UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Thiago Dias Oliveira Silva

Finitude Genérica de Configurações Centrais de Dimensão $n-2$ em Potenciais Homogêneos com Expoentes Inteiros

Recife
2013

Thiago Dias Oliveira Silva

Finitude Genérica de Configurações Centrais de Dimensão $n-2$ em Potenciais Homogêneos com Expoentes Inteiros

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Leandro

Recife

2013

Catalogação na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

S586f Silva, Thiago Dias Oliveira
Finitude genérica de configurações centrais de dimensão n-2 em potenciais homogêneos com expoentes inteiros / Thiago Dias Oliveira Silva. – 2013.
70 f.

Orientador: Eduardo Shirlippe Góes Leandro.
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, Recife, 2013.
Inclui referências.

1. Matemática. 2. Configurações centrais. I. Leandro, Eduardo Shirlippe Góes (orientador). II. Título.

510 CDD (23. ed.) UFPE- MEI 2017-166

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Doutorado em Matemática.

Aprovado: ____

Eduardo Shirlippe Goes Leandro, *UFPE*

Orientador

Hildeberto Eulálio Cabral, *UFPE*

Seyed Hamid Hassanzadeh Hafshejane, *UFPE*

Israel Vainsencher, *UFMG*

Jean Fernandes Barros, *UEFS*

FINITUDE GENÉRICA DE CONFIGURAÇÕES CENTRAIS DE DIMENSÃO N-2 EM POTENCIAIS HOMOGÊNEOS COM EXPOENTES INTEIROS

Por

Thiago Dias Oliveira Silva

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126.8415– Fax: (081) 2126.8410
RECIFE – BRASIL
Junho - 2013

Dedico este trabalho ao meu pai Gastão Oliveira que é o meu maior professor.

AGRADECIMENTOS

À meus amigos e familiares agradeço por terem torcido pelo meu sucesso e por terem compreendido minha ausência em momentos importantes. Ao meu orientador, Eduardo Leandro, agradeço pela orientação precisa em todos os momentos da confecção deste trabalho. Tambám agradeço aos membros da banca Hildeberto Cabral, Israel Vainsencher, Seyed Hamid e Jean Fernades pelas sugestões e conselhos que aperfeiçoaram o meu trabalho. À Tania Maranhão, secretária da pós-graduação em Matemática da UFPE, agradeço por ter me auxiliado com extrema eficiência em todas as tarefas burocráticas relacionadas ao meu doutorado. Por fim, posso deixar de agradecer aos rofessores Stenio Oliveira, Tetsuo Usui, Cleide Martins, Airton Castro, Antonio Carlos, Aron Simis, Cesar Castilho, Sergio Santa Cruz, Lucas Catão e Giuseppe Borelli por terem propiciado os momentos e ensinamentos mais importantes da minha formação.

Thiago Dias Oliveira Silva

RESUMO

Configurações centrais são objetos muito importantes em Mecânica Celeste por serem condições iniciais das únicas soluções explícitas conhecidas do problema de n corpos. No capítulo 1, formulamos o conceito de configuração central em potenciais homogêneos com expoentes inteiros, e discutimos algumas de suas propriedades básicas. Também enunciamos os principais resultados sobre finitude de configurações centrais existentes na literatura. No capítulo 2, realizamos um estudo detalhado das configurações centrais de dimensão $n-2$. A maior parte dos resultados presentes nesse estudo foram obtidos em (1). Inspirados por este trabalho, realizamos um estudo inédito sobre as configurações de dimensão $n-3$ apresentado nas seções 2.6 e 2.7. Na seção 2.8, provamos um critério para determinar a dimensão de uma configuração que depende unicamente das distancias mútuas entre os pontos. No capítulo 3, fazemos uma exposição sucinta dos resultados da Geometria Algébrica utilizados para obter o resultado de finitude. No capítulo 4, provamos que para uma escolha genérica de massas reais $m_1, \ldots, m_n$ positivas, o número de configurações centrais de dimensão $n-2$ com potencial homogêneo de expoente inteiro é finito. Para tanto, utilizamos as equações polinomiais para configurações centrais de dimensão $n-2$ que obtivemos no capítulo 2 para definir um conjunto algébrico quasi-afim que, em certo sentido, contém todas as configurações centrais de dimensão $n-2$. Demonstramos que esse conjunto algébrico é não-singular e têm dimensão $n-1$. Em seguida, interpretamos as configurações centrais de dimensão $n-2$ como fibras de uma projeção no espaço das massas. Por fim, mostramos que para uma escolha "genérica" de massas reais as fibras da nossa aplicação projeção são finitas.

Palavras-chave: Configurações Centrais. Critério Jacobiano. Matriz de Cayley-Menger. Teorema da Dimensão das Fibras. Aplicações Regulares.

ABSTRACT

Central configurations are very important objects in Celestial Mechanics because they are the initial conditions of the only known explicit solutions to the n body problem. In the fist chapter, we formulate the concept of central configuration with homogeneous potentials and integer exponents, and discuss some of its basic properties. We also enunciate the main results on finitude of central configurations presented in the literature. In the second chapter, we present a detailed study of the central settings of dimension $n-2$. The most of the results present in this study were obtained in (1). Inspired by this work, we conducted a new study on the $n-3$ dimensional configurations presented in sections 2.6 and 2.7. In the section 2.8 , we prove a criterion for determining the dimension of a configuration that only depends on the mutual distances between the points. In the chapter 3, we make a brief exposition of the results of the Algebraic Geometry used in order to obtain the result of finitude. In chapter 4, we prove that for a generic choice of positive real masses $m_1,...,m_n$, the number of $(n-2)-$dimensional central configurations with homogeneous potential and integer exponent is finite. In order to proof it, we use the polynomial equations for the central configurations of dimension $n-2$ that we obtained in the chapter 2 to define a quasi-affine algebraic set that, in a certain sense, contains all the central configurations of dimension $n-2$. We show that this algebraic set is non-singular and has dimension $n-1$. Then we interpret the central configurations of $n-2$ dimension as fibers of a projection in mass space. Finally, we show that for a " generic " choice of real masses, the fibers of our projection are finite.

Keywords: Central Configurations. Jacobian criterion. Cayley-Menge Matrix. Fiber Dimension Theorem. Regular Aplications.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Considere n corpos pontuais com massas $m_1,...,m_n \in \mathbb{R}$ e posições $x_1,...,x_n \in \mathbb{R}^d$. Suponha que as equações do movimento dos corpos são dadas por:

$$m_i\ddot{x}_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} m_i m_j (x_j - x_i)\|x_i - x_j\|^{2a} = \frac{\partial U}{\partial x_i},\ i = 1,...,n, \tag{1.1}$$

onde $a \in \mathbb{R}$ e

$$U = \frac{1}{2a+2}\sum_{1\leq i<j\leq n} m_i m_j \|x_i - x_j\|^{2a+2},\ \text{se } a \neq -1,\ \text{ou} \tag{1.2}$$

$$U = \sum_{1\leq i<j\leq n} m_i m_j \log\|x_i - x_j\|,\ \text{se } a = -1. \tag{1.3}$$

O vetor $x = (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^{dn}$ é denominado *configuração*. Se $x_1,...,x_n \in \mathbb{R}^d$, com $d = 1, 2$ ou 3, dizemos que a configuração x é colinear, planar ou espacial, respectivamente. Por simplicidade, definiremos as quantidades

$$\gamma_i = \sum_{j\neq i} m_j R_{ij}(x_j - x_i) \tag{1.4}$$

onde

$$R_{ij} = R_{ji} = \|x_j - x_i\|^{2a}, \tag{1.5}$$

de modo que as equações (1.1) tomam a seguinte forma:

$$\ddot{x}_i - \gamma_i = 0,\ i = 1,...,n. \tag{1.6}$$

O valor de a tem um papel importantíssimo na dinâmica desse sistema de equações diferenciáveis. Por exemplo, se $a = \frac{-3}{2}$, obtemos o problema Newtoniano de n corpos. Se $d = 2$ e $a = -1$, passamos ao problema de n vórtices. Porém, como veremos adiante, neste trabalho não estaremos interessados em problemas dinâmicos e sim em problemas estáticos. Nesse contexto, o valor de a não afetará nossa análise substancialmente. Outra observação importante é sobre as hipóteses de trabalho para as massas dos corpos: No problema de n corpos, usualmente supomos que todas as massas m_i são positivas, enquanto que no problema de n vórtices as quantidades m_i podem ser negativas. Desse modo, seguindo (2), nesta seção não faremos nenhuma restrição para a escolha das massas m_1,...,m_n.

A quantidade $M = m_1 + ... + m_n$ é a *massa total* do sistema. Quando $M \neq 0$ podemos definir

$$c = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{M},$$

o *centro de massa* do sistema (1.1).

Quando $n > 2$ acredita-se que esse sistema de equações diferenciáveis não é integrável no sentido clássico (ou seja, não é conhecida quantidade suficiente de integrais primeiras para o sistema). Entretanto, existe uma classe de soluções para o problema de n corpos que é constante a menos de simetrias e reescala. Tais soluções são conhecidas como soluções homográficas. Consulte (3, cap. 2).

Uma configuração x é chamada de *configuração central* se existirem vetor γ, um ponto x_0 e um escalar $\lambda \neq 0$ tal que:

$$\gamma_i - \gamma = \lambda(x_i - x_0), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.7}$$

O conjunto das configurações centrais é invariantes módulo isometrias e homotetias. Portanto é natural considerar o espaço das configurações centrais módulo essas transformações. A teoria de configurações centrais apresenta muitos problemas em aberto. Talvez o mais importante destes seja o seguinte:

"Considere n corpos pontuais com massas positivas $m_1, \ldots, m_n$. É finito o número de configurações centrais correspondentes? "

Este problema foi proposto inicialmente em (4), consta no livro de Mecânica Celeste (5) e foi incluído por S.Smale em sua lista de problemas para os matemáticos desse século publicada em (6). Atualmente este problema é conhecido como conjectura de Chazy-Wintner-Smale.

Neste texto resolveremos uma versão "genérica" da conjectura de Chazy-Wintner-Smale em um caso particular. A nossa estratégia de trabalho consiste em estudar propriedades das configurações utilizando a dimensão com invariante. Falta definir a noção de dimensão de uma configuração.

Seja $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{dn}$ uma configuração. A *dimensão*, $\delta(x)$ de uma configuração é o mínimo das dimensões dos espaços afins que contêm as posições $x_1, \ldots, x_n$.

O que nos motiva a utilizar a dimensão como invariante é a existência de resultados gerais, obtidos fixando a dimensão da configuração:

- Euler mostrou que, para cada tripla de massas positiva, existe uma única configuração de 3 corpos e dimensão 1, a menos de ordenação das massas. Posteriormente, Moulton provou que existe uma única configuração colinear de n corpos. Essas configurações ficaram conhecidas como *Configurações de Moulton*. Consulte (7) e (8).

- Em (9) Lagrange provou que para cada escolha de massas positivas m_1, m_2 e m_3, a única configuração central planar com 3 corpos é o triângulo equilátero. Mais geralmente, se x é uma configuração central com $\delta(x) = n-1$, o problema está completamente resolvido: a única configuração central, a menos de isometrias e homotetias, é o simplexo regular. Uma demonstração para este fato pode ser encontrada em (2).

- Em (10) Moeckel e Hamptom provaram que uma quantidade finita de configurações centrais planares com 4 corpos.

- Em (11) Albouy e Kaloshin provaram que que existem polinômios $p_1,...,p_k \in \mathbb{C}[x_1,...,x_5]$ tais que, se escolhermos massas $m_1,...,m_5$ que não pertencem ao conjunto-solução do sistema
$$p_1 = ... = p_k = 0,$$
teremos uma quantidade finita de configurações centrais planares de 5 corpos correspondentes.

- Em (1) Moeckel provou que existem polinômios $f_1,...,f_l \in \mathbb{C}[x_1,...,x_n]$ tais que se escolhermos massas $m_1,...,m_n$ que não pertencem ao conjunto solução do sistema polinomial
$$f_1 = ... = f_l = 0$$
teremos uma quantidade finita de configurações centrais de n corpos e dimensão $\delta(x) = n-2$ (Note que esta não é uma generalização do item anterior).

Seja x uma configuração de n corpos com massas não-nulas. Dizemos que x é uma *configuração central de Dziobek* se existe um vetor não-nulo $\Delta = (\Delta_1,...,\Delta_n) \in \mathbb{R}^n$ e $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2$ tais que:

$$\Delta_1 + ... + \Delta_n = 0 \tag{1.8}$$
$$\Delta_1 x_1 + ... \Delta_n x_n = 0 \tag{1.9}$$
$$S_{ij} := \|x_i - x_j\|^{2a} = \xi + \eta z_i z_j \quad \text{com} \quad z_k = \frac{\Delta_k}{m_k} \tag{1.10}$$

Estas equações foram obtidas em (12) e serão importantes neste trabalho por serem polinomiais na variavéis z. No próximo capítulo deduziremos que toda configuração central x com $\delta(x) = n-2$ é de Dziobek, embora a recíproca desse resultado não seja verdadeira quando a massa total do sistema M for nula. Em (2, p. 128-129) existe uma bela exposição sobre esse tema.

2 CONFIGURAÇÕES CENTRAIS

Neste capítulo, demonstraremos resultados básicos da teoria de configurações centrais, associaremos a uma configuração $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{dn}$ duas matrizes especiais, denominadas *matriz da configuração* e *matriz de Cayley-Menger*. Utilizando essas matrizes, obteremos equações polinomiais para configurações centrais, em especial, configurações de dimensão $\delta(x) = n-2$ e $\delta(x) = n-3$. Essa formulação polinomial para as configurações permitirá a utilização de resultados da geometria algébrica clássica para a resolução de casos particulares da conjectura de Chazy-Wintner-Smale. Boa parte dos resultados obtidos valem para uma configuração de pontos x não necessariamente central.

2.1 Resultados Básicos da Teoria de Configurações Centrais

Iniciaremos esta seção reformulando a definição de configuração central. Mais precisamente, demosntraremos que quando a massa total do sistema for diferente de zero, podemos determinar explicitamente os vetores de γ_0 e x_0 na definição 1.

Proposição 2.1. *Suponha que $M = m_1 + ... + m_n \neq 0$. Então x é configuração central se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\gamma_i = \lambda(x_i - c), \quad i = 1, ..., n. \tag{2.1}$$

Basta provar que a ida da proposição, pois a volta é trivial. Observe que

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \gamma_i = 0. \tag{2.2}$$

De fato, pela equação (1.4),

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \gamma_i = \sum_{i<j} m_i m_j (R_{ij}(x_i - x_j) + R_{ji}(x_j - x_i)) = 0,$$

uma vez que todas as parcelas do somatório do segundo membro da equação anterior são não-nulas.

Suponha que $\lambda = 0$ na definição de configuração central. Então, $\gamma_1 = \gamma_0$. Pela equação (2.2) temos:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} m_i(\gamma_i - \gamma_0) = \sum_{i=1}^{n} m_i \gamma_i + M\gamma_0 = M\gamma_0.$$

Como $M \neq 0$, $\gamma_0 = 0$. Desse modo, a equação $\gamma_i = \lambda(x_i - c)$ é satisfeira.

Se $\lambda \neq 0$, então

$$\gamma_i = \lambda \left[x_i - \left(x_0 - \frac{\gamma_0}{\lambda} \right) \right]. \tag{2.3}$$

Defina $q = q_0 - \frac{\gamma_0}{\lambda}$. Substituindo na equação acima obtemos $\gamma_i = \lambda(x_i - q)$. Utilizando novamente a equação (2.2), obtemos:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} m_i \gamma_i = \lambda (\sum_{i=1}^{n} x_i - Mq).$$

Logo,

$$q = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{M}.$$

Por conseguinte, q é o centro de massa, como queríamos.

Configurações centrais são condições iniciais de órbitas homográficas. Uma demonstração desse fato (no caso Newtoniano) pode ser encontrada em (3).

As equações (1.7) não fornecem muita informação a respeito do conjunto das configurações centrais. Por esse motivo, se desejarmos deduzir propriedades satisfeitas por configurações centrais, é importante obter sistemas de equações cujo conjunto-solução inclui as soluções do sistema (1.7). Ilustraremos esta afirmação através de uma proposição-exemplo.

Proposição 2.2 (Equações de Laura-Andoyer)**.** *Seja $x = (x_1, \ldots, x_n)$ uma configuração central planar. Então,*

$$0 = \sum_{k \neq i,j} m_k (R_{ik} - R_{jk}) \Lambda_{ijk}, \quad 1 \leq i < j \leq n, \tag{2.4}$$

onde

$$\Lambda_{ijk} = (x_i - x_j) \wedge (x_i - x_k).$$

Pela definição dos γ_i's obtemos

$$\begin{aligned} \gamma_i - \gamma_j &= (m_i + m_j) R_{ij}(x_i - x_j) + \sum_{k \neq i,j} m_k \big(R_{ik}(x_i - x_k) - R_{jk}(x_j - x_k) \big) \qquad (2.5) \\ &= (m_i + m_j) R_{ij}(x_i - x_j) + \sum_{k \neq i,j} m_k \big(R_{ik}(x_i - x_k) - R_{jk}(x_j - x_i) + R_{jk}(x_i - x_k) \big) \end{aligned}$$

Fazendo o produto exterior da equação (2.5) com $(x_i - x_j)$ e utilizando a equação (2.1), obtemos a relação desejada:

$$0 = \lambda (x_i - x_j) \wedge (x_i - x_j) = \sum_{k \neq i,j} m_k (R_{ik} - R_{kj}) \Lambda_{ijk} \tag{2.6}$$

Podemos interpretar a quantidade Λ_{ijk} como o dobro da área orientada do triângulo com vértices (x_i, x_j, x_k). Essa observação permite provar o seguinte corolário

[Teorema da Mediatriz] Sejam x_i e x_j pontos de uma configuração planar x com massas positivas. Considere um sistema ortogonal de coordenadas tal que x_i e x_j pertencem ao eixo x, e o eixo y não contém nenhum dos corpos e intersecta o segmento $\overline{x_i x_j}$ no seu ponto médio. Então, os outros corpos não podem estar simultaneamente na união do primeiro e terceiro quadrante. Similarmente, os outro corpos não podem estar simultaneamente na união do segundo e quarto quadrantes. De fato, se o corpo x_k, $k \neq i, j$ pertence ao primeiro quadrante, então as quantidades Λ_{ikl} e $R_{ik} - R_{jk}$ são ambas positivas. Se o corpo x_k, $k \neq i, j$ pertence ao terceiro quadrante, Λ_{ikl} e $R_{ik} - R_{jk}$ são ambas negativas. Como as massas também são positivas, obtemos que as equações de Laura-Andoyer não podem ser satisfeitas simultaneamente, pois o somatório

$$\sum_{k \neq i,j} m_k (R_{ik} - R_{jk}) \Lambda_{ijk}$$

possui todas as parcelas positivas. Similarmente podemos deduzir a afirmação quando todos os corpos estão no segundo e quarto quadrantes.

As equações de Laura-Andoyer permitiram a dedução de uma importante propriedade sobre a “forma” de configurações centrais planares, algo que seria muito difícil de observar utilizando como material de trabalho apenas as equações (1.7). De fato, as equações de Laura-Andoyer são muito importantes na dedução de propriedades satisfeitas por configurações centrais planares por conterem em seu “DNA” informações sobre os triângulos gerados por 3 dos corpos de uma configuração x.

2.2 A matriz de Configuração e a matriz de Cayley-Menger

Considere uma configuração $x = (x_1, ..., x_n)$, com $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}^d$, e o $\mathbb{R}-$espaço vetorial V gerado pelos vetores $x_2 - x_1, ..., x_n - x_1$. Observe que

$$\delta(x) = dim V.$$

Como a dimensão de V é no máximo $d-1$, a configuração x tem dimensão $n-k$ com $k \geq 1$. Consequentemente, podemos supor, sem perda de generalidade, que $d = n-k$, $k \geq 1$. Assim, podemos fazer a seguinte identificação entre pontos de $\mathbb{R}^{n-k}$ e $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{array}{cccc} i_n : & \mathbb{R}^{n-k} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (a_1, ..., a_{n-k}) & \longmapsto & (1, a_1, ..., a_{n-k}, 0, ..., 0). \end{array}$$

Similarmente, podemos identificar uma configuração $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{(n-k)n}$ com uma configuração em $\mathbb{R}^{n^2}$ definindo

$$i_n(x) \doteq (i_n(x_1), ..., i_n(x_n)).$$

É fácil ver que essa identificação preserva a dimensão da configuração x bem como a classe de x módulo simetrias e homotetias (de fato, a aplicação i_n é uma transformação afim injetiva). Para nossos propósitos é melhor trabalhar com a configuração $i_n(x) \in \mathbb{R}^{n^2}$, pois independente da dimensão de uma configuração x com n posições, podemos “enxergá-la” em um ambiente

$n-$dimensional, uma vez que $i_n(x_1),...,i_n(x_n) \in \mathbb{R}^n$.
A *codimensão da configuração* x, com n posições, é definida por:

$$\rho(x) = dim\mathbb{R}^n - \delta(i_n(x)) = dim\mathbb{R}^n - \delta(x).$$

A identificação que fizemos acima sugere que é natural associar a uma configuração x uma matriz quadrada. Dizemos que

$$X = \begin{pmatrix} i(x_1)^t & \dots & i(x_n)^t \end{pmatrix}_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ x_{(n-k)1} & \dots & x_{(n-k)n} \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

é a *matriz associada à configuração* x, e denotaremos o seu determinante por $w(x) = |X|$. Seja $\widehat{x}_k = (x_1,...,x_{k-1},x_{k+1},...,x_n)$ a configuração de $n-1$ corpos obtida da configuração x removendo-se o $k-$ésimo corpo. A matriz:

$$\widehat{X}_k = \begin{pmatrix} i_{n-1}(x_1) & \dots & i_{n-1}(x_{k-1}) & i_{n-1}(x_{k+1}) & \dots & \dots(x_n) \end{pmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

é a *matriz associada à configuração* $\widehat{x}_k$. Também consideraremos subconfigurações onde uma quantidade arbitrária de corpos é retirada.

Quando $i_1 < i_2 < ... < i_k$, denotaremos por $\widehat{x}_{i_1...i_k}$ a subconfiguração de $n-k$ corpos obtida da configuração x removendo-se os corpos $x_{i_1},...,x_{i_k}$. A matriz de configuração $x_{i_1...i_k}$ será denotada por $X_{i_1...i_k} \in \mathscr{M}_{(n-k)\times(n-k)}$.

Lembrando que $\delta(x) = dim < x_1 - x_k,...,x_n - x_k >$, e observando que $dim < x_1 - x_k,...,x_n - x_k > +1$ é precisamente o número de colunas L.I. da matriz X, obtemos a seguinte fórmula para a dimensão de uma configuração:

$$\delta(x) = \text{posto}(X) - 1. \tag{2.7}$$

Como a única configuração central com $\delta(x) = n-1$ é o simplexo regular $n-1$ dimensional, a conjectura de Chazy-Wintner-Smale está resolvida nesse caso. Consequentemente, vamos supor que uma configuração central possui dimensão $\delta(x) \leq n-2$. Nesse caso, existe vetor $\Delta = (\Delta_1,...,\Delta_n)$ no núcleo de X, isto é, as entradas de Δ satisfazem as equações:

$$\begin{aligned} \Delta_1 + ... + \Delta_n &= 0, \\ \Delta_1 x_1 + ... + \Delta_n x_n &= 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

O próximo resultado nos dá uma fórmula para obter elementos do núcleo de uma matriz (quando o mesmo é não-trivial):

Proposição 2.3. *Sejam $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n\times n}$ e A_{ij}, $i, j \in \{1,\ldots,n\}$ seus cofatores. Se A possui núcleo não-trivial, então $(A_{i1},\ldots,A_{in})$ pertence ao núcleo de A para todo $i = 1,\ldots,n$.*

Consideremos as matrizes $B_k \in \mathscr{M}_{n\times n}$, $k = 1,\ldots,n$, obtidas da matriz A, substituindo a $k-$ésima linha da matriz A pela $i-$ésima linha (e mantendo a $i-$ésima linha intacta). Note que $B_i = A$, portanto, possui determinante nulo. Note ainda que as matrizes B_k também têm determinante nulo (porque possuem duas linhas iguais). Expandindo o determinante das matrizes B_k, $k = 1,\ldots,n$, obtemos as equações que definem o núcleo de A são satisfeitas pelo vetor $(A_{i1},\ldots,A_{in})$. Como o argumento não depende do particular i escolhido, o resultado segue.

Utilizando a equação (2.7), obtemos que $\delta(x) = n-2$ se, e somente se, a dimensão do núcleo da transformação linear definida pela sua matriz de configuração X é 1. Consequentemente, o vetor Δ é único a menos de multiplicação por constante. Utilizando a proposição 2.3 podemos expressar Δ explicitamente.

Se x é uma configuração central de dimensão $\delta(x) = n-2$ então existe um vetor $\Delta = (\Delta_1,\ldots,\Delta_n)$ no núcleo da matriz de configuração X tal que $\Delta_k = (-1)^{k+1}|\widehat{X}_k|$. De fato, seja $X \in \mathscr{M}_{n\times n}$ a matriz da configuração de x. Como $\delta(x) = n-2$, pela equação (2.7) posto$(X) = n-1$. Logo, X possui núcleo não-trivial. Aplicando a proposição 2.3 à matriz X, e observando que os cofatores com respeito à última linha de X são $\Delta_k = (-1)^{k+n}|\widehat{X}_k|$, e ainda, multiplicando o vetor $\Delta = (\Delta_1,\ldots,\Delta_n)$ por -1, se necessário, encontramos o vetor desejado.

Como interpretação geométrica, observe que $\omega(\widehat{x}_k) = |\ \widehat{X}_k\ |$ é o volume orientado do paralelepípedo gerado pelos vetores $x_1,\ldots x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_n$. Mais ainda, temos $\delta(x) = n-2$ se, e somente se, um destes determinantes é não-nulo.

A seguir, deduziremos uma relação que será importante posteriormente. Trata-se de uma maneira de escrever $\omega(\widehat{x}_k)$ como um produto exterior em $\bigwedge^{n-2}\mathbb{R}^{n-2}$ quando $\delta(x) = n-2$.

Lema 2.1. *Seja x uma configuração de dimensão $\delta(x) = n-2$, $\widehat{x}_k$ a configuração obtida de x removendo-se o $k-$ésimo corpo e $\wedge$ o produto exterior no espaço $\mathbb{R}^{n-2}$. Fixe índices j,k com $j \neq k$. Então:*

$$\tau(j,k)(x_1-x_j)\wedge\ldots\wedge\widehat{(x_k-x_j)}\wedge\ldots\wedge\widehat{(x_j-x_j)}\wedge\ldots\wedge(x_n-x_j) = \omega(\widehat{x}_k)e_1\wedge\ldots\wedge e_{n-2},$$

onde os e_i's formam a base canônica de $\mathbb{R}^{n-2}$ e

$$\tau(j,k) = \begin{cases} (-1)^j, & se \quad k<j, \\ (-1)^{j+1}, & se \quad k>j. \end{cases}$$

Seja $x = (x_1,\ldots,x-n)$ uma configuração de dimensão $n-2$. Temos que $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}^{n-2}$. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^{n-2} \to \mathbb{R}^{n-2}$ cuja matriz na base canônica é dada por

$$T = \begin{pmatrix} x_1-x_j & \ldots & x_{j-1}-x_j & x_{j+1}-x_j & \ldots & x_{k-1}-x_j & x_{k+1}-x_j & \ldots & x_n-x_j \end{pmatrix}$$

se $j<k$, ou

$$T = \begin{pmatrix} x_1-x_j & \ldots & x_{k-1}-x_j & x_{k+1}-x_j & \ldots & x_{j-1}-x_j & x_{j+1}-x_j & \ldots & x_n-x_j \end{pmatrix}$$

se $j > k$. Temos que:

$$| T | e_1 \wedge \ldots \wedge e_{n-2} = (x_1 - x_j) \wedge \ldots \wedge (\widehat{x_k - x_j}) \wedge \ldots \wedge (\widehat{x_j - x_j}) \wedge \ldots \wedge (x_n - x_j). \tag{2.9}$$

Afirmação:

$$| T | = \begin{cases} (-1)^j \omega(\widehat{x}_k), & \text{se} \quad k < j, \\ (-1)^{j+1} \omega(\widehat{x}_k), & \text{se} \quad k > j. \end{cases}$$

Considere $\widehat{X}_k$, a matriz da configuração x_k, e subtraia a j-ésima coluna das demais, obtendo a seguinte matriz:

$$\widehat{X}_k^{(j)} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ x_1 - x_j & \ldots & x_{j-1} - x_j & x_j & x_{j+1} - x_j & \ldots & x_{k-1} - x_j & x_{k+1} - x_j & \ldots & x_n - x_j \end{pmatrix}.$$

Observe que

$$| \widehat{X}_k^{(j)} | = | \widehat{X}_k | = w(\widehat{x}_k) \tag{2.10}$$

pois subtrair uma coluna de outra não altera o determinante. Expandindo o determinante de $\widehat{X}_k^{(j)}$ pela primeira linha, obtemos que

$$| \widehat{X}_k^{(j)} | = \begin{cases} (-1)^j \, | T |, & \text{se} \quad k < j, \\ (-1)^{j+1} \, | T |, & \text{se} \quad k > j. \end{cases}$$

Portanto, de (2.10) e da relação acima, obtemos $w(\widehat{x}_k) = \tau \, | T |$. Substituindo em (2.9), acarreta em:

$$\tau \omega(\widehat{x}_k) e_1 \wedge \ldots \wedge e_{n-2} = (x_1 - x_j) \wedge \ldots \wedge (x_n - x_j).$$

Multiplicando ambos os membros da equação acima por τ, obtemos a relação desejada.

2.3 Critério para decidir se a dimensão de uma configuração é $n-1$

As distância mútuas r_{ij}, $1 \leq i < j < n$, são ótimas variavéis para trabalhar com o problema de configurações centrais porque eliminam as simetrias de translação e rotação. A fórmula (2.7) fornece um critério de dimensão da configuração x que depende, em última instância das posições $x_1, \ldots, x_n$ dos n corpos. Gostaríamos de obter um critério de dimensão para configurações que dependam das distâncias mútuas. Nesta seção obteremos o tal critério para configurações $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de dimensão $\delta(x) = n - 1$.

Considere uma configuração $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{(n-1)n}$ de dimensão $n-1$, cujos corpos possuem posições $x_i = (x_{1i}, \ldots, x_{(n-1)i})$. Se V é o volume do simplexo $(n-1)-$dimensional gerado pelos corpos $x_1, \ldots, x_n$, então

$$(n-1)!V = |X| = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ x_{11} & \ldots & x_{1n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ x_{(n-1)1} & \ldots & x_{(n-1)n} \end{vmatrix}$$

Podemos reescrever esses determinantes das seguintes maneiras:

$$(n-1)!V = |X_1| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & x_{(n-1)1} & \dots & x_{(n-1)n} \end{vmatrix}$$

e

$$-(n-1)!V = |X_2| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & x_{(n-1)1} & \dots & x_{(n-1)n} \end{vmatrix}.$$

Multiplicando o determinante da transposta da matriz X_1 pelo determinante da matriz X_2 obtemos:

$$-((n-1)!V)^2 = |X_1^t||X_2| \doteq |Z| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x_1^t \cdot x_1 & \dots & x_1^t \cdot x_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n^t \cdot x_1 & \dots & x_n^t \cdot x_n \end{vmatrix}.$$

Sejam $r_{ij} = r_{ji} = \|x_i - x_j\|$, $1 \leq i < j \leq n$ as distancias mútuas entre os corpos $x_1, ..., x_n$. Note que as seguintes identidades são satisfeitsa:

$$r_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (x_{ki}^2 + x_{kj}^2) - 2x_i^t \cdot x_j, \quad 1 \leq i < j \leq n, \tag{2.11}$$

$$r_{ii} = 0, \quad i = 1, ..., n. \tag{2.12}$$

Desse modo, fazendo as transformações linha

$$L_i \to L_i - \sum_{k=1}^{n} x_{ki}^2 L_1, \quad i = 2, ..., n+1, \tag{2.13}$$

e as transformações coluna

$$C_i \to C_i - \sum_{i=1}^{n} x_{kj}^2 C_1, \quad i = 2, ..., n+1, \tag{2.14}$$

no determinante $|Z|$, obtemos:

$$-((n-1)!V)^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -r_{11}^2/2 & -r_{12}/2 & -r_{13}^2/2 & \dots & -r_{1n}^2/2 \\ 1 & -r_{21}^2/2 & -r_{22}/2 & -r_{23}^2/3 & \dots & -r_{2n}^2/2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & -r_{n1}^2/2 & -r_{n2}/2 & -r_{n3}^2/2 & \dots & -r_{nn}^2/2 \end{vmatrix}.$$

Finalmente, multiplicando linhas $2,3,...,n+1$ da matriz Z por -2 e multiplicando a primeira coluna da matriz Z por $-1/2$ concluímos:

$$-V^2 = \frac{1}{(-2)^{n-1}(n-1)^2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & r_{12}^2 & r_{13}^2 & \dots & r_{1n}^2 \\ 1 & r_{21}^2 & 0 & r_{23}^2 & \dots & r_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & r_{n1}^2 & r_{n2}^2 & r_{n3}^2 & \dots & 0 \end{vmatrix}. \tag{2.15}$$

Nos próximos exemplos calcularemos o volume de simplexos 2 e 3 dimensionais utilizando a fórmula (2.15): Se $n=2$ temos:

$$V^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & r_{12}^2 \\ 1 & r_{12}^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, $V = r_{12}$.

Se $n=3$ temos:

$$V^2 = \left(-\frac{1}{16}\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & r_{12}^2 & r_{13}^2 \\ 1 & r_{12}^2 & 0 & r_{23}^2 \\ 1 & r_{13}^2 & r_{23}^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podemos calcular o determinante de maneira mais simples subtraindo a segunda coluna da terceira e quarta colunas e expandindo o determinante:

$$V^2 = \frac{-1}{16}(r_{12}-r_{13}-r_{23})(r_{13}-r_{12}-r_{23})(r_{23}-r_{12}-r_{13})(r_{23}+r_{12}+r_{13}).$$

Escrevendo $\sigma = \frac{r_{23}+r_{12}+r_{13}}{2}$ segue:

$$V = \sqrt{\sigma(\sigma-r_{12})(\sigma-r_{13})(\sigma-r_{23})}.$$

A expressão anterior é a fórmula de Herão para cálculo da área de um triângulo, conhecidos os seus lados.

A matriz que aparece na fórmula (2.15) é muito importante e merece definição formal:

Seja x uma configuração e considere o vetor $s=(s_{ij})$, $1 \leq i < j \leq n$, cujas entradas são dadas por $s_{ij} = r_{ij}^2 = \|x_i - x_j\|^2$. Dizemos que a *matriz de Cayley-Menger associada à configuração x* é a matriz simétrica definida por:

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & s_{12} & s_{13} & \dots & s_{1n} \\ 1 & s_{21} & 0 & s_{23} & \dots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & s_{n1} & s_{n2} & s_{n3} & \dots & 0 \end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+1)},$$

sendo o *determinante de Cayley-Menger* o número $F(x) = \mid A(x) \mid$.

Observe que, como consequência imediata da fórmula (2.15), temos o seguinte critério para dimensão:

Proposição 2.4. *Seja x uma configuração em $\mathbb{R}^n$. As seguintes condições são equivalentes:*

1. $\delta(x) = n-1$;
2. $postoA(x) = n+1$.

1. $\Rightarrow$ 2. Se $\delta(x) = n-1$ então $|X| \neq 0$. Portanto o volume V do simplexo gerado pelos corpos $x_1, ..., x_n$ é não-nulo. Consequentemente,

$$F = V.(-2)^{n-1} n!^2 \neq 0.$$

Logo posto$A(x) = n+1$.
2. $\Rightarrow$ 1. Se posto$A(x) = n+1$ então $F(x) \neq 0$. Logo,

$$V = \frac{1}{(-2)^{n-1} n!^2} F \neq 0.$$

Desse modo, posto$X = n$ e, pela fórmula (2.7), $\delta(x) = n-1$.

2.4 A Matriz de Cayley-Menger

Reformularemos o critério de dimensão, em termos dos quadrados das distâncias mútuas $s_{ij} = \|x_i - x_j\|^2$, utilizando a matriz de Cayley-Menger. Nós consideramos as $p = \frac{n(n-1)}{2}$ distâncias, com $1 \leq i < j \leq n$, como variáveis independentes.

Proposição 2.5. *Seja x uma configuração central e $s = (s_{ij}) \in \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ o vetor cujas entradas são os quadrados das distâncias mútuas dos corpos da configuração x. Se $(\Delta_1, ..., \Delta_n)$ é um vetor do núcleo de X, então $(\Delta_0, ..., \Delta_n)$ está no núcleo de $A(s)$ onde $\Delta_0 = -\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2 \Delta_j$.*

Temos que $s_{ij} = \|x_i - x_j\|^2 = \left(x_i - x_j\right) \cdot \left(x_i - x_j\right) = \|x_i\|^2 - 2x_i \cdot x_j + \|x_j\|^2$.
Usando esta expressão e as equações (2.8), obtemos:

$$\sum_{j=1}^{n} s_{ij} \Delta_j = \|x_i\|^2 \sum_{j=1}^{n} \Delta_j - 2x_i \cdot \sum_{j=1}^{n} \Delta_j x_j + \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2 \Delta_j = \sum_{j=1}^{n} \|x_j^2\| \Delta_j = -\Delta_0. \tag{2.16}$$

Claramente, o resultado independe de i e decorre das equações (2.8) e (2.16) que $(\Delta_0, ..., \Delta_n)$ está no núcleo de $A(s)$.

Mais geralmente, temos o seguinte resultado:

Proposição 2.6. *Seja x uma configuração, $X_{n \times n}$ sua matriz de configuração e A sua matriz de Cayley-Menger associada. Se os vetores*

$$v_1 = (v_{11}, ..., v_{1n}), ..., v_k = (v_{k1}, ..., v_{kn})$$

são L.I e pertencem ao núcleo de X então os vetores

$$\widetilde{v}_1 = (-\sum_{i=1}^{n} \|x_i\| v_{1i}, v_{11}, ..., v_{1n}), ..., \widetilde{v}_k = (-\sum_{i=1}^{n} \|x_i\| v_{ki}, v_{k1}, ..., v_{kn})$$

também são L.I e pertencem ao núcleo de A. Em particular, $dim(Ker(X)) \leq dim(Ker(A))$

Segue da Proposição 2.5 que $\widetilde{v}_1, ..., \widetilde{v}_k$ pertencem ao núcleo da matriz A. Sejam $\alpha_1, ..., \alpha_k$ tais que:

$$\alpha_1 \widetilde{v}_1 + ... + \alpha_k \widetilde{v}_k = 0.$$

Em particular, vale a equação:

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k = 0.$$

Como $v_1, ..., v_k$ são L.I., $\alpha_1 = ... = \alpha_k = 0$. Portanto, $\widetilde{v}_1, ..., \widetilde{v}_k$ são L.I.. Em particular, se $\{v_1, ..., v_k\}$ for base para o núcleo de X, então temos que $\{\widetilde{v}_1, ..., \widetilde{v}_k\}$ é conjunto de vetores L.I. contido em $Ker(A)$. Disto segue $dim(Ker(X)) \leq dim(Ker(A))$.

Proposição 2.7. *Seja x uma configuração de n corpos e seja F o determinante de Cayley-Menger a ela associado. Então* $\delta(x) \leq n-2$ *se, e somente se,* $F(s) = 0$.

Suponha, sem perda de generalidade, que $x_i \in \mathbb{R}^{n-1}$. Se $\delta(x) \leq n-2$, (2.8) tem uma solução não-trivial $(\Delta_1, ..., \Delta_n)$ e, consequentemente, algum Δ_i é não-nulo. Definindo $-\Delta_0$ como em (2.16), temos que $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, ..., \Delta_n)$ é um elemento não-trivial do núcleo de $A(s)$ pela proposição 2.5 . Segue que $F(s) = |A(s)| = 0$.

Por outro lado, se $F(s) = 0$, a equação $A(s)\Delta = 0$ tem uma solução não-trivial $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, ..., \Delta_n)$. Para estes Δ_i's, $1 \leq i \leq n$, a soma em (2.16) é igual a $-\Delta_0$ e também $\sum_{j=1}^{n} \Delta_j = 0$. Tome

$$\alpha = 2\sum_{j=1}^{n} \Delta_j x_j \quad \text{e} \quad \beta = \Delta_0 + \sum_{j=1}^{n} \Delta_j \|x_j\|^2, \tag{2.17}$$

e considere a equação

$$\alpha \cdot y = \beta. \tag{2.18}$$

Substituindo diretamente x_i, $1 \leq i \leq n$, em (2.18) obtemos de (2.16) que os x_i's satisfazem a equação (2.18) .

Se $\alpha = 0$ então as equações (2.8) são satisfeitas e $\delta(x) \leq n-2$. Se $\alpha \neq 0$, note que:

$$\alpha \cdot x_i = \beta, \quad i = 1, ..., n. \tag{2.19}$$

Fazendo $i = 1$ na equação (2.19) e subtraindo-a de (2.18) concluímos que $\alpha \cdot (y - x_1) = 0$. Esta é a equação de um hiperplano não-trivial H de dimensão $n-2$. Como

$$x_2 - x_1, ..., x_n - x_1 \in H,$$

resulta $\delta(x) \leq n-2$.

Denotaremos por F_{ij} o cofator do elemento na i-ésima linha e na j-ésima coluna de $F(s)$.

Proposição 2.8. *Se $A(s)$, a matriz de Cayley-Menger associada a um vetor $s \in \mathbb{R}^p$, possui núcleo não-trivial, então o vetor $(F_{i1},...,F_{ij},...,F_{i(n+1)})$ está no núcleo de $A(s)$, para todo $i = 1,...,n+1$.*

Este resultado é um corolário imediato da proposição 2.3.

Os dois próximos lemas serão importantes para obtermos um critério capaz de decidir se uma configuração de pontos possui dimensão $n-2$ em termos da matriz de Cayley-Menger.

Lema 2.2. *Se x é uma configuração de dimensão $n-k$, $k \geq 2$, então é possível encontrar dois corpos x_{i_1} e x_{i_2} tais que $\widehat{x}_{i_1}$ e $\widehat{x}_{i_2}$ são subconfigurações de x com $\delta(\widehat{x}_{i_1}) = \delta(\widehat{x}_{i_2}) = n-k$.*

Seja V_1 o espaço vetorial gerado pelos vetores $x_2 - x_1,...,x_n - x_1$. A dimensão da configuração x é dada por:

$$\delta(x) = n-k = dimV_1, \quad k \geq 2.$$

Como V_1 é gerado por $n-1$ vetores existe índice i_1 tal que $x_{i_1} - x_1$ é combinação linear dos vetores $x_l - x_1$, $k \neq i_1$, $2 \leq l \leq n$. Seja W_{i_1} o subespaço de V_1 gerado pelos vetores $x_2 - x_1, ...x_{i_1-1} - x_1, x_{i_1+1} - x_1, ..., x_n - x_1$. Uma vez que

$$\delta(\widehat{x}_{i_1}) = dimW_{i_1} = n-k,$$

a configuração $\widehat{x}_{i_i}$ é uma subconfiguração de x com $\delta(\widehat{x}_{i_1}) = n-k$. Similarmente,

$$\delta(x) = n-k = dimV_{i_1},$$

onde V_{i_1} é o espaço vetorial gerado pelos vetores $x_1 - x_{i_1},...,x_n - x_{i_1}$. Desse modo, existe um índice i_2 tal que $x_{i_2} - x_{i_1}$ é combinação linear dos demais geradores de V_{i_1}. Logo, a configuração $\widehat{x}_{i_2}$ também possui dimensão $\delta(\widehat{x}_{i_2}) = n-k$.

Lema 2.3. *Seja M uma matriz $n \times n$ de nulidade 1. Se M_{ij} $i,j \in \{1,...,n\}$ são os cofatores da matriz M, então vale a seguinte relação:*

$$M_{ik}M_{jl} = M_{jk}M_{il}, \quad \forall i,j,k,l \in \{1,...,n\}.$$

Em particular, quando M é simétrica, valem as seguintes relações:

$$M_{ii}M_{jj} = M_{ij}^2 \quad 1 \leq i \leq j \leq n. \tag{2.20}$$

Seja $D = (D_1,...,D_n)$ vetor do núcleo de M. Pela proposição 2.3, $(M_{i1},...,M_{in})$ é um vetor do núcleo de M para todo i. Como, por hipótese, a nulidade de M é 1, existem b_i, b_j tais que $b_iD = (M_{i1},...,M_{in})$ e $b_jD = (M_{j1},...,B_{jn})$, $\forall$ $i,j \in \{1,...,n\}$. Resulta que, para todos $i,k,j,l \in \{1,...,n\}$,

$$M_{ik}M_{jl} = b_ib_jD_kD_l = M_{jk}M_{il}. \tag{2.21}$$

Proposição 2.9. *Se $F = 0$, as seguintes condições são equivalentes:*

1. *$\delta(x) = n-2$;*

2. *No mínimo dois cofatores principais F_{ii} são não-nulos;*

3. *$posto(A) = n$.*

1. $\Rightarrow$ 2. Se $\delta(x) = n-2$ então, para todo $j \in \{1,...,n\}$, os vetores $x_i - x_j$, $1 \leq i \leq n$, $i \neq j$, geram um espaços vetorial de dimensão $n-2$. Desse modo, pelo lema 2.2, podemos encontrar dois corpos x_{i_1} e x_{i_2} tais que $\delta(\widehat{x}_{i_k}) = n-2$, $k = 1,2$. Uma vez que $\delta(\widehat{x}_{i_k}) = (n-1)-1 > (n-1)-2$, pela proposição 2.7, agora aplicada a uma configuração com $n-1$ corpos, concluímos que o determinante de Cayley-Menger associado à configuração $\widehat{x}_{i_k}$, ou seja, $F_{i_k i_k}$, é diferente de zero para $k = 1,2$. Assim, pelo menos dois cofatores principais não se anulam.

2. $\Rightarrow$ 3. Suponha agora que pelo menos dois cofatores principais não se anulam. Isto nos diz que $posto(A) \geq n$. Para ver a desigualdade contrária, note que, por hipótese, $F = 0$. Portanto, $posto(A) \leq n$.

3. $\Rightarrow$ 1. Se 3. vale, então a dimensão do núcleo de A é 1. Pelo lema 2.3 temos

$$F_{ik}F_{jl} = F_{jk}F_{il}. \tag{2.22}$$

Em particular, vale a relação $F_{ii}F_{jj} = F_{ij}^2$. Por hipótese, temos que $posto(A) = n$, logo, para algum $i_0, j_0 \in \{1,...,n+1\}$, vale $F_{i_0 j_0} \neq 0$. Isto implica que $F_{i_0 i_0} \neq 0$. Observando que $F_{i_0 i_0}$ é o determinante de Cayley-Menger associado a configuração $\widehat{x}_{i_0}$, então, pela proposição 2.7, $\delta(\widehat{x}_i) > (n-1)-2$. Consequentemente, $\delta(x) \geq n-2$. Como $F = 0$, novamente pela proposição 2.7, temos $\delta(x) \leq n-2$. Daí segue-se 1.

As duas proposições anteriores fornecem critérios a respeito da dimensão de uma configuração que dependem do determinante de Cayley-Menger. Uma questão natural é se existem representações convenientes para os cofatores desta matriz. O próximo resultado apresenta uma resposta satisfatória a esta questão.

Proposição 2.10. *Sejam $A(s)$ e $F(s)$ a matriz e o determinante de Cayley-Menger com s_{ij} números complexos arbitrários. Suponha que $F(s) = 0$, com ao menos um dos cofatores $F_{ij} \neq 0$. Então, se $\Delta = (\Delta_0,...,\Delta_n)$ é uma solução não-trivial de $A(s)\Delta = 0$, existe uma única constante k não-nula tal que*

$$F_{ij} = k\Delta_{i-1}\Delta_{j-1}, \; 1 \leq i,j \leq n+1. \tag{2.23}$$

Mais ainda, pelo menos dois Δ_i's são não-nulos para $1 \leq i \leq n$.

Segue imediatamente da hipótese que $posto(A(s)) = n$. Mais ainda, o vetor Δ é único, a menos de multiplicação por constante. Pelo que observamos na prova do lema 2.3, temos que $F_{ij} = b_i \Delta_j$. Como $A(s)$ é matriz simétrica, $b_i \Delta_{j-1} = F_{ij} = F_{ji} = b_j \Delta_{i-1}$. Logo, a matriz

$$\begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_{n+1} \\ \Delta_0 & \dots & \Delta_n \end{pmatrix}$$

possui posto 1. Como a segunda linha desta matriz é não-trivial, existe um único $k \neq 0$ tal que $k\Delta_{i-1} = b_i$. Disto segue a fórmula desejada.

2.5 As equações para configurações de dimensão $n-2$

Nesta seção, supondo que a massa total do sistema $M = \sum_i^n m_i$ é não-nula, obteremos equações para as configurações centrais com $\delta(x) = n-2$ em termos das distâncias mútuas. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que estamos no espaço $\mathbb{R}^{n-2}$.

Pela proposição 2.1, uma configuração central x satisfaz a equação:

$$\sum_{j \neq i} m_j S_{ij}(x_j - x_i) - \lambda(x_i - c) = 0, \tag{2.24}$$

onde $c = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^n m_j x_j$ é o centro de massa do sistema. Tome:

$$\lambda = \frac{M}{r_0^a} \tag{2.25}$$

na equação (2.24), onde r_0 é uma nova constante não-nula. Deste modo, podemos reescrever a equação (2.24) da seguinte maneira:

$$\sum_{j \neq i} m_j \frac{(x_j - x_i)}{r_{ij}^a} - \left[\frac{\sum_{j=1}^n m_j x_i - \sum_{j=1}^n m_j x_j}{r_0^a}\right] = 0.$$

Colocando os m_j's em evidência na segunda parcela da equação anterior, obtemos:

$$\sum_{j \neq i} m_j \frac{(x_j - x_i)}{r_{ij}^a} - \sum_{j \neq i} m_j \frac{(x_j - x_i)}{r_0^a} = 0.$$

Definindo:

$$S_{ij} \doteq r_{ij}^{-a} - r_0^{-a}, \quad i \neq j, \tag{2.26}$$

e colocando-o em evidência, obtemos as seguintes equações:

$$\sum_{j \neq i} m_j S_{ij}(x_i - x_j) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \tag{2.27}$$

Estas equações são convenientes para nossos propósitos, pois são homogêneas nas variáveis m_i, $1 \leq i \leq n$, e S_{ij}, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, e são satisfeitas por qualquer configuração central, independente de sua dimensão.

Proposição 2.11. *Se x é uma configuração central com massas $m_1,\ldots,m_n$ então*

$$m_k S_{ik}\Delta_l = m_l S_{il}\Delta_k, \tag{2.28}$$

onde $i,k,l \in \{1,\ldots,n\}$ são distintos dois a dois, S_{ik} é como em (2.26) e os Δ_k's são como no corolário 2.2.

Seja $v_{ikl} = (x_1 - x_i)\wedge \ldots \wedge (x_n - x_i)$ um produto exterior $(n-3)$-dimensional, onde os termos $(x_i - x_i)$, $(x_k - x_i)$, $(x_l - x_i)$ foram omitidos. Considere agora $\sum_{j\neq i} m_j S_{ij}(x_i - x_j)\wedge v_{ikl} = 0$. Temos três casos a considerar:

$$i<k<l,\ k<i<l \text{ e } k<l<i.$$

Nos concentraremos no caso $i<k<l$, pois os outros dois casos são análogos. Usando a distributividade do produto exterior e o fato de $w \wedge w = 0$ (sendo w um vetor), segue que:

$$m_k S_{ik}(x_k - x_i)\wedge v_{ikl} = -m_l S_{il}(x_l - x_i)\wedge v_{ikl}. \tag{2.29}$$

Utilizando a anticomutatividade do produto exterior, deduzimos as seguintes relações:

$$(x_k - x_i)\wedge v_{ikl} = (-1)^{k-1} v_{il}; \tag{2.30}$$
$$(x_l - x_i)\wedge v_{ikl} = (-1)^{l-2} v_{ik}. \tag{2.31}$$

Substituindo estas relações na equação (2.29), concluímos que:

$$(-1)^{k-1} m_k S_{ik} v_{il} = (-1)^{l-1} m_l S_{il} v_{ik}.$$

Pelo lema 2.1, vale a seguinte relação:

$$(-1)^{k-1}(-1)^{i+1} m_k S_{ik} w(\widehat{x}_l) = (-1)^{l-1}(-1)^{i+1} m_l S_{il} w(\widehat{x}_k).$$

Usando corolário 2.2, obtemos:

$$(-1)^{k-1}(-1)^{i+1}(-1)^{l+1} m_k S_{ik}\Delta_l = (-1)^{l-1}(-1)^{i+1}(-1)^{k+1} m_l S_{il}\Delta_k. \tag{2.32}$$

Desse modo, concluímos a prova.

Para $\delta(x) < n-2$, a equação acima é trivial, pois os Δ_k's são todos nulos. Portanto a equação (2.28) nos dá menos informação que a equação (2.27). Posteriormente, provaremos a validade de equações adequadas para estudar configurações com dimensão $n-3$ utilizando menores determinantes da matriz da configuração x de tamanho $n-2$.

Seja $S \in \mathbb{R}^p$, onde $p = \frac{n(n-1)}{2}$, o vetor de entradas S_{ij}, $1 \le i < j \le n$. O próximo resultado nos dá uma parametrização polinomial para os vetores $S = (S_{ij})$, valendo para configurações de dimensão $n-2$.

Proposição 2.12. *Seja x uma configuração central com massas não-nulas e $\delta(x) = n-2$, e seja S_{ij} como em (2.26). Então existem números reais $z_1, ..., z_n$ e $c \neq 0$ tais que:*

$$S_{ij} = c z_i z_j. \tag{2.33}$$

Mais ainda, ao menos dois dos z_i's são não-nulos.

Uma vez que as massas são não-nulas, podemos definir:

$$z_i = \frac{\Delta_i}{m_i}, \qquad i = 1, ..., n. \tag{2.34}$$

Assim, reescrevemos a equação (2.28) como:

$$S_{ik} z_l = S_{il} z_k. \tag{2.35}$$

Se $\delta(x) = n-2$, pela proposição 2.10, existe l_0 tal que Δ_{l_0} é não-nulo. Decorre da equação (2.34) que z_{l_0} também é não-nulo. Substituindo l por l_0 em (2.35) e dividindo ambos os membros desta equação por $z_{l_0} \neq 0$, obtemos:

$$S_{ij} = \frac{S_{il_0} z_j}{z_{l_0}}.$$

Fazendo o i e o j variarem e definindo as constantes

$$c_i = \frac{S_{il_0}}{z_{l_0}}, \qquad i = 1, ..., n,$$

obtemos $S_{ij} = c_i z_j$ para $i \neq j$, $i, j \in \{1, ..., n\}$. Por simetria dos S_{ij}'s temos $c_i z_j = c_j z_i$. Isto implica que a matriz:

$$\begin{pmatrix} c_1 & \dots & c_n \\ z_1 & \dots & z_n \end{pmatrix}$$

tem posto 1. Portanto, existe um único c tal que $c z_i = c_i$. Para ver que $c \neq 0$, observe que, caso contrário, teríamos $S_{ij} = 0$, para todos $i \neq j$. Pela definição dos S_{ij}'s, teríamos que todas as distâncias mútuas r_{ij} são iguais. Mas então teríamos que a configuração x seria o simplexo regular $(n-1)$-dimensional, contradizendo $\delta(x) = n-2$. Logo, algum S_{ij} é não-nulo, e daí, pela forma da equação (2.33), ao menos dois dos z_i's são não-nulos.

Observação 2.1. *A proposição 2.12 mostra que toda configuração de dimensão $n-2$ é configuração de Dziobek.*

Da equação (2.33) segue imediatamente que os vetores S provenientes de uma configuração de dimensão $n-2$ satisfazem as equações:

$$S_{ik} S_{jl} = S_{il} S_{jk}, \tag{2.36}$$

onde i, j, k, l são índices distintos, $i, j, k, l \in \{1, ..., n\}$. Entretanto estas equações são mais fracas que a equação (2.33). Por exemplo, para $n = 4$ seja $S_{12} = S_{13} = S_{23} = 0$ e $S_{14} = S_{24} = S_{34} = 1$.

Então S satisfaz (2.36), mas não satisfaz (2.33). Por esta razão, é preferível trabalhar com as variáveis z_i, $i = 1, \dots, n$ no lugar das variáveis S_{ij}.

Seja x uma configuração central de dimensão $n-2$ com distâncias mútuas r_{ij}, $1 \leq i < j \leq n$, parametrizadas por quantidades $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{R}$ conforme a proposição 2.12. Dizemos que o vetor $r = (r_{12}, r_{13}, \dots r_{1n}, \dots, r_{jn}, \dots, r_{(n-1)n})$ é *vetor de distâncias de* x e $z = (z_1, \dots, z_n)$ é o *vetor de parâmetros de* x.

Agora, calcularemos a derivada do determinante de Cayley-Menger com respeito às variáveis r_{ij}.

Proposição 2.13. *Seja F o determinante de Cayley-Menger associado a uma configuração central x de dimensão $n-2$. Então:*

$$\frac{\partial F}{\partial r_{ij}} = 4kr_{ij}\Delta_i\Delta_j, \tag{2.37}$$

onde k é a constante definida conforme na proposição 2.10.

Pela regra da cadeia, temos que $\frac{\partial F}{\partial r_{ij}} = 2(r_{ij}F_{(i+1)(j+1)} + r_{ij}F_{(j+1)(i+1)})$. Como a matriz de Cayley-Menger é simétrica, obtemos:

$$\frac{\partial F}{\partial r_{ij}} = 4r_{ij}F_{(i+1)(j+1)}. \tag{2.38}$$

Pela equação (2.23), temos que:

$$\frac{\partial F}{\partial r_{ij}} = 4r_{ij}F_{(i+1)(j+1)} = 4kr_{ij}\Delta_i\Delta_j. \tag{2.39}$$

A expressão (2.39) é semelhante a encontrada por Dziobek, Hagihara, Schmidt (Consulte (13, Capítulo 3), (14, Capítulo 1) e (12)). A próxima proposição será crucial posteriormente.

Proposição 2.14. *Se x é configuração central de dimensão $n-2$ com expoente real $a \in \mathbb{R}$, massas $m_1, \dots, m_n$ positivas, vetor de distâncias mútuas $r = (r_{12}, r_{13}, \dots r_{1n}, \dots, r_{jn}, \dots, r_{(n-1)n})$ e vetor de parâmetros $z = (z_1, \dots, z_n)$, então, para todo $b \in \mathbb{R}$ equações*

$$z_i\left(\prod_{(k,l)\neq(1,i)} r_{kl}^b \frac{\partial F}{\partial r_{1i}} z_1 + \dots + \prod_{(k,l)\neq(n,i)} r_{kl}^b \frac{\partial F}{\partial r_{ni}} z_n\right) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \tag{2.40}$$

não são satisfeitas simultaneamente.

De fato, usando as equações (2.37) e (2.34) obtemos

$$\prod_{(k,l)\neq(i,1)} r_{kl}^b \frac{\partial F}{\partial r_{i1}} z_i z_1 + \dots + \prod_{(k,l)\neq(i,n)} r_{in}^{a+1} \frac{\partial F}{\partial r_{in}} z_i z_n =$$

$$m_i m_1 \left(\prod_{(k,l)\neq(i,1)} r_{kl}^b\right) r_{12} z_i^2 z_1^2 + \dots + m_i m_n \left(\prod_{(k,l)\neq(i,n)} r_{kl}^b\right) r_{in} z_i^2 z_n^2,$$

$i = 1, \dots, n$. Estas expressões não podem se anular simultaneamente pois, pela proposição 2.12, ao menos dois $z_i's$ são não-nulos, e as massas e distâncias mútuas são estritamente positivas.

2.6 Geometria das configurações de codimensão $n-3$

Nesta seção, estenderemos as idéias da seção anterior com o intuito de obter equações polinomiais satisfeitas por configurações centrais de codimensão 3.

Considere uma configuração $x = (x_1, \ldots, x_n)$ tal que $\delta(x) = n-3$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $x_i \in \mathbb{R}^{n-3}$, $i = 1, \ldots, n$.

Seja $X \in \mathscr{M}_{n\times n}$ a matriz da configuração x. Decorre da equação (2.7) que $\delta(x) = n-3$ se, e somente se a dimensão do núcleo de X é 2.

Quando $k < l$, denotamos por $\widehat{x}_{kl} = (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_{l-1}, x_{l+1}, \ldots, x_n)$ a configuração de $n-2$ corpos obtida da configuração x removendo-se o $k-$ésimo e o l-ésimo corpo, e por:

$$\widehat{X}_{kl} = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & \ldots & x_{k-1} & x_{k+1} & \ldots & x_{l-1} & x_{l+1} & \ldots & x_n \end{pmatrix}_{(n-2)\times(n-2)}$$

a matriz da configuração $\widehat{x}_{kl}$. O determinante da configuração $\widehat{x}_{kl}$ será denotado por $w(\widehat{x}_{kl})$.

Quando trabalhamos com as configurações de dimensão $n-2$, as quantidades $w(\widehat{x}_k)$ desempenharam papel fundamental. Porém, no contexto de configurações de codimensão 3 isso não acontece porque todas as subconfigurações $\widehat{x}_k$, $k = 1, \ldots, n$ têm determinante $w(\widehat{x}_k)$ nulo. Nesta seção observaremos que quando trabalharmos com configurações de codimensão 3, as quantidades que serão fundamentais são os determinantes $w(\widehat{x}_{kl})$ com $k, l \in 1, \ldots, n$, $k \neq l$.

Proposição 2.15. *Seja x uma configuração de dimensão $\delta(x) = n-3$ e considere $\widehat{X}_k$ a matriz da configuração $\widehat{x}_k$. O vetor*

$$\Phi_k = (\Delta_{k1}, \ldots, \Delta_{k(k-1)}, \Delta_{k(k+1)}, \ldots, \Delta_{kn}),$$

é elemento do núcleo de $\widehat{X}_k$, onde

$$\Delta_{kl} = \begin{cases} (-1)^{k+l}\omega(k_{kl}), & se \quad k < l, \\ (-1)^{k+l-1}\omega(k_{kl}), & se \quad l < k. \end{cases}$$

Em particular,

$$\Delta_{kl} = -\Delta_{lk}.$$

A matriz X da configuração x possui posto $n-2$. Então, a matriz

$$X_k = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_{11} & \ldots & x_{1(k-1)} & x_{1(k+1)} & \ldots & x_{1n} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ x_{(n-3)1} & \ldots & x_{(n-3)(k-1)} & x_{(n-3)(k+1)} & \ldots & x_{(n-3)n} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}_{n-1\times n-1}$$

possui núcleo não-trivial. Observe que os cofatores com respeito a última linha são:

$$\Delta_{kl} = \begin{cases} (-1)^{k+l-1}\omega(k_{kl}), & \text{se} \quad l = 1, ..., k-1, \\ (-1)^{k+l}\omega(k_{kl}), & \text{se} \quad l = k+1, ..., n \end{cases}$$

Logo, pela proposição 2.3, o vetor

$$\Phi_k = (\Delta_{k1}, ..., \Delta_{k(k-1)}, \Delta_{k(k+1)}, \Delta_{kn})$$

pertence ao núcleo da matriz $\widehat{X}_k$. Multiplicando o vetor Δ_k, por $(-1)^{k-n+1}$, encontramos o vetor desejado.

Analogamente ao que fizemos na seção anterior, deduziremos uma maneira de escrever $\omega(\widehat{x}_{kl})$ como um $n-2$ produto exterior em $\mathbb{R}^{n-3}$:

Lema 2.4. *Seja $\wedge$ o produto exterior no espaço $\mathbb{R}^{n-3}$. Temos que*

$$\tau(j,k,l)(x_1 - x_j) \wedge \ldots \wedge (x_n - x_j) = \omega(\widehat{x}_{kl}) e_1 \wedge \ldots \wedge e_{n-3},$$

onde os fatores $(x_k - x_j)$, $(x_j - x_j)$ e $(x_l - x_j)$ foram omitidos no primeiro membro, j é um índice arbitrário com j,k,l distintos, os e_i's formam a base canônica de $\mathbb{R}^{n-3}$ e

$$\tau(j,k,l) = \begin{cases} (-1)^{j-1}, & se \quad k < l < j, \\ (-1)^{j}, & se \quad k < j < l, \\ (-1)^{j+1}, & se \quad j < k < l. \end{cases}$$

Considere a seguinte transformação linear $T : \mathbb{R}^{n-3} \to \mathbb{R}^{n-3}$ cuja matriz na base canônica é dada por:

$$T = \begin{pmatrix} x_1 - x_j & \ldots & x_n - x_j \end{pmatrix},$$

onde as colunas $x_j - x_j$, $x_k - x_j$ e $x_l - x_j$ foram omitidas.

Temos que:

$$| T | e_1 \wedge \ldots \wedge e_{n-3} = (x_1 - x_j) \wedge \ldots \wedge (x_n - x_j). \tag{2.41}$$

Afirmação:

$$| T | = \begin{cases} (-1)^{j-1}\omega(\widehat{x}_{kl}), & \text{se} \quad k < l < j, \\ (-1)^{j}\omega(\widehat{x}_{kl}), & \text{se} \quad k < j < l, \\ (-1)^{j+1}\omega(\widehat{x}_{kl}), & \text{se} \quad j < k < l. \end{cases}$$

Considere a matriz da configuração $\widehat{x}_{kl}$, $\widehat{X}_{kl}$, e subtraia a j-ésima coluna das demais, obtendo a seguinte matriz:

$$\widehat{X}_{kl}^{(j)} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ x_1 - x_j & \ldots & x_{j-1} - x_j & x_j & x_{j+1} - x_j & \ldots & x_n - x_j \end{pmatrix}.$$

Observe que

$$| \widehat{X}_{kl}^{(j)} | = | \widehat{X}_{kl} | = w(\widehat{x}_{kl}), \tag{2.42}$$

pois subtrair uma coluna de outra não altera o determinante.

Expandindo o determinante de $\widehat{X}_{kl}^{(j)}$ pela primeira linha, obtemos que:

$$| \widehat{X}_{k}^{(j)} |= \begin{cases} (-1)^{j-1} \mid T \mid, & \text{se} \quad k<l<j, \\ (-1)^{j} \mid T \mid, & \text{se} \quad k<j<l, \\ (-1)^{j+1} \mid T \mid, & \text{se} \quad j<k<l. \end{cases}$$

Portanto, de (2.42) e da relação anterior segue que $w(\widehat{x}_{kl}) = \tau \mid T \mid$. Substituindo em (2.41), temos:

$$\tau\omega(\widehat{x}_k)e_1 \wedge \ldots \wedge e_{n-3} = (x_1 - x_j) \wedge \ldots \wedge (x_n - x_j).$$

Multiplicando ambos os membros da equação acima por τ, obtemos a relação desejada.

Como na seção 1.1, seja $A(x)$ matriz de Cayley-Menger associada à configuração x. Denotaremos por A_{ij} a submatriz de A obtida retirando-se suas $i-$ésima linha e $j-$ésima coluna. Denotaremos por F_{ij} o cofator de elemento na i-ésima linha e na j-ésima coluna de A. Denotaremos ainda $(F_{ij})_{kl}$ o cofator da $k-$ésima linha e $l-$ésima coluna da matriz A_{ij}.

A seguir, provaremos um critério para decidir se uma configuração x possui dimensão $n-3$.

Proposição 2.16. *Se $F = 0$, as seguintes condições são equivalentes:*

1. *$\delta(x) = n-3$;*

2. *Existem 2 corpos $x_{i_j}, j = 1,2$, tais que no mínimo dois cofatores principais $F_{kk}(\hat{x}_{i_j})$ são não-nulos;*

3. *$posto(A) = n-1$.*

1. $\Rightarrow$ 2. Se $\delta(x) = n-3$, então, para todo $j \in \{1,...,n\}$, os vetores $x_i - x_j$, $1 \leq i \leq n$, $i \neq j$, geram um espaços vetorial de dimensão $n-3$. Deste modo, segue do lema 2.2 que podemos encontrar dois índices i_1,i_2 tais que $\delta(\widehat{x}_{i_l}) = (n-1)-2$, $l = 1,2$. Logo, pela proposição 2.9 aplicada as configurações $\widehat{x}_{il}$, $k = 1,2$, obtemos $F(x_{i_l}) \neq 0$, $l = 1,2$. Observando que $F(\widehat{x}_{i_l}) = F_{i_l i_l}$, $k \neq 1,2$, obtemos o resultado.

2. $\Rightarrow$ 3. Se 2. vale, então existe ao menos um cofator principal $F_{kk}(\hat{x}_{i_j}) \neq 0$. Uma vez que esse cofator é, a menos de sinal, um menor $(n-1) \times n-1$ da matriz de Cayley-Menger, 3. segue.

3. $\Rightarrow$ 1. Se 3. vale, então $dimKer(A) = 2$. Pela proposição 2.6, temos que $dimKer(X) =$ 1 ou 2, onde X é a matriz da configuração x. A equação (2.7) acarreta $\delta(x) = n-2$ ou $\delta(x) = n-3$. Pela proposição 2.9, a primeira suposição está descartada (pois posto de A seria $n-1$). Logo, $\delta(x) = n-3$.

O próximo resultado fornece uma parametrização conveniente para os cofatores da matriz de Cayley-Menger $A(\widehat{x}_i)$.

Proposição 2.17. *Sejam $A(s)$ e $F(s)$ matriz e determinante de Cayley-Menger, com s_{ij} números complexos arbitrários. Suponha que, para algum $i \in \{1,...,n\}$, $F_{ii}(s) = 0$ com algum cofator* *de A_{ii} não-nulo. Então, se $\Delta = (\Delta_{i0}, \ldots, \widehat{\Delta_{ii}}, \cdots, \Delta_{in})$ é uma solução não-trivial de $A_{ii}(s)\Delta = 0$, existe uma única constante κ não-nula tal que*

$$(F_{ii})_{jl} = \kappa \Delta_{i(j-1)} \Delta_{i(l-1)}, \quad 1 \leq j, l \leq n. \tag{2.43}$$

Mais ainda, pelo menos dois Δ_{ij}'s são não-nulos para $1 \leq i \leq n$.

Segue imediatamente das hipóteses que $A_{ii}(s) = A(\widehat{x_i})$ têm posto $n-1$. Pela proposição 2.9, aplicada a configuração de $n-1$ corpos $\widehat{x_i}$, temos que $\delta(\widehat{x_i}) = (n-1)-2$. Portanto, pela proposição 2.10, aplicada à configuração $\widehat{x_i}$, o resultado segue.

2.7 As equações para configurações centrais de dimensão $n-3$

Na seção 1.2 deduzimos que toda configuração central satisfaz as equações:

$$\sum_{j \neq i, j=1}^{n} m_j S_{ij}(x_i - x_j) = 0, \; i = 1, \ldots, n, \tag{2.44}$$

onde

$$S_{ij} = r_{ij}^{-a} - r_0^{-a}, \; i \neq j. \tag{2.45}$$

Analogamente ao que foi feito na seção 1.2, vamos eliminar a dependência explícita das equações (2.44) nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$.

Proposição 2.18. *Se x é uma configuração central com massas $m_1, \ldots, m_n$, então:*

$$m_j S_{ij} \Delta_{lk} - m_k S_{ik} \Delta_{jl} + m_l S_{il} \Delta_{jk} = 0, \tag{2.46}$$

onde $i, j, k, l \in \{1, \ldots, n\}$, são dois a dois distintos e $j < k < l$, S_{ik} é como na equação (2.45) e os Δ_{jk}'s são como na proposição 2.15.

Seja $v_{ijkl} = (x_1 - x_i) \wedge \ldots \wedge (x_n - x_i)$ um produto exterior $(n-4)$-dimensional, onde os termos $(x_i - x_i)$,$(x_j - x_i)$, $(x_k - x_i)$, $(x_l - x_i)$ foram omitidos. Calcularemos

$$\sum_{j \neq i} m_j S_{ij}(x_i - x_j) \wedge v_{ijkl} = 0.$$

Usando a distributividade e a anticomutatividade do produto exterior, obtemos:

$$m_j S_{ij}(x_j - x_i) \wedge v_{ijkl} + m_k S_{ik}(x_k - x_i) \wedge v_{ijkl} + m_l S_{il}(x_l - x_i) \wedge v_{ijkl} = 0 \tag{2.47}$$

Vamos supor, sem perda de generalidade que $j < k < l$. Temos 4 casos a considerar:

$$i < j < k < l, \quad j < i < k < l, \quad j < k < i < l, \quad j < k < l < i.$$

Faremos apenas o caso $j < i < k < l$, porque os outros casos são análogos.

Utilizando novamente anticomutatividade do produto exterior, obtem-se a relação:

$$(-1)^{j-1}m_jS_{ij}v_{ikl}+(-1)^{k-3}m_kS_{ik}v_{ijl}+(-1)^{l-4}m_lS_{il}v_{ijk}=0.$$

Do lema 4.1, segue:

$$(-1)^{j-1}(-1)^{i+1}m_jS_{ij}w(\widehat{x}_{kl})+(-1)^{k-3}(-1)^{i}m_kS_{ik}w(\widehat{x}_{jl})+(-1)^{l-4}(-1)^{i}m_lS_{il}w(\widehat{x}_{jk})=0.$$

Utilizando a proposição 2.15, obtemos:

$$(-1)^{i+j+k+l}m_jS_{ij}\Delta_{lk}+(-1)^{i+j+k+l-3}m_kS_{ik}\Delta_{jl}+(-1)^{i+j+k+l-4}m_lS_{il}\Delta_{jk}=0.$$

Disto segue o resultado.

Lema 2.5. *Seja $x=(x_1,\ldots,x_n)$ uma configuração central com massas não-nulas $m_1,\ldots m_n$. Se uma configuração $\tilde{x}=(\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_n)$ equivalente a x módulo homotetias então $\tilde{x}$ também é configuração central com respeito as massas $m_1,\ldots,m_n$.*

Sendo x configuração central, existe $\lambda\neq 0$ de modo que

$$\sum_{j\neq i}m_j||x_j-x_i||^{2a}(x_j-x_i)-\lambda(x_i-c)=0, \tag{2.48}$$

Se $\tilde{x}$ é equivalente a x módulo homotetias, existe β tal que $\tilde{x}=\beta x$, logo

$$\begin{aligned}\sum_{j\neq i}m_j||\tilde{x}_j-\tilde{x}_i||^{2a}(\tilde{x}_j-\tilde{x}_i) &= \beta^{2a+1}\sum_{j\neq i}m_j||x_j-x_i||^{2a}(x_j-x_i)\\ &= \beta^{2a}\lambda(\tilde{x}_j-\beta c)\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que $\tilde{x}$ é configuração central com $\tilde{\lambda}=\beta^{2a}\lambda$.

Para x e $\tilde{x}$ como na lema 2.5, sejam r_{ij} as distâncias entre os pontos de x, $\tilde{r}_{ij}$ as distâncias entre os pontos de $\tilde{x}$ e tome

$$S_{ij}=r_{ij}^{-a}-r_0^{-a},\qquad \tilde{S}_{ij}=\tilde{r}_{ij}^{-a}-\tilde{r}_0^{-a}\ i\neq j,$$

onde

$$r_0=\frac{M}{\lambda}\qquad \tilde{r}_0=\frac{M}{\tilde{\lambda}}.$$

Lema 2.6. *Se x uma configuração central com massas não-nulas $m_1,\ldots m_n$, escolhida uma quatidade S_{ij}, é possível encontrar uma configuração central $\tilde{x}$ equivalente a x módulo homotetias tal que $\tilde{S}_{ij}=0$.*

De fato, escolha uma homotetia β tal que $\beta^{2a+1}r_{ij}^{-a}=M\lambda^{-1}$ obtemos:

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{ij} &= \tilde{r}_{ij}^{-a}-\tilde{r}_0^{-a}\\ &= \beta r_{ij}^{-a}-M\lambda^{-1}\\ &= \frac{\beta^{2a+1}r_{ij}^{-a}-M\lambda^{-1}}{\beta^{2a}}=0.\end{aligned}$$

A seguir, encontraremos uma parametrização para as distâncias mútuas provenientes de configurações centrais x de dimensão $\delta(x)=n-3$.

Proposição 2.19. *Se x uma configuração central com massas não-nulas e $\delta(x) = n-3$ então existe uma configuração $\tilde{x}$ equivalente a x módulo homotetias de modo que existem números reais $z_{12},\ldots,z_{1n}$, $z_{1n},\ldots,z_{(n-1)n}$ e constantes k_1 e k_2 não ambas nulas tais que:*

$$\tilde{S}_{ik} = k_1 z_{1i} z_{1k} + k_2 z_{in} z_{kn}. \tag{2.49}$$

Mais ainda, ao menos duas das quantidades z são não-nulas.

Uma vez que as massas são não-nulas, nós podemos definir:

$$z_{ij} = \frac{\Delta_{ij}}{m_i m_j}, \qquad 1 \leq i < j \leq n, \tag{2.50}$$

$$z_{ii} = 0, \qquad i = 1,\ldots,n. \tag{2.51}$$

Desse modo, podemos escrever a equação (2.46) como:

$$S_{ik} z_{jl} = S_{il} z_{jk} + S_{ij} z_{kl}. \tag{2.52}$$

Sendo x configuração de dimensão $n-3$, o posto da matriz X é $n-2$. Desse modo, podemos supor sem perda de generalidade que Δ_{1n} é diferente de zero e, consequentemente, $z_{1n} \neq 0$. Fixando $j = 1$ e $l = n$ nas equações (2.52), obtemos:

$$S_{ik} z_{1n} = S_{in} z_{1k} + S_{i1} z_{kn}. \tag{2.53}$$

Afirmação: Se $i \neq 1, n$ então $S_{in} = c_1 z_{1i}$.

De fato, fazendo $i = n$, $j = 1$, $k = i$ e $l = k$ na equação (2.52) obtemos:

$$S_{ni} z_{1k} = S_{n1} z_{ik} + S_{nk} z_{1i}. \tag{2.54}$$

Pelo lema 2.6, aplicando uma homotetia se necessário, podemos tomar x tal que $S_{1n} = 0$. Consequentemente,

$$S_{in} z_{1k} - S_{kn} z_{1i} = 0. \tag{2.55}$$

Portanto a matriz

$$K = \begin{pmatrix} S_{2n} & \cdots & S_{(n-1)n} \\ z_{12} & \cdots & z_{1(n-1)} \end{pmatrix}$$

possui posto 1. Isto implica que existe uma única constante c_1, tal que:

$$S_{l_0 i} = c_1 z_{j_0 i}. \tag{2.56}$$

Logo, nossa afirmação está provada. Analogamente, existe uma única constante c_2 tal que

$$S_{j_0 i} = c_2 z_{l_0 i}. \tag{2.57}$$

Substituindo (2.56) e (2.57) em (2.53), e definindo $k_1 = c_1/z_{1n}$ e $k_2 = c_2/z_{1n}$, obtemos o resultado.

Para finalizar, se c_1 e c_2 fossem ambas nulas todas as distâncias r_{ij} seriam iguais, daí a configuração x teria dimensão $n-1$, o que é um absurdo. Logo, k_1 e k_2 não são ambas nulas. Pelo mesmo motivo ao menos duas das quantidades z são não-nulas

2.8 Configurações centrais de dimensão arbitrária

Nesta seção demonstraremos a versão mais geral da proposição 2.9.

Proposição 2.20. *As seguintes condições são equivalentes:*

1. $\delta(x) = n-k,\ k \geq 2;$

2. *Existem índices* $i_1,\ldots,i_{k-2} \in \{1,\ldots,n\}$ *tais que dois cofatores pricipais da matriz* $A(\widehat{x}_{i1\ldots i_{k-2}})$ *são não-nulos;*

3. $posto(A) = n-k+2.$

1. $\Rightarrow$ 2. Se $\delta(x) = n-k$ então existem índices $i_1,\ldots,i_{k-2}$ tais que a configuração de $n-k+2$ corpos $\widehat{x}_{i_1\ldots i_{k-2}}$ tem dimensão $\delta(\widehat{x}_{i_1\ldots i_{k-2}}) = n-k$. Pela proposição 2.9, a matriz de Cayley-Menger $A(\widehat{x}_{i_1\ldots i_{k-2}})$ possui dois cofatores principais não-nulos.

2. $\Rightarrow$ 3. Seja $F_{jj}(\widehat{x}_{i_1\ldots i_{k-2}})$ um menor principal não-nulo da matriz $A(\widehat{x}_{i_1\ldots i_{k-2}})$. Note que $F_{jj}(\widehat{x}_{i_1\ldots i_{k-2}})$ é o determinante de uma submatriz quadrada $(n-k+2)\times(n-k+2)$ da matriz A. Desse modo:

$$\text{posto}(A) \geq n-k+2.$$

Por outro lado, pela proposição 2.6,

$$dim\text{Ker}(A) \geq dim\text{Ker}(X) = k-1.$$

Logo,

$$\text{posto}(A) = n+1-dim\text{Ker}(A) \leq (n+1)-(k+1) = n-k+2.$$

Disto segue 3.

3. $\Rightarrow$ 1. Se $\text{posto}(A) = n-k+2$, então $dim\text{Ker}(A) = k-1$. Pela proposição 2.6,

$$dim\text{Ker}(X) \leq k-1.$$

Suponha por contradição que $dim\text{Ker}(X) = l-1$, com $l<k$. Desse modo, utilizando a equação (2.7), teríamos $\delta(x) = n-l$, com $l>k$. Uma vez que já estabelecemos 1. $\Rightarrow$ 3., deduzimos que $\text{posto}(A) = n-l+2$. Isso é um absurdo porque supomos $\text{posto}(A) = n-k+2$ e $k \neq l$.

Esse resultado é importante porque permitirá incluir cada conjunto das configurações centrais com dimensão fixada no conjunto solução de um sistema de equações polinomiais dados por determinantes.

O próximo resultado é um corolário da proposição 2.20 e explicita a relação entre os núcleos das matrizes de configuração e de Cayley-Menger associadas a uma configuração x.

Seja x uma configuração. Os núcleos das matrizes de Cayley-Menger e da configuração x são isomorfos. Mais ainda, esse isomomorfismo é dado por:

$$\begin{array}{rcl} T : Ker(X) & \to & Ker(A) \\ v = (v_1, ..., v_n) & \mapsto & \widetilde{v} = (-\sum_{i=1}^{n} \|x_i\| v_i, v_1, ..., v_n) \end{array}$$

Pela demonstração da proposição 2.20, Ker(X) e Ker(A) possuem a mesma dimensão. Da proposição 2.6, segue que T transforma conjuntos L.I. em conjuntos L.I.. Logo, T é isomorfismo.

3 UM POUCO DE GEOMETRIA ALGÉBRICA

No capítulo 2, obtivemos sistemas de equações polinomiais satisfeitos por configurações centrais. Desejamos saber qual é o “tamanho” do conjunto-solução desses sistemas polinomiais. A ferramenta que utilizaremos para este fim será o critério Jacobiano para o cálculo da dimensão de uma conjunto algébrico quasi-projetivo. Neste capítulo, exporemos, de maneira sucinta, os resultados e conceitos que serão utilizados no último capítulo deste texto. As principais referências para este capítulo são (15, seções 1.1-1.6 e 2.1), (16, Capítulos 1-6) e (17, Capítulo 1)

Seja $\mathbb{K}$ um corpo algebricamente fechado e $R = \mathbb{K}[x_1,..,x_n]$ o anel de polinômios com coeficientes em $\mathbb{K}$ nas variáveis $x_1,...,x_n$.

3.1 Conjuntos Algébricos Afins

Definimos por $\mathbb{A}^n = \{(a_1,...,a_n) : a_i \in \mathbb{K}, i = 1,...,n\}$, *o espaço afim* $n-$*dimensional sobre* $\mathbb{K}$.

Seja T um subconjunto de R. Dizemos que:

$$Z(T) = \{(a_1,...,a_n) \in \mathbb{A}^n : f(a_1,...,a_n) = 0, \text{para todo } F \in T\},$$

é o *conjunto dos zeros* de T.

São verdadeiros os seguintes fatos:

1. Se $I =< T >$ é o ideal gerado por T, então $Z(T) = Z(I) = Z(\sqrt{I})$, onde:

   $$\sqrt{I} = \{a \in R | \text{ existe } m \in \mathbb{N} \text{ tal que } a^m \in I\}$$

   denota o radical de I.

2. Se $T \subset R$, pelo teorema da base de Hilbert, existem $f_1,...,f_k \in R$ tais que

   $$< T >= I =< f_1,...,f_k > .$$

   Assim, $Z(T)$ é dado pelas soluções do sistema finito

   $$f_1 = ... = f_k = 0.$$

1. Se $T = \{0\} \subset R$ então $Z(T) = \mathbb{A}^n$.

2. Se $T = \{1\} \subset R$ então $Z(T) = \emptyset$.

3. Se $T = \{x_1^2 - x_2, x_1 - x_2\} \subset \mathbb{K}[x_1, x_2]$ então:

$$\begin{aligned} Z(T) &= \{(a,b) \in \mathbb{A}^2 : a^2 - b = 0, a - b = 0\} \\ &= \{(a,b) \in \mathbb{A}^2 : a^2 = a\} \\ &= \{(0,0), (1,1)\}. \end{aligned}$$

Um subconjunto $Y \in \mathbb{A}^n$ é dito *conjunto algébrico* se existir $T \subset R$ tal que $Y = Z(T)$.

1. $\mathbb{A}^n = Z(0)$ é conjunto algébrico.

2. $\emptyset = Z(1)$ é conjunto algébrico.

3. $\{(a,b) \in \mathbb{A}^2 : b \geq 0\}$ não é conjunto algébrico.

4. $q = \{(a_1, ..., a_n)\} = Z(< x_1 - a_1, ..., x_n - a_n >)$ é conjunto algébrico.

Os conjuntos algébricos serão os objetos básicos do nosso estudo. A família $\{Y \subset \mathbb{A}^n : Y = Z(T), T \subset R\}$ dos conjuntos algébricos satisfaz as seguinte propriedades:

1. $\cup_{i=1}^n Z(T_i) = Z(T_1.T_2...T_n)$,

2. $\cap Z(T_\alpha) = Z(\cup T_\alpha)$,

3. $Z(0) = \mathbb{A}^n$ e $Z(1) = \emptyset$.

Desse modo, definimos a *topologia de Zariski em* $\mathbb{A}^n$ tomando como coleção de abertos os complementares dos conjuntos algébricos. Denotaremos o *fecho* de um conjunto $Y \subset \mathbb{A}^n$ na topologia de Zariski por $\overline{Y}$.

[Determinando a família de abertos da topologia de Zariski em $\mathbb{A}^1$] Uma vez que $\mathbb{K}[x]$ é domínio de ideais principais, a família dos fechados de $\mathbb{A}^1$ é dada por $\{Z(< f >)\}_{f \in R}$. Como um polinômio não-nulo tem uma quantidade finita de raízes, os abertos da topologia de Zariski de $\mathbb{A}^1$ são $\emptyset$, $\mathbb{A}^1$ e complementares de conjuntos finitos de pontos.

Das definições apresentadas podemos observar que existe uma relação entre ideais $I \subset R$ e conjuntos algébricos $Y \subset \mathbb{A}^n$. Precisamos entender melhor essa relação.

Seja $Y \subset \mathbb{A}^n$. Definimos o ideal de Y, $\mathscr{I}(Y) \subset R$, por:

$$\mathscr{I}(Y) = \{f \in R : f(a) = 0 \text{ para todo } a \in Y\}.$$

Observe que:

1. Para todo subconjunto $Y \subset \mathbb{A}^n$, $\mathscr{I}(Y) \subset R$ é ideal radical, ou seja, $\mathscr{I} = \sqrt{\mathscr{I}}$.

2. $\mathscr{I}(\cdot)$ induz uma função entre os conjuntos algébricos $Y \subset \mathbb{A}^n$ e ideais $I \subset R$.

Proposição 3.1. *[Teorema dos Zeros de Hilbert]* $Z(\cdot)$ *e* $\mathscr{I}(\cdot)$ *induzem a seguinte correspondência bijetiva que reverte inclusões :*

$$\begin{array}{ccc} \{Y|Y \text{ é conjunto algébrico de } \mathbb{K}^n\} & \leftrightarrow & \{I|I \text{é ideal radical de } R\} \\ Y & \to & \mathscr{I}(Y) \\ Z(I) & \leftarrow & I \end{array}$$

O próximo passo do nosso estudos será definir funções entre conjuntos algébricos. Como um conjunto algébrico é dado por polinômios, é natural que os morfismos entre conjuntos algébricos sejam dados por polinomios.

Seja $Y \subset \mathbb{A}^n$ um conjunto algébrico. Uma função $\phi : Y \to \mathbb{K}$ é dita *regular* se existe $g \in R$ tal que $\phi(a) = g(a)$ para todo $a \in Y$. Denotaremos por $\mathscr{O}(Y)$ o conjunto de todas as funções regulares de Y em $\mathbb{K}$.

Mais geralmente, sejam $Y \subset \mathbb{A}^n$ e $Z \subset \mathbb{A}^m$ conjuntos algébricos. Uma função $f : Y \to Z$ é dita *regular* se existem polinomios $f_1, ..., f_m \in R$ tais que $f(a) = (f_1(a), ..., f_m(a))$, para todo $a \in Y$.

Denotaremos o conjunto de todas as funções regulares de Y em Z por $\mathscr{O}(Z,Y)$.

A função $f : \mathbb{A}^3 \to \mathbb{A}^3$ dada por $f(x,y,z) = (x, xy, xyz)$ é regular.

Considere os conjuntos algébricos $Y \subset \mathbb{A}^n$ e $Z \subset \mathbb{A}^m$. Dizemos que Y e Z são conjuntos algébricos *isomorfos* se existe um função regular bijetiva $\phi : Y \to Z$, cuja inversa também é regular.

A parábola $Z(x^2 - y) \subset \mathbb{A}^2$ e a reta $\mathbb{A}^1$ são isomorfas. De fato, a função regular

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{A}^1 & \longrightarrow & Z(x^2 - y) \\ & t & \longmapsto & (t, t^2) \end{array}$$

possui inversa

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & Z(x^2 - y) & \longrightarrow & \mathbb{A}^1 \\ & (x,y) & \longmapsto & x, \end{array}$$

que também é função regular.

Seja $f : Y \to Z$ uma função regular. f induz um homomorfismo de $\mathbb{K}-$álgebras dado por:

$$\begin{array}{rccc} f^*: & \mathscr{O}(Z) & \to & \mathscr{O}(Y) \\ & u & \to & u^* = u \circ f. \end{array}$$

A aplicação u^* é chamada de *pullback da função regular u*. Considere a aplicação regular f : $\mathbb{A}^1 \to Z(x^2 - y^3)$ dada por $f(t) = (t^3, t^2)$ e a função regular $u \in \mathscr{O}(\mathbb{A}^1)$ dada por $u(x,y) = x + y$. Temos que $u^* \in \mathscr{O}(Z(x^2 - y3))$ é dada por $u^*(t) = u(f(t)) = u(t^2, t^3) = t^2 + t^3$.

O pullback tem o comportamento esperado quando compomos funções regulares:

Proposição 3.2. *Sejam $f : Y_1 \to Y_2$ e $g : Y_2 \to Y_3$ funções regulares. Então $(g \circ f)^* = g^* \circ f^*$.*

A proposição 3.1 nos permite associar um conjunto algébrico Y a um anel determinado por $\mathscr{I}(V)$.

Seja $Y \subset \mathbb{A}^n$ um conjunto algébrico. Definimos $A(Y)$, *o anel de coordenadas de* Y, por:

$$A(Y) = R/\mathscr{I}(Y).$$

Como $\mathscr{I}(Y)$ é ideal radical, $A(Y)$ não possui elementos nilpotentes não-nulos. Observe ainda que $A(Y)$ é uma $\mathbb{K}-$algebra gerada pelas classes $\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n$ módulo I. Logo, $A(Y)$ é uma $\mathbb{K}-$álgebra finitamente gerada livre de nilpotentes.

1. $A(\mathbb{A}^n) = R$;
2. $A(Z(x_2^2 - x_1^3) = \mathbb{K}[x_1, x_2]/(x_2^2 - x_1^3) \cong \mathbb{K}[t^2, t^3]$;
3. $A(q = (a_1, ..., a_n)) = R/ < x - a_1, ..., x - a_n > \cong \mathbb{K}$.

Dado um conjunto algébrico $Y \subset \mathbb{A}^n$, considere o homomorfismo de $\mathbb{K}-$álgebras

$$\alpha : \mathbb{K}[x_1, ..., x_n] \to \mathscr{O}(Y)$$

dado por $\alpha(f) = f|_Y$. Note que o núcleo desse homomorfismo é exatamente $\mathscr{I}(Y)$. Pelo teorema do homomorfisomo provamos o seguinte:

Proposição 3.3. *Seja $Y \subset \mathbb{A}^n$ um conjunto algébrico. Então A(Y) e $\mathscr{O}(Y)$ são isomorfas como $\mathbb{K}$-álgebras.*

A associação feita na definição 3.1 é importante porque poderemos traduzir propriedades algébricas do anel $A(Y)$ em propriedades geométricas do conjunto algébrico Y.

Proposição 3.4. *Seja $f : Y \to Z$ uma função regular. As seguintes condições são equivalentes:*

1. *f é isomorfismo entre conjuntos algébricos Y e Z.*
2. *$f^* : A(Z) \to A(Y)$ é isomorfismo de $\mathbb{K}-$álgebras.*

Mais ainda, a aplicação $Y \to A(Y)$ induz a seguinte correspondência $1-1$:

$$\begin{array}{ccc} \{\textit{Conjuntos Algébricos}\} & \leftrightarrow & \{\mathbb{K}-\textit{álgebras finitamente geradas livres de nilpotentes}\} \\ Y & \leftrightarrow & A(Y) \cong R/\mathscr{I}(Y). \end{array}$$

Afirmamos que a hipérbole $Z(xy-1)$ e a reta afim $\mathbb{A}^1$ não são isomorfas. De fato:

$$A(Z(xy-1)) \;=\; \mathbb{K}[x,y]/ < xy-1 > \cong \; \mathbb{K}[x, 1/x] \;\ncong\; \mathbb{K}[x] \;=\; A(\mathbb{A}^1).$$

3.2 Conjuntos Algébricos Projetivos

O espaço afim $\mathbb{A}^n$ admite uma compactificação natural, o espaço projetivo $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$. Nesta seção definiremos o espaço projetivo e conjuntos algébricos projetivos. Além disso, interpretaremos um conjunto algébrico projetivo como compaticficação natural de um conjunto algébrico afim.

Defina em $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{(0,...,0)\}$ a seguinte relação de equivalência:

$$(a_0,...,a_n) \sim (b_0,...,b_n) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \text{ tal que } a_i = \lambda b_i, \quad i \in 0,...,n.$$

O espaço projetivo n-dimensional sobre $\mathbb{K}$ é dado por:

$$\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} = (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{(0,...,0)\})/\sim. \tag{3.1}$$

Se um ponto projetivo $\xi \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ é dado pela classe do ponto $a = (a_0,...,a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, dizemos que $[a] = [a_0 : ... : a_n]$ são as *cordenadas homogêneas de* ξ.

Consideremos o anel $S = \mathbb{K}[x_0,...,x_n]$. Dizemos que um polinômio $f \in S$ *se anula no ponto* $[a] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ se $f(b) = 0$, $\forall\, b \in [a]$. **Notação:** $f([a]) = 0$.

Se $F \in S$ for um polinômio homogêneo de grau d então $F(\lambda a_0,...,\lambda a_n) = \lambda^d F(a_0,...,a_n)$, logo $F(a) = 0 \Rightarrow F([a]) = 0$. Isso nos permite considerar o conjunto dos zeros de F, dado por:

$$Z(F) = \{[a] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} : F([a]) = 0\}.$$

Isso motiva a seguinte definição:

Seja T um subconjunto de polinômios homogêneos de S. *O conjunto dos zeros de* T é um subconjunto de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ da forma:

$$Z(T) = \{[a] : F([a]) = 0,\ \forall F \in T\}.$$

Dizemos que Y é um *conjunto algébrico projetivo* se existir um cojunto de polinômios homogêneos $T \subset S$ tal que $Y = V(T)$.

Proposição 3.5. *A família* $\{Z(T)\}_{T \subset S}$ *dos conjuntos algébricos projetivos satisfaz as seguintes propriedadas:*

1. $\cup_{i=1}^n Z(T_i) = Z(T_1 T_2 ... T_n)$,
2. $\cap Z(T_\alpha) = Z(\cup T_\alpha)$,
3. $Z(0) = \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ *e* $Z(1) = \emptyset$.

A proposição anterior permite definir *a topologia de Zariski em* $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ tomando como coleção de abertos os complementares dos conjuntos algébricos projetivos.

Seja $Y \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$. Definimos o *ideal homogêneo de* Y, $\mathscr{I}(Y) \subset S$ por

$$\{F \in S : F \text{ é homogêneo e } F([a]) = 0 \text{ para todo } [a] \in Y\}.$$

É fácil verificar que $\mathscr{I}(Y)$ é um ideal radical e homogêneo. Pelo teorema da base de Hilbert, $\mathscr{I}(Y)$ possui um conjunto finito de geradores. Também é possível provar que $\mathscr{I}(V)$ é um ideal homogêneo, ou seja, existe um conjunto finito de polinômios homogêneos que geram $\mathscr{I}(V)$.

O próximo teorema explicita a relação entre conjuntos algébricos projetivos e ideais homogêneos.

Teorema 3.1 (Teorema dos Zeros de Hilbert Homogêneo)**.** *Considere um ideal homogêneo* $I \subset S$ *tal que* $\sqrt{I} \neq < x_0, ..., x_n >$. *Então*

$$\mathscr{I}(Z(I)) = \sqrt{I}.$$

Consequentemente, temos a seguinte função bijetiva, que reverte inclusões, entre conjuntos algébricos projetivos de $\mathbb{P}^n_K$ *e ideais radicais de* S *diferentes de* $(x_0, ..., x_n)$*:*

$$\begin{array}{ccc} \{\textit{Conjuntos Algébricos Projetivos}\} & \leftrightarrow & \{\textit{Ideais radicais homogêneos}\} \setminus \{< x_0, ..., x_n >\} \\ Y & \rightarrow & \mathscr{I}(Y) \\ Z(I) & \leftarrow & I \end{array}$$

Isto nos motiva a definir o *anel de coordenadas* de uma varidade provetiva $Y \subset \mathbb{P}^n_K$ por:

$$\mathbb{K}[x_0, ..., x_n]/\mathscr{I}(Y).$$

3.2.1 O fecho projetivo de uma Variedade Afim

Considere os hiperplanos $H_i = Z(x_i)$, $i = 0, ..., n$ e os abertos $U_i = \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \setminus H_i$.

Proposição 3.6. *A aplicação*

$$\phi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{A}^n \tag{3.2}$$

$$[a_0 : ... : a_n] \longmapsto \left(\frac{a_0}{a_i}, ..., \frac{a_n}{a_i}\right) \tag{3.3}$$

é um homeomorfismo entre U_i *munido da topologia de Zariski induzida e* $\mathbb{K}^n$ *munido da topologia de Zariski. Em particular,* $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} = \cup_{i=0}^n U_i$ *é uma cobertura aberta para* $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ *formada por* $n+1$ *espaços homeomorfos a* $\mathbb{A}^n$.

Como consequência imediata do resultado anterior, podemos mergulhar um conjunto algébrico afim $Y \subset \mathbb{A}^n$ em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$.

Seja $Y \subset \mathbb{A}^n \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ um conjunto algébrico afim mergulhado em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$. O *fecho projetivo de* Y, denotado por $\overline{Y}$, é o fecho de Y no espaço projetivo $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$. Dado um conjunto algébrico afim V, encontraremos geradores para $\overline{V} \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$.

1. Considere o polinômio de grau d, $F = G_0 + G_1 + ... + G_d \in \mathbb{K}[x_1,...,x_n]$, onde G_i é polinômio homogêneo de grau i, $i = 0,1...,d$ e $G_d \neq 0$. A *homogeneização* do polinômio F é o polinômio $\widetilde{F} \in \mathbb{K}[x_0,...,x_n]$ dado por:
$$\widetilde{F} = x_0^d G_0 + x_0^{d-1} G_1 ... + G_d.$$

2. Seja $G \in \mathbb{K}[x_0,...x_n]$ um polinômio homogêneo. A *desomogeinação* de G é o polinômio $g \in \mathbb{K}[x_1,...,x_n]$ dado por:
$$g(x_1,...,x_n) = G(1,x_1,...,x_n).$$

Teorema 3.2. *Seja $Y \subset \mathbb{A}^n \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ um conjunto algébrico afim com ideal $\mathscr{I}(Y)$. Se $\widetilde{I} \subset \mathbb{K}[x_0,...,x_n]$ é o ideal gerado pela homogeneização de todos os elementos de $\mathscr{I}(Y)$, então $\widetilde{I} = \mathscr{I}(\overline{Y})$. O ideal $\widetilde{I}$ é chamado de homogeneização do ideal I.*

Observação 3.1. *Se $\mathscr{I}(Y)$ é gerado por $F_1,...,F_k$ não é verdade que $\mathscr{I}(\overline{Y})$ é gerado por $\widetilde{F}_1,...,\widetilde{F}_k$. De fato, se*
$$Y = Z(y - x^2, z - xy) = \{(t,t^2,t^3) : t \in \mathbb{K}\},$$
então pode-se mostrar que:
$$\overline{Y} = \{(u^3 : u^2v : uv^2 : v^3 : u,v \in \mathbb{K})\},$$
Assim,
$$\mathscr{I}(\overline{Y}) \ = < xz - y^2, yw - z^2, xw - yz > .$$
Por outro lado, temos que o ideal gerado pelas homogeneizações de $y - x^2$ e $z - xy$ é dado por:
$$J =< wy - x^2, wz - xy > .$$
Note que $(0,1,1,0) \in \mathscr{Z}(J)$ e $(0,1,1,0) \notin \mathscr{I}(\overline{Y})$. Logo, $\overline{Y} \neq \mathscr{I}(J)$.

Para concluir esta seção, observe que podemos ver uma conjunto algébrico afim $Y \subset \mathbb{A}^n$ como um aberto de $\overline{Y}$. De fato,
$$Y = \overline{Y} \cap U_0 \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}.$$

3.3 Conjuntos Algébricos quasi-projetivos

Na seção anterior observamos que podemos ver um conjunto algébrico $Y \subset \mathbb{A}^n$ como um aberto de um conjunto algébrico projetivo. Gostaríamos de estender os objetos de nosso estudo para uma classe que englobe os conjuntos algébricos afim e projetivos e seus respectivos abertos na topologia de Zariski. Este será o objetivo desta seção.

Um *conjunto algébrico quasi-projetivo* é um conjunto da forma $V = X \setminus Y$, onde X e Y são conjuntos algébricos projetivos. Se X e Y forem conjuntos algébricos afins, dizemos que V é conjunto algébrico *quasi-afim*.

Observe que:

1. Um conjunto algébrico quasi-projetivo V é um aberto relativo de um conjunto algébrico projetivo na topologia de Zariski-induzida.

2. Conjuntos algébricos afins e projetivos são conjuntos algébricos quasi-projetivas.

Um subconjunto de um conjunto algébrico quasi-projetivo $W \subset V$ é uma *subvariedade* se, e somente se, W também for um conjunto algébrico quasi-projetivo. Dizemos que um conjunto algébrico quasi-projetivo V é *irredutível* se não puder ser escrito na forma $V = V_1 \cup V_2$ onde V_1 e V_2 são subvariedades próprias. Neste caso, dizemos que V é uma *variedade* quasi-projetiva.

1. $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ e $\mathbb{A}^n$ são irredutíveis;

2. O conjunto algébrico $Z(x^2 + y^2 - 1) \subset \mathbb{A}^2$;

3. $V = Z(xy, xz) = Z(x) \cup Z(y, z)$ é a união do eixo x com o plano yz, logo não é irredutível.

No exemplo anterior vimos conjuntos algébricos que não são irredutíveis. Felizmente, um conjunto algébrico admitirá uma decomposição finita cujas “peças” são subvariedades irredutiveis.

Seja V um conjunto algébrico quasi-projetivo em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$. Dizemos que V admite uma *decomposição em subvariedades irredutíveis* ou simplesmente, decomposição em irredutíveis se V pode ser escrito na forma $V = \cup_{i=1}^n V_i$, onde cada V_i, $i = 1, ..., n$ é uma subvariedade fechada irredutível de V. A decomposição é dita *irredundante* se $V_i \not\subseteq V_j$ para $i \neq j$.

Teorema 3.3. *Toda variedade quasi-projetiva $V \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ admite uma única decomposição irredundante.*

$V = Z(xy, xz) = Z(x) \cup Z(y, z)$ é uma decomposição irredundante para V.

Podemos definir conjuntos algébricos quasi-projetivas no espaço produto.

1. Uma subvariedade $V \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \times \mathbb{P}^m_{\mathbb{K}}$ é um conjunto da forma

$$V = \{([z],[w]) : p_i(z,w) = 0, i \in I\},$$

onde $p_i(z,w) = p(z_0, ..., z_n, w_0, ..., w_m)$ são separadamente homogêneos nas variáveis z e w, com graus de homogeneidade possivelmente diferentes.

2. Uma subvariedade $V \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^m$ é um conjunto da forma:

$$V = \{(z,[w]) : p_i(z,w) = 0, i \in I\},$$

onde $p_i(z,w) = p_i(z_0, ..., z_n, w_0, ..., w_m)$ é homogêneo nas variáveis w.

É possível generalizar esta definição para produtos de espaços projetivos com uma quantidade arbitrária e finita de fatores.

Seja Y uma variedade projetiva. Dizemos que uma propriedade é *genérica* em Y se vale em um aberto de Zariski de Y não-trivial.

Seja Y um conjunto algébrico irredutível. Se $U \subset Y$ é um aberto, então pode-se mostrar que U é denso. Esse fato mostra que uma propriedade Zariski-genérica vale em "quase toda parte".

3.4 Aplicações Regulares

Nesta seção estenderemos a noção de aplicação regular para conjuntos algébricos quasi-projetivos. Sejam $V \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ e $W \subset \mathbb{P}^k_{\mathbb{K}}$ conjuntos algébricos quasi-projetivos. Uma aplicação $f : V \to W$ é *regular* em um ponto $[z] \in V$ se existe um aberto de Zariski $U \subset V$ contendo $[z]$ tal que para todo $[x] = [x_0 : ... : x_n] \in U$ é dada por:

$$f([x]) = (f_0(x_0,...,x_n),...,f_k(x_0,...,x_n))$$

onde os polinômios $f_1,...,f_k$ são homogêneos, todos com o mesmo grau.

Por exemplo, a projeção $\pi_1 : \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \times \mathbb{P}^k_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}^k_{\mathbb{K}}$ é uma aplicação regular pois é dada por polinômios lineares que não se anulam simultaneamente.

Proposição 3.7. *Aplicações regulares são contínuas na topologia de Zariski.*

Uma aplicação regular entre conjuntos algébricos quasi-projetivos $f : V \to W$ é dita *dominante* se $f(V)$ não está contida em nenhuma subvariedade fechada própria de W. Equivalentemente, $\overline{f(V)} = \overline{W}$.

As propriedade das aplicações dominantes listadas na proposição a seguir serão úteis adiante.

Proposição 3.8. *Seja $f : X \to Y$ é um mapa regular dominante entre conjuntos algébricos quasiprojetivos X e Y então:*

1. *$f(X)$ contém algum aberto de Zariski W_0 de Y não-trivial.*

2. *Se X é irredutível, então Y é irredutível.*

3.5 Dimensão

Nesta seção exporemos alguns resultados básicos sobre a dimensão de uma conjunto algébrico.

A *dimensão* de um conjunto algébrico afim V é maior inteiro n para o qual existe uma cadeia de subvariedades fechadas próprias irredutíveis

$$V = V_d \supsetneq V_{d-1} \supsetneq \cdots \supsetneq V_1 \supsetneq V_0.$$

Com esta definição é possível provar que:

$$\dim(V) = \text{máx}\{\dim(V_i) : V_i \text{ é componente irredutível de } V\}.$$

$V = Z(xy, yz)$ adimite duas componentes irredutíveis, o eixo x e o plano yz, que têm dimensão 1 e 2 respectivamente. Logo, sua dimensão é 2.

É consequência imediata da definição 3.5 que $\dim(V) = 0$ se, e somente se, V é um conjunto finito. Por outro lado, da definição dada, não é claro que $\dim(\mathbb{A}^n) = n$. Essa observação mostra que precisamos de uma formulação do conceito de dimensão que viabilize o seu cálculo. De fato, existem muitas formulações equivalentes para a definição de dimensão. Listaremos aqui apenas algumas.

Seja V um conjunto algébrico quasi-projetivo irredutível. A dimensão de V, $\dim(V)$ pode ser definida como:

1. $\dim(V)$ é o grau de transcendência do corpo das funções racionais em V.

2. $\dim(V) = d$ se d é o menor inteiro tal que subespaço linear "genérico" $L \subset \mathbb{P}^n$ de dimensão $n-d-1$ é disjunto de V.

Foge ao escopo deste texto explicar os conceitos que aparecem na definição acima. Para mais informações, o leitor interessado pode consultar (15, Capítulo 1, Seção 6) e (18, Capítulo 11).

Existe uma formulação para a dimensão de V em termos da dimensão do espaço tangente de V em seus ponto não-singulares. Definiremos estas noções nas próximas seções.

A seguir, enunciaremos alguns fatos acerca da dimensão de conjuntos algébricos.

1. Se $V' \subset V$ é uma subvariedade fechada própria de uma variedade quasi-projetiva V então
$$\dim(V') < \dim(V).$$

2. A dimensão de uma variedade quasi-projetiva irredutível V é igual a dimensão do seu fecho.

3. Se $V \subset \mathbb{A}^n$ é um conjunto algébrico afim dado pelos zeros de m polinômios, então a dimensão de cada componente irredutível (não vazia) de V é, no mínimo, $n-m$.

Teorema 3.4 (Teorema da Dimensão das Fibras)**.** *Sejam X e Y variedades algébricas irredutíveis de dimensão n e m respectivamente e $f : X \to Y$ uma aplicação regular sobrejetiva. Então,*

1. *$dim(f^{-1}(y)) \geq n-m$ para todo $y \in Y$.*

2. *Existe aberto não vazio $U \subset Y$ tal que $dim(f^{-1}(y)) = n-m$ para todo $y \in U$.*

É fácil ver que o aberto U da parte 2 do teorema da dimensão das fibras, em geral, não pode ser tomado igual a Y. De fato, se $V = Z(xy-1) \cup Z(x)$, a aplicação regular:

$$\begin{array}{rccc} f: & V & \longrightarrow & \mathbb{K}^1 \\ & (x,y) & \longmapsto & x, \end{array}$$

é tal que:

$$\dim(f^{-1}(x)) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in \mathbb{K} \setminus 0, \\ 1 & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$$

Logo não é possível tomar $U = Y$.

Para concluir essa seção, provaremos um resultado que desempenhará papel importantíssimo no calculo da dimensão dos conjuntos algébricos a serem definidos no próximo capítulo.

Proposição 3.9. *Seja $f: V \to W$ uma aplicação regular entre conjuntos algébricos quasi-projetivos. Então:*

1. *Se f é dominante então dim$(V) \geq$ dim(W).*

2. *Se toda fibra $f^{-1}([w])$, $[w] \in W$ tem dimensão no máximo d, então dim$(V) \leqslant$ dim$(W) + d$.*

3. *Se W é irredutível e dim$(V) \leqslant$ dim(W), então quase toda fibra é finita.*

1. Escolha uma componente irredutível $W_j \subset W$ de dimensão máxima. Desde que f é dominante, existe alguma componente irredutível $V_i \subset V$ tal que $f: V_i \cap f^{-1}(W_j) \to W_j$ é dominante. Como f é dominante, pela proposição 3.8 parte 1, $f(V_i)$ contém um aberto. Logo, existem subconjuntos abertos de Zariski $V_{i_0} \subset V_i$ e $W_{j_0} \subset W_j$, que tem a mesma dimensão de V_i e W_j respectivamente e $f: V_{i_0} \to W_{j_0}$ é aplicação sobrejetiva. Portanto pela proposição 3.4 temos:

$$\dim(V) \geqslant \dim(V_i) \geqslant \dim(W_j) \geqslant \dim(W).$$

2. Tome qualquer componente irredutível V_i de V. Como a aplicação $f: V_i \to \overline{f(V_i)}$ é dominante, existe componente irredutível $W_j \subset \overline{f(V)}$ tal que $f: V_i \cap f^{-1}(W_j) \to W_j$ é dominante. Podemos restringir a aplicação f, se necessário, a subconjuntos Zariski-abertos $V_{i_0} \subset V_i$ e $W_{j_0} \subset W_j$ tais que f é sobrejetiva. Pelo teorema da dimensão das fibras, concluímos que $\dim(V_i) \leq \dim(W_j) + d \leq \dim(\overline{f(V)}) + d \leq \dim(W) + d$ para toda componente irredutível V_i de V. Logo,

$$\dim(V) \leq \dim(W) + d$$

3. Para demonstrar isto, é suficiente considerar a restrição de f às componentes irredutíveis V_i de V. Se $f: V_i \to W$ não é dominante então o resultado é trivial por que quase toda fibra é finita, já que é vazia. Se $f: V_i \to W$ é dominante então, pelo item 1., temos que $\dim(V_i) \geqslant$

$\dim(W)$. Uma vez que, por hipótese, $\dim(V_i) \leqslant \dim(W)$ temos $\dim(V_i) = \dim(W)$. Restringindo a uma aplicação sobrejetiva $f : V_{i_0} \to W_{j_0}$ entre subconjuntos abertos de Zariski, temos pela pela proposição anterior, que existe uma aberto de Zariski tal que a dimensão de $f^{-1}([z])$ é igual a $\dim(V_{i_0}) - \dim(W_{j_0}) = \dim(V_i) - \dim(W) = 0$. Portanto, quase toda fibra tem dimensão zero, logo é um conjunto finito.

3.6 O espaço tangente

Definiremos o espaço tangente de uma variedade afim V em um ponto x como sendo o conjunto de todas as retas passando pelo ponto x tangentes a V. Falta definir a noção de tangência de uma reta $L \subset \mathbb{A}^n$ a uma variedade afim $V \subset \mathbb{A}^n$ em um ponto $x \in V$.

Seja $x = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{A}^n$. Uma reta passando pelo ponto $x \in V$ é dada pelo conjunto $L = \{x + tq : t \in \mathbb{K}\}$, onde q é um ponto fixado. Para estudar $L \cap V$ podemos supor, sem perda de generalidade, que V é dado pelo sistema de equações $F_1 = ... = F_m = 0$. Desse modo, o conjunto $V \cap L$ é dado pelo sistema de equações:

$$F_1(x+tq) = ... = F_m(x+tq) = 0$$

que são polinomiais na variável t. Observe que:

$$Z(F_1(x+tq), ..., F_m(x+tq)) = Z(F(t)),$$

onde

$$f(t) = m.d.c(F_1(x+tq), ..., F_m(x+tq)) = c\prod(t-\alpha_1)^{k_i},$$

c é uma constante e os valores α_i correspondem aos pontos de interseção de L com V.

A *multiplicidade de interseção* de L com a variedade V em x é a multiplicidade de $t = 0$ como raiz do polinômio $f(t) = m.d.c(F_1(x+tq), ..., F_m(x+tq))$

Se algum $F_i(x+tq)$ for identicamente nulo, o índice de interseção com essa hipersuperfície será convencionado como $+\infty$. Uma vez que

$$f(t) = m.d.c(F_1(x+tq), ..., F_m(x+tq)) = m.d.c\{F(x+tq) : F \in \mathscr{I}(V)\},$$

o índice de interseção independe da particular escolha dos geradores F_i de $\mathscr{I}(V)$. Uma reta L é *tangente* à variedade afim V no ponto x se a multiplicidade de interseção de L em x é maior ou igual que 2.

Considere o conjunto algébrico $V = Z(x^2 - y^3) \subset \mathbb{A}^2$. Encontraremos as retas tangentes a V nos pontos $x = (0,0)$ e $x = (1,1)$. Iniciaremos com o ponto $x = (0,0)$. Uma reta passando pela origem é dada por $\{(ta, tb) : t \in \mathbb{K}\}$. Logo,

$$V \cap L = Z(a^2t^2 - b^3t^3).$$

Desse modo, para qualquer reta passando pela origem têm índice de interceção 2 e, portanto é “razoável” pensar que o espaço tangente V na origem é o plano afim. Agora, calcularemos o espaço tangente a V quando $x = (1,1)$. Uma reta passando pelo ponto $(1,1)$ é dada pelo conjunto $L = \{(1+at, 1+tb)\}$. Portanto $V \cap L$ é dado pelo conjunto-solução da equação:

$$(2b-3a)t + (b^2-3a)t^2 - a^3t^3.$$

Desse modo, a condição de tangência se reduz a $2b-3b = 0$. Logo, a única reta tangente a V no ponto $(1,1)$ é $\{(1+3t, 1+2t : t \in \mathbb{K})\}$.

Esse exemplo mostra que a dimensão do espaço tangente a um conjunto algébrico afim pode não ser constante, mesmo quando o conjunto algébrico for irredutível.

Agora, analisaremos a condição para L ser tangente a V em x. Expandindo cada F_i em série de Taylor no ponto x, obtemos:

$$F_i(x+tq) = F_i(x) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x)(tq) + F_i^{(2)}(x+qt), \tag{3.4}$$

onde $F_i^{(2)}(x+qt)$ é o resto da expansão em série de Taylor.

Logo, t^2 divide $F(x+tq)$, se, e somente, $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x)(q) = 0$. Portanto, a condição de tangencia é

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x)(q) = 0, \forall i = 1,...,m. \tag{3.5}$$

Isto motiva a seguinte definição:

O espaço tangente a variedade V no ponto x, denotado por $\Theta_{V,x}$ ou Θ_x é o conjunto dos pontos $q \in \mathbb{A}^n$ tais que

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x)(q) = 0, \forall i = 1,...,m \tag{3.6}$$

Note que $\Theta_{V,x}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{A}^n$.

Seja $x \in \mathbb{A}^n$. A *matriz Jacobiana* dos polnômios $F_1,...,F_m \in \mathbb{K}[x_1,...,x_n]$ no ponto x é dada por:

$$J(F_1,...,F_m)(x) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) \right).$$

Note que se a variedade afim V é definida pelo sistema de equações $F_1,...,F_m$ então

$$\dim(\Theta_x) = \mathrm{nul}\big(J(F_1,...,F_m)(x)\big) = n - \mathrm{rank}\big(J(F_1,...,F_m)(x)\big).$$

Observe que a definição de espaço tangente que fornecemos dependeu fortemente dos polinômios geradores do ideal do conjunto algébrico. Felizmente, é possível contornar esse problema descrevendo o espaço tangente em um ponto em termos do anel das funções que são regulares na vizinhança desse ponto. Essa técnica permite definir a noção de espaço tangente para um conjunto algébrico quasi-projetivo V de modo que o espaço tangente seja preservado por isomorfismos de conjunto algébricos. Fornecer essa definição foge ao escopo desse texto.

Para finalizar esta seção observaremos que o espaço tangente é um invariante local dos conjuntos algébricos.

Proposição 3.10. *Considere um aberto U de um conjunto algébrico afim V e $x \in V$. Se $\Theta_x U$ é o espaço tangente a x em U, então:*

$$\Theta_x U \cong \Theta_x V,$$

como $\mathbb{K}-$espaços vetoriais.

3.7 Pontos não-singulares

Nesta seção definiremos pontos não singulares e enunciaremos o critério Jacobiano para conjuntos algébricos afins.

Seja V um conjunto algébrico quasi-projetivo. O subconjunto do produto $V \times \mathbb{A}^n$ cujos elementos são pares ordenados da forma (x,q) com $x \in V$ e $q \in \Theta_{V,x}$ é chamado de *fibrado tangente* de V e será denotado por Θ_V.

Lema 3.1. *Seja V uma variedade afim. Θ_V é uma subvariedade algébrica de $V \times \mathbb{A}^n$.*

De fato, espaço tangente Θ_V é o conjunto solução das equações

$$F_1(x_1,...,x_n) = ... = F_m(x_1,...,x_n) = 0, \quad \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x)(q) = 0, \quad i = 1,...,m.$$

Teorema 3.5. *Seja V uma variedade afim irredutível. Existe um número inteiro positivo s tal que $dim(\Theta_x) \geq s$ para todo $x \in V$. Mais ainda, existe um aberto $U \in V$ tal que $dim(\Theta_x) = s$, $\forall x \in U$.*

Considere a aplicação regular $\pi : \Theta_X \to X$ tal que $\pi(x,a) = x$. Note que $\pi(\Theta_X) = X$ e $\pi^{-1}(P) = \Theta_x$, $\forall x \in V$. Seja $s = \dim(\Theta_V) - \dim(V)$. Pelo teorema da dimensão das fibras $\dim(\Theta_x) = \dim(\pi^{-1}(x)) \geq s, \forall x \in V$ e existe um aberto não-vazio $U \subset V$ tal que $\dim(\Theta_x) = \dim(\pi^{-1}(x)) = s$.

Motivado por este resultado vamos definir a noção de ponto não-singular.

Seja V uma variedade irredutível e seja $s = min_{x \in V} \dim \Theta_x$. Dizemos que $x \in V$ é ponto *não-singular* de V se $\dim(\Theta_x) = s$. Caso contrário dizemos que o ponto x é *singular*. Uma variedade afim V é dita não-singular se todos os seus pontos são não-singulares.

Segue teorema 3.5 que o conjunto dos pontos singulares de uma variedade irredutível X é um aberto U não-vazio.

Teorema 3.6. *Sejam V uma variedade quasi-projetiva. Se $x \in V$ é ponto não-singular então $dim(\Theta_x Y) = dim(V)$. Em particular, $dim(\Theta_x V) \geq dim(V)$ para todo $x \in V$.*

Observe que se V é conjunto algébrico redutível não é nessecariamente verdade que $\dim(\Theta_x V) \geq \dim(V)$ para todo $x \in V$. De fato, tome um conjunto algébrico $X = X_1 \cup X_2$ com $\dim(X_1) = 1$, $\dim(X_2) = 2$. Se tomarmos um ponto não-singular $x \in X_1 \setminus X_2$, obtemos $\dim(\Theta_x V) = 1 < \dim(X) = 2$.

A dimensão de um conjunto algébrico quasi-projetivo V em um ponto x, denotada por $\dim_x V$ é o máximo das dimensões das componentes irredutíveis de V que contém o ponto x. Nessas hipótes, um ponto $x \in V$ é dito não-singular se $\dim_x(V) = \dim(\Theta_x V)$.

Proposição 3.11. *Seja V uma variedade algébrica. $dim\Theta_{V,x} \geq dim_x V$, $\forall x \in V$.*

De fato, seja $x \in V$, e, V_i, $i = 1, ..., k$, as componentes irredutíveis de V que contém x e $\Theta_{V_i,x}$ seus respectivos espaços tangentes em x. Uma vez que $\Theta_{V_i,x} \subset \Theta_{V,x}$ obtemos:

$$\dim(\Theta_{V,x}) \geq \text{máx}_i \dim(\Theta_{x,V_i}) \geq \text{máx}_{x \in V_i} \dim(V_i) \geq \dim_x(V).$$

Agora, estamos prontos para provar o critério Jacobiano para conjuntos algébricos afins.

Teorema 3.7 (Critério Jacobiano)**.** *Seja V um conjunto algébrico afim tal que $\mathscr{I}(V) = (F_1, ..., F_m)$. Então x é ponto não-singular, se e somente se, $n - rank\big(J(F_1, ..., F_m)(x)\big) = dim_x V$.*

Seja $x \in V$ é ponto não-singular, então

$$dim_x V = dim\Theta_x V = n - \text{posto}\big(J(F_1, ..., F_m(x))\big).$$

Por outro lado, se $n - \text{rank}\big(J(F_1, ..., F_m)(x)\big) = \dim_x(V)$, claramente x é ponto não-singular.

4 FINITUDE GENÉRICA

Lembremos que já foi realizado, no capítulo 2, um estudo detalhado das configurações de dimensão $\delta(x) = n-2$. Como resultado deste estudo, deduzimos que tais configurações são zeros de equações polinomiais. Neste capítulo, definiremos um conjunto algébrico quasi-projetivo que contém todas as configurações centrais de dimensão $\delta(x) = n-2$ e calcuraremos sua dimensão utilizando dois métodos diferentes. O primeiro utiliza a resultante e foi proposto por Moeckel em (1). O segundo método é o critério Jacobiano. Prefirimos o segundo método por ser possível fazer as contas explicitamente e por podermos adaptá-lo para uso em outros problemas de finitude de configurações centrais.

4.1 O método da Resultante

Nesta seção, definiremos um conjunto algébrico quasi-projetivo que contém todas as configurações de dimensão $\delta(x) = n-2$. Para tanto, utilizaremos as equações polinomiais satisfeitas por configurações centrais de dimensão $\delta(x) = n-2$ obtidas na proposição 2.12 e o determinante de Cayley-Menger pensando nas quantidades r_{ij}, $1 \leq i < j \leq n$, e $z_1, \ldots, z_n$ como números complexos. Denotaremos por $[r] \in \mathbb{P}^p_{\mathbb{C}}$, $p = \frac{n(n-1)}{2}$, o ponto projetivo com coordenadas homogêneas r_0 e r_{ij}, $1 \leq i < j \leq n$, e por $[z] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ o ponto com coordenadas homogêneas z_0 e $z_1, \ldots, z_n$. Optamos por utilizar coordenadas projetivas para eliminar simetrias de reescala no problema de finitude de configurações centrais. No restante desta seção suporemos que $a = -3$ nas equações 2.9 e 2.12. Essa hipótese corresponde a trabalhar com configurações centrais no problema Newtoniano de N corpos.

Segue das proposições 2.9 e 2.12 que, se r e z são vetores de distâncias e de parâmetros associados a uma configuração central x de dimensão $n-2$, então as coordenadas deste ponto satisfazem as seguintes equações:

$$\begin{aligned} r_{ij}^{-3} - r_0^{-3} &= z_i z_j, \ 1 \leq i < j \leq n, \\ F(r_{ij}^2) &= 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde eliminamos a constante c na equação (2.33) fazendo a mudança de variavéis complexa:

$$z_i \doteq \sqrt{c} z_i.$$

Para eliminar os denominadores e homogeneizar as equações (4.1) incluiremos uma variável z_0 definida por $z_0^2 := r_0^{-3}$. Desse modo, podemos associar uma a um configuração x de dimensão $n-2$ um ponto $([r],[z]) \in \mathbb{P}^p_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ que satisfaz as equações 4.1.

Proposição 4.1. *Consideres as variedades projetivas*

$$V_0 = \{([r],[z]) \in \mathbb{P}^p_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} : F(r_{ij}^2) = 0, \ g_{ij} = 0, \quad 1 \leq i < j \leq n\},$$

onde

$$g_{ij} = z_0^2(r_{ij}^3 - r_0^3) - r_{ij}^3 z_i z_j,\ 1 \leq i < j \leq n, \tag{4.2}$$

e

$$\Sigma = \{([r],[z]) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^p \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n : z_0 r_0 \prod_{1 \leq i < j \leq n} r_{ij} = 0\}.$$

A variedade quasi-projetiva:

$$V = V_0 \setminus \Sigma$$

contém todos os pares $([r],[z])$ *associados a uma configuração central.*

Considere um ponto $([r],[z]) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^p \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ associado a uma configuração x de dimensão $n-2$. Como as entradas r_{ij}, $1 \leq i < j \leq n$ do ponto $[r] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^p$ são as distâncias mútuas entre os corpos da configuração x, segue-se $r_{ij} \neq 0$, $1 \leq i < j \leq n$. Além disso, como $r_0^{-a} = \frac{M}{\lambda}$ (ver equação (2.25)) e λ e M são não-nulos, r_0 é não nulo. Uma vez que $z_0^2 = r_0^{-3}$, z_0 também é não-nulo. Logo, $([r],[z])$ não satisfaz a equação $z_0 r_0 \prod_{1 \leq i < j \leq n} r_{ij} = 0$, e portanto,

$$([r],[z]) \notin \Sigma.$$

Por outro lado, se $([r],[z])$ está associado a uma configuração x então

$$r_{ij}^{-3} - r_0^{-3} = z_i z_j, \quad 1 \leq i < j \leq n.$$

Multiplicando todas estas equações por $r_{ij}^3 r_0^3 z_0^2$ e utilizando a relação $z_0^2 = r_0^{-3}$, obtemos:

$$z_0^2(r_0^3 - r_{ij}^3) = r_{ij}^3 z_i z_i\ 1 \leq i < j \leq n.$$

Desse modo, $([r],[z])$ satisfazem as equações $g_{ij} = 0$, $1 \leq i < j \leq n$. Como a matriz de Cayley-Menger associada a uma configuração possui determinante $F(r_{ij}^2) = 0$, concluímos que $([r],[z]) \in V_0$. Logo,

$$([r],[z]) \in V := V_0 \setminus \Sigma.$$

A proposição 2.12 garante que no mínimo dois $z_i's$ são não-nulos. Porém, não podemos garantir que todas entradas de um vetor de parâmetros $z = (z_1, \ldots, z_n)$ associado a uma configuração x de dimesão $\delta(x) = n-2$ são não-nulas. Para contornar essa dificuldade, também consideraremos as seguintes subvariedades de V:

$$V_k = \{([r],[z]) \in V : z_{k+1} = \ldots = z_n = 0\}. \tag{4.3}$$

Nosso próximo passo será calcular a dimensão do conjunto algébrico quasi-projetivo V. O próximo lema será fundamental.

Lema 4.1. *Sejam $\omega_{ij} \in \mathbb{C}$, $0 \leqslant i < j \leqslant n$, raízes cúbicas da unidade. Então*

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 2\omega_{12} & \omega_{13} & \dots & \omega_{1n} \\ 1 & 2\omega_{12} & 0 & \omega_{23} & \dots & \omega_{2n} \\ 1 & \omega_{13} & \omega_{23} & 0 & \dots & \omega_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega_{1n} & \omega_{2n} & \omega_{3n} & \dots & 0 \end{vmatrix} \neq 0.$$

O determinante pode ser expandido em somas cujas parcelas são monômios nas variáveis ω_{ij} com coeficientes inteiros. Cada monômio é igual a um múltiplo inteiro de 1, ω e ω^2, onde $\omega = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$. Mais ainda, agrupando os monômios semelhantes, concluímos que este determinante é da forma $\alpha + \beta\omega + \gamma\omega^2$, onde α, β e γ são inteiros tais que a soma $\alpha + \beta + \gamma$ independe da particular escolha dos ω_{ij}. Uma expressão deste tipo se anula se, e somente se, é múltiplo inteiro do polinômio mínimo de ω, $1 + \omega + i\omega^2$, isto é, se, e somente se, $\alpha = \beta = \gamma$. Uma condição necessária para isto é $\alpha + \beta + \gamma$ ser divisível por 3. Por outro lado, $\alpha + \beta + \gamma$ é o valor do determinante quando $\omega_{ij} = 1, \forall\, 0 \leq i < j \leq n$, e este é $(-1)^n 4$. Portanto, o determinante acima não pode se anular.

Considere a projeção $\pi_2 : \mathbb{P}^p_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. Provaremos que $\pi_2(V)$ está contida no conjunto de zeros de uma hipersuperfície irredutível não-trivial de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. Para tanto vamos utilizar a teoria de resultantes a uma variável. A seguir listaremos as propriedades das resultantes utilizadas nesta seção.

Proposição 4.2. *Sejam f e $g \in \mathbb{C}[x]$ com termos líderes $a_n \neq 0$ e $b_m \neq 0$, respectivamente. Existe um polinômio homogêneo nos coeficientes de f e g, denotado por $Res(f,g)$, tal que:*

1. *Se as equações $f = 0$ e $g = 0$ possuem solução comum, então $Res(f,g) = 0$.*
2. *Se $Res(f,g) = 0$, então existe uma quantidade finita não nula de valores de x que satisfazem simultaneamente as equações $f = 0$ e $g = 0$.*

Para uma demonstração desses fatos, consulte (19, Capítulo 3).

Lema 4.2. *Existe um polinômio $H \in \mathbb{C}[z_0,\dots,z_n]$ tal que $\pi_2(V) \subset Z(H)$.*

Note que $[z] \in \pi_2(V)$ se existe solução da forma $(1,r) \in \mathbb{C}^{p+1}$ (uma vez que $z_0 \neq 0$ podemos tomar $r_0 = 1$) para as equações

$$\begin{aligned} F(r_{ij}^2) &= 0, \\ h_{ij} &= (z_1 z_j + 1) r_{ij}^3 - 1 = 0, \quad 1 \leq i < j \leq n. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Utilizando a teoria de resultantes, eliminaremos as variáveis r_{ij} do sistema de equações (4.4). Considere F e h_{12} como polinômios pertencentes a $\mathbb{C}[r_{12}]$ (interpretaremos todas as outras variáveis como parametros). Temos que $H_{12} := R(F, h_{12})$ é um polinômio homogêneo nos coeficientes de F e h_{12}, portanto, é uma função polinomial homogênea nas variáveis z_0, z_1, z_2 e r_{ij}, $1 \leq i < j \leq n$, $(i, j) \neq (1, 2)$. Além disso, se existir r_{12} tal que $F = 0$ e $g_{12} = 0$, segue da proposição 4.2 parte 1. que $H_{12} = 0$. Nesta etapa eliminamos r_{12}. Para eliminar r_{13} considere H_{12} e h_{13} como polinômios pertencentes a $\mathbb{C}[r_{13}]$. Observe que $H_{13} = R(H_{12}, h_{13})$ é um polinomio homogêneo nos coeficientes de H_{12} e h_{13}. Utilizando novamente a proposição 4.2, concluimos que $H_{13} = 0$. Nesta etapa eliminamos r_{13}. Observe que cada vez que realizamos este procedimento eliminamos uma variavel r_{ij} do sistema. Desse modo, continuando esse processo obteremos um polinômio homogêneo $H \in \mathbb{C}[z_0, z_1, ..., z_n]$ com a seguinte propriedade: se $[z] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ é tal que existem $r = (r_{ij})$, $1 \leq i < j \leq n$, satisfazendo $F = 0$ e $h_{ij} = 0$ então $H(z) = 0$. Em particular, se $[z] \in \pi_2(V)$, então $[z] \in Z(H) \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, como queríamos.

Incluímos $\pi_2(V)$ na hipersuperfície $Z(H)$, porém, isso não fornecerá informação adicional se $Z(H) = \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. Vamos eliminar essa possibilidade:

Lema 4.3. *$H(z) \in \mathbb{C}[z_0, z_1, ..., z_n]$ é polinômio não-trivial.*

Para mostrar que $H(z)$ é polinômio não-trivial, precisamos exibir um ponto $[z]$ tal que $H(z) \neq 0$. Escolha $z_0 = 1$ e $z_i = 0$, $3 \leq i \leq n$. Logo, se $1 \leq i < j \leq n$ e $(i, j) \neq (1, 2)$ têm-se $z_i z_j + z_0^2 = 1$. Nesse caso, $h_{ij} = 0 \Rightarrow r_{ij}^3 = 1$, $3 \leq i < j \leq n$. Assim, $s_{ij} = r_{ij}^2$, $3 \leq i < j \leq n$, são raízes cúbicas da unidade. Por fim, escolheremos z_1, z_2 tais que $z_1 z_2 + z_0^2 = 1/\sqrt{8}$. Desse modo, $h_{12} = 0 \Rightarrow r_{12} = \sqrt{8}$ e s_{12} é duas vezes uma raiz cúbica da unidade. Observe que, para a escolha de $[z]$ que fizemos, o determinante de Cayley-Menger associado ao vetor $r = (r_{ij})$ que satisfaz as equações $h_{ij} = 0$ é exatamente como na proposição 4.1, logo $F(r_{ij}^2) \neq 0$. Pela contrapositiva da proposição 4.2 parte 2., obtemos que $H(z) \neq 0$, como queríamos.

No próximo lema, caracterizaremos $\pi_2(V)$ mais precisamente.

Lema 4.4.

$$\pi_2(V) = Z(H) \setminus B,$$

onde

$$B = \{[z] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} : K(z) := z_0 \prod_{1 \leq i < j \leq n} (z_i z_j + z_0^2) = 0\}.$$

$(\subset)$ Para mostrar esta inclusão, é suficiente mostrar que se $[z] \in \pi_2(V)$ então $[z] \notin B$. De fato, se $z \in \pi_2(V)$ então existe ponto $r \in \mathbb{C}^p$ tal que $h_{ij} = (z_1 z_j + z_0^2) r_{ij}^3 - 1 = 0$ e $z_0^2 = 1$. Estas equações implicam em

$$z_0 \prod_{1 \leq i < j \leq n} (z_i z_j + z_0^2) \neq 0.$$

Logo, $[z] \notin B$.

$(\supset)$ Se $H(z) = 0$ então $F = 0$ e $r_{ij} = 0$. Logo, $[z] \in \pi_2(V)$.

Estamos prontos para provar o resultado principal desta seção.

Teorema 4.1. *A variedade V possui dimensão $dim V = n - 1$. Mais ainda, $dim V_k = k - 1$, $k \geq 2$.*

Pelo lema 4.4, $\pi_2(V) = Z(H) \setminus B$. Note que algumas das componentes irredutíveis de $Z(H)$ poderiam estar contidas em B. Seja W a variedade algébrica dada pela união das componentes irredutíveis de $Z(H)$ que não estão contidas em B. Consequentemente, $\pi_2(V) \subset W$. Em particular, π_2 intersecta todas as componentes irredutíveis de $\pi_2(V)$. Afirmamos que $\overline{\pi_2(V)} = W$. De fato, considere uma decomposição $W = W_1 \cup .... \cup W_k$ em componentes irredutíveis. Como $W_i \setminus B \neq \emptyset$ temos que $\pi_2(V) \cap W_i$ é um aberto relativo não-trivial de W_i. Como W_i é irredutível, $\overline{\pi_2(V) \cap W_i} = W_i$. Consequentemente,

$$\overline{\pi_2(V)} = \overline{\pi_2(V) \cap W_1} \cup ... \cup \overline{\pi_2(V) \cap W_k} = W_1 \cup ... \cup W_k = W.$$

Assim, concluímos que a aplicação $\pi_2 : V \to W$ é dominante. Utilizando a proposição 3.9 parte 1., obtemos:

$$\dim(V) \geq \dim(W) = n - 1.$$

Por outro lado, é fácil ver que a fibra $\pi_2^{-1}(V)$ é finita para todo $[z] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. Pela proposição 3.9 parte 2. obtemos

$$\dim(V) \leq \dim(W) + 0 = n - 1.$$

Logo, $\dim(V) = n - 1$ como queríamos. Utilizando argumento análogo para a projeção

$$\pi_2 : V_k \subset \mathbb{P}^p_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^k_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^k_{\mathbb{C}},$$

obtemos que $\dim(V_k) = k - 1$.

Uma pergunta natural é se o argumento apresentado nesta seção pode ser adaptado para o calculo da dimensão da variedade V para potenciais homogêneos com $a \in \mathbb{Z}$ por exemplo. Para tanto, precisaríamos mostrar que o polinômio $H(z) \in \mathbb{C}[z_0, ..., z_n]$ é não-trivial, o que não parece ser tarefa fácil devido à dificuldade computacional de se calcular resultantes. Adaptar o argumento utilizado no lema 4.1 para um potencial homogêneo com $a \in \mathbb{Z}$ exigiria (no mínimo) o conhecimento dos coeficientes do polinômio ciclotômico da $a-$raiz primitiva da unidade ω_a. Vale observar que o argumento dessa seção pode ser integralmente adaptado quando a for um número primo.

4.2 O método Jacobiano

Nesta seção, definiremos um conjunto algébrico quasi-afim V contido em $\mathbb{C}^{p+n}$, $p = \frac{n(n-1)}{2}$ que contém todos os pares (r, z) onde r é vetor de distâncias e z é vetor de parâmetros associado a uma configuração x de dimensão $n-2$ sujeita a um potencial homogêneo com $a \in \mathbb{Z}$. Calcularemos a dimensão de V utilizando o critério Jacobiano para cálculo da dimensão de uma variedade afim. Denotaremos um ponto de $\mathbb{C}^{p+n}$ por (r, z) onde $r = (r_{ij}), 1 \leq i \leq j \leq n$ e $z = (z_1, ..., z_n)$.

Seja x uma configuração central de dimensão $\delta(x) = n - 2$. Associemos a x um ponto $(r, z) \in \mathbb{C}^{p+n}$ tal que r é o vetor de distâncias e z é o vetor de parâmetros associado a x. Utilizando as proposições 2.9 e 2.12 e aplicando uma homotetia adequada à configuração x, de modo que $r_0 = 1$, obtemos que o ponto (r,z) satisfaz as seguintes equações:

$$\begin{aligned} r_{ij}^a - 1 &= z_i z_j, \quad 1 \le i < j \le n,\ a \in \mathbb{Z}. & (4.5)\\ F(r_{ij}^2) &= 0, & (4.6)\end{aligned}$$

onde $F(r_{ij}^2)$ é o determinante de Cayley Menger.

Para aplicar resultados da Geometria Algébrica, precisamos que as equações satisfeitas por configurações centrais sejam polinomiais. Por esse motivo, estamos supondo que $a \in \mathbb{Z}$ no que segue. Dividiremos o trabalho em dois casos:

$$a > 0 \text{ e } a < 0.$$

4.2.1 O caso $a > 0$.

Lema 4.5. *Considere as variedades algébricas:*

$$V_0 = \{(r,z) \in \mathbb{C}^{p+n} :\ F(r_{ij}^2) = 0,\ h_{ij} = r_{ij}^a - 1 - z_i z_j,\ 1 \le i < j \le n\}, \tag{4.7}$$

$$W = Z\left(\Lambda_i = z_i\left(\prod_{(k,l)\neq(1,i)} r_{kl}^{a-1}\frac{\partial F}{\partial r_{1i}} z_1 + \ldots + \prod_{(k,l)\neq(n,i)} r_{kl}^{a-1}\frac{\partial F}{\partial r_{ni}} z_n\right), \quad i = 1,\ldots,n\right) \tag{4.8}$$

e

$$S = \{(r,z) \in \mathbb{C}^{p+n} : \prod_{1\le i<j\le n} r_{ij} = 0\}.$$

O conjunto algébrico quasi-afim:

$$V = V_0 \setminus (W \cap S)$$

contém todos os pares (r,z) associados a uma configuração x de dimensão $\delta(x) = n-2$ com $a > 0$. Dizemos que V é a variedade das configurações centrais de n corpos e dimensão $n-2$

Seja um ponto $(r,z) \in \mathbb{C}^{p+n}$ associado a uma configuração x de dimensão $\delta(x) = n-2$ com $a > 0$. Das equações (4.5) deduzimos que o ponto (r,z) é solução das equações polinomiais que definem V_0. Além disso, pela proposição 2.14 aplicada quando $b = a-1$, (r,z) não satisfaz simultaneamente as equações que definem a variedade W. Logo, o resultado segue.

Também trabalharemos com os conjuntos algébricos:

$$V_k = \{(r,z) \in V : z_{k+1},\ldots,z_n = 0\}, \quad k = 2,\ldots,n.$$

Utilizaremos o critério Jacobiano para calcular a dimensão de V. Começaremos calculando as derivadas parciais de h_{ij} com respeito as variáveis r e z:

$$\frac{\partial h_{ij}}{\partial r_{ij}} = \begin{cases} ar_{kl}^{a-1}, & \text{se} \quad (k,l) = (i,j) \\ 0, & \text{se} \quad (k,l) \neq (i,j) \end{cases}, \qquad \frac{\partial h_{ij}}{\partial z_i} = \begin{cases} z_j, & \text{se} \quad k = i, \\ z_i, & \text{se} \quad k = j, \\ 0, & \text{se} \quad k \neq i,j. \end{cases}.$$

Para fixar ideias, calcularemos a dimensão do conjunto algébrico V associado a uma configuração x de quatro corpos e dimensão 2 . Nesse caso,

$$V_0 = \{(r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{23}, r_{24}, r_{34}, z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^{10} : \ F(r_{ij}^2) = 0, \ h_{ij} = 0, \ 1 \leq i < j \leq n\},$$

onde

$$\begin{aligned} h_{12} &= r_{12}^a - 1 - z_1 z_2, \\ h_{13} &= r_{13}^a - 1 - z_1 z_3, \\ h_{14} &= r_{14}^a - 1 - z_1 z_4, \\ h_{23} &= r_{23}^a - 1 - z_2 z_3, \\ h_{24} &= r_{24}^a - 1 - z_2 z_4, \\ h_{34} &= r_{34}^a - 1 - z_3 z_4, \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$W = \{(r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{23}, r_{24}, r_{34}, z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^{10} \in \mathbb{C}^{10} : \Lambda_i = 0, \ i = 1,2,3, \text{ e } 4\},$$

onde

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= z_1 \left(\prod_{(k,l)\neq(1,2)} z_2 r_{12}^{a-1} \frac{\partial F}{\partial r_{12}} + \prod_{(k,l)\neq(1,3)} z_3 r_{13}^{a-1} \frac{\partial F}{\partial r_{13}} + \prod_{(k,l)\neq(1,4)} z_4 r_{14}^{a-1} \frac{\partial F}{\partial r_{14}} \right), \\ \Lambda_2 &= z_2 \left(\prod_{(k,l)\neq(1,2)} z_1 r_{12}^{a-1} \frac{\partial F}{\partial r_{12}} + \prod_{(k,l)\neq(2,3)} z_3 r_{23}^{a-1} \frac{\partial F}{\partial r_{23}} + \prod_{(k,l)\neq(2,4)} z_4 r_{24}^{a-1} \frac{\partial F}{\partial r_{24}} \right), \\ \Lambda_3 &= z_3 \left(\prod_{(k,l)\neq(1,3)} z_1 r_{13}^{a-1} \frac{\partial F}{\partial r_{14}} + \prod_{(k,l)\neq(2,3)} z_2 r_{23}^{a-1} \frac{\partial F}{\partial r_{23}} + \prod_{(k,l)\neq(3,4)} z_4 r_{34}^{a-1} \frac{\partial F}{\partial r_{34}} \right), \\ \Lambda_4 &= z_4 \left(\prod_{(k,l)\neq(1,4)} z_1 r_{14}^{a-1} \frac{\partial F}{\partial r_{14}} + \prod_{(k,l)\neq(2,4)} z_2 r_{24}^{a-1} \frac{\partial F}{\partial r_{24}} + \prod_{(k,l)\neq(3,4)} z_3 r_{34}^{a-1} \frac{\partial F}{\partial r_{34}} \right), \end{aligned} \tag{4.10}$$

e

$$S = \{(r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{23}, r_{24}, r_{34}, z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^{10} : \prod_{1 \leq i < j \leq 4} r_{ij} = 0\}.$$

Temos que $V = V_0 \setminus (W \cup S)$ é um conjunto algébrico quasi-afim que contêm todos os pontos $(r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{23}, r_{24}, r_{34}, z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^{10}$ associados a uma configuração central x com 4 corpos e dimensão 2.

Estamos prontos para calcular a dimensão de V.

Proposição 4.3. *Se V é variedade das configurações de 4 corpos e dimensão 2, então V é conjunto algébrico quasi-afim não-singular de dimensão 3.*

Afirmamos que se $(r,z) \in V_0 \setminus (W \cup U)$ então o posto da matriz Jacobiana $J(h_{ij},F)(r,z)$ é máximo. De fato, a matriz $J(h_{ij},F)(r,z)$ é dada por:

$$\begin{pmatrix} ar_{12}^{a-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_2 & z_1 & 0 & 0 \\ 0 & ar_{13}^{a-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & z_3 & 0 & z_1 & 0 \\ 0 & 0 & ar_{14}^{a-1} & 0 & 0 & 0 & z_4 & 0 & 0 & z_1 \\ 0 & 0 & 0 & ar_{23}^{a-1} & 0 & 0 & 0 & z_3 & z_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ar_{24}^{a-1} & 0 & 0 & z_4 & 0 & z_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ar_{34}^{a-1} & 0 & 0 & z_3 & z_4 \\ \frac{\partial F}{\partial r_{12}} & \frac{\partial F}{\partial r_{13}} & \frac{\partial F}{\partial r_{14}} & \frac{\partial F}{\partial r_{23}} & \frac{\partial F}{\partial r_{24}} & \frac{\partial F}{\partial r_{34}} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como um ponto de V não pertence a $W \cup S$, todas as quantidades r_{ij} são não-nulas. Além disso, a menos de isomorfismo linear, podemos supor que

$$z_1 \left(\prod_{(k,l)\neq(1,2)} z_2 r_{12}^{a-1} \frac{\partial F}{\partial r_{12}} + \prod_{(k,l)\neq(1,3)} z_3 r_{13}^{a-1} \frac{\partial F}{\partial r_{13}} + \prod_{(k,l)\neq(1,4)} z_4 r_{14}^{a-1} \frac{\partial F}{\partial} r_{14} \neq 0 \right).$$

Desse modo, podemos fazer as seguintes trasformações coluna:

$$\begin{aligned} C_7 &\to \frac{1}{a} r_{12}^{1-a} z_2 C_1 + C_7, \\ C_7 &\to \frac{1}{a} r_{13}^{1-a} z_3 C_2 + C_7, \\ C_7 &\to \frac{1}{a} r_{14}^{1-a} z_4 C_3 + C_7, \end{aligned} \tag{4.11}$$

obtemos a seguinte submatriz 7×7:

$$\begin{pmatrix} ar_{12}^{a-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ar_{13}^{a-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ar_{14}^{a-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ar_{23}^{a-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ar_{24}^{a-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ar_{34}^{a-1} & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial r_{12}} & \frac{\partial F}{\partial r_{13}} & \frac{\partial F}{\partial r_{14}} & \frac{\partial F}{\partial r_{23}} & \frac{\partial F}{\partial r_{24}} & \frac{\partial F}{\partial r_{34}} & \alpha \end{pmatrix},$$

onde

$$\alpha = \frac{\partial F}{\partial r_{12}} r_{12}^{1-a} z_2 + \frac{\partial F}{\partial r_{13}} r_{13}^{1-a} z_3 + \frac{\partial F}{\partial r_{14}} r_{14}^{1-a} z_4.$$

Uma vez que essa matriz é triangular, seu determinante é dado pelo produto dos elementos da diagonal principal:

$$\prod_{1 \le i < j \le n} r_{ij} \alpha = \prod_{(k,l)\neq(1,2)} z_2 r_{12}^{a-1} \frac{\partial F}{\partial r_{12}} + \prod_{(k,l)\neq(1,3)} z_3 r_{13}^{a-1} \frac{\partial F}{\partial r_{13}} + \prod_{(k,l)\neq(1,4)} z_4 r_{14}^{a-1} \frac{\partial F}{\partial r_{14}} = \Lambda_1. \tag{4.12}$$

Como $\Lambda_1 \neq 0$, a expressão anterior não pode se anular. Logo, a matriz Jacobiana $J(h_{ij},F)(r,z) \in \mathscr{M}_{10\times 7}$ possui uma submatriz quadrada 7×7 com determinante não-nulo para todo ponto $(r,z) \in$

$\mathbb{C}^{10}$. Consequentemente, $J(h_{ij},F)(r,z)$ possui posto 7 para todo ponto $(r,z) \in V = V_0 \setminus (W \cup S)$. Logo, $\dim(\Theta_{V,(r,z)}) = 3$. Uma vez que V_0 é o conjunto solução de um sistema polinomial com 7 equações em $\mathbb{C}^{10}$, temos que cada componente irredutível de V_0 tem dimensão maior ou igual que 3. Com maior razão, cada componente irredutível de V tem dimensão maior ou igual que 3. Desse modo, $\dim_{(r,z)}(V) \geq 3$, $\forall (r,z) \in V$. Assim, $\forall (r,z) \in V$ temos:

$$3 = \dim(\Theta_{V,(r,z)}) \geq \dim_{(r,z)}(V) \geq 3.$$

O critério Jacobiano implica que V é conjunto algébrico não-singular de dimensão 3 [1].

Com uma pequena adaptação do argumento utilizado na proposição anterior podemos provar o seguinte:

Proposição 4.4. *Considere os conjuntos algébricos $V_2 = V \cap Z(z_3,z_4)$ e $V_3 = V \cap Z(z_4)$. Temos que*

$$dim(V_2) = 1 \quad e \quad dim(V_3) = 2.$$

A demonstração deste resultado é similar à da proposição 4.3. Calcularemos a dimensão de V_3. O argumento para calcular a dimensão de V_2 é completamente análogo.

A menos de isomorfismo linear podemos supor que (observe que, por hipótese, Λ_3 e Λ_4 são iguais a zero):

$$\Lambda_1 = z_1 \left(\prod_{(k,l)\neq(1,2)} z_2 r_{12}^{a-1} \frac{\partial F}{\partial r_{12}} + \prod_{(k,l)\neq(1,3)} z_3 r_{13}^{a-1} \frac{\partial F}{\partial r_{13}} + \prod_{(k,l)\neq(1,4)} z_4 r_{14}^{a-1} \frac{\partial F}{\partial r_{14}} \right) \neq 0.$$

A matriz Jacobiana $J(r_{ij},F,z_3,z_4)(r,z)$ em um ponto $(r,z) \in V_2$ é dada por:

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
ar_{12}^{a-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_2 & z_1 & 0 & 0 \\
0 & ar_{13}^{a-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & z_3 & 0 & z_1 & 0 \\
0 & 0 & ar_{14}^{a-1} & 0 & 0 & 0 & z_4 & 0 & 0 & z_1 \\
0 & 0 & 0 & ar_{23}^{a-1} & 0 & 0 & 0 & z_3 & z_2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & ar_{24}^{a-1} & 0 & 0 & z_4 & 0 & z_4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ar_{34}^{a-1} & 0 & 0 & z_3 & z_4 \\
\frac{\partial F}{\partial r_{12}} & \frac{\partial F}{\partial r_{13}} & \frac{\partial F}{\partial r_{14}} & \frac{\partial F}{\partial r_{23}} & \frac{\partial F}{\partial r_{24}} & \frac{\partial F}{\partial r_{34}} & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}.$$

[1] De fato, V é variedade analítica para todo $a \in \mathbb{R}$

Retirando a oitava coluna dessa matriz obtemos a seguinte matriz 9×9:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ ar_{12}^{a-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_2 & 0 & 0 \\ 0 & ar_{13}^{a-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & z_3 & z_1 & 0 \\ 0 & 0 & ar_{14}^{a-1} & 0 & 0 & 0 & z_4 & 0 & z_1 \\ 0 & 0 & 0 & ar_{23}^{a-1} & 0 & 0 & 0 & z_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ar_{24}^{a-1} & 0 & 0 & 0 & z_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ar_{34}^{a-1} & 0 & z_3 & z_4 \\ \frac{\partial F}{\partial r_{12}} & \frac{\partial F}{\partial r_{13}} & \frac{\partial F}{\partial r_{14}} & \frac{\partial F}{\partial r_{23}} & \frac{\partial F}{\partial r_{24}} & \frac{\partial F}{\partial r_{34}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Afirmamos que o posto desta matriz é 9. De fato, expanda o determinante pela primeira e segunda linha, obtendo, a menos de sinal:

$$\begin{pmatrix} ar_{12}^{a-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_2 \\ 0 & ar_{13}^{a-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & z_3 \\ 0 & 0 & ar_{14}^{a-1} & 0 & 0 & 0 & z_4 \\ 0 & 0 & 0 & ar_{23}^{a-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ar_{24}^{a-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ar_{34}^{a-1} & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial r_{12}} & \frac{\partial F}{\partial r_{13}} & \frac{\partial F}{\partial r_{14}} & \frac{\partial F}{\partial r_{23}} & \frac{\partial F}{\partial r_{24}} & \frac{\partial F}{\partial r_{34}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Por um argumento completamente análogo ao utilizado na proposição anterior, deduzimos que o determinante desta matriz 7×7 é não-nulo. Uma vez que $J(z_3,z_4,h_{ij},F)(r,z)$ possui posto 9, pela proposição 3.7,

$$dim(V_k) = 1$$

Na próxima proposição, calcularemos a dimensão de V para configurações com uma quantidade arbitrária de corpos.

Proposição 4.5. *V é um conjunto algébrico quasi-afim não singular de dimensão $n-1$.*

Como a variedade quasi-afim V é um aberto de Zariski da variedade V_0, para todo ponto $(r,z)\in V$ temos que. $\Theta_{V,(r,z)} \cong \Theta_{V_0,(r,z)}$. Mais ainda, $dim(\Theta_{V,(r,z)}) = dim(\Theta_{V_0,(r,z)})$ é igual a nulidade da matriz Jacobiana $J(r,z)$ das equações F e h_{ij}, $1\le i<j\le n$ no ponto $(r,z)\in V$, que

é a matriz $(p+n)\times(p+n)$ dada por:

$$J(r,z)=\begin{pmatrix} ar_{12}^{a-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & z_2 & \dots & 0 \\ 0 & ar_{13}^{a-1} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & z_3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & ar_{14}^{a-1} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & z_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & ar_{1n}^{a-1} & 0 & \dots & 0 & z_n & \dots & z_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & ar_{23}^{a-1} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & ar_{(n-1)n}^{a-1} & 0 & \dots & z_{n-1} \\ \frac{\partial F}{\partial r_{12}} & \frac{\partial F}{\partial r_{13}} & \frac{\partial F}{\partial r_{14}} & \dots & \frac{\partial F}{\partial r_{1n}} & \frac{\partial F}{\partial r_{23}} & \dots & \frac{\partial F}{\partial r_{(n-1)n}} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

A ideia da demonstração consiste em verificar que $J(r,z)$ possui posto máximo. Como nenhum ponto de V satisfaz, simultaneamente, as equações que definem W, podemos supor, a menos de isomorfismo linear, que (r,z) não satisfaz a equação

$$\prod_{(k,l)\neq(1,2)} r_{kl}^{a-1}\frac{\partial F}{\partial r_{12}}z_2+\ldots+\prod_{(k,l)\neq((n-1),n)} r_{kl}^{a-1}\frac{\partial F}{\partial r_{1n}}z_n=0.$$

Fazendo as transformações-coluna:

$$C_{\frac{n(n-1)}{2}+1}\to\frac{1}{a}r_{1i}^{1-a}z_{i+1}C_i+C_{\frac{n(n-1)}{2}+1},\quad i=1,\ldots,n-1,$$

obtemos a seguinte matriz $(p+1)\times(p+1)$:

$$\begin{pmatrix} ar_{12}^{a-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & ar_{13}^{a-1} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ar_{14}^{a-1} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r_{1n}^{a-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & r_{23}^{a-1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & r_{(n-1)n} & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial r_{12}} & \frac{\partial F}{\partial r_{13}} & \frac{\partial F}{\partial r_{14}} & \dots & \frac{\partial F}{\partial r_{1n}} & \frac{\partial F}{\partial r_{23}} & \dots & \frac{\partial F}{\partial r_{(n-1)n}} & \alpha \end{pmatrix},$$

onde

$$\alpha=r_{12}^{1-a}\frac{\partial F}{\partial r_{21}}z_2+r_{13}^{1-a}\frac{\partial F}{\partial r_{13}}z_3+\ldots+r_{in}^{1-a}\frac{\partial F}{\partial r_{1n}}z_n.$$

Uma vez que a matriz acima é triângular, seu determinante é dado pelo produto dos elementos da diagonal. Logo, a menos de multiplicação por constante não-nula, este determinante é dado por:

$$\prod_{1\le i<j\le n} r_{ij}^{a-1}\alpha=\prod_{(k,l)\neq(1,2)} r_{kl}^{a-1}\frac{\partial F}{\partial r_{12}}z_2+\ldots+\prod_{(k,l)\neq((n-1),n)} r_{kl}^{a-1}\frac{\partial F}{\partial r_{1n}}z_n.$$

Esta última equação não se anula, pois $(r,z) \notin W$. Disto segue que a nulidade de $J(r,z)$ é $n-1$. Uma vez que V_0 e dado pelo conjunto solução de $p+1$ equações em $\mathbb{C}^{p+n}$, temos que $dim_{(r,z)}V \geq n-1$. Desse modo, para todo ponto $(r,z) \in V$ têm-se:

$$n-1 = \dim\Theta_{(r,z),V} \geq \dim_{r,z}V \geq n-1.$$

Utilizando o critério Jacobiano, concluímos que V é um conjunto algébrico quasi-afim não-sigular de dimensão $n-1$.

Proposição 4.6. *A variedade $V_k = V \cap Z(z_{k+1},...,z_n)$ possui dimensão $k-1$.*

Essa proposição pode ser demonstrada de maneira análoga à proposição 4.5, considerando a matriz Jacobiana das equações $F=0$, $h_{ij}=0$, $z_{k+1} = ... = z_n = 0$.

4.2.2 O caso $a < 0$

Procedemos de maneira análoga ao caso $a < 0$. Assim, definiremos um conjunto algébrico quasi-afim que contém todos os pontos associados a uma configuração de dimnesão $n-2$ quando $a < 0$.

Lema 4.6. *Considere os conjuntos algébricos de $\mathbb{C}^{p+n}$:*

$$V_0 = \{(r,z) \in \mathbb{C}^{p+n} : \ F(r_{ij}^2) = 0, \ h_{ij} = r_{ij}^{-a}(z_i z_j + 1) - 1 = 0, \quad 1 \leq i \leq j \leq n\}, \tag{4.13}$$

e

$$W = Z\left(\Psi_i = z_i\left(\prod_{(k,l)\neq(1,i)} r_{kl}^{-a-1}\frac{\partial F}{\partial r_{1i}}z_1 + ... + \prod_{(k,l)\neq(n,i)} r_{kl}^{-a-1}\frac{\partial F}{\partial r_{ni}}z_n\right), \quad i = 1,...,n\right) \tag{4.14}$$

O conjunto algébrico quasi-afim:

$$V = V_0 \setminus W$$

contém todos os pontos (r,z) associados a uma configuração x de dimensão $\delta(x) = n-2$.

Se $a < 0$ então um ponto $(r,z) \in \mathbb{C}^{p+n}$ associado a uma configuração central de dimensão $n-2$ satisfaz as equações:

$$r_{ij}^a - 1 = z_i z_j, \ 1 \leq i < j \leq n.$$

Multiplicando a equação anterior por r_{ij}^{-a}, obtemos:

$$1 = r_{ij}^{-a}(1 + z_i z_j).$$

Logo, (r,z) satisfaz as equações que definem V_0. Por outro lado, pela proposição 2.14 aplicada quando $b = -a-1$, o ponto (r,z) não satisfaz simultaneamente as equações que definem a variedade W.

Novamente utilizaremos o critério Jacobiano para calcular a dimensão de V. Calculando as derivadas parciais das equações h_{ij} com respeito as variavéis r e z:

$$\frac{\partial h_{ij}}{\partial z_k} = \begin{cases} r_{ij}^{-a} z_j, & \text{se} \quad k = i, \\ r_{ij}^{-a} z_i, & \text{se} \quad k = j, \\ 0, & \text{se} \quad k \neq i, j. \end{cases} \qquad \frac{\partial h_{ij}}{\partial r_{kl}}(r,z) = \begin{cases} -a r_{kl}^{-a-1}(1 + z_i z_j), & \text{se} \quad (k,l) = (i,j) \\ 0, & \text{se} \quad (k,l) \neq (i,j) \end{cases}.$$

Como $(r,z) \in V$, temos que (r,z) satisfaz as equações que definem V_0, obtemos:

$$r_{ij} \frac{\partial h_{ij}}{\partial r_{kl}}(r,z) = -a r_{ij}^{-a}(1 + z_i z_j) = 1.$$

Portando, podemos reescrever as derivadas parciais das h_{ij} com respeito às variáveis r e z da seguinte maneira:

$$\frac{\partial h_{ij}}{\partial z_k} = \begin{cases} r_{ij}^{-a} z_j, & \text{se} \quad k = i, \\ r_{ij}^{-a} z_i, & \text{se} \quad k = j, \\ 0, & \text{se} \quad k \neq i, j. \end{cases}, \quad \frac{\partial h_{ij}}{\partial r_{kl}}(r,z) = \begin{cases} \frac{-a}{r_{ij}}, & \text{se} \quad (k,l) = (i,j) \\ 0, & \text{se} \quad (k,l) \neq (i,j) \end{cases}.$$

Estamos prontos para calcular a dimensão de V.

Proposição 4.7. *V é um conjunto algébrico quase-afim de não-singular de dimensão $n-1$.*

Como a variedade quasi-afim V é um aberto de Zariski da variedade V_0, para todo ponto $x \in V$ temos que $\Theta_{V,x} \cong \Theta_{V_0,x}$. Temos que $dim(\Theta_{V,x}) = dim(\Theta_{V_0,x})$ é igual à nulidade da matriz Jacobiana $J(r,z)$ das equações F e h_{ij}, $1 \leq i \leq j \leq n$ no ponto $(r,z) \in V$, que é a matriz $(p+n) \times (p+n)$ dada por:

$$J(r,z) = \begin{pmatrix} \frac{-a}{r_{12}} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & r_{12}^{-a} z_2 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{-a}{r_{13}} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & r_{13}^{-a} z_3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-a}{r_{14}} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & r_{14}^{-a} z_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{-a}{r_{1n}} & 0 & \dots & 0 & r_{1n}^{-a} z_n & \dots & r_{in}^{a} z_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{-a}{r_{23}} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \frac{-a}{r_{(n-1)n}} & 0 & \dots & r_{(n-1)n}^{-a} z_{n-1} \\ \frac{\partial F}{\partial r_{12}} & \frac{\partial F}{\partial r_{13}} & \frac{\partial F}{\partial r_{14}} & \dots & \frac{\partial F}{\partial r_{1n}} & \frac{\partial F}{\partial r_{23}} & \dots & \frac{\partial F}{\partial r_{(n-1)n}} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Como nenhum ponto de V satisfaz as equações que definem W, a menos de isomorfismo linear, podemos supor que x não satisfaz a equação:

$$\Psi_i = z_i \left(\prod_{(k,l) \neq (1,2)} r_{kl}^{-a-1} \frac{\partial F}{\partial r_{12}} z_2 + \dots + \prod_{(k,l) \neq (1,n)} r_{1n}^{-a-1} \frac{\partial F}{\partial r_{kl}} z_n = 0 \right).$$

Fazendo as transformações-coluna:

$$C_{p+1} \to r_{1n}^{a+1} z_{i+1} C_1 + C_{p+1}, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

obtemos a seguinte matriz $(p+1)\times(p+1)$:

$$\begin{pmatrix}
\frac{-a}{r_{12}} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\
0 & \frac{-a}{r_{13}} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\
0 & 0 & \frac{-a}{r_{14}} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \dots & \frac{-a}{r_{1n}} & 0 & \dots & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{-a}{r_{23}} & \dots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \frac{-a}{r_{(n-1)n}} & 0\\
\frac{\partial F}{\partial r_{12}} & \frac{\partial F}{\partial r_{13}} & \frac{\partial F}{\partial r_{14}} & \dots & \frac{\partial F}{\partial r_{1n}} & \frac{\partial F}{\partial r_{23}} & \dots & \frac{\partial F}{\partial r_{(n-1)n}} & \alpha
\end{pmatrix},$$

onde

$$\alpha = r_{12}^{a+1}\frac{\partial F}{\partial r_{21}}z_2 + r_{13}^{a+1}\frac{\partial F}{\partial r_{13}}z_3 + \ldots + r_{in}^{a+1}\frac{\partial F}{\partial r_{1n}}z_n.$$

Como a matriz anterior é triangular, seu determinante é dado pelo produto dos elementos na sua diagonal principal. Portanto, o determinante é dado, a menos de multiplicação por constante não-nula, pela seguinte expressão:

$$\prod r_{ij}^{-1}\left(r_{12}^{a+1}\frac{\partial F}{\partial r_{21}}z_2 + r_{13}^{a+1}\frac{\partial F}{\partial r_{13}}z_3 + \ldots + r_{in}^{a+1}\frac{\partial F}{\partial r_{1n}}z_n\right) = \Psi_1 z_1^{-1}\prod r_{ij}^{a}.$$

A segundo membro da equação acima não se anula, pois Ψ_1 é não-nula e todas as coordenadas r do ponto (r,z) também são não-nulas. Disto segue que a nulidade de $J(r,z)$ é $n-1$. De maneira completamente análoga ao caso $a>0$, concluímos que V é um conjunto algébrico quasi-afim não-singular de dimensão $n-1$.

Proposição 4.8. *A variedade $V_k = V\cap Z(z_{k+1},\ldots,z_n)$ possui dimensão $k-1$.*

Esse lema pode ser demonstrado, de maneira análoga à proposição anterior, considerando a matriz Jacobiana das equações $F=0$, $h_{ij}=0$, $z_{k+1}=\ldots=z_n=0$.

4.3 Finitude genérica de Configurações de Dimensão $n-2$

Nesta seção provaremos que para uma escolha genérica das massas, o número de configurações centrais de dimensão $n-2$ é finito. Estudamos a variedade das configurações de dimensão $n-2$ usando as variáveis $(r,z)\in\mathbb{C}^{p+n}$, onde $p=n(n-1)/2$. Considere $m=(m_1,\ldots,m_n)\in\mathbb{C}^n$, o vetor das massas, e $[m]\in\mathbb{P}^{n-1}$ suas coordenadas homogêneas.

Proposição 4.9. *O conjunto algébrico quasi-projetivo*

$$\begin{aligned}\Gamma &= \{((r,z),[m])\in\mathbb{C}^{p+n}\times\mathbb{P}^{n-1} : (4.1)\ e\ (4.16)\ valem\}\\ &= \{((r,z),[m])\in V\times\mathbb{P}^{n-1} : (4.16)\ valem\},\end{aligned}\tag{4.15}$$

contém todos os pontos $((r,z),[m])\in\mathbb{C}^{p+n}\times\mathbb{P}^{n-1}$ provenientes de configuração central.

De fato, se $((r,z),[m])$ é um ponto proveniente de configuração central então as coordenadas deste ponto satisfazem as equações (2.28), que são dadas por:

$$m_k S_{ik} \Delta_l = m_l S_{il} \Delta_k.$$

Multiplicando essas equações por Δ_j e usando as equações (2.23) e (2.33) nós encontramos:

$$m_k z_i z_k F_{jl} = m_l z_i z_l F_{jk}, \tag{4.16}$$

onde $i,k,l \in \{1,\dots,n\}$ e são distintos, e $j \in \{1,\dots,n\}$. Como as equações (4.16) são homogêneas nas variáveis m, de fato obtemos um conjunto algébrico quasi-projetivo em $\mathbb{C}^{p+n} \times \mathbb{P}^{n-1}$.

Neste momento vamos lembrar a conjectura de Chazy-Wintner-Smale:

"Considere n corpos pontuais com massas positivas $m_1,\dots,m_n$. É finito o número de configurações centrais correspondentes? "

Uma observação crucial é que, se fixarmos massas positivas $m_1,\dots,m_n$, os pontos (r,z) associados a configurações centrais de dimensão $n-2$ estão em $\pi_2^{-1}([m_1 : \dots : m_n])$.

Consideraremos as projeções $\pi_1 : \Gamma \to \mathbb{C}^{p+n}$ e $\pi_2 : \Gamma \to \mathbb{P}^{n-1}$. Infelizmente, não sabemos se Γ é irredutível, portanto, decomporemos Γ em componentes irredutíveis Γ_α. Para provar o desejado resultado de finitude genérica, a nossa estratégia será restringir π_2 a cada componente irredutível Γ_α e provar que para uma escolha genérica das massas a fibra $\pi^{-1}([m])$ é finita em cada Γ_α. Note que isso garante que para uma escolha genérica das massas a quantidade de configurações de dimensão $n-2$ é finita. Se uma componente irredutível Γ_α não contiver configurações de dimensão $n-2$ então podemos retirá-la da nossa análise. Um problema natural que surge é caracterizar quais componentes de Γ contêm configurações de dimensão $n-2$.

Seja Γ_i uma componente irredutível de Γ. Dizemos que Γ_i de uma *componente de Dziobek* de Γ se a seguintes condições são satisfeitas:

1. Pelo menos dois dos $z_i \not\equiv 0$ quando vistos como funções regulares deΓ_i.

2. Pelo menos dois cofatores principais $F_{ii} \not\equiv 0$, $1 \leq i < n$ quando vistos como funções regulares deΓ_i.

Lema 4.7. *As componentes Γ_α de Γ que não são de Dziobek não contêm configurações centrais de dimensão $n-2$.*

De fato, se $((r,z),[m]) \in \mathbb{C}^{p+n} \times \mathbb{P}^{n-1}$ que provém de uma configuração central de dimensão $n-2$, então a proposição 2.9 garante que o item 1. não vale, e a proposição 2.12 garante que 2. não vale. Logo, $((r,z),[m]) \in \mathbb{C}^{p+n} \times \mathbb{P}^{n-1}$ não pode pertencer a uma componente que não é Dziobek.

A proposição abaixo garante que se algum F_{ij} se anula identicamente em uma componente de Dziobek, então uma das variáveis m ou z também se anula.

Proposição 4.10. *Seja Γ_α uma componente de Dziobek e suponha que $F_{il} \equiv 0$ em Γ_α, para algum par de índices com $1 \leq i,l \leq n$. Então $m_i m_l z_i z_l \equiv 0$ em Γ_α.*

Uma vez que $F_{il} \equiv 0$, deduzimos da equação (2.22) que $F_{ik}F_{jl} \equiv 0$ para todos $j,k \in \{0,\dots,n\}$. Se $F_{ik} \not\equiv 0$, $0 \leq k \leq n$, então, pela irredutibilidade de Γ_α, segue que $F_{jl} \equiv 0$, para todo $j \in \{0,\dots,n\}$. Portanto, ou todos os $F_{ik} \equiv 0$, ou todos os $F_{jl} \equiv 0$. Logo podemos assumir, sem perda de generalidade, que $F_{jl} \equiv 0$, $1 \leq j \leq n$. Sabemos que Γ_α é uma componente de Dziobek, logo existem dois índices k tais que $F_{kk} \not\equiv 0$. Como $F_{ll} \equiv 0$, podemos tomar $k \neq i,l$. Fazendo $j = k$ na equação (4.16), obtemos $m_l z_i z_l F_{kk} \equiv 0$. Logo, novamente pela irredutibilidade de Γ_α, $m_i m_l z_i z_l \equiv 0$ em Γ_α como queríamos demonstrar.

Note que se $\pi_2 : \Gamma_\alpha \to \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{K}}$ não for dominante temos que se $[m] \in \mathbb{P}^{n-1} \setminus \overline{\pi_2(\Gamma_\alpha)}$ a fibra é vazia. Portanto, já temos a finitude genérica da fibra nesse caso.

Uma componente Γ_α é chamada de *massa-dominante* se $\pi_2 : \Gamma_\alpha \to \mathbb{P}^{n-1}$ é dominante.

Dizemos que Γ_α é *não-degenerada* se $z_i \not\equiv 0$ e $F_{ij} \not\equiv 0$, $\forall i,j \in \{1,\dots,n\}$. Caso contrário, dizemos que Γ_α é degenerada.

Lema 4.8. *Se Γ_α é não-degenerada, então existe subconjunto aberto de Zariski $U_\alpha \subset \Gamma_\alpha$ tal que $z_i \neq 0$ e $F_{ij} \neq 0$, $\forall i,j \in \{1,\dots,n\}$.*

Tome $U_\alpha = \Gamma_\alpha \setminus ((\cup Z(z_i)) \bigcup (\cup Z(F_{ij})))$.

Lema 4.9. *Toda componente de Dziobek massa-dominante não-degenerada Γ_α tem dimensão $n-1$.*

Como Γ_α é massa dominante, nós temos $dim(\Gamma_\alpha) \geq n-1$. Resta provar a desigualdade contrária. Suponha Γ_α não-degenerada e considere a aplicação regular $\pi_1 : U_\alpha \to V$, onde U_α é como no lema acima. Todas as fibras $\pi_1^{-1}((r,z))$ são finitas pois as equações (4.16) determinam as massas a menos de multiplicação por constante. Logo $\pi_1^{-1}((r,z))$ é conjunto unitário. Pelo teorema 4.7, $dim(V) = n-1$. Então segue da parte 2. da proposição 3.9 que $dim(\Gamma_\alpha) \leq n-1$.

Lema 4.10. *Toda componente de Dziobek massa-dominante degenerada Γ_α tem dimensão $n-1$.*

Suponha que Γ_α é degenerada. Por definição, $z_i \equiv 0$ para algum índice $1 \leq i \leq n$. Podemos supor sem perda de generalidade que existe algum índice $2 \leq k \leq n$ tal que $z_i \not\equiv 0$ para $1 \leq i \leq k$ e $z_i \equiv 0$ para $k+1 \leq i \leq n$. Devido a este fato e à massa-dominância, temos que $m_i m_l z_i z_l \not\equiv 0$ para $1 \leq i,j \leq k$. Portanto, pela proposição 4.10 para estes i,j, $F_{ij} \not\equiv 0$. Tome $U_\alpha \subset \Gamma_\alpha$, tal que $z_i \neq 0$ e $F_{ij} \neq 0$, $1 \leq i,j \leq k$ em Γ_α e considere a projeção $\pi_1 : U_\alpha \to V_k$. Dado $(r,z) \in V_k$, calcularemos $\pi_1^{-1}(V)$. Se $(r,z) \in V_k$, podemos resolver a equação (4.16), a menos de multiplicação por constante, unicamente para m_i, $1 \leq i \leq k$. Temos ainda que todas as equações envolvendo as massas $m_{k+1},\dots,m_n$ são identicamente nulas. Desse modo, a fibra $\pi_1^{-1}(V)$ contém uma cópia do espaço afim $(n-k)$-dimensional. Portanto, a dimensão de $\pi_1((r,z))$é maior ou igual a $n-k$, para todo $(r,z)\in V$. Como $\dim(V_k)$ é $k-1$, encontramos:

$$dim(\Gamma_\alpha)\leq k-1+n-k=n-1,$$

como queríamos mostrar.

Combinados, os lemas 4.9 e 4.10 provam o seguinte:

Proposição 4.11. *Toda componente de Dziobek massa-dominante Γ_α possui dimensão $n-1$.*

Denotamos por $\Gamma_D\subset\Gamma$ a união de todas as componentes de Dziobek. Para uma massa fixada $[m]\in\mathbb{P}^n$, escrevemos $\Gamma_D([m])=\{((r,z)):((r,z),[m])\in\Gamma_D\}$.

O próximo resultado é nosso resultado principal acerca de finitude genérica.

Teorema 4.2. *Existe uma subvariedade própria do espaço das massas, $B\subset\mathbb{P}^{n-1}$, tal que se $[m]\in\mathbb{P}^{n-1}\setminus B$, a fibra $\Gamma_D([m])$ é finita.*

É suficiente considerar cada componente irredutível Γ_α de Γ_D. Se Γ_α não é massa dominante, para $[m]\in\mathbb{P}^{n-1}\setminus\overline{\pi_2(\Gamma_\alpha)}$, a parte da fibra $\Gamma_D([m])$ que está em Γ_α é vazia. Seja B a união dos $\overline{\pi_2(\Gamma_\alpha)}$'s onde Γ_α não é componente massa-dominante. Então, para $[m]\in\mathbb{P}^{n-1}\setminus B$, a parte da fibra $\Gamma_D([m])$ que está em Γ_α é vazia.

Se Γ_β é massa-dominante, então pelo teorema anterior, temos que $\dim(\Gamma_\beta)=n-1$. Desde que a projeção é um mapa regular, segue da parte 3 da proposição 3.9 que existe um aberto A_β tal que se $[m]\in\mathbb{P}^{n-1}\setminus A_\beta$ então $\pi_2^{-1}([m])$ é finita.

Tome $B=\big((\cup_\alpha B_\alpha)\cup(\cup_\beta A_\beta)\big)$. Tomando $[m]\in\mathbb{P}^{n-1}\setminus B$ temos que a fibra $\Gamma_D([m])$ é finita. Isso prova o resultado.

Lema 4.11. *Se uma componente Γ_α de Γ não é massa-dominante, então, $\pi_2(\Gamma_\alpha)\cap\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{R}}$ está contida em alguma subvariedade própria de $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{R}}$.*

Como $\pi_2(\Gamma_\alpha)$ está contida em alguma subvariedade própria de $\mathbb{P}^{n-1}$, podemos considerar f polinômio complexo não-nulo que se anula em $\pi_2(\Gamma_\alpha)$. Então as partes real e imaginária deste polinômio também se anulam identicamente em $\pi_2(\Gamma_\alpha)\cap\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{R}}$. Elas também são polinômios não-nulos, porque polinômios que se anulam identicamente em $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{R}}$ também se anulam identicamente em $\mathbb{P}^{n-1}$. Disto segue o resultado.

Finalmente vamos mostrar a finitude genérica para configurações centrais reais, ou seja, provaremos que fora de uma variedade projetiva B no espaço das massas existe um número finito de configurações centrais de dimensão $n-2$.

Teorema 4.3. *Existe uma subvariedade própria do espaço das massas, $B\subset\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{R}}$, tal que se $[m]\in\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{R}}\setminus B$, então $[m]$ admite somente um número finito de configurações centrais de dimensão $\delta(x)=n-2$ a menos de simetria.*

Se $B \subset \mathbb{P}^{n-1}$ é o conjunto algébrico obtido no teorema 4.2, então, pelo lema 4.11, $B \cap \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1}$ é uma subvariedade própria de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1}$ tal que se $[m] \in B \cap \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1}$ temos que a fibra $\Gamma_D([m])$ é finita. Isto implica que para uma massa genérica $[m]$ fixada, temos um número finito de possibilidades para as distâncias mútuas r_{ij} de uma configuração de dimensão $n-2$. Desde que as distâncias mútuas determinam as configurações a menos de rotação e reflexão, a primeira parte do teorema está provada.

Agora provaremos que para uma escolha genérica das massas o número de configurações centrais de dimensão $n-2$ correspondentes é menor do que uma cota que independe da particular escolhas de $[m]$. Para tanto utilizaremos a teoria de Thom e Milnor sobre a homologia das variedades algébricas. Esta teoria nos fornece uma cota superior para o número de componentes conexas de qualquer variedade algébrica real que depende somente do número de variáveis e do grau das equações usadas para definir a variedade.

Teorema 4.4. *Sejam $f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ tais que $k = máx\{gr(f_1), \ldots, gr(f_m)\}$. Seja $X = \{x \in \mathbb{R}^n : f_1 = \ldots = f_m = 0\}$. Então o número de componentes conexas de X é menor ou igual a $k(2k-1)^{n-1}$.*

Para uma demonstração desse teorema, consulte (20) e (21).

Teorema 4.5. *Para qualquer $[m] = [m_1 : \ldots : m_n] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1} \setminus B$, o número de configurações centrais de dimensão $n-2$ com massas $m_1, \ldots, m_n$ e potencial inteiro $a \in \mathbb{Z}$ é menor do que $k(2k-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+n-1}$, onde*

$$k = \begin{cases} máx\{-a+2, 2n+2\} & se \quad a\text{¡}0, \\ máx\{a, 2n+2\} & se \quad a\text{¿}0. \end{cases}$$

Demonstraremos o teorema no caso em que $a < 0$. Para o caso em que $a > 0$ a demonstração é análoga. Escolha $[m] = [m_1 : \ldots : m_n] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1} \setminus B$. Qualquer configuração central de dimensão $n-2$ associada a $[m]$ pertence ao conjunto

$$X = \{(r,z) \in \mathbb{R}^{\frac{n(n-2)}{2}+n} : F(r_{ij}^2) = 0,\ r_{ij}^{-a}(z_i z_j + 1) - 1 = 0,\ m_k z_i z_k F_{jl} - m_l z_i z_l F_{jk} = 0\}$$

O grau máximo dos polinômios que definem o conjunto X é $k = \text{máx}\{-a+2, 2n+2\}$. Observe que k independe da escolha das massas. Pelo teorema 4.4, o número de componentes conexas de X é no máximo $k(2k-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+n-1}$. Uma vez que X é finito, cada ponto de X determina sua própia componente conexa. Em particular, cada configuração central de dimensão $n-2$ associada a $[m]$ determina uma conponente conexa de X. Isso prova o resultado.

REFERÊNCIAS

1 MOECKEL, R. Generic finiteness for dziobek configurations. *Transactions of the American Mathematical Society*, Providence, RI [etc.] American Mathematical Society., v. 353, n. 11, p. 4673, 2001.

2 ALBOUY, A. On a paper of moeckel on central configurations. *Regular and chaotic dynamics*, Turpion Ltd, v. 8, n. 2, p. 133–142, 2003.

3 MEYER, K.; HALL, G.; OFFIN, D. *Introduction to Hamiltonian dynamical systems and the N-body problem*. [S.l.]: Springer, 2008. v. 77.

4 CHAZY, J. Sur certaines trajectoires du probleme des n corps. *Bull. Astron*, v. 35, p. 321–389, 1918.

5 WINTNER, A. The analytical foundations of celestial mechanics. *Princeton, NJ, Princeton university press*, v. 1, 1941.

6 SMALE, S. Mathematical problems for the next century. *The Mathematical Intelligencer*, Springer, v. 20, n. 2, p. 7–15, 1998.

7 EULER, L. De motu rectilineo trium corporum se mutuo attahentium. *Novi Comm. Acd. Sci. Imp. Petrop.*, v. 11, 1767.

8 MOULTON, F. R. The straight line solutions of the problem of n bodies. *The Annals of Mathematics*, JSTOR, v. 12, n. 1, p. 1–17, 1910.

9 LAGRANGE, J.-L. Essai sur le probleme des trois corps. *Œuvres*, v. 6, p. 229–324, 1772.

10 HAMPTON, M.; MOECKEL, R. Finiteness of relative equilibria of the four-body problem. *Inventiones Mathematicae*, Springer, v. 163, n. 2, p. 289–312, 2006.

11 ALBOUY, A.; KALOSHIN, V. Finiteness of central configurations of five bodies in the plane. *Annals of mathematics*, v. 176, p. 535–588, 2012.

12 DZIOBEK, O. Über einen merkwürdigen fall des vielkörperproblems. *Astron. Nach.*, v. 152, 1900.

13 HAGIHARA, Y. *Celestial mechanics*. [S.l.]: MIT Press, 1975. v. 1.

14 CABRAL, H.; DIACU, F. *Classical and celestial mechanics: the Recife lectures*. [S.l.]: Princeton University Press, 2002.

15 SHAFAREVICH, I. *Basic algebraic geometry. 1. Varieties in projective space. Translated from the 1988 Russian edition and with notes by Miles Reid*. [S.l.]: Springer-Verlag, Berlin, 1994.

16 SMITH, K. E. et al. *An Invitation to Algebraic Geometry*. [S.l.]: Springer, 2000.

17 HARTSHORNE, R. *Algebraic geometry*. [S.l.]: Springer Verlag, 1977. v. 52.

18 GRIFFITHS, P.; HARRIS, J. *Principles of algebraic geometry*. [S.l.]: Wiley-interscience, 2011. v. 52.

19 COX, D. A.; LITTLE, J.; O'SHEA, D. *Ideals, varieties, and algorithms: an introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra*. [S.l.]: Springer Verlag, 2007. v. 10.

20 MILNOR, J. On the betti nunbers of real varieties. *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 15, p. 275–280, 1964.

21 THOM, R. Sur l'homologie des variétés algebrique réeles. *In Differential and Combinatorial Topology*, Princeton Univ. Press, p. 255–265, 1965.