  é uma matrôide definida por  $M[A]$  onde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

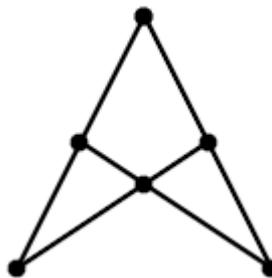
Veja abaixo a representação geométrica de  $F_7$ .



**Exemplo 4.4.**  $M(K_4)$  é uma matrôide definida por  $M[A]$  onde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

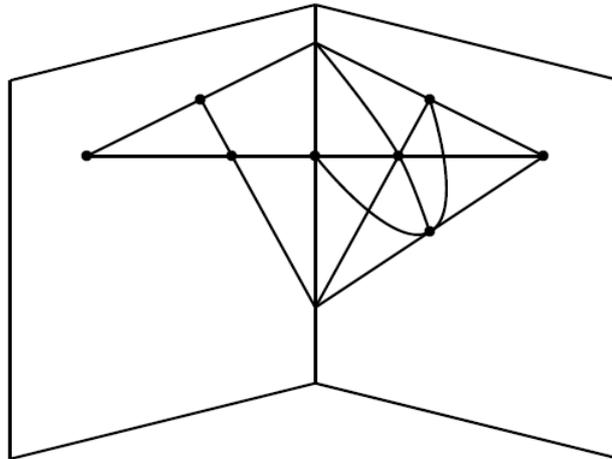
Veja abaixo a representação geométrica de  $M(K_4)$ .



**Exemplo 4.5.** Sejam  $M_1$  e  $M_2$  matrôides isomorfas à  $M(K_4)$  e  $F_7$ , respectivamente, tais que  $E(M_1) \cap E(M_2)$  é um triângulo em ambas as matrôides. Seja  $\tilde{M}$  a conexão em paralelo generalizada de  $M_1$  e  $M_2$ . Assim, vamos definir a matrôide  $S_8$  por  $\tilde{M} \setminus \{a, b\}$ , onde  $\{a, b\} \subseteq E(M_1) \cap E(M_2)$ . Note que  $S_8 \simeq M[A]$  onde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Veja abaixo a representação geométrica de  $S_8$ .



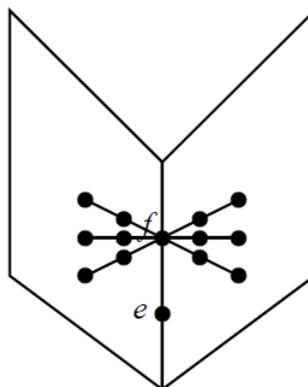
As matrôides apresentadas a partir de agora, foram todas elaboradas por nós e são necessárias à confecção deste trabalho. Observe que em  $S_8$  temos um único elemento que não é coberto por triângulo e um único elemento que pertence aos 3 triângulos de  $S_8$ , chamemos estes elementos de  $e$  e  $f$ , respectivamente. Seja  $f' \in E(S_8) \setminus \{e, f\}$ . Sejam  $M_1$  e  $M_2$  matrôides isomorfas a  $S_8$  tais que  $|E(M_1) \cap E(M_2)| = 2$ , digamos  $E(M_1) \cap E(M_2) = \{a, b\}$ . Desta forma, vamos definir as seguintes matrôides:

- $A_{14}$  é a conexão em paralelo generalizada de  $M_1$  com  $M_2$ , identificando em  $M_1$ ,  $a$  e  $b$  com  $e$  e  $f$  respectivamente; e em  $M_2$  também identificamos  $a$  e  $b$  com  $e$  e  $f$  respectivamente.
- $B_{14}$  é a conexão em paralelo generalizada de  $M_1$  com  $M_2$ , identificando em  $M_1$ ,  $a$  e  $b$  com  $e$  e  $f$  respectivamente; e em  $M_2$  identificamos  $a$  e  $b$  com  $e$  e  $f'$  respectivamente.
- $C_{14}$  é a conexão em paralelo generalizada de  $M_1$  com  $M_2$ , identificando em  $M_1$ ,  $a$  e  $b$  com  $e$  e  $f'$  respectivamente; e em  $M_2$  identificamos  $a$  e  $b$  com  $e$  e  $f'$  respectivamente.

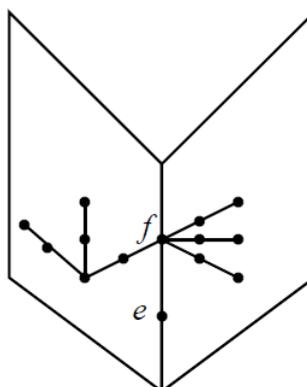
Assim,  $A_{14}, B_{14}$  e  $C_{14}$  são binárias e cominimalmente 3-conexas com 1 elemento descoberto. Além disso, note que  $r(A_{14}) = r(B_{14}) = r(C_{14}) = 6$ , uma vez que estamos "colando" duas matrôides de posto 4.

Vejam abaixo figuras que ilustram as linhas de cada uma destas matrôides:

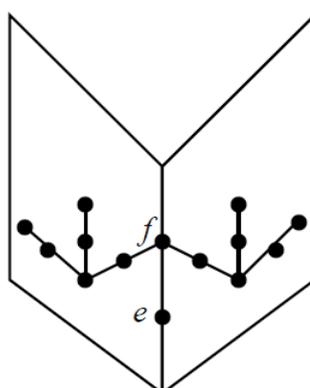
$A_{14}$



$B_{14}$



$C_{14}$

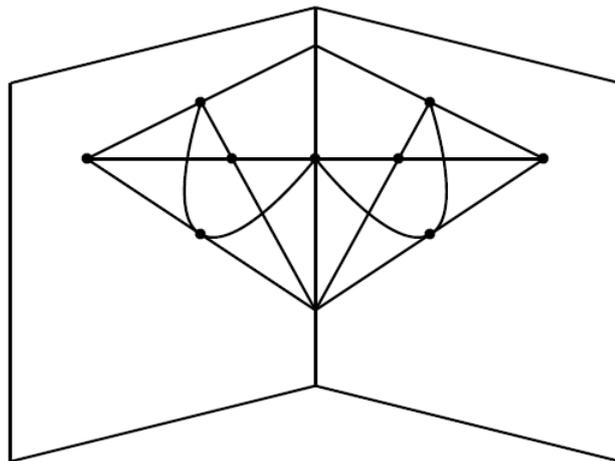


**Exemplo 4.6.** Sejam  $M_1$  e  $M_2$  matrôides isomorfas à  $F_7$ , tais que  $E(M_1) \cap E(M_2)$  seja um triângulo em ambas as matrôides. Seja  $\tilde{M}$  a conexão em paralelo generalizada de  $M_1$  e  $M_2$ . Assim, vamos definir a matrôide  $A_9$  por  $\tilde{M} \setminus \{a, b\}$ , onde  $\{a, b\} \subseteq E(M_1) \cap E(M_2)$ . Note que  $A_9 \simeq M[A]$  onde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que  $A_9$  é 3-conexa, todos os seus elementos estão cobertos e todos os elementos de  $A_9$  pertencem a um único triângulo, com exceção do elemento rotulado pela quinta coluna, o qual pertence aos quatro triângulos de  $A_9$ .

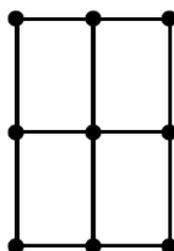
Veja abaixo a representação geométrica de  $A_9$ .



**Exemplo 4.7.** Considere a matrôide binária  $M$  tal que  $M \simeq M[B]$  onde

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

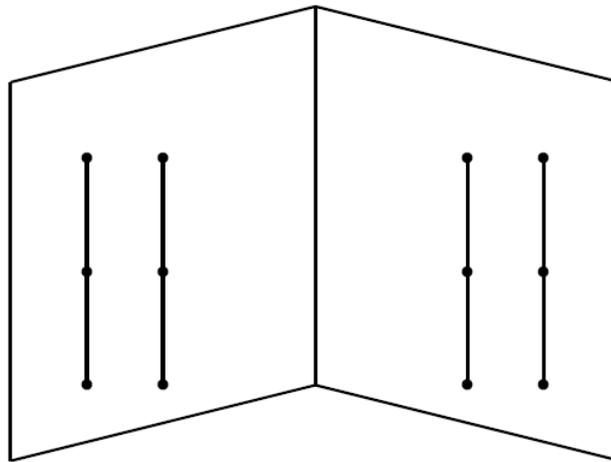
Veja abaixo uma figura que ilustra as linhas desta matrôide.



Esta matrôide será chamada de  $B_9$ . Observe que  $B_9$  é 3-conexa, todos os seus elementos estão cobertos e todos os elementos de  $B_9 \setminus T$  são cobertos para todo triângulo  $T$  de  $B_9$ .

Sejam  $M_1$  e  $M_2$  matrôides isomorfas a  $B_9$  tais que  $E(M_1) \cap E(M_2)$  é um triângulo. Desta forma, vamos definir as matrôide  $A_{12}$  como sendo  $\tilde{M} \setminus (E(M_1) \cap E(M_2))$ , onde  $\tilde{M}$  é a conexão em paralelo generalizada de  $M_1$  e  $M_2$ . Assim,  $A_{12}$  tem 12 elementos e 4 triângulos disjuntos. Note ainda que  $A_{12}$  é 3-conexa pois  $B_9$  é, e que  $r(A_{12}) = 6$ .

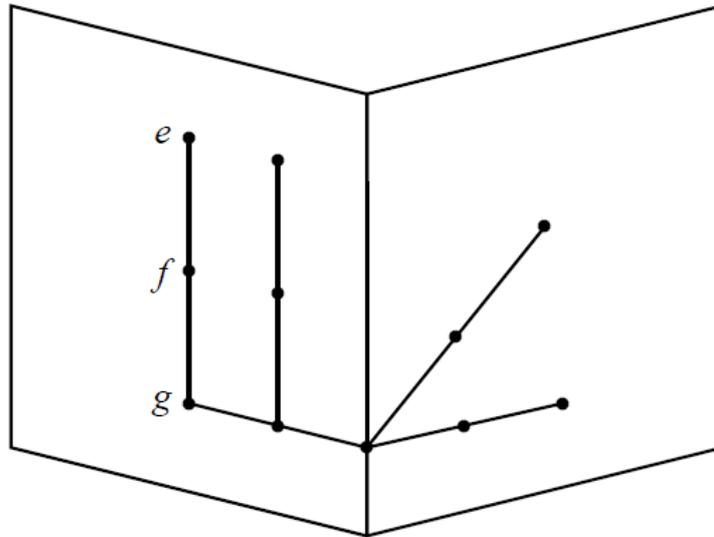
Veja abaixo uma figura que ilustra as linhas de  $A_{12}$



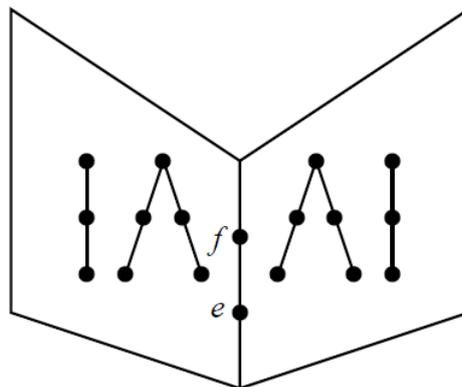
**Exemplo 4.8.** Sejam  $M_1$  e  $M_2$  matrôides isomorfas à  $B_9$  e  $F_7$ , respectivamente, tais que  $E(M_1) \cap E(M_2)$  é um triângulo em ambas as matrôides. Seja  $\tilde{M}$  a conexão em paralelo generalizada de  $M_1$  e  $M_2$ . Assim, vamos definir a matrôide  $A_{11}$  por  $\tilde{M} \setminus \{a, b\}$ , onde  $\{a, b\} \subseteq E(M_1) \cap E(M_2)$ . Note que  $A_{11} \simeq M[A]$  onde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Veja abaixo uma figura que ilustra esta matrôide.



Note que  $A_{11}$  é 3-conexa pois,  $B_9$  e  $F_7$  são. Observe ainda que existem apenas dois elementos que pertencem a exatamente dois triângulos. Seja  $g$  um destes elementos e  $T = \{e, f, g\}$  o triângulo que contém  $g$ , tal que  $e$  e  $f$  não pertencem a outro triângulo. Sendo assim, sejam  $M_1$  e  $M_2$  matrôides isomorfas a  $A_{11}$  tais que  $E(M_1) \cap E(M_2) = \{e, f, g\}$  e seja  $M'$  a conexão em paralelo generalizada de  $M_1$  e  $M_2$ . Assim, vamos definir  $A_{18} = M' \setminus g$ . Note que  $A_{18}$  tem 18 elementos dos quais 2 são descobertos,  $r(A_{18}) = 8$  e  $A_{18}$  é cominimalmente 3-conexa. Veja abaixo uma figura ilustrativa de  $A_{18}$ .



## 4.2 Operação 3-soma e Algumas Decomposições

Sejam  $M_1$  e  $M_2$  matrôides binárias sobre  $E_1$  e  $E_2$ , respectivamente, tais que  $E_1 \cap E_2$  é um triângulo de ambas  $M_1$  e  $M_2$  e  $\min\{|E_1|, |E_2|\} \geq 6$ . Nestas condições Seymour (10) mostrou que existe uma matrôide binária sobre  $E_1 \triangle E_2$ , cuja família de circuitos é constituída pelos subconjuntos minimais não-vazios de  $E_1 \triangle E_2$  da forma  $X_1 \triangle X_2$ , onde  $X_1$  e  $X_2$  são uniões disjuntas de circuitos de  $M_1$  e  $M_2$ , respectivamente. Esta matrôide

é dita a 3-soma de  $M_1$  e  $M_2$  e é denotada por  $M_1 \oplus_3 M_2$ . Uma observação a ser feita, é que  $M_1 \oplus_3 M_2 \simeq \tilde{M} \setminus (E_1 \cap E_2)$ , onde  $\tilde{M}$  é a conexão em paralelo generalizada de  $M_1$  e  $M_2$ . Seymour (10) ainda mostrou as proposições a seguir, que serão usadas na tese, porém não serão demonstradas.

**Proposição 4.9.** *Seja  $M$  uma matróide binária e 3-conexa. Se  $M$  é 3-soma de matróides  $M_1$  e  $M_2$ , então  $M_1$  e  $M_2$  são isomorfos a menores próprios de  $M$ .*

**Proposição 4.10.** *Sejam  $\{X_1, X_2\}$  uma 3-separação exata de uma matróide binária e 3-conexa  $M$ , com  $\min\{|X_1|, |X_2|\} \geq 4$ , e  $Z$  um conjunto de 3 elementos disjunto de  $E(M)$ . Então existem matróides binárias  $M_1$  e  $M_2$  sobre  $X_1 \cup Z$  e  $X_2 \cup Z$ , respectivamente, que são 3-conexas a menos de elementos em paralelo com elementos de  $Z$ , tais que  $M = M_1 \oplus_3 M_2$ . Reciprocamente, se  $M = M_1 \oplus_3 M_2$ , então  $\{E(M_1) \setminus E(M_2), E(M_2) \setminus E(M_1)\}$  é uma 3-separação exata de  $M$ , e  $\min\{|E(M_1) \setminus E(M_2)|, |E(M_2) \setminus E(M_1)|\} \geq 3$ .*

Durante o trabalho faremos alguns exemplos de 3-soma.

**Lema 4.11.** *Seja  $\{X, Y\}$  uma 3-separação de uma matróide  $M$ , então  $r(\text{cl}(X) \cap \text{cl}(Y)) \leq 2$ . Mais ainda, se  $M$  for binária e 3-conexa temos que  $|\text{cl}(X) \cap \text{cl}(Y)| \leq 2$ , ou  $\text{cl}(X) \cap \text{cl}(Y)$  é um triângulo de  $M$ .*

*Demonstração.* Primeiramente, note que pelo lema 2.1 (ii)

$$r(X) = r(\text{cl}(X)), r(Y) = r(\text{cl}(Y)) \text{ e } r(\text{cl}(X) \cup \text{cl}(Y)) = r(M). \quad (4.1)$$

Por submodularidade temos que

$$r(\text{cl}(X) \cup \text{cl}(Y)) + r(\text{cl}(X) \cap \text{cl}(Y)) \leq r(\text{cl}(X)) + r(\text{cl}(Y)). \quad (4.2)$$

Substituindo 4.1 em 4.2, obtemos que

$$r(M) + r(\text{cl}(X) \cap \text{cl}(Y)) \leq r(X) + r(Y) \quad (4.3)$$

e como  $\{X, Y\}$  é 3-separação de  $M$  segue que  $r(X) + r(Y) - r(M) = 2$  e conseqüentemente  $r(\text{cl}(X) \cap \text{cl}(Y)) \leq 2$ . Se  $|\text{cl}(X) \cap \text{cl}(Y)| \leq 2$  então o resultado segue. Assum que  $|\text{cl}(X) \cap \text{cl}(Y)| \geq 3$ . Como  $M$  é simples, por ser 3-conexa, temos, por 4.3, que  $r(\text{cl}(X) \cap \text{cl}(Y)) = 2$ . Portanto,  $\text{cl}(X) \cap \text{cl}(Y)$  é uma linha de  $M$  e daí  $\text{cl}(X) \cap \text{cl}(Y)$  é um triângulo de  $M$ , já que  $M$  é binária e simples.  $\square$

**Lema 4.12.** *Seja  $M$  uma matróide binária e 3-conexa. Se  $\{X \cup L, Y\}$  é uma 3-separação de  $M$  tal que  $\min\{|X|, |Y|\} \geq 4$  e  $L = \text{cl}(X) \cap \text{cl}(Y)$ , então se  $Z$  e  $M_1$  são como na Proposição 5 temos que*

- (i) para todo elemento  $e$  de  $L$ , existe um elemento  $x$  de  $Z$  tal que  $\{e, x\}$  é um circuito de  $M_1$ ,
- (ii)  $M_1 \setminus A$  é 3-conexa e  $L_1 = L \cup (Z \setminus A)$  é linha de  $M_1 \setminus A$ , onde  $A$  é o subconjunto de  $Z$  formado pelos elementos que estão em paralelo com os elementos de  $L$ ,
- (iii) se  $L$  tem um elemento descoberto, temos que  $\min\{r(X), r(Y)\} \geq 4$ .
- (iv) se  $L$  tem um elemento descoberto, temos que  $\min\{|X|, |Y|\} \geq 5$ .

*Demonstração.* Como  $e$  é gerado por  $Y$  em  $M$  existe circuito  $C$  de  $M$  tal que  $e \in C \subseteq Y \cup e$ . Pela definição de 3-soma temos que  $C = X_1 \Delta X_2$ , onde  $X_1$  e  $X_2$  são uniões disjuntas de circuitos de  $M_1$  e  $M_2$ , respectivamente. Nestas condições, devemos ter  $X_1 = \{e, x\}$  para algum elemento  $x$  de  $Z$ , caso contrário  $C$  conteria outros elementos de  $X$ . Sendo assim,  $e$  está em paralelo com  $x$  em  $M_1$  e (i) segue.

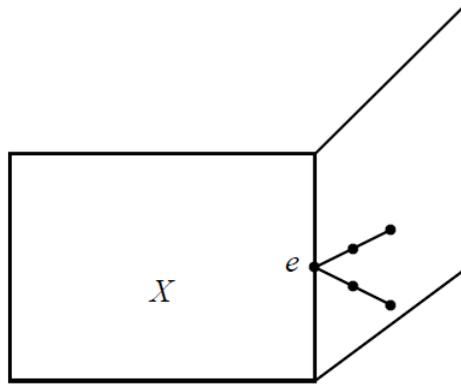
Observe que (ii) segue direto da Proposição 5.

Seja  $e \in L$  um elemento descoberto. Por (ii),  $M_1 \setminus A$  é 3-conexa. Se  $r(M_1 \setminus A) = 3$ , então temos que  $M_1 \setminus A \simeq F_7$  ou  $M_1 \setminus A \simeq M(K_4)$ . No primeiro caso, teríamos que  $e$  estaria coberto por um triângulo contido em  $X \cup e$  em  $M_1 \setminus A$  logo estaria coberto por triângulos contidos em  $X \cup e$  na matróide  $M$ ; um absurdo. Se  $M_1 \setminus A \simeq M(K_4)$  teríamos  $X$  uma tríade de  $M$  (triângulo em  $M^*$ ). Assim,  $e$  pertence a triângulo com dois elementos contidos em  $X$ ; um absurdo. Logo,  $r(X) = r(M_1 \setminus A) \geq 4$ . Como  $Y$  também gera  $L$  em  $M$ , temos que  $\{X, Y \cup L\}$  é 3-separação de  $M$  e por analogia temos que  $r(Y) \geq 4$ . Assim, (iii) segue. Agora, provemo (iv). Por (iii) temos que  $|X| \geq 4$ . Suponha que  $|X| = 4$ . Observe que não há triângulo contido em  $X$ , senão  $r(X) = 3$ ; um absurdo. Se houver algum triângulo  $T$  em  $M_1 \setminus A$  além de  $L_1$ , temos que  $T \cap L_1 \neq \emptyset$ . Sendo assim,  $T \cup L_1$  é 2-separador de  $M_1 \setminus A$ ; um absurdo, pois  $M_1 \setminus A$  é 3-conexa. Então, todos os elementos de  $X$  são descobertos em  $M_1 \setminus A$ , isto é,  $T(M_1 \setminus A) = L_1$ . Seja  $g$  um elemento de  $M_1 \setminus A$  que não pertence a  $M$ . Como  $g$  é gerado por  $X$  e não pertence a triângulo de  $M_1 \setminus A$  além de  $L_1$ , temos que  $X \cup g$ , ou  $(X \setminus w) \cup g$  é circuito de  $M_1 \setminus A$ , para algum  $w \in X$ . Se  $X \cup g$  é circuito de  $M_1 \setminus A$ , então  $(X \cup g) \Delta L_1 = X \cup (L_1 \setminus g)$  é união disjunta de dois circuitos de  $M_1 \setminus A$ . Assim,  $e \in T(M_1 \setminus A) \setminus L_1$ ; um absurdo. Se  $(X \setminus w) \cup g$  é circuito de  $M_1 \setminus A$ , então  $[(X \setminus w) \cup g] \Delta L_1 = (X \setminus w) \cup (L_1 \setminus g)$  é circuito de  $M_1 \setminus A$  com cinco elementos, uma vez que  $M_1 \setminus A$  é 3-conexa. Como  $e$  é gerado por  $X$  temos que  $(X \setminus z) \cup e$  é circuito de  $M_1 \setminus A$ , para algum  $z \in X$  (se  $X \cup e$  for circuito de  $M_1 \setminus A$ , caímos no caso anterior). Então,  $[(X \setminus z) \cup e] \Delta L_1 = (X \setminus z) \cup (L_1 \setminus e)$  é circuito de  $M_1 \setminus A$ . Se  $z = w$ , então  $[(X \setminus w) \cup (L_1 \setminus g)] \Delta [(X \setminus z) \cup (L_1 \setminus e)] = \{e, g\}$  é circuito de  $M_1 \setminus A$ ; um absurdo, uma vez

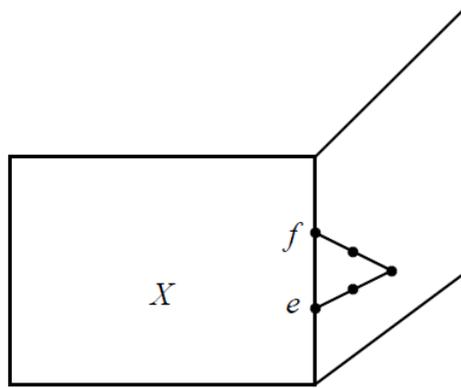
que  $M_1 \setminus A$  é 3-conexa. Se  $z \neq w$  então  $[(X \setminus w) \cup (L_1 \setminus g)] \Delta [(X \setminus z) \cup (L_1 \setminus e)] = \{e, g, w, z\}$  é circuito de  $M_1 \setminus A$ . Daí,  $L_1 \Delta \{e, g, w, z\} = \{w, z\} \cup (L_1 \setminus \{e, g\})$  é triângulo de  $M_1 \setminus A$  diferente de  $L_1$ ; um absurdo. Assim, (iv) segue.  $\square$

Sejam  $M$  uma matrôide binária e 3-conexa, e  $e \notin T(M)$ . Suponha que  $M/e$  não é 3-conexa, e seja  $\{X, Y\}$  uma 2-separação de  $M/e$ . Pelo lema 4.11, temos que  $cl(X) \cap cl(Y) = e$  ou  $cl(X) \cap cl(Y) = \{e, f\}$ . No primeiro caso temos pelo lema 3.3 que  $\{X \cup e, Y\}$  é 3-separação de  $M$ , onde ambos  $X$  e  $Y$  geram  $e$  em  $M$ . No segundo caso temos pelo lema 3.3 que  $\{X \cup \{e, f\}, Y\}$  é 3-separação de  $M$ , onde ambos  $X$  e  $Y$  geram  $\{e, f\}$  em  $M$ . Com base nestas informações e nas notações do lema 4.12 vamos fazer as seguintes decomposições, que serão usadas diversas vezes no decorrer do trabalho:

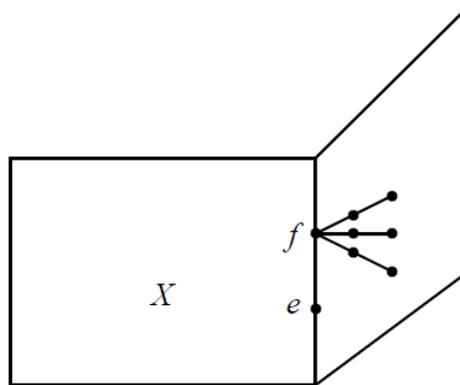
**Decomposição 1** Se  $cl(X) \cap cl(Y) = e$ , seja  $M_2$  uma matrôide isomorfa a  $F_7$  tal que  $E(M_1 \setminus A) \cap E(M_2)$  é um triângulo de forma que este triângulo seja identificado com o triângulo  $L_1$  em  $M_1 \setminus A$ . Assim, seja  $\tilde{M}_X$  a conexão em paralelo generalizada de  $M_1 \setminus A$  com  $M_2$ , aqui  $M_1 \setminus A$  e  $L_1$  são como no lema 4.12. Agora, seja  $M_X = \tilde{M}_X \setminus (L_1 \setminus e)$ . Note que  $r(M_X) = r(X) + 1$  e que  $E(M_X) = cl_M(X) \cup W$ , onde  $|W| = 4$  e  $W \cap E(M) = \emptyset$ . Observe ainda que os elementos de  $(cl(X) \cap cl(Y)) \cup W$  são cobertos em  $M_X$ . Veja abaixo uma figura ilustrativa da decomposição 1.



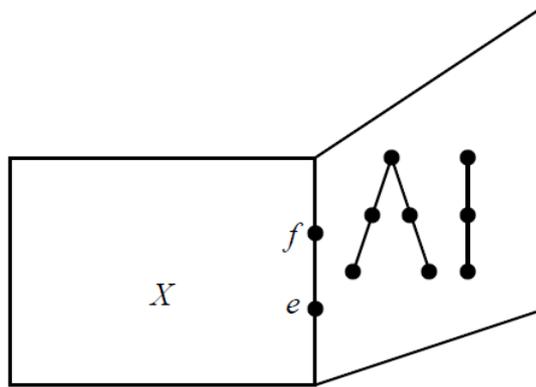
**Decomposição 2** Se  $cl(X) \cap cl(Y) = \{e, f\}$ , seja  $M_2$  uma matrôide isomorfa a  $M(K_4)$  tal que  $E(M_1 \setminus A) \cap E(M_2)$  é um triângulo de forma que este triângulo seja identificado com o triângulo  $L_1$  em  $M_1 \setminus A$ . Assim, seja  $\tilde{M}_X$  a conexão em paralelo generalizada de  $M_1 \setminus A$  com  $M_2$ , aqui  $M_1 \setminus A$  e  $L_1$  são como no lema 4.12. Agora, seja  $M_X = \tilde{M}_X \setminus (L_1 \setminus \{e, f\})$ . Note que  $r(M_X) = r(X) + 1$  e que  $E(M_X) = cl_M(X) \cup W$ , onde  $|W| = 3$  e  $W \cap E(M) = \emptyset$ . Observe ainda que os elementos de  $(cl(X) \cap cl(Y)) \cup W$  são cobertos em  $M_X$ . Veja abaixo uma figura ilustrativa da decomposição 2.



**Decomposição 3** Se  $cl(X) \cap cl(Y) = \{e, f\}$ , seja  $M_2$  uma matrôide isomorfa a  $A_9$  tal que  $E(M_1 \setminus A) \cap E(M_2)$  é um triângulo de forma que este triângulo seja identificado com o triângulo  $L_1$  em  $M_1 \setminus A$  e que  $f \in E(M_1 \setminus A)$  seja identificado com o elemento que pertence aos quatro triângulos de  $M_2$ . Assim, seja  $\tilde{M}_X$  a conexão em paralelo generalizada de  $M_1 \setminus A$  com  $M_2$ , aqui  $M_1 \setminus A$  e  $L_1$  são como no lema 4.12. Agora, seja  $M_X = \tilde{M}_X \setminus (L_1 \setminus \{e, f\})$ . Note que  $r(M_X) = r(X) + 2$  e que  $E(M_X) = cl_M(X) \cup W$ , onde  $|W| = 6$ ,  $W \cap E(M) = \emptyset$  e os elementos de  $W \cup (cl(X) \cap cl(Y) \setminus \{e, f\})$  são cobertos. Veja abaixo uma figura ilustrativa da decomposição 3.

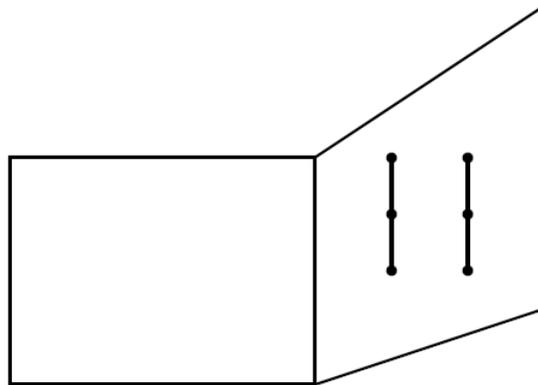


**Decomposição 4** Se  $cl(X) \cap cl(Y) = \{e, f\}$ , seja  $M_2$  uma matrôide isomorfa a  $A_{11}$  tal que  $E(M_1 \setminus A) \cap E(M_2)$  é um triângulo de forma que este triângulo seja identificado com o triângulo  $L_1$  em  $M_1 \setminus A$  e que seja identificado com o triângulo  $T = \{e, f, g\}$  em  $M_2$  de forma que os elementos  $e \in L_1$  e  $e \in T$  sejam identificados, bem como os elementos  $f \in L_1$  e  $f \in T$  sejam identificados. Assim, seja  $\tilde{M}_X$  a conexão em paralelo generalizada de  $M_1 \setminus A$  com  $M_2$ , aqui  $M_1 \setminus A$  e  $L_1$  são como no lema 4.12. Agora, seja  $M_X = \tilde{M}_X \setminus (L_1 \setminus \{e, f\})$ . Note que  $r(M_X) = r(X) + 3$  e que  $E(M_X) = cl_M(X) \cup W$ , onde  $|W| = 8$ ,  $W \cap E(M) = \emptyset$  e os elementos de  $W$  são cobertos. Veja abaixo uma figura ilustrativa da decomposição 4.



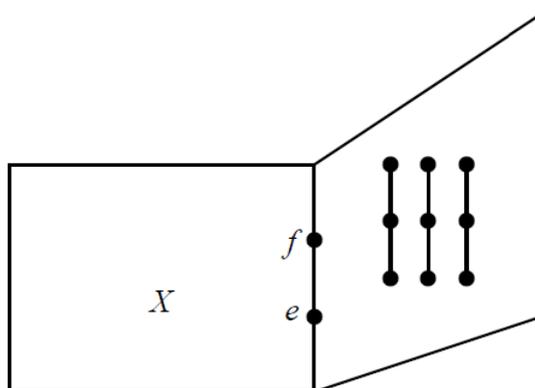
**Decomposição 5** Se  $cl(X) \cap cl(Y) = e$ , seja  $M_2$  uma matrôide isomorfa a  $B_9$  tal que  $E(M_1 \setminus A) \cap E(M_2)$  é um triângulo de forma que este triângulo seja identificado com o triângulo  $L_1$  em  $M_1 \setminus A$ . Assim, seja  $M_X$  a 3-soma de  $M_1 \setminus A$  com  $M_2$ , aqui  $M_1 \setminus A$  e  $L_1$  são como no lema 4.12. Note que  $r(M_X) = r(X) + 2$  e que  $E(M_X) = X \cup W$ , onde  $|W| = 6$ ,  $W \cap E(M) = \emptyset$  e os elementos de  $W$  são cobertos.

Veja abaixo uma figura ilustrativa da decomposição 5.



**Decomposição 6** Se  $cl(X) \cap cl(Y) = \{e, f\}$ , seja  $M_2$  uma matrôide isomorfa a  $A_{12}$  tal que  $E(M_1 \setminus A) \cap E(M_2)$  é um triângulo de forma que este triângulo seja identificado com o triângulo  $L_1$  em  $M_1 \setminus A$ . Assim, seja  $\tilde{M}_X$  a conexão em paralelo generalizada de  $M_1 \setminus A$  com  $M_2$ , aqui  $M_1 \setminus A$  e  $L_1$  são como no lema 4.12. Agora, seja  $M_X = \tilde{M}_X \setminus (L_1 \setminus \{e, f\})$ . Note que  $r(M_X) = r(X) + 4$  e que  $E(M_X) = cl_M(X) \cup W$ , onde  $|W| = 9$ ,  $W \cap E(M) = \emptyset$  e os elementos de  $W$  são cobertos.

Veja abaixo uma figura ilustrativa da decomposição 6.



Usando alguns argumentos envolvendo 3-soma e conexão em paralelo generalizada, não é difícil ver que estas matrôides são cominimalmente 3-conexas.

## 5 RESULTADOS PRELIMINARES

Neste capítulo, estabeleceremos alguns lemas elaborados por nós necessários às demonstrações dos teoremas centrais do trabalho.

**Lema 5.1.** *Seja  $M$  uma matróide binária simples. Se  $T_1$  e  $T_2$  são triângulos disjuntos de  $M$  então*

$$(i) \ M|(T_1 \cup T_2) = M[A], \text{ onde } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) *para cada  $e \in cl_M(T_1 \cup T_2) \setminus (T_1 \cup T_2)$ , existe triângulo  $T$  de  $M$  tal que  $e \in T \subseteq (T_1 \cup T_2) \cup e$*

*Demonstração.* Primeiramente, mostremos que  $M|(T_1 \cup T_2) = (M|T_1) \oplus (M|T_2)$ . Se isto não acontece, então existe circuito  $C$  de  $M$  tal que  $C \cap T_1 \neq \emptyset$  e  $C \cap T_2 \neq \emptyset$ . Observe que  $|C| \in \{3, 4\}$ , pois  $M$  é simples e se  $|C| \geq 5$  teríamos  $T_i \subseteq C$  para algum  $i \in \{1, 2\}$ ; um absurdo. Se  $|C| = 3$  temos que  $|T_i \cap C| = 2$  para algum  $i \in \{1, 2\}$ , digamos que isto valha para  $T_1$ . Assim  $C \Delta T_1$  seria um circuito com 2 elementos; um absurdo, pois  $M$  é simples. Se  $|C| = 4$  temos que  $|T_i \cap C| = 2$  para  $i \in \{1, 2\}$ . Desta forma,  $C \Delta T_1 \Delta T_2$  seria um circuito com 2 elementos; um absurdo. Com isto provamos 1.

Agora provemos 2. Como  $e \in cl_M(T_1 \cup T_2) \setminus (T_1 \cup T_2)$ , existe circuito  $C$  de  $M$  tal que  $e \in C \subseteq (T_1 \cup T_2) \cup e$ . Observe que  $|C| \in \{3, 4, 5\}$ , pois  $M$  é simples e se  $|C| \geq 6$  teríamos  $T_i \subseteq C$  para algum  $i \in \{1, 2\}$ ; um absurdo. Se  $|C| = 3$  nada temos a provar. Se  $|C| = 4$  temos que  $|T_i \cap C| = 2$  para algum  $i \in \{1, 2\}$ , digamos que isto valha para  $T_1$ . Assim  $C \Delta T_1$  seria um circuito com 3 elementos que contem  $e$  como desejávamos. Se  $|C| = 5$  temos que  $|T_i \cap C| = 2$  para  $i \in \{1, 2\}$ . Desta forma,  $C \Delta T_1 \Delta T_2$  seria um circuito com 3 elementos que contem  $e$  e 2 está provado.

□

**Lema 5.2.** *Seja  $M$  uma matróide binária e  $X \subseteq T(M)$ . Se  $X = T(M|X)$ , então*

(i)  $r(X) \leq 3$ , ou

(ii) *existem dois triângulos disjuntos em  $X$ , ou*

(iii) *existem três triângulos contidos em  $X$  que se intersectam num ponto, cuja união tem posto 4.*

*Demonstração.* Suponha (i), (ii) e (iii) falsos. Em particular, temos que  $r(X) \geq 4$ . Assim, existem pelo menos quatro elementos em  $X$ . Logo, temos pelo menos dois triângulos  $T_1$  e  $T_2$  contidos em  $X$ . Como (ii) não ocorre, temos que  $T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$ . Como  $r(X) \geq 4$  e

$r(T_1 \cup T_2) = 3$ , existe um elemento  $a \in X$  que não é gerado por  $T_1 \cup T_2$ . Como  $a$  é coberto, existe um triângulo  $T_3$  que contém  $a$ . Daí, temos que  $T_3 \cap T_1 \neq \emptyset$  e  $T_3 \cap T_2 \neq \emptyset$ , uma vez que (ii) não ocorre. Se  $T_3 \cap T_1 = T_3 \cap T_2$ , temos que (iii) acontece. Então,  $T_3 \cap T_1 \neq T_3 \cap T_2$ . Desta forma,  $a$  é gerado por  $T_1 \cup T_2$ ; um absurdo. Assim, o lema segue. □

**Lema 5.3.** *Seja  $M$  uma matróide binária e cominimalmente 3-conexa, que possui exatamente 1 elemento que não pertence a triângulo. Se  $(r(M), e(M))$  é minimal em relação à ordem lexicográfica, então  $M \simeq A_{14}$ , ou  $M \simeq B_{14}$ , ou  $M \simeq C_{14}$ .*

*Demonstração.* Seja  $M$  uma matróide binária e cominimalmente 3-conexa, que possui exatamente 1 elemento que não pertence a triângulo, tal que  $r(M)$  é mínimo.

Seja  $e$  o elemento descoberto e  $\{X, Y\}$  uma 2-separação de  $M/e$ . Pelo lema 4.11 e pelo fato que  $e$  não está em triângulo temos que  $cl_M(X) \cap cl_M(Y) = \{e, f\}$  com  $f \in T(M)$ , ou  $cl_M(X) \cap cl_M(Y) = \{e\}$ .

Se  $cl_M(X) \cap cl_M(Y) = \{e\}$ , vemos pelo lema 3.3 que  $\{X \cup e, Y\}$  é 3-separação de  $M$  onde ambos  $X$  e  $Y$  geram  $e$  em  $M$ , e pelo lema 4.12 temos que  $\min\{r(X), r(Y)\} \geq 4$ . Sendo assim, pelo exemplo  $A_{14}$  devemos ter  $r(X) = r(Y) = 4$ . Como todos os elementos de  $X$  e  $Y$  são cobertos em  $M$  então, pelos lemas 5.2 e 5.1 temos que tanto  $X$  como  $Y$  contem 3 triângulos que se intersectam num ponto. Assim  $e(M) \geq 15$  contrariando a minimalidade de  $M$ , pois  $A_{14}$  tem mesmo posto e 14 elementos. Logo, não podemos ter  $cl_M(X) \cap cl_M(Y) = \{e\}$ .

Vejamos agora o caso em que  $cl_M(X) \cap cl_M(Y) = \{e, f\}$ , com  $f \in T(M)$ . Como todos os elementos de  $X \cup f$  e  $Y \cup f$  são cobertos em  $M$ , então como no caso anterior ambos  $X \cup f$  e  $Y \cup f$  contem pelo menos 3 triângulos que se intersectam num ponto, assim  $e(M) \geq 14$ . Logo pela minimalidade de  $M$  e pelo exemplo  $A_{14}$  temos  $e(M) = 14$ . Agora, mostremos que  $cl(X)$  e  $cl(Y)$  contém exatamente três triângulos. De fato, pelo lema 4.12 (iv) temos que  $\min\{|X|, |Y|\} \geq 5$ . Como  $e(M) = 14 = |X| + |Y| + 2$ , temos que  $\max\{|X|, |Y|\} \leq 7$ . Suponha que exista outro triângulo  $T$  em  $cl(X)$ , pelos lemas 5.2 e lema 5.1  $T$  intersecta os outros três triângulos contidos em  $cl(X)$ . Se  $T$  intersecta no ponto de interseção destes triângulos, então  $|X| \geq 8$ ; um absurdo, pois  $|X| \leq 7$ . Se  $T$  intersecta os outros três triângulos contidos em  $cl(X)$  em pontos distintos, então  $r(X) = 3$ ; um absurdo, pois  $r(X) = 4$ . Sendo assim, temos as seguintes possibilidades:

- $f$  pertence a 3 triângulos de  $X \cup f$  que se intersectam e a 3 triângulos de  $Y \cup f$  que se intersectam, isto é,  $M \simeq A_{14}$ , ou
- $f$  pertence a 3 triângulos de  $X \cup f$  que se intersectam e a 1 triângulo de  $Y \cup f$ , isto é,  $M \simeq B_{14}$ , ou
- $f$  pertence a 1 triângulo de  $X \cup f$  e a 3 triângulos de  $Y \cup f$  que se intersectam, isto é,  $M \simeq B_{14}$ , ou

- $f$  pertence a 1 triângulo de  $X \cup f$  e a 1 triângulo de  $Y \cup f$ , isto é,  $M \simeq C_{14}$ .

Assim, o resultado é válido.  $\square$

**Lema 5.4.** *Seja  $M$  uma matróide binária e 3-conexa com pelo menos 4 elementos, que possui um triângulo  $T = \{e, f, g\}$ , onde  $e$  e  $f$  não pertencem a outro triângulo de  $M$  e  $E(M \setminus T) = T(M \setminus T)$ . Se  $(r(M), e(M))$  é minimal na ordem lexicográfica então  $M \simeq A_{11}$ .*

*Demonstração.* Primeiramente, mostremos que existe base de  $M$  que não intersecta  $T$ , isto é,  $r(M \setminus T) = r(M)$ . De fato, se  $B \cap T \neq \emptyset$  para toda base  $B$  de  $M$ , temos que

$$r(T) + r(E(M) \setminus T) - r(M) \leq 2 + [r(M) - 1] - r(M) = 1$$

e assim  $T$  seria um conjunto 2-separador de  $M$ , absurdo. Note que  $r(M) \geq 4$ , pois as únicas matróides binárias 3-conexas de posto 3 são  $M(K_4)$  e  $F_7$  e estas matróides não satisfazem as hipóteses do lema. Suponhamos que  $r(M) = 4$  e sejam  $T_1$  e  $T_2$  triângulos de  $M \setminus T$ . Então,  $T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$ , caso contrário teríamos  $r(T_1 \cup T_2) = 4$  e  $T_1 \cup T_2$  geraria  $e$  em  $M$  e pelo lema 5.1  $e$  pertenceria a triângulo. Assim, quaisquer dois triângulos de  $M \setminus T$  se intersectam, e como  $r(M \setminus T) = r(M) = 4$ , segue que  $e(M \setminus T) \geq 7$ . Note que existe triângulo  $L$  de  $M \setminus T$  tal que  $L \cap T = \emptyset$ . Assim  $r(L \cup T) = 4$  e os pelo menos 4 elementos de  $M \setminus (L \cup T)$  seriam gerados por  $L \cup T$  em  $M$  e pelo lema 1 estes elementos estariam em triângulos da forma  $\{l, t, z\}$  com  $l \in L$ ,  $t \in T$  e  $z \in E(M) \setminus (L \cup T)$  e daí ou  $e$  ou  $f$  estariam em triângulo; um absurdo. Assim pelo exemplo  $A_{11}$  temos que  $r(M) = 5$ .

Finalmente, vamos construir  $M$ . Observe que temos no mínimo três triângulos em  $M \setminus T$ , caso contrário teríamos três elementos de  $B$  num mesmo triângulo; um absurdo. Pelo lema 5.2 temos três triângulos contidos em  $X$  cuja união tem posto 4, ou temos dois triângulos disjuntos contidos em  $X$ . No primeiro caso, temos pelo menos um elemento que não é gerado pela união dos três triângulos e assim precisaríamos de mais um elemento para cobrir este elemento, tendo desta forma  $e(M) \geq 12$ , contrariando o exemplo  $A_{11}$ . No segundo caso, também temos pelo menos um elemento que não é gerado pela união dos dois triângulos e assim precisaríamos de mais um elemento para cobrir este elemento. Sendo assim, temos que adicionar mais um elemento para formar triângulo com este elemento. Então, sem perda de generalidade temos  $M \setminus T \simeq M[A]$  onde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vejamos como inserir  $T = \{e, f, g\}$ . Como  $e$  não forma triângulo com os elementos de  $M \setminus T$ ,

o vetor de  $e$  deve ter quatro 1's e 1 zero ou  $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Se  $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , inevitavelmente

$f$  formará triângulo com elementos de  $M \setminus T$ . Assim, tanto  $e$  como  $f$  devem ter quatro 1's e 1 zero, e para que as hipóteses do lema sejam satisfeitas devemos ter  $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,

$f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  e  $g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , ou  $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $f = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  e  $g = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Observe que em

ambos os casos  $g$  forma mais um único triângulo com dois elementos de  $E(M) \setminus T$ . Assim, nos dois casos as matróides obtidas são isomorfas, logo sem perda de generalidade temos a validade do lema.

□

**Lema 5.5.** *Seja  $\{X \cup e, Y\}$  uma 3-separação de uma matróide  $M$  binária e 3-conexa, tal que  $e \notin T(M)$  e  $cl(X) \cap cl(Y) = \{e\}$ . Então,  $\min\{r(X), r(Y)\} \geq 5$ .*

*Demonstração.* Pelo lema 4.12 (iii) temos que  $\min\{r(X), r(Y)\} \geq 4$ . Por simetria necessitamos estabelecer apenas que  $r(X) \geq 5$ . Mostremos que todos os elementos de  $X$  estão cobertos. De fato, suponha que existe um elemento descoberto em  $X$ . Sendo assim, considere  $M_X$  como na decomposição 1. Desta forma,  $M_X$  é cominimalmente 3-conexa e binária com um elemento não coberto, então pelo lema 5.3,  $r(M_X) \geq 6$ . Logo,  $r(X) \geq 5$ , uma vez que  $r(M_X) = r(X) + 1$ . Então, vamos supor que todos os elementos de  $X$  estão cobertos e que  $r(X) = 4$ . Então, pelos lemas 5.2 e 5.1 temos que  $X$  contém 3 triângulos que se intersectam num ponto.

Agora, sejam  $M_1 \setminus A$  e  $L_1$ , como no lema 4.12, e sejam  $T_1, T_2$  e  $T_3$ , contidos em  $X$ , tais que  $T_1 \cap T_2 \cap T_3 = a$ . Note que  $T_1 \cap L_1 = \emptyset$ . Pelo lema 5.1 para cada elemento  $u \in (T_2 \cup T_3) \setminus a$  existe um triângulo  $T_u$  de  $M_1 \setminus A$ , tal que  $|T_u \cap T_1| = |T_u \cap L_1| = 1$ , pois  $u \in cl(T_1 \cup L_1)$  uma vez que  $r(M_1 \setminus A) = r(X) = 4$ . Note que  $T_u \cap T_1 \neq a$ , senão  $|T_u \cap T_i| = 2$ , para algum  $i \in \{2, 3\}$ . Observe ainda que  $T_u \cap L_1 \neq e$ , senão  $e$  estaria em triângulo contido em  $X \cup e$  em  $M$ . Assim, existe  $\{v, w\} \subseteq (T_2 \cup T_3) \setminus a$  tal que  $T_v \cap T_w = b \in T_1 \setminus a$  e  $(T_v \cup L_1) \cup (T_w \cup L_1) = L_1 \setminus e$ . Daí, pelo teorema 4.2  $T_v \Delta T_w = \{v, w\} \cup (L_1 \setminus e)$  é um circuito com 4 elementos, uma vez que  $M_1 \setminus A$  é binária e 3-conexa. Assim,  $(T_v \Delta T_w) \Delta L_1 = \{v, w, e\}$

é um triângulo de  $M_1 \setminus A$  contido em  $X \cup e$ . Logo é um triângulo de  $M$ ; um absurdo, já que  $e \notin T(M)$ . Assim,  $r(X) \geq 5$ .

□

**Lema 5.6.** *Seja  $\{X \cup \{e, f\}, Y\}$  uma 3-separação de uma matróide binária  $M$  e 3-conexa, tal que  $cl(X) \cap cl(Y) = \{e, f\}$  e  $\{e, f\} \subseteq E(M) \setminus T(M)$ . Então,  $\min\{r(X), r(Y)\} \geq 5$ .*

*Demonstração.* Pelo lema 4.12 (iii) temos que  $\min\{r(X), r(Y)\} \geq 4$ . Mostremos que quando todos os elementos de  $X$  estão cobertos o resultado segue. De fato, suponha que existe um elemento descoberto em  $X$ . Sendo assim, considere  $M_X$  como na decomposição 1. Desta forma,  $M_X$  é cominimalmente 3-conexa e binária com um elemento descoberto, então pelo lema 5.3,  $r(M_X) \geq 6$ . Logo,  $r(X) \geq 5$ , uma vez que  $r(M_X) = r(X) + 1$ . Então vamos supor que todos o elementos de  $X$  estão cobertos. Desta forma, seja  $M_1 \setminus A$  como no lema 4.12. Assim,  $M_1 \setminus A$  satisfaz as hipóteses do lema 5.4, logo  $r(X) = r(M_1 \setminus A) \geq 5$ . Analogamente, temos que  $r(Y) = r(M_1 \setminus A) \geq 5$ .

□

**Lema 5.7.** *Seja  $M$  uma matróide binária e cominimalmente 3-conexa, que possui exatamente 2 elementos que não pertencem a triângulo. Se  $(r(M), e(M))$  é minimal em relação a ordem lexicográfica, então  $M \simeq A_{18}$ .*

*Demonstração.* Tome  $e \in E(M) \setminus T(M)$  e seja  $\{X, Y\}$  uma 2-separação de  $M/e$ . Pelo lema 4.11 temos três casos a considerar:  $cl_M(X) \cap cl_M(Y) = \{e, f\}$  com  $f \in T(M)$ ; ou  $cl_M(X) \cap cl_M(Y) = \{e, f\}$  com  $f \in E(M) \setminus T(M)$ ; ou  $cl_M(X) \cap cl_M(Y) = \{e\}$ .

Se  $cl_M(X) \cap cl_M(Y) = \{e\}$ . Suponhamos que o outro elemento descoberto de  $M$  esteja em  $X$ . Pelo lema 5.5 temos que  $\min\{r(X), r(Y)\} \geq 5$ . Então pelo exemplo  $A_{18}$  temos que  $r(X) = r(Y) = 5$ . Seja  $M_X$  como na decomposição 1. Como  $M_X$  é binária e cominimalmente 3-conexa com 1 elemento não coberto, temos pelo lema 5.3 que  $e(M_X) \geq 14$ , logo  $|X| \geq 9$ . Como todos os elementos de  $Y$  são cobertos em  $M$  e  $r(Y) = 5$  temos  $|Y| \geq 8$ , então  $e(M) \geq 18$  e pelo exemplo  $A_{18}$  temos  $e(M) = 18$ . Neste caso, temos que  $|X| = 9$  e  $|Y| = 8$ . Então pelo lema 5.3 temos que  $M_X \simeq A_{14}$ , ou  $M_X \simeq B_{14}$ , ou  $M_X \simeq C_{14}$ . Mas  $e$  pertence a exatamente dois triângulos de  $M_X$  que não intersectam outros triângulos, o que não ocorre em  $A_{14}$ , nem em  $B_{14}$ , nem em  $C_{14}$ ; um absurdo. Assim, não podemos ter  $cl_M(X) \cap cl_M(Y) = \{e\}$ .

Se  $cl_M(X) \cap cl_M(Y) = \{e, f\}$ , com  $f \in E(M) \setminus T(M)$ , seja  $M_1 \setminus A$  como no lema 4.12. Assim pelo lema 5.4, concluímos que  $|M_1 \setminus A| \geq 11$ . Como  $e(M_1 \setminus A) = |X \cup L_1| = |X| + 3 \geq 11$  temos que  $|X| \geq 8$ . Similarmente,  $|Y| \geq 8$  e conseqüentemente  $e(M) \geq |X| + |Y| + |\{e, f\}| \geq 18$ . Assim, pelo exemplo  $A_{18}$ , temos que estas desigualdades são de fato igualdades. Daí, pelo lema 5.4, daí  $M_1 \setminus A \simeq A_{11}$ . Onde,  $M|X \simeq A_{11} \setminus \{e, f, g\}$  (ver exemplo 6 pag 34). Analogamente, vemos que  $M|Y \simeq A_{11} \setminus \{e, f, g\}$ . Assim,  $M \simeq A_{18}$ .

Se  $cl_M(X) \cap cl_M(Y) = \{e, f\}$ , com  $f \in T(M)$ , pelo lema 4.12 (iii) temos que  $\min\{r(X), r(Y)\} \geq 4$ . Suponhamos que o outro elemento não coberto de  $M$ , digamos  $e'$ , esteja em  $X$ . Pelo lema 3.7 (i) existe 2-separação  $\{X', Y'\}$  de  $M/e'$  com  $X' \subseteq X$ , já que (ii) e (iii) não podem acontecer, uma vez que pelo lema 4.12 (iii) temos que  $\min\{r(X'), r(Y')\} \geq 4$  para toda 2-separação  $\{X', Y'\}$  de  $M/e'$ . Se  $cl(X') \cap cl(Y') = \{e'\}$  caímos no primeiro caso. Então,  $cl(X') \cap cl(Y') = \{e', f'\}$  com  $f' \in T(M)$  ou caímos no segundo caso. Considere  $M_1 \setminus A$  sobre  $X \cup L_1$ , como no lema 4.12, de forma que  $L_1 = \{e, f, g\}$ , com  $g \notin E(M)$ . Como  $E(M_1 \setminus A) \setminus X'$  é 3-separador de  $M_1 \setminus A$ , considere  $M'_1 \setminus A'$  sobre  $(E(M_1 \setminus A) \setminus X') \cup L'_1$ , de forma que  $L'_1 = \{e', f', g'\}$ , com  $g' \notin E(M)$ . Observe que todos os elementos de  $cl(X) \cap cl(Y')$  são cobertos por triângulos de  $M$  contidos em  $cl(X) \cap cl(Y')$ , logo serão cobertos em  $M'_1 \setminus A'$ . Note ainda que  $r(M'_1 \setminus A') = r(cl(X) \cap cl(Y'))$ . Sendo assim, temos que  $r(M'_1 \setminus A') = r(cl(X) \cap cl(Y')) \leq 4$ , caso contrário teríamos  $r(M) = r(X') + r(Y) + r(cl(X) \cap cl(Y')) - 4 \geq 9$  e o resultado do lema é válido. Agora, mostremos que

$$|(cl(X) \cap cl(Y')) \setminus \{e, f, e', f'\}| \geq 2.$$

Se  $|(cl(X) \cap cl(Y')) \setminus \{e, f, e', f'\}| = 0$ , temos duas possibilidades:  $r(M'_1 \setminus A') = 3$  ou  $r(M'_1 \setminus A') = 4$ . No primeiro caso, temos que  $f = f'$  ou  $g = g'$ , conseqüentemente teríamos  $e(M'_1 \setminus A') = 5$ ; um absurdo, uma vez que  $M(K_4)$  é a matróide binária 3-conexa de posto 3 com menor número de elementos. No segundo caso, temos que  $\{L_1, L'_1\}$  é separação de  $M'_1 \setminus A'$ ; um absurdo, pois  $M'_1 \setminus A'$  é 3-conexa. Se  $(cl(X) \cap cl(Y')) \setminus \{e, f, e', f'\} = \{a\}$ , temos duas possibilidades:  $r(M'_1 \setminus A') = 3$  ou  $r(M'_1 \setminus A') = 4$ . No primeiro caso, temos que  $f = f'$  ou  $g = g'$ , conseqüentemente teríamos  $M'_1 \setminus A' \simeq M(K_4)$ . Se  $f = f'$  temos que  $a$  não estaria coberto por triângulo de  $M$ ; um absurdo. Se  $g = g'$  temos que  $e$  e  $e'$  estariam em triângulos de  $M$ ; um absurdo. No segundo caso, temos que  $\{L_1 \cup a, L'_1\}$  é separação de  $M'_1 \setminus A'$ ; um absurdo, pois  $M'_1 \setminus A'$  é 3-conexa. Então,

$$|(cl(X) \cap cl(Y')) \setminus \{e, f, e', f'\}| \geq 2.$$

Agora, mostremos que  $r(M'_1 \setminus A') = r(cl(X) \cap cl(Y')) = 4$ . Se  $r(M'_1 \setminus A') = 3$ , então  $g = g'$  ou  $f = f'$ . Assim, teríamos  $e$  e  $e'$  cobertos por triângulos em  $M$ ; um absurdo.

Mostremos que não podemos ter  $|(cl(X) \cap cl(Y')) \setminus \{e, f, e', f'\}| = 2$ . Suponha que  $(cl(X) \cap cl(Y')) \setminus \{e, f, e', f'\} = \{a, b\}$ . Então,  $E(M'_1 \setminus A') = L_1 \cup L'_1 \cup \{a, b\}$  e todos os elementos de  $M'_1 \setminus A'$  são cobertos. Se  $g = g'$  ou  $f = f'$  temos que  $e(M'_1 \setminus A') = 7$ . Então, pelo lema 5.2 temos três triângulos que se intersectam num elemento ou dois triângulos disjuntos contidos em  $M'_1 \setminus A'$ . No primeiro caso, temos que qualquer triângulo é 2-separador de  $M'_1 \setminus A'$ ; um absurdo, uma vez que  $M'_1 \setminus A'$  é 3-conexa. Note que o segundo caso não pode ocorrer, pois  $e(M'_1 \setminus A') = 7$ . Então,  $L_1 \cap L'_1 = \emptyset$ . Assim, pelo lema 5.1 existem triângulos  $T_a$  e  $T_b$  que contem  $a$  e  $b$ , respectivamente, que intersectam ambos  $L_1$  e  $L'_1$ . Se  $T_a \cap T_b \neq \emptyset$ , então  $L_1$  é 2-separador de  $M'_1 \setminus A'$  (caso  $T_a \cap T_b \in L_1$ ) ou  $L'_1$  é 2-separador de  $M'_1 \setminus A'$  (caso  $T_a \cap T_b \in L'_1$ ); um absurdo. Então,  $T_a \cap T_b = \emptyset$ . Assim,  $a$  ou  $b$  está em triângulo com

$g$  ou  $g'$ , logo não estará em triângulo de  $M$ ; um absurdo, uma vez que os elementos de  $(cl(X) \cap cl(Y')) \setminus \{e, f, e', f'\}$  são cobertos em  $M$ .

Então,  $|(cl(X) \cap cl(Y')) \setminus \{e, f, e', f'\}| \geq 3$ . Como todos os elementos de  $X'$  e  $Y$  são cobertos temos pelo lema 5.2, temos que  $\min\{|X'|, |Y|\} \geq 6$ . Assim, temos que  $e(M) \geq 19$  a não ser que  $f = f'$  e  $|(cl(X) \cap cl(Y')) \setminus \{e, f, e', f'\}| = 3$ , uma vez que  $e(M) = |X'| + |Y| + |cl(X) \cap cl(Y')|$ , contrariando o exemplo  $A_{18}$ . Agora, vamos provar que não podemos ter  $f = f'$  e  $|(cl(X) \cap cl(Y')) \setminus \{e, f, e', f'\}| = 3$ . De fato, suponha que  $(cl(X) \cap cl(Y')) \setminus \{e, f, e', f'\} = \{a, b, c\}$ . Então,  $E(M'_1 \setminus A') = L_1 \cup L'_1 \cup \{a, b, c\}$  e todos os elementos de  $M'_1 \setminus A'$  são cobertos. Então, pelo lema 5.2 temos três triângulos que se intersectam num elemento ou dois triângulos disjuntos contidos em  $M'_1 \setminus A'$ . No primeiro caso, temos um triângulo contendo  $f'$  e um 2-subconjunto de  $\{a, b, c\}$ , digamos  $\{a, b\}$ . Como  $c$  é coberto, então existe um triângulo que contem  $c$  e que intersecta outros dois triângulo, desta forma a união de  $c$  com estes dois triângulos é um conjunto 2-separador de  $M'_1 \setminus A'$ ; um absurdo. No segundo caso,  $\{a, b, c\}$  é um triângulo disjunto de  $L_1$  e  $L'_1$ . Sendo assim,  $\{a, b, c\}$  é um conjunto 2-separador de  $M'_1 \setminus A'$ ; um absurdo.

Assim, caso  $cl_M(X) \cap cl_M(Y) = \{e, f\}$ , com  $f \in T(M)$  não pode ocorrer. Então, o resultado do lema segue. □

**Lema 5.8.** *Seja  $M$  uma matróide binária e cominimalmente 3-conexa, com 3 elementos descobertos. Então,  $r(M) \geq 10$ .*

*Demonstração.* Tome  $e \in E(M) \setminus T(M)$  e seja  $\{X, Y\}$  uma 2-separação de  $M/e$ . Então, pelo lema 4.11 temos três casos a considerar:  $cl(X) \cap cl(Y) = \{e\}$ ; ou  $cl(X) \cap cl(Y) = \{e, f\}$  com  $f \notin T(M)$ ; ou  $cl(X) \cap cl(Y) = \{e, f\}$  com  $f \in T(M)$ .

Caso 1 ( $cl(X) \cap cl(Y) = \{e\}$ ) Pelo lema 3.3, temos que  $\{X \cup e, Y\}$  é 3-separação de  $M$  onde ambos  $X$  e  $Y$  geram  $e$  em  $M$ . Pelo lema 5.5,  $\min\{r(X), r(Y)\} \geq 5$ . Este caso vamos subdividir em dois subcasos: (Caso A) os dois outros elementos descobertos de  $M$  estão contidos em  $X$  ou em  $Y$ , e (Caso B) temos um elemento descoberto em  $X$  e outro em  $Y$ .  
Caso A- Suponhamos que os elementos descobertos estejam em  $X$ . Seja  $M_X$  como na decomposição 1. Como  $M_X$  é binária, cominimalmente 3-conexa e tem dois elementos descobertos temos pelo lema 5.7 que  $r(M_X) \geq 8$ , logo  $r(X) \geq 7$ , uma vez que  $r(M_X) = r(X) + 1$ . Como  $r(Y) \geq 5$  e  $r(X) + r(Y) - r(M) = 2$  temos que  $r(M) \geq 10$  e o resultado está provado neste caso.

Caso B- Seja  $e'$  o outro elemento descoberto de  $X$ . Sejam  $M_1 \setminus A$  e  $L_1$  como no lema 4.12. Mostremos que  $e'$  pertence a no máximo um triângulo de  $M_1 \setminus A$ . De fato, suponha que  $e'$  pertence a dois triângulos, digamos  $\{a, f, e'\}$  e  $\{b, g, e'\}$ , com  $\{a, b\} \subseteq X$  e  $\{f, g\} = L_1 \setminus E(M)$ . Assim, pelo teorema 4.2  $\{a, b, f, g\}$  é circuito, pois é a diferença simétrica de  $\{a, f, e'\}$  com  $\{b, g, e'\}$ , e  $M_1 \setminus A$  é 3-conexa. Agora, fazendo a diferença simétrica entre  $\{a, b, f, g\}$  e  $\{e, f, g\}$  vemos que  $\{a, b, e\}$  é um triângulo contido em  $X \cup e$  em  $M_1 \setminus A$ , logo

$\{a, b, e\}$  é um triângulo de  $M$ ; um absurdo.

Assim, vamos supor que  $e'$  não está em triângulo com  $f$ . Seja  $M_X$  como na decomposição 3(aqui estamos identificando  $f$  com o elemento que pertence aos 4 triângulos de  $A_9$ ). Desta forma,  $M_X$  é binária, cominimalmente 3-conexa e tem dois elementos descobertos. Então, pelo lema 5.7 temos que  $r(M_X) \geq 8$ . Logo,  $r(X) \geq 6$ , uma vez que  $r(M_X) = r(X) + 2$ . Analogamente, temos que  $r(Y) \geq 6$ . Finalmente, como  $r(X) + r(Y) - r(M) = 2$ , segue que  $r(M) \geq 10$ , e resultado vale também neste caso.

Caso2( $cl(X) \cap cl(Y) = \{e, f\}$ ,  $f \notin T(M)$ ) Pelo lema 3.3, temos que  $\{X \cup \{e, f\}, Y\}$  é 3-separação de  $M$  onde ambos  $X$  e  $Y$  geram  $e$  em  $M$ . Pelo lema 5.6,  $\min\{r(X), r(Y)\} \geq 5$ . Suponhamos que o outro elemento descoberto, digamos  $e'$ , esteja em  $X$ . Assim,  $r(Y) = 5$ . Caso contrário,  $M_X$  da decomposição 4 teria 3 elementos descobertos e posto menor que o posto de  $M$ . Pelo lema 3.7 (i), existe 2-separação  $\{X', Y'\}$  de  $M/e'$  com  $X' \subseteq X$ , já que (ii) e (iii) não podem acontecer, uma vez que pelo lema 4.12 (iii) temos que  $\min\{r(X'), r(Y')\} \geq 4$ , para toda 2-separação  $\{X', Y'\}$  de  $M/e'$ . Se  $cl(X') \cap cl(Y') = \{e'\}$  caímos no caso1. Então,  $cl(X') \cap cl(Y') = \{e', f'\}$  com  $f' \in T(M)$ . Considere  $M_{Y'}$  como na decomposição 2. Como  $M_{Y'}$  é cominimalmente 3-conexa e binária, com 2 elementos descobertos, temos pelo lema 5.7 que  $r(M_{Y'}) \geq 8$ . Como  $r(M_{Y'}) = r(Y') + 1$ , temos que  $r(Y') \geq 7$ . Sendo assim,  $r(X') \leq 4$ . Caso contrário, teríamos  $r(M) = r(X') + r(Y') - 2 \geq 10$  e o resultado valeria. Então, pelo lema 4.12 (iii) temos que  $r(X') = 4$ . Daí,  $r(Y') = 7$ . Caso contrário,  $r(M) \geq 10$ . Observe que  $(cl(X) \cap cl(Y')) \setminus \{e, f, e', f'\} \neq \emptyset$ . Caso contrário, teríamos por submodularidade que  $r(cl(X')) + r(cl(Y)) \geq r(M)$ . Logo,  $r(M) \leq 9$ , e pelo lema 5.7,  $r(M) = 9$ . Assim,  $\{cl(X'), cl(Y)\}$  seria um conjunto separador de  $M$ ; um absurdo. Note ainda, que todos os elementos de  $(cl(X) \cap cl(Y')) \setminus \{e, f, e', f'\}$  são cobertos. Daí, como no lema anterior  $r(cl(X) \cap cl(Y')) \geq 4$ . Se  $r(cl(X') \cap cl(Y')) \geq 5$ , teríamos

$$r(M) = r(X') + r(cl(X \cap Y')) + r(Y) - 4 \geq 4 + 5 + 5 - 4 \geq 10$$

e o resultado valeria. Então  $r(cl(X) \cap cl(Y')) = 4$ .

Sendo assim, considere  $M'_2 \setminus A$  sobre  $Y' \cup L_1$ , onde  $L_1 = \{e', f', g'\}$  e  $g' \notin E(M)$  como no lema 4.12. Vamos mostrar que todo triângulo contido em  $cl_M(X) \cap cl_M(Y')$  de  $M'_2 \setminus A$  intersecta  $f'$ . De fato, seja  $\{k, l, m\} \subseteq cl_M(X) \cap cl_M(Y')$  um triângulo de  $M'_2 \setminus A$  que não intersecta  $f'$ . Como  $r(cl(X) \cap cl(Y')) = 4$  temos que ambos  $e$  e  $f$  são gerados por  $L_1 \cup \{k, l, m\}$ . Logo, sem perda de generalidade, pelo lema 5.1, podemos supor que  $\{g', e, l\}$  e  $\{g', m, f\}$  são triângulos de  $M'_2 \setminus A$ . Agora, como  $M'_2 \setminus A$  é binária e 3-conexa (não tem laços nem elementos em paralelo), temos pelo teorema 4.2 que  $\{l, m, e, f\} = \{g', e, l\} \Delta \{g', m, f\}$  é circuito de  $M'_2 \setminus A$ . Daí,  $\{k, e, f\} = \{l, m, e, f\} \Delta \{k, l, m\}$  é triângulo de  $M'_2 \setminus A$  contido em  $Y'$ , logo seria triângulo de  $M$ ; um absurdo, já que  $e$  e  $f$  são descobertos.

Agora, vamos mostrar que  $e$  e  $f$  são descobertos em  $M'_2 \setminus A$ . De fato, suponha que  $e$  é coberto em  $M'_2 \setminus A$ . Digamos que  $\{e, g', c\}$  é triângulo de  $M'_2 \setminus A$ . Primeiramente, vamos supor que  $c \in Y$ . Como todos os elementos de  $Y \setminus \{e, f\}$  são cobertos em  $M$ , temos que existe um triângulo  $\{a, b, c\} \subseteq Y$ . Assim,  $\{e, a, b, g'\} = \{a, b, c\} \Delta \{g', e, c\}$  é circuito de

$M'_2 \setminus A$ . Daí,  $\{e, a, b, e', f'\} = \{e, a, b, g'\} \Delta \{e', f', g'\}$  é circuito de  $M'_2 \setminus A$ . Como  $f'$  pertence à triângulo contido em  $cl(X) \cap cl(Y')$ , digamos que este triângulo seja  $\{f', h, i\}$ , temos que  $\{e, a, b, e', h, i\} = \{e, a, b, e', f'\} \Delta \{f', h, i\}$  é circuito de  $M'_2 \setminus A$ . Assim,  $\{c, e, e', h, i\} = \{e, a, b, e', h, i\} \Delta \{a, b, c\}$  é circuito de  $M'_2 \setminus A$  contido em  $Y' \cup e'$ . Logo, seria circuito de  $M$ . Daí, pela proposição 2.2,  $cl(X) \cap cl(Y')$  gera  $c$  em  $M$ ; um absurdo, já que pelo lema 3.7,  $cl(X) \cap cl(Y')$  é fechado.

Então,  $c$  pertence a um triângulo que intersecta  $f'$ , digamos  $\{f', w, c\}$ . Daí,  $\{g', f', e, w\} = \{g', e, c\} \Delta \{f', c, w\}$  é circuito de  $M'_2 \setminus A$ . Logo,  $\{e', e, w\} = \{g', f', e, w\} \Delta \{e', f', g'\}$  é triângulo de  $M'_2 \setminus A$  contido em  $Y' \cup e'$ . Assim,  $\{e', e, w\}$  é triângulo de  $M$ ; um absurdo, pois  $e$  é descoberto em  $M$ .

Então  $M'_2 \setminus A$  é cominimalmente 3-conexa e binária com 2 elementos descobertos, daí pelo lema 5.7,  $r(M'_2 \setminus A) = r(Y') \geq 8$ . Logo,  $r(M) = r(Y') + r(X') - 2 \geq 10$  e o resultado vale neste caso.

Caso3( $cl(X) \cap cl(Y) = \{e, f\}$ ,  $f \in T(M)$ ) Pelo lema 3.3, temos que  $\{X \cup \{e, f\}, Y\}$  é 3-separação de  $M$  onde ambos  $X$  e  $Y$  geram  $e$  em  $M$ . Pelo lema 4.12 (iii),  $\min\{r(X), r(Y)\} \geq 4$ . Sejam  $e'$  e  $e''$  os outros elementos descobertos. Suponha que  $e' \in X$ . Pelo lema 3.7, existe 2-separação  $\{X', Y'\}$  de  $M/e'$  com  $X' \subseteq X$ . Se  $cl(X') \cap cl(Y') = \{e'\}$  ou  $cl(X') \cap cl(Y') = \{e', e''\}$  caímos nos casos 1 e 2, respectivamente. Então,  $cl(X') \cap cl(Y') = \{e', f'\}$  com  $f' \in T(M)$ . Se  $e'' \in X'$ , considere  $M_{X'}$  e  $M_{Y'}$  como na decomposição 3. Como estas matróides são binárias e cominimalmente 3-conexas, com 2 elementos descobertos cada, temos pelo lema 5.7 que  $r(M_{X'}) \geq 8$  e  $r(M_{Y'}) \geq 8$ . Assim,  $r(X') \geq 6$  e  $r(Y') \geq 6$ , uma vez que  $r(M_{X'}) = r(X') + 2$  e  $r(M_{Y'}) = r(Y') + 2$ . Logo,  $r(M) \geq 10$ . Então,  $e'' \in Y'$ . Se  $e'' \in Y$ , considere  $M_X$  e  $M_Y$  como na decomposição 3. Como estas matróides são binárias e cominimalmente 3-conexas, com 2 elementos descobertos cada, temos pelo lema 5.7 que  $r(M_X) \geq 8$  e  $r(M_Y) \geq 8$ . Assim,  $r(X) \geq 6$  e  $r(Y) \geq 6$ . Logo,  $r(M) \geq 10$ . Então,  $e'' \in (Y' \cap X)$ . Sendo assim, considere  $M'_2 \setminus A$  sobre  $Y' \cup L_1$ , onde  $L_1 = \{e', f', g'\}$  e  $g' \notin E(M)$ . Como no caso2, temos que  $e''$  e  $e$  não pertencem a triângulos em  $M'_2 \setminus A$ . Então, pelo lema 5.7 temos que  $r(M'_2 \setminus A) = r(Y') \geq 8$ , uma vez que  $M'_2 \setminus A$  é binária e cominimalmente 3-conexa com dois elementos descobertos. Assim,  $r(M) \geq 10$ , uma vez que  $r(X') \geq 4$ .

□

**Lema 5.9.** *Seja  $M$  uma matróide binária e cominimalmente 3-conexa, com 4 elementos descobertos. Então,  $r(M) \geq 11$ .*

*Demonstração.* Tome  $e \in E(M) \setminus T(M)$  e seja  $\{X, Y\}$  uma 2-separação de  $M/e$ . Então, pelo lema 4.11 temos três casos a considerar:  $cl(X) \cap cl(Y) = \{e\}$ ; ou  $cl(X) \cap cl(Y) = \{e, f\}$ ,  $f \notin T(M)$ ; ou  $cl(X) \cap cl(Y) = \{e, f\}$ ,  $f \in T(M)$ . Assim temos três casos para analisar. Caso1( $cl(X) \cap cl(Y) = \{e\}$ ) Pelo lema 3.3 temos que  $\{X \cup e, Y\}$  é 3-separação de  $M$  onde ambos  $X$  e  $Y$  geram  $e$  em  $M$ . Pelo lema 5.5,  $\min\{r(X), r(Y)\} \geq 5$ . Este caso vamos

subdividir em dois subcasos: (Caso A1) onde os três outros elementos descobertos de  $M$  estão contidos em  $X$  ou em  $Y$ , e (Caso B1) onde temos um elemento descoberto em  $X$  e os outros dois em  $Y$ , ou vice-versa.

Caso A1- Suponhamos que os elementos descobertos estejam em  $X$ . Seja  $M_X$  como na decomposição 1. Como  $M_X$  é binária, cominimalmente 3-conexa e tem três elementos, temos pelo lema 5.8 que  $r(M_X) \geq 10$ . Logo,  $r(X) \geq 9$ , uma vez que  $r(M_X) = r(X) + 1$ . Como  $r(Y) \geq 5$  e  $r(X) + r(Y) - r(M) = 2$ , temos que  $r(M) \geq 12$  e o resultado está provado neste caso.

Caso B1- Suponhamos que tenhamos exatamente dois elementos descobertos em  $X$ . Seja  $e'$  o elemento descoberto de  $Y$ . Pelo lema 3.7, existe 2-separação  $\{X', Y'\}$  de  $M/e'$  tal que  $Y' \subseteq Y$ . Sendo assim, considere  $M_{X'}$  como na decomposição 1, caso  $cl(X') \cap cl(Y') = \{e'\}$ , ou como na decomposição 2, caso  $cl(X') \cap cl(Y') = \{e', f'\}$ . Como  $M_{X'}$  é binária, cominimalmente 3-conexa e tem três elementos descobertos, temos pelo lema 5.8 que  $r(M'_{X'}) \geq 10$ . Logo,  $r(X') \geq 9$ . Como pelo lema 4.12 (iii), temos que  $r(Y') \geq 4$ , segue que  $r(M) \geq 11$  e o resultado está provado neste caso.

Caso2( $cl(X) \cap cl(Y) = \{e, f\}$ ,  $f \notin T(M)$ ) Pelo lema 3.3, temos que  $\{X \cup \{e, f\}, Y\}$  é 3-separação de  $M$  onde ambos  $X$  e  $Y$  geram  $\{e, f\}$  em  $M$ . Pelo lema 5.6, temos que  $\min\{r(X), r(Y)\} \geq 5$ . Este caso vamos subdividir em dois subcasos: (Caso A2) onde os dois outros elementos descobertos de  $M$  estão contidos em  $X$  ou em  $Y$ , e (Caso B2) onde temos um elemento descoberto em  $X$  e outro em  $Y$ .

Caso A2- Suponhamos que os elementos descobertos estejam em  $X$ . Seja  $M_X$  como na decomposição 3. Como  $M_X$  é binária, cominimalmente 3-conexa e tem três elementos descobertos, temos pelo lema 5.8 que  $r(M_X) \geq 10$ . Logo,  $r(X) \geq 8$ , uma vez que  $r(M_X) = r(X) + 2$ . Como  $r(Y) \geq 5$  e  $r(X) + r(Y) - r(M) = 2$ , temos que  $r(M) \geq 11$  e o resultado está provado neste caso.

Caso B2- Neste caso, considere  $M_X$  e  $M_Y$  como na decomposição 4. Como  $M_X$  e  $M_Y$  são binárias, cominimalmente 3-conexas e tem três elementos descobertos, temos pelo lema 5.8 que  $r(M_X) \geq 10$  e  $r(M_Y) \geq 10$ . Logo,  $r(X) \geq 7$  e  $r(Y) \geq 7$ , uma vez que  $r(M_X) = r(X) + 3$  e  $r(M_Y) = r(Y) + 3$ . Como  $r(X) + r(Y) - r(M) = 2$ , temos que  $r(M) \geq 12$  e o resultado está provado neste caso.

Caso3( $cl(X) \cap cl(Y) = \{e, f\}$ ,  $f \in T(M)$ ) Pelo lema 3.3 temos que  $\{X \cup \{e, f\}, Y\}$  é 3-separação de  $M$  onde ambos  $X$  e  $Y$  geram  $\{e, f\}$  em  $M$ . Pelo lema 4.12 (iii),  $\min\{r(X), r(Y)\} \geq 4$ . Este caso vamos subdividir em dois subcasos: (Caso A3) onde os três outros elementos descobertos de  $M$  estão contidos em  $X$  ou em  $Y$ , e (Caso B3) onde temos um elemento descoberto em  $X$  e os outros dois em  $Y$ , ou vice-versa.

Caso A3- Suponhamos que os elementos descobertos estejam em  $X$ . Seja  $M_X$  como na decomposição 2. Como  $M_X$  é binária, cominimalmente 3-conexa e tem três elementos descobertos, temos pelo lema 5.8 que  $r(M_X) \geq 10$ . Logo,  $r(X) \geq 9$ . Como  $r(Y) \geq 4$  e  $r(X) + r(Y) - r(M) = 2$ , temos que  $r(M) \geq 11$  e o resultado está provado neste caso.

Caso B3- Suponhamos que tenhamos exatamente dois elementos descobertos em  $X$ . Seja  $e'$  o elemento descoberto de  $Y$ . Pelo lema 3.7, existe 2-separação  $\{X', Y'\}$  de  $M/e'$ , tal que  $Y' \subseteq Y$ . Sendo assim, considere  $M_{X'}$  como na decomposição 1 caso  $cl(X') \cap cl(Y') = \{e'\}$ , ou como na decomposição 2 caso  $cl(X') \cap cl(Y') = \{e', f'\}$ . Como  $M_{X'}$  é binária, cominimalmente 3-conexa e tem três elementos descobertos temos pelo lema 5.8 que  $r(M'_{X'}) \geq 10$ . Logo,  $r(X') \geq 9$ . Como  $r(Y') \geq 4$  e  $r(X) + r(Y) - r(M) = 2$ , temos que  $r(M) \geq 11$  e o resultado está provado neste caso.  $\square$

**Lema 5.10.** *Seja  $M$  uma matróide binária e cominimalmente 3-conexa com algum elemento descoberto. Então, o número de triângulos de  $M(t'(M))$  é maior ou igual a 6.*

*Demonstração.* Suponha que  $t'(M) \leq 5$ , assim

$$e(M) \leq 15 + (e(M) - t(M)). \quad (5.1)$$

Tome  $e \in E(M) \setminus T(M)$ . Pelo teorema 6 (observe que não usamos este lema na demonstração do teorema 6) temos que

$$e(M) - t(M) \leq e(M) - \frac{2e(M) + 12}{3} = \frac{e(M) - 12}{3}.$$

Substituindo 5.1 temos que

$$e(M) - t(M) \leq \frac{[15 + (e(M) - t(M))] - 12}{3} = \frac{3 + (e(M) - t(M))}{3}.$$

Daí, temos que  $e(M) - t(M) \leq 1$ . Então,  $M$  tem exatamente 1 elemento descoberto. Assim, seja  $\{X, Y\}$  uma 2-separação de  $M/e$ . Pelo lema 3.3, temos que  $\{X \cup e, Y\}$  é 3-separação de  $M$  onde ambos  $X$  e  $Y$  geram  $e$  em  $M$ . Pelo lema 4.12 (iii), temos que  $\min\{r(X), r(Y)\} \geq 4$ . Como  $t'(M) \leq 5$  e todos os elementos de  $X$  e  $Y$  são cobertos em  $M$ , podemos supor que  $cl(X)$  contem no máximo 2 triângulos. Se estes triângulos forem disjuntos temos pelo lema 5.1 que  $e \in T(M)$ ; um absurdo. Se estes triângulos se intersectam ou se temos apenas um triângulo, segue que  $r(X) \leq 3$ ; um absurdo. Assim, o resultado do lema segue.  $\square$

**Lema 5.11.** *Seja  $M$  uma matróide binária e cominimalmente 3-conexa com pelo menos 6 elementos. Então, o número de triângulos de  $M(t'(M))$  é maior ou igual a 4.*

*Demonstração.* Suponha que  $t'(M) \leq 3$ . Pelo lema 5.10, podemos supor que todos os elementos de  $M$  são cobertos. Se  $r(M) = 3$ , temos que  $M \simeq M(K_4)$  ou  $M \simeq F_7$  e o resultado vale nestes casos. Suponha que  $r(M) = 4$ , e seja  $T$  um triângulo de  $M$ . Daí, temos que  $r(E(M) \setminus T) \leq 3$ . Logo,  $r(T) + r(E(M) \setminus T) - r(M) \leq 1$  e  $T$  seria 2-separador de  $M$ ; um absurdo. Se  $r(M) \geq 5$  temos um triângulo  $T$  que não intersectam os outros triângulos.

Logo,  $r(E(M)\setminus T) \leq 4$ . Daí,  $r(T) + r(E(M)\setminus T) - r(M) \leq 1$  e  $T$  seria 2-separador de  $M$ ; um absurdo. Assim, o resultado do lema segue.  $\square$

**Lema 5.12.** *Seja  $M$  uma matróide binária e cominimalmente 3-conexa. Se  $\{X \cup L, Y\}$  é uma 3-separação de  $M$  tal que  $L = cl(X) \cap cl(Y)$  e existe um elemento descoberto  $e \in L$ , então  $\min\{t'(M|cl(X)), t'(M|cl(Y))\} \geq 3$ .*

*Demonstração.* Pelo lema 4.11 e pelo fato que  $e \notin T(M)$  temos que  $L = e$  ou  $|L| = 2$ . Pelo lema 4.12 (iii), temos que  $\min\{r(X), r(Y)\} \geq 4$ . Suponha que existe elemento descoberto em  $X$ . Sendo assim, considere  $M_X$  como na decomposição 1 (caso  $L = e$ ), ou considere  $M_X$  como na decomposição 2 (caso  $|L| = 2$ ). Como  $M_X$  é cominimalmente 3-conexa em ambos os casos, temos que pelo lema 5.10 que  $t'(M_X) \geq 6$ . Assim,  $t'(M|cl(X)) \geq 4$ , uma vez que  $t'(M_X) = t'(M|X) + 2$ . Então, podemos supor que todos os elementos de  $X$  são cobertos. Como  $r(X) \geq 4$  temos que  $t'(M|cl(X)) \geq 2$ . Se  $t'(M|cl(X)) = 2$ , então  $cl(X)$  contem dois triângulos disjuntos e  $r(X) = 4$ . Assim, pelo lema 5.1 temos que  $e \in T(M)$ ; um absurdo. Logo,  $t'(M|cl(X)) \geq 3$  como desejávamos.  $\square$

**Lema 5.13.** *Seja  $M$  uma matróide binária e cominimalmente 3-conexa, com 4 elementos descobertos. Então,  $t'(M) \geq 8$ .*

*Demonstração.* Tome  $e \in E(M)\setminus T(M)$  e seja  $\{X, Y\}$  uma 2-separação de  $M/e$ . Pelo lema 4.11, temos que  $cl(X) \cap cl(Y) = \{e\}$ , ou  $cl(X) \cap cl(Y) = \{e, f\}$ ,  $f \notin T(M)$ , ou  $cl(X) \cap cl(Y) = \{e, f\}$ ,  $f \in T(M)$ . Assim, temos dois casos para analisar.

Caso 1 ( $cl(X) \cap cl(Y) = \{e, f\}$ ,  $f \notin T(M)$ ) Pelo lema 3.3, temos que  $\{X \cup \{e, f\}, Y\}$  é 3-separação de  $M$  onde ambos  $X$  e  $Y$  geram  $\{e, f\}$  em  $M$ . Pelo lema 5.6, temos que  $\min\{r(X), r(Y)\} \geq 5$ , e pelo lema 5.12 temos que  $\min\{t'(M|cl(X)), t'(M|cl(Y))\} \geq 3$ . Este caso vamos subdividir em dois subcasos: (Caso A1) onde os dois outros elementos descobertos de  $M$  estão contidos em  $X$  ou em  $Y$ , e (Caso B1) onde temos um elemento descoberto em  $X$  e outro em  $Y$ .

Caso A1- Sejam  $e'$  e  $e''$  os outros elementos descobertos. Suponhamos que eles estejam em  $X$ . Pelo lema 3.7, existe 2-separação  $\{X', Y'\}$  de  $M/e'$  tal que  $X' \subseteq X$ . Se  $e'' \in X'$ , considere  $M_{X'}$  e  $M_{Y'}$  como na decomposição 1, caso  $cl(X') \cap cl(Y') = \{e'\}$ , ou como na decomposição 2, caso  $cl(X') \cap cl(Y') = \{e', f'\}$ . Como  $M_{X'}$  e  $M_{Y'}$  são binárias, cominimalmente 3-conexas e tem pelo menos um elemento descoberto, cada, temos pelo lema 5.10 que  $t'(M_{X'}) \geq 6$  e  $t'(M_{Y'}) \geq 6$ . Logo  $t'(M|X') \geq 4$  e  $t'(M|Y') \geq 4$ , uma vez que  $t'(M_{X'}) = t'(M|X') + 2$  e  $t'(M_{Y'}) = t'(M|Y') + 2$ . Como  $t'(M) = t'(M|X') + t'(M|Y')$ , temos que  $t'(M) \geq 8$  e o resultado está provado neste caso.

Caso B1- Neste caso, considere  $M_X$  e  $M_Y$  como na decomposição 2. Como  $M_X$  e  $M_Y$  são binárias, cominimalmente 3-conexas e um três elemento descoberto, cada, temos pelo

lema 5.12 que  $t'(M_X) \geq 6$  e  $t'(M_Y) \geq 6$ , logo  $t'(M|X) \geq 4$  e  $t'(M|Y) \geq 4$ , uma vez que  $t'(M_{X'}) = t'(M|X') + 2$  e  $t'(M_{Y'}) = t'(M|Y') + 2$ . Como  $t'(M) = t'(M|X') + t'(M|Y')$ , temos que  $t'(M) \geq 8$  e o resultado está provado neste caso.

Caso2( $cl(X) \cap cl(Y) = \{e, f\}$ ,  $f \in T(M)$ ; ou  $cl(X) \cap cl(Y) = e$ ) Pelo lema 3.3, temos que  $\{X \cup \{e, f\}, Y\}$  é 3-separação de  $M$  onde ambos  $X$  e  $Y$  geram  $\{e, f\}$  em  $M$ . Pelo lema 4.12 (iii),  $\min\{r(X), r(Y)\} \geq 4$ , e pelo lema 5.12 temos que  $\min\{t'(M|cl(X)), t'(M|cl(Y))\} \geq 3$ . Este caso vamos subdividir em dois subcasos: (Caso A2) onde os três outros elementos descobertos de  $M$  estão contidos em  $X$  ou em  $Y$ , e (Caso B2) onde temos um elemento descoberto em  $X$  e os outros dois em  $Y$ , ou vice-versa.

Caso A2- Suponhamos que os elementos descobertos estejam em  $X$ . Seja  $e'$  um destes elementos descobertos. Pelo lema 3.7, existe 2-separação  $\{X', Y'\}$  de  $M/e'$  tal que  $X' \subseteq X$ . Se  $X'$  contiver algum outro elemento descoberto, considere  $M_{X'}$  e  $M_{Y'}$  como na decomposição 1, caso  $cl(X') \cap cl(Y') = \{e'\}$ , ou como na decomposição 2, caso  $cl(X') \cap cl(Y') = \{e', f'\}$ . Como  $M_{X'}$  e  $M_{Y'}$  são binárias, cominimalmente 3-conexas e tem pelo menos um elemento descoberto, cada, temos pelo lema 5.10 que  $t'(M_{X'}) \geq 6$  e  $t'(M_{Y'}) \geq 6$ . Logo,  $t'(M|X') \geq 4$  e  $t'(M|Y') \geq 4$ , uma vez que  $t'(M_{X'}) = t'(M|X') + 2$  e  $t'(M_{Y'}) = t'(M|Y') + 2$ . Como  $t'(M) = t'(M|X') + t'(M|Y')$ , temos que  $t'(M) \geq 8$  e o resultado está provado neste caso. Agora, suponhamos que não temos elementos descobertos em  $X'$ . Então, existe um elemento descoberto  $e'' \in Y' \cap X$ . Neste caso, considere  $M_{Y'}$  como na decomposição 1 caso  $cl(X') \cap cl(Y') = \{e'\}$ , ou como na decomposição 2, caso  $cl(X') \cap cl(Y') = \{e', f'\}$ . Como  $M_{Y'}$  é binária, cominimalmente 3-conexas e tem três elementos descobertos, temos pelo lema 5.8 que  $r(M_{Y'}) \geq 10$ . Assim,  $r(Y') \geq 9$ , uma vez que  $r(M_{Y'}) = r(Y') + 1$ . Se  $r(Y) \geq 7$ , então  $t'(M|Y) \geq 4$ , uma vez que para cada 2 elementos de uma base de  $M|Y$  temos pelo menos um triângulo. Daí, considere  $M_X$  como na como na decomposição 1, caso  $cl(X) \cap cl(Y) = \{e\}$ , ou como na decomposição 2, caso  $cl(X) \cap cl(Y) = \{e, f\}$ . Como  $M_X$  é binária, cominimalmente 3-conexas e tem pelo menos um elemento descoberto, temos pelo lema 5.10 que  $t'(M_X) \geq 6$ . Logo,  $t'(M|X) \geq 4$ , uma vez que  $t'(M_X) = t'(M|X) + 2$ . Como  $t'(M) = t'(M|X) + t'(M|Y)$ , temos que  $t'(M) \geq 8$  e o resultado está provado neste caso. Então, podemos supor que  $4 \leq r(Y) \leq 6$ . Daí, como  $r(Y') \geq 9$  temos que

$$r(cl(Y') \setminus Y) \geq r(Y') - r(Y) + 2 \geq 5.$$

Então, temos pelo menos dois triângulos em  $cl(Y') \setminus Y$ . Daí, temos que

$$t'(M) = t'(M|X') + t'(M|Y) + t'(M|(cl(Y') \setminus Y)) \geq 3 + 3 + 2 = 8.$$

Assim, o resultado vale neste caso.

Caso B2- Neste caso, considere considere  $M_X$  e  $M_Y$  como na decomposição 1, caso  $cl(X) \cap cl(Y) = \{e\}$ , ou como na decomposição 2, caso  $cl(X) \cap cl(Y) = \{e, f\}$ . Como  $M_X$  e  $M_Y$  são binárias, cominimalmente 3-conexas e tem pelo menos um elemento descoberto, cada, temos pelo lema 5.10 que  $t'(M_X) \geq 6$  e  $t'(M_Y) \geq 6$ . Logo,  $t'(M|X) \geq 4$  e  $t'(M|Y) \geq 4$ , uma

vez que  $t'(M_X) = t'(M|X) + 2$  e  $t'(M_Y) = t'(M|Y) + 2$ . Como  $t'(M) = t'(M|X) + t'(M|Y)$ , temos que  $t'(M) \geq 8$  e o resultado também está provado neste caso.  $\square$

## 6 OS TEOREMAS CENTRAIS E OS EXEMPLOS MINIMAIS

Neste capítulo, faremos as demonstrações dos resultados principais, bem como forneceremos uma família infinita de matróides que atinge a cota, em cada resultado.

**Teorema 6.1.** *Seja  $M$  uma matróide binária e cominimalmente 3-conexa, que possui pelo menos 12 elementos. Se  $M$  não for isomorfa à  $A_{14}$ , nem à  $B_{14}$ , nem à  $C_{14}$ , então o número de elementos cobertos por triângulos é maior ou igual a*

$$\frac{2e(M) + 12}{3}.$$

Antes da demonstração deste resultado, vamos dar um exemplo onde o limite é atingido.

Para um inteiro positivo  $n$ , sejam  $M_0, M_1, \dots, M_n$  matróides isomorfas à  $B_9$  tais que

$$|E(M_i) \cap E(M_j)| = \begin{cases} 0 & , \text{ se } |i - j| \geq 2 \\ 3 & , \text{ se } |i - j| = 1 \end{cases}$$

Para  $i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$ , vamos definir  $A_i = E(M_i) - [E(M_{i-1}) \cup E(M_{i+1})]$ . Sejam  $A_{-1}, A_0$  e  $A_n, A_{n+1}$  conjuntos de 3 elementos que particionam, respectivamente,  $E(M_0) - E(M_1)$  e  $E(M_n) - E(M_{n-1})$ , de forma que  $A_{-1}$  e  $A_0$  sejam linhas de  $M_0$ ,  $A_n$  e  $A_{n+1}$  sejam linhas de  $M_n$ ,  $A_i$  e  $E(M_{i-1}) \cap E(M_i)$  sejam linhas de  $M_i$ , para  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Sejam  $C_{-1}, C_0, C_1, \dots, C_n, C_{n+1}$ ,  $E(M_0) \cup E(M_1) \cup \dots \cup E(M_n)$  uma família de conjuntos dois a dois disjuntos. Para todo  $i \in \{-1, 0, 1, 2, \dots, n, n + 1\}$ , suponha  $|C_i| = 8$  e que  $N_i$  seja uma matróide sobre  $(C_i \cup A_i)$  isomorfa à  $A_{11}$  tal que  $A_i$  seja identificada com a linha  $\{e_i, f_i, g_i\}$  de  $M_i$  (aqui estamos supondo que  $e_i, f_i$  e  $g_i$  estão identificados com  $e, f$  e  $g$ , respectivamente, de  $A_{11}$  como no exemplo....). Agora seja  $\tilde{M}$  a conexão paralela generalizada de  $M_0, M_1, \dots, M_n, N_{-1}, N_0, N_1, \dots, N_n, N_{n+1}$ , e finalmente seja  $M = \tilde{M} \setminus \{g_{-1}, g_0, \dots, g_n, g_{n+1}, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ , onde  $x_i \in E(M_i) \cap E(M_{i+1})$ , para  $i \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$ , e  $T(M_0 \setminus \{g_{-1}, g_0, x_0\}) = T(M_n \setminus \{g_n, g_{n+1}, x_{n-1}\}) = T(M_i \setminus \{x_{i-1}, g_i, x_i\}) = \emptyset$ , para  $i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$ .

Antes de mostrarmos que  $M$  é cominimalmente 3-conexa, note que  $T(M) = C_{-1} \cup C_0 \cup C_1 \cup \dots \cup C_n \cup C_{n+1}$ . Assim  $t(M) = 8(n + 3) = 8n + 24$ , pois os únicos elementos que pertencem a triângulos de  $M$  são os elementos dos  $n + 3$   $C_i$ 's os quais têm 8 elementos cada. Temos ainda que  $e(M) = (6n + 6) - 2n + (8n + 24) = 12n + 30$ , onde  $6n + 6$  é referente aos elementos que sobraram das  $M_i$ 's e  $2n$  é referente aos elementos da interseção das  $M_i$ 's, e  $8n + 24$  é referente aos elementos dos  $C_i$ 's. Então,

$$t(M) = 8n + 24 = \frac{2(12n + 30) + 12}{3} = \frac{2e(M) + 12}{3}.$$

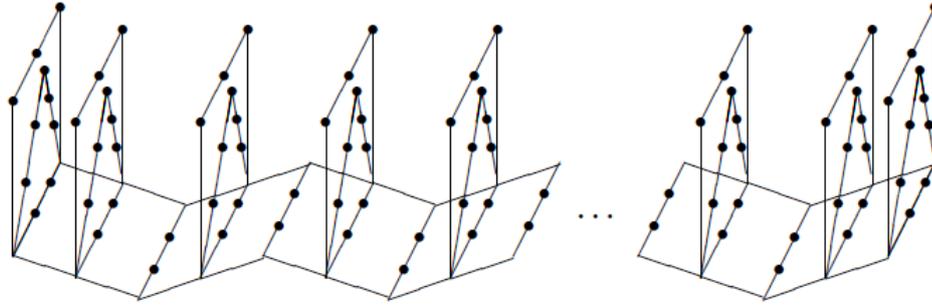
Vejamos agora que  $M$  é cominimalmente 3-conexa. De fato,  $M$  é 3-conexa pois  $M_0, M_1, \dots, M_n, N_{-1}, N_0, \dots, N_n, N_{n+1}$  são 3-conexas e os elementos deletados pertenciam a linhas largas de conexão entre essas matróides. Temos também que  $M$  é cominimalmente 3-conexa, pois ao contraírmos um elemento  $e$  dos  $C'_i$ s criamos um par de elementos em paralelo e assim  $M/e$  não é 3-conexa, para todo  $e \in C_i$ . Se contraírmos um elemento  $e$  das linhas de conexão entre as matróides, tendo em vista que existe uma 3-separação exata  $\{X, E(M) - X\}$  de  $M$  tal que  $X$  e  $E(M) - X$  gerem  $e$ , temos que  $M/e$  não é 3-conexa já que  $\{X - e, E(M/e) - (X - e)\}$  é uma 2-separação de  $M/e$ .

Esta 3-separação é obtida tomando  $X = C_i \cup \{e_i, f_i\}$  se  $e \in \{e_i, f_i\}$  para algum

$$i \in \{-1, 0, 1, \dots, n, n + 1\}, \text{ ou}$$

$X = [E(M_0) \cup E(M_1) \cup \dots \cup E(M_i) \cup E(N_{-1}) \cup E(N_0) \cup \dots \cup E(N_i)] \cap E(M)$  se  $e \in [E(M_i) \cap E(M_{i+1})] \cap E(M)$  para algum  $i \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$ . Vejamos agora que  $X$  é 3-separador exato de  $M$ . De fato, no primeiro caso temos  $r(X) = 5$ ,  $r(E(M) - X) = 15 + 5(n - 1)$  e  $r(M) = 18 + 5(n - 1)$ , daí  $\xi_M(X, E(M) - X) = 2$  e  $X$  é 3-separador exato de  $M$ . No segundo caso, temos que  $r(X) = 10 + 5i$ ,  $r(E(M) - X) = 10 + 5(n - i - 1)$  e  $r(M) = 18 + 5(n - 1)$ , daí  $\xi_M(X, E(M) - X) = 2$  e  $X$  também é 3-separador exato de  $M$ . Então  $M$ , de fato, é cominimalmente 3-conexa.

Veja abaixo uma representação dos triângulos de  $M$ . Aqui, os planos horizontais representam as  $M_i$  e os planos verticais representam as  $N_i$ .



*Demonstração.* Assuma que o resultado é falso. Escolha um contra-exemplo  $M$  tal que  $(r(M), e(M))$  seja minimal com relação a ordem lexicográfica. Em particular,

$$\frac{2e(M) + 12}{3} > t(M). \tag{6.1}$$

Vamos mostrar que  $t(M) \neq e(M)$ . Se  $t(M) = e(M)$ , então por 6.1 teríamos  $(1 - \frac{2}{3})e(M) < \frac{12}{3}$  implicando que  $e(M) \leq 11$ ; uma contradição. Assim, tome  $e \in E(M) \setminus T(M)$  e seja  $\{X, Y\}$  uma 2-separação de  $M/e$ . Do lema 4.11 e pelo fato que  $e$  não está em triângulo temos que  $cl_M(X) \cap cl_M(Y) = \{e, f\}$  ou  $cl_M(X) \cap cl_M(Y) = \{e\}$ . Sendo assim, temos 3 casos:

Caso1-  $cl_M(X) \cap cl_M(Y) = \{e\}$

Caso2-  $cl_M(X) \cap cl_M(Y) = \{e, f\}$  e  $f \in T(M)$

Caso3-  $cl_M(X) \cap cl_M(Y) = \{e, f\}$  e  $f \notin T(M)$

Caso1: Baseados no lema 3.3, vemos que  $\{X \cup e, Y\}$  é 3-separação de  $M$ , onde ambos  $X$  e  $Y$  geram  $e$  em  $M$ . Pelo lema 5.5, temos  $\min\{r(X), r(Y)\} \geq 5$ . Sejam  $M_X$  e  $M_Y$  como na decomposição 1. Observe que  $M_X$  e  $M_Y$  matróides binárias e cominimalmente 3-conexas. Note que

$$e(M_X) + e(M_Y) = e(M) + 9. \quad (6.2)$$

Como  $e \in T(M_X)$  e  $e \in T(M_Y)$  temos que

$$t(M_X) + t(M_Y) = t(M) + 10. \quad (6.3)$$

Agora vamos supor o resultado do teorema válido para ambas  $M_X$  e  $M_Y$ . Assim temos

$$3t(M_X) \geq 2e(M_X) + 12 \quad (6.4)$$

e

$$3t(M_Y) \geq 2e(M_Y) + 12. \quad (6.5)$$

Somando 6.4 e 6.5 obtemos

$$3[t(M_X) + t(M_Y)] \geq 2[e(M_X) + e(M_Y)] + 24. \quad (6.6)$$

Substituindo as equações 6.2 e 6.3 em 6.6 temos

$$3[t(M) + 10] \geq 2[e(M) + 9] + 24$$

donde segue que  $3t(M) \geq 2e(M) + 12$  e assim o resultado seria válido para  $M$ . Então o resultado é falso para  $M_X$  ou  $M_Y$ .

Se  $e(M_X) \geq 15$  e  $e(M_Y) \geq 15$  temos o resultado válido para  $M_X$  e  $M_Y$ , uma vez que  $r(M_X)$  e  $r(M_Y)$  são estritamente menores que  $r(M)$  e  $M$  é um contra-exemplo tal que  $(r(M), e(M))$  é minimal com relação a ordem lexicográfica. Então  $e(M_X) \leq 14$  ou  $e(M_Y) \leq 14$ . Mostremos que o resultado também é válido para  $M_X$  se  $e(M_X) \leq 14$ . De fato:

-Se  $e(M_X) = 14$ , pelo lema 5.3 teríamos que todos os elementos de  $M_X$  são cobertos e o resultado do teorema seria válido para  $M_X$ , ou  $M_X \simeq A_{14}$ , ou  $M_X \simeq B_{14}$ , ou  $M_X \simeq C_{14}$ , mas  $e$  pertence a exatamente dois triângulos de  $M_X$  que não intersectam outros triângulos, o que não ocorre em  $A_{14}$ , nem em  $B_{14}$ , nem em  $C_{14}$ .

-Se  $e(M_X) = 13$ , pelo lema 5.3 teríamos  $t(M_X) = 13$  e o resultado seria válido para  $M_X$ ; um absurdo.

-Se  $e(M_X) = 12$ , pelo lema 5.3 teríamos  $t(M_X) = 12$  e o resultado seria válido para  $M_X$ ; um absurdo.

-Se  $e(M_X) = 11$ , então  $|X| = 6$ . Como  $X$  gera  $e$  em  $M$ ,  $r(X) \geq 4$  e todos os elementos de  $X$  são cobertos, temos que  $X$  é união de dois triângulos disjuntos e segue do lema 5.1 que  $e$  pertence a algum triângulo contido em  $X$ ; um absurdo.

-Se  $e(M_X) \leq 10$ , então  $|X| \leq 5$ . Como todos os elementos são cobertos temos  $r(X) \leq 3$ ; um absurdo, pois pelo lema 5.5 temos que  $r(X) \geq 5$ .

Então, o resultado é válido para  $M_X$  e  $M_Y$ , implicando a validade do resultado para  $M$ ; um absurdo..

Assim, o caso1 não pode acontecer.

Caso2: Pelo lema 3.3, vemos que  $\{X \cup \{e, f\}, Y\}$  é 3-separação de  $M$  onde ambos  $X$  e  $Y$  geram  $\{e, f\}$  em  $M$ . Pelo lema 4.12 (iii), temos  $\min\{r(X), r(Y)\} \geq 4$ . Sejam  $M_X$  e  $M_Y$  como na decomposição 2. Observe que  $M_X$  e  $M_Y$  são binárias e cominimalmente 3-conexas. Note que

$$e(M_X) + e(M_Y) = e(M) + 8. \quad (6.7)$$

Como  $e \in T(M_X)$  e  $e \in T(M_Y)$  temos que

$$t(M_X) + t(M_Y) = t(M) + 9. \quad (6.8)$$

Agora, vamos supor o resultado do teorema válido para ambas  $M_X$  e  $M_Y$ . Assim temos

$$3t(M_X) \geq 2e(M_X) + 12 \quad (6.9)$$

e

$$3t(M_Y) \geq 2e(M_Y) + 12. \quad (6.10)$$

Somando 6.9 e 6.10 obtemos

$$3[t(M_X) + t(M_Y)] \geq 2[e(M_X) + e(M_Y)] + 24. \quad (6.11)$$

Substituindo as equações 6.7 e 6.8 em 6.11 temos que

$$3t(M) \geq 2e(M) + 13 \geq 2e(M) + 12$$

e assim o resultado seria válido para  $M$ . Então, o resultado é falso para  $M_X$  ou  $M_Y$ .

Note que  $r(M_X) \leq r(M) - 1$  e  $r(M_Y) \leq r(M) - 1$ . Assim, se  $e(M_X) \geq 15$  e  $e(M_Y) \geq 15$  teríamos o resultado válido para  $M_X$  e  $M_Y$ , logo válido para  $M$ ; um absurdo. Se  $e(M_X) \leq 14$  e o resultado do teorema é falso para  $M_X$  então pelo lema 5.3, temos como no caso1, que  $M_X \simeq A_{14}$ , ou  $M_X \simeq B_{14}$ , ou  $M_X \simeq C_{14}$ . Assim, teríamos um elemento descoberto em  $X \setminus \{e, f\}$  e  $|cl_M(X)| = 11$ . Sendo assim, seja  $M_X$  como na decomposição 3. Observe que  $M_X$  é uma matróide binária e cominimalmente 3-conexa com 2 elementos descobertos e 17 elementos contrariando o lema 5.7.

Assim, concluímos que o caso 2 também não pode acontecer.

Caso3: Baseados no lema 3.3, vemos que  $\{X \cup \{e, f\}, Y\}$  é 3-separação de  $M$  onde ambos  $X$  e  $Y$  geram  $\{e, f\}$  em  $M$  pelo lema 5.6 temos  $\min\{r(X), r(Y)\} \geq 5$ . Sejam  $M_X$  e  $M_Y$  como na decomposição 4. Observe que  $M_X$  e  $M_Y$  são binárias e cominimalmente

3-conexas com pelo menos 2 elementos descobertos. Assim, pelo lema 5.7 temos que  $\min\{e(M_X), e(M_Y)\} \geq 18$ .

Note que

$$e(M_X) + e(M_Y) = e(M) + 18. \quad (6.12)$$

Como  $\{e, f\} \subseteq E(M_X) \setminus T(M_X)$  e  $\{e, f\} \subseteq E(M_Y) \setminus T(M_Y)$  temos que

$$t(M_X) + t(M_Y) = t(M) + 16. \quad (6.13)$$

Agora, vamos supor o resultado do teorema válido para ambas  $M_X$  e  $M_Y$ . Assim, temos

$$3t(M_X) \geq 2e(M_X) + 12 \quad (6.14)$$

e

$$3t(M_Y) \geq 2e(M_Y) + 12. \quad (6.15)$$

Somando 6.14 e 6.15 obtemos

$$3[t(M_X) + t(M_Y)] \geq 2[e(M_X) + e(M_Y)] + 24. \quad (6.16)$$

Substituindo as equações 6.12 e 6.13 em 6.16 temos

$$3[t(M) + 16] \geq 2[e(M) + 18] + 24$$

donde segue que

$$3t(M) \geq 2e(M) + 12$$

e assim o resultado seria válido para  $M$ . Então, o resultado é falso para  $M_X$  ou  $M_Y$ . Digamos para  $M_Y$ .

Como  $M_Y$  satisfaz as hipóteses do teorema e  $M$  é um contra exemplo tal que  $(r(M), e(M))$  é minimal com relação à ordem lexicográfica segue que  $r(M_Y) \geq r(M)$ . Como  $r(M_Y) = r(Y) + 3$  e  $r(M) = r(X) + r(Y) - 2$  temos  $r(Y) + 3 \geq r(X) + r(Y) - 2$ , daí resulta que  $r(X) \leq 5$ . Assim,  $r(X) = 5$  e  $r(M) = r(M_Y)$ . Logo  $e(M_Y) \geq e(M)$ . Como  $e(M_Y) = |cl(Y)| + 8$  e  $e(M) = |cl(X)| + |cl(Y)| - 2$  segue que  $|cl(Y)| + 8 \geq |cl(X)| + |cl(Y)| - 2$ , daí  $|cl(X)| \leq 10$ . Sendo assim, pelo lema 5.7, temos que  $M_X \simeq A_{18}$  e  $M|cl(X) \simeq A_{11} \setminus g$ . Até o momento, mostramos que para cada  $e_i \in E(M) \setminus T(M)$ , existe um conjunto  $X_{e_i}$  fechado e 3-separador exato de  $M$  tal que  $M|X_{e_i}$  é isomorfa à  $A_{11} \setminus g$  e  $cl(X_{e_i}) \cap cl(E(M) \setminus X_{e_i}) = \{e_i, f_i\}$ , com  $\{e_i, f_i\} \subseteq E(M) \setminus T(M)$ . A partir de agora, provaremos que se  $e_i \neq e_j$  onde  $\{e_i, e_j\} \subseteq E(M) \setminus T(M)$ , temos que  $X_{e_i} \cap X_{e_j} = \emptyset$  ou  $X_{e_i} \cap X_{e_j} = \{e_i, e_j\}$ . De fato, seja  $\{X, Y\}$  uma 2-separação de  $M/e_j$ . Então,  $cl(X) = X_{e_j}$  ou  $cl(Y) = X_{e_j}$ . Primeiramente, suponhamos que  $e_i \in X$ . Assim, pelo lema 3.7 existe 2-separação  $\{X', Y'\}$  de  $M/e_i$ , tal que  $X' \subseteq X$ . Se  $cl(X) = X_{e_j}$  teríamos  $X_{e_i} \subseteq X_{e_j}$ . Como  $X_{e_i}$  e  $X_{e_j}$  são fechados e tem mesmo posto, segue que  $X_{e_i} = X_{e_j}$ , como desejávamos. Logo, podemos supor que  $cl(Y) = X_{e_j}$ . Se  $cl(Y') = X_{e_i}$ , como  $Y \subseteq Y'$  teríamos que  $X_{e_j} \subseteq X_{e_i}$ , daí teríamos

$X_{e_j} = X_{e_i}$ , como queríamos. Então, temos que  $cl(Y) = X_{e_j}$  e  $cl(X') = X_{e_i}$ , daí  $X_{e_i}$  e  $X_{e_j}$  são disjuntos. Agora, vamos supor que  $cl(X) \cap cl(Y) = \{e_i, e_j\}$ . Como  $cl(X) = X_{e_i}$  ou  $cl(Y) = X_{e_i}$ , vamos supor que  $cl(X) = X_{e_i}$ . Temos também que  $cl(X) = X_{e_j}$  ou  $cl(Y) = X_{e_j}$ . Se  $cl(X) = X_{e_j}$ , temos que  $X_{e_i} = X_{e_j}$ . Se  $cl(Y) = X_{e_j}$  temos que  $X_{e_i} \cap X_{e_j} = \{e_i, e_j\}$ . Assim, temos resultado desejado.

Finalmente, note que existem  $e_1, \dots, e_n \in E(M) \setminus T(M)$  tais que  $L_{e_1}, \dots, L_{e_n}$  é uma partição de  $E(M) \setminus T(M)$ , onde  $L_{e_i} = cl(X_{e_i}) \cap cl(E(M) \setminus X_{e_i}) \forall i = 1, \dots, n$ . Logo,  $|E(M) \setminus T(M)| = 2n$ . Como  $X_{e_1}, \dots, X_{e_n}$  são dois a dois disjuntos ou  $X_{e_i} \cap X_{e_j} = \{e_i, e_j\}$ , temos que

$$t(M) = 8(n + r) + x \text{ e } e(M) = 8(n + r) + 2n + x,$$

onde  $x$  é o número de elementos cobertos que não pertencem a  $\bigcup_{e_i \in E \setminus T} X_{e_i}$  e  $r$  é o número de vezes que  $X_{e_i} \cap X_{e_j} = \{e_i, e_j\}$ .

Note que  $r \leq n$ . Como  $M$  é um contra-exemplo para o teorema, segue que

$$3(8n + 8r + x) < 2(10n + 8r + x) + 12,$$

implicando que  $4n + 8r + x < 12$ . Como  $n \geq r$ , temos que  $12r + x < 12$ , e assim,  $r = 0$ , ou seja, todos os  $X_{e_i}$  são disjuntos para  $e_i \in E(M) \setminus T(M)$ . Daí, ficamos com  $4n + x < 12$ . Logo,  $n \leq 2$ .

Se  $n = 2$ , temos  $x \leq 3$ , e assim  $M$  tem pelo menos 23 elementos onde 4 destes são descobertos. Como  $M$  é 3-conexa, devemos ter  $r(M) \leq r(X_{e_1} \cup X_{e_2}) + r(E(M) \setminus (X_{e_1} \cup X_{e_2})) - 2$ , e como  $r(E \setminus (X_{e_1} \cup X_{e_2})) \leq 2$ , temos que  $r(M) \leq r(X_{e_1} \cup X_{e_2}) \leq 10$  o que contraria o lema 5.9, pois para ter pelo menos 4 elementos descobertos deveríamos ter  $r(M) \geq 11$ .

Se  $n = 1$ , temos  $x \leq 7$ , e assim  $M$  teria no máximo 17 e elementos dos quais 2 são descobertos, contrariando o lema 5.7.

Se  $n = 0$  temos  $e(M) = x \leq 11$ ; um absurdo, uma vez que  $e(M) \geq 12$ .

Assim, o resultado do teorema segue. □

Agora, vamos encontrar uma cota para o número de triângulos ( $t'(M)$ ) em uma matróide binária e cominimalmente 3-conexa  $M$ . Note que  $3t'(M) \geq t(M)$ . Então, temos como corolário do teorema 3 que  $t'(M) \geq \frac{2e(M)+12}{9}$ . No teorema a seguir vamos melhorar esta cota.

**Teorema 6.2.** *Seja  $M$  uma matróide binária e cominimalmente 3-conexa, que possui pelo menos 6 elementos. Se  $M$  não for isomorfa à  $A_{12}$ , então o número de triângulos de  $M$  é maior ou igual a*

$$\frac{2e(M) + 14}{9}.$$

Antes da demonstração deste resultado, vamos dar um exemplo onde o limite é atingido.

Para um inteiro positivo  $n$ , sejam  $M_0, M_1, \dots, M_n$  matróides isomorfas à  $B_9$  tais que

$$|E(M_i) \cap E(M_j)| = \begin{cases} 0 & , \text{ se } |i - j| \geq 2 \\ 3 & , \text{ se } |i - j| = 1 \end{cases}$$

Para  $i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$ , vamos definir  $A_i = E(M_i) - [E(M_{i-1}) \cup E(M_{i+1})]$ . Sejam  $A_{-1},$

$A_0$  e  $A_n, A_{n+1}$  conjuntos de 3 elementos que particionam, respectivamente,  $E(M_0) - E(M_1)$  e  $E(M_n) - E(M_{n-1})$ , de forma que  $A_{-1}$  e  $A_0$  sejam linhas de  $M_0$ ,  $A_n$  e  $A_{n+1}$  sejam linhas de  $M_n$ ,  $A_i$  e  $E(M_{i-1}) \cap E(M_i)$  sejam linhas de  $M_i$ , para  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Sejam  $C_{-1}, C_{n+1}$  e  $E(M_0) \cup E(M_1) \cup \dots \cup E(M_n)$  conjuntos dois a dois disjuntos. Para

todo  $i \in \{-1, n + 1\}$ , suponha  $|C_i| = 9$  e que  $N_i$  seja uma matróide sobre  $(C_i \cup A_i)$  isomorfa à  $A_{12}$ . Agora seja  $\tilde{M}$  a conexão paralela generalizada de  $M_0, M_1, \dots, M_n, N_{-1}$  e  $N_{n+1}$ . Finalmente seja  $M = \tilde{M} \setminus \{h_{-1}, h_{n+1}, f_1, g_1, f_3, g_3, \dots, f_n, g_n, h_2, h_4, \dots, h_{n-1}\}$ , onde

$\{f_i, g_i\} \subseteq E(M_i) \cap E(M_{i+1})$ , para  $i \in \{0, 2, 4, \dots, n - 1\}$ ,  $h_i \in E(M_i) \cap E(M_{i+1})$ , para

$i \in \{1, 3, 5, \dots, n - 2\}$ ,  $h_{-1} \in A_{-1}$ ,  $h_{n+1} \in A_{n+1}$ ,  $T(M_0 \setminus \{h_{-1}, f_1, g_1\}) = A_0$ ,

$T(M_n \setminus \{h_{n+1}, f_n, g_n\}) = A_n$ ,  $T(M_i \setminus \{h_{i+1}, f_i, g_i\}) = A_i$  se  $i$  é ímpar, e

$T(M_i \setminus \{h_i, f_{i+1}, g_{i+1}\}) = A_i$  se  $i$  é par.

Note que  $T(M) = C_{-1} \cup C_{n+1} \cup A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_{n-1} \cup A_n$ . Como todos os triângulos de

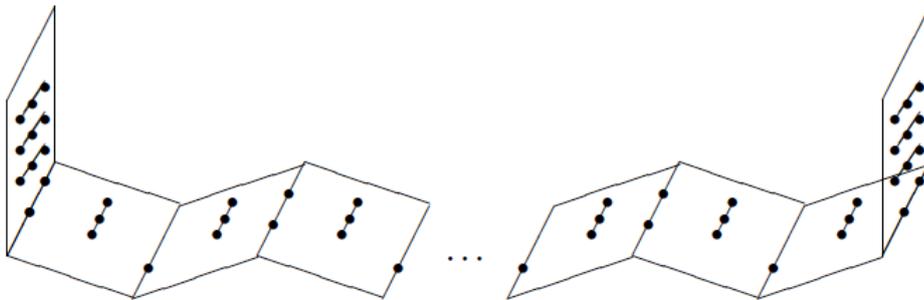
$M$  são disjuntos temos que  $t'(M) = 7 + n$ . Note ainda, que  $e(M) = 29 + 9 \cdot \frac{n-1}{2}$ . Então,

$$t'(M) = n + 7 = \frac{2(29 + 9 \cdot \frac{n-1}{2}) + 14}{9} = \frac{2e(M) + 14}{9}.$$

Assim,  $M$  atinge a cota do teorema.

Fazendo uma análise análoga a do exemplo do teorema 6, vemos que  $M$  é cominimalmente 3-conexa.

Veja abaixo uma figura que ilustra os triângulos de  $M$ . Aqui, os planos horizontais representam as  $M_i$  e os planos verticais representam as  $N_i$ .



*Demonstração.* Assuma que o resultado é falso. Escolha um contra-exemplo  $M$  tal que  $t'(M)$  seja mínimo e  $e(M)$  seja máximo. Em particular,

$$\frac{2e(M) + 14}{9} > t'(M). \tag{6.17}$$

Vamos mostrar que  $t(M) \neq e(M)$ . Se  $t(M) = e(M)$ , então por 6.17 teríamos  $(1 - \frac{2}{9})e(M) < \frac{14}{9}$  implicando que  $e(M) \leq 1$ ; uma contradição. Assim, tome  $e \in E(M) \setminus T(M)$  e seja  $\{X, Y\}$  uma 2-separação de  $M/e$ . Do lema 4.11 e pelo fato que  $e$  não está em triângulo, temos que  $cl_M(X) \cap cl_M(Y) = \{e, f\}$  ou  $cl_M(X) \cap cl_M(Y) = \{e\}$ . Sendo assim, temos 2 casos:

Caso1-  $cl_M(X) \cap cl_M(Y) = \{e\}$

Caso2-  $cl_M(X) \cap cl_M(Y) = \{e, f\}$

Caso1: Baseados no lema 3.3, vemos que  $\{X \cup e, Y\}$  é 3-separação de  $M$  onde ambos  $X$  e  $Y$  geram  $e$  em  $M$ . Pelo lema 5.5, temos  $\min\{r(X), r(Y)\} \geq 5$ . Sejam  $M_X$  e  $M_Y$  como na decomposição 5. Observe que  $M_X$  e  $M_Y$  matrôides binárias e cominimalmente 3-conexas.

Note que

$$e(M_X) + e(M_Y) = e(M) + 11. \quad (6.18)$$

Observe ainda que

$$t'(M_X) + t'(M_Y) = t'(M) + 4. \quad (6.19)$$

Agora, vamos supor o resultado do teorema válido para ambas  $M_X$  e  $M_Y$ . Assim temos

$$9t'(M_X) \geq 2e(M_X) + 14 \quad (6.20)$$

e

$$9t'(M_Y) \geq 2e(M_Y) + 14. \quad (6.21)$$

Somando 6.20 e 6.21 obtemos

$$9[t'(M_X) + t'(M_Y)] \geq 2[e(M_X) + e(M_Y)] + 28. \quad (6.22)$$

Substituindo as equações 6.18 e 6.19 em 6.22 temos

$$9[t'(M) + 4] \geq 2[e(M) + 11] + 28$$

donde segue que  $9t(M) \geq 2e(M) + 14$  e assim o resultado seria válido para  $M$ . Então o resultado é falso para  $M_X$  ou  $M_Y$ .

Se  $e(M_X) \geq 13$  e  $e(M_Y) \geq 13$  temos o resultado válido para  $M_X$  e  $M_Y$ , uma vez que pelo lema 5.12,  $t'(M_X)$  e  $t'(M_Y)$  são estritamente menores que  $t'(M)$  e  $M$  é um contra-exemplo tal que  $t'(M)$  é mínimo. Então  $e(M_X) \leq 12$  ou  $e(M_Y) \leq 12$ . Mostremos que o resultado também é válido para  $M_X$  se  $e(M_X) \leq 12$ . De fato:

-Se  $e(M_X) = 12$ , pelo lema 5.3 teríamos que todos os elementos de  $M_X$  são cobertos. Assim, pelo lema 5.11 temos que  $M_X \simeq A_{12}$ . Desta forma,  $X$  seria um conjunto formado por dois triângulos disjuntos. Então pelo lema 5.1 temos que  $e \in T(M)$ ; um absurdo.

-Se  $e(M_X) \leq 11$ , pelo lema 5.11 teríamos  $t'(M_X) \geq 4$  e o resultado seria válido para  $M_X$ . Então, o resultado é válido para  $M_X$  e  $M_Y$ , implicando a validade do resultado para  $M$ ; um absurdo.

Assim o caso1 não pode acontecer.

Caso2: Pelo lema 3.3, vemos que  $\{X \cup \{e, f\}, Y\}$  é 3-separação de  $M$  onde ambos  $X$  e  $Y$  geram  $\{e, f\}$  em  $M$ . Pelo lema 4.12 (iii), temos  $\min\{r(X), r(Y)\} \geq 4$ . Sejam  $M_X$  e  $M_Y$  como na decomposição 6. Observe que  $M_X$  e  $M_Y$  são binárias e cominimalmente 3-conexas. Note que

$$e(M_X) + e(M_Y) = e(M) + 20. \quad (6.23)$$

Note ainda, que

$$t'(M_X) + t'(M_Y) = t'(M) + 6. \quad (6.24)$$

Agora, vamos supor o resultado do teorema válido para ambas  $M_X$  e  $M_Y$ . Assim temos

$$9t'(M_X) \geq 2e(M_X) + 14 \quad (6.25)$$

e

$$9t'(M_Y) \geq 2e(M_Y) + 14. \quad (6.26)$$

Somando 6.25 e 6.26 obtemos

$$9[t'(M_X) + t'(M_Y)] \geq 2[e(M_X) + e(M_Y)] + 28. \quad (6.27)$$

Substituindo as equações 6.23 e 6.24 em 6.27 temos que

$$9t'(M) \geq 2e(M) + 14$$

e assim o resultado seria válido para  $M$ . Então o resultado é falso para  $M_X$  ou  $M_Y$ . Como  $M_Y$  satisfaz as hipóteses do teorema e  $M$  é um contra exemplo tal que  $t'(M)$  é mínimo segue que  $t'(M_Y) \geq t'(M)$ . Como  $t'(M_Y) = t'(M|Y) + 3$  e  $t'(M) = t'(M|X) + t'(M|Y)$  temos  $t'(M|Y) + 3 \geq t'(M|X) + t'(M|Y)$ , daí resulta que  $t'(M|X) \leq 3$ . Assim, pelo lema 5.12 temos que  $t'(M|X) = 3$ . Agora, vamos mostrar que todos os elementos de  $X$  são cobertos em  $M$ . Suponha que existe um elemento descoberto em  $X$ . Sendo assim, considere  $M_X$  como na decomposição 2. Como  $M_X$  é cominimalmente 3-conexa, temos pelo lema 5.10 que  $t'(M_X) \geq 6$ . Assim,  $t'(M|X) \geq 4$ ; um absurdo. Como  $e(M)$  é máximo devemos ter que  $X$  é a união disjunta de três triângulos. Logo,  $M|cl(X) \simeq A_{12} \setminus a$ , onde  $a$  é um elemento qualquer de  $A_{12}$ .

Até o momento, mostramos que para cada  $e_i \in E(M) \setminus T(M)$ , existe um conjunto  $X_{e_i}$  fechado e 3-separador exato de  $M$  tal que  $M|X_{e_i}$  é isomorfa à  $A_{12} \setminus a$  e  $cl(X_{e_i}) \cap cl(E(M) \setminus X_{e_i}) = \{e_i, f_i\}$ . A partir de agora, provaremos que se  $e_i \neq e_j$  onde  $\{e_i, e_j\} \subseteq E(M) \setminus T(M)$ , temos que  $X_{e_i} \cap X_{e_j} = \emptyset$  ou  $X_{e_i} \cap X_{e_j} = \{e_i, e_j\}$ . De fato, seja  $\{X, Y\}$  uma 2-separação de  $M/e_j$ . Então,  $cl(X) = X_{e_j}$  ou  $cl(Y) = X_{e_j}$ . Primeiramente suponhamos que  $e_i \in X$ . Assim, pelo lema 3.7 existe 2-separação  $\{X', Y'\}$  de  $M/e_i$ , tal que  $X' \subseteq X$ . Se  $cl(X) = X_{e_j}$  teríamos  $X_{e_i} \subseteq X_{e_j}$ . Como  $X_{e_i}$  e  $X_{e_j}$  são fechados e tem mesmo posto, segue

que  $X_{e_i} = X_{e_j}$ , como desejávamos. Logo, podemos supor que  $cl(Y) = X_{e_j}$ . Se  $cl(Y') = X_{e_i}$ , como  $Y \subseteq Y'$  teríamos que  $X_{e_j} \subseteq X_{e_i}$ , daí teríamos  $X_{e_j} = X_{e_i}$ , como queríamos. Então, temos que  $cl(Y) = X_{e_j}$  e  $cl(X') = X_{e_i}$ , daí  $X_{e_i}$  e  $X_{e_j}$  são disjuntos. Agora, vamos supor que  $cl(X) \cap cl(Y) = \{e_i, e_j\}$ . Como  $cl(X) = X_{e_i}$  ou  $cl(Y) = X_{e_i}$ , vamos supor que  $cl(X) = X_{e_i}$ . Temos também que  $cl(X) = X_{e_j}$  ou  $cl(Y) = X_{e_j}$ . Se  $cl(X) = X_{e_j}$ , temos que  $X_{e_i} = X_{e_j}$ . Se  $cl(Y) = X_{e_j}$  temos que  $X_{e_i} \cap X_{e_j} = \{e_i, e_j\}$ . Assim, temos o resultado desejado.

Finalmente, note que existem  $e_1, \dots, e_n \in E(M) \setminus T(M)$  tais que  $L_{e_1} \setminus T(M), \dots, L_{e_n} \setminus T(M)$  é uma partição de  $E(M) \setminus T(M)$ , onde  $L_{e_i} = cl(X_{e_i}) \cap cl(E(M) \setminus X_{e_i}) \forall i = 1, \dots, n$ . Logo,  $|E(M) \setminus T(M)| = 2a + b$ , onde  $a$  representa os  $X_{e_i}$  que tem dois elementos descobertos e  $b$  representa os  $X_{e_i}$  que tem apenas um elemento descoberto. Note que  $a + b = n$ . Como  $X_{e_1}, \dots, X_{e_n}$  são dois a dois disjuntos ou  $X_{e_i} \cap X_{e_j} = \{e_i, e_j\}$ , temos que

$$t'(M) \geq 3(n + r) + \frac{x + b}{3} \text{ e } e(M) = 9(n + r) + 2n + x,$$

onde  $x$  é o número de elementos cobertos que não pertencem a  $\bigcup_{e_i \in E \setminus T} X_{e_i}$  e  $r$  é o número de vezes que  $X_{e_i} \cap X_{e_j} = \{e_i, e_j\}$ .

Note que  $r \leq n$ . Como  $M$  é um contra-exemplo para o teorema, segue que

$$9(3n + 3r + \frac{x + b}{3}) < 2(11n + 9r + x) + 14,$$

implicando que  $5n + 9r + 3b + x < 14$ . Como  $n \geq r$ , temos que  $14r + 3b + x < 14$ , e assim,  $r = 0$ , ou seja, todos os  $X_{e_i}$  são disjuntos para  $e_i \in E(M) \setminus T(M)$ . Daí, ficamos com  $5a + 8b + x < 14$ . Logo,  $b \leq 1$ .

Se  $b = 1$ , temos  $a \leq 1$ . Se  $a = 1$ , então  $x = 0$ , e temos que  $\{X_{e_1}, X_{e_2}\}$  é partição de  $E(M)$ , e daí teríamos  $cl(X_{e_1}) \cap cl(X_{e_2}) = \{e_1, e_2\}$ ; um absurdo, já que  $X_{e_1}$  e  $X_{e_2}$  são fechados. Se  $a = 0$ , então  $x \leq 5$ . Assim teríamos  $t'(M) \geq 5$ ; contrariando o lema 5.10. Então,  $b = 0$ . Logo,  $a \leq 2$ .

Se  $a = 2$ , temos  $x \leq 3$ . Se  $x = 3$  temos que  $t'(M) \geq 7$ . Caso  $t'(M) \geq 8$  temos o resultado válido para  $M$ , pois  $e(M) = 25$ . Caso  $x = 3$  e  $t'(M) = 7$ , temos 4 elementos descobertos em  $M$ , daí pelo lema 5.13, temos que  $t'(M) \geq 8$ ; um absurdo. Se  $2 \leq x \leq 3$  temos que  $t'(M) \geq 7$  e assim teríamos o resultado válido para  $M$ . Se  $x = 0$  temos que  $\{X_{e_1}, X_{e_2}\}$  é partição de  $E(M)$  e daí teríamos  $X_{e_1} \cap X_{e_2} = \{e_1, e_2\}$ ; um absurdo, já que  $X_{e_1}$  e  $X_{e_2}$  são fechados.

Se  $a = 1$ , temos  $x \leq 8$ , e assim teríamos pelo lema 5.10 que  $t'(M) \geq 6$ . Daí o resultado do teorema valeria para  $M$ , uma vez que  $M$  teria no máximo 19 elementos.

Se  $a = 0$  temos que  $x \leq 13$ . Se  $x = 13$  teríamos  $t'(M) \geq 5$ , uma vez que pelo lema 5.3 todos os elementos de  $M$  são cobertos, e assim o resultado valeria para  $M$ . Se  $x = 12$  temos que  $M \simeq A_{12}$ ; um absurdo, pois o resultado do teorema não vale para  $M$ . Se  $x \leq 11$  teríamos o resultado válido para  $M$ , uma vez que pelo lema 5.11, temos que  $t'(M) \geq 4$ . Assim, temos a validade do teorema.  $\square$

# REFERÊNCIAS

- 1 DIRAC, G. A. Minimally 2-connected graphs. *J. reine angew. Math*, v. 228, n. 204216, p. 2, 1967.
- 2 HALIN, R. Untersuchungen über minimalen-fach zusammenhängende graphen. *Mathematische Annalen*, Springer, v. 182, n. 3, p. 175–188, 1969.
- 3 MADER, W. Ecken vom gradn in minimalenn-fach zusammenhängenden graphen. *Archiv der Mathematik*, Springer, v. 23, n. 1, p. 219–224, 1972.
- 4 REID, T. J.; WU, H. On elements in small cocircuits in minimally k-connected graphs and matroids. *Discrete mathematics*, Elsevier, v. 243, n. 1-3, p. 273–282, 2002.
- 5 MURTY, U. S. Extremal critically connected matroids. *Discrete Mathematics*, Elsevier, v. 8, n. 1, p. 49–58, 1974.
- 6 OXLEY, J. G. On matroid connectivity. *The Quarterly Journal of Mathematics*, Oxford University Press, v. 32, n. 2, p. 193–208, 1981.
- 7 LEO, J. W. Triads and triangles in 3-connected matroids. *Discrete mathematics*, Elsevier, v. 194, n. 1-3, p. 173–193, 1999.
- 8 LEMOS, M. Elements belonging to triads in 3-connected matroids. *Discrete mathematics*, Elsevier, v. 285, n. 1, p. 167–181, 2004.
- 9 LEMOS, M. On the number of triangles in 3-connected matroids. *European Journal of Combinatorics*, Elsevier, v. 28, n. 3, p. 931–941, 2007.
- 10 SEYMOUR, P. D. Decomposition of regular matroids. *Journal of combinatorial theory, Series B*, Elsevier, v. 28, n. 3, p. 305–359, 1980.