UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Manaíra Lima da Silva

O Teorema da Dimensão das Fibras e pontos não fechados

Recife
2011

Manaíra Lima da Silva

O Teorema da Dimensão das Fibras e pontos não fechados

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Ramón Mendoza
Co-Orientadora: Jacqueline Rojas

Recife
2011

Catalogação na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

S586t Silva, Manaíra Lima da
O teorema da dimensão das fibras e pontos não fechados / Manaíra Lima da Silva. – 2011.
50 f.

Orientador: Ramón Mendonza.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, Recife, 2011.
Inclui referências.

1. Matemática. 2. Dimensão das fibras. I. Mendonza, Ramón (orientador). II. Título.

510 CDD (23. ed.) UFPE- MEI 2017-219

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Matemática.

Aprovado: ____
Ramón Orestes Mendoza Ahumada, UFPE
Orientador

____
André Luiz Meireles Araújo, UFPE

____
Roberto Callejas Bedregal, UFPB

O TEOREMA DA DIMENSÃO DAS FIBRAS
E PONTOS NÃO FECHADOS

Por
Manaíra Lima da Silva

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126 - 8414 – Fax: (081) 2126 - 8410
RECIFE – BRASIL
Agosto – 2011

RESUMO

O Teorema da Dimensão das Fibras para variedades projetivas é uma ferramenta muito importante da Geometria Algébrica e tem inúmeras aplicações. Por exemplo, pode-se utilizá-lo para calcular a dimensão do espaço das matrizes cujo posto é menor do que ou igual a k ou a dimensão da variedade de incidência $\Gamma = \{(\pi, l, p) \mid p \in l \subset \pi\}$, onde π é um plano, l é uma reta e p é um ponto em algum espaço projetivo. Neste trabalho, apresentamos a versão do Teorema da Dimensão das Fibras para esquemas afins. Esta versão é particularmente interessante devido a existência de pontos não-fechados. A estratégia utilizada para provar este resultado é a sugerida pelo exercício 3.22 da página 95 em (1) e também utilizada em (2). Inicialmente, estudamos o conceito de Espaço Topológico Noetheriano e apresentamos duas classes básicas e importantes em Geometria Algébrica: Variedades Afins e Espectros de Anéis; consideramos a noção de dimensão a partir dos pontos de vista algébrico - dimensão de Krull de um anel comutativo e grau de transcendência de uma extensão de corpos - e topológico e provamos que se considerarmos uma K-álgebra finitamente gerada, os três conceitos de dimensão apresentados coincidem. Em seguida, definimos pré-feixe, feixe e morfismos entre feixes e exibimos vários exemplos; apresentamos os esquemas afins, os morfismos entre esquemas afins e a equivalência entre a categoria dos anéis e a categoria dos esquemas afins, e demonstramos o nosso resultado principal. Por fim, exibimos duas aplicações relevantes e diversas do Teorema da Dimensão das Fibras: a contagem das retas numa superfície cúbica no espaço projetivo tridimensional complexo (um problema da Geometria Algébrica) e a finitude genérica das configurações de Dziobek (um problema da Mecânica Celeste).

Palavras-chave: Teorema da dimensão das fibras. Pontos não-fechados. Esquemas afins.

ABSTRACT

The Fibers Dimension Theorem for projective varieties is a very important tool of Algebraic Geometry and has many applications. For example, it can be used to calculate the dimension of the space of matrices whose rank is less than or equal to k or the size of incidence variety $\Gamma = \{(\pi, l, p) \mid p \in l \subset \pi\}$ where π is a plane, l is a line, and p is a point in some projective space. In this work, we present the version of the Fibers Dimension Theorem for affine schemes. This version is particularly interesting due to the existence of nonclosed points. The strategy used to prove this result is suggested by the exercise 3.22 from the page 95 in (1) and also used in (2). Initially, we studied the Noetherian Topological Space concept and presented two basic and important classes in Algebraic Geometry: Affine Varieties and Ring Spectrum; we consider the notion of dimension from the algebraic points of view - Krull dimension of a commutative ring and degree of transcendence of a field extension - and topological, and prove that if we consider a finitely generated K-algebra then the three dimension concepts presented coincide. Next, we define pre-sheaf, sheaf and morphisms between sheaves and we show several examples; we present the affine schemes, the morphisms between affine schemes, and the equivalence between the category of rings and the category of affine schemes, and we demonstrate our main result. Finally, we present two relevant and diverse applications of the Fiber Dimension Theorem: the counting of the lines on a cubic surface in the complex three-dimensional projective space (an Algebraic Geometry problem) and the generic fineness of the Dziobek configurations (a Celestial Mechanics problem).

Keywords: Fibers dimension theorem. Nonclosed points. Affine schemes.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O objetivo deste texto é provar o seguinte teorema.

Teorema 1.1 (Teorema da Dimensão da Fibra)**.** *Se X e Y são esquemas afins integrais de tipo finito sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $f : X \to Y$ é um morfismo dominante, então existe um conjunto aberto não-vazio $U \subset Y$ tal que* $\dim f^{-1}(y) = r$*, para todo $y \in U$, onde $r = \dim X - \dim Y$.*

Certamente, o teorema acima pode ser lido no compêndio de Eisenbud, Corolário 14.5 (p. 310 em (3)). Mas a estratégia que utilizaremos para provar o Teorema 1.1 acima foi sugerida pelo exercício 3.22 da página 95 em (1). Mais precisamente, o exercício citado nos diz que é suficiente demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 1.2 (Teorema 3 na p. 49 de (4))**.** *Sejam X e Y esquemas afins integrais de tipo finito sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $f : X \to Y$ um morfismo dominante. Se $r = \dim X - \dim Y$, então existe um subconjunto aberto não-vazio $U \subset Y$ tal que:*

1. *$f(X) \subseteq U$;*
2. *se W é qualquer subconjunto fechado irredutível de Y tal que $W \cap U \neq \emptyset$ e Z é uma componente irredutível de $f^{-1}(W)$ tal que $Z \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset$, então temos que $\dim Z = \dim W + r$.*

É importante salientar que a demonstração do Teorema 1.1 não é apenas uma aplicação do Teorema 1.2, devido à existência de pontos não-fechados como é o caso dos esquemas afins com a topologia de Zariski. De fato, neste trabalho não exibiremos a demonstração do Teorema 1.2. Concentraremos nossa atenção nas demonstrações dos resultados que usaremos para concluir o Teorema 1.1 no caso dos pontos não fechados, mostrando que necessitamos ser mais cuidadosos com esses.

Para aqueles que não estão familiarizados com a natureza das variedades algébricas e, em particular, com esquemas de pontos, onde podemos encontrar pontos não-fechados, recomendamos a bela exposição em (5), onde alguns pontos não-fechados aparecem como limites de um número finito de pontos simples e outros resultados muito interessantes. Também em (6) podem ser encontrados alguns resultados sobre pontos não-fechados no plano projetivo. Também recomendamos ao leitor o estudo de "Quádruplas de Pontos no Plano Projetivo" feito por Avritzer-Vaisencher em (7), "Quádruplas Projetivas em $\mathbb{P}^2$ e Fórmula de Localização de Bott" feito por Rojas-Mendoza-Silva em (8) e "Sextuplas Cônicas" feito por Rojas-Vaisencher em (9), onde são dadas descrições explícitas das variedades que parametrizam esses subesquemas de graus 4 e 6, contidos numa cônica, respectivamente.

2 ESPAÇOS TOPOLÓGICOS NOETHERIANOS

Um espaço topológico X é chamado **noetheriano** se para qualquer sequência $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq ...$ de subconjuntos fechados de X existe um inteiro r tal que $Y_r = Y_{r+1} = ...$.

Sejam X um espaço topológico e Y um subconjunto de X, munido da topologia induzida pela topologia de X. Y é chamado **irredutível** se não é a união de dois subconjuntos fechados próprios de Y.

Proposição 2.1. *Se X é um espaço topológico noetheriano então todo subconjunto fechado não-vazio Y pode ser escrito como uma união finita $Y = Y_1 \cup ... \cup Y_r$ de subconjuntos fechados irredutíveis $Y_i \subset Y$. Além disso, se for exigido que $Y_i \supsetneq Y_j$, para $i \neq j$, então os Y_i's são unicamente determinados.*

Demonstração. Primeiro mostraremos a existência de uma tal representação. Seja $\mathscr{F}$ a família dos subconjuntos fechados não-vazios de X que não podem ser escritos como uma união finita de subconjuntos fechados irredutíveis. Se $\mathscr{F}$ é não-vazia então, como X é noetheriano, segue do Lema de Zorn que $\mathscr{F}$ deve ter um elemento minimal, digamos Y. Por construção de $\mathscr{F}$, Y não é irredutível e, portanto, podemos escrever $Y = Y' \cup Y''$, onde Y' e Y'' são subconjuntos fechados próprios de Y. Da minimalidade de Y, segue que Y' e Y'' podem ser escritos como uma união finita de subconjuntos fechados irredutíveis e, consequentemente, Y também pode, o que é uma contradição. Concluímos que todo subconjunto fechado $Y \subset X$ pode ser escrito como uma união finita $Y = Y_1 \cup ... \cup Y_r$ de subconjuntos fechados irredutíveis.
Para eliminar subconjuntos desnecessários, podemos assumir que $Y_i \supsetneq Y_j$, para $i \neq j$. Suponhamos que $Y = Y_1' \cup ... \cup Y_s'$ é outra tal representação. Então $Y_1' \subset Y = Y_1 \cup ... \cup Y_r$ e, portanto, $Y_1' = \cup(Y_1' \cap Y_i)$. Mas, como Y_1' é irredutível, segue-se que $Y_1' \subseteq Y_i$, para algum i, digamos $i = 1$. Analogamente, $Y_1 \subseteq Y_j'$, para algum j. Então $Y_1' \subseteq Y_j'$ e, portanto $j = 1$. Logo, $Y_1 = Y_1'$. Seja $Z = Y \backslash Y_1$. Então $Z = Y_2 \cup ... \cup Y_r$ e também $Z = Y_2' \cup ... \cup Y_s'$. Procedendo-se por indução sobre r, obtém-se a unicidade do Y_i's.

■

Os subconjuntos fechados Y_i que aparecem na decomposição de Y como uma união finita de subconjuntos fechados irredutíveis unicamente determinados são chamados as **componentes irredutíveis** de Y.

A seguir apresentamos duas classes de exemplos importantes no que diz respeito ao desenvolvimento deste trabalho.

2.1 Variedades afins

Consideremos o conjunto $\mathbb{C}^n$ das n-uplas de elementos de $\mathbb{C}$.
Uma **variedade afim** X é simplesmente o (locus) lugar geométrico dos zeros comuns de uma coleção de polinômios em $\mathbb{C}[x_1,...,x_n]$. Mais precisamente, seja $S \subset \mathbb{C}[x_1,...,x_n]$ um conjunto de polinômios. O conjunto dos zeros de S em $\mathbb{C}^n$

$$Z(S) = \{(a_1,...,a_n) \in \mathbb{C}^n |\ f(a_1,...,a_n) = 0,\ \forall\ f \in S\},$$

é a variedade afim determinada pelos polinômios $f \in S$.

Observações.

1. Sejam $S_1 \subseteq S_2 \subseteq \mathbb{C}[x_1,...,x_n]$. Se $a \in Z(S_2)$ então $f(a) = 0,\ \forall f \in S_2$. Em particular, $f(a) = 0,\ \forall f \in S_1$ e, portanto, $a \in Z(S_1)$. Logo, $Z(S_1) \supseteq Z(S_2)$.

2. Denotemos por $\langle S \rangle$ o ideal gerado por S em $\mathbb{C}[x_1,...,x_n]$.
   Como $S \subseteq \langle S \rangle$, segue diretamente do item anterior que $Z(S) \supseteq Z(\langle S \rangle)$. Por outro lado, se $a \in Z(S)$ e $f \in \langle S \rangle$, então $f = g_1 f_1 + ... + g_k f_k$, para alguns $f_1,...,f_k \in S,\ g_1,...,g_k \in \mathbb{C}[x_1,...,x_n]$. Logo $f(a) = g_1(a)f_1(a) + ... + g_k(a)f_k(a) = 0$ e, portanto, $a \in Z(\langle S \rangle)$. Desse modo, $Z(S) \subseteq Z(\langle S \rangle)$. Logo, $Z(S) = Z(\langle S \rangle)$.

3. Em particular, temos que se $I \subset \mathbb{C}[x_1,...,x_n]$ é um ideal e $\{f_1,...,f_k\} \subset \mathbb{C}[x_1,...,x_n]$ é um conjunto qualquer de geradores para I então $Z(I) = Z(\{f_1,...,f_k\})$. Em lugar de $Z(\{f_1,...,f_k\})$ passaremos a escrever $Z(f_1,...,f_k)$.

Exemplo 2.1. *Consideremos o anel* $\mathbb{C}[x,y]$.

1. $Z(1) = \emptyset$;

2. $Z(0) = \mathbb{C}^2$ *é chamado o plano afim;*

3. $Z(\langle y \rangle) = \{(a,0) \in \mathbb{C}^2 |\ a \in \mathbb{C}\}$ *é uma reta afim.*

Proposição 2.2. *A família* $\{Z(I)^C \mid I \subseteq \mathbb{C}[x_1,...,x_n]$ *é um ideal* $\}$ *é uma topologia em* $\mathbb{C}^n$ *a qual chamaremos Topologia de Zariski.*

Demonstração. Observe que:

- $Z(1) = \emptyset$ e $Z(0) = \mathbb{C}^n$.

- Se I_1 e I_2 são ideais de $\mathbb{C}[x_1,...,x_n]$ então $Z(I_1) \cup Z(I_2) = Z(I_1 I_2)$.
  Como $I_1 I_2 \subseteq I_1$ e $I_1 I_2 \subseteq I_2$, temos que $Z(I_1 I_2) \supseteq Z(I_1)$ e $Z(I_1 I_2) \supseteq Z(I_2)$ e, portanto, $Z(I_1 I_2) \supseteq Z(I_1) \cup Z(I_2)$.
  Por outro lado, seja $a \in Z(I_1 I_2)$. Então $f(a) = 0,\ \forall f \in I_1 I_2$. Suponha que $a \notin Z(I_1)$.

Então existe $g \in I_1$ tal que $g(a) \neq 0$. Para todo $f \in I_2$, temos que $fg \in I_1I_2$ e $f(a)g(a) = (fg)(a) = 0$. Logo, $f(a) = 0$. Como $f \in I_2$ foi escolhido arbitrariamente, $f(a) = 0$, $\forall f \in I_2$ e, portanto, $a \in Z(I_2)$. Portanto, $Z(I_1I_2) \subseteq Z(I_1) \cup Z(I_2)$.

- Se $\{I_\alpha\}_\alpha$ é uma família de ideais em $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ então $\cap Z(I_\alpha) = Z(\cup I_\alpha)$.
  Para cada α, temos que $I_\alpha \subseteq \cup I_\alpha$ e, portanto, $Z(I_\alpha) \supseteq Z(\cup I_\alpha)$. Consequentemente, $\cap Z(I_\alpha) \supseteq Z(\cup I_\alpha)$.
  Por outro lado, seja $a \in \cap Z(I_\alpha)$. Então $a \in Z(I_\alpha)$ para cada α. Isto é, $f(a) = 0$, $\forall f \in I_\alpha$, $\forall \alpha$ o que implica em $f(a) = 0$, $\forall f \in \cup I_\alpha$ e, portanto $a \in Z(\cup I_\alpha)$. Logo $\cap Z(I_\alpha) \subseteq Z(\cup I_\alpha)$.

Desse modo, os conjuntos $Z(I)$ formam uma coleção de subconjuntos fechados de $\mathbb{C}^n$. ■

Isto é, a **Topologia de Zariski** sobre $\mathbb{C}^n$ é simplesmente a topologia na qual os conjuntos fechados são dados por $Z(I)$, para algum ideal $I \subset \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$.

Chamaremos de espaço afim (n-dimensional) sobre o corpo $\mathbb{C}$ o espaço topológico $\mathbb{C}^n$ munido da Topologia de Zariski e o denotaremos por $\mathbb{A}^n$.

Exemplo 2.2. *1. Todo ponto $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{A}^n$ é fechado, uma vez que*

$$\{(a_1, ..., a_n)\} = Z(x_1 - a_1, ..., x_n - a_n).$$

2. *$\mathscr{U} = \{(a, 0) \in \mathbb{C}^2 |\ a \in \mathbb{C}\}^C$ é aberto em $\mathbb{A}^2$, uma vez que $\mathscr{U} = Z(y)^C$, com $y \in \mathbb{C}[x, y]$.*

3. *O conjunto $X = \mathscr{U} \cup \{(0, 0)\} \subset \mathbb{A}^2$ não é nem fechado nem aberto.*

   Suponha que X é aberto em $\mathbb{A}^2$. Então $X^C = \{(a, 0) \in \mathbb{C}^2 |\ a \in \mathbb{C}, a \neq 0\}$ é fechado. Isto é, existe um ideal $I \subseteq \mathbb{C}[x, y]$ tal que $X^C = Z(I)$. Considere $f(x, y) = a_n(x)y^n + ... + a_1(x)y + a_0(x) \in I$. Temos que $f(a, 0) = a_0(a) = 0$, $\forall a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ e, portanto, $a_0(x) = 0$. Logo, $f(x, y) = a_n(x)y^n + ... + a_1(x)y$ e, em particular $f(0, 0) = 0$. Como $f \in I$ foi escolhido arbitrariamente, temos que $f(0, 0) = 0$, $\forall f \in I$ e, portanto, $(0, 0) \in Z(I)$, o que contradiz a hipótese de $X^C = Z(I)$.

   Suponha, agora, que X é fechado em $\mathbb{A}^2$. Então existe um ideal $J \subseteq \mathbb{C}[x, y]$ tal que $X = Z(J)$. Considere $f \in J$. Fixado $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, temos que $(a, b) \in X$, $\forall\ b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$ e também que $f(a, y)$ é um polinômio na variável y, o qual denotaremos por $f_a(y)$. Mas $f_a(b) = f(a, b) = 0$, $\forall\ b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$ e, portanto, $f_a(y) = 0$. Em particular, $f(a, 0) = f_a(0) = 0$. Como $f \in J$ foi escolhido arbitrariamente, temos que $f(a, 0) = 0$, $\forall f \in J$ e, portanto, $(a, 0) \in Z(J)$, o que contradiz a hipótese de $X = Z(J)$.

Exemplo 2.3. *Um espaço topológico X é um* ***Espaço de Hausdorff*** *se quaisquer dois pontos distintos de X podem ser separados por vizinhanças, isto é, se x e $y \in X$, então existem vizi-nhanças U de x e V de y tais que $U \cap V = \emptyset$. Quase todos os espaços encontrados em análise são de Hausdorff. Por exemplo, todo espaço métrico é de Hausdorff.*

No entanto, $\mathbb{A}^n$ não é um espaço de Hausdorff, como veremos a seguir.

Sejam a, $b \in \mathbb{A}^n$ e U, V abertos de $\mathbb{A}^n$ com $a \in U$ e $b \in V$. Temos que $U = \mathbb{A}^n - Z(I)$ e $V = \mathbb{A}^n - Z(J)$, onde I, J são ideais de $\mathbb{C}[x_1,...,x_n]$. Observe que $U \cap V = \mathbb{A}^n - (Z(I) \cup Z(J)) = \mathbb{A}^n - Z(IJ)$. Por outro lado, $U \cap V = \emptyset$ se, e somente se, $Z(IJ) = \mathbb{A}^n$ o que implica em $IJ = 0$ e, portanto, $I = 0$ ou $J = 0$ uma vez que $\mathbb{C}[x_1,...,x_n]$ é um domínio de integridade. Mas se, por exemplo, $I = 0$ temos $Z(I) = \mathbb{A}^n$, $U = \emptyset$ e, em particular, $a \notin U$, o que é uma contradição.

Se I é um ideal do anel comutativo A, lembremos que o **radical** de I é o ideal

$$\sqrt{I} = \{f \in A |\ \exists\, n \in \mathbb{N} : f^n \in I\}.$$

Lembremos também que I é um **ideal radical** quando $I = \sqrt{I}$.

Observação 2.1. *1. Se I e J são ideais de A tais que $I \subset J$, então $\sqrt{I} \subset \sqrt{J}$.*

2. *Se I é um ideal de $\mathbb{C}[x_1,...,x_n]$, como $I \subseteq \sqrt{I}$, então $Z(I) \supseteq Z(\sqrt{I})$. Por outro lado, seja $a \in Z(I)$. Se $g \in \sqrt{I}$ então $g^n \in I$ para algum $n \in \mathbb{N}$ e, portanto, $g^n(a) = (g(a))^n = 0 \Rightarrow g(a) = 0$. Logo, $a \in Z(\sqrt{I})$ e, desse modo, $Z(I) \subseteq Z(\sqrt{I})$. Portanto, $Z(I) = Z(\sqrt{I})$.*

Seja $Y \subset \mathbb{A}^n$. O **ideal associado** a Y em $\mathbb{C}[x_1,...,x_n]$ é dado por

$$\Im(Y) = \{f \in \mathbb{C}[x_1,...,x_n] |\ f(a) = 0,\ \forall\, a \in Y\}.$$

Observação 2.2. *1. Sejam $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq \mathbb{A}^n$. Se $f \in \Im(Y_2)$ então $f(a) = 0\ \forall\, a \in Y_2$. Em particular, $f(a) = 0\ \forall\, a \in Y_1$ e, portanto, $f \in \Im(Y_1)$. Logo, $\Im(Y_1) \supseteq \Im(Y_2)$.*

2. *$\Im(Y)$ é um ideal radical. Isto é, $\Im(Y) = \sqrt{\Im(Y)}$.*

   Por definição de radical, temos $\Im(Y) \subseteq \sqrt{\Im(Y)}$. Por outro lado, se $f \in \sqrt{\Im(Y)}$ então existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $f^r \in \Im(Y)$. Ou seja, $f^r(a) = 0\ \forall\, a \in Y$ o que implica em $f(a) = 0\ \forall\, a \in Y$ e, portanto, $f \in \Im(Y)$. Logo, $\sqrt{\Im(Y)} \subseteq \Im(Y)$.

Lema 2.1 (Lema de Zariski)**.** *Sejam $k \subset K$ corpos. Se K é uma k-álgebra finitamente gerada então K é uma extensão algébrica de k.*

Demonstração. Veja o Lema 2.7, na p. 33 de (10). ∎

Proposição 2.3. *Seja K um corpo algebricamente fechado. Os ideais maximais de $K[x_1,\dots,x_n]$ são da forma $\langle x_1 - a_1,\dots,x_n - a_n\rangle$, para algum $(a_1,\dots,a_n) \in K^n$.*

Demonstração. Seja $\mathfrak{m}$ um ideal maximal de $K[x_1,\dots,x_n]$. Logo, $K[x_1,\dots,x_n]/\mathfrak{m}$ é um corpo. Note que $K[x_1,\dots,x_n]/\mathfrak{m} = K_1[\alpha_1,\dots,\alpha_n]$, onde $K_1 = \{\overline{a} = a+\mathfrak{m} |\ a \in K\}$ e $\alpha_i = \overline{x_i}$, é uma K_1-álgebra finitamente gerada.
Segue do Lema de Zariski que $K[x_1,\dots,x_n]/\mathfrak{m}$ é uma extensão algébrica de K_1. Como K é algebricamente fechado, então K_1 também é algebricamente fechado pois é a imagem de K por um homomorfismo. Portanto, $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in K_1$ pois são algébricos sobre K_1. Logo, $\overline{x_i} = \overline{a_i}$, para algum $a_i \in K$ e $\mathfrak{m} = \langle x_1 - a_1,\dots,x_n - a_n\rangle$.

∎

No caso $n = 2$ o resultado acima tem uma demonstração bastante simples, que dispensa o uso do Lema de Zariski e que pode ser encontrada na p. 31 de (11).

Teorema 2.1. *[Teorema dos Zeros de Hilbert] Se K é um corpo algebricamente fechado e I é um ideal de $K[x_1,\dots,x_n]$ então $Z(I) \neq \emptyset$ ou $I = \langle 1\rangle$.*

Demonstração. Suponhamos $I \neq \langle 1\rangle$. Então existe um ideal maximal $\mathfrak{m}$ tal que $I \subseteq \mathfrak{m}$. Pela proposição anterior, temos que $\mathfrak{m} = \langle x_1 - a_1,\dots,x_n - a_n\rangle$, para algum $(a_1,\dots,a_n) \in K^n$. Como $I \subseteq \mathfrak{m}$, $Z(I) \supseteq Z(\mathfrak{m}) = \{(a_1,\dots,a_n)\}$. Logo $Z(I) \neq \emptyset$. ∎

Proposição 2.4. *Se I é um ideal de $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ então $\Im(Z(I)) = \sqrt{I}$.*

Demonstração. Temos que $I \subseteq \Im(Z(I)) = \{f \in \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n] |\ f(a) = 0\ \forall a \in Z(I)\}$.
Considerando o item 1 nas observações acima e o fato de que $\Im(Z(I))$ é um ideal radical, concluímos que $\sqrt{I} \subseteq \Im(Z(I))$.

Sejam $g \in \Im(Z(I))$, com $g \neq 0$, e $\{f_1,\dots,f_k\}$ um conjunto de geradores de I em $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$.
Consideremos os polinômios $F_0 = 1 - gx_{n+1}$, $F_1 = f_1$, ... , $F_k = f_k$ em $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_{n+1}]$.
Suponhamos $(a_1,\dots,a_{n+1}) \in Z(F_0,\dots,F_k)$. Em particular, $(a_1,\dots,a_n) \in Z(f_1,\dots,f_k) = Z(I)$. Desse modo, $F_0(a_1,\dots,a_{n+1}) = 1 - g(a_1,\dots,a_n)a_{n+1} = 1 - 0a_{n+1} = 1 \neq 0$ o que é uma contradição. Logo $Z(F_0,\dots,F_k) = \emptyset$ e, pela proposição anterior, $\langle F_0,\dots,F_k\rangle = \langle 1\rangle$.
Então existem polinômios $Q_0,\dots,Q_k \in \mathbb{C}[x_1,\dots,x_{n+1}]$ tais que

$$1 = Q_0F_0 + \dots + Q_kF_k = Q_0(1 - gx_{n+1}) + \dots + Q_kF_k.$$

Aplicando o homomorfismo $\varphi : \mathbb{C}[x_1,...,x_{n+1}] \to \mathbb{C}[x_1,...,x_n]_g$ definido por $\varphi(x_i) = \frac{x_i}{1}$, para $1 \leq i \leq n$, $\varphi(a) = \frac{a}{1}$, se $a \in \mathbb{C}$ e $\varphi(x_{n+1}) = \frac{1}{g}$ obtemos

$$\frac{1}{1} = \varphi(Q_0(1-gx_{n+1}) + ... + Q_kF_k) = 0 + \varphi(Q_1F_1 + ... + Q_kF_k) = R_1f_1 + ... + R_kf_k,$$

onde $R_i = \varphi(Q_i) = \frac{P_i}{g^{m_i}}$, com $P_i \in \mathbb{C}[x_1,...,x_n]$, para algum $m_i \in \mathbb{N}$ e, portanto,

$$\frac{1}{1} = \frac{P_1g^{m-m_1}f_1 + ... + P_kg^{m-m_k}f_k}{g^m}, \text{ para } m = m_1...m_k.$$

Logo $g^m = P_1g^{m-m_1}f_1 + ... + P_kg^{m-m_k}f_k \in \langle f_1,...,f_k\rangle = I$ e $g \in \sqrt{I}$.
Desse modo, $\Im(Z(I)) \subseteq \sqrt{I}$.

■

Proposição 2.5. *Se $Y \subset \mathbb{A}^n$ então $Z(\Im(Y)) = \overline{Y}$.*

Demonstração. Temos que $Z(\Im(Y)) = \{a \in \mathbb{C}^n |\ f(a) = 0\ \forall f \in \Im(Y)\}$ é um fechado de $\mathbb{A}^n$ e $Y \subset Z(\Im(Y))$. Como o fecho é o menor fechado que contém o conjunto, então $\overline{Y} \subseteq Z(\Im(Y))$. Seja $Z(J)$ um fechado em $\mathbb{A}^n$ com $Y \subset Z(J)$. Então $\Im(Y) \supseteq \Im(Z(J)) = \sqrt{J} \supseteq J$, o que implica em $Z(\Im(Y)) \subseteq Z(J)$. Como o fecho é a interseção de todos os fechados que contém o conjunto, então $Z(\Im(Y)) \subseteq \overline{Y}$.

■

Proposição 2.6. *$\mathbb{A}^n$ é um espaço topológico noetheriano.*

Demonstração. Sejam $Y_i \subset \mathbb{A}^n$, $i = 1,2,...$, subconjuntos fechados de $\mathbb{A}^n$ tais que

$$Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq ... \supseteq Y_i \supseteq Y_{i+1} \supseteq ...$$

Considerando os ideais associados aos subconjuntos Y_i, obtemos que

$$\Im(Y_1) \subseteq \Im(Y_2) \subseteq ... \subseteq \Im(Y_i) \subseteq \Im(Y_{i+1}) \subseteq ...$$

Temos uma cadeia ascendente de ideais em $\mathbb{C}[x_1,...,x_n]$ que é uma anel noetheriano e, portanto, a tal cadeia estaciona. Isto é, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $\Im(Y_r) = \Im(Y_{r+1}) = ...$
Segue da proposição anterior que $Z(\Im(Y_i)) = \overline{Y_i} = Y_i$, $i = 1,2,...$, uma vez que Y_i é fechado.
Em particular, $Y_r = Y_{r+1} = ...$ e segue o resultado.

■

2.2 O espectro de um anel

Seja A um anel comutativo com unidade.

$$Spec(A) = \{P \subset A |\ P \text{ é um ideal primo de } A\}$$

é denominado o espectro primo de A.

Denotaremos por 0 o ideal nulo de A. Temos que $0 \in Spec(A)$ se, e somente se, A é um domínio de integridade.

Para cada subconjunto $S \subseteq A$, defina

$$V(S) = \{P \in Spec(A) |\ P \supseteq S\}.$$

Observação 2.3. *1. Se $S \subseteq T \subseteq A$ então $V(S) \supseteq V(T)$.*
Sejam $S \subseteq T \subseteq A$ e $P \in V(T)$. Em particular, $P \supseteq T \supseteq S$ e, portanto, $P \in V(S)$. Logo $V(T) \subseteq V(S)$.

2. Se $\langle S \rangle$ denota o ideal gerado por S em A então $V(S) = V(\langle S \rangle)$.
De fato, $S \subseteq \langle S \rangle \Rightarrow V(S) \supseteq V(\langle S \rangle)$ e, como $\langle S \rangle$ é a interseção de todos os ideais de A que contém S, temos também que $V(S) \subseteq V(\langle S \rangle)$.

Proposição 2.7. *A família $\{V(I)^C |\ I$ é um ideal de A $\}$ é uma topologia sobre $Spec(A)$, a qual chamaremos de Topologia de Zariski de $Spec(A)$.*

Demonstração. Observe que:

- Segue das definições que $V(0) = Spec(A)$ e $V(1) = \emptyset$.
- Se I e J são dois ideais de A então $V(I) \cup V(J) = V(IJ)$.
  De fato, temos que $IJ \subseteq I$ e $IJ \subseteq J$ o que implica em $V(IJ) \supseteq V(I)$ e $V(IJ) \supseteq V(J)$ e, portanto, $V(IJ) \supseteq V(I) \cup V(J)$. Por outro lado, segue da definição de ideal primo que se $P \in Spec(A)$ e $P \supseteq IJ$ então $P \supseteq I$ ou $P \supseteq J$. Logo, $V(IJ) \subseteq V(I) \cup V(J)$.
- Se $\{I_\alpha\}_\alpha$ é uma família de ideais em A então $V(\cup I_\alpha) = \cap V(I_\alpha)$.
  Temos que, para cada α, $I_\alpha \subseteq \cup I_\alpha$. Então $V(I_\alpha) \supseteq V(\cup I_\alpha)$, $\forall \alpha$ e, portanto, $\cap V(I_\alpha) \supseteq V(\cup I_\alpha)$. Por outro lado, se $P \in \cap V(I_\alpha)$ então $P \in V(I_\alpha)$, para todo α, e, portanto, $I_\alpha \subset P$, para todo α. Desse modo, $\cup I_\alpha \subset P$ o que implica em $P \in V(\cup I_\alpha)$. Logo $\cap V(I_\alpha) \subseteq V(\cup I_\alpha)$.

Donde, concluímos que os conjuntos $V(I)$ satisfazem os axiomas para subconjuntos fechados num espaço topológico.

■

Sejam A um anel comutativo com unidade e $f \in A$. O subconjunto

$$X_f = Spec(A) - V(f) = \{P \in Spec(A) | \; f \notin P\}$$

é denominado **aberto básico (ou distinguido)** de $Spec(A)$.

Os conjuntos X_f, com $f \in A$, formam uma base para a Topologia de Zariski sobre $Spec(A)$, conforme mostraremos a seguir.
De fato, consideremos o aberto $U = Spec(A) - V(S)$, para algum $S \subseteq A$. Temos que

$$U = Spec(A) - \bigcap_{f \in S} V(f) = \bigcup_{f \in S} X_f.$$

Observe que podemos estabelecer uma bijeção entre X_f e $Spec(A_f)$, onde A_f é a localização de A em f, uma vez que os ideais primos de A que não contém f podem ser identificados com os ideais primos de A_f.

Proposição 2.8. *Se I e J são dois ideais de A então $V(I) \subseteq V(J)$ se, e somente se, $\sqrt{I} \supseteq \sqrt{J}$.*

Demonstração. Sabemos que o radical de um ideal é a interseção de todos os ideais primos que o contém. Portanto,

$$\sqrt{I} = \bigcap_{P \supset I} P \supseteq \sqrt{J} = \bigcap_{P \supset J} P$$
$$\Updownarrow$$
$$V(I) = \{P \in Spec(A) | \; P \supseteq I\} \subseteq V(J) = \{P \in Spec(A) | \; P \supseteq J\}.$$

■

Observação 2.4. *Segue da Proposição 2.8 que se $I \subset A$ é um ideal então $V(I) = V(\sqrt{I})$.*

Usaremos a notação $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ para $Spec(\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n])$.

Observe que $\mathbb{A}^n$ pode ser considerado como um subconjunto de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ através da correspondência

$$(a_1, \ldots, a_n) \to \langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n \rangle,$$

onde a cada ponto $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n$ é associado o ideal maximal $\langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n \rangle$ em $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$.

Note que sob a identificação acima os pontos de $\mathbb{A}^n$ permanecem fechados em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$.

Exemplo 2.4. *A identificação acima implica que $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} = Spec(\mathbb{C}[x])$ possui exatamente um ponto a mais do que $\mathbb{A}^1$, a saber, $p = 0$. De fato, os subconjuntos fechados de $Spec(\mathbb{C}[x])$ são da forma $V(f)$, com $f \in \mathbb{C}[x]$, uma vez que $\mathbb{C}[x]$ é um Domínio de Ideais Principais. Observe que:*

$$V(f) = \begin{cases} \emptyset, & se\ f \in \mathbb{C} - \{0\} \\ Spec(\mathbb{C}[x]), & se\ f = 0 \\ \{\langle x - a_1 \rangle, ..., \langle x - a_n \rangle\}, & se\ f = a(x-a_1)^{m_1} ... (x-a_n)^{m_n}. \end{cases}$$

Logo, os pontos fechados de $Spec(\mathbb{C}[x])$ são os ideais maximais $\langle x - a \rangle$, com $a \in \mathbb{C}$.

Entretanto, no caso $n > 1$, existe um número infinito de pontos ou, mais precisamente, de ideais primos que não são maximais. Por exemplo, no anel $\mathbb{Z}[x]$ os ideais $\langle p \rangle$, com $p \in \mathbb{Z}$ primo, e $\langle q(x) \rangle$, com $q(x)$ irredutível, são ideais primos que não são maximais.

A proposição a seguir mostra que os ideais radicais em $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ nos permitem identificar os subconjuntos fechados de $\mathbb{A}^n$ com os subconjuntos fechados de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$.

Proposição 2.9. *Temos as seguintes bijeções*

$$\begin{array}{ccccc} Conjuntos & & Ideais & & Conjuntos \\ fechados & & radicais & & fechados \\ em\ \mathbb{A}^n & & em\ \mathbb{C}[x_1, ..., x_n] & & em\ \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \\ Z(I) & \leftrightarrow & I & \leftrightarrow & V(I) \end{array}$$

Demonstração. A primeira bijeção segue das proposições 2.4 e 2.5.
Vejamos agora a segunda bijeção.
Se I é um ideal radical em $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ então, por definição, $V(I)$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$. Por outro lado, se Y é um subconjunto fechado em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ segue da proposição 2.8 que $Y = V(I)$, para um único ideal radical $I \subset \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$. ■

Proposição 2.10. *$\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} = Spec(\mathbb{C}[x_1, ..., x_n])$, munido da topologia de Zariski é um espaço topológico noetheriano.*

Demonstração. Sejam Y_i, $i = 1, 2, ...$ subconjuntos fechados de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ tais que

$$Y_1 \supseteq ... \supseteq Y_i \supseteq Y_{i+1} \supseteq ...$$

Temos que $Y_i = V(I_i) = \{P \in Spec(\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]) | P \supseteq I_i\}$, onde I_i é um ideal radical de $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$. Então I_i, $i = 1, 2, ...$ são ideais radicais de $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ tais que

$$V(I_1) \supseteq V(I_2) \supseteq ... \supseteq V(I_i) \supseteq V(I_{i+1}) \supseteq ...$$

Sabemos que se I, J são ideais radicais e $V(I) \supseteq V(J)$ então $I \subseteq J$. Portanto,

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq ... \subseteq I_i \subseteq I_{i+1} \subseteq ...$$

Como $\mathbb{C}[x_1,...,x_n]$ é anel noetheriano, então a cadeia de ideais acima estabiliza. Isto é, existe um inteiro r tal que $I_r = I_{r+1} = ...$ Logo $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq ... \supseteq Y_r = Y_{r+1} = ...$

$\blacksquare$

Sejam X um espaço topológico e $x \in X$. Dizemos que

- x é um **ponto fechado** quando $\overline{\{x\}} = \{x\}$;
- x é um **ponto genérico** quando $\overline{\{x\}} = X$.

Proposição 2.11. *Seja $x \in Spec(A)$. Verifica-se que:*

1. $\overline{\{x\}} = V(x)$*;*
2. *x é um ponto fechado se, e somente se, x é um ideal maximal de A;*
3. *x é um ponto genérico se, e somente se, $x = \mathcal{N}_A$, onde $\mathcal{N}_A = \bigcap\limits_{P \in Spec(A)} P$ é o **nilradical** do anel A.*

Demonstração.

1. Segue da definição que $\{x\} \subset V(x)$ e que $V(x)$ é fechado em $Spec(A)$. Como o fecho é o menor fechado que contém o conjunto, temos que $\overline{\{x\}} \subset V(x)$.
   Seja F um fechado de $Spec(A)$, com $\{x\} \subset F$. Então $F = V(S)$, para algum $S \subset A$. Observe que
   $$\{x\} \subset V(S) \Leftrightarrow x \in V(S) \Leftrightarrow S \subseteq x \Rightarrow V(x) \subseteq V(S) = F.$$
   Ou seja, todos os fechados que contém $\{x\}$ também contém $V(x)$ e, portanto, $V(x) \subseteq \overline{\{x\}}$, uma vez que o fecho é a interseção de todos os fechados que contém o conjunto.

2. x é um ideal maximal de A se, e somente se, x é primo e não está contido em nenhum outro ideal próprio de A. Logo $\overline{\{x\}} = V(x) = \{x\}$.

3. Suponhamos $Spec(A) = \overline{\{x\}}$. Então $x \subseteq P$, $\forall\, P \in Spec(A)$ e, portanto, $x \subseteq \bigcap\limits_{P \in Spec(A)} P = \mathcal{N}_A$. Como $x \in Spec(A)$, então $x \supseteq \bigcap\limits_{P \in Spec(A)} P$. Logo $x = \bigcap\limits_{P \in Spec(A)} P = \mathcal{N}_A$.
   Suponhamos $x = \mathcal{N}_A$. Então $x \subseteq P$, $\forall\, P \in Spec(A)$ e, portanto, $Spec(A) \subseteq V(x)$. Como $V(x) \subseteq Spec(A)$ por definição, segue que $Spec(A) = V(x) = \overline{\{x\}}$.

$\blacksquare$

Corolário 2.1. *Se $Spec(A)$ possui um ponto genérico então ele é único. Em particular, se A é um domínio de integridade então $0 \in Spec(A)$ é o único ponto genérico de $Spec(A)$.*

Demonstração. Segue diretamente do item 3 da proposição 2.11. ∎

Exemplo 2.5.
1. *Temos que* $\overline{\{0\}} = V(0) = Spec(\mathbb{C}[x]) = \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ *e, portanto,* 0 *não é um ponto fechado em* $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$*. De fato,* 0 *é o ponto genérico de* $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$*.*

2. $\langle \overline{x} \rangle$ *é o único ponto genérico de* $Spec(\mathbb{C}[x]/\langle x^2 \rangle)$*, mas* $\mathbb{C}[x]/\langle x^2 \rangle$ *não é um domínio de integridade.*

3. $Spec(\mathbb{C}[x,y]/\langle xy \rangle)$ *não possui ponto genérico.*

3 A NOÇÃO DE DIMENSÃO

Neste capítulo, consideraremos a noção de dimensão a partir dos pontos de vista algébrico (dimensão de Krull e grau de transcendência) e topológico.

- **Dimensão de Krull**

Sejam A um anel comutativo e $Spec(A)$ o espectro primo de A. Considere todas as cadeias da forma $P_0 \subset P_1 \subset ... \subset P_n$, com $P_i \in Spec(A)$. A **dimensão de Krull** de A é

$$\dim_{Krull}(A) = \max\{n \in \mathbb{N} |\ P_0 \subset P_1 \subset ... \subset P_n \text{ é uma cadeia de primos em } A\ \}.$$

- **Grau de transcendência**

Seja $L \supseteq K$ uma extensão de corpos. Dizemos que $a_1, ..., a_n \in L$ formam uma base de transcendência de $L \supseteq K$ se eles são algebricamente independentes e se $L \supseteq K(a_1, ..., a_n)$ é uma extensão algébrica. Se $L \supseteq K$ é uma extensão finitamente gerada, o número de elementos de uma base de transcendência é chamado o **grau de transcendência** da extensão $L \supseteq K$ e denotado por $grtr_K L$.

Proposição 3.1. *Sejam $M \supseteq L \supseteq K$ extensões de corpos finitamente geradas. Então*

$$grtr_K M = grtr_L M + grtr_K L.$$

Demonstração. Sejam $\{a_1, ..., a_m\}$ e $\{b_1, ..., b_n\}$ bases de transcendência de L sobre K e M sobre L, respectivamente. Veremos que a união $\{a_1, ..., a_m, b_1, ..., b_n\}$ é uma base de trans-cendência de M sobre K.
Temos que L é algébrico sobre a extensão transcendente $K(a_1, ..., a_m)$ de K.
Seja $f(X_1, ..., X_m, Y_1, ..., Y_n) = \Sigma_i f_i(X)Y^i$ um polinômio com coeficientes em K tal que $f(a_1, ..., a_m, b_1, ..., b_n) = 0$. Em particular, $f(a_1, ..., a_m, Y_1, ..., Y_n) = \Sigma_i f_i(a_1, ..., a_m)Y^i$ é um poli-nômio com coeficientes em L que fornece uma relação de dependência para $b_1, ..., b_n$ sobre L. Logo, cada coeficiente $f_i(a_1, ..., a_m)$ é nulo. Pela independência de $a_1, ..., a_m$ sobre K, temos que cada $f_i(X_1, ..., X_m) = 0$ e, portanto, $f = 0$. Logo $a_1, ..., a_m, b_1, ..., b_n$ são algebricamente independentes sobre K.

Verificaremos agora que M é algébrico sobre $K(a_1, ..., a_m, b_1, ..., b_n)$.
Dado $c \in M$, existe um polinômio $g \neq 0$ com coeficientes em $L_1 = L(b_1, ..., b_n)$ tal que $g(c) = 0$, pois M é algébrico sobre L_1. Logo a extensão $L_1(c) \supseteq L_1$ é algébrica. Como a extensão $L \supseteq K(a_1, ..., a_m)$ é algébrica, segue que a extensão $L_1(c) = L(b_1, ..., b_n)(c) \supseteq K(a_1, ..., a_m, b_1, ..., b_n)$ também é algébrica e, portanto, c é algébrico sobre $K(a_1, ..., a_m, b_1, ..., b_n)$. Como $c \in M$ foi escolhido arbitrariamente, temos que

a extensão $M \supseteq K(a_1,...,a_m,b_1,...,b_n)$ é algébrica, como queríamos demonstrar. ■

Seja A um domínio de integridade e uma K-álgebra finitamente gerada, onde K é um corpo. Denotemos por $Frac(A)$ o corpo de frações de A. Observe que $Frac(A)$ é uma extensão de corpos de K. Definimos o grau de transcendência de A por $\dim_{grtr} A = grtr_K Frac(A)$.

- **Dimensão topológica**

Seja X um espaço topológico. Considere todas as cadeias da forma $Y_0 \subset Y_1 \subset ... \subset Y_n$, com $Y_i \subset X$ fechado irredutível (cada Y_i é munido da topologia induzida pela topologia de X). A **dimensão** de X é dada por

$$\dim X = \max\{n \in \mathbb{N} |\ Y_0 \subset Y_1 \subset ... \subset Y_n \text{ é uma cadeia de } X\}.$$

Observação 3.1. *1. A dimensão topológica não é finita em geral.*

Por exemplo, $\dim Spec(\mathbb{C}[x_1,...,x_n,...]) = \infty$. *Note que* $Spec(\mathbb{C}[x_1,...,x_n])$ *não é um espaço topológico noetheriano.*

Consideremos $\mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$ *o conjunto dos números naturais e, para cada* $n \in \mathbb{N}$, *denotemos* $I_n = \{1,2,...,n\}$. *Temos que os complementares dos conjuntos da família* $\mathscr{F} = \{\mathbb{N},\emptyset\} \cup \{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ *definem uma topologia em* $\mathbb{N}$. *Verifica-se facilmente que* $\mathbb{N}$, *munido da topologia determinada por* $\mathscr{F}$ *é um espaço topológico noetheriano. Por outro lado, a cadeia de fechados* $I_1 \subset I_2 \subset ... \subset I_n ...$ *não é estacionária e, portanto,* $\mathbb{N}$ *tem dimensão infinita.*

2. *Se A é uma K-álgebra finitamente gerada então* $\dim Spec(A)$ *é finita.*

3. *Se X é um espaço topológico noetheriano e Y é um subconjunto fechado de X, munido da topologia induzida, então* $\dim X \geq \dim Y$. *De fato,* $\dim Y = \max\{n \in \mathbb{N} |\ Y_0 \subset Y_1 \subset ... \subset Y_n$ *é uma cadeia de* $Y\}$. *Mas, como $Y \subset X$, toda cadeia de Y também é uma cadeia de X e, portanto,* $\dim X \geq \dim Y$.

Proposição 3.2. *Se X é um espaço topológico noetheriano então*

$$\dim X = \max\{\dim X_i |\ X_i \text{ é uma componente irredutível de } X\}.$$

Demonstração. Seja X um espaço topológico noetheriano. Segue da proposição 2.1, que $X = X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_r$, onde cada X_i é um subconjunto fechado irredutível de X. Temos duas possibilidades a serem consideradas: $\dim X < \infty$ ou $\dim X = \infty$.

- Caso $\dim X = \infty$.

Se $\dim X = \infty$ então existe uma cadeia infinita $Y_0 \subset Y_1 \subset ... \subset Y_n \subset ...$ de subconjuntos fechados irredutíveis de X. Suponhamos que todas as componentes irredutíveis X_i, $i \in \{1,...,r\}$, de X tenham dimensão finita. Como $Y_0 \subset Y_1 \subset ... \subset X = X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_r$, segue que

$$X_i = X \cap X_i \supset ... \supset (Y_1 \cap X_i) \supset (Y_0 \cap X_i) \text{ para cada } i \in \{1,...,r\}.$$

Como $\dim X_i < \infty$, então, para cada $i \in \{1,...,r\}$, existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $(Y_{n_i} \cap X_i) = (Y_{n_i+1} \cap X_i) = ...$ Denotando $n = \max\{n_i |\ i \in \{1,...,r\}\}$, temos que $(Y_n \cap X_i) = (Y_{n+1} \cap X_i) = ...$ para todo $i \in \{1,...,r\}$ e, como $Y_i = (Y_i \cap X_1) \cup ... \cup (Y_i \cap X_r)$, segue que $Y_n = Y_{n+1} = ...$, o que é uma contradição. Logo, alguma das componentes irredutíveis de X tem dimensão infinita e, portanto, $\dim X = \infty = \max\{\dim X_i |\ X_i \text{ é uma componente iredutível de } X\}$.

- Caso $\dim X < \infty$.

Seja $n = \dim X$. Então existe uma cadeia $Y_0 \subset Y_1 \subset ... \subset Y_n$, onde cada Y_i é um subconjunto fechado irredutível de X. Como Y_n é um subconjunto fechado irredutível de X, existe $k \in \{1,2,...,r\}$ tal que $Y_n \subset X_k$. Desse modo, $Y_0 \subset Y_1 \subset ... \subset Y_n$ também é uma cadeia de subconjuntos fechados irredutíveis em X_k e, consequentemente, $\dim X_k \geq n$.
Denotemos $m = \max\{\dim X_i |\ i \in \{1,2,...,r\}\}$. Por definição, $m \geq \dim X_k$. Por outro lado, existe $j \in \{1,2,...,n\}$ tal que $\dim X_j = m$. Assim, existe uma cadeia $Z_0 \subset Z_1 \subset ... \subset Z_m$ de subconjuntos fechados irredutíveis em X_j que, em particular, também é uma cadeia de subconjuntos fechados irredutíveis em X. Logo $\dim X = n \geq m$.
Concluímos que $n = m$.

■

Desse modo, para calcular dimensões de espaços topológicos noetherianos é suficiente considerar o caso dos irredutíveis.

Exemplo 3.1. *Seja* $X = Spec(\mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]/\langle x_1x_2, x_1x_3\rangle) \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$.
Note que $\langle x_1x_2, x_1x_3\rangle = \langle x_1\rangle \cap \langle x_2x_3\rangle$ *e, portanto,* $X = V(\{x_1\}) \cup V(\{x_2,x_3\})$. *Assim,* X *consiste de duas componentes irredutíveis, a saber, a reta* $V(\{x_2,x_3\})$ *e o plano* $V(\{x_1\})$. *Concluímos que* $\dim X = 2$.

É importante observar que essas três abordagens para a noção de dimensão coincidem no caso de uma K-álgebra finitamente gerada sem divisores de zero, como o teorema 3.3 garante.

Para demonstração do teorema 3.3, assumiremos os seguintes resultados da Álgebra Comutativa.

Proposição 3.3. *Seja* $\phi : B \hookrightarrow A$ *uma extensão de anéis inteira. Se* Q *e* Q_1 *são ideais primos de* A *tais que* $Q \subset Q_1$ *e* $\phi^{-1}(Q) = \phi^{-1}(Q_1)$ *então* $Q = Q_1$.

Demonstração. Veja o Corolário 5.9, p. 61 de (12). ∎

Teorema 3.1 (Going-up)**.** *Seja $\phi : B \hookrightarrow A$ uma extensão de anéis inteira. Se $Q_1 \subset ... \subset Q_n$ é uma cadeia de ideais primos de B e $P_1 \subset ... \subset P_m$, com $m < n$, é uma cadeia de ideais primos de A tal que P_i encontra-se sobre Q_i então a segunda cadeia pode ser extendida a $P_1 \subset ... \subset P_n$ satisfazendo ainda a propriedade.*

Demonstração. Veja o Teorema 5.11, p. 62 de (12). ∎

Teorema 3.2 (Normalização de Noether)**.** *Seja A um domínio de integridade, finitamente gerado sobre um corpo K. Se $grtr_K A = n$ então existem elementos $\alpha_1, ..., \alpha_n \in A$, algebricamente independentes sobre K, tais que A é uma extensão finita (e, em particular, inteira) de $K[\alpha_1, ..., \alpha_n]$.*

Demonstração. Veja o Lema da Normalização de Noether, p. 2 de (4). ∎

Lema 3.1. *$Y \subset Spec(A)$ é um subconjunto fechado irredutível se, e somente se, $Y = V(P)$ para algum $P \in Spec(A)$.*

Demonstração. Seja $Y = V(P) \subset Spec(A)$ para algum $P \in Spec(A)$. Em particular, Y é um fechado.
Suponhamos que Y não seja irredutível. Isto é, Y pode ser escrito como a união de dois subconjuntos fechados próprios. Como os subconjuntos fechados de $Spec(A)$ são da forma $V(I)$, com $I \subset A$ ideal, temos que

$$V(P) = Y = (V(I) \cap Y) \cup (V(J) \cap Y) = (V(I) \cup V(J)) \cap Y = V(IJ) \cap Y \Rightarrow V(P) \subset V(IJ),$$

onde I, J são ideais de A.
Segue da proposição 2.8 que $P = \sqrt{P} \supset \sqrt{IJ} \supset IJ$. Como P é ideal primo, $P \supset IJ \Rightarrow P \supset I$ ou $P \supset J$. Portanto, $Y = V(P) \subset V(I)$ ou $Y = V(P) \subset V(J)$. Ou seja, algum dos subconjuntos fechados da decomposição de Y não é próprio, o que é uma contradição.
Logo Y é irredutível.

Seja agora $Y \subset Spec(A)$ fechado e irredutível. Temos que $Y = V(Q)$ para algum ideal radical $Q \subset A$.
Sejam I, J ideais de A tais que $IJ \subset Q$. Então $V(Q) \subset V(IJ) = V(I) \cup V(J)$ e, em particular, $Y = (V(I) \cap Y) \cup (V(J) \cap Y)$ é a união de dois subconjuntos fechados. Como $Y = V(Q)$ é irredutível, $V(Q) \subset V(I)$ ou $V(Q) \subset V(J)$ e, portanto, $I \subset \sqrt{I} \subset \sqrt{Q} = Q$ ou $J \subset \sqrt{J} \subset \sqrt{Q} = Q$.
Logo Q é um ideal primo.

∎

Lema 3.2. *Se $\phi : B \hookrightarrow A$ é uma extensão de anéis inteira então* $\dim Spec(A) = \dim Spec(B)$.

Demonstração. Segue do teorema 3.1 que dada uma cadeia de ideais primos em B, pode-se obter uma cadeia de primos em A de mesmo tamanho. Portanto, $\dim Spec(B) \leq \dim Spec(A)$. Por outro lado, temos que uma cadeia de ideais primos em A nos dá uma cadeia de ideais primos em B, uma vez que a imagem inversa de um ideal primo por um homomorfismo também é um ideal primo, e pela proposição 3.3 dois elementos da cadeia em A não podem corresponder a um mesmo elemento na cadeia em B. Logo, $\dim Spec(B) \geq \dim Spec(A)$.

■

Teorema 3.3. *Se A é uma K-álgebra finitamente gerada sem divisores de zero, então*

$$\dim Spec(A) = \dim_{Krull} A = \dim_{grtr} A.$$

Demonstração.

- $\dim_{Krull} A = \dim Spec(A)$.

Se $P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_n$ é uma cadeia maximal de ideais primos em A, então $V(P_n) \subset \ldots \subset V(P_1) \subset V(P_0)$ é uma cadeia maximal de fechados irredutíveis em $Spec(A)$ e, portanto, $\dim Spec(A) \geq \dim_{Krull} A$.
Seja agora $Y_0 \subset Y_1 \subset \ldots \subset Y_n$ uma cadeia maximal de fechados irredutíveis em $Spec(A)$. Segue do lema 3.1 que $Y_i = V(P_i)$, onde $P_i \in Spec(A)$. Como $P_i \in Spec(A) \Rightarrow P_i = \sqrt{P_i}$, pela proposição 2.8, temos que $P_0 \supset P_1 \supset \ldots \supset P_n$ é uma cadeia de ideais primos em A. Logo $\dim Spec(A) \leq \dim_{Krull} A$.

- $\dim Spec(A) = grtr_K Frac(A)$.

Demonstraremos o resultado por indução em $n = grtr_K Frac(A)$.
Pelo Teorema da Normalização de Noether, temos que $A \supset K[x_1, \ldots, x_n]$ é uma extensão de anéis inteira e segue do lema 3.2 que $\dim Spec(A) = \dim Spec(K[x_1, \ldots, x_n])$. Se $n = 0$, o resultado é verdadeiro.
Suponhamos que o resultado seja válido para todos os graus de transcendência menores do que n. Veremos que $\dim \mathbb{A}^n_K = n$ se $n > 0$.

De fato, a cadeia de ideais $\langle 0 \rangle \subset \langle x_1 \rangle \subset \ldots \subset \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ em $K[x_1, \ldots, x_n]$ induz uma cadeia de subconjuntos fechados irredutíveis de comprimento n em $\mathbb{A}^n_K$. Logo, $\dim \mathbb{A}^n_K \geq n$.

Por outro lado, suponhamos que exista uma cadeia de ideais primos $\langle 0 \rangle = P_0 \subset \ldots \subset P_m$, com $m \geq n$. Note que P_1 é um ideal primo de altura 1 e, portanto, é principal. Isto é, $P_1 =$

$\langle f(x_1,...,x_n)\rangle$, onde $f \in K[x_1,...,x_n]$ é um polinônio irredutível. Desse modo, $K[x_1,...,x_n]/P_1$ tem grau de trancedência $n-1$ e, por hipótese de indução,

$$n-1 = \dim_{grtr}(K[x_1,...,x_n]/P_1) = \dim Spec(K[x_1,...,x_n]/P_1)$$

$$= \dim_{Krull}(K[x_1,...,x_n]/P_1) \geq \dim_{Krull} K[x_1,...,x_n] - alt(P_1) = \dim Spec(K[x_1,...,x_n]) - 1,$$

onde as duas últimas igualdades seguem da primeira parte desta demonstração. Temos então que $\dim \mathbb{A}^n_K = \dim Spec(K[x_1,...,x_n]) \leq n$.

Portanto, $\dim \mathbb{A}^n_K = n$.

■

Se $X = Spec(A)$ então $K(X) = Frac(A)$ é chamado o **corpo das funções racionais** de X.

Observação 3.2. *1. Se $p \in Spec(A)$ então $\{p\}$ pode ser identificado com $Spec(\kappa(p))$, onde $\kappa(p) = Frac(A/p)$ é denominado **corpo residual** de p.*

2. Se A é um domínio de integridade então $Spec(A) = V(0)$, uma vez que 0 é o único ponto genérico de $Spec(A)$. Por outro lado, note que,

$$K(\overline{\{0\}}) = K(Spec(A)) = Frac(A),$$

$$K(\{0\}) = K(Spec(\kappa(0))) = \kappa(0) = Frac(A).$$

Desse modo, $K(Spec(A)) = K(\{0\})$.

4 FEIXES E MORFISMOS ENTRE FEIXES

Seja X um espaço topológico. Um **pré-feixe** $\mathscr{F}$ sobre X associa a cada subconjunto aberto U de X um conjunto denotado por $\mathscr{F}(U)$ e a cada par de subconjuntos abertos encaixados $U \subset V \subset X$ um mapa de restrição $r_U^V : \mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(U)$ satisfazendo as seguintes propriedades

$$\begin{array}{c} r_U^U = id_{\mathscr{F}(U)},\ \forall\, U \subset X \text{ e} \\ r_U^V \circ r_V^W = r_U^W,\ \forall\, U \subset V \subset W \subset X. \end{array}$$

Os elementos de $\mathscr{F}(U)$ são chamados **seções** de $\mathscr{F}$ sobre U.

Exemplo 4.1. *Seja X espaço topológico. Podemos definir o pré-feixe $\mathscr{C}$ que a cada subconjunto aberto U de X associa $\mathscr{C}(U)$, o conjunto das funções contínuas de U em $\mathbb{R}$, e cujos mapas de restrição r_U^V são dados pela restrição da função em questão ao aberto $U \subseteq V$.*

Exemplo 4.2. *Seja $X = \{0,1\}$, munido da topologia discreta em X, $\mathscr{T} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, X\}$. Um pré-feixe em X é determinado por quatro conjuntos e mapas de restrição permissíveis. Temos então*

$$\begin{array}{rccc} \mathscr{F}: & \{abertos\ de\ X\} & \to & \{conjuntos\} \\ & \emptyset & \mapsto & \mathscr{F}(\emptyset) \\ & \{0\} & \mapsto & \mathscr{F}(\{0\}) \\ & \{1\} & \mapsto & \mathscr{F}(\{1\}) \\ & X & \mapsto & \mathscr{F}(X) \end{array}$$

e os morfismos de restrição

$$\begin{array}{rccc} r_\emptyset^{\{0\}}: & \mathscr{F}(\{0\}) & \to & \mathscr{F}(\emptyset) \\ r_\emptyset^{\{1\}}: & \mathscr{F}(\{1\}) & \to & \mathscr{F}(\emptyset) \\ r_\emptyset^{X}: & \mathscr{F}(X) & \to & \mathscr{F}(\emptyset) \\ r_{\{0\}}^{X}: & \mathscr{F}(X) & \to & \mathscr{F}(\{0\}) \\ r_{\{1\}}^{X}: & \mathscr{F}(X) & \to & \mathscr{F}(\{1\}) \end{array}$$

satisfazendo ainda as condições $r_U^U = id_{\mathscr{F}(U)}$, para todo $U \subseteq X$, e

$$r_\emptyset^{\{0\}} \circ r_{\{0\}}^X = r_\emptyset^X,\ r_\emptyset^{\{1\}} \circ r_{\{1\}}^X = r_\emptyset^X.$$

- *Podemos fazer a seguinte pergunta: Existe anel um A tal que $X = Spec(A)$?*

Consideremos os ideais maximais $P = \langle x,y \rangle$ e $Q = \langle x-1, y \rangle$ de $\mathbb{C}[x,y]$. Denotemos $I = P \cap Q = \langle x(x-1), y \rangle$ e $A = \mathbb{C}[x,y]/I$. Temos que os únicos ideais primos de $\mathbb{C}[x,y]$ que *contém I são P e Q e, portanto, $Spec(A) = \{P, Q\}$. Neste caso a topologia de Zariski e a topologia discreta coincidem e podemos definir o seguinte pré-feixe:*

$$\begin{array}{rccc} \mathscr{F}: & \{abertos\ de\ X\} & \to & \{conjuntos\} \\ & \emptyset & \mapsto & \mathscr{F}(\emptyset) := \{0\} \\ & \{P\} & \mapsto & \mathscr{F}(\{P\}) := A_P/\mathfrak{m}_P \\ & \{Q\} & \mapsto & \mathscr{F}(\{Q\}) := A_Q/\mathfrak{m}_Q \\ & X & \mapsto & \mathscr{F}(X) := A \end{array}$$

com os morfismos de restrição dados pelos homomorfismos canônicos entre os respectivos anéis.

Um pré-feixe $\mathscr{F}$ sobre X é um **feixe** se, para cada aberto $U \subset X$, qualquer cobertura aberta $\{U_a\}_{a\in\Lambda}$ de U e cada coleção de elementos $f_a \in \mathscr{F}(U_a)$, com $a \in \Lambda$, tal que $r^{U_a}_{U_a\cap U_b}(f_a) = r^{U_b}_{U_a\cap U_b}(f_b)$, $\forall\ a, b \in \Lambda$, existe um único elemento $f \in \mathscr{F}(U)$ tal que $r^{U}_{U_a}(f) = f_a$, $\forall\ a \in \Lambda$.

Se cada $\mathscr{F}(U)$ é um grupo, anel, etc e cada mapa de restrição r^U_V é um homomorfismo de grupos, anéis, etc então $\mathscr{F}$ é chamado um pré-feixe de grupos, anéis, etc.

Exemplo 4.3 (Um pré-feixe que não é um feixe)**.** *Sejam*

$$A = \{\frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{C}(x) |\ g(0) \neq 0,\ g(1) \neq 0\},$$

$$X = Spec(A) = \{\star = 0,\ p_1 = \langle\frac{x}{1}\rangle,\ p_2 = \langle\frac{x-1}{1}\rangle\},$$

onde $\star$ é o ponto genérico e p_1, p_2 são pontos fechados, e

$$\mathscr{T} = \{X,\ U_1 = \{\star, p_1\},\ U_2 = \{\star, p_2\},\ U = U_1 \cap U_2 = \{\star\},\ \emptyset\}$$

a topologia de Zariski em X.

Consideremos o seguinte pré-feixe

$$\begin{array}{rccc} \mathscr{F}: & \{abertos\ de\ X\} & \to & \{conjuntos\} \\ & \emptyset & \mapsto & \mathscr{F}(\emptyset) := \{0\} \\ & \{\star\} & \mapsto & \mathscr{F}(\{\star\}) := \mathbb{Q}[t] \\ & U_1 & \mapsto & \mathscr{F}(U_1) := \mathbb{Q}[t] \\ & U_2 & \mapsto & \mathscr{F}(U_2) := \mathbb{Q}[t] \\ & X & \mapsto & \mathscr{F}(X) := \mathbb{Q} \end{array}$$

com os morfismos de retrição correspondendo aos seguintes homomorfismos de $\mathbb{Q}$-álgebras

$$\begin{array}{rccclrccc}
r_{\emptyset}^{U}: & \mathbb{Q}[t] & \rightarrow & \{0\}, & r_{\emptyset}^{U_1}: & \mathbb{Q}[t] & \rightarrow & \{0\}, \\
& h & \mapsto & 0 & & h & \mapsto & 0 \\
r_{\emptyset}^{U_2}: & \mathbb{Q}[t] & \rightarrow & \{0\}, & r_{\emptyset}^{X}: & \mathbb{Q} & \rightarrow & \{0\}, \\
& h & \mapsto & 0 & & q & \mapsto & 0 \\
r_{U}^{U_1}: & \mathbb{Q}[t] & \rightarrow & \mathbb{Q}[t], & r_{U}^{U_2}: & \mathbb{Q}[t] & \rightarrow & \mathbb{Q}[t], \\
& h & \mapsto & h & & h & \mapsto & h \\
r_{U}^{X}: & \mathbb{Q} & \rightarrow & \mathbb{Q}[t], & r_{U_1}^{X}: & \mathbb{Q} & \rightarrow & \mathbb{Q}[t], \\
& q & \mapsto & q & & q & \mapsto & q \\
r_{U_2}^{X}: & \mathbb{Q} & \rightarrow & \mathbb{Q}[t] & & & & \\
& q & \mapsto & q & & & &
\end{array}$$

Temos que $\mathscr{F}$ não é um feixe. De fato, $X = U_1 \cup U_2$, $f_1 = t \in \mathscr{F}(U_1)$ e $f_2 = t \in \mathscr{F}(U_2)$ são tais que

$$r_U^{U_1}(f_1) = r_U^{U_2}(f_2)$$

e, portanto, se $\mathscr{F}$ fosse um feixe existiria uma seção $f \in \mathscr{F}(X)$ tal que

$$r_{U_1}^{X}(f) = f_1 \text{ e } r_{U_2}^{X}(f) = f_2,$$

o que não ocorre pois toda seção de $\mathscr{F}$ sobre X é um número racional e $f_1 = f_2 = t \notin \mathbb{Q}$.

Exemplo 4.4 (Outro pré-feixe que não é feixe)**.** *Seja $X = \mathbb{R}$. Para cada aberto não vazio $U \subset X$, seja $\mathscr{F}(U)$ o anel das funções constantes de U em $\mathbb{R}$. Para abertos $U \subset V \subset X$, seja ρ_U^V o morfismo de restrição óbvio. Então $\mathscr{F}$ é um pré-feixe, mas não é um feixe.*

Isto ocorre porque ser constante não é uma propriedade local.
Por exemplo, seja $U = (0,1) \cup (2,3)$. Então U tem uma cobertura aberta $U = U_1 \cup U_2$, onde $U_1 = (0,1)$ e $U_2 = (2,3)$. Sejam $f_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}$ a função constante 0 e $f_2 : U_2 \rightarrow$ a função constante 1. Então f_1 e f_2 coincidem na interseção $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, mas não existe uma função contante sobre U que coincida simultaneamente com f_1 e f_2 quando restrita, respectivamente, a U_1 e U_2.

Por outro lado, existe uma única função localmente constante de U em $\mathbb{R}$ com esta propriedade. Mais ainda, as funções localmente constantes sobre X formam um feixe.

Exemplo 4.5. *Sejam X e Y espaços topológicos, $f : Y \rightarrow X$ uma função contínua e $\mathscr{F}$ um feixe sobre Y. Então $f_*\mathscr{F}$ definido por $f_*\mathscr{F}(U) = \mathscr{F}(f^{-1}(U))$, para todo subconjunto aberto U de X, e com os mapas de restrição $\rho_U^V = r_{f^{-1}(U)}^{f^{-1}(V)}$, onde $r_{f^{-1}(U)}^{f^{-1}(V)}$ é um mapa de restrição associado ao feixe $\mathscr{F}$, para $U \subseteq V$ subconjuntos abertos de X, é um feixe sobre X denominado **feixe imagem direta** de $\mathscr{F}$ por f.*

O conceito de $\mathscr{B}$-feixe que introduziremos a seguir nos permitirá definir um feixe a partir de certos tipos especiais de bases para o espaço topológico X. Desse modo, para definirmos um feixe é suficiente especificar as seções e os mapas de restrição numa dada base sob as condições a seguir.

Dada uma base $\mathscr{B}$ para os conjuntos abertos do espaço topológico X, dizemos que uma coleção de conjuntos $\mathscr{F}(U)$, onde $U \in \mathscr{B}$ é um subconjunto aberto de X, e mapas $r_U^V : \mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(U)$, com $V \supset U$, formam um **$\mathscr{B}$-feixe** se estes satisfazem o axioma de feixe com respeito a inclusão de conjuntos abertos básicos em conjuntos abertos básicos e coberturas de conjuntos abertos básicos por conjuntos abertos básicos. A condição de que $f_a \in \mathscr{F}(U_a)$ para cada $a \in \Lambda$, $U_a \in \mathscr{B}$ tal que $r_{U_a \cap U_b}^{U_a}(f_a) = r_{U_a \cap U_b}^{U_b}(f_b)$, $\forall\ a,b \in \Lambda$; $U_a, U_b \in \mathscr{B}$ deve ser substituída pela seguinte

$$r_V^{U_a}(f_a) = r_V^{U_b}(f_b),\ \forall\ a,b \in \Lambda;\ U_a, U_b, V \in \mathscr{B} \text{ tais que } V \subset U_a \cap U_b.$$

E pode ser mostrado que

Proposição 4.1. *Todo $\mathscr{B}$-feixe sobre X estende-se unicamente a um feixe sobre X.*

Demonstração. Veja Proposição I-12 na p. 16 em (5). ■

Definimos o **feixe das funções regulares** $\mathscr{O}_{Spec(A)}$ sobre $Spec(A)$ por

$$\mathscr{O}_{Spec(A)}(Spec(A)_f) = A_f,\ \forall\ f \in A,$$

onde A_f denota a localização do anel A em $f \in A$.

Note que $Spec(A)_g \subset Spec(A)_f$ se, e somente se, alguma potência de g é múltiplo de f. Portanto, definimos o mapa de restrição

$$\begin{array}{rccc} r_{Spec(A)_f,\ Spec(A)_g}: & A_f & \to & A_g \\ & \frac{a}{f^k} & \mapsto & \frac{a\mu^k}{g^{Nk}} \quad \textit{onde } g^N = \mu f. \end{array}$$

De fato, se $\mathscr{B}$ é a coleção dos conjuntos abertos distinguidos $Spec(A)_f$ de $Spec(A)$ então $\mathscr{O}_{Spec(A)}$ é um $\mathscr{B}$-feixe sobre $Spec(A)$. (proposição I18, p. 19 em (5))

5 ESQUEMAS AFINS E MORFISMOS ENTRE ESQUEMAS AFINS

Um **esquema afim** é um par $(Spec(A), \mathscr{O}_{Spec(A)})$, onde $Spec(A)$ é o espectro primo do anel comutativo A munido da topologia de Zariski e $\mathscr{O}_{Spec(A)}$ é o feixe das funções regulares sobre $Spec(A)$.
O anel A é chamado o **anel de coordenadas** do esquema afim $(Spec(A), \mathscr{O}_{Spec(A)})$.

Observação 5.1. *O conjunto fechado $V(I) \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ pode ser identificado com o esquema afim*

$$(Spec(\mathbb{C}[x_1,...,x_n]/\sqrt{I}), \mathscr{O}_{Spec(\mathbb{C}[x_1,...,x_n]/\sqrt{I})}).$$

Sejam A e B anéis comutativos com unidade, $X = Spec(A)$ e $Y = Spec(B)$. Se $\varphi : A \to B$ é um homomorfismo de anéis então φ induz uma função $f : Y \to X$, definida por $f(Q) = \varphi^{-1}(Q)$.

Proposição 5.1.

1. *Se $a \in A$ então $f^{-1}(X_a) = Y_{\varphi(a)}$.*
2. *Se I é um ideal de A então $f^{-1}(V(I)) = V(\langle\varphi(I)\rangle)$. Em particular, f é contínua.*
3. *Se J é um ideal de B então $\overline{f(V(J))} = V(\varphi^{-1}(J))$.*

Demonstração.

1. Seja $Q \in f^{-1}(X_a) \subset Y = Spec(B)$. Então $f(Q) \in X_a$. Isto é, $f(Q) \in X = Spec(A)$ e $a \notin f(Q) = \varphi^{-1}(Q)$. Logo $\varphi(a) \notin Q$ e, portanto, $Q \in Y_{\varphi(a)}$. Desse modo, $f^{-1}(X_a) \subseteq Y_{\varphi(a)}$.
   Seja agora $Q \in Y_{\varphi(a)}$. Ou seja, $Q \in Y = Spec(B)$ e $\varphi(a) \notin Q$. Então $a \notin \varphi^{-1}(Q)$ e, portanto, $f(Q) = \varphi^{-1}(Q) \in X_a$. Logo $Q \in f^{-1}(X_a)$. Desse modo, $f^{-1}(X_a) \supseteq Y_{\varphi(a)}$.

2. Seja $Q \in f^{-1}(V(I)) \subset Y$. Então $f(Q) \in V(I)$. Isto é, $f(Q) \in Spec(A)$ e $I \subset f(Q) = \varphi^{-1}(Q)$. Logo $\varphi(I) \subset Q \in Spec(B)$ e, portanto, $Q \in V(\langle\varphi(I)\rangle)$. Desse modo, $f^{-1}(V(I)) \subseteq V(\langle\varphi(I)\rangle)$.
   Seja agora $Q \in V(\langle\varphi(I)\rangle)$. Ou seja, $Q \in Spec(B)$ e $\langle\varphi(I)\rangle \subset Q$. Então $f(Q) \in Spec(A)$ e $f(Q) = \varphi^{-1}(Q) \supset \varphi^{-1}(\langle\varphi(I)\rangle) \supset I$. Logo $f(Q) \in V(I)$ e, portanto, $Q \in f^{-1}(V(I))$. Desse modo, $f^{-1}(V(I)) \supseteq V(\langle\varphi(I)\rangle)$.

3. Seja $P \in f(V(J)) \subset Spec(A)$. Então $P = f(Q)$, para algum $Q \in V(J) \subset Spec(B)$. Isto é, $Q \in Spec(B)$ e $J \subset Q$. Logo $\varphi^{-1}(J) = f(J) \subset f(Q) = P$ e, portanto, $P \in V(\varphi^{-1}(J))$. Desse modo, $f(V(J)) \subseteq V(\varphi^{-1}(J))$. Como $V(\varphi^{-1}(J))$ é fechado em $Spec(A)$, temos que $\overline{f(V(J))} \subseteq V(\varphi^{-1}(J))$.
   Seja agora $P \in V(\varphi^{-1}(J)) \subset Spec(A)$. Então, para todo $a \in A$ tal que $P \in X_a$, existe

$Q \in V(J)$ tal que $f(Q) \in X_a$.
Suponhamos por contradição que $a \in f(Q) = \varphi^{-1}(Q)$, para todo $Q \in V(J)$. Então $\varphi(a) \in Q$, $\forall Q \in V(J)$ e, portanto, $\varphi(a) \in \sqrt{J}$. Ou seja, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(\varphi(a))^n \in J$. Como φ é um homomorfismo, segue que $\varphi(a^n) \in J$. Logo $a^n \in \varphi^{-1}(J) \subset P$ e, portanto, $a \in P$, o que é uma contradição pois $P \in X_a$.
Logo, existe $Q \in V(J) \subset Spec(B)$ tal que $f(Q) \in X_a$. Em particular, $f(Q) \in X_a \cap f(V(J)) \neq \emptyset$ e, portanto, $P \in \overline{f(V(J))}$. Desse modo, $\overline{f(V(J))} \supseteq V(\varphi^{-1}(J))$.

■

Proposição 5.2. *Se o homomorfismo $\varphi : A \to B$ é sobrejetivo então $Spec(B)$ é homeomorfo a $Spec(A/Núcleo(\varphi))$. Em particular, $Spec(A)$ e $Spec(A/\mathcal{N}_A)$ são naturalmente homeomorfos.*

Demonstração. Se $\varphi : A \to B$ é um homomorfismo sobrejetivo então, pelo Primeiro Teorema do Homomorfismo, existe um isomorfismo $\widetilde{\varphi} : A/Núcleo(\varphi) \to B$, induzido por φ.
Temos, então, que $\widetilde{\varphi}$ induz (como acima) a função contínua $\widetilde{f} : Spec(B) \to Spec(A/Núcleo(\varphi))$ e $\widetilde{\varphi}^{-1}$, o homomorfismo inverso de $\widetilde{\varphi}$, induz a função contínua $\widetilde{f}^{-1} : Spec(A/Núcleo(\varphi)) \to Spec(B)$, que é a função inversa de $\widetilde{f}$. Logo $\widetilde{f}$ é um homeomorfismo.

■

Observação 5.2. *Segue da Proposição 5.2 acima que* $\dim Spec(A) = \dim Spec(A/\mathcal{N}_A)$. *Isto é, a fim de calcular a dimensão de um esquema afim podemos assumir que seu anel de coordenadas é reduzido. Mais precisamente, pela Proposição 3.2, podemos assumir que seu anel de coordenadas é um domínio de integridade.*

Diremos que uma aplicação $f : X \to Y$ é um **morfismo entre esquemas afins** se ela é obtida (como acima) a partir de um homomorfismo de anéis, isto é, se existe um homomorfismo de anéis $\varphi : B \to A$, onde $X = Spec(A)$ e $Y = Spec(B)$ tal que $f(P) = \varphi^{-1}(P)$, $\forall P \in X$.

Mais precisamente, um morfismo entre dois esquemas afins é um par $(f, f^\sharp)$, onde $f : X \to Y$ é uma função contínua e $f^\sharp : \mathscr{O}_Y \to f_*\mathscr{O}_X$ (do feixe de funções regulares sobre Y na imagem direta de $\mathscr{O}_X$ por f) é uma família de homomorfismo de anéis $\{f^\sharp_{Y_g}\}_{g \in B}$ que comutam com os mapas de restrição e são dados por

$$\begin{array}{rccc} f^\sharp_{Y_g} : & \mathscr{O}_Y(Y_g) = B_g & \to & f_*\mathscr{O}_X(Y_g) = A_{\varphi(g)} \\ & \frac{b}{g^k} & \mapsto & \frac{\varphi(b)}{\varphi(g)^k}, \end{array}$$

onde assumimos que f é induzida por algum homomorfismo de anéis $\varphi : B \to A$ e, pelo item 1 da Proposição 5.1, $f^{-1}(Y_g) = Spec(A_{\varphi(g)})$, para todo $g \in B$.

De fato, verifica-se que a associação

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Anéis}\} & \to & \{\text{Esquemas Afins}\} \\ B & \mapsto & (Y, \mathscr{O}_Y) \\ \downarrow \varphi & & \uparrow (\varphi^*, \varphi^\sharp) \\ A & \mapsto & (X, \mathscr{O}_X) \end{array}$$

determina uma equivalência de categorias. Donde concluímos que

$$Hom_{\text{Anéis}}(B,A) \cong Hom_{\text{Esquemas Afins}}(X,Y).$$

Isto é, cada morfismo entre esquemas afins é determinado por um único homomorfismo de anéis (Veja Teorema I40 na p. 30 de (5)).

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 5.1. *1. Sejam A um anel, $I \subset A$ um ideal e $\Pi : A \to A/I$ o homomorfismo canônico. Então Π induz o morfismo*

$$f : V(I) \to Spec(A).$$

2. *Existe um morfismo $f : \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ tal que $f(a,b) = a$ sobre os pontos fechados de $\mathbb{A}^2$?*

   A resposta será afirmativa se for possível encontrar $\varphi : \mathbb{C}[t] \to \mathbb{C}[u,v]$ tal que $\varphi^{-1}\langle u - a, v - b\rangle = \langle t - a\rangle$.
   Podemos definir φ por $\varphi(t) = u$. Como $\langle u - a, v - b\rangle$ é um ideal primo de $\mathbb{C}[u,v]$, então $\varphi^{-1}\langle u - a, v - b\rangle$ também é um ideal primo de $\mathbb{C}[t]$. Observando que $\varphi(t - a) = u - a$, então $t - a \in \varphi^{-1}\langle u - a, v - b\rangle$ e, portanto, $\varphi^{-1}\langle u - a, v - b\rangle = \langle t - a\rangle$.

3. *Existe um morfismo $f : \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ tal que $f(a,b) = (ab,b)$ sobre os pontos fechados de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$?*

   Definindo

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{C}[x,y] & \to & \mathbb{C}[u,v] \\ & p(x,y) & \mapsto & p(uv,v), \end{array}$$

   observamos que $\varphi(y - b) = v - b$ e $\varphi(x - ab) = uv - ab = u(v - b) + b(u - a)$. Desse modo, $\varphi^{-1}\langle u - a, v - b\rangle = \langle x - ab, y - b\rangle$.

Uma função $f : X \to Y$ entre espaços topológicos é chamada **dominante** se $\overline{f(X)} = Y$, isto é se a imagem de f é densa em Y.

Proposição 5.3. *Seja $\varphi : A \to B$ um homomorfismo de anéis que determina o morfismo $f : Y = Spec(B) \to X = Spec(A)$. Então f é dominante se, e somente se, $Núcleo(\varphi) \subseteq \mathscr{N}_A$ (nilradical de A).*

Demonstração. Seja f dominante, isto é $\overline{f(Y)} = X$, e suponhamos por contradição que $Núcleo(\varphi) \nsubseteq \mathcal{N}_A$. Então existe $a \in A \setminus \mathcal{N}_A$ tal que $\varphi(a) = 0$. Em particular, $\varphi(\langle a \rangle) = 0 \subset B$ e, portanto, $V(\varphi(\langle a \rangle)) = V(0) = V(\mathcal{N}_B) = Spec(B)$. Logo, $\overline{f(Y)} = \overline{f(Spec(B))} = \overline{f(V(\varphi(\langle a \rangle)))} = V(\varphi^{-1}(\varphi(\langle a \rangle))) = V(\langle a \rangle) \subsetneq Spec(A) = X$. Ou seja, $\overline{f(Y)}$ é um subconjunto próprio de X, o que contradiz a hipótese $\overline{f(Y)} = X$.

Seja agora φ tal que $Núcleo(\varphi) \subseteq \mathcal{N}_A$ e suponhamos por contradição que $f(Y)$ não é denso em X. Então existe um ideal próprio $I \subsetneq A$ tal que $V(I) = \overline{f(Y)}$. Em particular, $f(Y) \subseteq V(I)$ e, portanto, $Y \subseteq f^{-1}(f(Y)) \subseteq f^{-1}(V(I)) \subseteq Y$. Logo, $V(\langle \varphi(I) \rangle) = f^{-1}(V(I)) = Y = V(\mathcal{N}_B)$. Desse modo, $\mathcal{N}_B = \sqrt{\langle \varphi(I) \rangle}$, com $I \nsubseteq \mathcal{N}_A$ pois $V(I) \neq X$. Então existe $a \in I \setminus \mathcal{N}_A$ tal que $\varphi(a) = b \in \mathcal{N}_B$ e, portanto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $b^n = (\varphi(a))^n = \varphi(a^n) = 0$. Logo, $a^n \in Núcleo(\varphi) \setminus \mathcal{N}_A$, o que contradiz a hipótese $Núcleo(\varphi) \subseteq \mathcal{N}_A$.

■

Exemplo 5.2. *Voltemos ao caso do item 3 do exemplo anterior.*
O homomorfismo $\varphi : \mathbb{C}[x,y] \to \mathbb{C}[u,v]$ *é injetivo. Logo* $Núcleo(\varphi) = \{0\} \subset \mathcal{N}_{\mathbb{C}[x,y]} = \{0\}$ *e, portanto,* f *é dominante. Note que* f *não é sobrejetiva.*

5.1 O Teorema da Dimensão das Fibras

Daqui em diante, assumiremos que todos os anéis são $\mathbb{K}$-álgebras finitamente geradas e também domínios de integridade ($\mathbb{K}$ é um corpo).

Seja $f : X = Spec(A) \to Y = Spec(B)$ um morfismo tal que A é uma B-álgebra finitamente gerada. Neste caso, X é dito ser **de tipo finito** sobre B.

Seja $y \in Y$. Temos que $\{y\}$ pode ser identificado com $Spec(\kappa(y))$, onde $\kappa(y) = Frac(B/y)$ é o corpo residual de y. Tendo em mente a Proposição 2.11 e a definição de Produto Fibrado (Veja p. 35 em (5)), obtemos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} X = Spec(A) & \hookleftarrow & f^{-1}(y) = Spec(\kappa(y) \otimes_B A) & \hookrightarrow & f^{-1}(\overline{\{y\}}) = Spec(B/y \otimes_B A) \\ \downarrow f & & \downarrow & & \downarrow \\ Y = Spec(B) & \hookleftarrow & \{y\} = Spec(\kappa(y)) & \hookrightarrow & \overline{\{y\}} = V(y) = Spec(B/y). \end{array}$$

Para determinar a dimensão da fibra $f^{-1}(y)$, utilizaremos os seguintes dois lemas.

Lema 5.1. $f^{-1}(y)$ *é de tipo finito sobre* $\{y\}$*. Em particular, se* Z *é uma componente irredutível de* $f^{-1}(y)$ *então* Z *é de tipo finito sobre* $\{y\}$*.*

Demonstração. Queremos mostrar que $R = \kappa(y) \otimes_B A$, o anel de coordenadas de $f^{-1}(y)$, é uma $\kappa(y)$-álgebra finitamente gerada ($\kappa(y)$ é o anel de coordenadas de $\{y\}$).

Observemos que, por hipótese, A é uma B-álgebra finitamente gerada e, portanto, existem $b_1,...,b_k \in A$ tais que $A = B[b_1,...,b_k]$. Temos então que

$$\kappa(y) \otimes_B A = \kappa(y) \otimes_B B[b_1,...,b_k] \cong \kappa(y)[b_1,...,b_k].$$

Se Z é uma componente irredutível de $f^{-1}(y)$ então $Z = Spec(R/p)$, para algum ideal primo minimal $p \subset R$. Assim, existe um homomorfismo sobrejetivo $\kappa(y)[b_1,...,b_k] \cong R \to R/p$ e, portanto, R/p é uma $\kappa(y)$-álgebra finitamente gerada.

■

Observação 5.3. *Tendo em mente o exercício 3.20(b) na p. 23 de (1) e usando o lema acima, concluímos que*

$$\dim Z = grtr_{\kappa(y)} K(Z),$$

para qualquer componente irredutível Z de $f^{-1}(y)$.

Lema 5.2. *Sejam $Z \subseteq f^{-1}(y)$ e $Z' \subseteq f^{-1}(\overline{\{y\}})$ componentes irredutíveis tais que $Z \subseteq Z'$. Então $\overline{Z} = Z'$ e $K(Z) = K(Z')$.*

Demonstração. Sejam $z \in Z$ e $z' \in Z'$ seus respectivos pontos genéricos. Considerando as topologias induzidas por X sobre Z e Z', temos que

$$Z = \overline{\{z\}}^Z = \overline{\{z\}} \cap Z \ \text{ e } \ Z' = \overline{\{z'\}} \text{ (pois } Z' \text{ é fechado em } X).$$

Logo, $\overline{\{z\}}^Z = Z = Z' \cap Z = \overline{\{z'\}} \cap Z = \overline{\{z'\}}^Z$. Pelo Corolário 2.1, concluímos que $z = z'$.

Por outro lado, $\{z\} \subset Z \subset Z'$ e, portanto, $\overline{Z} = Z'$. Novamente pelo Corolário 2.1 e pelo item 2 da Observação 3.2, temos que

$$K(Z') = K(\{z'\}) = K(\{z\}) = K(Z).$$

■

Aplicando o Teorema 1.2 demostraremos nosso resultado principal.

Teorema 5.1 (Teorema da Dimensão das Fibras)**.** *Sejam X e Y esquemas afins integrais de tipo finito sobre um corpo $\mathbb{K}$, $f : X \to Y$ um morfismo dominante. Então existe um subconjunto aberto não vazio $U \subseteq Y$ tal que $\dim f^{-1}(y) = r$, para todo $y \in U$, onde $r = \dim X - \dim Y$.*

Demonstração. Tomando U como no Teorema 1.2, analizaremos os dois casos possíveis.

- Seja $y \in U$ um ponto fechado de Y.

Consideremos $W = \{y\}$. Temos que W é um subconjunto fechado irredutível de Y tal que $W \cap U \neq \emptyset$. Logo, qualquer componente irredutível Z da fibra $f^{-1}(y)$ que intersecte a imagem inversa de U tem dimensão exatamente r.

- Seja $y \in U$ um ponto não-fechado de Y.

Seja agora $W' = \overline{\{y\}}$ o fecho do ponto y em Y. Observemos que W' é um subconjunto fechado irredutível de Y tal que $W' \cap U \neq \emptyset$. Logo, qualquer componente irredutível Z' de $f^{-1}(W')$ que intersecte a imagem inversa de U tem dimensão exatamente $\dim W' + r$. Devido a Proposição 5.2 podemos assumir que W' é reduzido. Portanto, $K(W') = K(\{y\}) = \kappa(y)$.

Por outro lado, seja Z uma componente irredutível de $f^{-1}(y)$. Existe uma componente Z' de $f^{-1}(W')$ tal que $Z \subset Z'$. Assim, pelo Lema 5.2, temos que $K(Z) = K(Z')$. A partir do Lema 5.1 concluímos que $\dim Z = grtr_{\kappa(y)} K(Z)$. Portanto

$$\begin{aligned} \dim Z &= grtr_{\kappa(y)} K(Z) = grtr_K K(Z) - grtr_K K(y) \\ &= grtr_K K(Z') - grtr_K K(W') = \dim Z' - \dim W' = r. \end{aligned}$$

■

6 APLICAÇÕES

6.1 As 27 retas numa superfície cúbica não singular em $\mathbb{P}^3$

Embora tenhamos colocado nosso foco na demonstração do Teorema da Dimensão das Fibras no caso de esquemas afins de tipo finito sobre um corpo $\mathbb{K}$, o mesmo resultado é válido para variedades quase-projetivas.

Teorema 6.1. *Sejam X e Y variedades quase-projetivas irredutíveis tais que $n = \dim X$ e $m = \dim Y$. Se $f : X \to Y$ é uma aplicação regular sobrejetiva, então $m \leq n$ e*

1. *$\dim Z \geq n-m$, para toda componente Z da fibra $f^{-1}(y)$, onde $y \in Y$;*
2. *Existe um subconjunto aberto não-vazio $U \subset Y$ tal que $\dim f^{-1}(y) = n-m$, para todo $y \in U$.*

Demonstração. Veja Teorema 7 na p. 76 de (13). ■

A versão acima, aliada ao fato de que toda superfície cúbica em $\mathbb{P}^3$ contém pelo menos uma reta, nos permitirá mostrar que toda superfície cúbica não-singular em $\mathbb{P}^3$ contém exatamente 27 retas.

Exemplo 6.1. *A superfície cúbica de Fermat $Z(F) \subset \mathbb{P}^3$, onde $F = x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$, contém exatamente 27 retas.*

Temos que uma reta em $\mathbb{P}^3$ é determinada por duas formas de grau 1 linearmente independentes em $\mathbb{C}[x_0,x_1,x_2,x_3]$ (geometricamente isto corresponde a interseção de dois planos). Assim, a menos de uma mudança de coordenadas, toda reta em $\mathbb{P}^3$ pode ser descrita pelas equações

$$x_0 = a_2x_2 + a_3x_3, \; x_1 = b_2x_2 + b_3x_3.$$

Substituindo na igualdade $F = 0$, obtemos

$$(a_2x_2 + a_3x_3)^3 + (b_2x_2 + b_3x_3)^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$$

$$\therefore\ (a_2^3 + b_2^3 + 1)x_2^3 + 3(a_2^2a_3 + b_2^2b_3)x_2^2x_3 + 3(a_2a_3^2 + b_2b_3^2)x_2x_3^2 + (a_3^3 + b_3^3 + 1)x_3^3 = 0$$

$$\therefore \begin{array}{llll} \textit{(I)} & a_2^3 + b_2^3 = -1, & \textit{(II)} & a_2^2a_3 = -b_2^2b_3, \\ \textit{(III)} & a_2a_3^2 = -b_2b_3^2, & \textit{(IV)} & a_3^3 + b_3^3 = -1. \end{array}$$

Suponhamos que a_2, a_3, b_2 e b_3 são todos não nulos. Então

$$(II)^2/(III): \quad a_2^3 = -b_2^3, \quad (III)^2/(II): \quad a_3^3 = -b_3^3.$$

e substituindo em (I) e (IV) chegamos a uma contradição. Logo algum dos coeficientes a_2, a_3, b_2, b_3 é igual a zero. Sem perda de generalidade, seja $a_2 = 0$. Então $b_3 = 0$ e $a_3^3 = b_2^3 = -1$. Portanto, $a_3 = -\omega^i$ e $b_2 = -\omega^j$, para $i,\ j \in \{0,1,2\}$, onde ω é uma raiz cúbica primitiva da unidade.
Logo temos 9 retas possíveis e, considerando as possíveis permutações das coordenadas, concluímos que existem exatamente 27 retas contidas em $Z(F)$:

$$x_0 + \omega^i x_1 = 0,\ x_2 + \omega^j x_3 = 0, \quad i,\ j \in \{0,1,2\};$$

$$x_0 + \omega^i x_2 = 0,\ x_1 + \omega^j x_3 = 0, \quad i,\ j \in \{0,1,2\};$$

$$x_0 + \omega^i x_3 = 0,\ x_1 + \omega^j x_2 = 0, \quad i,\ j \in \{0,1,2\}.$$

A seguir, introduziremos algumas notações e citaremos certos fatos preponderantes que nos permitirão concluir que toda superfície cúbica em $\mathbb{P}^3$ contém pelo menos uma reta.

Seja $S \subset \mathbb{P}^3$ uma superfície cúbica não-singular em $\mathbb{P}^3$. Denotemos por $R = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ o anel de polinômios nas variáveis x_0, x_1, x_2, x_3 com coefientes em $\mathbb{C}$. Para cada $d \in \mathbb{N}$, denotemos por R_d o subespaço vetorial de R formado pelos polinômios homogêneos de grau d. Note que R_d é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensão $\binom{3+d}{d}$.

Consideremos $G(2,4) = \{\text{retas no espaço projetivo}\}$. O dito conjunto é uma variedade projetiva de dimensão 4 que pode ser identificada com uma hipersuperfície quádrica de $\mathbb{P}^5$ via mergulho de Plücker (Veja p. 64 de (14)). Note que $\mathbb{P}(R_3)$ é uma variedade projetiva de dimensão 19 que parametriza as superfícies cúbicas em $\mathbb{P}^3$.

Lema 6.1. *A imagem de uma variedade projetiva por uma aplicação regular é um fechado.*

Demonstração. Veja p. 57 de (13). ■

Lema 6.2. *Sejam X e Y variedades projetivas. Se $Y \subset X$ então $\dim Y \leq \dim X$. Se X é irredutível e $Y \subset X$ é uma subvariedade fechada tal que $\dim Y = \dim X$ então $Y = X$.*

Demonstração. Veja p. 68 de (13). ■

Teorema 6.2. *Toda superfície cúbica em $\mathbb{P}^3$ contém pelo menos uma reta.*

Demonstração. Seja $\Gamma = \{(l,[F]) \in G(2,4) \times \mathbb{P}(R_3) | \; l \subset Z(F)\}$. O leitor interessado pode verificar que Γ é uma variedade projetiva via o mergulho de Segre (Veja p. 56 de (13)). Con-sideremos as projeções canônicas $p_1 : \Gamma \to G(2,4)$ e $p_2 : \Gamma \to \mathbb{P}(R_3)$. Temos que p_1 é sobrejetiva. Se p_2 é sobrejetiva, segue o resultado.

Suponhamos que $p_2(\Gamma) \subsetneq \mathbb{P}(R_3)$. Sejam $L_1, L_2 \in R_1$ linearmente independentes e $l = Z(L_1, L_2) \subset \mathbb{P}^3$ uma reta. Temos que o conjunto $V_l = \{F \in R_3 | \; F = AL_1 + BL_2, \text{ com } A, \; B \in R_2\}$ é um subespaço vetorial de R_3. Calculemos $\dim V_l$.

Consideremos a aplicação linear sobrejetiva $\phi : R_2 \times R_2 \to V_l$ dada por $(A,B) \mapsto AL_1 + BL_2$. Se $(A,B) \in Núcleo(\phi)$ então $AL_1 + BL_2 = 0$ e, portanto, existe $A_1 \in R_1$ tal que $A = A_1L_2$ e $B = -A_1L_1$, uma vez que R é um domíno de fatoração única. Desse modo, $Núcleo(\phi) = \{(A_1L_2, -A_1L_1) | \; A_1 \in R_1\} \cong R_1$. Pelo Teorema do núcleo e da imagem $\dim(R_2 \times R_2) = \dim R_1 + \dim V_l$ e, portanto, $\dim V_l = 10 + 10 - 4 = 16$.

Seja agora $l = Z(L_1, L_2)$. Temos que $p_1^{-1}(l) = \{(l,[F]) | \; l \subset Z(F)\} = l \times \mathbb{P}(V_l) \cong \mathbb{P}(V_l) \cong \mathbb{P}^{15}$ e, portanto, $\dim p_1^{-1}(l) = 15$. Aplicando o Teorema da Dimensão das Fibras ao morfismo $p_1 : \Gamma \to G(2,4)$, obtemos que $\dim \Gamma - \dim G(2,4) = \dim p_1^{-1}(l)$ para toda reta l num aberto não vazio de $G(2,4)$. Logo $\dim \Gamma = 15 + 4 = 19$. Por outro lado, pelo Lema 6.2, temos que $\dim p_2(\Gamma) < 19$.

Aplicando o Teorema da Dimensão das Fibras ao morfismo $p_2 : \Gamma \to \mathbb{P}(R_3)$, obtemos que se $[F] \in p_2(\Gamma)$ então $\dim p_2^{-1}([F]) \geq \dim \Gamma - \dim p_2(\Gamma) > 0$ e, portanto, $\dim p_2^{-1}([F]) \geq 1$. Deste modo, se $S \subset \mathbb{P}^3$ é uma superfície cúbica não singular então ou S contém infinitas retas (caso $S \in p_2(\Gamma)$) ou S não contém retas (caso $S \notin p_2(\Gamma)$). Temos uma contradição pois no Exemplo 6.1 vimos que a superfície cúbica de Fermat $Z(x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)$ contém exatamente 27 retas.

■

Lema 6.3. *Se S e H são, respectivamente, uma superfície cúbica não singular e um plano em $\mathbb{P}^3$ então existem três possibilidade para $H \cap S$: uma curva cúbica irredutível, a união de uma cônica irredutível com uma reta ou três retas distintas.*

Demonstração. Veja item (b) da Proposição 7.1 na p. 102 de (15). ■

Lema 6.4. *Se $p \in S$ e l_1, l_2 e l_3 são três retas distintas contidas em S tais que $p \in l_1 \cap l_2 \cap l_3$ então l_1, l_2 e l_3 são coplanares.*

Demonstração. Veja item (a) da Proposição 7.1 na p. 102 de (15). ■

Lema 6.5. *Se $l \subset S$ é uma reta então existem exatamente cinco planos π_1, π_2, π_3, π_4 e π_5 tais que $\pi_i \cap S = l \cup l_i \cup l'_i$, onde l, l_i e l'_i são três retas distintas.*

Demonstração. Veja Proposição 7.3 na p. 106 de (15). ■

Lema 6.6. *Sejam l, l_1, l'_1, l_2, l'_2, l_3, l'_3, l_4, l'_4, l_5 e l'_5 retas como no Lema 6.5 acima. Então*

$$l_i \cap l_j = l_i \cap l'_j = l'_i \cap l'_j = \emptyset.$$

Demonstração. Suponhamos, por contradição, que exista $p \in l_i \cap l_j$. Temos duas possibilidades a serem consideradas: $p \in l$ ou $p \notin l$.
Se $p \in l$ então, pelo Lema 6.4, l, l_i e l_j são coplanares e, portanto, $\pi_i = \pi_j$. Se $p \notin l$ então existe um único plano contendo l e p. Como π_i e π_j são planos que contêm l e p, temos que $\pi_i = \pi_j$. Logo $l \cup l_i \cup l'_i = \pi_i \cap S = \pi_j \cap S = l \cup l_j \cup l'_j$, o que é uma contradição pois as retas são distintas. Os demais casos são análogos.

■

Proposição 6.1. *S contém pelo menos 27 retas distintas.*

Demonstração. O Teorema 6.2 nos diz que existe uma reta $l \subset S$. Aplicando o Lema 6.5 à reta l, obtemos 5 planos π_1, π_2, π_3, π_4, π_5 e 10 retas l_1, l'_1, l_2, l'_2, l_3, l'_3, l_4, l'_4, l_5, l'_5 tais que $\pi_i \cap S = l \cup l_i \cup l'_i$. Aplicando novamente o Lema 6.5, agora à reta l_1, obtemos 4 novos planos π'_2, π'_3, π'_4, π'_5 e 8 novas retas m_2, m'_2, m_3, m'_3, m_4, m'_4, m_5, m'_5 tais que $\pi'_i \cap S = l_1 \cup m_i \cup m'_i$. Aplicando o Lema 6.5 uma última vez, agora à reta l'_1, obtemos mais 4 planos π''_2, π''_3, π''_4, π''_5 e mais 8 retas k_2, k'_2, k_3, k'_3, k_4, k'_4, k_5, k'_5 tais que $\pi''_i \cap S = l'_1 \cup k_i \cup k'_i$

Suponhamos, por contradição, que $m_i = l_j$ para $i \in \{2,3,4,5\}$ e $j \in \{2,3,4,5\}$ ($j = 1$ não foi considerado pois, por construção, m_i é diferente de l, l_1 e l'_1). Então o plano π'_i contém as retas l_1 e l_j e, portanto, $l_1 \cap l_j \neq \emptyset$ com $i \neq j$, o que contradiz o Lema 6.6. Logo, nenhuma das retas m_2, m'_2, m_3, m'_3, m_4, m'_4, m_5, m'_5 coincide com alguma das retas l_1, l'_1, l_2, l'_2, l_3, l'_3, l_4, l'_4, l_5, l'_5. Analogamente, verifica-se que as retas m_2, m'_2, m_3, m'_3, m_4, m'_4, m_5, m'_5 são distintas de todas as retas k_2, k'_2, k_3, k'_3, k_4, k'_4, k_5, k'_5 e também que nenhuma das retas k_2, k'_2, k_3, k'_3, k_4, k'_4, k_5, k'_5 coincide com alguma das retas l_1, l'_1, l_2, l'_2, l_3, l'_3, l_4, l'_4, l_5, l'_5.

Portanto, as 27 retas do conjunto $\mathfrak{L}_S = \{l,\ l_1, l'_1, l_2,\ l'_2, l_3, l'_3, l_4, l'_4, l_5,\ l'_5, m_2, m'_2, m_3,\ m'_3,\ m_4,\ m'_4,\ m_5,\ m'_5,\ k_2,\ k'_2,\ k_3, k'_3, k_4, k'_4, k_5,\ k'_5\}$ são duas a duas distintas.

■

Lema 6.7. *Se $L \subset S$ é uma reta tal que $L \cap l \neq \emptyset$ ou $L \cap l_1 \neq \emptyset$ ou $L \cap l'_1 \neq \emptyset$, então $L \in \mathfrak{L}_S$.*

Demonstração. Seja $L \subset S$ uma reta e suponhamos, sem perda de generalidade, que $L \cap l \neq \emptyset$. Temos duas possibilidades a serem consideradas: ou $L = l$ ou $L \cap l = \{p\}$. Se $L = l$ então $L \in \mathfrak{L}_S$. Seja $L \cap l = \{p\}$. Então existe um único plano π contendo as retas L e l e, pelo Lema 6.3, a interseção $\pi \cap S$ pode ser uma curva cúbica irredutível, a união de uma reta com uma cônica irredutível ou a união de três retas distintas.
Se $\pi \cap S$ é curva cúbica irredutível C então $L \subset \pi \cap S = C$ e, como $\dim L = 1 = \dim C$, segue do Lema 6.2 que $L = C$, o que é uma contradição. Se $\pi \cap S$ é a união de uma reta r com uma cônica irredutível Q então $L \subset \pi \cap S = r \cup Q$ e, em particular, $L = (r \cap L) \cup (Q \cap L)$. Como Q é uma cônica irredutível então $L \not\subseteq Q$ e, portanto $Q \cap L$ consiste de no máximo 2 pontos. Logo $L = r$. Analogamente, conclui-se que $l = r$ e, consequentemente, $L = l$, o que é uma contradição. Portanto, $\pi \cap S$ consiste de três retas distintas e, pelo Lema 6.5, $\pi = \pi_i$ para algum $i \in \{1,2,3,4,5\}$ e $L \in \{l_i, l_i'\} \subset \mathfrak{L}_S$.

■

Lema 6.8. *Se $L \subset S$ é uma reta então $L \cap l \neq \emptyset$ ou $L \cap l_1 \neq \emptyset$ ou $L \cap l_1' \neq \emptyset$.*

Demonstração. Temos que, em $\mathbb{P}^3$, a interseção de dois planos distintos é sempre uma reta e que se π é um plano e r é uma reta então $r \cap \pi \neq \emptyset$.
Sejam $L \subset S$ uma reta e π_1 o plano cuja interseção com S é formada pelas retas l, l_1 e l_1'. Então existe um ponto $p \in L \cap \pi_1$ e, portanto, $p \in \pi_1 \cap S = l \cup l_1 \cup l_1'$. Logo, $p \in L \cap l$ ou $p \in L \cap l_1$ ou $p \in L \cap l_1'$.

■

Teorema 6.3. *S contém exatamente 27 retas.*

Demonstração. Na demonstração da Proposição 6.1 obtivemos o conjunto $\mathfrak{L}_S$ formado por 27 retas distintas contidas em S e os Lemas 6.7 e 6.8 afirmam que todas as retas contidas em S pertecem ao conjunto $\mathfrak{L}_S$. Desse modo, temos que S contém exatamente 27 retas.

■

6.2 Finitude Genérica das Configurações de Dziobek

A Mecânica Celeste é o estudo do comportamento de partículas pontuais em $\mathbb{R}^3$ movendo-se sob influência de atração gravitacional. O movimento destas partículas é descrito por um sistema de equações diferenciais que não é integrável em geral e, por isso, são considerados casos particulares. Em 1998, inspirado na lista de problemas de Hilbert, S. Smale elaborou 18 perguntas para os matemáticos deste século. Uma delas é a seguinte:

"No problema de n corpos da Mecânica Celeste, é finito o número de classes de configurações centrais, para uma escolha de números reais positivos $m_1,...,m_n$ para as massas dos corpos?"

Nesta seção, obteremos uma resposta para o problema de Smale num caso particular.

Consideremos n corpos e sejam $m_1,...,m_n \in \mathbb{R}$ suas massas e $x_1,...,x_n \in \mathbb{R}^d$ suas posições. Denotemos por $r_{ij} = ||x_i - x_j||$ a distância entre o i-ésimo e o j-ésimo corpo. O vetor $x = (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^{dn}$ é chamado **configuração**.

As equações que estudaremos provém das seguintes leis da física clássica:

1. Segunda Lei de Newton: Força resultante é igual ao produto da massa pela aceleração.
2. Lei da Gravitação Universal: O módulo da Força Gravitacional é diretamente proporcional ao produto das massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância.

Supondo que as únicas forças atuando sobre cada corpo são as forças gravitacionais provenientes dos demais corpos, temos a seguinte Equação Diferencial de Segunda Ordem para o movimento do i-ésimo corpo:

$$m_i\ddot{x}_i = \sum_{i\neq j} \frac{m_i m_j (x_j - x_i)}{r_{ij}^3},\ i = 1,...,n.$$

Para que as equações acima estejam bem definidas, assumimos que $r_{ij} \neq 0$, para $i \neq j$.

Sejam $M = m_1 + ... + m_n \neq 0$, $c = \dfrac{m_1x_1 + ... + m_nx_n}{M}$ a **massa total** e o **centro de massa** dos corpos. A configuração $x = (x_1,...,x_n)$ é chamada **configuração central** quando os vetores aceleração dos corpos satisfazem

$$\ddot{x}_i + \lambda(x_i - c) = 0,\ i = 1,...,n$$

$$\therefore \sum_{i\neq j} \frac{m_j(x_j - x_i)}{r_{ij}^3} + \lambda(x_i - c) = 0,\ i = 1,...,n,$$

para alguma constante $\lambda \in \mathbb{R}$ não nula.

A **dimensão** da configuração $x = (x_1,...,x_n)$, denotada por $\delta(x)$, é a dimensão do menor subespaço afim de $\mathbb{R}^d$ que contém os pontos x_i. Uma configuração central é chamada **configuração de Dziobek** quando $\delta(x) = n - 2$.

Se $x = (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^{dn}$ é uma configuração central, temos que:

1. Se $E(n)$ é grupo euclidiano n-dimensional (grupo das isometrias em $\mathbb{R}^n$) e $A \in E(n)$ então Ax é uma configuração central.

2. Se $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ então kx é uma configuração central.

e, portanto, podemos contar as classes de configurações centrais módulo rotações em torno do centro de massa c, translações e homotetias.

- **Equações Polinomiais para Configurações Centrais de Dziobek**

Seja $x = (x_1, ..., x_n)$, com $x_i \in \mathbb{R}^d$ uma configuração. Uma vez que a dimensão $\delta(x)$ satisfaz $0 \leq \delta(x) \leq n-1$, podemos supor sem perda de generalidade que $d = n-1$. Associaremos a configuração x a matriz $n \times n$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & ... & 1 \\ x_1 & ... & x_n \end{pmatrix}$$

e denotaremos $\omega(x) = \det(X)$.

Temos que $\delta(x) = n-2$ se, e somente se, a dimensão do núcleo da transformação linear definida por X é igual a 1. Neste caso, podemos assumir sem perda de generalidade que cada $x_i \in \mathbb{R}^{n-2}$ e agora X torna-se uma matriz $(n-1) \times n$. Consideremos ainda a matriz $n \times n$

$$\widetilde{X} = \begin{pmatrix} 1 & ... & 1 \\ x_1 & ... & x_n \\ 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$$

Seja $\widehat{x}_k$ a configuração de $n-1$ corpos obtida desconsiderando-se o k-ésimo corpo da configuração x e seja $\widehat{X}_k$ a matriz $(n-1) \times (n-1)$ associada à configuração $\widehat{x}_k$ que é obtida retirando-se a k-ésima coluna de X.

$$\widehat{X}_k = \begin{pmatrix} 1 & ... & 1 & 1 & ... & 1 \\ x_1 & ... & x_{k-1} & x_{k+1} & ... & x_n \end{pmatrix}$$

Segue que, a menos de sinal, as quantidades $\Delta_k = (-1)^{k+1}\det(\widehat{X}_k) = (-1)^{k+1}\omega(\widehat{x}_k)$ são os cofatores das entradas na última linha de $\widetilde{X}$. Considerando propriedades do determinante, verifica-se que $\Delta = (\Delta_1, ..., \Delta_n)$ está no núcleo da transformação linear definida por X.

Lema 6.9. *Denotemos por $\wedge$ o produto exterior em $\mathbb{R}^{n-2}$ e seja*

$$\tau(j,k) = \begin{cases} (-1)^j, & \text{se } k < j, \\ (-1)^{j+1}, & \text{se } k > j. \end{cases}$$

Se $j,\ k \in \{1, ..., n\}$ são índices arbitrários com $j \neq k$ e $\{e_1, ..., e_{n-2}\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^{n-2}$, então

$$\tau(j,k)(x_1 - x_j) \wedge ... \wedge (x_n - x_j) = \omega(\widehat{x}_k) e_1 \wedge ... \wedge e_{n-2},$$

onde os fatores $(x_k - x_j)$ e $(x_j - x_j)$ foram omitidos no primeiro membro.

Demonstração. Veja Lema 2.1 na p. 7 de (16). ■

Consideremos as $p = \frac{n(n-1)}{2}$ distâncias mútuas $r_{ij} = ||x_i - x_j||$, com $1 \leq i < j \leq n$ entre os n corpos da configuração x. Denotemos $s_{ij} = ||x_i - x_j||^2$ e seja $s \in \mathbb{R}^p$ o vetor de coordenadas s_{ij}, com $1 \leq i < j \leq n$. A matriz de Cayley-Menger associada a s é dada por

$$A(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ 1 & s_{13} & 0 & \dots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & s_{1n} & s_{2n} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Denotamos por $F(s) = \det A(s)$, o determinante de Cayley-Menger, e por F_{ij} o cofator do elemento na i-ésima linha e na j-ésima coluna de A.

Proposição 6.2. *Sejam $x = (x_1, \dots, x_n)$ uma configuração de Dziobek e $s \in \mathbb{R}^p$ o vetor cujas coordenadas são os quadrados das distâncias mútuas entre os corpos da configuração (como acima). Então*

1. *$F(s) = 0$;*
2. *Pelo menos dois cofatores principais F_{ii} são não nulos;*
3. *$F_{ik}F_{jl} = F_{jk}F_{il}$ para todos $i, j, k, l \in \{1, \dots, n+1\}$*
4. *$F_{ij} = k\Delta_{i-1}\Delta_{j-1}$, para $1 \leq i,\ j \leq n$, onde $\Delta = (\Delta_0, \dots, \Delta_n)$ é uma solução não trivial de $A(s)\Delta = 0$. Além disso, pelo menos dois dos Δ_i's são não nulos, para $1 \leq i \leq n$;*
5. *Se $S_{ij} = r_{ij}^{-3} - r_0^{-3}$ e $r_0^3 = \frac{M}{\lambda}$ então existem números reais z_1, ..., z_n e $k \neq 0$ tais que*
$$S_{ij} = kz_iz_j.$$
6. *$m_kS_{ik}\Delta_l = m_lS_{il}\Delta_k$, onde S_{ij} e Δ_k são como nos itens acima.*

Demonstração. Veja Proposições 1 a 3 nas p. 5 a 7 em (17) ou Proposições 2.1 a 2.4 nas p. 9 a 13 em (16). ■

Lema 6.10. *Seja $f : V \to W$ um morfismo entre variedades quase-projetivas. Tem-se que*

1. *Se f é dominante então $\dim V \geq \dim W$;*
2. *Se $\dim f^{-1}(w) \geq d$, para todo $w \in W$ então $\dim V \leq \dim W + d$;*
3. *Se W é irredutível e $\dim V \leq \dim W$ então existe subconjunto aberto não vazio $U \subset W$ tal que se $y \in U$ então a fibra $f^{-1}(y)$ é finita.*

Demonstração.

1. Escolha uma componente irredutível W_j de W cuja dimensão é a maior possível. Desde que f é dominante existe alguma componente irredutível V_i de V e subconjuntos abertos $V_{i_0} \subset V_i$ e $W_{j_0} \subset W_j$, tal que tem a mesma dimensão de V_i e W_j respectivamente e $f : V_{i_0} \to W_{j_0}$ é aplicação sobrejetiva. Portanto temos

$$\dim(V) \geqslant \dim(V_i) \geqslant \dim(W_j) = \dim(W).$$

2. Tome qualquer componente V_i de V. A aplicação $f : V \to \overline{f(V)}$ é dominante, portanto existem subvariedades $V_i \subset V$ e $W_j \subset W$ tais que $f : V_i \to W_j$ é dominante. Podemos restringir a aplicação f se necessário, a subconjuntos $V_{i_0} \subset V_i$ e $W_{j_0} \subset W_j$ tais que f é sobrejetiva. Pelo Teorema da Dimensão das Fibras, concluímos que $\dim(V_i) - \dim(W_j) \leqslant d$.

3. É suficiente considerarmos a restrição de f às componentes irredutíveis V_i. Se $f : V_i \to W$ não é dominante então o resultado é trivial por que quase toda fibra é finita. Se $f : V_i \to W$ é dominante então pelo item 1 temos que $\dim(V_i) \geqslant \dim(W)$. Desde que $\dim(V_i) \leqslant \dim(W)$ temos $\dim(V_i) = \dim(W)$. Restringindo f a uma aplicação sobrejetiva entre subconjuntos abertos de Zariski, segue do Teorema da Dimensão das Fibras que quase toda fibra tem dimensão zero e, em particular, é um conjunto finito.

■

- **Finitude Genérica para Configurações de Dziobek**

Consideremos $x = (x_1, \dots, x_n)$ uma configuração de Dziobek (isto é, a dimensão $\delta(x) = n - 2$) e sejam $r_{ij} = ||x_i - x_j||$, para $1 \leq i < j \leq n$, as $p = \frac{n(n-1)}{2}$ distâncias mútuas entre os corpos da configuração. Temos que se $S_{ij} = r_{ij}^{-3} - r_0^{-3}$, onde $r_0^3 = M/\lambda$, então existem $k \neq 0, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{R}$ tais que $S_{ij} = k z_i z_j$.

Seja $r \in \mathbb{P}^p$ o ponto com coordenadas r_0, r_{ij}, para $1 \leq i < j \leq n$. Assumiremos que as variáveis $z_1, \dots, z_n$, definidas na proposição 6.2, são complexas. Introduzindo uma variável adicional z_0, denotamos $z = [z_0 : \dots : z_n] \in \mathbb{P}^n$. Se x é uma configuração de Dziobek então a igualdade $r_{ij}^{-3} - r_0^{-3} = k z_i z_j$ implica que o sistema de equações

$$r_{ij}^{-3} - r_0^{-3} = z_i z_j, \text{ para } 1 \leq i < j \leq n, \; r_0^{-3} = z_0^2 \tag{6.1}$$

tem uma solução não nula $z = (z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$.

No complementar do conjunto singular (correspondente às configurações nas quais $x_i = x_j$, com $i \neq j$, ou $M = 0$) dado por

$$\Sigma = \{(r,z) \in \mathbb{P}^p \times \mathbb{P}^n | \; z_0 r_0 \prod_{i<j} r_{ij} = 0\},$$

os zeros das equações (6.1) estão contidos nos zeros das equações

$$z_0^2(r_0^3 - r_{ij}^3) = r_{ij}^3 z_i z_j, \text{ para } 1 \leq i < j \leq n, \tag{6.2}$$

que são separadamente homogêneas em r e z.

Consideremos a subvariedade

$$V = \{(r,z) \in \mathbb{P}^p \times \mathbb{P}^n \setminus \Sigma | \; F(r_{ij}^2) = 0 \text{ e } z_0^2(r_0^3 - r_{ij}^3) = r_{ij}^3 z_i z_j, \text{ para } 1 \leq i < j \leq n\}$$

que contém todas as configurações de Dziobek e também as subvariedades

$$V_k = \{(r,z) \in V | \; z_{k+1} = \ldots = z_n = 0\}.$$

Lema 6.11. *Sejam $\omega_{ij} \in \mathbb{C}$, $0 \leqslant i < j \leqslant n$, raízes cúbicas da unidade. Então*

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 2\omega_{12} & \omega_{13} & \ldots & \omega_{1n} \\ 1 & 2\omega_{12} & 0 & \omega_{23} & \ldots & \omega_{2n} \\ 1 & \omega_{13} & \omega_{23} & 0 & \ldots & \omega_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega_{1n} & \omega_{2n} & \omega_{3n} & \ldots & 0 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Demonstração. Veja Lema 5.1 na p. 30 de (16). ■

Teorema 6.4. $\dim V = n - 1$. *Mais geralmente,* $\dim(V_k) = k - 1$ *se* $k \geq 2$.

Demonstração. Considere a projeção $\pi_2 : \mathbb{P}^p \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ e note que $z \in \pi_2(V)$ se, e somente se, as equações (6.2)

$$z_0^2(r_0^3 - r_{ij}^3) = r_{ij}^3 z_i z_j, \text{ para } 1 \leq i < j \leq n,$$

tem solução $r \in \mathbb{C}^{p+1}$, com todas as entradas não nulas e $F(r_{ij}^2) = 0$. Desse modo,

$$g_{ij} = (z_i z_j + z_0^2) r_{ij}^3 - 1 = 0, \; 1 \leq i < j \leq n.$$

Usaremos estas equações para eliminar as variáveis r_{ij} do determinante de Cayley-Menger. Considere F e g_{12} como polinômios na variável r_{12}, com todas as outras variáveis vistas como parâmetros. Seja G a resultante desses dois polinômios com respeito a r_{12}. A resultante G é um polinômio nas variáveis $(z_i z_j + z_0^2)$ e r_{ij}, diferente de r_{12}. Se para determinados valores dos parâmetros existe r_{12} anulando F e g_{12} então para esses valores tem-se $G = 0$. Reciprocamente, se $G = 0$, com $z_1z_2 + z_0^2 \neq 0$, então existe um conjunto finito não vazio de valores para r_{12} tais que $F = 0$ e $g_{12} = 0$.

As demais variáveis r_{ij} podem ser eliminadas de maneira análoga. Após um número finito de passos obtemos um polinômio $H(z)$ com a seguinte propriedade: Dado um valor de z, se existe r_{ij} satisfazendo $F = 0$ e $g_{12} = 0$, então $H(z) = 0$. Reciprocamente, se z é uma solução de $H(z) = 0$, tal que todas as quantidades $z_iz_j + z_0^2 \neq 0$, então existe um conjunto não-vazio de valores de r_{ij} tais que $F = 0$ e todas as equações $g_{ij} = 0$.
Consideremos a seguinte variedade projetiva determinada por $H(z)$:

$$W^{'} = \{z \in \mathbb{P}^n : H(z) = 0\}.$$

As propriedades da resultante implicam que $\pi_2(V) \subset W'$. Para caracterizar a imagem, devemos observar que para determinarmos r_{ij} dado z é necessário que $z_iz_j + z_0^2 \neq 0$ e $z_0 \neq 0$. Definindo o polinômio homogêneo

$$K(z) = z_0 \prod_{i<j} (z_iz_j + z_0^2)$$

e a variedade projetiva

$$B = \{[z] \in \mathbb{P}^n : K(z) = 0\}$$

temos que $\pi_2(V) = W^{'} \setminus B$. Note que algumas das componentes irredutíveis de W' podem estar inteiramente contidas em B. Ignoraremos estas componentes e denotaremos por W a união de todas as outras componentes de W'. Seja $W = Z(I)$, para algum ideal I e consideremos $W = Z(I_1) \cup \ldots \cup Z(I_n)$ uma decomposição em irredutíveis para W. Note que $Z(I_j) \cap B$ é uma subvariedade própria de $Z(I_j)$ para todo j e, portanto, a aplicação $f : V \to W$ é dominante.
Desde que toda fibra $\pi_2^{-1}([z])$ é finita temos que $\dim(V) \leq \dim(W)$. Por outro lado, como $\pi_2 : V \to W$ então $\dim(V) \geq \dim(W)$ e, portanto, $\dim(V) = \dim(W)$.

O resultado segue se mostrarmos que W' é definida por uma única equação polinomial não-trivial $H(z) = 0$, em $\mathbb{P}^n$. Portanto, toda componente irredutível de W' tem dimensão $n-1$. Logo, $n-1 = \dim(W) = \dim(V)$. Para mostrar isso precisamos mostrar que, existe um z tal que as quantidades $z_iz_j + z_0^2$ são todas não nulas, mas as equações $F = 0$ e $g_{ij} = 0$ não têm solução. Visto que $H(z)$ é a resultante destas equações, teremos $H(z) \neq 0$. Tome $z_i = 0$, $3 \leq i < n$. Então para $3 \leq i, j \leq n$ temos que $z_iz_j + z_0^2 = 1$ e as equações $g_{ij} = 0$ reduzem-se a $r_{ij}^3 = 1$. Portanto $s_{ij} = r_{ij}^2$ são raízes cúbicas da unidade. Por outro lado se escolhermos z_1, z_2 tal que $z_1z_2 + z_0^2 = 1/\sqrt{8}$ então $r_{12}^3 = \sqrt{8}$ e $s_{12} = 2$, que é duas vezes uma raiz cúbica da unidade. Desse modo, o determinante de Cayley-Menger é exatamente como no lema 6.11 e, portanto, $F(r_{ij}^2) \neq 0$, $1 \leq i < j \leq n$.

■

As equações $m_k S_{ik} \Delta_l = m_l S_{il} \Delta_k$ obtidas no item 6 da Proposição 6.2 relacionam as massas com as variáveis S_{ij}, Δ_i. Multiplicando essas equações por Δ_j e considerando os itens 4 e 5 da Proposição 6.2 e também as igualdades em (6.1) obtemos

$$m_k z_i z_k F_{jl} = m_l z_i z_l F_{jk}, \text{ onde } i,k,l,j \in \{1,...,n\} \tag{6.3}$$

e os índices i, k, l são dois a dois distintos. Calculando os cofatores F_{ij} do determinante de Cayley-Menger, verifica-se que eles são polinômios homogêneos em r e, portanto, as equações obtidas acima são separadamente homogêneas nas variáveis r, z e m. Podemos então definir a seguinte subvariedade

$$\Gamma = \{(r,z,m) \in V \times \mathbb{P}^{n-1} |\ m_k z_i z_k F_{jl} = m_l z_i z_l F_{jk}\}.$$

Denotaremos por Γ_α as componentes irredutíveis de Γ e escreveremos $f \equiv 0$ em Γ_α se a função f se anula em todos os pontos de Γ_α, ou $f \not\equiv 0$ caso contrário.
Chamaremos Γ_α de **componente de Dziobek** quando as seguintes duas condições forem satisfeitas:

1. pelo menos dois dos $z_i \not\equiv 0$ em Γ_α;
2. pelo menos dois dos cofatores principais $F_{ii} \not\equiv 0$ em Γ_α.

Segue-se que se Γ_α não é uma componente de Dziobek então Γ_α é irrelevante pois não contém uma configuração de dimensão $n-2$.

Proposição 6.3. *Se Γ_α é uma componente de Dziobek tal que $F_{il} \equiv 0$ em Γ_α, para alguma escolha dos índices com $1 \leq i,\ l \leq n$, então $m_i m_l z_i z_l \equiv 0$ em Γ_α.*

Demonstração. Seja $F_{il} \equiv 0$ em Γ_α. Segue do item 3 da proposição 6.2 que $F_{ik} F_{jl} \equiv 0$, para todos $i,\ j$. Como Γ_α é irredutível, se $F_{ik} \not\equiv 0$, para algum k, então, $F_{jl} \equiv 0$, para todo j. Desse modo, ou todos os $F_{ik} \equiv 0$, ou todos os $F_{jl} \equiv 0$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $F_{jl} \equiv 0$, para todo j. Como Γ_α é uma componente de Dziobek, existem dois índices k tais que $F_{kk} \not\equiv 0$. Fazendo $j = k$ na equação (6.3), obtemos $m_l z_i z_l F_{kk} \equiv 0$ e, portanto, $m_i m_l z_i z_l \equiv 0$ em Γ_α. ■

Uma componente Γ_α é chamada **massa-dominante** quando a projeção canônica $\pi_3 : \Gamma_\alpha \to \mathbb{P}^{n-1}$ é uma aplicação dominante. Diremos que Γ_α é **não-degenerada** quando $z_i \not\equiv 0$ e $F_{ij} \not\equiv 0$ em Γ_α, para todos $i,\ j \in \{1,...,n\}$.

Teorema 6.5. *Se Γ_α é uma componente de Dziobek massa-dominante então* $\dim \Gamma_\alpha = n-1$.

Demonstração. Como Γ_α é massa dominante, temos que $\dim(\Gamma_\alpha) \geq n-1$. Para provar a desigualdade contrária, consideraremos dois casos: Γ_α degenerada ou não-degenerada.

Suponhamos Γ_α não-degenerada e consideremos o morfismo regular $\pi_{12} : \Gamma_\alpha \to V$. Cada uma das fibras $\pi_{12}^{-1}(r,z)$ é um conjunto unitário pois as equações (6.3) determinam as massas a menos de multiplicação por constante. Segue do teorema 6.4 que $\dim(V) = n-1$ e, portanto, pelo item 2 do lema 6.10, $\dim \Gamma_\alpha \geq n-1$.

Seja agora Γ_α degenerada. A proposição 6.3 mostra que toda componente degenerada tem $z_i \equiv 0$ algum índice $1 \leq i \leq n$. Podemos supor sem perda de generalidade que existe algum índice $2 \leq k \leq n$ tal que $z_i \not\equiv 0$ para $1 \leq i \leq k$ e $z_i \equiv 0$ para $k+1 \leq i \leq n$. Temos então que $m_i m_l z_i z_l \not\equiv 0$ para $1 \leq i,j \leq k$ e, portanto, para estes i,j, $F_{ij} \not\equiv 0$. Em um subconjunto aberto de Zariski U_α, onde, $z_i \neq 0$ e $F_{ij} \neq 0$, $1 \leq i,j \leq k$ podemos resolver a equação (6.3), a menos de multiplicação por constante, unicamente para m_i, $1 \leq i \leq k$. Temos ainda que todas as equações envolvendo as massas $m_{k+1}, \ldots, m_n$ são identicamente nulas, logo estas massas são arbitrárias. Considere a projeção $\pi_{12} : U_\alpha \to V_k$. Temos que os subespaços lineares de dimensão $k-2$ $L_i = \{(m) \in \mathbb{P}^{n-1} : m_i = m_{k+1}, \ldots, = m_n = 0\}$ com $i \leq k$ tem intersecção vazia com as fibras $\pi_{12}^{-1}(z,r)$, $(z,r) \in V$ e são espaços com a maior dimensão possível com esta propriedade. Disto segue que todo espaço linear de dimensão $k-2$ que não está contido em alguma componente de $\pi_{12}^{-1}(z,r)$, $(z,r) \in V$ tem intersecção vazia com $\pi_{12}^{-1}(z,r)$, $(z,r) \in V$. Portanto a dimensão das fibras é menor ou igual a $n-k$. Segue do teorema 6.4 que $\dim(V_k) = k-1$ e, portanto, disto segue que $\dim(\Gamma_\alpha) \leq k-1+n-k = n-1$, como queríamos mostrar.

■

Seja $\Gamma_D \subset \Gamma$ a união de todas as componentes de Dziobek. Se $m \in \mathbb{P}^{n-1}$, definimos

$$\Gamma_D(m) = \{(r,z) \in V \mid (r,z,m) \in \Gamma_D\}.$$

Proposição 6.4. *Existe uma subvariedade própria $B \subset \mathbb{P}^{n-1}$ tal que se $m \in \mathbb{P}^{n-1} \setminus B$ então $\Gamma_D(m)$ é um conjunto finito.*

Demonstração. É suficiente considerar cada componente irredutível Γ_α de Γ_D. Temos que Γ_α pode ser massa-dominante ou não.

Se Γ_α não é massa dominante, para $m \in \mathbb{P}^{n-1} \setminus \overline{\pi_3(\Gamma_\alpha)}$ então $\Gamma_D(m) \cap \Gamma_\alpha = \emptyset$. Seja B a união de $\overline{\pi_3(\Gamma_\alpha)}$, onde Γ_α não é massa dominante. Se $m \in \mathbb{P}^{n-1} \setminus B$ então $\Gamma_D(m) \cap \Gamma_\alpha = \emptyset$.

Se Γ_α é massa-dominante, então pelo teorema anterior, temos que $\dim(\Gamma_\alpha) = n-1$. Desde que a projeção é um morfismo regular, o teorema segue pela parte 3 da proposição 6.10.

■

Observação 6.1. *Se uma componente Γ_α não é massa-dominante então $\pi_3(\Gamma_\alpha) \cap \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{R}}$ está contida em alguma subvariedade própria de $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{R}}$.*

Teorema 6.6. *Existe uma subvariedade própria $B \subset \mathbb{P}^{n-1}$ tal que se $m \in \mathbb{P}^{n-1} \setminus B$ então m admite, a menos de simetrias, somente um número finito de configurações centrais de Diobek (com dimensão $\delta(x) = n-2$).*

Demonstração. Se $B \subset \mathbb{P}^{n-1}$ é a variedade da proposição 6.4 então, pela observação 6.1, $B \cap \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{R}}$ é uma subvariedade própria de $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{R}}$ e, desse modo, temos o resultado para massas reais. Isto implica que para uma massa genérica m dada, temos um número finito de possibilidades para as distâncias mútuas r_{ij} de uma configuração de Dziobek, a menos de reescala. Desde que as distâncias mútuas determinam as configurações a menos de rotação e reflexão, o teorema está provado.

■

REFERÊNCIAS

1 HARTSHORNE, R. *Algebraic geometry*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 52.

2 ROJAS, J.; MENDOZA, R. A note on the fiber dimension theorem. *Proyecciones (Antofagasta)*, SciELO Chile, v. 28, n. 1, p. 57–73, 2009.

3 EISENBUD, D. *Commutative Algebra: with a view toward algebraic geometry*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1994. v. 150.

4 MUMFORD, D. *The red book of varieties and schemes: includes the Michigan lectures (1974) on curves and their Jacobians*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1999. v. 1358.

5 EISENBUD, D.; HARRIS, J. *The geometry of schemes*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006. v. 197.

6 HARBOURNE, B. Problems and progress: a survey on fat points in $\mathbb{P}^2$, zero dimensional schemes and applications. *Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics*, Queen's University, v. 150, p. 85–132, 2002.

7 AVRITZER, D.; VAINSENCHER, I. $\mathrm{Hilb}^4\mathbb{P}^2$. *Lecture Notes in Mathematics*, Springer, v. 1436, p. 30–59, 1990.

8 ROJAS, J.; MENDOZA, R.; SILVA, E. Projective squares in $\mathbb{P}^2$ and bott's localization formula. *Cubo*, 2010.

9 ROJAS, J.; VAINSENCHER, I. Conical sextuplets. *Communications in Algebra*, Taylor & Francis, v. 24, n. 11, p. 3437–3457, 1996.

10 MILNE, J. S. Fields and galois theory. *Disponível em: <http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/FT.pdf>, Acesso em 10 set. 2011*.

11 VAINSENCHER, I. *Introdução às curvas algébricas planas*. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1996.

12 ATIYAH, M. F.; MACDONALD, I. G. *Introduction to commutative algebra*. [S.l.]: Westview press, 1994.

13 IGOR, R. *Shafarevich. Basic algebraic geometry. 1*. [S.l.]: Springer-Verlag, Berlin,, 1994.

14 HARRIS, J. *Algebraic geometry: a first course*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1995. v. 133.

15 REID, M. *Undergraduate algebraic geometry*. [S.l.]: Cambridge University Press Cambridge, 1988.

16 DIAS, T. Aplicação da geometria algébrica à finitude das configurações centrais de dziobek. 37 f. Dissertação (Mestrado) - Departamento de Matemática, Universidade Federal de Pernambuco, 2009.

17 MOECKEL, R. Generic finiteness for dziobek configurations. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 353, p. 4673–4686, 2001.