Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

Pós Graduação em Matemática

Uma Demonstração Topológica da Existência das Órbitas de Broucke para o Problema Isósceles de Três Corpos

Anete Soares Cavalcanti

Tese de Doutorado

Recife
14 de Setembro de 2012

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

Anete Soares Cavalcanti

Uma Demonstração Topológica da Existência das Órbitas de Broucke para o Problema Isósceles de Três Corpos

Trabalho apresentado ao Programa de Pós Graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Orientador: *Eduardo Shirlippe Goes Leandro*

Recife
14 de Setembro de 2012

Catalogação na fonte
Bibliotecário Jefferson Luiz Alves Nazareno, CRB 4-1758

Cavalcanti, Anete Soares.
Uma demonstração topológica da existência das órbitas de Broucke para o problema isósceles de três corpos / Anete Soares Cavalcanti – Recife: O Autor, 2012.
xi, 50 p.: fig.

Orientador: .Eduardo Shirlippi Goes Leandro
Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Matemática, 2012.
Inclui bibliografia.

1. Mecânica Celeste. 2. Órbitas periódicas. 3.Conjuntos de Wazewski I. Leandro,, Eduardo Shirlippi Goes (orientador). II. Título.

521 (22. ed.) MEI 2012

ANETE SOARES CAVALCANTI

UMA DEMONSTRAÇÃO TOPOLÓGICA DA EXISTÊNCIA DAS ÓRBITAS DE BROUCKE PARA O PROBLEMA ISÓSCELES DE TRÊS CORPOS

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutorado em Matemática.

Aprovada em: 14/09/2012

BANCA EXAMINADORA

_____

Prof. Dr. Eduardo Shirlippe Góes Leandro (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

_____

Prof. Dr. Hildeberto Eulálio Cabral (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

_____

Prof. Dr. Ramón Orestes Mendonza Ahumada (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

_____

Prof. Dr. Jair Koiler (Examinador Externo)
Faculdade Getúlio Vargas

_____

Prof.Dr. Clodoaldo Grotta Ragazzo (Examinador Externo)
Universidade de São Paulo

Ao meu pinguinho de gente, Aninha.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a minha família: mainha, voinha, Aninha (minha irmã), painho, minhas tias: tia Paula, tia Lena, tia Nidinha e tia Rosana. Em especial gostaria de destacar a paciência da minha mãe, minha avó e minha irmã. As duas primeiras por até hoje continuarem me tratando como na escola, sempre que as encontrava perguntavam "como está a tese?", e eu passava horas falando do trabalho e elas ficavam com a maior tranquilidade do mundo me ouvindo, mesmo sem entender absolutamente nada do que estava se tratando; já minha irmã além do apoio que sempre me deu, foi responsável pela maioria das figuras da tese (que não foram poucas), deixo aqui a promessa que "não retribuirei em empadas", certo Ninha?!. As minhas filhas, irmãs, sobrinhas, e primos de 4 patas. Em especial a Tinha e Angel pelo apoio moral de sempre, mesmo sem saber o que estavam fazendo, mas como diz minha mãe: "elas adoram estudar com a mãe!".

Agradeço a todos os que foram meus professores, em especial aos meus professores do DMat-UFPE, que foram de fundamental importância na minha formação acadêmica. A Eduardo, que foi muito mais que um orientador, sendo um pai acadêmico. E fazendo jus a esse título: sempre muito participativo, mesmo à distância (quando eu fui trabalhar no sertão pernambucando, UFRPE-UAST, ou quando ele esteve no Canadá), repetindo sempre a frase "Anete você não pode esfriar, não pare!... Olhe a pesquisa, não a deixe de lado!"; me dando "puxões de orelha" quando me afastava da tese ou quando ocupava muito meu tempo com os trabalhos de olimpíadas, extensão ou ensino da UFRPE; sempre se mostrando como exemplo a ser seguido; e, claro, aproveitando os bons momentos com conversas no almoço, café ou lanche, e principalmente comemorando cada etapa realizada deste trabalho. Tenho certeza que se não fossem suas atitudes eu não teria terminado (ou talvez nem começado) o doutorado, muito menos se teria despertado novamente a minha vontade de trabalhar com pesquisa.

Para a conclusão e evolução dessa tese acredito que os seminários que apresentei e assisti foram de profunda importância. Aqui agradeço a todos que participaram dos meus seminários. Em particular ao professor Hildeberto, sempre com suas críticas construtivas e dúvidas "cabeludas", e ao meu irmão acadêmico Thiago DK, que além de me ouvir nos seminários mantemos uma convivência quase que diária, já que também dividimos gabinete na UFRPE, e nessa convivência ele me deu várias dicas "TEXníscicas" e grandes pitacos para a tese, como o uso da Regra dos sinais de Descartes.

Agradeço aos meus amigos do DMat e UFPE: Gigi, Tarci, Renato, Lila, Rafelli, Marina, Eudes, Bárbara e Manaíra, pelo apoio e pelos momentos de distração. Agradeço aos que me ouviram quando estive dando "choque": Adriana, Natalia, Leon, Rodrigo, Thiago DK e Ângela. Aos meus colegas de trabalho da UFRPE por, sempre que possível, reduzirem meus encargos didáticos, e fica aqui um agradecimento especial a Rodrigo, Hebe e Eulália. Agradeço

aos meus alunos, que tiveram paciência nas aulas em que eu estava cansada, ou ainda aos que demonstraram interesse por conhecer meu trabalho, me motivando ainda mais pra continuar pesquisando.

Fazer do ofício uma diversão levada a sério.
—CHICO SCIENCE

Resumo

Apresentaremos aqui uma demonstração topológica da existência de certas órbitas periódicas simétricas no problema isósceles planar de três corpos, chamadas órbitas de Broucke. Esta prova é baseada na construção de um conjunto de Wazewski no espaço de fase. Encontramos essa família de órbitas periódicas por um "shooting argument", escolhendo um conjunto de condições iniciais no conjunto de Wazewski o qual fazemos fluir pelo fluxo do problema isósceles no espaço de fase, obtendo as condições de saída desejadas.

Palavras-chave: Mecânica Celeste. Órbitas periódicas. Problema isósceles. Conjunto de Wazewski. Órbita de Broucke.

Abstract

We will present a topological proof for the existence of certain symmetrical periodic orbits of the planar isosceles three-body problem, called Broucke's orbits. This proof is based on the construction of a Wazewski set in phase space. We find this family of periodic orbits by a shooting argument, choosing one set of initial conditions in the Wazewski's set, and letting it flow in the phase space, obtaining the desired exit condition.

Keywords: Celestial Mechanics. Periodic orbits. Isosceles problem. Wazewski's set. Broucke's orbits.

Prefácio

Inicialmente tentamos generalizar a órbita de Schubart, no problema colinear dos 3-corpos, para a partir daí fazer uma demonstração topológica da existência dessas órbitas generalizadas. A *órbita de Schubart* é dada por três massas inicialmente alinhadas, com as partículas das extremidades de mesma massa, digamos $m_1 = m_2$, e $m_3 > 0$ qualquer. Escolhe-se velocidades para m_1, m_2 e m_3 de modo que m_2 e m_3 se aproximem enquanto m_1 se afasta de m_3 (ver figura 1). É possível fazer uma escolha das velocidades e distâncias entre as massas de modo que o movimento é periódico. Além disso, tem-se que m_1 desacelera até parar exatamente no instante em que m_2 e m_3 colidem. Isto representa o primeiro quarto da órbita de Schubart. O restante da órbita é dado por reflexão e translação deste primeiro quarto. Veja a figura 1. Este resultado está descrito no Teorema 2.2 na página 43.

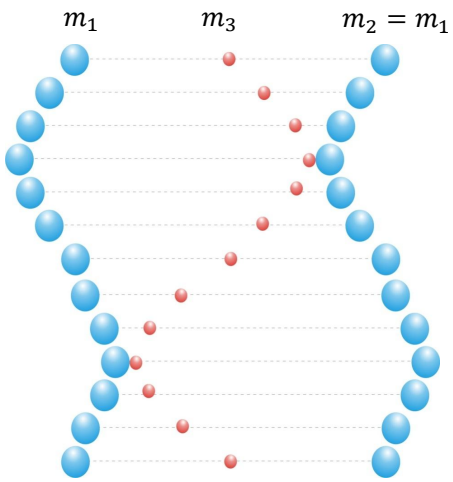

Figura 1: Órbita de Schubart.

No intuito de generalizar essa órbita, consideramos o *problema isósceles planar de três corpos*, que é um subproblema do problema de três corpos sob a ação da força gravitacional Newtoniana, onde os três corpos estão sempre nos vértices de um triângulo isósceles e as velocidades respeitam a simetria da configuração isósceles. Conjecturamos a existência de uma órbita dada pelas três partículas inicialmente alinhadas, onde as duas da extremidade teriam mesma massa, $m_1 = m_2$, e a terceira estaria no ponto médio do segmento que une as outras duas. Escolhendo adequadamente as velocidades dessas três partículas, poderíamos fazer m_3 subir pela mediatriz do segmento que une m_1 e m_2, se afastando do binário $\{m_1, m_2\}$, e m_1, m_2 desceriam e se aproximariam uma da outra. Um ponto importante a se provar era que, quando

m_1 colidisse com m_2, a massa m_3 pararia, e todas reverteriam suas velocidades; assim m_3 desceria e m_1, m_2 se afastariam e subiriam, e quando m_3 voltasse a passar pelo ponto médio do segmento que liga m_1 à massa m_2, m_1 e m_2 parariam e reverteriam suas velocidades. Isto representaria a primeira metade da órbita. Vimos que esta órbita era análoga à órbita de Schubart, a diferença sendo que o corpo do meio subiria ao invés de ficar confinado à linha dos outros dois corpos. Não sabíamos ainda da existência dessa órbita, nem tão pouco das dificuldades a mais que teríamos quando considerássemos o problema isósceles. Após alguns meses de estudos, descobrimos que a família de órbitas que estávamos estudando existia e já tinha sido verificada numericamente por Broucke em [2], ver figura 2 b.. Isso fortaleceu ainda mais a nossa pesquisa! A partir daquele momento estávamos trabalhando com algo concreto, que já tinha sido verificado, numericamente, para certos valores de massas. Este resultado está descrito no Teorema 3.1 na página 56.

O estudo de órbitas periódicas tem um papel importante não só na mecânica celeste, mas também na astronomia (dinâmica estelar). Em particular, as órbitas periódicas estáveis podem ser cercadas por conjuntos de órbitas *aproximadamente-periódicas*, cuja trajetória fica numa vizinhança de órbitas periódicas por um tempo finito (ou não). Estas órbitas formam variedades "tipo-tubo", as quais "atraem" órbitas no sistema dinâmico ver [12] e [13]. Para problemas de três corpos planar com massas iguais, temos três órbitas periódicas conhecidas: Schubart (no problema colinear, citada acima), Broucke (no problema isósceles, citada acima), figura-oito. Veja figura 2. Foi verificado, numericamente, a estabilidade dessas três órbitas, ver [9] e [10] para órbitas de Schubart, [11] para órbitas de Broucke, [25] para órbitas coreográficas figura-oito. Martynova, Orlov e Rubinov, em [12] e [13], e Kotiranta em [8], fazem um estudo interessante da dinâmica dentro dessa variedade "tipo-tubo". Assim, nosso estudo das órbitas de Broucke tornou-se ainda mais interessante, pois estávamos agora tratando de órbitas conhecidas da literatura e estudadas recentemente por astrônomos. No nosso trabalho consideramos, de maneira mais geral, o caso de massas distintas. Quanto à estabilidade linear dessas órbitas, encontramos as referências Doukui Yan [27] para as órbitas de Broucke; Roberts [21] para a figura-oito e "duplo-schubart" [1] (Roberts et. al). Curiosamente não encontramos na literatura referências sobre a estabilidade linear das órbitas de Schubart.

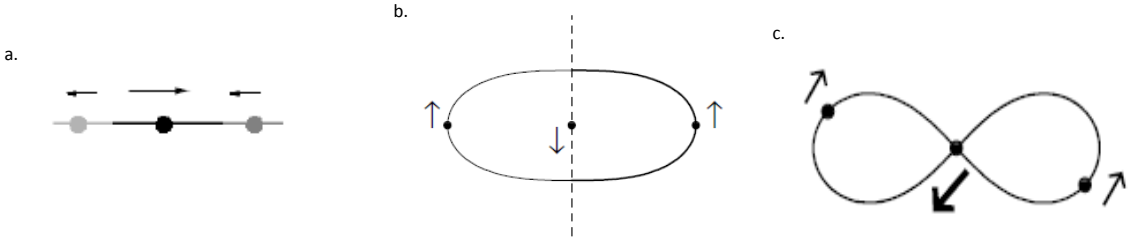

Figura 2: Órbitas periódicas em problemas de três corpos planares de massas iguais: a. órbita de Schubart; b. órbita de Broucke; c. órbita figura-oito.

O problema isósceles planar de três corpos foi estudado por vários autores, dentre os quais: Broucke [2], Devaney [7], Moeckel [16] e Montgomery, Moeckel e Venturelli [18], nossas principais referências. Embora a órbita de Broucke não contenha colisões triplas, já que quando

ocorre a colisão dupla do binário o terceiro corpo está no ponto mais afastado do centro de massa do binário, será importante o estudo desta dinâmica. Em [7] foi feito um estudo da dinâmica na variedade de colisão tripla. Esse estudo foi complementado por Moeckel em [16], que além de trabalhar com a dinâmica na variedade de colisão tripla, analisou a dinâmica próximo a esta variedade. Este estudo é fundamental para o uso do método topológico ("shooting argument") de Moeckel [15]. Como parte do método para estudar a dinâmica próxima de colisões triplas, obtem-se a regularização das colisões duplas, que fazem parte da nossa órbita.

Para demonstrar a existência das órbitas de Broucke, utilizaremos o método topológico introduzido por Moeckel em [15] que se baseia em construir um conjunto de Wazewski, $\mathcal{W}$, no espaço de fase do sistema regularizado. O método topológico utiliza de maneira fundamental o fluxo de um sistema de equações diferenciais ordinárias, já que fluxos e equações diferenciais estão conectadas pelos teoremas de existência, unicidade e dependência contínua das condições iniciais. Os conjuntos de Wazewski generalizam os blocos isolantes do Conley [4], já que um conjunto de Wazewski não precisa ser necessariamente compacto (nem tão pouco fechado!). Um ponto importante a se observar é que existe um retrato de deformação do conjunto de saída de $\mathcal{W}$ no conjunto de saída imediato de $\mathcal{W}$. Este fato é conhecido como *princípio de Wazewski*. A parte principal da demonstração consiste em verificar que o tempo de saída é uma função contínua das condições iniciais. Note que se o fluxo não for um retrato de $\mathcal{W}$ no seu conjunto de saída imediato, segue que $\mathcal{W}$ possui *conjunto invariante*, solução que permanece em $\mathcal{W}$ para todo tempo positivo. Para mais detalhes ver a definição de conjunto de Wazewski: definição 2.1 na página 37.

As observações sobre conjuntos de Wazewski feitas acima seguem imediatamente da definição de fluxo. A construção destes conjuntos depende fortemente de um estudo detalhado do fluxo do sistema. Como o estudo do fluxo nada mais é que o estudo do sistema de E.D.O.'s, vemos que este método tem uma variedade de aplicações naturais, já que os sistemas de equações diferenciais estão intimamente ligados à aplicações. O "argumento final", ou "shooting argument", é uma aplicação do princípio de Wazewski. A ideia topológica básica é o estudo das imagens por funções contínuas de espaços topológicos conexos.

A nossa demonstração da existência das órbitas de Broucke não é a única. Foi apresentada por Shibayama [23] em 2011 uma demonstração variacional, que será discutida com mais detalhes no último capítulo dessa tese. Além desta referência, Yan [27] em 2012, afirma ter provado a existência das órbitas de Broucke com uma demonstração, aparentemente, simples. [27] também contém um estudo da estabilidade linear dessas órbitas utilizando o método do Roberts [21]. Mas a nossa demonstração topológica das órbitas de Broucke é ainda inédita.

SUMÁRIO

1. **O PROBLEMA ISÓSCELES E AS ÓRBITAS DE BROUCKE** 14
1.1 I**ntrodução** 14
1.2 **Equações do Movimento e Regularização** 15
1.3 **Estudo das Variedades Invariantes** 25
2. **O MÉTODO TOPOLÓGICO E UMA APLICAÇÃO À EXISTÊNCIA DAS ÓRBITAS DE SCHUBART NO PROBLEMA COLINEAR DE TRÊS CORPOS** 31
2.1 **Introdução** 31
2.2 **Conjunto de Wazewski** 36
2.3 **Argumento Final** 41
3. **O MÉTODO TOPOLÓGICO PARA O PROBLEMA ISÓSCELES PLANAR** 45
3.1 **Um Conjunto de Wazewski Para o Problema Isósceles de Três Corpos** 45
3.2 **Argumento Final ("Shooting Argument")** 51
4. **OUTROS MÉTODOS E PROJETOS FUTUROS** 57
4.1 **O Método Variacional** 57
4.2 **Do Brake à Sizígia** 59
4.3 **Projetos Futuros** 63
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 65

CAPÍTULO 1

O PROBLEMA ISÓSCELES E AS ÓRBITAS DE BROUCKE

1.1 Introdução

O problema isósceles planar consiste em descrever a dinâmica de 3 massas pontuais, m_1, m_2 e m_3, movendo-se num plano de modo que a configuração é sempre um triângulo isósceles. A órbita de Broucke é uma solução do problema isósceles planar. Descreveremos essa solução a seguir.

As órbitas de Broucke foram encontradas numericamente pelo próprio Broucke em 1979, ver [2]. Neste trabalho vemos a existência de dois tipos de órbitas:

(1) órbitas com ponto de velocidade zero (chamaremos de *órbitas brake*): passam pelo repouso;

(2) órbitas periódicas ordinárias (chamaremos de *órbitas não-brake*): não passam pelo repouso.

O primeiro caso foi estudado por Moeckel, Montgomery e Venturelli [18], onde, para demonstrar a existência desse tipo de órbita, foram usados métodos topológicos e variacionais. Voltaremos a discutir esse caso no capítulo 4 da tese.

Nesta tese estudaremos as órbitas não-brake de Broucke. Essas órbitas serão descritas a seguir. Inicialmente temos as três partículas alinhadas, onde as duas da extremidade têm mesma massa, $m_1 = m_2$, e a terceira está no ponto médio do segmento que une as outras duas. Escolhendo adequadamente as velocidades dessas três partículas, podemos fazer m_3 subir pela mediatriz do segmento que une m_1 e m_2, se afastando do binário $\{m_1, m_2\}$, e m_1, m_2 descendo e se aproximando uma da outra. Um ponto importante a se observar é que, quando m_1 colide com m_2, a massa m_3 pára, e todas revertem suas velocidades; assim m_3 desce e m_1 e m_2 se afastam e sobem, e quando m_3 volta a passar pelo ponto médio do segmento que liga m_1 à m_2, m_1 e m_2 param e revertem suas velocidades. Isto representará a primeira metade da órbita de Broucke. A segunda metade da órbita é dada pela reflexão da primeira metade. Observe a figura 1.1.

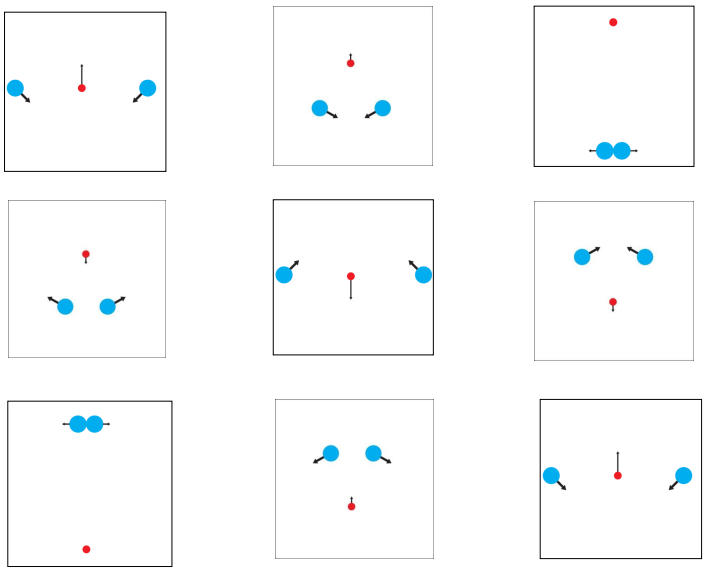

Figura 1.1: Órbita de Broucke.

Apresentaremos uma demonstração da existência desse tipo de órbita utilizando o método topológico introduzido por Moeckel [15] para demonstrar a existência das órbitas de Schubart no problema colinear dos 3 corpos. Neste primeiro momento, observamos que as colisões duplas fazem parte da nossa órbita. Assim, precisamos estudar o sistema nas colisões duplas. Além disso, temos que ser cuidadosos com a colisão tripla, que podemos interpretar como uma variedade, a *variedade de colisão tripla*, pois em nosso estudo teremos órbitas que passam suficientemente próximas desta variedade. A fim de sanar esses problemas, introduziremos as coordenadas *tamanho-forma*, utilizadas por Montgomery [20], bem como reescalas convenientes do tempo. Tais coordenadas, além de regularizar as colisões duplas, fazem o *blow-up* da colisão tripla (enviando a colisão tripla para $t = +\infty$). E assim, nosso sistema dinâmico fica sem singularidades. Essas coordenadas serão introduzidas na seção seguinte. A regularização das colisões duplas é similar à regularização de Levi-Civita, detalhada por Devaney em [7].

1.2 Equações do Movimento e Regularização

Sem perda de generalidade, podemos *normalizar* as massas $m_1 = m_2 = 1$ e m_3 livre. Daí o Lagrangeano do problema planar de três corpos $L = T + U$ se escreve como:

$$\begin{cases} T = & \frac{1}{2}(v_1^2 & +v_2^2 & +m_3 v_3^2) \\ U = & \frac{1}{r_{12}} & +\frac{m_3}{r_{13}} & +\frac{m_3}{r_{23}} \end{cases},$$

onde $v_i = \dot{q}_i$ e $r_{ij} = |q_i - q_j|$.

Seja $q_i = ((q_i)_x, (q_i)_y)$. As *coordenadas de Jacobi* são dadas pela posição relativa do binário $\{q_1, q_2\}$, denotada por ξ_1, e pela posição de m_3 relativa ao centro de massa do binário, denotada por ξ_2, que podem ser escritas como:

$$\begin{cases} \xi_1 = & (q_2)_x - (q_1)_x, \\ \xi_2 = & (q_3)_y - \frac{1}{2}((q_1)_y + (q_2)_y). \end{cases}$$

Note que, no problema isósceles, $(q_1)_y = (q_2)_y$ e $(q_3)_x = 0$.

A partir de agora nos restringiremos ao problema isósceles planar.

Também podemos assumir, sem perda de generalidade, que o *centro de massa* do sistema está na origem e o *momento total* é nulo:

$$q_1 + q_2 + m_3 q_3 = 0 \quad \text{e} \quad v_1 + v_2 + m_3 v_3 = 0$$

Escrevendo $\dot{q}_i{}^2 = (\dot{q}_i)_x^2 + (\dot{q}_i)_y^2$ e observando que:

(1) $(q_1)_y = (q_2)_y$ para todo tempo $\implies (\dot{q}_1)_y = (\dot{q}_2)_y$;

(2) $(q_3)_x = 0$ para todo o tempo $\implies (\dot{q}_3)_x = 0$;

(3) momento total $= 0$:

$$\big((\dot{q}_1)_x + (\dot{q}_2)_x + m_3(\dot{q}_3)_x, (\dot{q}_1)_y + (\dot{q}_2)_y + m_3(\dot{q}_3)_y\big) = (0,0),$$

ou seja:

$$(\dot{q}_1)_x = -(\dot{q}_2)_x \text{ e } 2(\dot{q}_1)_y = -m_3(\dot{q}_3)_y.$$

Temos:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1{}^2 + \dot{q}_2{}^2 + m_3\dot{q}_3{}^2 &= 2(\dot{q}_1)_x^2 + 2(\dot{q}_1)_y^2 + m_3(\dot{q}_3)_y^2 \\ &= 2(\dot{q}_1)_x^2 + 2(-\frac{m_3}{2}(\dot{q}_3)_y)^2 + m_3(\dot{q}_3)_y^2 \end{aligned}$$

Assim:

$$\dot{q}_1{}^2 + \dot{q}_2{}^2 + m_3\dot{q}_3{}^2 = 2(\dot{q}_1)_x^2 + (\frac{m_3^2}{2} + m_3)(\dot{q}_3)_y^2.$$

Note que, das observações (1)-(3) acima e da definição de ξ_1, ξ_2 podemos escrever

$$\dot{\xi}_1 = -2(\dot{q}_1)_x \text{ e } \dot{\xi}_2 = \frac{2+m_3}{2}(\dot{q}_3)_y.$$

Denote por $\mu = \frac{2m_3}{2+m_3}$ a massa reduzida do sistema. Assim,

$$T = \frac{\dot{\xi}_1{}^2}{4} + \frac{\mu}{2}\dot{\xi}_2{}^2.$$

Quanto ao potencial, $U = \frac{1}{r_{12}} + \frac{m_3}{r_{12}} + \frac{m_3}{r_{23}}$, note que $r_{12} = |\xi_1|$ e $r_{13} = r_{23} = \sqrt{(\xi_1/2)^2 + \xi_2^2}$, já que a configuração do sistema é sempre um triângulo isósceles. Assim U se reescreve como :

$$U = \frac{1}{|\xi_1|} + \frac{2m_3}{\sqrt{\frac{\xi_1^2}{4} + \xi_2^2}}. \tag{1.1}$$

Introduziremos, agora, novas variáveis ao sistema chamadas *'tamanho-forma' (size-shape)* para o problema isósceles seguindo [18]. Defina:

$$r^2 = \frac{1}{2}\xi_1^2 + \mu\xi_2^2,$$

e note que r mede o *tamanho* da configuração.

Escrevendo r^2 nas coordenadas (q_1, q_2, q_3), analogamente ao que fizemos com a energia cinética e utilizando que o centro de massa do sistema está na origem, temos:

$$r^2 = \frac{1}{2}\xi_1^2 + \mu\xi_2^2 = (q_1)_x^2 + (q_1)_y^2 + (q_2)_x^2 + (q_2)_y^2 + m_3((q_3)_x^2 + (q_3)_y^2) = \sum_{i=1}^{3} m_i ||q_i||^2.$$

Assim, r^2 é o *momento de inércia do sistema*.

A fim de descrever a "forma" de um triângulo isósceles, introduziremos a coordenada θ que pode ser vista como a inversa de uma projeção estereográfica; ver figura 1.2.

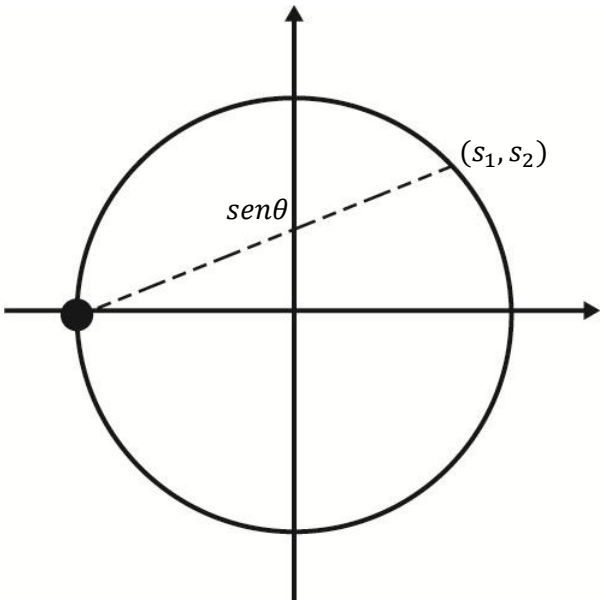

Figura 1.2: Coordenada θ.

Dado um ponto $(0, \operatorname{sen}\theta)$ no eixo y do plano cartesiano, sabemos que este ponto corresponde, pela inversa da projeção estereográfica, a um ponto (s_1, s_2) na circunferência unitária, dado por

$$s_1 = \frac{1 - \operatorname{sen}^2\theta}{1 + \operatorname{sen}^2\theta} \text{ e } s_2 = \frac{2\operatorname{sen}\theta}{1 + \operatorname{sen}^2\theta}.$$

Defina (ξ_1, ξ_2) nas novas coordenadas percorrendo a elipse:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \xi_1 & = & \sqrt{2}rs_1 \\ \xi_2 & = & \frac{r}{\sqrt{\mu}}s_2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \xi_1 & = & \sqrt{2}r\frac{1-\operatorname{sen}^2\theta}{1+\operatorname{sen}^2\theta} \\ \xi_2 & = & \frac{r}{\sqrt{\mu}}\frac{2\operatorname{sen}\theta}{1+\operatorname{sen}^2\theta} \end{array} \right.$$

Observe que θ dá a *forma* da configuração:

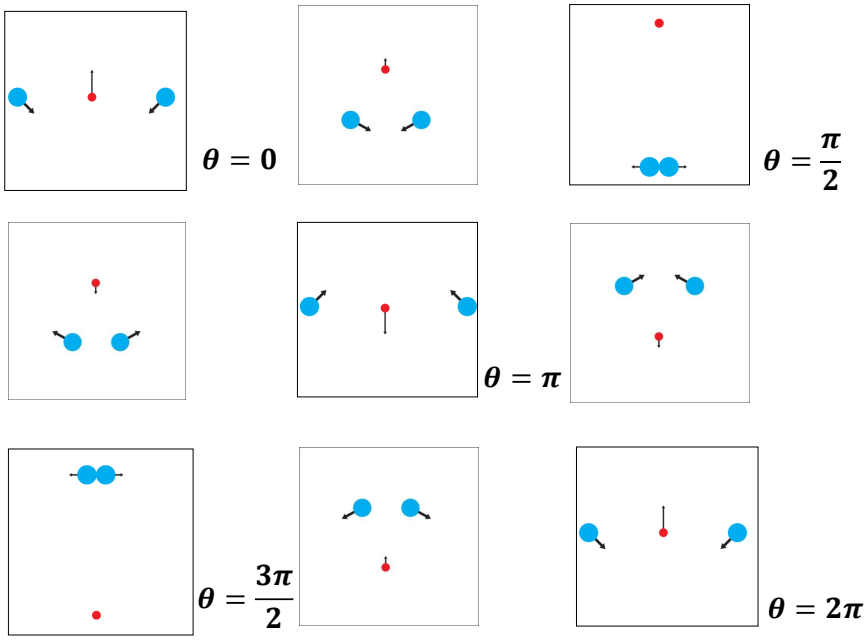

Figura 1.3: Órbita de Broucke.

Note que $\theta \in \mathbb{R}$, e as 'formas' da configuração se repetem periodicamente (com período 2π). O ângulo θ é uma aplicação de recobrimento infinita das 'formas isósceles'; localmente é um recobrimento duplo ramificado próximo às formas de colisão binária.

As coordenadas tamanho-forma (r,θ) irão possibilitar a regularização das colisões duplas e o blow-up da colisão tripla.

Vejamos como fica a energia potencial U (ver equação (1.1)) nessas novas coordenadas. Note que

$$\frac{\xi_1^2}{4}+\xi_2^2 = \frac{r^2}{2}\frac{(1-\text{sen}^2\theta)^2}{(1+\text{sen}^2\theta)^2}+\frac{r^2}{\mu}\frac{4sen^2\theta}{(1+\text{sen}^2\theta)^2}$$
$$= \frac{r^2}{(1+\text{sen}^2\theta)^2}\left[\frac{(1+\text{sen}^2\theta)^2}{2}+\frac{4\text{sen}^2\theta}{m_3}\right],$$

daí o potencial fica:

$$U(r,\theta) = \frac{1}{r}(1+\text{sen}^2\theta)\left(\frac{1}{\sqrt{2}\cos^2\theta}+\frac{2\sqrt{2}m_3}{\sqrt{(1+\text{sen}^2\theta)^2+\frac{8}{m_3}\text{sen}^2\theta}}\right). \tag{1.2}$$

Definimos $V(\theta)$ por :

$$U(r,\theta) = \frac{1}{r}V(\theta). \tag{1.3}$$

O cálculo para escrever a energia cinética, $T = \frac{1}{4}\dot{\xi_1}^2+\frac{1}{2}\mu\dot{\xi_2}^2$, nas novas variáveis é um pouco mais trabalhoso. Ele é dado pelo lema abaixo:

Lema 1.1. *A energia cinética do problema isósceles planar de três corpos nas coordenadas tamanho-forma é dada por*

$$T = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}r^2\frac{4cos^2\theta}{(1+sen^2\theta)^2}\dot{\theta}^2. \tag{1.4}$$

Demonstração. Vamos inicialmente introduzir a seguinte notação:

$$f(\theta) = 1 + \text{sen}^2\theta.$$

Assim $s_1 = \frac{2\,\text{sen}\,\theta}{f(\theta)}$ e $s_2 = \frac{\cos^2\theta}{f(\theta)}$. Lembre-se que $(s_1, s_2) \in S^1$, *i.e.*, $s_1^2 + s_2^2 = 1$, daí $s_1\dot{s_1} + s_2\dot{s_2} = 0$. Derivando ξ_1 e ξ_2 na definição, temos:

$$\dot{\xi_1} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}(\dot{r}s_1 + r\dot{s_1}) \text{ e } \dot{\xi_2} = \sqrt{2}(\dot{r}s_2 + r\dot{s_2}),$$

portanto:

$$\frac{1}{2}\dot{\xi_1}^2 = \dot{r}^2 s_1^2 + 2r\dot{r}s_1\dot{s_1} + r^2\dot{s_1}^2,$$

$$\mu\dot{\xi_2}^2 = \dot{r}^2 s_2^2 + 2r\dot{r}s_2\dot{s_2} + r^2\dot{s_2}^2,$$

o que implica que $2T = \dot{r}^2 + r^2(\dot{s_1}^2 + \dot{s_2}^2)$. Basta calcular $\dot{s_1}^2 + \dot{s_2}^2$ para escrevermos T. Temos que:

$$\dot{s_1} = -\frac{2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta f(\theta) + \cos^2\theta\dot{f}(\theta)}{f(\theta)^2}\dot{\theta}\ ,\ \dot{s_2} = 2\frac{\cos\theta f(\theta) - \text{sen}\,\theta\dot{f}(\theta)}{f(\theta)^2}\dot{\theta}.$$

Daí:

$$(\dot{s_1}^2 + \dot{s_2}^2)\frac{f(\theta)^4}{\dot{\theta}^2} = 4(\cos^2\theta f(\theta)^2 - 2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta f(\theta)\dot{f}(\theta) + \text{sen}^2\theta\dot{f}(\theta)^2)$$
$$+\cos^2\theta(4\text{sen}^2\theta f(\theta)^2 + 4\cos\theta\,\text{sen}\,\theta f(\theta)\dot{f}(\theta) + \cos^2\theta\dot{f}(\theta)^2).$$

Utilizando que $4\,\text{sen}^2\theta + \cos^4\theta = f(\theta)^2$, $\cos^2\theta - 2 = -f(\theta)$ e que $\dot{f}(\theta) = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$, temos:

$$(\dot{s_1}^2 + \dot{s_2}^2)\frac{f(\theta)^4}{\dot{\theta}^2} = f^2(4\cos^2\theta f - 4\cos\theta\,\text{sen}\,\theta\dot{f}(\theta) + \dot{f}(\theta)).$$

Substituindo o valor de f, e fazendo uso de identidades trigonométricas, vemos que:

$$\dot{s_1}^2 + \dot{s_2}^2 = \frac{4\cos^2\theta}{(1+\text{sen}^2\theta)^2}\dot{\theta}^2.$$

Fica demonstrado o resultado. □

A partir das equações do movimento e da introdução de duas novas variáveis para descrever as variações de r e θ, deduziremos um sistema de EDOs de primeira ordem e estudaremos o seu fluxo.

Defina:

$$v = r^{\frac{1}{2}}\dot{r}, \tag{1.5}$$

$$w = \frac{4\cos^2\theta}{r^{-3/2}(1+\operatorname{sen}^2\theta)^2}\dot{\theta}. \tag{1.6}$$

Para regularizar as colisões duplas e enviar a colisão tripla para ocorrer após um tempo "infinito" fazemos uma reescala de tempo:

$$' = r^{\frac{3}{2}}\cos^2\theta\,\dot{}\,. \tag{1.7}$$

Isto significa que $f'(t(\tau)) = \frac{dt}{d\tau}\dot{f}$.

Lema 1.2. *As equações do problema isósceles planar de três corpos nas variáveis (r, v, θ, w) são:*

$$(*)\begin{cases} r' = rv\cos^2\theta, \\ v' = \frac{1}{2}v^2\cos^2\theta + \frac{1}{4}w^2(1+\operatorname{sen}^2\theta)^2 - W(\theta), \\ \theta' = \frac{1}{4}w(1+\operatorname{sen}^2\theta)^2, \\ w' = W_\theta(\theta) - \frac{1}{2}vw\cos^2\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta(2r + v^2 - \frac{1}{2}w^2(1+\operatorname{sen}^2\theta)), \end{cases}$$

onde $W(\theta) = \cos^2\theta V(\theta)$ é o potencial regularizado.

Demonstração. Observe que:

$$\dot{v} = \frac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}}\dot{r}^2 + r^{\frac{1}{2}}\ddot{r} = \frac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}}(r^{-\frac{1}{2}}v)^2 + r^{\frac{1}{2}}\ddot{r}.$$

Vamos reescrever $\ddot{r}$ usando as equações de *Euler-Lagrange*:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0, \tag{1.8}$$

com $x = r$.

O Lagrangeano, $L = T + U$, do sistema nas coordenadas tamanho-forma fica:

$$L = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{r^2}{2}\frac{4\cos^2\theta}{(1+\operatorname{sen}^2\theta)^2}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{r}V(\theta).$$

Substituindo na equação (1.8), obtemos:

$$\ddot{r} = r\frac{4\cos^2\theta}{(1+\operatorname{sen}^2\theta)^2}\dot{\theta}^2 - \frac{1}{r^2}V(\theta),$$

e $\dot{v}$ pode ser escrito como:

$$\dot{v} = \frac{1}{2}r^{-\frac{3}{2}}v^2 + r^{\frac{1}{2}}\left(r\frac{4\cos^2\theta}{(1+\operatorname{sen}^2\theta)^2}\dot{\theta}^2 - \frac{1}{r^2}V(\theta)\right).$$

Como:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{r^{-3}}{\cos^4\theta}\frac{1}{16}w^2(1+\operatorname{sen}^2\theta)^4,$$

a equação de $\dot{v}$ fica:

$$\dot{v} = \frac{1}{2} r^{-\frac{3}{2}} v^2 + r^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{4} \frac{w^2}{\cos^2\theta} (1+\text{sen}^2\theta)^2 - V(\theta) \right).$$

Analogamente a $\dot{v}$, podemos escrever a equação de $\dot{w}$. Basta usar as equações de Euler-Lagrange com $x = \theta$, e assim obter $\ddot{\theta}$. Fazendo isso, temos a quarta equação do nosso sistema de EDOs de primeira ordem:

$$\dot{w} = \frac{r^{-\frac{3}{2}}}{\cos^2\theta} \left(W_\theta(\theta) - \frac{1}{2} vw\cos^2\theta + \text{sen}\theta\cos\theta(2r + v^2 - \frac{1}{2} w^2(1+\text{sen}^2\theta)) \right).$$

Após a reescala no tempo (1.7), obtém-se o sistema $(*)$ do enunciado.

□

A equação da energia $h = T - U$ se escreve nas coordenadas (r, v, θ, w) como:

$$\frac{1}{2} v^2\cos^2\theta + \frac{1}{8} w^2(1+\text{sen}^2\theta)^2 - W(\theta) = rh\cos^2\theta.$$

Como a nossa prova é de existência, fixaremos a energia em -1, *i.e.* $h = -1$. O resultado pode ainda ser verificado para outros valores de energia negativo, devido a escala de simetria, ver [19].

$$\frac{1}{2} v^2\cos^2\theta + \frac{1}{8} w^2(1+\text{sen}^2\theta)^2 - W(\theta) = -r\cos^2\theta. \tag{1.9}$$

A equação acima se reescreve como:

$$\cos^2\theta(V(\theta) - r) = \frac{1}{2} v^2\cos^2\theta + \frac{1}{8} w^2(1+\text{sen}^2\theta)^2 \geq 0.$$

As regiões onde a equação da energia faz sentido, $r \leq V(\theta)$ são chamadas *regiões de Hill*. No problema em questão, há apenas uma reegião de Hill. Vejamos a fronteira desta região:

$$r = V(\theta) = (1 + \text{sen}^2\theta) \left(\frac{1}{\sqrt{2}\cos^2\theta} + \frac{2\sqrt{2} m_3}{\sqrt{(1+\text{sen}^2\theta)^2 + \frac{8}{m_3}\text{sen}^2\theta}} \right). \tag{1.10}$$

Note que $V(\theta)$ é π-periódica e par. Assim, basta construir o gráfico de $V(\theta)$ com $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}] = \{0\} \cup \{\frac{\pi}{2}\} \cup (0, \frac{\pi}{2})$.

Definição 1.1. A variedade de colisão tripla é dada por

$$\{r = 0\} = \{(r, v, \theta, w) / r = 0 \text{ e } (1.9) \text{ vale } \}$$

Para esboçar o gráfico de $V(\theta)$ usaremos a proposição:

Proposição 1.1. *Os equilíbrios do sistema $(*)$ na variedade de colisão tripla, $\{r = 0\}$, correspondem aos pontos críticos de $V(\theta)$.*

Demonstração. De fato, num equilíbrio do sistema $P_0 = (r_0 = 0, v_0, \theta_0, w_0)$ temos:

(1) $\theta'|_{P_0} = 0 \Longrightarrow \frac{1}{4} w_0 (1+\operatorname{sen}^2\theta)^2 = 0 \Longrightarrow w_0 = 0$;

(2) $v'|_{P_0} = 0 \Longrightarrow \frac{1}{2} v_0^2 \cos^2\theta_0 + \frac{1}{4} w_0^2 (1+\operatorname{sen}^2\theta_0)^2 - W(\theta_0) = 0 \Longrightarrow v_0^2 = 2V(\theta_0)$;

(3) $w'|_{P_0} = 0 \Longrightarrow W_\theta(\theta_0) - \frac{1}{2} v_0 w_0 \cos^2\theta_0 + \operatorname{sen}\theta_0 \cos\theta_0 \left(2r_0 + v_0^2 - \frac{1}{2} w_0^2 (1+\operatorname{sen}^2\theta_0)\right)$, que se reescreve como:

$$W_\theta(\theta_0) + 2\operatorname{sen}\theta_0 \cos\theta_0 V(\theta_0) = \cos^2\theta_0 V_\theta(\theta_0) = 0.$$

Supondo $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, temos $w'|_{P_0} = 0 \Leftrightarrow V_\theta(\theta_0) = 0$.

□

A fim de usar os resultados obtidos por Devaney [7], mostraremos que as nossas coordenadas (*tamanho-forma*) são equivalentes às coordenadas usadas em [7]. Devaney definiu suas coordenadas semelhantes às coordenadas polares, e verificou que só existem três equilíbrios (configurações centrais), para o problema isósceles: dois triângulos equiláteros, de Lagrange, e um colinear, de Euler, com $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e $v < 0$. Para verificar essa equivalência, vamos construir um difeomorfismo entre as coordenadas tamanho-forma as coordenadas do trabalho do Devaney, que são as coordenadas de McGehee para o problema isósceles planar de três corpos.

Vejamos como são as coordenadas introduzidas por Devaney. Seja x_1 a posição relativa do binário, e x_2 a posição da terceira massa e o centro de massa do binário. Note que $x_1 = \xi_1$ e $x_2 = \xi_2$. Considere:

$$x = (x_1, x_2) \quad \text{e} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{m_1+m_2+m_3}{2m_1m_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix}.$$

Defina

$$\tilde{r} = (x^t A x)^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad \tilde{s} = \frac{1}{\tilde{r}} x.$$

Note que $x^t A x = \frac{1}{2} x_1^2 + \mu x_2^2$ é como em nossas coordenadas. Além disso, observe que:

$$\tilde{s}^t A \tilde{s} = 1, \quad \text{e} \quad \tilde{s}^t A^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} \tilde{s} = 1.$$

Como A é diagonal temos $(A^{\frac{1}{2}})^t = A^{\frac{1}{2}}$, daí $(A^{\frac{1}{2}}\tilde{s})$ está no círculo unitário, e pode ser escrito como $A^{\frac{1}{2}}\tilde{s} = (\cos\tilde{\theta}, \operatorname{sen}\tilde{\theta})$. Temos então:

$$\tilde{s} = (A^{-1})^{\frac{1}{2}} (\cos\tilde{\theta}, \operatorname{sen}\tilde{\theta}).$$

Faremos agora um breve resumo da construção das coordenadas tamanho-forma, com observações que as aproximem das coordenadas do Devaney. Note que x se escreve, também, como $x = (\xi_1, \xi_2)$ e $r = (x^t A x)^{\frac{1}{2}}$. Defina por s pelo cálculo da inversa de uma projeção estereográfica de $\alpha = \operatorname{sen}\theta$ com relação ao "pólo oeste", seguido de uma multiplicação por $(A^{-1})^{\frac{1}{2}}$, *i.e.*:

$$s = (A^{-1})^{\frac{1}{2}} (\xi_1(\theta), \xi_2(\theta)) = (A^{-1})^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1-\operatorname{sen}^2\theta}{1+\cos^2\theta}, \frac{2\operatorname{sen}\theta}{1+\operatorname{sen}^2\theta} \right).$$

Substituindo $\alpha = \operatorname{sen}\theta$ e A na equação acima, temos:

$$s = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\mu}} \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}, \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} \right).$$

Seja $\mathcal{E} = (A^{-1})^{\frac{1}{2}} S^1 \setminus \mathcal{O}$ a elipse que estamos estudando, retirando o pólo oeste, que corresponde a $\theta = \pi$. Definiremos o difeormorfismo

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathcal{E}\setminus\mathcal{O} & \longrightarrow & \mathcal{E}\setminus\mathcal{O} \\ & \tilde{s} & \longrightarrow & s \end{array}$$

por

$$\tilde{s} \xrightarrow{A^{\frac{1}{2}}} (\cos\tilde{\theta}, \operatorname{sen}\tilde{\theta}) \xrightarrow{\pi_{(e)}} \left(\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}, \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} \right) \xrightarrow{A^{-\frac{1}{2}}} s,$$

onde $\pi_{(e)}$ indica projetar $\alpha = \frac{\operatorname{sen}\tilde{\theta}}{1+\cos\tilde{\theta}}$ em S^1. Como as aplicações $A^{\frac{1}{2}}, A^{-\frac{1}{2}}$ são difeomorfismos, basta provar que a mudança:

$$\theta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{\operatorname{sen}\tilde{\theta}}{1+\cos\tilde{\theta}} \right)$$

é difeomorfismo. De fato,

$$\frac{d\theta}{d\tilde{\theta}} = \frac{2}{(1+\cos\tilde{\theta})^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\operatorname{sen}\tilde{\theta}}{1+\cos\tilde{\theta}} \right)^2}},$$

nunca se anula e está bem definido em $\theta \neq \pi$. Concluímos, assim, a equivalência entre as coordenadas que estamos usando e as coordenadas do Devaney.

Para termos mais precisão na localização dos equilíbrios, vamos calcular o potencial do nosso sistema escrito nas coordenadas do Devaney e seus pontos críticos. É fácil ver que o potencial, (1.10), fica:

$$\widetilde{V}(\tilde{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{2}\cos\tilde{\theta}} + \frac{4m_3}{\sqrt{2\cos^2\tilde{\theta} + \frac{4}{\mu}\operatorname{sen}^2\tilde{\theta}}}.$$

Note que $\widetilde{V}(\tilde{\theta})$ tem 3 pontos críticos: $\tilde{\theta} = 0$ e $\tilde{\theta} = \pm\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3m_3}{2+m_3}}$.

Para voltar as nossas coordenadas, basta efetuar a mudança $\theta \leftrightarrow \tilde{\theta}$ definida acima. Denotaremos os pontos críticos com $\theta \neq 0$ por $-\theta^*, \theta^*$. Concluímos que V tem 3 pontos críticos, e consequentemente o nosso sistema tem 3 equilíbrios. O esboço de $r = V(\theta)$ é:

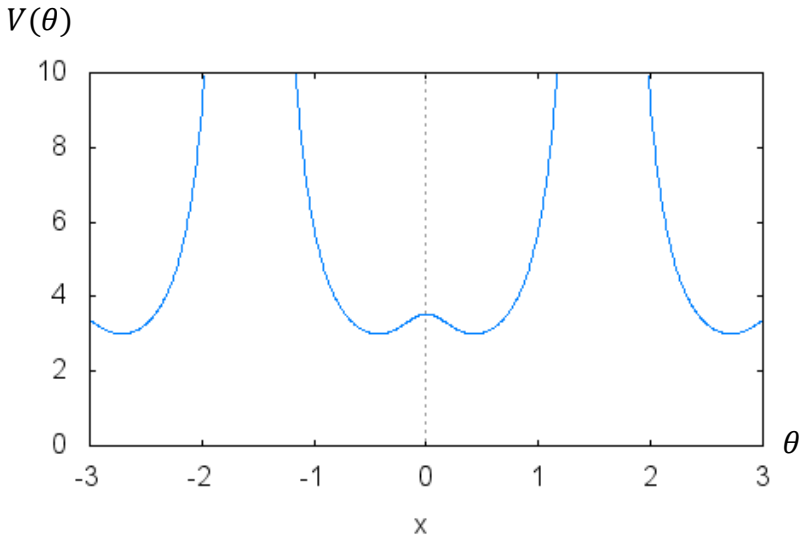

Figura 1.4: Gráficos do potencial com massas iguais. Os gráficos com massas distintas têm forma semelhante.

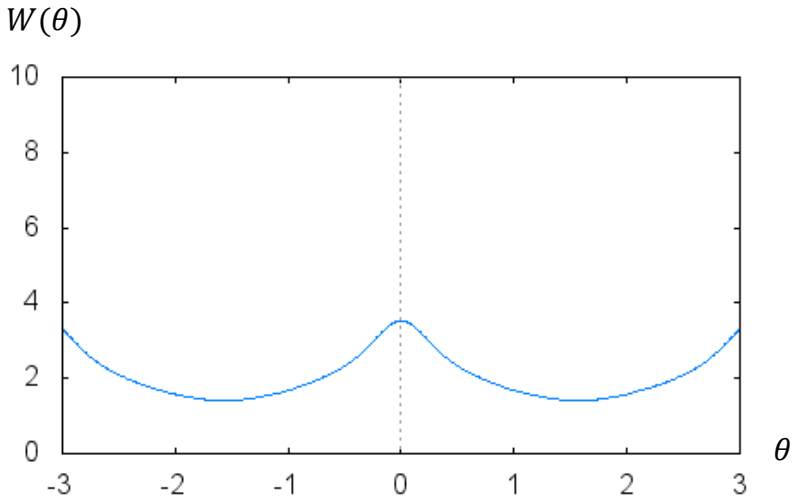

Figura 1.5: Gráficos do potencial regularizado com massas iguais. Os gráficos com massas distintas têm forma semelhante.

Vimos que a região de Hill do nosso problema é dada pela região abaixo da curva $r = V(\theta)$. Pela simetria da órbita de Broucke, vemos que basta construir o primeiro quarto da órbita periódica, o restante da órbita sai por reflexão e translação no tempo. Assim, queremos construir uma curva na região $r \leq V(\theta)$ que parte de $\theta = 0$ e chega em $\theta = \frac{\pi}{2}$. Para podermos refletir o primeiro quarto sem problemas de continuidade ou diferencibilidade da órbita, é necessário

que a órbita parta de $\theta = 0$ ortogonalmente e atinja $\theta = \frac{\pi}{2}$ ortogonalmente. Interpretando esse esse primeiro quarto como um arco de função $r(\theta)$, vemos que $\theta = 0, \frac{\pi}{2}$ são pontos críticos desta função. Veja figura 1.6. No plano θv isto significa que queremos construir uma curva iniciando em $\theta = v = 0$ e terminando em $\theta = \frac{\pi}{2}, v = 0$. E é este arco que construiremos usando conjuntos de Wazewski e o Argumento Shooting no capítulo 3 da tese.

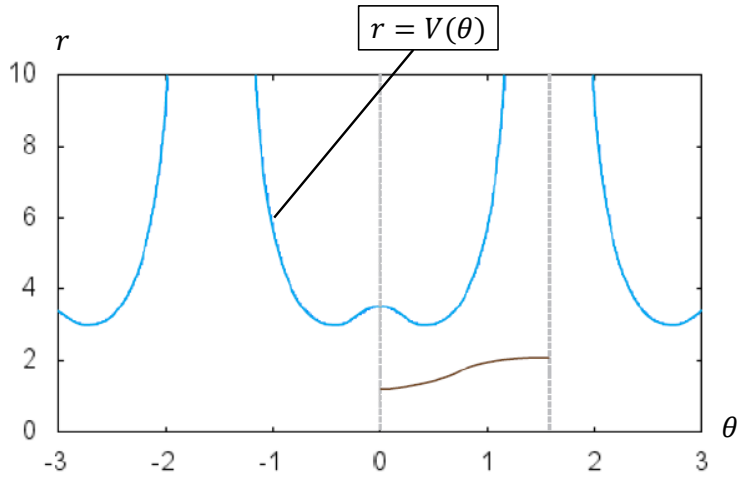

Figura 1.6: Primeiro Quarto da òrbita periódica na Região de Hill.

1.3 Estudo das Variedades Invariantes

Estudaremos o fluxo do sistema $(*)$ na variedade de energia, que é dada por:

$$\widetilde{\mathcal{F}} = \{(r, v, \theta, w) \subseteq \mathbb{R}^4 / r \geq 0, \text{ (1.9) vale}\}.$$

Salvo menção, vemos a variedade de energia como *recobrimento duplo singular* da variedade:

$$\mathcal{F} = \{(r, v, \theta) \subseteq \mathbb{R}^3 / r \geq 0, \text{ (1.9) vale}\}.$$

Este recobrimento, $\pi : \widetilde{\mathcal{F}} \longrightarrow \mathcal{F}$ é dado pela identificação de pontos com mesmo r, v, θ e $|w|$ que satisfazem a equação da energia.

Apresentaremos um estudo das *variedades invariantes* dos equilíbrios no problema isósceles de três corpos no plano. Neste estudo utilizaremos os trabalhos de Moeckel, [16], e Devaney, [7]. Primeiramente, estudaremos o fluxo na variedade de colisão tripla.

A variedade de colisão tripla foi definida anteriormente, veja definição 1.1. No espaço (θ, v, w), é ilustrada pela figura:

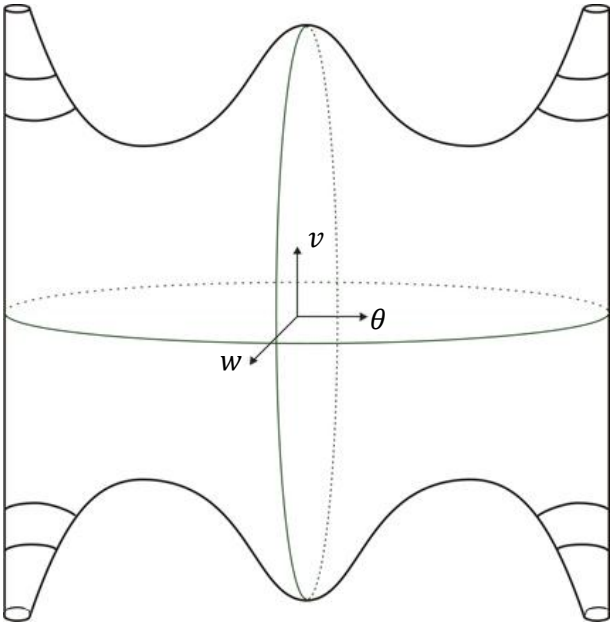

Figura 1.7: Variedade de Colisão Tripla.

Esta variedade é topologicamente uma esfera com quatro pontos removidos.

Pela proposição 1.1 vemos que cada ponto crítico de $V(\theta)$ corresponde a dois equilíbrios, um com $v_0 < 0$ e outro com $v_0 > 0$. Sabemos que V tem 3 pontos críticos, com $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, ou seja, temos 6 equilíbrios para esse intervalo de θ. Denotaremos por E', L'_-, L'_+, respectivamente, os equilíbrios de Euler, Lagrange em $\theta = -\theta^*$ e Lagrange em $\theta = \theta^*$ com $v_0 > 0$, e E, L_-, L_+, respectivamente, os equilíbrios de Euler, Lagrange em $\theta = -\theta^*$ e Lagrange em $\theta = \theta^*$ com $v_0 < 0$.

Note que, da equação da energia com $r = 0$ e da segunda equação do sistema $(*)$, temos:

$$\begin{aligned} v' &= \frac{1}{2}v^2\cos^2\theta + \frac{1}{4}w^2(1+\operatorname{sen}^2\theta)^2 - W(\theta) \\ &= \frac{1}{4}w^2(1+\operatorname{sen}^2\theta)^2 - \frac{1}{8}w^2(1+\operatorname{sen}^2\theta)^2 \\ &= \frac{1}{4}w^2(1+\operatorname{sen}^2\theta)^2, \end{aligned}$$

portanto:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{4}w^2(1+\operatorname{sen}^2\theta)^2 \geq 0.$$

Daí, v é não-decrescente, e vale 0 apenas quando $w = 0$. Mas nesses pontos temos:

$$w'|_{w=0} = \cos^2\theta \; V_\theta \neq 0,$$

fora dos equilíbrios. Aqui combinamos a quarta equação de $(*)$ com a equação da energia, usando $w = 0$. Assim v, de fato, cresce ao longo de qualquer órbita não-estacionária do sistema. Fica provada a proposição abaixo:

Proposição 1.2. *A coordenada v cresce ao longo de todas as órbitas que não passam por equilíbrios do sistema na variedade de colisão tripla. Por isso, o fluxo nesta variedade é tipo-gradiente.*

Vamos fazer um estudo das variedades invariantes dos equilíbrios E, L_-, L_+. Para isso, linearizaremos o sistema $(*)$ na variedade de energia. Lembre-se que nesses equilíbrios temos $r_0 = 0$, $v_0 = -\sqrt{2V(\theta_0)}$, $\theta_0 = 0, -\theta^*, \theta^*$ e $w_0 = 0$, de acordo com a proposição 1.1. O sistema $(*)$ não está escrito nas coordenadas locais da variedade de energia. Ao invés de usar coordenadas locais, reproduziremos o que é feito na literatura [7], [16]. Assim escreveremos o sistema restrito à variedade de energia apenas com a modificação na segunda equação de $(*)$, substituindo $\frac{1}{4}w^2(1+\operatorname{sen}^2\theta)^2$ pelo que é dado na equação da energia, (1.9). O sistema a ser considerado é:

$$(*') \begin{cases} r' = rv\cos^2\theta \\ v' = -\dfrac{1}{2}v^2\cos^2\theta - 2r\cos^2\theta + W(\theta) \\ \theta' = \dfrac{1}{4}w(1+\operatorname{sen}^2\theta)^2 \\ w' = W_\theta(\theta) - \dfrac{1}{2}vw\cos^2\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta(2r + v^2 - \dfrac{1}{2}w^2(1+\operatorname{sen}^2\theta)) \end{cases}$$

O sistema linearizado nos equilíbrios é dado pela matriz:

$$A = \begin{bmatrix} v\cos^2\theta & 0 & 0 & 0 \\ -2\cos^2\theta & -v\cos^2\theta & -v^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta - W_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}(1+\operatorname{sen}^2\theta)^2 \\ 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta & 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta v & W_{\theta\theta} + (\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)v^2 & -\frac{1}{2}v\cos^2\theta \end{bmatrix}.$$

Os autovalores são as raízes da equação $\det(A - \lambda \mathrm{I}) = 0$, ou seja:

$$(v\cos^2\theta - \lambda)\cdot \begin{vmatrix} -v\cos^2\theta - \lambda & -v^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta - W_\theta & 0 \\ 0 & -\lambda & \frac{1}{4}(1+\operatorname{sen}^2\theta)^2 \\ 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta v & W_{\theta\theta} + (\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)v^2 & -\frac{1}{2}v\cos^2\theta - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Fica determinado um autovalor, $\lambda_1 = v_0\cos^2\theta_0$.

Observe que para o equilíbrio E, temos $\theta_0 = 0$, daí:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda \mathrm{I}) = (v\cos^2\theta - \lambda)\cdot(v\cos^2\theta + \lambda)\Big[-\lambda(\frac{1}{2}v\cos^2\theta + \lambda) \\ -(W_{\theta\theta} + (\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)v^2)\frac{1}{4}(1+\operatorname{sen}^2\theta)^2)\Big] = 0. \end{aligned}$$

Concluímos que o equilíbrio de Euler tem dois autovalores reais $\lambda_1 = v_0 < 0$, $\lambda_2 = -v_0 > 0$ e dois autovalores complexos, não-reais, dados pelas raízes de:

$$\lambda^2 + \frac{1}{2}v_0\lambda + \frac{1}{4}(W_{\theta\theta} + v_0^2) = 0,$$

que tem parte real $-\frac{1}{4}v_0$ positiva. Ou seja, concluímos que o equilíbrio de Euler E tem variedade estável de dimensão 1 e instável de dimensão 3.

Vamos escrever $\det(A-\lambda \mathrm{I}) = (v\cos^2\theta - \lambda)p(\lambda)$. Para os equilíbrios de Lagrange, L_-, L_+, *i.e.*, $\theta = \pm\theta^*$ e $v = v_0 = -\sqrt{2V(\theta^*)}$, iremos verificar que o polinômio:

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \Big[& -(v\cos^2\theta + \lambda)\lambda(\frac{1}{2}v\cos^2\theta + \lambda) \\ & - (v^2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{1}{4}W_\theta(\theta))(1+\mathrm{sen}^2\theta)2v\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta \\ & + (v\cos^2\theta + \lambda)(W_{\theta\theta}(\theta) + \frac{1}{4}(\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta)v^2)(1+\mathrm{sen}^2\theta)^2)\Big] = 0, \end{aligned}$$

têm três raízes reais, duas positivas e uma negativa. Daí, os equilíbrios de Lagrange têm variedades instáveis e estáveis de dimensão 2. Para isso reescreva o polinômio acima como:

$$p(\lambda) = a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d,$$

onde:

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = -\left[\frac{1}{2}v\cos^2\theta + v\cos^2\theta\right] \\ c = \left[-\frac{1}{2}v^2\cos^4\theta + (W_{\theta\theta} + (\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta)v^2)\frac{1}{4}(1+\mathrm{sen}^2\theta)^2\right] \\ d = \frac{1}{4}(1+\mathrm{sen}^2\theta)^2\left[v\cos^2\theta(W_{\theta\theta} + (\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta)v^2)\right. \\ \qquad \left. -(v^2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + W_\theta)2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\right] \end{cases} \tag{1.11}$$

Para determinar os sinais dos autovalores, utilizaremos *A Regra dos Sinais de Descartes*. Para isso precisaremos dos sinais dos coeficientes de $p(\lambda)$. Seguem imediatamente de (1.11) os sinais de a e b em L_-, L_+, $a<0$ e $b>0$, já que $v = v_0 = -\sqrt{2V(\theta_0)} < 0$. Para os sinais de c e d faremos uma análise mais detalhada.

(1) Sinal de d: observando a última equação de (1.11), vemos que:

(1.1) $\frac{1}{4}(1+\mathrm{sen}^2\theta)^2 > 0$;

(1.2) lembrando que $W(\theta) = \cos^2\theta V(\theta)$ e que L_-, L_+ são pontos críticos de V, na expressão $(W_{\theta\theta} + (\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta)v^2$, temos:

$$\begin{aligned} & (W_{\theta\theta}(\pm\theta^*) + (\cos^2\theta^* - \mathrm{sen}^2\theta^*)v_0^2 = \\ = & -2(\cos^2\theta^* - \mathrm{sen}^2\theta^*)V(\pm\theta^*) \\ & + \cos^2\theta^* V_{\theta\theta}(\pm\theta^*) + (\cos^2\theta^* - \mathrm{sen}^2\theta^*)2V(\pm\theta^*) \\ = & \cos^2\theta^* V_{\theta\theta}(\pm\theta^*) > 0; \end{aligned}$$

(1.3) $v^2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + W_\theta = 2V(\theta^*)\cos\theta^*\,\mathrm{sen}\,(\pm\theta^*) - 2\cos\theta^*\,\mathrm{sen}\,(\pm\theta^*)V(\theta^*) = 0.$

Assim, $d < 0$.

(2) Utilizando o estudo do item (1), vemos que $c = -V(\theta^*)\cos^4\theta^* + \frac{1}{4}\cos^2\theta^* V_{\theta\theta}(\pm\theta^*)(1+\text{sen}^2\theta^*)^2$. Note que o sinal de c depende do valor de θ^*, *i.e.*, depende da escolha da massa m_3.

Faremos então um estudo das raízes de $p(\lambda)$ com o sinal de c livre. Segundo a regra dos sinais de Descartes, se os termos de um polinômio com coeficientes reais são colocados em ordem decrescente de grau, então o número de raízes positivas (contadas com multipliciadade) do polinômio é ou igual ao número de permutações de sinal ou menor por uma diferença par (pois podemos ter raízes complexas, que aparecem aos pares). Para nosso polinômio temos duas opções de sinais:

coeficiente:	a	b	c	d
sinal 1	$-$	$+$	$-$	$-$
sinal 2	$-$	$+$	$+$	$-$

.

Portanto $p(\lambda)$ possui 2 ou 0 raízes positivas e consequentemente 1 negativa. Afirmamos que ele possui 2 raízes positivas. De fato, considere $p'(\lambda) = 3a\lambda^2 + 2b\lambda + c$ tem ou duas raízes positivas (isto significa que $p(\lambda)$ tem dois pontos críticos positivos) ou 1 raiz positiva (neste caso $p(\lambda)$ tem uma raiz positiva). Assim, $p(\lambda)$ tem pelo menos um ponto crítico positivo. Observando o comportamento do polinômio, vemos que pelo fato de d ser negativo, segue que o gráfico de $p(\lambda)$ cruza o eixo das ordenadas abaixo de $(0,0)$. Como a é negativo, quando λ tende a ∞ temos que $p(\lambda)$ tende a $-\infty$. Isto obriga a existência das duas raízes positivas para $p(\lambda)$.

Note que os três equilíbrios são selas, e que quando restringimos à variedade de colisão tripla, vemos que os equilíbrios de Lagrange, $\theta = \pm\theta^*$, são selas para quaisquer valores da massa m_3. Os equilíbrios de Euler $\theta = 0$, para $v_0 < 0$, é uma *fonte*, e para $v_0 > 0$ é um *poço*. A próxima figura ilustra os equilíbrios e suas variedades invariantes na variedade de colisão tripla:

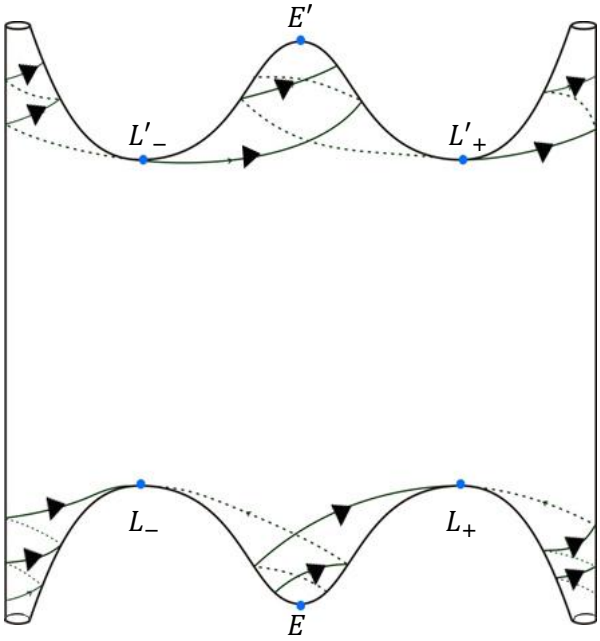

Figura 1.8: Algumas variedades invariantes das selas em $\{r = 0\}$.

Os resultados do nosso estudo sobre as variedades invariantes dos equilíbrios concordam com as conclusões de Devaney [7] e Moeckel [16].

CAPÍTULO 2

O MÉTODO TOPOLÓGICO E UMA APLICAÇÃO À EXISTÊNCIA DAS ÓRBITAS DE SCHUBART NO PROBLEMA COLINEAR DE TRÊS CORPOS

2.1 Introdução

Apresentaremos aqui um método topológico para demontração da existência de órbitas periódicas em problemas simétricos de três corpos. Nosso exemplo para introdução do método será a existência das órbitas de Schubart no problema colinear de três corpos. Este resultado foi publicado por Moeckel em 2006 numa versão preliminar, em seguida publicado em [15] no ano de 2008. Esta apresentação do artigo do Moeckel será dada acrescentando detalhes ausentes no trabalho e reorganizando-o. Este método foi utilizado por Moeckel [17] para demonstrar a existência da órbita coreográfica "figura-oito", encontrada por Chenciner e Montgomery [3]. No capítulo 3 desta tese, mostraremos a existência das *órbitas de Broucke* no problema isósceles de três corpos no plano. A fim de aplicar o método, é necessário construir um conjunto de Wazewski, $\mathcal{W}$, no espaço de fase. Um conjunto de Wazewski é uma generalização da noção de blocos isolantes devido a Conley [4].

No caso da figura-oito temos três massas iguais, $m_1 = m_2 = m_3$. Moeckel constrói o primeiro doze avos da órbita periódica que é dado inicialmente pelas massas numa configuração de Euler, *i.e.*, alinhadas com a massa do meio, digamos m_3, equidistante das outras duas (situação vermelha na figura 2.1). Passado o primeiro doze avos, as massas se encontram numa configuração de triângulo isósceles com m_1 no eixo de simetria (situação azul na figura 2.1). O restante da órbita sai por translação e reflexão no tempo, com os corpos permanecendo numa mesma curva com a forma de "oito".

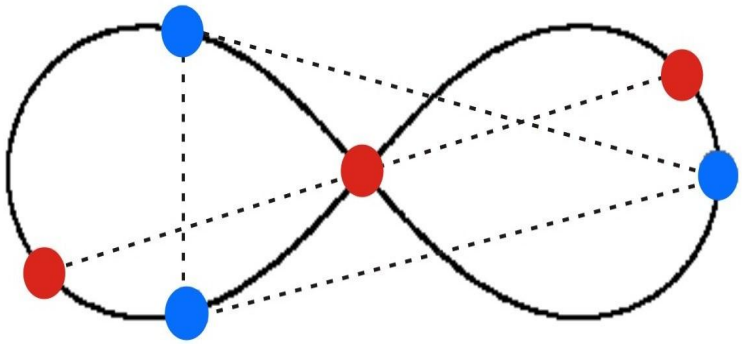

Figura 2.1: Órbita Figura 8.

Para o problema das órbitas de Schubart, começamos com três massas alinhadas, as duas das extremidades com mesmo valor, como no problema isósceles descrito no capítulo anterior. Escolha velocidades para m_1, m_2 e m_3 de modo que m_2 e m_3 se aproximam enquanto m_1 se afasta de m_3 (ver figura 2.1). Queremos demonstrar que é possível fazer uma escolha das velocidades e distâncias entre as massas de modo que o movimento é periódico. Além disso, para que a órbita seja de Schubart, precisamos mostrar que m_1 desacelera até parar exatamente no instante em que m_2 e m_3 colidem. Isto representa o primeiro quarto da órbita periódica. O restante da órbita é dado por reflexão e translação deste primeiro quarto.

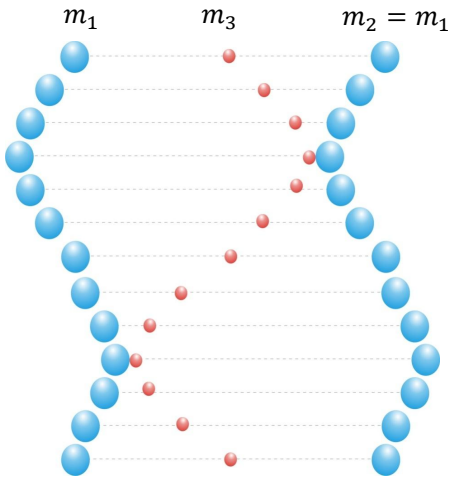

Figura 2.2: Órbita de Schubart.

Aqui também podemos normalizar as massas $m_1 = m_2 = 1$. Considerando $q_i \in \mathbb{R}$ a posição da massa m_i e $v_i = \dot{q}_i$, o Lagrangeano $L = T + U$ se escreve como:

$$\begin{cases} T = & \frac{1}{2}(v_1^2 & +v_2^2 & +m_3 v_3^2), \\ U = & \frac{1}{r_{12}} & +\frac{m_3}{r_{13}} & +\frac{m_3}{r_{23}}, \end{cases}$$

onde $r_{ij} = |q_i - q_j|$.

Também podemos assumir aqui, sem perda de generalidade, que o centro de massa do sistema está na origem e o momento total é nulo:

$$q_1 + q_2 + m_3 q_3 = 0 \text{ e } v_1 + v_2 + m_3 v_3 = 0$$

Introduza as coordenadas de Jacobi:

$$\begin{cases} \xi_1 = q_2 - q_1 \\ \xi_2 = q_3 - \dfrac{1}{2}(q_1 + q_2). \end{cases}$$

Note que $\xi_1 > 0$. As equações do movimento são dadas nessas coordenadas por:

$$\begin{cases} T = & \frac{\dot{\xi_1}^2}{4} + \frac{\mu}{2}\dot{\xi_2}^2, \\ U = & \frac{1}{\xi_1} + \frac{m_3 \xi_1}{\frac{\xi_1^2}{4} - \xi_2^2}. \end{cases}$$

Para introduzir as coordenadas tamanho-forma (r, θ) no problema colinear, defina r, w_1, w_2 via:

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{1}{2}\xi_1^2 + \mu\xi_2^2, \\ w_1 &= \frac{1}{4}\xi_1^2 - \frac{1}{2}\mu\xi_2^2, \\ w_2 &= \sqrt{\frac{\mu}{2}}\xi_1\xi_2. \end{aligned}$$

Defina $w = (w_1, w_2)$. É fácil verificar que:

$$w_1^2 + w_2^2 = \frac{1}{4}I^2 = \frac{1}{4}r^4,$$

onde I representa o momento de inércia do sistema. Assim como no problema isósceles, r mede o tamanho da configuração. Observe que o vetor $s = 2w/r^2$ é unitário, daí podemos escolher θ de modo que $s = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. O ângulo θ descreve a forma da configuração. Note que basta considerar valores de θ para os quais m_3 está entre m_1 e m_2. Isto significa que $-\theta_{\text{máx}} \leq \theta \leq \theta_{\text{máx}}$, onde

$$\theta_{\text{máx}} = \operatorname{arctg}\sqrt{m_3(2 + m_3)}.$$

Note que quando m_3 varia de 0 a ∞, temos $\theta_{\text{máx}}$ variando de 0 a $\frac{\pi}{2}$.

O Lagrangeano nas novas variáveis é $L = T + U$, onde:

$$T = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{8}r^2\dot{\theta}^2,$$

$$U = \frac{1}{r}W(\theta),$$

com $W(\theta) = \frac{1}{\rho_{12}} + \frac{m_3}{\rho_{13}} + \frac{m_3}{\rho_{23}}$, $\rho_{ij} = \frac{r_{ij}}{r}$. Utilizando os r_{ij} escritos como função de ξ_1, ξ_2, a definição de r, w_1, w_2 e algumas identidades trigonométricas, encontramos:

$$\begin{aligned}
\rho_{12}^2 &= 1 + \cos\theta, \\
\rho_{13}^2 &= \frac{1+m_3}{m_3}\,\mathrm{sen}^2(\frac{1}{2}(\theta + \theta_{\text{máx}})), \\
\rho_{23}^2 &= \frac{1+m_3}{m_3}\,\mathrm{sen}^2(\frac{1}{2}(\theta - \theta_{\text{máx}})).
\end{aligned}$$

As equações de *Euler-Lagrange*,

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0,$$

do problema colinear são:

$$\begin{cases} \ddot{r} = -\dfrac{1}{r^2}W + \dfrac{1}{4}r\dot{\theta}^2 \\ (r^2\dot{\theta})^{\cdot} = \dfrac{4}{r}W_\theta. \end{cases} \tag{2.1}$$

A colisão tripla, $\{r = 0\}$, é uma singularidade do sistema (2.1). Procedendo como McGehee [14], através da reescala no tempo $' = r^{\frac{3}{2}}\,\dot{}$, fazemos um *blow-up* da singularidade da colisão tripla. Introduzindo duas novas variáveis $v' = \frac{r'}{r}$ e $\tau = \theta'$. Utilizando as equações de Euler-Lagrange, obtemos o seguinte sistema de E.D.O.'s de primeira ordem:

$$\begin{cases} r' = vr, \\ v' = \dfrac{1}{2}v^2 + \dfrac{1}{4}\tau^2 - W(\theta), \\ \theta' = \tau, \\ \tau' = 4W_\theta - \dfrac{1}{2}v\tau, \end{cases} \tag{2.2}$$

com a equação da energia:

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{8}\tau^2 - W(\theta) = rh.$$

Observe que $\{r = 0\}$ é conjunto invariante pelo o fluxo do sistema (2.2). Além disso, vemos que as colisões duplas, $\theta = \pm\theta_{\text{máx}}$, ainda são singularidades do sistema. Para regularizar essas

colisões, fazemos uma nova reescala no tempo, que atuará como a multiplicação do campo vetorial por $\theta_{\text{máx}}\cos^2 u$. Além disso, introduzimos as novas variáveis u, z, dadas por:

$$\begin{cases} \theta = \theta_{\text{máx}} \operatorname{sen} u, \\ z = \tau \cos u. \end{cases}$$

Assim $-\theta_{\text{máx}} \leq \theta \leq \theta_{\text{máx}}$ significa $-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$. O sistema de EDOs fica:

$$\begin{cases} r' = \theta_{\text{máx}} vr\cos^2 u, \\ v' = \theta_{\text{máx}}(\frac{1}{2}v^2\cos^2 u + \frac{1}{4}z^2 - G(u)), \\ u' = z, \\ z' = 4G_u - \frac{1}{2}\theta_{\text{máx}} vz\cos^2 u + 4\operatorname{sen} u\cos u(v^2+2r). \end{cases} \tag{2.3}$$

onde

$$G(u) = \cos^2 u W(u)$$

é o potencial regularizado. A figura 2.3 contém gráficos das funções W e G.

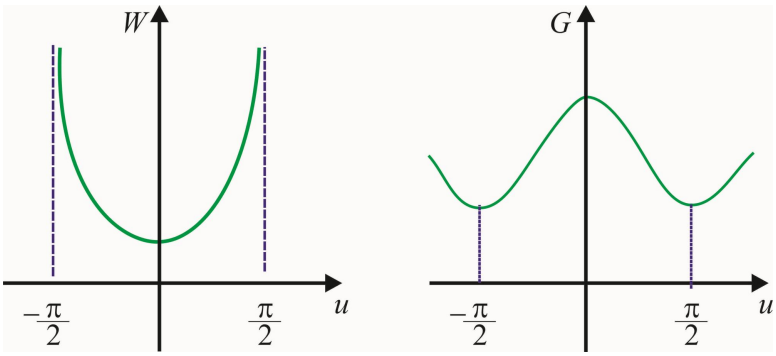

Figura 2.3: Potencial e potencial regularizado.

Observe a semelhança do sistema(2.3) com o sistema de EDOs introduzido no capítulo anterior $(*)$, página 20. Lembre-se que as variáveis r, v são as mesmas e $u \leftrightarrow \theta$, $z \leftrightarrow w$ estão intimamente ligadas.

A equação da energia para $h = -1$ fica:

$$\frac{1}{2}v^2\cos^2 u + \frac{1}{8}z^2 - G(u) = -r\cos^2 u. \tag{2.4}$$

Observe que, sem perda de generalidade, podemos supor $h = -1$.

Observação 2.1. *Façamos agora um breve estudo da função potencial, W e do potencial regularizado, G. Essas informações serão úteis mais adiante. É fácil ver que $W(u)$ tem singularidades nas colisões duplas: $u = \pm\frac{\pi}{2}$. Além disso, pode-se observar que: W só tem um ponto crítico localizado em $u = 0$, $W_u > 0$ em $u \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ e $W_{uu} > 0$ em $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Já o potencial regularizado, $G(u)$ estende W a uma função analítica em $u = \pm\pi/2$, periódica (de período π), com pontos críticos em $u = -\pi/2, 0, \pi/2$.*

2.2 Conjunto de Wazewski

A fim de demonstrar a existência das órbitas de Schubart para o problema colinear dos 3 corpos, nesta seção encontraremos um conjunto de Wazewski no espaço de fase para o problema colinear dos três corpos. A demonstração da existência das órbitas de Schubart será dada na seção seguinte.

Pela simetria do problema, basta construirmos o primeiro quarto da órbita, o restante sai por rotação e translação no tempo. Para isso, precisamos provar que existe uma configuração inicial tal que a órbita deixa ortogonalmente o eixo $u = 0$ e atinge ortogonalmente o eixo $u = \frac{\pi}{2}$. No plano u, v, isto significa que conseguimos construir a órbita iniciando em $u = v = 0$ e terminando em $u = \frac{\pi}{2}, v = 0$. Observe a figura:

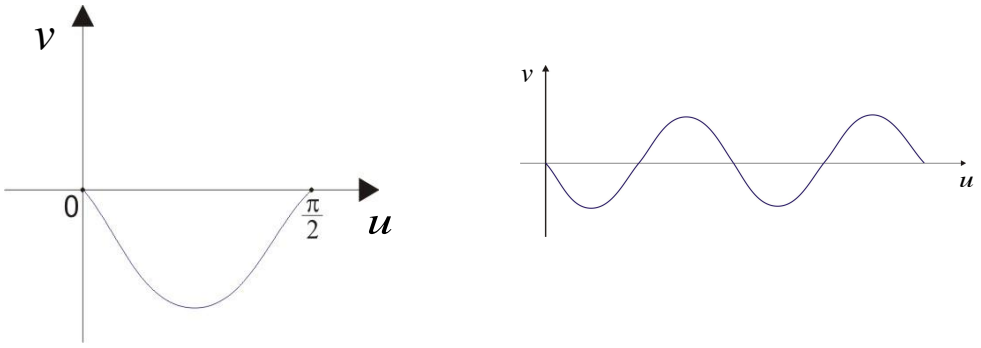

Figura 2.4: Primeiro quarto e órbita completa.

Estudaremos agora o fluxo na variedade de energia:

$$\widetilde{\mathcal{F}} = \{(r, v, u, z)/r \geq 0,\ (2.4) \text{ vale}\}.$$

Quando necessário veremos variedade de energia como recobrimento duplo singular de

$$\mathcal{F} = \{(r, v, u)/r \geq 0,\ (2.4) \text{ vale}\}.$$

Este recobrimento, $\pi : \widetilde{\mathcal{F}} \longrightarrow \mathcal{F}$ é dado pela identificação de pontos com mesmo r, v, u e $|z|$ que satisfazem a equação da energia.

Na discussão a seguir usaremos a notação $x \cdot t$ para indicar a imagem de x pelo fluxo após um tempo t. Esta notação foi introduzida por Conley [4] e enfatiza a ideia do fluxo como uma ação de grupo.

Definição 2.1. Sejam Γ um espaço topológico e $\mathcal{W} \subset \Gamma$. $\mathcal{W}$ é *conjunto de Wazewski* se:

a) $x \in \mathcal{W}$, $x \cdot [0,t] \subset \overline{\mathcal{W}} \Longrightarrow x \cdot [0,t] \subset \mathcal{W}$;

b) O *conjunto de saída imediato*:

$$\mathcal{W}^- = \{x \in \mathcal{W} / x \cdot [0,t] \not\subset \mathcal{W} \text{ , } \forall t > 0\}$$

é fechado no *conjunto de saída*:

$$\mathcal{W}^0 = \{x \in \mathcal{W} / x \cdot t \notin \mathcal{W} \text{ para algum } t > 0\}.$$

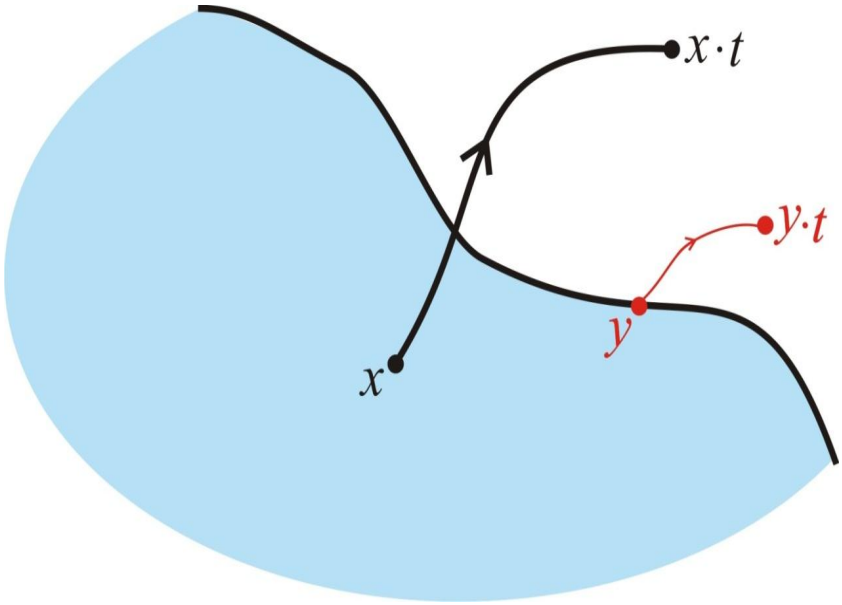

Figura 2.5: Ilustração de um conjunto de Wazewski.

Observe que na figura acima $x \in \mathcal{W}^0$, mas $x \notin \mathcal{W}^-$, já $y \in \mathcal{W}^0 \cap \mathcal{W}^-$.

Lema 2.1. *O tempo de saída:*

$$\tau : \mathcal{W}^0 \longrightarrow \mathbb{R}_+ \text{ , } \tau(x) = sup\{t \geq 0 / x \cdot [0,t) \subset \mathcal{W}\},$$

é uma função contínua.

Demonstração. Para mostrar a continuidade dados x e $\varepsilon > 0$, precisamos construir uma vizinhança $\mathfrak{U}$ de x tal que $\forall u \in \mathfrak{U}$ temos $|\tau(u) - \tau(x)| < \varepsilon$, ou seja:

(i) $\tau(u) < \tau(x) + \varepsilon$, e

(ii) $\tau(u) > \tau(x) - \varepsilon$.

Para (i), observe que da condição a) da definição de conjunto de Wazewski, temos para qualquer $\varepsilon > 0$:

$$x \cdot [\tau(x), \tau(x)+\varepsilon] \not\subset \mathcal{W} \quad \Longrightarrow \quad x \cdot [\tau(x), \tau(x)+\varepsilon] \not\subset \overline{\mathcal{W}}.$$

Assim, existe $t' \in [\tau(x), \tau(x)+\varepsilon]$ tal que $x \cdot t' \notin \overline{\mathcal{W}}$. Tome $\mathcal{V}$, vizinhança de $x \cdot t'$ tal que $\mathcal{V} \cap \overline{\mathcal{W}} = \emptyset$. Note que podemos escolher $\mathcal{U}$, vizinhança de x onde $\mathcal{U} \cdot t' \subset \mathcal{V}$. Daí, $\forall u \in \mathcal{U}$, temos $u \cdot t' \notin \mathcal{W}$. Concluímos que dado $x \in \mathcal{W}^0$ existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de x tal que $u \in \mathcal{W}$ para todo $u \in \mathcal{U}$, *i.e.*, $\mathcal{U} \subset \mathcal{W}$. Ou seja, vimos que $\mathcal{W}^0$ é aberto em $\mathcal{W}$. Além disso, construímos uma vizinhança de x com $\tau(u) < \tau(x)+\varepsilon$ para todo u nessa vizinhança. Portanto a condição (i) é verificada para $\mathcal{U}$.

Vejamos (ii). Dado $\varepsilon > 0$ e $x \in \mathcal{W}^0$, sabemos que $x \cdot [0, \tau(x)-\varepsilon] \subset \mathcal{W}^0$. Como $\mathcal{W}^-$ é fechado em $\mathcal{W}^0$, temos:

$$x \cdot [0, \tau(x)-\varepsilon] \cap \mathcal{W}^- = \emptyset.$$

Cada $x \cdot s$ com $s \in [0, \tau(x)-\varepsilon]$ admite uma vizinhança A_s disjunta de $\mathcal{W}^-$. $\mathcal{C} = \{A_s\}_{s \in [0,\tau(x)-\varepsilon]}$ é uma cobertura do compacto $x \cdot [0, \tau(x)-\varepsilon]$. Seja A uma subcobertura finita deste compacto contida em $\mathcal{C}$. Defina $B = A \cap \mathcal{U}$. B é um aberto que contém x onde:

$$B \cdot [0, \tau(x)-\varepsilon] \subset A \quad \text{e} \quad \forall u' \in B \quad \Longrightarrow \quad u' \cdot [0, \tau(x)-\varepsilon] \cap \mathcal{W}^- = \emptyset.$$

Daí $\tau(u') > \tau(x)-\varepsilon$.

Assim, basta definir a $\mathfrak{U}$ do início como B. □

O conjunto de Wazewski para o problema colinear é dado pela proposição abaixo.

Proposição 2.1. $\mathcal{W} = \{(r, v, u, z) /$ (2.4) vale $, 0 \le u \le \frac{\pi}{2}, \quad v \le 0, \quad r \ge 0, \quad z \ge 0\}$.

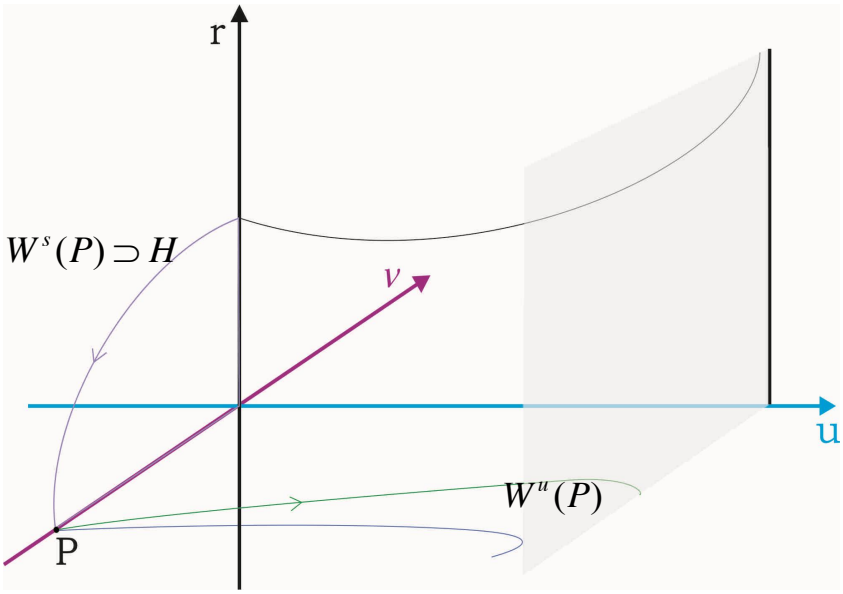

Figura 2.6: Conjunto de Wazewski.

Enxergaremos $\mathcal{W}$ na variedade de energia projetada no espaço *rvu*, que estamos denotando por $\mathcal{F}$, a superfície na figura acima corresponde a $z = 0$, e o interior corresponde ao z positivo que soluciona a equação da energia para dados r, v, u.

Note que o item a) da definição de conjunto de Wazewski segue imediatamente do fato de $\mathcal{W}$ ser fechado. Para verificarmos o item b) precisamos identificar os conjuntos de saída, e verificar que o conjunto de saída imediato é fechado no conjunto de saída.

Em [14] vemos que o único equilíbrio em $\mathcal{W}$ é o equilíbrio de Euler, correspondente à configuração $u = 0$. Denotaremos por P esse equilíbrio. Note que $P = (r, v, u, z) = (0, -\sqrt{2G(0)}, 0, 0)$. Ainda no trabalho de McGehee, foi demonstrado que P é um equilíbrio hiperbólico, com variedade estável, $W^s(P)$, de dimensão 2 e instável, $W^u(P)$, de dimensão 1. A *órbita homotética Euleriana* é um conjunto invariante que conecta os equilíbrios de Euler P e P' que estão na variedade de colisão tripla, o primeiro com $v < 0$ e o segundo com $v > 0$. Note que a órbita homotética Euleriana deve estar contida na variedade de energia com $z = 0$, caso contrário $z > 0$ (lembrando que $z = u'$) e a órbita não seria invariante. Assim $\mathcal{H} = \{(r, v, u, z) \in \widetilde{\mathcal{F}} / u = z = 0\}$ é a órbita homotética Euleriana. Note que $\mathcal{H} \cap \mathcal{W} = W^s(P) \cap \mathcal{W}$.

Lema 2.2. $\mathcal{W}^0 = \mathcal{W} \setminus \mathcal{H}$.

Demonstração. Suponha que $x_0 = (r_0, v_0, u_0, z_0) \in \mathcal{W} \setminus \mathcal{H}$. Note que, se $u_0 = 0$ então $u'|_{x_0} = z_0 > 0$ (caso contrário, $x_0 \in \mathcal{H}$), daí u cresce e a órbita de x_0 entra em $\mathcal{W}$ com $u > 0$. Assim, sem perda de generalidade, podemos supor que nosso ponto inicial x_0 tem $u_0 > 0$.

Seja $x_0 = (r_0, v_0, u_0, z_0)$ fixo com $u_0 > 0$, defina $W_{u_0} = \{x \in \mathcal{W} / u \geq u_0\}$. Note que, como $u' = z \geq 0$ em todo instante, temos que $u(t)$ é não-decrescente ao longo de órbitas em $\mathcal{W}$.

Afirmação: Existem constantes $c_0, d_0 > 0$ tais que $\forall x \in \mathcal{W}$ ou $z \geq c_0$ ou $z' \geq d_0$.

Devemos considerar dois casos:

(1) Se $u = \frac{\pi}{2}$ a equação da energia, (2.4), fica:

$$z^2 = 8G(\pi/2).$$

Se escolhermos c_0 tal que $c_0^2 \leq 8G(\pi/2)$ e d_0 qualquer, a afirmação é satisfeita, já que $z'(\pi/2) = 4G_u(\pi/2) = 0$.

(2) Se $u_0 \leq u < \pi/2$, vamos escrever a quarta equação do sistema (2.2):

$$z' = 4G_u - \frac{1}{2}\theta_{\text{máx}} vz \cos^2 u + 4 \operatorname{sen} u \cos u (v^2 + 2r) \tag{2.5}$$

de uma maneira mais conveniente. Usando a equação da energia temos:

$$4 \operatorname{sen} u \cos u (v^2 + 2r) = 4 \operatorname{sen} u \cos u \cdot \frac{\cos u}{\cos u} \cdot (v^2 + 2r) = \operatorname{tg} u (8G(u) - z^2),$$

e (2.5) fica:

$$z' = 4G_u - \frac{1}{2}\theta_{\text{máx}} vz \cos^2 u + \operatorname{tg} u (8G(u) - z^2).$$

Como $\theta_{\text{máx}} vz\cos^2 u \leq 0$, temos $z' \geq 4G_u(u) + \text{tg}\, u(8G(u) - z^2)$. Note que:

$$4G_u(u) + \text{tg}\, u(8G(u) - z^2) = \text{tg}\, u(4\text{cotg}\, uG_u(u) + 8G(u) - z^2).$$

Além disso,

$$4\text{cotg}\, uG_u(u) + 8G(u) = \frac{4\cos^3 u}{\text{sen}\, u} W_u(u) > 0,$$

em $[u_0, \pi/2]$. Daí (2.5) fica:

$$z' \geq 4G_u - \text{tg}\, u(8G(u) - z^2) = \text{tg}\, u[4\frac{\cos^3 u}{\text{sen}\, u} W_u - z^2].$$

Tome k o mínimo que $\frac{4\cos^3 u}{\text{sen}\, u} W_u(u) = 4\text{cotg}\, uG_u(u) + 8G(u)$ atinge em $[u_0, \pi/2]$. Assim

$$z' \geq \text{tg}\, u[k - z^2] \geq \text{tg}\, u_0[k - z^2].$$

Basta tomar $c_0 = \text{mín}\{\sqrt{\frac{k}{2}}, \sqrt{8G(\pi/2)}\}$ e $d_0 = \frac{k}{2}\text{tg}\, u_0$.

Assim fica demonstrada a afirmação.

Da afirmação segue que $\forall x \in \mathcal{W}_{u_0}$ ou $z \geq c_0$ ou $z' \geq d_0$. Escreva:

$$\mathcal{W}_{u_0} = \mathcal{W}^-_{u_0} \cup \mathcal{W}^+_{u_0},$$

onde $\mathcal{W}^-_{u_0} = \{x \in \mathcal{W}_{u_0} / 0 \leq z \leq c_0\}$ e $\mathcal{W}^+_{u_0} = \{x \in \mathcal{W}_{u_0} / z \geq c_0\}$. Concluímos que $0 \leq z \leq c_0$ e $z' \geq d_0$ em $\mathcal{W}^-_{u_0}$, daí um segmento de órbita permanece em $\mathcal{W}^-_{u_0}$ ($z < c_0$) no máximo por um tempo c_0/d_0, a partir daí ele sai de $\mathcal{W}$ ou entra em $\mathcal{W}^+_{u_0}$. Para uma órbita em $\mathcal{W}^+_{u_0}$ temos $0 \leq u \leq \pi/2$ e $u' = z \geq c_0 > 0$, assim para tempos maiores que $\frac{\pi}{2c_0}$ a órbita deixa $\mathcal{W}^+_{u_0}$. Como $u' = z \geq 0$ em todo $\mathcal{W}$, temos que $\mathcal{W}^+_{u_0}$ é positivamente invariante em $\mathcal{W}$ portanto esta órbita não pode voltar para $\mathcal{W}^-_{u_0}$, *i.e.*, ela deixa $\mathcal{W}$. □

Para a construção do conjunto de saída imediato defina:

$$B_1 = \{x \in \mathcal{W}^0 / u = \frac{\pi}{2}\} \quad \text{e} \quad B_2 = \{x \in \mathcal{W}^0 / v = 0\ ,\ 2r\cos^2 u \leq G(u)\}.$$

O conjunto de saída imediato é a união de B_1 e B_2.

Lema 2.3. $\mathcal{W}^- = B_1 \cup B_2$.

Demonstração. Vejamos primeiramente que $B_1 \cup B_2 \subset \mathcal{W}^-$.

Se $x \in B_1$ então $u = \pi/2$ e $u' = z = \sqrt{8G(\pi/2)} > 0$, daí x sai imediatamente.

Se $x \in B_2$ com $0 \leq u < \pi/2$, temos que $v = 0$. Utilizando este fato e a segunda equação do sistema (2.2) segue:

$$v' = \theta_{\text{máx}}(G(u) - \frac{1}{2} v\cos^2 u - 2r\cos^2 u) = \theta_{\text{máx}}(G(u) - 2r\cos^2 u) \geq 0.$$

Assim, caso $G(u) - 2r\cos^2 u > 0$, temos $v = 0$ e $v' > 0$, o ponto deixa $\mathcal{W}$ imediatamente. No caso em que $G(u) - 2r\cos^2 u = 0$, temos $v = v' = 0$. Estudaremos o sinal de v'':

$$v''|_{v=v'=0} = \theta_{\text{máx}}(G_u(u) + 4r\cos u \operatorname{sen} u)z.$$

Note que $v''|_{v=v'=0} > 0$, exceto em $u = 0$, onde $v = v' = v'' = 0$, mas:

$$v'''|_{v=v'=v''=0} = \theta_{\text{máx}}(G_{uu}(0) + 2G(0)) = \theta_{\text{máx}} W_{uu}(0) > 0.$$

Daí $B_1 \cup B_2 \subset \mathcal{W}^-$.

Para verificar que $\mathcal{W} \subset B_1 \cup B_2$, basta observarmos a fronteira de $\mathcal{W}$, pois para um ponto deixar um conjunto imediatamente ele deve estar na fronteira do mesmo.

(1) Fronteira de r: $\{r = 0\}$.
Sabemos que esta é a variedade de colisão tripla, que é um conjunto invariante pelo fluxo [14]. Para sair de $\mathcal{W}$ deveríamos ter $r_0 = 0$ e $r'|_{x_0} < 0$, mas $r'|_{x_0} = (rv\cos^2\theta)|_{x_0} = 0$, que é uma contradição.

(2) Fronteira de v: $\{v = 0\}$.
Observe que no plano $v = 0$, pontos acima da curva $2r\cos^2 u = G(u)$ tem $v' < 0$, logo não saem imediatamente. Pontos sobre e abaixo de $2r\cos^2 u = G(u)$ estão em B_2.

(3) Fronteira de u: $\{u = 0\}$ e $\{u = \frac{\pi}{2}\}$.
Se $u = 0$, temos $z > 0$, e se $z > 0$ e $u = 0$ então o ponto entra em $\mathcal{W}$, e portanto não sai imediatamente. Por outro lado, se $u = \frac{\pi}{2}$ então o ponto está em B_1, veja figura 2.9.

(4) Fonteira de z: $\{z = 0\}$.
Para o ponto deixar $\mathcal{W}$ imediatamente pela fronteira de z, devemos ter $z = 0$ e $z' < 0$. Mas pela afirmação do lema anterior, temos que $z = 0 \Longrightarrow z < c_0 \Longrightarrow z' \geq d_0 > 0$.

Isto conclui a demonstração do lema 2.3. □

2.3 Argumento Final

Para construir o primeiro quarto da órbita de Schubart mostraremos que existe uma condição inicial com $u = v = 0$ que flui ao longo de $\mathcal{W}$ com estado de saída $u = \frac{\pi}{2}, v = 0$.

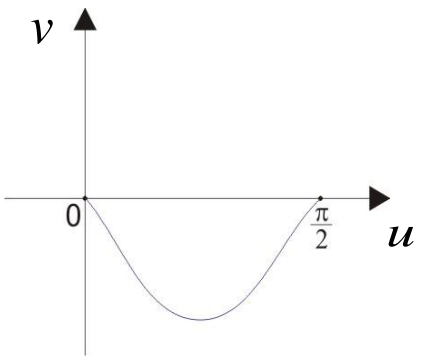

Figura 2.7: Primeiro quarto da órbita de Schubart.

Definição 2.2. Defina os conjuntos:

$$\mathcal{S}_0 = \{(r,v,u,z) \in \mathcal{W} / u = v = 0\ ,\ 0 < r < G(0)\},$$

$$\mathcal{T} = \{(r,v,u,z) \in \mathcal{W} / u = \frac{\pi}{2}\ ,\ v = 0\},$$

e a função:

$$f: \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_0 & \longrightarrow & \mathcal{W}^- \\ x & \longmapsto & x \cdot \tau(x) \end{array},$$

onde $\tau(x)$ denota o tempo de saída de x.

De acordo com o lema 2.1, τ e o fluxo do sistema são funções contínuas, logo f é uma função contínua que leva pontos de $\mathcal{S}_0$ no conjunto de saída imediato de $\mathcal{W}$. Observe ainda que podemos escolher $x_1 \in B_2 \cap \mathcal{S}_0$, e naturalmente tem-se $f(x_1) = x_1$. Tome $x_2 \in \mathcal{S}_0$ suficientemente próximo de $(G(0),0,0,\sqrt{8G(0)})$, então x_2 depois segue acompanhando a órbita homotética Euleriana, descendo por $\mathcal{W}$ até chegar próximo de P, seguindo próximo a sua varidade instável, $W^u(P)$. Determinaremos por onde $W^u(P)$ deixa $\mathcal{W}$, para entender o comportamenro da linha de fluxo que passa por x_2.

$W^u(P)$ é uma variedade unidimensional inteiramente contida na variedade de colisão tripla: $\{r = 0\}$. Apenas um dos dois ramos de $W^u(P)$ está contido em $\mathcal{W}$, mais precisamente em $\mathcal{W}^0$, daí ele flui para $\mathcal{W}^-$.

Lema 2.4. *O ramo $W^u(P)$ em $\mathcal{W}$ deixa $\mathcal{W}$ por um ponto da forma $(0,v,\frac{\pi}{2},z)$, com $v < 0$.*

Usando esse lema, vemos que x_2 deixa $\mathcal{W}$ por $\frac{\pi}{2}$ com $v < 0$.

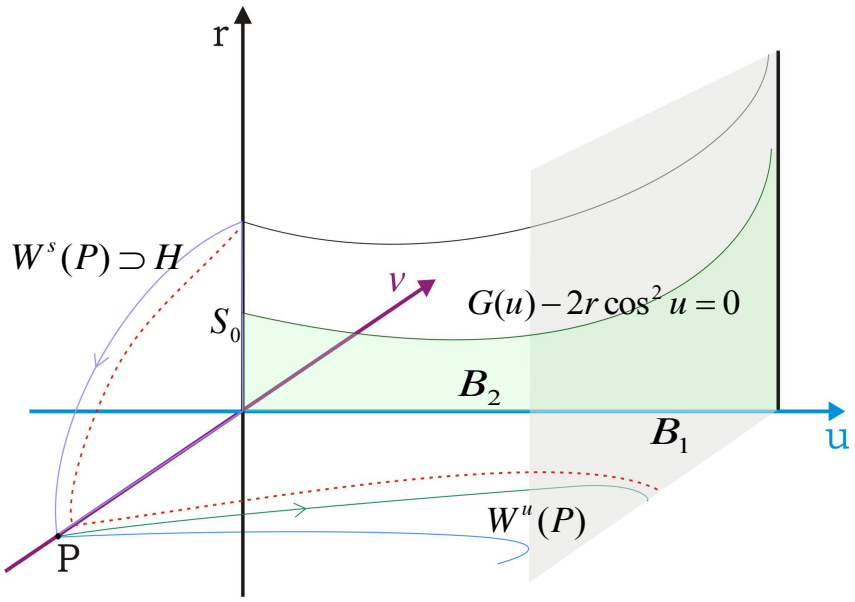

Figura 2.8: Conjunto de Wazewski.

Em resumo temos que:

- x_1 deixa $\mathcal{W}$ por $B_2 \setminus B_1$, *i.e*, $f(x_1) \in B_2 \setminus B_1$
- x_2 deixa $\mathcal{W}$ por $B_1 \setminus B_2$, *i.e*, $f(x_2) \in B_1 \setminus B_2$.

Como $\mathcal{S}_0$ é conexo e f é contínua, temos que existe um ponto em $\mathcal{S}_0$ que sai por $B_1 \cap B_2$, ou seja, construimos o nosso primeiro quarto de órbita! Fica assim provado o Teorema:

Teorema 2.2. *Dadas três massas positivas com $m_1 = m_2$ e m_3, e uma energia negativa h, existe um solução periódica simétrica do problema colinear de três corpos com energia h e colisões duplas regularizadas. Durante o primeiro quarto, as massas se movem da configuração central Euleriana com m_3 no ponto médio do segmento que liga m_1 a m_2 para uma colisão dupla entre m_2 e m_3. No momento da colisão dupla a velocidade de m_1 é zero. O segundo quarto da órbita é dado pela reversão no tempo do primeiro e a segunda metade da órbita é uma reflexão da primeira metade, trocando m_1 por m_2.*

Faremos a seguir a demonstração do lema 2.4.

Demonstração. Observe que a segunda e terceira equações do sistema (2.3), restritas à variedade de colisão tripla, reescrevem-se como:

$$v' = \theta_{\text{máx}}(G(u) - \tfrac{1}{2}v^2\cos^2 u),$$

$$u' = z,$$

onde $z^2 = 8(G(u) - \frac{1}{2}v^2\cos^2 u)$. Reparametrizando o ramo pela variável u, temos:

$$\frac{dv}{du} = \frac{\theta_{\text{máx}}}{4}\sqrt{2G(u) - v^2\cos^2 u} \leq \frac{\theta_{\text{máx}}}{4}\sqrt{2G(u)}.$$

Como $G(u)$ é decrescente em $0 \leq u \leq \pi/2$, temos que $G(u) \leq G(0)$, assim:

$$\frac{dv}{du} \leq \frac{\theta_{\text{máx}}}{4}\sqrt{G(0)}.$$

como $0 \leq u \leq \pi/2$ e $\theta_{\text{máx}} \leq \pi/2$, temos que:

$$\Delta v \leq \frac{\theta_{\text{máx}}\pi\sqrt{G(0)}}{8} \leq \frac{\pi^2\sqrt{2G(0)}}{16} \leq \sqrt{2G(0)}.$$

Isso garante que $W^u(P)$ sai de $\mathcal{W}$ com $v < 0$. □

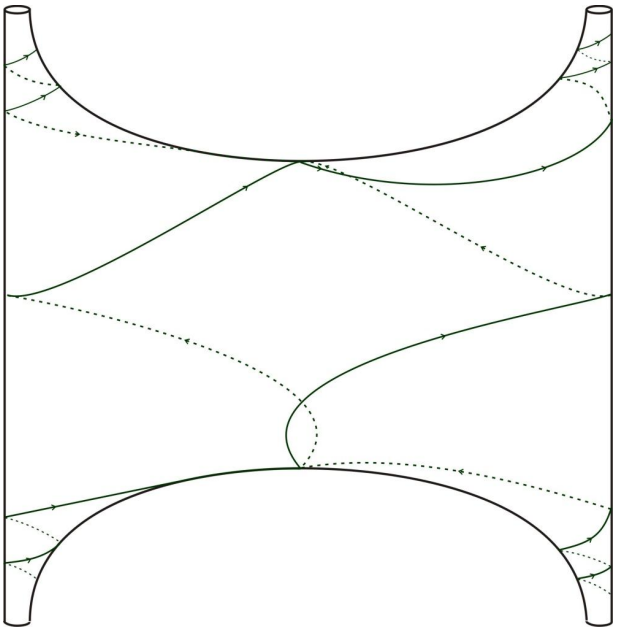

Figura 2.9: Fluxo na variedade de colisão tripla.

CAPÍTULO 3

O MÉTODO TOPOLÓGICO PARA O PROBLEMA ISÓSCELES PLANAR

3.1 Um Conjunto de Wazewski para o Problema Isósceles de Três Corpos

Sabemos que as equações do movimento desse problema se escrevem como:

$$\begin{cases} r' = rv\cos^2\theta, \\ v' = \frac{1}{2}v^2\cos^2\theta + \frac{1}{4}w^2(1+\operatorname{sen}^2\theta)^2 - W(\theta), \\ \theta' = \frac{1}{4}w(1+\operatorname{sen}^2\theta)^2, \\ w' = W_\theta(\theta) - \frac{1}{2}vw\cos^2\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta(2r + v^2 - \frac{1}{2}w^2(1+\operatorname{sen}^2\theta)). \end{cases}$$

Este é um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, onde:

$$W(\theta) = \cos^2\theta V(\theta)$$

é o potencial regularizado, e

$$V(\theta) = (1+\operatorname{sen}^2\theta)\left(\frac{1}{\sqrt{2}\cos^2\theta} + \frac{2\sqrt{2}m_3}{\sqrt{(1+\operatorname{sen}^2\theta)^2 + \frac{8}{m_3}\operatorname{sen}^2\theta}}\right) = rU(r,\theta).$$

Em nossa região de interesse ($U > T$), que a menos de reescala em r, é $h = T - U$ com $h = -1$, a equação da energia é:

$$\frac{1}{2}v^2 cos^2\theta + \frac{1}{8}w^2(1+sen^2\theta)^2 - W(\theta) = -rcos^2\theta. \tag{3.1}$$

Lembremos que nosso objetivo final é construir as órbitas periódicas de Broucke. Sabemos que, pela simetria do problema isósceles, basta construirmos o primeiro quarto da órbita periódica. Para isso, precisamos provar que existe uma configuração inicial tal que a órbita deixa ortogonalmente a sizígia $\theta = 0$ e atinge a sizígia $\theta = \frac{\pi}{2}$ ortogonalmente. No plano $v\theta$, isto significa que conseguimos construir a órbita iniciando em $\theta = 0, v = 0$ e terminando em $\theta = \frac{\pi}{2}, v = 0$.

Estudaremos agora o fluxo na variedade de energia:

$$\tilde{\mathcal{F}} = \{(r,v,\theta,w)/r \geq 0,\ (3.1)\ \text{vale}\}.$$

Salvo menção, vemos a variedade de energia como recobrimento duplo singular sobre:

$$\mathcal{F} = \{(r,v,\theta)/r \geq 0,\ (3.1)\ \text{vale}\}.$$

Este recobrimento, $\pi : \tilde{\mathcal{F}} \longrightarrow \mathcal{F}$ é dado pela identificação de pontos com mesmo r, v, θ e $|w|$ que satisfazem a equação da energia.

Por conveniência, repetimos a definição de conjunto de Wazewski vista no capítulo anterior.

Definição 3.1. Sejam Γ um espaço topológico e $\mathcal{W} \subset \Gamma$. $\mathcal{W}$ é *conjunto de Wazewski* se:

a) $x \in \mathcal{W}$, $x \cdot [0,t] \subset \overline{\mathcal{W}} \Longrightarrow x \cdot [0,t] \subset \mathcal{W}$;

b) O *conjunto de saída imediato*:

$$\mathcal{W}^- = \{x \in \mathcal{W}/x \cdot [0,t] \not\subset \mathcal{W}\ ,\ \forall t > 0\}$$

é fechado no *conjunto de saída*:

$$\mathcal{W}^0 = \{x \in \mathcal{W}/x \cdot t \notin \mathcal{W} \text{ para algum } t > 0\}.$$

Vimos no capítulo anterior que o tempo de saída:

$$\tau : \mathcal{W}^0 \longrightarrow \mathbb{R}_+\ ,\ \tau(x) = sup\{t \geq 0/x \cdot [0,t) \subset \mathcal{W}\},$$

é uma função contínua.

O conjunto de Wazewski para o nosso problema será dado pela proposição abaixo.

Proposição 3.1. $\mathcal{W} = \{(r,v,\theta,w)/\ (1)\ vale\ , -\theta^* \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, v \leq 0, r \geq 0\} \setminus \gamma$, *onde* $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$, *e*

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \{(r,v,\theta,w)/v = v' = 0\ ,\ \theta \in (-\theta^*, 0]\ ,\ w < 0\},\\
\gamma_2 &= \{(r,v,\theta,w)/v = v' = 0\ ,\ \theta \in [0, \theta^*)\ ,\ w > 0\},\\
\gamma_3 &= \{(r,v,\theta,w)/v = v' = 0\ ,\ \theta \in (\theta^*, \frac{\pi}{2})\ ,\ w < 0\}.
\end{aligned}$$

Estamos olhando $\mathcal{W}$ em $\mathcal{F}$. Após projetarmos $\mathcal{W}$ no espaço θvr, usaremos cores para identificar pontos com $w \geq 0$ e $w < 0$. A legenda das figuras é a seguinte:

- vermelho indica $w \geq 0$;
- verde indica $w < 0$.

Para excluir curvas do conjunto, iremos tracejá-las. Com estas convenções, o esboço para o conjunto de Wazewski é dado pela figura 3.1. Note que cada ponto no interior do conjunto tem duas cores, e a superfície, que corresponde a $w = 0$, é vermelha.

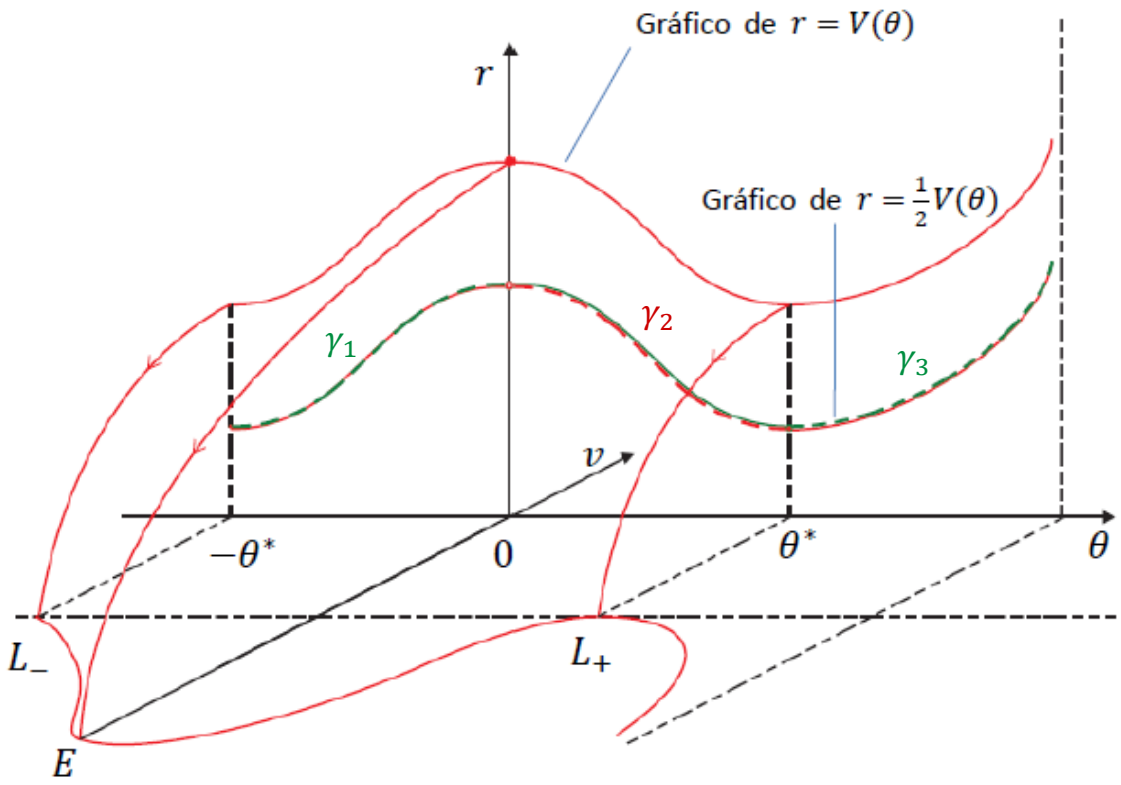

Figura 3.1: Conjunto de Wazewski.

Lema 3.1. *$\mathcal{W}$ satisfaz a) na definição de conjunto de Wazewski.*

Demonstração. A única fronteira de $\mathcal{W}$ que não está em $\mathcal{W}$ é γ. Basta mostrar que não existe nenhuma linha de fluxo passando por γ inteiramente em $\overline{\mathcal{W}}$.

Usando a equação da energia, podemos escrever v' do sistema como:

$$v' = W(\theta) - (2r + \frac{1}{2}v^2)\cos^2\theta.$$

A superfície $v' = 0$ em $\mathcal{W}$ é dada pela supefície azul na figura 3.2. Sobre a curva $v = v' = 0$ temos:

$$v'' = (\cos^2\theta \quad V_\theta) \quad \theta'.$$

Assim, $\gamma \setminus \{\theta = -\theta^*, 0, \theta^*\}$ tem $v'' < 0$. Daí pontos em $\gamma \setminus \{\theta = -\theta^*, 0, \theta^*\}$ entram em $\mathcal{W}$. Para $\{\theta = -\theta^*, 0, \theta^*\}$ temos $v = v' = v'' = 0$ e

$$v''' = \cos^2\theta V_{\theta\theta}(\theta')^2,$$

logo para os pontos que estão em γ, v''' é negativo, já que $V_{\theta\theta}|_{\theta=0} < 0$, veja a figura 3.1. Concluímos que pontos sobre γ entram em $\mathcal{W}$.

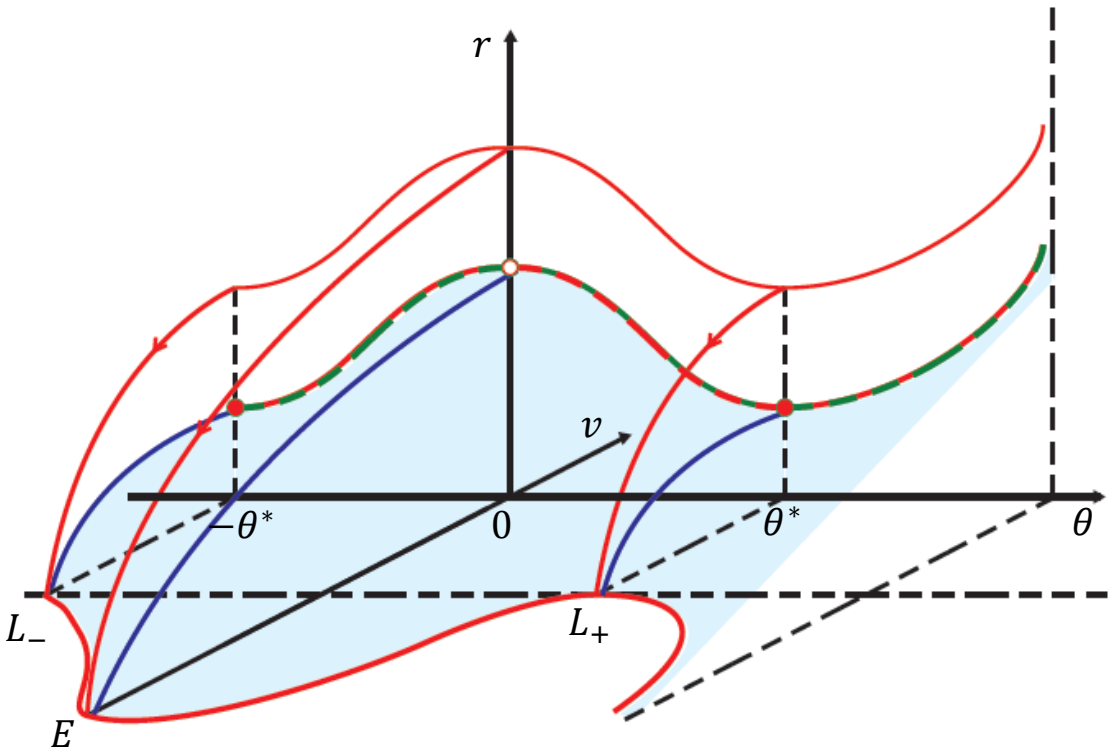

Figura 3.2: $v' = 0$ em $\mathcal{W}$.

Além disso, sabemos que $r' = rv\cos^2\theta$, daí $r' \leq 0$, *i.e.*, r é não-crescente! Desta observação, vemos que a única maneira de uma linha de fluxo atingir um ponto de γ seria descendo pela região acima de $v' = 0$, ou seja, com $v' < 0$. Contudo, $v' < 0$ obriga v a diminuir, se afastando do plano (no espaço $rv\theta$) $v = 0$, e, consequentemente, de γ. Isto termina a demonstração do lema. □

Precisamos identificar os conjuntos de saída de $\mathcal{W}$, e verificar que o conjunto de saída imediato é fechado no conjunto de saída.

Lema 3.2. $\mathcal{W}^0 = \mathcal{W} \setminus (H_{L_-} \cup H_E \cup H_{L_+} \cup W^s(L_{+,-}))$, *onde* $W^s(L_{+,-})$ *denota as variedades estáveis dos equilíbrios de Lagrange.*

Demonstração. Separe $\mathcal{W}$ em três regiões:

$$\begin{aligned} R_1 &= \mathcal{W} \cap \{(r,v,\theta,w)/\theta \in [-\theta^*, 0)\}, \\ R_2 &= \mathcal{W} \cap \{(r,v,\theta,w)/\theta \in [0, \theta^*)\}, \\ R_3 &= \mathcal{W} \cap \{(r,v,\theta,w)/\theta \in [\theta^*, \frac{\pi}{2})\}. \end{aligned}$$

Seja $x_0 \in \mathcal{W}^0$, $x_0 = (r_0, v_0, \theta_0, w_0)$. Faremos agora uma série de observações, em especial para região $w \approx 0$.

(i) Considere a região $\mathcal{W}^0 \cap R_1$. Caso $\theta_0 = -\theta^*$, temos $w_0 \neq 0$, caso contrário teríamos $x_0 \in H_{L_}$. Assim ou $w_0 > 0$, daí x_0 entra no conjunto, ou $w_0 < 0$, significando que x_0 sai imediatamente. Logo, sem perda de generalidade, podemos supor $\theta_0 > -\theta^*$.

Note que na casca $\{w = 0\} \cap R_1$ temos $w'|_{w=0} = \cos^2\theta V_\theta > 0$, e seus pontos entram em $\mathcal{W}$ pela região $w \geq 0$. Por continuidade existe uma vizinhança compacta, V_1, de $\{w = 0\} \cap R_1$ com $-\theta^* < \theta_0 \leq \theta \leq -\varepsilon < 0$, onde $w' > d_1(\varepsilon) > 0$. Esta condição indica que w é crescente em V_1. Daí, para uma linha de fluxo tocar em $V_1 \cap \{w = 0\}$, ela deve vir pela região $w < 0$, tocá-la e descer pela região $w \geq 0$. Ou seja, em V_1 temos:

$$w' > d_1(\varepsilon) > 0 \text{ e } |w| \leq c_1(\varepsilon) \Longrightarrow \text{as linhas de fluxo saem de } V_1.$$

onde $c_1(\varepsilon) > 0$ dada pelo máximo de $|w|$ no compacto V_1.

(ii) Analogamente a V_1, construímos V_2 em $\{w = 0\} \cap R_2$. Nesta região temos $w'|_{w=0} = \cos^2\theta\, V_\theta < 0$, por continuidade existe vizinhança compacta V_2 de $\{w = 0\} \cap R_2$ com $\varepsilon \leq \theta \leq \theta^* - \varepsilon$, onde $w' < -d_2(\varepsilon) < 0$. Portanto, em V_2 temos:

$$w' < -d_2(\varepsilon) < 0 \text{ e } |w| \leq c_2(\varepsilon) \Longrightarrow \text{as linhas de fluxo saem de } V_2.$$

(iii) Analogamente, na região $\{w = 0\} \cap R_3$ temos $w'|_{w=0} = \cos^2\theta\, V_\theta > 0$, e podemos tomar θ em $\theta^* + \varepsilon \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Concluímos que uma linha de fluxo nessa região tem:

$$w' > d_3(\varepsilon) > 0 \text{ e } |w| < c_3(\varepsilon) \Longrightarrow \text{as linhas de fluxo saem de } V_3.$$

(iv) Estudaremos agora as regiões próximas às órbitas homotéticas, $-\varepsilon < \theta < \varepsilon$ e $\theta^* - \varepsilon < \theta < \theta^* + \varepsilon$. Nessa região $w \approx 0$ e $w' \approx 0$, podemos escolher $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que existam vizinhanças $\widetilde{V_1}$ e $\widetilde{V_2}$ tais que:

$$|w'| \approx 0, |w| \approx 0 \quad \text{em} \quad \widetilde{V_1}, \quad \text{com } -\varepsilon < \theta < \varepsilon;$$

$$|w'| \approx 0, |w| \approx 0 \quad \text{em} \quad \widetilde{V_2}, \quad \text{com } \theta^* - \varepsilon < \theta < \theta^* + \varepsilon.$$

Isto significa que órbitas próximas das homotéticas se comportam como as homotéticas, *i.e.*, as acompanham, descendo em direção à variedade de colisão tripla, $\{r = 0\}$, e assim saindo de $\mathcal{W}$.

Concluímos que existe uma vizinhança compacta de $\{w = 0\}$:

$$V = V_1 \cup \widetilde{V_1} \cup V_2 \cup \widetilde{V_2} \cup V_3$$

na qual o comportamento de linhas de fluxo que começam (ou entram) em V é conhecido. Essas linhas ou saem de V entrando na região $|w| > c_0 = \text{mín}\{c_1(\varepsilon), c_2(\varepsilon), c_3(\varepsilon)\}$ ou saem de $\mathcal{W}$ acompanhando a variedade de colisão tripla.

Seja $x_0 \in \mathcal{W}^0$, pela observação (i), podemos considerar $\theta_0 > -\theta^*$. Defina $\alpha(t)$ a órbita que passa por x_0 em $t = t_0$. Se $x_0 \in V$ ou $\alpha(t)$ acompanha uma solução homotética, saindo de $\mathcal{W}$, ou ela sai de V, *i.e.*, $|w| > c_0$. Quando $\alpha(t)$ entra na região $\mathcal{W}^0 \setminus V$, ela pode se comportar de duas maneiras:

(1) nunca retornar a V, *i.e.* caso $w(t^*) > c_0$ para algum t^*, então $w(t) > c_0 \quad \forall t > t^*$. Assim $\theta'(t) > \frac{c_0}{4} > 0$, mas θ é limitado pois $-\theta \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, e por isso α deixa $\mathcal{W}$. Caso contrário, $w(t^*) < -c_0$, teremos analogamente $\theta'(t) < -\frac{c_0}{4} < 0 \quad \forall t > t^*$, o que indica que α deixa $\mathcal{W}$.

(2) retornar a V, e neste caso recorremos ao estudo $(i) - (iv)$, ou seja, ou α acompanha uma homotética ou α sai de V. Este processo (entrar e sair de V) pode se repetir indefinidamente. Observe que $r' = rvcos^2\theta$ e fora da variedade de colisão tripla ou do plano $v = 0$, temos $r' < 0$, ou seja r é decrescente. Então ou $\alpha(t)$ deixa $\mathcal{W}$ para t suficientemente grande ou se aproxima da variedade de colisão tripla, saindo de $\mathcal{W}$.

Concluímos que dado $x_0 \in \mathcal{W}^0$, x_0 deixa $\mathcal{W}$.

□

A fim de mostrar que $\mathcal{W}$ é conjunto de Wazewski, vamos identificar o conjunto de saída imediato.

Defina:

$$B_1 = \{x \in \mathcal{W}^0 / v = 0 \, , W(\theta) - 2r\cos^2\theta \geq 0\};$$
$$B_2 = \{x \in \mathcal{W}^0 / \theta = -\theta^* \, , w < 0\};$$
$$B_3 = \{x \in \mathcal{W}^0 / \theta = \frac{\pi}{2} \, , w > 0\}.$$

Lema 3.3. *$\mathcal{W}^- = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ é o conjunto de saída imediato para $\mathcal{W}$.*

Demonstração. Primeiramente vejamos que $B_1 \cup B_2 \cup B_3 \subset \mathcal{W}^-$.

Se $x_0 = (r_0, v_0, \theta_0, w_0) \in B_2$, então $w_0 < 0$ ($\theta'|_{x_0} < 0$) e $\theta = -\theta^*$, assim x_0 deixa $\mathcal{W}$ imediatamente. Analogamente, quando $x_0 \in B_3$, temos $w_0 > 0$ ($\theta'|_{x_0} > 0$) e $\theta = \frac{\pi}{2}$, x_0 também deixa $\mathcal{W}$ imediatamente.

Vejamos agora quando $x_0 \in B_1$. Note que podemos reescrever a segunda equação do nosso sistema de EDOs com $v = 0$ como $v' = W(\theta) - 2r\cos^2\theta$. Pontos de B_1 com $W(\theta) - 2r\cos^2\theta > 0$ têm $v = 0$ e $v' > 0$, *i.e.*, deixam $\mathcal{W}$ imediatamente. Pontos de B_1 sobre $v' = 0$ têm

$$v''|_{v=v'=0} = \cos^2\theta V_\theta \theta'.$$

Vimos acima que $v''|_{v=v'=0} > 0$ em $\{v = v' = 0\} \setminus \gamma$, exceto em $\theta = -\theta^*, \theta^*$; nestes casos $v'' = 0$, mas $v''' = \cos^2\theta V_{\theta\theta}(\theta')^2 > 0$. Concluímos que $\{v = v' = 0\} \setminus \gamma$ deixa $\mathcal{W}$ imediatamente.

Agora vejamos que $\mathcal{W}^- \subset B_1 \cup B_2 \cup B_3$. Para pontos de $\mathcal{W}$ saírem imediatamente, eles devem estar na fronteira de $\mathcal{W}$. Seja $x_0 = (r_0, v_0, \theta_0, w_0)$.

(1) Fronteira de r: $\{r = 0\}$.
Sabemos que esta é a variedade de colisão tripla, que é um conjunto invariante pelo fluxo [7]. Assim, para sair de $\mathcal{W}$ deveríamos ter $r_0 = 0$ e $r'|_{x_0} < 0$, mas $r'|_{x_0} = (rv\cos^2\theta)|_{x_0} = 0$, que é uma contradição.

(2) Fronteira de v: $\{v = 0\}$.

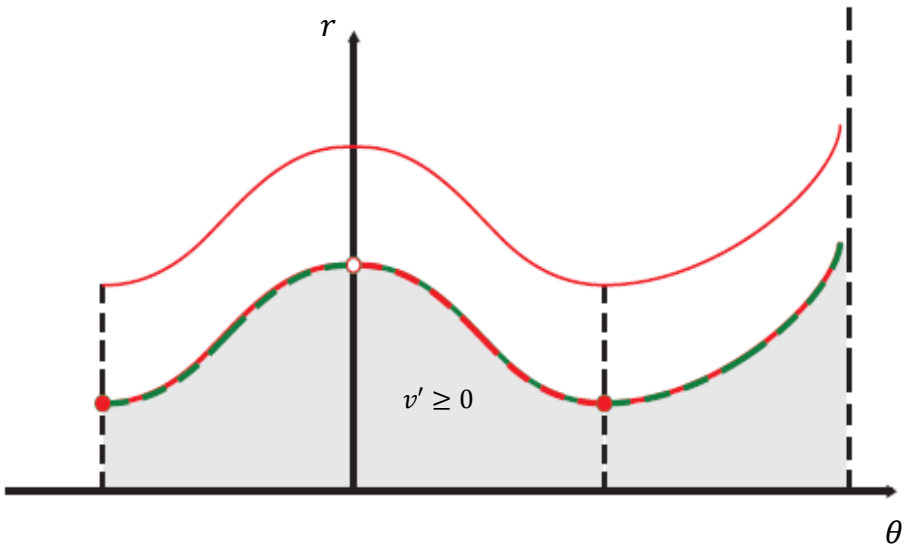

Figura 3.3: Plano $v = 0$.

Já vimos que, no plano $v = 0$, pontos acima de γ têm $v' < 0$, e por isso não saem imediatamente. Pontos sobre γ tem $v = v' = 0$, mas $v'' < 0$, exceto quando $\theta = 0$, e neste caso temos $v = v' = v'' = 0$ e $v''' < 0$, ou seja pontos sobre γ não deixam $\mathcal{W}$ imediatamente. Só sobram os pontos que estão sobre B_1, assim, estes são os únicos pontos de $v = 0$ que saem imediatamente.

(3) Fronteira de θ: $\{\theta = -\theta^*\}$ e $\{\theta = \frac{\pi}{2}\}$.
Se $\theta_0 = -\theta^*$ e $w \neq 0$, se $w_0 > 0$, então x_0 não sai imediatamente. Caso contrário, $w_0 < 0$, $x_0 \in B_2$. Daí, pontos de $\theta = -\theta^*$ só saem imediatamente se estiverem em B_2. Analogamente, pontos na fronteira $\theta = \frac{\pi}{2}$ saem imediatamente apenas quando estiverem em B_3.

Isto conclui a demonstração do lema. □

3.2 Argumento Final (“Shooting Argument”)

Faremos aqui um breve resumo do estudo das variedades invariantes dos equilíbrios do nosso sistema, L_-, E, L_+, feito no capítulo 1.

Denotamos por $W^u(X)$ a *variedade instável* do equilíbrio X e $W^s(X)$ a *variedade estável* do mesmo equilíbrio. Como vimos no capítulo 1, as dimensões das variedades na região que estamos estudando $\mathcal{W}$ são:

$$\dim W^u(L_{-,+}) = 2;$$
$$\dim W^s(L_{-,+}) = 2;$$
$$\dim W^u(E) = 3;$$
$$\dim W^s(E) = 1.$$

Além disso, Moeckel em [16] abre uma discussão sobre as 'órbitas de conexão' entre os equilíbrios. Essas órbitas estão na interseção das variedades invariantes. [16] garante a existência das órbitas conectoras: $E \longrightarrow L_{-,+}$, $E \longrightarrow E'$, $E' \longrightarrow E$, $L_- \longrightarrow L'_-$, $L'_- \longrightarrow L_-$, $L_+ \longrightarrow L'_+$, $L'_+ \longrightarrow L_+$. A notação X' significa o outro equilíbrio do nosso sistema de EDOs $(*)$ da página 20, com $v > 0$.

Vimos também que as dimensões das variedades invariantes na variedade de colisão tripla são:

$$\dim W^u(L_{-,+}) = 1;$$
$$\dim W^s(L_{-,+}) = 1;$$
$$\dim W^u(E) = 2;$$
$$\dim W^s(E) = 0.$$

Para "completar" as dimensões restritas à variedade de colisão tripla para em todo o espaço, basta observar as órbitas de conexão: $E \longrightarrow E'$, $E' \longrightarrow E$, $L_- \longrightarrow L'_-$, $L'_- \longrightarrow L_-$, $L_+ \longrightarrow L'_+$, $L'_+ \longrightarrow L_+$.

Uma análise detalhada sobre $W^u(L_+)$ foi feita por Moeckel em [18] e Simó [24] . O primeiro provou que para $m_3 \approx 1$, $W^u(L_+)$ na variedade de colisão tripla deixa $\mathcal{W}$ com $v < 0$. O segundo verificou numericamente que este resultado ainda vale para $0 < m_3 < 2,66$. Esta observação será útil adiante. Na demonstração de [18] vemos uma semelhança com a demontração do lema 2.4 na página 42, que fala da variedade estável do equilíbrio de Euler no problema colinear, órbitas de Schubart. Mas a generalização para o problema isósceles não é simples, tendo em vista o 'acréscimo' dos equilíbrios de Lagrange e o comportamento 'espiralado' das variedades instáveis do equilíbrio de Euler. Conseguimos ainda um resultado analítico deste fato para a região $m_3 \geq 0,7$, que pode ser resumido no lema:

Lema 3.4. *$W^u(L_+)$ sai de $\mathcal{W}$ com $v < 0$ para $m_3 \geq 0,7$.*

Demonstração. Iremos verificar que as órbitas na variedade de colisão tripla que se iniciam próximos do equilíbrio de Lagrange $L_+ = (r = 0, v = -v^*, \theta = \theta^*, w = 0)$, onde $v^* = \sqrt{2V(\theta^*)}$ saem pelo plano $\theta = \frac{\pi}{2}$ com $v < 0$. Essas órbitas têm uma variação em θ de $\Delta\theta = \frac{\pi}{2} - \theta^*$. Se provarmos que $\Delta v < v^*$, então temos que $v_{\text{final}} < 0$.
Reparametrizando curvas na variedade de colisão tripla, $\{r = 0\}$, e utilizando:

$$v' = \frac{1}{8}w^2(1 + \text{ sen }^2\theta)^2 = W(\theta) - \frac{1}{2}v^2\cos^2\theta,$$
$$\theta' = \frac{1}{4}w(1 + \text{ sen }^2\theta)^2,$$

temos:

$$\frac{dv}{d\theta} = \frac{1}{2}w = \frac{1}{1+\ \text{sen}^{\,2}\theta}\sqrt{2W(\theta) - v^2\cos^2\theta}$$
$$\leq \frac{1}{1+\ \text{sen}^{\,2}\theta}\sqrt{2W(\theta)}$$

Lembre-se que $W(\theta)$ é uma função decrescente, veja a figura abaixo:

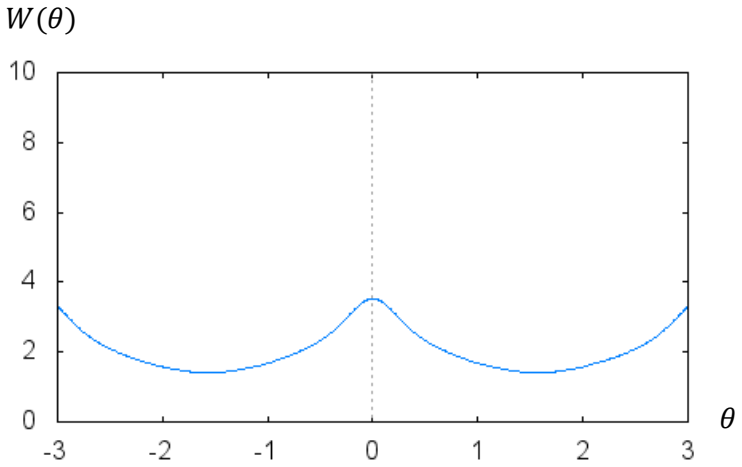

Figura 3.4: Gráfico de $W(\theta)$.

Além disso, $\frac{1}{1+\text{sen}^2\theta}$ também é decrescente. Assim:

$$\frac{dv}{d\theta} \leq \frac{1}{1+\text{sen}^2\theta^*}\sqrt{2W(\theta^*)} = \frac{\cos\theta^*}{1+\text{sen}^2\theta^*}\sqrt{2V(\theta^*)}.$$

Daí

$$\Delta v \leq \frac{\cos\theta^*\,\Delta\theta}{1+\text{sen}^2\theta^*}v^*.$$

Defina

$$f(\theta^*) = \frac{\cos\theta^*\,\Delta\theta}{1+\text{sen}^2\theta^*}.$$

Observe que $f(\theta^*)$ é uma função de θ^* que por sua vez é função de m_3. É fácil verificar que f é uma função decrescente e θ^* é uma função (de m_3) crescente. Assim

$$\Delta v \leq f(\theta^*(0,7))v^* \qquad \text{para } m_3 \geq 0,7\ ,$$

como $f(\theta^*(0,7)) \approx 0,94 < 1$, obtemos o resultado esperado. □

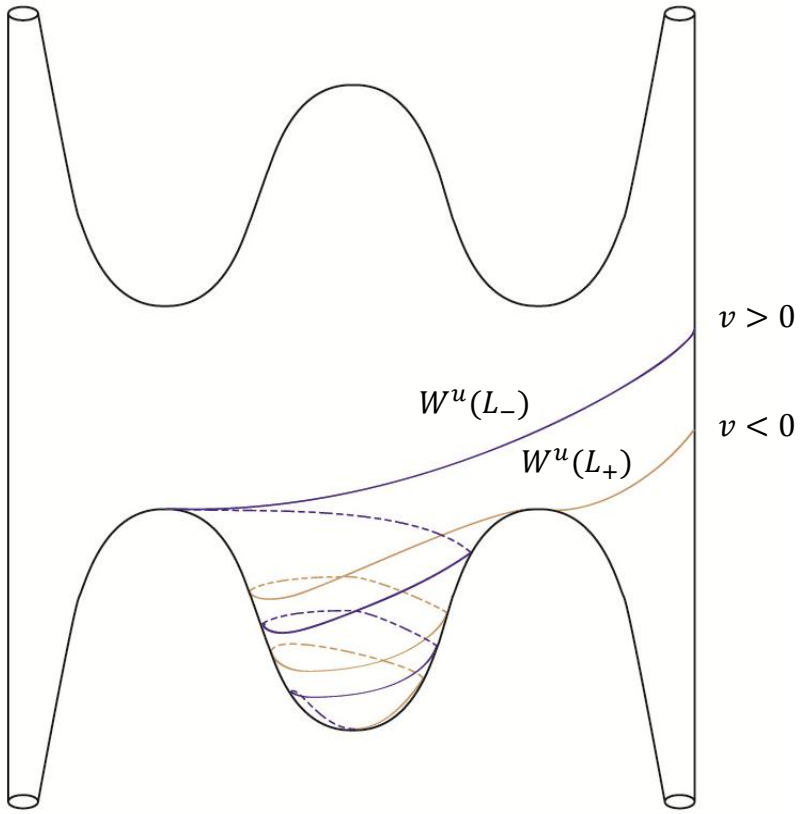

Figura 3.5

Para o argumento final, sabemos que a função *tempo de saída*, $\tau(x)$, é uma função contínua, e que o fluxo do sistema também o é. Considere a função:

$$\begin{array}{rccc} F: & S & \longrightarrow & \mathcal{W}^- \\ & x & \longrightarrow & x \cdot \tau(x), \end{array}$$

que leva os pontos de S no conjunto de saída imediato de $\mathcal{W}$. Ela também é contínua.

S é uma linha contida em $w \geq 0$ e, quase inteiramente, contida no eixo r , $0 < r < V(0)$. Ela só sai do eixo r numa vizinhança do ponto $\overline{P}$, onde permanece no plano $\theta = 0$ e acompanha a fronteira de uma pequena vizinhança de $\overline{P}$ se curvando (ver figura 3.6).

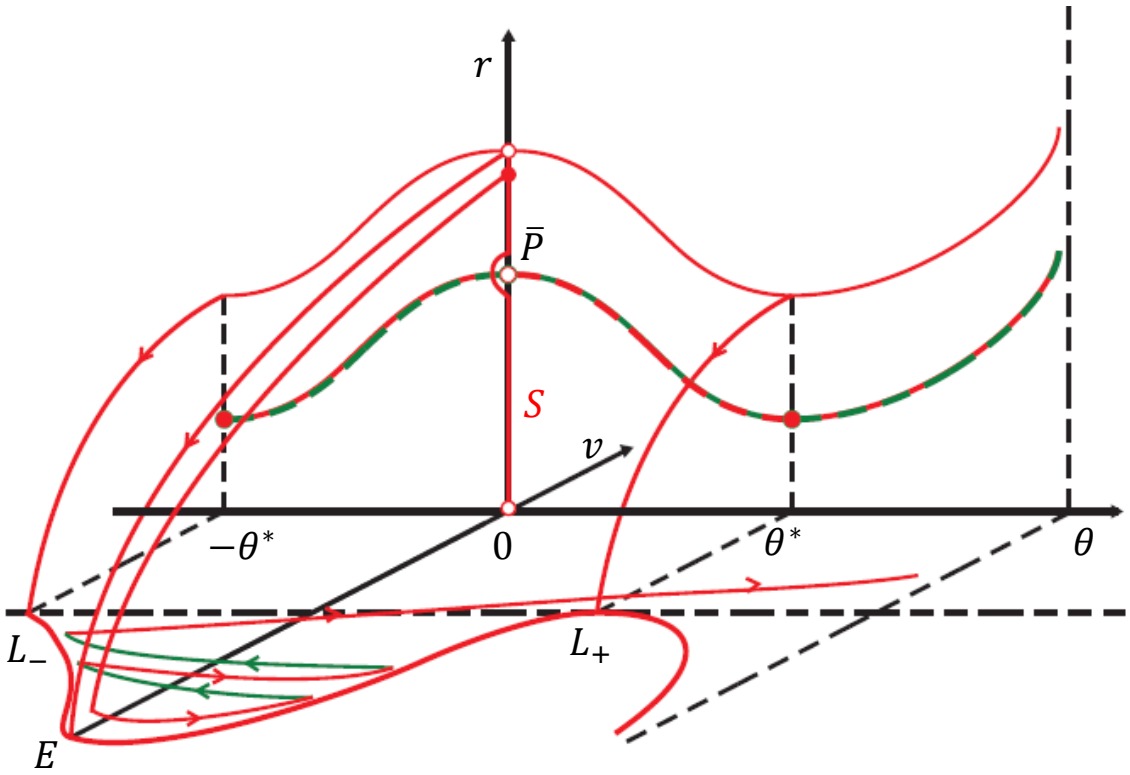

Figura 3.6

Note que pontos de S abaixo de $\{v=0, v'=0\}$ no eixo r estão em B_1, portanto deixam $\mathcal{W}$ imediatamente, ou seja dado um ponto x_1 nessa região, temos que $F(x_1)=x_1$, daí $F(x_1)\in B_1\setminus B_3$. Já pontos de S próximos de $(r,v,\theta,w)=(V(0),0,0,0)$ acompanham a órbita homotética Euleriana, H_E. Vejamos que este 'acompanhamento' se dá com $w>0$ sempre. De fato, em H_E temos $w=w'=0$, portanto próximo à órbita homotética temos $|w|\approx 0$ e $|w'|\approx 0$. Vejamos o sinal de w'' nessa região:

$$w' = W(\theta) - \frac{1}{2}vw\cos^2\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta(2r+v^2-\frac{1}{2}w^2(1+\operatorname{sen}\theta));$$
$$w''|_{w=w'=0} = W_{\theta\theta}\theta' + \cos^2\theta(2r+v^2) - \operatorname{sen}^2\theta(2r+v^2) + \operatorname{sen}\theta\cos\theta(2r'+2vv');$$

em $w=w'=0$ e $\theta=0$ temos:

$$w'' = 2r+v^2 > k > 0.$$

Daí w cresce em H_E, consequentemente cresce em $x\approx H_E$. Isto mostra que dado um $x_2\in S$ próximo de $(r,v,\theta,w)=(V(0),0,0,0)$, a órbita por este ponto acompanha H_E, descendo com $w>0$, chegando próximo de $\{r=0\}$ com $w>0$, *i.e.*, acompanhando a $W^s(L_+)$, seguindo até próximo do equilíbrio L_+, depois seguindo a variedade instável desse equilíbrio, saindo por $\{\theta=\frac{\pi}{2}\}$ com $v<0$. Concluímos que x_2 deixa $\mathcal{W}$ por $B_3\setminus B_1$, ou seja $F(x_2)\in B_3\setminus B_1$.

Como S é um conjunto conexo, existe um ponto x^* em S que sai por $B_1\cap B_3$. Podemos supor que este ponto x^* não está na 'curva' de S. E assim temos a condição inicial do primeiro quarto da nossa órbita periódica de Broucke.

Vejamos que é possível supor que x^* não pertence a 'curva do S'. O ponto $\overline{P}$ só pode sair de $\mathcal{W}$ por B_1, B_2 ou B_3. Caso $\overline{P}$ saia por $B_1 \cap B_3$, construimos o nosso primeiro quarto da órbita periódica, e a demonstração fica concluida. Suponha que $\overline{P}$ sai por $B_i \setminus B_1 \cap B_3$, por continuidade, existe uma vizinhança de $\overline{P}$ que sai por $B_i \setminus B_1 \cap B_3$, basta escolher a 'curva' de S no interior dessa vizinhança.

Assim, fica demonstrada a existência da órbita de Broucke, que pode ser resumida no teorema:

Teorema 3.1. *Dadas três massas positivas com $m_1 = m_2$ e $m_3 \geq 0,7 \cdot m_1$ e uma energia negativa h, existe um solução periódica simétrica do problema isósceles planar de três corpos com energia h e colisões duplas regularizadas. Durante o primeiro quarto, as massas se movem da configuração central Euleriana com m_3 no ponto médio do segmento que liga m_1 a m_2 para uma colisão dupla entre m_1 e m_2, e m_1, m_2, m_3 passando por uma configuração de um triângulo equilátero. No momento da colisão dupla a velocidade de m_3 é zero. O segundo quarto da órbita é dado pela reversão no tempo do primeiro e a segunda metade da órbita é uma reflexão da primeira metade.*

Utilizando os resultados numéricos de [24], discutidos na página 52, vemos que este teorema se generaliza para m_3 qualquer.

CAPÍTULO 4

OUTROS MÉTODOS E PROJETOS FUTUROS

4.1 O Método Variacional

O *método variacional* aplicado ao problema Newtoniano de *n*-corpos permite demonstrar a existência de órbitas periódicas, em muitos casos contendo algum tipo de simetria. Foi retomado pela escola italiana na década de 90 [5], [6], [22] e utilizado por Chenciner e Montgomery em [3] no ano de 2000, quando descobriram a existência da órbita coreográfica da figura 8, introduzida no capítulo 2. Este método também foi usado por Venturelli [26] para demonstrar a existência das órbitas de Schubart para o problema colinear dos três corpos, resultado que foi publicado no mesmo número da revista que o trabalho de Moeckel [15], apresentado no capítulo 2.

Uma referência sobre o método variacional bastante interessante é o trabalho do Shibayama [23]. Ele demonstra um teorema importante. Este teorema nos diz que sob certas condições para o gradiente do potencial de um subproblema do problema Newtoniano de *n* corpos, teremos soluções periódicas para este subproblema. Deste teorema seguem como consequência vários exemplos de soluções periódicas para subproblemas do problema Newtoniano de *n* corpos com simetria e dois graus de liberdade, dentre as quais estão as órbitas de Schubart e Broucke. Faremos aqui uma breve exposição do método variacional usando como referência o Shibayama.

No problema Newtoniano de *n* corpos, existem vários subproblemas com dois graus de liberdade, como por exemplo o problema colinear de três corpos e o problema isósceles de três corpos planar. Após determinar o Lagrangeano desses subproblemas, prova-se a existência de soluções periódicas com colisões regularizadas. O ponto principal neste artigo é verificar a existência de órbitas periódicas com duas colisões parciais que são regularizadas via mudança de coordenadas. O método variacional consiste em minimizar o funcional ação:

$$\mathcal{A}(\alpha) = \int_0^T L(\alpha(t), \dot{\alpha}(t))dt, \tag{4.1}$$

supondo que o centro de massa está na origem e que $\mathcal{A}$ está restrito a um determinado espaço de curvas, de modo que os pontos críticos da restrição são ainda pontos críticos de $\mathcal{A}$. L acima é o Lagrangeano do sistema:

$$L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k||\dot{q}_k||^2 + \sum_{i<j}\frac{m_i m_j}{||q_i - q_j||}.$$

Prova-se, por meio de passagem a uma curva vizinha, que um minimizante não tem colisão total. Além disso, mostra-se que as colisões dos minimizantes são isoladas.

Alguns exemplos da aplicação do teorema do Shibayama são:

1. Problema colinear (órbita de Schubart), discutido no capítulo 2, ver figura 2.2;
2. Problema isósceles no plano (órbita de Broucke), discutido ao longo dessa tese, ver por exemplo a figura 1.1;
4. Problema dos 4-corpos sempre em configuração “losangular”, chamaremos essa órbita de “dupla-Broucke”;

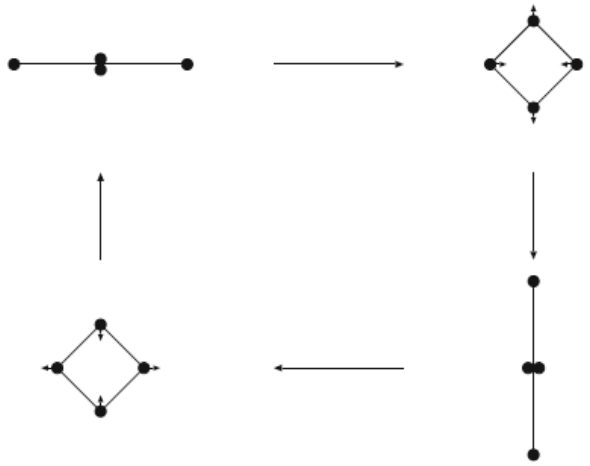

Figura 4.1: Órbita “dupla-Broucke”.

5. Problema piramidal de 4-corpos (órbita piramidal de 4-corpos);

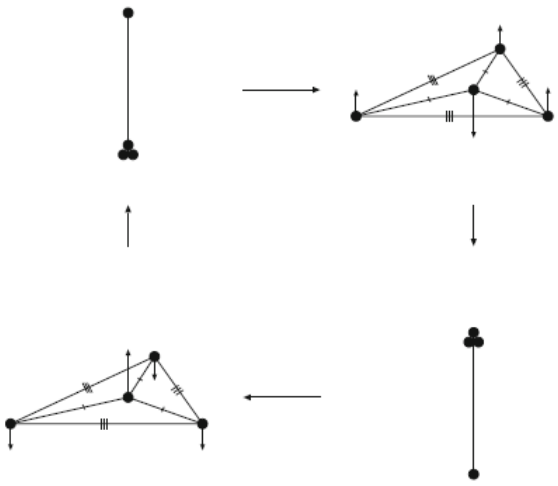

Figura 4.2: órbita piramidal de 4-corpos.

6. Problema de 8-corpos “bi-tetraedral complementar”;

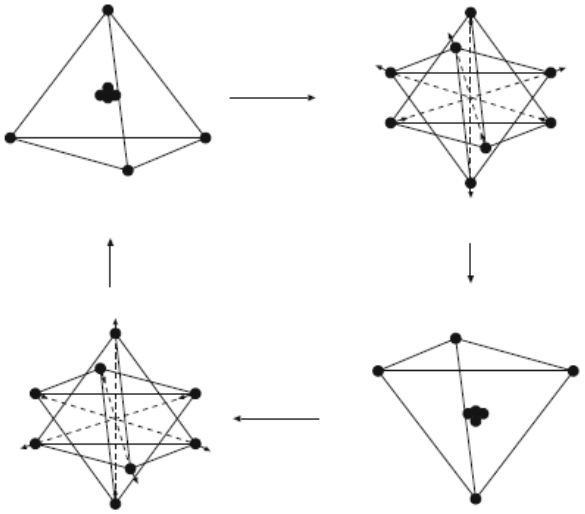

Figura 4.3: Órbita do problema de 8-corpos “bi-tetraedral complementar”.

4.2 Do Brake à Sizígia

Acreditamos na importância do método variacional e que de alguma maneira ele complementa o método topológico. Essa complementariedade se evidencia no trabalho de Moeckel, Montgomery e Venturelli [18]. Eles demonstram a existência das órbitas brake de Broucke (incluindo o caso das três massas iguais), usando uma mistura do método variacional e topológico, bem como argumentos geométricos . Em [18], vemos que não foi possível fazer uma demonstração da existência dessas órbitas utilizando apenas o método topológico. Faremos uma breve exposição desta referência.

Este trabalho consiste num estudo da interação entre órbitas brake e sizígias no problema Newtoniano planar de três corpos. Uma *órbita brake* é uma solução, não necessariamente periódica, na qual as velocidades de todos os três corpos são zero em um certo instante, chamado ‘instante brake’. Além disso, uma órbita brake tem momento angular zero e energia negativa. Quando os três corpos ficam colineares, chamamos essa configuração de *sizígia*, mas excluímos a colisão tripla. Segundo teoremas devidos a Montgomery [20], a única solução com momento angular zero e energia negativa que não contém uma sizígia é a solução homotética de Lagrange (configuração de triângulo equilátero estudada anteriormente). Em particular, todas as órbitas brake, exceto pela solução homotética de Lagrange, passam por uma sizígia. Assim, temos uma função que mapeia condições iniciais brake para suas primeiras sizígias. Chamaremos este mapa de *função sizígia*. O teorema abaixo detalha propriedades desta função.

Teorema 4.1. *A função sizígia é contínua. Sua imagem contém uma vizinhança punturada das configurações que apresentam colisões binárias. Para um conjunto aberto de parâmetros (massas) grande, incluindo massas iguais, a função se estende continuamente às singularidades (colisões duplas), levando o triângulo equilátero de Lagrange à colisão tripla.*

A prova deste teorema contém uma mistura dos métodos variacional e topológico e argumentos geométricos.

[18] estabelece a existência de órbitas brake periódicas no problema planar de três corpos, olhando para órbitas brake que intersectam o conjunto das sizígias ortogonalmente. Refletindo esse arco, obtemos uma órbita periódica. Assuma massas $m_1 = m_2$ e $m_3 > 0$, e considere o subproblema isósceles planar de três corpos, estudado anteriormente. Vale o seguinte teorema:

Teorema 4.2. *Para m_3 num conjunto aberto de parâmetros, incluindo $m_3 = 1$, existe um órbita brake isósceles periódica que cruza o conjunto das sizígias ortogonalmente, na sua segunda interseção.*

Uma pergunta natural é: será que existem órbitas brake que intersectam ortogonalmente o conjunto das sizígias na primeira interseção? Eles conjecturam que não; pois acreditam que o momento de inércia é decrescente (sem ponto crítico) no primeiro pedaço da órbita, incluindo a primeira interseção com o conjunto das sizígias. Porém para curva cruzar ortogonalmente este conjunto, devemos ter um ponto crítico do momento de inércia no instante do cruzamento, já que $I = r^2$. Veja figura 4.4.

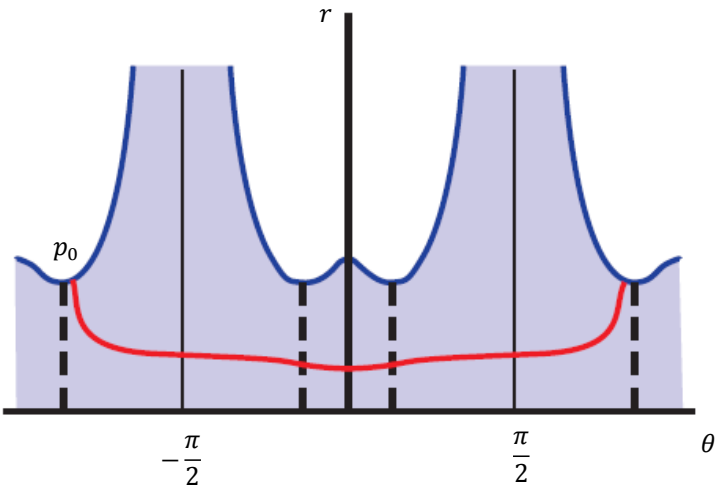

Figura 4.4: Região de Hill e a órbita-brake.

Daremos aqui uma ideia da prova do teorema 4.2, utilizando a mesma notação com que estamos tratando o problema isósceles planar na tese.

Seja p uma condição inicial brake, *i.e.*, condição que parte da curva de velocidade zero, no caso $r = V(\theta)$. p deve ser uma condição inicial diferente da órbita homotética Lagrangeana, digamos que p_0 seja a interseção desta homotética com a curva de velocidade zero. ver figura 4.4. Com resultados que seguem do teorema 4.1, é possível provar que a linha de fluxo que passa por p, digamos $\alpha(t)$, flui para encontrar o conjunto das sizígias na forma colinear para uma dada energia negativa fixa $h = -1$, digamos que ela a atinja após um tempo T. A órbita completa fica descrita na figura 4.4:

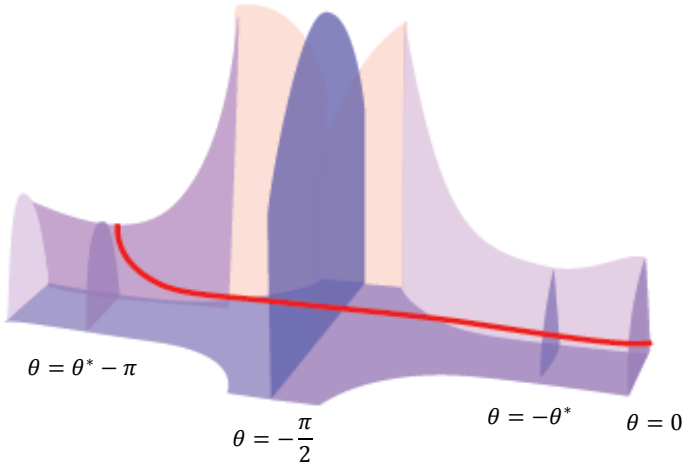

Figura 4.5: Variedade de energia, $\mathcal{F}$, e a órbita-brake.

Se $\alpha(t)$ não encontra ortogonalmente a subvariedade das configurações colineares da variedade de energia, e se $\alpha(T)$ não está na variedade estável do equilíbrio de Lagrange, então ela pode fluir para a segunda sizígia. Se essa interseção é dada ortogonalmente, construimos o nosso primeiro quarto da órbita.

Para demonstrar a existência da órbita brake, dividimos a variedade de energia, $\mathcal{F}$, com $\theta^* - \pi \leq \theta \leq 0$ e $w \geq 0$, em três regiões:

R_I com $\theta \in [\theta^* - \pi, -\frac{\pi}{2}]$;

R_{II} com $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, -\theta^*]$;

R_{III} com $\theta \in [-\theta^*, 0]$.

Seja Z a parte da curva de velocidade zero em R_I, note que $p \in Z \setminus p_0$. A prova do teorema 4.2 consiste em verificar que é possível escolher uma condição incial p cuja linha de fluxo que passa por ela flui pelas três regiões atingindo a parede direita de R_{III} (plano $\theta = 0$) com $v = 0$. Para encontrar p, consideraremos a imagem da curva Z no plano (sizígia) $\theta = 0$ pela função sizígia (fluxo). Seja Z_I a imagem de Z no plano $\theta = -\frac{\pi}{2}$. Esta curva parte do ponto de insterseção do ramo da variedade instável na variedade de colisão tripla do equilíbrio de Lagrange $\theta = \pi - \theta^*$ com o eixo $\theta = -\frac{\pi}{2}$. Ou seja Z_I parte do ponto $(r, v, \theta) = (0, v_1, -\frac{\pi}{2})$ com $v_1 < 0$, e tende ao infinito (figura 4.6).

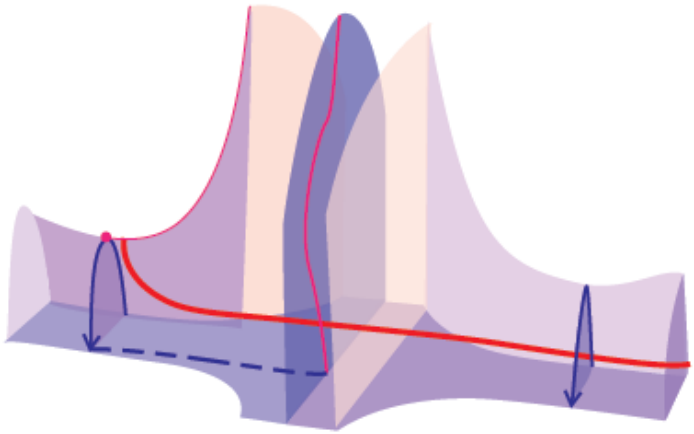

Figura 4.6: Z_I na variedade de energia.

Note que, não se pode garantir que Z_I cruza o plano $v = 0$. Da região R_I para R_{II}, a curva Z_I terá como imagem na parede direita de R_{II} a curva Z_{II}, que é um arco no plano $\theta = -\theta^*$ abaixo da órbita homotética de Lagrange. Z_{II} tem uma extremidade em $(r, v, \theta) = (0, v_2, -\theta^*)$ com $v_2 < 0$, e outra em $(r, v, \theta) = (0, v^*, -\theta^*)$, onde $v^* = -\sqrt{2V(\theta^*)}$ e $v^* < v_2$. Dando continuidade, temos Z_{III} a imagem de Z_{II} na parede direita de R_{III}. Z_{III} é uma curva no plano $\theta = 0$ abaixo da órbita homotética de Euler, que tem como extremidades $(r, v, \theta) = (0, v_{3,1}, 0)$ e $(r, v, \theta) = (0, v_{3,2}, 0)$ com $v_{3,1} > 0$ e $v_{3,2} < 0$, daí Z_{III} é um arco que cruza o plano $v = 0$, digamos num ponto p'. Basta escolher o $p \in Z$ do início como a imagem inversa de p' pelo fluxo.

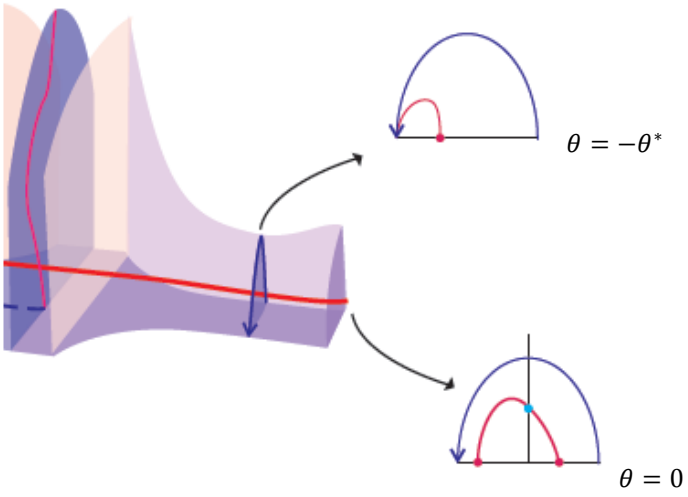

Figura 4.7: Z_{II} e Z_{III} na variedade de energia.

4.3 Projetos Futuros

Pretendemos analisar com mais detalhes as órbitas periódicas descritas no trabalho do Shibayama [23], discutido na primeira seção deste capítulo. Nosso objetivo é tentar dar uma demonstração topológica da existência de algumas dessas órbitas periódicas, em particular o estudo da órbita "dupla-Broucke" no problema dos 4-corpos, que se assemelha bastante ao problema isósceles planar. Esta seria uma extensão natural do problema que tratamos nesta tese.

Estudaremos o método variacional com vista a entender melhor [23] e concretizar uma colaboração com o professor Andrea Ventturelli na França. Esta colaboração tem como principal objetivo tentar unir os dois métodos, variacional e topológico, talvez na linha 'brake' feita por Montgomery, Moeckel e Ventturelli em [18], descrita na seção anterior.

Ainda como perspectiva futura, gostaríamos de demonstrar topologicamente a existência de outras coreografias além da figura-oito. Coreografias tem sido descritas numericamente, sendo tópico de forte interesse no cenário atual. Uma coreografia é uma solução do problema de n-corpos que aprisiona os corpos em uma mesma curva fechada. Na figura 4.8, vemos em 1) a órbita coreográfica da figura-oito, e em 2) e 3) órbitas semelhantes à figura-oito descobertas por Simó [25], com 4 e 5 corpos, repectivamente, de massas iguais.

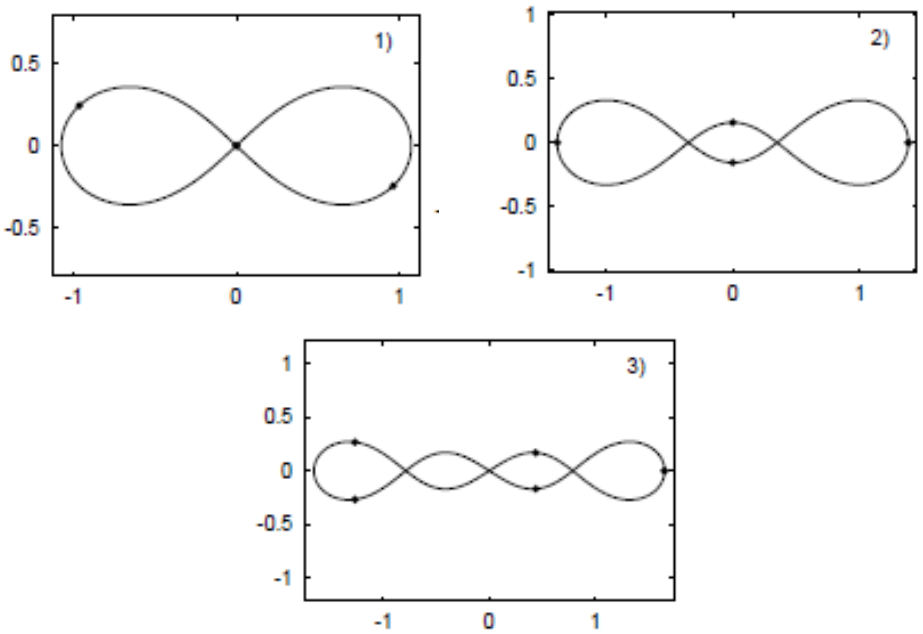

Figura 4.8: Cadeias com 3, 4 e 5 corpos.

A título de ilustração, apresentamos algumas coreografias mais elaboradas na figura 4.11, ver referência [25].

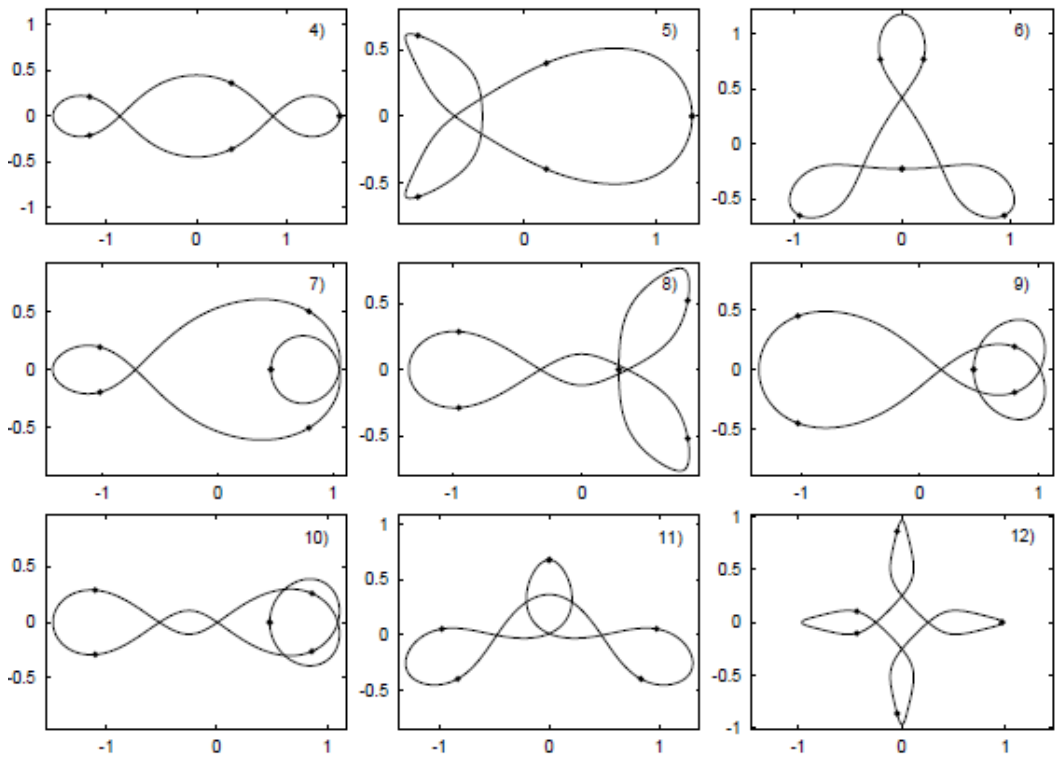

Figura 4.9: Coreografias de 5 corpos, os pontos destacados representam as condições iniciais.

Pretendemos ainda fazer um estudo da estabilidade linear, usando por exemplo o método de Roberts [21], destas soluções, como um projeto natural de continuação do nosso estudo.

Referências Bibliográficas

[1] Bakker, L.F., Ouyang, T., Yan, D., Simmons, S., Roberts, G., *Linear Stability for Some Symmetric Periodic Simultaneous Binary Collision Orbits in the Four-Body Problem*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy 108, No. 2, 2010, p. 147-164.

[2] Broucke, R., *On the Isosceles Triangle Configuration in the Planar General Three-Body Problem*, Astronomy and Astrophysics 73, 1979, p. 303-313.

[3] Chenciner, A., Montgomery, R., *A Remarkable Periodic Solution of the Three-Body Problem in the Case of Equal Mass*, Annals of Mathematics 152, 2000, p. 881-901.

[4] Conley, C., *Isolated Invariant Sets and the Morse Index*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics 38, 1978, American Mathematic Society.

[5] Coti-Zelati, Z., *Periodic Solution for N-Body Problems*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal Non Linéaire 7, number 5, 1990, p. 477-492.

[6] Degiovanni, M., Gianonni, F. and Marino, A., *Periodic Solutions of Dynamical Systems with Newtonian Type Potentials*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 15, 1988, p. 467-494.

[7] Devaney, R., *Triple Collision in the Planar Isosceles Three Body Problem*, Inventiones Mathematicæ 60, 1980, p. 249-267.

[8] Kotiranta, S., *Classification of orbits and recoverability of initial conditions in some three-body systems*, Annales Universitatis Turkuensis, Series 1A, Vol. 344, 2006, p. 55-59 .

[9] Hénon, M., *Stability and interplay motions*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy 15, 1977, p. 243-261.

[10] Hietarinta, J., and Mikkola, S., *Chaos in the one-dimensional gravitational three-body problem*, Chaos 3 (2), 1993, p. 183-203.

[11] Martynova, A., Orlov, V. and Rubinov, A., *Classification of orbits in the plane isosceles three-body problem*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 333, Issue 3, 2002, p. 495-500.

[12] Martynova, A., Orlov, V. and Rubinov, A., *Metastability in the evolution of triple systems*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 344, 2003, p. 1091-1096.

[13] Martynova, A., Orlov, V. and Rubinov, A., *Structure of the near-periodic motion manifold in stellar triple systems*, Annales Universite Turkuensis, Series 1A, vol. 358, 2006, p. 39-43.

[14] McGehee, R., *Triple Collision in the Colinear Three-Body Problem*, Inventiones Mathematicæ27, 1974, p. 191-227

[15] Moeckel, R., *A Topological Existence Proof for the Schubart Orbits in the Collinear Three-Body Problem*, Discrete and Continuous Dynamical Systems B 10, 2008, p. 609-620.

[16] Moeckel, R., *Chaotic Dynamics Near Triple Collision*, Arch. Rational Mech. Anal. 107, Number 1, 1989, p. 37-69.

[17] Moeckel, R., *Shooting for the Eight- A Topological Existence Proof for a Figure-Eight Orbit of the Three-Body Problem*, Differential equations [electronic resource] : geometry, symmetries and integrability, The Abel Symposium 2008, Springer 2009, p. 287-310.

[18] Moeckel, R., Montgomery, R., Venturelli, A., *From Brake to Syzygy*, arXiv:1109.1089vl [math.DS], 6 Sep 2011, p. 1-47.

[19] Moeckel, R., *Celestial Mechanics (especially in central configurations)*, Lectures Notes, http://www.math.umn.edu/ rmoeckel/notes/CMNotes.pdf.

[20] Montgomery, R., *Infinitely Many Syzygies*, Archive for Rational Mechanics and Analysis 164, 2002, 311-340.

[21] Roberts, G., *Linear Stability Analysis of the Figure-Eight Orbit in the Three Body Problem*, Ergodic Theory and Dynamical Systems 27, 2007, p. 1947-1963.

[22] Serra, E. and Terracini, S. *Collisionless Periodic Solutions to Some Three-Body Problems*, Arch. Rational Mech. Anal. 120, 1992, p. 305-325.

[23] Shibayama, M., *Minimizing Periodic Orbits with Regularizable Collisions in the n-Body Problem*, Arch. Rational Mech. Anal. 199, 2011, p. 821-841.

[24] Simó, C., *Analysis of Triple Collison in the Isosceles Three-Body Problem*, Classical Mechanics and Dynamical Systems, Marcel Dekkar, 1981, p. 203-224.

[25] Simó, C., *New Families of Solutions in N-Body Problems*, Proceedings of the 3rd European Congress of Mathematics, Barcelona, Progress in Mathematics series, Vol 201, 2001, Birkäuser, Basel, p. 101-115.

[26] Venturelli, A. *A Variational proof of the existence of Von Schubart's Orbits*, Discrete and Continuous Dynamical Systems B 10, 2008, p. 699-717.

[27] Yan, D., *Existence of the Broucke Periodic Orbit and its Linear Stabiliy*, Journal of Mathematical Analysis and Application 389, 2012, p. 656-664.