Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
EDUMATEC

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA

AMANDA RODRIGUES MARQUES DA SILVA

COMO OS ESTUDANTES LIDAM COM DIFERENTES REPRESENTAÇÕES? UM ESTUDO COM O BINGO DOS NÚMEROS RACIONAIS

RECIFE
2016

AMANDA RODRIGUES MARQUES DA SILVA

COMO OS ESTUDANTES LIDAM COM DIFERENTES REPRESENTAÇÕES? UM ESTUDO COM O BINGO DOS NÚMEROS RACIONAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, como requisito parcial para obtenção do título de mestre sob orientação da Profa. Dra. Paula Moreira Baltar Bellemain

RECIFE
2016

Catalogação na fonte
Bibliotecária Giseani Bezerra, CRB-4/1738

S586c Silva, Amanda Rodrigues Marques da.
Como os estudantes lidam com diferentes representações?: um estudo com o bingo dos números racionais / Amanda Rodrigues Marques da Silva. – 2016.
144 f. : il. ; 30 cm.
Orientadora: Paula Moreira Baltar Bellemain.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2016.
Inclui Referências, Apêndices e Anexos.

1. Educação. 2. Jogos recreativos. 3. Matemática - aprendizagem. 4. UFPE - Pós-graduação. I. Bellemain, Paula Moreira Baltar. II. Título.

371.337 CDD (22. ed.) UFPE (CE2017-028)

AMANDA RODRIGUES MARQUES DA SILVA

COMO OS ESTUDANTES LIDAM COM DIFERENTES REPRESENTAÇÕES? UM ESTUDO COM O BINGO DOS NÚMEROS RACIONAIS

Aprovada em, 29 de Maio de 2016.

Comissão Examinadora

Profa. Dra. Paula Moreira Baltar Bellemain (Presidente e Orientadora)
Universidade Federal de Pernambuco

Profa. Dra. Rosinalda Aurora de Melo Teles (Examinadora Interna)
Universidade Federal de Pernambuco

Profa. Dra. Marilena Bittar (Examinadora Externa)
Universidade Federal do Mato Grosso do Sul

RECIFE
2016

Dedico cada página dessa dissertação
À mulher que Deus escolheu para ser
minha mãe, Cirlene. Sem ela, que é a
minha maior amiga, confidente,
protetora, meu tudo, eu não estaria aqui
para produzir esse trabalho.
Mãe esse trabalho tem a tua colaboração
em cada linha.
À minha avó Severina (in memorian)
que com certeza estaria orgulhosa nesse
momento.
E, aos que também fazem parte de mim e
me apoiaram nessa caminhada:
Meu pai, José;
Meu irmão, Álvaro;
E, claro, meu namorado,
Fellipe Barnabé.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, soberano e bondoso, por ter me dado coragem, capacidade e pessoas maravilhosas na minha vida que me ajudaram a passar por mais essa fase na carreira acadêmica.

Agradeço de todo o coração a minha família que amo infinitamente, meu alicerce, meu porto seguro, meus pais Cirlene Rodrigues e José da Silva e meu irmão Álvaro Rodrigues, que com paciência me apoiaram e ajudaram nos dias cansativos de estudo e pesquisa. Ao meu amigo, amor e namorado Fellipe Barnabé que nunca cansou de me apoiar, teve paciência com meu stress, cansaço e correria, me ajudou na coleta de dados, sem perder o carinho e a ternura. À minha prima Gabriela Moura que me ajudou na coleta de dados e sempre ouvia atentamente minhas “aventuras acadêmicas”.

Quero agradecer a todos os professores que contribuíram direta ou indiretamente com meu aprendizado e construção da minha carreira acadêmica. Em especial a professora Walenska Maysa, que desde a licenciatura acredita no meu potencial e se tornou uma verdadeira mestra, madrinha acadêmica e uma grandiosa amiga que tenho orgulho em ter na minha vida, sempre me incentivou, confiou em mim e me inspira sempre. Agradeço também ao seu esposo Amaury, que ao seu lado sempre esteve disposto a ajudar no que fosse preciso.

Meu muito obrigada à professora Paula Baltar, minha orientadora, sempre atenciosa e cuidadosa com a construção da nossa pesquisa. Me guiou de forma harmoniosa e competente nesse percurso, me ensinou e me inspira muito nessa caminhada. Seus comentários sempre enchem de luz o caminho da pesquisa.

Não poderia deixar de agradecer aos meus colegas da turma de mestrado de 2014, aqui representados pelos mais próximos a mim e companheiros de estudos e pesquisa Anderson Douglas e Luciana Máximo, pelos conhecimentos compartilhados. Quero agradecer também aos colegas de seminários da linha de pesquisa em didática da matemática, em especial Alexandre Barros e aos demais leitores do nosso trabalho que tanto contribuíram para melhorar nosso percurso metodológico.

Ao professor Paulo Figueiredo, meu primeiro professor no EDUMATEC/UFPE, que me fez encantar-me com a pesquisa e sentir mais vontade de fazer a seleção de mestrado. A todos os professores do EDUMATEC/UFPE que contribuíram com esse processo de construção de aprendizagem.

Às professoras Rosinalda Teles, que acompanha nosso trabalho desde a sementinha nos seminários até a defesa da dissertação, sempre contribuindo de forma significativa para aprimorarmos nossa pesquisa e Marilena Bittar, que participou da qualificação e da defesa da dissertação, contribuindo grandiosamente para construção desse trabalho.

À professora Verônica Gitirana, meu muito obrigada! Obrigada por me aceitar no Estágio à Docência e me permitir momentos de aprendizagem sob sua supervisão.

Meus sinceros agradecimentos à direção da escola campo de pesquisa que abriu as portas da escola sem nenhum obstáculo para que coletássemos nossos dados e a todos os funcionários da escola que se mostraram sempre prestativos em ajudar no que fosse preciso. E, claro, muito obrigado aos estudantes e seus responsáveis que aceitaram participar da pesquisa.

Aos queridos Clara e Mário, na secretaria do EDUMATEC, sempre com paciência com a gente e tirando todas as nossas dúvidas burocráticas.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pela concessão de bolsa de estudante durante o período do mestrado.

Quero agradecer também a todos que embora não citados nesse texto tiveram grande importância na construção desse trabalho. Seja me incentivando, me ajudando ou tendo paciência com minha correria, a todos envolvidos nesse processo de construção meu **MUITO OBRIGADA**!

RESUMO

Esse estudo investigou o uso de um jogo para identificar como estudantes do 6º ano do ensino fundamental lidam com diferentes representações de números racionais. O marco teórico da pesquisa é a Teoria dos Campos Conceituais que permite analisar os conhecimentos mobilizados pelos sujeitos e as representações simbólicas utilizadas no enfrentamento de situações. O jogo é o Bingo dos Números Racionais, desenvolvido em 2012, na UFPE, no âmbito do Projeto Rede “Jogos no ensino da matemática a partir de sucata”. A revisão de literatura abordou questões sobre usos e papeis dos jogos na sala de aula, o ensino e a aprendizagem de números racionais. O dispositivo experimental consistiu na observação de partidas jogadas em duplas e na realização de entrevistas individuais com estudantes de uma escola situada na Zona da Mata, em Pernambuco. As partidas e as entrevistas foram videogravadas. A análise a priori das representações que compõem as cartelas do jogo permitiu mapear conhecimentos passíveis de serem mobilizados na identificação das representações e subsidiou a escolha das cartelas utilizadas nas partidas. Com base nos dados obtidos nas partidas, foram elaboradas seis questões para entrevistas individuais, no contexto do jogo, incluindo tipos de representações não contemplados nas cartelas. Foram mapeados alguns teoremas-em- ação falsos utilizados pelos estudantes, como o que considera que a representação decimal m,n corresponde ao mesmo número que a representação fracionária , onde m é um número natural e n é um número natural diferente de zero. Observou-se que na identificação de representações figurativas, apoiadas na área de figuras, alguns sujeitos desconsideram a necessidade de que as partes da figura tenham mesma área. Percebeu-se também a dificuldade de mobilizar o conceito-em- ação de frações equivalentes, bem como a dificuldade de relacionar porcentagem com representações diferentes da simbólico-numérica percentual. O jogo mostrou-se adequado para o trabalho no 6º ano, oferecendo desafio satisfatório para os estudantes nesse nível de escolaridade. Foi possível manter o caráter lúdico do jogo, os estudantes permaneceram ativos no jogo durante as partidas, respeitaram as regras, formularam hipótese e buscaram formas de validá-las.

PALAVRAS-CHAVE: Jogos nas aulas de matemática. Números Racionais. Teoremas-em-ação. Representações simbólicas.

ABSTRACT

This study investigated how the students of the 6th deal with the different representations of rational numbers. The theoretical background used in this study is Conceptual Fields Theory that allows us analyze the knowledge mobilized by the individuals and the symbolic representations used to face situations. The game is Bingo dos Números Racionais, developed in 2012, at UFPE, in the framework of the Projeto Rede “Jogos no Ensino da Matemática a partir de Sucata. The literature review approaches questions about the uses and roles of games at the classroom, the teaching and learning process of rational numbers. The experimental devices consisted primarily in the watching of matches played in pairs and the realization of individuals interview with the students in a school located at Zona da Mata, in Pernambuco. The data analyses of bingo cards and call sheets allow us to map knowledge that could be mobilized to indentify, and subsided, representations of Bingo dos Números Racionais. The result revealed the use of false theorems-in-action as it considers that the decimal representation m,n corresponds to the same number as the factionary representation , where m is a natural number and n is a natural number different of zero. It was observed that in the identification of figurative representation, supported in the area of the figure, some individuals disregarded the necessity that the parts of the figure have the same area. It is also difficulty realized to mobilize of the concept-in- action equivalents fractions as well as the difficulty to relate percentage with different representations of percentage symbolic and numeric. The game proved to be adequate to work with sixth grade, offering a satisfactory challenge for students at this level of education. It was possible to keep a playful game, the students remaining active during the game, respecting the rules, formulating a hypothesis and looking for ways to validate them.

Key words: Games in Math Classes. Rational Numbers. Theorems-in- action. Symbolic Representation.

LISTA DE FIGURAS

LISTAS DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Nossa pesquisa situa-se no contexto dos Jogos na Educação Matemática como ferramenta didática para o ensino e a aprendizagem de conteúdos específicos. O jogo que trazemos como parte do nosso objeto de investigação é o Bingo dos Números Racionais, que explora diferentes representações de números racionais.

O interesse em conhecer mais sobre a aprendizagem dos números racionais vem desde a época de estudante de Ensino Fundamental e se estendeu à prática como professora de matemática tanto da Educação Básica e do Ensino Técnico, como do Ensino Superior. As dificuldades observadas na época de estudante e posteriormente como professora eram inúmeras e entre elas a de estabelecer um elo entre as diferentes representações dos números racionais. O fato de não reconhecer que um mesmo número pode ser representado de formas diferentes, dificulta a tomada de decisões frente a algumas situações problemas que exigem a passagem de uma representação a outra.

A aprendizagem dos números racionais e suas representações é abordada em diversas pesquisas, como Kieren (1976), Lima (1989), Nunes e Bryant (1997), Catto (2000), Bezerra (2001), Silva (2004) e Santos (2010), que apontam para uma dificuldade em relacionar as diferentes representações e os diferentes significados de um mesmo número racional. Os possíveis motivos para essas dificuldades, segundo as pesquisas, são diversos e vão desde o ensino mecanizado até a interpretação equivocada dessas representações.

No decorrer da vivência profissional, a maneira como os estudantes se empenham para resolver situações em níveis complexos quando estão jogando sempre chamou atenção. Pensamos que o aspecto lúdico, a não obrigatoriedade, a atividade espontânea de jogar, favorecem a motivação para a reflexão e compreensão de situações complexas. A utilização de jogos na sala de aula parece relevante tanto para auxiliar na compreensão de conceitos, quanto para levantar hipóteses sobre assuntos já ensinados ou para a introdução de novos conteúdos.

O uso de jogos em sala de aula é visto, inclusive pelos Parâmetros Curriculares Nacionais, como uma opção lúdica de explorar um conteúdo facilitando assim o interesse dos estudantes em mobilizar seus conhecimentos para aquisição de novos e propiciando a percepção dos professores das dificuldades enfrentadas pelos estudantes.

O Bingo dos Números Racionais é um jogo construído no PROJETO REDE - Formação Docente: Interdisciplinaridade e Ação Docente[1], mais especificamente em seu *Subprojeto3 - Jogos no ensino de matemática a partir de sucata.* O subprojeto 3 visou elaborar e confeccionar jogos utilizando sucata ou materiais de baixo custo, bem como formar professores para o uso desses recursos, incluindo a reflexão crítica sobre os jogos elaborados e possíveis adaptações dos mesmos pelos professores (GITIRANA, TELES, BELLEMAIN, CASTRO, CAMPOS, LIMA, BELLEMAIN, 2013).

Além do Bingo dos Números Racionais, foram elaborados nesse subprojeto, mais sete jogos: *Jogo da Velha com Figuras Geométricas*; *Jogo dos Polígonos*; *Jogo do Nim com Dados*; *Jogo dos Sinais*; *Desafio das Operações*; *Bingo das Grandezas e Medidas e o Mankala Colhe Três*. Dois desses jogos já foram investigados em dissertações de mestrado no programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica (UFPE): o Mankala Colhe Três (SANTOS, 2014) e o Jogo dos Polígonos (BARROS, 2012), além de Ramos (2014) que tomou o caso do Bingo dos Racionais, como exemplo para uma pesquisa sobre engenharia de software educativo. Atualmente estão sendo investigados no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica – UFPE mais dois desses jogos: o Jogo da Velha com Polígonos e o Bingo das Grandezas e Medidas.

De acordo Gitirana et al. (2013), a ideia de construir os jogos a partir de sucata foi pensada com o objetivo de ampliar o acesso geral aos jogos, tanto por seu baixo custo, como para evitar que ficassem guardados por medo de perda. Além disso, em muitos casos, a própria confecção do jogo envolve conhecimentos matemáticos. Os autores destacam ainda que o projeto articulava simultaneamente a criação de novos jogos e a formação de professores para o uso desses jogos em sala de aula ou em outros ambientes da escola. Pretendia-se contribuir para o desenvolvimento profissional do professor no sentido de fazer adaptações que julgasse necessárias nos jogos e também na criação de novos jogos de baixo custo.

[1] “Tal projeto foi desenvolvido com financiamento do FNDE (Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação), em uma parceria do NEMAT (Núcleo de Educação Matemática da UFPE) com o CEEL (Centro de Estudos de Educação e Linguagem da UFPE) (GITIRANA et al., 2013, p. 9)”.

Buscou-se também, na elaboração dos jogos, um equilíbrio entre os aspectos lúdicos dos jogos e seu uso com intenção didática.

Todos os jogos construídos pelo projeto e disponíveis no livro Jogos com Sucata na Educação Matemática: Projeto Rede (GITIRANA et al., 2013) possuem uma análise didática em que discutem-se suas finalidades, além de expor as regras e o material necessário para a confecção do jogo, procurando ao máximo resguardar o jogo como diversão. Entretanto, não foram realizadas no âmbito do Projeto Rede, investigações sistemáticas sobre os usos potenciais e as contribuições dos jogos criados para a aprendizagem e o ensino de matemática.

Nessa pesquisa, nosso interesse se volta para a utilização do jogo como recurso para auxiliar o diagnóstico sobre os conhecimentos dos sujeitos. Acreditamos que é necessário considerar os conhecimentos prévios dos estudantes para poder contribuir na construção de novos saberes. Para isso, é importante observar as hipóteses e os argumentos levantados por eles, válidos e não-válidos, para chegar a uma solução e com base nessas observações propor um programa de ensino com o intuito de auxiliar os estudantes na construção do conhecimento novo e mais adequado para as novas situações.

O caminho utilizado pelos estudantes para chegar a uma determinada solução é um grande revelador dos conhecimentos trazidos por eles. A análise da construção da solução para um determinado problema nos fornece elementos importantes para tentar compreender os conhecimentos que o indivíduo usou explícita ou implicitamente para chegar à solução do problema. Seguindo as ideias de Cury (2008), podemos dizer que o erro revela muito mais sobre os conhecimentos dos estudantes que o acerto. Porém acreditamos que uma resposta correta, quando bem explicada e justificada, também nos leva ao entendimento sobre o trajeto escolhido pelo estudante e auxilia o levantamento de hipóteses que favoreçam a inferência do professor.

Nosso objeto de estudo é o modo como estudantes lidam com diferentes maneiras de representar simbolicamente números racionais positivos (em texto, com figuras, usando frações, números decimais ou porcentagem) e os conhecimentos que mobilizam explicita ou implicitamente em tarefas de identificação de representações diversas de números racionais positivos, a partir de uma expressão textual. Como se sabe, os números racionais são muito importantes na compreensão de vários conteúdos como divisão, medidas de grandezas, proporcionalidade ou ainda resolução de equações.

Para fundamentar nossa pesquisa, escolhemos como marco teórico a Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud, por tratar das conexões entre diferentes conceitos e por fornecer suporte para analisar os conhecimentos implícitos (corretos ou não), mobilizados pelos estudantes nas identificações das representações diversas de um mesmo conceito. Pode-se destacar, por exemplo as fortes conexões dos números racionais com os campos conceituais das estruturas multiplicativas e das grandezas e medidas e a possibilidade de identificar invariantes operatórios mobilizados pelos estudantes na identificação de diferentes representações simbólicas dos números racionais.

O texto a seguir está estruturado em seis capítulos. O capítulo 2 é dedicado à contextualização da pesquisa e sua problemática, tecendo uma discussão sobre os jogos como elemento cultural necessário ao homem, os jogos na Educação Matemática, suas perspectivas de usos em sala aula, o uso do jogo como instrumento de diagnóstico sobre o conhecimento dos estudantes e uma descrição do Bingo dos Números Racionais; trazemos alguns elementos da teoria dos campos conceituais e o papel das representações nas aulas de matemática e uma discussão sobre os números racionais, suas relações entre o contínuo e discreto. E, finalizamos o capítulo com os objetivos da pesquisa;

No capítulo 3 descrevemos nossos procedimentos metodológicos, contextualizamos o experimento piloto realizado, fazemos um levantamento sobre o que os documentos de orientação curricular estão trazendo de contribuição sobre o estudo dos números racionais; exploramos os resultados da análise a priori das cartelas do jogo e das fichas de chamada, trazendo os conhecimentos possíveis e os conhecimentos necessários de serem mobilizados para identificar corretamente e incorretamente as representações; e a descrição do dispositivo experimental.

O capítulo 4 trata da análise dos dados das partidas jogadas com os estudantes. Analisamos as representações que foram marcadas de forma correta ou incorreta e as que os estudantes deixaram de marcar. Nesse sentido, tentamos identificar através da argumentação dos estudantes durante a conferência das cartelas, os teoremas-em-ação que estavam sendo mobilizados ao identificar as representações.

No capítulo 5 trazemos a concepção, análise a priori e os resultados das entrevistas individuais que foram realizadas para complemento dos dados da pesquisa.

Seguem-se as considerações finais, as referências, os apêndices e os anexos.

2 CONTEXTUALIZAÇÃO DA PESQUISA E CONSTRUÇÃO DA PROBLEMÁTICA

Para a construção da problemática dessa pesquisa, são abordados alguns tópicos. O primeiro trata dos jogos na sala de aula e especialmente na educação matemática e apresenta o jogo em foco nessa pesquisa – o Bingo dos Números Racionais. O segundo tópico apresenta o marco teórico da pesquisa, ou seja, os elementos da teoria dos campos conceituais que serão utilizados na pesquisa. Segue-se um tópico sobre números racionais com foco em questões sobre seu ensino e sua aprendizagem que serão aprofundadas nesse estudo. Finalmente, com base no exposto são explicitados os objetivos que nortearam essa investigação.

2.1 Jogos na Educação Matemática

Antes de discutir os jogos na educação matemática, tecemos algumas considerações sobre os jogos e suas características e discutimos até que ponto o uso didático de um jogo ou a criação de um jogo didático converge ou diverge do sentido de jogo. Para tal tomaremos como referência as obras Homo Ludens, escrito por Huizinga[2] em 1938 e Os jogos e os Homens, escrito por Caillois[3] em 1958.

Após a caracterização dos jogos e a reflexão sobre seus significados, trazemos uma explanação sobre o cenário do uso de jogos na Educação Matemática baseada nos estudos de Grando (1995), Smolle et al. (2007), Muniz (2010) e Gitirana et al. (2013). Fazemos uma reflexão sobre a inserção dos jogos no planejamento das aulas e a utilização do jogo como um instrumento de diagnóstico do conhecimento dos alunos.

2.1.1 O jogo como elemento lúdico do ser

Os jogos surgem como atividade natural do ser humano. Para Huizinga (2000), o jogo antecede a sociedade e cultura, desenvolvendo-a e desenvolvendo-se nela. Esse autor afirma que: “*No jogo existe alguma coisa ‘em jogo’ que transcende as necessidades imediatas da vida e confere um sentido à ação* (HUIZINGA, 2000, p. 5)”. A essência do jogo é definida pelo divertimento, alegria e prazer em jogar, ou

---

[2] Nesse trabalho foi consultada a edição do ano 2000.
[3] Foi consultada a edição de 1990.

seja, o lúdico. O trabalho de Huizinga (2000) estuda a função social do jogo e discute algumas características dos jogos:

> Numa tentativa de resumir as características formais do jogo, poderíamos considerá-lo uma atividade livre, conscientemente tomada como "não-séria" e exterior à vida habitual, mas ao mesmo tempo capaz de absorver o jogador de maneira intensa e total. É uma atividade desligada de todo e qualquer interesse material, com a qual não se pode obter qualquer lucro, praticada dentro de limites espaciais e temporais próprios, segundo uma certa ordem e certas regras. (HUIZINGA, 2000, pp. 12-13)

Esse autor apoia-se em definições encontradas em diversas línguas e nas características indicadas para definir jogo como sendo

> (...) uma atividade ou ocupação voluntária, exercida dentro de certos e determinados limites de tempo e de espaço, segundo regras livremente consentidas, mas absolutamente obrigatórias, dotado de um fim em si mesmo, acompanhado de um sentimento de tensão e de alegria e de uma consciência de ser diferente da "vida quotidiana" (HUIZINGA, 2000, p. 24).

O jogo, nas ideias de Huizinga (2000), diz respeito a uma atividade lúdica, não obrigatória, exterior à vida cotidiana, que não responde a necessidades externas e provoca diversão. Para esse autor, não se trata simplesmente de realizar uma atividade, uma competição ou resolver um desafio. Em sua análise, o jogo é uma característica do ser, existe além de definições e nomenclaturas e está presente em praticamente toda organização social.

O significado de jogo trazido por Caillois (1990) tem como características a liberdade e a não construção de algo que durará, pois ao final de cada partida o jogador volta à “estaca zero” e recomeça todo seu trajeto. As características de jogo para Caillois (1990) têm convergência com as características citadas por Huizinga (2000): liberdade, divertimento, não seriedade e afastamento do mundo real.

Outro ponto convergente entre Caillois (1990) e Huizinga (2000) é a necessidade da existência e do respeito às regras para que exista o jogo. As regras são respeitadas voluntariamente, mas não as respeitar significa não mais jogar.

> Todo jogo é um sistema de regras que define o que é e o que não é jogo, ou seja, o permitido e o proibido. Estas convenções são simultaneamente arbitrárias, imperativas e inapeláveis. Não podem ser violadas sob nenhum pretexto, pois, se assim for o jogo acaba imediatamente por este facto. (CAILLOIS, 1990, p.11)

Podemos dizer que a razão pela qual se escolhe participar ou não do jogo, não segue a lógica, é uma atitude motivada pela diversão que ele (o jogo) oferece, é uma escolha “irracional”. Joga-se simplesmente pelo prazer de jogar. Porém, o ato de jogar exige racionalidade para buscar atingir os objetivos do jogo e vencê-lo, os jogos de alguma forma sempre estimulam e aprimoram alguma esfera do ser humano, quando não é intelectual é física, ou ainda ambos (CAILLOIS, 1990).

Caillois (1990) classifica os jogos em quatro categorias. Agôn que são os jogos de competição, onde ambos os jogadores ou ambas as equipes estão em situação de igualdade e a vitória assegura a superioridade do vencedor. A competição nesse caso quer provar quem é o melhor em determinado aspecto, que pode ser de força, intelectual ou outra habilidade qualquer.

Alea são jogos de azar e dependem unicamente da sorte que o destino traz a cada competidor; Mimicry são os jogos de imitação, fantasia, nos quais os jogadores vivem personagens e em mundos criados por eles; e, Ilinx são jogos que buscam a desestabilização da percepção, a vertigem, a instabilidade.

Apesar de classificar os jogos, Caillois (1990) chama a atenção para o fato de dificilmente esses jogos se enquadrarem em apenas uma categoria, a combinação entre elas é bastante comum.

Partindo dessas reflexões sobre o significado de jogo e considerando o fator lúdico como essencial ao ser, os jogos podem ser considerados como uma possibilidade de trabalho na sala de aula, desde que sejam vivenciados com prazer e diversão. Portanto, é importante a reflexão acerca de um bom planejamento para realização desse trabalho (visto que os jogos com intenção didática são recursos que auxiliam o ensino e a aprendizagem da matemática) mantendo as características de jogo.

2.1.2 Os jogos na Educação Matemática

Os jogos têm surgido como uma Tendência na Educação Matemática[4] e são objeto de estudo de muitas pesquisas Grando (1995), Smolle et al.(2007), Muniz (2010) e Gitirana et al. (2013). Quando utilizados no ambiente escolar, os jogos podem contribuir para a formação dos estudantes em vários aspectos.

Muitos jogos favorecem a aprendizagem do trabalho em equipe, pois cada jogador deve desempenhar seu papel de acordo com as definições estabelecidas

[4] Estamos utilizando a expressão tendências em educação matemática de acordo com o que definiram Flemming, Luz e Melo (2005).

pelo grupo e o sucesso da equipe frequentemente depende do envolvimento e do empenho de seus membros.

O trabalho com jogos também estimula a motivação e a perseverança uma vez que a vontade de vencer pode levar o estudante a não desistir diante de uma dificuldade, movido pela vontade de encontrar uma solução que o leve ao sucesso no jogo. Há vários jogos, sobretudo os jogos de estratégia que também propiciam a formulação de hipóteses, o desenvolvimento de maneiras de validá-las e a concentração na busca de atingir os objetivos do jogo.

Destaca-se ainda que a experiência com jogos pode ter repercussões importantes no exercício da cidadania, pois todo jogo possui regras que devem ser obedecidas por todos que se submetem a elas e aceitam jogar. Uma vez que todo jogador deve respeitar as regras e que está apto a exigir que elas sejam respeitadas pelos demais, os jogadores aprendem a lidar com as noções de direito e dever.

Na vida cotidiana os jogos contribuem para a aprendizagem da vida em sociedade. Essa é uma das razões das quais os jogos podem ser utilizados na sala de aula e contribuir para formação social dos estudantes. Porém ao inserir os jogos na sala de aula o professor precisa ter clareza das intenções de aprendizagem, nas dimensões conceitual, procedimental e atitudinal, para evitar que seja jogado o jogo pelo jogo. No caso dos jogos trabalhados com intenção didática, é essencial que eles não percam o caráter de jogo, ou seja, sua ludicidade. Pois, para se manter ativo no jogo é necessário que haja motivação para jogar.

O que se propõe com o uso dos jogos com intenção didática é que haja uma união entre o trabalho e a diversão. Queremos dizer com isso que o equilíbrio buscado seria nem “ludicidade pura”, o que seria atividades de recreação que não são o foco da nossa pesquisa, nem a “intenção didática pura”, que perderia a característica de jogo ao destruir o lúdico.

Grando (1995) e Muniz (2010), apoiados nas ideias de Huizinga e de Caillois, trazem a discussão sobre a ludicidade dos jogos matemáticos (usados em sala de aula), levantando a questão: Os jogos utilizados com intenção didática perdem as características de jogo, visto que o único objetivo do jogo deve ser o prazer da diversão? Os autores levantam a discussão sobre até onde a intenção didática e o jogo podem caminhar juntos, mantendo suas características e objetivos durante as partidas.

Observando a definição de jogo e a discussão desses autores, pensamos que mesmo o jogo criado com um objetivo didático específico, pode fazer parte de uma atividade prazerosa, que favorece a aquisição de conteúdos matemáticos sem perder o caráter de jogo. Para isso, nosso ponto de vista é que o professor que desejar utilizar um jogo com intenção didática precisa realizar um planejamento cuidadoso e assumir durante a condução da atividade uma postura adequada. De acordo com Gitirana et al. (2013),

> O problema a encarar é como inserir, então, no contexto da Educação Básica as experiências com jogos matemáticos. Esta não é uma tarefa fácil, requerendo de um lado, a clareza sobre os vários conceitos matemáticos envolvidos e, de outro, um planejamento do momento e da maneira adequados à sua utilização no processo do ensino-aprendizagem, garantindo-se assim, a riqueza conceitual, o prazer de participar da atividade e a conquista da autoconfiança (p. 13)

Muniz (2010) traz um estudo acerca das aproximações da matemática e os jogos espontâneos das crianças, no qual busca a matemática produzida no momento lúdico, onde a situação de trabalho que remete à matemática não está presente. Ele faz a diferenciação entre os jogos espontâneos, jogos de reflexão pura e jogos matemáticos.

Os jogos espontâneos têm caráter social, eles estão presentes no cotidiano das crianças e até mesmo dos adultos, em seu trabalho Muniz (2010) faz menção ao jogo POG, que foi observado no início de seu trabalho, comum entre crianças francesas e aqui no Brasil corresponde ao jogo Tazzo (um jogo semelhante ao de desvirar figurinhas de um monte, batendo nele com a palma da mão);

Os jogos de reflexão pura são considerados os jogos dos sábios, pois a sorte e/ou o azar não influenciam no seu resultado, para se chegar a uma solução é necessário que haja um pensamento lógico que leve à solução. Os jogos matemáticos se apresentam como atividades elaboradas por matemáticos e tem como objetivo distrair e inspirar seus jogadores que raramente não são matemáticos. Para ser considerado jogo matemático ele precisa ter o objetivo de resolver um problema e/ou construir uma teoria ((MUNIZ, 2010).

Dentre os jogos matemáticos encontramos os que são chamados de jogos-problemas, eles são os mais comuns dos jogos matemáticos inseridos na sala de aula. Suas características, segundo Criton (1997) citado por Muniz (2010), são: ter uma redação atrativa e descontraída; trazer um desafio, uma curiosidade; e apresentar um desafio. São classificados como jogos-problemas os paradoxos, as sequências a completar, as falsas demonstrações e outros desafios que necessitam da lógica para resolvê-los.

> Os jogos matemáticos que não podem ser apresentados [apenas] como jogos-problemas, uma vez que são apresentados por meio de um enunciado matemático, podem ser classificados dentro de uma das categorias seguintes: criptogramas, quadrados mágicos, poliminós, jogos de palitos, “autómatas celulares”, figuras impossíveis e ilusão de ótica, jogos informáticos, ou, ainda, curiosidades, humor (MUNIZ, 2010, p. 25).

Em relação a esse tipo de atividade (os jogos-problema) concordamos com as colocações de Muniz (2010), que elas não favorecem a ideia de jogo, onde deve existir a dúvida do ganhar ou perder na execução de cada rodada. Pois uma vez que o indivíduo atinge o objetivo do jogo que é desvendar o mistério, já conhece todos os passos lógicos e vencerá o jogo sempre que jogado. Assim, o jogo-problema só será jogo na primeira vez que for jogado.

Acreditamos que a inserção de jogos nas aulas de matemática pode contribuir para o ensino de conteúdos matemáticos que vão além das fórmulas e regras mecanizadas, uma vez que estimulam a concentração e a motivação, quebram a rotina e exigem a mobilização de conhecimentos matemáticos para ganhar o jogo. Para isso, como já dito, é importante que a intenção didática fique clara no planejamento, mas o caráter lúdico seja preservado.

Dessa forma, se faz necessário que o professor tenha claros os conhecimentos matemáticos envolvidos no jogo, seus objetivos didáticos e os objetivos específicos da situação de jogo a ser vivenciada com os estudantes, para que o jogo assuma o caráter didático-pedagógico. Sobre a utilização de jogos com a intenção didática, temos que,

> Trabalhar com jogos envolve planejamento de uma sequência didática. Exige uma série de intervenções do professor para que, mais que jogar, mais que brincar, haja aprendizagem. Há que se pensar como e quando o jogo será proposto e quais possíveis explorações ele permitirá para que os alunos aprendam (SMOLE et al., 2007, p 15).

Nesse contexto, consideramos que os jogos como recurso didático nas aulas de matemática se jogados por jogar, podem não elencar pontos fortes a serem trabalhados. Por isso um planejamento cuidadoso, no qual o professor faz uma análise didática[5] do jogo, de seus possíveis resultados e quais seriam as possíveis intervenções, se faz necessário para que o jogo contribua para a evolução da compreensão de determinados conceitos, salientando novamente que mesmo com intenções didáticas os jogos na sala de aula necessitam conservar o caráter lúdico.

Concordamos com o que foi dito por Gitirana et al. (2013), “É preciso que os alunos vivenciem o jogo como jogo, podendo posteriormente ser analisadas estratégias e conteúdos matemáticos (2013, p. 14)”. O ideal para que esse aspecto seja mantido, é o professor dedicar-se ao planejamento das possíveis intervenções que se permitirá fazer durante o momento do jogo, saindo o máximo de cena para que os estudantes se sintam realmente dentro do jogo.

No caso da utilização do jogo que tratamos nesse trabalho é ideal que o professor conheça as representações que compõem as cartelas, identifique os distratores[6] e planeje possíveis intervenções nos momentos de conferência das cartelas.

O jogo quando trabalhado com intenção didática é escolhido, de acordo com o planejamento do professor para atender aos objetivos das aulas, podendo existir alteração nas regras de maneira explícita para obter indícios sobre o que está sendo aprendido, revisado ou apresentado. Como trazem Smole et al. (2007), os jogos podem ser utilizados para levar o estudante a pensar sobre um conteúdo novo, para explorar mais os conteúdos já estudados, para desenvolver estratégias e provocar a formulação de hipóteses ou ainda para investigar os conhecimentos que os estudantes dispõem sobre certo conteúdo.

Um mesmo jogo pode servir a vários propósitos, em função do momento, do modo como é utilizado na sala de aula e do planejamento do professor. Por exemplo, ao iniciar o estudo de certo conteúdo, a vivência de jogos pode contribuir para motivar a turma para o assunto e ao mesmo tempo pode fornecer ao professor informações sobre os conhecimentos que os alunos têm e sobre os erros e dificuldades que apresentam.

---

[5] Estamos chamando de análise didática o ato de analisar previamente o jogo identificando elementos como: nível adequado para utilização do jogo, conhecimentos prévios envolvidos, as regras do jogo, as possibilidades de erros e acertos, as fragilidades e os pontos fortes do jogo.

[6] Distratores são representações que podem ser marcadas, ao ser chamada algumas fichas, de forma incorreta. Uma explicação mais detalhada será dada adiante, na seção 2.1.3.

A utilização do Bingo dos Números Racionais em sala de aula pode visar motivar o estudo, diagnosticar os conhecimentos dos estudantes e retomar conteúdos previamente trabalhados ou ainda avaliar a aprendizagem sobre diferentes representações de números racionais. Nosso interesse está voltado para esse jogo como possível instrumento de diagnóstico de conhecimentos.

O uso de um jogo como instrumento de diagnóstico dos conhecimentos dos estudantes requer que tenhamos conhecimento amplo dos conceitos envolvidos no jogo, seu nível de dificuldade, as regras e possíveis adaptações das mesmas, possibilidades de questionamentos e intervenções que mobilizem os estudantes a explicitar o conhecimento que utilizaram. Faz-se necessário também um planejamento de observação da ação dos estudantes durante o jogo para sistematizar o registro dos conhecimentos que são utilizados de forma correta e de forma incorreta, analisar o percurso realizado por eles para identificar em qual/quais ponto(s) do caminho ocorreu maior ou menor dificuldade de resolução para cada problema lançado. Diante do exposto, a seção a seguir é dedicada ao jogo em foco nessa pesquisa.

2.1.3 Descrição e contextualização do Bingo dos Números Racionais

O Bingo dos Números Racionais, trata-se de uma adaptação do bingo tradicional que é um jogo espontâneo de acordo com a classificação de Muniz (2010) e de acordo com a classificação de Caillois (1990) um jogo de azar, alea. O bingo é considerado um jogo espontâneo pois faz parte de uma cultura social e de azar pois ganhar ou perder depende unicamente da sorte. Portanto, no caso do jogo utilizado nessa pesquisa que tem finalidades didáticas, a sorte, apesar de ser um fator influente à partida, não garante que um jogador vença.

Assim acreditamos ainda que o bingo dos números racionais se trata, em partes de um jogo espontâneo e de azar, pois continua com as características de um bingo tradicional, diferenciando-se pelas representações contidas nas cartelas e por vencer marcando uma linha, coluna ou diagonal. Não é totalmente espontâneo, pois nesse formato não faz parte da cultura social e nem apenas de azar, porque é preciso ter conhecimento sobre os números racionais em questão para realizar as marcações adequadamente.

Tal jogo exige do jogador que mobilize conhecimentos matemáticos sobre diferentes representações de números racionais, para marcar corretamente os itens contidos nas cartelas. E "*O objetivo didático central do bingo de números racionais é explorar representações para os números racionais, estabelecendo relações entre diferentes representações para um mesmo número* (MELO et al., 2011, p.1)"., podendo ser classificado ainda de acordo com Muniz (2010) como um jogo matemático.

Assim, além da concentração para não passar batido nenhuma representação, o jogo exige reflexão sobre as representações possíveis de cada número racional chamado. Os equívocos cometidos pelos jogadores podem sinalizar que eles desconhecem alguma representação ou que estabelecem relações inadequadas entre números e representações. Podemos argumentar dessa forma, que o bingo dos números racionais é um jogo matemático que possui elementos dos jogos espontâneos e de azar.

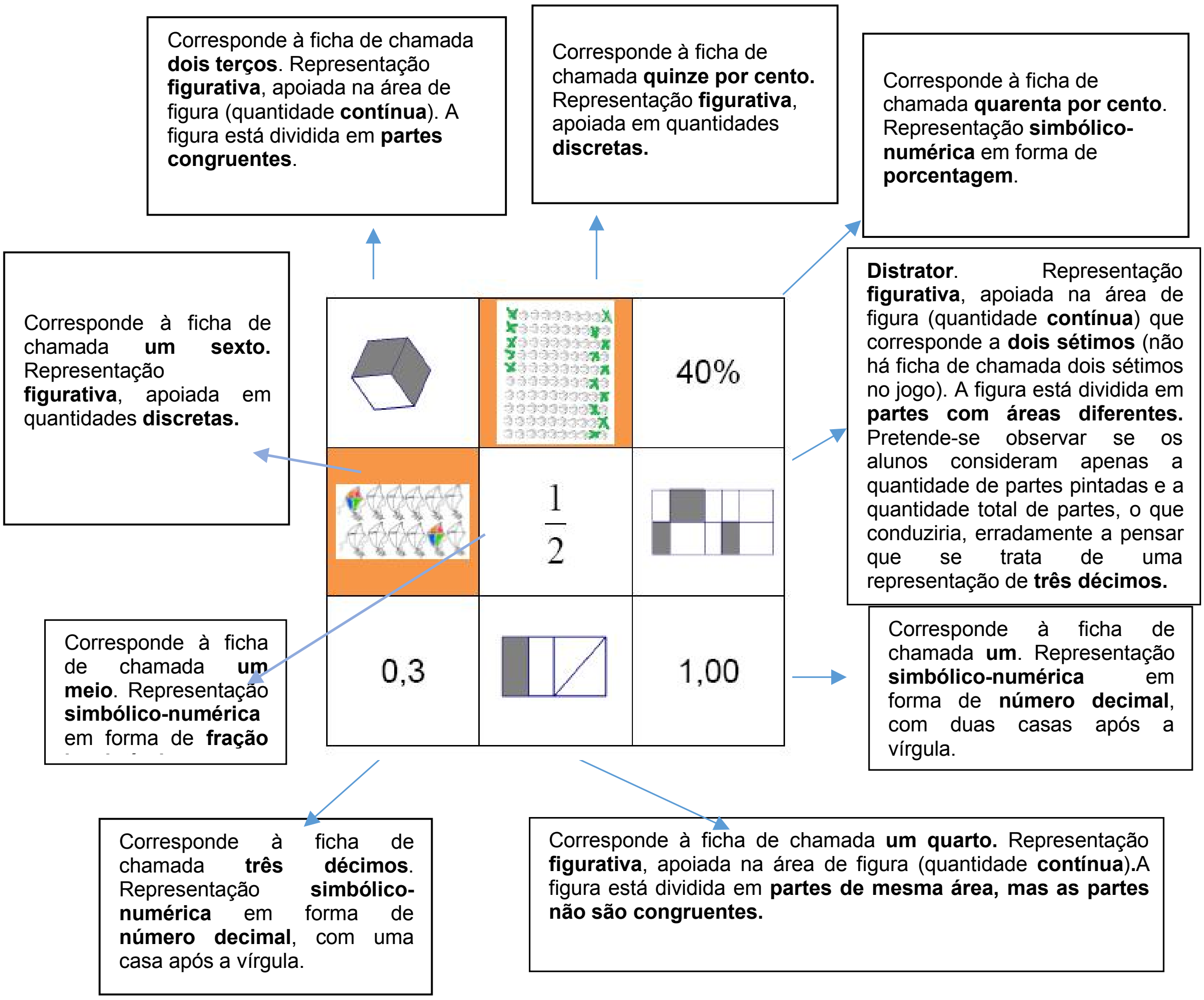
Como se sabe, o contato das crianças com diferentes representações dos números racionais começa muito cedo na caminhada escolar e também na vida cotidiana. Mas, por vezes as representações são abordadas de maneira fragmentada e nem sempre é feita uma reflexão suficiente sobre a equivalência entre elas. Assim, o jogo pode ser útil para retomar conteúdos que foram trabalhados de maneira isolada, como também após a aprendizagem formal dos números racionais, trabalhando suas representações em conjunto para favorecer a consolidação da capacidade de relacionar as diferentes representações.

A construção do Bingo dos Números Racionais foi fundamentada pela Teoria dos Registros de Representações Semiótica de Raymond Duval (2005), articulando possíveis representações de números racionais em linguagem natural, contidas nas fichas de chamada (um quinto, sete décimos, etc.), linguagem figural (representações de quantidades contínuas, vinculadas à área de figuras e representações de quantidades discretas) e linguagem simbólico-numérica (frações, números decimais e porcentagem), usadas nas cartelas.

Ao jogar o Bingo são chamados números racionais na sua representação em língua materna oral. Os jogadores, por sua vez, identificam em suas cartelas representações de diferentes tipos do mesmo número. Cada cartela (FIGURA 1) possui nove representações dispostas em três linhas e três colunas. Ganha o jogo quem marcar primeiro os três números representados em uma linha vertical, horizontal ou diagonal.

Em todas as cartelas do jogo existe uma representação de um número racional que não consta nas fichas a serem chamadas, a qual foi chamada pela equipe que desenvolveu o jogo de distrator. A finalidade dos distratores é favorecer a observação de associações errôneas entre representações de determinados números racionais. Os distratores correspondem a erros identificados na revisão de literatura ou observados por professores em sua prática docente. É importante ressaltar que em cada cartela existe uma representação correta, que tem relação com alguma das fichas de chamada, que pode se confundir com o distrator. A existência dos distratores justifica a escolha de ganhar a rodada com o preenchimento de uma linha coluna ou diagonal e não com o preenchimento de toda a cartela, pois não há ficha de chamada correspondente aos distratores.

Figura 1 – Exemplo de cartela do jogo.



Fonte: Adaptado do texto de apresentação do jogo.

No jogo são propostos três tipos de participantes: o chamador, o escriba e os marcadores. De acordo com os elaboradores do jogo (MELO et al., 2011) é importante que haja revezamento dos participantes em cada função para que exerçam todos os níveis de desafios. O chamador é responsável por chamar (ler em voz alta) as fichas, o escriba registra os números chamados para que possa existir uma conferência entre as fichas chamadas e a representação do número racional marcado nas fichas. E o marcador se responsabiliza por marcar na cartela a representação correspondente ao número chamado.

Fazendo uma análise inicial do jogo pensamos que a função do escriba poderia comprometer a ludicidade do momento, devido à obrigação de realizar um registro numérico para cada representação. Por isso optamos em não manter a função de escriba em nosso experimento.

O jogo foi pensado em dois níveis, um para estudantes do segundo ciclo (4º e 5º anos) e um para o terceiro ciclo (6º e 7º anos), visto que os números racionais e suas representações são abordados e aprofundados durante anos no Ensino Fundamental. Essa diferença foi pensada para que não fosse oferecido um desafio mais complexo do que os estudantes pudessem resolver e nem tão simples que eles resolvessem sem nenhum esforço. Porém as cartelas do nível dois não foram construídas sistematicamente como as do nível um, as quais foram confeccionadas e utilizadas na formação do Projeto Rede (GITIRANA et al., 2012).

Escolhemos utilizar as cartelas disponíveis para download no site <http://lematec.net/projetorede/index.php?page=bingo-dos-racionais> e no livro do PROJETO REDE (GITIRANA et al., 2012). São 24 cartelas diferentes, trazendo em seus componentes pelo menos: duas representações figurativas de quantidades contínuas e duas representações figurativas de quantidades discretas, duas representações simbólico-numéricas de números decimais (com uma casa decimal e com duas casas decimais), uma representação simbólico-numérica em forma de porcentagem e uma representação simbólico-numérica na forma de fração. Além disso, em cada cartela há um distrator, que pode assumir diferentes formas de representação (figurativa ou simbólico-numérica), o qual nunca fica localizado nas diagonais, para evitar diferenças marcantes de grau de dificuldade de marcação entre as cartelas.

Formulamos a hipótese que esse jogo pode ser um recurso útil para identificar o que os alunos sabem sobre as diferentes representações de números racionais.

Não levamos em consideração em que momento seria utilizado, mas podemos pontuar três possibilidades com objetivos distintos. No início da abordagem sistemática de números racionais, poderia ser utilizado para sondar os conhecimentos prévios dos alunos e subsidiar escolhas didáticas sobre a maneira de abordar o assunto e sobre o que precisa ser priorizado. O uso do jogo durante o ensino de números racionais pode ajudar a monitorar a aprendizagem e indicar eventuais necessidades de mudança de rumo na maneira de conduzir o ensino para criar condições mais favoráveis à aprendizagem.

Finalmente, inferimos que o Bingo dos Números Racionais poderia ser utilizado ao final do processo para avaliar o que foi aprendido e as dificuldades que persistem quanto a diferentes representações de números racionais. Como já foi dito, nosso interesse se volta para o Bingo dos Números Racionais como um instrumento de diagnóstico dos conhecimentos dos estudantes sobre representações de números racionais. Nesse sentido, nosso foco é ver se o jogo pode contribuir para avaliar o que os alunos sabem e isso a priori pode ser útil em diferentes momentos da aprendizagem e do ensino.

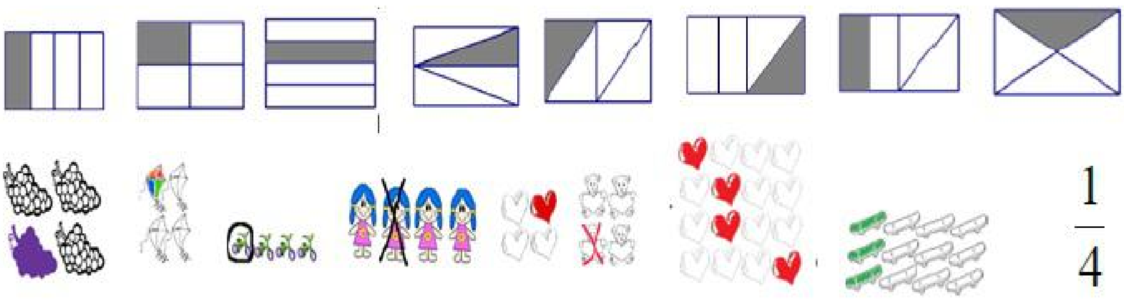
Nossa investigação buscou identificar as lacunas, os possíveis entraves e as facilidades que os estudantes apresentam acerca de diferentes representações de números racionais. A escolha por utilizar o jogo como instrumento de diagnóstico do conhecimento dos estudantes se dá pelo fato de ele trabalhar de uma maneira “suave” com várias formas de representar um número racional, permitindo motivar as associações entre diferentes representações de modo lúdico e permitir trazer à tona as dificuldades que os alunos apresentam para que possam ser trabalhadas e que haja evolução no processo de conceitualização. É um trabalho diferenciado onde o estudante pode se permitir tentar e errar, afinal é apenas um jogo. Diante do exposto, na próxima seção são apresentados elementos da teoria dos campos conceituais que deu suporte à pesquisa.

2.2 Elementos da Teoria dos Campos Conceituais

O marco teórico dessa pesquisa é a Teoria dos Campos Conceituais desenvolvida por Gérard Vergnaud e seus colaboradores. A escolha dessa teoria justifica-se por alguns motivos, dentre os quais, o papel atribuído às representações no processo de aprendizagem e a consideração dos conhecimentos implícitos mobilizados na resolução de tarefas.

Para resolver problemas fazemos constantemente o uso de representações de objetos matemáticos. Para um mesmo objeto matemático existem diferentes representações, o que torna necessário para a aprendizagem que se consiga transitar entre mais de uma dessas representações. Por exemplo, há inúmeras maneiras de representar o número racional um quarto (FIGURA 2), das quais expomos a seguir alguns exemplos:

Figura 2 – Representações correspondentes à ficha de chamada um quarto presentes nas cartelas do jogo.



Fonte: Texto de apresentação do jogo.

A adoção da Teoria dos Campos Conceituais leva também a considerar o número racional em suas interligações com outros conceitos. Destacamos nessa pesquisa o Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas e o das Grandezas e Medidas.

O Campo Conceitual Multiplicativo, além das operações de multiplicação e divisão, abrange vários outros conceitos como razão, proporção, função, combinação, área, volume, entre outros, como destacam Gitirana, Campos, Magina e Spinillo (2014). Existe uma descontinuidade conceitual entre o raciocínio aditivo e o multiplicativo. De acordo com Nunes, Campos, Magina e Bryant (2005), o que diferencia o campo das estruturas multiplicativas e o campo das estruturas aditivas é a relação constante entre duas ou mais variáveis contidas no raciocínio multiplicativo. Enquanto no pensamento aditivo temos os esquemas de ação, juntar, separar e corresponder um a um, no pensamento multiplicativo temos a correspondência um a muitos e o de distribuir, que vem a ser ampliado pelas questões de distribuição e divisão em partes iguais. As relações parte-todo, divisão por partes iguais e distribuição são conhecimentos necessários para compreensão do conceito de número racional.

O Campo Conceitual das Grandezas e Medidas está relacionado com diversos domínios do conhecimento e é extremamente presente no cotidiano. Ele tem muitas conexões com os demais campos da matemática. As grandezas, que são atributos de objetos ou fenômenos, como o comprimento, a área, a massa, as durações de intervalos de tempo, entre outros, estão na origem da ideia de número e da necessidade de estender os conjuntos numéricos. Durante um dia normal, fazemos uso das Grandezas e Medidas em diversas situações, quando estamos na cozinha, tomamos um remédio, pensamos em temperatura, vamos à feira, ao supermercado, salvamos um arquivo em uma mídia externa, estimamos o tempo e/ou a distância ao ir para algum lugar.

Nesse Campo Conceitual estão as grandezas contínuas, como por exemplo, área, comprimento, volume, tempo, etc. que são atributos cujas medidas podem ser subdivididas infinitamente sem perder suas características individuais. As grandezas podem ser comparadas, relacionadas, articuladas entre si e podem ser medidas. Quando medimos grandezas, estamos comparando-as com uma unidade previamente escolhida (de mesma natureza que a grandeza a ser medida). Em processos de medição concreta, a busca por definir quantas vezes a unidade cabe na grandeza medida geralmente exige números que não são inteiros. Fazemos uso de estimativas, atribuindo valores aproximados dessas medidas, ou medimos concretamente e nesse caso, é preciso levar em consideração a precisão do instrumento de medida utilizado. Essa busca por definir quantas vezes a unidade cabe na grandeza medida conduz à necessidade dos números racionais.

Para compreender o funcionamento dos sistemas métricos fazemos uso dos números racionais. Utilizaremos como exemplo o caso da medida de comprimentos, cujo processo de medição, de acordo com Nunes, Campos, Magina e Bryant (2005), tem seu processo baseado inicialmente no pensamento aditivo. Quando medimos um comprimento de um metro e vinte e cinco centímetros com uma régua graduada de um metro, por exemplo, precisamos compreender que o uso da unidade apenas uma vez não será suficiente. Então observamos quantas vezes cabe a régua naquele comprimento a ser medido e percebemos que cabe uma régua (um metro) e um quarto de régua (um quarto de um metro corresponde a vinte e cinco centímetros). Concluímos que o comprimento é ao todo um metro e vinte e cinco centímetros (um e um quarto do metro).

A adoção da Teoria dos Campos Conceituais favorece investigar o conceito de número racional, considerando suas relações com campos conceituais nos quais está inserido, como é o caso das estruturas multiplicativas e das grandezas e medidas. Na próxima seção refletimos sobre as representações à luz dessa teoria.

2.2.1 O papel das representações em matemática à luz da Teoria dos Campos Conceituais

A forma como a criança interpreta uma situação está ligada à maneira como ela a compreende. De acordo com Vergnaud[7] (2009, p.18), "[...] *os meios utilizados pela criança, o caminho que ela toma para resolver um problema ou atingir um dado objetivo numa determinada tarefa escolar, são profundamente enraizados na representação que ela faz da situação*". Por um lado, há a representação mental que faz de uma situação e por outro as representações simbólicas usadas para lidar com as situações, para comunicar-se e para argumentar.

Sendo assim, a forma de identificar e relacionar um conceito a suas interpretações está fortemente vinculada ao sentido que a criança atribui ao referido conceito. Partindo desse pressuposto, nos propomos a utilizar o jogo Bingo dos Números Racionais e verificar até que ponto ele permite uma observação de conhecimentos implícitos em torno de diferentes formas de representar simbolicamente os números racionais.

Vergnaud afirma que um conceito só pode ser compreendido se abordado por diferentes meios, formas e perspectivas.

> "Desse modo, a definição pragmática de um conceito faz apelo ao conjunto das situações que constituem a referência das suas diferentes propriedades, e ao conjunto dos esquemas utilizados pelos sujeitos nessas situações" (VERGNAUD, 2009, p. 155).

Assim, de acordo com a Teoria dos Campos Conceituais, um conceito é considerado como um tripé com situações, invariantes operatórios e representações simbólicas, e portanto, caracterizar o conceito de número racional nessa teoria consiste em levar em consideração três dimensões:

---

[7] Tradução para o português, publicada em 2009. Título original publicado em 1996.

- S – O conjunto das situações que dão sentido ao número racional;
- I – O conjunto de invariantes operatórios relativos ao número racional;
- s – O conjunto das representações simbólicas que dão acesso ao número racional e nos permitem observar os invariantes mobilizados nas situações.

Uma situação para Vergnaud (2009) não corresponde ao sentido dado por Guy Brousseau no âmbito da Teoria das Situações Didáticas. Na Teoria dos Campos Conceituais, as situações dizem respeito às tarefas realizadas pelos sujeitos, sejam elas propostas intencionalmente para provocar a aprendizagem dos conceitos ou não, sejam elas escolares ou não. É na busca de solução para as tarefas às quais é confrontado que o sujeito atribui significado aos conceitos.

Para situações percebidas pelo sujeito como similares, ele organiza sua ação também de maneira similar. A organização invariante da conduta dos sujeitos é chamada por Vergnaud (seguindo a escola piagetiana) de esquema. Ao resolver situações familiares e dominadas, o indivíduo faz uso dos esquemas conhecidos por ele e as resolve satisfatoriamente. Quando é confrontado a situações novas, o sujeito tenta utilizar os diferentes esquemas de que dispõe, porém nem sempre os conhecimentos que ele possui são suficientes e muitas vezes, por esse motivo chega a uma solução incorreta utilizando invariantes operatórios que não são válidos ou não adaptados à situação proposta. Ainda diante de situações novas, o sujeito desenvolve novos esquemas e apropria-se de novos conhecimentos.

Os esquemas são compostos, entre outros elementos, de conhecimentos que o sujeito mobiliza, mas não é necessariamente capaz de explicitar. Vergnaud chama esses conhecimentos de invariantes operatórios, destacando os conceitos-em-ação e os teoremas-em-ação.

Os teoremas-em-ação dizem respeito às propriedades que o sujeito acredita serem válidas e adaptadas para resolver uma tarefa. Os teoremas-em-ação podem ser corretos ou errôneos do ponto de vista matemático. Muitas vezes, os teoremas-em-ação errôneos são extensões indevidas de propriedades válidas em um âmbito mais estreito. Um exemplo é o caso da comparação entre números decimais. Se o sujeito mobiliza o teorema-em-ação segundo o qual se um número A tem mais algarismos que um número B então A é maior que B, poderá concluir erradamente que 2,06 é maior que 2,5 (pois 2,06 tem 3 algarismos e 2,5 tem apenas dois algarismos). No caso de números naturais essa propriedade é válida. Ou seja, o teorema-em-ação segundo o qual, dados dois números naturais A e B, aquele que tem mais algarismos é maior é verdadeiro. Mas sua extensão para o caso de números decimais não é legítima e corresponde a um teorema-em-ação errôneo.

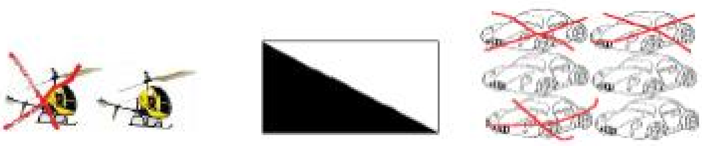
Os conceitos em ação não são nem verdadeiros nem falsos, mas podem ou não ser adaptados à situação. Na nossa pesquisa o foco de atenção são as situações escolares propostas para favorecer a aprendizagem de conceitos matemáticos, mais especificamente de número racional. Ao buscar uma solução satisfatória para tarefas matemáticas propostas pelo professor em sala de aula, o estudante mobiliza invariantes operatórios (teoremas-em-ação e conceitos-em-ação) e utiliza representações simbólicas.

Não se pretende nessa dissertação investigar em sua plenitude o número racional como conceito, o que exigiria mapear e investigar as situações que lhe dão sentido. Trata-se de explorar a possível contribuição que um jogo pode dar para diagnosticar como estudantes de 6º ano lidam com alguns elementos do conceito de número racional.

Nossa intenção foi observar se (e em caso afirmativo, como) o Bingo dos Números Racionais contribui para identificar teoremas-em-ação mobilizados pelos estudantes, relativos ao modo como lidam com diferentes representações de números racionais.

No bingo dos números racionais, para a ficha de chamada UM MEIO, temos quatro tipos de representações diferentes contidas nas cartelas, como mostram o exemplo a seguir (FIGURA 3).

Figura 3 – Exemplos de representações para a ficha de chamada um meio



$$\frac{1}{2}$$

Fonte: Documento de descrição do jogo.

Não importa o tipo de representação utilizada para designar um número racional, ele sempre será o mesmo número e ao lidar com esse número, mesmo implicitamente, o sujeito estará mobilizando o número racional como um conceito-em-ação. E a aquisição de novos conhecimentos se dá a partir da construção de novos invariantes operatórios, que trarão à tona novos conceitos-em-ação e teoremas-em-ação, que irão compor novos esquemas.

O conhecimento dos teoremas-em-ação mobilizados pelos estudantes diante de um conceito matemático proporciona ao professor uma base para construção de situações que permitam ao estudante reconhecer tal ação como válida ou não-válida para a resolução do problema naquela circunstância.

Os conceitos são formados de várias propriedades específicas e cada representação explora aspectos distintos de um mesmo conceito. De acordo com o que estudamos, sustentamos a necessidade de estabelecer relações entre as várias representações de um mesmo conceito e fazer essa diferenciação entre o conceito e cada uma de suas representações. No caso dos números racionais temos representações diversas e que não apresentam por si só sentido de equivalência, pelo fato de cada uma das suas representações explorar aspectos diferenciados.

Focando no conjunto dos invariantes e das representações, esse trabalho buscou encontrar os teoremas-em-ação que estudantes utilizam ao identificar as representações dos números racionais e observar de que forma os estudantes encontram a solução ao resolver uma tarefa específica. Diante do exposto, seguimos na próxima seção com um levantamento de pesquisas sobre os números racionais e o ensino e a aprendizagem desses números.

2.3 Os Números Racionais

A história dos números e dos sistemas de representações numéricas tem uma estreita relação com o desenvolvimento social da humanidade. Na medida que o homem ia deixando de ser nômade, fixando-se em um determinado local e praticando a pesca, a agricultura e pecuária, a necessidade de contar foi surgindo. Quantos animais havia no rebanho? Quantos frutos obtiveram na colheita? Eles precisavam conferir se todos os animais haviam voltado do pasto, por exemplo, e começaram a utilizar artifícios para realizar esses registros, dar nós em cordas, colocar pedras em saquinhos, fazer risquinhos nas paredes, entre outros (IFRAH, 1992).

A expansão das atividades de troca de produtos, ampliando cada dia mais o comércio, fez com que as pedrinhas no saquinho, os nós das cordas e os riscos nas paredes fossem insuficientes para realização desses registros. Dessa forma, em diversas culturas foram surgindo símbolos que eram escritos para representar as quantidades. Dessa necessidade, surgem os números naturais e os sistemas de representação desses números. A criação dos números naturais, de acordo com Caraça (1951), foi consequência da atividade de contagem, a qual é uma atividade do pensamento humano que antecede a criação dos números. Assim, para suprir a necessidade de contar surgem os números naturais.

Caraça (1951) mostra que os números naturais não são suficientes para resolver o problema da medida. Entendendo o ato de medir, como a atividade de comparar duas grandezas de mesma espécie e exprimir numericamente o resultado dessa comparação com um número que represente quantas vezes o objeto de referência utilizado na medição cabe no objeto medido, chegamos ao ponto que historicamente fez-se necessário o uso desses números “quebrados”.

Não é nossa intenção fazer um estudo profundo do ponto de vista histórico, mas a partir de fontes secundárias pode-se apontar possíveis elementos sobre como surgiram os números racionais, uma análise de suas propriedades e um estudo sobre as formas de explorar, ensinar e aprender esse conteúdo. Com isso, pretende-se tornar mais claros os sentidos desses números.

A origem dos números racionais está relacionada à ideia de medir. Os primeiros registros de números fracionários de que se tem conhecimento foram no Egito. Nas margens do Rio Nilo, os agricultores pagavam impostos de acordo com o tamanho das terras. Após as enchentes anuais do rio, as demarcações das terras eram perdidas e havia a necessidade de remarcação.

Para remarcar as terras os agrimensores, conhecidos como estiradores de corda, utilizavam uma corda, com nós em seu comprimento, como instrumento para medir e remarcar as terras. Porém nem sempre o resultado da medição era uma quantidade inteira de partes, para solucionar essa questão utilizaram representações para números menores que um inteiro. Eles usavam as frações unitárias (FIGURA 4), ou seja, frações com numerador igual a um.

Figura 4 – Exemplo de frações unitárias utilizadas no Egito Antigo

Fonte: Elaborada pela autora

Caraça (1951) ilustra a criação desse novo campo numérico por meio do problema da medição definindo que, sendo uma unidade de medida subdividida em partes menores o número racional é a razão entre quantas dessas subunidades cabem no objeto a ser medido e o número de subunidades contidas na unidade de medida. Sendo assim, se existir a razão (existir um quociente inteiro), a medida coincide com um número inteiro. Caso contrário, a medida consiste em um número novo chamado fracionário. Porém em ambos os casos os números pertencem ao Conjunto dos Números Racionais.

2.3.1 Números Racionais, quantidades discretas e quantidades contínuas

Vimos nos parágrafos que antecedem esse tópico, que o surgimento desse novo conjunto numérico está vinculado à necessidade de medir, enquanto a criação dos números naturais está relacionada a necessidade de contar. Medir e contar são funções básicas da vida em sociedade.

Segundo Caraça (1951), os problemas surgiram antes dos números propriamente ditos e estes aparecem como solução do problema. A contagem se dá ao estabelecer uma relação biunívoca entre quantidades discretas, ao passo que medir se dá na ordem das quantidades contínuas.

Brolezzi (1996) discute em sua tese de doutorado as relações entre o par discreto-contínuo nas relações matemáticas e traz o par discreto-contínuo como sendo equivalente ao par contar-medir. Ele considera como discretos os objetos separáveis, divisíveis apenas por unidades e como contínuos os objetos únicos que podem ser divisíveis infinitamente. Esse ponto converge com as ideias apresentas por Caraça (1951) e já citadas nesse texto.

Baseados em Vergnaud (2009), podemos dizer que um conjunto contínuo é um conjunto que admite sempre um intermediário (tamanho) entre os objetos e o conjunto discreto é aquele em que podemos fazer uma relação biunívoca termo a termo entre os objetos sem que haja assim algum intermediário entre dois elementos de um mesmo conjunto. Ele traz um exemplo, sobre a continuidade das grandezas, no caso citado, da grandeza comprimento.

> Suponhamos que se queira medir com muita exatidão o comprimento do quadro de giz. No caso de se dispor de uma trena onde somente estão marcados os metros, será possível, por exemplo, afirmar: o quadro tem ‘mais ou menos 2 metros’, ou ‘um pouco mais que 2 metros’, ou ‘menos de 3 metros’, ou ‘entre 2 e 3 metros.
> No caso de se dispor de uma trena onde estão marcados os decímetros, será possível afirmar: o quadro tem ‘mais ou menos 21

> decímetros', ou 'um pouco mais que 21 decímetros', ou 'um pouco menos que 22 decímetros', ou 'entre 21 e 22 decímetros'.
> A notar que os números expressos no primeiro caso (2 e 3) e no segundo (21 e 22) não são de mesma ordem e este fato traz um inconveniente grave.
> Já no caso de se dispor de uma trena onde estão marcados os centímetros, será possível empregar números ainda diferentes (respectivamente 213 e 214, por exemplo). Com milímetros, 2.134 e 2.135, etc. (VERGNAUD, 2009, p. 150).

Podemos com esse exemplo ilustrar a definição de contínuo, visto que contínuo é algo que podemos dividir em partes cada vez menores e de um ponto de vista idealizado, isso pode ser feito infinitamente. Nesse exemplo, a conversão das unidades permite o trabalho com números inteiros, ao estudar os números racionais trabalhamos com as subunidades sem necessariamente convertê-las e sim utilizando números que representam frações da unidade. E assim quanto maior for a precisão do instrumento de medida a ser utilizado mais casas decimais do intervalo de aproximação de medida do contínuo encontraríamos. Isso por que a medida concreta se dá no campo dos números racionais onde um número não possui um sucessor, pois entre dois números racionais existem infinitos outros números racionas. Essa continuidade dos números racionais torna-se uma dificuldade na aprendizagem, visto que é necessário que haja uma ruptura com os números naturais, que sempre possuem (com exceção do zero, que não possui antecessor) um sucessor e um antecessor, o que não acontece com os racionais.

A partir dessa definição de quantidades contínuas e sabendo que as quantidades não-contínuas são também chamadas discretas, podemos dizer que quantidades discretas formam conjuntos que podem estabelecer uma relação biunívoca com outro, sem que existam sobras entre os elementos dos conjuntos.

Sendo assim, poderíamos dizer que quantidades obtidas através da contagem derivam de grandezas discretas e quantidades obtidas por medição são contínuas, porém essa definição nos leva a pensar: o processo de medição não seria uma contagem e a atividade de contar não seria uma medição? O ato de medir parece estar relacionado mais com a comparação entre grandezas do mesmo tipo e de unidades diferentes, onde utilizamos a contagem para responder quantas vezes a unidade cabe na grandeza medida, a contagem servirá, nesse caso, de apoio a esse processo de medição.

Ao comparar as grandezas com a finalidade de medir podemos chegar a duas possibilidades como resultado do processo de medição concreta: um número racional inteiro, quando a unidade de medida cabe um número de vezes exato no objeto a ser medido ou um número racional fracionário, quando a unidade de medida não cabe um número de vezes exato no objeto a ser medido, precisando assim de serem utilizadas frações da unidade de medida para encontrar o resultado. Essas possibilidades que apresentamos tratam da medição concreta. Já no caso da medida abstrata, é preciso considerar um terceiro caso, que corresponde à incomensurabilidade.

Sobre a questão da incomensurabilidade, Caraça (1951) inicia o estudo dessa questão com uma crítica ao problema da medida. Ele apresenta a construção do campo racional como resposta ao problema da medida, onde uma unidade de medida é subdividida quantas vezes forem necessárias para que esta subunidade caiba um número de vezes exato e resulte em uma expressão numérica da medida. A partir dessa definição do campo racional, ele traz a seguinte pergunta que sustentará sua crítica: “ (...) existe sempre uma parte alíquota de que seja parte alíquota de ? (CARAÇA, 1951, p. 49)”.

Para responder a pergunta que sustenta a crítica, Caraça (1951) traz o problema da diagonal do quadrado, para o qual não é possível expressar com um número racional a medida abstrata do comprimento da diagonal, tomando como unidade o comprimento do lado do quadrado. Nesse caso diz-se que o lado do quadrado e sua diagonal são incomensuráveis.

No âmbito dessa pesquisa, nosso interesse é voltado para os números racionais positivos e limita-se portanto, à medição concreta. Se por um lado, concordamos que com a relação entre contar e grandezas discretas, medir e grandezas contínuas, pensamos que se deve levar em consideração que as frações também são usadas no contexto das quantidades discretas.

Por exemplo, se temos um conjunto de 24 elementos, podemos formar subconjuntos com quantidades iguais: 2 conjuntos de 12 elementos cada, 3 conjuntos de 8 elementos cada, 4 conjuntos de 6 elementos cada, 6 conjuntos de 4 elementos cada, 8 conjuntos de 3 elementos cada, 12 conjuntos de 2 elementos cada, 24 conjuntos unitários. Mesmo sem poder subdividir indefinidamente, é possível expressar frações de quantidades discretas. Considerando só as frações unitárias, corresponde a 12 elementos; corresponde a 8 elementos; corresponde a 6 elementos; corresponde a 4 elementos; corresponde a 3 elementos, corresponde a 2 elementos e corresponde a 1 elemento. Em todas as frações unitárias o denominador é divisor do total de elementos do conjunto.

Em seguida trazemos considerações sobre as diferentes representações e significados dos números racionais, tais considerações são importantes para compreensão do contexto da pesquisa.

2.3.2 Diferentes Representações e Significados dos números racionais

Os números racionais possuem significados e representações diversas. Kieren propõe sete subconstrutos dos números racionais:

> 1. Números Racionais são frações que podem ser comparadas, adicionadas, subtraídas, etc.;
> 2. Números Racionais são frações decimais que formam uma extensão natural (por nosso sistema de numeração) para os números inteiros;
> 3. Números racionais são classes de equivalência de frações. Assim, e são números racionais;
> 4. Números racionais são números na forma , quando p e q são inteiros e q ≠ 0. Dessa forma, números racionais são números relacionais;
> 5. Números racionais são operadores multiplicativos (ex. esticar, contrair, etc.);
> 6. Números racionais são elementos de um campo de quocientes infinitos. Eles são números na forma onde *x* satisfaz a equação ;
> 7. Números racionais são medidas ou pontos numa reta numérica.(1976, pp. 102-103. Tradução nossa)

Segundo Kieren (1976), cada uma dessas interpretações é independente e que cada uma delas admite uma visão diferenciada dos números racionais. Sendo assim, cada interpretação traz aspectos diversos que permitem o estudo por diferentes perspectivas. Ele afirma que a aprendizagem só acontece por diferentes experiências em torno dos diferentes significados dos números racionais e defende que o ensino baseado em cálculos em nada ajuda a compreender o significado de cada interpretação desses números.

Dentre as possíveis estratégias para a iniciação ao ensino formal dos números racionais, Santos (2010) destaca a exploração de situações nas quais os números naturais não são suficientes para solucionar o problema de maneira satisfatória.

Podemos exemplificar uma situação que traz o significado de quociente dos números racionais. Imagine que quatro crianças têm seis barras de chocolate a serem divididas entre elas equitativamente e não é permitido sobrar nenhuma barra. Nessa situação, inicialmente cada criança receberá uma barra de chocolate e ainda sobrarão duas. Pode-se então repartir cada uma das barras em dois pedaços e cada criança recebe mais meia barra de chocolate. Ao final, cada uma receberá uma barra e meia de chocolate. Uma situação como esta propicia a exploração de várias representações para a mesma resposta. Deixando assim a reflexão que são diferentes representações e não diferentes respostas e que deve-se escolher para dar a resposta a representação que mais favorecer a compreensão do caso estudado.

Para representar a solução para a tarefa proposta, podemos expressar a resposta em língua natural (oral ou escrita), um e meio; em forma de fração ordinária, como uma fração mista (com uma parte formada por inteiro e outra por fração),; por meio de um número decimal, 1,5. Se buscarmos determinar que parte do todo cada criança recebeu encontraríamos um número diferente para responder à pergunta. Poderíamos dizer que cada um recebeu , 0,25 ou com o auxílio da porcentagem tomaríamos, cada um receberia 25% dos bombons distribuídos. Nesse caso, a unidade considerada são as quatro barras de chocolate, enquanto no caso anterior, a unidade é uma barra.

Temos nas cartelas do bingo diferentes representações que podem ser articuladas a diferentes significados dos números racionais positivos. Aqui buscamos trazer a relação existente entre essas representações e os significados que elas carregam.

Vamos tomar os significados pontuados nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) dos anos finais do ensino fundamental (BRASIL, 1998) para os números racionais: medida, parte-todo, quociente, operador e razão.

Quando há um todo, dividido em partes equivalentes e tomam-se algumas dessas partes, estamos diante da fração como expressão de uma relação parte-todo (o denominador indica em quantas partes equivalentes o todo foi dividido e o numerador expressa quantas partes foram tomadas).

Quando questionamos quantas vezes certa grandeza cabe em outra de mesma espécie, está em jogo o número racional como expressão da medida de uma grandeza em certa unidade.

Como se sabe, o resultado de uma divisão entre dois inteiros quaisquer nem sempre resulta em um número inteiro. Quando a ideia central na situação é a de divisão, temos o significado do número racional como a expressão de um quociente (resultado de uma divisão).

Por fim, o número racional como operador corresponde à situação em que o número racional expressa uma ideia de transformação de um valor, por meio de uma função.

Por outro lado, os números racionais possuem várias representações que podem ser classificadas em três grandes grupos, língua natural, figurativas (representações por figuras de grandezas contínuas e discretas) e simbólico-numérica (fracionária, decimal e percentual), essas são as nomenclaturas utilizadas ao nos referimos ao Bingo dos Números Racionais.

As representações *um meio*, , 0,5, 50%,  e  representam o mesmo número racional e ainda para este mesmo número existem infinitas representações equivalentes.

Há diferentes tipos de representações em jogo no Bingo dos Números Racionais. As fichas chamadas são em língua natural. Assim, os números são designados por expressões como “um meio”, “três quartos” ou “quarenta por centro”, entre outros. Nas cartelas, há representações em figuras e representações simbólico-numéricas, as quais são detalhadas a seguir.

Figura 5 – Exemplo de representação de quantidade contínua

Fonte: Documentos de apresentação do jogo

Entre as representações figurativas, há aquelas que representam quantidades contínuas (FIGURA 5) e quantidades discretas (FIGURA 6), como nos exemplos.

Figura 6 – Exemplo de representação de quantidade discreta

$$\frac{1}{2}$$

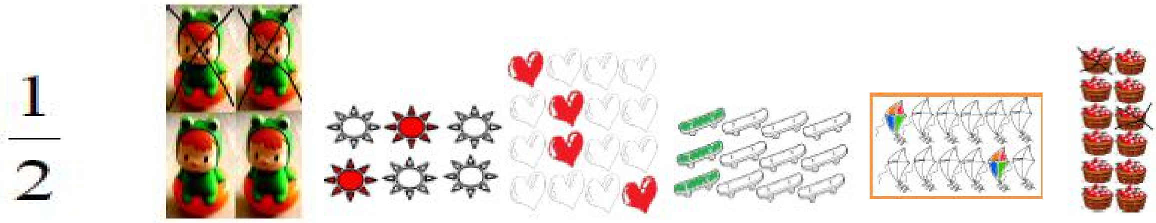
Fonte: Documentos de apresentação do jogo

As representações percentuais podem ser interpretadas segundo o significado de razão ou de operador matemático. A representação 40% pode ser vista como a expressão de uma razão (entre a quantidade de pessoas da população de uma cidade que tem acesso à internet e a população dessa mesma cidade, por exemplo) ou como um operador multiplicativo, na situação em que em um pagamento parcelado o comprador deve pagar de entrada 40% do valor total da compra.

No que diz respeito ao significado operador multiplicativo algumas pesquisas, como a de Moreira e Ferreira (2008), trazem uma crítica à forma como ele é trabalhado, de uma maneira meramente mecânica. Pois ao trabalhar o operador multiplicativo como um conjunto de duas operações (multiplicar e dividir) esse trabalho gera um entrave na compreensão da representação por fração como sendo um único número racional, ou seja, fortalece a ideia de que a representação por fração é composta por dois números separados por algum símbolo.

Quando analisamos uma fração como representante de uma classe de equivalência de números racionais, podemos ver a ideia de razão contida em cada fração equivalente. Ao observar que é equivalente a , observamos que existe uma razão constante de 1 para 2. Algumas representações de frações de quantidades discretas podem ser interpretadas segundo esse significado.

Figura 7 – Exemplo de representações que trazem o significado de razão



Fonte: Documento de descrição do jogo.

Nas representações acima (FIGURA 7), as expressões em língua materna chamadas não são “três sextos”, “dois quartos”, “dois sextos” etc. Espera-se que ao chamar “um meio”, os alunos identifiquem essas representações como equivalentes a um meio. Um dos caminhos para isso é mobilizar o conceito em ação de “frações equivalentes”. Outra possibilidade é questionar quantos conjuntos de três elementos há em um conjunto de seis elementos (o que corresponde ao número racional como expressão de uma medida).

Como se pode perceber, a aprendizagem de números racionais envolve uma pluralidade de significados e de representações simbólicas. Esse tema tem sido tratado no ensino de modo fragmentado. Cada aspecto é abordado individualmente, sem existir um diálogo entre eles. Isso pode provocar ou reforçar dificuldades no ensino e na aprendizagem devido, inclusive, às rupturas necessárias com o conjunto dos números naturais.

As pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem desse campo numérico estão distribuídas em diferentes formatos, focos e perspectivas. As pesquisas que investigam os números racionais, geralmente exploram parte dessas representações, seus significados, as indicações mais propícias a obter êxito no ensino desses números, possíveis motivos dos entraves na aprendizagem desse conceito, a cultura do ensino desse campo numérico no âmbito escolar, a maneira como esse conceito é tratado em livros didáticos e os conhecimentos dos professores sobre esses números e suas representações.

Acerca dos entraves para a aprendizagem desses números, as pesquisas apontam entre outros aspectos para o tratamento individual entre as diferentes representações e o privilégio dado a determinadas representações.

Pesquisas anteriores à nossa, como Bezerra (2001), Silva (2004) e Santos (2010) mostram que nos livros didáticos, geralmente as representações privilegiadas são as fracionárias. Exploram-se sobretudo figuras que representam quantidades contínuas, com predomínio da área das figuras planas.

Silva (2004) faz um estudo exploratório em livros didáticos para observar como as grandezas geométricas eram utilizadas no estudo das frações. Para isso analisou três coleções das séries finais do Ensino Fundamental, buscando como os contextos contínuo e discreto eram utilizados para introdução da noção de fração. Nessa busca encontrou que o contexto contínuo se sobressaía em relação ao discreto embora, segundo Lima (1989), existam indicações de que se deve iniciar o estudo das frações no contexto discreto. Silva (2004) mostra ainda que dentre os contextos de utilização de quantidades contínuas a área de figuras planas predominava.

De acordo com Lima (1989) os estudantes reconhecem a conservação de quantidades discretas antes do reconhecimento de quantidades contínuas. Esse fato aponta para um possível entrave no estabelecimento de relações entre as representações por fração e representações figurativas por meio da área de uma figura plana. Os alunos tendem a fazer a dupla contagem da relação parte-todo desconsiderando a necessidade da igualdade entre as áreas das partes.

Com frequência as representações dos racionais são vistas de forma isolada, o que do nosso ponto de vista favorece o pensamento de que cada representação é um número diferente. Para ampliar a discussão desse foco, trazemos a pesquisa de Santos (2010), que busca os efeitos didáticos de sequência extraída do próprio livro didático utilizado na escola onde a pesquisa foi realizada. Também constatou que a área das figuras planas é predominante para representar o significado parte-todo dos racionais.

Ela traz um esquema com os contextos, significados e representações dos números racionais, em que se apoiou na teoria dos Registros das Representações Semióticas de Raymond Duval, fragmentando as representações em três categorias: linguagem natural, pictórica e simbólica. A linguagem simbólica pode ser numérica (decimal, fracionário ou potência de base 10) ou algébrica. Ela acredita que a variedade de situações pode favorecer a relação entre as diferentes representações dos números racionais e nós concordamos com a ela nesse sentido.

Essa segregação dos significados no ensino dos números racionais pode ser observada nas constatações de Bezerra (2001). Partindo da teoria dos campos conceituais, ele faz uso de uma sequência didática para investigar como crianças de 3ª série do Ensino Fundamental concebem o conceito de fração e suas representações, priorizando o aspecto parte-todo e quociente, visto que em livros didáticos a maioria do tratamento das frações é nesse sentido. Traz em seu trabalho vários aspectos sobre a aprendizagem de frações, inclusive uma breve discussão sobre a representação gráfica feita dos números fracionários, em relação à divisão de uma figura em partes “iguais”. Com esse estudo ele conclui que as crianças compreendem melhor o conceito de número fracionário quando tratado de forma significativa, permitindo sua interação com a situação problema.

A fração como representação de números racionais aparece constantemente no cotidiano escolar, porém a contextualização desses significados e a relação entre diferentes representações precisam ser expandidos para que os estudantes compreendam que o número racional pode ser representado de diversas formas e que não basta converter mecanicamente de número decimal para fração e reciprocamente, nem de fração para porcentagem. É preciso provocar o entendimento de que para cada número racional há infinitas maneiras de representá-lo.

Diante do exposto, nosso interesse se volta para investigar como o Bingo dos Números Racionais pode ajudar a observar como os alunos lidam com as diferentes representações desses números, o que leva a formular os objetivos a seguir.

2.4 Objetivos

2.4.1 Objetivo Geral

Averiguar possibilidades de utilização do jogo Bingo dos Números Racionais como instrumento de diagnóstico dos conhecimentos dos alunos sobre números racionais.

2.4.2 Objetivos Específicos

- Analisar como estudantes de 6º ano, lidam com representações figurativas de números racionais, apoiadas em quantidades contínuas e em quantidades discretas no contexto do jogo Bingo dos Números Racionais;

- Analisar como estudantes de 6º ano, lidam com representações simbólico-numéricas (frações, números decimais e porcentagem) no contexto do jogo Bingo dos Números Racionais;

- Identificar teoremas-em-ação (corretos ou errôneos) mobilizados por estudantes do 6º ano, ao jogar o Bingo dos Números Racionais;

- Verificar se o jogo Bingo dos Números Racionais favorece a identificação de conhecimentos, dificuldades e erros dos alunos na identificação de diferentes representações de números racionais.

3 PERCURSO METODOLÓGICO

Iniciamos nosso percurso metodológico apresentando uma síntese do experimento piloto que realizamos para nos apropriar do jogo, observar a interação dos estudantes com o jogo, testar a forma de registro dos dados e nos dar suporte para aprimorar nossas escolhas metodológicas. Seguidamente fazemos uma análise dos documentos de referência curricular e trazemos a justificativa da escolha dos nossos sujeitos.

Sequencialmente sintetizamos a análise a priori realizada das representações do jogo e a descrição do dispositivo experimental que foi o instrumento de coleta de dados dessa pesquisa.

3.1 O experimento piloto

Visando a melhor forma de atingir nossos objetivos de pesquisa, buscamos por meio de um experimento piloto verificar como se daria a interação dos estudantes com o jogo. Trabalhamos nessa etapa com 18 estudantes do 5º ao 9º do Ensino Fundamental de uma escola particular de um município da Zona da Mata Norte de Pernambuco.

O experimento consistiu na realização de três partidas utilizando o jogo Bingo dos Números Racionais com os estudantes que aceitaram participar do experimento. Os estudantes jogaram em duplas, como sugerido pelos criadores do bingo, para favorecer o diálogo e o levantamento de hipóteses. As partidas foram videogravadas para complementar informações no momento de análise dos dados, embora não tenha sido feita a transcrição completa das mesmas. As duplas recebiam uma cartela a cada partida, sendo as duas primeiras partidas jogadas com cartelas iguais.

O jogo seguiu as etapas previstas: chamada das fichas, marcações nas cartelas e conferência após alguma dupla bater. Os estudantes foram orientados a escrever dentro da “casa” onde marcassem a representação a qual ficha de chamada anunciada pelo chamador, para que pudéssemos saber a relação representação/ficha de chamada que eles estabeleceram. Essa escolha por cartelas consumíveis permitiu eliminar o papel do escriba no experimento sem perder assim o registro escrito.

Das três partidas jogadas, analisamos apenas as duas primeiras, que cada dupla jogou com cartelas iguais. Observamos que os estudantes não identificaram as representações figurativas que faziam referência à porcentagem, alguns não identificaram as representações figurativas de grandeza contínua que não estavam divididas em partes congruentes (porém, de mesma área) e alguns ainda não levaram em conta a necessidade de igualdade entre a área das partes na hora de realizar as marcações (fazendo assim, marcações incorretas).

Observamos também que as fichas que foram sorteadas não permitiram a mobilização das representações que traziam a ideia de equivalência e as possibilidades de distratores numéricos. Os estudantes se mantiveram motivados e trabalhando em equipe durante as partidas, respeitaram as regras e trabalharam com o levantamento e validade de hipóteses durante a conferência.

Alguns dos sujeitos desse experimento piloto estavam no nível de escolaridade para o qual o jogo foi pensado (5º ano do Ensino Fundamental), mas muitos estudantes do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental também participaram. Essa diversidade não acarretou diferença acentuada na forma de lidar com as representações contidas nas cartelas. Ou seja, as dificuldades para lidar com as representações contidas nas cartelas eram parecidas para todas as duplas que estavam jogando.

Ou seja, o jogo parecia desafiador para alunos da segunda etapa do ensino fundamental. Optamos por trabalhar com estudantes de uma mesma turma. Escolhemos assim, trabalhar com uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental, que é um ano posterior aos anos pensados para o jogo pelos seus elaboradores. Adiante trazemos uma análise dos documentos de referência curricular e reforçamos a justificativa para escolha dos nossos sujeitos.

3.2 Os números racionais nos documentos de referência curricular e a escolha dos nossos sujeitos

Nessa seção discutimos o que dizem documentos de referência curricular nacionais e do estado de Pernambuco: os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997; 1998) e os Parâmetros Curriculares de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012) sobre nosso objeto de pesquisa.

Os documentos citados orientam que os números racionais sejam abordados desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, inicialmente de maneira intuitiva e pouco a pouco de maneira mais formal, com alguns aspectos a serem consolidados no Ensino Médio. Deve-se destacar ainda que até o 7º ano trata-se de estudar os números racionais não negativos. A proposta para inserção desse campo numérico é que ela seja feita de forma significativa lançando, por exemplo, situações nas quais os números naturais não sejam suficientes para solucionar certos problemas, o que torna necessária a ampliação dos conjuntos numéricos.

A partir do segundo ciclo (4º e 5º anos), os PCN orientam que os estudantes devem compreender melhor os aspectos envolvidos na medição, pois nesse processo nem sempre o resultado será um número inteiro, “[...] Ou seja, percebem a necessidade de escolher certa “unidade”, de comparar essa unidade com o objeto que estão medindo e de contar o número de vezes que essa unidade foi utilizada (BRASIL, 1997, p. 58)”.

Os documentos também chamam a atenção para a necessidade e possibilidade de contextualização dos números racionais. Orienta-se que essa contextualização seja feita com os aspectos sociais e outras áreas do conhecimento que permitem ampliar e construir novos significados para o campo numérico. Podemos relacionar os números racionais a outras áreas do conhecimento como a música, a biologia, a química e a física, por exemplo.

É com essa contextualização que se torna mais fácil a transição entre o conhecimento que já se tem - números naturais, que são inteiros, para um conhecimento novo, mais amplo - os números racionais, que nem sempre são inteiros. Essa "facilidade" pode ser atribuída às várias formas de representar um número racional e seus diferentes significados, podendo o mesmo número aparecer de diferentes formas de acordo com a situação que estamos vivenciando.

As representações fracionárias e decimais estão presentes na prática social constantemente. É muito comum ouvir falar em metade de uma fruta, um quarto de um comprimento, um terço e por aí vai, a representação fracionária geralmente está associada a alguma grandeza seja ela contínua ou discreta. Ao ir ao mercado, olhar a embalagem de determinados produtos, podemos encontrar facilmente a representação decimal, sendo comum o contato dos estudantes com esse tipo de representação. Partindo dessa observação, afirma-se nos PCPE:

> "É também em seu cotidiano social que o estudante toma contato com as primeiras **leituras e escritas numéricas**. As atividades propostas devem, então, buscar números familiares aos estudantes, nos primeiros anos de escolaridade. [...] essa abordagem articulada com o ambiente social do estudante pode facilitar a interpretação e escrita de outros números, incluindo a **escrita dos números racionais em sua forma decimal** (PERNAMBUCO, 2012, p. 76. Grifo do Autor)".

Bem como as representações citadas anteriormente, frações e decimais, os racionais também podem ser representados como porcentagem podendo esse ser iniciado com valores simples como 10%, 20%, 50% – o que facilita a transição dessa representação para outras como a fração e decimal. Não se fazem nos PCPE maiores comentários sobre a representação por meio de figuras. Catto (2000) destaca que essa compreensão que o mesmo número pode ser representado por diferentes formas e símbolos pode facilitar ou dificultar a resolução de problemas que necessitem a transição entre as representações.

Destaca-se nos PCN que embora as representações fracionárias e decimais sejam desenvolvidas nos ciclos iniciais, percebe-se que os estudantes chegam ao terceiro ciclo sem compreender os diferentes significados associados ao número racional. Esse documento destaca ainda possíveis dificuldades de aprendizagem dos números racionais, relacionadas à ruptura entre os números naturais e os números racionais, como detalhamos a seguir.

Como se sabe, ao utilizar o sistema de numeração decimal há uma única possibilidade de representação dos números inteiros e infinitas representações diferentes para um mesmo número racional, como exemplo, as frações equivalentes e as representações em números decimais. Além das diferentes representações numéricas para os números racionais existem ainda diversas formas de representá-los por meio de figuras.

Na comparação entre números racionais utilizam-se regras diferentes daquelas usadas na comparação dos números naturais. Ao comparar frações com denominadores iguais parece não haver contradição. Por exemplo, para uma criança que sabe que 4 é maior que 3 não há maior dificuldade em compreender que é maior que . Entretanto, no caso da comparação de frações com numeradores iguais, por exemplo, e parece contraditório com o que sabe sobre os números naturais, dizer que é maior que .

Ainda sobre a comparação de números racionais, no caso da escrita decimal, é difícil para os estudantes aceitar que 1,0006 é menor que 1,5. Uma das razões para essa dificuldade é que, no contexto dos números naturais quanto maior a quantidade de ordens que o número possui, maior é esse número e esse é um teorema-em-ação que não leva a solução correta no âmbito da representação decimal de números racionais.

Outro pensamento que se apoia nos conhecimentos sobre números naturais e que pode gerar dificuldades na compreensão dos números racionais é a ideia de que em uma multiplicação o produto é sempre um número maior que os fatores. Essa propriedade se verifica no contexto dos números naturais. Contudo, no conjunto dos números racionais esse teorema não é válido, visto, por exemplo, que se multiplicamos 100 por 0,5 o resultado da multiplicação será 50.

Outro aspecto problemático na passagem entre os números naturais e os racionais é a impossibilidade de definir sucessor e antecessor dos números racionais. Como se sabe, entre dois números naturais não existe nenhum outro número natural, o que permite definir antecessor e sucessor de cada número (exceto o zero). Já no conjunto dos números racionais, quaisquer que sejam dois números racionais, é possível encontrar outro número racional entre eles. Na verdade, entre dois números racionais existem infinitos outros números racionais e por isso não é possível definir antecessor e sucessor de um número racional.

Nosso trabalho busca identificar o conhecimento dos estudantes e como eles lidam com as diferentes representações, usando para tanto um jogo foi elaborado para ser utilizado no segundo ciclo do ensino fundamental (4º e 5º anos). Por outro lado, os documentos de orientação curricular argumentam que, os estudantes passam por esse ciclo ainda com dúvidas sobre os números racionais. Por isso, decidimos realizar o experimento com estudantes do 6º ano, para identificar possíveis lacunas na aprendizagem desses números e suas representações.

Para a escolha desse nível de escolaridade levamos em consideração que os estudantes provavelmente já tiveram momentos de estudo formal dos números racionais nas diferentes representações contidas no bingo.

E tendo os estudantes concluído os anos escolares pensados como apropriado para o jogo, pudemos coletar mais elementos a incorporar no nosso corpus de dados para análise.

Escolhemos organizar os alunos em duplas, a fim de favorecer uma discussão sobre as marcações e tornar possível o acesso ao percurso traçado pelos estudantes para chegar à marcação de determinada representação, facilitando assim a identificação de teoremas-em-ação presentes no momento que alguns conhecimentos precisam ser mobilizados.

3.3 Apresentação e análise a priori das cartelas e das fichas de chamada

Apresentamos nessa seção a configuração de cada tipo de cartela do jogo, trazendo o mapeamento dos tipos de cartelas e um exemplo de cada um. Trazemos também uma análise das representações utilizadas para compor as cartelas do jogo.

3.1.1 Configuração das cartelas do jogo

Como já foi dito na apresentação do jogo, as cartelas são formadas por nove representações dispostas em três linhas e três colunas. Dessas representações pelo menos quatro são figurativas (duas de quantidades contínuas e duas de quantidades discretas), quatro são simbólico-numéricas (um decimal com uma casa, um decimal com duas casas, uma fração irredutível e uma expressão de porcentagem) e uma representação é um distrator (pode ser figurativa ou numérica, mas sempre corresponde a algum erro habitual na aprendizagem de números racionais). Para localização das representações nas cartelas utilizaremos uma notação similar à notação de matrizes indicando a linha e a coluna à qual cada representação pertence na cartela, como exemplificado a seguir (QUADRO 1).

Quadro 1 – Notação para localização das representações nas cartelas

Fonte: Elaborado pela autora.

Fizemos um mapeamento de todas as cartelas, trazendo um paralelo entre as fichas chamadas e a representação correspondente em cada cartela. Para não deixar o texto cansativo[8] traremos aqui apenas o quadro com a configuração de cada tipo de cartela e ilustraremos com uma cartela mapeada de cada tipo.

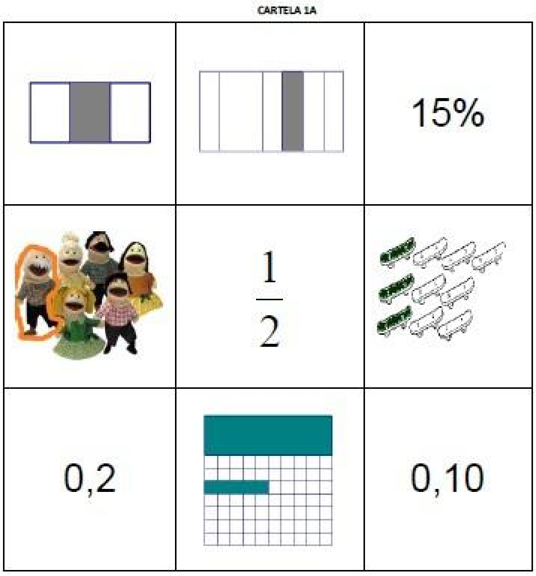
Quadro 2 – Formato da distribuição das representações nas Cartelas do Tipo 1

Representação Figurativa de Grandeza Contínua	**Representação Figurativa de Grandeza Contínua (DISTRATOR)**	**Representação Simbólico-Numérica em Forma de Porcentagem**
Representação Figurativa de Grandeza Discreta	**Representação Simbólico-Numérica Fração Irredutível**	**Representação Figurativa de Grandeza Discreta**
Representação Simbólico-Numérica Decimal com Uma Casa	**Representação Figurativa de Grandeza Contínua**	**Representação Simbólico-Numérica Decimal com Duas Casas**

Fonte: Elaborado pela autora com base nos documentos de descrição do jogo

[8] O mapeamento de todas as cartelas pode ser encontrado no APÊNDICE A dessa dissertação.

Figura 8 – Cartela 1A e seu mapeamento



UM TERÇO (Representação Figurativa de Grandeza Contínua)	**UM SÉTIMO** (Representação Figurativa de grandeza Contínua. Distrator, não consta nas fichas de chamada)	**QUINZE POR CENTO** (Representação Simbólico-Numérica em Forma de Porcentagem)
UM SEXTO (Representação Figurativa de Grandeza Discreta)	**UM MEIO** (Representação Simbólico-Numérica Fração Irredutível)	**TRÊS DÉCIMOS** (Representação Figurativa de Grandeza Discreta)
DOIS DÉCIMOS (Representação Simbólico-Numérica Decimal com Uma Casa)	**TRINTA E CINCO POR CENTO** (Representação Figurativa de Grandeza Contínua)	**DEZ CENTÉSIMOS** (Representação Simbólico- Numérica Decimal com Duas Casas)

Fonte: Ampliado de: Projeto Rede: Jogos na Educação Matemática, 2011.

No exemplo da figura anterior (FIGURA 8), há cinco representações figurativas (das quais três de quantidades contínuas e duas de quantidades discretas) e quatro representações simbólico-numéricas (uma em porcentagem, uma em fração e duas decimais).

O distrator nesse caso é uma figura, na qual um retângulo está dividido em seis partes, mas uma das partes não tem mesma área que as demais. Pretende-se observar, com esse distrator, se alguns alunos consideram na interpretação dessa representação que basta contar a quantidade de partes pintadas e a quantidade total de partes, desconsiderando a necessidade de que as partes da figura tenham mesma área. Um estudante que marcar essa representação como correspondente ao número racional “um sexto” podemos interpretar que está mobilizando o teorema-em-ação errôneo segundo o qual “Se uma figura está dividida em n partes e m delas estão pintadas então pode-se dizer que é uma representação da fração ”. Como o exemplo desse distrator ilustra, nem sempre essa propriedade é verdadeira (a figura está dividida em seis partes, uma delas está pintada, mas a área dessa parte pintada corresponde a da área total do retângulo, pois uma das partes tem o dobro da área das demais partes). Nessa mesma cartela, o item R_{11} é um caso em que o emprego do teorema-em-ação anterior levaria a uma resposta certa (a figura está dividida em três partes, uma delas está pintada e trata-se de uma representação de).

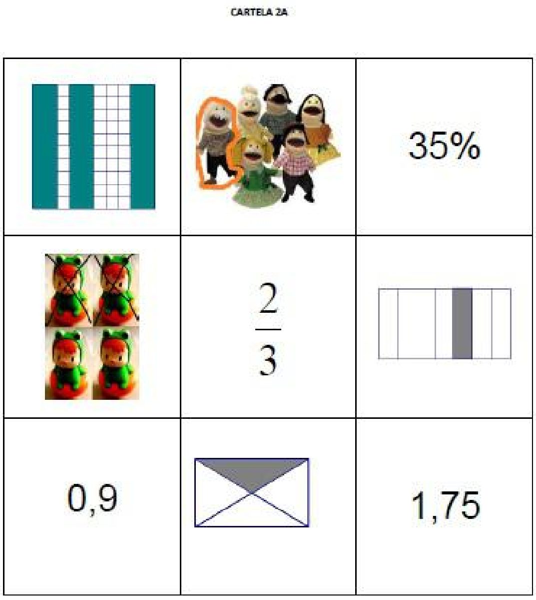
Chama-se a atenção também para uma representação pouco usual de porcentagem, utilizando figuras. Na posição R_{32} da cartela, temos um quadrado, subdividido em cem quadradinhos congruentes, dos quais são pintados 35. No jogo, pretende-se observar se os alunos identificam que essa figura é uma maneira legítima de representar 35%.

Quadro 3 – Formato da distribuição das representações nas Cartelas do Tipo 2

Representação Figurativa de Grandeza Contínua	**Representação Figurativa de Grandeza Discreta**	**Representação Simbólico-Numérica em Forma de Porcentagem**
Representação Figurativa de Grandeza Discreta	**Representação Simbólico-Numérica Fração Irredutível**	**Representação Figurativa de Grandeza Contínua. Distrator, não consta nas fichas de chamada**
Representação Simbólico-Numérica Decimal com Uma Casa	**Representação Figurativa de Grandeza Contínua**	**Representação Simbólico- Numérica Decimal com Duas Casas**

Fonte: Elaborado pela autora com base nos documentos de descrição do jogo

Figura 9 – Cartela 2A e seu mapeamento



SESSENTA POR CENTO (Representação Figurativa de Grandeza Contínua)	**UM SEXTO** (Representação Figurativa de Grandeza Discreta)	**TRINTA E CINCO POR CENTO** (Representação Simbólico-Numérica em Forma de Porcentagem)
UM MEIO (Representação Figurativa de Grandeza Discreta)	**DOIS TERÇOS** (Representação Simbólico-Numérica Fração Irredutível)	**UM SÉTIMO** (Representação Figurativa de Grandeza Contínua. Distrator, não consta nas fichas de chamada)
NOVE DÉCIMOS (Representação Simbólico- Numérica Decimal com Uma Casa)	**UM QUARTO** (Representação Figurativa de Grandeza Contínua)	**UM INTEIRO E SETENTA E CINCO CENTÉSIMOS** (Representação Simbólico- Numérica Decimal com Duas Casas)

Fonte: Ampliado de Projeto Rede: Jogos na Educação Matemática, 2011.

Na figura anterior (FIGURA 9), destacamos alguns aspectos. A marcação da representação figurativa de quantidade discreta na posição R_{21} como correspondente a um meio pode se amparar no reconhecimento de que há dois grupos, de dois bonecos cada, na coleção de quatro bonecos (ou seja, mobilizar o significado de medida) ou utilizar implicitamente frações equivalentes (como há quatro bonecos e dois estão riscados, a fração seria “dois quartos” e “dois quartos” é equivalente a “um meio”).

O reconhecimento da representação figurativa de quantidade contínua da posição R_{32} traz um componente sutil: o retângulo está dividido em quatro partes de mesma área, mas essas partes não são iguais. Assim, se o aluno pensar que para representar uma fração a figura precisa estar dividida em partes iguais, poderá incorretamente não identificar essa representação como correspondente a um quarto. Em contrapartida, o aluno ao realizar a marcação dessa representação pode estar apoiado em um conhecimento em ação incorreto (se considerar que basta contar a quantidade total de partes e a quantidade de partes pintadas, sem levar em conta se as partes têm ou não mesma área) ou em um conhecimento em ação correto (baseado no significado parte-todo e no fato de as partes terem mesma área).

Podem-se formular os seguintes teoremas-em-ação correspondentes aos três casos supracitados:

TA_{DCC} (dupla contagem): “Se uma figura está dividida em n partes e m delas estão pintadas então pode-se dizer que é uma representação da fração ”.

TA_{PI} (partes iguais): “Para que uma figura represente a fração é preciso que esteja dividida em n partes iguais e m dessas partes estejam pintadas”.

TA_{MA} (partes de mesma área): “Se uma figura está dividida em n partes de áreas iguais duas a duas e m dessas partes estão pintadas então pode-se dizer que essa figura representa a fração ”.

Como já foi dito, desses três teoremas-em-ação, apenas TA_{MA} é correto, embora em alguns casos TA_{DC} e TA_{PI} conduzam a respostas corretas.

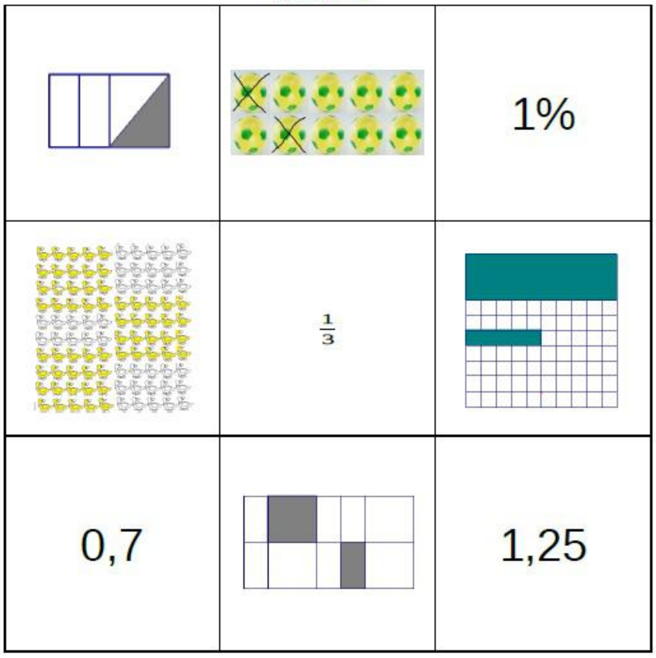
Quadro 4 – Formato da distribuição das representações nas Cartelas do Tipo 3

Representação Figurativa de Grandeza Contínua	**Representação Figurativa de Grandeza Discreta**	**Representação Simbólico-Numérica em Forma de Porcentagem)**
Representação Figurativa de Grandeza Discreta	**Representação Simbólico-Numérica Fração Irredutível**	**Representação Figurativa de Grandeza Contínua**
Representação Simbólico-Numérica Decimal com Uma Casa	**Representação Figurativa de grandeza Contínua. Distrator, não consta nas fichas de chamada**	**Representação Simbólico- Numérica Decimal com Duas Casas**

Fonte: Elaborado pela autora com base nos documentos de descrição do jogo

Figura 10 – Cartela 3A e seu mapeamento

CARTELA 3A



UM QUARTO (Representação Figurativa de Grandeza Contínua)	DOIS DÉCIMOS (Representação Figurativa de Grandeza Discreta)	UM POR CENTO (Representação Simbólico-Numérica em Forma de Porcentagem)
SESSENTA POR CENTO (Representação Figurativa de Grandeza Discreta)	UM TERÇO (Representação Simbólico-Numérica Fração Irredutível)	TRINTA E CINCO POR CENTO (Representação Figurativa de Grandeza Contínua)
SETE DÉCIMOS (Representação Simbólico- Numérica Decimal com Uma Casa)	TRÊS CATORSE AVOS (Representação Figurativa de grandeza Contínua. Distrator, não consta nas fichas de chamada)	UM INTEIRO E VINTE E CINCO CENTÉSIMOS (Representação Simbólico- Numérica Decimal com Duas Casas)

Fonte: Ampliado de: Projeto Rede: Jogos na Educação Matemática, 2011.

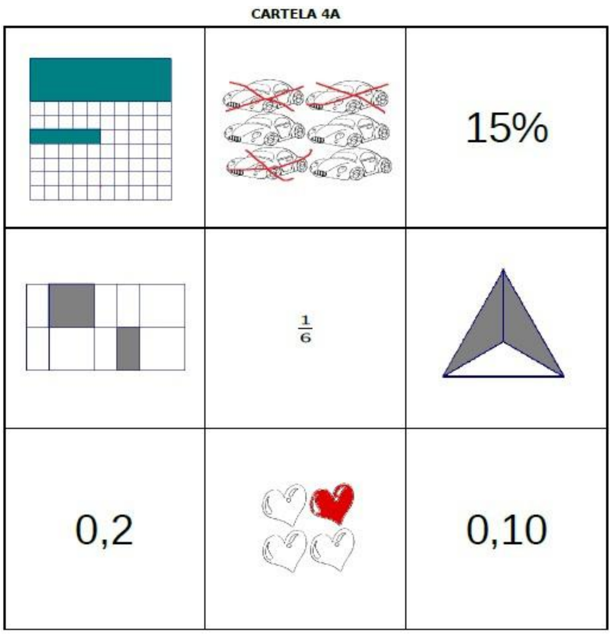
Da figura acima (FIGURA 10), destacamos a representação figurativa de quantidade discreta situada em R_{21} que corresponde a uma ficha de chamada em linguagem natural que remete a um percentual. O distrator dessa cartela é uma representação figurativa de quantidade contínua, na qual as partes não têm áreas iguais. Ainda nessa cartela, na posição R_{11} há um caso em que a figura está dividida em partes de mesma área, mas não idênticas.

Quadro 5 – Formato da distribuição das representações nas Cartelas do Tipo 4

Representação Figurativa de Grandeza Contínua	**Representação Figurativa de Grandeza Discreta**	**Representação Simbólico-Numérica em Forma de Porcentagem**
Representação Figurativa de grandeza Contínua. Distrator, não consta nas fichas de chamada	**Representação Simbólico-Numérica Fração Irredutível**	**Representação Figurativa de Grandeza Contínua**
Representação Simbólico-Numérica Decimal com Uma Casa	**Representação Figurativa de Grandeza Discreta**	**Representação Simbólico-Numérica Decimal com Duas Casas**

Fonte: Elaborado pela autora com base nos documentos de descrição do jogo

Figura 11 – Cartela 4A e seu mapeamento



TRINTA E CINCO POR CENTO (Representação Figurativa de Grandeza Contínua)	**UM MEIO** (Representação Figurativa de Grandeza Discreta)	**QUINZE POR CENTO** (Representação Simbólico-Numérica em Forma de Porcentagem)
TRÊS CATORZE AVOS (Representação Figurativa de grandeza Contínua. Distrator, não consta nas fichas de chamada)	**UM SEXTO** (Representação Simbólico-Numérica Fração Irredutível)	**DOIS TERÇOS** (Representação Figurativa de Grandeza Contínua)
DOIS DÉCIMOS (Representação Simbólico- Numérica Decimal com Uma Casa))	**UM QUARTO** (Representação Figurativa de Grandeza Discreta)	**DEZ CENTÉSIMOS** (Representação Simbólico- Numérica Decimal com Duas Casas)

Fonte: Ampliado de: Projeto Rede: Jogos na Educação Matemática, 2011.

Na cartela anterior (FIGURA 11), observa-se que a representação figurativa de quantidades contínuas na posição R_{23} rompe com as representações mais familiares em que a figura é um retângulo ou um círculo. Trata-se de um triângulo equilátero dividido em três triângulos idênticos.

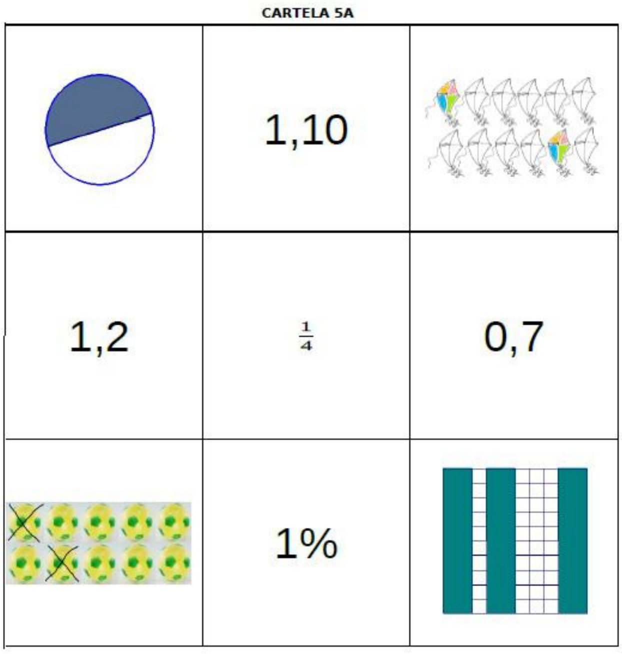
Em experimentos assistemáticos com estudantes da licenciatura, foi levantada a hipótese que os estudantes poderiam compreender a representação R_{23} como a vista superior de um tetraedro, optamos por mantê-las para verificar se realmente aconteceria, visto que no experimento piloto tão interpretação não foi feita pelos estudantes.

Quadro 6 – Formato da distribuição das representações nas Cartelas do Tipo 5

Representação Figurativa de Grandeza Contínua	**Representação Simbólico-Numérica Decimal com Duas Casas**	**Representação Figurativa de Grandeza Discreta**
Representação Simbólico-Numérica. Distrator, não consta nas fichas de chamada	**Representação Simbólico-Numérica Fração Irredutível**	**Representação Simbólico-Numérica Decimal com Uma Casa**
Representação Figurativa de Grandeza Discreta	**Representação Simbólico-Numérica em Forma de Porcentagem**	**Representação Figurativa de Grandeza Contínua**

Fonte: Elaborado pela autora com base nos documentos de descrição do jogo

Figura 12– Cartela 5A e seu mapeamento



UM MEIO (Representação Figurativa de Grandeza Contínua)	**UM INTEIRO E DEZ CENTÉSIMOS** (Representação Simbólico- Numérica Decimal com Duas Casas)	**UM SEXTO** (Representação Figurativa de Grandeza Discreta)
UM INTEIRO E DOIS DÉCIMOS (Representação Simbólico-Numérica. Distrator, não consta nas fichas de chamada)	**UM QUARTO** (Representação Simbólico-Numérica Fração Irredutível)	**SETE DÉCIMOS** (Representação Simbólico- Numérica Decimal com Uma Casa)
DOIS DÉCIMOS (Representação Figurativa de Grandeza Discreta)	**UM POR CENTO** (Representação Simbólico-Numérica em Forma de Porcentagem)	**SESSENTA POR CENTO** (Representação Figurativa de Grandeza Contínua)

Fonte: Ampliado de: Projeto Rede: Jogos na Educação Matemática, 2011.

Com o distrator da cartela anterior (FIGURA 12), situado na posição R_{21} pretende-se observar se alguns alunos consideram que 1,2 representa um meio, ou seja, que em uma representação decimal pode-se pensar que o número que vem antes da vírgula é o numerador e o que vem depois da vírgula é o denominador. Pode-se formular como teorema em ação falso:

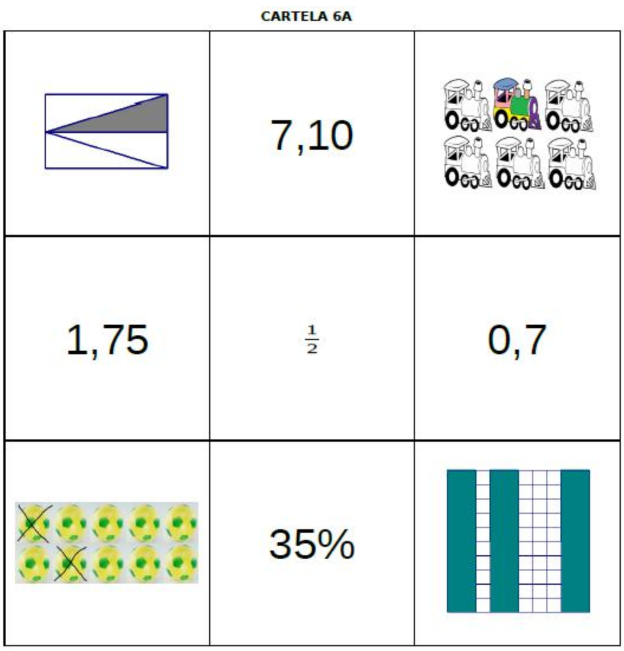
TA_{DND} (decimal numerador, denominador): A representação decimal *m,n* corresponde ao mesmo número que a representação fracionária , onde m é um número natural e n é um número natural diferente de zero.

Quadro 7 – Formato da distribuição das representações nas Cartelas do Tipo 6

Representação Figurativa de Grandeza Contínua	**Representação Simbólico-Numérica. Distrator, não consta nas fichas de chamada**	**Representação Figurativa de Grandeza Discreta**
Representação Simbólico-Numérica Decimal com Duas Casa	**Representação Simbólico-Numérica Fração Irredutível**	**Representação Simbólico-Numérica Decimal com Uma Casa**
Representação Figurativa de Grandeza Discreta	**Representação Simbólico-Numérica em Forma de Porcentagem**	**Representação Figurativa de Grandeza Contínua**

Fonte: Elaborado pela autora com base nos documentos de descrição do jogo.

Figura 13– Cartela 6A e seu mapeamento



UM QUARTO (Representação Figurativa de Grandeza Contínua)	SETE INTEIROS E DEZ CENTÉSIMOS (Representação Simbólico-Numérica. Distrator, não consta nas fichas de chamada)	UM SEXTO (Representação Figurativa de Grandeza Discreta)
UM INTEIRO E SETENTA E CINCO CENTÉSIMOS (Representação Simbólico- Numérica Decimal com Duas Casa)	UM MEIO (Representação Simbólico-Numérica Fração Irredutível)	SETE DÉCIMOS (Representação Simbólico- Numérica Decimal com Uma Casa)
DOIS DÉCIMOS (Representação Figurativa de Grandeza Discreta)	TRINTA E CINCO POR CENTO (Representação Simbólico-Numérica em Forma de Porcentagem)	SESSENTA POR CENTO (Representação Figurativa de Grandeza Contínua)

Fonte: Ampliado de: Projeto Rede: Jogos na Educação Matemática, 2011

O item R_{11} da cartela (FIGURA 13) traz mais uma representação figurativa de quantidades contínuas pouco usual, embora a figura esteja dividida em quatro partes idênticas.

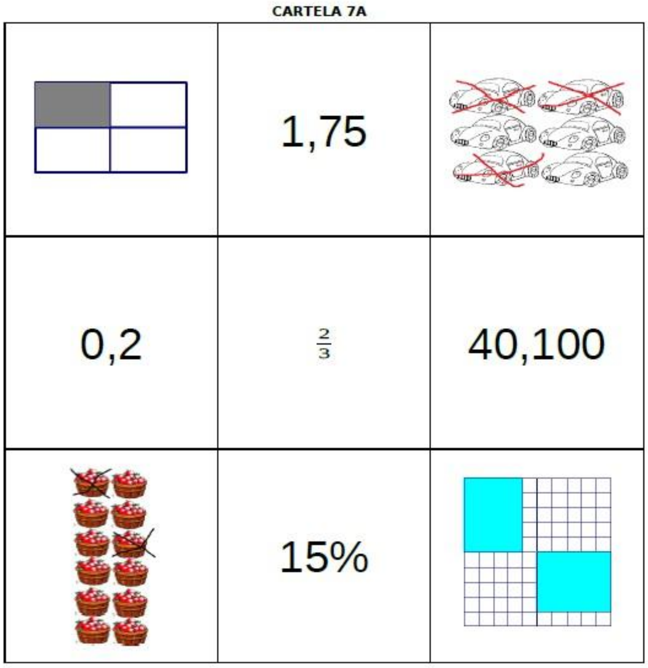
O distrator também corresponde a um erro segundo o qual na representação decimal o número antes da vírgula corresponde ao numerador e o número depois da vírgula corresponde ao denominador. Se o aluno mobilizar o teorema-em-ação errôneo TA_{DND} (decimal numerador, denominador) poderá marcar 7,10 como representação de "sete décimos".

Quadro 8 – Formato da distribuição das representações nas Cartelas do Tipo 7

Representação Figurativa de Grandeza Contínua	**Representação Simbólica-Numérico Decimal com Duas Casas**	**Representação Figurativa de Grandeza Discreta**
Representação Simbólica-Numérico Decimal com Uma Casa	**Representação Simbólica-Numérico Fração Unitária**	**Representação Simbólica-Numérico. Distrator, não consta nas fichas de chamada**
Representação Figurativa de Grandeza discreta	**Representação Simbólica-Numérico em Forma de Porcentagem**	**Representação Figurativa de Grandeza Contínua**

Fonte: Elaborado pela autora com base nos documentos de descrição do jogo.

Figura 14– Cartela 7A e seu mapeamento



UM QUARTO (Representação Figurativa de Grandeza Contínua)	**UM INTEIRO E SETENTA E CINCO CENTÉSIMOS** (Representação Simbólico- Numérica Decimal com Duas Casas)	**UM MEIO** (Representação Figurativa de Grandeza Discreta)
DOIS DÉCIMOS (Representação Simbólico- Numérica Decimal com Uma Casa)	**DOIS TERÇOS** (Representação Simbólico-Numérica Fração Unitária)	**QUARENTA INTEIROS E CEM MILÉSIMOS** (Representação Simbólico-Numérica. Distrator, não consta nas fichas de chamada)
UM SEXTO (Representação Figurativa de Grandeza discreta)	**QUINZE POR CENTO** (Representação Simbólico-Numérica em Forma de Porcentagem)	**QUARENTA POR CENTO** (Representação Figurativa de Grandeza Contínua)

Fonte: Ampliado de: Projeto Rede: Jogos na Educação Matemática, 2011.

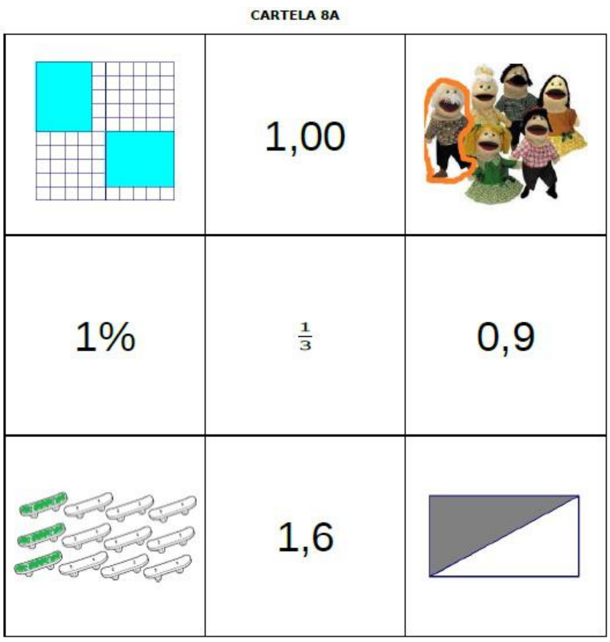
Na figura anterior (FIGURA 14) temos um exemplo de cartela que possui quatro representações figurativas (duas de quantidade discreta e duas de quantidade contínua) e cinco representações numéricas. O distrator dessa cartela R_{23}, pensado para ficha de chamada quarenta por cento corresponde à possibilidade de erro no qual a porcentagem, expressa como uma fração decimal de denominador cem é combinada com a mobilização do teorema-em-ação errôneo TA_{DND} ou seja, considera-se o número antes da vírgula como numerador e o número depois da vírgula como denominador.

Quadro 9– Formato da distribuição das representações nas Cartelas do Tipo 8

Representação Figurativa de Grandeza Contínua	**Representação Simbólica-Numérico Decimal com Duas Casas**	**Representação Figurativa de Grandeza Discreta**
Representação Simbólica-Numérico em Forma de Porcentagem	**Simbólica-Numérico Fração Irredutível**	**Representação Simbólica-Numérico Decimal com Uma Casa**
Representação Figurativa de Grandeza Discreta	**Representação Simbólica-Numérico. Distrator, não consta nas fichas de chamada**	**Representação Figurativa de Grandeza Contínua**

Fonte: Elaborado pela autora com base nos documentos de descrição do jogo.

Figura 15 – Cartela 8A e seu mapeamento



QUARENTA POR CENTO (Representação Figurativa de Grandeza Contínua)	UM (Representação Simbólico- Numérico Decimal com Duas Casas)	UM SEXTO (Representação Figurativa de Grandeza Discreta)
UM POR CENTO (Representação Simbólico-Numérico em Forma de Porcentagem)	UM TERÇO (Representação Simbólico-Numérico Fração Irredutível)	NOVE DÉCIMOS (Representação Simbólico- Numérico Decimal com Uma Casa)
UM QUARTO (Representação Figurativa de Grandeza Discreta)	UM INTEIRO E SEIS DÉCIMOS (Representação Simbólico-Numérico. Distrator, não consta nas fichas de chamada)	UM MEIO (Representação Figurativa de Grandeza Contínua)

Fonte: Ampliado de: Projeto Rede: Jogos na Educação Matemática, 2011.

A cartela anterior (FIGURA 15) é composta por quatro representações figurativas e cinco representações numéricas. A representação R_{32}, distrator pensado para um sexto, refere-se a um erro que consiste em considerar o número antes da vírgula como numerador e o número depois da vírgula como denominador, possivelmente mobilizando o teorema-em-ação TA_{DND}. O item na posição R_{31} é uma representação que faz referência à ideia de equivalência e não pode ser identificada nas fichas de chamada apenas contando as partes pintadas e o total de partes.

A tipologia das cartelas foi pensada para que mudando a ordem dos elementos e os tipos de representações fosse preservado aproximadamente o grau de dificuldade das cartelas. Por isso, o distrator nunca é disposto numa diagonal, as representações numéricas fracionárias ficaram sempre no centro da cartela por se pressupor que são de mais fácil identificação, entre outros critérios explicitados pelos criadores do jogo.

3.1.2 Análise a Priori das Cartelas e Levantamento dos Conhecimentos Necessários

Ao analisar as representações que formavam as cartelas encontramos 13 tipos de representações diferentes (entre representações corretas e distratores) utilizadas para compor as cartelas do jogo. Cada tipo de representação mobiliza conhecimentos específicos acerca do conceito de número racional. Como dito anteriormente na fundamentação teórica, o conceito de número racional aparece fortemente relacionado a dois campos conceituais o das grandezas e medidas e o das estruturas multiplicativas. Conhecimentos próprios desses dois campos conceituais podem ou precisam ser mobilizados na identificação de cada tipo de representação que compõe o bingo.

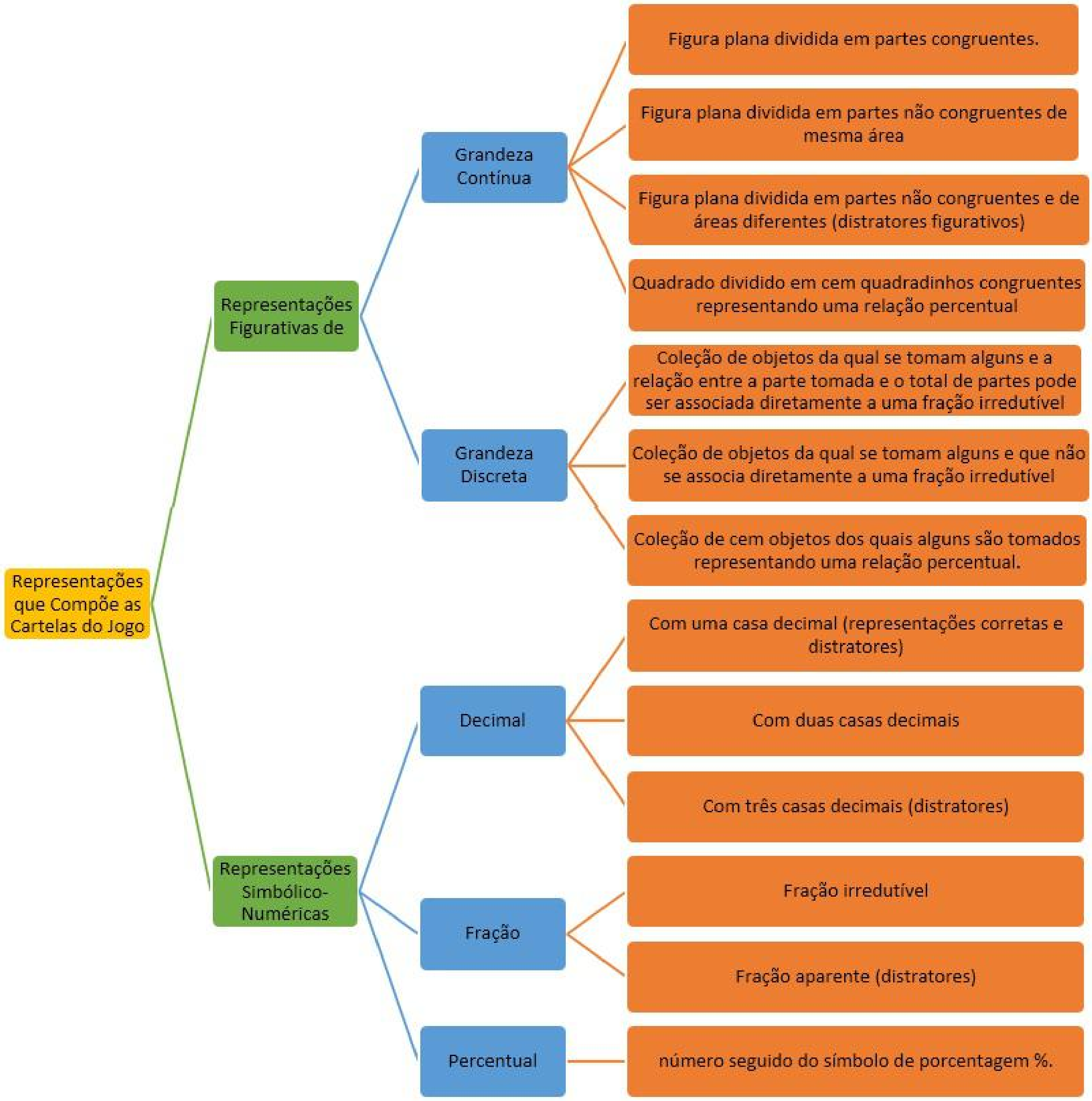
Em nossa análise a priori elencamos conhecimentos subjacentes à identificação de cada um desses tipos de representações. As representações nas cartelas aparecem de duas formas, figurativas e simbólico-numéricas. As representações figurativas aparecem em dois grupos (de grandeza contínua e de grandeza discreta) e as representações simbólico-numéricas aparecem em três grupos (decimal, fração e percentual).

Dividimos cada grupo de representações por tipos, exceto o grupo das representações simbólico-numéricas percentual que só aparece de um tipo (número + símbolo de porcentagem, %). As representações figurativas de grandeza contínua foram divididas em quatro tipos, área de figura plana dividida em partes congruentes, área de figura plana dividida em partes não congruentes de mesma área, área de figura plana dividida em partes não congruentes e de áreas diferentes (distratores figurativos) e área de um quadrado dividido em cem quadradinhos congruentes representando uma relação percentual.

As representações figurativas de grandeza discreta foram divididas em três tipos: coleção de objetos da qual se tomam alguns e a relação parte tomada/total de partes pode ser associada diretamente a uma fração irredutível, coleção de objetos da qual se tomam alguns e a associação a uma fração irredutível pode ser feita através da mobilização do conceito-em-ação de frações equivalentes e coleção de cem objetos dos quais alguns são tomados representando uma relação percentual.

As representações simbólica-numéricas decimais aparecem em três tipos, número decimal com uma casa decimal (representações corretas e distratores), número decimal com duas casas decimais e número decimal com três casas decimais (distratores). As representações por fração aparecem de dois tipos, fração irredutível e fração aparente (distratores).

Figura 16– Esquema com os tipos de representação mapeadas nas cartelas do jogo



Fonte: Elaborada pela autora.

No entanto percebemos que não há uma regularidade na distribuição dos tipos de representações, nem nas cartelas, nem nas representações correspondentes às fichas de chamada. Dessa forma, sentimos a necessidade de fazer um mapeamento das cartelas (APÊNDICE A), quanto ao tipo de representação e à ficha de chamada correspondente e um agrupamento das fichas de chamadas e suas respectivas representações, tipos de representações e conhecimentos que cada uma mobilizava. Esse mapeamento foi feito para nos dar um suporte na escolha das cartelas que seriam utilizadas no dispositivo experimental.

Na análise das representações por ficha de chamada, percebemos que das 20 fichas existentes dez possuem distratores. Destas, seis possuem mais de um, podendo ter até três tipos de representações diferentes para distratores de uma única ficha de chamada. Ao todo temos vinte representações diferentes para os distratores.

Durante a análise a priori, sentimos falta de alguns tipos de representações, como representações de grandezas contínuas que mobilizasse conhecimentos sobre frações equivalentes, por exemplo. Outro exemplo seria o distrator para um meio, por meio de uma representação de grandeza contínua dividida em partes não congruentes que mobilizasse o conceito de unidade de medida e a representação por grandeza contínua de três décimos.

3.2 O Dispositivo Experimental

Fazemos agora uma apresentação do dispositivo experimental, expomos nossas justificativas para as escolhas metodológicas e as condições da coleta de dados.

3.2.1 Descrição do campo de pesquisa e construção do experimento

Nosso dispositivo experimental para coleta de dados consistiu em uma situação de jogo com o Bingo dos Racionais, com a finalidade de observar como os estudantes fazem a identificação de diferentes representações de um mesmo número racional. Como se sabe os sujeitos da nossa pesquisa foram estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental.

O experimento foi composto por duas etapas, a primeira com partidas do jogo e a segunda etapa com a realização de entrevistas com os estudantes. As entrevistas surgiram como uma necessidade de complementar os dados coletados e sua elaboração foi feita com base na análise dos dados obtidos enquanto os estudantes jogavam partidas do bingo. O detalhamento, apresentação e justificativa da escolha das questões para entrevista serão trazidas mais adiante, uma vez que parte das escolhas apoiam-se na análise dos resultados da vivência do jogo.

Na primeira etapa os estudantes foram divididos em dois grupos e jogaram em duplas, essa divisão foi feita buscando otimizar a utilização dos recursos tecnológicos e garantir o registro integral do experimento. Cada dupla recebeu uma pasta com as cartelas que iriam jogar as quatro rodadas e deveriam marcar as representações correspondentes às fichas chamadas e escrever em cada marcação a ficha correspondente. As cartelas foram impressas em folhas de A4 e foram consumíveis, isto é, a cada nova rodada as cartelas eram substituídas. A escolha por cartelas consumíveis foi feita para garantir nosso acesso à correspondência ficha de chamada/representação em cada marcação. Cada dupla participou de quatro rodadas videogravadas.

Na análise a priori das cartelas e das fichas de chamada, como já dissemos, percebemos a irregularidade na distribuição das representações. Devido a essa observação foi necessário fazer uma análise criteriosa de quais cartelas seriam inseridas no dispositivo de coleta e quais fichas de chamada seriam prioritariamente chamadas em cada rodada. Tomamos esse cuidado para possibilitar a mobilização de todos os tipos de representações elencadas e o mapeamento das possibilidades de marcação com as cartelas e fichas escolhidas.

A turma de 6º ano que participou do nosso experimento é composta por 16 alunos, dos quais 13 participaram do nosso experimento, pois três faltaram a aula nesse dia. Os treze estudantes presentes foram divididos em dois grupos, o primeiro com oito estudantes e o segundo com cinco. Para completar o segundo grupo convidamos um estudante que participou do primeiro grupo a jogar, ficamos então com dois grupos um com oito estudantes (04 duplas) e um com seis estudantes (03 duplas).

Cada dupla recebeu a pasta com as cartelas que iriam utilizar, as regras do jogo foram explicitadas e foi combinado com os estudantes que no momento da conferência do jogo eles deveriam chegar a um consenso na avaliação das marcações em certas ou erradas, para validarem ou não a vitória da dupla que primeiro anunciasse ter batido o jogo, sem nossa interferência nas rodadas 1 e 2 e que nós poderíamos ser consultados sobre as decisões tomadas apenas nas rodadas 3 e 4.

4 ANÁLISE DOS DADOS E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Para uma visão global do que as rodadas (partidas) jogadas com o bingo nos indicam, fizemos uma análise das representações que foram ou poderiam ter sido mobilizadas. As análises buscaram inferir quais conhecimentos foram mobilizados nas marcações e quais conhecimentos não foram mobilizados nas não marcações de números chamados e presentes nas cartelas.

Ao realizarmos uma discussão sobre os conhecimentos (adequados ou não) e possíveis dificuldades na identificação de números racionais ao jogar as partidas do Bingo dos Números Racionas, vamos trazer um mapeamento por tipo de representação, analisando três possibilidades: o número chamado consta na cartela e as duplas marcaram corretamente; o número chamado consta na cartela, mas as duplas não marcam (não associam a expressão em linguagem natural com a representação figurativa ou simbólico-numérica) ou ainda as duplas fazem uma marcação que não corresponde ao número chamado (marcam um distrator ou fazem uma associação inadequada entre uma ficha de chamada e um item da cartela). São consideradas, de maneira global as marcações realizadas por todas as duplas, ao longo das quatro partidas jogadas.

4.1 Mapeamento das representações mobilizadas durante as partidas jogadas

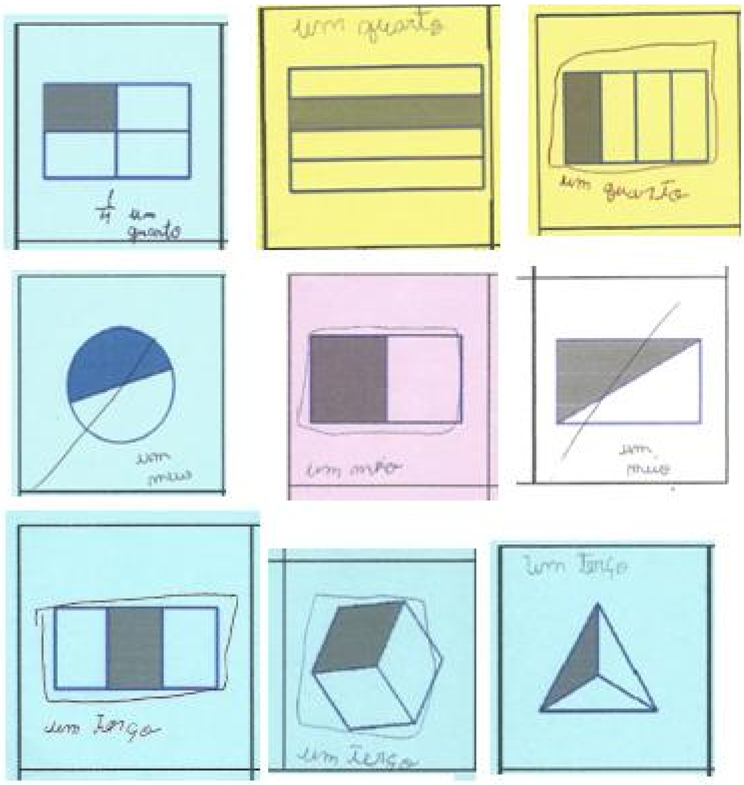
Para estabelecer a equivalência entre um número chamado e uma representação na cartela, os estudantes podem fazer uso (implícita ou explicitamente) de diferentes conhecimentos que possuem sobre os números racionais. Interpretamos as ações dos alunos, na marcação das cartelas ou no momento de conferência, como indícios da mobilização de conceitos-em-ação e teoremas-em-ação (corretos ou não). Vamos a partir de agora mapear as representações mobilizadas, discutindo as marcações corretas e incorretas e as não marcações das representações contidas nas cartelas.

Durantes as quatro partidas foram chamadas as fichas: um quarto, dois décimos, quinze por cento, um terço, um sexto, quarenta por cento, um meio, dois terços, três décimos, trinta e cinco por cento, um por cento, um inteiro e setenta e cinco centésimos, um inteiro e dez centésimos, sessenta por cento, dez centésimos

4.1.1 Marcações para as representações figurativas

Na identificação das representações figurativas de grandezas contínuas (FIGURA 17) divididas em partes congruentes os estudantes não demonstram dificuldades, a maioria das duplas marcaram corretamente as representações presentes nas cartelas utilizadas, a exceção foi de uma dupla que utilizava um teorema-em-ação falso, TA_{RPP} (relação parte-parte), que será discutido mais adiante.

Figura 17 – Marcações corretas para representação de grandeza contínua dividida em partes congruentes



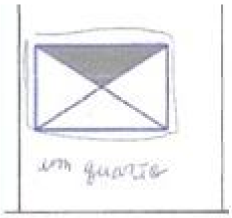
Fonte: Cartelas utilizadas nas partidas pelos estudantes.

A marcação desses tipos de representação não indica necessariamente que os estudantes compreendem o que está implícito nessa representação e mobilizam o teorema-em-ação correto, TA_{MA} (partes de mesma área) “se uma figura está dividida em n partes de áreas iguais duas a duas e m dessas partes estão pintadas então pode-se dizer que essa figura representa a fração ”, pois fazendo uso do teorema-em-ação falso TA_{DCC} (dupla contagem contínuo), onde “se uma figura está dividida em n partes e m delas estão pintadas então pode-se dizer que é uma representação da fração ”, o estudante chegará a uma resposta correta.

Na marcação das representações do tipo grandezas contínuas divididas em partes congruentes, pode estar relacionada a um outro teorema-em-ação falso, TA_{PI} (partes iguais), “para que uma figura represente a fração é preciso que esteja dividida em n partes iguais e m dessas partes estejam pintadas” e a marcação de representações contínuas com partes não congruentes e áreas iguais pode mobilizar também um teorema-em-ação falso, o TA_{DCC} segundo o qual “se uma figura está dividida em n partes e m delas estão pintadas então pode-se dizer que é uma representação da fração ”. Porém sabemos que as partes consideradas precisam ser comparadas com o todo independentemente da quantidade de partes em que o todo foi dividido.

Das três representações passiveis de marcação de representação figurativa contínua dividida em partes não congruentes e de áreas iguais (FIGURA 18) tivemos uma marcação correta. Apenas a marcação correta dessa representação não nos diz muito sobre como o estudante lida com essa situação. Nesse caso eles podem ter utilizado um teorema-em-ação falso, TA_{DCC} (Dupla contagem contínuo) que o levaria a acertar ou o teorema-em-ação correto, TA_{MA} (partes de mesma área), “se uma figura está dividida em n partes de áreas iguais duas a duas e m dessas partes estão pintadas então pode-se dizer que essa figura representa a fração ”.

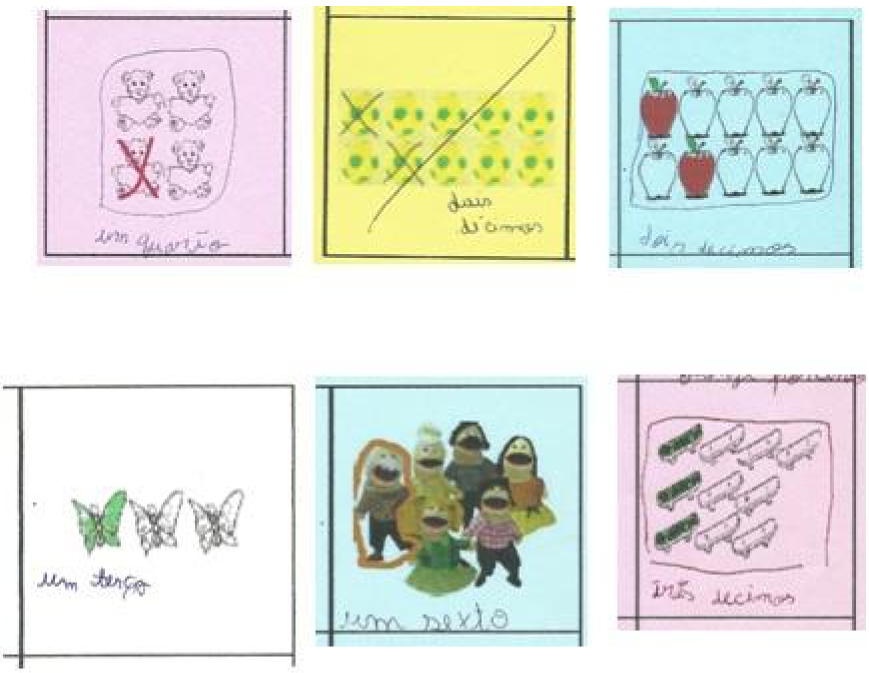
Figura 18 - Representação figurativa contínua referente a um quarto



Fonte: Cartelas utilizadas nas partidas pelos estudantes.

Podemos perceber que há uma predominância de acertos quanto às representações figurativas de grandeza contínua onde a figura foi dividida em partes congruentes de mesma área e nas representações figurativas de grandeza discreta onde a relação partes tomadas/total de partes pode ser diretamente relacionada a uma fração irredutível.

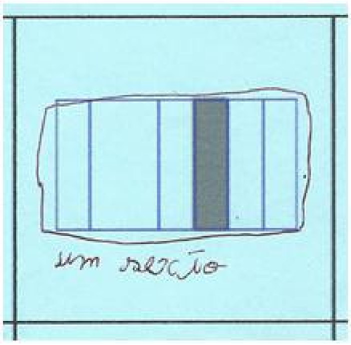
As representações de grandeza discreta (FIGURA 19) que apresentam uma coleção de objetos onde a relação entre as partes tomadas e o total de partes podem ser relacionado diretamente com uma fração irredutível foram, em sua maioria, marcadas corretamente. Com exceção de uma dupla que marcou a representação correspondente a um sexto como outro número, esse erro também será discutido mais adiante. Para essas marcações formulamos, como possibilidade, o teorema-em-ação: TA_{DCD} (dupla contagem discreto), onde tendo uma coleção de objetos do qual alguns são tomados, os m objetos tomados e os n objetos totais representam a fração .



Fonte: Cartelas utilizadas nas partidas pelos estudantes.

Uma possível forma de verificar se os estudantes compreendem o que está por trás da representação de um número racional por meio da área de figuras planas é observar a forma como lidam com os distratores figurativos de grandeza contínua onde as partes não são congruentes e as áreas são diferentes (FIGURA 20). A representação figurativa pensada como distrator para um sexto apareceu nas cartelas utilizadas e foi passível de marcação quatro vezes, duas vezes foi marcada como representação adequada para um sexto e duas vezes não foi marcada.

Figura 20 – Representação de grandeza contínua, distrator.



Fonte: Cartelas utilizadas nas partidas pelos estudantes.

A marcação do distrator indica que talvez esses estudantes tenham acertado as demais marcações das representações figurativas de grandeza contínua fazendo uso de teoremas-em-ação falsos que levam a resposta correta apenas em algumas situações.

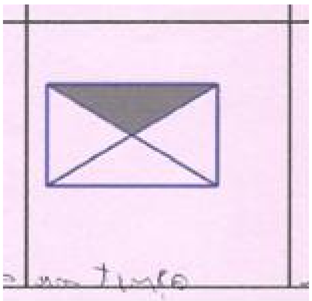
A não marcação desse distrator pode indicar que os estudantes compreendem o conceito de unidade de medida e compreendem a necessidade das partes possuírem a mesma área, ter o mesmo tamanho, ou ainda que consideram que as partes têm que ser congruentes. Um dos estudantes reconhece a diferença dos tamanhos e compreende que não representa um sexto, pois não são do mesmo tamanho, ele diz: "*[...] eu não acho que esteja certo não. Porque quando a gente faz uma fração é pra gente dividir igual a todos e aqui não pode ficar desigual*.

Nesse caso, há estudantes que dizem que não é um sexto por causa da desigualdade do tamanho das partes, mas não indicam que seria a representação para um sétimo, assim não podemos ter certeza que usaram o teorema-em-ação correto, TA_{MA} (partes de mesma área), "se uma figura está dividida em n partes de áreas iguais duas a duas e m dessas partes estão pintadas então pode-se dizer que essa figura representa a fração ". Pois o uso do teorema-em-ação falso TA_{PI} (partes iguais), "para que uma figura represente a fração é preciso que esteja dividida em n partes iguais e m dessas partes estejam pintadas", conduziria a mesma resposta.

Um teorema-em-ação identificado nas marcações da representação figurativa de grandeza contínua dividida em partes não congruentes e de áreas iguais traz a ideia de razão, TA_{RPP} (Relação Parte-Parte),"a representação de um número racional é feita dividindo-se a figura em n partes onde *a* são as partes tomadas e *b* as partes que restaram".

Os estudantes marcaram a representação referente a um quarto (FIGURA 21) como se ela fosse equivalente a um terço, fazendo uso desse teorema-em-ação falso nesse contexto (TA_{RPP}). No momento da conferência da segunda partida quando anunciam ter batido marcando como um terço a representação pensada para um quarto, um dos estudantes da dupla já diz: *“vão dizer que é um quarto”;* devido à discussão na conferência da primeira rodada sobre a marcação do distrator pensado para um sexto que eles dizem: *“ esse tá errado... Porque um sexto... aqui tem um (pintado) e tem cinco (não pintados) aqui né? Aqui seria um quinto... porque o que vale é que aqui já tá marcado, então não vai valer aqui (ou seja, se já está pintado não conta mais para o denominador)”.* Os demais estudantes chegaram à conclusão que eles não bateram, pois a representação é um quarto. A dupla fez a mesma correspondência duas vezes, uma na primeira partida e uma na segunda.

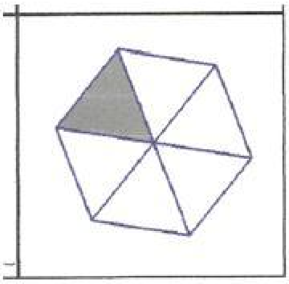
Figura 21 – Representação de grandeza contínua, interpretada segundo o pensamento parte-parte



Fonte: Cartelas utilizadas nas partidas pelos estudantes.

A não marcação de uma representação de grandeza contínua dividida em partes congruentes (FIGURA 22) pelos estudantes nos parece estar relacionada ao uso do teorema-em-ação falso TA_{RPP}, que faz uso da relação parte-parte. Pois a ausência dessa marcação foi identificada na cartela da dupla que fizeram uso desse teorema-em-ação em dois momentos das partidas (conferência na primeira partida, onde também realizaram marcações usando esse pensamento e na conferência da segunda partida, quando eles batem usando esse raciocínio).

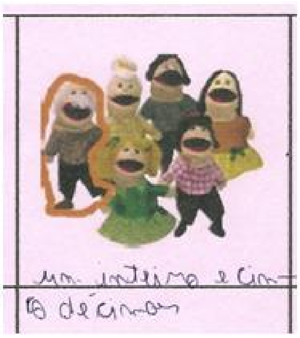
Figura 22 – Representação de grandeza contínua referente a um sexto



Fonte: Cartelas utilizadas nas partidas pelos estudantes.

A marcação incorreta de uma representação figurativa de grandeza discreta (FIGURA 23) para a ficha de chamada um inteiro e cinco décimos, sugere a combinação do teorema-em-ação, TA_{RPP}, e o teorema-em-ação, também falso, TA_{DND} (decimal numerador, denominador), “a representação decimal m,n corresponde ao mesmo número que a representação fracionária , onde m é um número natural e n é um número natural diferente de zero”.

Figura 23 – Representação de grandeza discreta referente a um sexto

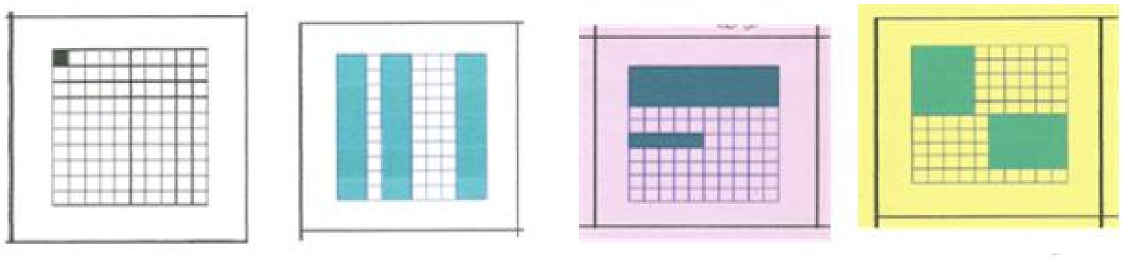


Fonte: Cartelas utilizadas nas partidas pelos estudantes.

Podemos observar que os estudantes consideram a relação parte tomada/partes que sobraram e aparentam fazem relação a um quinto e fazendo uso do TA_{DND} associam como representação equivalente a um inteiro e cinco décimos.

Das representações figurativas (FIGURA 24), de grandeza contínua dividida em cem quadradinhos congruentes que faziam referência a porcentagem, tendo aparecido uma vez, duas vezes, uma vez e cinco vezes para as fichas de chamada um por cento, sessenta por cento, trinta e cinco por cento e quarenta por cento respectivamente conforme a figura, nenhuma foi reconhecida.

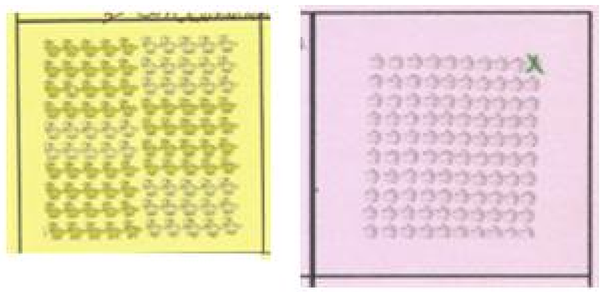
Figura 24 – Representações figurativas contínuas referentes a porcentagens



Fonte: Cartelas utilizadas nas partidas pelos estudantes.

Observamos que os estudantes ao lidar com essas representações associavam-nas a frações decimais, mas não estabeleciam relações com porcentagem. O mesmo aconteceu com as representações figurativas de grandeza discreta (FIGURA 25), coleção com cem objetos que fazia referência a porcentagem, para sessenta por cento e um por cento que apareceu duas vezes e uma vez respectivamente.

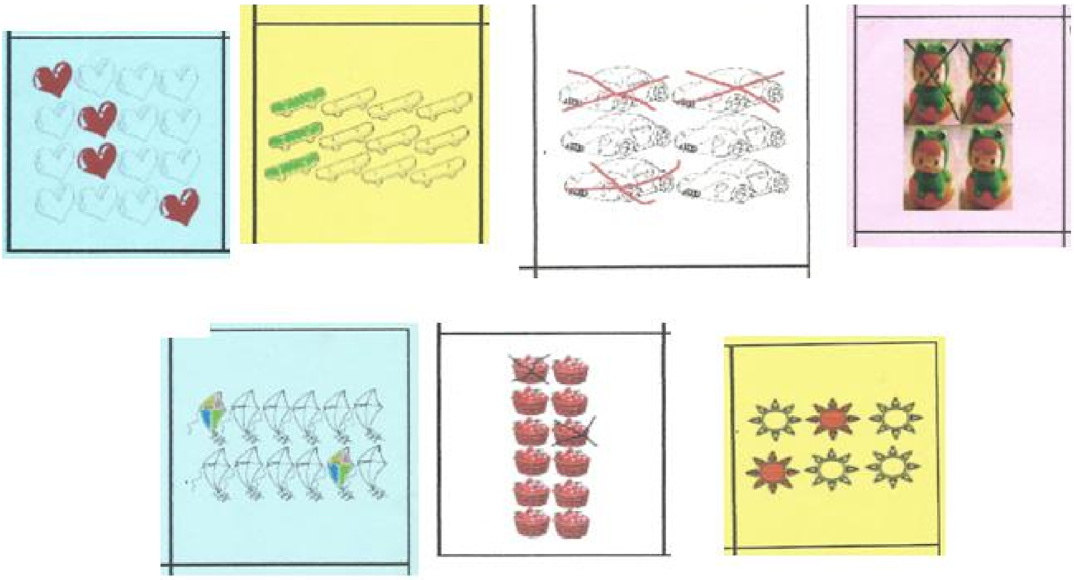
Figura 25 – Representações figurativas discretas referentes a porcentagens



Fonte: Cartelas utilizadas nas partidas pelos estudantes.

O tipo de representação figurativa que remetia a ideia de equivalência (FIGURA 26) entre frações, requisitando dos estudantes o uso de conhecimentos específicos sobre a classe de equivalência de frações não foram identificadas pelos estudantes. Ao identificar essas representações em suas cartelas esperando pela chamada de um número correspondente para realizar a marcação, eles faziam referência ao uso do teorema-em-ação TA_{DCD} (dupla contagem) : “onde tendo uma coleção de objetos do qual alguns são tomados, os *m* objetos tomados e os *n* objetos totais representam a fração .”, não observando a possibilidade de frações equivalentes. Nesse caso, nenhuma das representações desse tipo mobilizadas foram reconhecidas.

Figura 26– Representações de grandeza discreta que remetem à ideia de frações equivalentes



Fonte: Cartelas utilizadas nas partidas pelos estudantes.

4.1.2Marcações para as representações numéricas

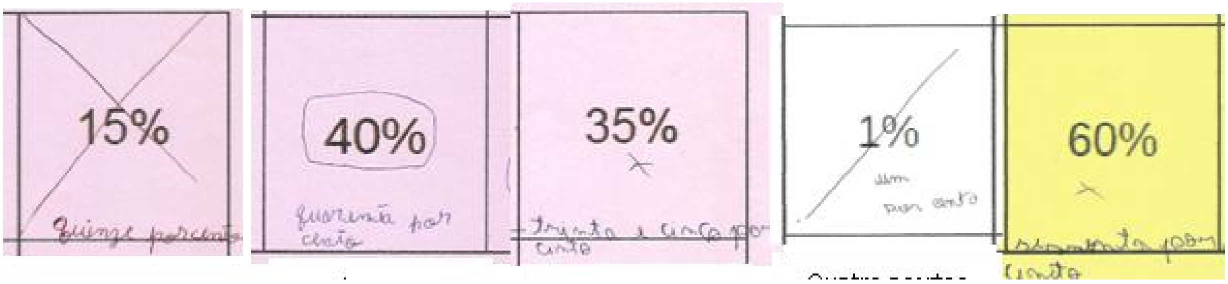
Durantes as partidas jogadas observamos que não houve nenhuma marcação realizada incorretamente e nenhuma marcação correta foi deixada de ser feita quando se tratava de representações simbólico-numéricas de fração e representações simbólico-numéricas percentuais. Provavelmente a recorrência à linguagem na representação lida nas fichas de chamada auxiliem nesse reconhecimento.

Figura 27– Representações simbólica-numérica por frações irredutíveis

Fonte: Cartelas utilizadas nas partidas pelos estudantes.

Pudemos perceber que embora os estudantes não sejam familiarizados com as representações figurativas de porcentagem, não as identificando nas cartelas, eles são bastante familiarizados com a representação de porcentagem por um número acompanhado pelo símbolo %, acertando todas as marcações (FIGURA 28).

Figura 28 - Representações simbólico-numéricas percentuais



Fonte: Cartelas utilizadas nas partidas pelos estudantes.

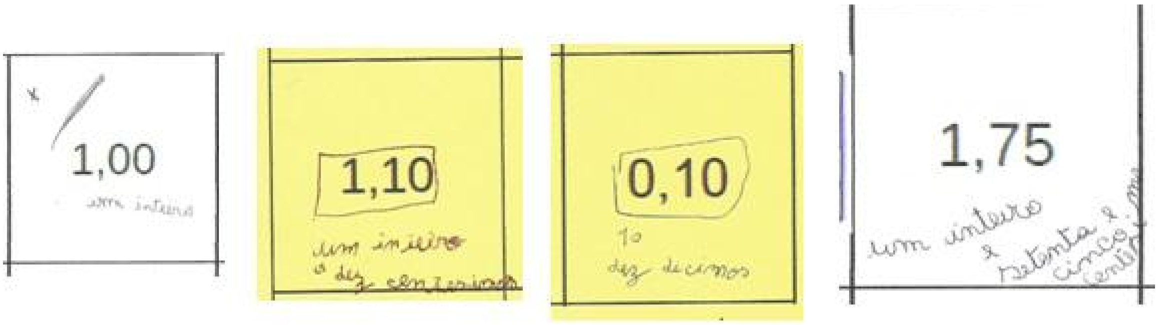
Na identificação das representações corretas de números decimais, os estudantes não demonstraram dificuldades, a maioria realizou a associação do número chamado com a representação correta presente nas cartelas. As representações simbólico-numéricas decimal (FIGURA 29) com uma casa para dois décimos, nove décimos e um inteiro e cinco décimos, foram mobilizadas respectivamente quatro vezes, uma vez e uma vez. Havendo apenas uma ausência de marcação para representação equivalente a dois décimos.

Figura 29 - Representações simbólico-numérica decimal com uma casa

Fonte: Cartelas utilizadas nas partidas pelos estudantes.

Sobre as representações simbólico-numéricas decimal com duas casas (FIGURA 30), temos as representações para um (duas vezes mobilizadas), um inteiro e dez centésimos (uma vez mobilizada), dez centésimos (uma vez mobilizada) e um inteiro e setenta e cinco centésimos (três vezes mobilizada), que foram marcadas corretamente todas as vezes que foram mobilizadas.

Figura 30 - Representações simbólico-numérica decimal com duas casas

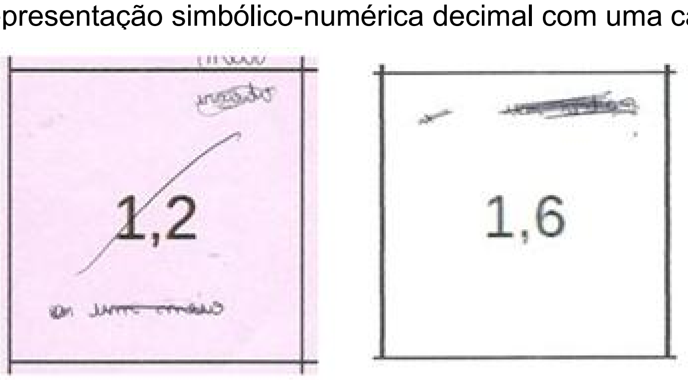


Fonte: Cartelas utilizadas nas partidas pelos estudantes.

Mostrou certa dificuldade a dupla que marcou a representação em número decimal para o número um, os conhecimentos mobilizados no momento da discussão da dupla estavam relacionados às diferentes possibilidades para o número “um” chamado. Os estudantes questionavam-se que poderiam ser diferentes “um”, poderia ser um inteiro, um décimo, um centésimo ou ainda um milésimo, porém um dos estudantes disse, *“é um apenas”*. E observamos também que os estudantes que marcaram a representação para dez centésimos no momento do registro escreveram dez décimos, isso pode demonstrar falta de compreensão sobre as ordens decimais.

Em dois momentos nas partidas tivemos a marcação incorreta de um número decimal confundido com uma fração. No distrator (FIGURA 31) referente a um meio a dupla percebeu o erro antes de começar a conferência da sua cartela e no distrator referente a um sexto as outras duplas invalidaram a marcação justificando que a representação é equivalente a um inteiro e seis décimos.

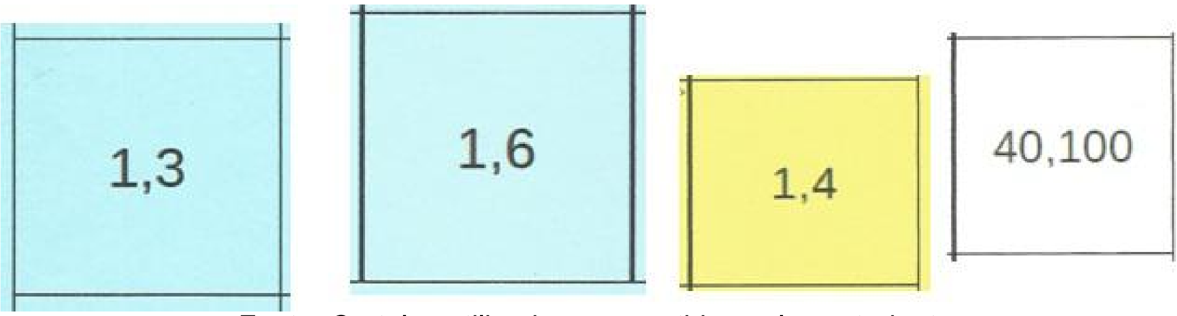
Figura 31 - Representação simbólico-numérica decimal com uma casa (distrator)



Fonte: Cartelas utilizadas nas partidas pelos estudantes.

Percebemos que os estudantes em sua maioria compreendem a diferença entre uma representação fracionária e uma representação de número decimal. Pois os distratores simbólico-numéricos (FIGURA 32) pensados para um terço, um sexto, um quarto e quarenta por cento não foram marcados, embora as fichas tenham sido chamadas.

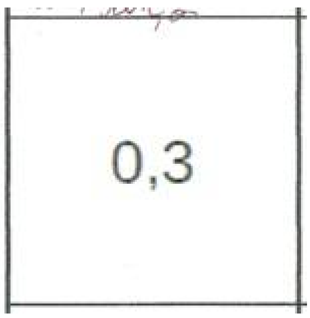
Figura 32 - Representações simbólico-numérica decimal (distratores numéricos)



Fonte: Cartelas utilizadas nas partidas pelos estudantes.

A não marcação da representação simbólico-numérica decimal referente a três décimos por mais de uma vez pela mesma dupla, pode demonstrar que o estudante não conhece a nomenclatura das ordens decimais. Devido ao hábito de ler um número x,y como “xis vírgula ípsilon”, os estudantes podem não ter associado a representação à ficha de chamada três décimos. Essa representação (FIGURA 33) não foi passível de marcação nas cartelas de outras duplas, porém outras duplas reconheceram as representações do mesmo tipo para dois décimos e nove décimos.

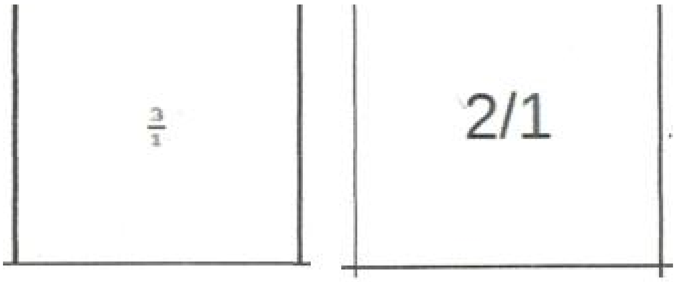
Figura 33 - Representação simbólico-numérica decimal com uma casa para três décimos



Fonte: Cartelas utilizadas nas partidas pelos estudantes.

Os distratores trazidos como fração aparente (FIGURA 34), não causaram dúvidas aos estudantes. Todos os participantes demonstraram durante as partidas reconhecer a ordem do numerador e denominador, havendo nenhuma marcação desse tipo de distrator durante o jogo.

Figura 34 - Representações simbólico-numérica fração aparente (distrator)



Fonte: Cartelas utilizadas nas partidas pelos estudantes.

A seguir trazemos uma síntese dos resultados obtidos elencando os pontos que demonstram compreensão dos estudantes, os pontos problemáticos e os pontos que precisam ser aprofundados.

4.2 Síntese dos resultados

Durante as partidas jogadas, foi possível elencar alguns pontos importantes sobre o modo como os estudantes lidaram com a identificação de diferentes representações de números racionais a partir de uma representação em linguagem natural. Os resultados apoiam-se nas marcações feitas, na ausência de marcação e nos diálogos entre as duplas ou no momento da conferência das cartelas.

Vamos destacar inicialmente os itens nos quais nenhuma das duplas apresentou dificuldades. As duplas marcaram corretamente todas as representações figurativas de grandeza discreta (a exceção para esse caso é de uma dupla que fazia uso do TA_{RPP}, relação parte-parte) que não exigiam a mobilização do conceito-em-ação de equivalência de frações, bem como todas as representações simbólico-numéricas de fração e de porcentagem.

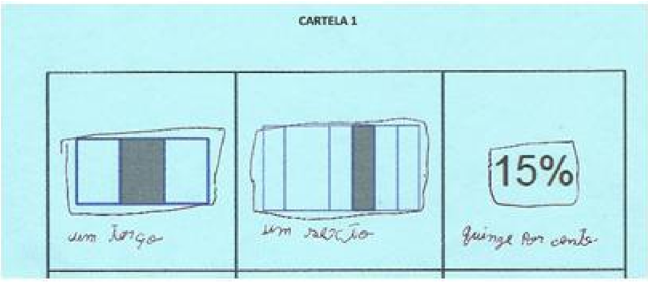
Por outro lado, há as associações que não foram realizadas por nenhuma das duplas e as conexões inadequadas feitas pelas duplas. É o caso das representações figurativas de quantidades contínuas e discretas referentes a porcentagens e das representações discretas que exigiam a mobilização do conceito-em-ação de frações equivalentes.

Finalmente, podem-se evidenciar os aspectos que foram problemáticos para alguns estudantes e aqueles que exigem um maior aprofundamento, uma vez que respostas corretas não nos parecem remeter necessariamente à mobilização de teoremas-em-ação adequados para encontrar a solução correta. Observamos que alguns estudantes sentiram dificuldades ao identificar representações simbólico-numéricas decimais. Sobre as representações figurativas de grandeza contínua com partes congruentes, mesmo havendo 100% de acerto, não podemos inferir que eles compreendem a relação implícita existente na marcação, pois o uso de teoremas-em-ação falsos pode levar ao acerto nesses casos.

Quanto às representações figurativas de grandeza contínua com partes não congruentes e áreas iguais, onde houve erros e acertos, conseguimos identificar o teorema-em-ação não adequado utilizado na marcação, mas não podemos ter certeza se o acerto foi apoiado no uso de um teorema-em-ação válido. As representações de figuras divididas em partes não congruentes e de áreas diferentes, em que observamos erros e acertos, precisa ser estudada mais detalhadamente. A não marcação dessas representações (que foram pensadas como distratores), não garante que os estudantes reconheçam a relação implícita existente (comparação da área tomada com a área total).

Em momento de conferência das marcações da dupla vencedora, os oito estudantes presentes no momento discutiram acerca da marcação e tentaram defender seus argumentos. As marcações apresentadas pela dupla "vencedora" foram relacionadas às fichas de chamada um terço, um sexto e quinze por cento (FIGURA 35). A marcação realizada identificada como um sexto foi a geradora da discussão, pois duas duplas não concordaram que eles haviam batido, cada uma delas com uma argumentação diferente contra a marcação da representação R_{12} e uma dupla validou as marcações realizadas.

Figura 35 – Representações apresentadas pela dupla vencedora da partida 1



Fonte: Cartelas utilizadas pelos estudantes nas partidas

As duas duplas que não validaram a marcação R_{12} utilizaram os seguintes argumentos:

1) Não bateram, pois a representação que marcaram referindo-se a um sexto na verdade é um quinto.
2) Não bateram, pois a figura não está dividida em partes iguais, o tamanho tá diferente;

Os estudantes que concordaram com a marcação demonstraram compreender o conceito de unidade de medida, pois afirmaram que o retângulo maior equivalia a dois retângulos menores. Mas para eles não importava o tamanho da parte e sim a quantidade de partes para fazer as relações. Nesse momento de discussão acerca dessa representação (que é um distrator para a ficha de chamada um sexto) percebemos três teoremas-em-ação sendo mobilizados, emergindo conhecimentos que já estavam previstos e elementos que não foram previstos na nossa análise a priori.

- TA_{MA} (partes de mesma área), “se uma figura está dividida em n partes de áreas iguais duas a duas e m dessas partes estão pintadas então pode-se dizer que essa figura representa a fração ”. Relação parte-todo, considerando os três aspectos trazidos por Nunes e Bryant (1997) necessários a situações multiplicativas que fazem uso dessa relação: a quantidade de partes do todo, a quantidade de partes tomadas e o “tamanho” das partes (ou seja, a área de cada parte). Outra possibilidade é que a dupla tenha utilizado o teorema-em-ação TA_{PI} (partes iguais), “para que uma figura represente a fração é preciso que esteja dividida em n partes iguais e m dessas partes estejam pintadas”; (01 dupla)
- TA_{DCC} (dupla contagem): “Se uma figura está dividida em n partes e m delas estão pintadas então pode-se dizer que é uma representação da fração ”. Esse teorema-em-ação se relaciona com a ideia parte-todo, porém considerando apenas dois aspectos: a quantidade de partes do todo e quantidade de partes tomadas. Segundo Nunes e Bryant (1997), a relação parte-todo considerando apenas esses dois aspectos está ligada ao pensamento aditivo. (02 duplas)
- TA_{RPP} (Relação Parte-Parte) ,“a representação de um número racional é feita dividindo-se a figura em n partes onde *a* é a quantidade de partes tomadas e *b* a quantidade de partes que restaram”. (01 dupla)

Levantamos três possibilidades com esses resultados: 1) os estudantes não têm compreensão sobre o conceito de unidade; 2) os estudantes ainda não conseguem compreender os problemas que envolvem a relação parte-todo dentro do pensamento multiplicativo, onde leva-se em conta não apenas a quantidade total de partes e a quantidade de cada parte, mas também o tamanho de cada parte; 3) os estudantes ainda não são capazes de lidar de forma satisfatória com representações de quantidades contínuas, porque ainda não são conservativas nesse tipo de representação. Algumas dessas hipóteses foram aprofundadas com a realização de entrevistas que são apresentadas e discutidas no próximo capítulo.

Segundo Nunes e Bryant (1997) a facilidade em reconhecer representações onde tratamos de um conjunto de unidades discretas ou as figuras estão divididas em partes congruentes ou quando estão divididas em partes não congruentes e de áreas iguais e o erro frequente ou a dúvida quando a figura está dividida em partes de áreas diferentes, pode estar relacionada à forma de ensino que muitas vezes associa a fração a uma representação composta por dois números. A técnica utilizada nesses casos pode ser dupla contagem, a utilização dessa técnica leva os estudantes a obterem sucesso em algumas situações e em outras não.

Em determinado momento uma dupla marcou ao chamar três décimos o distrator (1,3) pensado para a ficha de chamada um terço. "*Eu lembro que teve um que tinha zero vírgula dois e era dois décimos. (Relembrando as rodadas anteriores, das quais ele participou)"*, disse o estudante - *tem um aqui na frente (da vírgula) representando o zero e o três décimos"*. O parceiro da dupla argumenta que na verdade é um terço, continuando a argumentar diz que para ser três décimos precisaria de no lugar do um ser um zero. Após a argumentação do parceiro ele diz, *"Lembro que o professor disse, que se fosse um número (aponta para depois da vírgula) era décimos. Se fosse dois, centésimos e três, milésimos*". Ao que parece esse estudante admite um número com vírgula como sendo dois números distintos unidos por uma vírgula.

Para alguns a ideia de representação decimal e representação por fração se confundem, pois para muitos a fração não representa um número e sim dois números distintos que representam não uma quantidade e sim duas quantidades (NUNES; BRYANT, 1997).

Observamos também que alguns estudantes não têm clareza sobre as ordens dos números decimais, isso talvez, como já dissemos, esteja atribuído a aspectos linguísticos. Visto que muitas vezes a leitura de um número como 1,5, por exemplo, é feita como sendo um vírgula cinco e não um inteiro e cinco décimos, pronunciando o nome das ordens; sendo assim, levado em consideração os indícios que a forma linguística dos números pode auxiliar na sua compreensão pelas crianças (NUNES; BRYANT, 1997).

Durante as partidas quando os estudantes fazem um mapeamento das representações contidas nas cartelas e quais fichas de chamada precisam ser *cantadas* para que batam, o comum foi vê-los associando representações figurativas sempre a uma fração ou um número decimal. Assim, quando lidavam com as representações figurativas para porcentagem não percebiam que a fração decimal de denominador cem também representa uma porcentagem. Também ao lidar com representações discretas sempre faziam a associação direta a uma fração, sem perceber suas possíveis equivalências.

Essa falta de articulação nos leva a formular duas hipóteses que precisam ser estudadas para serem confirmadas ou não: 1) os estudantes não percebem que um mesmo número racional pode assumir diversas formas de representação; 2) os estudantes não têm compreensão de que a porcentagem pode ser representada por meio de uma fração.

Essas hipóteses foram aprofundadas por nós em entrevistas individuas, elaboradas de acordo com os dados analisados no experimento. Decidimos então extrapolar o jogo acrescentando entrevistas individuais, como já mencionamos, nas quais alguns aspectos não contemplados nas cartelas foram explorados e outros aprofundados. No capítulo seguinte trazemos a concepção, análise a priori e os resultados dessas entrevistas.

5 CONCEPÇÃO, ANÁLISE A PRIORI E ANÁLISE DAS ENTREVISTAS

A segunda etapa do nosso dispositivo experimental foi a realização de entrevistas individuais formuladas a partir dos dados da primeira etapa. Como já foi dito, optamos por utilizar na primeira etapa do dispositivo, as cartelas produzidas no âmbito do Projeto Rede (GITIRANA et al., 2013) e em nossa análise a priori observamos que alguns tipos de representações não haviam sido contemplados nas cartelas do jogo. Assim, as questões da entrevista tiveram como objetivo extrapolar as escolhas feitas pelos elaboradores para as cartelas originais e investigar algumas hipóteses formuladas durante a análise das partidas jogadas. As entrevistas foram videogravadas, para permitir à pesquisadora o acesso não só ao registro escrito de sua produção e à fala dos sujeitos (para a qual a audiogravação seria suficiente), mas aos gestos que realizam durante o processo de resolução das tarefas. Realizamos sete entrevistas das quais só foi possível analisar três, devido ao prazo para conclusão da dissertação. A realização de entrevistas foi pensada para complementar nossos dados e esclarecer algumas evidências obtidas durante as partidas jogadas.

As questões da entrevista trazem representações similares às contidas no jogo e buscam confirmar nossas hipóteses sobre alguns teoremas-em-ação mobilizados nas partidas jogadas. Acrescentamos algumas representações que julgamos ser necessárias e não estavam contidas nas cartelas do jogo, como por exemplo, representação figurativa de grandeza contínua como distrator para um meio.

A primeira seção desse capítulo apresenta o roteiro da entrevista e sua análise a priori e a segunda seção é dedicada aos resultados obtidos nessa etapa do dispositivo experimental.

5.1 Apresentação e análise a priori das questões utilizadas na entrevista

A entrevista foi composta por 5 questões, contextualizadas em torno do jogo. A primeira traz uma cartela supostamente marcada por um estudante e pede que o sujeito diga quais fichas ele pensa que haviam sido chamadas para justificar essas marcações e quais não foram chamadas e correspondem aos itens não marcados. A cartela utilizada é diferente das elaboradas no Projeto Rede. A segunda questão simula a construção de uma cartela. A pesquisadora pede ajuda ao entrevistado, dizendo que quer usar alguma representação para três décimos e para isso gostaria que ele selecionasse em um conjunto de itens todos os que representam três décimos.

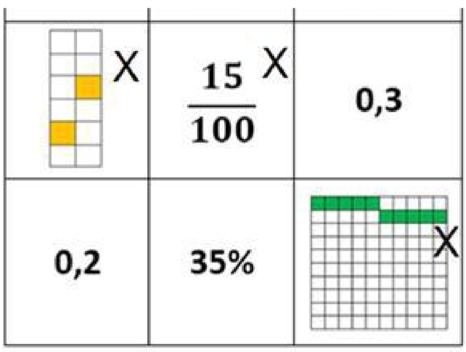
Na terceira questão a pesquisadora apresenta uma lista de representações que supostamente foram marcadas por alguns estudantes de outra escola e que geraram dúvidas no momento da conferência. Pede para que os estudantes entrevistados se posicionem se concordam ou não com a marcação e que argumentem para convencer os estudantes da outra escola sobre suas hipóteses. A quarta questão traz uma cartela que está sendo confeccionada por uma professora que precisa de ajuda para compor as representações correspondentes a alguns itens específicos.

A quinta questão traz para os estudantes várias representações diferentes para os números racionais um meio, um quarto, um quinto e um sexto, além de representações que não fazem parte de nenhum desses grupos, onde os estudantes são solicitados a agrupá-las dentro de envelopes e alguns envelopes extras para que eles pudessem formar novos grupos, caso achassem conveniente.

Trazemos a segui uma análise questão a questão da entrevista:

1. A cartela abaixo é fornecida ao sujeito e é dada a seguinte explicação: Essa cartela é de um estudante que estava participando do jogo. Quais fichas você acha que foram chamadas? Quais fichas da cartela não foram chamadas?

Figura 36 – Cartela utilizada na entrevista



Fonte: Construída pela autora com base nas ideias do jogo.

O item R_{11} é uma representação figurativa de grandeza discreta correspondente a “um terço”. Pretendíamos confirmar (ou não) a facilidade que os estudantes possuem em identificar uma representação desse tipo quando está diretamente relacionada a uma fração irredutível.

Os itens R_{12}, R_{13}, R_{21} e R_{33} são representações figurativas de grandeza contínua correspondentes respectivamente a “um quarto”, “um meio”, “um sexto” e “um décimo”.

Os dados das partidas jogadas indicaram que os estudantes não estão familiarizados com as representações que remetem ao conceito de frações equivalentes e não deixa claro como os estudantes lidam com representações figurativas de grandeza contínua divididas em partes não congruentes e de área diferente. Esperou-se trazer à tona os conhecimentos-em-ação dos estudantes no momento da identificação de cada uma dessas representações, nos dando suporte para formular hipóteses mais pontuais.

No caso do item R_{12}, a figura está dividida em seis partes das quais duas correspondem a um quarto do quadrado, cada, e quatro partes correspondem a um oitavo da figura, cada. Com tal representação queríamos observar como os estudantes lidam com representações figurativas de grandeza contínuas divididas em partes de áreas diferentes. O trabalho com essa representação permite verificar se (e como) o estudante compreende o conceito de unidade de medida. Podemos observar se o estudante faz a relação entre a parte destacada e o número de partes do mesmo tamanho que ele poderia obter nessa mesma figura; e se compreende a necessidade de considerar a igualdade das áreas das partes para representação de um número racional por meio de uma figura plana.

Ao observar como os estudantes lidam com essa representação pretendemos observar se os estudantes utilizam (e quais) os teoremas-em-ação:

- TA_{DCC} (dupla contagem contínuo) : “Se uma figura está dividida em n partes e m delas estão pintadas então pode-se dizer que é uma representação da fração ”.
- TA_{PI} (partes iguais): “Para que uma figura represente a fração é preciso que esteja dividida em n partes iguais e m dessas partes estejam pintadas”.

- TA_{MA} (partes de mesma área): “Se uma figura está dividida em n partes de áreas iguais duas a duas e m dessas partes estão pintadas então pode-se dizer que essa figura representa a fração ”.

No caso dos itens R_{13} e R_{21}, nossa intenção era averiguar como os estudantes lidam com o conceito de frações equivalentes por meio de representações figurativas de grandeza contínua. É claro que se eles disserem que o item R_{13}representa “dois quartos” e R_{21}representa “dois doze avos” essas respostas estão corretas. Mas nesse caso, eles podem acertar utilizando um teorema-em-ação que não leva a uma resposta correta no contexto contínuo:

- TA_{DCC} (dupla contagem) : “Se uma figura está dividida em n partes e m delas estão pintadas então pode-se dizer que é uma representação da fração ”.

Mas se eles afirmarem que as fichas correspondentes a esses itens são respectivamente “um meio” e “um sexto” teremos indícios de que os alunos mobilizam adequadamente o conceito em ação de frações equivalentes. Como já foi dito, havíamos percebido que nenhuma cartela trazia representações de “um meio” nas quais fosse necessário utilizar frações equivalentes, o que motivou a inclusão do item R_{13} e R_{21}.

Outra possibilidade de interpretação dos estudantes e que foi observada nas partidas do jogo, é que interpretem tal item apoiados na relação parte-parte, mobilizando o teorema-em-ação:

- TA_{RPP} (Relação Parte-Parte),“a representação de um número racional é feita dividindo-se a figura em n partes onde *a* são as partes tomadas e *b* as partes que restaram”.

O item R33 foi inserido para verificar como os estudantes lidam com representações figurativas com cem partes. No Bingo dos Números Racionais, essas representações foram incluídas como uma maneira de representar porcentagem e durante as partidas jogadas no nosso experimento nenhum dos estudantes participantes fizeram tal associação. Algumas respostas corretas são esperadas: “dez centésimos”, uma vez que há dez quadradinhos pintados de um total de cem quadradinhos; “um décimo”, que é a fração irredutível equivalente a dez centésimos; ou ainda “dez por cento”. Se os entrevistados afirmarem que se trata de “um décimo” indica a mobilização do conceito de frações equivalentes e se responderem “dez por cento” realizam uma associação entre representação figurativa e porcentagem.

Na cartela há também quatro representações simbólico-numéricas, sendo uma em fração (R_{22}), que representa “quinze centésimos”, duas decimais (R_{23} e R_{31}), que correspondem respectivamente a “três décimos” e “dois décimos”, e uma representação de porcentagem (R_{32}) associada a “trinta e cinco por cento”.

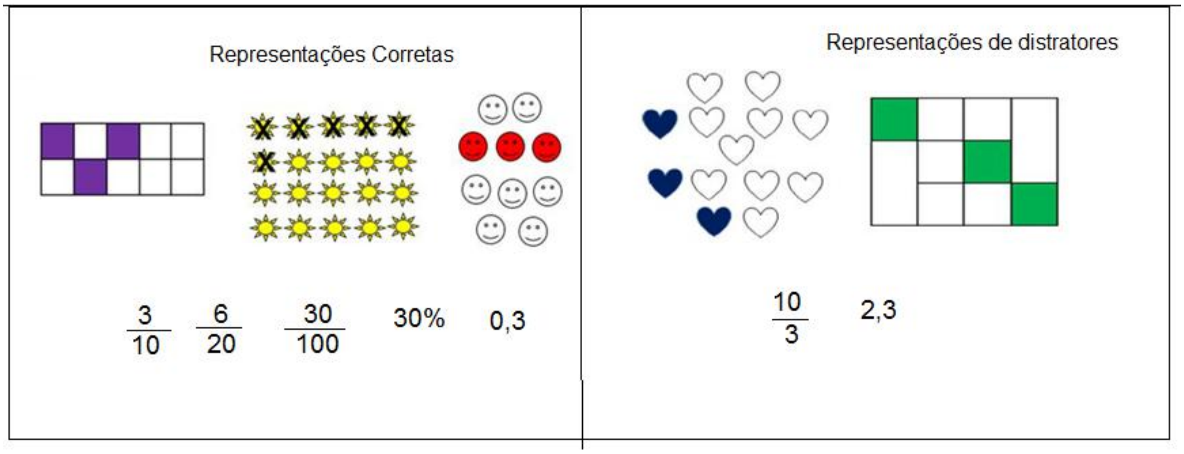
No caso do item R_{22},nossa intenção era verificar se os entrevistados conseguiriam fazer a associação com 15%. As expressões em linguagem natural “quinze centésimos” e “três vinte avos” (fração irredutível) também são corretas. Decidimos colocar uma fração decimal de denominador cem para observar se os estudantes a relacionariam com porcentagem.

Com respeito às representações R_{23} e R_{31}, podemos observar se os entrevistados associam às expressões “três décimos” e “dois décimos” ou se formulam “zero vírgula três” e “”zero vírgula dois” respectivamente. Pelos resultados da etapa anterior, é provável que os alunos associem corretamente 35% à expressão “trinta e cinco por cento” (R_{32}). Como já foi dito, há duas outras representações que poderiam ser associadas a porcentagem (R_{22} e R_{33}).

Observando o não reconhecimento pelos estudantes das representações de grandezas discretas que sugeriam o conhecimento sobre equivalência e tendo verificado na análise a priori das representações que compõe as cartelas do jogo que não são contempladas representações figurativas de grandeza contínua que exija esse conhecimento, decidimos inseri-la para observar se os estudantes a reconhecem.

2. Amanda quer fabricar uma cartela e gostaria de usar uma representação para a ficha TRÊS DÉCIMOS. Coloque no envelope todas as representações que Amanda poderia usar.

Quadro 10 – Representações corretas e distratores para três décimos



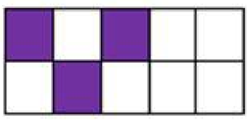
Fonte: Elaborado pela autora com base nas ideias do jogo e dados das partidas

As representações apresentadas (Quadro 10) foram fornecidas, separadas umas das outras. Solicitamos que o sujeito selecionasse aquelas que pensa representarem três décimos e as coloca em um envelope, preparado previamente com a indicação “representações de três décimos” e o nome do sujeito. E cada uma das representações teve a intenção de investigar se as evidências encontradas no resultado das rodadas se confirmam.

Para essa questão utilizamos representações figurativas e numéricas, inserimos representações dos tipos que foram trabalhadas no jogo, representações de tipos diferentes das contidas no jogo de acordo com as observações que fizemos na análise a priori das representações que compõem as cartelas do jogo e representações de tipos diferentes das contidas no jogo tomando como base os teoremas-em-ação mobilizados durante as partidas jogadas.

Trabalhamos com duas representações figurativas de grandeza contínua de tipos contidos no jogo: representação figurativa de grandeza contínua de partes congruentes e representação figurativa de grandeza contínua cujas partes têm áreas diferentes, fazendo o papel de distrator.

Figura 37– Representação figurativa de grandeza contínua de partes congruentes

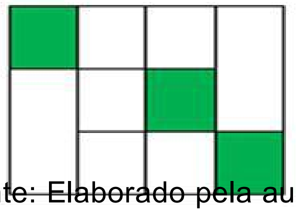


Fonte: Elaborada pela autora.

Nesse caso, trata-se de uma representação correta de três décimos (FIGURA 37), uma vez que a figura está dividida em dez quadradinhos idênticos e três deles estão pintados. A identificação dessa figura como representação de três décimos pode ser justificada pela mobilização dos teorema-em-ação:

- TA_{DCC} (dupla contagem) : “Se uma figura está dividida em n partes e m delas estão pintadas então pode-se dizer que é uma representação da fração ”.
- TA_{PI} (partes iguais): “Para que uma figura represente a fração é preciso que esteja dividida em n partes iguais e m dessas partes estejam pintadas”.
- TA_{MA} (partes de mesma área): “Se uma figura está dividida em n partes de áreas iguais duas a duas e m dessas partes estão pintadas então pode-se dizer que essa figura representa a fração ”.

Figura 38– Representação figurativa de grandeza contínua cujas partes têm áreas diferentes



Fonte: Elaborado pela autora.

No caso acima (FIGURA 38), o retângulo está dividido em dez partes, das quais três estão pintadas, mas as partes não têm mesma área. Interpretamos a designação dessa figura como representação para três décimos como mobilização do TA_{DCC} (dupla contagem) : “Se uma figura está dividida em n partes e m delas estão pintadas então pode-se dizer que é uma representação da fração ”.. A área da parte pintada da figura representa “um quarto” da área do retângulo.

O reconhecimento que essa representação não é de três décimos pode ser interpretada como mobilização dos teoremas-em-ação, TA_{PI} (partes iguais): “Para que uma figura represente a fração é preciso que esteja dividida em n partes iguais e m dessas partes estejam pintadas” (falso, válido apenas em algumas situações) ou TA_{MA} (partes de mesma área): “Se uma figura está dividida em n partes de áreas iguais duas a duas e m dessas partes estão pintadas então pode-se dizer que essa figura representa a fração ” (válido para todas as situações).

O trabalho com esses dois tipos de representação (FIGURA 37; FIGURA 38) ao mesmo tempo com o mesmo estudante evidenciará qual conhecimento ele utilizou para identificar as representações, permitindo assim uma maior confiabilidade quanto a nossa interpretação de quais os teoremas-em-ação que o estudante mobiliza na identificação desse tipo de representação.

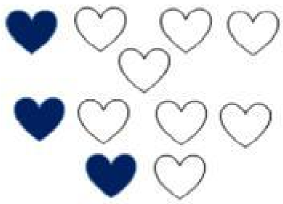
Foram disponibilizadas três representações figurativas de grandeza discreta, duas do tipo que já é contemplada no jogo e uma de um tipo diferente das contidas no jogo e que foi elaborada de acordo com a análise das partidas jogadas: uma representação figurativa de grandeza discreta, na qual a razão entre a quantidade de objetos tomados e a quantidade total de objetos pode ser diretamente relacionada a uma fração irredutível "três décimos", uma representação na qual a razão entre a quantidade de objetos pintados e a quantidade de objetos não pintados corresponde a "três décimos" e uma representação figurativa de grandeza discreta que pode ser associada a três décimos, mas que não tem 3 objetos pintados de um total de dez objetos.

Figura 39 - Representação discreta, distrator para três décimos

Fonte: Elaborado pela autora

No caso da figura anterior (FIGURA 39), mobilizando a noção de fração como expressão de uma relação parte-todo e realizando uma dupla contagem, os entrevistados podem identificar sem maiores dificuldades essa representação como correspondente a "três décimos". Caso realizem a contagem de partes pintadas e partes não pintadas, dirão que a figura acima representa "três sétimos".

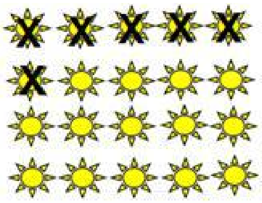
Figura 40 - Representação discreta, distrator para três décimos



Fonte: Elaborado pela autora

Mobilizando a noção de fração como expressão de uma relação parte-todo e realizando uma dupla contagem, os entrevistados chegarão à conclusão de que a figura anterior representa “três treze avos” e, portanto, essa representação não seria selecionada como possibilidade de representar “três décimos”. Entretanto, como já foi observado nas partidas jogadas, há estudantes que consideram que essa figura representa “três décimos”, realizando uma razão entre quantidade de corações pintados e quantidade de corações brancos.

Figura 41 - Representação discreta que remete ao conceito de frações equivalentes



Fonte: Elaborado pela autora.

No tipo de representação figurativa de quantidade discreta acima, o significado de fração como parte-todo leva a atribuir à figura acima a fração “seis vinte avos”, que como se sabe é equivalente a “três décimos”. Ou seja, se os sujeitos fazem a associação direta entre a quantidade de figuras riscadas e a quantidade total de figuras não chegam imediatamente à fração irredutível “três décimos”. Assim, se os alunos forem capazes de identificar essa figura como representação de três décimos” interpretamos que mobilizou como conceito em ação a equivalência de frações.

Nessa parte da entrevista, foram utilizadas sete representações numéricas: três dos tipos já contempladas nas cartelas do jogo, três tipos inseridos por nós para investigar como os estudantes lidam com a equivalência entre frações e um tipo inserido de acordo com a análise das partidas jogadas.

Na forma de fração, foram inseridas as frações irredutíveis e em que, como se sabe, a primeira é uma representação correta de “três décimos” e a segunda corresponde a “dez terços”. O objetivo dessa combinação de representações numéricas por frações inversas é observar se os entrevistados mobilizam o teorema-em-ação TA_{CND} (comutatividade numerador-denominador) segundo o qual eles acreditam que a posição do numerador e denominador não muda o número da representação.

Há também representações simbólico-numéricas por fração redutível a “três décimos”: e . Esse tipo de representação não compõe as cartelas originais do jogo. Nosso objetivo, com essas representações era verificar se os estudantes mobilizam a equivalência de frações quando estão lidando com representações numéricas em forma de fração.

Incluímos também nessa parte da entrevista a representação 30% que corresponde a “três décimos”. Pretendíamos verificar se os estudantes fazem a relação da representação percentual a uma fração irredutível.

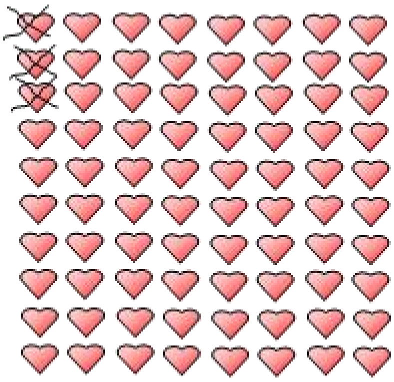
Finalmente, havia as representações em números decimais. Além da representação correta (0,3), inserimos a representação 2,3 (dois inteiros e três décimos). Essa escolha baseia-se da etapa anterior do experimento, pois um estudante durante uma das partidas jogadas, ignorou a parte inteira e reconheceu apenas a parte decimal como correspondente ao número chamado.

3. No 6º ano B da Escola Aprender Pensando os alunos jogaram uma rodada do Bingo e estavam conferindo as marcações. Em alguns casos estavam em dúvida se a marcação era correta ou não. Você poderia dar sua opinião? Se discordar da marcação, o que diria para convencer o aluno que aquela representação não corresponde ao número chamado?

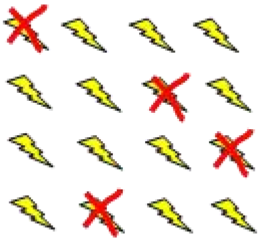
Pensamos que trazendo já essa correspondência podemos provocar a reflexão sobre as representações, trazendo à tona teoremas-em-ação que eles não utilizam de forma usual.

Tendo em vista que as representações figurativas para porcentagem e as representações figurativas que recorriam à ideia de equivalência de frações não foram reconhecidas nas cartelas do jogo, decidimos inserir representações figurativas similares àquelas contidas no jogo nas questões de a à d e observar se estando a relação já estabelecida os estudantes conseguiriam reconhecer como correta a marcação.

a. Para a ficha “três por cento”, Ana marcou

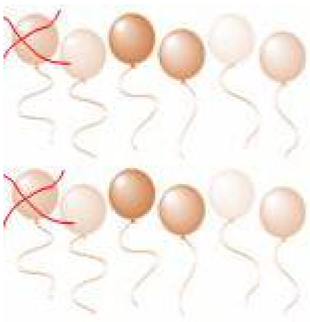


b. Para a ficha “um quarto” Bernardo marcou



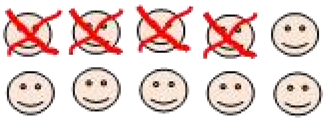
c. Para a ficha “um meio”, Carolina marcou

d. Para a ficha “um sexto”, Danilo marcou



No item *e* pensamos em verificar se a expressão que remete a ordem decimal, “décimos”, pode interferir na identificação de uma representação figurativa.

e. Para a ficha “quatro décimos”, Elisa marcou

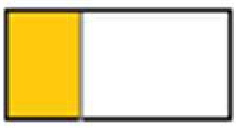


Buscamos com a representação contida no item f e no item g, observar se os estudantes mobilizam ao lidar com essa representação teoremas-em-ação falsos (válidos para algumas situações) ou verdadeiros (válidos para todas as situações do contexto contínuo). Os teoremas-em-ação passível de mobilização na identificação dessa representação que encontramos em nossas análises foram:

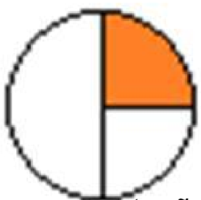
- TA_{DCC} (dupla contagem) : “Se uma figura está dividida em n partes e m delas estão pintadas então pode-se dizer que é uma representação da fração ”.
- TA_{PI} (partes iguais): “Para que uma figura represente a fração é preciso que esteja dividida em n partes iguais e m dessas partes estejam pintadas”.
- TA_{MA} (partes de mesma área): “Se uma figura está dividida em n partes de áreas iguais duas a duas e m dessas partes estão pintadas então pode-se dizer que essa figura representa a fração ”.

f. Para a ficha “um meio”, Paula marcou

.

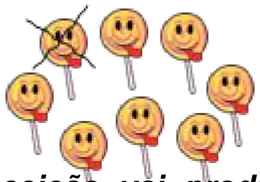


g. Para a ficha “um quarto” Anderson marcou



Inserimos a representação do item h com objetivo de verificar se os estudantes mobilizam a relação parte/todo (e nesse caso, diriam que a marcação estaria incorreta) ou se expressam que essa figura representa “um sétimo” porque a razão entre a quantidade de pirulitos riscados e a quantidade de pirulitos não riscados é um pra sete. Esses tipos de raciocínio foram observados nas partidas jogadas e estão relacionadas ao teorema-em-ação TA_{RPP} (relação parte-parte)..

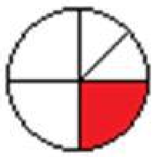
h. Para a ficha de chamada “um sétimo” Marina marcou



4. A professora Conceição vai produzir novas cartelas para o Bingo dos números racionais e precisa de ajuda.

É fornecida a cartela abaixo, e para cada posição, a pesquisadora instrui o que gostaria que fosse colocado, para que o aluno produza a cartela.

Quadro 11– Cartela para ser construída com os estudantes

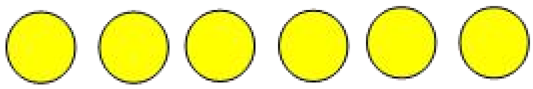
		

Fonte: Elaborado pela autora.

As especificações de cada item da cartela são:

- Para a posição R_{11}, foi entregue um quadrado com 5 cm de lado, subdividido em cem quadradinhos de 5 cm de lado cada. Foi solicitado que o aluno pinte 15% da figura;

- No item R_{12}, foi pedido que o aluno representasse “trinta e cinco por cento” em forma de fração;
- Na posição R_{13}, foi fornecida malha quadriculada, figuras de desenhos isolados e régua para facilitar o traçado. Com esses recursos os sujeitos deveriam representar “um quinto”;
- O item R_{21} solicitava uma representação de “um meio” na forma de número decimal;
- Na posição R_{22}, o estudante deveria representar em porcentagem o número “um décimo”
- O item R_{23} correspondia à representação de “um quarto” na forma de número decimal
- Para R_{31}, a pesquisadora pediu aos entrevistados que, usando a figura a seguir, produzissem uma representação para “um terço”



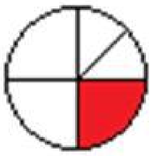
- Na posição R_{32} estava previamente marcado um distrator e ao final do preenchimento da cartela pedimos aos estudantes para dizerem que número pensavam estar ali representado
- Para o item R_{33}, foi pedido aos sujeitos que usando fração, representassem “um inteiro e cinco décimos”

Como já foi dito, na aplicação do jogo, percebemos que os alunos não fazem as correspondências de representações figurativas e numéricas (em fração e decimal) com a porcentagem. Com os itens R_{11}, R_{12}e R_{22} pretendíamos verificar se os sujeitos conseguiam compreender as relações existentes entre razão, fração e porcentagem. No R_{11}, dada a expressão em linguagem natural “quinze por centro”, o estudante deveria produzir uma representação figurativa de quantidade contínua correspondente; no R_{12}, tratava-se de expressar “trinta e cinco por cento” em fração e no R_{22}, da representação em linguagem natural “um décimo”, solicitava-se que o estudante escrevesse em forma de porcentagem (10%).

Nos itens R_{13} e R_{31} solicita-se que os alunos produzam representações figurativas correspondentes a números decimais. O R_{13}foi elaborado para verificar como os sujeitos lidam como representações figurais de quantidades contínuas na representação de “um quinto”. Já o R_{31}, permitia observar como os estudantes lidam com a representação de quantidades discretas em um contexto no qual há seis bolinhas e pede-se uma representação de um terço. Para resolver essa questão adequadamente, os entrevistados podem marcar duas bolinhas e mobilizar o conceito em ação de frações equivalentes (equivalente a) ou pensar em fração como operador (buscando responder à pergunta - quantas bolinhas correspondem a de seis bolinhas ?)

Para aprofundar nossas hipóteses sobre como os estudantes lidam com números decimais e como eles os relacionam com outras representações de números decimais utilizamos os itens R_{21}, R_{22}, R_{23} e R_{33} No caso de R_{21} e R_{23},as expressões em linguagem natural remetem a frações ordinárias (um meio e um quarto) e solicita-se que os estudantes produzam uma representação na forma de números decimais (por exemplo, 0,5 e 0,25 respectivamente). Queremos averiguar se os alunos fazem a conexão entre representações. Já nos casos da R_{22}e R_{33}, embora as representações a serem produzidas pelo aluno sejam respectivamente em porcentagem e fração, as expressões dadas inicialmente (“um décimo” e “um inteiro e cinco décimos”) remetem aos números decimais.

Com o distrator, traçado previamente na cartela, na posição R_{32} pretendíamos observar como os estudantes lidam com representações figurativas de quantidades contínuas em que as áreas das partes da figura são diferentes.



Finalmente, com o item R_{33}, queríamos verificar o conhecimento sobre representações fracionárias que indicam números maiores que um.;

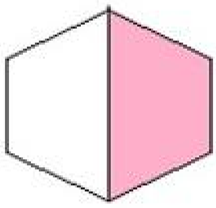
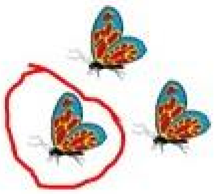
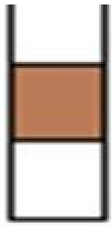
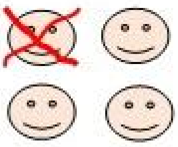
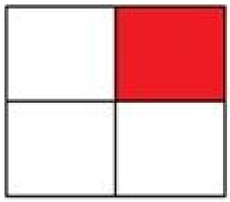
5. Dona Conceição está organizando seu material para compor novas cartelas. Ela tem várias representações e gostaria de agrupá-las em caixas (ou envelopes). Você poderia ajudá-la?

Foram entregues oito envelopes a cada entrevistado sendo quatro deles marcados respectivamente com “um meio”, “um terço” “um quarto” e “um quinto” e os outros quatro em branco, caso o estudante quisesse formar novos grupos de representações.

Trabalhamos nessa questão com representações em língua materna (escrita por extenso nos envelopes), representações figurativas e representações simbólico-numéricas.

Trazemos nas figuras a seguir representações figurativas discretas e contínuas de um número racional que pode ser escrito onde a é a quantidade de partes tomadas e b é a quantidade total de partes.

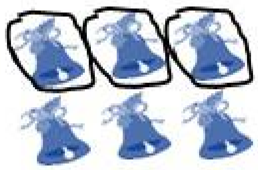
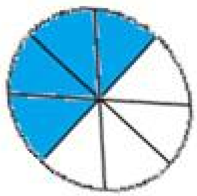
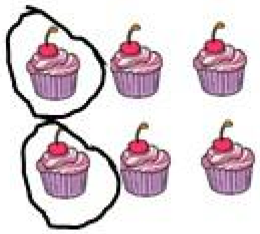
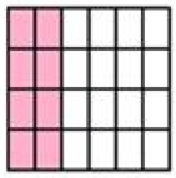
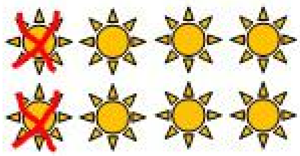
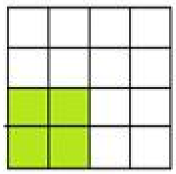
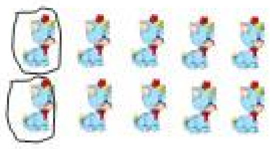
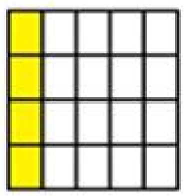
Quadro 12 - Representações discretas e contínuas que não exigem uso do conceito de frações equivalentes

Tipo de Representação / Número Expresso em Língua Materna	Representações figurativas de quantidades discretas	Representações figurativas de quantidades contínuas
Um meio		
Um terço		
Um quarto		
Um quinto		

Fonte: Elaborado pela autora.

A seguir as representações de figuras contínuas e discretas que exigem o uso do conhecimento sobre frações equivalentes para seu reconhecimento.

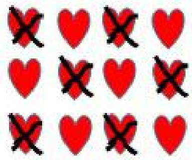
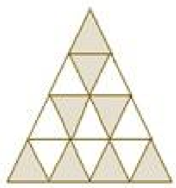
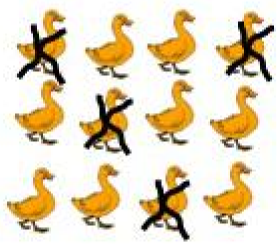
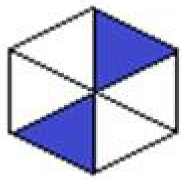
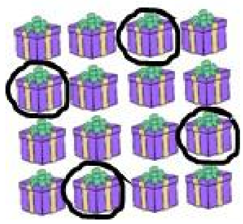
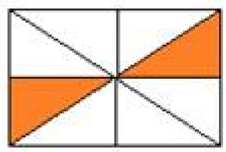
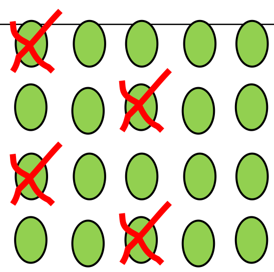
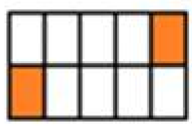
Quadro 13 - Representações discretas e contínuas que remetem ao uso do conceito de frações equivalentes com apoio visual.

Tipo de Representações / Número Expresso em Língua Materna	Representações figurativas de quantidades discretas	Representações figurativas de quantidades contínuas
Um meio		
Um terço		
Um quarto		
Um quinto		

Fonte: Elaborado pela autora.

Para esse tipo de representação pensamos em duas formas de representar: 1) as partes tomadas foram colocadas próximas uma da outra para facilitar a visualização da possibilidade de agrupamento em grupos menores e reconhecimento da possibilidade de equivalência de frações (QUADRO XX); 2) as partes tomadas foram colocadas distantes uma da outra para observar se a forma de agrupamento modifica a forma de identificação das possibilidades de equivalência de frações (QUADRO 14).

Quadro 14 - Representações discretas e contínuas que remetem ao uso do conceito de fração equivalente, sem apoio visual

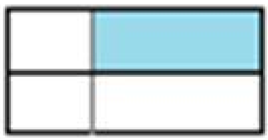
Tipo de Representações / Número Expresso em Língua Materna	Representações figurativas de quantidades discretas	Representações figurativas de quantidades contínuas
Um meio		
Um terço		
Um quarto		
Um quinto		

A seguir temos representações que foram divididas em partes não congruentes. O objetivo dessas representações foi observar se os estudantes levavam em consideração a área das partes ou apenas a quantidade de partes tomadas e o total de partes.

As figuras a seguir podem ser confundidas respectivamente com um quarto, um terço, um meio e um quinto. Quando na verdade três delas possuem grupos específicos nos envelopes que foram entregues aos estudantes, são eles respectivamente um terço, um quarto e um quarto.

No caso da figura a seguir (FIGURA 42), ela representa , mas a figura está dividida em quatro partes e uma delas está pintada. Por isso o aluno que fizer uma dupla contagem compreendendo que “se uma figura está dividida em n partes e m delas estão pintadas então pode-se dizer que é uma representação da fração ” (TA_{DCC}), irá concluir erradamente que se trata de uma representação de um quarto.

Figura 42 - Representação figurativa de grandeza contínua para um terço, distrator para um quarto



Fonte: Elaborado pela autora.

Para chegar a uma resposta correta o estudante possivelmente irá mobilizar o teorema-em-ação, TA_{MA}, se uma figura está dividida em n partes de áreas iguais duas a duas e m dessas partes estão pintadas então pode-se dizer que essa figura representa a fração .

Ainda para verificar como os estudantes lidam com as representações figurativas divididas em partes de área diferentes inserimos a representação a seguir (FIGURA 43).

Figura 43 - Representação figurativa dividida em partes não congruentes para um quarto

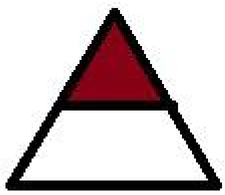
Fonte: Elaborado pela autora.

A figura representa um quarto e está dividida em três partes desiguais. Os estudantes não irão identificar a qual grupo a representação pertence se fizer uso dos teoremas-em-ação a seguir:

- TA_{DCC} (dupla contagem): “Se uma figura está dividida em n partes e m delas estão pintadas então pode-se dizer que é uma representação da fração ”.
- TA_{PI} (partes iguais): “Para que uma figura represente a fração é preciso que esteja dividida em n partes iguais e m dessas partes estejam pintadas”.

Para uma interpretação correta dessa representação é necessário considerar o tamanho da área das partes. Possivelmente com a mobilização do TA_{MA}.

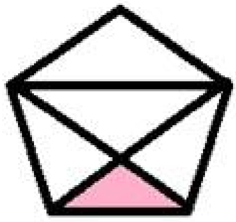
Figura 44 - Representação figurativa dividida em partes de área diferentes



Fonte: Elaborado pela autora.

O triângulo dividido em duas partes de áreas diferentes (FIGURA 44) representa um quarto. Porém se os estudantes ao identificar tal representação utilizar o TA_{DCC} ou o TA_{PI} não chegarão a uma resposta adequada, e o colocarão no grupo das representações para um meio. O que se espera é que utilizem a ideia que segue o TA_{MA}.

Figura 45 - Representação figurativa dividida em parte de área diferentes, distrator para um quinto



Fonte: Elaborado pela autora.

Um pentágono dividido em cinco partes de áreas diferentes foi contemplado nas representações como distrator para um quinto. A intenção foi observar a possível utilização dos teoremas-em-ação: TA_{DCC}, TA_{PI}ou TA_{MA}.

Para cada grupo de representações inserimos uma representação simbólico-numérica de fração (FIGURA 46).

Figura 46 - Representações simbólico-numérica de fração

$$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3}$$

Fonte: Elaborado pela autora.

Dentre esses números, apenas 1/3 não possui representação decimal finita. Assim, estão também incluídas:

- para “um quarto” a representação decimal 0,25 e em porcentagem 25%
- para “um quinto” a representação decimal 0,2 e em porcentagem 20%
- para “um meio” a representação decimal 0,5 e em porcentagem 50%.

Dentre as representações, inserimos também distratores numéricos.

Quadro 15 - Representações simbólico-numérica de fração aparente e decimal com uma casa (distratores)

Tipo de Representação / Número Expresso em Língua Materna	Representações errôneas em forma de fração	Representações errôneas em números decimais
Um meio		**1,2**
Um terço		**1,3**
Um quarto		**1,4**
Um quinto		**1,5**

Fonte: Elaborado pela autora.

Com as frações, procuramos confirmar se estava claro para os sujeitos que ao trocar numerador e denominador o número se altera (com exceção do caso em que numerador e denominador são iguais). As representações em forma de número decimal visavam verificar se algum sujeito interpretava conforme o teorema-em-ação: A representação decimal m,n corresponde ao mesmo número que a representação fracionária , onde m é um número natural e n é um número natural diferente de zero, TA_{DND}.

5.2 Análise dos dados das entrevistas

Apontamos no capítulo anterior algumas hipóteses, umas aprofundamos nas entrevistas outras mantivemos em aberto os questionamentos iniciais para pesquisas futuras. Realizamos as entrevistas com sete estudantes que participaram das partidas do jogo, no entanto analisamos apenas três. As entrevistas foram transcritas e foram analisados tanto o diálogo dos estudantes com a pesquisadora, quanto a produção dos estudantes durante a coleta dos dados.

Com a realização das entrevistas, ficou claro que os estudantes não têm dificuldades em identificar números racionais representados por figuras, nas quais o processo de dupla contagem pode ser empregado de forma direta. Ou seja, quando não precisam mobilizar o conceito-em-ação de frações equivalentes ou compreender (no contexto contínuo) a relação existente entre a área tomada e a área total da figura.

Ao responder as questões solicitadas, onde o TA_{DCC} e TA_{DCD} são suficientes para chegar a uma resposta correta, todos os estudantes responderam corretamente. Porém, como já foi dito, no contexto contínuo essa técnica só conduz a respostas corretas em casos específicos (quando as figuras são divididas em partes de mesma área, por exemplo). Assim não podemos ainda afirmar que tais acertos indicam compreensão dos números racionais no contexto parte-todo.

Outras representações figurativas que constam nas entrevistas nos permitem ir mais adiante sobre "o quanto" esses estudantes compreendem ao lidar as representações figurativas de grandeza contínua.

A questão 3 da entrevista traziam nos itens *f* e *g* representações contínuas divididas em partes de áreas diferentes. Essas representações haviam sido supostamente marcadas por um estudante de um 6º ano de uma outra escola e os estudantes que participaram das entrevistas opinavam se a marcação havia sido correta ou não. Ao ser questionado se estava correta a marcação de uma representação para um quarto (FIGURA 47), o estudante demonstra que consegue estabelecer relações de comparação entre a área pintada e o total, mas acredita que uma figura plana para representar um racional precisa estar dividida em parte iguais.

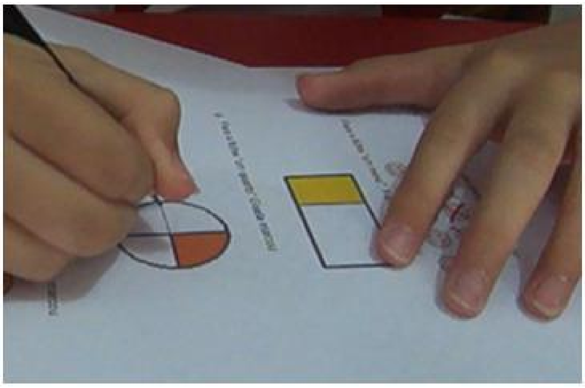
O estudante mobiliza o TA_{PI} (partes iguais), conforme podemos observar no extrato do diálogo que segue:

Estudante: *[...] acho que tá errado (risos). Porque aqui... primeiro aqui tem três partes, mas ta dividido desigual. A gente deveria dividir aqui assim no meio esse tracinho em partes iguais, porque fração é partes iguais. Aí aqui se a gente dividisse ia ser um quarto, mas aqui não ta não, um quarto não.*

Pesquisadora: *Então no caso, se... Teria que ser como pra ser um quarto?*

Estudante: *(pega o lápis e dividido o semicírculo em dois setores circulares "do mesmo tamanho").*

Figura 47 - Construção da representação de um quarto segundo um estudante



Fonte: Dados da entrevista

Os três estudantes, cujas entrevistas foram analisadas, disseram que a representação discutida não era equivalente a um quarto, pois não estava dividida em partes iguais. Tal resposta demonstra que embora haja 100% de acertos nas representações figurativas discretas do tipo “coleção de objetos que pode ser associado diretamente a uma fração irredutível” e nas representações figurativas contínuas divididas em partes com áreas iguais, os estudantes não possuem uma ampla compreensão acerca dessas representações.

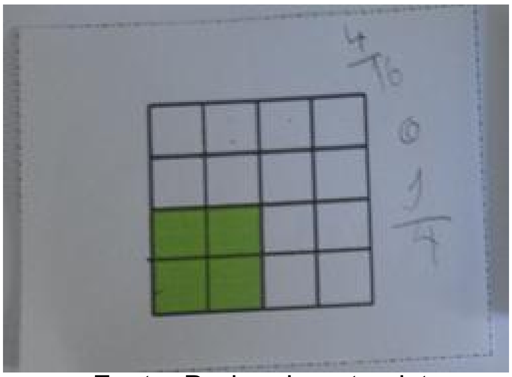
Ficou mais forte a impressão de que embora compreendam o conceito de unidade (consigam fazer a comparação entre a área das partes tomadas e a área total), que favorece a utilização do teorema-em-ação TA_{MA}, não o utilizam na identificação de representações cuja as partes não possuem áreas iguais.

Em relação às hipóteses que levantamos das representações que trazem a ideia de equivalência, nas entrevistas analisadas por nós os estudantes não identificaram essa forma de relacionar. Em todas as questões das entrevistas inserimos representações que pediam a mobilização do conceito-em-ação de fração equivalente. Dois dos estudantes não identificaram nenhuma das representações que remetiam a frações equivalentes e um deles reconheceu tal possibilidade no contexto das representações contínuas.

As representações contínuas que remetem a esse conhecimento não foram contempladas nas cartelas do bingo. Lima (1989) traz em seu estudo, sobre a questão da conservação nos contextos contínuo e discreto, que as crianças tornam-se conservativas primeiro no contexto discreto. Porém inserimos nas entrevistas representações figurativas dos dois tipos, em mesma quantidade e nas mesmas condições (com as partes tomadas agrupadas, para facilitar a visualização e com as partes tomadas não agrupadas).

Na quinta questão da entrevista, foi pedido aos estudantes que agrupassem as representações em envelopes. Dentre todas as representações que envolviam o conceito de frações equivalentes, o estudante percebeu, possivelmente pelo auxilio visual que a figura a seguir (FIGURA 48), conforme podemos observar com o diálogo que segue.

Figura 48 - Representação figurativa de grandeza contínua que remete ao conceito de fração equivalente



Fonte: Dados da entrevista

Estudante: *Aqui ta pintado quatro, aí aqui tem... um, dois, três quatro... dezesseis, aqui é quatro dezesseis (escreve). Mas se a gente for contar por aqui assim oh... (mostra os quatro quadrados agrupados e o utiliza como unidade de medida) teria um, dois, três quatro, seria um de quatro. Esse daqui eu tô em dúvida! Eu posso dizer que... botar numa cartela de dúvida né? Porque... pode ser uma pegadinha...*

Pesquisadora*: Então no caso, tu queria um envelope de dúvida né?*

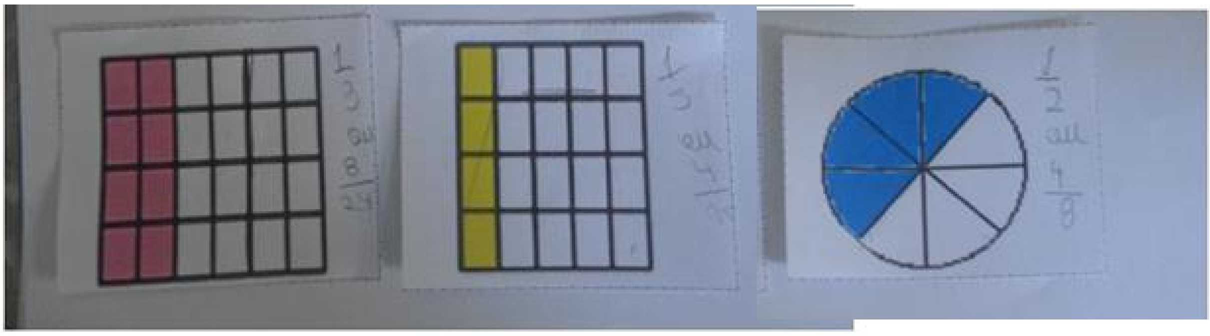
Estudante: *É.. (coloca a representação dentro do envelope e nomeia .com dúvidas.*

Pesquisadora: *Você ta em dúvida se ele é o que?*

Estudante: (*Retira a representação de dentro do envelope e escreve logo abaixo de onde tinha escrito a fração quatro dezesseis avos e escreve também a fração um quarto).*

O mesmo raciocínio mostrado no diálogo anterior foi utilizado para as demais representações figurativas (FIGURA 49) do mesmo tipo. Mesmo reconhecendo a possibilidade de equivalência, o estudante não demonstra ter conhecimento amplo sobre o conceito de fração equivalente.

Figura 49 – Representações identificadas por um dos estudantes como pegadinha



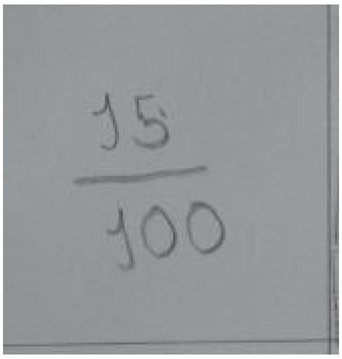
Fonte: Dados da entrevista

Uma hipótese que verificamos nas entrevistas, foi sobre as representações de números racionais na forma percentual. Os dados revelaram que os estudantes fazem relações entre diferentes representações de porcentagem quando incentivados a fazê-la. Em todas as questões da entrevista diferentes representações que poderiam ser associadas a porcentagem foram inseridas. As representações contidas nas entrevistas sugeriam uma relação entre número decimal e porcentagem, representações figurativas discretas (coleção de cem objetos dos quais alguns foram marcados) e porcentagem, frações figurativas de grandeza contínua (quadrado dividido em cem quadradinhos congruentes) e frações decimais com denominador cem.

Foram bem-sucedidos em todos os itens com representações que envolviam representação figurativas de grandeza contínua (quadrado dividido em cem quadradinhos congruentes) e representação figurativa de grandeza discreta (coleção de cem objetos dos quais alguns foram/ marcado). Como por exemplo, na questão 3, item a (FIGURA 50), onde supostamente de um conjunto com cem corações três foram marcados. Sobre a marcação tivemos, como exemplo, a resposta: *"ta certo, porque aqui tem cem e ela marcou três.*

Obtiveram êxito nas representações simbólico-numérica de fração, a serem pedidos para escrever uma porcentagem em forma de fração, na questão 4, representação R_{12}.

Figura 50 - Produção de um estudante, representação simbólico-numérico para quinze por cento.

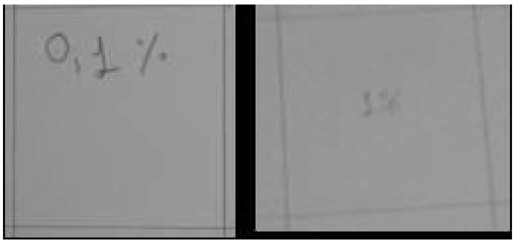


Fonte: Dados da entrevista

Um deles identificou corretamente a representação simbólica-numérica em forma de porcentagem (30%) relacionando-a com representação (três décimos) expressa em língua materna.

Não conseguiram estabelecer a relação de um número racional expresso em língua materna que remete a números decimais, para construir uma representação simbólico-numérica em forma de porcentagem. Para esse item um dos estudantes não respondeu e para os outros dois encontramos as seguintes respostas (FIGURA 51).

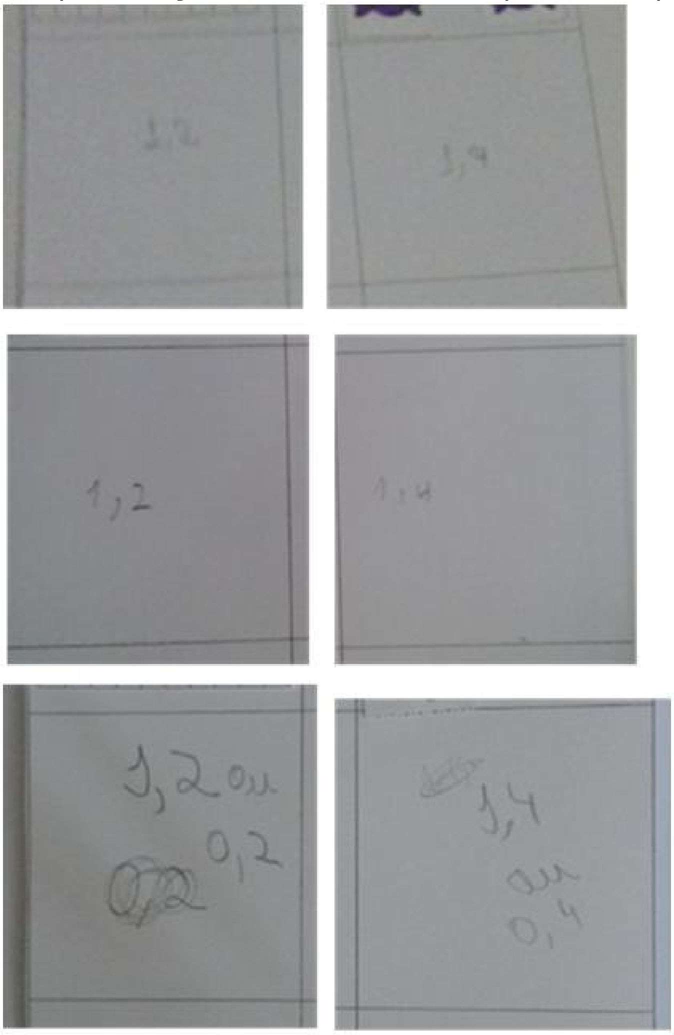
Figura 51 – Representações construídas pelos estudantes para um décimo na forma percentual



Fonte: Dados da entrevista

Quando pedidos para representar um meio e um quarto na forma de número decimal, os estudantes ficaram confusos sem saber como prosseguir respondendo a atividade e representaram como se fossem uma fração trocando apenas a barra horizontal pela vírgula.

Figura 52 - Representações simbólico-numérica produzidas pelos estudantes



Fonte: Dados da entrevista

Quanto às representações de porcentagem percebemos que os estudantes conseguem de forma geral compreender mais de uma forma para representar porcentagem.

De uma maneira geral, as hipóteses testadas nesse segundo momento de coleta de dados nos trouxeram dados mais precisos para o levantamento de hipóteses sobre as facilidades e dificuldades dos estudantes ao lidar com diferentes representações de números racionais.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Tomamos como ponto de partida a diferenciação entre o número e suas representações e a importância de compreender a relação existente entre as representações de números racionais. Nosso trabalho se propôs a averiguar se o jogo Bingo dos Números Racionais contribui para observar como os estudantes de um 6º ano lidavam com diferentes representações dos números racionais e em caso afirmativo, de que maneira pode ser útil no diagnóstico dos conhecimentos e das dificuldades dos sujeitos.

Em nosso estudo levantamos os teoremas-em-ação passíveis de serem mobilizados ao identificar as diferentes representações contidas nas cartelas do jogo e elencamos os que, segundo nossa interpretação, poderiam ter sido utilizados pelos estudantes no momento que tratavam de algumas representações.

Os resultados do nosso estudo mostraram que embora os estudantes se saiam bem ao lidar com algumas representações figurativas, ainda existe uma lacuna quanto à compreensão das relações implícitas em jogo. Os estudantes parecem ter dificuldade em compreender (no caso das representações figurativas de grandeza contínua) a necessidade de comparar a área tomada com a área total antes de fazer a relação parte-todo.

Outro ponto observado foi a dificuldade em estabelecer as relações entre frações equivalentes tanto com representações figurativas, quanto com representações simbólico-numéricas. O conceito de frações equivalentes, no nível de escolaridade dos sujeitos da pesquisa (6º ano do ensino fundamental) já deve ter sido estudado formalmente, porém os estudantes agem como se não conhecessem tal conceito. Mesmo o estudante que chegou a reconhecer a possibilidade de quatro dezesseis avos ser equivalente a um quarto, fez isso com um apoio visual e não teve certeza, foi uma hipótese levantada.

Durante as partidas tivemos a impressão que os estudantes não conseguiam estabelecer uma conexão entre porcentagem e outras representações diferentes da simbólico-numérica percentual. Porém com a realização das entrevistas percebemos que os estudantes conseguem relacionar porcentagem em quatro contextos: representação simbólico-numérica de fração e porcentagem, representação figurativa e porcentagem, representação em língua materna e porcentagem. Não obtiveram sucesso ao relacionar representação simbólico-numérica decimal e porcentagem.

Sobre as representações simbólico-numéricas em número decimal, percebemos que os estudantes não têm um amplo conhecimento sobre sua estrutura e suas características decimais de ordem. Eles produzem as representações solicitadas para os números decimais, mas não fazem de forma coerente a transição da representação simbólico-numérica de fração para a representação simbólico-numérica decimal. Eles parecem não compreender a diferença estrutural das representações e associam *m,n* como igual a . As possíveis dificuldades sobre a compreensão da estrutura decimal dessas representações e a dificuldade de articulação com as representações de fração não foram exploradas nesse estudo.

Alguns teoremas-em-ação foram mobilizados pelos estudantes ao interpretar as representações contidas nas cartelas do jogo e as representações contidas na entrevista que foi realizada individualmente:

- TA_{DCC} (dupla contagem): "Se uma figura está dividida em n partes e m delas estão pintadas então pode-se dizer que é uma representação da fração ".
- TA_{PI} (partes iguais): "Para que uma figura represente a fração é preciso que esteja dividida em n partes iguais e m dessas partes estejam pintadas".
- TA_{DND} (decimal numerador, denominador): A representação decimal m,n corresponde ao mesmo número que a representação fracionária , onde m é um número natural e n é um número natural diferente de zero.
- TA_{DCD} (dupla contagem discreto), onde tendo uma coleção de objetos do qual alguns são tomados, os m objetos tomados e os n objetos totais representam a fração .

Percebemos também o não uso do teorema-em-ação que mobiliza a necessidade de comparação da área das partes tomadas e a área total da figura, no caso das representações figurativas de grandeza contínua divididas em partes de áreas diferentes, TA_{MA} (partes de mesma área), "se uma figura está dividida em n partes de áreas iguais duas a duas e m dessas partes estão pintadas então pode-se dizer que essa figura representa a fração ". Portanto, não podemos afirmar que nenhum estudante utilizou tal teorema no reconhecimento de alguma das representações. Um estudo mais pontual sobre os conhecimentos dos estudantes em torno desse teorema-em-ação seria preciso para evidências mais precisas.

A utilização do Bingo dos números racionais como um recurso de diagnóstico dos conhecimentos dos estudantes se mostrou pertinente. Inclusive para o levantamento de hipóteses que subsidiaram a construção das entrevistas para aprofundamento do estudo.

Durante as partidas observamos que o caráter de jogo foi mantido, os estudantes continuavam ativos e se divertindo ao jogar. O jogo permitiu o trabalho em equipe dos estudantes, eles levantavam hipóteses e buscavam formas de validá-las para convencer o parceiro ou justificar suas marcações no momento da conferência.

O comportamento dos estudantes no contexto do jogo mostrou também que o jogo, embora pensado para turmas de 4º e 5º ano do ensino fundamental, foi adequado para o trabalho com os estudantes do 6º ano, oferecendo desafio apropriado para o nível de escolaridade. As representações que compõem as cartelas oferecem ao observador (professor/pesquisador) elementos diferenciados propiciando o trabalho com diferentes aspectos das representações de números racionais, podendo ainda ser construídas novas cartelas, inclusive com a ajuda dos estudantes para atingir objetivos específicos do momento de utilização.

Os distratores contidos nas cartelas permitem verificar se os estudantes estão mobilizando conhecimentos falsos para identificar e representar números racionais. Com a mobilização dos distratores figurativos, por exemplo, percebemos a dificuldade dos estudantes em estabelecer a relação área das partes/área da figura. E percebemos a associação incorreta do número *m,n* ou número .

Salientamos que nosso estudo foi pontual com uma turma de 6º ano e que nossos resultados apontam para a compreensão desses estudantes, pesquisas mais globais sobre como os estudantes lidam com cada uma dessas representações e como estabelecem relações entre elas são necessárias. Sugere-se também que seja verificada a pertinência do Bingo dos Números Racionais com objetivos (de pesquisa/didáticos) diferentes dos nossos.

Finalizamos nossas considerações esperando poder contribuir com produção de conhecimento acadêmico e intenção de ampliar os estudos realizados para aprofundamento de pontos não contemplados na pesquisa.

REFERÊNCIAS

BARROS, Lilian Debora. **Análise de um jogo como recurso didático para o ensino da geometria:** o jogo dos polígonos. Dissertação de mestrado. Universidade Federal de Pernambuco – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica. Recife: 2012.

BEZERRA, Francisco José Brabo. **Introdução do conceito de número fracionário e de suas representações: Uma abordagem criativa para a sala de aula.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica. São Paulo, 2001.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. (3º e 4º ciclos do ensino fundamental). Brasília: MEC, 1998.

BROLEZZI, Antônio Carlos. **A tensão entre o discreto e o contínuo na história da matemática e no ensino da matemática.** Tese de Doutorado em Educação. Universidade de São Paulo. Faculdade de Educação. São Paulo, 1996.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Tipografia Matemática, 1951.

CAILLOIS, Roger. **Os jogos e os homens:** A máscara e a vertigem. Tradução de: José Garcez Palha. Lisboa: Cotovia, 1990.

CATTO, Glória Garrido. **Registros de representação e o número racional:** uma abordagem em livro didático. Dissertação de mestrado. São Paulo: PUC, 2000.

CURY, Helena Noronha. **Análise de erros:** o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2008. Coleção Tendências em Educação Matemática.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Aprendizagem em matemática:** Registros de representação semiótica. São Paulo: Papirus, 2003.

FLEMMING, Diva Marilia. LUZ, Eliza Flemming. MELLO, Ana Claúdia Collaço de. **Tendências em educação matemática.** 2. ed. Palhoça: UnisulVirtual, 2005.

GITIRANA, Verônica; TELES, Rosinalda; BELLEMAIN, Paula M. B.; CASTRO, Airton T. de C.; CAMPOS, Iolanda; LIMA, Paulo F.; BELLEMAIN, Franck. (Orgs.). **Jogos com Sucata na Educação Matemática:** Projeto Rede. Recife: NEMAT: Ed. Universitária UFPE, 2013.

GRANDO, Regina Célia. **O jogo suas possibilidades metodológicas no processo ensino-aprendizagem da matemática.** Dissertação de Mestrado. Campinas: UNICAMP, 1995.

HUIZINGA, Johan. **Homo ludens:** O jogo como elemento na cultura. Tradução de: João Paulo Monteiro. São Paulo: Editora Perspectiva, 2000.

IFRAH, Georges. **Os números**: a história de uma grande invenção. Tradução de: Stella M. de Freitas Senra. São Paulo: Editora Globo, 1992.

KIEREN, Thomas E. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In: LESH, Richard A.; BRADBARD, David A. **Number and mensurament:** papers from a research workshop. Georgia: ERIC, 1976.

LIMA, José Mauricio Figueiredo. Iniciação ao conceito de fração e o desenvolvimento da conservação de quantidade. In: CARRAHER, Terezinha Nunes (Org.). **Aprender pensando.** 4. ed. Rio de Janeiro: Vozes, 1989.

MELO, Maria Sônia Leitão de; MONTENEGRO, Grácia Maria M.; SANTOS, Luciana Silva dos; MORAES, Maria das Dores de; BELLEMAIN, Paula Moreira Baltar. Bingo dos números racionais – Indicações didáticas. **Projeto Rede:** Jogos na educação matemática. Recife, 2011. Disponível em: <http://lematec.net/projetorede/index.php?page=bingo-dos-racionais>. Acesso em: 02/07/2014.

MONTENEGRO, Grácia Maria M.; SANTOS, Luciana Silva dos; DORES, Maria das; VIEIRA, Maria Sônia Leitão Melo; BELLEMAIN, Paula Moreira Baltar. Bingo dos Racionais. **Projeto REDE:** Jogos na educação matemática. Recife, 2011. Disponível em:<http://lematec.net/projetorede/index.php?page=bingo-dos-racionais>. Acesso em: 07/09/2014.

MUNIZ, Cristiano Alberto. **Brincar e jogar:** enlaces teóricos e metodológicos no campo da educação matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2010. Coleção Tendências em Educação Matemática.

NUNES, Terezinha; BRYANT, Peter. **Crianças fazendo matemática.** Tradução de: Sandra Costa.Porto Alegre: Artes medicas, 1997.

NUNES, Terezinha; CAMPOS, Tânia Maria Mendonça; MAGINA, Sandra; BRYANT, Peter. **Educação Matemática:** Números e operações numéricas. São Paulo: Cortez, 2005.

PERNAMBUCO.Secretaria de Educação de Pernambuco.**Parâmetros para a Educação Básica do estado de Pernambuco:** Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio. Recife: SEDUC-PE, 2012.

SANTOS, Tarcísio Rocha dos. **Mankala Colhe Três:** jogando e explorando conhecimentos matemáticos por meio de situações didáticas. Dissertação. Universidade Federal de Pernambuco – Programa de Pós Graduação em Educação Matemática e Tecnológica. Recife: 2014.

SANTOS, Luciana Silva dos. **Análise dos efeitos didáticos emergentes de uma sequência de atividades na aprendizagem do significado parte/todo do número racional.** Dissertação. Universidade Federal Rural de Pernambuco - Programa de Pós Graduação em Ensino das Ciências. Recife, 2010.

SILVA, Marithiça Flaviana Florentino da. **Frações e grandezas geométricas: um estudo exploratório da abordagem em livros didáticos.** Dissertação. Universidade Federal de Pernambuco – Programa de Pós Graduação em Educação. Recife, 2004.

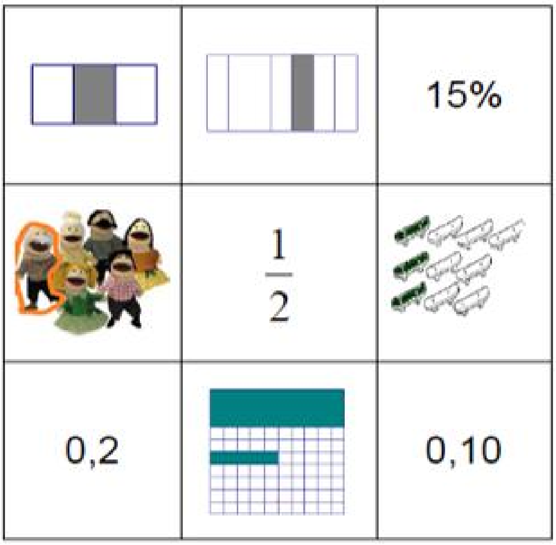
SMOLE, Katia Stocco; DINIZ, Maria Ignez; MILANE, Estela. **Cadernos do Mathema:** jogos de matemática de 6º ao 9º ano. Porto Alegre: ATMED, 2007.

VERGNAUD, Gérard. **A criança, a matemática e a realidade:** problemas de ensino da matemática na escola elementar. 3. ed.Tradução de: Maria Lúcia Faria Moro. Curitiba: UFPR, 2009

APÊNDICE

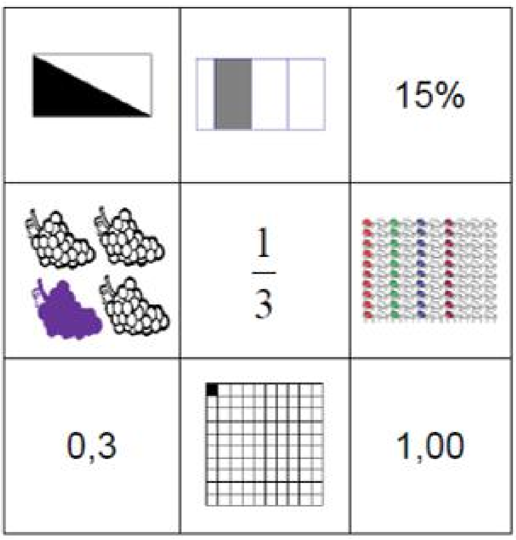
Apêndice A – cartelas do jogo bingo dos números racionais com seus respectivos mapeamentos

CARTELA 1A



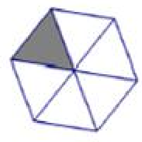
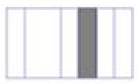
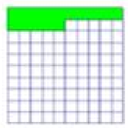
UM TERÇO (Figura Contínua)	**UM SETIMO** (Figura Contínua. Distrator, não consta nas fichas de chamada)	**QUINZE POR CENTO** (Numérico percentual)
UM SEXTO (Figura Discreta)	**UM MEIO** (Numérico Fração Unitária)	**TRÊS DÉCIMOS** (Figura Discreta)
DOIS DECIMOS (Numérico Decimal com Uma Casa)	**TRINTA E CINCO POR CENTO** (Figura Contínua)	**DEZ CENTÉSIMOS** (Numérico Decimal com Duas Casas)

CARTELA 1B



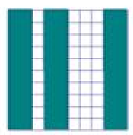
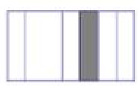
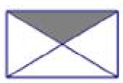
UM MEIO (Figura Contínua)	**DOIS SETIMOS** (Figura Contínua. Distrator, não consta nas fichas de chamada)	**QUINZE POR CENTO** (Numérico percentual)
UM QUARTO (Figura Discreta)	**UM TERÇO** (Numérico Fração Unitária)	**QUARENTA POR CENTO** (Figura Discreta)
TRÊS DÉCIMOS (Numérico Decimal com Uma Casa)	**UM POR CENTO** (Figura Contínua)	**UM** (Numérico Decimal com Duas Casas)

CARTELA 1C

		60%
	$\frac{1}{4}$	
0,7		1,25

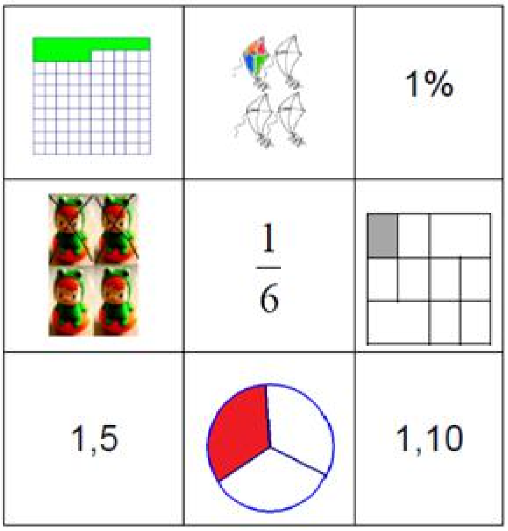
UM SEXTO (Figura Contínua)	**UM SETIMO** (Figura Contínua. Distrator, não consta nas fichas de chamada)	**SESSENTA POR CENTO** (Numérico percentual)
DOIS TERÇOS (Figura Discreta)	**UM QUARTO** (Numérico Fração Unitária)	**UM MEIO** (Figura Discreta)
SETE DÉCIMOS (Numérico Decimal com Uma Casa)	**QUINZE POR CENTO** (Figura Contínua)	**UM INTEIRO E VINTE E CINCO CENTÉSIMOS** (Numérico Decimal com Duas Casas)

CARTELA 2A

		35%
	$\frac{2}{3}$	
0,9		1,75

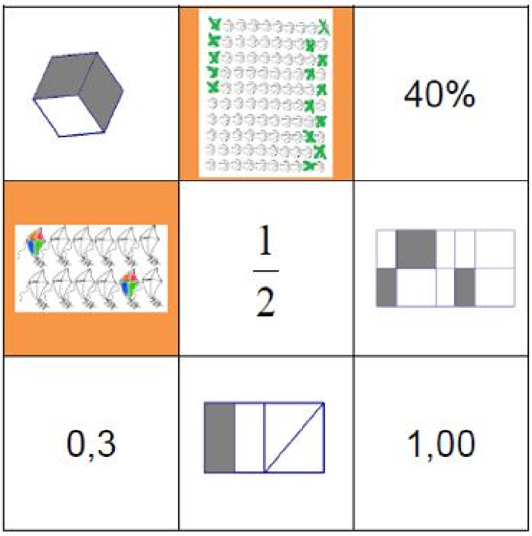
SESSENTA POR CENTO (Figura Contínua)	**UM SEXTO** (Figura discreta)	**TRINTA E CINCO POR CENTO** (Numérico percentual)
UM MEIO (Figura Discreta)	**DOIS TERÇOS** (Numérico Fração Unitária)	**UM SETIMO** (Figura Contínua. Distrator, não consta nas fichas de chamada)
NOVE DÉCIMOS (Numérico Decimal com Uma Casa)	**UM QUARTO** (Figura Contínua)	**UM INTEIRO E SETENTA E CINCO CENTÉSIMOS** (Numérico Decimal com Duas Casas)

CARTELA 2B



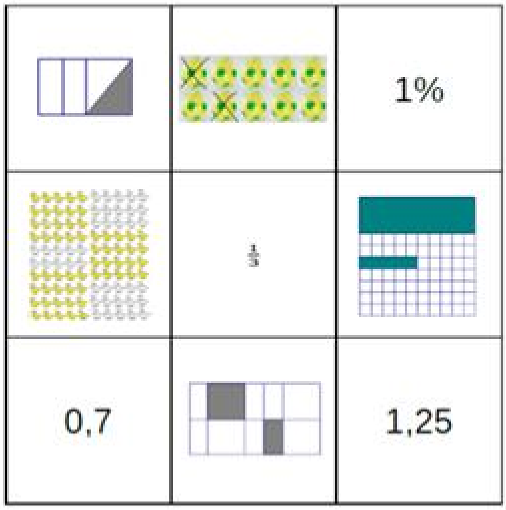
QUINZE POR CENTO (Figura Contínua)	**UM QUARTO** (Figura discreta)	**UM POR CENTO** (Numérico percentual)
UM MEIO (Figura Discreta)	**UM SEXTO** (Numérico Fração Unitária)	**UM DOZE AVOS** (Figura Contínua. Distrator, não consta nas fichas de chamada)
UM INTEIRO E CINCO DÉCIMOS (Numérico Decimal com Uma Casa)	**UM TERÇO** (Figura Contínua)	**UM INTEIRO E DEZ CENTÉSIMOS** (Numérico Decimal com Duas Casas)

CARTELA 2C



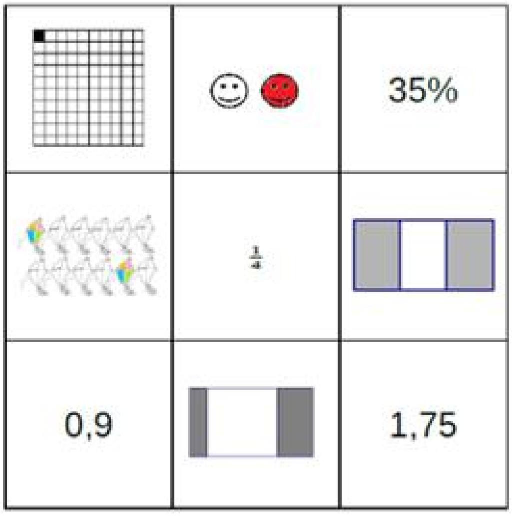
DOIS TERÇOS (Figura Contínua)	**QUINZE POR CENTO** (Figura discreta)	**QUARENTA POR CENTO** (Numérico percentual)
UM SEXTO (Figura Discreta)	**UM MEIO** (Numérico Fração Unitária)	**QUATRO CATORSE AVOS** (Figura Contínua. Distrator, não consta nas fichas de chamada)
TRÊS DÉCIMOS (Numérico Decimal com Uma Casa)	**UM QUARTO** (Figura Contínua)	**UM** (Numérico Decimal com Duas Casas)

CARTELA 3A



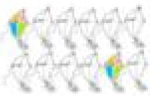
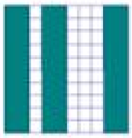
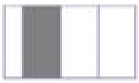
UM QUARTO (Figura Contínua)	**UM SEXTO** (Figura discreta)	**UM POR CENTO** (Numérico percentual)
SESSENTA POR CENTO (Figura Discreta)	**UM TERÇO** (Numérico Fração Unitária)	**TRINTA E CINCO POR CENTO** (Figura Contínua)
SETE DECIMOS (Numérico Decimal com Uma Casa)	**TRES CATORSE AVOS** (Figura Contínua. Distrator, não consta nas fichas de chamada)	**UM INTEIRO E VINTE E CINCO CENTESIMOS** (Numérico Decimal com Duas Casas)

CARTELA 3B



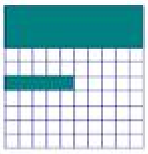
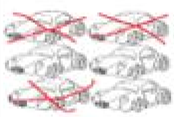
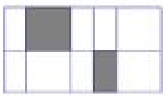
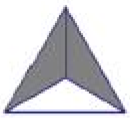
UM POR CENTO (Figura Contínua)	**UM MEIO** (Figura discreta)	**TRINTA E CINCO POR CENTO** (Numérico percentual)
UM SEXTO (Figura Discreta)	**UM QUARTO** (Numérico Fração Unitária)	**DOIS TERÇOS** (Figura Contínua)
NOVE DECIMOS (Numérico Decimal com Uma Casa)	**TRES SETIMOS** (Figura Contínua. Distrator, não consta nas fichas de chamada)	**UM INTEIRO E SETENTA E CINCO CENTESIMOS** (Numérico Decimal com Duas Casas)

CARTELA 3C

		1%
	$\frac{2}{3}$	
1,5		1,10

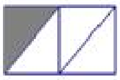
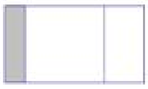
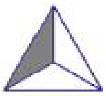
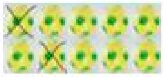
UM MEIO (Figura Contínua)	**UM QUARTO** (Figura discreta)	**UM POR CENTO** (Numérico percentual)
UM SEXTO (Figura Discreta)	**DOIS TERÇOS** (Numérico Fração Unitária)	**SESSENTA POR CENTO** (Figura Contínua)
UM INTEIRO E CINCO DECIMOS (Numérico Decimal com Uma Casa)	**DOIS SETIMOS** (Figura Contínua. Distrator, não consta nas fichas de chamada)	**UM INTEIRO E DEZ CENTESIMOS** (Numérico Decimal com Duas Casas)

CARTELA 4A

		15%
	$\frac{1}{6}$	
0,2		0,10

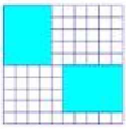
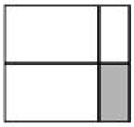
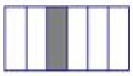
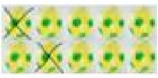
TRINTA E CINCO PORCENTO (Figura Contínua)	**UM MEIO** (Figura Discreta)	**QUINZE PORCENTO** (Numérico Percentual)
TRÊS CATORZE AVOS (Figura Contínua. DISTRATOR, não contém nas fichas de chamada)	**UM SEXTO** (Numérico Fração Unitária)	**DOIS TERÇOS** (Figura Contínua)
DOIS DECIMOS (Numérico Decimal com uma casa)	**UM QUARTO** (Figura discreta)	**DEZ CENTÉSIMOS** (Numérico Decimal com Duas Casas)

CARTELA 4B

		60%
	$\frac{1}{2}$	
0,3		1,25

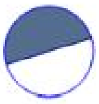
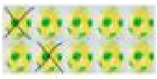
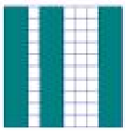
UM QUARTO (Figura Contínua)	**UM SEXTO** (Figura Discreta)	**SSENTA PORCENTO** (Numérico Percentual)
UM SÉTIMO (Figura Contínua. DISTRATOR, não contém nas fichas de chamada)	**UM MEIO** (Numérico Fração Unitária)	**UM TERÇO** (Figura Contínua)
TRÊS DECIMOS (Numérico Decimal com uma casa)	**DOIS DÉCIMOS** (Figura discreta)	**UM INTEIRO E VINTE E CINCO CENTÉSIMOS** (Numérico Decimal com Duas Casas)

CARTELA 4C

		35%
	$\frac{1}{3}$	
0,3		1,75

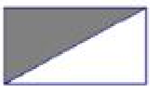
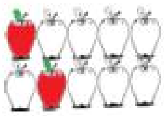
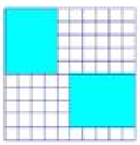
QUARENTA POR CENTO (Figura Contínua)	**UM MEIO** (Figura Discreta)	**TRINTA E CINCO PORCENTO** (Numérico Percentual)
UM OITAVO (Figura Contínua. DISTRATOR, não contém nas fichas de chamada)	**UM TERÇO** (Numérico Fração Unitária)	**UM SEXTO** (Figura Contínua)
TRES DECIMOS (Numérico Decimal com uma casa)	**DOIS DECIMOS** (Figura discreta)	**UM INTEIRO E SETENTA E CINCO CENTESIMOS** (Numérico Decimal com Duas Casas)

CARTELA 5A

	1,10	
1,2	$\frac{1}{4}$	0,7
	1%	

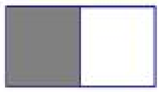
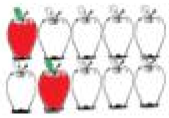
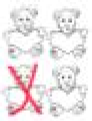
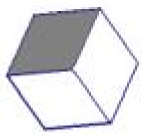
UM MEIO (Figura Contínua)	**M INTEIRO E DEZ DÉCIMOS** (Numérico Decimal com Duas Casas)	**UM SEXTO** (Figura discreta)
UM INTEIRO E DOIS DÉCIMOS (Figura Contínua. DISTRATOR, não contém nas fichas de chamada)	**UM QUARTO** (Numérico Fração Unitária)	**SETE DÉCIMOS** (Numérico Decimal com uma casa)
DOIS DÉCIMOS (Figura discreta)	**UM PORCENTO** (Numérico Percentual)	**SESSENTA PORCENTO** (Figura Contínua)

CARTELA 5B

	1,00	
2,10	$\frac{2}{3}$	0,9
	15%	

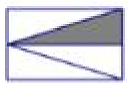
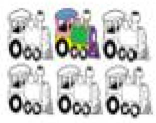
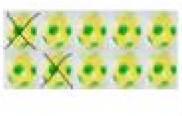
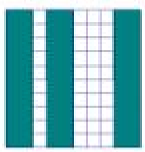
UM MEIO (Figura Contínua)	**UM** (Numérico Decimal com Duas Casas)	**UM QUARTO** (Figura discreta)
DOIS INTEIROS E DOIS DÉCIMOS (Figura Contínua. DISTRATOR, não contém nas fichas de chamada)	**DOIS TERÇOS** (Numérico Fração Unitária)	**NOVE DÉCIMOS** (Numérico Decimal com uma casa)
DOIS DÉCIMOS (Figura discreta)	**QUINZE PORCENTO** (Numérico Percentual)	**QUARENTA PORCENTO** (Figura Contínua)

CARTELA 5C

	1,25	
1,3	$\frac{1}{6}$	1,5
	40%	

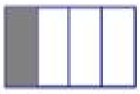
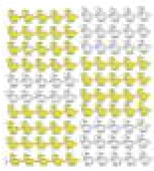
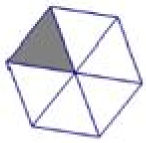
UM MEIO (Figura Contínua)	**UM** (Numérico Decimal com Duas Casas)	**UM QUARTO** (Figura discreta)
DOIS INTEIROS E DOIS DÉCIMOS (Figura Contínua. DISTRATOR, não contém nas fichas de chamada)	**DOIS TERÇOS** (Numérico Fração Unitária)	**NOVE DÉCIMOS** (Numérico Decimal com uma casa)
DOIS DÉCIMOS (Figura discreta)	**QUINZE PORCENTO** (Numérico Percentual)	**QUARENTA PORCENTO** (Figura Contínua)

CARTELA 6A

	7,10	
1,75	$\frac{1}{2}$	0,7
	35%	

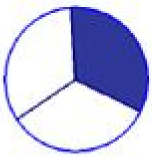
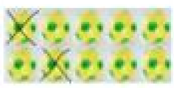
UM MEIO (Figura Contínua)	**UM** (Numérico Decimal com Duas Casas. DISTRATOR, não está contida nas fichas de chamada)	**UM SEXTO** (Figura discreta)
UM INTEIRO E SETENTA E CINCO DÉCIMOS (Numérico decimal com duas casas)	**UM MEIO** (Numérico Fração Unitária)	**SETE DÉCIMOS** (Numérico Decimal com uma casa)
DOIS DÉCIMOS (Figura discreta)	**TRINTA E CINCO PORCENTO** (Numérico Percentual)	**SESSENTA PORCENTO** (Figura Contínua)

CARTELA 6B

	2/1	
1,10	$\frac{1}{3}$	0,9
	1%	

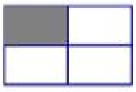
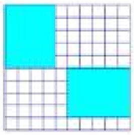
UM QUARTO (Figura Contínua)	**DOIS** (Numérico, fração aparente. DISTRATOR, não está contida nas fichas de chamada)	**UM MEIO** (Figura discreta)
UM INTEIRO E DEZ DÉCIMOS (Numérico decimal com duas casas)	**UM TERÇO** (Numérico Fração Unitária)	**NOVE DÉCIMOS** (Numérico Decimal com uma casa)
SESSENTA PORCENTO (Figura discreta)	**UM PORCENTO** (Numérico Percentual)	**UM SEXTO** (Figura Contínua)

CARTELA 6C

	15,100	
0,10	$\frac{1}{4}$	1,5
	15%	

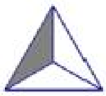
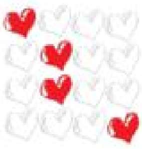
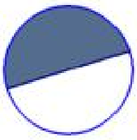
UM TERÇO (Figura Contínua)	**QUINZE INTEIROS E CEM CENTÉSIMOS** (Numérico Decimal com três casas. DISTRATOR, não	**UM SEXTO** (Figura discreta)
DEZ DÉCIMOS (Numérico decimal com duas casas)	**UM QUARTO** (Numérico Fração Unitária)	**UM INTEIRO E CINCO DÉCIMOS** (Numérico Decimal com uma casa)
DOIS DÉCIMOS (Figura discreta)	**QUINZE PORCENTO** (Numérico Percentual)	**UM MEIO** (Figura Contínua)

CARTELA 7A

	1,75	
0,2	$\frac{2}{3}$	40,100
	15%	

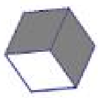
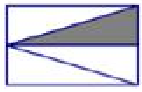
UM TERÇO (Figura Contínua)	**QUINZE INTEIROS E CEM CENTÉSIMOS** (Numérico Decimal com duas casas)	**UM MEIO** (Figura discreta)
DOIS DÉCIMOS (Numérico decimal com uma casa)	**DOIS TERÇOS** (Numérico Fração Unitária)	**QUARENTA INTEIROS E CEM CENTÉSIMOS** (Numérico Decimal com três casas. DISTRATOR, não está contido nas fichas de chamada)
UM SEXTO (Figura discreta)	**QUINZE PORCENTO** (Numérico Percentual)	**QUARENTA PORCENTO** (Figura Contínua)

CARTELA 7B

	1,10	
0,3	$\frac{1}{6}$	1,4
	60%	

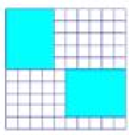
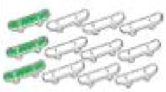
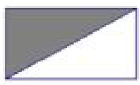
UM TERÇO (Figura Contínua)	**UM INTEIROS E DEZ DÉCIMOS** (Numérico Decimal com duas casas)	**UM PORCENTO** (Figura discreta)
DOIS DÉCIMOS (Numérico decimal com uma casa)	**DOIS TERÇOS** (Numérico Fração Unitária)	**UM INTEIRO E QUATRO DÉCIMOS** (Numérico Decimal com uma casa. DISTRATOR, não está contido nas fichas de chamada)
UM QUARTO (Figura discreta)	**SESSENTA PORCENTO** (Numérico Percentual)	**UM MEIO** (Figura Contínua)

CARTELA 7C

	0,10	
0,7	$\frac{1}{2}$	2,3
	35%	

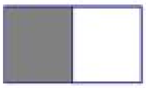
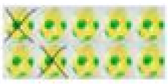
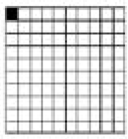
DOIS TERÇOS (Figura Contínua)	**DEZ CENTESIMOS** (Numérico Decimal com duas casas)	**UM SEXTO** (Figura discreta)
SETE DÉCIMOS (Numérico decimal com uma casa)	**UM MEIO** (Numérico Fração Unitária)	**DOIS INTEIROS E TRÊS DÉCIMOS** (Numérico Decimal com uma casa. DISTRATOR, não está contido nas fichas de chamada)
DOIS DÉCIMOS (Figura discreta)	**TRINTA E CINCO PORCENTO** (Numérico Percentual)	**UM QUARTO** (Figura Contínua)

CARTELA 8A

	1,00	
1%	$\frac{1}{3}$	0,9
	1,6	

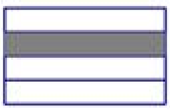
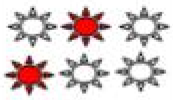
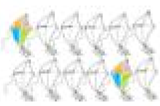
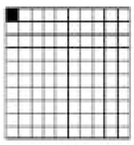
VINTE PORCENTO (Figura Contínua)	**UM** (Numérico Decimal com duas casas)	**UM SEXTO** (Figura discreta)
UM PORCENTO (Numérico Percentual)	**UM TERÇO** (Numérico Fração Unitária)	**NOVE DÉCIMOS** (Numérico Decimal com uma casa)
UM QUARTO (Figura discreta)	**UM INTEIRO E SEIS DÉCIMOS** (Numérico Decimal. DISTRATOR, não está contido nas fichas de chamada)	**UM MEIO** (Figura Contínua)

CARTELA 8B

	1,25	
15%	$\frac{1}{4}$	1,5
	$\frac{3}{1}$	

UM MEIO (Figura Contínua)	**UM INTEIRO E VINTE E CINCO CENTESIMOS** (Numérico Decimal com duas casas)	**UM TERÇO** (Figura discreta)
QUINZE PORCENTO (Numérico Percentual)	**UM QUARTO** (Numérico Fração Unitária)	**UM INTEIROE CINCO DÉCIMOS** (Numérico Decimal com uma casa)
DOIS DÉCIMOS (Figura discreta)	**TRÊS** (Numérico, fração aparente. DISTRATOR, não está contido nas fichas de chamada)	**UM PORCENTO** (Figura Contínua)

CARTELA 8C

	1,75	
40%	$\frac{1}{2}$	0,2
	$\frac{6}{1}$	

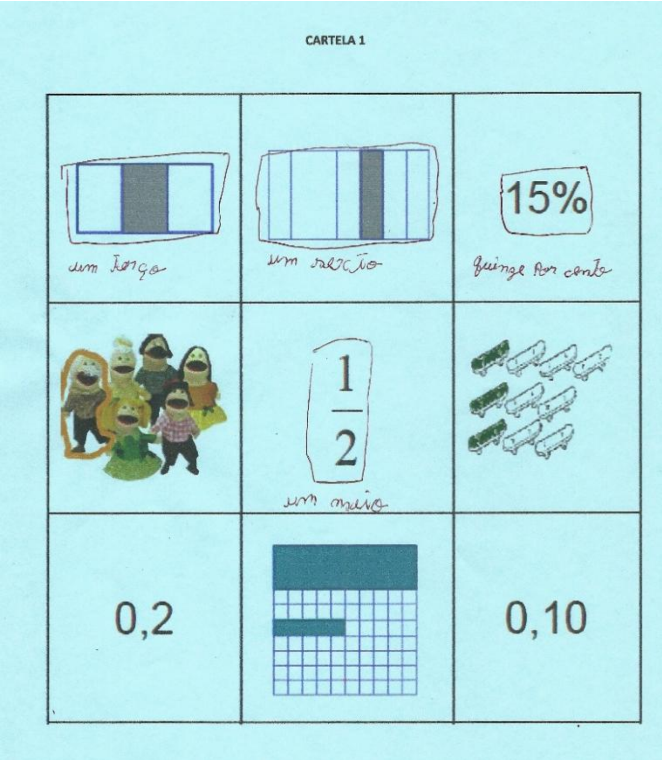
UM QUARTO (Figura Contínua)	**UM INTEIRO E SETENTA E CINCO CENTESIMOS** (Numérico Decimal com duas casas)	**UM TERÇO** (Figura discreta)
QUARENTA PORCENTO (Numérico Percentual)	**UM MEIO** (Numérico Fração Unitária)	**DOIS DÉCIMOS** (Numérico Decimal com uma casa)
UM SEXTO (Figura discreta)	**SEIS** (Numérico, fração aparente. DISTRATOR, não está contido nas fichas de chamada)	**UM PORCENTO** (Figura Contínua)

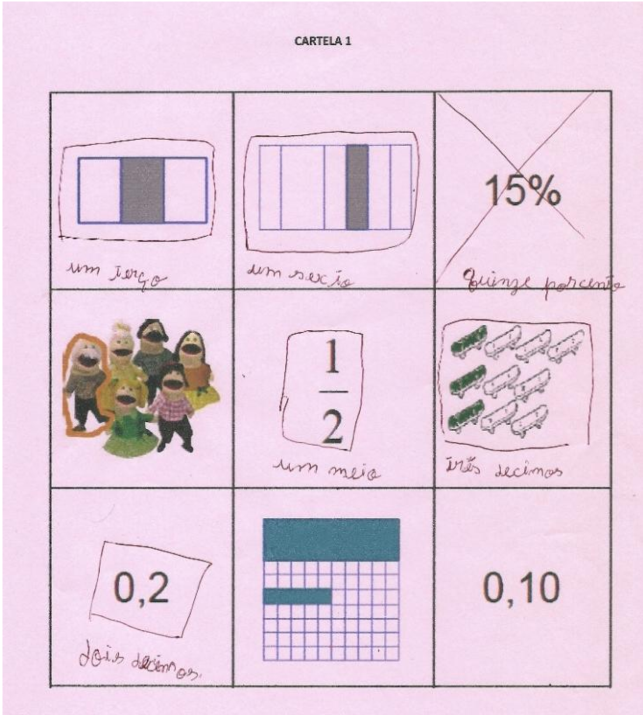
ANEXOS

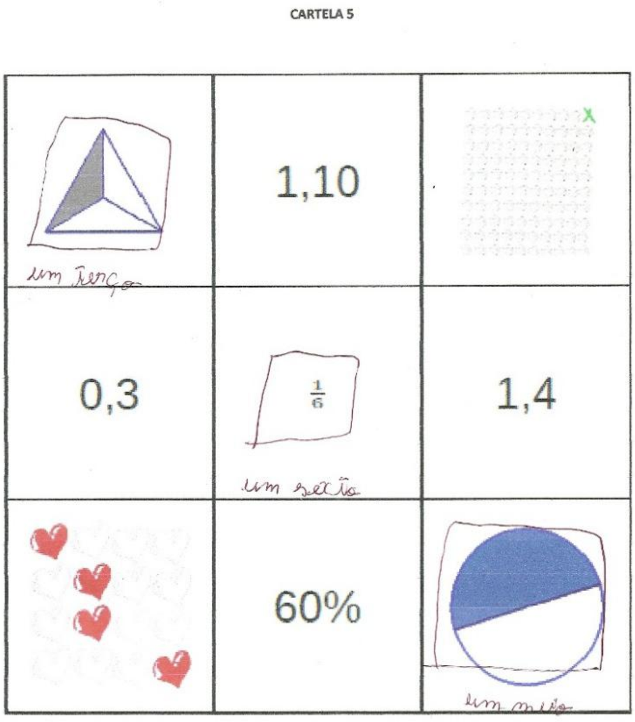
Anexo A – Cartelas do jogo bingo dos números racionais marcadas pelos estudantes do G1 na realização do experimento

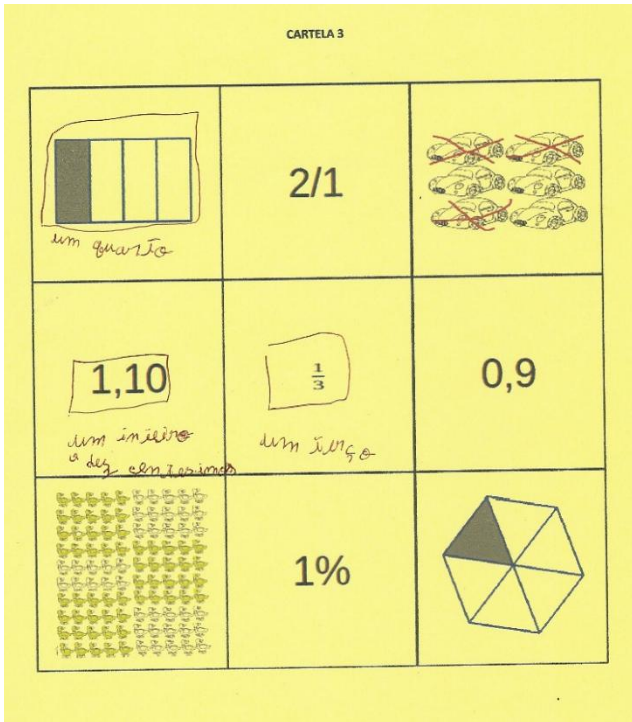
1 Cartelas Utilizadas pelo Grupo 1

<u>1.1 Dupla um</u>

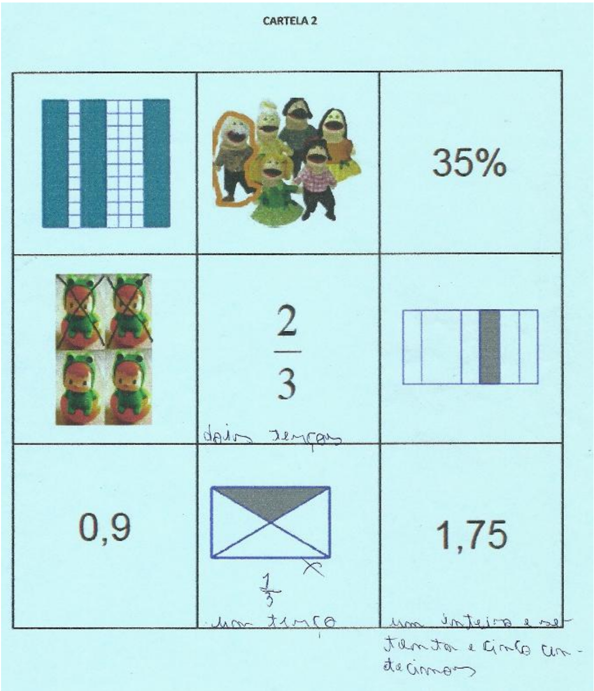


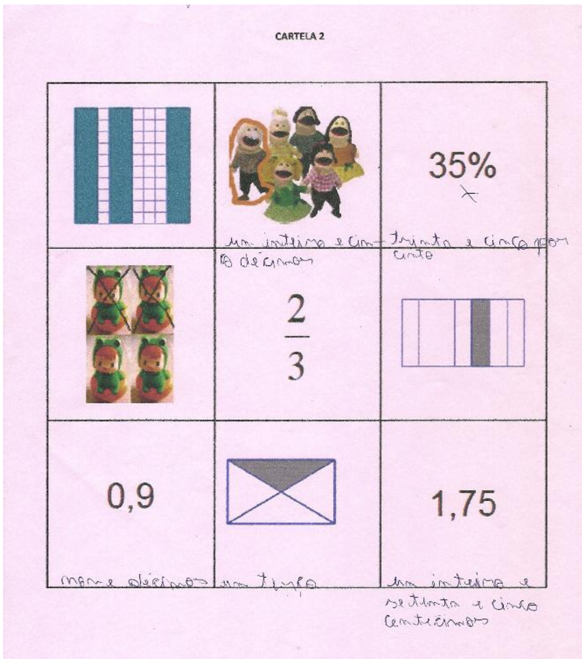


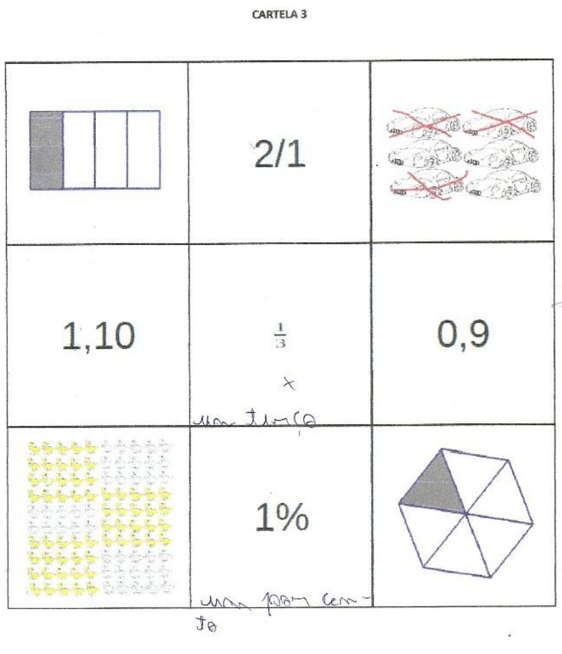


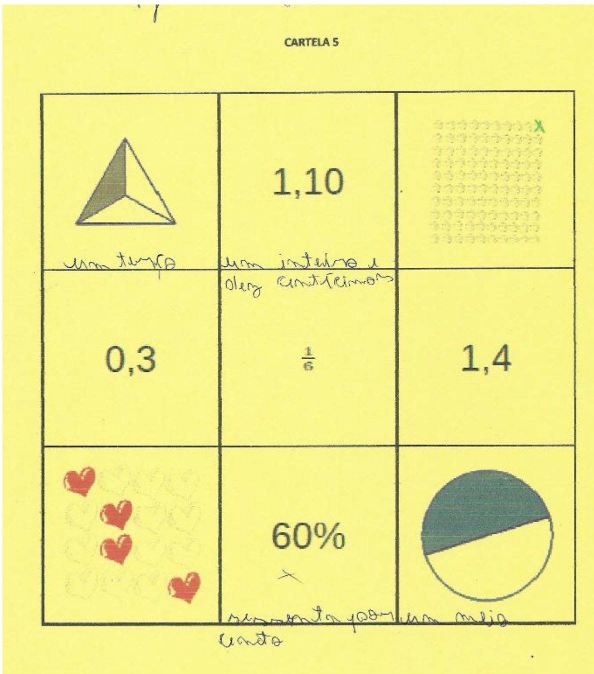


<u>1.2 Dupla dois</u>

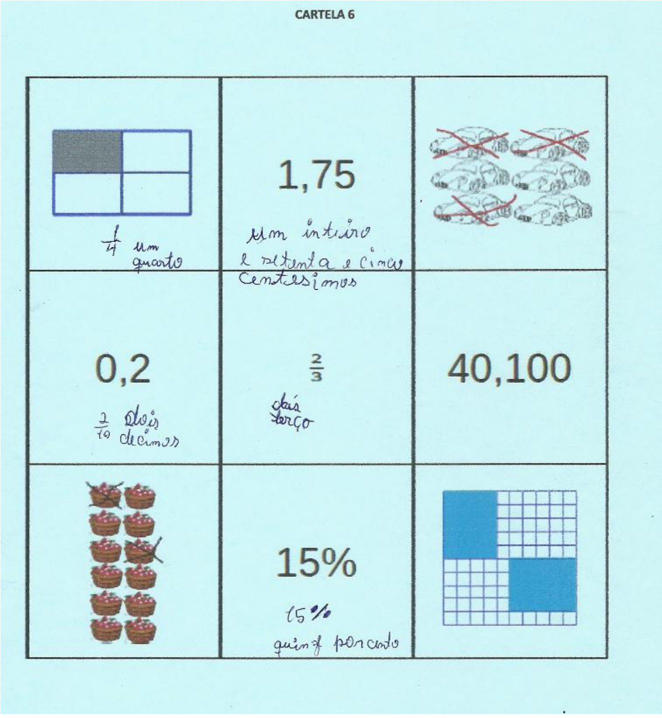


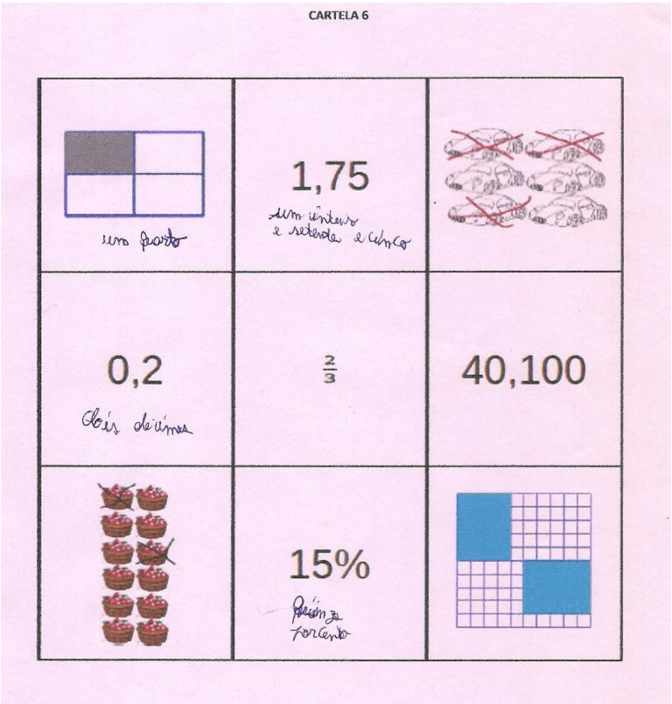


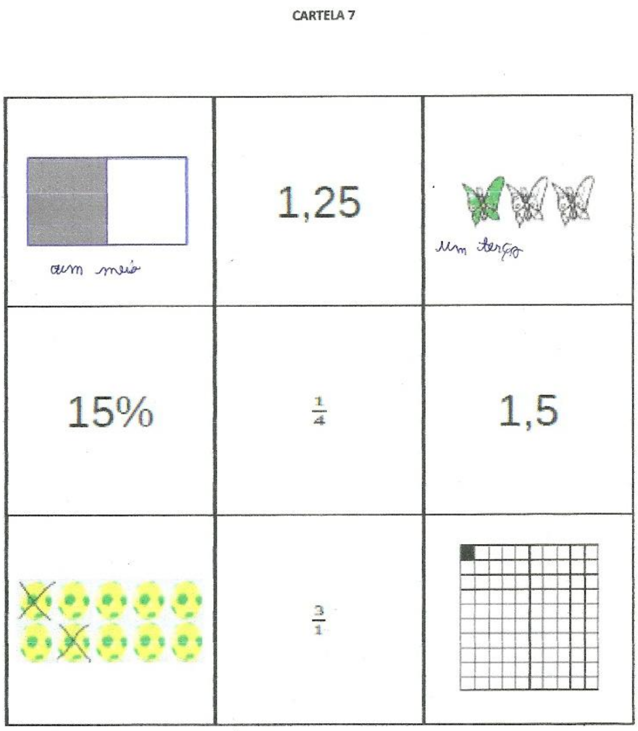


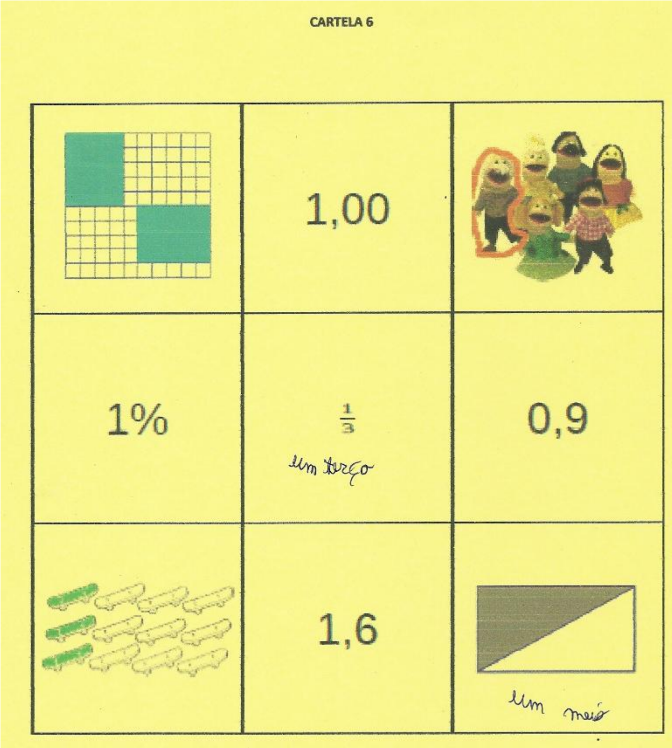


1.3 Dupla três

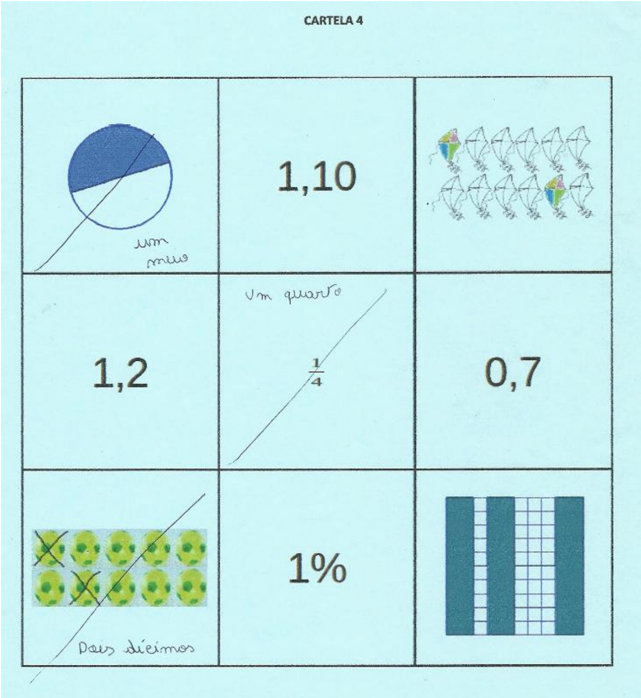


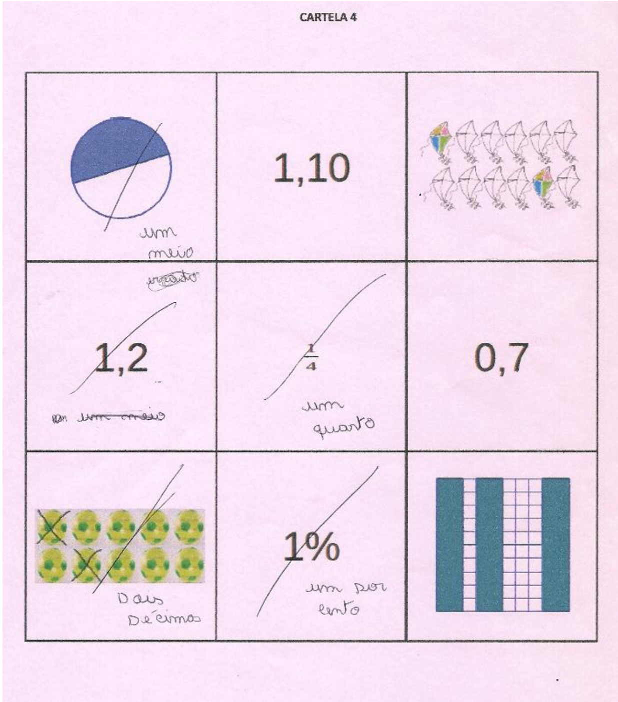


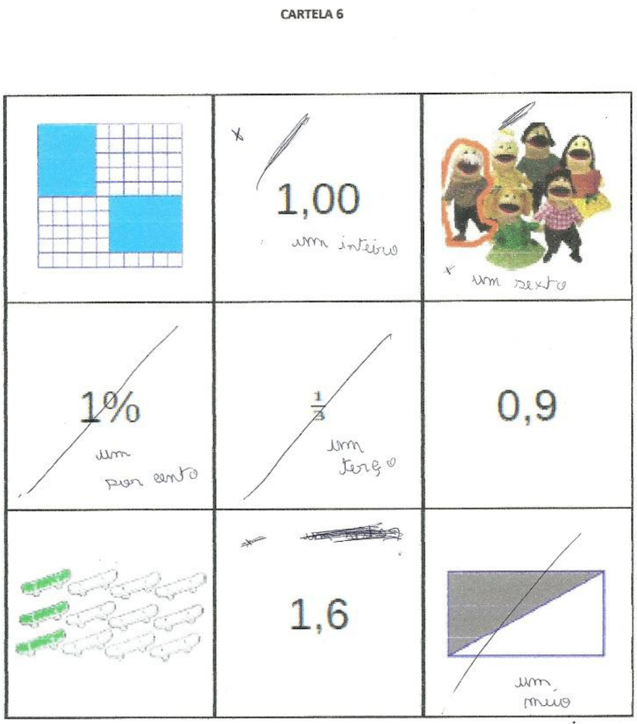


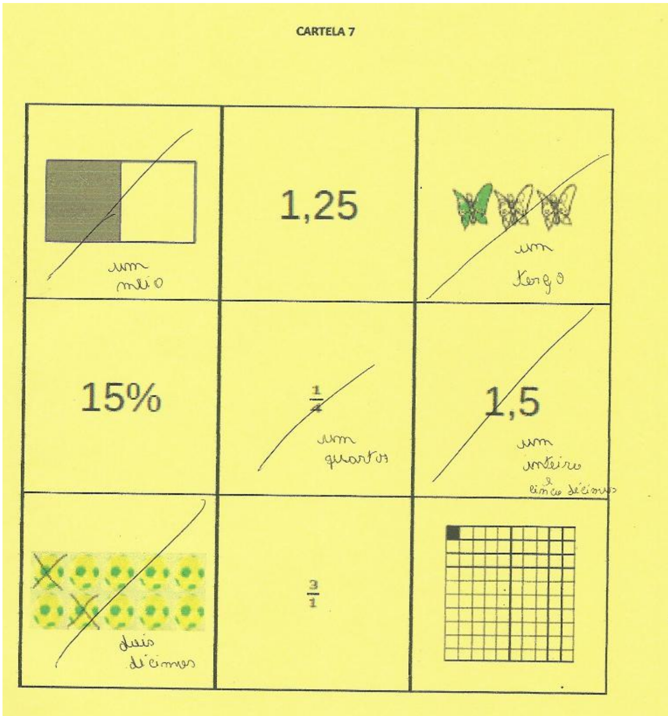


2.4 Dupla quatro

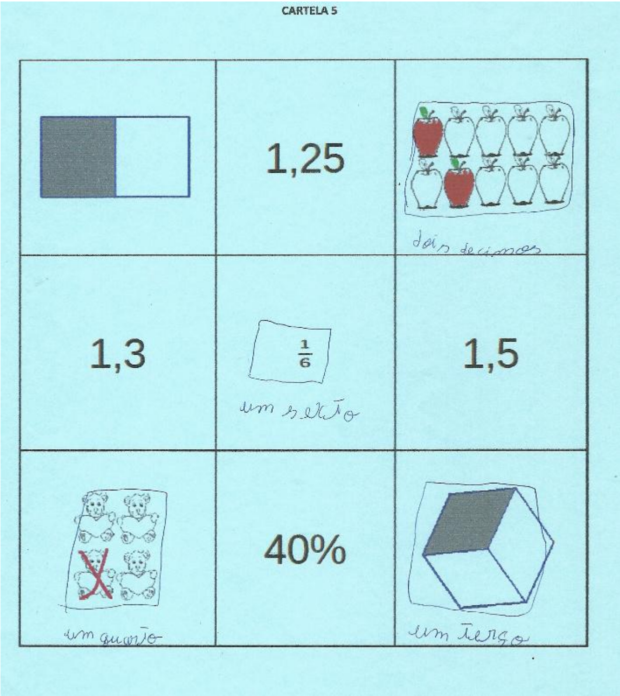


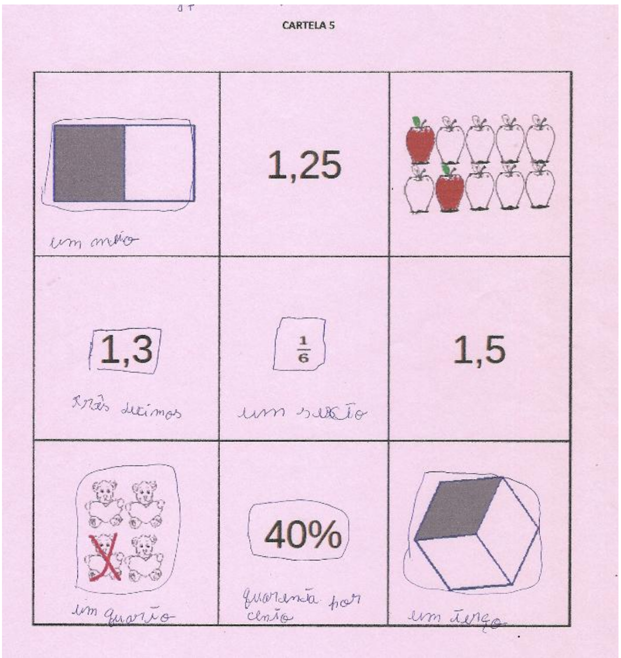


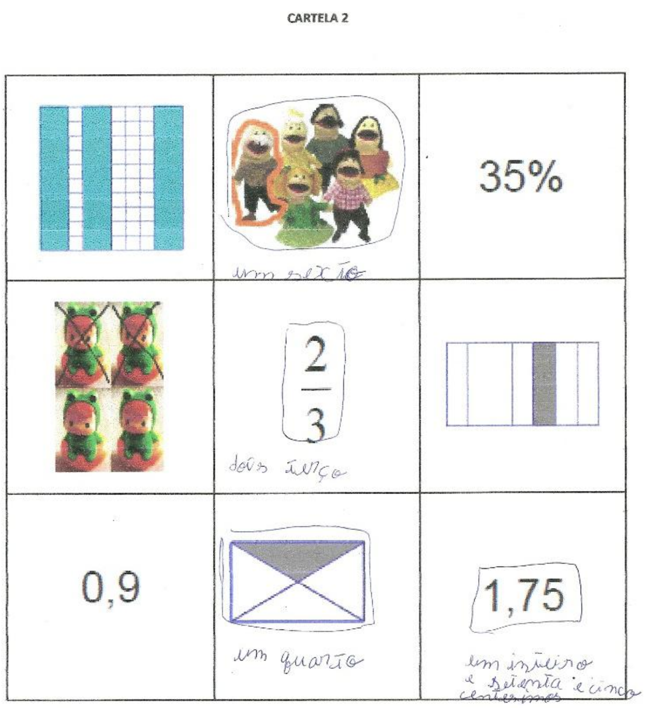


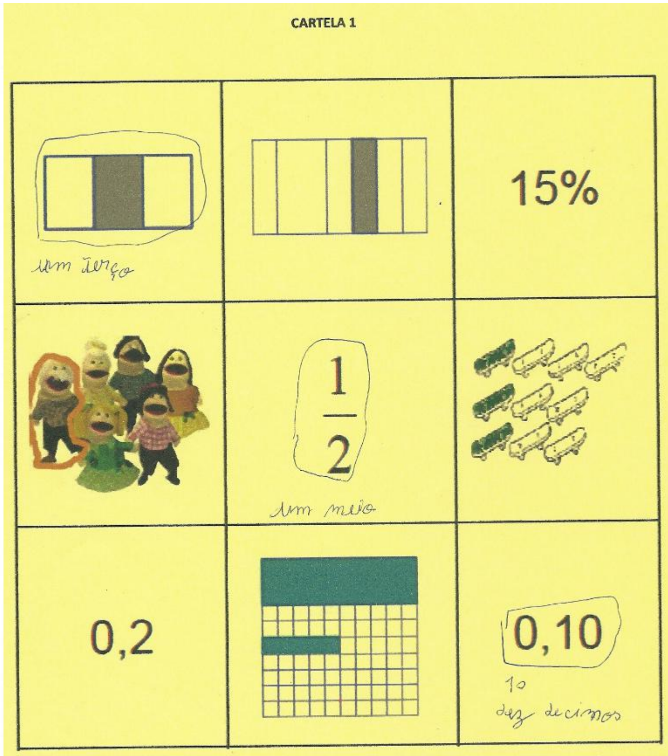


2.5 Dupla cinco

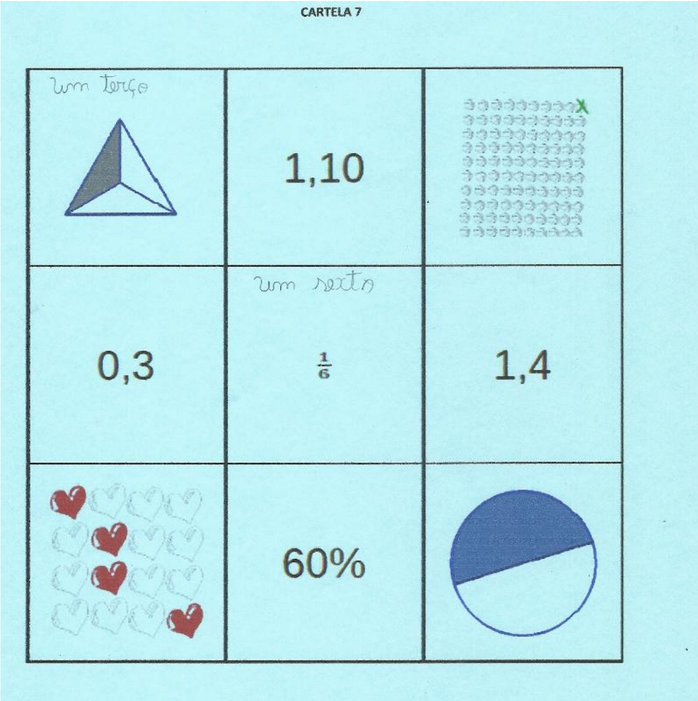


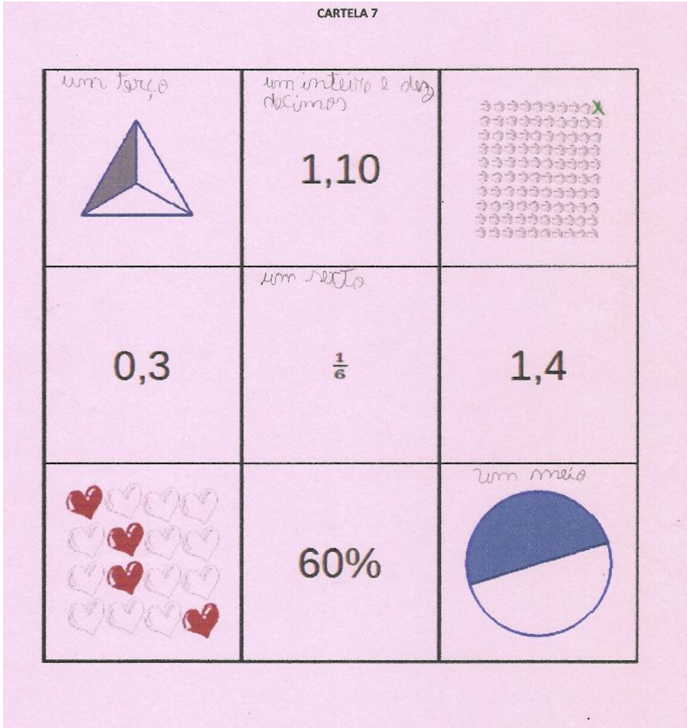


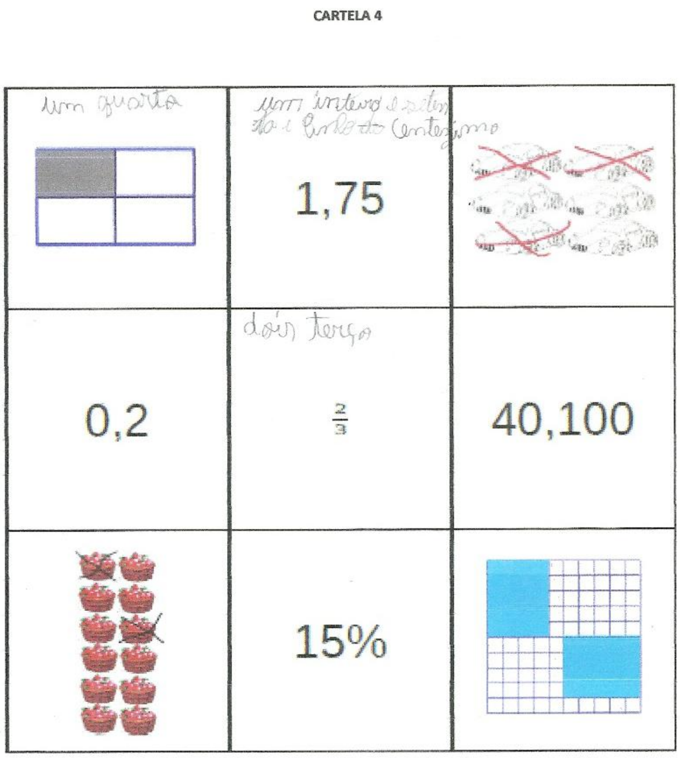


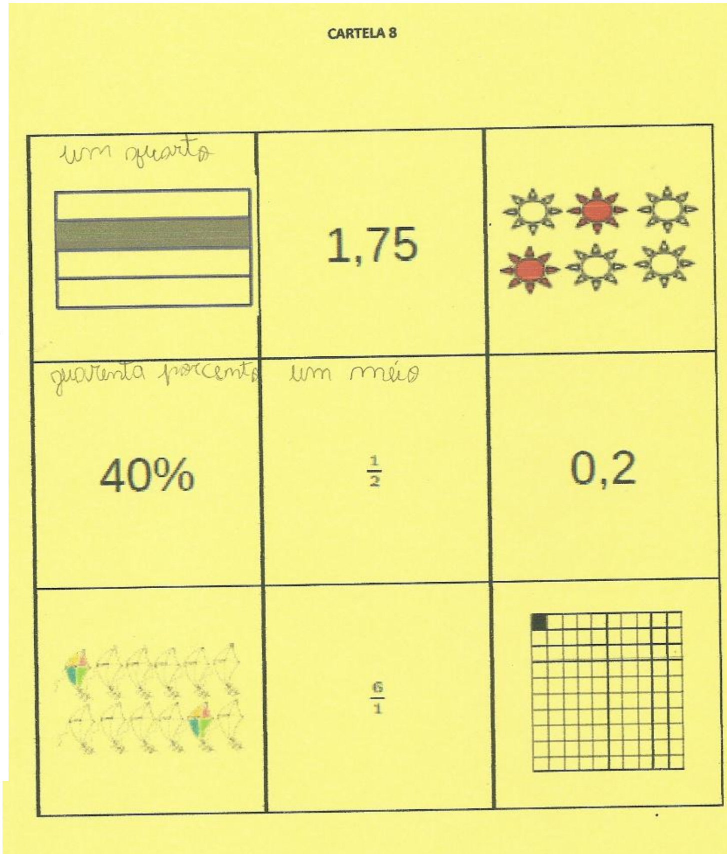


2.6 Dupla seis









2.7 Dupla sete