



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

TIAGO ARAÚJO DE PAULA LIMA

**BILHARES TRIANGULARES IRRACIONAIS E ESTÁDIOS ELÍPTICOS:
MIXING, CAOS E QUANTIZAÇÃO**

Recife
2017

TIAGO ARAÚJO DE PAULA LIMA

**BILHARES TRIANGULARES IRRACIONAIS E ESTÁDIOS ELÍPTICOS: *MIXING*, CAOS E
QUANTIZAÇÃO**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em Física da Universidade Federal de Pernambuco,
como requisito parcial para a obtenção do título de
Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Flávio Menezes de Aguiar.

Recife
2017

Catálogo na fonte
Bibliotecário Joana D'Arc Leão Salvador CRB 4-572

L732b Lima, Tiago Araújo de Paula.
 Bilhares triangulares irracionais e estádios elípticos: Mixing, Caos e
 Quantização / Tiago Araújo de Paula Lima . – 2017.
 110 f.: fig.

 Orientador: Flávio Menezes de Aguiar .
 Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN.
 Física, Recife, 2017.
 Inclui referências, apêndices e anexo.

 1. Física teórica e computacional. 2. Dinâmica não-linear. 3. Caos.
 4. Quantização. I. Aguiar, Flávio Menezes de (Orientador). II. Título.

 530.1 CDD (22. ed.) UFPE-FQ 2017-32

TIAGO ARAÚJO DE PAULA LIMA

**BILHARES TRIANGULARES IRRACIONAIS E ESTÁDIOS ELÍPTICOS: *MIXING*,
CAOS E QUANTIZAÇÃO**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Física.

Aprovada em: 15/02/2017.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Flávio Menezes de Aguiar
Orientador
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. José Roberto Rios Leite
Examinador Interno
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Fernando Roberto de Luna Parisio Filho
Examinador Interno
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Alfredo Miguel Ozorio de Almeida
Examinador Externo
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Prof. Dr. Hugo Leonardo Davi de Souza Cavalcante
Examinador Externo
Universidade Federal da Paraíba

Aos meus pais

Agradecimentos

O meu primeiro agradecimento não poderia deixar de ser aos meus pais, Glória e Sérgio, vocês são meus principais apoiadores e responsáveis por me fazer chegar até aqui. Torcida reforçada por João, primas, primos, tias, tios e vós, serei sempre grato a vocês.

Agradeço aos amigos e colegas, que me ajudaram de maneira direta ou indireta. Marquinho, Aline, Valéria, Taty, Osmar, Hugo, Pablo, Jeca, Mários, Lana, Maelyson, Bruna, Eglanio, Chico, Débora, Victor, Maria, Rebecas, Saulo, Eduardos, Tiagos, Kainã, Florentino, Cecília, Paulão, Pacelli, João Victor, Pedros, Ricardo, Fillipe, Gabriel, Raoni, Alison, Adson, Léos, Wendson, Plínio, Ítalo, Raúl, Raphael, Pamela, Davyd e Joyce, cada um de vocês contribuiu para esse trabalho. Alguns com sugestões e ensinamentos, outros com seus incentivos e parcerias. Seja qual tenha sido a forma que cada um de vocês esteve comigo, espero ter feito ou um dia fazer o mesmo por vocês.

Meu obrigado direto ao provedor das idéias, o Prof. Flávio Aguiar. Suas orientações e desafios propostos durante esse trabalho só me fizeram crescer, bem como as disciplinas que tive a oportunidade de cursar com você.

*E já que nada temos
só carregaremos
peso que ajude a subir.
-SIBA*

Resumo

Em mecânica clássica, o caos é caracterizado por uma forte dependência das trajetórias no espaço de fases com suas condições iniciais. Esta dependência é comumente quantificada por um expoente de Lyapunov positivo. Mais geralmente, a teoria ergódica dos sistemas dinâmicos os classifica nos conjuntos simplesmente ergódico (E), *mixing* (M), Kolmogorov (K) e Bernoulli (B). Apenas os sistemas K e B são caóticos. Protótipos simples nessa teoria são os bilhares, cavidades planas onde uma partícula move-se livremente entre colisões elásticas com a fronteira. Esta dinâmica conservativa pode variar de regular a caótica, dependendo apenas da geometria da borda. Em mecânica quântica, o princípio da incerteza inviabiliza uma caracterização do caos baseada em trajetórias. Assim, os resultados apresentados nesta tese procuram contribuir para este tema desafiador e que tem sido de grande interesse nas últimas décadas: a quantização de sistemas classicamente caóticos. Aqui, apresentamos resultados numéricos sobre propriedades clássicas e quânticas de uma família de Bilhares em Triângulos Irracionais (BTIs) e de Bilhares em Estádios Elípticos (BEEs). A motivação para o estudo dos BTIs é que classicamente polígonos nunca são caóticos, mas uma conjectura proposta por Casati e Prosen (CP) sugere que BTIs são fortemente *mixing*. Para os BEEs, a conjectura de Markarian e colaboradores (Mc) remete a uma possível linha de transição entre um espaço de fases misto e outro completamente caótico. Aqui, a dinâmica clássica foi caracterizada através da medida relativa, de funções de correlação e pela entropia de Shannon. Nos BTIs, verificamos que a irracionalidade dos ângulos não é condição suficiente para que eles sejam fortemente *mixing*, restringindo a conjectura de CP. Nos BEEs, encontramos evidências numéricas para uma transição tipo λ com os mesmos expoentes críticos observados no hélio líquido, resultados que dão interessante suporte à conjectura de Mc. No âmbito da quantização, utilizamos um método de *scaling* para obter 150 000 autovalores de energia para cada bilhar. Investigamos a distribuição de espaçamento entre primeiros vizinhos $p(s)$, a rigidez espectral $\Delta_3(L)$, e a presença de ruído $1/f^\alpha$ na estatística δ_n . Nos BTIs, mostramos que $p(s)$ e $\Delta_3(L)$ se aproximam dos resultados previstos para o Ensemble Gaussiano Ortogonal (GOE) das matrizes aleatórias quando a geometria corresponde a uma dinâmica clássica fortemente *mixing*. Este resultado nos faz acreditar que a propriedade ergódica necessária para espectros tipo GOE no limite quântico é a de *mixing* forte, não caos, como frequentemente considerado na literatura. Nos BEEs, mostramos que na região onde o espaço de fases é misto, $p(s)$ é bem descrita pela distribuição de Brody ou pela distribuição de Berry-Robnik-Brody. Embora ajustes próximos aos do GOE sejam satisfatórios na região caótica, não foi possível verificar uma linha de transição clara entre os dois regimes a partir das propriedades quânticas investigadas.

Palavras-chaves: Bilhares. *Mixing*. Caos. Quantização.

Abstract

In classical mechanics, chaos is characterized by a strong dependence of the trajectories in phase space on their initial conditions. This dependence is usually quantified by a positive Lyapunov exponent. More generally, the ergodic theory sorts the dynamical systems into four sets, namely, sheer ergodic (E), mixing (M), Kolmogorov (K) and Bernoulli. Only systems K and B are chaotic. Billiards, *i.e.*, flat cavities where a particle is free to move between elastic collisions with the boundary, are simple prototype systems in that theory. The conservative dynamics of a billiard may vary from regular to chaotic, depending only on the geometry of the border. In quantum mechanics, the uncertainty principle prevents a characterization of chaos based on well defined trajectories. The results reported on this thesis seek to shed light on this challenging subject, which has been of great interest in the past three decades, namely, the quantization of classically chaotic systems. Here, we present numerical results on some classical and quantum properties in a one-parameter family of Irrational Triangular Billiards (ITBs) and a biparametric family of Elliptical Stadium Billiards (ESBs). The motivation for studying the ITBs is that billiards in polygons are never chaotic, but a conjecture by Casati and Prosen (CP) suggests that ITBs are strongly mixing. On the other hand, the conjecture by Markarian and co-workers (Mc) refers to a possible transition line between a mixed phase space and another fully chaotic region in the ESB dynamics. Here, we characterize the classical dynamics through the relative measure, correlation functions and the Shannon entropy. In the ITBs, our results indicate that the irrationality of the angles is not a sufficient condition for the strong mixing property, thus limiting the CP conjecture. In the ESBs, we found numerical evidences of a λ transition with the same critical exponents observed in liquid helium, results that support the Mc conjecture. As far as quantization is concerned, we used a scaling method to obtain 150,000 energy eigenvalues in each billiard. We investigated the nearest neighbor spacing distribution $p(s)$, the spectral rigidity $\Delta_3(L)$, and the presence of $1/f^\alpha$ noise in the δ_n statistic. In the ITBs, we show that the calculated $p(s)$ and $\Delta_3(L)$ are close to the results of the Gaussian Orthogonal Ensemble (GOE) of random matrices when the geometry corresponds to a strongly mixing classical dynamics. This result suggests that the ergodic property required for the observation of GOE spectral correlations in the quantum limit is strongly mixing, not chaos, as usually considered in the literature. In the ESBs, we show that in the mixed region of the phase space, $p(s)$ is well described either by the Brody or Berry-Robnik-Brody distributions. As expected, GOE statistics are observed in the chaotic region. However, differently from the classical dynamics, no clear evidence of a critical line was observed from the quantum properties here investigated.

Keywords: Billiards. Mixing. Chaos. Quantization.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	A hipótese ergódica de Boltzmann	12
1.2	Hierarquia ergódica	13
1.2.1	Sistemas puramente ergódicos	14
1.2.2	Sistemas <i>mixing</i>	14
1.2.3	Sistemas K	15
1.2.4	Sistemas Bernoulli	16
1.3	Bilhares	16
1.3.1	Aspectos gerais	16
1.3.2	Medida relativa e entropia de Shannon	21
1.4	Caos quântico	21
1.4.1	Desdobramento de espectros de energia	22
1.4.2	Distribuição de espaçamento entre primeiros vizinhos, $p(s)$	23
1.4.3	Rigidez espectral, $\Delta_3(L)$	26
1.4.4	Estatística δ_n e sua transformada $S(k)$	27
2	DINÂMICA CLÁSSICA EM BILHARES TRIANGULARES IRRACIONAIS	30
2.1	Medida relativa e ergodicidade	32
2.2	Funções de correlação e mixing	32
3	PROPRIEDADES QUÂNTICAS DE BILHARES TRIANGULARES IRRACIONAIS	35
3.1	Correlação de curto alcance	35
3.2	Correlação de longo alcance	36
3.3	Ruído $1/f^\alpha$ nas flutuações espectrais	37
4	BILHAR ESTÁDIO ELÍPTICO E A TRANSIÇÃO λ	43
4.1	O desafio de Donnay	43
4.2	Conjectura sobre o limite inferior para o caos no estádio elíptico	44
4.3	Analogia com a transição λ	46
4.3.1	Parâmetro de ordem e o expoente β	48
4.3.2	Capacidade do bilhar e o expoente α	51
5	QUANTIZAÇÃO DO BILHAR ESTÁDIO ELÍPTICO	55
5.1	Funções de onda cicatrizadas	55

5.2	Caracterização estatística	57
5.2.1	Espaçamento entre autovalores vizinhos	57
5.2.2	Rigidez espectral	61
5.3	Análise do ruído $1/f^\alpha$	63
6	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	75
	Referências	77
	APÊNDICE A – DINÂMICA NUMÉRICA NO BILHAR ESTÁDIO ELÍPTICO	80
	APÊNDICE B – MÉTODO DE <i>SCALING</i> DE VERGINI E SARA- CENO	95
B.1	O Método	95
B.2	Estratégia para Diagonalização	97
B.3	Construção das Matrizes	98
B.4	Aplicando no Bilhar Estádio Elíptico	99
	ANEXO A – ARTIGOS PUBLICADOS EM PERIÓDICOS	108

1 Introdução

Neste capítulo, apresentamos superficialmente alguns conceitos da sofisticada Teoria Ergódica de Sistemas Dinâmicos, procurando posicionar nosso trabalho em um contexto histórico. Em seguida faremos uma pequena introdução ao caos quântico apresentando as principais ferramentas que utilizaremos em nossas análises. Indicaremos oportunamente uma literatura mais especializada para um leitor mais interessado nos detalhes.

A ideia de que moléculas podem estar por trás da Termodinâmica (fundamentada pela Mecânica Estatística) foi um dos grandes avanços científicos do Século XIX. A essas partículas, constituintes de gases em particular, está associado o conceito de ergodicidade do então chamado "caos molecular". A palavra ergódico vem do grego *ergon* ("trabalho") e *odos* ("trajetória") e foi utilizada por Boltzmann para representar a hipotética visita a todos os pontos do espaço de fases por uma partícula desse gás com comportamento dinâmico microscópico aleatório. A introdução do ingrediente probabilístico na teoria que veio a se chamar Mecânica Estatística de Equilíbrio passou por um longo regime probatório, com resultados mais convincentes ocorrendo apenas nas primeiras décadas do Século XX. A chamada Hipótese Ergódica só ganhou o rigor de um teorema com o trabalho do matemático russo Yakov Sinai nos anos 60-70, para um gás ideal de apenas duas partículas. É com esta hipótese que iniciamos nossa revisão.

1.1 A hipótese ergódica de Boltzmann

A hipótese ergódica de Boltzmann fornece as bases para o estabelecimento do postulado fundamental da física estatística (1), onde *todos os estados (pontos no espaço de fases) de um sistema dinâmico D têm probabilidades iguais a priori de serem acessados*. Considere uma grandeza mensurável f . Suponha que em uma situação de equilíbrio as flutuações de f ocorrem em uma escala de tempo muito mais rápida do que o intervalo típico de uma medição. O que é medido, então, é uma média temporal de f , tipicamente expressa como

$$\bar{f} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} f(t). \quad (1.1)$$

No caso contínuo, teríamos

$$\bar{f} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt. \quad (1.2)$$

Por outro lado, se $\rho(\vec{x})$ é a densidade de pontos no espaço de fases de D , a média no *ensemble* de f é definida por

$$\langle f \rangle = \frac{\int f(\vec{x})\rho(\vec{x})d\vec{x}}{\int \rho(\vec{x})d\vec{x}}. \quad (1.3)$$

A hipótese ergódica de Boltzmann consiste em supor que, no equilíbrio $\bar{f} = \langle f \rangle$.

Dessa forma, está sendo feita a suposição de que os pontos do ensemble são cópias fiéis do sistema e que no decorrer do tempo, a trajetória no espaço de fases deve visitar todos os pontos do ensemble.

A Hipótese Ergódica de Boltzmann não foi aceita de imediato pela comunidade científica. Idéias probabilísticas também foram questionadas em sua abordagem para problemas fora do equilíbrio, notavelmente em relação ao "Teorema H ". Este teorema pressupõe a existência de uma função $H(t)$, definida em termos da função distribuição de probabilidade. $H(t)$ é decrescente para um sistema dinâmico fechado e igual ao negativo da entropia termodinâmica dividida pela constante de Boltzmann quando calculada com a distribuição do equilíbrio. Uma objeção, conhecida como "Paradoxo de Loschmidt", faz referência à simetria de reversão temporal das equações de movimento de Newton. Neste caso, se existe uma situação que leva ao decaimento de $H(t)$, deve existir, mesmo sendo menos provável, outro movimento do sistema que leva ao crescimento de $H(t)$. Outra objeção famosa, conhecida como "Paradoxo de Zermelo", faz referência ao Teorema da Recorrência de Poincaré, que demonstra que todo sistema mecânico fechado recorre, *i.e.*, retorna ao seu estado inicial em um tempo arbitrariamente longo. O fato de que este tempo pode ser infinitamente longo na situação de "caos molecular" está na essência da introdução do ingrediente não mecânico, ou seja, probabilístico na teoria (2).

1.2 Hierarquia ergódica

Na teoria de sistemas dinâmicos, sistemas ergódicos são classificados de acordo com seu grau de aleatoriedade (3), tipicamente como:

Puramente Ergódicos (E) - *Mixing* (M) - Kolmogorov (K) - Bernoulli (B).

Em notação de conjuntos, dizemos que

$$E \supset M \supset K \supset B. \quad (1.4)$$

1.2.1 Sistemas puramente ergódicos

Por definição, são sistemas que apresentam igualdade entre as equações (1.2) e (1.3). Neles, todas as condições iniciais (a menos de um conjunto de medida nula) levam a trajetórias que visitam todo o espaço de fases ao longo do tempo. Ergodicidade é a forma mais fraca de aleatoriedade. Sistemas quase periódicos, por exemplo, fazem parte desta classe mas não das seguintes.

1.2.2 Sistemas *mixing*

Esta classe terá destaque nesta tese. Dado que M define a dinâmica do sistema, então se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu[M^t(A) \cap B]}{\mu(B)} = \frac{\mu(A)}{\mu(X)} \quad (1.5)$$

é válida, então o sistema é dito *mixing*. Aqui $\mu(C)$ é a medida probabilística do conjunto C , A e B são subconjuntos de X (onde X representa o espaço de fases acessível), como esquematizado na Figura 1. Sendo $\mu(X) = 1$, podemos escrever o limite como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu[M^t(A) \cap B] = \mu(A)\mu(B). \quad (1.6)$$

Em outras palavras, escolhendo qualquer subconjunto A de X e aplicando o mapa t vezes, geramos o subconjunto $M^t(A)$. Escolhendo qualquer outro subconjunto B de X , a medida do subconjunto $[M^t(A)] \cap B$ quando o mapa é aplicado infinitas vezes, tende à medida de A multiplicada pela medida de B .

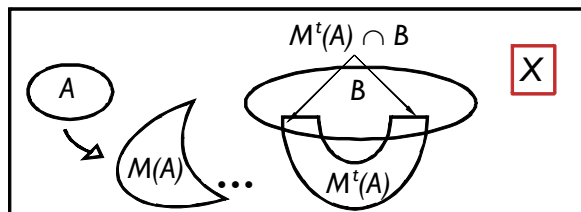


Figura 1 – Esquema de uma transformação do tipo *mixing*.

Para caracterizar esses sistemas, usaremos a chamada função de correlação (4)

$$C_{fg}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{T-1} \hat{f}_{i+t} \cdot \hat{g}_i = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{T-1} f_{i+t} \cdot g_i - \bar{f} \bar{g}, \quad (1.7)$$

onde f e g são quaisquer funções de quadrado integrável das variáveis dinâmicas, $\hat{f}_i = f_i - \bar{f} = M^i[f(\vec{x}_0)] - \bar{f}$, $\vec{x}_0$ é condição inicial e $\bar{f}$ é a média temporal

$$\bar{f} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{T-1} M^i[f(x_0)]. \quad (1.8)$$

De posse da função de correlação, um sistema é dito *mixing* se e somente se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C_{fg}(t) \rightarrow 0. \quad (1.9)$$

A equação (1.9) é satisfeita quando há o decaimento assintótico de C_{fg} . Contudo o decaimento pode ser lento ou rápido. Para decaimentos tipo lei de potência $C(t) \sim t^{-\alpha}$, podemos caracterizá-lo como rápido quando o expoente $\alpha \sim 1$ (ver (5), por exemplo). Com isso podemos dividir os sistemas *mixing* em duas subclasses (4). Um rápido decaimento da função de correlação corresponde a um sistema *fortemente mixing*, enquanto que um decaimento lento com $0 < \alpha < 1$ (ver (6), por exemplo) corresponde a um sistema *fracamente mixing*. Podemos definir a propriedade *fracamente mixing* de maneira mais genérica, em termos da função de correlação, através de

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} [C_{fg}(t)]^2 = 0. \quad (1.10)$$

Isso significa que $|C_{fg}(t)|$ pode ter valores arbitrariamente grandes para t longo, desde que esses eventos sejam raros, enquanto (1.9) implica que a função de correlação deve ser 0 para todos os tempos longos. O mapa do padeiro conservativo (3) é um exemplo não só dessa classe mas também da seguinte.

1.2.3 Sistemas K

Mais uma classe que será relevante nesta tese, em um sistema K, duas trajetórias vizinhas no espaço de fases separam-se exponencialmente. Se δ é a distância no espaço de fases entre tais trajetórias, escrevemos $\delta(t) = \delta(0)e^{h_1 t}$. O parâmetro h_1 é chamado expoente de Lyapunov. Na realidade, h_1 representa o maior dos expoentes de Lyapunov. Portanto um sistema K é caracterizado pela existência de pelo menos um expoente de Lyapunov positivo. Uma alternativa é caracterizar um sistema K a partir da chamda

Entropia de Kolmogorov-Sinai, K . Para defini-la, considere o seguinte: divida o espaço de fases d -dimensional em caixas de volume L^d . O estado do sistema é medido em intervalos de tempo τ . Seja $P_{i_0, \dots, i_n}$ a probabilidade conjunta de que o sistema esteja na caixa i_0 em $t = 0$, em i_1 em $t = \tau, \dots$, e i_n em $t = n\tau$. A informação média associada a um o sistema encontrado numa sequência particular é

$$K_n = - \sum_{i_0, \dots, i_n} P_{i_0, \dots, i_n} \log P_{i_0, \dots, i_n}. \quad (1.11)$$

A entropia de Kolmogorov-Sinai é definida como a taxa média de perda de informação:

$$K = \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{L \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T\tau} \sum_{n=0}^{T-1} (K_{n+1} - K_n). \quad (1.12)$$

Para sistemas conservativos, podemos relacionar essa entropia com os expoentes de Lyapunov (h_i) positivos via a fórmula de Pesin (3):

$$K = \sum_{h_i > 0} h_i. \quad (1.13)$$

Portanto, sistemas K , possuem $K > 0$. Esta também é a definição moderna para sistemas *caóticos*.

1.2.4 Sistemas Bernoulli

São sistemas representados por uma dinâmica simbólica sem uma medida invariante natural. Exemplos desses sistemas são o mapa da ferradura de Smale e do padeiro conservativo (3). Detalhes desses sistemas estão fora do escopo desta tese.

1.3 Bilhares

1.3.1 Aspectos gerais

Bilhares descrevem o movimento livre de uma partícula puntiforme em um domínio fechado Ω com reflexões elásticas na fronteira $\partial\Omega$ do domínio. A natureza da dinâmica desse sistema depende exclusivamente da forma da fronteira $\partial\Omega$, podendo variar de completamente regular a completamente caótica.

Sem perda de generalidade, dizemos que a partícula tem massa $m = 1$ e velocidade de módulo $|\vec{v}| = 1$. Temos, portanto, um espaço de fases de dimensão $d = 4$, $(q, p) = (x, y, v_x, v_y)$. A conservação de $|\vec{v}|$ implica que o ângulo que a velocidade de incidência faz com a normal à fronteira é igual ao ângulo de saída. Como a dinâmica dentro de Ω é simplesmente retilínea, podemos considerar apenas as componentes de $\vec{v}$ em $\partial\Omega$.

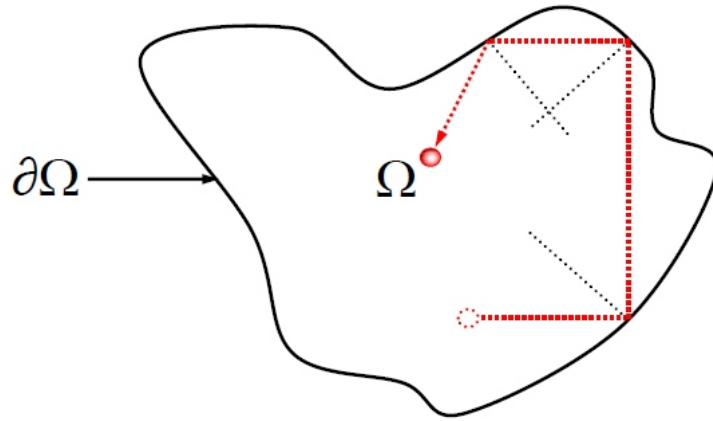
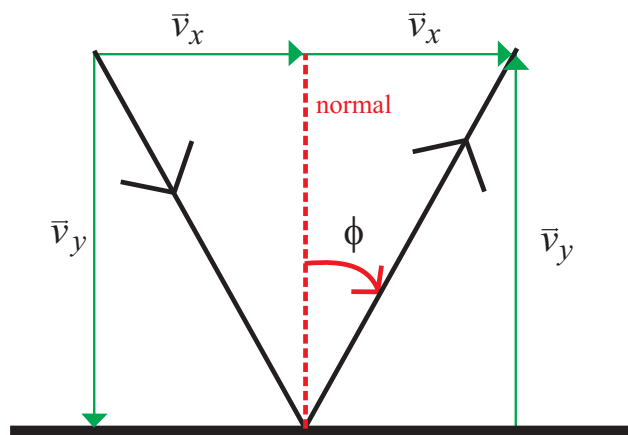


Figura 2 – Geometria genérica de um bilhar plano.

Uma variável adequada para o problema é o próprio ângulo de reflexão ϕ , que é função de $\vec{v}$. Por exemplo, na Figura 3, temos uma colisão numa borda retilínea paralela ao eixo- x . Neste caso, temos que $v_x = \text{sen}\phi$, logo

$$\phi = \arcsen v_x. \quad (1.14)$$

Como $v_x^2 + v_y^2 = 1$, definindo-se v_x, v_y fica definido. Então, a variável ϕ guarda toda a informação das variáveis (v_x, v_y) , inclusive o sinal de v_x , que indica se a partícula segue da esquerda para a direita ($\phi > 0$) ou da direita para a esquerda ($\phi < 0$). O sinal de v_y muda no exemplo dado, sendo negativo na chegada e positivo na saída.

Figura 3 – Colisão com um lado retilíneo paralelo ao eixo- x .

Para as variáveis (x, y) , como no interior de Ω temos uma trajetória retilínea, conhecendo $\vec{v}$ após uma colisão, conhecemos todas as posições até a próxima colisão. Dessa forma o ponto em $\partial\Omega$ onde há uma colisão nos dá toda a informação das variáveis

(x,y) entre colisões consecutivas. Então definimos como ℓ a fração do perímetro $\partial\Omega$ se percorrendo-o de uma origem escolhida, ao ponto de colisão no sentido anti-horário, como indica a Figura 4.

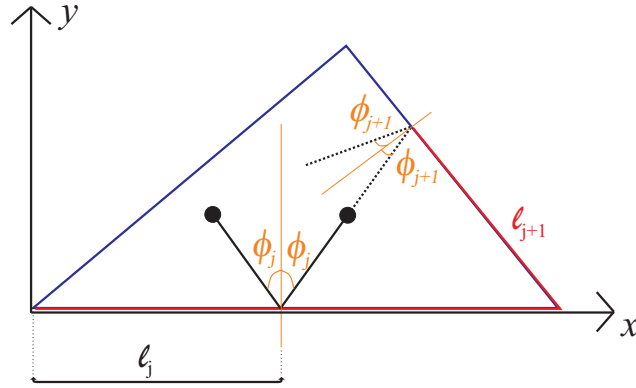


Figura 4 – Frações do perímetro em duas colisões consecutivas.

Portanto, podemos escrever as quatro variáveis dinâmicas, (x,y,v_x,v_y) , em termos de duas, (ℓ,ϕ) . Essas são as variáveis usadas amplamente na literatura de dinâmica clássica em bilhares. Obviamente, em casos particulares pode ser mais vantajoso utilizar o par (x,v_x) em vez de (ℓ,ϕ) , mas as relações entre os conjuntos de variáveis é o mesmo e temos 2 graus de liberdade efetivos qualquer que seja o conjunto escolhido.

Note que na digressão anterior para a redução do espaço de fases, os únicos instantes relevantes da dinâmica eram os instantes das colisões. Assim, não há a necessidade de observarmos a trajetória durante todo o tempo contínuo das trajetórias retilíneas no interior. Só nos interessam os instantes de tempo em que ocorrem as colisões. Assim, (ℓ,ϕ) evoluem via a atuação de um mapa. As variáveis em um dado instante de tempo discreto $t+1$, dependem das variáveis no instante anterior t , onde t indicará a quantidade de colisões. Aqui t não deve ser entendido como um intervalo de tempo entre colisões, já que esse pode variar entre colisões consecutivas. Temos então

$$(\ell_{t+1}, \phi_{t+1}) = (f(\ell_t, \phi_t), g(\ell_t, \phi_t)). \quad (1.15)$$

É possível demonstrar (ver (7) página 35, por exemplo) que a medida invariante sob a ação do mapa de um bilhar é dada por

$$d\mu = (2|\Gamma|)^{-1} \cos\phi d\phi d\ell, \quad (1.16)$$

onde $|\Gamma|$ é o perímetro do bilhar.

Hoje em dia esses modelos matemáticos são classificados em 4 subconjuntos, a saber, os *regulares* (círculo, elipse e região anular concêntrica), os *neutros* (polígonos), os *dispersivos* (Sinai) e os *desfocalizadores* (Estádio de Bunimovich). Os dois primeiros têm $K = 0$, enquanto os dois seguintes são caóticos. Em anos recentes tem sido estudadas geometrias distintas das anteriores, como no cogumelo de Bunimovich (8), que exibem um espaço de fases dividido com partes regulares e partes caótica. Seguem elementos dos dois bilhares caóticos mais famosos.

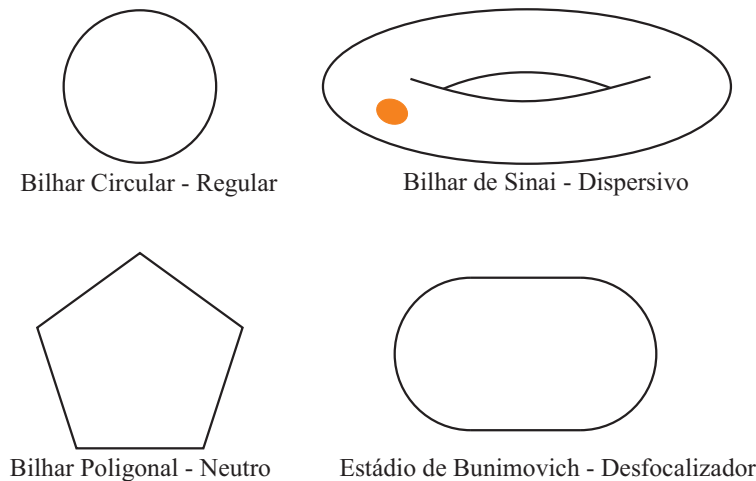


Figura 5 – Exemplos de bilhares em suas classes.

Foi mencionado no resumo que o bilhar de Sinai corresponde ao movimento de uma partícula na superfície de um toro com reflexões especulares em um "disco" com a topologia do toro (Figura 5). No plano, ele tem duas versões isomórficas com a do toro. Uma delas consiste em uma região quadrada com um disco espalhador concêntrico. Diferentemente dos tratados anteriormente, esta versão do bilhar de Sinai tem condições de contorno periódicas na fronteira do quadrado, enquanto as colisões com o centro espalhador são elásticas (Figura 6).

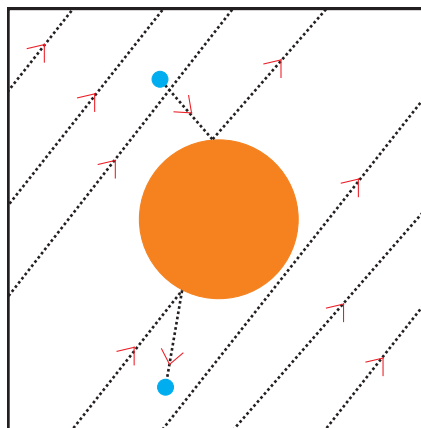


Figura 6 – Bilhar de Sinai no quadrado.

A origem do caos nessa classe pode ser entendida intuitivamente. A curvatura do

centro espalhador tende a *dispersar* trajetórias típicas vizinhas, fazendo com que elas se separem exponencialmente em poucas colisões. Existem órbitas periódicas como por exemplo, uma trajetória que colide colinearmente com um diâmetro do centro espalhador, mas esse tipo de órbita não é típica. O bilhar de Sinai pode ser interpretado também como uma partícula transitando em uma rede infinita de obstáculos circulares, como esquematizado na Figura 7.

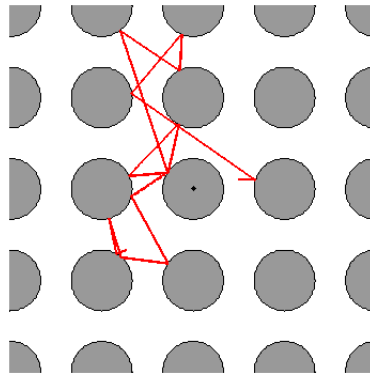


Figura 7 – Bilhar de Sinai como uma rede infinita de obstáculos circulares.

Outro exemplo que merece ser citado aqui é o estádio de Bunimovich. Esse bilhar também pode apresentar $K > 0$ e é extremamente relevante para esta tese devido ao Bilhar Estádio Elíptico ser uma perturbação sua. Sua geometria consiste em duas semicircunferências unidas por dois segmentos de tamanho finito $2t$ (Figura 8), formando um *estádio*. Diferentemente do bilhar de Sinai, o estádio não possui característica dispersiva, mas ainda assim é caótico para qualquer $t > 0$. Leonid Bunimovich foi aluno de Sinai e foi quem demonstrou a propriedade caótica deste bilhar. Num bilhar circular, as colisões mantêm o momento angular em relação ao seu centro (foco) constante. O estádio de Bunimovich não apresenta essa propriedade em sua dinâmica, por isso é conhecido como desfocalizador.

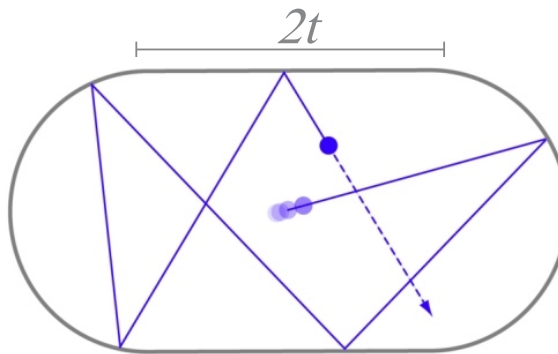


Figura 8 – Estádio de Bunimovich.

1.3.2 Medida relativa e entropia de Shannon

Em nossas análises a dinâmica clássica será caracterizada através da medida relativa, pela entropia de Shannon além da função de correlação já citada. Para construir a medida relativa e a entropia de Shannon o espaço de fases é dividido em N_C células. Para uma dada órbita, $n(t)$ é o número de células diferentes visitadas em t passos da dinâmica. A medida relativa é definida como $r(t) = \frac{\langle n(t) \rangle}{N_C}$, que nos dá a fração de células diferentes que foram visitadas em média num número de passos t . Para uma distribuição uniforme de visita das N_C células, $r(t)$ obedece o Modelo Aleatório (MA) (do inglês *Random Model* (RM)) (9):

$$r_{\text{MA}}(t) = 1 - \exp(-t/N_C). \quad (1.17)$$

Várias definições de entropia estão disponíveis na literatura da teoria ergódica de sistemas dinâmicos, onde bilhares são modelos. Devido à simplicidade tanto do ponto vista teórico quanto prático a entropia de informação de Shannon pode ser aplicada a bilhares. Começamos com uma condição inicial típica no espaço de fases reduzido (y_0, v_{y0}) . Podemos computar a probabilidade $p_i(y_0, v_{y0})$ de encontrar a partícula na célula i contando o número de vezes que ela é visitada ao longo do tempo. A entropia de Shannon resultante é dada por

$$s(y_0, v_{y0}) = - \sum_{i=1}^{N_C} p_i(y_0, v_{y0}) \ln p_i(y_0, v_{y0}). \quad (1.18)$$

1.4 Caos quântico

A mecânica quântica é conhecida como uma das teorias físicas mais bem testadas desde seu surgimento. A teoria faz excelentes previsões não somente para o átomo de hidrogênio, que é classicamente integrável, como para o átomo de hélio, classicamente não integrável. Nada mais natural como a questão se há algum efeito análogo ao caos no âmbito da mecânica quântica. A equação de Schrödinger é linear no tempo, retirando um dos principais ingredientes dos sistemas classicamente caóticos, a não linearidade dos sistemas dinâmicos. Por outro lado, o princípio da correspondência diz que no limite semiclássico, onde as escalas espaciais são muito maiores que o comprimento de onda de de Broglie por exemplo, a mecânica quântica revela continuamente a mecânica clássica (10). Por esses e outros motivos houve muito debate sobre o uso do termo "caos quântico". Um dos problemas da definição do termo é com o conceito de trajetória, que perde sua significância em mecânica quântica devido ao princípio da incerteza

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar/2. \quad (1.19)$$

O termo caologia quântica chegou a ser introduzido mas não houve a mesma aceitação por parte da comunidade científica como caos quântico. Hoje, o termo é geralmente entendido como o estudo do comportamento quântico de sistemas classicamente caóticos (10). Um dos meios comumente utilizados para o estudo desses sistemas é fazer uma caracterização estatística de propriedades espectrais em regime semiclássico e compará-las com resultados da teoria de matrizes aleatórias. Para mais aspectos do caos quântico consultar a bibliografia citada aqui em especial (11). Todos os resultados contidos nesta tese seguirão essa linha. Apresentaremos na próxima seção aspectos básicos das ferramentas que foram utilizadas nas obtenções dos resultados e análises. Em bilhares a obtenção do espectro de energia é um passo importante para a análise. O problema consiste em resolver a equação de Schrödinger independente do tempo com potencial nulo em uma região planar Ω com condições de Dirichlet na fronteira $\partial\Omega$

$$\nabla_{2D}^2 \varphi(\vec{r}) = -k^2 \varphi(\vec{r}), \quad (1.20)$$

onde $k^2 = 2mE/\hbar^2$ e E é o autovalor de energia. A obtenção das autofunções e autovalores da equação de Helmholtz já é por si só um desafio. Em duas dimensões poucos casos são integráveis. Apenas retângulos, elipses, regiões anulares concêntricas e os triângulos equilátero, retângulo isósceles e o com ângulos $(30^\circ, 60^\circ, 90^\circ)$ são integráveis. Aqui utilizaremos um método de *scaling* proposto por Vergini e Saraceno (12). Esse método permite obter eficientemente autovalores e autofunções de níveis altamente excitados da equação de Helmholtz. Detalhes sobre este método são apresentados no apêndice B.

1.4.1 Desdobramento de espectros de energia

Em geral diferentes sistemas possuem espectros de energia com diferentes escalas. Queremos comparar as estatísticas espectrais entre sistemas diferentes e com a expectativa de observar alguma universalidade. Para colocar espectros de sistemas distintos em pé de igualdade, eles devem passar pelo processo de desdobramento (do inglês, *unfolding*), descrito a seguir. Da lista de autovalores obtidos podemos ordená-los crescentemente, ou seja

$$E_1 < E_2 < E_3 < \dots < E_N \dots \quad (1.21)$$

Com esse conjunto forma-se a chamada Função Espectral

$$F_S(E) = \sum_{n=1}^N \delta(E - E_n). \quad (1.22)$$

Da função espectral obtemos a função espectral cumulativa, integrando $F_S(E)$ da seguinte forma

$$\eta(E) = \int_{-\infty}^E F_S(E') dE' = \sum_{n=1}^N \int_0^E \delta(E' - E_n) dE' = \sum_{n=1}^N \Theta(E - E_n). \quad (1.23)$$

Uma função espectral cumulativa típica pode ser vista na Figura 9. Ela conta quantos níveis de energia existem com energia menor ou igual a E no espectro. Devido à forma típica mostrada ela também é comumente chamada de função escada. Num intervalo com um grande número de níveis bem acima do estado fundamental surge um comportamento global de caráter linear, previsto também pela famosa fórmula de Weyl. Aqui utilizaremos sempre os primeiros 145 000 níveis acima dos primeiros 5 000. Podemos fazer um ajuste linear do tipo $\eta(E) = AE + B$. Finalmente trocamos o espectro original $\{E_n\}$ por $\{\eta(E_n)\}$. Este procedimento garante, universalmente, que o novo espectro possui um espaçamento entre níveis vizinhos com média unitária. No que segue, por simplicidade faremos $\eta(E_n) \rightarrow E_n$, ou seja, estaremos considerando E_n como o autovalor já desdobrado.

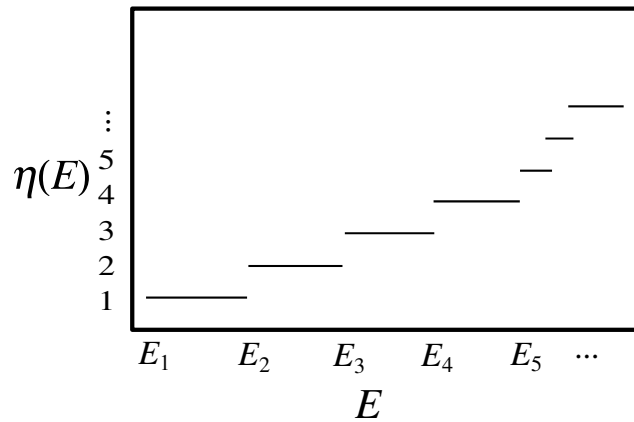


Figura 9 – Esboço de uma função espectral cumulativa ou função escada.

1.4.2 Distribuição de espaçamento entre primeiros vizinhos, $p(s)$

Seja $\{s_n\}$ o conjunto de espaçamentos entre níveis vizinhos mais próximos. Então, dado o espectro desdobrado $\{E_n\}$,

$$s_n = E_{n+1} - E_n. \quad (1.24)$$

De acordo com (10) possivelmente não há estatística espectral mais intensamente estudada do que $p(s)$, a densidade de probabilidade de se encontrar dois níveis mais

próximos separados pela distância s . Para sistemas com simetria de reversão temporal duas conjecturas bem conhecidas na literatura são: (i) se o sistema estudado for classicamente regular, $p(s)$ deve obedecer a distribuição de Poisson (10) (13) (14)

$$p(s) = e^{-s}. \quad (1.25)$$

(ii) Se o sistema for classicamente caótico, $p(s)$ deve seguir o resultado previsto pelo Ensemble Gaussiano Ortogonal das matrizes aleatórias proposto por Wigner (10) (13), dado por

$$p(s) = \frac{\pi}{2} s e^{-\frac{\pi}{4} s^2}. \quad (1.26)$$

As duas curvas podem ser vistas na Figura 10. Apesar da conjectura ser bem clara quanto ao que se esperar de $p(s)$ caso classicamente o sistema seja caótico ou integrável, para sistemas onde o espaço de fases é misto o resultado permanece em aberto na literatura. Algumas propostas já foram feitas e aqui citaremos as que serão relevantes para nosso trabalho. Todas resultam em fórmulas intermediárias entre Poisson e GOE através da variação de parâmetros. Primeiramente, citaremos a abordagem puramente fenomenológica de Brody (10) (15) onde um expoente é variado gradualmente para se obter uma suave mudança entre o caso integrável e o não integrável. Partindo disso, temos a fórmula

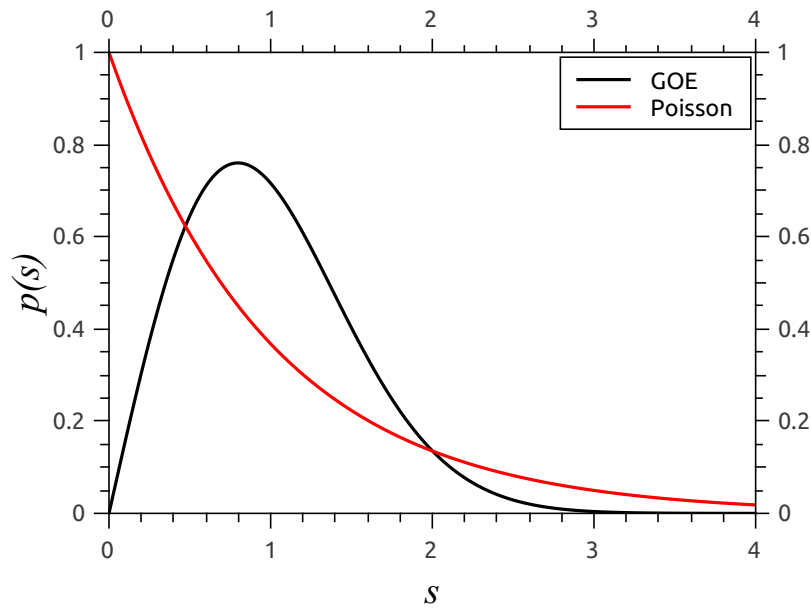


Figura 10 – Representação de $p(s)$ para os casos Poisson e GOE.

$$p(s) = As^\nu \exp(-Bs^{f(\nu)}), \quad (1.27)$$

onde a função $f(\nu)$ deve satisfazer os vínculos para que os casos extremos sejam Poisson e GOE:

$$f(\nu = 0) = 1 \quad \text{e} \quad f(\nu = 1) = 2. \quad (1.28)$$

Feito isso Brody propôs a mais simples das funções para completar a sua distribuição fenomenológica, uma função linear. Respeitando os vínculos acima, temos que

$$f(\nu) = 1 + \nu. \quad (1.29)$$

Com isso a distribuição de Brody fica

$$p(s) = As^\nu \exp(-Bs^{\nu+1}). \quad (1.30)$$

Restando agora a normalização $\int_0^\infty p(s)ds = 1$ e $\int_0^\infty sp(s)ds = 1$. Finalmente ficamos com a fórmula de Brody

$$p(s) = a_\nu(\nu + 1)s^\nu \exp(-a_\nu s^{\nu+1}), \quad (1.31)$$

onde $a_\nu = [\Gamma(\frac{\nu+2}{\nu+1})]^{\nu+1}$ e $\Gamma(x)$ é a função Gamma. Além de ser puramente fenomenológica outra característica destacável da distribuição de Brody é sempre apresentar $p(s = 0) = 0$, a chamada, repulsão de níveis para $\nu \neq 0$.

A segunda distribuição que citaremos aqui é a distribuição de Berry-Robnik (BR), uma proposta que leva em consideração as frações regular e caótica do espaço de fases clássico (10) (16), que chamaremos aqui de ρ_r e ρ_c , tal que $\rho_r + \rho_c = 1$. Utilizando essas quantidades como parâmetros de interpolação entre a distribuição de Poisson e a distribuição para o GOE, eles encontraram que

$$p(s) = \exp(-\rho_r s) \left[\rho_r^2 \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \rho_c s \right) + \left(2\rho_r \rho_c + \frac{\pi}{2} \rho_c^3 s \right) \exp \left(-\frac{\pi}{4} \rho_c^2 s^2 \right) \right], \quad (1.32)$$

onde $\operatorname{erfc}(x)$ é a função erro complementar. Nos casos limites $(\rho_r, \rho_c) = (1, 0)$ e $(\rho_r, \rho_c) = (0, 1)$ as distribuições de Poisson e GOE são recuperadas respectivamente. Em geral as

distribuições encontradas não apresentam exatamente os valores de ρ_r e ρ_c advindos do espaço de fases clássico, o acordo é tipicamente qualitativo via um ajuste. A destacar também dessa distribuição é a ausência da repulsão de níveis, nesse caso $p(s=0) = 1 - \rho_c^2$. Note que a repulsão ocorre apenas no caso totalmente caótico, quando $\rho_c = 1$. Por último, citaremos aqui a distribuição de Berry-Robnik-Brody (BRB), uma interpolação das duas citadas anteriormente (17). A expressão resultante fica

$$p(s) = \exp(-\rho_r s) \left\{ \frac{\rho_r^2}{(\beta+1)\Gamma\left(\frac{\beta+2}{\beta+1}\right)} Q\left[\frac{1}{\beta+1}; a_\beta(\rho_c s)^{\beta+1}\right] + \right. \\ \left. + [2\rho_r\rho_c + (\beta+1)a_\beta\rho_c^{\beta+2}s^\beta] \exp[-a_\beta(\rho_c s)^{\beta+1}] \right\}, \quad (1.33)$$

onde novamente ρ_r e ρ_c são as frações do espaço de fases clássico regular e caótico respectivamente. Assim como na distribuição de Brody $a_\beta = \left[\Gamma\left(\frac{\beta+2}{\beta+1}\right)\right]^{\beta+1}$ e $Q(x)$ é a função Gamma incompleta. Essa distribuição é capaz de percorrer todas as distribuições antes citadas variando-se os parâmetros livres ρ_c e β . Para $\beta = 0$ recupera-se a distribuição de Poisson e para $\beta = 1$ a de Berry-Robnik. Se $\rho_c = 0$ também é recuperada a distribuição de Poisson, enquanto para $\rho_c = 1$ a distribuição de Brody é encontrada. Essa distribuição tem o seu ingrediente fenomenológico já que se utiliza da expressão de Brody em sua interpolação, mas ganha ao conter ingredientes físicos advindos da dinâmica clássica, as frações do espaço de fases.

1.4.3 Rigidez espectral, $\Delta_3(L)$

Outra estatística frequentemente usada na análise de espectros é a rigidez espectral, que por razões históricas é chamada de $\Delta_3(L)$ (10). Seja $\eta(E)$ a função escada de um espectro desdobrado e $AE + B$ um ajuste a essa função escada no intervalo $(E, E+L)$. A média em intervalos de tamanho L então gera a seguinte expressão:

$$\Delta_3(L) = \left\langle \min_{A,B} \frac{1}{L} \int_E^{E+L} [\eta(E) - AE - B]^2 dE \right\rangle, \quad (1.34)$$

Seguindo a mesma conjectura para $p(s)$, temos que a rigidez espectral de um espectro advindo da quantização de um sistema classicamente regular deve seguir o resultado de Poisson, $\Delta_3(L) = L/15$. Para sistemas classicamente caóticos temos que a rigidez espectral deve ser

$$\Delta_3(L) = \frac{L}{15} - \frac{1}{15L^4} \int_0^L dr (L-r)^3 (2L^2 - 9Lr - 3r^2) Y_2(r), \quad (1.35)$$

onde $Y_2(r)$ é a função de correlação de dois pontos:

$$Y_2(r) = \left(\frac{\sin \pi r}{\pi r} \right)^2 + \left[\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(r) - \operatorname{Si}(\pi r) \right] \left[\frac{\cos \pi r}{\pi r} - \frac{\sin \pi r}{(\pi r)^2} \right]. \quad (1.36)$$

Em 1.36, $\operatorname{sgn}(r)$ é função sinal e $\operatorname{Si}(r)$ é a função Seno Integral:

$$\operatorname{Si}(r) = \int_0^r \frac{\sin x}{x} dx. \quad (1.37)$$

Ambas as funções podem ser vistas na Figura 11.

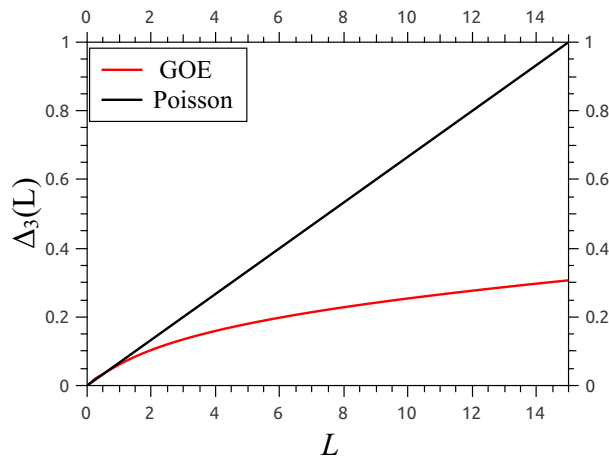


Figura 11 – Representações típicas de $\Delta_3(L)$ para os casos Poisson e GOE.

1.4.4 Estatística δ_n e sua transformada $S(k)$

Uma lei do tipo $1/f^\alpha$ no espectro de potência de uma série temporal caracteriza as flutuações observadas em muitos sistemas complexos (18). Considerando os níveis de energia $\{E_n\}$ de um sistema quântico como uma série temporal discreta onde a ordem n faz o papel do tempo, as flutuações nos níveis podem ser caracterizadas pelo espectro de potência. Foi conjecturado em (19) que o "espectro de energia de um sistema caótico quântico é caracterizados por um ruído do tipo $1/f$ ". A ideia original era que flutuações nos níveis de energia podiam ser estudadas através de métodos tradicionais de análise de séries temporais, como o espectro de potência. Quando a ideia foi aplicada a sistemas tipicamente caóticos o espectro apresentou um ruído do tipo $1/f$. Foi mostrado também que para sistemas que classicamente apresentavam espaço de fases misto o expoente α sempre estava no intervalo $(1,2)$, sendo $\alpha = 2$ no limite

esperado para sistemas classicamente regulares. O estudo das flutuações espectrais é feito a partir da estatística δ_n definida como

$$\delta_n = \sum_{i=1}^n (s_i - \langle s \rangle) = E_{n+1} - E_1 - n, \quad (1.38)$$

onde E_i faz parte do conjunto do espectro de energia desdobrado, $s_i = E_{i+1} - E_i$ e $\langle s \rangle = 1$ por definição. Assim, δ_n representa a flutuação do n -ésimo estado excitado. Formalmente δ_n é similar a uma série temporal onde a ordem do nível indexado por n faz o papel do tempo discreto. Em (18) os autores estudaram o bilhar de Robnik, bilhar cujo contorno é descrito pela equação polar $r = 1 + 2\lambda \cos(\theta)$. Classicamente ele apresenta uma dinâmica regular para $\lambda = 0$ e completamente caótica para $\lambda = 0.5$ passando por uma região de espaço de fases misto para $0 < \lambda < 0.5$. A estatística δ_n para alguns valores de λ é mostrada da Figura 12.

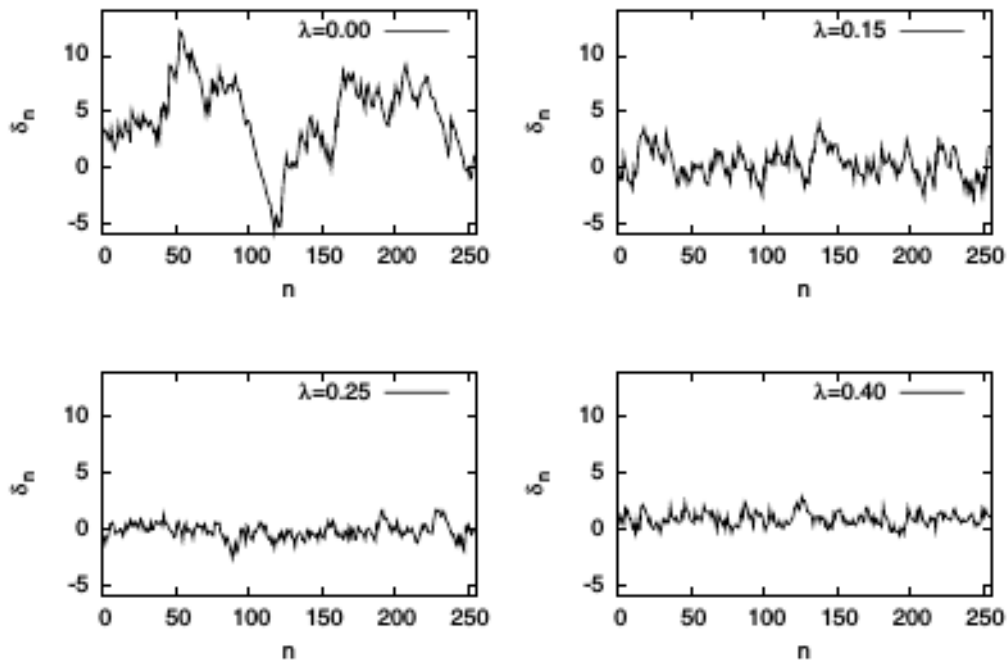


Figura 12 – Gráficos da estatística δ_n para um conjunto de 256 níveis de energia consecutivos no bilhar de Robnik para alguns valores de λ , retirado de (18).

O comportamento das flutuações nessa série temporal pode ser estudado via o espectro de potência

$$S(k) = \left| \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{n=1}^M \delta_n \exp \left(-i \frac{2\pi k}{M} n \right) \right|^2, \quad (1.39)$$

onde M é o tamanho da série e $\frac{2\pi k}{M}$ faz o papel de frequência fundamental. A Figura 13 mostra $S(k)$ para alguns valores de λ . Ela também mostra no encarte de cada gráfico o contorno do bilhar de Robnik. Foram calculadas médias de $S(k)$ para reduzir as

flutuações estatísticas. Em (18) foram utilizadas médias para obtenção de $\langle S(k) \rangle$ em apenas 25 conjuntos de 256 autovalores de estados altamente excitados consecutivos. Ajustes foram feitos de acordo com lei de potência do tipo

$$\langle S(k) \rangle \sim \frac{1}{k^\alpha}. \quad (1.40)$$

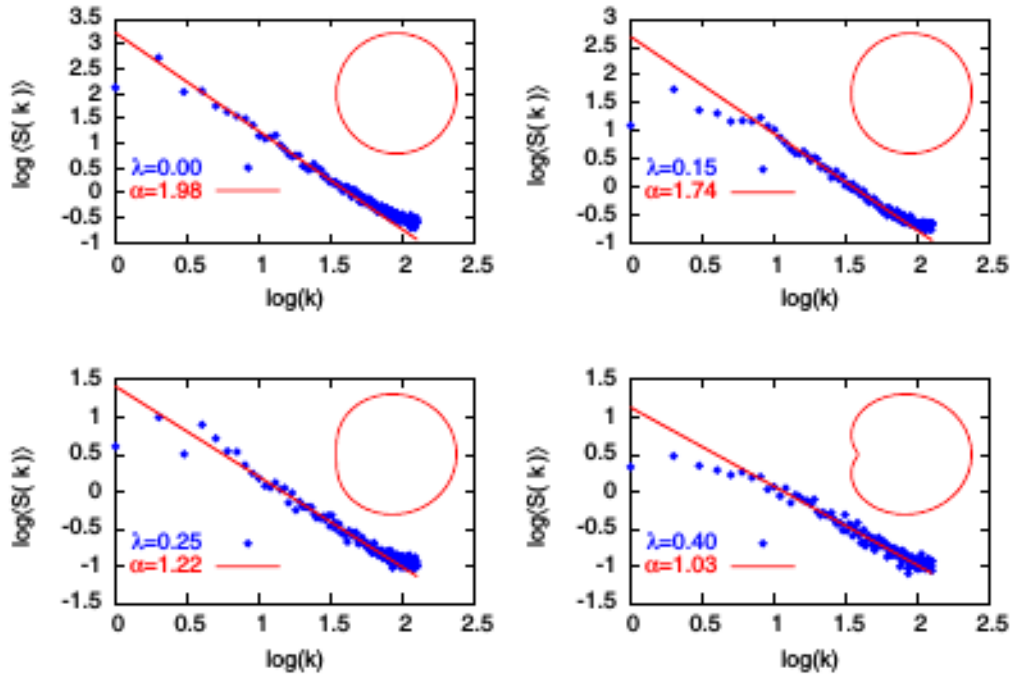


Figura 13 – Em azul, gráfico log-log de $\langle S(k) \rangle$ para alguns valores de λ . Em vermelho, ajuste com uma lei de potencia $\langle S(k) \rangle \sim 1/k^\alpha$. Nos encartes, a forma do bilhar de Robnik correspondente a cada valor de λ . Retirado de (18).

A analogia entre espectros quânticos de energia e séries temporais trouxe uma nova tentativa de se caracterizar a quantização de sistemas classicamente caóticos. A estatística δ_n e seu espectro de potência $S(k)$ podem ser interpretados como mais uma característica intrínseca de sistemas quânticos. Observe que o comportamento tipo lei de potência para $\langle S(k) \rangle$ já é encontrado em uma grande variedade de sistemas complexos. Sobre a transição ordem-caos, o expoente α pareceu mostrar uma suave transição entre $\alpha = 2$, no caso regular, e $\alpha = 1$, no caso caótico.

2 Dinâmica clássica em bilhares triangulares irracionais

É sabido que bilhares em polígonos quaisquer jamais podem ser caóticos (20). Contudo, existem evidências numéricas de que triângulos retângulos cujos ângulos não retos são irracionais com π podem apresentar comportamento fracamente *mixing* (6). Além disso, Casati e Prosen (CP) (5) apresentaram um resultado que ficou marcado na literatura: triângulos irracionais (todos os ângulos irracionais com π) podem apresentar comportamento fortemente *mixing*. CP, então, conjecturaram que qualquer bilhar triangular irracional possuiria a propriedade de ser fortemente *mixing*. Para tal conclusão, CP simplificaram o espaço de fases considerando colisões apenas no lado horizontal do triângulo. As variáveis utilizadas são (x, v_x) , e este plano de fases foi discretizado em N_C células. Para um triângulo com $\alpha = \frac{\pi(\sqrt{2}-1)}{2}$ e $\beta = \frac{\pi(\sqrt{5}-1)}{4}$ (ver Figura 14), CP observaram que a medida relativa (MR) desse triângulo obedece ao modelo aleatório. Assim, concluíram que bilhares em triângulos irracionais (BTIs) genéricos são ergódicos.

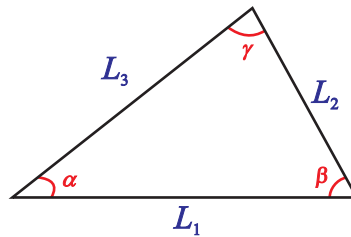


Figura 14 – Triângulo no plano e todos seus possíveis parâmetros. Na verdade, devido a $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ e utilizando lei dos senos apenas dois parâmetros são independentes α e β (para um contorno normalizado com $L_1 = 1$).

Garantida a ergodicidade, o próximo passo foi averiguar a propriedade *mixing*. Ao calcular a função de correlação de posição e velocidade, CP observaram um rápido decaimento nessas funções de um triângulo de mesmo α anterior e $\beta = 1$. O rápido decaimento foi caracterizado como uma lei de potência com expoente 0.94. Com base nessas observações, CP conjecturaram que bilhares triangulares irracionais genéricos são ergódicos e fortemente *mixing*, com uma função de correlação decaindo via uma lei de potência do tipo $C(t) \sim t^{-1}$. Esta conjectura ficou em aberto na literatura e com a limitação de ter sido um estudo em apenas dois triângulos. Isto foi uma motivação para a investigação da dinâmica clássica (e posteriormente uma caracterização quântica) de um número maior de triângulos irracionais que será mostrada mais adiante.

Com o objetivo de investigar sistematicamente as propriedades ergódicas nesses sistemas, foi introduzida na literatura (21) uma família de triângulos irracionais com

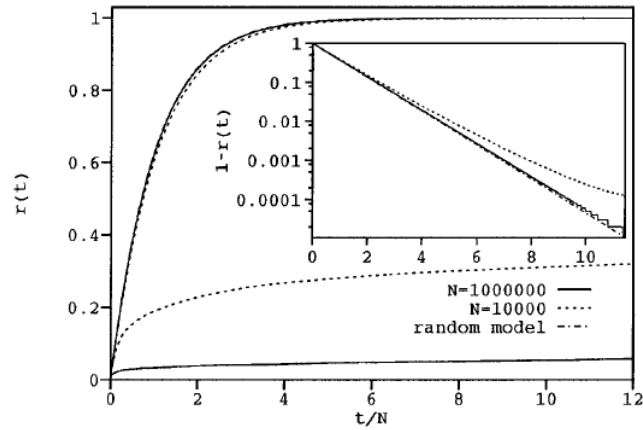


Figura 15 – Medida relativa em triângulos calculadas por CP (5). As linhas cheias representam uma discretização com $N_C = 10^6$ células, sendo a superior para um triângulo irracional e a inferior para outro racional. A linha superior coincide com o modelo aleatório. No encarte, o mesmo em escala monolog.

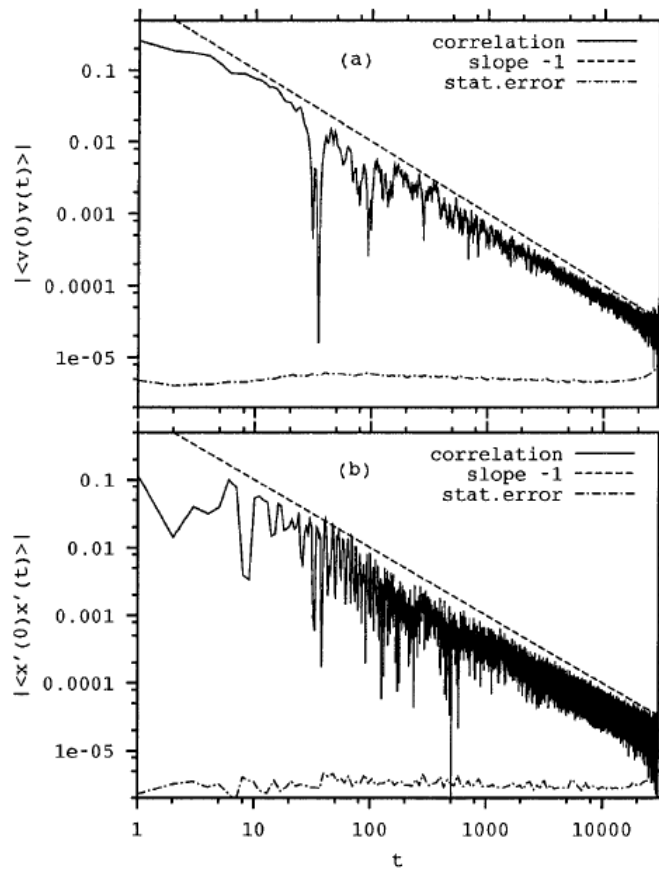


Figura 16 – Funções de correlação de velocidade e posição em um triângulo irracional, calculadas numericamente por CP (5).

um único parâmetro discreto N . Essa família consiste em triângulos com lados dados por inteiros consecutivos $(N, N+1, N+2)$ para $3 < N < \infty$. Note que o limite inferior é o triângulo retângulo de lados $(3, 4, 5)$ e o limite superior é um triângulo equilátero.

Para mais detalhes sobre a irracionalidade desses triângulos ver (22), (21) e (23). Como a dinâmica no bilhar depende apenas da forma, pode-se normalizar os lados do triângulo tal que tenhamos lados valendo $\frac{N}{N+2}$, $\frac{N+1}{N+2}$ e 1.

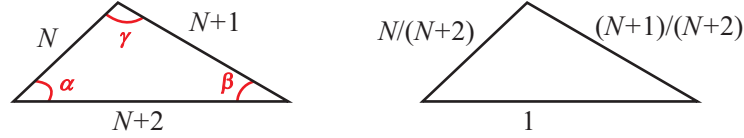


Figura 17 – Triângulo irracional da família de único parâmetro N e sua versão normalizada.

2.1 Medida relativa e ergodicidade

Seguimos CP considerando colisões apenas com a parte horizontal de um dado bilhar com parâmetro N . O espaço de fases reduzido é um retângulo onde uma reescala na posição é feita para que $-1 < x < 1$. Naturalmente $-1 < v_x < 1$. Na Figura 18 está mostrado o cálculo numérico da MR $r(t)$, como definida na seção 1.3.2 para triângulos representativos na família N . Em todos os casos, foram utilizadas $N_C = 10^6$ células com média sobre 200 condições iniciais escolhidas aleatoriamente. Observa-se que para $4 < N < 110$, todos os triângulos estão concentrados numa região muito próxima ao modelo aleatório. Denominamos esse subconjunto de Triângulos Ergódicos Rápidos (TERs), triângulos para os quais o desvio médio entre a medida relativa e o resultado do modelo aleatório, definido por $\frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} |r(t) - r_{MA}|$, onde utilizamos sempre $T = 12N_C$, é menor que 0.001. O triângulo $N = 4$ (linha vermelha no meio da Figura 18) alcança 99% de sua ergodicidade ($r = 1$) muito depois dos TERs, em $t \simeq 50N_C$. Para $N > 110$, um suave desvio do MA até o limite do triângulo equilátero (linha vermelha horizontal na Figura 18, com $r = 0.003$) é observado. Enfatizamos que $r(t \rightarrow \infty) \rightarrow 1$ mesmo para altos valores de N (Figura 18 a direita), mas essa taxa de crescimento até a ergodicidade completa não é a mesma para todos os triângulos.

2.2 Funções de correlação e *mixing*

Outro passo da análise foi o estudo das funções de correlação como discutido na seção 1.2.2. Foi calculada sistematicamente a função de autocorrelação da posição $C_x(t)$ na família de triângulos irracionais N , sempre em longas séries de tamanho $T = 10^9$, com média em 10 condições iniciais escolhidas aleatoriamente. Os resultados estão na Figura 19. É possível observar que para o TER $N = 7$ $C_x(t)$ decai com expoente perto de -1, valor esperado para uma dinâmica fortemente *mixing*. Contudo, observa-se um expoente mais lento, -0.6, para $N = 4$. De fato, apenas os triângulos $N = 67, 7$

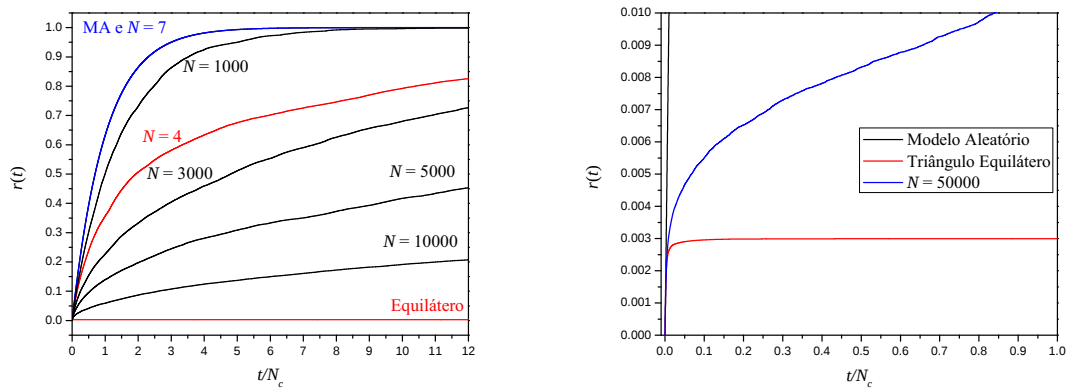


Figura 18 – Esquerda: cálculo numérico de $r(t)$ para vários triângulos na família N . O modelo aleatório é dificilmente distinguido da medida relativa no triângulo $N = 7$ (linha azul). Direita: $r(t)$ para $N = 50000$ mostrando que apesar de estar próximo do equilátero, o espaço de fases continua sendo preenchido com o passar do tempo.

e 8 pareceram ter expoente próximo de -1. Um lento decaimento é ainda observado para valores de N altos. Assim a correlação da posição manifesta uma dependência na geometria do bilhar (aumento de N) muito mais suave do que a medida relativa. Intrigantemente, uma sensibilidade com a geometria para valores baixos de N também é observado nas correlações quânticas, que serão mostradas na seção seguinte.

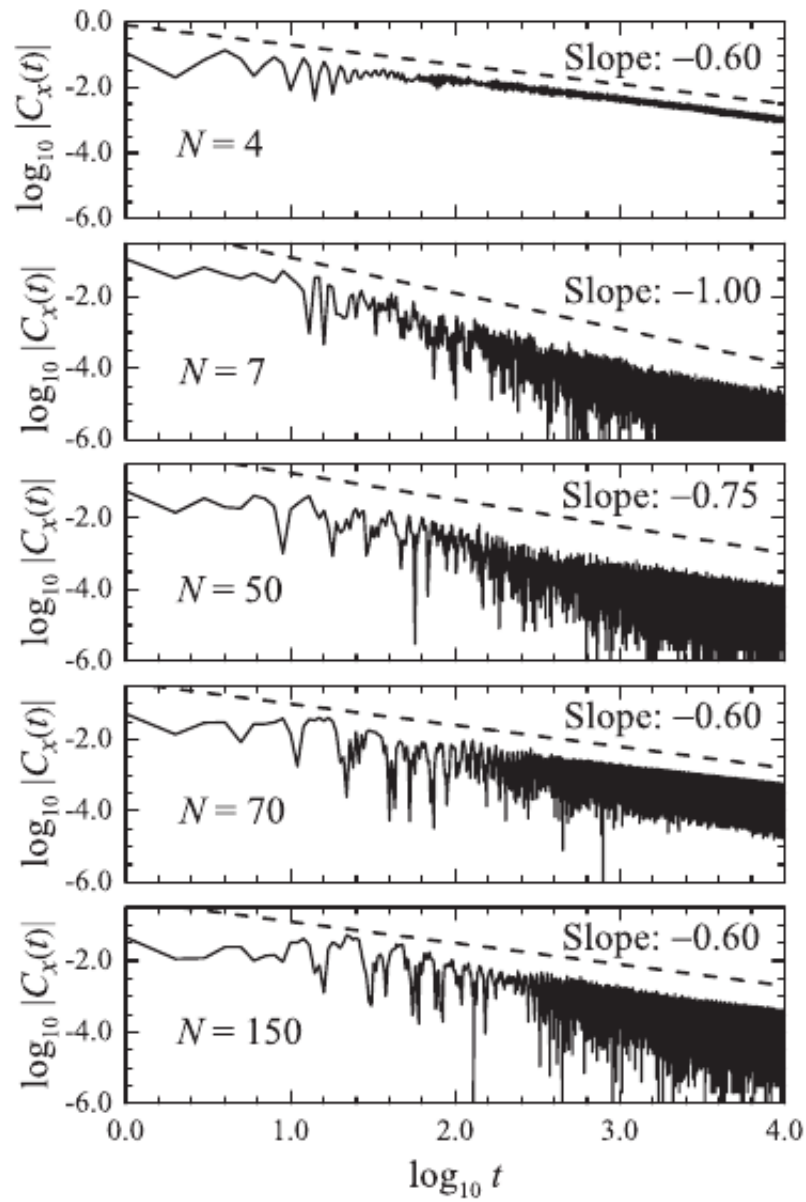


Figura 19 – As linhas sólidas são os valores absolutos de $C_x(t)$ para alguns membros da família de triângulos irracionais N . As linhas tracejadas são paralelas a ajustes lineares com a respectiva inclinação indicada (22).

3 Propriedades quânticas de bilhares triangulares irracionais

3.1 Correlação de curto alcance

O alvo aqui é tentar elucidar a seguinte questão: sistemas classicamente não caóticos, mas com aleatoriedade do ponto de vista da hierarquia ergódica, mostram em sua versão quantizada flutuações espectrais universais? A família de triângulos irracionais N pode dar pistas a essa indagação. Primeiramente, consideremos o espaçamento entre níveis vizinhos. O espectro de energia foi calculado como o método descrito em (12). Conjuntos de autovalores desdobrados foram calculados para vários triângulos na família. Os histogramas de alta qualidade da Figura 20 representam as disitrbuições de espaçamento entre níveis vizinhos $p(s)$ para valores de N representativos. A linha tracejada é o resultado de Wigner para o GOE, $p(s) = \frac{\pi}{2}s \exp(-\frac{\pi}{4}s^2)$.

As linhas sólidas na Figura 20 são ajustes com uma fórmula genérica que inclui a soma de uma função tipo GOE, uma exponencial e uma gaussiana:

$$p(s) = A_1 s^{A_2} \exp(-A_3 s^{A_4}) + A_5 \exp(-A_6 s) + A_7 \exp(-A_8 s^2), \quad (3.1)$$

sujeita aos vínculos

$$\int_0^\infty p(s) ds = 1 \quad ; \quad \int_0^\infty s p(s) ds = 1. \quad (3.2)$$

O comportamento não usual encontrado aqui não consegue ser descrito por algumas das fórmulas mais conhecidas na literatura, como as distribuições de Brody ou de Berry-Robnik. Apesar de bastante suaves, os histogramas não parecem ter uma clara relação com a dinâmica clássica descrita anteriormente. Por exemplo, para $N = 4$ observa-se repulsão de níveis, $p(s = 0) = 0$, mas a distribuição claramente se desvia da GOE. O TER $N = 7$ possui uma $p(s)$ muito próxima da GOE. O TER $N = 50$ se desvia do GOE mas, diferentemente do $N = 4$, não apresenta repulsão de níveis. Ainda mais dramático é o caso de $N = 100$, ele já mostra um máximo local largo na origem e uma cauda longa, antecipando o caso altamente degenerado do triângulo equilátero (limite esse só alcançado quando $N \rightarrow \infty$).

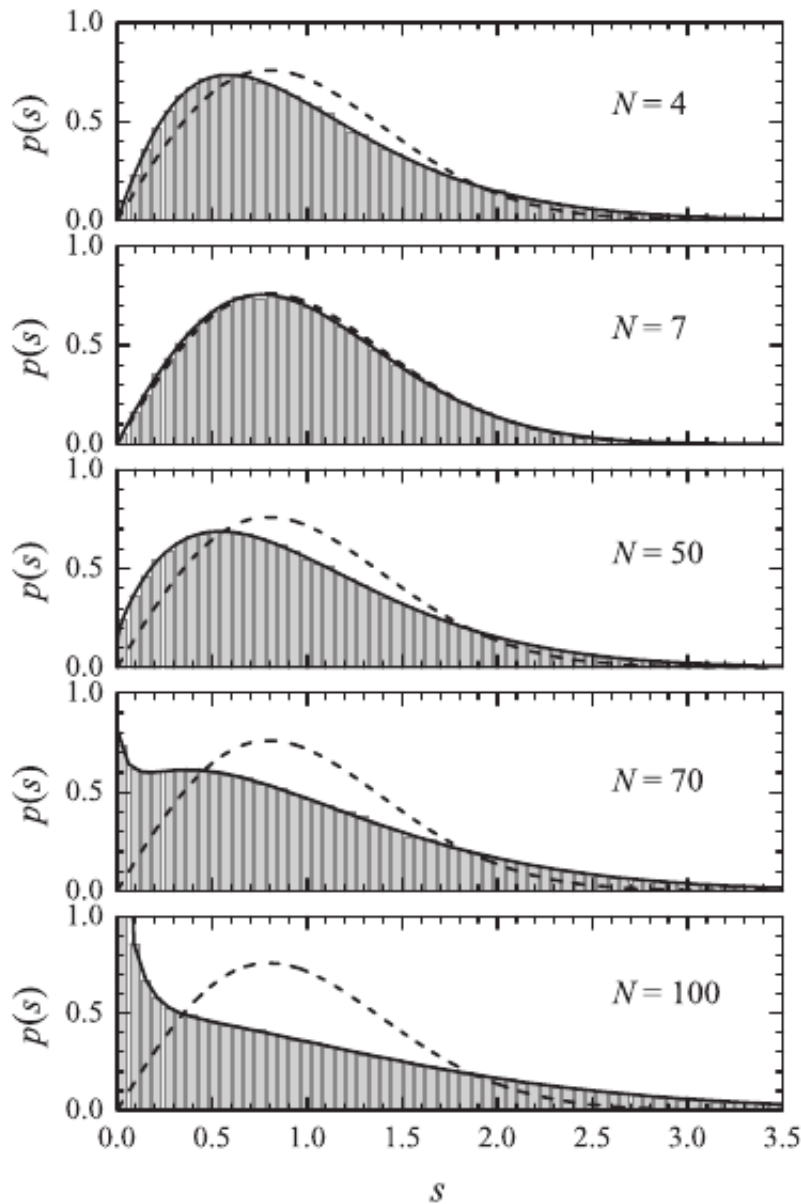


Figura 20 – Os histogramas são as $p(s)$ calculadas numericamente. A linha tracejada é a curva do GOE. As linhas sólidas são ajustes com a equação (3.1), com os parâmetros descritos em (22), cuja cópia pode ser encontrada no apêndice C.

3.2 Correlação de longo alcance

A rigidez espectral de Dyson-Mehta foi descrita na seção 1.4.3. Os limites de Poisson e GOE estão representados como linhas tracejadas na Figura 21, na qual as linhas sólidas representam resultados calculados para membros da família N . A rigidez para $N = 7$ é muito próxima à curva do GOE, como esperado. Uma rigidez intermediária para $N = 4$ não chega a ser surpreendente, devido aos resultados exibidos em sua dinâmica clássica e pela correspondente $p(s)$. A figura 21 também mostra a rigidez calculada de $N = 21, 50$ e 70 . Classicamente, esses triângulos foram classificados como

TERs, mas suas correlações não decaem com expoente próximo de -1 . Então, estatísticas espectrais intermediárias já eram esperadas. Uma conclusão desse resultado é que as correlações quânticas são mais sensíveis à geometria do que as quantidades clássicas.

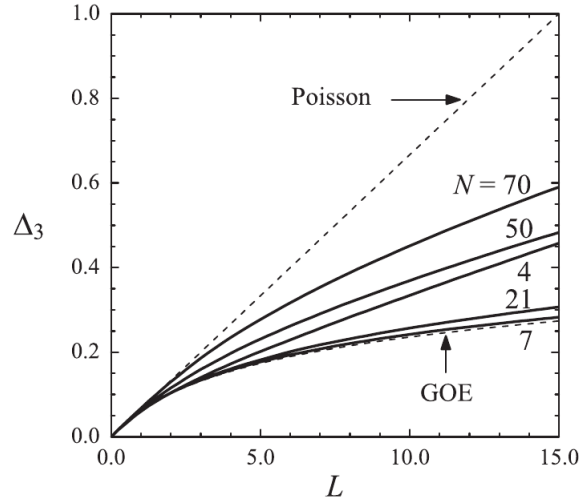


Figura 21 – As linhas tracejadas correspondem a rigidez espectral para processos poissonianos e GOE. As linhas cheias são $\Delta_3(L)$ calculadas numericamente para $N = 4, 7, 21, 50$ e 70 .

O resultado central mostrado até aqui foi a variação de propriedades clássicas e quânticas com a geometria numa família de bilhares triangulares irracionais de um único parâmetro N . Esses sistemas são conhecidos por não possuírem uma dinâmica clássica caótica. A taxa da ergodicidade clássica foi quantificada pela medida relativa, e membros da família N apresentaram resultados muito próximos do modelo aleatório para $4 < N < 110$. Nesse intervalo definimos os TERs. Foi mostrado que mesmo para os TERs a dinâmica poderia ser fracamente *mixing*, diferentemente da conjectura anterior de CP. A investigação numérica das estatísticas de níveis quânticos mostraram $p(s)$ e Δ_3 bem definidos entre os limites de Poisson e de Wigner, uma boa concordância qualitativa com os resultados clássicos. Em adição exploramos ainda uma terceira estatística quântica para caracterização da família como discutido na seção seguinte.

3.3 Ruído $1/f^\alpha$ nas flutuações espectrais

Vimos na seção 1.4.4 que

$$\delta_n = \sum_{i=1}^n (s_i - \langle s \rangle) = E_{n+1} - E_1 - n, \quad (3.3)$$

onde n faz o papel de tempo discreto E_i é o i -ésimo nível de energia desdobrado e $s_i = E_{i+1} - E_i$ é o espaçamento entre primeiros vizinhos. Flutuações típicas são mostradas na Figura 22 para os triângulos $N = 7$ e 8 . Elas apresentam uma forma similar a uma série

temporal discreta, cujo comportamento estatístico das flutuações pode ser expresso através do espectro de potência

$$S(k) = \left| \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{n=1}^M \delta_n \exp \left(-i \frac{2\pi k}{M} n \right) \right|^2, \quad (3.4)$$

onde M é o tamanho da série. Em geral, para reduzir flutuações estatísticas, faz-se uma média em várias séries resultando num espectro de potência médio $\langle S(k) \rangle$. Nossos cálculos foram feitos com 400 séries todas com $M = 256$ autovalores consecutivos. Uma lei de escala

$$\langle S(k) \rangle \sim \frac{1}{k^\alpha} \quad (3.5)$$

é esperada para cada triângulo N . Os resultados para $N = 7$ e 8 são mostrados na Figura 23 juntamente com as correspondentes estatísticas $p(s)$ e $\Delta_3(L)$. As linhas sólidas são ajustes, ambos com expoente $\alpha \simeq 1.12$. Há poucos resultados na literatura que podem ser comparados com esse valor. Destacamos aqui o resultado em (18), onde o caso caótico da família de bilhares de Robnik possui $\alpha \simeq 1.14$, valor muito próximo do mostrado aqui, lembrando que nossos bilhares são rigorosamente não caóticos.

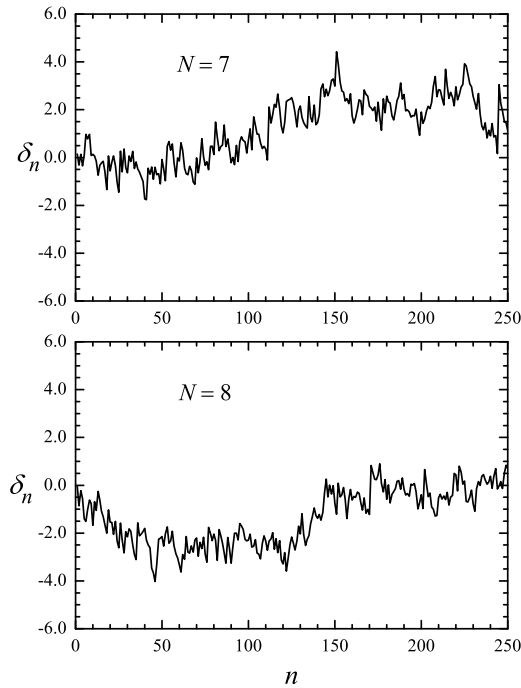


Figura 22 – Séries definidas como na equação (3.3) para os triângulos com $N = 7$ e 8.

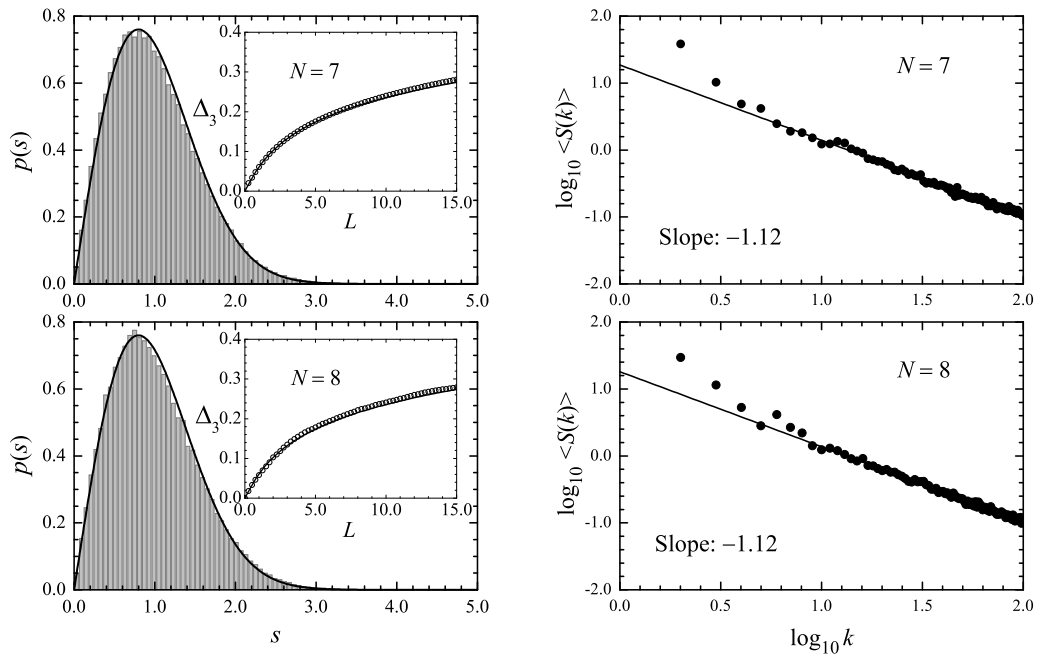


Figura 23 – Esquerda: $p(s)$ e Δ_3 para os triângulos $N = 7$ e 8 . As linhas sólidas são as curvas do GOE. Direita: gráficos log-log de $\langle S(k) \rangle$ como definidos na equação (3.4) para os triângulos $N = 7$ e 8 . Em ambos os casos o expoente $\alpha \simeq 1.12$.

Em adição, investigamos a presença do ruído $1/f^\alpha$ em mais membros da família irracional. Os gráficos de $\langle S(k) \rangle$ estão no fim deste capítulo na Figuras 26 e 27. O comportamento de $\alpha(N)$ está na Figura 24. Ele é similar ao do expoente da função de correlação clássica (22). Há uma abrupta queda quando N cresce de 4 até 8, seguida por um aparente suave crescimento em direção ao limite integrável, que aqui é o triângulo equilátero quando $N \rightarrow \infty$, cujo resultado obtido foi de $\alpha \simeq 1.8$. Importante lembrar que o triângulo equilátero, assim como o oscilador harmônico, não possui uma distribuição de níveis tipo Poisson (22). Possuem, respectivamente $p(s) = \delta(s)$ e $p(s) = \delta(s - 1)$, onde $\delta(x)$ é a função delta de Dirac. Sendo assim, um valor de α diferente de 2 para esse caso não chega a ser surpreendente.

Como um teste final, consideramos um triângulo irracional genérico, cuja dinâmica clássica foi estudada originalmente por CP (5) e já foi discutida no início deste capítulo. Chamaremos aqui de triângulo A. Ele possui ângulos dados por $\frac{\alpha_A}{\pi} = \frac{(\sqrt{2}-1)}{2} = 0.207\dots$, $\frac{\beta_A}{\pi} = \frac{(\sqrt{5}-1)}{4} = 0.309\dots$ e $\frac{\gamma_A}{\pi} = 1 - \frac{\alpha_A + \beta_A}{\pi} = 0.483\dots$. Os resultados para esse triângulo correspondentes a $p(s)$, Δ_3 e $S(k)$ estão na Figura 25. Todos os resultados da Figura 25 indicam que o triângulo A pode não ser fortemente *mixing* como os membros da família $N = 7$ e 8 , dada a distância de $p(s)$ e Δ_3 aos resultados previstos para o GOE, lembrando bastante os resultados para o caso $N = 4$. Os ângulos normalizados por π dos triângu-

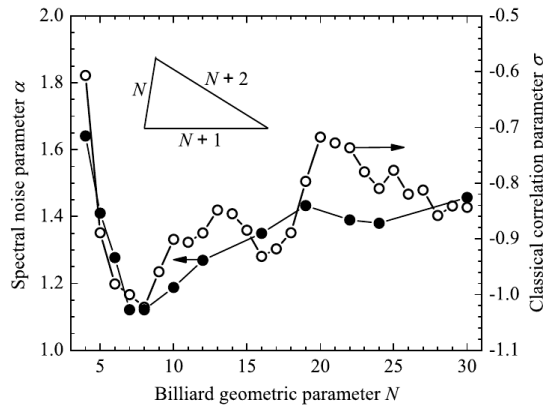


Figura 24 – Símbolo escuro: expoente α do espectro de potência como função do parâmetro geométrico N . Símbolo claro: expoente de decaimento σ das funções de correlação clássicas. As linhas cheias são guias para os olhos.

los $N = 4, 7$ e 8 são respectivamente $(0.230..., 0.309..., 0.460)$, $(0.267..., 0.324..., 0.407...)$ e $(0.274..., 0.326..., 0.398...)$. Assim, do ponto de vista geométrico, o triângulo A e o $N = 4$ não são apenas similares entre si mas também muito próximos do triângulo retângulo $(3, 4, 5)$.

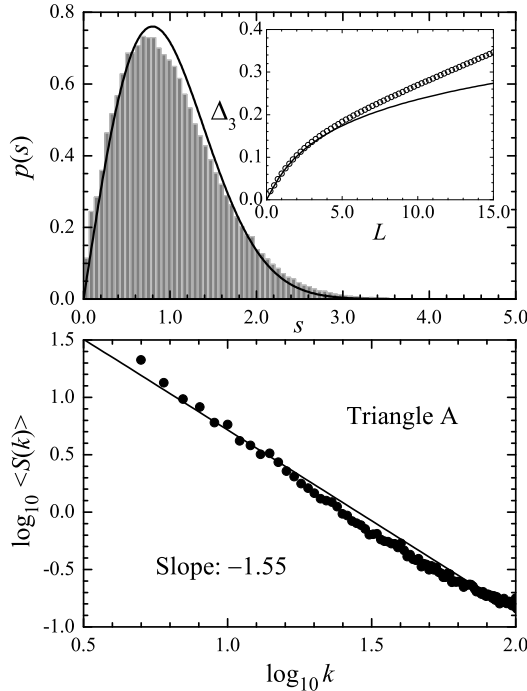


Figura 25 – Superior: $p(s)$, Δ_3 . As linhas sólidas são as curvas do GOE. Inferior: $\langle S(k) \rangle$ para o triângulo A, estudado classicamente por CP em (5).

Aqui, investigamos a presença do ruído $1/f^\alpha$ no espectro de energia de uma família de bilhares irracionais quantizados. Em suas versões clássicas esses bilhares não são

caóticos mas apresentam as propriedades de *mixing* fraco e forte. Nossos resultados mostraram um comportamento onde o expoente α variou suavemente no intervalo $1 < \alpha < 2$.

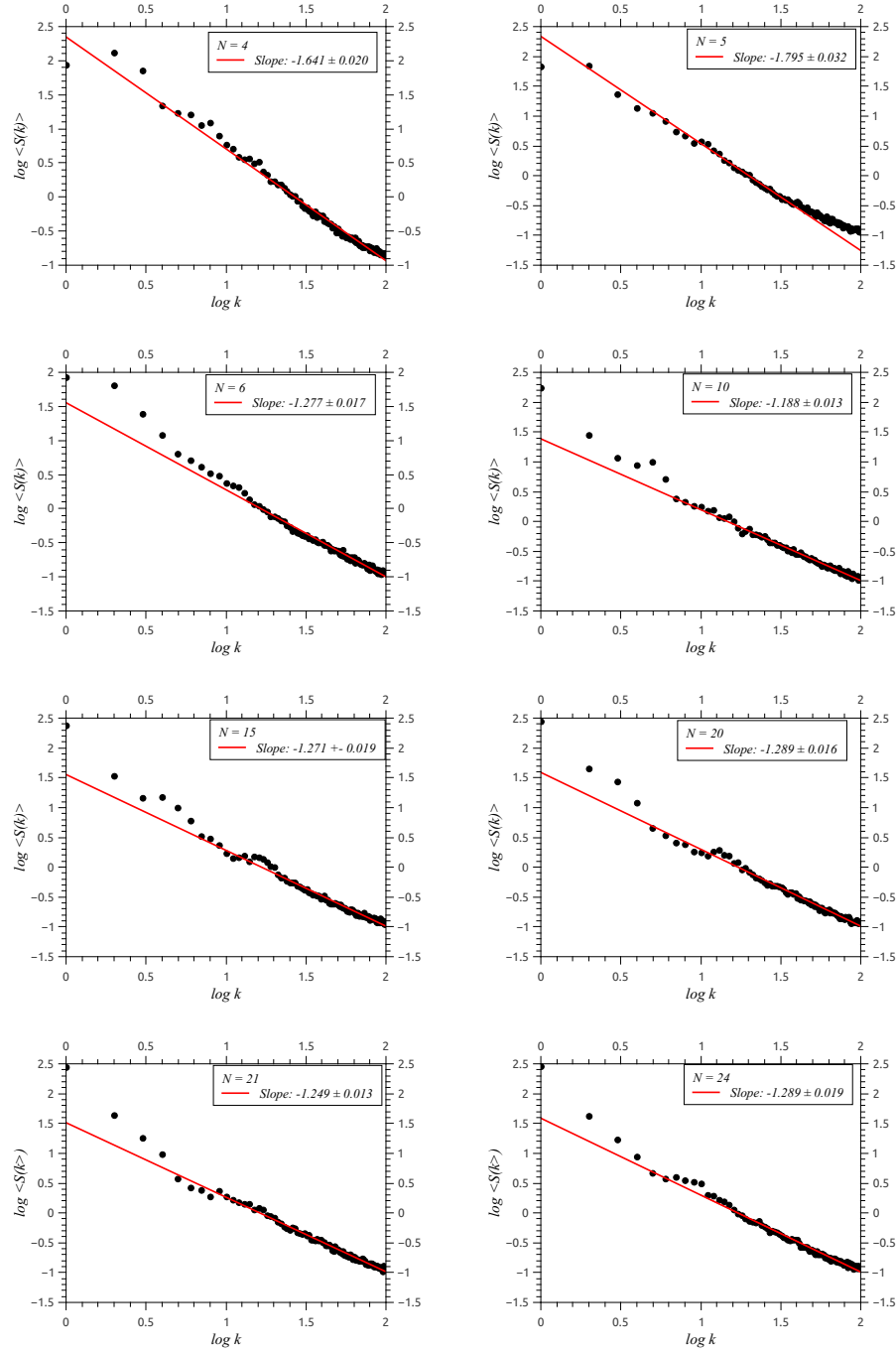


Figura 26 – $\langle S(k) \rangle$ para vários membros da família irracional.

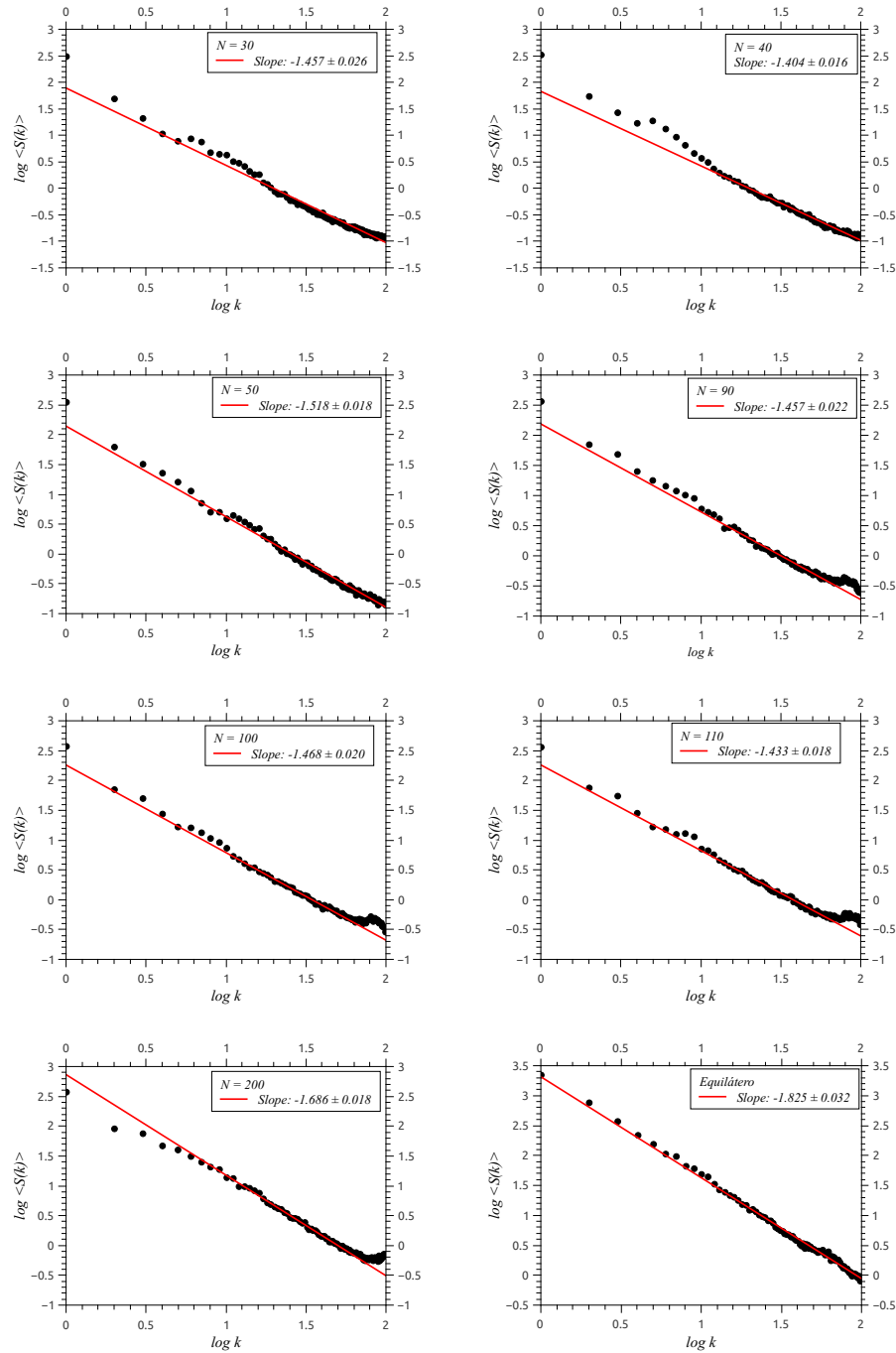


Figura 27 – $\langle S(k) \rangle$ para vários membros da família irracional e para o triângulo equilátero no canto inferior direito.

4 Bilhar estádio elíptico e a transição λ

Neste capítulo descreveremos como foi feita uma analogia entre a transição ordem-caos na dinâmica do Bilhar Estádio Elíptico (BEE) e a chamada transição λ observada no ^4He onde duas porções, uma superfluida e outra normal, podem coexistir (24). Na Figura 28 mostramos $1/4$ de um BEE, o qual consiste em duas semi-elipses de semieixo maior a e semieixo menor $b = 1$ separadas por um região retangular de altura 2 e comprimento $2t$. De início apresentaremos resultados iniciais da literatura sobre a dinâmica do BEE em função de seus parâmetros geométricos a e t . Depois mostraremos como a analogia é feita através da visualização do espaço de fases, passando pelas definições de um parâmetro de ordem $\psi(t)$ e da capacidade do bilhar $c(t)$, a partir da entropia de Shannon.

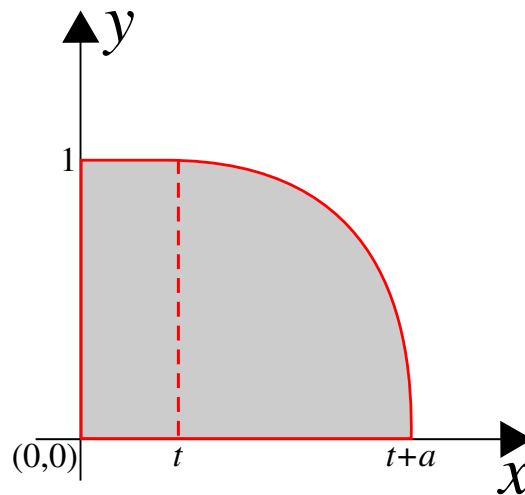


Figura 28 – Bilhar Estádio Elíptico.

4.1 O desafio de Donnay

Caso $t = 0$, independente do valor do parâmetro a temos um bilhar elíptico, completamente regular. Se $a = 1$, para qualquer valor de $t > 0$, teremos o estádio de Bunimovich, sempre caótico. Em 1991, V. J. Donnay (25) provou que se $1 < a < \sqrt{2}$ e t for muito grande o mapa discreto que descreve a dinâmica do bilhar possui expoente de Lyapunov positivo para quase todas as condições iniciais no espaço de fases. Mostrou ainda que se $a \rightarrow \sqrt{2}$ um comportamento caótico só poderia ser observado se $t \rightarrow \infty$. A possibilidade de se encontrar limites para o caos nesse intervalo de a o próprio Donnay deixou como desafio para a comunidade científica. Passados 5 anos Markarian e colaboradores (Mc) (26) mostraram que se $1 < a < \sqrt{4 - \sqrt{8}} \simeq 1.082$ caos só é garantido para $t > 2a^2\sqrt{a^2 - 1}$. Os próprios autores afirmam que a curva $t_{\text{blue}}(a) = 2a^2\sqrt{a^2 - 1}$,

mostrada na Figura 29, não é o melhor limite inferior para o caos pois haviam observado numericamente caos na dinâmica para valores menores que $t_{\text{blue}}(a)$. Além disso, $a \simeq 1.082$ está muito próximo de 1, resultando apenas numa pequena perturbação do estádio de Bunimovich e, portanto, ainda longe do desafio inicial proposto por Donnay, encontrar limites para o caos no intervalo $1 < a < \sqrt{2}$.

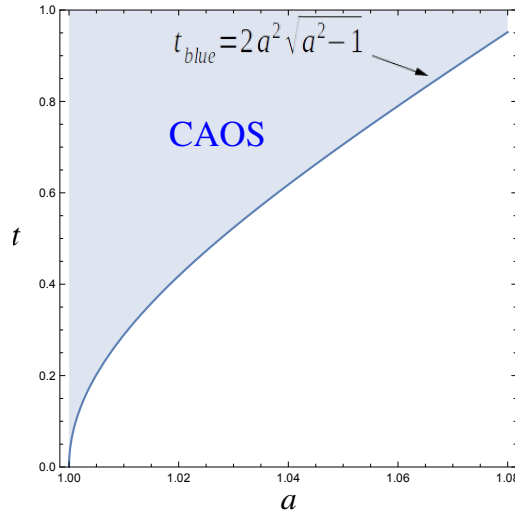


Figura 29 – Primeiro limite para o caos no estádio elíptico encontrado por Markarian e colaboradores (26).

4.2 Conjectura sobre o limite inferior para o caos no estádio elíptico

Em 1998, Mc publicaram uma maior realização (27), obtendo uma curva $t = H(a)$ como possível limite inferior para o caos no intervalo $1 < a < \sqrt{2}$. A curva $H(a)$ é o limite superior de uma família de curvas $t_i(a)$ com $i = 0, 1, 2, \dots$ e, além do mais, como Donnay já havia demonstrado, tem a propriedade $H(a \rightarrow \sqrt{2}) \rightarrow \infty$. Para ilustrar, $t_{\text{red}}(a) = t_0(a) = \sqrt{a^2 - 1}$ é mostrada na Figura 30. É importante destacar o significado das curvas nessa figura. Uma dinâmica com os parâmetros acima da curva azul garante o caos. Já parâmetros abaixo da curva vermelha garantem um espaço de fases misto. O que prevalece na região entre as duas curvas não se conhece.

Aqui, descreveremos resumidamente como a curva $H(a)$ foi obtida em (27). Esse trabalho considera a estabilidade de órbitas periódicas de período $4 + 2i$, nas quais ocorrem 4 colisões nas partes curvas e i colisões em uma das partes retas do estádio. Essas órbitas são chamadas de pantográficas e alguns casos estão ilustrados na Figura 31.

Nas curvas $t_i(a)$ citadas na seção anterior o índice i representa a ordem da órbita pantográfica. Cada curva representa o limite entre a tal órbita pantográfica ser elíptica, $t < t_i(a)$ ou hiperbólica, $t > t_i(a)$. Na Figura 32 vemos as primeiras curvas $t_i(a)$, obtidas

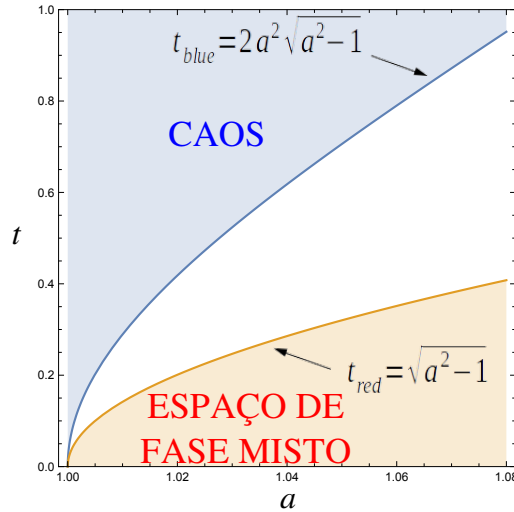


Figura 30 – Curva $t_0(a) = t_{red}$ nos mesmos limites da primeira curva encontrada por Markarian e colaboradores.

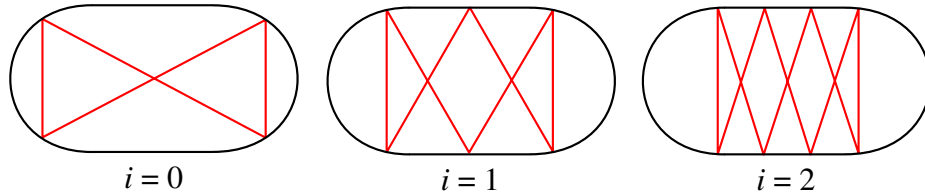


Figura 31 – Órbitas pantográficas de ordem 0, 1 e 2.

a partir das seguintes considerações. Dado $a_i = \sqrt{\frac{2+2i}{2+i}}$, Mc demonstraram que:

(i) Para $i \geq 0$, se $a_i < a < \sqrt{2}$ existe uma única curva $t_i(a)$ tal que se $t < t_i(a)$, a órbita pantográfica é elíptica e se $t > t_i(a)$ a órbita é hiperbólica.

(ii) Para $i > 0$, se $1 < a < a_i$, então a órbita pantográfica é hiperbólica $t > 0$.

(iii) As curvas $t_i(a)$ são dadas por

$$t_i(a) = \frac{a\sqrt{1-y_i^2}}{(a^2+1)y_i^2-1} [1 + 2iy_i - (a^2-1)y_i^2], \quad (4.1)$$

onde y_i é a solução real positiva da equação cúbica

$$y_i^3 + \frac{i}{2a^2}(a^2-1)y_i^2 - \frac{y_i}{a^2} - \frac{i}{2a^2} = 0. \quad (4.2)$$

Foi demonstrado que para cada valor de i , a equação acima possui apenas uma única raiz real no intervalo $(0,1)$ para $a_i < a < \sqrt{2}$ que pode ser encontrada analiticamente.

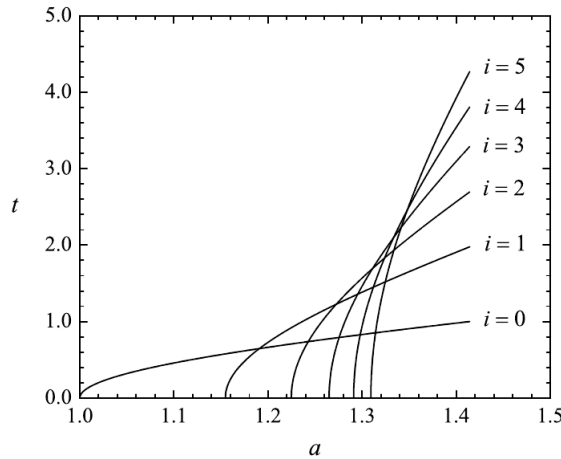


Figura 32 – Curvas de transição entre o comportamento elíptico e hiperbólico das órbitas pantográficas de ordem 0 a 5.

É fácil ver que $y_0 = \frac{1}{a}$, o que resulta em $t_0(a) = \sqrt{a^2 - 1}$, curva já apresentada na seção anterior. Interessante notar também que $t_i(a_i) = 0$ sempre. Em suma, órbitas pantográficas existem para qualquer valor de $a \in (1, \sqrt{2})$. Para $i > 0$ todas as órbitas pantográficas são hiperbólicas no intervalo $1 < a < a_i$ para todo $t > 0$, exceto o conjunto de órbitas de ordem $j < i$. Essas órbitas se tornam hiperbólicas apenas se $t > t_j(a)$. De modo que todas as órbitas pantográficas são hiperbólicas quando $t > H(a)$, onde $H(a) = \max_i [t_i(a)]$. Essa envoltória pode ser vista na Figura 33, retirada diretamente de (27).

De posse desses resultados os autores clamaram que a curva $H(a)$ poderia ser o limite inferior para o caos no BEE. Abaixo dessa curva, há pelo menos uma órbita pantográfica que é elíptica e, portanto, não teríamos caos. Importante observar que esse resultado absorve o resultado anterior de Donnay que requeria $t \rightarrow \infty$ quando $a \rightarrow \sqrt{2}$. Essa estratégia foi adotada pois já havia indícios numéricos de que essa família de órbitas era a última a se tornar hiperbólicas. Não há uma prova rigorosa sobre isso, mas órbitas tipo *bouncing ball* e tipo losango já não são mais elípticas perto das curvas $t_i(a)$. Esse resultado permaneceu na literatura como resultado analítico mais próximo de estabelecer uma resposta ao desafio de Donnay. Nosso objetivo a seguir é demonstrar uma analogia entre BEEs e o ${}^4\text{He}$ e através dela buscar algum suporte para a conjectura de Mc.

4.3 Analogia com a transição λ

As propriedades dinâmicas do BEE serão estudadas numa seção de Poincaré em $x = 0$, ou seja, serão analisadas apenas colisões na parede vertical na Figura 28. Essa fração assimétrica do BEE foi escolhida pois reduz consideravelmente o número de

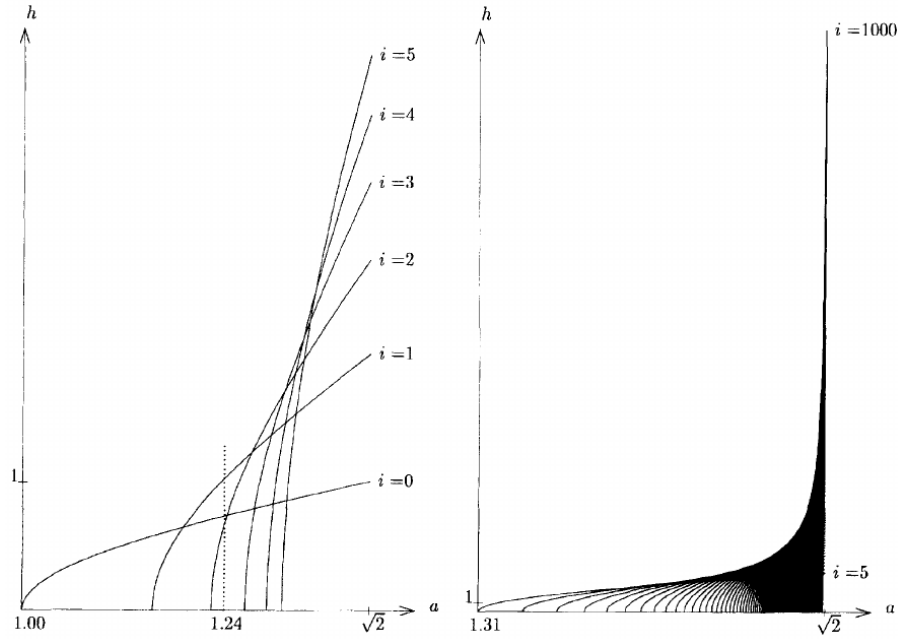


Figura 33 – Curvas $t_i(a)$ gerando a envoltória $H(a)$ (27). (No trabalho original a separação retangular do estádio é chamada de h , que chamamos de t desde o início).

órbitas periódicas assim como degenerescências em sua posterior quantização. Nesse cenário, o espaço de fases reduzido é um retângulo definido pela posição y onde a colisão ocorre e a componente vertical da velocidade v_y , que não se altera na colisão. Aqui, $0 < y < 1$ e $-1 < v_y < 1$. De início vamos considerar alguns espaços de fases para $a = 1.24$ e alguns valores de t (Figura 34). Note pela Figura 32 ou 33 que $t = 0.1 < t_i(a)$ para $i = 0, 1$ e 2 de modo que podemos ver ilhas de estabilidade, representadas pelas trajetórias vermelha, verde e azul. Para $t = 0.45$ ainda estamos abaixo das mesmas curvas e as ilhas apesar de ainda presentes, já aparecem em quantidades menores. Possivelmente nessa região de parâmetros, apenas as pantográficas $i = 0, 1$ e 2 são elípticas, enquanto no caso $t = 0.1$ ainda havia outros tipos de trajetórias periódicas com dinâmica elíptica. No caso $t = 0.75$ vemos uma única ilha de estabilidade. Nessa região estamos abaixo apenas da curva de estabilidade da pantográfica $i = 1$, enquanto para $t = 1.05$ já foram ultrapassadas todas as curvas e vemos um espaço de fases ergódico. Para facilitar essa visualização os valores de $t_i(a = 1.24)$ são $t_1 \simeq 0.7332$, $t_0 \simeq 1.0236$ e $t_2 \simeq 0.6777$, tal que $t_2 < t_0 < t_1 = H(1.24)$. Com essa indicação de que $H(a)$ é uma forte candidata a ser uma linha de transição de fato para o caos, focamos na região $1 < a < a_1 = \sqrt{\frac{4}{3}} \simeq 1.1547$, onde apenas pantográficas de ordem 0 podem ser elípticas. Neste caso, observamos a seguinte analogia com o ${}^4\text{He}$ para o qual T , a temperatura absoluta e P , a pressão são análogos a t e a no bilhar. O diagrama de fases do ${}^4\text{He}$ está mostrada na Figura 37. Para pressões relativamente baixas e $T = 0$ o ${}^4\text{He}$ é 100% superfluido e não entrópico, assim como o BEE em $t = 0$. Para $T > 0$ a componente

superfluida diminui e a componente normal do fluido aumenta. No bilhar, a fração regular do espaço de fases misto diminui e a caótica aumenta em $t > 0$. Quando $T \rightarrow T_\lambda$ a fração superfluida tende a zero e o fluido é inteiramente normal, portanto, entrópico para $T > T_\lambda$. Nossa expectativa é de poder observar uma transição análoga em $t = t_0(a)$ no bilhar devido a essa analogia entre a coexistência de fases no ^4He e o espaço de fases misto no BEE.

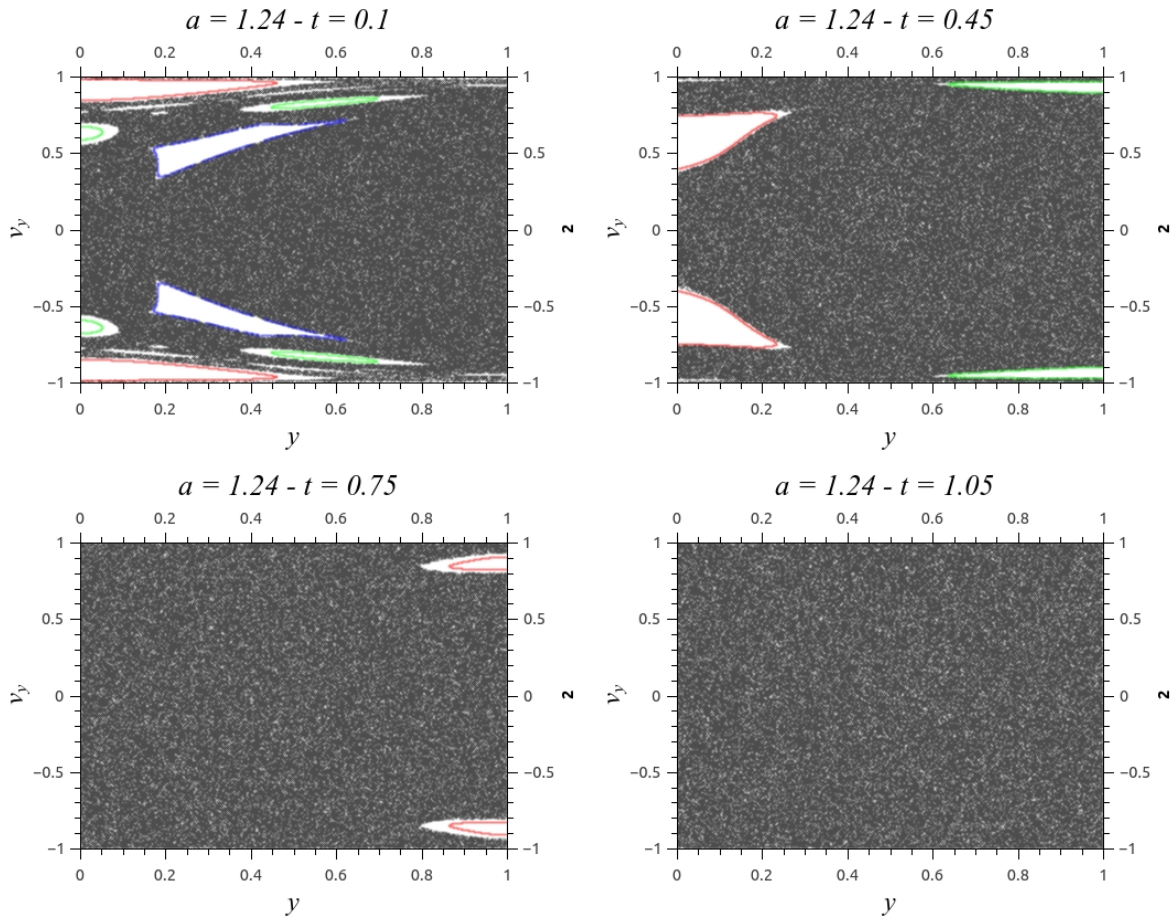


Figura 34 – Espaços de fases reduzidos no BEE. Cada figura possui cerca de 10^6 pontos.

4.3.1 Parâmetro de ordem e o expoente β

Os resultados apresentados aqui são para $a = 1.04$. Resultados semelhantes foram observados para $a = 1.03, 1.05, 1.06$ e 1.07 . O que faremos é cruzar $t_0(a = 1.04)$, variando o valor do parâmetro t . Por conveniencia definimos o parâmetro adimensional

$$\theta = 1 - \frac{t}{t_0(a)} = 1 - \frac{t}{t_c}. \quad (4.3)$$

Na Figura 35 vemos o espaço de fases reduzido para $\theta = 0.5$ e $\theta = 0.05$. Vale salientar que quando $\theta \rightarrow 0$ temos $t \rightarrow t_c$. Claramente observamos características de um espaço de

fases misto como observado nos exemplos anteriores. Quando θ diminui o subconjunto do espaço de fase caótico aumenta.

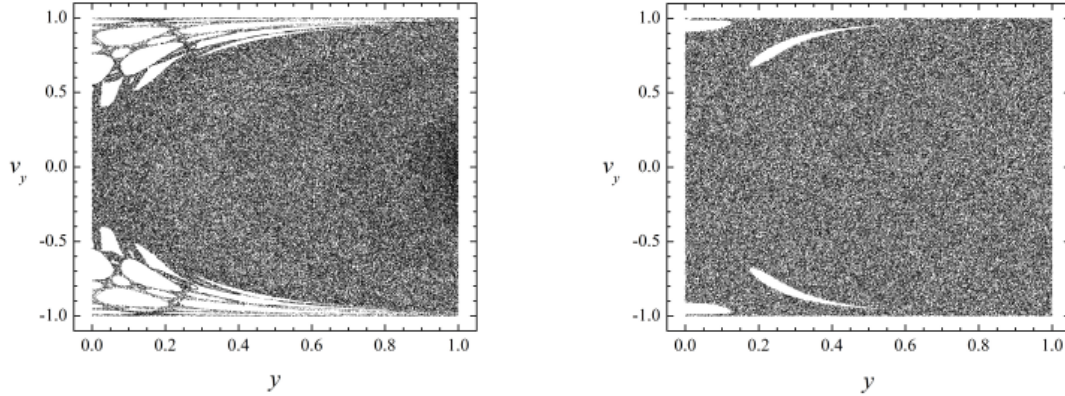


Figura 35 – Espaços de Fases Reduzidos para $\theta = 0.5$ e $\theta = 0.05$.

Para caracterizar estatisticamente a dinâmica do bilhar o plano de fases é particionado em N_c pequenas células disjuntas. Como em trabalhos anteriores (5),(22), aqui usamos $N_c = 10^6$. A Figura 36 mostra resultados numéricos para $r(n)$ no BEE com $a = 1.04$ e alguns valores de θ , assim como $r_{RM}(n)$. Média em $5 \cdot 10^4$ condições iniciais aleatórias foram usadas. Quando $\theta \rightarrow 0$, podemos ver que $r(n) \rightarrow r_{RM}(n)$, uma evidência ainda mais forte de que a ergodicidade plena é atingida no BEE quando $t = t_0(a) = \sqrt{a^2 - 1} = 0.2856\dots$. Nos cálculos numéricos descartamos trajetórias não típicas. Na prática a maioria delas são trajetórias que passam muito tempo colindando apenas com a parte retangular do bilhar quase que verticalmente. Com esses resultados em mente, nosso próximo passo para caracterizar a transição na dinâmica é buscar um parâmetro de ordem.

Aqui a analogia com a transição λ já nos dá uma pista do parâmetro de ordem que precisamos definir. No ^4He , ele é proporcional à raiz quadrada da concentração da componente superfluida ρ_s , que é não entrópica. Por outro lado a componente normal do fluido possui entropia não nula. Dessa forma nossa analogia com o espaço de fases misto se faz considerando que a componente caótica do espaço de fases está para a concentração do fluido normal assim como a componente regular está para a porção superfluida (ver Figura 37). Definimos, então nosso parâmetro de ordem como

$$\psi \equiv \sqrt{1 - r_\infty}, \quad (4.4)$$

onde $r_\infty = r(n \rightarrow \infty)$. Em nossos cálculos numéricos usamos $r_\infty \simeq r(n = 20 \times 10^6)$.

Na Figura 38 temos ψ^2 como função de θ na vizinhança de t_c , mais uma vez para

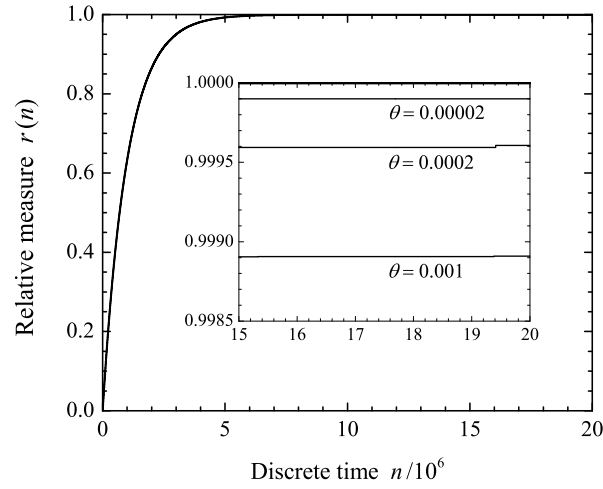


Figura 36 – Na escala aberta, todas as curvas parecem coalescer em $r_{\text{RM}}(n)$. O encarte mostra detalhes do comportamento assintótico de $r(n)$ para diferentes valores de θ .

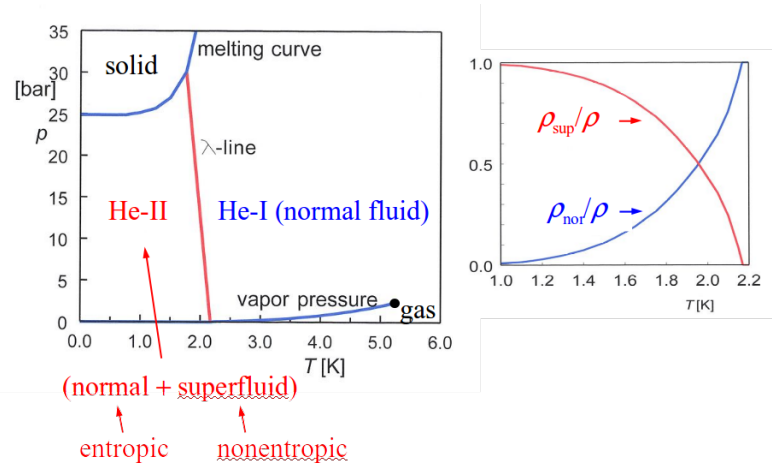


Figura 37 – Esquerda: diagrama de fases para o ^4He no diagrama PV. Direita: concentrações do hélio normal e superfluido em função da temperatura (24)(28).

$a = 1.04$. O ajuste foi feito com a seguinte equação:

$$\psi^2 = P_1(1 + P_2\theta)\theta^{2\beta}(1 + P_3\theta^\Delta). \quad (4.5)$$

Essa equação é baseada na fórmula assintótica de Sigsaas and Ahlers (24), proposta para a transição λ . Devido à grande quantidade de parâmetros simplificamos o ajuste seguindo (24). Fixamos $P_2 = -1.8$, $2\beta = 0.68$, $P_3 = 0.4$ e $\Delta = 0.5$, deixando livre para o ajuste apenas P_1 . O resultado é a linha sólida na figura com $P_1 = 0.1294 \pm 0.0013$. Em particular, o valor $2\beta = 0.68$ é muito próximo do valor medido no hélio líquido $2\beta_{\text{exp}} = 0.677 \pm 0.020$ (29), que por sua vez, concorda com o resultado predito teoricamente via grupo de renormalização $\beta_{\text{teor}} = 0.3454 \pm 0.0015$ (28). Motivados por essas

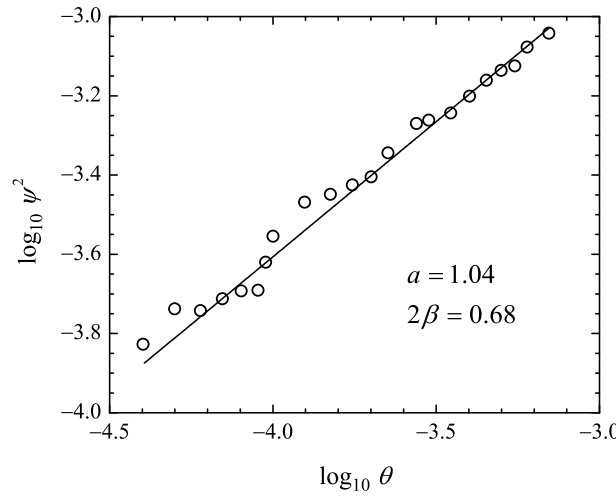


Figura 38 – Símbolos: $\psi^2 = 1 - r_\infty$ em função de θ calculado numericamente. Linhas: Ajuste com a equação (4.5) com expoente $2\beta = 0.68$ e $\Delta = 0.5$, idênticos ao do ^4He .

concordâncias, fomos em busca de um análogo da capacidade térmica da termodinâmica para o bilhar.

4.3.2 Capacidade do bilhar e o expoente α

A divergência no calor específico no ^4He é determinado na maioria das vezes pela presença de flutuações no parâmetro de ordem. Pequenas mudanças na temperatura absoluta T em torno de T_c levam a grandes variações da entropia termodinâmica S . As relações que definem a capacidade térmica do sistema nos levam a propor a definição da capacidade do bilhar a partir da entropia de Shannon $s(t, a)$:

$$c = t \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right)_a. \quad (4.6)$$

Utilizamos séries de tamanho $n = 10^8$ e médias em 100 pares de condições iniciais para computar as probabilidades $\{p_i\}_{i=1}^{N_c}$. A Figura 39 mostra $s(t)$ calculada numericamente para $a = 1.04$ na região $0.275 < t < 0.295$. Nesse intervalo, há uma clara evidência que $s(t)$ cresce suavemente se $t < t_c = 0.2856\dots$ e possui um valor positivo e constante para $t > t_c$.

A correspondente capacidade do bilhar $c(t)$ é numericamente calculada pela equação (4.6) utilizando os dados da Figura 39. O resultado é mostrado na Figura 40, onde é possível observar a forma λ , característica da transição.

O próximo passo é estimar o correspondente expoente crítico α para a transição no bilhar. Em experimentos com hélio líquido, o calor específico é finamente medido em várias ordens de grandeza em torno de T_c . Em experimentos sem gravidade, por

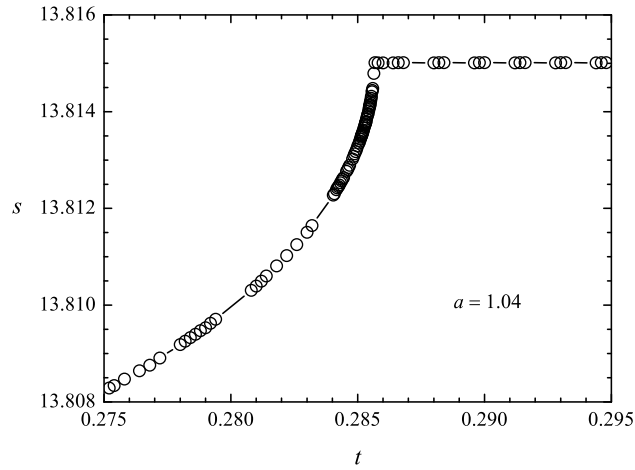


Figura 39 – Entropia de Shannon em função de t no BEE para $a = 1.04$. Aqui $t_c = t_0(a) = 0.2856\dots$. A linha é apenas um guia para os olhos.

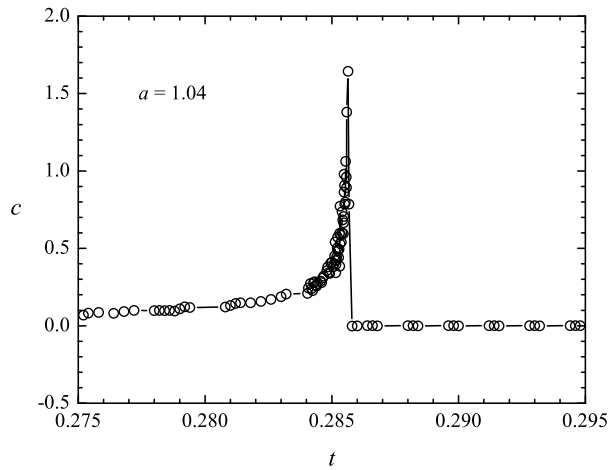


Figura 40 – Capacidade do bilhar em função de t . A linha é apenas um guia para os olhos.

exemplo, a resolução chega a $|\theta| \simeq 10^{-12}$ em condições ideais. Nossos dados não são tão ricos e, de fato, torna-se muito ruidoso quando t está muito próximo de t_c . Muito devido à acurácia limitada da derivada numérica de $s(t)$, que é um conjunto de dados discretos. Dito isso, temos a Figura 41 mostrando o comportamento de $c(\theta)$. Realizamos o ajuste dos dados com uma expressão resultante da teoria de grupo de renormalização (28):

$$c(\theta) = P_5 + P_6 \frac{\theta^{-\alpha}}{\alpha} (1 - P_7 \sqrt{\theta}). \quad (4.7)$$

Aqui os parâmetros P_5 , P_6 e P_7 foram mantidos livres enquanto o expoente crítico foi mantido fixo próximo ao valor experimental $\alpha = -0.0127$. Note que o valor experimen-

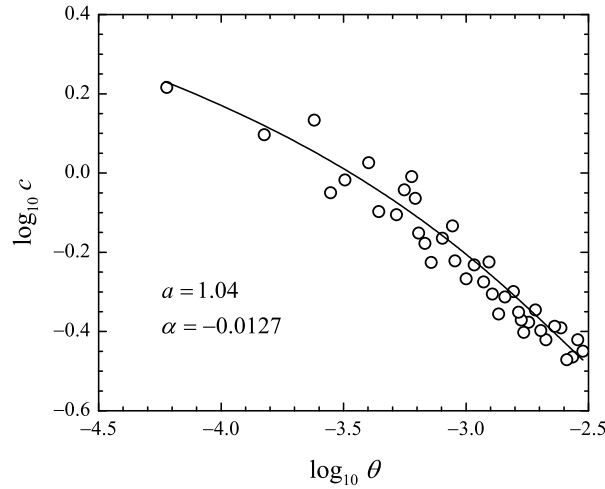


Figura 41 – Símbolos: gráfico log-log de $c(\theta)$ para t muito próximo de t_c . Linha: ajuste com a equação (4.7) com expoente crítico $\alpha = -0.0127$.

tal no ^4He é $\alpha_{\text{exp}} = -0.01270 \pm 0.00030$ (30), que por sua vez possui um excelente acordo com o valor predito pela teoria quântica de campos, $\alpha_{\text{teor}} = -0.01294 \pm 0.00060$ (31). Os valores resultantes do ajuste são $P_5 = 37.7 \pm 4.6$, $P_6 = 0.518 \pm 0.066$ e $P_7 = 0.267 \pm 0.080$.

Em suma, foi traçado um paralelo entre a transição λ no ^4He líquido e a mudança de um espaço de fases misto para um completamente caótico quando a linha $t_0(a)$ é cruzada no espaço de parâmetros do BEE com $a \in (1, \sqrt{4/3})$. Para quantificar a transição no espaço de fases reduzido, primeiro voltamos a atenção para o parâmetro de ordem do sistema. Em geral, na descrição estatística de sistemas de muito corpos interagentes escolher o parâmetro de ordem não é uma tarefa muito simples. Felizmente, no hélio líquido interagente, a parte real do parâmetro de ordem ψ é proporcional à raiz quadrada da densidade do superfluido, razão do sucesso do modelo de dois fluidos. Nossa analogia no BEE aqui proposta é que essa porção superfluida corresponde à fração regular do espaço de fases. Aproximando-se de T_c em baixas temperaturas absolutas, ψ se anula criticamente com expoente $\beta_{\text{exp}} \simeq 0.34$, estando em excelente acordo com o valor predito pela teoria de grupo de renormalização. Por outro lado, o calor específico diverge logicamente quando $T \simeq T_c$, com o expoente crítico sendo um desafio tanto para experimentais quanto para teóricos. O mais recente valor experimental em microgravidade data de 2003 e vale $\alpha_{\text{exp}} \simeq -0.0127$. Esse valor está em ótimo acordo com a teoria φ^4 de Kleinert, $\alpha_{\text{teor}} \simeq -0.01294$. Existem várias outras estimativas teóricas na literatura, mas esse resultado parece ser o melhor comparado ao valor experimental. Propomos uma analogia na qual tomamos emprestada a definição de capacidade térmica da termodinâmica para definir a capacidade do bilhar via a Entropia de Shannon. Uma parte central da teoria de fenômenos críticos é o conceito de classe de

a universalidade, caracterizada por um conjunto de expoentes críticos. Prevista pela teoria de grupo de renormalização, universalidade é determinada apenas por uma pequena quantidade de características como dimensionalidade e graus de liberdade do parâmetro de ordem, deixando de lado propriedades microscópicas do sistema. Hélio líquido possui dimensionalidade 3 e seu parâmetro de ordem complexo tem 2 graus de liberdade (valor absoluto e fase da função de onda). Assim, o ^4He é um fluido quântico que pertence à classe de universalidade tridimensional XY. Por outro lado, o BEE é um sistema composto por uma partícula clássica confinada no espaço cuja complexidade do espaço de fases é ditada pelos parâmetros geométricos. Note que existem outros bilhares com espaço de fases misto (8), mas o BEE nos parece ser único. A característica em comum que motivou esse trabalho é que tanto o ^4He quanto o BEE possuem uma linha de transição separando duas diferentes fases, uma mista e outra completamente entrópica. No caso do hélio a linha λ está associada com uma transição de fase de segunda ordem, enquanto que $t_0(a)$ é uma forte candidata para ser o limite inferior para o caos no BEE se $(1 < a < \sqrt{4/3})$. De fato o que foi rigorosamente calculado em (27) foi o início da hiperbolicidade das órbitas pantográficas a partir da curva $H(a)$ para $1 < a < \sqrt{2}$ no espaço de parâmetros (t, a) . A característica totalmente hiperbólica dessas órbitas pode estar associada à presença de caos em todo o espaço de fases, desde que se possa provar que esse tipo de órbita seja realmente a última a deixar de ser elíptica. Até onde sabemos, só há evidências numéricas. Então, através da analogia com a transição de fase real, nós fornecemos evidências numéricas adicionais de que a linha $t_0(a)$ é de fato um limite crítico separando os estádios completamente caóticos dos de espaço de fases misto. Ajustes satisfatórios foram obtidos no bilhar para os expoentes α e β , bem próximos dos valores experimentais no ^4He dando suporte quantitativo para a analogia. Certamente existem diferenças entre as duas transições. Por exemplo, o BEE exibe uma distribuição uniforme de ocupação do espaço de fases para $t > t_c$, levando a um valor constante da entropia de Shannon (aqui $\ln N_c = \ln 10^6 = 13.8155\dots$). Isso faz com que a capacidade do bilhar seja nula para $t > t_c$, diferentemente do hélio líquido para $T > T_\lambda$.

5 Quantização do bilhar estádio elíptico

5.1 Funções de onda cicatrizadas

Bilhares quantizados podem exibir densidade de probabilidade com uma concentração extra na vizinhança de órbitas periódicas clássicas desde que a borda as permita. A essa localização dá-se o nome de cicatriz. Esse tipo de localização foi descoberta e batizada por Eric J. Heller (32). Um estudo quantitativo de cicatrizes no estádio de Bunimovich pode ser visto em (33). Dada a importância das órbitas pantográficas na caracterização da dinâmica clássica do BEE nós buscamos e encontramos autofunções que cicatrizam próximas a órbitas desse tipo. Apresentamos aqui alguns resultados preliminares já publicados em (34). A Figura 42 mostra a densidade de probabilidade $|\varphi(\vec{r})|^2$ correspondente a $k \simeq 37.3591$ no BEE com $a = 1.04$ e $t = 1$. Aqui k é o número de onda advindo da equação de Helmholtz em (1.20). Importante destacar que para esses parâmetros a curva de transição clássica já foi ultrapassada e as órbitas pantográficas de todas as ordens já são hiperbólicas. As linhas amarelas na figura representam a órbita pantográfica com $i = 0$ exata. Com origem no centro do bilhar, os pontos de colisão são $(\pm 1.2856..., \pm 0.9615...)$. Esses valores são obtidos com o método descrito em (27).

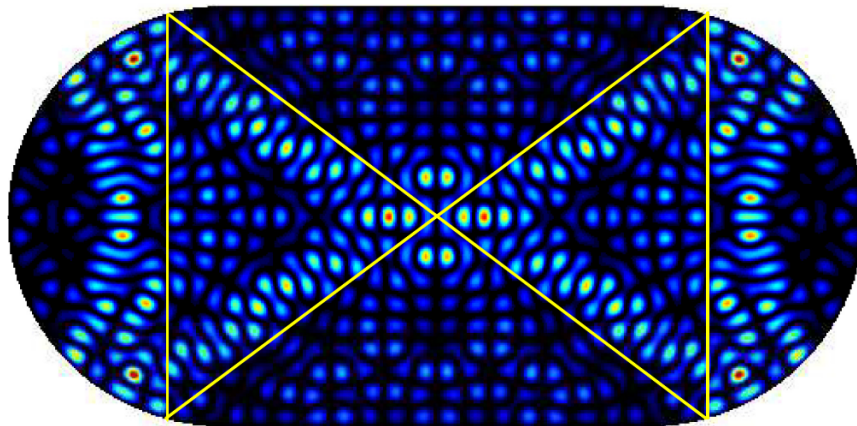


Figura 42 – Densidade de probabilidade $|\varphi(\vec{r})|^2$ correspondente a $k \simeq 37.3591$ para o BEE com $a = 1.04$ e $t = 1$. As linhas amarelas representam a órbita pantográfica com $i = 0$.

A seguir, mostramos outros dois exemplos de órbitas de ordens diferentes no mesmo bilhar com $a = 1.185$ e $t = 1$. Para esse conjunto de parâmetros mais uma vez estamos num cenário onde classicamente todas as órbitas pantográficas são hiperbólicas. Na Figura 43 temos uma densidade de probabilidade que cicatrizou próxima à pantográfica de ordem $i = 0$, representada pela linha amarela com pontos de colisão dados por

$(\pm 1.6357..., \pm 0.8438...)$. Na Figura 44 a cicatriz dessa vez sombreia uma órbita pantográfica de ordem $i = 1$, os pontos de colisão são $(\pm 1.2905..., \pm 0.9694...)$ e $(0, \pm 1)$. Esta última figura foi escolhida para a seção Kaleidoscope da página da Physical Review E na internet (34). Na Figura 45 a cicatriz é em torno órbita com $i = 2$.

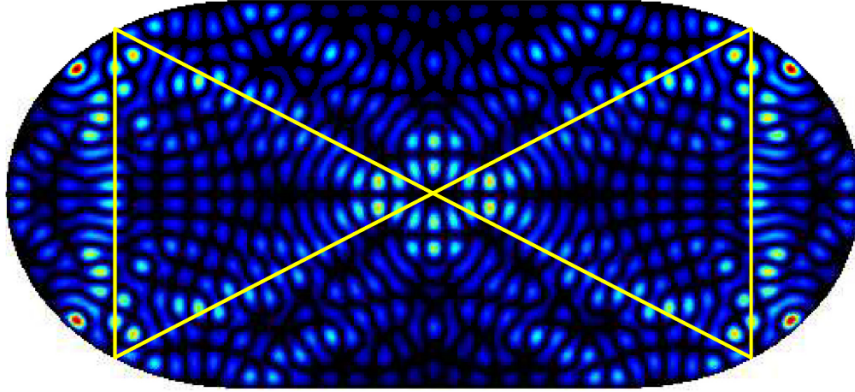


Figura 43 – Densidade de probabilidade $|\varphi(\vec{r})|^2$ correspondente ao autovalor $k \simeq 36.7532$ para o BEE com $a = 1.185$ e $t = 1$. As linhas amarelas representam a órbita pantográfica com $i = 0$.

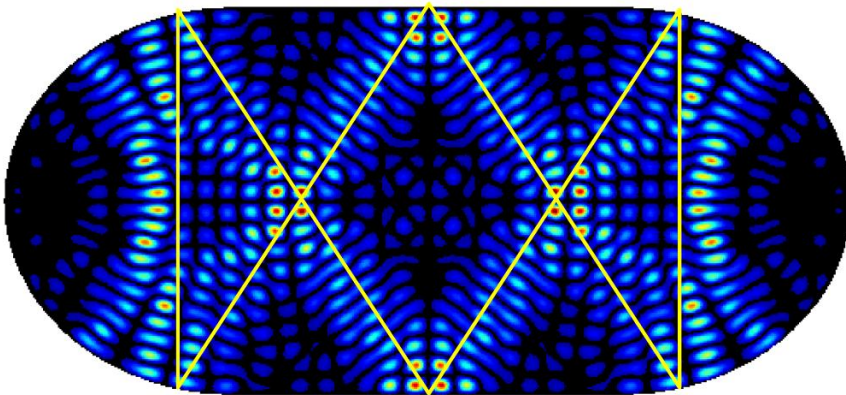


Figura 44 – Densidade de probabilidade $|\varphi(\vec{r})|^2$ correspondente ao autovalor $k \simeq 36.7532$ para o BEE com $a = 1.185$ e $t = 1$. As linhas amarelas representam a órbita pantográfica com $i = 0$.

Esses resultados preliminares mostrados aqui demonstram a interessante possibilidade do estudo de cicatrizes nas autofunções do BEE em torno das órbitas pantográficas. Se há ou não uma relação quantitativa entre o fenômeno das cicatrizes e as curvas críticas $t_i(a)$ ainda está em aberto.

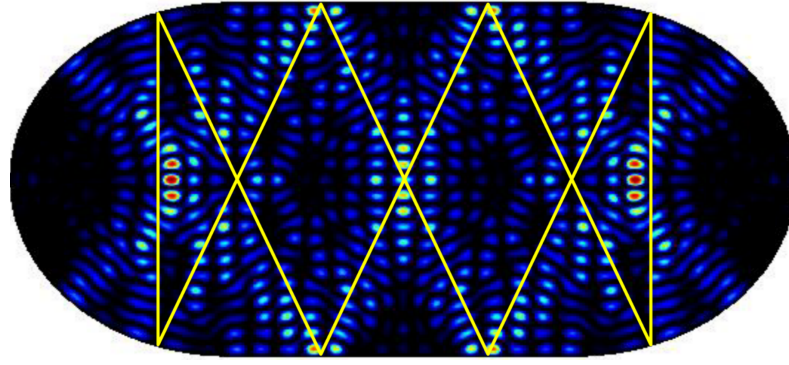


Figura 45 – Densidade de probabilidade $|\varphi(\vec{r})|^2$ correspondente ao autovalor $k \simeq 40.6706$ para o BEE com $a = 1.278$ e $t = 1$. As linhas amarelas representam a órbita pantográfica com $i = 2$.

5.2 Caracterização estatística

5.2.1 Espaçamento entre autovalores vizinhos

Para evitar degenerescências nossos 150 000 autovalores foram calculados em $1/4$ do BEE, o que corresponde a selecionar apenas os estados ímpares do bilhar completo. A autofunção mostrada na Figura 44 equivale a um desses estados. Inicialmente nossa caracterização será feita através da distribuição de espaçamentos entre autovalores vizinhos, $p(s)$. Previamente Lopac e colaboradores (35) estudaram a quantização de BEEs mas com no máximo 3 000 autovalores, levando a resultados bastante pobres, como pode ser visto na Figura 46.

Sabemos que a dinâmica clássica no BEE apresenta uma transição de regular para completamente caótico passando por uma região no espaço de parâmetros onde o espaço de fases é misto. Com a distribuição de Berry-Robnik em mãos partimos para tentar ajustar nossas distribuições com essa expressão. Fixamos $a = 1.04$ e encontramos que para valores do parâmetro t próximos a $t_c = \sqrt{a^2 - 1} = 0.285657\dots$ a expressão ajusta de maneira ótima nossos dados, sendo irrelevante o uso do valor ρ_c calculado previamente, por apresentarem valores já muito próximos de 1, como pode ser visto na Figura 47. Mas para valores de t mais próximos do caso regular, a distribuição de BR não é mais capaz de ajustar bem nossos dados, os melhores ajustes podem ser vistos na Figura 48. Esse resultado se mantém seja utilizando o valor calculado do espaço de fases clássico ou utilizando ρ_c como parâmetro de ajuste. Isso nos levou a descartar essa distribuição de nossa caracterização.

Outra expressão extremamente conhecida na literatura é a distribuição fenomenológica de Brody (10), (15)

$$p(s) = a_\nu(\nu + 1)s^\nu \exp(-a_\nu s^{\nu+1}). \quad (5.1)$$

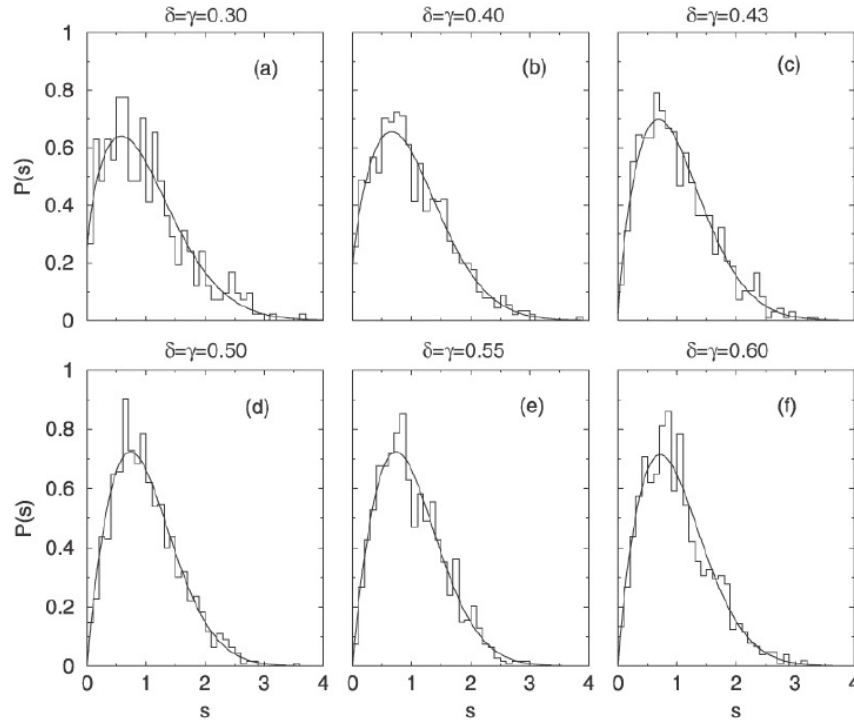


Figura 46 – Distribuições de espaçamentos entre primeiros vizinhos apresentados por Lopac e colaboradores em (35). Aqui, δ e γ são parâmetros geométricos.

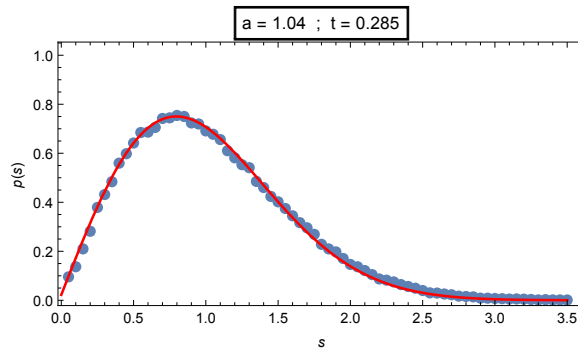


Figura 47 – Os símbolos azuis representam $p(s)$ calculada para $a = 1.04$ e $t = 0.285$. A linha vermelha é um ajuste com a expressão em (1.32). O valor retirado do ajuste é $\rho_c = 0.9688 \pm 0.0030$. Já o valor calculado do espaço de fases clássico é $\rho_c = 0.998329$, ambos em excelente acordo com o resultado de $p(s)$.

Nela, através de um único parâmetro de ajuste ν , se passa pela distribuição de Poisson ($\nu = 0$) até chegar ao GOE ($\nu = 1$). Onde $a_\nu = [\Gamma(\frac{\nu+2}{\nu+1})]^{\nu+1}$ e $\Gamma(x)$ é a função gamma. Além de ser puramente fenomenológica outra característica destacável da distribuição de Brody é sempre apresentar $p(s=0) = 0$, o que chamamos de repulsão de níveis. Para a distribuição de BR por exemplo, $p(s=0) = 1 - \rho_c^2$, apresentando repulsão de níveis apenas no caso completamente caótico com $\rho_c = 1$. A utilização da distribuição de Brody para ajustar nossa $p(s)$ mostrou-se extremamente eficiente para todos os valores de t testados. Mostramos como exemplos na Figura 49 as mesmas distribuições que mostramos anteriormente para fins de comparação. No fim do capítulo colocaremos

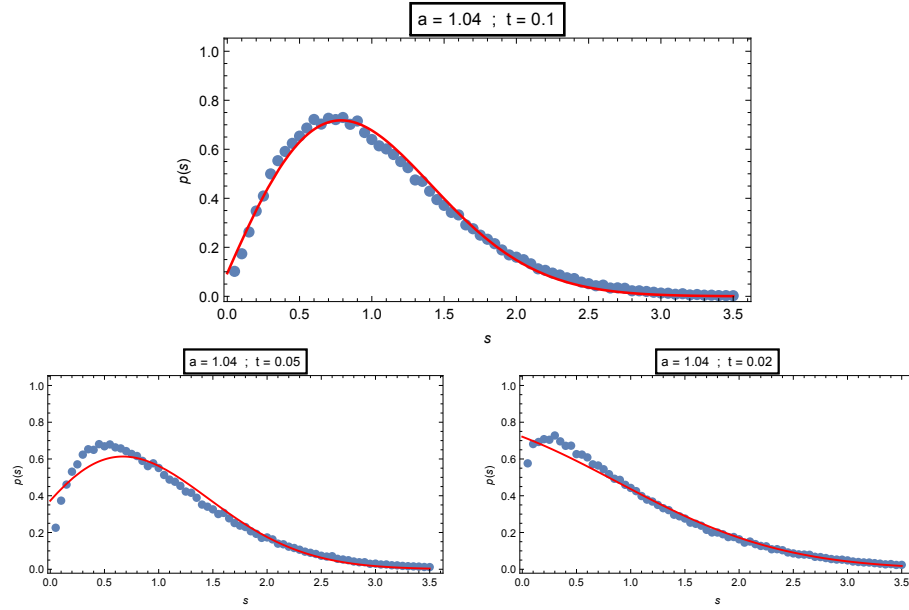


Figura 48 – Os símbolos azuis representam o $p(s)$ calculado. As linhas vermelhas são os melhores ajustes com a distribuição de BR, exemplificando sua incapacidade de representar bem nossos dados.

os resultados para todos os bilhares calculados. Na Figura 50 temos como o parâmetro de Brody varia em relação ao parâmetro geométrico t . Para valores de t pequenos, temos o parâmetro também pequeno e um crescimento monotônico e suave segue com pequenas flutuações. Perto da t_c o parâmetro alcança valores muito próximos de 1, como esperado.

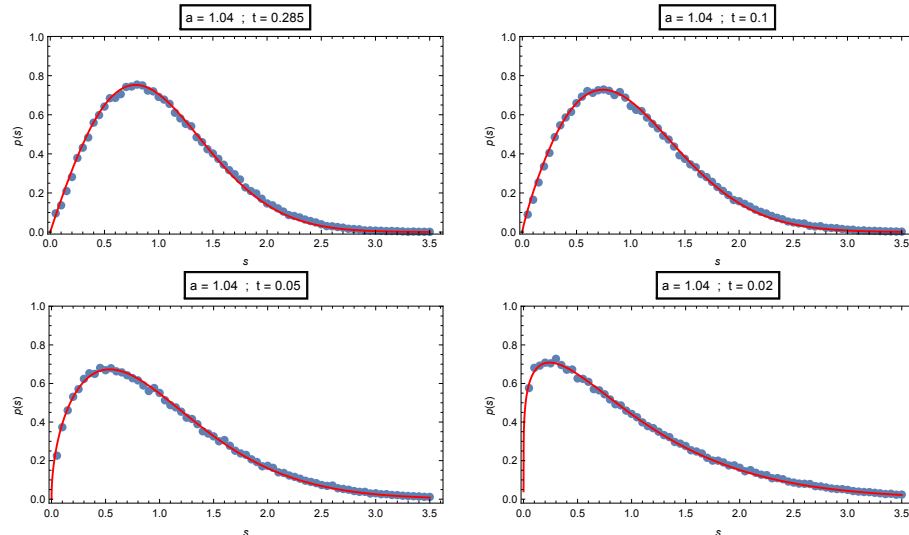


Figura 49 – Os símbolos azuis representam a $p(s)$ calculada. As linhas vermelhas são os melhores ajustes com a distribuição de Brody. Da esquerda para direita e de cima para baixo os valores retirados dos ajustes são 0.9676 ± 0.0085 , 0.8591 ± 0.0076 , 0.5063 ± 0.0058 e 0.2011 ± 0.0032 .

Por último, testamos a distribuição de Berry-Robnik-Brody (BRB), uma interpolação

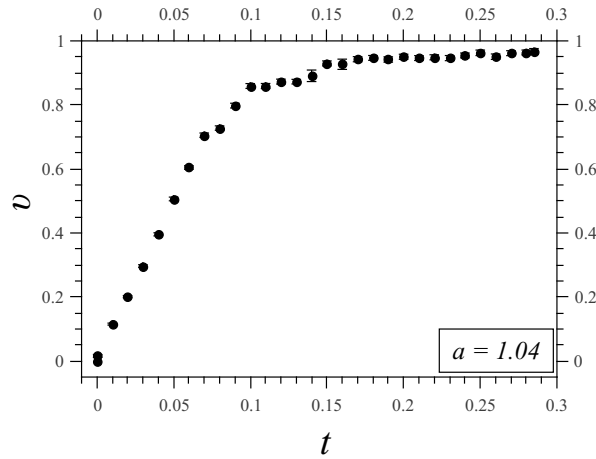


Figura 50 – Parâmetro de Brody em função de t para $a = 1.04$.

das duas citadas anteriormente (17). Como mencionado no capítulo 1 a expressão resultante fica

$$p(s) = \exp(-\rho_r s) \left\{ \frac{\rho_r^2}{(\beta + 1)\Gamma\left(\frac{\beta+2}{\beta+1}\right)} Q\left[\frac{1}{\beta+1}; a_\beta(\rho_c s)^{\beta+1}\right] + \right. \\ \left. + [2\rho_r \rho_c + (\beta + 1)a_\beta \rho_c^{\beta+2} s^\beta] \exp[-a_\beta(\rho_c s)^{\beta+1}] \right\}, \quad (5.2)$$

onde novamente ρ_r e ρ_c são as frações do espaço de fases clássico regular e caótico respectivamente. Assim como na distribuição de Brody $a_\beta = \left[\Gamma\left(\frac{\beta+2}{\beta+1}\right)\right]^{\beta+1}$ e $Q(x)$ é a função gamma incompleta. Os valores previamente calculados de ρ_c estão na Figura 51 e foram mantidos fixos no ajuste, utilizando apenas β como único parâmetro livre. Novamente mostramos na Figura 52 os resultados para os mesmos bilhares anteriores e no fim deste capítulo mostraremos todos eles. Diferentemente da distribuição de BR para todos os bilhares calculados, as $p(s)$ são bem ajustadas pela distribuição de BRB. Assim como o parâmetro ν de Brody, o parâmetro β mostrou um suave crescimento em função do parâmetro t , como pode ser visto na Figura 53.

Com esses resultados concluímos que a distribuição de Berry-Robnik-Brody foi a melhor em descrever as distribuições de espaçamentos entre autovalores vizinhos em sistemas cujo espaço de fases clássico é misto. Apesar do ingrediente fenomenológico da distribuição de Brody, ela possui como parâmetro uma quantidade clássica e foi capaz de ajustar bem todos os nossos resultados. Assim como na dinâmica clássica, estávamos buscando algum comportamento crítico em algum quantificador que indicasse a transição ordem-caos. Os parâmetros de ajuste de Brody e BRB para $p(s)$ mostravam-se bons candidatos para esse fim mas num intervalo pequeno de t próximo a t_c não é

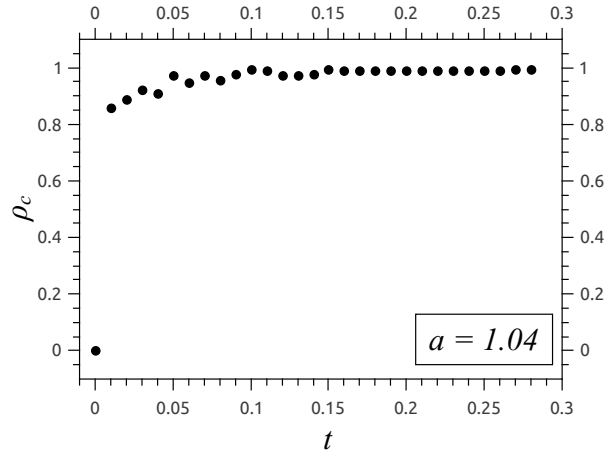


Figura 51 – Porção caótica do espaço de fases clássico em função de t para $a = 1.04$. Note que $a = 1.04$ é um valor próximo a $a = 1$ que corresponde ao estádio de Bunimovich, completamente caótico para qualquer $t > 0$.

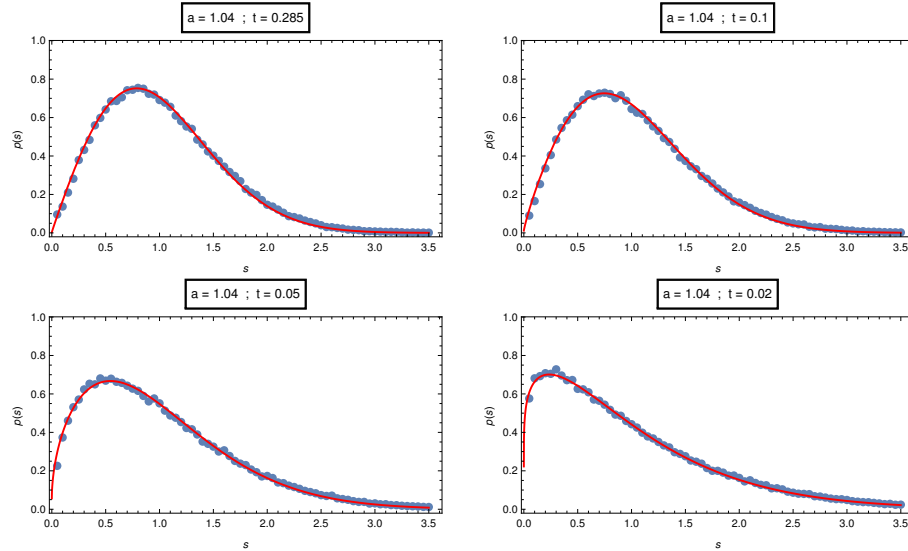


Figura 52 – Os símbolos azuis representam o $p(s)$ calculado. As linhas vermelhas são os melhores ajustes com a distribuição de BRBR. Os valores de (t, ρ_c, β) são $(0.285, 0.998329, 0.9715 \pm 0.0085)$, $(0.1, 0.994202, 0.8707 \pm 0.0081)$, $(0.05, 0.971570, 0.5386 \pm 0.0072)$ e $(0.02, 0.889535, 0.2517 \pm 0.0044)$.

possível ver uma descontinuidade seja na função ou em sua derivada, como encontrado na entropia de Shannon no caso clássico.

5.2.2 Rigidez espectral

Seguindo com a análise estatística dos espectros de autovalores de energia apresentaremos resultados da rigidez espectral

$$\Delta_3(L) = \left\langle \min_{A,B} \frac{1}{L} \int_E^{E+L} [\eta(E) - AE - B]^2 dE \right\rangle, \quad (5.3)$$

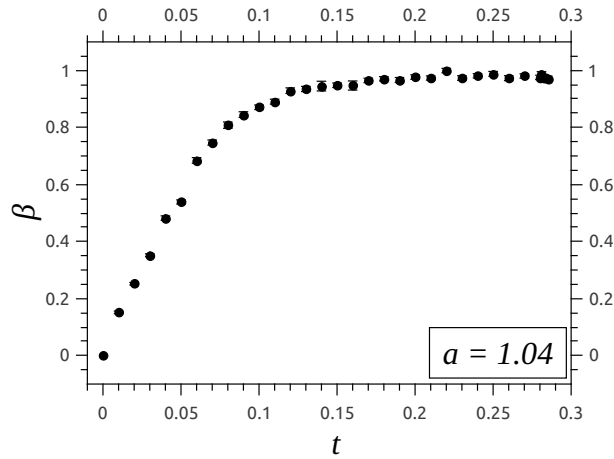


Figura 53 – Parâmetro β em função de t para $a = 1.04$.

onde $\eta(E)$ é a função escada dos autovalores desdobrados e $AE + B$ é a melhor reta que ajusta a função no intervalo $(E, E + L)$. Na Figura 54 seguem algumas curvas para os mesmos bilhares mostrados anteriormente, mostrando como a rigidez espectral se afasta do resultado $\frac{L}{15}$ da distribuição de Poisson e se aproxima do resultado do GOE. Na busca de um quantificador que pudesse apresentar um comportamento crítico, testamos

$$p(t) = \frac{\Delta_3^{(t)}(L=15) - \Delta_3^{(\text{Poisson})}(L=15)}{\Delta_3^{(\text{GOE})}(L=15) - \Delta_3^{(\text{Poisson})}(L=15)}. \quad (5.4)$$

Desse modo, temos que no caso integrável, $p(t=0) = 0$ e num caso totalmente GOE, teríamos $p(t > t_c) = 1$. A escolha do valor da função em $L = 15$ se deu pelo fato de que no caso de Poisson é nesse ponto em que a rigidez atinge o valor numérico 1, simplificando a escrita do parâmetro para

$$p(t) = \frac{\Delta_3^{(t)}(L=15) - 1}{0.273802... - 1} = \frac{1 - \Delta_3^{(t)}(15)}{0.726198...}. \quad (5.5)$$

Na Figura 55 temos o comportamento de $p(t)$. Como esperado $p(t)$ apresentou um crescimento partindo de zero até valores próximos de 1. Infelizmente com uma curvatura que não permite a identificação de um comportamento crítico em $t_0(a)$.

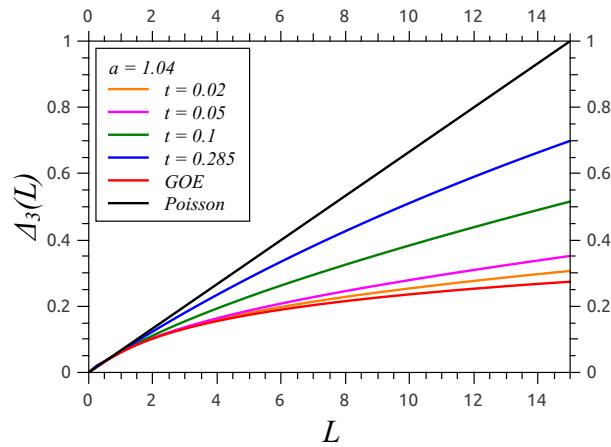


Figura 54 – Rigidez espectral para alguns BEEs. A medida que se afasta de $t = 0$ se aproximando de t_c , as curvas se afastam do resultado de Poisson ficando mais próximas de GOE.

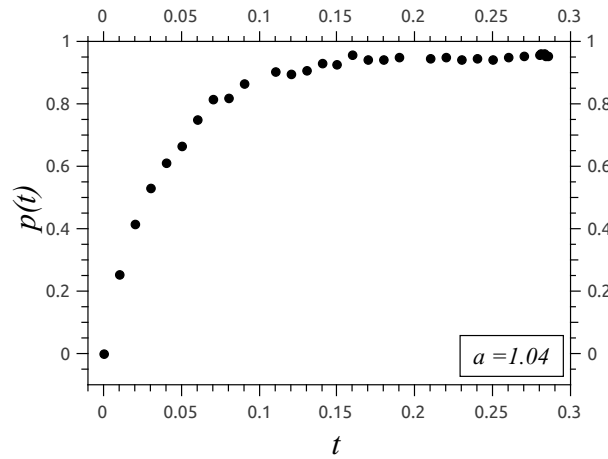


Figura 55 – Parâmetro proposto para quantificador. Ele cresce suavemente de 0 até valores próximos a 1.

5.3 Análise do ruído $1/f^\alpha$

Vimos no capítulo 1 que a estatística δ_n é definida por

$$\delta_n = \sum_{i=1}^n (s_i - \langle s \rangle) = E_{n+1} - E_1 - n, \quad (5.6)$$

onde E_i é o i -ésimo nível de energia desdobrado e $s_i = E_{i+1} - E_i$ é o espaçamento entre primeiros vizinhos.

Flutuações típicas são mostradas na Figura 56 para os estádios com $a = 1.04$ e $t = 0.285, t = 0.1, t = 0.05$ e $t = 0.02$. Elas apresentam forma similar a uma série temporal discreta, cujo comportamento estatístico das flutuações pode ser expresso pelo espectro

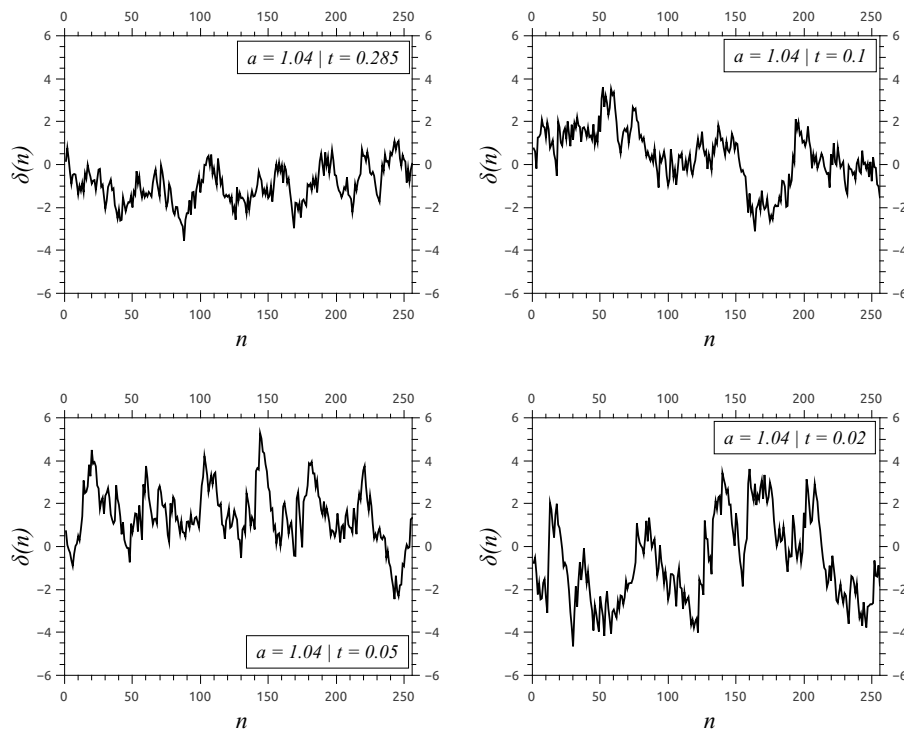


Figura 56 – Séries definidas como na equação (5.6).

de potência

$$S(k) = \left| \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{n=1}^M \delta_n \exp \left(-i \frac{2\pi k}{M} n \right) \right|^2, \quad (5.7)$$

onde M é o tamanho da série. Em geral, para reduzir flutuações estatísticas, faz-se uma média em várias séries resultando num espectro de potência médio $\langle S(k) \rangle$. Nossos cálculos foram feitos com 400 séries todas com $M = 256$ autovalores consecutivos. Uma lei de escala

$$\langle S(k) \rangle \sim \frac{1}{k^\alpha} \quad (5.8)$$

é esperada para cada estádio. Os resultados para $a = 1.04$ e $t = 0.285$, $t = 0.1$, $t = 0.05$ e $t = 0.02$ são mostrados na Figura 57. As linhas sólidas são ajustes lineares. Assim como em (18), para estádios cujo espaço de fases é misto encontramos valores de α no intervalo (1,2).

Investigamos a presença do ruído $1/f^\alpha$ em mais estádios variando-se o parâmetro t . Os gráficos de $S(k)$ estão no fim deste capítulo na Figuras 65, 66 e 67. O comportamento de $\alpha(t)$ está na Figura 58. Para $t = 0$, caso integrável classicamente, o expoente obtido foi 1.779 ± 0.018 . Relativamente longe do esperado valor de 2. Para $t = 0.285$, valor muito

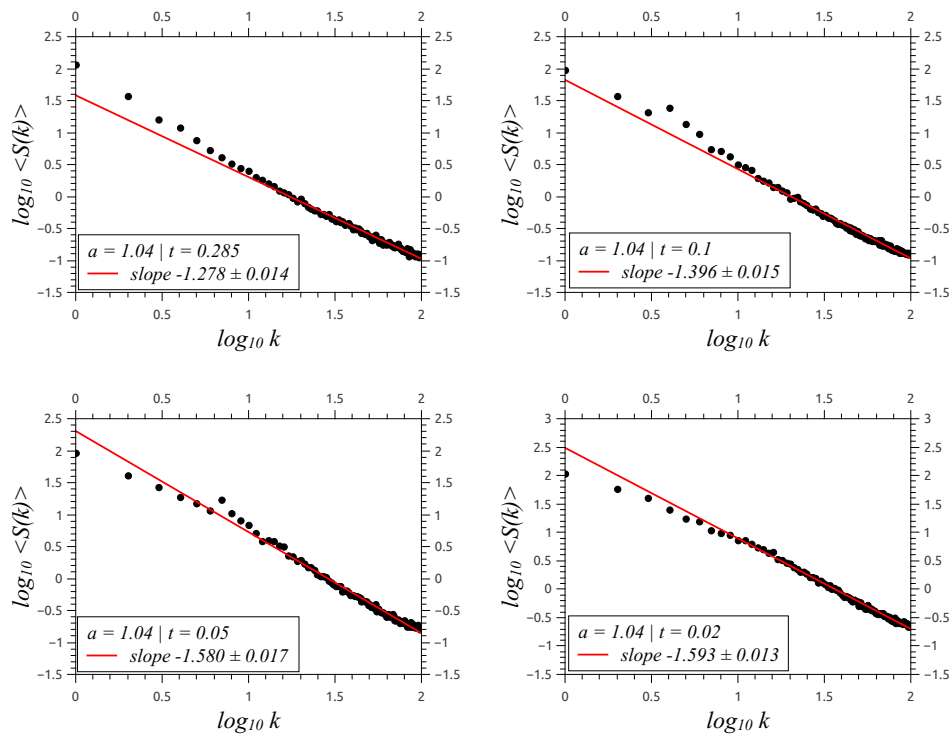


Figura 57 – Símbolos: gráficos log-log de $\langle S(k) \rangle$ como definidos na equação (5.7) para os estádios com $a = 1.04$ e $t = 0.285$, $t = 0.1$, $t = 0.05$ e $t = 0.02$. O expoente α é extraído através da reta de ajuste (linha vermelha).

próximo da transição clássica em $t_c = 0.285657\dots$, o expoente obtido foi 1.278 ± 0.014 , valor mais próximo de 1.

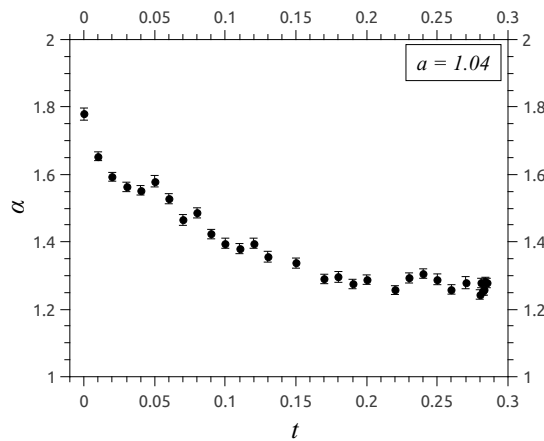


Figura 58 – Expoente α do espectro de potência como função do parâmetro geométrico t para $a = 1.04$.

Neste capítulo apresentamos o estudo da quantização do bilhar estádio elíptico. Mostramos funções de onda cicatrizadas em órbitas periódicas clássicas do tipo panto-gráfica e fizemos uma caracterização estatística de correlações de curto alcance através do cálculo da distribuição de espaçamento entre primeiros vizinhos, $p(s)$ e de longo

alcance através da rigidez espectral $\Delta_3(L)$. Por fim, investigamos a presença do ruído $1/f^\alpha$ no espectro de energia dos bilhares quantizados. Em todas as análises foi fixado $a = 1.04$ e obtivemos espectros de energia para vários valores de t . Nenhuma das estatísticas foi capaz de fornecer um parâmetro que quantificasse a transição como observado na mecânica clássica por mais que as quantidades calculadas como $p(s)$ e $\Delta_3(L)$ apresentem uma mudança qualitativa em seus comportamentos quando variamos t entre $(0, t_c(a))$.

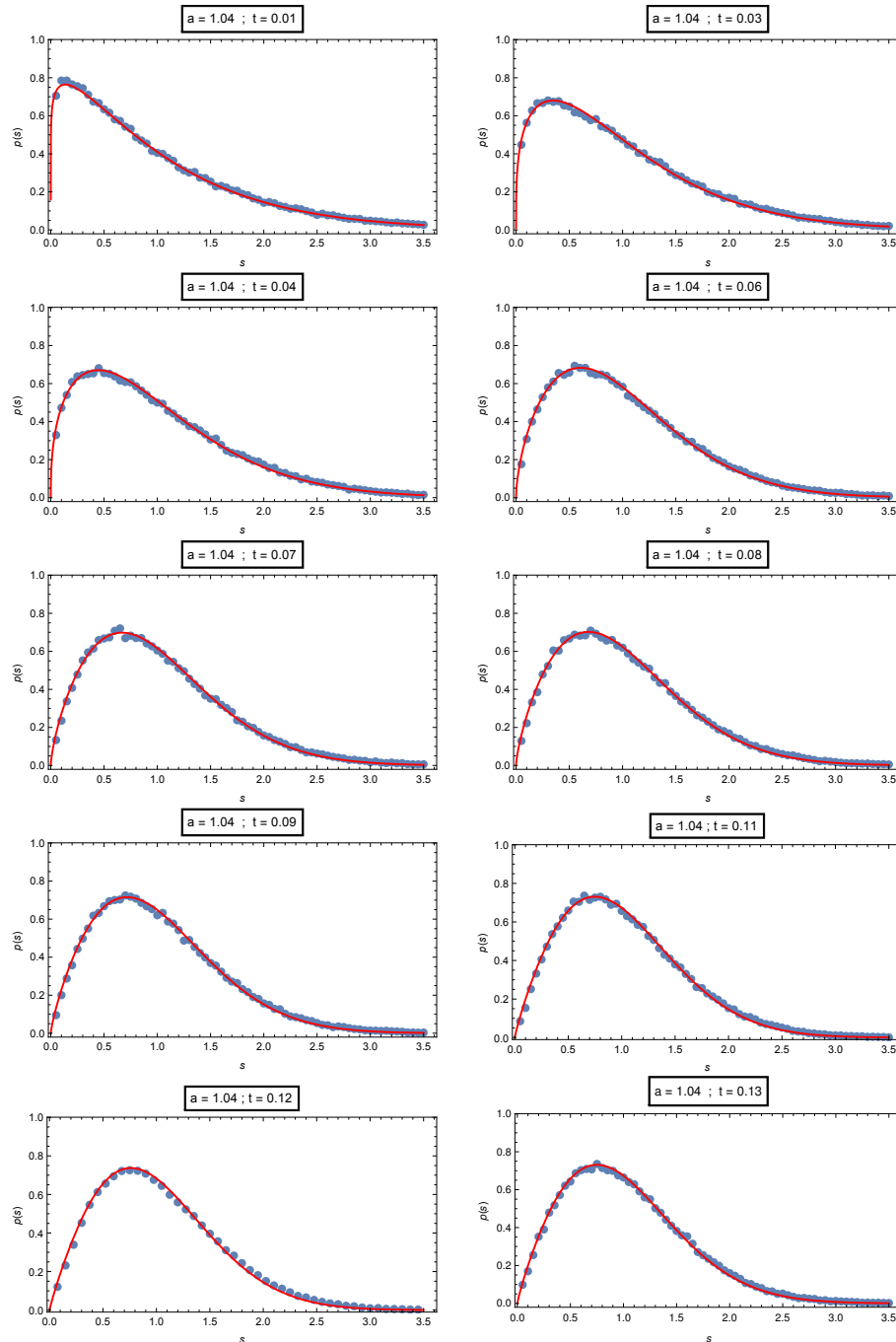


Figura 59 – Os símbolos azuis representam a $p(s)$ calculada. As linhas vermelhas são os melhores ajustes com a distribuição de Brody.

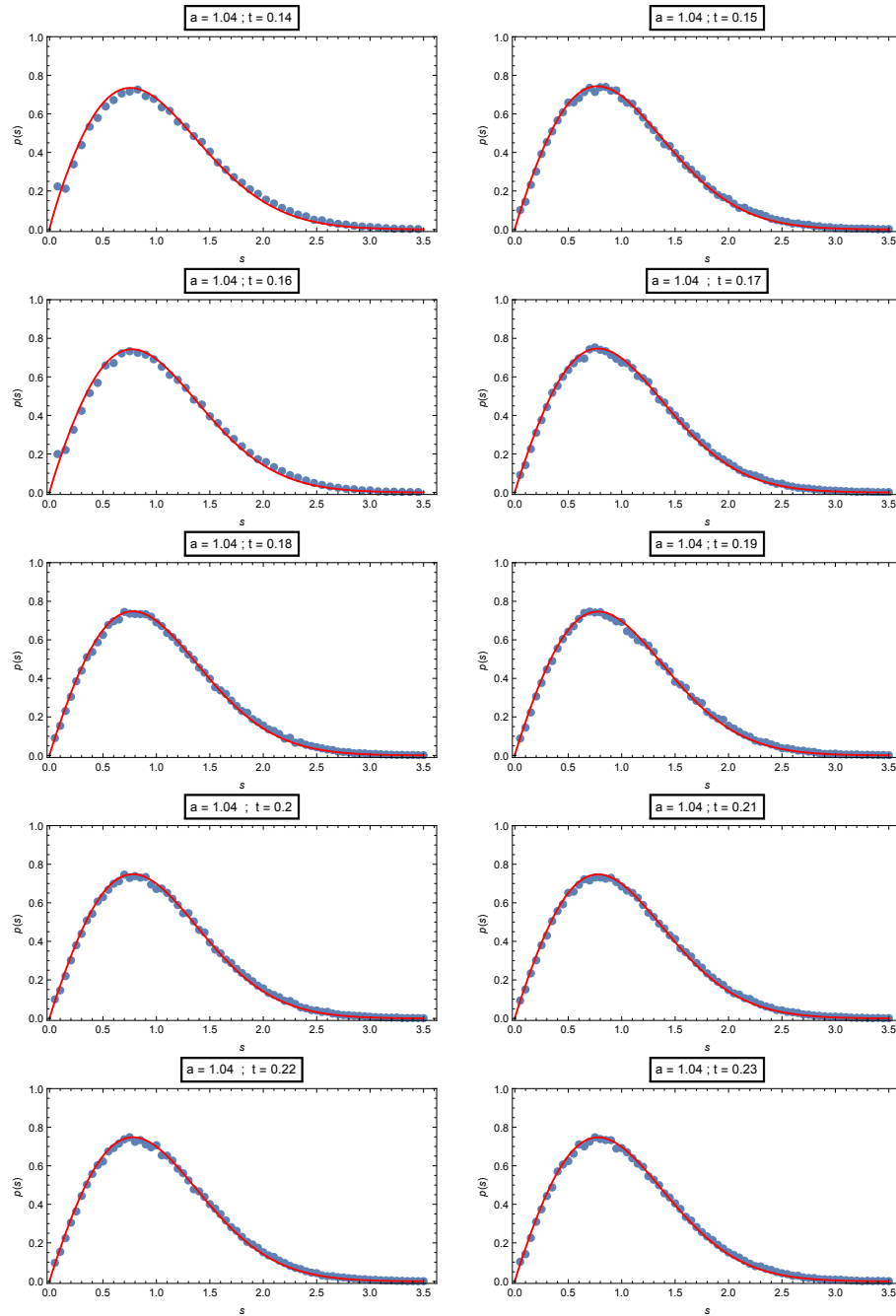


Figura 60 – Os símbolos azuis representam a $p(s)$ calculada. As linhas vermelhas são os melhores ajustes com a distribuição de Brody.

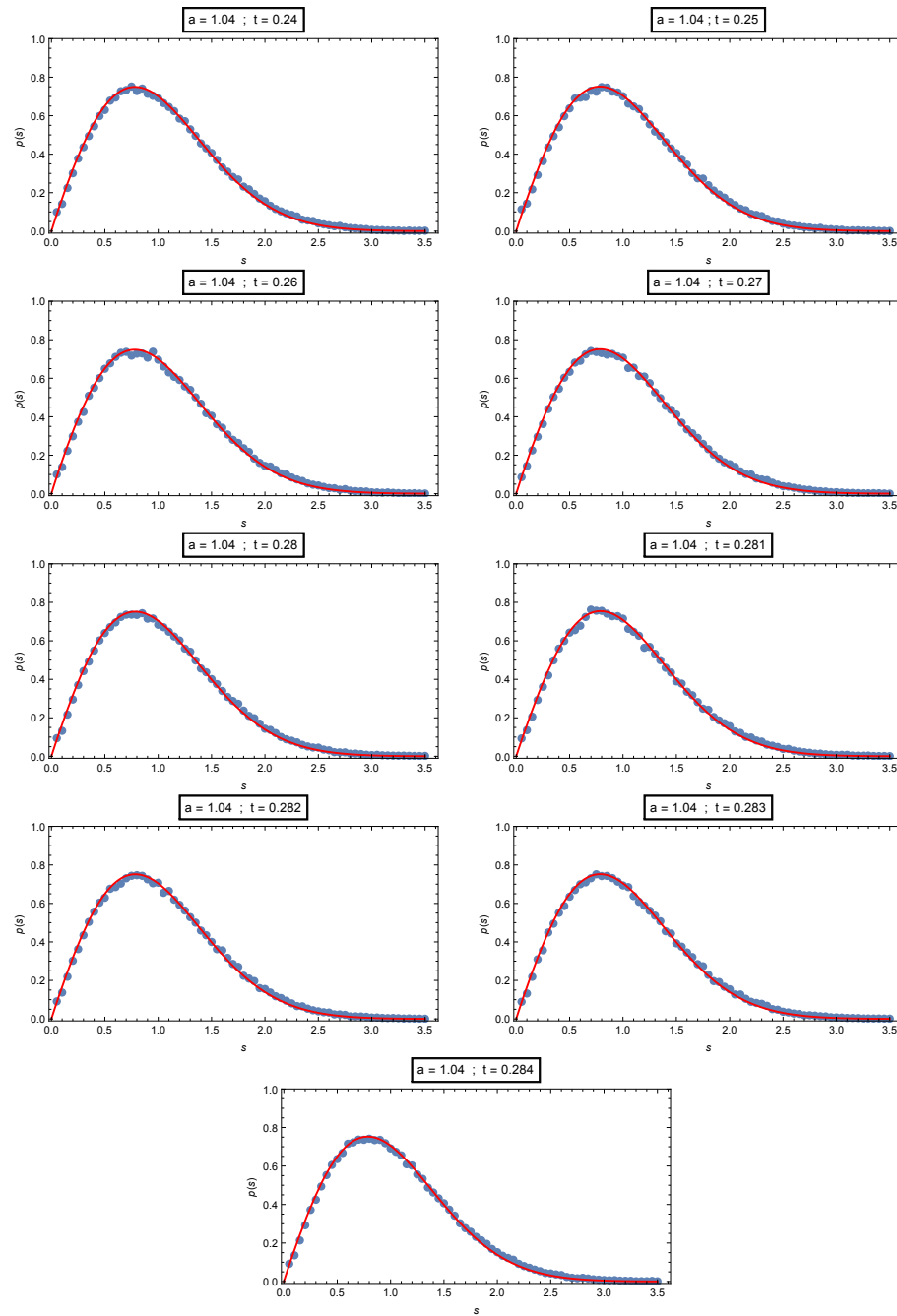


Figura 61 – Os símbolos azuis representam a $p(s)$ calculada. As linhas vermelhas são os melhores ajustes com a distribuição de Brody.

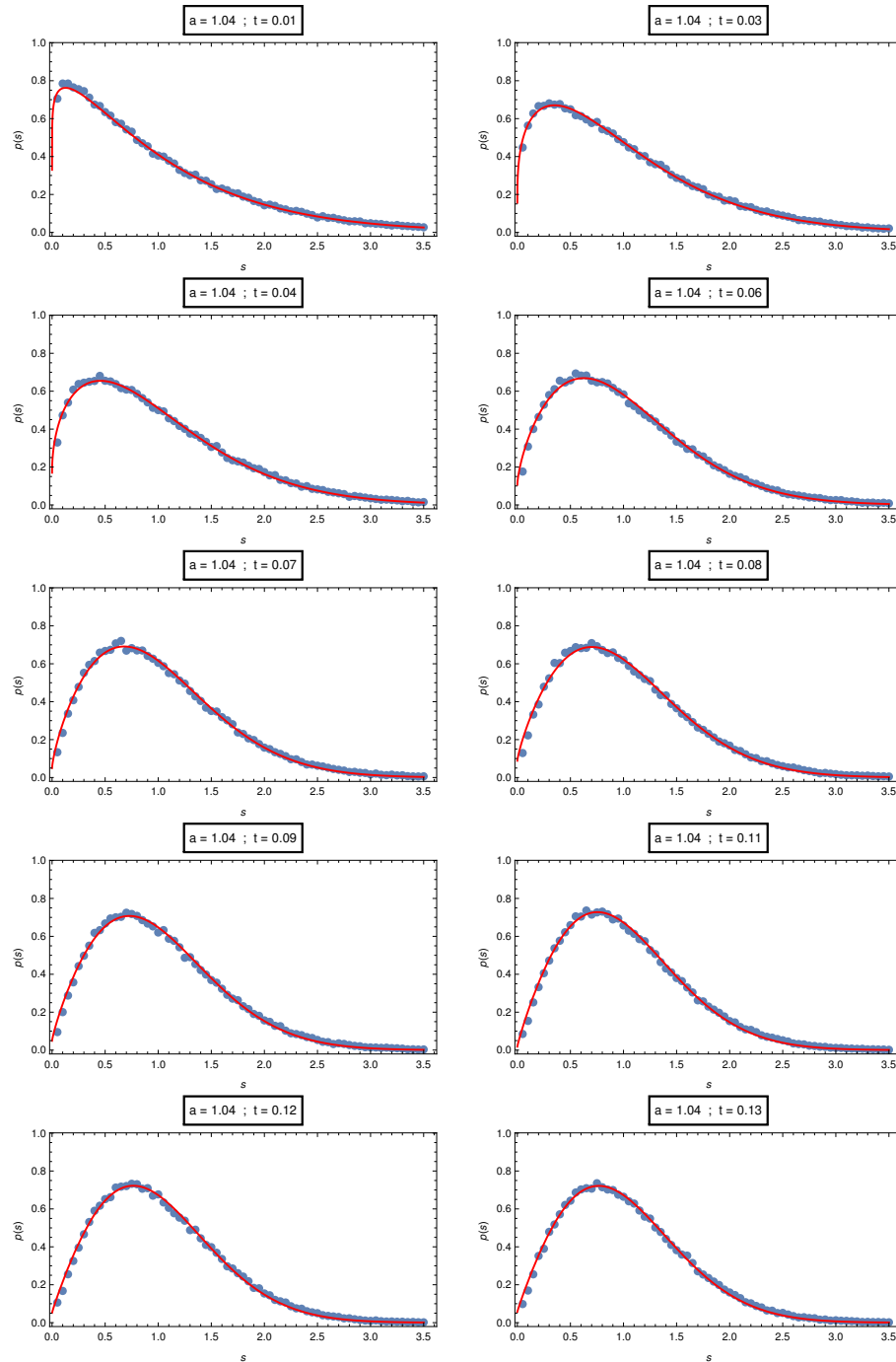


Figura 62 – Os símbolos azuis representam a $p(s)$ calculada. As linhas vermelhas são os melhores ajustes com a distribuição de BRB.

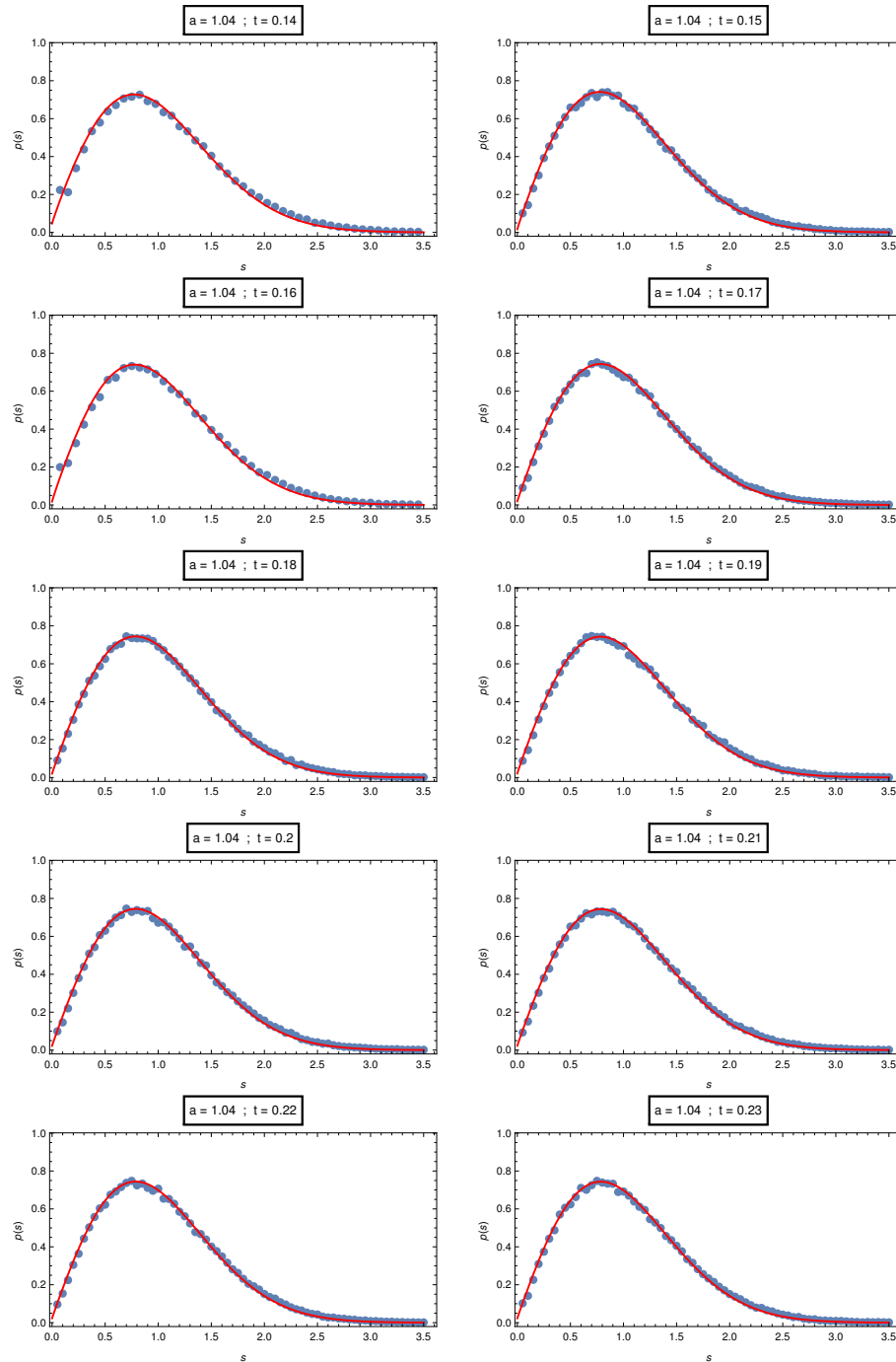


Figura 63 – Os símbolos azuis representam a $p(s)$ calculada. As linhas vermelhas são os melhores ajustes com a distribuição de BRB.

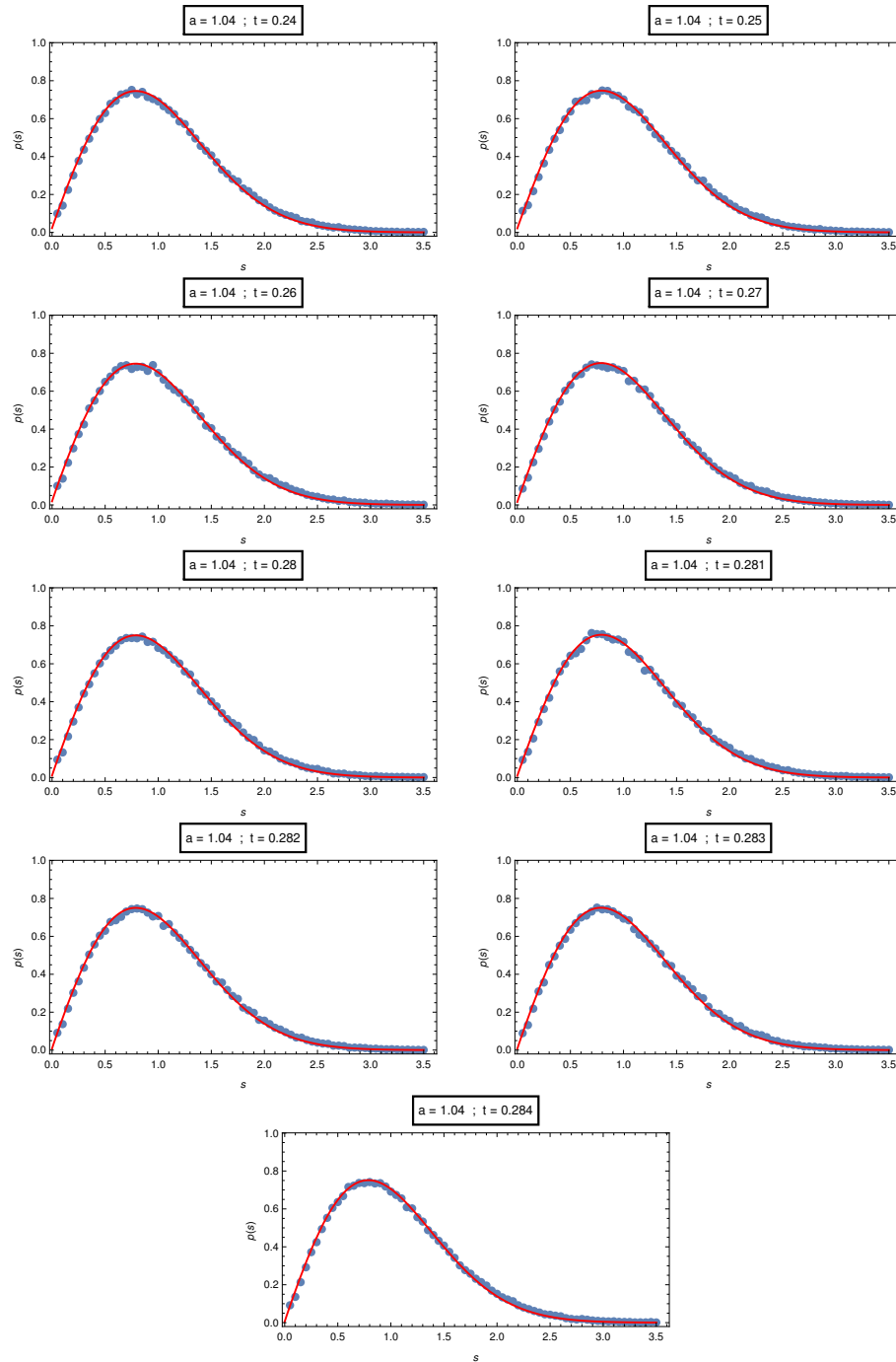


Figura 64 – Os símbolos azuis representam a $p(s)$ calculada. As linhas vermelhas são os melhores ajustes com a distribuição de BRB.

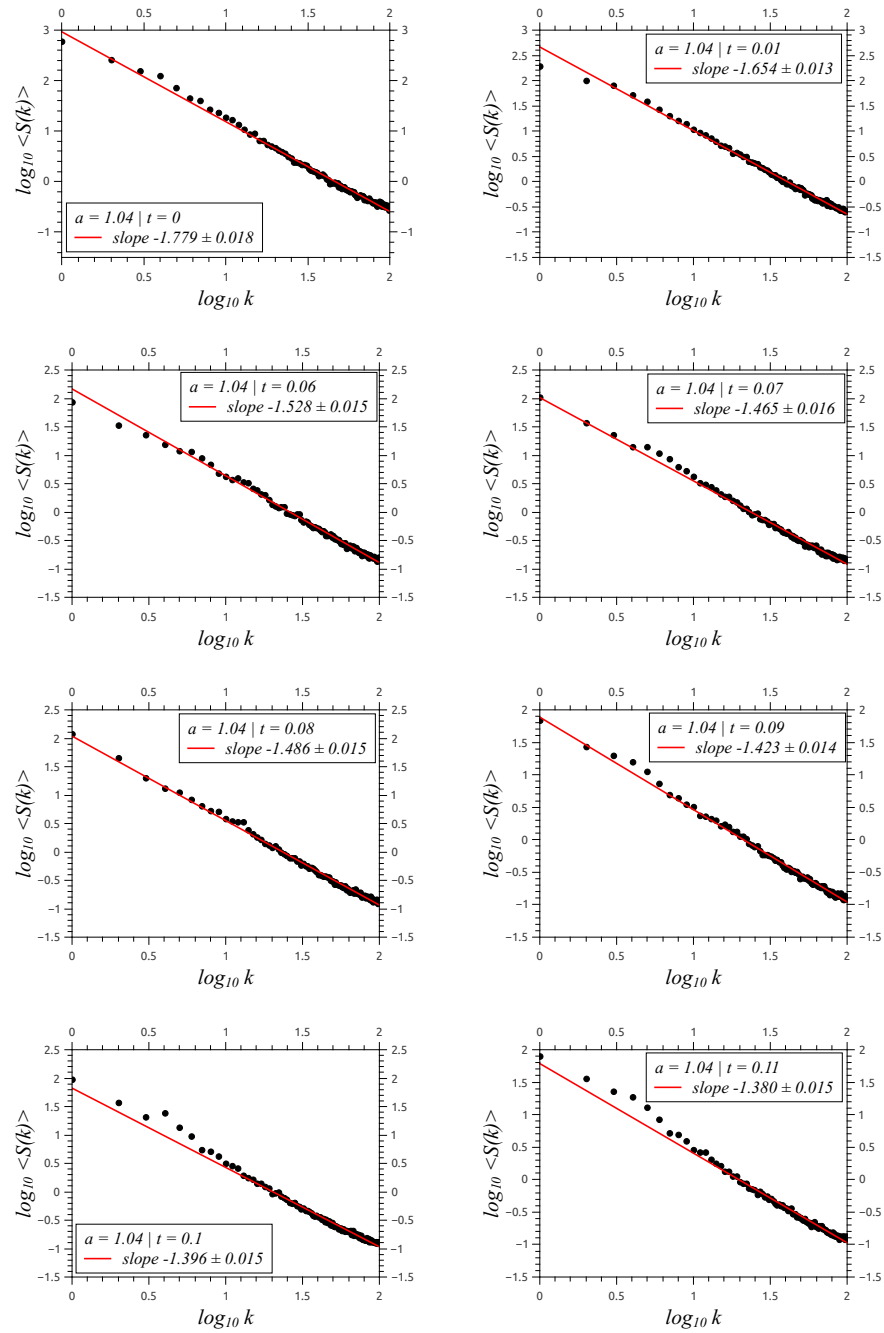


Figura 65 – Os símbolos representam o $S(k)$ calculado. As linhas vermelhas são ajustes lineares.

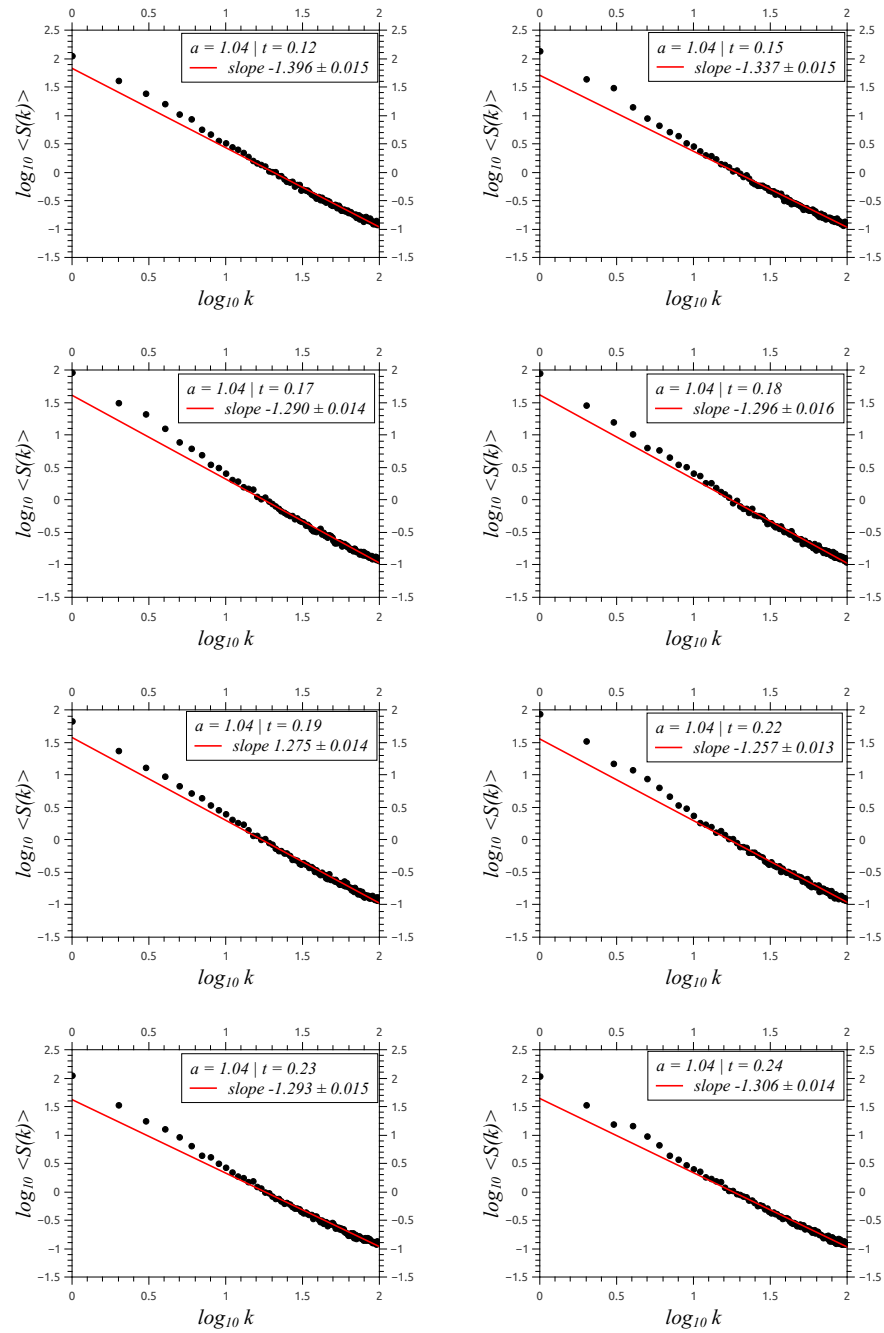


Figura 66 – Os símbolos representam o $S(k)$ calculado. As linhas vermelhas são ajustes lineares.

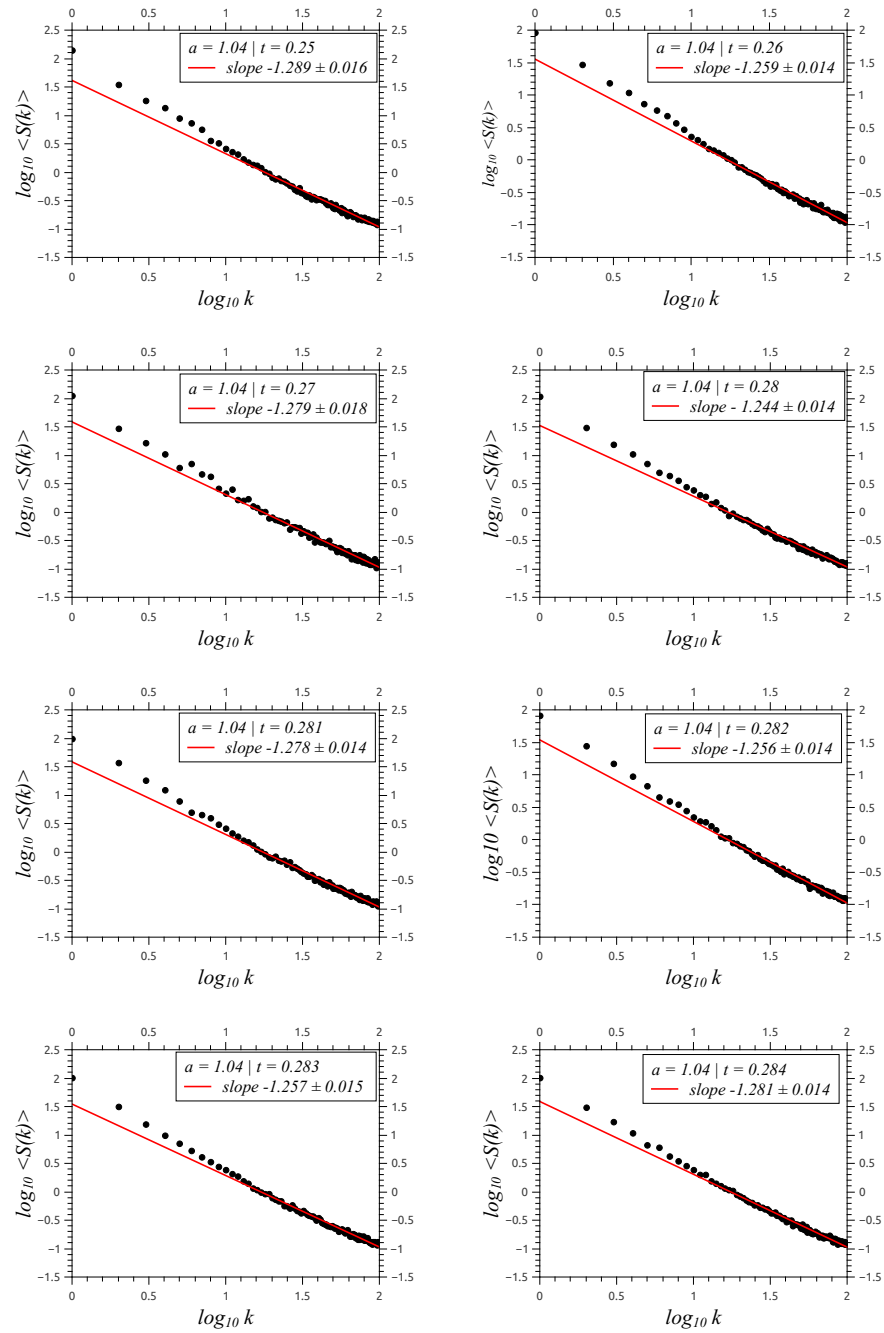


Figura 67 – Os símbolos representam o $S(k)$ calculado. As linhas vermelhas são ajustes lineares.

6 Conclusões e perspectivas

Nesta tese apresentamos resultados numéricos sobre a dinâmica clássica e a quantização em duas famílias de bilhares. A BTI, composta por bilhares triangulares irracionais cujos lados são inteiros consecutivos $N, N+1, N+2$, com $3 < N < \infty$. Neste caso, é possível mostrar que todos os ângulos são irracionais com π . A outra família, BEE, é biparamétrica e composta por estádios elípticos de semieixo menor unitário, semieixo maior a e trecho retilíneo de comprimento $2t$.

Nos BTIs testamos uma antiga conjectura sobre sua dinâmica clássica devida a Casati e Prosen (CP). Ela diz que a dinâmica nesses bilhares é fortemente *mixing*, generalizando o rápido decaimento das funções de correlação observado em apenas 2 triângulos. Mostramos que essa conjectura não foi satisfeita para muitos triângulos da família N de BTIs. As correlações decaem com expoentes variados, sempre com $0 < -\sigma \leq 1$, indicando assim, que muitos triângulos da família são fracamente *mixing*. Com base nessas observações, podemos inferir que a irracionalidade não determina a dinâmica, mas sim a geometria. Com todos os ângulos irracionais com π , os triângulos da família apresentam comportamentos ergódicos distintos. No âmbito da quantização, utilizamos um método de *scaling* para obter 150 000 autovalores de energia para cada bilhar. Mostramos que os triângulos que são fortemente *mixing* exibem comportamento quântico próximo ao do ensemble gaussiano ortogonal (GOE) das matrizes aleatórias. Os fracamente *mixing*, exibem estatísticas intermediárias entre GOE e de uma distribuição do tipo $\delta(s)$. Além disso, calculamos a estatística δ_n e seu espectro de potência $S(k)$. Mostramos que para os membros da família N próximos ao GOE $\langle S(k) \rangle$ decai com expoente α próximo a 1. Baseado nesses resultados conjecturamos que sistemas quânticos que apresentem características espectrais do tipo GOE devem ter em sua contrapartida clássica uma dinâmica fortemente *mixing* e não necessariamente caótica, como sugere a conjectura frequentemente citada na literatura. Como a motivação para esse estudo vem do fato de que todos os bilhares em polígonos não são caóticos mas com a possibilidade de ser *mixing*, uma possível exploração desse resultado seria expandir a análise para outros polígonos.

Para os BEEs traçamos um paralelo entre a transição λ no ^4He líquido e a mudança de um espaço de fases misto para um completamente caótico quando a linha $t_0(a)$ é cruzada no espaço de parâmetros do BEE com $1 < a < \sqrt{4/3}$. Construímos um parâmetro de ordem para o bilhar e obtivemos o expoente crítico $\beta \simeq 0.34$. Definimos uma capacidade do bilhar em analogia à capacidade térmica da termodinâmica. Nossa definição foi baseada na entropia de Shannon e obtivemos o expoente crítico $\alpha \simeq -0.0127$

para a divergência na capacidade do bilhar. Esses resultados numéricos estão quantitativamente em acordo com aqueles observados no hélio líquido e calculados via grupo de renormalização e teoria ϕ^4 também para o hélio líquido. Isto fornece interessante suporte para a conjectura de Markarian e colaboradores sobre o limite inferior para o caos no espaço de parâmetros (t, a) . Nossos cálculos foram todos feitos na região de (t, a) onde apenas as órbitas pantográficas de ordem zero podem ser elípticas. Uma excelente extensão do que fizemos aqui seria analisar o que acontece quando cruzamos as curvas de instabilidade das outras pantográficas a fim de verificar se há comportamento crítico ao cruzar cada curva ou apenas ao cruzar a curva limite $H(a)$. Outro adendo interessante seria cruzar a curva $H(a)$ mantendo-se t fixo e variando-se a . No âmbito da quantização, apresentamos funções de onda cicatrizadas em órbitas pantográficas. Como perspectiva seria interessante uma busca da cicatrização de órbitas de ordens superiores. Investigamos a distribuição de espaçamento entre primeiros vizinhos $p(s)$, a rigidez espectral $\Delta_3(L)$, e a presença de ruído $1/f^\alpha$ na estatística δ_n . Na região do espaço de parâmetros onde o espaço de fases é misto todas as estatísticas apresentaram resultados intermediários entre Poisson e GOE. A destacar a não eficácia da distribuição de Berry-Robnik em descrever todos as $p(s)$ obtidos. No entanto a distribuição fenomenológica de Brody e a de Berry-Robnik-Brody, uma composição das anteriores, descrevem muito bem $p(s)$ para todo o conjunto de parâmetros testado. Infelizmente não conseguimos observar uma linha crítica $t_c(a)$ a partir das estatísticas quânticas investigadas em contrapartida ao caso clássico. Uma outra geometria que apresentasse uma transição crítica entre um espaço de fases misto e outro caótico, ou uma outra propriedade quântica que exibisse criticalidade, seriam bem vindas como adições ao trabalho aqui apresentado.

Extendendo os estudos feitos até então sugerimos o estudo dos bilhares apresentados como cavidades abertas seguindo (36) (37) (38) (39) (40). A ideia inicial é considerar a densidade de probabilidade calculada via VS como a intensidade da onda espalhada e simular numericamente os resultados apresentados nas referências citadas.

Referências

- [1] SALINAS, S. R. *Introdução à Física Estatística*. 2nd. ed. Edusp, (2008).
- [2] DORFMAN, J. R. *An Introduction to Chaos in Nonequilibrium Statistical Mechanics*. 1st. ed. Cambridge University Press, (1999).
- [3] OTT, E. *Chaos in Dynamical Systems*. 2nd. ed. Cambridge University Press, (2002).
- [4] ZASLAVSKY, G. *The Physics of Chaos in Hamiltonian Systems*. 2nd. ed. Imperial College Press, (2007).
- [5] CASATI, G.; PROSEN, T. Mixing Properties of Triangular Billiards. *Woodbury*, v. 83, n. 23, p. 4729–4732, (1999).
- [6] ARTUSO, R.; CASATI, G.; GUARNERI, I. Numerical study on ergodic properties of triangular billiards. *Physical Review E*, v. 55, n. 6, p. 6384–6390, (1997).
- [7] CHERNOV, N.; MARKARIAN, R. *Chaotic Billiards*. 1st. ed. American Mathematical Society, (2006).
- [8] BUNIMOVICH, L. A. Mushrooms and other billiards with divided phase space. *Chaos*, v. 11, n. 802, (2001).
- [9] ROBNIK, M.; DOBNIKAR, J.; RAPISARDA, A.; PROSEN, T. New universal aspects of diffusion on strongly chaotic systems. *J. Phys. A: Math. Gen.*, v. 30, p. L803–L813, (1997).
- [10] STÖCKMANN, H.-J. *Quantum Chaos, an introduction*. 2000.
- [11] Ozorio de Almeida, A. M. *Sistemas Hamiltonianos: Caos e Quantização*. 3a. ed. Editora da Unicamp, (1995).
- [12] VERGINI, E.; SARACENO, M. Calculation by scaling of highly excited states billiards. *Physical Review E*, v. 52, n. 3, p. 2204–2209, (1995).
- [13] BOHIGAS, O.; GIANNONI, M. J.; SCHMIT, C. Characterization of Chaotic Quantum Spectra and Universality of Level Fluctuation Laws. *Woodbury*, v. 52, n. 1189, Jan. (1984).
- [14] CASATI, G.; CHIRIKOV, B. V.; GUARNIERI, I. Energy-Level Statistics of Integrable Quantum Systems. *Woodbury*, v. 54, n. 13, p. 1350, Apr. (1985).
- [15] BRODY, T. A. A statistical measure for the repulsion of energy levels. *Lettere Al Nuovo Cimento*, v. 7, n. 482, (1973).

- [16] BERRY, M. V.; ROBNIK, M. Semiclassical level spacing when regular and chaotic orbits coexist. *J. Phys. A: Math. Gen.*, v. 17, p. 2413, (1984).
- [17] BATISTIĆ, B.; ROBNIK, M. Semiempirical theory of level spacing distribution beyond the Berry–Robnik regime: modeling the localization and the tunneling effects. *J. Phys. A: Math. Gen.*, v. 43, n. 215101, p. 28, (2010).
- [18] GÓMEZ, J. M. G.; RELAÑO, A.; RETAMOSA, J.; FALEIRO, E.; SALASNICH, L.; VRANICAR, M.; ROBNIK, M. $1/f^\alpha$ Noise in Spectral Fluctuations of Quantum Systems. *Woodbury*, v. 94, p. 084101, (2005).
- [19] RELAÑO, A.; GÓMEZ, J. M. G.; MOLINA, R. A.; RETAMOSA, J.; FALEIRO, E. Quantum Chaos and $1/f$ Noise. *Woodbury*, v. 89, p. 244102, (2002).
- [20] GUTKIN, E. Billiards in polygons. *Physica D, Amsterdam*, v. 19, p. 311–333, (1985).
- [21] DE AGUIAR, F. M. Quantum properties of irrational triangular billiards. *Physical Review E*, v. 77, p. 036201, (2008).
- [22] LIMA, T. A.; RODRÍGUEZ-PÉREZ, S.; DE AGUIAR, F. M. Ergodicity and quantum correlations in irrational triangular billiards. *Physical Review E*, v. 87, n. 062902, (2003).
- [23] VARONA, J. L. Rational Values of the arccosine function. *Cent. Eur. J. Math.*, v. 4, n. 2, p. 319–322, (2006).
- [24] SINGSAAS, A.; AHLERS, G. Universality of static properties near the superfluid transition in ^4He . *Physical Review B*, v. 30, n. 5103, (1984).
- [25] DONNAY, V. J. Using Integrability to produce chaos: Billiards with positive entropy. *Comm. Math. Phys.*, v. 141, n. 225, (1991).
- [26] MARKARIAN, R.; KAMPHORST, S. O.; CARVALHO, S. P. Chaotic properties of the elliptical stadium. *Comm. Math. Phys.*, v. 174, n. 661, (1996).
- [27] CANALE, E.; MARKARIAN, R.; KAMPHORST, S. O.; DE CARVALHO, S. P. A lower bound for chaos on the elliptical stadium. *Physica D, Amsterdam*, v. 115, n. 189, (1998).
- [28] ENSS, C.; HUNKLINGER, S. *Low-Temperature Physics*. 2005.
- [29] GREYWALL, D. S.; AHLERS, G. Second-Sound velocity, scaling and universality in He II under pressure near the superfluid transition. *Woodbury*, v. 28, n. 1251, (1972).

- [30] LIPA, J. A.; NIELSEN, J. A.; STRICKER, D. A.; SWANSON, D. R.; CHUI, T. C. P. Specific heat of liquid helium in zero gravity very near the lambda point. *Physical Review B*, v. 68, n. 174518, (2003).
- [31] KLEINERT, H. Critical exponents from seven-loop strong-coupling ϕ^4 theory in three dimensions. *Physical Review D*, v. 60, n. 085001, (1999).
- [32] HELLER, E. J. Bound-state eigenfunction of classically chaotic Hamiltonian systems: Scars of periodic orbits. *Woodbury*, v. 42, n. 1189, (1984).
- [33] SIMONOTTI, F. P.; VERGINI, E.; SARACENO, M. Quantitative study of scars in the boundary section of the stadium billiard. *Physical Review E*, v. 56, n. 3859, (1997).
- [34] LIMA, T. A.; DE AGUIAR, F. M. Classical billiards and quantum fluids. *Physical Review E*, v. 91, n. 012923, (2015).
- [35] LOPAC, V.; MRKONJIĆ, I.; PAVIN, N.; RADIĆ, D. Chaotic dynamics of the elliptical stadium billiard in the full parameter space. *Physica D, Amsterdam*, v. 217, p. 88–101, (2006).
- [36] MÉNDEZ-SÁNCHEZ, R. A.; KUHL, U.; BARTH, M.; LEWENKOPF, C. H.; STÖCKMANN, H.-J. Distribution of Reflection Coefficients in Absorbing Chaotic Microwave Cavities. *Woodbury*, v. 91, n. 174518, Oct. (2003).
- [37] KUHL, U.; MARTÍNEZ-MARES, M.; MÉNDEZ-SÁNCHEZ, R. A.; STÖCKMANN, H.-J. Direct Processes in Chaotic Microwave Cavities in the Presence of Absorption . *Woodbury*, v. 94, n. 144101, Apr. (2005).
- [38] HEMMADY, S.; ZHENG, X.; OTT, E.; ANTONSEN, T. M.; ANLAGE, S. M. Universal Impedance Fluctuations in Wave Chaotic Systems . *Woodbury*, v. 94, n. 014102, Jan. (2005).
- [39] DIETZ, B.; HEINE, A.; RICHTER, A.; BOHIGAS, O.; LEBOEUF, P. Spectral statistics in an open parametric billiard system. *Physical Review E*, v. 73, n. 035201, Mar. (2006).
- [40] DIETZ, B.; FRIEDRICH, T.; MISKI-UGLU, M.; RICHTER, A.; SCHÄFER, F. Spectral properties of Bunimovich mushroom billiards. *Physical Review E*, v. 75, n. 035203, Mar. (2007).
- [41] BARNETT, A. *Dissipation in Deforming Chaotic Billiards*. 2000. Tese (Doutorado em Física) - Harvard University, 2000.

APÊNDICE A – Dinâmica Numérica no Bilhar Estádio Elíptico

Descreveremos aqui como é gerada numericamente a dinâmica clássica no Bilhar Estádio Elíptico dados os parâmetros (t,a) e uma condição inicial. Primeiramente precisamos escrever o bilhar num sistema de coordenadas, como indicado na Figura 68. Nominaremos as partes do contorno com as seguintes regras:

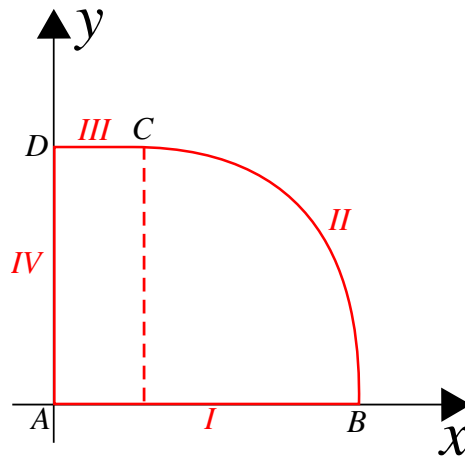


Figura 68 – Bilhar Estádio Elíptico no sistema de coordenadas.

$$I \longrightarrow y = 0 \quad ; \quad II \longrightarrow y = \sqrt{1 - \left(\frac{x-t}{a}\right)^2}, \quad (\text{A.1})$$

$$III \longrightarrow y = 1 \quad ; \quad IV \longrightarrow x = 0, \quad (\text{A.2})$$

onde os pontos A, B, C e D são

$$A = (0,0) \quad ; \quad B = (a+t,0) \quad ; \quad C = (t,1) \quad ; \quad D = (0,1). \quad (\text{A.3})$$

De posse disso, podemos escolher uma condição inicial em uma das partes do contorno. Começaremos por simplicidade com uma condição inicial partindo da parte IV , ou seja, com $x = 0$. Sorteamos então um número aleatório entre $(0,1)$ para y_0 e outro entre

$(-1,1)$ para v_{y0} , sendo $v_{x0} = \sqrt{1 - v_{y0}^2}$, ou seja, a partícula já está saindo após a colisão. De acordo com a Figura 69 existem 2 ângulos críticos dados por

$$\xi_1 = \arccos \left[-\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{y_0}{a+t}\right)^2}} \right] ; \quad \xi_2 = \arccos \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1-y_0}{t}\right)^2}} \right]. \quad (\text{A.4})$$

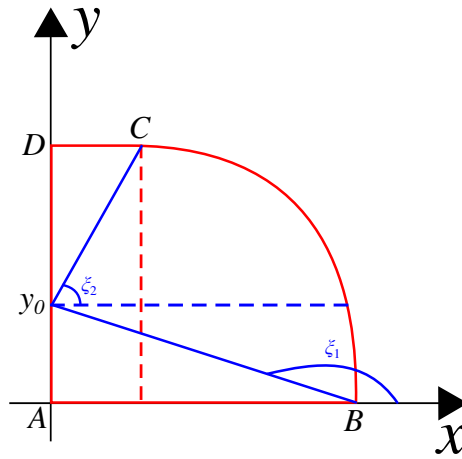


Figura 69 – Ângulos críticos para trajetória saindo da parte IV.

Com as duas componentes da velocidade conhecidas, podemos determinar o ângulo que da trajetória, definido aqui como

$$\tan \theta = \frac{v_{y0}}{v_{x0}}. \quad (\text{A.5})$$

Com isso, temos as seguintes condições para o destino da trajetória:

- Se $\xi_2 < \theta < \frac{\pi}{2} \longrightarrow$ trajetória segue para a parte III.
- Se $\frac{\pi}{2} < \theta < \xi_1 \longrightarrow$ trajetória segue para a parte I.
- Se $\theta > \xi_1$ ou $\theta < \xi_2 \longrightarrow$ trajetória segue para a parte II.

Agora precisamos calcular qual será a nova posição da partícula, seja para que parte do contorno ela tenha seguido. Como conhecemos a condição inicial, a reta por onde a trajetória passa é dada por

$$y = y_0 + x \tan \theta. \quad (\text{A.6})$$

Substituindo (A.6) nas equações (A.1) e (A.2), temos:

- Para a parte III $\longrightarrow (x, y) = \left(\frac{1-y_0}{\tan\theta}, 1\right)$.
- Para a parte I $\longrightarrow (x, y) = \left(-\frac{y_0}{\tan\theta}, 0\right)$.
- Para a parte II $\longrightarrow (x, y) = (x_e, y_e)$.

Onde x_e é solução da equação de 2º grau a seguir com $x_0 = 0$ tal que $t < x_e < a + t$ e y_e é o correspondente valor na elipse.

$$x^2(1 + a^2 \tan^2 \theta) - 2x[t + a^2 \tan \theta (x_0 \tan \theta - y_0)] + t^2 + a^2[(x_0 \tan \theta - y_0)^2 - 1] = 0. \quad (\text{A.7})$$

Mais adiante mostraremos como se calcula a nova velocidade dado o ponto no contorno no qual a partícula colide. Seguiremos mostrando dada uma certa trajetória saindo de uma das partes, para que parte a partícula segue dada a velocidade. Supomos agora uma trajetória saindo da parte I, então estaremos em um x_0 tal que $0 < x_0 < a + t$. A Figura 70 mostra os dois ângulos críticos desse caso.

$$\xi_1 = \arccos \left[-\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{x_0}\right)^2}} \right] \quad ; \quad \xi_2 = \arccos \left[\frac{t - x_0}{\sqrt{1 + (t - x_0)^2}} \right]. \quad (\text{A.8})$$

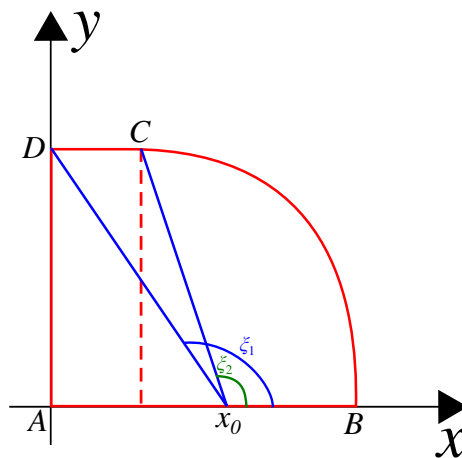


Figura 70 – Ângulos críticos para trajetória saindo da parte I.

As condições para que parte a trajetória segue ficam:

- Se $\theta > \zeta_1 \longrightarrow$ trajetória segue para a parte IV.
- Se $\zeta_2 < \theta < \zeta_1 \longrightarrow$ trajetória segue para a parte III.
- Se $\theta < \zeta_2 \longrightarrow$ trajetória segue para a parte II.

A reta por onde passa a trajetória saindo da parte I é dada por

$$y = (x - x_0) \tan \theta. \quad (\text{A.9})$$

Substituindo (A.9) nas equações (A.1) e (A.2), temos:

- Para a parte IV $\longrightarrow (x, y) = (0, -x_0 \tan \theta)$.
- Para a parte III $\longrightarrow (x, y) = \left(x_0 + \frac{1}{\tan \theta}, 1\right)$.
- Para a parte II $\longrightarrow (x, y) = (x_e, y_e)$.

Onde x_e é solução de (A.7) com $y_0 = 0$ tal que $t < x_e < a + t$ e y_e é o correspondente valor na elipse. Agora veremos para uma trajetória saindo da parte III. Estaremos em um x_0 tal que $0 < x_0 < t$. A Figura 71 mostra os ângulos críticos desse caso.

$$\zeta_1 = \arccos \left[-\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{a+t-x_0}\right)^2}} \right] ; \quad \zeta_2 = \arccos \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{x_0}\right)^2}} \right]. \quad (\text{A.10})$$

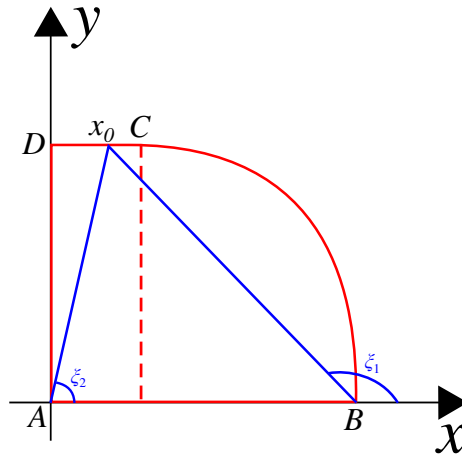


Figura 71 – Ângulos críticos para trajetória saindo da parte III.

As condições com os ângulos críticos ficam:

- Se $\theta > \xi_1 \longrightarrow$ trajetória segue para a parte II.
- Se $\xi_2 < \theta < \xi_1 \longrightarrow$ trajetória segue para a parte I.
- Se $\theta < \xi_2 \longrightarrow$ trajetória segue para a parte IV.

A trajetória saindo da parte III obedece a reta

$$y = 1 + (x - x_0) \tan \theta. \quad (\text{A.11})$$

Substituindo (A.11) nas equações (A.1) e (A.2), temos:

- Para a parte IV $\longrightarrow (x, y) = (0, 1 - x_0 \tan \theta)$.
- Para a parte I $\longrightarrow (x, y) = \left(x_0 - \frac{1}{\tan \theta}, 0\right)$.
- Para a parte II $\longrightarrow (x, y) = (x_e, y_e)$.

Onde x_e é solução de (A.7) com $y_0 = 1$ tal que $t < x_e < a + t$ e y_e é o correspondente valor na elipse. Por último será mostrado para trajetória saindo da parte II. Estaremos em um ponto (x_0, y_0) pertencente a elipse. Na Figura 72 mostramos os ângulos críticos. Nesse caso, temos 4 ângulos críticos. Pois essa é única situação desse bilhar onde a partícula pode ser refletida na mesma parte em que incidiu.

$$\xi_1 = \arccos \left[-\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1-y_0}{x_0}\right)^2}} \right] ; \quad \xi_2 = \arccos \left[-\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1-y_0}{x_0-t}\right)^2}} \right]. \quad (\text{A.12})$$

$$\xi_3 = \arccos \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2}} \right] ; \quad \xi_4 = \arccos \left[-\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{y_0}{a+t-x_0}\right)^2}} \right]. \quad (\text{A.13})$$

De modo que as condições para as trajetórias são:

- Se $\xi_2 < \theta < \xi_1 \longrightarrow$ trajetória segue para a parte III.
- Se $\theta > \xi_1$ ou $\theta < \xi_3 \longrightarrow$ trajetória segue para a parte IV.

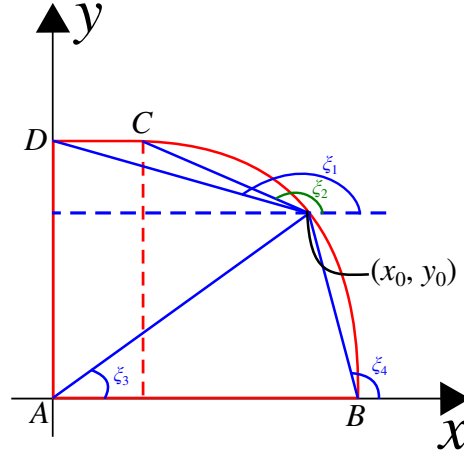


Figura 72 – Ângulos críticos para trajetória saindo da parte II.

- Se $\theta > \xi_3$ ou $\theta < \xi_4 \rightarrow$ trajetória segue para a parte I.
- Se $\xi_4 < \theta < \xi_2 \rightarrow$ trajetória segue para a parte II.

Uma trajetória que sai da parte II pertence a reta

$$y = y_0 + (x - x_0) \tan \theta. \quad (\text{A.14})$$

Substituindo (A.11) nas equações (A.1) e (A.2), temos:

- Para a parte III $\rightarrow (x, y) = \left(x_0 + \frac{1-y_0}{\tan \theta}, 1 \right)$.
- Para a parte IV $\rightarrow (x, y) = (0, y_0 - x_0 \tan \theta)$.
- Para a parte I $\rightarrow (x, y) = \left(x_0 - \frac{y_0}{\tan \theta}, 0 \right)$.
- Para a parte II $\rightarrow (x, y) = (x_e, y_e)$.

Onde x_e é solução de (A.7) tal que $t < x_e < a + t$ e y_e é o correspondente valor na elipse. Nesse caso também deve ser observado a direção que a partícula seguirá. Se $v_x > 0$, $x_e > x_0$ e se $v_x < 0$, $x_e < x_0$.

Até aqui conhecemos qual o destino da partícula dado o ponto e o ângulo de partida em uma das partes da borda. Agora mostraremos como esse ângulo de partida é calculado a partir do ângulo de chegada. Será mostrado como o vetor velocidade (v_x, v_y) é transformado numa colisão. O ângulo é obtido via a equação (A.5). As colisões elásticas nas partes I, III e IV são triviais. Bastando trocar o sinal de v_y para as partes

I e III e de v_x para a parte IV. Daqui já podemos retirar o seguinte, para uma colisão elástica basta trocar o sinal da componente da velocidade que é normal a borda. Com isso, uma colisão na parte II não é trivial e varia com o ponto da colisão. Para calcular a nova velocidade precisamos ir para um referencial rotacionado (como o da Figura 73). Nesse referencial podemos inverter a componente v_y rotacionada e depois voltar ao referencial original. Em termos de matrizes de rotação ficaríamos com

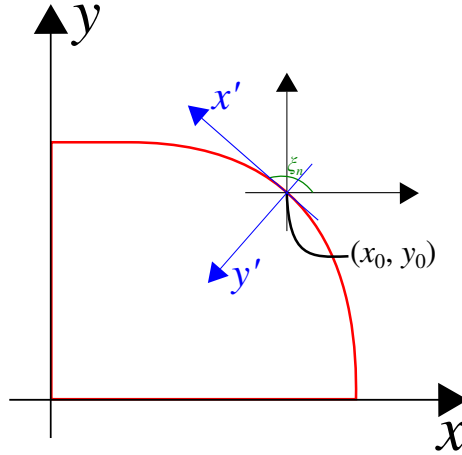


Figura 73 – Colisão na parte II.

$$\hat{M}_C = \hat{U}_{-\xi_n} \hat{U}_C \hat{U}_{\xi_n}. \quad (\text{A.15})$$

Onde $\hat{U}_{\xi_n}$ representa a primeira troca de referencial, $\hat{U}_C$ a troca de sinal da componente normal da velocidade e $\hat{U}_{-\xi_n}$ a volta ao referencial original. Explicitamente ficamos com

$$\hat{M}_C = \begin{pmatrix} \cos \xi_n & -\sin \xi_n \\ \sin \xi_n & \cos \xi_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \xi_n & \sin \xi_n \\ -\sin \xi_n & \cos \xi_n \end{pmatrix}. \quad (\text{A.16})$$

$$\hat{M}_C = \begin{pmatrix} \cos 2\xi_n & \sin 2\xi_n \\ \sin 2\xi_n & -\cos 2\xi_n \end{pmatrix}. \quad (\text{A.17})$$

O ângulo de rotação ξ_n é obtido através da derivada em relação a x da equação da elipse contida em (A.1).

$$y = \sqrt{1 - \left(\frac{x-t}{a}\right)^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{t-x}{a\sqrt{a^2 - (x-t)^2}}, \quad (\text{A.18})$$

$$\xi_n(x_0) = \arctan \left[\frac{t-x_0}{a\sqrt{a^2 - (t-x_0)^2}} \right]. \quad (\text{A.19})$$

A seguir, rotina desenvolvida por nós em C. Ela é capaz de gerar uma trajetória no BEE

para quaisquer valores dos parâmetros, inclusive para um semieixo maior diferente de 1.

```
1 #include <stdio.h>
2 #include <stdlib.h>
3 #include <math.h>
4
5 #define PI 3.141592653589793
6
7 //Funções.
8 double mov(int , double , double , double , double );
9 double Ganma(int , double , double );
10
11 //Variáveis Globais.
12 double a, b, e; //Parâmetros do bilhar, Eixo maior(horizantal > 1), Eixo menor (Vetical = 1) e
    Separação.
13 double X, Y, X0, Y0, Vx, Vy, XM, Xm, YM, Ym; //Coordenadas final e inicial entre duas colisões, as
    velocidades e auxiliares.
14 double X3, Y3; //Coordenadas do vértice superior.
15 double ang1, ang2, ang3, ang4;
16
17 int lado; //Variável que designa o lado no qual a partícula está incidindo.
18
19 int main(){
20
21     FILE *pontos_file;
22     pontos_file=fopen("pontos.txt","w+")
23
24     int Tt = 1000000 //Tempo total de cada amostra.
25
26     int m, o;
27
28     ang1 = 0;
29     ang2 = 0;
30     ang3 = 0;
31     ang4 = 0;
32
33     b = 1;
34
35     a = 1.04;;
36     e = 0.28;
37
38     X3 = e;
39     Y3 = b;
40
41     //0 lado de incidência inicial é o 4.
42     lado = 4;
43     X0 = 0.0;
44     Y0 = 0.5;
45
46     Vy = 0.5;
47     Vx = - sqrt(1-Vy*Vy);
48
49     m = 0;
50
51     //Este ciclo gera uma trajetória dada uma condição inicial.
52     for (o = 0 ; ; o++) {
53
54         if (lado == 4){
55
56             if (m%5 == 0) fprintf (pontos_file, "%f %f\n", Y0, Vy);
57             m++;
58
59         }
60
61         //Ordeno à partícula a realizar uma nova colisão
62         mov (lado, X0, Y0, Vx, Vy);
63
64         //Redefino as coordenadas iniciais depois da colisão.
65         X0 = X;
66         Y0 = Y;
67
68         if (m == Tt) break;
```

```
69
70     }
71
72     fclose (pontos_file);
73
74 }
75
76 //Ganma tem como entrada o lado de incidência e o ponto sobre o qual incide a partícula.
77 //Retorna o ângulo crítico a partir do qual a partícula será refletida para um lado ou para outro.
78 double Ganma(int lad, double x0, double y0){
79
80     double temp1, temp2, temp3;
81
82     switch (lad){
83
84         case 1:
85
86             temp1 = X3 - x0;
87
88             ang1 = acos(temp1/sqrt(temp1*temp1 + Y3*Y3));
89             ang2 = acos(-x0/sqrt(x0*x0 + Y3*Y3));
90
91             break;
92
93         case 2:
94
95             temp1 = X3 - x0;
96             temp2 = Y3 - y0;
97             temp3 = x0 - X3 - a;
98
99             ang1 = acos(temp1/sqrt(temp2*temp2 + temp1*temp1));
100            ang2 = acos(-x0/sqrt(temp2*temp2 + x0*x0));
101            ang3 = acos(x0/sqrt(y0*y0 + x0*x0));
102            ang4 = acos(temp3/sqrt(y0*y0 + temp3*temp3));
103
104            break;
105
106         case 3:
107
108             temp1 = x0 - a - X3;
109
110             ang1 = acos(x0/sqrt(Y3*Y3 + x0*x0));
111             ang2 = acos(temp1/sqrt(Y3*Y3 + temp1*temp1));
112
113             break;
114
115         case 4:
116
117             temp1 = Y3 - y0;
118             temp2 = X3 + a;
119
120             ang1 = acos(X3/sqrt(temp1*temp1 + X3*X3));
121             ang2 = acos(-temp2/sqrt(temp2*temp2 + y0*y0));
122
123             break;
124     }
125 }
126
127 }
128
129 //mov tem como entrada o lado de incidência, o ponto de incidência e a velocidade de incidência.
130 //Ela modifica a velocidade de incidência, as coordenadas de incidência e a variável lado.
131 double mov(int lad, double x0, double y0, double vx0, double vy0 ){
132     double ang_r, tgt, teta, A, B, C;
133
134     switch (lad){
135
136         case 1:
137
138             Ganma(1,x0,y0);
```

```
139     Vx=vx0;
140     Vy=-vy0;
141     tgt=Vy/Vx;
142     ang_r=atan(tgt);
143     if (ang_r < 0) ang_r += PI;
144
145     if (ang_r < ang1) {
146
147         lado = 2;
148
149         A = 1 + a*a*tgt*tgt/Y3/Y3;
150         B = - 2*(X3 + x0*a*a*tgt*tgt/Y3/Y3);
151         C = X3*X3 - a*a + x0*x0*a*a*tgt*tgt/Y3/Y3;
152
153         XM = ( - B + sqrt(B*B - 4*A*C))/2/A;
154         Xm = ( - B - sqrt(B*B - 4*A*C))/2/A;
155         YM = Y3*sqrt(1 - (XM - X3)*(XM - X3)/a/a);
156         Ym = Y3*sqrt(1 - (Xm - X3)*(Xm - X3)/a/a);
157
158         if (XM > 0 && Xm < 0){
159
160             X = XM;
161             Y = YM;
162
163         }
164
165         if (Xm > 0 && XM < 0){
166
167             X = Xm;
168             Y = Ym;
169
170         }
171
172         if (XM > 0 && Xm > 0){
173
174             if (XM > X3 && Xm < X3){
175
176                 X = XM;
177                 Y = YM;
178
179             }
180
181             if (XM < X3 && Xm > X3){
182
183                 X = Xm;
184                 Y = Ym;
185
186             }
187
188             if (XM > X3 && Xm > X3){
189
190                 if (Vx > 0){
191
192                     X = XM;
193                     Y = YM;
194
195                 }
196
197                 if (Vx < 0){
198
199                     X = Xm;
200                     Y = Ym;
201
202                 }
203
204             }
205
206         }
207
208     if (ang_r > ang1 && ang_r < ang2) {
```

```
209
210         lado = 3;
211         X = x0 + Y3/tgt;
212         Y = Y3;
213
214     }
215
216     if (ang_r > ang2){
217
218         lado = 4;
219         X = 0;
220         Y = - x0*tgt;
221
222     }
223
224     break;
225
226 case 2:
227
228     Ganma(2,x0,y0);
229     teta = atan(Y3*(X3 - x0)/a/sqrt(a*a - (x0 - X3)*(x0 - X3)));
230     if(teta < 0) teta += PI;
231     Vx = vx0*cos(2.0*teta) + vy0*sin(2.0*teta);
232     Vy = - vy0*cos(2.0*teta) + vx0*sin(2.0*teta);
233     tgt=Vy/Vx;
234     ang_r=atan(tgt);
235     if (ang_r < 0) ang_r += PI;
236
237     if (ang_r > ang3 && ang_r < PI/2) {
238
239         lado = 1;
240         X = x0 - y0/tgt;
241         Y = 0.0;
242
243     }
244
245     if (ang_r < ang4 && ang_r > PI/2) {
246
247         lado = 1;
248         X = x0 - y0/tgt;
249         Y = 0.0;
250
251     }
252
253     if (ang_r < ang3 && ang_r < PI/2) {
254
255         lado = 4;
256         X = 0;
257         Y = y0 - x0*tgt;
258
259     }
260
261     if (ang_r > ang2 && ang_r > PI/2) {
262
263         lado = 4;
264         X = 0;
265         Y = y0 - x0*tgt;
266
267     }
268
269     if (ang_r > ang1 && ang_r < ang2) {
270
271         lado = 3;
272         X = x0 + (Y3 - y0)/tgt;
273         Y = Y3;
274
275     }
276
277     if (ang_r > ang4 && ang_r < ang1) {
```

```

279     lado = 2;
280
281     A = 1 + a*a*tgt*tgt/Y3/Y3;
282     B = - 2*a*a*tgt*(x0*tgt - y0 + Y3*Y3*X3/a/a/tgt)/Y3/Y3;
283     C = X3*X3 - a*a + a*a*(y0*y0 + x0*x0*tgt*tgt - 2*x0*y0*tgt)/Y3/Y3;
284
285     XM = ( - B + sqrt(B*B - 4*A*C))/2/A;
286     Xm = ( - B - sqrt(B*B - 4*A*C))/2/A;
287     YM = Y3*sqrt(1 - (XM - X3)*(XM - X3)/a/a);
288     Ym = Y3*sqrt(1 - (Xm - X3)*(Xm - X3)/a/a);
289
290     if (XM > 0 && Xm < 0){
291
292         X = XM;
293         Y = YM;
294
295     }
296
297     if (XM < 0 && Xm > 0){
298
299         X = Xm;
300         Y = Ym;
301
302     }
303
304     if (XM > 0 && Xm > 0){
305
306         if (XM > X3 && Xm < X3){
307
308             X = XM;
309             Y = YM;
310
311         }
312
313         if (XM < X3 && Xm > X3){
314
315             X = Xm;
316             Y = Ym;
317
318         }
319
320         if (XM > X3 && Xm > X3){
321
322             if (Vx > 0){
323
324                 X = XM;
325                 Y = YM;
326
327             }
328
329             if (Vx < 0){
330
331                 X = Xm;
332                 Y = Ym;
333
334             }
335
336         }
337
338     }
339
340     break;
341
342 case 3:
343
344     Ganma(3,x0,y0);
345     Vx = vx0;
346     Vy = -vy0;
347     tgt=Vy/Vx;
348     ang_r=atan(tgt);

```

```
349     if (ang_r < 0) ang_r += PI;
350
351     if (ang_r < ang1) {
352
353         lado = 4;
354         X = 0;
355         Y = Y3 - x0*tgt;;
356
357     }
358
359     if (ang_r > ang1 && ang_r < ang2) {
360
361         lado = 1;
362         X = x0 - Y3/tgt;
363         Y = 0.0;
364
365     }
366
367     if (ang_r > ang2) {
368
369         lado = 2;
370
371         A = 1 + a*a*tgt*tgt/Y3/Y3;
372         B = - 2*a*a*tgt*( - 1 + (x0*tgt/Y3) + (X3*Y3/a/a/tgt))/Y3;
373         C = X3*X3 + a*a*x0*tgt*( - 2 + x0*tgt/Y3)/Y3;
374
375         XM = ( - B + sqrt(B*B - 4*A*C))/2/A;
376         Xm = ( - B - sqrt(B*B - 4*A*C))/2/A;
377         YM = Y3*sqrt(1 - (XM - X3)*(XM - X3)/a/a);
378         Ym = Y3*sqrt(1 - (Xm - X3)*(Xm - X3)/a/a);
379
380         if(Xm > 0 && Ym > 0) {
381             if(Xm > X3){
382                 X = Xm;
383                 Y = Ym;
384             }
385         }
386
387         if(XM > 0 && YM > 0) {
388             if(XM > X3){
389                 X = XM;
390                 Y = YM;
391             }
392         }
393
394     }
395
396 }
397
398 break;
399
400 case 4:
401
402     Ganma(4,x0,y0);
403     Vx = -vx0;
404     Vy = vy0;
405     tgt=Vy/Vx;
406     ang_r=atan(tgt);
407     if (ang_r < 0) ang_r += PI;
408
409     if(ang_r < PI/2 && ang_r > ang1) {
410
411         lado = 3;
412         X = (Y3 - y0)/tgt;
413         Y = Y3;
414
415     }
416
417     if(ang_r > PI/2 && ang_r < ang2) {
```

```

419         lado = 1;
420         X = -y0/tgt;
421         Y = 0.0;
422     }
423
424     if(ang_r < ang1 && ang_r < PI/2) {
425
426         lado = 2;
427
428         A = 1 + a*a*tgt*tgt/Y3/Y3;
429         B = - 2*(X3 - a*a*y0*tgt/Y3/Y3);
430         C = X3*X3 + a*a*( - 1 + y0*y0/Y3/Y3);
431
432         XM = ( - B + sqrt(B*B - 4*A*C))/2/A;
433         Xm = ( - B - sqrt(B*B - 4*A*C))/2/A;
434         YM = Y3*sqrt(1 - (XM - X3)*(XM - X3)/a/a);
435         Ym = Y3*sqrt(1 - (Xm - X3)*(Xm - X3)/a/a);
436
437         if(Xm > 0 && Ym > 0) {
438             if(Xm > X3){
439                 X = Xm;
440                 Y = Ym;
441             }
442         }
443
444         if(XM > 0 && YM > 0) {
445             if(XM > X3){
446                 X = XM;
447                 Y = YM;
448             }
449         }
450     }
451
452     }
453
454     if(ang_r > ang2 && ang_r > PI/2) {
455
456         lado = 2;
457         XM = (Y3*Y3*X3/a/a - y0*tgt + Y3*sqrt(tgt*tgt + Y3*Y3/a/a - y0*y0/a/a -
458         X3*X3*tgt*tgt/a/a - 2*y0*X3*tgt/a/a))/(tgt*tgt + Y3*Y3/a/a);
459         Xm = (Y3*Y3*X3/a/a - y0*tgt - Y3*sqrt(tgt*tgt + Y3*Y3/a/a - y0*y0/a/a -
460         X3*X3*tgt*tgt/a/a - 2*y0*X3*tgt/a/a))/(tgt*tgt + Y3*Y3/a/a);
461         YM = Y3*sqrt(1 - (XM - X3)*(XM - X3)/a/a);
462         Ym = Y3*sqrt(1 - (Xm - X3)*(Xm - X3)/a/a);
463
464         if(Xm > 0 && Ym > 0) {
465             if(Xm > X3){
466                 X = Xm;
467                 Y = Ym;
468             }
469         }
470
471         if(XM > 0 && YM > 0) {
472             if(XM > X3){
473                 X = XM;
474                 Y = YM;
475             }
476         }
477
478     }
479     break;
480 }
481
482 }
```

APÊNDICE B – Método de *Scaling* de Vergini e Saraceno

Este apêndice apresentará um resumo do trabalho de E. Vergini e M. Saraceno (VS) intitulado *Calculation by scaling of highly excited states of billiards*, publicado na *Physical Review E* em 1995 (12). Apresentaremos ao fim uma rotina desenvolvida no *Mathematica* para o cálculo dos autovalores do estádio elíptico. Nesse trabalho é proposto um método que fornece diretamente todos os autovalores e autofunções de um bilhar bidimensional em um estreito intervalo de energia via a solução de um problema de autovalor generalizado. Isso é possível através do uso do *scaling* que permite escrever a chamada "Norma do Bilhar" como função da energia. A dimensão do problema de autovalor é da ordem do número de comprimentos de onda no perímetro do bilhar. O número de estados obtidos é 5% ou 10% dessa dimensão dependendo da precisão. O método pode ser aplicado a um domínio *star-shapped* genérico e foi ilustrado em 1/4 do Estádio de Bunimovich, com raio unitário $a = 1$ e separação retangular $t = 1$. Foram obtidos estados em torno do 568.000° com precisão de 10^{-4} do espaçamento médio entre os níveis.

B.1 O Método

Seja $\phi(\vec{r})$ uma função que satisfaz a equação de Helmholtz com $k_0 > 0$:

$$\nabla^2 \phi(\vec{r}) = -k_0^2 \phi(\vec{r}). \quad (\text{B.1})$$

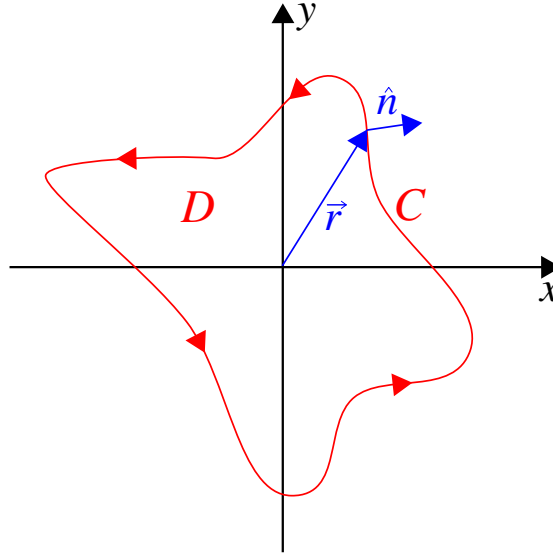
Associa-se a ϕ a função de escala $\phi(k, \vec{r}) \equiv \phi(k\vec{r}/k_0)$. Funções desta família são dependentes do parâmetro de escala k e satisfazem

$$\nabla^2 \phi(k, \vec{r}) = -k^2 \phi(k, \vec{r}). \quad (\text{B.2})$$

Seja C uma curva fechada que defina um domínio *star-shapped* D . Define-se então $\forall \vec{r} \in C$

$$r_n = \vec{r} \cdot \hat{n}, \quad (\text{B.3})$$

onde $\hat{n}$ é um vetor unitário normal C apontando para fora de D como mostrado na Figura 74. Então, diz-se que a função de escala ϕ_μ é uma autofunção de escala do bilhar

Figura 74 – Domínio D .

definido por C , se existe k_μ tal que $\phi_\mu(k_\mu, \vec{r}) = 0, \forall \vec{r} \in C$, então $\phi_\mu(k_\mu, \vec{r})$ é uma autofunção do bilhar com condições de contorno de Dirichlet. Define-se então a chamada "Norma do Bilhar" como sendo

$$f_{[\phi]}(k) = \oint_C \phi^2(k, \vec{r}) \frac{dl}{r_n}. \quad (\text{B.4})$$

O comportamento exato de f depende de ϕ , contudo, para autofunções de escala normalizadas f satisfaz uma expansão independente de ϕ_μ até terceira ordem em k_μ .

$$f_{[\phi_\mu]}(k_\mu + \delta) = 2\delta^2 \left(1 - \frac{\delta}{k_\mu} \right) + O(\delta^4). \quad (\text{B.5})$$

Então, calculado f e sua derivada em $k_0 = k_\mu + \delta_\mu$ até ordem 3 obtém-se

$$f_{[\phi_\mu]}(k_0) - \frac{\delta_\mu}{2} \frac{df_{[\phi_\mu]}}{dk}(k_0) + O(\delta_\mu^4) = 0. \quad (\text{B.6})$$

Como ainda não se conhece a autofunção ϕ_μ temos que expandi-la em uma base conhecida. Com isso, constrói-se um problema de autovalor generalizado (B.7) que fornece as autofunções e autovalores próximos a k_0

$$\frac{d\hat{F}}{dk}(k_0) |\zeta^{(\mu)}\rangle = \lambda_\mu \hat{F}(k_0) |\zeta^{(\mu)}\rangle. \quad (\text{B.7})$$

$\hat{F}(k_0)$ e $\frac{d\hat{F}}{dk}(k_0)$ são as formas quadráticas associadas a f e a $\frac{df}{dk}$ e $\lambda_\mu = \frac{2}{\delta_\mu}$. No cálculo

numérico essas matrizes são escritas em termos de uma base finitas de funções de escala $\varphi(k, \vec{r})_{i=1}^N$.

$$F_{ij}(k_0) = \oint_C \varphi_i(k_0, \vec{r}) \varphi_j(k_0, \vec{r}) \frac{dl}{r_n}, \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{dF_{ij}}{dk}(k_0) = \frac{1}{k_0} \oint_C \{ \varphi_i(k_0, \vec{r}) [\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \varphi_j(k_0, \vec{r})] + \varphi_j(k_0, \vec{r}) [\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \varphi_i(k_0, \vec{r})] \} \frac{dl}{r_n}. \quad (\text{B.9})$$

As autofunções de escala são escritas como

$$\phi_\mu(k, \vec{r}) = \sum_{i=1}^N \xi_i^{(\mu)} \varphi(k_\mu, \vec{r}), \quad (\text{B.10})$$

onde $k_\mu = k_0 - \frac{2}{\lambda_\mu}$ e $\xi_i^{(\mu)}$ é a i -ésima coordenada do autovetor $|\xi^{(\mu)}\rangle$. O método torna-se indeterminado caso k_0 coincida com um autovalor. No trabalho original, VS aplicaram o método para o 1/4 do Estádio de Bunimovich, com $a = 1$ e $t = 1$. Foi usada como base funções do tipo onda plana simetrizada

$$\varphi_i(k, \vec{r}) = \text{sen}(kx \cos \theta_i) \text{sen}(ky \text{sen} \theta_i), \quad (\text{B.11})$$

onde $\theta_i = \frac{\pi}{8N} \left(i - \frac{1}{2}\right) \left(5 - \frac{i}{N}\right)$ com $N \simeq 0.9k_0 + 20$. O número de funções base pode ser usado para outra geometria com perímetro próximo ao do estádio, o que nos motivou a manter tanto a escolha das funções base como N para a nossa aplicação no Estádio Elíptico. Outros tipos de funções base podem ser utilizadas, a citar a base de Bessel-Fourier em coordenadas polares (r, ω) , $J_i(kr) \text{sen}(i\omega)$ ou $J_i(kr) \cos(i\omega)$ e ondas planas $\cos[k(x \cos \theta_i + y \text{sen} \theta_i)]$ ou $\text{sen}[k(x \cos \theta_i + y \text{sen} \theta_i)]$.

B.2 Estratégia para Diagonalização

Para resolver o problema de autovalor generalizado primeiro diagonaliza-se a matriz simétrica $\hat{F}$, ou seja, resolve-se

$$\hat{F}|f\rangle = f|f\rangle. \quad (\text{B.12})$$

Feito isso descarta-se o subespaço numericamente nulo, bastando selecionar os autovetores $|f\rangle$ cujo autovalor satisfaça a relação $\left|\frac{f}{f_{\text{máx}}}\right| > \frac{10^{-16}}{2}$, onde $f_{\text{máx}}$ é o maior dos autovalores em módulo. De modo que

$$F'_{ij} = \frac{\langle f_i | \hat{F} | f_j \rangle}{\sqrt{f_i} \sqrt{f_j}} = \frac{f_j}{\sqrt{f_i f_j}} \langle f_i | f_j \rangle = \sqrt{\frac{f_j}{f_i}} \delta_{i,j}. \quad (\text{B.13})$$

Dessa forma, na base $\left\{ \frac{|f_i\rangle}{\sqrt{f_i}} \right\}$ a matriz $\hat{F}$ é a matriz identidade $\hat{I}$. Mostramos a seguir que uma mudança de base não altera o autovalor na equação (B.7). Seja $\hat{M}$ uma matriz mudança de base tal que $\hat{M}\hat{F}\hat{M}^{-1} = \hat{I}$, então temos a partir de (B.7) que

$$\hat{M} \frac{d\hat{F}}{dk} |\xi^{(\mu)}\rangle = \lambda_\mu \hat{M} \hat{F} \hat{M}^{-1} \hat{M} |\xi^{(\mu)}\rangle = \lambda_\mu \hat{M} |\xi^{(\mu)}\rangle. \quad (\text{B.14})$$

Como mudaremos a base precisamos verificar a equação anterior na nova base:

$$\hat{M} \frac{d\hat{F}}{dk} \hat{M}^{-1} \hat{M} |\xi^{(\mu)}\rangle = \lambda_\mu \hat{M} |\xi^{(\mu)}\rangle, \quad (\text{B.15})$$

$$\left(\hat{M} \frac{d\hat{F}}{dk} \hat{M}^{-1} \right) (\hat{M} |\xi^{(\mu)}\rangle) = \lambda_\mu (\hat{M} |\xi^{(\mu)}\rangle), \quad (\text{B.16})$$

$$\left(\frac{d\hat{F}}{dk} \right)_{\hat{F}=\hat{I}} |\xi^{(\mu)}\rangle_{\hat{F}=\hat{I}} = \lambda_\mu |\xi^{(\mu)}\rangle_{\hat{F}=\hat{I}}. \quad (\text{B.17})$$

De modo que uma mudança de base do tipo (B.13) resultará num problema simples de autovalor para $\frac{d\hat{F}}{dk}$, bastando fazer

$$\frac{dF'_{ij}}{dk} = \frac{\langle f_i |}{\sqrt{f_i}} \frac{d\hat{F}}{dk} \frac{|f_j\rangle}{\sqrt{f_j}} = \frac{1}{\sqrt{f_i f_j}} \langle f_i | \frac{d\hat{F}}{dk} | f_j \rangle. \quad (\text{B.18})$$

B.3 Construção das Matrizes

Um passo importante a ser dado ao aplicar este método é como serão construídas as matrizes $\hat{F}$ e $\frac{d\hat{F}}{dk}$. Tome como exemplo o caso onde se quer calcular os autovalores próximos a $k_0 = 1000$, seguindo VS teríamos $N = 920$ funções base e consequentemente matrizes dessa ordem para construir e diagonalizar. Portanto o procedimento empregado para a escrita dessas matrizes deve ser bem otimizado. O que será descrito a seguir foi extraído da tese de doutorado de Alex Barnett do ano de 2000, *Dissipation in Deforming Chaotic Billiards* (41). Todos os elementos de matriz de interesse são da forma

$$A_{ij} = \oint_C g_i(s) h_j(s) ds. \quad (\text{B.19})$$

Para calcular numericamente esses elementos, faz-se a seguinte discretização:

$$\oint_C g_i(s) h_j(s) ds \longrightarrow \frac{P}{M} \sum_{m=1}^M g_i(s_m) h_j(s_m), \quad (\text{B.20})$$

onde P é o perímetro do bilhar e M é o número de pontos que representam o contorno discretizado. Desta forma, precisa-se do cálculo de $O(N^2M)$ quantidades, os N^2 elementos de matriz mais os M pedaços do contorno. Contudo usando matrizes auxiliares retangulares com elementos de matriz definidos a seguir, apenas $O(NM)$ quantidades são requeridas.

$$G_{mi} = g_i(s_m) \quad ; \quad H_{mi} = h_i(s_m), \quad (\text{B.21})$$

De modo que para obter $\hat{A}$ basta fazer

$$\hat{A} = \frac{L}{M} \hat{G}^T \hat{H}. \quad (\text{B.22})$$

Vale destacar que para avaliar a expressão acima é requerido N^2M operações, mas são apenas somas e multiplicações, executados de maneira eficiente seja em C ou no *Mathematica*.

B.4 Aplicando no Bilhar Estádio Elíptico

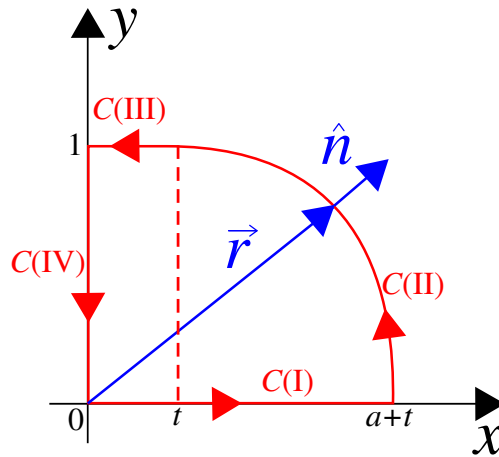


Figura 75 – Bilhar Estádio Elíptico.

Aqui apresentaremos o desenvolvimento do método para a geometria de 1/4 do Bilhar Estádio Elíptico (BEE). Como mostrado na Figura 75, para a construção dos elementos de matriz das equações (B.8) e (B.9) iremos dividir o contorno C em quatro pedaços de modo que $C = C(I) + C(II) + C(III) + C(IV)$. As integrais serão escritas então como

$$\oint_C [\dots] ds = \int_{C(I)} [\dots] ds + \int_{C(II)} [\dots] ds + \int_{C(III)} [\dots] ds + \int_{C(IV)} [\dots] ds. \quad (\text{B.23})$$

Utilizando as funções base (B.11) temos que se as arestas do bilhar pertencem totalmente a um dos eixos as contribuições para a equação anterior são nulas. No BEE temos os pedaços C(I) e C(IV) pertencendo totalmente aos eixos x e y respectivamente e ficamos com todas as integrais de contorno do problema escritas como

$$\oint_C [...] ds = \int_{C(\text{II})} [...] ds + \int_{C(\text{III})} [...] ds. \quad (\text{B.24})$$

Para escrever as integrais discretizadas como em (B.20) precisamos do perímetro do BEE:

$$P = t + a + L_a + t + 1 = 1 + 2t + a + L_a, \quad (\text{B.25})$$

onde L_a é o comprimento de $1/4$ da elipse de semi-eixo maior a e semi-eixo menor 1. Para calcular L_a escolhemos a parametrização

$$\vec{r} = (t + a \cos z, \text{senz}) \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dz} = (-a \text{senz}, \cos z), \quad (\text{B.26})$$

$$\left| \frac{d\vec{r}}{dz} \right|^2 = a^2 \text{senz}^2 + \cos^2 z = 1 + (a^2 - 1) \text{senz}^2. \quad (\text{B.27})$$

Calculando a integral de comprimento com essa parametrização temos

$$L_a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{d\vec{r}}{dz} \right| dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + (a^2 - 1) \text{senz}^2} dz, \quad (\text{B.28})$$

$$L_a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + (a^2 - 1) \text{senz}^2} dz = E(1 - a^2). \quad (\text{B.29})$$

Onde $E(x)$ é a integral elíptica completa. Escolhemos $M = 3000$ e as frações de M de cada pedaço do contorno ficam

$$M_1 = M \left(\frac{a+t}{P} \right) \quad ; \quad M_2 = M \frac{L_a}{P} \quad ; \quad M_3 = M \frac{t}{P} \quad ; \quad M_4 = M \frac{1}{P} \quad (\text{B.30})$$

Agora precisamos escrever a quantidade r_n , definida na equação (B.3), para os pedaços II e III do contorno, por simplicidade comecemos pelo III:

$$\vec{r} = (x, 1) \quad ; \quad \hat{n} = (0, 1) \Rightarrow r_n = 1. \quad (\text{B.31})$$

Para o pedaço II podemos aproveitar a parametrização (B.26) para escrever $\vec{r}$, já o versor normal à II não é tão simples quanto o caso anterior. Considere a equação da parte elíptica do bilhar:

$$\left(\frac{x-t}{a}\right)^2 + y^2 = 1. \quad (\text{B.32})$$

Derivando em relação a x temos

$$2\frac{(x-t)}{a^2} + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \left(\frac{t-x}{a^2}\right) = -\frac{1}{a \tan z}. \quad (\text{B.33})$$

A expressão anterior representa já na parametrização (B.26) o coeficiente angular de retas tangentes à elipse. Pode ser verificado avaliando os casos extremos $z = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} = e$ e $z = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0$. Para extrair o coeficiente angular de retas normais à elipse pode-se utilizar a relação $\tan \omega_1 \tan \omega_2 = -1$, onde retas que possuam coeficientes angulares $\tan \omega_1$ e $\tan \omega_2$ são ortogonais. Chamando o coeficiente angular de uma reta normal a elipse de $\tan \omega_n$ ficaremos com

$$\frac{dy}{dx} \tan \omega_n = -1 \Rightarrow \tan \omega_n = a \tan z. \quad (\text{B.34})$$

Agora basta construir um vetor normalizado $\hat{n} = (n_x, n_y)$ que possua inclinação ω_n :

$$\hat{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + a^2 \tan^2 z}}, \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{a^2 \tan^2 z}}} \right). \quad (\text{B.35})$$

Mais uma vez podemos usar os casos extremos $z = 0 \Rightarrow \hat{n} = (1, 0)$ e $z = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \hat{n} = (0, 1)$. Com $\vec{r}$ e $\hat{n}$ em mãos r_n é calculado tem termos da parametrização (B.26) como

$$r_n(z) = \frac{t + a \cos z}{\sqrt{1 + a^2 \tan^2 z}} + \frac{\text{senz}}{\sqrt{1 + \frac{1}{a^2 \tan^2 z}}}. \quad (\text{B.36})$$

Agora temos todos os ingredientes para construir as matrizes $\hat{F}$ e $\frac{d\hat{F}}{dk}$. Considere a discretização (B.20), juntamente com a equação (B.24) ficamos com

$$A_{ij} = \frac{P}{M} \left(\sum_{m_2=1}^{M_2} g_i(s_m) h_j(s_m) + \sum_{m_3=1}^{M_3} g_i(s_m) h_j(s_m) \right), \quad (\text{B.37})$$

$$\hat{A} = \frac{P}{M} \left(\hat{G}_2^T \hat{H}_2 + \hat{G}_3^T \hat{H}_3 \right). \quad (\text{B.38})$$

Construiremos primeiro a matriz $\hat{F}$, por simplicidade comecemos mais uma vez pela contribuição da parte III do bilhar. Para caminharmos discretamente pela reta $y = 1$ saindo de $x = t$, chegando em $x = 0$, passando por M_3 pontos, basta que para $m = 1, 2, 3, \dots, M_3$ $x_3(m)$ seja

$$x_3(m) = t \left(\frac{M_3 - m}{M_3 - 1} \right). \quad (\text{B.39})$$

Com $i = 1, 2, 3, \dots, N$ temos que $\hat{G}_3$ e $\hat{H}_3$ possuem os elementos de matriz a seguir, lembrando que $r_n = 1$ como foi mostrado em (B.31):

$$(G_3)_{mi} = \varphi_i[k_0, x_3(m), 1] \quad ; \quad (H_3)_{mi} = (G_3)_{mi}. \quad (\text{B.40})$$

Para a contribuição da parte II utilizaremos a seguinte parametrização para caminhar pela elipse passando por M_2 pontos com $m = 1, 2, 3, \dots, M_2$:

$$z(m) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{m - 1}{M_2 - 1} \right). \quad (\text{B.41})$$

Com $x_2(m) = t + a \cos z(m)$ e $y_2(m) = \text{sen} z(m)$, temos que os elementos de matriz de $\hat{G}_2$ e $\hat{H}_2$ são

$$(G_2)_{mi} = \varphi_i[k_0, x_2(m), y_2(m)] \quad ; \quad (H_2)_{mi} = \frac{(G_2)_{mi}}{r_n[z(m)]}. \quad (\text{B.42})$$

Construídas as matrizes auxiliares, finalmente calculamos $\hat{F}$ como sendo

$$\hat{F} = \frac{P}{M} \left(\hat{G}_3^T \hat{G}_3 + \hat{G}_2^T \hat{H}_2 \right). \quad (\text{B.43})$$

Agora calcularemos a matriz $\frac{d\hat{F}}{dk}$, utilizaremos as mesmas parametrizações que usamos para $\hat{F}$ e até mesmo aproveitaremos algumas das matrizes já utilizadas. Observando a equação (B.9) percebe-se que termos do tipo $\frac{\varphi_i}{r_n}$ também aparecem. Então para a parte III, temos:

$$(G_{d3})_{mi} = (H_3)_{mi} = (G_3)_{mi}, \quad (\text{B.44})$$

$$(H_{d3})_{mi} = x(m) \varphi_{ix}[k_0, x_3(m), 1] + \varphi_{iy}[k_0, x_3(m), 1], \quad (\text{B.45})$$

onde $\varphi_{ix}(k_0, x, y) = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(k_0, x, y)$ e $\varphi_{iy}(k_0, x, y) = \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(k_0, x, y)$. Para a parte II teremos os seguintes elementos de matriz:

$$(G_{d2})_{mi} = (H_2)_{mi}, \quad (\text{B.46})$$

$$(H_{d2})_{mi} = x_2(m)\varphi_{ix}[k_0, x_2(m), y_2(m)] + y_2(m)\varphi_{iy}[k_0, x_2(m), y_2(m)]. \quad (\text{B.47})$$

Então, finalmente escrevemos

$$\hat{A} = \frac{P}{M} \left(\hat{G}_3^T \hat{H}_{d3} + \hat{H}_2^T \hat{H}_2 d \right) \Rightarrow \frac{d\hat{F}}{dk} = \frac{\hat{A} + \hat{A}^T}{k_0}. \quad (\text{B.48})$$

Para utilizar o método agora basta escolher um valor de k_0 e realizar os procedimentos aqui descritos, o intervalo de confiança é pouco discutido em (12) e basicamente foi definido através de testes. Uma janela de ± 0.1 em k_0 se mostrou adequada e foi seguida por nós em nossos cálculos. Resumindo, de todos os k 's encontrados só são considerados solução, ou seja, são realmente um k_μ quando o dado $k \in (k_0 - 0.1, k_0 + 0.1)$. Feito uma rodada com um dado k_0 , ele é incrementado de 0.2 de modo que não há o risco de se calcular o mesmo autovalor duas vezes. Segue aqui uma rotina desenvolvida por nós no *Mathematica* aplicando o Método de VS no Estádio Elíptico para qualquer par (t, a) escolhidos pelo usuário. Por fim, seguem as 8 primeiras densidades de probabilidade para o BEE com $a = 1.04$ e $t = 0.286$.

```

(*Limpaando a Memória *)
ClearAll["Global`*"]

(*Critério do  $\delta$  e Variação de  $q$ *)
 $\delta m = 0.1$ ;
 $\lambda m = 2 / \delta m$  ;
 $qv = 2 * \delta m$  ;

(*Quantidade de autovalores a serem calculados*)
Q = 50000;

(*k0*)
ki = 4;

(*Vetor de números de onda*)
k = {};

(*Parâmetros do Bilhar*)
a = 1.04
t = 0.28

(* Perímetro do 1/4 de elipse*)
La = N[EllipticH[1 - a*a]];

P = 1 + 2 * t + a + La;

(* Discretização*)
M = 3000;
M3 = Round[M*t / P]
M2 = Round[M*La / P]

Norma = P / M;

(*Cutoff*)
 $\gamma = N[10^{(-16)} / 2]$ 

(*Discretização*)
x3 = ParallelTable[t * (M3 - m) / (M3 - 1), {m, M3}];

zm = ParallelTable[N[Pi * (m - 1) / (M2 - 1) / 2], {m, M2}];
Sm = ParallelTable[Sin[zm[[m]]], {m, M2}];
Cm = ParallelTable[Cos[zm[[m]]], {m, M2}];
Tm = ParallelTable[Sin[zm[[m]]] / Cos[zm[[m]]], {m, M2}];

x2 = ParallelTable[t + a * Cm[[m]], {m, M2}];

rn = ParallelTable[x2[[m]] / Sqrt[1 + a * a * Tm[[m]] * Tm[[m]] +
    Sm[[m]] / Sqrt[1 + 1 / a / a / Tm[[m]] / Tm[[m]]], {m, M2}];

```

```

Timing [

L = 0;
While[L < Q,

Clear[k0, n,  $\theta$ , Cs, Ss,  $\varphi$ ,  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$ , G3, G3t, G2, G2t, H2,
H2t, F, H3d, H2d, DF, valsF, vecsF, valsFn, nn, DFz, valsDF];

(*Número de onda inicial/ Tamanho das Matrizes*)
k0 = ki + qv * q;
n = Round[0.9 * k0 + 20];

(*Funções Base*)
 $\theta$  = ParallelTable[N[(Pi/8/n) * (i - 1/2) * (5 - i/n)], {i, n}];
Cs = N[Cos[ $\theta$ ]];
Ss = N[Sin[ $\theta$ ]];

 $\varphi[i_, k_, x_, y_] := \text{Sin}[k * x * \text{Cs}[[i]]] * \text{Sin}[k * y * \text{Ss}[[i]]];$ 

 $\varphi_x[i_, k_, x_, y_] := \text{Cs}[[i]] * \text{Cos}[k * x * \text{Cs}[[i]]] * \text{Sin}[k * y * \text{Ss}[[i]]];$ 
 $\varphi_y[i_, k_, x_, y_] := \text{Ss}[[i]] * \text{Sin}[k * x * \text{Cs}[[i]]] * \text{Cos}[k * y * \text{Ss}[[i]]];$ 

(*Matrizes G e H de F (iguais nesse caso) para o segmento reto*)
G3 = ParallelTable[ $\varphi[i, k0, x3[[m]], 1]$ , {m, M3}, {i, n}];
G3t = Transpose[G3];

(*Matrizes G e H de F para a parte elíptica*)
G2 = ParallelTable[ $\varphi[i, k0, x2[[m]], \text{Sm}[[m]]]$ , {m, M2}, {i, n}];
G2t = Transpose[G2];
H2 = ParallelTable[G2[[m]][[i]]/rn[[m]], {m, M2}, {i, n}];
H2t = Transpose[H2];

(*Matriz F*)
F = Norma * (G3t.G3 + G2t.H2);

(*Matriz H de DF para o segmento reto*)
H3d = ParallelTable[
x3[[m]] *  $\varphi_x[i, k0, x3[[m]], 1]$  +  $\varphi_y[i, k0, x3[[m]], 1]$ , {m, M3}, {i, n}];

(*Matriz H de DF para a parte elíptica*)
H2d = ParallelTable[x2[[m]] *  $\varphi_x[i, k0, x2[[m]], \text{Sm}[[m]]]$  +
Sm[[m]] *  $\varphi_y[i, k0, x2[[m]], \text{Sm}[[m]]]$ , {m, M2}, {i, n}];

(*Matriz dF/dk*)
DF = Norma * (G3t.H3d + H2t.H2d);
DF = DF + Transpose[DF];

```

```

(*Problema de Autovalor de
  F / Autovalores normalizados pelo maior em módulo *)
{valsF, vecsF} = Eigensystem [F];
valsFn = Abs[valsF/Max[Abs[valsF]]];

(*Retirada do Subespaço nulo*)
nn = 0;
For[i = 1, i < n + 1, i++, If[nn == 0, If[valsFn[[i]] < γ, nn = i, nn = 0], nn = nn]];
If[nn == 0, nn = n, nn = nn - 1];

(*Reescrevendo dF/dk no subespaço não-
  nulo - Mesma forma das matrizes anteriores*)
{DFz = ConstantArray[0, {nn, nn}];
  Do[DFz[[i, j]] =
    DFz[[j, i]] = vecsF[[j]].DF.vecsF[[i]]/Conjugate[Sqrt[valsF[[j]]]]/
    Sqrt[valsF[[i]]], {i, 1, nn}, {j, 1, i}];

  (*Autovalores de dF/dk na nova base*)
  valsDF = Table[1, {nn}];
  valsDF = Eigenvalues[DFz];

  (*Autovalores*)
  For[i = 1, i ≤ nn, i++, If[Abs[valsDF[[i]]] > λm, AppendTo[k, k0 - 2/valsDF[[i]]]]];

  (*Quantidade de autovalores encontrados*)
  l = Length[k];
  If[l > L,
    L = l;
    Print[q]
    Print[k0]
    Print[L]
  ];

  q++;

];

Length[k]
k = Sort[Re[k]]

Export["Ks_alp04_t0p28.txt", k];

```

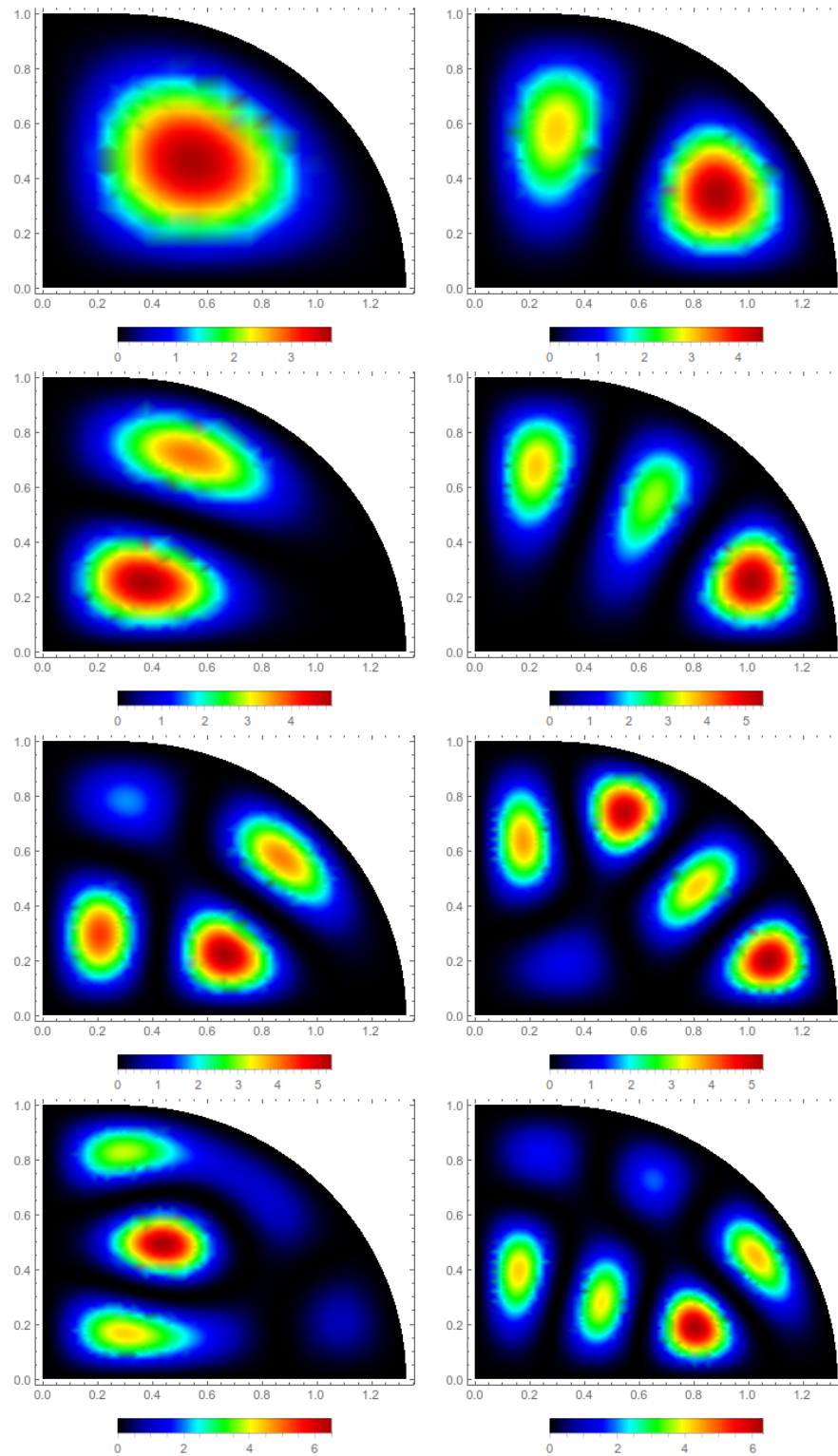


Figura 76 – Primeiras densidades de probabilidade do BEE para $a = 1.04$ e $t = 0.286$. Ordem crescente da esquerda para a direita e de cima para baixo.

ANEXO A – Artigos publicados em periódicos

Neste apêndice apresentamos artigos publicados sobre os temas da tese até o presente momento. No primeiro intitulado *Ergodicity and quantum correlations in irrational triangular billiards*, publicado no periódico *Physical Review E* em 2013 (?), estão apresentados os resultados da dinâmica clássica e quantização desses bilhares.

No segundo, *Classical billiards and quantum fluids*, publicado no mesmo periódico em 2015 (34), estão os resultados sobre a dinâmica clássica dos BEEs e a analogia com a transição λ . Alguns resultados preliminares sobre cicatrização das funções de onda também estão presentes neste artigo.

Ergodicity and quantum correlations in irrational triangular billiards

T. Araújo Lima, S. Rodríguez-Pérez,^{*} and F. M. de Aguiar[†]

Departamento de Física, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE 50670-901, Brazil

(Received 15 August 2012; revised manuscript received 8 December 2012; published 5 June 2013)

Pseudochaotic properties are systematically investigated in a one-parameter family of irrational triangular billiards (all angles irrational with π). The absolute value of the position correlation function $C_x(t)$ decays like $\sim t^{-\alpha}$. Fast ($\alpha \approx 1$) and slow ($0 < \alpha < 1$) decays are observed, thus indicating that the irrational triangles do not share a unique ergodic dynamics, which, instead, may vary smoothly between the opposite limits of strong mixing ($\alpha = 1$) and regular behaviors ($\alpha = 0$). Upgrading previous data, spectral statistical properties of the quantized counterparts are computed from 150 000 energy eigenvalues numerically calculated for each billiard. Gaussian orthogonal ensemble spectral fluctuations are observed when $\alpha \approx 1$ and intermediate statistics are found otherwise. Our irrational billiards have zero Kolmogorov-Sinai entropy and essentially infinity genus. Thus, differently from previous works on *rational* (pseudointegrable) enclosures, our results provide a missing classical-quantum correspondence regarding the ergodic hierarchy for a set of nonchaotic systems that might enjoy the strong mixing property.

DOI: [10.1103/PhysRevE.87.062902](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.87.062902)

PACS number(s): 05.45.Mt, 02.50.Ey, 05.90.+m

I. INTRODUCTION

The ergodic theory of Hamiltonian dynamical systems is quite involved, but its importance for the establishment of laws of statistical physics by mathematically rigorous tools is undisputed. Nowadays, ergodic systems are hierarchically organized as sheer *ergodic* (E), *weakly mixing* (WM), *strongly mixing* (SM), *Kolmogorov* (K) and *Bernoulli* (B). The hierarchy is such that $E \supset WM \supset SM \supset K \supset B$. Positive Kolmogorov-Sinai entropy h_{KS} and, thus, the *chaotic* property, is assured for the K and B systems only. Lately, there has been a great deal of interest in dynamical systems with a mixed (regular and chaotic) phase space. These systems are said to exhibit *weak chaos* or *weak ergodicity* [1]. *Pseudochaos* is a particular case of weak chaos when, in addition to the presence of random behavior, the dynamics has $h_{KS} = 0$. On the other hand, billiard models have played a key role in the modern theory of dynamical systems [2]. In a billiard, one studies the conservative dynamics of a point particle that moves uniformly between specular reflections off the border of a bounded region. Such dynamics may vary from regular to chaotic, depending on the geometry of the confining domain. Plane polygonal billiards are of particular interest here. Billiards in polygons have $h_{KS} = 0$. Thus, they may be pseudochaotic, but never K or B systems. *Rational* polygonal billiards, where each angle is a rational multiple of π , are never ergodic. Until the mid-1990s, many believed that polygons were never SM, although they could be WM. Numerical evidence for WM properties in *right* triangular billiards was first provided by Artuso, Casati, and Guarneri [3]. Soon after, Casati and Prosen (CP) [4] reported a remarkable result, namely, numerical evidences for SM properties in fully irrational triangular billiards (ITBs), for which *all* angles are irrational with π . CP then suggested that generic ITBs might be SM.

We emphasize that much has been said about billiards in *rational* polygons, both classical and quantum. Much less has been reported on *irrational* polygonal domains. In their seminal work, Richens and Berry [5] have drawn attention to the fact that the trajectories in the phase space of rational polygons are bounded in multiply handled spheres, not on a torus. These systems were then called *pseudointegrable*. In particular, Richens and Berry studied the spectra of the square torus billiard and other relatively simple geometries such as the equilateral triangle and the symmetric $\pi/3$ rhombus. Soon after, other rational triangles have been investigated in another influential paper by Berry and Wilkinson [6], in the context of the geometric phase associated with conical intersections of energy surfaces. Such accidental degeneracies in asymmetric domains contrasted with the level repulsion statistically observed in the semiclassical regime of classically chaotic billiards, and predicted by the Wigner distribution for the eigenvalues of 2×2 random matrices belonging to the Gaussian orthogonal ensemble (GOE) as well. A number of papers on the quantum properties of rational polygons appeared in the literature in the following decades. We briefly address two recent ones. Russ [7] analyzed the spectra of interesting polygonal domains with rough boundaries and found intermediate statistics between the Poisson and Wigner distributions, which seemed to depend solely on the genus number of the billiard geometry, not on details of the boundary. Moreover, the observed intermediate statistics approached the Wigner distribution with increasing genus. More recently, Tuan *et al.* [8] studied the spectra of the square torus billiard as a function of the position of the inner scattering element, thus finding a transition between the Poisson-like and Wigner-like behaviors for billiards geometrically distinct but with the same genus. Notice, however, that the authors in [8] were limited to less than 2000 energy eigenvalues, due to the numerical method they used. As a result, they obtained histograms that show a trend for that particular set of energy interval, which might be still far from the semiclassical regime, where universal features are expected to occur [9]. This issue is also present in a previous work by one of the authors [10], who used

^{*}Current address: Departamento de Física, Universidade Federal São Carlos, São Carlos, SP 13565-905, Brazil.

[†]Corresponding author: fma@df.ufpe.br

Classical billiards and quantum fluids

T. Araújo Lima^{*} and F. M. de Aguiar[†]

Departamento de Física, Universidade Federal de Pernambuco, PE 50670-901 Recife, Brazil

(Received 5 February 2014; revised manuscript received 15 October 2014; published 26 January 2015)

The dynamics of a particle confined in the elliptical stadium billiard with rectangular thickness $2t$, major axis $2a$, and minor axis $2b = 2$ is numerically investigated in a reduced phase space with discrete time n . Both relative measure $r(n)$, with asymptotic value $r(n \rightarrow \infty) = r_\infty$ and Shannon entropy s , are calculated in the vicinity of a particular line in the $a \times t$ parameter space, namely $t_c = t_0(a) = \sqrt{a^2 - 1}$, with $a \in (1, \sqrt{4/3})$. If $t < t_c$, the billiard is known to exhibit a mixed phase space (regular and chaotic regions). As the line t_c is crossed upwards by increasing t with fixed a , we observe that the function $\psi(t) = \sqrt{1 - r_\infty(t)}$ critically vanishes at $t = t_c$. In addition, we show that the function $c(t) = t(ds/dt)$ displays a pronounced peak at $t = t_c$. In the vicinity of t_c ($t < t_c$), a chi-square tolerance of 1.0×10^{-9} is reached when the numerically calculated functions $\psi(t)$ and $c(t)$ are fitted with renormalization group formulas with fixed parameters $\alpha = -0.0127$, $\beta = 0.34$, and $\Delta = 0.5$. The results bear a remarkable resemblance to the famous λ transition in liquid ^4He , where the two-component (superfluid and normal fluid) phase of He-II is critically separated from the fully entropic normal-fluid phase of He-I by the so-called λ line in the pressure $\times$ temperature parameter space. The analogy adds support to a set of previous results by Markarian and coworkers, which indicate that the line $t_0(a)$ is a strong candidate for the bound for chaos in the elliptical stadium billiard if $a \in (1, \sqrt{4/3})$.

DOI: [10.1103/PhysRevE.91.012923](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.012923)

PACS number(s): 05.45.-a, 67.25.dj, 05.30.Jp, 05.90.+m

I. INTRODUCTION

^4He fluids are among the most fascinating substances in nature. For pressures below 25 bar, there are two *liquid* phases, known as helium I, at higher temperatures, and helium II (He-II), at lower temperatures. Helium I is a normal (viscous) fluid, whereas He-II has both normal and superfluid components, with densities ρ_n and ρ_s , respectively. These concentrations depend on absolute temperature T . At $T = 0$, He-II is fully nonentropic and superfluid. As T is increased, the superfluid density decreases and the normal component sets in, carrying all entropy S . The superfluid density vanishes at a critical temperature T_λ , which depends on pressure P . The so-called λ line, $T_\lambda(P)$, slightly shifts the phase transition towards lower temperatures with increasing pressure. At saturated vapor pressure, $T_\lambda = 2.17$ K. Besides the unique ability to remain liquid down to $T = 0$, He-II amazingly climbs up and over the wall of a beaker, coating all the outer and inner surfaces, flows through ultra-thin capillaries with no shear viscosity, and stands still in a spinning container. A detailed review on these and other exotic physics of liquid ^4He may be found in [1]. Two properties are of particular interest here, namely the distinct behaviors of the real part of the order parameter $\psi(T) = \sqrt{\rho_s}$ and that of the heat capacity at constant volume $C_V(T) = T(\partial S/\partial T)_V$, as T_λ is approached at saturated vapor pressure. Let $\Theta = 1 - T/T_\lambda$. While ψ vanishes when $\Theta \rightarrow 0$, C_V diverges in the same limit. The experimental values of the corresponding critical exponents are $\beta_{\text{exp}} \approx 0.34$ [2] and $\alpha_{\text{exp}} \approx -0.0127$ [3]. While the former agrees very well with renormalization group theory (RGT), the latter has been a long-standing challenge for theorists [4]. Hitherto it seems that the most successful

result has been achieved from a seven-loop strong-coupling quantum field theory with a φ^4 interaction [5]. In fact, the discovery of the unusual and exciting behavior of liquid helium, visible to the naked eye in several experiments since the 1930s, was followed by a theoretical development which has never been completely free of debate [6–8]. The two-fluid assumption, shared by both phenomenological and quantum theories of He-II, embodies an intrinsic difficulty, namely the idea of two interpenetrating distinct fluids of identical particles.

On the other hand, parallels between phase transitions and chaotic transitions in *dissipative* dynamical systems have been of interest since universality and self-similarity were found in a number of numerical computations [9] and observed in a variety of experiments (fluids [10], acoustics [11], electronic circuits [12], chemical reactions [13], lasers [14], and microwave-driven spin waves [15], to name a few). For instance, a renormalization group approach to the period-doubling transition to chaos in a one-dimensional map allows one to derive scaling laws for the Lyapunov exponent and the correlation function in perfect analogy to those for the magnetization and the spin-spin correlation near a magnetic phase transition, as described by the Ginzburg-Landau functional. The existence of such parallels involving *conservative* dynamical systems seems to have been less explored [16,17]. For conservative systems, volume elements in phase space do not shrink with increasing time. However, one such attractor-free phase space may exhibit chaotic regions densely interweaved with well-behaved ones, i.e., a mixed phase space, thus allowing the coexistence of regular and irregular motions and making the analysis more involved. Billiard gas models are among the most exciting topics in the modern theory of Hamiltonian systems and have been used for decades as simple but rigorous testing tools for the ergodic hypothesis and laws of statistical physics. In a billiard, one considers the dynamics of a single particle

^{*}tiagopl@df.ufpe.br

[†]Corresponding author: fma@df.ufpe.br