



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Thiago Araújo de Albuquerque Mendonça

Superfícies Formando Ângulo Constante com a Vertical em  
Certos Espaços Tridimensionais

RECIFE  
2017

**Thiago Araújo de Albuquerque Mendonça**

Superfícies Formando Ângulo Constante com a Vertical em Certos Espaços  
Tridimensionais

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em  
Matemática da Universidade Federal de Pernambuco  
como requisito parcial para obtenção do título de Dou-  
tor em matemática.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Fernando Pereira de Sousa

RECIFE

2017

Catálogo na fonte  
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

M539s    Mendonça, Thiago Araújo de Albuquerque  
            Superfícies formando ângulo constante com a vertical em certos espaços  
            tridimensionais / Thiago Araújo de Albuquerque Mendonça. – 2017.  
            116 f.: il., fig.

            Orientador: Antônio Fernando Pereira de Sousa.  
            Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN,  
            Matemática, Recife, 2017.  
            Inclui referências.

            1. Geometria diferencial. 2. Grupo especial linear. I. Sousa, Antônio  
            Fernando Pereira de (orientador). II. Título.

            516.36                      CDD (23. ed.)                      UFPE- MEI 2017-87

**THIAGO ARAÚJO DE ALBUQUERQUE MENDONÇA**

**SUPERFÍCIES FORMANDO ÂNGULO CONSTANTE COM A VERTICAL EM CERTOS  
ESPAÇOS TRIDIMENSIONAIS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutorado em Matemática.

Aprovado em: 23/02/2017

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Antônio Fernando Pereira de Sousa (Orientador)  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof. Dr. César Augusto Rodrigues Castilho (Examinador Interno)  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof. Dr. Henrique de Barros Correia Vítório (Examinador Interno)  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof. Dr. Juscelino Pereira Silva (Examinador Externo)  
Universidade Federal do Cariri

---

Prof.Dr. Damião Júnio Gonçalves Araújo (Examinador Externo)  
Universidade Federal da Paraíba

*À minha família*

# Agradecimentos

- Agradeço, primeiramente a Deus, em seguida
- Ao Prof. Henrique Araújo pela orientação, paciência e sugestões no decorrer do trabalho.
- Aos professores que participaram da banca: Antônio Fernando Pereira de Sousa, César Castilho, Henrique Vítório, Juscelino Silva e Damião Júnio pelos comentários e sugestões.
- Aos meus pais Mario José e Rosimere Mendonça e meus avós Pedro Araujo e Maria das Mercês, pela educação e por me apoiarem em todos os aspectos da minha vida.
- A meu irmão Diogo Mendonça, as minhas tias Rode Araujo e Rosângela Araujo e ao meu tio Rodérico Araujo pelo amor e carinho.
- A todos os meus professores da graduação e Pós-graduação em matemática da UFPE, pela formação e incentivo.
- A todos que, direta ou indiretamente, participaram na realização deste trabalho.
- À CAPES pelo apoio financeiro.

# Resumo

Consideramos o problema das superfícies com ângulo constante nos espaços de Bianchi-Cartan-Vranceanu (espaços BCV). Especificamente, no grupo especial linear  $SL(2, \mathbb{R})$ , nas Esferas de Berger e no grupo de Heisenberg tridimensional  $Nil_3$ . Primeiramente, apresentamos esta família de espaços BCV e descrevemos suas geometrias em termos de um referencial específico, em seguida damos alguns aspectos gerais sobre o comportamento local de uma superfície com ângulo constante isometricamente imersas nestes espaços. Em seguida, dividindo o trabalho em duas partes, estudamos aspectos da geometria tridimensional destes três espaços. A primeira parte é dedicada a alguns aspectos gerais dessa geometria: introduzimos um sistema de coordenadas, e nelas calculamos sua métrica, a conexão Riemanniana nesta base e as suas curvaturas seccionais. Na segunda parte, mostramos a existência de duas curvas com propriedades especiais, peças fundamentais para a construção da superfície, e a partir delas, damos uma nova abordagem para uma classificação global completa destas superfícies e investigamos propriedades geométricas tais como completude, extensibilidade e invariância por subgrupo a um parâmetro.

**Palavras-chave:** Superfícies com ângulo constante. Grupo Especial Linear  $SL(2, \mathbb{R})$ . Esferas de Berger. Grupo de Heisenberg Tridimensional  $Nil_3$ .

# Abstract

We consider the problem of constant angle surfaces in the Bianchi-Cartan-Vranceanu spaces. Specifically in the linear special group  $SL(2, \mathbb{R})$ , Berger sphere and three-dimensional Heisenberg group  $Nil_3$ . First, we introduce the family of BCV spaces and describe their geometries in terms of a specific frame, then we give some general aspects about the local behavior of a surface with constant angle isometrically immersed in these spaces. Then, we study aspects of the three-dimensional geometry of the three above mentioned: we introduce a coordinate system, calculate the metric and the Riemannian connection in coordinates and compute its sectional curvatures. Finally, we show the existence of two curves with special properties, which will be fundamental pieces for the construction of a constant angle surface. From this construction we give a new approach to a complete global classification of these surfaces and investigate geometric properties such as completeness, extensibility and invariance under a one-parameter subgroup of isometries.

**Keywords:** Constant angle surfaces. Linear special group  $SL(2, \mathbb{R})$ . Berger sphere. three-dimensional Heisenberg group  $Nil_3$ .

# Lista de ilustrações

|                                                                                                                                                                        |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1 – Triedro inicial. . . . .                                                                                                                                    | 45 |
| Figura 2 – $F(s, t) = \left( \frac{-yz-xw}{x^2+y^2}, \frac{-xz+yw}{x^2+y^2}, \arcsin \left( \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \right), \quad s, t \in [-3, 3].$ . . . . | 67 |

# Sumário

|       |                                                                  |    |
|-------|------------------------------------------------------------------|----|
| 1     | <b>INTRODUÇÃO</b>                                                | 11 |
| 2     | <b>MOTIVAÇÃO</b>                                                 | 17 |
| 2.1   | CURVA-COM-TRIEDRO                                                | 17 |
| 2.2   | OS ESPAÇOS DE BIANCHI-CARTAN-VRANCEANU                           | 18 |
| 2.2.1 | <b>Superfícies com ângulo Constante</b>                          | 21 |
| 3     | <b>SUPERFÍCIES COM ÂNGULO CONSTANTE NO GRUPO ESPECIAL LINEAR</b> | 25 |
| 3.1   | GEOMETRIA RIEMANNIANA DE $SL(2, \mathbb{R})$                     | 25 |
| 3.1.1 | <b>Introdução à Geometria de <math>SL(2, \mathbb{R})</math></b>  | 25 |
| 3.1.2 | <b>Curvatura Seccional de <math>SL(2, \mathbb{R})</math></b>     | 30 |
| 3.1.3 | <b>Isometrias de <math>SL(2, \mathbb{R})</math></b>              | 33 |
| 3.2   | SUPERFÍCIE COM ÂNGULO CONSTANTE EM $SL(2, \mathbb{R})$           | 37 |
| 3.2.1 | <b>Curva-com-Triedro em <math>SL(2, \mathbb{R})</math></b>       | 37 |
| 3.2.2 | <b>Superfícies com ângulo Constante</b>                          | 47 |
| 3.2.3 | <b>Análise da Curvatura Média</b>                                | 57 |

|       |                                                                                         |            |
|-------|-----------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 4     | <b>SUPERFÍCIES COM ÂNGULO CONSTANTE NAS ESFERAS DE BERGER . . . . .</b>                 | <b>76</b>  |
| 4.1   | GEOMETRIA RIEMANNIANA DAS ESFERAS DE BERGER . . . . .                                   | 76         |
| 4.1.1 | <b><math>S^3</math> como Grupo de Lie . . . . .</b>                                     | <b>76</b>  |
| 4.1.2 | <b>Esferas de Berger . . . . .</b>                                                      | <b>78</b>  |
| 4.2   | SUPERFÍCIES COM ÂNGULO CONSTANTE NAS ESFERAS DE BERGER . . . . .                        | 82         |
| 4.2.1 | <b>Curva-com-Triedro nas Esferas de Berger . . . . .</b>                                | <b>82</b>  |
| 4.2.2 | <b>Superfícies com ângulo Constante . . . . .</b>                                       | <b>88</b>  |
| 4.2.3 | <b>Análise da Curvatura Média . . . . .</b>                                             | <b>97</b>  |
| 5     | <b>SUPERFÍCIES COM ÂNGULO CONSTANTE NO GRUPO DE HEISENBERG TRIDIMENSIONAL . . . . .</b> | <b>99</b>  |
| 5.1   | O ESPAÇO $NIL_3$ . . . . .                                                              | 99         |
| 5.2   | SUPERFÍCIES COM ÂNGULO CONSTANTE EM $NIL_3$ . . . . .                                   | 101        |
| 5.2.1 | <b>Curva-com-Triedro em <math>Nil_3</math> . . . . .</b>                                | <b>101</b> |
| 5.2.2 | <b>Superfícies com ângulo Constante . . . . .</b>                                       | <b>104</b> |
| 5.2.3 | <b>Análise da Curvatura Média . . . . .</b>                                             | <b>113</b> |
|       | <b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>                                                            | <b>115</b> |

# 1 INTRODUÇÃO

Devido a Thurston, entre outros, e o Teorema da Geometrização (Thurston, Perelman 2002):

*Toda variedade tridimensional pode ser cortada ao longo de superfícies e decomposta em variedades de dimensão 3 passíveis de deformação em uma das geometrias abaixo:*

$$\mathbb{E}^3, \mathbb{S}^3, \mathbb{H}^3, \mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}, \mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}, \widetilde{SL}(2, \mathbb{R}), Nil_3, Sol.$$

os espaços homogêneos tridimensionais ganharam interesse entre os geometras. Espaços homogêneos são variedades Riemannianas tais que para quaisquer dois pontos existe uma isometria que leva um ponto no outro, em outras palavras, são espaços com a mesma geometria em todos os pontos. Em (1), P. Scott descreve a geometria dos espaços homogêneos tridimensionais simplesmente conexos de acordo com a dimensão do grupo de isometria, que podem ser 3, 4 ou 6. No caso da dimensão do grupo de isometria ser 6, os espaços homogêneos são as formas espaciais  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{S}^3$  e  $\mathbb{H}^3$ , se a dimensão for 3, temos o espaço solúvel  $Sol_3$  e, se a dimensão for 4, temos as variedades produto  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , o recobrimento universal do grupo especial linear  $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$  e o grupo de Heisenberg tridimensional  $Nil_3$ .

Com exceção do espaço hiperbólico tridimensional  $\mathbb{H}^3$ , os espaços homogêneos tridimensionais cuja dimensão do grupo de isometria é 4 ou 6, munido de uma métrica dependendo de dois parâmetros reais,  $\kappa$  e  $\tau > 0$ , formam uma família de espaços. Essa família de métricas apareceram nos trabalhos de Cartan (2), que obteve esta família de espaços com  $\kappa \neq 4\tau^2$ , Bianchi (3, 4, 5) e Vranceanu (6). Os espaços com essa família de métricas recebem o nome de *Espaços de Bianchi-Cartan-Vranceanu*, ou espaços BCV. A classificação completa dos espaços BCV  $M^3(\kappa, \tau)$  é a seguinte:

- se  $\kappa = \tau = 0$ , então  $M^3(\kappa, \tau) \cong \mathbb{E}^3$ ,
- se  $\kappa = 4\tau^2 \neq 0$ , então  $M^3(\kappa, \tau) \cong \mathbb{S}^3(\kappa/4) - \{\infty\}$ ,
- se  $\kappa > 0$  e  $\tau = 0$ , então  $M^3(\kappa, \tau) \cong (\mathbb{S}^2(\kappa) - \{\infty\}) \times \mathbb{R}$ ,
- se  $\kappa < 0$  e  $\tau = 0$ , então  $M^3(\kappa, \tau) \cong \mathbb{H}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ ,
- se  $\kappa > 0$  e  $\tau \neq 0$ , então  $M^3(\kappa, \tau) \cong SU(2) - \{\infty\}$ ,
- se  $\kappa < 0$  e  $\tau \neq 0$ , então  $M^3(\kappa, \tau) \cong \widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ ,
- se  $\kappa = 0$  e  $\tau \neq 0$ , então  $M^3(\kappa, \tau) \cong Nil_3$ .

Ao longo dos anos, muitos matemáticos vêm estudando superfícies isometricamente imersas nestes espaços, satisfazendo certas propriedades, tais como superfícies mínimas, diferencial de Hopf, superfícies de curvatura média constante, superfícies invariantes,

dentre outras. Estes temas podem ser encontrados em vários artigos, por exemplo em (7, 8, 9, 10, 11, 12). Em (13), B. Daniel mostra que o ângulo entre o campo vetorial normal a uma superfície isometricamente imersa em uma variedade Riemanniana homogênea tridimensional com grupo de isometria tetradimensional e uma direção fixada é um invariante fundamental para a superfície, obtendo, dentre outras coisas, uma expressão para as equações de Gauss-Codazzi, em termos desta função ângulo. Quando este ângulo é constante, estas superfícies são denominadas *superfícies com ângulo constante*. Essas superfícies generalizam o conceito de hélice, isto é, curvas cujas linhas tangentes formam um ângulo constante com um vetor fixo de  $\mathbb{E}^3$ . Por esta razão, as superfícies com ângulo constante também são chamadas de *superfícies helicoidais*.

A invariância do ângulo levou muitos geometras a procura das superfícies que fazem ângulo constante com uma direção fixada nas variedades homogêneas tridimensionais. Dillen, Fastenakels, Van der Veken e Vranken (14) e Dillen e Munteanu (15) classificaram as superfícies que fazem ângulo constante com a direção  $\mathbb{R}$  nas variedades produtos  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , respectivamente. Em (12), López e Munteanu classificam todas as superfícies com ângulo constante em  $Sol_3$ , em (16) M. Munteanu e Ana-Irina Nistor deram uma nova abordagem as superfícies com ângulo constante em  $\mathbb{E}^3$ . Fastenakels, Munteanu e Van der Veken (17), por meio de resolução de um sistema de EDO's, dão uma classificação local completa para as superfícies que fazem ângulo constante em  $Nil_3$  (Teorema 1). Montaldo e Onnis (18) e, Montaldo, Onnis e Passamani (19) dão uma caracterização local completa das superfícies com ângulo constante nas Esferas de Berger (Teorema 3.1) e no grupo especial linear  $SL(2, \mathbb{R})$  (Teoremas 4.1, 5.2 e 6.2), respectivamente. Tais superfícies são descritas por meio de uma curva adequada e uma família a um parâmetro de isometrias do espaço ambiente. No espaço  $SL(2, \mathbb{R})$ , há uma dependência do sinal de uma constante  $B = (\tau^2 + 1) \cos^2 \theta - 1$ .

O objetivo deste trabalho é dar uma classificação global completa para as superfícies com ângulo constante no grupo especial linear  $SL(2, \mathbb{R})$ , nas Esferas de Berger e no grupo de Heisenberg tridimensional  $Nil_3$ . Também investigamos propriedades geométricas tais como completude, extensibilidade e invariância por subgrupo a um parâmetro. Dividimos a exposição em três partes, a primeira é voltada para uma introdução ao espaço  $SL(2, \mathbb{R})$  e ao estudo destas superfícies. A parte seguinte trata das Esferas de Berger e destas superfícies neste espaço. Por fim, é feito um estudo sobre estas superfícies no espaço tridimensional  $Nil_3$ .

Seja  $F : \tilde{S} \rightarrow M^3(\kappa, \tau)$  uma imersão isométrica de uma superfície orientada em um espaço  $BCV$   $M^3(\kappa, \tau)$ . Denote por  $N$  o campo vetorial normal unitário,  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$  o ângulo entre o campo vetorial  $E_3$  e  $N$ , por  $T$  a projeção de  $E_3$  sobre o plano tangente a  $\tilde{S}$ , isto é,  $T = E_3 - \cos \theta N$  e  $JT = N \times T$ . A ideia por trás do que segue é motivada pelo seguinte Lema de (17):

**Lema 1.1.** *Seja  $\tilde{S}$  uma superfície com ângulo constante em um espaço BCV. Então:*

(i) *O operador de forma com respeito a base  $\{T, JT\}$  é  $S = \begin{pmatrix} 0 & -\tau \\ -\tau & \lambda \end{pmatrix}$*

(ii) *A conexão de Levi-Civita da superfície é determinada por:*

$$\nabla_T T = -2\tau \cos \theta JT, \quad \nabla_{JT} T = \lambda \cos \theta JT,$$

$$\nabla_T JT = 2\tau \cos \theta T, \quad \nabla_{JT} JT = -\lambda \cos \theta T$$

(iii) *A curvatura Gaussiana da superfície é determinada por:*

$$K = (\kappa - 4\tau^2) \cos^2 \theta$$

(iv) *A função  $\lambda$  satisfaz a seguinte EDP:*

$$T(\lambda) + \lambda^2 \cos \theta + \kappa \cos \theta \sin^2 \theta + 4\tau^2 \cos^3 \theta = 0$$

De onde observamos que a curva integral do campo vetorial  $T$  é uma curva de curvatura  $-2\tau \cot \theta$  e torção  $\tau$  constantes. Além disso, a curva integral do campo  $JT$  é uma curva horizontal (Definição 2.14), e que por meio destas duas curvas se constrói uma superfície com ângulo constante.

Também em (17) é mostrado que quando o ângulo é nulo a distribuição gerada pelos campos vetoriais  $E_1$  e  $E_2$  não é integrável, e quando o ângulo for  $\frac{\pi}{2}$  obtém-se um cilindro de Hopf (Definição 2.10). Portanto, a análise feita a seguir será para o ângulo em  $(0, \frac{\pi}{2})$ .

No Capítulo 1, introduzimos o grupo especial linear  $SL(2, \mathbb{R})$  esboçando sua geometria, e fixamos notações, nos restringindo ao estritamente necessário ao prosseguimento da leitura. Um tratamento mais extenso sobre este espaço pode ser encontrado em (20). Mostraremos explicitamente uma curva de curvatura  $\kappa = \cot \theta$  e torção  $\tau = -\frac{1}{2}$  satisfazendo certas propriedades (Proposição 3.24). Em seguida, mostraremos a existência e unicidade da curva horizontal (Proposição 3.26). Estas curvas correspondem as curvas integrais dos campos vetoriais  $T$  e  $JT$ , respectivamente.

A partir da curva horizontal emana um feixe de curvas satisfazendo as condições da Proposição 3.24, gerando uma superfície com ângulo constante. O estudo desta superfície irá depender de uma constante  $B = \cos(2\theta)$ ,  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ , que pode ser negativo, nulo ou positivo.

**Teorema 1.2.** *Uma superfície em  $SL(2, \mathbb{R})$  que faz ângulo constante,  $\theta \in (0, \pi/2)$  com a vertical  $E_3$  é da forma*

a) *Se  $B = 0$ ,*

$$F(s, u) = \psi_1(u) + s\psi_2(u),$$

onde  $\psi_1(u)$  e  $\psi_2(u)$  são vetores em  $\mathbb{R}_2^4$  dependendo apenas de  $u$ , satisfazendo as condições dadas no [Corolário 3.23](#) e a equação diferencial

$$\psi_1' = \frac{\sin C}{2} J_2 \psi_1 - \frac{\cos C}{2} J_3 \psi_1$$

b) Se  $B > 0$ ,

$$F(s, u) = \cos(\varphi_1 s) \psi_1(u) + \sin(\varphi_1 s) \psi_2(u) + \cos(\varphi_2 s) \psi_3(u) + \sin(\varphi_2 s) \psi_4(u),$$

onde

$$\varphi_1 = \frac{1}{2 \sin \theta} (B - \sqrt{B} \cos \theta) \quad e \quad \varphi_2 = \frac{1}{2 \sin \theta} (B + \sqrt{B} \cos \theta)$$

são constantes, e  $\psi_i(u)$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  são vetores em  $\mathbb{R}_2^4$ , dependendo apenas de  $u$ , satisfazendo as condições dadas no [Corolário 3.23](#) e a equação diferencial

$$(\psi_1 + \psi_3)' = \frac{\sin C}{2} J_2 (\psi_1 + \psi_3) - \frac{\cos C}{2} J_3 (\psi_1 + \psi_3)$$

c) Se  $B < 0$ ,

$$F(s, u) = \cos\left(\frac{\tilde{b}}{2} s\right) [\cosh(\delta s) \psi_1(u) + \sinh(\delta s) \psi_3(u)] + \sin\left(\frac{\tilde{b}}{2} s\right) [\cosh(\delta s) \psi_2(u) + \sinh(\delta s) \psi_4(u)],$$

onde  $\delta = \frac{\sqrt{-B} \cot \theta}{2}$  e  $\tilde{b} = \frac{B}{\sin \theta}$  são constantes, e  $\psi_i(u)$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  são vetores em  $\mathbb{R}_2^4$ , dependendo apenas de  $u$ , satisfazendo as condições dadas no [Corolário 3.23](#) e a equação diferencial

$$\psi_1' = \frac{\sin C}{2} J_2 \psi_1 - \frac{\cos C}{2} J_3 \psi_1$$

onde as matrizes  $J_2$  e  $J_3$  são dadas por [\(3.18\)](#).

Encerramos com uma análise da curvatura média destas superfícies, donde concluímos as que são não completas e sobre quais condições algumas delas são inextensíveis. E, dentre as completas, quais são os subgrupos a um parâmetro do grupo de isometrias que as deixam invariantes:

**Corolário 1.3.** *Uma superfície completa em  $SL(2, \mathbb{R})$  que faz ângulo constante,  $\theta \in (0, \pi/2)$  com a vertical  $E_3$  é invariante pelo seguinte subgrupo a um parâmetro:*

a)  $\phi_t = \zeta_{c_3 t} \circ \lambda_{c_2 t}$ , se

i)  $B = 0$  com  $C$  constante satisfazendo a equação

$$\begin{aligned} 0 &= c_2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2) + 2c_3(k_2 k_3 - k_1 k_4) \\ &\quad - 2[c_2(k_1 k_3 - k_2 k_4) + c_3(k_1 k_2 - k_3 k_4)] \cos C \\ &\quad + [2c_2(k_2 k_3 + k_1 k_4) + c_3(-k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - k_4^2)] \sin C \end{aligned}$$

onde  $c_2$  e  $c_3$  constantes arbitrárias;

ii)  $B < 0$  com  $C$  constante satisfazendo a equação

$$2(k_1k_2 + k_3k_4) \cos C + (k_1^2 - k_2^2 + k_3^2 - k_4^2) \sin C = 0,$$

e  $c_2, c_3$  constantes satisfazendo  $c_2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2) = 2c_3(k_1k_4 - k_2k_3)$ ;

b)  $\phi_t = \xi_{c_4t} \circ \zeta_{c_3t} \circ \lambda_{c_2t}$ , se  $B = 0$ ,  $C = \pi + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  e  $c_2, c_3$  constantes tais que

$$c_2[(k_1 + k_3)^2 + (k_2 - k_4)^2] + 2c_3(k_1 + k_3)(k_2 - k_4) = 0,$$

e  $c_4$  uma constante arbitrária;

c)  $\phi_t = \zeta_{c_3t}$ , se  $B = 0$ ,  $C$  constante satisfazendo

$$(k_1 - k_3) \cos\left(\frac{C}{2}\right) + (k_4 - k_2) \sin\left(\frac{C}{2}\right) = 0,$$

com  $c_3$  uma constante arbitrária.

Os  $k_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  são as constantes de integração dadas na [Proposição 3.43](#) e  $\lambda_t, \zeta_t, \xi_t$  são dados nos [Exemplo 3.12](#), [Exemplo 3.14](#) e [Exemplo 3.15](#), respectivamente.

Nos próximos dois Capítulos são feitas a análise das superfícies com ângulo constante nas Esferas de Berger e em  $Nil_3$ , respectivamente. Começamos apresentando os espaços e exibindo a existência da curva com curvatura  $\kappa$  e torção  $\tau$  constantes ([Proposição 4.11](#) e [Proposição 5.9](#)) e da curva horizontal ([Proposição 4.12](#) e [Proposição 5.10](#)), respectivamente.

A partir destas duas curvas construímos uma superfície, em seguida é mostrado que esta superfície possui ângulo constante e damos uma equação explícita para ela dependendo de uma constante estritamente positiva  $B$ :

**Teorema 1.4.** *Uma superfície em  $\mathbb{S}_\tau^3$  que faz ângulo constante,  $\theta \in (0, \pi/2)$ , com a vertical  $E_3$  é da forma*

$$F(s, u) = \cos(\varphi_1 s) \psi_1(u) + \sin(\varphi_1 s) \psi_2(u) + \cos(\varphi_2 s) \psi_3(u) + \sin(\varphi_2 s) \psi_4(u)$$

onde

$$\varphi_1 = \frac{1}{\tau \sin \theta} (B - \tau \sqrt{B} \cos \theta) \quad e \quad \varphi_2 = \frac{1}{\tau \sin \theta} (B + \tau \sqrt{B} \cos \theta)$$

são constantes, e  $\psi_i(u)$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  são vetores em  $\mathbb{R}^4$ , dependendo apenas de  $u$ , satisfazendo as condições dadas no [Corolário 4.10](#) e a equação diferencial

$$(\psi_1 + \psi_3)' = -\sin C J_3(\psi_1 + \psi_3) - \cos C J_2(\psi_1 + \psi_3).$$

com  $B = \tau^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta$  e,  $J_2$  e  $J_3$  dadas por [\(4.6\)](#).

**Teorema 1.5.** *Uma superfície em  $Nil_3$  que faz ângulo constante,  $\theta \in (0, \pi/2)$  com a vertical  $E_3$  é da forma*

$$F(s, u) = \left( -\tan \theta \sin \omega + \varphi_1(u), \tan \theta \cos \omega + \varphi_2(u), \right. \\ \left. \frac{\sin \theta}{2}s + \frac{\tan \theta}{2}(\varphi_1(u) \cos \omega + \varphi_2(u) \sin \omega) + \varphi_3(u) \right),$$

onde

$$\begin{aligned} \varphi_1(u) &= -\int \sin C(u) du + \tan \theta \sin C(u) + k_1, \\ \varphi_2(u) &= \int \cos C(u) du - \tan \theta \cos C(u) + k_2, \\ \varphi_3'(u) &= \frac{1}{2}(\varphi_1(u)\varphi_2'(u) - \varphi_1'(u)\varphi_2(u) - C'(u) \tan^2 \theta), \end{aligned}$$

com  $\omega = -Bs + C(u)$ , onde  $B = \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta}$ .

Com o estudo da curvatura média, encerramos estes capítulos mostrando que tais superfícies são não completas e, quando o domínio da curva horizontal for  $\mathbb{R}$ , elas são inextensíveis.

## 2 MOTIVAÇÃO

### 2.1 Curva-com-Triedro

**Definição 2.1.** Uma *curva-com-triedro* é uma curva p.c.a.  $\alpha$  munida de um triedro ortonormal positivo  $\{t, n, b\}$  ao longo de  $\alpha$  tal que  $t = \alpha'$ .

Sejam  $\kappa = \kappa(s)$  e  $\tau = \tau(s)$  duas funções definidas em um intervalo.

**Definição 2.2.** Diremos que a curva-com-triedro  $(\alpha, \{t, n, b\})$  tem *curvatura*  $\kappa$  e *torção*  $\tau$  se

$$\begin{cases} \nabla_t t = \kappa n \\ \nabla_t n = -\kappa t - \tau b \\ \nabla_t b = \tau n \end{cases} \quad (2.1)$$

Diremos que  $\alpha$  tem *curvatura*  $\kappa$  e *torção*  $\tau$  se existe um triedro ao longo de  $\alpha$  tal que a curva-com-triedro  $(\alpha, \{t, n, b\})$  tem curvatura  $\kappa$  e torção  $\tau$ .

**Proposição 2.3.** Sejam  $M^3$  uma variedade Riemanniana completa,  $\kappa = \kappa(s)$  e  $\tau = \tau(s)$  funções definidas num intervalo. Sejam  $p \in M^3$  dado e  $\{t_0, n_0, b_0\}$  um triedro ortonormal positivo em  $T_p M^3$ . Então existe uma única curva-com-triedro  $(\alpha, \{t, n, b\})$  com curvatura  $\kappa$  e torção  $\tau$  satisfazendo as condições iniciais  $\alpha(0) = p$ ,  $t(0) = t_0$ ,  $n(0) = n_0$  e  $b(0) = b_0$ .

*Ideia da Demonstração:* Seja  $(x, y, z)$  um sistema de coordenadas em  $M^3$ . Seja  $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))$ ,  $s \in (\bar{a}, \bar{b})$ , uma curva com triedro  $\{t, n, b\}$ . Conhecendo a conexão Riemanniana de  $M^3$ , as equações (2.1) juntamente com a equação  $\alpha' = t$  nos dá um sistema de EDO's de primeira ordem:

$$\begin{cases} \alpha' = t \\ \nabla_t t = \kappa n \\ \nabla_t n = -\kappa t - \tau b \\ \nabla_t b = \tau n \end{cases} \quad (2.2)$$

Então  $\{t, n, b, x, y, z\}$  é solução desse sistema de EDO's com as condições iniciais dadas.

Pelo Teorema de existência e unicidade de soluções de sistemas de EDO's, temos solução única para o sistema acima em algum intervalo. Um argumento semelhante ao do caso de curvas em  $\mathbb{R}^3$  mostra que o triedro solução é ortonormal.

Seja  $(A, B)$  o intervalo de definição das funções  $\kappa$  e  $\tau$ , e seja  $(\bar{a}, \bar{b})$  o intervalo maximal de definição da solução do sistema (2.2).

Mostremos que  $\bar{b} = B$ . Suponha, por contradição, que  $\bar{b} < B$ . Considere a aplicação do intervalo  $(\bar{a}, \bar{b})$  no fibrado dos referenciais ortonormais

$$s \mapsto (\alpha(s), t(s), b(s), n(s)).$$

Segue de (2.2), uma vez que  $\kappa$  e  $\tau$  são limitadas em  $[0, \bar{b}]$ , que a derivada dessa aplicação é limitada. Como  $M^3$  é completa, essa aplicação tem extensão contínua a  $\bar{b}$ . Isto significa que  $\alpha(s)$  tende a um ponto  $q \in M^3$ , enquanto que  $\{t(s), n(s), b(s)\}$  tende a um triedro ortonormal tangente em  $q$ . Aplica-se o resultado de existência local com essas novas condições iniciais e estende-se a curva original à  $B$ . Analogamente, mostra-se que  $\alpha$  estende-se à  $A$ .

Obtido  $\{t, n, b, x, y, z\}$ , a existência da curva  $\alpha$  é imediata.

□

## 2.2 Os Espaços de Bianchi-Cartan-Vranceanu

Muitos estudos são feitos nos espaços homogêneos  $\mathbb{E}^3$ ,  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ,  $Nil_3$  e  $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ . Todos estes espaços pertencem a uma grande família de espaços chamada Espaços de Bianchi-Cartan-Vranceanu.

**Definição 2.4.** Sejam  $\kappa$  e  $\tau$  números reais, com  $\tau \geq 0$ . Os Espaços de Bianchi-Cartan-Vranceanu (espaços BCV)  $\widetilde{M}^3(\kappa, \tau)$  são definidos como o conjunto

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 1 + \frac{\kappa}{4}(x^2 + y^2) > 0\}$$

equipado com as métricas

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{(1 + \frac{\kappa}{4}(x^2 + y^2))^2} + \left( dz + \tau \frac{ydx - xdy}{1 + \frac{\kappa}{4}(x^2 + y^2)} \right)^2.$$

Foi Cartan (2) quem obteve essa família de espaços, com  $\kappa \neq 4\tau^2$ , como resultado da classificação das variedades Riemannianas tridimensionais com grupo de isometrias tetradimensional. Estes espaços também aparecem nos trabalhos de Bianchi (3, 4, 5) e Vranceanu (6). A classificação completa dos espaços BCV é a seguinte:

- se  $\kappa = \tau = 0$ , então  $\widetilde{M}^3(\kappa, \tau) \cong \mathbb{E}^3$ ,
- se  $\kappa = 4\tau^2 \neq 0$ , então  $\widetilde{M}^3(\kappa, \tau) \cong \mathbb{S}^3(\kappa/4) - \{\infty\}$ ,
- se  $\kappa > 0$  e  $\tau = 0$ , então  $\widetilde{M}^3(\kappa, \tau) \cong (\mathbb{S}^2(\kappa) - \{\infty\}) \times \mathbb{R}$ ,
- se  $\kappa < 0$  e  $\tau = 0$ , então  $\widetilde{M}^3(\kappa, \tau) \cong \mathbb{H}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ ,

- se  $\kappa > 0$  e  $\tau \neq 0$ , então  $\widetilde{M}^3(\kappa, \tau) \cong SU(2) - \{\infty\}$ ,
- se  $\kappa < 0$  e  $\tau \neq 0$ , então  $\widetilde{M}^3(\kappa, \tau) \cong \widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ ,
- se  $\kappa = 0$  e  $\tau \neq 0$ , então  $\widetilde{M}^3(\kappa, \tau) \cong Nil_3$ .

Os grupos de Lie nesta classificação são equipados com métrica invariante à esquerda. Esta classificação implica que  $\widetilde{M}^3(\kappa, \tau)$  tem curvatura seccional constante se e somente se  $\kappa = 4\tau^2$ . A curvatura é então igual a  $\frac{\kappa}{4} = \tau^2 \geq 0$ .

**Lema 2.5.** *Os seguintes campos de vetores formam um referencial ortonormal em  $\widetilde{M}^3(\kappa, \tau)$ :*

$$e_1 = \left(1 + \frac{\kappa}{4}(x^2 + y^2)\right)\partial_x - \tau y\partial_z, \quad e_2 = \left(1 + \frac{\kappa}{4}(x^2 + y^2)\right)\partial_y + \tau x\partial_z, \quad e_3 = \partial_z.$$

A geometria dos espaços BCV pode ser descrita em termos deste referencial:

$$i) [e_1, e_2] = -\frac{\kappa}{2}ye_1 + \frac{\kappa}{2}xe_2 + 2\tau e_3, \quad [e_2, e_3] = [e_3, e_1] = 0.$$

ii) A conexão de Levi-Civita  $\widetilde{\nabla}$  de  $\widetilde{M}^3(\kappa, \tau)$  é dada por:

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_{e_1}e_1 &= \frac{\kappa}{2}ye_2, & \widetilde{\nabla}_{e_1}e_2 &= -\frac{\kappa}{2}ye_1 + \tau e_3, & \widetilde{\nabla}_{e_1}e_3 &= -\tau e_2, \\ \widetilde{\nabla}_{e_2}e_1 &= -\frac{\kappa}{2}xe_2 - \tau e_3, & \widetilde{\nabla}_{e_2}e_2 &= \frac{\kappa}{2}xe_1, & \widetilde{\nabla}_{e_2}e_3 &= \tau e_1, \\ \widetilde{\nabla}_{e_3}e_1 &= -\tau e_2, & \widetilde{\nabla}_{e_3}e_2 &= \tau e_1, & \widetilde{\nabla}_{e_3}e_3 &= 0. \end{aligned}$$

iii) O tensor curvatura de Riemann  $\widetilde{R}$  de  $\widetilde{M}^3(\kappa, \tau)$  é determinado por:

$$\begin{aligned} \widetilde{R}(X, Y)Z &= (\kappa - 3\tau^2)[\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y] - (\kappa - 4\tau^2)[\langle Y, e_3 \rangle \langle Z, e_3 \rangle X \\ &\quad - \langle X, e_3 \rangle \langle Z, e_3 \rangle Y + \langle X, e_3 \rangle \langle Y, Z \rangle e_3 - \langle Y, e_3 \rangle \langle X, Z \rangle e_3], \end{aligned}$$

para  $p \in \widetilde{M}^3(\kappa, \tau)$  e  $X, Y, Z \in T_p\widetilde{M}^3(\kappa, \tau)$ .

**Definição 2.6.** Uma aplicação diferenciável entre duas variedades diferenciáveis  $f : \overline{M}^{n+k} \rightarrow M^n$  é uma *submersão* se  $f$  é sobrejetiva, e para todo  $\bar{p} \in \overline{M}$ ,  $df_{\bar{p}} : T_{\bar{p}}\overline{M} \rightarrow T_{f(\bar{p})}M$  tem posto  $n$ . Neste caso,  $\forall p \in M$ , a fibra  $f^{-1}(p) = F(p)$  é uma subvariedade de  $\overline{M}$ , e um vetor tangente de  $\overline{M}$ , tangente a algum  $F(p)$ ,  $p \in M$ , é chamado um *vetor vertical* da submersão. Se, além disso,  $\overline{M}$  e  $M$  têm métricas Riemannianas, a submersão  $f$  diz-se *Riemanniana* se,  $\forall p \in \overline{M}$ ,  $df_p : T_p\overline{M} \rightarrow T_{f(p)}M$  preserva comprimentos de vetores ortogonais a  $F(p)$ .

Seja  $\widetilde{M}^2(\kappa)$  a superfície Riemanniana de curvatura Gaussiana constante igual a  $\kappa$

$$\widetilde{M}^2(\kappa) = \left( \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 + \frac{\kappa}{4}(x^2 + y^2) > 0\}, \frac{dx^2 + dy^2}{(1 + \frac{\kappa}{4}(x^2 + y^2))^2} \right).$$

Considere a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} \pi &: \widetilde{M}^3(\kappa, \tau) \rightarrow \widetilde{M}^2(\kappa) \\ (x, y, z) &\mapsto \pi(x, y, z) = (x, y) \end{aligned}$$

**Lema 2.7.**  $\pi$  é uma submersão Riemanniana e o campo vetorial  $e_3$  é um vetor vertical.

*Demonstração.* Note que  $\pi$  é sobrejetiva e que  $d\pi_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\forall p \in \widetilde{M}^3(\kappa, \tau)$ , tem posto 2. Logo,  $\pi$  é submersão.

Fixe  $(x_0, y_0) \in \widetilde{M}^2(\kappa)$ . A fibra  $\pi^{-1}(x_0, y_0)$  é unidimensional, dada por

$$\pi^{-1}(x_0, y_0) = \{(x_0, y_0, z) | z \in \mathbb{R}\}.$$

A direção determinada pela fibra é a direção vertical  $\partial_z = e_3$ . Assim, um vetor  $v \in T_p \widetilde{M}^3(\kappa, \tau)$  é ortogonal a fibra se  $\langle v, e_3 \rangle = 0$ . Fixado  $p = (x_0, y_0, z_0) \in \widetilde{M}^3(\kappa, \tau)$ , seja  $v = a\partial_x + b\partial_y + c\partial_z \in T_p \widetilde{M}^3(\kappa, \tau)$  um vetor ortogonal a fibra. Pelo Lema 2.5, temos que

$$v = \frac{a}{1 + \frac{\kappa}{4}(x_0^2 + y_0^2)} e_1 + \frac{b}{1 + \frac{\kappa}{4}(x_0^2 + y_0^2)} e_2.$$

Portanto,  $\|v\| = \frac{a^2 + b^2}{(1 + \frac{\kappa}{4}(x_0^2 + y_0^2))^2}$ . Por outro lado,  $d\pi_p(v) = a\partial_x + b\partial_y$ , daí  $\|d\pi_p(v)\| = \frac{a^2 + b^2}{(1 + \frac{\kappa}{4}(x_0^2 + y_0^2))^2}$ . Logo,  $\|v\| = \|d\pi_p(v)\|$ .  $\square$

**Definição 2.8.** Dizemos que a direção vertical determinada pelo campo vetorial  $e_3$  é a *direção distinguida* do espaço  $\widetilde{M}^3(\kappa, \tau)$ .

**Observação 2.9.** a) O campo vetorial  $e_3$  é um campo de Killing unitário do espaço  $\widetilde{M}^3(\kappa, \tau)$  pois satisfaz a equação  $\langle \widetilde{\nabla}_X e_3, X \rangle = 0$ ,  $\forall p \in \widetilde{M}^3(\kappa, \tau)$  e  $\forall X \in T_p \widetilde{M}^3(\kappa, \tau)$ .

b) As fibras são geodésicas pois  $\widetilde{\nabla}_{e_3} e_3 = 0$ .

c) Existe uma família a um parâmetro de translações ao longo das fibras gerada pela direção vertical  $e_3$ . De fato, a curva integral do campo  $e_3$  é dada por  $\alpha(t) = (x_0, y_0, t + z_0)$ . Considere a seguinte aplicação  $f_t(x, y, z) = (x, y, t + z)$ . Logo,  $f_t$  é a família desejada.

d) Para as variedades homogêneas com grupo de isometrias tetradimensional, isto é,  $\kappa \neq 4\tau^2$ , a constante  $\tau$ , denominada *curvatura da fibra*, é o número real que satisfaz  $\widetilde{\nabla}_X e_3 = \tau X \times e_3$ ,  $p \in \widetilde{M}^3(\kappa, \tau)$  e  $X \in T_p \widetilde{M}^3(\kappa, \tau)$ .

**Definição 2.10.** A aplicação  $\pi$  é chamada *Fibração de Hopf*. A imagem inversa de uma curva em  $\widetilde{M}^2(\kappa)$  por  $\pi$  é chamada *Cilindro de Hopf* e uma *folha* da fibração de Hopf é denotada como a superfície que é ortogonal, em todos os pontos, às fibras de  $\pi$ .

No caso em que  $\kappa = 4\tau^2 \neq 0$ ,  $\pi$  coincide localmente com a clássica fibração de Hopf  $\pi : \mathbb{S}^3(\kappa/4) \rightarrow \mathbb{S}^2(\kappa)$ . Pelo Teorema de Frobenius e pelo Lema 2.5 i), as folhas de  $\pi$  só existem se  $\tau = 0$ . De fato, as folhas são as superfícies que são ortogonais às fibras, ou seja, os planos tangentes às superfícies são ortogonais às fibras, isto é, o vetor normal aos planos tangentes são paralelos às fibras. Portanto,  $e_1$  e  $e_2$  são tangentes, sendo  $e_1$  e  $e_2$  uma distribuição integrável, então  $[e_1, e_2]$  também é tangente, o que não ocorre se  $\tau \neq 0$ .

### 2.2.1 Superfícies com Ângulo Constante

A partir de agora o estudo será voltado para uma análise local das superfícies com ângulo constante isometricamente imersas em algum espaço BCV.

Seja  $F : \tilde{S} \rightarrow \tilde{M}^3(\kappa, \tau)$  uma imersão isométrica de uma superfície orientada em algum espaço BCV. Denotamos por  $N$  o campo vetorial normal, por  $S$  o operador de forma associado,  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$  o ângulo entre o campo vetorial normal  $N$  e a direção vertical  $e_3$ , e por  $T$  a projeção do campo vetorial  $e_3$  sobre o plano tangente a  $\tilde{S}$ , isto é,  $T = e_3 - \cos \theta N$ . Podemos supor que, para uma função  $\phi$  definida localmente em  $\tilde{S}$ , temos

$$\begin{aligned} N &= -\sin \theta \cos \phi e_1 - \sin \theta \sin \phi e_2 + \cos \theta e_3, \\ T &= \sin \theta (\cos \theta \cos \phi e_1 + \cos \theta \sin \phi e_2 + \sin \theta e_3), \\ JT &= \sin \theta (-\sin \phi e_1 + \cos \phi e_2), \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde  $JX = N \times X$  é a rotação de noventa graus no sentido anti-horário.

Sejam  $p \in \tilde{M}^3(\kappa, \tau)$  e  $X, Y \in T_p \tilde{M}^3(\kappa, \tau)$ , as equações de compatibilidade são, ver (13):

$$\nabla_X SY - \nabla_Y SX - S[X, Y] = (\kappa - 4\tau^2) \cos \theta [\langle Y, T \rangle X - \langle X, T \rangle Y], \quad (2.4)$$

$$K = \det S + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2) \cos^2 \theta, \quad (2.5)$$

$$\nabla_X T = \cos \theta (SX - \tau JX), \quad (2.6)$$

$$X(\cos \theta) = -\langle SX - \tau JX, T \rangle. \quad (2.7)$$

**Definição 2.11.** Uma *superfície com ângulo constante* é uma superfície isometricamente imersa em  $\tilde{M}^3(\kappa, \tau)$ , orientada, onde o campo vetorial normal forma ângulo constante com uma direção fixada. A direção fixada é escolhida em cada caso como a direção distinguida do espaço  $\tilde{M}^3(\kappa, \tau)$ .

Para uma superfície com ângulo constante, temos:

- $\theta = 0$  não pode ocorrer pois a distribuição gerada por  $e_1$  e  $e_2$  não é integrável.
- Se  $\theta = \frac{\pi}{2}$  temos que a superfície é parte aberta de um cilindro de Hopf  $= \pi^{-1}\{(x(t), y(t)) | t \in (a, b)\} = \{(x(t), y(t), z) | t \in (a, b), z \in \mathbb{R}\}$ .

**Lema 2.12.** *Seja  $\tilde{S}$  uma superfície com ângulo constante em algum espaço BCV. Então:*

$$(i) \text{ O operador de forma com respeito a base } \{T, JT\} \text{ é } S = \begin{pmatrix} 0 & -\tau \\ -\tau & \lambda \end{pmatrix}$$

(ii) A conexão de Levi-Civita da superfície é determinada por:

$$\nabla_T T = -2\tau \cos \theta JT, \quad \nabla_{JT} T = \lambda \cos \theta JT,$$

$$\nabla_T JT = 2\tau \cos \theta T, \quad \nabla_{JT} JT = -\lambda \cos \theta T.$$

(iii) A curvatura Gaussiana da superfície é constante dada por:

$$K = (\kappa - 4\tau^2) \cos^2 \theta$$

(iv) A função  $\lambda$  satisfaz a seguinte EDP:

$$T(\lambda) + \lambda^2 \cos \theta + \kappa \cos \theta \sin^2 \theta + 4\tau^2 \cos^3 \theta = 0$$

*Demonstração.* i) Seja  $ST = fT + gJT$ . Daí  $f\|T\|^2 = \langle ST, T \rangle$  e  $g\|T\|^2 = \langle ST, JT \rangle$ .

Fazendo  $X = T$  em (2.7):  $0 = -\langle ST - \tau JT, T \rangle = \langle ST, T \rangle \Rightarrow f = 0$ .

Fazendo  $X = JT$  em (2.7):

$$0 = -\langle S(JT) - \tau J(JT), T \rangle = -\langle S(JT), T \rangle + \tau \langle -T, T \rangle = -\langle JT, ST \rangle - \tau \|T\|^2 \Rightarrow g = -\tau.$$

Seja  $S(JT) = hT + \lambda JT$ . Daí

$$h\|T\|^2 = \langle S(JT), T \rangle = \langle JT, ST \rangle = -\tau \|T\|^2 \Rightarrow h = -\tau.$$

$$\lambda = \frac{\langle S(JT), JT \rangle}{\|T\|^2}.$$

ii) Fazendo  $X = T$  em (2.6):

$$\nabla_T T = \cos \theta (ST - \tau JT) = \cos \theta (-\tau JT - \tau JT) = -2\tau \cos \theta JT.$$

Fazendo  $X = JT$  em (2.6):

$$\nabla_{JT} T = \cos \theta (S(JT) - \tau J(JT)) = \cos \theta (-\tau T + \lambda JT + \tau T) = \lambda \cos \theta JT.$$

Seja  $\nabla_T JT = fT + gJT$ . Como  $\langle JT, JT \rangle = \sin^2 \theta$ , então

$$\langle \nabla_{JT} JT, JT \rangle = 0 \Rightarrow g = 0.$$

Como  $\langle T, JT \rangle = 0$ , então

$$\langle \nabla_T JT, T \rangle = -\langle \nabla_T T, JT \rangle = 2\tau \cos \theta \|T\|^2 \Rightarrow f = 2\tau \cos \theta.$$

Analogamente se determina  $\nabla_{JT} JT = -\lambda \cos \theta T$ .

iii) Segue diretamente de (2.5).

iv) Segue de (2.4) com  $X = T$  e  $Y = JT$ , e usando os itens anteriores.  $\square$

Estendendo as conexões dadas pelo Lema 2.12 item ii) para a base  $\{T, JT, N\}$  do espaço, obtemos:

$$\nabla_T T = -2\tau \cos \theta JT, \quad \nabla_{JT} T = \lambda \cos \theta JT - \tau \sin^2 \theta N,$$

$$\nabla_T JT = 2\tau \cos \theta T - \tau \sin^2 \theta N, \quad \nabla_{JT} JT = -\lambda \cos \theta T + \lambda \sin^2 \theta N.$$

**Proposição 2.13.** A curva integral do campo  $\frac{T}{\|T\|}$  é p.c.a. com curvatura constante  $-2\tau \cot \theta$  e torção constante  $\tau$ .

*Demonstração.* Sejam  $t = \frac{T}{\|T\|}$ ,  $n = \frac{JT}{\|T\|}$  e  $b = t \times n = N$ . Assim,

$$\nabla_t t = \frac{1}{\|T\|^2} \nabla_T T = \frac{-2\tau \cos \theta JT}{\|T\|^2} = -2\tau \cot \theta n,$$

$$\nabla_t n = \frac{1}{\|T\|^2} \nabla_T JT = \frac{2\tau \cos \theta T - \tau \sin^2 \theta N}{\|T\|^2} = 2\tau \cot \theta t - \tau b$$

e

$$\nabla_t b = \nabla_t t \times n + t \times \nabla_t n = t \times (2\tau \cot \theta t - \tau b) = \tau n.$$

Ou seja,

$$\begin{cases} \nabla_t t = -2\tau \cot \theta n \\ \nabla_t n = 2\tau \cot \theta t - \tau b \\ \nabla_t b = \tau n \end{cases}$$

□

**Definição 2.14.** Uma curva  $\alpha(t)$  é dita *horizontal* se  $\langle \alpha'(t), e_3 \rangle = 0$ ,  $\forall t$ .

**Proposição 2.15.** A curva integral do campo  $\frac{JT}{\|T\|}$  é horizontal, p.c.a., com curvatura  $\frac{\lambda}{\|T\|}$  e torção constante  $-\tau$ .

*Demonstração.* Sejam  $t = \frac{JT}{\|T\|}$ ,  $n = \|T\|(-\cot \theta \frac{T}{\|T\|} + N)$  e  $b = t \times n = T + \cos \theta N = e_3$ . Note que, usando as equações (2.3) o referencial  $\{t, n, b\}$  é ortonormal. Assim,

$$\begin{aligned} \nabla_t t &= \frac{1}{\|T\|^2} \nabla_{JT} JT = \frac{-\lambda \cos \theta T + \lambda \sin^2 \theta N}{\|T\|^2} = \lambda(-\cot \theta \frac{T}{\|T\|} + N) \\ &= \frac{\lambda}{\|T\|} \|T\|(-\cot \theta \frac{T}{\|T\|} + N) = \frac{\lambda}{\|T\|} n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_t n &= \frac{\|T\|}{\|T\|} \nabla_{JT}(-\cot \theta \frac{T}{\|T\|} + N) = -\frac{\cot \theta}{\|T\|} \nabla_{JT} T + \nabla_{JT} N \\ &= -\frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} (\lambda \cos \theta JT - \tau \sin^2 \theta N) - (-\tau T + \lambda JT) = \frac{\lambda}{\|T\|} t + \tau b \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \nabla_t b &= \frac{1}{\|T\|} \nabla_{JT}(T + \cos \theta N) = \frac{1}{\|T\|} [\lambda \cos \theta JT - \tau \|T\|^2 N - \cos \theta (-\tau T + \lambda JT)] \\ &= -\tau \|T\| (N - \frac{\cos \theta}{\|T\|^2} T) = -\tau n. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{cases} \nabla_t t = \frac{\lambda}{\|T\|} n \\ \nabla_t n = -\frac{\lambda}{\|T\|} t + \tau b \\ \nabla_t b = -\tau n \end{cases}$$

□

**Pergunta:** Uma curva horizontal e uma curva com curvatura constante  $-2\tau \cot \theta$  e torção constante  $\tau$  geram uma superfície com ângulo constante?

Nos capítulos seguintes respondemos esta pergunta para os espaços  $SL(2, \mathbb{R})$ , as Esferas de Berger e  $Nil_3$ , respectivamente, com  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Também damos condições para uma superfície com ângulo constante ser globalmente definida por estas duas curvas.

# 3 SUPERFÍCIES COM ÂNGULO CONSTANTE NO GRUPO ESPECIAL LINEAR

Considere o grupo especial linear definido como o grupo das matrizes  $2 \times 2$  com entradas reais e determinante 1, com a multiplicação matricial,

$$SL(2, \mathbb{R}) = \{m \in GL(2, \mathbb{R}) \mid \det m = 1\}.$$

$SL(2, \mathbb{R})$  pertence a família dos Espaços  $BCV$  onde  $\kappa = -1$  e  $\tau = 1$ . Como grupo,  $SL(2, \mathbb{R})$  é um grupo de Lie topologicamente conexo, não compacto, não abeliano e não é simplesmente conexo pois seu grupo fundamental é isomorfo ao grupo dos inteiros. Indicamos ao leitor as referências (20, 21, 22).

Este capítulo é voltado para a compreensão da geometria Riemanniana de  $SL(2, \mathbb{R})$ . O espaço  $SL(2, \mathbb{R})$  será abordado por meio do grupo linear projetivo  $PSL(2, \mathbb{R}) \approx SL(2, \mathbb{R})/\{\pm I_2\}$ , onde  $I_2$  é a matriz identidade  $2 \times 2$ .  $PSL(2, \mathbb{R})$  é isomorfo ao grupo das transformações de Möbius de  $\mathbb{C}$  em  $\mathbb{C}$  dadas por

$$\left\{ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\}.$$

Também serão usadas as notações usuais para o espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^2$  e para as partes real e imaginária de um número complexo  $z = u + iv \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Re}(z) = u$  e  $\text{Im}(z) = v$ .

Em seguida daremos uma descrição geométrica global completa para as superfícies que fazem ângulo constante com o campo vetorial distinguido  $E_3$ . Esta descrição irá depender de uma constante  $B = \cos(2\theta)$ ,  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ , que pode ser negativa, nula ou positiva. Finalmente, através de uma análise sobre a curvatura média, diferenciamos, em geral, quais destas superfícies são completas e quais não são e, dentre as completas, obtemos sobre quais subgrupos a um parâmetro elas são invariantes. Encerramos com uma análise da inextensibilidade de algumas das superfícies não completas.

## 3.1 Geometria Riemanniana de $SL(2, \mathbb{R})$

### 3.1.1 Introdução à Geometria de $SL(2, \mathbb{R})$

Considere o espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^2$  no modelo do disco

$$\mathbb{H}^2 = \left( \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}, g = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2} \right).$$

As isometrias de  $\mathbb{H}^2$  que preservam orientação são dadas por

$$F_{\alpha,\phi}(z) = e^{i\phi} \frac{\alpha - z}{\bar{\alpha}z - 1}, \quad \phi \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\}.$$

Através da identificação entre as transformações de Möbius e  $PSL(2, \mathbb{R})$ , dada por:

$$\frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}, \quad |a|^2 - |b|^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{R}),$$

onde

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix},$$

temos uma identificação entre as isometrias  $F_{\alpha,\phi}$  e a classe da matriz  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{R})$ , dada por

$$F_{\alpha,\phi}(z) = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}, \quad \text{com } a = \frac{-e^{i\phi/2}}{\sqrt{1 - |\alpha|^2}} \text{ e } b = \frac{\alpha e^{i\phi/2}}{\sqrt{1 - |\alpha|^2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - |\alpha|^2}} \begin{pmatrix} -Re(\omega_1) & Re(\omega_2) \\ Im(\omega_1) & -Im(\omega_2) \end{pmatrix}, \quad \text{com } \omega_1 = (1 + \alpha i)e^{i\phi/2} \text{ e } \omega_2 = (\alpha + i)e^{i\phi/2}.$$

Topologicamente, temos  $M = \widetilde{PSL}(2, \mathbb{R}) = \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . Considere o recobrimento universal

$$\begin{aligned} \pi &: M \longrightarrow PSL(2, \mathbb{R}) \\ (\alpha, \rho) &\longmapsto F_{\alpha, 2\rho} \end{aligned}$$

Para que este recobrimento seja um homomorfismo entre grupos de Lie o produto em  $M$  deve satisfazer

$$(\alpha_1, \rho_1)(\alpha_2, \rho_2) = (\alpha, \rho),$$

onde  $\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 e^{2i\rho_2}}{\alpha_1 \bar{\alpha}_2 + e^{2i\rho_2}}$ ,  $\rho = \rho_1 + \rho_2 + \arg \omega$ , com  $\omega = 1 + \alpha_1 \bar{\alpha}_2 e^{-2i\rho_2}$ .

Pondo  $\alpha_1 = u_1 + iv_1$  e  $\alpha_2 = u_2 + iv_2$ , e através de um longo cálculo temos

$$\begin{aligned} \omega &= [1 + \cos(2\rho_2)(u_1 u_2 + v_1 v_2) + \sin(2\rho_2)(v_1 u_2 - u_1 v_2)] \\ &+ i[\cos(2\rho_2)(v_1 u_2 - u_1 v_2) - \sin(2\rho_2)(u_1 u_2 + v_1 v_2)], \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} Re(\alpha) &= \frac{(u_1 + u_2 \cos(2\rho_2) - v_2 \sin(2\rho_2))(\cos(2\rho_2) + u_1 u_2 + v_1 v_2)}{(\cos(2\rho_2) + u_1 u_2 + v_1 v_2)^2 + (\sin(2\rho_2) + v_1 u_2 - u_1 v_2)^2} \\ &+ \frac{(v_1 + u_2 \sin(2\rho_2) + v_2 \cos(2\rho_2))(\sin(2\rho_2) + v_1 u_2 - u_1 v_2)}{(\cos(2\rho_2) + u_1 u_2 + v_1 v_2)^2 + (\sin(2\rho_2) + v_1 u_2 - u_1 v_2)^2}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned}
Im(\alpha) &= \frac{(u_1 + u_2 \cos(2\rho_2) - v_2 \sin(2\rho_2))(-\sin(2\rho_2) - v_1 u_2 + u_1 v_2)}{(\cos(2\rho_2) + u_1 u_2 + v_1 v_2)^2 + (\sin(2\rho_2) + v_1 u_2 - u_1 v_2)^2} \\
&+ \frac{(v_1 + u_2 \sin(2\rho_2) + v_2 \cos(2\rho_2))(\cos(2\rho_2) + u_1 u_2 + v_1 v_2)}{(\cos(2\rho_2) + u_1 u_2 + v_1 v_2)^2 + (\sin(2\rho_2) + v_1 u_2 - u_1 v_2)^2}, \quad (3.3)
\end{aligned}$$

$\arg \omega$  está bem definido pois  $Re(\omega) > 0$ . Para que  $(0, 0)$  seja o elemento neutro, devemos ter  $-\frac{\pi}{2} < \arg \omega < \frac{\pi}{2}$ .

O recobrimento se fatora através de  $SL(2, \mathbb{R})$  por meio da aplicação:

$$\begin{aligned}
P &: M \longrightarrow SL(2, \mathbb{R}) \\
(\alpha, \rho) &\longmapsto \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad (3.4)
\end{aligned}$$

onde  $A = \frac{Re(\omega_1)}{\sqrt{1-|\alpha|^2}}$ ,  $B = \frac{-Re(\omega_2)}{\sqrt{1-|\alpha|^2}}$ ,  $C = \frac{-Im(\omega_1)}{\sqrt{1-|\alpha|^2}}$  e  $D = \frac{Im(\omega_2)}{\sqrt{1-|\alpha|^2}}$ , com  $\omega_1 = (1 + i\alpha)e^{i\rho}$  e  $\omega_2 = (i + \alpha)e^{i\rho}$ .

Se  $\alpha = 0$  e  $\rho = 0$ , então  $\omega_1 = 1$  e  $\omega_2 = i$ . Logo,  $P(0, 0) = I$ .

Outra possibilidade seria:  $A = \frac{-Re(\omega_1)}{\sqrt{1-|\alpha|^2}}$ ,  $B = \frac{Re(\omega_2)}{\sqrt{1-|\alpha|^2}}$ ,  $C = \frac{Im(\omega_1)}{\sqrt{1-|\alpha|^2}}$  e  $D = \frac{-Im(\omega_2)}{\sqrt{1-|\alpha|^2}}$  com os mesmos  $\omega_1$  e  $\omega_2$ . Assim,  $P(0, 0) = -I$  e  $P(0, \pi) = I$ .

Escrevendo  $\alpha = u + iv$ , temos um sistema de coordenadas globais  $u, v, \rho$  em  $M$ . De (3.4), temos que

$$A = \frac{(1 - v) \cos \rho - u \sin \rho}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}, \quad B = \frac{-u \cos \rho + (1 + v) \sin \rho}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}, \quad (3.5)$$

$$C = \frac{-u \cos \rho - (1 - v) \sin \rho}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}, \quad D = \frac{(1 + v) \cos \rho + u \sin \rho}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}, \quad (3.6)$$

Usando as equações (3.1), (3.2) e (3.3), obtemos a derivada da translação à esquerda na identidade

$$(dL_{(\alpha_0, \rho_0)})_e = \begin{pmatrix} 1 - u_0^2 + v_0^2 & -2u_0v_0 & 2v_0 \\ -2u_0v_0 & 1 + u_0^2 - v_0^2 & -2u_0 \\ v_0 & -u_0 & 1 \end{pmatrix},$$

de onde tiramos os campos invariantes à esquerda:

$$\begin{aligned}
U &= (1 - u^2 + v^2)\partial_u - 2uv\partial_v + v\partial_\rho, \\
V &= -2uv\partial_u + (1 + u^2 - v^2)\partial_v - u\partial_\rho, \\
\wp &= 2v\partial_u - 2u\partial_v + \partial_\rho.
\end{aligned} \quad (3.7)$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\partial_u &= \frac{U - v\wp}{1 - u^2 - v^2}, \\
\partial_v &= \frac{V + u\wp}{1 - u^2 - v^2}, \\
\partial_\rho &= \frac{-2v}{1 - u^2 - v^2}U + \frac{2u}{1 - u^2 - v^2}V + \frac{1 + u^2 + v^2}{1 - u^2 - v^2}\wp.
\end{aligned}$$

Olhemos a Álgebra de Lie em  $SL(2, \mathbb{R})$ :

Para  $\alpha = u$  e  $\rho = 0$ , temos a matriz  $\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \begin{pmatrix} 1 & -u \\ -u & 1 \end{pmatrix}$ , cuja derivada em  $u = 0$  é  $\mu_u = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Para  $\alpha = iv$  e  $\rho = 0$ , temos a matriz  $\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \begin{pmatrix} 1-v & 0 \\ 0 & 1+v \end{pmatrix}$ , cuja derivada em  $v = 0$  é  $\mu_v = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Para  $\alpha = 0$ , temos a matriz  $\begin{pmatrix} \cos \rho & \sin \rho \\ -\sin \rho & \cos \rho \end{pmatrix}$ , cuja derivada em  $\rho = 0$  é  $\mu_\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Os colchetes são  $[\mu_u, \mu_v] = -2\mu_\rho$ ,  $[\mu_v, \mu_\rho] = 2\mu_u$  e  $[\mu_\rho, \mu_u] = 2\mu_v$ .

Aplicando a multiplicação à esquerda, obtemos os campos invariantes à esquerda em  $SL(2, \mathbb{R})$ :

$$M_u = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B & -A \\ -D & -C \end{pmatrix},$$

$$M_v = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A & B \\ -C & D \end{pmatrix},$$

$$M_\rho = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B & A \\ -D & C \end{pmatrix}.$$

Daí,  $[M_u, M_v] = -2M_\rho$ ,  $[M_v, M_\rho] = 2M_u$  e  $[M_\rho, M_u] = 2M_v$ .

Logo,  $[U, V] = -2\wp$ ,  $[V, \wp] = 2U$  e  $[\wp, U] = 2V$ .

Defina

$$E_1 = \frac{U}{2}, \quad E_2 = \frac{V}{2} \quad \text{e} \quad E_3 = \frac{\wp}{2}.$$

Logo,  $[E_1, E_2] = -E_3$ ,  $[E_2, E_3] = E_1$  e  $[E_3, E_1] = E_2$ .

Equipamos  $M$  com a métrica invariante à esquerda tal que  $\{E_1, E_2, E_3\}$  seja um

referencial ortonormal. Portanto, a métrica nas coordenadas  $u, v, \rho$  é dada por

$$\begin{aligned} g_{11} &= \frac{4(1+v^2)}{(1-u^2-v^2)^2}, \\ g_{12} &= \frac{-4uv}{(1-u^2-v^2)^2}, \\ g_{13} &= \frac{4[-2v-v(1+u^2+v^2)]}{(1-u^2-v^2)^2}, \\ g_{22} &= \frac{4(1+u^2)}{(1-u^2-v^2)^2}, \\ g_{23} &= \frac{4[2u+u(1+u^2+v^2)]}{(1-u^2-v^2)^2}, \\ g_{33} &= \frac{4[4u^2+4v^2+(1+u^2+v^2)^2]}{(1-u^2-v^2)^2}. \end{aligned}$$

Considere  $\mathbb{R}_2^4$  o espaço pseudo-Euclideano tetradimensional dotado com o produto interno semidefinido de assinatura  $(2, 2)$

$$\langle v, w \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4.$$

Podemos olhar o espaço  $SL(2, \mathbb{R})$  como um subconjunto de  $\mathbb{R}_2^4$

$$SL(2, \mathbb{R}) = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}_2^4 | x^2 + y^2 - z^2 - w^2 = 1\} \subset \mathbb{R}_2^4$$

através da identificação

$$x = \frac{A+D}{2}, \quad y = \frac{B-C}{2}, \quad z = \frac{A-D}{2} \text{ e } w = \frac{B+C}{2},$$

onde  $A, B, C$  e  $D$  são dados em (3.5) e (3.6).

Portanto,

$$\begin{aligned} x &= \frac{\cos \rho}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, & y &= \frac{\sin \rho}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, \\ z &= \frac{-u \sin \rho - v \cos \rho}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, & w &= \frac{-u \cos \rho + v \sin \rho}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, \\ u &= \frac{-zy - xw}{x^2 + y^2}, & v &= \frac{-xz + yw}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Donde tiramos, através da regra da cadeia,

$$\partial_u = -x(xw + yz)\partial_x - y(xw + yz)\partial_y + (-y - z(xw + yz))\partial_z + (-x - w(xw + yz))\partial_w,$$

$$\partial_v = -x(xz - yw)\partial_x - y(xz - yw)\partial_y + (-x - z(xz - yw))\partial_z + (y - w(xz - yw))\partial_w,$$

$$\partial_\rho = -y\partial_x + x\partial_y + w\partial_z - z\partial_w.$$

Substituindo estes campos em (3.7), obtemos

$$\begin{aligned} U &= -w\partial_x - z\partial_y - y\partial_z - x\partial_w, \\ V &= -z\partial_x + w\partial_y - x\partial_z + y\partial_w, \\ \wp &= -y\partial_x + x\partial_y - w\partial_z + z\partial_w. \end{aligned} \tag{3.8}$$

**Lema 3.1.** *A conexão de Levi-Civita em  $SL(2, \mathbb{R})$  é dada por:*

$$\begin{aligned} \nabla_{E_1} E_1 &= 0, & \nabla_{E_2} E_1 &= \frac{E_3}{2}, & \nabla_{E_3} E_1 &= \frac{3}{2} E_2 \\ \nabla_{E_1} E_2 &= -\frac{E_3}{2}, & \nabla_{E_2} E_2 &= 0, & \nabla_{E_3} E_2 &= -\frac{3}{2} E_1 \\ \nabla_{E_1} E_3 &= \frac{E_2}{2}, & \nabla_{E_2} E_3 &= -\frac{E_1}{2}, & \nabla_{E_3} E_3 &= 0 \end{aligned}$$

*Demonstração.* Sai por um cálculo direto usando a fórmula de Koszul

$$2 \langle \nabla_X Y, Z \rangle = \langle [X, Y], Z \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle$$

□

**Observação 3.2.** Seja  $X = fE_1 + gE_2 + hE_3$ . Então,  $X \times E_3 = -fE_2 + gE_1$  e  $\nabla_X E_3 = \frac{f}{2}E_2 - \frac{g}{2}E_1$ . Logo,  $\nabla_X E_3 = \tau X \times E_3$ , onde  $\tau = -\frac{1}{2}$ .

### 3.1.2 Curvatura Seccional de $SL(2, \mathbb{R})$

Para o cálculo da curvatura seccional usaremos a fórmula do tensor curvatura dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_{[X, Y]}Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z.$$

Usaremos a base de campos invariantes à esquerda  $\{E_1, E_2, E_3\}$ , e o colchete calculado nesta base.

Lembramos que a curvatura seccional é determinada por

$$K(X, Y) = \frac{\langle R(X, Y)X, Y \rangle}{|X|^2 |Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2}$$

onde  $X, Y$  formam uma base de um plano tangente em  $SL(2, \mathbb{R})$  num ponto dado.

**Lema 3.3.** *O tensor curvatura de Riemann é dado por:*

$$\begin{aligned} R(E_1, E_2)E_3 &= R(E_1, E_3)E_2 = R(E_2, E_3)E_1 = 0, \\ R(E_1, E_2)E_1 &= -\frac{7}{4}E_2, & R(E_1, E_2)E_2 &= \frac{7}{4}E_1, & R(E_1, E_3)E_1 &= \frac{1}{4}E_3, \\ R(E_1, E_3)E_3 &= -\frac{1}{4}E_1, & R(E_2, E_3)E_2 &= \frac{1}{4}E_3, & R(E_2, E_3)E_3 &= -\frac{1}{4}E_2. \end{aligned}$$

*Demonstração.* Utilizando a fórmula do tensor curvatura de Riemann

$$R(X, Y)Z = \nabla_{[X, Y]}Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z$$

e o [Lema 3.1](#), temos

$$R(E_1, E_2)E_1 = \nabla_{[E_1, E_2]}E_1 - \nabla_{E_1} \nabla_{E_2} E_1 + \nabla_{E_2} \nabla_{E_1} E_1 = -\frac{7}{4}E_2$$

De modo análogo obtemos o restante.  $\square$

**Lema 3.4.**  $\langle R(X, Y)Z, E_3 \rangle = -\tau^2(\langle X, E_3 \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle Y, E_3 \rangle \langle X, Z \rangle)$ , onde  $\tau = -\frac{1}{2}$ .

*Demonstração.* Seja  $Z = h_1 E_1 + h_2 E_2 + h_3 E_3$ . Usando que  $A \times (B \times C) = B \langle A, C \rangle - C \langle A, B \rangle$ , temos

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)Z, E_3 \rangle &= -h_1 \langle R(X, Y)E_3, E_1 \rangle - h_2 \langle R(X, Y)E_3, E_2 \rangle \\ &= -h_1 \langle \nabla_{[X, Y]}E_3 - \nabla_X \nabla_Y E_3 + \nabla_Y \nabla_X E_3, E_1 \rangle \\ &\quad - h_2 \langle \nabla_{[X, Y]}E_3 - \nabla_X \nabla_Y E_3 + \nabla_Y \nabla_X E_3, E_2 \rangle \\ &= -h_1 \langle \tau[X, Y] \times E_3 - \nabla_X(\tau Y \times E_3) + \nabla_Y(\tau X \times E_3), E_1 \rangle \\ &\quad - h_2 \langle \tau[X, Y] \times E_3 - \nabla_X(\tau Y \times E_3) + \nabla_Y(\tau X \times E_3), E_2 \rangle \\ &= -h_1 \langle -\tau^2 Y \times (X \times E_3) + \tau^2 X \times (Y \times E_3), E_1 \rangle \\ &\quad - h_2 \langle -\tau^2 Y \times (X \times E_3) + \tau^2 X \times (Y \times E_3), E_2 \rangle \\ &= -h_1 \langle -\tau^2 X \langle Y, E_3 \rangle + \tau^2 Y \langle X, E_3 \rangle, E_1 \rangle \\ &\quad - h_2 \langle -\tau^2 X \langle Y, E_3 \rangle + \tau^2 Y \langle X, E_3 \rangle, E_2 \rangle \\ &= -\tau^2 [\langle X, E_3 \rangle \langle Y, h_1 E_1 + h_2 E_2 \rangle \\ &\quad - \langle Y, E_3 \rangle \langle X, h_1 E_1 + h_2 E_2 \rangle] \\ &= -\tau^2 [\langle X, E_3 \rangle \langle Y, Z \rangle \langle Y, E_3 \rangle \langle X, Z \rangle] \end{aligned}$$

$\square$

**Lema 3.5.** Se  $U$  é unitário e ortogonal a  $E_3$ , então

$$\langle R(X, Y)Z, U \rangle = \frac{1}{4} \langle Z, E_3 \rangle \langle X \times Y, U \rangle + \frac{7}{4} \langle Z, U \rangle \langle X \times Y, E_3 \rangle$$

onde  $V = E_3 \times U$ .

*Demonstração.* Como  $\{U, V, E_3\}$  é base ortonormal, podemos supor  $X = f_1 U + f_2 V + f_3 E_3$  e  $Y = g_1 U + g_2 V + g_3 E_3$ . Daí,  $X \times Y = (f_2 g_3 - f_3 g_2)U + (f_3 g_1 - f_1 g_3)V + (f_1 g_2 - f_2 g_1)E_3$ .

Suponha que  $Z = E_3$ . Pelo [Lema 3.4](#), temos

$$\langle R(X, Y)E_3, U \rangle = \tau^2(\langle X, E_3 \rangle \langle Y, U \rangle - \langle Y, E_3 \rangle \langle X, U \rangle) = \tau^2(f_3 g_1 - f_1 g_3) = \tau^2 \langle X \times Y, V \rangle.$$

Suponha que  $Z = U$ . Logo,  $\langle R(X, Y)U, U \rangle = 0$ .

Suponha que  $Z = V$ .

a) Se  $X = U$  e  $Y = E_3$ ,  $\langle R(U, E_3)V, U \rangle = 0$ , pelo [Lema 3.4](#). Analogamente se  $X = V$  e  $Y = E_3$ ,  $\langle R(V, E_3)V, U \rangle = 0$ .

b) Se  $X = U$  e  $Y = V$ . Sejam  $U = RE_1 + SE_2$  e  $V = PE_1 + QE_2$ .

$$\langle R(U, V)V, U \rangle = (QR - PS) \langle R(E_1, E_2)V, U \rangle = \frac{7}{4}(PS - QR)^2$$

Como as colunas da matriz  $\begin{pmatrix} R & P & 0 \\ S & Q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  formam um conjunto ortonormal, esta matriz é ortogonal, logo  $RQ - PS = \pm 1$ . Portanto,  $\langle R(U, V)V, U \rangle = \frac{7}{4}$ .

Seja  $Z = h_1U + h_2V + h_3E_3$ . Assim,

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)Z, U \rangle &= h_2 \langle R(X, Y)V, U \rangle + h_3 \langle R(X, Y)E_3, U \rangle \\ &= h_2[f_1g_2 \langle R(U, V)V, U \rangle + f_2g_1 \langle R(V, U)V, U \rangle] \\ &\quad + \tau^2 \langle Z, E_3 \rangle \langle X \times Y, V \rangle \\ &= \tau^2 \langle Z, E_3 \rangle \langle X \times Y, V \rangle + \frac{7}{4} \langle Z, V \rangle \langle X \times Y, E_3 \rangle \end{aligned}$$

□

**Corolário 3.6.** *A curvatura seccional de um plano  $P$  cujo vetor normal faz um ângulo  $\theta$  com  $E_3$  é*

$$K(P) = \frac{1}{4} - 2 \cos^2 \theta$$

*Demonstração.* Suponha que o ângulo formado entre  $E_3$  e o vetor normal  $N$  do plano  $P$  seja  $\theta$ . A projeção do campo  $E_3$  em  $P$  é  $T = E_3 - \cos \theta N$ . Donde,  $\|T\|^2 = \sin^2 \theta$ ,  $\langle N, E_3 \rangle = \cos \theta$ ,  $\langle T, E_3 \rangle = \|T\|^2$ ,  $\langle JT, E_3 \rangle = 0$ , onde  $JT = N \times T$ .

Assim, uma base para o plano  $P$  é  $\{T, JT\}$ , logo  $K(P) = \frac{\langle R(T, JT)T, JT \rangle}{\|T\|^4}$ .

Como  $\frac{JT}{\|T\|}$  é unitário e ortogonal a  $E_3$ , usando o [Lema 3.5](#), temos

$$\begin{aligned} \left\langle R(T, JT)T, \frac{JT}{\|T\|} \right\rangle &= \frac{1}{4} \langle T, E_3 \rangle \left\langle T \times JT, E_3 \times \frac{JT}{\|T\|} \right\rangle \\ &\quad + \frac{7}{4} \left\langle T, E_3 \times \frac{JT}{\|T\|} \right\rangle \langle T \times JT, E_3 \rangle \\ &= \frac{1}{4} \|T\|^3 \langle N, E_3 \times JT \rangle + \frac{7}{4} \|T\| \cos \theta \langle T, E_3 \times JT \rangle \\ &= -\frac{1}{4} \|T\|^3 \langle E_3, N \times JT \rangle - \frac{7}{4} \|T\| \cos \theta \langle E_3, T \times JT \rangle \\ &= \frac{1}{4} \|T\|^5 - \frac{7}{4} \|T\|^3 \cos^2 \theta \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} K(P) &= \frac{1}{\|T\|^3} \left\langle R(T, JT)T, \frac{JT}{\|T\|} \right\rangle \\ &= \frac{1}{4} \sin^2 \theta - \frac{7}{4} \cos^2 \theta = \frac{1}{4} - 2 \cos^2 \theta \end{aligned}$$

□

### 3.1.3 Isometrias de $SL(2, \mathbb{R})$

A seguir daremos alguns subgrupos a um parâmetro de onde tiramos uma base para os campos de Killing, ou seja, daremos explicitamente as isometrias de  $SL(2, \mathbb{R})$ . Para isto, precisamos de alguns resultados preliminares.

**Lema 3.7.** *Seja  $\varphi : SL(2, \mathbb{R}) \longrightarrow SL(2, \mathbb{R})$  uma isometria. Então,  $\forall p \in SL(2, \mathbb{R})$ ,  $d\varphi_p(E_3) = \pm E_3$ , onde o sinal é constante.*

*Demonstração.* Seja  $P$  o plano gerado por  $E_1$  e  $E_2$  em  $p$ . A curvatura seccional de  $P$  é  $K(P) = \frac{1}{4} - 2 = -\frac{7}{4}$ . Sendo  $\tilde{P} = d\varphi_p(P)$ , temos  $K(\tilde{P}) = -\frac{7}{4}$ , pois a curvatura seccional é preservada por isometrias. Assim,  $-\frac{7}{4} = \frac{1}{4} - 2 \cos^2 \theta \implies \cos^2 \theta = 1 \implies \theta = 0, \pi$ .

Portanto, o vetor normal,  $N$ , a  $\tilde{P}$  faz ângulo 0 ou  $\pi$  com  $E_3$ , ou seja  $N = \pm E_3(\varphi(p))$ .

Como  $d\varphi_p$  manda vetor normal a  $P$  em vetor normal a  $\tilde{P}$  e,  $E_3(p)$  é normal a  $P$ , temos  $d\varphi_p(E_3(p)) = \pm E_3(\varphi(p))$ .

Como a função  $\langle d\varphi_p(E_3(p)), E_3(\varphi(p)) \rangle$  é contínua, o sinal é constante. □

Dada isometria  $\varphi : SL(2, \mathbb{R}) \longrightarrow SL(2, \mathbb{R})$ , temos

$$d\varphi(E_3) = \pm E_3, \quad (3.9)$$

$$d\varphi(E_1) = \cos \rho E_1 + \sin \rho E_2, \quad (3.10)$$

$$d\varphi(E_2) = \pm(-\sin \rho E_1 + \cos \rho E_2). \quad (3.11)$$

onde  $\rho$  é uma função.

**Lema 3.8.** *Suponha que o sinal na equação (3.11) seja positivo. Então, o sinal na equação (3.9) também é positivo. Além disso,  $\rho$  é constante.*

*Demonstração.* Temos que  $\nabla_{d\varphi(E_1)} d\varphi(E_1) = d\varphi(\nabla_{E_1} E_1) = 0$ . Por outro lado, usando a equação (3.10), temos

$$\begin{aligned} \nabla_{d\varphi(E_1)} d\varphi(E_1) &= E_1[-\cos \rho \sin \rho E_1(\rho) - \sin^2 \rho E_2(\rho)] + E_2[\cos^2 \rho E_1(\rho) + \cos \rho \sin \rho E_2(\rho)] \\ &\implies \cos \rho E_1(\rho) + \sin \rho E_2(\rho) = 0 \end{aligned}$$

Analogamente,  $\nabla_{d\varphi(E_2)}d\varphi(E_2) = d\varphi(\nabla_{E_2}E_2) = 0$ . E, pela equação (3.11), temos

$$\begin{aligned}\nabla_{d\varphi(E_2)}d\varphi(E_2) &= E_1[\cos \rho \sin \rho E_1(\rho) - \cos^2 \rho E_2(\rho)] + E_2[\sin^2 \rho E_1(\rho) - \cos \rho \sin \rho E_2(\rho)] \\ &\implies \sin \rho E_1(\rho) - \cos \rho E_2(\rho) = 0\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{cases} \cos \rho E_1(\rho) + \sin \rho E_2(\rho) = 0 \\ \sin \rho E_1(\rho) - \cos \rho E_2(\rho) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} E_1(\rho) = 0 \\ E_2(\rho) = 0 \end{cases}$$

$\nabla_{d\varphi(E_2)}d\varphi(E_1) = d\varphi(\nabla_{E_2}E_1) = d\varphi(\frac{E_3}{2}) = \pm \frac{E_3}{2}$ . E, pelas equações (3.10), (3.11), temos

$$\nabla_{d\varphi(E_2)}d\varphi(E_1) = \pm \frac{E_3}{2}.$$

Assim,  $d\varphi(E_2)$  e  $d\varphi(E_3)$  têm que ter o mesmo sinal, ambos positivos ou ambos negativos.

$\nabla_{d\varphi(E_3)}d\varphi(E_1) = d\varphi(\nabla_{E_3}E_1) = d\varphi(\frac{3}{2}E_2) = \pm \frac{3}{2}(-\sin \rho E_1 + \cos \rho E_2)$ . E, pelas equações (3.9), (3.10), temos

$$\begin{aligned}\nabla_{d\varphi(E_3)}d\varphi(E_1) &= \pm \{E_1[-\sin \rho E_3(\rho) - \frac{3}{2} \sin \rho] + E_2[\frac{3}{2} \cos \rho + \cos \rho E_3(\rho)]\} \\ &\implies \begin{cases} \sin \rho E_3(\rho) = 0 \\ \cos \rho E_3(\rho) = 0 \end{cases} \implies E_3(\rho) = 0\end{aligned}$$

O resultado segue.  $\square$

**Corolário 3.9.** *Não existe isometria de  $SL(2, \mathbb{R})$  que reverta orientação.*

*Demonstração.* Suponha que  $\varphi$  reverta orientação. Logo,  $\varphi$  manda a base positiva  $\{E_1, E_2, E_3\}$  na base negativa  $\{d\varphi(E_1), d\varphi(E_2), d\varphi(E_3)\}$ , isto é,  $d\varphi(E_1) \times d\varphi(E_2) = -d\varphi(E_3) = \mp E_3$ . Por outro lado,

$$d\varphi(E_1) \times d\varphi(E_2) = \pm(\cos \rho E_1 + \sin \rho E_2) \times (-\sin \rho E_1 + \cos \rho E_2) = \pm E_3$$

Absurdo, pois  $d\varphi(E_3)$  e  $d\varphi(E_2)$  têm o mesmo sinal.  $\square$

**Exemplo 3.10.** Considere o subgrupo a um parâmetro  $T_t : M \longrightarrow M$ ,  $T_t(\alpha, \rho) = (\alpha e^{-2it}, \rho + t)$ . Verifica-se que

$$(dT_t)_{(\alpha, \rho)} = \begin{bmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) & 0 \\ -\sin(2t) & \cos(2t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \begin{aligned} (dT_t)_{(\alpha, \rho)}(U) &= \cos(2t)U - \sin(2t)V \\ (dT_t)_{(\alpha, \rho)}(V) &= \sin(2t)U + \cos(2t)V \\ (dT_t)_{(\alpha, \rho)}(\wp) &= \wp \end{aligned}$$

Assim, cada  $T_t$  é uma isometria de  $M$ . O gerador infinitesimal do subgrupo é dado por

$$\frac{d}{dt}(\alpha e^{-2it}, \rho + t)|_{t=0} = (-2i\alpha, 1) = \wp.$$

**Observação 3.11.** As trajetórias  $t \mapsto T_t(\alpha, \rho)$  são as curvas integrais de  $\wp$ .

De fato, seja  $\beta(t) = (\alpha(t), \rho(t)) = (u(t), v(t), \rho(t))$  a curva integral do campo  $\wp$ . Assim,  $\beta' = u'\partial_u + v'\partial_v + \rho'\partial_\rho = \wp$ . Portanto,

$$\begin{cases} u' = 2v \\ v' = 2u \\ \rho' = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} u = u_0 \cos(2t) + v_0 \sin(2t) \\ v = -u_0 \sin(2t) + v_0 \cos(2t) \\ \rho = \rho_0 + t \end{cases}$$

Logo,  $\beta(t) = (\alpha_0 e^{-2it}, \rho_0 + t)$

**Exemplo 3.12.** Consideramos o subgrupo  $\lambda_t : M \rightarrow M$ ,  $\lambda_t(\alpha, \rho) = (\alpha, \rho + t)$ . Temos  $(d\lambda_t)_{(\alpha, \rho)} = I$ .

Logo, cada  $\lambda_t$  é uma isometria de  $M$ , com gerador infinitesimal  $\partial_\rho$ . Note que  $\lambda_t$  é a multiplicação à esquerda por  $(0, t)$  e que  $\lambda_{t_1}$  comuta com  $\lambda_{t_2}$ ,  $\forall t_1, t_2$ .

**Exemplo 3.13.** Combinando os dois exemplos anteriores, temos  $\Lambda_t : M \rightarrow M$ ,  $\Lambda_t(\alpha, \rho) = (\alpha e^{-2it}, \rho)$ . Note que  $\Lambda_t = \lambda_{-t} \circ T_t$ .

Cada  $\Lambda_t$  é uma isometria de  $M$  que fixa a origem e manda  $E_3$  em  $E_3$ . Além disso, podemos escolher  $t$  de forma a levar  $\{E_1, E_2\}$  em uma base ortonormal previamente escolhida do plano gerado por  $E_1$  e  $E_2$ , nessa orientação. O gerador infinitesimal deste subgrupo é  $\wp - \partial_\rho$ .

**Exemplo 3.14.** Consideramos o subgrupo  $\zeta_t = L_{(i \tanh t, 0)}$ , multiplicação à esquerda por  $(i \tanh t, 0)$ . Este subgrupo corresponde ao subgrupo de isometrias cuja representação matricial em  $PSL(2, \mathbb{R})$  é  $\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$ . O gerador infinitesimal é

$$\begin{aligned} K_\zeta &= \frac{U}{1 - |\alpha|^2} (-2uv \cos(2\rho) + (1 - u^2 + v^2) \sin(2\rho)) \\ &+ \frac{V}{1 - |\alpha|^2} ((1 + u^2 - v^2) \cos(2\rho) - 2uv \sin(2\rho)) \\ &+ \frac{2\wp}{1 - |\alpha|^2} (u \cos(2\rho) - v \sin(2\rho)) \end{aligned}$$

**Exemplo 3.15.** Em  $PLS(2, \mathbb{R})$  consideramos o subgrupo a um parâmetro de isometrias parabólicas de  $\mathbb{H}^2$ , representadas matricialmente por  $\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Em  $M$  temos as translações à esquerda  $\xi_t = L_{(-\sin \rho e^{-i\rho}, \rho)}$ ,  $\rho(t) = \arcsin(\frac{s}{\sqrt{1+s^2}})$ , com  $s = t/2$ . O gerador infinitesimal é

$$\begin{aligned} K_\xi &= \frac{1}{2(1 - |\alpha|^2)} \left[ U(-(1 - u^2 + v^2) \cos(2\rho) - 2uv \sin(2\rho) - 2v) \right. \\ &+ V(2uv \cos(2\rho) + (1 + u^2 - v^2) \sin(2\rho) + 2u) \\ &\left. + \wp(2v \cos(2\rho) + 2u \sin(2\rho) + 1 + u^2 + v^2) \right] \end{aligned}$$

**Exemplo 3.16.** Seja  $R : M \longrightarrow M$ ,  $R(\alpha, \rho) = (\bar{\alpha}, -\rho)$ .  $R$  é uma isometria de  $M$  que fixa a origem e manda  $E_3$  em  $-E_3$ . Temos ainda  $dR(U) = U$  e  $dR(V) = -V$ .

**Observação 3.17.**  $(\alpha, \rho) \longrightarrow (\alpha, -\rho)$  não é uma isometria.

**Proposição 3.18.** *Toda isometria de  $M$  que preserva  $E_3$  pode ser escrita de forma única como  $L_p \circ \Lambda_t$ , onde  $\Lambda_t$  é como no [Exemplo 3.13](#) e  $L_p$  é a multiplicação à esquerda por  $p$ . A unicidade em  $t$  entende-se como módulo  $2\pi$ , ou seja, vemos  $t \in \mathbb{S}^1$ .*

*Demonstração.* Seja  $T : M \longrightarrow M$  isometria que preserva  $E_3$ . Suponha que  $T(0, 0) = (0, 0)$ .

Escolhendo  $t$  apropriadamente, obtemos

$$dT_{(0,0)} = d\Lambda_{t(0,0)}$$

daí  $T = \Lambda_t$ .

Se  $T(0, 0) = p$ , então  $L_p^{-1} \circ T$  fixa  $(0, 0)$  e preserva  $E_3$ , logo  $L_p^{-1} \circ T = \Lambda_t$ , para algum  $t$ .

Para a unicidade,  $p$  é determinado por  $T(0, 0)$  e  $t \pmod{2\pi}$  é determinado por  $dT_{(0,0)}$ .  $\square$

A demonstração do próximo resultado é um exercício simples.

**Proposição 3.19.** *O conjunto das isometrias de  $M$  é uma variedade tetradimensional com duas componentes conexas  $M_1$  e  $M_2$ , onde  $M_1$  é o conjunto das isometrias que preservam  $E_3$  e  $M_2$  é o conjunto das isometrias que revertem o  $E_3$ .  $M_1$  é difeomorfa a  $M \times \mathbb{S}^1$  pelo difeomorfismo*

$$\begin{aligned} M \times \mathbb{S}^1 &\longrightarrow M_1 \\ (p, t) &\longmapsto L_p \circ \Lambda_t \end{aligned}$$

$M_2$  é difeomorfa a  $M_1$  pelo difeomorfismo

$$\begin{aligned} M_1 &\longrightarrow M_2 \\ T &\longmapsto R \circ T \end{aligned}$$

onde  $R$  é dada no [Exemplo 3.16](#).

**Corolário 3.20.** *O espaço dos campos de Killing é tetradimensional gerado por*

$$\emptyset, \quad \partial_\rho, \quad K_\zeta \text{ ([Exemplo 3.14](#))}, \quad K_\xi \text{ ([Exemplo 3.15](#))}$$

Nas coordenadas  $(x, y, z, w)$  de  $\mathbb{R}_2^4$ , os campos de Killing se escrevem como:

$$\begin{aligned}
K_1 &= \emptyset, \\
K_2 &= 2(xz - yw)U + 2(-xw - yz)V + (x^2 + y^2 + z^2 + w^2)\wp, \\
K_3 &= 2(xy - zw)U + (x^2 - y^2 - z^2 + w^2)V + 2(-xw + yz)\wp, \\
K_4 &= \frac{1}{2}[(y - w)^2 - (x - z)^2]U + (x - z)(y - w)V + \frac{1}{2}[(x - z)^2 - (y - w)^2]\wp.
\end{aligned}$$

## 3.2 Superfícies com Ângulo Constante em $SL(2, \mathbb{R})$

### 3.2.1 Curva-com-triedro em $SL(2, \mathbb{R})$

O objetivo desta seção é mostrar a existência de duas curvas  $\alpha(s)$  e  $\beta(u)$ , satisfazendo certas condições específicas ([Proposição 3.24](#) e [Proposição 3.26](#)), que serão usadas na construção de uma superfície (seção 3.2.2).

Em  $SL(2, \mathbb{R})$ , a [Proposição 2.3](#) se reescreve como:

**Proposição 3.21.** *Sejam  $\kappa = \kappa(s)$  e  $\tau = \tau(s)$  funções dadas. Sejam  $p \in SL(2, \mathbb{R})$  dado e  $\{t_0, n_0, b_0\}$  um triedro ortonormal positivo em  $T_p SL(2, \mathbb{R})$ . Então existe uma única curva-com-triedro  $(\alpha, \{t, n, b\})$  com curvatura  $\kappa$  e torção  $\tau$  satisfazendo as condições iniciais  $\alpha(0) = p$ ,  $t(0) = t_0$ ,  $n(0) = n_0$  e  $b(0) = b_0$ .*

*Demonstração.* Consideremos o referencial dado pelos campos invariantes à esquerda  $\{E_1, E_2, E_3\}$  em  $SL(2, \mathbb{R})$ . Seja  $\alpha(s) = (u(s), v(s), \rho(s))$ ,  $s \in (\bar{a}, \bar{b})$ , uma curva com triedro  $\{t, n, b\}$ . Escreva

$$\begin{aligned}
t &= f_1 E_1 + f_2 E_2 + f_3 E_3, \\
n &= g_1 E_1 + g_2 E_2 + g_3 E_3, \\
b &= h_1 E_1 + h_2 E_2 + h_3 E_3.
\end{aligned}$$

Então  $\{t, n, b\}$  é solução do seguinte sistema de EDO's de primeira ordem:

$$\begin{aligned}
f'_1 &= \kappa g_1 + 2f_2 f_3 \\
f'_2 &= \kappa g_2 - 2f_1 f_3 \\
f'_3 &= \kappa g_3 \\
g'_1 &= -\kappa f_1 - \tau h_1 + \frac{3}{2}f_3 g_2 + \frac{1}{2}g_3 f_2 \\
g'_2 &= -\kappa f_2 - \tau h_2 - \frac{3}{2}f_3 g_1 - \frac{1}{2}g_3 f_1 \\
g'_3 &= -\kappa f_3 - \tau h_3 - \frac{1}{2}f_2 g_1 + \frac{1}{2}f_1 g_2 \\
h'_1 &= \tau g_1 + \frac{3}{2}f_3 h_2 + \frac{1}{2}h_3 f_2 \\
h'_2 &= \tau g_2 - \frac{3}{2}f_3 h_1 - \frac{1}{2}f_1 h_3 \\
h'_3 &= \tau g_3 - \frac{1}{2}f_2 h_1 + \frac{1}{2}f_1 h_2
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Pelo Teorema de existência e unicidade de soluções de sistemas de EDO's, temos solução única para o sistema acima em algum intervalo. Um argumento semelhante ao do caso de curvas em  $\mathbb{R}^3$  mostra que o triedro solução é ortonormal.

Seja  $(\tilde{a}, \tilde{b})$  o intervalo de definição das funções  $\kappa$  e  $\tau$ , e seja  $(\bar{a}, \bar{b})$  o intervalo maximal de definição da solução do sistema.

Mostremos que  $\bar{b} = \tilde{b}$ . Suponha, por contradição, que  $\bar{b} < \tilde{b}$ . Teríamos uma limitação uniforme para as derivadas das funções  $f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3, h_1, h_2, h_3$  em  $[0, \bar{b})$ . Portanto, essas funções se estenderiam continuamente a  $\bar{b}$ . Um argumento padrão mostra que a solução poderia ser continuada para além de  $\bar{b}$ . Analogamente, se mostra que  $\bar{a} = \tilde{a}$ .

Obtido o triedro  $\{t, n, b\}$ , a existência e unicidade da curva segue de uma aplicação adicional do teorema de existência e unicidade de sistemas de EDO's tomando  $\alpha$  como a solução da equação diferencial

$$\frac{d\alpha}{ds} = f_1 E_1 + f_2 E_2 + f_3 E_3.$$

□

Suponha que sejam dados  $\kappa = \cot \theta$ , com  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$  uma constante fixada,  $\tau = -\frac{1}{2}$  e um triedro ortonormal, orientado positivamente  $\{t_0, n_0, b_0\}$  em  $T_p SL(2, \mathbb{R})$  com  $\langle t_0, E_3 \rangle = \sin \theta$ ,  $\langle n_0, E_3 \rangle = 0$  e  $\langle b_0, E_3 \rangle > 0$ .

Uma solução para o sistema (3.12) satisfazendo as condições iniciais acima é  $\{t(s), n(s), b(s)\}$ , dados por

$$\begin{cases} t(s) = \cos \theta \cos \omega E_1 + \cos \theta \sin \omega E_2 + \sin \theta E_3 \\ n(s) = -\sin \omega E_1 + \cos \omega E_2 \\ b(s) = -\sin \theta \cos \omega E_1 - \sin \theta \sin \omega E_2 + \cos \theta E_3 \end{cases} \quad (3.13)$$

com  $\omega = \frac{B}{\sin \theta} s + C$ , onde  $B = \cos(2\theta)$ ,  $s \in I$ , onde  $C$  é determinado por  $n(0)$ .

Pela [Proposição 3.21](#), dados  $\kappa = \cot \theta$ , com  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$  uma constante fixada,  $\tau = -\frac{1}{2}$  e um triedro ortonormal, orientado positivamente  $\{t_0, n_0, b_0\}$  em  $T_p SL(2, \mathbb{R})$  com  $\langle t_0, E_3 \rangle = \sin \theta$ ,  $\langle n_0, E_3 \rangle = 0$  e  $\langle b_0, E_3 \rangle > 0$ , então existe uma única curva p.c.a.  $\alpha$  passando por  $p$  com curvatura constante  $\kappa = \cot \theta$  e torção  $\tau = -\frac{1}{2}$  satisfazendo  $\langle \alpha'(0), E_3 \rangle = \sin \theta$ ,  $\langle \alpha''(0), E_3 \rangle = 0$  e  $\langle \alpha'(0) \times \frac{\alpha''(0)}{\kappa}, E_3 \rangle > 0$ . A saber, a curva  $\alpha(s)$ , que satisfaz a seguinte equação diferencial:

**Proposição 3.22.** *A curva integral do campo  $t$ ,  $\alpha$ , em  $\mathbb{R}_2^4$ , satisfaz a equação diferencial*

a) Se  $B = 0$ ,

$$\frac{d^2 \alpha}{ds^2} = 0, \quad (3.14)$$

b) Se  $B \neq 0$ ,

$$\frac{d^4 \alpha}{ds^4} + (\tilde{b}^2 - 2\tilde{a}) \frac{d^2 \alpha}{ds^2} + \tilde{a}^2 \alpha = 0, \quad (3.15)$$

onde  $\tilde{a} = -\frac{B}{4}$  e  $\tilde{b} = \frac{B}{\sin \theta}$  com  $B = \cos(2\theta)$ .

*Demonstração.* Usando as expressões de  $E_1$ ,  $E_2$  e  $E_3$  com respeito aos campos coordenados de  $\mathbb{R}_2^4$  dados em (3.8)

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{2}(-w\partial_x - z\partial_y - y\partial_z - x\partial_w), \\ E_2 &= \frac{1}{2}(-z\partial_x + w\partial_y - x\partial_z + y\partial_w), \\ E_3 &= \frac{1}{2}(-y\partial_x + x\partial_y - w\partial_z + z\partial_w). \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} t &= \left(-\frac{w}{2}\cos\theta\cos\omega - \frac{z}{2}\cos\theta\sin\omega - \frac{y}{2}\sin\theta\right)\partial_x \\ &+ \left(-\frac{z}{2}\cos\theta\cos\omega + \frac{w}{2}\cos\theta\sin\omega + \frac{x}{2}\sin\theta\right)\partial_y \\ &+ \left(-\frac{y}{2}\cos\theta\cos\omega - \frac{x}{2}\cos\theta\sin\omega - \frac{w}{2}\sin\theta\right)\partial_z \\ &+ \left(-\frac{x}{2}\cos\theta\cos\omega + \frac{y}{2}\cos\theta\sin\omega + \frac{z}{2}\sin\theta\right)\partial_w \end{aligned}$$

Seja  $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s), w(s))$  a curva integral do campo  $t$ . Logo,

$$\begin{cases} x' = -\frac{w}{2}\cos\theta\cos\omega - \frac{z}{2}\cos\theta\sin\omega - \frac{y}{2}\sin\theta \\ y' = -\frac{z}{2}\cos\theta\cos\omega + \frac{w}{2}\cos\theta\sin\omega + \frac{x}{2}\sin\theta \\ z' = -\frac{y}{2}\cos\theta\cos\omega - \frac{x}{2}\cos\theta\sin\omega - \frac{w}{2}\sin\theta \\ w' = -\frac{x}{2}\cos\theta\cos\omega + \frac{y}{2}\cos\theta\sin\omega + \frac{z}{2}\sin\theta \end{cases} \quad (3.16)$$

Derivando (3.16) e usando-o, obtemos

$$\begin{cases} x'' = \tilde{a}x + \tilde{b}y' \\ y'' = \tilde{a}y - \tilde{b}x' \\ z'' = \tilde{a}z + \tilde{b}w' \\ w'' = \tilde{a}w - \tilde{b}z' \end{cases} \quad (3.17)$$

onde  $\tilde{a} = -\frac{B}{4}$  e  $\tilde{b} = \frac{B}{\sin\theta}$ . Se  $B = 0$ , temos (3.14). Derivando (3.17) duas vezes e usando-o, obtemos

$$\begin{cases} x'''' = (-\tilde{b}^2 + 2\tilde{a})x'' - \tilde{a}^2x \\ y'''' = (-\tilde{b}^2 + 2\tilde{a})y'' - \tilde{a}^2y \\ z'''' = (-\tilde{b}^2 + 2\tilde{a})z'' - \tilde{a}^2z \\ w'''' = (-\tilde{b}^2 + 2\tilde{a})w'' - \tilde{a}^2w \end{cases}$$

Portanto, temos (3.15). □

Considere as seguintes matrizes

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Elas serão usadas no intuito de simplificar algumas notações.

**Corolário 3.23.** *A curva integral do campo  $t$ , em  $\mathbb{R}_2^4$ , é dada por*

a) *Se  $B = 0$ ,*

$$\alpha(s) = \psi_1 + s\psi_2$$

*onde  $\psi_1$  e  $\psi_2$  são vetores em  $\mathbb{R}_2^4$ , satisfazendo*

$$\langle \psi_1, \psi_1 \rangle = 1,$$

$$\psi_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}[J_1\psi_1 - \cos(C)J_2\psi_1 - \sin(C)J_3\psi_1].$$

b) *Se  $B > 0$ ,*

$$\alpha(s) = \cos(\varphi_1 s)\psi_1 + \sin(\varphi_1 s)\psi_2 + \cos(\varphi_2 s)\psi_3 + \sin(\varphi_2 s)\psi_4$$

*onde*

$$\varphi_1 = \frac{1}{2\sin\theta}(B - \sqrt{B}\cos\theta) \quad e \quad \varphi_2 = \frac{1}{2\sin\theta}(B + \sqrt{B}\cos\theta)$$

*são constantes, e  $\psi_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , são vetores em  $\mathbb{R}_2^4$ , dois a dois ortogonais, tais que*

$$\langle \psi_1, \psi_1 \rangle = \langle \psi_2, \psi_2 \rangle = \frac{\sqrt{B} + \cos\theta}{2\sqrt{B}} > 0,$$

$$\langle \psi_3, \psi_3 \rangle = \langle \psi_4, \psi_4 \rangle = \frac{\sqrt{B} - \cos\theta}{2\sqrt{B}} < 0,$$

$$\psi_2 = -J_1\psi_1, \quad \psi_3 = \frac{\cos\theta - \sqrt{B}}{\sin\theta}(\cos C J_3\psi_1 - \sin C J_2\psi_1),$$

$$\psi_4 = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + \sqrt{B}}(\cos C J_2\psi_1 + \sin C J_3\psi_1).$$

c) *Se  $B < 0$ ,*

$$\alpha(s) = \cos\left(\frac{\tilde{b}}{2}s\right)[\cosh(\delta s)\psi_1 + \sinh(\delta s)\psi_3] + \sin\left(\frac{\tilde{b}}{2}s\right)[\cosh(\delta s)\psi_2 + \sinh(\delta s)\psi_4]$$

*onde*

$$\delta = \frac{\sqrt{-B}\cot\theta}{2} \quad e \quad \tilde{b} = \frac{B}{\sin\theta}$$

*são constantes, e  $\psi_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , são vetores em  $\mathbb{R}_2^4$ , tais que*

$$\langle \psi_1, \psi_1 \rangle = \langle \psi_2, \psi_2 \rangle = -\langle \psi_3, \psi_3 \rangle = -\langle \psi_4, \psi_4 \rangle = 1,$$

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \langle \psi_1, \psi_3 \rangle = \langle \psi_2, \psi_4 \rangle = \langle \psi_3, \psi_4 \rangle = 0,$$

$$\langle \psi_1, \psi_4 \rangle = -\langle \psi_2, \psi_3 \rangle = -\frac{2\delta}{\tilde{b}},$$

$$\psi_2 = -J_1\psi_1, \quad \psi_3 = \frac{1}{\sqrt{-B}}[\cos\theta J_1\psi_1 - \sin\theta(\cos C J_2\psi_1 + \sin C J_3\psi_1)], \quad \psi_4 = -J_1\psi_3,$$

*onde  $J_1, J_2, J_3$  são dadas em (3.18).*

*Demonstração.* a) Resolvendo a equação (3.14), temos

$$\alpha(s) = \psi_1 + s\psi_2$$

onde  $\psi_1$  e  $\psi_2$  são vetores em  $\mathbb{R}_2^4$ . Usando a equação (3.16), calculado em  $s = 0$ , temos  $\psi_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}[J_1\psi_1 - \cos(C)J_2\psi_1 - \sin(C)J_3\psi_1]$ .

Como  $\alpha(s) \subset SL(2, \mathbb{R})$ , então  $\langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle = 1$ ,  $\forall s \in \mathbb{R}$ . Em particular, para  $s = 0$ ,  $\langle \psi_1, \psi_1 \rangle = 1$ .

Para mostrar os item b) e c), usamos o fato que  $\|\alpha\| = 1$  e as equações (3.16) e (3.17) para obter

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \alpha \rangle &= 1, & \langle \alpha', \alpha' \rangle &= \tilde{a}, & \langle \alpha, \alpha' \rangle &= 0, & \langle \alpha', \alpha'' \rangle &= 0, & \langle \alpha'', \alpha'' \rangle &= D, \\ \langle \alpha, \alpha'' \rangle &= -\tilde{a}, & \langle \alpha', \alpha''' \rangle &= -D, & \langle \alpha'', \alpha''' \rangle &= 0, & \langle \alpha, \alpha''' \rangle &= 0, & & \\ & & & & \langle \alpha''', \alpha''' \rangle &= E, \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde  $D = \tilde{a}\tilde{b}^2 - 3\tilde{a}^2$  e  $E = (\tilde{b}^2 - 2\tilde{a})D - \tilde{a}^3$ .

A equação (3.15) é uma EDO, em  $s$ , com coeficientes constantes cuja solução é dada por

b) Se  $B > 0$ ,

$$\alpha(s) = \cos(\varphi_1 s)\psi_1 + \sin(\varphi_1 s)\psi_2 + \cos(\varphi_2 s)\psi_3 + \sin(\varphi_2 s)\psi_4$$

com

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{\tilde{b}^2 - 2\tilde{a} - \sqrt{\tilde{b}^4 - 4\tilde{a}\tilde{b}^2}}{2}} \quad \text{e} \quad \varphi_2 = \sqrt{\frac{\tilde{b}^2 - 2\tilde{a} + \sqrt{\tilde{b}^4 - 4\tilde{a}\tilde{b}^2}}{2}}$$

constantes e os  $\psi_i$  são vetores em  $\mathbb{R}_2^4$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ .

Substituindo  $\tilde{a} = -\frac{B}{4}$  e  $\tilde{b} = \frac{B}{\sin \theta}$ , obtemos

$$\varphi_1 = \frac{1}{2\sin \theta}(B - \sqrt{B} \cos \theta) \quad \text{e} \quad \varphi_2 = \frac{1}{2\sin \theta}(B + \sqrt{B} \cos \theta).$$

Calculando  $\alpha$  e suas derivadas em  $s = 0$ , temos

$$\begin{aligned} \alpha(0) &= \psi_1 + \psi_3, & \alpha'(0) &= \varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_4, \\ \alpha''(0) &= -\varphi_1^2\psi_1 - \varphi_2^2\psi_3, & \alpha'''(0) &= -\varphi_1^3\psi_2 - \varphi_2^3\psi_4. \end{aligned}$$

Substituindo estas equações em (3.19), e tomando  $\psi_{ij} = \langle \psi_i, \psi_j \rangle$ , obtemos o seguinte

sistema:

$$\begin{aligned}
\psi_{11} + \psi_{33} + 2\psi_{13} &= 1, \\
\varphi_1^2\psi_{22} + \varphi_2^2\psi_{44} + 2\varphi_1\varphi_2\psi_{24} &= \tilde{a}, \\
\varphi_1\psi_{12} + \varphi_2\psi_{14} + \varphi_1\psi_{23} + \varphi_2\psi_{34} &= 0, \\
-\varphi_1^3\psi_{12} - \varphi_1\varphi_2^2\psi_{23} - \varphi_1^2\varphi_2\psi_{14} - \varphi_2^3\psi_{34} &= 0, \\
\varphi_1^4\psi_{11} + \varphi_2^4\psi_{33} + 2\varphi_1^2\varphi_2^2\psi_{13} &= D, \\
-\varphi_1^2\psi_{11} - \varphi_2^2\psi_{13} - \varphi_1^2\psi_{13} - \varphi_2^2\psi_{33} &= -\tilde{a}, \\
-\varphi_1^4\psi_{22} - \varphi_1\varphi_2^3\psi_{24} - \varphi_1^3\varphi_2\psi_{24} - \varphi_2^4\psi_{44} &= -D, \\
\varphi_1^5\psi_{12} + \varphi_1^2\varphi_2^3\psi_{14} + \varphi_1^3\varphi_2^2\psi_{23} + \varphi_2^5\psi_{34} &= 0, \\
-\varphi_1^3\psi_{12} - \varphi_2^3\psi_{14} - \varphi_1^3\psi_{23} - \varphi_2^3\psi_{34} &= 0, \\
\varphi_1^6\psi_{22} + \varphi_2^6\psi_{44} + 2\varphi_1^3\varphi_2^3\psi_{24} &= E.
\end{aligned}$$

Este sistema é linear cuja solução é:

$$\begin{aligned}
\psi_{12} = \psi_{14} = \psi_{23} = \psi_{34} = \psi_{13} = \psi_{24} &= 0, \\
\psi_{11} = \psi_{22} &= \frac{\sqrt{B} + \cos \theta}{2\sqrt{B}} > 0, \\
\psi_{33} = \psi_{44} &= \frac{\sqrt{B} - \cos \theta}{2\sqrt{B}} < 0.
\end{aligned}$$

Usando as equações (3.16), calculado em  $s = 0$ , temos

$$\varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_4 = -\frac{\cos \theta \cos C}{2}J_2(\psi_1 + \psi_3) - \frac{\cos \theta \sin C}{2}J_3(\psi_1 + \psi_3) + \frac{\sin \theta}{2}J_1(\psi_1 + \psi_3).$$

As equações (3.17), calculado em  $s = 0$ , nos dá

$$(-\varphi_1^2 + \frac{B}{4})\psi_1 + (-\varphi_2^2 + \frac{B}{4})\psi_3 = -\tilde{b}\varphi_1J_1\psi_2 - \tilde{b}\varphi_2J_1\psi_4.$$

Derivando a equação (3.17) e calculando em  $s = 0$ , obtemos

$$\varphi_1(-\varphi_1^2 + \frac{B}{4})\psi_2 + \varphi_2(-\varphi_2^2 + \frac{B}{4})\psi_4 = \tilde{b}\varphi_1^2J_1\psi_1 + \tilde{b}\varphi_2^2J_1\psi_3.$$

Estas 3 equações nos dá um sistema de 12 equações com 12 variáveis, cuja solução é

$$\begin{aligned}
\psi_2 = -J_1\psi_1, \quad \psi_3 &= \frac{\cos \theta - \sqrt{B}}{\sin \theta}(\cos C J_3\psi_1 - \sin C J_2\psi_1), \\
\psi_4 &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta + \sqrt{B}}(\cos C J_2\psi_1 + \sin C J_3\psi_1).
\end{aligned}$$

c) Se  $B < 0$ ,

$$\alpha(s) = \cos(\frac{\tilde{b}}{2}s)[\cosh(\delta s)\psi_1 + \sinh(\delta s)\psi_3] + \sin(\frac{\tilde{b}}{2}s)[\cosh(\delta s)\psi_2 + \sinh(\delta s)\psi_4]$$

onde

$$\delta = \frac{\sqrt{-B} \cos \theta}{2 \sin \theta} \quad \text{e} \quad \tilde{b} = \frac{B}{\sin \theta}$$

são constantes e os  $\psi_i$  são vetores em  $\mathbb{R}_2^4$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ .

Calculando  $\alpha$  e suas derivadas em  $s = 0$ , temos

$$\begin{aligned} \alpha(0) &= \psi_1, \\ \alpha'(0) &= \frac{\tilde{b}}{2} \psi_2 + \delta \psi_3, \\ \alpha''(0) &= (\delta^2 - \frac{\tilde{b}^2}{4}) \psi_1 + \delta \tilde{b} \psi_4, \\ \alpha'''(0) &= (3\frac{\tilde{b}}{2} \delta^2 - \frac{\tilde{b}^3}{8}) \psi_2 + (\delta^3 - 3\frac{\tilde{b}^2}{4} \delta) \psi_3. \end{aligned}$$

Substituindo estas equações em (3.19), e tomando  $\psi_{ij} = \langle \psi_i, \psi_j \rangle$ , obtemos o seguinte sistema linear:

$$\begin{aligned} \psi_{11} &= 1, \\ \frac{\tilde{b}^2}{4} \psi_{22} + \delta \tilde{b} \psi_{23} + \delta^2 \psi_{33} &= \tilde{a}, \\ \frac{\tilde{b}}{2} \psi_{12} + \delta \psi_{13} &= 0, \\ \frac{\tilde{b}}{2} (\delta^2 - \frac{\tilde{b}^2}{4}) \psi_{12} + \delta \frac{\tilde{b}}{2} \psi_{24} + \delta (\delta^2 - \frac{\tilde{b}^2}{4}) \psi_{13} + \delta^2 \tilde{b} \psi_{34} &= 0, \\ (\delta^2 - \frac{\tilde{b}^2}{4})^2 \psi_{11} + 2\delta \tilde{b} (\delta^2 - \frac{\tilde{b}^2}{4}) \psi_{14} + \delta^2 \tilde{b}^2 \psi_{44} &= D, \\ (\delta^2 - \frac{\tilde{b}^2}{4}) \psi_{11} + \delta \tilde{b} \psi_{14} &= -\tilde{a}, \\ \frac{\tilde{b}^2}{4} (3\delta^2 - \frac{\tilde{b}^2}{4}) \psi_{22} + \delta \frac{\tilde{b}}{2} (4\delta^2 - \tilde{b}^2) \psi_{23} + \delta^2 (\delta^2 - 3\frac{\tilde{b}^2}{4}) \psi_{33} &= -D, \\ (\delta^2 - \frac{\tilde{b}^2}{4}) (3\frac{\tilde{b}}{2} \delta^2 - \frac{\tilde{b}^3}{8}) \psi_{12} + (\delta^2 - \frac{\tilde{b}^2}{4}) (\delta^3 - 3\frac{\tilde{b}^2}{4} \delta) \psi_{13} \\ + \delta \tilde{b} (3\frac{\tilde{b}}{2} \delta^2 - \frac{\tilde{b}^3}{8}) \psi_{24} + \delta \tilde{b} (\delta^3 - 3\frac{\tilde{b}^2}{4} \delta) \psi_{34} &= 0, \\ (3\frac{\tilde{b}}{2} \delta^2 - \frac{\tilde{b}^3}{8}) \psi_{12} + (\delta^3 - 3\frac{\tilde{b}^2}{4} \delta) \psi_{13} &= 0, \\ (3\frac{\tilde{b}}{2} \delta^2 - \frac{\tilde{b}^3}{8})^2 \psi_{22} + 2(3\frac{\tilde{b}}{2} \delta^2 - \frac{\tilde{b}^3}{8}) (\delta^3 - 3\frac{\tilde{b}^2}{4} \delta) \psi_{23} + (\delta^3 - 3\frac{\tilde{b}^2}{4} \delta)^2 \psi_{33} &= E, \end{aligned}$$

cuja solução é dada por:

$$\begin{aligned} \psi_{11} &= \psi_{22} = -\psi_{33} = -\psi_{44} = 1, \\ \psi_{12} &= \psi_{13} = \psi_{24} = \psi_{34} = 0, \\ \psi_{14} &= -\psi_{23} = -\frac{2\delta}{\tilde{b}}. \end{aligned}$$

Usando as equações (3.16), calculado em  $s = 0$ , temos

$$\frac{\tilde{b}}{2}\psi_2 + \delta\psi_3 = -\frac{\cos\theta\cos C}{2}J_2\psi_1 - \frac{\cos\theta\sin C}{2}J_3\psi_1 + \frac{\sin\theta}{2}J_1\psi_1.$$

As equações (3.17), calculado em  $s = 0$ , nos dá

$$(\delta^2 - \frac{\tilde{b}^2}{4})\psi_1 + \delta\tilde{b}\psi_4 = -\frac{\tilde{b}\sin\theta}{4}\psi_1 - \frac{\tilde{b}^2}{2}J_1\psi_2 - \delta\tilde{b}J_1\psi_3.$$

Derivando a equação (3.17) e calculando em  $s = 0$ , obtemos

$$\begin{aligned} (3\frac{\tilde{b}}{2}\delta^2 - \frac{\tilde{b}^3}{8})\psi_2 + (\delta^3 + 3\frac{\tilde{b}^2}{4}\delta)\psi_3 &= -\tilde{b}(\delta^2 - \frac{\tilde{b}^2}{4})J_1\psi_1 - \frac{\tilde{b}^2\sin\theta}{8}\psi_2 \\ &- \frac{\delta\tilde{b}\sin\theta}{4}\psi_3 - \delta\tilde{b}^2J_1\psi_4. \end{aligned}$$

Estas 3 equações nos dá um sistema de 12 equações com 12 variáveis, cuja solução é

$$\psi_2 = -J_1\psi_1, \quad \psi_3 = \frac{1}{\sqrt{-B}}[\cos\theta J_1\psi_1 - \sin\theta(\cos C J_2\psi_1 + \sin C J_3\psi_1)], \quad \psi_4 = -J_1\psi_3.$$

□

Seja  $\gamma$  outra curva com a mesma curvatura e torção da curva  $\alpha$  passando por um ponto  $q \in SL(2, \mathbb{R})$  satisfazendo as mesmas condições iniciais dadas acima,  $\langle \bar{t}(0), E_3 \rangle = \sin\theta$ ,  $\langle \bar{n}(0), E_3 \rangle = 0$  e  $\langle \bar{b}(0), E_3 \rangle > 0$ . Assim, temos o triedro da curva  $\gamma$ ,  $\{\bar{t}(s), \bar{n}(s), \bar{b}(s)\}$ , dado por

$$\begin{cases} \bar{t}(s) = \cos\theta\cos\bar{\omega}E_1 + \cos\theta\sin\bar{\omega}E_2 + \sin\theta E_3 \\ \bar{n}(s) = -\sin\bar{\omega}E_1 + \cos\bar{\omega}E_2 \\ \bar{b}(s) = -\sin\theta\cos\bar{\omega}E_1 - \sin\theta\sin\bar{\omega}E_2 + \cos\theta E_3 \end{cases}$$

com  $\bar{\omega} = \frac{B}{\sin\theta}s + \bar{C}$ .

Seja  $r \in SL(2, \mathbb{R})$  tal que  $q = \Lambda_{\bar{t}}(r)$ , onde  $\Lambda_{\bar{t}}$  é dada no Exemplo 3.13. Considere a seguinte isometria de  $SL(2, \mathbb{R})$ :  $\varphi = \Lambda_{\bar{t}} \circ L_r \circ L_{p^{-1}}$ , com  $L$  translação à esquerda. Assim,  $\varphi$  leva  $p$  em  $q$  e  $E_3$  em  $E_3$ . Tomando  $\tilde{t} = \frac{C-\bar{C}}{2}$ , temos que  $d\varphi_p(t(0)) = \bar{t}(0)$ ,  $d\varphi_p(n(0)) = \bar{n}(0)$  e  $d\varphi_p(b(0)) = \bar{b}(0)$ .

Portanto, as curvas  $\varphi \circ \alpha$  e  $\gamma$  são duas curvas com mesma curvatura e torção passando pelo mesmo ponto  $q$  com as mesmas condições iniciais. Logo, pela unicidade da curva,  $\varphi \circ \alpha = \gamma$ .

Suponha que  $\psi$  seja outra isometria de  $SL(2, \mathbb{R})$  que leva  $p$  em  $q$  e leva o triedro  $\{t(0), n(0), b(0)\}$  no triedro  $\{\bar{t}(0), \bar{n}(0), \bar{b}(0)\}$ . Assim  $\psi^{-1} \circ \varphi(p) = Id(p)$  e  $d(\psi^{-1} \circ \varphi)_p = Id$ . Como  $SL(2, \mathbb{R})$  é conexo, então  $\psi^{-1} \circ \varphi = Id \implies \psi = \varphi$ .

Assim, obtemos o seguinte resultado:

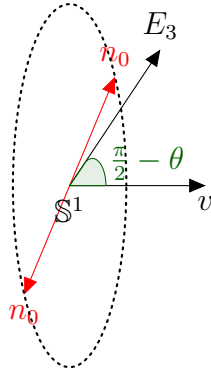
**Proposição 3.24.** Dados  $p \in SL(2, \mathbb{R})$  e  $v \in T_p SL(2, \mathbb{R})$  unitário com  $\langle v, E_3 \rangle = \sin \theta$ , então existe uma única curva  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$ , p.c.a., com  $\alpha(0) = p$ ,  $\alpha'(0) = v$ , com curvatura constante  $\kappa = \cot \theta$ , torção  $\tau = -\frac{1}{2}$ , satisfazendo  $\langle \alpha''(0), E_3 \rangle = 0$  e  $\left\langle \alpha'(0) \times \frac{\alpha''(0)}{\kappa}, E_3 \right\rangle > 0$ . A saber, a curva dada no [Corolário 3.23](#) com  $\alpha(0) = p$ . Além disso, dadas duas curva  $\alpha$  e  $\gamma$  com as condições acima, existe uma única isometria  $\varphi$  de  $SL(2, \mathbb{R})$  tal que  $\gamma = \varphi \circ \alpha$ .

**Observação 3.25.** Note que as condições

$$\langle v, E_3 \rangle = \sin \theta, \quad \langle \alpha''(0), E_3 \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \left\langle \alpha'(0) \times \frac{\alpha''(0)}{\kappa}, E_3 \right\rangle > 0$$

determinam o triedro ortonormal inicial  $\{t_0, n_0, b_0\}$  em  $T_p SL(2, \mathbb{R})$ . De fato, tome  $t_0 = v$ . Por  $p$  passa alguma curva  $\alpha$  com velocidade  $\alpha'(0) = t_0$ , suponha a curva p.c.a. Logo,  $\alpha' \perp \alpha''$ . Portanto,  $\alpha''(0) \parallel n_0$ , com  $n_0$  algum vetor unitário e perpendicular a  $t_0$ . De  $\langle v, E_3 \rangle = \sin \theta$ , temos que o ângulo entre  $t_0$  e  $E_3$  é  $\frac{\pi}{2} - \theta$ . Como  $\alpha''(0) \perp E_3$  e  $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ , então  $n_0$  é paralelo ao vetor  $t_0 \times E_3$ . Portanto, há duas possibilidades para o vetor  $n_0$ , o que aponta na direção do vetor  $t_0 \times E_3$  ou o que aponta na direção oposta ao vetor  $t_0 \times E_3$ , como ilustra a [Figura 1](#) a seguir.

Figura 1 – Triedro inicial.



Fonte: Produzido pelo autor.

A condição  $\left\langle \alpha'(0) \times \frac{\alpha''(0)}{\kappa}, E_3 \right\rangle > 0$  determina o  $n_0$  apropriado. Obtidos  $t_0$  e  $n_0$ , o vetor  $b_0$  fica determinado por  $b_0 = t_0 \times n_0$ .

**Proposição 3.26.** Sejam  $p \in SL(2, \mathbb{R})$ ,  $v \in T_p SL(2, \mathbb{R})$  unitário e horizontal, e  $\kappa(u)$  uma função de  $u$ . Existe uma única curva horizontal p.c.a  $\beta(u)$  de curvatura  $\kappa(u)$  e torção  $\frac{1}{2}$  com triedro  $\{t, n, E_3\}$  tal que  $\beta(0) = p$ ,  $\beta'(0) = v$ .

*Demonstração.* Consideremos o referencial dado pelos campos invariantes à esquerda

$\{E_1, E_2, E_3\}$  em  $SL(2, \mathbb{R})$ . Escreva

$$\begin{aligned} t &= f_1 E_1 + f_2 E_2, \\ n &= g_1 E_1 + g_2 E_2, \\ b &= E_3. \end{aligned}$$

Então  $\{t, n, b\}$  é solução do seguinte sistema de EDO's de primeira ordem:

$$\begin{aligned} f_1' &= \kappa g_1 \\ f_2' &= \kappa g_2 \\ g_1' &= -\kappa f_1 \\ g_2' &= -\kappa f_2 \end{aligned}$$

satisfazendo  $g_1 = -f_2$ ,  $g_2 = f_1$ . A curva integral do campo  $t$  é a curva desejada. Verifica-se que a curvatura desta curva é  $\kappa(u)$  e sua torção é  $\frac{1}{2}$ .  $\square$

**Proposição 3.27.** *Uma curva horizontal p.c.a.  $\beta(u)$  satisfaz a EDO*

$$\beta'(u) = \frac{\sin \varepsilon(u)}{2} J_2 \beta - \frac{\cos \varepsilon(u)}{2} J_3 \beta$$

onde  $\varepsilon'(u)$  é sua curvatura na orientação  $E_1, E_2$ .  $J_2$  e  $J_3$  são dados por (3.18).

*Demonstração.* Seja  $\beta$  uma curva horizontal p.c.a. Podemos supor que existe uma função  $\varepsilon(u)$  tal que  $\beta' = -\sin \varepsilon(u) E_1 + \cos \varepsilon(u) E_2$ . Pelas equações (3.8), obtemos

$$\beta' = -\frac{\sin \varepsilon(u)}{2} (-w \partial_x - z \partial_y - y \partial_z - x \partial_w) + \frac{\cos \varepsilon(u)}{2} (-z \partial_x + w \partial_y - x \partial_z + y \partial_w).$$

Por outro lado, seja  $\beta = (x, y, z, w)$ . Assim,

$$\beta' = x' \partial_x + y' \partial_y + z' \partial_z + w' \partial_w.$$

O resultado segue igualando estas duas equações e usando as matrizes  $J_2$  e  $J_3$  para simplificar a notação.

Como  $\beta$  é p.c.a., sua curvatura é  $\|\nabla_{\beta'} \beta'\|$ . Por um cálculo direto temos:

$$\nabla_{\beta'} \beta' = \nabla_{\beta'} (-\sin \varepsilon(u) E_1 + \cos \varepsilon(u) E_2) = -\varepsilon' \cos \varepsilon E_1 - \varepsilon' \sin \varepsilon E_2.$$

$\square$

Note que a velocidade inicial determina e é determinada por  $\varepsilon(0)$  pela relação

$$v = -\sin \varepsilon(0) E_1 + \cos \varepsilon(0) E_2.$$

### 3.2.2 Superfícies com Ângulo Constante

A partir de uma curva horizontal emana um feixe de curvas satisfazendo as condições dadas na [Proposição 3.24](#). De fato, sejam  $p \in SL(2, \mathbb{R})$ ,  $C$  uma constante e  $\kappa(u)$  uma função de  $u$ . Considere o seguinte vetor horizontal

$$w = -\sin CE_1 + \cos CE_2 \in T_p SL(2, \mathbb{R}).$$

Pela [Proposição 3.26](#) existe uma única curva horizontal  $\beta(u)$  p.c.a. passando por  $p$  com velocidade  $w$  e com curvatura  $\kappa(u)$ . Pela demonstração da [Proposição 3.27](#), existe uma função  $\varepsilon(u)$  tal que

$$\beta'(u) = -\sin \varepsilon(u)E_1 + \cos \varepsilon(u)E_2,$$

onde a curvatura de  $\beta$  é  $\varepsilon'(u)$ . Logo,  $\kappa(u) = \varepsilon'(u)$ .

Fixe  $u_0$  tal que  $\beta(u_0) = p$  e  $\varepsilon(u_0) = C$ . Considere o seguinte vetor unitário e ortogonal a  $w$

$$v = \cos \theta \cos CE_1 + \cos \theta \sin CE_2 + \sin \theta E_3 \in T_p SL(2, \mathbb{R}).$$

Pela [Proposição 3.24](#), existe uma única curva  $\alpha(s)$  com  $\alpha(0) = p$ ,  $\alpha'(0) = v$  de curvatura constante  $\kappa = \cot \theta$  e torção  $\tau = -\frac{1}{2}$  satisfazendo  $\langle \alpha''(0), E_3 \rangle = 0$  e  $\langle \alpha'(0) \times \frac{\alpha''(0)}{\kappa}, E_3 \rangle > 0$ . Esta curva  $\alpha(s)$  tem como triedro os vetores  $\{t, n, b\}$  dados por [\(3.13\)](#).

Da arbitrariedade de  $u_0$ , conclui-se que:

i) Para cada  $u_0$  dado obtemos um valor para a constante  $C$ . Logo,  $C$  depende da variável  $u$ ,  $C = C(u)$ .

ii)  $\beta'(u) = \frac{\nabla_t t}{\cot \theta}(0) = n(0) \Rightarrow \varepsilon(u) = C(u)$ .

iii) Ao longo de uma curva horizontal p.c.a. passa um feixe de curvas satisfazendo as condições da [Proposição 3.24](#), dando origem a uma superfície.

De agora em diante, as notações  $t, n, b$  serão usadas para os campos vetoriais dados em [\(3.13\)](#), que dependem das variáveis  $s$  e  $u$ , com  $\omega = \frac{B}{\sin \theta} s + C(u)$ , onde  $B = \cos(2\theta)$ ,  $\theta \in (0, \pi/2)$  uma constante fixada.

A seguir, mostraremos que a superfície resultante forma ângulo constante com a vertical  $E_3$ .

Temos que  $t = \partial_s$ . Sejam  $f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3, h_1, h_2$  e  $h_3$  funções das variáveis  $s$  e  $u$  tais que

$$\begin{aligned}\partial_u &= f_1 t + f_2 n + f_3 b, \\ \nabla_t \partial_u &= g_1 t + g_2 n + g_3 b, \\ \nabla_{\partial_u} n &= h_1 t + h_2 n + h_3 b.\end{aligned}$$

Pela simetria da conexão,  $g_1 = \langle t, \nabla_t \partial_u \rangle = \frac{1}{2} \partial_u \langle \partial_s, \partial_s \rangle = 0$ . Analogamente,  $h_2 = 0$ . Logo,  $\nabla_t \partial_u = g_2 n + g_3 b$  e  $\nabla_{\partial_u} n = h_1 t + h_3 b$ .

Note que, o vetor normal unitário da superfície é dado por

$$N = \frac{\partial_s \times \partial_u}{\|\partial_s \times \partial_u\|} = \frac{f_2 b - f_3 n}{\sqrt{f_2^2 + f_3^2}}.$$

Portanto, o ângulo formado pelo campo vetorial normal unitário e o campo vetorial  $E_3$  é

$$\langle N, E_3 \rangle = \frac{f_2}{\sqrt{f_2^2 + f_3^2}} \cos \theta.$$

Logo, a superfície faz ângulo constante com a direção vertical  $E_3$  se  $f_3 \equiv 0$ . Mostraremos que, de fato, isto é verificado.

Temos  $\nabla_t \partial_u = g_2 n + g_3 b$ . Por outro lado,

$$\begin{aligned} \nabla_t \partial_u &= t(f_1)t + f_1 \nabla_t t + t(f_2)n + f_2 \nabla_t n + t(f_3)b + f_3 \nabla_t b \\ &= t(f_1)t + f_1 \kappa n + t(f_2)n + f_2(-\kappa t - \tau b) + t(f_3)b + f_3 \tau n \\ &= (t(f_1) - \kappa f_2)t + (\kappa f_1 + t(f_2) + \tau f_3)n + (-\tau f_2 + t(f_3))b \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{cases} 0 = \partial_s(f_1) - \kappa f_2 \\ g_2 = \kappa f_1 + \partial_s(f_2) + \tau f_3 \\ g_3 = -\tau f_2 + \partial_s(f_3) \end{cases} \quad (3.20)$$

Usando o tensor curvatura de Riemann

$$R(X, Y)Z = \nabla_{[X, Y]}Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z,$$

temos  $\nabla_{\partial_s} \nabla_{\partial_s} \partial_u = \nabla_{\partial_s} \nabla_{\partial_u} \partial_s = \nabla_{\partial_u} \nabla_{\partial_s} \partial_s - R(\partial_s, \partial_u) \partial_s$ , onde

$$R(\partial_s, \partial_u) \partial_s = R(t, f_1 t + f_2 n + f_3 b)t = f_2 R(t, n)t + f_3 R(t, b)t$$

$$\begin{aligned}
R(t, n)t &= R(\cos \theta \cos \omega E_1 + \cos \theta \sin \omega E_2 + \sin \theta E_3, n)t \\
&= \cos \theta \cos \omega R(E_1, n)t + \cos \theta \sin \omega R(E_2, n)t + \sin \theta R(E_3, n)t \\
&= \cos \theta \cos \omega [\cos \theta \cos \omega R(E_1, n)E_1 + \cos \theta \sin \omega R(E_1, n)E_2 + \sin \theta R(E_1, n)E_3] \\
&+ \cos \theta \sin \omega [\cos \theta \cos \omega R(E_2, n)E_1 + \cos \theta \sin \omega R(E_2, n)E_2 + \sin \theta R(E_2, n)E_3] \\
&+ \sin \theta [\cos \theta \cos \omega R(E_3, n)E_1 + \cos \theta \sin \omega R(E_3, n)E_2 + \sin \theta R(E_3, n)E_3] \\
&= \cos \theta \cos \omega [\cos \theta \cos^2 \omega R(E_1, E_2)E_1 + \cos \theta \sin \omega \cos \omega R(E_1, E_2)E_2] \\
&+ \cos \theta \sin \omega [-\cos \theta \cos \omega \sin \omega R(E_2, E_1)E_1 - \cos \theta \sin^2 \omega R(E_2, E_1)E_2] \\
&+ \sin \theta [-\cos \theta \cos \omega \sin \omega R(E_3, E_1)E_1 + \cos \theta \sin \omega \cos \omega R(E_3, E_2)E_2 \\
&+ \sin \theta \{-\sin \omega R(E_3, E_1)E_3 + \cos \omega R(E_3, E_2)E_3\}] \\
&= \cos \theta \cos \omega [\cos \theta \cos^2 \omega (-\frac{7}{4}E_2) + \cos \theta \sin \omega \cos \omega (\frac{7}{4}E_1)] \\
&+ \cos \theta \sin \omega [-\cos \theta \cos \omega \sin \omega (\frac{7}{4}E_2) - \cos \theta \sin^2 \omega (-\frac{7}{4}E_1)] \\
&- \sin \theta \cos \theta \cos \omega \sin \omega (-\frac{1}{4}E_3) + \sin \theta \cos \theta \cos \omega \sin \omega (-\frac{1}{4}E_3) \\
&- \sin^2 \theta \sin \omega (\frac{1}{4}E_1) + \sin^2 \theta \cos \omega (\frac{1}{4}E_2) \\
&= (-\frac{7}{4} \cos^2 \theta + \frac{1}{4} \sin^2 \theta) [-\sin \omega E_1 + \cos \omega E_2] \\
&= (\frac{1}{4} - 2 \cos^2 \theta) n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(t, b)t &= R(\cos \theta \cos \omega E_1 + \cos \theta \sin \omega E_2 + \sin \theta E_3, b)t \\
&= \cos \theta \cos \omega R(E_1, b)t + \cos \theta \sin \omega R(E_2, b)t + \sin \theta R(E_3, b)t \\
&= \cos \theta \cos \omega [\cos \theta \cos \omega R(E_1, b)E_1 + \cos \theta \sin \omega R(E_1, b)E_2 + \sin \theta R(E_1, b)E_3] \\
&+ \cos \theta \sin \omega [\cos \theta \cos \omega R(E_2, b)E_1 + \cos \theta \sin \omega R(E_2, b)E_2 + \sin \theta R(E_2, b)E_3] \\
&+ \sin \theta [\cos \theta \cos \omega R(E_3, b)E_1 + \cos \theta \sin \omega R(E_3, b)E_2 + \sin \theta R(E_3, b)E_3] \\
&= \cos \theta \cos \omega \{ \cos \theta \cos \omega [-\sin \theta \sin \omega R(E_1, E_2)E_1 + \cos \theta R(E_1, E_3)E_1] \\
&- \cos \theta \sin \theta \sin^2 \omega R(E_1, E_2)E_2 + \cos \theta \sin \theta R(E_1, E_3)E_3 \} \\
&+ \cos \theta \sin \omega \{ -\cos \theta \sin \theta \cos^2 \omega R(E_2, E_1)E_1 \\
&+ \cos \theta \sin \omega [-\sin \theta \cos \omega R(E_2, E_1)E_2 + \cos \theta R(E_2, E_3)E_2] + \sin \theta \cos \theta R(E_2, E_3)E_3 \} \\
&+ \sin \theta \{ -\cos \theta \sin \theta \cos^2 \omega R(E_3, E_1)E_1 - \cos \theta \sin \theta \sin^2 \omega R(E_3, E_2)E_2 \\
&+ \sin \theta [-\sin \theta \cos \omega R(E_3, E_1)E_3 - \sin \theta \sin \omega R(E_3, E_2)E_3] \} \\
&= \cos \theta \cos \omega \{ \cos \theta \cos \omega [-\sin \theta \sin \omega (-\frac{7}{4}E_2) + \cos \theta (\frac{1}{4}E_3)] \\
&- \cos \theta \sin \theta \sin^2 \omega (\frac{7}{4}E_1) + \cos \theta \sin \theta (-\frac{1}{4}E_1) \} \\
&+ \cos \theta \sin \omega \{ -\cos \theta \sin \theta \cos^2 \omega (\frac{7}{4}E_2) \\
&+ \cos \theta \sin \omega [-\sin \theta \cos \omega (-\frac{7}{4}E_1) + \cos \theta (\frac{1}{4}E_3)] + \sin \theta \cos \theta (-\frac{1}{4}E_2) \} \\
&+ \sin \theta \{ -\cos \theta \sin \theta \cos^2 \omega (-\frac{1}{4}E_3) - \cos \theta \sin \theta \sin^2 \omega (-\frac{1}{4}E_3) \\
&+ \sin \theta [-\sin \theta \cos \omega (\frac{1}{4}E_1) - \sin \theta \sin \omega (\frac{1}{4}E_2)] \} \\
&= E_1 [-\frac{1}{4} \sin \theta \cos \omega] + E_2 [-\frac{1}{4} \sin \theta \sin \omega] + E_3 \frac{1}{4} \cos \theta \\
&= \frac{1}{4}b
\end{aligned}$$

Portanto,

$$R(\partial_s, \partial_u)\partial_s = f_2 R(t, n)t + f_3 R(t, b)t = f_2 \left(\frac{1}{4} - 2 \cos^2 \theta\right)n + f_3 \frac{1}{4}b.$$

Como  $\nabla_{\partial_s}\partial_s = \kappa n$ , temos  $\nabla_{\partial_u}\nabla_{\partial_s}\partial_s = \kappa \nabla_{\partial_u}n = \kappa(h_1t + h_3b)$ .

Assim,

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_s}\nabla_{\partial_s}\partial_u &= \nabla_{\partial_u}\nabla_{\partial_s}\partial_s - R(\partial_s, \partial_u)\partial_s \\
&= \kappa(h_1t + h_3b) - f_2\left(\frac{1}{4} - 2 \cos^2 \theta\right)n - f_3\frac{1}{4}b \\
&= \kappa h_1t - f_2\left(\frac{1}{4} - 2 \cos^2 \theta\right)n + \left(\kappa h_3 - \frac{f_3}{4}\right)b
\end{aligned}$$

Por outro lado, como  $\nabla_{\partial_s}\partial_u = g_2n + g_3b$ , temos

$$\nabla_{\partial_s}\nabla_{\partial_s}\partial_u = (-\kappa g_2)t + (t(g_2) + \tau g_3)n + (-\tau g_2 + t(g_3))b$$

Logo,

$$\begin{cases} -\kappa g_2 = \kappa h_1 \\ \partial_s(g_2) + \tau g_3 = -f_2(\frac{1}{4} - 2 \cos^2 \theta) \\ -\tau g_2 + \partial_s(g_3) = \kappa h_3 - \frac{f_3}{4} \end{cases} \quad (3.21)$$

Temos também que

$$\nabla_{\partial_s} \nabla_{\partial_u} n = \nabla_{\partial_u} \nabla_{\partial_s} n - R(\partial_s, \partial_u) n,$$

onde  $R(\partial_s, \partial_u) n = R(t, f_1 t + f_2 n + f_3 b) n = f_2 R(t, n) n + f_3 R(t, b) n$ .

$$\begin{aligned} R(t, n) n &= R(\cos \theta \cos \omega E_1 + \cos \theta \sin \omega E_2 + \sin \theta E_3, n) n \\ &= \cos \theta \cos \omega R(E_1, n) n + \cos \theta \sin \omega R(E_2, n) n + \sin \theta R(E_3, n) n \\ &= \cos \theta \cos \omega [-\sin \omega R(E_1, n) E_1 + \cos \omega R(E_1, n) E_2] \\ &\quad + \cos \theta \sin \omega [-\sin \omega R(E_2, n) E_1 + \cos \omega R(E_2, n) E_2] \\ &\quad + \sin \theta [-\sin \omega R(E_3, n) E_1 + \cos \omega R(E_3, n) E_2] \\ &= \cos \theta \cos \omega [-\sin \omega \cos \omega R(E_1, E_2) E_1 + \cos^2 \omega R(E_1, E_2) E_2] \\ &\quad + \cos \theta \sin \omega [\sin^2 \omega R(E_2, E_1) E_1 - \sin \omega \cos \omega R(E_2, E_1) E_2] \\ &\quad + \sin \theta [\sin^2 \omega R(E_3, E_1) E_1 + \cos^2 \omega R(E_3, E_2) E_2] \\ &= \cos \theta \cos \omega [-\sin \omega \cos \omega (-\frac{7}{4} E_2) + \cos^2 \omega (\frac{7}{4} E_1)] \\ &\quad + \cos \theta \sin \omega [\sin^2 \omega (\frac{7}{4} E_2) - \sin \omega \cos \omega (-\frac{7}{4} E_1)] \\ &\quad + \sin \theta \sin^2 \omega (-\frac{1}{4} E_3) + \sin \theta \cos^2 \omega (-\frac{1}{4} E_3) \\ &= E_1 [\frac{7}{4} \cos \theta \cos \omega] + E_2 [\frac{7}{4} \cos \theta \sin \omega] + E_3 [-\frac{1}{4} \sin \theta] \\ &= (-\frac{1}{4} + 2 \cos^2 \theta) t - 2 \sin \theta \cos \theta b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(t, b)n &= R(\cos \theta \cos \omega E_1 + \cos \theta \sin \omega E_2 + \sin \theta E_3, b)n \\
&= \cos \theta \cos \omega R(E_1, b)n + \cos \theta \sin \omega R(E_2, b)n + \sin \theta R(E_3, b)n \\
&= \cos \theta \cos \omega [-\sin \omega R(E_1, b)E_1 + \cos \omega R(E_1, b)E_2] \\
&+ \cos \theta \sin \omega [-\sin \omega R(E_2, b)E_1 + \cos \omega R(E_2, b)E_2] \\
&+ \sin \theta [-\sin \omega R(E_3, b)E_1 + \cos \omega R(E_3, b)E_2] \\
&= \cos \theta \cos \omega \{-\sin \omega [-\sin \theta \sin \omega R(E_1, E_2)E_1 + \cos \theta R(E_1, E_3)E_1] \\
&- \sin \theta \sin \omega \cos \omega R(E_1, E_2)E_2\} \\
&+ \cos \theta \sin \omega \{\sin \omega \sin \theta \cos \omega R(E_2, E_1)E_1 + \cos \omega [-\sin \theta \cos \omega R(E_2, E_1)E_2 \\
&+ \cos \theta R(E_2, E_3)E_2]\} \\
&+ \sin \theta \{\sin \theta \sin \omega \cos \omega R(E_3, E_1)E_1 - \sin \theta \cos \omega \sin \omega R(E_3, E_2)E_2\} \\
&= \cos \theta \cos \omega \{-\sin \omega [-\sin \theta \sin \omega (-\frac{7}{4}E_2) + \cos \theta (\frac{1}{4}E_3)] \\
&- \sin \theta \sin \omega \cos \omega (\frac{7}{4}E_1)\} \\
&+ \cos \theta \sin \omega \{\sin \omega \sin \theta \cos \omega (\frac{7}{4}E_2) + \cos \omega [-\sin \theta \cos \omega (-\frac{7}{4}E_1) \\
&+ \cos \theta (\frac{1}{4}E_3)]\} \\
&+ \sin \theta \{\sin \theta \sin \omega \cos \omega (-\frac{1}{4}E_3) - \sin \theta \cos \omega \sin \omega (-\frac{1}{4}E_3)\} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$R(\partial_s, \partial_u)n = f_2 R(t, n)n + f_3 R(t, b)n = f_2 [(-\frac{1}{4} + 2 \cos^2 \theta)t - 2 \sin \theta \cos \theta b]$$

Também temos que

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_u} \nabla_{\partial_s} n &= \nabla_{\partial_u} (-\kappa t - \tau b) = -\kappa \nabla_{\partial_u} t - \tau \nabla_{\partial_u} b = -\kappa \nabla_{\partial_s} \partial_u - \tau \nabla_{\partial_u} (t \times n) \\
&= -\kappa \nabla_{\partial_s} \partial_u - \tau (\nabla_{\partial_u} t \times n + t \times \nabla_{\partial_u} n) \\
&= -\kappa (g_2 n + g_3 b) - \tau [(g_2 n + g_3 b) \times n + t \times (h_1 t + h_3 b)] \\
&= \tau g_3 t + (-\kappa g_2 + \tau h_3)n - \kappa g_3 b
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_s} \nabla_{\partial_u} n &= \nabla_{\partial_u} \nabla_{\partial_s} n - R(\partial_s, \partial_u)n \\
&= \tau g_3 t + (-\kappa g_2 + \tau h_3)n - \kappa g_3 b - f_2 [(-\frac{1}{4} + 2 \cos^2 \theta)t - 2 \sin \theta \cos \theta b] \\
&= [\tau g_3 + f_2 (\frac{1}{4} - 2 \cos^2 \theta)]t + (-\kappa g_2 + \tau h_3)n + (-\kappa g_3 + 2 \sin \theta \cos \theta f_2)b
\end{aligned}$$

Por outro lado, como  $\nabla_{\partial_u} n = h_1 t + h_3 b$ , temos

$$\nabla_{\partial_s} \nabla_{\partial_u} n = (t(h_1))t + (\kappa h_1 + \tau h_3)n + (t(h_3))b$$

Logo,

$$\begin{cases} \partial_s(h_1) = \tau g_3 + f_2(\frac{1}{4} - 2 \cos^2 \theta) \\ \kappa h_1 + \tau h_3 = -\kappa g_2 + \tau h_3 \\ \partial_s(h_3) = -\kappa g_3 + 2 \sin \theta \cos \theta f_2 \end{cases} \quad (3.22)$$

Juntando (3.20), (3.21) e (3.22), temos

$$\begin{cases} \partial_s(f_1) = \kappa f_2 \\ \partial_s(f_2) = g_2 - \kappa f_1 - \tau f_3 \\ \partial_s(f_3) = \tau f_2 + g_3 \\ -\kappa g_2 = \kappa h_1 \\ \partial_s(g_2) = -\tau g_3 - f_2(\frac{1}{4} - 2 \cos^2 \theta) \\ \partial_s(g_3) = \tau g_2 + \kappa h_3 - \frac{f_3}{4} \\ \partial_s(h_1) = \tau g_3 + f_2(\frac{1}{4} - 2 \cos^2 \theta) \\ \kappa h_1 + \tau h_3 = -\kappa g_2 + \tau h_3 \\ \partial_s(h_3) = -\kappa g_3 + 2 \sin \theta \cos \theta f_2 \end{cases}$$

que equivale à:

$$\begin{cases} \partial_s(f_1) = \kappa f_2 \\ \partial_s(f_2) = g_2 - \kappa f_1 - \tau f_3 \\ \partial_s(f_3) = \tau f_2 + g_3 \\ -\kappa g_2 = \kappa h_1 \\ \partial_s(g_2) = -\tau g_3 - f_2(\frac{1}{4} - 2 \cos^2 \theta) \\ \partial_s(g_3) = \tau g_2 + \kappa h_3 - \frac{f_3}{4} \\ \partial_s(h_3) = -\kappa g_3 + 2 \sin \theta \cos \theta f_2 \end{cases} \quad (3.23)$$

onde  $\kappa = \cot \theta$  e  $\tau = -\frac{1}{2}$ .

As condições iniciais deste sistema são dadas por: Ao longo da curva horizontal  $\beta$ ,

ou seja, em  $s = 0$ , temos  $n(0, u) = \partial_u$ . Logo,  $f_1 = 0$ ,  $f_2 = 1$  e  $f_3 = 0$ .

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_u} \partial_s &= \nabla_n (\cos \theta \cos C E_1 + \cos \theta \sin C E_2 + \sin \theta E_3) \\
&= -\cos \theta \sin C n(C) E_1 + \cos \theta \cos^2 C \nabla_{E_2} E_1 + \cos \theta \cos C n(C) E_2 - \cos \theta \sin^2 C \nabla_{E_1} E_2 \\
&\quad + \sin \theta [-\sin C \nabla_{E_1} E_3 + \cos C \nabla_{E_2} E_3] \\
&= -\cos \theta C' \sin C E_1 + \frac{1}{2} \cos \theta \cos^2 C E_3 + \cos \theta C' \cos C E_2 + \frac{1}{2} \cos \theta \sin^2 C E_3 \\
&\quad + \sin \theta [-\frac{1}{2} \sin C E_2 - \frac{1}{2} \cos C E_1] \\
&= E_1 [-\cos \theta C' \sin C - \frac{1}{2} \sin \theta \cos C] + E_2 [\cos \theta C' \cos C - \frac{1}{2} \sin \theta \sin C] + E_3 [\frac{\cos \theta}{2}] \\
&= [\cos C (\cos \theta t - \sin \theta b) - \sin C n] [-\cos \theta C' \sin C - \frac{1}{2} \sin \theta \cos C] \\
&\quad + [\sin C (\cos \theta t - \sin \theta b) + \cos C n] [\cos \theta C' \cos C - \frac{1}{2} \sin \theta \sin C] \\
&\quad + [\sin \theta t + \cos \theta b] \frac{\cos \theta}{2} \\
&= \cos \theta C' n + \frac{1}{2} b
\end{aligned}$$

Por outro lado,  $\nabla_{\partial_u} \partial_s = \nabla_{\partial_s} \partial_u = g_2 n + g_3 b$ . Logo,  $g_2 = \cos \theta C'$  e  $g_3 = \frac{1}{2}$ .

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_u} \partial_u &= \nabla_n n = \nabla_n (-\sin C E_1 + \cos C E_2) \\
&= -C' \cos C E_1 - \sin C \cos C \nabla_{E_2} E_1 - C' \sin C E_2 - \sin C \cos C \nabla_{E_1} E_2 \\
&= -C' \cos C E_1 - \frac{1}{2} \sin C \cos C E_3 - C' \sin C E_2 + \frac{1}{2} \sin C \cos C E_3 \\
&= -C' \cos C [\cos C (\cos \theta t - \sin \theta b) - \sin C n] - C' \sin C [\sin C (\cos \theta t - \sin \theta b) + \cos C n] \\
&= -C' \cos \theta t + C' \sin \theta b
\end{aligned}$$

Por outro lado,  $\nabla_{\partial_u} \partial_u = \nabla_{\partial_u} n = h_1 t + h_3 b$ . Logo,  $h_1 = -\cos \theta C'$  e  $h_3 = \sin \theta C'$ .

Portanto, as condições iniciais são:

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 1, \quad f_3 = 0, \quad g_2 = \cos \theta C', \quad g_3 = \frac{1}{2}, \quad h_1 = -\cos \theta C', \quad h_3 = \sin \theta C'.$$

Note que o sistema (3.23) é um sistema linear. Suas soluções são dadas por:

Se  $B < 0$ :

$$\begin{cases} f_1 = \frac{1}{\sqrt{-B}} \left[ \sinh(2\delta s) + \frac{C' \sin \theta}{\sqrt{-B}} (\cosh(2\delta s) - 1) \right] \\ f_2 = \cosh(2\delta s) + \frac{C' \sin \theta}{\sqrt{-B}} \sinh(2\delta s) \\ f_3 = 0 \\ g_2 = \frac{1}{\sqrt{-B}} \left[ \sin(2\theta) \sinh(2\delta s) + \frac{C' \cos \theta}{\sqrt{-B}} (2 \sin^2 \theta \cosh(2\delta s) - 1) \right] \\ g_3 = \frac{1}{2} f_2 \\ h_1 = -g_2 \\ h_3 = -\frac{1}{2} f_1 + \tan \theta g_2 \end{cases} \quad (3.24)$$

onde  $\delta = \frac{\sqrt{-B} \cot \theta}{2}$  é constante.

Se  $B > 0$ :

$$\begin{cases} f_1 = \frac{1}{\sqrt{B}} \left[ \sin(s\sqrt{B} \cot \theta) - \frac{C' \sin \theta}{\sqrt{B}} (\cos(s\sqrt{B} \cot \theta) - 1) \right] \\ f_2 = \cos(s\sqrt{B} \cot \theta) + \frac{\sin \theta}{\sqrt{B}} C' \sin(s\sqrt{B} \cot \theta) \\ f_3 = 0 \\ g_2 = \frac{1}{\sqrt{B}} \left[ \sin(2\theta) \sin(s\sqrt{B} \cot \theta) + \frac{C' \cos \theta}{\sqrt{B}} (1 - 2 \sin^2 \theta \cos(s\sqrt{B} \cot \theta)) \right] \\ g_3 = \frac{1}{2} f_2 \\ h_1 = -g_2 \\ h_3 = -\frac{1}{2} f_1 + \tan \theta g_2 \end{cases}$$

Se  $B = 0$ :

$$\begin{cases} f_1 = s + s^2 \frac{\sqrt{2}}{4} C' \\ f_2 = 1 + s \frac{\sqrt{2}}{2} C' \\ f_3 = 0 \\ g_2 = s + (1 + \frac{s^2}{2}) \frac{\sqrt{2}}{2} C' \\ g_3 = \frac{1}{2} f_2 \\ h_1 = -g_2 \\ h_3 = -\frac{1}{2} f_1 + g_2 \end{cases} \quad (3.25)$$

Nos pontos onde  $f_2 \neq 0$  temos, em todos os casos,  $\partial_u = f_1 t + f_2 n$ . Portanto,

**Teorema 3.28.** *A superfície gerada pelas curvas das [Proposição 3.24](#) e [Proposição 3.26](#) tem como vetor normal unitário*

$$N = \frac{\partial_s \times \partial_u}{\|\partial_s \times \partial_u\|} = \frac{f_2 t \times n}{\|f_2 t \times n\|} = b,$$

que faz ângulo constante  $\theta$  com a vertical  $E_3$ .

Seja  $F : S \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$  uma imersão isométrica de uma superfície com ângulo constante  $S$  em  $SL(2, \mathbb{R})$ . Denote por  $N$  o campo vetorial normal unitário,  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$  o ângulo entre o campo vetorial  $E_3$  e  $N$ , por  $T$  a projeção de  $E_3$  sobre o plano tangente a  $S$ , isto é,  $T = E_3 - \cos \theta N$  e  $JT = N \times T$ . Podemos supor que

$$N = -\sin \theta \cos \Phi E_1 - \sin \theta \sin \Phi E_2 + \cos \theta E_3,$$

onde  $\Phi = \Phi(s, u)$  é uma função em  $S$ . Daí

$$T = \sin \theta (\cos \theta \cos \Phi E_1 + \cos \theta \sin \Phi E_2 + \sin \theta E_3),$$

$$JT = \sin \theta (-\sin \Phi E_1 + \cos \Phi E_2).$$

Logo, a curva integral do campo  $\frac{JT}{\|T\|}$  é uma curva horizontal p.c.a. e a curva integral do campo  $\frac{T}{\|T\|}$  é uma curva p.c.a. com curvatura  $\cot \theta$  e torção  $-\frac{1}{2}$  satisfazendo  $\left\langle \frac{T}{\|T\|}, E_3 \right\rangle = \sin \theta$ ,  $\left\langle \nabla_{\frac{T}{\|T\|}} \frac{T}{\|T\|}, E_3 \right\rangle = 0$  e  $\left\langle \frac{T}{\|T\|} \times \frac{\nabla_{\frac{T}{\|T\|}} \frac{T}{\|T\|}}{\cot \theta}, E_3 \right\rangle > 0$ . Portanto, ao longo da curva horizontal temos um feixe de curvas integrais do campo  $\frac{T}{\|T\|}$ , gerando uma superfície  $\tilde{S}$  com ângulo constante contida em  $S$ .

Quando  $\tilde{S}$  é uma superfície inextensível ([Teorema 3.41](#), [Teorema 3.56](#) e [Teorema 3.62](#)) temos que  $\tilde{S} = S$ . Portanto,

**Teorema 3.29.** *Uma superfície em  $SL(2, \mathbb{R})$  que faz ângulo constante,  $\theta \in (0, \pi/2)$  com a vertical  $E_3$  é da forma*

a) Se  $B = 0$ ,

$$F(s, u) = \psi_1(u) + s\psi_2(u),$$

onde  $\psi_1(u)$  e  $\psi_2(u)$  são vetores em  $\mathbb{R}_2^4$  dependendo apenas de  $u$ , satisfazendo as condições dadas no [Corolário 3.23](#) e a equação diferencial

$$\psi_1' = \frac{\sin C}{2} J_2 \psi_1 - \frac{\cos C}{2} J_3 \psi_1$$

b) Se  $B > 0$ ,

$$F(s, u) = \cos(\varphi_1 s) \psi_1(u) + \sin(\varphi_1 s) \psi_2(u) + \cos(\varphi_2 s) \psi_3(u) + \sin(\varphi_2 s) \psi_4(u),$$

onde

$$\varphi_1 = \frac{1}{2 \sin \theta} (B - \sqrt{B} \cos \theta) \quad e \quad \varphi_2 = \frac{1}{2 \sin \theta} (B + \sqrt{B} \cos \theta)$$

são constantes, e  $\psi_i(u)$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  são vetores em  $\mathbb{R}_2^4$ , dependendo apenas de  $u$ , satisfazendo as condições dadas no [Corolário 3.23](#) e a equação diferencial

$$(\psi_1 + \psi_3)' = \frac{\sin C}{2} J_2 (\psi_1 + \psi_3) - \frac{\cos C}{2} J_3 (\psi_1 + \psi_3)$$

c) Se  $B < 0$ ,

$$F(s, u) = \cos\left(\frac{\tilde{b}}{2}s\right)[\cosh(\delta s)\psi_1(u) + \sinh(\delta s)\psi_3(u)] + \sin\left(\frac{\tilde{b}}{2}s\right)[\cosh(\delta s)\psi_2(u) + \sinh(\delta s)\psi_4(u)],$$

onde  $\delta = \frac{\sqrt{-B} \cot \theta}{2}$  e  $\tilde{b} = \frac{B}{\sin \theta}$  são constantes, e  $\psi_i(u)$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  são vetores em  $\mathbb{R}_2^4$ , dependendo apenas de  $u$ , satisfazendo as condições dadas no [Corolário 3.23](#) e a equação diferencial

$$\psi_1' = \frac{\sin C}{2} J_2 \psi_1 - \frac{\cos C}{2} J_3 \psi_1$$

onde as matrizes  $J_2$  e  $J_3$  são dadas por (3.18).

*Demonstração.* Seja  $F(s, u) = (x(s, u), y(s, u), z(s, u), w(s, u))$  a superfície com ângulo constante  $\theta \in (0, \pi/2)$ . Como  $\partial_s = t$ , análogo a [Corolário 3.23](#), obtemos:

a)

$$F(s, u) = \psi_1(u) + s\psi_2(u),$$

onde  $\psi_1(u)$  e  $\psi_2(u)$  são vetores em  $\mathbb{R}_2^4$  dependendo apenas de  $u$  satisfazendo as equações dadas no [Corolário 3.23](#). Como  $F(0, u) = \beta(u)$ , onde  $\beta(u)$  é uma curva horizontal. Por outro lado  $F(0, u) = \psi_1(u)$ , logo  $\beta(u) = \psi_1(u)$ . Portanto, a equação diferencial segue imediatamente da [Proposição 3.27](#).

b)

$$F(s, u) = \cos(\varphi_1 s)\psi_1(u) + \sin(\varphi_1 s)\psi_2(u) + \cos(\varphi_2 s)\psi_3(u) + \sin(\varphi_2 s)\psi_4(u),$$

onde  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  são constantes, e  $\psi_i(u)$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  são vetores em  $\mathbb{R}_2^4$ , dependendo apenas de  $u$ , satisfazendo as condições dadas no [Corolário 3.23](#). Análogo ao caso anterior, temos  $F(0, u) = \beta(u)$ , onde  $\beta(u)$  é uma curva horizontal. Por outro lado  $F(0, u) = \psi_1(u) + \psi_3(u)$ , logo  $\beta(u) = \psi_1(u) + \psi_3(u)$ . A equação diferencial segue imediatamente da [Proposição 3.27](#).

c)

$$F(s, u) = \cos\left(\frac{\tilde{b}}{2}s\right)[\cosh(\delta s)\psi_1(u) + \sinh(\delta s)\psi_3(u)] + \sin\left(\frac{\tilde{b}}{2}s\right)[\cosh(\delta s)\psi_2(u) + \sinh(\delta s)\psi_4(u)],$$

onde  $\delta$  e  $\tilde{b}$  são constantes, e  $\psi_i(u)$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  são vetores em  $\mathbb{R}_2^4$ , dependendo apenas de  $u$ , satisfazendo as condições dadas no [Corolário 3.23](#). De  $F(0, u) = \beta(u)$  e  $F(0, u) = \psi_1(u)$ , logo  $\beta(u) = \psi_1(u)$ . A equação diferencial segue imediatamente da [Proposição 3.27](#).  $\square$

### 3.2.3 Análise da Curvatura Média

Ao longo da superfície os campos coordenados são determinados por  $\partial_s = t$  e  $\partial_u = f_1 t + f_2 n$ . Assim, os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$E = \langle \partial_s, \partial_s \rangle = 1,$$

$$F = \langle \partial_s, \partial_u \rangle = f_1,$$

$$G = \langle \partial_u, \partial_u \rangle = (f_1)^2 + (f_2)^2.$$

De

$$\nabla_{\partial_s} \partial_s = \cot \theta n,$$

$$\nabla_{\partial_s} \partial_u = g_2 n + g_3 b = g_2 n + \frac{1}{2} f_2 b,$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_u} \partial_u &= \nabla_{\partial_u} (f_1 t + f_2 n) = \partial_u(f_1) t + f_1 \nabla_{\partial_u} t + \partial_u(f_2) n + f_2 \nabla_{\partial_u} n \\ &= \partial_u(f_1) t + f_1 \nabla_{\partial_u} \partial_s + \partial_u(f_2) n + f_2 (h_1 t + h_3 b) \\ &= \partial_u(f_1) t + f_1 (g_2 n + \frac{1}{2} f_2 b) + \partial_u(f_2) n + f_2 (-g_2 t + [-\frac{1}{2} f_1 + \tan \theta g_2] b) \\ &= [\partial_u(f_1) - f_2 g_2] t + [f_1 g_2 + \partial_u(f_2)] n + \tan \theta f_2 g_2 b. \end{aligned}$$

obtemos os coeficientes da segunda forma fundamental,

$$e = \langle N, \nabla_{\partial_s} \partial_s \rangle = \langle b, \cot \theta n \rangle = 0,$$

$$f = \langle N, \nabla_{\partial_s} \partial_u \rangle = \left\langle b, g_2 n + \frac{1}{2} f_2 b \right\rangle = \frac{1}{2} f_2,$$

$$g = \langle N, \nabla_{\partial_u} \partial_u \rangle = \tan \theta f_2 g_2.$$

Portanto, a curvatura média é dada por  $H = \frac{\frac{1}{2} eG - 2fF + Eg}{EG - F^2} = \frac{\tan \theta g_2 - f_1}{2f_2}$ .

Se  $B > 0$ ,

$$H = \frac{\sqrt{B} [-\sin(s\sqrt{B} \cot \theta) + \frac{C' \sin \theta}{\sqrt{B}} \cos(s\sqrt{B} \cot \theta)]}{2[\cos(s\sqrt{B} \cot \theta) + \frac{C' \sin \theta}{\sqrt{B}} \sin(s\sqrt{B} \cot \theta)]}.$$

Se  $B = 0$ ,

$$H = \frac{C'}{2(\sqrt{2} + sC')}.$$

Se  $B < 0$ ,

$$H = \frac{\sqrt{-B} [\sinh(2\delta s) + \frac{C' \sin \theta}{\sqrt{-B}} \cosh(2\delta s)]}{2[\cosh(2\delta s) + \frac{C' \sin \theta}{\sqrt{-B}} \sinh(2\delta s)]},$$

com

$$\delta = \frac{\sqrt{-B} \cot \theta}{2}.$$

Estudo da Curvatura Média:

- Suponha que  $B > 0$ :

$H \rightarrow 0$  se

$$-\sin(s\sqrt{B} \cot \theta) + \frac{C' \sin \theta}{\sqrt{B}} \cos(s\sqrt{B} \cot \theta) = 0 \implies \tan(s\sqrt{B} \cot \theta) = \frac{C' \sin \theta}{\sqrt{B}}.$$

$H \longrightarrow \infty$  se

$$\cos(s\sqrt{B} \cot \theta) + \frac{C' \sin \theta}{\sqrt{B}} \sin(s\sqrt{B} \cot \theta) = 0 \implies \tan(s\sqrt{B} \cot \theta) = \frac{-\sqrt{B}}{C' \sin \theta}.$$

Note que

$$\frac{C' \sin \theta}{\sqrt{B}} \neq \frac{-\sqrt{B}}{C' \sin \theta}.$$

Concluimos que os pontos que anulam o numerador,  $\tan \theta g_2 - f_1$ , e o denominador,  $f_2$ , de  $H$  são distintos. Ou seja, existem pontos onde a curvatura média não existe, mesmo se  $C' \equiv 0$ . Logo, a superfície não está definida nestes pontos.

- Suponha que  $B = 0$ :

$$H \equiv 0, \text{ se } C' \equiv 0 \text{ e, caso contrário, } H \not\equiv 0 \text{ e } H \longrightarrow \infty \text{ se } \sqrt{2} + sc' = 0 \implies s = -\frac{\sqrt{2}}{C'}.$$

Existem pontos onde a curvatura média não existe. Logo, a superfície não está definida nestes pontos.

- Suponha que  $B < 0$ :

$H \longrightarrow 0$  se

$$\sinh(2\delta s) + \frac{C' \sin \theta}{\sqrt{-B}} \cosh(2\delta s) = 0 \implies \tanh(2\delta s) = -\frac{C' \sin \theta}{\sqrt{-B}}.$$

$H \longrightarrow \infty$  se

$$\cosh(2\delta s) + \frac{C' \sin \theta}{\sqrt{-B}} \sinh(2\delta s) = 0 \implies \tanh(2\delta s) = -\frac{\sqrt{-B}}{C' \sin \theta},$$

que só ocorre se

$$-1 < \tanh(2\delta s) < 1 \implies -1 < -\frac{\sqrt{-B}}{C' \sin \theta} < 1 \implies \left| \frac{\sqrt{-B}}{C' \sin \theta} \right| < 1.$$

Note que

$$-\frac{C' \sin \theta}{\sqrt{-B}} \neq -\frac{\sqrt{-B}}{C' \sin \theta}$$

exceto se  $C' = \left| \frac{\sqrt{-B}}{\sin \theta} \right|$ . Mais, se  $C' = \left| \frac{\sqrt{-B}}{\sin \theta} \right|$ , então  $\tanh(2\delta s) = -\frac{\sqrt{-B}}{C' \sin \theta} = \pm 1$ , que é um absurdo.

Concluimos que os pontos que anulam o numerador,  $\tan \theta g_2 - f_1$ , e o denominador,  $f_2$ , de  $H$  são distintos. Ou seja, se  $\left| \frac{\sqrt{-B}}{C' \sin \theta} \right| < 1$  há pontos onde a curvatura média não existe. Logo, a superfície não está definida nestes pontos. Portanto, a curvatura média está definida para todo  $s$  se  $C' \equiv 0$  e se  $\left| \frac{\sqrt{-B}}{C' \sin \theta} \right| \geq 1$ .

Nos casos onde a curvatura média não existe temos

**Corolário 3.30.** *Uma superfície em  $SL(2, \mathbb{R})$  que faz ângulo constante  $\theta$ ,  $\theta \in (0, \pi/2)$ , com a vertical  $E_3$  não é completa nos seguintes casos:*

- a)  $B > 0$ ,
  - b)  $B = 0$  com  $C' \neq 0$ ,
  - c)  $B < 0$  com  $|\frac{\sqrt{-B}}{C' \sin \theta}| < 1$ , para algum  $u$ .
  - d)  $B < 0$  com  $|\frac{\sqrt{-B}}{C' \sin \theta}| \equiv 1$ , para algum  $u$ .
- onde  $B = \cos(2\theta)$  e  $C'$  é a curvatura da curva horizontal.

O item d) é verificado na [Observação 3.35](#) onde damos uma curva divergente com comprimento finito.

A curvatura média estará definida para todo  $s$  nos seguintes casos:

- Se  $B = 0$  e  $C' \equiv 0$ . Então  $H \equiv 0$  e sua primeira forma fundamental é dada por:

$$\begin{cases} E = 1 \\ F = s \\ G = s^2 + 1 \end{cases}$$

- Se  $B < 0$  com:

i)  $C' \equiv 0$ ,  $H = \frac{\sqrt{-B} \sinh(2\delta s)}{2 \cosh(2\delta s)}$ .

Onde a primeira forma fundamental é dada por:

$$\begin{cases} E = 1 \\ F = \frac{\sinh(2\delta s)}{\sqrt{-B}} \\ G = -\frac{\sinh^2(2\delta s)}{B} + \cosh^2(2\delta s) \end{cases}$$

ii)  $C' \neq 0$ , satisfazendo  $|\frac{\sqrt{-B}}{C' \sin \theta}| \geq 1$ , então

$$H = \frac{-B \sinh(2\delta s) + \sqrt{-B} \sin \theta C' \cosh(2\delta s)}{2[\sqrt{-B} \cosh(2\delta s) + C' \sin \theta \sinh(2\delta s)]}$$

Onde a primeira forma fundamental é dada por:

$$\begin{cases} E = 1 \\ F = \frac{\sinh(2\delta s)}{\sqrt{-B}} - \frac{\sin \theta C'}{B} [\cosh(2\delta s) - 1] \\ G = \left[ \frac{C' \sin \theta \sinh(2\delta s)}{\sqrt{-B}} + \cosh(2\delta s) \right]^2 + F^2 \end{cases}$$

com

$$\delta = \frac{\sqrt{-B} \cot \theta}{2}.$$

Para mostrar a completude de algumas destas superfícies onde a curvatura média está definida para todo  $s$  serão necessários alguns resultados preliminares:

É conhecido da Álgebra Linear que toda matriz simétrica pode ser diagonalizada. Como a matriz,  $[I]$ , da primeira forma fundamental é uma matriz simétrica, então pode ser diagonalizada e possui dois autovalores  $\lambda_{min}$  e  $\lambda_{max}$ . Sejam  $v_1$  e  $v_2$  os autovetores associados aos autovalores  $\lambda_{min}$  e  $\lambda_{max}$ , respectivamente. Seja  $v = av_1 + bv_2$ , assim

$$\begin{aligned}\langle v, [I]v \rangle &= \langle av_1 + bv_2, a\lambda_{min}v_1 + b\lambda_{max}v_2 \rangle = a^2\lambda_{min} + b^2\lambda_{max} \\ &\geq \lambda_{min}(a^2 + b^2).\end{aligned}$$

Os autovalores da matriz  $[I]$  são:  $\frac{(E+G) \pm \sqrt{(E+G)^2 - 4(EG-F^2)}}{2}$ . Portanto,

$$\lambda_{min} = \frac{(E+G) - \sqrt{(E+G)^2 - 4(EG-F^2)}}{2} = \frac{2(EG-F^2)}{(E+G) + \sqrt{(E+G)^2 - 4(EG-F^2)}}.$$

Note que, como  $EG - F^2 > 0$ , temos  $(E+G)^2 - 4(EG-F^2) \leq (E+G)^2$ .

Portanto,  $\sqrt{(E+G)^2 - 4(EG-F^2)} \leq \sqrt{(E+G)^2} = E+G$ . Logo,

$$\lambda_{min} \geq \frac{EG-F^2}{E+G}.$$

Fixemos  $L > 0$ . Consideremos uma curva  $\alpha$  na superfície partindo de  $(0,0)$  com comprimento  $L_\alpha \leq L$ . Escreva  $\alpha(t) = (s(t), u(t))$ ,  $0 \leq t \leq T$ . Assim,

$$\|\alpha'\|^2 = E(s')^2 + 2Fs'u' + G(u')^2 = \langle \alpha', [I]\alpha' \rangle \geq \lambda_{min}((s')^2 + (u')^2)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad \|\alpha'\|^2 &\geq \frac{EG-F^2}{E+G}(s')^2, \\ \|\alpha'\|^2 &\geq \frac{EG-F^2}{E+G}(u')^2.\end{aligned}\tag{3.26}$$

- Suponha que  $\mathbb{R}^2$  esteja dotado da métrica

$$\begin{cases} E = 1 \\ F = s \\ G = s^2 + 1 \end{cases}$$

**Lema 3.31.** a)  $|s(t)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}e^L$ ,  $0 \leq t \leq T$ ,

b)  $|u(t)| \leq L$ ,  $0 \leq t \leq T$ .

*Demonstração.* a) Usando os coeficientes da métrica e a equação (3.26), temos que  $\|\alpha'\| \geq \frac{|s'|}{\sqrt{s^2+2}}$ . Logo,  $\int_0^T \frac{|s'|}{\sqrt{s^2+2}} dt \leq L$ .

Se  $s > 0$ ,

$$\int_0^{s_0} \frac{1}{\sqrt{s^2+2}} ds = \ln \left| \frac{\sqrt{2+s_0^2} + s_0}{\sqrt{2}} \right| \leq L \Rightarrow \frac{\sqrt{2+s_0^2} + s_0}{\sqrt{2}} \leq e^L.$$

Como  $s_0 \leq \sqrt{2 + s_0^2}$ , temos que  $\frac{2s_0}{\sqrt{2}} \leq \frac{\sqrt{2+s_0^2}+s_0}{\sqrt{2}} \leq e^L \Rightarrow s_0 \leq \frac{\sqrt{2}}{2}e^L$ .

Se  $s < 0$ ,

$$\int_0^{s_0} \frac{-1}{\sqrt{s^2+2}} ds = -\ln \left| \frac{\sqrt{2+s_0^2}+s_0}{\sqrt{2}} \right| \leq L \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+s_0^2}+s_0} \leq e^L.$$

Como  $s_0^2 \leq 2 + s_0^2$ , temos que  $-s_0 \leq \sqrt{2 + s_0^2} \Rightarrow \sqrt{2 + s_0^2} + s_0 \geq 0$ . Logo,

$$-\frac{2s_0}{\sqrt{2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+s_0^2}+s_0} \leq e^L \Rightarrow s_0 \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}e^L.$$

b) Como  $\|\alpha'\| = E(s')^2 + 2Fs'u' + G(u')^2 = (s' + su')^2 + (u')^2 \geq (u')^2$ , temos que  $\int_0^T |u'| dt \leq L$ . O resultado segue.  $\square$

Segue do [Lema 3.31](#) que

**Proposição 3.32.** *Uma curva com comprimento menor que ou igual a  $L$ , partindo de  $(0, 0)$ , está contida no retângulo  $[-\frac{\sqrt{2}}{2}e^L, \frac{\sqrt{2}}{2}e^L] \times [-L, L]$ .*

- Suponha que  $\mathbb{R}^2$  esteja dotado da métrica

$$\begin{cases} E = 1 \\ F = \frac{\sinh(2\delta s)}{\sqrt{-B}} \\ G = -\frac{\sinh^2(2\delta s)}{B} + \cosh^2(2\delta s) \end{cases}$$

**Lema 3.33.** a)  $|s(t)| \leq \sqrt{1 + \frac{1}{-B}}L$ ,  $0 \leq t \leq T$ ,

$$b) |u(t)| \leq \sqrt{1 + \frac{1}{-B}}L, \quad 0 \leq t \leq T.$$

*Demonstração.* Usando os coeficientes da métrica, temos que  $\frac{EG-F^2}{E+G} = \frac{1+\sinh^2(2\delta s)}{2+(1+\frac{1}{-B})\sinh^2(2\delta s)}$ .

Seja  $z = \sinh^2(2\delta s)$ . Assim, temos a função  $f(z) = \frac{1+z}{2+(1+\frac{1}{-B})z}$ . Note que,  $\text{Dom } f = [0, \infty)$ ,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \frac{B}{B-1} \text{ e } f'(z) = \frac{B(B+1)}{(2B+(B-1)z)^2} < 0. \text{ Concluimos que } \frac{B}{B-1} \leq f(z) \leq \frac{1}{2}.$$

Portanto,  $\frac{EG-F^2}{E+G} \geq \frac{B}{B-1}$ . Por [\(3.26\)](#), temos

$$\begin{aligned} \|\alpha'\| &\geq \frac{B}{B-1}|s'(t)|, \\ \|\alpha'\| &\geq \frac{B}{B-1}|u'(t)|. \end{aligned}$$

O resultado segue.  $\square$

**Proposição 3.34.** *Uma curva com comprimento menor que ou igual a  $L$ , partindo de  $(0, 0)$ , está contida no retângulo  $[-\sqrt{\frac{B-1}{B}}L, \sqrt{\frac{B-1}{B}}L] \times [-\sqrt{\frac{B-1}{B}}L, \sqrt{\frac{B-1}{B}}L]$ .*

- Suponha que  $\mathbb{R}^2$  esteja dotado da métrica

$$\begin{cases} E = 1 \\ F = \frac{\sinh(2\delta s)}{\sqrt{-B}} - \frac{\sin\theta C'}{B} [\cosh(2\delta s) - 1] \\ G = \left[ \frac{C' \sin\theta}{\sqrt{-B}} \sinh(2\delta s) + \cosh(2\delta s) \right]^2 + F^2 \end{cases}$$

com  $\delta = \frac{\sqrt{-B} \cot\theta}{2}$  e  $|\frac{C' \sin\theta}{\sqrt{-B}}| \leq 1$ . Para simplificar usaremos a notação

$$\Delta = \frac{C' \sin\theta}{\sqrt{-B}} \sinh(2\delta s) + \cosh(2\delta s); \quad x = \frac{C' \sin\theta}{\sqrt{-B}}; \quad y = \sinh(2\delta s).$$

**Observação 3.35.** Seja  $x \equiv 1$ . Então  $\sqrt{-B}F + 1 = y + \sqrt{1+y^2} = \Delta = e^{2\delta s}$ . Considere a curva  $\alpha(t) = (-t, -\sqrt{-B}t)$ ,  $t \in [0, \infty)$ . Daí,

$$\begin{aligned} \|\alpha'\|^2 &= E(s')^2 + 2Fs'u' + G(u')^2 = 1 + 2F\sqrt{-B} + F^2(-B) + \Delta^2(-B) \\ &= (1 + \sqrt{-B}F)^2 + \Delta^2(-B) = \Delta^2(1 - B) \end{aligned}$$

Logo,

$$L_\alpha = \int_0^\infty \sqrt{1-B} e^{-2\delta t} dt = \frac{\sqrt{1-B}}{2\delta} < \infty.$$

Portanto, a métrica não é completa se  $x \equiv 1$ .

Suponha que

$$\begin{aligned} & \left| \frac{C' \sin\theta}{\sqrt{-B}} \right| < 1, \quad \forall u, \quad \text{e que} \\ & \int_0^\infty \sqrt{1 - \left( \frac{C' \sin\theta}{\sqrt{-B}} \right)^2} du = \infty \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^0 \sqrt{1 - \left( \frac{C' \sin\theta}{\sqrt{-B}} \right)^2} du = \infty. \end{aligned} \quad (3.27)$$

**Lema 3.36.**  $\Delta \geq \sqrt{1-x^2} > 0$ .

*Demonstração.* Usando o cálculo diferencial e integral temos:  $\lim_{s \rightarrow \infty} \Delta = \lim_{s \rightarrow -\infty} \Delta = \infty$ , e  $\Delta' = 0 \Leftrightarrow s_0 = \frac{1}{2\delta} \ln \left( \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} \right)$ . Assim,  $\Delta(s_0) = \sqrt{1-x^2} > 0$ , pois  $|x| < 1$ . Portanto,  $\Delta \geq \sqrt{1-x^2} > 0$ .  $\square$

Usando os coeficientes da métrica e o [Lema 3.36](#), obtemos

$$\begin{aligned} \|\alpha'\|^2 &= E(s')^2 + 2Fs'u' + G(u')^2 = (s')^2 + 2Fs'u' + (F^2 + \Delta^2)(u')^2 \\ &= (s' + Fu')^2 + \Delta^2(u')^2 \geq \Delta^2(u')^2 \geq (1-x^2)(u')^2 \end{aligned}$$

**Lema 3.37.** a)  $\int_0^T \sqrt{1 - \left( \frac{C' \sin\theta}{\sqrt{-B}} \right)^2} |u'| dt \leq L$ .

b) Existe  $M = M(L) > 0$  tal que  $|u(t)| \leq M$ ,  $0 \leq t \leq T$ .

c) Existe  $\varepsilon = \varepsilon(M) > 0$  tal que  $\int_0^T |u'| dt \leq \frac{L}{\varepsilon}$ .

*Demonstração.* a) Como  $(1 - x^2)(u')^2 \leq \|\alpha'\|^2$ , então

$$\int_0^T \sqrt{1 - \left(\frac{C' \sin \theta}{\sqrt{-B}}\right)^2} |u'| dt \leq \int_0^T \|\alpha'\| dt \leq L.$$

b) Da equação (3.27), da definição de limite,  $\int_0^\infty \sqrt{1 - x^2} du = \infty \Leftrightarrow$  dado  $L > 0$ , existe  $M > 0$  tal que  $\int_0^u \sqrt{1 - x^2} du > L$ , sempre que  $u > M$ , e usando o item a), obtemos:

supondo  $u' > 0$ , temos  $\int_0^T \sqrt{1 - x^2} |u'| dt = \int_0^{u(T)} \sqrt{1 - x^2} du \leq L$ . Portanto,

$$u(T) \leq M.$$

Analogamente,  $\int_{-\infty}^0 \sqrt{1 - x^2} du = \infty \Leftrightarrow$  dado  $L > 0$ , existe  $M > 0$  tal que  $\int_u^0 \sqrt{1 - x^2} du > L$ , sempre que  $u > M$ .

Pelo item a), supondo  $u' < 0$ , temos  $\int_0^T \sqrt{1 - x^2} |u'| dt = -\int_0^{u(T)} \sqrt{1 - x^2} du = \int_{u(T)}^0 \sqrt{1 - x^2} du \leq L$ . Portanto,  $u(T) \geq -M$ . Logo,  $-M \leq u(T) \leq M$ .

c) Pelo item b),  $|u(t)| \leq M$ ,  $0 \leq t \leq T$ , ou seja,  $u$  está definido num intervalo compacto. Logo,  $\sqrt{1 - x^2}$  possui um mínimo, ou seja, existe  $\varepsilon = \varepsilon(M) > 0$ , pois  $|x| < 1$ , tal que  $\varepsilon \leq \sqrt{1 - x^2}$ . Portanto,

$$L \geq \int_0^T \sqrt{1 - x^2} |u'| dt \geq \int_0^T \varepsilon |u'| dt = \varepsilon \int_0^T |u'| dt.$$

□

**Lema 3.38.**  $F^2 \leq \frac{2\Delta^2}{-B} + \frac{2}{-B}$

*Demonstração.*  $(\sqrt{-BF} + x)^2 = y^2 + 2xy\sqrt{1 + y^2} + x^2(1 + y^2) \leq \Delta^2$ .

Logo,  $|\sqrt{-BF} + x| \leq \Delta$ . Assim,

$$|\sqrt{-BF}| = |\sqrt{-BF} + x - x| \leq |\sqrt{-BF} + x| + |x| \leq \Delta + 1.$$

Daí,

$$(\sqrt{-BF})^2 \leq (\Delta + 1)^2 = \Delta^2 + 2\Delta + 1 \leq 2\Delta^2 + 2,$$

pois  $2\Delta + 1 \leq \Delta^2 + 2$ .

□

Portanto, usando os coeficientes da métrica e o [Lema 3.38](#), obtemos

$$\begin{aligned} \|\alpha'\|^2 &= E(s')^2 + 2\frac{F}{\sqrt{G+1}}s'\sqrt{G+1}u' + G(u')^2 \\ &\geq (s')^2 - \frac{F^2}{G+1}(s')^2 - (G+1)(u')^2 + G(u')^2 \\ &= (s')^2 \left[1 - \frac{F^2}{G+1}\right] - (u')^2 = (s')^2 \left[\frac{\Delta^2 + 1}{F^2 + \Delta^2 + 1}\right] - (u')^2 \\ &\geq \frac{(s')^2}{1 + \frac{2}{-B}} - (u')^2 \end{aligned}$$

Daí,

$$|s'| \leq \sqrt{1 + \frac{2}{-B}} \sqrt{(u')^2 + \|\alpha'\|^2} \leq \sqrt{1 + \frac{2}{-B}} (|u'| + \|\alpha'\|)$$

**Lema 3.39.**  $\int_0^T |s'| dt \leq \sqrt{1 + \frac{2}{-B}} \left( \frac{L}{\varepsilon} + L \right)$

*Demonstração.* Pelo [Lema 3.37](#),

$$\int_0^T |s'| dt \leq \sqrt{1 + \frac{2}{-B}} \left( \int_0^T |u'| dt + \int_0^T \|\alpha'\| dt \right) \leq \sqrt{1 + \frac{2}{-B}} \left( \frac{L}{\varepsilon} + L \right)$$

□

**Proposição 3.40.** *Uma curva com comprimento menor que ou igual a  $L$ , partindo de  $(0, 0)$ , está contida no retângulo  $[-\tilde{L}, \tilde{L}] \times [-M, M]$ , onde  $\tilde{L} = \sqrt{1 + \frac{2}{-B}} \left( \frac{L}{\varepsilon} + L \right)$ .*

**Teorema 3.41.** *Uma superfície em  $SL(2, \mathbb{R})$  que faz ângulo constante  $\theta$ ,  $\theta \in (0, \pi/2)$ , com a vertical  $E_3$  é completa se:*

- a)  $B = 0$  com  $C' \equiv 0$ ,
- b)  $B < 0$  com  $C'$  satisfazendo as seguintes condições

$$\begin{aligned} & i) \left| \frac{C' \sin \theta}{\sqrt{-B}} \right| < 1, \forall u, \\ & ii) \int_0^\infty \sqrt{1 - \left( \frac{C' \sin \theta}{\sqrt{-B}} \right)^2} du = \infty, \\ & iii) \int_{-\infty}^0 \sqrt{1 - \left( \frac{C' \sin \theta}{\sqrt{-B}} \right)^2} du = \infty. \end{aligned}$$

onde  $B = \cos(2\theta)$  e  $C'$  é a curvatura da curva horizontal.

*Demonstração.* Mostraremos que uma curva divergente na superfície tem comprimento infinito. O argumento usado será por contradição. Suponha que a curva tenha comprimento finito, mostraremos que ela está contida num compacto, isto é, a curva não é divergente.

Suponha que  $\alpha$  seja uma curva, partindo da origem, com comprimento finito, ou seja,  $L_\alpha \leq L$ ,  $L \in \mathbb{R}_+^*$ . Pelas [Proposição 3.32](#), [Proposição 3.34](#) e [Proposição 3.40](#), respectivamente, as curvas estão contidas num compacto, ou seja,  $\alpha$  não é uma curva divergente. Logo, a métrica é completa. □

**Observação 3.42.** Não é claro se há alguma curva divergente com comprimento finito caso a hipótese *ii)* ou *iii)* falhar.

**Proposição 3.43.** *As superfícies do Teorema 3.41 com  $C' \equiv 0$  são dadas por:*

a)

$$F(s, u) = \psi_1(u) + s\psi_2(u),$$

onde  $\psi_1$  e  $\psi_2$  são vetores em  $\mathbb{R}_2^4$  dependendo apenas de  $u$ ,

$$\psi_1 = \cosh\left(\frac{u}{2}\right)(k_1, k_2, k_3, k_4) - \sinh\left(\frac{u}{2}\right) \cos C(k_3, -k_4, k_1, -k_2) + \sinh\left(\frac{u}{2}\right) \sin C(k_4, k_3, k_2, k_1),$$

$$\psi_2 = -\frac{\cosh\left(\frac{u}{2}\right) + \sinh\left(\frac{u}{2}\right)}{2\sqrt{2}}[(k_2, -k_1, k_4, -k_3) + \cos C(k_4, k_3, k_2, k_1) + \sin C(k_3, -k_4, k_1, -k_2)],$$

com  $k_1, k_2, k_3, k_4$  constantes satisfazendo  $k_1^2 + k_2^2 - k_3^2 - k_4^2 = 1$ .

b)

$$F(s, u) = \cos\left(\frac{\tilde{b}}{2}s\right)[\cosh(\delta s)\psi_1(u) + \sinh(\delta s)\psi_3(u)] + \sin\left(\frac{\tilde{b}}{2}s\right)[\cosh(\delta s)\psi_2(u) + \sinh(\delta s)\psi_4(u)],$$

onde  $\delta = \frac{\sqrt{-B} \cot \theta}{2}$  e  $\tilde{b} = \frac{B}{\sin \theta}$  são constantes, e  $\psi_i(u)$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  são vetores em  $\mathbb{R}_2^4$ , dependendo apenas de  $u$ ,

$$\psi_1 = \cosh\left(\frac{u}{2}\right)(k_1, k_2, k_3, k_4) - \sinh\left(\frac{u}{2}\right) \cos C(k_3, -k_4, k_1, -k_2) + \sinh\left(\frac{u}{2}\right) \sin C(k_4, k_3, k_2, k_1),$$

$$\psi_2 = -J_1\psi_1,$$

$$\psi_3 = \frac{1}{\sqrt{-B}}[\cos \theta J_1\psi_1 - \sin \theta (\cos C J_2\psi_1 + \sin C J_3\psi_1)],$$

$$\psi_4 = -J_1\psi_3,$$

com  $k_1, k_2, k_3, k_4$  constantes satisfazendo  $k_1^2 + k_2^2 - k_3^2 - k_4^2 = 1$ .

*Demonstração.* a) Como  $C' \equiv 0$ , a solução da equação diferencial dada no Teorema 3.29, item a), é dada por

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1}{2}e^{-u/2}[(e^u + 1)(k_1, k_2, k_3, k_4) \\ &\quad - (e^u - 1) \cos C(k_3, -k_4, k_1, -k_2) + (e^u - 1) \sin C(k_4, k_3, k_2, k_1)], \end{aligned}$$

onde  $k_1, k_2, k_3$  e  $k_4$  são constantes de integração satisfazendo  $k_1^2 + k_2^2 - k_3^2 - k_4^2 = 1$ , pois  $\langle \psi_1, \psi_1 \rangle = 1$ . Pelo Corolário 3.23, item a), temos

$$\psi_2 = -\frac{e^{u/2}}{2\sqrt{2}}[(k_2, -k_1, k_4, -k_3) + \cos C(k_4, k_3, k_2, k_1) + \sin C(k_3, -k_4, k_1, -k_2)].$$

b) Como  $C' \equiv 0$ , a solução da equação diferencial dada no Teorema 3.29, item c), é dada por

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \frac{1}{2}e^{-u/2}[(e^u + 1)(k_1, k_2, k_3, k_4) \\ &\quad - (e^u - 1)\cos C(k_3, -k_4, k_1, -k_2) + (e^u - 1)\sin C(k_4, k_3, k_2, k_1)],\end{aligned}$$

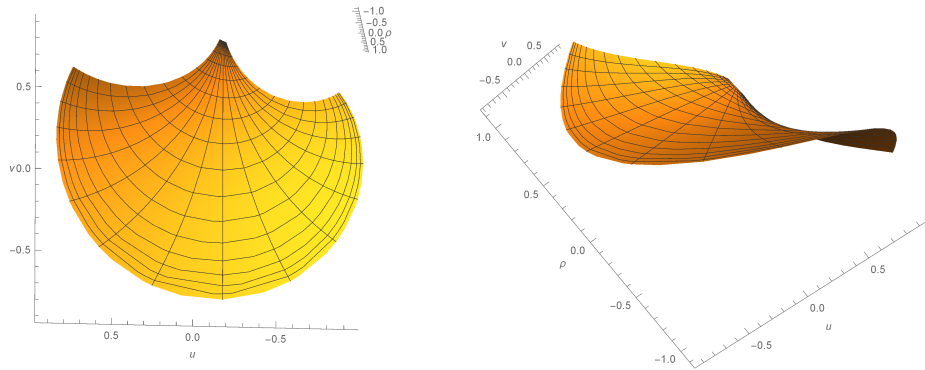
onde  $k_1, k_2, k_3$  e  $k_4$  são constantes de integração satisfazendo  $k_1^2 + k_2^2 - k_3^2 - k_4^2 = 1$ , pois  $\langle \psi_1, \psi_1 \rangle = 1$ . As funções  $\psi_2, \psi_3$  e  $\psi_4$  são dadas pelo Corolário 3.23, item c).  $\square$

**Exemplo 3.44.** Daremos um exemplo explícito de superfície com ângulo constante  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , ou seja  $B = 0$ , com  $C \equiv \pi$ . Considere a condição inicial  $(k_1, k_2, k_3, k_4) = (1, 0, 0, 0)$ . Assim, a superfície é dada por

$$F(s, u) = (\cosh(u/2), \frac{se^{u/2}}{2\sqrt{2}}, \sinh(u/2), \frac{se^{u/2}}{2\sqrt{2}}), \quad s, u \in \mathbb{R}. \quad (3.28)$$

$F(s, u)$  dá uma imersão explícita de uma superfície com ângulo constante em  $SL(2, \mathbb{R})$ . Para não causar confusão entre o parâmetro  $u$  da superfície e a coordenada  $u$  do espaço  $SL(2, \mathbb{R})$ , façamos  $t = u$  na parametrização de  $F$ . Na Figura 2 plotamos alguns pontos de vista da superfície parametrizada (3.28) nas coordenadas  $(u, v, \rho)$  de  $SL(2, \mathbb{R})$  com  $s, t \in [-3, 3]$ .

$$\text{Figura 2} - F(s, t) = \left( \frac{-yz-xw}{x^2+y^2}, \frac{-xz+yw}{x^2+y^2}, \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \right), \quad s, t \in [-3, 3].$$



Fonte: Produzido pelo autor.

É conhecido da teoria das superfícies completas que tal superfície é invariante por um subgrupo a um parâmetro do grupo de isometrias se a curva integral de um campo de Killing qualquer está inteiramente contida na superfície, ou seja, se existir constantes  $c_1, c_2, c_3$  e  $c_4$ , e funções  $g = g(s, u)$  e  $h = h(s, u)$  tais que

$$c_1 K_1 + c_2 K_2 + c_3 K_3 + c_4 K_4 = g \partial_s + h \partial_u. \quad (3.29)$$

onde  $K_1, K_2, K_3$  e  $K_4$  são os campos de Killing em  $SL(2, \mathbb{R})$ .

**Teorema 3.45.** *Uma superfície completa em  $SL(2, \mathbb{R})$  que faz ângulo constante,  $\theta \in (0, \pi/2)$  com a vertical  $E_3$ , é invariante por um subgrupo a um parâmetro do grupo de isometrias se e somente se*

a)  $B = 0$  com  $C' \equiv 0$  e, uma das condições abaixo é satisfeita:

i)  $C = \pi + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $c_1 = 0$ ,  $c_2, c_3$  constantes tais que

$$c_2[(k_1 + k_3)^2 + (k_2 - k_4)^2] + 2c_3(k_1 + k_3)(k_2 - k_4) = 0$$

e  $c_4$  constante livre;

ii)  $C$  é solução da equação

$$(k_1 - k_3) \cos\left(\frac{C}{2}\right) + (k_4 - k_2) \sin\left(\frac{C}{2}\right) = 0,$$

$c_1 = c_2 = c_4 = 0$  e  $c_3$  constante livre;

iii)  $C$  é solução da equação

$$\begin{aligned} 0 &= c_2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2) + 2c_3(k_2k_3 - k_1k_4) \\ &\quad - 2[c_2(k_1k_3 - k_2k_4) + c_3(k_1k_2 - k_3k_4)] \cos C \\ &\quad + [2c_2(k_2k_3 + k_1k_4) + c_3(-k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - k_4^2)] \sin C, \end{aligned}$$

$c_1 = c_4 = 0$  e  $c_2, c_3$  constantes livres.

$k_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  são as constantes de integração dadas na Proposição anterior.

b)  $B < 0$  com  $C' \equiv 0$  e  $C$  sendo uma solução da equação

$$2(k_1k_2 + k_3k_4) \cos C + (k_1^2 - k_2^2 + k_3^2 - k_4^2) \sin C = 0,$$

$c_1 = c_4 = 0$  e  $c_2$  e  $c_3$  satisfazendo  $c_2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2) = 2c_3(k_1k_4 - k_2k_3)$ , onde  $k_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  são as constantes de integração dadas na Proposição anterior.

*Demonstração.* Seja  $F(s, u) = (x(s, u), y(s, u), z(s, u), w(s, u))$  dada pelo Teorema 3.29. Como  $\partial_s = t$  e  $\partial_u = f_1t + f_2n$ , conhecendo os campos de Killing em  $SL(2, \mathbb{R})$  e usando (3.13), temos que a equação (3.29) é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} 4(xz - yw)c_2 + 4(xy - zw)c_3 + [(y - w)^2 - (x - z)^2]c_4 = \\ (g + hf_1) \cos \theta \cos \omega - hf_2 \sin \omega \\ 4(-xw - yz)c_2 + 2(x^2 - y^2 - z^2 + w^2)c_3 + 2(x - z)(y - w)c_4 = \\ (g + hf_1) \cos \theta \sin \omega + hf_2 \cos \omega \\ 2c_1 + 2(x^2 + y^2 + z^2 + w^2)c_2 + 4(-xw + yz)c_3 + [(x - z)^2 - (y - w)^2]c_4 = \\ (g + hf_1) \sin \theta \end{cases} \quad (3.30)$$

onde  $f_1$  e  $f_2$  são dados em (3.24) e (3.25). Das duas primeiras equações temos que as funções  $g$  e  $h$  são determinadas por

$$\begin{aligned} hf_2 &= \cos \omega [4(-xw - yz)c_2 + 2(x^2 - y^2 - z^2 + w^2)c_3 + 2(x - z)(y - w)c_4] \\ &\quad - \sin \omega [4(xz - yw)c_2 + 4(xy - zw)c_3 + [(y - w)^2 - (x - z)^2]c_4] \\ g &= \frac{\cos \omega}{\cos \theta} [4(xz - yw)c_2 + 4(xy - zw)c_3 + [(y - w)^2 - (x - z)^2]c_4] \\ &\quad + \frac{\sin \omega}{\cos \theta} [4(-xw - yz)c_2 + 2(x^2 - y^2 - z^2 + w^2)c_3 + 2(x - z)(y - w)c_4] - hf_1 \end{aligned}$$

Conhecendo a superfície, dada pela [Proposição 3.43](#) e, substituindo os valores de  $f_1, f_2, g$  e  $h$  na terceira equação de (3.30), obtemos um sistema cujas soluções são:

a)

i)  $C = \pi + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $c_1 = 0$ ,  $c_2, c_3$  constantes tais que  $c_2[(k_1 + k_3)^2 + (k_2 - k_4)^2] + 2c_3(k_1 + k_3)(k_2 - k_4) = 0$  e  $c_4$  constante livre.

ii)  $C$  sendo solução constante da equação

$$(k_1 - k_3) \cos \left( \frac{C}{2} \right) + (k_4 - k_2) \sin \left( \frac{C}{2} \right) = 0,$$

$c_1 = c_2 = c_4 = 0$  e  $c_3$  constante.

iii)  $C$  sendo solução da equação

$$\begin{aligned} 0 &= c_2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2) + 2c_3(k_2k_3 - k_1k_4) \\ &\quad - 2[c_2(k_1k_3 - k_2k_4) + c_3(k_1k_2 - k_3k_4)] \cos C \\ &\quad + [2c_2(k_2k_3 + k_1k_4) + c_3(-k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - k_4^2)] \sin C, \end{aligned}$$

$c_1 = c_4 = 0$  e  $c_2, c_3$  constantes livres.

Onde  $k_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  são as constantes de integração dadas na [Proposição](#) anterior.

b)  $C$  sendo uma solução da equação

$$2(k_1k_2 + k_3k_4) \cos C + (k_1^2 - k_2^2 + k_3^2 - k_4^2) \sin C = 0,$$

$c_1 = c_4 = 0$  e  $c_2$  e  $c_3$  satisfazendo  $c_2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2) = 2c_3(k_1k_4 - k_2k_3)$ , onde  $k_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  são as constantes de integração dadas na [Proposição](#) anterior.

Portanto, existem constantes  $c_1, c_2, c_3$  e  $c_4$ , e funções  $g = g(s, u)$  e  $h = h(s, u)$  tais que (3.29) é verificado.  $\square$

**Proposição 3.46.** *Uma superfície com ângulo constante completa em  $SL(2, \mathbb{R})$  satisfazendo  $B < 0$  e  $C' \neq 0$  não é invariante por um subgrupo a um parâmetro do grupo das isometrias.*

*Demonstração.* Seja  $\psi_1(u) = (r_1(u), r_2(u), r_3(u), r_4(u))$ . A terceira equação de (3.30) nos dá a equação

$$2c_1 + 2c_2(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 + 2(-r_1r_3 + r_2r_4) \cos C \tan \theta + 2(r_2r_3 + r_1r_4) \sin C \tan \theta) + 2c_3(2r_2r_3 - 2r_1r_4 + 2(-r_1r_2 + r_3r_4) \cos C \tan \theta + (-r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 - r_4^2) \sin C \tan \theta) = 0$$

que, usando um programa computacional juntamente com a condição  $r_1^2 + r_2^2 - r_3^2 - r_4^2 = 1$  e com a equação diferencial dada no Teorema 3.29, não possui solução. Portanto, uma superfície com ângulo constante completa em  $SL(2, \mathbb{R})$  com  $B < 0$  e  $C' \neq 0$  não satisfaz o sistema (3.30), ou seja, não existem constantes  $c_1, c_2, c_3$  e  $c_4$  tais que a equação (3.29) é verificada. Logo, esta superfície não é invariante por um subgrupo a um parâmetro do grupo das isometrias.  $\square$

**Observação 3.47.** Sejam  $\lambda_t, \zeta_t$  e  $\xi_t$  as isometrias dos Exemplo 3.12, Exemplo 3.14 e Exemplo 3.15, respectivamente. Então, segue por meio de um longo cálculo que as isometrias  $\zeta_{c_3t}, \zeta_{c_3t} \circ \lambda_{c_2t}$  e  $\xi_{c_4t} \circ \zeta_{c_3t} \circ \lambda_{c_2t}$  têm como geradores infinitesimais os campos vetoriais  $c_3K_3, c_2K_2 + c_3K_3$  e  $c_2K_2 + c_3K_3 + c_4K_4$ , respectivamente.

**Corolário 3.48.** *Uma superfície completa em  $SL(2, \mathbb{R})$  que faz ângulo constante,  $\theta \in (0, \pi/2)$  com a vertical  $E_3$  é invariante pelo seguinte subgrupo a um parâmetro:*

a)  $\phi_t = \zeta_{c_3t} \circ \lambda_{c_2t}$ , se

i)  $B = 0$  com  $C$  constante satisfazendo a equação

$$\begin{aligned} 0 &= c_2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2) + 2c_3(k_2k_3 - k_1k_4) \\ &\quad - 2[c_2(k_1k_3 - k_2k_4) + c_3(k_1k_2 - k_3k_4)] \cos C \\ &\quad + [2c_2(k_2k_3 + k_1k_4) + c_3(-k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - k_4^2)] \sin C \end{aligned}$$

onde  $c_2$  e  $c_3$  constantes arbitrárias;

ii)  $B < 0$  com  $C$  constante satisfazendo a equação

$$2(k_1k_2 + k_3k_4) \cos C + (k_1^2 - k_2^2 + k_3^2 - k_4^2) \sin C = 0,$$

e  $c_2, c_3$  constantes satisfazendo  $c_2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2) = 2c_3(k_1k_4 - k_2k_3)$ ;

b)  $\phi_t = \xi_{c_4t} \circ \zeta_{c_3t} \circ \lambda_{c_2t}$ , se  $B = 0, C = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$  e  $c_2, c_3$  constantes tais que

$$c_2[(k_1 + k_3)^2 + (k_2 - k_4)^2] + 2c_3(k_1 + k_3)(k_2 - k_4) = 0,$$

e  $c_4$  uma constante arbitrária;

c)  $\phi_t = \zeta_{c_3t}$ , se  $B = 0, C$  constante satisfazendo

$$(k_1 - k_3) \cos\left(\frac{C}{2}\right) + (k_4 - k_2) \sin\left(\frac{C}{2}\right) = 0,$$

com  $c_3$  uma constante arbitrária.

Os  $k_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  são as constantes de integração dadas na [Proposição 3.43](#) e  $\lambda_t$ ,  $\zeta_t$ ,  $\xi_t$  são dados nos [Exemplo 3.12](#), [Exemplo 3.14](#) e [Exemplo 3.15](#), respectivamente.

**Exemplo 3.49.** A superfície (3.28) dada no [Exemplo 3.44](#) é um exemplo de superfície com ângulo constante completa e invariante pela isometria  $\phi_t = \xi_{c_1 t} \circ \zeta_{c_2 t}$ , onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes arbitrárias e  $\zeta_t$ ,  $\xi_t$  são dados nos [Exemplo 3.14](#) e [Exemplo 3.15](#), respectivamente.

A seguir, mostraremos a inextensibilidade de algumas das superfícies  $S$  com ângulo constante não completas quando o parâmetro  $u$  da curva horizontal está definido para todo  $\mathbb{R}$ . Para tal, será necessário a introdução de alguns conceitos:

Seja  $S$  uma superfície dada pelo domínio  $D$  (a ser determinado) com primeira forma fundamental dada, e imersão isométrica  $F : S \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$ . Supomos que  $S$  é extensível, no sentido de haver um mergulho isométrico  $i : S \rightarrow \tilde{S}$  ( $\tilde{S}$  conexa) e uma imersão  $\tilde{F} : \tilde{S} \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$  tais que  $\tilde{F} \circ i = F$ .

Como  $i$  é imersão,  $i(S) \subset \tilde{S}$  é aberto. Se mostrarmos que  $i(S) \subset \tilde{S}$  é fechado, então  $i(S) = \tilde{S}$ , ou seja  $F : S \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$  é inextensível.

Suponha que  $\overline{i(S)} - i(S) = \partial(i(S)) \neq \emptyset$ .

**Lema 3.50.** *Existem  $p \in \partial(i(S))$  e geodésica minimizante  $\gamma : [0, T] \rightarrow \tilde{S}$  tais que  $\gamma(t) \in i(D)$ ,  $\forall t \in [0, T]$  e  $\gamma(T) = p$ .*

*Demonstração.* Seja  $q_1 \in \partial(i(S))$ . Seja  $B$  uma bola normal centrada em  $q_1$ . Seja  $q_2 \in B \cap i(D)$ . Considere a geodésica minimizante  $\gamma : [0, T_1] \rightarrow \tilde{S}$  tal que  $\gamma(0) = q_2$  e  $\gamma(T_1) = q_1$ , com  $T_1 = d(q_1, q_2)$ .

Seja  $T = \sup\{\tau \mid \gamma(t) \in i(D), 0 \leq t \leq \tau\}$ . Então,  $p = \gamma(T)$  satisfaz as condições.  $\square$

Consideramos as funções  $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por

$$f(t) = s(i^{-1}(\gamma(t)))$$

$$g(t) = u(i^{-1}(\gamma(t)))$$

**Definição 3.51.** Seja  $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ . Diremos que  $h$  possui *extensão diferenciável* a  $\tilde{S}$  se existe função diferenciável  $\tilde{h} : \overline{i(S)} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\tilde{h}(i(s, u)) = h(s, u)$ ,  $\forall (s, u) \in D$ .

- Suponha  $B > 0$ , e que a curva horizontal  $\beta$  está definida para todo  $u \in \mathbb{R}$ .

Sejam  $\xi = \xi(u) = \arctan\left(\frac{C' \sin \theta}{\sqrt{B}}\right)$  e  $x = \xi - s\sqrt{B} \cot \theta$ . Assim, a primeira forma fundamental se reescreve como:

$$\begin{aligned} E &= 1, \\ F &= \frac{\sin \xi - \sin x}{\sqrt{B} \cos \xi}, \\ G &= F^2 + \Delta^2, \text{ onde } \Delta = \frac{\cos x}{\cos \xi}. \end{aligned}$$

e a curvatura média como:

$$H = \frac{\sqrt{B}}{2} \tan x.$$

Daí,  $x = \arctan(\frac{2H}{\sqrt{B}}) \Rightarrow -\pi/2 < x < \pi/2$ . O domínio dos parâmetros é dado por:

$$D = \{(s, u) \mid -\pi/2 < x < \pi/2, u \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2,$$

ou seja,

$$-\pi/2 + \xi(u) < s\sqrt{B} \cot \theta < \pi/2 + \xi(u).$$

Para cada  $u$ , temos um intervalo de comprimento  $\frac{\pi}{\sqrt{B} \cot \theta}$ .

**Lema 3.52.** *As funções  $x$  e  $\omega = \frac{\cos(2\theta)}{\sin \theta} s + C(u)$  possuem extensões diferenciáveis a  $\tilde{S}$ , e  $-\pi/2 < \tilde{x} < \pi/2$ .*

*Demonstração.* A curvatura média  $H$  e o campo normal  $N$  estão definidos em  $\tilde{S}$ . Podendo, assim, serem estendidos a  $\tilde{S}$ .

Defina  $\tilde{x} = \arctan(\frac{2\tilde{H}}{\sqrt{B}})$ . Assim,  $\tilde{x} \circ i = x$  e  $-\pi/2 < \tilde{x} < \pi/2$ .

Como  $\sin \theta \cos \omega = \langle N, E_1 \rangle$  e  $\sin \theta \sin \omega = \langle N, E_2 \rangle$ ,  $\omega$  pode ser estendido.  $\square$

**Lema 3.53.** *As funções  $f$  e  $g$  têm extensões contínuas a  $[0, T]$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $\gamma$  é p.c.a. Como  $i$  é isometria e usando a regra da cadeia temos

$$f'(t) = \left\langle \text{grad } s, \frac{d}{dt}(i^{-1}(\gamma(t))) \right\rangle \leq \|\text{grad } s\| \|di_{\gamma(t)}^{-1}(\gamma'(t))\| = \|\text{grad } s\| \|\gamma'(t)\| = \|\text{grad } s\|$$

Analogamente,

$$g'(t) \leq \|\text{grad } u\|.$$

Basta mostrar que  $\|\text{grad } s\|$  e  $\|\text{grad } u\|$  são limitados.

Seja  $\text{grad } s = a\partial_s + b\partial_u$ . Por definição,  $\langle \text{grad } s, \partial_s \rangle = \partial_s(s) = 1$ . Por outro lado,

$$\langle \text{grad } s, \partial_s \rangle = aE + bF \Rightarrow aE + bF = 1.$$

Analogamente,  $\langle \text{grad } s, \partial_u \rangle = \partial_u(s) = 0$ . Por outro lado,

$$\langle \text{grad } s, \partial_u \rangle = aF + bG \Rightarrow aF + bG = 0.$$

Portanto,

$$\begin{cases} aE + bF = 1 \\ aF + bG = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{G}{EG - F^2}, \quad b = \frac{-F}{EG - F^2}$$

Assim, usando os coeficientes da métrica, obtemos

$$\|grad\ s\|^2 = 1 + \frac{(\sin \xi - \sin x)^2}{B \cos^2 x}$$

Da mesma forma verifica-se que  $\|grad\ u\|^2 = \frac{\cos^2 \xi}{\cos^2 x}$ .

Podemos supor que  $\gamma([0, T])$  está contida na vizinhança de  $p$  na qual  $\frac{1}{\cos^2 \tilde{x}}$  é limitada, onde  $\tilde{x}$  é a extensão de  $x$  a  $\tilde{S}$ . Assim, as funções  $f$  e  $g$  têm derivadas limitadas, de onde segue o resultado.  $\square$

**Lema 3.54.**  $(f(T), g(T)) \in D$

*Demonstração.* Temos  $x(i^{-1}(\gamma(t))) = \xi(g(t)) - f(t)\sqrt{B} \cot \theta$ . Como  $\tilde{x} \circ i = x$ , e por continuidade,

$$x(i^{-1}(\gamma(t))) = \tilde{x}(\gamma(t)) \rightarrow \tilde{x}(p) \quad \text{quando } t \rightarrow T.$$

Também por continuidade,

$$x(i^{-1}(\gamma(t))) = \xi(g(t)) - f(t)\sqrt{B} \cot \theta \rightarrow \xi(g(T)) - f(T)\sqrt{B} \cot \theta \quad \text{quando } t \rightarrow T.$$

Logo,  $\tilde{x}(p) = \xi(g(T)) - f(T)\sqrt{B} \cot \theta$ . Pelo [Lema 3.52](#),  $-\pi/2 < \tilde{x}(p) < \pi/2$ . O resultado segue.  $\square$

**Lema 3.55.**  $p = i(f(T), g(T))$

*Demonstração.* Temos que  $\gamma(t) = i(f(t), g(t))$ . Logo, por continuidade, temos

$$p = \lim_{t \rightarrow T} \gamma(t) = \lim_{t \rightarrow T} i(f(t), g(t)) = i(f(T), g(T)).$$

$\square$

**Teorema 3.56.**  $S$  é inextensível.

**Observação 3.57.** Não é claro que  $S$  é inextensível se o intervalo de definição de  $\beta$  não for  $\mathbb{R}$ . O ponto  $p$  da fronteira corresponderia a  $u_0$  no extremo do intervalo, e poderíamos ter  $s_0 \neq 0$  e  $\xi_0 = \pm\pi/2$ , mas ainda assim  $-\pi/2 < x_0 < \pi/2$ .

• Suponha  $B < 0$  com  $|\frac{C' \sin \theta}{\sqrt{-B}}| > 1$ , e que a curva horizontal  $\beta$  está definida para todo  $u \in \mathbb{R}$ .

Sejam  $\xi = \xi(u) = \coth^{-1} \left( \frac{C' \sin \theta}{\sqrt{-B}} \right)$  e  $x = x = \xi + 2\delta s$ . Assim, a primeira forma fundamental se reescreve como:

$$\begin{aligned} E &= 1, \\ F &= \frac{\cosh x - \cosh \xi}{\sqrt{-B} \sinh \xi}, \\ G &= F^2 + \Delta^2, \quad \text{onde } \Delta = \frac{\sinh x}{\sinh \xi}. \end{aligned}$$

e a curvatura média como:

$$H = \frac{\sqrt{-B}}{2} \coth x.$$

Daí,  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ . O domínio dos parâmetros é dado por:

$$D = \{(s, u) | x \in \mathbb{R} - \{0\}, u \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2,$$

ou seja, para cada  $u$ ,  $s \neq -\frac{\xi(u)}{2\delta}$ .

**Hipótese:** Suponha que exista uma constante  $\tilde{C}$  tal que  $|\frac{C' \sin \theta}{\sqrt{-B}}| \geq \tilde{C} > 1$ .

Portanto,  $|\xi| \leq \coth^{-1}(\tilde{C})$ .

**Lema 3.58.** As funções  $x$  e  $\omega = \frac{\cos(2\theta)}{\sin \theta} s + C(u)$  possuem extensões diferenciáveis a  $\tilde{S}$ , e  $\tilde{x} \in \mathbb{R} - \{0\}$ .

*Demonstração.* A curvatura média  $H$  e o campo normal  $N$  estão definidos em  $\tilde{S}$ . Podendo, assim, serem estendidos a  $\tilde{S}$ .

Defina  $\tilde{x} = \coth^{-1}(\frac{2\tilde{H}}{\sqrt{-B}})$ . Assim,  $\tilde{x} \circ i = x$  e  $\tilde{x} \in \mathbb{R} - \{0\}$ .

Como  $\sin \theta \cos \omega = \langle N, E_1 \rangle$  e  $\sin \theta \sin \omega = \langle N, E_2 \rangle$ ,  $\omega$  pode ser estendido.  $\square$

**Lema 3.59.** As funções  $f$  e  $g$  têm extensões contínuas a  $[0, T]$ .

*Demonstração.* Suponha que  $\gamma$  é p.c.a. Como  $i$  é isometria e usando a regra da cadeia temos

$$f'(t) = \left\langle \text{grad } s, \frac{d}{dt}(i^{-1}(\gamma(t))) \right\rangle \leq \|\text{grad } s\| \|di_{\gamma(t)}^{-1}(\gamma'(t))\| = \|\text{grad } s\| \|\gamma'(t)\| = \|\text{grad } s\|$$

Analogamente,

$$g'(t) \leq \|\text{grad } u\|.$$

Basta mostrar que  $\|\text{grad } s\|$  e  $\|\text{grad } u\|$  são limitadas.

Seja  $\text{grad } s = a\partial_s + b\partial_u$ . Por definição,  $\langle \text{grad } s, \partial_s \rangle = \partial_s(s) = 1$ . Por outro lado,

$$\langle \text{grad } s, \partial_s \rangle = aE + bF \Rightarrow aE + bF = 1.$$

Analogamente,  $\langle \text{grad } s, \partial_u \rangle = \partial_u(s) = 0$ . Por outro lado,

$$\langle \text{grad } s, \partial_u \rangle = aF + bG \Rightarrow aF + bG = 0.$$

Portanto,

$$\begin{cases} aE + bF = 1 \\ aF + bG = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{G}{EG - F^2}, \quad b = \frac{-F}{EG - F^2}$$

Assim, usando os coeficientes da métrica, obtemos

$$\|\text{grad } s\|^2 = 1 + \frac{F^2}{\Delta^2} = 1 + \frac{(\cosh x - \cosh \xi)^2}{-B \sinh^2 x} = 1 + \frac{\coth^2 x}{-B} - \frac{2 \coth x \cosh \xi}{-B \sinh x} + \frac{\cosh^2 \xi}{-B \sinh^2 x}.$$

Da mesma forma verifica-se que  $\|\text{grad } u\|^2 = \frac{1}{\Delta^2} = \frac{\sinh^2 \xi}{\sinh^2 x}$ .

Como  $|\xi| \leq \coth^{-1}(\tilde{C})$ , então  $\cosh \xi$  e  $\sinh \xi$  são limitadas. Podemos supor que  $\gamma([0, T])$  está contida na vizinhança de  $p$  na qual  $\frac{1}{\sinh^2 \tilde{x}}$  é limitada, onde  $\tilde{x}$  é a extensão de  $x$  a  $\tilde{S}$ , ou seja,  $\tilde{x} \rightarrow 0$ , logo  $\coth \tilde{x} \rightarrow \infty$ . Assim, as funções  $f$  e  $g$  têm derivadas limitadas, de onde segue o resultado.  $\square$

**Lema 3.60.**  $(f(T), g(T)) \in D$

*Demonstração.* Temos  $x(i^{-1}(\gamma(t))) = \xi(g(t)) + 2\delta f(t)$ . Como  $\tilde{x} \circ i = x$ , e por continuidade,

$$x(i^{-1}(\gamma(t))) = \tilde{x}(\gamma(t)) \rightarrow \tilde{x}(p) \quad \text{quando } t \rightarrow T.$$

Também por continuidade,

$$x(i^{-1}(\gamma(t))) = \xi(g(t)) + 2\delta f(t) \rightarrow \xi(g(T)) + 2\delta f(T) \quad \text{quando } t \rightarrow T.$$

Logo,  $\tilde{x}(p) = \xi(g(T)) + 2\delta f(T)$ . Pelo [Lema 3.58](#),  $\tilde{x}(p) \in \mathbb{R} - \{0\}$ . O resultado segue.  $\square$

**Lema 3.61.**  $p = i(f(T), g(T))$

*Demonstração.* Temos que  $\gamma(t) = i(f(t), g(t))$ . Logo, por continuidade, temos

$$p = \lim_{t \rightarrow T} \gamma(t) = \lim_{t \rightarrow T} i(f(t), g(t)) = i(f(T), g(T)).$$

$\square$

**Teorema 3.62.**  $S$  é inextensível.

**Observação 3.63.** Não é claro que  $S$  é inextensível se o intervalo de definição de  $\beta$  não for  $\mathbb{R}$ . O ponto  $p$  da fronteira corresponderia a  $u_0$  no extremo do intervalo, e poderíamos ter  $s_0 \neq 0$  e  $\xi_0 = 0$ , mas ainda assim  $x_0 \in \mathbb{R} - \{0\}$ .

# 4 SUPERFÍCIES COM ÂNGULO CONSTANTE NAS ESFERAS DE BERGER

Na geometria Riemanniana, as Esferas de Berger são espaços Riemannianos difeomorfos a esfera  $\mathbb{S}^3$ . Estes espaços foram encontrados por M. Berger em (23) na classificação de todas as variedades Riemannianas normais, simplesmente conexas, de curvatura seccional positiva não constante, e sua métrica é obtida da métrica padrão de  $\mathbb{S}^3$  por uma deformação ao longo das fibras da fibração de Hopf  $\mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$  por  $\tau > 0$ . As Esferas de Berger são os espaços  $BCV \widetilde{M}^3(\kappa, \tau)$  com  $\kappa = 4$  e  $\tau > 0$ . Mais sobre este espaço pode ser encontrado em (24, 25, 26).

Neste capítulo iremos apresentar a geometria da Esferas de Berger e daremos uma descrição geométrica global para as superfícies que fazem ângulo constante com o campo vetorial distinguido  $E_3$ . Esta construção dependerá de uma constante estritamente positiva  $B = \tau^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta$ ,  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Em seguida, encerramos com uma análise de sua curvatura média, donde conclui-se que tais superfícies não são completas e são inextensíveis caso o parâmetro  $u$  esteja definido para todo  $\mathbb{R}$ , caso contrário, não é claro que esta superfície seja estendível ou não.

## 4.1 Geometria Riemanniana das Esferas de Berger

### 4.1.1 $\mathbb{S}^3$ como Grupo de Lie

Identificamos  $\mathbb{S}^3$  e o grupo de Lie  $SU(2)$  pelo mapa que envia  $(z, w) \in \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$  em  $\begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \in SU(2)$ . O elemento neutro deste grupo é

$$(1, 0) \in \mathbb{C}^2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SU(2).$$

Sejam  $z = x + iy$  e  $w = a + ib$ , onde  $(x, y, a, b) \in \mathbb{R}^4$  tais que  $x^2 + y^2 + a^2 + b^2 = 1$ . Assim,

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} x + iy & a + ib \\ -a + ib & x - iy \end{pmatrix} / x^2 + y^2 + a^2 + b^2 = 1 \right\}.$$

O espaço tangente a  $SU(2)$  na matriz identidade, que denotamos por  $e$ , é descrito da seguinte forma:

$$\partial_y = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x} + i & 0 \\ 0 & -\frac{y}{x} - i \end{pmatrix} \Rightarrow \partial_y(e) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

$$\partial_a = \begin{pmatrix} -\frac{a}{x} & 1 \\ -1 & -\frac{a}{x} \end{pmatrix} \Rightarrow \partial_a(e) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\partial_b = \begin{pmatrix} -\frac{b}{x} & i \\ i & -\frac{b}{x} \end{pmatrix} \Rightarrow \partial_b(e) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} T_e(SU(2)) &= \left\{ \begin{pmatrix} ia_1 & a_2 + ia_3 \\ -a_2 + ia_3 & -ia_1 \end{pmatrix} / a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{span}\{e_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\}. \end{aligned}$$

Donde obtemos,  $[e_1, e_2] = 2e_3$ ,  $[e_2, e_3] = 2e_1$  e  $[e_3, e_1] = 2e_2$ .

O grupo  $SU(2)$  está contido no espaço vetorial real tetradimensional

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \mid (z, w) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

Sejam  $z = x + iy$  e  $w = a + ib$ . Pela correspondência

$$\begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \in V \leftrightarrow (z, w) \in \mathbb{C}^2 \leftrightarrow (x, y, a, b) \in \mathbb{R}^4,$$

o produto de matrizes em  $V$  pode ser expresso em termos das coordenadas  $(z, w) \in \mathbb{C}^2$  por

$$L_{(z_0, w_0)}(z, w) = (zz_0 - \bar{w}w_0, wz_0 + \bar{z}w_0),$$

e nas coordenadas  $(x, y, a, b) \in \mathbb{R}^4$  por

$$\begin{aligned} L_{(x_0, y_0, a_0, b_0)}(x, y, a, b) &= (xx_0 - yy_0 - aa_0 - bb_0, xy_0 + yx_0 - ab_0 + ba_0, \\ &\quad xa_0 + yb_0 + ax_0 - by_0, xb_0 - ya_0 + ay_0 + bx_0). \end{aligned}$$

Olhando a translação à esquerda como uma aplicação de  $\mathbb{R}^4$  em  $\mathbb{R}^4$ , temos:

$$(dL_{(x, y, a, b)})_e = \begin{pmatrix} x & -y & -a & -b \\ y & x & -b & a \\ a & b & x & -y \\ b & -a & y & x \end{pmatrix}$$

Note que,

$$e_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \in su(2) \sim (i, 0) \in \mathbb{C}^2 \sim (0, 1, 0, 0) \in \mathbb{R}^4,$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in su(2) \sim (0, 1) \in \mathbb{C}^2 \sim (0, 0, 1, 0) \in \mathbb{R}^4,$$

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \in su(2) \sim (0, i) \in \mathbb{C}^2 \sim (0, 0, 0, 1) \in \mathbb{R}^4.$$

Para cada  $e_i$ , definimos o campo invariante à esquerda em  $\mathbb{S}^2 (\approx SU(2))$  por  $X_i(z, w) = (dL_{(z,w)})_e(e_i)$ . Assim,

$$X_1(z, w) = (dL_{(z,w)})_e(e_1) = (-y, x, b, -a) \sim (iz, -iw) \sim \begin{pmatrix} iz & -iw \\ -i\bar{w} & -i\bar{z} \end{pmatrix},$$

$$X_2(z, w) = (dL_{(z,w)})_e(e_2) = (-a, -b, x, y) \sim (-w, z) \sim \begin{pmatrix} -w & z \\ -\bar{z} & -\bar{w} \end{pmatrix},$$

$$X_3(z, w) = (dL_{(z,w)})_e(e_3) = (-b, a, -y, x) \sim (iw, iz) \sim \begin{pmatrix} iw & iz \\ i\bar{z} & -i\bar{w} \end{pmatrix}.$$

Donde tiramos:  $[X_1, X_2] = 2X_3$ ,  $[X_2, X_3] = 2X_1$  e  $[X_3, X_1] = 2X_2$ .

Definindo em  $V$  o produto interno dado por  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + da^2 + db^2$ ,  $SU(2)$  possui uma métrica induzida bi-invariante. Note que, usando as coordenadas  $(x, y, a, b) \in \mathbb{R}^4$ , temos

$$\begin{cases} X_1 = -y\partial_x + x\partial_y + b\partial_a - a\partial_b \\ X_2 = -a\partial_x - b\partial_y + x\partial_a + y\partial_b \\ X_3 = -b\partial_x + a\partial_y - y\partial_a + x\partial_b \end{cases}$$

#### 4.1.2 Esferas de Berger

Considere um parâmetro  $\tau > 0$  e os campos invariantes à esquerda  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$  em  $SU(2)$  definidos anteriormente. As Esferas de Berger  $\mathbb{S}_\tau^3$ , é a esfera  $\mathbb{S}^3$  dotado com a métrica

invariante à esquerda de tal modo que na base  $\{X_1, X_2, X_3\}$  temos  $g_{ij}^\tau = \begin{pmatrix} \tau^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Defina

$$E_1 = X_3, \quad E_2 = -X_2 \quad \text{e} \quad E_3 = \tau^{-1}X_1.$$

Logo,  $\{E_1, E_2, E_3\}$  formam um referencial ortonormal de campos invariantes à esquerda em  $\mathbb{S}_\tau^3$ .

Portanto,  $[E_1, E_2] = 2\tau E_3$ ,  $[E_2, E_3] = 2\tau^{-1}E_1$  e  $[E_3, E_1] = 2\tau^{-1}E_2$ .

**Lema 4.1.** *A conexão de Levi-Civita em  $\mathbb{S}_\tau^3$  é dada por:*

$$\begin{aligned}\nabla_{E_1}E_1 &= 0, & \nabla_{E_2}E_1 &= -\tau E_3, & \nabla_{E_3}E_1 &= \tau^{-1}(2 - \tau^2)E_2 \\ \nabla_{E_1}E_2 &= \tau E_3, & \nabla_{E_2}E_2 &= 0, & \nabla_{E_3}E_2 &= -\tau^{-1}(2 - \tau^2)E_1 \\ \nabla_{E_1}E_3 &= -\tau E_2, & \nabla_{E_2}E_3 &= \tau E_1, & \nabla_{E_3}E_3 &= 0\end{aligned}$$

*Demonstração.* Sai por um cálculo direto usando a fórmula de Koszul

$$2\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \langle [X, Y], Z \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle$$

□

**Observação 4.2.** Seja  $X = fE_1 + gE_2 + hE_3$ . Então,  $X \times E_3 = -fE_2 + gE_1$  e  $\nabla_X E_3 = g(\tau E_1) - f(\tau E_2)$ . Logo,  $\nabla_X E_3 = \tau X \times E_3$ .

**Lema 4.3.** *O tensor curvatura de Riemann é dado por:*

$$\begin{aligned}R(E_1, E_2)E_3 &= R(E_1, E_3)E_2 = R(E_2, E_3)E_1 = 0 \\ R(E_1, E_2)E_1 &= (4 - 3\tau^2)E_2, & R(E_1, E_2)E_2 &= -(4 - 3\tau^2)E_1, & R(E_1, E_3)E_1 &= \tau^2 E_3 \\ R(E_1, E_3)E_3 &= -\tau^2 E_1, & R(E_2, E_3)E_2 &= \tau^2 E_3, & R(E_2, E_3)E_3 &= -\tau^2 E_2\end{aligned}$$

*Demonstração.* Utilizando a fórmula do tensor curvatura de Riemann

$$R(X, Y)Z = \nabla_{[X, Y]}Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z$$

e o [Lema 4.1](#), temos

$$R(E_1, E_2)E_1 = \nabla_{[E_1, E_2]}E_1 - \nabla_{E_1} \nabla_{E_2} E_1 + \nabla_{E_2} \nabla_{E_1} E_1 = (4 - 3\tau^2)E_2$$

De modo análogo obtemos o restante. □

**Lema 4.4.**  $\langle R(X, Y)Z, E_3 \rangle = -\tau^2(\langle X, E_3 \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle Y, E_3 \rangle \langle X, Z \rangle)$

*Demonstração.* Seja  $Z = h_1 E_1 + h_2 E_2 + h_3 E_3$ . Usando que  $A \times (B \times C) = B \langle A, C \rangle - C \langle A, B \rangle$ , temos

$$\begin{aligned}
\langle R(X, Y)Z, E_3 \rangle &= -h_1 \langle R(X, Y)E_3, E_1 \rangle - h_2 \langle R(X, Y)E_3, E_2 \rangle \\
&= -h_1 \langle \nabla_{[X, Y]} E_3 - \nabla_X \nabla_Y E_3 + \nabla_Y \nabla_X E_3, E_1 \rangle \\
&\quad - h_2 \langle \nabla_{[X, Y]} E_3 - \nabla_X \nabla_Y E_3 + \nabla_Y \nabla_X E_3, E_2 \rangle \\
&= -h_1 \langle \tau[X, Y] \times E_3 - \nabla_X(\tau Y \times E_3) + \nabla_Y(\tau X \times E_3), E_1 \rangle \\
&\quad - h_2 \langle \tau[X, Y] \times E_3 - \nabla_X(\tau Y \times E_3) + \nabla_Y(\tau X \times E_3), E_2 \rangle \\
&= -h_1 \langle -\tau^2 Y \times (X \times E_3) + \tau^2 X \times (Y \times E_3), E_1 \rangle \\
&\quad - h_2 \langle -\tau^2 Y \times (X \times E_3) + \tau^2 X \times (Y \times E_3), E_2 \rangle \\
&= -h_1 \langle -\tau^2 X \langle Y, E_3 \rangle + \tau^2 Y \langle X, E_3 \rangle, E_1 \rangle \\
&\quad - h_2 \langle -\tau^2 X \langle Y, E_3 \rangle + \tau^2 Y \langle X, E_3 \rangle, E_2 \rangle \\
&= -\tau^2 [\langle X, E_3 \rangle \langle Y, h_1 E_1 + h_2 E_2 \rangle \\
&\quad - \langle Y, E_3 \rangle \langle X, h_1 E_1 + h_2 E_2 \rangle] \\
&= -\tau^2 [\langle X, E_3 \rangle \langle Y, Z \rangle \langle Y, E_3 \rangle \langle X, Z \rangle]
\end{aligned}$$

□

**Lema 4.5.** *Se  $U$  é unitário e ortogonal a  $E_3$ , então*

$$\langle R(X, Y)Z, U \rangle = \tau^2 \langle Z, E_3 \rangle \langle X \times Y, V \rangle - (4 - 3\tau^2) \langle Z, V \rangle \langle X \times Y, E_3 \rangle$$

onde  $V = E_3 \times U$ .

*Demonstração.* Como  $\{U, V, E_3\}$  é base ortonormal, podemos supor  $X = f_1 U + f_2 V + f_3 E_3$  e  $Y = g_1 U + g_2 V + g_3 E_3$ . Daí,  $X \times Y = (f_2 g_3 - f_3 g_2)U + (f_3 g_1 - f_1 g_3)V + (f_1 g_2 - f_2 g_1)E_3$ .

Suponha que  $Z = E_3$ . Pelo [Lema 4.4](#), temos

$$\langle R(X, Y)E_3, U \rangle = \tau^2 (\langle X, E_3 \rangle \langle Y, U \rangle - \langle Y, E_3 \rangle \langle X, U \rangle) = \tau^2 (f_3 g_1 - f_1 g_3) = \tau^2 \langle X \times Y, V \rangle.$$

Suponha que  $Z = U$ . Logo,  $\langle R(X, Y)U, U \rangle = 0$ .

Suponha que  $Z = V$ .

a) Se  $X = U$  e  $Y = E_3$ ,  $\langle R(U, E_3)V, U \rangle = 0$ , pelo [Lema 4.4](#). Analogamente se  $X = V$  e  $Y = E_3$ ,  $\langle R(V, E_3)V, U \rangle = 0$ .

b) Se  $X = U$  e  $Y = V$ . Sejam  $U = RE_1 + SE_2$  e  $V = PE_1 + QE_2$ .

$$\langle R(U, V)V, U \rangle = (QR - PS) \langle R(E_1, E_2)V, U \rangle = -(4 - 3\tau^2)(PS - QR)^2$$

Como as colunas da matriz  $\begin{pmatrix} R & P & 0 \\ S & Q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  formam um conjunto ortonormal, esta matriz é ortogonal, logo  $RQ - PS = \pm 1$ . Portanto,  $\langle R(U, V)V, U \rangle = -(4 - 3\tau^2)$ .

Seja  $Z = h_1U + h_2V + h_3E_3$ . Assim,

$$\begin{aligned}\langle R(X, Y)Z, U \rangle &= h_2 \langle R(X, Y)V, U \rangle + h_3 \langle R(X, Y)E_3, U \rangle \\ &= h_2[f_1g_2 \langle R(U, V)V, U \rangle + f_2g_1 \langle R(V, U)V, U \rangle] \\ &+ \tau^2 \langle Z, E_3 \rangle \langle X \times Y, V \rangle \\ &= \tau^2 \langle Z, E_3 \rangle \langle X \times Y, V \rangle - (4 - 3\tau^2) \langle Z, V \rangle \langle X \times Y, E_3 \rangle\end{aligned}$$

□

**Corolário 4.6.** *A curvatura seccional de um plano  $P$  cujo vetor normal faz um ângulo  $\theta$  com  $E_3$  é*

$$K(P) = \tau^2 + 4(1 - \tau^2) \cos^2 \theta$$

*Demonstração.* Suponha que o ângulo formado entre  $E_3$  e o vetor normal  $N$  do plano  $P$  seja  $\theta$ . A projeção do campo  $E_3$  em  $P$  é  $T = E_3 - \cos \theta N$ . Donde,  $\|T\|^2 = \sin^2 \theta$ ,  $\langle N, E_3 \rangle = \cos \theta$ ,  $\langle T, E_3 \rangle = \|T\|^2$ ,  $\langle JT, E_3 \rangle = 0$ , onde  $JT = N \times T$ .

Assim, uma base para o plano  $P$  é  $\{T, JT\}$ , logo  $K(P) = \frac{\langle R(T, JT)T, JT \rangle}{\|T\|^4}$ .

Como  $\frac{JT}{\|T\|}$  é unitário e ortogonal a  $E_3$ , usando o [Lema 4.5](#), temos

$$\begin{aligned}\left\langle R(T, JT)T, \frac{JT}{\|T\|} \right\rangle &= \tau^2 \langle T, E_3 \rangle \left\langle T \times JT, E_3 \times \frac{JT}{\|T\|} \right\rangle \\ &- (4 - 3\tau^2) \left\langle T, E_3 \times \frac{JT}{\|T\|} \right\rangle \langle T \times JT, E_3 \rangle \\ &= \tau^2 \|T\|^3 \langle N, E_3 \times JT \rangle - (4 - 3\tau^2) \|T\| \cos \theta \langle T, E_3 \times JT \rangle \\ &= -\tau^2 \|T\|^3 \langle E_3, N \times JT \rangle + (4 - 3\tau^2) \|T\| \cos \theta \langle E_3, T \times JT \rangle \\ &= \tau^2 \|T\|^5 + (4 - 3\tau^2) \|T\|^3 \cos^2 \theta\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}K(P) &= \frac{1}{\|T\|^3} \left\langle R(T, JT)T, \frac{JT}{\|T\|} \right\rangle \\ &= \tau^2 \sin^2 \theta + (4 - 3\tau^2) \cos^2 \theta = \tau^2 + 4(1 - \tau^2) \cos^2 \theta\end{aligned}$$

□

**Exemplo 4.7.** Consideramos o subgrupo  $\lambda_t : \mathbb{S}_\tau^3 \longrightarrow \mathbb{S}_\tau^3$ ,

$$\lambda_t(x, y, a, b) = (x, y, a \cos t - b \sin t, a \sin t + b \cos t).$$

Verifica-se que

$$(d\lambda_t)_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(t) & -\sin(t) \\ 0 & 0 & \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \implies \begin{aligned} (d\lambda_t)_p(E_1) &= \cos(t)E_1 + \sin(t)E_2 \\ (d\lambda_t)_p(E_2) &= -\sin(t)E_1 + \cos(t)E_2 \\ (d\lambda_t)_p(E_3) &= E_3 \end{aligned}$$

Logo, cada  $\lambda_t$  é uma isometria de  $\mathbb{S}_\tau^3$ , que fixa a origem e manda  $E_3$  em  $E_3$ .

## 4.2 Superfícies com Ângulo Constante nas Esferas de Berger

### 4.2.1 Curva-com-triedro nas Esferas de Berger

O objetivo desta seção é mostrar a existência de duas curvas  $\alpha(s)$  e  $\beta(u)$ , satisfazendo certas condições específicas ([Proposição 4.11](#) e [Proposição 4.12](#)), que serão usadas na construção de uma superfície (seção 4.2.2).

Nas Esferas de Berger, a [Proposição 2.3](#) se reescreve como:

**Proposição 4.8.** *Sejam  $\kappa = \kappa(s)$  e  $\tau = \tau(s)$  funções dadas. Sejam  $p \in \mathbb{S}_\tau^3$  dado e  $\{t_0, n_0, b_0\}$  um triedro ortonormal positivo em  $T_p\mathbb{S}_\tau^3$ . Então existe uma única curva-com-triedro  $(\alpha, \{t, n, b\})$  com curvatura  $\kappa$  e torção  $\tau$  satisfazendo as condições iniciais  $\alpha(0) = p$ ,  $t(0) = t_0$ ,  $n(0) = n_0$  e  $b(0) = b_0$ .*

*Demonstração.* Consideremos o referencial dado pelos campos invariantes à esquerda  $\{E_1, E_2, E_3\}$  em  $\mathbb{S}_\tau^3$ . Seja  $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))$ ,  $s \in (a, b)$ , uma curva com triedro  $\{t, n, b\}$ . Escreva

$$\begin{aligned} t &= f_1 E_1 + f_2 E_2 + f_3 E_3, \\ n &= g_1 E_1 + g_2 E_2 + g_3 E_3, \\ b &= h_1 E_1 + h_2 E_2 + h_3 E_3. \end{aligned}$$

Então  $\{t, n, b\}$  é solução do seguinte sistema de EDO's de primeira ordem:

$$\begin{aligned} f'_1 &= \kappa g_1 + 2f_2 f_3 \tau^{-1}(1 - \tau^2) \\ f'_2 &= \kappa g_2 - 2f_1 f_3 \tau^{-1}(1 - \tau^2) \\ f'_3 &= \kappa g_3 \\ g'_1 &= -\kappa f_1 - \tau h_1 - \tau f_2 g_3 + f_3 g_2 \tau^{-1}(2 - \tau^2) \\ g'_2 &= -\kappa f_2 - \tau h_2 + \tau f_1 g_3 - f_3 g_1 \tau^{-1}(2 - \tau^2) \\ g'_3 &= -\kappa f_3 - \tau h_3 + \tau f_2 g_1 - \tau f_1 g_2 \\ h'_1 &= \tau g_1 - \tau f_2 h_3 + f_3 h_2 \tau^{-1}(2 - \tau^2) \\ h'_2 &= \tau g_2 + \tau f_1 h_3 - f_3 h_1 \tau^{-1}(2 - \tau^2) \\ h'_3 &= \tau g_3 + \tau f_2 h_1 - \tau f_1 h_2 \end{aligned} \tag{4.1}$$

O resultado segue análogo a demonstração da [Proposição 3.21](#).

□

Suponha que sejam dadas constantes  $\tau > 0$ ,  $\kappa = -2\tau \cot \theta$ , com  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$  uma constante fixada e um triedro ortonormal, orientado positivamente  $\{t_0, n_0, b_0\}$  em  $T_p\mathbb{S}_\tau^3$  com  $\langle t_0, E_3 \rangle = \sin \theta$ ,  $\langle n_0, E_3 \rangle = 0$  e  $\langle b_0, E_3 \rangle > 0$ .

Uma solução para o sistema (4.1) satisfazendo as condições iniciais acima é  $\{t(s), n(s), b(s)\}$ , dados por

$$\begin{cases} t(s) = \cos \theta \cos \omega E_1 + \cos \theta \sin \omega E_2 + \sin \theta E_3 \\ n(s) = -\sin \omega E_1 + \cos \omega E_2 \\ b(s) = -\sin \theta \cos \omega E_1 - \sin \theta \sin \omega E_2 + \cos \theta E_3 \end{cases} \quad (4.2)$$

com  $\omega = -\frac{2B}{\tau \sin \theta} s + C$ ,  $s \in I$ , com  $B = \tau^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta$ , onde  $C$  é determinado por  $n(0)$ .

Pela [Proposição 4.8](#), dadas constantes  $\tau > 0$ ,  $\kappa = -2\tau \cot \theta$ , com  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$  uma constante fixada e um triedro ortonormal, orientado positivamente  $\{t_0, n_0, b_0\}$  em  $T_p \mathbb{S}_\tau^3$  com  $\langle t_0, E_3 \rangle = \sin \theta$ ,  $\langle n_0, E_3 \rangle = 0$  e  $\langle b_0, E_3 \rangle > 0$ , então existe uma única curva p.c.a.  $\alpha$  passando por  $p$  com curvatura  $\kappa = -2\tau \cot \theta$  e torção  $\tau > 0$  satisfazendo  $\langle \alpha'(0), E_3 \rangle = \sin \theta$ ,  $\langle \alpha''(0), E_3 \rangle = 0$  e  $\left\langle \alpha'(0) \times \frac{\alpha''(0)}{\kappa}, E_3 \right\rangle > 0$ . A saber, a curva  $\alpha(s)$ , que satisfaz a seguinte equação diferencial:

**Proposição 4.9.** *A curva integral do campo  $t$ ,  $\alpha$ , em  $\mathbb{R}^4$ , satisfaz a equação diferencial*

$$\frac{d^4 \alpha}{ds^4} + (\tilde{b}^2 - 2\tilde{a}) \frac{d^2 \alpha}{ds^2} + \tilde{a}^2 \alpha = 0, \quad (4.3)$$

onde  $\tilde{a} = \frac{B}{\tau^2}$  e  $\tilde{b} = -\frac{2B}{\tau \sin \theta}$  com  $B = \tau^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta$ .

*Demonstração.* Usando as expressões de  $E_1$ ,  $E_2$  e  $E_3$  com respeito aos campos coordenados de  $\mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned} E_1 &= X_3 = -b\partial_x + a\partial_y - y\partial_a + x\partial_b, \\ E_2 &= -X_2 = a\partial_x + b\partial_y - x\partial_a - y\partial_b, \\ E_3 &= \tau^{-1}X_1 = \tau^{-1}(-y\partial_x + x\partial_y + b\partial_a - a\partial_b). \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} t &= (-b \cos \theta \cos \omega + a \cos \theta \sin \omega - y\tau^{-1} \sin \theta) \partial_x \\ &+ (a \cos \theta \cos \omega + b \cos \theta \sin \omega + x\tau^{-1} \sin \theta) \partial_y \\ &+ (-y \cos \theta \cos \omega - x \cos \theta \sin \omega + b\tau^{-1} \sin \theta) \partial_a \\ &+ (x \cos \theta \cos \omega - y \cos \theta \sin \omega - a\tau^{-1} \sin \theta) \partial_b \end{aligned}$$

Seja  $\alpha(s) = (x(s), y(s), a(s), b(s))$  a curva integral do campo  $t$ . Logo,

$$\begin{cases} x' = -b \cos \theta \cos \omega + a \cos \theta \sin \omega - y\tau^{-1} \sin \theta \\ y' = a \cos \theta \cos \omega + b \cos \theta \sin \omega + x\tau^{-1} \sin \theta \\ a' = -y \cos \theta \cos \omega - x \cos \theta \sin \omega + b\tau^{-1} \sin \theta \\ b' = x \cos \theta \cos \omega - y \cos \theta \sin \omega - a\tau^{-1} \sin \theta \end{cases} \quad (4.4)$$

Derivando (4.4) e usando-o, obtemos

$$\begin{cases} x'' = \tilde{a}x + \tilde{b}y' \\ y'' = \tilde{a}y - \tilde{b}x' \\ a'' = \tilde{a}a - \tilde{b}b' \\ b'' = \tilde{a}b + \tilde{b}a' \end{cases} \quad (4.5)$$

onde  $\tilde{a} = \frac{B}{\tau^2}$  e  $\tilde{b} = -\frac{2B}{\tau \sin \theta}$ . Derivando (4.5) duas vezes e usando-o, obtemos

$$\begin{cases} x'''' = (-\tilde{b}^2 + 2\tilde{a})x'' - \tilde{a}^2x \\ y'''' = (-\tilde{b}^2 + 2\tilde{a})y'' - \tilde{a}^2y \\ a'''' = (-\tilde{b}^2 + 2\tilde{a})a'' - \tilde{a}^2a \\ b'''' = (-\tilde{b}^2 + 2\tilde{a})b'' - \tilde{a}^2b \end{cases}$$

Portanto, temos (4.3). □

Considere as seguintes matrizes

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Elas serão usadas no intuito de simplificar algumas notações.

**Corolário 4.10.** *A curva integral do campo  $t$ , em  $\mathbb{R}^4$ , é dada por*

$$\alpha(s) = \cos(\varphi_1 s)\psi_1 + \sin(\varphi_1 s)\psi_2 + \cos(\varphi_2 s)\psi_3 + \sin(\varphi_2 s)\psi_4$$

onde

$$\varphi_1 = \frac{1}{\tau \sin \theta}(B - \tau\sqrt{B} \cos \theta) \quad e \quad \varphi_2 = \frac{1}{\tau \sin \theta}(B + \tau\sqrt{B} \cos \theta)$$

são constantes, e  $\psi_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  são vetores em  $\mathbb{R}^4$ , dois a dois ortogonais, tais que

$$\langle \psi_1, \psi_1 \rangle = \langle \psi_2, \psi_2 \rangle = \frac{\tau \sin \theta}{2B} \varphi_2,$$

$$\langle \psi_3, \psi_3 \rangle = \langle \psi_4, \psi_4 \rangle = \frac{\tau \sin \theta}{2B} \varphi_1,$$

$$\psi_2 = J_1 \psi_1,$$

$$\psi_3 = -\frac{\sin \theta}{\sqrt{B} + \tau \cos \theta}(\cos C J_2 \psi_1 + \sin C J_3 \psi_1),$$

$$\psi_4 = \frac{\sin \theta}{\sqrt{B} + \tau \cos \theta}(\cos C J_3 \psi_1 - \sin C J_2 \psi_1),$$

onde  $J_1, J_2, J_3$  são dadas em (4.6).

*Demonstração.* A equação (4.3) é uma EDO, em  $s$ , com coeficientes constantes cuja solução é dada por

$$\alpha(s) = \cos(\varphi_1 s)\psi_1 + \sin(\varphi_1 s)\psi_2 + \cos(\varphi_2 s)\psi_3 + \sin(\varphi_2 s)\psi_4$$

com

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{\tilde{b}^2 - 2\tilde{a} - \sqrt{\tilde{b}^4 - 4\tilde{a}\tilde{b}^2}}{2}} \quad \text{e} \quad \varphi_2 = \sqrt{\frac{\tilde{b}^2 - 2\tilde{a} + \sqrt{\tilde{b}^4 - 4\tilde{a}\tilde{b}^2}}{2}}$$

são constantes e os  $\psi_i$  são vetores em  $\mathbb{R}^4$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ .

Substituindo  $\tilde{a} = \frac{B}{\tau^2}$  e  $\tilde{b} = -\frac{2B}{\tau \sin \theta}$ , obtemos

$$\varphi_1 = \frac{1}{\tau \sin \theta}(B - \tau\sqrt{B} \cos \theta) \quad \text{e} \quad \varphi_2 = \frac{1}{\tau \sin \theta}(B + \tau\sqrt{B} \cos \theta).$$

Como  $\|\alpha\| = 1$ , e usando (4.4) e (4.5), temos

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \alpha \rangle &= 1, & \langle \alpha', \alpha' \rangle &= \frac{B}{\tau^2}, & \langle \alpha, \alpha' \rangle &= 0, \\ \langle \alpha', \alpha'' \rangle &= 0, & \langle \alpha'', \alpha'' \rangle &= D, & \langle \alpha, \alpha'' \rangle &= -\frac{B}{\tau^2}, \\ \langle \alpha', \alpha''' \rangle &= -D, & \langle \alpha'', \alpha''' \rangle &= 0, & \langle \alpha, \alpha''' \rangle &= 0, \\ & & \langle \alpha''', \alpha''' \rangle &= E. \end{aligned} \tag{4.7}$$

onde  $D = \tilde{a}\tilde{b}^2 - 3\tilde{a}^2$  e  $E = (\tilde{b}^2 - \tilde{a})D - \tilde{a}^3$ .

Calculando  $\alpha$  e suas derivadas em  $s = 0$ , temos

$$\begin{aligned} \alpha(0) &= \psi_1 + \psi_3, \\ \alpha'(0) &= \varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_4, \\ \alpha''(0) &= -\varphi_1^2\psi_1 - \varphi_2^2\psi_3, \\ \alpha'''(0) &= -\varphi_1^3\psi_2 - \varphi_2^3\psi_4. \end{aligned}$$

Substituindo estas equações em (4.7), e tomando  $\psi_{ij} = \langle \psi_i, \psi_j \rangle$ , obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} \psi_{11} + \psi_{33} + 2\psi_{13} &= 1, \\ \varphi_1^2\psi_{22} + \varphi_2^2\psi_{44} + 2\varphi_1\varphi_2\psi_{24} &= \frac{B}{\tau^2}, \\ \varphi_1\psi_{12} + \varphi_2\psi_{14} + \varphi_1\psi_{23} + \varphi_2\psi_{34} &= 0, \\ -\varphi_1^3\psi_{12} - \varphi_1\varphi_2^2\psi_{23} - \varphi_1^2\varphi_2\psi_{14} - \varphi_2^3\psi_{34} &= 0, \\ \varphi_1^4\psi_{11} + \varphi_2^4\psi_{33} + 2\varphi_1^2\varphi_2^2\psi_{13} &= D, \\ -\varphi_1^2\psi_{11} - \varphi_2^2\psi_{13} - \varphi_1^2\psi_{13} - \varphi_2^2\psi_{33} &= -\frac{B}{\tau^2}, \\ -\varphi_1^4\psi_{22} - \varphi_1\varphi_2^3\psi_{24} - \varphi_1^3\varphi_2\psi_{24} - \varphi_2^4\psi_{44} &= -D, \\ \varphi_1^5\psi_{12} + \varphi_1^2\varphi_2^3\psi_{14} + \varphi_1^3\varphi_2^2\psi_{23} + \varphi_2^5\psi_{34} &= 0, \\ -\varphi_1^3\psi_{12} - \varphi_2^3\psi_{14} - \varphi_1^3\psi_{23} - \varphi_2^3\psi_{34} &= 0, \\ \varphi_1^6\psi_{22} + \varphi_2^6\psi_{44} + 2\varphi_1^3\varphi_2^3\psi_{24} &= E. \end{aligned}$$

Este sistema é linear cuja solução é:

$$\begin{aligned} \psi_{12} &= \psi_{14} = \psi_{23} = \psi_{34} = 0, \\ \psi_{11} &= \frac{\tau^2(D + \varphi_2^4) - 2B\varphi_2^2}{\tau^2(\varphi_1^2 - \varphi_2^2)^2}, \quad \psi_{33} = \frac{\tau^2(D + \varphi_1^4) - 2B\varphi_1^2}{\tau^2(\varphi_1^2 - \varphi_2^2)^2}, \\ \psi_{22} &= \frac{\tau^2(E - 2D\varphi_2^2) + B\varphi_2^4}{\tau^2\varphi_1^2(\varphi_1^2 - \varphi_2^2)^2}, \quad \psi_{44} = \frac{\tau^2(E - 2D\varphi_1^2) + B\varphi_1^4}{\tau^2\varphi_2^2(\varphi_1^2 - \varphi_2^2)^2}, \\ \psi_{13} &= \frac{-\tau^2(D^2 + \varphi_1^2\varphi_2^2) + B(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)}{\tau^2(\varphi_1^2 - \varphi_2^2)^2}, \quad \psi_{24} = \frac{\tau^2(D(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - E) - B\varphi_1^2\varphi_2^2}{\tau^2\varphi_1\varphi_2(\varphi_1^2 - \varphi_2^2)^2}. \end{aligned}$$

que, simplificando, temos

$$\begin{aligned} \psi_{12} &= \psi_{14} = \psi_{23} = \psi_{34} = \psi_{13} = \psi_{24} = 0, \\ \psi_{11} &= \psi_{22} = \frac{\tau \sin \theta}{2B} \varphi_2, \\ \psi_{33} &= \psi_{44} = \frac{\tau \sin \theta}{2B} \varphi_1. \end{aligned}$$

Usando as equações (4.4), calculado em  $s = 0$ , temos

$$\varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_4 = \cos \theta \cos C J_3(\psi_1 + \psi_3) - \cos \theta \sin C J_2(\psi_1 + \psi_3) + \tau^{-1} \sin \theta J_1(\psi_1 + \psi_3).$$

As equações (4.5), calculado em  $s = 0$ , nos dá

$$(-\varphi_1^2 - \frac{B}{\tau^2})\psi_1 + (-\varphi_2^2 - \frac{B}{\tau^2})\psi_3 = -\tilde{b}\varphi_1 J_1\psi_2 - \tilde{b}\varphi_2 J_1\psi_4.$$

Derivando as equações (4.5) e calculando em  $s = 0$ , obtemos

$$\varphi_1(-\varphi_1^2 - \frac{B}{\tau^2})\psi_2 + \varphi_2(-\varphi_2^2 - \frac{B}{\tau^2})\psi_4 = \tilde{b}\varphi_1^2 J_1\psi_1 + \tilde{b}\varphi_2^2 J_1\psi_3.$$

Estas 3 equações nos dá um sistema de 12 equações com 12 variáveis, cuja solução é

$$\begin{aligned} \psi_2 &= J_1\psi_1, \\ \psi_3 &= -\frac{\sin \theta}{\sqrt{B} + \tau \cos \theta} (\cos C J_2\psi_1 + \sin C J_3\psi_1), \\ \psi_4 &= \frac{\sin \theta}{\sqrt{B} + \tau \cos \theta} (\cos C J_3\psi_1 - \sin C J_2\psi_1). \end{aligned}$$

□

Seja  $\gamma$  outra curva com a mesma curvatura e torção da curva  $\alpha$  passando por um ponto  $q \in \mathbb{S}_\tau^3$  satisfazendo as mesmas condições iniciais dadas acima,  $\langle \bar{t}(0), E_3 \rangle = \sin \theta$ ,  $\langle \bar{n}(0), E_3 \rangle = 0$  e  $\langle \bar{b}(0), E_3 \rangle > 0$ . Assim, temos o triedro da curva  $\beta$ ,  $\{\bar{t}(s), \bar{n}(s), \bar{b}(s)\}$ , dado por

$$\begin{cases} \bar{t}(s) = \cos \theta \cos \bar{\omega} E_1 + \cos \theta \sin \bar{\omega} E_2 + \sin \theta E_3 \\ \bar{n}(s) = -\sin \bar{\omega} E_1 + \cos \bar{\omega} E_2 \\ \bar{b}(s) = -\sin \theta \cos \bar{\omega} E_1 - \sin \theta \sin \bar{\omega} E_2 + \cos \theta E_3 \end{cases}$$

com  $\bar{\omega} = -\frac{2B}{\tau \sin \theta} s + \bar{C}$ .

Seja  $r \in \mathbb{S}_\tau^3$  tal que  $q = \lambda_{\bar{t}}(r)$ , onde  $\lambda_{\bar{t}}$  é dada no Exemplo 4.7. Considere a seguinte isometria de  $\mathbb{S}_\tau^3$ :  $\varphi = \lambda_{\bar{t}} \circ L_r \circ L_{p^{-1}}$ , com  $L$  translação à esquerda. Assim,  $\varphi$  leva  $p$  em  $q$  e  $E_3$  em  $E_3$ . Tomando  $\tilde{t} = \bar{C} - C$ , temos que  $d\varphi_p(t(0)) = \bar{t}(0)$ ,  $d\varphi_p(n(0)) = \bar{n}(0)$  e  $d\varphi_p(b(0)) = \bar{b}(0)$ .

Portanto as curvas  $\varphi \circ \alpha$  e  $\gamma$  são duas curvas com mesma curvatura e torção passando pelo mesmo ponto  $q$  com as mesmas condições iniciais. Logo, pela unicidade da curva,  $\varphi \circ \alpha = \beta$ .

Suponha que  $\psi$  seja outra isometria de  $\mathbb{S}_\tau^3$  que leva  $p$  em  $q$  e leva o triedro  $\{t(0), n(0), b(0)\}$  no triedro  $\{\bar{t}(0), \bar{n}(0), \bar{b}(0)\}$ . Assim  $\psi^{-1} \circ \varphi(p) = Id(p)$  e  $d(\psi^{-1} \circ \varphi)_p = Id$ . Como  $\mathbb{S}_\tau^3$  é conexo, então  $\psi^{-1} \circ \varphi = Id \implies \psi = \varphi$ .

Assim, obtemos o seguinte resultado:

**Proposição 4.11.** *Dados  $p \in \mathbb{S}_\tau^3$  e  $v \in T_p \mathbb{S}_\tau^3$  unitário com  $\langle v, E_3 \rangle = \sin \theta$ , então existe uma única curva  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}_\tau^3$ , p.c.a., com  $\alpha(0) = p$ ,  $\alpha'(0) = v$ , com curvatura constante  $\kappa = -2\tau \cot \theta$ , torção constante  $\tau > 0$ , satisfazendo  $\langle \alpha''(0), E_3 \rangle = 0$  e  $\left\langle \alpha'(0) \times \frac{\alpha''(0)}{\kappa}, E_3 \right\rangle > 0$ . A saber, a curva dada no Corolário 4.10 com  $\alpha(0) = p$ . Além disso, dadas duas curvas  $\alpha$  e  $\gamma$  com as condições acima, existe uma única isometria  $\varphi$  de  $\mathbb{S}_\tau^3$  tal que  $\gamma = \varphi \circ \alpha$ .*

Análogo a Observação 3.25, as condições

$$\langle v, E_3 \rangle = \sin \theta, \quad \langle \alpha''(0), E_3 \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \left\langle \alpha'(0) \times \frac{\alpha''(0)}{\kappa}, E_3 \right\rangle > 0$$

determinam o triedro ortonormal inicial  $\{t_0, n_0, b_0\}$  em  $T_p \mathbb{S}_\tau^3$ .

**Proposição 4.12.** *Sejam  $p \in \mathbb{S}_\tau^3$ ,  $v \in T_p \mathbb{S}_\tau^3$  unitário e horizontal, e  $\kappa(u)$  uma função de  $u$ . Existe uma única curva horizontal p.c.a.  $\beta(u)$  de curvatura  $\kappa(u)$  e torção constante  $-\tau$  com triedro  $\{t, n, E_3\}$  tal que  $\beta(0) = p$ ,  $\beta'(0) = v$ .*

*Demonstração.* Consideremos o referencial dado pelos campos invariantes à esquerda  $\{E_1, E_2, E_3\}$  em  $\mathbb{S}_\tau^3$ . Escreva

$$\begin{aligned} t &= f_1 E_1 + f_2 E_2, \\ n &= g_1 E_1 + g_2 E_2, \\ b &= E_3. \end{aligned}$$

Então  $\{t, n, b\}$  é solução do seguinte sistema de EDO's de primeira ordem:

$$\begin{aligned} f_1' &= \kappa g_1 \\ f_2' &= \kappa g_2 \\ g_1' &= -\kappa f_1 \\ g_2' &= -\kappa f_2 \end{aligned}$$

satisfazendo  $g_1 = -f_2$ ,  $g_2 = f_1$ . A curva integral do campo  $t$  é a curva desejada. Verifica-se que a curvatura desta curva é  $\kappa(u)$  e sua torção é  $-\tau$ .  $\square$

**Proposição 4.13.** *Uma curva horizontal p.c.a.  $\beta(u)$  satisfaz a EDO*

$$\beta'(u) = -\sin \varepsilon(u) J_3 \beta - \cos \varepsilon(u) J_2 \beta$$

onde  $\varepsilon'(u)$  é sua curvatura na orientação  $E_1, E_2$ .  $J_2$  e  $J_3$  são dados por (4.6).

*Demonstração.* Seja  $\beta$  uma curva horizontal p.c.a. Podemos supor que existe uma função  $\varepsilon(u)$  tal que

$$\begin{aligned} \beta' &= -\sin \varepsilon(u) E_1 + \cos \varepsilon(u) E_2 \\ &= -\sin \varepsilon(u) (-b\partial_x + a\partial_y - y\partial_a + x\partial_b) \\ &\quad + \cos \varepsilon(u) (a\partial_x + b\partial_y - x\partial_a - y\partial_b) \end{aligned}$$

Por outro lado, seja  $\beta = (x, y, z, w)$ . Assim,

$$\beta' = x'\partial_x + y'\partial_y + z'\partial_z + w'\partial_w.$$

O resultado segue igualando estas duas equações e usando as matrizes  $J_2$  e  $J_3$  para simplificar a notação.

Como  $\beta$  é p.c.a., sua curvatura é  $\|\nabla_{\beta'} \beta'\|$ . Por um cálculo direto temos:

$$\nabla_{\beta'} \beta' = \nabla_{\beta'} (-\sin \varepsilon(u) E_1 + \cos \varepsilon(u) E_2) = -\varepsilon' \cos \varepsilon E_1 - \varepsilon' \sin \varepsilon E_2.$$

$\square$

Note que a velocidade inicial determina e é determinada por  $\varepsilon(0)$  pela relação

$$v = -\sin \varepsilon(0) E_1 + \cos \varepsilon(0) E_2.$$

## 4.2.2 Superfícies com Ângulo Constante

A partir de uma curva horizontal emana um feixe de curvas satisfazendo as condições dadas na Proposição 4.11. De fato, sejam  $p \in \mathbb{S}_\tau^3$ ,  $C$  uma constante e  $\kappa(u)$  uma função de  $u$ . Considere o seguinte vetor horizontal

$$w = -\sin C E_1 + \cos C E_2 \in T_p \mathbb{S}_\tau^3.$$

Pela Proposição 4.12 existe uma única curva horizontal  $\beta(u)$  p.c.a. passando por  $p$  com velocidade  $w$  e com curvatura  $\kappa(u)$ . Pela demonstração da Proposição 4.13, existe uma função  $\varepsilon(u)$  tal que

$$\beta'(u) = -\sin \varepsilon(u) E_1 + \cos \varepsilon(u) E_2,$$

onde a curvatura de  $\beta$  é  $\varepsilon'(u)$ . Logo,  $\kappa(u) = \varepsilon'(u)$ .

Fixe  $u_0$  tal que  $\beta(u_0) = p$  e  $\varepsilon(u_0) = C$ . Considere o seguinte vetor unitário e ortogonal a  $w$

$$v = \cos \theta \cos C E_1 + \cos \theta \sin C E_2 + \sin \theta E_3 \in T_p \mathbb{S}_\tau^3.$$

Pela [Proposição 4.11](#), existe uma única curva  $\alpha(s)$  com  $\alpha(0) = p$ ,  $\alpha'(0) = v$  de curvatura constante  $\kappa = -2\tau \cot \theta$  e torção constante  $\tau > 0$  satisfazendo  $\langle \alpha''(0), E_3 \rangle = 0$  e  $\langle \alpha'(0) \times \frac{\alpha''(0)}{\kappa}, E_3 \rangle > 0$ . Esta curva  $\alpha(s)$  tem como triedro os vetores  $\{t, n, b\}$  dados por [\(4.2\)](#).

Da arbitrariedade de  $u_0$ , conclui-se que:

i) Para cada  $u_0$  dado obtemos um valor para a constante  $C$ . Logo,  $C$  depende da variável  $u$ ,  $C = C(u)$ .

ii)  $\beta'(u) = \frac{\nabla_t t}{\cot \theta}(0) = n(0) \Rightarrow \varepsilon(u) = C(u)$ .

iii) Ao longo de uma curva horizontal p.c.a. passa um feixe de curvas satisfazendo as condições da [Proposição 4.11](#), dando origem a uma superfície.

De agora em diante, as notações  $t, n, b$  serão usadas para os campos vetoriais dados em [\(4.2\)](#), que dependem das variáveis  $s$  e  $u$ , com  $\omega = -\frac{2B}{\tau \sin \theta} s + C(u)$ , onde  $B = \tau^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta$ ,  $\theta \in (0, \pi/2)$  uma constante fixada.

A seguir, mostraremos que a superfície resultante forma ângulo constante com a vertical  $E_3$ .

Temos  $t = \partial_s$ . Sejam  $f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3, h_1, h_2$  e  $h_3$  funções das variáveis  $s$  e  $u$  tais que

$$\begin{aligned}\partial_u &= f_1 t + f_2 n + f_3 b, \\ \nabla_t \partial_u &= g_1 t + g_2 n + g_3 b, \\ \nabla_{\partial_u} n &= h_1 t + h_2 n + h_3 b.\end{aligned}$$

Pela simetria da conexão,  $g_1 = \langle t, \nabla_t \partial_u \rangle = \frac{1}{2} \partial_u \langle \partial_s, \partial_s \rangle = 0$ . Analogamente,  $h_2 = 0$ . Logo,  $\nabla_t \partial_u = g_2 n + g_3 b$  e  $\nabla_{\partial_u} n = h_1 t + h_3 b$ .

Note que, o vetor normal unitário da superfície é dado por

$$N = \frac{\partial_s \times \partial_u}{\|\partial_s \times \partial_u\|} = \frac{f_2 b - f_3 n}{\sqrt{f_2^2 + f_3^2}}.$$

Assim, análogo à  $SL(2, \mathbb{R})$ , mostraremos que  $f_3 \equiv 0$ .

Temos  $\nabla_t \partial_u = g_2 n + g_3 b$ . Por outro lado,

$$\begin{aligned}\nabla_t \partial_u &= t(f_1)t + f_1 \nabla_t t + t(f_2)n + f_2 \nabla_t n + t(f_3)b + f_3 \nabla_t b \\ &= t(f_1)t + f_1 \kappa n + t(f_2)n + f_2(-\kappa t - \tau b) + t(f_3)b + f_3 \tau n \\ &= (t(f_1) - \kappa f_2)t + (\kappa f_1 + t(f_2) + \tau f_3)n + (-\tau f_2 + t(f_3))b\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{cases} 0 = \partial_s(f_1) - \kappa f_2 \\ g_2 = \kappa f_1 + \partial_s(f_2) + \tau f_3 \\ g_3 = -\tau f_2 + \partial_s(f_3) \end{cases} \quad (4.8)$$

Usando o tensor curvatura de Riemann

$$R(X, Y)Z = \nabla_{[X, Y]}Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z$$

temos  $\nabla_{\partial_s} \nabla_{\partial_s} \partial_u = \nabla_{\partial_s} \nabla_{\partial_u} \partial_s = \nabla_{\partial_u} \nabla_{\partial_s} \partial_s - R(\partial_s, \partial_u) \partial_s$ , onde

$$R(\partial_s, \partial_u) \partial_s = R(t, f_1 t + f_2 n + f_3 b) t = f_2 R(t, n) t + f_3 R(t, b) t$$

$$\begin{aligned} R(t, n) t &= R(\cos \theta \cos \omega E_1 + \cos \theta \sin \omega E_2 + \sin \theta E_3, n) t \\ &= \cos \theta \cos \omega R(E_1, n) t + \cos \theta \sin \omega R(E_2, n) t + \sin \theta R(E_3, n) t \\ &= \cos \theta \cos \omega [\cos \theta \cos \omega R(E_1, n) E_1 + \cos \theta \sin \omega R(E_1, n) E_2 + \sin \theta R(E_1, n) E_3] \\ &+ \cos \theta \sin \omega [\cos \theta \cos \omega R(E_2, n) E_1 + \cos \theta \sin \omega R(E_2, n) E_2 + \sin \theta R(E_2, n) E_3] \\ &+ \sin \theta [\cos \theta \cos \omega R(E_3, n) E_1 + \cos \theta \sin \omega R(E_3, n) E_2 + \sin \theta R(E_3, n) E_3] \\ &= \cos \theta \cos \omega [\cos \theta \cos^2 \omega R(E_1, E_2) E_1 + \cos \theta \sin \omega \cos \omega R(E_1, E_2) E_2] \\ &+ \cos \theta \sin \omega [-\cos \theta \cos \omega \sin \omega R(E_2, E_1) E_1 - \cos \theta \sin^2 \omega R(E_2, E_1) E_2] \\ &+ \sin \theta [-\cos \theta \cos \omega \sin \omega R(E_3, E_1) E_1 + \cos \theta \sin \omega \cos \omega R(E_3, E_2) E_2 \\ &+ \sin \theta \{-\sin \omega R(E_3, E_1) E_3 + \cos \omega R(E_3, E_2) E_3\}] \\ &= \cos \theta \cos \omega [(4 - 3\tau^2) \cos \theta \cos^2 \omega E_2 - (4 - 3\tau^2) \cos \theta \sin \omega \cos \omega E_1] \\ &+ \cos \theta \sin \omega [(4 - 3\tau^2) \cos \theta \cos \omega \sin \omega E_2 - (4 - 3\tau^2) \cos \theta \sin^2 \omega E_1] \\ &- \sin^2 \theta \sin \omega \tau^2 E_1 + \sin^2 \theta \cos \omega \tau^2 E_2 \\ &= ((4 - 3\tau^2) \cos^2 \theta + \tau^2 \sin^2 \theta) [-\sin \omega E_1 + \cos \omega E_2] \\ &= (\tau^2 + 4(1 - \tau^2) \cos^2 \theta) n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(t, b)t &= R(\cos \theta \cos \omega E_1 + \cos \theta \sin \omega E_2 + \sin \theta E_3, b)t \\
&= \cos \theta \cos \omega R(E_1, b)t + \cos \theta \sin \omega R(E_2, b)t + \sin \theta R(E_3, b)t \\
&= \cos \theta \cos \omega [\cos \theta \cos \omega R(E_1, b)E_1 + \cos \theta \sin \omega R(E_1, b)E_2 + \sin \theta R(E_1, b)E_3] \\
&+ \cos \theta \sin \omega [\cos \theta \cos \omega R(E_2, b)E_1 + \cos \theta \sin \omega R(E_2, b)E_2 + \sin \theta R(E_2, b)E_3] \\
&+ \sin \theta [\cos \theta \cos \omega R(E_3, b)E_1 + \cos \theta \sin \omega R(E_3, b)E_2 + \sin \theta R(E_3, b)E_3] \\
&= \cos \theta \cos \omega \{ \cos \theta \cos \omega [-\sin \theta \sin \omega R(E_1, E_2)E_1 + \cos \theta R(E_1, E_3)E_1] \\
&- \cos \theta \sin \theta \sin^2 \omega R(E_1, E_2)E_2 + \cos \theta \sin \theta R(E_1, E_3)E_3 \} \\
&+ \cos \theta \sin \omega \{ -\cos \theta \sin \theta \cos^2 \omega R(E_2, E_1)E_1 \\
&+ \cos \theta \sin \omega [-\sin \theta \cos \omega R(E_2, E_1)E_2 + \cos \theta R(E_2, E_3)E_2] + \sin \theta \cos \theta R(E_2, E_3)E_3 \} \\
&+ \sin \theta \{ -\cos \theta \sin \theta \cos^2 \omega R(E_3, E_1)E_1 - \cos \theta \sin \theta \sin^2 \omega R(E_3, E_2)E_2 \\
&+ \sin \theta [-\sin \theta \cos \omega R(E_3, E_1)E_3 - \sin \theta \sin \omega R(E_3, E_2)E_3] \} \\
&= \cos \theta \cos \omega \{ \cos \theta \cos \omega [-(4 - 3\tau^2) \sin \theta \sin \omega E_2 + \tau^2 \cos \theta E_3] \\
&+ (4 - 3\tau^2) \cos \theta \sin \theta \sin^2 \omega E_1 - \tau^2 \cos \theta \sin \theta E_1 \} \\
&+ \cos \theta \sin \omega \{ (4 - 3\tau^2) \cos \theta \sin \theta \cos^2 \omega E_2 \\
&+ \cos \theta \sin \omega [-(4 - 3\tau^2) \sin \theta \cos \omega E_1 + \tau^2 \cos \theta E_3] - \tau^2 \sin \theta \cos \theta E_2 \} \\
&+ \sin \theta \{ \tau^2 \cos \theta \sin \theta \cos^2 \omega E_3 + \tau^2 \cos \theta \sin \theta \sin^2 \omega E_3 \\
&+ \sin \theta [-\tau^2 \sin \theta \cos \omega E_1 - \tau^2 \sin \theta \sin \omega E_2] \} \\
&+ E_1 [-\tau^2 \sin \theta \cos \omega] + E_2 [-\tau^2 \sin \theta \sin \omega] + E_3 \tau^2 \cos \theta \\
&= \tau^2 b
\end{aligned}$$

Portanto,

$$R(\partial_s, \partial_u)\partial_s = f_2 R(t, n)t + f_3 R(t, b)t = f_2(\tau^2 + 4(1 - \tau^2) \cos^2 \theta)n + f_3 \tau^2 b$$

Como  $\nabla_{\partial_s} \partial_s = \kappa n$ , temos  $\nabla_{\partial_u} \nabla_{\partial_s} \partial_s = \kappa \nabla_{\partial_u} n = \kappa(h_1 t + h_3 b)$ .

Assim,

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_s} \nabla_{\partial_s} \partial_u &= \nabla_{\partial_u} \nabla_{\partial_s} \partial_s - R(\partial_s, \partial_u)\partial_s \\
&= \kappa(h_1 t + h_3 b) - f_2[\tau^2 + 4(1 - \tau^2) \cos^2 \theta]n - f_3 \tau^2 b \\
&= \kappa h_1 t - f_2[\tau^2 + 4(1 - \tau^2) \cos^2 \theta]n + (\kappa h_3 - \tau^2)b
\end{aligned}$$

Por outro lado, como  $\nabla_{\partial_s} \partial_u = g_2 n + g_3 b$ , temos

$$\nabla_{\partial_s} \nabla_{\partial_s} \partial_u = (-\kappa g_2)t + (t(g_2) + \tau g_3)n + (-\tau g_2 + t(g_3))b$$

Logo,

$$\begin{cases} -\kappa g_2 = \kappa h_1 \\ \partial_s(g_2) + \tau g_3 = -f_2[\tau^2 + 4(1 - \tau^2) \cos^2 \theta] \\ -\tau g_2 + \partial_s(g_3) = \kappa h_3 - \tau^2 f_3 \end{cases} \quad (4.9)$$

Temos também que

$$\nabla_{\partial_s} \nabla_{\partial_u} n = \nabla_{\partial_u} \nabla_{\partial_s} n - R(\partial_s, \partial_u) n,$$

onde  $R(\partial_s, \partial_u) n = R(t, f_1 t + f_2 n + f_3 b) n = f_2 R(t, n) n + f_3 R(t, b) n$ .

$$\begin{aligned} R(t, n) n &= R(\cos \theta \cos \omega E_1 + \cos \theta \sin \omega E_2 + \sin \theta E_3, n) n \\ &= \cos \theta \cos \omega R(E_1, n) n + \cos \theta \sin \omega R(E_2, n) n + \sin \theta R(E_3, n) n \\ &= \cos \theta \cos \omega [-\sin \omega R(E_1, n) E_1 + \cos \omega R(E_1, n) E_2] \\ &+ \cos \theta \sin \omega [-\sin \omega R(E_2, n) E_1 + \cos \omega R(E_2, n) E_2] \\ &+ \sin \theta [-\sin \omega R(E_3, n) E_1 + \cos \omega R(E_3, n) E_2] \\ &= \cos \theta \cos \omega [-\sin \omega \cos \omega R(E_1, E_2) E_1 + \cos^2 \omega R(E_1, E_2) E_2] \\ &+ \cos \theta \sin \omega [\sin^2 \omega R(E_2, E_1) E_1 - \sin \omega \cos \omega R(E_2, E_1) E_2] \\ &+ \sin \theta [\sin^2 \omega R(E_3, E_1) E_1 + \cos^2 \omega R(E_3, E_2) E_2] \\ &= \cos \theta \cos \omega [-(4 - 3\tau^2) \sin \omega \cos \omega E_2 - (4 - 3\tau^2) \cos^2 \omega E_1] \\ &+ \cos \theta \sin \omega [-(4 - 3\tau^2) \sin^2 \omega E_2 - (4 - 3\tau^2) \sin \omega \cos \omega E_1] \\ &- \tau^2 \sin \theta \sin^2 \omega E_3 - \tau^2 \sin \theta \cos^2 \omega E_3 \\ &= E_1 [-(4 - 3\tau^2) \cos \theta \cos \omega] + E_2 [-(4 - 3\tau^2) \cos \theta \sin \omega] + E_3 [-\tau^2 \sin \theta] \\ &= [-\tau^2 - 4(1 - \tau^2) \cos^2 \theta] t - 4(\tau^2 - 1) \sin \theta \cos \theta b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(t, b)n &= R(\cos \theta \cos \omega E_1 + \cos \theta \sin \omega E_2 + \sin \theta E_3, b)n \\
&= \cos \theta \cos \omega R(E_1, b)n + \cos \theta \sin \omega R(E_2, b)n + \sin \theta R(E_3, b)n \\
&= \cos \theta \cos \omega [-\sin \omega R(E_1, b)E_1 + \cos \omega R(E_1, b)E_2] \\
&+ \cos \theta \sin \omega [-\sin \omega R(E_2, b)E_1 + \cos \omega R(E_2, b)E_2] \\
&+ \sin \theta [-\sin \omega R(E_3, b)E_1 + \cos \omega R(E_3, b)E_2] \\
&= \cos \theta \cos \omega \{-\sin \omega [-\sin \theta \sin \omega R(E_1, E_2)E_1 + \cos \theta R(E_1, E_3)E_1] \\
&- \sin \theta \sin \omega \cos \omega R(E_1, E_2)E_2\} \\
&+ \cos \theta \sin \omega \{\sin \omega \sin \theta \cos \omega R(E_2, E_1)E_1 + \cos \omega [-\sin \theta \cos \omega R(E_2, E_1)E_2 \\
&+ \cos \theta R(E_2, E_3)E_2]\} \\
&+ \sin \theta \{\sin \theta \sin \omega \cos \omega R(E_3, E_1)E_1 - \sin \theta \cos \omega \sin \omega R(E_3, E_2)E_2\} \\
&= \cos \theta \cos \omega \{-\sin \omega [-(4 - 3\tau^2) \sin \theta \sin \omega E_2 + \tau^2 \cos \theta E_3] \\
&+ (4 - 3\tau^2) \sin \theta \sin \omega \cos \omega E_1\} \\
&+ \cos \theta \sin \omega \{-(4 - 3\tau^2) \sin \omega \sin \theta \cos \omega E_2 + \cos \omega [-(4 - 3\tau^2) \sin \theta \cos \omega E_1 \\
&+ \tau^2 \cos \theta E_3]\} \\
&+ \sin \theta \{-\tau^2 \sin \theta \sin \omega \cos \omega E_3 + \tau^2 \sin \theta \cos \omega \sin \omega E_3\} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$R(\partial_s, \partial_u)n = f_2 R(t, n)n + f_3 R(t, b)n = f_2 [(-\tau^2 - 4(1 - \tau^2) \cos^2 \theta)t - 4(1 - \tau^2) \sin \theta \cos \theta b]$$

Também temos que

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_u} \nabla_{\partial_s} n &= \nabla_{\partial_u} (-\kappa t - \tau b) = -\kappa \nabla_{\partial_u} t - \tau \nabla_{\partial_u} b = -\kappa \nabla_{\partial_s} \partial_u - \tau \nabla_{\partial_u} (t \times n) \\
&= -\kappa \nabla_{\partial_s} \partial_u - \tau (\nabla_{\partial_u} t \times n + t \times \nabla_{\partial_u} n) \\
&= -\kappa (g_2 n + g_3 b) - \tau [(g_2 n + g_3 b) \times n + t \times (h_1 t + h_3 b)] \\
&= \tau g_3 t + (-\kappa g_2 + \tau h_3) n - \kappa g_3 b
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_s} \nabla_{\partial_u} n &= \nabla_{\partial_u} \nabla_{\partial_s} n - R(\partial_s, \partial_u)n \\
&= \tau g_3 t + (-\kappa g_2 + \tau h_3) n - \kappa g_3 b \\
&- f_2 [(-\tau^2 - 4(1 - \tau^2) \cos^2 \theta)t - 4(\tau^2 - 1) \sin \theta \cos \theta b] \\
&= [\tau g_3 + f_2(\tau^2 + 4(1 - \tau^2) \cos^2 \theta)]t + (-\kappa g_2 + \tau h_3)n \\
&+ (-\kappa g_3 + 4(\tau^2 - 1) \sin \theta \cos \theta f_2)b
\end{aligned}$$

Por outro lado, como  $\nabla_{\partial_u} n = h_1 t + h_3 b$ , temos

$$\nabla_{\partial_s} \nabla_{\partial_u} n = (t(h_1))t + (\kappa h_1 + \tau h_3)n + (t(h_3))b$$

Logo,

$$\begin{cases} \partial_s(h_1) = \tau g_3 + f_2(\tau^2 + 4(1 - \tau^2) \cos^2 \theta) \\ \kappa h_1 + \tau h_3 = -\kappa g_2 + \tau h_3 \\ \partial_s(h_3) = -\kappa g_3 + 4(\tau^2 - 1) \sin \theta \cos \theta f_2 \end{cases} \quad (4.10)$$

Juntando (4.8), (4.9) e (4.10), temos

$$\begin{cases} \partial_s(f_1) = \kappa f_2 \\ \partial_s(f_2) = g_2 - \kappa f_1 - \tau f_3 \\ \partial_s(f_3) = \tau f_2 + g_3 \\ -\kappa g_2 = \kappa h_1 \\ \partial_s(g_2) = -\tau g_3 - f_2(\tau^2 + 4(1 - \tau^2) \cos^2 \theta) \\ \partial_s(g_3) = \tau g_2 + \kappa h_3 - \tau^2 f_3 \\ \partial_s(h_1) = \tau g_3 + f_2(\tau^2 + 4(1 - \tau^2) \cos^2 \theta) \\ \kappa h_1 + \tau h_3 = -\kappa g_2 + \tau h_3 \\ \partial_s(h_3) = -\kappa g_3 + 4(\tau^2 - 1) \sin \theta \cos \theta f_2 \end{cases}$$

que equivale à:

$$\begin{cases} \partial_s(f_1) = \kappa f_2 \\ \partial_s(f_2) = g_2 - \kappa f_1 - \tau f_3 \\ \partial_s(f_3) = \tau f_2 + g_3 \\ -g_2 = h_1 \\ \partial_s(g_2) = -\tau g_3 - f_2(\tau^2 + 4(1 - \tau^2) \cos^2 \theta) \\ \partial_s(g_3) = \tau g_2 + \kappa h_3 - \tau^2 f_3 \\ \partial_s(h_3) = -\kappa g_3 + 4(\tau^2 - 1) \sin \theta \cos \theta f_2 \end{cases} \quad (4.11)$$

onde  $\kappa = -2\tau \cot \theta$  e  $\tau > 0$  são constantes.

As condições iniciais deste sistema são dadas por: Ao longo da curva horizontal  $\beta$ ,

ou seja, em  $s = 0$ , temos  $n(0, u) = \partial_u$ . Logo,  $f_1 = 0$ ,  $f_2 = 1$  e  $f_3 = 0$ .

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_u} \partial_s &= \nabla_n (\cos \theta \cos C E_1 + \cos \theta \sin C E_2 + \sin \theta E_3) \\
&= -\cos \theta \sin C n(C) E_1 + \cos \theta \cos^2 C \nabla_{E_2} E_1 + \cos \theta \cos C n(C) E_2 - \cos \theta \sin^2 C \nabla_{E_1} E_2 \\
&\quad + \sin \theta [-\sin C \nabla_{E_1} E_3 + \cos C \nabla_{E_2} E_3] \\
&= -\cos \theta C' \sin C E_1 - \tau \cos \theta \cos^2 C E_3 + \cos \theta C' \cos C E_2 - \tau \cos \theta \sin^2 C E_3 \\
&\quad + \sin \theta [\tau \sin C E_2 + \tau \cos C E_1] \\
&= E_1 [-\cos \theta C' \sin C + \tau \sin \theta \cos C] + E_2 [\cos \theta C' \cos C + \tau \sin \theta \sin C] + E_3 [-\tau \cos \theta] \\
&= [\cos C' (\cos \theta t - \sin \theta b) - \sin C n] [-\cos \theta C' \sin C + \tau \sin \theta \cos C] \\
&\quad + [\sin C (\cos \theta t - \sin \theta b) + \cos C n] [\cos \theta C' \cos C + \tau \sin \theta \sin C] \\
&\quad - [\sin \theta t + \cos \theta b] \tau \cos \theta \\
&= \cos \theta C' n - \tau b
\end{aligned}$$

Por outro lado,  $\nabla_{\partial_u} \partial_s = \nabla_{\partial_s} \partial_u = g_2 n + g_3 b$ . Logo,  $g_2 = \cos \theta C'$  e  $g_3 = -\tau$ .

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_u} \partial_u &= \nabla_n n = \nabla_n (-\sin C E_1 + \cos C E_2) \\
&= -C' \cos C E_1 - \sin C \cos C \nabla_{E_2} E_1 - C' \sin C E_2 - \sin C \cos C \nabla_{E_1} E_2 \\
&= -C' \cos C E_1 + \tau \sin C \cos C E_3 - C' \sin C E_2 - \tau \sin C \cos C E_3 \\
&= -C' \cos C [\cos C (\cos \theta t - \sin \theta b) - \sin C n] - C' \sin C [\sin C (\cos \theta t - \sin \theta b) + \cos C n] \\
&= -\cos \theta C' t + \sin \theta C' b
\end{aligned}$$

Por outro lado,  $\nabla_{\partial_u} \partial_u = \nabla_{\partial_u} n = h_1 t + h_3 b$ . Logo,  $h_1 = -\cos \theta C'$  e  $h_3 = \sin \theta C'$ .

Portanto, as condições iniciais são:

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 1, \quad f_3 = 0, \quad g_2 = \cos \theta C', \quad g_3 = -\tau, \quad h_1 = -\cos \theta C', \quad h_3 = \sin \theta C'.$$

Note que o sistema (4.11) é um sistema linear, sua solução é dada por:

$$\begin{cases} f_1 = \frac{-\tau}{\sqrt{B}} [\sin(sA) + \frac{C' \sin \theta}{2\sqrt{B}} (1 - \cos(sA))] \\ f_2 = \cos(sA) + \frac{C' \sin \theta}{2\sqrt{B}} \sin(sA) \\ f_3 = 0 \\ g_2 = \frac{(\tau^2 - 1) \sin(2\theta)}{\sqrt{B}} \sin(sA) + \frac{C' \cos \theta}{B} [\tau^2 - (\tau^2 - 1) \sin^2 \theta \cos(sA)] \\ g_3 = -\tau f_2 \\ h_1 = -g_2 \\ h_3 = \tau f_1 + \tan \theta g_2 \end{cases}$$

com

$$A = 2 \cot \theta \sqrt{B}$$

Nos pontos onde  $f_2 \neq 0$ , temos  $\partial_u = f_1 t + f_2 n$ . Portanto,

**Teorema 4.14.** *A superfície gerada pelas curvas das [Proposição 4.11](#) e [Proposição 4.12](#) tem como vetor normal unitário*

$$N = \frac{\partial_s \times \partial_u}{\|\partial_s \times \partial_u\|} = \frac{f_2 t \times n}{\|f_2 t \times n\|} = b,$$

que faz ângulo constante  $\theta$  com a vertical  $E_3$ .

Seja  $F : S \rightarrow \mathbb{S}_\tau^3$  uma imersão isométrica de uma superfície com ângulo constante  $S$  em  $\mathbb{S}_\tau^3$ . Denote por  $N$  o campo vetorial normal unitário,  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$  o ângulo entre o campo vetorial  $E_3$  e  $N$ , por  $T$  a projeção de  $E_3$  sobre o plano tangente a  $S$ , isto é,  $T = E_3 - \cos \theta N$  e  $JT = N \times T$ . Podemos supor que

$$N = -\sin \theta \cos \Phi E_1 - \sin \theta \sin \Phi E_2 + \cos \theta E_3,$$

onde  $\Phi = \Phi(s, u)$  é uma função em  $S$ . Daí

$$T = \sin \theta (\cos \theta \cos \Phi E_1 + \cos \theta \sin \Phi E_2 + \sin \theta E_3),$$

$$JT = \sin \theta (-\sin \Phi E_1 + \cos \Phi E_2).$$

Logo, a curva integral do campo  $\frac{JT}{\|JT\|}$  é uma curva horizontal p.c.a. e a curva integral do campo  $\frac{T}{\|T\|}$  é uma curva p.c.a. com curvatura  $-2\tau \cot \theta$  e torção  $\tau$  satisfazendo  $\left\langle \frac{T}{\|T\|}, E_3 \right\rangle = \sin \theta$ ,  $\left\langle \nabla_{\frac{T}{\|T\|}} \frac{T}{\|T\|}, E_3 \right\rangle = 0$  e  $\left\langle \frac{T}{\|T\|} \times \frac{\nabla_{\frac{T}{\|T\|}} \frac{T}{\|T\|}}{-2\tau \cot \theta}, E_3 \right\rangle > 0$ . Portanto, ao longo da curva horizontal temos um feixe de curvas integrais do campo  $\frac{T}{\|T\|}$ , gerando uma superfície  $\tilde{S}$  com ângulo constante contida em  $S$ .

Quando  $\tilde{S}$  é uma superfície inextensível ([Teorema 4.17](#)) temos que  $\tilde{S} = S$ . Portanto,

**Teorema 4.15.** *Uma superfície em  $\mathbb{S}_\tau^3$  que faz ângulo constante,  $\theta \in (0, \pi/2)$ , com a vertical  $E_3$  é da forma*

$$F(s, u) = \cos(\varphi_1 s) \psi_1(u) + \sin(\varphi_1 s) \psi_2(u) + \cos(\varphi_2 s) \psi_3(u) + \sin(\varphi_2 s) \psi_4(u)$$

onde

$$\varphi_1 = \frac{1}{\tau \sin \theta} (B - \tau \sqrt{B} \cos \theta) \quad e \quad \varphi_2 = \frac{1}{\tau \sin \theta} (B + \tau \sqrt{B} \cos \theta)$$

são constantes, e  $\psi_i(u)$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  são vetores em  $\mathbb{R}^4$ , dependendo apenas de  $u$ , satisfazendo as condições dadas no [Corolário 4.10](#) e a equação diferencial

$$(\psi_1 + \psi_3)' = -\sin C J_3(\psi_1 + \psi_3) - \cos C J_2(\psi_1 + \psi_3),$$

onde as matrizes  $J_2$  e  $J_3$  são dadas por [\(4.6\)](#).

*Demonstração.* Seja  $F(s, u) = (x(s, u), y(s, u), a(s, u), b(s, u))$  a superfície com ângulo constante  $\theta \in (0, \pi/2)$ . Como  $\partial_s = t$ , análogo ao [Corolário 4.10](#), obtemos:

$$F(s, u) = \cos(\varphi_1 s) \psi_1(u) + \sin(\varphi_1 s) \psi_2(u) + \cos(\varphi_2 s) \psi_3(u) + \sin(\varphi_2 s) \psi_4(u),$$

onde  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  são constantes, e  $\psi_i(u)$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  são vetores em  $\mathbb{R}^4$ , dependendo apenas de  $u$ , satisfazendo as condições dadas no [Corolário 4.10](#). Como  $F(0, u) = \beta(u)$ , onde  $\beta(u)$  é uma curva horizontal. Por outro lado  $F(0, u) = \psi_1(u) + \psi_3(u)$ , logo  $\beta(u) = \psi_1(u) + \psi_3(u)$ . Portanto, a equação diferencial segue imediatamente da [Proposição 4.13](#).  $\square$

### 4.2.3 Análise da Curvatura Média

Ao longo da superfície os campos coordenados são determinados por  $\partial_s = t$  e  $\partial_u = f_1 t + f_2 n$ . Assim, os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$E = \langle \partial_s, \partial_s \rangle = 1,$$

$$F = \langle \partial_s, \partial_u \rangle = f_1,$$

$$G = \langle \partial_u, \partial_u \rangle = (f_1)^2 + (f_2)^2.$$

De

$$\nabla_{\partial_s} \partial_s = -2\tau \cot \theta n,$$

$$\nabla_{\partial_s} \partial_u = g_2 n + g_3 b = g_2 n - \tau f_2 b,$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_u} \partial_u &= \nabla_{\partial_u} (f_1 t + f_2 n) = \partial_u(f_1) t + f_1 \nabla_{\partial_u} t + \partial_u(f_2) n + f_2 \nabla_{\partial_u} n \\ &= \partial_u(f_1) t + f_1 \nabla_{\partial_u} \partial_s + \partial_u(f_2) n + f_2 (h_1 t + h_3 b) \\ &= \partial_u(f_1) t + f_1 (g_2 n - \tau f_2 b) + \partial_u(f_2) n + f_2 (-g_2 t + [\tau f_1 + \tan \theta g_2] b) \\ &= [\partial_u(f_1) - f_2 g_2] t + [f_1 g_2 + \partial_u(f_2)] n + \tan \theta f_2 g_2 b. \end{aligned}$$

obtemos os coeficientes da segunda forma fundamental,

$$e = \langle N, \nabla_{\partial_s} \partial_s \rangle = \langle b, 2\tau \cot \theta n \rangle = 0,$$

$$f = \langle N, \nabla_{\partial_s} \partial_u \rangle = \langle b, g_2 n - \tau f_2 b \rangle = -\tau f_2,$$

$$g = \langle N, \nabla_{\partial_u} \partial_u \rangle = \langle b, \nabla_{\partial_u} \partial_u \rangle = \tan \theta f_2 g_2.$$

Portanto, a curvatura média é dada por

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + Eg}{EG - F^2} = \frac{\tan \theta g_2 + 2\tau f_1}{2f_2} \\ &= \sqrt{B} \frac{-\sin(sA) + \frac{C' \sin \theta}{2\sqrt{B}} \cos(sA)}{\cos(sA) + \frac{C' \sin \theta}{2\sqrt{B}} \sin(sA)} \end{aligned}$$

com

$$A = 2 \cot \theta \sqrt{B}.$$

Estudo da Curvatura Média:

$$H \longrightarrow 0 \text{ se}$$

$$-\sin(sA) + \frac{C' \sin \theta}{2\sqrt{B}} \cos(sA) = 0 \implies \tan(sA) = \frac{C' \sin \theta}{2\sqrt{B}}.$$

$$H \longrightarrow \infty \text{ se}$$

$$\cos(sA) + \frac{C' \sin \theta}{2\sqrt{B}} \sin(sA) = 0 \implies \tan(sA) = -\frac{2\sqrt{B}}{C' \sin \theta}.$$

Note que

$$\frac{C' \sin \theta}{2\sqrt{B}} \neq -\frac{2\sqrt{B}}{C' \sin \theta}$$

Concluimos que os pontos que anulam o numerador,  $-\tan \theta g_2 + 2\tau f_1$ , e o denominador,  $2f_2$ , de  $H$  são distintos. Ou seja, a curvatura média não está definida para todo  $s$ , mesmo se  $C' \equiv 0$ . Logo, a superfície não está definida nestes pontos. Portanto,

**Corolário 4.16.** *Uma superfície em  $\mathbb{S}_\tau^3$  que faz ângulo constante  $\theta$ ,  $\theta \in (0, \pi/2)$ , com a vertical  $E_3$  não é completa.*

Ideias análogas às usadas em  $SL(2, \mathbb{R})$ , para o caso  $B > 0$ , com

$$\xi = \xi(u) = \arctan \left( \frac{C' \sin \theta}{2\sqrt{B}} \right) \text{ e } x = \xi - sA,$$

mostram que

**Teorema 4.17.** *Uma superfície em  $\mathbb{S}_\tau^3$  que faz ângulo constante  $\theta$ ,  $\theta \in (0, \pi/2)$ , com a vertical  $E_3$  é inextensível se o domínio da curva horizontal for  $\mathbb{R}$ .*

A [Observação 3.57](#) também é válida em  $\mathbb{S}_\tau^3$ .

# 5 SUPERFÍCIES COM ÂNGULO CONSTANTE NO GRUPO DE HEISENBERG TRIDIMENSIONAL

A conjectura de Thurston propôs uma caracterização completa de estruturas geométricas nas variedades tridimensionais. Dentre elas está a geometria de  $Nil_3$ , isto é, a geometria do grupo de Lie consistindo das matrizes reais da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ou seja, o grupo de Heisenberg tridimensional.

O grupo de Heisenberg é um objeto matemático notável, com interessantes aspectos algébricos, geométricos e probabilísticos.  $Nil_3$  pertence a família dos Espaços  $BCV$  onde  $\kappa = 0$  e  $\tau = \frac{1}{2}$ . O leitor poderá encontrar mais detalhes sobre o grupo de Heisenberg tridimensional  $Nil_3$  e sua geometria em (11, 27, 28, 29, 30).

Neste capítulo daremos uma descrição geométrica global para as superfícies que fazem ângulo constante com o campo vetorial distinguido  $E_3$ . Esta construção dependerá de uma constante estritamente positiva  $B = \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta}$ ,  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Em seguida, encerramos com uma análise de sua curvatura média, donde conclui-se que tais superfícies não são completas e são inextensíveis caso o parâmetro  $u$  esteja definido para todo  $\mathbb{R}$ , caso contrário, não é claro que esta superfície seja estendível ou não.

## 5.1 O Espaço $Nil_3$

Consideraremos a Grupo de Lie tridimensional  $Nil_3$ , definido como o conjunto das matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

onde a operação do grupo é dada pela multiplicação matricial usual e com elemento neutro

dado por  $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , e cuja translação à esquerda, é determinada por:

$$\begin{aligned} L_M(A) &= MA \\ &= \begin{pmatrix} 1 & x_0 & z_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & x_0 + x & z_0 + x_0y + z \\ 0 & 1 & y_0 + y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

onde  $M = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & z_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in Nil$  é arbitrário.

Uma base de campos invariantes à esquerda, nas coordenadas  $(x, y, z)$ , é dada por

$$E_1 = \partial_x - \frac{y}{2}\partial_z, \quad E_2 = \partial_y + \frac{x}{2}\partial_z, \quad E_3 = \partial_z.$$

Definindo, em  $Nil_3$ , o referencial ortonormal  $\{E_1, E_2, E_3\}$ , temos que a equação da métrica invariante à esquerda, nessas coordenadas, é dada por

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + \left( \frac{1}{2}(ydx - xdy) + dz \right)^2$$

A demonstração dos próximos resultados podem ser encontrados em (11, 29, 30).

**Lema 5.1.** *A conexão de Levi-Civita em  $Nil_3$  é dada por:*

$$\begin{aligned} \nabla_{E_1}E_1 &= 0, & \nabla_{E_2}E_1 &= -\frac{1}{2}E_3, & \nabla_{E_3}E_1 &= -\frac{1}{2}E_2, \\ \nabla_{E_1}E_2 &= \frac{1}{2}E_3, & \nabla_{E_2}E_2 &= 0, & \nabla_{E_3}E_2 &= \frac{1}{2}E_1, \\ \nabla_{E_1}E_3 &= -\frac{1}{2}E_2, & \nabla_{E_2}E_3 &= \frac{1}{2}E_1, & \nabla_{E_3}E_3 &= 0 \end{aligned}$$

**Observação 5.2.** Seja  $X = fE_1 + gE_2 + hE_3$ . Então,  $X \times E_3 = -fE_2 + gE_1$  e  $\nabla_X E_3 = g(\frac{1}{2}E_1) - f(\frac{1}{2}E_2)$ . Logo,  $\nabla_X E_3 = \frac{1}{2}X \times E_3$ .

**Lema 5.3.** *O tensor curvatura de Riemann é dado por:*

$$\begin{aligned} R(E_1, E_2)E_3 &= R(E_1, E_3)E_2 = R(E_2, E_3)E_1 = 0 \\ R(E_1, E_2)E_1 &= -\frac{3}{4}E_2, & R(E_1, E_2)E_2 &= \frac{3}{4}E_1, & R(E_1, E_3)E_1 &= \frac{1}{4}E_3 \\ R(E_1, E_3)E_3 &= -\frac{1}{4}E_1, & R(E_2, E_3)E_2 &= \frac{1}{4}E_3, & R(E_2, E_3)E_3 &= -\frac{1}{4}E_2 \end{aligned}$$

**Corolário 5.4.** *A curvatura seccional de um plano  $P$  cujo vetor normal faz um ângulo  $\theta$  com  $E_3$  é*

$$K(P) = \frac{1}{4} - \cos^2 \theta$$

**Corolário 5.5.** *Se  $\varphi$  é uma isometria de  $Nil_3$ , vale uma das duas possibilidades:*

a)  $D\varphi_p(E_3(p)) = E_3(\varphi(p)), \forall p \in Nil_3;$

b)  $D\varphi_p(E_3(p)) = -E_3(\varphi(p)), \forall p \in Nil_3.$

**Proposição 5.6.** *Seja  $\varphi$  uma isometria de  $Nil_3$ . Sejam  $A = \varphi(I)$  e  $L_A$  a multiplicação à esquerda por  $A$ . Se  $D\varphi(E_3(I)) = E_3(A)$ , então  $\varphi = L_A \circ \phi_t$ , para algum  $t$  univocamente determinado. Se  $D\varphi(E_3(I)) = -E_3(A)$ , então  $\varphi = L_A \circ R \circ \phi_t$ , para algum  $t$  univocamente determinado, onde*

$$\phi_t(x, y, z) = (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t, z) \quad e \quad R(x, y, z) = (x, -y, -z)$$

## 5.2 Superfícies com Ângulo Constante em $Nil_3$

### 5.2.1 Curva-com-triedro em $Nil_3$

O objetivo desta seção é mostrar a existência de duas curvas  $\alpha(s)$  e  $\beta(u)$ , satisfazendo certas condições específicas ([Proposição 5.9](#) e [Proposição 5.10](#)), que serão usadas na construção de uma superfície (seção 5.2.2).

Em  $Nil_3$ , a [Proposição 2.3](#) se reescreve como:

**Proposição 5.7.** *Sejam  $\kappa = \kappa(s)$  e  $\tau = \tau(s)$  funções dadas. Sejam  $p \in Nil_3$  dado e  $\{t_0, n_0, b_0\}$  um triedro ortonormal positivo em  $T_p Nil_3$ . Então existe uma única curva-com-triedro  $(\alpha, \{t, n, b\})$  com curvatura  $\kappa$  e torção  $\tau$  satisfazendo as condições iniciais  $\alpha(0) = p$ ,  $t(0) = t_0$ ,  $n(0) = n_0$  e  $b(0) = b_0$ .*

*Demonstração.* Consideremos o referencial dado pelos campos invariantes à esquerda  $\{E_1, E_2, E_3\}$  em  $Nil_3$ . Seja  $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s)), s \in (a, b)$ , uma curva com triedro  $\{t, n, b\}$ . Escreva

$$t = f_1 E_1 + f_2 E_2 + f_3 E_3,$$

$$n = g_1 E_1 + g_2 E_2 + g_3 E_3,$$

$$b = h_1 E_1 + h_2 E_2 + h_3 E_3.$$

Então  $\{t, n, b\}$  é solução do seguinte sistema de EDO's de primeira ordem:

$$\begin{aligned} f'_1 &= \kappa g_1 - f_2 f_3 \\ f'_2 &= \kappa g_2 + f_1 f_3 \\ f'_3 &= \kappa g_3 \\ g'_1 &= -\kappa f_1 - \tau h_1 - \frac{1}{2} f_3 g_2 - \frac{1}{2} g_3 f_2 \\ g'_2 &= -\kappa f_2 - \tau h_2 + \frac{1}{2} f_3 g_1 + \frac{1}{2} g_3 f_1 \\ g'_3 &= -\kappa f_3 - \tau h_3 + \frac{1}{2} f_2 g_1 - \frac{1}{2} f_1 g_2 \\ h'_1 &= \tau g_1 - \frac{1}{2} f_3 h_2 - \frac{1}{2} h_3 f_2 \\ h'_2 &= \tau g_2 + \frac{1}{2} f_3 h_1 + \frac{1}{2} f_1 h_3 \\ h'_3 &= \tau g_3 + \frac{1}{2} f_2 h_1 - \frac{1}{2} f_1 h_2 \end{aligned} \tag{5.1}$$

O resultado segue análogo a demonstração da [Proposição 3.21](#).

□

Suponha que sejam dados  $\kappa = -\cot \theta$ , com  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$  uma constante fixada,  $\tau = \frac{1}{2}$  e um triedro ortonormal, orientado positivamente  $\{t_0, n_0, b_0\}$  em  $T_p \text{Nil}_3$  com  $\langle t_0, E_3 \rangle = \sin \theta$ ,  $\langle n_0, E_3 \rangle = 0$  e  $\langle b_0, E_3 \rangle > 0$ .

Uma solução para o sistema (5.1) satisfazendo as condições iniciais acima é  $\{t(s), n(s), b(s)\}$ , dados por

$$\begin{cases} t(s) = \cos \theta \cos \omega E_1 + \cos \theta \sin \omega E_2 + \sin \theta E_3 \\ n(s) = -\sin \omega E_1 + \cos \omega E_2 \\ b(s) = -\sin \theta \cos \omega E_1 - \sin \theta \sin \omega E_2 + \cos \theta E_3 \end{cases} \tag{5.2}$$

com  $\omega = -Bs + C$ , com  $B = \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta}$ ,  $s \in I$ , onde  $C$  é determinado por  $n(0)$ .

Pela [Proposição 5.7](#), dados  $\kappa = -\cot \theta$ , com  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$  uma constante fixada,  $\tau = \frac{1}{2}$  e um triedro ortonormal, orientado positivamente  $\{t_0, n_0, b_0\}$  em  $T_p \text{Nil}_3$  com  $\langle t_0, E_3 \rangle = \sin \theta$ ,  $\langle n_0, E_3 \rangle = 0$  e  $\langle b_0, E_3 \rangle > 0$ , então existe uma única curva p.c.a.  $\alpha$  passando por  $p$  com curvatura  $\kappa = -\cot \theta$  e torção  $\tau = \frac{1}{2}$  satisfazendo  $\langle \alpha'(0), E_3 \rangle = \sin \theta$ ,  $\langle \alpha''(0), E_3 \rangle = 0$  e  $\langle \alpha'(0) \times \frac{\alpha''(0)}{\kappa}, E_3 \rangle > 0$ . A saber, a curva  $\alpha(s)$ :

**Proposição 5.8.** *A curva integral do campo  $t$  é dada por  $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , onde*

$$\begin{cases} x(s) = -\tan \theta \sin \omega + \varphi_1 \\ y(s) = \tan \theta \cos \omega + \varphi_2 \\ z(s) = \frac{\sin \theta}{2} s + \frac{\tan \theta}{2} (\cos \omega \varphi_1 + \sin \omega \varphi_2) + \varphi_3 \end{cases}$$

com  $\omega = -Bs + C$ , onde  $B = \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta}$ ,  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ , e  $\varphi_i$  constantes,  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

*Demonstração.* Seja  $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))$ . Logo,  $\alpha' = x' \partial_x + y' \partial_y + z' \partial_z = t$ .

Como

$$\begin{aligned} t &= \cos \theta \cos \omega E_1 + \cos \theta \sin \omega E_2 + \sin \theta E_3 \\ &= \cos \theta \cos \omega \partial_x + \cos \theta \sin \omega \partial_y + \left(-\frac{y}{2} \cos \theta \cos \omega + \frac{x}{2} \cos \theta \sin \omega + \sin \theta\right) \partial_z \end{aligned}$$

obtemos o sistema:

$$\begin{cases} x' = \cos \theta \cos \omega \\ y' = \cos \theta \sin \omega \\ z' = -\frac{y}{2} \cos \theta \cos \omega + \frac{x}{2} \cos \theta \sin \omega + \sin \theta \end{cases}$$

com  $\omega = -Bs + C$ . A solução deste sistema é:

$$\begin{cases} x(s) = -\tan \theta \sin \omega + \varphi_1 \\ y(s) = \tan \theta \cos \omega + \varphi_2 \\ z(s) = \frac{\sin \theta}{2} s + \frac{\tan \theta}{2} (\cos \omega \varphi_1 + \sin \omega \varphi_2) + \varphi_3 \end{cases}$$

□

Seja  $\gamma$  outra curva com a mesma curvatura e torção da curva  $\alpha$  passando por um ponto  $q \in Nil_3$  satisfazendo as mesmas condições iniciais dadas acima,  $\langle \bar{t}(0), E_3 \rangle = \sin \theta$ ,  $\langle \bar{n}(0), E_3 \rangle = 0$  e  $\langle \bar{b}(0), E_3 \rangle > 0$ . Assim, temos o triedro da curva  $\gamma$ ,  $\{\bar{t}(s), \bar{n}(s), \bar{b}(s)\}$ , dado por

$$\begin{cases} \bar{t}(s) = \cos \theta \cos \bar{\omega} E_1 + \cos \theta \sin \bar{\omega} E_2 + \sin \theta E_3 \\ \bar{n}(s) = -\sin \bar{\omega} E_1 + \cos \bar{\omega} E_2 \\ \bar{b}(s) = -\sin \theta \cos \bar{\omega} E_1 - \sin \theta \sin \bar{\omega} E_2 + \cos \theta E_3 \end{cases}$$

com  $\bar{\omega} = -Bs + \bar{C}$ .

Seja  $r \in Nil_3$  tal que  $q = \phi_{\bar{t}}(r)$ , onde  $\phi_{\bar{t}}$  é dada na [Proposição 5.6](#). Considere a seguinte isometria de  $Nil_3$ :  $\varphi = \phi_{\bar{t}} \circ L_r \circ L_{p^{-1}}$ , com  $L$  translação à esquerda. Assim,  $\varphi$  é uma que leva  $p$  em  $q$  e  $E_3$  em  $E_3$ . Tomando  $\tilde{t} = \bar{C} - C$ , temos que  $d\varphi_p(t(0)) = \bar{t}(0)$ ,  $d\varphi_p(n(0)) = \bar{n}(0)$  e  $d\varphi_p(b(0)) = \bar{b}(0)$ .

Portanto, as curvas  $\varphi \circ \alpha$  e  $\gamma$  são duas curvas com mesma curvatura e torção passando pelo mesmo ponto  $q$  com as mesmas condições iniciais. Logo, pela unicidade da curva,  $\varphi \circ \alpha = \gamma$ .

Suponha que  $\psi$  seja outra isometria de  $Nil_3$  que leva  $p$  em  $q$  e leva o triedro  $\{t(0), n(0), b(0)\}$  no triedro  $\{\bar{t}(0), \bar{n}(0), \bar{b}(0)\}$ . Assim,  $\psi^{-1} \circ \varphi(p) = Id(p)$  e  $d(\psi^{-1} \circ \varphi)_p = Id$ . Como  $Nil_3$  é conexo, então  $\psi^{-1} \circ \varphi = Id \implies \psi = \varphi$ .

Assim, obtemos o seguinte resultado:

**Proposição 5.9.** *Dados  $p \in Nil_3$  e  $v \in T_p Nil_3$  unitário com  $\langle v, E_3 \rangle = \sin \theta$ , então existe uma única curva  $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow Nil_3$ , p.c.a., com  $\alpha(0) = p$ ,  $\alpha'(0) = v$ , com curvatura constante*

$\kappa = -\cot \theta$ , torção  $\tau = \frac{1}{2}$ , satisfazendo  $\langle \alpha''(0), E_3 \rangle = 0$  e  $\left\langle \alpha'(0) \times \frac{\alpha''(0)}{\kappa}, E_3 \right\rangle > 0$ . A saber, a curva dada na [Proposição 5.8](#) com  $\alpha(0) = p$ . Além disso, dadas duas curvas  $\alpha$  e  $\gamma$  com as condições acima, existe uma única isometria  $\varphi$  de  $Nil_3$  tal que  $\gamma = \varphi \circ \alpha$ .

Análogo a [Observação 3.25](#), as condições

$$\langle v, E_3 \rangle = \sin \theta, \quad \langle \alpha''(0), E_3 \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \left\langle \alpha'(0) \times \frac{\alpha''(0)}{\kappa}, E_3 \right\rangle > 0$$

determinam o triedro ortonormal inicial  $\{t_0, n_0, b_0\}$  em  $T_p Nil_3$ .

**Proposição 5.10.** *Sejam  $p \in Nil_3$ ,  $v \in T_p Nil_3$  unitário e horizontal, e  $\kappa(u)$  uma função de  $u$ . Existe uma única curva horizontal p.c.a.  $\beta(u)$  de curvatura  $\kappa(u)$  e torção  $-\frac{1}{2}$  com triedro  $\{t, n, E_3\}$  tal que  $\beta(0) = p$ ,  $\beta'(0) = v$ .*

*Demonstração.* Consideremos o referencial dado pelos campos invariantes à esquerda  $\{E_1, E_2, E_3\}$  em  $Nil_3$ . Escreva

$$\begin{aligned} t &= f_1 E_1 + f_2 E_2, \\ n &= g_1 E_1 + g_2 E_2, \\ b &= E_3. \end{aligned}$$

Então  $\{t, n, b\}$  é solução do seguinte sistema de EDO's de primeira ordem:

$$\begin{aligned} f_1' &= \kappa g_1 \\ f_2' &= \kappa g_2 \\ g_1' &= -\kappa f_1 \\ g_2' &= -\kappa f_2 \end{aligned}$$

satisfazendo  $g_1 = -f_2$ ,  $g_2 = f_1$ . A curva integral do campo  $t$  é a curva desejada. Verifica-se que a curvatura desta curva é  $\kappa(u)$  e sua torção é  $-\frac{1}{2}$ .  $\square$

### 5.2.2 Superfícies com Ângulo Constante

A partir de uma curva horizontal emana um feixe de curvas satisfazendo as condições dadas na [Proposição 5.9](#). De fato, sejam  $p \in Nil_3$ ,  $C$  uma constante e  $\kappa(u)$  uma função de  $u$ . Considere o seguinte vetor horizontal

$$w = -\sin C E_1 + \cos C E_2 \in T_p Nil_3.$$

Pela [Proposição 5.10](#) existe uma única curva horizontal  $\beta(u)$  p.c.a. passando por  $p$  com velocidade  $w$  e com curvatura  $\kappa(u)$ . Podemos supor que existe uma função  $\varepsilon(u)$  tal que

$$\beta'(u) = -\sin \varepsilon(u) E_1 + \cos \varepsilon(u) E_2,$$

onde, por um cálculo simples, a curvatura de  $\beta$  é  $\varepsilon'(u)$ . Logo,  $\kappa(u) = \varepsilon'(u)$ .

Fixe  $u_0$  tal que  $\beta(u_0) = p$  e  $\varepsilon(u_0) = C$ . Considere o seguinte vetor unitário e ortogonal a  $w$

$$v = \cos \theta \cos CE_1 + \cos \theta \sin CE_2 + \sin \theta E_3 \in T_p Nil_3.$$

Pela [Proposição 5.9](#), existe uma única curva  $\alpha(s)$  com  $\alpha(0) = p$ ,  $\alpha'(0) = v$  de curvatura constante  $\kappa = -\cot \theta$  e torção  $\tau = \frac{1}{2}$  satisfazendo  $\langle \alpha''(0), E_3 \rangle = 0$  e  $\langle \alpha'(0) \times \frac{\alpha''(0)}{\kappa}, E_3 \rangle > 0$ . Esta curva  $\alpha(s)$  tem como triedro os vetores  $\{t, n, b\}$  dados por [\(5.2\)](#).

Da arbitrariedade de  $u_0$ , conclui-se que:

i) Para cada  $u_0$  dado obtemos um valor para a constante  $C$ . Logo,  $C$  depende da variável  $u$ ,  $C = C(u)$ .

$$ii) \beta'(u) = \frac{\nabla_t t}{\cot \theta}(0) = n(0) \Rightarrow \varepsilon(u) = C(u).$$

iii) Ao longo de uma curva horizontal p.c.a. passa um feixe de curvas satisfazendo as condições da [Proposição 5.9](#), dando origem a uma superfície.

De agora em diante, as notações  $t, n, b$  serão usadas para os campos vetoriais dados em [\(5.2\)](#), que dependem das variáveis  $s$  e  $u$ , com  $\omega = -Bs + C(u)$ , onde  $B = \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta}$ ,  $\theta \in (0, \pi/2)$  uma constante fixada.

A seguir, mostraremos que a superfície resultante forma ângulo constante com a vertical  $E_3$ .

Temos  $t = \partial_s$ . Sejam  $f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3, h_1, h_2$  e  $h_3$  funções das variáveis  $s$  e  $u$  tais que

$$\begin{aligned} \partial_u &= f_1 t + f_2 n + f_3 b, \\ \nabla_t \partial_u &= g_1 t + g_2 n + g_3 b, \\ \nabla_{\partial_u} n &= h_1 t + h_2 n + h_3 b. \end{aligned}$$

Pela simetria da conexão,  $g_1 = \langle t, \nabla_t \partial_u \rangle = \frac{1}{2} \partial_u \langle \partial_s, \partial_s \rangle = 0$ . Analogamente,  $h_2 = 0$ . Logo,  $\nabla_t \partial_u = g_2 n + g_3 b$  e  $\nabla_{\partial_u} n = h_1 t + h_3 b$ .

Note que, o vetor normal unitário da superfície é dado por

$$N = \frac{\partial_s \times \partial_u}{\|\partial_s \times \partial_u\|} = \frac{f_2 b - f_3 n}{\sqrt{f_2^2 + f_3^2}}.$$

Assim, análogo à  $SL(2, \mathbb{R})$ , mostraremos que  $f_3 \equiv 0$ .

Temos  $\nabla_t \partial_u = g_2 n + g_3 b$ . Por outro lado,

$$\begin{aligned} \nabla_t \partial_u &= t(f_1)t + f_1 \nabla_t t + t(f_2)n + f_2 \nabla_t n + t(f_3)b + f_3 \nabla_t b \\ &= t(f_1)t + f_1 \kappa n + t(f_2)n + f_2(-\kappa t - \tau b) + t(f_3)b + f_3 \tau n \\ &= (t(f_1) - \kappa f_2)t + (\kappa f_1 + t(f_2) + \tau f_3)n + (-\tau f_2 + t(f_3))b \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{cases} 0 = \partial_s(f_1) - \kappa f_2 \\ g_2 = \kappa f_1 + \partial_s(f_2) + \tau f_3 \\ g_3 = -\tau f_2 + \partial_s(f_3) \end{cases} \quad (5.3)$$

Usando o tensor curvatura de Riemann

$$R(X, Y)Z = \nabla_{[X, Y]}Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z$$

temos  $\nabla_{\partial_s} \nabla_{\partial_s} \partial_u = \nabla_{\partial_s} \nabla_{\partial_u} \partial_s = \nabla_{\partial_u} \nabla_{\partial_s} \partial_s - R(\partial_s, \partial_u) \partial_s$ , onde

$$R(\partial_s, \partial_u) \partial_s = R(t, f_1 t + f_2 n + f_3 b) t = f_2 R(t, n) t + f_3 R(t, b) t$$

$$\begin{aligned} R(t, n) t &= R(\cos \theta \cos \omega E_1 + \cos \theta \sin \omega E_2 + \sin \theta E_3, n) t \\ &= \cos \theta \cos \omega R(E_1, n) t + \cos \theta \sin \omega R(E_2, n) t + \sin \theta R(E_3, n) t \\ &= \cos \theta \cos \omega [\cos \theta \cos \omega R(E_1, n) E_1 + \cos \theta \sin \omega R(E_1, n) E_2 + \sin \theta R(E_1, n) E_3] \\ &+ \cos \theta \sin \omega [\cos \theta \cos \omega R(E_2, n) E_1 + \cos \theta \sin \omega R(E_2, n) E_2 + \sin \theta R(E_2, n) E_3] \\ &+ \sin \theta [\cos \theta \cos \omega R(E_3, n) E_1 + \cos \theta \sin \omega R(E_3, n) E_2 + \sin \theta R(E_3, n) E_3] \\ &= \cos \theta \cos \omega [\cos \theta \cos^2 \omega R(E_1, E_2) E_1 + \cos \theta \sin \omega \cos \omega R(E_1, E_2) E_2] \\ &- \cos \theta \sin \omega [\cos \theta \cos \omega \sin \omega R(E_2, E_1) E_1 + \cos \theta \sin^2 \omega R(E_2, E_1) E_2] \\ &+ \sin \theta [-\cos \theta \cos \omega \sin \omega R(E_3, E_1) E_1 + \cos \theta \sin \omega \cos \omega R(E_3, E_2) E_2 \\ &+ \sin \theta \{-\sin \omega R(E_3, E_1) E_3 + \cos \omega R(E_3, E_2) E_3\}] \\ &= \cos \theta \cos \omega [-\cos \theta \cos^2 \omega (\frac{3}{4} E_2) + \cos \theta \sin \omega \cos \omega (\frac{3}{4} E_1)] \\ &- \cos \theta \sin \omega [\cos \theta \cos \omega \sin \omega (\frac{3}{4} E_2) - \cos \theta \sin^2 \omega (\frac{3}{4} E_1)] \\ &- \sin^2 \theta \sin \omega (\frac{1}{4} E_1) + \sin^2 \theta \cos \omega (\frac{1}{4} E_2) \\ &= (-\frac{3}{4} \cos^2 \theta + \frac{1}{4} \sin^2 \theta) [-\sin \omega E_1 + \cos \omega E_2] \\ &= (\frac{1}{4} - \cos^2 \theta) n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(t, b)t &= R(\cos \theta \cos \omega E_1 + \cos \theta \sin \omega E_2 + \sin \theta E_3, b)t \\
&= \cos \theta \cos \omega R(E_1, b)t + \cos \theta \sin \omega R(E_2, b)t + \sin \theta R(E_3, b)t \\
&= \cos \theta \cos \omega [\cos \theta \cos \omega R(E_1, b)E_1 + \cos \theta \sin \omega R(E_1, b)E_2 + \sin \theta R(E_1, b)E_3] \\
&+ \cos \theta \sin \omega [\cos \theta \cos \omega R(E_2, b)E_1 + \cos \theta \sin \omega R(E_2, b)E_2 + \sin \theta R(E_2, b)E_3] \\
&+ \sin \theta [\cos \theta \cos \omega R(E_3, b)E_1 + \cos \theta \sin \omega R(E_3, b)E_2 + \sin \theta R(E_3, b)E_3] \\
&= \cos \theta \cos \omega \{ \cos \theta \cos \omega [-\sin \theta \sin \omega R(E_1, E_2)E_1 + \cos \theta R(E_1, E_3)E_1] \\
&- \cos \theta \sin \theta \sin^2 \omega R(E_1, E_2)E_2 + \cos \theta \sin \theta R(E_1, E_3)E_3 \} \\
&+ \cos \theta \sin \omega \{ -\cos \theta \sin \theta \cos^2 \omega R(E_2, E_1)E_1 \\
&+ \cos \theta \sin \omega [-\sin \theta \cos \omega R(E_2, E_1)E_2 + \cos \theta R(E_2, E_3)E_2] + \sin \theta \cos \theta R(E_2, E_3)E_3 \} \\
&+ \sin \theta \{ -\cos \theta \sin \theta \cos^2 \omega R(E_3, E_1)E_1 - \cos \theta \sin \theta \sin^2 \omega R(E_3, E_2)E_2 \\
&+ \sin \theta [-\sin \theta \cos \omega R(E_3, E_1)E_3 - \sin \theta \sin \omega R(E_3, E_2)E_3] \} \\
&= \cos \theta \cos \omega \{ \cos \theta \cos \omega [\sin \theta \sin \omega (\frac{3}{4}E_2) + \cos \theta (\frac{1}{4}E_3)] \\
&- \cos \theta \sin \theta \sin^2 \omega (\frac{3}{4}E_1) - \cos \theta \sin \theta (\frac{1}{4}E_1) \} \\
&+ \cos \theta \sin \omega \{ -\cos \theta \sin \theta \cos^2 \omega (\frac{3}{4}E_2) \\
&+ \cos \theta \sin \omega [\sin \theta \cos \omega (\frac{3}{4}E_1) + \cos \theta (\frac{1}{4}E_3)] - \sin \theta \cos \theta (\frac{1}{4}E_2) \} \\
&+ \sin \theta \{ \cos \theta \sin \theta \cos^2 \omega (\frac{1}{4}E_3) + \cos \theta \sin \theta \sin^2 \omega (\frac{1}{4}E_3) \\
&+ \sin \theta [-\sin \theta \cos \omega (\frac{1}{4}E_1) - \sin \theta \sin \omega (\frac{1}{4}E_2)] \} \\
&= E_1 [-\frac{1}{4} \sin \theta \cos \omega] + E_2 [-\frac{1}{4} \sin \theta \sin \omega] + E_3 \frac{1}{4} \cos \theta \\
&= \frac{1}{4}b
\end{aligned}$$

Portanto,

$$R(\partial_s, \partial_u)\partial_s = f_2 R(t, n)t + f_3 R(t, b)t = f_2 (\frac{1}{4} - \cos^2 \theta)n + f_3 \frac{1}{4}b$$

Como  $\nabla_{\partial_s}\partial_s = \kappa n$ , temos  $\nabla_{\partial_u}\nabla_{\partial_s}\partial_s = \kappa \nabla_{\partial_u}n = \kappa(h_1t + h_3b)$ .

Assim,

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_s}\nabla_{\partial_s}\partial_u &= \nabla_{\partial_u}\nabla_{\partial_s}\partial_s - R(\partial_s, \partial_u)\partial_s \\
&= \kappa(h_1t + h_3b) - f_2(\frac{1}{4} - \cos^2 \theta)n - f_3\frac{1}{4}b \\
&= \kappa h_1t - f_2(\frac{1}{4} - \cos^2 \theta)n + (\kappa h_3 - \frac{f_3}{4})b
\end{aligned}$$

Por outro lado, como  $\nabla_{\partial_s}\partial_u = g_2n + g_3b$ , temos

$$\nabla_{\partial_s}\nabla_{\partial_s}\partial_u = (-\kappa g_2)t + (t(g_2) + \tau g_3)n + (-\tau g_2 + t(g_3))b$$

Logo,

$$\begin{cases} -\kappa g_2 = \kappa h_1 \\ \partial_s(g_2) + \tau g_3 = -f_2(\frac{1}{4} - \cos^2 \theta) \\ -\tau g_2 + \partial_s(g_3) = \kappa h_3 - \frac{f_3}{4} \end{cases} \quad (5.4)$$

Temos também que

$$\nabla_{\partial_s} \nabla_{\partial_u} n = \nabla_{\partial_u} \nabla_{\partial_s} n - R(\partial_s, \partial_u) n,$$

onde  $R(\partial_s, \partial_u) n = R(t, f_1 t + f_2 n + f_3 b) n = f_2 R(t, n) n + f_3 R(t, b) n$ .

$$\begin{aligned} R(t, n) n &= R(\cos \theta \cos \omega E_1 + \cos \theta \sin \omega E_2 + \sin \theta E_3, n) n \\ &= \cos \theta \cos \omega R(E_1, n) n + \cos \theta \sin \omega R(E_2, n) n + \sin \theta R(E_3, n) n \\ &= \cos \theta \cos \omega [-\sin \omega R(E_1, n) E_1 + \cos \omega R(E_1, n) E_2] \\ &\quad + \cos \theta \sin \omega [-\sin \omega R(E_2, n) E_1 + \cos \omega R(E_2, n) E_2] \\ &\quad + \sin \theta [-\sin \omega R(E_3, n) E_1 + \cos \omega R(E_3, n) E_2] \\ &= \cos \theta \cos \omega [-\sin \omega \cos \omega R(E_1, E_2) E_1 + \cos^2 \omega R(E_1, E_2) E_2] \\ &\quad + \cos \theta \sin \omega [\sin^2 \omega R(E_2, E_1) E_1 - \sin \omega \cos \omega R(E_2, E_1) E_2] \\ &\quad + \sin \theta [\sin^2 \omega R(E_3, E_1) E_1 + \cos^2 \omega R(E_3, E_2) E_2] \\ &= \cos \theta \cos \omega [\sin \omega \cos \omega (\frac{3}{4} E_2) + \cos^2 \omega (\frac{3}{4} E_1)] \\ &\quad + \cos \theta \sin \omega [\sin^2 \omega (\frac{3}{4} E_2) + \sin \omega \cos \omega (\frac{3}{4} E_1)] \\ &\quad - \sin \theta \sin^2 \omega (\frac{1}{4} E_3) - \sin \theta \cos^2 \omega (\frac{1}{4} E_3) \\ &= E_1 [\frac{3}{4} \cos \theta \cos \omega] + E_2 [\frac{3}{4} \cos \theta \sin \omega] + E_3 [-\frac{1}{4} \sin \theta] \\ &= (-\frac{1}{4} + \cos^2 \theta) t - \sin \theta \cos \theta b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(t, b)n &= R(\cos \theta \cos \omega E_1 + \cos \theta \sin \omega E_2 + \sin \theta E_3, b)n \\
&= \cos \theta \cos \omega R(E_1, b)n + \cos \theta \sin \omega R(E_2, b)n + \sin \theta R(E_3, b)n \\
&= \cos \theta \cos \omega [-\sin \omega R(E_1, b)E_1 + \cos \omega R(E_1, b)E_2] \\
&+ \cos \theta \sin \omega [-\sin \omega R(E_2, b)E_1 + \cos \omega R(E_2, b)E_2] \\
&+ \sin \theta [-\sin \omega R(E_3, b)E_1 + \cos \omega R(E_3, b)E_2] \\
&= \cos \theta \cos \omega \{-\sin \omega [-\sin \theta \sin \omega R(E_1, E_2)E_1 + \cos \theta R(E_1, E_3)E_1] \\
&- \sin \theta \sin \omega \cos \omega R(E_1, E_2)E_2\} \\
&+ \cos \theta \sin \omega \{\sin \omega \sin \theta \cos \omega R(E_2, E_1)E_1 + \cos \omega [-\sin \theta \cos \omega R(E_2, E_1)E_2 \\
&+ \cos \theta R(E_2, E_3)E_2]\} \\
&+ \sin \theta \{\sin \theta \sin \omega \cos \omega R(E_3, E_1)E_1 - \sin \theta \cos \omega \sin \omega R(E_3, E_2)E_2\} \\
&= \cos \theta \cos \omega \{-\sin \omega [\sin \theta \sin \omega (\frac{3}{4}E_2) + \cos \theta (\frac{1}{4}E_3)] \\
&- \sin \theta \sin \omega \cos \omega (\frac{3}{4}E_1)\} \\
&+ \cos \theta \sin \omega \{\sin \omega \sin \theta \cos \omega (\frac{3}{4}E_2) + \cos \omega [\sin \theta \cos \omega (\frac{3}{4}E_1) \\
&+ \cos \theta (\frac{1}{4}E_3)]\} \\
&+ \sin \theta \{\sin \theta \sin \omega \cos \omega (-\frac{1}{4}E_3) + \sin \theta \cos \omega \sin \omega (\frac{1}{4}E_3)\} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$R(\partial_s, \partial_u)n = f_2 R(t, n)n + f_3 R(t, b)n = f_2 [(-\frac{1}{4} + \cos^2 \theta)t - \sin \theta \cos \theta b]$$

Também temos que

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_u} \nabla_{\partial_s} n &= \nabla_{\partial_u} (-\kappa t - \tau b) = -\kappa \nabla_{\partial_u} t - \tau \nabla_{\partial_u} b = -\kappa \nabla_{\partial_s} \partial_u - \tau \nabla_{\partial_u} (t \times n) \\
&= -\kappa \nabla_{\partial_s} \partial_u - \tau (\nabla_{\partial_u} t \times n + t \times \nabla_{\partial_u} n) \\
&= -\kappa (g_2 n + g_3 b) - \tau [(g_2 n + g_3 b) \times n + t \times (h_1 t + h_3 b)] \\
&= \tau g_3 t + (-\kappa g_2 + \tau h_3)n - \kappa g_3 b
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_s} \nabla_{\partial_u} n &= \nabla_{\partial_u} \nabla_{\partial_s} n - R(\partial_s, \partial_u)n \\
&= \tau g_3 t + (-\kappa g_2 + \tau h_3)n - \kappa g_3 b - f_2 [(-\frac{1}{4} + \cos^2 \theta)t - \sin \theta \cos \theta b] \\
&= [\tau g_3 + f_2 (\frac{1}{4} - \cos^2 \theta)]t + (-\kappa g_2 + \tau h_3)n + (-\kappa g_3 + \sin \theta \cos \theta f_2)b
\end{aligned}$$

Por outro lado, como  $\nabla_{\partial_u} n = h_1 t + h_3 b$ , temos

$$\nabla_{\partial_s} \nabla_{\partial_u} n = (t(h_1))t + (\kappa h_1 + \tau h_3)n + (t(h_3))b$$

Logo,

$$\begin{cases} \partial_s(h_1) = \tau g_3 + f_2(\frac{1}{4} - \cos^2 \theta) \\ \kappa h_1 + \tau h_3 = -\kappa g_2 + \tau h_3 \\ \partial_s(h_3) = -\kappa g_3 + \sin \theta \cos \theta f_2 \end{cases} \quad (5.5)$$

Juntando (5.3), (5.4) e (5.5), temos

$$\begin{cases} \partial_s(f_1) = \kappa f_2 \\ \partial_s(f_2) = g_2 - \kappa f_1 - \tau f_3 \\ \partial_s(f_3) = \tau f_2 + g_3 \\ -\kappa g_2 = \kappa h_1 \\ \partial_s(g_2) = -\tau g_3 - f_2(\frac{1}{4} - \cos^2 \theta) \\ \partial_s(g_3) = \tau g_2 + \kappa h_3 - \frac{f_3}{4} \\ \partial_s(h_1) = \tau g_3 + f_2(\frac{1}{4} - \cos^2 \theta) \\ \kappa h_1 + \tau h_3 = -\kappa g_2 + \tau h_3 \\ \partial_s(h_3) = -\kappa g_3 + \sin \theta \cos \theta f_2 \end{cases}$$

que equivale à:

$$\begin{cases} \partial_s(f_1) = \kappa f_2 \\ \partial_s(f_2) = g_2 - \kappa f_1 - \tau f_3 \\ \partial_s(f_3) = \tau f_2 + g_3 \\ -\kappa g_2 = \kappa h_1 \\ \partial_s(g_2) = -\tau g_3 - f_2(\frac{1}{4} - \cos^2 \theta) \\ \partial_s(g_3) = \tau g_2 + \kappa h_3 - \frac{f_3}{4} \\ \partial_s(h_3) = -\kappa g_3 + \sin \theta \cos \theta f_2 \end{cases} \quad (5.6)$$

onde  $\kappa = -\cot \theta$  e  $\tau = \frac{1}{2}$ .

As condições iniciais deste sistema são dadas por: Ao longo da curva horizontal  $\beta$ ,

ou seja, em  $s = 0$ , temos  $n(0, u) = \partial_u$ . Logo,  $f_1 = 0$ ,  $f_2 = 1$  e  $f_3 = 0$ .

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\partial_u} \partial_s &= \nabla_n (\cos \theta \cos CE_1 + \cos \theta \sin CE_2 + \sin \theta E_3) \\
 &= -\cos \theta \sin Cn(C)E_1 + \cos \theta \cos^2 C \nabla_{E_2} E_1 + \cos \theta \cos Cn(C)E_2 - \cos \theta \sin^2 C \nabla_{E_1} E_2 \\
 &\quad + \sin \theta [-\sin C \nabla_{E_1} E_3 + \cos C \nabla_{E_2} E_3] \\
 &= -\cos \theta C' \sin CE_1 - \frac{1}{2} \cos \theta \cos^2 CE_3 + \cos \theta C' \cos CE_2 - \frac{1}{2} \cos \theta \sin^2 CE_3 \\
 &\quad + \sin \theta \left[ \frac{1}{2} \sin CE_2 + \frac{1}{2} \cos CE_1 \right] \\
 &= E_1 \left[ -\cos \theta C' \sin C + \frac{1}{2} \sin \theta \cos C \right] + E_2 \left[ \cos \theta C' \cos C + \frac{1}{2} \sin \theta \sin C \right] - E_3 \left[ \frac{\cos \theta}{2} \right] \\
 &= [\cos C (\cos \theta t - \sin \theta b) - \sin Cn] \left[ -\cos \theta C' \sin C + \frac{1}{2} \sin \theta \cos C \right] \\
 &\quad + [\sin C (\cos \theta t - \sin \theta b) + \cos Cn] \left[ \cos \theta C' \cos C + \frac{1}{2} \sin \theta \sin C \right] \\
 &\quad - [\sin \theta t + \cos \theta b] \frac{\cos \theta}{2} \\
 &= \cos \theta C' n - \frac{1}{2} b
 \end{aligned}$$

Por outro lado,  $\nabla_{\partial_u} \partial_s = \nabla_{\partial_s} \partial_u = g_2 n + g_3 b$ . Logo,  $g_2 = \cos \theta C'$  e  $g_3 = -\frac{1}{2}$ .

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\partial_u} \partial_u &= \nabla_n n = \nabla_n (\sin CE_1 - \cos CE_2) \\
 &= -C' \cos CE_1 - \sin C \cos C \nabla_{E_2} E_1 - C' \sin CE_2 + \sin C \cos C \nabla_{E_1} E_2 \\
 &= -C' \cos CE_1 + \frac{1}{2} \sin C \cos CE_3 - C' \sin CE_2 - \frac{1}{2} \sin C \cos CE_3 \\
 &= -C' \cos C [\cos C (\cos \theta t - \sin \theta b) - \sin Cn] - C' \sin C [\sin C (\cos \theta t - \sin \theta b) + \cos Cn] \\
 &= -\cos \theta C' t + \sin \theta C' b
 \end{aligned}$$

Por outro lado,  $\nabla_{\partial_u} \partial_u = \nabla_{\partial_u} n = h_1 t + h_3 b$ . Logo,  $h_1 = -\cos \theta C'$  e  $h_3 = \sin \theta C'$ .

Portanto, as condições iniciais são:

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 1, \quad f_3 = 0, \quad g_2 = \cos \theta C', \quad g_3 = -\frac{1}{2}, \quad h_1 = -\cos \theta C', \quad h_3 = \sin \theta C'.$$

Note que (5.6) é um sistema linear. Sua solução é dada por:

$$\begin{cases} f_1 = \sec \theta [-\sin(sB) + C' \tan \theta (\cos(sB) - 1)] \\ f_2 = \cos(sB) + C' \tan \theta \sin(sB) \\ f_3 = 0 \\ g_2 = \sin \theta \sin(sB) + C' [\sec \theta - \tan \theta \sin \theta \cos(sB)] \\ g_3 = -\frac{1}{2} f_2 \\ h_1 = -g_2 \\ h_3 = \frac{1}{2} f_1 + \tan \theta g_2 \end{cases} \quad (5.7)$$

Nos pontos onde  $f_2 \neq 0$ , temos,  $\partial_u = f_1 t + f_2 n$ . Portanto,

**Teorema 5.11.** *A superfície gerada pelas curvas das [Proposição 5.9](#) e [Proposição 5.10](#) tem como vetor normal unitário*

$$N = \frac{\partial_s \times \partial_u}{\|\partial_s \times \partial_u\|} = \frac{f_2 t \times n}{\|f_2 t \times n\|} = b,$$

que faz ângulo constante  $\theta$  com a vertical  $E_3$ .

Seja  $F : S \rightarrow Nil_3$  uma imersão isométrica de uma superfície com ângulo constante  $S$  em  $Nil_3$ . Denote por  $N$  o campo vetorial normal unitário,  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$  o ângulo entre o campo vetorial  $E_3$  e  $N$ , por  $T$  a projeção de  $E_3$  sobre o plano tangente a  $S$ , isto é,  $T = E_3 - \cos \theta N$  e  $JT = N \times T$ . Podemos supor que

$$N = -\sin \theta \cos \Phi E_1 - \sin \theta \sin \Phi E_2 + \cos \theta E_3,$$

onde  $\Phi = \Phi(s, u)$  é uma função em  $S$ . Daí

$$T = \sin \theta (\cos \theta \cos \Phi E_1 + \cos \theta \sin \Phi E_2 + \sin \theta E_3),$$

$$JT = \sin \theta (-\sin \Phi E_1 + \cos \Phi E_2).$$

Logo, a curva integral do campo  $\frac{JT}{\|JT\|}$  é uma curva horizontal p.c.a. e a curva integral do campo  $\frac{T}{\|T\|}$  é uma curva p.c.a. com curvatura  $-\cot \theta$  e torção  $\frac{1}{2}$  satisfazendo  $\left\langle \frac{T}{\|T\|}, E_3 \right\rangle = \sin \theta$ ,  $\left\langle \nabla_{\frac{T}{\|T\|}} \frac{T}{\|T\|}, E_3 \right\rangle = 0$  e  $\left\langle \frac{T}{\|T\|} \times \frac{\nabla_{\frac{T}{\|T\|}} \frac{T}{\|T\|}}{-\cot \theta}, E_3 \right\rangle > 0$ . Portanto, ao longo da curva horizontal temos um feixe de curvas integrais do campo  $\frac{T}{\|T\|}$ , gerando uma superfície  $\tilde{S}$  com ângulo constante contida em  $S$ .

Quando  $\tilde{S}$  é uma superfície inextensível ([Teorema 5.14](#)) temos que  $\tilde{S} = S$ . Portanto,

**Teorema 5.12.** *Uma superfície em  $Nil_3$  que faz ângulo constante,  $\theta \in (0, \pi/2)$  com a vertical  $E_3$  é da forma*

$$F(s, u) = \left( -\tan \theta \sin \omega + \varphi_1(u), \tan \theta \cos \omega + \varphi_2(u), \frac{\sin \theta}{2} s + \frac{\tan \theta}{2} (\varphi_1(u) \cos \omega + \varphi_2(u) \sin \omega) + \varphi_3(u) \right),$$

onde

$$\begin{aligned} \varphi_1(u) &= -\int \sin C(u) du + \tan \theta \sin C(u) + k_1, \\ \varphi_2(u) &= \int \cos C(u) du - \tan \theta \cos C(u) + k_2, \\ \varphi_3'(u) &= \frac{1}{2} (\varphi_1(u) \varphi_2'(u) - \varphi_1'(u) \varphi_2(u) - C'(u) \tan^2 \theta), \end{aligned}$$

com  $\omega = -Bs + C(u)$ , onde  $B = \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta}$ .

*Demonstração.* Seja  $F(s, u) = (x(s, u), y(s, u), z(s, u))$  a superfície com ângulo constante  $\theta \in (0, \pi/2)$ . Como  $\partial_s = t$ , análogo a [Proposição 5.8](#), obtemos:

$$\begin{cases} x(s, u) = -\tan \theta \sin \omega + \varphi_1(u) \\ y(s, u) = \tan \theta \cos \omega + \varphi_2(u) \\ z(s, u) = \frac{\sin \theta}{2}s + \frac{\tan \theta}{2}(\cos \omega \varphi_1(u) + \sin \omega \varphi_2(u)) + \varphi_3(u) \end{cases} \quad (5.8)$$

com  $\omega = -Bs + C(u)$ . Como  $\partial_u = f_1t + f_2n$ , de [\(5.2\)](#) temos

$$\begin{cases} x_u = f_1 \cos \theta \cos \omega - f_2 \sin \omega \\ y_u = f_1 \cos \theta \sin \omega + f_2 \cos \omega \\ z_u = f_1[\sin \theta - \frac{y}{2} \cos \theta \cos \omega + \frac{x}{2} \cos \theta \sin \omega] + f_2[\frac{y}{2} \sin \omega + \frac{x}{2} \cos \omega] \end{cases} \quad (5.9)$$

Derivando [\(5.8\)](#) com relação a  $u$  e igualando a [\(5.9\)](#), obtemos, usando [\(5.7\)](#),

$$\begin{aligned} \varphi_1'(u) &= -\sin(C(u)) + C'(u) \tan \theta \cos(C(u)) \\ \varphi_2'(u) &= \cos(C(u)) + C'(u) \tan \theta \sin(C(u)) \\ \varphi_3'(u) &= \frac{1}{2}(\varphi_1(u)\varphi_2'(u) - \varphi_1'(u)\varphi_2(u) - C'(u) \tan^2 \theta) \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \varphi_1(u) &= -\int \sin C(u) du + \tan \theta \sin C(u) + k_1, \\ \varphi_2(u) &= \int \cos C(u) du - \tan \theta \cos C(u) + k_2, \end{aligned}$$

□

### 5.2.3 Análise da Curvatura Média

Ao longo da superfície os campos coordenados são determinados por  $\partial_s = t$  e  $\partial_u = f_1t + f_2n$ . Assim, os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$\begin{aligned} E &= \langle \partial_s, \partial_s \rangle = 1, \\ F &= \langle \partial_s, \partial_u \rangle = f_1, \\ G &= \langle \partial_u, \partial_u \rangle = (f_1)^2 + (f_2)^2. \end{aligned}$$

De

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_s} \partial_s &= -\cot \theta n, \\ \nabla_{\partial_s} \partial_u &= g_2n + g_3b = g_2n - \frac{1}{2}f_2b, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_u} \partial_u &= \nabla_{\partial_u} (f_1t + f_2n) = \partial_u(f_1)t + f_1\nabla_{\partial_u} t + \partial_u(f_2)n + f_2\nabla_{\partial_u} n \\ &= \partial_u(f_1)t + f_1\nabla_{\partial_u} \partial_s + \partial_u(f_2)n + f_2(h_1t + h_3b) \\ &= \partial_u(f_1)t + f_1(g_2n - \frac{1}{2}f_2b) + \partial_u(f_2)n + f_2(-g_2t + [\frac{1}{2}f_1 + \tan \theta g_2]b) \\ &= [\partial_u(f_1) - f_2g_2]t + [f_1g_2 + \partial_u(f_2)]n + \tan \theta f_2g_2b, \end{aligned}$$

obtemos os coeficientes da segunda forma fundamental,

$$\begin{aligned} e &= \langle N, \nabla_{\partial_s} \partial_s \rangle = \langle b, \cot \theta n \rangle = 0, \\ f &= \langle N, \nabla_{\partial_s} \partial_u \rangle = \left\langle b, g_2 n - \frac{1}{2} f_2 b \right\rangle = -\frac{1}{2} f_2, \\ g &= \langle N, \nabla_{\partial_u} \partial_u \rangle = \tan \theta f_2 g_2. \end{aligned}$$

Portanto, a curvatura média é dada por

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + Eg}{EG - F^2} = \frac{\tan \theta g_2 + f_1}{2f_2} \\ &= \frac{\cos \theta [-\sin(sB) + C' \tan \theta \cos(sB)]}{2[\cos(sB) + C' \tan \theta \sin(sB)]} \end{aligned}$$

Estudo da Curvatura Média:

$H \rightarrow 0$  se

$$-\sin(sB) + C' \tan \theta \cos(sB) = 0 \implies \tan(sB) = C' \tan \theta.$$

$H \rightarrow \infty$  se

$$\cos(sB) + C' \tan \theta \sin(sB) = 0 \implies \tan(sB) = -\frac{1}{C' \tan \theta}.$$

Note que

$$C' \tan \theta \neq -\frac{1}{C' \tan \theta}$$

Concluimos que os pontos que anulam o numerador  $-\tan \theta g_2 + f_1$  e o denominador  $f_2$  de  $H$  são distintos. Ou seja, a curvatura média não está definida para todo  $s$ , mesmo se  $C' \equiv 0$ . Logo, a superfície não está definida nestes pontos. Portanto,

**Corolário 5.13.** *Uma superfície em  $Nil_3$  que faz ângulo constante  $\theta$ ,  $\theta \in (0, \pi/2)$ , com a vertical  $E_3$  não é completa.*

Ideias análogas às usadas em  $SL(2, \mathbb{R})$ , para o caso  $B > 0$ , com

$$\xi = \xi(u) = \arctan(C' \tan \theta) \quad \text{e} \quad x = \xi - sB,$$

mostram que

**Teorema 5.14.** *Uma superfície em  $Nil_3$  que faz ângulo constante  $\theta$ ,  $\theta \in (0, \pi/2)$ , com a vertical  $E_3$  é inextensível se o domínio da curva horizontal for  $\mathbb{R}$ .*

A [Observação 3.57](#) também é válida em  $Nil_3$ .

# REFERÊNCIAS

- 1 SCOTT, P. The geometries of 3-manifolds. *Bull. London Math. Soc.*, v. 15, p. 401–487, 1983.
- 2 CARTAN, E. *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*. Paris: Gauthier Villars, 1946.
- 3 BIANCHI, L. *Lezioni di Geometria Differenziale I*. Pisa: E. Spoerri, 1894.
- 4 BIANCHI, L. *Lezioni sulla Teoria dei Gruppi Continui e Finiti di Transformazioni*. Pisa: E. Spoerri, 1918.
- 5 BIANCHI, L. Sugli spazi a tre dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti. *Mem. Mat. Fis. Soc. It. Sci. Terza XI*, p. 264–352, 1898.
- 6 VRANCEANU, G. *Leçons de Géométrie Différentielle I*. Bucarest: Editions de l'Académie de la République Populaire Roumaine, 1947.
- 7 ROSENBERG, H. Minimal surfaces in  $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ . *Illinois J. Math.*, v. 46, n. 4, p. 1177–1195, 2002.
- 8 MEEKS, W.; ROSENBERG, H. Stable minimal surfaces in  $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ . *J. Differential Geometry*, v. 68, n. 3, p. 515–534, 2004.
- 9 ABRESCH, U.; ROSENBERG, H. A hopf differential for constant mean curvature surfaces in  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . *Acta. Math.*, v. 193, n. 2, p. 141–174, 2004.
- 10 ABRESCH, U.; ROSENBERG, H. Generalized hopf differentials. *Mat. Contemp.*, v. 28, n. 1, p. 1–28, 2005.
- 11 FIGUEROA, C. B.; MERCURI, F.; PEDROSA, R. H. L. Invariant surfaces of the heisenberg group. *Annali Di Matematica Pura Ed Applicata*, v. 177, p. 173–194, 1999.
- 12 LÓPEZ, R.; MUNTEANU, M. On the geometry of constant angle surfaces in  $sol_3$ . *Kyushu J. Math.*, v. 65, p. 237–249, 2011.
- 13 DANIEL, B. Isometric immersions into 3-dimensional homogeneous manifolds. *Comment. Math. Helv.*, n. 82, p. 87–131, 2007.
- 14 DILLEN, F. et al. Constant angle surfaces in  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ . *Monatsh. Math.*, v. 152, n. 2, p. 89–96, 2007.
- 15 DILLEN, F.; MUNTEANU, M. Constant angle surfaces in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . *Bull. Braz. Math. Soc.*, v. 40, n. 1, p. 85–97, 2009.
- 16 MUNTEANU, M.; NISTOR, A. A new approach on constant angle surfaces in  $\mathbb{E}^3$ . *Turk J. Math.*, v. 33, p. 169–178, 2009.
- 17 FASTENAKELS, J.; MUNTEANU, M.; VEKEN, J. Van der. Constant angle surfaces in the heisenberg group. *Acta Math. Sin.(Engl. Ser.)*, v. 27, p. 747–756, 2011.

- 18 MONTALDO, S.; ONNIS, I. Helix surfaces in the berger sphere. *Israel J. Math.*, v. 201, n. 2, p. 949–966, 2014.
- 19 MONTALDO, S.; ONNIS, I.; PASSAMANI, A. Helix surfaces in the special linear group. *Annali di Matematica*, v. 195, p. 59–77, 2016.
- 20 LANG, S.  $SL(2, \mathbb{R})$ . New York: Springer, 1985. v. 105.
- 21 BELKHELFA, M.; DILLEN, F.; INOBUCHI, J. Parallel surfaces in the real special linear group  $sl(2, \mathbb{R})$ . *Bull. Austral. Math. Soc.*, v. 65, p. 183–189, 2002.
- 22 TORRALBO, F. Rotationally invariant constant mean curavture surfaces in homogeneous 3-manifolds. *Differential Geom. Appl.*, v. 28, p. 593–607, 2010.
- 23 BERGER, M. Les variétés riemanniennes homogènes normales simplement connexes à courbure strictement positive. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* 15, p. 179–246, 1961.
- 24 LIRA, J. H. de; HINOJOSA, J. A. The gauss map of minimal surfaces in berger spheres. *Annals of Global Analysis & Geometry*, v. 37, n. 2, p. 143–162, 2010.
- 25 TORRALBO, F. Compact minimal surfaces in the berger spheres. *Annals of Global Analysis & Geometry*, v. 41, n. 4, p. 391–405, 2012.
- 26 GADEA, P.; OUBIÑA, J. Homogeneous riemannian structures on berger 3-spheres. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, v. 48, n. 2, p. 375–387, 2005.
- 27 BERDINSKY, D. A.; TAIMANOV, I. A. Surfaces of revolution in the heisenberg group and the espectral generalization of the willmore functional. *Siberian Math. Journal* 48:3, p. 395–407, 2007.
- 28 FERNÁNDEZ, I.; MIRA, P. Holomorphic quadratic differentials and the bernstein problem in heisenberg space. *Transactions of the American Mathematical Society*, n. 361, p. 5737–5752, 2009.
- 29 KAPLAN, A. Riemannian nilmanifolds attached to clifford modules. *Geometria Dedicata* 11, 1981.
- 30 TOMTER, P. Constant mean curvature surfaces in the heisenberg group. *American Mathematical Society*, v. 54, n. 1, 1993.