



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

TESE DE DOUTORADO

Análise da Dinâmica Energética de Buscas Aleatórias

Plínio José Ribeiro Neto

Recife-PE, Brasil
Julho de 2012

PLÍNIO JOSÉ RIBEIRO NETO

Análise da Dinâmica Energética de Buscas Aleatórias

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Ciências.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Ernesto Carneiro Pessoa Raposo (Orientador, UFPE)

Prof. Dr. Maurício Domingues Coutinho Filho (UFPE)

Profa. Dra. Rita Maria Zorzenon dos Santos (UFPE)

Prof. Dr. Madras Viswanathan Gandhi Mohan (UFRN)

Prof. Dr. Alexandre da Silva Rosas (UFPB)

Recife-PE, Brasil

Julho de 2012

Catálogo na fonte
Bibliotecário Joana D'Arc L. Salvador, CRB 4-572

Ribeiro Neto, Plínio José.

Análise da dinâmica energética de buscas aleatórias
/ Plínio José Ribeiro Neto. – Recife: O Autor, 2012.
xvi, 152 p.: fig., tab.

Orientador: Ernesto Carneiro Pessoa Raposo.
Tese (Doutorado) - Universidade Federal de
Pernambuco. CCEN. Física, 2012.
Inclui referências e apêndice.

1. Física estatística. 2. Transformações de fase
(Física estatística). 3. Simulação (Computadores).
I. Raposo, Ernesto Carneiro Pessoa. (orientador).
II. Título.

530.1595

(22. ed.)

FQ 2013-52



Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Física – CCEN
Programa de Pós-Graduação em Física
Cidade Universitária - 50670-901 Recife PE Brasil
Fone (+55 81) 2126-8449/2126-8450 - Fax (+55 81) 3271-0359
<http://www.df.ufpe.br/pg> e-mail: posgrad@df.ufpe.br

Parecer da Banca Examinadora de Defesa de Tese de Doutorado

Plínio José Ribeiro Neto

ANÁLISE DA DINÂMICA ENERGÉTICA DE BUSCAS ALEATÓRIAS

A Banca Examinadora composta pelos Professores Ernesto Carneiro Pessoa Raposo (Presidente e Orientador), Maurício Domingues Coutinho Filho, Rita Maria Zorzenon dos Santos, todos do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco, Alexandre da Silva Rosas, do Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba e Madras Viswanathan Gandhi Mohan, do Departamento de Física Teórica e Experimental da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, consideram o candidato:

(X) Aprovado

() Reprovado

() Em exigência

Secretaria do Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco em trinta de julho de dois mil e doze.

Prof. Ernesto Carneiro Pessoa Raposo
Presidente e Orientador

Prof. Maurício Domingues Coutinho Filho

Prof. Rita Maria Zorzenon dos Santos

Prof. Alexandre da Silva Rosas

Prof. Madras Viswanathan Gandhi Mohan

*Por motivos de amor, dedico este trabalho à mainha: Liuzinha; minha irmazinha:
Livinha; ao meu pai: Sassinha; e à criança fantástica, ao grande poetinha, meu
sobrinho: Cacá.*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço aos meus pais. À minha mãe Lícia, cujo esforço e dedicação são dádivas. Meu pai Vicente, sua alegria e lucidez são motores contagiantes. À minha irmã Lívia, sua amizade e compreensão são bálsamos, e ao meu sobrinho Cauã, cujas aulas de infância e poesia norteiam meus rumos.

Um salve à energia misteriosa, sem identidade, nome e forma, cujas flutuações (ou que for) desencadearam o big-bang (ou os bigbangs), nos proporcionando uma vida humana preciosa e seus encontros.

Agradeço, em especial, a meu amigo e orientador, Ernesto Raposo. Gratidão enquanto eu viver, por sua parceria, calma, paciência, profissionalismo, integridade; suas aulas de física, de humanidades, sempre muito bem humoradas, valeu Ernesto!

Agradeço a todos* os meus amigos, mestres, amores e entes queridos. Está sendo fantástica essa jornada!

Aos Colaboradores e aos Membros da banca.

À CAPES e CNPQ pelo apoio financeiro.

*Isto também inclui todos o leitores deste trabalho.

No dia 5 de dezembro de 1791
Wolfgang Amadeus Mozart
entrou no céu, como um artista
de circo, fazendo piruetas
extraordinárias sobre um
mirabolante cavalo branco.
Os anjinhos atônitos diziam:
Que foi? Que não foi?
Melodias jamais ouvidas voavam
nas linhas suplementares
superiores da pauta.
Um momento se suspendeu a
contemplação inefável.
A Virgem beijou-o na testa.
E desde então Wolfgang
Amadeus Mozart foi o mais
moço dos anjos.

Mozart no Céu

Manuel Bandeira

Lira dos Cinquent'anos, 1940.

Resumo

Neste trabalho estudamos a dinâmica energética das buscas aleatórias no contexto de encontros biológicos da procura por alimentos realizada em condições adversas, isto é, na situação em que o buscador (*forager*) encontra-se no limiar de extinção. Apresentaremos os princípios teóricos associados à dinâmica energética do encontro de sítios distribuídos num espaço unidimensional com condições periódicas de contorno e definiremos o modelo de busca a ser estudado. Estabeleceremos os parâmetros de ordem e os expoentes críticos da transição de fase para o estado absorvente de extinção através do estudo analítico do ganho energético médio, dos tempos de primeira passagem pelo estado de ganho energético nulo e da taxa de sobrevivência. Através das hipóteses de escala, determinaremos numericamente os expoentes críticos associados à dinâmica energética, β_{on} , β' e ν , e à dinâmica espacial, p . Exploraremos os fundamentos das classes de universalidade das transições de fases de não-equilíbrio, numa perspectiva de definição de uma classe de universalidade do problema em questão distinta das classes conhecidas que apresentam um único estado absorvente. Estudaremos, ainda, o mecanismo chave de acoplamento do *forager* com o ambiente, e a questão de como os ambientes heterogêneos afetam a eficiência das interações de encontro sob condições de densidade global constante e escassa de recursos. Avaliaremos como as estratégias com valores superdifusivos dos expoentes de difusão surgem quando ambientes heterogêneos com ampla distribuição de distâncias iniciais entre o *forager* e os alvos são considerados. Por fim, mostraremos também como as flutuações estatísticas no conjunto das condições iniciais das buscas aleatórias são cruciais para a determinação de qual estratégia de busca é a ideal.

Palavras Chaves: Buscas aleatórias, classes de universalidade, estado absorvente, transições de fase, extinção, efeitos de tamanho finito

Abstract

In this work we study the energetic dynamics of random searches in the context of biological encounters in environments with low density of resources, *i.e.* the foraging problem on the edge of extinction. We present the theoretical principles of this energetic dynamics when sites are distributed in a one-dimensional space with periodic boundary conditions and establish the model of foraging to be analyzed. We calculate the order parameter and critical exponents of the phase transition into an absorbing state of extinction through the analytical study of the mean energetic gain, the first-passage time through a state of null energetic gain, and the survival rate. We determine the critical exponents numerically by using the scaling hypothesis, such as the exponents of the energetic dynamics, β_{on} , β' , and ν , and the exponent of space dynamics, p . We explore the basis of the universality classes of non-equilibrium phase transitions, with the aim to define the universality class of the present foraging problem as being distinct from that of known problems with a single absorbing state. We also address the general question of how the landscape heterogeneity affects the efficiency of encounter interactions under global constant density of scarce resources. We unveil the key mechanism coupling the landscape structure with optimal search diffusivity. Finally, we show that statistical fluctuations in the set of initial positions are crucial to determine which search strategy is optimal in heterogeneous landscapes.

Keywords: Random searches, forager, universality class, extinction, phase transitions, absorbing state, finite size effects

Lista de Figuras

1.1	Trajatórias de albatrozes da espécie albatroz-de-sobrancelha (<i>Thalassarche melanophris</i>) nas imediações das Ilhas de Kerguelen, no sul do Oceano Índico, durante o processo de busca por alimento [HWQ ⁺ 12]. O monitoramento foi realizado via GPS de alta resolução temporal, resultando em tamanhos ou durações de vôos bem descritos por uma distribuição de Lévy truncada com expoente $\mu = 1.28$ (ver Seção 1.6). A escala gradiente de azul indica a profundidade do oceano.	5
1.2	(a) Representação esquemática de uma transição de fase de primeira ordem, explicitando a descontinuidade na energia interna do sistema no ponto crítico (Pt.C). (b) Em contraste, uma transição de segunda ordem apresenta energia interna contínua no ponto crítico.	7
1.3	Representação esquemática de uma transição de fase de segunda ordem de não-equilíbrio de um estado ativo (Fase 2) para um estado absorvente (Fase 1), passando continuamente pelo ponto crítico (Pt.C).	9
1.4	Intervalo de variação de duas variáveis aleatórias s_1 e s_2 tal que x esteja entre x e $x + dx$	13
1.5	Contorno C utilizado para a aplicação do teorema de Cauchy no plano complexo, subdividido em quatro partes sem singularidades internas. A parte C_1 do contorno C contém o intervalo da integral que queremos calcular, $(-\infty + i\alpha, \infty + i\alpha)$	16
1.6	(a) Caminhada aleatória browniana caracterizada por comprimentos de passos com valor máximo da ordem de um desvio padrão gaussiano. (b) Caminhada aleatória de Lévy com distribuição de tamanhos de passos com $\alpha = 0.5$. Devido à divergência do seu primeiro momento, passos (em azul) de comprimentos muito maiores que o comprimento médio do passo browniano (dentro da mesma escala) passam a existir com probabilidade consideravelmente maior do que no caso gaussiano. Ambas as caminhadas contém 7×10^3 passos.	21

1.7 Cada cor representa um caminhante aleatório distinto executando uma caminhada unidimensional. A variável aleatória x representa a posição final após t passos. (a) Padrão de difusão normal gerada por movimentos brownianos com assinatura dinâmica $\sigma \sim t^{1/2}$. (b) Padrão de superdifusão gerado por vôos de Lévy com $\sigma_L \sim t^{1/\alpha}$ em que $\alpha = 0.9$. Os contornos negritados são as curvas σ para os respectivos casos. 28

1.8 Comportamentos esquemáticos do modelo de busca aleatória. 33

1.9 Gráfico do produto entre o livre caminho médio associado à distribuição de sítio-alvo λ e a eficiência da busca η em função do expoente μ da distribuição de Lévy em uma dimensão, para o caso de buscas não destrutivas [RBdL⁺09b], (a) a partir da equação 1.80 e (b) de simulações numéricas. (c) $\lambda\eta$ em duas dimensões, para $\lambda = 5000$; a inserção mostra $\langle \ell \rangle$ como uma função de μ para $\lambda = 10$ (linha contínua), $\lambda = 10^2$ (traços), e $\lambda = 10^3$ (longos traços). Todos os dados foram obtidos usando $r_v = 1$ 36

2.1 *Forager* com raio de visão r_v realizando uma busca aleatória num espaço unidimensional de comprimento λ 40

3.1 Ganho energético normalizado pelo comprimento pré-determinado da busca, L , em função da densidade de alvos normalizada $\rho = g/d$, com $d = 2\lambda$, para vários valores dos expoentes de Lévy do *forager* e do alvo, de acordo com o modelo proposto por Faustino *et al.* [Fdd⁺07]. Para o alvo, $\mu = 3$ (regime de pequenos passos) corresponde aproximadamente à situação de sítios fixos. Os parâmetros utilizados foram $\mathcal{E}_0 = 100$, $g = 100$, $\alpha = 100$, $r_v = 1$, $L = 10^4$ e velocidades unitárias para o *forager* e para o alvo. 69

3.2 (a) Esboço do comprimento médio de uma caminhada até o encontro de um dos sítios-alvo, distantes entre si de λ , em função da posição inicial. No caso de condições periódicas de contorno, os dois sítios-alvo se identificam num só. A simetria do espaço de busca implica em $\langle L \rangle(x) = \langle L \rangle(\lambda - x)$, para $r_v < x \leq \lambda/2$. (b) Esboço da relação inversa, $x(\langle L \rangle)$ 74

3.3 Comparação entre as curvas de $\langle L \rangle(x)$ versus x obtidas a partir da computação numérica com o *software* Matlab da Eq. (2.53) no espaço de busca discretizado, linha preta e da aproximação expressa pela Eq. (3.24), para vários valores de μ e λ , linhas vermelhas. A introdução do fator de correção $A(\lambda, \mu)$ nesta última corrige as discrepâncias observadas para $\mu > 2$, linhas verdes. De fato, obtemos que $A(\lambda, \mu \leq 2) \approx 1$ 76

3.4	Mapeamento da dinâmica energética do <i>forager</i> , partindo de um valor inicial \mathcal{E}_0 (lado direito), em uma caminhada aleatória tradicional partindo de x_0 (lado esquerdo).	87
3.5	Probabilidade de que o <i>forager</i> tenha energia acumulada \mathcal{E} (com a notação $\mathcal{E} \equiv \xi$) após N_f encontros. Utilizamos os parâmetros $\mathcal{E}_0 = 100$, α e σ_E unitários, $g = \alpha m$ para $N_f = 5$ e $g > \alpha m$ para $N_f = 20, 50$	90
3.6	Probabilidade de que o <i>forager</i> tenha energia acumulada \mathcal{E} (com a notação $\mathcal{E} \equiv \xi$) após N_f encontros. Utilizamos os parâmetros $\mathcal{E}_0 = 100$, α e σ_E unitários, $g = \alpha m$ para $N_f = 5$ e $g < \alpha m$ para $N_f = 20, 50$	91
4.1	Ganho energético, ψ , em função de $\rho = g/\lambda$, na aproximação analítica e resultados numéricos com ambos os critérios de sobrevivência e busca ligados (CB + CS), ou com apenas o critério de busca ligado (CB). Resultados obtidos para $\mu = 1.1, 1.5, 2.01, 2.5, 2.9$, e parâmetros $g = 100$, $\mathcal{E}_0 = 100$, $r_v = 1$, $\alpha = 1$, $\ell_0 = 1$ e $N_f = 1000$. A média computacional foi realizada sobre 10^4 buscas. Para curvas com CS desligado, isto é, apenas CB, ψ pode se acumular negativamente.	96
4.2	Região na vizinhança do ponto crítico para cada valor de μ da Fig. 4.1.	98
4.3	Ganho energético, ψ , em função de $\rho - \rho_c$, na vizinhança do ponto crítico para vários valores de μ , para a simulação numérica com o critério CB de sobrevivência desligado (<i>off</i>). Parâmetros como na Fig. 4.1. As linhas sólidas representam os melhores ajustes não-lineares que determinam o expoente crítico $a_1 = \beta_{\text{off}}$	99
4.4	Taxa de sobrevivência, $\Gamma(n, \chi)$, versus $\chi \equiv \lambda/g$ para vários valores de n e μ , com ambos os critérios de busca e sobrevivência ligados (CB + CS <i>on</i>). Os parâmetros utilizados foram $g = 100$, $r_v = \ell_0 = 1$, $\mathcal{E}_0 = 100$ e $\alpha = 1$. Foram realizadas médias sobre 500 réplicas com 10^3 caminhadas de busca, cada.	101
4.5	Observável $k(n_0, n, \chi)$ versus $\chi \equiv \lambda/g$ para $n_0 = 100$ e vários valores de n e μ , com ambos os critérios de busca e sobrevivência ligados (CB + CS <i>on</i>). Para todos os valores de μ obtemos $\beta/\nu \approx 0.5$. Os parâmetros utilizados foram $g = 100$, $r_v = \ell_0 = 1$, $\mathcal{E}_0 = 100$ e $\alpha = 1$. Foram realizadas médias sobre 500 réplicas com 10^3 caminhadas de busca, cada.	103
4.6	Gráfico similar à Fig. 4.5, mas para $n_0 = 400$. Para todos os valores de μ , obtemos $\beta/\nu \approx 0.5$	104

4.7 Observável $h(n_0, n, \chi)$ versus $\chi \equiv \lambda/g$ para $n_0 = 100$ e vários valores de n e μ , com ambos os critérios de busca e sobrevivência ligados (CB + CS on). Os parâmetros utilizados foram $g = 100$, $r_v = \ell_0 = 1$, $\mathcal{E}_0 = 100$ e $\alpha = 1$. Foram realizadas médias sobre 500 réplicas com 10^3 caminhadas de busca, cada. 105

4.8 Gráfico log-log do observável $h(n_0, n, \chi)$ versus n/n_0 para $n_0 = 100$ e vários valores de χ e μ , com ambos os critérios de busca e sobrevivência ligados (CB + CS on). A curva em azul, corresponde ao caso $\chi = \chi_c$. Em ordem respectiva em valores de μ decrescente, da esquerda para direita $\mu = 2.9, 2.5, 2.1, 1.5, 1.1$, os valores de χ_c são aproximadamente $\chi_c \sim \{0.4445, 0.5596, 0.8572, 1.4330, 1.9162\}$ e as frações de ν correspondentes $1/\nu = \{0.5229, 0.5302, 0.5211, 0.4887, 0.5008\}$. Para todos os valores de μ obtemos, como pode ser visto, $\nu \approx 2.0$. Os parâmetros utilizados foram $g = 100$, $r_v = \ell_0 = 1$, $\mathcal{E}_0 = 100$ e $\alpha = 1$. Foram realizadas médias sobre 500 réplicas com 10^3 caminhadas de busca, cada. 106

4.9 Gráfico similar à Fig. 4.8, mas para $n_0 = 400$. Em ordem respectiva em valores de μ decrescente, da esquerda para direita, os valores de χ_c são aproximadamente $\chi_c \sim \{0.4445, 0.5590, 0.8572, 1.4354, 1.9162\}$ e as frações de ν correspondentes $1/\nu = \{0.5229, 0.5204, 0.5135, 0.5148, 0.5000\}$. Para todos os valores de μ , obtemos $\nu \approx 2.0$ 107

4.10 Observável $\tau_{rel}(n, \chi)$ versus $\chi \equiv \lambda/g$ para vários valores de n e μ , com ambos os critérios de busca e sobrevivência ligados (CB + CS on). Os parâmetros utilizados foram $g = 100$, $r_v = \ell_0 = 1$, $\mathcal{E}_0 = 100$ e $\alpha = 1$. Foram realizadas médias sobre 500 réplicas com 10^3 caminhadas de busca, cada. 110

4.11 Observável $Q(n_0, n, \chi)$ versus $\chi \equiv \lambda/g$ para $n_0 = 100$ e vários valores de n e μ , com ambos os critérios de busca e sobrevivência ligados (CB + CS on). Para todos os valores de μ obtemos $z' = 0.47$. Os parâmetros utilizados foram $g = 100$, $r_v = \ell_0 = 1$, $\mathcal{E}_0 = 100$ e $\alpha = 1$. Foram realizadas médias sobre 500 réplicas com 10^3 caminhadas de busca, cada. 111

4.12 Observáveis $\Lambda(n_0, n, \chi)$ e $F(n_0, n, \chi)$ em função de $\chi \equiv \lambda/g$ (gráficos acima) e n/n_0 (gráficos log-log abaixo), para $n_0 = 400$ fixo, $\mu = 1.1$ e $\mu = 2.9$, com ambos os critérios de busca e sobrevivência ligados (CB + CS on). Para ambos os valores de μ obtemos $\beta_{on} \approx 2$ e $\nu'' \approx 2$. Os parâmetros utilizados foram $g = 100$, $r_v = \ell_0 = 1$, $\mathcal{E}_0 = 100$ e $\alpha = 1$. Foram realizadas médias sobre 500 réplicas com 10^3 caminhadas de busca, cada. 113

5.1 Esboço, em ordem respectiva da esquerda para direita e de cima para baixo, das Eqs. (5.3), (5.1), (5.2) e (5.4). No último quadro (abaixo à direita), esboçamos a Eq. (5.2) com $x_0 \rightarrow \lambda - x_0$ 122

5.2 Eficiência média, $\bar{\eta}$, obtida a partir da Eq. (5.9), versus μ para os casos da busca de Lévy destrutiva (função δ de Dirac) e de buscas de Lévy com diferentes distribuições simétricas de sítios-alvo ao redor de $x_0 = \lambda/2$, Eq.(5.2) com diversos valores do parâmetro α (cenários com vários graus de heterogeneidade). Quanto maior o valor de α , mais espalhadas ao redor de $x_0 = \lambda/2$ encontram-se as posições iniciais. O caso homogêneo, $\pi(x_0) = (\lambda - 2r_v)^{-1}$, também é mostrado. Em todos os casos, a eficiência da busca é máxima para $\mu \rightarrow 1$ (dinâmica balística), demonstrando a robustez dessa estratégia quanto a flutuações com respeito à situação de busca destrutiva. Os parâmetros usados foram $\lambda = 10^3$ e $r_v = 1$. As linhas sólidas são apenas um guia visual. 126

5.3 Comprimento médio percorrido por um *forager* de Lévy entre dois encontros consecutivos, $\langle L \rangle_p$, em função da sua posição inicial fixa, x_0 , para vários valores de μ . As linhas sólidas representam os resultados obtidos pela discretização numérica da Eq. (2.41) e os símbolos denotam os ajustes não-lineares realizados através da regressão múltipla, Eq. (5.12). Os parâmetros usados foram $\lambda = 10^3$ e $r_v = 1$ 127

5.4 Eficiência média, $\bar{\eta}$, obtida a partir da Eq. (5.9), versus μ para os casos da busca de Lévy não-destrutiva (função δ de Dirac) e de buscas de Lévy com diferentes distribuições de sítios-alvo ao redor de $x_0 = r_v$, Eq.(5.4) com diversos valores do parâmetro α (cenários com vários graus de heterogeneidade). Quanto maior o valor de α , mais espalhadas ao redor de $x_0 = r_v$ encontram-se as posições iniciais. O caso homogêneo, $\pi(x_0) = (\lambda - 2r_v)^{-1}$, também é mostrado. Observamos que à medida que posições iniciais adquirem peso maior distante de $x_0 = r_v$ (α maior) a estratégia ótima de busca desloca-se da situação não-destrutiva superdifusiva, $\mu \approx 2$, em direção à dinâmica balística, $\mu \rightarrow 1$, com aumento na difusividade (expoente de difusão) do *forager*. Os símbolos vazios representam os máximos de $\bar{\eta}$ calculados pela condição $f[\mu = \mu_{\text{opt}}(\alpha)] = \partial \langle \bar{L} \rangle_p / \partial \mu |_{\mu = \mu_{\text{opt}}} = 0$. A passagem (*crossover*) para a dinâmica balística ótima ocorre para flutuações suficientemente fortes, isto é, para $\alpha > \alpha_{\text{cross}} \approx 312.2$. Os parâmetros usados foram $\lambda = 10^3$ e $r_v = 1$. Novamente, as linhas sólidas são somente um guia visual. 133

- 5.5 Determinação da estratégia ótima de buscas de Lévy com flutuações poissonianas nas distâncias iniciais dos sítios próximos ao *forager*, Eq. (5.4). A condição $f(\mu = \mu_{\text{opt}}, \alpha) = 0$, para $\lambda = 10^3$ e $r_v = 1$, determina o expoente ótimo, $\mu_{\text{opt}}(\alpha)$, associado à estratégia de máxima eficiência. No detalhe: uma vez que estratégias com $\mu \leq 1$ não são permitidas, valores de $\alpha > \alpha_{\text{cross}} \approx 312.2$ levam à eficiência máxima obtida para $\mu \rightarrow 1$, determinando um regime dominado por buscas de dinâmica balística. . . . 134

Lista de Tabelas

- 4.1 Tabela de expoentes críticos obtidos numérica e analiticamente para vários valores de μ . Correspondentemente temos $\psi_{\text{off}} \rightarrow \beta$ $\psi_{\text{on}} \rightarrow \beta_{\text{on}}$, $\Gamma \rightarrow \beta'$, $n \rightarrow \nu, \tau \rightarrow p$ 114
- 4.2 Tabela de valores da densidade crítica χ_c obtidos numérica e analiticamente (linha da função $\psi(\mu, \chi)$) para vários valores de μ 114

Sumário

1	Introdução	1
1.1	História do Problema de <i>Foraging</i> : Motivações e Objetivos	1
1.2	Transições de Fase para Estados Absorventes	6
1.3	Teorema do Limite Central	10
1.4	Teorema do Limite Central Generalizado	18
1.5	Assinaturas Dinâmicas: Difusão Normal, Sub e Superdifusão	22
1.6	Distribuições de Lévy	27
1.7	Um Modelo de Busca Aleatórias	31
1.7.1	Eficiência das Busca Aleatórias	33
2	Princípios Teóricos da Busca Aleatória em Uma Dimensão	38
2.1	Buscas de Lévy num Espaço Unidimensional com Bordas Absorventes	39
2.2	Operador Integral de Caminhadas Aleatórias	44
2.3	Cálculo de $\langle L \rangle$ e $\langle n \rangle$	47
2.4	Discretização do Espaço de Busca	49
2.5	Buscas de Lévy no Limite Espacial Discreto	54
2.6	Busca de Lévy no Limite Temporal Contínuo	56
3	Dinâmica Energética das Buscas Aleatórias de Lévy	63
3.1	Modelos de Busca com Balanço Energético	64
3.2	Eficiência Energética e Entropia das Buscas Aleatórias	82
3.3	Taxa de Sobrevivência do <i>Forager</i>	84
4	Análise de Escala para o Comportamento Crítico e Resultados Numéricos	93
4.1	Resultado Numérico para o Expoente Crítico β	93
4.2	Hipóteses de Escala e os Expoentes Críticos β' e ν	97
4.3	Expoente Crítico p da Dinâmica Espacial	107
4.4	Limiar de Extinção: Expoente β_{on}	112

4.5	Universalidade do Problema de <i>Foraging</i> com Dinâmica Energética	113
4.6	Flutuações do Forager e Extinções Biológicas	115
5	Buscas Aleatórias em Meios Heterogêneos	119
5.1	Distribuições de Posições Iniciais	120
5.2	Acoplamento com os Cenários de Buscas Unidimensionais	122
5.2.1	Eficiência das Estratégias de Busca em Ambientes Heterogêneos: Caso Geral	124
5.2.2	Eficiência das Estratégias de Busca em Ambientes Heterogêneos: Caso Lévy	125
5.3	Ecologia do <i>Forager</i>	131
6	Conclusões e Perspectivas	135
	Referências Bibliográficas	151
A	Gerador de Foragers de Lévy	152

Capítulo 1

Introdução

...

Siddhartha: – Tudo que lhe ensinei é como um oceano, quanto mais você entra mais profundo se torna.

Ananda: – Mas mestre, eu mal sei nadar.

Siddhartha: Então vamos começar juntos, pela beira.

Diálogos da Vida de Buda

1.1 História do Problema de *Foraging*: Motivações e Objetivos

Neste trabalho, estudaremos a dinâmica energética de buscas aleatórias no contexto de encontros biológicos, isto é, o modelo de comportamento ecológico de animais quando estão buscando por alimentos. Tal conceito é bem descrito pela palavra nativa do inglês *forager* (Cambridge Dictionary: “Aquele que vai a algum lugar procurar por algo, especialmente por comida”). Em particular, a nossa análise com base em ideias e técnicas da Física Estatística caracteriza a chamada Física do problema de *foraging* (*The Physics of Foraging*) [VdLRS11]. Nesse contexto, podemos pensar o *forager* como uma partícula em movimento que eventualmente encontra um sorvedouro, um sítio, uma fonte, ou um alvo. As realizações práticas desse problema são inúmeras, abrangendo desde peixes que procuram por plâncton [PW10] a albatrozes caçando peixes [HWQ⁺12], enzimas em busca de um sítio específico de DNA [MSW⁺09], pessoas que procuram por chaves

perdidas [BLMV11], o FBI procurando por criminosos [VdLRS11], problemas associados à saúde do coração [PMH⁺93], e possivelmente até mesmo partículas “procurando” por mínimos locais de energia em um sistema físico [TM94] ou um atacante tentando marcar um gol^{***} [Gut01], *etc.*

A principal motivação deste trabalho, portanto, surge da questão biológica da descrição do comportamento animal associado à busca de alimento. Alguns dos primeiros desenvolvimentos científicos nessa linha se deram a partir da teoria de Darwin sobre a evolução das espécies [Dar59], e empiricamente, por tentativa e erro, por volta de 1800, com inspirações motivadas por filósofos gregos, tais como Aristóteles e Teofrasto, que estudaram as relações dos organismos entre si e com o meio [GME09]. Conjuntamente, também por volta desta época, surgiram as primeiras descrições matemáticas de dinâmica populacional [Mal98]. Posteriormente, no período de 1910 a 1926, ocorreu um novo avanço de modelos determinísticos de dinâmica populacional, realizados independentemente por Lotka [Lot10] e Volterra [Vol26].

Somente por volta de 1960 os principais conceitos associados ao problema de *foraging*, isto é, conceitos associados à otimização das buscas por alimento (*The Optimal Foraging Theory* - OFT), foram desenvolvidos, principalmente por MacArthur *et al.* [MP66] e Emlen [Eml66]. Ainda por volta desta época surgiram os primeiros estudos não-determinísticos sobre a eficiência da busca, cuja questão principal era determinar qual a estratégia mais eficiente a ser adotada ao se procurar aleatoriamente por sítios alvos [VdLRS11].

Nesse sentido, os primeiros modelos de buscas aleatórias consistiam de variações do movimento browniano de caminhadas aleatórias. Este tipo de movimento ganhou bastante atenção da comunidade científica após uma metódica investigação experimental realizada em meados do século XIX por Robert Brown [Bro28] e, posteriormente, através do seu estudo teórico realizado em 1905 por Albert Einstein [Ein05].

Por volta de 1986, a teoria do problema de *foraging* passou a ser apresentada como uma função conjunta da probabilidade de sobrevivência associada à taxa de encontros, à escolha da estratégia de busca e ao gasto de energia por parte do organismo, sendo estes fatores determinantes para a sobrevivência da espécie. Tal unificação foi realizada pela introdução da variável de estado $X(t)$ como um conceito chave para caracterizar completamente a condição do energética do *forager* no tempo t . Em termos do balanço

^{***}Quando o gol se encontra no raio de visão do atacante, a bola passa ao regime de movimento balístico; por exemplo, o gol de Carlos Alberto Torres no Estádio Azteca, na final da Copa do Mundo de 1970 [TRI⁺70].

energético, a esquematização mais simples da teoria unificada do problema de *foraging* (*The Unified Forager Theory* - UFT) pode ser expressa como

$$X(t+1) = X(t) - \left\{ \begin{array}{c} \text{perda} \\ \text{de energia} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \text{ganho de energia} \\ \text{devido ao encontro de alimento} \end{array} \right\}. \quad (1.1)$$

Acima, o fator de perda de energia contabiliza tanto fatores externos (predação, condições ambientais adversas, *etc.*) quanto os internos (fisiologia e metabolismo). Nesse contexto, o processo de busca é irreversivelmente finalizado quando a variável de estado atinge um determinado limiar, caracterizando assim a morte do *forager* [MC86].

A partir da década de 1990 as principais variações dos modelos de busca aleatória constituíram as caminhadas aleatórias correlacionadas (*correlated random walks* - CRWs) [BCV⁺08, ZL99, Tur98], as caminhadas intermitentes (*intermittent walks* - IWs) [Rey06a, BCV⁺08, BLMV11, BCM⁺05, LM08, PJ08, JPB08], as caminhadas brownianas compostas (*composite Brownian walks* - CBWs) [Ben07, Rey10] e os vôos (*Lévy Flights* - LFs) e caminhadas de Lévy (*Lévy Walks* - LW) [SK86a, SM95, LKW88, RBdL⁺09b, VRdL08, BL08, BC09, SSH⁺08, HQD⁺10, Shl06, Shl09, MKvdB⁺09, VAB⁺96, VBH⁺99, dLRS01, EPW⁺07, BPP⁺03a, Bar09, BFdL⁺08].

As caminhadas aleatórias do tipo CRW são determinadas pela presença de algum tipo de correlação entre os passos. Por exemplo, a probabilidade para a direção de um dado passo pode ser dependente da probabilidade da direção do passo anterior. Nesse caso, a probabilidade condicionada introduz uma correlação nas sucessivas orientações de passos, isto é, uma persistência local [Pat53] num dos sentidos de movimento: se o buscador caminha para a esquerda ele pode, por exemplo, tender a permanecer se movendo para a esquerda*. As correlações entre passos sucessivos podem ser quantificadas a partir de duas dimensões através da função de correlação $C_j = \langle \mathbf{r}_j \rangle \langle \mathbf{r}_{j+1} \rangle - \langle \mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}_{j+1} \rangle = \langle \mathbf{r}_j \rangle \langle \mathbf{r}_{j+1} \rangle - \langle \cos \theta_j \rangle$, onde θ_j denota o ângulo entre dois vetores de passos sucessivos, \mathbf{r}_j e \mathbf{r}_{j+1} , escolhidos através de uma distribuição de probabilidades. As CRWs obedecem ao *Teorema do Limite Central* - TLC [VRB⁺05] e têm sido bem sucedidas na descrição dos movimentos de busca de formigas, besouros e borboletas [Rey06b].

As caminhadas aleatórias do tipo IW são geralmente caracterizadas pela alteração (intermitência) da função de distribuição de tamanho de passos de acordo com condições específicas, e podem ser úteis em situações em que ocorrem mudanças de “fase” durante a busca. Por exemplo, em determinadas circunstâncias o caminhante aleatório pode apresentar uma fase de deslocamentos tipicamente longos sem detecção de alvos, que lhe permite o acesso a regiões do espaço de busca ainda não visitadas, alternando para

*A influência que a direção do movimento de um dado passo exerce na direção de passos futuros geralmente decresce com o tempo, de modo que, no caso de uma influência de alcance finito, a dinâmica do movimento torna-se browniana após um grande número de passos [VdLRS11]

uma fase de busca detalhada e passos relativamente menores, durante a qual o alvo pode ser detectado. Tais fases não necessariamente são caracterizadas por distribuições de tamanhos de passos que obedeçam ao TLC [Rey06a, BCV⁺08, BLMV11, BCM⁺05, LM08, PJ08, JPB08]. A eficiência da busca é otimizada variando-se a duração relativa das fases de modo a permitir uma eficiência ótima global em diversas situações. Vale comentar que, devido à plasticidade dos modelos intermitentes atribuída à maior extensão do conjunto de parâmetros, as IWs geralmente apresentam eficiência ótima superior [BCM⁺05] à de outros modelos envolvendo um número menor de parâmetros livres.

As caminhadas brownianas compostas são parecidas com as IWs, contrastando com estas apenas no fato de que nas duas fases se utilizam distribuições de tamanhos de passos apresentando escalas características e obedecendo ao TLC.

Por fim, as caminhadas de Lévy, em contraste com as IWs, possuem uma distribuição de tamanho de passos caracterizada apenas por um único parâmetro relacionado ao expoente da sua lei de potência μ (a ser definido na Seção 1.6). Nas LWs a detecção de alvos é sempre permitida, ao contrário das IWs que têm a detecção desligada quando em fase balística [VdLRS11]. As LWs apresentam naturalmente um comportamento intrínseco de combinação de regimes, dependendo do valor do parâmetro μ . Por exemplo, para valores de $\mu \approx 1$ os longos passos seguem uma tendência balística, em contraste com valores $\mu \approx 3$ com tendência browniana. Assim, pode-se balancear os dois limites possíveis (balístico e browniano) sintonizando o valor de μ , obtendo desse modo um regime intermediário em que eventos raros de grandes comprimentos de passos (devido à distribuição do tipo “cauda longa” associada à lei de potência) são alternados por muitos eventos de pequenos passos [RBdL⁺11]. Para valores de μ menores que 3 a divergência no segundo momento da distribuição de tamanhos de passos faz com que as LWs não obedeçam ao TLC, mas sim ao TLC generalizado, como veremos a seguir. Portanto, devido à sua simplicidade de forma e ao número rico de comportamentos e regimes apresentados pelas LWs, este modelo de busca aleatória tem sido um dos mais extensivamente estudados a partir de meados da década de 1990 [VdLRS11]. E, de fato, dados empíricos sugerem que uma extensa variedade de espécies adota estratégias de buscas de Lévy quando na procura por alimentos [VdLRS11]: de microrganismos marinhos a peixes, albatrozes e moscas de fruta, dentre outras.

Estas evidências empíricas levantaram a hipótese de que organismos biológicos podem de fato se utilizar de processos de Lévy ao procurar por nutrientes na natureza [VAB⁺96]. Em consequência, surgiu a ideia de que as escolhas por estratégias de Lévy podem ter surgido evolucionariamente, o que caracteriza a chamada “hipótese de vôos de Lévy para as buscas por alimento” (*Lévy Flight Foraging Hypothesis* - LFF [VBH⁺99]). De fato, o estudo de predação e busca mais extenso até o momento [HQD⁺10], envolvendo mais

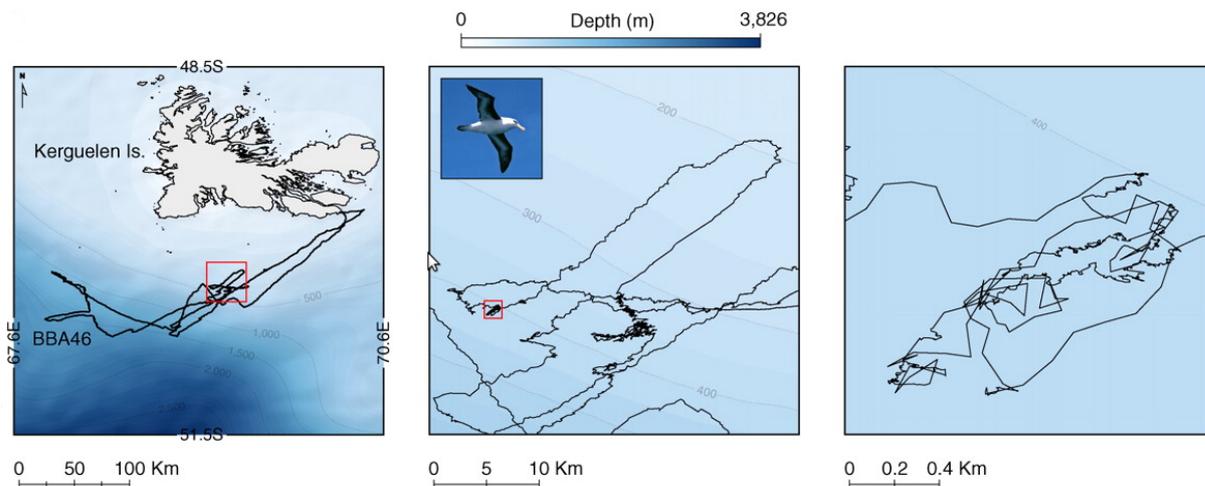


Figura 1.1: Trajetórias de albatrozes da espécie albatroz-de-sobrancelha (*Thalassarche melanophris*) nas imediações das Ilhas de Kerguelen, no sul do Oceano Índico, durante o processo de busca por alimento [HWQ⁺12]. O monitoramento foi realizado via GPS de alta resolução temporal, resultando em tamanhos ou durações de vôos bem descritos por uma distribuição de Lévy truncada com expoente $\mu = 1.28$ (ver Seção 1.6). A escala gradiente de azul indica a profundidade do oceano.

de doze milhões de passos para 55 indivíduos pertencendo a 14 espécies distintas de predadores marinhos ao redor do mundo, concluiu que as espécies investigadas usam distribuições de Lévy em ambientes escassos de alimento. Além disso, recentemente a análise dos vôos de albatrozes nômades (*Diomedea Exulans*) e albatrozes-de-sobrancelha (*Thalassarche melanophris*) utilizando a tecnologia GPS (*Global Positioning System*) de alta resolução temporal também confirmou o padrão de vôos de Lévy para estas espécies [HWQ⁺12] (ver a Fig. 1.1). Por outro lado, foi observado [HQD⁺10, HWQ⁺12] que o movimento browniano é uma escolha adequada de busca em ambientes em que alimentos são abundantes [SSH⁺08].

Vale mencionar ainda que, além do problema de *foraging*, as LWs têm sido aplicadas em diversos outros contextos [Mey09], tais como, por exemplo, a distribuição de campos elétricos em um gás ionizado, difusão de traços em fluidos, trajetórias de notas bancárias, difusão de fótons em vapor atômico, impulsos de ruído com aplicações em economia, rádio-frequência de sinais eletromagnéticos, dinâmica climática, ruído de sinais biomédicos, distribuição de distâncias entre a recepção de chamadas consecutivas de telefone celular, *etc.*

Neste trabalho realizaremos a análise da dinâmica energética de buscas aleatórias utilizando estratégias do tipo LW. De acordo com a Eq. (1.1), quando a variável de energia acumulada $X(t)$ atinge um determinado valor crítico o *forager* ingressa em um

“estado absorvente” irreversível (“morte”). Em termos de uma população de *foragers*, este fato implica na extinção da espécie. Como veremos a seguir, este fenômeno será descrito por uma transição de fase de segunda ordem no contexto da Mecânica Estatística de Não-Equilíbrio.

Nas próximas seções descreveremos alguns dos principais conceitos necessários ao desenvolvimento deste trabalho, tais como transições de fase de não-equilíbrio para um estado absorvente, as distribuições de Lévy, o teorema do limite central generalizado e os diversos tipos de dinâmicas das caminhadas aleatórias. No final do capítulo detalharemos o modelo de buscas aleatórias adotado na presente Tese.

1.2 Transições de Fase para Estados Absorventes

Na Mecânica Estatística de Equilíbrio, em que as médias termodinâmicas dos observáveis não variam com o tempo, uma transição de fase é uma transformação relevante em um sistema macroscópico de um estado de equilíbrio para outro quando um parâmetro do sistema atinge um determinado valor crítico, tal como ocorre, por exemplo, na transição da fase líquida para a gasosa de uma determinada substância na sua temperatura de vaporização [CF94]. O estudo das transições de fase é um tópico com abrangência geral em muitos campos da Física, desde as mudanças de fases de fluidos simples, aos sistemas magnéticos, transições ordem-desordem, ferroelétricos, cristais líquidos, fluidos não newtonianos, supercondutores, superfluidos, *etc.* As transições de fase são comumente classificadas em transições de primeira e de segunda ordem. As transições de primeira ordem são caracterizadas por descontinuidades na primeira derivada da energia livre de Gibbs, implicando na existência de calor latente e mudanças bruscas de observáveis, tais como a densidade na transição líquido-gás, por exemplo. Já as transições de segunda ordem apresentam descontinuidade na derivada de segunda ordem da energia livre, ausência de calor latente e distinção entre a fase “ordenada” e a “desordenada” caracterizada pelo comportamento contínuo de um “parâmetro de ordem” (ver a Fig. 1.2). Tais transições apresentam ainda singularidades no ponto de crítico em diversas propriedades do sistema, tais como no calor específico e/ou na susceptibilidade magnética [Mey09].

Através de aproximações simples, como, por exemplo, a de campo médio, pode-se formar um quadro intuitivo acerca das transições de fase. Esta aproximação, contudo, geralmente falha em prover explicações quantitativas em uma larga variedade de fenômenos e frequentemente não captura características conceituais importantes dos processos físicos subjacentes. Os desenvolvimentos acerca das transições de fase consistem em avanços na caracterização da fenomenologia e no aumento da sua compreensão usando uma “combinação de (raras) soluções exatas de princípios teóricos e aproximações numéricas” [BL09].

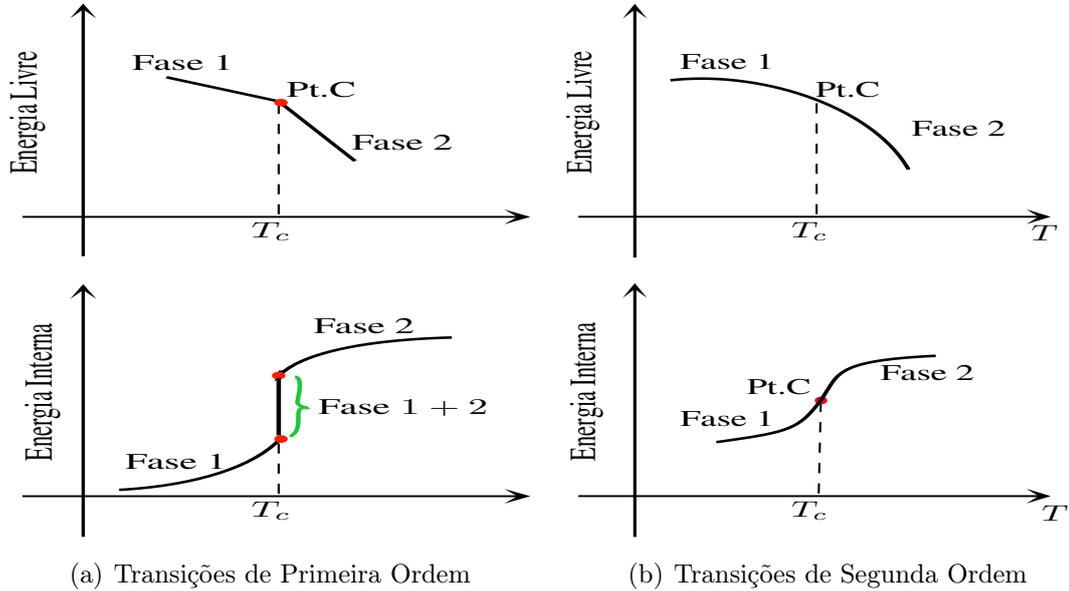


Figura 1.2: (a) Representação esquemática de uma transição de fase de primeira ordem, explicitando a descontinuidade na energia interna do sistema no ponto crítico (Pt.C). (b) Em contraste, uma transição de segunda ordem apresenta energia interna contínua no ponto crítico.

Uma característica essencial das transições de fase de segunda ordem é o comportamento do tipo lei de potência de diversas propriedades do sistema nas vizinhanças do ponto crítico. Outra característica relevante são as correlações críticas de longo alcance completamente especificadas pelas propriedades de simetria do modelo em consideração e independentes dos detalhes das interações microscópicas [Hin06]. Isto permite categorizar as transições de fases para sistemas que possuem os mesmos comportamentos gerais para as suas grandezas nas vizinhanças dos pontos críticos, os quais são caracterizados por expoentes críticos. Estas categorias de comportamento são ditas classes de universalidade. A noção de classe de universalidade foi introduzida por experimentalistas ao observar que vários sistemas físicos aparentemente sem qualquer relação entre si apresentavam o mesmo tipo de comportamento crítico [Hin06, Sta99]. Em seguida, os primeiros conceitos teóricos foram desenvolvidos por Leo Kadanoff [Kad71].

A ideia de classes de universalidade tornou-se um paradigma da teoria de fenômenos críticos de equilíbrio. Devido ao número limitado de classes de universalidade, fundamentar e classificar a transição em um quadro completo, assim como fez Mendeleev para os elementos químicos, são os principais objetivos e perspectivas das teorias que abordam as transições de fase [Hin06]. A mais promissora nesse sentido é a aplicação de teoria de campos conformes em fenômenos críticos de equilíbrio [Pol70].

Em Mecânica Estatística de Equilíbrio, o exemplo fundamental de transição de fase ordem-desordem em duas dimensões é a do modelo de Ising, em que no limite termodinâmico a susceptibilidade magnética e o comprimento de correlação entre spins divergem à medida que a temperatura se aproxima da temperatura crítica finita [MW73]. Esta transição é fundamental também por apresentar uma solução exata, obtida por Lars Onsager, constituindo uma das mais sólidas e robustas classes de universalidades de equilíbrio. Para ilustrar a definição de alguns expoentes críticos do modelo de Ising, citamos [Sta71]

$$M \sim (T_c - T)^\beta, \quad (1.2)$$

$$\chi \sim |T - T_c|^{-\alpha}, \quad (1.3)$$

$$C_H \sim |T - T_c|^{-\gamma}, \quad (1.4)$$

$$\xi \sim |T - T_c|^{-\nu_\perp}, \quad (1.5)$$

em que M é a magnetização, que define o parâmetro de ordem; T é a temperatura com a função de parâmetro de controle, T_c é a temperatura crítica, χ a susceptibilidade, C_H o calor específico em campo magnético (H) constante e ξ denota o comprimento de correlação. Portanto, os expoentes críticos associados a estas grandezas são, respectivamente, β , α , γ , ν_\perp . Tais expoentes não são independentes; ao invés disso, eles obedecem a relações de escala, como, por exemplo, $\alpha + 2\beta + \gamma = 2$ [Sta71].

Em transições de fases de não-equilíbrio (ver Fig. 1.3), em que observáveis variam no tempo, os conceitos de universalidade e expoentes críticos, originalmente desenvolvidos no contexto da Mecânica Estatística de Equilíbrio e explorados pelas hipóteses de escala e pela técnica de expansão em ϵ do Grupo de Renormalização, também são largamente aplicados [BL09, Ó04]. Espera-se, contudo, que as classes de universalidade dos fenômenos críticos de não-equilíbrio sejam mais diversas, uma vez que envolvem o tempo como grau extra de liberdade e portanto são governadas por propriedades de simetria associadas à dinâmica [Hin06]. Há, de fato, uma grande variedade de fenômenos exibindo transições de fase de não-equilíbrio na natureza, os quais vão desde transições morfológicas do tipo líquido-vidro [CG79] até processos que envolvem eventos de criação-difusão-aniquilação [FML01], tais como a evolução de doenças e processos de infecção-cura, reações catalíticas, *etc.* De particular interesse para este trabalho são as transições dinâmicas para estados absorventes, típicas de sistemas que apresentam estados que uma vez atingidos não podem ser deixados, tais como aqueles que envolvem sincronizações [BLT01], criticalidade auto-organizada [DAM⁺01], *etc.* No contexto do problema de *foraging*, veremos adiante que estes estados absorventes caracterizam-se por associar ao *forager* uma energia acumulada nula ou negativa (“morte” do *forager*).

A transição de fase para um estado absorvente não tem um análogo de equilíbrio, pois tal estado é irreversível por definição [CW51] e reversibilidade é uma condição necessária para que haja equilíbrio termodinâmico [CF94, Ó04]. Em outras palavras, as transições de fase para estados absorventes são fenômenos típicos de não-equilíbrio. Como mencionado,

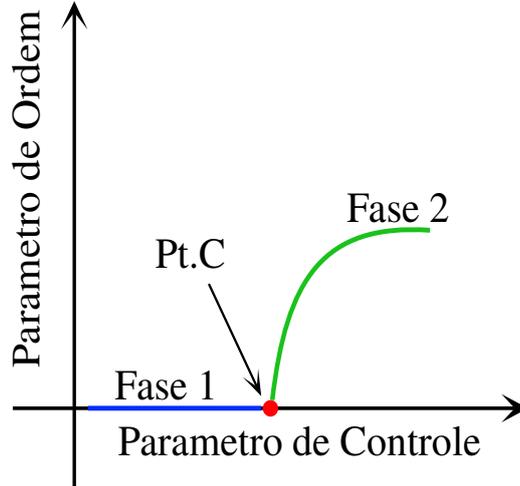


Figura 1.3: Representação esquemática de uma transição de fase de segunda ordem de não-equilíbrio de um estado ativo (Fase 2) para um estado absorvente (Fase 1), passando continuamente pelo ponto crítico (Pt.C).

vários conceitos associados às transições de fase em equilíbrio também se aplicam em transições fora do equilíbrio. Para ilustrar uma classe de universalidade de Mecânica Estatística de Não-Equilíbrio, consideremos o caso da percolação direcionada (*directed percolation* - DP) [Hin06]. Assim como para o modelo de Ising, observamos na vizinhança do ponto crítico que

$$\rho \sim |p - p_c|^\beta, \quad (1.6)$$

$$P \sim |p - p_c|^{\beta'}, \quad (1.7)$$

$$\xi_\perp \sim |p - p_c|^{-\nu_\perp}, \quad (1.8)$$

$$\xi_\parallel \sim |p - p_c|^{-\nu_\parallel}. \quad (1.9)$$

Acima, ρ denota a densidade de sítios ativos, que define o parâmetro de ordem, p é probabilidade de conexão, que determina o parâmetro de controle, p_c é probabilidade crítica de conexão, P denota a probabilidade de sobrevivência de um sítio ativo, que também pode ser interpretada como um parâmetro de ordem [GdlT79], ξ_\perp é o comprimento de correlação temporal e ξ_\parallel o comprimento de correlação espacial [Hin06]. Para esta classe

de universalidade observa-se que $\beta = \beta'$, em função da presença da simetria de reversão de rapidez (*rapidity reversal symmetry*) [Hin06].

Assim como o modelo de Ising em Mecânica Estatística de Equilíbrio, a percolação direcionada é fundamental para a teoria dos fenômenos críticos fora do equilíbrio, mostrando uma transição de uma fase ativa para um estado absorvente (nenhum sítio ativo num dado instante de tempo). Tal transição caracteriza a chamada classe de universalidade DP, com expoentes críticos compartilhados por diversos sistemas físicos em uma variedade de contextos e aplicações [Ó04]. Vale mencionar ainda que, mesmo em sua forma mais simples, os comportamentos nas vizinhanças do ponto crítico do problema de percolação direcionada apresentam elevada complexidade, sem solução exata mesmo em uma dimensão [Hin06].

Para se ter uma ideia do alcance da classe de universalidade DP, foi sugerida por Janssen [Jan81] a conjectura, que estabelece que todas as transições de fase contínuas para um único estado absorvente em sistemas de uma componente, com interações de curto alcance e sem simetria extra e/ou inhomogeneidade ou desordem, pertencem à classe de universalidade DP [OS96]. Assim, a percolação direcionada tem sido largamente estudada via técnicas usuais de Grupo de Renormalização, análise de escala para sistemas com tamanho finito, *etc* [BL09].

Nesse sentido, no presente trabalho caracterizaremos os expoentes críticos associados à dinâmica energética do problema de *foraging* próximo ao limiar de extinção, combinando resultados analíticos e simulações numéricas no contexto de distribuições de Lévy de tamanhos de passos. A fim de emprendermos este estudo é necessário entender com mais profundidade o teorema do limite central, bem como a sua generalização, pois o utilizaremos como ferramenta de mapeamento da energia acumulada do *forager* em um modelo de caminhada aleatória browniana, para obter a taxa de sobrevivência e o seu expoente crítico associado.

1.3 Teorema do Limite Central

O Teorema do Limite Central - TLC (*central limit theorem* - CLT) é um dos resultados fundamentais da teoria de probabilidades para o tratamento de um grande número de eventos estatísticos. Ele possui inúmeras aplicações em diversos contextos físicos e, devido às suas poucas condições a serem satisfeitas, permite uma vasta modelagem de fenômenos aleatórios utilizando distribuições gaussianas e dinâmicas brownianas. Em particular, nos beneficiaremos da sua utilização no cálculo realizado no capítulo 2 da energia do *forager*.

Inicialmente, como um exemplo ilustrativo, consideremos um dado não viciado de seis faces em que cada face tem mesma probabilidade, $p = 1/6$, de ocorrer após um

lançamento. Quando o dado é jogado duas vezes (ou jogamos simultaneamente dois dados: eventos s_1 e s_2 , respectivamente), o número de maneiras (configurações) de se obter, por exemplo, o valor 7 como resultado da soma dos valores obtidos em cada jogada é maior que o número de maneiras de se obter a soma 2. Isto é, para o valor da soma 7 temos $x = s_1 + s_2 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4 = 6 + 1 = 5 + 2 = 4 + 3 = 7$, contabilizando 6 maneiras possíveis, ao invés de apenas uma para a soma 2: $1 + 1 = 2$. Além disso, como $p = 1/6$ então cada dado apresenta um valor médio para a face sorteada igual a 3,5, de modo que 7 é também o valor médio ou valor esperado da variável soma x em dois lançamentos, denotado por $\langle x \rangle$. O valor máximo para um dado não viciado em duas jogadas é 12 ($s_1 = s_2 = 6$), e o mínimo, 2. Quando o dado é lançado muitas vezes (lei dos grandes números), os valores máximos e mínimos para a soma se tornam eventos cada vez mais raros e o valor médio cada vez mais provável. Em outras palavras, ao se jogar 100 vezes um único dado, a probabilidade de se encontrar em todas as jogadas a face 1, obtendo o valor mínimo da soma $x = 100$, ou a face 6, obtendo o valor máximo da soma $x = 600$, é praticamente nula. Desse modo, os eventos mais acessados serão as somas cujos valores se encontram no entorno da média, $\langle x \rangle = 350$, ou mais precisamente as somas que se encontram no intervalo 350 ± 17 , onde 17 representa o desvio padrão da variável soma x .

Nesse contexto, podemos escrever a função densidade de probabilidade de se obter o valor aleatório s_i de uma dada face do dado após um lançamento como

$$\omega(s_i) = \frac{1}{6} \sum_{f=1}^6 \delta(s_i - f), \quad (1.10)$$

onde δ denota a função delta de Dirac e f é um índice que varre o valor das faces do dado. É possível generalizar esta densidade desde o caso de uma moeda não viciada de duas faces até o limite de uma esfera, pensada como a generalização de um dado com um número N infinito de faces*, isto é,

$$\omega(s_i) = \frac{1}{N} \sum_{f=1}^N \delta(s_i - f). \quad (1.11)$$

A média da variável s_i , denotada por $\langle s_i \rangle = \langle s \rangle$, é definida por

$$\langle s \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} s \omega(s) ds, \quad (1.12)$$

*Como os gomos da tradicional bola de futebol (por exemplo, a bola telstar da Copa do Mundo de 1970), no limite em que a área dos gomos tende a zero.

a qual é também denominada de primeiro momento da distribuição $\omega(s)$. Similarmente, o n -ésimo momento da distribuição é definido por

$$\langle s^n \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} s^n \omega(s) ds. \quad (1.13)$$

Assim, podemos calcular o desvio padrão da variável s , $\sigma_s = \sqrt{\langle (\Delta s)^2 \rangle}$, tal que

$$\sigma_s = \sqrt{\langle s^2 \rangle - \langle s \rangle^2}, \quad \text{para } \Delta s = s - \langle s \rangle. \quad (1.14)$$

No contexto da análise estatística de dados, σ_s pode ser interpretado como o desvio estatístico com respeito à média*.

Podemos ainda nos perguntar sobre o que aconteceria com a distribuição de probabilidades $P(x)$ dos valores x da soma para um grande número (*e.g.* 100) de jogadas se, por exemplo, modificássemos o número de possibilidades de valores para a variável aleatória s_i (as “faces do dado”), tal que, por exemplo, $s_i = 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}, 5, \frac{11}{2}, 6$, isto é, se alterássemos $\omega(s_i)$, porém mantendo algumas de suas características. A resposta é que, independentemente da forma específica de $\omega(s_i)$, sob certas condições a distribuição de probabilidades $P(x)$ para a soma x converge para a mesma função, dita gaussiana, após um grande número de eventos estatísticos (“jogadas do dado”). Esta resposta é fornecida pelo teorema do limite central.

A seguir enunciaremos o TLC e apresentaremos uma demonstração padrão, com ênfase nos principais pontos de discussão†.

Teorema 1 (Teorema do Limite Central). *Seja $\mathcal{S} = \{s_i\}_N$ o conjunto de N variáveis aleatórias estatisticamente independentes s_i , identicamente distribuídas sobre \mathbb{R} , tal que a probabilidade de que uma determinada variável s_i assuma um valor no intervalo $[s_i, s_i + ds_i)$ seja $\omega(s_i)ds_i$, com média $\langle s \rangle$ e variância $\langle (\Delta s)^2 \rangle$ finitas. Então, para $N \gg 1$ a densidade de probabilidades $P(x)$ para um dado valor da soma $x = \sum_{i=1}^N s_i$ converge para uma distribuição gaussiana, dada por*

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} (x - \mu_N)^2 \right],$$

com média $\mu_N = N\langle s \rangle$ e variância $\sigma^2 = N\langle (\Delta s)^2 \rangle$.

Demonstração. Inicialmente vamos considerar, por simplicidade, $N = 2$, tal que a soma $x = s_1 + s_2$ seja encontrada entre x e $x + dx$, sendo s_1 e s_2 sorteadas com probabilidades

*As barras de erro que comumente aparecem em gráficos de dados estatísticos.

†Uma demonstração com maior ênfase nos pontos sutis do rigor matemático pode ser encontrada em [Khi49].

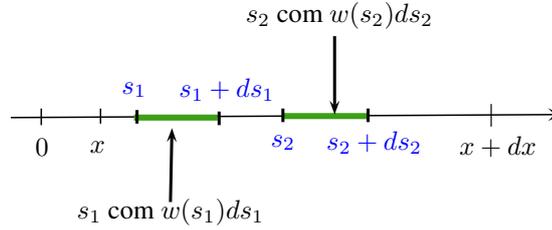


Figura 1.4: Intervalo de variação de duas variáveis aleatórias s_1 e s_2 tal que x esteja entre x e $x + dx$.

$\omega(s_1)ds_1$ e $\omega(s_2)ds_2$ dentro dos intervalos de s_1 até $s_1 + ds_1$ e de s_2 até $s_2 + ds_2$, respectivamente (ver Fig. 1.4). Para determinarmos a distribuição de x é, portanto, necessário somar sobre todos os valores possíveis de s_1 e s_2 cuja soma pertença ao intervalo de x até $x + dx$, isto é, somar sobre $x < s_1 + s_2 < x + dx$:

$$P(x)dx = \iint_{x < s_1 + s_2 < x + dx} \omega(s_1)\omega(s_2)ds_1ds_2. \quad (1.15)$$

Substituindo $s_2 = x - s_1$ e utilizando o jacobiano para o produto dos infinitésimos ds_1ds_2 , tal que

$$\begin{aligned} ds_1ds_2 &= \begin{vmatrix} \frac{\partial s_1}{\partial s_1} & \frac{\partial s_1}{\partial x} \\ \frac{\partial s_2}{\partial s_1} & \frac{\partial s_2}{\partial x} \end{vmatrix} ds_1dx \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} ds_1dx \\ &= ds_1dx, \end{aligned} \quad (1.16)$$

então

$$P(x)dx = \int_{s_1(x)} \int_x^{x+dx} \omega(s_1)\omega(x' - s_1)ds_1dx'. \quad (1.17)$$

Notando que para uma função $\phi(x)$ contínua sobre \mathbb{R} , tal como as distribuições $\omega(s_1)$ e $\omega(s_2)$,

$$\int_x^{x+dx} \phi(x')dx' = dx\phi(x), \quad \forall x,$$

pela interpretação geométrica da integral [Rei65, p. 30], então podemos remover a restrição sobre s_1 , uma vez que x é qualquer, ou seja, $s_1(x)$ pode variar em \mathbb{R} ,

$$\begin{aligned} P(x)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega(s_1)\omega(x - s_1)ds_1dx \\ \therefore P(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega(s_1)\omega(x - s_1)ds_1. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Podemos agora utilizar a função delta de Dirac para voltar à variável s_2 , isto é,

$$\begin{aligned} P(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega(s_1)\omega(s_2)\delta[s_2 - (x - s_1)]ds_1ds_2 \\ &\stackrel{\delta(-x)=\delta(x)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega(s_1)\omega(s_2)\delta[x - (s_1 + s_2)]ds_1ds_2, \end{aligned} \quad (1.19)$$

de modo que, para $N > 2$, podemos generalizar por indução:

$$P(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \omega(s_1) \cdots \omega(s_N) \delta \left(x - \sum_{i=1}^N s_i \right) ds_1 \cdots ds_N. \quad (1.20)$$

Utilizaremos, em seguida, a representação de Fourier da função δ e tomaremos a transformada de Fourier das densidades ω , $Q(k)$, denominada *função característica* da distribuição ω , isto é,

$$\begin{aligned} \delta(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dk, \\ Q_i(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iks} \omega(s) ds_i. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Uma vez que s_i são variáveis aleatórias independentes e igualmente distribuídas, tal que $\omega(s_i)ds_i = \omega(s_j)ds_j = \omega(s)ds$ e $Q_i = Q_j = Q$, então

$$\begin{aligned} P(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \omega(s_1) \cdots \omega(s_N) ds_1 \cdots ds_N \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ik(x - \sum_{j=1}^N s_j)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ikx} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iks_1} \omega(s_1) ds_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{iks_N} \omega(s_N) ds_N \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} [Q(k)]^N dk. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Devido ao fator oscilatório $\exp(iks)$, $Q(k)$ decai quando k aumenta. Por exemplo, supondo que a variável s assuma valores no intervalo $a \leq s \leq b$, com $(b-a)k \gg 1$, reescrevemos $Q \rightarrow \hat{Q}$ dentro deste intervalo como

$$\begin{aligned} \hat{Q}(k) &= \int_a^b e^{iks} \omega(s) ds, \\ &\stackrel{\text{p/partes}}{=} \omega(s) \frac{e^{iks}}{ik} \Big|_a^b - \int_a^b \frac{e^{iks}}{ik} \frac{dw}{ds} ds \\ &= \omega(s) \frac{e^{iks}}{ik} \Big|_a^b + \mathcal{O}(k^{-2}) \\ &\stackrel{k \gg 1}{\approx} 0. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Notamos ainda que este resultado persiste para qualquer intervalo $[a, b]$, isto é, mesmo para $[a, b] \rightarrow (-\infty, \infty)$, uma vez que ao tomarmos o limite $s \rightarrow \infty$, em conjunto com a hipótese de finitude da média e da variância de $\omega(s)$ enunciada no teorema, então $|\omega(s)| \rightarrow 0$ de modo suficientemente rápido. Em particular podemos considerar que as funções ω variam lentamente para distâncias longínquas do valor médio, ou seja, $|dw/ds| \ll kw$, e portanto $\hat{Q} \rightarrow Q \stackrel{k \gg 1}{\approx} 0$. Podemos, então, escrever a expansão de e^{iks} em torno de $k = 0$ para qualquer valor de s devido à ponderação de $\omega(s)$:

$$\begin{aligned} Q(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega(s) (1 + iks - \frac{1}{2}k^2s^2 + \dots) ds \\ &= 1 + ik\langle s \rangle - \frac{1}{2}k^2\langle s^2 \rangle + \dots \end{aligned} \tag{1.24}$$

Ainda evocando a finitude dos dois primeiros momentos de $\omega(s)$, definimos $\mu \equiv N\langle s \rangle$ e $\sigma^2 \equiv N\langle (\Delta s)^2 \rangle = N(\langle s^2 \rangle - \langle s \rangle^2)$, cuja substituição na Eq. (1.24) leva a

$$Q(k) = 1 + ik \frac{\mu}{N} - \frac{1}{2} \frac{k^2 \sigma^2}{N} + \mathcal{O}(N^{-2}). \tag{1.25}$$

Para a N -ésima potência de Q , no limite de $N \rightarrow \infty$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} [Q(k)]^N &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + ik \frac{\mu}{N} - \frac{1}{2} \frac{k^2 \sigma^2}{N} \right)^N \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\mathcal{B}}{N} \right)^N \\ &= e^{\mathcal{B}}, \end{aligned} \tag{1.26}$$

onde $\mathfrak{y} = ik\mu - \frac{1}{2}k^2\sigma^2$. Substituindo o resultado (1.26) na Eq. (1.22), e restaurando a expressão original de \mathfrak{y} , obtemos

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(x-\mu) - \frac{1}{2}\sigma^2 k^2} dk \\ &\stackrel{\dagger}{=} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 \left[k + i\frac{1}{\sigma^2}(x-\mu) \right]^2} dk. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Em seguida, substituindo $z = k + i\alpha$, com $\alpha = \frac{1}{\sigma^2}(x - \mu)$, e observando os limites da integração, chegamos a

$$P(x) = \frac{1}{2\pi} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2 \right] \int_{-\infty+i\alpha}^{\infty+i\alpha} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 z^2} dz. \quad (1.28)$$

Para determinarmos a integral acima definida na variável complexa z , utilizaremos o *Teorema de Cauchy* [DK96], $\oint_C f(z)dz = 0$, para uma função $f(z)$ analítica no contorno C (ver Fig. 1.5),

$$\oint_C dze^{-\frac{1}{2}\sigma^2 z^2} = \int_{C_1} dze^{-\frac{1}{2}\sigma^2 z^2} + \int_{C_2} dze^{-\frac{1}{2}\sigma^2 z^2} + \int_{C_3} dze^{-\frac{1}{2}\sigma^2 z^2} + \int_{C_4} dze^{-\frac{1}{2}\sigma^2 z^2} = 0.$$

Podemos notar na Fig. 1.5 que $\int_{C_2} = -\int_{C_4}$, que $\int_{C_1} \rightarrow -\int_{-\infty+i\alpha}^{\infty+i\alpha}$ e que $\int_{C_3} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}$ é

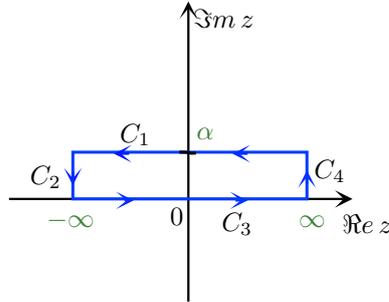


Figura 1.5: Contorno C utilizado para a aplicação do teorema de Cauchy no plano complexo, subdividido em quatro partes sem singularidades internas. A parte C_1 do contorno C contém o intervalo da integral que queremos calcular, $(-\infty + i\alpha, \infty + i\alpha)$.

[†]Completando o quadrado do argumento da exponencial, isto é,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\sigma^2 \left[2ik\frac{1}{\sigma^2}(x-\mu) + k^2 \right] &= -\frac{1}{2}\sigma^2 \left[2i\frac{1}{\sigma^2}k(x-\mu) + k^2 + \frac{1}{\sigma^4}(x-\mu)^2 - \frac{1}{\sigma^4}(x-\mu)^2 \right] \\ &= -\frac{1}{2}\sigma^2 \left\{ \left[k + i\frac{1}{\sigma^2}(x-\mu) \right]^2 + \frac{1}{\sigma^4}(x-\mu)^2 \right\}. \end{aligned}$$

restrita à parte real de z . Ou seja, nesta última parte do contorno podemos fazer $z \rightarrow y$, tal que y seja um número real, levando a

$$\int_{-\infty+i\alpha}^{\infty+i\alpha} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 z^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 y^2} dy = \sqrt{\frac{2\pi}{\sigma^2}}.$$

Assim, a partir da Eq. (1.28) finalmente obtemos a função densidade de probabilidade gaussiana:

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} (x - \mu)^2 \right]. \quad (1.29)$$

□

Ao seguirmos as condições do enunciado do teorema do limite central durante a demonstração acima, a generalidade do seu resultado foi verificada para qualquer que seja a distribuição $\omega(s_i)$ das variáveis s_i , desde que estas sejam estatisticamente independentes e identicamente distribuídas, com $\omega(s_i)$ variando lentamente num intervalo finito ou caindo rapidamente para $s \rightarrow \infty$, de forma que os seus dois primeiros momentos sejam finitos. Assim, garantimos que a variável soma x esteja distribuída por uma gaussiana no limite em que $N \rightarrow \infty$. Neste sentido, a gaussiana é dita como o **atrator** estatístico [BPB99] de densidades ω cujos primeiros momentos são finitos.

Um resultado interessante do ponto de vista matemático pode ser obtido notando-se que $P(x)$ é a convolução, definida como

$$[w_1 * w_2](x) = \int w_1(s)w_2(x - s)ds,$$

de N distribuições,

$$P(x) = w_1 * \dots * w_N,$$

admitindo a existência de uma função transformada inversa de Fourier para $P(x)$,

$$P(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} P_N(k) dk.$$

Isto é, diretamente a partir da Eq. 1.22 podemos concluir que $P_N(k) = Q_1(k) \dots Q_N(k)$, e no caso particular de variáveis identicamente distribuídas, $P_N(k) = [Q(k)]^N$. Por esta razão, $P(x)$ é dita *infinitamente divisível*.

Particularmente, o teorema do limite central nos diz como a distribuição de cada variável s contribui para a soma. Para valores finitos de N é importante notar que a aproximação gaussiana para $P(x)$ se aplica bem no entorno do centro da distribuição (condição de k no entorno de zero), isto é, desvios consideráveis podem ocorrer na região

da cauda da gaussiana em que os pesos $\omega(s)$ são tipicamente reduzidos. Desse modo, o desvio padrão σ , que determina a largura da gaussiana ao redor da média, também dá uma medida do intervalo de confiança do teorema do limite central. De fato, o resultado

$$\sigma \sim N^{1/2} \tag{1.30}$$

é uma assinatura tanto da distribuição gaussiana quanto das caminhadas aleatórias brownianas [VdLRS11], e determina o padrão de difusão do caminhante aleatório à medida que mais passos são executados.

A convergência para a distribuição gaussiana ainda pode ser verificada mesmo que as variáveis s_i e s_j não sejam identicamente distribuídas, com $\omega(s_i)ds_i \neq \omega(s_j)ds_j$ ainda apresentando os primeiros momentos finitos. De fato, a condição de independência das variáveis s_i e s_j pode ser relaxada desde que as mesmas permaneçam fracamente correlacionadas, tal que o TLC continua válido [GK54].

O TLC é de nosso especial interesse não só por ser um resultado fundamental da teoria de probabilidades, como também pelo fato da distribuição de Lévy não satisfazer a hipótese essencial dos primeiros momentos finitos, e portanto, não se enquadrar nos requisitos do TLC. Tal fato gera inúmeras consequências interessantes no contexto das buscas aleatórias que utilizam distribuições de Lévy para os tamanhos dos passos. De fato, como veremos a seguir, as caminhadas de Lévy são governadas pelo TLC generalizado.

1.4 Teorema do Limite Central Generalizado

O teorema do limite central generalizado surge da questão de se determinar qual é o **atrator** estatístico de distribuições que possuem os primeiros momentos divergentes. Neste sentido, é importante apresentarmos o conceito de distribuições estáveis, como veremos adiante.

Iniciamos a discussão observando que, ao somarmos (convolução) N gaussianas, o resultado ainda é uma distribuição gaussiana, com uma variância σ^2 dada por N vezes a variância finita de cada variável independente, σ_s^2 , de acordo com o teorema do limite central. Essa estabilidade na forma sob convoluções permite classificar a gaussiana como uma distribuição estável. Nesse sentido, Auguste Cauchy (1853) e Paul Lévy (1930) mostraram que também existem distribuições que são estáveis mesmo tendo os seus primeiros momentos divergentes (portanto não seguindo o TLC), e que a distribuição de probabilidades $p_N(x)$ da soma $x = s_1 + s_2 + \dots + s_N$ é a mesma dos eventos individuais, $p_1(s_1)$, a menos de um fator de escala [SKZ96], isto é, $p_N(x) = \frac{1}{\lambda^a} p_1(x/\lambda)$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$.

Com base em tais ideias, definiremos formalmente a seguir o conceito de distribuições estáveis e enunciaremos o teorema do limite central generalizado.

Definição 1 (Probabilidades Estáveis). *Seja $x = \sum_{i=1}^N s_i$ a soma de N variáveis aleatórias s_i , estatisticamente independentes e identicamente distribuídas com densidade de probabilidade $\omega(s_i)$. A distribuição de probabilidades da soma x destas variáveis é dada por N convoluções de $\omega(s_i)$. As distribuições $\omega(s_i)$ e $P(x)$ são então ditas estáveis se*

$$\omega(s_i)ds_i = P(x)dx, \quad (1.31)$$

onde $x = a_N s_i + b_N$ e a_N e b_N são constantes. Em particular, para $b_N = 0$ as distribuições são ditas estritamente estáveis.

Teorema 2 (Teorema do Limite Central Generalizado). *Seja $x = \sum_{i=1}^N s_i$ a soma do conjunto \mathcal{S} de N variáveis aleatórias s_i , estatisticamente independentes e identicamente distribuídas com densidade de probabilidade estável $\omega(s_i)$. No limite $N \rightarrow \infty$ a distribuição da soma x converge para uma densidade estável e infinitamente divisível $P(x)$, tal que $P(x)dx = a^{-p}\omega(s_i)ds_i$, onde a^{-p} denota um fator de escala.*

Demonstração. Notando inicialmente que $s_i + s_j = s'_i \in \mathcal{S}$, então, iterativamente,

$$\begin{aligned} x &= \underbrace{s_1 + s_2}_{s'_1} + \underbrace{s_3 + s_4}_{s'_2} \cdots + \underbrace{s_{N-1} + s_N}_{s'_{N/2}} \\ &= s'_1 + s'_2 + \cdots + s'_{N/2} \\ &\vdots \\ &= s_1^{(n)}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Observando ainda que existe um $s_j \in \mathcal{S}$ e um $a \in \mathbb{R}$ tal que $as'_i = s_j = s$, temos que

$$\omega(as_1^{(n)})ds_1^{(n)} = \omega(s)ds.$$

Se $P(x)$ é infinitamente divisível,

$$P(ax)dx = a^p P(x)dx,$$

em que a^p é um fator de escala, tal que $p \in \mathbb{R}$. Então, se as densidades são estáveis, finalmente obtemos

$$P(x)dx = a^{-p}\omega(as_1^{(n)})ds_1^{(n)} = a^{-p}\omega(s)ds.$$

Isto é, a probabilidade de um dado valor da soma x é igual à probabilidade de um evento individual s_i a menos de um fator de escala*. □

Corolário 1. *A variável aleatória x é dita estável se, para x_1 e x_2 cópias independentes de x e constantes u e $v \in \mathbb{R}$, a condição*

$$ux_1 + vx_2 \stackrel{d}{=} ax + b \tag{1.33}$$

for satisfeita†.

Por exemplo, no limite de um grande número N de eventos sorteados a partir de uma distribuição infinitamente divisível [BPB99], a lei de escala para a distribuição α -estável de Lévy, $\omega_\alpha(s)$, caracterizada pelo parâmetro $0 < \alpha \leq 2$ (ver a seguir), obedece a relação

$$\omega_\alpha(s) \sim \frac{1}{N^{1/\alpha}} P_\alpha(x/N^{1/\alpha}), \tag{1.34}$$

com desvio padrão dado por [SKZ96]

$$\sigma \sim N^{1/\alpha}. \tag{1.35}$$

É interessante contrastar com a distribuição gaussiana, para a qual

$$\omega(s) \sim \frac{1}{N^{1/2}} P(x/N^{1/2}), \tag{1.36}$$

tal que

$$\sigma \sim N^{1/2}. \tag{1.37}$$

Se considerarmos o contexto das caminhadas aleatórias com densidade de probabilidade $\omega_\alpha(s)$ dos tamanhos s dos passos, temos, portanto, um parâmetro (α) que determina a assinatura da trajetória do caminhante dependente da bacia de atração estatística: para $0 < \alpha \leq 2$ os resultados das Eqs. (1.34)-(1.35) indicam que $\omega_\alpha(s)$ e $P_\alpha(x)$ são regidas pelo teorema do limite central generalizado (distribuições α -estáveis de Lévy); por outro lado, para $\alpha \geq 2$ as Eqs. (1.36)-(1.37) atestam que é o TLC que governa o comportamento browniano das distribuições. De fato, a diferença espacial entre a caminhada aleatória com densidade de probabilidade de Lévy para os tamanhos dos passos e o caminhante browniano é ilustrada na Fig. 1.6.

*Uma prova matematicamente mais rigorosa deste teorema pode ser encontrada em [GK54].

†O símbolo $\stackrel{d}{=}$ significa igualdade entre distribuições, *i.e.* os conjuntos à esquerda e à direita do símbolo são distribuídos segundo a mesma lei de probabilidades [Nol10].

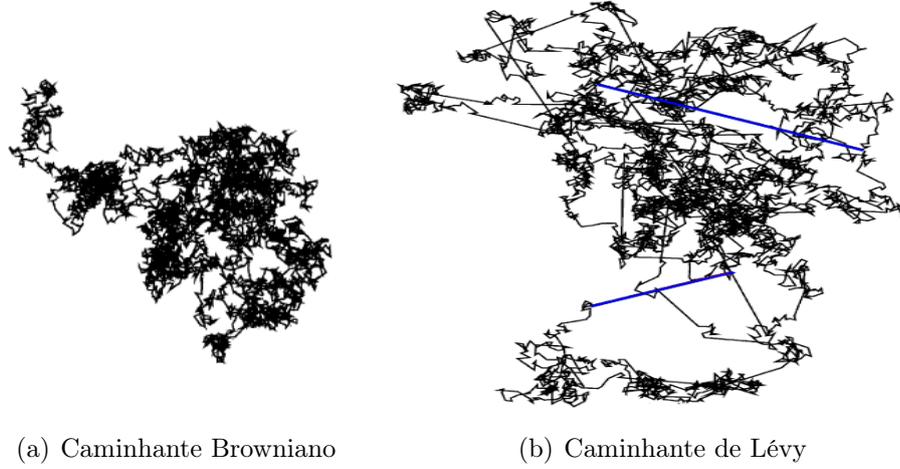


Figura 1.6: (a) Caminhada aleatória browniana caracterizada por comprimentos de passos com valor máximo da ordem de um desvio padrão gaussiano. (b) Caminhada aleatória de Lévy com distribuição de tamanhos de passos com $\alpha = 0.5$. Devido à divergência do seu primeiro momento, passos (em azul) de comprimentos muito maiores que o comprimento médio do passo browniano (dentro da mesma escala) passam a existir com probabilidade consideravelmente maior do que no caso gaussiano. Ambas as caminhadas contém 7×10^3 passos.

A principal consequência do teorema do limite central generalizado foi a ampliação da bacia de atratores estatísticos, ou seja, do “domínio de atração das leis estáveis” [BPB99]. Lévy determinou toda uma classe de distribuições governadas pelo TLC generalizado, nomeada como a classe das distribuições α -estáveis de Lévy. Tais distribuições são descritas pelas *funções características* $\phi_\alpha(k)$, tais que

$$\phi_\alpha(k) = \begin{cases} \exp \{-j_\alpha |k|^\alpha [1 - i\beta \tan(\pi\alpha/2) \text{sgn}(k)]\}, & \text{para } \alpha \neq 1; \\ \exp \{-j_1 |k| [1 + i\beta \frac{2}{\pi} \text{sign}(k) \ln |k|]\}, & \text{para } \alpha = 1, \end{cases} \quad (1.38)$$

em que o parâmetro α assume valores $0 < \alpha \leq 2$, β é um parâmetro (*skewness*) definido no intervalo $-1 \leq \beta < 1$, j_α é uma constante positiva e $\text{sign}(k)$ é a função sinal. O caso especial $\alpha = 1$ constitui uma generalização da função característica da distribuição de Cauchy, com a introdução de uma fase dependente de β . De fato, através da introdução do parâmetro β foi possível descrever assimetrias nas distribuições estáveis com respeito ao seu centro ($s = 0$), isto é, β está associado a uma fase que governa a assimetria da distribuição. Em nossos estudos, trabalharemos sempre com distribuições de Lévy simétricas ($\beta = 0$). Na seção 1.6 exploraremos o comportamento assintótico destas distribuições no limite $s \gg 1$, descrito por uma lei de potência de s com expoente α .

1.5 Assinaturas Dinâmicas: Difusão Normal, Sub e Superdifusão

Uma vez que caracterizamos na seção anterior a assinatura geométrica das caminhadas aleatórias com distribuições de tamanhos de passos browniana e de Lévy, vamos em seguida determinar as suas respectivas dinâmicas de evolução temporal.

Inicialmente, podemos dizer que ao levar em conta os passos da caminhada *um a um*, através da convolução de suas distribuições obtemos uma densidade de probabilidade de encontrar o caminhante numa dada posição x após N passos. Nesta formulação, temos o espaço contínuo e o “tempo” (isto é, a variável número de passos) discreto. Como veremos a seguir, é possível tomar o limite temporal contínuo ao se associar adequadamente o número de passos ao tempo.

De fato, para passar ao limite de tempo contínuo no caso unidimensional, podemos nos perguntar pela densidade de probabilidade $P(x, N + 1)$ de encontrar o caminhante na posição x após $N + 1$ passos. Considerando passos de tamanho $\delta x > 0$, tal função é determinada pela probabilidade de que após N passos o caminhante realize um deslocamento para a direita com probabilidade p a partir da posição $x - \delta x$, ou para a esquerda com probabilidade $q = 1 - p$ a partir da posição $x + \delta x$:

$$P(x, N + 1) = pP(x - \delta x, N) + qP(x + \delta x, N). \quad (1.39)$$

Na equação acima podemos agora fazer as associações $N \rightarrow t$ e $(N + 1) \rightarrow (t + \delta t)$, tal que

$$P(x, t + \delta t) = pP(x - \delta x, t) + qP(x + \delta x, t). \quad (1.40)$$

Considerando incrementos infinitesimais e expandindo em série de Taylor para cada variável, obtemos

$$\begin{aligned} P(x, t) + \frac{\partial P}{\partial t} \delta t + \mathcal{O}(\delta t^2) &= p \left[P(x, t) - \frac{\partial P}{\partial x} \delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} (\delta x)^2 + \mathcal{O}(\delta x^3) \right] + \\ &+ q \left[P(x, t) + \frac{\partial P}{\partial x} \delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} (\delta x)^2 + \mathcal{O}(\delta x^3) \right], \end{aligned} \quad (1.41)$$

isto é,

$$\frac{\partial P}{\partial t} = v \frac{\partial P}{\partial x} + D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}, \quad (1.42)$$

tal que $v \equiv (p-q)\frac{\delta x}{\delta t}$ é a velocidade tendenciada (*bias velocity*) e $D \equiv \frac{(\delta x)^2}{2\delta t}$ é a constante de difusão. A Eq. (1.42) determina a dinâmica da densidade de probabilidade do caminhante aleatório browniano (note que os primeiros momentos da distribuição de deslocamentos convergem) para espaço e tempo contínuos, e representa a equação de Fokker-Planck neste contexto.

Note que o fator v/D diverge, uma vez que $v/D \sim 1/\delta x$ no limite contínuo ($\delta x, \delta t \rightarrow 0$). Portanto o termo convectivo $\partial P/\partial x$ invariavelmente domina sobre o termo difusivo $\partial^2 P/\partial x^2$, neste sentido, no limite contínuo devemos ter $(p-q) \propto \delta x$ [Red01], para que ambas primeiras e segundas derivadas sejam simultaneamente finitas, isto é,

$$p - q = \frac{v\delta x}{2D} \quad (1.43)$$

ou, uma vez que $q = 1 - p$,

$$p = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{v\delta x}{2D} \right) \quad \text{e} \quad q = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{v\delta x}{2D} \right). \quad (1.44)$$

De um modo não rigoroso, qualquer processo de saltos (*hopping*) estocásticos em que a distribuição de comprimentos de passos seja bem comportada tem uma descrição contínua em termos da equação de Fokker-Planck [Red01].

A forma geral da equação de difusão, levando-se em conta arrastos, fontes e e transmissões de ordem não-linear, e outros efeitos relacionados, por exemplo, pode ser encontrada como:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [A(x, t)P(x, t)] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [B(x, t)P(x, t)]. \quad (1.45)$$

As funções A e B variam de acordo com o contexto físico.

A densidade de probabilidade $P(x, t)$ para um ou um conjunto de caminhantes aleatórios, obedece à mesma equação da difusão para a temperatura T ou a concentração c de espécies químicas em difusão, de acordo com a equação do calor ou a lei de Fick [Sor06], respectivamente. A razão fundamental é que as variáveis T e c são manifestações microscópicas para um grande número de movimentos aleatórios em todos os seus graus de liberdade. Para a temperatura, os graus de liberdade são os fónons colidindo com heterogeneidades em volta que podem se comportar, também, como um caminhante aleatório.

Ainda, vale mencionar que $P(x, t)$ pode mapear o *processo do telegráfo aleatório*, isto é, considerando a equação da difusão de um modo geral, tomando como premissa que a variável aleatória x pode adquirir os valores a ou b que se alteram entre eles à medida que o tempo passa [Gar85].

Para obtermos a sua solução, tomemos a transformada de Fourier de $P(x, t)$, isto é, $P(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x, t)e^{ikx} dx$, tal que

$$\frac{\partial P(k, t)}{\partial t} = (ikv - Dk^2)P(k, t). \quad (1.46)$$

Em seguida, integrando no tempo e realizando a transformada de Fourier inversa, obtemos, para um caminhada iniciada em $x = 0$,

$$\begin{aligned} P(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(x-vt)-Dtk^2} dk, \\ P(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left[-\frac{1}{4Dt}(x-vt)^2\right]. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Para o caso específico em que deslocamentos para a esquerda e direita têm probabilidades iguais ($p = q = 1/2$ e $v = 0$), temos que

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}, \quad (1.48)$$

que é conhecida como equação de difusão do calor [Rei65], com solução gaussiana obtida fazendo $v = 0$ na Eq. (1.47). Assim, por comparação direta entre as Eqs. (1.47) e (1.29), obtemos a variância $\sigma^2 = 2Dt$ e o resultado canônico para a dinâmica browniana:

$$\sigma \sim t^{1/2}. \quad (1.49)$$

Portanto, espalhamento espacial da caminhada browniana ao redor da sua posição média é tipicamente limitado pela potência $t^{1/2}$, como ilustrado na Fig. 1.7. Este resultado também é válido para dimensões maiores que um e caracteriza a chamada **difusão normal**. Entretanto, este formalismo falha para distribuições de Lévy, uma vez que não leva em conta as correlções de longo alcance, isto é, a densidade de probabilidade $P(x, t)$ é obtida da densidade de pequenos passos $P(x \pm \delta x, t)$ em que δx é infinitesimal.

Podemos generalizar o tratamento do limite contínuo acima, supondo uma forma mais geral para as taxas de transição entre posições ocupadas em instantes distintos. Seja $\mathcal{W}(x, \xi; t - \tau)$ a taxa de transição da posição ξ no tempo τ para a posição x no tempo t . Uma variação temporal de $P(x, t)$ está associada tanto a um fluxo positivo do tipo $\mathcal{W}(x, \xi; t - \tau)P(\xi, \tau)$ (o caminhante estava em ξ no tempo τ e saltou para a posição x no tempo t), quanto a um fluxo negativo do tipo $\mathcal{W}(\xi, x; t - \tau)P(x, \tau)$ (o caminhante estava em

x no tempo τ e saltou para a posição ξ no tempo t). Somando sobre todas as possibilidades, obtemos a equação mestra generalizada (*generalized master equation*) [KBS87]:

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t [\mathcal{W}(x, \xi; t - \tau)P(\xi, \tau) + \mathcal{W}(\xi, x; t - \tau)P(x, \tau)] d\xi d\tau, \quad (1.50)$$

a partir da qual também é possível reobter a Eq. (1.46) para a difusão normal ou browniana.

A seguir, analisaremos como se comporta a dinâmica de processos de Lévy, tomando como ponto de partida a equação mestra generalizada neste contexto. Em nossa abordagem, vamos considerar que os passos são realizados instantaneamente, ou que os passos são locais no tempo, ou ainda que tempos distintos são decorrelacionados. Tais propriedades caracterizam os chamados voos de Lévy, em contraste com as caminhadas de Lévy em que os passos são realizados com velocidade finita e constante. Nesse sentido, a taxa de transição pode ser separada nas suas partes espacial e temporal, de modo que $\mathcal{W}(\xi, x; t - \tau) = \omega(\xi, x)\delta(\tau - t)$. Após a integração temporal, obtemos

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} [\omega(x, \xi)P(\xi, t) + \omega(\xi, x)P(x, t)] d\xi. \quad (1.51)$$

Considerando a simetria esquerda-direita escrevemos $\omega(x, \xi) = -\omega(\xi, x)$, e levando em conta que o caminhante executa um passo de tamanho $s = |x - \xi|$ para transitar de x para ξ ou de ξ para x , então fazemos $\omega(\xi, x) \rightarrow \omega(s)$ e $\xi \rightarrow x + s$, de modo que

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(s) [P(x + s, t) - P(x, t)] ds. \quad (1.52)$$

Como comentado anteriormente (e também detalhado na próxima seção), no limite assintótico $s \gg 1$ a distribuição de Lévy para os tamanhos de passos s assume a forma de uma lei de potência, $\omega(s) \propto s^{-(1+\alpha)}$, a qual, ao ser substituída na equação acima, leva ao operador derivada fracionária de Caputo [Pod99]:

$$D^\alpha f(x) = \frac{1}{A(\alpha)} \int ds \frac{1}{s^{1+\alpha}} [f(x + s) - f(x)], \quad (1.53)$$

onde $A(\alpha)$ é uma constante. A essa maneira, obtemos a generalização da equação de difusão de calor para o caso da dinâmica dos voos de Lévy:

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = D^\alpha P(x, t) \quad (1.54)$$

Um caminho intuitivo para derivarmos a equação diferencial fracionária (1.54) pode ser seguido ao se notar inicialmente que, no caso browniano, tomando a transformada de Fourier para $P(x, t)$, o argumento da função $\exp(z)$, dado pelo número complexo $z = ikv - Dk^2$, determina a forma da equação diferencial da difusão no espaço k . No caso $v = 0$, considerando a distribuição α -estável de Lévy, Eq. (1.38), em conjunto com o fato de que $[\phi(k)]^N \rightarrow [\phi(k)]^{N+1}$ para o deslocamento de um único passo, podemos escrever no espaço k a função com dependência temporal, tal que um passo simples acontece num intervalo infinitesimal δt ,

$$\phi(k, \delta t) = e^{-j_\alpha |k|^\alpha \delta t}. \quad (1.55)$$

No entorno de $k = 0$ temos que $\phi(k, \delta t) \cong 1 - j_\alpha |k|^\alpha \delta t$, de modo que no limite contínuo $N \rightarrow \infty$ e $\delta t \rightarrow 0$, com $t = N\delta t$ finito, obtemos

$$\phi(k, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} [\phi(k, \delta t)]^N = \left(1 - \frac{j_\alpha |k|^\alpha t}{N}\right)^N = e^{-j_\alpha |k|^\alpha t}. \quad (1.56)$$

Tomando agora a transformada inversa de Fourier da função característica, encontramos

$$P(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx - j_\alpha |k|^\alpha t} dk, \quad (1.57)$$

de modo que

$$\frac{\partial P(k, t)}{\partial t} = -j_\alpha |k|^\alpha P(k, t), \quad (1.58)$$

sugerindo uma forma diferencial fracionária no espaço das coordenadas, como obtemos antes

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = J_\alpha \frac{\partial^\alpha P(x, t)}{\partial x^\alpha}; \quad J_\alpha \equiv cte. \quad (1.59)$$

O decaimento com lei de potência de $\omega(s)$ implica na divergência dos momentos de ordem q maior ou igual a α . Em particular, como $0 < \alpha \leq 2$ então o segundo momento da distribuição de Lévy diverge. Apesar disso, considerando a quantidade finita $\sigma_L = \langle |x|^q \rangle^{1/q}$ para $q < \alpha$, que não é um desvio padrão, mas joga o papel, convergindo para o desvio padrão usual como veremos a seguir; é possível verificar através dos resultados acima a assinatura da **difusão anômala** [Fog98]

$$\sigma_L \sim t^{1/\alpha}. \quad (1.60)$$

O fato de $0 < \alpha \leq 2$ indica, portanto, que a dispersão dos processos de Lévy se dá de forma mais rápida (superdifusão) do que a difusão normal ($\alpha = 2$). Na verdade, de um

modo mais geral a forma da densidade de probabilidades (propagador) na ausência de ruídos e arrastos* pode ser escrita como [VdLRS11]

$$P(x, t) = \mathcal{N}(t)F\left(-\frac{|x|}{t^H}\right), \quad (1.61)$$

em que, conseqüentemente [Wei94], condensando as assinaturas numa única forma,

$$\sigma \sim t^H, \quad (1.62)$$

tal que H define o expoente de Hurst [VdLRS11]. Observamos então que $H = 1/2$ determina uma difusão **normal**, $H < 1/2$ caracteriza uma **subdifusão**, que pode ser gerada por caminhadas aleatórias com tempos de pausa divergentes. $H > 1/2$ corresponde a uma **superdifusão**, com característica de persistência em que o caminhante tende a permanecer na direção do último passo. Pode ser gerada por voos de Lévy com $0 < \alpha < 2$ (ver Fig. 1.7). Em particular, o limite $H = 1$ corresponde ao regime balístico.

Apesar da assinatura dinâmica geral contemplar todos os casos de difusão, a equação para a subdifusão tem sua forma peculiar, isto é, a equação que gera subdifusão é fracionária no tempo,

$$\frac{\partial^\alpha P}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x} [A(x, t)P(x, t)] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [B(x, t)P(x, t)]. \quad (1.63)$$

A subdifusão pode ser gerada por longos tempos de espera, isto é, o caminhante executa um passo e espera um tempo para executar outro, frequentemente encontrada em caminhadas de Lévy, ou por antipersistência (os passos tendenciados a não repetir o sentido do passo anterior) [Mit11].

Na próxima seção vamos analisar o limite assintótico de grandes comprimentos de passos da distribuição de Lévy, explorando os seus aspectos matemáticos e as suas principais características.

1.6 Distribuições de Lévy

Como vimos anteriormente, as distribuições de Lévy são estatisticamente estáveis e apresentam uma dinâmica superdifusiva com assinatura dada por $\sigma_L = t^{1/\alpha}$, onde $0 < \alpha \leq 2$. Outra característica essencial das distribuições de Lévy são as probabilidades consideráveis, se comparadas às probabilidades gaussianas, de que grandes valores da variável aleatória (longos saltos, $s \gg 1$) sejam sorteados.

*Termos de derivadas dependentes da velocidade nas equações de difusão.

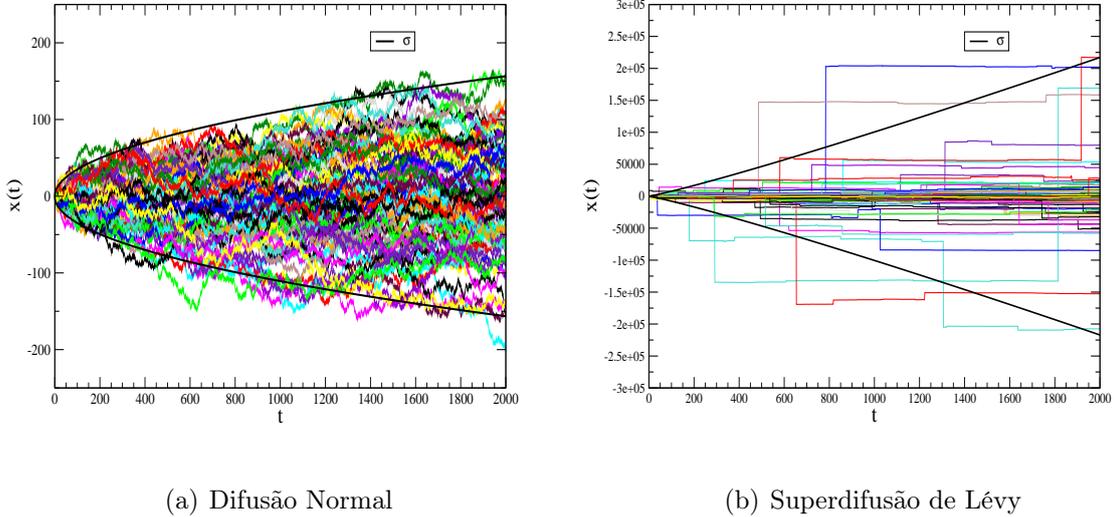


Figura 1.7: Cada cor representa um caminhante aleatório distinto executando uma caminhada unidimensional. A variável aleatória x representa a posição final após t passos. (a) Padrão de difusão normal gerada por movimentos brownianos com assinatura dinâmica $\sigma \sim t^{1/2}$. (b) Padrão de superdifusão gerado por vôos de Lévy com $\sigma_L \sim t^{1/\alpha}$ em que $\alpha = 0.9$. Os contornos negritos são as curvas σ para os respectivos casos.

Mencionamos também que existem dois tipos de processos de Lévy: as caminhadas de Lévy (LWs) e os voos de Lévy (LFs). O termo voo de Lévy foi usado primeiramente por Benoit Mandelbrot [Man82] no contexto da “poeira de Lévy” (*Lévy dust*), definida como o conjunto dos pontos obtidos a partir de uma sequência de voos de Lévy. Tal conjunto possui dimensão fractal, como discutiremos a seguir. Nos LFs os saltos são executados instantaneamente (duração nula), de forma que o buscador efetivamente se teleporta entre as posições de origem e destino no espaço de busca, conferindo uma característica de localidade no tempo. As taxas de transição associadas aos LFs possuem longo alcance espacial, tal como observamos ao derivar a Eq. (1.54). Em particular, o seu deslocamento quadrático médio diverge. Dentre as várias aplicações relacionadas com os voos de lévy [VdLRS11], destacamos os lasers aleatórios [Wie08], com impacto direto em tecnologia.

Em contraste, nas caminhadas de Lévy o caminhante viaja com velocidade finita e constante, independentemente do tamanho do passo. Este fato acopla espaço e tempo, isto é, as taxas de transição na Eq. (1.50) contém efeitos de longo alcance e de memória que não podem mais ser separados. Nesse caso, o tempo de percurso é proporcional à distância total percorrida e o deslocamento quadrático médio existe como função do tempo, crescendo na forma de uma difusão anômala segundo a sua assinatura dinâmica. Para

períodos de tempo muito longos as caminhadas de Lévy progressivamente se assemelham aos voos de Lévy.

Vamos a seguir derivar algumas propriedades matemáticas da classe de distribuições de Lévy no regime de longas distâncias, $\ell \gg \ell_0$, onde ℓ_0 é um valor mínimo de referência, isto é, o menor tamanho de passo que o caminhante pode executar. A mudança de notação $s \rightarrow \ell$ indica que agora estamos considerando uma sequência de saltos ou passos de tamanho ℓ distribuídos segundo a densidade de probabilidades α -estável de Lévy $\omega(s) \rightarrow p(\ell)$, que possui a função característica $\phi_\alpha(k)$ dada pela Eq. (1.38) cujo parâmetro de *skewness* $\beta = 0$, que determina distribuições simétricas em relação a ℓ_0 . Portanto, as distribuições de Lévy são definidas a partir da transformada inversa de Fourier da função $\phi_\alpha(k)$, isto é,

$$p(\ell) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ik\ell} \phi_\alpha(k). \quad (1.64)$$

De um modo geral, para uma distribuição arbitrária $\tilde{U}(\ell)$,

$$\tilde{U}(\ell) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ik\ell} U(k). \quad (1.65)$$

Ainda, podemos escrever as componentes da decomposição de Fourier $U(k)$ como uma exponencial

$$U(k) = e^{-H(k)}, \quad (1.66)$$

em que $H(k)$ joga o papel do hamiltoniano das integrais de caminho de estatística quântica [JK10]. Para as distribuições de Lévy simétricas $\beta = 0$, o hamiltoniano de Lévy H_L seria,

$$H_L(k) = j_\alpha k^\alpha. \quad (1.67)$$

Portanto, tomando $j_\alpha = a\ell_0^\alpha$ por conveniência, em que a é uma constante, tal que a distribuição após N passos, $p(\ell) \rightarrow p_N(\ell)$,

$$p_N(\ell) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp(-aN\ell_0^\alpha k^\alpha) \cos(k\ell) dk, \quad \text{para } 0 < \alpha \leq 2. \quad (1.68)$$

Através de uma expansão em série de Taylor, o comportamento assintótico de $p_N(\ell)$ no regime de ℓ largo o suficiente, pode ser escrito abaixo

$$p_N(\ell) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\infty \frac{dk}{\pi} (aN\ell_0^\alpha k^\alpha)^n \cos k\ell = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \frac{a^n N^n \ell_0^{n\alpha}}{\pi} \Gamma(1+n\alpha) \frac{\sin \frac{\alpha\pi}{2}}{\ell^\alpha}. \quad (1.69)$$

tal que $\Gamma(1 + n\alpha)$ representa a função Gama (extensão do fatorial). Se definirmos o parâmetro $\mu = \alpha + 1$ (que não deve ser confundido com a média gaussiana μ_N da seção 1.3), podemos reescrever para

$$p_N(\ell) = aN \frac{\Gamma(\mu) \sin[\pi(\mu - 1)/2]}{\pi\ell_0} \left(\frac{\ell_0}{\ell}\right)^\mu + \mathcal{O}(\ell^{-2\mu+1}). \quad (1.70)$$

Vamos considerar que o caminhante aleatório unidimensional executa passos estatisticamente independentes e identicamente distribuídos, e ainda considerar apenas o primeiro termo da expansão junto ao fato que para uma distribuição estável,

$$p(\ell) = \frac{1}{N^{\frac{1}{\alpha}}} p_N(\ell/N^{\frac{1}{\alpha}}),$$

ou seja,

$$p(\ell) = A_\mu \frac{1}{|\ell|^\mu}, \quad \text{se } |\ell| \geq \ell_0, \quad (1.71)$$

e $p(\ell) = 0$ qualquer outro caso, com $A_\mu \equiv a \frac{\Gamma(\mu) \sin[\pi(\mu-1)/2]}{\pi\ell_0}$. Por simplicidade, daqui por diante nos referiremos ao limite assintótico da distribuição de Lévy, dado pela expressão acima com comportamento do tipo lei de potência, simplesmente como “distribuição de Lévy”. Além disso, convencionamos que passos “negativos”, $-|\ell|$, são dados para a esquerda e são equiprováveis aos realizados para a direita.

É necessário que $p(\ell)$ seja normalizada à unidade, isto é,

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\ell) d\ell = A_\mu \int_{-\infty}^{-\ell_0} \frac{1}{|\ell|^\mu} d\ell + A_\mu \int_{\ell_0}^{\infty} \frac{1}{\ell^\mu} d\ell = 1, \quad (1.72)$$

o que leva a $A_\mu = \frac{\mu-1}{2} \ell_0^{\mu-1}$, ou seja,

$$p(\ell) = \frac{\mu-1}{2} \ell_0^{\mu-1} \frac{1}{|\ell|^\mu}, \quad \text{se } |\ell| \geq \ell_0. \quad (1.73)$$

Comparando as equações Eqs(1.70) com Eqs(1.73), determinamos o inverso da constante $a^{-1} = 2\Gamma(\alpha + 1) \sin(\pi\alpha/2)/(\pi\ell_0)$ no limite assintótico.

Assim, o passo médio, ou primeiro momento de $p(\ell)$,

$$\langle \ell \rangle = 2A_\mu \int_{\ell_0}^{\infty} \frac{\ell}{|\ell|^\mu} d\ell, \quad (1.74)$$

bem como o seu segundo momento, divergem no intervalo para $1 \leq \mu \leq 2$ e $1 \leq \mu \leq 3$, com *divergências logarítmicas* para $\mu = 2$ e $\mu = 3$, respectivamente. Além disso, os outros momentos de ordem superior também divergem com suas respectivas divergências loga-

rítmicas. Portanto, $p(\ell)$ não obedece ao TLC, e sim ao TLC generalizado. É interessante observar ainda que a sua dependência do tipo lei-de-potência implica na propriedade de autossimilaridade sob mudança de escala espacial, $p(\gamma\ell) = \gamma^{-\mu}p(\ell)$, típica de conjuntos fractais, a qual permanece válida até a escala do tamanho mínimo dos passos, ℓ_0 . Consequentemente, a sequência de pontos gerados a partir de $p(\ell)$, denominada de poeira de Lévy, apresenta uma geometria fractal com dimensão $d_f = \mu - 1$ [VdLRS11].

Por outro lado, é importante notar que para $\mu > 3$ temos a média (novamente, não confundir com o índice de Lévy) $\mu_N = N\langle\ell\rangle = 0$ e a variância finita $\sigma^2 = N(\mu - 1)\ell_0^2/(\mu - 3)$, recaindo no limite gaussiano governado pelo TLC para um número suficientemente grande de passos [dS10]:

$$P_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N(\mu - 1)\ell_0^2/(\mu - 3)}} \exp\left(-\frac{\mu - 3}{2N(\mu - 1)}x^2\right), \quad (1.75)$$

com $x = \sum_{i=0}^N \ell_i$.

Por fim, se considerarmos um truncamento na cauda longa, isto é, se alterarmos o regime assintótico do tipo lei-de-potência em valores suficientemente elevados de ℓ para um decaimento exponencial,

$$\omega(\ell) = \begin{cases} 0, & \text{se } \ell < \ell_0; \\ \frac{A}{|\ell|^\mu}, & \text{se } \ell_0 < \ell < \lambda; \\ Be^{-b|\ell|}, & \text{se } |\ell| > \lambda, \end{cases} \quad (1.76)$$

então todos os momentos tornam-se finitos, mesmo no intervalo $1 < \mu \leq 3$, condição suficiente para que a distribuição $\omega(\ell)$ acima obedeça o TLC [dS10]. Em outras palavras, a dinâmica associada à distribuição truncada dada acima é inicialmente superdifusiva, mas converge após um número suficientemente grande de passos para a dinâmica browniana. Portanto, enfatizamos a importância da cauda longa para que a distribuição apresente superdifusão e todas as características interessantes do ponto de vista da Física, inerentes às distribuições de Lévy.

1.7 Um Modelo de Busca Aleatórias

Nesta seção apresentamos as características gerais do modelo de buscas aleatórias que será considerado neste trabalho. Tal modelo captura a essência da dinâmica do *forager* no caso limite em que as relações predador-presa são ignoradas e a aprendizagem é minimizada, e consiste de um caminhante buscando por sítios aleatoriamente distribuídos em um espaço

d -dimensional de busca. Associamos um comprimento λ ao livre caminho médio da distribuição de sítios-alvo. Além disso, dotamos o caminhante de um raio de visão r_v , dentro do qual ele consegue detectar sítios-alvo. Assim, durante a busca no espaço d -dimensional o caminhante cobre, efetivamente, um “corredor” cuja secção transversal é proporcional a r_v^{d-1} . Dessa forma, podemos dizer que λ é o comprimento médio desse corredor entre dois sítios vizinhos quaisquer:

$$\lambda \equiv \frac{1}{\rho r_v^{d-1}}, \quad (1.77)$$

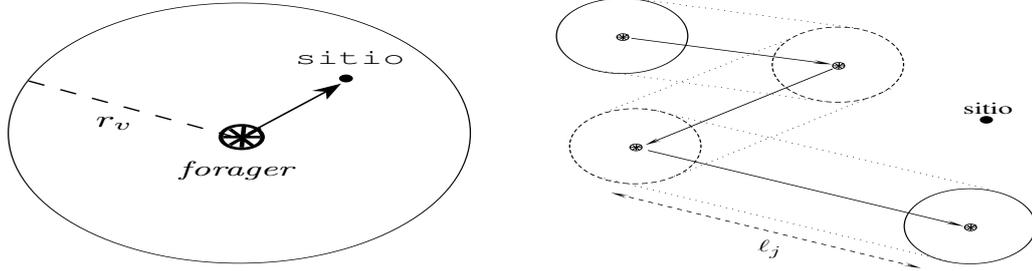
tal que ρ é a densidade de sítios.

Especificamente, o comportamento do *forager* ao realizar a busca segundo este modelo é descrito da seguinte forma [VBH⁺99]:

1. Se um sítio-alvo se encontra dentro do seu raio de visão r_v , então o caminhante se dirige em linha reta (balisticamente) até ele.
2. Se não existem sítios dentro do seu raio de visão r_v , então em seu j -ésimo passo o *forager* escolhe uma direção aleatória e um comprimento de passo também aleatório, ℓ_j , a partir de uma distribuição de probabilidade $p(\ell_j)$. Ele então se move para uma nova posição, sempre procurando sítios até uma distância máxima r_v de si ao longo da caminhada. Se nenhum sítio é detectado, ele para após ter viajado a distância ℓ_j , escolhendo uma nova direção e uma nova distancia ℓ_{j+1} ; de outro modo, ele procede como descrito na regra 1.

O caso especial em que o caminhante encontra dois sítios simultaneamente equidistantes é extremamente raro, ou seja, pode ser desconsiderado sem acréscimo ao algoritmo.

Portanto, a primeira regra determina o processo de encontro dos sítios pelo caminhante, definindo o comprimento r_v como um parâmetro de alcance de detecção. A segunda regra determina a natureza estocástica do processo de busca, isto é, determina a evolução da caminhada a cada passo, em direções e comprimentos aleatórios, de acordo com a distribuição de probabilidades $p(\ell_j)$. A natureza da distribuição de probabilidades sob os vínculos do raio de visão e livre caminho médio da distribuição de sítios-alvo determina o regime do comprimento de passos.



(a) *Forager* se dirigindo balisticamente para o sítio que se encontra dentro do seu raio de visão r_v .

(b) *Forager* realizando uma caminhada aleatória segundo a regra 2 do modelo de busca.

Figura 1.8: Comportamentos esquemáticos do modelo de busca aleatória.

De fato, as regras do comportamento do *forager* e o seu mecanismo de busca se vinculam ao parâmetro λ a partir da comparação deste com o comprimento do raio de visão r_v . Por exemplo, o regime em que $\lambda \gg r_v$ representa a situação de escassez de recursos, em que longos passos de busca podem se tornar vantajosos. Por outro lado, para altas densidades de sítios-alvo, $\lambda \gtrsim r_v$, o mecanismo de detecção domina o processo de busca, ou seja, há um aumento do número de caminhadas balísticas de curto alcance e pouca aleatoriedade é necessária no processo de busca. Podemos, assim, passar à questão da eficiência das buscas aleatórias.

1.7.1 Eficiência das Busca Aleatórias

A seguir, abordaremos a questão geral de qual é a estratégia estatística para a escolha da densidade de probabilidades dos tamanhos dos passos, $p(\ell)$, que otimiza a eficiência da busca por objetos aleatoriamente distribuídos (sítios-alvo). Foi mostrado por G. M. Viswanathan *et al.* [VBH⁺99] que, quando os sítios estão homogênea e escassamente distribuídos e podem ser visitados qualquer número de vezes, a estratégia ótima é aquela em que $p(\ell)$ é dada por uma distribuição de Lévy com comportamento do tipo lei de potência associado a um expoente $\mu \approx 2$. Este resultado encontra suporte empírico em estudos envolvendo espécies tão distintas entre si quanto albatrozes [HWQ⁺12] e diversos tipos de predadores marinhos [HQD⁺10], dentre várias outras [VdLRS11]. Por outro lado, para ambientes ricos em alimentos estudos teóricos [VBH⁺99] e empíricos [VdLRS11, HWQ⁺12, HQD⁺10] concordam que estratégias brownianas e de Lévy são indistinguíveis do ponto de vista da eficiência da busca. Na verdade, devido à segunda regra de comportamento do modelo da seção anterior, o *forager* tem o seu percurso alterado (passo truncado) quando um sítio entra no seu raio de visão. Este fato tem uma consequência direta para a distribuição efetiva dos tamanhos dos passos, que se torna então uma *distribuição de Lévy*

truncada [VBH⁺99]. Tal distribuição possui momentos grandes porém finitos, de modo que o caminhante passa a apresentar comportamento gaussiano após um número extremamente grande de passos, embora preservando a dinâmica superdifusiva durante o longo regime que o antecede. Esse limite de corte superior relacionado à mudança entre regimes na verdade reflete a condição natural de finitude e limitação dos processos de buscas reais (associados a animais, radares, celulares, etc.), devido, no caso, por exemplo, das buscas por alimentos realizadas por animais, às restrições biológicas que podem levar à morte do *forager* se nenhum sítio de comida for localizado a uma certa distância máxima. Esse parâmetro de corte superior está associado à densidade de sítios-alvo no caso de distribuição homogênea e, portanto, também ao seu livre caminho médio λ .

De acordo com os interesses biológicos podemos distinguir entre dois tipos básicos de busca [VBH⁺99]. Na **busca destrutiva**, quando ocorre o encontro de um sítio este não mais se torna disponível para uma busca posterior. Desse modo, é necessário introduzir um sítio adicional no espaço de busca para manter a densidade de sítios constante. Por outro lado, na **busca não-destrutiva** o *forager* pode visitar um mesmo sítio várias vezes. Uma opção intermediária, talvez mais realista do ponto de vista biológico, representa a situação em que, uma vez encontrado, o sítio torna-se indisponível a um novo encontro futuro apenas durante um intervalo de tempo finito. Assim, dependendo do tipo de busca, pode surgir um mecanismo de competição entre os regimes de comportamento caracterizados por um grande número de curtos passos na proximidade de um sítio já encontrado e a existência de passos longos que eventualmente levem o *forager* a regiões de sítios ainda não visitados. Para cada tipo de busca as melhores estratégias são distintas e podem ser quantificadas pela eficiência da busca, definida como

$$\eta = \frac{\text{número de sítios encontrados}}{\text{distância total percorrida}}. \quad (1.78)$$

Assim, uma busca eficiente é aquela que alia o encontro de muito sítios ao longo do menor percurso realizado. Para que a eficiência seja adimensional basta multiplicarmos por uma constante de comprimento e tomarmos como unitária.

Na definição de η , a distância total percorrida pelo *forager* pode ser escrita como o produto do número total de sítios encontrados, N_f , pela distância média caminhada entre o encontro de dois sítios consecutivos, denotada por $\langle L \rangle$, de modo que

$$\eta = \frac{N_f}{N_f \langle L \rangle} = \frac{1}{\langle L \rangle}. \quad (1.79)$$

No próximo capítulo determinaremos uma forma analítica para $\langle L \rangle$ em buscas unidimensionais por sítios homogeneamente distribuídos e no capítulo 5 estudaremos a sua expressão em ambientes heterogêneos.

Em uma primeira aproximação, podemos escrever que $\langle L \rangle \approx \langle n \rangle \langle |\ell| \rangle$, em que $\langle n \rangle$ e $\langle |\ell| \rangle$ denotam o número médio de passos entre o encontro de dois sítios consecutivos e o tamanho médio do passo individual, respectivamente. Nesse caso, a eficiência pode ser escrita como

$$\eta \approx \frac{1}{\langle n \rangle \langle \ell \rangle}. \quad (1.80)$$

Notamos, então, que uma alta eficiência pode resultar de $\langle n \rangle$ pequeno e/ou de $\langle |\ell| \rangle$ pequeno. Nesse sentido, por um lado valores grandes de μ em geral definem o regime de saltos pequenos, em que na média são necessários muitos passos até o encontro de um sítio. Por outro lado, valores pequenos de μ determinam o regime de grandes saltos e menor número de passos até o encontro, o qual no limite $\mu \rightarrow 1$ determina trajetórias balísticas (trajetórias indefinidamente em linha reta). É possível, portanto, que surjam situações em que o máximo em η ocorra para valores intermediários de μ [RBdL⁺09b].

Usando a distribuição de Lévy, $p(\ell) \sim \ell^{-\mu}$, podemos escrever aproximadamente que

$$\langle |\ell| \rangle \approx \frac{\int_{r_v}^{\lambda} \ell^{1-\mu} d\ell + \lambda \int_{\lambda}^{\infty} \ell^{-\mu} d\ell}{\int_{r_v}^{\infty} \ell^{-\mu} d\ell} = \left(\frac{\mu - 1}{2 - \mu} \right) \left(\frac{\lambda^{2-\mu} - r_v^{2-\mu}}{r_v^{1-\mu}} \right) + \frac{\lambda^{2-\mu}}{r_v^{1-\mu}}. \quad (1.81)$$

De fato, a segunda integral no numerador é aproximada à “campo médio”, pois assume que todos os passos com tamanho igual ou superior a λ são truncados pelo encontro de um sítio-alvo [RBdL⁺09b].

Em busca destrutivas (índice d), o número médio de passos entre encontros sucessivos, $\langle n_d \rangle$, se comporta assintoticamente no limite $\lambda \gg r_v$ de escassez de recursos como [VBH⁺99]

$$\begin{aligned} \langle n_{d,\mu} \rangle &\sim (\lambda/r_v)^{\mu-1}, \quad \text{para } 1 < \mu < 3 \\ \langle n_{d,\mu} \rangle &\sim (\lambda/r_v)^2, \quad \text{para } \mu \geq 3. \end{aligned} \quad (1.82)$$

O último caso corresponde à dinâmica browniana. Para o caso não-destrutivo (índice p), tem-se nesse regime que $\langle n_p \rangle \sim \langle n_d \rangle^{1/2}$ [VBH⁺99].

Para buscas não destrutivas no regime escasso, substituindo as expressões acima para $\langle |\ell| \rangle$ e $\langle n_p \rangle$ em η e derivando com relação μ , encontramos que a eficiência é ótima para $\mu_{\text{opt}} = 2 - \delta$, onde $\delta \approx 1/[\ln(\lambda/r_v)]^2$ para $\lambda \gg r_v$ [VBH⁺99]. Por outro lado, o mesmo

procedimento no caso destrutivo leva a uma eficiência máxima para $\mu_{\text{opt}} \rightarrow 1^+$, correspondendo ao regime balístico.

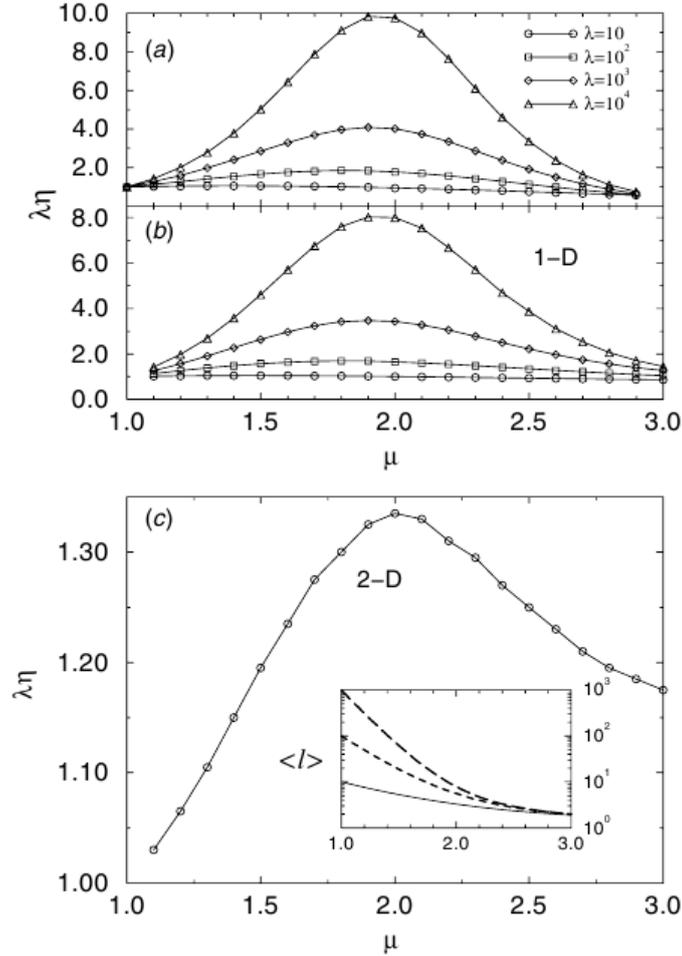


Figura 1.9: Gráfico do produto entre o livre caminho médio associado à distribuição de sítio-alvo λ e a eficiência da busca η em função do expoente μ da distribuição de Lévy em uma dimensão, para o caso de buscas não destrutivas [RBdL⁺09b], (a) a partir da equação 1.80 e (b) de simulações numéricas. (c) $\lambda\eta$ em duas dimensões, para $\lambda = 5000$; a inserção mostra $\langle \ell \rangle$ como uma função de μ para $\lambda = 10$ (linha contínua), $\lambda = 10^2$ (traços), e $\lambda = 10^3$ (longos traços). Todos os dados foram obtidos usando $r_v = 1$.

Simulações numéricas, Fig.1.9 deste modelo para uma e duas dimensões mostram que os resultados aproximados obtidos acima para μ_{opt} são robustos em ambos os casos destrutivo e não-destrutivo no regime escasso de sítios homogeneamente distribuídos [VBH⁺99]. Contudo, é importante ressaltar que essa independência dos resultados com a dimensão é não trivial. Por exemplo, nas caminhadas aleatórias autoexcludentes (*self-avoiding random walks*), em que não é permitido ao caminhante visitar o mesmo

ponto do espaço mais de uma vez, o expoente de Hurst varia com a dimensão até uma dimensão crítica superior $d_c = 4$, acima da qual ele assume o valor browniano, $H = 1/2$ para $d \geq d_c$. Nesse caso, para $d < d_c$ o caminhante entra em modo superdifusivo devido à restrição espacial, embora acima de d_c o espaço de busca se torna suficientemente grande, de modo que é improvável que o caminhante revisite algum ponto da trajetória. Embora alterações no modelo de busca possam gerar dependência de alguns de seus resultados com a dimensão, aparentemente o valor de μ_{opt} permanece robusto no contexto de sítios homogênea e escassamente distribuídos. No capítulo 4 veremos, contudo, que a introdução de heterogeneidades no espaço de busca pode levar a valores do expoente ótimo no intervalo $1 \lesssim \mu_{\text{opt}} \lesssim 2$.

Capítulo 2

Princípios Teóricos da Busca Aleatória em Uma Dimensão

*E do mesmo modo que há
muitas velocidades num só dia
e nesse mesmo dia
muitos dias
assim não se pode também dizer
que o dia tem um único centro
(feito um caroço ou um sol)
porque na verdade um dia tem
inumeráveis centros . . .*

Excerto de **Poema Sujo**

Ferreira Gullar

maio-outubro/1975

Buenos Aires

Neste capítulo descreveremos os princípios teóricos do caminhante aleatório que realiza uma busca por sítios-alvo distribuídos homogeneamente em uma dimensão. Sob essas condições iremos analisar o processo de busca em função do número discreto de passos (“tempo” discreto) do caminhante com densidade geral de probabilidades para os tamanhos de passos, $p(\ell)$. Definiremos um operador integral para as caminhadas aleatórias, cujo cálculo efetivo será realizado no limite discreto do espaço de busca. Embora o resultado obtido para a eficiência da busca seja válido para qualquer $p(\ell)$, neste trabalho iremos focar no estudo das buscas de Lévy. Por fim, passaremos ao limite de tempo contínuo para um caminhante de Lévy, estabelecendo os principais resultados que serão utilizados na determinação da dinâmica energética do caminhante no próximo capítulo:

as expressões para o comprimento médio do passo e para o número médio de passos entre dois encontros sucessivos. No capítulo 5 estenderemos estes resultados para as buscas em ambientes com distribuições heterogêneas de sítios-alvo.

2.1 Buscas de Lévy num Espaço Unidimensional com Bordas Absorventes

Inicialmente, vamos revisar o tratamento formal para o cálculo do comprimento médio e do número médio de passos da busca realizada por um caminhante de Lévy em um intervalo unidimensional com bordas absorventes onde estão localizados os sítios-alvo. Os cálculos seguirão a abordagem desenvolvida por Buldyrev *et al.* [BHK⁺01, BGH⁺01].

Considere inicialmente um caminhante aleatório, com raio de visão r_v e dinâmica ditada pelas regras gerais do modelo da seção 1.7, procurando por sítios-alvo num espaço unidimensional em que os sítios encontram-se regularmente espaçados de distâncias λ entre si. Como desejaremos aplicar os resultados desta seção a distribuições $p(\ell)$ do tipo lei de potência, precisamos definir um tamanho mínimo de passo, ℓ_0 , tal que $p(\ell) = 0$ se $|\ell| < \ell_0$. Observamos que ℓ_0 pode ser feito tão pequeno quanto possível, desde que $\ell_0 \neq 0$. Em geral, utilizaremos $\ell_0 = r_v$ nos capítulos 4 e 5.

Suponha que o caminhante inicie a primeira busca a partir de uma posição inicial x_0 no intervalo $r_v < x_0 < \lambda - r_v$, com sítios-alvo (bordas absorventes) localizados nas posições $x = 0$ e $x = \lambda$ (devido ao seu raio de visão, se $0 < x_0 \leq r_v$ ou se $\lambda - r_v \leq x_0 < \lambda$ o caminhante procederá deterministicamente até o respectivo sítio em $x = 0$ ou $x = \lambda$, segundo a regra 1 do modelo da seção 1.7). Considere ainda que, à medida que a busca se desenvolve e vários encontros ocorrem, a cada encontro o caminhante reinicia o processo sempre à mesma distância x_0 à direita do último sítio detectado. Por exemplo, suponha que após alguns encontros o sítio localizado na posição $x = 10\lambda$ seja detectado; nesse caso, o caminhante reiniciará a próxima busca a partir da posição $x = 10\lambda + x_0$. Considerando, contudo, que cada busca por um novo sítio é independente da busca pelo sítio anterior, podemos realizar a descrição estatística do processo de busca como estando restrito apenas ao intervalo $r_v < x < \lambda - r_v$.

Como discutido no capítulo 1, a densidade de sítios-alvos é dada por $\rho \propto 1/\lambda$, de modo que estaremos particularmente interessados no regime de escassez de recursos em que $\lambda \gg r_v$ e $\rho \ll 1$. Além disso, consideraremos condições periódicas de contorno no capítulo seguinte de análise energética da busca (ver a Fig. 2.1). Nesse contexto, generalizaremos também o tratamento apresentado neste capítulo a fim de considerar uma função densidade de probabilidades para a distribuição de posições iniciais, $\pi(x_0)$. A

partir desta consideração, será possível introduzir heterogeneidades no ambiente de busca através de escolhas apropriadas para $\pi(x_0)$, tornando o modelo mais realista do ponto de vista biológico.

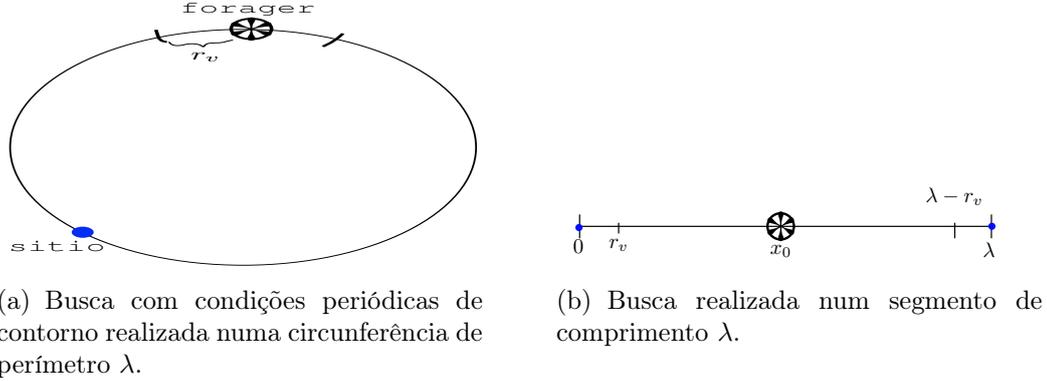


Figura 2.1: *Forager* com raio de visão r_v realizando uma busca aleatória num espaço unidimensional de comprimento λ .

Iniciaremos o nosso estudo calculando a distância média percorrida até o encontro de um sítio, $\langle L \rangle(x_0)$, por um caminhante que iniciou a busca na posição $r_v < x_0 < \lambda - r_v$. Posteriormente determinaremos também o número médio de passos até o encontro do sítio, $\langle n \rangle(x_0)$.

O comprimento total percorrido após n passos realizados pelo *forager* é dado por

$$L_n = \sum_{i=1}^n |\ell_i|, \quad (2.1)$$

onde $|\ell_i|$ denota o comprimento do i -ésimo passo. Suponha que no n -ésimo passo um dos sítios (em $x = 0$ ou em $x = \lambda$) seja encontrado. É de esperar, portanto, que o comprimento total da caminhada até o encontro seja uma função da posição inicial do caminhante, isto é, $L_n \equiv L_n(x_0)$.

Considerando a média sobre todas as possibilidades de caminhadas que encontram um dos sítios no n -ésimo passo, temos

$$\langle L_n \rangle = \sum_{i=1}^n \langle |\ell_i| \rangle. \quad (2.2)$$

Notamos agora que n pode variar de 1 a ∞ , isto é, o sítio pode ser encontrado após o primeiro passo, $n = 1$, ou mesmo após um número muito grande de passos. Definimos P_n como a probabilidade de encontrar o sítio após n passos, a qual é não uniforme e depende de n . Assim, ao realizarmos a média sobre todas as caminhadas possíveis partindo de

2.1. BUSCAS DE LÉVY NUM ESPAÇO UNIDIMENSIONAL COM BORDAS ABSORVENTES

x_0 e que encontram um dos sítios ao seu final, temos que levar em consideração o peso estatístico associado aos encontros realizados após diferentes valores de n , isto é,

$$\langle L \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} P_n \langle L_n \rangle. \quad (2.3)$$

Uma vez que P_n reflete uma probabilidade, temos o vínculo de sua normalização, isto é, $\sum_{n=1}^{\infty} P_n = 1$, assegurando que um sítio-alvo, quer em $x = 0$ ou em $x = \lambda$, sempre será encontrado no final. Neste sentido, vale observar que o processo de busca também pode ser interpretado como um *problema de primeira passagem* por um dos sítios-alvo absorventes. De fato, associando uma velocidade constante ao caminhante, a quantidade $\langle L \rangle$ também pode ser interpretada como *a distância ou o tempo médio de primeira passagem (first-passage-time)* para se encontrar um sítio-alvo ou uma fronteira absorvente. Voltaremos a explorar esta analogia no capítulo 4.

Para determinar P_n , definimos $\rho_n(x_n)$ como a função densidade de probabilidade de encontrar o *forager* entre as posições x_n e $x_n + dx_n$ após n passos. Portanto, a probabilidade de que o caminhante ainda *não* tenha encontrado um sítio após n passos é dada por

$$\tilde{P}_n = \int_{r_v}^{\lambda - r_v} \rho_n(x_n) dx_n. \quad (2.4)$$

Por outro lado, a probabilidade complementar de encontrar um sítio em algum passo $n' \geq n + 1$ equivale a

$$P_{n' \geq n+1} = 1 - \tilde{P}_n. \quad (2.5)$$

Desse modo, a probabilidade de encontrarmos um sítio precisamente após n passos é

$$P_n = |P_{n' \geq n+1} - P_{n' \geq n}| = |\tilde{P}_n - \tilde{P}_{n-1}|, \quad (2.6)$$

tal que, usando a Eq. (2.4) e descartando os sub-índices das variáveis x , podemos escrever

$$P_n = \int_{r_v}^{\lambda - r_v} [\rho_{n-1}(x) - \rho_n(x)] dx. \quad (2.7)$$

Assim, $[\rho_{n-1}(x) - \rho_n(x)]$ representa a densidade de probabilidade de encontrar um sítio-alvo exatamente após n passos em função da posição x de partida do n -ésimo passo. Vale notar ainda que, uma vez que $\rho_n(x)$ está associado ao não encontro de um sítio após n passos, então $\rho_{n-1}(x) > \rho_n(x)$, pois a probabilidade de encontrar um sítio cresce com n ,

como de fato demonstraremos a seguir. Com estas considerações, a Eq. (2.3) é reescrita como

$$\begin{aligned}\langle L \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx [\rho_{n-1}(x) - \rho_n(x)] \langle L_n \rangle(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx \rho_{n-1}(x) \langle L_n \rangle(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx \rho_n(x) \langle L_n \rangle(x).\end{aligned}\tag{2.8}$$

Trocando os índices na primeira soma, $n := n + 1$, e adicionando o termo de $n = 0$ na segunda, levando em conta que por definição $\langle L_0 \rangle = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}\langle L \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx \rho_n(x) \langle L_{n+1} \rangle(x) - \sum_{n=0}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx \rho_n(x) \langle L_n \rangle(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx \rho_n(x) [\langle L_{n+1} \rangle(x) - \langle L_n \rangle(x)].\end{aligned}\tag{2.9}$$

A partir da Eq. (2.2) temos que

$$\langle L_n \rangle(x) = \langle |\ell_1| \rangle + \langle |\ell_2| \rangle + \dots + \langle |\ell_n| \rangle,\tag{2.10}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\langle L_{n+1} \rangle(x) - \langle L_n \rangle(x) &= (\langle |\ell_1| \rangle + \langle |\ell_2| \rangle + \dots + \langle |\ell_n| \rangle + \langle |\ell_{n+1}| \rangle) + \\ &\quad - (\langle |\ell_1| \rangle + \langle |\ell_2| \rangle + \dots + \langle |\ell_n| \rangle) \\ &= \langle |\ell_{n+1}| \rangle.\end{aligned}\tag{2.11}$$

Desse modo podemos escrever a expressão para $\langle L \rangle$ como

$$\langle L \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx \rho_n(x) \langle |\ell_{n+1}| \rangle(x).\tag{2.12}$$

Notamos que $\langle |\ell_{n+1}| \rangle(x)$ denota o comprimento médio de um passo individual começado em x , e portanto não depende explicitamente de sua ordem $n + 1$, mas apenas da posição inicial x . Por outro lado, observamos também que para chegar à posição x após n passos foi necessária uma sequência de $n - 1$ passos anteriores, de modo que a posição x_{n-1} na qual o passo n começa depende de x_{n-2} , que por sua vez depende de x_{n-3} , e assim sucessivamente até a dependência em x_0 presente em $\langle L \rangle$. Portanto, ao levarmos em conta

2.1. BUSCAS DE LÉVY NUM ESPAÇO UNIDIMENSIONAL COM BORDAS ABSORVENTES

a possibilidade de truncamento do passo pelo encontro de um sítio, a média ou primeiro momento do tamanho do passo iniciado em x_0 , $\langle |\ell| \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |\ell| p(\ell) d\ell$, torna-se

$$\begin{aligned} \langle |\ell| \rangle(x_0) &= \int_{r_v}^{x_0 - \ell_0} (x_0 - x) p(x - x_0) dx + \int_{x_0 + \ell_0}^{\lambda - r_v} (x - x_0) p(x - x_0) dx + \\ &+ (x_0 - r_v) \int_{-\infty}^{r_v} p(x - x_0) dx + (\lambda - r_v - x_0) \int_{\lambda - r_v}^{\infty} p(x - x_0) dx, \end{aligned} \quad (2.13)$$

na situação em que $r_v + \ell_0 \leq x_0 \leq \lambda - r_v - \ell_0$, onde, como definido anteriormente, ℓ_0 é o menor comprimento de passo que o caminhante pode executar. Realizando acima a substituição $\ell = x - x_0$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle |\ell| \rangle(x_0) &= \int_{-(x_0 - r_v)}^{-\ell_0} |\ell| p(\ell) d\ell + \int_{\ell_0}^{\lambda - r_v - x_0} |\ell| p(\ell) d\ell \\ &+ (x_0 - r_v) \int_{-\infty}^{-(x_0 - r_v)} p(\ell) d\ell + (\lambda - r_v - x_0) \int_{\lambda - r_v - x_0}^{\infty} p(\ell) d\ell. \end{aligned} \quad (2.14)$$

As duas primeiras integrais acima representam, respectivamente, os deslocamentos para a esquerda e para a direita que não são truncados pelo encontro de um sítio. As terceira e quarta integrais representam deslocamentos truncados pelo encontro respectivo dos sítios em $x = 0$ e $x = \lambda$, segundo a regra 2 do modelo da seção 1.7. Devido à restrição para o tamanho mínimo do passo, ℓ_0 , observamos que a primeira integral se anula para x_0 no intervalo $r_v < x_0 < r_v + \ell_0$, enquanto que a segunda não contribui se $\lambda - r_v - \ell_0 < x_0 < \lambda - r_v$.

Após as considerações acima, podemos escrever a Eq. (2.12) na forma

$$\langle L \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda - r_v} dx \rho_n(x) \langle |\ell| \rangle(x). \quad (2.15)$$

Para a resolução da integral (2.15), vamos primeiro trabalhar o termo $\rho_n(x)$, que, de uma forma geral, pode ser explicitado pela integral a seguir:

$$\rho_i(x_i) = \int_{r_v}^{\lambda - r_v} \rho_{i-1}(x_{i-1}) p(x_i - x_{i-1}) dx_{i-1}. \quad (2.16)$$

Acima, estamos somando sobre todas as possibilidades de alcançar a posição x_i após i passos, tendo saído da posição x_{i-1} e realizado um passo de comprimento $|x_i - x_{i-1}|$, com probabilidade $p(x_i - x_{i-1}) dx_{i-1}$.

Por exemplo, se a posição inicial do caminhante é definida por $x_0 = a$, com $r_v < a < \lambda - r_v$, então a densidade de probabilidade $\rho_0(x_0)$ é dada pela função delta de Dirac, $\rho_0(x_0) = \delta(x_0 - a)$. Dessa forma,

$$\rho_1(x_1) = \int_{r_v}^{\lambda - r_v} \rho_0(x_0) p(x_1 - x_0) dx_0 = p(x_1 - a). \quad (2.17)$$

Recursivamente, para determinarmos a densidade de probabilidade $\rho_2(x_2)$ após os dois primeiros passos, temos

$$\begin{aligned} \rho_2(x_2) &= \int_{r_v}^{\lambda - r_v} \rho_1(x_1) p(x_2 - x_1) dx_1 \\ &= \int_{r_v}^{\lambda - r_v} \int_{r_v}^{\lambda - r_v} p(x_2 - x_1) p(x_1 - x_0) \rho_0(x_0) dx_1 dx_0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Por indução, podemos concluir para o n -ésimo passo que

$$\begin{aligned} \rho_n(x_n) &= \int_{r_v}^{\lambda - r_v} p(x_n - x_{n-1}) \rho_{n-1}(x_{n-1}) dx_{n-1} \\ &= \left[\prod_{i=0}^{n-1} \int_{r_v}^{\lambda - r_v} dx_i p(x_{i+1} - x_i) \right] \rho_0(x_0). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Finalmente, substituindo a Eq. (2.19) na Eq. (2.15), obtemos

$$\langle L \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda - r_v} \left\{ \left[\prod_{i=0}^{n-1} \int_{r_v}^{\lambda - r_v} dx_i p(x_{i+1} - x_i) \right] \rho_0(x_0) \right\} \langle |\ell| \rangle(x_n) dx_n. \quad (2.20)$$

Na próxima seção definiremos um operador integral que nos permitirá avançar no cálculo de $\langle L \rangle$.

2.2 Operador Integral de Caminhadas Aleatórias

Para iniciar um tratamento mais formal, vamos definir o operador integral

$$\mathcal{L}[f(x)](\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi - x) f(x) dx, \quad (2.21)$$

conhecido na literatura como integral de Fredholm, no mesmo espírito de Buldyrev *et al.* [BHK⁺01, BGH⁺01]. Em outras palavras, o operador \mathcal{L} realiza a convolução da função de entrada $f(x)$ com uma distribuição de probabilidade $p(\xi - x)$.

Para o nosso caso temos que

$$\mathcal{L}[\rho_n(x)](\xi) = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} p(\xi - x)\rho_n(x)dx. \quad (2.22)$$

Por outro lado, de acordo com a Eq. (2.16),

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}\rho_n(x_n)](x_{n+1}) &= \int_{r_v}^{\lambda-r_v} p(x_{n+1} - x_n)\rho_n(x_n)dx_n \\ &= \rho_{n+1}(x_{n+1}); \quad x_n = \text{variável muda}, \\ [\mathcal{L}\rho_n(x_n)](x) &= \rho_{n+1}(x). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Assim, aplicando o operador iterativamente, temos, para $n=0$,

$$\rho_1(x_1) = [\mathcal{L}\rho_0(x_0)](x_1); \quad (2.24)$$

para $n=1$,

$$\begin{aligned} \rho_2(x_2) &= [\mathcal{L}\rho_1(x_1)](x_2) \\ &= [\mathcal{L}[\mathcal{L}\rho_0(x_0)]](x_2) \\ &= [\mathcal{L}^2\rho_0(x_0)](x_2); \end{aligned} \quad (2.25)$$

e, mais geralmente,

$$\rho_n(x) = [\mathcal{L}^n\rho_0(x_0)](x). \quad (2.26)$$

Antes de prosseguir no cálculo de $\langle L \rangle$, faremos algumas considerações gerais sobre as propriedades essenciais de linearidade e norma do operador \mathcal{L} .

Notamos inicialmente que \mathcal{L} é um operador linear como consequência direta da sua forma integral, Eq. (2.21), uma vez que

$$\{\mathcal{L}[f(x) + g(x)]\}(\xi) = [\mathcal{L}f(x)](\xi) + [\mathcal{L}g(x)](\xi). \quad (2.27)$$

Para analisarmos a norma do operador \mathcal{L} , vamos seguir critérios de Análise Funcional.

Seja \mathbb{F} o espaço de todas as funções contínuas sobre o corpo de \mathbb{R} , definidas no intervalo fechado $[r_v, \lambda - r_v] \subset \mathbb{R}$, tal que $\mathbb{F} = \{f : [r_v, \lambda - r_v] \rightarrow \mathbb{R}\}$; e seja ainda \mathbb{F} dotado de um produto escalar definido por

$$\langle f, g \rangle_{C, \mathbb{R}} = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} f(x)g(x)dx, \quad x \in [r_v, \lambda - r_v] \quad (2.28)$$

e uma norma dada por

$$\|f\|_{C,\mathbb{R}}^2 = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} |f(x)|^2 dx, \quad (2.29)$$

tal que os índices C e \mathbb{R} relacionam a norma com o *intervalo fechado* no *corpo dos reais*, respectivamente. Da forma como definimos, \mathbb{F} é Banach*. Nesse contexto, é válido o seguinte teorema.

Teorema 3 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz [Sax00]). *Se \mathbb{F} é um espaço com um produto escalar definido, $\langle \cdot, \cdot \rangle$, então*

$$\|\langle f, g \rangle\| \leq \|f\| \|g\|$$

para $f, g \in \mathbb{F}$.

Em conexão com este fato, vale a proposição abaixo.

Proposição 1 (Norma operatorial de \mathcal{L}). *O operador \mathcal{L} , tal como definido na Eq. (2.21), é limitado e tem norma operatorial $\|\mathcal{L}\| < 1$.*

Demonstração. Seja \mathcal{T} um operador tal que $\mathcal{T} : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$, isto é, $\mathcal{T} \in \mathfrak{B}(\mathbb{F}, \mathbb{F})$, com \mathfrak{B} , os espaço de todas as aplicações de $\mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$, também Banach. Seja a norma operatorial definida como [Sax00]

$$\|\mathcal{T}\| = \sup_{f \in \mathbb{F}, f \neq 0} \frac{\|\mathcal{T}f\|}{\|f\|},$$

onde sup indica que todo o objeto deve ser avaliado no ponto de máximo. Então, para determinarmos $\|\mathcal{L}\|$, notamos que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}f\| &= \sup_{f, p \in \mathbb{F}, f \neq 0} \left| \int_{r_v}^{\lambda-r_v} p(\xi - x) f(x) dx \right| \\ &\stackrel{\text{Teor 3}}{\leq} \sup_{f \in \mathbb{F}, f \neq 0} \left| \int_{r_v}^{\lambda-r_v} p(\xi - x) dx \right| \left| \int_{r_v}^{\lambda-r_v} f(x) dx \right|, \end{aligned} \quad (2.30)$$

e portanto

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}\| &\leq \sup_{f \in \mathbb{F}, f \neq 0} \frac{\left| \int_{r_v}^{\lambda-r_v} p(\xi - x) dx \right| \left| \int_{r_v}^{\lambda-r_v} f(x) dx \right|}{\left| \int_{r_v}^{\lambda-r_v} f(x) dx \right|} \\ &\leq \sup_{f \in \mathbb{F}, f \neq 0} \left| \int_{r_v}^{\lambda-r_v} p(\xi - x) dx \right|. \end{aligned} \quad (2.31)$$

*Um espaço que possui uma norma completa, isto é, uma norma majorada (uma norma com sup \equiv “supremum”, tal como o conjunto gerado por $n/(1+n)$, $n \in \mathbb{N}$, que tem “supremum” igual à unidade).

Finalmente, como $p(\xi - x)$ é uma função densidade de probabilidade e a última integral acima é maximizada para $\xi = \lambda/2$, então temos que

$$\|\mathcal{L}\| \leq \sup_{f \in \mathbb{F}, f \neq 0} \left| \int_{r_v}^{\lambda - r_v} p(\xi - x) dx \right| \equiv \mathcal{N} < 1. \quad (2.32)$$

□

O valor de \mathcal{N} pode ser tomado como a norma do operador \mathcal{L} , e a sua interpretação física está associada à probabilidade de que um caminhante partindo da posição no meio do intervalo não encontre as bordas absorventes. Portanto, ao substituir a Eq. (2.26) na Eq. (2.4), podemos escrever a probabilidade de que o caminhante permaneça não absorvido após n passos como

$$\begin{aligned} \tilde{P}_n &= \int_{r_v}^{\lambda - r_v} [\mathcal{L}^n \rho_0](x) dx < \mathcal{N}^n, \\ \ln(\tilde{P}_n) &< n \ln \mathcal{N}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Como $\mathcal{N} < 1$, temos que $\ln \mathcal{N} < 0$. Assim, definindo $\gamma = |\ln \mathcal{N}|$, podemos escrever

$$\tilde{P}_n < \exp(-\gamma n), \quad (2.34)$$

de modo que a probabilidade de que o caminhante permaneça não absorvido após n passos decai exponencialmente com n .

2.3 Cálculo de $\langle L \rangle$ e $\langle n \rangle$

Após a definição do operador integral \mathcal{L} , podemos combinar o resultado (2.26) com a Eq. (2.15) para obter

$$\langle L \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda - r_v} [\mathcal{L}^n \rho_0](x) \langle |\ell| \rangle(x) dx, \quad (2.35)$$

ou ainda

$$\langle L \rangle = \int_{r_v}^{\lambda - r_v} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}^n \rho_0 \right](x) \langle |\ell| \rangle(x) dx. \quad (2.36)$$

Uma vez que o operador \mathcal{L} é linear e possui norma menor que um, a soma infinita converge e portanto podemos escrevê-la como a série geométrica

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}^n \rho_0 \right](x) = [(\mathbb{1} - \mathcal{L})^{-1} \rho_0](x), \quad (2.37)$$

tal que $\mathbb{1}$ é definido como o operador identidade com $\mathbb{1} \in \mathfrak{B}(\mathbb{F}, \mathbb{F})$, cuja aplicação se realiza por $\mathbb{1}f(x) = f(x)$.

Considerando agora que o caminhante inicia a busca na posição $x_0 = a$, com $r_v < a < \lambda - r_v$, então a partir da expressão $\rho_0(x_0) = \delta(x_0 - a)$ obtemos

$$\langle L \rangle = \int_{r_v}^{\lambda - r_v} [(\mathbb{1} - \mathcal{L})^{-1} \delta(x_0 - a)](x) \langle |\ell| \rangle(x) dx. \quad (2.38)$$

Como mostramos, uma vez que $\mathcal{L} \in \mathfrak{B}$ e é linear, então $(\mathbb{1} - \mathcal{L})^{-1} \in \mathfrak{B}$ e também é linear. Ou seja, podemos escrevê-lo em uma forma integral com um núcleo representado por $K(x, x_0) \in \mathbb{F}^2$, de modo que

$$\begin{aligned} \langle L \rangle &= \int_{r_v}^{\lambda - r_v} \int_{r_v}^{\lambda - r_v} K(x, x_0) \delta(x_0 - \xi) \langle |\ell| \rangle(x) dx dx_0 \\ &= \int_{r_v}^{\lambda - r_v} K(x, \xi) \langle |\ell| \rangle(x) dx. \end{aligned} \quad (2.39)$$

O núcleo $K(x, \xi)$ pode ser interpretado fisicamente como o propagador do caminhante aleatório que executa a propagação da posição ξ até a posição x .

Para o caso específico em que a densidade de probabilidade de se deslocar de um ponto x a um ponto ξ em um passo é função de $|x - \xi|$, temos que $\mathcal{L} \equiv \mathcal{T}(|x - \xi|)$ e $(\mathbb{1} - \mathcal{L})^{-1} \equiv \mathcal{Q}(|x - \xi|)$, o que implica em $K(x, \xi) = K(\xi, x) \equiv f(|x - \xi|)$. Assim, a partir da Eq. (2.39),

$$\begin{aligned} \langle L \rangle &= \int_{r_v}^{\lambda - r_v} K(x, \xi) \langle |\ell| \rangle(x) dx \\ &= \int_{r_v}^{\lambda - r_v} K(\xi, x) \langle |\ell| \rangle(x) dx, \end{aligned} \quad (2.40)$$

tal que, utilizando a expressão para $\rho_0(x_0)$ com a identificação $\xi = a$, obtemos finalmente*

$$\langle L \rangle(a) = [(\mathbb{1} - \mathcal{L})^{-1} \langle |\ell| \rangle(x)](a). \quad (2.41)$$

*Vale notar que, aplicando $(\mathbb{1} - \mathcal{L})$ pela esquerda em ambos os lados da Eq. (2.41), obtemos

$$\begin{aligned} (\mathbb{1} - \mathcal{L})\langle L \rangle &= (\mathbb{1} - \mathcal{L})[(\mathbb{1} - \mathcal{L})^{-1} \langle |\ell| \rangle] \\ \langle L \rangle(x) &= [\mathcal{L}\langle L \rangle(a)](x) + \langle |\ell| \rangle(x). \end{aligned}$$

De forma análoga ao cálculo de $\langle L \rangle$, o número médio de passos até um encontro é dado por

$$\begin{aligned}
 \langle n \rangle &= \sum_n P_n n \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx [\rho_{n-1}(x) - \rho_n(x)] n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx \rho_n(x) (n+1) - \sum_{n=0}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx \rho_n(x) n.
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

Novamente, assim como fizemos para $\langle L \rangle$, escrevemos

$$\begin{aligned}
 \langle n \rangle(a) &= \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}^n \rho_0 \right] dx \\
 &= \int_{r_v}^{\lambda-r_v} K(x, \xi) dx \\
 &= [(\mathcal{L} - \mathbb{1})^{-1} h(x)](a),
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

tal que $h(x) = -1$ é uma função constante que realiza acima um papel similar ao do comprimento médio de um passo, $\langle |\ell| \rangle(x)$, no cálculo de $\langle L \rangle$.

O operador $(\mathbb{1} - \mathcal{L})^{-1}$ é denominado resolvente e captura analiticamente as propriedades espectrais de \mathcal{L} . De fato, uma vez que $(\mathbb{1} - \mathcal{L})^{-1}$ é o operador inverso de $(\mathbb{1} - \mathcal{L})$, então, como mostramos, ambos pertencem ao espaço Banach das operações lineares que levam \mathbb{F} em \mathbb{F} , isto é, \mathcal{L} , $(\mathbb{1} - \mathcal{L})$ e $(\mathbb{1} - \mathcal{L})^{-1} \in \mathfrak{B}(\mathbb{F}, \mathbb{F})$. Portanto, pela relação direta entre os operadores, é possível construir o espectro de $(\mathbb{1} - \mathcal{L})^{-1}$ a partir do espectro de \mathcal{L} .

Como veremos na próxima seção, as expressões (2.41) e (2.43) podem ser resolvidas numericamente através de um processo de discretização do espaço de busca.

2.4 Discretização do Espaço de Busca

A fim de obter valores numéricos para $\langle L \rangle(a)$, formalmente dado pela Eq. (2.41), vamos subdividir o intervalo contínuo $0 \leq x \leq \lambda$ em subintervalos pequenos o suficiente (muito menores, por exemplo, que qualquer parâmetro de comprimento do modelo: ℓ_0, r_v, λ) para permitir a convergência do cálculo computacional via, por exemplo, o *software* Matlab. Isto corresponde a subdividi-lo em $M = \lambda/\Delta x$ intervalos de tamanho Δx , tal que as posições acessíveis ao caminhante sejam dadas por $x = i\Delta x$, com $i = 0, 1, \dots, M$. Os sítios-alvo localizados em $x = 0$ e $x = \lambda$ (bordas absorventes) são agora identificados pelos

índices $i = 0$ e $i = M$, respectivamente. A continuidade é recuperada tomando o limite $\Delta x \rightarrow 0$ e $M \rightarrow \infty$, com $\lambda = M\Delta x$ finito. Além disso, definimos $\ell_0 = q\Delta x$ e $r_\nu = \nu\Delta x$, com $q, \nu \in \mathbb{N}$, ou seja, o intervalo contínuo aberto $(r_\nu, \lambda - r_\nu)$ é mapeado no intervalo discreto, adicionando e retirando uma unidade respectivamente, $\nu + 1, M - \nu - 1$ para se evitar as bordas. Inicialmente, para discretizar a Eq. (2.40) transformamos a integral em um somatório, isto é,

$$\int_{r_\nu}^{\lambda - r_\nu} dx \rightarrow \sum_{i=\nu+1}^{M-\nu-1} \Delta x,$$

e portanto

$$\langle L \rangle(x_j) = \sum_{i=\nu+1}^{M-\nu-1} K(x_j, x_i) \langle |\ell| \rangle(x_i) \Delta x. \quad (2.44)$$

Podemos associar o somatório (2.44) ao produto matricial $\mathbf{K} \cdot \Delta \mathbf{X}$, de dimensão* $\dim(N^2)$, da matriz nuclear

$$\mathbf{K} \doteq \begin{pmatrix} K(x_1, x_1) & \cdots & K(x_1, x_i) & \cdots & K(x_1, x_j) & \cdots & K(x_1, x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(x_i, x_1) & \cdots & K(x_i, x_i) & \cdots & K(x_i, x_j) & \cdots & K(x_i, x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(x_j, x_1) & \cdots & K(x_j, x_i) & \cdots & K(x_j, x_j) & \cdots & K(x_j, x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(x_N, x_1) & \cdots & K(x_N, x_i) & \cdots & K(x_N, x_j) & \cdots & K(x_N, x_N) \end{pmatrix},$$

correspondente ao núcleo $K(x_j, x_i)$, com $K(x_j, x_i) = K(x_i, x_j)$ e $K(x_i, x_i) \equiv 0$ para todo i , pela matriz de deslocamentos

$$\Delta \mathbf{X} \doteq \begin{pmatrix} \Delta x_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \Delta x_i & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \Delta x_j & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \Delta x_N \end{pmatrix},$$

*Para que a contagem da dimensão fique correta precisamos somar uma unidade à diferença dos limite de integração, isto é, para se contar todas as posições é preciso levar em conta a a posição zero adicionando uma unidade à diferença, ou seja, $N = (M - \nu - 1) - (\nu + 1) + \underbrace{1}_{\text{correção da contagem}} = M - 2\nu - 1$.

correspondente às respectivas subdivisões do intervalo, com $\Delta x_i = \Delta x$ para todo i . Na Eq. (2.44) o comprimento médio do passo atua como um vetor coluna N -dimensional dependente da posição inicial, $\langle |\ell| \rangle$. Portanto, no espaço discretizado o vetor coluna N -dimensional $\langle \vec{L} \rangle$ representa o conjunto das distâncias percorridas para se encontrar um sítio, partindo-se de cada posição inicial possível dentro do intervalo, para uma dada distribuição de comprimentos de passos discretizados, $p(\ell)$. Explicitamente, $\langle \vec{L} \rangle = \mathbf{K} \cdot \Delta \mathbf{X} \langle |\ell| \rangle$ pode ser escrito como

$$\begin{pmatrix} \langle L_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle L_i \rangle \\ \vdots \\ \langle L_j \rangle \\ \vdots \\ \langle L_N \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & K(x_1, x_i) \Delta x & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ K(x_i, x_1) \Delta x & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ K(x_j, x_1) \Delta x & \cdots & K(x_j, x_i) \Delta x & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ K(x_N, x_1) \Delta x & \cdots & K(x_N, x_i) \Delta x & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle |\ell_1| \rangle \\ \vdots \\ \langle |\ell_i| \rangle \\ \vdots \\ \langle |\ell_j| \rangle \\ \vdots \\ \langle |\ell_N| \rangle \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

Dessa maneira, a j -ésima linha do vetor $\langle \vec{L} \rangle$ determina o comprimento médio, $\langle L \rangle(x_j)$, da busca iniciada na posição discretizada x_j .

Ao escrevermos $x = x_i = i\Delta x$ e $x_j = \xi = j\Delta x$, o comprimento de passo $\ell = |x_i - x_j| = |i - j|\Delta x$ possui densidade de probabilidade $p(x_i - x_j)dx_j = p(|i - j|\Delta x)\Delta x$. A discretização do operador integral \mathcal{L} se dá, então, a partir da definição da matriz de transição \mathbf{L} , de dimensão N^2 e elementos* L_{ij} , de modo que

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}\rho_n(x)](\xi) &= \sum_x L_{x,\xi} \rho_n(x) \\ [\mathcal{L}\rho_n(x_i)](x_j) &= \sum_{i=\nu+1}^{M-\nu-1} L_{ij} \rho_n(x_i), \end{aligned} \quad (2.46)$$

*Com $L_{ij} = L_{ji}$ e $L_{ii} = 0$ para todo i .

reduzindo um pouco,

$$[\mathcal{L}\rho_{n,i}]_j = \sum_{i=\nu+1}^{M-\nu-1} L_{ij}\rho_{n,i}. \quad (2.47)$$

Recursivamente, em analogia com as Eqs. (2.16) e (2.22),

$$\begin{aligned} \rho_{n,u_n} &= [\mathcal{L}\rho_{n-1,u_{n-1}}]_{u_n} \\ &= \sum_{u_{n-1}=\nu+1}^{M-\nu-1} L_{u_n,u_{n-1}}\rho_{n-1,u_{n-1}} \\ &= \sum_{u_{n-1}=\nu+1}^{M-\nu-1} L_{u_n,u_{n-1}} \sum_{u_{n-2}=\nu+1}^{M-\nu-1} L_{u_{n-1},u_{n-2}}\rho_{n-2,u_{n-2}} \\ &= \sum_{u_{n-1}=\nu+1}^{M-\nu-1} \sum_{u_{n-2}=\nu+1}^{M-\nu-1} \sum_{u_{n-3}=\nu+1}^{M-\nu-1} L_{u_n,u_{n-1}}L_{u_{n-1},u_{n-2}}L_{u_{n-2},u_{n-3}}\rho_{n-3,u_{n-3}} \\ &\vdots \\ &= \sum_{u_{n-1}=\nu+1}^{M-\nu-1} \sum_{u_{n-2}=\nu+1}^{M-\nu-1} \cdots \sum_{u_1=\nu+1}^{M-\nu-1} \sum_{u_0=\nu+1}^{M-\nu-1} L_{u_n,u_{n-1}}L_{u_{n-1},u_{n-2}} \cdots L_{u_2,u_1}L_{u_1,u_0}\rho_{0,u_0} \\ &= \prod_{k=0}^{n-1} \left[\sum_{u_k=\nu+1}^{M-\nu-1} L_{u_{k+1},u_k} \right] \rho_{0,u_0}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Uma contribuição ao tratamento, foi realizada ao expressarmos de forma alternativa ρ_{n,u_n} a partir da interpretação dos elementos L_{ij} da matriz de transição \mathbf{L} , que levam o caminhante da posição x_j para x_i , utilizando a notação de Dirac da Mecânica Quântica. Nesse contexto, definimos os vetores de estado $|u_k\rangle$, os quais formam uma base completa no intervalo $\nu+1 \leq u_k \leq M-\nu-1$, correspondente a $r_\nu < x_k < \lambda - r_\nu$, representando todas as posições possíveis após k passos. Consequentemente, a expressão $\sum_{u_k=\nu+1}^{M-\nu-1} |u_k\rangle\langle u_k| = \mathbb{1}$ é definida como a realação de completeza, que significa que o caminhante existe e está em algum lugar deste intervalo após k passos. Assim podemos escrever qualquer transição como $L_{ij} = \langle u_i | \mathbf{L} | u_j \rangle$. Portanto,

$$\rho_{n,u_k} = \sum_{u_{k-1}=\nu+1}^{M-\nu-1} \cdots \sum_{u_1=\nu+1}^{M-\nu-1} \sum_{u_0=\nu+1}^{M-\nu-1} \langle u_k | \mathbf{L} | u_{k-1} \rangle \cdots \langle u_2 | \mathbf{L} | \underbrace{u_1}_1 \rangle \langle u_1 | \mathbf{L} | u_0 \rangle \rho_{0,u_0}. \quad (2.49)$$

Acima observamos a presença de $n - 1$ relações de completeza e do produto de n elementos da matriz de transição, ou seja,

$$\rho_{n,u_n} = \sum_{u_0=\nu+1}^{M-\nu-1} \langle u_n | \mathbf{L}^n | u_0 \rangle \rho_{0,u_0}. \quad (2.50)$$

Notamos ainda que a propriedade de normalização da função delta de Dirac no limite contínuo, $\int_{r_\nu}^{\lambda-r_\nu} \delta(x_0 - a) dx_0 = 1$, corresponde à relação $\sum_{u_0=\nu+1}^{M-\nu-1} \delta_{u_0,u_a} = 1$, envolvendo a delta de Kronecker no limite discreto, com $x_0 = u_0 \Delta x$ e $a = u_a \Delta x$. Em outras palavras, as deltas de Dirac e Kronecker se relacionam através de

$$\delta(x_0 - a) \rightarrow \frac{\delta_{u_0,u_a}}{\Delta x}. \quad (2.51)$$

Agora podemos escrever a Eq. (2.35) no limite discreto com as devidas considerações. Por exemplo, notando que $dx \rightarrow \Delta x$ e que $\langle |\ell| \rangle(x_j)$ vai num vetor coluna $|\langle |\ell| \rangle, u_j \rangle$, portanto o vetor que representa o conjunto de todas as distâncias médias percorridas para se encontrar um sítio, partindo-se de cada posição inicial, $\vec{\langle L \rangle} = \mathbf{K} \cdot \Delta \mathbf{X} \vec{\langle |\ell| \rangle}$ vai no “ket” $|\langle L \rangle, u_a \rangle$ então

$$\begin{aligned} \langle L \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{r_\nu}^{\lambda-r_\nu} [\mathcal{L}^n \rho_0(x_0)](x_j) \langle |\ell| \rangle(x_j) dx_j \\ |\langle L \rangle \rangle &\stackrel{\text{discr}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{u_j=\nu+1}^{M-\nu-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left[\sum_{u_k=\nu+1}^{M-\nu-1} L_{u_{k+1},u_k} \right] \rho_{0,u_0} |\langle |\ell| \rangle, u_j \rangle \Delta x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{u_j=\nu+1}^{M-\nu-1} \sum_{u_0=\nu+1}^{M-\nu-1} \langle u_j | \mathbf{L}^n | u_0 \rangle \frac{\delta_{u_0,u_a}}{\Delta x} |\langle |\ell| \rangle, u_j \rangle \Delta x \\ |\langle L \rangle, u_a \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{u_j=\nu+1}^{M-\nu-1} \langle u_j | \mathbf{L}^n | u_a \rangle |\langle |\ell| \rangle, u_j \rangle. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Desse modo, expressamos formalmente a média sobre todas as configurações das distâncias médias para encontro de um sítio, partindo-se de cada posição inicial, isto é, a leitura do resultado de Eq. (2.52), pode ser entendida como a média sobre todas as configurações partindo-se da posição inicial x_a . Em seguida, o mesmo procedimento que levou à Eq. (2.41), quando realizado no limite discreto, permite escrever

$$|\langle L \rangle, u_a \rangle = \sum_{u_j=\nu+1}^{M-\nu-1} \langle u_j | (\mathbb{1} - \mathbf{L})^{-1} | u_a \rangle |\langle |\ell| \rangle, u_j \rangle, \quad (2.53)$$

onde $\mathbb{1}$ é matriz unitária de dimensão N^2 e $(\mathbb{1} - \mathbf{L})^{-1}$ é a matriz inversa de $(\mathbb{1} - \mathbf{L})$.

Para obter resultados numéricos a partir da Eq. (2.53), resta somente determinar os elementos L_{ij} da matriz de transição \mathbf{L} . Isto pode ser realizado pela comparação entre as Eqs.(2.22) e (2.47), que leva à conclusão de que L_{ij} representa no limite discreto a probabilidade $p(x_i - x_j)dx_j$ de se executar um passo de comprimento entre $|x_i - x_j| = |i - j|\Delta x$ e $|x_i - x_j| + dx_j = (|i - j| + 1)\Delta x$. Portanto, escrevemos

$$P(|x_i - x_j| < |\ell| < |x_i - x_j| + \Delta x) = \int_{|x_i - x_j|}^{|x_i - x_j| + \Delta x} p(\ell) d\ell, \quad (2.54)$$

que implica em

$$L_{ij} = L_{ji} = \int_{|i-j|\Delta x}^{(|i-j|+1)\Delta x} p(\ell) d\ell, \quad i \neq j, \quad (2.55)$$

$$L_{ii} = 0.$$

Uma vez que tenhamos calculado L_{ij} para uma dada distribuição $p(\ell)$ de comprimentos de passos, invertemos a matriz $(\mathbb{1} - \mathbf{L})$ para determinar a *distância média percorrida até um encontro*, $\langle L \rangle(a)$, e a *eficiência da busca*, $\eta(a)$, dadas pelas Eqs. (2.53) e (1.79), respectivamente. Na próxima seção, estes cálculos serão especificamente realizados para a distribuição de Lévy.

2.5 Buscas de Lévy no Limite Espacial Discreto

Como discutido na seção 1.6, o regime assintótico da distribuição de Lévy para os comprimentos dos passos possui a forma da lei de potência

$$p(\ell) = A \frac{\Theta(|\ell| - \ell_0)}{|\ell|^\mu}, \quad (2.56)$$

onde introduzimos a função Θ de Heavside,

$$\Theta(|\ell| - \ell_0) = \begin{cases} 1, & \text{se } |\ell| \geq \ell_0; \\ 0, & \text{se } |\ell| < \ell_0, \end{cases}$$

para levar em conta o comprimento mínimo do passo, ℓ_0 , e a constante A é determinada pela condição de normalização da distribuição $p(\ell)$:

$$A = \frac{(\mu - 1)}{2} \ell_0^{\mu-1}, \quad \mu > 1. \quad (2.57)$$

Os elementos da matriz \mathbf{L} são então calculados substituindo as Eqs. (2.56) e (2.57) na Eq. (2.55), tal que

$$L_{ij} = L_{ji} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{|i-j|^{\mu-1}} - \frac{1}{(|i-j|+1)^{\mu-1}} \right], \quad i \neq j, \quad 1 < \mu \leq 3, \quad (2.58)$$

com $L_{ii} = 0$.

Para se determinar $\langle L \rangle(x_0)$ via a Eq. (2.53) para a distribuição de Lévy, é necessário ainda calcular $\langle |\ell| \rangle(x_0)$ e a sua forma discretizada $\langle |\ell| \rangle_i$. Substituindo a Eq. (2.56) na Eq. (2.14), obtemos para cada um dos intervalos específicos de x_0 os seguintes resultados:

- para $r_v + \ell_0 \leq x_0 \leq \lambda - r_v - \ell_0$,

$$\langle |\ell| \rangle(x_0) = \begin{cases} \frac{(\lambda - x_0 - r_v)}{2} + \frac{\ell_0(1-\mu)}{2(2-\mu)} \left[1 + \frac{((x_0 - r_v)/\ell_0)^{2-\mu}}{1-\mu} \right], & \text{se } 1 < \mu \leq 3, \text{ e } \mu \neq 2, \\ \frac{(\lambda - x_0 - r_v)}{2} + \frac{\ell_0}{2} [1 + \ln((x_0 - r_v)/\ell_0)], & \text{se } \mu = 2; \end{cases} \quad (2.59)$$

desse modo, a forma discreta, segundo as considerações do início da seção 2.4, é escrita como

$$\langle |\ell| \rangle_i = \begin{cases} \frac{(M-i-\nu)\Delta x}{2} + \frac{q\Delta x(1-\mu)}{2(2-\mu)} \left[1 + \frac{((i-\nu)/q)^{2-\mu}}{1-\mu} \right], & \text{se } 1 < \mu \leq 3, \text{ e } \mu \neq 2, \\ \frac{(M-i-\nu)\Delta x}{2} + \frac{q\Delta x}{2} [1 + \ln((i-\nu)/q)], & \text{se } \mu = 2; \end{cases} \quad (2.60)$$

- para $r_v < x_0 \leq r_v + \ell_0$:

$$\langle |\ell| \rangle(x_0) = \begin{cases} \frac{(x_0 - r_v)}{2} + \frac{\ell_0(1-\mu)}{2(2-\mu)} \left[1 + \frac{((\lambda - x_0 - r_v)/\ell_0)^{2-\mu}}{1-\mu} \right], & \text{se } 1 < \mu \leq 3, \text{ e } \mu \neq 2, \\ \frac{(x_0 - r_v)}{2} + \frac{\ell_0}{2} [1 + \ln((\lambda - x_0 - r_v)/\ell_0)], & \text{se } \mu = 2; \end{cases} \quad (2.61)$$

e no caso discreto,

$$\langle |\ell| \rangle_i = \begin{cases} \frac{(i-\nu)\Delta x}{2} + \frac{q\Delta x(1-\mu)}{2(2-\mu)} \left[1 + \frac{((M-i-\nu)/q)^{2-\mu}}{1-\mu} \right], & \text{se } 1 < \mu \leq 3, \text{ e } \mu \neq 2, \\ \frac{(i-\nu)\Delta x}{2} + \frac{q\Delta x}{2} [1 + \ln((M-i-\nu)/q)], & \text{se } \mu = 2; \end{cases} \quad (2.62)$$

- para o intervalo $\lambda - r_v - \ell_0 \leq x_0 < \lambda - r_v$:

$$\langle |\ell| \rangle(x_0) = \begin{cases} \frac{\ell_0(1-\mu)}{2(2-\mu)} \left[2 + \frac{((x_0 - r_v)/\ell_0)^{2-\mu}}{1-\mu} + \frac{((\lambda - x_0 - r_v)/\ell_0)^{2-\mu}}{1-\mu} \right], & \text{se } 1 < \mu \leq 3, \text{ e } \mu \neq 2, \\ \ell_0 [1 + \ln((\lambda - x_0 - r_v)(x_0 - r_v)^{1/2}/\ell_0)], & \text{se } \mu = 2; \end{cases} \quad (2.63)$$

e no caso discreto,

$$\langle |\ell| \rangle_i = \begin{cases} \frac{q\Delta x(1-\mu)}{2(2-\mu)} \left[2 + \frac{((i-\nu)/q)^{2-\mu}}{1-\mu} + \frac{((M-i-\nu)/q)^{2-\mu}}{1-\mu} \right], & \text{se } 1 < \mu \leq 3, \text{ e } \mu \neq 2, \\ q\Delta x [1 + \ln([(M-i-\nu)(i-\nu)]^{1/2}/q)], & \text{se } \mu = 2. \end{cases} \quad (2.64)$$

Agora que determinamos o comprimento médio de uma busca de Lévy em função da sua posição inicial, uma questão de fundamental importância passa a ser encontrar a dependência com o ponto de partida do caminhante do número médio de passos realizados até o encontro. Tal questão será analisada na próxima seção ao tomarmos o limite temporal contínuo da busca aleatória, ou seja, o limite em que o número discreto de passos assume o caráter de uma variável “tempo” contínua.

2.6 Busca de Lévy no Limite Temporal Contínuo

Vamos considerar agora o limite temporal contínuo da busca aleatória de Lévy com bordas absorventes, em que, ao invés de uma sequência de passos discretos, como por exemplo no caso da Eq. (2.16),

$$P_{n+1}(x) = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} p(x-\xi)P_n(\xi)d\xi,$$

a função densidade de probabilidade de encontrar o caminhante no ponto x varia continuamente com o tempo, constituindo uma equação de difusão fracionária, como descrita na seção 1.5. Notamos que a equação acima traz a mudança de notação $\rho_n(x) \rightarrow P_n(x)$ em relação à Eq. (2.16), a fim de se aproximar da discussão realizada na seção 1.5.

De forma geral, a difusão usual browniana é descrita por um modelo local, ou seja, em pequenas escalas de tempo a evolução da função densidade de probabilidades para uma dada posição é afetada tipicamente apenas por pontos relativamente próximos no espaço. Contudo, devido ao caráter de longo alcance da distribuição de Lévy e à divergência no seu segundo momento, a dinâmica dos processos de Lévy é descrita por uma equação de difusão fracionária com característica superdifusiva, como discutido na seção 1.5.

No caso dos processos de busca de Lévy, de acordo com Buldyrev *et al.* [BHK⁺01, BGH⁺01] é possível definir o operador

$$\mathcal{D}_\alpha \equiv \lim_{\ell_0 \rightarrow 0} \ell_0^{-\alpha} [\mathcal{L}_\alpha(\ell_0) - \mathbb{1}], \quad (2.65)$$

onde, de acordo com as Eqs. (2.21) e (2.56), a sua ação numa função contínua $f(\xi)$ é dada por

$$\mathcal{D}_\alpha f(\xi) = \lim_{\ell_0 \rightarrow 0} \ell_0^{-\alpha} \left\{ \frac{\alpha \ell_0^\alpha}{2} \left[\int_{r_v}^{\xi - \ell_0} \frac{1}{(\xi - x)^{\alpha+1}} f(x) dx + \int_{\xi + \ell_0}^{\lambda - r_v} \frac{1}{(x - \xi)^{\alpha+1}} f(x) dx \right] - f(\xi) \right\}. \quad (2.66)$$

Realizando uma integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\alpha f(\xi) = \lim_{\ell_0 \rightarrow 0} \left\{ \ell_0^{-\alpha} \left[\frac{f(\xi - \ell_0)}{2} + \frac{f(\xi + \ell_0)}{2} - f(\xi) \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[- \int_{r_v}^{\xi - \ell_0} \frac{f'(x) dx}{(\xi - x)^\alpha} + \int_{\xi + \ell_0}^{\lambda - r_v} \frac{f'(x) dx}{(x - \xi)^\alpha} \right] \right\} + \\ - \frac{f(r_v)}{2(\xi - r_v)^\alpha} - \frac{f(\lambda - r_v)}{2(\lambda - r_v - \xi)^\alpha}. \quad (2.67) \end{aligned}$$

Para $\alpha < 2$, o primeiro termo vai a zero de acordo com $\frac{1}{2} \ell_0^{2-\alpha} f''(\xi)$ *. De uma forma compacta, representamos

$$\mathcal{D}_\alpha f(x) = \mathcal{P} \int_{r_v}^{\lambda - r_v} \frac{\text{sign}(x - \xi)}{2|\xi - x|^\alpha} f'(x) dx - \frac{f(r_v)}{2(\xi - r_v)^\alpha} - \frac{f(\lambda - r_v)}{2(\lambda - \xi)^\alpha}, \quad (2.68)$$

onde o primeiro termo acima corresponde ao valor principal da integral[†] em torno de ℓ_0 e $f'(x)$ é a primeira derivada da função $f(x)$. Este operador é similar ao operador $\partial^2/\partial x^2$ da equação de difusão normal e pode ser expresso como uma combinação linear das derivadas fracionárias à esquerda e à direita de Riemann-Liouville[‡]. Para avaliarmos as correções

*Para

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

temos que

$$\frac{1}{2} h^2 f''(x) = \frac{1}{2} f(x+h) + \frac{1}{2} f(x-h) - f(x).$$

†O valor principal da integral é definido por

$$\mathcal{P} \int_a^c dx \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_a^{b-\varepsilon} dx + \int_{b+\varepsilon}^c dx \right].$$

‡Derivada à esquerda:

$$\mathcal{D}_-^\alpha \equiv \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x \frac{1}{(\xi-x)^\alpha} f(\xi) d\xi.$$

Derivada à direita:

$$\mathcal{D}_+^\alpha \equiv \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^\infty \frac{1}{(x-\xi)^\alpha} f(\xi) d\xi,$$

com transformadas de Fourier $\mathcal{F}\{\mathcal{D}_\pm^\alpha f\} = (\mp ik)^\alpha \hat{f}(k)$.

para núcleos do operador \mathcal{L}_α do tipo lei de potência truncada, vamos definir o operador diferença

$$d_\alpha \equiv \ell_0^{-\alpha} [\mathcal{L}_\alpha(\ell_0) - \mathbb{1}] - \mathcal{D}_\alpha, \quad (2.69)$$

que decai com $\ell_0^{2-\alpha}$ quando $\ell_0 \rightarrow 0$. A partir das Eqs. (2.67) e (2.68) podemos concluir que d_α é proporcional à segunda derivada operatorial, isto é,

$$d_\alpha = \ell_0^{2-\alpha} \frac{\alpha}{2(\alpha-2)} \frac{d^2}{dx^2} + \mathcal{O}(\ell_0^{2-\alpha}). \quad (2.70)$$

No caso em que o núcleo de \mathcal{L}_α , $p_\alpha(|x-\xi|)$, tem comportamento assintótico $p(x) = \gamma x^{-(\alpha+1)}[1 + \mathcal{O}(1)]$ para $x \rightarrow \infty$, podemos obter correções para d_α expandindo $f'(x)$ em série de Taylor, isto é, $f'(x) = f'(\xi) + f''(\xi)(x-\xi) + \mathcal{O}((x-\xi)^2)$. Assim, o operador \mathcal{D}_α é bem definido para uma classe de funções que possuem segunda derivada.

Em analogia com a equação de difusão de buscadores aleatórios evoluindo num tempo contínuo, Eq. (1.42) com $v = 0$, podemos, de modo similar à Eq. (1.59), definir uma equação de difusão fracionária para a busca de Lévy motivados pela proporcionalidade entre os operadores \mathcal{D}_α e $\partial^2/\partial x^2$ num domínio de bordas absorventes, isto é,

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \frac{\ell_0^\alpha}{t_0} \mathcal{D}_\alpha P(x,t), \quad (2.71)$$

em que t_0 é o tempo de duração de cada passo e $J_\alpha = \ell_0^\alpha/t_0$ é o análogo fracionário do coeficiente de difusão normal.

Uma vez que o operador \mathcal{D}_α é uma função contínua do operador \mathcal{L}_α , então $\mathcal{D}_\alpha \in \mathfrak{B}(\mathbb{F}, \mathbb{F})$. Este fato é útil para determinarmos as soluções da Eq. (2.71). Consideramos inicialmente que $P(x,t)$ pode ser expresso como uma série de autofunções do operador \mathcal{D}_α , $\mathcal{D}_\alpha f_k(x) = \omega_k f_k(x)$, restritas às condições absorventes, $f_k(r_v) = f_k(\lambda - r_v) = 0$, tal que [SS93]

$$P(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\omega_k J_\alpha t} f_k(x) \int_{r_v}^{\lambda - r_v} f_k(\xi) P(\xi, 0) d\xi. \quad (2.72)$$

Esta forma da solução, no contexto da equação de difusão fracionária com dinâmica superdifusiva, num intervalo finito de bordas absorventes; foi proposta primeiramente por Gitterman [Git00]. As autofunções $f_k(x)$ podem ser aproximadas por autofunções do laplaciano com bordas absorventes, isto é, $\sqrt{2/(\lambda - 2r_v)} \sin[\pi k x / (\lambda - 2r_v)]$, tal que os autovalores ω_k têm um comportamento assintótico para grandes valores de k dado por $\omega_k \sim -[k/(\lambda - 2r_v)]^\alpha < 0$. Resultados numéricos confirmam estas considerações na região

longe das bordas absorventes, mas mostram que as autofunções f_k têm comportamentos distintos próximos às bordas [BHK⁺01]. Por exemplo,

$$f_k(x) \sim (x - r_v)^{\alpha/2}, \quad (2.73)$$

próximo à borda $x = 0$, isto é, para $x \rightarrow r_v$.

Podemos agora calcular o tempo médio da busca de Lévy no limite temporal contínuo da Eq. (2.43). Uma vez que, a partir da definição do operador diferença, o operador

$$\mathcal{L} - \mathbb{1} = \ell_0^\alpha [\mathcal{D}_\alpha + d_\alpha(\ell_0)] \quad (2.74)$$

é inversível e pode ser expandido em séries de $d_\alpha(\ell_0)$, tal que $d_\alpha(\ell_0) \rightarrow 0$ quando $\ell_0 \rightarrow 0$, então

$$(\mathcal{L} - \mathbb{1})^{-1} = \ell_0^{-\alpha} \mathcal{D}_\alpha^{-1} (1 - d_\alpha \mathcal{D}_\alpha^{-1} + \dots). \quad (2.75)$$

Utilizando agora a Eq. (2.43), obtemos

$$\begin{aligned} \langle n \rangle(x_0) &= [(\mathcal{L} - \mathbb{1})^{-1} h](x_0) \\ &= [\ell_0^{-\alpha} \mathcal{D}_\alpha^{-1} (1 - d_\alpha \mathcal{D}_\alpha^{-1} + \dots) h](x_0). \end{aligned} \quad (2.76)$$

No limite em que $\ell_0 \ll \lambda$, então $d_\alpha \mathcal{D}_\alpha^{-1} h(x_0) \ll h(x_0)$, de modo que

$$\langle n \rangle(x_0) = [\ell_0^{-\alpha} \mathcal{D}_\alpha^{-1} h](x_0). \quad (2.77)$$

Dessa forma, o tempo médio para o encontro numa busca de Lévy com bordas absorventes pode ser formalmente escrito como [BHK⁺01]

$$\langle t \rangle(x_0) = t_0 \langle n \rangle(x_0) = \frac{t_0}{\ell_0^{\mu-1}} [\mathcal{D}_\mu^{-1} h](x_0) = \frac{t_0}{\ell_0^{\mu-1}} g(x_0), \quad (2.78)$$

onde $\alpha = \mu - 1$. Acima, a função $g(x)$ satisfaz*

$$\mathcal{D}_\mu g(x) = h(x) = -1, \quad (2.79)$$

com $g(r_v) = g(\lambda - r_v) = 0$. A partir da Eq. (2.68),

$$\mathcal{D}_\mu g(x) = \int_{r_v}^{\lambda - r_v} \frac{\text{sign}(\xi - x)}{2|\xi - x|^\alpha} g'(\xi) d\xi = h(x). \quad (2.80)$$

*Uma vez que $\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\mu^{-1} = \mathbb{1}$.

Esta equação pertence a uma classe de equações integrais com um núcleo de Riesz fracionário [Pod99], cuja solução para $1 < \alpha \leq 2$ foi obtida por Sonin através do seu algoritmo de inversão [Son54]. Em particular, uma equação do tipo

$$\int_{r_v}^{\lambda-r_v} \frac{[a_1 \text{sign}(\xi - x) + a_2]^\nu}{2|\xi - x|^\alpha} \phi(\xi) d\xi = h(x), \quad r_v \leq \xi \leq \lambda - r_v \quad (2.81)$$

tem solução geral

$$\phi(x) = A\phi_0(x) + \phi_1(x), \quad (2.82)$$

em que $\phi_0(x) = [(\lambda - r_v - x)(x - r_v)]^{\alpha/2-1}$ é a solução da equação *homogênea* com $h(x) = 0$. Por outro lado, o caso geral

$$\phi(z) = B_\alpha z^{(\beta-1)} \frac{d}{dz} \int_z^{\lambda-r_v} \frac{t^{1-\alpha}}{(t-z)^{\beta-\alpha}} dt \frac{d}{dt} \int_{r_v}^t \frac{t^{1-\alpha}}{(t-z)^{\beta-\alpha}} \phi(x) dx = h(\xi), \quad (2.83)$$

tal que $r_v \leq \xi \leq \lambda - r_v$, com

$$B_\alpha = \frac{-2 \sin(\pi\beta)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta-\alpha)(a_1+a_2)^\nu \pi}, \quad (2.84)$$

$$\sin[\pi(\beta-\alpha)] = c_\nu \sin(\pi\beta) \quad (2.85)$$

e

$$c_\nu = \left(\frac{a_2 - a_1}{a_1 + a_2} \right)^\nu. \quad (2.86)$$

Para a Eq. (2.80), $\nu = 1$, $a_2 = 0$ e $a_1 = -1$, de modo que $c_\nu = -1$. O número infinito de soluções determinado pela relação $\beta = \alpha/2 + k$, tal que k é um inteiro, fica restrito a apenas duas soluções devido à condição de convergência das integrais para $0 < \alpha \leq 2$, isto é,

$$\phi_1(z) = B_\alpha z^{(\alpha/2-1)} \frac{d}{dz} \int_z^{\lambda-r_v} \frac{t^{1-\alpha}}{(t-z)^{\alpha/2}} dt \frac{d}{dt} \int_{r_v}^t \frac{y^{\alpha/2}}{(t-y)^{\alpha/2-1}} h(y) dy \quad (2.87)$$

e

$$\phi_2(z) = -B_\alpha z^{(\alpha/2-1)} \frac{d}{dz} \int_z^{\lambda-r_v} \frac{t^{1-\alpha}}{(t-z)^{\alpha/2-1}} dt \frac{d}{dt} \int_{r_v}^t \frac{y^{\alpha/2}}{(t-y)^{\alpha/2}} h(y) dy. \quad (2.88)$$

A partir da relação $\mathcal{D}_\mu g(x) = h(x)$, e notando que $\phi(x) = g'(x)$, com $g(x)$ obedecendo a condição de contorno $g(r_v) = g(\lambda - r_v) = 0$, então

$$g(x) = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \phi(z) dz.$$

Para o nosso caso de interesse em que $h(x) = -1$, a solução da equação integral é $\phi_1(x)$ para $\alpha = \mu - 1$, de modo que

$$g(x) = \frac{\sin[\pi(\mu - 1)/2]}{\pi(\mu - 1)/2} [(\lambda - r_v - x)(x - r_v)]^{(\mu-1)/2}. \quad (2.89)$$

A solução pode ser verificada por performar um contorno de integração no entorno do corte $[r_v, \lambda - r_v]$ no plano complexo, computando o resíduo do integrando no infinito. Ainda podemos estabelecer $g(x)$ através da expansão nas autofunções de \mathcal{D}_μ , isto é,

$$g(x_0) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k} f_k(x_0) \int_{r_v}^{\lambda - r_v} f_k(x) dx,$$

que não difere substancialmente da solução obtida pelo método da inversão.

Assim, no limite $\ell_0 \rightarrow 0$ definimos o número médio de passos até o encontro da busca de Lévy no limite temporal contínuo a partir do primeiro termo da expansão formal, Eq. (2.75), de modo que

$$\langle n \rangle(x_0) \equiv \ell_0^{-\mu+1} g(x_0) = \frac{\sin[\pi(\mu - 1)/2]}{\pi(\mu - 1)/2} \left[\frac{(\lambda - r_v - x_0)(x_0 - r_v)}{\ell_0^2} \right]^{(\mu-1)/2}. \quad (2.90)$$

No limite browniano $\mu > 3$, regido pelo TLC, retomamos a equação de difusão normal, Eq. (1.42) com $v = 0$, com coeficiente de difusão $D = (\mu - 1)\ell_0^2/[2t_0(\mu - 3)]$, tal que

$$\langle t \rangle = x(\lambda - x)/(2J). \quad (2.91)$$

Finalmente, em analogia com o procedimento anterior, podemos determinar uma expressão analítica para a aproximação do limite contínuo do comprimento médio da trajetória antes do encontro com um sítio, L_μ , em termos de funções hipergeométricas, fazendo $h(x) = s(x)$, isto é,

$$L_\mu(x_0) = \frac{\lambda(3 - \mu)}{2(2 - \mu)} \left[1 - 4 \frac{\psi_\mu(z) + \psi_\mu(1 - z)}{(\mu - 1)(\mu + 1)B((\mu - 1)/2, (\mu - 1)/2)} \right] + \frac{2\lambda M^{\mu-2} \sin(\pi(\mu - 1)/2)(z - z^2)^{(\mu-1)/2}}{\pi(\mu - 2)}, \quad (2.92)$$

tal que $z = x_0/\lambda$, $M = \lambda/\ell_0$; no numerador a função B é a função de Euler definida como $B(a, b) \equiv \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a + b)$. A função $\psi_\mu(z)$ engloba a função hipergeométrica F , tal que

$$\psi_\mu(z) = F\left(2 - \frac{\mu - 1}{2}, \frac{\mu - 1}{2}, \frac{\mu - 1}{2} + 2, z\right) z^{(\mu-1)/2+1}.$$

A função hipergeométrica é definida por,

$$F(a, b, c, x) = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+a)\Gamma(n+b)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+c)} x^n.$$

Este resultado surge da aproximação ao considerar o operador diferencial fracionário d_μ junto ao algoritmo de inversão de Sonin para a equação de difusão fracionária. Apresentando duas singularidades, para $\mu \rightarrow 2$ (alteração do caráter da busca balística-superdifusiva) $\mu = 3$ (buscas gaussianas). A aproximação só se realiza no limite de ℓ_0 deixando de ser válida nos contornos absorventes. Entretanto, este resultado será de grande utilidade para investigações numéricas.

As equações (2.59)-(2.64) para $\langle |\ell| \rangle(x_0)$ e (2.90) para $\langle n \rangle(x_0)$ serão fundamentais nesse trabalho, uma vez que na análise energética da busca de Lévy apresentada no próximo capítulo iremos aproximar o comprimento médio da busca por $\langle L \rangle \cong \langle |\ell| \rangle \langle n \rangle$.

Capítulo 3

Dinâmica Energética das Buscas Aleatórias de Lévy

Muitos
muitos dias há num dia só
por que as coisas mesmas
os compõem
com sua carne (ou ferro
que nome tenha essa
matéria-tempo
suja ou
não) os compõem

Excerto de Poema Sujo

Ferreira Gullar
maio-outubro/1975
Buenos Aires

Ao atribuímos energia ao caminhante no processo de busca, surgem naturalmente os estados de vida e morte, isto é, se a energia chega a zero ao longo da dinâmica da busca o *forager* é considerado morto. Nesse contexto, aplicaremos aqui os conceitos da Mecânica Estatística de Não-Equilíbrio associados às transições de fases dinâmicas para um estado absorvente [Hin06].

Como veremos, tais transições de fase ocorrem no ponto crítico para a sobrevivência do caminhante e envolvem processos de primeira passagem, isto é, processos em que pela primeira vez o *forager* passa pelo zero de energia. O zero de energia é portanto considerado um estado absorvente.

O principal objetivo desse capítulo é, portanto, apresentar um modelo de dinâmica energética das buscas aleatórias de Lévy, estabelecendo os parâmetros de ordem e expoentes críticos da transição de fase para um estado absorvente. A nossa abordagem se dará através de estudos analítico e numérico da equação de estado do caminhante, de acordo com ideias gerais da teoria unificada do problema de *foraging* [MC86].

Um fator indispensável para a sobrevivência dos organismos é a energia calórica mínima para sustentar as suas atividades metabólicas. Muitos organismos gastam uma considerável parte de suas vidas essencialmente procurando por alimento. A peculiaridade da Física do problema de *foraging* é ampliada quando lhe adicionamos um mecanismo de balanço energético entre a energia consumida e a acumulada por exemplo pelo encontro de alimentos, procurando, dessa forma, aproximar a abordagem tradicional [VdLRS11, RBdL⁺09b, VBH⁺99] de aspectos biológicos mais realistas. Abstratamente, esse mecanismo pode ser gerado por variáveis estocásticas de caráter aditivo e, como veremos, introduz uma dinâmica na transição de fase para o estado absorvente (caminhante morto) que enriquece o problema da busca aleatória, tornando-o adequado para análise através da Mecânica Estatística de Não-Equilíbrio. Neste trabalho, propomos um modelo que descreve a dinâmica energética do *forager* ao longo da busca, numa abordagem que permite um tratamento analítico, em contraste com um modelo anterior proposto por Faustino *et al.* [Fdd⁺07] que se concluía numa aproximação analítica tipo campo médio para o modelo de buscas.

Historicamente, a teoria da otimização do balanço energético da busca dos organismos por recursos, foi primeiramente proposta por MacArthur *et al.* em 1966 [MP66] partindo de modelos matemáticos com número elevado de parâmetros. Após considerável progresso, uma revisão da situação até 1981 foi realizada por Kamil *et al.* [KDP87], e novamente em 1986 por Stephens *et al.* [SK86b], incluindo a descrição dos principais fatores ecológicos e psicológicos do comportamento do *forager*. Mais recentemente, um resumo do conhecimento sobre o comportamento e ecologia do *forager* foi descrito por Stephens *et al.* [SY07]. Por outro lado, a interface com a Física do problema de busca aleatória foi explorada em 2011 por Viswanathan *et al.* [VdLRS11]. Nesse contexto, nossas contribuições contemplam as transições de fase do modelo matemático das buscas aleatórias de Lévy quando levamos em conta a dinâmica energética, analisando a estatística de encontros de sítios.

3.1 Modelos de Busca com Balanço Energético

Um modelo de busca aleatória que leve em conta a dinâmica do balanço energético deve incluir os processos de entrada e dissipação de energia. De acordo com as regras que

descreveremos para o comportamento do *forager* na busca por sítios-alvo, quando um encontro ocorre uma quantidade de energia g lhe é adicionada. Por outro lado, ao se deslocar o *forager* consome energia. De um modo geral podemos descrever essa dissipação em termos de alguma função do tamanho do passo, $f(\ell)$ [RBd⁺03]. Inicialmente vamos, por simplicidade, considerar essa dissipação linearmente proporcional a ℓ , isto é, $f(\ell) = \alpha|\ell|$, onde $\alpha > 0$ denota uma constante de dissipação e que a velocidade do *forager* continua a mesma à medida que perde ou ganha energia. Neste trabalho não trataremos o caso em que a velocidade muda à medida que se consome energia, isto é, uma velocidade $v = v(\ell)$; ou uma velocidade que muda ao longo do encontro de sítios, isto é uma velocidade dependente do número de encontros, $v = v(n)$. Por essas considerações, surge naturalmente a questão da universalidade dos resultados do modelo, isto é, a alteração, por exemplo, na forma da função de dissipação deve provocar uma mudança nos expoentes críticos associados à transição de fase? Esta questão será discutida no final desse trabalho.

Tão logo definamos os mecanismos de consumo e armazenamento de energia no modelo de busca, poderemos fazer previsões sobre a sobrevivência do *forager* e estudar a eficiência da sua estratégia de busca. Como discutiremos, estas previsões podem se conectar aos estudos ecológicos de extinção e sobrevivência das espécies.

Como vimos no capítulo introdutório, a literatura aponta [VdLRS11, HWQ⁺12] para buscas eficientes geradas por um caminhante com uma distribuição de comprimentos de passos, $|\ell| \geq \ell_0$, do tipo lei de potência,

$$p(\ell) \sim \ell^{-\mu}, \quad \text{com } 1 < \mu \leq 3. \quad (3.1)$$

Ao somar os comprimentos dos passos, obtemos distribuições estáveis de Lévy, para $1 < \mu \leq 3$, e browniana, para $\mu > 3$. Em nosso estudo consideraremos que o caminhante procura por sítios utilizando a $p(\ell)$ acima, ao longo de uma extensão unidimensional de comprimento λ com condições periódicas de contorno.

Consideramos que após n passos a energia acumulada do caminhante pode ser escrita como [Fdd⁺07, FLR⁺12]

$$\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_0 + \sum_{i=1}^n (g\delta_i - \alpha|\ell_i|), \quad (3.2)$$

onde \mathcal{E}_0 é a energia inicial do caminhante, necessária para a busca ter início, e $|\ell_i|$ é o comprimento do i -ésimo passo da caminhada, sorteado a partir da distribuição (3.1). Quando (não) acontece um encontro de sítio-alvo no i -ésimo passo, temos $\delta_i = 1$ ($\delta_i = 0$).

Vale observar que uma equação similar à Eq. (3.2), com dissipação de energia diretamente proporcional ao tamanho do passo, também foi proposta [BML09] no contexto de

um modelo determinístico de agentes inteligentes se comportando como *foragers* de Lévy em ambientes heterogêneos.

No nosso contexto, tentamos descrever a dinâmica energética de um processo de busca que simule, na medida do possível, os encontros biológicos. Para este fim, é necessário fazer escolhas apropriadas para os parâmetros do modelo. Por exemplo, a escolha $g \gg \alpha\lambda$ tipicamente levaria a um *forager* imortal, que jamais pereceria por falta de alimento; por outro lado, a consideração $g \ll \alpha\lambda$ certamente implicaria na morte do *forager* após poucos passos sem encontrar nenhum sítio-alvo. Tais situações são úteis para extrairmos informações sobre o modelo nos casos limites. Entretanto, nesse trabalho o nosso foco principal está na análise da dinâmica da busca no regime intermediário em que o *forager* consegue em média sobreviver durante um longo tempo antes de eventualmente se extinguir, isto é, a dinâmica da busca no limiar da extinção.

Vamos a seguir descrever as regras do modelo de busca com dinâmica energética. Na verdade, procuraremos contrastar o modelo utilizado neste trabalho com um modelo similar, porém com diferenças importantes, introduzido por Faustino *et al.* [Fdd⁺07,FLR⁺12].

1. Inicialmente, as posições do caminhante de Lévy e do alvo são sorteadas aleatoriamente em um segmento de comprimento λ com condições periódicas de contorno.
2. O *forager* escolhe uma direção aleatória e um tamanho de passo a partir da Eq. (3.1), e inicia a busca com velocidade constante. No nosso modelo o alvo é considerado estático. No modelo de Faustino *et al.* [Fdd⁺07,FLR⁺12], ele pode se movimentar com velocidade idêntica à do *forager*, tendo escolhido uma direção aleatória e um tamanho de passo também a partir da Eq. (3.1), porém com um expoente μ que pode em geral ser distinto do expoente do *forager*.
3. A cada passo de comprimento ℓ_i que realiza, o *forager* perde uma quantidade de energia $f(\ell_i) = \alpha|\ell_i|$, como descrito pela Eq. (3.2).
4. Ao longo da busca, o *forager* checa continuamente se o alvo encontra-se dentro do seu raio de visão, r_v . Se o alvo não é detectado até o final do seu passo, uma nova direção e um novo comprimento de passo são escolhidos para o *forager*, de acordo com a regra 2.
5. Quando um encontro acontece, o alvo é eliminado e uma quantidade de energia g é adicionada ao *forager*, segundo a Eq. (3.2). Um novo alvo é então criado em uma posição aleatória e o processo recomeça a partir da regra 2, continuando até que um dos **critérios de parada**, definidos a seguir para cada modelo, seja satisfeito, finalizando o processo de busca.

Os critérios para o término da busca constituem uma distinção importante entre o nosso modelo e o modelo de Faustino *et al*, já que os critérios para termino da busca determinam as estatísticas dos modelos. Em ambos os modelos, um dos critérios de parada é o evento em que o *forager* morre por falta de energia, isto é, quando a sua energia acumulada ao longo de vários encontros, Eq. (3.2), atinge o zero pela primeira vez (estado absorvente), que definimos como **critério de sobrevivência**. Este último critério pode ser desativado para analisarmos o modelo sem alterar a estatística. A seguir, descreveremos as escolhas realizadas.

No modelo de Faustino *et al*. o caminhante finaliza a busca após percorrer uma *distância máxima* (L_{\max}) pré-determinada, gerando uma estatística de busca essencialmente vinculada às flutuações da distância total percorrida, o que definiremos como **critério de busca**. Em suma, a regra 5 para este modelo é complementada por estes **critérios de parada**, sendo reescrita da seguinte forma.

5. Faustino *et al*. Quando um encontro acontece, o alvo é eliminado e uma quantidade de energia g é adicionada ao *forager*, segundo a Eq. (3.2). Um novo alvo é então criado em uma posição aleatória e o processo recomeça a partir da regra 2, continuando até que o *forager* percorra uma distância máxima (**critério de busca**) ou até que a sua energia atinja o zero pela primeira vez (**critério de sobrevivência**) [Fdd⁺07, FLR⁺12].

Deixando à parte o critério de parada devido à morte do *forager*, é interessante notar que, quando a busca é encerrada após percorrer uma certa distância máxima pré-determinada, geralmente ela é interrompida entre o encontro de dois alvos, mesmo que o *forager* ainda tenha suficiente energia acumulada para prosseguir. Como veremos, em nosso modelo adotaremos o critério de encerramento da busca após o encontro de um número máximo de sítios-alvo. Além de evitar esta interrupção durante o transcorrer da busca, este critério permitirá também um tratamento analítico do modelo.

De acordo com a Eq. (3.2), podemos escrever

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_n &= \mathcal{E}_0 + \sum_{i=1}^n (g\delta_i - \alpha|\ell_i|) \\ \mathcal{E}_{N_f} &= \mathcal{E}_0 + N_f g - \alpha L_{N_f},\end{aligned}\tag{3.3}$$

em que $N_f = \sum_{i=1}^n \delta_i$ e $L_{N_f} = \sum_{i=1}^n |\ell_i|$ são, respectivamente, o número de alvos encontrados e comprimento total da caminhada após n passos. No contexto do modelo de Faustino *et al.*, como a distância total percorrida L é o parâmetro associado ao critério de parada da busca, na qual um total de N alvos são encontrados, os autores adotaram o ganho energético normalizado, $(\mathcal{E}_{N_f} - \mathcal{E}_0)/L$, como a quantidade de interesse a ser estudada. De

fato, uma vez descontado o efeito da energia inicial \mathcal{E}_0 , esta quantidade deve se anular no ponto da densidade crítica de sítios (ver a Fig. 3.1). Para tentar explicar os resultados numéricos obtidos, Faustino *et al.* utilizaram uma abordagem analítica com uma aproximação à campo médio, de modo similar ao tratamento realizado por Viswanathan *et al.* [VBH⁺99] para o estudo das buscas de Lévy por sítios-alvo estáticos.

A análise de Faustino *et al.* [Fdd⁺07, FLR⁺12] se inicia considerando que o número N_f de alvos encontrados após n passos é dado pela razão entre n e o número médio de passos entre dois encontros sucessivos, $\langle N_2 \rangle$, isto é, $N_f \approx n / \langle N_2 \rangle$. (Para evitar confusão, estamos mudando a notação com relação ao capítulo 2: $\langle n \rangle \rightarrow \langle N_2 \rangle$.) Essa expressão é aproximada porque, a cada encontro, a posição do novo alvo é aleatoriamente distinta da posição inicial do alvo anterior. Como reportado na Ref. [VBH⁺99], o comportamento assintótico de $\langle N_2 \rangle$ no regime de escassez de recursos, $\lambda \gg r_v$, é dado por

$$\langle N_2 \rangle \simeq (\lambda / r_v)^{\mu-1}. \quad (3.4)$$

Assim, $L = \sum_i \ell_i \approx N_f \langle \ell \rangle_t + (n - N_f) \langle \ell \rangle_{nt}$, em que $\langle \ell \rangle_t$ ($\langle \ell \rangle_{nt}$) representa o comprimento médio de um passo simples truncado (não truncado) ao encontrar (não encontrar) um alvo. A manipulação algébrica destas quantidades leva a [Fdd⁺07]

$$(\mathcal{E}_N - \mathcal{E}_0) / L \approx \frac{g}{\langle \ell \rangle_t + (\langle N_2 \rangle - 1) \langle \ell \rangle_{nt}} - \alpha. \quad (3.5)$$

Para incluir os efeitos de flutuação na sobrevivência das caminhadas com energia próxima a zero, os autores introduziram um termo multiplicativo $\mathcal{N}(\lambda, \mu)$, tal que

$$(\mathcal{E}_N - \mathcal{E}_0) / L \approx \left[\frac{g}{\langle \ell \rangle_t + (\langle N_2 \rangle - 1) \langle \ell \rangle_{nt}} - \alpha \right] \mathcal{N}(\lambda, \mu), \quad (3.6)$$

onde

$$\mathcal{N}(\lambda, \mu) = C \left(\frac{\lambda}{r_v} \right)^{\mu-3}, \quad \mu \leq 3 \quad \text{e} \quad C = \text{constante}. \quad (3.7)$$

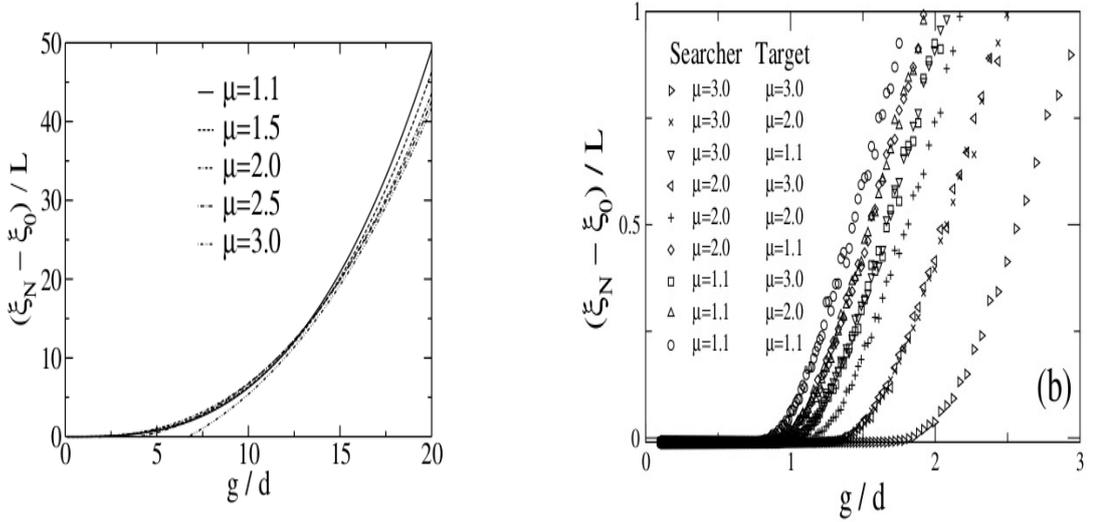
A dependência do fator multiplicativo com o expoente $\mu - 3$ implica que tais flutuações são irrelevantes no regime browniano de passos curtos, isto é, para $\mu \rightarrow 3$. Observamos a partir da Eq. (3.6) que $\mathcal{N}(\lambda, \mu)$ afeta como o ganho de energia varia com λ e μ . Finalmente, argumentando que, na média, $\lambda/2$ tem o papel de um limite superior de truncamento, os autores escrevem

$$\langle \ell \rangle_t \approx \frac{\lambda}{2} \quad (3.8)$$

e, numa aproximação à campo médio como na Ref. [VBH⁺99],

$$\begin{aligned} \langle \ell \rangle_{nt} &\approx \frac{\int_{r_v}^{\lambda} d\ell p(\ell)}{\int_{r_v}^{\lambda} d\ell p(\ell)} \\ &= \frac{r_v(\mu - 1) \left(\frac{\lambda}{r_v}\right)^{2-\mu} - 1}{\mu - 2 \left(\frac{\lambda}{r_v}\right)^{1-\mu} - 1}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

A comparação entre os resultados numéricos e a aproximação teórica do modelo de Faustino *et al.*, apresentada na Fig. 3.1, mostra um quadro qualitativamente compatível, embora quantitativamente insatisfatório [Fdd⁺07, FLR⁺12]. É interessante notar que a



(a) Aproximação analítica considerando o sítio-alvo fixo. Os valores de μ são correspondentes ao *forager*.

(b) Dados numéricos obtidos da simulação tomando a média sobre 500 caminhadas.

Figura 3.1: Ganho energético normalizado pelo comprimento pré-determinado da busca, L , em função da densidade de alvos normalizada $\rho = g/d$, com $d = 2\lambda$, para vários valores dos expoentes de Lévy do *forager* e do alvo, de acordo com o modelo proposto por Faustino *et al.* [Fdd⁺07]. Para o alvo, $\mu = 3$ (regime de pequenos passos) corresponde aproximadamente à situação de sítios fixos. Os parâmetros utilizados foram $\mathcal{E}_0 = 100$, $g = 100$, $\alpha = 100$, $r_v = 1$, $L = 10^4$ e velocidades unitárias para o *forager* e para o alvo.

quantidade $(\mathcal{E}_{N_f} - \mathcal{E}_0)/L$ define essencialmente dois regimes distintos do comportamento do *forager* em função da razão g/λ : uma fase nula na região $g/\lambda < (g/\lambda)_c$, em que o *forager* encontra-se no estado absorvente (morte) devido ao fato de ter atingido energia nula ao longo da busca realizada num ambiente escasso ($g \lesssim \alpha\lambda$); e um regime de sobrevivência,

na região $g/\lambda > (g/\lambda)_c$, em que $(\mathcal{E}_{N_f} - \mathcal{E}_0)/L$ é finito e a busca se desenvolve num ambiente mais abundante em recursos ($g \gtrsim \alpha\lambda$). Os autores argumentam, então, que o valor $g/\lambda = (g/\lambda)_c$ corresponde ao ponto crítico de uma transição de fase dinâmica de segunda ordem entre os estados absorvente e ativo [FLR⁺12]. Vale notar ainda que quanto menor o expoente do *forager*, isto é, quanto mais próxima do regime balístico ($\mu \rightarrow 1$) for a sua dinâmica de busca, maior a região de valores do parâmetro g/λ em que a fase ativa ocorre.

Vamos voltar o foco agora para o nosso modelo e os resultados que dele derivam. Como mencionado, uma distinção importante com relação ao modelo de Faustino *et al.* diz respeito ao critério de parada para a finalização da busca, ou mais especificamente ao que denominamos de critério de busca. Diferentemente do modelo proposto por Faustino *et al.*, em que a busca é finalizada após o *forager* percorrer um comprimento máximo L_{\max} , no nosso modelo ele conclui a procura após encontrar um *número máximo de encontros de sítios* $N_{f,\max}$, gerando uma estatística dependente das flutuações do número de encontros N_f . Naturalmente, assim como no modelo de Faustino *et al.*, caso o *forager* assuma energia nula ao longo da busca, ele ingressa num estado absorvente (morte) e a busca é imediatamente finalizada (critério de sobrevivência).

Vale mencionar ainda que nosso modelo está de acordo com a teoria unificada do problema de *foraging* [MC86], segundo a qual, sendo $X(t)$ a variável de estado que caracteriza a condição do *forager* no tempo t , então

$$X(t+1) = X(t) - \alpha_i + Z_i, \quad (3.10)$$

onde α_i e Z_i são as respectivas variáveis aleatórias que definem a perda de energia associada à escolha da estratégia de busca i e o ganho de energia pelo encontro de alimento. Ainda nesse contexto, a variável de estado está vinculada aos limites

$$x_c < X(t) < C, \quad (3.11)$$

em que x_c é uma energia crítica que determina a morte do *forager*, a qual eventualmente pode ser normalizada a zero, e C é a capacidade máxima de armazenamento de energia, isto é, a energia máxima que o *forager* pode acumular [MC86]. A dinâmica estabelecida pela perda de energia, α_i , e pela energia ganha pelo número de encontros com os sítios-alvo, $N_f Z_i$, determina a evolução do processo de busca. No nosso caso específico, α_i é mapeado naturalmente na função dissipação $f(\ell_i)$, associada à estratégia de busca.

Em suma, o correspondente à regra 5 para nosso modelo é descrito da seguinte forma:

5. Regra para N_f Quando um encontro acontece, o alvo é eliminado e uma quantidade de energia g é adicionada ao *forager*, segundo a Eq. (3.2). Um novo alvo é então criado em uma posição aleatória e o processo recomeça a partir da regra 2, continuando até que o *forager* encontre $N_{f,\max}$ sítios-alvo (**critério de busca**) ou até que a sua energia atinja o zero pela primeira vez (**critério de sobrevivência**).

Como veremos a seguir, a alteração no nosso modelo para a implementação da regra 5 acima permite uma aproximação analítica mais fiel aos resultados numéricos. Por hora, e até o final deste capítulo, vamos focar na obtenção de resultados analíticos com base no nosso modelo, tais como a determinação do ponto crítico que separa os regimes de extinção e sobrevivência do *forager*, isto é, o ponto em que a energia acumulada atinge o zero pela primeira vez, e o cálculo do comportamento assintótico da probabilidade (taxa) de sobrevivência do *forager* em função do número de sítios encontrados. Tais resultados serão comparados no capítulo 4 com os resultados numéricos obtidos através de uma simulação computacional do modelo do tipo dinâmica molecular, isto é, com a posição do *forager* sendo iterativamente atualizada enquanto as condições para a sua mobilidade forem satisfeitas.

O nosso ponto de partida é a expressão para a energia acumulada pelo *forager* após o encontro de N_f sítios em n passos,

$$\mathcal{E}_{N_f} = \mathcal{E}_0 + N_f g - \alpha L_{N_f}, \quad (3.12)$$

em que

$$L_{N_f} = \sum_{i=1}^n |\ell_i| = \sum_{i=1}^{n_1} |\ell_i| + \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} |\ell_i| + \cdots + \sum_{i=n_{(N_f-1)+1}}^n |\ell_i|, \quad n = \sum_{j=1}^{N_f} n_j, \quad (3.13)$$

$$L_{N_f} = L_1(x_1) + L_2(x_2) + \cdots + L_{N_f}(x_{N_f}),$$

onde $L_j(x_j)$ e $n_j(x_j)$ denotam, respectivamente, o comprimento e o número de passos da j -ésima caminhada partindo da posição x_j até o encontro do próximo sítio-alvo ($j + 1$). As somas sobre j de L_j e n_j resultam, naturalmente, no comprimento total L_{N_f} e no número de passos da busca até o encontro de N_f sítios.

Para continuarmos, vamos tomar a média sobre configurações das caminhadas. Uma forma de definirmos a média sobre as configurações possíveis de caminhadas que partem da posição x_j , notando que os índices r denotam configurações diferentes para as caminhadas

que começam na mesma posição, b o número de configurações que pode ser interpretado como caminhadas, ou ainda como uma população de caminhantes, é tal que

$$\langle L_k \rangle(x_k) = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b} \sum_{r=1}^b L_k^r(x_k), \quad (3.14)$$

que converge para uma configuração média que pode ser Então se,

$$\begin{aligned} L_1 &= \sum_{i=1}^{n_1} |\ell_i| &\Rightarrow & L_1(x_1) \\ L_2 &= \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} |\ell_i| &\Rightarrow & L_2(x_2), \end{aligned} \quad (3.15)$$

podemos escrever que $L_2(x_1) = \sum_{i=1}^{n_2} |\ell_i|$, isto é, $L_2(x_1)$ é uma dada configuração para uma caminhada que começa em x_1 . De tal modo que sempre existirão configurações de caminhadas tais que, $L_n^s(x_j) = L_m^r(x_j)$, umas vez que estamos utilizando a mesma distribuição de passos $p(\ell)$ para cada uma das configurações. Assim,

$$\langle L_i \rangle(x_j) = \langle L_k \rangle(x_j) = \langle L \rangle(x_j),$$

ou seja, a soma para o comprimento total após N_f encontros de sítio torna-se

$$\begin{aligned} \langle L_{N_f} \rangle &= \langle L \rangle(x_1) + \langle L \rangle(x_2) + \cdots + \langle L \rangle(x_{N_f}) \\ \langle L_{N_f} \rangle &= \sum_{j=1}^{N_f} \langle L \rangle(x_j). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Com o resultado acima, obtemos a média da *energia* sobre as configurações de caminhadas com uma dada sequência $\{x_j\}$ de posições iniciais:

$$\mathcal{E}_{N_f}(\{x_j\}) = \mathcal{E}_0 + N_f g - \alpha \sum_{j=1}^{N_f} \langle L \rangle(x_j). \quad (3.17)$$

Com o intuito de não sobrecarregarmos a notação, simplificamos acima $\langle \mathcal{E}_{N_f} \rangle(\{x_j\}) \rightarrow \mathcal{E}_{N_f}(\{x_j\})$.

A seguir, vamos realizar a média sobre todos os conjuntos possíveis de posições iniciais, $\{x_j\}$, dentro do intervalo $r_v < x_j < \lambda - r_v$. Para este fim, vamos considerar uma função

densidade de probabilidade para o sorteio da posição inicial, $\pi(x_j) = \pi(x)$ para todo j , tal que qualquer posição no intervalo tenha a mesma probabilidade, isto é,

$$\pi(x) = \frac{1}{\lambda - 2r_v}, \quad (3.18)$$

com norma unitária,

$$\begin{aligned} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \pi(x) dx &= \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \frac{1}{\lambda - 2r_v} dx \\ &= \left[\frac{x}{\lambda - 2r_v} \right]_{r_v}^{\lambda-r_v} \\ &= 1. \end{aligned} \quad (3.19)$$

É interessante notar que a simetria do espaço de busca, em conjunto com o fato de que deslocamentos para a esquerda ou direita são equiprováveis, implica em $\langle L \rangle(x) = \langle L \rangle(\lambda - x)$, para $r_v < x \leq \lambda/2$ (ver Fig. 3.2). Em outras palavras, para o cálculo do comprimento médio da busca até atingir qualquer um dos sítios-alvo, $\langle L \rangle$, uma busca iniciada a uma distância x do sítio da esquerda e $\lambda - x$ do sítio da direita é indistinguível de uma busca iniciada a uma distância $\lambda - x$ do sítio da esquerda e x do sítio da direita. No caso de condições periódicas de contorno, os dois sítios-alvo identificam-se num só, como mostrado na Fig. 2.1, e a simetria descrita acima continua válida. Podemos nos aproveitar deste fato para dividir o domínio da integral no espaço de busca ao meio e multiplicá-la por dois, obtendo

$$\overline{\mathcal{E}_{N_f}(\{x_j\})} = \mathcal{E}_0 + N_f g - 2\alpha \sum_{j=1}^{N_f} \int_{r_v}^{\lambda/2} \langle L_j \rangle(x_j) \pi(x_j) dx_j. \quad (3.20)$$

A sobrelinha acima denota a média sobre as posições iniciais. Definindo

$$m \equiv \overline{\langle L \rangle(x)} = 2 \int_{r_v}^{\lambda/2} \langle L \rangle(x) \pi(x) dx, \quad (3.21)$$

de modo similar ao primeiro momento de uma distribuição, escrevemos

$$\overline{\mathcal{E}_{N_f}(\{x_j\})} = \mathcal{E}_0 + N_f g - \alpha \sum_{j=1}^{N_f} m_{1,j}, \quad (3.22)$$

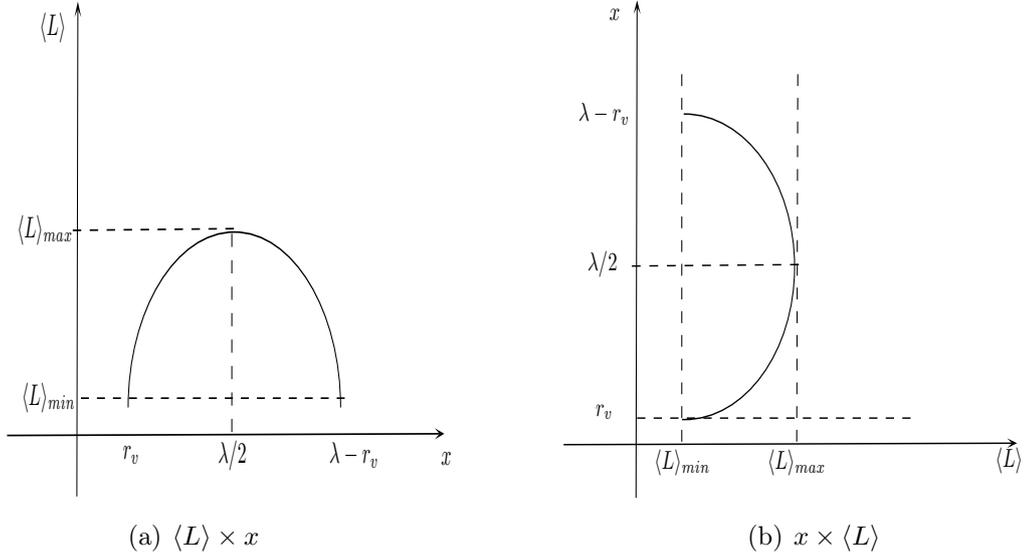


Figura 3.2: (a) Esboço do comprimento médio de uma caminhada até o encontro de um dos sítios-alvo, distantes entre si de λ , em função da posição inicial. No caso de condições periódicas de contorno, os dois sítios-alvo se identificam num só. A simetria do espaço de busca implica em $\langle L \rangle(x) = \langle L \rangle(\lambda - x)$, para $r_v < x \leq \lambda/2$. (b) Esboço da relação inversa, $x(\langle L \rangle)$.

onde notamos que, no caso da busca de Lévy num espaço de extensão λ , $m_j \equiv m(\lambda, \mu)$ para todo j . Novamente, desejamos não sobrecarregar as expressões com as notações das médias, chegando, assim, à energia média após o encontro de N_f sítios-alvo:

$$\mathcal{E}_{N_f}(\lambda, \mu) = \mathcal{E}_0 + N_f g - \alpha N_f m(\lambda, \mu). \quad (3.23)$$

Nosso modelo analítico consiste em aproximar o comprimento da caminhada entre dois encontros consecutivos como o produto do tamanho médio de um passo pelo número médio de passos entre dois encontros [RBd⁺03],

$$\langle L \rangle(x) \approx \langle n \rangle(x) \cdot \langle \ell \rangle(x), \quad (3.24)$$

em que $\langle n_\mu \rangle(x)$ (ocultando o índice μ por simplicidade) e $\langle \ell \rangle(x)$ são dados, respectivamente, pelas Eqs. (2.90) e (2.59), isto é,

$$\begin{aligned} \langle n \rangle(x) &= \frac{\sin[\pi(\mu - 1)/2]}{\ell_0^{(\mu-1)/2} \pi(\mu - 1)/2} [\lambda - x - r_v]^{(\mu-1)/2} [x - r_v]^{(\mu-1)/2}, \\ \langle \ell \rangle(x) &= \frac{\ell_0}{2(2 - \mu)} \left\{ [\lambda - x - r_v]^{(2-\mu)} + [x - r_v]^{(2-\mu)} - 2(\mu - 1) \right\}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

A fim de controlar os erros da aproximação acima e conhecer seus efeitos, comparamos na Fig. 3.3 o resultado da Eq. (3.24) com aquele obtido a partir da discretização do espaço de busca realizada no capítulo anterior, Eq. (2.53). Percebemos que a discrepância observada no regime $\mu > 2$ pode ser praticamente sanada pela introdução de um fator multiplicativo $A(\lambda, \mu)$, obtido numericamente pelo ajuste das curvas, isto é,

$$\langle L \rangle(x) = A(\lambda, \mu) \langle n \rangle(x) \cdot \langle \ell \rangle(x). \quad (3.26)$$

Por outro lado, observamos que o fator é desnecessário para pequenos valores de μ , ou seja, $A(\lambda, \mu \leq 2) \approx 1$, comprovando a eficácia da nossa aproximação nesse regime. Para fins didáticos, as duas primeiras colunas da Fig. 3.3, isto é, $\mu \leq 2$, as curvas vermelhas (resultados para $\langle L \rangle$ sem a presença do fator) e as curvas verdes (resultados para $\langle L \rangle$ com a presença do fator) se coincidem perfeitamente com as curvas pretas pontuadas em circunferências.

A determinação analítica do fator é um problema em aberto, no entanto nossos estudos numéricos apontam que ele permanece positivo para $\mu \rightarrow 3$. Além do mais a aproximação do limite contínuo prediz um fator de $(\lambda/\ell_0)^{\frac{\mu-1}{2}}$ para o número de vôos nas vizinhanças das bordas absorventes [BHK⁺01, BGH⁺01] que corrobora com nossos resultados.

Além disso, como veremos no capítulo 4, o fato de usarmos apenas a região de maior extensão de x no cálculo de $\langle \ell \rangle(x)$, isto é, $r_v + \ell_0 \leq x \leq \lambda - r_v - \ell_0$, Eq. (2.59), levará a uma discrepância um pouco maior em relação aos resultados numéricos no regime de pequenos λ e grandes μ , em que o *forager* permanece muito tempo próximo às bordas absorventes.

Nosso objetivo a seguir é analisar o ponto em que a energia do *forager* atinge o zero, isto é, o ponto onde ocorre a transição de fase para o estado absorvente (morte do *forager*). Como discutido, no nosso contexto de buscas aleatórias com dinâmica energética o sistema evolui estocasticamente através de deslocamentos do caminhante intermediados por eventuais encontros de sítios-alvo, implicando em perdas e ganhos de energia. Desse modo, quando a sua energia acumulada ao longo da busca atinge o zero pela primeira vez o caminhante se extingue, entrando no estado absorvente. Uma vez fixadas as densidades de probabilidades para os comprimentos dos passos, $p(\ell)$, e para as posições de reinício da busca após um encontro, $\pi(x_0)$, a dinâmica da busca é essencialmente controlada pelos parâmetros que caracterizam o ambiente de busca, λ (inversamente proporcional à densidade de sítios-alvo) e g (ganho energético em um encontro) (nesse trabalho fixamos os valores de r_v , ℓ_0 e α). De fato, quando a razão $\rho = g/\lambda$ (ou ainda $\rho = g/(\lambda - 2r_v)$, ao levarmos em conta a detecção do sítio a uma distância r_v do *forager*) é muito pequena a extinção em tempos longos é certa e o *forager* ingressa num estado absorvente irreversível,

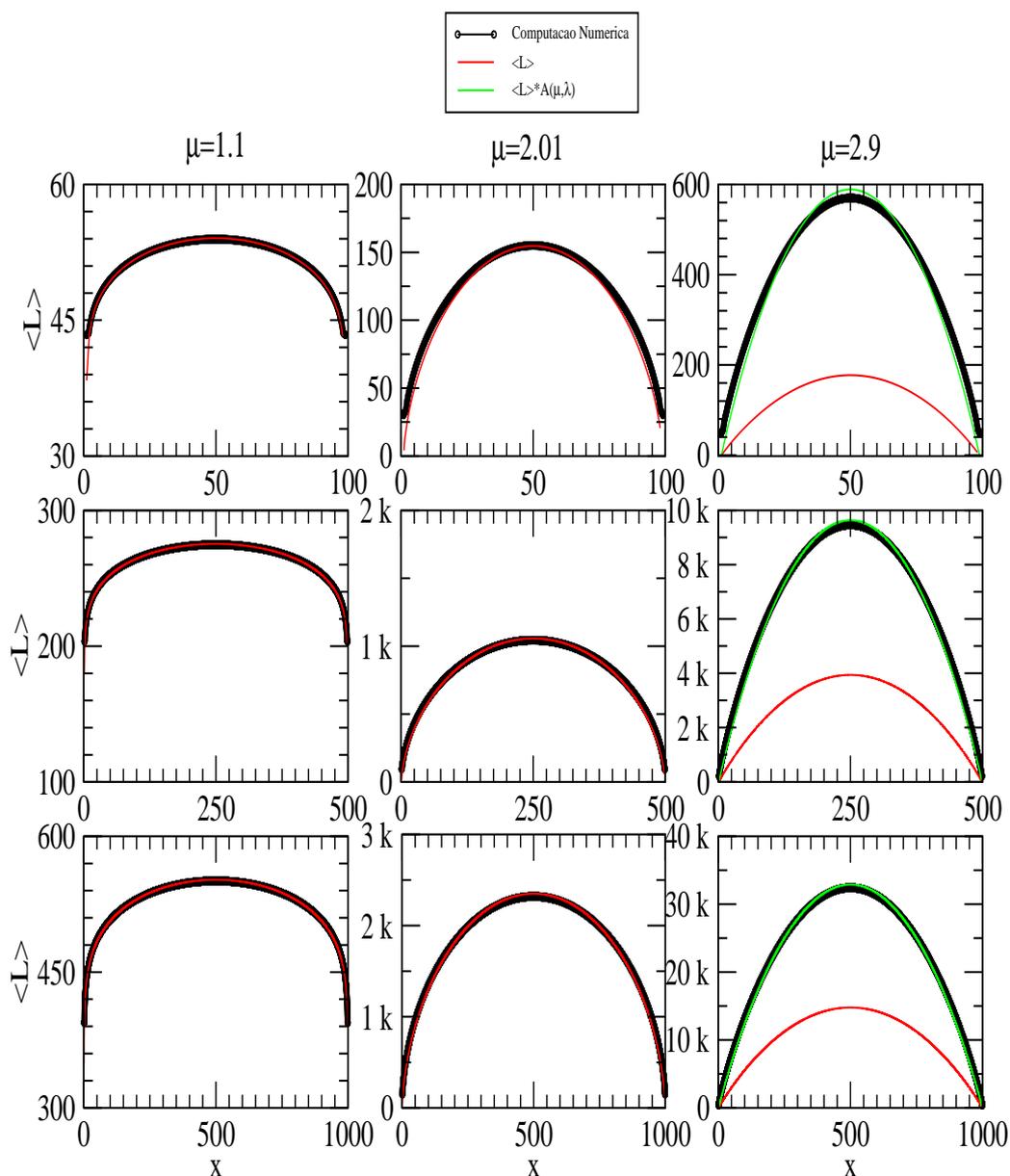


Figura 3.3: Comparação entre as curvas de $\langle L \rangle(x)$ versus x obtidas a partir da computação numérica com o *software* Matlab da Eq. (2.53) no espaço de busca discretizado, linha preta e da aproximação expressa pela Eq. (3.24), para vários valores de μ e λ , linhas vermelhas. A introdução do fator de correção $A(\lambda, \mu)$ nesta última corrige as discrepâncias observadas para $\mu > 2$, linhas verdes. De fato, obtemos que $A(\lambda, \mu \leq 2) \approx 1$.

do qual ele não consegue mais escapar; por outro lado, grandes valores de ρ asseguram que o *forager* prospera, configurando um estado dinâmico ativo. A fronteira entre prosperidade e extinção é marcada, como veremos a seguir, pelo ponto crítico ρ_c , que caracteriza uma transição de fase contínua entre os estados absorvente e ativo. Ao fixarmos g e variarmos apenas λ , temos, de forma análoga ao modelo de Faustino *et al.* [Fdd⁺07], que o ganho energético $(\mathcal{E}_{N_f} - \mathcal{E}_0)/N_f$ deve se anular no ponto crítico $\lambda = \lambda_c$. Desse modo, reescrevemos a energia média após o encontro de N_f sítios-alvo como

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{N_f}(\lambda, \mu) &= \mathcal{E}_0 + N_f g - \alpha N_f m(\lambda, \mu), \\ \frac{\mathcal{E}_{N_f}(\lambda, \mu) - \mathcal{E}_0}{N_f} &= g - \alpha m(\lambda, \mu).\end{aligned}\tag{3.27}$$

Para distinguir as duas fases, vamos definir a função ganho energético por conveniência [Fdd⁺07, FLR⁺12, Sta71]

$$\begin{aligned}\psi &\equiv \frac{\mathcal{E}_{N_f} - \mathcal{E}_0}{N_f \alpha} \\ &= \frac{g}{\alpha} - m(\lambda, \mu).\end{aligned}\tag{3.28}$$

Observando que ψ não se anula na fase absorvente ($\mathcal{E} = 0$), contudo, apresenta o mesmo comportamento na criticalidade, isto é, rigorosamente definimos o parâmetro de ordem

$$\Psi \equiv \frac{\mathcal{E}}{N_f},\tag{3.29}$$

tal que $\Psi = \psi + \frac{\mathcal{E}_0}{N_f \alpha}$, cuja análise realizada indicam os mesmos expoentes críticos para a definição do ganho energético ψ , que passaremos a chamar de parâmetro de ordem intercambiavelmente.

Desse modo, o ponto crítico ocorre quando $\psi = 0$ em $\rho_c = g/(\lambda_c - 2r_v)$, ou seja, $g = \alpha m(\lambda_c, \mu)$. O parâmetro de ordem ψ é então nulo para $\rho \leq \rho_c$ (estado absorvente) e não nulo para $\rho > \rho_c$ (estado ativo).

Associado à definição do parâmetro de ordem está o expoente crítico β , que caracteriza como ψ tende a zero nas vizinhanças da transição de fase sobrevivência-extinção

do *forager*. Substituindo a aproximação $\langle L \rangle = A(\lambda, \mu) \langle n \rangle \cdot \langle \ell \rangle$ em $m(\lambda, \mu)$, Eq. (3.21), obtemos

$$m = \frac{A(\lambda, \mu)}{\lambda - 2r_v} \int_{r_v}^{\lambda - r_v} dx \frac{\sin[\pi(\mu - 1)/2]}{\ell_0^{(\mu-1)/2} \pi(\mu - 1)/2} \cdot [\lambda - x - r_v]^{(\mu-1)/2} [x - r_v]^{(\mu-1)/2} \times \quad (3.30)$$

$$\times \frac{\ell_0}{2(2 - \mu)} \cdot \left\{ [\lambda - x - r_v]^{(2-\mu)} + [x - r_v]^{(2-\mu)} - 2(\mu - 1) \right\}.$$

Organizando os termos constantes,

$$m = \frac{A(\lambda, \mu)}{\lambda - 2r_v} \underbrace{\ell_0^{(1-\mu)/2} \frac{\sin[\pi(\mu - 1)/2]}{\pi(\mu - 1)(2 - \mu)}}_{C_\mu} \int_{r_v}^{\lambda - r_v} dx [\lambda - x - r_v]^{(\mu-1)/2} [x - r_v]^{(\mu-1)/2} \times \quad (3.31)$$

$$\times \left\{ [\lambda - x - r_v]^{(2-\mu)} + [x - r_v]^{(2-\mu)} - 2(\mu - 1) \right\},$$

e distribuindo o produto dentro da integral,

$$m = \frac{A(\lambda, \mu)C_\mu}{\lambda - 2r_v} \int_{r_v}^{\lambda - r_v} dx \left\{ [(\lambda - r_v - x)(x - r_v)]^{(\mu-1)/2} [\lambda - r_v - x]^{(2-\mu)} + \quad (3.32)$$

$$+ [(\lambda - r_v - x)(x - r_v)]^{(\mu-1)/2} [x - r_v]^{(2-\mu)} + \right.$$

$$\left. - 2 [(\lambda - r_v - x)(x - r_v)]^{(\mu-1)/2} (\mu - 1) \right\},$$

de modo que, substituindo em ψ , obtemos

$$\psi = g/\alpha - \frac{A(\lambda, \mu)C_\mu}{\lambda - 2r_v} \int_{r_v}^{\lambda - r_v} dx [(\lambda - r_v - x)(x - r_v)]^{(\mu-1)/2} [\lambda - r_v - x]^{(2-\mu)} + \quad (3.33)$$

$$- \frac{A(\lambda, \mu)C_\mu}{\lambda - 2r_v} \int_{r_v}^{\lambda - r_v} dx [(\lambda - r_v - x)(x - r_v)]^{(\mu-1)/2} [x - r_v]^{(2-\mu)} +$$

$$+ 2 \frac{A(\lambda, \mu)C_\mu}{\lambda - 2r_v} \int_{r_v}^{\lambda - r_v} dx [(\lambda - r_v - x)(x - r_v)]^{(\mu-1)/2} (\mu - 1).$$

Podemos ainda reescrever

$$\psi = g/\alpha - \frac{A(\lambda, \mu)C_\mu}{\lambda - 2r_v} \int_{r_v}^{\lambda - r_v} dx (\lambda - r_v - x)^{\frac{1}{2}(3-\mu)} (x - r_v)^{\frac{1}{2}(\mu-1)} + \quad (3.34)$$

$$- \frac{A(\lambda, \mu)C_\mu}{\lambda - 2r_v} \int_{r_v}^{\lambda - r_v} dx (\lambda - r_v - x)^{\frac{1}{2}(\mu-1)} (x - r_v)^{\frac{1}{2}(3-\mu)} +$$

$$+ 2 \frac{A(\lambda, \mu)C_\mu}{\lambda - 2r_v} \int_{r_v}^{\lambda - r_v} dx [(\lambda - r_v - x)(x - r_v)]^{(\mu-1)/2} (\mu - 1),$$

notando que no ponto crítico $g = \alpha m(\lambda_c, \mu)$, de modo que

$$\psi(\lambda, \mu) = m(\lambda_c, \mu) - m(\lambda, \mu). \quad (3.35)$$

Após realizarmos as integrações acima, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\psi}{C_\mu} &= \frac{1}{8} \frac{A(\lambda_c, \mu) (\lambda_c - 2r_v)^2 \pi (\mu - 1) (\mu - 3)}{\lambda_c - 2r_v \cos\left(\frac{1}{2}\pi\mu\right)} + \\ &+ \frac{1}{8} \frac{A(\lambda_c, \mu) (\lambda_c - 2r_v)^2 \pi (\mu - 1) (\mu - 3)}{\lambda_c - 2r_v \cos\left(\frac{1}{2}\pi\mu\right)} + \\ &- \frac{A(\lambda_c, \mu) (\mu - 1) (\lambda_c - 2r_v)^\mu 2^{-\mu} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\right)}{\lambda_c - 2r_v \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\mu\right)} + \\ &- \lambda_c \leftrightarrow \lambda. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Simplificando,

$$\begin{aligned} \frac{\psi}{C_\mu} &= \frac{1}{4} A(\lambda_c, \mu) (\lambda_c - 2r_v) \underbrace{\frac{\pi (\mu - 1) (\mu - 3)}{\cos\left(\frac{1}{2}\pi\mu\right)}}_{K_\mu} + \\ &+ A(\lambda_c, \mu) (\lambda_c - 2r_v)^{\mu-1} (1 - \mu) \underbrace{\frac{2^{-\mu} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\mu\right)}}_{D_\mu} + \\ &- \lambda_c \leftrightarrow \lambda, \end{aligned} \quad (3.37)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \psi(\lambda, \mu) &= \frac{1}{4} (\lambda_c - 2r_v) A(\lambda_c, \mu) C_\mu K_\mu + \\ &+ (\lambda_c - 2r_v)^{\mu-1} A(\lambda_c, \mu) C_\mu D_\mu + \\ &- \frac{1}{4} (\lambda - 2r_v) A(\lambda, \mu) C_\mu K_\mu + \\ &- (\lambda - 2r_v)^{\mu-1} A(\lambda, \mu) C_\mu D_\mu. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Vamos agora analisar o parâmetro de ordem ψ nas vizinhanças do ponto crítico, considerando a variável

$$\varepsilon \equiv \frac{\lambda_c - 2r_v}{g} - \frac{\lambda - 2r_v}{g}, \quad (3.39)$$

com $\varepsilon \rightarrow 0$, tal que

$$\frac{\lambda_c - 2r_v}{g} = \varepsilon + \frac{\lambda - 2r_v}{g}.$$

Como o fator $A(\lambda, \mu)$ é uma função suave de λ , então a proximidade do ponto crítico permite expandi-lo em série de Taylor, de modo que

$$A(\lambda, \mu) = A(\lambda_c, \mu) + \left. \frac{\partial A}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_c} \cdot (\lambda - \lambda_c) + \dots,$$

onde definimos $A_\mu \equiv A(\lambda_c, \mu)$. Assim, desprezando termos de mais alta ordem em $\lambda - \lambda_c$ próximo ao ponto crítico, escrevemos

$$\begin{aligned} \psi(\lambda, \mu) = & \frac{1}{4} (\lambda_c - \lambda) A_\mu C_\mu K_\mu + \\ & + [(\lambda_c - 2r_v)^{\mu-1} - (\lambda - 2r_v)^{\mu-1}] A_\mu C_\mu D_\mu. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Multiplicando ψ por $1 = g^{(\mu-1)}g^{-(\mu-1)}$,

$$\begin{aligned} \psi(\lambda, \mu) = & \frac{1}{4} \frac{g^\mu}{g^{(\mu-1)}} \frac{(\lambda_c - \lambda)}{g} A_\mu C_\mu K_\mu + \\ & + \left[\frac{(\lambda_c - 2r_v)^{\mu-1}}{g^{(\mu-1)}} - \frac{(\lambda - 2r_v)^{\mu-1}}{g^{(\mu-1)}} \right] g^{(\mu-1)} A_\mu C_\mu D_\mu, \end{aligned} \quad (3.41)$$

de modo que, reescrevendo ψ para identificarmos ε ,

$$\begin{aligned} \psi(\lambda, \mu) = & \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\lambda_c - 2r_v}{g} \right) - \left(\frac{\lambda - 2r_v}{g} \right) \right] g A_\mu C_\mu K_\mu + \\ & + \left[\left(\frac{\lambda_c - 2r_v}{g} \right)^{\mu-1} - \left(\frac{\lambda - 2r_v}{g} \right)^{\mu-1} \right] g^{(\mu-1)} A_\mu C_\mu D_\mu, \end{aligned} \quad (3.42)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \psi(\lambda, \mu) = & \left(\frac{1}{4} g A_\mu C_\mu K_\mu \right) \varepsilon + \\ & + \left[\left(\varepsilon + \frac{\lambda - 2r_v}{g} \right)^{\mu-1} - \left(\frac{\lambda - 2r_v}{g} \right)^{\mu-1} \right] g^{(\mu-1)} A_\mu C_\mu D_\mu, \end{aligned} \quad (3.43)$$

levando a

$$\begin{aligned} \psi(\lambda, \mu) = & \left(\frac{1}{4} g A_\mu C_\mu K_\mu \right) \varepsilon + \\ & + \left[\left(\underbrace{\frac{\lambda - 2r_v}{g}}_a \right)^{\mu-1} \left(1 + \varepsilon \frac{g}{\lambda - 2r_v} \right)^{\mu-1} - \left(\frac{\lambda - 2r_v}{g} \right)^{\mu-1} \right] g^{(\mu-1)} A_\mu C_\mu D_\mu. \end{aligned} \quad (3.44)$$

A equação acima pode ser expressa na forma

$$\begin{aligned} \psi(\lambda, \mu) = & \left(\frac{1}{4} g A_\mu C_\mu K_\mu \right) \varepsilon + \\ & + \left[a^{\mu-1} \left(1 + \frac{1}{a} \varepsilon \right)^{\mu-1} - a^{\mu-1} \right] g^{(\mu-1)} A_\mu C_\mu D_\mu. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Tomando o limite em que $\lambda \rightarrow \lambda_c$, tal que $a \rightarrow a_c$ e $\varepsilon \rightarrow 0$, podemos expandir em série de Taylor,

$$\left(1 + \frac{1}{a} \varepsilon \right)^{\mu-1} = 1 + \frac{1}{a_c} (\mu - 1) \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

tal que

$$\begin{aligned} \psi(\lambda, \mu) = & \left(\frac{1}{4} g A_\mu C_\mu K_\mu \right) \varepsilon + \\ & + \left[a_c^{\mu-1} + a_c^{\mu-1} \frac{1}{a_c} (\mu - 1) \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) - a_c^{\mu-1} \right] g^{(\mu-1)} A_\mu C_\mu D_\mu. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Retornando acima o valor de a_c ,

$$\begin{aligned} \psi(\varepsilon, \mu) = & \frac{1}{4} g A_\mu C_\mu K_\mu \varepsilon + \\ & + g^{(\mu-1)} A_\mu C_\mu D_\mu \left(\frac{\lambda_c - 2r_v}{g} \right)^{\mu-2} (\mu - 1) \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (3.47)$$

e reorganizando os termos,

$$\begin{aligned} \psi(\varepsilon, \mu) = & \left[\frac{1}{4} g A_\mu C_\mu K_\mu + g^{(\mu-1)} A_\mu C_\mu D_\mu \left(\frac{\lambda_c - 2r_v}{g} \right)^{\mu-2} (\mu - 1) \right] \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \psi \sim & \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Portanto, na vizinhança do ponto crítico o parâmetro de ordem ψ comporta-se assintoticamente como [Sta71]

$$\psi \sim |\varepsilon|^\beta, \quad \text{com } \beta = 1 \quad \text{e } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.49)$$

Dessa forma, determinamos nosso primeiro expoente crítico associado ao parâmetro de ordem que descreve a transição de fase para o estado de extinção do *forager*.

No capítulo 4 veremos que a definição de ψ não é a única possível para o parâmetro de ordem que governa a transição, de modo que uma outra quantidade (a taxa de sobrevivência, definida na seção 3.3) também possuirá as mesmas características gerais. Analogamente, determinaremos o seu expoente crítico associado, assim como outros expoentes críticos que caracterizam a transição de fase. No capítulo 4 apresentaremos também as curvas do ganho energético do nosso modelo e faremos a comparação direta com as do modelo de Faustino *al.* [Fdd⁺07, FLR⁺12].

Antes, porém, comentaremos na seção a seguir sobre a eficiência das buscas aleatórias quando considerações de energia são levadas em conta, em contraste com a eficiência estatística, Eq. (1.79), em que tais fatores não fazem parte da análise das caminhadas de busca [VBH⁺99].

3.2 Eficiência Energética e Entropia das Buscas Aleatórias

A discussão realizada no capítulo 1 sobre a eficiência das buscas, baseada na quantidade η definida estatisticamente [VBH⁺99], Eq. (1.79), não leva em conta a influência dos fenômenos dissipativos presentes ao longo da caminhada aleatória. Para contornar este fato, introduzimos, em acordo com a Ref. [MC86], uma função que descreve o custo energético associado à locomoção do *forager*, $f(\langle L \rangle)$, caracterizada por ser monotonicamente crescente com a distância média percorrida entre dois sítios, $\langle L \rangle$. Nesse sentido, uma nova eficiência energética pode ser agora definida como

$$\eta_{\mathcal{E}} = \frac{\mathcal{E}_{N_f}}{L_{\text{tot}, N_f}}, \quad (3.50)$$

onde \mathcal{E}_{N_f} e L_{tot, N_f} denotam, respectivamente, a energia média acumulada e o comprimento médio total de uma busca que encontra N_f sítios. Novamente, para efeito de estudo da eficiência $\eta_{\mathcal{E}}$, podemos aproximar $L_{\text{tot}, N_f} = N_f \langle L \rangle$ e, similarmente, $\mathcal{E}_{N_f} = N_f E$, tal que

$$E = g - f(\langle L \rangle) \quad (3.51)$$

é a energia média acumulada entre o encontro sucessivo de dois sítios. Neste caso, como vimos, surge o vínculo natural $\mathcal{E}_{N_f} > 0$; isto é, para que o *forager* permaneça vivo a sua energia acumulada ao longo da busca deve se manter positiva.

A partir da comparação com a Eq. (1.79), escrevemos

$$\eta_{\mathcal{E}} = (g - f)\eta, \quad (3.52)$$

em que $\eta = 1/\langle L \rangle$ é a eficiência estatística. A extremização de $\eta_{\mathcal{E}}$ implica em $F(\eta)d\eta/d\mu = 0$, com $F(\eta) = g - f - \eta \frac{df}{d\eta}$, onde consideramos $f = f(\eta)$. Uma vez que $f(\eta)$ é monotonicamente crescente com $\langle L \rangle = 1/\eta$, então $df/d\eta < 0$. Portanto, $F > 0$ e o extremo de $\eta_{\mathcal{E}}$ coincide com o da eficiência estatística de η . Finalmente,

$$d^2\eta_{\mathcal{E}}/d\mu^2 < 0 \quad (3.53)$$

nos pontos extremos, caracterizando de fato uma eficiência energética máxima. O resultado acima para a eficiência energética $\eta_{\mathcal{E}}$ indica que a introdução de uma função de custo locomotivo arbitrária não altera os resultados para os valores de μ_{opt} obtidos via a Eq. (1.79) para a eficiência estatística, mas a sua presença pode limitar significativamente o intervalo de valores de μ aceitáveis devido ao vínculo $\mathcal{E}_{N_f} > 0$ [RBd⁺03].

Energia e entropia são conceitos centrais em Física Estatística. Também o são, portanto, no contexto das buscas aleatórias. Nesse caso, como discutimos, a energia é importante devido aos ganhos e custos energéticos associados aos encontros de alimento e à locomoção, determinados a partir da fisiologia do próprio *forager*. Por outro lado, a entropia está associada com a desordem relativa ao meio e a informação disponível (por exemplo, a entropia de Shannon [VdLRS11]). No contexto biológico, os organismos em geral têm sistemas nervosos que permitem o aprendizado de novos comportamentos em face às informações obtidas sobre as características do ambiente. Nesse sentido, a memória do caminhante relativa ao espaço de busca torna-se também um ingrediente importante. Observamos, contudo, que devido à complexidade do problema ainda não foi desenvolvida uma teoria geral para compreender como a informação pode interagir e modificar os padrões de comportamento do *forager* [VdLRS11].

Passaremos, agora, ao estudo da taxa de sobrevivência do *forager* ao longo da busca, uma quantidade essencial na descrição estatística do problema e que também terá papel fundamental na transição de fase para o estado absorvente.

3.3 Taxa de Sobrevivência do *Forager*

A taxa de sobrevivência do *forager* num processo de busca aleatória com um estado absorvente (morte) é certamente uma quantidade de grande interesse a ser calculada. No presente contexto, a taxa de sobrevivência é definida como a probabilidade, $\Gamma(t)$ ou $\Gamma(N_f)$, de que o *forager* ainda se encontre no estado ativo após um tempo t ou um número N_f de encontros de sítios-alvo. Como veremos a seguir, a taxa de sobrevivência possui algumas características comuns ao parâmetro de ordem ψ com respeito ao ponto crítico: na fase absorvente Γ é nula, enquanto que na fase ativa o seu valor é finito. Nesta seção nós determinaremos analiticamente a taxa de sobrevivência a partir de um mapeamento realizado entre a caminhada aleatória real do *forager* e uma “caminhada aleatória” em que, ao invés de passos reais de comprimento ℓ_j , são executados “passos” de “comprimento” (variável aleatória energia) E_j , correspondendo à energia acumulada entre os encontros dos $(j - 1)$ -ésimo e j -ésimo sítios.

Dois conceitos importantes para o cálculo da taxa de sobrevivência do *forager* são as respectivas probabilidades $P(\mathcal{E}, t)$ e $F(\mathcal{E}, t)$ de encontrar o *forager* com energia \mathcal{E} no instante de tempo t e de encontrá-lo *pela primeira vez* com o valor de energia \mathcal{E} no tempo t . Notamos, portanto, que a absorção (morte) do *forager* corresponde a um *problema de primeira passagem* pelo estado de ganho energético nulo após um tempo t . Por força da analogia com as caminhadas aleatórias tradicionais, no que se segue a variável tempo t apenas designará o número de encontros de sítios pelo *forager*, N_f .

Iniciamos o cálculo da taxa de sobrevivência $\Gamma(t)$ estabelecendo a conexão analítica entre $P(\mathcal{E}, t)$ e $F(\mathcal{E}, t)$. Na função $P(\mathcal{E}, t)$ o valor de energia \mathcal{E} pode ter sido atingido no instante t pela primeira vez, ou então o *forager* pode ter retornado ao valor \mathcal{E} após tê-lo atingido uma ou mais vezes:

$$P(\mathcal{E}, t) = \delta_{\mathcal{E}, \mathcal{E}_0} \delta_{t, 0} + \sum_{t' \leq t} F(\mathcal{E}, t') P(\mathcal{E}_0, t - t'). \quad (3.54)$$

O primeiro termo acima representa o valor no instante inicial $t_0 = 0$ da energia do *forager* ao começar a busca, \mathcal{E}_0 . Até o instante $t' \leq t$ a sua energia acumulada atinge o valor \mathcal{E} pela primeira vez com probabilidade determinada por $F(\mathcal{E}, t')$. Para $t - t'$ existe uma infinita multiplicidade de retornos ao valor \mathcal{E} partindo de \mathcal{E}_0 , isto é, o próximo termo na expressão acima é dado então pela soma de $F(\mathcal{E}, t') P(\mathcal{E}_0, t - t')$ sobre todos os tempos t' possíveis [NCFY01, Red01].

Para inverter a relação acima vamos utilizar as funções geratrizes,

$$P(\mathcal{E}, z) = \sum_{t=0}^{\infty} P(\mathcal{E}, t) z^t \quad \text{e} \quad F(\mathcal{E}, z) = \sum_{t=0}^{\infty} F(\mathcal{E}, t) z^t, \quad (3.55)$$

de modo que

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{\infty} P(\mathcal{E}, t) z^t &= \sum_{t=0}^{\infty} \delta_{\mathcal{E}, \mathcal{E}_0} \delta_{t,0} z^t + \sum_{t' \leq t} \sum_{t=0}^{\infty} F(\mathcal{E}, t') P(\mathcal{E}_0, t - t') z^t \\ &= \delta_{\mathcal{E}, \mathcal{E}_0} + \sum_{t' \leq t} \sum_{t=0}^{\infty} F(\mathcal{E}, t') P(\mathcal{E}_0, t - t') z^{t-t'+t'} \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\dagger}{=} \delta_{\mathcal{E}, \mathcal{E}_0} + \sum_{t' \leq t} \sum_{t=0}^{\infty} F(\mathcal{E}, t') z^{t'} P(\mathcal{E}_0, t - t') z^{t-t'} \\ &= \delta_{\mathcal{E}, \mathcal{E}_0} + \sum_{t'=0}^{\infty} \sum_{\tau=0}^{\infty} F(\mathcal{E}, t') z^{t'} P(\mathcal{E}_0, \tau) z^{\tau}, \end{aligned} \quad (3.57)$$

ou seja,

$$P(\mathcal{E}, z) = \delta_{\mathcal{E}, \mathcal{E}_0} + P(\mathcal{E}_0, z) F(\mathcal{E}, z). \quad (3.58)$$

Resolvendo para $F(\mathcal{E}, z)$ [NCFY01, Red01], temos para $\mathcal{E} \neq \mathcal{E}_0$ que

$$F(\mathcal{E}, z) = \frac{P(\mathcal{E}, z)}{P(\mathcal{E}_0, z)}, \quad (3.59)$$

e para $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$,

$$F(\mathcal{E}_0, z) = 1 - \frac{1}{P(\mathcal{E}_0, z)}. \quad (3.60)$$

Portanto, o nosso objetivo a seguir é calcular a função $P(\mathcal{E}, t)$. Para tanto, vamos traçar um paralelo entre um caminhante aleatório tradicional, com passos efetuados no espaço real, e uma “caminhada aleatória” de “passos de energia”, como mostra a Fig. 3.4.

Começamos considerando o *forager* localizado a uma distância inicial x_1 do primeiro sítio a ser procurado, sorteada a partir da densidade de probabilidades $\pi(x_1) = \pi(x)$.

[†]Similar à mudança de coordenadas da integração sobre duas áreas iguais limitadas por uma reta $t = t'$ ($y = x$): denotando por A a área acima da reta e por B a área abaixo, e passando do somatório para a integração, então

$$\sum_{t' \leq t} \sum_{t=0}^{\infty} \rightarrow \int_0^t dt' \int_0^{\infty} dt \xrightarrow{A=B} \int_0^{\infty} dt' \int_{t'}^{\infty} dt \xrightarrow{\tau=t-t'} \int_0^{\infty} dt' \int_0^{\infty} d\tau \rightarrow \sum_{t'=0}^{\infty} \sum_{\tau=0}^{\infty}.$$

Como sabemos, esta posição inicial do *forager* determina o comprimento médio percorrido até o primeiro encontro, $\langle L \rangle(x_1)$, que por sua vez leva à energia média acumulada entre o ponto de partida e o encontro do primeiro sítio, Eq. (3.17) com $N_f = 1$: $E_1 = g - \alpha \langle L \rangle(x_1)$. De modo similar, dada uma sequência aleatória e estatisticamente independente de distâncias iniciais sorteadas até o encontro de N_f sítios,

$$\{x_i\} = \{x_1, x_2, \dots, x_{N_f}\}, \quad (3.61)$$

teremos uma sequência aleatória de energias acumuladas entre dois encontros sucessivos, diretamente associada à sequência $\{x_i\}$, isto é

$$\{E_i\} = \{E_1, E_2, \dots, E_{N_f}\}. \quad (3.62)$$

Observamos que a soma $\mathcal{E}_{N_f}(\{x_i\}) = \mathcal{E}_0 + \sum_{i=1}^{N_f} E_i$ corresponde à energia média acumulada pelo *forager* até o encontro de N_f sítios, Eq. (3.17). É interessante notar que a sequência $\{E_i\}$ também pode ser interpretada como uma sequência de “passos de energia” realizados por um caminhante aleatório. Em particular, segundo esta analogia \mathcal{E}_{N_f} representa a “posição” do caminhante após N_f “passos”. Nesse sentido, como os passos de energia são estatisticamente independentes e têm tamanho bem determinado, isto é, possuem média e variância finitas, então para um número suficientemente grande de encontros, $N_f \gg 1$, a soma \mathcal{E}_{N_f} será distribuída por uma gaussiana, de acordo com o Teorema do Limite Central. De fato, como vimos na seção 1.3, ao considerarmos um caminhante aleatório tradicional iniciando a sua caminhada a partir da posição x_0 , com passos de comprimento s_i estatisticamente independentes sorteados com probabilidade $\omega(s_i)ds_i$, com $\omega(s_i) = \omega(s)$, então a sua posição após $N \gg 1$ passos, $x_N = x_0 + \sum_{i=1}^N s_i$, será distribuída de acordo com a gaussiana (1.29):

$$P(x_N, N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N \sigma_s^2}} \exp \left[-\frac{1}{2N \sigma_s^2} (x_N - x_0 - N\bar{s})^2 \right], \quad (3.63)$$

tal que $\sigma_s^2 = \overline{(\Delta s)^2} = \bar{s}^2 - \bar{s}^2$ representa a variância da variável comprimento de um passo simples. Em analogia com o caminhante aleatório tradicional, ao fazermos as associações $\omega(s_i) \rightarrow \omega(E_i)$, com $\omega(E_i) = \omega(E)$, e que $x_N \rightarrow \mathcal{E}_{N_f}$, escrevemos

$$P(\mathcal{E}_{N_f}, N_f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_f \sigma_E^2}} \exp \left[-\frac{1}{2N_f \sigma_E^2} (\mathcal{E}_{N_f} - \mathcal{E}_0 - N_f \bar{E})^2 \right], \quad (3.64)$$

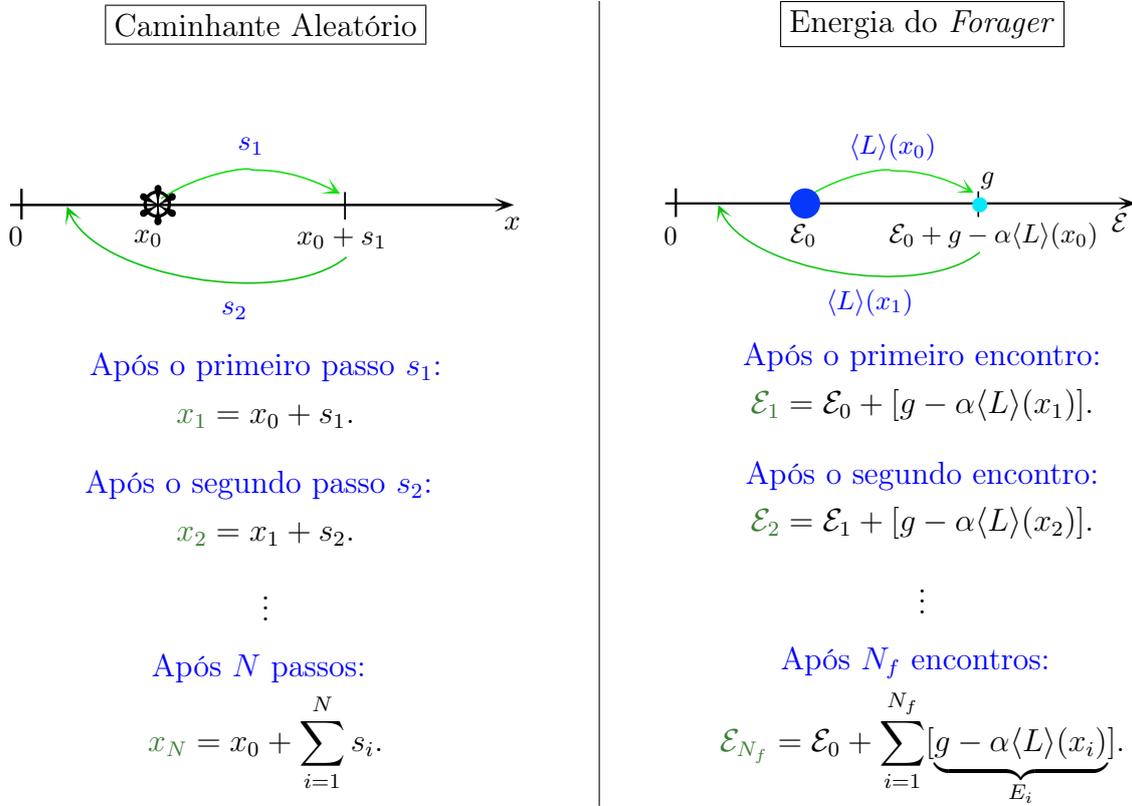


Figura 3.4: Mapeamento da dinâmica energética do *forager*, partindo de um valor inicial \mathcal{E}_0 (lado direito), em uma caminhada aleatória tradicional partindo de x_0 (lado esquerdo).

onde $\sigma_E^2 = \overline{E^2} - \overline{E}^2$, com

$$\overline{E} = \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} E \omega(E) dE, \quad (3.65)$$

onde E_{\min} e E_{\max} denotam os valores mínimo e máximo de E , respectivamente. Levando em conta que E_i é uma função de $\langle L \rangle(x_i)$, e que $\langle L \rangle(x_i)$ é distribuído para todo i de acordo com a densidade de probabilidades $f(\langle L \rangle)$, então

$$\overline{E} = \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} E f(\langle L \rangle) \left| \frac{d\langle L \rangle}{dE} \right| dE. \quad (3.66)$$

Na equação acima relembramos que os colchetes angulados denotam a média sobre as configurações de caminhadas que partem de uma dada posição inicial, enquanto que a sobrelinha representa a média sobre a distribuição de posições iniciais das buscas.

O resultado acima pode ser obtido escrevendo a probabilidade de que a energia média acumulada entre dois encontros esteja entre E e $E + dE$, $\omega(E)dE$, em função da probabi-

lidade correspondente de que o comprimento médio percorrido entre dois encontros esteja entre $\langle L \rangle$ e $\langle L \rangle + d\langle L \rangle$:

$$f(\langle L \rangle)d\langle L \rangle = \int_{d\langle L \rangle} \omega(E)dE. \quad (3.67)$$

A integral acima soma sobre todos os possíveis valores da energia entre E e $E + dE$ que levem ao valor do percurso entre $\langle L \rangle$ e $\langle L \rangle + d\langle L \rangle$:

$$f(\langle L \rangle)d\langle L \rangle = \int_{\langle L \rangle}^{\langle L \rangle + d\langle L \rangle} \omega(E) \left| \frac{dE}{d\langle L \rangle} \right| d\langle L \rangle, \quad (3.68)$$

ou seja,

$$f(\langle L \rangle)d\langle L \rangle = \omega(E) \left| \frac{dE}{d\langle L \rangle} \right| d\langle L \rangle, \quad (3.69)$$

de onde obtemos

$$\omega(E) = f(\langle L \rangle) \left| \frac{d\langle L \rangle}{dE} \right|, \quad (3.70)$$

em concordância com a Eq. (3.66).

Um cálculo similar pode ser realizado para explicitar a conexão entre as funções densidade de probabilidades associadas às variáveis $\langle L \rangle$ e x . De fato, uma vez que $\langle L \rangle = \langle L \rangle(x)$ e $\pi(x)$ denota a distribuição de posições iniciais x após cada encontro, então

$$f(\langle L \rangle) = 2\pi(x) \left| \frac{dx}{d\langle L \rangle} \right|, \quad r_v < x \leq \lambda/2. \quad (3.71)$$

Acima levamos em conta a simetria do espaço de busca discutida na seção 3.1. Com um pouco mais de detalhe, escrevemos inicialmente que

$$\overline{\langle L \rangle} = \int_{\langle L \rangle_{\min}}^{\langle L \rangle_{\max}} \langle L \rangle f(\langle L \rangle) d\langle L \rangle, \quad (3.72)$$

em que $\langle L \rangle_{\min}$ e $\langle L \rangle_{\max}$ denotam os valores mínimo e máximo de $\langle L \rangle(x)$, respectivamente. De modo similar ao cálculo apresentado acima, notamos que

$$f(\langle L \rangle)d\langle L \rangle = \int_{[\langle L \rangle, \langle L \rangle + d\langle L \rangle]} \pi(x') dx' = \int_{\langle L \rangle}^{\langle L \rangle + d\langle L \rangle} \pi(x') \left| \frac{d\langle L \rangle}{dx'} \right|^{-1} d\langle L \rangle. \quad (3.73)$$

Acima, o intervalo no limite inferior da primeira integral indica que $f(\langle L \rangle)$ somente contribui se o valor da variável x' estiver associado a um valor de $\langle L \rangle$ no intervalo $[\langle L \rangle, \langle L \rangle + d\langle L \rangle]$. Por outro lado, devido à simetria do espaço de busca, como os ca-

minhantes que iniciam a busca em x são estatisticamente indistinguíveis daqueles que a iniciam em $\lambda - x$ (em ambos os casos os sítios mais próximo e mais distante estão a distâncias x e $\lambda - x$ do ponto inicial), então $\langle L \rangle(x) = \langle L \rangle(\lambda - x)$. Como consequência, qualquer valor de $\langle L \rangle$ pode sempre ser obtido a partir de duas posições iniciais x distintas, uma em cada metade do intervalo de busca, como mostra a Fig. 3.2. Então, se denotarmos $x' = x_A$ e $x' = x_B$, com $r_v < x_A \leq \lambda/2$ e $\lambda/2 \leq x_B < \lambda - r_v$, tal que $x_A = \lambda - x_B$, podemos escrever

$$f(\langle L \rangle)d\langle L \rangle = \left[\left(\pi(x') \left| \frac{d\langle L \rangle}{dx'} \right|^{-1} \right)_{x'=x_A} + \left(\pi(x') \left| \frac{d\langle L \rangle}{dx'} \right|^{-1} \right)_{x'=x_B} \right] d\langle L \rangle, \quad (3.74)$$

tal que, quando substituimos a expressão acima na Eq. (3.72), obtemos

$$\overline{\langle L \rangle} = \int_{r_v}^{\lambda/2} \langle L \rangle(x_A) \pi(x_A) dx_A + \int_{\lambda/2}^{\lambda - r_v} \langle L \rangle(x_B) \pi(x_B) dx_B. \quad (3.75)$$

Notando que os subíndices A e B são mudos, encontramos

$$\overline{\langle L \rangle} = \int_{r_v}^{\lambda - r_v} \langle L \rangle(x) \pi(x) dx = 2 \int_{r_v}^{\lambda/2} \langle L \rangle(x) \pi(x) dx, \quad (3.76)$$

em que $\pi(x) = \pi(\lambda - x)$ devido à simetria mencionada.

Sob estas considerações, podemos retomar a Eq. (3.66) e reescrevê-la na forma

$$\begin{aligned} E(x) &= g - \alpha \langle L \rangle(x), \\ \overline{E} &= g - 2\alpha \int_{r_v}^{\lambda/2} \langle L \rangle(x) \pi(x) dx, \end{aligned} \quad (3.77)$$

ou, usando a definição dada à Eq. (3.21),

$$\overline{E} = g - \alpha m. \quad (3.78)$$

Finalmente, reescrevemos a distribuição gaussiana $P(\mathcal{E}_{N_f}, N_f)$ em termos de m como

$$P(\mathcal{E}_{N_f}, N_f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_f \sigma_E^2}} \exp \left[-\frac{1}{2N_f \sigma_E^2} (\mathcal{E}_{N_f} - \mathcal{E}_0 - N_f g + \alpha N_f m)^2 \right]. \quad (3.79)$$

No ponto crítico, em que $g = \alpha m$ (ou $\lambda = \lambda_c$ para g fixo), a gaussiana acima permanece centrada em \mathcal{E}_0 para qualquer valor de N_f , apenas se alargando à medida que mais sítios vão sendo encontrados. Em outras palavras, nesta situação há uma grande probabilidade

de que o *forager* ingresse no estado absorvente, uma vez o ganho energético é dado por $\psi \propto \mathcal{E} - \mathcal{E}_0$. Por outro lado, para $g > \alpha m$ (regime de abundância de recursos, $\lambda < \lambda_c$) a gaussiana se desloca no sentido de energias acumuladas positivas à medida que N_f cresce, aumentando também a probabilidade de sobrevivência do *forager*, como pode ser visto na

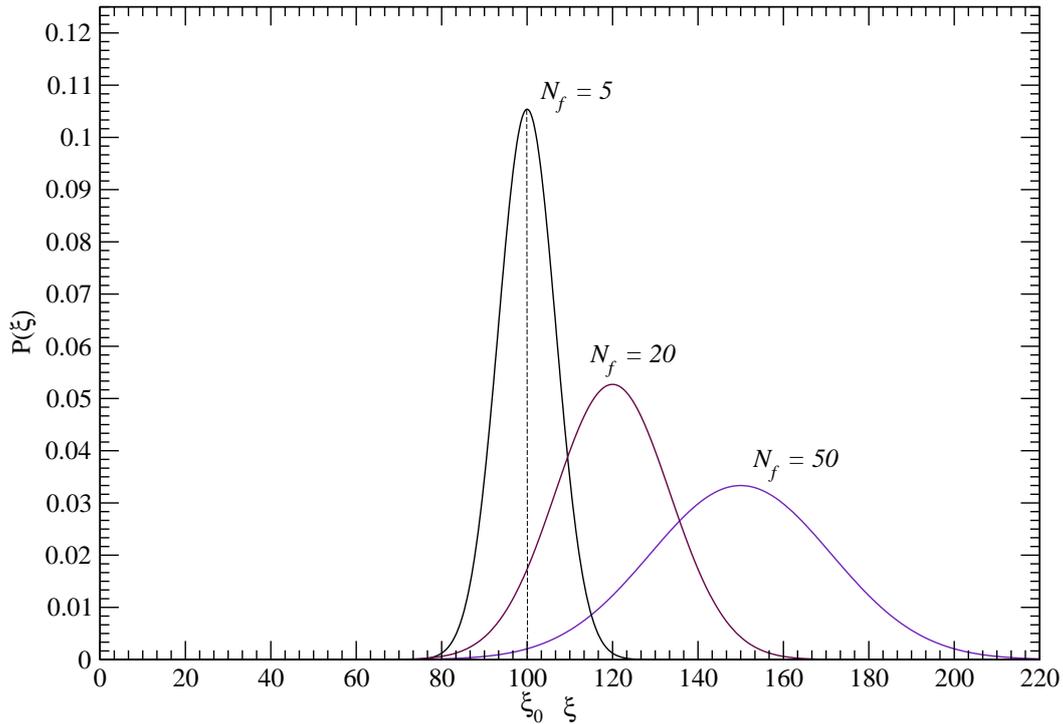


Figura 3.5: Probabilidade de que o *forager* tenha energia acumulada \mathcal{E} (com a notação $\mathcal{E} \equiv \xi$) após N_f encontros. Utilizamos os parâmetros $\mathcal{E}_0 = 100$, α e σ_E unitários, $g = \alpha m$ para $N_f = 5$ e $g > \alpha m$ para $N_f = 20, 50$.

desloca com o aumento de N_f no sentido de energias negativas, aumentando rapidamente a probabilidade de que o *forager* seja absorvido, como mostra a Fig. 3.6.

Por fim, uma vez que obtivemos a probabilidade da energia acumulada em função do número de encontros, $P(\mathcal{E}_{N_f}, N_f)$, podemos retomar o cálculo da taxa de sobrevivência do *forager* no instante t , $\Gamma(t)$, notando que a associação $N_f \leftrightarrow t$ representa uma descrição pictórica do tempo para a realização de uma busca com N_f encontros. Desse modo, para um número suficientemente grande de encontros, $N_f \gg 1$ ou $t \gg 1$, podemos considerar a gaussiana em função do parâmetro de ordem ψ fazendo $\mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = \alpha t \psi$:

$$P(\psi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t \sigma_E^2}} \exp \left[-\frac{1}{2t \sigma_E^2} (\alpha t \psi - t \bar{E})^2 \right]. \quad (3.80)$$

3.3. TAXA DE SOBREVIVÊNCIA DO *Forager*

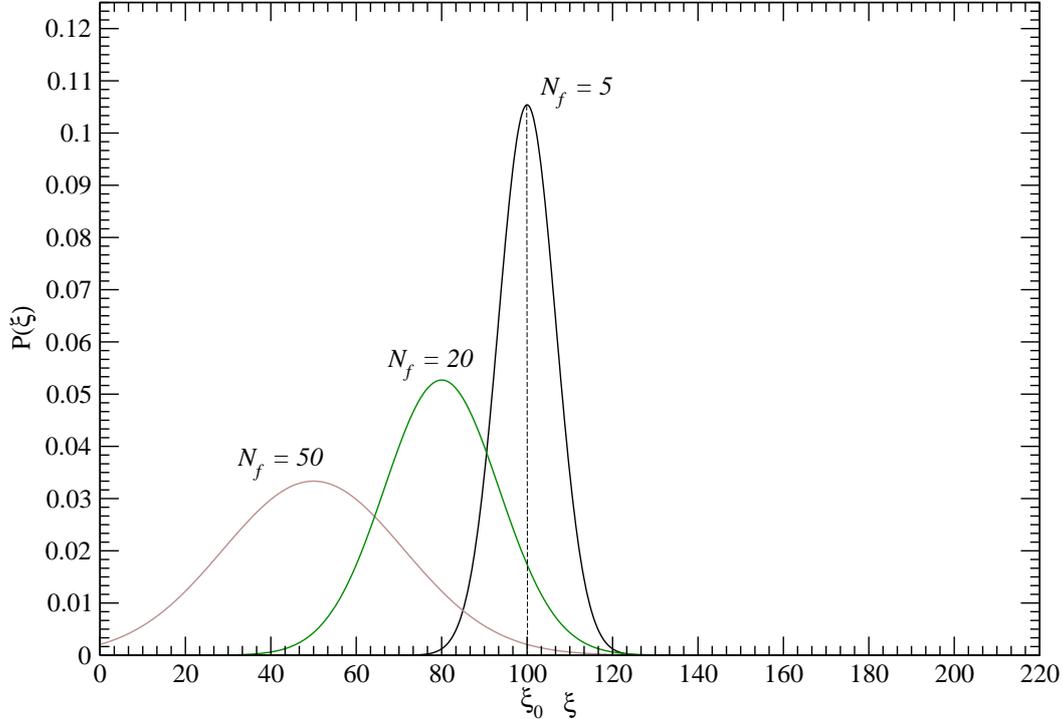


Figura 3.6: Probabilidade de que o *forager* tenha energia acumulada \mathcal{E} (com a notação $\mathcal{E} \equiv \xi$) após N_f encontros. Utilizamos os parâmetros $\mathcal{E}_0 = 100$, α e σ_E unitários, $g = \alpha m$ para $N_f = 5$ e $g < \alpha m$ para $N_f = 20, 50$.

Assim, na vizinhança do ponto crítico, com $\lambda \rightarrow \lambda_c$, $\bar{E} \rightarrow 0$ e $\psi \rightarrow 0$, obtemos o comportamento assintótico de $P(\psi, t)$ para $t \gg 1$:

$$P(\psi, t) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi t \sigma_E^2}}. \quad (3.81)$$

Podemos, então, considerar a probabilidade de primeira passagem pela condição de ganho energético nulo, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$, como sendo uma probabilidade de primeiro retorno ao valor $\psi = 0$, tal que $F(\mathcal{E}_0, z) \rightarrow F(\psi = 0, z)$ na Eq. (3.60).

Partindo das funções geratrizes, Eq. (3.55), vamos considerar a variável t contínua e passar os somatórios para integrais. Em analogia com a transformada de Laplace, vamos reescrever $z^t = e^{-t \ln(1/z)}$, com $s = \ln(1/z)$, tal que possamos considerar o limite superior de integração como $\zeta = s^{-1} = [\ln(1/z)]^{-1}$ [Red01]. Assim, para obtermos o comportamento assintótico para tempos grandes, basta tomarmos o limite $s \rightarrow 0$. Por considerar ζ como um limite de corte superior, introduzimos erros numéricos da ordem de $\mathcal{O}(1)$, que, apesar disso, preservam o comportamento assintótico da taxa de sobrevivência [Red01]. Dessa maneira, o tempo de corte superior ζ está relacionado com o nosso critério de parada da

busca após o encontro de um número máximo de sítios. Portanto, escrevendo a partir da definição das funções geratrizes, Eq. (3.55), no limite temporal contínuo,

$$P(\psi, z) = \int_0^\infty P(\psi, t)z^t dt, \quad \text{e} \quad F(\psi, z) = \int_0^\infty F(\psi, t)z^t dt. \quad (3.82)$$

Tanto para $F(\psi, z)$ como para $P(\psi, z)$, encontramos

$$F(\psi, z) = \int_0^\infty F(\psi, t)e^{-st} dt \approx \int_0^\zeta F(\psi, t)e^{-st} dt \sim \int_0^\zeta F(\psi, t) dt. \quad (3.83)$$

Na vizinhança do ponto crítico, utilizando o comportamento assintótico para $P(\psi, t)$, obtemos então

$$P(0, z) \sim \int_0^\zeta \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma t}} dt = \gamma\zeta^{1/2}, \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_E}}. \quad (3.84)$$

Finalmente, a probabilidade de primeira passagem por $\psi = 0$ no instante ζ , com $z = 1 - s$ para $s \rightarrow 0$, é dada por

$$F(0, z) = 1 - \frac{1}{\gamma\zeta^{1/2}} = 1 - \frac{1}{\gamma[\ln(1/z)]^{-1/2}}. \quad (3.85)$$

A taxa de sobrevivência até o tempo (número de encontros) t é determinada pela probabilidade complementar da probabilidade de primeira passagem até o tempo t . Como ζ é um tempo de corte superior e um limite assintótico, podemos intercambiar as variáveis sem mais considerações, ou seja, $F(0, z = 1 - 1/\zeta) \rightarrow F(0, \zeta) \rightarrow F(0, t)$, tal que $\Gamma(\zeta) = 1 - F(0, z = 1 - 1/\zeta)$. Assim, para $t \gg 1$, o comportamento da taxa de sobrevivência na vizinhança do ponto crítico, $\lambda \rightarrow \lambda_c$, é dado por

$$\Gamma(t) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_E}} t^{-1/2}, \quad (3.86)$$

ou, retornando à notação do número de encontros, $N_f \gg 1$,

$$\Gamma(N_f) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_E}} N_f^{-1/2}. \quad (3.87)$$

Este decaimento assintótico de $\Gamma(N_f)$ com $N_f^{-1/2}$ está de acordo com a previsão do teorema de Sparre Andersen [And53, And54, DGN09].

No próximo capítulo, faremos a análise numérica da taxa de sobrevivência próxima ao ponto crítico, determinando o seu expoente crítico associado e comprovando a previsão acima para o seu comportamento assintótico.

Capítulo 4

Análise de Escala para o Comportamento Crítico e Resultados Numéricos

*... E se acrescento que a
harmonia universal do mundo é
a fonte de toda beleza, será
possível compreender que valor
devemos atribuir aos lentos e
penosos progressos que nos
fazem, pouco a pouco, conhecê-la
melhor?*

Excerto de “*O Valor da Ciência*”
Henri Poincaré, 1905

Neste capítulo vamos apresentar os nossos resultados obtidos através de simulações numéricas do modelo de busca aleatória associado aos desenvolvimentos analíticos do capítulo 3, incluindo a estimativa para os expoentes críticos que governam a transição de fase para o estado absorvente no limiar de extinção do *forager*. Os expoentes serão determinados utilizando hipóteses de escala e ajustes não-lineares.

4.1 Resultado Numérico para o Expoente Crítico β

Primeiramente, vamos recordar a partir da seção 3.1 que no modelo descrito neste trabalho as buscas aleatórias se encerram (i) se o ganho energético se anular ao longo da

busca ($\psi = 0$) (**critério de sobrevivência**) ou (ii) se N_f sítios-alvo são encontrados (**critério de busca**). Vale mencionar ainda que no modelo considerado por Faustino *et al.* [Fdd⁺07, FLR⁺12] o critério de sobrevivência é o mesmo, enquanto que o critério de busca corresponde ao término da caminhada após a execução de um percurso de tamanho L .

Na simulação numérica realizada, procuramos incorporar todas as regras do modelo apresentado nas seções 1.7 e 3.1. Em particular, para gerar passos de tamanhos distribuídos de acordo com o regime de lei de potência da distribuição de Lévy utilizamos o chamado método da inversão, detalhado no Apêndice A.

Realizamos simulações numéricas levando em conta duas possibilidades de utilização dos critérios acima. Na primeira, consideramos o critério de sobrevivência (CS) desligado (*off*) e o critério de busca (CB) ligado (*on*). Em outras palavras, o *forager* termina a busca após encontrar N_f sítios, podendo apresentar qualquer valor de energia (mesmo negativo) ao longo da busca; se ao final de N_f encontros a sua energia acumulada é negativa, então o *forager* é considerado morto. Na segunda possibilidade, ambos CS e CB estão ligados (*on*). Nesse caso, se o *forager* assume um valor negativo de energia acumulada em qualquer momento ao longo da busca, então ele é considerado morto e a busca é abortada. É interessante comentar que os desenvolvimentos analíticos do capítulo 3 estão mais próximos da primeira possibilidade acima, uma vez que nenhuma restrição foi imposta para a positividade da energia acumulada no cálculo. De fato, a concordância mostrada a seguir entre os resultados analíticos e numéricos de acordo com a primeira possibilidade ratifica esta afirmativa.

Para podermos comparar os resultados do nosso modelo com os do modelo de Faustino *et al.* [Fdd⁺07], vamos inicialmente realizar uma mudança de variável no ganho energético ψ , Eq. (3.37), escrevendo-o em função da densidade $\rho = g/\lambda$. Portanto,

$$\begin{aligned} \psi(\rho, \mu) = & \frac{g}{\alpha} - \left(\frac{g}{\rho} - 2r_v \right) A_\mu C_\mu K_\mu + \\ & - \left(\frac{g}{\rho} - 2r_v \right)^{\mu-1} A_\mu C_\mu D_\mu, \end{aligned} \quad (4.1)$$

em que

$$\begin{aligned} C_\mu &= \ell_0^{(1-\mu)/2} \frac{\sin[\pi(\mu-1)/2]}{\pi(\mu-1)(2-\mu)}, \\ K_\mu &= \frac{\pi(\mu-1)(\mu-3)}{\cos(\frac{1}{2}\pi\mu)}, \\ D_\mu &= (1-\mu) \frac{2^{-\mu} \sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2})}{\Gamma(1 + \frac{1}{2}\mu)}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Como mostra a Fig. 4.1, os nossos resultados analíticos estão em muito bom acordo com os numéricos na situação em que apenas o critério de busca está ligado (CB). No limite gaussiano, $\mu = 2.9$, existe uma pequena discrepância entre as curvas analítica e computacional para pequenas distâncias entre os sítios (baixos valores de λ e grandes ρ), quando em comparação com o tamanho médio dos passos. Essa diferença surge devido ao fator $A(\lambda, \mu)$ não corrigir completamente a nossa aproximação para λ pequeno, uma vez que nesse regime de baixo λ e μ gaussiano o *forager* tende a se encontrar num regime quase-localizado (passos curtos muito prováveis) próximo das bordas. Nesse caso, o fato de usarmos apenas a região de maior extensão de x no cálculo de $\langle \ell \rangle(x)$, isto é, $r_v + \ell_0 \leq x \leq \lambda - r_v - \ell_0$, Eq. (2.59), na aproximação da Eq. (3.24) tem um efeito maior. Além disso, segundo discutido no capítulo 2, de acordo com Buldyrev *et al.* [BGH⁺01] é justamente no regime de λ pequeno e *forager* próximo às bordas que as aproximações que levaram à expressão para $\langle n \rangle(x)$, Eq. (2.90), apresentam problemas.

No caso de ambos os critérios ativados, isto é, CB e CS *on* (CB + CS), o *forager* termina a sua busca após encontrar N_f sítios ou após a sua energia chegar a zero. Nesse caso, quando o *forager* morre, a sua energia tem contribuição nula para a média, fato este que provoca uma redução na curva de ψ em comparação com o resultado obtido apenas com CB *on*, como mostra a Fig. 4.1. De fato, quando o critério de sobrevivência está desligado indivíduos que têm energia negativa ao longo da busca eventualmente podem readquirir energia e terminar com $\psi > 0$ após o encontro de N_f sítios, aumentando assim o ganho energético médio.

É interessante compararmos os resultados da Fig. 4.1 com os obtidos numericamente por Faustino *et al.* [Fdd⁺07], Fig. 3.1. Nesse caso, o critério de busca adotado (finalização após um percurso de tamanho L) leva à definição do ganho energético (parâmetro de ordem) como

$$\psi_L \equiv \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_0}{\alpha L}. \quad (4.3)$$

A mudança de concavidade em ψ , observada na Fig. 4.1, não é notada em ψ_L , Fig. 3.1. De fato, à medida que a densidade ρ aumenta o parâmetro de ordem ψ_L cresce indefinidamente, enquanto que no nosso modelo ψ apresenta uma saturação assintótica, $\psi \rightarrow g/\alpha = 100$ para $g \gg \alpha m_1$ ($\rho \gg \rho_c$ ou $\lambda \gg \lambda_c$), correspondendo ao resultado intuitivo para o máximo valor da energia, $\mathcal{E}_{N_f} \rightarrow N_f g$.

Passaremos agora à vizinhança do ponto crítico, a fim de determinar o expoente crítico β , um novo resultado na literatura, que descreve o comportamento do *forager* próximo

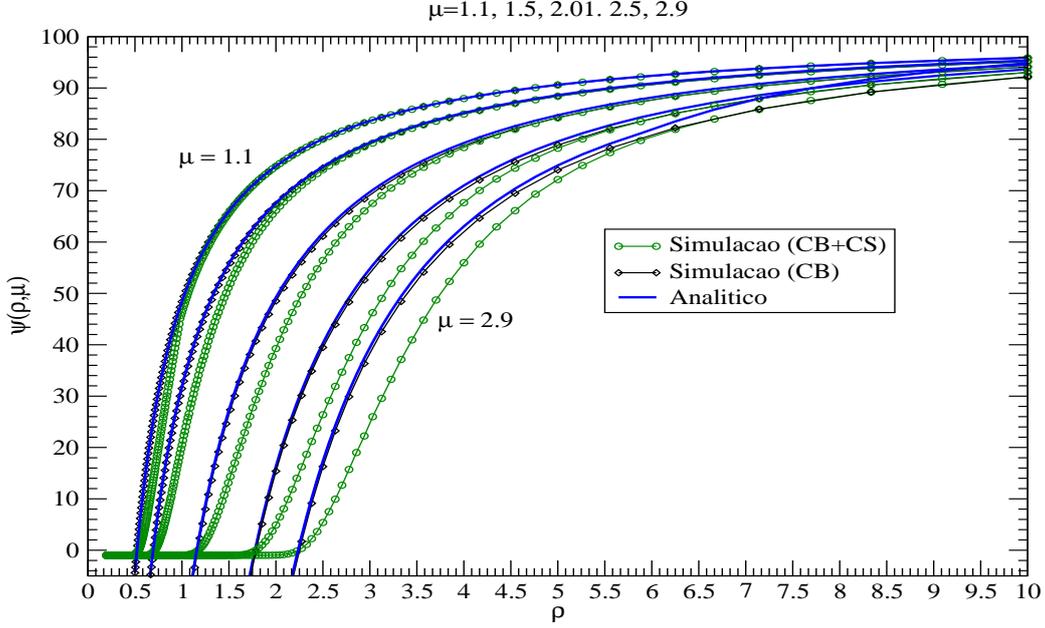


Figura 4.1: Ganho energético, ψ , em função de $\rho = g/\lambda$, na aproximação analítica e resultados numéricos com ambos os critérios de sobrevivência e busca ligados (CB + CS), ou com apenas o critério de busca ligado (CB). Resultados obtidos para $\mu = 1.1, 1.5, 2.01, 2.5, 2.9$, e parâmetros $g = 100$, $\mathcal{E}_0 = 100$, $r_v = 1$, $\alpha = 1$, $\ell_0 = 1$ e $N_f = 1000$. A média computacional foi realizada sobre 10^4 buscas. Para curvas com CS desligado, isto é, apenas CB, ψ pode se acumular negativamente.

à transição de fase extinção-sobrevivência, o qual foi definido na Eq. (3.49). A partir da Eq. (3.48) podemos escrever

$$\begin{aligned} \psi(\varepsilon, \mu) &= b(\mu, \lambda_c, g)\varepsilon, \\ b(\mu, \lambda_c, g) &\equiv \frac{1}{4}gA_\mu C_\mu K_\mu + g^{(\mu-1)}A_\mu C_\mu D_\mu \left(\frac{\lambda_c - 2r_v}{g} \right)^{\mu-2} (\mu - 1). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Novamente, como estamos interessados no parâmetro de ordem em função de ρ , para a efetiva comparação com ψ_L vamos definir a nova variável

$$\varrho \equiv \frac{g}{\lambda - 2r_v} - \frac{g}{\lambda_c - 2r_v}. \quad (4.5)$$

Assim, podemos concluir usando a Eq. (3.39) que

$$\begin{aligned}
 \varrho &= \frac{g}{\lambda - 2r_v} - \frac{g}{\lambda_c - 2r_v} \\
 &= \frac{g}{(\lambda_c - 2r_v)(\lambda - 2r_v)} [(\lambda_c - 2r_v) - (\lambda - 2r_v)] \\
 &\stackrel{\times g/g}{=} \frac{g^2}{(\lambda_c - 2r_v)(\lambda - 2r_v)} \left[\frac{\lambda_c - 2r_v}{g} - \frac{\lambda - 2r_v}{g} \right] \\
 \therefore \quad \varrho &= \frac{g^2}{(\lambda_c - 2r_v)(\lambda - 2r_v)} \varepsilon.
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Finalmente, no limite $\lambda \rightarrow \lambda_c$, ou seja, $\varepsilon \rightarrow 0$ e $\varrho \rightarrow 0$, temos que

$$\varepsilon = \left(\frac{\lambda_c - 2r_v}{g} \right)^2 \varrho. \tag{4.7}$$

Desse modo, a expressão para ψ torna-se

$$\psi(\varrho, \mu) = b(\mu, \lambda_c, g) \left(\frac{\lambda_c - 2r_v}{g} \right)^2 \varrho, \quad \varrho \rightarrow 0. \tag{4.8}$$

A expressão acima permite identificar o expoente crítico $\beta = 1$, assim como o fizemos na Eq. (3.49) para $\psi(\varepsilon, \mu)$. A comparação entre os resultados analítico e numéricos de ψ na região crítica pode ser vista na Fig. 4.2.

Para obtermos o expoente β numericamente no caso da simulação com o critério de sobrevivência desligado (β_{off}), ajustamos os dados numéricos por uma função não-linear do tipo $y = a_0(x - x_0)^{a_1}$, usando dois parâmetros independentes, a_0 e $a_1 = \beta_{\text{off}}$. Como indicado na Fig. 4.3, obtemos uma boa concordância, $\beta_{\text{off}} \approx \beta = 1$, para vários valores de μ . Mais adiante, mostraremos os expoentes críticos associados a cada parâmetro numa tabela, para uma visão geral do quadro de transição.

Para determinarmos os expoentes críticos a partir das simulações com ambos os critérios ligados (CB + CS), vamos realizar uma análise de escala na próxima seção.

4.2 Hipóteses de Escala e os Expoentes Críticos β' e ν

O objetivo da teoria de escala é fornecer uma descrição do sistema nas proximidades do ponto crítico baseando-se na hipótese de que as suas propriedades são invariantes sob certas transformações específicas de escala. Como vimos no capítulo 1, as transições de fase dinâmicas e de equilíbrio guardam algumas similaridades entre si. Por exemplo, em uma transição de fase de equilíbrio magnética pode se perguntar até que distância espacial

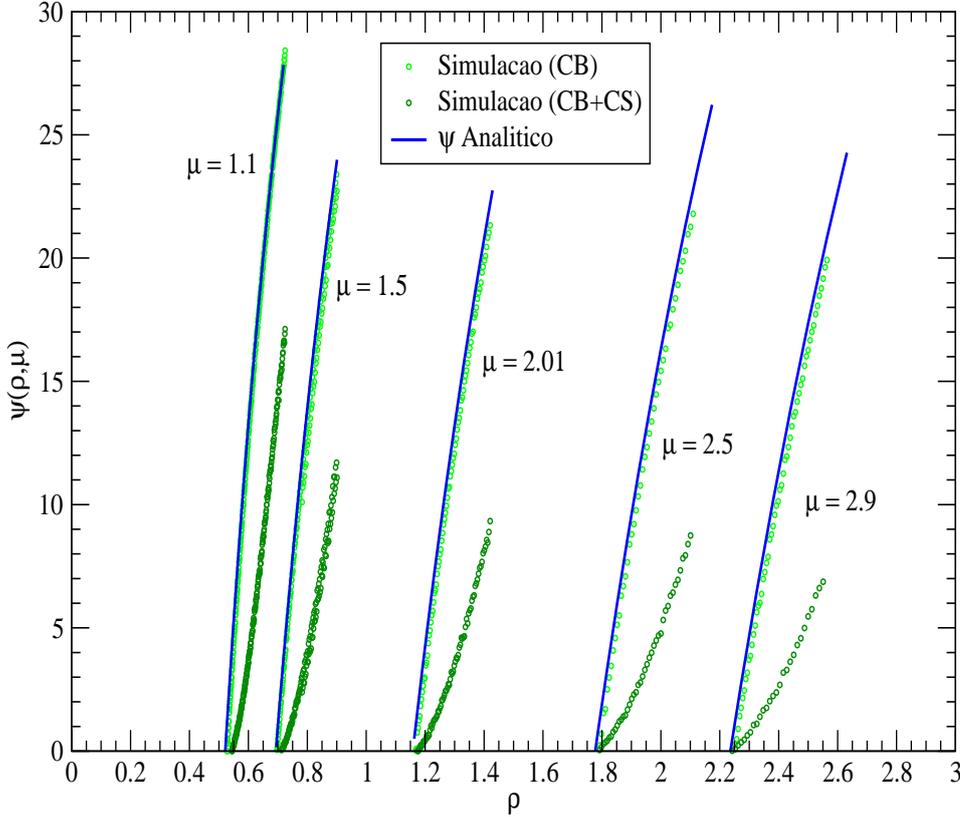


Figura 4.2: Região na vizinhança do ponto crítico para cada valor de μ da Fig. 4.1.

se faz tipicamente sentida uma flutuação no spin de um dado sítio. Isto define o chamado comprimento de correlação espacial. Por sua vez, numa transição dinâmica, como a que estudamos nesse trabalho, faz sentido perguntar até que “distância” temporal a influência de uma flutuação na energia do *forager* é sentida, definindo, assim, um comprimento de correlação temporal, ξ . A resposta a ambas as perguntas depende da distância ao ponto crítico de cada transição. Em particular, ambos os comprimentos de correlação divergem na forma de uma lei de potência à medida que o ponto crítico é aproximado, o que define o seu expoente crítico associado.

É importante notar, por exemplo, que a taxa de sobrevivência do *forager* depende fortemente das suas flutuações de energia nas vizinhanças do ponto crítico, pois, como mencionado, $\xi \rightarrow \infty$ quando $\lambda \rightarrow \lambda_c$. Em outras palavras, nas proximidades do ponto crítico uma pequena flutuação na energia acumulada do *forager* ocorrida num dado ins-

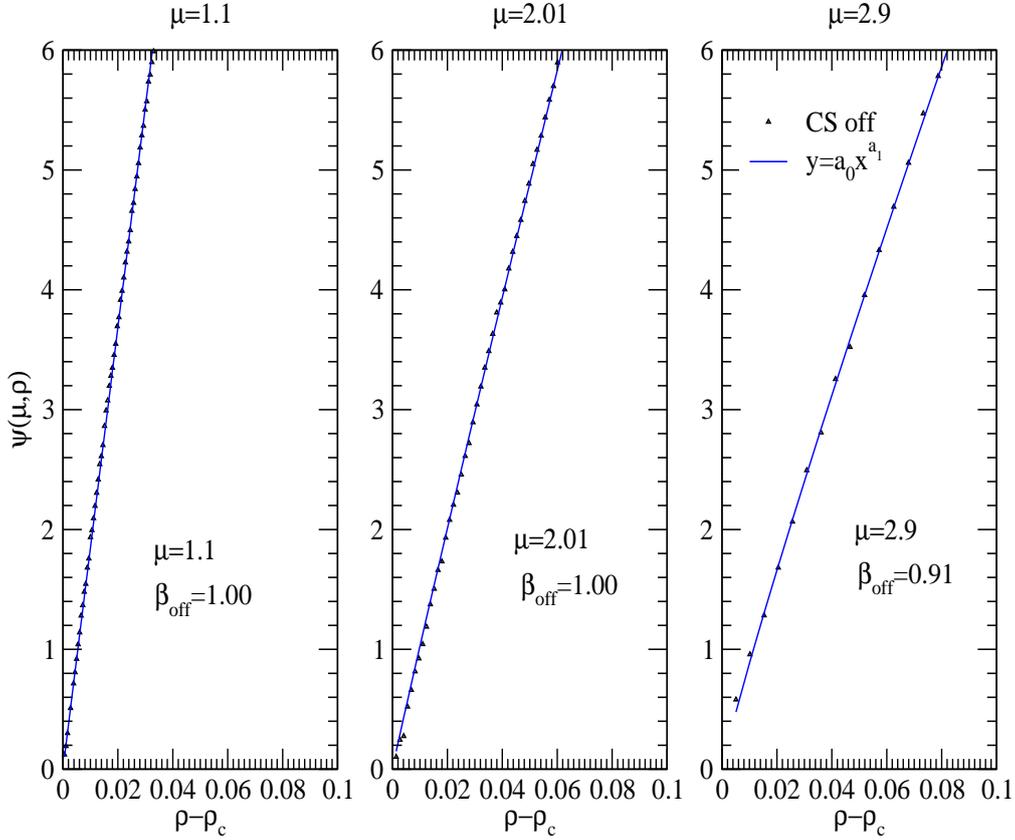


Figura 4.3: Ganho energético, ψ , em função de $\rho - \rho_c$, na vizinhança do ponto crítico para vários valores de μ , para a simulação numérica com o critério CB de sobrevivência desligado (*off*). Parâmetros como na Fig. 4.1. As linhas sólidas representam os melhores ajustes não-lineares que determinam o expoente crítico $a_1 = \beta_{\text{off}}$.

tante pode ter um efeito relevante para o estado do sistema em um tempo bem posterior (por exemplo, uma pequena flutuação na energia em $\lambda \rightarrow \lambda_c$ pode levar ao ingresso do *forager* no estado absorvente irreversível). Nesse sentido, vamos analisar a seguir a taxa de sobrevivência do *forager* em função do número de encontros, $\Gamma(n)$ (para simplificar, vamos mudar a notação $N_f \rightarrow n$, em relação ao capítulo anterior). De fato, $\Gamma(n)$ pode ser vista como um agente genuíno para a caracterização do fenômeno crítico da dinâmica energética, pois depende explicitamente do número de encontros, o qual herda o conceito de tempo e define os efeitos dinâmicos. Além disso, possuímos a sua previsão analítica para efeito de comparação, a qual foi obtida no capítulo 3.

Vamos iniciar assumindo a hipótese de escala [Sta71, Hin06] segundo a qual os aspectos físicos do problema são preservados sob as seguintes mudanças de escala:

$$(\chi - \chi_c) \rightarrow a(\chi - \chi_c) \quad n \rightarrow a^{-\nu}n \quad \psi \rightarrow a^{\beta_{\text{on}}}\psi \quad \Gamma \rightarrow a^{\beta'}\Gamma, \quad (4.9)$$

onde a é um fator de escala arbitrário. Ainda, definimos a variável comprimento específico entre dois sítios $\chi \equiv \lambda/g$, e o subíndice “on” indica que a análise a seguir será feita com base em resultados numéricos de simulações com ambos os critérios de busca e sobrevivência ligados (CB + CS *on*), isto é, teremos três observáveis distintos de acordo com as estatísticas geradas a partir dos critérios ligados ou desligados, a saber: $\psi \rightarrow \text{Analítico} \rightarrow \beta, \psi_{\text{off}} \rightarrow \text{Numérico} \rightarrow \beta_{\text{off}} \sim \beta$ e $\psi_{\text{on}} \rightarrow \text{Numérico} \rightarrow \beta_{\text{on}}$. Em outras palavras, acionar ou desativar o critério de sobrevivência corresponde estatisticamente a dois quadros físicos distintos para as buscas: o estado absorvente é somente acessado após n encontros se *CS off* ou pode ser acessado em qualquer $j \leq n$ se *CS on*.

Para uma função $F(x)$ homogênea qualquer, temos $a^p F(x) = F(ax)$, ou de uma forma mais geral, $a^p F(\{x_i\}) = F(\{a^{z_i} x_i\})$, em que z_i é o expoente de escala correspondente à variável x_i . Em particular, no nosso caso β' é o expoente crítico associado à taxa de sobrevivência Γ que, como discutido na seção 3.3, também apresenta propriedades de um parâmetro de ordem da transição. Considerando que nas vizinhanças do ponto crítico da transição de fase dinâmica de segunda ordem

$$\begin{aligned} \psi_{\text{on}}(n, \chi) &= a^{-\beta_{\text{on}}}\psi(a^{-\nu}n, a(\chi - \chi_c)), \\ \Gamma(n, \chi) &= a^{-\beta'}\Gamma(a^{-\nu}n, a(\chi - \chi_c)), \end{aligned} \quad (4.10)$$

a arbitrariedade do parâmetro a nos permite escrever $a^{-\nu}n = 1$, de modo que ao fazer $\Gamma(1, a\chi) \rightarrow f[n^{1/\nu}(\chi - \chi_c)]$, então

$$\begin{aligned} \Gamma(n, \chi) &= n^{-\beta'/\nu} f[n^{1/\nu}(\chi - \chi_c)], \\ \Gamma(n_0, \chi) &= n_0^{-\beta'/\nu} f[n_0^{1/\nu}(\chi - \chi_c)], \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde n e n_0 são números de encontros distintos (a serem utilizados na definição das funções auxiliares adiante), tal que n_0 é um limite inferior para garantia do teorema do limite central, isto é, acima desse regime, os resultados numéricos indicam convergência para o TLC. É interessante comparar a expressão acima com a previsão analítica do capítulo anterior para o limite assintótico da taxa de sobrevivência do *forager* na vizinhança do ponto crítico, $\Gamma \sim n^{-1/2}$, para $\chi \rightarrow \chi_c$ e $n \gg 1$. Nesse caso, o expoente $\beta' = \beta = 1$ (ver discussão a seguir) implica em $\nu = 2$, analiticamente. O caso análogo para ψ_{on} será feito adiante. No limite assintótico de tempos (número de encontros) extremamente grandes,

a taxa de sobrevivência assume a forma típica em função da distância infinitesimal ao ponto crítico em transições de segunda ordem [GdlT79], isto é, $\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma \sim |\chi - \chi_c|^{\beta'}$, com $\chi \rightarrow \chi_c$. Nesse regime, a função de escala possui a forma $f[n^{1/\nu}|\chi - \chi_c|] \sim n^{\beta'/\nu}(\chi - \chi_c)^{\beta'}$.

A Fig. 4.4 mostra uma situação típica com $\mathcal{E}_0 = 100$, $g = 100$, $r_v = \ell_0 = 1$ e $\alpha = 1$, mediada sobre 500 réplicas de 10^3 caminhadas de busca, cada. Para todos os valores de parâmetros considerados, $\Gamma(n, \chi)$ varia continuamente de 1 ($\chi \ll \chi_c$) a 0 ($\chi \gtrsim \chi_c$), o que confirma o seu papel de possível parâmetro de ordem da transição de fase do estado de sobrevivência para o estado de extinção.

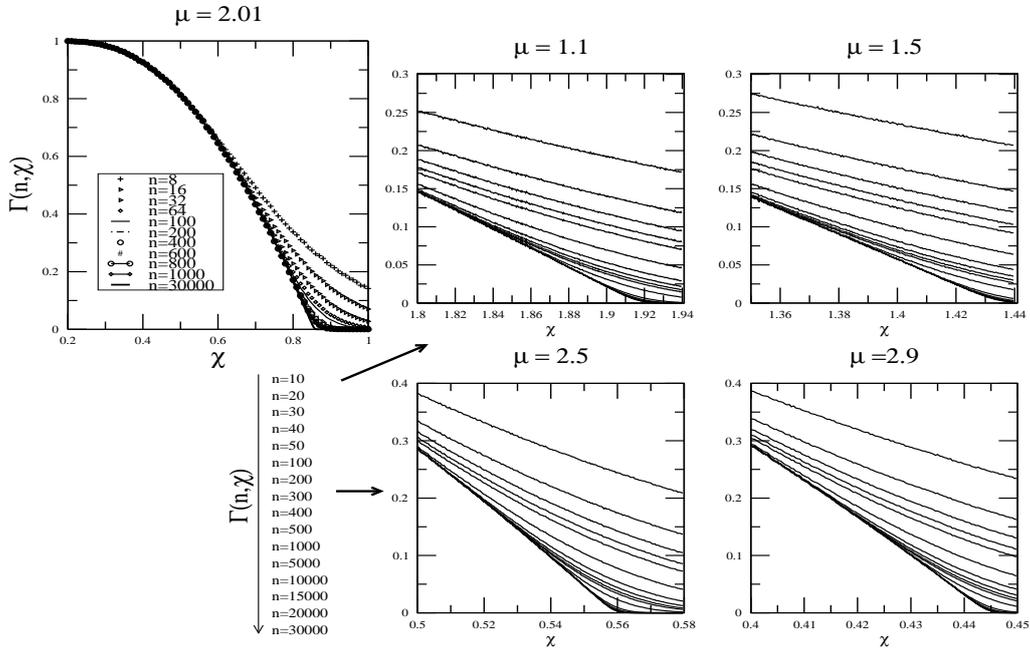


Figura 4.4: Taxa de sobrevivência, $\Gamma(n, \chi)$, versus $\chi \equiv \lambda/g$ para vários valores de n e μ , com ambos os critérios de busca e sobrevivência ligados (CB + CS on). Os parâmetros utilizados foram $g = 100$, $r_v = \ell_0 = 1$, $\mathcal{E}_0 = 100$ e $\alpha = 1$. Foram realizadas médias sobre 500 réplicas com 10^3 caminhadas de busca, cada.

Supondo agora que a função $f(x)$ seja analiticamente bem comportada, podemos utilizar algumas funções auxiliares para exprimir os expoentes críticos associados à transição de fase, essa maneira de obter os resultados numéricos é conhecida como grupo de renormalização fenomenológica [Sta71, Hin06]. Primeiramente, vamos definir a função $k(n_0, n, \chi)$ a fim de determinar o expoente crítico β'/ν , em que n_0 é um limite inferior para converg:

$$k(n_0, n, \chi) \equiv \frac{\ln \left[\frac{\Gamma(n, \chi)}{\Gamma(n_0, \chi)} \right]}{\ln \left(\frac{n}{n_0} \right)}. \quad (4.12)$$

A partir da hipótese de escala do grupo de renormalização fenomenológica, podemos escrever

$$\frac{\Gamma(n, \chi)}{\Gamma(n_0, \chi)} = \left(\frac{n}{n_0}\right)^{-\beta'/\nu} \frac{f[n^{1/\nu}(\chi - \chi_c)]}{f[n_0^{1/\nu}(\chi - \chi_c)]}. \quad (4.13)$$

Assim,

$$\ln \left[\frac{\Gamma(n, \chi)}{\Gamma(n_0, \chi)} \right] = -\beta'/\nu \ln \left(\frac{n}{n_0} \right) + \ln \left\{ \frac{f[n^{1/\nu}(\chi - \chi_c)]}{f[n_0^{1/\nu}(\chi - \chi_c)]} \right\}, \quad (4.14)$$

de modo que

$$k(n_0, n, \chi) = -\beta'/\nu + \frac{1}{\ln \left(\frac{n}{n_0} \right)} \ln \left\{ \frac{f[n^{1/\nu}(\chi - \chi_c)]}{f[n_0^{1/\nu}(\chi - \chi_c)]} \right\}. \quad (4.15)$$

Para $\chi \rightarrow \chi_c$, determinamos

$$k(n_0, n, \chi_c) = -\beta'/\nu. \quad (4.16)$$

A Eq. (4.16) indica que curvas numéricas k para uma dada escolha de n_0 e valores de n distintos devem se cruzar no ponto crítico $\chi = \chi_c$. Este cruzamento determina o valor de χ_c e também o expoente $\beta'/\nu \approx 0.5$ para cada valor de μ investigado, como mostra a Fig. 4.5. Além disso, verificamos que outras escolhas para n_0 também levam ao mesmo expoente β'/ν , como, por exemplo, mostra a Fig. 4.6 para $n_0 = 400$. Ainda os resultados indicam que os expoentes não apresentam dependência em μ . Por outro lado, uma importante dependência é observada em χ_c como função de μ , tal que, as buscas que possuem uma dinâmica mais rápida (estratégias de caráter balístico, $\mu \rightarrow 1$) apresentam mais baixas densidade crítica.

Por outro lado, para determinar o expoente ν , e assim também o expoente β' via o conhecimento de β'/ν , vamos definir o observável

$$h(n_0, n, \chi) \equiv \frac{\partial_\chi \ln \Gamma(n, \chi)}{\partial_\chi \ln \Gamma(n_0, \chi)}, \quad (4.17)$$

com $\partial_\chi \equiv \partial/\partial\chi$. Para calcular as derivadas envolvidas, vamos definir a *variável de escala dinâmica*

$$\begin{aligned} y &\equiv n^{1/\nu}(\chi - \chi_c), \\ \frac{\partial y}{\partial \chi} &= n^{1/\nu}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

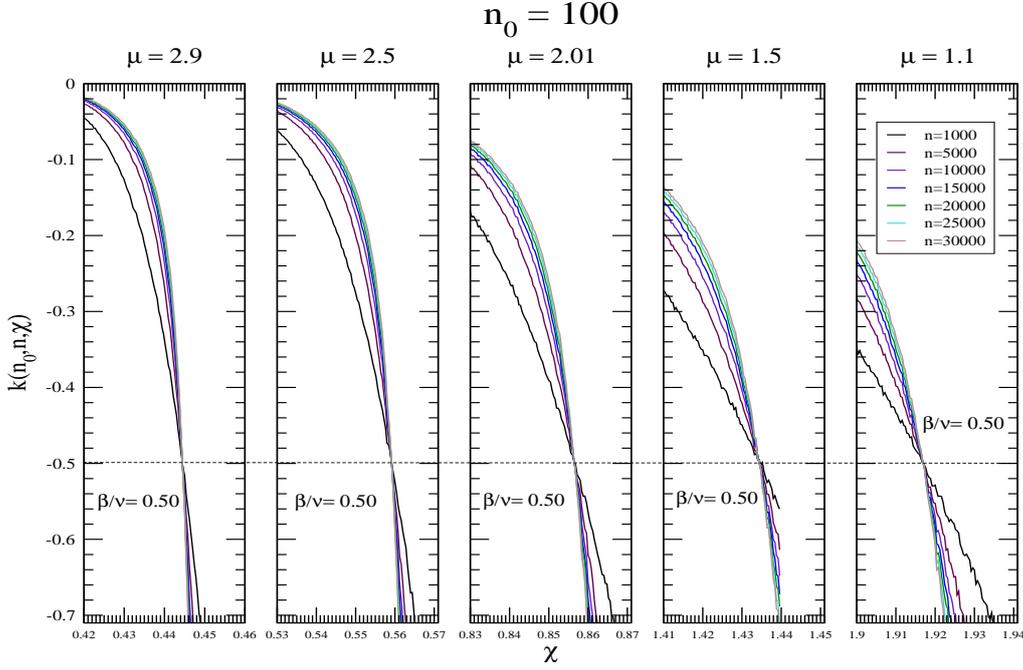


Figura 4.5: Observável $k(n_0, n, \chi)$ versus $\chi \equiv \lambda/g$ para $n_0 = 100$ e vários valores de n e μ , com ambos os critérios de busca e sobrevivência ligados (CB + CS on). Para todos os valores de μ obtemos $\beta/\nu \approx 0.5$. Os parâmetros utilizados foram $g = 100$, $r_v = \ell_0 = 1$, $\mathcal{E}_0 = 100$ e $\alpha = 1$. Foram realizadas médias sobre 500 réplicas com 10^3 caminhadas de busca, cada.

tal que

$$\begin{aligned} \Gamma(n, \chi) &= n^{-\beta'/\nu} f(y), \\ \frac{\partial \Gamma(n, \chi)}{\partial \chi} &= n^{-\beta'/\nu} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \chi} = n^{-\beta'/\nu + 1/\nu} \frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Analogamente para $n = n_0$,

$$\frac{\partial \Gamma(n_0, \chi)}{\partial \chi} = n_0^{-\beta'/\nu + 1/\nu} \frac{\partial f}{\partial y_0}; \quad y_0 \equiv n_0^{1/\nu} (\chi - \chi_c). \quad (4.20)$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln \Gamma(n, \chi)}{\partial \chi} &= \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial \Gamma}{\partial \chi} \\ &= \frac{1}{\Gamma} n^{-\beta'/\nu} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \chi} \\ &= \frac{1}{\Gamma} n^{-\beta'/\nu + 1/\nu} \frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

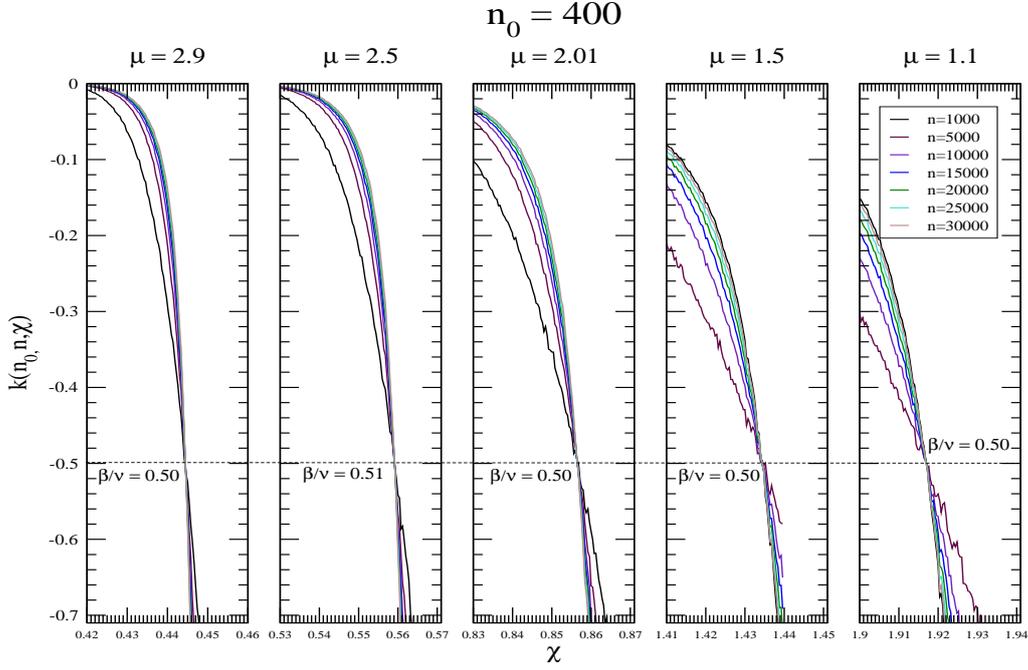


Figura 4.6: Gráfico similar à Fig. 4.5, mas para $n_0 = 400$. Para todos os valores de μ , obtemos $\beta/\nu \approx 0.5$.

Portanto,

$$h(n_0, n, \chi) = \frac{\Gamma(n_0, \chi)}{\Gamma(n, \chi)} \left(\frac{n}{n_0} \right)^{-\beta'/\nu + 1/\nu} \frac{\partial_y f}{\partial_{y_0} f}. \quad (4.22)$$

No ponto crítico,

$$\begin{aligned} \Gamma(\chi_c, n) &= n^{-\beta'/\nu} f(0), \\ \partial_y f|_{y=0} &= \partial_{y_0} f|_{y_0=0}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

de modo que

$$\begin{aligned} h(n_0, n, \chi_c) &= \frac{n_0^{-\beta'/\nu} f(0)}{n^{-\beta'/\nu} f(0)} \left(\frac{n}{n_0} \right)^{-\beta'/\nu + 1/\nu} \frac{\partial_y f|_{y=0}}{\partial_{y_0} f|_{y_0=0}} \\ &= \left(\frac{n}{n_0} \right)^{1/\nu}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Finalmente, em $\chi = \chi_c$,

$$\ln h = (1/\nu) \ln \left(\frac{n}{n_0} \right), \quad (4.25)$$

ou seja, a inclinação da curva log-log de h em função de n/n_0 determina o expoente crítico $1/\nu$ no ponto $\chi = \chi_c$. Manualmente, isto equivale a traçar uma reta vertical passando pelo ponto crítico nos gráficos da figura 4.7, cujos cruzamentos com as curvas $h(n_0, n, \chi)$ (para os vários n) determinam o locus dos pontos que podem ser ajustado por uma função linear no gráfico *log-log* para determinação do ponto crítico.

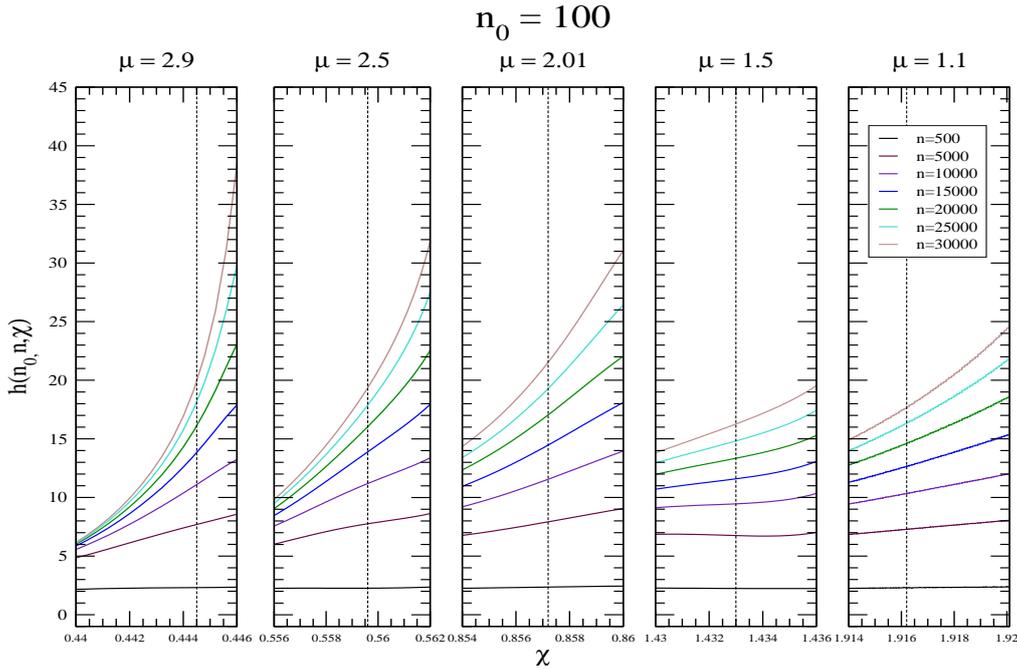


Figura 4.7: Observável $h(n_0, n, \chi)$ versus $\chi \equiv \lambda/g$ para $n_0 = 100$ e vários valores de n e μ , com ambos os critérios de busca e sobrevivência ligados (CB + CS on). Os parâmetros utilizados foram $g = 100$, $r_v = \ell_0 = 1$, $\mathcal{E}_0 = 100$ e $\alpha = 1$. Foram realizadas médias sobre 500 réplicas com 10^3 caminhadas de busca, cada.

Apesar de conhecermos o valor de χ_c (Tabela 4.1) obtido, por exemplo, a partir da função k , não sabemos *a priori* se χ_c apresentará o mesmo valor quando calculado a partir do observável h . Então o que fazemos é varrer uma pequena região em torno do ponto crítico, determinando um grande número de curvas logarítmicas construídas a partir dos cruzamentos de $h(n_0, n, \chi)$ variando n , com retas verticais (retas tracejadas da Fig. 4.7) que passam por $\chi \approx \chi_c$. A curva logarítmica que melhor se aproxima de um reta na Fig. 4.8 é então aquela que está sobre o ponto crítico. Devido às características das curvas $h(n_0, n, \chi)$, qualquer pequena variação em torno do ponto crítico determina uma grande flutuação no valor do expoente $1/\nu$. Portanto, de todos os observáveis utilizados para a determinação do ponto crítico e dos expoentes este é o mais sensível, ou seja, aquele que precisa ser calculado a partir de uma varredura mais fina realizada ao redor do ponto crítico. Isto surge devido à rápida variação das curvas logarítmicas.

Podemos calcular a derivada numérica da função $\ln h$ em função de $\ln(n/n_0)$ para toda a família de curvas com n_0 fixo e n e χ variáveis, analisando qual delas se aproxima de uma constante. Assim, determinamos os valores de χ_c e o expoente ν para os valores de μ investigados, de tal modo que podemos concluir que $\nu \approx 2.0$. Este último passo é realizado através da identificação da inclinação da reta obtida pelo ajuste linear da curva determinada por χ_c , marcada em azul na Fig. 4.8 com $n_0 = 100$, para cada valor de μ . Novamente, para a escolha $n_0 = 400$ os expoentes também estão em bom acordo com

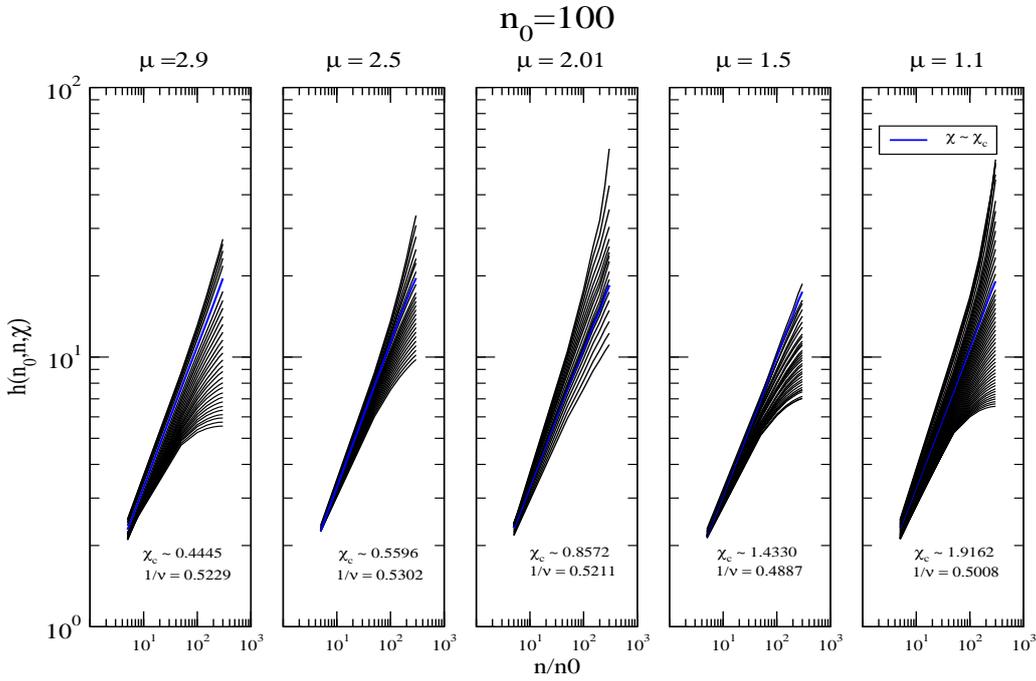


Figura 4.8: Gráfico log-log do observável $h(n_0, n, \chi)$ versus n/n_0 para $n_0 = 100$ e vários valores de χ e μ , com ambos os critérios de busca e sobrevivência ligados (CB + CS on). A curva em azul, corresponde ao caso $\chi = \chi_c$. Em ordem respectiva em valores de μ decrescente, da esquerda para direita $\mu = 2.9, 2.5, 2.1, 1.5, 1.1$, os valores de χ_c são aproximadamente $\chi_c \sim \{0.4445, 0.5596, 0.8572, 1.4330, 1.9162\}$ e as frações de ν correspondentes $1/\nu = \{0.5229, 0.5302, 0.5211, 0.4887, 0.5008\}$. Para todos os valores de μ obtemos, como pode ser visto, $\nu \approx 2.0$. Os parâmetros utilizados foram $g = 100$, $r_v = \ell_0 = 1$, $\mathcal{E}_0 = 100$ e $\alpha = 1$. Foram realizadas médias sobre 500 réplicas com 10^3 caminhadas de busca, cada.

aqueles obtidos para $n_0 = 100$, como mostra a Fig. 4.9. Na seção 4.5 apresentaremos um resumo dos expoentes críticos e valores de χ_c obtidos a partir dos diversos observáveis.

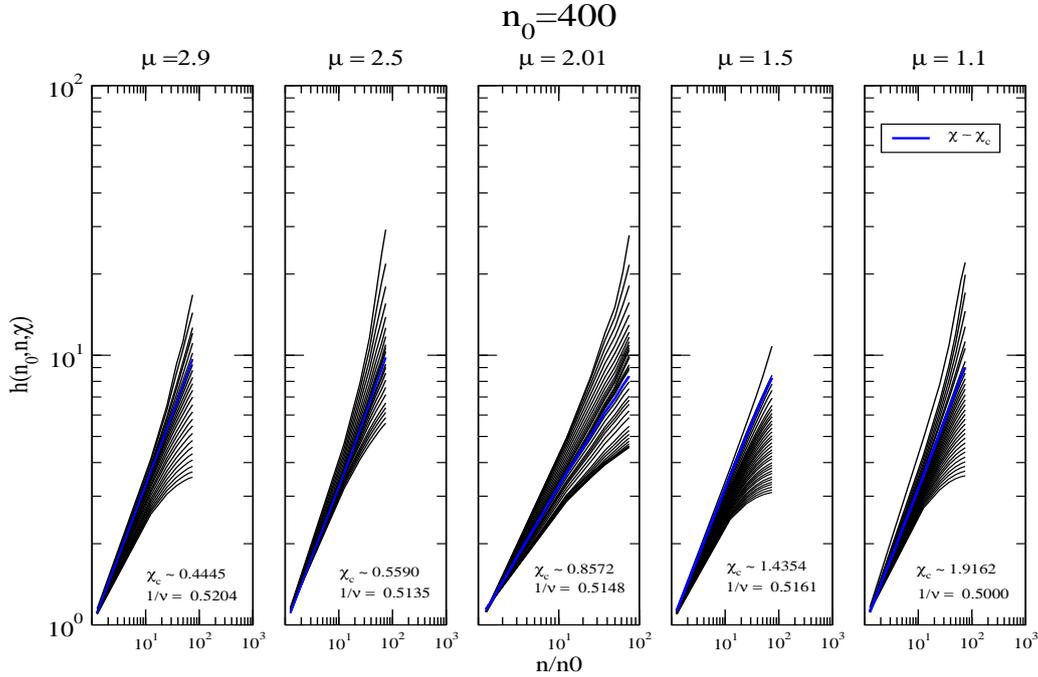


Figura 4.9: Gráfico similar à Fig. 4.8, mas para $n_0 = 400$. Em ordem respectiva em valores de μ decrescente, da esquerda para direita, os valores de χ_c são aproximadamente $\chi_c \sim \{0.4445, 0.5590, 0.8572, 1.4354, 1.9162\}$ e as frações de ν correspondentes $1/\nu = \{0.5229, 0.5204, 0.5135, 0.5148, 0.5000\}$. Para todos os valores de μ , obtemos $\nu \approx 2.0$.

4.3 Expoente Crítico p da Dinâmica Espacial

Uma vez que determinamos o comportamento dinâmico da energia do *forager* a partir da análise de como a sua energia evolui com o número de sítios encontrados e a distância ao ponto crítico, vamos agora investigar nesta seção a dinâmica espacial da busca, ou seja, como o comprimento médio da caminhada varia em função de n e χ nas proximidades da transição para o estado absorvente. Para isso, vamos definir um observável τ associado ao espaço observando que, para uma população de \mathcal{N} *foragers*, o *comprimento médio total percorrido* até o encontro de n sítios em um ambiente de densidade χ depende do comprimento médio do encontro entre dois sítios sucessivos ($\langle L \rangle(x)$) e do número de sobreviventes ($\Gamma\mathcal{N}$). Em termos gerais, temos que

$$\tau = F[\langle L \rangle_j(\chi, \{x_i\}_j), \Gamma_j(n, \chi)], \quad (4.26)$$

onde $\{x_i\}_j$ denota a sequência de posições iniciais das buscas realizadas pelo j -ésimo *forager*. Particularmente, para cada *forager* podemos definir um parâmetro de sobrevivência em um ambiente de densidade χ , $p_j(n, \chi)$, tal que $p_j(n, \chi) = 1$ se o *forager* está vivo após

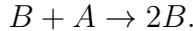
n encontros de sítios e $p_j(n, \chi) = 0$, caso contrário. Como consequência, para uma população de \mathcal{N} *foragers*, a taxa de sobrevivência média após n encontros pode ser expressa em termos das variáveis p_j como

$$\Gamma(n, \chi) = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} p_j(n, \chi). \quad (4.27)$$

Algumas propostas para a definição do observável τ foram realizadas no contexto da dinâmica de avalanches em modelos de evolução [Ant97], através de um mapeamento envolvendo uma média ponderada das probabilidades de retorno à origem pela primeira vez após n passos no instante t . Em uma outra proposta [FML01], τ descreve o tempo de relaxação de um determinado processo dinâmico envolvendo dois tipos de partículas interagentes, A e B :

$$\tau \equiv \left\langle \frac{\int_0^\infty \rho_B(t) t dt}{\int_0^\infty \rho_B(t) dt} \right\rangle, \quad (4.28)$$

em que ρ_B é a densidade de partículas do tipo B , cuja reação com as partículas do tipo A é definida por



Este modelo foi construído na tentativa de caracterizar a propagação de uma epidemia infecciosa [FML01].

Com base nas ideias previamente discutidas, uma forma natural de definir o observável τ pode se dar através da convolução discreta do parâmetro de sobrevivência pelo comprimento total até o encontro do n -ésimo sítio:

$$\tau(n, \chi, \{x_i\}_j) \equiv \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} p_j(n, \chi) \langle L_{\text{tot}} \rangle_j(n, \chi, \{x_i\}_j), \quad (4.29)$$

onde o comprimento médio da caminhada do j -ésimo *forager* após n encontros, $\langle L_{\text{tot}} \rangle_j$, foi denotado por $\langle L_{N_f} \rangle$ na Eq. (3.16). É interessante observar que τ também apresenta características gerais comuns aos parâmetros de ordem ψ e Γ : se todos os *foragers* estão mortos após n encontros (fase absorvente, $\chi < \chi_c$), então $p_j = 0$ e $\tau = 0$; por outro lado, na fase ativa em que $\chi > \chi_c$ temos que $\tau > 0$. Em particular, para dados n e $\chi \gg \chi_c$, τ assume o seu valor máximo quando todos os *foragers* estão vivos, $p_j = 1$. De fato, a Eq. (4.29) também permite interpretar τ como a convolução dos parâmetros de ordem anteriores, isto é, $\tau = F[\langle L \rangle, \Gamma] \rightarrow \tau_{\text{rel}} \sim \psi * \Gamma$, tal que $\tau_{\text{rel}} \equiv \bar{\tau}/n$ representa o seu valor normalizado pelo número de encontros. Em suma, τ ou τ_{rel} dão uma medida da evolução

dinâmica do comprimento espacial médio da caminhada de busca próximo à transição de fase para o estado de extinção do *forager*.

Considerando a média da Eq. (4.29) sobre as posições iniciais de cada *forager*, escrevemos, de acordo com a Eq. (3.21),

$$\begin{aligned}
 \overline{\tau(n, \chi)} &= \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} p_j(n, \chi) \overline{\langle L_{\text{tot}} \rangle_j(n, \chi, \{x_i\}_j)} \\
 &= \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} p_j(n, \chi) \sum_{i=1}^n \int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx_i \pi(x_i) \langle L \rangle_j(x_i) \\
 &= \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} n p_j(n, \chi) m_j(\chi).
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

Assim, seguindo nossa definição para τ_{rel} ,

$$\tau_{\text{rel}}(n, \chi) = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} p_j(n, \chi) m_j(\chi). \tag{4.31}$$

Desse modo, como discutimos, podemos caracterizar duas possibilidades de situações extremas, a partir da taxa de sobrevivência em função da distância específica e do número de encontros $\Gamma(n, \chi)$:

$$\begin{aligned}
 \tau_{\text{rel}}(n, \chi) &= 0, & \text{se } \Gamma(n, \chi) &= 0 \quad (\text{extinção}); \\
 \tau_{\text{rel}}(n, \chi) &= f(\chi), & \text{se } \Gamma(n, \chi) &= 1 \quad (\text{extrema prosperidade}).
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

A Fig. 4.10 mostra o comportamento de $\tau_{\text{rel}}(n, \chi)$ para os parâmetros de simulação $\mathcal{E}_0 = 100$, $g = 100$, $r_v = \ell_0 = 1$ e $\alpha = 1$, com a média realizada sobre 500 réplicas de 10^3 *foragers*, cada. Observamos nas curvas apresentadas as tendências descritas acima. Ainda, à medida que a densidade de alvos cresce χ a dinâmica do comprimento total decresce diferentemente para cada estratégia μ , isto é, $\tau_{\text{rel}} \rightarrow 0$ quando $\chi \rightarrow \infty$. Em outras palavras, os *foragers* andam pouco para encontrar um sítio próximo, sendo mais eficiente para estratégias balísticas em que mesmo para sítios muito afastados, uma grande população de caminhantes sobrevivem percorrendo distâncias relativamente pequenas em comparação às estratégias difusivas.

De uma forma geral, nas vizinhanças do ponto crítico deve surgir um novo expoente crítico p associado à dinâmica espacial, uma vez que sob a transformação de escala dis-

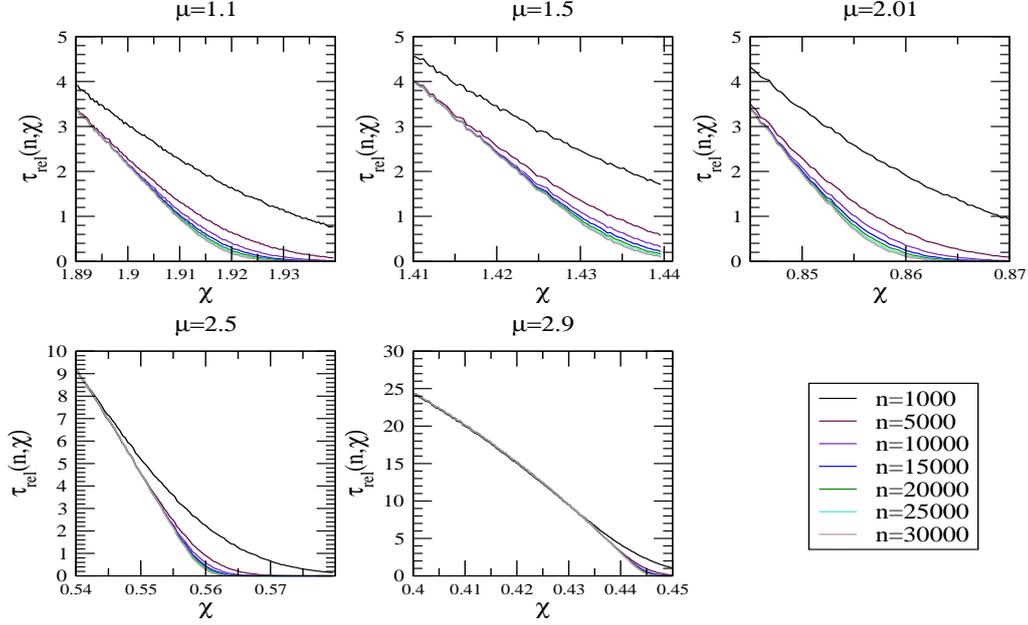


Figura 4.10: Observável $\tau_{\text{rel}}(n, \chi)$ versus $\chi \equiv \lambda/g$ para vários valores de n e μ , com ambos os critérios de busca e sobrevivência ligados (CB + CS *on*). Os parâmetros utilizados foram $g = 100$, $r_v = \ell_0 = 1$, $\mathcal{E}_0 = 100$ e $\alpha = 1$. Foram realizadas médias sobre 500 réplicas com 10^3 caminhadas de busca, cada.

cutida na seção 4.2 temos que $\tau_{\text{rel}} \rightarrow a^p \tau_{\text{rel}}$, de modo similar às transformações de ψ e Γ . É de se esperar, portanto, que na região crítica, $\chi \rightarrow \chi_c$, tenhamos

$$\tau_{\text{rel}}(n, \chi_c) \stackrel{m \rightarrow g/\alpha}{\sim} n^{-z'}, \quad (4.33)$$

onde definimos o expoente $z' \equiv p/\nu$. Mais especificamente, aplicando a hipótese de escala em τ_{rel} identificamos uma nova função de escala ϕ , tal que

$$\tau_{\text{rel}}(n, \chi) = n^{-p/\nu'} \phi \left[n^{1/\nu'} (\chi - \chi_c) \right]. \quad (4.34)$$

Em princípio, consideramos acima o expoente ν' distinto do expoente ν associado à taxa de sobrevivência, Γ . Contudo, veremos a seguir que os resultados numéricos mostrarão que eles são idênticos, em concordância com a hipótese de escala, uma vez que ambos ditam como a variável n se comporta sob uma transformação de escala.

Para determinar os expoentes p e ν' procedemos analogamente à taxa de sobrevivência na seção anterior. Para tanto, definimos a função auxiliar

$$Q(n_0, n, \chi) \equiv \frac{\ln \left[\frac{\tau_{\text{rel}}(n, \chi)}{\tau_{\text{rel}}(n_0, \chi)} \right]}{\ln \left(\frac{n}{n_0} \right)}, \quad (4.35)$$

que leva ao valor $z' = 0.47$ para vários valores de μ , como mostra a Fig. 4.11. Um análise

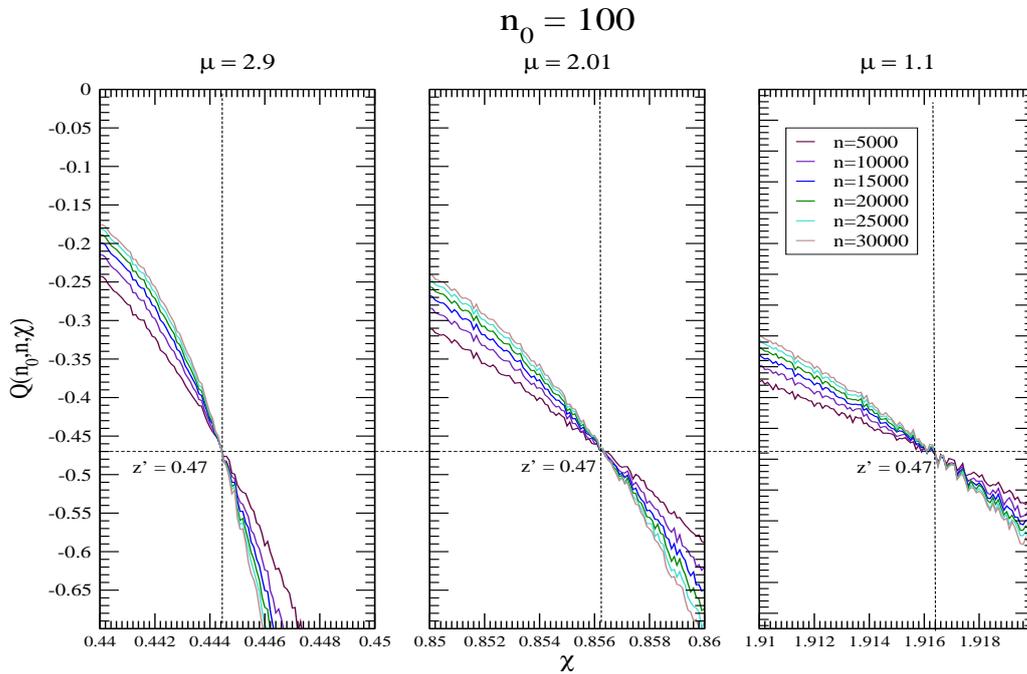


Figura 4.11: Observável $Q(n_0, n, \chi)$ versus $\chi \equiv \lambda/g$ para $n_0 = 100$ e vários valores de n e μ , com ambos os critérios de busca e sobrevivência ligados (CB + CS on). Para todos os valores de μ obtemos $z' = 0.47$. Os parâmetros utilizados foram $g = 100$, $r_v = \ell_0 = 1$, $\mathcal{E}_0 = 100$ e $\alpha = 1$. Foram realizadas médias sobre 500 réplicas com 10^3 caminhadas de busca, cada.

similar à apresentada na seção anterior para o cálculo do expoente ν também indica que os valores de ν' se mantiveram dentro do intervalo $1.92 - 2.00$ para ambos $n_0 = 100$ e $n_0 = 400$, em concordância com os resultados para ν apresentados na Fig. 4.8. De fato, como comentado, era de se esperar que ν e ν' fossem os mesmos, uma vez que a hipótese de escala para o nosso problema admite apenas uma variável de escala dinâmica, Eq. (4.18). A partir dos valores de z' e ν' , finalmente determinamos $p = z'\nu'$ no intervalo $0.90 - 0.96$, de modo que o expoente p determina a plasticidade do comprimento total após n encontros para a população de *foragers*.

4.4 Limiar de Extinção: Expoente β_{on}

Nesta seção apresentaremos os resultados numéricos da análise de escala do comportamento crítico do parâmetro de ordem ψ na situação em que ambos os critérios de busca e sobrevivência estão ligados (CB + CS *on*). Nesse caso, vamos denotá-lo por ψ_{on} e determinar o seu expoente crítico associado, β_{on} .

Aplicando a hipótese de escala para ψ_{on} , escrevemos

$$\psi_{on}(n, \chi) = n^{-\beta_{on}/\nu''} S \left[n^{1/\nu''} (\chi - \chi_c) \right], \quad (4.36)$$

onde S é a função de escala correspondente. Observamos que ψ_{on} deve estar de acordo com os seguintes limites assintóticos:

$$\begin{aligned} \psi_{on}(\infty, \chi) &\sim (\chi - \chi_c)^{\beta_{on}} && \text{(limite estacionário),} \\ \psi_{on}(n, \chi_c) &= 0 && \text{(extinção).} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Além disso, em completa analogia com os observáveis $k(n_0, n, \chi)$ e $h(n_0, n, \chi)$, definimos as funções auxiliares $\Lambda(n_0, n, \chi)$ e $F(n_0, n, \chi)$ para determinar os expoentes β_{on} e ν'' :

$$\begin{aligned} \Lambda(n_0, n, \chi) &\equiv \frac{\ln \left[\frac{\psi_{on}(n, \chi)}{\psi_{on}(n_0, \chi)} \right]}{\ln \left(\frac{n}{n_0} \right)}, \\ F(n_0, n, \chi) &\equiv \frac{\partial_\chi \ln \psi_{on}(n, \chi)}{\partial_\chi \ln \psi_{on}(n_0, \chi)}, \end{aligned} \quad (4.38)$$

tal que, para $\chi \rightarrow \chi_c$,

$$\begin{aligned} \Lambda(n_0, n, \chi_c) &= -\frac{\beta_{on}}{\nu''}, \\ \ln F(n_0, n, \chi_c) &= \frac{1}{\nu''} \ln \left(\frac{n}{n_0} \right). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Desse modo, determinamos $\beta_{on} \approx 2$ e $\nu'' \approx 2$ para os regimes limites $\mu = 1.1$ e $\mu = 2.9$, fixando $n_0 = 400$ e utilizando os parâmetros $\mathcal{E}_0 = 100$, $g = 100$, $r_v = \ell_0 = 1$ e $\alpha = 1$, com médias sobre 500 réplicas de 10^3 *foragers* cada, como mostra a Fig. 4.12. Essencialmente os mesmos valores de β_{on} e ν'' também foram verificados para outras escolhas de μ e n_0 .

A diferença de comportamento crescente de decrescente para os μ diferentes, se deve essencialmente à transição do caráter das estratégias, isto é, à mudança das estratégias superdifusivas tendendo ao caso balístico $\mu \rightarrow 1$ para estratégias brownianas $\mu \rightarrow 3$.

Notamos, então, que o resultado $\nu'' = \nu$ mais uma vez demonstra a existência de apenas uma variável de escala dinâmica do sistema. Em adição, fisicamente, o expoente ν determina a maneira pela qual a população de *foragers* sobrevive à medida que se encontra sítios, isto é, nossos resultados indicam que a dinâmica deste modelo é caracterizada exclusivamente pelo comprimento de correlação de encontros, o qual evidencia o efeito da flutuação de um j -ésimo encontro na energia da busca como um todo.

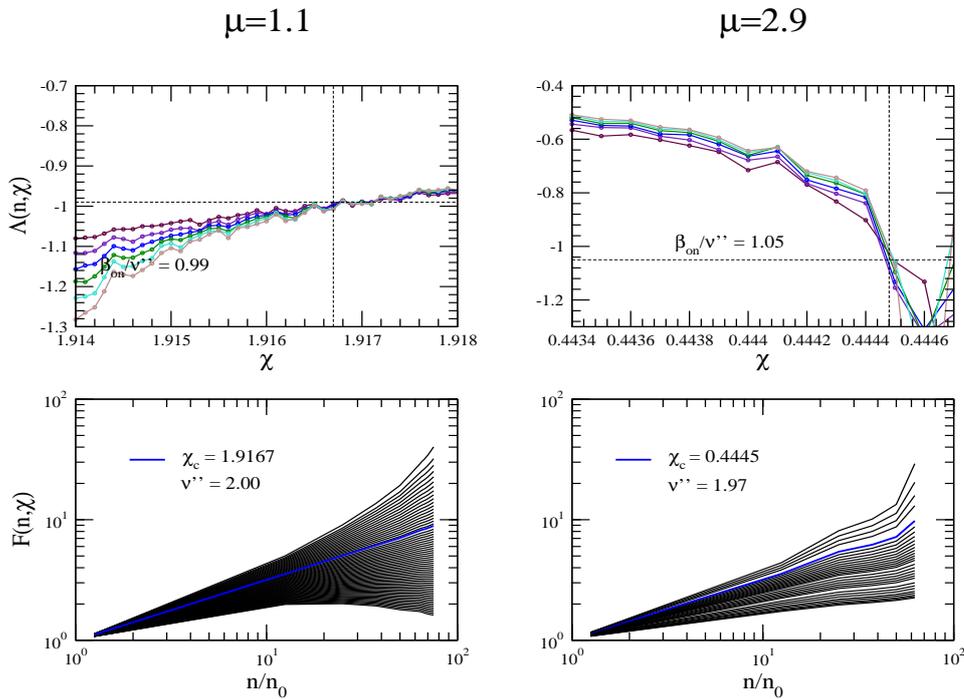


Figura 4.12: Observáveis $\Lambda(n_0, n, \chi)$ e $F(n_0, n, \chi)$ em função de $\chi \equiv \lambda/g$ (gráficos acima) e n/n_0 (gráficos log-log abaixo), para $n_0 = 400$ fixo, $\mu = 1.1$ e $\mu = 2.9$, com ambos os critérios de busca e sobrevivência ligados (CB + CS *on*). Para ambos os valores de μ obtemos $\beta_{on} \approx 2$ e $\nu'' \approx 2$. Os parâmetros utilizados foram $g = 100$, $r_v = \ell_0 = 1$, $\mathcal{E}_0 = 100$ e $\alpha = 1$. Foram realizadas médias sobre 500 réplicas com 10^3 caminhadas de busca, cada.

4.5 Universalidade do Problema de *Foraging* com Dinâmica Energética

Destinamos esta seção ao resumo de alguns dos principais resultados do presente capítulo, tais como os valores das densidades críticas e dos expoentes críticos. Em seguida, discutiremos possíveis aplicações destes resultados em diversos contextos de buscas aleatórias com dinâmica energética.

De acordo com os nossos resultados numéricos apresentados na Tabela 4.1, temos quatro expoentes críticos bem determinados e universais com respeito ao parâmetro μ . Para três deles apresentamos também as suas respectivas previsões teóricas para comparação.

	β	β_{on}	β'	ν	p
Simulação	0.98(4)	2.02(5)	1.00(7)	2.00(8)	0.94(3)
Analítico	1	–	1	2	–

Tabela 4.1: Tabela de expoentes críticos obtidos numérica e analiticamente para vários valores de μ . Correspondentemente temos $\psi_{off} \rightarrow \beta$, $\psi_{on} \rightarrow \beta_{on}$, $\Gamma \rightarrow \beta'$, $n \rightarrow \nu, \tau \rightarrow p$.

Cada um dos parâmetros de ordem e observáveis definidos neste capítulo determina um valor crítico do comprimento específico χ_c para cada μ , conforme apresentado na Tabela 4.2. Observamos um excelente acordo entre os diversos valores numéricos, bem como entre estes e o valor analítico apresentado na linha da função $\psi(\mu, \chi)$, obtido a partir da equação $g = \alpha m_1(\lambda_c, \mu)$ (ver capítulo 3).

Observável	χ_c para $\mu = 1.1$	χ_c para $\mu = 2.01$	χ_c para $\mu = 2.9$
$k(n_0, n, \chi)$	1.9170(6)	0.8565(6)	0.4445(6)
$Q(n_0, n, \chi)$	1.9164(4)	0.8564(4)	0.4444(4)
$h(n_0, n, \chi)$	1.9162(1)	0.8572(1)	0.4445(1)
$\psi_{on}(n \rightarrow \infty, \chi)$	1.9164(7)	0.8562(7)	0.4444(7)
$\psi_{off}(n \rightarrow \infty, \chi)$	1.9172(7)	0.8560(7)	0.4441(7)
$\psi(\mu, \chi)$	1.9163	0.8634	0.4471
$\Lambda(n_0, n, \chi)$	1.9167(4)	0.8565(4)	0.4445(4)
$F(n_0, n, \chi)$	1.9167(1)	0.8565(1)	0.4445(1)

Tabela 4.2: Tabela de valores da densidade crítica χ_c obtidos numérica e analiticamente (linha da função $\psi(\mu, \chi)$) para vários valores de μ .

É interessante comparar os nossos resultados para o problema de *foraging* com os do problema de percolação direcionada (*directed percolation* - DP), geralmente considerado como “o modelo de Ising das transições de fase dinâmicas” [Hin06], dada a sua diversidade de aplicações e mapeamentos (ver também a seção 1.2). Primeiramente, notamos que os nossos parâmetros de ordem, ψ_{on} e Γ , possuem expoentes críticos $\beta' \neq \beta_{on}$ ($\beta' \cong 1$ e $\beta_{on} \cong 2$), com ambos os critérios de busca e sobrevivência ligados. Em contraste, a existência de uma simetria adicional específica do problema de DP (simetria de reversão de rapidez ou *rapidity reversal symmetry*) faz com que, nesse caso, $\beta' = \beta$ para parâmetros de ordem com definições similares às do nosso problema [Hin06]. No nosso contexto essa simetria é mapeada ao se inverter a trajetória do *forager* até a condição inicial, o que não é possível devido a aleatoriedade dos passos, diferentemente da DP em que, uma vez percolada a trajetória pode ser invertida caracterizando a simetria.

Por outro lado, é importante mencionar ainda que o resultado $\beta' \neq \beta$ também é obtido no contexto do problema do autômato celular de Domany-Kinzel (*cellular-automaton Domany-Kinzel* - CDK), cujo comportamento nas vizinhanças da criticalidade é mapeado no modelo de percolação direcionada compacta [Lü06]. Além deste, os modelos do votante (*voter model* - VM), Ising cinético de não-equilíbrio (*non-equilibrium kinetic Ising model* - NEKIM), de Glauber e os modelos que envolvem ramificações e aniquilações de caminhantes aleatórios (*branching and annihilation random walks* - BARW) também apresentam a ausência da simetria DP específica, de modo que $\beta' \neq \beta$ [Ó04].

Uma outra distinção importante com respeito ao modelo DP é o fato deste apresentar a evolução do sistema no espaço e no tempo, caracterizando, assim, a presença de variáveis de escala espacial e dinâmica e os respectivos expoentes críticos associados, geralmente denotados por ν_{\perp} e ν_{\parallel} . No nosso caso, a escala espacial λ se confunde com o próprio parâmetro de controle do sistema (análogo à probabilidade de percolação p no problema DP ou à temperatura em muitas transições de fase de equilíbrio), de modo que apenas a variável de escala dinâmica é definida associada ao expoente ν .

Por fim, mencionamos também que o nosso sistema é caracterizado por uma “interação” de longo alcance (distribuição de Lévy) [HHL08, p. 213], em contraste com a interação de curto alcance (distribuição uniforme) do modelo DP. Estes motivos nos permitem concluir que a classe de universalidade do problema de *foraging* com dinâmica energética não satisfaz a conjectura de Janssen and Grassberger, que faz com que uma grande diversidade de sistemas apresentando transição de fase dinâmica pertença à mesma classe de universalidade do problema DP [Hin06].

4.6 Flutuações do Forager e Extinções Biológicas

Vale comentar ainda sobre os nossos resultados no contexto da extinção biológica de organismos em meios com recursos escassos [FLR⁺12, MA97].

A conexão é realizada através do fenômeno crítico descrito pela taxa de sobrevivência na proximidade da transição, a qual, como vimos, é governada essencialmente pela estratégia de busca de alimentos, segundo a teoria unificada do problema de *foraging* [MC86]. Por exemplo, em um ambiente de densidade escassa de sítios-alvo um *forager* típico poderia aumentar o quanto possível a sua difusividade como uma estratégia de sobrevivência, tal como o faz a *borboleta azul Karkloof** [SL07]. No contexto das buscas de Lévy, isto pode ser feito considerando valores menores de μ . Tais escolhas, entretanto, podem ser limitadas por vínculos físicos [New06], heterogeneidade do meio, *etc.* Nesse sentido, os ambientes escassos em conjunto com tais limitações podem naturalmente levar à extinção

*Nome científico: *Orachrysops ariadne*.

da espécie. Contudo, sendo este um fenômeno crítico, fortes flutuações estão presentes para $\chi \rightarrow \chi_c$, de modo que pode existir uma fração de *foragers* que sobrevivem próximo ao ponto crítico durante um tempo t_s considerável. O tempo t_s é o tempo de relaxação do sistema em direção ao equilíbrio ou tempo para extinção [GSO98], o qual é proporcional ao comprimento de correlação temporal da busca, ξ , isto é, $t_s \sim \xi^n$, que diverge exatamente no ponto crítico, isto quer dizer que a fração de *foragers* que sobrevivem terminam a missão. Naturalmente, se o sistema permanece indefinidamente no ponto crítico a espécie será extinta, assim t_s descreve o tempo para que o sistema atinja o equilíbrio (no ponto crítico o sistema não entra em equilíbrio). Uma vez que o número de encontros numa situação real ou computacional é sempre finito, o tempo t_s pode ser calculado através do estudo dos efeitos de tamanho finito do sistema, isto é, usamos um tempo t_s suficientemente grande para que ocorra a convergência do teorema do limite central no regime de um grande número de encontros. Computacionalmente, no nosso caso específico t_s é dado então pelo número máximo de encontros considerados numa dada busca, *e.g.* $t_s = 30000$. Se t_s for longo o suficiente para que os recursos sejam regenerados [LBT⁺10] ou para que haja adaptação da estratégia de busca ao ambiente escasso [SL07], então a espécie pode não ser extinta, uma vez que os *foragers* remanescentes podem restaurar o número original de indivíduos via mecanismos de reprodução/replicação [LBT⁺10, PA06]. Eventualmente, uma mudança adaptativa em μ ou algum outro fator de impacto positivo pode retirar a espécie da região de criticalidade, aumentando as suas chances de sobrevivência a longo prazo.

O tempo em que o sistema permanece na criticalidade, t_c , naturalmente dependerá do sistema ou da ecologia em questão. A razão $S = t_s/t_c$ é, portanto, um importante quantificador do tempo de crescimento ou decrescimento populacional em condições adversas do processo de busca por alimento [FLR⁺12]. Analogamente, para um processo de busca associado ao encontro social com a finalidade de reprodução [LBT⁺10], podemos escrever a mesma razão $S \rightarrow R$ com $t_s \rightarrow t_r$ descrevendo o tempo típico para que haja reprodução/replicação. Então, R e S descrevem os mecanismos chaves em condições adversas de extinção-sobrevivência de uma espécie. Por exemplo, se a razão R for muito pequena, isto é, se a reprodução estiver comprometida, é certo que em condições adversas haverá extinção. Esta aproximação, contudo, não leva em conta os diversos recursos que a natureza dispõe para a preservação da vida.

Durante a história da vida na Terra as extinções em massa têm ocorrido com alguma frequência (existem pelo menos cinco grandes eventos identificados [Alr08]), tendo sido apontadas como fenômenos críticos de extinção [SBFJ95]. Tem-se argumentado que a busca por alimento é o gerador de pequenas perturbações em ecossistemas complexos [SBFJ95, Alr08]. É interessante notar que uma lei de potência com expoente apro-

ximadamente 2, foi observada a partir da análise de fósseis [SM96] para o número de extinções em função do seu tamanho (medido pelo número de famílias extintas), de modo bastante similar à lei de potência da distribuição de tamanhos de avalanches, descritas como um fenômeno de criticalidade auto-organizada [FCMS⁺96]. Nesse caso, por exemplo, dobrando-se o tamanho da extinção, ela demora quatro vezes mais para ocorrer.

De uma forma geral, não é um fato extraordinário nem trivial que a dinâmica energética associada às taxas R e S capte os primeiros aspectos de uma extinção. Em última análise, na adversidade esses dois mecanismos em conjunto capturam os aspectos fundamentais que determinam as extinções desde microorganismos até espécies extremamente complexas do ponto de vista evolutivo. Por exemplo, no evento de extinção dos homens de Neanderthal, que aconteceu há cerca de 30.000 anos após a última Era do Gelo, quando o seu sistema ecológico tornou-se completamente adverso [Gil07], a direta competição por recursos [MF11] com os homens modernos, dotados de maior mobilidade e melhores estratégias de busca por alimento [BDF⁺11, BHG06], é apontada como o fator nocaute para a sua extinção [MF11].

Finalmente, é importante enfatizar que, apesar de levar em conta alguns dos mecanismos relevantes da busca por recursos, o nosso modelo é consideravelmente minimalista, uma vez que não considera muitos ingredientes biológicos. Por outro lado, nenhum modelo até o presente momento tem se mostrado completo o suficiente do ponto de vista realista. Há, nesse sentido, diversos modelos matemáticos determinísticos [YYS12, MGT06] e não determinísticos para explicar os fenômenos de extinção [SM96, Alr08, SBFJ95, MGT06]. Contudo, por estar de acordo com a teoria unificada do problema de *foraging* [MC86] podemos concluir que, apesar de não conter todos os ingredientes, o nosso modelo captura alguns dos resultados gerais da busca aleatória de Lévy [VBH⁺99, Bar07], tais como, por exemplo, a determinação da melhor estratégia de busca em função da densidade de recursos disponíveis [HQD⁺10, HWQ⁺12]. Assim, em última análise, podemos reportar que extinções são fenômenos críticos decorrentes da própria evolução dinâmica do sistema em questão, corroborando as hipóteses seminais dos autores que descrevem extinções como criticalidade auto-organizada [SM96, BTW87, Jab05]. Nesse sentido, mesmo num estado estacionário ou de equilíbrio, em que as taxas de sobrevivência e reprodução das diversas espécies se equilibram dinamicamente numa cadeia alimentar organizada, flutuações provindas dos processos de busca por alimento em espécies chaves [Pai95, CZdSS03] podem determinar extinções em massa por efeito em cadeia [SM96], ou mesmo explosões evolutivas através do alívio de uma pressão específica de predação ou competição [CZdSS03], como por exemplo na evolução dos mamíferos, antes contida pela predação dos dinossauros [Jab05], ou da competição entre bactérias, fungos e vírus [PA06]. Este fato decorre imediatamente da invariância de escala do nosso modelo, isto é, pequenas perturbações

podem se propagar em todas as escalas [BTW87], podendo desencadear uma “avalanche de extinções”. É importante comentar que não estamos negando que várias ações externas aos ecossistemas* tenham causado eventos de extinção, nem somos os primeiros a teorizar sobre extinções e criticalidade, mas acreditamos estar contribuindo com um argumento robusto, para enfatizar que eventos de extinção são também manifestações de criticalidade auto-organizada provocadas por flutuações na busca por recursos, a partir de um modelo de busca em que são permitidos ao *forager* de Lévy passos extremamente longos, se comparados a estratégias brownianas.

**E.g.*, impulsos aleatórios do tipo “intervenções divinas”.

Capítulo 5

Buscas Aleatórias em Meios Heterogêneos

De noite, como
a luz é pouca,
a gente tem a impressão
de que o tempo não passa
ou pelo menos não escorre
como escorre o dia:
como se desse uma interrupção
para o dr. Bacelar fazer uma
palestra no Grêmio
Lítero-Recreativo Português
...

Excerto de Poema Sujo

Ferreira Gullar
maio-outubro/1975
Buenos Aires

Neste capítulo estudaremos como a eficiência da busca e a sua dinâmica de difusão dependem da introdução de flutuações nas posições iniciais do *forager*. De um modo geral, investigaremos como a heterogeneidade na distribuição de recursos no meio afeta a difusividade das buscas eficientes no caso de densidades escassas de sítios-alvo [RBdL⁺11]. Em particular, apresentaremos o nosso principal resultado, o qual pode ser empiricamente testado [SWR⁺06, WWL⁺11, GHV⁺11, SSAS10, MOJ10, MW99]: o aumento da difusividade do *forager* (contemplando, inclusive, as buscas superdifusivas) no sentido de favorecer o sucesso dos encontros de sítios-alvo em cenários heterogêneos.

5.1 Distribuições de Posições Iniciais

De acordo com a discussão apresentada no capítulo 1, no regime de baixas densidades de recursos do problema de *foraging* duas situações limites têm sido extensivamente consideradas [VBH⁺99]: (i) buscas não-destrutivas, em que após um encontro o *forager* recomeça a busca a uma pequena distância do último sítio localizado, e (ii) buscas destrutivas, em que, uma vez localizado, o sítio é destruído, de modo que a distância média do *forager* aos demais sítios é grande no regime de escassez de recursos. Como vimos, a máxima eficiência para as buscas não-destrutivas é obtida para valores intermediários de μ , isto é, $\mu \approx 2$, enquanto que para as buscas destrutivas tem-se que $\mu \rightarrow 1$ (regime balístico). É importante observar ainda que, ao se variar a distância inicial ao sítio mais próximo [RB09a, Rey10] ou o grau de revisitabilidade ou regeneração temporal dos sítios-alvo, surgem valores intermediários para a estratégia de busca mais eficiente, $1 < \mu \lesssim 2$ [RBd⁺03, SRVd04]. Nessa última situação, é interessante comentar também, em conexão com a dinâmica energética da busca, que devido ao efeito do custo energético de deslocamento do *forager* o intervalo dos valores de μ em que o ganho de energia permanece positivo é de fato limitado [RBd⁺03, SRVd04], como discutimos na seção 3.2. Nesse sentido, estratégias de buscas caracterizadas por passos muito grandes, tendendo ao limite balístico, podem não ser acessíveis, uma vez que isto implicaria em um alto custo no balanço energético.

O efeito da densidade *global* de recursos no comportamento do *forager* tem sido bem documentado [HQD⁺10, SWR⁺06, BPP⁺03b, LM08, BGL⁺10]. Por outro lado, a análise do papel para a eficiência da busca das flutuações *locais* na densidade de sítios-alvo em cenários heterogêneos é um problema ainda pouco explorado. Ambos constituem fatores chaves para a compreensão da otimização das buscas na situação em que o *forager* possui apenas uma percepção limitada do ambiente ao seu redor [RB09a, Rey10, RBd⁺03, SRVd04].

Nesse contexto consideraremos a seguir no nosso modelo de buscas aleatórias diversos graus de inhomogeneidades na distribuição de recursos através da introdução de flutuações nas distâncias iniciais do *forager* aos sítios-alvo. O efeito destas inhomogeneidades na eficiência da busca será analisado qualitativamente para o caso geral e quantitativamente para as buscas de Lévy, no regime de baixas densidades globais de recursos.

O ponto de partida é o nosso modelo de busca, com regras apresentadas nas seções 1.7 e 3.1. Nele a busca se dá em um espaço unidimensional com condições absorventes de contorno separadas por uma distância λ , isto é, com os sítios-alvo localizados em $x = 0$ e $x = \lambda$. Cada vez que um encontro ocorre a busca é reiniciada e uma nova posição inicial é sorteada a partir da função densidade de probabilidades $\pi(x_0)$. Nos capítulos precedentes sempre consideramos $\pi(x_0)$ uniforme. É nosso interesse, agora, introduzir variações em $\pi(x_0)$ de modo a contemplar situações em que, por exemplo, o *forager* tenda na maioria

das vezes a recomeçar a busca com sítios por perto, como em uma distribuição de sítios agregados. A forma funcional de $\pi(x_0)$ determina, então, o cenário de busca, cujo grau de heterogeneidade pode ser alterado pela escolha apropriada de $\pi(x_0)$.

Nesse sentido a busca destrutiva representa a situação limite em que $\pi(x_0)$ é bastante aguda e simétrica com respeito ao meio do intervalo, $x = \lambda/2$, pois nesse caso ambos os sítios extremos estão igualmente muito distantes do *forager* no regime de escassez de recursos. Por outro lado, distribuições $\pi(x_0)$ que geram condições assimétricas estão relacionadas aos cenários de agregação de sítios-alvo.

Mais especificamente, o caso **destrutivo** é descrito pela escolha

$$\pi(x_0) = \delta(x_0 - \lambda/2), \quad (5.1)$$

onde $\delta(x_0)$ denota a função delta de Dirac. Isto implica que cada busca sempre começa exatamente equidistante das bordas. Flutuações com respeito a essa situação podem ser introduzidas ao considerarmos, por exemplo, uma distribuição de posições iniciais com decaimento exponencial poissoniano (Fig. 5.1):

$$\pi(x_0) = a \exp[-(\lambda/2 - x_0)/\alpha], \quad (5.2)$$

onde $r_v < x_0 \leq \lambda/2$, a é a constante de normalização e consideramos $\pi(x_0) = \pi(\lambda - x_0)$ para a simetria do espaço de busca. Acima, o parâmetro α determina o quanto as posições iniciais estão na média dispersas ao redor do centro do intervalo, $x_0 = \lambda/2$. De fato, quanto maior o valor de α , mais espalhadas ao redor de $x_0 = \lambda/2$ encontram-se as posições iniciais. Por outro lado, no limite de máxima assimetria entre os dois sítios nas bordas o *forager* reinicia a sua busca sempre à menor distância possível do sítio mais próximo, isto é,

$$\pi(x_0) = \delta(x_0 - r_v). \quad (5.3)$$

Essa situação corresponde ao caso **não-destrutivo** descrito acima. Similarmente, flutuações com respeito a essa situação podem ser introduzidas considerando uma distribuição poissoniana que decai a partir de $x_0 = r_v$:

$$\pi(x_0) = b \exp[-(x_0 - r_v)/\alpha], \quad (5.4)$$

onde $r_v < x_0 \leq \lambda/2$, b é a constante de normalização e $\pi(x_0) = \pi(\lambda - x_0)$.

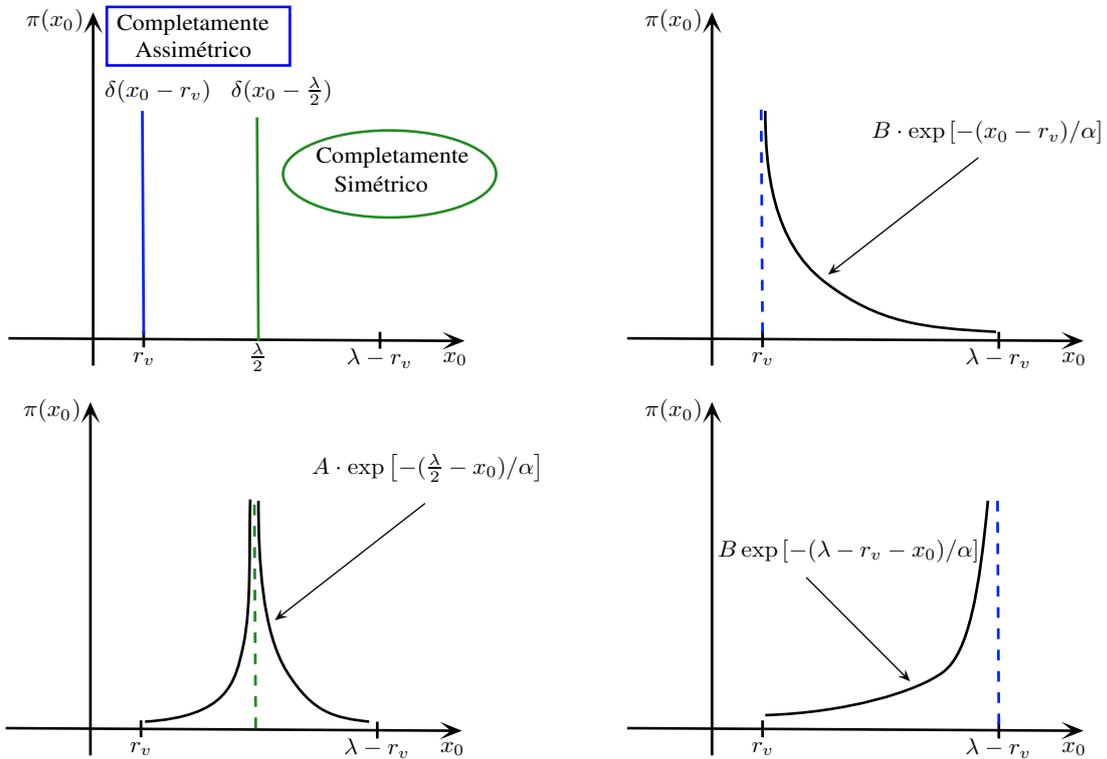


Figura 5.1: Esboço, em ordem respectiva da esquerda para direita e de cima para baixo, das Eqs. (5.3), (5.1), (5.2) e (5.4). No último quadro (abaixo à direita), esboçamos a Eq. (5.2) com $x_0 \rightarrow \lambda - x_0$.

5.2 Acoplamento com os Cenários de Buscas Unidimensionais

Assim como nos capítulos precedentes, vamos considerar a seguir um caminhante aleatório com condições de contorno absorventes em uma dimensão, cujos comprimentos dos passos são distribuídos pela densidade de probabilidades $p(\ell)$, com igual probabilidade de sentidos, isto é, esquerda e direita têm a mesma probabilidade de serem escolhidas. O raio de visão r_v define a distância para a detecção de sítios. Portanto, se os sítios-alvo estão localizados nas posições $x = 0$ e $x = \lambda$ então o *forager* pode começar a sua caminhada dentro do intervalo $r_v < x < \lambda - r_v$. O nosso interesse consiste em ambientes escassos, determinados pela condição $\lambda \gg r_v$.

A grandeza física de interesse agora é a eficiência estatística, η , que está diretamente relacionada com a otimização das estratégias de buscas [VBH⁺99]. Como vimos na sub-

seção 1.7.1, esta quantidade é calculada como a razão do número de sítios encontrados (considerado suficientemente grande) pela distância total percorrida pelo caminhante:

$$\eta = \frac{n}{L_{\text{tot}}}. \quad (5.5)$$

De fato, para uma dada sequência $\{x_{0,i}\}$ de posições iniciais do *forager* ao longo de uma caminhada de busca, escrevemos explicitamente que

$$\eta(\{x_{0,i}\}) = \frac{n}{L_{\text{tot}}(\{x_{0,i}\})}. \quad (5.6)$$

Ou seja, a eficiência depende do *ensemble* de posições iniciais $\{x_{0,i}\}$ sorteadas de acordo com $\pi(x_{0,i}) = \pi(x_0)$, para todo i .

A média no *ensemble* das posições iniciais define o acoplamento da busca com os cenários heterogêneos. Isto é, ao invés de usarmos uma função densidade de probabilidade uniforme (cenário homogêneo),

$$\pi(x_0) = \frac{1}{\lambda - 2r_v}, \quad (5.7)$$

como fizemos até aqui ao longo deste trabalho, podemos escolher funções que determinam distribuições de x_0 com diversos graus de assimetria e heterogeneidade. Para realizar tal média, utilizamos a Eq. (3.76), de modo que

$$\bar{\eta} = \frac{1}{\langle L \rangle_p}, \quad (5.8)$$

onde usamos acima o resultado $\overline{\langle L_{\text{tot}} \rangle(\{x_{0,i}\})} = n \overline{\langle L \rangle_p}$. Uma vez que também tencionamos analisar qualitativamente o efeito da heterogeneidade na eficiência das buscas realizadas com uma distribuição de tamanhos de passos geral, $p(\ell)$, adicionamos acima o subíndice p para indicar a dependência de $\overline{\langle L \rangle}$ com a escolha de $p(\ell)$. A partir da Eq. (5.8) escrevemos então

$$\bar{\eta}^{-1} = 2 \int_{r_v}^{\lambda/2} \langle L \rangle_p(x_0) \pi(x_0) dx_0, \quad (5.9)$$

onde, de acordo com a Eq. (2.41),

$$\langle L \rangle_p(x_0) = [(\mathbb{1} - \mathcal{L})^{-1} \langle |\ell| \rangle(x)](x_0), \quad (5.10)$$

com $\langle |\ell| \rangle(x)$ dado pelas Eqs. (2.59)-(2.64). Assim como fizemos no capítulo 2, devido à complexidade do núcleo resolvente do operador integral \mathcal{L} , determinamos $\langle L \rangle_p(x_0)$ através da discretização do espaço de busca, com o auxílio do *software* Matlab.

A seguir, apresentaremos resultados qualitativos para o caso de uma distribuição $p(\ell)$ geral e quantitativos para buscas de Lévy.

5.2.1 Eficiência das Estratégias de Busca em Ambientes Heterogêneos: Caso Geral

Consideramos, primeiramente, os casos limites em que a posição inicial após um encontro, x_0 , é sempre a mesma. Como vimos, essa situação nos permite compreender os mecanismos da eficiência das buscas em condições completamente simétrica (busca destrutiva, $x_0 = \lambda/2$) e maximamente assimétrica (busca não-destrutiva, $x_0 = r_v$). No caso simétrico os sítios estão inicialmente equidistantes do *forager*, com $\lambda/2 \gg r_v$ no regime de baixas densidades de recursos. De um modo geral, a distribuição dos comprimentos de passo, $p(\ell)$, pode ser caracterizada por um conjunto de parâmetros $\{k_i\}$. Assim, existe um determinado subconjunto $\{k_i\}_s$ que apresenta a máxima eficiência η da busca no caso simétrico. Como os sítios estão inicialmente muito distantes do *forager*, esta estratégia também corresponde à de mais rápida difusividade. Por exemplo, no caso de uma distribuição de Lévy do tipo lei de potência, $p(\ell) \sim \ell^{-\mu}$, η é maximizada com a estratégia balística (ver os dados relativos à δ de Dirac na Fig. 5.2) [VBH⁺99]: $k_{1,s} = \mu_{\text{opt},s} \rightarrow 1$.

Por outro lado, na situação de máxima assimetria a busca mais eficiente apresenta um compromisso entre executar passos largos para acessar os sítios mais distantes e passos curtos para vasculhar as vizinhanças de um possível sítio próximo. Neste caso, o subconjunto $\{k_i\}_{\text{as}}$ representa a solução intermediária entre uma difusividade normal (browniana) e a mais rápida possível. No caso das buscas de Lévy não-destrutivas, sabe-se [VBH⁺99] que $k_{1,\text{as}} = \mu_{\text{opt},\text{as}} \approx 2$ (ver os dados relativos à δ de Dirac na Fig. 5.4).

Quando as posições iniciais não são mais constantes, surge a possibilidade de cenários heterogêneos, com estratégias de busca eficientes de difusividades intermediárias com respeito aos casos acima.

Vamos, inicialmente, considerar que o *forager* possa recomeçar a sua busca a partir de posições x_0 mais provavelmente distribuídas em torno de $x_0 = \lambda/2$ (caso destrutivo). Neste caso, esperamos que as posições iniciais próximas aos sítios localizados em $x = 0$ e $x = \lambda$ tenham pequenas probabilidades de ocorrer. Isto implica numa função $\pi(x_0)$ decrescente de $x_0 = \lambda/2$ a $x_0 = r_v$, Eq. (5.2). Consequentemente, ambos $\pi(x_0)$ e $\langle L \rangle_p$ na Eq. (5.9) crescem monotonicamente de r_v a $\lambda/2$ (o crescimento de $\langle L \rangle_p$ é ilustrado na Fig. 5.3). A contribuição mais relevante do produto $\langle L \rangle_p(x_0)\pi(x_0)$ para a eficiência média, Eq.(5.9), surge, portanto, das posições próximas a $x_0 = \lambda/2$, exatamente como ocorre no caso destrutivo. Desse modo, é de se esperar que a situação descrita pela Eq. (5.2) tenha dinâmica ótima similar à do caso destrutivo, $\{k_i\}_s$.

Em contraste, no caso assimétrico as flutuações nas posições iniciais com respeito ao caso não-destrutivo podem ser introduzidas por uma função $\pi(x_0)$ decrescente de $x_0 = r_v$ a $x_0 = \lambda/2$, Eq. (5.4). Portanto, quando $\langle L \rangle_p(x_0)$ aumenta e $\pi(x_0)$ diminui de $x_0 = r_v$ a $x_0 = \lambda/2$, a posição inicial associada com a contribuição mais relevante para o produto $\langle L \rangle_p(x_0)\pi(x_0)$ na Eq. (5.9) se encontra em algum ponto no intervalo entre $x_0 = r_v$ e $x_0 = \lambda/2$. Como consequência, o conjunto de parâmetros $\{k_i\}_{\text{as}}$ que otimizam a eficiência no caso não-destrutivo pode dar lugar a um outro conjunto, $\{k_i\}_{\text{int}}$, que represente uma solução com difusividade intermediária entre os casos não-destrutivo e destrutivo, isto é, uma dinâmica eficiente com expoente de difusão aumentado (superdifusão) em relação à busca não-destrutiva. Eventualmente, em situações em que a distribuição $\pi(x_0)$ assimétrica possui grandes pesos para posições próximas a $x_0 = \lambda/2$, as estratégias ótimas se aproximam do caso completamente simétrico, isto é, $\{k_i\}_{\text{int}} \rightarrow \{k_i\}_{\text{s}}$. Neste caso, o regime intermediário dá lugar a um fenômeno de passagem (*crossover*) do comportamento dinâmico superdifusivo para o balístico.

Observamos ainda que em princípio podemos aplicar esta discussão qualitativa para espaços de busca com dimensões mais altas. Nesta situação, a trajetória de busca pode de fato ser aproximada por uma sequência de movimentos retilíneos [VBH⁺99, BFd⁺08]. Apesar disso, notamos que o encontro de sítios em duas ou três dimensões ocorre com probabilidade consideravelmente mais baixa, uma vez que as direções extras resultam num alargamento do espaço de busca, reduzindo, assim, a taxa de encontros e a eficiência das buscas. Assim, de modo geral a influência da heterogeneidade do meio em dimensões mais altas é reduzido, se comparado ao caso unidimensional. Podemos, portanto, concluir que a análise unidimensional aqui apresentada é de fato útil no estabelecimento de limites superiores do efeito dos cenários heterogêneos nas buscas aleatórias.

A seguir aplicaremos os argumentos acima, válidos para uma distribuição de passos geral, $p(\ell)$, ao caso particular da busca de Lévy.

5.2.2 Eficiência das Estratégias de Busca em Ambientes Heterogêneos: Caso Lévy

No caso específico das buscas de Lévy, assim como vimos considerando até aqui no presente trabalho, o *forager* se desloca com passos de comprimento sorteado a partir da função densidade de probabilidades

$$p(\ell) = \frac{(\mu - 1)\ell_0^{\mu-1}}{2} \frac{1}{|\ell|^\mu}, \quad 1 < \mu \leq 3, \quad |\ell| \geq \ell_0, \quad (5.11)$$

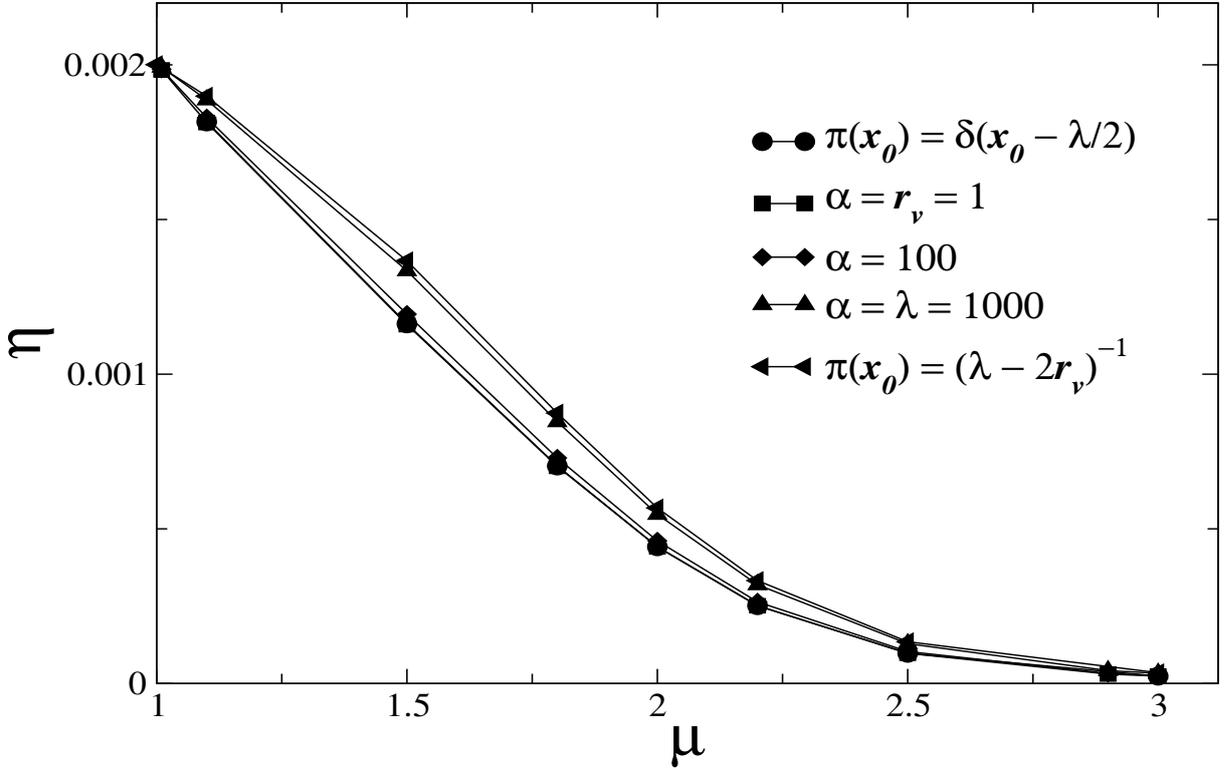


Figura 5.2: Eficiência média, $\bar{\eta}$, obtida a partir da Eq. (5.9), versus μ para os casos da busca de Lévy destrutiva (função δ de Dirac) e de buscas de Lévy com diferentes distribuições simétricas de sítios-alvo ao redor de $x_0 = \lambda/2$, Eq.(5.2) com diversos valores do parâmetro α (cenários com vários graus de heterogeneidade). Quanto maior o valor de α , mais espalhadas ao redor de $x_0 = \lambda/2$ encontram-se as posições iniciais. O caso homogêneo, $\pi(x_0) = (\lambda - 2r_v)^{-1}$, também é mostrado. Em todos os casos, a eficiência da busca é máxima para $\mu \rightarrow 1$ (dinâmica balística), demonstrando a robustez dessa estratégia quanto a flutuações com respeito à situação de busca destrutiva. Os parâmetros usados foram $\lambda = 10^3$ e $r_v = 1$. As linhas sólidas são apenas um guia visual.

e $p(\ell) = 0$ se $|\ell| < \ell_0$, onde ℓ_0 representa o limite inferior para o tamanho dos passos, com a escolha $\ell_0 = r_v$ por simplicidade. O caso $\mu \leq 1$ não é permitido por representar funções não normalizáveis. Como discutimos no capítulo 1, a Eq. (5.11) corresponde [SK86a, SM95, RBdL⁺09a] ao limite assintótico de longo alcance das distribuições de Lévy α -estáveis, tal que $\alpha = \mu - 1$, as quais apresentam dinâmica superdifusiva (balística no caso $\mu \rightarrow 1$) e são governadas pelo teorema do limite central generalizado (o regime browniano difusivo corresponde a $\mu \geq 3$).

Vale comentar que a trajetória de busca eventualmente contém truncamentos de passos devido ao encontro de sítios-alvo, de acordo com as regras do modelo de busca definido na seção 1.7. Assim, a lei de potência da Eq.(5.11) de fato não se estende até o infinito, o que

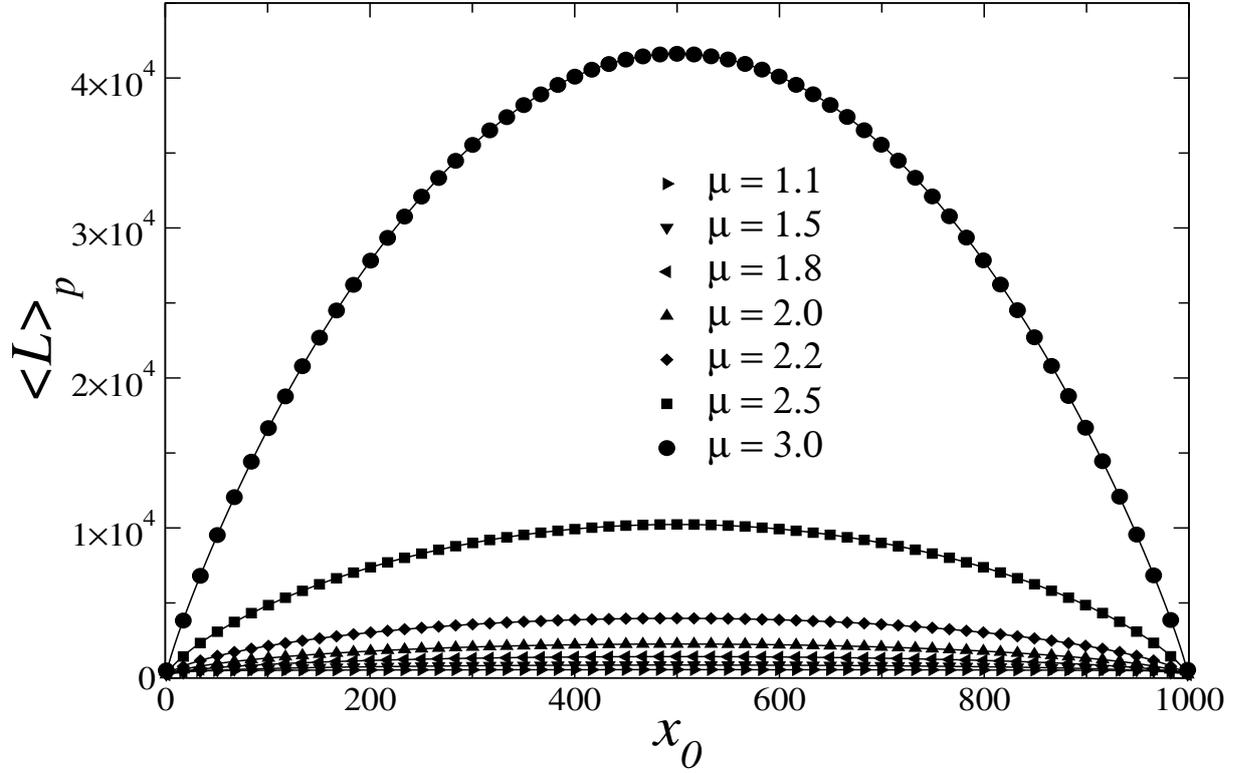


Figura 5.3: Comprimento médio percorrido por um *forager* de Lévy entre dois encontros consecutivos, $\langle L \rangle_p$, em função da sua posição inicial fixa, x_0 , para vários valores de μ . As linhas sólidas representam os resultados obtidos pela discretização numérica da Eq. (2.41) e os símbolos denotam os ajustes não-lineares realizados através da regressão múltipla, Eq. (5.12). Os parâmetros usados foram $\lambda = 10^3$ e $r_v = 1$.

implica em uma distribuição efetiva de Lévy truncada [MS94]. Apesar disso, no regime de escassez de recursos, $\lambda \gg r_v$, a busca deve manter as propriedades de uma caminhada de Lévy não truncada durante a maior parte da sua realização. Mais precisamente, no regime $\lambda \gg r_v$ é pequena a razão do número de passos truncados pelo de não truncados, essencialmente dada [VBH⁺99, BGH⁺01, BHK⁺01] pelo inverso do número médio de passos entre sítios-alvo consecutivos, $R \sim (\lambda/r_v)^{(1-\mu)/2}$ e $R \sim (\lambda/r_v)^{1-\mu}$, para os casos não-destrutivo e destrutivo, respectivamente. Além disso, a justificativa para distribuições truncadas também surge naturalmente no contexto de animais que buscam por alimento, uma vez que passos de tamanho infinito ou mesmo muito grande são proibitivos [PMJ11].

Para determinarmos os efeitos das flutuações nas posições iniciais nas buscas de Lévy, precisamos estudar explicitamente o comportamento da integral na Eq. (5.9). Primeiramente, no que diz respeito à distância média percorrida entre dois encontros sucessivos por um *forager* de Lévy com posição inicial x_0 , $\langle L \rangle_p(x_0)$, a discretização da Eq. (2.41) segundo a prescrição da seção 2.4 leva ao resultado mostrado em linhas sólidas na Fig. 5.3

para vários valores de μ , $\lambda = 1000$ e $r_v = 1$. Nesse gráfico a presença da simetria $\langle L \rangle_p(x_0) = \langle L \rangle_p(\lambda - x_0)$ pode ser conferida.

No caso da busca não-destrutiva na ausência de flutuações, em que $\pi(x_0)$ é dada pela delta de Dirac, Eq. (5.3), a existência de uma eficiência máxima para um expoente intermediário $\mu_{\text{opt,as}} \approx 2$ (Fig. 5.4) na condição de máxima assimetria, $x_0 = r_v$, pode ser compreendida da seguinte forma. Por um lado, no limite $\mu \rightarrow 1$ o *forager* de Lévy pode acessar os sítios mais distantes numa trajetória balística após um pequeno número de passos bastante largos, implicando num alto valor de $\langle L \rangle_p(x_0 = r_v)$ e, portanto, em baixa eficiência. Em contrapartida, no limite browniano, $\mu \rightarrow 3$, o *forager* tende a encontrar os sítios mais próximos (sempre presentes no caso não-destrutivo) após um grande número de pequenos passos, o que também implica em altos valores de $\langle L \rangle_p(x_0 = r_v)$. Desse modo, o compromisso entre estas duas tendências gera um máximo de η para um valor intermediário, $\mu_{\text{opt,as}} \approx 2$.

No caso da busca destrutiva, com $\pi(x_0)$ dada pela Eq. (5.1), os sítios próximos estão ausentes, de modo que uma solução envolvendo o compromisso discutido acima não é mais possível. Nessa situação, no regime $\lambda \gg r_v$ o *forager* deve se deslocar balisticamente, com $\mu_{\text{opt,s}} \rightarrow 1$, até os sítios distantes a fim de maximizar a sua eficiência da busca.

Passemos agora à discussão da busca de Lévy na presença de flutuações com respeito às funções delta de Dirac. Uma vez que a solução exata para a Eq. (2.41) não é conhecida até o presente momento, o estudo de $\langle L \rangle_p(x_0)$ pode ser realizado ao considerarmos uma regressão múltipla dos dados obtidos a partir da discretização da Eq. (2.41), tal que

$$\langle L \rangle_p(x_0) = \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_\mu} a_{ij} x_0^i \mu^j. \quad (5.12)$$

Como indicado em símbolos na Fig. 5.3, um ajuste excelente é obtido através da Eq. (5.12), com $N_x = 10$ e $N_\mu = 8$. A eficiência $\bar{\eta}$ pode então ser calculada para vários valores do parâmetro α através da substituição da Eq. (5.12) na Eq. (5.9), juntamente com as Eqs. (5.2) ou (5.4), e executando a integração analiticamente. Os resultados encontram-se mostrados nas Figs. 5.2 e 5.4, para flutuações com respeito aos casos destrutivo e não-destrutivo, respectivamente.

Por um lado, considerando flutuações para distâncias iniciais longínquas dos sítios, Eq. (5.2), notamos na Fig. 5.2 que a eficiência é qualitativamente similar àquela da condição completamente simétrica (busca destrutiva), Eq. (5.1), concordando com os argumentos gerais da seção 5.2.1. Nestes casos o máximo da eficiência é atingido para $\mu \rightarrow 1$. No intervalo $1 < \mu < 3$ a presença das flutuações aumenta muito pouco o valor da eficiência.

Estes resultados indicam que as estratégias balísticas permanecem robustas na presença de flutuações nos sítios que estão a grandes distâncias iniciais do *forager*.

Por outro lado, a presença de flutuações nos sítios que estão inicialmente próximos do *forager*, Eq. (5.4), reduz consideravelmente a eficiência das buscas, em comparação à condição completamente assimétrica, Eq. (5.3), como mostra a Fig. 5.4. Neste regime, quando as flutuações aumentam consideravelmente o peso de posições iniciais mais distantes (α maiores), as estratégias de Lévy ótimas apresentam o caráter superdifusivo incrementado, observado na localização do máximo de eficiência na Fig. 5.4, que se desloca a partir do valor $\mu_{\text{opt,as}} \approx 2$ em direção à estratégia balística, $\mu_{\text{opt}} \rightarrow 1$, à medida que maiores valores de α são considerados na Eq. (5.4). De fato, como discutimos no capítulo 1, uma diminuição no valor de μ_{opt} está diretamente relacionada com um aumento no expoente de Hurst [VdLRS11, SK86a, SM95] e, portanto, no incremento também do expoente de difusão. Vale comentar, por fim, que o limite $\alpha \rightarrow \infty$ corresponde à situação de distribuição uniforme, $\pi(x_0) = (\lambda - 2r_v)^{-1}$, também mostrada nas Figs. 5.2 e 5.4.

Para quantificar a passagem (*crossover*) observada na Fig. 5.4 entre os regimes com $\mu_{\text{opt,as}} \approx 2$ e $\mu_{\text{opt}} \rightarrow 1$ em função do aumento do parâmetro α , vamos considerar a seguir a função $\mu_{\text{opt}}(\alpha)$, que identifica a localização no eixo μ do máximo de $\bar{\eta}$ para cada curva da Fig. 5.4. Como sabemos, uma solução com $\mu_{\text{opt}}(\alpha) \leq 1$ não é possível, visto que corresponde a uma função (5.11) não normalizável. Assim, todos os valores tais que $\alpha > \alpha_{\text{cross}}$ levam a um máximo na eficiência em $\mu_{\text{opt}}(\alpha) \rightarrow 1$. Nesse sentido, α_{cross} marca o limite acima do qual as estratégias balísticas de busca são as mais eficientes.

O valor de $\mu_{\text{opt}}(\alpha)$ pode ser determinado a partir da condição de mínimo de $\overline{\langle L \rangle}_p(\alpha)$ (ou máximo de $\bar{\eta}$, segundo a Eq. (5.8)):

$$\left. \frac{\partial \overline{\langle L \rangle}_p}{\partial \mu} \right|_{\mu=\mu_{\text{opt}}} = 0, \quad (5.13)$$

ou equivalentemente,

$$f(\mu = \mu_{\text{opt}}, \alpha) = 0, \quad (5.14)$$

tal que, considerando as Eqs. (5.4), (5.9) e (5.12), escrevemos

$$f(\mu, \alpha) = 2A \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_\mu} a_{ij} j \mu^{j-1} \left\{ \sum_{k=0}^i \left[\frac{i! \alpha^{k+1}}{(i-k)!} \left(e^{-\alpha r_v} r_v^{i-k} - e^{-\alpha \lambda/2} \left(\frac{\lambda}{2} \right)^{i-k} \right) \right] \right\}, \quad (5.15)$$

com $A = \{2\alpha[\exp(-r_v/\alpha) - \exp(-\lambda/(2\alpha))]\}^{-1}$. As soluções $\mu_{\text{opt}}(\alpha)$ da Eq. (5.14) para $\lambda = 1000$ e $r_v = 1$ são indicadas na Fig. 5.5 como os zeros da função $f(\mu, \alpha)$. Elas também

aparecem na Fig. 5.4 na forma de símbolos vazios, marcando a localização do máximo de cada curva de eficiência. Por fim, o *crossover* pode ser determinado através de

$$f(\mu \rightarrow 1^+, \alpha = \alpha_{\text{cross}}) = 0. \quad (5.16)$$

No caso da distribuição $\pi(x_0)$ dada pela Eq. (5.4), obtemos $\alpha_{\text{cross}} \approx 312.2$ para $\lambda = 10^3$ e $r_v = 1$ (ver detalhe da Fig. 5.5).

Para avaliarmos a robustez das discussões acima, consideramos como uma alternativa à Eq. (5.4) uma distribuição de posições iniciais do tipo lei de potência decrescente,

$$\pi(x_0) = Cx_0^{-\nu}, \quad (5.17)$$

com $r_v < x_0 \leq \lambda/2$ e $\pi(x_0) = \pi(\lambda - x_0)$, em que C é uma constante de normalização. Diferentemente das distribuições (5.2) e (5.4), a característica de cauda longa apresentada pela Eq. (5.17) confere propriedades de autoafinidade e invariância de escala para $\pi(x_0)$ sobre um longo intervalo de alcance espacial no regime de baixas densidades de sítios, $\lambda \gg r_v$. Além disso, a evidência de distribuições com invariância de escala tem sido reportada também no contexto biológico de animais que buscam por alimento [SSH+08]. A partir de uma análise similar à feita acima com a Eq. (5.4), encontramos que todas as estratégias de buscas ótimas de Lévy com $\nu < \nu_{\text{cross}} \approx 0.35$ apresentam dinâmica balística, enquanto que as soluções com superdifusão aumentada surgem para $\nu \geq \nu_{\text{cross}}$. Estes resultados também estão de acordo com a discussão geral da seção 5.2.1.

Vale comentar ainda que, uma vez que as estratégias balísticas têm eficiência reduzida em espaços com dimensões mais altas [RB09b], é possível que em duas e três dimensões tais estratégias sejam limitadas, por exemplo, pelo balanço energético da busca. Apesar disso, buscas não necessariamente balísticas, mas com superdifusividade aumentada, $1 < \mu_{\text{opt}} < 2$, podem surgir em ambientes heterogêneos em dimensões mais altas.

Destes resultados concluímos que, na presença de distribuições poissonianas nas distâncias iniciais com $\alpha \leq \alpha_{\text{cross}}$, estratégias de Lévy para as buscas com propriedades de superdifusão aumentada, $1 < \mu_{\text{opt}} < \mu_{\text{opt,as}} \approx 2$, representam a condição de otimização das soluções. Dessa forma, as buscas em ambientes heterogêneos podem se beneficiar desse incremento na difusividade do *forager*. Por outro lado, para flutuações suficientemente fortes com $\alpha > \alpha_{\text{cross}}$ um *crossover* para a estratégia balística emerge a fim de possibilitar o acesso eficiente do *forager* a regiões distantes onde os sítios encontram-se distribuídos.

5.3 Ecologia do *Forager*

O efeito da limitação de recursos na mobilidade animal é bem documentado. É conhecido, por exemplo, que a escassez provinda da competição por recursos induz altas taxas de dispersão [Bye00, SGN] e deslocamentos de longo alcance a partir do *habitat* dos indivíduos [Sou99, BDF08]. A fragmentação do *habitat* também altera a forma de dispersão, frequentemente aumentando o seu alcance espacial [VHPH⁺07]. No contexto do comportamento do *forager* na busca por alimento, o caráter global da densidade de recursos tem sido consideravelmente investigado, com fortes evidências apontando para a passagem das estratégias brownianas para as superdifusivas quando os animais ingressam em ambientes escassos a partir de regiões abundantes em recursos. Esta fato tem sido observado desde espécies de microrganismos [BPP⁺03a] até grandes predadores marinhos [HQD⁺10, SWR⁺06, BGL⁺10]. Em contraste, muito pouco é conhecido até o momento sobre o sucesso das buscas com respeito à influência da heterogeneidade e das flutuações locais na densidade de recursos.

A maior parte dos esforços teóricos com base na teoria de buscas aleatórias tem provido apenas aproximações limitadas para a questão das buscas eficientes, uma vez que elas assumem ambientes demasiadamente simplificados com relação à distribuição de recursos [RBdL⁺09b, BLMV11]. Não obstante, alguns poucos estudos simulacionais têm apontado para o efeito da heterogeneidade do ambiente sobre a eficiência da busca, incluindo fatores de mobilidade dos sítios e a consideração de diferentes tipos de *forager* [BL08, SSH⁺08, BFdL⁺08, PW10, PBG09]. Nesse contexto, os nossos estudos dão suporte à hipótese de que os processos de busca estão conectados à distribuição de sítios e à sua dinâmica. De fato, os nossos resultados mostram que a estratégia ótima de busca pode se alterar, *e.g.* de superdifusividade para movimentos balísticos, dependendo da heterogeneidade do cenário. Acreditamos que o presente estudo avança neste tópico ao apontar para os mecanismos gerais de busca (seção 5.2.1), essenciais para a compreensão de resultados anteriores sobre a dinâmica do problema de *foraging* [BL08, SSH⁺08, BFdL⁺08, PW10].

A partir da descrição dos mecanismos chaves de acoplamento dos ambientes com a difusividade do *forager*, mostramos que as flutuações estatísticas no conjunto das condições iniciais das buscas têm papel essencial para a determinação de qual estratégia de busca é a ideal. A presença destas flutuações define uma base para o entendimento da não universalidade dos padrões de busca e mostra que o aumento na difusividade favorece o sucesso dos encontros em ambientes heterogêneos com agregação de sítios. Como consequência, as condições de busca por alimento em que as estratégias de Lévy aparecem como ideais são muito mais amplas [BLMV11, RB09a, PJ08, JPB08] do que apenas no cenário homogêneo originalmente analisado [VBH⁺99].

Em ambientes complexos e dinâmicos com escassez de recursos, nem as estratégias de Lévy, nem as brownianas ou mesmo as balísticas podem ser consideradas universais [PJ08,JPB08], uma vez que flutuações nas distribuições de sítios-alvo podem induzir alterações entre dois regimes de busca. Esta observação tem sido confirmada empiricamente [HQD⁺10,HBD⁺12], mostrando que os *foragers* exibem padrões de movimento que não podem ser sempre aproximados por Lévy, balísticos ou modelos exponenciais. De um modo geral, observa-se que no regime de baixas densidades de recursos as estratégias superdifusivas de Lévy permanecem como soluções ideais numa ampla variedade de ambientes heterogêneos, com expoentes no intervalo $1 < \mu_{\text{opt}} \leq 2$, dependentes das propriedades específicas do ambiente.

Estratégias intermediárias entre as balísticas e as superdifusivas podem surgir dependendo de o quão fortes sejam as flutuações espaciais na distribuição dos sítios-alvo. Dados recentes em espécies de água-viva [HBD⁺12] reportam sobre buscas de Lévy com estratégias de expoente $\mu_{\text{opt}} = 1.18$. Além disso, estudos com predadores marinhos têm encontrado valores tais como, por exemplo, $\mu_{\text{opt}} = 1.63$ [SSH⁺08]. Estas superdifusões incrementadas com respeito ao expoente $\mu \approx 2$ emergem em ambientes heterogêneos e com dinâmica complexa, como é o caso dos predadores marinhos [HQD⁺10,SWR⁺06,MRS⁺06]. Em particular, os nossos resultados permitem uma predição empiricamente testável: ambientes heterogêneos podem promover a emergência do aumento na difusividade (expoente de difusão) do *forager* compatível com as buscas eficientes de Lévy [SWR⁺06,WWL⁺11,GHV⁺11,SSAS10,MOJ10,MW99].

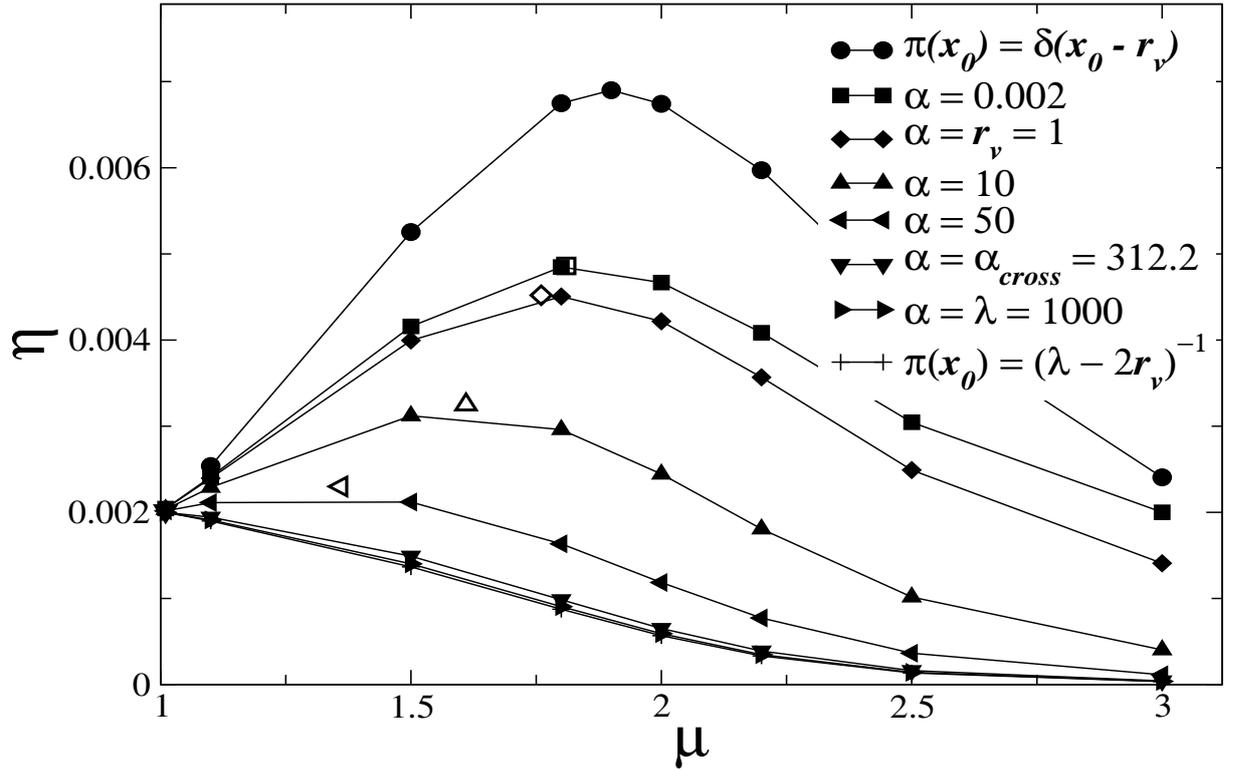


Figura 5.4: Eficiência média, $\bar{\eta}$, obtida a partir da Eq. (5.9), versus μ para os casos da busca de Lévy não-destrutiva (função δ de Dirac) e de buscas de Lévy com diferentes distribuições de sítios-alvo ao redor de $x_0 = r_v$, Eq.(5.4) com diversos valores do parâmetro α (cenários com vários graus de heterogeneidade). Quanto maior o valor de α , mais espalhadas ao redor de $x_0 = r_v$ encontram-se as posições iniciais. O caso homogêneo, $\pi(x_0) = (\lambda - 2r_v)^{-1}$, também é mostrado. Observamos que à medida que posições iniciais adquirem peso maior distante de $x_0 = r_v$ (α maior) a estratégia ótima de busca desloca-se da situação não-destrutiva superdifusiva, $\mu \approx 2$, em direção à dinâmica balística, $\mu \rightarrow 1$, com aumento na difusividade (expoente de difusão) do *forager*. Os símbolos vazios representam os máximos de $\bar{\eta}$ calculados pela condição $f[\mu = \mu_{\text{opt}}(\alpha)] = \partial \langle \bar{L} \rangle_p / \partial \mu |_{\mu = \mu_{\text{opt}}} = 0$. A passagem (*crossover*) para a dinâmica balística ótima ocorre para flutuações suficientemente fortes, isto é, para $\alpha > \alpha_{\text{cross}} \approx 312.2$. Os parâmetros usados foram $\lambda = 10^3$ e $r_v = 1$. Novamente, as linhas sólidas são somente um guia visual.

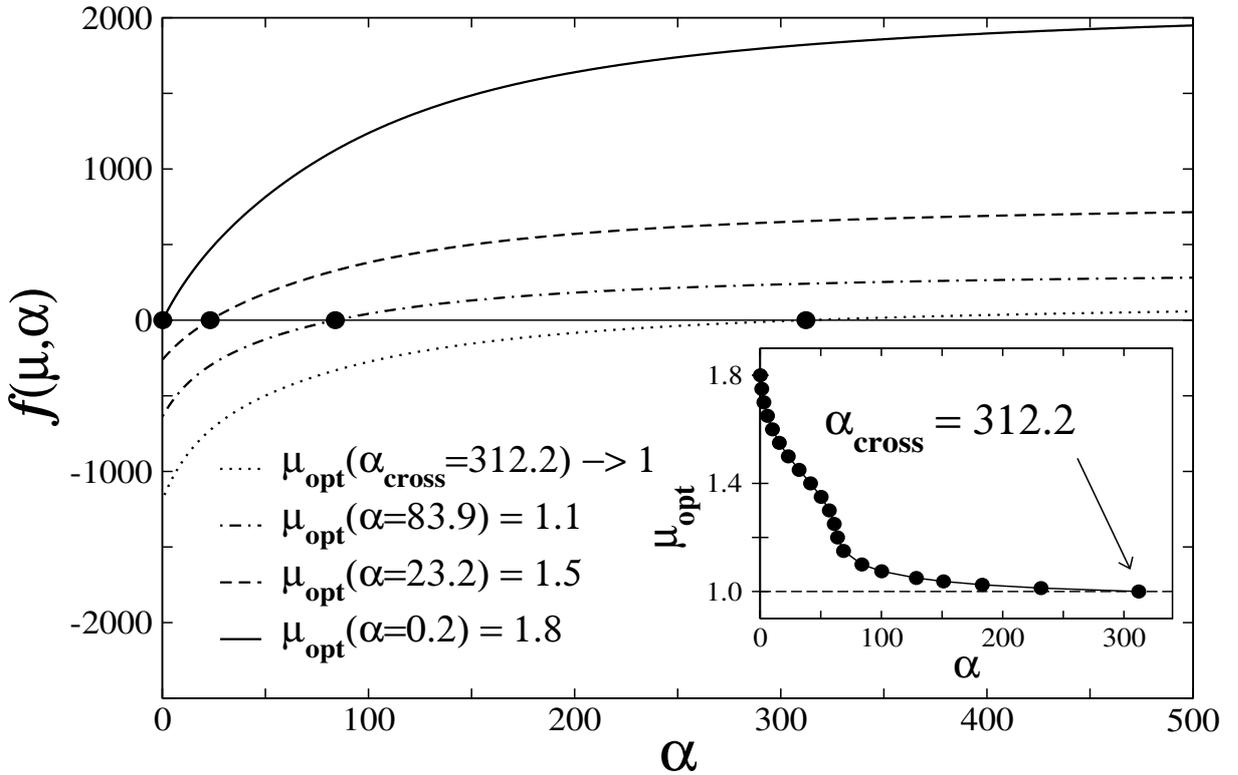


Figura 5.5: Determinação da estratégia ótima de buscas de Lévy com flutuações poissonianas nas distâncias iniciais dos sítios próximos ao *forager*, Eq. (5.4). A condição $f(\mu = \mu_{\text{opt}}, \alpha) = 0$, para $\lambda = 10^3$ e $r_v = 1$, determina o expoente ótimo, $\mu_{\text{opt}}(\alpha)$, associado à estratégia de máxima eficiência. No detalhe: uma vez que estratégias com $\mu \leq 1$ não são permitidas, valores de $\alpha > \alpha_{\text{cross}} \approx 312.2$ levam à eficiência máxima obtida para $\mu \rightarrow 1$, determinando um regime dominado por buscas de dinâmica balística.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho apresentamos inicialmente uma breve história do problema da busca de recursos por animais na natureza (problema de *foraging*), enfatizando os principais pontos e conceitos a partir de uma revisão da literatura específica. A nossa abordagem ao problema teve como base as ideias e conceitos desenvolvidos no contexto da Física Estatística, incluindo o estudo das caminhadas aleatórias, transições de fase dinâmicas, análises de escala e classes de universalidade, dentre outros. De fato, apresentamos os fundamentos teóricos das buscas aleatórias e os aplicamos numa abordagem analítica à dinâmica energética da busca, baseada em um modelo de acordo com a teoria unificada do problema de *foraging* [MC86]. Através de uma aproximação bem mais precisa que a de campo médio [VBH⁺99], determinamos a evolução energética do caminhante aleatório no regime de escassez de recursos, com resultados em excelente concordância com as simulações numéricas.

Calculamos analiticamente o parâmetro de ordem associado à transição de fase dinâmica para o estado de extinção do *forager*, bem como o seu expoente crítico associado, β . Desenvolvemos um mapeamento conciso da energia do caminhante aleatório através do teorema do limite central, a fim de obter a taxa de sobrevivência dos *foragers* em função do número de sítios encontrados. Nesse contexto, determinamos também o expoente crítico ν , relacionado ao comprimento de correlação temporal do problema e à sua variável dinâmica de escala.

Utilizamos as hipóteses de escala para determinar numericamente os expoentes críticos β_{on} , na situação em que ambos os critérios de busca e sobrevivência estão ligados, β' , associado à taxa de sobrevivência, e ν . Explorando as bases das classes de universalidade das transições de fase de não-equilíbrio, notamos no nosso problema que $\beta_{on} \neq \beta'$. Realizamos então uma discussão comparativa com o problema de percolação direcionada (DP), em que $\beta_{on} = \beta'$ devido à presença da simetria de reversão de rapidez. Concluimos que

as transições de fase dinâmicas encontradas nas buscas de Lévy com dinâmica energética e no problema DP pertencem a classes de universalidade distintas.

Definimos, ainda, um observável para analisar a dinâmica espacial do *forager*, isto é, como o comprimento da sua caminhada de busca evolui com o encontro de sítios, e determinamos o expoente crítico p associado. Verificamos também a consistência da nossa hipótese de escala através do expoente ν , que apresentou o mesmo valor obtido a partir de cálculos independentes.

Nós observamos que estratégias balísticas permitem aos buscadores permanecerem na fase ativa em cenários de buscas mais adversos. Em outras palavras, menores valores do índice de Lévy (μ) permitem densidades críticas mais baixas ou cenários mais rarefeitos. Interessantemente, as propriedades gerais de buscas aleatórias próximas no limiar de criticalidade são governadas pelos expoentes críticos que não dependem da dinâmica da busca, ao passo que a dinâmica é diretamente associada com a estratégia de busca, definida a partir do índice μ . Em adição, estratégias balísticas estão intrinsecamente ligada com ganhos energéticos elevados.

Todas essas características impactam consideravelmente a dinâmica das buscas em ambientes escassos. Atualmente, quando os recursos são baixos, os buscadores (e.g., um animal em atividade de caça, um *forager*) poderiam aumentar sua difusividade o quanto possível para encontrar sítios-alvos longínquos.

A determinação dos expoentes críticos da transição para o estado absorvente no limiar de extinção deve constituir, do nosso ponto de vista, um resultado relevante para os estudos ecológicos da extinção de espécies. Uma vez que determinamos que as flutuações de energia das buscas podem determinar fatores nocautes para a extinção.

Alternativamente, uma vez que este fenômeno crítico envolve flutuações de muitas magnitudes, uma pequena tendência à acumulações positivas pode garantir a sobrevivência de espécies em condições adversas [SLSR⁺12], como demonstramos numérico-analiticamente através dos parâmetros de ordem definidos, e em conformidade com as Hipoteses de Escalas e as técnicas do Grupo de Renormalização Fenomenológico para interpretar os efeitos de criticalidade.

Estudamos, ainda, os mecanismos chaves de acoplamento da busca com o ambiente, e a questão de como a heterogeneidade na distribuição de recursos afeta a eficiência das interações de encontros no regime escasso. Nestas condições encontramos que as estratégias com aumento no expoente de difusão (incluindo os casos superdifusivos) surgem à medida que ambientes heterogêneos com ampla distribuição de distâncias iniciais entre o *forager* e os sítios-alvo próximos são considerados.

A partir da descrição destes mecanismos, mostramos que as flutuações estatísticas no conjunto das condições iniciais das buscas têm papel fundamental para a determinação

de qual estratégia de busca é a ideal. A presença dessas flutuações de fato define uma base para o entendimento da não universalidade dos padrões de busca, e mostra que um aumento na difusividade favorece o sucesso dos encontros em ambientes de agregação, quando comparado ao caso homogêneo. Nesse sentido, concluímos que as estratégias superdifusivas de Lévy permanecem como soluções ideais numa ampla variedade de ambientes heterogêneos, com expoentes no intervalo $1 < \mu_{\text{opt}} \leq 2$, dependendo das propriedades específicas do ambiente.

Nesse contexto, os nossos resultados permitem uma predição empiricamente testável: ambientes heterogêneos podem promover a emergência do aumento na difusividade (expoente de difusão) do *forager* compatível com as buscas eficientes de Lévy.

Por fim, as perspectivas relativas a este trabalho, giram em torno de explorar outras dimensões através de contornos específicos, analisar a universalidade do *forager* via outras funções de custo energético, considerar um mapeamento por teoria de campos e grupo de renormalização tratando diretamente o problema do *forager* através da Equação Mestra e da Equação de Langevin [JT05] para explorar aspectos teóricos. Estudar uma possível assinatura de avalanches no observável que descreve a dinâmica espacial do *forager* para aplicação no contexto da extinção das espécies.

Referências Bibliográficas

- [Alr08] John Alroy. Dynamics of origination and extinction in the marine fossil record. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 105:11536–11542, 2008.
- [And53] E. S. Andersen. On the fluctuations of sums of random variables. *Mathematica Scandinavica*, 1:263–285, 1953.
- [And54] E. S. Andersen. On the fluctuations of sums of random variables. ii. *Mathematica Scandinavica*, 2:195–223, 1954.
- [Ant97] L. Anton. A random walk approach to the bak - sneppen evolution model. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 30(8):2609, 1997.
- [Bar07] F. Bartumeus. Lévy processes in animal movement: An evolutionary hypothesis. *Fractals*, 15:151–162., 2007.
- [Bar09] F. Bartumeus. Behavioral intermittence, lévy patterns, and randomness in animal movement. *Oikos*, 118, 2009.
- [BC09] F. Bartumeus and J. Catalan. Optimal search behavior and classic foraging theory. 2009.
- [BCM⁺05] O. Bénichou, M. Coppey, M. Moreau, P-H. Suet, and R. Voituriez. A stochastic model for intermittent search strategies. *J. Phys. Cond. Matter*, 17:S4275–S4286, 2005.
- [BCV⁺08] F. Bartumeus, J. Catalan, G. M. Viswanathan, E.P. Raposo, and M. G. E. da Luz. The influence of turning angles on the success of non-oriented animal searches. *Journal of Theoretical Biology*, 252(1):43 – 55, 2008.
- [BDF08] L. Borger, B. D. Dalziel, and J. M. Fryxell. Are there general mechanisms of animal home range behaviour? a review and prospects for future research. *Ecol. Lett*, 11:637–650, 2008.

- [BDF⁺11] S. Benazzi, K. Douka, C. Fornai, C. C. Bauer, O. Kullmer, J. Svoboda, I. Pap, F. Mallegni, P. Bayle, M. Coquerelle, S. Condemi, A. Ronchitelli, K. Harvati, and G. W. Weber. Early dispersal of modern humans in Europe and implications for Neanderthal behaviour. *Nature*, 479:525–528, November 2011.
- [Ben07] S. Benhamou. How many animals really do the levy walk? *Ecology*, 88:1962–1969, 2007.
- [BFd⁺08] F. Bartumeus, P. Fernández, M. G. E. da Luz, J. Catalan, R. V. Solé, and S. A. Levin. Superdiffusion and encounter rates in diluted, low dimensional worlds. *European Physical Journal Special Topics*, 157:157–166, apr 2008.
- [BFdL⁺08] F. Bartumeus, P. Fernandez, M. G. E. da Luz, J. Catalan, R. V. Sole, and et al. Superdiffusion and encounter rates in diluted, low dimensional worlds. *Eur. Phys. J. Special Topics*, 157:157–166, 2008.
- [BGH⁺01] S. Buldyrev, M. Gitterman, S. Havlin, A. Kazakov, M. Daluz, E. Raposo, H. Stanley, and G. Viswanathan. Properties of lévy flights on an interval with absorbing boundaries. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 302(1-4):148–161, 2001.
- [BGL⁺10] F. Bartumeus, L. Giuggioli, M. Louzao, V. Bretagnolle, D. Oro, and S. A. Levin. Fishery discards impact on seabird movement patterns at regional scales. *Curr Biol*, 20(3):215–222, 2010.
- [BHG06] D. Brockmann, L. Hufnagel, and T. Geisel. The scaling laws of human travel. *Nature*, 439(7075):462–465, January 2006.
- [BHK⁺01] S. V. Buldyrev, S. Havlin, A. Ya. Kazakov, M. G. E. da Luz, E. P. Raposo, H. E. Stanley, and G. M. Viswanathan. Average time spent by lévy flights and walks on an interval with absorbing boundaries. *Phys. Rev. E*, 64:041108, Sep 2001.
- [BL08] F. Bartumeus and S. Levin. Fractal reorientation clocks: linking animal behavior to statistical patterns of search. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 105:19072–19077, 2008.
- [BL09] K. Binder and D. P. Landau. *A Guide to Monte-Carlo Simulations in Statistical Physics*. Cambridge Press, 2009.

- [BLMV11] O. Bénichou, C. Loverdo, M. Moreau, and R. Voituriez. Intermittent search strategies. *Rev. Mod. Phys.*, 83:81–129, 2011.
- [BLT01] L. Baroni, R. Livi, and A. Torcini. Transition to stochastic synchronization in spatially extended systems. *Phys. Rev. E*, 63(3):036226, March 2001.
- [BML09] D. Boyer, O. Miramontes, and H. Larralde. Lévy-like behaviour in deterministic models of intelligent agents exploring heterogeneous environments. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 42(43):434015, 2009.
- [BPB99] H. Bercovici, V. Pata, and P. Biane. Stable laws and domains of attraction in free probability theory. *The Annals of Mathematics*, 149(3):pp. 1023–1060, 1999.
- [BPP⁺03a] F. Bartumeus, F. Peters, S. Pueyo, C. Marrase, and J. Catalan. Helical lévy walks: adjusting searching statistics to resource availability in microzooplankton. *Proc Natl Acad Sci USA*, 100:12771–12775, 2003.
- [BPP⁺03b] F. Bartumeus, F. Peters, S. Pueyo, C. Marrasé, and J. Catalan. Helical lévy walks: adjusting searching statistics to resource availability in microzooplankton. *Proc Natl Acad Sci*, 100:12771–12775., 2003.
- [Bro28] R. Brown. A brief account of microscopical observations made in the months of june, july and august, 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies. *Phil. Mag.*, 4:161–173, 1828.
- [BTW87] Per Bak, Chao Tang, and Kurt Wiesenfeld. Self-organized criticality: An explanation of the $1/f$ noise. *Phys. Rev. Lett.*, 59:381–384, Jul 1987.
- [Bye00] J. E. Byers. Effects of body size and resource availability on dispersal in anative and a nonnative estuarine snail. *J. Exp. Mar. Bio. Ecol.*, 248:133–150, 2000.
- [CF94] Maurício D. Coutinho-Filho. Reflexões sobre o desenvolvimento da Mecânica Estatística: um tributo a Ludwig Boltzmann (1844-1994). *Química Nova*, 17(6), 1994.
- [CG79] Morrel H. Cohen and G. S. Grest. Liquid-glass transition, a free-volume approach. *Phys. Rev. B*, 20:1077–1098, Aug 1979.

- [CW51] H. B. Callen and T. A. Welton. Irreversibility and generalized noise. *Phys. Rev.*, 83:34–40, Jul 1951.
- [CZdSS03] M. Copelli, R. M. Zorzenon dos Santos, and D. A. Stariolo. On the aging dynamics in an immune network model. *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*, 34:119–129, 2003. 10.1140/epjb/e2003-00203-7.
- [DAM⁺01] R. Dickman, M. Alava, M. A. Muñoz, J. Peltola, A. Vespignani, and S. Zapperi. Critical behavior of a one-dimensional fixed-energy stochastic sandpile. *Phys. Rev. E*, 64(5):056104, November 2001.
- [Dar59] C. Darwin. *On The Origin of Species*. John Murray, 1859.
- [DGN09] B. Dybiec and E. Gudowska-Nowak. Anomalous diffusion and generalized sparré andersen scaling. *EPL (Europhysics Letters)*, 88(1):10003, 2009.
- [DK96] P. Dennery and A. Krzywicki. *Mathematics for physicists*. Dover, 1996.
- [dLRS01] S. V. anda Havlin S. da Luz, M. G. E. anda Buldyrev, E. P. Raposo, and H. E. et al. Stanley. Improvements in the statistical approach to random levy flight searches. *Physica A*, 295, 2001.
- [dS10] T. A. de Souza. Estudos de eficiência em buscas aleatórias unidimensionais. Master’s thesis, Departamento de Física, Universidade Federal de Pernambuco, 2010.
- [Ein05] A Einstein. Über die von der molekularkinetischen theorie der wärme geforderte bewegung von in ruhenden flüssigkeiten suspendierten teilchen. *Ann. der Physik*, 17:549–560, 1905.
- [Eml66] J. M. Emlen. The role of time and energy in food preference. *The American Naturalist*, 100(916):611–617, Nov-Dec 1966.
- [EPW⁺07] A. M. Edwards, R. A. Phillips, N. W. Watkins, M. P. Freeman, and E. J. et al. Murphy. Revisiting levy flight search patterns of wandering albatrosses, bumblebees and deer. *Nature*, 449:1044–1048, 2007.
- [FCMS⁺96] V. Frette, K. Christensen, A. Malthe-Sorensen, J. Feder, T. Jossang, and P. Meakin. Avalanche dynamics in a pile of rice. *Nature*, 379(6560):49–52, January 1996.

- [Fdd⁺07] C. L. Faustino, L. R. da Silva, M. G. E. da Luz, E. P. Raposo, and G. M. Viswanathan. Search dynamics at the edge of extinction: Anomalous diffusion as a critical survival state. *EPL (Europhysics Letters)*, 77:30002, feb 2007.
- [FLR⁺12] C. L. Faustino, M. L. Lyra, E. P. Raposo, G. M. Viswanathan, and M. G. E. da Luz. The universality class of random searches in critically scarce environments. *EPL (Europhysics Letters)*, 97(5):50005, 2012.
- [FML01] U.L Fulco, D.N Messias, and M.L Lyra. Monte carlo study of the critical behavior of a diffusive epidemic process. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 295(1–2):49 – 52, 2001.
- [Fog98] H. C. Fogedby. Lévy flights in quenched random force fields. *Phys. Rev. E*, 58:1690–1712, Aug 1998.
- [Gar85] C. W. Gardiner. *Handbook of Stochastic Methods*. Springer, 1985.
- [GdlT79] P. Grassberger and A. de la Torre. Reggeon field theory (schlögl’s first model) on a lattice: Monte carlo calculations of critical behaviour. *Annals of Physics*, 122(2):373 – 396, 1979.
- [GHV⁺11] C. Giuffre, P. Hinow, R. Vogel, T. Ahmed, R. Stocker, T. R. Consi, and J. R. Strickler. The ciliate *Paramecium* shows higher motility in non-uniform chemical landscapes. *PLoS ONE*, 6(4):e15274, 04 2011.
- [Gil07] I Gilligan. Neanderthal extinction and modern human behaviour: the role of climate change and clothing. *World Archaeology*, 39(4):499–514, 2007.
- [Git00] M. Gitterman. Mean first passage time for anomalous diffusion. *Phys. Rev. E*, 62:6065–6070, Nov 2000.
- [GK54] B. V. Gnedenko and A. N. Kolmogorov. *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables*. Addison-Wesley., 1954.
- [GME09] J. Goodenough, B. McGuire, and Jakob E. *Perspectives on Animal Behavior*. John Wiley & Sons, 2009.
- [GSO98] A. Gandhi, L. Simon, and S. Orszag. Critical slowing down in time-to-extinction: an example of critical phenomena in ecology. *Journal of Theoretical Biology*, 192(3):363 – 376, 1998.

- [Gut01] M. W. Gutowski. Levy flights as an underlying mechanism for global optimization algorithms. Warsaw University of Technology Publishing House, 2001.
- [HBD⁺12] G. C. Hays, T. Bastian, T. K. Doyle, S. Fossette, A. C. Gleiss, M. B. Gravenor, V. J. Hobson, N. E. Humphries, M. K. Lilley, N. G. Pade, and D. W. Sims. High activity and lévy searches: jellyfish can search the water column like fish. 2012.
- [HHL08] M. Henkel, H. Hinrichsen, and S. Lübeck. Universality classes different from directed percolation. In *Non-Equilibrium Phase Transitions*, Theoretical and Mathematical Physics, pages 197–259. Springer Netherlands, 2008.
- [Hin06] Haye Hinrichsen. Non-equilibrium phase transitions. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 369(1):1 – 28, 2006.
- [HQD⁺10] Nicolas E. Humphries, Nuno Queiroz, Jennifer R. M. Dyer, Nicolas G. Pade, Michael K. Musyl, Kurt M. Schaefer, Daniel W. Fuller, Juerg M. Brunnschweiler, Thomas K. Doyle, Jonathan D. R. Houghton, Graeme C. Hays, Catherine S. Jones, Leslie R. Noble, Victoria J. Wearmouth, Emily J. Southall, and David W. Sims. Environmental context explains lévy and brownian movement patterns of marine predators. *Nature*, 465(7301):1066–1069, 2010.
- [HWQ⁺12] Nicolas E. Humphries, Henri Weimerskirch, Nuno Queiroz, Emily J. Southall, and David W. Sims. Foraging success of biological lévy flights recorded in situ. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2012.
- [Jab05] David Jablonski. Mass extinctions and macroevolution. *Paleobiology*, 31(2 Suppl):192–210, Spring, 2005.
- [Jan81] H. K. Janssen. On the nonequilibrium phase transition in reaction-diffusion systems with an absorbing stationary state. *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, 42:151–154, 1981. 10.1007/BF01319549.
- [JK10] P Jizba and H Kleinert. Superstatistics approach to path integral for a relativistic particle. *Phys. Rev. D*, 82:085016, Oct 2010.
- [JPB08] A. James, M. J. Planck, and R. Brown. Optimizing the encounter rate in biological interactions: ballistic versus lévy versus brownian strategies. *Phys. Rev. E*, 78(051128), 2008.

- [JT05] H.-K. Janssen and U. C. Täuber. The field theory approach to percolation processes. *Annals of Physics*, 315:147–192, January 2005.
- [Kad71] L. P. Kadanoff. Critical behavior universality and scaling. In *Critical Phenomena*, page 101, New York, 1971. Proceedings of the Int. School of Physics, *Enrico Fermi*, Course LI, Academic Press.
- [KBS87] J. Klafter, A. Blumen, and M. F. Shlesinger. Stochastic pathway to anomalous diffusion. *Phys. Rev. A*, 35:3081–3085, Apr 1987.
- [KDP87] A. C. Kamil, J. R. Drebs, and H. R. Pulliam. *Foraging Behavior*. New York: Plenum Press., 1987.
- [Khi49] A. I. Khinchin. *Mathematical Foundations of Statistical Mechanics*. Dover, 1949.
- [LBT⁺10] Amélie Lescroël, Grant Ballard, Viola Toniolo, Kerry J. Barton, Peter R. Wilson, Philip O’B. Lyver, and David G. Ainley. Working less to gain more: when breeding quality relates to foraging efficiency. *Ecology*, 91(7):2044–2055, July 2010.
- [LKW88] M. Levandowsky, J. Klafter, and B. S. White. Swimming behavior and chemosensory responses in the protistan microzooplankton as a function of the hydrodynamic regime. *Bull Marine Sci*, 43:758–763, 1988.
- [LM08] Metzler R, Klafter J, Lomholt MA, Koren T. Lévy strategies in intermittent search processes are advantageous. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 105:11055–11059, 2008.
- [Lot10] A.J. Lotka. Contribution to the theory of periodic reaction. *J.Phys. Chem.*, 14:271–274, 1910.
- [Lü06] S Lübeck. Crossover scaling in the domany–kinzel cellular automaton. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2006(09):P09009, 2006.
- [MA97] Roberto A. Monetti and Ezequiel V. Albano. On the emergence of large-scale complex behavior in the dynamics of a society of living individuals: the stochastic game of life. *Journal of Theoretical Biology*, 187(2):183 – 194, 1997.
- [Mal98] T. R. Malthus. An essay on the principle of population. *J. Johnson*, 1798.

- [Man82] B. B. Mandelbrot. *The Fractal Geometry of Nature*. Freeman, 1982.
- [MC86] Marc Mangel and Colin W. Clark. Towards a unified foraging theory. *Ecology*, 67(5):pp. 1127–1138, 1986.
- [Mey09] R. A. Meyers. *Encyclopedia of Complexity and Systems Science*. Springer, 2009.
- [MF11] Paul Mellars and Jennifer C. French. Tenfold population increase in western europe at the neandertal-to-modern human transition. *Science*, 333(6042):623–627, 2011.
- [MGT06] M. Mabilia, I. T. Georgiev, and U. C. Täuber. Fluctuations and correlations in lattice models for predator-prey interaction. *Phys. Rev. E*, 73:040903, Apr 2006.
- [Mit11] T Mitsui. Subdiffusion due to strange nonchaotic dynamics: A numerical study. *Phys. Rev. E*, 83:066212, Jun 2011.
- [MKvdB⁺09] R. Metzler, T. Koren, B. van den Broek, G. J. L. Wuite, and M. A. Lomholt. And did he search for you, and could not find you? *J. Phys. A*, 42(434005), 2009.
- [MOJ10] A. Mashanova, T. H. Oliver, and V. A. A. Jansen. Evidence for intermittency and a truncated power law from highly resolved aphid movement data. *Journal of The Royal Society Interface*, 7(42):199–208, 2010.
- [MP66] R. H. MacArthur and E. R. Pianka. On optimal use of a patchy environment. *The American Naturalist*, 100(916):603–609, Nov- Dec 1966.
- [MRS⁺06] N. C. Makris, P. Ratilal, D. T. Symonds, S. Jagannathan, S. Lee, and R. W. Nero. Fish population and behavior revealed by instantaneous continental shelf-scale imaging. *Science*, 311(5761):660–663, 2006.
- [MS94] Rosario N. Mantegna and H. Eugene Stanley. Stochastic process with ultraslow convergence to a gaussian: The truncated lévy flight. *Phys. Rev. Lett.*, 73:2946–2949, Nov 1994.
- [MSW⁺09] Leonid Mirny, Michael Slutsky, Zeba Wunderlich, Anahita Tafvizi, Jason Leith, and Andrej Kosmrlj. How a protein searches for its site on dna: the mechanism of facilitated diffusion. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 42(43):434013, 2009.

- [MW73] B. M. McCoy and T. T. Wu. *The two-dimensional Ising model*. Harvard University Press, 1973.
- [MW99] N. E. McIntyre and J. A. Wiens. Interactions between landscape structure and animal behavior: the roles of heterogeneously distributed resources and food deprivation on movement patterns. *Landsc. Ecol.*, 14:437–447, 1999.
- [NCFY01] M. S. Nascimento, M. D. Coutinho-Filho, and C. S. O. Yokoi. Partial and random covering times in one dimension. *Phys. Rev. E*, 63:066125, May 2001.
- [New06] I Newton. Can conditions experienced during migration limit the population levels of birds? *Journal of Ornithology*, 147:146–166, 2006. 10.1007/s10336-006-0058-4.
- [Nol10] J. P. Nolan. Stable distributions models for heavy tailed data, 2010. In progress, Chapter 1 online.
- [Ó04] Géza Ódor. Universality classes in nonequilibrium lattice systems. *Rev. Mod. Phys.*, 76:663–724, Aug 2004.
- [OS96] Géza Ódor and Attila Szolnoki. Directed-percolation conjecture for cellular automata. *Phys. Rev. E*, 53:2231–2238, Mar 1996.
- [PA06] D. I. Peixoto and G. Abramson. The effect of biodiversity on the hantavirus epizooti. *Ecology*, 87:873, 2006.
- [Pai95] R.T. Paine. A conversation on refining the concept of keystone species. *Conservation Biology*, 9(4):962–964, 1995.
- [Pat53] C.S Patlack. Random walk with persistence and external bias. *Bull. Math. Biophys.*, 15(311), 1953.
- [PBG09] Z. Pasternak, F. Bartumeus, and F. W. Grasso. Levy-taxis: a novel search strategy for finding odor plumes in turbulent flow-dominated environments. *J. Phys. A*, 42(434010), 2009.
- [PJ08] M.J. Plank and A. James. Optimal foraging: Levy pattern or process? *J. R. Soc. Interface*, 5:1077–1086, 2008.
- [PMH+93] C.-K. Peng, J. Mietus, J. M. Hausdorff, S. Havlin, H. E. Stanley, and A. L. Goldberger. Long-range anticorrelations and non-gaussian behavior of the heartbeat. *Phys. Rev. Lett.*, 70:1343–1346, Mar 1993.

-
- [PMJ11] Sergei Petrovskii, Alla Mashanova, and Vincent A. A. Jansen. Variation in individual walking behavior creates the impression of a lévy flight. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2011.
- [Pod99] I. Podlubny. *Fractional Differential Equations*. Academic, London, 1999.
- [Pol70] A. M. Polyakov. Conformal symmetry of critical fluctuations. *Sov. Phys. JETP Lett*, 12(381), 1970.
- [PW10] Pitchford J. W. Preston, M. D. and A. J. Wood. Evolutionary optimality in stochastic search problems. *J. R. Soc. Interface*, 7:1301–1310, 2010.
- [RB09a] A.M. Reynolds and F. Bartumeus. Optimising the success of random destructive searches: Lévy walks can outperform ballistic motions. *Journal of Theoretical Biology*, 260(1):98 – 103, 2009.
- [RB09b] A.M. Reynolds and F. Bartumeus. Optimising the success of random destructive searches: Lévy walks can outperform ballistic motions. *Journal of Theoretical Biology*, 260(1):98 – 103, 2009.
- [RBd⁺03] E. P. Raposo, S. V. Buldyrev, M. G. da Luz, M. C. Santos, H. E. Stanley, and G. M. Viswanathan. Dynamical robustness of lévy search strategies. *Physical Review Letters*, 91(24):240601, dec 2003.
- [RBdL⁺09a] E. P. Raposo, S. V. Buldyrev, M. G. E. da Luz, G. M. Viswanathan, and H. E. Stanley. Lévy flights and random searches. *Journal of Physics A Mathematical General*, 42:4003, oct 2009.
- [RBdL⁺09b] E.P. Raposo, S.V. Buldyrev, M. G. E. da Luz, G. M. Viswanathan, and H. E. Stanley. Levy flights and random searches. 42(434003), 2009.
- [RBdL⁺11] E. P. Raposo, F. Bartumeus, M. G. E. da Luz, P. J. Ribeiro-Neto, T. A. Souza, and G. M. Viswanathan. How landscape heterogeneity frames optimal diffusivity in searching processes. *PLoS Comput Biol*, 7(11):e1002233, 11 2011.
- [Red01] Sidney Redner. *A Guide to First-Passage Processes*. Cambridge University Press, 2001.
- [Rei65] F. Reif. *Fundamentals of statistical and thermal physics*. McGraw-Hill, 1965.

- [Rey06a] A. M. Reynolds. On the intermitent behavior of foraging animals. *Europhys. Lett.*, 75:517–520., 2006.
- [Rey06b] A. M. Reynolds. Optimal scale-free seraching strategies for the location of moving targets: New insights on visually cued mate location behaviour in insects. *Physics Letters A*, 360:224–227, 2006.
- [Rey10] A. M. Reynolds. Balancing the competing demands of harvesting and safety from predation: Lévy walk searches outperform composite brownian walk searches but only when foraging under the risk of predation. *Physica A Statistical Mechanics and its Applications*, 389:4740–4746, nov 2010.
- [Sax00] K. Saxe. *Beginning Functional Analysis*. springer, 2000.
- [SBFJ95] K. Sneppen, P. Bak, H. Flyvbjerg, and M. H. Jensen. Evolution as a self-organized critical phenomenon. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 92(11):5209–5213, 1995.
- [SGN] W. J. Sutherland, J. A. Gill, and K. Norris. *Density-dependent dispersal in animals: concepts, evidence, mechanisms, and consequences*. Blackwell Publishing. In: Bullock JM, Kenward RE, Hails RS, eds. Dispersal ecology.
- [Shl06] M. F. Shlesinger. Search research. *Nature*, 443:281–282, 2006.
- [Shl09] M. F. Shlesinger. Random searching. *J. Phys. A*, 42, 2009.
- [SK86a] M. F. Shlesinger and J. Klafter. Lévy walks versus lévy flights. In H. E. Stanley & N. Ostrowsky, editor, *On Growth and Form: Fractal and Non-Fractal Patters in Physics*, page 279, 1986.
- [SK86b] D. W Stephens and J. R. Krebs. *Foraging Theory*. Princeton, University Press, 1986.
- [SKZ96] M. F. Shlesinger, J. Klafter, and G. Zumofen. Beyond the brownian motion. *Physics Today*, 49(2):33, 1996.
- [SL07] M. J. Samways and S. Lu. Key traits in a threatened butterfly and its common sibling: implications for conservation. *Biodiversity and Conservation*, 16:4095–4107, 2007.
- [SLSR⁺12] S. A. Sotelo-López, M. C. Santos, E. P. Raposo, G. M. Viswanathan, and M. G. E. da Luz. Conditions under which a superdiffusive random-search strategy is necessary. *Phys. Rev. E*, 86:031133, Sep 2012.

- [SM95] Frisch U Shlesinger MF, Zaslavsky G. *Levy flights and related topics in physics*. Springer., Berlin, 1995.
- [SM96] Ricard V. Solé and Susanna C. Manrubia. Extinction and self-organized criticality in a model of large-scale evolution. *Phys. Rev. E*, 54:R42–R45, Jul 1996.
- [Son54] N.Ya. Sonin. *Studies on Cylinder Functions and Special Polynomials*. Gos-tekhnizdat, Moscow, 1954.
- [Sor06] D. Sornette. *Critical Phenomena in Natural Sciences*. Springer, 2nd edition, 2006.
- [Sou99] A South. Extrapolating from individual movement behaviour to population spacing patterns in a ranging mammal. *Ecol. Model*, 117:343–360, 1999.
- [SRVd04] M. C. Santos, E. P. Raposo, G. M. Viswanathan, and M. G. E. da Luz. Optimal random searches of revisitable targets: Crossover from superdiffusive to ballistic random walks. *EPL (Europhysics Letters)*, 67:734–740, sep 2004.
- [SS93] O.I. Marichev S.G. Samko, A.A. Kilbas. *Fractional Integrals and Derivatives*. Gordon and Breach, New York, 1993.
- [SSAS10] J. R. Seymour, R. Simó, T. Ahmed, and R. Stocker. Chemoattraction to dimethylsulfoniopropionate throughout the marine microbial food web. *Science*, 329(5989):342–345, 2010.
- [SSH+08] D. W. Sims, E. J. Southall, N. E. Humphries, G. C. Hays, C. J. A. Bradshaw, J. W. Pitchford, A. James, M. Z. Ahmed, A. S. Brierley, M. A. Hindell, D. Morritt, M. K. Musyl, D. Righton, E. L. C. Shepard, V. J. Wearmouth, R. P. Wilson, M. J. Witt, and J. D. Metcalfe. Scaling laws of marine predator search behaviour. *Nature*, 451(7182):1098–1102, feb 2008.
- [Sta71] H. E. Stanley. *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena*. Oxford, Clarendon Press, 1971.
- [Sta99] H. E. Stanley. Scaling, universality, and renormalization: Three pillars of modern critical phenomena. *Rev. Mod. Phys.*, 71:S358–S366, Mar 1999.
- [SWR+06] D.W. Sims, M.J. Witt, A.J. Richardson, E. J. Southall, and J. D. Metcalfe. Encounter success of freeranging marine predator movements across a dynamics prey landscape. *Proc. R. Soc. B*, 273:1095–1201, 2006.

- [SY07] Brown J. S. Stephens, D. W. and R. C. Ydenberg. *Foraging: Behavior and Ecology*. Chicago, University of Chicago Press, 2007.
- [TM94] Guray Tas and Humphrey J. Maris. Electron diffusion in metals studied by picosecond ultrasonics. *Phys. Rev. B*, 49:15046–15054, Jun 1994.
- [TRI⁺70] (Cruzeiro) Tostão, (Corinthians) Rivelino, (Fluminense) Félix, (Santos) Carlos Alberto, (Flamengo) Brito, (Cruzeiro) Piazza, (Grêmio) Everaldo, (S. Paulo) Gérson, (Santos) Clodoaldo, (Santos) Pelé, and (Botafogo) Jairzinho. TRICAMPEANATO MUNDIAL DE FUTEBOL: UMA MANIFESTAÇÃO MÁGICA DE ARTE. In *Após encontrar o futebolista Clodoaldo Santana, a bola entra em regime superdifusivo contornando três obstáculos granulares italianos passando ao limite contínuo através de um passo para o lateral esquerdo, Rivelino, que generaliza a equação mestra lançando-a ao furacão futebolista, vulgo Jairzinho, que cruza num vôo de Lévy para Pelé, que a domina com seu raio de visão infinito executando o passo invariante de escala mais bonito de todos os tempos para que o chute de Carlos Alberto a impusione ao regime balístico até as redes de Albertosi. É gol do Brasil!*, volume 9. Zagallo, M. J. L., A Copa do Mundo é Nossa, 1970.
- [Tur98] P. Turchin. Quantitative analysis of movement: measuring and modelling population redistribution in animal and plants. 1998.
- [VAB⁺96] G. M. Viswanathan, V. Afanasyev, S. V. Buldyrev, E. J. Murphy, and P. A. et al. Prince. Levy flight search patterns of wandering albatrosses. *Nature*, 381:413–415, 1996.
- [VBH⁺99] G. M. Viswanathan, S. V. Buldyrev, S. Havlin, M. G. E. da Luz, E. P. Raposo, and H. E. Stanley. Optimizing the success of random searches. *Nature*, 401:911–914, October 1999.
- [VdLRS11] G. M. Viswanathan, M. G. E. da Luz, E. P. Raposo, and H. E. Stanley. *The Physics of Foraging*. Cambridge, 2011.
- [VHPH⁺07] K. S. Van Houtan, S. L. Pimm, J. M. Halley, R. O. Bierregaard Jr., and T. E. Lovejoy. Dispersal of amazonian birds in continuous and fragmented forest. *Ecol Lett*, 10:219–229, 2007.
- [Vol26] V. Volterra. Variazioni e fluttuazioni del numero d’individui in specie animali conviventi. *Mem. Acad. Lincei Roma*, 2:31–113, 1926.

- [VRB⁺05] G. M. Viswanathan, E. P. Raposo, F. Bartumeus, Jordi Catalan, and M. G. E. da Luz. Necessary criterion for distinguishing true superdiffusion from correlated random walk processes. *Phys. Rev. E*, 72:011111, Jul 2005.
- [VRdL08] G. M. Viswanathan, E. P. Raposo, and M. G. E. da Luz. Levy flights and superdiffusion in random search: the biological encounters context. *Phys. Life Rev.*, 5(133–162), 2008.
- [Wei94] G. H. Weiss. *Aspects and Applications of the Random Walk*. North-Holland, 1994.
- [Wie08] D. S. Wiersma. The physics and applications of random lasers. *Nature Physics*, 4:359–367, 2008.
- [WWL⁺11] Yan Wei, Xiaolin Wang, Jingfang Liu, Ilya Nememan, Amoolya H. Singh, Howie Weiss, and Bruce R. Levin. The population dynamics of bacteria in physically structured habitats and the adaptive virtue of random motility. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2011.
- [YYS12] V. Yukalov, E. Yukalova, and D. Sornette. Extreme events in population dynamics with functional carrying capacity. *The European Physical Journal - Special Topics*, 205:313–354, 2012. 10.1140/epjst/e2012-01577-3.
- [ZL99] Patrick A. Zollner and Steven L. Lima. Search strategies for landscape-level interpatch movements. *Ecology*, 80(3):1019–1030, April 1999.

Apêndice A

Gerador de Foragers de Lévy

Para realizarmos a simulação, sendo que o computador gera uma variável aleatória u contida no intervalo $[0, 1]$ é necessário então, escrever uma distribuição de densidade de probabilidades apropriada, isto é, é necessário utilizar a função acumulada de distribuição de probabilidades até o tamanho de passo ℓ , $F(\ell)$, tal que $F(\ell) \in [0, 1]$ podendo ser interpretada como a variável aleatória gerada pelo computador, ou seja,

$$F(\ell) = \int_{\ell_0}^{\ell} w(s) ds, \quad (\text{A.1})$$

então, invertendo a função obtêm-se o comprimento de passo gerado aleatoriamente, isto é, $\ell = F^{-1}(u)$. Este método é denominado método da inversão [BL09]. Para uma densidade de Lévy, $w(s) = As^{-\mu}$, com $A = (\mu - 1)/2\ell_0^{1-\mu}$, segue que

$$F(\ell) = \int_{\ell_0}^{\ell} As^{-\mu} ds = \frac{2A}{1-\mu} \ell^{1-\mu} \Big|_{\ell_0}^{\ell} = 1 - \left(\frac{\ell}{\ell_0} \right)^{1-\mu}, \quad (\text{A.2})$$

e portanto, um passo aleatório de Lévy é gerado no computador, fazendo $u = F(\ell)$, ou seja, $\ell = \ell_0 (1 - u)^{\frac{1}{1-\mu}}$. Para um passo gaussiano, com média nula e variância unitária, tomando $F(\ell)^2$ para calcular a integral em coordenadas polares, temos,

$$\ell = \sqrt{-2 \ln \left(e^{-\frac{1}{2}\ell_0^2} - \pi u^2 \right)}.$$

Utilizando este método, os *foragers* podem ser gerados a partir da equação para sua energia 3.2,

$$\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_0 + \sum_{i=1}^n (g\delta_i - \alpha|\ell_i). \quad (\text{A.3})$$