UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

José Deibsom da Silva

Um Princípio do Máximo para hipersuperfícies com um Contato Ideal no Infinito e Aplicações Geométricas

Recife
2017

José Deibsom da Silva

Um Princípio do Máximo para hipersuperfícies com um Contato Ideal no Infinito e Aplicações Geométricas

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Fernando Pereira de Sousa

Recife
2017

Catalogação na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

S586p Silva, José Deibsom da
Um princípio do máximo para hipersuperfícies com um contato ideal no infinito e aplicações geométricas / José Deibsom da Silva. – 2017.
53f.:il, fig.

Orientador: Antônio Fernando Pereira de Sousa.
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, Recife, 2017.
Inclui referências.

1. Geometria diferencial. 2. Variedades ponderadas. I. Sousa, Antônio Fernando Pereira de (orientador). II. Título.

516.36 CDD (23. ed.) UFPE- MEI 2017-161

JOSÉ DEIBSOM DA SILVA

UM PRINCÍPIO DO MÁXIMO PARA HIPERSUPERFÍCIES COM UM CONTATO IDEAL NO INFINITO E APLICAÇÕES GEOMÉTRICAS

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutorado em Matemática.

Aprovado em: 20/06/2017

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Antonio Fernando Pereira de Sousa (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

____

Prof. Dr. Fernando Antônio Nóbrega dos Santos (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

____

Prof. Dr. Aírton Temístocles Gonçalves de Castro (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

____

Prof. Dr. Levi Lopes de Lima (Examinador Externo)
Universidade Federal do Ceará

____

Prof.Dr. Flávio França Cruz (Examinador Externo)
Universidade Regional do Cariri

Aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Primeiro agradeço a Deus por ter me dado saúde, aos meus pais, familiares e amigos e força pra concluir com êxito essa jornada.

Agradeço também aos meus pais Sr. Antonio Laurentino e Dona Maria Da Paz, pois sem eles nada seria possível, devo-lhes tudo que sou. A todos os meus irmãos e sobrinhos e todos os meus familiares que sempre acreditaram em mim.

Agradeço imensamente a minha amada esposa Ana Nery pela paciência, pelo companheirismo, pela compreensão nas inúmeras noites que fora dormir sem mim enquanto eu ficara madrugada a dentro trabalhando e por sempre ter acreditado em mim nessa longa e árdua batalha de quatro anos de doutoramento.

Aos meus grandes amigos de longa data e parceiros de jornada Leon Denis, Filipe Mendonça e Tiago Veras pela amizade que perdura até hoje.

Aos meus novos amigos e companheiros de pós-graduação do Dmat-UFPE Luiz, Eudes, Cecília, Rúbya, Marcelo, Thiago Mendonça, Josué, Omar, Juscelino, Bob, Jaime, Gilson, Lorena, Edgar, Tanaka e todos os outros que possa ter esquecido aqui, foi bom conviver com vocês.

Ao meu orientador Tony pela parceria e pela orientção no trabalho realizado ao longo deste período.

A todos os professores que fizeram parte de minha formação, desde a escola até última disciplina de doutorado por praticarem esta nobre profissão a qual agora faço parte.

A todos os professores do departamento de matemática da UFRPE pelo apoio.

A todos, meus sinceros agradecimentos.

José Deibsom da Silva

RESUMO

Vamos generalizar um Princípio do Máximo no Infinito no caso parabólico dado por Ronaldo F. de Lima em seu trabalho A Maximum Principles at Infinity for surfaces with Constant Mean Curvature in Euclidean Space e por Ronaldo F. de Lima e William Meeks no artigo Maximum Principles at Infinity for surfaces of Bounded Mean Curvature in $\mathbb{R}^3$ and $\mathbb{H}^3$ onde agora teremos hipersuperfícies M_1 e M_2 do $\mathbb{R}^{n+1}$, disjuntas com bordos (possivelmete vazios) ∂M_1 e ∂M_2, de curvatura média limitada com um Contato Ideal no Infinito, porém agora sem restrição sobre a curvatura Gaussiana de qualquer hipersuperfície. Como aplicação geométrica apresentaremos alguns resultados que estendem para hipersuperfícies mergulhadas M_1 e M_2 do $\mathbb{R}^{n+1}$ com bordos vazios, uma generalização do Princípio do Máximo de Hopf para hipersuperfícies disjuntas que se aproximam assintoticamente. Uma vez obtidos esses resultados, introduzimos uma estrutura de variedade Riemanniana ponderada em $\mathbb{R}^{n+1}$ e obtemos algumas generalizações dos resultados antes obtidos sob hipóteses dos objetos agora existentes, tais como f-curvatura média, f-Laplaciano, variedades ponderadas f-parabólicas, para as hipersuperfícies M_1 e M_2 do $\mathbb{R}^{n+1}_f$.

Palavras-chave: Variedades parabólicas. Lado convexo. Variedades ponderadas.

ABSTRACT

We will generalize a Maximum Principle at Infinity in the parabolic case given in paper A Maximum Principles at Infinity for surfaces with Constant Mean Curvature in Euclidean Space by Ronald F. de Lima and Ronaldo F. de Lima and William Meeks in paper Maximum Principles at Infinity for surfaces of Bounded Mean Curvature in $\mathbb{R}^3$ and $\mathbb{H}^3$ where we will now have hypersurfaces M_1 and M_2 of $\mathbb{R}^{n+1}$ disjoints, with boundary (possibly empty) ∂M_1 e ∂M_2 of the bounded mean curvature and with Ideal Contact et Infinity, but now without restrictions on the Gaussian Curvature of any hypersurface. As geometric application we will present some results that extend for embedded hypersurfaces M_1 and M_2 in $\mathbb{R}^{n+1}$ with empty boundaries a generalization of Hopf's Maximum Principle for disjoint hypersurfaces that get close asymptotically. Once obtained these results, we inserted a structure of a weighted Riemannian Manifold in $\mathbb{R}^{n+1}$ and obtained some generalizations of the results previously achieved under some hypothesis of the objects now found, such as f-mean curvature, f-Laplacian, f-parabolic weighted manifold, in the hypersurfaces M_1 and M_2 from $\mathbb{R}^{n+1}_f$.

Keywords: Parabolic manifold. Convex side. Weighted manifold.

Lista de ilustrações

Sumário

1 INTRODUÇÃO

Um dos grandes resultados do estudo da geometria diferencial de hipersuperfícies do $\mathbb{R}^{n+1}$ é o princípio do máximo de Hopf, que garante que, sob certas condições de curvatura média, se duas hipersuperfícies M_1 e M_2 são tangentes em um ponto interior $p \in M_1 \cap M_2$ e neste ponto elas tem um contato ideal, o qual é chamado de *contato ideal em* p (ver Definição 3.2), então elas tem que coincidir em uma vizinhança de p (Teorema 3.1).

Pensando neste tipo de contato entre duas hipersuperfíces, contato ideal em p, os autores de (1) e (2) estabeleceram um contato ideal entre duas superfícies disjuntas M_1 e M_2 do $\mathbb{R}^3$, o qual generaliza o *contato ideal em* p, para superfícies disjuntas que se aproximam com um comportamento assintótico uma da outra. A essa aproximação deram o nome de *contato ideal no infinito* (ver Definição 3.3).

Supondo um *contato ideal no infinito* entre as superfícies M_1 e M_2 do $\mathbb{R}^3$, o autor de (1) demonstra o seguinte **Princípio do Máximo no Infinito** para superfícies de curvatura Gaussiana limitada e curvatura média constante $H \neq 0$:

Teorema 1.1. *Sejam M_1 e M_2 duas H-superfícies disjuntas, completas, propriamente mergulhadas em $\mathbb{R}^3$, com curvatura Gaussiana limitada e bordos não vazio ∂M_1 e ∂M_2. Se M_1 e M_2 tem um contato ideal no infinito e M_1 ou M_2 é parabólica, então*

$$min\{dist(M_1, \partial M_2), dist(M_2, \partial M_1)\} = 0.$$

Em 2004 Ronaldo F. de Lima, autor de (1), junto com William Meeks conseguiram provar em (2) a seguinte versão não parabólica, de curvaturas Gaussiana e média limitadas do Teorema 1.1.

Teorema 1.2. *Seja M_1 uma superfície com bordo ∂M_1 e curvatura Gaussiana limitada, que é propriamente mergulhada em $\mathbb{R}^3$ e cuja função curvatura média satisfaz $b_0 \leq H_{M_1} \leq b_1$, $b_0, b_1 > 0$. Assuma que M_2 é uma superfície com bordo ∂M_2, que é propriamente imersa em $\mathbb{R}^3$ e tal que $|H_{M_2}| \leq b_0$. Então, se M_2 tem um contato ideal no infinito com M_1, temos que*

$$min\{dist(M_1, \partial M_2), dist(M_2, \partial M_1)\} = 0.$$

Como aplicação do Teorema 1.2 os autores obtiveram também em (2) o teorema a seguir, o qual generaliza para superfícies do $\mathbb{R}^3$ o Princípio do Máximo de Hopf para superfícies com um *contato ideal no infinito* e curvaturas Gaussiana e média limitadas:

Teorema 1.3. *Suponha M_1 uma superfície propriamente mergulhada em $\mathbb{R}^3$, sem bordo, com curvatura Gaussiana limitada. Então se a função curvatura média de M_1 satisfaz $b_0 \leq H_{M_1} \leq b_1$, $b_0, b_1 > 0$, a superfície sem bordo M_2, que é propriamente imersa em $\mathbb{R}^3$ e cuja função curvatura média satisfaz $|H_{M_2}| \leq b_0$, não pode estar no lado convexo de M_1.*

Em (1) Ronaldo F. de Lima obteve a versão parabólica do Teorema 1.3 supondo M_1 e M_2 H-superfícies, $H \neq 0$.

Nosso objetivo neste trabalho é estender para hipersuperfícies do $\mathbb{R}^{n+1}$ os Teoremas 1.1 e 1.2. Isto será feito no Teorema 3.2 onde provamos um Princípio do Máximo no Infinito para hipersuperfícies M_1 e M_2 do $\mathbb{R}^{n+1}$ disjuntas, propriamente mergulhadas no $\mathbb{R}^{n+1}$ e com bordos não vazios. Para isso supomos que M_2 seja completa e que $\sup_{M_2} |\mathbf{H}_{M_2}| \leq \inf_{M_1} H_{M_1}$, onde H_{M_1} é a curvatura média de M_1 e $\mathbf{H}_{M_2}$ o vetor curvatura média de M_2. Também é pedido que M_2 tenha um contato ideal no infinito com M_1 e que M_2 seja parabólica. Aqui no entanto, não atribuímos hipótese alguma sobre a curvatura Gaussiana de qualquer hipersuperfície. Para tanto precisaremos de dois lemas que são provados na seção 3.3, a saber os Lemas 3.2 e 3.3.

Como aplicação do Teorema 3.2 provaremos o Teorema 3.6, que é uma generalização do Princípio do Máximo de Hopf para hipersuperfícies com um contato ideal no infinito, o qual estende o Teorema 1.3. Tal teorema garante que, sob condições análogas as do Teorema 3.2, se M_2 tem bordo vazio então não pode estar no lado convexo de M_1. E no Teorema 3.7 estendemos o Teorema 3.6 para o caso em que $M_1 \subset \mathbb{R}^{n+k}$ é uma hipersuperfície e $M_2 \subset \mathbb{R}^{n+k}$ uma n-subvariedade parabólica, o qual generaliza o Teorema 4 de (3) para hipersuperfícies assintóticas.

No Teorema 3.8, assim com em seu corolário, usamos o Princípio do Máximo de Omori-Yau e provamos um resultado análogo ao do Teorema 3.6 sem a hipótese de $M_2 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ser uma hipersuperfície parabólica. Obtendo assim uma outra generalização do Princípio do Máximo de Hopf para hipersuperfícies assintóticas do $\mathbb{R}^{n+1}$.

Dada uma variedade Riemanniana $(M^n, \langle , \rangle)$ chamamos de variedade Riemanniana ponderada a terna $M_f = (M^n, \langle , \rangle, dvol_f)$, onde $f \in C^\infty(M)$, $dvol_f = e^{-f} dvol$ e $dvol$ é o elemento de volume Riemanniano de M. A essa estrutra está associada a f-divergência dada por $\operatorname{div}_f X = e^f \operatorname{div}(e^{-f} X)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$, o que por sua vez nos dá o f-Laplaciano $\Delta_f u = \Delta u - \langle \nabla u, \nabla f \rangle$, onde u é uma função suave. Com essa noção do f-Laplaciano podemos dar de forma natural a noção de variedade Riemanniana f-parabólica. Também é bem sabido que sob hipóteses apropriadas sobre M vale o princípo do máximo de Omori-Yau para o f-Laplaciano, ver por exemplo (26) e (27). No capítulo 4 deste trabalho, vamos introduzir uma estrutura de variedade Riemanniana ponderada no $\mathbb{R}^{n+1}$ e estudar sob quais condições sobre as hipersuperfícies M_1 e M_2 do $\mathbb{R}^{n+1}_f$ podemos generalizar, nesta estrutura, os resultados já obtidos no capítulo 3. Como alguns dos resultados obtidos, extenderemos o princípio do máximo no infinito, Teorema 4.3, e no Teorema 4.4 obtemos um princípio de barreira para hipersuperfícies tangentes do $\mathbb{R}^{n+1}_f$, o qual generaliza o Teorema 4 em (3). Finalmente terminamos com algumas aplicações do princípio do máximo de Omori-Yau para o f-Laplaciano.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo vamos relembrar os conceitos e proriedades de alguns objetos em uma variedade Riemanniana e de hipersuperfícies que iremos utilizar no decorrer deste trabalho.

2.1 Curvaturas

Definição 2.1. *Seja M uma variedade Riemanniana. O tensor curvatura $\mathbf{R}$ de M é uma correspondência que associa a cada par $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$ uma aplicação $\mathbf{R}(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dada por*

$$\mathbf{R}(Y,X)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, \;\; Z \in \mathfrak{X}(M),$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M.

Se $\{x_i\}$ é uma sistema de coordenadas em torno de $p \in M$, de $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$, temos que

$$\mathbf{R}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_k} = \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\right)\frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Logo se $M = \mathbb{R}^{n+1}$, temos que seu tensor curvatura $\mathbf{R} \equiv 0$.

Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço bidimensional $P \subset T_pM$, chamamos de curvatura seccional de M em p com relação ao plano P o número dado por

$$K(x,y) = \frac{\langle \mathbf{R}(x,y)x, y\rangle}{|x \wedge y|^2},$$

onde $\{x,y\}$ é uma base de P e $|x \wedge y| = \sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x,y\rangle^2}$. Pode-se provar, ver por exemplo (23), que o número $K(x,y)$ não depende da escolha da base de P. Observe que assim definida, temos que a curvatura seccional do $\mathbb{R}^{n+1}$ é $K \equiv 0$.

Seja $\{v_1, \cdots, v_n\}$ uma base ortonormal de T_pM. Fixado $v_j = v$, definimos também a curvatura de Ricci e a curvatura escalar (normalizada) de M, respectivamente, por

$$Ric(v) = \frac{1}{(n-1)} \sum_i \langle \mathbf{R}(v, v_i)v, v_i\rangle, \;\; i = 1, \cdots, \widehat{j}, \cdots, n$$

e

$$R = \frac{1}{n}\sum_j Ric(v_j) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{ij} \langle \mathbf{R}(v_i, v_j)v_i, v_j\rangle, \;\; j = 1, \cdots, n.$$

2.2 A segunda forma fundamental

Seja $f : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ uma imersão da variedade diferenciável M na variedade Riemanniana $\overline{M}$. A imersão f induz de maneira natural uma métrica Riemanniana em M dada por $\langle u, v\rangle_p =$

$\langle df_p(u), df_p(v)\rangle_{f(p)}$, onde $u, v \in T_pM$. Sendo assim M é também munida de uma conexão Riemanniana, denotemos por ∇ e $\overline{\nabla}$ as conexões Riemannianas de M e $\overline{M}$, respectivamente. É fácil ver que $\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^T$, onde $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ são as extensões de X e Y, respctivamente, é a conexão Riemanniana de M em relação a métrica induzida por f.

Sejam $p \in M$ e $\eta \in T_pM^{\perp}$, a aplicação $H_\eta : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ dada por

$$H_\eta(x,y) = \langle B(x,y), \eta\rangle, \quad x, y \in T_pM,$$

onde $B(X,Y) = (\overline{\nabla}_X Y)^{\perp}$ e X e Y são extensões locais de x e y respectivamente, é uma forma bilinear simétrica.

Definição 2.2. *A forma quadrática II_η definida em T_pM por*

$$II_\eta(x) = H_\eta(x,x)$$

é chamada de segunda forma fundametal de f em p em relação a normal η.

À aplicação bilinear H_η está associada uma aplicação linear auto-adjunta $A_\eta : T_pM \to T_pM$ por

$$\langle A_\eta(x), y\rangle = H_\eta(x,y).$$

Pode-se provar sem dificuldades, ver por exmeplo (23), que se N é uma extensão local de η normal a M, então

$$A_\eta(x) = -(\overline{\nabla}_x N)^T. \tag{2.1}$$

Definição 2.3. *Sejam $f : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ uma imersão e $\eta^1, \cdots, \eta^k$ uma base ortonormal de $TM^{\perp}$. Definimos o vetor curvatura média da imersão por*

$$\mathbf{H} = \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{k}(tr\, A_r)\eta^r, \tag{2.2}$$

onde $A_r = A_{\eta^r}$.

O vetor curvatura média acima definido não depende da escolha da base $\eta^1, \cdots, \eta^k$ escolhida.

2.3 Curvaturas de Hipersuperfícies em $\mathbb{R}^{n+1}$

Seja $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientada, η sua normal unitária e $p \in M$. Como $dim\ (T_pM)^{\perp} = 1$, então a orientção de M deixa η unicamente determinado, e neste caso a aplicação $A_\eta = A_p : T_pM \to T_pM$ é definida por $A_p(v) = -\overline{\nabla}_v\eta$, onde $\overline{\nabla}$ é a conexão Riemanniana do $\mathbb{R}^{n+1}$, é chamada de operador de forma de M em p. A aplicação linear A_p é simétrica com respeito a primeira forma fundamental I_p, definida como a restrição do produto interno euclidiano ao espaço tangente T_pM, de modo que existe uma base ortonormal de T_pM consistindo de autovetores $\{e_1, \cdots, e_n\}$ de A_p associado aos autovalores $\lambda_1(p), \cdots, \lambda_n(p)$. Estes autovalores são chamados de curvaturas principais de M em p, ver por exemplo (23).

A forma quadrática associada a A_p é chamada de segunda forma fundamental de M em p, e é denotada por II_p. Assim temos que $II_p(v) = I_p(v, A_p(v))$, $v \in T_pM$.

A partir daqui, e quando não causar confusão, omitiremos o ponto p na notação, escrevendo $A = A_p$, $I = I_p$ e $II = II_p$.

Fixada uma base de T_pM, a matriz de A em p é dada por

$$[A] = [I]^{-1}[II],$$

onde $[I]$ e $[II]$ são as matrizes das primeira e segunda formas fundamentais em relação a base fixada.

Chamamos de curvatura média e de curvatura de Gauss- Kronecker de M na orientação dada por η, respectivamente, $\frac{1}{n}$traço e o determinante de A na base $\{e_1, \cdots, e_n\}$. Ou seja, na base de autovetores a curvatura média de M é dada por

$$H = \frac{1}{n} tr[A] = \frac{1}{n}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n),$$

e a curvatura de Gauss-Kronecker de M é dada por

$$\det[A] = \lambda_1 \cdots \lambda_n.$$

Na base de autovetores $\{e_1, \cdots, e_n\}$, temos pela equação de Gauss que a curvatura seccional da hipersuperfície $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é dada por $K(e_i, e_j) = \lambda_i \lambda_j$, o que por sua vez nos da que a curvatura de Ricci e a curvatura escalar de M são dadas, respectivamente, por

$$Ric(e_j) = \frac{1}{(n-1)} \sum_i \lambda_i \lambda_j \;\; i = 1, \cdots, \widehat{j}, \cdots n$$

e

$$R = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{ij} \lambda_i \lambda_j, \;\; j = 1, \cdots, n.$$

Na base de autovetores que diagonaliza o operador de forma, temos que o quadrado de norma A é dada por

$$\|A\|^2 = \sum_i \lambda_i^2,$$

o que nos dá a seguinte relação

$$n^2 H^2 = \left(\sum_i \lambda_i \right)^2 = \sum_i \lambda_i^2 + \sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j = \|A\|^2 + n(n-1)R.$$

2.4 O gradiente, divergente e o Laplaciano

Nesta seção iremos relembrar as definições e algumas propriedades do gradiente, divergente e Laplaciano de uma função $f \colon M^n \to \mathbb{R}$ suave onde M é uma variedade Riemanniana, visto que esses são objetos que serão usados no decorrer deste trabalho.

2.4.1 O Gradiente

Definição 2.4. *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função suave. O gradiente de f é o campo vetorial suave ∇f definido sobre M por*

$$\langle \nabla f, X \rangle = X(f)$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Se $e_1, \cdots, e_n$ é um referencial ortonormal em M então podemos escrever $\nabla f = \sum_i a_i e_i$, onde $a_i \in C^\infty(M)$. Assim $a_i = \langle \nabla f, e_i \rangle$. Mas por definição $\langle \nabla f, e_i \rangle = e_i(f)$, o que nos dá que numa base ortonormal o gradiente de f se escreve como

$$\nabla f = \sum_i e_i(f) e_i.$$

Para o gradiente temos a seguinte proposição:

Proposição 2.1. *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função suave. Dados $p \in M$ e $v \in T_pM$, seja $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ uma curva suave tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Então*

$$\langle \nabla f, v \rangle_p = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) \mid_{t=0} .$$

Em particular, se p é ponto de máximo ou mínimo local de f, então $\nabla f(p) = 0$.

Corolário 2.1. *Sejam $f : M^n \to \mathbb{R}$ e $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções suaves. Então*

$$\nabla(\varphi \circ f) = (\varphi' \circ f) \nabla f.$$

Prova. Sejam $p \in M$, $v \in T_pM$ e $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ uma curva suave tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Então da proposição anterior

$$\begin{aligned} \langle \nabla(\varphi \circ f), v \rangle_p &= \frac{d}{dt}(\varphi \circ f \circ \gamma)(t) \mid_{t=0} \\ &= \varphi'(f(p)) \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) \mid_{t=0} \\ &= (\varphi' \circ f) \langle \nabla f, v \rangle_p. \end{aligned}$$

E sendo $v \in T_pM$ qualquer, o resultado segue. □

2.4.2 O divergente

Definição 2.5. *Dado um compo de vetores $X \in \mathfrak{X}(M)$ definimos o divergente de X em $p \in M$ como a aplicação $div\, X : T_pM \to \mathbb{R}$ dada por*

$$div\, X = tr\, \{v \longrightarrow \nabla_v X\},$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M.

Desta forma se $e_1, \cdots, e_n$ é um referencial ortonormal em M^n, então

$$\text{div}\, X = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle.$$

Assim quando $f : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ é uma imersão, temos de (2.1) e (2.2) que podemos escrever o vetor curvatura média de M como

$$\mathbf{H} = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{k} (tr\, A_r) \eta^r = -\frac{1}{n} \sum_{r=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{n} \langle \overline{\nabla}_{e_i} \eta^r, e_i \rangle \right) \eta^r = -\frac{1}{n} \sum_{r=1}^{k} (\text{div}\, \eta^r) \eta^r,$$

onde $\eta^1, \cdots, \eta^k$ é uma base ortonormal de $TM^{\perp}$, $A_r = A_{\eta^r}$ e $\overline{\nabla}$ é a conexão Riemanniana de $\overline{M}$.

2.4.3 O Laplaciano

Definição 2.6. *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função suave. O Laplaciano de f é a função $\Delta f : M^n \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\Delta f = div\, (\nabla f).$$

Da definição de Laplaciano, das propriedades do divergente e do Corolário 2.1 segue facilmente a seguinte proposição

Proposição 2.2. *Sejam $f : M^n \to \mathbb{R}$ e $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções suaves. Então*

$$\Delta(\varphi \circ f) = (\varphi'' \circ f) |\nabla f|^2 + (\varphi' \circ f) \Delta f.$$

3 UM PRINCÍPIO DO MÁXIMO E APLICAÇÕES GEOMÉTRICAS

3.1 Introdução

Sejam M_1 e M_2 hipersuperfícies do $\mathbb{R}^{n+1}$ disjuntas e com bordo não vazios. Seguindo a nomenclatura de (2) diremos que M_1 e M_2 satisfazem o *Princípio do Máximo no Infinito* se

$$dist(M_1, M_2) = min\{dist(M_1, \partial M_2), dist(M_2, \partial M_1)\}.$$

Para superfícies do $\mathbb{R}^3$, Ronaldo F. de Lima, autor de (1), e Ronaldo F. de Lima e W. Meeks, autores de (2), definiram uma aproximação ideal a qual chamaram de **Contato ideal no Infinito** (Definição 3.3). Supondo esta aproximação Ronaldo F. de Lima provou em (1) a seguinte versão do Princípio do Máximo no Infinito

Teorema. *Sejam M_1 e M_2 duas H-superfícies disjuntas, completas, propriamente mergulhadas em $\mathbb{R}^3$, com curvatura Gaussiana limitada e bordos não vazio ∂M_1 e ∂M_2. Se M_1 e M_2 tem um contato ideal no infinito e M_1 ou M_2 é parabólica, então*

$$min\{dist(M_1, \partial M_2), dist(M_2, \partial M_1)\} = 0.$$

Onde por H-superfícies nos referimos a superfícies de curvatura média constante $H \neq 0$. Posteriormente em (2) Ronaldo F. de Lima junto com W. Meeks provam a seguinte versão deste princípio

Teorema. *Seja M_1 uma superfície com bordo ∂M_1 e curvatura Gaussiana limitada, que é propriamente mergulhada em $\mathbb{R}^3$ e cuja função curvatura média satisfaz $b_0 \leq H_{M_1} \leq b_1$, $b_0, b_1 > 0$. Assuma que M_2 é uma superfície com bordo ∂M_2, que é propriamente imersa em $\mathbb{R}^3$ e tal que $|H_{M_2}| \leq b_0$. Então, se M_2 tem um contato ideal no infinito com M_1, temos que*

$$min\{dist(M_1, \partial M_2), dist(M_2, \partial M_1)\} = 0.$$

Onde agora não mais se supõe M_1 ou M_2 parabólica nem que sejam H-superfícies. Observe que estes Teoremas necessitam da limitação da curvatura gaussiana de M_1 e M_2.

Neste capítulo, no Teorema 3.2, daremos uma generalização dos Teoremas acima, para hipersuperfícies parabólicas do $\mathbb{R}^{n+1}$ com um contato ideal no infinito porém, não necessitamos de hipótese sobre a curvatura Gaussiana de nenhuma hipersuperfície, provamos o seguinte teorema:

Teorema. *Sejam M_1 e M_2 duas hipersuperfícies do $\mathbb{R}^{n+1}$ disjuntas, propriamente mergulhadas no $\mathbb{R}^{n+1}$ e com bordos não vazios ∂M_1 e ∂M_2. Suponha que M_2 seja completa e que*

$$\sup_{M_2} |\mathbf{H}_{M_2}| \leq b_0 \leq \inf_{M_1} H_{M_1}, \quad b_0 > 0.$$

Se M_2 tem um contato ideal no infinito com M_1 e é parabólica então

$$min\{dist(M_1, \partial M_2), dist(M_2, \partial M_1)\} = 0$$

Como aplicação geométrica, os autores provam em (2) uma versão para superfícies disjuntas do $\mathbb{R}^3$ o Princípio do Máximo de Hopf com o seguinte Teorema

Teorema. *Suponha M_1 uma superfície propriamente mergulhada em $\mathbb{R}^3$, sem bordo, com curvatura Gaussiana limitada. Então se a função curvatura média de M_1 satisfaz $b_0 \leq H_{M_1} \leq b_1$, $b_0, b_1 > 0$, a superfície sem bordo M_2, que é propriamente imersa em $\mathbb{R}^3$ e cuja função curvatura média satisfaz $|H_{M_2}| \leq b_0$, não pode estar no lado convexo de M_1.*

Com uma versão parabólica, para H-superfícies, antes provada por Ronaldo F. de Lima em (1), Corolário 1. Resultados estes generalizados neste capítulo com os seguintes teoremas

Teorema. *Seja M_1 uma hipersuperfície sem bordo, propriamente mergulhada em $\mathbb{R}^{n+k}$ com curvatura escalar limitada e cuja curvatura média satisfaz $b_0 \leq H_{M_1} \leq b_1$, $b_0, b_1 > 0$. Seja também M_2 uma subvariedade n-dimensional, sem bordo, propriamente mergulhada em $\mathbb{R}^{n+k}$, disjunta de M_1 e suponha que existe uma função não negativa $\gamma \in C^2(M_2)$ satisfazendo as condições $C1)$, $C2)$ e $C3)$ do Teorema 3.9. Se*

$$\sup_{M_2} |\mathbf{H}_{M_2}| < \inf_{M_1} \Lambda_n$$

então M_2 não pode estar do lado convexo de M_1.

E no caso parabólico temos o seguinte teorema:

Teorema. *Sejam M_1 e M_2 duas hipersuperfícies do $\mathbb{R}^{n+1}$ disjuntas, propriamente mergulhadas no $\mathbb{R}^{n+1}$ e com bordos vazios. Suponha que M_2 seja completa e que*

$$\sup_{M_2} |\mathbf{H}_{M_2}| \leq b_0 \leq \inf_{M_1} H_{M_1}, \quad b_0 > 0.$$

Se M_2 é parabólica, então não pode estar no lado convexo de M_1.

3.2 Preliminares

Dada uma hipersuperfície suave e orientada $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$, iremos denotar a função curvatura média e o vetor curvatura média de M, respectivamente, por H_M e $\mathbf{H}_M$. Também denotaremos por ∇^M e Δ^M seu gradiente e Laplaciano, respectivamente.

3.2.1 Variedades Riamannianas Parabólicas

Seja M^n uma variedade Riemanniana n-dimensional com bordo suave, possivelmente vazio, ∂M e $\Omega \subset M$ um conjunto aberto em M. Uma função $h \in C^2(\Omega)$ é chamada harmônica se $\Delta^M h = 0$. Dizemos que h é subharmônica se

$$\Delta^M h \geq 0.$$

Funções subharmônicas irão desempenhar um papel importante nesta seção em que iremos abordar uma classe de variedades Riemannianas que são caracterizadas por estas funções.

Quando uma variedade Riemanniana M tem bordo ∂M vazio diremos que M é parabólica se não admite função subharmônica, não constante, limitada por cima. Isto é, M é parabólica se $\Delta^M h \geq 0$ e $\sup_M h < +\infty$ tivermos h constante. Como exemplo de tais variedades Riemannianas Cheng e Yau provaram em (22) que $M = \mathbb{R}^2$ é uma variedade parabólica.

No caso em que ∂M é não vazio iremos utilizar a seguinte definição de variedade parabólica dada por Ronaldo F. de Lima em (1).

Definição 3.1. *Uma variedade Riemanniana n-dimensional M^n, completa, com bordo suave não vazio ∂M é chamada* ***parabólica*** *se, para qualquer função subharmônica h em M, limitada por cima tivermos*

$$\sup_M h = \sup_{\partial M} h.$$

Ou seja, estamos assumindo como variedades Riemannianas parabólicas com bordo não vazio, aquelas cujas funções subharmônicas limitadas por cima atingem seu supremo no bordo de M. O Próximo resultado, cuja demosntração pode ser encontrado em (1), dá uma condição suficiente para que uma variedade Riemanniana com bordo não vazio seja parabólica.

Proposição 3.1. *Seja M uma variedade Riemanniana completa com bordo suave não vazio ∂M. Se existe uma função própria, harmônica e positiva definida em M, então M é parabólica.*

Exemplo 3.1. *Seja C o cilindro em $\mathbb{R}^3$ dado por $C = \{(x,y,z) : x^2+y^2 = 1, z \geq 1\}$. Considere a parametrização de C dada por $X(\theta,r) = (\cos\theta, \sin\theta, r)$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $r \geq 1$. A função $h(\theta,r) = r$ definida em C é positiva, própria e harmônica, logo pela Prposição 3.1 C é parabólica.*

Mais geralmente, podemos considerar em $C^n = [1,+\infty) \times \mathbb{S}^{n-1}$ a métrica $ds^2 = dr^2 + \tau(r)^2 d\theta^2$, onde dr^2 e $d\theta^2$ são as métricas canônicas em $[1,+\infty)$ e $\mathbb{S}^{n-1}$, respectivamente, e τ é uma função positiva e diferenciável em $[1,+\infty)$. Dessa forma, o Laplaciano em $C^n_\tau = (C^n, ds^2)$ é dado por, ver (21)

$$\Delta_\tau = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + (n-1)\frac{\tau'}{\tau}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\tau^2}\Delta_\theta,$$

onde Δ_θ denota o Laplaciano em $\mathbb{S}^{n-1}$.

Exemplo 3.2. *Seja $\tau(r) = \frac{1}{r}$, e considere em C^2_τ a função h dada por $h(\theta, r) = \frac{r^2}{2}$, então*

$$\Delta_\tau h = \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + (n-1)\frac{\tau'}{\tau}\frac{\partial h}{\partial r} + \frac{1}{\tau^2}\Delta_\theta h = 1 - \frac{1}{r}r = 0.$$

Como h é positiva e própria, pela Proposição 3.1, C^2_τ é parabólico.

Iremos agora enunciar uma proposição de fundamental importância na de-monstração do nosso resultado principal, cuja demonstração pode ser encontrada em (1). No que segue M^n é uma variedade Riemanniana n-dimensional, completa, com bordo suave, possivelmente vazio, ∂M e $M' \subset M$ uma subvariedade Riemanniana n-dimensional de M completa, mergulhada com bordo suave não vazio $\partial M'$.

Proposição 3.2 (Proposição 3 de (1))**.** *Sejam M e M' como acima. Então M' é parabólica se M é parabólica.*

Também faremos uso do seguinte Lema, encontrado em (5).

Lema 3.1 (Lema 2.3 de (5))**.** *Seja A uma forma quadrática em um espaço vetorial euclidiano n-dimensional V com autovalores $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \cdots \leq \lambda_n$. Então para qualquer subespaço k-dimensional $W \subset V$ temos que*

$$trA\mid_W \geq \lambda_1 + \cdots + \lambda_k.$$

Para fazer um paralelo com o princípio do máximo no infinito, vamos definir a seguir o contato ideal em um ponto (Definição3.2) e apresentar o Principio do Máximo de Hopf (Teorema 3.1) que, segundo o autor de (1) foi o que o inspirou a pensar em um contato ideal no infinito (ver definição 3.3) para hipersuperfícies.

Definição 3.2 (Contato ideal em p)**.** *Sejam M_1 e M_2 duas hipersuperfícies orientadas do $\mathbb{R}^{n+1}$. Se M_1 e M_2 são tangentes em um ponto interior p e tem, em p a mesma normal unitária η_0, dizemos que elas tem um **contato ideal em** p. Vamos dizer também que M_1 está acima de M_2 próximo a p com respeito a η_0, se quando expressarmos M_1 e M_2 como gráficos de funções ϕ_1 e ϕ_2 sobre o hiperplano tangente em p tivermos $\phi_1 \geq \phi_2$ em uma vizinhança de p.*

Teorema 3.1 (Princípio do Máximo de Hopf)**.** *Sejam M_1 e M_2 hipersuperfícies orientadas do $\mathbb{R}^{n+1}$ que tem um contato ideal em p. Sejam H_{M_1} e H_{M_2} suas funções curvaturas médias, respectivamente. Se $H_{M_1} \leq H_{M_2}$ em p então M_1 não pode estar acima de M_2, a menos que coincidam numa vizinhança de p.*

3.3 O Princípio do Máximo no Infinito para Hipersuperfícies do $\mathbb{R}^{n+1}$

Introduziremos agora, e a usaremos no decorrer deste trabalho, a definição de **Contato Ideal no Infinito** utilizada em (2) e que tem uma versão anterior dada pelo autor de (1).

Definição 3.3 (Contato ideal no Infinito). *Seja M_1 uma hipersuperfície propriamente mergulhada em $\mathbb{R}^{n+k}$ cuja função curvatura média é positiva. Dizemos que a subvariedade n-dimensional $M_2 \subset \mathbb{R}^{n+k}$ tem um* ***Contato Ideal no Infinito*** *com M_1, se M_1 e M_2 são disjuntas e existem sequências de pontos interior $y_i \in M_1$, de pontos interior $x_i \in M_2$ e $\lambda_i > 0$, $i \in \mathbb{N}$, com*

$$|y_i - x_i| \to 0 \qquad e \qquad x_i - y_i = \lambda_i \mathbf{H}_{M_1}(y_i)$$

sempre que $i \to \infty$.

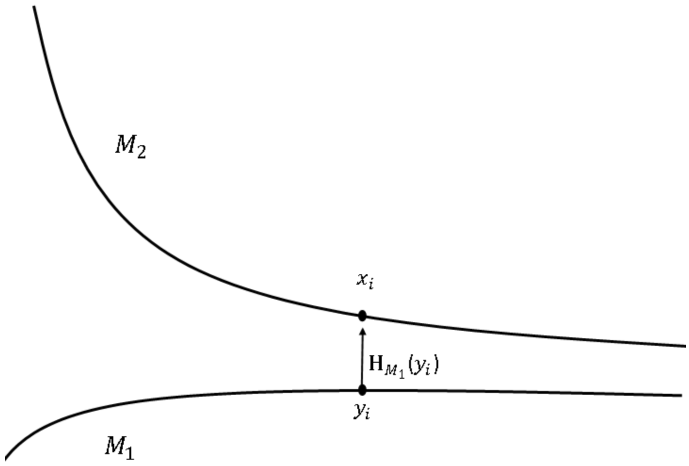

Figura 1 – Contato Ideal no Infinito

Aqui, como em (2), vamos dizer que as hipersuperfícies disjuntas M_1 e M_2, com bordos não vazios ∂M_1 e ∂M_2 e propriamente imersas no $\mathbb{R}^{n+1}$ satisfazem o *Princípio do Máximo no Infinito* se

$$dist(M_1, M_2) = min\{dist(M_1, \partial M_2), dist(M_2, \partial M_1)\},$$

onde *dist* é a distância em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Enunciaremos a seguir o principal resultado desta seção. Aqui estamos supondo $M_1 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície suave, orientada com função curvatura média H_{M_1} positiva.

Teorema 3.2 (Princípio do Máximo no Infinito). *Sejam M_1 e M_2 duas hipersuperfícies do $\mathbb{R}^{n+1}$ disjuntas, propriamente mergulhadas no $\mathbb{R}^{n+1}$ e com bordos não vazios ∂M_1 e ∂M_2. Suponha que M_2 seja completa e que*

$$\sup_{M_2} |\mathbf{H}_{M_2}| \leq b_0 \leq \inf_{M_1} H_{M_1}, \;\; b_0 > 0. \tag{3.1}$$

Se M_2 tem um contato ideal no infinito com M_1 e é parabólica então

$$min\{dist(M_1, \partial M_2), dist(M_2, \partial M_1)\} = 0 \tag{3.2}$$

Tal teorema é uma generalização dos Teoremas 1.1 e 1.2, que além de ser, por si só, um resultado notável, sua demonstração nos leva ao Teorema 3.6 que é uma generalização do princípio do máximo de Hopf no $\mathbb{R}^{n+1}$ para hipersuperfícies que tem um contato ideal no infinito (ver definição 3.3) no sentido que são hipersuperfícies disjuntas e se aproximam assintoticamente uma da outra. O exemplo 3.3 a seguir mostra que o Teorema 3.2 pode não ser verdade sem a hipótese do **Contato Ideal no Infinito**.

Exemplo 3.3. *Seja M_1 a superfície de revolução obtida girando a curva $\alpha(t) = (t, 0, \frac{1}{1-t^2})$, $0 < t_0 < t < 1$, em torno do eixo z e M_2 o cilindro $M_2 = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 = 1,\ z > z_0 > 0\}$. Pelo Exemplo 3.1 M_2 é parabólica e temos que $\sup_{M_2} |H_{M_2}| = \frac{1}{2}$. Também temos que $\inf_{M_1} H_{M_1} = \frac{1}{2}$, mas*

$$0 = dist(M_1, M_1) < min\{dist(M_1, \partial M_2), dist(M_2, \partial M_1)\}.$$

Isto se dá pois não existem $y \in M_1$, $x \in M_2$ e $\lambda > 0$ tal que $x - y = \lambda \mathbf{H}_{M_1}(y)$, ou seja, M_2 não tem um contato ideal no infinito com M_1, Figura 2.

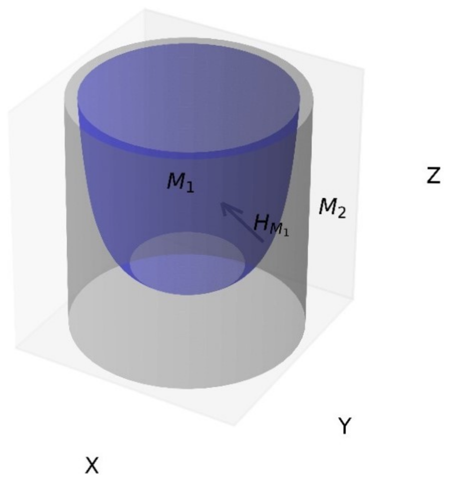

Figura 2 – Sem Contato Ideal no Infinito

3.3.1 Resultados Preliminares

Na demonstração do Teorema 3.2 faremos uso dos Lemas 3.2 e 3.3 abaixo, os quais necessitam das seguintes considerações: Seja $M_1 \subset \mathbb{R}^{n+k}$ uma hipersuperfície, pelo menos C^2, com curvatura média H_{M_1} com respeito à normal unitária η. Denotaremos por

$$\Lambda_n := \frac{1}{n}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$$

a "n-ésima curvatura média"com respeito a η, onde $\lambda_1 \leq \lambda_2 \cdots \leq \lambda_{n+k-1}$ são as curvaturas principais de M_1 com respeito a η. Observe que $\Lambda_{n+k-1} = H_{M_1}$. Seja também $M_2 \subset \mathbb{R}^{n+k}$, uma C^2 subvariedade n-dimensional, $n \geq 1$, com vetor curvatura média

$$\mathbf{H}_{M_2} = -\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{k}(\mathrm{div}\eta^r)\eta^r$$

onde $\eta^1, \cdots, \eta^k$ são campos de vetores ortonormais normal a M_2.

Seja agora d a função distância $d(x) := dist(x, M_1)$. Tal função é de classe C^2 em uma vizinhança de M_1, é Lipschitz com constante 1 e é orientada pela escolha de η, isto é, temos $\eta(y) = Dd(x)$, onde $y \in M_1$ é tal que $|x-y| = d(x)$ e $D = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{n+k}}\right)$ é o gradiente de $\mathbb{R}^{n+k}$ (ver (3) ou (6)). Desta forma o ponto x é tal que $x = y + d(x)\eta(y)$.

Para cada x próximo a M_1 consideremos a hipersuperfície paralela

$$M_{1d(x)} = \{p \in \mathbb{R}^{n+k} : d(p) = d(x)\} = d^{-1}(d(x)).$$

Tais hipersuperfícies são de classe C^2 e tem curvaturas principais em x_0 dadas por (ver (3) ou (6))

$$\frac{\lambda_1(y_0)}{1-\lambda_1(y_0)d(x_0)} \leq \frac{\lambda_2(y_0)}{1-\lambda_2(y_0)d(x_0)} \leq \cdots \leq \frac{\lambda_{n+k-1}(y_0)}{1-\lambda_{n+k-1}(y_0)d(x_0)}$$

onde $y_o \in M_1$ é tal que $|x_0 - y_0| = d(x_0)$ e $\lambda_1(y_0) \leq \lambda_2(y_0) \leq \cdots \leq \lambda_{n+k-1}(y_0)$, são as curvaturas principais de M_1 em y_0, se $|d| \ll 1$. Observe que isso nos dá que

$$\frac{1}{n}\left(\frac{\lambda_1(y_0)}{1-\lambda_1(y_0)d(x_0)} + \cdots + \frac{\lambda_n(y_0)}{1-\lambda_n(y_0)d(x_0)}\right) \geq \frac{1}{n}(\lambda_1(y_0) + \cdots + \lambda_n(y_0))$$

para qualquer hipersuperfície M_{1d}. Em outras palavras, a n-curvatura média $\Lambda_n(x_0)$ de M_{1d} em x_0 não é menor que a n-curvatura média $\Lambda_n(y_0)$ de M_1 em y_0.

No que segue seja $e_1, e_2, \cdots, e_n$ uma base ortonormal de T_xM_2 e denote por

$$e_i^T := e_i - \langle e_i, \eta\rangle\eta \tag{3.3}$$

a projeação ortogonal de e_i sobre o espaço tangente T_xM_{1d}. Seja também $T_xM_2^T$ o espaço projeção ortogonal de T_xM_2 sobre T_xM_{1d}. Finalmente, sejam II_d e A_d a segunda forma fundamental e o operador de forma de M_{1d}, respectivamente, com respeito a normal η.

O lema a seguir é uma adaptação do Lema 1 em (3), com demonstração adaptada ao contato ideal no infinito.

Lema 3.2. *Sejam M_1 e M_2 como acima e d a função $d(x) = dist(x, M_1)$. Suponha que M_2 tem um contato ideal no infinito com M_1. Então temos*

$$\Delta^{M_2}d - \sum_{i,j}^{n}\sigma_{ij}II_d(e_i^T, e_j^T) - n\langle\mathbf{H}_{M_2}, Dd\rangle + trA_d\,|_{T_xM_2^T} = 0,$$

onde $\sigma_{ij} = \dfrac{\nabla^{M_2}_{e_i}d\nabla^{M_2}_{e_j}d}{1-|\nabla^{M_2}d|^2}$ *e* $\nabla^{M_2}_{e_i}$ *é a derivada na direção de* e_i.

Prova. Seja $x \in M_2$ tal que $d(x) \ll 1$, tal ponto existe pois M_2 tem um contato ideal no infinito com M_1. Então se $\eta^1, \cdots, \eta^k$ é uma base ortonormal de $T_x M_2^{\perp}$ e $Dd = \eta$ é o gradiente euclidiano de d, temos de

$$\nabla^{M_2} d = Dd - \langle Dd, \eta^1\rangle \eta^1 - \cdots - \langle Dd, \eta^k\rangle \eta^k$$

que

$$\begin{aligned} \Delta^{M_2} d \quad = \quad \mathrm{div}\nabla^{M_2} d \quad &= \mathrm{div}Dd - \sum_{r=1}^{k} \langle Dd, \eta^r\rangle \mathrm{div}\eta^r \\ &= \mathrm{div}Dd + n\langle \mathbf{H}_{M_2}, Dd^{\perp}\rangle \end{aligned} \tag{3.4}$$

onde $Dd^{\perp} = \langle Dd, \eta^1\rangle \eta^1 + \cdots + \langle Dd, \eta^k\rangle \eta^k$ é a componente normal de $\eta = Dd$ relativo a M_2 e $\mathbf{H}_{M_2} = -\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{k}(\mathrm{div}\eta^r)\eta^r$ é o vetor curvatura média de M_2.

Denote por $\overline{\nabla}_{e_i}$ a derivada direcional euclidiana na direção de e_i. Então como

$$e_i = e_i^T + \langle e_i, \eta\rangle \eta, \text{ e } |\eta|^2 = 1$$

temos de (3.4) que

$$\begin{aligned} \Delta^{M_2} d &= \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, \overline{\nabla}_{e_i} \eta\rangle + n\langle \mathbf{H}_{M_2}, Dd^{\perp}\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle e_i^T, \overline{\nabla}_{e_i^T} \eta\rangle + n\langle \mathbf{H}_{M_2}, Dd^{\perp}\rangle \\ &= -\sum_{i=1}^{n} II_d(e_i^T, e_i^T) + n\langle \mathbf{H}_{M_2}, Dd^{\perp}\rangle \end{aligned}$$

e como $Dd = \nabla^{M_2} d + Dd^{\perp}$, temos que

$$\Delta^{M_2} d - n\langle \mathbf{H}_{M_2}, Dd\rangle + \sum_{i=1}^{n} II_d(e_i^T, e_i^T) = 0. \tag{3.5}$$

Como $d(x) \ll 1$, pois M_2 tem um contato ideal no infinito com M_1, temos que $|\nabla^{M_2} d| < 1$. Ou seja, $|\nabla^{M_2} d|(x) < 1$ se $dist(x, M_1)$ é suficientemente pequena. Sendo assim defina

$$\begin{aligned} g_{ij} \quad &:= \quad \langle e_i^T, e_j^T\rangle = \langle e_i - \langle e_i, \eta\rangle \eta, e_j - \langle e_j, \eta\rangle \eta\rangle \\ &= \quad \delta_{ij} - \langle e_i, \eta\rangle \langle e_j, \eta\rangle \end{aligned}$$

e como $|\nabla^{M_2} d| < 1$, temos que o inverso g^{ij}, de g_{ij} é dado por

$$g^{ij} = \delta_{ij} + \frac{\langle e_i, \eta\rangle \langle e_j, \eta\rangle}{1 - \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, \eta\rangle^2} =: \delta_{ij} + \sigma_{ij}.$$

E assim o traço de A_d em $T_x {M_2}^T$ é dado por

$$\begin{aligned} trA_d \mid_{T_x {M_2}^T} &= \sum_{i,j}^{n} g^{ij} II_d(e_i^T, e_j^T) \\ &= \sum_{i=1}^{n} II_d(e_i^T, e_i^T) + \sum_{i,j}^{n} \sigma_{ij} II_d(e_i^T, e_j^T). \end{aligned}$$

Donde de (3.5) teremos

$$\Delta^{M_2} d - n\langle \mathbf{H}_{M_2}, Dd\rangle + trA_d\,|_{T_x M_2{}^T} - \sum_{i,j}^{n} \sigma_{ij} II_d(e_i^T, e_j^T) = 0. \tag{3.6}$$

E o lema segue observando que

$$\langle e_i, \eta\rangle = \langle e_i, Dd\rangle = \langle e_i, \nabla^{M_2} d\rangle + \langle e_i, Dd^{\perp}\rangle = \langle e_i, \nabla^{M_2} d\rangle = \nabla^{M_2}_{e_i} d$$

e

$$\nabla^{M_2} d = \sum_{i=1}^{n} (\nabla^{M_2}_{e_i} d) e_i$$

e assim

$$\sigma_{ij} = \frac{\langle e_i, \eta\rangle\langle e_j, \eta\rangle}{1 - \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, \eta\rangle^2} = \frac{\nabla^{M_2}_{e_i} d \nabla^{M_2}_{e_j} d}{1 - |\nabla^{M_2} d|^2}.$$

□

Lema 3.3. *Sejam M_1 e M_2 como no Lema 3.2 e $d(x) = dist(x, M_1)$. Suponha que M_2 tem um contato ideal no infinito com M_1 e que*

$$\sup_{M_2} |\mathbf{H}_{M_2}| \leq \inf_{M_1} \frac{1}{n}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n) = \inf_{M_1} \Lambda_n.$$

Então temos que

$$\Delta^{M_2} d - C_0 |\nabla^{M_2} d|^2 \leq 0, \tag{3.7}$$

para alguma constante positiva C_0.

Prova. Primeiro provaremos que

$$-n\langle \mathbf{H}_{M_2}, Dd\rangle + trA_d\,|_{T_x M_2^T} \geq 0. \tag{3.8}$$

Pelo Lema 3.1 temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} trA_d\,|_{T_x M_2^T} &\geq \frac{1}{n}\left(\frac{\lambda_1(y)}{1 - \lambda_1(y)d(x)} + \frac{\lambda_2(y)}{1 - \lambda_2(y)d(x)} + \cdots + \frac{\lambda_n(y)}{1 - \lambda_n(y)d(x)}\right) \\ &\geq \frac{1}{n}(\lambda_1(y) + \cdots + \lambda_n(y)) \end{aligned}$$

onde $y \in M_1$ é tal que $|x - y| = d(x) \ll 1$ e $\lambda_1(y), \cdots, \lambda_n(y)$ são as n primeiras curvaturas principais de M_1. Como supomos que

$$\sup_{M_2} |\mathbf{H}_{M_2}| \leq \inf_{M_1} \Lambda_n$$

concluímos que $\frac{1}{n} trA_d\,|_{T_x M_2^T} \geq |\mathbf{H}_{M_2}|$ e pela desigualdade de Schwarz, temos que

$$\langle \mathbf{H}_{M_2}, Dd\rangle \leq |\mathbf{H}_{M_2}||Dd| = |\mathbf{H}_{M_2}|$$

pois $Dd = \eta$, e (3.8) segue.

Por simplicidade de notação façamos $\nabla^{M_2}_{e_i} d = d_i$. Seja σ_{ij} dado no Lema 3.2, então

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j}^{n} \sigma_{ij} II_d(e_i^T, e_j^T) &= \sum_{i,j}^{n} \frac{II_d(e_i^T, e_j^T) d_i d_j}{1 - |\nabla^{M_2} d|^2} \\
&= \sum_{i,j}^{n} \frac{II_d(d_i e_i^T, d_j e_j^T)}{1 - |\nabla^{M_2} d|^2} \\
&= \frac{II_d((\nabla^{M_2} d)^T, (\nabla^{M_2} d)^T)}{1 - |\nabla^{M_2} d|^2} \\
&\leq \frac{C_0 |(\nabla^{M_2} d)^T|^2}{1 - |\nabla^{M_2} d|^2} \leq \frac{C_0 |\nabla^{M_2} d|^2}{1 - |\nabla^{M_2} d|^2} \leq C_0 |\nabla^{M_2} d|^2
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

para alguma constante positiva C_0, onde a terceira desigualdade segue de $|\nabla^{M_2} d| \ll 1$, pois M_2 tem um contato ideal no infinito com M_1. Usando agora (3.6), (3.8) e (3.9) o lema segue.

□

3.3.2 Demonstração do Resultado Principal

A demonstração do Teorema 3.2 é baseada na demonstração do caso de H-superfícies parabólicas do $\mathbb{R}^3$ dada no Teorema 1 em (1). Nela utilizaremos os Lemas 3.2 e 3.3 acima, cujos equivalentes em (1) são os Lemas 3 e 4, respectivamente. Estes nos permitirá montar, especificamente o Lema 3.3, em um conjunto conveniente uma função subharmônica, e supondo por absurdo que (3.2) não vale chegaremos a uma contradição com a parabolicidade de M_2. Vamos então a ela.

Demonstração do Teorema 3.2. Suponha que (3.2) seja falso, isto é,

$$m_0 = min\{dist(M_1, \partial M_2), dist(M_2, \partial M_1)\} > 0.$$

Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, seja

$$M_2(\varepsilon) = \{x \in M_2 : dist(x, M_1) \leq \varepsilon\}.$$

Para cada $x \in M_2(\varepsilon)$, considere o conjunto

$$S_x = \{y \in M_1 : |y - x| = dist(x, M_1) \;\; e \;\; x - y = \lambda \mathbf{H}_{M_1}(y), \;\; \lambda > 0\}$$

e finalmente defina o conjunto $M_2'(\varepsilon) \subset M_2(\varepsilon)$ por

$$M_2'(\varepsilon) = \{x \in M_2(\varepsilon) : S_x \neq \emptyset\}.$$

Note que $M_2'(\varepsilon)$ tem interior não vazio pois M_1 e M_2 são propriamente mergulhadas em $\mathbb{R}^{n+1}$ e tem um contato ideal no infinito. Seja $C_2(\varepsilon) \subset M_2'(\varepsilon)$ uma componente conexa de $M_2'(\varepsilon)$. Tome agora $\varepsilon > 0$ tal que $m_o > \varepsilon$. Desta última suposição temos que $\partial M_2 \cap C_2(\varepsilon) = \emptyset$. De fato, caso contrário se $x \in C_2(\varepsilon) \subset M_2'(\varepsilon)$ teríamos $dist(x, M_1) \leq \varepsilon$ e $x \in \partial M_2$ teríamos $dist(x, M_1) > \varepsilon$, pois $dist(M_1, \partial M_2) > \varepsilon$, o que nos dá

$$\partial C_2(\varepsilon) = \{x \in C_2(\varepsilon) : dist(x, M_1) = \varepsilon\} \subset int M_2.$$

Considere agora a função distância $d(x) = dist(x, M_1)$. Temos pelo Lema 3.3 que

$$\Delta^{M_2} d - C_0 |\nabla^{M_2} d|^2 \leq 0 \tag{3.10}$$

para alguma constante positiva C_0. Observe que $d\,|_{\partial C_2(\varepsilon)} \equiv \varepsilon$. Também temos que $C_2(\varepsilon)$ é não compacto, caso contrário existiria x' no interior de $C_2(\varepsilon)$ tal que $d(x')$ seria um mínimo, e nesse caso $\nabla^{M_2} d(x') = 0$ e por (3.10) teríamos $\Delta^{M_2} d(x') \leq 0$, contradizendo o fato de x' ser um ponto de mínimo interior. Sendo assim $C_2(\varepsilon)$ é não compacto e $\sup_{C_2(\varepsilon)} d = \varepsilon$.

Considere agora a função ϕ em $C_2(\varepsilon)$ dada por

$$\phi(x) = e^{-C_0 d(x)}.$$

Calculando $\Delta^{M_2} \phi$ teremos, por (3.10), que

$$\Delta^{M_2} \phi = -C_0 e^{-C_0 d} (\Delta^{M_2} d - C_0 |\nabla^{M_2} d|^2) \geq 0$$

o que nos diz que ϕ é subharmônica em $C_2(\varepsilon)$. Como estamos assumindo que M_2 é parabólica, temos pela Proposição 3.2 que $C_2(\varepsilon)$ é parabólico. Então devemos ter

$$\sup_{C_2(\varepsilon)} \phi = \sup_{\partial C_2(\varepsilon)} \phi = e^{-C_0 \varepsilon}$$

o que é um absurdo pois $\sup_{C_2(\varepsilon)} \phi = 1 > e^{-C_0 \varepsilon} = \sup_{\partial C_2(\varepsilon)} \phi$. Como esta contradição derivou da suposição $m_0 = min\{dist(M_1, \partial M_2), dist(M_2, \partial M_1)\} > 0$, temos então que $m_0 = 0$ e o teorema fica demonstrado. $\square$

Em (14) Impera-Pigola-Setti, utilizam a seguinte definição de variedade Riemanniana parabólica quando $\partial M \neq \emptyset$ (ver também (15)).

Definição 3.4. *Seja M uma variedade Riemanniana orientada, com bordo $\partial M \neq \emptyset$ e normal unitária exterior ν. M é dita ser $\mathcal{N}$-parabólica se as únicas soluções do problema*

$$\begin{cases} \Delta^M h \geq 0 & em \quad M \\ \dfrac{\partial h}{\partial \nu} \leq 0 & em \quad \partial M \\ \sup_M h < +\infty \end{cases} \tag{3.11}$$

são as funções constantes $h \equiv \sup_M h$.

E obtêm a seguinte proposição(Apêndice A em (14)):

Proposição 3.3. *Seja M uma variedade Riemanniana $\mathcal{N}$-parabólica com bordo $\partial M \neq \emptyset$ e h uma solução do problema*

$$\begin{cases} \Delta^M h \geq 0 & em \quad M \\ \sup_M h < +\infty \end{cases}$$

Então

$$\sup_M h = \sup_{\partial M} h.$$

Provando assim que a Definição 3.4 implica na definição dada por Ronaldo F. de Lima em (1), e utlizada neste trabalho (Definição 3.1) . Isto é, funções subharmônicas limitadas por cima definidas em variedades Riemannianas parabólicas no sentido clássico (Definição 3.4), com bordo não vazio atingem seu supremo no bordo de M. Certamente quando o bordo de M é vazio a $\mathcal{N}$-parabolicidade equivale a parabolicidade.

Alguns pesquisadores conseguiram dar condições suficientes para que uma variedade Riemanniana seja $\mathcal{N}$-parabólica. Em (20) e (21) Grigor'yan provou o seguinte teorema

Teorema 3.3. *Seja M uma variedade Riemanniana completa com bordo $\partial M \neq \emptyset$. Se para algum ponto de referência $o \in M$, ou*

$$\frac{R}{VolB_R^M(o)} \notin L^1(+\infty)$$

ou

$$\frac{1}{Area(\partial_o B_R^M(o))} \notin L^1(+\infty)$$

então M é $\mathcal{N}$-parabólica.

Que tem como corolário o seguinte resultado provada por Cheng e Yau em (22), que nos garante que o $\mathbb{R}^2$ é uma variedade Riemanniana $\mathcal{N}$-parabólica.

Corolário 3.1 (Cheng-Yau)**.** *Seja M uma variedade Riemanniana completa. Se para algum ponto $o \in M$ e para alguma sequência $R_k \to +\infty$*

$$VolB_{R_k}^M(o) \leq cte.R_k^2,$$

então M é $\mathcal{N}$-parabólica.

Onde, seguindo a notação de (14) e (15), temos $o \in intM$ e para $R > 0$,

$$B_R^M(o) = \{x \in M : d_M(x,o) < R\},$$

$$\partial B_R^M(o) = \{x \in M : d_M(x,o) = R\},$$

sendo $d_M(x,o)$ a distância intrísseca de M. E para um conjunto aberto $D \subseteq M$, não necessariamente conexo, definimos

$$\partial_0 D = \partial D \cap intM$$

e

$$\partial_1 D = \partial M \cap D.$$

O que nos dá que

$$\partial_o B_R^M(o) = \partial B_R^M(o) \cap intM.$$

O Teorema 3.3 e o Corolário 3.1 nos dão então, uma condição geométrica, a partir do volume ou da área das bolas em M, para que uma variedade Riemanniana completa seja $\mathscr{N}$-parabólica.

Portanto em notação de (14) temos que $\partial_0 C_2(\varepsilon) = \partial C_2(\varepsilon) \cap intM_2$, onde $C_2(\varepsilon)$ é dado na demonstração do Teorema 3.2. Nessas condições, como estamos supondo por absurdo que $dist(\partial M_2, M_1) > \varepsilon$ na demonstração do Teorema 3.2 , temos que $\partial_0 C_2(\varepsilon) = \partial C_2(\varepsilon)$, pois se $\partial C_2(\varepsilon) \not\subset intM_2$ então existiria $x \in \partial C_2(\varepsilon) \cap \partial M_2$, e daí teríamos $dist(x, M_1) > \varepsilon$. Sendo assim o Princípio do Máximo de Ahlfors, Teorema 7 em (14) (ver também (15)), nos diz que se M_2 é $\mathscr{N}$-parabólica no Teorema 3.2, isto é, não admite função não constante satisfazendo (3.11), então a função $\phi(x) = e^{-C_0 d(x)}$ que satisfaz $\Delta^{M_2}\phi \geq 0$ em $\partial_0 C_2(\varepsilon) = \partial C_2(\varepsilon)$, é tal que

$$\sup_{C_2(\varepsilon)} \phi = \sup_{\partial C_2(\varepsilon)} \phi.$$

Nos permitindo, também, chegar a mesma contradição da demonstração do Teorema 3.2. Ou seja, o Teorema 3.2 continua válido se supormos $M_2 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície $\mathscr{N}$-parabólica com bordo $\partial M_2 \neq \emptyset$.

Em (16), ver também Apêndice A de (14), os autores extendem a noção de variedade Riemanniana $\mathscr{N}$-parabólica utlizando a seguinte definição

Definição 3.5. *Vamos dizer que uma variedade Riemanniana M com bordo ∂M não vazio é $\mathscr{D}$-parabólica se toda função limitada $h \in C^\infty(int\ M) \cap C^0(M)$ satisfazendo*

$$\begin{cases} \Delta^M h = 0 & em \quad int\ M \\ h = 0 & em \quad \partial M, \end{cases}$$

se anula identicamente.

Observe que da Proposição 3.3 temos que toda variedade Riemanniana $\mathscr{N}$-parabólica é $\mathscr{D}$-parabólica, a recíproca em geral não é verdade, ver Exemplo 3 de (16).

Quando M é uma variedade Riemanniana $\mathscr{D}$-parabólica temos a seguinte proposição.

Proposição 3.4 (Proposição 9 de (16)). *Seja M uma variedade Riemanniana com bordo ∂M não vazio. Então são equivalentes:*

1. *M é $\mathscr{D}$-parabólica;*

2. *Para qualquer domínio Ω contido em M e qualquer função limitada satisfazendo $\Delta^M h \geq 0$ em int Ω temos*

$$\sup_{\Omega} h = \sup_{\partial\Omega} h;$$

3. *Para toda função limitada h tal que $\Delta^M h \geq 0$ em int M temos*

$$\sup_M h = \sup_{\partial M} h.$$

Onde aqui seguindo a notção de (14) e (16), entende-se por domínio um aberto contido em M.

Agora com o auxílio da Proposião 3.4, podemos supor no Teorema 3.2 M_2 uma hipersuperfície $\mathscr{D}$-parabólica e ainda garantir a validade do mesmo. De fato, seguindo como na demonstração do Teorema 3.2, temos do Lema 3.3 que

$$\Delta^{M_2}\phi = -C_0\phi(\Delta^{M_2}d - C_0|\nabla^{M_2}d|^2) \geq 0, \tag{3.12}$$

para $\phi(x) = e^{-C_0 d(x)}$, onde $d(x) = dist(x, M_1)$ e $C_o > 0$. Tomemos agora $C_2(\varepsilon)$ dado na demonstração do Teorema 3.2. Sendo M_2 $\mathscr{D}$-parabólica a Proposição 3.4 acima garante que

$$1 = \sup_{C_2(\varepsilon)} \phi = \sup_{\partial C_2(\varepsilon)} \phi = e^{-C_0\varepsilon}$$

para ε fixado suficientemente pequeno, nos levando a mesma contradição da demonstração do Teorema 3.2. Em resumo, temos agora o seguinte teorema

Teorema 3.4. *Sejam M_1 e M_2 duas hipersuperfícies do $\mathbb{R}^{n+1}$ disjuntas, propriamente mergulhadas no $\mathbb{R}^{n+1}$ e com bordos não vazios ∂M_1 e ∂M_2. Suponha que M_2 seja completa e que*

$$\sup_{M_2} |\mathbf{H}_{M_2}| \leq b_0 \leq \inf_{M_1} H_{M_1}, \quad b_0 > 0. \tag{3.13}$$

Se M_2 tem um contato ideal no infinito com M_1 e é $\mathscr{N}$-parabólica (ou $\mathscr{D}$-parabólica) então

$$min\{dist(M_1, \partial M_2), dist(M_2, \partial M_1)\} = 0 \tag{3.14}$$

Para variedades Riemannianas $\mathscr{D}$-parabólicas temos o seguinte corolário do Teorema 3.4.

Corolário 3.2. *Sejam M_1 e M_2 como no Teorema 3.2. Assuma que M_2 seja completa e que*

$$\sup_{M_2} |\mathbf{H}_{M_2}| \leq b_0 \leq \inf_{M_1} H_{M_1}, \quad b_0 > 0.$$

Suponha que existem conjuntos relativamente compactos $\Omega_1 \subset M_1$ e $\Omega_2 \subset M_2$ tais que $M_1 \setminus \Omega_1$ é isométrico a $M_2 \setminus \Omega_2$. Se M_2 tem um contato ideal no infinito com M_1 e M_1 ou M_2 é $\mathscr{D}$-parabólica então

$$min\{dist(M_1, \partial M_2), dist(M_2, \partial M_1)\} = 0.$$

Prova. Pelo Corolário 12 de (16) temos que se $M_1 \setminus \Omega_1$ é isométrico a $M_2 \setminus \Omega_2$, sendo Ω_1 e Ω_2 conjuntos relativamente compactos, então M_1 é $\mathscr{D}$-parabólica se, e somente se, M_2 é $\mathscr{D}$-parabólica. Portanto, se M_2 é $\mathscr{D}$-parabólica, vale o teorema. Se M_1 é $\mathscr{D}$-parabólica, então M_2 o é, e novamente vale o teorema. □

Observação 3.1. *Em virtude da Proposição 3.2 e do Princípio do Máximo de Ahlfors, no caso da $\mathscr{N}$-parabolicidade, serem válidos quando $\partial M_2 = \emptyset$, temos que o Teorema 3.2 bem como o Teorema 3.4 continuam válidos se $\partial M_2 = \emptyset$, e neste caso temos $dist(M_2, \partial M_1) = 0$.*

Observação 3.2. *Se supormos M_2 uma hipersuperfície compacta, podemos retirar sua hipótese de parabolicidade no Teorema 3.2 e enunciar o Teorema 3.5 abaixo, usando agora o Teorema da divergência em sua demonstração.*

Teorema 3.5. *Sejam M_1 e M_2 duas hipersuperfícies do $\mathbb{R}^{n+1}$ disjuntas, propriamente mergulhadas no $\mathbb{R}^{n+1}$ e com bordos não vazios ∂M_1 e ∂M_2. Assuma que M_2 seja compacta e suponha que*

$$\sup_{M_2} |\mathbf{H}_{M_2}| < \inf_{M_1} H_{M_1}. \tag{3.15}$$

Se M_2 tem um contato ideal no infinito com M_1 então

$$min\{dist(M_1, \partial M_2), dist(M_2, \partial M_1)\} = 0 \tag{3.16}$$

Prova. De fato, assumindo (3.15) a demonstração do Lema 3.3 nos dá que

$$\Delta^{M_2} d - C_0 |\nabla^{M_2} d|^2 < 0, \tag{3.17}$$

para alguma constante positiva C_0, onde $d(x) = dist(x, M_1)$. Suponha agora que o teorema seja falso, isto é, que

$$min\{dist(M_1, \partial M_2), dist(M_2, \partial M_1)\} > 0.$$

Sejam $C_2(\varepsilon)$ e $\phi(x) = e^{-C_0 d(x)}$ como na demonstração do Teorema 3.2. Teremos então de (3.17) que

$$\Delta^{M_2} \phi = -C_0 \phi (\Delta^{M_2} d - C_0 |\nabla^{M_2} d|^2) > 0,$$

e calculando $\nabla^{M_2} \phi$ encontramos

$$\nabla^{M_2} \phi = -C_0 e^{-C_0 d} \nabla^{M_2} d = -C_0 \phi \nabla^{M_2} d.$$

Pelo Teorema da divergência, temos que se ν é a normal unitária exterior ao longo de $\partial C_2(\varepsilon)$, então

$$0 < \int_{C_2(\varepsilon)} \Delta^{M_2} \phi = \int_{\partial C_2(\varepsilon)} \langle \nabla^{M_2} \phi, \nu \rangle = -C_0 \int_{\partial C_2(\varepsilon)} \phi \langle \nabla^{M_2} d, \nu \rangle = 0 \tag{3.18}$$

pois d é constante ao longo de $\partial C_2(\varepsilon)$. E com a contradição obtida em (3.18) o teorema segue.

□

3.4 Aplicações Geométricas

Seja $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície completa, propriamente mergulhada e com bordo vazio. Dizemos que M é convexa com respeito a normal unitária η se sua função curvatura média for positiva. Observe que M divide o $\mathbb{R}^{n+1}$ em duas componentes conexas. Chamaremos então de *lado convexo* de M a componente do $\mathbb{R}^{n+1}$ para a qual o vetor curvatura média de M aponta.

3.4.1 Aplicações do Princípio do Máximo no infinito

Como consequência da demonstração do Teorema 3.2 temos o teorema a seguir que estende ao $\mathbb{R}^{n+1}$, sem hipóteses sobre a curvatura Gaussiana, o Corolário 1 em (1) e o Teorema 3.4 em (2). Estende também, no caso parabólico, o Teorema 1 em (9).

Teorema 3.6. *Sejam M_1 e M_2 duas hipersuperfícies do $\mathbb{R}^{n+1}$ disjuntas, propriamente mergulhadas no $\mathbb{R}^{n+1}$ e com bordos vazios. Suponha que M_2 seja completa e que*

$$\sup_{M_2} |\mathbf{H}_{M_2}| \leq b_0 \leq \inf_{M_1} H_{M_1}, \quad b_0 > 0.$$

Se M_2 é parabólica, então não pode estar no lado convexo de M_1.

Prova. Suponha que M_2 está contida no lado convexo de M_1. Se tivermos $dist(M_1, M_2) = 0$, então M_2 tem um contato ideal no infinito com M_1. Dessa forma podemos prosseguir como na demonstração do Teorema 3.2 definindo, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, os conjuntos

$$M_2(\varepsilon) = \{x \in M_2 : dist(x, M_1) \leq \varepsilon\}.$$

Para cada $x \in M_2(\varepsilon)$, considere os conjuntos

$$S_x = \{y \in M_1 : |y - x| = dist(x, M_1) \ \ e \ \ x - y = \lambda \mathbf{H}_{M_1}(y), \ \ \lambda > 0\}$$

e $M_2'(\varepsilon) \subset M_2(\varepsilon)$ dado por

$$M_2'(\varepsilon) = \{x \in M_2(\varepsilon) : S_x \neq \emptyset\}.$$

Se $C_2(\varepsilon) \subset M_2'(\varepsilon)$ é uma componente conexa de $M_2'(\varepsilon)$, teremos, pois estamos supondo que $\partial M_2 = \emptyset$, que

$$\partial C_2(\varepsilon) = \{x \in C_2(\varepsilon) : dist(x, M_1) = \varepsilon\} \subset int M_2.$$

E finalmente definindo em $C_2(\varepsilon)$ a função $\phi(x) = e^{-C_0 d(x)}$, onde $d(x) = dist(x, M_1)$, chegaremos a mesma contradição do Teorema 3.2, pois estamos supondo que M_2 é parabólica. Logo M_2 não pode estar no lado convexo de M_1 se $dist(M_1, M_2) = 0$.

Se $dist(M_1, M_2) > 0$, existem sequências $y_n \in M_1$ e $x_n \in M_2$ tal que a sequência $y_n - x_n$ tem uma subsequência que converge para um vetor $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ com $|v| = dist(M_1, M_2)$. Seja então $\overline{M}_2 = M_2 + v$. Dessa forma temos que $dist(M_1, \overline{M}_2) = 0$ e que $M_1 \cap \overline{M}_2 \neq \emptyset$. Seja $p \in M_1 \cap \overline{M}_2$, como $|v| = dist(M_1, M_2)$ e M_2 está contida no lado convexo de M_1, temos que M_1 e $\overline{M}_2$ tem um contato ideal em p. Pelo Princípio do máximo de Hopf, M_1 e $\overline{M}_2$ coincidem em uma vizinhança de p. Isto significa que M_1 difere de M_2 por uma translação em $\mathbb{R}^{n+1}$ de comprimento $|v| = dist(M_1, M_2)$. Donde temos que, nesta vizinhança de p, M_1 e M_2 são hiperplanos paralelos, contradizendo a hipótese de que a função curvatura média de M_1 é positiva. Logo, se $dist(M_1, M_2) > 0$, M_2 não pode estar no lado convexo de M_1, o que demonstra o teorema.

□

Novamente aqui no Teorema 3.6, assim como no Teorema 3.2, podemos supor, devido ao Teorema 7 em (14) (ver também (15)), M_2 uma hipersuperfície $\mathcal{N}$-parabólica e ainda teremos a validade do Teorema 3.6.

Observação 3.3. *De modo geral, uma hipersuperfície $M_1 \subset \mathbb{R}^{n+k}$ com curvaturas principais $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \cdots \leq \lambda_{n+k-1}$ com respeito a normal unitária η é chamada de n-meio convexo(n-convex mean) com respeito a normal η se $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n \geq 0$. Sendo assim a demonstração do Teorema 3.6 acima na verdade nos dá o seguinte teorema abaixo, cuja demonstração é totalmente análoga.*

Teorema 3.7. *Sejam M_1 uma hipersuperfície do $\mathbb{R}^{n+k}$ cuja função curvatura média é positiva e M_2 uma subvariedade n-dimensional do $\mathbb{R}^{n+k}$. Sejam ainda M_1 e M_2 disjuntas, propriamente mergulhadas no $\mathbb{R}^{n+k}$ e com bordos vazios. Suponha que M_2 seja completa e que*

$$\sup_{M_2} |\mathbf{H}_{M_2}| \leq \inf_{M_1} \Lambda_n.$$

Se M_2 é parabólica, então não pode estar no lado convexo de M_1.

O teorema acima é a versão, com o contato ideal no infinito, do Teorema 4 em (3) no caso em que M_2 é parabólica, e é lá denominado como ”Um princípio de barreira para subvariedades de codimensão arbitrária e curvatura média limitada”, ver também em (5) o caso para subvariedades mínimas.

3.4.2 Aplicações do Princípio de Máximo do Omori-Yau

Ao acrescentarmos uma hipótese adequada sobre a curvatura de Ricci da hipersuperfície M_2, podemos retirar sua condição de parabolicidade no Teorema 3.6, e usando o Princípio do Máximo de Omori-Yau, ver (11) e (12), obteremos um resultado análogo dado no Teorema 3.8 abaixo. Precisaremos, porém, acrescentar uma hipótese sobre o operador de forma da hipersuperfície M_1, o que nos permitirá o uso do lema abaixo.

Lema 3.4. *Sejam $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ uma hipersuperfície propriamente mergulhada e A seu operador de forma. Denotemos por $d_j = d(x_j) = dist(x_j, M)$, onde $x_j \in \mathbb{R}^{n+k}$ é uma sequência de pontos tal que $\lim_{j\to\infty} d_j = 0$, e por A_j o operador de forma de M em $y_j \in M$, tal que $|x_j - y_j| = d_j$. Suponha que*

$$\limsup_{j\to\infty} \|A_j\| < \infty.$$

Se II_{d_j} é a segunda forma fundamental da hipersuperfície paralela $M_{d_j} = d^{-1}(d_j)$ em $T_{x_j}M_{d_j}$, então

$$\lim_{j\to\infty} \|II_{d_j}\| < \infty.$$

Prova. Se A_{d_j} é o operador de forma de M_{d_j} então temos a equação de Riccati, ver (17),

$$\overline{\nabla}_{Dd} A_{d_j} + A_{d_j}^2 + \overline{\mathbf{R}}(\cdot\,, Dd)Dd = 0 \tag{3.19}$$

onde $\overline{\nabla}$ e $\overline{\mathbf{R}}$ são a conexão Riemanniana e o tensor curvatura do $\mathbb{R}^{n+k}$, respectivamente. Para $x_j \in \mathbb{R}^{n+k}$ tal que $d_j \ll 1$ considere a geodésica minimizante normalizada $\beta : [0, d_j] \to \mathbb{R}^{n+k}$ com $\beta(0) = y_j \in M$ e $\beta(d_j) = x_j \in M_{d_j}$. Como β é um segmento de reta ligando y_j a x_j e $d_j \ll 1$, então $\beta'(d) = Dd$ se $d \in [0, d_j]$. Seja então $v \in T_{x_j} M_{d_j}$ e V seu transporte paralelo ao longo de β com $V(0) = v_0 \in T_{y_j} M$. Se denotarmos por $'$ a derivada ao longo de β teremos

$$\langle A_d(V), V\rangle' = \langle \overline{\nabla}_{\beta'} A_d(V), V\rangle = \langle \overline{\nabla}_{Dd} A_d(V), V\rangle.$$

Logo por (3.19)

$$\langle A_d(V), V\rangle' = -\langle A_d^2(V), V\rangle - \langle \overline{\mathbf{R}}(V, Dd)Dd, V\rangle.$$

Portanto em $d = 0$ teremos

$$\langle A_d(V), V\rangle' \,|_{d=0} = -\langle A_j^2(v_0), v_0\rangle - \langle \overline{\mathbf{R}}(v_0, \eta)\eta, v_0\rangle$$

Assim a expansão em série de Taylor de $II_{d_j}(v) = \langle A_{d_j}(v), v\rangle$ em torno da segunda forma fundamental $II_j = II_d \,|_{d=0}$ de M é dada por

$$\langle A_{d_j}(v), v\rangle = \langle A_j(v_0), v_0\rangle - [\langle A_j^2(v_0), v_0\rangle + \langle \overline{\mathbf{R}}(v_0, \eta)\eta, v_0\rangle]d + O(d^2) \tag{3.20}$$

Sendo a curvatura seccional do $\mathbb{R}^{n+k}$ nula, temos de (3.20) que

$$|II_{d_j}(v)| \leq \|A_j\||v_0|^2 + \|A_j\|^2|v_0|^2 d + O(d^2). \tag{3.21}$$

Logo de (3.21)

$$\|II_{d_j}\| \leq \|A_j\| + \|A_j\|^2 d + O(d^2). \tag{3.22}$$

Fazendo agora $j \to \infty$ em (3.22) temos o desejado. □

Estamos em condições agora de enunciar o seguinte teorema

Teorema 3.8. *Sejam M_1 e M_2 duas hipersuperfícies disjuntas, sem bordo e propriamente mergulhada em $\mathbb{R}^{n+1}$. Assuma que M_2 seja completa com curvatura de Ricci satisfazendo*

$$Ric_{M_2} \geq -(n-1)R_0, \;\; R_0 > 0.$$

Seja $d(x) = dist(x, M_1)$ e A_j como no Lema 3.4 e suponha que

$$\limsup_{j\to\infty} \|A_j\| < \infty \tag{3.23}$$

para toda sequência $x_j \in M_2$ tal que $\lim_{j\to\infty} d(x_j) = \inf_{M_2} dist(x, M_1)$. Se

$$\sup_{M_2} |\mathbf{H}_{M_2}| < \inf_{M_1} H_{M_1} \tag{3.24}$$

então M_2 não pode estar no lado convexo de M_1.

Prova. Pelo Princípio do Máximo de Omori-Yau, com a versão para o mínimo, existe uma sequência $x_j \in M_2$ tal que $\lim_{j\to\infty} d(x_j) = \inf_{M_2} dist(x, M_1)$ e tem-se que

$$|\nabla^{M_2} d|(x_j) < \frac{1}{j} \qquad e \qquad \Delta^{M_2} d(x_j) > -\frac{1}{j}, \quad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{3.25}$$

Suponha que M_2 esteja no lado convexo de M_1 e que $dist(M_1, M_2) = 0$. Então M_2 tem um contado ideal no infinito com M_1. Sendo assim, para $j \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, a equação (3.6) na demonstração do Lema 3.2 nos dá que

$$\Delta^{M_2} d(x_j) - n|\mathbf{H}_{M_2}| + \sum_i^n \lambda_i(d_j) - \frac{II_{d_j}((\nabla^{M_2} d)^T, (\nabla^{M_2} d)^T)}{1 - |\nabla^{M_2} d|^2}(x_j) \leq 0 \tag{3.26}$$

onde $\lambda_i(d_j)$ são as curvaturas principais da hipersuperfície paralela $d^{-1}(d_j)$ na orientação dada por η e $d_j = d(x_j)$. Como temos que $\Delta^{M_2} d(x_j) > -\frac{1}{j}$ então (3.26) nos dá que

$$\frac{1}{j} > -n|\mathbf{H}_{M_2}| + \sum_i^n \lambda_i(d_j) - \frac{II_{d_j}((\nabla^{M_2} d)^T, (\nabla^{M_2} d)^T)}{1 - |\nabla^{M_2} d|^2}. \tag{3.27}$$

E de $|\nabla^{M_2} d|(x_j) < \frac{1}{j}$ temos que

$$\frac{|II_{d_j}((\nabla^{M_2} d)^T, (\nabla^{M_2} d)^T)|}{1 - |\nabla^{M_2} d|^2} \leq \|II_{d_j}\| \frac{|\nabla^{M_2} d|^2}{1 - |\nabla^{M_2} d|^2} < \|II_{d_j}\| \frac{1}{j^2 - 1}.$$

Então de (3.27)

$$\begin{aligned} \|II_{d_j}\| \frac{1}{j^2 - 1} + \frac{1}{j} &> \sum_i^n \lambda_i(d_j) - n|\mathbf{H}_{M_2}| \\ &\geq \sum_i^n \lambda_i - n|\mathbf{H}_{M_2}|. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Fazendo agora $j \to \infty$ em (3.28), teremos, pelo Lema 3.4,

$$n|\mathbf{H}_{M_2}| \geq \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$$

contradizendo (3.24). Logo M_2 não pode estar do lado convexo de M_1 se $dist(M_1, M_2) = 0$.

Se $dist(M_1, M_2) > 0$, existem sequências $y_n \in M_1$ e $x_n \in M_2$ tal que a sequência $y_n - x_n$ tem uma subsequência que converge para um vetor $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ com $|v| = dist(M_1, M_2)$. Seja então $\overline{M}_2 = M_2 + v$. Dessa forma temos que $dist(M_1, \overline{M}_2) = 0$. Se $M_1 \cap \overline{M}_2 = \emptyset$, então $\overline{M}_2$ tem um contao ideal no infinito com M_1, o que não pode acontecer pelo que foi visto no parágrafo anterior. Caso $M_1 \cap \overline{M}_2 \neq \emptyset$ então $p_0 \in M_1 \cap \overline{M}_2$ seria um ponto de mínimo da função d, e assim $\nabla^{\overline{M}_2} d(p_0) = 0$ e do Lema 3.3 teremos $\Delta^{\overline{M}_2} d(p_0) < 0$ contradizendo o fato de p_0 ser ponto de mínimo. Se M_1 e $\overline{M}_2$ coincidem numa vizinhança então d é constante, e novamente o Lema 3.3 diz que isso não pode acontecer. Logo M_2 não pode estar do lado convexo de M_1 se $dist(M_1, M_2) > 0$. □

O Teorema 3.8 continua válido se $M_1 \subset \mathbb{R}^{n+k}$ é uma hipersuperfície com curvatura média positiva e $M_2 \subset \mathbb{R}^{n+k}$ uma n-subvariedade mergulhada.

Observação 3.4. *Seja M^n uma hipersuperfície orientada imersa isometricamente no espaço forma Riemanniano $\mathbb{M}_c^{n+1}$. Se R_M é a curvatura escalar normalizada de M e A seu operador de forma, então da equação de Gauss temos a seguinte relação, ver por exemplo (18),*

$$\|A\|^2 = n^2 H_M^2 - n(n-1)(R_M - c).$$

Portanto, se $R_M \geq c$ temos que $\|A\|^2 \leq n^2 H_M^2$, donde $\|A\| \leq nH_M$, se $H_M > 0$. Logo, se a curvatura média de M for limitada, teremos

$$\sup_M \|A\| \leq n \sup_M H_M < \infty.$$

Com a Observação 3.4, o Teorema 3.8 nos dá o seguinte Corolário.

Corolário 3.3. *Sejam M_1 e M_2 como no Teorema 3.8. Assuma que M_2 seja completa com curvatura de Ricci limitada inferiormente. Seja R_{M_1} a curvatura escalar (normalizada) de M_1 e suponha que $R_{M_1} \geq 0$. Suponha também H_{M_1} seja limitada e que*

$$\sup_{M_2} |\mathbf{H}_{M_2}| < \inf_{M_1} H_{M_1}.$$

Então M_2 não pode estar do lado convexo de M_1.

Prova. Suponha M_2 no lado convexo de M_1 e que $dist(M_1, M_2) = 0$. Seja II_{d_j} a segunda forma fundamental da hipersuperfície paralela $d^{-1}(d_j)$, onde $d_j = d(x_j) = dist(x_j, M_1)$ e $x_j \in M_2$ é uma sequência dada por Omori-Yau, isto é, com $d_j \to 0$ satisfazendo (3.25). Então de acordo com a Observação 3.4 e pelo Lema 3.4, temos $\lim_{j\to\infty} \|II_{d_j}\| < \infty$. Seguindo agora como na demonstração do Teorema 3.8 temos o desejado. $\square$

Note que da Observação 3.4, se supormos R_{M_1} limitada no Corolário 3.3, podemos retirar a hipótese $R_{M_1} \geq 0$ e conseguir o mesmo resultado.

Observe que na demonstração do Teorema 3.8 as hipóteses sobre M_2 são essencialmente para que possamos usar o Princípio do Máximo de Omori-Yau na função $d(x) = dist(x, M_1)$. Dessa forma, podemos supor outras hipóteses em M_2 que nos permita usar este princípio. Isto pode ser feito utilizando o teorema de Pigola-Rigoli-Setti, ver (19), que estende a classe de variedades Riemanniana à qual vale o Princípio do Máximo de Omori-Yau. Antes, porém, daremos a seguinte definição dada por Pigola-Rigoli-Setti também em (19).

Definição 3.6. *Diremos que a variedade Riemanniana M satisfaz o Princípio do Máximo de Omori-Yau se, para qualquer função $u \in C^2(M)$ com $\sup_M u = u^* < \infty$, existe uma sequência de pontos $x_j \in M$, dependendo de M e de u, tal que*

$$\lim_{j\to\infty} u(x_j) = u^*, \ \ |\nabla^M u|(x_j) < \frac{1}{j}, \ \ \Delta^M u(x_j) < \frac{1}{j}.$$

Teorema 3.9 (Pigola-Rigoli-Setti)**.** *Seja M uma variedade Riemanniana e assuma que existe uma função não negativa γ satisfazendo:*

C1) $\gamma(x) \to \infty$ quando $x \to \infty$;

C2) $\exists B > 0$ tal que $|\nabla^M \gamma| \leq B\sqrt{\gamma}$ fora de um compacto;

C3) $\exists C > 0$ tal que $\Delta^M \gamma \leq C\sqrt{\gamma G(\sqrt{\gamma})}$ fora de um compacto, onde $G : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ é uma função suave satisfazendo

$$G(0) > 0, \quad G'(0) \geq 0, \quad \int_0^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{G(s)}} = +\infty, \quad \limsup_{t\to+\infty} \frac{tG(\sqrt{t})}{G(t)} < +\infty.$$

Então M satisfaz o Princípio do Máximo de Omori-Yau.

Devido ao Teorema de Pigola-Rigoli-Setti, Teorema 3.9 acima, o Corolário 3.3 pode ser estendido a uma classe mais ampla de variedades Riemanniana que satisfazem o Princípio do Máximo de Omori-Yau. Temos então o

Teorema 3.10. *Seja M_1 uma hipersuperfície sem bordo, propriamente mergulhada em $\mathbb{R}^{n+k}$ com curvatura escalar limitada e cuja curvatura média satisfaz $b_0 \leq H_{M_1} \leq b_1$, $b_0, b_1 > 0$. Seja também M_2 uma subvariedade n-dimensional, sem bordo, propriamente mergulhada em $\mathbb{R}^{n+k}$, disjunta de M_1 e suponha que existe uma função não negativa $\gamma \in C^2(M_2)$ satisfazendo as condições $C1)$, $C2)$ e $C3)$ do Teorema 3.9. Se*

$$\sup_{M_2} |\mathbf{H}_{M_2}| < \inf_{M_1} \Lambda_n$$

então M_2 não pode estar do lado convexo de M_1.

Com demonstração análoga ao do Teorema 3.8, que extende no caso do contato ideal no infinito, para subvariedades n-dimensionais $M_2 \subset \mathbb{R}^{n+k}$ que satisfazem o princípio do máximo de Omori-Yau para o Laplacaino, o Teorema 4 em (3). Extende também no caso em que a subvariedade M_2 tem codimensão arbitrária o Teorema 3.4 em (2), o Teorema 1 em (9), e o Corolário 1 em (1).

4 UM PRINCÍPIO DO MÁXIMO PARA HIPERSUPERFÍCIES PONDERADAS DO $\mathbb{R}^{n+1}_f$ E APLICAÇÕES GEOMÉTRICAS

4.1 Introdução

Ao introduzirmos um peso no elemento de volume $dvol$ de uma variedade Riemanniana $(M,\langle,\rangle)$, passamos a ter uma variedade Riemanniana ponderada $(M,\langle,\rangle,e^{-f}dvol)$, onde $f \in C^\infty(M)$. Surgem então, de forma natural, alguns objetos relacionados a variedade Riemanniana ponderada $(M,\langle,\rangle,e^{-f}dvol)$ tais como a f-divergênca, que por sua vez nos dá o f-Laplaciano, a Bakry-Emery curvatura de Ricci, a f-curvatura média, no caso das hipersuperfícies de uma variedade Riemanniana ponderada, entre outros, ver por exemplo (25), (27) e (36).

Em trabalhos como (25), (26), (27), (31), (36) e (37) entre outros, temos várias contribuições que garantem a validade de resultados clássicos da geometria no contexto das variedades Riemannianas ponderadas, como por exemplo o Princípio do Máximo de Omori-Yau para o f-Laplacinano. Seguindo esta linha, iremos demonstrar neste capítulo a validade, no contexto ponderado, dos resultados obtidos no capítulo anterior deste trabalho e dar mais algumas contribuições a resultados já conhecidos no contexto não ponderado. No Teorema 4.3 daremos a versão ponderada do Princípio do Máximo no Infinito, Teoremas 1 e 3.2 de (1) e (2), respectivamente, que foram generalizados no capítulo anterior deste trabalho com o teorema abaixo para hipersuperfícies do $\mathbb{R}^{n+1}$ sem restrições sobre a curvatura gaussiana

Teorema. *Sejam M_1 e M_2 duas hipersuperfícies do $\mathbb{R}^{n+1}$ disjuntas, propriamente mergulhadas no $\mathbb{R}^{n+1}$ e com bordos não vazios ∂M_1 e ∂M_2. Suponha que M_2 seja completa e que*

$$\sup_{M_2}|\mathbf{H}_{M_2}| \le b_0 \le \inf_{M_1} H_{M_1}, \quad b_0 > 0.$$

Se M_2 tem um contato ideal no infinito com M_1 e é parabólica então

$$min\{dist(M_1,\partial M_2), dist(M_2,\partial M_1)\} = 0$$

Que tem como aplicaçao geométrica o Corolário 4.1.

No Teorema 4.4 damos a versão ponderada do Princípio de barreira para subvariedades de codimensão arbitrária e curvatura média limitada, Teorema 4 de (3)

Teorema. *Sejam $M_2 \subset \mathbb{R}^{n+k}$ uma subvariedade n-dimensional e $M_1 \subset \mathbb{R}^{n+k}$ uma C^2-hipersuperfície propriamente mergulhada em $\mathbb{R}^{n+k}$. Assuma que M_2 está no lado convexo de M_1 e que*

M_2 toca em M_1 no ponto $p_0 \in M_1 \cap M_2$. Suponha que $U(p_0) \subset \mathbb{R}^{n+k}$ seja uma vizinhança de p_0 em $\mathbb{R}^{n+k}$ tal que

$$\sup_{U \cap M_2} |\mathbf{H}_{M_2}| \leq \inf_{U \cap M_1} \Lambda_n.$$

Então próximo a p_0, M_2 está contida em M_1, ou seja, $M_2 \cap U \subset M_1 \cap U$.

Que nos dá o Corolário 4.2 para hipersuperfícies f-mínimas.

Como Aplicação do Princípio do Máximo de Omori-Yau para o f-Laplaciano, estendemos para o contexto ponderado, Teorema 4.6 e Corolário 4.3, o Teorema 3.10 do capítulo anterior deste trabalho.

4.2 Preliminares

Seja $(M^n, \langle , \rangle)$ uma variedade Riamanniana. Chamaremos de n-variedade ponderada a terna

$$M_f = (M^n, \langle , \rangle, dvol_f)$$

onde $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função suave escolhida, $dvol$ é a medida de volume Riemanniano em $(M^n, \langle , \rangle)$ e finalmente $dvol_f = e^{-f} dvol$ é a medida de volume ponderado. À variedade ponderada $(M^n, \langle , \rangle, dvol_f)$ está associada a f-divergência, ver por exemplo (27),

$$\text{div}_f X := e^f \text{div}(e^{-f} X), \quad X \in \mathfrak{X}(M),$$

o que nos dá o operador f-Laplaciano dado por

$$\Delta_f^M u = e^f \text{div}(e^{-f} \nabla^M u) = \Delta^M u - \langle \nabla^M f, \nabla^M u \rangle$$

onde $u \in C^2(M)$ e Δ^M e ∇^M são o Laplaciano e gradiente em $(M^n, \langle , \rangle)$, respectivamente.

A Bakry-Emery curvatura de Ricci da variedade ponderada $(M^n, \langle , \rangle, dvol_f)$ é o 2-tensor

$$Ric_f = Ric + \text{Hess}(f),$$

onde Ric é o tensor de Ricci de M. Quando

$$Ric_f = \alpha \langle , \rangle,$$

para alguma constante $\alpha \in \mathbb{R}$, então a variedade ponderada $(M^n, \langle , \rangle, dvol_f)$ é chamada soliton de Ricci.

Observação 4.1. *Uma variedade Riemanniana $(M^n, \langle , \rangle)$ é chamada soliton de Ricci se existe um campo suave de vetores X satisfazendo a equação do soliton*

$$Ric + \frac{1}{2} L_X \langle , \rangle = \alpha \langle , \rangle, \alpha \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

onde L_X é a derivada de Lie na direção de X. No caso especial em que $X = \nabla^M f$, para alguma função $f \in C^\infty(M)$, dizemos que $(M, \langle , \rangle, \nabla^M f)$ é um soliton de Ricci gradiente e a equação (4.1) fica, ver por exemplo (25),

$$Ric + Hess(f) = \alpha \langle , \rangle.$$

Observe que se $(M,\langle,\rangle,\nabla^M f)$ é um soliton de Ricci gradiente, então a variedade ponderada $(M,\langle,\rangle,dvol_f)$ é um soliton de Ricci. O soliton de Ricci gradiente $(M,\langle,\rangle,\nabla^M f)$ é dito ser contraído(shrinking), estável (steady) ou expansível (expanding) de acordo com $\alpha > 0$, $\alpha = 0$ ou $\alpha < 0$, respectivamente.

Se $B_r(p)$ e $\partial B_r(p)$ são, respectivamente, a bola geodésicas de raio $r > 0$ centrada em p e seu bordo em $(M^n,\langle,\rangle)$, definimos então o volume ponderado em $(M^n,\langle,\rangle,dvol_f)$ por

$$vol_f(B_r(p)) = \int_{B_r(p)} e^{-f} dvol \ \ e \ \ vol_f(\partial B_r(p)) = \int_{\partial B_r(p)} e^{-f} dvol_{n-1}$$

onde $dvol_{n-1}$ representa a $(n-1)$-medida de Hausdorff.

4.2.1 A f-Curvatura Média das hipersuperfícies ponderadas

Seja M^n uma hipersuperfície imersa na variedade Riemanniana ponderada $\overline{M}_f^{n+1}$ e denotemos por $\overline{\nabla}$ o gradiente de $\overline{M}^{n+1}$. Então temos que a f-curvatura média de M é dada por

$$nH_M^f = nH_M + \langle N, \overline{\nabla} f\rangle,$$

onde H_M é a curvatura média de M com relação a normal unitária N. Dessa forma o f-vetor curvatura média de M é dado por

$$\mathbf{H}_M^f = H_M^f N = \mathbf{H}_M + \frac{1}{n}\langle N, \overline{\nabla} f\rangle N = -\frac{1}{n}(\mathrm{div}_f N)N,$$

onde $\mathbf{H}_M = -\dfrac{1}{n}(\mathrm{div} N)N$ é o vetor curvatura média de M na orientação dada por N.

Dizemos que a hipersuperfície M é f-mínima se $H_M^f = 0$. Quando f é constante as hipersuperfícies f-mínimas são precisamente as hipersuperfícies mínimas de $\overline{M}^{n+1}$.

4.3 O Princípio do Máximo no Infinito para Hipersuperfícies ponderadas do $\mathbb{R}_f^{n+1}$

Vamos a partir daqui estudar sob quais hipóteses em uma variedade ponderada continuam válidos os resultados anteriormente obtidos.

Seguindo a notção de (15) extenderemos a seguir a noção de variedade Riemanniana Neuman parabólica, ou simplesmete $\mathcal{N}$-parabólica no contexto das variedades Riemannianas ponderadas.

Definição 4.1. *Seja M uma variedade Riemanniana orientada, com bordo $\partial M \neq \emptyset$ e normal unitária exterior ν. A variedade Riemanniana ponderada $(M,\langle,\rangle,dvol_f)$ é dita ser $\mathcal{N}$-f-parabólica se as únicas soluções do problema*

$$\begin{cases} \Delta_f^M h \geq 0 & em \quad int M \\ \dfrac{\partial h}{\partial \nu} \leq 0 & em \quad \partial M \\ \sup_M h < +\infty \end{cases} \tag{4.2}$$

são as funções constantes $h \equiv \sup_M h$.

Certamente se $\partial M = \emptyset$, podemos considerar a condição de bordo em (4.2) trivialmente satisfeita, e neste caso diremos que $(M, \langle,\rangle, dvol_f)$ é $\mathcal{N}$-f-parabólica se não admite funções f-subharmônicas não constantes limitadas por cima. Onde, de forma natural, diremos que $h \in C^2(M)$ é f-subhamônica se $\Delta_f^M h \geq 0$.

A classificação de variedades Riemannianas ponderadas $\mathcal{N}$-f-parabólicas é objeto de estudo de alguns pesquisadores como S. Pigola e A. Setti. Em (25) (Teorema 22) estes junto, com M. Rimoldi obtêm o seguinte teorema

Teorema 4.1. *Um soliton de Ricci gradiente contraído $(M, \langle,\rangle, \nabla^M f)$ completo é $\mathcal{N}$-f-parabólico.*

Pode-se provar também que uma condição suficiente para que a variedade Riemanniana ponderada $(M, \langle,\rangle, dvol_f)$ seja $\mathcal{N}$-f-parabólica é que M seja geodesicamente completa e que

$$vol_f(\partial B_r)^{-1} \notin L^1(+\infty).$$

No Teorema 4.3 iremos demonstrar para hipersuperfícies ponderadas $\mathcal{N}$-f-parabólicas do $\mathbb{R}_f^{n+1}$, a validade do Princípio do Máximo no Infinito dado por Ronaldo F. de Lima em (1) para superfícies parabólicas do $\mathbb{R}^3$ com curvatura média constante e generalizada no capítulo anterior deste trabalho para hipersuperfícies parabólicas do $\mathbb{R}^{n+1}$ com curvatura média limitada, Teorema 3.2. Antes porém, precisaremos de alguns resultados para hipersuperfícies ponderadas que nos auxiliarão no decorrer deste capítulo.

Em (36), Stefano Pigola, J.H. de Lira, D. Impera e A.G. Setti generalizaram o princípio do máximo de Alhfors para variedades Riemannianas ponderadas $\mathcal{N}$-f-parabólica com uma bela demonstração, mas que segundo os autores o resultado pode ser facilmente obtido, com as devidas adaptações, seguindo a mesma linha de reciocínio da demonstração do Teorema 0.9 em (15). Mais precisamente tem-se o seguite Teorema

Teorema 4.2 (Princípio do Máximo de Ahlfors)**.** *Uma variedade Riemanniana ponderada $(M, \langle,\rangle, dvol_f)$ é $\mathcal{N}$-f-parabólica se, e somente se, para todo domínio $D \subseteq M$ com $\partial_0 D \neq \emptyset$ e toda função $h \in C^2(D)$ satisfazendo*

$$\begin{cases} \Delta_f^M h \geq 0 & em \quad int\, D \\ \dfrac{\partial h}{\partial \nu} \leq 0 & em \quad \partial_1 D \\ \sup_D h < +\infty \end{cases}$$

tivermos

$$\sup_D h = \sup_{\partial_0 D} h.$$

Onde $\partial_0 D = \partial D \cap int\, M$ e $\partial_1 D = \partial M \cap D$.

E no caso em que $\partial M \neq \emptyset$, temos também a seguinte extensão para o contexto ponderado da Proposição 3.3, Proposição 3.2 de (15), ver também (36).

Proposição 4.1. *Seja M uma variedade Riemanniana com bordo $\partial M \neq \emptyset$. Se $(M, \langle,\rangle, dvol_f)$ é uma variedade Riemanniana ponderada $\mathcal{N}$-f-parabólica e h é uma solução do problema*

$$\begin{cases} \Delta_f^M h \geq 0 & em \quad M \\ \sup_M h < +\infty \end{cases}$$

então

$$\sup_M h = \sup_{\partial M} h.$$

Podemos também sem dificuldades, extender a noção de variedade Riemanniana Dirichlet parabólica, ou simplesmente $\mathcal{D}$-parabólica, ver (16), para o contexto das variedades Riemannianas ponderadas com a seguinte definição:

Definição 4.2. *Seja M uma variedade Riemanniana com bordo não vazio. Vamos dizer que uma variedade Riemanniana ponderada $(M, \langle,\rangle, dvol_f)$ é Dirichlet f-parabólica, ou simplesmente $\mathcal{D}$-f-parabólica, se toda função limitada h satisfazendo*

$$\begin{cases} \Delta_f^M h = 0 & em \quad int\, M \\ h = 0 & em \quad \partial M, \end{cases}$$

se anula identicamente.

E na mesma linha de raciocíneo obter o Princípio do Máximo de Ahlfors, Proposição 3.4 (Proposição 9 de (16)), para variedades Reiamnnianas $\mathcal{D}$-f-parabólicas, ver (36). Observe que da Proposição 4.1 temos que toda variedade Riemanniana ponderada com $\partial M \neq \emptyset$ $\mathcal{N}$-f-parabólica é $\mathcal{D}$-f-parabólica.

Demonstraremos a seguir a versão ponderada dos Lemas 3.2 e 3.3 do capítulo anterior deste trabalho.

No que segue $M_1 \subset \mathbb{R}_f^{n+k}$ é uma hipersuperfície suave, orientada com curvaturas principais $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \cdots \leq \lambda_{n+k-1}$ com relação a normal unitária η. Denotaremos por $\mathbf{H}_{M_2}^f$ o f-vetor curvatura média da subvariedade n-dimensional $M_2 \subset \mathbb{R}_f^{n+k}$ e por D o gradiente euclidiano do $\mathbb{R}^{n+k}$.

Lema 4.1. *Sejam $M_1 \subset \mathbb{R}_f^{n+k}$ uma hipersuperfície e $M_2 \subset \mathbb{R}_f^{n+k}$ uma subvariedade n-dimensional. Assuma que M_1 e M_2 sejam disjuntas e propriamente mergulhadas. Se M_2 tem um contato ideal no infinito com M_1 então a função $d(x) = dist(x, M_1)$ satisfaz*

$$\Delta_f^{M_2} d - n\langle \mathbf{H}_{M_2}^f, Dd\rangle + trA_d\,|_{T_x M_2^T} + \langle Df, Dd\rangle - \sum_{i,j}^{n} \sigma_{ij} II_d(e_i^T, e_j^T) = 0, \tag{4.3}$$

onde $\sigma_{ij} = \dfrac{\nabla_{e_i}^{M_2} d \nabla_{e_j}^{M_2} d}{1 - |\nabla^{M_2} d|^2}$, $II_d(\cdot) = \langle A_d(\cdot), \cdot\rangle$ é a segunda forma fundamental da hipersuperfície paralela $d^{-1}(d(x))$ e e_i^T é dado em (3.3).

Prova. Do Lema 3.2 temos que

$$\Delta^{M_2}d - n\langle \mathbf{H}_{M_2}, Dd\rangle + trA_d\,|_{T_xM_2^T} - \sum_{i,j}^{n}\sigma_{ij}II_d(e_i^T, e_j^T) = 0. \tag{4.4}$$

Logo se $N^1, \cdots, N^k$ são campos de vetores ortonormais normais a M_2 e D é o gradiente euclidiano do $\mathbb{R}^{n+k}$ temos que o f-vetor curvatura média de M_2 é dado por

$$\mathbf{H}^f_{M_2} = \mathbf{H}_{M_2} + \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{k}\langle N^r, Df\rangle N^r,$$

onde $\mathbf{H}_{M_2} = -\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{k}(\mathrm{div}N^r)N^r$ é o vetor curvatura média de M_2 . Portanto

$$\langle \mathbf{H}_{M_2}, Dd\rangle = \langle \mathbf{H}^f_{M_2}, Dd\rangle - \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{k}\langle Df, N^r\rangle\langle Dd, N^r\rangle. \tag{4.5}$$

E sendo $\nabla^{M_2}f = Df - \sum_{r=1}^{k}\langle Df, N^r\rangle N^r$ e $\nabla^{M_2}d = Dd - \sum_{r=1}^{k}\langle Dd, N^r\rangle N^r$ temos que

$$\langle \nabla^{M_2}f, \nabla^{M_2}d\rangle = \langle Df, Dd\rangle - \sum_{r=1}^{k}\langle Df, N^r\rangle\langle Dd, N^r\rangle. \tag{4.6}$$

Agora de (4.4), (4.5) e (4.6) temos

$$\Delta_f^{M_2}d - n\langle \mathbf{H}^f_{M_2}, Dd\rangle + trA_d\,|_{T_xM_2^T} + \langle Df, Dd\rangle - \sum_{i,j}^{n}\sigma_{ij}II_d(e_i^T, e_j^T) = 0. \tag{4.7}$$

como queríamos. □

Denotemos por

$$\Lambda_l^f := \frac{1}{l}\{(\lambda_1 + \cdots + \lambda_l) + \langle Df, \eta\rangle\}, \quad l = 1, \cdots, n+k-1$$

a l-ésima f-curvatura média da hipersuperfície $M_1 \subset \mathbb{R}^{n+k}_f$ com relação a normal unitária η, onde $\lambda_1, \cdots, \lambda_l$ são as l primeiras curvaturas principais de $M_1 \subset \mathbb{R}^{n+k}_f$ na orientação dada por η. Observe que se $l = n+k-1$ então $\Lambda_l^f = H^f_{M_1}$.

Seguindo agora temos a versão ponderada do Lema 3.3.

Lema 4.2. *Sejam M_1 e M_2 como no Lema 4.1 e $d(x) = dist(x, M_1)$. Suponha que M_2 tem um contato ideal no infinito com M_1 e que*

$$\sup_{M_2}|\mathbf{H}^f_{M_2}| \leq \inf_{M_1}\Lambda_n^f.$$

Então temos que

$$\Delta_f^{M_2}d - C_0|\nabla^{M_2}d|^2 \leq 0.$$

para alguma constante positiva C_0.

Prova. Basta prosseguir, a partir da equação (4.3), como na demonstração do Lema 3.3. Observando que Pelo Lema 3.1 temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} trA_d \mid_{T_x M_2^T} &\geq \frac{1}{n}(\lambda_1(d) + \cdots + \lambda_n(d)) \\ &\geq \frac{1}{n}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n), \end{aligned} \tag{4.8}$$

onde $\lambda_1(d), \cdots, \lambda_n(d)$ são a n-primeiras curvaturas principais da hipersuperfície paralela a M_1 $d^{-1}(d(x))$ na orientação dada por η. Portanto

$$\begin{aligned} |\mathbf{H}^f_{M_2}| &\leq \Lambda^f_n = \frac{1}{n}\{(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n) + \langle Df, \eta \rangle\} \\ &\leq \frac{1}{n}\{(\lambda_1(d) + \cdots + \lambda_n(d)) + \langle Df, \eta \rangle\} \\ &\leq \frac{1}{n}\{trA_d \mid_{T_x M_2^T} + \langle Df, \eta \rangle\}. \end{aligned}$$

O que nos diz que

$$-n|\mathbf{H}^f_{M_2}| + trA_d \mid_{T_x M_2^T} + \langle Df, Dd \rangle \geq 0.$$

E sendo $\langle \mathbf{H}^f_{M_2}, Dd \rangle \leq |\mathbf{H}^f_{M_2}|$, pois $Dd = \eta$, temos de (4.3)

$$\Delta^{M_2}_f d - \sum_{i,j}^{n} \sigma_{ij} II_d(e_i^T, e_j^T) \leq 0.$$

Seguindo agora de modo análogo ao segundo parágrafo da demonstração do Lema 3.3 concluímos o Lema 4.2.

□

Seguindo agora, com o auxílio dos Lemas 4.1 e 4.2, temos a versão ponderada do Teorema 3.2 dada no teorema abaixo.

Teorema 4.3 (Princípio do Máximo no Infinito)**.** *Seja $M_1 \subset \mathbb{R}^{n+1}_f$ uma hipersuperfície propriamente mergulhada, com bordo não vazio ∂M_1 e função curvatura média positiva. Seja também $M_2 \subset \mathbb{R}^{n+1}_f$ uma hipersuperfície completa, propriamente mergulhada, com bordo não vazio ∂M_2 e disjunta de M_1. Suponha que a f-curvatura média de M_1 satisfaz*

$$\sup_{M_2} |\mathbf{H}^f_{M_2}| \leq \inf_{M_1} H^f_{M_1} \tag{4.9}$$

e que M_2 tem um contato ideal no infinito com M_1. Se $(M_2, \langle , \rangle, dvol_f)$ é uma variedade Riemanniana ponderada $\mathcal{N}$-f-parabólica (ou $\mathcal{D}$-f-parabólica) então

$$min\{dist(M_1, \partial M_2), dist(M_2, \partial M_1)\} = 0.$$

Prova. Suponha que o teorema seja falso, isto é, que

$$m_0 = min\{dist(M_1, \partial M_2), dist(M_2, \partial M_1)\} > 0.$$

Escolha $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $m_0 > \varepsilon$ e defina

$$M_2(\varepsilon) = \{x \in M_2 : dist(x, M_1) < \varepsilon\}.$$

Tomemos $C_2(\varepsilon) \subset M_2(\varepsilon)$ uma componente conexa, se necessário. Observe que

$$\partial C_2(\varepsilon) = \{x \in M_2 : dist(x, M_1) = \varepsilon\} \subset int M_2.$$

De fato, se existisse $x' \in \partial C_2(\varepsilon) \cap \partial M_2$ então, como estamos supondo por absurdo que $m_0 > \varepsilon$, teríamos $dist(x', M_1) > \varepsilon$. Logo $\partial C_2(\varepsilon) \subset int M_2$ e portanto

$$\partial_0 C_2(\varepsilon) = \partial C_2(\varepsilon) \cap int M_2 = \partial C_2(\varepsilon).$$

Defina em $C_2(\varepsilon)$ a função $\phi(x) = e^{-C_0 d(x)}$, onde C_0 é uma cosntante positiva dada pelo Lema 4.2 . Calculando o f-Laplaciano de ϕ em M_2 temos, pelo Lema 4.2 que

$$\begin{aligned} \Delta_f^{M_2} \phi &= \Delta^{M_2} \phi - \langle \nabla^{M_2} f, \nabla^{M_2} \phi \rangle \\ &= -C_0 \phi (\Delta^{M_2} d - C_0 |\nabla^{M_2} d|^2) + C_0 \phi \langle \nabla^{M_2} f, \nabla^{M_2} d \rangle \\ &= -C_0 \phi (\Delta_f^{M_2} d - C_0 |\nabla^{M_2} d|^2) \geq 0, \end{aligned} \tag{4.10}$$

nos dizendo que ϕ é f-subharmônica. Mas pelo Princípio do máximo de Ahlfors, Teorema 4.2

$$1 = \sup_{C_2(\varepsilon)} \phi = \sup_{\partial_0 C_2(\varepsilon)} \phi = \sup_{\partial C_2(\varepsilon)} \phi = e^{-C_0 \varepsilon}$$

para $\varepsilon > 0$ fixado, o que é um absurdo. Como essa contradição veio de supormos $m_0 > 0$, o teorema segue. □

Observe que o Teorema 3.2 é um caso particular do Teorema 4.3 no caso que a função f é constante.

Note também que, de acordo com o Lema 4.2, podemos ter $M_2 \subset \mathbb{R}_f^{n+k}$ uma n-subvariedade no Teorema 4.3 desde que tenhamos

$$\sup_{M_2} |\mathbf{H}_{M_2}^f| \leq \inf_{M_1} \Lambda_n^f.$$

4.4 Aplicações Geométricas

4.4.1 Uma aplicação do Princípio do Máximo no Infinito

Quando M_1 e M_2 são hipersuperfícies do $\mathbb{R}_f^{n+1}$ com bordo vazio, temos como aplicação do Princípio do Máximo no infinito, Teorema 4.3, o seguinte corolário

Corolário 4.1. *Seja $M_1 \subset \mathbb{R}_f^{n+1}$ uma hipersuperfície propriamente mergulhada e com bordo vazio. Seja também $M_2 \subset \mathbb{R}_f^{n+1}$ uma hipersuperfície completa, propriamente mergulhada, com bordo vazio e disjunta de M_1. Suponha que M_1 e M_2 sejam f-mínimas. Se $(M_2, \langle , \rangle, dvol_f)$ é uma variedade Riemanniana ponderada $\mathcal{N}$-f-parabólica, então*

$$dist(M_1, M_2) > 0.$$

Prova. Se M_2 é disjunta de M_1 então M_2 está contida no lado de M_1 para o qual a normal unitária η aponta ou no lado para o qual $-\eta$ aponta. Suponha então que $dist(M_1, M_2) = 0$. Se M_2 está do lado para o qual η aponta, então podemos seguir com o mesmo raciocínio da demonstração do Teorema 4.3, tomando para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno

$$M_2(\varepsilon) = \{x \in M_2 : dist(x, M_1) < \varepsilon\}$$

e $C_2(\varepsilon) \subset M_2(\varepsilon)$ uma componente conexa. Como estamos supondo que $\partial M_2 = \emptyset$ temos que

$$\partial C_2(\varepsilon) = \{x \in M_2(\varepsilon) : dist(x, M_1) = \varepsilon\} \subset int M_2.$$

Definindo agora em $C_2(\varepsilon)$ a função $\phi(x) = e^{-C_0 d(x)}$, onde $d(x) = dist(x, M_1)$ e C_0 é uma constante positiva dada pelo Lema 4.2, chegaremos a mesma contradição do Teorema 4.3. Se M_2 está no lado para o qual $-\eta$ aponta, inverta a orientação de M_1. Ainda teremos M_1 f-mínima e prossigamos como acima. □

4.4.2 Um Princípio de Tangência para Subvariedades n-dimensionais ponderadas do $\mathbb{R}^{n+k}_f$

Observe que o Lema 4.1 é a versão ponderada com um contato ideal no infinito do Lema 1 de (3). Sendo o f-Laplacino um operador eliptico, ver por exemplo (35), podemos, a partir do Lema 4.2, dar uma versão ponderada do Princípio de barreira para subvariedades de codimensão arbitrária do $\mathbb{R}^{n+k}$, Teorema 4 em (3). Mais precisamente temos o seguinte teorema

Teorema 4.4. *Sejam $M_2 \subset \mathbb{R}^{n+k}_f$ uma subvariedade n-dimensional e $M_1 \subset \mathbb{R}^{n+k}_f$ uma C^2-hipersuperfície propriamente mergulhada em $\mathbb{R}^{n+k}_f$. Assuma que M_2 está no lado convexo de M_1 e que M_2 toca em M_1 no ponto $p_0 \in M_1 \cap M_2$. Suponha que $U(p_0) \subset \mathbb{R}^{n+k}_f$ seja uma vizinhança de p_0 em $\mathbb{R}^{n+k}_f$ tal que*

$$\sup_{U \cap M_2} |\mathbf{H}^f_{M_2}| \leq \inf_{U \cap M_1} \Lambda^f_n.$$

Então próximo a p_0, M_2 está contida em M_1, ou seja, $M_2 \cap U \subset M_1 \cap U$.

Prova. Pelo Lema 4.2 acima temos que a função $d(x) = dist(x, M_1)$ satisfaz

$$\Delta^{M_2}_f d - C_0 |\nabla^{M_2} d|^2 \leq 0, \tag{4.11}$$

para alguma constante positiva C_0. De fato, a condição de M_2 ter um contato ideal no infinito com M_1 no Lema 4.2 pode ser facilmente substituída pela tangência uma vez que ambas as situações garante que M_2 esteja suficientemente próxima de M_1 e o lema vale para uma vizinhança $U(p_0)$ suficientemente próxima de M_1. Sendo $p_0 \in M_1 \cap M_2$, então p_0 é ponto de mínimo de d e, próximo a p_0, d satisfaz (4.11), então pelo Princípio do Máximo de Hopf, Teorema 3.5 de (6), temos que, próximo a p_0, d é constante e o teorema segue. □

O Teorema 4.4 acima estende então, para hipersuperfícies do $\mathbb{R}^{n+k}_f$ que se relacionam a partir do suas f-curvaturas médias, o Princípio do Máximo de Hopf.

Corolário 4.2. *Sejam M_1 e M_2 duas hipersuperfícies f-mínimas, propriamente mergulhadas em $\mathbb{R}^{n+1}_f$ e tangentes em p_0. Se M_2 permanece do mesmo lado de M_1, então, próximo a p_0, M_2 coincide com M_1.*

Prova. Se M_2 está do lado de M_1 para o qual a normal aponta, segue imediatamente do Teorma 4.4. Se não, inverta a orientação de M_1. Ainda vamos ter $H^f_{M_1} = 0$ e apliquemos o Teorema 4.4. □

Observação 4.2. *Observe que o Teorema 4.4 e o Corolário 4.2 são resultados locais, e neste sentido não é necessario que a subvariedade M_2 esteja contida no lado de M_1 para o qual a normal unitária η aponta, no caso em que $\partial M_1 = \emptyset$, bastando apenas que M_2 permaneça no lado para o qual η aponta próximo a p_0.*

4.4.3 Aplicações do Princípio do Máximo de Omori-Yau

Nesta seção, iremos usar algumas versões do Princípio do Máximo de Omori-Yau para o f-Laplaciano, ver por exemplo (26) e (27), e generalizar o Princípio do Máximo do Hopf para duas hipersuperfícies M_1 e M_2 disjuntas do $\mathbb{R}^{n+1}_f$.

Definição 4.3. *Vamos dizer que a variedade Riemanniana ponderada*

$$(M, \langle , \rangle, dvol_f)$$

satisfaz o Princípio do Máximo de Omori-Yau para o f-Laplaciano se, para qualquer função $u \in C^2(M)$ com $\sup_M u = u^* < \infty$, existe uma sequência de pontos $x_j \in M$, dependendo de M e de u, tal que

$$\lim_{j\to\infty} u(x_j) = u^*, \;\; |\nabla^M u|(x_j) < \frac{1}{j}, \;\; \Delta^M_f u(x_j) < \frac{1}{j}.$$

Em artigos como (26), (27), (29), (30), (31), (32), (33) e (34) temos algumas versões (ou contribuições) de resultados que garantem a validade deste princípio para variedades Riemannianas ponderada. Em resumo temos o seguinte teorema

Teorema 4.5 (Borbély, Bessa, Mari, Mastrolia, Pigola, Rigoli, Rimoldi, Setti)**.** *Considere a variedade Riemanniana ponderada completa $(M, \langle , \rangle, dvol_f)$ e assuma que existe uma função não negativa $\gamma \in C^2(M)$ satisfazendo:*

C1) $\gamma(x) \to \infty$ quando $x \to \infty$;

C2) $\exists B > 0$ tal que $|\nabla^M \gamma| \leq B$ fora de um compacto;

C3) $\exists C > 0$ *tal que* $\Delta_f^M \gamma \leq CG(\gamma)$ *fora de um compacto, onde* $G : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ *é uma função suave satisfazendo*

$$G(0) > 0, \;\; G'(t) \geq 0 \;\; em \;\; [0,+\infty), \;\; G(t)^{-1} \notin L^1([0,+\infty)).$$

Então dado uma função $u \in C^2(M)$ *com* $u^* = \sup_M u < \infty$*, existe uma sequência* $x_j \in M$ *com*

$$\lim_{j\to\infty} u(x_j) = u^*, \;\; |\nabla^M u|(x_j) < \frac{1}{j}, \;\; \Delta_f^M u(x_j) < \frac{1}{j},$$

isto é, $(M, \langle,\rangle, dvol_f)$ *satisfaz o Princípio do Máximo de Omori-Yau para o* f*-Laplaciano.*

Como nosso primeiro resultado desta seção, temos o Teorema 4.6 para hipersuperfícies ponderada do $\mathbb{R}_f^{n+1}$. Como de costume $M_1 \subset \mathbb{R}_f^{n+1}$ é uma hipersuperfície orientada, $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ são suas curvaturas principais em relação a normal unitária η e denotaremos por A o operador de forma de M_1.

Teorema 4.6. *Sejam* M_1 *e* M_2 *duas hipersuperfícies disjuntas, sem bordo e propriamente mergulhadas em* $\mathbb{R}_f^{n+1}$*. Assuma que a* f*-curvatura média de* M_1 *satisfaça*

$$\sup_{M_2} |\mathbf{H}_{M_2}^f| < \inf_{M_1} H_{M_1}^f \tag{4.12}$$

e que $\sup_{M_1} \|A\| < \infty$*. Suponha que* $(M_2, \langle,\rangle, dvol_f)$ *é uma variedade ponderada completa e que existe uma função não negativa em* M_2 *satisfazendo as condições* $C1)$*,* $C2)$ *e* $C3)$ *do Teorema 4.5. Se* M_2 *está no lado de* M_1 *para o qual* η *aponta, então*

$$dist(M_1, M_2) > 0.$$

Prova. Seja $d(x) = dist(x, M_1)$. Pelo Princípio do Máximo de Omori-Yau para o f-Laplaciano, ver (26) e (27), existe uma sequência $x_j \in M_2$ tal que $\lim_{j\to\infty} d(x_j) = \inf_{M_2} dist(x, M_1)$ e tem-se que

$$|\nabla^{M_2} d|(x_j) < \frac{1}{j} \quad e \quad \Delta_f^{M_2} d(x_j) > -\frac{1}{j}, \quad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{4.13}$$

Suponha que M_2 esteja no lado de M_1 para o qual η aponta e que tenhamos $dist(M_1, M_2) = 0$. Então para $j \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, o Lema 4.1 junto com (4.8), lembrando que $Dd = \eta$, nos dá que

$$\Delta_f^{M_2} d(x_j) - n|\mathbf{H}_{M_2}^f| + nH_{M_1}^f - \frac{II_{d_j}((\nabla^{M_2} d)^T, (\nabla^{M_2} d)^T)}{1 - |\nabla^{M_2} d|^2}(x_j) \leq 0, \tag{4.14}$$

onde $d_j = d(x_j)$. Como $\Delta_f^{M_2} d(x_j) > -\dfrac{1}{j}$ e

$$\frac{|II_{d_j}((\nabla^{M_2} d)^T, (\nabla^{M_2} d)^T)|}{1 - |\nabla^{M_2} d|^2}(x_j) \leq \|II_{d_j}\| \frac{|\nabla^{M_2} d|^2}{1 - |\nabla^{M_2} d|^2}(x_j) < \|II_{d_j}\| \frac{1}{j^2 - 1}.$$

Temos de (4.14) que

$$nH_{M_1}^f - n|\mathbf{H}_{M_2}^f| < \|II_{d_j}\| \frac{1}{j^2 - 1} + \frac{1}{j} \tag{4.15}$$

Fazendo agora $j \to \infty$ em (4.15), teremos, pelo Lema 3.4,

$$|\mathbf{H}^f_{M_2}| \geq H^f_{M_1}$$

contradizendo (4.12).

$\square$

Lembremos, da Observação 3.4, que se as curvaturas média e escalar de M_1 forem limitadas temos que $\sup_{M_1} \|A\| < \infty$. Então o Teorema 4.6 nos dá o seguinte corolário:

Corolário 4.3. *Sejam M_1 e M_2 como no Teorema 4.6. Seja f uma função tal que seu gradiente em $\mathbb{R}^{n+1}$, Df, é constante. Assuma que as curvaturas média e escalar de M_1 sejam limitadas e que*

$$\sup_{M_2} |\mathbf{H}^f_{M_2}| < \inf_{M_1} H^f_{M_1}. \tag{4.16}$$

Suponha que $(M_2, \langle,\rangle, dvol_f)$ é uma variedade ponderada completa cujo tensor de Ricci satisfaz

$$Ric_f \geq -(n-1)\langle,\rangle.$$

Então M_2 não pode estar no lado de M_1 para o qual a normal unitária aponta.

Prova. Suponha que M_2 esteja no lado de M_1 para o qual η aponta. Se $dist(M_1, M_2) = 0$, basta prosseguir como na demonstração do Teorema 4.6, observando que sendo as curvaturas média e escalar de M_1 limitadas, a Observação 3.4 nos dá que a norma do operador de forma A de M_1 é limitada, isto é, temos que $\sup_{M_1} \|A\| < \infty$, e portanto, o Lema 3.4 nos dá que $\lim_{j\to\infty} \|II_{d_j}\| < \infty$. E sendo a Bakry-Emery curvatura de Ricci de M_2, Ric_f, limitada por baixo temos que, ver (26), $(M_2, \langle,\rangle, dvol_f)$ satisfaz o princípio do máximo de Omori-Yau para o f-Laplaciano. Chegaremos então a mesma contradição com 4.16, nos dizendo que se M_2 está no lado de M_1 para o qual η aponta então a distância entre M_1 e M_2 não pode ser zero.

Se $dist(M_1, M_2) > 0$ prossigamos com o mesmo raciocínio do segundo parágrafo da demonstração do Teorema 3.8, observando que existem sequências $y_n \in M_1$ e $x_n \in M_2$ tal que a sequência $y_n - x_n$ tem uma subsequência que converge para um vetor $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ com $|v| = dist(M_1, M_2)$. Seja então $\overline{M}_2 = M_2 + v$. Dessa forma temos que $dist(M_1, \overline{M}_2) = 0$. Se $M_1 \cap \overline{M}_2 = \emptyset$, então $\overline{M}_2$ tem um contao ideal no infinito com M_1, o que não pode acontecer pelo que foi visto no parágrafo anterior, uma vez que sendo Df constante, então $\sup_{\overline{M}_2} |\mathbf{H}^f_{\overline{M}_2}| = \sup_{M_2} |\mathbf{H}^f_{M_2}|$. Caso $M_1 \cap \overline{M}_2 \neq \emptyset$ então $p_0 \in M_1 \cap \overline{M}_2$ seria um ponto de mínimo da função d, e assim $\nabla^{\overline{M}_2} d(p_0) = 0$ e do Lema 4.2 teremos $\Delta_f^{\overline{M}_2}(p_0) < 0$ contradizendo o fato de p_0 ser ponto de mínimo.

$\square$

Devido a validade do Princípio do Máximo de Omori-Yau para o f-Laplaciano quando $(M_2, \langle,\rangle, \nabla^{M_2} f)$ é um soliton de Ricci gradiente contraído (ver Corolário 4.2 em (26)), temos também o seguinte corolário.

Corolário 4.4. *Sejam M_1 e M_2 como no Teorema 4.6. Assuma que as curvaturas média e escalar de M_1 sejam limitadas. Suponha que*

$$\sup_{M_2} |\mathbf{H}^f_{M_2}| < \inf_{M_1} H^f_{M_1}.$$

Se $(M_2, \langle , \rangle, \nabla^{M_2} f)$ é um soliton de Ricci gradiente contraído e M_2 está no lado de M_1 para o qual η aponta, então

$$dist(M_1, M_2) > 0.$$

Prova. Análoga a demonstração do Teorema 4.6. □

REFERÊNCIAS

1 DE LIMA, R. F. A Maximum Principle at Infinity for Surfaces with Constant Mean Curvature in Euclidean Space; Annals of Global Analysis and Geometry 20, p. 325–343, 2001.

2 DE LIMA, R. F.; MEEKS, W. A Maximum Principle at Infinity for Surfaces with Bounded Mean Curvature in $\mathbb{R}^3$ and $\mathbb{H}^3$, Indiana Journal of Math, 53:5, p. 1211-1223, 2004.

3 DIERKES, U.; SCHWAB, D. Maximum principles for submanifolds of arbitrary codimension and bounded mean curvature; Calc. Var. 22, p. 173–184, 2005.

4 LANGEVIN, R.; ROSENBERG, H. A maximum principle at infinity for minimal surfaces and applications, Duke Math. J. 57, p. 819–829, 1988.

5 JORGE, L.P.; TOMI, F. The barrier principle for minimal submanifolds of arbitrary codimenson. Ann. Glob. Anal. Geom. 24,p. 261–267, 2003.

6 TRUDINGER, G. D. Elliptic partial diferential equations of second order. Springer Grundlehren.

7 FONTENELE, F.; SILVA S. L. A Tangency Principle and Applications; Illinois Journal of Mathematics Volume 45, Number 1, Pages 213-228, Springer 2001.

8 SORET, M. Maximum principle at infinity for complete minimal surfaces in flat 3-manifolds, Ann. Global Anal. Geom. 13, p. 101–116, 1995.

9 ROS, A.; ROSENBERG, H. Properly embedded surfaces whit constant mean curvature, American Journal of Mathematics, Volume 132, Number 6, p. 1429-1443, 2010.

10 MEEKS,W.; ROSENBERG, H. The maximum principle at infinity in flat 3-manifolds, Comment. Math. Helv. 65, 1990.

11 OMORI, H. Isometric immersions of Riemannian manifolds. J. Math. Soc. Japan 19 (2), 1967.

12 YAU, S. T. Harmonic functions on complete Riemannian manifolds. Comm. Pure Appl. Math. 28, p. 201-228, 1975.

13 CHAVEL, I. Riemannian Geometry : A Modern Introduction, Second Edition. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 2006.

14 IMPERA, D.; PIGOLA, S.; SETTI, A. G. Global Maximum Principles and Divergence Theorems on Complete Manifolds with Boundary, arXiv:1303.2853v2, 2013.

15 IMPERA, D.; PIGOLA, S.; SETTI, A.G. Potential theory on manifolds with boundary and applications to controlled mean curvature graphs. Crelle's Journal, to appear in J. Reine Angew. Math. DOI: 10.1515/crelle-2014-0137.

16 PESSOA, L. F.; PIGOLA, S.; SETTI, A. G. Dirichlet parabolicity and L^1-Liouville property under localized geometric conditions. On arXiv:1607.06483v1, 2016.

17 ESCHENBURG, J.H. Comparison Theorems and Hypersurfaces. Manuscripta Mathematica, v. 59, n^o 3, p. 295-323, 1987.

18 ALIÁS, L. J.; MARTÍNEZ, S. C.; RIGOLI, M. A maximum principle for hypersurfaces with constant scalar curvature and applications, Ann Glob Anal Geom. 41, p. 307–320, 2012.

19 PIGOLA, S.; RIGOLI, M.; SETTI, A. G. Maximum Principles on Riemannian Manifolds and Applications, Memoirs of the American Mathematical Society, no. 822, 2005.

20 GRIGOR'YAN, A. On the existence of positive fundamental solutions of the Laplace equation on Riemannian manifolds. Mat. Sb. (N.S.) 128 , no. 3, p. 354–363. http://m.iopscience.iop.org/0025-5734/56/2/A05/pdf/0025-5734 56 2 A05.pdf, 1985.

21 GRIGOR'YAN, A. Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 36, no. 2, p. 135–249, 1999.

22 CHENG, S. Y.; YAU, S.T. Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications, Comm. Pure Appl. Math. 28, p. 333–354, 1975.

23 DO CARMO, M. P. Geomtria Riemanniana, Projeto Euclides, quarta edição, Rio de janeiro, IMPA, 2008.

24 SILVA, J. D.; SOUSA, A. F. A maximum principle for hipersurfaces in $\mathbb{R}^{n+1}$ with an ideal contact at infinity and bounded mean curvature, arXiv:1606.04899v1, 2016.

25 PIGOLA, S.; RIMOLDI, M.; SETTI, A. Remarks on non-compact gradient Ricci solitons, Math. Z. 68, p. 777-790, 2011.

26 PIGOLA, S.; RIGOLI, M.; RIMOLDI, M.; SETTI, A. Ricci Almost Solitons. Ann. Sc. Norm. Super.Pisa Cl. Sci. (5) Vol. X, p. 757-799, 2011.

27 BESSA, G. P.; PIGOLA, S.; SETTI, A. G. Spectral and stochastic properties of the f-Laplacian, solutions of PDEs at infinity and geometric applications.Rev. Mat. Iberoam.29, no. 2, p. 579–610, 2013.

28 GROMOV, M. Isoperimetry of waists and concentration of maps. Geom. Funct. Anal.,13(1), p. 178–215, 2003.

29 BORBÉLY, A. Immersions of manifolds with unbounded image and modified maximum principle of Yau. Bull. Aust. Math. Soc. 78, p. 285–291, 2008.

30 BORBÉLY, A. A remark on the Omori-Yau maximum principle. Kuwait J. Sci. 39(2A), p. 45-56, 2012.

31 MASTROLIA, P.; RIGOLI, M.; RIMOLDI, M. Some geometric analysis on generic Ricci solitons, Commun.Contemp. Math.15, 1250058 (2013).

32 MARI, L.; RIGOLI, M.; SETTI, A. G. Keller–Osserman conditions for diffusion-type operators on Riemannian Manifolds J. Funct. Anal. 258, no. 2, p. 665–712, 2010.

33 PIGOLA, S.; RIGOLI, M.; SETTI, A. G. Maximum Principles on Riemannian Manifolds and Applications. Memoirs of the American Mathematical Society, no. 822.

34 PIGOLA, S.; RIGOLI, M.; SETTI, A. G. Maximum principles and singular elliptic inequalities. J. Funct. Anal. 193, p. 224–260, 2002.

35 GRIGOR'YAN, A.; MESAMUNE, J. Parabolicity and stochastic completeness of manifolds in terms of the Green formula, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, V. 100, p. 607-632, 2013.

36 IMPERA, D.; LIRA, J. H.; PIGOLA, S.; SETTI, A. G. Height estimates for Killing graphs, on arXiv:1612.01257v1, 2016.

37 MUNTEANU, O.; WANG, J. Geometry of manifolds with densities, Advances in Mathematics 259, p. 269-305, 2014.